Actas de las VII Jornadas de Investigación en Filosofía para profesores, graduados y alumnos

10, 11 y 12 DE NOVIEMBRE DE 2008

Departamento de Filosofía
Facultad de Humanidades y Ciencias de la Educación
Universidad Nacional de La Plata
ISBN 978-950-34-0578-9

# Tipos de negación en la lógica contemporánea.

**Gladys Palau**
**UBA y UNLP**
**Cecilia Duran**
**UNLP**

**Resumen**

Uno de los problemas más interesantes en la teoría lógica actual radica en la determinación de la caracterización formal de la negación y su relación con el lenguaje natural. En el presente trabajo nos proponemos presentar, analizar y comparar las propuestas de H. Curry en *Foundations of Mathematical Logic* y la de M.Dunn en *The Kite of Negations*, a los efectos de determinar si dan cuenta de los mismos sistemas lógicos.

## 1. Introducción:

Precisar el o los significados de la negación es uno de los problemas centrales de las investigaciones lógicas actuales. Muchas de las diferencias entre sistemas lógicos pueden identificarse precisamente por el significado que en ellos se estipula para la conectiva negación, ya sea desde un enfoque semántico o sintáctico. En efecto, no hay consenso entre los lógicos respecto de los diversos tipos de negación y tampoco la hay respecto entre éstos y los sistemas lógicos propuestos para representarlos. En el presente trabajo nos circunscribiremos a describir las distintas clasificaciones sobre la negación propuestas por Haskell B. Curry[1] y por Michael Dunn,[2] a establecer comparaciones entre ellas y finalmente a tratar de identificar a qué sistemas lógicos responden.

## 2. Las clasificaciones de H. B. Curry (1963/77) y la de M Dunn (1999)

[1] Curry, H.B., (1963), 1977, *Foundations of Mathematical Logic,* New York, Dover.
[2] Dunn, J.M., (1999), "A Comparative Study of Various Model-Theoretic Treatements of Negation: A History of Formal Negation", en Gabbay, D.M. y Wansin, H (comp.), *What is Negation?*, Dordrecht-Boston-London, Kluwer, pp.23-52

Como punto de partida debe aclararse que H. Curry no considera a la negación como una conectiva de la misma clase que las restantes conectivas proposicionales, sino que, por considerarla diferente de las demás, estima que ella puede ser correctamente definida solamente en forma constructiva dentro del sistema lógico en el que se la caracteriza.[3] Esta posición, aunque no declarada explícitamente, subyace, como veremos posteriormente, también en la posición de M. Dunn.[4] Comenzaremos por exponer brevemente las propuestas de ambos:

### 2.1. Las cinco negaciones de H. B Curry

Las nociones centrales donde Curry radica su clasificación y que considera intrínsecas a la negación son: la negación por *refutabilidad* y la negación por *absurdidad.* Así, una proposición atómica A será definida como *absurda* precisamente cuando al agregarla a un sistema S, éste se vuelve inconsistente o, lo que es lo mismo, cuando hace que en S toda proposición sea derivable.

La caracterización de la *refutabilidad* es más compleja. Esta presupone aceptar que en una teoría hay un subconjunto de proposiciones que son teoremas y otro conjunto de proposiciones que son refutables, el cual se define inductivamente a partir de contra-axiomas. De ahí que, dadas dos proposiciones A y B de un sistema S, tales que B es refutable y al mismo tiempo es derivable de A por las reglas del sistema S, pueda inferirse que A refutable.

H. Curry propone cinco tipos de sistemas de negación. En todos ellos están presupuestas las reglas de las conectivas clásicas positivas. Las negaciones de Curry quedan así caracterizadas por las correspondientes reglas lógicas de la negación, las cuales pasamos a describir.

**(C1) Negación Minimal (LM)** (o *refutabilidad simple* y que se debe a Johansson)

Esta negación queda caracterizada por la siguiente regla:

$$\mathbf{F^*}: \frac{\Sigma \vdash Fi}{\Sigma \vdash F}$$

[3] Al comienzo de su presentación Curry deja de lado la negación llamada por él "no-demostrabilidad" por considerarla no constructiva ya que en un sistema formal una proposición A es considerada falsa (no verdadera) cuando ella es no-demostrable; y sostiene que esta negación resuelve todos los problemas desde una visión platónica de la lógica. En efecto, en la lógica clásica toda proposición que no tiene demostración es considerada falsa. En síntesis, Curry rechaza la noción de "no-demostrabilidad" para caracterizar la negación porque no queda garantizada su invariancia para cualquier extensión de un sistema, lo cual él supone que sucede con las restantes conectivas positivas.

[4] En efecto, si bien M. Dunn no lo afirma explícitamente surge del trabajo analizado aquí, y cuyo propósito es discutir el tratamiento teórico de la negaciones tal como se las presenta en las semánticas de los sistemas de lógicas subclásicas más tradicionales y determinar las relaciones entre ellas.

donde “Fi” es una proposición refutable cualquiera y “F” debe ser entendida como $\perp$, i.e., lo Falso. Dado que la premisa expresa que algún contra-axioma es demostrable, se sigue que el sistema es inconsistente.
Esta negación queda entonces definida de la siguiente manera:

$$\neg A =_{df} A \rightarrow \perp$$

De modo equivalente, **LM** puede caracterizarse a partir de **F*** agregando dos reglas más:

$$\mathbf{F^*}\ \textit{plus}\quad \mathbf{N^*}\quad \frac{\Sigma\, ,\, A \vdash F}{\Sigma \vdash \neg A} \quad \text{y} \quad \mathbf{{}^*N}\quad \frac{\Sigma \vdash A}{\Sigma, \neg A \vdash F}$$

Reglas que en Lógica de Secuentes se formulan como:

$$\frac{A\ \blacksquare}{\vdash \neg A} \qquad \text{y} \qquad \frac{\blacksquare\ A}{\neg A\ \blacksquare}$$

y en Deducción Natural se conocen como Introducción de la negación (**I¬**) y como Eliminación de la negación (**E¬**) respectivamente.
Puede comprobarse mediante las demostraciones correspondientes que de esta forma la refutabilidad simple queda caracterizada por la regla *Modus Tollens*, es decir que si de A se sigue B y B es refutable, entonces se sigue no-A. En este caso, la proposición refutable queda expresada por Fi, de la cual se sigue F. O si se prefiere por la Transposición Simple $A\ \blacksquare\ B$ sólo si $\neg B\ \blacksquare\ \neg A$ ya que su demostración en Lógica de Secuentes requieren de las reglas $\vdash \neg A$ y $\neg A\ \blacksquare$ .
La lógica caracterizada por estas reglas es la conocida bajo el nombre de *Lógica Minimal*.

**(C2) Negación Intuicionista (LJ)** (o *absurdidad simple*)

La negación de la Lógica Intuicionista LJ se construye a partir de la Lógica Minimal (LM) más la regla Fj, o sea :

$$\mathbf{LJ} = \quad \mathbf{LM}\quad \textit{plus}\quad \mathbf{Fj:}\qquad \frac{\Sigma \vdash F}{\Sigma \vdash A}$$

Tradicionalmente conocida como **ECQ** (*Ex Contradictione Quodlibet*)
En este caso si se sigue que el sistema es inconsistente (porque se deriva F), entonces toda proposición es derivable en el sistema. Debe recordarse también que en LJ, la negación queda definida como $A \rightarrow \perp$ (donde ahora $\perp$ significa *lo absurdo*.)

**(C3): Negación Estricta (LD)** (o *refutabilidad completa*)
La Negación Estricta o refutabilidad completa LD se construye agregando a la Lógica Minimal LM la regla Nx.

$$\mathbf{Nx}: \qquad \frac{\Sigma, A \vdash B \quad \Sigma, \neg A \vdash B}{\Sigma \vdash B}$$

O sea: **LD** = **LM** *plus* **Nx**
La demostración de esta regla requiere de la negación clásica $\neg\neg A$ ▪ A. Sin embargo en ella no vale ECQ (*Ex Contradictione Quolibet*) y por este motivo pertenece al tipo de la refutabilidad. Además, es completa porque presupone que el sistema es completo, y que por lo tanto vale también el Principio del Tercero Excluido. De ahí que valdrá o bien A o bien $\neg A$.
Si en Nx se reemplaza B por A se obtiene un caso especial de la Ley de Peirce:

$$\frac{\Sigma, \neg A \vdash A}{\Sigma \vdash A}$$

**(C4) Refutabilidad Clásica (LE)**
El cuarto tipo de negación se construye a partir de la Negación Minimal (LM) más la regla Px:

$$\mathbf{LE} = \mathbf{LM} \quad \textit{plus} \quad \mathbf{Px}: \quad \frac{\Sigma, A \rightarrow B \vdash A, \phi}{\Sigma \vdash A, \phi}$$

que ahora sí es la Ley de Peirce.[5]
Debe tenerse en cuenta que el sistema de negación LE incluye al sistema precedente LD.

**(C5): Negación Clásica (LK)** o (absurdidad completa)

[5] Recuérdese que si bien en Deducción Natural la Ley de Peirce se demuestra con ECQ, la demostración en Lógica de Secuentes no la requiere.

A partir de LE, se puede ahora construir la Negación Clásica de las siguientes tres formas:

**LK = LJ** *plus* **Nx** o bien **LD** *plus* **Fj** o bien **LE** *plus* **Fj**

Finalmente, queremos observar que por una vía constructiva Curry ha llegado a la Negación Booleana, que como es sabido se define por el complemento, y por lo tanto ha arribado a la negación clásica que él había abandonado al principio por ser no constructiva.
Pasemos ahora a presentar la clasificación de las negaciones de M.Dunn.

**2.2. Las siete negaciones de M. Dunn (o el "barrilete" de M.Dunn)**

La clasificación de los distintos tipos de negación que M.Dunn realiza en el apartado (2) *The kite of negations* de su estudio comparativo de las negaciones incluye un número mayor de sistemas de negación, más precisamente siete, a saber la negación (D1) la Subminimal de I.L Humberstone, (D2) la Negación de Galois, conocida como *split* , (D3) la Negación Minimal de Johansson, (D4) la Negación Intuicionista, (D5) la Negación de De Morgan , (D6) la Negación Ortho y finalmente (D7) la Negación Booleana, tal como las caracteriza en el siguiente gráfico denominado "barrilete".

**Barrilete de las negaciones de M. Dunn**

**Booleana (D7)**
(A ⊢ ¬B sii no se da A ⊢ B)
*Ortho Negation plus* distributividad de la conjunción sobre la disyunción
↑
**Ortho (D6)**
ECQ *plus* ¬¬A ▪ A
↗ ↖

**De Morgan (D5)**
Minimal *plus* ¬A→ B *sólo si* ¬B→A
ó Minimal *plus* ¬ ¬A ▪ A

**Intuicionista (D4)**
Minimal *plus* ECQ

↖ ↗
**Minimal (Johansson) (D3)**
Subminimal *plus* A ▪ ¬B sii B ▪ ¬A ó Subminimal *plus* A ▪ ¬ ¬A
↑
**Galois (*Split*) (D2)**
Subminimal *plus* A ▪ ¬B sii B ▪ ~A
↑
**Subminimal *(Humberstone)* (D1)**
A ▪ B sólo si ¬B ▪ ¬A

Realizaremos ahora algunas aclaraciones. Para la negación subminimal (D1) y todo sistema que la incluya, valen las reglas clásicas de Introducción y Eliminación de la disyunción y de la conjunción. La negación D2 consiste en un par de negaciones subminimales vinculadas por la Introducción de la doble negación Galois. La negación minimal D3 consiste en la subminimal, incluyendo la contraposición débil, más la contraposición constructiva. También puede definirse como la subminimal más Introducción de la Doble Negación. D4 es la negación intuicionista: negación minimal más ECQ. Adviértase que también contiene Introducción de la Doble Negación. D5 es la denominada negación De Morgan y se construye sobre la minimal agregando la dual de la contraposición constructiva y obteniendo así la contraposición clásica. O bien se la obtiene agregando a la negación minimal la Eliminación de la doble negación. D6 o sea, la Ortho-negación equivale a una negación De Morgan más ECQ. En los sistemas en que no vale distributividad de la conjunción sobre la disyunción, esta negación no es booleana. Finalmente, D7 es la negación booleana, o sea que es una Ortho negación con la mencionada distributividad de la conjunción sobre la disyunción. La diferencia entre estas dos últimas es que en D6 puede haber dos negaciones diferentes (Split), pero en D7 todas las negaciones son equivalentes.

**3. Comparaciones**

Dado que la negación *split* involucra dos negaciones, no la tomaremos en cuenta para la comparación con la clasificación de Curry. Tampoco tomaremos en cuenta la subminimal (D1) dado que queda comprendida como caso especial más débil de la caracterización de la negación minimal de Johansson, Más aún, sus demostraciones en lógica de secuentes requieren de las mismas reglas que la lógica minimal. Por similares razones la lógica Minimal (LM) de Curry coincide plenamente con la Minimal de Dunn.

Ambas clasificaciones coinciden también en la caracterización de la lógica intuicionista LJ, llamada por Curry *absurdidad simple,* dado que la negación es definida en términos del signo "lo falso" o "lo absurdo", i.e., $\perp$ . En efecto, ambos presentan la lógica intuicionista como construida a partir de la lógica minimal más la regla ECQ, en forma acorde con las restricciones que se imponen en la lógica de secuentes de Gentzen para las derivaciones intuicionistas, i.e., no permitir más de una fórmula en el postsecuente. Más aún, en ambas vale la caracterización de la negación dada por la regla A ▪ ¬¬A.

También hay coincidencia plena entre la llamada por Curry negación clásica LK o absurdidad completa con la negación booleana de Dunn, ya que ambas expresan la negación de la lógica clásica. Finalmente, similarmente a la clasificación de Curry , D7 (negación booleana) y D4 (negación intuicionista) son sistemas unívocos.

Respecto de la negación (D5) de Dunn, a saber, la negación De Morgan, encontramos que no se corresponde directamente con una sola de las restantes negaciones de Curry. Se advierte que en el sistema LD de Curry está presupuesto el principio del Tercero Excluido y carece de ECQ, pero, por no tener Eliminación de la Doble Negación, no coincide con De Morgan de Dunn. Aunque, el sistema De Morgan de Dunn, también carece de ECQ, por tener Eliminación de la Doble Negación es derivable el Principio del Tercero Excluido. Parecería ser que la negación del sistema LD es más débil que la del sistema de De Morgan. Por otro lado, respecto de LE, dado que consta de la Ley de Peirce, tiene incluida una "negación troyana", es decir, una doble negación implícita que se advierte al derivarla por deducción natural y en alguna forma de derivación en la lógica de secuentes, tal como lo hemos mostrado en otro trabajo.[6] Nos referimos precisamente a la Eliminación de la Doble Negación $\neg\neg A$ ▪ $A$, a la que muchos autores reconocen como equivalente a la ley de Peirce.[7] Por ello, dado que además LE incluye según Curry a LD y ambos sistemas careen de ECQ, *prima facie* pareciera que LE es comparable con la negación del sistema de De Morgan de M Dunn.

La Ortho-negación de Dunn (D6) no es equivalente a la negación booleana (D7) porque carece de la distributividad de la conjunción respecto de la disyunción. Se trata de un sistema diseñado para resolver problemas generados por la mecánica cuántica; de ahí el recurso a retirar distributividad. Por ello, este sistema carece de equivalente en la clasificación de Curry.

## 4- Algunas reflexiones finales

Finalmente queremos señalar que así como la dupla LJ, D4 coincide con la tradicionalmente denominada Lógica Intuicionista, es posible también establecer una comparación limitada entre los sistemas LE-D5 y los sistemas de Lógica Paraconsistente C1-Cn de Da Costa, cuyos

[6] *La ley de Peirce, y las formas de la negación*. XVI Jornadas de Epistemlogía e Historia de la Ciencia, La Falda Córdoba, 13-15 de octubre, 2005. 3 -(2006) . Publicado en *Epistemología e Historia de la Ciencia*, vol.12, p.458-462.

[7] R. Sylvan, "What is that item designated Negation?", en Gabbay *et al,* (1999)*, What is Negation?*, Kluwer Academic Publishers, London, p. 315.

autores también han querido adaptarla a la problemática de la mecánica cuántica (similarmente a lo que Dunn quiso concretar con D6).

Respecto de Curry, si bien no es posible establecer una coincidencia entre los sistemas paraconsistentes mencionados y el sistema LD dado que en LD no es derivable la ley de Peirce, sí es posible establecer un paralelismo de los sistemas de Da Costa con el sistema LE de Curry, es decir con la refutabilidad clásica, por las razones ya dadas. Sin embargo, es necesario aclarar que esta comparación se establece en particular con las fórmulas con negaciones de los sistemas C1-Cn que contienen fórmulas estabilizadas. Respecto de Dunn, los sistemas de Da Costa, que al igual que en el caso anterior tienen una negación estricta, se corresponden con D5 (De Morgan) ya que tiene Eliminación de la Doble Negación y es derivable el Absurdo Paraconsistente. La negación débil de los sistemas mencionados de Da Costa no cumplen con LE ni D5. Menos aún los sistemas $C\omega$.

Para finalizar, deseamos reafirmar que ni la negación De Morgan ni la negación LD y LE son negaciones univocas, ya que varios sistemas de negación pueden ser abarcados por ellas. De hecho, además de la existencia de varios tipos de lógica paraconsistente que satisfacen la Doble Negación clásica, el principio de Tercero Excluido y no tienen ECQ, hay otros sistemas que también cumplen tales propiedades y no son sistemas paraconsistentes, como por ejemplo el sistema R de la lógica de la Relevancia de Anderson y Belnap.