LA CONCEPCION INTUICIONISTA DE LA LOGICA (*)

Por A. HEYTING.

1. *La lógica del ser.*

A menudo se ha estudiado la lógica como una ciencia puramente formal, donde no se tiene en cuenta el sentido de las nociones lógicas, sino solamente sus propiedades formales. En este caso no se trata de ver si una proposición es verdadera o falsa, sino solamente de indagar las condiciones formales según las cuales se puede deducir una proposición a partir de otras proposiciones. Sin embargo, cuando se va a aplicar la lógica, se debe esclarecer la cuestión de la significación de la palabra "verdadero" y de los otros términos lógicos, y se llega entonces a enunciados como el siguiente: "Una proposición es verdadera si el estado de cosas que ella expresa existe en el mundo real". La definición varía según el punto de vista del filósofo, pero ella presupone siempre una concepción de lo real; esto quiere decir que la lógica necesita, para su interpretación, de una ontología.

Las dificultades con que tropieza la interpretación de la implicación son bien conocidas. A decir verdad, en la lógica de las proposiciones no hay cabida para una implicación propiamente dicha, porque cada proposición es o verdadera o falsa, y no se concibe cómo su verdad podría depender de la de otras proposiciones. Así se llega a la definición de la implicación por la verdad y la falsedad: la proposición **p**—> **q** es falsa si y sólo si **p** es verdadera y **q** es falsa. Por una parte, esta definición no se ajusta a la idea intuitiva de la implicación, por otra, ella depende para su aplicación, de la noción de verdad.

La lógica de las proposiciones, bajo su forma tradicional, no es independiente sino cuando se la trata como un cálculo puramente formal. Para interpretarla, se debe recurrir a una metafísica.

2. *La lógica de la modalidad.*

Muchos lógicos, poco satisfechos con la interpretación de la implicación que acabo de recordar, han procurado dar una que concordara mejor con la intuición. Especialmente C. I. Lewis, propuso considerar, al lado de la implicación material, una implicación estricta, donde la definición se basa en la noción de necesidad. **p** implica **q** en sentido estricto, si es imposible que **p** sea

(*) *Les Etudes philosophiques*, Nº 2, 1956.

verdadera y **q** sea falsa. Para Lewis, la posibilidad es una noción primitiva, y la necesidad se alcanza por medio de la negación. De todas maneras, para aplicar la lógica es necesario que sepamos qué quieren decir las palabras "necesario" y "posible". Se puede definir que una proposición es posible si ella no es contradictoria, pero para que esta definición tenga un sentido claro es necesario tomar la palabra "contradictoria" en su sentido lógico, con lo cual se reduce la lógica estricta a la lógica usual. Este no es el propósito de Lewis. Todo cuanto se puede concluir de sus ejemplos es que toma las palabras "no-contradictorio" en un sentido bastante vago que se explica por su uso en el lenguaje corriente. Analizando un poco esta noción se ve que es muy complicada y que da lugar a confusiones.

He aquí otra definición de implicación estricta, sugerida por Lewis, **p** implica **q** en sentido estricto, si **q** expresa un efecto de la causa expresada por **p**. Por ejemplo: si hay oscuridad en la habitación, no puedo leer. Esta definición está muy próxima a la intuición, pero tiene el inconveniente de suponer como dada una teoría de la causalidad, y ésta, más todavía que la de la existencia, es un verdadero campo de batalla en la filosofía. Parece pues que la teoría de la implicación estricta, en lugar de esclarecer el sentido de la lógica de las proposiciones, la hace depender de nociones mucho más complicadas y más oscuras.

3. *La lógica simbólica.*

¿Nos veremos obligados, pues, para tratar la lógica de una manera exacta, a considerarla como un cálculo formal y a renunciar a toda interpretación de ese cálculo? La lógica simbólica (sinónimos: lógica matemática, lógica formalizada) es actualmente tema de extensos estudios. Se ha constituido en una ciencia matemática, y sus métodos se han elaborado a partir de los métodos matemáticos. Pero éstos han evolucionado mucho después de la mitad del siglo XIX. Las matemáticas se han emancipado poco a poco de su interpretación en relación con la realidad; actualmente la mayoría de los matemáticos consideran su ciencia como algo puramente formal. En Francia el grupo de matemáticos que se presenta bajo el nombre colectivo de Bourbaki, publicó un tratado en el cual las matemáticas se desarrollan de esta manera. Desde su punto de vista, las matemáticas consisten en signos que se escriben sobre el papel; todo lo que hay de más, todas las ideas que responden a esos signos, no incumben al matemático como tal sino sólo al físico o al técnico que aplica las matemáticas.

La lógica ha seguido de cerca la evolución que condujo a esta concepción de las matemáticas. También ella se ha constituído en una ciencia puramente formal, donde se puede operar con los signos sin ocuparse de su sentido. Tal como las matemáticas, la lógica ha ganado en claridad y precisión por la separación entre el sistema formal y su interpretación. Se puede incluso decir que en lógica esta separación ha resultado más exitosa que en matemáticas, a causa de la estructura más simple de la lógica. Al mismo tiempo, el problema de la aplicación es más premioso para la lógica. Se concibe fácilmente que las matemáticas se apliquen a las ciencias de la naturaleza, donde las experiencias conducen a resultados numéricos; ya he señalado que para explicar la aplicación de la lógica es necesario analizar primero las nociones de verdad y de falsedad. La lógica formalizada ha contribuido mucho a sistematizar las leyes de la lógica, pero no es apta para esclarecer su aplicación. Además, la lógica formal bivalente se aleja mucho de la intuición de las nociones lógicas, como por ejemplo, la de la implicación.

4. *La lógica del saber.*

Para llegar a una lógica que sea a la vez más ajustada a nuestras intuiciones y más fácil de aplicar, he elegido como punto de partida el hecho de que para aplicar una regla lógica debemos saber que las premisas son verdaderas; entonces la regla nos enseña que la conclusión es igualmente verdadera. Se descuida casi siempre la circunstancia de que en las aplicaciones de la lógica se trata siempre de lo que sabemos y las conclusiones que podemos extraer de esto que sabemos.

Se objetará, sin duda, que al adoptar este punto de vista basó la lógica en la teoría del conocimiento, en la que no se ha llegado a mayor acuerdo de opiniones que en metafísica. Respondo que es necesario elegir algún punto de partida; lo que importa es que las nociones básicas sean lo más inmediatas posible. Ahora bien, al menos para el hombre, el saber es más inmediato que el ser, que sólo se manifiesta a él por un análisis del saber.

Otra objeción sería que nada se logra poniendo la lógica en relación con el saber en lugar de basarla en la noción de verdad, pues una proposición no tiene un sentido bien definido sino cuando se puede saber si es verdadera. De esta manera, por un rodeo, la noción de proposición se basa nuevamente en la de verdad. No obstante, en concordancia con el hecho de que el saber es una noción más inmediata que el ser, es más fácil precisar las condiciones bajo las cuales se sabe que una proposición dada es verdadera, que decir exactamente bajo qué condiciones es verdadera. Más explícitamente, en la mayoría de los casos, para definir la verdad de una proposición no se dispone de otro medio que el de enumerar las condiciones bajo las cuales se la sabe verdadera. Consideremos algunos ejemplos. Todo el mundo sabe qué informaciones es necesario poseer para saber si la proposición: "El habitante más viejo de París tiene 101 años", es verdadera; es precisamente por este conjunto de informaciones por el que se define el sentido de la proposición. La cuestión es un poco más difícil para un enunciado como: "Todos los hombres son mortales". Se puede sostener que esta proposición es analítica, en cuanto la propiedad de ser mortal forma parte de la definición de hombre; también se la puede considerar como un enunciado verificado por la experiencia. En los dos casos se indican las condiciones bajo las cuales se sabe que la proposición es verdadera. Para: "Todos los franceses son hombres" se presenta el primer caso: Sin duda forma parte de la definición de un francés, que éste sea un hombre. Consideremos ahora el silogismo: "Todos los hombres son mortales. Todos los franceses son hombres. Por lo tanto: todos los franceses son mortales".

Es claro que, si sé que las dos premisas son verdaderas, sé que la conclusión es verdadera, y es en este sentido como las premisas implican la conclusión. Un razonamiento análogo se impone para el **modus ponens**, por ejemplo: "Si tengo dolor de cabeza no puedo trabajar. Tengo dolor de cabeza. Por lo tanto: no puedo trabajar". Por experiencia sé que la primera premisa es verdadera; pruebo directamente la verdad de la segunda. Luego sé que la conclusión es verdadera.

En estos ejemplos la diferencia entre la lógica del ser y la del saber es aún poco importante; las dos lógicas son, por así decir, paralelas. Pero desde el momento en que el infinito juega un papel, la diferencia se vuelve más clara. Si se me da una serie finita de números enteros puedo saber por simple inspección si el número 5 se encuentra en ella o no; aquí todavía el saber se ajusta perfectamente al ser. Pero si la serie dada es infinita, todo cambia, porque ya no tengo ningún medio de recorrer toda la serie. Estudiemos más de cerca las dificultades provocadas por esta circunstancia.

5. *El infinito matemático.*

En matemáticas el infinito se presenta en primer lugar bajo la forma de la serie de los números naturales: 1, 2, 3, ... Diré simplemente "número" en lugar de "número natural". Lo que nos interesa es la significación de un enunciado sobre la existencia de un número. Esta noción es difícil porque no se trata de una existencia material. Es imposible examinar aquí todas las discusiones sobre este concepto; quiero solamente subrayar que las dificultades de la noción de existencia matemática bastan para explicar el hecho de que la lógica del saber haya surgido como lógica del saber del infinito matemático. Acabo de mencionar otra razón, a saber, que es imposible en general comprobar esta existencia por simple inspección.

Para ser más concreto, tomo un ejemplo. Como se sabe, un número que no tiene otros divisores que 1 y sí mismo se llama número primo. (Por ejemplo, 7 es primo, porque no tiene más divisores que 1 y 7; 6 no es primo, porque aparte de 1 y 6, es divisible por 2 y 3). Consideremos el enunciado (A): Todo número más grande que 1 es o primo, o la suma de dos números primos, o la suma de tres números primos.

No se sabe si (A) es verdadero. Para todos los números que se han ensayado (A) ha sido satisfecho. (Por ejemplo, $27 = 3 + 11 + 13$; $28 = 11 + 17$; 29 es primo; son posibles otras descomposiciones, como $28 = 5 + 23$, $29 = 5 + 11 + 13$). Llamemos "número excepcional" a un número que no satisface a (A), por lo tanto un número que no sea ni 1, ni primo, ni la suma de dos o tres números primos. Como ya he dicho, no se ha encontrado jamás un número excepcional, lo que no excluye que exista entre los números que aún no se han ensayado. Evidentemente (A) es equivalente a (A'):

(A') no existe un número excepcional.

Estudiemos además los enunciados (B) y (B_1):

(B) existe un número excepcional.

(B') es imposible que no exista un número excepcional. En la lógica del ser, (B) y (B') son equivalentes, porque (B) es o verdadero o falso, por lo tanto si (B) no puede ser falso, (B) es verdadero.

En la lógica del saber, debemos comenzar por preguntarnos cómo podemos saber que un número excepcional existe. La manera más simple es indicar efectivamente un número tal. Consideremos por lo tanto los enunciados (C) y (D):

(C) he indicado efectivamente un número excepcional.

(D)he llevado a contradicción la suposición de que no existe ningún número excepcional.

En la lógica del saber (C) y (D) no son totalmente equivalentes. En el caso de (C) sabemos mucho más que en el de (D); en particular, en el caso de (C) conocemos el valor exacto de un número excepcional, que en el caso de (D) puede quedar completamente desconocido. Por lo tanto, se podrá distinguir entre los dos enunciados; ya no nos está permitido expresarnos por la frase: "No existe un número excepcional". La cuestión de saber cuál de los dos será expresado por esta frase es una cuestión de terminología que no toca el fondo de las cosas. Mientras tanto, hay razones para considerar "Existe un número excepcional" como sinónimo de (C). Sería extravagante definir por un enunciado negativo tal como (D), la existencia que, desde el punto de vista de la intuición, es la noción más primitiva de todas. Además, aunque en matemática se puede razonar de una manera abstracta sobre un número del cual se ha probado la imposibilidad de su no existencia, no se puede utilizar en los cálculos más que números cuyo valor se conoce. Adoptamos por lo tanto a título de definición que (B) significará lo mismo que (C). Generalizando, si P (x) es un predicado que se define por los números naturales, "Existe un número x tal que P (x)" significará "Se sabe calcular un número x tal que P (x). Se puede considerar esta definición como un caso particular del "principio de positividad" que se enuncia como sigue: Cada enunciado matemático o lógico expresa el resultado de una construcción.

6. *La negación.*

En cuanto a la interpretación de la negación se presenta una dificultad. Si (B) quiere decir lo mismo que (C) podríamos inclinarnos a interpretar "No existe un número excepcional" como si quisiera decir "No sé calcular un número excepcional". Pero este enunciado peca contra el principio de positividad. Además, no expresa un resultado definitivo pues el hecho de que yo no sepa (en este momento) calcular un número excepcional, no excluye que descubra uno la semana próxima. Para dar al enunciado negativo un sentido en la lógica del saber, es necesario indicar la construcción por la cual concluimos la no existencia de un número excepcional. Esta construcción no puede ser más que la de una contradicción. Por lo tanto, llegamos a la siguiente interpretación. "No existe un número excepcional" significa: "Se ha deducido una contradicción de la suposición de que un número excepcional existe". En general, la negación de una proposición **p** será interpretada por "se ha deducido una contradicción de la suposición de que **p**". Deducir una contradicción es una construcción; esta definición de la negación satisface por lo tanto el principio de positividad.

Comparemos ahora los enunciados (B) y (E):

(B) existe un número excepcional.
(E) no existe un número excepcional.

Según nuestras definiciones tienen respectivamente la misma significación que (F) y (G):

(F) se sabe calcular un número excepcional.
(G) se sabe deducir una contradicción a partir de la suposición de que se ha encontrado un número excepcional.

No hay ninguna razón para afirmar que (F) o (G) deba ser verdadero.

De hecho, en el estado actual de la ciencia, ni (F) ni (G) se han realizado. Esto quiere decir que ni (B) ni (E) pueden establecerse como verdadedros. Dicho de otra manera, el principio del tercero excluido no es válido. Este resultado es menos sorprendente de lo que parece a primera vista, ya que se apoya sobre las interpretaciones (F) y (G) que habíamos dado de los enunciados (B) y (E), y que difieren esencialmente de las interpretaciones usuales en la lógica del ser.

Será útil alertar contra cualquier mal entendido. Sería erróneo decir que el principio del tercero excluido es falso pues esto significaría que implica contradicción. Ahora bien, no es contradictorio que (B) o (E) sean verdaderos; solamente hemos comprobado que en el estado actual de la ciencia no hay ninguna razón para afirmar el uno o el otro. Esta comprobación no constituye un teorema de la lógica, así como la comprobación de que un cierto problema matemático no está resuelto, no constituye un teorema matemático. Sería igualmente erróneo creer que la lógica del saber sea una lógica plurivalente, donde al lado de la proposiciones verdaderas y de las proposiciones falsas se consideran proposiciones que no son ni verdaderas ni falsas, que tienen algún tercer valor lógico. Hay solamente proposiciones, como las del tercero excluido, las cuales no sabemos si son verdaderas o falsas y sobre cuya verdad no podemos, en consecuencia, afirmar nada. Lo que da lugar a este malentendido, es que se confunden las consideraciones acerca de la lógica con los teoremas de la lógica. Que el principio del tercero excluido no se aplique, es una comprobación sobre la lógica, no un teorema de la lógica.

7. *La implicación.*

Veremos que la implicación encuentra en la lógica del saber una interpretación muy intuitiva y natural.

Tomemos como ejemplo el enunciado (H):

(H) si al menos un número excepcional existe, entonces el número excepcional más pequeño es par.

He aquí una demostración de (H). Sea a un número excepcional impar Entonces a-3 no es ni 1, ni primo, ni la suma de dos números primos. Si a-3 fuera la suma de tres número primos, uno de ellos sería 2, por lo tanto se tendría $a-3=2+p+q$, con p y q primos. Se tendría por lo tanto $a=5+p+q$, lo que contradiría la hipótesis de que a es excepcional. He demostrado que $a-3$ es un número par excepcional. Como a todo número impar excepcional a corresponde un número par excepcional $a-3$ que es más pequeño, el mas pequeño número excepcional debe ser par.

Al analizar esta demostración vemos que consiste en una construcción que, partiendo de la hipótesis de que conocemos un número excepcional a (o lo que viene a ser lo mismo, que hemos demostrado que un número excepcional existe), conduce a una demostración de la proposición "El más pequeño número excepcional es par". En general, se demostrará la proposición "A entraña B" por una construcción que demuestre B bajo la hipótesis de que sea dada una demostración de A. La interpretación de "A entraña B" en la lógica del saber es precisamente esta, que tal construcción es conocida. Las dificultades con que tropieza la definición de la implicación en la lógica del saber, encuentra aquí su solución inmediata. Mientras que es difícil comprender cómo la verdad de una proposición puede depender de la verdad de otra, es absolutamente natural que la demostración de una proposición depende de la demostración de otra.

Es M. L. E. J. Brouwer el primero que ha comprendido que para el infinito matemático la lógica del saber es la más adecuada y es él quien ha introducido la expresión "matemáticas intuicionistas" para designar las matemáticas que se basan sobre esta lógica.

Como hemos visto el principio del tercero excluido no es válido en la lógica intuicionista. Por consiguiente, muchas otras reglas lógicas ya no se aplican. Citemos como ejemplo que la doble negación de una proposición p no es equivalente a p. Por otra parte, es claro que (B') que es la doble negación de (B), no es equivalente a (B), pues para poder afirmar (B) es necesario conocer un número excepcional, lo cual no es necesario para poder afirmar (B'). El hecho de que muchas reglas de la lógica tradicional fallen en la lógica intuicionista no es un empobrecimiento, pues es necesario completar esta lógica por reglas, entre otras, sobre el empleo de la doble negación, que en la lógica bivalente se reducen a identidades si se suprimen las dobles negaciones. No es el objeto de este artículo entrar en el detalle de la técnica de lógica intuicionista. Se hallarán algunas indicaciones con una bibliografía completa en mi libro "*Los fundamentos de las matemáticas*" (París, Gauthier-Villars, 1955).

(Traducción del francés de BEATRIZ M. APREDA)