# Explorando el Rol de la Visualización en Experiencias de Cátedra

Estela Torroba[1], Nilda Etcheverry[1], Marisa Reid[1]

[1] Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. UNLPam , Santa Rosa (La Pampa), Argentina

## Resumen

El presente trabajo incursiona en la conjunción tecnología-educación matemática. Presenta el relato de experiencias desarrolladas con estudiantes universitarios al trabajar en un ambiente computacional con una propuesta didáctica diferencial basada en la visualización.

Se reportan observaciones que muestran características del trabajo realizado por estudiantes y docentes en el ambiente en el cual se llevaron a cabo las experiencias y algunas conclusiones vinculadas con el rol de la visualización en los procesos de resolución de situaciones problemas.

*Palabras clave*: Visualización Matemática – Computadora -Estudiantes Universitarios .

## 1. Introducción

Presentaremos en este trabajo situaciones problemas provenientes de distintas experiencias que hemos realizado con alumnos universitarios pertenecientes a las carreras de Profesorado y Licenciatura en Matemática de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la UNLPam. Todas las experiencias aquí presentadas se desarrollaron en ambientes computacionales. Nos referiremos a los distintos aspectos visuales de cada uno de ellas y cómo el uso de la computadora favorece:

- el planteo de conjeturas para luego validarlas o refutarlas
- la modelización y la exploración de situaciones problemáticas
- la proposición de nuevos problemas.

Cuando se emplean recursos informáticos para resolver problemas matemáticos además de generar su solución, ellos permiten que los estudiantes visualicen, manipulen y entiendan, motivándolos a realizar conjeturas en forma intuitiva y posteriormente verificarlas.
En este sentido, Noss [1] señala que: *"Es el conocimiento el que determina el diseño, tanto como el diseño el que determina el conocimiento".* Así, el modo en que una propuesta esté diseñada condiciona la manera en que un determinado conocimiento se ha de trabajar en el aula, produciendo, al mismo tiempo, modificaciones en la propia dinámica de las clases de Matemática (Borba [2], Noss y Hoyles [3]).

Zimmerman y Cunningham [4], definen como visualización, *"el proceso de formar imágenes, ya sea mentalmente o con el auxilio de lápiz y papel o tecnología",* entendiendo como tal el conjunto de representaciones geométricas o gráficas de conceptos matemáticos, principios o problemas, ya sea dibujados a mano o generados por la computadora, de esta manera visualizar hace posible, como dice Hitt [5], *"…crear ricas imágenes mentales que el individuo pueda manipular en su mente, ensayando diferentes representaciones del concepto y, si es necesario, usar el papel o la computadora para expresar la idea matemática en cuestión".*

A continuación reportaremos tres situaciones problemas (E. Torroba et al. [6],[7] y [8]), describiremos el grupo de estudiantes que participó de cada experiencia, las tareas propuestas, el software utilizado y datos anecdóticos de lo ocurrido durante el desarrollo de las actividades. Finalmente, presentaremos algunas conclusiones.

# 2. Las experiencias

## 2.1. Modelización

A un grupo de alumnos que cursaban la asignatura Análisis Matemático I se los convocó para plantear problemas "de la vida real" y para la elección de los mismos se tuviera en cuenta el interés que despertaría, la viabilidad de su resolución y también la manera como ese problema se relacionaría con la Matemática.

La propuesta de Manuel fue la que despertó mayor interés, quién como asiduo concurrente a una sala de cine de nuestra ciudad presentó el siguiente interrogante: **¿cuál es el mejor lugar para sentarse?**

El grupo acordó que el mejor lugar para sentarse sería aquel en que el ángulo abarcado por las visuales dirigidas a los extremos de la pantalla sea máximo.

El tema era motivador y fácilmente podrían hacer una investigación sobre él ya sea a través de bibliografía especializada o recogiendo datos *in situ*.

Para la obtención de los datos los integrantes del grupo se entrevistaron con el dueño del cine con el fin de realizar las mediciones en la sala para obtener la información necesaria. Pero éste les facilitó la tarea, proporcionándoles una copia del plano de obra de la sala.

Se formaron tres grupos, dos de ellos utilizaron las herramientas del calculo diferencial para llegar a la solución del problema pero manifestaron que habían tenido dudas respecto a los resultados obtenidos porque no era lo que intuitivamente esperaban.

El tercer grupo formado por Andrea y Luciana presentaron una solución distinta con la utilización del software CABRI GÉOMÈTRE II PLUS (Figura.1[1])

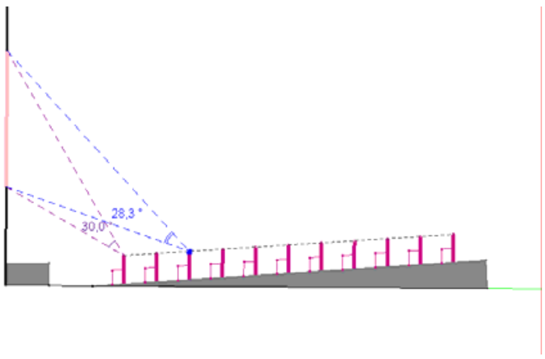


Figura 1: Esquema del cine

[1] Si bien en esta figura se muestra la construcción estática, la realizada por la alumnas con el auxilio de la computadora permitió mostrarla en forma dinámica.

El software les permitió realizar un esquema simplificado del plano de obra, y luego haciendo uso de algunas de las herramientas con que cuenta el programa, lograron una presentación en la cual es posible visualizar en qué fila el ángulo es máximo. Para ello sólo es necesario desplazar un punto sobre la línea de butacas y de esta manera observar como varía el ángulo de visión.

En la construcción del modelo gráfico que las condujo a la solución del problema debieron usar distintos conceptos matemáticos entre ellos: escala, transformaciones en el plano, paralelismo, perpendicularidad, mediciones, etc. El buen manejo del software les permitió elegir opciones para economizar tiempo y esfuerzo en la realización de los cálculos y construcciones. Utilizando los atributos del programa mostraron un diseño claro y estéticamente agradable.

Esta posibilidad de observar de manera dinámica los cambios que aparecen cuando se manipulan los objetos en la pantalla, es un aspecto esencial del proceso de comprensión de las matemáticas.

## 2.2. Proposición de problemas

A dos alumnos, Emiliano (Em) y Erica (Er), que habían cursado la asignatura Análisis I y se encontraban preparando el examen final se les planteó un problema donde debían combinar varios temas vistos en la asignatura para su solución. Se planteó el siguiente problema:

> Sea una función cuadrática de la forma $y = ax^2 + bx$. Hallar el coeficiente $b$ en función de $a$, de manera que el área de la región encerrada por la curva y el eje de las $x$ tenga un valor constante.

En el proceso de resolución del problema se debía atender a la conexión existente entre las distintas representaciones (verbal, algebraica, numérica y gráfica) para lo cual la tecnología juega un papel fundamental es por ello que se propuso a los alumnos el uso del software Derive.

A continuación mostraremos el trabajo exploratorio de los estudiantes lo cual merece ser destacado ya que proporciona evidencias acerca del tipo de actividad que favorece el ambiente computacional. Los estudiantes profundizan y van más allá en la exploración.

Luego de resolver el problema planteado para el caso particular donde el área encerrada es 3, donde obtuvieron $b = 18^{1/3}\, a^{2/3}$, realizan las gráficas de las funciones cuadráticas $y = a\,x^2 + 18^{1/3}\,a^{2/3}x$ para distintos valores negativos de *a*, lo cual se muestra en la Figura 2.

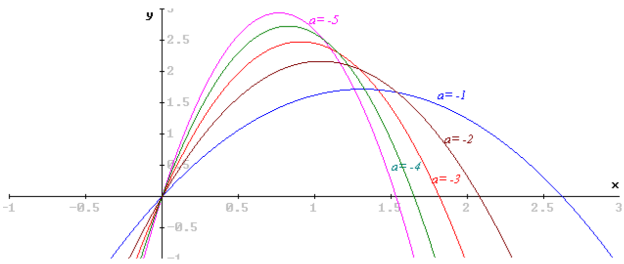


Figura 2: Graficas de las funciones $y = a\,x^2 + 18^{1/3}\,a^{2/3}x$ para valores negativos de $a$

Observando las gráficas, los estudiantes comentan:

Em: *Para que el área sea siempre la misma, cuando la base* [se refiere a la distancia entre las raíces de cada parábola] *aumenta, la altura* [se refiere a la ordenada del vértice de cada parábola] *debe disminuir.*

Er: *Claro, para que el área de la región encerrada sea constante es necesario que cuando la raíz* [se refiere a la raíz no nula] *crece, la ordenada del vértice decrezca,* [sobre su hoja de trabajo realiza la gráfica que se muestra en la Figura 3]

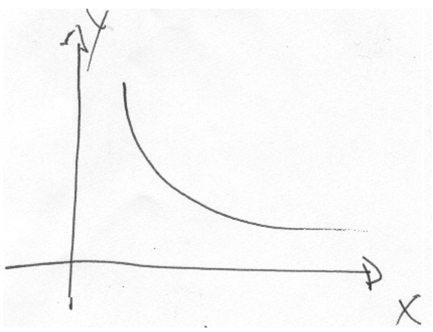

Figura 3: esquema realizado por Erica

La docente trata de interpretar las producciones de los alumnos y retomando la afirmación de Erica, pregunta: *Cuándo la raíz, de la que hablan Uds., crece: ¿qué sucede con la abscisa del vértice?*

Er: *"como la raíz aumenta, entonces la abscisa del vértice también aumenta"*

La profesora rescatando la relación que los alumnos establecían entre las coordenadas del vértice les propone que las marquen sobre las parábolas para que confirmen o desechen la hipótesis que están sosteniendo.

Para poder obtener las coordenadas del vértice, Erica, tras un trabajo algebraico logra expresar estas coordenadas de la forma:

$$V = \left( -\frac{b}{2a}; -\frac{b^2}{4a} \right).$$

Emiliano, quien está frente al teclado de la computadora, introduce la expresión hallada por Erica y marca los vértices sobre las parábolas mostradas en la Figura 2, (Figura 4)

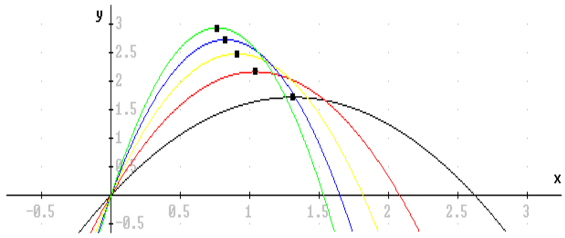

Figura 4: Parábolas y sus vértices

La docente interviene diciendo:

D: *Entonces ¿se cumple que cuando la base aumenta la altura debe disminuir?*

Er: *Sí, en realidad cuando aumenta la abscisa del vértice disminuye su ordenada.*

A pedido de Erica, Emiliano grafica una familia de parábolas y sobre ellas los vértices (Figura 5)

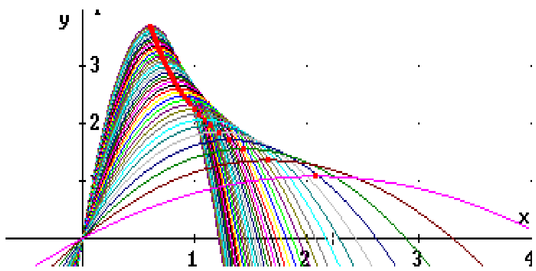

Figura 5: Familia de parábolas y vértices

Mediante la observación de la gráfica los estudiantes conjeturan que los vértices de esas parábolas pertenecen a una cierta curva y se proponen encontrar la ecuación de la misma.

Los estudiantes tenían la conjetura de que la gráfica de la función que buscaban, relacionando las coordenadas del vértice bajo las condiciones establecidas, era una rama de hipérbola.

Es importante destacar en este momento del relato de la experiencia que los estudiantes visualizando las gráficas pudieron anticipar la existencia de una curva que une los vértices de las parábolas, surgiendo de esta manera un nuevo problema propuesto por ellos y que va más allá del problema original.

Con la participación del docente, utilizando lápiz, papel y computadora encontraron la ecuación de la curva que pasa por los vértices de las parábolas:

$$f(x)=\frac{9}{4x}.$$

Presentando esta curva en un gráfica en el que aparecen también la familia de parábola (Figura 6):

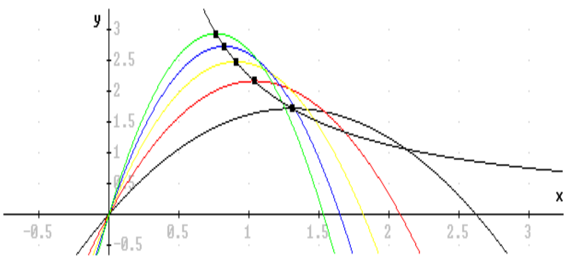


Figura 6: Parábolas y curva $f(x)=\frac{9}{4x}$

El problema propuesto podría haberse resuelto sin recurrir a la computadora, solamente usando lápiz y papel. Usar el software amplió la gama de manipulaciones posibles y de visualizaciones, favoreciendo la exploración de temas matemáticos y la formulación de conjeturas, provocando la reflexión y el razonamiento matemático permitiendo la formulación y resolución de un nuevo problema.

## 2.3. Variación de parámetros

Esta propuesta pedagógica incluye el estudio de gráficas de algunas cónicas analizando los cambios que se producen en las representaciones gráficas con la variación de los parámetros de la expresión algebraica $Ax^2+By^2+Cx+Dy+E=0$.

Esta experiencia se desarrolló en un ambiente computacional en cuatro encuentros de dos horas cada uno y las seis alumnas participantes disponían de una computadora para su uso exclusivo.

En uno de los encuentros centramos la actividad en estudiar la influencia de los parámetros de la ecuación $Ax^2+By^2+Cx+Dy+E=0$, con $A=B\neq 0$, en las gráficas correspondientes, que, por lo visto en encuentros anteriores, representan circunferencias.

La actividad propuesta fue investigar como se modifica la gráfica de la circunferencia $3x^2+3y^2+Cx+4y+5=0$ al variar el parámetro *C*.

Una de las alumnas, usando el comando TABLA del software DERIVE, asignando a *C* algunos valores enteros entre –50 y 50 generó ecuaciones diferentes que fueron graficadas (figura 7). La utilización del Zoom le permitió ver más en detalle las gráficas obtenidas

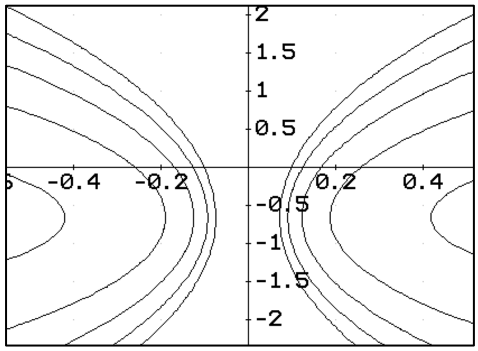


Figura 7: Gráficas de $3x^2+3y^2+Cx+4y+5=0$

De la observación de estas gráficas una alumna concluyó que: "la curva no corta al eje de las ordenadas". Otras alumnas, verificaron la conclusión anterior variando el coeficiente *A* en la ecuación $Ax^2+Ay^2+Cx+Dy+E=0$ y graficaron las circunferencias correspondiente a las ecuaciones:

$$4x^2+4y^2+Cx+4y+5=0$$

$$x^2+y^2+Cx+4y+5=0$$

$$0{,}9x^2+0{,}9y^2+Cx+4y+5=0$$

Pero Laura, una de las alumnas participantes graficó la familia de curvas: $0{,}2x^2+0{,}2y^2+Cx+4y+5=0$ que cortan al eje *y* en dos puntos como muestra la figura 8:

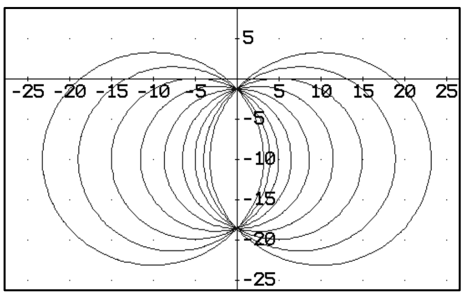


Figura 8: Grafica de la familia de curvas $0{,}2x^2+0{,}2y^2+Cx+4y+5=0$

Y propuso un nuevo desafío: encontrar el valor del parámetro cuadrático para el cual los círculos son tangentes el eje. Así variando los valores del parámetro *A* en la ecuación $Ax^2+Ay^2+Cx+4y+5=0$ con valores entre *0,2* y *0,9* para el valor $A = 0{,}8$ los círculos son tangentes al eje *y* (ver figura 9).

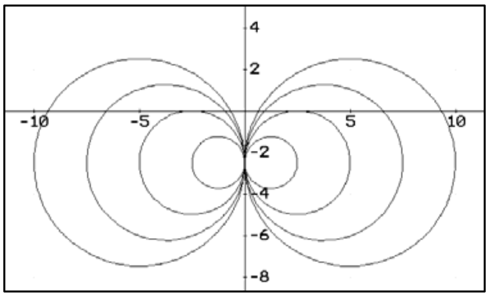


Figura 9: Gráfica de $Ax^2 + Ay^2 + Cx + 4y + 5 = 0$ con $A = 0{,}8$

Laura recurre inicialmente a una justificación computacional visual (uso del *Zoom*) y posteriormente indica que también podría realizar una resolución algebraica, resolviendo ecuaciones.

Con el uso de software es posible trazar dos o más gráficas en la misma pantalla, permitiendo la comparación y, por lo tanto, la producción de conjeturas a partir de la visualización de los diferentes tipos de cambios que las gráficas sufren cuando sus expresiones algebraicas son alteradas.

Los estudiantes también usaron el comando Zoom como una herramienta para verificar la validez de sus conjeturas. El Zoom es un recurso computacional que ellos utilizan frecuentemente para asegurar la validez de sus afirmaciones.

El enfoque propuesto permitió justificaciones visuales para el desarrollo algebraico, dando nuevas opciones en el estudio de estos temas para aquellos estudiantes que se resisten al trabajo algebraico.

El desempeño con los ambientes dinámicos permite a los estudiantes aprender a experimentar, hacer observaciones, medir, comparar, cambiar las figuras y hacer construcciones. La información obtenida de esta manera es un paso hacia la enunciación de generalizaciones y conjeturas.

# Conclusiones

Nemirovsky y Noble [9] observan que la visualización no se restringe ni a la mente ni a los medios externos (papel, computadora, etc.), sino más bien definen visualización como un medio de circulación entre ellos.

El proceso de resolución de un problema con el uso de tecnología se centra en el alumno, es este quien tiene una responsabilidad importante en su formación, donde es preferible el trabajo en pequeños grupos tal como sostienen Litwin, Maggio y Lipsman [10] "*... los encuentros entre pares resultan espacios para considerar en cuanto a las oportunidades que generan para el desarrollo de conversaciones relevantes* (orientadas a la comprensión de los problemas que se analizan)". El profesor tiene el rol de generar espacios de trabajo y de asistir a los alumnos en la organización de la tarea, guiando las conversaciones hacia los temas que se abordan.

En la primera experiencia la representación de la realidad utilizando tecnología fue determinante para aceptar la solución, esto nos lleva a reflexionar que la utilización de conceptos matemáticos no fue suficiente, necesitaron "ver" para aceptar la solución.

Con respecto al papel de la computadora como motivadora y promotora de cambios en el abordaje de los contenidos matemáticos, podemos señalar que en el estudio habitual de las ecuaciones de segundo grado, es dominante el aspecto algebraico. Usualmente los alumnos realizan manipulaciones algebraicas y construyen gráficas por medio de la expresión canónica, lo que se justifica cuando las gráficas son realizadas con lápiz y papel. La introducción de la computadora ofrece condiciones para que este cuadro sea modificado.

Durante el desarrollo de la segunda experiencia surgieron conclusiones no previstas por los docentes como la determinación de que los vértices de las diferentes parábolas se hallaban sobre una rama de hipérbola lo que muestra que trabajando en un ambiente computacional es posible que emerjan conjeturas que puedan ser verificadas.

La actividad de proposición de problemas por parte de los alumnos está asociada con lo establecido por Silver [11] *"la proposición de problemas (Posing Problem) se refiere tanto a la generación de problemas como a la reformulación de problemas dados, pudiendo ocurrir antes, durante o después de resolver un problema matemático".*

Las conjeturas son el resultado de la observación y el razonamiento inductivo. Las exploraciones de los objetos geométricos por medio de la computadora permiten que el estudiante a partir de la observación de muchos casos particulares pueda no sólo reconocer patrones, sino formular conjeturas, de esta forma construye su conocimiento geométrico. Esta metodología permite que el estudiante trabaje de la misma forma como lo hacen los matemáticos, a la vez que favorece un cambio de actitud de los alumnos hacia la geometría.

Devlin [12] considera que la llegada de un nuevo medio como la computadora no suplanta a uno viejo, como el lápiz y papel, y cree que la computadora puede jugar un papel significante en los procesos de razonamiento matemático. Por ejemplo, la posibilidad de ver los efectos de cambiar un parámetro en una ecuación puede contribuir a la generación de nuevas conjeturas.

La tecnología computacional enfatiza la componente visual de la matemática, cambiando el status de la visualización en la educación de matemática. Los medios usados para comunicar, representar y producir ideas matemáticas condicionan el tipo de matemática que se hace y el tipo de pensamiento desarrollado en esos procesos.

La herramienta tecnológica plantea a los docentes el desafío de diseñar actividades que aprovechen sus características con el potencial de apoyar nuevas maneras de enseñanza.

## Agradecimientos

Agradecemos profundamente a la Dra. Mónica Villarreal que nos inició y continua guiándonos en la tarea de investigar en el área de educación matemática.

## Referencias

[1] R. Noss, New numeracies for a technological culture. For the learning of Mathematics, 18, 2 (1998) , pp.2-12.

[2] M. Borba, Graphing calculator, functions and reorganization of the classroom. In: Borba, M. et al (Eds.) Proceedings of Working Group 16 at ICME 8: the role of technology in the Mathematics classroom. Rio Claro: Gráfica Cruzeiro, (1997) pp.53-62.

[3] R. Noss, C. Hoyles. Windows on mathematical meanings: learning cultures and computers. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, (1996), pp. 275.

[4] W. Zimmermann, S. Cunningham, What is mathematical visualization? In W. Zimmermann and S. Cunningham (Eds.), Visualization in Teaching and Mathematics. (1991). Washington, D. C.: The Mathematical Association of America.

[5] F. Hitt, Resolución de Problemas no-rutinarios y Uso de Nuevas Tecnologías. Berlín (Germany): Proceedings CIEAE-47, (1995), pp. 283-289.

[6] E. Torroba, N. Etcheverry, M. Reid, Modelaje y Cine en la Formación de Profesores de Matemática. CD-ROM de las Memorias del Octavo Simposio de Educación Matemática. (2006). Buenos Aires, Argentina.

[7] E. Torroba, M. Reid, N. Etcheverry, M. Villarreal, Los estudiantes proponen un problema: una posibilidad favorecida por los ambientes computacionales informatizados. Revista Iberoamericana de Educación Matemática Unión., 7, (2006) pp. 39-51. *http://www.fisem.org/paginas/union/revista.php*

[8] E. Torroba, M. Reid, N. Etcheverry, N. Evangelista, M. Villarreal, Fomentando discusiones en un ambiente computacional a través de la experimentación y la visualización. Revista Zetetiké 12, 21, (2004), pp. 57-81, S.P. Brasil.

[9] R. Nemirovsky y T. Noble, On mathematical visualization and the place where we live, Educational Studies in Mathematics. 33 (2) (1997), pp. 99-131.

[10] E. Litwin, M. Maggio, M. Lipsman, Tecnologías en las aulas. Las nuevas tecnologías en las prácticas de la enseñanza. Casos para el análisis. (2005), Buenos Aires: Amorrortu.

[11] E. Silver, For the learning of Mathematics: On Mathematical problem posing (14, Vancouver, FLM Publishing Association), (1994) , Canada.

[12]K. Devlin, The logical structure of computer-aided mathematical reasoning, American Mathematical Monthly. 104 (7) ,(1997), pp.632-646.

[13] M. Borba; M. Villarreal, Humans-with-Media and the Reorganization of Mathematical Thinking. Mathematics Education Library .Springer, United States of America. (2005).

*Dirección de Contacto del Autor/es*:

Estela Torroba
Avda. Uruguay 151
Santa Rosa (La Pampa)
Argentina
e-mail: estelat@exactas.unlpam.edu.ar

Nilda Etcheverry
Avda. Uruguay 151
Santa Rosa (La Pampa)
Argentina
e-mail: nildae@exactas.unlpam.edu.ar

Marisa Reid
Avda. Uruguay 151
Santa Rosa (La Pampa)
Argentina
e-mail: mareid@exactas.unlpam.edu.ar

**Estela Torroba** Profesor Adjunto con dedicación exclusiva en la asignatura Análisis I, para las carreras de Profesorado en Matemática y Licenciatura en Matemática. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad Nacional de La Pampa.

**Nilda Etcheverry** Profesor Adjunto con dedicación semiexclusiva en la asignatura Práctica educativa II para la carrera Profesorado en Matemática. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad Nacional de La Pampa.

**Marisa Reid** Profesor Adjunto con dedicación exclusiva en la asignatura Análisis III, para la carrera Licenciatura en Matemática. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad Nacional de La Pampa.