



Ricardo Jorge Perdigão Dos Santos

Licenciado em Ciências da Engenharia Mecânica

**Determinação Experimental das
Propriedades de Corpo Rígido
Utilizando Sensores MEMS e Métodos
Modais**

Dissertação para obtenção do Grau de Mestre em
Engenharia Mecânica

Orientador: Prof. Doutor António Paulo Vale Urgueira,
Professor Associado, Faculdade de Ciências e
Tecnologia, Universidade Nova de Lisboa

Júri:

Presidente: Prof. Doutora Marta Isabel Pimenta Verdete da Silva Carvalho
Arguente: Prof. Doutor Tiago Alexandre Narciso da Silva
Vogal: Prof. Doutor António Paulo Vale Urgueira

Ricardo Jorge Perdigão Dos Santos

Licenciado em Ciências da Engenharia Mecânica

**Determinação Experimental das
Propriedades de Corpo Rígido
Utilizando Sensores MEMS e Métodos
Modais**

Dissertação para obtenção do Grau de Mestre em
Engenharia Mecânica

Determinação Experimental das Propriedades de Corpo Rígido Utilizando Sensores MEMS e Métodos Modais

Copyright © 2018 Ricardo Jorge Perdigão Dos Santos

Faculdade de Ciências e Tecnologia,

Universidade Nova de Lisboa

A Faculdade de Ciências e Tecnologia e a Universidade Nova de Lisboa têm o direito, perpétuo e sem limites geográficos, de arquivar e publicar esta dissertação através de exemplares impressos reproduzidos em papel ou de forma digital, ou por qualquer outro meio conhecido ou que venha a ser inventado, e de a divulgar através de repositórios científicos e de admitir a sua cópia e distribuição com objetivos educacionais ou de investigação, não comerciais, desde que seja dado crédito ao autor e editor.

Agradecimentos

Em primeiro, gostaria de agradecer ao professor António Urgueira, inicialmente pela confiança depositada em mim para realizar este trabalho e posteriormente por toda a disponibilidade demonstrada em ajudar-me ao longo do trabalho realizado. Também transmitiu-me muita confiança e motivação nos momentos mais adversos, tornando-os assim mais acessíveis de ultrapassar, pois fez com que eu acreditasse que dia a dia era possível ir progredindo cada vez mais. Ao longo deste ano, deu-me conselhos muito úteis, mostrando-se sempre recetivo para conversar sobre temáticas que não se relacionaram com o trabalho em si, mas que têm grande utilidade. Levo por isso, todos esses conselhos para o futuro, bem como toda a aprendizagem adquirida neste trabalho. Um muito obrigado!

De seguida, um grande agradecimento ao Nuno Venâncio e ao Pedro Riscado por toda a disponibilidade para ajudar-me em momentos cruciais neste trabalho. Com a vossa ajuda, as coisas tornaram-se mais fáceis. Um muito obrigado!

Agradeço aos meus pais e família por todo o apoio que me deram ao longo do percurso académico, onde motivaram-me para superar os momentos menos bons e procuraram sempre o meu bem-estar. A vossa confiança e apoio foram muito importantes neste trabalho, para que conseguisse ultrapassar todas as dificuldades. Um muito obrigado!

Um agradecimento a todos os professores da FCT, especialmente do DEMI, por todo o conhecimento que me transmitiram ao longo destes cinco anos que permitiu ser possível realizar este documento. Neste trabalho, um especial agradecimento ao professor Tiago Silva pela disponibilidade em ajudar-me com o algoritmo Matlab do estudo numérico. Um muito obrigado!

Por fim, agradeço a todos os colegas/amigos que tive o privilégio de conhecer e conviver ao longo destes cinco anos. A troca de ideias a preparar testes e/ou trabalhos, o convívio em almoços e intervalos, as festas da faculdade permitiram o meu bem-estar e contribuíram para que eu chegasse até aqui. Igualmente, agradecer aos meus amigos fora da faculdade e que estudam no continente e os que estão no Porto Santo, por tudo o que me proporcionaram ao longo destes anos. Um muito obrigado!

Resumo

O conhecimento dos parâmetros de inércia de um corpo rígido é essencial sempre que se pretende calcular o seu comportamento dinâmico, especialmente na gama de baixas frequências. A determinação destes parâmetros para corpos com geometria complexa e/ou características de construção desconhecidas levanta dificuldades reais aos investigadores. Para estes casos, a modelação computacional nem sempre proporciona os melhores resultados, pelo que o recurso à via experimental tem sido uma solução para a obtenção das referidas propriedades.

A motivação principal para este trabalho assenta numa via experimental que faz a utilização inédita dos sensores MEMS em Métodos Modais. Inicialmente, faz-se um estudo numérico para verificar se o Método Modal modificado, que inclui a informação das rotações, pode conduzir a melhores estimativas dos parâmetros de inércia. Posteriormente, realiza-se o estudo experimental, onde na primeira parte se aplicou o método original, utilizando sensores MEMS triaxiais, e numa segunda etapa se aplica o método modificado, com a introdução dos sensores MEMS giroscópios.

Os resultados obtidos com o método original e com esta nova versão são comparados com a versão do método que utiliza sensores triaxiais piezoelétricos. Conclui-se que os resultados são promissores e que existe um enorme ganho na relação custo do trabalho experimental versus qualidade dos resultados obtidos.

Palavras-chave

Corpo rígido, MEMS, Métodos Modais, Parâmetros de inércia

Abstract

The knowledge of inertia parameters from a rigid body is essential whenever it is expected to calculate his dynamic behavior, especially in the low frequency range. The determination of these parameters for bodies with complex geometry and/or unknown construction characteristics presents real difficulties to investigators. For these cases, computational modeling does not always provide the best results, so the use of the experimental way has been a solution to obtain these properties.

The main motivation for this work is based on an experimental way that makes the unprecedented use of MEMS sensors in Modal Methods. Initially, a numeric study is carried out to verify if the modified Modal Method that includes the information about rotation measurements can lead to better estimations of inertia parameters. Afterwards, the experimental study is carried out, where in the first part the original method was applied, using triaxial MEMS sensors, and in the second part the modified method was applied, with the introduction of gyroscopes MEMS sensors.

The results obtained with original and modified methods are compared with the version of the method that uses triaxial piezoelectric sensors. It is concluded that results are promising and that exists a huge gain in the cost of experimental work versus quality of the results obtained.

Key words

Rigid body, MEMS, Modal Methods, Inertia parameters

Índice

Agradecimentos.....	V
Resumo.....	VII
Abstract	IX
Índice de Figuras	XIII
Índice de Tabelas.....	XVII
Nomenclatura	XIX
Abreviaturas	XXIII
1. Introdução	1
1.1 Motivação e Objetivos.....	1
1.2 Estrutura da dissertação	2
1.3 Revisão Bibliográfica	3
1.3.1 Corpo rígido e suas propriedades.....	3
1.3.2 Métodos de determinação das propriedades de corpo rígido	5
1.3.3 Acelerómetros MEMS e piezoelétricos	15
2. Métodos Modais.....	19
2.1 Método Original	19
2.1.1 Obtenção dos modos de corpo rígido.....	22
2.2 Método modificado para implementação da medição direta de rotações	23
2.3 Estudo numérico com Método Modal modificado	25
2.3.1 Esquema do algoritmo Matlab proposto	25
2.3.2 Caraterização do corpo rígido em estudo.....	27
2.3.3 Caracterização das suspensões utilizadas.....	28
2.3.4 Caraterização das forças aplicadas.....	33
2.3.5 Caraterização dos pontos de medição das respostas	34
2.3.6 Resultados e conclusões.....	34

3. Identificação experimental de propriedades de corpo rígido	41
3.1 Caraterização do corpo rígido em estudo	41
3.2 Caraterização da suspensão utilizada.....	43
3.3 Equipamento e procedimento experimental	44
3.3.1 Calibração	44
3.3.2 Sistema de aquisição de dados	47
3.3.3 Regeneração das FRF	50
3.4 Estudo experimental	53
3.4.1 MEMS triaxiais	55
3.4.2 MEMS triaxiais e MEMS giroscópios	63
3.5 Principais dificuldades sentidas e discussão dos resultados	72
3.5.1 Principais dificuldades sentidas	72
3.5.2 Discussão dos resultados.....	77
4. Conclusões e sugestões para trabalhos futuros	87
4.1 Conclusões.....	87
4.2 Sugestões para trabalhos futuros	88
Bibliografia	91
Anexos.....	95

Índice de Figuras

Figura 1.1- Estrutura da dissertação por capítulos.	2
Figura 1.2- Corpo rígido não constrangido (adaptado de [3])......	6
Figura 1.3- Classificação dos Métodos Experimentais de Identificação dos Parâmetros de Inércia de acordo com [3].....	10
Figura 1.4- FRF, com a linha mássica assinalada a vermelho.....	10
Figura 1.5- FRF, com os modos rígidos assinalados a vermelho.....	12
Figura 1.6- Classificação dos Métodos Experimentais de Identificação dos Parâmetros de Inércia de acordo com [21].....	14
Figura 1.7- Sensor piezoelétrico (adaptado de [24]).	15
Figura 1.8-Típico acelerómetro MEMS do tipo capacitivo (adaptado de [32]).	16
Figura 1.9- Representação de um acelerómetro MEMS giroscópio do tipo diapasão [33]......	17
Figura 2.1- Esquema do algoritmo Matlab proposto para o estudo numérico.	26
Figura 2.2- Secção transversal dos perfis do corpo rígido em estudo.	27
Figura 2.3- Geometria do corpo rígido em estudo.	27
Figura 2.4- Pontos de referência para colocação dos acelerómetros e/ou aplicação das forças..	28
Figura 2.5- Procedimento experimental para cálculo da constante de rigidez das molas.	29
Figura 2.6- Representação gráfica da curva experimental de rigidez da mola 8.....	29
Figura 2.7- Representação esquemática da suspensão A.	30
Figura 2.8- Representação esquemática da suspensão B.	30
Figura 2.9- Conjunto de forças aplicado no estudo numérico.....	33
Figura 2.10- Pontos de medição das respostas no estudo numérico.....	34
Figura 2.11- FRF da força 1xx na suspensão A.	35
Figura 2.12- FRF da força 1xx na suspensão B.	36
Figura 2.13- FRF da força 2yy na suspensão A.	36
Figura 2.14- FRF da força 2yy na suspensão B.	36
Figura 2.15- FRF da força 1zz na suspensão A.....	37
Figura 2.16- FRF da força 1zz na suspensão B.....	37
Figura 2.17- FRF de rotações: Força 1xx / suspensão A.....	37
Figura 2.18- FRF de rotações: Força 1xx / suspensão B.....	38
Figura 2.19- FRF de rotações: Força 2yy / suspensão A.....	38
Figura 2.20- FRF de rotações: Força 2yy / suspensão B.....	38
Figura 2.21- FRF de rotações: Força 1zz / suspensão A.....	39
Figura 2.22- FRF de rotações: Força 1zz / suspensão B.	39

Figura 3.1- Corpo rígido em estudo.	42
Figura 3.2- Caraterização da suspensão experimental utilizada (2 vistas).	43
Figura 3.3- Procedimento experimental na calibração dos MEMS triaxiais na direção z e x respetivamente.	44
Figura 3.4- Linha mássica típica da resposta experimental do bloco.	45
Figura 3.5- Montagem experimental para a calibração dos MEMS giroscópios.	46
Figura 3.6- Procedimento experimental na calibração dos MEMS giroscópios.	46
Figura 3.7- Representação de um prisma rectangular (adaptado de [1]).	47
Figura 3.8- Sensores MEMS triaxiais ADXL 326.	47
Figura 3.9- Sensores MEMS giroscópios IDG500 e LPY503AL respetivamente.	47
Figura 3.10- Esquema do sistema de aquisição de dados.	49
Figura 3.11- Dados exportados do programa Labview.	50
Figura 3.12- Ficheiro em formato.txt com as FRF exportadas do programa Labview.	50
Figura 3.13- Ficheiro em formato. FRF pronto a ser lido no programa Modent.	51
Figura 3.14- Escolha do método de identificação modal.	51
Figura 3.15- Procedimento de regeneração das FRF.	52
Figura 3.16- Curva teórica resultante da regeneração da FRF.	52
Figura 3.17- Lista modal com as constantes modais pretendidas.	53
Figura 3.18- Esquema do procedimento da metodologia inversa.	53
Figura 3.19- Esquema do algoritmo Matlab para determinar o Indicador Norma.	54
Figura 3.20- Esquema do algoritmo Matlab que aplica os Métodos Modais.	55
Figura 3.21- Esquematização dos testes experimentais.	56
Figura 3.22- FRF direta (2x_2x).	58
Figura 3.23- FRF indireta (1x_3y).	58
Figura 3.24- Variação experimental da massa.	59
Figura 3.25- Variação experimental do centro de massa.	59
Figura 3.26- Variação experimental dos momentos de inércia.	59
Figura 3.27- Variação experimental dos produtos de inércia.	60
Figura 3.28- Erro experimental médio dos parâmetros de inércia.	60
Figura 3.29- Valores experimentais de massa: teste 4.	61
Figura 3.30- Valores experimentais do centro de massa: teste 4.	61
Figura 3.31- Valores experimentais dos momentos e produtos de inércia: teste 4.	63
Figura 3.32- Esquematização dos testes experimentais.	64
Figura 3.33- FRF Rot x_1z.	65
Figura 3.34- FRF Rot y_1x.	65
Figura 3.35- FRF -Rotz_2y.	66
Figura 3.36- Variação experimental da massa.	66

Figura 3.37- Variação experimental do centro de massa.	67
Figura 3.38- Variação experimental dos momentos e produtos de inércia.	68
Figura 3.39- Erro experimental médio dos parâmetros de inércia: MEMS triaxiais vs MEMS triaxiais + MEMS giroscópios.....	69
Figura 3.40- Valores experimentais de massa: teste 1.	69
Figura 3.41- Valores experimentais do centro de massa: teste 1.	70
Figura 3.42- Valores experimentais dos momentos e produtos de inércia: teste 1.	71
Figura 3.43- Suspensão inicial com fio Nylon unifilar e correntes de aço.....	72
Figura 3.44- Indicador Norma: MEMS triaxiais, teste 1, suspensão inicial.	73
Figura 3.45- Indicador Norma: MEMS triaxiais, teste 1, suspensão final.	73
Figura 3.46- Base de plástico onde foram colocados os sensores MEMS.	74
Figura 3.47- FRF obtida com sensores MEMS triaxiais ADXL326 com fase assinalada a preto.	75
Figura 3.48- FRF obtida com sensores MEMS giroscópios LPY503AL com fase assinalada a preto.....	76
Figura 3.49- Ruído da FRF na gama de frequência de interesse assinalado a preto.	77
Figura 3.50- Escolha automática de pontos de teste do Modent devido ao ruído na FRF.	77
Figura 3.51- Indicador Norma: MEMS triaxiais + MEMS giroscópios, teste 1.	83

Índice de Tabelas

Tabela 1.1- Comparativo entre o acelerômetro piezoelétrico e o MEMS.....	17
Tabela 2.1- Rigidez das molas (N/m).	31
Tabela 2.2- Dados para construção da matriz de rigidez KAg.....	32
Tabela 2.3- Dados para construção da matriz de rigidez KBg.....	32
Tabela 2.4- Conjunto de forças aplicado no estudo numérico.	33
Tabela 2.5- Frequências naturais (Hz) para a estrutura com suspensão A ou B.....	35
Tabela 3.1- Rigidez das molas na suspensão experimental (N/m).....	43
Tabela 3.2- Propriedades dos sensores MEMS triaxiais ADXL 326.	48
Tabela 3.3- Propriedades dos sensores MEMS giroscópios IDG500 e LPY503AL.....	48
Tabela 3.4- Pontos de medição de resposta.....	57
Tabela 3.5- Conjuntos de forças aplicados.....	57
Tabela 3.6- Conjunto de forças aplicado.....	64
Tabela 3.7- Comparação dos erros experimentais: MEMS triaxiais: teste 1, suspensão inicial e final.	74
Tabela 3.8- Comparação do erro experimental considerando a massa experimental ou a massa real: teste 5.	79
Tabela 3.9- Comparação do erro experimental considerando a massa experimental ou a massa real: teste 6.	79
Tabela 3.10- Método Modal vs Método de Restrição de Inércia: teste 2.....	81
Tabela 3.11- Método Modal vs Método de Restrição de Inércia: teste 4.....	81
Tabela 3.12- Método Modal vs Método de Restrição de Inércia: teste 5.....	82
Tabela I.1- Resultados experimentais: Parte 1, teste 1.....	95
Tabela I.2- Resultados experimentais: Parte 1, teste 2.....	95
Tabela I.3- Resultados experimentais: Parte 1, teste 3.....	96
Tabela I.4- Resultados experimentais: Parte 1, teste 4.....	96
Tabela I.5- Resultados experimentais: Parte 1, teste 5.....	96
Tabela I.6- Resultados experimentais: Parte 1, teste 6.....	97
Tabela I.7- Resultados experimentais: Parte 2, teste 1.....	97
Tabela I.8- Resultados experimentais: Parte 2, teste 2.....	97
Tabela I.9- Resultados experimentais: Parte 2, teste 3.....	98

Nomenclatura

a	Aceleração
A_{jk}	Constante modal
$a_{jk}(\omega)$	Acelerância
$[B]$	Matriz dos ângulos de Bryant
β_{r_i}	Ângulos de Bryant
C	Capacidade de duas placas paralelas
$C(X, Y, Z)$	Referencial global de inércia
d	Distância ao centro de rotação do corpo rígido Distância do referencial considerado ao centro de massa Distância entre placas Distância do centro de massa ao ponto de colocação das molas
dm	Elemento infinitesimal de massa
dV	Elemento infinitesimal de volume
E	Permissividade do material
E_{pel}	Energia potencial elástica
$[F_{-j}]$	Matriz de transformação de coordenadas da força
$\{f_{-i}\}$	Vetor de forças e momentos relativamente ao ponto i
$\{f_i\}; \{M_i\}$	Vetores de forças e momentos externos no ponto i
$f_{inicial}, f_{final}$	Frequência inicial e final (Hz)
F_k	Força aplicada num ponto k
f_n	Frequência natural (Hz)
g	Aceleração da gravidade
$[I]$	Matriz Identidade
Im	Parte imaginária
J_0	Momento de inércia relativamente à origem
J_{cm}	Momento de inércia relativamente ao centro de massa
$[J_i]$	Tensor de inércia relativo ao ponto i
J_{xx}, J_{yy}, J_{zz}	Momentos de inércia em relação a um referencial fixo x, y, z
J_{xy}, J_{xz}, J_{yz}	Produtos de inércia em relação a um referencial fixo x, y, z
$(J_{xx}, J_{yy}, J_{zz})_i$	Momentos de inércia relativamente ao ponto i
$(J_{xy}, J_{xz}, J_{yz})_i$	Produtos de inércia relativamente ao ponto i

$(J_{xx}, J_{yy}, J_{zz})_g$	Momentos de inércia relativamente ao centro de massa
$(J_{xy}, J_{xz}, J_{yz})_g$	Produtos de inércia relativamente ao centro de massa
$[K]$	Matriz de rigidez
K_i	Constante de rigidez num ponto i
$[K_g]$	Matriz de rigidez relativamente ao centro de massa
(k_x, k_y, k_z)	Constantes de rigidez relativamente aos eixos x, y, z
$L(x, y, z)$	Referencial local fixo ao corpo
m	Massa do corpo
$[M]$	Matriz de massa
$[M_0]$	Matriz de massa relativamente à origem
$[M_g]$	Matriz de massa relativamente ao centro de massa
$[\hat{m}_r]$	Matriz de massa modal
$NFRF$	Número de FRF
N_{pontos}	Número de pontos
$\{\ddot{r}_A\}$	Vetor das acelerações de translação relativo ao ponto A
$\{r_{AG}\}$	Vetor distância entre o ponto A e o centro de massa
r_c	Vetor posição do centro de massa
Re	Parte real
$[R_{0_i}]$	Matriz de transformação de coordenadas do referencial local para a origem
$[R_g]$	Matriz de transformação de coordenadas do centro de massa para a origem
$r(m)$	Vetor posição de um elemento de massa dm
t	Espessura
V	Volume
$\{w\}, \{\dot{w}\}$	Vetores velocidade e aceleração angulares
$[w_r]$	Matriz de ponderação
$\{X\}$	Vetor de deslocamentos e rotações em x, y, z
$\{X_0\}$	Vetor de deslocamentos e rotações relativamente à origem
x_{AG}, y_{AG}, z_{AG}	Coordenadas do centro de massa do referencial local
x_{cm}, y_{cm}, z_{cm}	Coordenadas x, y, z do centro de massa
X_i	Deslocamento no ponto i
$\{\dot{X}_i\}$	Vetor das velocidades de translação relativamente ao ponto i
$\{\ddot{X}_i\}$	Vetor das acelerações de translação relativamente ao ponto i
\ddot{X}_j	Aceleração num ponto j

$(X_{out}, Y_{out}, Z_{out})$	Canais x, y, z dos sensores MEMS
$x(V), y(V), z(V)$	Coordenadas x, y, z do elemento de volume dV
$[Z]$	Matriz de rigidez dinâmica
$[Z_g]$	Matriz de rigidez dinâmica relativamente ao centro de massa
$\{\ddot{\theta}_x, \ddot{\theta}_y, \ddot{\theta}_z\}_i$	Vetor das acelerações de rotação relativamente ao ponto i
$\{\dot{\theta}_x, \dot{\theta}_y, \dot{\theta}_z\}_i$	Vetor das velocidades de rotação relativamente ao ponto i
$[\alpha(\omega)]$	Matriz de receptância
$[\alpha_0(\omega)]$	Matriz de receptância relativamente à origem
$[\alpha_g(\omega)]$	Matriz de receptância relativamente ao centro de massa
Y_r	Fator de normalização
δ	Deslocamento
$\ddot{\theta}$	Aceleração angular
$\left(\frac{\ddot{\theta}}{F}\right)_{dir}$	Linha mássica de rotação experimental diretamente obtida
$\left(\frac{\ddot{\theta}}{F}\right)_{ind}$	Linha mássica de rotação experimental indiretamente obtida
$\left(\frac{\ddot{\theta}}{F}\right)_{teórica}$	Linha mássica de rotação teórica
ρ	Massa específica
$[\emptyset]$	Matriz normalizada de modos de corpo rígido experimental relativamente aos pontos de medição
$[\emptyset_0]$	Matriz normalizada de modos de corpo rígido relativamente à origem
$[\emptyset_g]$	Matriz normalizada de modos de corpo rígido relativamente ao centro de massa
$[\emptyset_r]$	Modos de corpo rígido normalizados
$\emptyset_x, \emptyset_y, \emptyset_z$	Modos de corpo rígido normalizados de translação
$\emptyset_{\theta x}, \emptyset_{\theta y}, \emptyset_{\theta z}$	Modos de corpo rígido normalizados de rotação
$\{\Psi_r\}$	Modos de corpo rígido não normalizados
ω	Frequência (rad/s)
Ω_0	Frequência natural (rad/s)
$[]^T$	Transposta da matriz
$[]^{-1}$	Inversa de uma matriz

Abreviaturas

<i>dB</i>	Decibél
<i>FRF</i>	Função de Resposta em Frequência
<i>IN</i>	Indicador Norma
<i>MEMS</i>	<i>Micro Electro Mechanical Systems</i>
<i>MIDPI</i>	Métodos de Identificação Direta dos Parâmetros de Inércia
<i>MM</i>	Métodos Modais
<i>MRI</i>	Métodos de Restrição de Inércia

1. Introdução

Este capítulo inicia-se com a apresentação da motivação, bem como dos principais objetivos do trabalho proposto. É apresentada a estrutura da dissertação e são revistos alguns conceitos sobre o corpo rígido, explicitadas as suas propriedades, classificados alguns métodos que permitem obter estas propriedades e revisto o princípio de funcionamento dos acelerómetros MEMS e piezoelétricos.

1.1 Motivação e Objetivos

Este trabalho tem como principal finalidade a determinação experimental das propriedades (massa, coordenadas do centro de massa, momentos e produtos de inércia) de um corpo rígido. Como tal, a motivação principal que levou à escolha deste tema prende-se com a utilização inédita dos sensores MEMS nos Métodos Modais para determinar experimentalmente estas propriedades.

Perante corpos que se podem considerar rígidos, cujas dimensões e/ou características de construção (ex: material) são desconhecidas, a determinação destas propriedades pela via teórica levanta dificuldades reais aos investigadores. Por isso, esta temática tem sido alvo de um estudo profundo ao longo destes últimos anos. Este estudo tem incidido sobretudo na via experimental, pois esta muitas vezes apresenta-se como a única possibilidade, tendo resultado diversos trabalhos baseados no domínio do tempo ou no domínio da frequência. Através da via experimental, consegue-se obter ótimos resultados no estudo dos sistemas dinâmicos onde as propriedades acima referidas têm grande importância principalmente na gama de baixas frequências.

As condições do laboratório em conjugação com o conhecimento adquirido de trabalhos anteriormente realizados por diversos autores (nomeadamente principais vantagens e limitações da aplicação de cada um dos métodos) motivaram a escolha deste trabalho.

Os Métodos Modais estudados podem constituir uma ferramenta experimental importante, nomeadamente com o uso dos sensores MEMS em vez dos acelerómetros piezoelétricos na obtenção de respostas dinâmicas da estrutura. Os sensores MEMS possibilitam a medição simultânea de translações e rotações triaxiais numa estrutura. Os acelerómetros piezoelétricos, de uso comum, apenas medem translações triaxiais. Os sensores MEMS têm um custo muito inferior aos acelerómetros piezoelétricos, surgindo também a oportunidade de utilizar menos pontos de medição, pois tem-se mais canais de medição.

A realização deste trabalho visa primeiramente um estudo numérico de forma a detetar possíveis problemas na utilização dos Métodos Modais. Para tal, faz-se o tratamento de dados através de algoritmos que necessitam de realizar operações matriciais. Com os resultados obtidos

das respostas dinâmicas da estrutura, tendo por base apenas a metodologia teórica, prevê-se o comportamento da estrutura como se tivesse sido ensaiada experimentalmente.

Na parte experimental, testa-se a eficiência dos sensores MEMS e comparam-se, para o caso de translação, eventuais benefícios nos resultados devido sobretudo à boa sensibilidade dos MEMS em gamas de baixas frequências. Além disso, utiliza-se a informação da rotação para melhorar o algoritmo já desenvolvido para os Métodos Modais. Analisa-se os resultados, verificando-se se são credíveis, retirando-se daí possíveis benefícios e verificando-se a fiabilidade dos Métodos Modais.

Para garantir esta fiabilidade dos métodos, tem-se como objetivo ultrapassar as dificuldades experimentais associadas à aplicação dos Métodos Modais tendo por base as respostas dinâmicas da estrutura, garantido uma preparação dos ensaios experimentais de acordo com os princípios teóricos.

1.2 Estrutura da dissertação

Esta dissertação encontra-se dividida em quatro capítulos, conforme se ilustra na figura 1.1.



Figura 1.1- Estrutura da dissertação por capítulos.

Introdução: Este capítulo inicia-se com a motivação que levou à realização deste trabalho, bem como a apresentação dos objetivos propostos. De seguida é apresentada a estrutura da dissertação

por capítulos, sendo o conteúdo de cada capítulo apresentado resumidamente. Por fim, são revistos os principais conceitos sobre o corpo rígido, explicitadas as suas propriedades, classificados alguns métodos que permitem obter estas propriedades e revisto o princípio de funcionamento dos acelerómetros MEMS e piezoelétricos.

Métodos Modais: Em primeiro lugar é apresentado todo o fundamento teórico do Método Modal original. De seguida são apresentadas as modificações a realizar no método original para implementar os sensores MEMS giroscópios. Por fim, faz-se um estudo numérico com o Método Modal modificado devidamente caracterizado e com os resultados apresentados e discutidos.

Identificação experimental de propriedades de corpo rígido: Este capítulo inicia-se com a caracterização do corpo rígido utilizado. De seguida é igualmente caracterizada a suspensão utilizada. Posteriormente é detalhado todo o equipamento e procedimento experimental utilizado neste estudo experimental. Este estudo experimental é devidamente abordado com os resultados apresentados. Finalmente são referidas as principais dificuldades sentidas e os resultados obtidos são discutidos.

Conclusões e sugestões para trabalhos futuros: O último capítulo inclui em primeiro lugar as conclusões a retirar deste trabalho e por fim as sugestões para trabalhos futuros.

1.3 Revisão Bibliográfica

1.3.1 Corpo rígido e suas propriedades

Um corpo rígido é um corpo considerado indeformável, ou seja, a distância entre as N partículas que o constituem é constante no tempo, independentemente das forças que nele atuam. Trata-se de uma aproximação à realidade, pois os corpos em estudo sofrem deformações desprezáveis. Assim, a trajetória de qualquer ponto é determinada pela variação de três coordenadas. No caso da rotação, este conceito é especialmente importante, pois uma vez que todo o corpo tem a mesma velocidade angular de rotação, sabendo a distância de qualquer ponto ao eixo de rotação, consegue-se calcular a velocidade e/ou aceleração nesse ponto. Esta abordagem é desenvolvida em Beer and Johnston [1]. A nível estrutural, o corpo rígido assume enorme importância, pois este e os seus suportes formam um sistema dinâmico sendo este usado em muitas estruturas mecânicas. A função dos suportes é manter o corpo rígido e isolar o ruído e vibração de outras estruturas.

A caracterização do corpo rígido envolve o conhecimento dos dez parâmetros de inércia dos sistemas mecânicos: massa, coordenadas do centro de massa e tensor de inércia (momentos e produtos de inércia). Estes parâmetros têm forte influência no comportamento dinâmico de

sistemas que se consideram livres no espaço ou suspensos por molas de rigidez reduzida (suspensão elástica) na gama de baixas frequências. Sendo assim, estas propriedades revelam-se importantes no projeto e otimização de sistemas mecânicos e no domínio da modificação estrutural.

De acordo com Harris and Piersol [2], a massa de um corpo é obtida integrando o produto da massa específica $\rho(V)$ pelo elemento de volume dV sobre o corpo.

$$m = \int_V \rho(V) dV \quad (1.1)$$

Se o corpo for definido por um número de partículas n , cada uma tendo uma massa específica constante ou média, a massa total é dada por:

$$m = \rho_1 V_1 + \rho_2 V_2 + \dots + \rho_n V_n \quad (1.2)$$

onde ρ_1 até ρ_n são as massas específicas dos elementos de volume V_1 a V_n . As massas específicas de vários materiais podem ser encontradas em catálogos contendo as propriedades dos materiais.

O centro de massa (ou centro de gravidade), segundo [2], é um ponto localizado pelo seguinte vetor:

$$r_c = \frac{\int_m r(m) dm}{\int_m dm} \quad (1.3)$$

Onde $r(m)$ é o vetor posição de um elemento de massa dm . O centro de massa de um corpo num sistema de coordenadas cartesianas x, y, z é localizado em:

$$x_{cm} = \frac{1}{m} \int_v x(V) \rho(V) dV \quad (1.4)$$

$$y_{cm} = \frac{1}{m} \int_v y(V) \rho(V) dV \quad (1.5)$$

$$z_{cm} = \frac{1}{m} \int_v z(V) \rho(V) dV \quad (1.6)$$

Onde $x(V), y(V), z(V)$ são as coordenadas x, y, z do elemento de volume dV e m a massa do corpo. Se o corpo for dividido em elementos cujos centros de massa são conhecidos, o centro de massa do corpo inteiro de massa m é dado por equações do seguinte tipo:

$$x_{cm} = \frac{1}{m} (x_{cm_1} m_1 + x_{cm_2} m_2 + \dots + x_{cm_n} m_n) \quad (1.7)$$

Onde x_{cm_1} é a coordenada x do centro de massa do elemento m_1 até x_{cm_n} que é a coordenada x do centro de massa do elemento m_n . Tabelas onde se especifica a localização dos centros de área e volume (chamados centroides) para secções simples e corpos sólidos normalmente são um auxílio para dividir o corpo em elementos conforme indicado na equação (1.7). O centroide e centro de massa de um elemento são coincidentes quando a massa específica do material é uniforme ao longo do elemento.

Os momentos de inércia ou segundos momentos de massa de um corpo rígido em relação a um sistema de eixos ortogonais fixo segundo [2] são:

$$J_{xx} = \int_m (y^2 + z^2) dm \quad (1.8)$$

$$J_{yy} = \int_m (x^2 + z^2) dm \quad (1.9)$$

$$J_{zz} = \int_m (x^2 + y^2) dm \quad (1.10)$$

Onde dm é um elemento infinitesimal de massa localizado nas coordenadas x, y, z e a integração é feita sobre a massa do corpo m . Da mesma maneira, os produtos de inércia são:

$$J_{xy} = \int_m xy dm \quad (1.11)$$

$$J_{xz} = \int_m xz dm \quad (1.12)$$

$$J_{yz} = \int_m yz dm \quad (1.13)$$

É convencional em mecanismos de corpo rígido ter a origem das coordenadas x, y, z no centro de massa do corpo. Salvo alguma indicação em contrário, esta localização é assumida e os momentos e produtos de inércia são referidos a eixos que passam no centro de massa. Para casos de simetria, os produtos de inércia são nulos. Os momentos de inércia sobre os eixos principais de inércia são os momentos principais de inércia. Caso o sistema de eixos não tenha como centro de coordenadas o centro de massa, aplica-se o teorema dos eixos paralelos dado por:

$$J_0 = J_{cm} + md^2 \quad (1.14)$$

Onde J_{cm} é o momento de inércia segundo o centro de massa; m é a massa do corpo; d é a distância do referencial considerado ao referencial do centro de massa.

1.3.2 Métodos de determinação das propriedades de corpo rígido

Os parâmetros de inércia podem ser determinados analiticamente ou experimentalmente. Analiticamente, recorre-se a programas de modelação geométrica. Mas se o estudo envolver estruturas de geometria complexa com propriedades dos materiais de construção desconhecidas, a via analítica torna-se uma tarefa muito complicada.

Segundo Schedlinski e Link [3] as técnicas experimentais são a melhor via para determinar os parâmetros de inércia. Tem-se como ponto de partida as equações do movimento de corpo rígido não constrangido (livre no espaço). Considerando o corpo rígido não constrangido da figura 1.2 e para o ponto de referência A, tem-se que as equações do movimento de corpo rígido podem ser escritas da seguinte forma:

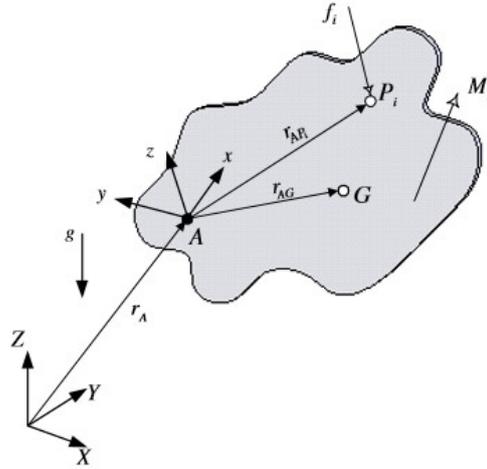


Figura 1.2- Corpo rígido não restrito (adaptado de [3]).

$$\{m\{\ddot{r}_A\} - m\{r_{AG}\} \times \{\dot{w}\} = \{f_A\} - m\{w\} \times (\{w\}\{r_{AG}\}) \quad (1.15)$$

$$\{m\{r_{AG}\} \times \{\ddot{r}_A\} + [J_A]\{\dot{w}\} = \{M_A\} - \{w\} \times (\{w\}[J_A]) \quad (1.16)$$

Onde:

$m \rightarrow$ massa do corpo

$\{\ddot{r}_A\} \rightarrow$ vetor das acelerações de translação

$\{r_{AG}\} \rightarrow$ vetor da distância entre o ponto A e o centro de massa G

$\{w\}$ e $\{\dot{w}\} \rightarrow$ vetores velocidade e aceleração angulares

$\{f_A\}$ e $\{M_A\} \rightarrow$ vetores das forças e momentos externos em A

$[J_A] \rightarrow$ tensor de inércia relativo ao ponto A

$C (X, Y, Z) \rightarrow$ referencial global de inércia

$L(x, y, z) \rightarrow$ referencial local fixo no corpo

Para transformar acelerações e forças das coordenadas do referencial global (C) para o referencial local (L) considera-se a matriz de transformação $[B]$ (matriz dos ângulos de Bryant) [3]. Tem-se a rotação sucessiva em redor dos ângulos β_{r_i} (ângulos de Bryant).

$$[B] = \begin{bmatrix} \cos \beta_{r_2} \cos \beta_{r_3} & -\cos \beta_{r_2} \sin \beta_{r_3} & \sin \beta_{r_2} \\ \cos \beta_{r_1} \sin \beta_{r_3} + \sin \beta_{r_1} \sin \beta_{r_2} \cos \beta_{r_3} & \cos \beta_{r_1} \cos \beta_{r_3} - \sin \beta_{r_1} \sin \beta_{r_2} \sin \beta_{r_3} & -\sin \beta_{r_1} \cos \beta_{r_2} \\ \sin \beta_{r_1} \sin \beta_{r_3} - \cos \beta_{r_1} \sin \beta_{r_2} \cos \beta_{r_3} & \sin \beta_{r_1} \cos \beta_{r_3} + \cos \beta_{r_1} \sin \beta_{r_2} \sin \beta_{r_3} & \cos \beta_{r_1} \cos \beta_{r_2} \end{bmatrix}$$

Ou seja, uma variável q no referencial global é transformada para o referencial local, com

$$\{q\}^l = [B]\{q\}^c \quad (1.17)$$

Se a aceleração da gravidade (g) for assumida na direção negativa do eixo Z, as equações (1.15) e (1.16) são reescritas na forma matricial conforme apresenta-se a seguir:

$$\begin{bmatrix} m & 0 & 0 & 0 & mz_{AG} & -my_{AG} \\ 0 & m & 0 & -mz_{AG} & 0 & mx_{AG} \\ 0 & 0 & m & my_{AG} & -mx_{AG} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_A \\ \ddot{y}_A \\ \ddot{z}_A \\ \ddot{\theta}_{x_A} \\ \ddot{\theta}_{y_A} \\ \ddot{\theta}_{z_A} \end{Bmatrix} = \sum_i \begin{Bmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{Bmatrix}_{Pi} - mg \begin{Bmatrix} \text{sen } \beta_{r_2} \\ -\text{sen } \beta_{r_1} \cos \beta_{r_2} \\ \cos \beta_{r_1} \cos \beta_{r_2} \end{Bmatrix} -$$

$$m \begin{bmatrix} \dot{\theta}_{y_A}^2 + \dot{\theta}_{z_A}^2 & -\dot{\theta}_{x_A} \dot{\theta}_{y_A} & -\dot{\theta}_{x_A} \dot{\theta}_{z_A} \\ -\dot{\theta}_{x_A} \dot{\theta}_{y_A} & \dot{\theta}_{x_A}^2 + \dot{\theta}_{z_A}^2 & -\dot{\theta}_{y_A} \dot{\theta}_{z_A} \\ -\dot{\theta}_{x_A} \dot{\theta}_{z_A} & -\dot{\theta}_{y_A} \dot{\theta}_{z_A} & \dot{\theta}_{x_A}^2 + \dot{\theta}_{y_A}^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_{AG} \\ y_{AG} \\ z_{AG} \end{Bmatrix} \quad (1.18)$$

e

$$\begin{bmatrix} 0 & -mz_{AG} & my_{AG} & Jxx_A & -Jxy_A & -Jxz_A \\ mz_{AG} & 0 & -mx_{AG} & -Jyx_A & Jyy_A & -Jyz_A \\ -my_{AG} & mx_{AG} & 0 & -Jzx_A & -Jzy_A & Jzz_A \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_A \\ \ddot{y}_A \\ \ddot{z}_A \\ \ddot{\theta}_{x_A} \\ \ddot{\theta}_{y_A} \\ \ddot{\theta}_{z_A} \end{Bmatrix} = \sum_i \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{Bmatrix}_{Pi} +$$

$$\sum_i \begin{bmatrix} 0 & -z_{APi} & y_{APi} \\ z_{APi} & 0 & -x_{APi} \\ -y_{APi} & x_{APi} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{Bmatrix}_{Pi} - mg \begin{bmatrix} 0 & -z_{AG} & y_{AG} \\ z_{AG} & 0 & -x_{AG} \\ -y_{AG} & x_{AG} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \text{sen } \beta_{r_2} \\ -\text{sen } \beta_{r_1} \cos \beta_{r_2} \\ \cos \beta_{r_1} \cos \beta_{r_2} \end{Bmatrix} -$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -\dot{\theta}_{z_A} & \dot{\theta}_{z_A} \\ -\dot{\theta}_{z_A} & 0 & -\dot{\theta}_{x_A} \\ -\dot{\theta}_{y_A} & \dot{\theta}_{x_A} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Jxx_A & -Jxy_A & -Jxz_A \\ -Jyx_A & Jyy_A & -Jyz_A \\ -Jzx_A & -Jzy_A & Jzz_A \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\theta}_{x_A} \\ \dot{\theta}_{y_A} \\ \dot{\theta}_{z_A} \end{Bmatrix} \quad (1.19)$$

Onde:

$\dot{x}_A, \dot{y}_A, \dot{z}_A \rightarrow$ velocidades de translação

$\ddot{x}_A, \ddot{y}_A, \ddot{z}_A \rightarrow$ acelerações de translação

$\ddot{\theta}_{x_A}, \ddot{\theta}_{y_A}, \ddot{\theta}_{z_A} \rightarrow$ acelerações de rotação

$\dot{\theta}_{x_A}, \dot{\theta}_{y_A}, \dot{\theta}_{z_A} \rightarrow$ velocidades de rotação

$x_{AG}, y_{AG}, z_{AG} \rightarrow$ coordenadas do centro de massa

$x_{APi}, y_{APi}, z_{APi} \rightarrow$ coordenadas do ponto Pi

$(f_x, f_y, f_z)_{Pi} \rightarrow$ forças no ponto Pi

$(M_x, M_y, M_z)_{Pi} \rightarrow$ momentos no ponto Pi

$(Jxx_A, Jyy_A, Jzz_A) \rightarrow$ momentos de inércia relativos ao ponto A do referencial local L

$(Jxy_A, Jyz_A, Jxz_A) \rightarrow$ produtos de inércia relativos ao ponto A do referencial local L

$g \rightarrow$ aceleração da gravidade

As equações (1.18) e (1.19) são equações não lineares relativamente às variáveis de estado

$\theta_x, \theta_y, \theta_z, x, y, z.$

Partindo destas equações, considerando o movimento de corpo rígido não constringido, segundo [3], os métodos de identificação dos parâmetros de inércia podem ser divididos em métodos estáticos e métodos dinâmicos.

Os métodos estáticos recorrem às equações de equilíbrio estático. Se as derivadas das variáveis de estado forem nulas, as equações (1.18) e (1.19) originam equações de equilíbrio estático de forças (1.20) e momentos (1.21).

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \sum_i \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{pmatrix}_{Pi} - mg \begin{pmatrix} \text{sen } \beta_{r_2} \\ -\text{sen } \beta_{r_1} \cos \beta_{r_2} \\ \cos \beta_{r_1} \cos \beta_{r_2} \end{pmatrix} \quad (1.20)$$

e

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \sum_i \begin{pmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{pmatrix}_{Pi} + \sum_i \begin{bmatrix} 0 & -z_{APi} & y_{APi} \\ z_{APi} & 0 & -x_{APi} \\ -y_{APi} & x_{APi} & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{pmatrix}_{Pi} - mg \begin{bmatrix} 0 & -z_{AG} & y_{AG} \\ z_{AG} & 0 & -x_{AG} \\ -y_{AG} & x_{AG} & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \text{sen } \beta_{r_2} \\ -\text{sen } \beta_{r_1} \cos \beta_{r_2} \\ \cos \beta_{r_1} \cos \beta_{r_2} \end{pmatrix} \quad (1.21)$$

Pelas equações (1.20) e (1.21) é possível identificar no máximo os parâmetros relativos à massa e coordenadas do centro de massa do corpo. Informação acerca do tensor de inércia não consta nestas equações.

Os métodos dinâmicos recorrem às equações de movimento generalizadas (1.18) e (1.19) ou então assume-se simplificações relativamente às velocidades de rotação e movimentos angulares, simplificando as equações (1.18) e (1.19).

Uma primeira simplificação é considerar pequenas velocidades de rotação, pelo que os termos quadráticos das velocidades angulares são desprezáveis quando comparados com os termos lineares, logo:

$$\left(\dot{\theta}_{x_A}, \dot{\theta}_{y_A}, \dot{\theta}_{z_A} \right) < 1 \rightarrow \left(\dot{\theta}_{x_A}^2, \dot{\theta}_{y_A}^2, \dot{\theta}_{z_A}^2 \right) \ll 1 \quad (1.22)$$

Uma segunda simplificação é considerar pequenos movimentos angulares ($\beta_{r_i} < 5^\circ - 6^\circ$), pelo que as funções trigonométricas dos ângulos de Bryant resultam aproximadamente em:

$$\text{sen } \beta_{r_i} \approx \beta_{r_i} \text{ e } \cos \beta_{r_i} \approx 1 \quad (1.23)$$

Considerando os movimentos angulares ainda mais pequenos, ou seja, muito pequenos ($\beta_{r_i} < 0,5^\circ - 1^\circ$), as funções trigonométricas dos ângulos de Bryant resultam aproximadamente em:

$$\text{sen } \beta_{r_i} \approx 0 \text{ e } \cos \beta_{r_i} \approx 1 \quad (1.24)$$

As simplificações referidas introduzem limitações nos ensaios que devem ser devidamente respeitadas. Estas simplificações originam a classificação dos métodos dinâmicos em três subcategorias:

- 1) Métodos sem limitação do movimento de corpo rígido, equações (1.18) e (1.19):
- 2) Métodos baseados em pequenos movimentos angulares, equações (1.25) e (1.26):

$$\begin{bmatrix} m & 0 & 0 & 0 & mz_{AG} & -my_{AG} \\ 0 & m & 0 & -mz_{AG} & 0 & mx_{AG} \\ 0 & 0 & m & my_{AG} & -mx_{AG} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_A \\ \ddot{y}_A \\ \ddot{z}_A \\ \ddot{\theta}_{x_A} \\ \ddot{\theta}_{y_A} \\ \ddot{\theta}_{z_A} \end{Bmatrix} = \sum_i \begin{Bmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{Bmatrix}_{Pi} - mg \begin{Bmatrix} \beta_{r2} \\ -\beta_{r1} \\ 1 \end{Bmatrix} -$$

$$m \begin{bmatrix} \dot{\theta}_{y_A}^2 + \dot{\theta}_{z_A}^2 & -\dot{\theta}_{x_A}\dot{\theta}_{y_A} & -\dot{\theta}_{x_A}\dot{\theta}_{z_A} \\ -\dot{\theta}_{x_A}\dot{\theta}_{y_A} & \dot{\theta}_{x_A}^2 + \dot{\theta}_{z_A}^2 & -\dot{\theta}_{y_A}\dot{\theta}_{z_A} \\ -\dot{\theta}_{x_A}\dot{\theta}_{z_A} & -\dot{\theta}_{y_A}\dot{\theta}_{z_A} & \dot{\theta}_{x_A}^2 + \dot{\theta}_{y_A}^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_{AG} \\ y_{AG} \\ z_{AG} \end{Bmatrix} \quad (1.25)$$

e

$$\begin{bmatrix} 0 & -mz_{AG} & my_{AG} & Jxx_A & -Jxy_A & -Jxz_A \\ mz_{AG} & 0 & -mx_{AG} & -Jyx_A & Jyy_A & -Jyz_A \\ -my_{AG} & mx_{AG} & 0 & -Jzx_A & -Jzy_A & Jzz_A \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_A \\ \ddot{y}_A \\ \ddot{z}_A \\ \ddot{\theta}_{x_A} \\ \ddot{\theta}_{y_A} \\ \ddot{\theta}_{z_A} \end{Bmatrix} = \sum_i \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{Bmatrix}_{Pi} +$$

$$\sum_i \begin{bmatrix} 0 & -z_{APi} & y_{APi} \\ z_{APi} & 0 & -x_{APi} \\ -y_{APi} & x_{APi} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{Bmatrix}_{Pi} - mg \begin{bmatrix} 0 & -z_{AG} & y_{AG} \\ z_{AG} & 0 & -x_{AG} \\ -y_{AG} & x_{AG} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \beta_{r2} \\ -\beta_{r1} \\ 1 \end{Bmatrix} -$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -\dot{\theta}_{z_A} & \dot{\theta}_{z_A} \\ -\dot{\theta}_{z_A} & 0 & -\dot{\theta}_{x_A} \\ -\dot{\theta}_{y_A} & \dot{\theta}_{x_A} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Jxx_A & -Jxy_A & -Jxz_A \\ -Jyx_A & Jyy_A & -Jyz_A \\ -Jzx_A & -Jzy_A & Jzz_A \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\theta}_{x_A} \\ \dot{\theta}_{y_A} \\ \dot{\theta}_{z_A} \end{Bmatrix} \quad (1.26)$$

- 3) Métodos baseados em movimentos angulares muito pequenos e velocidades angulares reduzidas, equações (1.27) e (1.28):

$$\begin{bmatrix} m & 0 & 0 & 0 & mz_{AG} & -my_{AG} \\ 0 & m & 0 & -mz_{AG} & 0 & mx_{AG} \\ 0 & 0 & m & my_{AG} & -mx_{AG} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_A \\ \ddot{y}_A \\ \ddot{z}_A \\ \ddot{\theta}_{x_A} \\ \ddot{\theta}_{y_A} \\ \ddot{\theta}_{z_A} \end{Bmatrix} = \sum_i \begin{Bmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{Bmatrix}_{Pi} - mg \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (1.27)$$

e

$$\begin{bmatrix} 0 & -mz_{AG} & my_{AG} & Jxx_A & -Jxy_A & -Jxz_A \\ mz_{AG} & 0 & -mx_{AG} & -Jyx_A & Jyy_A & -Jyz_A \\ -my_{AG} & mx_{AG} & 0 & -Jzx_A & -Jzy_A & Jzz_A \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_A \\ \ddot{y}_A \\ \ddot{z}_A \\ \ddot{\theta}_{x_A} \\ \ddot{\theta}_{y_A} \\ \ddot{\theta}_{z_A} \end{Bmatrix} = \sum_i \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{Bmatrix}_{Pi} +$$

$$\sum_i \begin{bmatrix} 0 & -z_{APi} & y_{APi} \\ z_{APi} & 0 & -x_{APi} \\ -y_{APi} & x_{APi} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{Bmatrix}_{Pi} - mg \begin{Bmatrix} z_{AG} \\ -x_{AG} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (1.28)$$

Para esta última subcategoria tem-se que esta ainda pode ser dividida em três grupos de métodos, conforme se ilustra na figura 1.3:

- 1) Métodos de Restrição de Inércia (MRI)

1. Introdução

- 2) Métodos de Identificação Direta dos Parâmetros de Inércia (MIDPI)
- 3) Métodos Modais (MM)

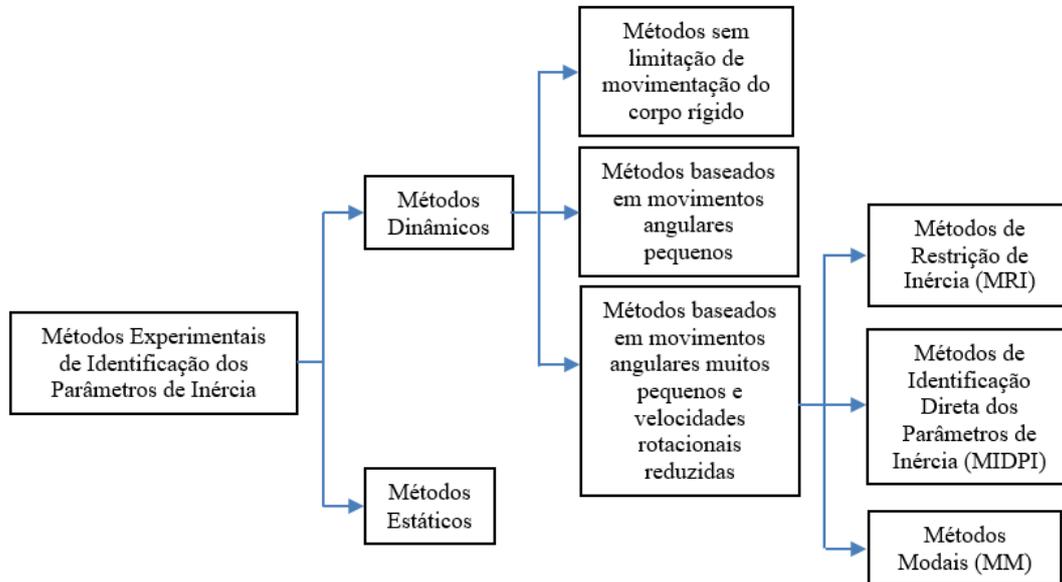


Figura 1.3- Classificação dos Métodos Experimentais de Identificação dos Parâmetros de Inércia de acordo com [3].

A resposta dinâmica de um sistema não constrangido (livre no espaço) na gama de baixas frequências é caracterizada pelo “valor da linha mássica” ou “restrição de inércia”, sendo este um valor constante. Os Métodos de Restrição de Inércia (MRI) visam a determinação deste valor, tendo por base a Função de Resposta em Frequência (FRF). Este termo corresponde à amplitude a zero Hz da FRF, como se representa na figura 1.4 onde tem-se uma FRF de Aceleração (aceleração/força) obtida experimentalmente.

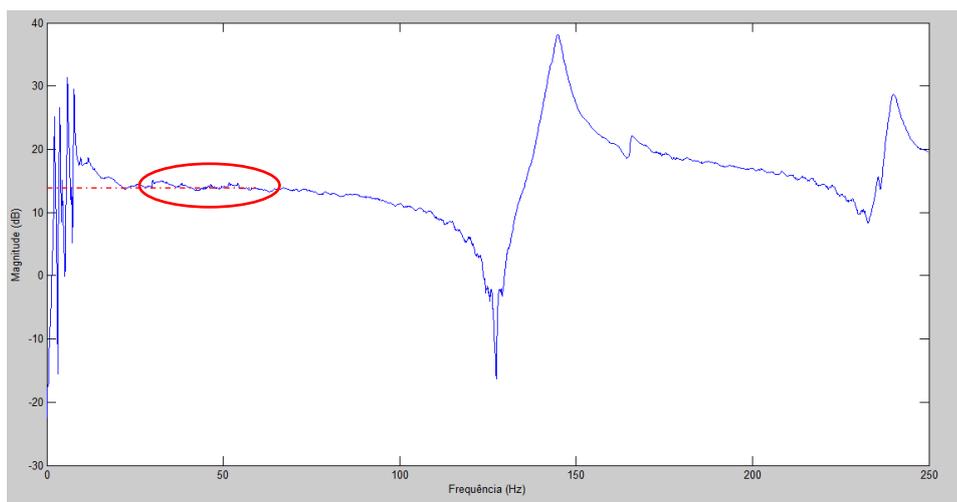


Figura 1.4- FRF, com a linha mássica assinalada a vermelho.

Experimentalmente, a determinação do valor da linha mássica tem por base estruturas suspensas em molas com elevada flexibilidade obtendo-se as FRF conforme os trabalhos de Lamontia [4], Ewins [5] e Crowley et al [6].

Na aplicação dos MRI pode-se partir do conhecimento prévio do valor de uma ou mais propriedades de corpo rígido e utilizando um processo iterativo, determinar as restantes propriedades. Por outro lado, pode-se utilizar diretamente os valores da linha mássica das FRF obtidas experimentalmente sem o conhecimento prévio de nenhum dos parâmetros de inércia.

Os trabalhos que merecem maior destaque considerando o conhecimento prévio de uma ou mais propriedades de corpo rígido são os de Okubo e Furakawa [7] e Schedlinski e Link [8].

O trabalho de Okubo e Furakawa [7] assenta no conhecimento prévio da massa do corpo e de um dos eixos principais de Inércia. Os restantes parâmetros de inércia são estimados através de sucessivas iterações, até resultar um valor da linha mássica obtido diretamente nas FRF.

O trabalho de Schedlinski e Link [8] baseia-se nas equações de movimento de corpo rígido não constrangido (1.12 e 1.13). A estrutura utilizada é a mesa vibratória (“Shaking Table”). Nesta estrutura são aplicadas forças de interface originando acelerações estruturais. Forças e acelerações devem sofrer uma transformação de coordenadas, expressando-se relativamente a um ponto de referência arbitrário, a partir do qual são obtidas as propriedades de corpo rígido. De seguida, iterativamente, procura-se a localização do centro de massa, usando a localização da iteração atual como referência para a iteração seguinte. Com o centro de massa localizado por convergência de dados, determina-se os parâmetros de inércia deste.

Utilizando diretamente os valores da linha mássica das FRF obtidas experimentalmente, destacam-se os trabalhos de Bretl e Conti [9], Urgueira [10] e Furusawa [11].

No procedimento de Bretl e Conti [9] utiliza-se diretamente o valor da linha mássica obtido das FRF expressas em Acelerância (aceleração/força). Este termo constante encontra-se entre o último modo de corpo rígido e o primeiro modo flexível. Parte-se do conhecimento prévio do valor da massa do corpo para aplicar o método.

No trabalho de Urgueira [10], o autor utiliza um método que tem como base o conhecimento das coordenadas dos N pontos de medição na estrutura, obtendo as respetivas respostas devido à ação de forças com localização e direção igualmente conhecidas. Resulta experimentalmente a obtenção das FRF extraindo-se o valor da linha mássica. Através de operações matriciais, com transformação de coordenadas, este processo permite identificar diretamente os dez parâmetros que caracterizam o comportamento do corpo rígido.

Furusawa [11] tem uma abordagem diferente para a definição de uma estrutura, podendo esta ser modelada como pontos, placas e/ou sólidos. A geometria da estrutura e as FRF obtidas experimentalmente são os dados de entrada para este método.

Os Métodos de Identificação dos Parâmetros de Inércia (MIDPI) permitem obter os parâmetros de massa, rigidez e amortecimento, utilizando diretamente as respostas medidas e/ou

forças aplicadas. Em geral, estes métodos têm em conta o comportamento elástico e amortecido do sistema mecânico. Mangus et al [12] apresentam um MIDPI partindo do ajuste das equações do movimento de corpo rígido sob suporte com comportamento acima referido, obtendo-se as Funções de Resposta em Frequência. Em [13], os mesmos autores fixam a estrutura da qual se pretende retirar as propriedades de inércia a uma mesa ligada a uma base por células de carga. O sistema base-mesa-estrutura é excitado por uma força harmónica que atua na base. Resultam daqui forças e momentos entre a mesa e a base que estão relacionados com as propriedades da estrutura que pretendem determinar. Estes dados de entrada do método são registados num algoritmo e através do método dos mínimos quadrados, estimam-se as propriedades da estrutura utilizada como corpo rígido. Identificar em simultâneo todos os dez parâmetros de massa, vinte e um de rigidez e vinte e um de amortecimento torna-se bastante complicado devido ao número de incógnitas existentes, originando sistemas de equações mal condicionados. Além disso, a identificação dos seis modos de corpo rígido levanta dificuldades para encontrar a gama de frequência de interesse. De forma a minimizar o problema relativo à identificação simultânea de todas as incógnitas, Huang et al [14,15] propõem um método onde os parâmetros de inércia, rigidez e amortecimento são identificados separadamente. Em [14] o método é para sistemas não amortecidos e em [15] o método é para sistemas amortecidos. Os MIDPI permitem utilizar diretamente as respostas obtidas da estrutura, sem a necessidade de identificação modal.

Os Métodos Modais permitem analisar os dados recolhidos experimentalmente de sistemas mecânicos suspensos por molas de reduzida rigidez e massa (deve ser aproximadamente 2% da massa da estrutura). Desses dados resultam os chamados modos de corpo rígido que estão presentes nas FRF na gama de baixas frequências, como se pode observar na figura 1.5. As FRF obtidas permitem extrair as propriedades modais (frequências naturais, constantes modais e fatores de amortecimento).

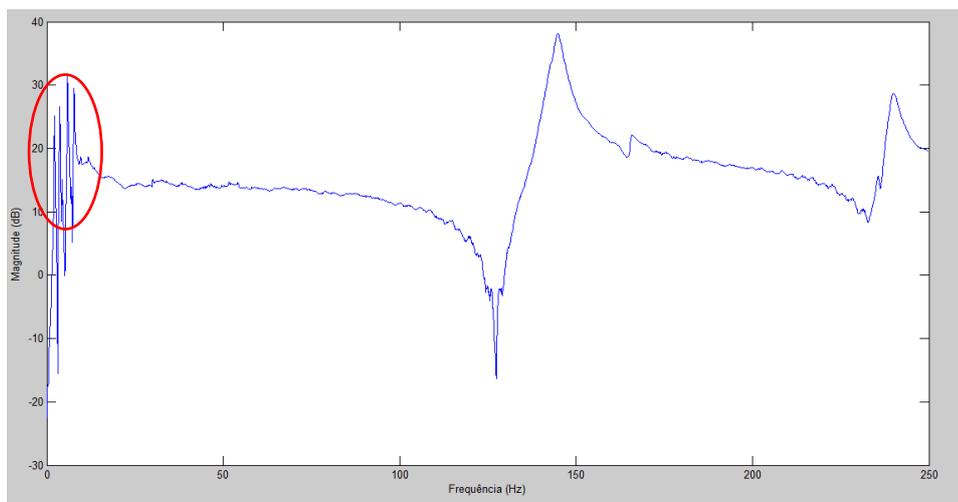


Figura 1.5- FRF, com os modos rígidos assinalados a vermelho.

O método original, Bretl e Conti [9,16] e Nakumura et al [17], permite obter a matriz de massa do sistema mecânico em estudo a partir da relação de ortogonalidade dos modos de corpo rígido relativamente à matriz de massa. Porém, é necessário que os seis modos de corpo rígido consigam ser excitados durante os ensaios experimentais e posteriormente identificados, o que nem sempre é possível. De referir que, de forma a ultrapassar a limitação de nem sempre ser possível excitar os seis modos de corpo rígido, foi proposto por Toivola e Nuutila [18] uma variante do método, onde também se tem por base a condição de ortogonalidade entre os modos. Resulta daqui a possibilidade de determinar as dez incógnitas relativas aos parâmetros de inércia com apenas quatro modos de corpo rígido identificados.

O trabalho de Zeng e Zhang [19] também estima experimentalmente os modos de corpo rígido, mas considerando uma estrutura livre no espaço e não suspensa por molas de reduzida rigidez. As propriedades do suporte (rigidez e amortecimento) e os parâmetros de inércia são obtidos inicialmente através do método dos mínimos quadrados. Posteriormente, através de uma modificação estrutural, há uma correção das propriedades modais obtidas, onde o efeito da rigidez e amortecimento do suporte é eliminado. Esta correção das propriedades modais é realizada de forma iterativa, obtendo-se assim bons parâmetros de inércia de corpo rígido.

De acordo com [20,21], a aplicação destes métodos apresenta alguns obstáculos nomeadamente quando não existe nenhum modelo teórico da estrutura ou quando foram realizadas algumas modificações nesta. Nestes casos, estabelecer um modelo teórico requer muito tempo despendido. O método também se torna menos eficiente em estruturas com elevado grau de simetria, onde não se têm produtos de inércia e perante o aparecimento de modos duplos do corpo.

Os métodos anteriormente abordados são referentes ao domínio da frequência. De acordo com [21], os métodos dinâmicos também podem ser desenvolvidos no domínio do tempo, resultando a classificação da figura 1.6.

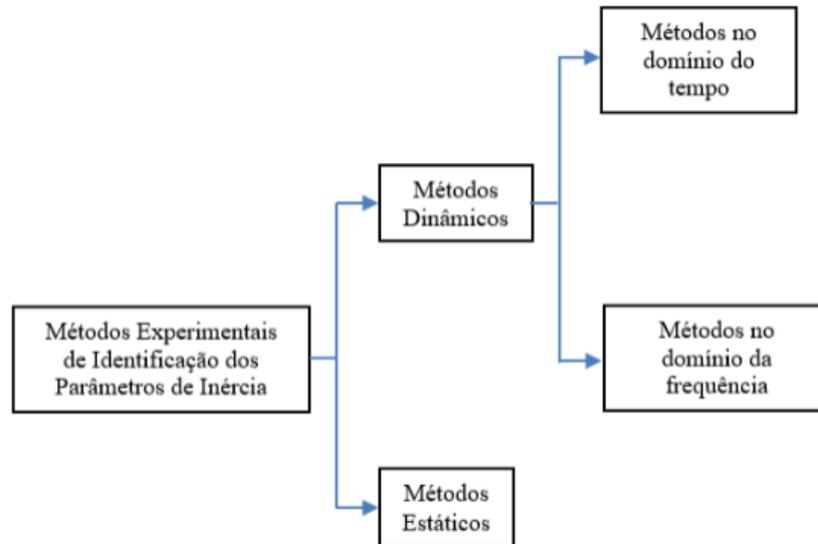


Figura 1.6- Classificação dos Métodos Experimentais de Identificação dos Parâmetros de Inércia de acordo com [21].

No domínio do tempo, segundo [21] numa primeira aproximação utilizou-se os métodos clássicos do pêndulo. Estes métodos, ainda utilizados atualmente, permitem determinar algumas propriedades de corpo rígido. Para estruturas de geometria mais complexa, a aplicação destes métodos requer perícia e podem surgir grandes erros experimentais. Além disso, a utilização do pêndulo composto requer a existência de um plano de simetria para a estrutura. No caso do pêndulo trifilar, um eixo de simetria para a estrutura oscilar segundo esse eixo. Por isso, recentemente diversos autores têm estudado métodos baseados em respostas obtidas, introduzindo variantes no grupo dos métodos no domínio do tempo. Destacam-se os trabalhos de Pandit and Hu [22] e Hahn et al [23]. Em [22] desenvolveu-se um método sistemático para calcular os parâmetros de inércia de corpo rígido através de uma seleção cuidadosa dos modos de corpo rígido obtidos de dados instantâneos no domínio do tempo. Em [23], utilizou-se dados experimentais no domínio do tempo de um sistema, uma mesa vibratória com seis eixos onde as forças de excitação são medidas em adição às acelerações do sistema. Estes métodos têm como vantagem principal o tratamento direto dos dados experimentais sem a necessidade de transformação no domínio da frequência, onde se tem problemas associados ao processamento de sinal. Como desvantagem principal, por vezes na gama de frequência escolhida, o corpo não se comporta como um corpo rígido sendo necessário aplicar um sistema de filtragem passa-baixo. Esta filtragem pode ser insuficiente para eliminar a influência dos modos elásticos se a primeira frequência elástica for muito baixa.

Os métodos do domínio da frequência podem ultrapassar a desvantagem principal dos métodos do domínio do tempo, porque é possível separar o comportamento do sistema elástico e do sistema rígido, mesmo que a primeira frequência natural elástica seja muito baixa.

1.3.3 Acelerómetros MEMS e piezoelétricos

Um acelerómetro piezoelétrico (figura 1.7) contém uma massa sísmica e um cristal de quartzo (elemento piezoelétrico). O elemento piezoelétrico que apresenta rigidez, produz uma carga após sofrer uma deformação mecânica. Estes sensores funcionam com base na 2ª lei de Newton, $F = m \times a$, pois a aceleração da base do suporte cria uma força F sobre a massa sísmica, conforme se ilustra na figura 1.7. Daqui resulta uma deformação no cristal de quartzo, surgindo assim carga elétrica (efeito piezoelétrico). Portanto, conclui-se que estes sensores combinam o uso da 2ª lei de Newton com o efeito piezoelétrico.

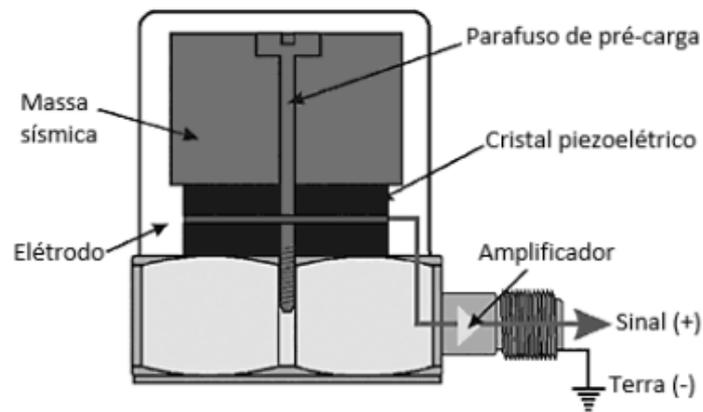


Figura 1.7- Sensor piezoelétrico (adaptado de [24]).

Estes acelerómetros são muito utilizados, pois são robustos e originam resultados estáveis. No entanto, são raros os que conseguem medir rotações diretamente e apresentam fraca sensibilidade em gamas de baixas frequências e com pequenas amplitudes de aceleração. Tal deve-se a estes produzirem uma resposta fraca, pois o cristal sofre pequenas deformações, originando cargas igualmente pequenas. A concretização destes requisitos significa um elevado preço (da ordem dos milhares de euros) a pagar pelo utilizador.

No mercado existe uma grande variedade de acelerómetros piezoelétricos, desde uniaxiais, biaxiais a triaxiais, estes últimos com leitura multiaxial e com um custo elevado.

Os sensores MEMS são dispositivos que combinam componentes elétricos e mecânicos produzidos em micro fabricação. Da combinação destes diferentes componentes resultam circuitos no interior dos sensores.

No mercado existem vários sensores MEMS utilizados para medir temperatura, aceleração, pressão, entre outros. Para este trabalho, serão utilizados os acelerómetros MEMS, tendo como objetivo medir acelerações em diferentes pontos de uma estrutura que são a base para trabalhos de análise modal. Os acelerómetros MEMS mais comuns são os do tipo capacitivo, pois apresentam boa sensibilidade e precisão a elevadas temperaturas. Este tipo de acelerómetros é

ainda pouco utilizado em trabalhos de análise modal, destacando-se os trabalhos de [25-31]. Serão utilizados dois tipos de sensores MEMS, o acelerómetro de translação e o angular (giroscópio).

O típico acelerómetro MEMS, que se ilustra na figura 1.8, é composto por uma massa de prova, com uma série de dentes planos (placas móveis), a qual é fixada a um sistema de referência por molas. Estas placas em conjunto com placas fixas exteriores formam condensadores, sendo que o movimento da massa de prova é medido através da variação da capacidade. Desprezando o efeito das bordas das placas, a capacidade de duas placas paralelas é dada por:

$$c = E \times \frac{A}{d} \quad (1.29)$$

Onde:

$A \rightarrow$ área das placas (m^2)

$d \rightarrow$ distância entre placas (m)

$E \rightarrow$ permissividade do material, ar (F/m)

A capacidade entre as placas móveis (interiores) e as placas fixas (exteriores) é dada em função dos respetivos deslocamentos $X1$ e $X2$, representados na figura 1.8. Quando a aceleração sentida é nula, $X1 = 0$ e $X2 = 0$, não havendo por isso variação das distâncias, sendo as capacidades $C1$ e $C2$ iguais. Havendo aceleração, esta origina o movimento da massa de prova. É então medida uma variação da capacidade aproximadamente proporcional ao movimento da massa. Para medir duas ou três acelerações, faz-se variar a direção desta estrutura em 90° .

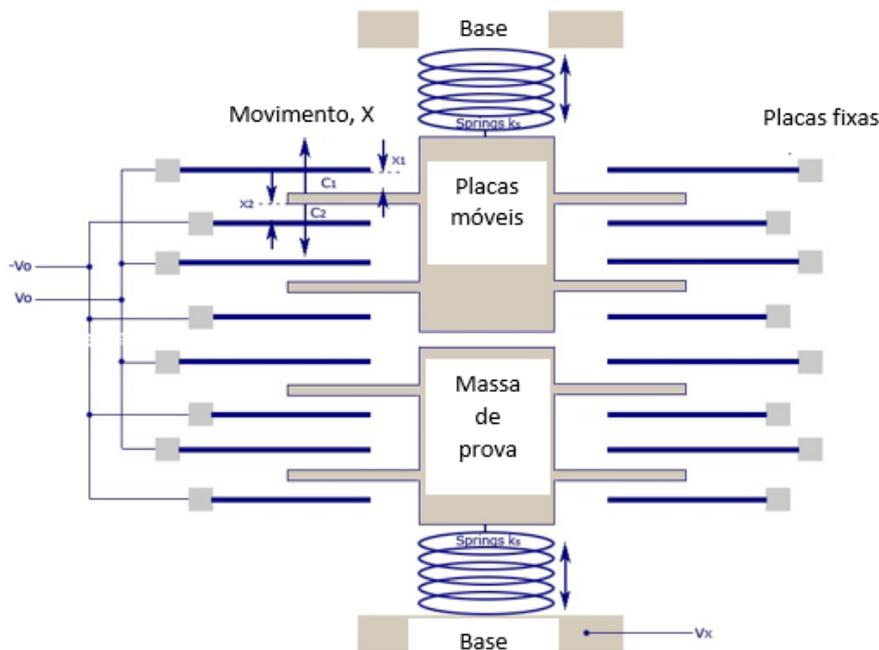


Figura 1.8-Típico acelerómetro MEMS do tipo capacitivo (adaptado de [32]).

O acelerómetro angular (giroscópio) é capaz de medir a velocidade angular de um corpo, sendo igualmente capacitivo. O acelerómetro giroscópio mais utilizado é do tipo diapasão, ilustrado na figura 1.9. O seu funcionamento consiste em dois dentes ligados a uma barra de

junção, os quais se tocam a uma certa amplitude. Quando os dentes se deslocam, uma força de Coriolis provoca uma força perpendicular a estes. Esta força é então detetada através da flexão do diapasão. Estas forças são proporcionais à velocidade angular a que são submetidos, de onde os deslocamentos podem ser obtidos através da diferença de capacidade. A força pode ser detetada por mecanismos electrostáticos, eletromagnéticos ou piezoelétricos.

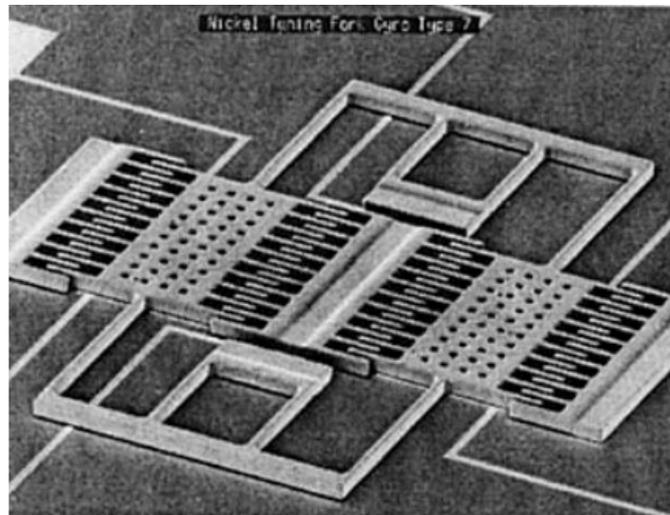


Figura 1.9- Representação de um acelerómetro MEMS giroscópio do tipo diapasão [33].

De seguida apresenta-se na tabela 1.1 uma comparação entre os acelerómetros piezoelétricos e os acelerómetros MEMS com vantagens e desvantagens associadas a cada um.

Tabela 1.1- Comparativo entre o acelerómetro piezoelétrico e o MEMS.

Acelerómetro	Vantagens	Desvantagens
Piezoelétrico	<ul style="list-style-type: none"> - Extensa gama de temperatura de funcionamento; - Boa resistência a condições atmosféricas (pressão, humidade); - Robustez e resultados estáveis; 	<ul style="list-style-type: none"> - Custo elevado; - Fraca sensibilidade a baixas frequências e pequenas amplitudes de aceleração; - Permitem medição direta de rotações a custo elevado e menos versátil;
MEMS	<ul style="list-style-type: none"> - Baixo custo; - Boa sensibilidade a baixas frequências e pequenas amplitudes de aceleração; - Tamanho reduzido e massa reduzida; - Medição direta de rotações triaxiais com os sensores MEMS giroscópios; 	<ul style="list-style-type: none"> - Fraca sensibilidade para frequências superiores a 400 Hz; - Sensíveis a condições de humidade e pressão;

2. Métodos Modais

Este capítulo inicia-se com a apresentação do Método Modal original, com todo o processo de cálculo, partindo dos modos de corpo rígido obtidos experimentalmente até aos parâmetros de inércia desejados. De notar que se inclui igualmente todo o processo de obtenção dos modos de corpo rígido. É também apresentado o método modificado para implementação da medição direta de rotações e detalhado o posterior estudo numérico realizado com este método. Aqui é descrito o algoritmo Matlab necessário à realização deste estudo, são descritas as propriedades do corpo rígido e são caracterizadas as suspensões utilizadas. Além disso, apresenta-se os pressupostos associados à aplicação das forças na estrutura e à localização dos diferentes pontos de medição de resposta da estrutura. Os resultados do estudo numérico são apresentados, bem como todas as conclusões a retirar destes.

2.1 Método Original

O Método Modal original [9,16,17] permite a determinação experimental dos parâmetros de inércia anteriormente referidos com resultados credíveis. Tem-se também que este método é de fácil implementação e utilização.

Considera-se que a estrutura analisada pelos Métodos Modais tem seis graus de liberdade e que existe um sistema de coordenadas físico como referência, designado por sistema de coordenadas centrado na origem. Aplicando o método original tem-se a ortogonalidade entre a matriz de massa normalizada relativamente à origem $[M_0]$ e a matriz normalizada dos modos de corpo rígido em relação à origem $[\Phi_0]$ expressa por:

$$[\Phi_0]^T [M_0] [\Phi_0] = [I] \quad (2.1)$$

Tendo em conta os modos de corpo rígido construídos com a informação das constantes modais associadas a cada FRF de cada ponto e direção de medição, pode-se construir uma matriz modal com dimensão $3N \times 6$ (matriz $[\Phi]$) onde N é o número de pontos de medição triaxiais utilizados para obter os seis modos de corpo rígido. A partir desta matriz obtém-se a matriz $[\Phi_0]$.

Ou seja:

$$\begin{bmatrix} \begin{matrix} \left\{ \begin{matrix} \Phi_x \\ \Phi_y \\ \Phi_z \end{matrix} \right\}_1 \\ \left\{ \begin{matrix} \Phi_x \\ \Phi_y \\ \Phi_z \end{matrix} \right\}_2 \\ \vdots \\ \left\{ \begin{matrix} \Phi_x \\ \Phi_y \\ \Phi_z \end{matrix} \right\}_N \end{matrix} & \begin{matrix} \left\{ \begin{matrix} \Phi_x \\ \Phi_y \\ \Phi_z \end{matrix} \right\}_1 \\ \left\{ \begin{matrix} \Phi_x \\ \Phi_y \\ \Phi_z \end{matrix} \right\}_2 \\ \vdots \\ \left\{ \begin{matrix} \Phi_x \\ \Phi_y \\ \Phi_z \end{matrix} \right\}_N \end{matrix} & \dots & \begin{matrix} \left\{ \begin{matrix} \Phi_x \\ \Phi_y \\ \Phi_z \end{matrix} \right\}_1 \\ \left\{ \begin{matrix} \Phi_x \\ \Phi_y \\ \Phi_z \end{matrix} \right\}_2 \\ \vdots \\ \left\{ \begin{matrix} \Phi_x \\ \Phi_y \\ \Phi_z \end{matrix} \right\}_N \end{matrix} \end{bmatrix}_{(3N \times 6)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & z_1 & -y_1 \\ 0 & 1 & 0 & -z_1 & 0 & x_1 \\ 0 & 0 & 1 & y_1 & -x_1 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & z_2 & -y_2 \\ 0 & 1 & 0 & -z_2 & 0 & x_2 \\ 0 & 0 & 1 & y_2 & -x_2 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & z_N & -y_N \\ 0 & 1 & 0 & -z_N & 0 & x_N \\ 0 & 0 & 1 & y_N & -x_N & 0 \end{bmatrix}_{(3N \times 6)} \begin{bmatrix} \left\{ \begin{matrix} \Phi_{0x} \\ \Phi_{0y} \\ \Phi_{0z} \end{matrix} \right\} \\ \dots \\ \left\{ \begin{matrix} \Phi_{0x} \\ \Phi_{0y} \\ \Phi_{0z} \end{matrix} \right\} \end{bmatrix}_{(6 \times 6)}$$

A relação matricial acima ilustrada é dada pela equação (2.2).

$$[\emptyset] = [R_0][\emptyset_0] \quad (2.2)$$

Sendo $[R_0]$ a matriz de transformação de coordenadas dos N pontos de medição triaxiais para a origem com dimensão $3N \times 6$.

A matriz $[\emptyset_0]$ de dimensão 6×6 pretendida é então dada por:

$$[\emptyset_0] = ([R_0]^T [R_0])^{-1} [R_0]^T [\emptyset] \quad (2.3)$$

A matriz $[\emptyset_0]$ é invertível se os modos de corpo rígido forem vetores linearmente independentes. As primeiras três linhas desta matriz dizem respeito ao movimento de translação do corpo e as últimas três linhas ao movimento de rotação do corpo.

Considerando a necessidade de garantir bons resultados experimentais, inclui-se na equação (2.3) a matriz de ponderação $[W_r]$. Esta matriz permite excluir dados experimentais pouco coerentes. Para tal, sempre que um modo de corpo rígido medido em função de uma dada localização e direção for inconsistente com o movimento de corpo rígido em outras localizações, coloca-se “0” no correspondente elemento da diagonal da matriz $[W_r]$. Para resultados experimentais de modos de corpo rígido aceitáveis, coloca-se “1” no correspondente elemento da diagonal da matriz $[W_r]$. Resulta então que:

$$[\emptyset_0] = ([R_0]^T [W_r] [R_0])^{-1} ([R_0]^T [W_r]) [\emptyset] \quad (2.4)$$

Numericamente conclui-se que $[\emptyset_0]$ pode ser obtido a partir de $[R_0]$ contendo apenas dados de dois pontos de medição triaxiais. Contudo, Lee et al [34] comprovaram que no mínimo são necessários três pontos de medição triaxiais para determinar $([R_0]^T \times [R_0])^{-1}$. Os mesmos autores também concluíram que os melhores resultados experimentais são obtidos a partir de medições em três pontos formando um triângulo regular.

Após se determinar $[\emptyset_0]$, a partir da equação (2.1) pode-se obter a matriz de massa $[M_0]$,

$$[M_0] = [\emptyset_0]^{-T} [\emptyset_0]^{-1} \quad (2.5)$$

Esta matriz é dada por:

$$[M_0] = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 & 0 & mz_{cm} & -my_{cm} \\ 0 & m & 0 & -mz_{cm} & 0 & mx_{cm} \\ 0 & 0 & m & my_{cm} & -mx_{cm} & 0 \\ 0 & -mz_{cm} & my_{cm} & J_{xx0} & -J_{xy0} & -J_{xz0} \\ mz_{cm} & 0 & -mx_{cm} & -J_{yx0} & J_{yy0} & -J_{yz0} \\ -my_{cm} & mx_{cm} & 0 & -J_{zx0} & -J_{zy0} & J_{zz0} \end{bmatrix}_{(6 \times 6)}$$

Utilizando a matriz de transformação de coordenadas $[R_g]$ dada por:

$$[R_g] = \begin{bmatrix} 0 & -z_{cm} & y_{cm} \\ z_{cm} & 0 & -x_{cm} \\ -y_{cm} & x_{cm} & 0 \end{bmatrix}_{(3 \times 3)}$$

Tem-se a matriz de massa relativamente ao centro de massa, $[M_g]$.

$$[M_g] = \begin{bmatrix} I & R_g \\ 0 & I \end{bmatrix}_{(6 \times 6)}^T [M_0]_{(6 \times 6)} \begin{bmatrix} I & R_g \\ 0 & I \end{bmatrix}_{(6 \times 6)} \quad (2.6)$$

A matriz de massa $[M_0]$ de dimensão 6×6 conforme acima demonstrado pode ser dividida em quatro matrizes 3×3 .

$$[M_0] = \begin{bmatrix} M_{AA} & M_{AB} \\ M_{BA} & M_{BB} \end{bmatrix}_{(6 \times 6)}$$

Onde $[M_{BB}]$ é o tensor de inércia e x_{cm}, y_{cm}, z_{cm} são as coordenadas do centro de massa relativamente à origem definida, sendo m a massa do corpo. De notar que a massa pode ser obtida através de uma média aritmética de três valores devido aos erros inerentes ao processo experimental.

Então, reformulando a equação (2.6), tem-se que:

$$[M_g] = \begin{bmatrix} I & R_g \\ 0 & I \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} M_{AA} & M_{AB} \\ M_{BA} & M_{BB} \end{bmatrix}_{(6 \times 6)} \begin{bmatrix} I & R_g \\ 0 & I \end{bmatrix}_{(6 \times 6)} \quad (2.7)$$

Onde,

$$[M_g] = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J_{xxg} & -J_{xyg} & -J_{xzg} \\ 0 & 0 & 0 & -J_{yxg} & J_{yyg} & -J_{yzg} \\ 0 & 0 & 0 & -J_{zxx} & -J_{zyg} & J_{zzg} \end{bmatrix}_{(6 \times 6)}$$

De seguida faz-se a seguinte operação de matrizes com dimensão 3×3 :

$$[M_{AA}][R_g] + [M_{AB}] = 0 \quad (2.8)$$

Daqui resultam nove equações. Como os três elementos da diagonal de $[M_{AA}][R_g]$ e $[M_{AB}]$ são nulos, então cada termo do primeiro membro da equação (2.8) é teoricamente nulo. Desprezando os termos nulos da diagonal, sobram então seis equações com três incógnitas:

$$\begin{bmatrix} 0 & m_{23} & -m_{22} \\ 0 & m_{33} & -m_{32} \\ -m_{13} & 0 & m_{11} \\ -m_{33} & 0 & m_{31} \\ m_{12} & -m_{11} & 0 \\ m_{22} & -m_{21} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_{cm} \\ y_{cm} \\ z_{cm} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} m_{24} \\ m_{34} \\ m_{15} \\ m_{35} \\ m_{16} \\ m_{26} \end{Bmatrix} \quad (2.9)$$

Através do método dos mínimos quadrados obtém-se a seguinte estimativa para as coordenadas do centro de massa:

$$x_{cm} = \frac{1}{2m}(m_{26} - m_{35}) \quad (2.10)$$

$$y_{cm} = \frac{1}{2m}(m_{34} - m_{16}) \quad (2.11)$$

$$z_{cm} = \frac{1}{2m}(m_{15} - m_{24}) \quad (2.12)$$

Onde m_{ij} corresponde aos elementos de linha i e coluna j da matriz $[M_0]$. Assim consegue-se estimar todos os parâmetros de inércia de corpo rígido, pois o tensor de inércia pretendido é relativo ao centro de massa, ou seja, obtém-se diretamente de $[M_g]$.

2.1.1 Obtenção dos modos de corpo rígido

Partindo da equação do movimento na forma matricial dada por:

$$[M]\{\ddot{x}(t)\} + [K]\{x(t)\} = \{f(t)\} \quad (2.13)$$

Para os Métodos Modais e desprezando o amortecimento, de acordo com [35] tem-se que:

$$([K] - \omega^2[M])\{x\} = \{F\} \quad (2.14)$$

$$\leftrightarrow \{x\} = ([K] - \omega^2[M])^{-1}\{F\} \quad (2.15)$$

$$\{x\} = [\alpha(\omega)]\{f\} \quad (2.16)$$

Onde $[\alpha(\omega)]$ é a matriz de receptância de dimensão $N \times N$ do sistema, constituindo a sua resposta modal. Um elemento desta matriz $\alpha_{jk}(\omega)$ é definido por:

$$\alpha_{jk}(\omega) = \frac{X_j}{F_k} \quad (2.17)$$

Sendo X_j o deslocamento resultante da força F_k aplicada. A partir da equação (2.18) é então possível obter um valor da matriz de receptância para uma dada frequência ω de interesse.

$$[\alpha(\omega)] = ([K] - \omega^2[M])^{-1} \quad (2.18)$$

Invertendo a matriz de receptância, obtém-se a matriz de rigidez dinâmica $[Z]$,

$$([K] - \omega^2[M]) = [\alpha(\omega)]^{-1} = [Z] \quad (2.19)$$

Prémultiplicando ambos os lados da equação (2.19) por $[\Phi]^T$ e de seguida multiplicando igualmente ambos os lados por $[\Phi]$ obtém-se:

$$[\Phi]^T([K] - \omega^2[M])[\Phi] = [\Phi]^T[\alpha(\omega)]^{-1}[\Phi] \quad (2.20)$$

$$\leftrightarrow [\Omega_0^2 - \omega^2] = [\Phi]^T[\alpha(\omega)]^{-1}[\Phi] \quad (2.21)$$

$$[\alpha(\omega)] = [\Phi][\Omega_0^2 - \omega^2]^{-1}[\Phi]^T \quad (2.22)$$

Onde Ω_0 é uma frequência natural e ω é a frequência.

Sendo a matriz de receptância $[\alpha(\omega)]$ simétrica, então o principio da reciprocidade é aplicável:

$$\alpha_{jk}(\omega) = \frac{X_j}{F_k} = \alpha_{kj}(\omega) = \frac{X_k}{F_j} \quad (2.23)$$

Cada elemento desta matriz $[\alpha_{jk}(\omega)]$ é então dado por:

$$\alpha_{jk}(\omega) = \sum_{r=1}^N \frac{((\Phi_j)(\Phi_k))_r}{\Omega_0^2 - \omega^2} \quad (2.24)$$

$$\leftrightarrow \alpha_{jk}(\omega) = \sum_{r=1}^N \frac{(A_{jk})_r}{\Omega_0^2 - \omega^2} \quad (2.25)$$

Logo tem-se que a constante modal A_{jk} é expressa da seguinte maneira:

$$A_{jk} = (\Phi_j)(\Phi_k) \quad (2.26)$$

Para uma FRF direta (medição efetuada no mesmo ponto e direção da força aplicada) tem-se que:

$$A_{11} = (\Phi_1)(\Phi_1) \leftrightarrow \Phi_1 = \sqrt{A_{11}}$$

Após determinar ϕ_1 , para A_{12} e A_{13} tem-se respectivamente que:

$$A_{12} = (\phi_1)(\phi_2) \leftrightarrow \phi_2 = \frac{A_{12}}{\phi_1}$$

$$A_{13} = (\phi_1)(\phi_3) \leftrightarrow \phi_3 = \frac{A_{13}}{\phi_1}$$

Onde ϕ_1 , ϕ_2 e ϕ_3 são componentes de modos de corpo rígido normalizados.

São escolhidos os componentes do modo de corpo rígido normalizado mais excitados para uma força aplicada. Com a finalidade de determinar os modos mais excitados, Almeida [36] desenvolveu um indicador capaz não só de estimar os modos de corpo rígido mais excitados para uma dada condição de excitação, bem como os seus níveis de excitação. Este Indicador Norma (IN) é dado por:

$$IN(\omega) = 20 \log\left(\sqrt{\sum_{i=1}^n (Re(\alpha_i(\omega)))^2 + (Im(\alpha_i(\omega)))^2}\right) \quad (2.27)$$

Onde n é o número de FRF, Re e Im são as partes reais e imaginárias das n FRF relacionadas com cada direção medida em função da força de excitação.

Os modos de corpo rígido não normalizados $\{\Psi\}$ sofrem um processo de normalização de acordo com [37]. A relação de ortogonalidade da equação (2.1) é obtida através da seguinte equação:

$$\{\Psi_r\}^T \times [M] \times \{\Psi_r\} = [m_\kappa] \quad (2.28)$$

Onde, $[m_\kappa]$ é a matriz de massas modal de dimensão 6×6 com todos os termos nulos exceto a diagonal. Para os modos normalizados em relação à matriz de massa, considera-se que esses termos da diagonal são iguais a um, ou seja, $[m_\kappa] = [I]$, conforme a equação (2.1). Os modos não normalizados $\{\Psi_r\}$ podem então ser normalizados $[\phi_r]$ relativamente à matriz de massa através de um fator Y_r . Ou seja:

$$[\phi_r] = Y_r \times \{\Psi_r\} \quad (2.29)$$

O fator de normalização é dado por:

$$Y_r = \frac{1}{\sqrt{[m_\kappa]}} \quad (2.30)$$

2.2 Método modificado para implementação da medição direta de rotações

Utilizando os sensores MEMS giroscópios tem-se a medição direta de rotações triaxiais. Como a rotação é igual em todo o corpo rígido numa dada direção, apenas se consideram três rotações, uma para cada direção. Sendo assim, a matriz de modos normalizados obtidos experimentalmente $[\phi]$ inclui agora para cada modo de vibração mais três termos correspondentes às rotações (assinalados a azul em $[\phi]$) que se juntam assim aos N pontos de medição de translações triaxiais.

$$[\emptyset] = \begin{bmatrix} \left\{ \begin{matrix} \emptyset_x \\ \emptyset_y \\ \emptyset_z \end{matrix} \right\}_1 & \left\{ \begin{matrix} \emptyset_x \\ \emptyset_y \\ \emptyset_z \end{matrix} \right\}_1 & \left\{ \begin{matrix} \emptyset_x \\ \emptyset_y \\ \emptyset_z \end{matrix} \right\}_1 & \left\{ \begin{matrix} \emptyset_x \\ \emptyset_y \\ \emptyset_z \end{matrix} \right\}_1 & \left\{ \begin{matrix} \emptyset_x \\ \emptyset_y \\ \emptyset_z \end{matrix} \right\}_1 & \left\{ \begin{matrix} \emptyset_x \\ \emptyset_y \\ \emptyset_z \end{matrix} \right\}_1 \\ \left\{ \begin{matrix} \emptyset_x \\ \emptyset_y \\ \emptyset_z \end{matrix} \right\}_2 & \left\{ \begin{matrix} \emptyset_x \\ \emptyset_y \\ \emptyset_z \end{matrix} \right\}_2 & \left\{ \begin{matrix} \emptyset_x \\ \emptyset_y \\ \emptyset_z \end{matrix} \right\}_2 & \left\{ \begin{matrix} \emptyset_x \\ \emptyset_y \\ \emptyset_z \end{matrix} \right\}_2 & \left\{ \begin{matrix} \emptyset_x \\ \emptyset_y \\ \emptyset_z \end{matrix} \right\}_2 & \left\{ \begin{matrix} \emptyset_x \\ \emptyset_y \\ \emptyset_z \end{matrix} \right\}_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \left\{ \begin{matrix} \emptyset_x \\ \emptyset_y \\ \emptyset_z \end{matrix} \right\}_N & \left\{ \begin{matrix} \emptyset_x \\ \emptyset_y \\ \emptyset_z \end{matrix} \right\}_N & \left\{ \begin{matrix} \emptyset_x \\ \emptyset_y \\ \emptyset_z \end{matrix} \right\}_N & \left\{ \begin{matrix} \emptyset_x \\ \emptyset_y \\ \emptyset_z \end{matrix} \right\}_N & \left\{ \begin{matrix} \emptyset_x \\ \emptyset_y \\ \emptyset_z \end{matrix} \right\}_N & \left\{ \begin{matrix} \emptyset_x \\ \emptyset_y \\ \emptyset_z \end{matrix} \right\}_N \\ \left\{ \begin{matrix} \emptyset_{\theta x} \\ \emptyset_{\theta y} \\ \emptyset_{\theta z} \end{matrix} \right\} & \left\{ \begin{matrix} \emptyset_{\theta x} \\ \emptyset_{\theta y} \\ \emptyset_{\theta z} \end{matrix} \right\} & \left\{ \begin{matrix} \emptyset_{\theta x} \\ \emptyset_{\theta y} \\ \emptyset_{\theta z} \end{matrix} \right\} & \left\{ \begin{matrix} \emptyset_{\theta x} \\ \emptyset_{\theta y} \\ \emptyset_{\theta z} \end{matrix} \right\} & \left\{ \begin{matrix} \emptyset_{\theta x} \\ \emptyset_{\theta y} \\ \emptyset_{\theta z} \end{matrix} \right\} & \left\{ \begin{matrix} \emptyset_{\theta x} \\ \emptyset_{\theta y} \\ \emptyset_{\theta z} \end{matrix} \right\} \end{bmatrix}_{((3N+3) \times 6)}$$

Neste trabalho, um dos objetivos é perceber se o método é fiável mesmo usando só um acelerómetro triaxial ($N = 1$) mais o conhecimento das rotações.

A matriz de transformação de coordenadas é agora denominada $[R_{0_MEMS}]$ e já inclui a informação das medições de rotação garantidas através dos sensores MEMS giroscópios (assinalada a azul em $[R_{0_MEMS}]$). Como a rotação é igual em todos os pontos num corpo rígido para uma dada direção, conforme referido acima, então os termos de rotação da matriz $[\emptyset]$ são os mesmos da matriz $[\emptyset_0]$. Como tal, nos termos de rotação, a matriz de transformação de coordenadas assume o formato da matriz identidade $[I]$ com os restantes termos nulos, devido ao contributo das translações para as rotações ser desprezado.

$$[R_{0_MEMS}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & z_1 & -y_1 \\ 0 & 1 & 0 & -z_1 & 0 & x_1 \\ 0 & 0 & 1 & y_1 & -x_1 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & z_2 & -y_2 \\ 0 & 1 & 0 & -z_2 & 0 & x_2 \\ 0 & 0 & 1 & y_2 & -x_2 & 0 \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & z_N & -y_N \\ 0 & 1 & 0 & -z_N & 0 & x_N \\ 0 & 0 & 1 & y_N & -x_N & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{((3N+3) \times 6)}$$

De acordo com o descrito para o método original, a matriz de massa normalizada \emptyset_0 :

$$[\emptyset_0] = \left[\begin{array}{c} \left\{ \begin{matrix} \emptyset_{0x} \\ \emptyset_{0y} \\ \emptyset_{0z} \end{matrix} \right\} \\ \dots \\ \left\{ \begin{matrix} \emptyset_{0\theta x} \\ \emptyset_{0\theta y} \\ \emptyset_{0\theta z} \end{matrix} \right\} \end{array} \right]_{(6 \times 6)}$$

Como $[\Phi_0]$ resultante é igual ao método original, todo o restante método modificado segue os mesmos passos do método original com a finalidade de obter a matriz $[M_0]$ e retirar os parâmetros de inércia de corpo rígido.

2.3 Estudo numérico com Método Modal modificado

O estudo numérico é aplicado em Métodos Modais seguindo a metodologia direta. Para aplicar esta metodologia, parte-se do conhecimento prévio dos parâmetros de inércia de corpo rígido e tem-se como objetivo obter as respostas dinâmicas da estrutura, expressas nas FRF. O estudo numérico que recorre a um algoritmo Matlab tem a finalidade de prever os resultados experimentais para uma estrutura que inclui um corpo rígido suspenso por molas de rigidez reduzida.

2.3.1 Esquema do algoritmo Matlab proposto

Este algoritmo inicialmente faz a leitura dos parâmetros de inércia e rigidez do corpo rígido provenientes do ficheiro Excel. Estes dados permitem preencher as matrizes de massa $[M_g]$ e rigidez $[K_g]$. Além destas matrizes, com estes dados todas as matrizes de transformação de coordenadas ficam definidas. $[R_{g_MEMS}]$ transforma os dados do centro de massa para a origem, $[R_{0_MEMS}]$ transforma os dados do referencial de origem para o referencial local que inclui os diferentes pontos de medição da resposta da estrutura e $[F_j]$ expressa as coordenadas do ponto de aplicação da força. Da resolução da equação (2.19), em relação ao centro de massa, resultam as frequências naturais (f_{n1} a f_{n6}) e os modos de corpo rígido (Φ_1 a Φ_6). Com as frequências naturais conhecidas define-se uma gama de frequência de interesse para as FRF obtidas. Definindo um vetor $\{f_j\}$ em que se tem uma força aplicada com intensidade unitária numa dada direção e sentido e multiplicando esse vetor por $[F_j]$ tem-se o vetor $\{F_0\}$ que caracteriza totalmente o conjunto de forças e momentos aplicados na origem. Invertendo a equação (2.19) obtém-se a matriz de Receptância igualmente relativamente ao centro de massa $[\alpha_g(\omega)]$. Multiplicando esta por $[R_{g_MEMS}]$ tem-se a matriz de Receptância segundo a origem $[\alpha_0(\omega)]$. De seguida realizando operações matriciais com $\{F_0\}$ e $[R_{0_MEMS}]$ tem-se a Receptância segundo o referencial local, onde o input da força aplicada num ponto j origina como output as FRF de Receptância para os seis pontos de resposta. Este processo realiza-se para N pontos. Este algoritmo Matlab encontra-se esquematizado na figura 2.1.

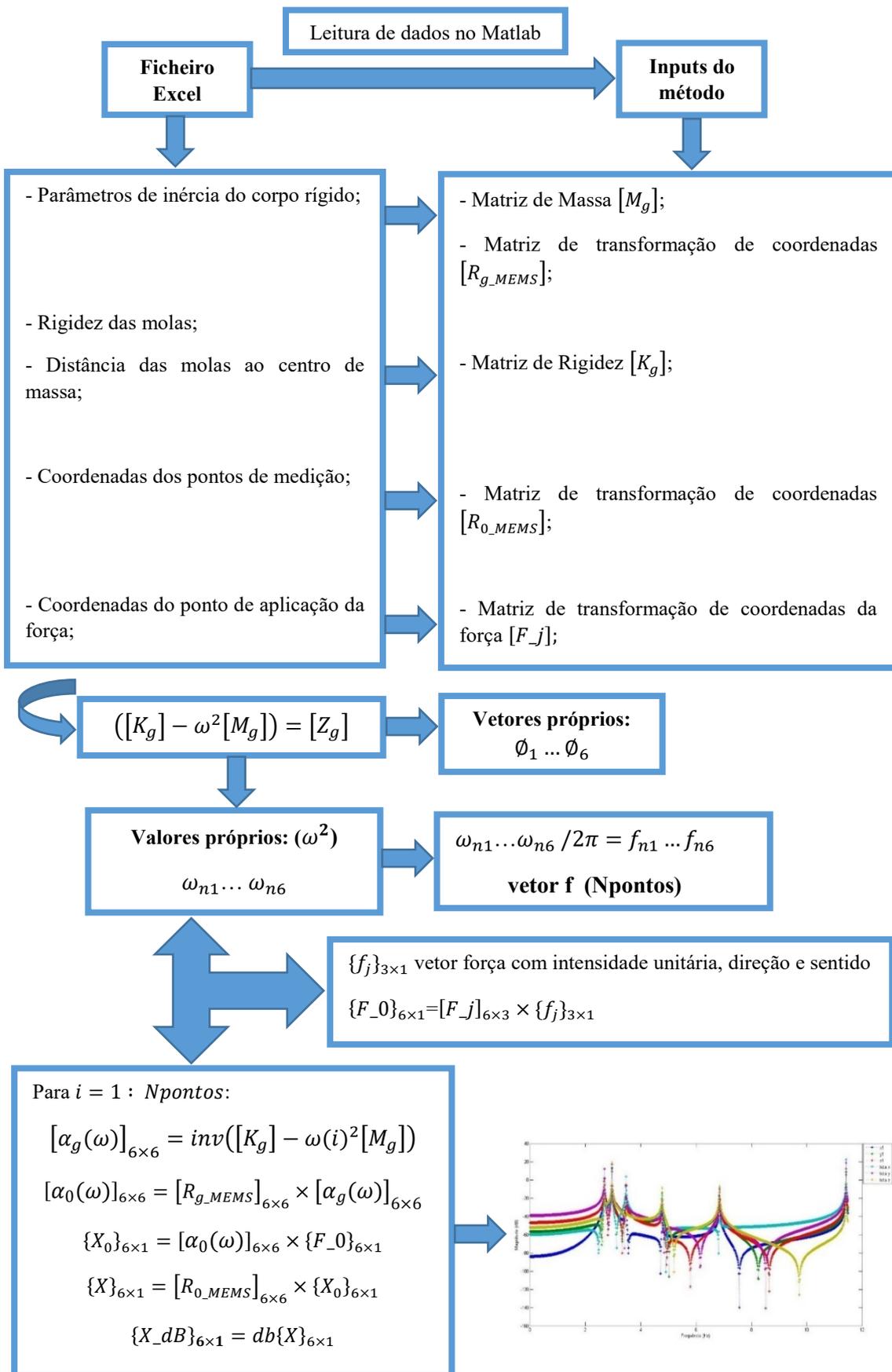


Figura 2.1- Esquema do algoritmo Matlab proposto para o estudo numérico.

2.3.2 Caracterização do corpo rígido em estudo

De acordo com [21], estruturas que apresentam um elevado grau de assimetria originam melhores resultados dos dez parâmetros de inércia aplicando os Métodos Modais do que estruturas com planos ou eixos de simetria. Estruturas com planos ou eixos de simetria podem conduzir à obtenção de maiores erros, porque nestas estruturas, os produtos de inércia são nulos relativamente a esses eixos. De forma a garantir que este pressuposto é cumprido, foi utilizado para este estudo um corpo com a geometria apresentada na figura 2.3 com o referencial assinalado. O corpo em estudo é constituído por três perfis de aço corrente de 250 mm, 350 mm e 400 mm com a secção transversal apresentada na figura 2.2.

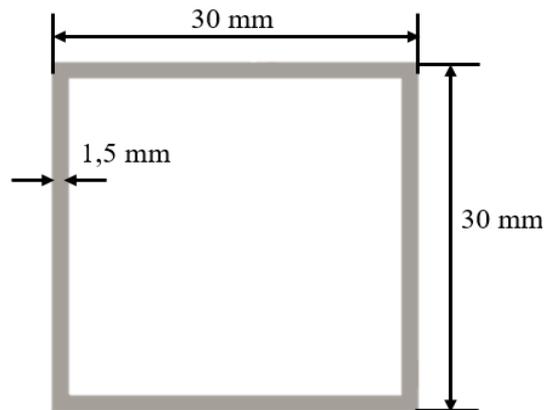


Figura 2.2- Secção transversal dos perfis do corpo rígido em estudo.

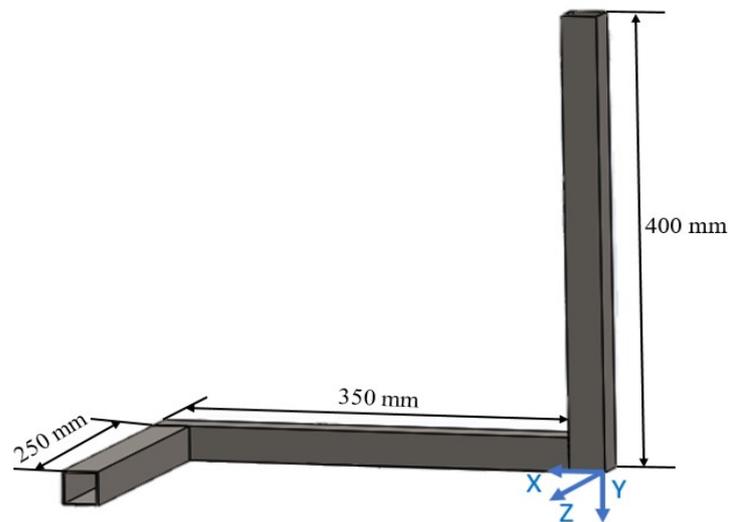


Figura 2.3- Geometria do corpo rígido em estudo.

Conforme é visível nas figuras 2.2 e 2.3, o corpo rígido em estudo foi modelado no Solidworks com o referencial assinalado. Tendo por base os perfis de aço corrente que permitem escolher um valor de referência para a massa específica do corpo ($\rho = 7850 \text{ kg/m}^3$), escolheu-

se um aço corrente como material dos perfis, resultando as seguintes propriedades do corpo rígido que servem de referência para a construção da matriz de massa $[M_g]$:

$$\left\{ \begin{array}{l} m = 1,34371801 \text{ kg} \\ \rho = 7850 \text{ kg/m}^3 \\ x_{cm} = 0,169 \text{ m} \\ y_{cm} = -0,089 \text{ m} \\ z_{cm} = 0,020 \text{ m} \\ J_{gxx} = 0,02513785 \text{ kg.m}^2 \\ J_{gyy} = 0,03800579 \text{ kg.m}^2 \\ J_{gzz} = 0,04949443 \text{ kg.m}^2 \\ J_{gxy} = 0,01531301 \text{ kg.m}^2 \\ J_{gxz} = 0,00348023 \text{ kg.m}^2 \\ J_{gyz} = 0,00921791 \text{ kg.m}^2 \end{array} \right.$$

Para o corpo rígido em estudo definiu-se quatro pontos de referência onde serão colocados os acelerómetros e/ou aplicadas as forças.

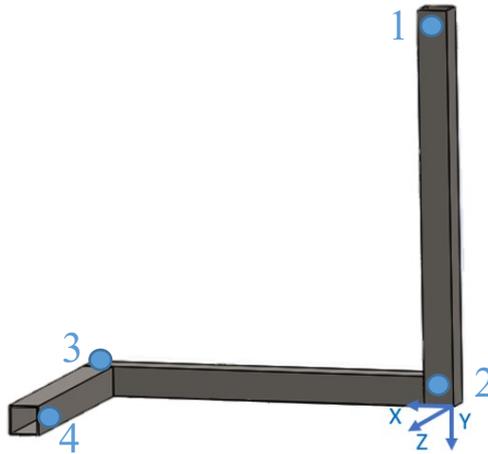


Figura 2.4- Pontos de referência para colocação dos acelerómetros e/ou aplicação das forças.

2.3.3 Caracterização das suspensões utilizadas

Para este estudo numérico considerou-se molas com várias constantes de rigidez e que estão disponíveis no laboratório.

Estas molas apresentaram constante de rigidez desconhecida. Numa primeira fase, procedeu-se à abertura das espiras das molas, de modo a tornar o seu comportamento linear. De seguida, mediu-se os valores de rigidez seguindo um procedimento experimental simples. Este procedimento consistiu em medir com uma régua o comprimento não deformado das molas. Posteriormente, suspenderam-se sucessivamente diferentes pesos de valor conhecido nas molas, com estas apoiadas num suporte conforme se observa na figura 2.5.



Figura 2.5- Procedimento experimental para cálculo da constante de rigidez das molas.

Sendo assim, obtém-se uma relação da força em função do deslocamento (figura 2.6) com vários deslocamentos experimentais que correspondem aos diferentes carregamentos. A força F é dada por:

$$F = \text{massa utilizada} \times 9,81 \quad (2.31)$$

O deslocamento X é dado pela diferença de posições da mola, medidas com uma régua, após a aplicação dos carregamentos X_F em relação à posição não deformada X_i desta.

$$X = X_F - X_i \quad (2.32)$$

Da figura 2.6 constata-se que a relação acima referida é definida por uma reta onde o declive corresponde ao valor experimental da rigidez das molas.

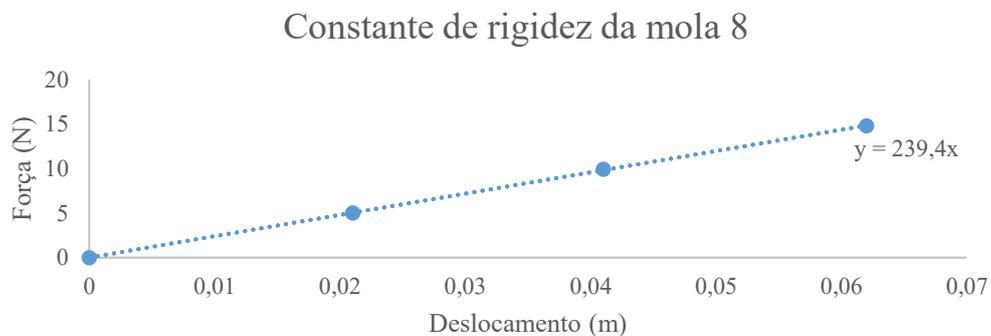


Figura 2.6- Representação gráfica da curva experimental de rigidez da mola 8.

Foram escolhidas duas configurações (A e B) para o arranjo das molas de modo a proporcionar o equilíbrio estático segundo o referencial. Nas figuras 2.7 e 2.8 tem-se esquematicamente os dois tipos de suspensão utilizados, onde todas as molas estão devidamente identificadas.

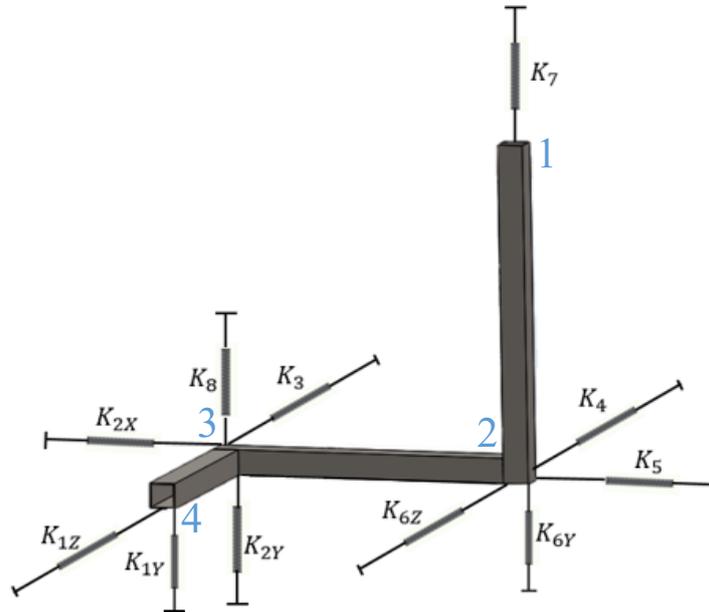


Figura 2.7- Representação esquemática da suspensão A.

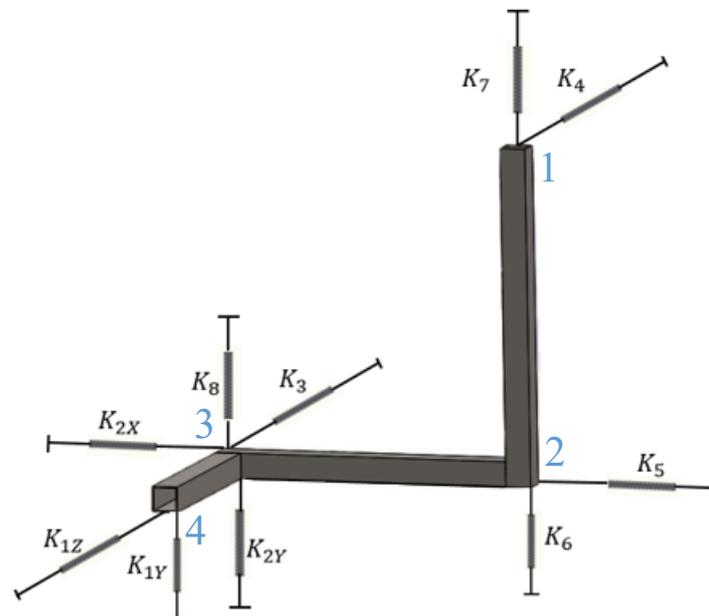


Figura 2.8- Representação esquemática da suspensão B.

Na tabela 2.1 apresentam-se os valores de rigidez das molas presentes em cada suspensão (A e B).

Tabela 2.1- Rigidez das molas (N/m).

Identificação das molas	Suspensão A	Suspensão B
K_{1Y}	$365,77 \times \text{sen}^2 45^\circ$	$365,77 \times \text{sen}^2 45^\circ$
K_{1Z}	$365,77 \times \text{cos}^2 45^\circ$	$365,77 \times \text{cos}^2 45^\circ$
K_{2X}	$261,03 \times \text{sen}^2 30^\circ$	$261,03 \times \text{sen}^2 30^\circ$
K_{2Y}	$261,03 \times \text{cos}^2 30^\circ$	$261,03 \times \text{cos}^2 30^\circ$
K_3	626,01	626,01
K_4	988,41	988,41
K_5	413,93	413,93
K_6	-	626,01
K_{6Y}	$626,01 \times \text{sen}^2 45^\circ$	-
K_{6Z}	$626,01 \times \text{cos}^2 45^\circ$	-
K_7	712,20	712,20
K_8	239,40	239,40

Para determinar as componentes da rigidez das molas inclinadas parte-se do conhecimento da energia potencial elástica dada por:

$$E_{Pel} = \frac{1}{2} \times K \times \delta^2 \quad (2.33)$$

Onde:

$$\delta^2 = \delta_x^2 + \delta_y^2 \quad (2.34)$$

$$\begin{cases} \delta_x = \delta \times \text{cos } \theta \\ \delta_y = \delta \times \text{sen } \theta \end{cases} \quad (2.35)$$

Portanto,

$$\leftrightarrow E_{Pel} = \frac{1}{2} \times K_x \times (\delta \text{cos } \theta)^2 + \frac{1}{2} \times K_y \times (\delta \text{sen } \theta)^2 \quad (2.36)$$

$$\leftrightarrow \begin{cases} K_x = K(\text{cos } \theta)^2 \\ K_y = K(\text{sen } \theta)^2 \end{cases} \quad (2.37)$$

Cada suspensão tem associada uma respetiva matriz de rigidez $[K_g]$. A construção desta matriz tem por base as forças e momentos nas molas (linhas da matriz) em x, y, z que provocam deslocamentos e rotações respetivamente (colunas da matriz), existindo igualmente o chamado “efeito cruzado”, onde as forças contribuem para as rotações e os momentos para os deslocamentos. Então, tendo por base os autores Harris e Piersol [2] e Almeida [36] tem-se a matriz $[K_g]$ definida para n pontos de referência.

2. Métodos Modais

$$K_g = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n K_{zi} & 0 & 0 & 0 & \sum_{i=1}^n (K_x \times d_x)_i & -\sum_{i=1}^n (K_x \times d_y)_i \\ 0 & \sum_{i=1}^n K_{yi} & 0 & -\sum_{i=1}^n (K_y \times d_x)_i & 0 & \sum_{i=1}^n (K_y \times d_z)_i \\ 0 & 0 & \sum_{i=1}^n K_{xi} & \sum_{i=1}^n (K_z \times d_y)_i & -\sum_{i=1}^n (K_z \times d_x)_i & 0 \\ 0 & -\sum_{i=1}^n (K_y \times d_x)_i & \sum_{i=1}^n (K_z \times d_y)_i & \sum_{i=1}^n (K_z(d_x)^2 + K_y(d_z)^2)_i & -\sum_{i=1}^n (K_z \times d_x \times d_y)_i & -\sum_{i=1}^n (K_y \times d_x \times d_z)_i \\ \sum_{i=1}^n (K_x \times d_x)_i & 0 & -\sum_{i=1}^n (K_z \times d_x)_i & -\sum_{i=1}^n (K_x \times d_x \times d_y)_i & \sum_{i=1}^n (K_x(d_x)^2 + K_z(d_z)^2)_i & -\sum_{i=1}^n (K_x \times d_x \times d_z)_i \\ -\sum_{i=1}^n (K_x \times d_y)_i & \sum_{i=1}^n (K_y \times d_x)_i & 0 & -\sum_{i=1}^n (K_y \times d_x \times d_z)_i & -\sum_{i=1}^n (K_x \times d_x \times d_y)_i & \sum_{i=1}^n (K_x(d_y)^2 + K_y(d_x)^2)_i \end{bmatrix}_{(6 \times 6)}$$

Onde K_x , K_y e K_z correspondem aos somatórios das constantes de rigidez das molas colocadas segundo as direções coordenadas x, y, z e d_x, d_y e d_z são as distâncias medidas, segundo as direções coordenadas x, y, z , do centro de massa ao ponto de colocação das molas. Com a matriz de rigidez definida, tem-se então para a suspensão A e B as suas matrizes de rigidez $[K_{Ag}]$ e $[K_{Bg}]$ construídas com os dados das tabelas 2.2 e 2.3 respetivamente.

Tabela 2.2- Dados para construção da matriz de rigidez K_{Ag} .

Pontos de referência (Suspensão A)	1	2	3	4
K_x (N/m)	-	413,930	65,258	-
d_x (m)	-	0,169	-0,211	
K_y (N/m)	712,200	313,005	435,173	182,885
d_y (m)	0,311	-0,089	-0,089	-0,089
K_z (N/m)	-	1311,415	626,010	182,885
d_z (m)	-	0,020	0,020	-0,230

Tabela 2.3- Dados para construção da matriz de rigidez K_{Bg} .

Pontos de referência (Suspensão B)	1	2	3	4
K_x (N/m)	-	413,930	65,258	-
d_x (m)	-	0,169	-0,211	
K_y (N/m)	712,200	626,01	435,173	182,885
d_y (m)	0,311	-0,089	-0,089	-0,089
K_z (N/m)	998,410	-	626,010	182,885
d_z (m)	0,020	-	0,020	-0,230

$$K_{Ag} = \begin{bmatrix} 479,188 & 0 & 0 & 0 & 9,584 & 42,648 \\ 0 & 1643,263 & 0 & 27,1 & 0 & -38,924 \\ 0 & 0 & 2120,31 & -188,708 & -89,541 & 0 \\ 0 & 27,1 & -188,708 & 26,769 & 7,969 & 0,778 \\ 9,584 & 0 & -89,541 & 7,969 & 65,518 & 0,853 \\ 42,648 & -38,924 & 0 & 0,778 & 0,853 & 32,111 \end{bmatrix}_{(6 \times 6)}$$

$$K_{Bg} = \begin{bmatrix} 479,188 & 0 & 0 & 0 & 1,305 & 42,648 \\ 0 & 1956,268 & 0 & 19,116 & 0 & 13,974 \\ 0 & 0 & 1807,305 & 238,514 & 132,088 & 0 \\ 0 & 19,116 & 238,514 & 113,108 & -11,756 & 1,836 \\ 1,305 & 0 & 132,088 & -11,756 & 27,897 & 0,116 \\ 42,648 & 13,974 & 0 & 1,836 & 0,116 & 41,049 \end{bmatrix}_{(6 \times 6)}$$

2.3.4 Caracterização das forças aplicadas

Para garantir a qualidade deste estudo numérico é importante definir conjuntos de forças que ao atuar no corpo permitam a correta obtenção dos dez parâmetros de inércia. Seguindo o que é demonstrado em [36], um conjunto de duas forças impossibilita a correta determinação dos parâmetros de inércia. A obtenção correta de tais parâmetros pressupõe a aplicação de um conjunto de pelo menos três forças. Contudo, certos conjuntos de três forças impossibilitam a determinação dos parâmetros segundo o mesmo documento, pois tem-se a necessidade de garantir a medição de pelo menos uma FRF direta (medição efetuada na mesma direção e ponto de aplicação da força) em cada modo, permitindo a identificação das constantes modais conforme visto anteriormente em 2.1.1.

Respeitando este pressuposto acima referido, optou-se pelo conjunto de forças representado na figura 2.9 e descrito na tabela 2.4 para este estudo numérico utilizando as duas suspensões caracterizadas em 2.3.3 para suspender o corpo rígido caracterizado em 2.3.1.

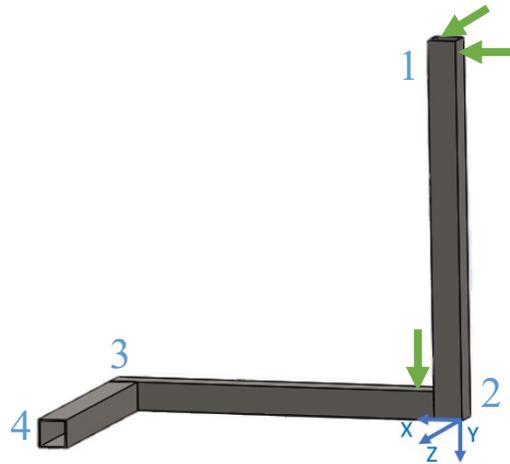


Figura 2.9- Conjunto de forças aplicado no estudo numérico.

Tabela 2.4- Conjunto de forças aplicado no estudo numérico.

Forças	Pontos de referência	Direção	Sentido
Conjunto 1	1	xx	+
	1	zz	+
	2	yy	+

2.3.5 Caracterização dos pontos de medição das respostas

Para caracterizar completamente este estudo numérico falta definir os pontos de medição das respostas, onde se simulará a colocação dos acelerómetros. Este estudo numérico, sendo realizado de acordo com o Método Modal modificado, referenciado em 2.2, simula a utilização de um acelerómetro MEMS triaxial (capaz de medir três translações) mais dois acelerómetros MEMS giroscópios (capazes de medir duas rotações cada um), tal como existente no laboratório.

Conforme demonstrado em [34] tem-se que para três acelerómetros triaxiais, a melhor posição é aquela na qual se forma um triângulo regular com estes. Contudo, para o método modificado utilizado neste estudo, a seleção dos pontos onde são colocados os acelerómetros simplifica-se. Tal deve-se às acelerações angulares em torno de um eixo de um corpo rígido serem iguais em qualquer ponto, pelo que a posição dos pontos de medição dos MEMS giroscópios não é significativa. Em relação ao MEMS triaxial, o modelo teórico não prevê qualquer pressuposto para a colocação deste, sendo assim esta é igualmente irrelevante.

Partindo dos pressupostos acima referidos, para este teste definiu-se a configuração para os pontos de medição das repostas da figura 2.10. O acelerómetro MEMS triaxial está representado a azul e os acelerómetros MEMS giroscópios a vermelho.

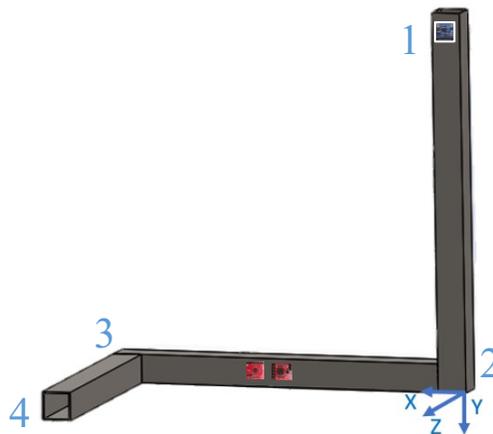


Figura 2.10- Pontos de medição das repostas no estudo numérico.

2.3.6 Resultados e conclusões

Este estudo numérico permite obter as respostas dinâmicas da estrutura, expressas nas FRF, para a suspensão A e B. Também permite obter, conforme se observa no esquema do algoritmo Matlab (figura 2.1), as frequências naturais da estrutura e os modos de corpo rígido relativamente ao centro de massa para a suspensão A e B. Posteriormente são apresentados os resultados e as principais conclusões a retirar deste estudo.

Apresentam-se na tabela 2.5 as frequências naturais da estrutura com a suspensão A e B. Posteriormente são apresentadas as duas matrizes dos modos de corpo rígido normalizados em

relação à matriz de massa relativos ao centro de massa para a estrutura com estas duas configurações de suspensão.

Tabela 2.5- Frequências naturais (Hz) para a estrutura com suspensão A ou B.

Frequências naturais (Hz)	Suspensão A	Suspensão B
f_{n1}	2,345	1,921
f_{n2}	2,766	2,779
f_{n3}	4,286	4,712
f_{n4}	5,609	5,650
f_{n5}	5,731	6,089
f_{n6}	10,790	13,626

$$\Phi_{Ag} = \begin{bmatrix} 0,3195 & 0,7306 & -0,3240 & -0,0011 & -0,0546 & 0,0211 \\ -0,1200 & 0,0149 & -0,1730 & 0,6553 & 0,5195 & 0,0207 \\ 0,4067 & -0,2730 & -0,1693 & 0,3847 & -0,4245 & -0,3840 \\ 4,0228 & -2,5018 & -1,3693 & -0,1474 & 0,4942 & 5,9489 \\ -0,1725 & 0,0458 & 0,7200 & 2,2500 & -2,8327 & 4,8539 \\ -1,3664 & -1,2674 & -3,9253 & -0,5349 & -0,9808 & 1,7328 \end{bmatrix}_{(6 \times 6)}$$

$$\Phi_{Bg} = \begin{bmatrix} -0,0181 & 0,8231 & -0,2569 & 0,0139 & 0,0110 & 0,0088 \\ 0,0160 & 0,0128 & 0,0681 & -0,1593 & 0,8446 & 0,0210 \\ 0,5864 & 0,0414 & 0,0653 & -0,5518 & -0,1278 & 0,2712 \\ -1,6511 & -0,0595 & 0,2853 & 1,8373 & 0,1731 & 7,3318 \\ -4,1731 & -0,3308 & -0,8265 & -2,8420 & -0,4669 & 3,2704 \\ 0,2482 & -1,3333 & -4,1834 & 0,4825 & 0,3979 & 1,8441 \end{bmatrix}_{(6 \times 6)}$$

As respostas dinâmicas da estrutura, expressas em FRF de Receptância são apresentadas nas figuras 2.11 a 2.16, onde se tem as seis respostas dinâmicas obtidas (três translações e três rotações) sobrepostas.

Força 1xx

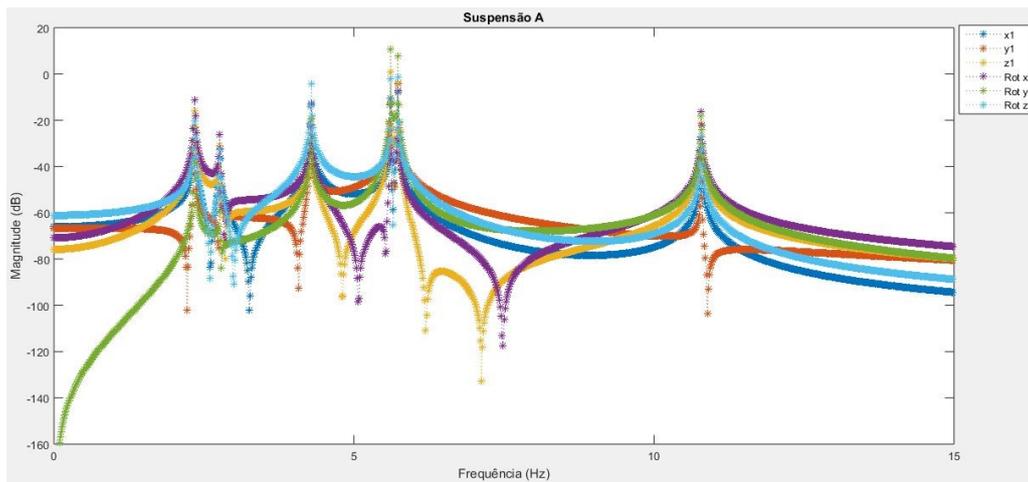


Figura 2.11- FRF da força 1xx na suspensão A.

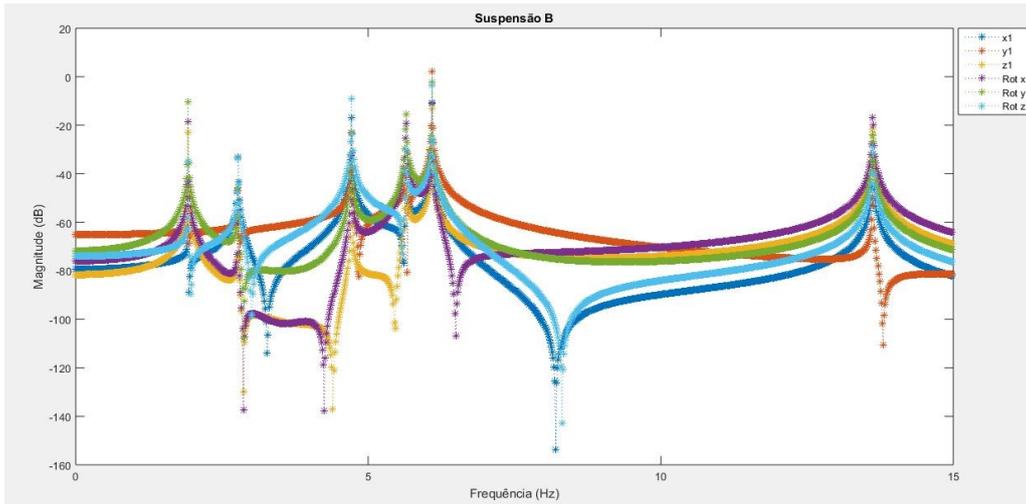


Figura 2.12- FRF da força 1xx na suspensão B.

Força 2yy

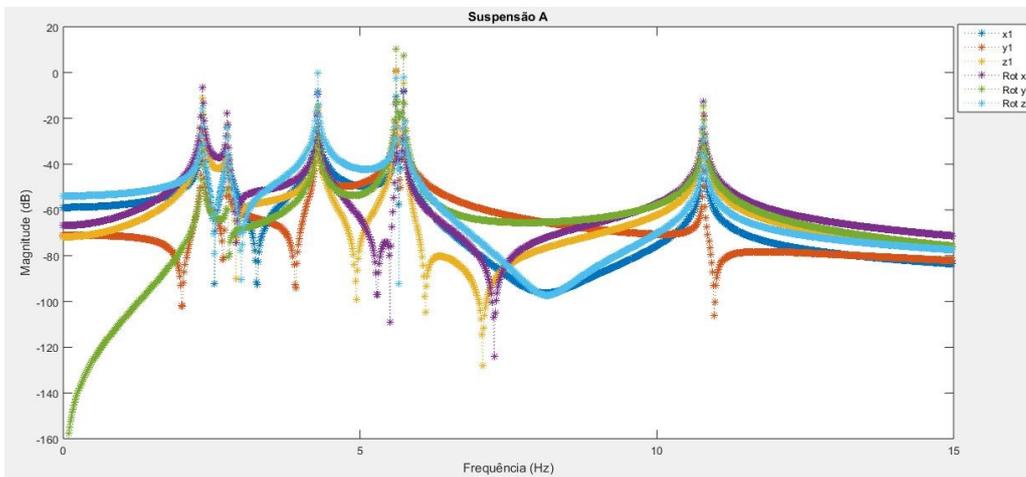


Figura 2.13- FRF da força 2yy na suspensão A.

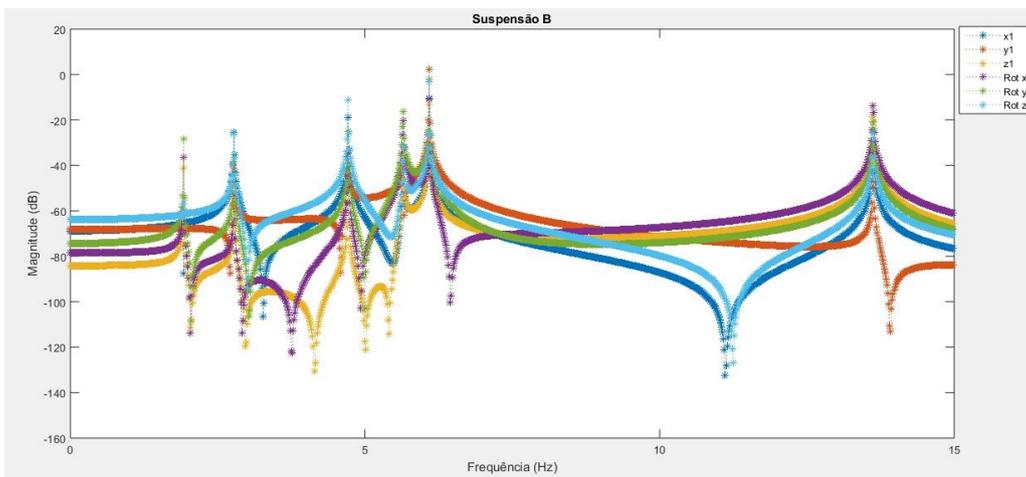


Figura 2.14- FRF da força 2yy na suspensão B.

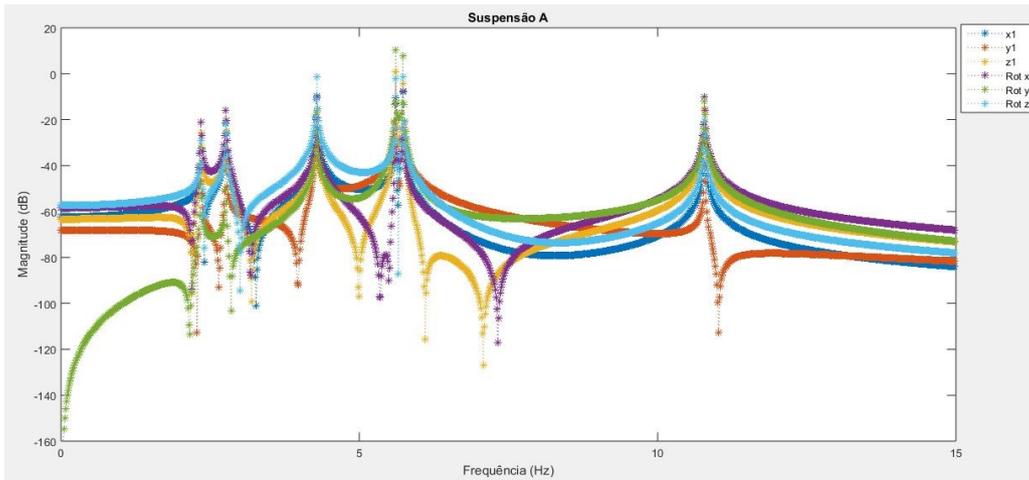
Força 1zz

Figura 2.15- FRF da força 1zz na suspensão A.

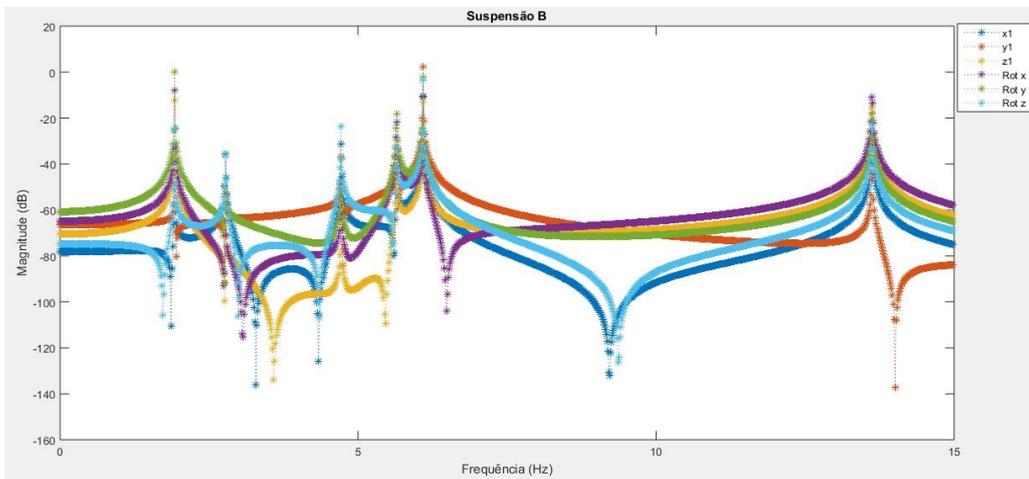


Figura 2.16- FRF da força 1zz na suspensão B.

Nas figuras 2.17 a 2.22 tem-se as FRF provenientes apenas das respostas angulares para as três forças aplicadas nas duas configurações de suspensão utilizadas.

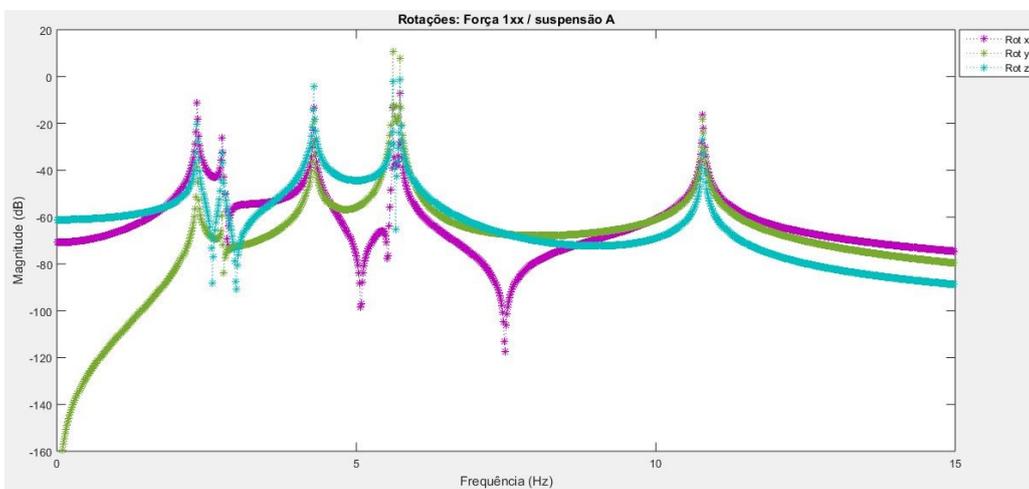


Figura 2.17- FRF de rotações: Força 1xx / suspensão A.

2. Métodos Modais

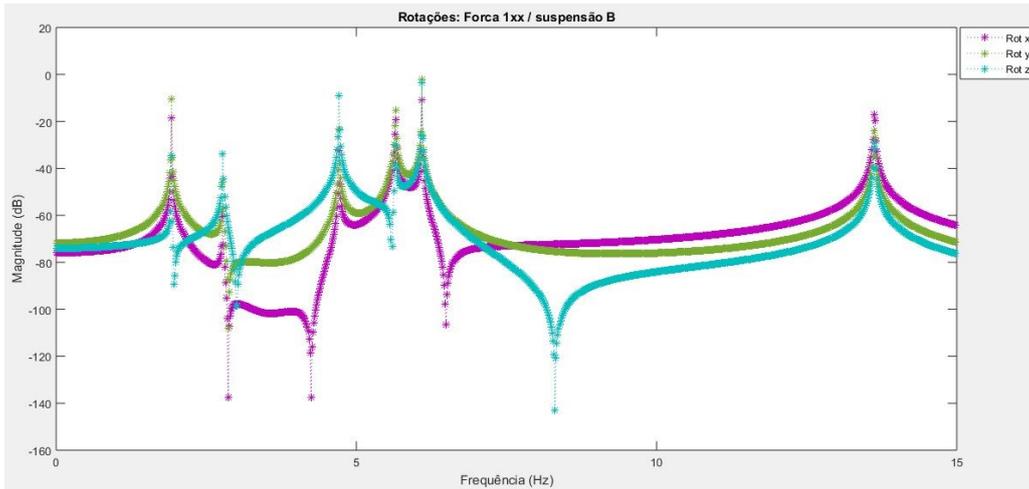


Figura 2.18- FRF de rotações: Força 1xx / suspensão B.

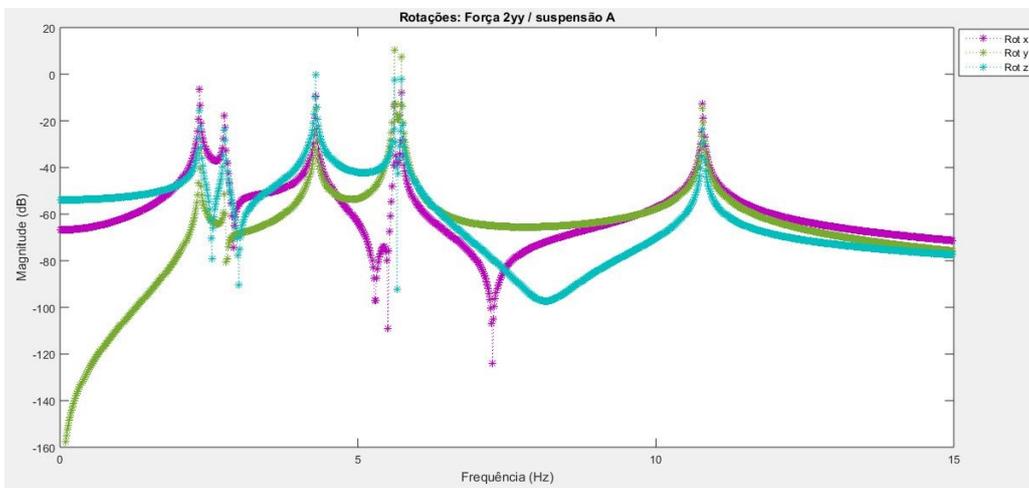


Figura 2.19- FRF de rotações: Força 2yy / suspensão A.

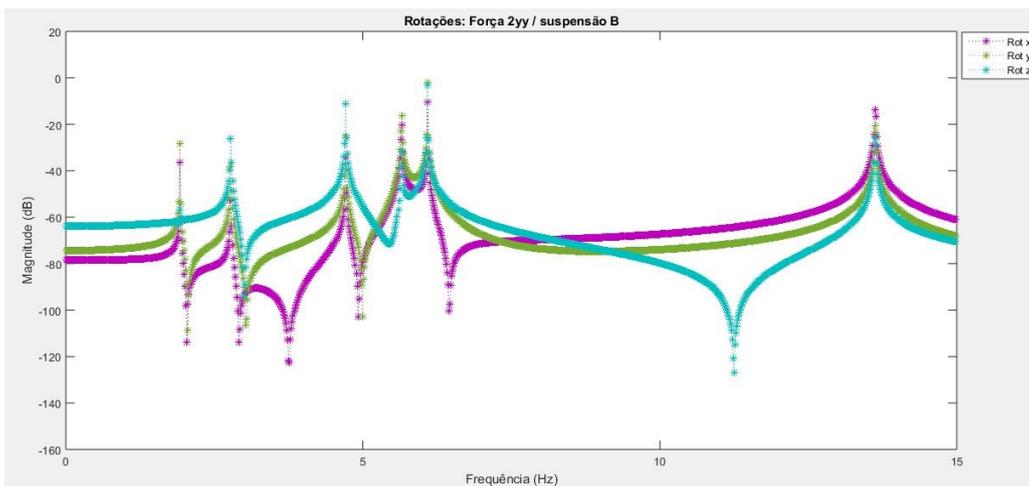


Figura 2.20- FRF de rotações: Força 2yy / suspensão B.

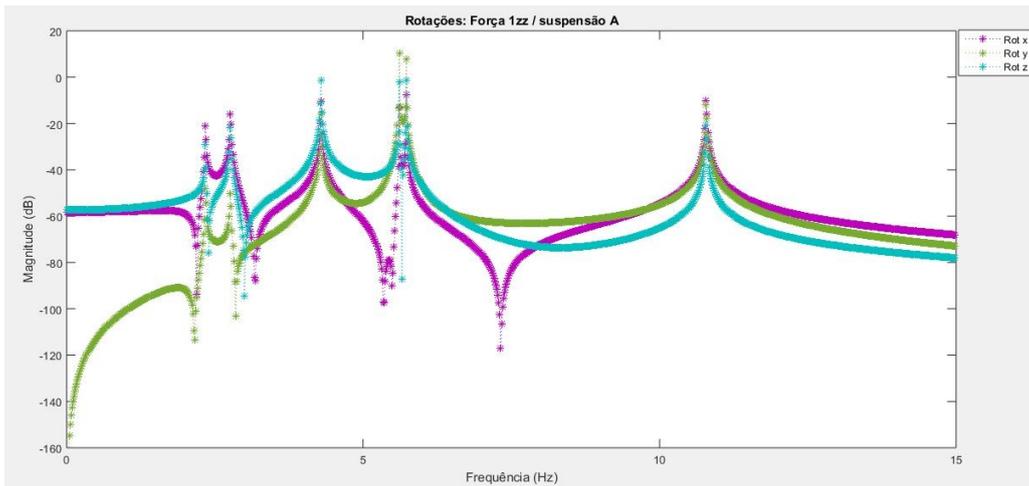


Figura 2.21- FRF de rotações: Força 1zz / suspensão A

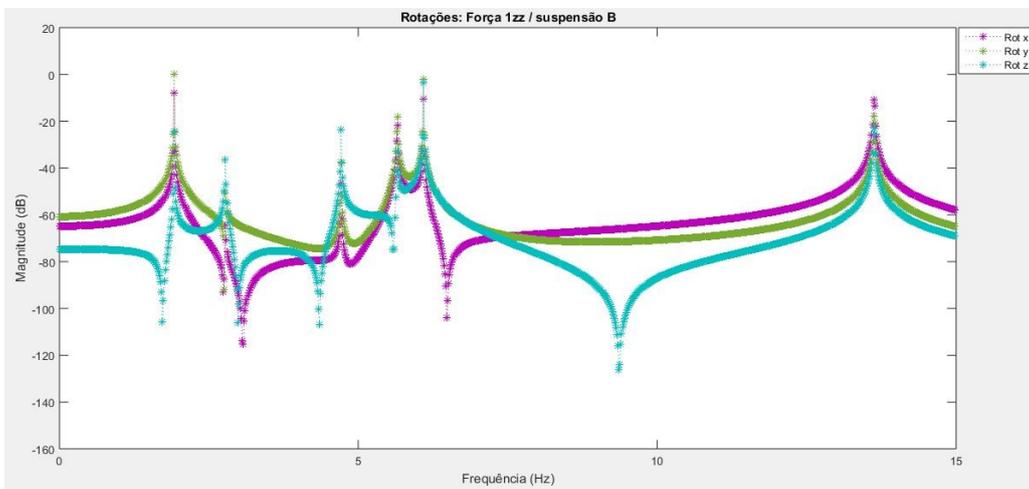


Figura 2.22- FRF de rotações: Força 1zz / suspensão B.

Um dos objetivos deste estudo numérico é prever se a inclusão de FRF provenientes de respostas angulares (rotações) oferecerá dificuldades no processo de identificação modal do estudo experimental. Analisando os resultados obtidos e ilustrados nas figuras 2.11 a 2.22, prevê-se que a inclusão destas FRF não oferecerá dificuldades durante o processo de identificação modal, pois os seis modos de corpo rígido encontram-se satisfatoriamente excitados. Sendo assim, espera-se a obtenção de valores corretos para os parâmetros de inércia utilizando este método modificado experimentalmente.

Os modos de corpo rígido ocorrem a frequências naturais que estão bem separadas umas das outras, conforme se ilustra nas figuras 2.11 a 2.22 e na tabela 2.5. A nível experimental é extremamente importante que este pressuposto seja cumprido, pois permite uma melhor identificação modal, indispensável na obtenção de bons parâmetros de inércia.

As matrizes de modos relativas ao centro de massa e normalizadas em relação à matriz de massa ($[\phi_{Ag}]$ e $[\phi_{Bg}]$) são diferentes para as duas configurações de suspensão como seria

expectável. Contudo, utilizando a equação (2.5), resulta na mesma matriz de massa $[M_0]$ para ambas as configurações.

$$[M_0] = \begin{bmatrix} 1,3437 & 0 & 0 & 0 & 0,0269 & 0,1196 \\ 0 & 1,3437 & 0 & -0,0269 & 0 & 0,2271 \\ 0 & 0 & 1,3437 & -0,1196 & 0,2271 & 0 \\ 0 & -0,0269 & -0,1196 & 0,0363 & 0,0049 & -0,0138 \\ 0,0269 & 0 & -0,2271 & 0,0049 & 0,0769 & -0,0011 \\ 0,1196 & 0,2271 & 0 & -0,0138 & -0,0011 & 0,0985 \end{bmatrix}_{(6 \times 6)}$$

Ou seja, a utilização de duas suspensões diferentes aplicando o mesmo teste, resulta na obtenção de parâmetros de inércia coerentes. Tal situação está de acordo com um dos principais pressupostos dos Métodos Modais, sendo claramente uma grande virtude destes métodos. No entanto, é importante lembrar que se tem sempre que utilizar uma suspensão que garanta uma identificação clara dos seis modos de corpo rígido com as frequências naturais bem separadas.

A nível experimental, a suspensão a utilizar será muito idêntica à suspensão A, pois nesta apenas se desprezou a pouca inclinação de algumas molas e se aproximou o valor de inclinação de outras. Como tal e com base nos resultados da tabela 2.5, prevê-se que os seis modos de corpo rígido se situem numa gama de frequência entre 0 e 12 Hz aproximadamente.

Em relação às forças aplicadas, este estudo comprovou que três forças aplicadas em que se garanta pelo menos uma FRF direta é suficiente para excitar devidamente os modos de corpo rígido.

3. Identificação experimental de propriedades de corpo rígido

Este capítulo refere-se ao estudo experimental incluído nesta dissertação. Inicialmente é caracterizada a estrutura utilizada, o corpo rígido em estudo e seus parâmetros de inércia e posteriormente a suspensão utilizada. Todo o equipamento e o procedimento experimental utilizados são apresentados em detalhe. Sendo assim, explica-se todo o processo de calibração dos acelerómetros, descreve-se o sistema de aquisição de dados (hardware e software) e explica-se o processo de regeneração das FRF, incluindo a exportação de dados do programa Labview para o programa Modent. Seguidamente, aborda-se o estudo experimental, explicando toda a metodologia inversa associada a este estudo e apresentando os resultados obtidos para duas fases de testes com os valores experimentais a serem comparados com os valores teóricos. Numa primeira fase, apresenta-se os testes experimentais só com acelerómetros MEMS triaxiais aplicando o Método Modal original e numa segunda fase, descreve-se os testes que incluem os acelerómetros MEMS giroscópios, aplicando o Método Modal modificado. Os resultados experimentais obtidos em ambas as fases dos testes são discutidos, referenciando também as principais dificuldades sentidas no estudo experimental.

3.1 Caracterização do corpo rígido em estudo

O corpo rígido utilizado no estudo experimental (figura 3.1) foi construído com base em elementos que são facilmente modelados. Com o modelo computacional foi possível obter as propriedades do corpo rígido que servem de referência para o estudo experimental. Este corpo já se encontrava disponível no laboratório.

3. Identificação experimental de propriedades de corpo rígido



Figura 3.1- Corpo rígido em estudo.

Recorrendo a uma balança digital disponível no laboratório, com uma incerteza de décimo de grama ($I = 0,1 g$) efetuou-se a pesagem deste corpo resultando uma massa = 1,238 kg.

Tendo por base que o corpo rígido partiu de um perfil de aço corrente de 1m com valor padrão de massa específica $\rho = 7850 kg/m^3$, a equação (3.1) permite definir a sua geometria e a equação (3.2) determina o valor da espessura t dos perfis.

$$\rho = \frac{m}{V} \leftrightarrow m = \rho \times V = 7850 \times (0,03^2 - x^2) \times 1 \leftrightarrow x = 0,02724505 m \quad (3.1)$$

$$t = \frac{0,03 - 0,02724505}{2} = 1,377475 \times 10^{-3} m = 1,377475 mm \quad (3.2)$$

Utilizou-se então o Solidworks para modelar o corpo caracterizado no estudo numérico mas com uma nova dimensão de espessura. Tal permite aproximar o modelo teórico ao corpo disponível no laboratório. Obteve-se as seguintes propriedades:

$$\left\{ \begin{array}{l} m = 1,238 kg \\ \rho = 7850 kg/m^3 \\ x_{cm} = 0,169 m \\ y_{cm} = -0,089 m \\ z_{cm} = 0,020 m \\ J_{gxx} = 0,02316196 kg.m^2 \\ J_{gyy} = 0,03501757 kg.m^2 \\ J_{gzz} = 0,04560212 kg.m^2 \\ J_{gxy} = 0,01410825 kg.m^2 \\ J_{gxz} = 0,00849268 kg.m^2 \\ J_{gyz} = 0,00320642 kg.m^2 \end{array} \right.$$

3.2 Caracterização da suspensão utilizada

Conforme dito no fundamento teórico, nos Métodos Modais o corpo rígido é suspenso em molas de reduzida massa e rigidez. A suspensão utilizada neste estudo, incorpora molas ligadas à estrutura por fio Nylon multifilar (figura 3.2). Foi utilizado este fio Nylon para garantir que a suspensão não influencia a estrutura em termos de massa, simulando o efeito de um cabo inextensível. Na figura 3.2 tem-se igualmente as molas utilizadas devidamente identificadas e com as constantes de rigidez apresentadas na tabela 3.1.



Figura 3.2- Caracterização da suspensão experimental utilizada (2 vistas).

Tabela 3.1- Rigidez das molas na suspensão experimental (N/m).

Suspensão experimental	Rigidez das molas K (N/m)
K_1	365,77
K_2	261,03
K_3	626,01
K_4	988,41
K_5	413,93
K_6	626,01
K_7	712,20
K_8	239,40

3.3 Equipamento e procedimento experimental

Em 3.3 são apresentados a montagem e o procedimento utilizados neste estudo experimental. É explicado o processo de calibração dos acelerómetros, referenciando e detalhando o sistema de aquisição de dados e por fim é descrito o processo de regeneração das FRF.

3.3.1 Calibração

Antes de se realizar os ensaios experimentais, os sensores MEMS foram sujeitos a uma calibração. A calibração prévia permite a medição correta da amplitude a zero Hz (valor da linha mássica) das FRF obtidas experimentalmente. Os processos de calibração dos MEMS de translação e de rotação são diferentes conforme explicado seguidamente.

Para os MEMS de translação, o procedimento experimental utilizado consiste na aplicação de uma força (através de um martelo) num paralelepípedo de aço (corpo rígido) suspenso por dois fios, resultando daí um movimento de translação pura, o qual permite obter a linha mássica do prisma experimentalmente (figura 3.4). A figura 3.3 ilustra todo este procedimento experimental, com a aplicação da força e colocação do sensor MEMS.



Figura 3.3- Procedimento experimental na calibração dos MEMS triaxiais na direção z e x respetivamente.

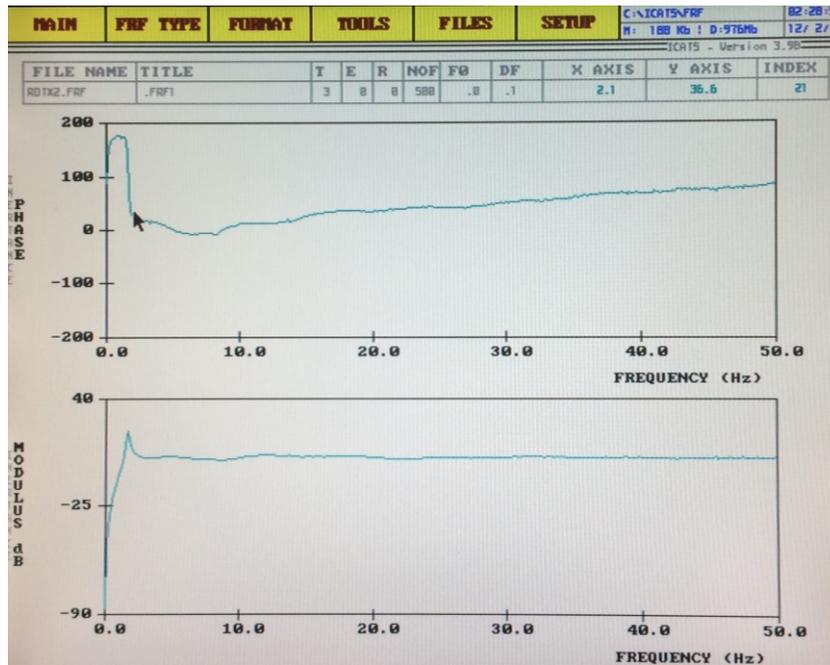


Figura 3.4- Linha mássica típica da resposta experimental do bloco.

A razão da aceleração medida em função da força aplicada (Acelerância), de acordo com [37] corresponde ao valor da linha mássica (equação (3.3)).

$$a_{jk}(\omega) = \frac{\ddot{X}_j(\omega)}{F_k(t)} = \frac{1}{m} \quad (3.3)$$

Onde $a_{jk}(\omega)$ corresponde à acelerância, $\ddot{X}_j(\omega)$ é a aceleração num ponto j , $F_k(t)$ a força num ponto k e m a massa do bloco.

Sabendo o valor da massa tem-se o valor da linha mássica prevista teoricamente. Sendo assim, o valor da linha mássica experimental (figura 3.4) é multiplicado por um fator de calibração para no final do processo resultar uma FRF com uma linha mássica a corresponder ao seu valor real.

Para os MEMS de rotação, utilizou-se uma técnica indireta de medição de rotações para a calibração. Com o mesmo paralelepípedo de aço foram fixados dois acelerómetros MEMS triaxiais, um em cada extremidade e o acelerómetro MEMS giroscópio no centro do prisma (figura 3.5). Aplicando uma força numa das extremidades do prisma (figura 3.6), tem-se as seguintes relações geométricas onde as translações são convertidas em rotações.

$$\begin{cases} \ddot{X}_1 = \ddot{X} + d\ddot{\theta} \\ \ddot{X}_2 = \ddot{X} - d\ddot{\theta} \end{cases} \leftrightarrow \ddot{\theta} = \frac{\ddot{X}_1 - \ddot{X}_2}{2d} \quad (3.4)$$

Onde \ddot{X}_1 e \ddot{X}_2 são as acelerações de translação medidas pelos acelerómetros triaxiais, d a distância ao centro de rotação do corpo rígido e $\ddot{\theta}$ a aceleração angular do corpo. A equação (3.4) resulta experimentalmente de:

$$\left(\frac{\ddot{\theta}}{F}\right)_{ind} = \frac{\ddot{X}_1 - \ddot{X}_2}{2d} \quad (3.5)$$

3. Identificação experimental de propriedades de corpo rígido

Onde $\frac{\ddot{x}_1}{F}$, $\frac{\ddot{x}_2}{F}$ são os valores da linha mássica obtidas experimentalmente nos dois acelerómetros MEMS triaxiais e $\left(\frac{\ddot{\theta}}{F}\right)_{ind}$ o valor da linha mássica de rotação experimental obtido indiretamente (equação (3.5)).

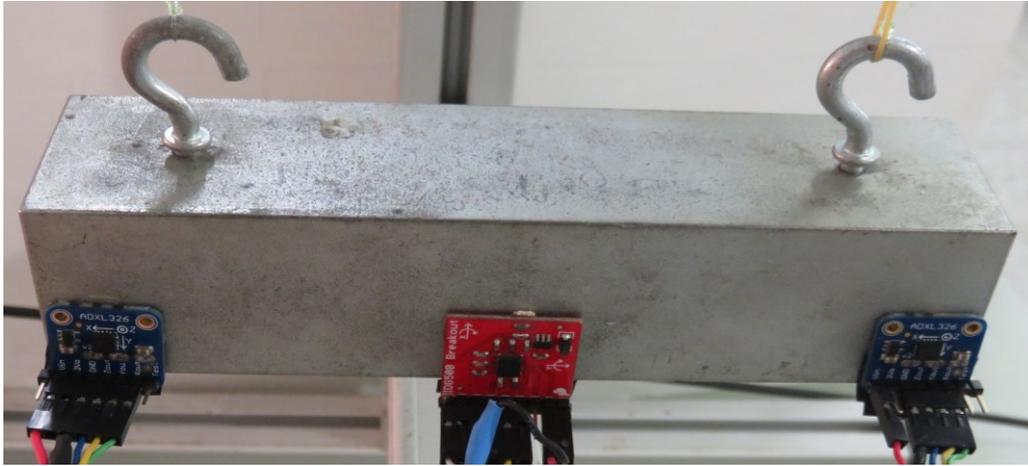


Figura 3.5-Montagem experimental para a calibração dos MEMS giroscópios.

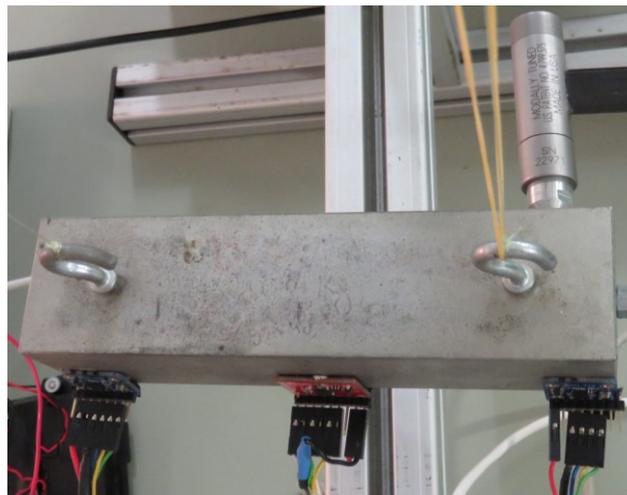


Figura 3.6- Procedimento experimental na calibração dos MEMS giroscópios.

O acelerómetro MEMS giroscópio mede a rotação diretamente, sendo que a sua linha mássica teórica $\left(\frac{\ddot{\theta}}{F}\right)_{teórico}$ resulta da seguinte relação:

$$\frac{\ddot{\theta}}{M} = \frac{1}{J} \leftrightarrow \frac{\ddot{\theta}}{F \times d} = \frac{1}{J} \leftrightarrow \frac{\ddot{\theta}}{F} = \frac{d}{J} \quad (3.6)$$

Onde d é a distância perpendicular à força, do seu ponto de aplicação ao centro de rotação do corpo rígido (“braço do momento”) e J o momento polar de inércia do bloco. Consultando [1] e conforme a figura 3.7 tem-se que:

$$J_{yy} = \frac{1}{12} m(c^2 + a^2) \quad (3.7)$$

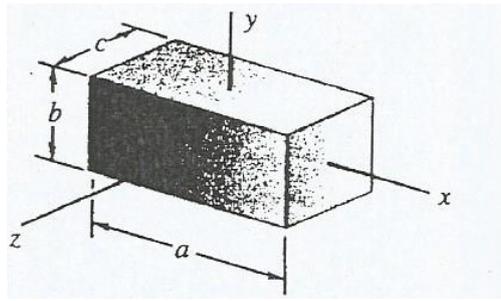


Figura 3.7- Representação de um prisma rectangular (adaptado de [1]).

Conhecido então o valor de J , obtém-se o valor teórico da linha mássica $\left(\frac{\ddot{\theta}}{F}\right)_{teórico}$. Como os MEMS giroscópios medem diretamente rotações, a linha mássica de rotação experimental $\left(\frac{\ddot{\theta}}{F}\right)_{dir}$ pode ser diretamente determinada e comparada com o valor de $\left(\frac{\ddot{\theta}}{F}\right)_{ind}$, esperando-se que sejam iguais. Posteriormente, $\left(\frac{\ddot{\theta}}{F}\right)_{dir}$ é multiplicado por um fator de calibração para no final do processo resultar uma FRF com uma linha mássica a corresponder ao seu valor real.

3.3.2 Sistema de aquisição de dados

Conforme referido, neste estudo experimental utilizou-se sensores MEMS triaxiais (figura 3.8) e giroscópios (figura 3.9) com saída analógica já existentes no laboratório.

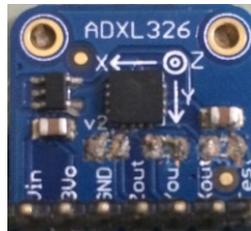


Figura 3.8- Sensores MEMS triaxiais ADXL 326.

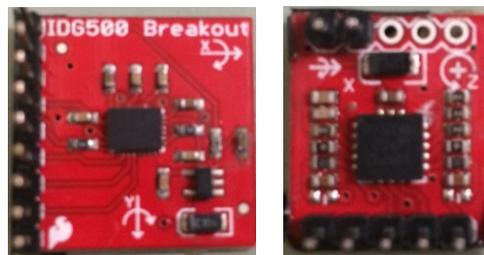


Figura 3.9- Sensores MEMS giroscópios IDG500 e LPY503AL respetivamente.

As características destes sensores MEMS encontram-se nas tabelas 3.2 e 3.3. Algumas destas propriedades foram obtidas de [38-40].

3. Identificação experimental de propriedades de corpo rígido

Tabela 3.2- Propriedades dos sensores MEMS triaxiais ADXL 326.

Sensores MEMS ADXL 326			
Largura de banda (Hz) (Sem condensadores)	Xout	Yout	Zout
	1600	1600	550
Leitura de aceleração em cada eixo (g)	±16		
Gama de temperatura de funcionamento (°C)	-40 a 85		
Massa (g)	3		
Preço (€)	20		
Sensibilidade em cada eixo (mv/g)	Mínima	Média	Máxima
	51	57	63

Tabela 3.3- Propriedades dos sensores MEMS giroscópios IDG500 e LPY503AL.

	Sensores MEMS IDG500		Sensores MEMS LPY503AL	
Largura de banda (Hz)	140		140	
Sinal (Amplificado/não amplificado)	Xout (4,5×)	Yout (4,5×)	Xout (4×)	Zout (4×)
	Xout (1×)	Yout (1×)	Xout (1×)	Zout (1×)
Velocidade angular máxima (°/s)	±110°/s (4, 5 ×)		±30°/s (4×)	
	±500°/s (1×)		±120°/s (1×)	
Gama de temperatura de funcionamento (°C)	-20 a 85		-40 a 85	
Massa (g)	3		3	
Preço (€)	55		35	
Sensibilidade (mv°/s)	9,1 (4, 5 ×)		33,3 (4×)	
	2,0 (1×)		8,3 (1×)	

Neste trabalho os sensores MEMS giroscópios foram utilizados com amplificação do sinal, de forma a diminuir o ruído das FRF e evitando ao máximo a saturação destes.

O martelo de impacto utilizado tem um sensor piezoelétrico para transformar a força de impacto aquando da excitação em sinal elétrico. O modelo utilizado foi o PCB 086C03 com uma cabeça de borracha (figura 3.10), pois neste trabalho tem-se por interesse excitar frequências muito baixas.

A aquisição de dados dos sensores MEMS e do martelo de impacto é feita através do chassis NI DAQ 9172 da *National Instruments* (figura 3.10). Este chassis contempla dois módulos, o módulo 9205 que adquire o sinal dos sensores MEMS e o módulo 9233 que adquire o sinal do martelo de impacto. A ligação entre o martelo e o módulo 9233 é feito com um cabo coaxial e a ligação entre os terminais dos sensores MEMS e o módulo 9205 é feita por um cabo condutor multifilar (três fases, alimentação e neutro). Os sensores MEMS são alimentados com duas pilhas de 1,5V (figura 3.10). Toda a ligação MEMS/módulos analógicos/alimentação segue o código de

cores presente em [41]. Como a figura 3.10 ilustra para evitar o aparecimento da frequência da rede (a 50 Hz) nas FRF fez-se uma ligação terra à estrutura do chassis. O sinal adquirido pelos dois módulos do chassis DAQ 9172 é tratado no software Labview. A ligação chassis/computador é uma ligação USB. O ambiente de trabalho ou “front panel” do programa Labview (figura 3.10) resulta de um diagrama de blocos adaptado do trabalho de [42]. Este diagrama analisa o sinal emitido pelo módulo 9205 devido a cada canal dos acelerómetros de modo a criar as FRF necessárias no “front panel”, expressas em aceleração e devidamente identificadas. Também analisa o sinal emitido pelo módulo 9233, fazendo a transformação dos sinais para o domínio da frequência. Neste trabalho utilizou-se dois programas Labview. Inicialmente, um programa que adquire nove FRF resultantes de três MEMS triaxiais. Posteriormente, um programa que inclui os MEMS giroscópios e que adquire dez FRF, seis associadas a dois MEMS triaxiais e quatro associadas a dois MEMS giroscópios. De referir que nas FRF resultantes dos MEMS giroscópios, o programa converte as FRF de Mobilidade (velocidade angular/força) obtidas experimentalmente em Aceleração (aceleração angular/força).

Martelo PCB 086C03

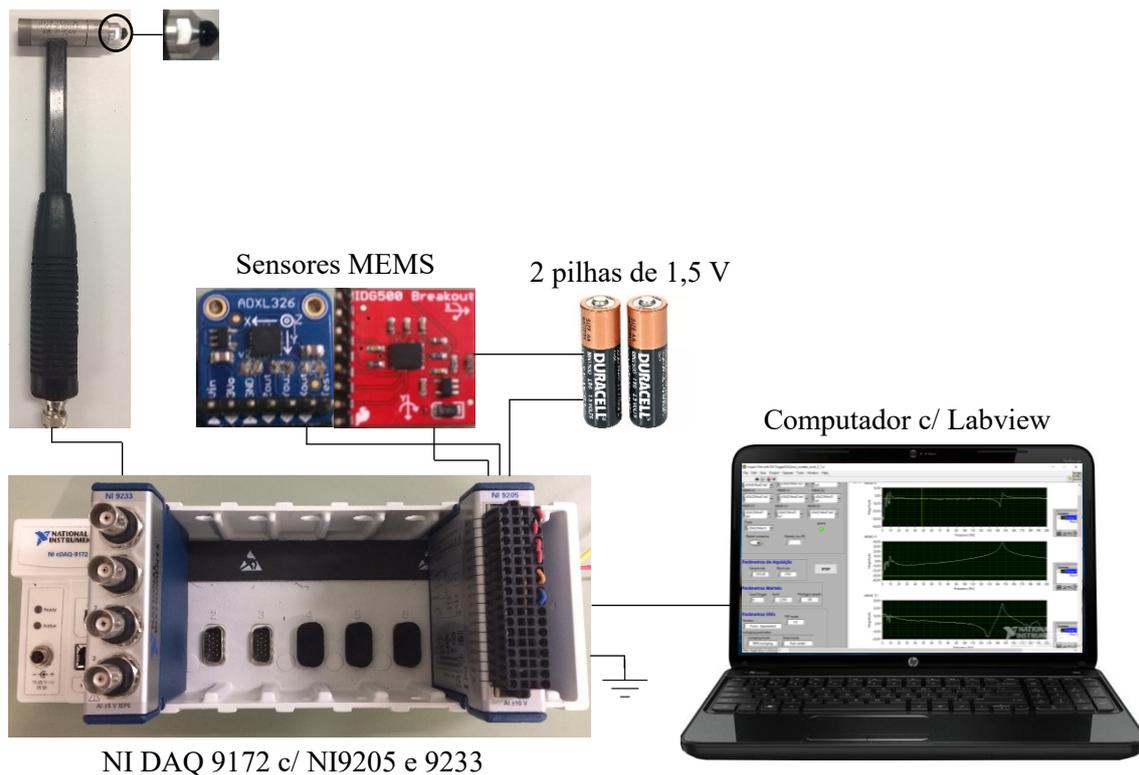


Figura 3.10- Esquema do sistema de aquisição de dados.

No “front panel” de ambos os programas Labview pode-se introduzir o número de pontos a adquirir do sinal, a frequência de aquisição, o número de médias que originam cada FRF, o fator de calibração de cada canal de medição dos acelerómetros, a diretoria onde os ficheiros com os dados são gravados, entre outras variáveis.

3. Identificação experimental de propriedades de corpo rígido

Como se pretende analisar os modos de corpo rígido, ocorrendo estes em gamas de baixas frequências, utilizou-se a gama de frequência de 0 a 50 Hz para visualizar as FRF.

3.3.3 Regeneração das FRF

O ficheiro que contém os dados exportados do programa Labview inclui em três linhas consecutivas frequência, parte real e parte imaginária das N FRF registadas, com o número de pontos adquiridos escolhido no programa Labview (figura 3.11). Desenvolveu-se um algoritmo Matlab para tratar N ficheiros em formato.txt (figura 3.12) com parte real e parte imaginária (assinaladas a preto) das FRF para um número de pontos escolhidos no algoritmo Matlab. As colunas são separadas por um espaçamento “tab” (figura 3.12). De referir que os N ficheiros.txt resultantes são gravados na mesma diretoria onde se encontra o algoritmo Matlab.

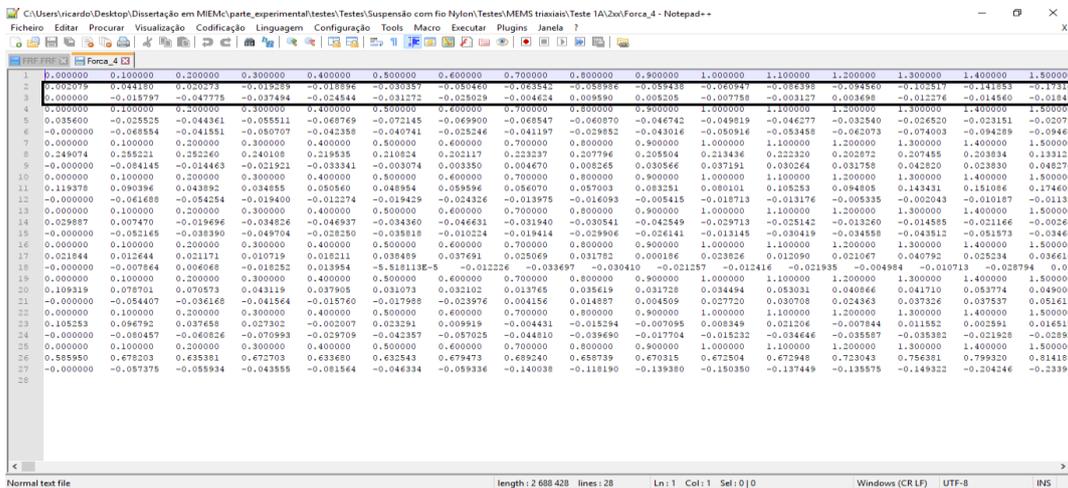


Figura 3.11- Dados exportados do programa Labview.

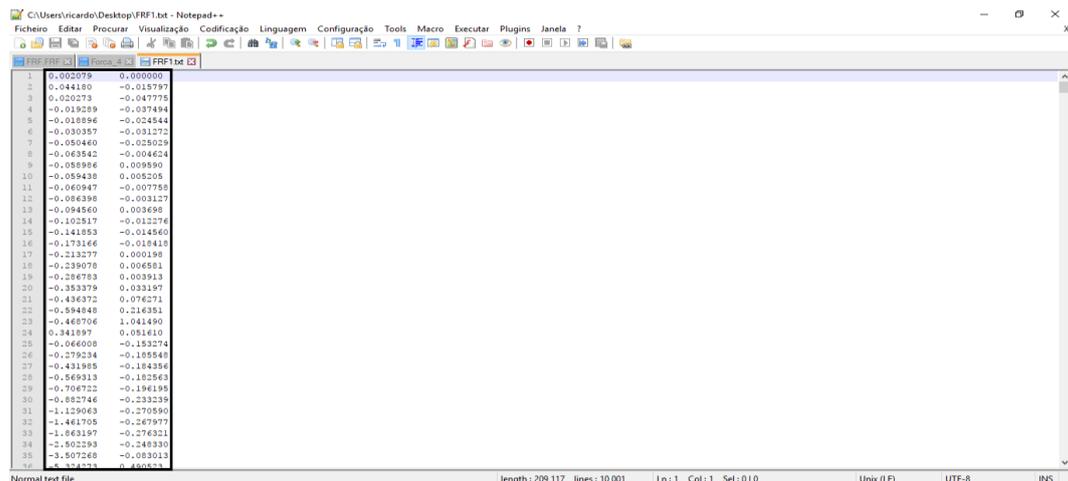


Figura 3.12- Ficheiro em formato.txt com as FRF exportadas do programa Labview.

Este processo tem a finalidade de permitir a leitura dos dados segundo o formato requerido pelo software Modent. Para tal, nos N ficheiros.txt resultantes adiciona-se um cabeçalho, (assinalado a preto na figura 3.13), seguindo os pressupostos de [43]. Neste cabeçalho

3. Identificação experimental de propriedades de corpo rígido

é possível definir frequência inicial, incremento de frequência e número de pontos experimentais. Além disso, como o programa Modent lê qualquer tipo de FRF, é possível escolher o tipo de FRF pretendido (acelerância). Resulta daqui N ficheiros com o formato. FRF prontos a serem lidos no programa Modent.

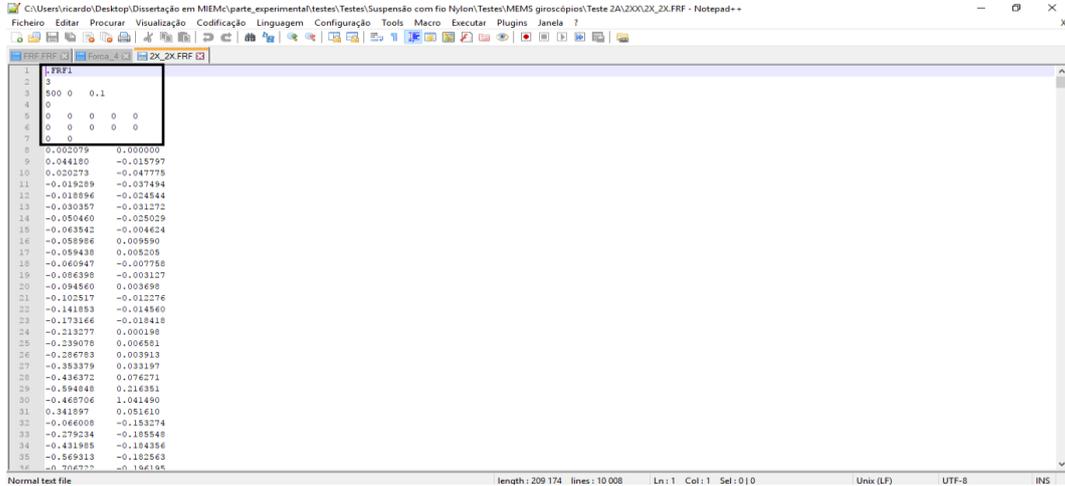


Figura 3.13- Ficheiro em formato. FRF pronto a ser lido no programa Modent.

O ambiente de trabalho do Modent permite a escolha de uma FRF gravada na diretoria do programa. Esta FRF é posteriormente analisada com o método de identificação modal Ident (figura 3.14) que é adequado para as estruturas cujo amortecimento se pode desprezar. A figura 3.15 ilustra todo o procedimento de regeneração, com a escolha de pontos de teste ou anti-ressonância (a vermelho) e pontos de ressonância (a azul). Após a escolha de todos os pontos necessários, o programa sobrepõe a curva teórica (a vermelho) na curva experimental (figura 3.16).

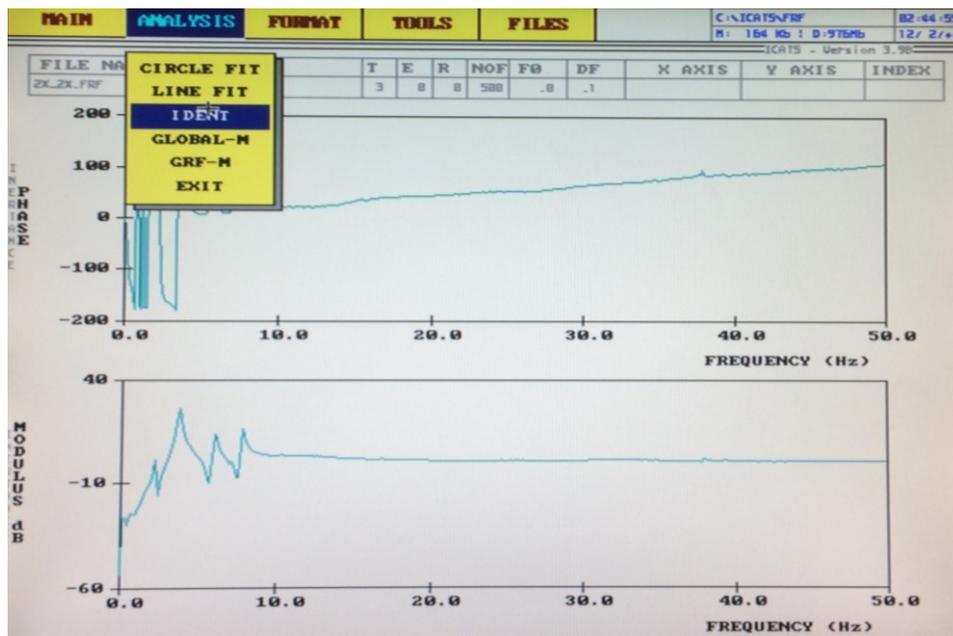


Figura 3.14- Escolha do método de identificação modal.

3. Identificação experimental de propriedades de corpo rígido

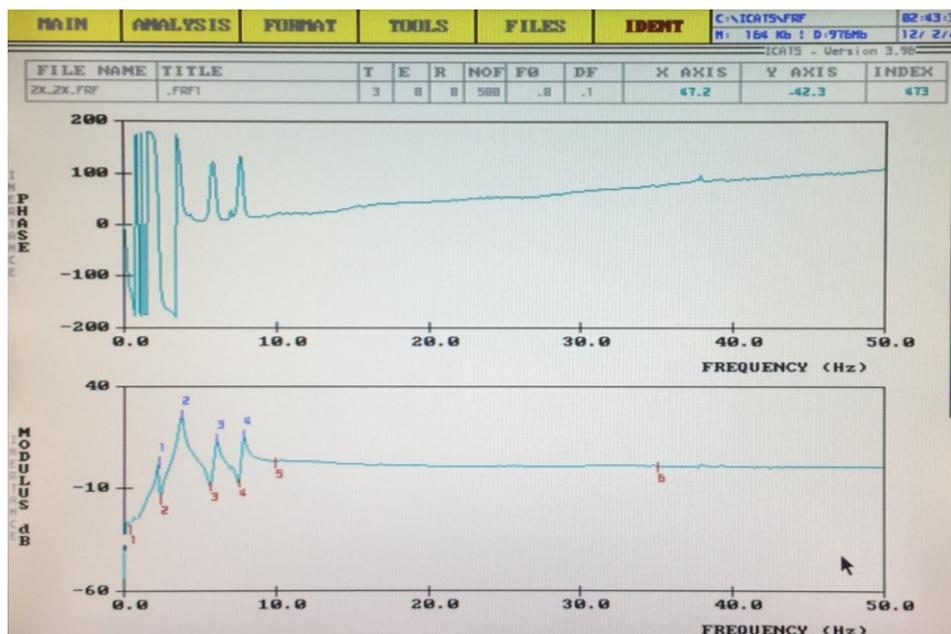


Figura 3.15- Procedimento de regeneração das FRF.

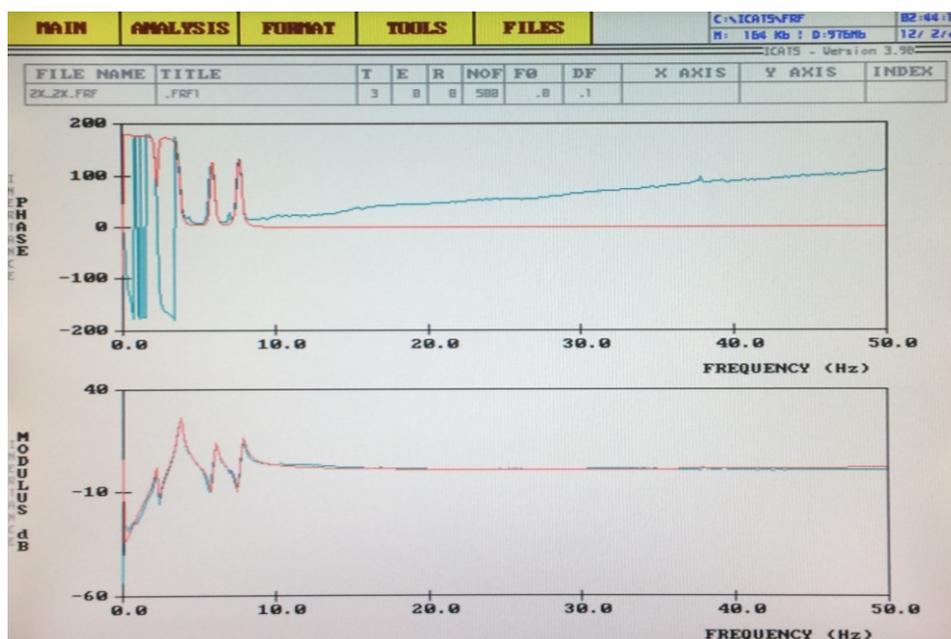


Figura 3.16- Curva teórica resultante da regeneração da FRF.

O *output* desejado é a obtenção da lista com as constantes modais (figura 3.17). Conforme é visível na figura 3.17, as constantes modais têm todas fase 0° ou 180° . Tal deve-se ao facto de se ter desprezado o amortecimento na estrutura. Como se ilustra na figura 3.16, os sensores MEMS apresentam fases mais instáveis que dificultaram o processo de identificação modal conforme será abordado mais à frente nas principais dificuldades sentidas neste estudo experimental.

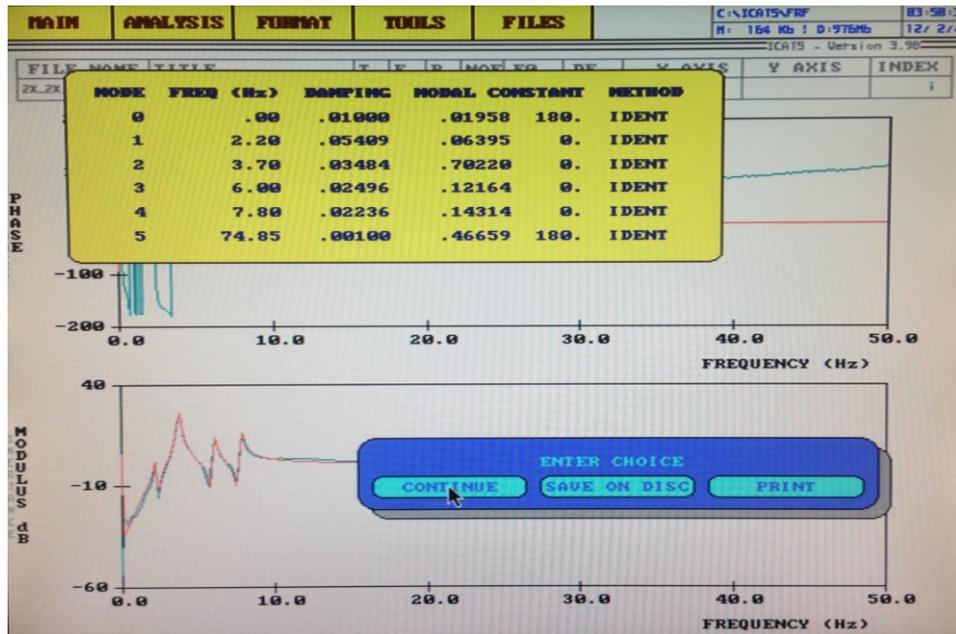


Figura 3.17- Lista modal com as constantes modais pretendidas.

3.4 Estudo experimental

O estudo experimental utiliza os Métodos Modais seguindo a metodologia inversa conforme esquematizado na figura 3.18.

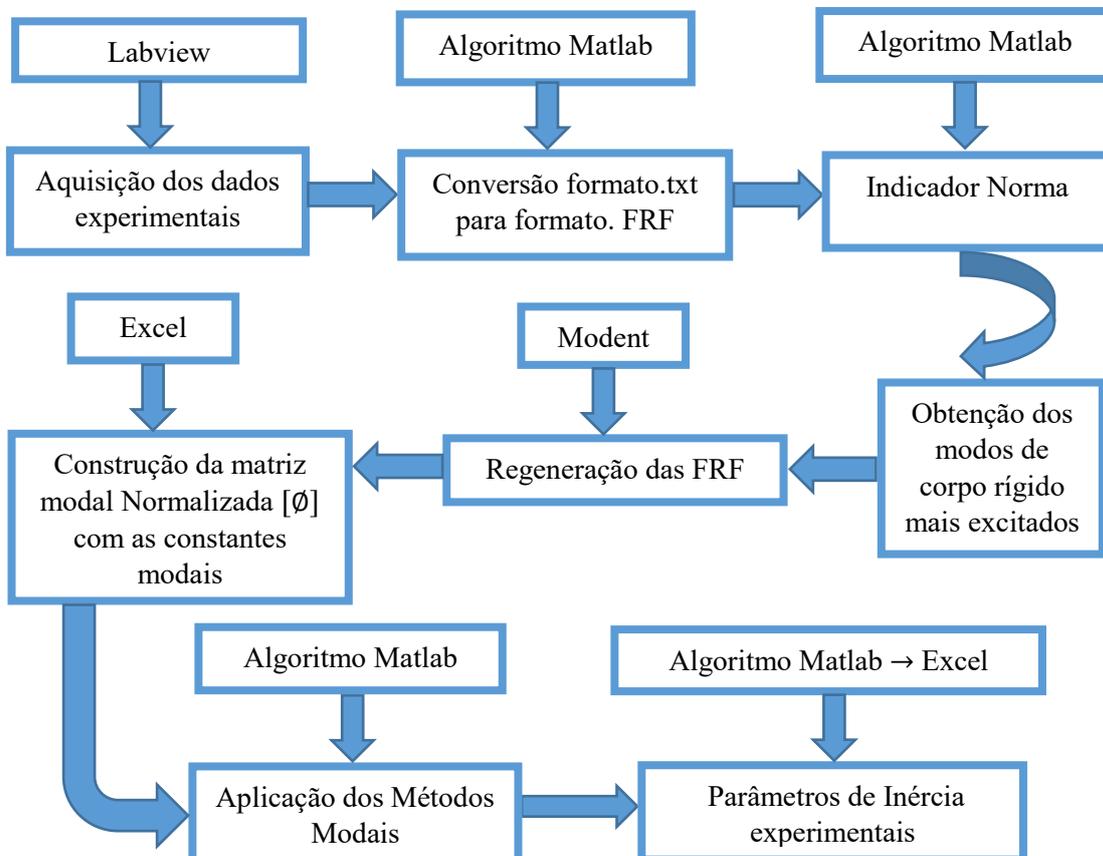


Figura 3.18- Esquema do procedimento da metodologia inversa.

3. Identificação experimental de propriedades de corpo rígido

Para aplicar esta metodologia, parte-se do conhecimento dos modos de corpo rígido, expressos nas respostas dinâmicas da estrutura (FRF), com a finalidade de obter os parâmetros de inércia do corpo rígido. Posteriormente, compara-se os parâmetros de inércia obtidos experimentalmente com os valores obtidos no software Solidworks, (página 42), calculando-se os respetivos erros.

Os processos de aquisição de dados, conversão de formato de ficheiro, regeneração das FRF já foram explicados previamente. Para calcular o Indicador Norma referido em 2.1.1 é utilizado um algoritmo Matlab resumido esquematicamente na figura 3.19. As constantes modais determinadas no Modent são colocadas no Excel, para construir a matriz modal $[\Phi]$ de acordo com a base teórica do capítulo 2. No mesmo capítulo, tem-se o modelo teórico do Método Modal original e do método modificado, sendo esses Métodos Modais programados num algoritmo Matlab, esquematizado na figura 3.20. Os parâmetros de inércia obtidos são escritos no mesmo ficheiro Excel acima referido, onde também são comparados com os valores teóricos.

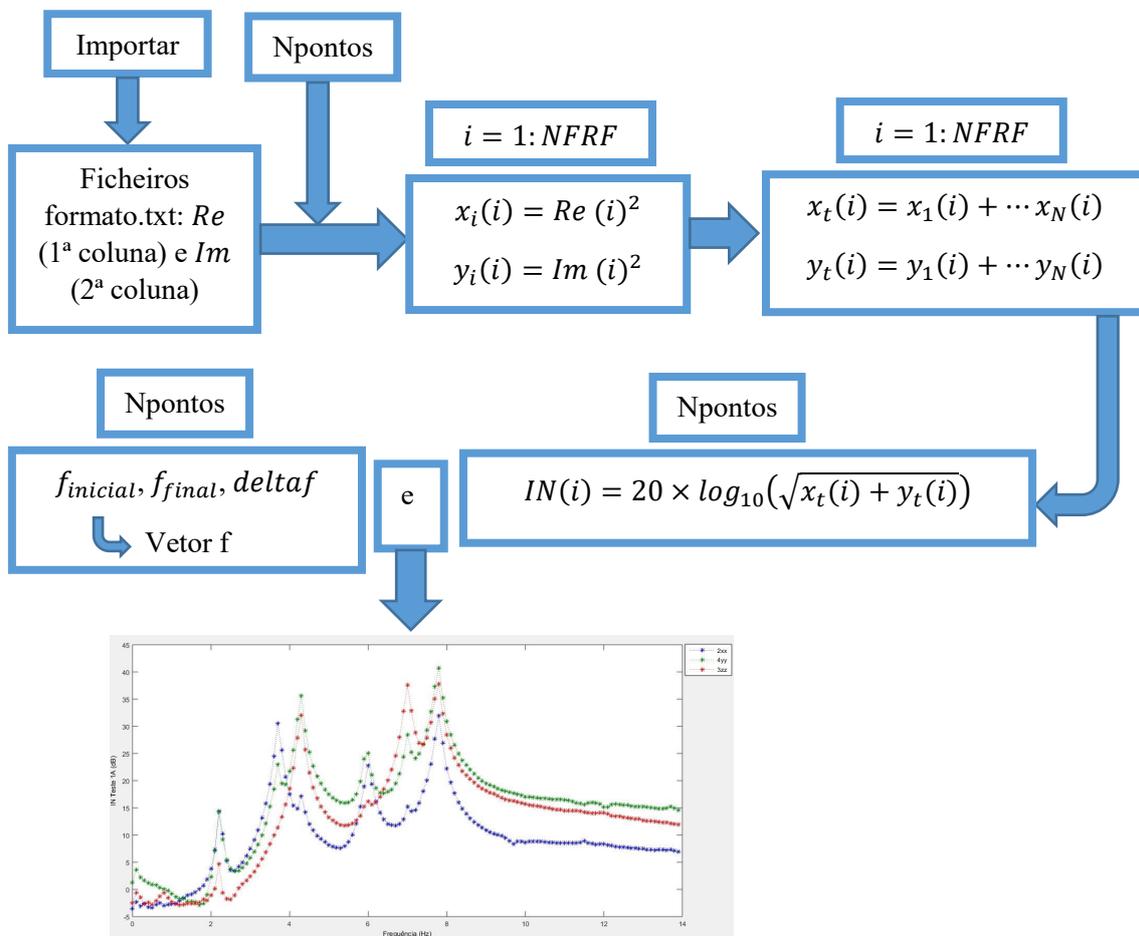


Figura 3.19- Esquema do algoritmo Matlab para determinar o Indicador Norma.

Onde $NFRF = 9$ para o método original com três pontos de medição triaxiais (translações) e $NFRF = 6$ para o método modificado com dois pontos de medição triaxial (translações e

rotações). Este procedimento esquematizado na figura 3.19 é realizado para cada força. Por teste aplica-se um conjunto de três forças conforme o estudo numérico previamente abordado.

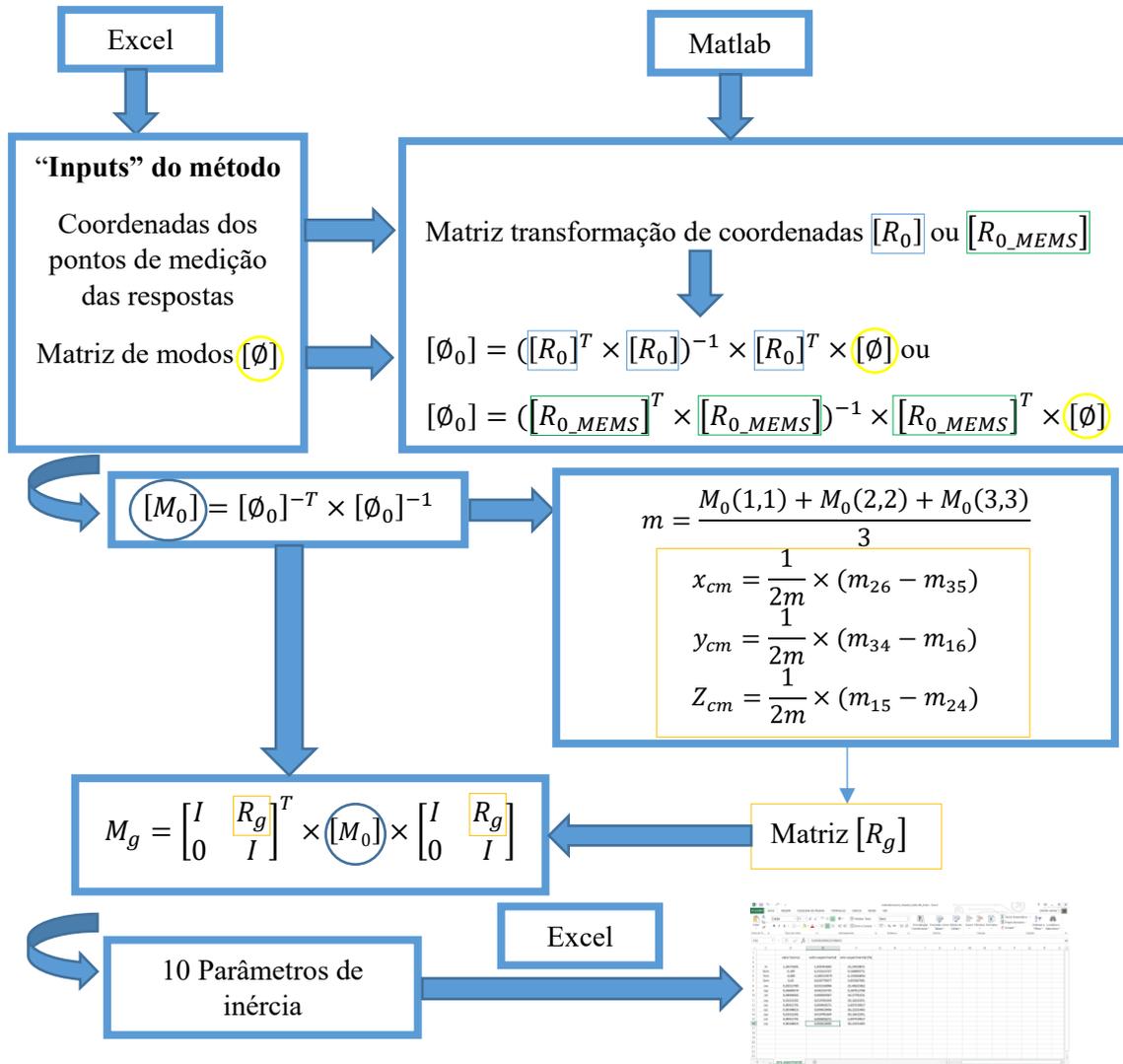


Figura 3.20- Esquema do algoritmo Matlab que aplica os Métodos Modais.

Onde $[R_0]$ é utilizada para o método original e $[R_{0_MEMS}]$ para o método modificado.

3.4.1 MEMS triaxiais

Nesta primeira fase dos testes experimentais, mediu-se as respostas dinâmicas da estrutura em três pontos onde estavam localizados três sensores MEMS triaxiais.

Sabe-se as melhores condições em termos de aplicação de forças e medição das respostas para uma boa obtenção dos parâmetros de inércia, pois de acordo com [34] é necessário medir a resposta em pelo menos três pontos, sendo a melhor posição desses pontos aquela em que estes formam um triângulo regular. É igualmente importante lembrar que de acordo com [36] é necessário aplicar no mínimo três forças por cada conjunto de forças em que se garanta pelo

3. Identificação experimental de propriedades de corpo rígido

menos a medição de uma FRF direta. Com base nestes dois pressupostos optou-se pelos testes experimentais esquematizados na figura 3.21.

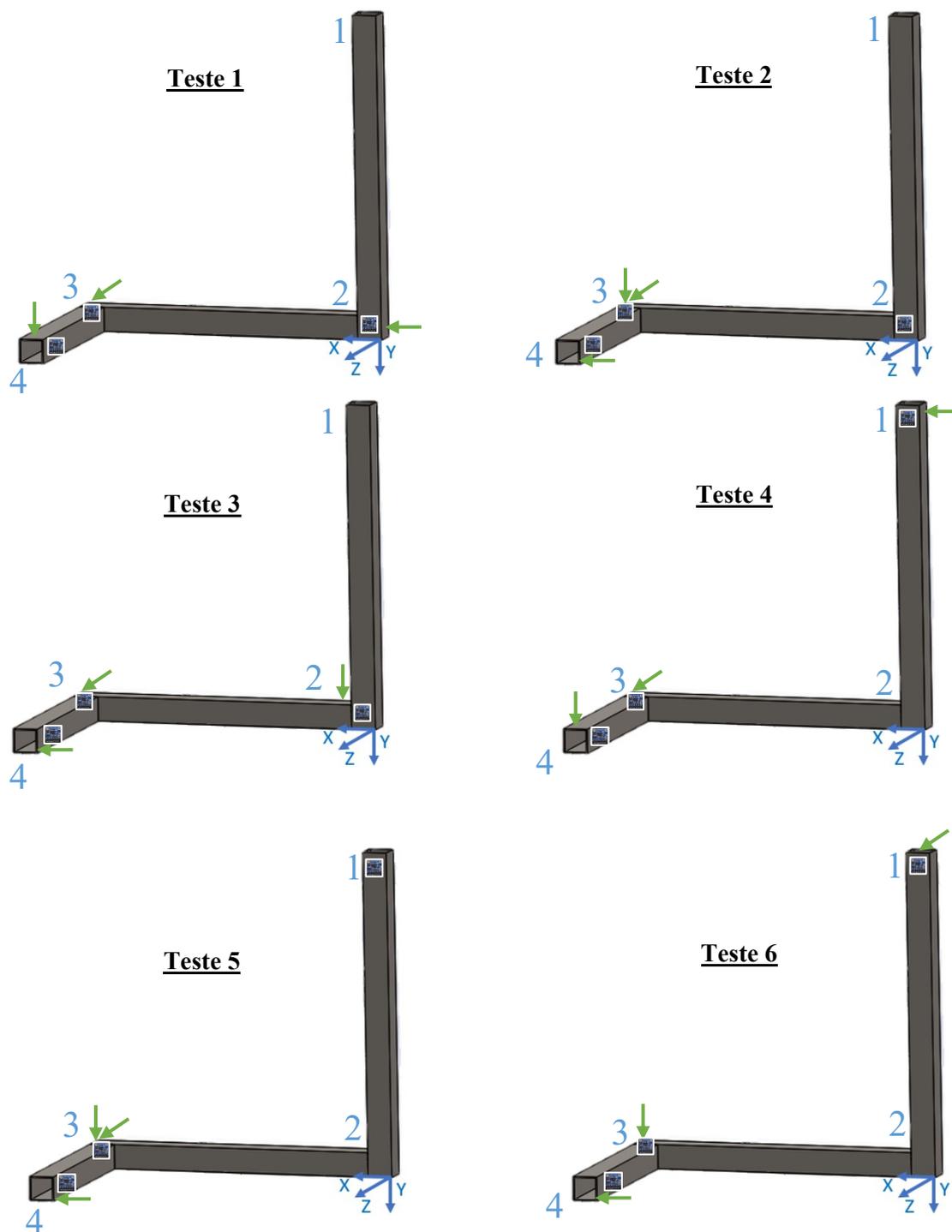


Figura 3.21- Esquematização dos testes experimentais.

De modo a facilitar a interpretação dos esquemas da figura 3.21, apresenta-se a tabela 3.4 referente aos pontos de medição de resposta e a tabela 3.5 referente aos conjuntos de forças aplicados.

3. Identificação experimental de propriedades de corpo rígido

Tabela 3.4- Pontos de medição de resposta.

Teste experimental	Pontos de medição de resposta
1,2,3	2
	3
	4
4,5,6	1
	3
	4

Tabela 3.5- Conjuntos de forças aplicados.

Teste experimental	Pontos de aplicação da força	Direção	Sentido
1	2	xx	+
	4	yy	+
	3	zz	+
2	4	xx	+
	3	yy	+
	3	zz	+
3	4	xx	+
	2	yy	+
	3	zz	+
4	1	xx	+
	4	yy	+
	3	zz	+
5	4	xx	+
	3	yy	+
	3	zz	+
6	4	xx	+
	3	yy	+
	1	zz	+

Os dados experimentais para aplicação dos Métodos Modais são as respostas dinâmicas da estrutura, ou seja, as FRF de aceleração já referidas anteriormente. Nas figuras 3.22 e 3.23 apresenta-se duas FRF, provenientes dos testes acima esquematizados, e prontas a ser analisadas no Modent. Na figura 3.22 tem-se uma FRF direta (medição na mesma direção e ponto de aplicação da força) e na figura 3.23 tem-se uma FRF indireta (medição num ponto e/ou direção diferente da aplicação da força). As FRF são mencionadas por resposta_força.

3. Identificação experimental de propriedades de corpo rígido

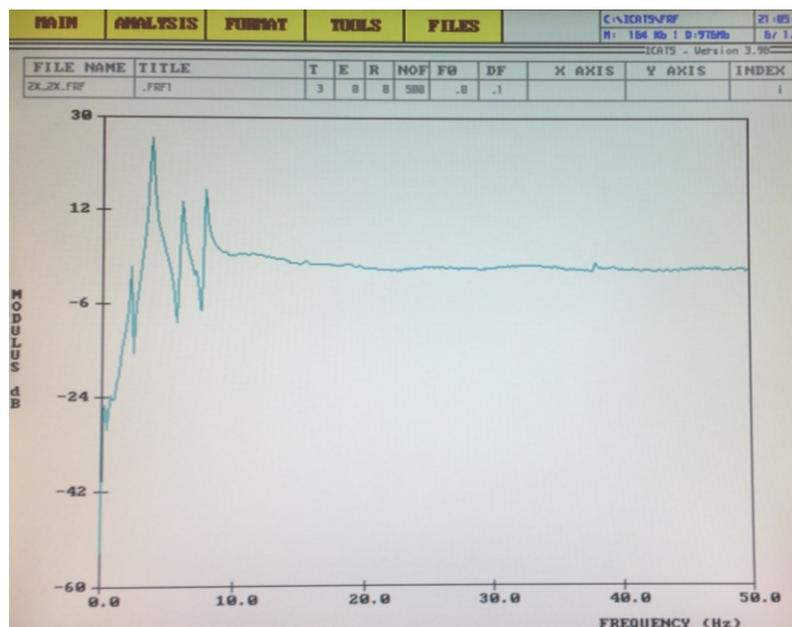


Figura 3.22- FRF direta (2x_2x).

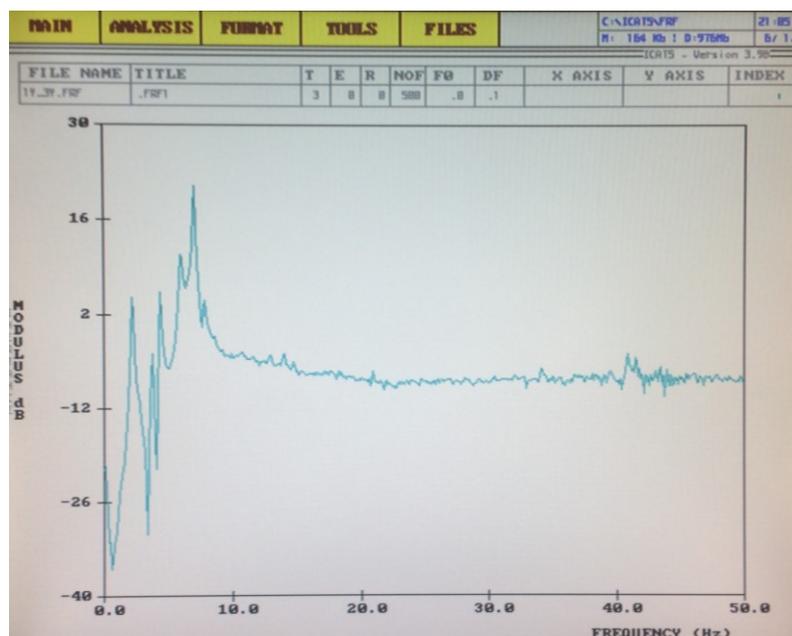


Figura 3.23- FRF indireta (1x_3y).

Conforme se ilustra nas FRF, os modos de corpo rígido excitados encontram-se bem identificados e com as frequências naturais bem separadas. Como tal, o posterior processo de identificação modal no programa Modent é facilitado. O cumprimento deste requisito é muito importante na aplicação dos Métodos Modais, tal como referido no estudo numérico. Além disso, as FRF obtidas através dos sensores MEMS triaxiais, na generalidade apresentam pouco ruído, sendo este outro aspeto vantajoso.

Tem-se então os resultados obtidos dos parâmetros de inércia (figuras 3.24, 3.25, 3.26, 3.27), para os seis testes, em variação percentual entre os valores experimentais obtidos com os

3. Identificação experimental de propriedades de corpo rígido

valores teóricos do corpo rígido caracterizado em 3.1. Estes resultados são os valores médios de cinco ensaios realizados por teste, encontrando-se tabelados no anexo I.



Figura 3.24- Variação experimental da massa.

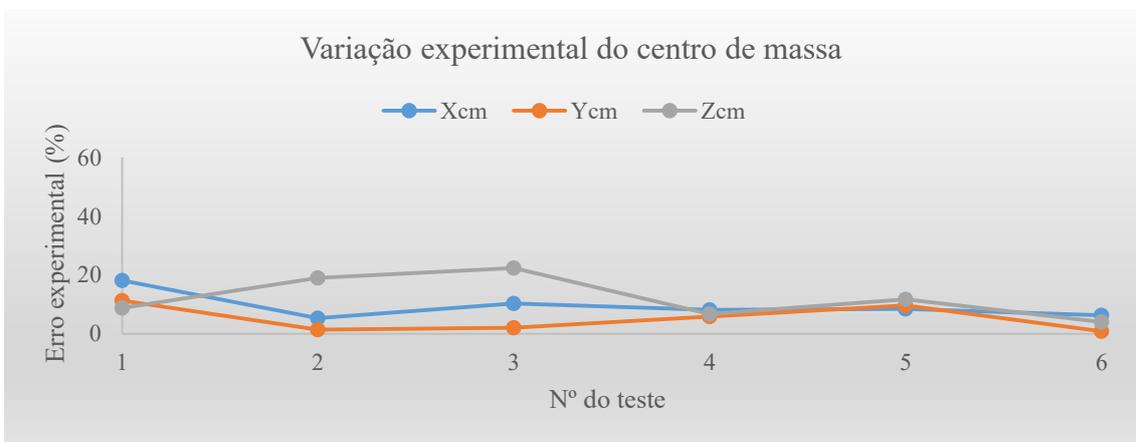


Figura 3.25- Variação experimental do centro de massa.

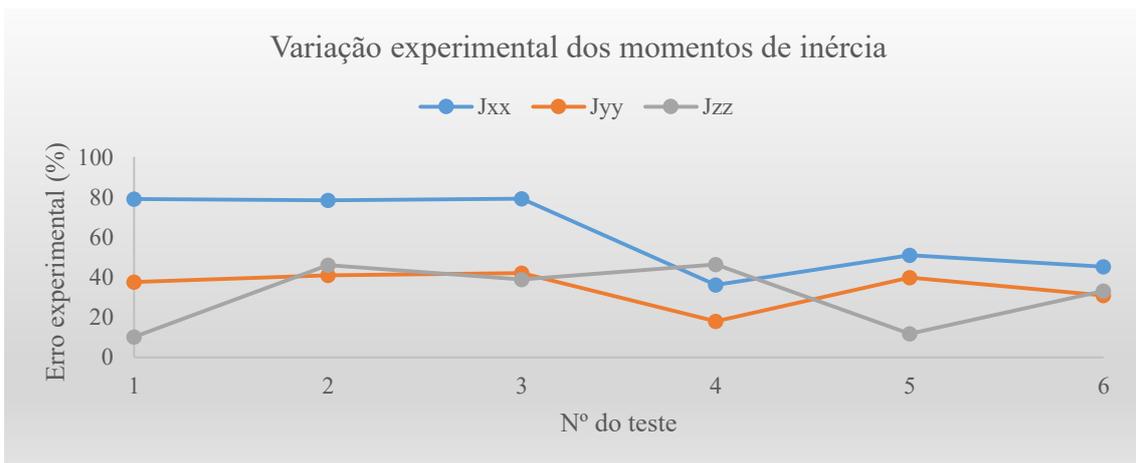


Figura 3.26- Variação experimental dos momentos de inércia.

3. Identificação experimental de propriedades de corpo rígido

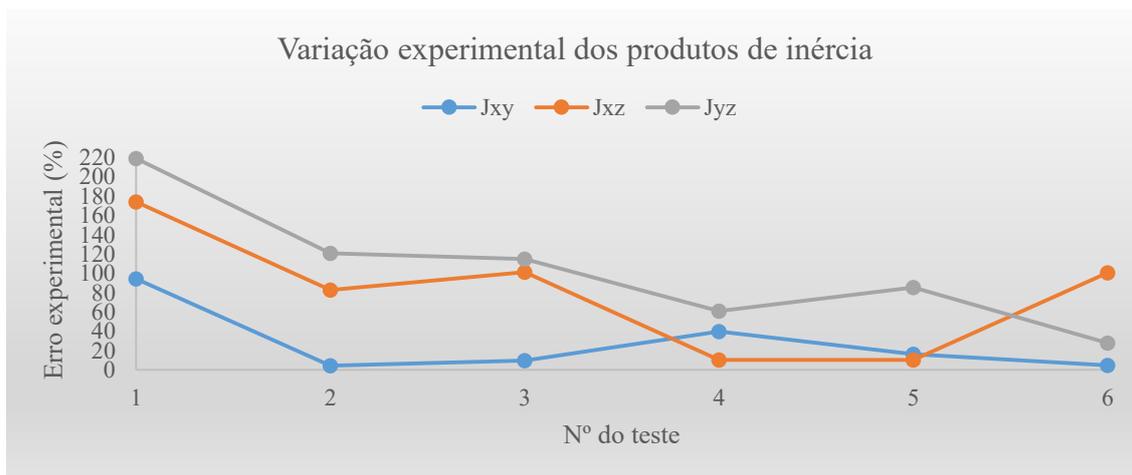


Figura 3.27- Variação experimental dos produtos de inércia.

No gráfico da figura 3.28 tem-se a média do erro experimental obtido nos testes experimentais para cada parâmetro de inércia.

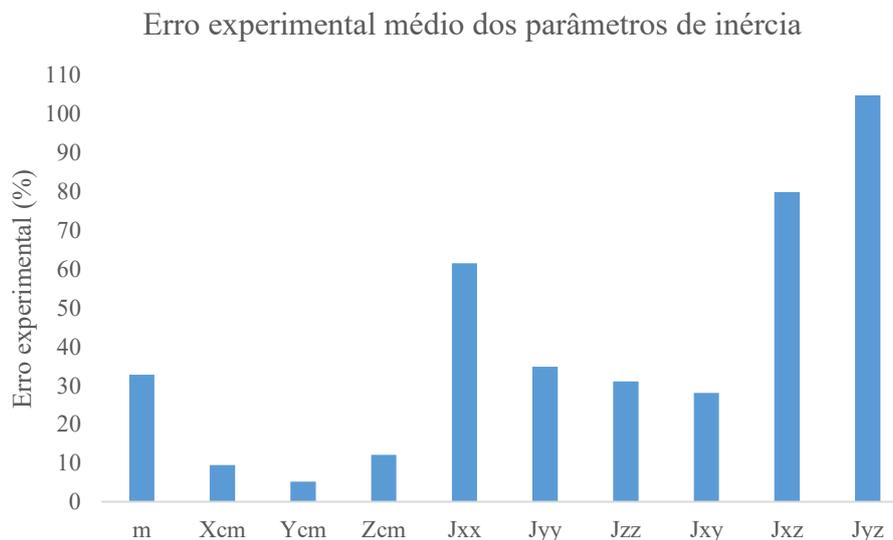


Figura 3.28- Erro experimental médio dos parâmetros de inércia.

Os resultados obtidos nos seis testes experimentais foram muito consistentes conforme se pode observar nas figuras 3.29, 3.30 e 3.31 onde se ilustra para o teste 4 a variação dos valores experimentais obtidos para os cinco ensaios em relação ao valor médio. Esta variação encontra-se assinalada nos seguintes gráficos.

3. Identificação experimental de propriedades de corpo rígido

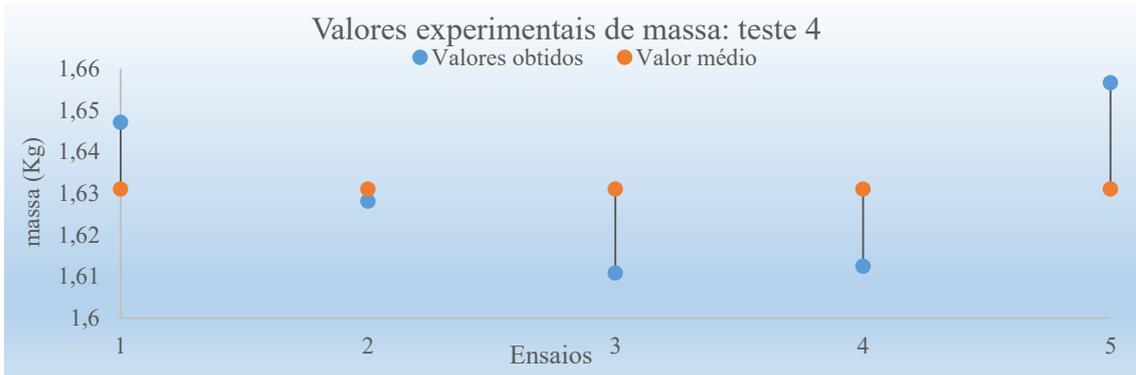


Figura 3.29- Valores experimentais de massa: teste 4.

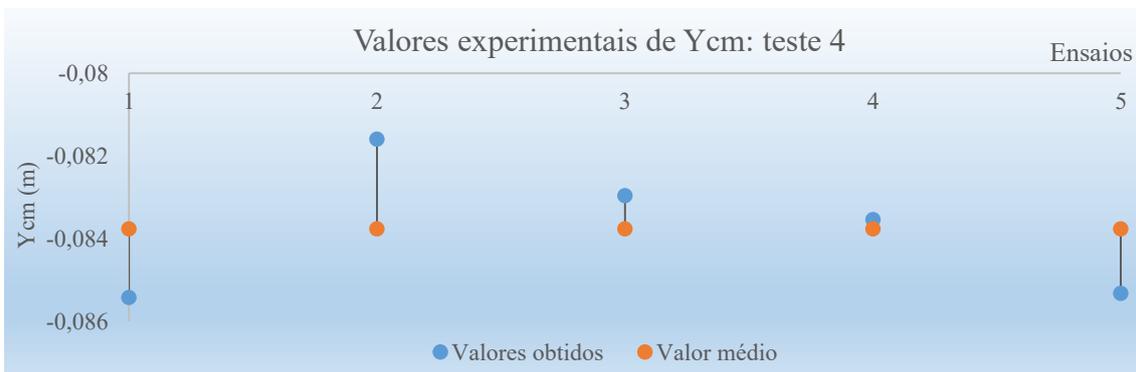
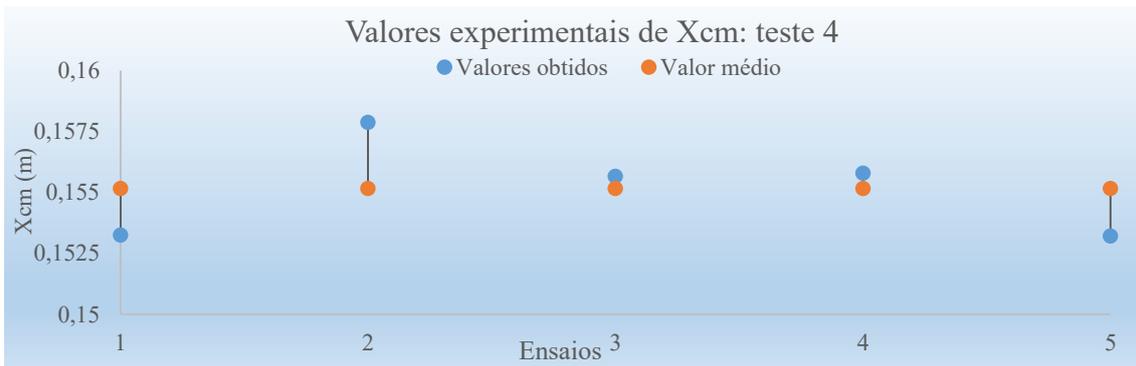
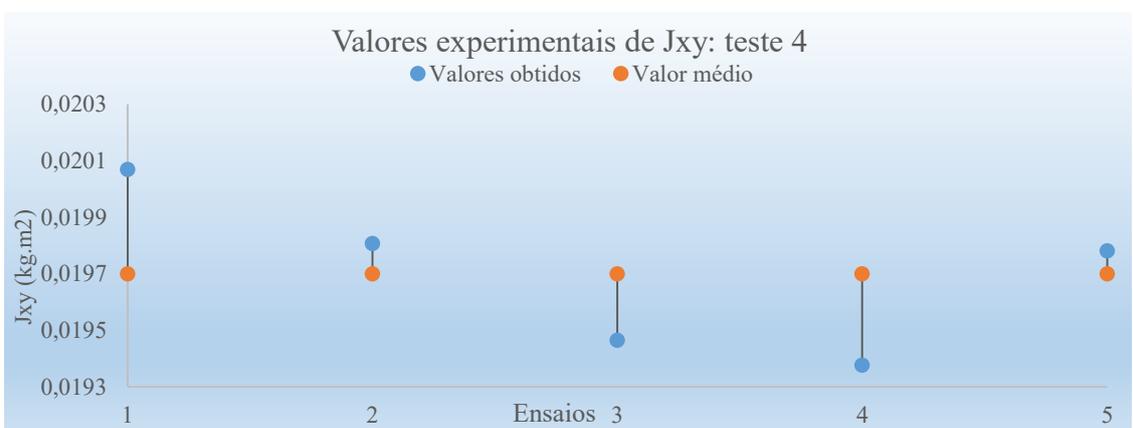
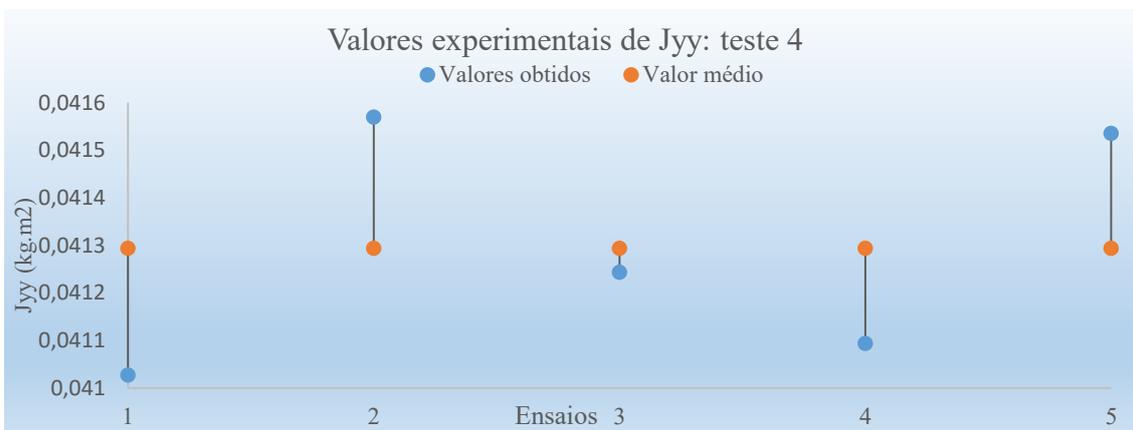
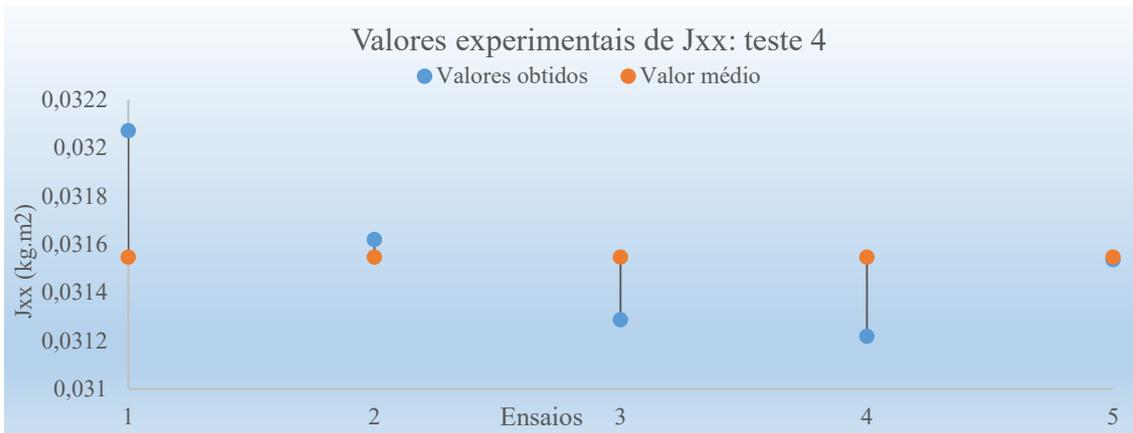


Figura 3.30- Valores experimentais do centro de massa: teste 4.

3. Identificação experimental de propriedades de corpo rígido



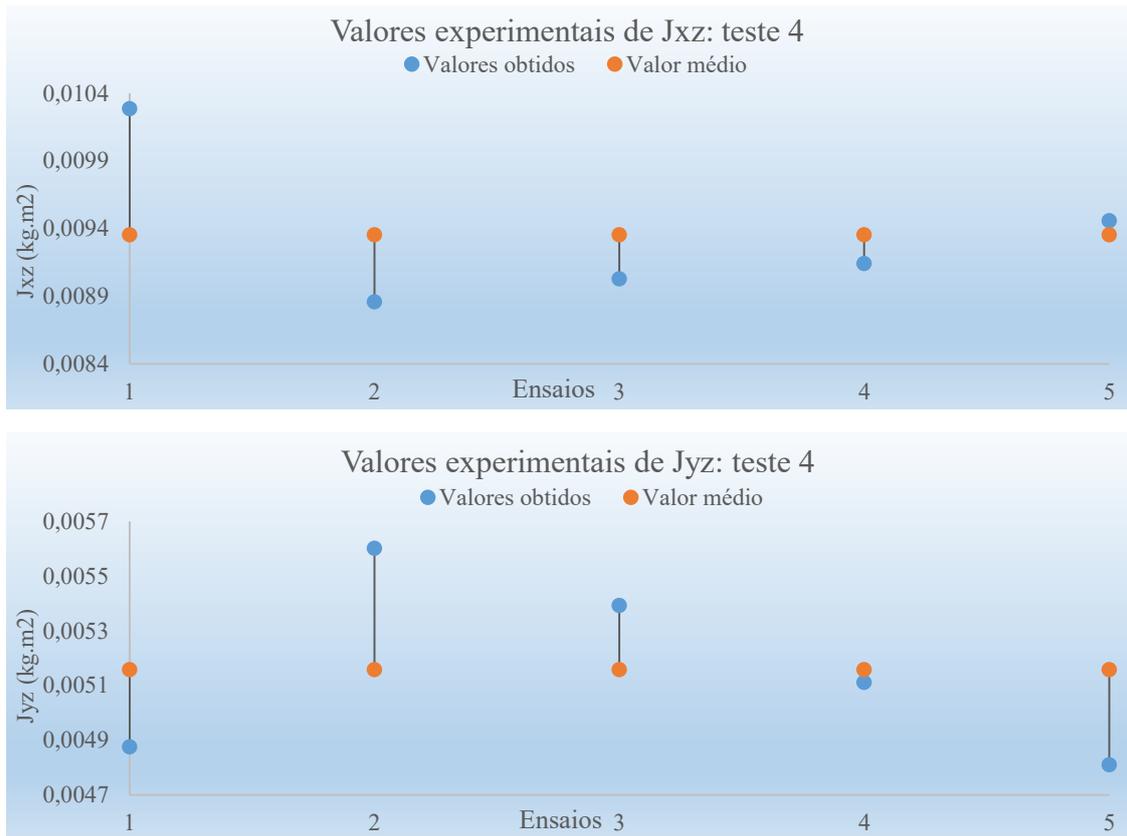


Figura 3.31- Valores experimentais dos momentos e produtos de inércia: teste 4.

3.4.2 MEMS triaxiais e MEMS giroscópios

Numa segunda fase de testes experimentais, inclui-se os sensores MEMS giroscópios. As condições dos testes experimentais seguem exatamente os pressupostos de aplicação de forças já revistos em 2.3.4 e de medição das respostas revistos em 2.3.5. Ou seja, mediu-se as respostas dinâmicas da estrutura em três pontos de medição de resposta, onde inseriu-se um sensor MEMS triaxial e dois sensores MEMS giroscópios nas mesmas posições que no estudo numérico já abordado. Neste estudo experimental, para o mesmo teste utilizou-se três referenciais de origem diferentes (figura 3.32), retirando daí conclusões importantes que serão abordadas mais à frente.

3. Identificação experimental de propriedades de corpo rígido

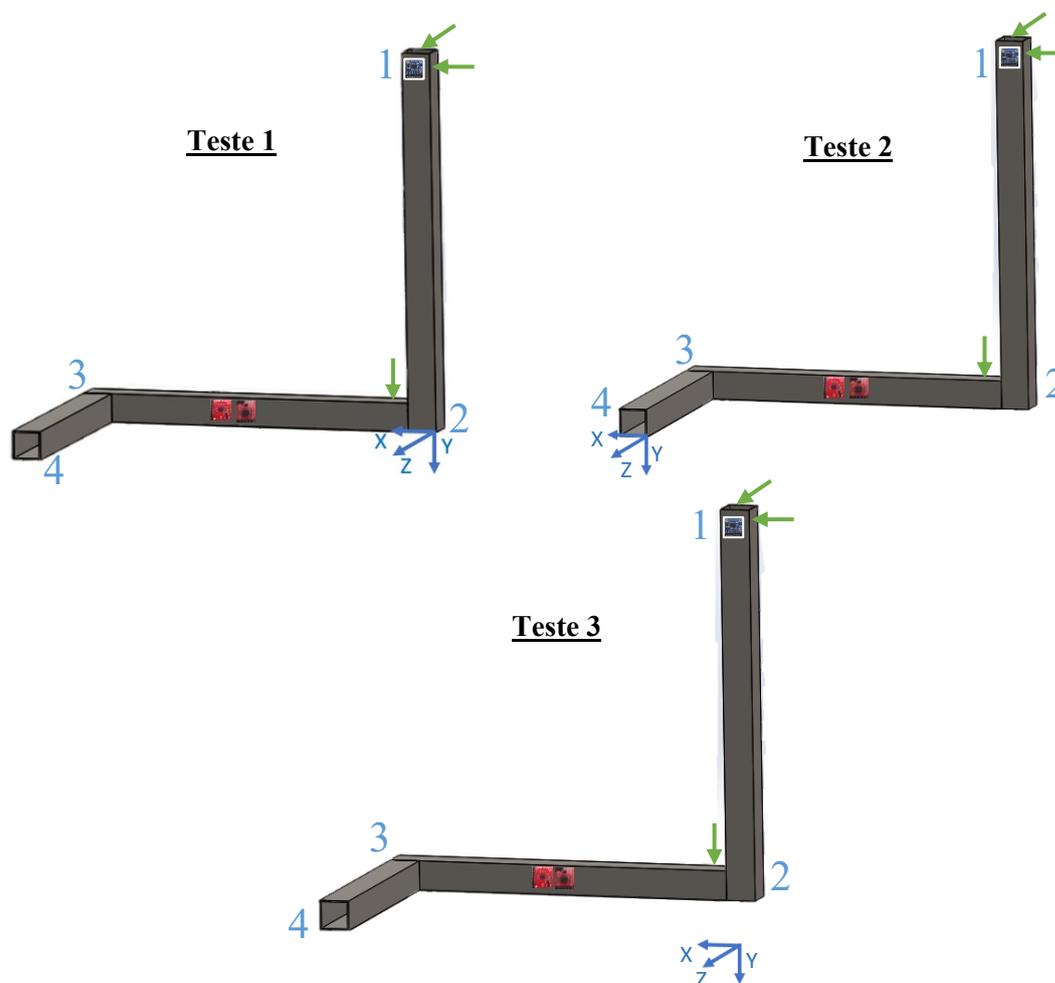


Figura 3.32- Esquematização dos testes experimentais.

De modo a facilitar a interpretação dos esquemas da figura 3.32, apresenta-se a tabela 3.6 referente ao conjunto de forças aplicado.

Tabela 3.6- Conjunto de forças aplicado.

Forças	Pontos de referência	Direção	Sentido
Conjunto 1	1	xx	+
	1	zz	+
	2	yy	+

Um dos principais destaques deste trabalho é a obtenção de medições diretas de rotação através de sensores MEMS giroscópios. Nas figuras 3.33 a 3.35 apresentam-se respostas angulares provenientes dos testes acima esquematizados para as direções x, y, z . As FRF são mencionadas por resposta_força.

3. Identificação experimental de propriedades de corpo rígido

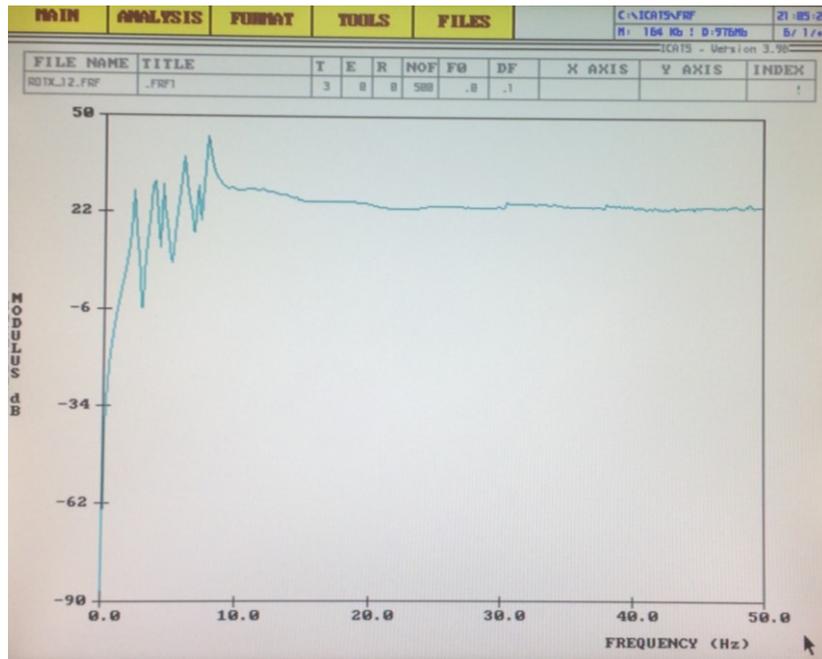


Figura 3.33- FRF Rot x_Iz.

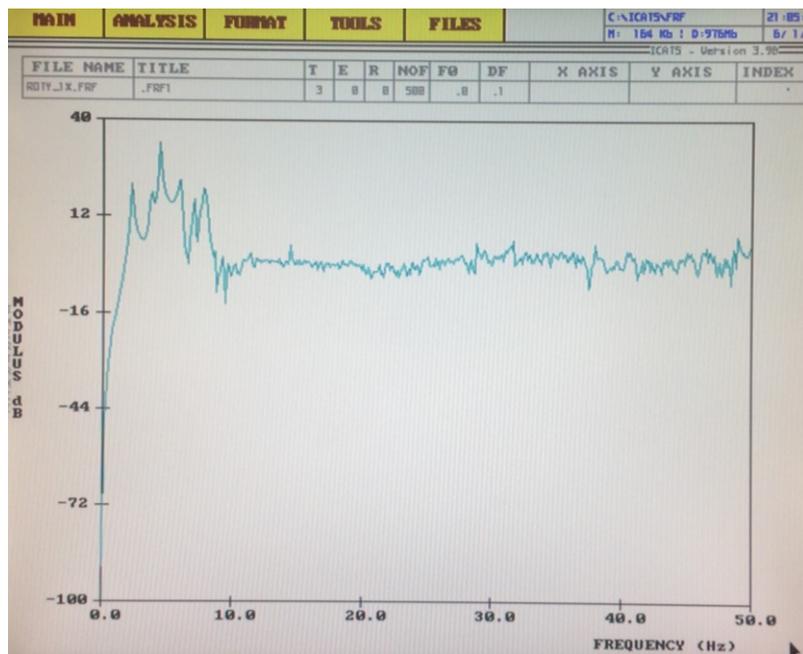


Figura 3.34- FRF Rot y_Ix.

3. Identificação experimental de propriedades de corpo rígido

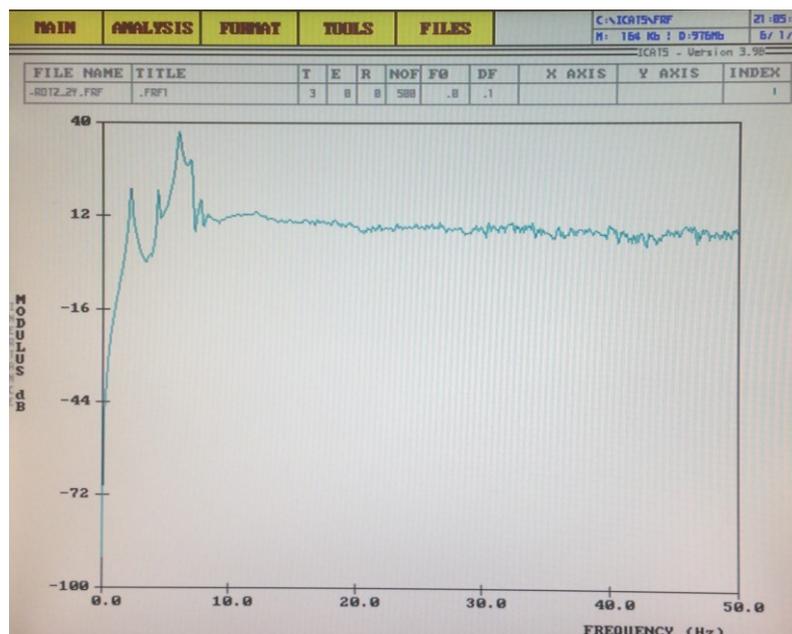


Figura 3.35- FRF -Rotz _2y.

Tal como nas respostas dinâmicas de translação, os modos de corpo rígido excitados estão bem identificados. Contudo há o aparecimento de algum ruído nas FRF devido a problemas na fase dos sensores MEMS giroscópios, que serão abordados mais à frente.

Tem-se então os resultados obtidos dos parâmetros de inércia (figuras 3.36 a 3.38), para os três testes, em variação percentual entre os valores experimentais obtidos com os valores teóricos do corpo rígido caracterizado em 3.1. Estes resultados são os valores médios de cinco ensaios realizados por teste, encontrando-se tabelados no anexo I.

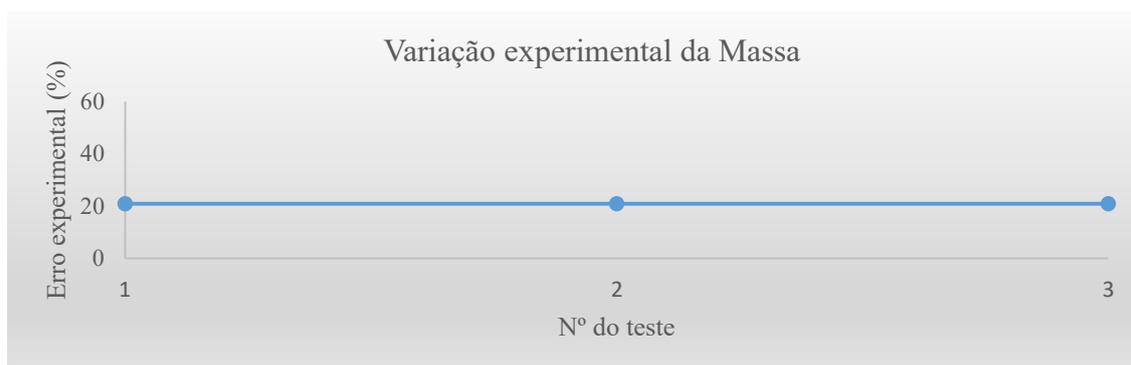


Figura 3.36- Variação experimental da massa.

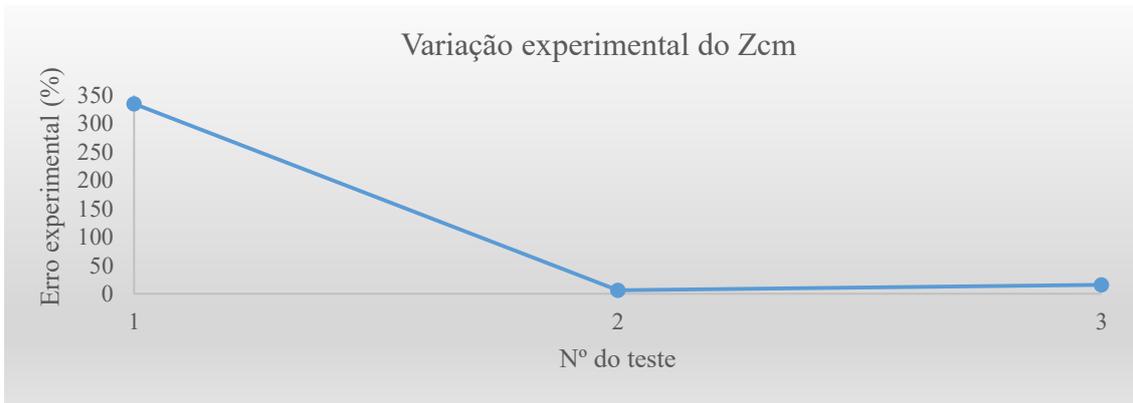
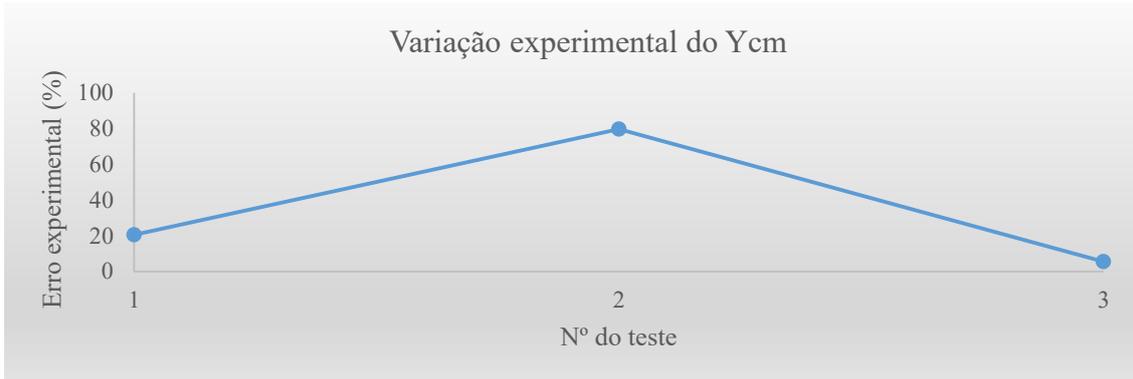
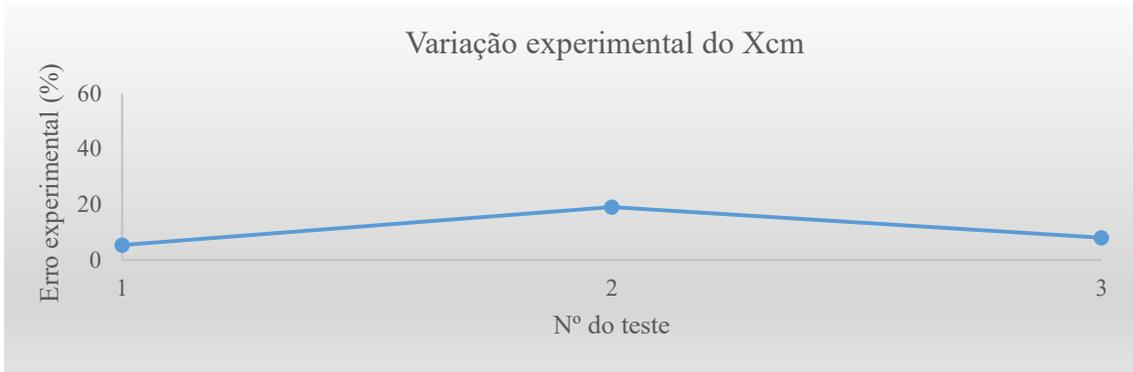


Figura 3.37- Variação experimental do centro de massa.

3. Identificação experimental de propriedades de corpo rígido

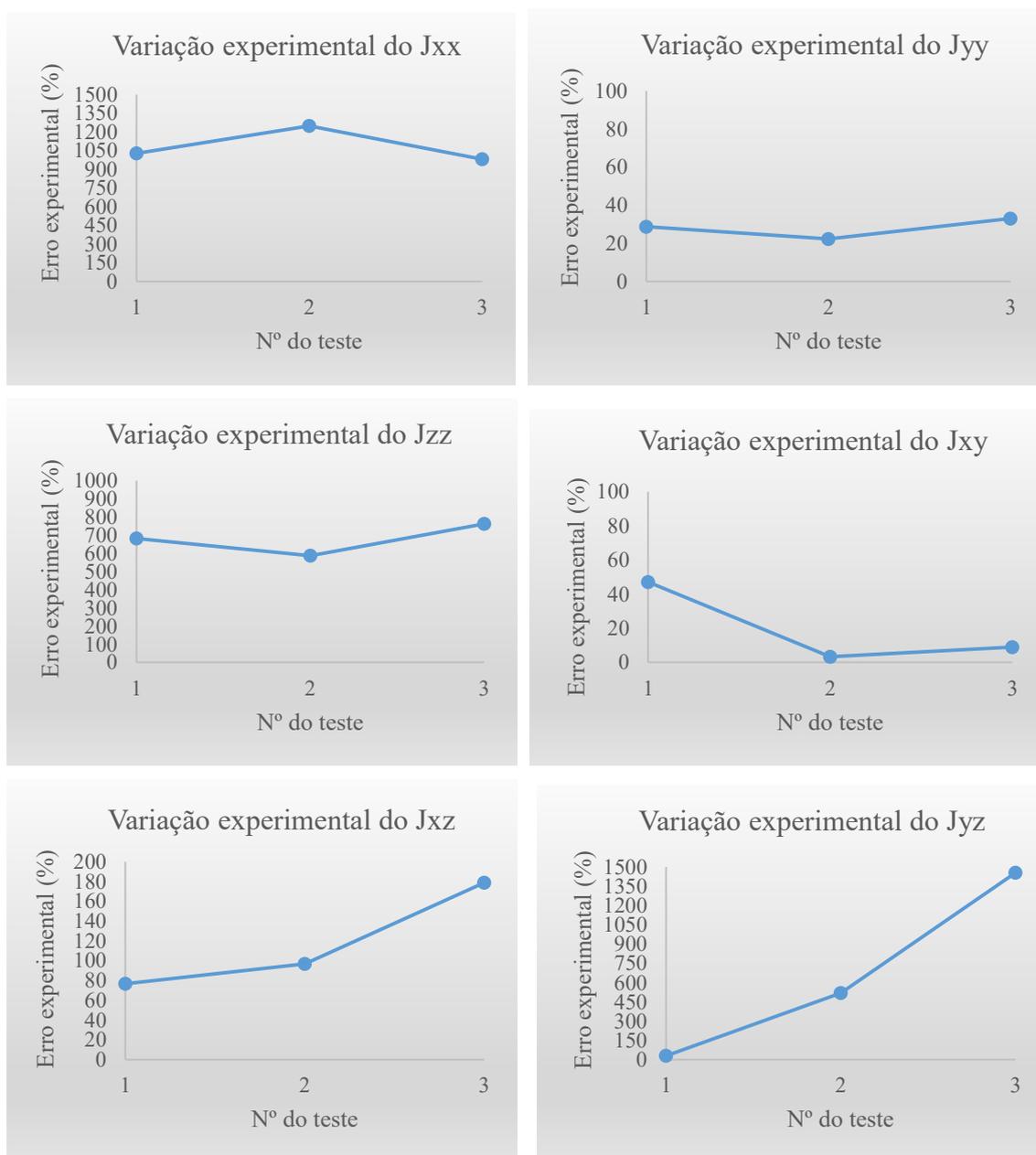


Figura 3.38- Variação experimental dos momentos e produtos de inércia.

No gráfico da figura 3.39 tem-se a média do erro experimental obtido nos testes experimentais para cada parâmetro de inércia na primeira fase de testes (3.4.1) e para esta segunda fase de testes (3.4.2) mantendo o mesmo referencial (teste 1).

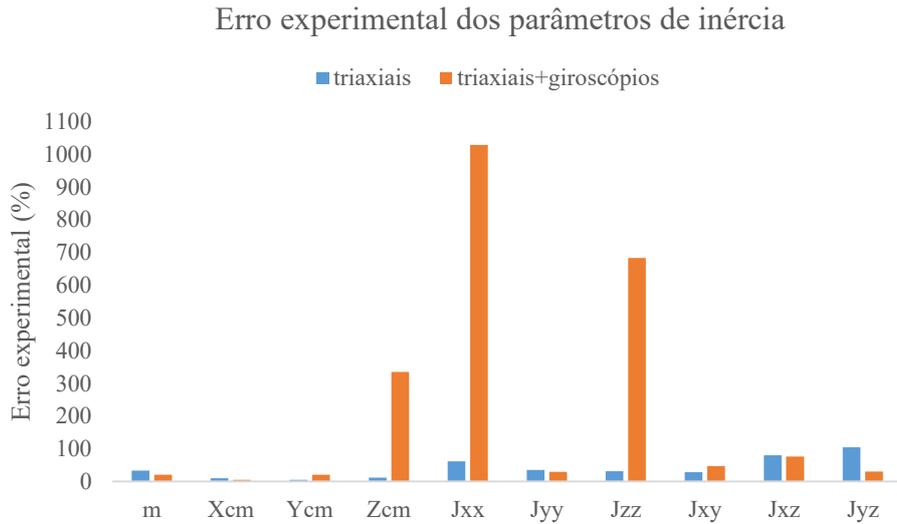


Figura 3.39- Erro experimental médio dos parâmetros de inércia: MEMS triaxiais vs MEMS triaxiais + MEMS giroscópios.

Os resultados obtidos nos três testes experimentais não foram tão consistentes conforme se pode observar nas figuras 3.40 a 3.42, onde se ilustra para o teste 1 a variação dos valores experimentais obtidos para os cinco ensaios em relação ao valor médio. Esta variação encontra-se assinalada nos seguintes gráficos.

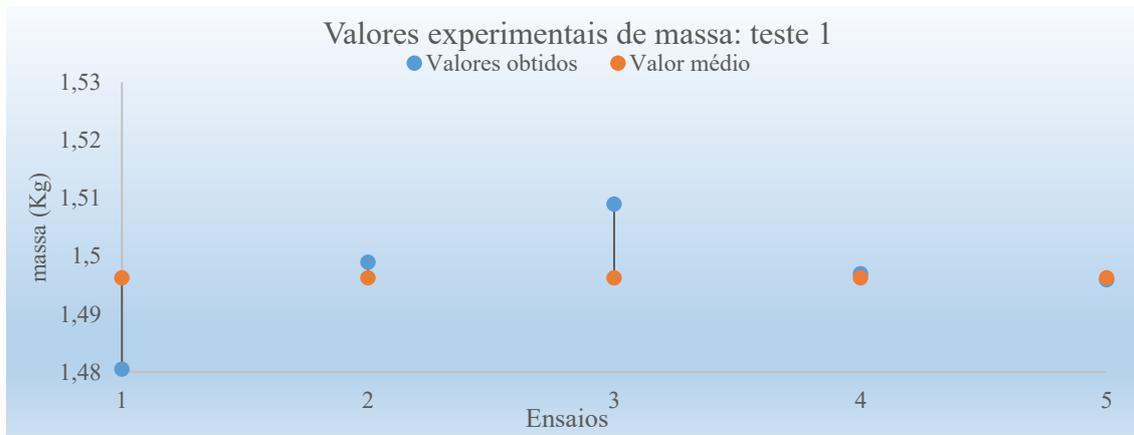
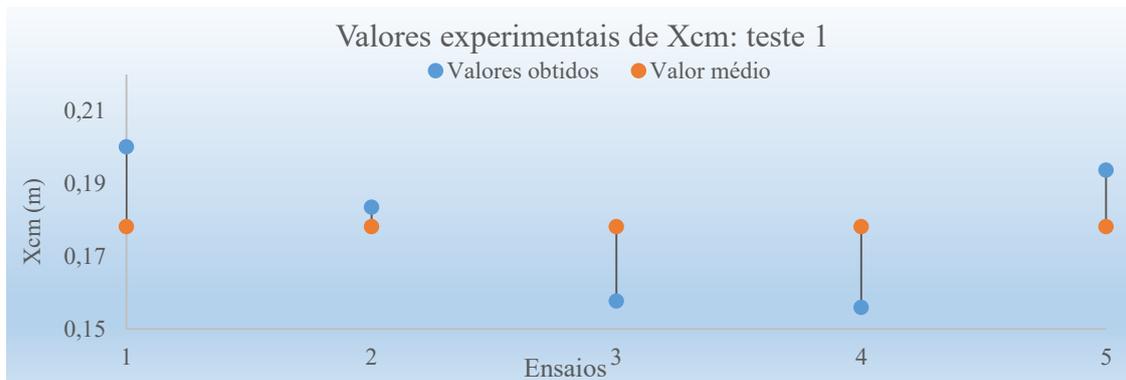


Figura 3.40- Valores experimentais de massa: teste 1.



3. Identificação experimental de propriedades de corpo rígido

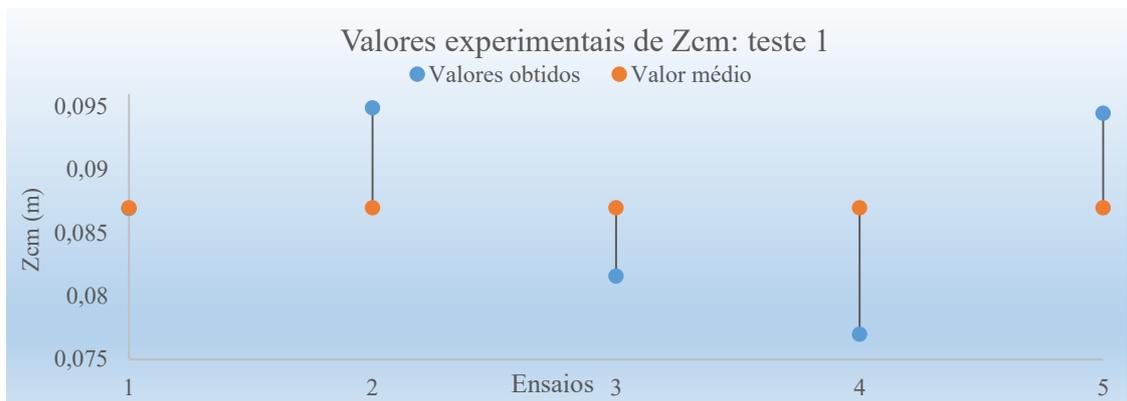
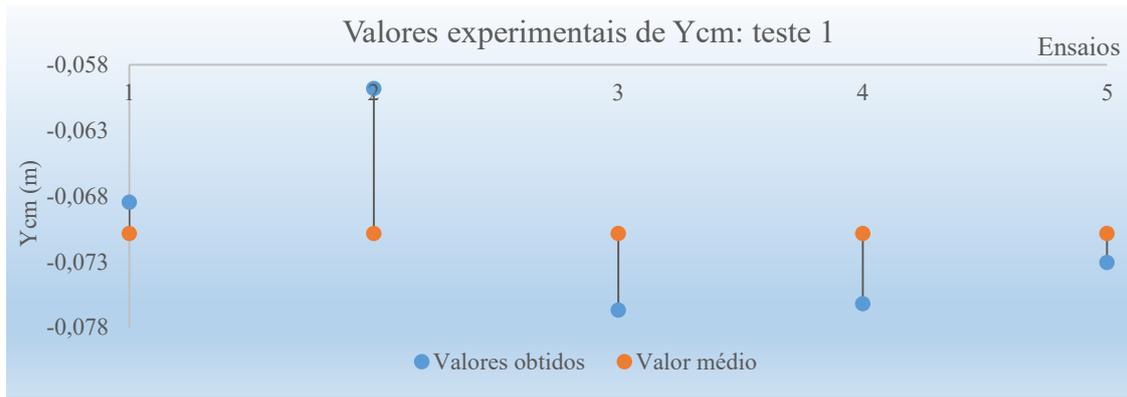
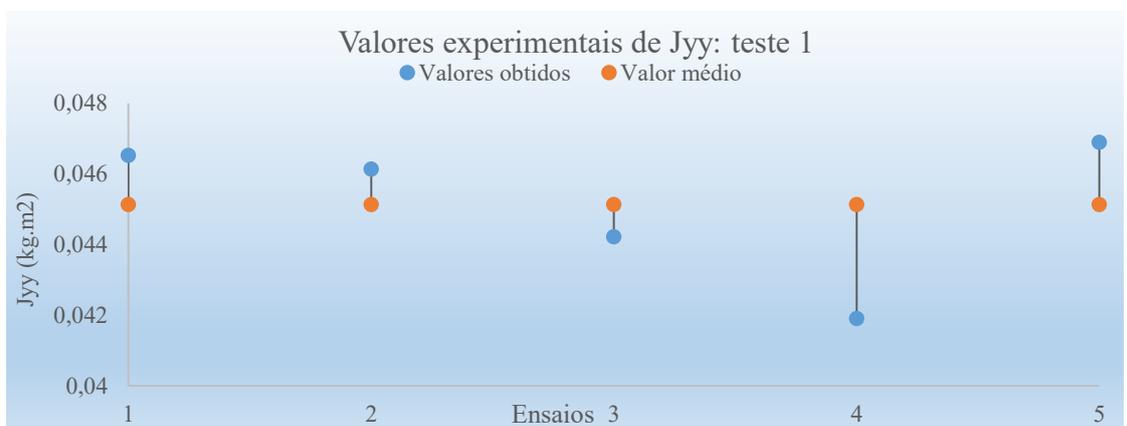
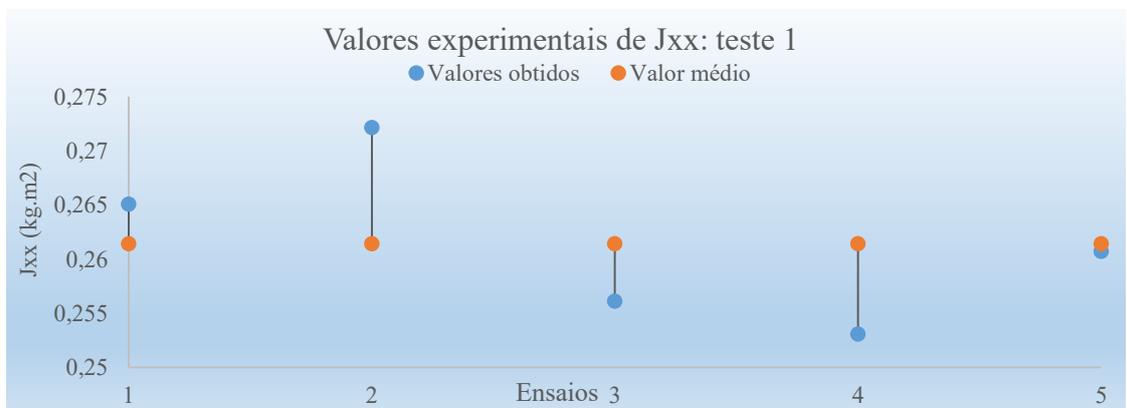


Figura 3.41- Valores experimentais do centro de massa: teste 1.



3. Identificação experimental de propriedades de corpo rígido

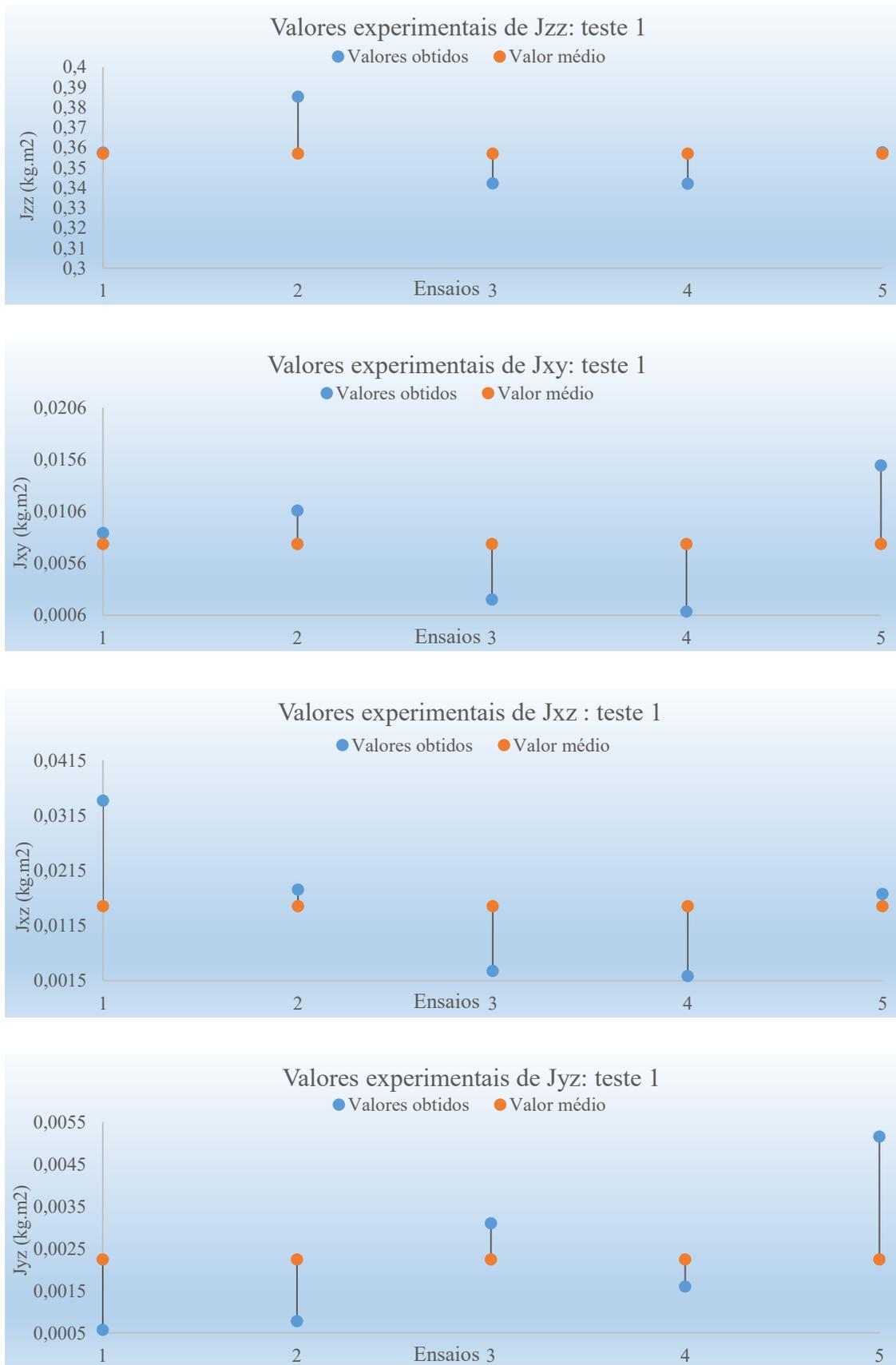


Figura 3.42- Valores experimentais dos momentos e produtos de inércia: teste 1.

3.5 Principais dificuldades sentidas e discussão dos resultados

Em 3.5 os resultados experimentais apresentados em 3.4.1 e 3.4.2 são analisados e discutidos. Inicialmente são referidas as principais dificuldades sentidas no estudo experimental originando alguns erros experimentais que prejudicaram os resultados obtidos. Posteriormente, comentam-se os resultados, retirando importantes conclusões sobre este estudo.

3.5.1 Principais dificuldades sentidas

- **Como identificar com clareza os seis modos de corpo rígido**

Inicialmente a estrutura encontrava-se suspensa em molas ligadas a fio Nylon unifilar e correntes de aço (figura 3.43). Conforme é visível na figura 3.43, envolveu-se as correntes com esferovite (preso com o fio de Nylon), para amortecer a vibração destas e evitar a contaminação com modos indesejáveis. Contudo, tal veio provocar duas consequências: a atenuação dos modos de corpo rígido, com o aparecimento de amortecimento, bem como o aparecimento do fenómeno de batimento em algumas molas. Ou seja, a frequência natural de vibração das molas era aproximadamente igual à frequência natural de alguns modos de corpo rígido. Tal provocou o aparecimento de modos duplos que dificultam a identificação clara dos modos de corpo. Na figura 3.44 tem-se o Indicador Norma de um teste realizado, onde se vê que na gama de frequência onde era expectável identificar os seis modos de corpo rígido, através de seis ressonâncias, há o aparecimento de ressonâncias indesejáveis.



Figura 3.43- Suspensão inicial com fio Nylon unifilar e correntes de aço.

3. Identificação experimental de propriedades de corpo rígido

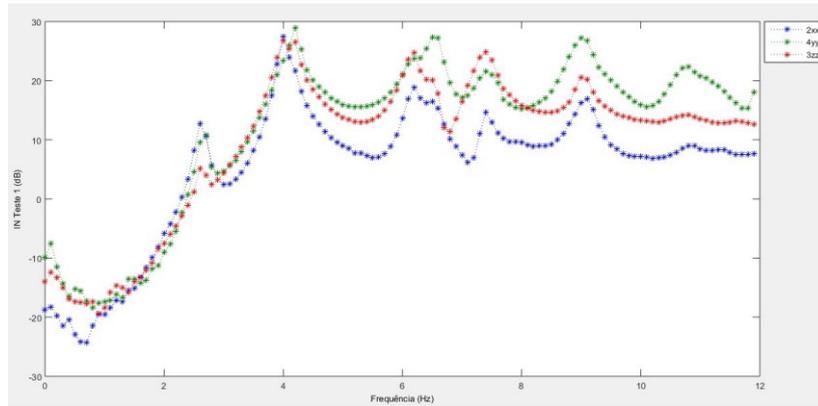


Figura 3.44- Indicador Norma: MEMS triaxiais, teste 1, suspensão inicial.

Para resolver este problema, e tendo por base o algoritmo do Indicador Norma esquematizado anteriormente, criou-se um indicador que para uma dada força permite verificar o nível de excitação que esta provoca em cada direção coordenada x, y, z . Assim, procurou-se detetar ressonâncias em comum a x, y, z que pudessem corresponder a modos de corpo rígido. Apesar desta tentativa, a solução encontrada foi modificar a suspensão da estrutura, utilizando a suspensão caracterizada em 3.2 que permitiu o desaparecimento de modos duplos e outros indesejáveis, bem como a ausência de amortecimento. Na figura 3.45 tem-se o indicador norma para o mesmo teste da figura 3.44, onde se notam melhorias. Melhorias essas que são ainda mais notórias na comparação dos erros experimentais para este teste com os dois tipos de suspensão apresentados na tabela 3.7.

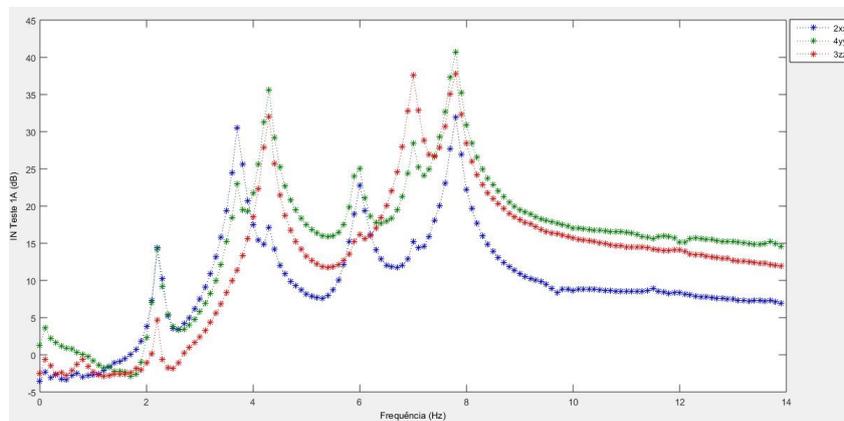


Figura 3.45- Indicador Norma: MEMS triaxiais, teste 1, suspensão final.

3. Identificação experimental de propriedades de corpo rígido

Tabela 3.7- Comparação dos erros experimentais: MEMS triaxiais: teste 1, suspensão inicial e final.

Parâmetros de inércia: teste 1	Erro experimental na Suspensão inicial (%)	Erro experimental na Suspensão final (%)
m (kg)	6,37	14,84
x_{cm} (m)	2,05	18,12
y_{cm} (m)	75,90	11,34
z_{cm} (m)	156,42	8,85
J_{gxx} (kg.m ²)	31,85	78,95
J_{gyy} (kg.m ²)	11,85	37,54
J_{gzz} (kg.m ²)	59,45	10,12
J_{gxy} (kg.m ²)	24,79	94,23
J_{gxz} (kg.m ²)	215,77	174,00
J_{gyz} (kg.m ²)	230,92	218,95

- **Orientar os eixos dos acelerómetros corretamente**

Mesmo com todas as modificações acima referidas, foi preciso igualmente introduzir modificações na fixação dos acelerómetros. Para evitar alguma rotação destes na estrutura devido à fraca adesão da cera utilizada em dias mais quentes, os sensores MEMS foram inseridos numa base de plástico que permitiu uma melhor adesão e orientação (figura 3.46). Tal permitiu que os eixos dos acelerómetros ficassem totalmente alinhados com o referencial escolhido, melhorando os resultados.



Figura 3.46- Base de plástico onde foram colocados os sensores MEMS.

- **Sistema de aquisição de dados**

Toda a montagem experimental, onde se inclui hardware e software Labview pode apresentar alguns constrangimentos. É necessário, neste tipo de sistemas verificar frequentemente, a condição das ligações elétricas, pois a resposta da estrutura vibratória pode

provocar o mau contato em cabos de ligação. Tal situação, pode originar o aumento de ruído nas FRF, tornando os modos de corpo rígido menos nítidos o que obriga a uma contínua monitorização das ligações elétricas. A tensão mecânica a que os cabos podem estar submetidos pode provocar algumas quebras na ligação aos terminais dos acelerómetros, obrigando a uma reparação por via da soldadura. A ligação terra feita no chassis da placa evita o aparecimento da frequência da rede nas FRF, pelo que é necessário garantir continuamente uma ligação perfeita. Além disso, os programas Labview desenvolvidos para os testes com os MEMS triaxiais e para os testes onde se inclui os MEMS giroscópios são muito extensos e por essa razão podem tornar-se relativamente lentos.

- **Sensores MEMS giroscópios**

Os sensores MEMS, quer triaxiais ou giroscópios apresentam limitações no valor da fase, nomeadamente em situações de fase constante, tem-se uma fase em rampa com estes sensores (assinalado a preto na figura 3.47). Nos MEMS giroscópios, estas limitações são mais evidentes, principalmente na gama de frequência de interesse. O modelo LPY503AL apresenta fase em sentido inverso no canal X. Neste mesmo modelo, verificam-se fases mais instáveis, o que complicou imenso o processo de regeneração das FRF. Além disso, outra adversidade é que satura facilmente, o que obrigou a excitá-lo de forma menos intensa. O modelo IDG500 não apresenta este problema de saturação, mas as FRF obtidas apresentam igualmente fases muito instáveis. Na figura 3.48 apresenta-se um exemplo de uma fase de uma FRF obtida com os MEMS giroscópios modelo LPY503AL onde se ilustra o que está acima referido.

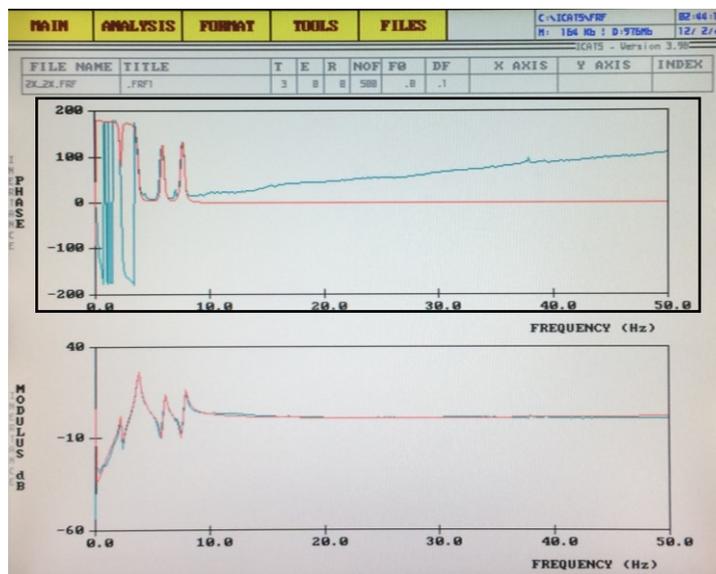


Figura 3.47- FRF obtida com sensores MEMS triaxiais ADXL326 com fase assinalada a preto.

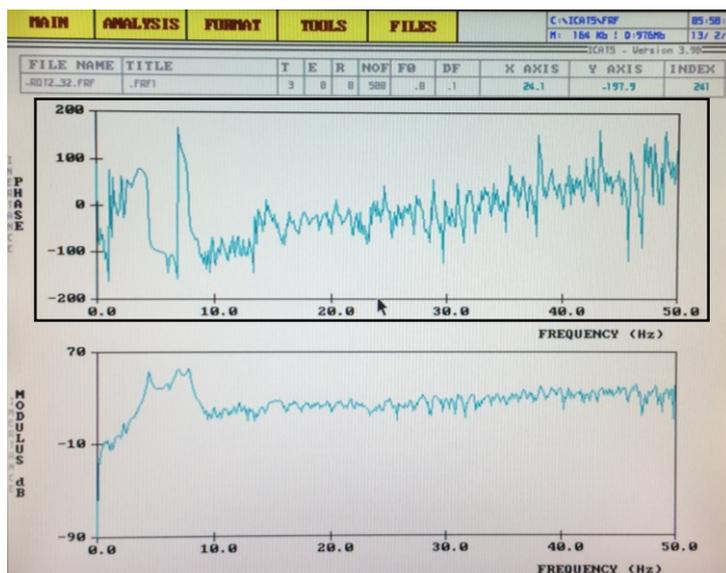


Figura 3.48- FRF obtida com sensores MEMS giroscópios LPY503AL com fase assinalada a preto.

- **Obtenção experimental dos modos do corpo rígido envolvendo rotação**

Devido à utilização inédita de acelerómetros capazes de medir diretamente rotações, a construção da matriz de modos experimental $[\emptyset]$ envolveu a identificação de constantes modais com informação das rotações, o que não é habitual em trabalhos experimentais. A medição direta da linha mássica de rotação é igualmente pouco frequente, o que obrigou a um esforço suplementar em termos do processo de calibração dos MEMS giroscópios, já explicado em 3.3.1.

- **Regeneração das FRF**

A regeneração das FRF, processo já explicado anteriormente em 3.3.3, é realizado integralmente pelo utilizar no software Modent. Sendo assim, as constantes modais resultantes dependem da escolha dos pontos de teste e pontos de ressonância por parte do utilizador. Para uma mesma FRF, regenerações feitas em alturas diferentes e mesmo que realizadas de forma sucessiva resultam sempre em constantes modais diferentes. Como as constantes modais têm uma enorme influência nos Métodos Modais e consequentemente nos resultados finais, estas resultaram sempre de uma média de pelo menos três regenerações da mesma FRF. Outro aspeto a referir é o aparecimento de ruído em algumas FRF, por razões previamente referidas, que complica a escolha dos pontos de regeneração do Modent. Portanto, o ruído (assinalado a preto na figura 3.49) tira nitidez à FRF na gama de frequência de interesse, tornando os modos de corpo rígido pouco claros. Além disso, obriga à remoção de pontos escolhidos automaticamente pelo Modent (figura 3.50). Duas FRF de igual significado físico (aceleração/força iguais) obtidas em testes diferentes, por vezes apresentam mais ruído num certo teste, o que vem prejudicar os resultados do teste em questão. Por fim e conforme já referido previamente, a fase mais instável dos sensores MEMS giroscópios pode complicar a regeneração das FRF resultantes destes.

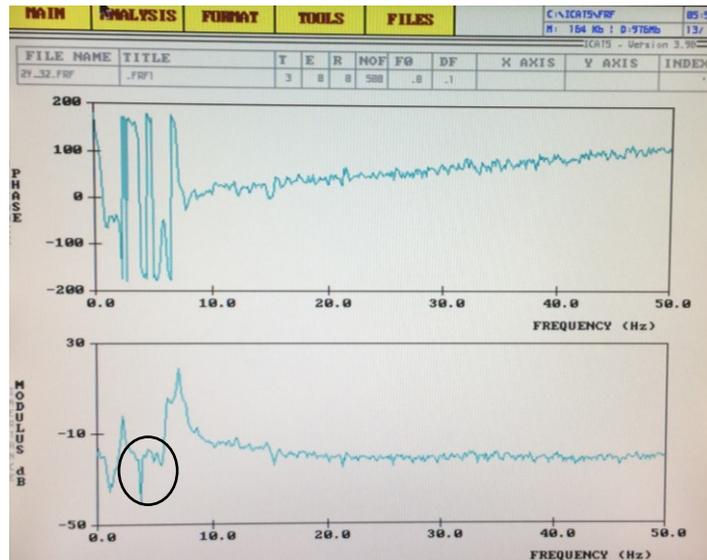


Figura 3.49- Ruído da FRF na gama de frequência de interesse assinalado a preto.

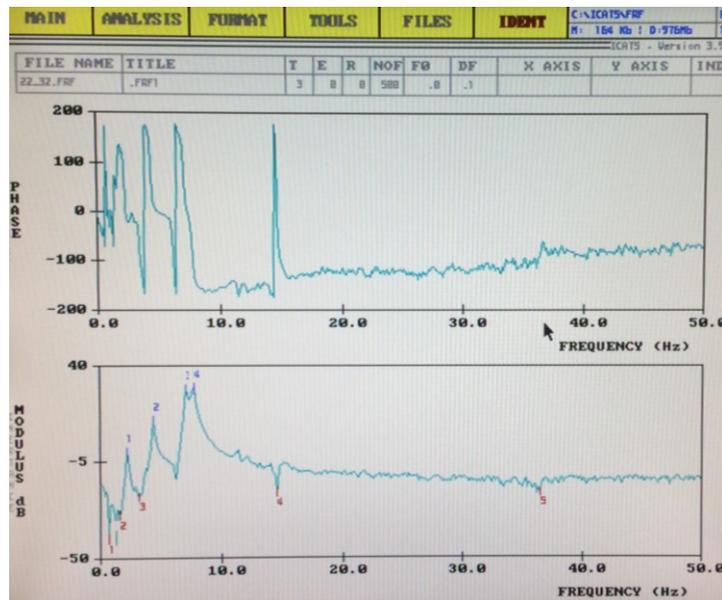


Figura 3.50- Escolha automática de pontos de teste do Modent devido ao ruído na FRF.

3.5.2 Discussão dos resultados

1ª Parte: MEMS triaxiais

Conforme é visível nas figuras 3.29 a 3.31 para o teste 4 fez-se cinco medições para garantir consistência e fiabilidade dos resultados experimentais obtidos. Os gráficos permitem constatar que os resultados são precisos. Para os outros testes, os resultados das cinco medições foram igualmente precisos, permitindo concluir que o procedimento experimental e toda a metodologia inversa foi aplicada de forma apropriada e com uniformidade em todos os testes.

Antes de analisar os resultados obtidos, é importante notar que os parâmetros de inércia obtidos através do modelo teórico não estão 100% corretos, daí que estes erros obtidos são relativos.

Analisando o gráfico da figura 3.24 constata-se que para os testes realizados com os MEMS triaxiais, os resultados obtidos para a massa apresentam erros relativamente elevados, principalmente nos testes 5 e 6. Há igualmente pouca uniformidade nos valores obtidos para os seis testes realizados. Na revisão bibliográfica dos Métodos Modais (capítulo 2) tem-se que o valor da massa resulta dos três primeiros termos da diagonal da matriz $[M_0]$, sendo a média aritmética dos valores obtidos nas três direções (x, y, z). Teoricamente, a massa deveria ser igual nas três direções, mas tal não se verifica devido aos erros experimentais. Apesar de tudo e sendo este parâmetro de inércia o mais facilmente obtido sem recorrer a esta via experimental, o erro presente na figura 3.28 não suscita grandes preocupações.

Na figura 3.25 tem-se a variação das coordenadas do centro de massa obtidas pela via experimental. Os valores do erro são muito baixos e com uniformidade nos resultados para os seis testes realizados. Conforme é visível na figura 3.28, as coordenadas do centro de massa apresentam o menor erro experimental, sendo por isso a determinação destas o ponto mais forte deste estudo experimental. No gráfico da figura 3.28 é igualmente notório que para z_{cm} o erro experimental é maior. Tal deve-se ao facto de z_{cm} possuir um valor com menor grandeza.

Em relação aos momentos de inércia (figura 3.26) e produtos de inércia (figura 3.27), os erros experimentais são bem superiores e com resultados comparando os vários testes bem mais dispersos, o que seria expectável. Tal deve-se a diversos fatores, entre os quais, os valores (sobretudo dos produtos de inércia) possuem uma ordem de grandeza muito baixa, o que origina erros percentuais elevados. Outro aspeto a mencionar é o tensor de inércia resultar dos produtos mx_{cm} , my_{cm} e mz_{cm} , ou seja, existindo erro experimental na massa e algum erro experimental nas coordenadas do centro de massa, estes produtos apresentam erro ainda maior. Conforme é observável no capítulo 2, todo o processo que conduz aos valores dos momentos e produtos de inércia envolve muito cálculo matricial, das quais se destaca a inversão de matrizes. O resultado da inversão de uma matriz é extremamente sensível a pequenas modificações na matriz, pelo que os erros experimentais da massa e das coordenadas do centro de massa contribuem para que o erro do tensor de inércia dispare. Com o objetivo de avaliar a influência do erro experimental da massa nos resultados experimentais do tensor de inércia e tendo o conhecimento do valor real da massa, através da medição na balança do laboratório, substitui-se o valor estimado experimentalmente de $[M_0]$ pela massa real. Esta modificação realizou-se para os testes 5 e 6 (tabela 3.8 e 3.9 respetivamente), pois são os testes que apresentam maior erro na massa, de forma a evidenciar a influência deste erro experimental.

3. Identificação experimental de propriedades de corpo rígido

Tabela 3.8- Comparação do erro experimental considerando a massa experimental ou a massa real: teste 5.

Parâmetros de inércia: teste 5	Erro experimental considerando a massa experimental (%)	Erro experimental considerando a massa real (%)
m (kg)	51,15	0
x_{cm} (m)	8,53	38,26
y_{cm} (m)	10,92	34,64
z_{cm} (m)	13,09	70,93
J_{gxx} (kg.m ²)	50,37	66,69
J_{gyy} (kg.m ²)	41,04	41,48
J_{gzz} (kg.m ²)	11,28	67,55
J_{gxy} (kg.m ²)	16,78	0,99
J_{gxz} (kg.m ²)	12,50	64,32
J_{gyz} (kg.m ²)	92,29	2,18

Tabela 3.9- Comparação do erro experimental considerando a massa experimental ou a massa real: teste 6.

Parâmetros de inércia: teste 6	Erro experimental considerando a massa experimental (%)	Erro experimental considerando a massa real (%)
m (kg)	43,19	0
x_{cm} (m)	4,84	36,26
y_{cm} (m)	3,29	38,47
z_{cm} (m)	2,15	46,28
J_{gxx} (kg.m ²)	43,20	50,05
J_{gyy} (kg.m ²)	29,79	30,07
J_{gzz} (kg.m ²)	28,97	41,30
J_{gxy} (kg.m ²)	0,73	12,84
J_{gxz} (kg.m ²)	90,87	70,30
J_{gyz} (kg.m ²)	47,37	78,79

3. Identificação experimental de propriedades de corpo rígido

Com base nos resultados expressos nas tabelas 3.8 e 3.9 pode-se concluir que a introdução da massa real afeta negativamente os valores das coordenadas do centro de massa, algo expectável. Partindo das equações 2.10 a 2.12 sabe-se que o valor de m encontra-se no denominador e sabendo que para os ensaios realizados em cada teste, os valores da massa foram sempre superiores ao valor teórico, algo observável na figura 3.29, então uma diminuição do valor da massa (introdução do valor teórico) fez aumentar significativamente os valores do centro de massa e conseqüentemente os erros experimentais. Em relação ao tensor de inércia, cuja análise dos resultados é o objetivo desta modificação, tem-se para os momentos de inércia um ligeiro aumento do erro experimental e para os produtos de inércia igualmente pouca influência nos resultados obtidos. Por conseguinte, esta modificação não vem trazer benefícios para uma melhoria dos resultados experimentais dos parâmetros de inércia.

Tendo por base os trabalhos anteriormente realizados com Métodos Modais, onde se destaca Almeida [36], os resultados experimentais dos parâmetros de inércia obtidos estão dentro do expectável. Este estudo experimental tem as limitações e dificuldades já anteriormente referidas que justificam os erros obtidos. Apesar da suspensão utilizada garantir a identificação dos seis modos de corpo rígido devidamente afastados, nos Indicadores Norma de cada teste, nem sempre esses seis modos estão devidamente excitados, sendo este um aspeto crítico para a obtenção da matriz de modos experimental $[\emptyset]$ o mais correta possível. Esta matriz $[\emptyset]$ resulta de constantes modais obtidas diretamente do programa Modent e apesar de se ter realizado pelo menos três regenerações por FRF, este processo tem sempre o erro inerente ao utilizador. Os acelerómetros apesar de terem sido fixados à estrutura através de uma base de plástico, é difícil impedir ligeiras rotações destes quando a estrutura vibra, afetando a identificação modal das FRF diretas e posteriormente das FRF indiretamente associadas. Finalmente, um outro aspeto importante é o efeito dos cabos, pois estes restringem o movimento. Portanto, deve-se utilizar cabos o mais flexível possível, contudo os cabos disponíveis no laboratório não apresentam essa flexibilidade desejada por necessitarem de uma malha metálica para evitar contaminação do sinal.

Nas tabelas 3.10 a 3.12 tem-se a comparação de resultados experimentais dos parâmetros de inércia para a mesma estrutura e realizando os mesmos testes entre este trabalho e o trabalho de Venâncio [42] onde se aplicou o Método de Restrição de Inércia com sensores MEMS e acelerómetros piezoelétricos.

3. Identificação experimental de propriedades de corpo rígido

Tabela 3.10- Método Modal vs Método de Restrição de Inércia: teste 2.

Parâmetros de inércia: teste 2	Erro experimental MM (MEMS) (%)	Erro experimental MRI (MEMS) (%) [42]	Erro experimental MRI (PIEZO) (%) [42]
m (kg)	26,62	34,98	12,35
x_{cm} (m)	5,36	7,44	8,57
y_{cm} (m)	1,38	21,84	4,71
z_{cm} (m)	19,04	29,52	0,31
J_{gxx} (kg.m ²)	78,37	3,12	0,27
J_{gyy} (kg.m ²)	40,93	19,54	32,74
J_{gzz} (kg.m ²)	45,97	20,95	17,34
J_{gxy} (kg.m ²)	4,34	3,93	7,55
J_{gxz} (kg.m ²)	82,63	13,42	5,38
J_{gyz} (kg.m ²)	120,81	45,50	14,22

Tabela 3.11- Método Modal vs Método de Restrição de Inércia: teste 4.

Parâmetros de inércia: teste 4	Erro experimental MM (MEMS) (%)	Erro experimental MRI (MEMS) (%) [42]	Erro experimental MRI (PIEZO) (%) [42]
m (kg)	31,75	9,29	22,60
x_{cm} (m)	8,19	1,66	13,77
y_{cm} (m)	5,88	17,39	20,55
z_{cm} (m)	6,75	2,80	20,11
J_{gxx} (kg.m ²)	36,20	63,50	35,74
J_{gyy} (kg.m ²)	17,92	21,76	33,12
J_{gzz} (kg.m ²)	46,29	2,05	13,54
J_{gxy} (kg.m ²)	39,64	64,96	66,06
J_{gxz} (kg.m ²)	10,16	4,84	7,58
J_{gyz} (kg.m ²)	60,88	15,48	2,49

3. Identificação experimental de propriedades de corpo rígido

Tabela 3.12- Método Modal vs Método de Restrição de Inércia: teste 5.

Parâmetros de inércia: teste 5	Erro experimental MM (MEMS) (%)	Erro experimental MRI (MEMS) [42] (%)	Erro experimental MRI (PIEZO) [42] (%)
m (kg)	51,29	18,02	2,54
x_{cm} (m)	8,44	5,60	9,66
y_{cm} (m)	9,73	15,35	1,71
z_{cm} (m)	11,73	13,68	17,96
J_{gxx} (kg.m ²)	50,89	2,43	5,01
J_{gyy} (kg.m ²)	39,77	16,93	9,86
J_{gzz} (kg.m ²)	11,67	4,38	14,79
J_{gxy} (kg.m ²)	16,16	4,83	15,81
J_{gxz} (kg.m ²)	10,34	23,06	32,26
J_{gyz} (kg.m ²)	85,46	27,05	18,19

Conforme ilustrado nas tabelas acima, o Método Modal é mais eficaz para estimar as coordenadas do centro de massa, sendo o Método de Restrição de Inércia mais eficaz a estimar o tensor de inércia. A massa é estimada de uma forma aproximadamente igual pelos dois métodos, salvo exceções.

2ª Parte: MEMS triaxiais + MEMS giroscópios

Na figura 3.32 tem-se esquematizado a utilização dos dois modelos de sensores MEMS giroscópios, já abordados em 3.3.2, nos testes realizados. Contudo e conforme o que é referido em 3.5.1, constatou-se que o modelo LPY503AL tem a fase trocada no canal X, fases mais instáveis e satura facilmente. Face a estas limitações, optou-se por utilizar exclusivamente o modelo IGD500 nos testes finais, realizando medições extra onde se muda a posição do acelerómetro, garantindo a medição das três rotações por teste, apesar do acelerómetro só possuir dois canais de medição. Ou seja, inicialmente colocou-se o acelerómetro com os canais X e Y orientados segundo a direção X e Y do referencial. Posteriormente, colocou-se o acelerómetro com os canais X e Y orientados segundo a direção X e Z do referencial. Com mais confiança no modelo IDG 500 procurou-se conseguir os melhores resultados experimentais possíveis.

Conforme esquematizado na figura 3.32 e seguindo os pressupostos teóricos, utilizou-se um conjunto de três forças nos testes realizados. Contudo, visualizando a figura 3.51 tem-se que no Indicador Norma do teste 1, com apenas duas forças (1xx e 1zz) consegue-se excitar

devidamente os seis modos de corpo rígido. Ou seja, este teste experimental veio contrariar um dos pressupostos teóricos. A força $2yy$ aplicada não excita tão bem os modos quando comparada com as forças $1xx$ e $1zz$.

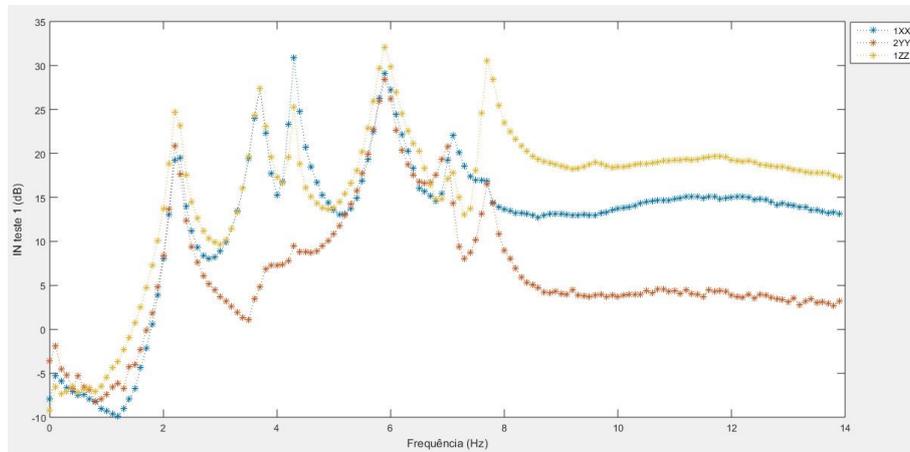


Figura 3.51- Indicador Norma: MEMS triaxiais + MEMS giroscópios, teste 1.

Da análise do gráfico da figura 3.36, conclui-se que o valor do erro experimental da massa é sempre o mesmo para os três testes. Confirmou-se então o expectável, pois apenas se mudou o referencial de teste para teste, ou seja, mantendo as condições de teste (pontos de medição de resposta e forças aplicadas), o valor experimental da massa mantém-se. A informação necessária para estimar a massa provém apenas do acelerómetro MEMS triaxial. Portanto, os resultados experimentais obtidos aproximam-se dos valores obtidos na primeira fase de testes (algo expectável). Contudo, de referir que os valores de massa obtidos nesta segunda fase de testes têm um erro inferior, pelo que este método modifica-se mais eficaz para estimar este parâmetro de inércia.

Os valores das coordenadas do centro de massa (figura 3.37) apresentam para o teste 1, erros de igual ordem de grandeza para x_{cm} e y_{cm} comparado com a primeira fase de testes. Contudo para valores de ordem de grandeza inferior, como z_{cm} , o método modifica-se mais sensível e não se consegue aproximar tanto dos valores teóricos. Utilizando uma origem do referencial mais afastada do centro de massa do corpo (valores teóricos das coordenadas do centro de massa superiores), o erro experimental diminui. E para um caso extremo com a origem do referencial fora do corpo rígido (valores teóricos das coordenadas do centro de massa com igual ordem de grandeza), os erros experimentais são todos baixos e aproximadamente iguais. Portanto, quanto mais afastado o centro de massa se encontrar da origem do referencial utilizado, menores são os erros experimentais obtidos para as suas coordenadas.

Em relação ao tensor de inércia (figura 3.38), os erros experimentais obtidos têm uma ordem de grandeza muito superior ao desejado. Contudo, estes resultados derivam de uma série de limitações importantes. De acordo com a revisão bibliográfica do método modifica-se (2.2), a matriz de modos experimental $[\emptyset]$ passa a contemplar a informação da rotação

experimentalmente medida pelos MEMS giroscópios. Conforme referido em 3.5.1, a utilização destes modos experimentais que incluem rotação não é habitual em trabalhos experimentais, pelo que se optou por efetuar uma aproximação ao método original. O método original inclui apenas modos experimentais de translação em três pontos, obtidos a partir de três MEMS triaxiais. Partindo de relações de cinemática, as translações originam rotações (como por exemplo na calibração dos MEMS giroscópios). Após uma transformação de coordenadas, os modos são normalizados segundo a origem, matriz $[\Phi_0]$, já com translações e rotações incluídas. O método modificado ao incluir rotações nos modos experimentais (matriz $[\Phi]$) origina que essas rotações sejam exatamente iguais às presentes na matriz $[\Phi_0]$, pois a rotação numa dada direção é igual em qualquer ponto de um corpo rígido. Conforme referido acima, apenas se tem uma medição experimental de rotação para cada direção (x, y, z) , ou seja, a utilização dos MEMS giroscópios não tem margem de erro. Portanto, idealmente os testes experimentais deveriam conter mais sensores MEMS giroscópios, com o intuito de haver mais redundância nos resultados das rotações experimentais obtidas que confirmasse a fiabilidade destas. Com todas as condicionantes na utilização destes acelerómetros já referidas é de esperar que tenham contribuído para os erros experimentais obtidos, pois a inversão de $[\Phi_0]$ resulta diretamente na matriz experimental de massa $[M_0]$ e conseqüentemente nos parâmetros de inércia. A matriz $[\Phi]$ no método original como resulta de translações em três pontos, apresenta redundância suficiente para originar uma matriz $[\Phi_0]$ com menor erro experimental. O contributo das translações para resultar rotações é desprezado no método modificado. Portanto, neste método, translações experimentais originam translações em $[\Phi_0]$ e rotações experimentais são iguais às rotações em $[\Phi_0]$. De referir que para a direção y , os momentos e produtos de inércia apresentam um erro experimental muito inferior, pois a suspensão presente na estrutura restringe mais a rotação nesta direção.

Analisando o gráfico da figura 3.39 onde se compara os resultados obtidos com ambos os métodos, verifica-se que apesar de algumas limitações, o método modificado apresenta muito potencial. Tirando os parâmetros de inércia z_{cm} , J_{xx} e J_{zz} , os resultados para os restantes parâmetros de inércia são relativamente idênticas para ambos os métodos. Sem as limitações associadas à utilização dos MEMS giroscópios, muito provavelmente os resultados seriam ainda mais satisfatórios. Face a todas as limitações já referidas, conclui-se que os resultados obtidos com o método modificado são muito aceitáveis.

Tendo o conhecimento destas limitações do método modificado e da utilização dos sensores MEMS giroscópios, os ensaios realizados têm pouca uniformidade nos resultados obtidos, algo visível nos gráficos das figuras 3.40 a 3.42 com desvios superiores à primeira fase de testes. É importante referir que se tentou realizar mais testes com este método modificado, contudo os resultados obtidos encontram-se bem afastados dos valores teóricos. Tentou-se igualmente uma nova nuance para este método modificado com a introdução de mais um acelerómetro MEMS

3. Identificação experimental de propriedades de corpo rígido

triaxial, realizando-se vários ensaios com diferentes pontos de medição de resposta e/ou aplicação de forças, todos eles com resultados menos promissores.

4. Conclusões e sugestões para trabalhos futuros

Neste capítulo são apresentadas as principais conclusões deste trabalho, a nível dos resultados obtidos e concretização dos objetivos propostos. São igualmente referidos contributos deste trabalho para o estudo da temática da determinação experimental de propriedades de corpo rígido. Finalmente são referidas sugestões para trabalhos futuros que abordem esta temática.

4.1 Conclusões

A grande conclusão a retirar deste trabalho é que os objetivos inicialmente propostos foram cumpridos. Os resultados obtidos utilizando os sensores MEMS têm muito potencial, validando a utilização destes em Métodos Modais, que até então não tinham expressão em termos experimentais.

O primeiro objetivo realizou-se no estudo numérico, pois verificou-se que o Método Modal modificado é aplicável e retirou-se conclusões importantes com base nos resultados obtidos, como por exemplo, a possibilidade de suspender um corpo rígido de formas diferentes, indo de acordo com um pressuposto teórico.

A primeira parte do estudo experimental permitiu retirar uma das conclusões mais importantes deste trabalho. O Método Modal original utilizado neste trabalho apenas tinha sido testado experimentalmente com acelerómetros piezoelétricos. Os resultados obtidos neste trabalho (com sensores MEMS) em comparação com esses trabalhos (com acelerómetros piezoelétricos) são muito idênticos. Ou seja, com uma montagem experimental de um custo de dezenas de euros, conseguiu-se resultados da mesma ordem de grandeza que em trabalhos onde se utilizou montagens experimentais de um custo de milhares de euros. Pode-se concluir face a esta comparação que caso os acelerómetros piezoelétricos fossem utilizados neste trabalho, repetindo exatamente estes testes, os resultados obtidos seriam muito idênticos. Ora, este trabalho vai ao encontro de um dos princípios fundamentais da engenharia, obter soluções (ou resultados) aceitáveis com o menor custo possível.

Na segunda parte do estudo experimental, aplicou-se o método modificado previamente verificado no estudo numérico. A montagem experimental necessária para este método apresenta um custo ainda menor, pois são necessários menos pontos de medição de resposta, e consequentemente menos sensores MEMS. Os testes realizados permitem retirar conclusões importantes, como a influência da escolha do referencial nos resultados obtidos, principalmente

nas coordenadas do centro de massa, onde quanto mais afastadas estas se encontram da origem do referencial melhor. Outra conclusão importante relaciona-se com o conjunto de forças aplicadas, onde se comprovou que nem sempre são necessárias aplicar pelo menos três forças. Em relação aos resultados obtidos, estes apesar de apresentarem potencial, não são os ideais. Contudo, ultrapassando as limitações já abordadas, os resultados podem ser melhores que o método original, com baixos custos implicados. Além disso, a conclusão a reter acerca da influência do referencial nos resultados do centro de massa, permite aferir que este método modificado pode ser ainda mais vantajoso para estimar os parâmetros de inércia em estruturas de maiores dimensões.

Conforme referido na motivação e objetivos, a temática de determinar os parâmetros de inércia de uma estrutura de geometria complexa e com dimensões e/ou características de construção desconhecidas levanta reais dificuldades aos investigadores. Este trabalho pode constituir um progresso no estudo profundo que esta temática tem sido sujeita nos últimos anos, por apresentar inovações importantes já referidas e com resultados credíveis.

A nível pessoal, o uso do programa de linguagem Labview constitui uma aprendizagem, havendo um progresso no uso de ferramentas de cálculo, modelação e programação (Excel, Solidworks e Matlab), cumprindo assim objetivos igualmente propostos para este trabalho.

4.2 Sugestões para trabalhos futuros

A primeira sugestão, de grande interesse na identificação modal com sensores MEMS, seria realizar os mesmos testes (iguais pontos de medição de resposta e aplicação de forças) para a mesma estrutura suspensa em molas de reduzida rigidez ou em suspensão livre. Ou seja, utilizando os sensores MEMS, aplicar os Métodos Modais e os Métodos de Restrição de Inércia na mesma estrutura mantendo os testes experimentais. Tal permitia efetuar uma comparação exata entre os dois métodos, retirando daí os benefícios e prejuízos de um e de outro. No método modificado, é preferível garantir redundância na medição de rotações experimentais, com a implementação de mais sensores MEMS giroscópios.

Uma outra sugestão, igualmente de grande interesse, seria introduzir os sensores MEMS de saída digital também disponíveis no mercado. Estes sensores MEMS permitem a medição simultânea das três translações e três rotações, pois possuem seis canais. Para este trabalho, não foi possível introduzir estes sensores, pois a saída digital não permite sincronização com o sinal da força (obtido através do martelo). Contudo, estes sensores são possíveis introduzir numa variante dos Métodos Modais. Na metodologia “*Output only-data*” apenas são considerados os dados experimentais das respostas dinâmicas de uma estrutura sem necessidade de conhecer o conjunto de forças que as originam. Este método apresenta outros requisitos, nomeadamente o conhecimento da rigidez das molas e pontos de colocação destas, para posterior conhecimento da

matriz de rigidez. A excitação da estrutura pode ser garantida igualmente por um martelo (sem a necessidade de conhecer o respetivo valor), ou então, por exemplo através de um motor rotativo a uma frequência constante (e necessariamente não muito elevada) que permita a resposta dinâmica da estrutura em gamas de frequências de interesse, com a identificação clara dos modos de corpo rígido. Esta metodologia com a utilização de sensores MEMS com saída digital e aplicando o método modificado criado neste trabalho pode ter um contributo interessante na análise modal operacional. De referir que para aplicar esta nova metodologia, a montagem experimental deste trabalho que aqui foi feita com módulos de aquisição de dados da *National Instruments* poderia ser substituída por um Arduíno, reduzindo ainda mais o custo do equipamento necessário.

Bibliografia

- [1] Beer, F.P. e J.E.Russell Johnston., "*Mecânica Vectorial para Engenheiros: Dinâmica*", McGraw-Hill, ed. 6th, 1998.
- [2] Harris, C.M. e A.G. Piersol., "*Harris' Shock and Vibration Handbook*", McGraw-Hill Book Company, ed. 5th, New York, 2002.
- [3] Schedlinski, C. e M. Link., "*A Survey of Current Inertia Parameter Identification Methods*", Mechanical Systems and Signal Processing, Vol 15 (1), 2001, pgs. 189-211.
- [4] Lamontia, M.A., "*On the Determination and Use of Residual Flexibilities, Inertia Restraints and Rigid Body Modes*", in International Modal Analysis Conference (IMAC I), 1st, Orlando, Florida, U.S.A., 1982, pgs. 153-159.
- [5] Ewins, D.J., "*Modal Testing: Theory and Practice*", Research Studies Press Ltd., Hertfordshire, ed. 2nd, 1999.
- [6] Crowley, J., G.T. Rocklin., e D.L. Brown, "*Use of Rigid Body Calculations in Tests*", in International Modal Analysis Conference (IMAC IV), 4th.
- [7] Okubo, N. e T. Furukawa., "*Measurement of Rigid Body Modes for Dynamic Design*", in International Modal Analysis Conference (IMAC II), 2nd, Orlando, Florida, U.S.A, 1984, pgs. 545-549.
- [8] Schedlinski, C. e M. Link., "*Identification of Rigid Body Properties Using Base Excitation and Measured Interface Forces*", Proceedings de 1996 ESA Conference on Spacecraft Structures, Materials and Mechanical Testing, European Space Agency (ESA), Noordwijk, Netherlands, 1996.
- [9] Bretl, J. e P. Conti., "*Rigid Body Mass Properties from Test Data*", in International Modal Analysis Conference (IMAC V), 5th, London, England, 1987, pgs. 655-659.
- [10] Urgueira, A.P.V., "*On the Rigid Body Properties Estimation From Modal Testing*", in International Modal Analysis Conference (IMAC XIII), 13th, Nashville, Tennessee, U.S.A., 1995, pgs. 1479-1483.
- [11] Furusawa, M., "*A Method of Determining of Rigid Body Inertia Properties*", in International Modal Analysis Conference (IMAC VII), 7th, Las Vegas, Nevada, U.S.A, 1989, pgs. 711-719.
- [12] Mangus, J.A., C. Passarello, e C. Vankarsen., "*Direct Estimation of Rigid Body Properties From Frequency Response Functions*", in International Modal Analysis Conference (IMAC X), 10th, San Diego, California, U.S.A., 1992, pgs. 259-264.
- [13] Mangus, J.A., C. Passarello, e C. Vankarsen., "*Estimation Rigid Body Properties from Frequency Reaction Measurements*", in International Modal Analysis Conference (IMAC XI), 11th, Kissimmee, Florida, U.S.A., 1993, pgs. 469-472.
- [14] Huang, S.J., S. Cogan, e G. Lallement., "*Experimental Identification of the Characteristics of a Rigid Structure on an Elastic Suspension*", in International Modal Analysis Conference (IMAC XIII), 13th, Nashville, Tennessee, U.S.A., 1995, pgs. 955-961.

- [15] Huang, S.J. e G. Lallement., "*Direct Estimation of Rigid Body Properties from Harmonic Forced Responses*", in International Modal Analysis Conference (IMAC XV), 15th, Orlando, Florida, U.S.A., 1997, pgs. 175-180.
- [16] Conti, P. e J. Bretl., "*Mount Stiffness and Inertia Properties from Modal Test Data*", Journal of Vibration, Acoustics, Stress and Reliability in Design, Vol. 111, 1989, pgs. 134-138.
- [17] Nakamura, M. et al., "*Identification of Inertial Properties for Resiliently Supported Mechanical System.*" in ASME Design Engineering Technical Conference 3C, 1995, pgs. 351-357.
- [18] Toivola, J. e O. Nuutila., "*Comparison of Three Methods for Determining Rigid Body Inertia Properties from Frequency Response Functions*", in International Modal Analysis Conference (IMAC XI), 11th, Kissimmee, Florida. U.S.A., 1993, pgs. 1126-1132.
- [19] Zeng, Q. e L. Zhang., "*Estimation of Rigid Body Modes and Support Properties*", in International Modal Analysis Conference (IMAC VIII), 8th, Kissimmee, Florida, U.S.A., 1990, pgs. 1116-1121.
- [20] Almeida, R.A.B., A.P.V. Urgueira, e N.M.M Maia., "*Further Developments of the Estimation of Rigid Body Properties from Experimental Data*", Mechanical Systems and Signal Processing, Vol 24, 2010, pgs. 1391-1408.
- [21] Almeida, R.A.B., N. M.M. Maia, e A.P.V. Urgueira., "*Identification of Rigid Body Properties from Vibration Measurements*", Journal of Sound and Vibration, Vol 299 (4-5), 2007, pgs. 884-889.
- [22] Pandit, S.M, e Z.-Q. Hu., "*Determination of Rigid Body Characteristics from Time Domain Modal Test Data*", Journal of Sound and Vibration, Vol 177 (1), 1994, pgs. 31-41.
- [23] Hahn, H., K.-D.Leimbach, e A.Piepenbrink., "*Inertia Parameter Identification of Rigid Bodies Using a Multi-Axis Test Facility*", in Conference on Control Applications, 3rd, Glasgow, 1994, pgs. 1735-1737.
- [24] Aszkler, C., "*The Principles of Acceleration, Shock, and Vibration Sensors*", in <http://archives.sensorsmag.com/articles/0505/14/main.shtml>, 2005.
- [25] Kok, R., C. Furlong, e R. J. Pryputniewicz., "*Application of MEMS accelerometers for modal analysis*" in SEM Annual Conference & Exposition on Experimental and Applied Mechanics, 2003.
- [26] Beskhyroun, S e Q. Ma., "*Low-Cost Accelerometers for Experimental Modal Analysis*" in World Conference on Earthquake Engineering, Lisbon, 2012.
- [27] Tom, P e M. Juránek., "*Modal analysis of car frame by MEMS accelerometer digital network*" in 13th International Carpathian Control Conference (ICCC), 2012, pgs. 731-734.
- [28] Esu, O., A.Flint e J.Watson., "*Condition monitoring of wind turbine blades using MEMS accelerometers*" in Proceedings of the Renewable Energy World Europe, Viena, Austria, 2013.

- [29] Cigada, A, M. Lurati, M. Redaelli, e M. Vanali., “*Mechanical performance and metrological characterization of MEMS accelerometers and application in modal analysis*” Conf. Proc. Soc. Exp. Mech. Ser, January, 2007.
- [30] Urgueira, A., T. Silva., N. Venâncio., R. Almeida., P. Riscado., “*Experimental Determination of Rigid Body Properties: An Evaluation on the Use of Piezoelectric or MEMS Tri-Axial Accelerometers*”, NOVA UNIDEMI, FCT-NOVA, Caparica, Portugal, 2017.
- [31] Urgueira, A., N. Venâncio., R. Almeida., P. Riscado., “*Experimental Determination of Rigid Body Properties: A New Approach That Makes Simultaneous Use of Translational and Rotational MEMS Accelerometers*”, NOVA UNIDEMI, FCT-NOVA, Caparica, Portugal, 2017.
- [32] John., “*MEMS accelerometer*”, in <http://www.instrumentationtoday.com/mems-accelerometer/2011/08>, 2011.
- [33] Burg, A, A. Meruani, B. Sandheinrich e M.Wickmann., “*MEMS Gyroscopes and Their Applications*”, ME-381 Introduction to Microelectromechanical System, 2004.
- [34] Lee, H., Y. B. Lee, e Y. – S. Park., “*Response and Excitation Points Selection for Accurate Rigid Body Inertia Properties Identification*”, Mechanical Systems and Signal Processing, Vol. 13 (4), 1999, pgs. 571-592.
- [35] Bilosová, A., “*Modal Testing*”, OP Education for Competitiveness, Ostrava, 2011.
- [36] Almeida, R.A.B., “*Determinação de Características Dinâmicas de Corpos Rígidos com Base em Resultados Experimentais*”, Tese de Doutoramento, Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa, 2005.
- [37] Silva, M.M.J, e Nuno M.M Maia., “*Modal Analysis and Testing*”, Kluwer Academic Publishers, NATO Science Series, Series E, Vol. 363, Netherlands, 1999.
- [38] Analog Devices., “*Small, Low Power, 3-Axis ± 16 g Accelerometer ADXL 326*”, in <http://www.analog.com/media/en/technical-documentation/data-sheets/ADXL326.pdf>, 2017.
- [39] ST., “*LPY503AL: MEMS motion sensor: dual axis pitch and yaw $\pm 30^\circ/s$ analog gyroscope*”, in <https://www.sparkfun.com/datasheets/Sensors/IMU/lpy503al.pdf>, 2009.
- [40] InvenSense., “*Integrated Dual-Axis Gyro IDG-500*”, in https://www.sparkfun.com/datasheets/Components/SMD/Datasheet_IDG500.pdf, 2008.
- [41] Riscado, P.H.G., “*Determinação Experimental de Rotações em Estruturas através da Utilização de Sensores MEMS*”, Tese de Mestrado, Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa, 2016.
- [42] Venâncio, N.A.S., “*Identificação das Propriedades Dinâmicas de um Corpo Rígido Utilizando Sensores MEMS*”, Tese de Mestrado, Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa, 2017.
- [43] Imperial College, “*Reference Manual: Modacq/ Modent/ Modesh/ Couple*”, ICATS, Mechanical Engineering Department, London, 1994.

Anexos

Anexo I: Resultados obtidos no estudo experimental

3.4.1 MEMS triaxiais

Tabela I.1- Resultados experimentais: Parte 1, teste 1.

Parâmetros de inércia	Valor teórico	Valor experimental	Erro experimental (%)
m (kg)	1,238	1,421733636	14,84
x_{cm} (m)	0,169	0,199622	18,12
y_{cm} (m)	-0,089	-0,099089161	11,34
z_{cm} (m)	0,02	0,018229661	8,85
J_{xx} (kg.m ²)	0,02316196	0,041447548	78,95
J_{yy} (kg.m ²)	0,03501757	0,048164399	37,54
J_{zz} (kg.m ²)	0,04560212	0,050217339	10,12
J_{xy} (kg.m ²)	0,01410825	0,027401984	94,23
J_{xz} (kg.m ²)	0,00849268	0,02327006	174,00
J_{yz} (kg.m ²)	0,00320642	0,010226959	218,95

Tabela I.2- Resultados experimentais: Parte 1, teste 2.

Parâmetros de inércia	Valor teórico	Valor experimental	Erro experimental (%)
m (kg)	1,238	1,580589552	27,67
x_{cm} (m)	0,169	0,159938239	5,36
y_{cm} (m)	-0,089	-0,09022539	1,38
z_{cm} (m)	0,02	0,02380825	19,04
J_{xx} (kg.m ²)	0,02316196	0,041314217	78,37
J_{yy} (kg.m ²)	0,03501757	0,049351169	40,93
J_{zz} (kg.m ²)	0,04560212	0,066563612	45,97
J_{xy} (kg.m ²)	0,01410825	0,013495594	4,34
J_{xz} (kg.m ²)	0,00849268	0,015510327	82,63
J_{yz} (kg.m ²)	0,00320642	0,007080218	120,81

Tabela I.3- Resultados experimentais: Parte 1, teste 3.

Parâmetros de inércia	Valor teórico	Valor experimental	Erro experimental (%)
m (kg)	1,238	1,570263064	26,84
x_{cm} (m)	0,169	0,151566749	10,32
y_{cm} (m)	-0,089	-0,087111956	2,12
z_{cm} (m)	0,02	0,024473001	22,37
J_{xx} (kg.m ²)	0,02316196	0,04150627	79,20
J_{yy} (kg.m ²)	0,03501757	0,049738716	42,04
J_{zz} (kg.m ²)	0,04560212	0,063318419	38,85
J_{xy} (kg.m ²)	0,01410825	0,015459278	9,58
J_{xz} (kg.m ²)	0,00849268	0,017080975	101,13
J_{yz} (kg.m ²)	0,00320642	0,006888298	114,83

Tabela I.4- Resultados experimentais: Parte 1, teste 4.

Parâmetros de inércia	Valor teórico	Valor experimental	Erro experimental (%)
m (kg)	1,238	1,631125394	31,75
x_{cm} (m)	0,169	0,155155973	8,19
y_{cm} (m)	-0,089	-0,083764872	5,88
z_{cm} (m)	0,02	0,0213507	6,75
J_{xx} (kg.m ²)	0,02316196	0,031546722	36,20
J_{yy} (kg.m ²)	0,03501757	0,041294406	17,92
J_{zz} (kg.m ²)	0,04560212	0,066710201	46,29
J_{xy} (kg.m ²)	0,01410825	0,019700396	39,64
J_{xz} (kg.m ²)	0,00849268	0,00935579	10,16
J_{yz} (kg.m ²)	0,00320642	0,005158777	60,89

Tabela I.5- Resultados experimentais: Parte 1, teste 5.

Parâmetros de inércia	Valor teórico	Valor experimental	Erro experimental (%)
m (kg)	1,238	1,87291854	51,29
x_{cm} (m)	0,169	0,154729222	8,44
y_{cm} (m)	-0,089	-0,080343527	9,73
z_{cm} (m)	0,02	0,022345324	11,73
J_{xx} (kg.m ²)	0,02316196	0,03494939	50,89
J_{yy} (kg.m ²)	0,03501757	0,048942424	39,77
J_{zz} (kg.m ²)	0,04560212	0,05092299	11,67
J_{xy} (kg.m ²)	0,01410825	0,016387744	16,16
J_{xz} (kg.m ²)	0,00849268	0,009370476	10,34
J_{yz} (kg.m ²)	0,00320642	0,000466337	85,46

Tabela I.6- Resultados experimentais: Parte 1, teste 6.

Parâmetros de inércia	Valor teórico	Valor experimental	Erro experimental (%)
m (kg)	1,238	1,787958698	44,42
x_{cm} (m)	0,169	0,158333943	6,31
y_{cm} (m)	-0,089	-0,088193081	0,91
z_{cm} (m)	0,02	0,020812261	4,06
J_{xx} (kg.m ²)	0,02316196	0,033635977	45,23
J_{yy} (kg.m ²)	0,03501757	0,045840819	30,91
J_{zz} (kg.m ²)	0,04560212	0,060706695	33,13
J_{xy} (kg.m ²)	0,01410825	0,014748684	4,54
J_{xz} (kg.m ²)	0,00849268	0,017046635	100,72
J_{yz} (kg.m ²)	0,00320642	0,002314989	27,80

3.4.2 MEMS triaxiais + MEMS giroscópios

Tabela I.7- Resultados experimentais: Parte 2, teste 1.

Parâmetros de inércia	Valor teórico	Valor experimental	Erro experimental (%)
m (kg)	1,238	1,496293926	20,86
x_{cm} (m)	0,169	0,178229539	5,46
y_{cm} (m)	-0,089	-0,07082697	20,42
z_{cm} (m)	0,02	0,086986844	334,93
J_{xx} (kg.m ²)	0,02316196	0,261425966	1028,69
J_{yy} (kg.m ²)	0,03501757	0,045136655	28,90
J_{zz} (kg.m ²)	0,04560212	0,357018305	682,90
J_{xy} (kg.m ²)	0,01410825	0,00747039	47,05
J_{xz} (kg.m ²)	0,00849268	0,014993972	76,55
J_{yz} (kg.m ²)	0,00320642	0,002244593	29,99

Tabela I.8- Resultados experimentais: Parte 2, teste 2.

Parâmetros de inércia	Valor teórico	Valor experimental	Erro experimental (%)
m (kg)	1,238	1,497749416	20,86
x_{cm} (m)	-0,181	-0,146392073	19,12
y_{cm} (m)	-0,089	-0,018145139	79,61
z_{cm} (m)	-0,23	-0,215790321	6,18
J_{xx} (kg.m ²)	0,02316196	0,312475482	1249,09
J_{yy} (kg.m ²)	0,03501757	0,042857563	22,39
J_{zz} (kg.m ²)	0,04560212	0,313777604	588,08
J_{xy} (kg.m ²)	0,01410825	0,013629241	3,40
J_{xz} (kg.m ²)	0,00849268	0,016701586	96,66
J_{yz} (kg.m ²)	0,00320642	0,019817824	518,07

Tabela I.9- Resultados experimentais: Parte 2, teste 3.

Parâmetros de inércia	Valor teórico	Valor experimental	Erro experimental (%)
m (kg)	1,238	1,496293926	20,86
x_{cm} (m)	0,169	0,155366028	8,07
y_{cm} (m)	0,311	0,293977105	5,47
z_{cm} (m)	-0,23	-0,265549639	15,46
J_{xx} (kg.m ²)	0,02316196	0,250326761	980,77
J_{yy} (kg.m ²)	0,03501757	0,046634277	33,17
J_{zz} (kg.m ²)	0,04560212	0,393530956	762,97
J_{xy} (kg.m ²)	0,01410825	0,0153847	9,05
J_{xz} (kg.m ²)	0,00849268	0,023657667	178,57
J_{yz} (kg.m ²)	0,00320642	0,049881485	1455,68