Helder Manuel da Conceição Barão Martins
Licenciatura em Ensino da Matemática

Tarefas para a Aprendizagem de Estatística no Ensino Secundário com Calculadora Gráfica

Dissertação para obtenção do Grau de Mestre em Ensino da Matemática no 3º Ciclo do Ensino Básico e Secundário

Orientador: António Manuel Dias Domingos, Professor Auxiliar da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa

Júri:
Presidente: Prof.ª Doutora Maria Helena Gomes de Almeida Santos
Arguente: Prof.ª Doutora Hélia Margarida Aparício Pintão de Oliveira
Vogal: Prof. Doutor António Manuel Dias Domingos

FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA

Dezembro 2016

UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA

FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA

Mestrado em Ensino da Matemática no 3º Ciclo do Ensino Básico e Secundário

Tarefas para a Aprendizagem de Estatística

no Ensino Secundário

com Calculadora Gráfica

Helder Manuel da Conceição Barão Martins

Dissertação apresentada na Faculdade de Ciências e Tecnologias da Universidade Nova de Lisboa para obtenção do grau de Mestre em Ensino da Matemática no 3.º Ciclo do Ensino Básico e Secundário, sob a orientação do Professor Doutor António Manuel Dias Domingos.

Tarefas para a Aprendizagem de Estatística no Ensino Secundário com Calculadora Gráfica

"Copyright" em nome de Helder Manuel da Conceição Barão Martins e da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa

"A Faculdade de Ciências e Tecnologia e a Universidade Nova de Lisboa têm o direito, perpétuo e sem limites geográficos, de arquivar e publicar esta dissertação através de exemplares impressos reproduzidos em papel ou de forma digital, ou por qualquer outro meio conhecido ou que venha a ser inventado, e de a divulgar através de repositórios científicos e de admitir a sua cópia e distribuição com objetivos educacionais ou de investigação, não comerciais, desde que seja dado crédito ao autor e editor'

À Gabriela, à Joaquina (1943-2016), ao Deodato, ao Vasco e à Inês

Agradecimentos

Ao Professor Doutor António Manuel Dias Domingos pelas orientações, críticas e sugestões manifestadas ao longo do período em que decorreu a elaboração desta dissertação, bem como pela sua total disponibilidade e entrega.

À minha família pelo tempo que lhes tomei com a minha insistente ausência.

Aos colegas e amigos, Cristina Negra e Emanuel Martinho, por terem sido responsáveis pela inscrição neste mestrado e por serem companheiros incansáveis na realização de outros projetos em conjunto, nomeadamente na elaboração de manuais escolares, para a editora Santillana.

Aos colegas do projeto T3 – Portugal, da Associação de Professores de Matemática, projeto a que estive associado de 1997 a 2005, em especial ao José Paulo Viana e à Ana Vieira Lopes, responsáveis pelo meu ingresso neste projeto.

À minha professora, colega e amiga Conceição Antunes (1943-2016), pelo seu entusiasmo, força e capacidade fora de série na transmissão de conhecimento.

A todos aqueles que, através da sua ação, contribuíram diretamente ou indiretamente, para que este trabalho chegasse a bom porto.

RESUMO

Neste trabalho pretende-se estudar a introdução de metodologias didáticas para a abordagem de conceitos estatísticos, no ensino secundário, utilizando a calculadora gráfica.

Atendendo a que a maioria dos alunos hoje em dia vive rodeado de tecnologia, e dentro de uma lógica de resolução de problemas matemáticos, a generalidade das tarefas propostas têm como pressuposto a utilização da calculadora gráfica.

São assim desenvolvidas e adaptadas tarefas matemáticas que têm por objetivo o estudo de estatística, recorrendo às potencialidades das calculadoras gráficas, nomeadamente fazendo uso dos módulos de estatística, de representação gráfica de funções e de geometria dinâmica, presentes, por exemplo, na TI-*n*spire da Texas Instruments, modelo com que se pretende trabalhar as tarefas propostas, embora algumas delas possam ser resolvidas recorrendo a outros modelos de calculadoras gráficas.

Foi utilizada uma metodologia de investigação de natureza qualitativa, recorrendo essencialmente a uma técnica de análise documental. Partiu-se de uma revisão de literatura que permite contextualizar as questões relacionadas com o currículo e o desenvolvimento curricular, o uso da tecnologia e as principais características que as tarefas devem observar.

Os materiais criados para a sala de aula, que incidem sobre o desenvolvimento curricular, agindo essencialmente sobre o currículo prescrito para o ensino secundário, nomeadamente no domínio de Estatística, permitem rever alguns conceitos introduzidos no ensino básico, como sejam: gráficos de barras, gráficos circulares e diagramas de extremos e quartis e as medidas de localização como a moda, média, mediana e quartis, e introduzir as medidas de dispersão e as amostras bidimensionais.

As questões às quais este trabalho pretende dar resposta são:

- Como se carateriza o currículo prescrito com estatística?
- Como pode ser moldado o currículo prescrito integrando a tecnologia?
- Como é que se materializam modelos de ensino-aprendizagem, no domínio da estatística, recorrendo à utilização da calculadora gráfica?
- De que forma a utilização da calculadora gráfica pode influenciar o currículo?

Sob um ponto de vista transversal à disciplina de matemática, são abordados igualmente a modelação matemática e a resolução de problemas; construção do raciocínio matemático e a utilização e exploração de tecnologia gráfica.

Palavras-chave: *Tarefas matemáticas, Ensino-aprendizagem, Calculadoras Gráficas, Resolução de Problemas, Conceitos Estatísticos.*

ABSTRACT

In this work we aim to study the introduction to didatical metodologies in order to approach statistical concepts, in high school, by utilizing graphical calculators.

Taking into account that the majority of students nowadays live surrounded by technology, and following a mathematical problem solving logic, most proposed tasks ensure using those same graphical calculators.

Mathematical tasks that aim the general study of statistics are being developed and adapted accordingly, using the potencialities of graphical calculators, namely making use of statistical modules, of graphical functions presentation and dinamic geometry, in, for example, the TI-*n*spire from Texas Instruments, model with which it is intended to work the proposed tasks, although some may be solved using some other models.

It has been used an investigation methodology of qualitative nature essentially utilising a documental analysis technique, This methodology began with a revision of literature that allowed the contextualization of questions related to the curriculum and curricular development, to the usage of technology and the most relevant characteristics that the tasks should verify.

The subjects developed for classroom, which are applied over curricular development, acting essentially over prescribed curriculum towards high school, namely in the domain of statistics, revisit some concepts introduced in middle school, being those: bargraphs, pie charts, box-plots and measures of location like the mode, the mean, the midian and quartiles; and introduce dispersion measures and bidimensional samples.

The questions that need to be answered with this work are:

- How to characterize the prescribed curriculum with statistics?
- How can the prescribed curriculum be moduled while integrating Technology?
- How do Teaching-Learning models materialize, in the domain of statistics, while working with a graphical calculator?
- In which way, using the graphical calculator can influence the curriculum?

Under a transversal perspective towards the subject of mathematics, mathematical modulation and problem solving are approached equaly; the building of a mathematical reasoning and the utilization and exploration of graphical technology.

Keywords: Mathematical Tasks, Teaching-Learning, Graphical Calculators, Problem Solving, Statistical Concepts.

INDICE GERAL

1. Introdução 1
1.1. Pertinência do estudo 1
1.2. Formulação do problema 4
1.3. Objetivos a atingir e questões de desenvolvimento curricular 6
1.4. Estrutura do documento 6
2. Revisão de Literatura 9
2.1. Análise curricular 9
2.1.1. O Currículo 9
2.1.2. Desenvolvimento curricular 14
2.2. O Ensino da Matemática e da Estatística 16
2.3. O uso da tecnologia 21
2.3.1. A tecnologia e a Matemática 21
2.3.2. A tecnologia nos programas de Matemática do Ensino Secundário 23
2.3.3. A aprendizagem da Estatística e a utilização da calculadora gráfica 24
3. Implementação de um currículo recorrendo a tarefas 27
3.1. Resolução de problemas e modelação matemática 27
3.2. O que são tarefas? 33
3.3. Critérios de seleção de tarefas 35
4. Metodologia 37
4.1. Fundamentação metodológica 37
4.2. Plano metodológico 39
4.3. Motivação para a seleção das tarefas propostas neste estudo 39
5. Enunciados e análise das tarefas 41
5.1. Amostras unidimensionais – Conceitos iniciais, tabelas e gráficos estatísticos 47
Tarefa 1. Cor dos olhos 47
Ficha Técnica – Tarefa 1 48
Tarefa 2. Lançamento de um dado 49
Ficha Técnica – Tarefa 2 50
Tarefa 3. Lançamento de dois dados 52
Ficha Técnica – Tarefa 3 53
Tarefa 4. Chamadas telefónicas 55
Ficha Técnica – Tarefa 4 56
5.2. Medidas de localização – Moda, média, mediana e quartis 58
Tarefa 5. Preços de computadores 58
Ficha Técnica – Tarefa 5 59
Tarefa 6. Localização da capital de um país 60
Ficha Técnica – Tarefa 6 61
Tarefa 7. As idades 62
Ficha Técnica – Tarefa 7 63

Tarefa 8. Dias de faltas ………………………………………………………… 64
Ficha Técnica – Tarefa 8 ………………………………………………………... 65
Tarefa 9. Salários de trabalhadores ...……………………………………..…… 67
Ficha Técnica – Tarefa 9 ……………………………………………………….. 68
Tarefa 10. Duração do trajeto casa-escola ………………………………….… 69
Ficha Técnica – Tarefa 10 …..………………………………………………….. 70
5.3. Medidas de dispersão – Amplitude, amplitude interquartil e desvio padrão …………………………………………………………………………..… 73
Tarefa 11. Lançamento de moedas ao ar ………………………………….… 73
Ficha Técnica – Tarefa 11 …..…………………………………………………... 74
Tarefa 12. Alturas de basquetebolistas ……………………………………… 76
Ficha Técnica – Tarefa 12 ……………..……………………………………….. 77
Tarefa 13. Teste de Matemática ….……………………………………………..… 79
Ficha Técnica – Tarefa 13 ..……………………………………………………... 80
5.4. Amostras bidimensionais – Diagramas de dispersão e reta dos mínimos quadrados ……………………………………………………………… 82
Tarefa 14. Quais são as suas idades? ….………………………………………… 82
Ficha Técnica – Tarefa 14 …..…………………………………………..……… 83
Tarefa 15. Horas de estudo ……………...………………………………….…. 85
Ficha Técnica – Tarefa 15 ……………..……………………………………….... 86
Tarefa 16. A chama da vela de aniversário ...………………………………..… 88
Ficha Técnica – Tarefa 16 ..………………………………………………………... 89
Tarefa 17. Rede postal …………………..……………………………………..… 90
Ficha Técnica – Tarefa 17 …..……………………………………………………... 91
Tarefa 18. Correlações – Relação causa/efeito ..…………………………….… 92
Ficha Técnica – Tarefa 18 ……………..……………………………………….. 93
Tarefa 19. Pizas e cortes …………………....……………………………….… 95
Ficha Técnica – Tarefa 19 ..…………………………………………………….. 96
Tarefa 20. Qual é o triângulo de maior área? …..…………………………..… 97
Ficha Técnica – Tarefa 20 ……………..…………………………………….…. 98
Tarefa 21. Matemática por um canudo …......……………………………….… 100
Ficha Técnica – Tarefa 21 ..…………………………………………………….. 101
Tarefa 22. Intensidade da luz e Sensores ……….…………………………..… 102
Ficha Técnica – Tarefa 22 …..…………………………………………………... 103
Tarefa 23. Retângulo dentro de um triângulo ...……………………………..… 104
Ficha Técnica – Tarefa 23 ……………..……………………………………….... 105
Tarefa 24. Estudo da evolução das notas nos exames nacionais ……………..… 107
Ficha Técnica – Tarefa 24...………………………………………………….... 108
6. Conclusões ………………………………………………………………… 109
6.1. Resultados gerais da investigação ..………………………………………….. 109
6.2. Considerações finais………………………………………………………….. 112
Bibliografia ……………………………………………………………………… 114
Anexo …………………………………………………………………………… 118

INDICE DE TABELAS

Tabela 3.1.1. – Ações e intensões do professor numa situação de resolução de Problemas ………………………………………………………………….. 30
Tabela 5.0.1. – Amostras unidimensionais – conceitos iniciais, tabelas e gráficos Estatísticos…………………………………………………………………… 41
Tabela 5.0.2. – Medidas de localização – moda, média, mediana e quartis ……………… 42
Tabela 5.0.3. – Medidas de dispersão – amplitude, amplitude interquartil e desvio padrão ……………………………………………………………….. 42
Tabela 5.0.4. – Amostras bidimensionais – diagramas de dispersão e reta dos mínimos quadrados ……………………………………………… 43
Tabela 5.0.5. – Tarefas matemáticas, tipo e contexto …………………………………….. 44
Tabela 5.0.6. – Proposta de planificação da unidade Estatística (10.º e 11.º anos) ……… 45
Tabela 5.1.1. – Tabela completa da tarefa 2 …………………………………………….. 50
Tabela 5.1.2. – Tabela completa da tarefa 3 …………………………………………….. 53
Tabela 5.1.3. – Tabela completa da tarefa 4 …………………………………………….. 56
Tabela 5.2.1. – Tabela de frequências absolutas e relativas ……………………………... 65
Tabela 5.2.2. – Tabela com a marca de classe e as frequências absoluta e relativa ….. 71
Tabela 5.3.1. – Frequência absoluta simples …..…………………………………………… 74
Tabela 5.4.1. – Comprimentos da vela …………………………………………………… 89
Tabela 5.4.2. – Dados obtidos com a experiência ………………………………………… 98
Tabela 5.4.3. – Dados obtidos com a experiência ………………………………………… 101

INDICE DE FIGURAS

Figura 2.1.1.1. – O currículo e a sua interação com o contexto …………………………….. 12
Figura 2.2.1. – Triângulo didático/contexto …………………………………………….….. 19
Figura 2.3.1.1. – Decisões acerca dos procedimentos de cálculo em problemas numéricos ……………………………………………………………………… 22
Figura 3.1.1. – NCTM e a resolução de problemas ……………………………………….. 28
Figura 3.1.2. – Modelação na sala de aula ………………………………………………… 32
Figura 3.2.1. – Esquema que relaciona as tarefas matemáticas, tendo por base o grau de desafio matemático e o grau de estrutura ……………………… 34
Figura 3.2.2. – Esquema com os diversos tipos de tarefas, no que respeita à duração … 35
Figura 5.1.1. – Dados da tarefa 1 ……………………………………………………….... 48
Figura 5.1.2. – Questão 1.3 ………………………………………………………………….. 48
Figura 5.1.3. – Programa da tarefa 2 ……………………………………………………..… 50
Figura 5.1.4. – Gráfico de pontos ……………………………………………………….... 51
Figura 5.1.5. – Gráfico circular ………………………………………………………….... 51
Figura 5.1.6. – Programa da tarefa 3 e respetiva execução ……………………………….. 53
Figura 5.1.7. – Gráfico de barras ……………………………………………………….... 54
Figura 5.1.8. – Frequências absolutas e relativas …………………………………….... 54
Figura 5.1.9. – Gráfico de barras das frequências relativas acumuladas ……………..... 54
Figura 5.1.10. – Marca de classe e frequências absolutas acumuladas ……………….… 56
Figura 5.1.11. – Histograma ……………………………………………………………….... 57
Figura 5.2.1. – Parâmetros estatísticos ………………………………………………….… 59
Figura 5.2.2. – Diagrama de extremos e quartis …………………………………………..… 59
Figura 5.2.3. – Distâncias entre as quatro cidades ……………………………………..… 61
Figura 5.2.4. – Parâmetros estatísticos das listas A, B, C e D …………………………..… 61
Figura 5.2.5. – Extremos e quartis ………………………………………….………….…. 65
Figura 5.2.6. – Diagrama de extremos e quartis ……………………………………..… 66
Figura 5.2.7. – Média ……………………………………………………………………….... 66
Figura 5.2.8. – Gráfico de barras ……………………………………………………..…. 66
Figura 5.2.9. – Média ……………………………………………………………………….….. 68
Figura 5.2.10. – Ordenar a lista a ………………………………………………………..…. 70
Figura 5.2.11. – Mosaico de páginas com os parâmetros estatísticos …………………... 70
Figura 5.2.12. – Média ……………………………………………………………………..… 71
Figura 5.2.13. – Frequências absolutas acumuladas …………………………………..… 71
Figura 5.2.14. – Gráfico de barras ……………………………………………………….. 72
Figura 5.2.15. – Histograma ……………………………………………………………….. 72
Figura 5.2.16. – Histograma com indicação da moda ………………………………………. 72
Figura 5.3.1. – Lista m ……………………………………………………………………..… 74
Figura 5.3.2. – Gráfico de barras ……………………………………………………..….. 74
Figura 5.3.3. – Parâmetros estatísticos ……………………………………………….…... 75

Figura 5.3.4. – Diagrama de extremos e quartis ………………………………………….… 75
Figura 5.3.5. – Mosaico de páginas da calculadora com as medidas estatísticas …….... 77
Figura 5.3.6. – Diagramas de extremos e quartis …………………………………………. 77
Figura 5.3.7. – Lista c ordenada …………………………………………………………..… 78
Figura 5.3.8. – Diagrama de extremos e quartis ………………………………………….… 80
Figura 5.3.9. – Estatísticas ……………………………………………………………….…. 80
Figura 5.4.1. – Listas e diagrama de dispersão …………………………………………..…. 83
Figura 5.4.2. – Tratamento estatístico das estimativas ……………………………….…. 84
Figura 5.4.3. – Diagrama de dispersão ……………………………………………………..… 86
Figura 5.4.4. – Estatísticas ………………………………………………………………..… 86
Figura 5.4.5. – Reta de regressão linear …………………………………………………..…. 86
Figura 5.4.6. – Desvios ……………………………………………………………………..... 87
Figura 5.4.7. – Diagrama de dispersão ……………………………………………………..… 89
Figura 5.4.8. – Diagrama de dispersão ……………………………………………………..… 91
Figura 5.4.9. – Mosaico de páginas da calculadora com os parâmetros das diversas retas de regressão linear ……………………………………….…. 93
Figura 5.4.10. – Diagrama de dispersão x/y_1 ……………………………………………..… 94
Figura 5.4.11. – Diagrama de dispersão x/y_2 ……………………………………………..… 94
Figura 5.4.12. – Diagrama de dispersão x/y_3 ……………………………………………..… 94
Figura 5.4.13. – Diagrama de dispersão x_4/y_4 …………………………………………..... 94
Figura 5.4.14. – Regressão quadrática …………………………………………………….…. 96
Figura 5.4.15. – Diagrama de dispersão x/A …………………………………………….…. 98
Figura 5.4.16. – Regressões quadrática e cúbicas …………………………………..……. 99
Figura 5.4.17. – Diagrama de dispersão ……………………………………………….…... 101
Figura 5.4.18. – Diagrama de dispersão e regressão potência …………………………..… 103
Figura 5.4.19. – Mosaico de páginas com aplicação do modelo $y = \frac{0,3}{x^2}$ ………………..…. 103
Figura 5.4.20. – Página de Geometria e de Listas e Folha de Cálculo com a investigação proposta na tarefa ………………...……………………..… 105
Figura 5.4.21. – Diagrama de dispersão ……………………………………………….…. 105
Figura 5.4.22. – Regressão quadrática …………………………………………………..… 106

1. INTRODUÇÃO

Com este trabalho pretende-se estudar a implementação de metodologias de ensino aprendizagem da estatística, recorrendo a tarefas, com utilização da calculadora gráfica, tendo em vista uma possível utilização futura dessas tarefas com alunos na disciplina de Matemática A do Ensino Secundário.

Neste capítulo é apresentada a pertinência do estudo, a formulação do problema e os objetivos a atingir partindo de um conjunto de questões que envolvem uma abordagem de desenvolvimento curricular com integração da tecnologia. Por último é efetuada uma apresentação da estrutura do documento.

1.1. Pertinência do estudo

A generalidade dos alunos que acedem a cursos de prosseguimento de estudos no Ensino Secundário, embora apresentem níveis motivacionais elevados no início, apresentam dificuldades na aquisição e aplicação de conhecimentos e, quando se confrontam com a disciplina de Matemática, que apresenta um significativo número de conteúdos teóricos, em que os conceitos em estudo precisam de tempo para serem compreendidos e de alguma persistência no estudo, sendo que a sua aplicação, por vezes, não é imediata, muitos deles acabam por desistir provocando assim altos níveis de insucesso escolar (CNE, 2015).

A Estatística é um domínio do conhecimento Matemático que pode ser utilizada para inverter um pouco esta tendência e que, quando é apresentada como forma de ligar o mundo real com a teoria, nomeadamente recorrendo a tarefas para implementar o currículo prescrito (Gimeno, 2000), permite que os alunos tenham acesso a uma visão mais real e próxima da utilidade da matemática.

A apresentação de temas que permitam ao aluno identificar a realidade e a sua evolução, trabalhando esses temas individualmente ou em grupo, pode e deve ser fomentado de forma que o aluno percecione a utilidade do conhecimento matemático e estabeleça pontes entre esse conhecimento e o mundo real. Como é referido em NCTM (2007), o currículo deve ser coerente e relevante.

Toda a ciência criada até aos nossos dias nasceu de uma necessidade e teve ou terá supostamente um objetivo, desde a descoberta do fogo e da invenção da roda, até à confirmação recente das ondas gravitacionais, previstas por Albert Einstein há mais de 100 anos.

Como refere Lima (2004, p. 122),

> As aplicações são a principal razão pela qual o ensino da matemática é tão difundido e necessário, desde os primórdios da civilização até aos dias de hoje e certamente cada vez mais no futuro.

É assim razoável concluir que cada aluno tem que ver na sua atividade um objetivo para que possa cumprir as suas metas e aspirações. A estatística e em particular a análise de dados, pela ligação imediata que permite à realidade circundante, é um campo de conhecimentos que pode servir para motivar cada aluno a querer aprender de forma mais eficaz.

A matemática escolar não deve ser encarada como o simples domínio de técnicas e de algoritmos, pode ser desenvolvida de forma a compreender aquilo que os alunos sabem e precisam de aprender, bem como os alunos devem ser estimulados e apoiados para que aprendam corretamente (NCTM, 2007). Tal como referiram os vinte e cinco professores e investigadores de matemática reunidos em Vila Nova de Milfontes, em 1998 (APM, 2009), é importante investir na metodologia, no tipo de atividades, no interesse das situações, de forma que o que é proposto ao aluno seja um fim em si mesmo e não um pré-requisito de algo que virá depois. A aplicação em sala de aula destes processos aumentará as possibilidades de que aquilo que for pedido ao aluno tenha para ele um maior significado.

Ainda segundo o NCTM (2007), os alunos devem aprender matemática com compreensão, construindo novos conhecimentos, baseando-se nas suas experiências e nos seus conhecimentos prévios, de forma a aumentar a sua confiança e a sua pré-disposição em relação à matemática.

> O ensino efetivo da matemática requer a compreensão daquilo que os alunos sabem e precisam de aprender; bem como o sequente estímulo e apoio para que o aprendam corretamente (NCTM, 2007, p 17)

O escritor Manuel António Pina tem a propósito, no seu *Pequeno Livro de Desmatemática*, um poema que, a pretexto de anúncio de jornal, diz o seguinte:

> Solução certa procura
> um problema à sua altura
> com quem possa partilhar
> uma vida sem incógnitas (Pina, 2012, p 28)

Este poema coloca-nos muitas interrogações, desde logo, um problema matemático pode desligar-se do mundo real? Deve ter solução? E se tiver solução esta tem que ser única?

Hewson (2011), Freiman & Manuel (2015) referem que um bom problema é toda aquela atividade que envolve ideias matemáticas importantes (contextualização); permite múltiplas estratégias de resolução, bem como várias respostas (abertura); é acessível a vários alunos com diferentes níveis de conhecimentos e aptidões (acessibilidade); envolve escolhas e requer tomada de decisões, bem como a justificação dessas decisões (complexidade); permite variantes e extensões (formulação) e permite o estabelecimento de conexões entre diferentes áreas ou tópicos da matemática (conexões).

É neste contexto que deve ser encarada a tecnologia – calculadoras e computadores – que constituem ferramentas preciosas para o ensino e a aprendizagem da matemática. O facto das tecnologias eletrónicas proporcionarem imagens visuais das ideias matemáticas, permitindo a organização e a análise de dados, e o facto de realizarem cálculos de uma forma eficaz e exata, permite que os alunos se possam concentrar na tomada de decisões, na reflexão, no raciocínio e na resolução de problemas. Alguns investigadores (Dunham & Dick, 1994) referem que o uso adequado das tecnologias permite que os alunos aprendam de forma mais aprofundada e consistente.

Num mundo em que a informação circula livremente, e muito rapidamente, e em que os recursos tecnológicos evoluem de forma acelerada, não se pode impedir que os alunos utilizem a tecnologia ao seu alcance para obterem eles próprios a informação de que necessitam.

O programa de matemática A (MEC, 2014, p. 28) preconiza que:

> A tecnologia no Ensino Secundário deve, portanto, ser aproveitada para ajudar os alunos a compreender certos conteúdos e relações matemáticas e para o exercício de certos procedimentos; essa utilização deve, no entanto, ser criteriosa, já que, caso contrário, pode condicionar e comprometer gravemente a aprendizagem e a avaliação.

O mesmo programa (ibidem) refere que:

> Em particular o professor deve alertar os alunos para as limitações das calculadoras e computadores, sublinhando sempre a importância de relacionar quer as representações gráficas observadas, quer os valores encontrados, com o conhecimento teórico que permite atribuir o devido significado a essas representações e valores.

Como diz o adágio popular: “tudo na vida deve ser feito com conta, peso e medida” e a utilização da tecnologia em sala de aula, ou fora desta, não é exceção, cabe ao professor gerir os momentos adequados para essa mesma utilização.

A aprendizagem feita com compreensão tem a vantagem de facilitar as aprendizagens subsequentes. O facto de os alunos relacionarem o conhecimento novo com o conhecimento que já detinham, torna a aprendizagem da matemática mais simples e é mais facilmente memorizada e aplicada (Schoenfeld, 1988).

Caldas (2016) refere a propósito que o cérebro necessita de ser estimulado com processos de memorização e com processos de compreensão, podendo com isto querer afirmar que tem que haver um equilíbrio entre aquilo que é conceptual e aquilo que é intuitivo.

O estudo da estatística, nomeadamente a análise de dados, com recurso à calculadora gráfica e ao computador, deve ser encarado num quadro de resolução de problemas decorrentes de situações, eventualmente centradas na vida do dia-a-dia, que permitam a utilização de conceitos e de técnicas formalizadas anteriormente e que possam ser reforçadas recorrendo a aspetos mais intuitivos. Não se pretende que os alunos trabalhem situações demasiadamente complexas, mas sim problemas que descrevam de modo algo simples processos da vida quotidiana e que sejam adaptadas convenientemente ao currículo prescrito (Ponte & Canavarro 1997).

Partindo do princípio que a matemática é essencialmente uma disciplina em que os raciocínios ocorrem de uma forma recorrente e sistematizada, pretende-se, com a resolução de problemas e em particular com a modelação matemática, que os alunos criem conjeturas e que as consigam verificar com os instrumentos que têm ao seu dispor (Matos, 1995).

Aliada à resolução de problemas está a explicação e a explicitação do raciocínio matemático envolvido na respetiva resolução ou tentativa de resolução. É fundamental o aluno saber argumentar o porquê de seguir um determinado caminho em detrimento de outro, saber explicar de forma conveniente, isto é, clara e coerentemente, uma estratégia que utilizou na resolução de um determinado problema. Neste contexto (NCTM, 1991), cada aluno deve saber expressar ideias matemáticas oralmente, por escrito, através de demonstrações ou de uma forma visual: deve compreender, interpretar e avaliar ideias matemáticas apresentadas sob diversas formas e deve utilizar vocabulário e simbologia adequada. Fomenta-se assim igualmente o uso da escrita, quer corrente, quer matemática, através de pequenas composições, e a apresentação a pequenos grupos e/ou ao grupo turma da ideia ou conceito que levou a uma determinada estratégia de resolução. Os alunos devem ser incentivados a expor as suas dúvidas e anseios de modo a que se autocorrijam e melhorem as suas prestações.

O papel do professor é determinante, pois deve funcionar como um moderador e um gerador de conhecimentos e atitudes nos alunos. Como é referido em NCTM (2007), uma parte significativa da responsabilidade do professor consiste em planear situações que proporcionem aos alunos a oportunidade de aprender conteúdos importantes através da sua exploração e praticar uma grande variedade de heurísticas.

1.2. Formulação do problema

A estatística é uma disciplina que pretende interpretar o meio em que vivemos, recolhendo dados e efetuando observações para, com o auxílio da teoria das probabilidades, prever e estimar resultados.

É igualmente um tema que os alunos portugueses começam a descobrir desde o 1.º ciclo do Ensino Básico, ao efetuarem contagens de coleções de objetos e ao procurarem processos de sistematização e de ordenação dessas mesmas contagens.

Atendendo ao programa de matemática para o Ensino Básico (MEC, 2013), um aluno neste nível de ensino toma o primeiro contacto com a estatística através do domínio Organização e Tratamento de Dados (OTD), devendo no 1.º ano do 1.º ciclo saber representar conjuntos usando diagramas de Venn, analisar a noção de conjunto e efetuar as primeiras representações de pontos através de pictogramas; no 2.º ano, deve observar a interseção e a união de conjuntos através de diagramas de Venn e de Carroll, efetuar igualmente tabelas de frequências absolutas e esquemas de contagem; no 3.º ano, efetuar diagramas de caule e folhas simples, tomando contacto com as noções de moda, máximo, mínimo e amplitude de uma amostra e no 4.º ano, saber o que é uma frequência relativa e trabalhar com percentagens.

Ao nível do 2.º ciclo do Ensino Básico, nomeadamente no 5.º ano de escolaridade, um aluno deve saber reproduzir tabelas de frequências absolutas e relativas, saber o que são gráficos de barras e de linhas, efetuar uma média aritmética e resolver problemas que envolvam o cálculo da média e da moda, bem como o tratamento de dados em tabelas, diagramas e gráficos. No 6.º ano, deve dominar as noções de população e de unidade estatística, diferenciar variáveis quantitativas de qualitativas, saber efetuar gráficos circulares e resolver problemas que envolvam o cálculo da média, moda e amplitude.

No 3.º ciclo do Ensino Básico, nomeadamente no 7.º ano de escolaridade, o discente deve saber ordenar dados, calcular a mediana de um conjunto de dados, bem como conhecer algumas propriedades e resolver problemas envolvendo tabelas, gráficos e medidas de localização; no 8.º ano, aprender a noção de quartil, elaborar diagramas de extremos e quartis e saber calcular a amplitude interquartil e no 9.º ano de escolaridade, o aluno toma contacto com as representações de variáveis estatísticas contínuas, nomeadamente a representação de dados em tabelas de frequências e histogramas e aprende os primeiros conceitos de probabilidade, que envolve já a noção de definição de Laplace e a noção de teoria frequencista.

No Ensino Secundário, segundo o programa de matemática A (MEC, 2014) e já com o domínio apelidado de Estatística, o aluno deverá adquirir as noções de somatório e suas propriedades elementares; saber calcular a média, a variância e o desvio padrão de uma amostra, bem como reconhecer o valor do percentil de ordem *k* e suas propriedades, tudo no 10.º ano. No 11.º ano, o aluno toma contacto com os conceitos referentes a amostras de dados bivariados, nomeadamente nuvem de pontos; reta dos mínimos quadrados de uma amostra de dados quantitativos e coeficiente de correlação linear de Pearson.

Para a prossecução e apropriação deste tema, os alunos têm, ao longo de todo o sistema de ensino uma carga curricular que vai variando à medida que os conhecimentos a adquirir na disciplina de matemática se vão adensando e complexificando, sendo que o aluno, quando chega ao Ensino Secundário, tem, em geral, e nos cursos Científico-Humanísticos de Ciências e Tecnologias e de Ciências Socioeconómicas, uma carga horária semanal de 3 blocos de 90 minutos, isto é, cerca de 270 minutos por semana.

Neste nível de ensino, a disciplina de matemática está inserida num conjunto de disciplinas que são apelidadas de disciplinas de formação específica e pretendem dotar o aluno, que acede a este tipo de cursos, normalmente designados por cursos para prosseguimento de estudos, de valências e competências que lhe permita efetivamente prosseguir estudos num curso do ensino superior.

Como foi referido, encontram-se no programa conteúdos de estatística desde o 1.º ano do 1.º ciclo ao 11.º ano de escolaridade, verificando-se assim uma das recomendações expressas quer nos documentos do NCTM (1991), quer nas recomendações da APM (2009).

Efetivamente, o facto de os temas inerentes à organização e interpretação de dados estarem presentes ao longo de todo o programa não significa que neste sejam dadas indicações metodológicas precisas de como efetivar esse conhecimento, e uma das formas de execução é fazer com que os alunos vivenciem experiências que lhes permitam o desenvolvimento do sentido crítico, a capacidade de argumentação e a tomada de decisões.

Tal como é referido por Martins, Monteiro, Viana & Turkman (1997): "A estatística é um domínio da matemática que verdadeiramente permite interpretar e intervir no real, formular e resolver problemas, comunicar, manifestar rigor e espírito crítico e ainda uma atitude crítica face à Ciência" (pp. 7 e 8).

No documento citado, exige-se que o aluno seja cada vez mais um agente do seu processo educativo e como tal deve saber interpretar, analisar e criticar de forma construtiva.

1.3. Objetivos a atingir e questões de desenvolvimento curricular

Com este estudo, pretende-se criar momentos de reflexão e simultaneamente implementar estratégias promotoras do sucesso dos alunos na disciplina de Matemática A, através da criação ou adaptação de tarefas em que é realçada a importância da utilização da calculadora gráfica na aprendizagem da Estatística.

A prática instituída do autor e a investigação em geral (Freitas, 2000; NCTM, 2007), sugerem que a utilização da calculadora gráfica permite ao aluno, mesmo com dificuldades de aprendizagem, repetir procedimentos algo morosos e relativamente complexos. São disso exemplo, a determinação do valor da média e do desvio padrão de uma amostra, possibilitando assim que o aluno se concentre mais na compreensão do conceito em causa em detrimento do simples cálculo e estabelecendo conjeturas, por verificação da existência de padrões ou regularidades na amostra estudada.

Num ambiente de resolução de problemas, e utilizando a calculadora gráfica, tenta-se criar procedimentos que permitam dar resposta à aquisição de conceitos de estatística por parte dos alunos.

As questões que se colocam têm por base uma abordagem de desenvolvimento curricular com integração da tecnologia e são:

- Como se carateriza o currículo prescrito com estatística?
- Como pode ser moldado o currículo prescrito integrando a tecnologia?
- Como é que se materializam modelos de ensino-aprendizagem, no domínio da estatística, recorrendo à utilização da calculadora gráfica?
- De que forma a utilização da calculadora gráfica pode influenciar o currículo?

Estas são questões às quais este trabalho tentará dar resposta, de forma a impulsionar uma prática letiva promotora de aprendizagens significativas nos alunos em geral.

1.4. Estrutura do documento

Este documento encontra-se organizado em cinco capítulos.

O presente capítulo é de introdução. O capítulo dois, em que é apresentada uma revisão da literatura, incide sobre a análise dos diversos currículos que coexistem numa instituição escolar e quais são os agentes que agem sobre o currículo, recorrendo aos trabalhos desenvolvidos por Gimeno (2000), Pacheco (2001), Roldão (1997), APM (2009) e Ponte (2002). Ainda neste capítulo é feita uma análise do desenvolvimento curricular, introduzindo-se análises de NCTM (2007), Serrazina & Oliveira (2005) e Abrantes (1997), assim como é apresentada a evolução do ensino da matemática e da estatística desde meados do século passado. Por fim, são efetuadas referencias ao uso da tecnologia, quer de forma genérica, quer recorrendo à forma como deve ser utilizada a calculadora gráfica com o objetivo de ensinar estatística, tendo por base Fey (1991), Reys (1989), NCTM (1991), Pontes & Filipe (1995), Waits (1997), Canavarro (2000), NCTM (2007) e Oliveira (2008).

No terceiro capítulo aborda-se a resolução de problemas e a modelação matemática, entendidos como processos para desenvolver o raciocínio matemático nos alunos, e desenvolve-se o significado da utilização de tarefas matemáticas em sala de aula, bem como quais são os seus diversos tipos, tendo por basa Ponte (2005), NCTM (1994 e 2007) e Almiro (2005).

No quarto capítulo é apresentada a metodologia que serviu de base à construção das tarefas que são propostas.

Por último, no quinto capítulo, são apresentadas as conclusões e as respostas às quatro questões colocadas sobre desenvolvimento curricular, no capítulo introdutório, e algumas considerações finais sobre este trabalho.

2. REVISÃO DE LITERATURA

Neste capítulo pretende-se efetuar uma revisão de literatura sobre os temas que são objeto de tratamento neste trabalho. Assim, inicia-se a referida revisão atendendo a alguns aspetos relativos à análise curricular, quer no que respeita ao currículo propriamente dito, quer na parte relativa ao desenvolvimento curricular. Em seguida trata-se o ensino da Matemática e da Estatística em termos históricos e são analisados modelos de ensino com tecnologia. Por último, é feita uma análise da aprendizagem da estatística com recurso a tecnologia e em particular usando a calculadora gráfica.

2.1. Análise curricular

2.1.1. O currículo

A matemática é uma disciplina que não pode ser desenquadrada do meio que circunda o indivíduo, e sendo as sociedades modernas cada vez mais competitivas, a cada jovem que realiza um determinado percurso académico, deve-lhe ser incutido um maior espírito crítico e uma maior capacidade de intervenção, de forma a estar apto a dar resposta às exigências da sociedade em que se insere.

Davis & Hersh (1995) referem que a matemática mais utilizada é aquela que faz parte da consciência coletiva, sendo que o mesmo tema matemático pode ser atingido de diversas maneiras, não sendo, contudo, correto afirmar que uma determinada forma de aprender matemática é mais verdadeira do que outra.

O currículo de matemática escolar deve assim acompanhar as alterações efetuadas na sociedade e como tal, desde os finais do século XX, tem-se assistido a uma maior preocupação, por parte de investigadores e dos governos em geral, no sentido de se alterar a forma como se ensina matemática. Não é recomendável que alunos que completem o ensino secundário não consigam resolver situações da vida corrente, quer estas situações ocorram em estudos de nível superior, quer mesmo no local de trabalho (APM, 2009).

O *currículo* deve aqui ser entendido como “um conjunto organizado de objetivos, orientações metodológicas, conteúdos e processos de avaliação” (APM, 2009, p. 15), deixando de ser sinónimo de programa, sendo este último, segundo Ponte, Matos e Abrantes (1998), uma sequência de tópicos de uma disciplina (conteúdos) que são lecionados num respetivo ano ou ciclo.

Como se desenvolve um currículo? Quais são os atores que agem sobre ele? Quais os contextos sociais e culturais que são determinantes?

Um dos investigadores, a nível internacional, que tem desenvolvido trabalho nesse campo de pesquisa, tem sido o autor espanhol José Gimeno Sacristán, sendo a sua obra, *O Currículo: uma reflexão sobre a prática*, originalmente publicada em 1991, uma referência.

Segundo Gimeno (2000):

> Quando definimos o currículo estamos a descrever a concretização das funções da própria escola e a forma particular de as enfocar, num momento histórico e social determinado, para um nível ou modalidade de educação, numa trama institucional (p. 15).

Ou ainda:

> O currículo, em seu conteúdo e nas formas através das quais se nos apresenta e se apresenta aos professores e aos alunos, é uma opção historicamente configurada, que se sedimentou dentro de uma determinada trama cultural, política, social e escolar; está carregado, portanto, de valores e pressupostos que é preciso decifrar (p. 17).

O currículo constitui-se como um instrumento de análise da sociedade, em termos sociais e culturais, permitindo assim que sejam transpostos os valores e saberes para a instituição escolar, sendo que a construção do currículo não pode ser desligada do desenvolvimento da sociedade e tem que atender a fatores políticos e administrativos, às condições estruturais, organizativas e materiais sentidas na comunidade educativa.

Pacheco (2001) reforça esta ideia assinalando que o currículo resulta de um projeto socioeducativo, que tem uma componente fortemente política, uma vez que é moldado pela administração central através da definição de planos curriculares e dos seus objetivos, na elaboração dos programas, na definição das formas e critérios de avaliação, na organização dos grupos de recrutamento e no agrupamento dos alunos.

Gimeno (2000, pp. 23 a 26) explicita igualmente oito domínios em que se revelam práticas que determinam o currículo:

1) Atividade político-administrativa, onde é definido o currículo na sua forma escrita, como sendo uma lista com objetivos e normas a atingir e cumprir.
2) Participação e controlo, sendo que inicialmente tais tarefas cabem aos serviços de inspeção educativa e posteriormente a diversas instâncias que democratizam o sistema, como por exemplo: órgãos do governo, escolas, associações profissionais de professores, encarregados de educação e associações científicas e culturais.
3) Organização do sistema educativo, em que as divisões por ciclos ou níveis permite uma regulação das entradas e saídas do sistema de ensino, nomeadamente através da progressão e certificação e de sistemas de avaliação dos alunos.
4) Produção de meios, nos quais se inserem os diversos meios didático-pedagógicos produzidos, nomeadamente manuais escolares e material de apoio, que influenciam de forma decisiva a prática de lecionação dos professores.
5) Criação cultural e científica, uma vez que o currículo tem uma base eminentemente cultural e como tal é influenciado pela ciência, arte, literatura, religião, etc.
6) Técnico-pedagógico, constituído por formadores, especialistas e investigadores em educação, universidades, etc.
7) Inovação, incluindo-se aqui a necessidade de renovação curricular que pode ser desenvolvida por professores de forma autónoma ou por associações profissionais.

8) Prático-pedagógico, em que se insere a prática dos diversos professores e alunos em contexto escolar.

Todos estes domínios ou subsistemas não podem ser vistos de forma isolada, pois muitos dos agentes participam em vários domínios simultaneamente, os quais por sua vez não estão isolados dos restantes. Um determinado currículo oficial sofre influência de todos estes domínios e por sua vez o currículo escrito define regras e procedimentos em cada um destes subsistemas.

Gimeno (2000, p. 30) considera que:

> O fracasso escolar, a desmotivação dos alunos, o tipo de relações entre estes e os professores, a disciplina em aula, a igualdade de oportunidades, etc. são preocupações de conteúdo psicopedagógico e social que têm concomitâncias com o currículo que se oferece aos alunos e com o modo como é oferecido. Quando os interesses dos alunos não encontram algum reflexo na cultura escolar, se mostram refratários a esta sob múltiplas reações possíveis: recusa, confronto, desmotivação, fuga, etc.

Skilbeck indica nove áreas que constituem o núcleo básico do currículo, as quais podem ser consideradas um valor em si mesmas ou serem inseridas noutras áreas (Gimeno, 2000, p60):

1) Artes e ofícios, onde se inclui, por exemplo, a literatura, a música e as artes visuais.
2) Estudos sobre o meio ambiente, que compreendem os aspetos físicos e ambientes criados pelo homem.
3) Habilidades e raciocínio matemático com suas aplicações, as quais têm relações com outras áreas; ciência e tecnologia, por exemplo.
4) Estudos sociais, cívicos e culturais, em que se incluem os sistemas políticos e os valores em sociedade.
5) Educação para a saúde, onde se encontram aspetos físicos, emocionais e mentais.
6) Modos de conhecimento científico e tecnológico e respetivas aplicações na sociedade.
7) Comunicação através de códigos verbais e não-verbais relacionados com o conhecimento e os sentimentos.
8) Pensamento moral, atos, valores e crenças.
9) Mundo do trabalho, do ofício e estilo de vida.

Gimeno (2000), apresenta ainda um modelo de desenvolvimento curricular tendo por base uma conceção processual do currículo. Considera assim diferentes tipos de currículo, dependendo dos diversos atores que agem sobre ele:

1) O currículo prescrito. Funciona como referência obrigatória na ordenação do sistema curricular, na elaboração de materiais curriculares e no controlo do sistema. É ditado pelas instâncias político-administrativas.
2) O currículo apresentado aos professores. É desenhado pelos materiais técnico-curriculares, principalmente o manual escolar, e interpretam o currículo prescrito facilitando a atividade de planificação de um professor pois apresenta uma interpretação mais orientada.

3) O currículo moldado pelos professores. Resulta da interpretação e do trabalho do professor ou de um grupo de professores, efetuado sobre o currículo prescrito ou tendo por base os materiais curriculares.
4) O currículo em ação. Corresponde ao currículo executável junto dos alunos e cumpre-se quando o professor leciona as suas aulas tendo por base o que foi planificado.
5) O currículo realizado. É uma consequência da prática e reflete-se nas aprendizagens dos alunos, afetando igualmente os professores na sua socialização profissional, projetando-se igualmente no ambiente social, familiar, etc.
6) O currículo avaliado. É neste currículo que incidem os testes ou avaliações externas, sendo este que possibilita o barómetro de todo o sistema por permitir retirar ilações para o ensino do professor e para a aprendizagem dos alunos.

O esquema representado na Figura 2.1.1.1., ilustra a relação entre os diferentes tipos de currículos e as suas interações com o contexto.

Figura 2.1.1.1. – O currículo e a sua interação com o contexto, adaptado de Gimeno (2000, p 105)

Cada um destes tipos de currículo determina uma diferente prática profissional nos professores, por vezes rotineira, que pode dificultar futuros processos de inovação e concretização curricular.

Como refere Pacheco (2001), pode medir-se o currículo realizado pelo afastamento ou aproximação relativamente ao currículo prescrito, isto é, por mais cumpridores que sejam os professores haverá sempre espaço para a existência de um currículo informal ou oculto uma vez que os docentes e alunos modelam o seu ensino e a sua aprendizagem, respetivamente, atendendo às suas crenças, vivências e saberes.

No entanto, se é verdade que no centro de todo o processo está o aluno, também é igualmente verdade que de todos os decisores o mais ativo, e do qual depende mais o sucesso de um currículo, é sem dúvida a ação e a prática profissional de um professor, sendo que, como refere Pacheco (2001), o currículo materializa-se na prática através de tarefas ou atividades que constituem o elo de ligação entre o que se pretende efetuar com o currículo e a *práxis* ou entre o projeto socioeducativo e o projeto didático.

Schulman, referido por Gimeno (2000, p 184), entende que um professor é possuidor de um saber profissional específico quando detém os seguintes tipos de conhecimento:

- Conhecimento do conteúdo do currículo prescrito.
- Conhecimento pedagógico suficiente para orientar os alunos em sala de aula.
- Conhecimento sobre técnicas e materiais a utilizar.
- Conhecimento adquirido sobre os problemas da sua atividade profissional.
- Conhecimento dos alunos e suas caraterísticas.
- Conhecimento sobre o contexto educativo.
- Conhecimento sobre os valores e metas a atingir como resultado da sua prática letiva.

Como refere Roldão (1997), a questão que deve ser colocada a todos os agentes que intervêm no processo educativo e em especial à classe docente, é o ‘como’, como executar, como fazer para atingir determinados fins? A cada professor é exigido que seja um gestor de conteúdos, que atenda à extensão, diversifique os métodos de ensinar, defina prioridades e estabeleça projetos promotores da integração, adequados ao contexto de cada escola ou agrupamento de escolas.

Desde a década de oitenta, do século passado, a nível mundial, surgiram vários movimentos que tiveram como principal preocupação a criação de recomendações para melhorar o ensino da matemática. Nos Estados Unidos da América, uma das entidades em destaque foi o National Council of Teachers of Mathematics (NCTM), criado em 1920.

Em Portugal, e tendo por base a publicação da Lei de Bases do Sistema Educativo, em 14 de Outubro de 1986, a Associação de Professores de Matemática - APM, promoveu, em 1988, em Vila Nova de Milfontes, um encontro envolvendo vinte e cinco professores de matemática, de vários níveis de ensino, e com diversas experiências de formação. Este encontro serviu essencialmente para refletir sobre a necessidade de implementar um novo currículo de matemática nas escolas portuguesas. Neste contexto, foram objeto de análise (APM, 2009) quatro grandes temas:

1) Os grandes objetivos e as orientações fundamentais para o ensino da matemática;
2) A natureza e organização das atividades de aprendizagem e o novo papel do professor;
3) Os computadores e as calculadoras e o processo de ensino-aprendizagem da matemática;
4) O estilo e a organização desejáveis para o currículo de matemática nos vários níveis.

Na sequência do seminário em Vila Nova de Milfontes, a APM publicou o livro *Renovação do Currículo de Matemática*, o qual, entre outras conclusões, dá enfase ao uso de recursos tecnológicos; à atividade de resolução de problemas; a uma preocupação em encontrar modelos que permitam uma matematização do real; ao cálculo mental e à estimação; à introdução de noções elementares de Estatística ao longo de todo o Ensino e atenuar o uso de algoritmos, nomeadamente o algoritmo da raiz quadrada, sem contudo eliminar o conceito subjacente (APM, 2009).

Ponte (2002) refere a propósito que este seminário constituiu o momento mais significativo de reflexão em matéria curricular e aponta igualmente o livro *A experiência matemática,* de Philip Davis e Reuben Hersh, como contendo uma profunda reflexão sobre a matemática em geral.

Em suma, entende-se por currículo escolar tudo aquilo que deixa marca num aluno, tendo por base motivações culturais e sociais, de forma a moldar cada ser humano, que se pretenda escolarizado, à imagem e semelhança da sociedade em que vive.

Tendo por base o currículo prescrito, um professor, principal agente do processo de ensino aprendizagem, mas não o seu foco, deve ter autonomia para moldar o currículo às suas caraterísticas profissionais, atendendo igualmente aos alunos com que se depara.

O currículo não é mais que um conjunto de normas e procedimentos, aceites tacitamente por todos, no sentido de criar no aluno sentido crítico, de modo a que este desenvolva competências que lhe permitam sobreviver e ser autónomo numa sociedade que se quer dinâmica e em permanente evolução.

Em particular, um currículo com matemática deve criar no aluno expetativa e vontade em aprender e explorar o meio que o rodeia e isso só se consegue se o aluno de alguma forma se identificar com os processos utilizados de transmissão do conhecimento, nomeadamente resolvendo problemas, usando a tecnologia ao seu dispor, efetuando estimativas, prevendo resultados e observando,

2.1.2. Desenvolvimento curricular

Ao definir um currículo tem que se ter em conta as diversas vivências, sendo que este deve incorporar em si mesmo maneiras distintas de relacionar a teoria com a prática e a sociedade no seu todo com a escola.

NCTM (2007) refere vários *Princípios e Normas para a Matemática Escolar*, a saber: Equidade; Ensino; Aprendizagem; Avaliação, Tecnologia e Currículo, sendo que relativamente a este último princípio:

> Um currículo é mais do que um conjunto de atividades: deve ser coerente, incidir numa matemática relevante e ser bem articulado ao longo dos anos de escolaridade (p 15).

Um currículo efetivo de matemática deve incidir numa matemática relevante, a qual deverá preparar os alunos não só para a continuação dos seus estudos, mas igualmente para a resolução de problemas em diferentes contextos, como na escola, no trabalho e em casa (NCTM, 2007).

O currículo pode assumir vários significados. Pode significar o que o aluno aprende sob um ponto de vista formal, com a ajuda do professor, o que advém de processos informais, ou ainda um conjunto de intenções definidas e planeadas na escola (Serrazina e Oliveira, 2005).

A implementação de um currículo prescrito tem sempre uma assunção piramidal: da administração central para o professor e do professor para o aluno, pressupondo uma obediência quase cega por parte de todos os intervenientes. No entanto, se assim fosse qual a parte da construção do currículo que caberia ao professor? E aos alunos? Tal como Serrazina e Oliveira (2005) referem:

> O currículo não se encontra nos documentos oficiais mas surge da sala de aula, da interação entre o aluno e o professor, partindo das tarefas propostas e conduzindo a uma reconstrução das experiências. (p. 46)

Abrantes (1994) considera que *desenvolvimento curricular*, mais do que um currículo sob a forma de um programa, pode significar:

a) desenvolvimento que engloba todos os processos determinados num país ou sistema de ensino;
b) desenvolvimento localizado que engloba projetos desenvolvidos numa escola ou agrupamento de escolas, e respetivas turmas, e que são dinamizados por docentes das próprias turmas;
c) desenvolvimento individual respeitante à atividade de um professor ou grupo de professores que elaboram materiais inovadores para as suas turmas.

Como referem Serrazina e Oliveira (2005), o desenvolvimento curricular mais não é do que a junção do currículo prescrito, determinado pela tutela, e a investigação feita em salas de aula, determinando assim a criação de materiais curriculares e a produção de novo conhecimento sobre o ensino-aprendizagem, ocorrendo o desenvolvimento curricular de uma forma gradual, tirando benefício das interações constantes entre a teoria e a prática.

Neste conjunto de interações os professores sentem-se estimulados na procura de soluções para as vicissitudes que enfrentam nas escolas, assumindo que é importante a tomada de decisões a vários níveis e contextos, dentro de um processo de franca colaboração entre pares.

Neste sentido, e como refere NCTM (2007), um professor deve ser capaz, no âmbito da sua sala de aula, de desenvolver um currículo coerente e organizar e integrar ideias matemáticas relevantes, de modo que os alunos possam entender como essas ideias evoluem, permitindo assim a criação de novos conhecimentos e capacidades.

Stigler e Hiebert, referidos por NCTM (2007, p 15), promoveram experiências em salas de aula de matemática japonesas, do oitavo ano, para o Third International Mathematics and Science Study (TIMSS), em que filmaram e analisaram o conteúdo lecionado nessas aulas, tendo concluído que uma caraterística importante dessas aulas era o facto de serem dinamizadas em torno de uma ideia base, bem trabalhada e desenvolvida.

Tal experiência, em oposição às aulas tipicamente lecionadas nos Estados Unidos da América, que abrangiam diferentes conceitos e que não eram suficientemente desenvolvidos, levou os investigadores citados a concluir que os professores devem desenvolver nas suas aulas, os conteúdos de forma organizada, de modo a constituírem um todo, devendo dar especial atenção às ideias mais relevantes.

Com o desenvolvimento sequenciado da aula espera-se que o professor ensine terminologia, definições, notações, conceitos gerais e específicos e competências. Aliado a tudo isto o professor deve igualmente ser capaz de aproveitar situações inesperadas de forma a reorientar o seu plano de aula e tirar proveito integral desses momentos.

Outro aspeto importante referido pelo NCTM (2007) e que foi igualmente desenvolvido no encontro de Vila Nova de Milfontes em 1998 (APM, 2009), prende-se com o facto de que o aluno deve ser imbuído de pensamento e raciocínio matemático, devendo ser capaz de formular conjeturas, desenvolver argumentos dedutivos, aprender conceitos de simetria e generalização, que propiciem a aquisição de uma visão diferente relativamente à beleza e à natureza da matemática e ter contacto com experiências que permitam ao aluno compreender que a matemática possibilita a criação de modelos úteis na previsão de fenómenos reais.

A Matemática é um corpo de conhecimentos abstrato mas que tem por base uma vivência real. As pessoas aprendem matemática observando e experimentando processos usuais da vida corrente.

A disciplina do número, como era apelidada pela Grécia antiga, sendo um produto da mente humana é igualmente um mecanismo poderoso para desenvolver raciocínios coerentes e sequenciados. Não é um conhecimento que se deva entender como imutável e estático, e sendo assim os professores devem, nas suas aulas, ser compelidos a utilizar procedimentos diversificados de forma a incutir nos alunos abertura para aceitarem novas ideias e outras conceções do real. Só assim é possível criar uma civilização plena e em permanente evolução.

2.2. O ensino da matemática e da estatística

O ensino da estatística elementar remonta ao início da segunda metade do século XX e nasceu da necessidade de criar técnicos habilitados a interpretar problemas de natureza estatística que surgiam na indústria, e em atividades de natureza governamental.

Branco (2000) refere que, em 1949, o *Conselho Económico e Social das Nações Unidas* convidou a UNESCO e o *International Statistical Institute* (ISI) a desenvolverem trabalho no sentido de fomentarem a educação estatística a uma escala planetária.

Sublinha ainda que, em 1959, ocorreu, em Royaumont, França, sob a orientação da Organização Europeia de Cooperação Económica (OECE), percursora da OCDE, um seminário que reuniu vários matemáticos famosos, entre eles, Dieudonné e Choquet, em que uma das conclusões obtidas foi a necessidade de introduzir o cálculo das probabilidades e da estatística nos currículos do ensino secundário, com o objetivo de preparar melhor as pessoas para resolver problemas relacionados com estatística/interpretação de dados e dotar os interessados de ferramentas que os habilitassem a interpretar a vida quotidiana.

Este movimento veio a designar-se por *Matemática Moderna*, sendo caraterizado por uma reforma curricular, que ocorreu um pouco por todo o mundo, entre 1955 e 1975. Uma das caraterísticas mais distintiva deste currículo consistiu numa reformulação de conteúdos usuais da matemática escolar em termos da lógica e da teoria de conjuntos, desenvolvidos conceptualmente pelo grupo Bourbaki, e uma aprendizagem de conteúdos centrada no aluno, seguindo de perto teorias de aprendizagem desenvolvidas por Jean Piaget, segundo refere Matos & Valente (2010).

Ponte (2003) sublinha que para a génese deste movimento foi determinante a influência da perspetiva formalista da Matemática. Para esta corrente de pensamento, mais importante que o significado dos símbolos é o modo como se manuseiam. Fomenta-se um maior rigor, no entanto perde-se na compreensão das ideias e dos conceitos matemáticos. O formalismo viria a consagrar-se como estilo de discurso matemático, no entanto revelou-se inadequado como doutrina para sustentar a didática da Matemática.

Em Portugal, a iniciativa mais conhecida foi desencadeada no ensino secundário (10.º e 11.º anos de escolaridade), designado na altura por ensino liceal, e teve como responsável máximo José Sebastião e Silva, o qual elaborou compêndios para alunos e livros para professores. Algumas das matérias que foram introduzidas neste novo currículo foram: Lógica, Estruturas algébricas, Álgebra linear e Probabilidades e Estatística, as quais foram articuladas com matérias tradicionais como Análise infinitesimal, Trigonometria, Cálculo Algébrico e Geometria Analítica.

Ponte (2003) considera que José Sebastião e Silva revelou um sentido prático assinalável pois, ao invés de seguir, como noutros países, um modelo matemático puramente formalista, introduziu nos seus documentos exemplos de aplicações da Matemática. Para Ponte (2003), Sebastião e Silva foi um professor revelador de uma preocupação genuína com a renovação dos métodos de ensino, criticando o método expositivo tradicional e assumindo como fonte George Pólya, um dos autores de referência da Didática da Matemática contemporânea, defensor do método de ensino por descoberta.

No princípio da década de 1970, e tendo por base o movimento da Matemática Moderna, foram criados novos programas de Matemática, sendo que Sebastião e Silva já não tomou parte na sua elaboração. Estes programas, que perduraram durante as décadas de 1970 e 1980, caraterizaram-se por serem demasiado abstratos e formais, sem aplicações da Matemática e em que a intuição, base da compreensão das ideias matemáticas, foi relegada para segundo plano.

No início da década de 1990, e verificando-se uma crescente desmotivação dos alunos por aprender Matemática com um consequente aumento dos resultados negativos nos exames, aceitaram-se como válidas as ideias desenvolvidas pelo NCTM e pelo seminário de Vila Nova de Milfontes e promoveu-se uma nova alteração nos programas. Nestes, foi introduzida a resolução de problemas no ensino básico, e foi admitido pela primeira vez, de forma explícita, o uso das tecnologias “quando possível e necessário”, bem como a Geometria que sofreu uma revalorização (Ponte 2003).

Da passagem do século XX para o século XXI, até aos dias de hoje, assistiu-se a quatro alterações verticais dos currículos de matemática. No Ensino Básico em 2007 e 2013 e no Ensino Secundário em 2001 e 2014, sendo que no ano letivo de 2015/2016 completou-se a implementação do programa ao Ensino Básico e neste mesmo ano letivo implementou-se o programa do Ensino Secundário no 10.º Ano. Da análise dos programas do Ensino Básico e do Ensino Secundário, homologados em 2013 e 2014, respetivamente, verifica-se que uma das caraterísticas mais marcantes é o romperem fortemente com a linha preconizada, por exemplo, pelo NCTM (1991), e que se encontrava expressa nos programas de 2007, do Ensino Básico, e 2001, do Ensino Secundário, voltando-se a um entendimento da matemática, em geral, em que predomina sobretudo o cálculo em detrimento da intuição e da compreensão.

Muitos investigadores portugueses, ligados à Didática da Matemática, interpretam estas alterações como um *back to basics*, nomeadamente à matemática desenvolvida essencialmente pelo movimento da Matemática Moderna (Ponte, Guimarães & Serrazina, 2012).

Outros investigadores, maioritariamente conotados com o ensino da matemática no superior, reforçam a ideia de algum conservadorismo na aprendizagem de conceitos matemáticos, imputando a culpa de existência de erros de matemática, nomeadamente em estudos avançados, precisamente pelo afastamento do cálculo de papel e lápis, o que, em seu entender, reduz a sensibilidade aos resultados numéricos e dificulta a análise crítica dos resultados (Matos, 2013)

Será que este último caminho proposto pelo Ministério é o mais correto?

Como refere Seymour Papert (1991, p. 29):

> A grande diferença entre o trabalho de uma criança [um adolescente] numa aula de Matemática elementar e o de um matemático, não está no assunto mas no facto de o matemático estar empenhado criativamente no desenvolvimento de um projeto pessoal significativo.

Este investigador compara o trabalho de uma criança numa aula de arte ao trabalho de um artista adulto, no sentido em que ambos são livres de se exprimir, sem constrangimentos.

Ponte (2002) assinala que o ensino da matemática se desenrola em torno de três vértices que são o saber matemático, o aluno e o professor, sendo que este triângulo didático (Figura 2.2.1), retirado de Ponte (2002, p. 14) tem por base um determinado contexto social e cultural e cria dinâmicas próprias, por influência dos objetivos curriculares pretendidos pelo professor.

Ponte (2002, p. 15) considera que:

- No saber matemático intervêm a generalização, a abstração e a formalização (Davis & Hersh, 1995). Nos últimos anos, depois de muitos avanços e recuos, têm sido aceites novas formas de fazer matemática, nomeadamente recorrendo às novas tecnologias, sendo que aquilo que se passa na matemática escolar não é muito diferente daquilo que se encontra na matemática em geral. A investigação das práticas determina novas formas de aprender e de ensinar.

- No aluno é preciso atender aos seus valores sociais e culturais. A forma como se aprende hoje numa sala de aula não é igual à forma como se aprendia em meados do século passado. A um aluno nos dias de hoje pede-se que seja mais interventivo e que participe no seu processo de ensino/aprendizagem.
- O professor constitui o elo de ligação entre o aluno e o saber. Ao professor exige-se que saiba as caraterísticas dos seus alunos e simultaneamente seja um gestor da sala de aula, além de ter que saber bem os conteúdos que pretende ensinar. O professor deve saber elaborar tarefas, construir materiais, recriar modelos de aprendizagem e ser avaliador
- Finalmente tem-se o contexto, quer no sentido educativo, quer social. Apresentam uma forte influência e condicionam professores, alunos e, por vezes, o saber, nomeadamente na forma como se transmite, condicionam o grupo de recrutamento, com a sua dinâmica; a escola, com uma cultura diferenciada e diferenciadora; as relações que a escola mantém com a comunidade e o sistema educativo no seu todo com as suas regras e condicionantes.

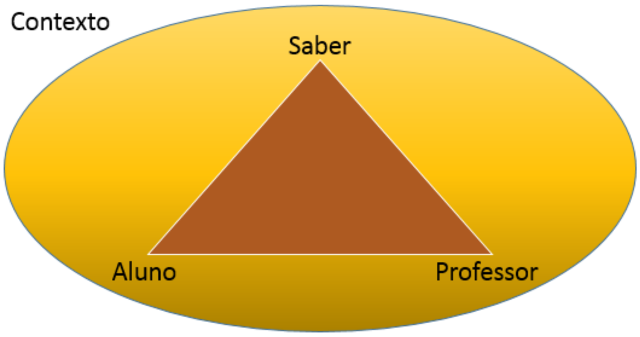


Figura 2.2.1. – Triângulo didático/contexto, retirado de Ponte (2002, p. 14)

Como refere ainda Ponte (2002, p. 16):

> A aprendizagem da Matemática é um processo complexo, que se desenvolve em momentos diversificados, onde podem predominar a exploração, a formalização e a integração das ideias matemáticas. Ouvir o professor e praticar a resolução de exercícios permite adquirir algumas competências matemáticas. Mas não permite adquirir todas as competências matemáticas, em especial as mais importantes. Por isso, o ensino/aprendizagem tem de envolver os alunos noutros tipos de experiências e situações, como a exploração, a investigação, a resolução de problemas, a realização de ensaios e projetos, a comunicação e a discussão. Aprender resulta sobretudo de fazer e de refletir sobre esse fazer. Requer um investimento cognitivo e afetivo, requer perseverança e vontade de aprender. Criar as condições para que isso aconteça, desafiando os alunos e diversificando as situações de aprendizagem, é responsabilidade do professor.

No que respeita ao domínio da Estatística, Ponte & Fonseca (2000) estabelecem uma comparação documental entre os currículos portugueses de matemática de 1990 a 1997, o

National Curriculum for Maths de 1997 (Currículo inglês) e o *Principles and Standards for School Mathematics* (NCTM, 2007).

Na comparação entre os três documentos foram considerados os seguintes tópicos de análise (Ponte & Fonseca, 2000, p 180):

(a) Colocar questões, recolher, organizar e representar dados.
(b) Interpretar dados usando métodos e conceitos.
(c) Desenvolver e avaliar inferências.
(d) Compreender e aplicar noções básicas de probabilidade e acaso.

Destes, e segundo os autores deste estudo, aquele que se refere mais diretamente à compreensão e utilização de conceitos estatísticos é o segundo.

Após a análise dos três currículos em termos das quatro divisões: 1.º ciclo do Ensino Básico, 2.º ciclo do Ensino Básico, 3.º ciclo do Ensino Básico e Ensino Secundário, Ponte & Fonseca (2000) concluem que os programas portugueses têm, em geral, uma abordagem mais pobre e mais limitada da estatística quando comparada com os documentos do currículo inglês e o documento do NCTM (2007). Referem a propósito o seguinte:

> É preciso ultrapassar definitivamente a noção que a estatística se reduz a umas tantas formas de representar dados em gráficos e tabelas e à execução de certos cálculos para determinar a média ou o desvio padrão. A estatística, encarada como um domínio de conceptualização dos processos de recolha, análise e interpretação de dados constitui uma interface fundamental entre a Matemática e a realidade, indispensável numa verdadeira educação para a cidadania e para a intervenção ativa nas mais diversas atividades. (p. 194)

Como assinala o grupo de trabalho T^3 Portugal (1999, p. 3):

> A abordagem da Estatística na aula de Matemática deve estar de acordo com as razões da sua introdução nos programas. Dito de uma forma simples, não é preciso recorrer à Estatística para insistir no cálculo referente a situações abstratas. A Estatística só tem sentido se for abordada de forma a não desvirtuar a sua natureza, de forma a ser vista e usada como uma ferramenta matemática que permite compreender melhor o mundo que nos rodeia, e em especial, a intervir na sociedade de uma forma mais informada.

Abrantes, Serrazina e Oliveira (1999) referem igualmente esta ideia, assinalando que o ensino da Estatística e de Probabilidades deve ser fortemente experimental, apelando, no entanto, ao raciocínio e comunicação.

O grupo de trabalho T^3 Portugal (1999, p. 4) refere:

> Os alunos devem ter oportunidade de realizar o estudo estatístico completo das situações em análise, decidindo sobre as variáveis a estudar, o processo de recolha de dados, o respetivo tratamento, análise de resultados, estabelecimento de conclusões e sua discussão. Em qualquer fase deste estudo, a atenção dos alunos deve incidir sobre os aspetos mais elaborados do trabalho, como o interpretar, organizar, discutir, argumentar, e não sobre os aspetos mais mecânicos associados à sua realização.

A Estatística, como domínio de conhecimentos, ainda é vista hoje em dia como um parente afastado da Matemática e pouco se avançou no sentido de perceber de que forma é que este domínio deve ser integrado no currículo e em particular nas salas de aula, no sentido de dar corpo à sua manifesta ligação com a realidade.

O ensino da Matemática sofreu em Portugal, e nos países ocidentais, algumas alterações desde meados do século passado. De um ensino altamente formalizado e abstrato passou-se, no princípio do século XXI, a um ensino em que imperam termos como a intuição, compreensão e a experimentação.

Atualmente o ensino da Matemática e da Estatística, em particular, ainda procuram um rumo que seja aceite pela generalidade dos investigadores. Por um lado, e segundo investigadores da Didática da Matemática, o que é importante é desenvolver nos alunos, desde tenra idade, a intuição como um meio para a descoberta, por outro, certos investigadores ligados a uma Matemática mais pura e formal, determinam que é impossível que os alunos saibam processos de elaboração de Matemática, sem conhecer a formalização e a abstração.

No que concerne à Estatística, esta não deve ser entendida unicamente como a ciência da exploração dos dados. Um aluno deve saber interpretar e organizar dados, deve saber para que servem certos cálculos estatísticos e acima de tudo deve saber tirar conclusões sobre esses mesmos dados.

2.3. O uso da tecnologia

A utilização da tecnologia nas aulas de Matemática tem vindo a mudar desde os finais do século XX. No início restringia-se ao uso das calculadoras científicas, mais tarde introduziu-se o computador, com folhas de cálculo, e mais recentemente, o uso das calculadoras gráficas é aceite, estando a sua utilização prevista nos programas de Matemática.

O uso do computador e da calculadora na sala de aula ainda hoje não é totalmente pacífica, no entanto começou a ser permitida oficialmente no programa de 1991, sendo que o NCTM define o uso da tecnologia como um princípio para a matemática escolar, referindo que "A tecnologia é essencial no ensino e na aprendizagem da matemática; influencia a matemática que é ensinada e melhora a aprendizagem dos alunos" (NCTM, 2007, p. 11)

2.3.1. A tecnologia e a matemática

Com a introdução da tecnologia nas salas de aula é natural que os modelos de ensino aprendizagem tenham que sofrer alterações. O professor mais do que um fiscalizador de exercícios passa a ser um organizador de tarefas (Fey, 1991).

Este entendimento da utilização da tecnologia no ensino é reforçado por Papert (1991), quando refere que ser matemático, tal como ser um poeta, um compositor ou um engenheiro, significa muito mais do que simplesmente conhecer ou compreender.

Fey (1991) refere que a introdução das tecnologias no ensino obrigam a uma revisão dos currículos e dos métodos de ensino, configurando tal tarefa uma das mais importantes em Educação Matemática. Este autor refere ainda que o computador e a calculadora estão perfeitamente aceites como ferramentas de trabalho para um Matemático. O problema surge quando se tentam implementar nos currículos, havendo ainda algumas dúvidas sobre o seu impacto. Nomeadamente os usos e costumes da prática determinam que os alunos só devem fazer uso da tecnologia quando os procedimentos que foram automatizados nas máquinas estiverem bem assentes na mente dos adolescentes.

O que é sublinhado nas *Normas para o currículo e a avaliação em matemática escolar* (NCTM, 1991) é algo diferente. O uso da tecnologia não elimina a necessidade do aluno aprender algoritmos. É igualmente importante que este tenha alguma proficiência nos algoritmos de cálculo com papel e lápis, mas tal conhecimento deve partir de situações problemáticas em que o aluno esteja consciente que existem vários métodos possíveis que pode escolher, adotando o processo que se afigure mais adequado à resolução do problema. Isto é, por vezes pode ser mais relevante optar por uma estimativa, quando a resposta se pretende aproximada, ou cálculo mental, ou papel e lápis, ou o uso da calculadora, ou ainda o uso do computador.

A Figura 2.3.3.1. define um esquema, adaptado de NCTM (1991, p. 10), sobre decisões acerca dos procedimentos de cálculo em problemas numéricos.

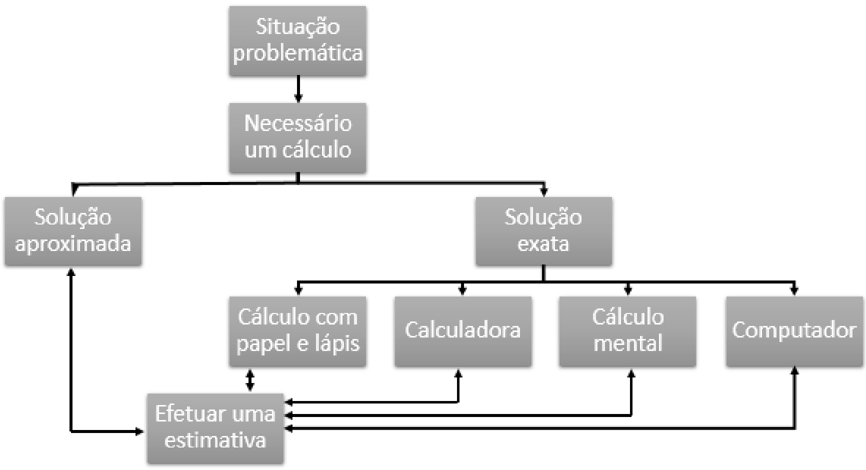


Figura 2.3.1.1. – Decisões acerca dos procedimentos de cálculo em problemas numéricos (adaptado de NCTM (1991, p. 10)).

Ao aluno exige-se que seja um *coletor* de conhecimento matemático e que, dentro do seu nível etário a das suas competências, seja capaz de efetuar uma escolha do processo e emitir uma resposta em conformidade com o problema sugerido.

Oliveira (2008, p. 8), apoiado nas análises de Steen e Sternberg, sublinha que:

> A utilização adequada de tecnologia associada ao trabalho de grupo e de projeto, e as discussões motivadas por tarefas matematicamente ricas (problemas e investigações), em vez de substituir o raciocínio matemático torna-o mais potente. A tecnologia permite ao aluno suportar melhor o raciocínio conjetural e muitas vezes dá pistas para apoiar o raciocínio dedutivo

Como é referido por Ponte & Canavarro (1997) a calculadora e o computador servem: como ferramenta de cálculo de índices estatísticos e de realização de representações gráficas a dados da mais diversa natureza; como instrumento de exploração e investigação, permitindo a realização de experiências a partir de dados reais ou simulando acontecimentos aleatórios e como suporte de ilustração de conceitos como média, desvio padrão, correlação, reta de regressão, etc.

A tecnologia é encarada assim como um catalisador da aprendizagem. Como refere Matos (1995), os computadores e as calculadoras gráficas são excelentes para efetuar modelação matemática, uma vez que cálculos complexos podem ser realizados rapidamente, dando assim maior liberdade ao utilizador para se concentrar no processo de modelação.

2.3.2. A tecnologia nos programas de matemática do ensino secundário

O programa do Ensino Secundário, aprovado em 2001, refere o seguinte:

> O uso de tecnologia facilita uma participação ativa do estudante na sua aprendizagem como já era preconizado por Sebastião e Silva, quando escrevia no "Guia para a utilização do Compêndio de Matemática" que "haveria muitíssimo a lucrar em que o ensino fosse tanto quanto possível laboratorial, isto é, baseado no uso de computadores, existentes nas próprias escolas ou fora destas, em laboratórios de cálculo". O estudante deve contudo ser confrontado, através de exemplos concretos, com os limites da tecnologia e, caso haja tempo, pode ser referido o problema da máquina de Turing, tal como o faz Ian Stewart quando aborda os limites da computabilidade no seu livro "Os problemas da Matemática" (p. 15).

Na tecnologia, indicada pelo referido programa são apontados:

1) o uso de calculadoras gráficas, por permitirem desenvolver a capacidade de lidar com elementos de que apenas uma parte se pode determinar de forma exata; desenvolvendo assim a capacidade de resolver problemas de aplicações da matemática e a capacidade de analisar modelos matemáticos;
2) o uso do computador, pelas suas potencialidades, nomeadamente nos domínios da geometria dinâmica, da representação gráfica de funções e da simulação, permite trabalhar com atividades de exploração, pesquisa, recuperação e desenvolvimento de conteúdos;
3) o uso da internet, como forma de criação de uma boa imagem da matemática, através da consulta de páginas que possibilitem a participação em projetos internacionais ou em acontecimentos de diversa índole relacionados com matemática.

Ainda em MEC (2001, p. 22) é assinalado que:

> A dimensão gráfica constitui uma componente incontornável do trabalho matemático, pelo que é importante o uso de tecnologia adequada (calculadora gráfica ou computador).
>
> É preciso ter presente que a "tecnologia" em si não está em causa como conteúdo de ensino, mas que são as aprendizagens que ela pode proporcionar que justificam o seu

> uso. O recurso à tecnologia pode auxiliar os estudantes na compreensão de conceitos matemáticos e prepará-los para usar a matemática num mundo cada vez mais tecnológico. Como qualquer ferramenta, a tecnologia pode ser utilizada de um modo mais ou menos rico. Nunca deve ser utilizada como simples substituição de raciocínios básicos, mas sim de modo a enriquecer a aprendizagem matemática, tornando-a mais profunda.
>
> Um estudante deveria registar por escrito, com os comentários julgados adequados, as observações que fizer ao usar a calculadora gráfica, o computador ou outro material, descrevendo com cuidado as propriedades constatadas e justificando devidamente as suas conclusões relativamente aos resultados esperados (desenvolvendo-se assim tanto o espírito crítico como a capacidade de comunicação matemática).

Já no programa do Ensino Secundário, implementado no 10.º Ano, em 2015 (MEC, 2014, p. 28), é referido que:

> Os professores e os alunos têm ao seu dispor, por exemplo, um vasto conjunto de recursos que facilitam o cálculo, as representações geométricas e a representação gráfica de funções, mas importa que os alunos adquiram capacidade crítica para reconhecer as situações em que a tecnologia não permite só por si justificar a adequação dos resultados encontrados ao problema proposto ou ilustrar devidamente os conceitos e procedimentos matemáticos envolvidos.
>
> A utilização da tecnologia não pode, pois, substituir a compreensão conceptual, a proficiência no cálculo e a capacidade de resolver problemas. Assim, os alunos devem dominar procedimentos como operar com polinómios, efetuar representações de gráficos de funções, resolver equações, calcular limites e derivadas sem necessitarem de utilizar recursos tecnológicos (calculadoras, computadores, etc.) que substituam algumas das capacidades matemáticas inerentes a esses procedimentos. Apenas a memorização e a compreensão cumulativa de conceitos, técnicas e relações matemáticas permitem alcançar conhecimentos progressivamente mais complexos e resolver problemas progressivamente mais exigentes.

Como se verifica, o uso da tecnologia é recomendado nos dois programas, no entanto, no programa de 2014, tal utilização não pode servir para investigar sem que primeiro se conheça, através do estudo da definição e do cálculo, o conceito ou conceitos em causa.

2.3.3. A aprendizagem da estatística e a utilização da calculadora gráfica

Waits (1997) refere que o início da utilização das calculadoras gráficas remonta a 1985, com a sua introdução no mercado pela empresa CASIO, iniciando assim uma revolução no ensino e na aprendizagem da matemática nos Estados Unidos da América e em alguns países europeus.

A ideia que está na base da utilização da calculadora, e em particular da calculadora gráfica, reside no facto de um aluno com calculadora conseguir efetuar cálculos de forma mais rápida e de uma forma mais exata, isto é, em que o resultado obtido tem um número de algarismos significativos que permite ao aluno ter uma perceção mais real do valor do que teria se usasse somente papel e lápis, sendo ainda que o tempo gasto na elaboração do problema com papel e lápis quando comparado com o tempo gasto no manuseio da calculadora é maior e esse diferencial de tempo pode e deve ser usado na compreensão e desenvolvimento de várias formas de raciocínio, desde que devidamente orientado pelo professor (Canavarro, 2000).

As calculadoras gráficas, pelo seu baixo custo, portabilidade, facilidade de manuseio e sendo incorporadas com aplicações gráficas, são encaradas atualmente como pequenos computadores portáteis, disponíveis para todos os alunos.

Segundo Reys (1989), Pontes & Filipe (1995) e Canavarro (2000), o uso correto da calculadora permite o desenvolvimento de capacidades de cálculo mental e estimação, mantendo-se ainda a necessidade de elaborar planos e definir estratégias de resolução de problemas preconizadas em meados do século XX por Polya.

Uma das grandes vantagens da utilização da calculadora é permitir a formulação de hipóteses e conjeturas uma vez que a rapidez com que se executa um dado cálculo liberta tempo para essa mesma formulação, além de que aumentando o número de interações com a calculadora de uma forma sistemática e perfeitamente sequenciada é possível comprovar ou desmentir uma dada conjetura inicial (Canavarro, 2000).

Como é referido pelo grupo de trabalho T^3 Portugal (1999), desde o início da década de 1990 que as calculadoras gráficas são usadas nas salas de aulas portuguesas e ao nível do ensino universitário, nomeadamente na formação de professores, desde o ano letivo de 1990/91.

Bert Waits, coautor das *Normas para o Currículo Escolar e a Avaliação em Matemática Escolar* (NCTM, 1989) e Frank Demana, ambos da *Ohio State University*, nos Estados Unidos da América, foram dois impulsionadores do projeto T^3 – *Teachers Teaching with Technology*, criado em 1987.

Este projeto foi trazido para Portugal, pela Associação de Professores de Matemática, em 1997, criando assim o projeto T^3 Portugal, que tem por finalidades desenvolver a capacidade de utilização da tecnologia gráfica no Ensino da Matemática, através de ações de formação de professores, experimentar e criar tarefas que possam ser executáveis em sala de aula e possibilitar o debate e a reflexão de assuntos ligados à tecnologia gráfica.

Mesmo tendo um estatuto de pequenas maravilhas da tecnologia, pela generalidade dos pedagogos, a implementação e adoção de processos que permitissem o uso de calculadoras no ensino português não foi fácil. Talvez porque o programa de matemática do Ensino Secundário, até finais da década de 1980, era muito hermético e pouco dado a experiências curriculares, nomeadamente ao uso de novas tecnologias, ou por a formação de professores nesse domínio ser escassa ou inexistente.

Como refere Freitas (2000):

> Deve-se seguir uma nova orientação didático-científica quando se usa calculadoras gráficas. Não só é importante ensinar como é que se faz na calculadora, mas mais importante do que isso é conseguir tirar partido das calculadoras gráficas (ou das novas tecnologias em geral) para explicar o raciocínio matemático ligado a um determinado tema sem se perder o rigor matemático: as calculadoras gráficas devem ser vistas como um meio e não como um fim. (p. 151)

Segundo Canavarro (2000), tendo por base tabelas dos valores das variáveis, as calculadoras gráficas permitem efetuar rapidamente e com rigor: medidas de tendência central, de localização e de dispersão; representações gráficas diversas; coeficientes de correlação linear e outras regressões diversas, possibilitando assim que os alunos lidem com os conceitos estatísticos de uma forma mais rica, explorando o seu significado, percebendo o alcance de cada parâmetro estatístico, o que está por trás do conceito e como se manipula. Esta autora prossegue o seu raciocínio concluindo o seguinte:

> Só um tal domínio dos conceitos estatísticos permite aos alunos uma utilização crítica da Estatística. Para desenvolver esse domínio, o aluno poderá ele mesmo investigar sobre os diversos conceitos, desenvolvendo assim uma compreensão esclarecida. Estas investigações podem ser realizadas em quaisquer aulas de Matemática graças à existência das calculadoras gráficas. (p. 160)

Esta citação complementa o princípio da tecnologia preconizado por NCTM (2007) em que usando a tecnologia os alunos poderão passar a trabalhar em níveis elevados de generalização ou abstração, sem contudo deixarem de tirar proveito da tecnologia, cabendo ao professor a seleção ou a criação de tarefas matemáticas que permitam efetuar um bom uso da tecnologia, de forma eficiente e correta.

Ainda segundo Waits (1997), os programas Maple e DERIVE foram alguns dos aplicativos existentes em computadores pessoais, que tiveram a sua aparição em calculadoras gráficas da empresa Texas Instruments, nos finais da década de 1990, fazendo deste instrumento uma ferramenta de cálculo ainda mais poderosa, e que têm por base o Sistema Algébrico de Cálculo, conhecido usualmente pela sigla CAS. Ao nível da geometria dinâmica destacou-se ainda o programa Cabri, e no domínio da estatística apareceram folhas de cálculo nas calculadoras que permitiram a organização e o tratamento de dados em larga escala, bem como o estabelecimento de inferências estatísticas. Como refere igualmente Waits (1997, p. 49):

> We can no longer spend out time in the Mathematics classroom doing everything we did in the past paper and pencil era and adding on the many topics and methods our students need for the technological intensive future they face. We have much to learn about our future Mathematics curriculum and the details of how we will get there.

É fundamental que o professor se aproprie destas ferramentas de trabalho, nas suas diversas vertentes, e as leve para a sala de aula de modo que os alunos tomem contacto com elas e de uma forma eficiente e consciente crie ou reformule tarefas que propiciem uma maior compreensão do que é fazer e aprender matemática.

3. IMPLEMENTAÇÃO DE UM CURRÍCULO RECORRENDO A TAREFAS

Pretende-se com este capítulo compreender o papel da resolução de problemas, num contexto de ensino-aprendizagem, atendendo essencialmente à definição dada por Polya (2003), do que é um problema ou situação problemática e das diversas etapas por que se passa ao resolver um problema,

Apresentam-se em seguida os instrumentos privilegiados para, em sala de aula, concretizar o objetivo de resolver problemas, genericamente designados por tarefas, estabelecendo-se uma caraterização dos diversos tipos de tarefas. Por último são apresentadas algumas razões motivacionais para a escolha de determinado tipo de tarefas.

3.1. Resolução de problemas e modelação matemática

A matemática, como disciplina do conhecimento, deve o seu crescimento à existência de problemas que possibilitam a criação de modelos teóricos os quais permitem, por manipulação, a interpretação do mundo que nos rodeia.

É assim natural que a prática de resolução de problemas matemáticos surja na sala de aula como forma de fomentar mecanismos de ensino-aprendizagem e propiciar no aluno o gosto pela disciplina.

Deve-se a George Polya a sistematização de estratégias de resolução de problemas bem como a definição do possível papel dos problemas. Segundo Polya (2003), o professor deve propor problemas aos seus alunos para que estes se possam sentir desafiados nas suas capacidades matemáticas e assim experimentar o gosto pela descoberta.

O modelo proposto por Polya (2003), para a resolução de problemas, em que no essencial o aluno é colocado na posição de investigador, é composto por quatro etapas:

1. Compreensão do problema: Qual é a incógnita? Quais são os dados? Qual é a condição? É possível satisfazer a condição? É possível separar as várias partes da condição? É possível anotá-las?
2. Estabelecimento de um plano: Descobrir a relação entre os dados e a incógnita. É necessário considerar problemas auxiliares se não se deslumbrar uma relação imediata?
3. Execução do plano: Verificar cada passo do plano de resolução. Cada passo está correto? Existe a certeza?
4. Verificação do trabalho efetuado: É possível efetuar uma verificação do resultado? E do raciocínio? É possível obter o mesmo resultado por outro caminho? O resultado ou o processo utilizado é relacionável com outro problema?

Para Polya é útil que cada aluno tenha conhecimento e consciência das estratégias gerais de resolução de problemas, designadas usualmente por heurísticas, pois só desta forma desenvolverá raciocínio de um modo mais sistemático e eficaz.

Em 1988, no Seminário de Vila Nova de Milfontes, a propósito da Renovação do Currículo de Matemática (APM, 2009), refere-se que: "Um problema pode ser definido como uma questão para a qual o aluno não dispõe de um processo ou algoritmo que ele sabe previamente que conduzirá à solução" (p. 34)

Igualmente é afirmado por APM (2009) que, por vezes, tem-se uma ideia errada do que é um problema num contexto de ensino-aprendizagem, assim, entende-se por problema algo que não depende de *insight* ou de uma visão e compreensão repentina do caminho a seguir, tipo *problema das Olimpíadas de Matemática.*

Assim, mais do que um exercício, entende-se por situação problemática toda a situação que é desafiante para o aluno e que o obriga a reconhecer e aplicar conhecimentos anteriormente adquiridos.

Ressalve-se, no entanto, que o não conhecimento e domínio prévio de técnicas, algoritmos e conhecimentos factuais não deverá inibir a aplicação de resolver problemas, sendo mesmo que o conhecimento matemático deve surgir das questões levantadas que surgem na resolução de problemas, e, por outro lado, os problemas a formular não têm que estar definitiva e completamente bem delineados, devem, isso sim, fomentar alguma diversidade de processos, atividades e experiências intelectualmente estimulantes e não se apresentar como altamente restritivas e descontextualizadas (APM, 2009).

Por exemplo, para um aluno do sexto ano de escolaridade, somar 0,75 com 12,29 é entendido como um mero exercício, uma vez que um aluno deste nível de ensino conhece as regras e as propriedades da adição de números decimais e efetua este cálculo sem qualquer dificuldade. No entanto, solicitar que um aluno nos dois primeiros anos do 1.º ciclo efetue corretamente a soma solicitada já é um problema pois o aluno não domina as técnicas da adição de números decimais.

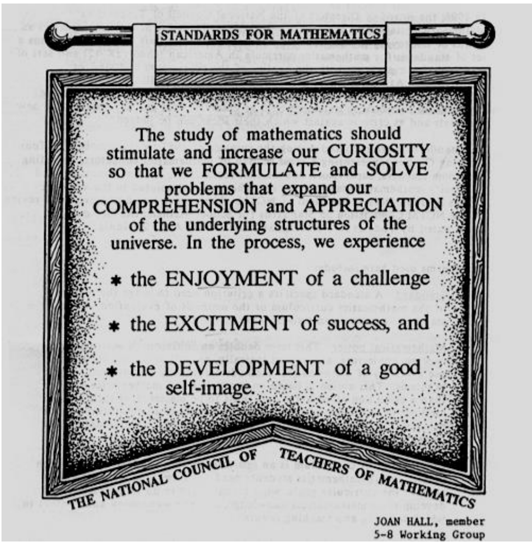


Figura 3.1.1. – NCTM e a resolução de problemas

Um verdadeiro problema deve despertar no aluno alguma curiosidade, provocar-lhe eventualmente alguns constrangimentos durante a concretização do plano estabelecido para a resolução e por último provocar satisfação pela descoberta da solução ou soluções, tal como é mencionado no esquema da Figura 3.1.1.

A resolução de problemas, em contexto escolar, não depende exclusivamente do domínio de técnicas e conhecimentos específicos, sendo que um aluno para ser bom solucionador de problemas matemáticos deve desenvolver igualmente estruturas de raciocínio e formas de pensar dispares entre si que favoreçam a resolução de situações problemáticas. Ao aprender a resolver problemas, os alunos irão desenvolver modos de pensar, hábitos de persistência e curiosidade, e adquirir alguma confiança perante situações aparentemente desconhecidas, que lhes serão úteis na vida quotidiana e no trabalho futuro (NCTM, 2007).

Mesmo quando é suposto uma dada questão ser um problema para uma dada faixa etária, com semelhantes caraterísticas sociais e culturais, pode acontecer que um aluno dessa faixa resolva o problema de forma aceitável e um outro não o consiga resolver por desconhecimento das técnicas ou algoritmos envolvidos.

Assim, o aluno deve, segundo Lopes et al (1990):

1. conhecer procedimentos, algoritmos e conceitos matemáticos;
2. dominar minimamente alguns instrumentos tecnológicos, nomeadamente software de computador específico e os procedimentos de trabalho com calculadoras, de forma a efetuar tarefas que eventualmente envolvam alguma repetição e sistematização;
3. resolver problemas com diversos níveis de complexidade;
4. aprender uma ou várias estratégias de processamento da informação e organização dessa mesma informação;
5. dominar algumas técnicas de resolução de problemas.

A resolução de problemas constitui um meio em si mesmo para que os alunos aprendam matemática com eficácia, nomeadamente o aprender a formular conjeturas, a discussão e a resolução de problemas que requeiram algum esforço e, o refletir sobre o seu raciocínio, quer pela exposição verbal direta com os seus pares quer de forma escrita servem de veículo para que os alunos percecionem o mundo que os rodeia (NCTM, 2007)

No programa de matemática A do Ensino Secundário (2014), é referido que:

> A resolução de problemas envolve, da parte dos alunos, a leitura e interpretação de enunciados, a mobilização de conhecimentos de factos, de conceitos e de relações, a seleção e aplicação adequada de regras e procedimentos, previamente estudados e treinados, a revisão, sempre que necessária, da estratégia preconizada e a interpretação dos resultados finais (p. 7)

Esta posição diverge um pouco da descrita anteriormente, uma vez que como refere Matos & Serrazina (1996), apoiados nas observações de Mason, um aluno ao ser desafiado a formular o seu próprio problema proporciona condições de maior envolvimento e como tal de maior entusiasmo na procura de soluções. É tarefa do professor, em sala de aula, apresentar devidamente as atividades que propõe ao aluno de forma que este tenha experiências significativas e consiga progredir no seu processo de ensino-aprendizagem. A verdadeira questão prende-se, não com a complexidade dos conhecimentos adquiridos, mas sim com o facto de o aluno ser compelido a raciocinar sobre os processos de resolução que utilizou; a forma como expõe os seus anseios, dificuldades, avanços e recuos, bem como os processos que utiliza para comunicar as suas ideias sobre o problema (NCTM, 2007).

Matos e Serrazina (1996) referem-se à questão da avaliação, no sentido em que o ensino-aprendizagem, baseado na resolução de problemas deverá ter consequências na forma como se avalia e o que se avalia. O trabalho no terreno mostra-nos que ainda não estão suficientemente incorporadas no nosso sistema de ensino estratégias de avaliação deste tipo de tarefas. Existe, no entanto, uma maior sensibilização por parte dos professores no estabelecimento de uma estrutura avaliativa consentânea com a prática de resolução de problemas.

Lopes et al (1990) sugerem uma metodologia para abordar a resolução de problemas em sala de aula manifestada na Tabela 3.1.1., adaptado de Lester.

Tabela 3.1.1. – Ações e intensões do professor numa situação de resolução de problemas em Lopes et al (1990, p 21)

AÇÕES DO PROFESSOR		INTENÇÕES DO PROFESSOR
Pedir a um aluno para ler o enunciado do problema em voz alta. Discutir palavras ou frases que possam levantar dúvidas. Pedir a um aluno para recontar o problema, usando palavras suas. Pedir a um aluno da turma a compreensão do problema, fazendo os comentários adequados. Discutir com toda a turma possíveis estratégias de resolução	A N T E S	Mostrar como é importante a leitura cuidadosa do problema e centrar a atenção em certas palavras que têm significado especial. Realçar a importância que tem a compreensão do enunciado e do problema. Centrar a atenção em dados importantes e clarificar partes do problema. Fazer surgir ideias sobre possíveis maneiras de resolver o problema.
Observar e pôr questões aos alunos, no decurso do trabalho, dando sugestões, se necessário. Proporcionar extensões do problema, se necessário. Pedir aos alunos que resolvam o problema para “dar a resposta”	D U R A N T E	Identificar os pontos fracos dos alunos. Ajudar os alunos a ultrapassar situações de impasse. Desafiar e encorajar os alunos mais rápidos a generalizar a sua estratégia de resolução a um problema semelhante. Proporcionar o confronto das soluções e a discussão da sua plausibilidade.
Pedir aos alunos que expliquem e discutam as estratégias de resolução que utilizaram. Pedir aos alunos que relacionem o problema com problemas já resolvidos, ou que resolvam extensões desses problemas.	D E P O I S	Identificar as diferentes estratégias que permitiram resolver o problema. Mostrar que as estratégias de resolução de problemas não são específicas de um dado problema e ajudar os alunos a reconhecer diferentes tipos de situações, onde estas estratégias podem ser úteis.

Os alunos que enfrentam situações problemáticas devem ser encorajados a registar as suas deduções e conclusões e o facto de partilharem as soluções que obtiveram e a forma como as obtiveram deve suscitar no professor algumas questões para o aluno e para toda a turma do tipo: Parece que organizaste um esquema. Alguém chegou à mesma solução utilizando outro caminho? Este processo, de uma certa verbalização, facilita a comunicação e as representações, além de permitir que o aluno e os seus colegas se apropriem do objeto de estudo e desenvolvam processos de apresentação gradualmente mais sofisticados, à medida que a complexificação dos problemas vai aumentando (NCTM, 2007).

NCTM (2007) refere ainda que, a constante reflexão sobre os avanços e recuos na resolução de um problema faz com que o aluno desenvolva processos de auto ajuste e se questione se o seu caminho é eficaz; se não existe uma alternativa melhor; se compreende perfeitamente o problema. Aqui o papel do professor é determinante pois mais do que um solucionador deve constituir-se como um elemento catalisador da pesquisa do aluno e deve formular questões que o ajudem a progredir, interagindo com o professor e a turma.

A avaliação não se constitui assim como um objetivo em si mesmo, mas é um elemento que é elaborado pelo professor para o aluno, para o orientar e para melhorar a sua aprendizagem, fornecendo informações úteis não só para o professor mas essencialmente para o aluno (NCTM, 2007). A avaliação, não deve ser entendida como uma simples interrupção do processo ensino-aprendizagem, estranho, mas sim integrador, não devendo ser disruptiva, mas sim inclusiva, algo que não deve ser extraordinário mas sim rotineiro. Deve igualmente servir-se de fontes múltiplas: “resposta aberta; resposta curta; escolha múltipla; tarefas de desempenho; observação; conversas; ensaios e portefólios” (NCTM, 2007, p. 25) de forma a fornecer evidências significativas.

Variadíssimas situações problemáticas, com alguma base real, têm como consequência a construção e utilização de modelos matemáticos, como tentativa para se conseguir alterar determinados parâmetros e assim obter uma resposta ao problema colocado, isto é, tenta-se generalizar uma situação particular como forma de dar resposta ao problema inicial.

Alguns desses problemas têm por base fenómenos económicos, por exemplo, o cálculo de juros de uma dada aplicação financeira, ou fenómenos biológicos, por exemplo, o crescimento do número de indivíduos de uma dada população animal ou vegetal, ou ainda fenómenos naturais, como, por exemplo, o estudo da atividade sísmica de um dado local, etc.

Matos et al (1995) descrevem um modelo matemático de um objeto ou fenómeno real, como um conjunto de regras ou leis, de natureza matemática, que representam adequadamente o objeto, ou o fenómeno na mente do observador, podendo coexistir em simultâneo vários modelos matemáticos para a mesma situação, dependendo dos objetivos a atingir.

Os modelos matemáticos podem ser representações grosseiras dos fenómenos físicos. A título de exemplo, quando se pretende testar as condições de um navio perto da costa assume-se por norma profundidades constantes, linhas da costa definidas por segmentos de reta, ou a superfície do mar estática, tudo depende do que se pretende estudar. Como destaca Matos et al (1995), baseando-se em conclusões de Nihoul, o uso inadequado de certo tipo de modelos pode levar a que se caia num mero quebra-cabeças ou no sentido contrário, na construção de regras muito simples.

Um bom modelo matemático tende a ser uma simplificação daquilo que se pretende descrever, salientando ou realçando alguns aspetos do problema e simplificando outros, por exemplo, na descrição da queda de um corpo existe a tendência para desprezar o atrito de forma a simplificar as equações envolvidas, obtendo-se assim um modelo que é viável e que pode ser comprovado experimentalmente dentro de certos condicionantes.

Matos et al (1995, p. 18) destaca como fases para a criação do modelo matemático ou ciclo da modelação as seguintes:

- identificação de uma situação real;
- tradução dos aspetos relevantes da situação para um modelo matemático;
- investigação sobre o modelo matemático;
- obtenção de novas informações acerca da situação através da tradução dos resultados para a situação real;
- avaliação da adequação e ajustamento dos resultados à situação real.

Matos et al (1995), tendo por base observações originalmente efetuadas por Kerr e Maki, considera alguns passos intermédios no processo de modelação de forma a adequar os modelos matemáticos à sua utilização pedagógica na sala de aula. Estas etapas ou fases não devem ser entendidas como tendo uma ordem rígida sendo que algumas delas podem ser omissas no âmbito da sua aplicação com os alunos.

A Figura 3.1.2. pretende traduzir o ciclo da modelação na sala de aula.

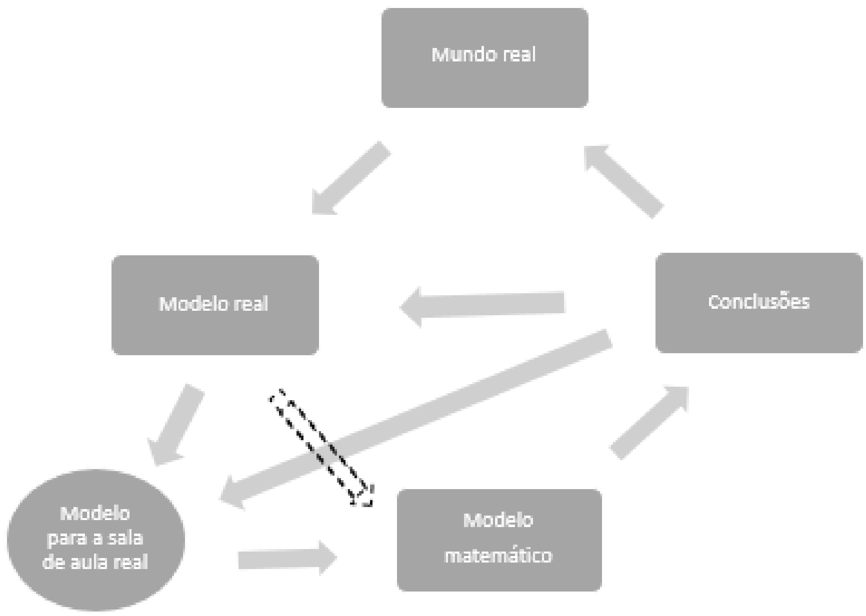


Figura 3.1.2. – Modelação na sala de aula, adaptado de Matos et al (1995, p. 20).

O ciclo de modelação apresentado na figura anterior reflete as etapas necessárias para a adaptação de um modelo matemático em termos didáticos.

3.2. O que são tarefas?

Gimero (2000) define tarefas como sendo, genericamente, atividades de ensino e aprendizagem dentro de ambientes escolares. Para este autor as tarefas inserem-se no currículo em ação.

Ponte (2005) refere que a aprendizagem dos alunos, recorrendo a tarefas, resulta principalmente de dois fatores: a atividade que realizam e a reflexão que sobre elas efetuam. Uma dada tarefa pode ser sugerida pelo professor; ser da iniciativa do próprio aluno ou resultar de consenso entre o aluno e o professor. Na maioria dos casos as tarefas são sugeridas pelo docente ao aluno, podendo ter uma formulação explícita que pode ser traduzida num enunciado, ou implícita, em que o professor sugere uma tarefa fazendo o aluno percorrer um determinado número de etapas sequenciadas. Segundo Ponte (2005) é muito importante a forma como a tarefa é introduzida e o modo de conduzir a realização da tarefa na sala de aula, não bastando que o professor saiba escolher "boas" tarefas.

As tarefas com significado não são, por si sós, promotoras de aprendizagem. É de vital importância a seleção que o professor faz das tarefas, a forma como as explora, como organiza e orienta o trabalho na aula, como apoia o trabalho dos alunos, promove a discussão, sistematiza o trabalho realizado e o relaciona com ideias e conceitos matemáticos relevantes.

Para Ponte (2005), quando um aluno está envolvido numa tarefa, realiza uma certa atividade e como tal, uma tarefa constitui-se como o objetivo da atividade. O mesmo autor considera que uma tarefa pode surgir sob quatro formas distintas: exercício, problema, investigação e exploração.

Num exercício o aluno dispõe de um processo mais ou menos imediato, mais ou menos complexo, para o resolver, mas em que é suposto o aluno conhecer o processo de resolução. Usam-se exercícios quando se pretende desenvolver no aluno mecanismos rotineiros e de consolidação, que envolvam alguma sistematização.

Quando um aluno resolve um problema, tem por base o princípio da descoberta. Isto é, um professor propõe um problema a um aluno quando quer desafiar as suas capacidades matemáticas e quer que o aluno desenvolva algum gosto pela disciplina. Os problemas devem funcionar como desafios, no entanto não devem ser nem demasiado difíceis, de forma a desmotivar o aluno, e fazer com que este desista da sua resolução, nem demasiado fáceis, pois nesse sentido podem confundir-se com exercícios. Quer nos exercícios, quer nos problemas, está bem demarcado o que é dado, normalmente pressupostos minimalistas e suficientes, e aquilo que se pretende obter.

Numa investigação: pretende-se levantar questões e apresentar alguma informação relevante, no entanto, deixa-se para o aluno a definição de estratégias, de forma a resolver as questões formuladas, sendo que os modos de resposta podem variar de aluno para aluno. Pode surgir sobre a forma de um simples enunciado ou sob a forma de um projeto, ou ainda como uma tarefa de modelação. Quer as investigações, quer os problemas surgem em norma associados a contextos reais.

Por último, uma exploração, pode constituir-se como uma tarefa de investigação em que o objetivo é por norma encontrar regularidades ou padrões e não requer por parte do aluno uma grande planificação.

Ponte e Serrazina (2004) referem o estudo *Matemática 2001* quando analisaram a frequência com que os professores solicitam aos seus alunos cada um destes tipos de tarefas. Assim, segundo o estudo efetuado, os exercícios aparecem no topo: 94% dos professores do 2º ciclo, 91% do 3º ciclo e 94% do ensino secundário afirmam usá-los com bastante frequência nas atividades letivas. Os problemas surgem em segundo lugar, com percentagens elevadas, mas que decrescem com os níveis de ensino: 80%, 77% e 67%, respetivamente. E as atividades de investigação ou exploração, em que se solicita um maior envolvimento dos alunos, 19%, 14% e 17%, respetivamente.

Tal como refere Ponte (2005), o que diferencia estes quatro tipos de tarefas é o seu maior ou menor grau de desafio matemático e o seu maior ou menor grau de estrutura ou abertura, podendo configurar-se como questões do tipo mais aberto ou mais fechado.

O esquema da Figura 3.2.1., adaptado de Ponte (2005), permite estabelecer uma relação entre os quatro tipos de tarefas enunciadas, atendendo às duas dimensões citadas.

Figura 3.2.1. – Esquema que relaciona as tarefas matemáticas, tendo por base o grau de desafio matemático e o grau de estrutura, adaptado de Ponte (2005, p. 17).

Formam-se assim dois eixos bidirecionais que dividem o plano em quatro partes ou quadrantes. No 1.º quadrante, surgem as tarefas de exploração, com um desafio reduzido e uma estrutura aberta; no 2.º quadrante, os exercícios com um desafio matemático considerado reduzido e um grau de abertura fechado; no 3.º quadrante os problemas, tarefas de desafio elevado e estrutura fechada, e, finalmente, no 4.º quadrante tem-se as tarefas de investigação, com um grau de desafio alto e uma estrutura aberta.

Quando se questiona um aluno sobre a média de idades dos rapazes da sua turma, a resolução desta questão passa por aplicação da fórmula da média, se já tiver sido lecionada, ou pela simples soma das idades e dividir pelo número total de rapazes, entendendo-se a questão neste sentido como um exercício. No entanto, se ao aluno ainda não tiver sido lecionada a fórmula da média, trata-se de uma tarefa de investigação em que se pede ao aluno que mobilize a noção intuitiva de média.

Ponte (2005) refere que é uma falsa questão quando se solicita ao aluno que resolva questões que ainda não foram suficientemente desenvolvidas em aula do ponto de vista teórico, o que se pretende é que o aluno, na prática, mobilize conhecimentos que adquiriu nas suas vivências sociais e culturais e que os traga para a sala de aula.

Quando um determinado professor propõe a resolução de uma dada tarefa em sala de aula deve ainda ter em conta a duração e o contexto. Como refere Ponte (2005) a duração de uma tarefa, por exemplo um exercício de aplicação dos conhecimentos, pode durar poucos minutos ou vários meses, caso se trate de um projeto.

No esquema seguinte apresentam-se vários tipos de tarefas explicitando-se a duração das mesmas.

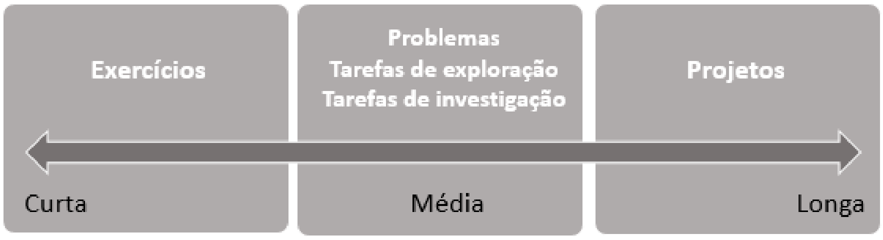


Figura 3.2.2. – Esquema com os diversos tipos de tarefas, no que respeita à duração, adaptado de Ponte (2005, p. 19)

Um projeto pode ser bastante rico pelo envolvimento que permite aos alunos, através da aquisição de aprendizagens significativas, no entanto, pode ter como grande inconveniente a dispersão e a desmotivação dos alunos, caso não sejam devidamente orientados pelo professor.

No que respeita à dimensão do contexto, as tarefas podem ter como pano de fundo a realidade ou serem tarefas puramente matemáticas. Quer num caso, quer noutro, encontram-se as tarefas de modelação ou aplicações da Matemática, que mais não são que casos particulares de problemas ou de tarefas de investigação.

3.3. Critérios de seleção de tarefas

Como refere Almiro (2005), um dos problemas enfrentados pela maioria dos professores nas suas escolas, nomeadamente quando não existe muito trabalho colaborativo entre colegas do mesmo grupo de recrutamento, prende-se com a escolha das tarefas e da orientação a dar aos alunos para a concretização dessas mesmas tarefas. O facto de experimentar métodos de ensino aprendizagem que fogem um pouco aos processos usualmente utilizados, nomeadamente às aulas expositivas, seguidas da simples aplicação/verificação dos conhecimentos transmitidos, através da resolução de exercícios em sala de aula, pode provocar algum desconforto no professor e o sentimento de alguma ineficácia no controlo da sala de aula pode efetivamente existir. No entanto, a troca de experiências entre os docentes e a reflexão conjunta sobre os processos reforçam a autoestima dos professores e são facilitadores de mudanças efetivas nas práticas letivas.

As normas profissionais para o ensino da Matemática (NCTM, 1994) referem que:

> Ao selecionar, adaptar e criar atividades matemáticas, os professores devem basear as suas decisões em três áreas de preocupação: o conteúdo matemático, os alunos e as suas formas de aprendizagem da matemática (p. 28).

Para Almiro (2006), tendo por base os investigadores Christiansen & Walther, quando se analisa o valor educativo de uma dada tarefa tem que se ter em conta se as tarefas, que se pretendem implementar na sala de aula com os alunos, são apropriadas e apresentam evidências relevantes; se apresentam uma cadência lógica de passos a executar pelos alunos; quais são as pistas dadas no texto da atividade a executar; se provocam análise e crítica por parte dos alunos. Acresce ainda a estas questões, aspetos práticos a ponderar, isto é, a tarefa é executável no espaço e tempo disponíveis? Existem os materiais suficientes para executar a tarefa? Os alunos estão preparados para trabalhar com os recursos exigidos nas tarefas?

Ponte (2005) enfatiza que toda a atividade de um professor pressupõe uma planificação, a qual encerra em si mesma a definição, de forma explícita ou implícita, de uma determinada estratégia de ensino, onde sobressaem dois elementos significativos: a atividade do professor – o que ele vai fazer – e a atividade do aluno – o que ele espera que o aluno faça – e em que é estabelecido uma determinada duração para a concretização. Este investigador refere a existência de duas estratégias básicas no ensino da Matemática: o ensino direto, expositivo ou magistral, em que o professor transmite conhecimento e o aluno limita-se a ouvir e aplicar esse conhecimento, efetuando essencialmente exercícios, e o ensino-aprendizagem de carácter exploratório ou ensino por descoberta, o qual pressupõe uma determinada mediação entre professor e aluno, em que o professor não procura explicar tudo mas deixa um espaço para a descoberta e exploração por parte do aluno.

NCTM (2007) refere que:

> Os professores de matemática controlam a diversidade de ideias matemáticas que estão disponíveis para os seus alunos. Eles têm a responsabilidade de garantir o ensino de uma completa gama de conteúdos e procedimentos matemáticos e de se certificarem que os conteúdos matemáticos formam um todo coerente. (p. 437)

A implementação de estratégias para a introdução de tarefas na sala de aula pode trazer algumas dificuldades, sendo muito importante o papel do professor que deve: garantir a compreensão da situação/contexto não matemático; centrar o aluno nos dados do problema e remeter as decisões para o aluno; efetuar sugestões; ter uma análise retrospetiva e analisar as resoluções dos alunos para estruturar a discussão, identificando os aspetos importantes na discussão e estruturar a sistematização.

4. METODOLOGIA

Um dos pressupostos que norteou a elaboração deste trabalho, foi a tentativa de encontrar respostas concretas e de cariz eminentemente prático, para as dificuldades sentidas pelos alunos no seu trabalho do dia-a-dia. Essa é uma das razões pela qual este estudo se centra na utilização da calculadora gráfica. Pela sua versatilidade, pela possibilidade de criação de ambientes de aprendizagem sem necessidade de efetuar grandes investimentos e por os alunos conseguirem criar dinâmicas de trabalho cooperante e cooperativo.

No presente capítulo é apresentada a metodologia de investigação seguida.

4.1. Fundamentação metodológica

A análise efetuada tem por pressuposto que os alunos que usam a tecnologia gráfica, essencialmente como ferramenta de cálculo e de visualização, compreendem melhor as funções e as variáveis, resolvem mais facilmente problemas algébricos em contextos aplicados e sabem interpretar melhor diferentes tipos de gráficos (Burril et al, 2002),

Com esta investigação pretendeu-se efetuar uma abordagem de desenvolvimento curricular, construir e adaptar diferentes tipos de tarefas matemáticas, com o objetivo de introduzir, desenvolver e consolidar conceitos estatísticos e utilizar a calculadora gráfica, nomeadamente o modelo TI-*n*spire *CX,* da Texas Instruments. Este modelo permite a análise de dados, bem como o trabalho com funções e geometria, como seja a identificação de pontos no plano, através das suas coordenadas, para a criação de modelos que se ajustem de forma conveniente aos dados. Assinale-se, contudo, que algumas das tarefas propostas podem igualmente ser executadas com outros modelos de calculadoras gráficas.

Neste trabalho foi utilizada uma metodologia de investigação de natureza qualitativa com um cunho interpretativo e descritivo, recorrendo essencialmente a uma técnica de análise documental. Ao usar esta metodologia pretendeu-se recolher e analisar documentos variados, que através de uma abordagem sistemática subordinada ao tema do trabalho e com base na revisão de literatura evidenciada acima, proporcionou o desenvolvimento de uma proposta de currículo baseado em tarefas com integração da tecnologia. Não se pretendeu com este estudo testar hipóteses, mas sim desenvolver critérios na busca de documentos de forma a obter fichas de trabalho que constituíssem um todo coeso.

Assim, tendo por base a revisão da literatura do capítulo anterior, foram objeto de análise e reflexão os programas e metas curriculares de Matemática A para o Ensino Secundário em vigor (MEC, 2014), diversos manuais escolares do Ensino Secundário, com destaque para Negra, Martinho & Martins (2015 e 2016); vários documentos produzidos pelo projeto T3-Portugal (1999a, 1999b, 2002 e 2014); textos editados pela APM, nomeadamente Grupo Azarquiel (1993); bem como as brochuras produzidas pelo antigo Departamento de Ensino Secundário (DES), do Ministério da Educação, em especial Martins et al (1997) e Teixeira, P et al (1997 e 1998).

Todos estes documentos têm como caraterística principal o serem fontes naturais de informação, além de serem ricos em conteúdo, poderem ser consultados livremente e variadíssimas vezes e servirem inclusive de base a diversos estudos. Tal como refere Bogdan e Bikien (1994) este tipo de documentação descreve de forma fértil o modo como as pessoas que produziram os materiais vêm o mundo.

Todas as tarefas construídas/adaptadas têm por base o currículo prescrito de forma a dar resposta às questões de desenvolvimento curricular com integração da tecnologia:

- Como se carateriza o currículo prescrito com estatística?
- Como pode ser moldado o currículo prescrito integrando a tecnologia?
- Como é que se materializam modelos de ensino-aprendizagem, no domínio da estatística, recorrendo à utilização da calculadora gráfica?
- De que forma a utilização da calculadora gráfica pode influenciar o currículo?

Como refere NCTM (2007, p. 383):

> Do 9.º ao 12.º ano, os alunos deverão adquirir uma compreensão aprofundada das questões relacionadas com o tirar de conclusões à luz da variabilidade. Irão aprender formas mais elaboradas para recolher e analisar dados, e para tirar conclusões a partir dos mesmos, de modo a responderem a questões ou a tomarem decisões fundamentadas no local de trabalho em situações do dia-a-dia. Deverão aprender a colocar questões que os ajudem a avaliar a qualidade de sondagens, de estudos de observação e de experiências controladas. Poderão recorrer ao seu crescente reportório de funções algébricas, sobretudo de funções lineares, para modelar e analisar dados, aumentando a sua compreensão sobre o que significa a adequação do modelo aos dados. Além disso, os alunos deverão começar a entender e a utilizar a correlação em conjunto com a análise dos resíduos, e representações gráficas na análise das relações entre duas variáveis. Deverão tornar-se consumidores entendidos, críticos e ponderados da informação e dos dados concebidos por outros.
>
> À medida que analisam dados, os alunos do 9.º ao 12.º ano poderão aprofundar o elo natural que liga a estatística com a álgebra. Os seus conhecimentos sobre gráficos e funções também podem ser aplicados no trabalho com dados.

Ao nível dos conteúdos estatísticos a introduzir no Ensino Secundário, o programa de Matemática A em vigor preconiza que sejam lecionados os conceitos específicos seguintes:

No 10.º ano (MEC, 2014, p. 14) sob a designação de características amostrais (EST10):

- Sinal de somatório; tradução no formalismo dos somatórios das propriedades associativa e comutativa generalizada da adição e distributiva generalizada da multiplicação em relação à adição;
- Variável estatística quantitativa como função numérica definida numa população e amostra de uma variável estatística;
- Média de uma amostra; propriedades da média de uma amostra;
- Variância e desvio-padrão de uma amostra; propriedades da variância e do desvio-padrão de uma amostra;
- Percentil de ordem k; propriedades do percentil de ordem k;

- Resolução de problemas envolvendo a média, o desvio-padrão e os percentis de uma amostra.

No 11.º ano (MEC, 2014, p. 20) sob a designação de reta de mínimos quadrados, amostras bivariadas e coeficiente de correlação (EST11):

- Reta de mínimos quadrados de uma sequência de pontos do plano;
- Amostras bivariadas; variável resposta e variável explicativa;
- Nuvem de pontos de uma amostra de dados bivariados quantitativos;
- Reta dos mínimos quadrados de uma amostra de dados bivariados quantitativos;
- Coeficiente de correlação;
- Resolução de problemas envolvendo a determinação de retas de mínimos quadrados e de problemas envolvendo amostras de dados bivariados quantitativos e o cálculo e interpretação dos coeficientes da reta de mínimos quadrados e do coeficiente de correlação.

Foram assim produzidos materiais pedagógico-didáticos, tendo em vista a sua aplicação futura em contexto educativo, de sala de aula, proporcionando dados relevantes para a tomada de decisões, quer a nível local, no trabalho direto com os alunos, de identificação e exploração de conceitos estatísticos, e na criação de indicações metodológicas na utilização da calculadora gráfica, quer a nível político, em instâncias de decisão do tipo de currículo prescrito a adotar futuramente.

4.2. Plano metodológico

Tendo por base a revisão de literatura, foram desenvolvidos critérios de análise a ter em conta para todo o estudo. Assim, e após efetuar a recolha de dados, através da pesquisa de documentação, foi construído um referencial que permitisse a análise de conteúdo.

Selecionadas e organizadas as tarefas a utilizar, foi definido um modelo comum para todas as tarefas e fichas técnicas respetivas, o qual atendeu a que quando um professor aplica uma determinada tarefa matemática, deve saber: o tema a abordar; o ano de escolaridade; as metas ou descritores do programa de Matemática A envolvidos na sua resolução; o tipo; o grau de dificuldade e de abertura; quais as dinâmicas de trabalho que deve impor, isto é, se a tarefa é para executar individualmente ou em grupo; qual o local preferencial de execução; qual a duração prevista; e quais são as propostas de abordagem e de resolução.

Após a construção das tarefas houve o cuidado de verificar se havia coerência entre todas as tarefas propostas e se estavam de acordo com a revisão da literatura, de forma a se poder estabelecer conclusões no final.

4.3. Motivação para a seleção das tarefas propostas neste estudo

Na escolha das tarefas a incluir neste estudo foram considerados quatro temas:

1) Amostras unidimensionais – conceitos iniciais, tabelas e gráficos estatísticos;

2) Medidas de localização – moda, média, mediana e quartis;
3) Medidas de dispersão – amplitude, amplitude interquartil e desvio padrão;
4) Amostras bidimensionais – diagramas de dispersão e reta dos mínimos quadrados

Tendo por base a análise efetuada sobre a denominação dos diversos tipos de tarefas, foram considerados 5 tipos: Exercício, Problema, Exploração, Investigação e Projeto, sendo que a Modelação Matemática pode surgir em qualquer um destes tipos.

Todos os conceitos referidos nas tarefas pressupõem três tipos de abertura: aberta, intermédia e fechada, e três níveis de desafio matemático: reduzido, médio ou elevado.

Em várias das tarefas pode identificar-se ainda uma estrutura que contém três partes distintas, definida por Friendland e Tabach (2001):

1) Familiarização: em que se apresenta o enunciado escrito que contém a situação-problema.
2) Transição: constituída por itens diversos que proporcionam o desenvolvimento das ideias que se pretendem enfatizar, assim como permitem que os alunos desenvolvam diversos tipos de apresentação dos resultados, as chamadas representações;
3) Exploração: constituída por itens mais abertos, que envolvem diferentes solicitações matemáticas, como por exemplo, comparar dados de diferentes amostras ou estabelecer comparações entre representações gráficas.

As tarefas propostas podem ser resolvidas em sala de aula, com uma duração prevista de 10 a 90 minutos, ou de três semanas, se a tarefa for para executar como trabalho final, na forma de projeto.

Algumas das tarefas permitem o estabelecimento de possíveis conexões entre temas diferentes do currículo prescrito de Matemática A e entre esta disciplina e outras disciplinas, promovendo o uso de estratégias diversificadas e incentivando a utilização da calculadora gráfica, sem contudo abdicar da apresentação dos resultados numa linguagem matemática mais formal e adaptada ao nível etário dos alunos, nomeadamente, sugerindo-se uma eventual elaboração de relatórios, não só como um elemento de avaliação, mas também no sentido de permitir aos alunos desenvolver a comunicação matemática sob a forma escrita.

Outra das preocupações tidas na seleção das tarefas é a possibilidade destas poderem ser resolvidas em pequenos grupos, de 2 ou de 4 elementos, devendo o professor efetuar a apresentação da tarefa no início dos trabalhos, com uma eventual introdução teórica, e posteriormente, no final, a reflexão e análise com todo o grupo turma, introduzindo ocasionalmente possíveis extensões e variantes à tarefa.

O facto de se assumir que a calculadora gráfica desempenha um papel de destaque na resolução das tarefas propostas, não deve ser entendido que os resultados obtidos não deverão ser reconfirmados com possíveis resoluções analíticas. Sempre que a tarefa o justifique, tal deve ser feito, enfatizando-se, desta forma, “o elo natural que liga a estatística à álgebra” (NCTM, 2007, p. 383).

5. ENUNCIADOS E ANÁLISE DAS TAREFAS

Neste capítulo é apresentada a metodologia seguida para a elaboração das tarefas propostas no estudo, fazendo-se referência aos critérios de seleção utilizados na escolha de cada tarefa, conteúdos matemáticos, graus de abertura e de desafio matemático, referenciados na revisão da literatura, duração prevista para a execução de cada tarefa, bem como observações de cariz eminentemente prático, indicações metodológicas e extensões ou variantes à tarefa proposta.

Como já foi assinalado, os conteúdos trabalhados nas vinte e quatro tarefas propostas são os que estão definidos no programa de Matemática A (MEC, 2014), com especial enfase para os temas de estatística, 10.º e 11.º anos, mas igualmente outros domínios como sejam as funções reais de variável real, 10.º e 11.º anos.

A adaptação das tarefas para o estudo envolveu a criação de uma estrutura comum e a elaboração de questões tendo em vista os conteúdos visados. Em todas as tarefas propostas, e após a apresentação de cada tarefa, é igualmente apresentada uma ficha técnica com observações de carácter pedagógico-didático para o professor.

Após a definição dos quatro temas a abordar, passou-se à fase de criação/escolha de tarefas que preenchessem estes quatro subdomínios. Considerou-se importante escolher maioritariamente tarefas que fossem executáveis em sala de aula, fossem suficientemente amplas e permitissem que os alunos realizassem um trabalho significativo. Na escolha das tarefas foi igualmente importante considerar maioritariamente situações com contextos reais de forma a criar uma maior identificação e empatia do aluno com a tarefa.

A tabela 5.0.1 apresenta o nome das tarefas escolhidas para desenvolver o primeiro tema: Amostras unidimensionais – conceitos iniciais, tabelas e gráficos estatísticos, bem como os conteúdos específicos a desenvolver em cada uma das tarefas propostas.

Tabela 5.0.1. – Amostras unidimensionais – conceitos iniciais, tabelas e gráficos estatísticos

Tarefa Matemática	Conteúdos a desenvolver
1. Cor dos olhos	Carateres qualitativos: Tabela de frequências absolutas e relativas/Gráficos de barras
2. Lançamento de um dado	Carateres quantitativos discretos: Tabela de frequências absolutas e relativas, simples e acumuladas/Gráficos circulares
3. Lançamento de dois dados	Carateres quantitativos discretos: Tabela de frequências absolutas e relativas, simples e acumuladas/Gráficos de barras
4. Chamadas telefónicas	Carateres quantitativos contínuos. Tabela de frequências absolutas/Histograma

Os conteúdos a desenvolver nestas primeiras quatro tarefas referem-se à identificação dos dados como sendo carateres qualitativos ou quantitativos, e dentro destes últimos, discretos ou contínuos, com subsequente elaboração de tabelas de frequências absolutas e relativas, simples e acumuladas. Pretende-se igualmente que o aluno efetue o desenho de gráficos circulares e/ou de barras, bem como de histogramas no caso das variáveis contínuas. Com estas tarefas pretende-se que o aluno revisite o que foi lecionado sobre estatística no 3.º ciclo do Ensino Básico, utilizando para tal as potencialidades da calculadora gráfica.

Na tabela 5.0.2 encontram-se os nomes dados às tarefas com que se pretende consolidar o tema Medidas de localização – moda, média, mediana e quartis, bem como os conteúdos a desenvolver em cada tarefa.

Assim, nestas seis tarefas, são desenvolvidos os conceitos de moda, média, mediana e quartis, para dados quantitativos discretos e contínuos e são analisadas algumas propriedades da média. Estes conceitos fazem parte do programa de Matemática A do 10.º ano de escolaridade, à exceção do cálculo da média para dados quantitativos contínuos.

Tabela 5.0.2. – Medidas de localização – moda, média, mediana e quartis

Tarefa Matemática	Conteúdos a desenvolver
5. Preço de computadores	Moda, Média, Mediana e Quartis de dados quantitativos discretos. Gráficos de extremos e quartis
6. Localização da capital de um país	Média
7. As idades	Moda e Média
8. Dias de faltas	Moda, Média, Mediana e Quartis de dados quantitativos discretos. Gráficos de extremos e quartis
9. Salário de trabalhadores	Propriedades da Média
10. Duração do trajeto casa-escola	Moda, Média, Mediana e Quartis de dados quantitativos contínuos

Na tabela 5.0.3, faz-se menção às tarefas utilizadas para cumprir os objetivos do tema Medidas de dispersão – amplitude, amplitude interquartil e desvio padrão.

São objeto de análise três tarefas, em que se pretende consolidar os conceitos estatísticos relativos a extremos, amplitude e amplitude interquartil de uma amostra univariada, bem como introduzir os conceitos de soma dos quadrados dos desvios, desvio padrão, desvio médio, percentil de ordem k e propriedades do desvio padrão. Os conceitos tratados nestas tarefas estão incluídos no programa de Matemática A do 10.º ano de escolaridade.

Tabela 5.0.3. – Medidas de dispersão – amplitude, amplitude interquartil e desvio padrão

Tarefa Matemática	Conteúdos a desenvolver
11. Lançamento de moedas ao ar…	Moda, Média, Mediana, Quartis, Amplitude, Amplitude interquartil e Desvio padrão de dados quantitativos discretos
12. Alturas de basquetebolistas	Extremos, Amplitude, Quartis, Amplitude interquartil, Soma dos Quadrados dos Desvios. Desvio padrão e Percentil de ordem k de dados quantitativos contínuos
13. Teste de Matemática	Média, Desvio médio, Desvio padrão, Extremos, Amplitude, Quartis, Amplitude interquartil, Percentil de ordem k, Propriedades da média, mediana e desvio padrão

Na tabela 5.0.4, estão contempladas as tarefas com que se pretende desenvolver o tema Amostras bidimensionais – diagramas de dispersão e reta dos mínimos quadrados.

Neste quarto e último grupo de tarefas foram consideradas quatro tarefas que permitem introduzir e consolidar aspetos relacionados com o estudo de amostras bidimensionais, como seja o estudo da regressão linear entre duas variáveis estatísticas, a determinação da reta dos mínimos quadrados e o cálculo do respetivo coeficiente de correlação linear. Estes conceitos são objeto de estudo ao nível do programa de Matemática A do 11.º ano de escolaridade.

Foram igualmente introduzidas neste tema seis tarefas que permitem o estudo de outro tipo de regressões entre duas variáveis, como sejam as regressões: quadrática, cúbica e potência. Neste último caso encontram-se a função de proporcionalidade inversa, na tarefa 21, “Matemática por um canudo”, e a relação entre intensidade da luz observada e a distância ao quadrado do foco à projeção da luz, na tarefa 22, “Intensidade da luz e sensores”.

Com estas seis tarefas pretende-se desenvolver nos alunos o gosto pela investigação, de modo a verificarem a existência de outro tipo de regressões entre duas variáveis. O tratamento destas tarefas pode ser facultativo, no entanto, estas tarefas revestem-se de uma grande importância pois permitem que o aluno aborde temas relacionados com a modelação matemática e verifique que uma correlação entre duas variáveis distintas não tem que ser necessariamente bem modelada por uma função afim, como acontece com a regressão linear.

Algumas destas tarefas apresentam conexões ao estudo efetuado com funções polinomiais no 10.º ano, ou com funções racionais no 11.º ano.

Por último, foi ainda incluída uma tarefa, mais ampla, que permite efetuar uma súmula dos diversos conceitos que foram alvo de análise nas tarefas anteriores, a tarefa 24, apelidada de “Estudo da evolução das notas nos exames nacionais”.

Tabela 5.0.4. – Amostras bidimensionais – diagramas de dispersão e reta dos mínimos quadrados

Tarefa Matemática	Conteúdos a desenvolver
14. Quais são as suas idades?	Nuvem de pontos de uma amostra de dados bivariados quantitativos
15. Horas de estudo	Nuvem de pontos de uma amostra de dados bivariados quantitativos/ Reta dos mínimos quadrados/Coeficiente de correlação linear
16. A chama da vela de aniversário	Nuvem de pontos de uma amostra de dados bivariados quantitativos/ Reta dos mínimos quadrados/Coeficiente de correlação linear
17. Rede Postal	Nuvem de pontos de uma amostra de dados bivariados quantitativos/ Reta dos mínimos quadrados/Coeficiente de correlação linear
18. Correlações – Relação causa/efeito	Regressão linear e outros tipos de regressões
19. Pizas e cortes	Regressão quadrática
20. Qual é o triângulo de maior área?	Regressão cúbica
21. Matemática por um canudo	Regressão potência (proporcionalidade inversa entre duas variáveis)
22. Intensidade da luz e sensores	Regressão potência (proporcionalidade inversa entre a intensidade da luz observada e o quadrado da distância do foco à projeção da luz)
23. Retângulo dentro de um triângulo	Regressão quadrática
24. Estudo da evolução das notas nos exames nacionais	Análise de diversos parâmetros estatísticos

As tarefas que possuem contextos reais, apresentam situações diversificadas, como por exemplo, “Cor dos olhos”, “Chamadas telefónicas”, “Preço de computadores” e “Dias de faltas”. Nas tarefas com contexto matemático: “Correlações – relações causa/efeito”, “Pizas e cortes”, “Qual é o triângulo de área máxima?” e “Retângulo dentro de um triângulo”, pretende-se, como foi assinalado, estudar diversos tipos de regressões entre as variáveis em estudo.

Na tabela 5.0.5. apresentam-se as diversas tarefas, o seu tipo e a classificação relativamente ao contexto, bem como a referência à sua elaboração.

Tabela 5.0.5. – Tarefas matemáticas, tipo e contexto

Temas	Tarefa Matemática	Tipo	Contexto	Referência
Amostras unidimensionais	1. Cor dos olhos	Exercício	Real	Criado pelo investigador
	2. Lançamento de um dado	Exercício	Real/ Matemático	Criado pelo investigador
	3. Lançamento de dois dados	Exercício	Real/ Matemático	Criado pelo investigador
	4. Chamadas telefónicas	Exercício	Real	Adaptado de Negra, Martinho & Martins (2015)
Medidas de localização	5. Preço de computadores	Exercício	Real	Criado pelo investigador
	6. Localização da capital de um país	Problema	Real	Adaptado de Grupo Azarquiel (1993)
	7. As idades	Exercício	Real	Criado pelo investigador
	8. Dias de faltas	Exercício	Real	Adaptado de Projeto T3 – Portugal (1999a)
	9. Salário de trabalhadores	Exercício	Real	Adaptado de Negra, Martinho & Martins (2015)
	10. Duração do trajeto casa-escola	Exercício	Real	Criado pelo investigador
Medidas de dispersão	11. Lançamento de moedas ao ar…	Exercício	Real/ Matemático	Criado pelo investigador
	12. Alturas de basquetebolistas	Exercício	Real	Adaptado de Negra, Martinho & Martins (2015)
	13. Teste de Matemática	Exercício	Real	Criado pelo investigador
Amostras bidimensionais	14. Quais são as suas idades?	Exercício	Real	Adaptado de Projeto T3 – Portugal (1999a)
	15. Horas de estudo	Exercício	Real	Criado pelo investigador
	16. A chama da vela de aniversário	Exercício	Real	Adaptado de Teixeira, P et al (1997)
	17. Rede Postal	Problema	Real	Adaptado de Negra, Martinho & Martins (2016)
	18. Correlações – Relação causa/efeito	Exercício	Matemático	Adaptado de Projeto T3 – Portugal (1999a)
	19. Pizas e cortes	Exploração	Matemático	Criado pelo investigador
	20. Qual é o triângulo de maior área?	Investigação	Matemático	Adaptado de Teixeira, P et al (1997)
	21. Matemática por um canudo	Investigação	Real	Adaptado de Projeto T3 – Portugal (2002)
	22. Intensidade da luz e sensores	Problema	Real	Adaptado de Teixeira, P. et al (1998)
	23. Retângulo dentro de um triângulo	Investigação	Matemático	Criado pelo investigador
	24. Estudo da evolução das notas nos exames nacionais	Projeto	Real	Criado pelo investigador

A aplicação destas tarefas em sala de aula pressupõe uma ordem. A tabela 5.0.6. – Proposta de planificação da unidade *Estatística (10.º e 11.º anos)* apresenta uma possível planificação, incluindo as tarefas propostas e o manual adotado, e atendendo às *Orientações de gestão curricular para o Programa e Metas Curriculares de Matemática A* (MEC, 2016).

Tabela 5.0.6. – Proposta de planificação da unidade Estatística (10.º e 11.º anos)

Ano	Aulas (90')	Conteúdos a desenvolver	Descritores das metas curriculares de Matemática A	Tarefas a propor
10.º Ano	**1.ª**	Carateres qualitativos e quantitativos discretos: Tabela de frequências absolutas e relativas/Gráficos de barras e gráficos circulares	---	Tarefas 1 e 2
	2.ª	Carateres quantitativos discretos e contínuos: Tabela de frequências absolutas e relativas, simples e acumuladas/Gráfico de barras vs Histograma	---	Tarefas 3 e 4
	3.ª	Somatórios: definição e propriedades	EST10: 1.1 a 1.4	Exercícios do manual adotado
	4.ª	Moda, Média, Mediana e Quartis de dados quantitativos discretos. Gráficos de extremos e quartis	EST10: 2.1 a 2.3 EST10: 5.1	Tarefas 5, 6 e 7 Exercícios do manual adotado
	5.ª	Moda, Média, Mediana e Quartis de dados quantitativos discretos e contínuos. Gráficos de extremos e quartis. Propriedades da Média.	EST10: 2.4 a 2.7 EST10: 5.1	Tarefas 8, 9 e 10
	6.ª	Propriedades da Média	EST10: 2.4 a 2.7 EST10: 5.1	Exercícios do manual adotado
	7.ª	Definir e conhecer propriedades da Variância e do Desvio padrão de uma amostra	EST10; 3.1 a 3.12 EST10: 5.1	Exercícios do manual adotado Tarefa 11
	8.ª	Extremos, Amplitude, Quartis, Amplitude interquartil, Soma dos quadrados dos desvios, Desvio padrão e Percentil de ordem *k* de dados quantitativos discretos e contínuos.	EST10; 2.1 a 2.3 e 2.5 EST10; 3.6, 3.7 e 3.9 EST10: 4.1 e 4.2 EST10: 5.1 e 5.2	Tarefas 12 e 13
	9.ª	Definir, conhecer e consolidar propriedades da Variância, do Desvio padrão e do Percentil de ordem *k* de uma amostra	EST10; 3.1 a 3.12 EST10: 4.1 a 4.4 EST10: 5.1 e 5.2	Exercícios do manual adotado
11.º Ano	**1.ª**	Nuvem de pontos de uma amostra de dados bivariados quantitativos Reta dos mínimos quadrados Coeficiente de correlação linear	EST11: 1.1 a 1.9 EST11: 2.1 a 2.3	Tarefas 14 e 15
	2.ª	Nuvem de pontos de uma amostra de dados bivariados quantitativos Reta dos mínimos quadrados Coeficiente de correlação linear	EST11: 1.1 a 1.9 EST11: 2.1 a 2.3	Tarefas 16 e 17 Exercícios do manual adotado
	3.ª	Nuvem de pontos de uma amostra de dados bivariados quantitativos Reta dos mínimos quadrados Coeficiente de correlação linear	EST11: 1.1 a 1.9 EST11: 2.1 a 2.3	Exercícios do manual adotado
	4.ª	Regressão linear e outros tipos de regressões	----	Tarefas 18, 19 e 20
	5.ª	Regressão potência	----	Tarefas 21 e 22
	6.ª	Regressão quadrática	----	Tarefa 23
	7.ª	Análise de diversos parâmetros estatísticos	EST10 e EST11	Tarefa 24

Para a elaboração desta planificação foi tido em conta, não só o desenvolvimento de cada tarefa apresentada, mas também o manual adotado, pois é importante que o aluno tenha um suporte escrito da matéria abordada ao longo deste tema, eventualmente para consulta e esclarecimento de dúvidas.

No estabelecimento desta planificação foi mantida a ordem apresentada no programa de Matemática A (MEC, 2014), e foram introduzidas algumas tarefas iniciais, cujos conteúdos não são introduzidos de forma direta no programa de Matemática do Ensino Secundário, mas que se encontram abordados no programa do Ensino Básico. Tais tarefas, como referido acima, permitem que o aluno revisite alguns conceitos estatísticos e que adquira igualmente um primeiro contacto com a calculadora gráfica, ao nível dos procedimentos que envolvem estatística.

As tarefas, só por si, não abarcam todos os conteúdos referidos no programa, nomeadamente não é referido de forma explícita o subdomínio dos somatórios. Tal deve-se a que, no entender do investigador, e tendo por base a sua prática letiva, o manual adotado deve estar sempre presente na lecionação e devem ser incutidos no aluno práticas normais de consulta do manual adotado de modo a que o adolescente percecione o livro, e todos os seus componentes, como parte integrante do processo de ensino aprendizagem.

As aulas previstas para a lecionação do domínio Estatística (10.º e 11.º anos) são as que estão definidas no Programa e Metas Curriculares Matemática A (MEC, 2014), tendo sido adicionadas três aulas para a investigação de outro tipo de regressões além da regressão linear, que se encontra referida no programa.

Para a execução da tarefa de projeto, tarefa 24, “Estudo da evolução das notas nos exames nacionais” propõe-se que o professor faça a proposta da tarefa à turma cerca de três a quatro semanas antes da sua apresentação na sala de aula, para que os alunos tenham tempo de recolher os dados necessários e executar a tarefa fora da sala de aula.

Apresentam-se em seguida as diversas tarefas propostas, bem como as respetivas fichas técnicas, onde constam:

- Título;
- Ano de escolaridade;
- Conteúdos a desenvolver;
- Descritores das metas curriculares de Matemática A;
- Tipo de tarefa e contexto;
- Descrição da tarefa;
- Grau de abertura e nível de desafio matemático;
- Metodologia de trabalho:
- Local de execução e duração prevista;
- Observações para o professor, bem como eventuais indicações metodológicas e extensões e variantes.

5.1 Amostras unidimensionais - conceitos iniciais, tabelas e gráficos estatísticos

TAREFA 1. Cor dos olhos

Numa determinada escola, com Ensino Secundário, verificou-se que dos 240 alunos que se encontram a frequentar o 10.º ano, 70% têm olhos de cor castanha, 20% têm olhos de cor preta, 8% olhos azuis e 2% olhos de cor verde.
Tendo por base estes dados completa a tabela seguinte:

Cor dos olhos	Frequência absoluta	Frequência relativa
Castanha		
Preta		
Azul		
Verde		
Totais		

1.1. Como classificas a cor dos olhos de uma pessoa? É um carater qualitativo ou quantitativo?

1.2. Qual é o número de alunos que têm a cor de olhos azul ou verde na amostra correspondente às turmas de 10.º ano desta escola?

1.3. Representa a amostra por meio de um gráfico de barras de frequências absolutas.

1.4. Supondo que a amostra considerada é representativa da população portuguesa, a qual é constituída por cerca de 9,8 milhões de indivíduos, determina, com valores aproximados ao milhar, o número estimado de indivíduos com a cor dos olhos castanha. E com a cor dos olhos verde?

1.5. Investiga e elabora um pequeno relatório, com cerca de 4 páginas, sobre a causa da diferenciação da cor de olhos nas diferentes pessoas e quais as percentagens de cor dos olhos que se julga existirem na população mundial.

FICHA TÉCNICA - TAREFA 1

TÍTULO: Cor dos olhos **ANO DE ESCOLARIDADE**: 10.º Ano

CONTEÚDOS A DESENVOLVER: Carateres qualitativos: Tabela de frequências absolutas e relativas/Gráficos de barras

DESCRITORES DAS METAS CURRICULARES DE MATEMÁTICA A: -----

TIPO DE TAREFA: Exercício **CONTEXTO**: Real

DESCRIÇÃO: Com esta tarefa de consolidação de conhecimentos pretende-se que os alunos efetuem a revisão de conceitos lecionados ao longo do 3.º ciclo do Ensino Básico, bem como adquiram motivação para os conceitos estatísticos a introduzir no Ensino Secundário.

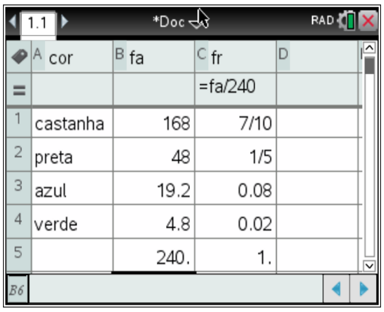
GRAU DE ABERTURA: Fechada **NÍVEL DE DESAFIO MATEMÁTICO**: Reduzido

METODOLOGIA DE TRABALHO: Grupos de 2 elementos

LOCAL DE EXECUÇÃO: Sala de aula **DURAÇÃO PREVISTA:** 45´

OBSERVAÇÕES PARA O PROFESSOR:

Após abrir uma página de Listas e Folha de Cálculo (digitar a tecla *ctrl* e depois *doc*), designar a coluna A por *cor* (cor dos olhos), a coluna B por *fa* (frequência absoluta) e a coluna C por *fr* (frequência relativa), e colocar as cores dos olhos nas células respetivas, dispondo as frequências absolutas na coluna/lista B. Na célula de fórmulas da coluna C, colocar a fórmula *fa*/240, de modo a obter as frequências relativas. Finalmente colocar nas células B5 e B6 as somas das células que se encontram por cima. Obtém-se assim a Figura 5.1.1., ao lado.



	A cor	B fa	C fr	D
=			=fa/240	
1	castanha	168	7/10	
2	preta	48	1/5	
3	azul	19.2	0.08	
4	verde	4.8	0.02	
5		240.	1.	

Figura 5.1.1. – Dados da tarefa 1

1.1. A cor dos olhos é um caráter qualitativo

1.2. 24 alunos

1.3. Carregar na tecla *MENU* e escolher *3: Dados - 8: Gráfico de resumo*. A máquina solicita que se coloque a Lista X, *cor*, e a lista de resumo, *fa*, bem como a disposição da Página (Página dividida ou Nova página). Sugere-se Nova página e carregar em *OK.* (Figura 5.1.2.)

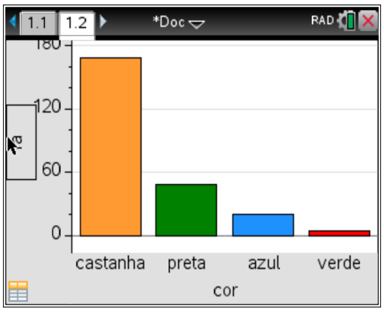


Figura 5.1.2. – Questão 1.3.

1.4. Para a cor dos olhos castanha o número estimado de indivíduos é de 6,86 mil milhares, e para a cor dos olhos verde é de 196 milhares.

1.5. Pretende-se que os alunos elaborem um relatório, apoiados eventualmente em pesquisas feitas na internet, sobre a cor dos olhos da população mundial.
No final pretende-se que exista uma análise conjunta dos resultados obtidos.

EXTENSÕES E VARIANTES:

Propõe-se como extensão que os alunos efetuem pequenas pesquisas sobre outro tipo de assuntos que envolvam carateres qualitativos, como sejam, por exemplo, o tipo de sangue de uma determinada população ou amostra, podendo esta última ser constituída com os alunos de uma turma, ou ano de escolaridade, ou mesmo toda a escola e depois verificar o que acontece na região, no país, no continente ou no planeta.

Tarefa 2. Lançamento de um dado

Quais os resultados possíveis de obter no lançamento de um dado?

Lança um dado cúbico 50 vezes e regista os valores obtidos na tabela seguinte:

Nº de pintas obtidas na face voltada para cima	Frequência absoluta simples	Frequência absoluta acumulada	Frequência relativa simples	Frequência relativa acumulada
1				
2				
3				
4				
5				
6				
Totais				

1.1. Como classificas a variável correspondente ao número de pintas obtidas na face voltada para cima? É um carater qualitativo ou quantitativo? Discreto ou contínuo?

1.2. Representa a amostra obtida por meio de um gráfico circular.

1.3. Comenta a afirmação:

> "No lançamento de um dado cúbico, um determinado número de vezes, a soma das frequências relativas de cada valor constante em cada face, é sempre igual a 1"

Nota: se não tiveres um dado podes simular o seu lançamento 50 vezes na tua calculadora executando *sim*(50) (programa na caixa ao lado) e contando depois na Lista que aparece quantas vezes ocorre cada número.

```
Define sim(n) = Prgm
    randInt(1,6,n)->a
    SortA a
    Disp a
EndPrgm
```

FICHA TÉCNICA - TAREFA 2

TÍTULO: Lançamento de um dado **ANO DE ESCOLARIDADE**: 10.º Ano

CONTEÚDOS A DESENVOLVER: Carateres quantitativos discretos: Tabela de frequências absolutas e relativas, simples e acumuladas/Gráficos circulares

DESCRITORES DAS METAS CURRICULARES DE MATEMÁTICA A: -----

TIPO DE TAREFA: Exercício **CONTEXTO**: Real/Matemático

DESCRIÇÃO: Com esta tarefa de consolidação de conhecimentos pretende-se que os alunos efetuem a revisão de conceitos lecionados ao longo do 3.º ciclo do Ensino Básico e trabalhem com pequenas simulações, usando a calculadora. Pretende-se ainda que os alunos adquiram motivação para os conceitos estatísticos a introduzir no Ensino Secundário.

GRAU DE ABERTURA: Fechada **NÍVEL DE DESAFIO MATEMÁTICO**: Reduzido

METODOLOGIA DE TRABALHO: Grupos de 2 elementos

LOCAL DE EXECUÇÃO: Sala de aula **DURAÇÃO PREVISTA:** 45´

OBSERVAÇÕES PARA O PROFESSOR:

Inserir na calculadora o programa descrito na tarefa (*1 Novo – Não – 1: Adicionar Calculadora/Calcular/MENU – 1: Ações – 1: Define/nome(n)=/MENU – 9: Funções e Programas – Prgm…EndPrgm, …*) transitando entre duas linhas sucessivas do programa com a tecla de símbolo ↲ . Efetuada uma experiência (*sim*(50)), obteve-se o resultado ao lado (Figura 5.1.3.).

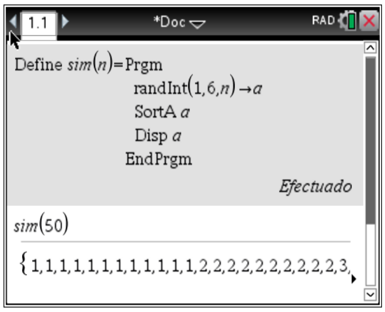


Figura 5.1.3. – Programa da tarefa 2

Preenchendo a tabela apresentada na tarefa, obtém-se:

Tabela 5.1.1. – Tabela completa da tarefa 2

Nº de pintas obtidas na face voltada para cima	Frequência absoluta simples	Frequência absoluta acumulada	Frequência relativa simples	Frequência relativa acumulada
1	12	12	0,24	0,24
2	10	22	0,2	0,44
3	5	27	0,1	0,54
4	4	31	0,08	0,62
5	5	36	0,1	0,72
6	14	50	0,28	1
Totais	50		1	

1.1. O número de pintas obtidas na face voltada para cima é um carater quantitativo discreto.

1.2. Após abrir uma página de Dados e Estatística, posicionar o cursor na linha que refere: “Clique para adicionar variável”, carregar na “mão” e escolher a lista a, aparecendo um gráfico de pontos do tipo que se encontra na Figura 5.1.4., abaixo.

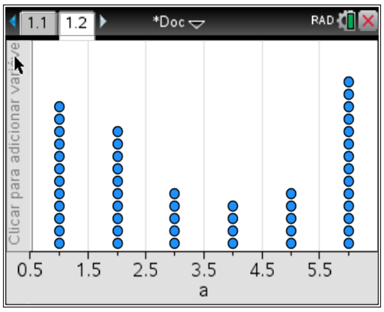


Figura 5.1.4. – Gráfico de pontos

Para obter o gráfico circular, carregar na tecla *MENU - 2: Propriedades do gráfico - B: Forçar categórico X*. Após escolher esta opção carregar novamente em *MENU - 1: Tipo de gráfico - 9: Gráfico circular*, obtendo-se o gráfico circular que se encontra na figura 5.1.5.

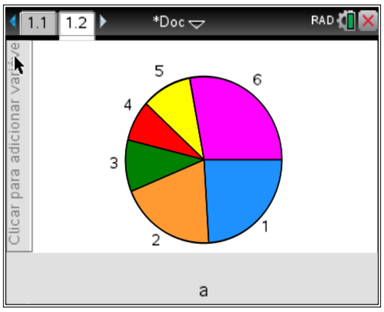


Figura 5.1.5. – Gráfico circular

1.3. A afirmação é verdadeira, pois a frequência relativa corresponde ao quociente entre a frequência absoluta de cada valor que a variável toma e o número total de efetivos, e sendo assim, a sua soma tem que ser 1.

INDICAÇÃO METODOLÓGICA:

Caso o professor não queira que os alunos gastem tempo de aula com a introdução das linhas de programação, pode introduzir o programa na sua calculadora e, através de uma ligação por cabo entre duas máquinas, enviar esse programa para a máquina de um aluno, solicitando depois a esse aluno que, efetuando o mesmo procedimento, o distribua pelos restantes alunos e estes a outros, e assim sucessivamente.

EXTENSÕES E VARIANTES:

Propõe-se que, no quadro, o professor reúna os dados obtidos por todos os grupos de alunos e introduza o conceito de probabilidade de um acontecimento *à posteriori*, isto é, faça referência ao conceito frequencista de probabilidade, verificando que a frequência relativa de cada valor da variável em estudo se aproxima de 1/6. Em alternativa, pode sempre solicitar aos alunos que, em casa, efetuem um maior número de experiências e tirem conclusões para um número significativo de “lançamentos de dados”, fazendo depois, com os alunos e na aula seguinte, a análise conjunta dos resultados obtidos.

Tarefa 3. Lançamento de dois dados

Lança agora dois dados em simultâneo 500 vezes e soma o número de pintas obtido nos dois dados em cada um dos lançamentos!!!

500 vezes?!! É um número considerável!!!

Usando a calculadora gráfica, nomeadamente o comando *randInt*, é possível simular o lançamento de dois dados o número de vezes que se queira.
Na calculadora executa o comando:

sum(randInt(1,6,2))

que é equivalente ao lançamento de dois dados simultaneamente, dando como resultado a soma das pintas obtidas nos dois dados, e carrega em ENTER 500 vezes.
Em alternativa pode-se executar o programa que se encontra ao lado *dados*(*500*) e contar na lista o número de vezes que ocorre o número 2, o 3, e assim sucessivamente até ao 12.

```
Define dados(n) = Prgm
   newlist(n)->a
   For k,1, n
   sum(randInt(1,6,2))->a[k]
   EndFor
   SortA a
   Disp a
EndPrgm
```

1.1. Tendo por base os valores obtidos na calculadora, completa a tabela seguinte e indica qual foi a percentagem de valores para a soma das pintas dos dois dados que se encontram entre 4 e 10, inclusive.

Soma do Nº de pintas obtidas nos dois dados	Frequência absoluta simples	Frequência absoluta acumulada	Frequência relativa simples	Frequência relativa acumulada
2				
3				
4				
5				
6				
7				
8				
9				
10				
11				
12				
Totais				

1.2. Constrói um gráfico de barras de:

a) Frequências absolutas simples.

b) Frequências relativas acumuladas.

1.3. Se te fosse proposto uma determinada quantia em dinheiro só pelo facto de apostares num número, em qual apostarias? Justifica.

FICHA TÉCNICA - TAREFA 3

TÍTULO: Lançamento de dois dados **ANO DE ESCOLARIDADE**: 10.º Ano

CONTEÚDOS A DESENVOLVER: Carateres quantitativos discretos: Tabela de frequências absolutas e relativas/Gráficos de barras

DESCRITORES DAS METAS CURRICULARES DE MATEMÁTICA A: -----

TIPO DE TAREFA: Exercício **CONTEXTO**: Real/Matemático

DESCRIÇÃO: Com esta tarefa pretende-se que os alunos efetuem a revisão de conceitos lecionados ao longo do 3.º ciclo do Ensino Básico e executem simulações.

GRAU DE ABERTURA: Fechada **NÍVEL DE DESAFIO MATEMÁTICO**: Reduzido

METODOLOGIA DE TRABALHO: Grupos de 2 elementos

LOCAL DE EXECUÇÃO: Sala de aula **DURAÇÃO PREVISTA:** 45´

OBSERVAÇÕES PARA O PROFESSOR:

Ao inserir na calculadora o programa descrito na tarefa (ver FICHA TÉCNICA – TAREFA 2, sobre a introdução das linhas do programa) e efetuando *dados*(500). obteve-se o resultado expresso na figura 5.1.6.

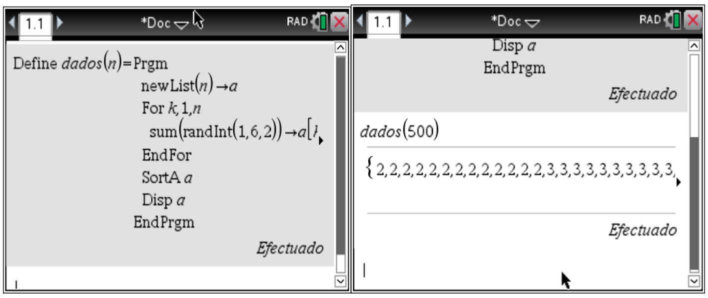


Figura 5.1.6. – Programa da tarefa 3 e respetiva execução.

1.1.

Contando os elementos da lista a obtém-se a tabela 5.1.2.

Tabela 5.1.2. – Tabela completa da tarefa 3.

Soma do Nº de pintas obtidas nos dois dados	Frequência absoluta simples	Frequência absoluta acumulada	Frequência relativa simples	Frequência relativa acumulada
2	13	13	0,026	0,026
3	30	43	0,06	0,086
4	48	91	0,096	0,182
5	55	146	0,11	0,292
6	62	208	0,124	0,416
7	80	288	0,16	0,576
8	81	369	0,162	0,738
9	56	425	0,112	0,85
10	36	461	0,072	0,922
11	27	488	0,054	0,976
12	12	500	0,024	1
Totais	500		1	

A percentagem solicitada é de 83,6%.

1.2.

a)

Após abrir uma página de Dados e Estatística, posicionar o cursor na linha que refere: “Clique para adicionar variável”, carregar na “mão” e escolher a lista a, aparece um gráfico de pontos.

Para obter o gráfico de barras, carregar na tecla *MENU*, em seguida *2: Propriedades do gráfico* e depois *B: Forçar categórico X*. Após escolher esta opção carregar novamente em *MENU*, escolhendo *1: Tipo de gráfico e 8: Gráfico de barras*, obtendo-se um gráfico de barras em que usando a “mão” é possível deslocar as barras dos valores de variável 10, 11 e 12 para a direita, obtendo-se o gráfico de barras apresentado na figura 5.1.7.

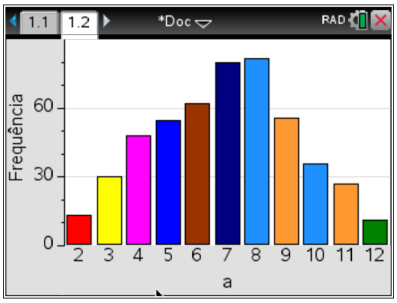
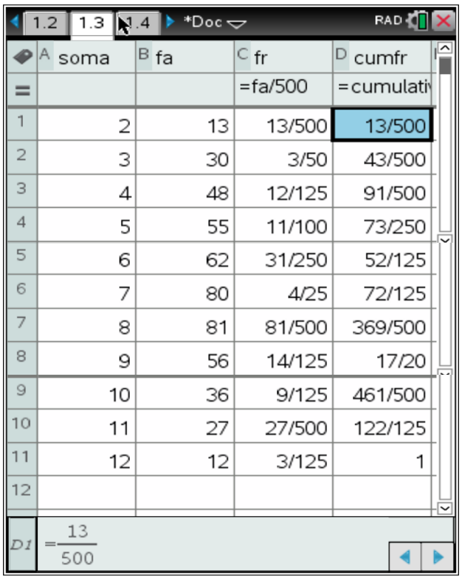


Figura 5.1.7. – Gráfico de barras.

b)

Após abrir uma página de *Listas e Folha de Cálculo*, designar a coluna A por soma (soma do número de pintas obtidas nos dois dados), a coluna B por *fa* (frequência absoluta), a coluna C por *fr* (frequência relativa) e a coluna D por *cumfr* (frequência relativa acumulada). Colocar os diversos valores da soma nas células respetivas da coluna A, colocando em seguida as suas frequências absolutas na coluna B e a fórmula *fa*/500, na célula de fórmulas da coluna C, de modo a obter as frequências relativas. Finalmente escolher na célula das fórmulas da coluna D *1: Lista de somas cumulativas* (*3: Dados - 7: Operações da lista - 1: Lista de somas cumulativas*), obtendo-se o resultado da figura 5.1.8.



	A soma	B fa	C fr	D cumfr
=			=fa/500	=cumulati
1	2	13	13/500	13/500
2	3	30	3/50	43/500
3	4	48	12/125	91/500
4	5	55	11/100	73/250
5	6	62	31/250	52/125
6	7	80	4/25	72/125
7	8	81	81/500	369/500
8	9	56	14/125	17/20
9	10	36	9/125	461/500
10	11	27	27/500	122/125
11	12	12	3/125	1
12				

D1 $=\frac{13}{500}$

Figura 5.1.8. – Frequências absolutas e relativas.

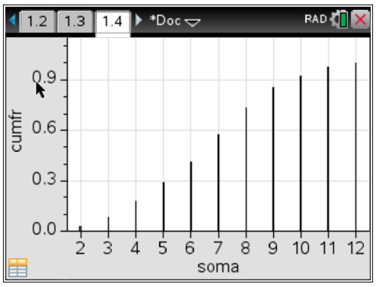


Figura 5.1.9. – Gráfico de barras das frequências relativas acumuladas.

Para se obter o gráfico de barras das frequências relativas acumuladas carregar na tecla *MENU*, depois escolher *3: Dados*, e em seguida *8: Gráfico de resumo*. A calculadora solicita para colocar a Lista X, soma, e a lista de resumo, *cumfr*, bem como se se pretende a Página dividida ou Nova página. Sugere-se Nova página e carregar em *OK*. Obtém-se um gráfico de barras com as barras juntas, sendo que basta usar a “mão” para “estreitar” as barras e definir uma janela de 1,5 a 12,5 para obter o gráfico ao lado (Figura 5.1.9.)

1.3.

Com base nos dados apresentados, o valor a apostar seria o correspondente à soma 8, pois é a que apresenta uma maior frequência absoluta, no entanto, se o professor coligir os dados de todos os grupos no quadro, possibilitará que os alunos tenham uma “visão” mais correta da questão de forma a aperceberem-se que o valor pretendido é o 7.

Tarefa 4. Chamadas telefónicas

Considera a duração, em minutos, de 40 chamadas telefónicas escolhidas ao acaso.

Sabe-se que 30% destas chamadas tiveram uma duração não inferior a 3 minutos e meio e que parte da informação referente a estas chamadas está resumida na tabela seguinte:

Duração (min)	n_i
$[2; 2{,}5[$	7
$[2{,}5; 3[$	9
$[3; 3{,}5[$	
$[3{,}5; 4[$	
$[4; 4{,}5[$	6

1.1. Como classificas a variável correspondente à duração, em minutos, das 40 chamadas telefónicas? É um carater qualitativo ou quantitativo? Discreto ou contínuo?

1.2. Completa a tabela e indica a percentagem das chamadas que tiveram uma duração de, pelo menos, 3 minutos.

1.3. Constrói um histograma das frequências absolutas acumuladas com os dados apresentados.

(Adaptado de Projeto Dimensões Matemática A, 10.º Ano, Santillana)

FICHA TÉCNICA - TAREFA 4

TÍTULO: Chamadas telefónicas **ANO DE ESCOLARIDADE**: 10.º Ano

CONTEÚDOS A DESENVOLVER: Carateres quantitativos contínuos. Tabela de frequências absolutas/Histograma

DESCRITORES DAS METAS CURRICULARES DE MATEMÁTICA A: -----

TIPO DE TAREFA: Exercício **CONTEXTO**: Real

DESCRIÇÃO: Com esta tarefa de consolidação de conhecimentos pretende-se que os alunos efetuem a revisão de conceitos lecionados no 9.º ano do 3.º ciclo do Ensino Básico.

GRAU DE ABERTURA: Fechada **NÍVEL DE DESAFIO MATEMÁTICO**: Reduzido

METODOLOGIA DE TRABALHO: Grupos de 2 elementos

LOCAL DE EXECUÇÃO: Sala de aula **DURAÇÃO PREVISTA:** 45´

OBSERVAÇÕES PARA O PROFESSOR:

1.1. É um carater quantitativo contínuo.
1.2. A tabela completa encontra-se na figura 5.1.3.:

Duração (min)	n_i
$[2; 2,5[$	7
$[2,5; 3[$	9
$[3; 3,5[$	12
$[3,5; 4[$	6
$[4; 4,5[$	6

Tabela 5.1.3. – Tabela completa da tarefa 4

A percentagem solicitada é de 60%.

1.3.

Após abrir uma página de *Listas e Folha de Cálculo*, designar a coluna A por *duração*, a coluna B por *fa* (frequência absoluta) e a coluna C por *cumfa*. Colocar o valor central de cada classe (2,25; 2,75; 3,25; 3,75 e 4,25) nas células respetivas e, em seguida, as frequências absolutas na coluna B. Na célula das fórmulas da coluna C colocar *1: Lista de somas cumulativas* (*3: Dados - 7: Operações da lista - 1: Lista de somas cumulativas*), obtendo-se um resultado semelhante ao da figura 5.1.10., ao lado.

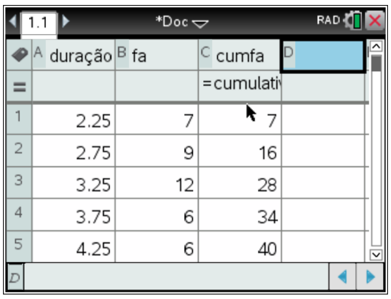


Figura 5.1.10. – Marca de classe e frequências absolutas acumuladas

Ao carregar na tecla *MENU*, escolhendo *3: Dados*, e em seguida *8: Gráfico de resumo*, a máquina solicita para colocar a Lista X, *duração*, e a lista de resumo, *cumfa*, bem como se se pretende a Página dividida ou Nova página. Sugere-se Nova página e carregar de seguida em *OK*.

Digitar *MENU – 5: Janela/Zoom – 1: Definições de janela* e colocar *XMin*: 1,9 e *XMax*: 4,6, clicando em *OK* de seguida.
Por último, digitar novamente *MENU – 2: Propriedades do gráfico – 2: Propriedades do histograma – 2: Definições das barras – 1: Largura da barra igual*, digitando 0.5 para a largura e 2 para o alinhamento. Ao escolher OK, obtém-se o histograma apresentado na figura 5.1.11:

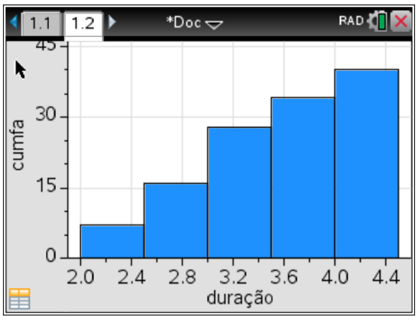


Figura 5.1.11. – Histograma.

EXTENSÕES E VARIANTES:

Propõe-se, como extensão, que os alunos de uma mesma turma efetuem pequenas pesquisas sobre outro tipo de assuntos que envolvam carateres quantitativos contínuos, como sejam, por exemplo, a pesquisa dos comprimentos de algumas partes do corpo (medidas antropométricas), nomeadamente, alturas da cabeça, dimensões dos braços, tamanho de um palmo da mão, comprimento de um pé, etc, organizando os dados obtidos em tabelas e ilustrando-os com histogramas.

Os alunos podem, eventualmente, completar esses dados com pequenas pesquisas de forma a determinar quais são os valores mais comuns para essas partes do corpo na população portuguesa e/ou mundial.

Sugere-se igualmente que os alunos pesquisem as medidas do *Homem Ideal,* ícone para a representação das relações aproximadas normais do corpo humano de uma pessoa adulta, usadas desde a Grécia antiga. E nesse sentido deve-se referir o matemático belga Lambert Adolphe Quételet (1796-1874), considerado um dos fundadores da estatística moderna, pelos seus estudos estatísticos sobre as proporções dos homens europeus.

5.2. Medidas de localização – moda, média, mediana e quartis

Tarefa 5. Preços de computadores

Duas lojas de distribuição de material eletrónico (loja A e loja B) vendem, cada uma, oito computadores de diferentes tipos e marcas. Os gerentes de cada loja afirmam ambos que o valor médio de cada computador na sua loja é de 519 euros.

O Pedro é um aluno do 11.º ano, que sabe um pouco de estatística, e afirma que o valor mediano dos preços dos computadores na loja A é de 500 euros.

Tabela de preços de cada loja (em euros):

Computador	Loja A
A	500
B	530
C	500
D	600
E	436
F	470
G	616
H	500

Computador	Loja B
I	1110
J	250
K	500
L	270
M	998
N	474
O	250
P	300

1.1. Coloca os valores dos computadores na calculadora, em duas listas diferentes, e confirma que o valor apontado pelos gerentes para a média dos preços dos computadores praticados em cada uma das duas lojas está correto. Indica, igualmente, os valores do 1.º quartil, da mediana e do 3.º quartil e os valores mínimo, máximo e moda dos preços dos computadores para cada loja.

1.2. Elabora para cada amostra de preços de computador em cada loja um gráfico de extremos e quartis.

1.3. Supondo que os computadores vendidos em cada loja não são muito diferentes em termos de caraterísticas técnicas e tendo por base a afirmação do Pedro, por qual das lojas optarias se tivesses que comprar um computador? Justifica a tua resposta.

FICHA TÉCNICA - TAREFA 5

TÍTULO: Preços de computadores **ANO DE ESCOLARIDADE**: 10.º Ano

CONTEÚDOS A DESENVOLVER: Moda, Média, Mediana e Quartis de dados quantitativos discretos. Gráficos de extremos e quartis

DESCRITORES DAS METAS CURRICULARES DE MATEMÁTICA A: EST10: 2.1 a 2.3/5.1

TIPO DE TAREFA: Exercício **CONTEXTO**: Real

DESCRIÇÃO: Com esta tarefa de consolidação de conhecimentos, pretende-se que os alunos efetuem a revisão das medidas de localização.

GRAU DE ABERTURA: Fechada **NÍVEL DE DESAFIO MATEMÁTICO**: Reduzido

METODOLOGIA DE TRABALHO: Grupos de 2 elementos

LOCAL DE EXECUÇÃO: Sala de aula **DURAÇÃO PREVISTA:** 45´

OBSERVAÇÕES PARA O PROFESSOR:

1.1.

Abrir uma página de *Listas e Folha de Cálculo* e colocar os valores dos computadores das lojas A e B nas colunas A e B, respetivamente.

Efetuar *MENU – 4: Estatística – 1: Cálculos Estatísticos – 1: Estatísticas de uma variável*, indicar como número de listas, 2, e escolher *OK*.

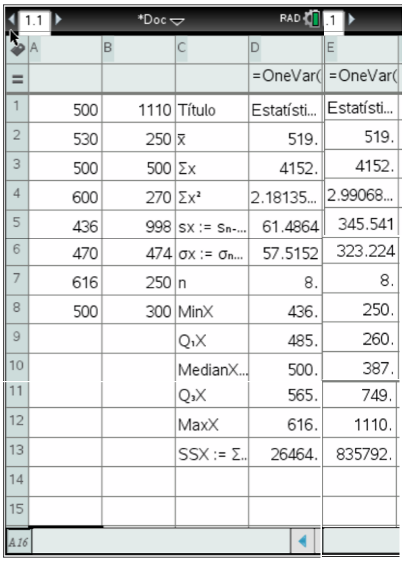
Colocar em Lista X1, *a[]*, em ListaX2, *b[]*, em 1.ª coluna de resultados, *c[]*, e pressionar *OK*.

Obtém-se o mosaico de páginas que se encontra na figura 5.2.1.

Como se pode confirmar pela verificação das células D2 e E2, o valor da média do preço dos computadores, em ambas as lojas, é de 519€.

Na loja A, $Q1 = 485$; $Me = 500$; $Q3 = 565$; $Min = 436$; $Max = 616$ e $Moda = 500$.

Na loja B, $Q1 = 260$; $Me = 387$; $Q3 = 749$; $Min = 250$; $Max = 1110$ e $Moda = 250$.



	A	B	C	D	E
=				=OneVar(	=OneVar(
1	500	1110	Título	Estatísti...	Estatísti...
2	530	250	x̄	519.	519.
3	500	500	Σx	4152.	4152.
4	600	270	Σx²	2.18135...	2.99068...
5	436	998	sx := sn-...	61.4864	345.541
6	470	474	σx := σn...	57.5152	323.224
7	616	250	n	8.	8.
8	500	300	MinX	436.	250.
9			Q₁X	485.	260.
10			MedianX...	500.	387.
11			Q₃X	565.	749.
12			MaxX	616.	1110.
13			SSX := Σ...	26464.	835792.
14					
15					

Figura 5.2.1. – Parâmetros estatísticos.

1.2.

Ao carregar na tecla *MENU*, escolhendo *3: Dados*, e em seguida *8: Gráfico rápido*, posicionar o cursor na linha que refere: "Clique para adicionar variável", carregar na "mão" e escolher a lista a. Para escolher o tipo de gráfico executar: *MENU – 1: Tipo de gráfico – 2: Gráfico de extremos e quartis*, depois tendo o cuidado de ter o cursor na página dos dados, efetuar o mesmo procedimento para desenhar o gráfico de extremos e quartis da lista b, obtendo-se o ecrã apresentado na figura 5.2.2., ao lado.

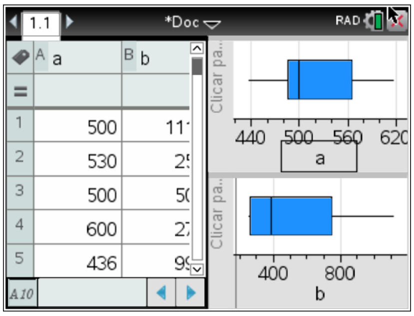


Figura 5.2.2. – Diagrama de extremos e quartis.

1.3.

Atendendo à afirmação do Pedro, a loja a optar deverá ser a loja A, pois nesta os preços de computadores são mais homogéneos e equiparados. Na loja B a mediana é maior.

Tarefa 6. Localização da capital de um país

Um determinado país pretende mudar a sua capital. Os seus habitantes averiguam qual a cidade mais adequada atendendo ao critério de minimizar os gastos, em deslocações, entre elas.

Na tabela abaixo estão registadas as distâncias, em quilómetros, entre as cinco principais cidades: A, B, C, D e E desse país.

	A	B	C	D	E
A	--				
B	42	--			
C	87	45	--		
D	82	53	47	--	
E	64	94	123	76	--

1.1. Define uma lista na calculadora com as distâncias da cidade A às outras quatro cidades e indica o valor médio.

1.2. Efetua o mesmo da alínea **1.1.** para as restantes cidades.

1.3. Que cidade escolherias para capital? Justifica.

(Adaptado de Estatística no 3.º Ciclo do Ensino Básico, APM)

FICHA TÉCNICA - TAREFA 6

TÍTULO: Localização da capital de um país **ANO DE ESCOLARIDADE**: 10.º Ano

CONTEÚDOS A DESENVOLVER: Média

DESCRITORES DAS METAS CURRICULARES DE MATEMÁTICA A: EST10: 2.1 a 2.3/5.1

TIPO DE TAREFA: Problema **CONTEXTO**: Real

DESCRIÇÃO: Com esta tarefa de consolidação de conhecimentos pretende-se que os alunos efetuem a revisão do conceito estatístico da média, lecionado no Ensino Básico, e consigam igualmente interpretar os dados disponíveis para obter uma conclusão viável e de acordo com o enunciado.

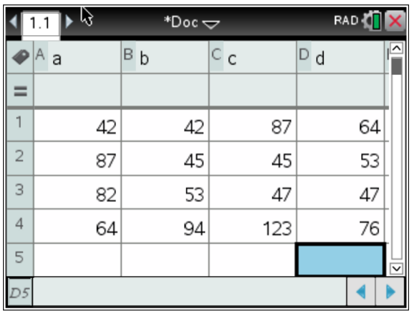
GRAU DE ABERTURA: Fechada **NÍVEL DE DESAFIO MATEMÁTICO**: Médio

METODOLOGIA DE TRABALHO: Grupos de 2 elementos

LOCAL DE EXECUÇÃO: Sala de aula **DURAÇÃO PREVISTA:** 20´

OBSERVAÇÕES PARA O PROFESSOR:

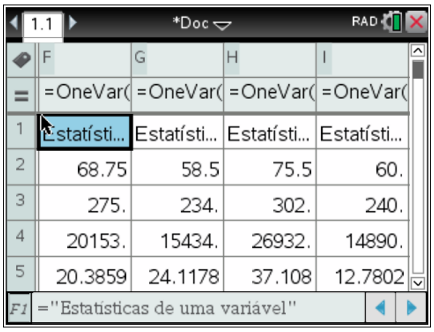
Dispondo a informação em quatro colunas, A, B, C e D, obtém-se a página apresentada na figura 5.2.3.



	A a	B b	C c	D d
=				
1	42	42	87	64
2	87	45	45	53
3	82	53	47	47
4	64	94	123	76
5				

Figura 5.2.3. – Distâncias entre as quatro cidades.

Efetuando *MENU – 4: Estatística – 1: Cálculos estatísticos – 1: Estatísticas de uma variável*, introduzindo 4 como número de listas e escolhendo *OK*, em seguida colocando como Lista X1, *a[],* lista X2, *b[],* Lista X3, *c[],* lista X4, *d[]* e como 1.ª coluna de resultados *e[]* e escolhendo novamente *OK*. Finalmente, escolhendo sucessivamente como referência de coluna *a[], b[], c[] e d[]*, obtém-se a figura 5.2.4..



	F	G	H	I
=	=OneVar(	=OneVar(	=OneVar(	=OneVar(
1	Estatísti...	Estatísti...	Estatísti...	Estatísti...
2	68.75	58.5	75.5	60.
3	275.	234.	302.	240.
4	20153.	15434.	26932.	14890.
5	20.3859	24.1178	37.108	12.7802

F1 ="Estatísticas de uma variável"

Figura 5.2.4. – Parâmetros estatísticos das listas A, B, C e D.

As médias de A, B, C e D, às outras cidades, respetivamente, estão nas células F2, G2, H2 e I2 e são 68,75; 58,5; 75,5 e 60. Conclui-se assim que a cidade que está mais perto das outras é, em média, a B, devendo ser esta a capital, atendendo ao critério adotado.

Tarefa 7. As idades

Seis amigos, o António, o Belarmino, o Carlos, o Daniel, o Eduardo e o Francisco encontram-se no jantar de aniversário do António e só este último sabe a idade de todos os outros.

Para entreter os convivas no final do jantar o António propôs o seguinte problema:

> "Sabendo que a média das nossas idades é 20 anos, a moda é 23, a minha idade é igualmente de 23, a do Belarmino 17, a do Carlos 19 e a do Francisco 16 e sabendo ainda que o Daniel é mais velho que o Eduardo. Quais as idades do Daniel e do Eduardo?"

FICHA TÉCNICA - TAREFA 7

TÍTULO: As idades **ANO DE ESCOLARIDADE**: 10.º Ano

CONTEÚDOS A DESENVOLVER: Média e Moda

DESCRITORES DAS METAS CURRICULARES DE MATEMÁTICA A: EST10: 2.1 a 2.3/5.1

TIPO DE TAREFA: Exercício **CONTEXTO**: Real

DESCRIÇÃO: Com esta tarefa de consolidação de conhecimentos pretende-se que os alunos efetuem a revisão dos conceitos estatísticos da média e da moda, lecionados no Ensino Básico.

GRAU DE ABERTURA: Fechada **NÍVEL DE DESAFIO MATEMÁTICO**: Reduzido

METODOLOGIA DE TRABALHO: Grupos de 2 elementos

LOCAL DE EXECUÇÃO: Sala de aula **DURAÇÃO PREVISTA:** 10´

OBSERVAÇÕES PARA O PROFESSOR:

Neste exercício não é requerível, nem exigível, a utilização da calculadora.

Pretende-se que os alunos executem cálculos algébricos simples, de forma a obter os resultados pretendidos.

Assim, as idades do Daniel e do Eduardo são, respetivamente, 22 e 23 anos.

Tarefa 8. Dias de faltas

O Departamento de Recursos Humanos de uma empresa registou o número de dias de faltas por doença de uma amostra de empregados nos últimos 6 meses.

Número de dias de faltas	Número de empregados
0	12
1	6
2	25
3	22
4	14
5	8
6	5
7	6
8	2
10	1
15	1

1.1. Qual é a população que deu origem a esta amostra? Quantos elementos tinha a amostra? Qual é a variável? Indica um possível objetivo desta recolha.

1.2. Constrói uma tabela com as frequências absolutas e relativas, simples e acumuladas.

1.3. Olhando para a tabela das frequências relativas acumuladas, diz quais são o mínimo, o 1.º quartil, a mediana, o 3.º quartil e o máximo. Confirma os valores com a calculadora.

1.4. Constrói um diagrama de extremos e quartis.

1.5. Quais são os valores da moda e da média desta distribuição? Qual o significado das medidas de tendência central?

1.6. Representa graficamente a distribuição de frequências absolutas simples.

1.7. Se fosses o responsável pelo Departamento de Recursos Humanos, que conclusões tirarias acerca das faltas por doença?

(Adaptado de Estatística e Calculadoras Gráficas, APM, Projeto T3)

FICHA TÉCNICA - TAREFA 8

TÍTULO: Dias de faltas

ANO DE ESCOLARIDADE: 10.º Ano

CONTEÚDOS A DESENVOLVER: Moda, Média, Mediana e Quartis de dados quantitativos discretos. Gráficos de extremos e quartis

DESCRITOR DAS METAS CURRICULARES DE MATEMÁTICA A: EST10: 2.4/5.1

TIPO DE TAREFA: Exercício

CONTEXTO: Real

DESCRIÇÃO: Com esta tarefa pretende-se que os alunos efetuem a média para dados agrupados, bem como trabalhem com as restantes medidas de localização.

GRAU DE ABERTURA: Fechada

NÍVEL DE DESAFIO MATEMÁTICO: Reduzido

METODOLOGIA DE TRABALHO: Grupos de 2 elementos

LOCAL DE EXECUÇÃO: Sala de aula

DURAÇÃO PREVISTA: 35´

OBSERVAÇÕES PARA O PROFESSOR:

1.1.

Empregados de uma empresa. A amostra tinha 102 elementos. A variável é o número de dias de faltas. Verificar o absentismo por doença dos empregados da empresa.

1.2.

Tabela 5.2.1. – Tabela de frequências absolutas e relativas.

Número de dias de faltas	Frequência absoluta	Frequência relativa	Frequência absoluta acumulada	Frequência relativa acumulada
0	12	0,1176	12	0,1176
1	6	0,0588	18	0,1764
2	25	0,2451	43	0,4215
3	22	0,2157	65	0,6372
4	14	0,1373	79	0,7745
5	8	0,0784	87	0,8529
6	5	0,0490	92	0,9019
7	6	0,0588	98	0,9607
8	2	0,0196	100	0,9803
10	1	0,0098	101	0,9901
15	1	0,0098	102	0,9999=1

1.3.

$Min = 0$;
$Q1 = 2$;
$Me = 3$;
$Q3 = 4$ e
$Max = 15$

Na figura 5.2.5., encontram-se as medidas solicitadas, tal como aparecem na calculadora.

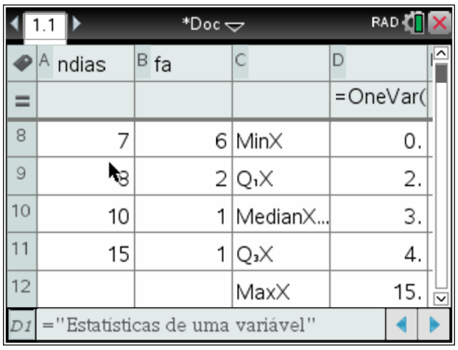


Figura 5.2.5. – Extremos e quartis.

1.4.

O diagrama de extremos e quartis com 3 outliers encontra-se na figura 5.2.6.:

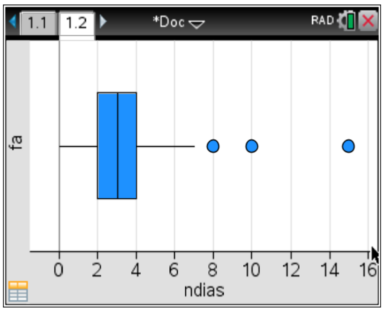


Figura 5.2.6. – Diagrama de extremos e quartis.

1.5.

Como se pode verificar na página da calculadora, figura 5.2.7., o valor da média é 3,245 e a moda é 2.
As medidas de tendência central são medidas que medem a tendência centralizadora da distribuição, destas fazem parte a moda, valor mais frequente, média, soma de todos os valores que a variável toma a dividir pelo número de efetivos, e a mediana, que é o parâmetro que indica que 50% dos dados são inferiores ou iguais a esse valor.

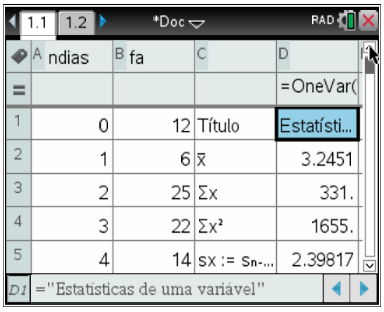


Figura 5.2.7. – Média.

1.6.

O gráfico de barras com as frequências absolutas simples encontra-se na figura 5.2.8.:

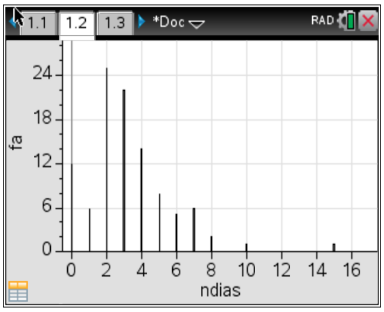


Figura 5.2.8. – Gráfico de barras.

1.7.

Os valores correspondentes aos 3 outliers não deveriam ser contabilizados para o estudo, pois podem ser considerados casos muito pontuais. Por outro lado, trabalhadores com dias de faltas abaixo de $\bar{x} - 1,5\,(Q3 - Q1) = 0,245$ $(\bar{x} - média\ (3,245); (Q3 - Q1) - amplitude\ interquartil(2))$, deveriam obter um bónus por assiduidade, e valores acima de $\bar{x} + 1,5\,(Q3 - Q1) = 6,245$, deveriam sofrer uma penalização por excesso de faltas.

EXTENSÕES E VARIANTES:

O professor poderá solicitar aos seus alunos que recolham, junto dos progenitores, quais foram os dias de falta por doença destes, nos últimos seis meses, e com base na amostra criada pelos progenitores de todos os alunos da turma, efetuar um estudo semelhante ao realizado na tarefa, comparando os valores obtidos com a nova amostra e os obtidos na tarefa.

Tarefa 9. Salários de trabalhadores

Numa empresa com 55 trabalhadores observa-se a seguinte distribuição de salários:

Salários (€)	Frequência relativa (%)
550	18,2
700	21,8
920	38,2
1100	14,5
2700	5,5
5800	1,8

Nas questões seguintes apresenta o resultado em euros, arredondado às centésimas.

1.1. Calcula o salário médio.

1.2. Em dezembro, todos os funcionários recebem uma bonificação igual para todos. Sabendo que o salário médio dos funcionários da empresa nesse mês foi de, aproximadamente, 1066,73 euros, determina o valor da bonificação.

1.3. Numa reestruturação da empresa decidiu-se abolir o cargo de diretor geral cujo salário era de 5800 euros, mantendo todos os outros funcionários e respetivos salários.
Após esta mudança, qual passou a ser o salário médio nesta empresa?

(Adaptado de Projeto Dimensões Matemática A, 10.º Ano, Santillana)

FICHA TÉCNICA - TAREFA 9

TÍTULO: Salários de trabalhadores **ANO DE ESCOLARIDADE**: 10.º Ano

CONTEÚDOS A DESENVOLVER: Propriedades da Média

DESCRITORES DAS METAS CURRICULARES DE MATEMÁTICA A: EST10: 2.4 a 2.7/5.1

TIPO DE TAREFA: Exercício **CONTEXTO**: Real

DESCRIÇÃO: Com esta tarefa pretende-se que os alunos aprendam algumas propriedades da média.

GRAU DE ABERTURA: Fechada **NÍVEL DE DESAFIO MATEMÁTICO**: Reduzido

METODOLOGIA DE TRABALHO: Grupos de 2 elementos

LOCAL DE EXECUÇÃO: Sala de aula **DURAÇÃO PREVISTA:** 20´

OBSERVAÇÕES PARA O PROFESSOR:

1.1.

Colocando os valores dados na calculadora obtém-se a figura 5.2.9.

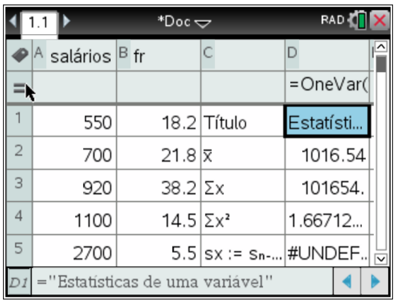


Figura 5.2.9. – Média.

O salário médio é de $1016{,}54$€.

1.2.

A bonificação foi de $1066{,}73 - 1016{,}54 = 50{,}19$€.

1.3.

Retirando o valor de 5800€ da lista referente aos salários, obtém-se o novo salário médio:

$$\bar{x} = \frac{1016{,}54 \times 55 - 5800}{54} = 927{,}96€$$

EXTENSÕES E VARIANTES:

O professor poderá solicitar aos seus alunos que coloquem num papel o salário de cada um dos seus progenitores. Forme uma amostra com base nos valores dos papéis recolhidos e, tendo essa amostra, efetuar um estudo semelhante ao realizado na tarefa, comparando os valores obtidos da nova amostra com os obtidos na tarefa.

Tarefa 10. Duração do trajeto casa-escola

Apresentam-se abaixo os tempos, arredondados à unidade de minuto, que 25 alunos de uma mesma turma do Ensino Secundário demora, em média, a percorrer o caminho casa-escola.

10	15	12	26	20
24	6	8	32	21
35	28	16	14	8
19	26	32	10	28
16	15	30	25	12

1.1. Coloca os dados apresentados numa lista da tua calculadora e ordena-os de forma crescente.

1.2. Determina as medidas de tendência central e os quartis, bem como a amplitude da amostra.

1.3. Separa os dados da amostra em classes de amplitude 6 minutos e apresenta uma tabela com as frequências absolutas e relativas, simples e acumuladas.

1.4. Determina o valor médio da amostra através do valor central de cada classe e compara-o com o valor obtido em **1.2.**

1.5. Esboça um histograma de frequências absolutas acumuladas e estima um valor para a mediana.

1.6. Indica a classe modal e, apresentando um histograma das frequências absolutas simples, estima um valor para a moda.

FICHA TÉCNICA - TAREFA 10

TÍTULO: Duração do trajeto casa-escola **ANO DE ESCOLARIDADE**: 10.º Ano

CONTEÚDOS A DESENVOLVER: Moda, Média, Mediana e Quartis de dados quantitativos contínuos

DESCRITORES DAS METAS CURRICULARES DE MATEMÁTICA A: ----

TIPO DE TAREFA: Exercício **CONTEXTO**: Real

DESCRIÇÃO: Com esta tarefa pretende-se introduzir o cálculo das medidas de localização de dados quantitativos contínuos. Esta tarefa pode ser facultativa, pois o cálculo das medidas de localização para este tipo de dados não faz parte do programa de Matemática A.

GRAU DE ABERTURA: Fechada **NÍVEL DE DESAFIO MATEMÁTICO**: Reduzido

METODOLOGIA DE TRABALHO: Grupos de 2 elementos

LOCAL DE EXECUÇÃO: Sala de aula **DURAÇÃO PREVISTA:** 35´

OBSERVAÇÕES PARA O PROFESSOR:

1.1.

Carregando na tecla *On – A: Calcular*, introduzindo os valores da lista, nomear a lista por a e ordenando-a de forma crescente, obtém-se os valores apresentados na figura 5.2.10.

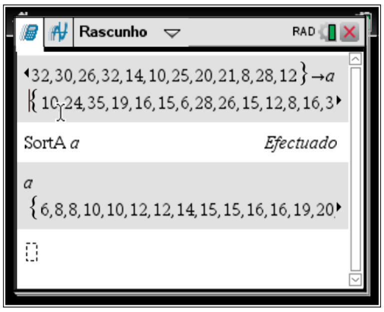


Figura 5.2.10. – Ordenar a lista a

1.2.

Escolhendo *MENU – 6: Estatística – 1: Cálculos Estatísticos – 1: Estatísticas de uma variável – N.º de listas: 1 – Lista X1: a – OK*, obtém-se o mosaico de páginas da figura 5.2.11.

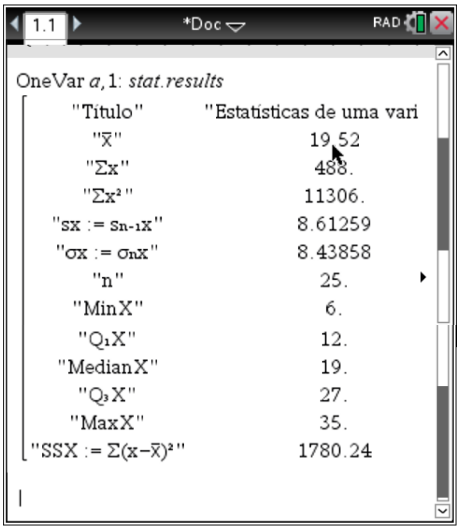


Figura 5.2.11. – Mosaico de páginas com os parâmetros estatísticos.

A amplitude da amostra é 29.

1.3.

Sugere-se a tabela 5.2.2., por simples contagem de elementos:

Tabela 5.2.2. – Tabela com a marca de classe e as frequências absoluta e relativa.

Duração do trajeto	Marca de classe	Frequência absoluta	Frequência relativa	Frequência absoluta acumulada	Frequência relativa acumulada
[5,5; 11,5[	8,5	5	0,2	5	0,2
[11,5; 17,5[	14,5	7	0,28	12	0,48
[17,5; 23,5[	20,5	3	0,12	15	0,6
[23,5; 29,5[	26,5	6	0,24	21	0,84
[29,5; 35,5[	32,5	4	0,16	25	1

1.4.

Introduzindo os dados na calculadora (*Listas e Folha de Cálculo*),efetuando *MENU – 4: Estatística – 1: Cálculos estatísticos – 1: Estatísticas de uma variável*, indicando 1, para número de listas, Lista X1: *a[],* lista de frequências: *b[]* e 1.ª coluna de resultados: *c[],* obtém-se a figura 5.2.12.

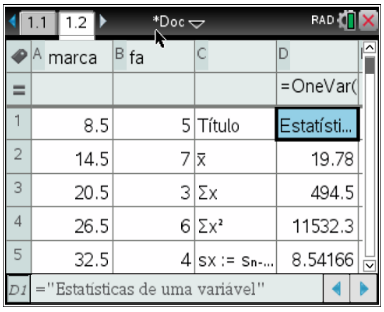


Figura 5.2.12. – Média.

O valor da média é 19,78, ligeiramente superior ao valor obtido para dados não agrupados.

1.5.

Apagando da página os parâmetros estatísticos obtidos e posicionando o cursor na célula de designação da coluna C, *cumfa*, em seguida colocando o cursor na célula de fórmulas da coluna C, e efetuando: *MENU – 3: Dados – 7: Operações da lista – 1: Lista de somas cumulativas*, obtém-se a figura 5.2.13.

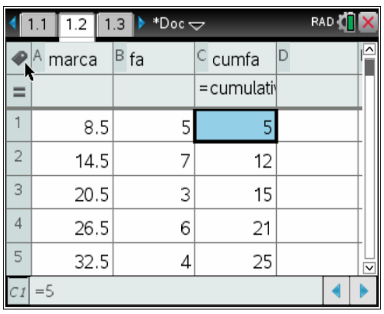


Figura 5.2.13. – Frequências absolutas acumuladas.

Efetuando *MENU – 3: Dados – 8: Gráfico de resumo*, escolhendo como lista X, marca, e lista de resumo, *cumfa*, e ainda Nova página. Clicando em *OK*, obtém-se a figura 5.2.14.

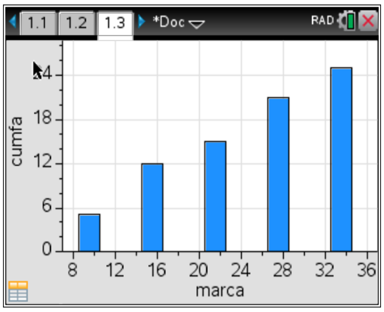


Figura 5.2.14. – Gráfico de barras.

Digitando *MENU – 2: Propriedades do gráfico – 2: Propriedades do histograma – 2: Definições das barras – 1: Largura da barra igual*, e escolhendo 6 para largura e 5,5 para alinhamento e ainda *MENU – 5: Janela/Zoom – 1: Definições da janela*, escolher 5 para *XMin*, 36 para *XMax* e *YMax*, 26. Escolhendo *OK*, obtém-se o histograma da figura 5.2.15.

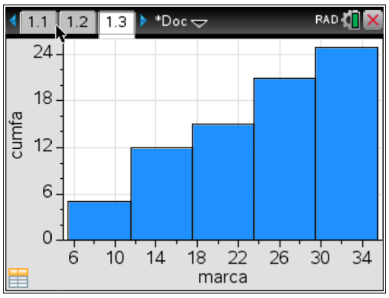


Figura 5.2.15. – Histograma.

A mediana é de, aproximadamente, 19,5.

1.6.

A classe modal é [11,5; 17,5[e o histograma das frequências absolutas simples corresponde ao apresentado na figura 5.2.16.

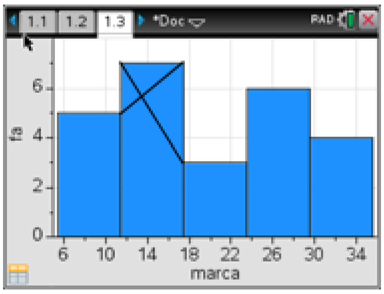


Figura 5.2.16. – Histograma com indicação da moda.

O valor da moda é, aproximadamente, 13,5.

EXTENSÕES E VARIANTES:

Pode-se complementar o estudo eventualmente efetuado em extensões e variantes na FICHA TÉCNICA – TAREFA 4, sobre as medidas antropométricas.

5.3. Medidas de dispersão – amplitude, amplitude interquartil e desvio padrão

Tarefa 11. Lançamento de moedas ao ar…

Pretende-se efetuar 100 lançamentos de quatro moedas de 1 euro e contar o número de vezes que sai face euro em cada lançamento de quatro moedas.

Com o objetivo de simular tais lançamentos executa na calculadora o programa *moedas*(100) que se encontra ao lado e conta o número de vezes que ocorre a face euro, verificando se dá 0, 1, 2, 3 ou 4.

```
Define moedas(n) = Prgm
    Newlist(n)->a
    For k,1, n
    sum(randInt(0,1,4))->a[k]
    EndFor
    SortA a
    Disp a
EndPrgm
```

1.1. Tendo por base os valores obtidos na calculadora completa a tabela seguinte:

Número de faces de euro (x_i)	Frequência absoluta simples (n_i)
0	
1	
2	
3	
4	

1.2. Representa a distribuição através de um gráfico de barras de frequências absolutas simples.

1.3. Determina a moda e a média deste conjunto de dados.

1.4. Indica o mínimo e o máximo e determina a amplitude, a mediana, os quartis e a amplitude interquartil da distribuição. Esboça um diagrama de extremos e quartis.

1.5. Qual é o desvio-padrão? O que significa?

FICHA TÉCNICA - TAREFA 11

TÍTULO: Lançamento de moedas ao ar… **ANO DE ESCOLARIDADE**: 10.º Ano

CONTEÚDOS A DESENVOLVER: Moda, Média, Mediana, Quartis, Amplitude, Amplitude interquartil e Desvio padrão de dados quantitativos discretos

DESCRITOR DAS METAS CURRICULARES DE MATEMÁTICA A: EST10: 3.7/5.1

TIPO DE TAREFA: Exercício **CONTEXTO**: Real/Matemático

DESCRIÇÃO: Com esta tarefa pretende-se introduzir o cálculo das medidas de dispersão de dados quantitativos discretos, trabalhando igualmente com simulações, usando a calculadora.

GRAU DE ABERTURA: Fechada **NÍVEL DE DESAFIO MATEMÁTICO**: Reduzido

METODOLOGIA DE TRABALHO: Grupos de 2 elementos

LOCAL DE EXECUÇÃO: Sala de aula **DURAÇÃO PREVISTA:** 45´

OBSERVAÇÕES PARA O PROFESSOR:

1.1.

Introduzindo o programa na calculadora (ver FICHA TÉCNICA – TAREFA 2) e correndo-o, executando $moedas(100)$, obtém-se uma lista, que podemos apelidar de m (figura 5.3.1.).
Obtendo-se a tabela 5.3.1.

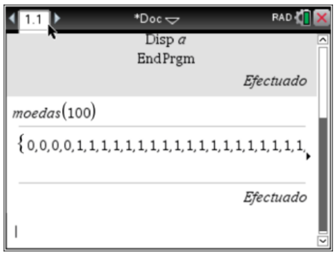


Figura 5.3.1. – Lista m.

Tabela 5.3.1. – Frequência absoluta simples

Número de faces de euro (x_i)	Frequência absoluta simples (n_i)
0	4
1	30
2	42
3	19
4	5

1.2.

Escolhendo na calculadora "Dados e Estatística", depois "Clicar para adicionar variável", na horizontal, e introduzir a lista m, em seguida *MENU – 2: Propriedades do gráfico – B: Forçar categórico X* e escolher *8: Gráfico de barras*, obtém-se o gráfico de barras de frequências absolutas simples com o aspeto apresentado na figura 5.3.2.

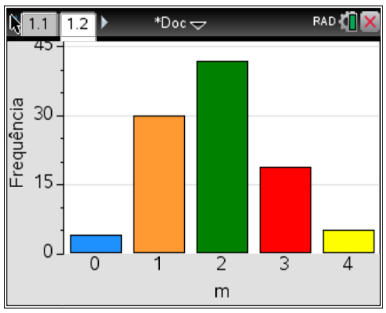


Figura 5.3.2. – Gráfico de barras.

1.3.

A moda é 2 e a média é $\bar{x} = \frac{0\times4+1\times30+2\times42+3\times19+4\times5}{100} = 1{,}91$

1.4.

Executando *MENU – 6: Estatística – 1: Cálculos Estatísticos – 1: Estatísticas de uma variável – N.º de listas: 1 – Lista X1: a – OK*, obtém-se o mosaico de páginas apresentado na figura 5.3.3.

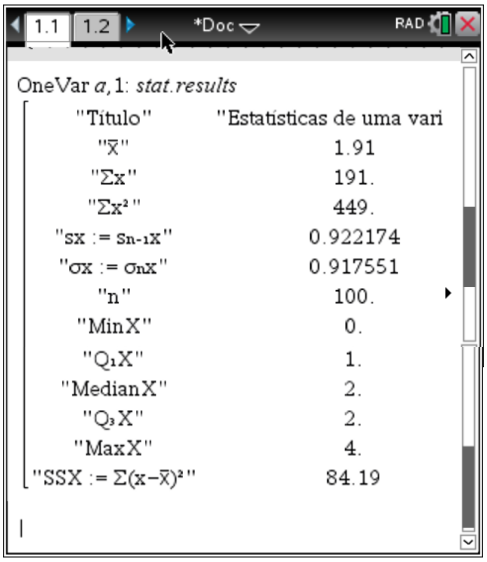


Figura 5.3.3. – Parâmetros estatísticos.

A amplitude é 4 e a amplitude interquartil é 1.
O diagrama de extremos e quartis fica com o aspeto da figura 5.3.4.

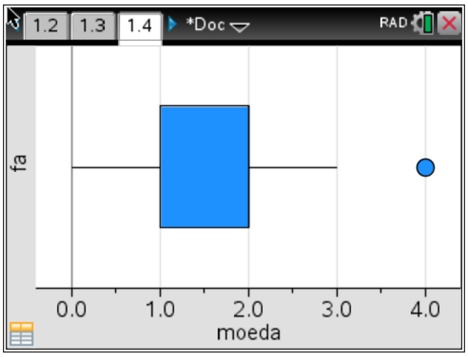


Figura 5.3.4. – Diagrama de extremos e quartis.

Nota: Para obter o diagrama de extremos e quartis é necessário criar uma página de “Listas e Folha de Cálculo” e solicitar um “Gráfico de resumo” do tipo “1: Diagrama de extremos e quartis”.

1.5.

O desvio-padrão (s_x), tal como se pode observar na página resumo das medidas estatísticas solicitadas em **1.4.**, é 0,922174, e permite avaliar o grau de dispersão da distribuição. Tem como objetivo permitir a comparação entre duas distribuições diferentes, nomeadamente, quanto maior o valor, maior é o afastamento dos valores da distribuição em relação à média.

INDICAÇÃO METODOLÓGICA:

À semelhança da indicação metodológica apresentada na FICHA TÉCNICA – TAREFA 2, sugere-se que o professor introduza o programa na sua calculadora e o distribua pelos alunos, usando cabos de ligação entre duas calculadoras.

Tarefa 12. Alturas de basquetebolistas

Os elementos de duas equipas de basquetebol têm, em centímetros, as seguintes alturas:

Equipa A	187	190	186	195	186	192	202	205	196	191
Equipa B	190	186	198	193	203	190	195	203	188	184

1.1. Introduz as alturas de cada equipa em duas listas distintas da tua calculadora e verifica que a média das alturas é igual nas duas equipas.

1.2. Faz na tua calculadora dois diagramas de extremos e quartis, um para cada uma das equipas, e usando a "mão" verifica e regista o mínimo, o máximo, a amplitude, o 1.º quartil, a mediana, o 3.º quartil e a amplitude interquartis para cada uma das duas equipas.

1.3. Indica a soma dos quadrados dos desvios e o desvio padrão das alturas para cada equipa e diz, justificando, em qual das equipas as alturas são mais heterogéneas.

1.4. Considera agora a amostra que se obtém pela junção das alturas dos elementos das duas equipas. Determina o percentil de ordem 80.

(Adaptado de Projeto Dimensões Matemática A, 10.º Ano, Santillana)

FICHA TÉCNICA - TAREFA 12

TÍTULO: Altura de basquetebolistas **ANO DE ESCOLARIDADE**: 10.º Ano

CONTEÚDOS A DESENVOLVER: Extremos, Amplitude, Quartis, Amplitude interquartil, Soma dos quadrados dos desvios e Desvio padrão de dados quantitativos discretos e Percentil de ordem *k* de dados quantitativos contínuos

DESCRITORES DAS METAS CURRICULARES DE MATEMÁTICA A: EST10: 2.1 a 2.3/3.6 e 3.7/4.1 e 4.2/5.1 e 5.2

TIPO DE TAREFA: Exercício **CONTEXTO**: Real

DESCRIÇÃO: Com esta tarefa de desenvolvimento, pretende-se consolidar o cálculo das medidas de dispersão de dados quantitativos discretos e introduzir o percentil de ordem k.

GRAU DE ABERTURA: Fechada **NÍVEL DE DESAFIO MATEMÁTICO**: Reduzido

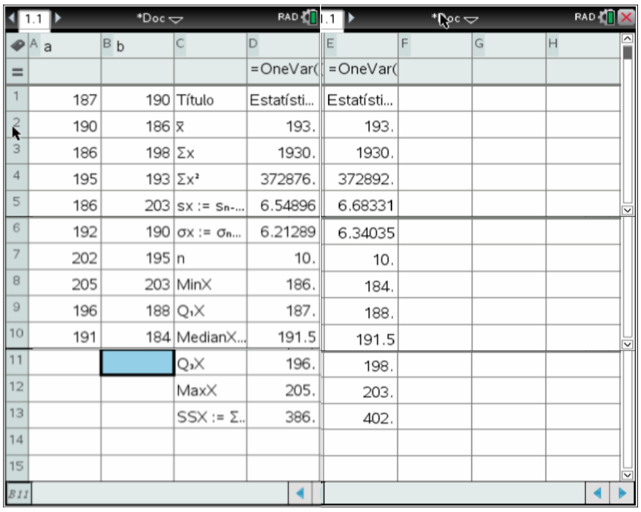
METODOLOGIA DE TRABALHO: Grupos de 2 elementos

LOCAL DE EXECUÇÃO: Sala de aula **DURAÇÃO PREVISTA:** 45´

OBSERVAÇÕES PARA O PROFESSOR:

1.1.

Introduzindo as listas na calculadora, A e B, respetivamente, obtém-se o mosaico de páginas da figura 5.3.5.



	A a	B b	C	D	E	F	G	H
=				=OneVar(	=OneVar(			
1	187	190	Título	Estatísti...	Estatísti...			
2	190	186	x̄	193.	193.			
3	186	198	Σx	1930.	1930.			
4	195	193	Σx²	372876.	372892.			
5	186	203	sx := sn-...	6.54896	6.68331			
6	192	190	σx := σn...	6.21289	6.34035			
7	202	195	n	10.	10.			
8	205	203	MinX	186.	184.			
9	196	188	Q₁X	187.	188.			
10	191	184	MedianX...	191.5	191.5			
11			Q₃X	196.	198.			
12			MaxX	205.	203.			
13			SSX := Σ...	386.	402.			
14								
15								

Figura 5.3.5. – Mosaico de páginas da calculadora com as medidas estatísticas.

Verifica-se assim que a média é igual e de 193.

1.2.

Encontra-se ao lado a figura 5.3.6., correspondente à página com os dois gráficos de extremos e quartis relativos às duas equipas, A e B, respetivamente.

A: $Min = 186$; $Máx = 205$; $h = 19$; $Q1 = 187$; $Med = 191{,}5$; $Q3 = 196$; $Q3 - Q1 = 9$.

B: $Min = 184$; $Máx = 203$; $h = 19$; $Q1 = 188$; $Med = 191{,}5$; $Q3 = 198$; $Q3 - Q1 = 10$.

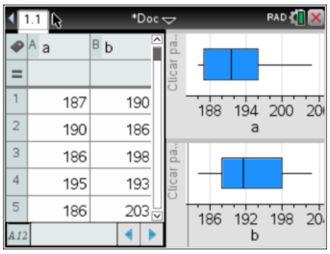


Figura 5.3.6. – Diagramas de extremos e quartis.

1.3.

Por observação da figura 5.3.5., tem-se, em A, $SSX = 386$ e $s_x = 6{,}55$ e em B, $SSX = 402$ e $s_x = 6{,}68$.

Conclui-se assim que as alturas são mais heterogéneas em B, pois o desvio padrão em A é menor que o desvio padrão em B.

1.4.

Introduzindo os dois conjuntos de dados numa nova lista, c, obtém-se a figura 5.3.7.

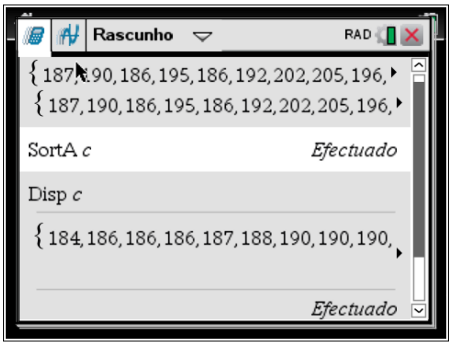


Figura 5.3.7. – Lista c ordenada.

A amostra ordenada fica:

$\tilde{x} = (184,186,186,186,187,188,190,190,190,191,192,193,195,195,196,198,202,203,203,205)$.

Como dispomos de 20 efetivos, e $\frac{20\times80}{100} = 16$, tem-se que $p_{80} = \frac{x_{(16)}+x_{(17)}}{2} = \frac{198+202}{2} = 200$

Tarefa 13. Teste de Matemática

Os resultados obtidos pelos 25 alunos de uma turma do 9.º ano, em pontos, de 0 a 100, num teste de Matemática, estão registados a seguir:

4	55	74	43	60
75	25	90	45	21
56	36	27	46	63
75	59	62	57	76
70	7	76	56	46

1.1. Determina a média, o desvio médio e o desvio padrão das classificações obtidas pelos alunos.

1.2. Indica o mínimo, o máximo, a amplitude, o 1.º quartil, a mediana, o 3.º quartil e a amplitude interquartil.

1.3. Representa os dados por meio de um diagrama de extremos e quartis.

1.4. Determina o percentil de ordem 70.

1.5. Elimina os valores extremos da amostra (4, 7 e 90) e calcula novamente os parâmetros estatísticos solicitados em **1.2** e **1.3**. Quais são as medidas mais afetadas com esta alteração?

1.6. Em face dos resultados obtidos o professor de Matemática decidiu atribuir uma bonificação a cada aluno, aumentando a sua classificação em 10%. Quais foram os resultados assim obtidos? Quais são os valores da média, mediana e desvio padrão com a bonificação atribuída? Efetua uma comparação destes três parâmetros com os valores obtidos inicialmente.

1.7. Após conversa em sala de aula do professor com os alunos sobre os resultados obtidos no teste de avaliação, cada aluno comprometeu-se a estudar mais para o teste seguinte de forma a subir pelo menos 10 pontos no teste seguinte. Caso se verifique a subida mínima nos testes de todos os alunos o que acontece à média, mediana e desvio-padrão?

FICHA TÉCNICA - TAREFA 13

TÍTULO: Teste de Matemática **ANO DE ESCOLARIDADE**: 10.º Ano

CONTEÚDOS A DESENVOLVER: Média, Desvio médio, Desvio padrão, Extremos, Amplitude, Quartis, Amplitude interquartil, Percentil de ordem k, Propriedades da média, mediana e desvio padrão

DESCRIT. DAS METAS CURRIC. DE MATEMÁTICA A: EST10: 2.1 a 2.3, 2.5 /3.7 e 3.9/4.1 e 4.2/5.1 e 5.2

TIPO DE TAREFA: Exercício **CONTEXTO**: Real

DESCRIÇÃO: Com esta tarefa de desenvolvimento, pretende-se consolidar o cálculo das medidas de dispersão de dados quantitativos discretos e o percentil de ordem k.

GRAU DE ABERTURA: Fechada **NÍVEL DE DESAFIO MATEMÁTICO**: Reduzido

METODOLOGIA DE TRABALHO: Grupos de 2 elementos

LOCAL DE EXECUÇÃO: Sala de aula **DURAÇÃO PREVISTA:** 45´

OBSERVAÇÕES PARA O PROFESSOR:

1.1.

Introduzindo a lista na calculadora, Teste, e solicitando os parâmetros estatísticos, obtém-se o mosaico de páginas que se encontra na figura 5.3.9., ao lado.
Como se pode constatar, a média é 52,16 e o desvio padrão 22,33.
Para efetuar o cálculo do desvio médio, basta considerar uma segunda lista com o módulo das diferenças de teste e da média, somar e dividir por 25, que dá 17,73

1.2.

Observando a figura ao lado tem-se que: $Min = 4$; $Máx = 90$; $h = 86$; $Q1 = 39{,}5$; $Me = 56$; $Q3 = 72$ $e\ Q3 - Q1 = 32{,}5$

1.3.

Colocando o cursor na célula que indica o nome da lista, escolhendo um gráfico rápido, alterando o gráfico para Diagrama de extremos e quartis e expandindo a janela do gráfico, obtém-se a figura 5.3.8.

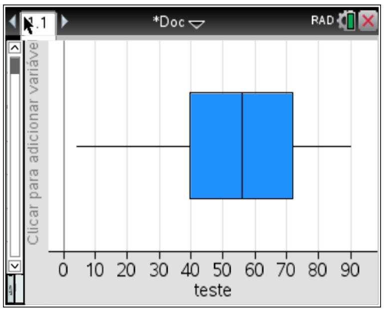
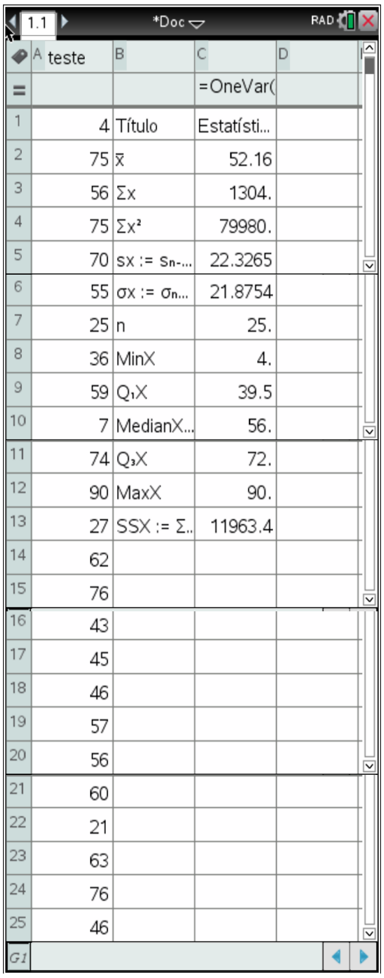


Figura 5.3.8. – Diagrama de extremos e quartis.



	A teste	B	C	D
=			=OneVar(	
1	4	Título	Estatísti...	
2	75	x̄	52.16	
3	56	Σx	1304.	
4	75	Σx²	79980.	
5	70	sx := sₙ₋...	22.3265	
6	55	σx := σₙ...	21.8754	
7	25	n	25.	
8	36	MinX	4.	
9	59	Q₁X	39.5	
10	7	MedianX...	56.	
11	74	Q₃X	72.	
12	90	MaxX	90.	
13	27	SSX := Σ..	11963.4	
14	62			
15	76			
16	43			
17	45			
18	46			
19	57			
20	56			
21	60			
22	21			
23	63			
24	76			
25	46			

Figura 5.3.9. – Estatísticas.

1.4.

Posicionar o cursor na célula que designa a lista, escolher MENU – 1: Ações – 6: Ordenar. Efetuar a escolha da lista a, ordenar de forma ascendente e pressionar OK, obtendo-se a lista teste ordenada.

Como $\frac{70\times25}{100} = 17{,}5$, tem-se que $p_{70} = x_{(18)} = a[18] = 63$.

1.5.

Eliminando os valores referidos, obtém-se uma nova lista. Solicitando as novas medidas estatísticas, obtém-se:

$$\bar{x} = 54{,}68 \text{ e } s_x = 16{,}95$$
$$Min = 21;\ Máx = 76;\ h = 55;$$
$$Q1 = 45;\ Me = 56{,}5;\ Q3 = 70\ e\ Q3 - Q1 = 25$$

Conclui-se assim que as medidas mais afetadas, além dos extremos, são a amplitude e o desvio padrão, isto é, medidas que medem precisamente o grau de dispersão da distribuição.

1.6.

Todos os valores correspondentes à média, mediana e desvio padrão, sofrem um incremento de 10%, isto é, para obter os novos valores basta multiplicar cada um deles por $1{,}1$.

1.7.

A média e a mediana aumentam 10 pontos no teste seguinte e o desvio padrão vai permanecer inalterável.

5.4. Amostras bidimensionais – diagramas de dispersão e reta dos mínimos quadrados

Tarefa 14. Quais são as suas idades?

Observa atentamente as fotografias seguintes.


Catarina Furtado

______


Justin Bieber

______


Adele

______


Cristiano Ronaldo

______


António Zambujo

______


Marcelo Rebelo de Sousa

______


José Mourinho

______


Barack Obama

______


Papa Francisco

______


Jennifer Lawrence

______

1.1. Estima as idades de cada uma das personalidades.

1.2. Investiga na internet as idades reais das personalidades referidas acima e coloca-as na calculadora, numa lista de nome IDADE, e numa lista de nome ESTIMA coloca as idades estimadas.

1.3. Na calculadora, obtém um gráfico com a nuvem de pontos correspondente à distribuição "idades reais – idades estimadas" e traçando a reta de equação $y = x$, analisa se a tua estimativa foi boa.

1.4. Calcula, para cada personalidade considerada, a diferença entre a idade estimada e a idade real, isto é, na calculadora, cria a lista de nome DIFERENÇA e efetua ESTIMA – IDADE (lista dos desvios)

1.5. Calcula a soma de todos os elementos da lista DIFERENÇA (soma dos desvios). É positiva ou negativa? És um avaliador por excesso ou por defeito?

1.6. Introduz os quadrados da lista DIFERENÇA numa lista de nome QUADRADOS e efetua a sua soma (soma dos quadrados dos desvios), bem como a média dos quadrados dos desvios. O valor que obtiveste para a média dos quadrados dos desvios parece-te um valor aceitável? Compara-o com o obtido pelos teus colegas. És um bom estimador de idades?

(Adaptado de Estatística e Calculadoras Gráficas, APM, Projeto T3)

FICHA TÉCNICA - TAREFA 14

TÍTULO: Quais são as suas idades? **ANO DE ESCOLARIDADE**: 11.º Ano

CONTEÚDOS A DESENVOLVER: Nuvem de pontos de uma amostra de dados bivariados quantitativos

DESCRITORES DAS METAS CURRICULARES DE MATEMÁTICA A: EST11: 1.4 a 1.7/2.2

TIPO DE TAREFA: Exercício **CONTEXTO**: Real

DESCRIÇÃO: Com esta tarefa, pretende-se introduzir os conceitos estatísticos relacionados com a correlação linear entre duas variáveis.

GRAU DE ABERTURA: Fechada **NÍVEL DE DESAFIO MATEMÁTICO**: Reduzido

METODOLOGIA DE TRABALHO: Grupos de 2 elementos

LOCAL DE EXECUÇÃO: Sala de aula **DURAÇÃO PREVISTA:** 45´

OBSERVAÇÕES PARA O PROFESSOR:

1.1./1.2. Na experiência efetuada, por consulta a um elemento da família, obtiveram-se os seguintes valores, obtidos por estimativa:

Catarina Furtado: 38
Justin Bieber: 25
Adele: 28
Cristiano Ronaldo: 31
António Zambujo: 35
Marcelo Rebelo de Sousa: 67
José Mourinho: 53
Barack Obama: 58
Papa Francisco: 79
Jennifer Lawrence: 32

As idades reais são:

Catarina Furtado: 44
Justin Bieber: 22
Adele: 28
Cristiano Ronaldo: 31
António Zambujo: 40
Marcelo Rebelo de Sousa: 67
José Mourinho: 57
Barack Obama: 55
Papa Francisco: 79
Jennifer Lawrence: 26

1.3. Após a introdução dos dados, escolher *MENU – 3: Dados – 9: Gráfico rápido*, inserir as listas nos retângulos "clique para adicionar variável", *IDADE*, na horizontal, e *ESTIMA*, na vertical, obtendo-se assim um diagrama de dispersão. Depois escolher *MENU – 4: Analisar – 4: Traçar função* e digitar x, para obter a reta definida por $y = x$, e obtém-se a figura 5.4.1.

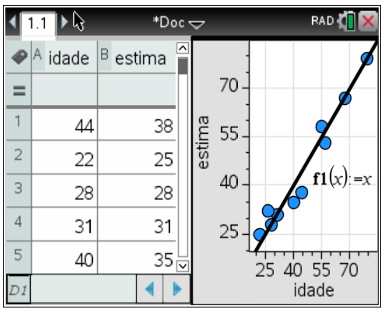


Figura 5.4.1. – Listas e diagrama de dispersão.

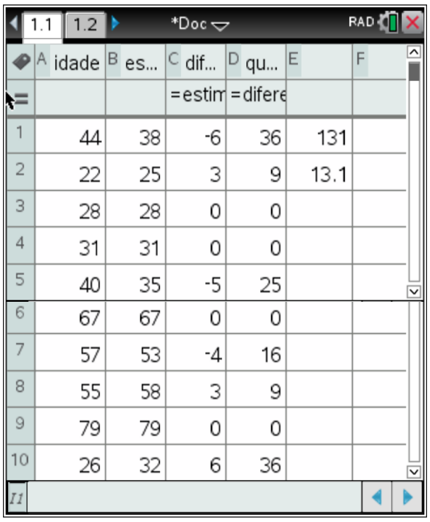
Conclui-se que a estimativa foi boa.

1.4/1.5.

Após colocar na célula da designação da coluna C, *DIFERENÇA*, e na célula de fórmulas da coluna C, *ESTIMA – IDADE*, efetuou-se a soma da lista *DIFERENÇA*, dando como resultado, neste caso, -3, o que é aparentemente um bom resultado para um bom estimador!!! O valor obtido significa que o avaliador é um subavaliador, no entanto, tal valor pouco significado tem, pois os valores em excesso podem anular os valores por defeito na avaliação.

1.6.

Efetuando o solicitado na questão, obteve-se um mosaico de páginas expresso na figura 5.4.2.



	A idade	B es...	C dif...	D qu...	E	F
=			=estim	=difere		
1	44	38	-6	36	131	
2	22	25	3	9	13.1	
3	28	28	0	0		
4	31	31	0	0		
5	40	35	-5	25		
6	67	67	0	0		
7	57	53	-4	16		
8	55	58	3	9		
9	79	79	0	0		
10	26	32	6	36		

Figura 5.4.2. – Tratamento estatístico das estimativas.

Na célula E1 está a soma dos quadrados dos desvios da coluna D (131), Lista *QUADRADOS*, e na célula E2 a sua média (13,1), o qual aparentemente, e sem comparação com outros resultados, parece ser um valor aceitável, até porque quanto mais perto de zero for esse valor melhor será o avaliador. Tal como a questão sugere há que comparar este resultado com outros.

INDICAÇÃO METODOLÓGICA:

Após os alunos estimarem as idades das personalidades visadas na tarefa, sugere-se que o professor disponibilize as suas idades reais, no sentido de poupar tempo de sala de aula, que de outro modo seria perdido na pesquisa das idades por parte dos alunos.

Tarefa 15. Horas de estudo

O professor Alexandre solicitou a todos os alunos que estavam a efetuar o teste de Estatística que colocassem na folha de respostas o tempo que dedicaram a estudar para aquele teste. Após ter corrigido os testes elaborou as tabelas abaixo que estabelecem uma correspondência entre o número de horas de estudo e as classificações, em pontos, de 0 a 200, obtidas no referido teste.

N.º de horas de estudo	Classificação (0 a 200 pontos)
2	70
4	86
5	75
5	100
5	110
6	95
6	120
7	112
7	130
7	114

N.º de horas de estudo	Classificação (0 a 200 pontos)
8	113
8	135
9	121
9	152
10	135
11	126
12	163
12	171
13	168
16	189

1.1. Coloca as horas de estudo numa lista com o nome ESTUDO e a classificação obtida numa lista com o nome CLASSIF e obtém um gráfico com o diagrama de dispersão que descreve a situação. Qual é o tipo de correlação linear entre as duas variáveis sugerido pelo gráfico?

1.2. Indica o coeficiente de correlação linear entre as duas variáveis.

1.3. Indica a equação da reta dos mínimos quadrados e verifica que esta passa pelo centro de gravidade, isto é, pelo ponto que tem por abcissa o número médio de horas de estudo e por ordenada a classificação média.

1.4. Tendo por base a reta de regressão obtida em **1.3.** constrói uma nova lista com os valores estimados pela reta dos mínimos quadrados para o número de horas de estudo.

1.5. Constrói uma outra lista com os desvios entre os valores estimados e os valores reais. Qual é o aluno que tem uma classificação com um maior desvio quando comparado com o modelo?

1.6. Usando a reta de regressão obtida como modelo, qual será a classificação esperada por um aluno que tenha estudado 20 horas? Tal resultado é possível?

FICHA TÉCNICA - TAREFA 15

TÍTULO: Horas de estudo **ANO DE ESCOLARIDADE**: 11.º Ano

CONTEÚDOS A DESENVOLVER: Nuvem de pontos de dados bivariados quantitativos, Reta dos mínimos quadrados e Coeficiente de correlação linear

DESCRIT. DAS METAS CURRICULARES DE MATEMÁTICA A: EST11: 1.1 a 1.9/2.1 a 2.3

TIPO DE TAREFA: Exercício **CONTEXTO**: Real

DESCRIÇÃO: Com esta tarefa, pretende-se introduzir os conceitos estatísticos relacionados com a reta dos mínimos quadrados e o coeficiente de correlação linear.

GRAU DE ABERTURA: Fechada **NÍVEL DE DESAFIO MATEMÁTICO**: Reduzido

METODOLOGIA DE TRABALHO: Grupos de 2 elementos

LOCAL DE EXECUÇÃO: Sala de aula **DURAÇÃO PREVISTA:** 45´

OBSERVAÇÕES PARA O PROFESSOR:

1.1.

Após a introdução dos valores nas listas respetivas, obtém-se o diagrama de dispersão representado na figura 5.4.3.
O gráfico sugere uma correlação linear positiva entre as duas variáveis.

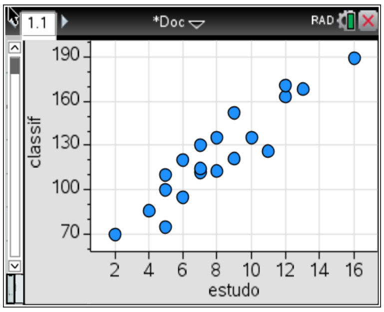
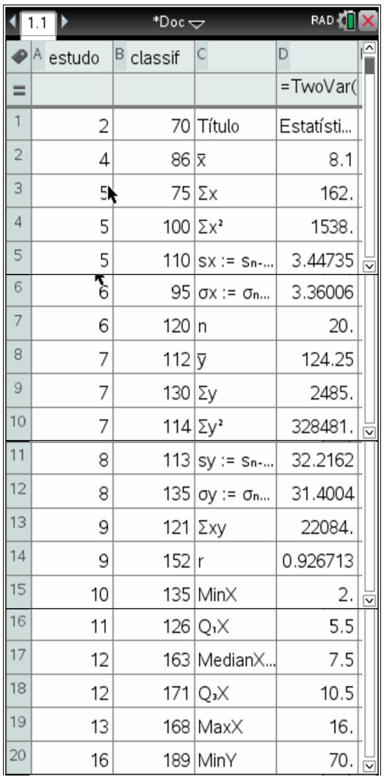


Figura 5.4.3. – Diagrama de dispersão.

1.2.

Como se pode verificar pelo mosaico de páginas apresentado na figura 5.4.4., o coeficiente de correlação, r, é 0,926713.



	A estudo	B classif	C	D
=				=TwoVar(
1	2	70	Título	Estatísti...
2	4	86	x̄	8.1
3	5	75	Σx	162.
4	5	100	Σx²	1538.
5	5	110	sx := sn-...	3.44735
6	6	95	σx := σn...	3.36006
7	6	120	n	20.
8	7	112	ȳ	124.25
9	7	130	Σy	2485.
10	7	114	Σy²	328481.
11	8	113	sy := sn-...	32.2162
12	8	135	σy := σn...	31.4004
13	9	121	Σxy	22084.
14	9	152	r	0.926713
15	10	135	MinX	2.
16	11	126	Q₁X	5.5
17	12	163	MedianX...	7.5
18	12	171	Q₃X	10.5
19	13	168	MaxX	16.
20	16	189	MinY	70.

Figura 5.4.4. – Estatísticas.

1.3.

O centro de gravidade tem de coordenadas $(8{,}1; 124{,}25)$. Efetuando *MENU – 4: Analisar – 6: Regressão – 1: Mostrar linear (mx+b)* obtém-se o gráfico da figura 5.4.5., com a reta de regressão ($y = 8{,}66032x + 54{,}1014$):

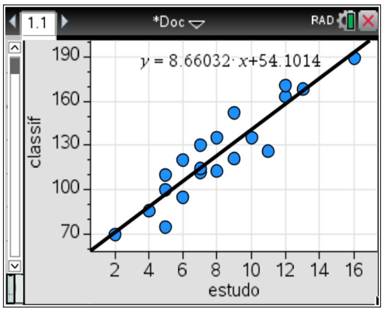


Figura 5.4.5. – Reta de regressão linear.

Como se pode verificar, o centro de gravidade pertence à reta de regressão linear pois $124{,}25 = 8{,}66032 \times 8{,}1 + 54{,}1014$

Nota: Ao introduzir a sequência de instruções: *MENU – 4: Estatística – 1: Cálculos estatísticos – 3: Regressão linear (mx+b)*, quando a janela em destaque é a que contem as listas, tem que se escolher qual a lista X, a lista Y, a função que irá conter a função afim relativa à reta de regressão linear e a célula onde irão aparecer na máquina os parâmetros relativos â equação da reta de regressão linear.

1.4./1.5

Com base no mosaico de páginas da calculadora, apresentado na figura 5.4.6., verifica-se que o aluno que tem uma classificação com um maior desvio, quando comparado com o modelo, é o aluno que estudou 11 horas.

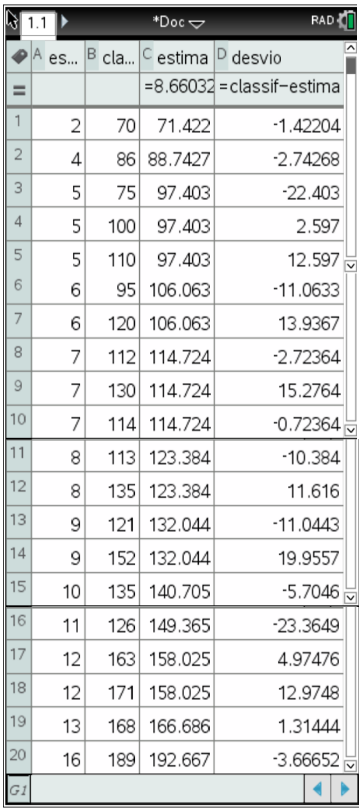
1.6.

Atendendo ao modelo obtido espera-se que o aluno obtenha uma classificação de

227 pontos $(8{,}66032 \times 20 + 54{,}1014)$

o que é impossível.

Deve chamar-se a atenção dos alunos que este modelo permite efetuar previsões mais precisas quando os valores da variável independente ou explicativa estiverem entre 2 e 16, pois foi entre esses valores inclusive que foi construída a reta de regressão.



	A es...	B cla...	C estima	D desvio
=			=8.66032	=classif−estima
1	2	70	71.422	-1.42204
2	4	86	88.7427	-2.74268
3	5	75	97.403	-22.403
4	5	100	97.403	2.597
5	5	110	97.403	12.597
6	6	95	106.063	-11.0633
7	6	120	106.063	13.9367
8	7	112	114.724	-2.72364
9	7	130	114.724	15.2764
10	7	114	114.724	-0.72364
11	8	113	123.384	-10.384
12	8	135	123.384	11.616
13	9	121	132.044	-11.0443
14	9	152	132.044	19.9557
15	10	135	140.705	-5.7046
16	11	126	149.365	-23.3649
17	12	163	158.025	4.97476
18	12	171	158.025	12.9748
19	13	168	166.686	1.31444
20	16	189	192.667	-3.66652

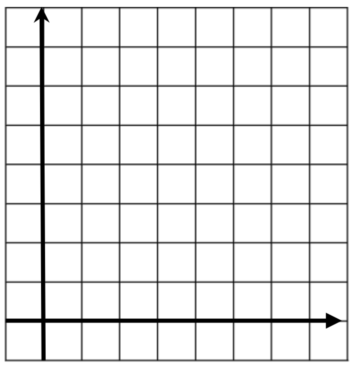
Figura 5.4.6. – Desvios.

Tarefa 16. A chama da vela de aniversário

Com o objetivo de verificar quanto tempo demora uma vela de aniversário a consumir-se, coloca uma vela num prato suportando-a com algumas gotas de cera de outra vela.

Após este procedimento acende a vela e mede-a de 20 em 20 segundos, tendo o cuidado de a apagar e acender de novo entre cada medição.

Tempo (x, em s)	Comprimento da vela (y, em cm)
0	
20	
40	



1.1. Completa a tabela acima medindo o comprimento da vela, em centímetros, após cada período de 20 segundos.

1.2. Atendendo aos dados recolhidos na tabela, marca no referencial os pontos de coordenadas (x, y) em que x representa o tempo, em segundos, e y, o comprimento da vela após cada período de 20 segundos, em centímetros, e indica qual é o tipo de correlação linear entre as duas variáveis sugerido pelos pontos marcados.

1.3. Coloca os tempos numa lista com o nome TEMPO e o comprimento da vela numa lista com o nome COMP e determina o coeficiente de correlação linear entre as duas variáveis.

1.4. Determina a equação da reta dos mínimos quadrados e indica qual a altura da vela ao fim de 6 minutos.

(Adaptado de Funções – 10.º ano de escolaridade, Ministério da Educação, DES)

FICHA TÉCNICA - TAREFA 16

TÍTULO: A chama da vela de aniversário **ANO DE ESCOLARIDADE**: 11.º Ano

CONTEÚDOS A DESENVOLVER: Nuvem de pontos de uma amostra de dados bivariados quantitativos, Reta dos mínimos quadrados e Coeficiente de correlação linear

DESCRIT. DAS METAS CURRICULARES DE MATEMÁTICA A: EST11: 1.1 a 1.9/2.1 a 2.3

TIPO DE TAREFA: Exercício **CONTEXTO**: Real

DESCRIÇÃO: Com esta tarefa, pretende-se consolidar os conceitos estatísticos relacionados com a reta dos mínimos quadrados e o coeficiente de correlação linear.

GRAU DE ABERTURA: Fechada **NÍVEL DE DESAFIO MATEMÁTICO**: Reduzido

METODOLOGIA DE TRABALHO: Grupos de 4 elementos

LOCAL DE EXECUÇÃO: Sala de aula **DURAÇÃO PREVISTA:** 45´

OBSERVAÇÕES PARA O PROFESSOR:

1.1./1.2.

Trata-se de uma atividade de cariz experimental, sendo o material necessário à sua implementação de fácil acesso, bastando uma vela de aniversário pequena e um cronómetro ou um simples relógio com ponteiro dos segundos.
Efetuada a experiência, obtiveram-se os resultados, expressos na tabela 5.4.1. e no referencial da figura 5.4.7.

Tabela 5.4.1. – Comprimentos da vela.

Tempo (x, em s)	Comprimento da vela (y, em cm)
0	5,0
20	4,8
40	4,6
60	4,5
80	4,3
100	4,0
120	3,7

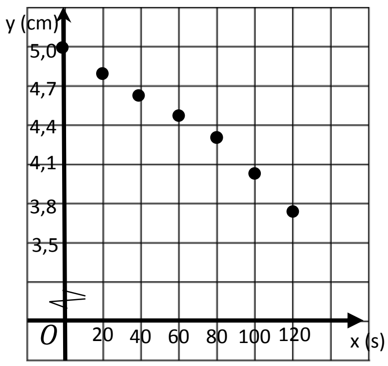


Figura 5.4.7. – Diagrama de dispersão.

A correlação linear entre as duas variáveis, tempo e comprimento da vela, é negativa.

1.3.

Introduzindo os valores na calculadora, obtém-se um coeficiente de correlação linear, r, de -0.98889, isto é, a correlação entre as duas variáveis é negativa forte.

1.4.

Uma equação da reta de regressão é: $y = -0.010357142857143x + 5.0357142857143$.
Assumindo que o modelo ainda é válido ao fim de 6 minutos, tem-se que a altura da vela é de 1,31 cm ($= -0.010357142857143 \times 360 + 5.0357142857143$).

Tarefa 17. Rede postal

Na tabela abaixo encontram-se o número total de pontos de acesso à rede postal, variável x, e a densidade postal (número de habitantes/número de pontos de acesso), variável y, de 2001 a 2009, em Portugal.

Ano	x	y
2001	19 775	471,3
2002	21 758	481,4
2003	21 008	501,2
2004	20 630	512,5
2005	20 457	517,9
2006	20 215	525,5
2007	19 897	534,1
2008	19 155	554,8
2009	18 394	563,2

Ao serem representados os dados que constam na tabela num diagrama de dispersão, verificou-se que o ponto de coordenadas $(19\,775; 471{,}3)$, relativo ao ano de 2001, se encontrava fora do contexto dos restantes, se se pretendesse ajustar um modelo de regressão linear, sendo considerado um *outlier*.
Explica o efeito da exclusão do *outlier* no valor do coeficiente de correlação linear e na reta de regressão quando se pretende fazer previsões.

Na tua resposta deves:

- apresentar os dados da tabela num diagrama de dispersão, incluindo o ano de 2001;
- determinar o valor do coeficiente de correlação linear entre as variáveis número total de pontos de acesso à rede postal (x) e densidade postal (y), incluindo o ano de 2001:
- apresentar a simulação do efeito de exclusão do ano 2001 no valor do coeficiente de correlação linear;
- referir o efeito da exclusão do *outlier* quando se pretende fazer previsões.

Apresenta os resultados com arredondamento às milésimas.

(Adaptado de Exame Nacional MACS, 2013, in Projeto Dimensões Matemática A, 11.º Ano, Santillana)

FICHA TÉCNICA - TAREFA 17

TÍTULO: Rede postal **ANO DE ESCOLARIDADE**: 11.º Ano

CONTEÚDOS A DESENVOLVER: Nuvem de pontos de uma amostra de dados bivariados quantitativos e Coeficiente de correlação linear

DESCRITORES DAS METAS CURRICULARES DE MATEMÁTICA A: EST11: 1.4 a 1.9/2.3

TIPO DE TAREFA: Problema **CONTEXTO**: Real

DESCRIÇÃO: Com esta tarefa, pretende-se consolidar os conceitos estatísticos relacionados com a nuvem de pontos de uma amostra bivariada e o coeficiente de correlação linear.

GRAU DE ABERTURA: Fechada **NÍVEL DE DESAFIO MATEMÁTICO**: Médio

METODOLOGIA DE TRABALHO: Grupos de 2 elementos

LOCAL DE EXECUÇÃO: Sala de aula **DURAÇÃO PREVISTA:** 25´

OBSERVAÇÕES PARA O PROFESSOR:

Introduzindo os dados da tabela na calculadora, colocando o cursor num dos elementos da lista X e efetuando *MENU – 3: Dados – 9: Gráfico rápido* e escolhendo as listas x e y para os eixos horizontal e vertical, respetivamente, obtém-se como diagrama de dispersão o gráfico da figura 5.4.8., depois de "encolher" a janela referente aos dados:

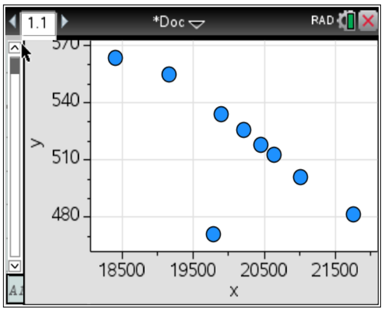


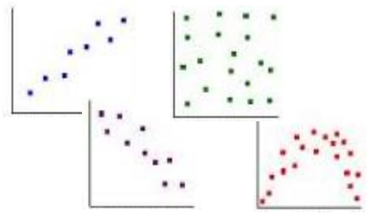
Figura 5.4.8. – Diagrama de dispersão.

Solicitando à calculadora os parâmetros estatísticos referentes a distribuições com duas variáveis (*MENU – 4: Estatística – 1: Cálculos estatísticos – 2: Estatísticas de duas variáveis* e escolhendo para lista X, *x*, e para lista Y, *y*, com apresentação das medidas em *c[]* e escolhendo *OK*) o valor do coeficiente de correlação, incluindo o ano de 2001, é de -0.728.
Sem incluir o ano de 2001, tem-se que, $r = -0.992$.

Como se verifica pelos diferentes valores do coeficiente de correlação linear, a distribuição é fortemente afetada pelos dados correspondentes ao ano de 2001, e sendo assim a inclusão deste outlier influencia fortemente qualquer previsão que se queira efetuar. Tal valor, que pode ter sido resultante de um deficiente registo ou leitura, não ilustra de forma significativa a tendência geral apresentada pelos restantes 8 dados e como tal é preferível retirar da lista o ano de 2001, se o objetivo for a determinação da equação da reta dos mínimos quadrados, no sentido de efetuar uma dada previsão para um ano subsequente.

Tarefa 18. Correlações – Relação causa/efeito

Considera as tabelas seguintes e introduz os valores de cada tabela na calculadora.



x	y_1
10	8,04
8	6,95
13	7,58
9	8,81
11	8,33
14	9,96
6	7,24
4	4,26
12	10,84
7	4,82
5	5,68

x	y_2
10	9,14
8	8,14
13	8,74
9	8,77
11	9,26
14	8,10
6	6,13
4	3,10
12	9,13
7	7,26
5	4,74

x	y_3
10	7,46
8	6,77
13	12,74
9	7,11
11	7,81
14	8,84
6	6,08
4	5,39
12	8,15
7	6,42
5	5,73

x_4	y_4
8	6,58
8	5,76
8	7,71
8	8,84
8	8,47
8	7,04
8	5,25
19	12,50
8	5,56
8	7,91
8	6,89

1.1. Para cada caso, indica a reta dos mínimos quadrados e o coeficiente de correlação linear. Regista os valores obtidos com aproximação à milésima. Que têm em comum?

1.2 Elabora o gráfico de dispersão de cada uma das distribuições. Parece-te razoável usar a correlação linear para descrever todos os casos?

1.3. Faz uso das diversas regressões que a calculadora contém para descrever uma relação causa-efeito entre as variáveis e indica, para cada caso, qual te parece ser a que melhor a descreve.

(Adaptado de Estatística e Calculadoras Gráficas, APM, Projeto T3)

FICHA TÉCNICA - TAREFA 18

TÍTULO: Correlações – Relação causa/efeito **ANO DE ESCOLARIDADE**: 11.º Ano

CONTEÚDOS A DESENVOLVER: Nuvem de pontos de uma amostra de dados bivariados quantitativos e vários tipos de regressão

DESCRITORES DAS METAS CURRICULARES DE MATEMÁTICA A: ----

TIPO DE TAREFA: Exercício **CONTEXTO**: Matemático

DESCRIÇÃO: Com esta tarefa, de carácter facultativo, pretende-se que os alunos percecionem a existência de outro tipo de correlações numa amostra bivariada, em que os dados conduzem a valores de coeficiente de correlação linear muito próximos.

GRAU DE ABERTURA: Fechada **NÍVEL DE DESAFIO MATEMÁTICO**: Reduzido

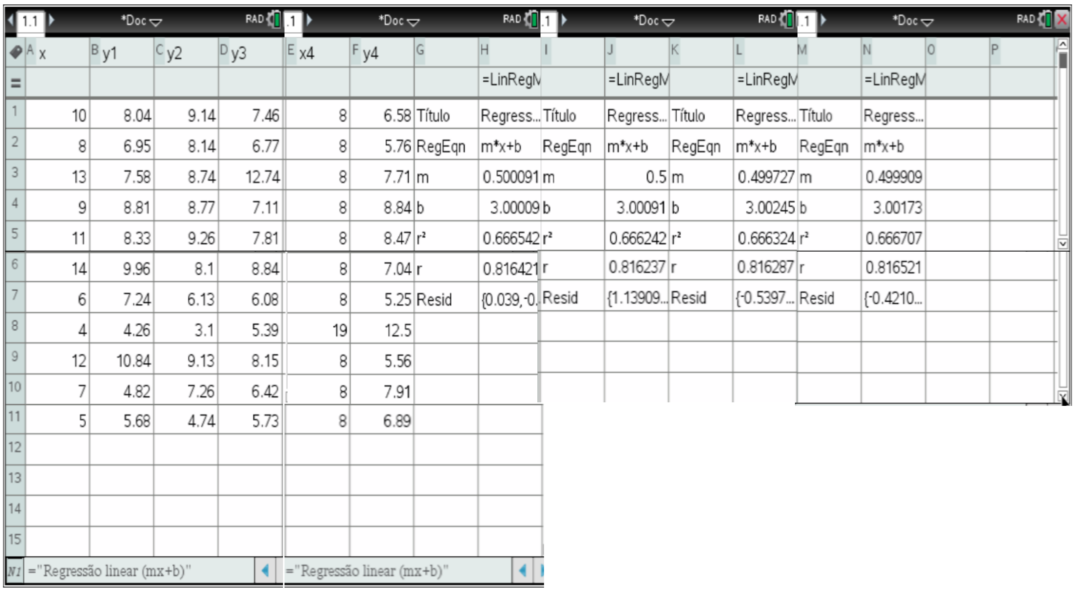
METODOLOGIA DE TRABALHO: Grupos de 4 elementos

LOCAL DE EXECUÇÃO: Sala de aula **DURAÇÃO PREVISTA:** 30´

OBSERVAÇÕES PARA O PROFESSOR:

1.1.

Após introduzir os dados das tabelas na calculadora e solicitar as regressões lineares referentes a cada uma distribuições com duas variáveis (*MENU – 4: Estatística – 1: Cálculos estatísticos – 3: Regressão linear (mx+b)* e escolhendo para lista X, *x* (no 4.º caso *x4*) e para lista Y, *y1, y2, y3* e *y4*, respetivamente, com apresentação dos parâmetros da regressão em *g[]* até *m[]* e escolhendo *OK*), obtém-se o mosaico de páginas da figura 5.4.9.:



	A x	B y1	C y2	D y3	E x4	F y4	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P
=								=LinRegM		=LinRegM		=LinRegM		=LinRegM		
1	10	8.04	9.14	7.46	8	6.58	Título	Regress...	Título	Regress...	Título	Regress...	Título	Regress...		
2	8	6.95	8.14	6.77	8	5.76	RegEqn	m*x+b	RegEqn	m*x+b	RegEqn	m*x+b	RegEqn	m*x+b		
3	13	7.58	8.74	12.74	8	7.71	m	0.500091	m	0.5	m	0.499727	m	0.499909		
4	9	8.81	8.77	7.11	8	8.84	b	3.00009	b	3.00091	b	3.00245	b	3.00173		
5	11	8.33	9.26	7.81	8	8.47	r²	0.666542	r²	0.666242	r²	0.666324	r²	0.666707		
6	14	9.96	8.1	8.84	8	7.04	r	0.816421	r	0.816237	r	0.816287	r	0.816521		
7	6	7.24	6.13	6.08	8	5.25	Resid	{0.039,-0.	Resid	{1.13909...	Resid	{-0.5397...	Resid	{-0.4210...		
8	4	4.26	3.1	5.39	19	12.5										
9	12	10.84	9.13	8.15	8	5.56										
10	7	4.82	7.26	6.42	8	7.91										
11	5	5.68	4.74	5.73	8	6.89										
12																
13																
14																
15																

Figura 5.4.9. – Mosaico de páginas da calculadora com os parâmetros das diversas retas de regressão linear.

Verifica-se assim que as equações das retas dos mínimos quadrados e o coeficiente de correlação linear para cada caso é, respetivamente:

1) $y = 0{,}500x + 3{,}000$ e $r = 0{,}816$ 2) $y = 0{,}5x + 3{,}000$ e $r = 0{,}816$

3) $y = 0{,}500x + 3{,}002$ e $r = 0{,}816$ 4) $y = 0{,}500x + 3{,}002$ e $r = 0{,}817$

1.2.

1)

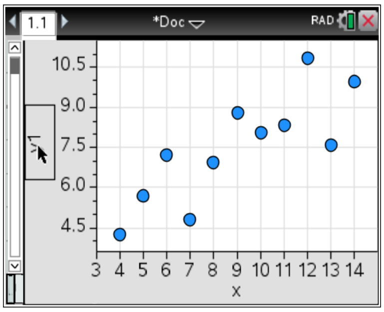


Figura 5.4.10. – Diagrama de dispersão x/y_1.

2)

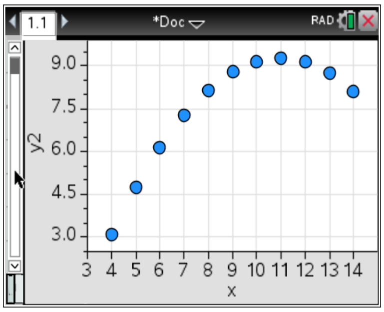


Figura 5.4.11. – Diagrama de dispersão x/y_2.

3)

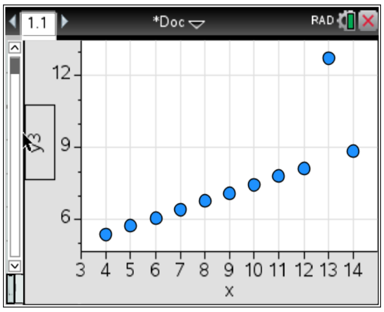


Figura 5.4.12. – Diagrama de dispersão x/y_3.

4)

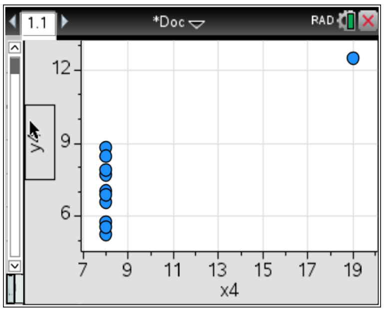


Figura 5.4.13. – Diagrama de dispersão x_4/y_4.

A resposta é não.

1.3.

1) Linear com alguma dispersão
2) Quadrática
3) Linear, excluindo um dos dados, provavelmente colocado por erro de leitura ou de registo
4) Não existe qualquer relação entre as duas variáveis

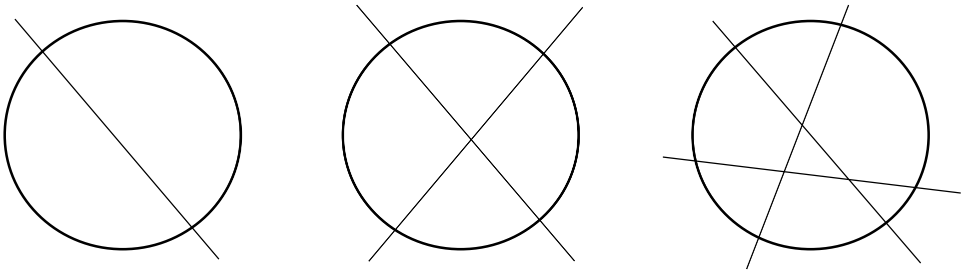
INDICAÇÃO METODOLÓGICA:

Sugere-se que o professor organize os grupos, dando indicações para que, em cada grupo, cada aluno dos quatro esteja encarregue de uma tabela/regressão.

Tarefa 19. Pizas e cortes

Pretende-se cortar pizas de forma a obter o maior número de pedaços.

Efetuando um corte com a forma de um segmento de reta é possível obter dois pedaços; com dois cortes 4 pedaços; com 3 cortes obtêm-se 7 pedaços e assim sucessivamente.



Quantos pedaços, no máximo, é possível obter com 4 cortes? E com 5? E com n?

FICHA TÉCNICA - TAREFA 19

TÍTULO: Pizas e cortes

ANO DE ESCOLARIDADE: 11.º Ano

CONTEÚDOS A DESENVOLVER: Nuvem de pontos de uma amostra de dados bivariados quantitativos e regressão quadrática

DESCRITORES DAS METAS CURRICULARES DE MATEMÁTICA A: ----

TIPO DE TAREFA: Exploração

CONTEXTO: Matemático

DESCRIÇÃO: Com esta tarefa, de carácter facultativo, pretende-se consolidar os conceitos estatísticos relacionados com a nuvem de pontos de uma amostra bivariada e conhecer os diversos tipos de regressão.

GRAU DE ABERTURA: Aberta

NÍVEL DE DESAFIO MATEMÁTICO: Médio

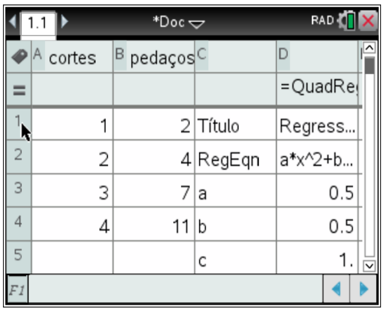
METODOLOGIA DE TRABALHO: Grupos de 2 elementos

LOCAL DE EXECUÇÃO: Sala de aula

DURAÇÃO PREVISTA: 20´

OBSERVAÇÕES PARA O PROFESSOR:

Os alunos devem tentar descobrir um padrão, para ser mais simples a contagem dos diversos pedaços de piza, Introduzir os dados obtidos na calculadora, em seguida representar a nuvem de pontos e, com base nos pontos formados no diagrama de dispersão, descobrir a regressão que melhor se adapta aos dados.
Na figura 5.4.14., apresenta-se a solução, uma regressão quadrática, em que o coeficiente de determinação (r^2) é 1, e uma equação, em função de n, é: $y = 0{,}5n^2 + 0{,}5n + 1$.



	A cortes	B pedaços	C	D
=				=QuadRe
1	1	2	Título	Regress...
2	2	4	RegEqn	a*x^2+b...
3	3	7	a	0.5
4	4	11	b	0.5
5			c	1.

Figura 5.4.14. – Regressão quadrática.

EXTENSÕES E VARIANTES:

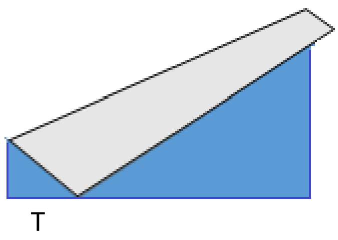
O professor deve/pode incentivar os seus alunos a confirmar a expressão analítica obtida. Como tal, sugere-se que, a partir do estudo efetuado sobre sucessões, nomeadamente progressões aritméticas, os alunos sejam conduzidos ao processo seguinte:

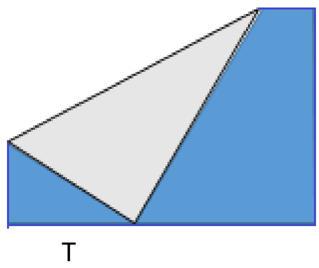
$$u_1 = 2 = 1 + 1$$
$$u_2 = 4 = 1 + 1 + 2$$
$$u_3 = 7 = 1 + 1 + 2 + 3$$
$$u_4 = 11 = 1 + 1 + 2 + 3 + 4$$
$$\dots$$
$$u_n = 1 + 1 + 2 + 3 + 4 + .. + n = 1 + \sum_{k=1}^{n} k = 1 + \frac{1+n}{2} \times n = 0{,}5n^2 + 0{,}5n + 1$$

c.q.d.

Tarefa 20. Qual é o triângulo de maior área?

Dobra uma folha de papel de modo que o canto superior esquerdo toque o lado inferior da folha, tal como mostra a figura. Qual é o triângulo (T) de maior área formado no canto inferior esquerdo da folha por efeito desta dobragem?





Investiga e faz um relatório da tua investigação explicando em pormenor a estratégia que utilizaste para resolver o problema.

(Adaptado de Funções – 10.º ano de escolaridade, Ministério da Educação, DES)

FICHA TÉCNICA - TAREFA 20

TÍTULO: Qual é o triângulo de maior área? **ANO DE ESCOLARIDADE**: 11.º Ano

CONTEÚDOS A DESENVOLVER: Nuvem de pontos de uma amostra de dados bivariados quantitativos e regressão cúbica

DESCRITORES DAS METAS CURRICULARES DE MATEMÁTICA A: ----

TIPO DE TAREFA: Investigação **CONTEXTO**: Matemático

DESCRIÇÃO: Com esta tarefa, de carácter facultativo, pretende-se consolidar os conceitos estatísticos relacionados com a nuvem de pontos de uma amostra bivariada e conhecer os diversos tipos de regressão.

GRAU DE ABERTURA: Aberta **NÍVEL DE DESAFIO MATEMÁTICO**: Elevado

METODOLOGIA DE TRABALHO: Grupos de 4 elementos

LOCAL DE EXECUÇÃO: Sala de aula **DURAÇÃO PREVISTA:** 40´

OBSERVAÇÕES PARA O PROFESSOR:

1.1.

Posicionando o canto superior esquerdo na margem inferior em diversos locais, e medindo a distância desse canto ao canto inferior esquerdo, bem como a distância do canto inferior esquerdo à dobra, no sentido de deduzir a área de cada triângulo, obteve-se, na experiência efetuada, a tabela 5.4.2. com os resultados obtidos.

Tabela 5.4.2. – Dados obtidos com a experiência.

Medida da base do triângulo *T* (x) (em cm)	Medida da altura do triângulo *T* (em cm)	Área do triângulo *T* (A) (em cm^2)
2	10,4	20,8
4	10,1	40,4
6	9,6	57,6
8	9	72
10	8,1	81
12	7	84
14	5,8	81,2
16	4,4	70,4
18	2,8	50,4
20	1	20

Introduzindo os dados na calculadora, obtém-se o diagrama de dispersão da figura 5.4.15.

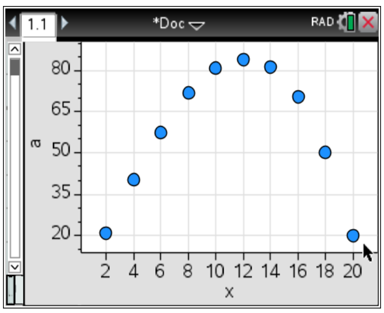
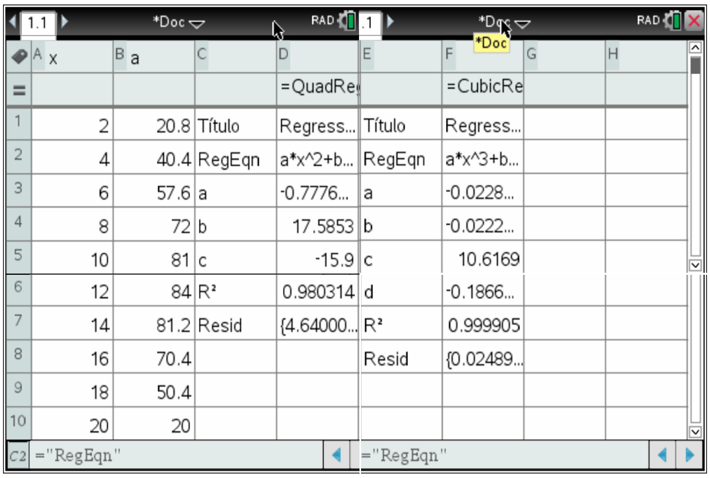


Figura 5.4.15. – Diagrama de dispersão x/A.

Observando o gráfico obtido, o modelo de regressão aparenta ser uma regressão quadrática ou cúbica (figura 5.4.16.):



	A x	B a	C	D	E	F	G	H
=				=QuadRe		=CubicRe		
1	2	20.8	Título	Regress...	Título	Regress...		
2	4	40.4	RegEqn	a*x^2+b...	RegEqn	a*x^3+b...		
3	6	57.6	a	-0.7776...	a	-0.0228...		
4	8	72	b	17.5853	b	-0.0222...		
5	10	81	c	-15.9	c	10.6169		
6	12	84	R²	0.980314	d	-0.1866...		
7	14	81.2	Resid	{4.64000...	R²	0.999905		
8	16	70.4			Resid	{0.02489...		
9	18	50.4						
10	20	20						

C2 ="RegEqn" ="RegEqn"

Figura 5.4.16. – Regressões quadrática e cúbicas.

Como se pode ver pelo mosaico de páginas anterior, o melhor modelo é o correspondente à regressão cúbica, definida por: $y = -0{,}022892x^3 - 0{,}022203x^2 + 10{,}6169x - 0{,}186667$, cujo máximo é 84,47 para $x = 12{,}11$.

Sendo assim, o triângulo de maior área terá que ter 12,11 cm de base e, se a altura for y, a hipotenusa mede $21 - y$, tendo-se que:

$$(21 - y)^2 = 12{,}11^2 + y^2 \Leftrightarrow y \approx 7$$

Logo, a altura é de, aproximadamente, 7 cm.

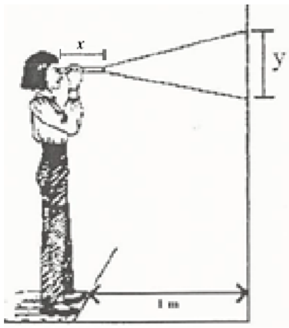
EXTENSÕES E VARIANTES:

A semelhança do que ocorreu nas observações para o professor na tarefa 19, também nesta tarefa o professor pode incentivar os seus alunos a confirmar, de forma analítica, a expressão e o resultado obtido. Para tal, basta verificar que tomando a base do triângulo T como sendo de x cm, e a altura de y cm, tem-se que a hipotenusa mede $(21 - y)$ cm, e sendo assim:

$$(21 - y)^2 = x^2 + y^2 \Leftrightarrow y = \frac{441 - x^2}{42}$$

Como tal a área do triângulo T é dada por $A(x) = \frac{x \cdot \left(\frac{441 - x^2}{42}\right)}{2} \Leftrightarrow A(x) = -\frac{1}{84}x^3 + \frac{441}{84}x$ e, portanto, como se poderá verificar, introduzindo a expressão na calculadora, o seu máximo é 42,435 para $x = 12{,}124$.

Tarefa 21. Matemática por um canudo



As dimensões de um telescópio, bem como as lentes utilizadas, são determinantes nas descobertas efetuadas pelos astrónomos.

Nesta tarefa pretende-se relacionar as dimensões de uma imagem que se consegue observar através de um cilindro oco com as dimensões desse mesmo cilindro.

Assim, efetua o seguinte:

- Fixa uma fita métrica numa parede;
- Tendo numa das mãos um cilindro oco, de um rolo de papel de cozinha, com 20 centímetros, coloca-te a 1 metro da parede e, olhando através do tubo, que deve estar paralelo ao chão, regista o comprimento da fita visualizada à tua frente, como ilustra a figura acima.
- Repete o procedimento, cortando sucessivamente, com uma tesoura, 2 cm no comprimento do rolo, e registando os dados obtidos na tabela abaixo:

Comprimento do rolo (x, em cm)	**20**	**18**	**16**	**14**	**12**
Comprimento visualizado na fita (y, em cm)					

1.1. Coloca os dados da tabela na calculadora.

1.2. Elabora o diagrama de dispersão da distribuição obtida.

1.3. Estima qual deverá ser o comprimento do rolo de papel de cozinha para que se consiga visualizar 15 cm de fita na parede.

1.4. Qual o comprimento visualizado na fita se as dimensões do rolo, em termos de comprimento, reduzirem para metade?

1.5. Tenta descobrir o modelo que melhor se ajusta aos dados obtidos.

(Adaptado de Funções no 3.º ciclo com tecnologia, APM, Projeto T3)

FICHA TÉCNICA - TAREFA 21

TÍTULO: Matemática por um canudo **ANO DE ESCOLARIDADE**: 11.º Ano

CONTEÚDOS A DESENVOLVER: Nuvem de pontos de uma amostra de dados bivariados quantitativos e regressão potência (proporcionalidade inversa entre duas variáveis)

DESCRITORES DAS METAS CURRICULARES DE MATEMÁTICA A: ----

TIPO DE TAREFA: Investigação **CONTEXTO**: Real

DESCRIÇÃO: Com esta tarefa, de carácter facultativo, pretende-se consolidar os conceitos estatísticos relacionados com a nuvem de pontos de uma amostra bivariada e conhecer os diversos tipos de regressão.

GRAU DE ABERTURA: Aberta **NÍVEL DE DESAFIO MATEMÁTICO**: Médio

METODOLOGIA DE TRABALHO: Grupos de 4 elementos

LOCAL DE EXECUÇÃO: Sala de aula **DURAÇÃO PREVISTA:** 65´

OBSERVAÇÕES PARA O PROFESSOR:

1.1.

Após serem efetuados os procedimentos estabelecidos na tarefa, e executar a tarefa três vezes, estabelecendo a média dos valores obtidos para cada comprimento do rolo, obteve-se a tabela 5.4.3.

Tabela 5.4.3. – Dados obtidos com a experiência.

Comprimento do rolo (*x*, em *cm*)	20	18	16	14	12
Comprimento visualizado na fita (*y*, em *cm*)	23	25	28	32	38

1.2.

Obteve-se o diagrama de dispersão da figura 5.4.18.

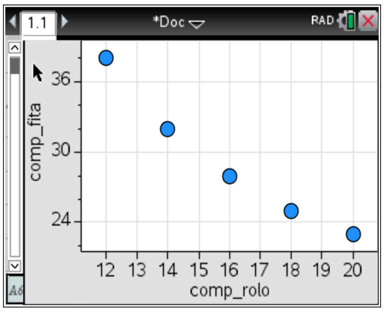


Figura 5.4.17. – Diagrama de dispersão.

1.3.

Aproximadamente, 30,5 cm.

1.4.

Duplicam.

1.5.

Uma equação possível é: $y = \frac{450}{x}$. Repare-se que, se o rolo tiver 1 metro de comprimento, o comprimento visualizado na fita será de 4,5 cm, correspondente ao diâmetro dos topos do rolo. Na calculadora, com os dados obtidos com a experiência, obtém-se: $y = 436{,}5 \times x^{-0{,}987}$.

EXTENSÕES E VARIANTES:

Pode-se igualmente fixar o comprimento do rolo e fazer variar a distância à parede. Sugere-se começar na distância à parede de 1 metro e ir aumentando essa distância. Obtém-se um modelo de regressão linear ($mx + b$), correspondente a uma função de proporcionalidade direta.

Tarefa 22. Intensidade da luz e sensores

Os dados da tabela abaixo relacionam a intensidade luminosa de uma lâmpada com a distância a que é colocada e foram recolhidos experimentalmente com o auxílio de sensores.

Distância (d)	Intensidade (I)
1,0	0,29645
1,1	0,25215
1,2	0,20547
1,3	0,17462
1,4	0,15342
1,5	0,13521
1,6	0,11450
1,7	0,10243
1,8	0,09231
1,9	0,08321
2,0	0,07342

1.1. Faz um gráfico (diagrama de dispersão) que te permita analisar a intensidade da luz (I) em função da distância (d).

1.2. Encontra uma função que se ajuste o melhor possível ao conjunto de pontos.

1.3. Qual será a intensidade da luz se a lâmpada for colocada a 2,5 m, de acordo com o teu modelo?

1.4. Sabe-se que a intensidade luminosa é inversamente proporcional ao quadrado da distância, ou seja que $I = \frac{a}{d^2}$. Compara a função que encontraste com esta.

(Adaptado de Funções – 11.º ano de escolaridade, Ministério da Educação, DES)

FICHA TÉCNICA - TAREFA 22

TÍTULO: Intensidade da luz e sensores **ANO DE ESCOLARIDADE**: 11.º Ano

CONTEÚDOS A DESENVOLVER: Nuvem de pontos de uma amostra de dados bivariados quantitativos e regressão potência (proporcionalidade inversa entre a intensidade da luz observada e o quadrado da distância do foco à projeção da luz)

DESCRITORES DAS METAS CURRICULARES DE MATEMÁTICA A: ----

TIPO DE TAREFA: Problema **CONTEXTO**: Matemático

DESCRIÇÃO: Com esta tarefa, de carácter facultativo, pretende-se consolidar os conceitos estatísticos relacionados com a nuvem de pontos de uma amostra bivariada e conhecer os diversos tipos de regressão.

GRAU DE ABERTURA: Fechada **NÍVEL DE DESAFIO MATEMÁTICO**: Médio

METODOLOGIA DE TRABALHO: Grupos de 2 elementos

LOCAL DE EXECUÇÃO: Sala de aula **DURAÇÃO PREVISTA:** 25´

OBSERVAÇÕES PARA O PROFESSOR:

1.1./1.2.

Introduzindo os dados na calculadora e solicitando à máquina que execute um diagrama de dispersão (gráfico rápido dos dados colocados nas listas) obtém-se o gráfico de pontos da figura 5.4.18, e o gráfico da regressão definida abaixo, após solicitar à calculadora que execute a regressão potência.

A regressão obtida é definida por:

$$y = 0{,}299506 \times x^{-2{,}012}$$

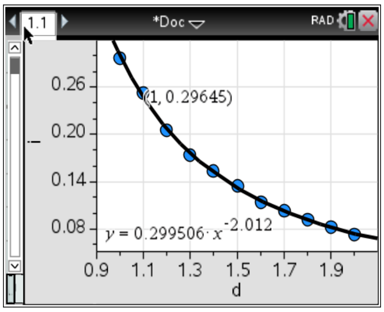


Figura 5.4.18. – Diagrama de dispersão e regressão potência.

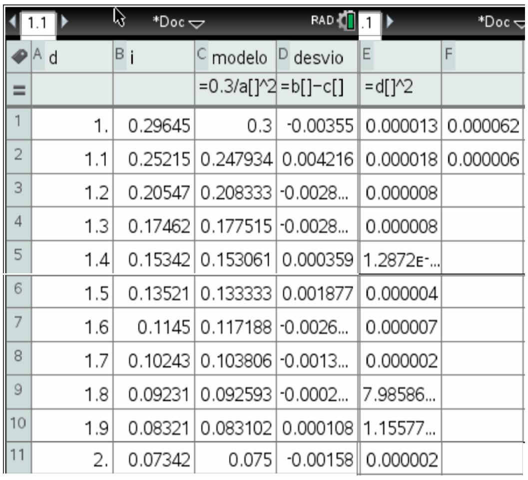
1.3.

A intensidade é de 0,0474

1.4.

O modelo obtido é definido pela expressão $y = \frac{0{,}299506}{x^{2{,}012}}$.

Consideremos o modelo definido por $y = \frac{0{,}3}{x^2}$ e comparemos os valores reais com os obtidos por esta expressão: Efetuando a média da soma dos quadrados dos desvios obtém-se o valor 0,000006 (célula 2F, do mosaico de páginas ao lado) que é um valor bastante pequeno, o que permite concluir que a expressão $y = \frac{0{,}3}{x^2}$ é uma boa representante para a situação descrita (figura 5.4.19.).

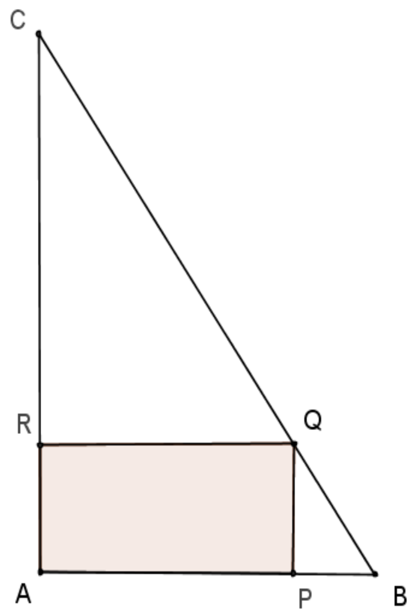


	A d	B i	C modelo	D desvio	E	F
=			=0.3/a[]^2	=b[]-c[]	=d[]^2	
1	1.	0.29645	0.3	-0.00355	0.000013	0.000062
2	1.1	0.25215	0.247934	0.004216	0.000018	0.000006
3	1.2	0.20547	0.208333	-0.0028...	0.000008	
4	1.3	0.17462	0.177515	-0.0028...	0.000008	
5	1.4	0.15342	0.153061	0.000359	1.2872E-...	
6	1.5	0.13521	0.133333	0.001877	0.000004	
7	1.6	0.1145	0.117188	-0.0026...	0.000007	
8	1.7	0.10243	0.103806	-0.0013...	0.000002	
9	1.8	0.09231	0.092593	-0.0002...	7.98586...	
10	1.9	0.08321	0.083102	0.000108	1.15577...	
11	2.	0.07342	0.075	-0.00158	0.000002	

Figura 5.4.19. – Mosaico de páginas com aplicação do modelo $y = \frac{0{,}3}{x^2}$.

Tarefa 23. Retângulo dentro de um triângulo

Considera um triângulo retângulo $[ABC]$ com 5 cm de base, 10 cm de altura e três pontos móveis P, Q e R, que se deslocam sobre os lados $[AB]$, $[BC]$ e $[AC]$, respetivamente, de forma que $[QR]$ seja paralelo a $[AB]$ como é sugerido na figura abaixo. A cada posição dos pontos P, Q e R corresponde um retângulo $[APQR]$.
Seja x a distância de A a P.



1.1. Entre que valores pode variar o valor de x?

1.2. Como varia a área do retângulo $[APQR]$ em função de x? Qual o valor de x que determina um retângulo $[APQR]$ de área máxima?

Sugestão: Efetua o desenho do retângulo nas condições descritas recorrendo às ferramentas de Geometria da tua calculadora, e numa folha de cálculo faz a captura de dados para cada uma das variáveis (valor de x, altura do retângulo e medida da área do retângulo $[APQR]$), deslocando o ponto Q ao longo do lado $[BC]$, para recolher um número significativo de valores.
Representa o diagrama de dispersão com os valores recolhidos e determina um modelo que melhor se ajusta aos dados, calculando em seguida o valor de x para o qual a área do retângulo $[APQR]$ é máxima

FICHA TÉCNICA - TAREFA 23

TÍTULO: Retângulo dentro de um triângulo **ANO DE ESCOLARIDADE**: 11.º Ano

CONTEÚDOS A DESENVOLVER: Nuvem de pontos de uma amostra de dados bivariados quantitativos e regressão quadrática

DESCRITORES DAS METAS CURRICULARES DE MATEMÁTICA A: ----

TIPO DE TAREFA: Investigação **CONTEXTO**: Matemático

DESCRIÇÃO: Com esta tarefa, de carácter facultativo, pretende-se consolidar os conceitos estatísticos relacionados com a nuvem de pontos de uma amostra bivariada e conhecer os diversos tipos de regressão.

GRAU DE ABERTURA: Aberta **NÍVEL DE DESAFIO MATEMÁTICO**: Médio

METODOLOGIA DE TRABALHO: Grupos de 2 elementos

LOCAL DE EXECUÇÃO: Sala de aula **DURAÇÃO PREVISTA:** 90´

OBSERVAÇÕES PARA O PROFESSOR:

1.1.

Entre 0 e 5 cm.

1.2.

Efetuando o modelo do triângulo e do retângulo numa página de Geometria e tendo o cuidado de deixar "livre" o ponto sobre a hipotenusa do triângulo, para se conseguir efetuar registos numa lista, obteve-se as páginas da figura 5.4.20., a primeira de Geometria e a segunda de Listas e Folha de Cálculo:

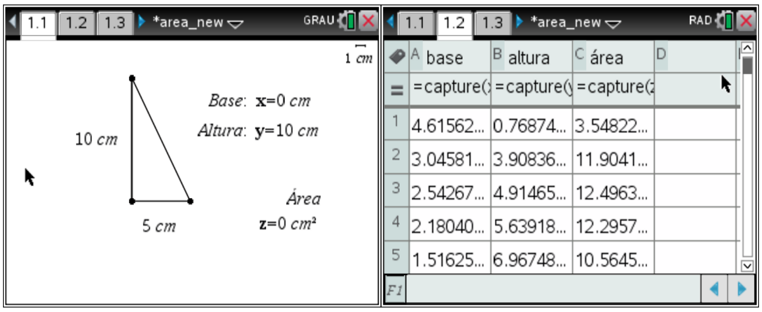


Figura 5.4.20. – Página de Geometria e de Listas e Folha de Cálculo com a investigação proposta na tarefa.

Nota: Na página de Geometria, não esquecer de guardar cada uma das variáveis.

Tendo por base as listas formadas, obtém-se o diagrama de dispersão da figura 5.4.21.

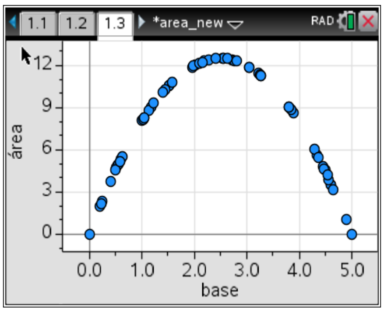


Figura 5.4.21. – Diagrama de dispersão.

Observando o gráfico obtido, o modelo de regressão aparenta ser uma regressão quadrática (figura 5.4.22.)

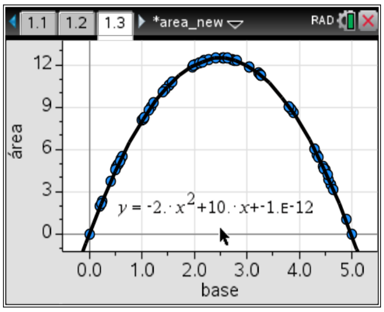


Figura 5.4.22. – Regressão quadrática.

Efetivamente o melhor modelo é o correspondente à regressão quadrática, definida por:

$$y = -2x^2 + 10x$$

cujo máximo é 12,5 para $x = 2{,}5$.
Sendo assim, o retângulo de maior área tem 2,5 cm de base e 5 cm de altura.

EXTENSÕES E VARIANTES:

O professor pode incentivar os alunos a procurar a expressão analítica da área do retângulo e a obter o máximo pretendido, eventualmente com o auxílio da calculadora. Para tal, basta verificar que tomando x por comprimento da base do retângulo e a altura por y, tem-se que:

$$\frac{5-x}{y} = \frac{5}{10} \Leftrightarrow y = 10 - 2x$$

Logo a área do retângulo é dada por $A(x) = x(10-2x) \Leftrightarrow A(x) = 10x - 2x^2$, igual à expressão obtida usando regressões quadráticas.

Tarefa 24. Estudo da evolução das notas nos exames nacionais

Pretende-se elaborar um estudo sobre a evolução das classificações obtidas pelos alunos nos exames de Matemática A e de Português nos três anos letivos anteriores, na tua escola.

Para tal sugere-se que seja constituída uma amostra de cerca de 20 alunos, 10 do sexo feminino e 10 do sexo masculino, para cada ano letivo, aleatória e ampla. Deves solicitar esses dados na direção da tua escola, sob a supervisão do teu professor de Matemática e tendo sempre o cuidado de salvaguardar a identidade dos alunos envolvidos na investigação.

Trabalhando em grupos de 4 elementos da tua turma, reflete com os elementos do teu grupo e com o professor a forma mais adequada de tratar os dados recolhidos. Nomeadamente poderás ter que organizar os dados em três conjuntos, um por cada ano letivo, construindo tabelas de frequências e gráficos, calculando medidas de localização e medidas de dispersão e estudando uma eventual relação de dependência linear entre as classificações obtidas a Matemática A e a Português.

Cada grupo deve apresentar os resultados e discuti-los em sala de aula, sugerindo-se inclusive a pesquisa de dados a nível nacional, quer no sítio eletrónico do organismo responsável pela elaboração dos exames nacionais, quer no sítio do Ministério da Educação e respetivos organismos tutelados.

Tendo em vista a avaliação dos resultados, cada aluno deve elaborar um relatório final distinto, baseado na sua experiência e visão do problema investigado. O tipo de relatório a apresentar, bem como formatos de apresentação, devem ser objeto de análise e reflexão entre os alunos e o professor, devendo incluir:

- os objetivos do trabalho;
- a metodologia adotada;
- a apresentação dos dados;
- conclusões.

Bom trabalho!!!

FICHA TÉCNICA - TAREFA 24

TÍTULO: Estudo da evolução das notas nos exames nacionais **ANO DE ESCOL.:** 11.º Ano

CONTEÚDOS A DESENVOLVER: Conceitos estatísticos de 10.º e 11.º ano.

DESCRITORES DAS METAS CURRICULARES DE MATEMÁTICA A: ----

TIPO DE TAREFA: Projeto **CONTEXTO**: **Real**

DESCRIÇÃO: Com esta tarefa, pretende-se que os alunos elaborem um trabalho onde coloquem a generalidade dos conhecimentos adquiridos ao longo do 10.º e do 11.º ano, de forma a consolidar os conceitos estatísticos adquiridos.

GRAU DE ABERTURA: Aberta **NÍVEL DE DESAFIO MATEMÁTICO**: Elevado

METODOLOGIA DE TRABALHO: Grupos de 4 elementos

LOCAL DE EXECUÇÃO: Casa **DURAÇÃO PREVISTA: 3** semanas

OBSERVAÇÕES PARA O PROFESSOR:

O principal objetivo desta tarefa é permitir que os alunos desenvolvam o tema estatística, num contexto real, e com dados recolhidos pelos próprios, verificando assim e *in loco* o que é trabalhar um determinado tema, tendo que recolher e organizar os dados, e depois tratá-los estatisticamente, quer do ponto de vista descritivo, quer indutivo.

É importante que os alunos trabalhem temas com os quais se identifiquem e que tenham algumas expetativas no futuro, como são neste caso os exames nacionais do Ensino Secundário. O facto de trabalharem com um tema que lhes pode provocar alguns constrangimentos e adversidades poderá fazer com que de alguma forma ganhem alguma familiaridade e assim lhes seja mais fácil ultrapassar um momento tão decisivo para as suas vidas.

Além da abordagem sugerida na tarefa, os alunos podem igualmente apresentar conclusões da elaboração dos seus trabalhos, bem como algumas recomendações práticas para se conseguir um maior sucesso nos exames.

Por último, poderá ser objeto de negociação, entre professor e alunos, os meios de divulgação dos trabalhos efetuados, e nesse sentido sugere-se não só a apresentação dos trabalhos sob a forma de pósteres, em locais visíveis da escola, mas igualmente, a apresentação das conclusões gerais na página eletrónica da escola ou mesmo a apresentação dos trabalhos efetuados numa página preparada para o efeito.

6. CONCLUSÕES

6.1. Resultados gerais da investigação

Nesta secção pretende-se apresentar as conclusões deste trabalho, tendo em vista que o objetivo principal consiste em agir no desenvolvimento curricular do Ensino Secundário, desenvolvendo tarefas matemáticas, no domínio da Estatística, na disciplina de Matemática A, integrando a tecnologia, nomeadamente a calculadora gráfica. Começaremos por responder às questões colocados no início do trabalho apresentado de seguida algumas considerações finais acerca do estudo realizado.

A primeira questão apresentada: "Como se carateriza o currículo prescrito com estatística?", é respondida quer na revisão da literatura, quer na apresentação das 24 tarefas propostas. De forma a caraterizar o currículo prescrito, seguiu-se de perto o programa e descritores das metas curriculares de Matemática A do Ensino Secundário, para o domínio da Estatística, mantendo no essencial a sua sequência. A caracterização apresentada na revisão de literatura, essencialmente centrada em aspetos formais dos conceitos envolvidos, permitiu que se desenvolvesse uma abordagem mais ampla e consentânea com especial relevância para tarefas de natureza diversificada, onde os conceitos são abordados de forma mais abrangente e com um caráter mais próximo da sua aplicação a situações reais.

Relativamente ao 10.º ano, deu-se especial atenção nas tarefas aos conceitos de média e às propriedades da média de uma amostra, bem como às medidas de dispersão como sejam a variância e o desvio padrão, tendo sido igualmente feita referência aos percentis, calculados de forma analítica, remetendo-se para segundo plano os resultados relativos aos somatórios. Foram acrescentados nas tarefas conceitos, como o de simulação de uma experiência, as medidas de localização: mediana, moda e quartis, as medidas de dispersão de amplitude interquartil e de desvio médio e a representação gráfica de dados de amostras univariadas.

As primeiras quatro tarefas, além de permitirem uma revisão dos conceitos de estatística, aprendidos essencialmente no Ensino Básico, permitem igualmente, por parte dos alunos, uma ambientação dos procedimentos inerentes à utilização da calculadora gráfica, necessários para uma boa resolução das tarefas seguintes.

No que concerne ao 11.º ano foram abordados todos os conceitos previstos no currículo prescrito, nomeadamente a regressão linear entre duas variáveis, a nuvem de pontos de uma amostra de dados bivariados quantitativos, a reta dos mínimos quadrados e o cálculo do coeficiente de correlação linear. Foram ainda introduzidos outros tipos de regressões entre duas variáveis, como sejam a regressão quadrática, a regressão cúbica e a regressão potência, funções de causa-efeito que os alunos dominam, pois foram objeto de estudo nos 10.º e 11.º anos, como forma de permitir aumentar o leque de funções disponíveis para tratamento de dados e assim se conseguir introduzir outro tipo de tarefas que permitissem aos alunos desenvolver as competências relacionadas com a resolução de problemas, nomeadamente a criação de modelos matemáticos, bem como comunicar e raciocinar matematicamente.

Em algumas das tarefas propostas houve a preocupação em apresentar contextos reais, de forma a não criar a impressão que as situações apresentadas derivam exclusivamente de problemas rotineiros, em que para a sua resolução basta apelar a processos repetitivos, sem grande caráter reflexivo.

No que concerne à segunda questão formulada: "Como pode ser moldado o currículo prescrito integrando a tecnologia?", houve a preocupação em desenvolver a utilização da tecnologia na sala de aula, nomeadamente introduzindo a calculadora gráfica, nas tarefas propostas, bem como na resolução da generalidade das tarefas. Tal facto fica a dever-se ao reconhecimento das potencialidades deste artefacto apresentadas por diversos investigadores (Fey, 1991; NCTM, 1991; Ponte & Canavarro, 1997 e Oliveira, 2008)

O uso da tecnologia permite a incorporação no espaço da sala de aula de um quarto elemento, além do saber, do professor e do aluno (Ponte, 2002), que tem que ser gerido com muito cuidado. Este artefacto possibilita que o aluno efetue investigações mais ricas, com um maior número de dados, envolvendo situações matemáticas em contextos reais e usando eventualmente procedimentos mais céleres do que os processos estritamente analíticos, nomeadamente quando os resultados requerem alguma generalização e reconhecimento de padrões.

Com as tarefas propostas, ao integrar a tecnologia, pretende-se agir diretamente no currículo apresentado aos professores e no currículo moldado, definidos por Gimeno (2000). Com a apresentação e desenvolvimento das respetivas fichas técnicas, são dadas indicações precisas sobre os processos de lecionação e aprendizagem da Estatística, tentando influenciar assim o modo como os docentes lecionam as suas aulas. Como complemento, é ainda apresentada uma possível planificação do domínio, a qual tem por principal objetivo orientar o professor e desenvolver por via deste processo o currículo em ação.

Todas as vinte e quatro tarefas, dispostas na sequência determinada pelo currículo prescrito, permitem que o professor crie em sala de aula momentos de análise e reflexão entre os alunos, quer quando estes estão sob a forma de pequeno grupo, quer mesmo quando estão a refletir no grupo turma, facilitando assim a exploração do raciocínio matemático e incentivando os alunos a agir sobre os seus procedimentos. A forma como as tarefas estão elaboradas permite igualmente ao professor definir etapas de execução diferenciadas, podendo dar assim especial atenção aos alunos com maiores dificuldades de aprendizagem.

Pretende-se assim apresentar um currículo moldado que enfatiza a integração da tecnologia com recurso a metodologias de ensino diversificadas e criadoras de ambientes de aprendizagem formais e informais, onde os alunos desempenham um papel primordial e ativo. O professor reforça o seu papel de orientador das aprendizagens e regula de forma eficaz os conhecimentos dos alunos que podem assumir uma dimensão multidisciplinar.

Relativamente à terceira questão: "Como é que se materializam modelos de ensino-aprendizagem, no domínio da estatística, recorrendo à utilização da calculadora gráfica?", pode afirmar-se, apontando vários investigadores (Reys, 1999; Pontes & Filipe, 1995; Canavarro, 2000 e T^3 Portugal, 1999) que a calculadora gráfica, pelo facto de facilitar a exploração, a investigação e a resolução de problemas, e pelo seu carácter fortemente experimental, permite desenvolver no aluno, de uma forma mais fácil, o raciocínio e a comunicação, não só pelo tempo que "roubam" ao cálculo de papel e lápis, mas também pela qualidade de trabalho que realizam.

As tarefas apresentadas, associadas à calculadora gráfica, em virtude de possibilitarem uma reflexão sobre os seus objetos, permitem a materialização dos conceitos referentes ao desenvolvimento de estratégias de ensino-aprendizagem e a criação de modelos de ensino, em que se solicita aos alunos o estabelecimento de conjeturas, o teste dessas conjeturas, a eventual reformulação, bem como conclusões sobre o trabalho desenvolvido. Tudo elementos propícios à criação de uma mente matemática e estatisticamente literata.

De forma a garantir aprendizagens mais eficazes, a estatística e a utilização da calculadora gráfica devem desenvolver-se lado a lado, isto é, a calculadora deve ser um elemento integrador/facilitador da estatística que se ensina e não um elemento que simplesmente se adiciona, só desta forma os alunos percecionam os limites da calculadora e adquirem competências matemáticas mais duradouras. O ensino baseado num conjunto de tarefas potenciadas pela tecnologia vem reforçar a dimensão construtivista da aprendizagem, evidenciando as suas dimensões cognitiva e social, inseridas em contextos de realidade e semi realidade.

Para a última questão: "De que forma a utilização da calculadora gráfica pode influenciar o currículo?", faz-se notar que a calculadora gráfica, pela sua acessibilidade e fácil utilização, é um meio tecnológico privilegiado para a abordagem da Estatística, tanto mais que fornece de forma rápida todos os parâmetros estatísticos necessários para a análise de uma determinada amostra, assim como permite a representação de um grande número de gráficos. Acresce ainda o facto de este artefacto permitir, de forma rápida e cómoda, analisar uma vasta e variada quantidade de dados.

Torna-se assim óbvio que a utilização deste recurso, quando feito de forma cuidada e crítica, permite que os alunos se orientem para aspetos de maior relevância cognitiva como sejam a interpretação, a organização, a argumentação e a reflexão, em detrimento de uma maior mecanização, influenciando assim sobremaneira o currículo.

O uso sistematizado da calculadora gráfica na sala de aula tende a melhorar as aprendizagens dos alunos, não só ao nível da criação de destreza mental, mas igualmente ao nível concetual, sendo igualmente fatores determinantes: a relação professor aluno, o currículo desenvolvido pelo professor, isto é, o currículo em ação, os conhecimentos matemáticos prévios e as conceções dos alunos, bem como o modo como os alunos utilizam a calculadora gráfica na sala de aula (Canavarro, 2000 e NCTM, 2007).

Os alunos habituados a usar tecnologia gráfica desenvolvem mais facilmente representações diversas dos objetos matemáticos, nomeadamente tendem a apresentar processos de resolução que contemplam representações algébricas, numéricas e gráficas, manipulando de forma mais livre expressões algébricas e analisando dados reais.

A utilização da calculadora gráfica pode, no entanto, quando utilizada de forma acrítica, gerar e ampliar ideias erradas (Burril et al, 2002), como, por exemplo, a não distinção entre números racionais e irracionais, a aceitação de determinado tipo de gráficos sem que se desenvolva algum tipo de reflexão crítica e a aceitação de determinado tipo de escalas inadequadas em alguns gráficos. Nestes casos o papel do professor é determinante como moderador e modelador do ensino e aprendizagem dos alunos.

6.2. Considerações finais

O processo de elaboração/adaptação das tarefas permitiu uma reflexão pessoal profunda, sendo que além de obrigar a uma escolha criteriosa de textos, permitiu igualmente uma verificação das práticas usadas em sala de aula, nomeadamente pela avaliação da forma como os alunos criam e desenvolvem raciocínio matemático. O modo como o professor age em sala de aula, para motivar os seus alunos, é determinante, e a introdução de tarefas ricas em conteúdo matemático conduz os alunos a uma maior envolvência, criando assim momentos mais enriquecedores e de maior empenho por parte destes, com um consequente aumento das suas capacidades intelectuais.

Com este conjunto de tarefas, para o domínio da estatística, sistematizadas e com observações para os professores, sugere-se a criação de uma página de internet ou mesmo de uma publicação para consulta dos eventuais interessados, onde as tarefas poderão eventualmente ser modificadas, atendendo às caraterísticas dos alunos sobre os quais se pretende a sua aplicação.

É importante que o professor seja incentivado a refletir sobre as tarefas que introduz na sala de aula, que não têm que ser exclusivamente do manual adotado. A riqueza do pensamento matemático advém da variabilidade dos instrumentos didáticos utilizados para a prossecução do processo de ensino aprendizagem.

Este estudo reforça a importância do papel do professor na criação e adaptação de tarefas para o ensino da Estatística, apoiadas na utilização da calculadora gráfica, a qual potencia o desenvolvimento do raciocínio por parte dos alunos. A escolha criteriosa de uma tarefa para a sala de aula é decisiva para a criação de boas práticas no professor, devendo ser incentivada pelos órgãos de supervisão pedagógica. Este documento, além de dar resposta às quatro questões formuladas, mostra como determinado tipo de tarefas incentivam o professor a ter atenção ao contexto e às situações ditas problemáticas, o qual, quando enceta um trabalho rigoroso de adaptação das questões originais, sente-se inspirado e motivado para ensinar os seus alunos de forma mais consistente e duradoura.

Para futuros desenvolvimentos deste estudo, no domínio da Estatística, sugere-se a criação de tarefas com o intuito de utilizar a calculadora gráfica na execução de estimativas e de inferências estatísticas, nomeadamente testes de hipóteses, dando continuidade assim à análise que é feita ao nível das simulações neste trabalho.

Igualmente se sugere o uso de outro tipo de regressões, disponíveis na calculadora gráfica, como por exemplo, as regressões: exponencial, logarítmica, sinusoidal e logística, funções de causa-efeito, lecionadas no 12.º ano, e presentes no programa de Matemática A.

Por último, seria interessante analisar o desempenho real de alunos e professores, na aplicação em sala de aula das tarefas apresentadas.

BIBLIOGRAFIA

Abrantes, P. (1994). *O Trabalho de Projeto e a Relação dos alunos com a Matemática*. (Tese de doutoramento, Universidade de Lisboa). Lisboa: APM.

Abrantes, P., Serrazina, L. & Oliveira, I. (1999). *A Matemática na Educação Básica*. Lisboa: Ministério da Educação.

Almiro, J. (2005). O professor e o desenvolvimento curricular em *Materiais manipuláveis e tecnologia na aula de Matemática* (pp. 275-307). Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

APM (2009). *Renovação do currículo de Matemática, Seminário de Vila Nova de Milfontes – 1988. Edição Comemorativa*. Lisboa.

Bivar, A., Grosso, C., Oliveira, F., Loura, L. & Timóteo, M. C. (2014). *Caderno de Apoio às Metas Curriculares, Matemática A 10.º ano*. Lisboa: Ministério da Educação e Ciência.

Bivar, A., Grosso, C., Oliveira, F., Loura, L. & Timóteo, M. C. (2013). *Caderno de Apoio às Metas Curriculares, Matemática 3.º Ciclo*. Lisboa: Ministério da Educação e Ciência.

Bogdan, R. e Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em Educação: Uma introdução à teoria e aos métodos.* Porto: Porto Editora.

Branco, J. (2000). Ensino e Aprendizagem da Estatística em *Estatística no Secundário: o Ensino e Seus Problemas* (pp. 11-30). Lisboa: SPE, APM e DEEIO/FCUL.

Burril, G. et al (2002). *Handheld graphing Technology in secondary Mathematics: research findings and implications for classroom practice*. Texas Instruments.

Caldas, A. C. (2016). *A vida do cérebro*. Lisboa: Verso da Kapa.

Canavarro, A. P. (2000). Ensino e Aprendizagem da Estatística em *Estatística e calculadoras gráficas* (pp. 159-167). Lisboa: SPE, APM e DEEIO/FCUL.

Canavarro, A. P. & Ponte, J. P. (2005). O professor e o desenvolvimento curricular em *O papel do professor no currículo de Matemática* (pp. 63-89). Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

Christiansen, B. & Walther, G. (1986). Task and activity. In B. Cristiansen, A. G. Howson & M. Otte (Eds.), *Perspectives on mathematics education* (pp. 73-81). Dordrecht: D. Reidel.

Dunham, P. H., & Thomas, P. D. (1994). Research on graphing calculators. Mathematics Teacher 87 (september 1994): pg. 440-445.

Fey, J. T. (1991). O Computador na Educação Matemática – Série Cadernos de Educação e Matemática, número 2, organização de João Pedro da Ponte em *Tecnologia e educação matemática. Uma revisão de desenvolvimentos recentes e problemas importantes* (pp. 45-79). Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

Freiman, V. & Manuel, D. (2015). *Relating student´s perceptions or interest and difficulty to the richness of Mathematical problems posted on the CAMI website*. Quadrante, 24(2), 61-84. Lisboa: APM.

Freitas, J. O. (2000). Ensino e Aprendizagem da Estatística em *Calculadoras Gráficas no Ensino da Estatística sem se perder o rigor científico* (pp. 147-158). Lisboa: SPE, APM e DEEIO/FCUL.

Friendland, A., & Tabach, M. (2001). Promothing multiple representation in algebra. In Cuoco (Ed), *The roles of representation in school Mathematics* (pp. 173-185). Reston, VA: NCTM.

Grupo Azarquiel (1993). *Estatística no 3.º Ciclo do Ensino Básico*. Lisboa: APM

Grupo de Trabalho T3 Portugal (1999a). *Estatística e calculadoras gráficas*. Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

Grupo de Trabalho T3 Portugal (1999b). *Modelação no Ensino da Matemática: Calculadora, CBL e CBR*. Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

Grupo de Trabalho T3 Portugal (2002). *Funções no 3.º ciclo com tecnologia.* Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

Grupo de Trabalho T3 Portugal (2014). *Problemas e investigações com tecnologia # Funções.* Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

Hewson, S. (2011*). What is a mathemalically rich task?*
Obtido em 2016 de http://nrich.maths.org/6299

Lopes, A. V., Bernardes, A, Loureiro, C., Varandas, J., Oliveira, M. J., Delgado, M. J., Bastos, R. & Graça, T. (1990). *Actividades Matemáticas na Sala de Aula*. Lisboa: Texto Editora, Lda.

Lopes, C. A. (2002). *Estratégias e métodos de resolução de problemas em matemática*. Porto: Asa Editores.

Matos, J. M. & Wagner, R. V. (2010). Estudos comparativos sobre a reforma da Matemática Moderna in A Reforma da Matemática Moderna em contextos ibero-americanos. Caparica: FCTUNL

Matos, J. M. & Serrazina, M. L. (1996). *Didáctica da Matemática*. Lisboa: Universidade Aberta.

Matos, J. F., Carreira, S., Santos, M. P. & Amorim, I. (1995). *Modelação Matemática*. Lisboa: Universidade Aberta.

Matos, J. (2013). *Erros de matemática podem levar ao desastre* em Gazeta de Matemática, número 171. Lisboa: Sociedade Portuguesa de Matemática.

Martins, M. E. G., Monteiro, C., Viana, J. P. & Turkman, M. A. (1997). *Estatística: matemática – 10.º ano de escolaridade*. Lisboa: Ministério da Educação, Departamento de Ensino Secundário.

Ministério da Educação (2001). *Programa de Matemática A, 10.º, 11.º e 12.º ano*. Lisboa: Departamento do Ensino Secundário.

Ministério da Educação (2007). *Programa de Matemática para o Ensino Básico*. Lisboa: Ministério da Educação.

Ministério da Educação e Ciência (2013). *Programa e Metas Curriculares, Matemática Ensino Básico.* Lisboa.

Ministério da Educação e Ciência (2014). *Programa e Metas Curriculares, Matemática A*. Lisboa.

Ministério da Educação e Ciência (2016). *Orientações de gestão curricular para o Programa e Metas Curriculares de Matemática A*. Lisboa.

NCTM (1991). *Normas para o currículo e a avaliação em matemática escolar (NCTM).* Lisboa: Associação de professores de matemática e Instituto de inovação Educacional.

NCTM (1994). *Normas profissionais para o ensino da Matemática (NCTM).* Lisboa: Associação de professores de matemática e Instituto de inovação Educacional.

NCTM (2007). *Princípios e Normas para a Matemática Escolar*. Lisboa: Associação de professores de Matemática.

Negra, C., Martinho, E. & Martins, H. (2015). *Dimensões de Matemática A 10.º Ano.* Queluz de Baixo: Santillana

Negra, C., Martinho, E. & Martins, H. (2016). *Dimensões de Matemática A 11.º Ano*. Queluz de Baixo: Santillana

Oliveira, P. (2008). Revista Educação e Matemática, número 100, *O raciocínio matemático à luz de uma epistemologia soft* (pp 3-9). Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

Pacheco, J. A. (2001). *Currículo: Teoria e Práxis*. Porto: Porto Editora.

Papert, S. (1991). O Computador na Educação Matemática – Série Cadernos de Educação e Matemática, número 2, organização de João Pedro da Ponte em *Ensinar crianças a serem matemáticos vs ensinar Matemática* (pp 29-44). Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

Pina, M. A. (2012). *Pequeno livro de Desmatemática*. Porto: Assírio & Alvim.

Philip, J. D. & Hersh, R. (1995). *A Experiência Matemática*. Lisboa: Gradiva.

Polya, G. (2003). *Como resolver Problemas. Um aspecto novo do método matemático*. Lisboa: Gradiva.

Ponte, J. P. & Canavarro, A. P. (1997). *Matemática e Novas Tecnologias*. Lisboa: Universidade Aberta.

Ponte, J. P. & Fonseca, H. (2000). *A Estatística no currículo do Ensino Básico e Secundário* em Ensino e Aprendizagem da Estatística. Lisboa: SPE, APM e DEEIO/FCUL.

Ponte, J. P., Matos, J. M. & Abrantes, P. (1998). *Investigação em Educação Matemática: Implicações curriculares.* Lisboa: Instituto de Inovação Curricular.

Ponte, J. P. (1991). O Computador na Educação Matemática – Série Cadernos de Educação e Matemática, número 2, introdução e organização (pp. 5-9). Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

Ponte, J. P. (2003). *O ensino da matemática em Portugal: Uma prioridade educativa?* Lisboa: Conselho Nacional de Educação.
Obtido em 2016, de http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/docs-pt/02-Ponte(CNE).pdf.

Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. em GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). Lisboa: APM.

Ponte, J. P., Guimarães, H. M. & Serrazina, L. (2012). Revista Educação e Matemática, número 119 em *As Metas Curriculares de Matemática: Um tremendo retrocesso no ensino da disciplina*. Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

Ponte, J. P. & Serrazina, L. (2004). Revista Quadrante, Volume 13, n.º 2, em *Práticas profissionais dos professores de Matemática*: Lisboa: APM.

Pontes, F. & Filipe, J. (1995). *As calculadoras e o Ensino*. Lisboa: Beltrão Coelho, Lda.

Reys, B. J. (1989). Revista Educação e Matemática, número 11, em *A calculadora como uma ferramenta para o ensino e a aprendizagem* (pp. 19- 21). Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

Roldão, M. C. (1997). Actas do Profmat 97 em *Currículo e aprendizagem efectiva e significativa. Eixos da investigação curricular dos nossos dias* Figueira da Foz: Comissão Organizadora do Profmat 97 - Associação de Professores de Matemática.

Gimeno Sacristán, J. (2000). *O Currículo: uma reflexão sobre a prática*. Tradução Ernani Rosa. Porto Alegre: Artmed.

Serrazina, L. & Oliveira, I. (2005). O professor e o desenvolvimento curricular em *O currículo de Matemática do ensino básico sob o olhar da competência matemática* (pp. 35-62). Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

Shoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical Problem Solving*. Nova Iorque: Academic Press.

Teixeira, P., Precatado, A., Albuquerque, C., Conceição, A. & Nápoles, S. (1997). *Funções: matemática – 10.º ano de escolaridade*. Lisboa: Ministério da Educação, Departamento de Ensino Secundário.

Teixeira, P., Precatado, A., Albuquerque, C., Conceição, A. & Nápoles, S. M. (1998). *Funções: matemática – 11.º ano de escolaridade*. Lisboa: Ministério da Educação, Departamento de Ensino Secundário.

Waits, B. K. (1997). Actas do Profmat 97 em *The Future of Technology Enhanced teaching and Learning of Mathematics*. Figueira da Foz: Comissão Organizadora do Profmat 97 - Associação de Professores de Matemática.

ANEXO

METAS CURRICULARES DE MATEMÁTICA A

Ensino Secundário

Estatística

ESTATÍSTICA EST10

CARATERÍSTICAS AMOSTRAIS

1. *Manipular o sinal de somatório*

1.1 Designar, dado $p \in \mathbb{N}$ e uma sequência de números reais $(x_1, x_2, \ldots, x_p)$, a soma $x_1 + x_2 + \ldots + x_p$ por «somatório de 1 a p dos x_i » (ou por «soma dos p termos da sequência», quando esta designação não for ambígua), representá-la por « $\sum_{i=1}^{p} x_i$» , designar o símbolo « Σ » por «sinal de somatório» e, para $1 < m \leq p$, representar também por «$\sum_{i=m}^{p} x_i$ » a soma $x_m + x_{m+1} + \ldots + x_p$ («somatório de m a p dos x_i ») .

1.2 Reconhecer, dados $p \in \mathbb{N}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ e uma sequência de números reais $(x_1, x_2, \ldots, x_p)$, que a igualdade $\sum_{i=1}^{p} (\lambda x_i) = \lambda \sum_{i=1}^{p} x_i$ representa, no formalismo dos somatórios, a propriedade distributiva da multiplicação relativamente à adição aplicada ao produto de λ pela soma das p parcelas x_1 , x_2 , …, x_p .

1.3 Reconhecer, dados $p \in \mathbb{N}$, uma sequência de números reais $(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ e um número natural n tal que $n < p$, que a igualdade $\sum_{i=1}^{p} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i + \sum_{i=n+1}^{p} x_i$ representa, no formalismo dos somatórios, uma aplicação da propriedade associativa da adição à soma das p parcelas x_1 , x_2 , …, x_p .

1.4 Reconhecer, dado $p \in \mathbb{N}$ e sequências de números reais $(x_i)_{1 \leq i \leq p}$ e $(y_i)_{1 \leq i \leq p}$, que a igualdade $\sum_{i=1}^{p} (x_i + y_i) = \sum_{i=1}^{p} x_i + \sum_{i=1}^{p} y_i$ representa, no formalismo dos somatórios, uma aplicação das propriedades associativa e comutativa da adição à soma das p parcelas $x_1 + y_1$, $x_2 + y_2$, …, $x_p + y_p$.

2. *Utilizar as propriedades da média de uma amostra*

2.1 Interpretar uma dada variável estatística quantitativa em determinada população como uma função numérica definida na população, cujo valor em cada unidade estatística é o valor que mede a característica em estudo nesse elemento da população.

2.2 Representar, dada uma variável estatística quantitativa x em determinada população e uma amostra A de dimensão $n \in \mathbb{N}$ dessa população cujos elementos estão numerados de 1 a n , por « x_i » o valor da variável x no elemento de A com o número i , por « $\underset{\sim}{x}$ » a sequência $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, designá-la por «amostra da variável estatística x » ou simplesmente por «amostra» e por «valores da amostra» os valores x_i , $1 \leq i \leq n$, sempre que estes abusos de linguagem não forem ambíguos.

2.3 Representar, dado $n \in \mathbb{N}$ e uma amostra $\underset{\sim}{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de uma variável estatística, por « $\bar{x}$ » a média $\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$, designando-a igualmente por «média da amostra $\underset{\sim}{x}$ » sempre que este abuso de linguagem não for ambíguo.

2.4 Representar, dado $n \in \mathbb{N}$ e uma amostra $\underset{\sim}{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ com m valores $(1 \leq m \leq n)$, por «$\tilde{x}$» o conjunto dos valores da amostra, por $\tilde{x}_1$, $\tilde{x}_2$, …, $\tilde{x}_m$ os elementos de $\tilde{x}$, por « n_j » $(1 \leq j \leq m)$ o cardinal do conjunto $\{i \in \{1, \ldots, n\}: x_i = \tilde{x}_j\}$, designar n_j por «frequência absoluta do valor $\tilde{x}_j$ » , e justificar que $\sum_{j=1}^{m} n_j = n$ e que $\bar{x} = \frac{\sum_{j=1}^{m} \tilde{x}_j \, n_j}{n}$, designando esta última igualdade por «fórmula da média para dados agrupados».

2.5 Representar, dado $n \in \mathbb{N}$, uma amostra $\underset{\sim}{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ e números reais h e a , por « $a\underset{\sim}{x} + h$ » a amostral $\underset{\sim}{y} = (ax_1 + h, ax_2 + h, \ldots, ax_n + h)$ e justificar que $\bar{y} = a\bar{x} + h$.

2.6 Interpretar, dado $n \in \mathbb{N}$ e uma amostra $\underset{\sim}{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, a média de $\underset{\sim}{x}$ como a abcissa do centro de gravidade de um segmento de reta no qual se colocou, para cada valor $\bar{x}_j$ da amostra, um ponto material no ponto de abcissa $\tilde{x}_j$ de massa igual à respetiva frequência absoluta n_j .

2.	***Utilizar as propriedades da média de uma amostra (cont.)***
2.7	Reconhecer que o valor da média de uma amostra $\underset{\sim}{x}$ = (x_1, x_2, …, x_n) nunca se mantém quando, para um dado $i \in \{1, …, n\}$, se altera o valor x_i , e referir, por essa razão, que a média é uma característica amostral «com pouca resistência».
3.	***Definir e conhecer propriedades da variância e do desvio-padrão de uma amostra***
3.1	Designar, dado $n \in \mathbb{N}$, uma amostra $\underset{\sim}{x}$ = (x_1, x_2, …, x_n) e $i \in \{1, …, n\}$, por «desvio de x_i em relação à média» a quantidade $x_i - \bar{x}$, representá-la por « d_i » e provar que $\Sigma_i^n = {}_1\, d_i = 0$.
3.2	+Representar dado $n \in \mathbb{N}$ e uma amostra $\underset{\sim}{x}$ = (x_1, x_2, …, x_n) , por « SS_x » a soma $\Sigma_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$ dos quadrados dos desvios dos x_i em relação à média e reconhecer que $SS_x = \Sigma_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2$.
3.3	+Reconhecer, dado $n \in \mathbb{N}$ e uma amostra $\underset{\sim}{x}$= (x_1, x_2, …, x_n) , que é possível calcular d_n em função de d_1 , d_2 , …, d_{n-1} mas que d_n só fica determinado se for conhecida a totalidade desses $n - 1$ desvios, e referir, por esta razão, que « SS_x tem $n - 1$ graus de liberdade».
3.4	Justificar, dado $n \in \mathbb{N}$ e uma amostra = (x_1, x_2, …, x_n) , que $SS_x = 0$ se, e somente se, $x_1 = x_2 = … = x_n$.
3.5	Justificar, dado $n \in \mathbb{N}$, uma amostra $\underset{\sim}{x}$ = (x_1, x_2, …, x_n) e números reais h e a , que se $\underset{\sim}{y} = \underset{\sim}{x} + h$ (respetivamente, $\underset{\sim}{y} = \alpha\underset{\sim}{x}$) , então, $SS_y = SS_x$ (respetivamente, $SS_y = \alpha^2 SS_x$) .
3.6	Justificar, dado $n \in \mathbb{N}$ e uma amostra = (x_1, x_2, …, x_n) , que $SS_x = \Sigma_j^m = {}_1(\tilde{x}_i - \bar{x})^2 n_j$, onde $\tilde{x}_1$, $\tilde{x}_2$, …, $\tilde{x}_m$ representam os m valores da amostra $\underset{\sim}{x}$ e n_j a frequência absoluta de $\tilde{x}_j$.
3.7	Designar, dado $n \in \mathbb{N}$ ($n > 1$) e uma amostra $\underset{\sim}{x}$ = (x_1, x_2, …, x_n) , $S_x^2 = \frac{SS_x}{n-1}$ por «variância da amostra $\underset{\sim}{x}$ » e $S_x = \sqrt{\frac{SS_x}{n-1}}$ por «desvio-padrão da amostra $\underset{\sim}{x}$ » .
3.8	Justificar, dado $n \in \mathbb{N}$ ($n > 1$) e uma amostra $\underset{\sim}{x}$ = (x_1, x_2, …, x_n) , que $S_x = 0$ se, e somente se, $x_1 = x_2 = … = x_n$.
3.9	Justificar, dados $n \in \mathbb{N}$ ($n > 1$), uma amostra $\underset{\sim}{x}$ = (x_1, x_2, …, x_n) e números reais h e a , que se $\underset{\sim}{y} = \underset{\sim}{x} + h$ (respetivamente, $\underset{\sim}{y} = \alpha\underset{\sim}{x}$) , então, $S_y = S_x$ (respetivamente, $S_y = \|\alpha\| S_x$) .
3.10	Reconhecer, dada uma variável estatística quantitativa x em determinada população, uma amostra A de dimensão $n > 1$ dessa população e sendo $\underset{\sim}{x}$ = (x_1, x_2, …, x_n) uma amostra correspondente da variável estatística x , que para todo o $k > 0$ a percentagem dos elementos da amostra A nos quais os valores da variável estatística têm desvios em relação à média superiores a k desvios-padrão é inferior a $\frac{1}{k^2}$ e interpretar este resultado como tradução quantitativa da afirmação segundo a qual o par ($\bar{x}$, S_x) reflete a distribuição dos valores da amostra em termos de “localização” e de “dispersão”.
3.11	Reconhecer que para comparar a “dispersão” dos valores dos elementos de duas ou mais amostras em torno da média, faz sentido comparar as respetivas variâncias (ou os respetivos desvios-padrão), sempre que a característica quantitativa em análise seja a mesma nas diversas amostras e que a respetiva medida esteja calculada na mesma unidade.

3.	***Definir e conhecer propriedades da variância e do desvio-padrão de uma amostra (cont.)***
3.12	Saber, dada uma população, que existem critérios que conduzem à recolha de amostras cujas médias e desvios-padrão são considerados boas estimativas da média e do desvio-padrão da população.
4.	***Definir e conhecer propriedades do percentil de ordem k***
4.1	Designar, dado $n \in \mathbb{N}$ e uma amostra $\underset{\sim}{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, por «amostra $\underset{\sim}{x}$ ordenada» a sequência $(x_{(1)}, x_{(2)}, \ldots, x_{(n)})$ tal que $x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq \ldots \leq x_{(n)}$, com os mesmos valores que a amostra $\underset{\sim}{x}$, cada um deles figurando na sequência um número de vezes igual à respetiva frequência absoluta enquanto valor da amostra $\underset{\sim}{x}$.
4.2	Designar, dado $n \in \mathbb{N}$, uma amostra $\underset{\sim}{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ e um número natural k do intervalo $]0, 100]$, por «percentil de ordem k» o valor máximo da amostra, se $k = 100$; a média dos elementos de ordem $\frac{kn}{100}$ e $\frac{kn}{100} + 1$ na amostra ordenada, se $k \neq 100$ e $\frac{kn}{100}$ for inteiro, e nos restantes casos, o elemento de ordem $\left[\frac{kn}{100}\right] + 1$ na amostra ordenada, (onde, para $x \in \mathbb{R}$, « $[x]$ » designa a «parte inteira de x», ou seja, o maior número natural inferior ou igual a x) e representá-lo por « P_k ».
4.3	Reconhecer, dado $n \in \mathbb{N}$ e uma amostra $\underset{\sim}{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, que P_{50} é igual à mediana de $\underset{\sim}{x}$ e saber que também é usual definir o primeiro e o terceiro quartil de modo a coincidirem, respetivamente, com P_{25} e P_{75}.
4.4	Designar, dados números naturais n e k, $k \leq 100$, uma sequência crescente de números reais $(a_1, a_2, \ldots, a_m)$ e um conjunto de dados quantitativos organizados nos intervalos de classe $[a_i, a_{i+1}[$, que se supõem de igual amplitude $h > 0$, por «percentil de ordem k», o número x tal que $\sum_{i=1}^{L-1} (a_i +_1 - a_i)n_i + (x - a_L)n_L = \frac{K}{100} \sum_{i=1}^{m} (a_{i+1} - a_i)n_i$, ou seja, tal que $h\sum_{i=1}^{L-1} + (x - a_L)n_L = \frac{khn}{100}$ onde n_i é a frequência absoluta do intervalo de classe $[a_i, a_{i+1}[$ e L é o maior número natural tal que $\sum_{i=1}^{L-1} n_i \leq \frac{kn}{100}$.
5.	***Resolver problemas***
5.1	+Resolver problemas envolvendo a média e o desvio-padrão de uma amostra.
5.2	+Resolver problemas envolvendo os percentis de uma amostra.

ESTATÍSTICA EST11

RETA DE MÍNIMOS QUADRADOS, AMOSTRAS BIVARIADAS E COEFICIENTE DE CORRELAÇÃO

1. Determinar os parâmetros da reta de mínimos quadrados

1.1. Designar, fixado um referencial ortogonal num plano e dados um número natural n, uma sequência ($P_1(x_1,y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$,…,$P_n(x_n, y_n)$) de pontos desse plano e uma reta t de equação $y = ax + b$ $(a, b \in \mathbb{R})$ por «desvio vertical do ponto $P_i(x_i, y_i)$ em relação à reta t» ($i \in \{1,2, \ldots, n\}$) a quantidade $y_i - ax_i - b$, interpretá-lo geometricamente e representá-lo por «e_i».

1.2. Provar, fixado um referencial ortogonal num plano e dados um número natural n, uma sequência ($P_1(x_1,y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$,…,$P_n(x_n, y_n)$) de pontos desse plano e uma reta t de equação $y = ax + b$ $(a, b \in \mathbb{R})$, que as condições $\sum_{i=1}^{n} e_i = 0$ e $b = \bar{y} - a\bar{x}$ são equivalentes, onde $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$ e $\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n}$.

1.3. +Reconhecer, fixado um referencial ortogonal num plano e dados um número natural n, uma sequência ($P_1(x_1,y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$,…,$P_n(x_n, y_n)$) de pontos desse plano, não pertencentes a uma mesma reta vertical, e uma reta t de equação $y = ax + b$ $(a, b \in \mathbb{R})$, onde $a \in \mathbb{R}$ e $b = \bar{y} - a\bar{x}$, ou seja, tal que é nula a soma $\sum_{i=1}^{n} e_i$ dos desvios verticais da sequência de pontos em relação à reta t, que a função definida em $\mathbb{R}$ pela expressão $f(a) = \sum_{i=0}^{n} {e_i}^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - ax_i - b)^2$ atinge um mínimo absoluto no ponto $a = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}}{SS_x}$ e designar a reta t com esse declive (e ordenada na origem igual a $b = \bar{y} - a\bar{x}$) por «reta de mínimos quadrados» da sequência de pontos.

1.4. Identificar, dadas duas variáveis estatísticas quantitativas x e y em determinada população e uma amostra A de dimensão $n \in \mathbb{N}$ dessa população cujos elementos estão numerados de 1 a n, a «amostra bivariada das variáveis estatísticas x e y» (ou simplesmente «amostra de dados bivariados (quantitativos)») como a sequência ($P_1(x_1,y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$,…,$P_n(x_n, y_n)$), representá-la por «$\underset{\sim}{(x, y)}$» e designar por «dimensão da amostra bivariada» o número natural n.

1.5. Determinar, em casos concretos de amostras de dados bivariados, qual das variáveis estatísticas deverá ser tomada como independente e qual deve ser tomada como dependente, utilizando argumentos que envolvam o conhecimento empírico das condicionantes físicas (ou outras) que poderão ter determinado a estrutura de relação entre as duas variáveis estatísticas.

1.6. Designar, dada uma amostra de dados bivariados, a variável considerada dependente por «variável resposta» e a variável considerada independente por «variável explicativa».

1.7. Designar, fixado um referencial ortonormado num plano, $n \in \mathbb{N}$ e uma amostra de dados bivariados quantitativos $\underset{\sim}{(x, y)}$=((x_1,y_1),(x_2, y_2),…,(x_n, y_n))», por «nuvem de pontos» o conjunto {$P_1(x_1,y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$,…,$P_n(x_n, y_n)$} e saber que uma análise visual e intuitiva da nuvem de pontos poderá permitir argumentar se será ou não adequada a interpretação da relação entre as duas variáveis estatísticas através do ajustamento da reta de mínimos quadrados.

1.8. Determinar, dada uma amostra de dados bivariados quantitativos e após a escolha da variável resposta e da variável explicativa e, ainda, da avaliação empírica da possível existência de relação linear entre as duas variáveis estatísticas mediante a observação da representação gráfica da nuvem de pontos, o declive e a ordenada na origem da reta de mínimos quadrados.

1.9. Designar, dado um número natural e uma amostra de dados bivariados quantitativos $\underset{\sim}{(x, y)}$, por «coeficiente de correlação linear» o quociente $\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{SS_x SS_y}}$, representá-lo por «$r$» , reconhecer que $r = a\sqrt{\frac{SS_x}{SS_y}}$ onde a é o declive da reta de mínimos quadrados, justificar que r e a têm o mesmo sinal e saber que |r| é sempre menor ou igual a 1, tomando o valor 1 unicamente nos casos em que todos os pontos $P_i(x_i, y_i)$, $1 \leq i \leq n$ estão alinhados e referir que a «associação linear entre as variáveis estatísticas» é positiva (respetivamente negativa) se $r > 0$ (respetivamente se $r < 0$) e que é tão mais «forte» quanto mais perto de 1 estiver |r|.

2. Resolver problemas	
2.1.	+Resolver problemas envolvendo a determinação da reta de mínimos quadrados.
2.2.	+Resolver problemas cujo contexto seja o da análise de dados bivariados, envolvendo a identificação da variável resposta e da variável explicativa e a análise empírica do ajustamento da reta de mínimos quadrados.
2.3.	+Resolver problemas envolvendo o cálculo e interpretação do coeficiente de correlação.