



Maria Rita Conde Barroso Geraldes

Licenciada em Ciências da Engenharia

Elementos finitos híbridos-Trefftz 'p'-adaptativos para problemas de condução de calor

Dissertação para obtenção do Grau de Mestre em
Engenharia Civil - Perfil de Estruturas

Orientador: Professor Doutor Dragoș Ionuț Moldovan
Instituto Superior Técnico, Universidade de Lisboa

Co-orientadora: Professora Doutora Ildi Cismașiu
Faculdade de Ciências e Tecnologia, Universidade Nova
de Lisboa

Júri:

Presidente: Professor Doutor Rodrigo M. Gonçalves
Arguente: Professor Doutor José Paulo Baptista Moitinho de Almeida
Vogal: Professora Doutora Ildi Cismașiu



Novembro de 2016

“Copyright” Maria Rita Conde Barroso Geraldes, FCT/UNL e UNL

A Faculdade de Ciências e Tecnologia e a Universidade NOVA de Lisboa têm o direito, perpétuo e sem limites geográficos, de arquivar e publicar esta dissertação através de exemplares impressos reproduzidos em papel ou de forma digital, ou por qualquer outro meio conhecido ou que venha a ser inventado, e de a divulgar através de repositórios científicos e de admitir a sua cópia e distribuição com objetivos educacionais ou de investigação, não comerciais, desde que seja dado crédito ao autor e editor.

Agradecimentos

Em primeiro lugar, quero agradecer ao meu orientador Professor Ionuț Moldovan pela imensa paciência, motivação, enorme ajuda e ainda pelo seu gosto em ensinar e orientar, que me influenciou muito no desenvolvimento desta dissertação.

Quero agradecer também à minha co-orientadora Professora Ildi Cismaşiu, por me ter dado a oportunidade de desenvolver esta dissertação, pela sua constante disponibilidade e encorajamento.

Aos meus amigos da faculdade, Bernardo, João Pedro, Joana, Jorge, Nuno e Vasco, obrigada por aturarem as minhas crises e lamúrias como ninguém, adorei ter partilhado este percurso com vocês.

Um enorme obrigada às minhas grandes amigas, Beatriz, Marta e Sheila por todos os momentos.

Aos meus amigos “professores” de surf e skate, António, Francisco, João e Luísinha, obrigada por serem sempre uma ótima companhia e por me terem proporcionado momentos para descontraír quando precisei.

Quero também agradecer ao Cascão, pelas dicas de programação e à Teresa, pela companhia indispensável naqueles dias de tanto calor.

Um obrigada muito especial ao André, pelo apoio incondicional em todo o meu percurso académico, pelos conselhos e amizade. Sei que posso contar sempre contigo.

Por fim, mas não menos importante, quero agradecer à minha família por todo o vosso apoio e carinho. Sem vocês tinha o dobro dos cabelos brancos.

Resumo

Neste trabalho é desenvolvido o modelo de temperatura dos elementos finitos híbridos-Trefftz para a resolução de problemas de transferência de calor, por condução, em regime estacionário, utilizando procedimentos de refinamento ' p '-adaptativo.

Na formulação híbrida-Trefftz de temperatura, as bases de aproximação das temperaturas e dos fluxos de calor satisfazem localmente todas as equações governativas no domínio do problema. Assim, as bases incluem as soluções da equação governativa do problema (equação de Poisson), o que possibilita que todos os termos que constituem o sistema resolutivo sejam calculados através de integrais na fronteira. Ademais, a informação física contida nas bases de aproximação promove a utilização de "macro-elementos", que constituem elementos de grande dimensão envolvendo muitos graus de liberdade e geometrias arbitrárias.

Os elementos híbridos-Trefftz aqui desenvolvidos usam funções de aproximação estritamente hierárquicas e independentes da geometria dos elementos. Esta opção possibilita a definição de bases de aproximação diferentes para cada elemento e fronteira essencial (refinamento ' p ' localizado), o que torna a definição do modelo consideravelmente mais flexível do que a dos elementos finitos conformes implementados na maioria dos programas de cálculo automático. No entanto, a gestão desta flexibilidade nem sempre é fácil para utilizadores mais inexperientes, podendo comprometer a estabilidade numérica do sistema resolutivo e portanto levar a resultados não fiáveis.

O algoritmo ' p '-adaptativo implementado neste trabalho tem como objetivo facilitar a utilização dos elementos finitos híbridos-Trefftz por parte de analistas inexperientes através da escolha automática dos graus das bases de aproximação, tornado assim estes elementos mais fáceis de utilizar.

Partindo de um refinamento mínimo inicial, o algoritmo procura encontrar uma combinação "ótima" de graus de liberdade das bases de aproximação nas fronteiras e nos domínios dos elementos, através da análise do efeito que cada refinamento possível tem sobre a qualidade da solução. Essa análise é feita com base em dois critérios, um local, baseado na avaliação da satisfação das condições cinemáticas em cada fronteira candidata a refinamento, e outro global, baseado na avaliação do efeito dos mesmos refinamentos na convergência da energia térmica.

A implementação do algoritmo foi feita no âmbito de uma plataforma computacional existente, tirando partido dos procedimentos padronizados de pré- e pós-processamento já disponíveis. A utilização desta plataforma é melhorada pela inclusão de uma interface gráfica muito simples de utilizar, que torna intuitiva a definição do modelo.

A formulação dos elementos finitos híbridos-Trefftz foi avaliada através da análise da sua convergência sob refinamentos ' p ' e ' h '. A convergência dos elementos foi confirmada, tendo-se detetado uma maior eficiência do refinamento ' p '. Uma comparação dos elementos finitos híbridos-Trefftz com elementos finitos convencionais verificou que os primeiros produzem soluções com mais qualidade, utilizando um número inferior de graus de liberdade.

O algoritmo ' p '-adaptativo foi avaliado através da análise do desempenho dos critérios de seleção

implementados. A qualidade das soluções resultou bastante semelhante para os dois critérios, e verificou-se, sempre, a convergência da energia térmica. Compararam-se ainda as soluções obtidas com elementos híbridos-Trefftz com as obtidas com elementos finitos puramente híbridos, tendo-se concluído que a utilização dos primeiros proporciona soluções de qualidade semelhante em menos tempo computacional e com menos graus de liberdade, mas à custa de uma maior instabilidade numérica do sistema governativo.

Palavras chave:

Problemas de transferência de calor
Elementos finitos híbridos-Trefftz
Modelo de temperatura
Refinamento ' p '-adaptativo

Abstract

This work reports the development of the temperature model of the hybrid-Trefftz finite elements for steady-state heat conduction problems, with automatic p-adaptive capabilities.

As typical of hybrid-Trefftz elements, the temperature and heat flux approximations satisfy locally all governing equations in the domain of the problem, meaning that their bases are constructed using the complementary and particular solutions of the governing (Poisson) equation. A direct consequence of this choice of shape functions is that all terms in the finite element solving system are reduced to boundary integral expressions. Moreover, the physical information embedded in the approximation bases enables the use of very large finite elements of arbitrary shapes and with arbitrary numbers of degrees of freedom.

The strictly hierarchical architecture of the approximation bases enables the independent definition of the ' p '-refinement level for each finite element and essential boundary, which adds considerable flexibility to the construction of the model when compared to the conforming finite elements implemented in the vast majority of commercial finite element software. The price paid for such flexibility is the increased difficulty that an inexperienced analyst may feel in correctly calibrating the ' p '-refinement orders for all mesh entities, since failure to do so may compromise the numerical stability of the solving system and lead to unreliable solutions. The goal of the ' p '-adaptive algorithm implemented in this work is to enable an inexperienced analysts to take advantage of the capabilities of the hybrid-Trefftz elements by automatically choosing adequate refinements for each approximation basis. Starting from an initial refinement specified by the user, the algorithm analyses the impact of each refinement increment on the quality of the finite element solution, in search for an 'optimal' combination of ' p '-refinement orders. This analysis is based on two alternative selection criteria, namely a local criterion which quantifies the improvement of the kinematic boundary condition on each Dirichlet boundary as a result of the refinement increment, and a global criterion, which assesses the convergence of the thermal energy over the entire mesh.

The algorithm was inserted into an existing computational platform, taking advantage of the standard pre- and post-processing procedures implemented therein. The user is assisted with an intuitive, user-friendly graphical interface for the data input witch provides an improved experience. The convergence of the hybrid-Trefftz finite elements to known analytic solutions was tested under both ' h '- and ' p '-refinements. Convergent solutions were obtained for both cases, with a clear edge in terms of order of convergence for the ' p '-refinement strategy. A comparison between conforming and hybrid-Trefftz temperature finite elements revealed that the latter were able to recover the correct solution with more accuracy and much less degrees of freedom. The automatic p-adaptive algorithm was assessed through a set of convergence analyses using both the local and global selection criteria. It was found that the quality of the final solutions is similar for both criteria. Convergence to accurate solutions was reported in all tested cases. Finally, the algorithm was tested against a similar ' p '-adaptive technique which uses pure hybrid temperature elements. Similar quality solutions were recovered by the hybrid-Trefftz elements in fewer computational time and with less degrees of

freedom. However, more unstable solving systems were also reported.

Keywords:

Heat conduction problems
Hybrid-Trefftz finite elements
Temperature model
Automatic ' p '-adaptive refinement

Índice

Agradecimentos	i
Resumo	iii
Abstract	v
Índice de Figuras	xi
Índice de Tabelas	xv
Lista de abreviaturas, siglas e símbolos	xvii
1 Introdução	1
1.1 Motivação e objetivos	1
1.2 Formulações híbridas de elementos finitos	2
1.3 Estado de arte	3
1.4 Organização do trabalho	6
2 Problemas de transferência de calor	9
2.1 Introdução	9
2.2 Condução	9
2.3 Condições de fronteira	12
2.4 Convecção	13
2.5 Radiação	14
2.6 Hipóteses simplificativas	15
3 Elementos finitos híbridos-Trefftz de temperatura	17
3.1 Introdução	17
3.2 Discretização do espaço	17
3.3 Bases de aproximação	18
3.3.1 Bases no domínio	18
3.3.2 Bases nas fronteiras	20
3.4 Formas fracas	21
3.5 Equações no domínio	22
3.6 Equações nas fronteiras	24
3.7 Sistema resolutivo	25
3.8 Indeterminação estática e cinemática	25
3.9 Energia térmica	26

4	Implementação dos elementos finitos híbridos-Trefftz	29
4.1	Introdução	29
4.2	Sistemas de referência	30
4.3	Pré-processamento	31
4.3.1	Interface gráfica	31
4.3.2	Geração da malha	32
4.3.3	Estruturas de dados	34
4.4	Processamento	37
4.4.1	Mapeamento do sistema	37
4.4.2	Integração numérica	38
4.4.3	Pré-condicionamento do sistema	40
4.4.4	Resolução do sistema	41
4.5	Pós-processamento	45
5	Refinamento 'p'-adaptativo	47
5.1	Introdução	47
5.2	Refinamento na fronteira	48
5.3	Refinamento no domínio	50
5.4	Procedimento adaptativo	50
5.4.1	Critérios de refinamento	50
5.4.2	Critérios de paragem	51
6	Implementação do refinamento 'p'-adaptativo	53
6.1	Introdução	53
6.2	Pré-processamento	53
6.2.1	Interface gráfica	53
6.2.2	Estrutura de dados	54
6.3	Processamento	56
6.3.1	Descrição do algoritmo	56
6.3.2	Refinamento na fronteira	57
6.3.3	Refinamento no domínio	59
6.3.4	Critérios de paragem	61
6.4	Pós-processamento	62
7	Estudo numérico dos elementos finitos híbridos-Trefftz de temperatura	63
7.1	Introdução	63
7.2	Análise da convergência	63
7.2.1	Solução analítica	64
7.2.2	Modelo de teste	66
7.2.3	Resultados	66
7.3	Comparação dos elementos finitos híbridos-Trefftz com elementos finitos convencionais	69
7.4	Caso de estudo de maior complexidade	71

8	Estudo numérico do refinamento ‘p’-adaptativo	73
8.1	Introdução	73
8.2	Problema bi-simétrico	74
8.2.1	Descrição do problema	74
8.2.2	Gráficos de convergência	75
8.2.3	Campos das soluções	76
8.2.4	Comparação com elementos finitos híbridos	76
8.3	Problema assimétrico	78
8.3.1	Descrição do problema	78
8.3.2	Gráficos de convergência	78
8.3.3	Campos das soluções	80
8.3.4	Comparação com elementos finitos híbridos	83
9	Conclusões e desenvolvimentos futuros	85
9.1	Conclusões	85
9.2	Desenvolvimentos futuros	87
	Referências bibliográficas	89
A	Funções do programa	95
A.1	Funções de interface gráfica	95
A.2	Funções do tronco principal do programa	96
A.3	Funções de biblioteca	99
B	Exemplo de utilização do software	101
B.1	Descrição do problema	101
B.2	Interfaces gráficas	102
B.2.1	Interface gráfica 1: Definições da estrutura e algoritmos	102
B.2.2	Interface gráfica 2: Definição do tipo de fronteiras	108
B.2.3	Interface gráfica 3: Definição das condições de fronteira	109
B.2.4	Interface gráfica 4: Definições do algoritmo adaptativo	110
B.2.5	Interface gráfica de verificação	111
B.3	Pós-processamento	112
B.3.1	Análise não adaptativa	112
B.3.2	Análise adaptativa	114

Índice de Figuras

2.1	Transmissão de calor por condução	10
2.2	Condução térmica num elemento de volume infinitesimal	11
2.3	Domínio (Ω) e fronteiras de Dirichlet (Γ_u) e de Neumann (Γ_σ)	13
2.4	Transmissão de calor por convecção	14
2.5	Transmissão de calor por radiação	15
3.1	Domínio do problema e fronteiras de Dirichlet, Neumann e interiores	18
4.1	Sistemas de referência	30
4.2	Fluxograma das interfaces gráficas	31
4.3	Malha regular de elementos finitos e orientação das arestas	32
4.4	Exemplo de malha não regular de elementos finitos	33
4.5	Matrizes \mathbf{K} e \mathbf{B} constituintes do sistema resolutivo para o exemplo da figura 4.3 com todas as fronteiras do tipo Dirichlet, ordem $n_D = 4$ no domínio e ordem $n_\Gamma = 1$ nas fronteiras.	38
4.6	Mapeamento da matriz dos coeficientes	39
4.7	Vetorização das matrizes de condutibilidade \mathbf{K}	40
4.8	Valores singulares (VS) e números de condição	42
4.9	Temperatura e fluxos, em x e y, para o caso ($n_D = 7$, $n_{\Gamma_i} = 0$ e $n_{\Gamma_e} = 4$)	43
4.10	Temperatura e fluxos, em x e y, para o caso ($n_D = 7$, $n_{\Gamma_i} = 0$ e $n_{\Gamma_e} = 5$)	43
4.11	Deteção de valores singulares para os casos $n_{\Gamma_e} = 4$ e $n_{\Gamma_e} = 5$	44
6.1	Fluxograma do pré-processamento, análise inicial e refinamento nas fronteiras	58
6.2	Fluxograma do refinamento no domínio e critérios de paragem	60
6.3	Fluxograma dos critérios de convergência	61
6.4	Fluxograma do pós-processamento	62
7.1	Condições de fronteira do modelo em análise	64
7.2	Temperatura e fluxos, em x e y, para $a = \frac{\pi}{2}$	65
7.3	Temperatura e fluxos, em x e y, para $a = \pi$	65
7.4	Temperatura e fluxos, em x e y, para $a = \frac{3\pi}{2}$	65
7.5	Temperatura e fluxos, em x e y, para $a = 2\pi$	65
7.6	Refinamentos ' h ' utilizados	66
7.7	Convergência da solução para refinamentos ' p ' e ' h '	67
7.8	Campos da temperatura e fluxos de calor para 1 elemento e refinamentos nos domínios e fronteiras essenciais de $n_D = 3$ e $n_\Gamma = 0$, respetivamente.	68

7.9	Campos da temperatura e fluxos de calor para 4 elementos e refinamentos nos domínios e fronteiras essenciais de $n_D = 8$ e $n_\Gamma = 3$, respetivamente. . . .	68
7.10	Campos da temperatura e fluxos de calor para 16 elementos e refinamentos nos domínios e fronteiras essenciais de $n_D = 8$ e $n_\Gamma = 3$, respetivamente. . . .	68
7.11	Definição do problema	69
7.12	Campo da temperatura e campos dos fluxos em x e y utilizando elementos finitos convencionais [55]	69
7.13	Campo da temperatura e campos dos fluxos em x e y utilizando elementos finitos convencionais [55]	70
7.14	Campo da temperatura e campos dos fluxos em x e y utilizando elementos finitos híbridos-Trefftz	70
7.15	Características do problema	72
7.16	Campos das soluções	72
8.1	Modelo bi-simétrico e refinamento 'h' adotado	74
8.2	Energia térmica e densidade máxima do resíduo na fronteira ao longo do processo iterativo para uma tolerância de seleção de 0.99	75
8.3	Graus de refinamento, campo da temperatura e campos dos fluxos em x e y para ambos os critérios de refinamento e tolerância de seleção de 0.99	76
8.4	Graus de refinamento, campo da temperatura e campos dos fluxos em x e y para uma tolerância de seleção de 0.99 (elementos finitos híbridos)	77
8.5	Caso de estudo assimétrico e refinamento 'h' adotado	78
8.6	Energia térmica e densidade máxima do resíduo na fronteira ao longo do processo iterativo para uma tolerância de seleção de 0.99	79
8.7	Energia térmica e densidade máxima do resíduo na fronteira ao longo do processo iterativo para uma tolerância de seleção de 0.9	79
8.8	Energia térmica e densidade máxima do resíduo na fronteira ao longo do processo iterativo para uma tolerância de seleção de 0.6	79
8.9	Graus de refinamento, campo da temperatura e campos dos fluxos em x e y para o critério de refinamento da energia térmica e tolerância de seleção 0.99	81
8.10	Graus de refinamento, campo da temperatura, campos dos fluxos em x e y para o critério de refinamento da densidade máxima do resíduo na fronteira e tolerância de seleção 0.99	81
8.11	Graus de refinamento, campo da temperatura, campos dos fluxos em x e y para o critério de refinamento da energia térmica e tolerância de seleção 0.9	81
8.12	Graus de refinamento, campo da temperatura, campos dos fluxos em x e y para o critério de refinamento da densidade máxima do resíduo na fronteira e tolerância de seleção 0.9	82
8.13	Graus de refinamento, campo da temperatura, campos dos fluxos em x e y para o critério de refinamento da energia térmica e tolerância de seleção 0.6	82
8.14	Graus de refinamento, campo da temperatura, campos dos fluxos em x e y para o critério de refinamento da densidade do resíduo na fronteira e tolerância de seleção 0.6	82
8.15	Graus de refinamento, campo da temperatura, campo dos fluxos em x e y para formulação híbrida-Trefftz, utilizando o critério de variação da energia térmica e tolerância de seleção 0.99	83

8.16	Graus de refinamento, campo da temperatura, campo dos fluxos em x e y para a formulação híbrida, utilizando o critério de variação da energia térmica e tolerância de seleção 0.99	83
8.17	Graus de refinamento, campo da temperatura, campo dos fluxos em x e y para a formulação híbrida-Trefftz, utilizando o critério de refinamento da densidade máxima do resíduo na fronteira e tolerância de seleção 0.99	83
8.18	Graus de refinamento, campo da temperatura, campo dos fluxos em x e y para a formulação híbrida, utilizando o critério de refinamento da densidade máxima do resíduo na fronteira e tolerância de seleção 0.99	84
B.1	Descrição do problema	101
B.2	Configuração da GUI 1	102
B.3	Interface gráfica GUI 1 com os dados não guardados (a), e com os dados guardados (b)	104
B.4	Definição de uma malha regular numa estrutura retangular	104
B.5	Interface gráfica 1, para gerador de malha não regular	105
B.6	Descrição do ecrã inicial da interface pdetool	106
B.7	Definição inicial da geometria	106
B.8	Definição final da geometria	107
B.9	Malhas utilizadas para o problema apresentado na figura B.1	108
B.10	Configuração da GUI 2	108
B.11	Configuração da interface de visualização	109
B.12	Configuração da GUI 3	109
B.13	Configuração da GUI 4	110
B.14	Visualização da malha na interface de verificação	112
B.15	Visualização das condições de fronteira da estrutura na interface de verificação	112
B.16	Campos de temperatura e fluxos de calor para a análise não adaptativa utilizando a malha mais refinada	113
B.17	Campos de temperatura e fluxos de calor para a análise não adaptativa utilizando a malha menos refinada	113
B.18	Graus de refinamento finais e campos de temperatura e fluxos de calor para a análise adaptativa do problema apresentado na figura B.1, utilizando a malha menos refinada	114
B.19	Gráficos de convergência resultantes da análise adaptativa do problema apresentado na figura B.1, utilizando a malha menos refinada	115

Índice de Tabelas

1.1	Características base das formulações híbrida e híbrida-Trefftz [45]	4
4.1	Dados topológicos	33
4.2	Estrutura de dados Edges	34
4.3	Estrutura de dados Loops	36
4.4	Estrutura de dados BConds	37
6.1	Estrutura List - Variáveis locais	54
6.2	Estrutura List - Variáveis globais	55
7.1	Refinamentos ' p ' utilizados	66
8.1	Parâmetros essenciais ao funcionamento do algoritmo ' p '-adaptativo.	74
B.1	Valores recomendados para as ordens das bases de aproximação nos domínios e fronteiras essenciais	103
B.2	Parâmetros que calibram o procedimento automático de refinamento e valores recomendados	111

Lista de abreviaturas, siglas e símbolos

Lista de Abreviaturas

EFHT: Elementos finitos híbridos-Trefftz

GUI: Interface gráfica

GDL: Graus de liberdade

LHS: Matriz dos coeficientes do sistema governativo (*Left-hand side*)

MEF: Método dos elementos finitos

NaN: *Not a number*

NGP: Número de pontos da quadratura de Gauss-Legendre

RHS: Vetor livre do sistema governativo (*Right-hand side*)

Lista de Siglas

FCT-UNL: Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa

IST-UL: Instituto Superior Técnico da Universidade de Lisboa

Lista de Símbolos

Símbolos Gerais

A : Área da superfície lateral de um corpo

T : Temperatura

Q : Quantidade de calor

q : Fluxo de calor

q_x, q_y, q_z : Fluxos de calor na direção dos eixos de um referencial Cartesiano

t : Tempo

Ω : Domínio do problema

Γ_u : Fronteira de Dirichlet

Γ_σ : Fronteira de Neumann

Γ_i : Fronteira interior

T_Γ : Temperatura aplicada na fronteira de Dirichlet

q_Γ : Fluxo de calor normal aplicado na fronteira de Neumann

T_s : Temperatura média de um fluido

σ : Constante de Stefan Boltzmann

\diamond^e : Quantidade \diamond do elemento

\diamond^T : Quantidade \diamond transposto

$\hat{\diamond}$: Quantidade \diamond conjugada

$d\diamond$: Diferencial da quantidade \diamond

$\Delta\diamond$: Variação da quantidade \diamond

\emptyset : Conjunto vazio

\cup : União de conjuntos

\cap : Interseção de conjuntos

α : Valor da indeterminação estática

β : Valor da indeterminação cinemática

U_p : Solução particular da equação de Poisson

C_n : Polinómio de Chebyshev de grau n

N_D : Número total de funções de aproximação incluídas na base do domínio

n_D : Ordem das funções de aproximação incluídas na base do domínio

N_Γ : Número total de polinómios incluídos na base da fronteira essencial

n_Γ : Grau máximo dos polinómios incluídos na base da fronteira essencial

R : Resíduo

W_j : Funções de peso

U : Energia térmica

∇ : Operador gradiente

∇^T : Operador divergência

∇^2 : Operador Laplaciano

L_Γ : Comprimento da fronteira

$\epsilon_{\Delta U}$: Valor médio da variação da energia térmica

ϵ_Γ : Densidade do erro na fronteira

$\epsilon_{\epsilon_\Gamma}$: Valor médio da densidade do erro na fronteira

\bar{Z} : Função de aproximação adicionada à base na fronteira

\bar{Y} : Fluxo generalizado associado à função \bar{Z}

\bar{T}_Γ : Temperatura imposta generalizada, referente ao refinamento na fronteira

Matrizes e Vetores

U: Base de aproximação do campo de temperaturas no domínio

Z: Base polinomial de aproximação dos fluxos de calor nas fronteiras essenciais

K: Matriz de condutibilidade

B: Matriz de fronteira

X: Vetor das temperaturas generalizadas

Y: Vetor dos fluxos generalizados

T_Γ: Vetor das temperaturas generalizadas

q_Γ: Vetor dos fluxos de calor generalizados

n: Normal unitária à fronteira

ΔX: Vetor da variação da solução

Características dos materiais

k: Condutibilidade térmica

ρ: Massa específica do material

c: Calor específico do material

h_s: Coeficiente de transmissão do calor

ε: Emissividade térmica

α: Difusividade térmica

Capítulo 1

Introdução

1.1 Motivação e objetivos

Os problemas de transferência de calor estão presentes em inúmeras atividades do nosso dia a dia e têm uma importância muito significativa em várias áreas da engenharia, nomeadamente civil, mecânica, física, aeronáutica entre outras. Quando sujeitos a elevadas temperaturas, os materiais que compõem os elementos estruturais sofrem variações muito significativas das suas propriedades mecânicas, causando uma importante diminuição da sua capacidade resistente, o que pode levar ao colapso de um edifício.

Para se poder dimensionar as estruturas de modo a evitar este fenómeno, é preciso prever o efeito da variação da temperatura antes que a mesma aconteça. Isto leva a que seja necessário obter um modelo virtual da resposta dos elementos estruturais a alterações de temperatura ou à aplicação de fluxos de calor. Perante esta necessidade, tem-se investido no desenvolvimento de modelos matemáticos que representam esses fenómenos e de técnicas numéricas para a sua resolução.

O modelo matemático de um fenómeno físico consiste num conjunto de equações algébricas, diferenciais ou integrais, que tentam exprimir as características essenciais do seu comportamento. A resolução destes modelos depende da complexidade das equações que o constituem, do domínio onde o problema se coloca e das respetivas condições de fronteira. Quando se trata de problemas relativamente simples, envolvendo geometrias simples e com condições de fronteiras simples, é comum conseguir utilizar métodos analíticos para a sua resolução. Porém, muitos dos problemas reais envolvem geometrias complicadas e complexas condições de fronteira, não havendo maneira de os resolver analiticamente. Graças ao grande desenvolvimento da tecnologia computacional, tornou-se possível aceder a computadores digitais que possibilitaram a obtenção rápida e precisa de soluções suficientemente bem aproximadas de problemas com elevada complexidade, usando métodos numéricos [32].

Os métodos numéricos mais populares na resolução de problemas complexos são os métodos das diferenças finitas, volumes finitos e elementos finitos. No entanto, graças à elevada precisão de resultados obtidos, grande versatilidade e à sua capacidade de modelar de forma precisa geometrias arbitrárias das fronteiras e do domínio, o método dos elementos finitos tem vindo a ser o método numérico mais usado, quer na resolução de problemas complexos de transferência de calor, quer na resolução de equações diferenciais de derivadas parciais em geral [13].

O conceito base de qualquer formulação do método dos elementos finitos é a divisão do domínio em pequenas parcelas (elementos finitos), com geometria mais simples, onde os campos físicos são aproximados através de uma combinação linear de funções relativamente simples (denominadas de funções de aproximação ou funções de forma) [68].

Atualmente, os elementos mais usados em programas de cálculo automático para a resolução de problemas de transmissão de calor são os elementos conformes de temperatura (convencionais). Estes elementos são estritamente compatíveis, ou seja, eles satisfazem localmente a equação de Fourier no domínio do elemento e as condições de continuidade das temperaturas (cinemáticas) nas fronteiras exteriores e interiores. Isto restringe muito a escolha das funções de aproximação e elimina praticamente a opção de se ter elementos com funções de forma com níveis de refinamento diferentes na mesma malha. O equilíbrio dos fluxos de calor é imposto em forma fraca no domínio dos elementos e nodalmente nas respectivas fronteiras. Isto tem repercussões na precisão da aproximação dos campos dos fluxos de calor que, comparativamente com os campos de temperaturas, são sempre de pior qualidade.

Em consequência disto, foram desenvolvidas formulações alternativas (não convencionais) de modo a ultrapassar as limitações dos elementos convencionais. Estas formulações fornecem soluções que não asseguram nem a compatibilidade nem o equilíbrio, mas têm maior flexibilidade na construção das bases de aproximação e proporcionam uma maior aproximação da precisão das soluções dos campos de temperaturas e fluxos de calor.

As formulações não convencionais podem ser classificadas em três classes, nomeadamente as híbridas-mistas, híbridas e híbridas-Trefftz [26].

Pretende-se demonstrar com este trabalho a aplicação do modelo de temperaturas dos elementos finitos híbridos-Trefftz para problemas de transferência de calor por condução em regime estacionário. Esta formulação foi desenvolvida e implementada usando o conceito de variáveis generalizadas (não-nodais) e com a estrutura das bases de aproximação de caráter hierárquico. Adicionalmente, foi possível o desenvolvimento de um algoritmo de refinamento ' p '-adaptativo que veio simplificar a utilização deste tipo de formulações para que utilizadores mais inexperientes consigam tirar partido das mesmas.

De salientar que o modelo desenvolvido e validado neste trabalho integra uma plataforma computacional baseada em elementos finitos híbridos que tem como objetivo ser disponibilizada abertamente à comunidade científica. A plataforma, desenvolvida com o objetivo de simplificar ao máximo a sua utilização, inclui atualmente *solvers* para problemas de valores de fronteira hiperbólicos, parabólicos e elípticos, com aplicação a análises acústicas, térmicas e estruturais. Para além de ser fácil de utilizar, devido às interfaces gráficas intuitivas para a introdução de dados, a plataforma computacional é facilmente expansível, proporcionando procedimentos padronizados para as sequências de pré e pós-processamento, integração numérica e resolução dos sistemas governativos.

1.2 Formulações híbridas de elementos finitos

Das três classes de elementos finitos não convencionais descritas na referência [26], neste trabalho são aplicados à resolução de problemas de condução térmica os modelos de temperatura dos elementos híbridos (desenvolvidos na referência [49]) e híbridos-Trefftz. Em ambos os modelos, as componentes normais dos fluxos de calor são diretamente aproximados nas fronteiras interelementares e de Dirichlet (com temperaturas impostas)

que o elemento contenha, e as suas bases de aproximação utilizadas para impor em média a continuidade das temperaturas nas fronteiras.

Independentemente da aproximação dos fluxos nas fronteiras, as formulações híbridas aqui utilizadas aproximam os campos das temperaturas nos domínios dos elementos. As bases de aproximação das temperaturas são naturalmente hierárquicas e associadas a variáveis não nodais, características que facilitam a implementação de refinamentos 'p'-adaptativos.

O que distingue os dois tipos de formulações híbridas aqui utilizadas são as condições impostas às bases de aproximação nos domínios. A formulação híbrida pura [49] impõe que o campo da temperatura no domínio satisfaça localmente a equação de Fourier (compatibilidade). As equações de condução (equilíbrio) no domínio, são impostas em forma fraca usando as funções de aproximação da temperatura como funções de peso.

A formulação híbrida-Trefftz é obtida a partir do correspondente modelo da formulação híbrida, restringindo a aproximação do campo das temperaturas de maneira a satisfazer exatamente todas as condições do domínio.

Uma grande vantagem da formulação híbrida-Trefftz comparativamente à formulação híbrida é o facto de a base de aproximação no domínio incorporar características físicas do problema em análise. Isto faz com que a integração de todos os termos do sistema resolutivo seja reduzida às fronteiras (como vai ser demonstrado na secção 3.5) e permite a utilização de elementos de grandes dimensões e a obtenção de soluções altamente precisas com um número relativamente pequeno de graus de liberdade. Estas vantagens levaram à escolha desta formulação para o presente trabalho. No entanto, quando comparada com a formulação híbrida, esta formulação envolve funções mais complexas, mais difíceis de integrar, e origina sistemas propensos a problemas de condicionamento.

Na tabela (1.1), adaptada da referência [45], estão presentes as características essenciais das duas classes da formulações híbridas.

1.3 Estado de arte

Pensa-se [68] que as bases matemáticas do método dos elementos finitos terão sido concebidas por volta dos anos 40 pelo trabalho de Hrennikoff e Courant [14, 33], onde soluções bastante satisfatórias foram alcançadas ao discretizar meios contínuos em parcelas mais pequenas. Mais tarde, os trabalhos desenvolvidos por Turner [61] e Argyris [2] deram início ao corrente método dos elementos finitos [68]. No entanto, foi apenas nos anos 60, por Clough [12], que se usou pela primeira vez o termo "elementos finitos" propriamente dito.

São destacadas de seguida algumas contribuições fundamentais no desenvolvimento do método dos elementos finitos, nos trabalhos de Synge [58], Veubeke [64], Bank [6], Varga [62] e principalmente de Zienkiewicz e Cheung [71] pelo primeiro livro sobre o método dos elementos finitos. Todos estes trabalhos, entre outros, ajudaram à ampliação das áreas de estudo deste método.

Ao mesmo tempo, foram desenvolvidos geradores automáticos de malhas de elementos finitos, permitindo o uso deste método em modelações computacionais de fenómenos reais, tridimensionais, de grande complexidade. Estes geradores funcionam para domínios arbitrários, onde apenas necessitam da informação geométrica do domínio e das dimensões máximas dos elementos. O trabalho pioneiro de Zienkiewicz e Phillips [70] e o trabalho do grupo de análise de estruturas do Departamento de Engenharia Civil no Instituto

Formulação	Híbrida temperatura	Híbrida-Trefftz temperatura
Constrangimentos na aproximação no domínio	Satisfaz equação Fourier	Satisfaz todas as equações no domínio
Aproximações no domínio	Temperatura	
Funções de aproximação no domínio	Flexíveis	Soluções da equação de Poisson
Aproximações na fronteira	Fluxos normais de calor	
Funções de aproximação na fronteira	Flexíveis	
Integração	Numérica	Numérica
Sistema de resolução	Regular, esparso	Pequeno, esparso

Tabela 1.1: Características base das formulações híbrida e híbrida-Trefftz [45]

Superior Técnico [52], são destacados para esta área de investigação.

Algumas aplicações deste método para problemas no domínio da térmica podem ser consultadas em [8, 66, 72].

As bases conceituais das formulações híbridas-Trefftz utilizadas no presente trabalho foram publicadas por Erich Trefftz em 1926 [60] como alternativa ao método de Rayleigh Ritz para a solução de problemas definidos por equações diferenciais com condições de fronteira. Trefftz propunha a aproximação da solução do problema utilizando funções tiradas do espaço das soluções da equação diferencial governativa, cujos fatores de participação são determinados de maneira a satisfazer o melhor possível as condições de fronteira. No entanto, nessa altura, o nível da tecnologia não permitiu a aplicação do método a problemas complexos. Só mais tarde, em 1973, apareceram as primeiras aplicações do método de Trefftz em algumas zonas particulares do domínio do problema [56], sendo o resto analisado através de elementos finitos convencionais.

O que impulsionou o desenvolvimento dos elementos finitos híbridos-Trefftz foi o artigo publicado, em 1978, por Jirousek [39] onde foram apresentadas quatro formulações utilizando elementos híbridos-Trefftz, que diferiam na forma como a continuidade entre elementos era imposta e na aproximação independente dos campos nas fronteiras. A partir desta altura foram desenvolvidas diversas contribuições ao método de Trefftz, destacando-se o trabalho de Herrera [30], que originou os princípios matemáticos fundamentais para a construção de bases Trefftz completas. O trabalho de Herrera veio assim consolidar os desenvolvimentos anteriores e fundamentar do ponto de vista matemático os trabalhos que se desenvolveram posteriormente.

As formulações desenvolvidas pelo grupo de investigação orientado por Jirousek, utilizam funções de peso dependentes dos nós (como os elementos finitos convencionais), na aproximação dos campos nas fronteiras dos elementos. A formulação localmente compatível apresentada na referência [42] aproxima os deslocamentos nas fronteiras dos elementos da maneira consagrada nos elementos finitos convencionais proporcionando, por isso, uma maneira direta de acoplar os dois tipos de elementos finitos na mesma malha. Alternativamente, nos elementos duais apresentados na referência [37], um campo de forças auto-equilibradas é assumido nas fronteiras do elemento, proporcionando assim uma solução enviesada para a qualidade dos campos de tensões

O trabalho de Jirousek contribuiu muito para a evolução dos elementos híbridos-Trefftz tanto a nível da sua formulação, como a nível da sua aplicação a diversos tipos de problemas, desde problemas de potencial a problemas de elasticidade em três dimensões e também no campo dos processos adaptativos. A aplicação deste tipo de elementos de Trefftz a problemas de potencial iniciou-se após os esforços de Zielinski e Zienkiewicz se direcionarem na resolução da equação de Laplace [69]. Deste modo, destacam-se no campo de problemas de condução térmica os trabalhos de Jirousek [43], Shaw [54], Wang e Qin [65] e Leitão [44]. No entanto, a área de estudo mais abrangida deste grupo de investigação é a análise de problemas de flexão em lajes (finas e espessas), destacando-se os trabalhos [40, 41, 38, 67]. Outros trabalhos que utilizam elementos finitos híbridos-Trefftz para a modelação das lajes incluem as contribuições de Piltner [51] para lajes espessas, e Qin [53] para a análise de lajes finas com comportamento isotrópico em fundações elásticas.

Outra abordagem ao método de Trefftz foi desenvolvida pela equipa de investigação coordenada por Freitas. Ao contrário do que acontece com as formulações desenvolvidas por Jirousek, todos os campos são aqui aproximados de forma independente dos nós, tanto no domínio como nas fronteiras dos elementos. Uma consequência disto foi o facto de se perder a interpretação física direta das variáveis dos elementos finitos, mas levou a que se adquirisse mais flexibilidade na construção das bases de aproximação e mais equilíbrio nos resultados das aproximações. O grupo de investigação liderado por Freitas aplicou este tipo de elementos híbridos-Trefftz a problemas elastostáticos planos tendo-se desenvolvido, tanto um modelo de tensão [24] como um modelo de deslocamento [16]. Foram ainda apresentadas formulações elastostáticas em três dimensões [19], elastoplásticas [29], e formulações elastodinâmicas [17, 23, 25]. Nas referências [22] e [46], este tipo de formulações estende-se à análise estática e dinâmica de materiais bifásicos (meios porosos saturados). Nas referências [47] e [48], os elementos finitos híbridos-Trefftz aplicam-se à análise elastodinâmica de meios porosos não saturados utilizando os seus modelos de deslocamento e tensão, respetivamente.

Um dos aspetos a ter em conta nas formulações de Trefftz é a facilidade em lidar com situações em que ocorrem altas concentrações de tensão (como em aberturas, fendas ou cargas concentradas) sem se ter de recorrer a refinamentos complexos da malha. A situação pode ser facilmente resolvida enriquecendo as bases de aproximação com funções que representam precisamente a solução na proximidade do local onde se encontra a singularidade. Alguns dos trabalhos de investigação de Jirousek apresentam exemplos de aplicação para casos onde ocorrem estas concentrações de tensões [63]. De salientar ainda alguns desenvolvimentos nesta área por parte de Freitas [27, 28] e Cismasiu [11].

Com o objectivo de melhorar a qualidade das soluções obtidas pelos elementos finitos híbridos-Trefftz foram desenvolvidas, desde cedo, algumas estratégias de refinamento 'p'-adaptativo. Uma das primeiras tentativas pertence ao Jirousek [36], no início dos anos

90, que propôs uma estratégia de refinamento ' p ' uniforme baseada no acréscimo gradual de nós nas fronteiras essenciais de todos os elementos. O critério de convergência utilizado baseava-se na quantificação das descontinuidades das tensões nos cantos dos elementos. Nos trabalhos de Freitas e Cismasiu [11, 18] e mais recentemente, nas referências [34, 49] são adotadas estratégias de refinamento ' p ' mais complexas, que tiram partido da flexibilidade adicional oferecida pelas bases independentes dos nós, que permite a definição de bases diferentes em cada elemento e fronteira essencial. Foram também realizadas estimativas de erro *a posteriori* com o objetivo de contribuir para o avanço dos processos adaptativos [35, 57]. Algumas técnicas para processamento em paralelo utilizando formulações híbridas podem ser encontradas em [9, 10].

1.4 Organização do trabalho

O texto que se segue está dividido em nove capítulos e dois anexos.

No capítulo 2, é apresentado o problema analisado neste trabalho, descrevendo-se os diferentes tipos de transferência de calor, juntamente com as respectivas equações governativas. Depois, são definidas as condições de fronteira aplicadas no problema analisado e as hipóteses simplificativas adotadas.

No capítulo 3, descreve-se a formulação dos elementos finitos híbridos-Trefftz. São introduzidas as aproximações feitas nos domínios e fronteiras para este tipo de formulação, definindo as funções que pertencem às respectivas bases de aproximação. Depois, são explicadas as bases matemáticas dos métodos dos resíduos pesados e de Galerkin, essenciais às deduções das equações nos domínios e fronteiras dos elementos. De seguida, é construído o sistema resolutivo e definem-se os conceitos de indeterminação estática e cinemática. Finalmente, o processo do cálculo da energia térmica é também apresentado.

No capítulo 4, é apresentada a implementação computacional da formulação dos elementos finitos híbridos-Trefftz. Começa-se por definir a organização do programa, apresentando as várias etapas que compõem o algoritmo. Depois, descrevem-se os geradores de malha implementados no programa (regular e não regular) e listam-se os dados topológicos e as estruturas de dados que o programa utiliza. Descrevem-se também o processo de mapeamento do sistema resolutivo, e o processo de integração numérica, e introduzem-se os procedimentos utilizados para o controlo da estabilidade numérica do sistema. Por fim, apresenta-se a forma como o programa constrói a solução para a representação gráfica dos campos.

No capítulo 5, são descritas as bases teóricas do refinamento ' p '-adaptativo desenvolvido neste trabalho. São expostos os processos de refinamento nas fronteiras e nos domínios, seguidos da apresentação dos critérios de refinamento e de paragem.

No capítulo 6, é descrita a implementação computacional do algoritmo ' p '-adaptativo. São apresentadas as três fases que definem o algoritmo, listam-se as estruturas de dados e descrevem-se e explicam-se todos os passos do algoritmo.

No capítulo 7, é testado o desempenho dos elementos híbridos-Trefftz de temperatura, através de testes de convergência e da comparação das soluções produzidas pelo programa, com soluções analíticas conhecidas. Para um exemplo prático, é ainda feita a comparação do desempenho dos elementos finitos híbridos-Trefftz com elementos finitos convencionais (conformes de temperatura). Por fim, é apresentada a análise de um problema mais complexo onde se utiliza o gerador de malha não regular.

No capítulo 8, é testado o desempenho do algoritmo ' p '-adaptativo em dois problemas, um simétrico e outro não simétrico. É feita uma análise pormenorizada do processo iterativo para os dois critérios de refinamento implementados no programa. Depois, é feita a comparação com um algoritmo semelhante, que utiliza elementos finitos puramente híbridos.

No capítulo 9, são apresentados alguns comentários e conclusões sobre o trabalho realizado, bem como algumas propostas para trabalhos futuros.

Apresentam-se ainda dois anexos que expressam informação auxiliar para a leitura do texto. No anexo A, definem-se todas as funções usadas no programa. No anexo B, apresenta-se um exemplo de utilização do programa onde se descrevem as interfaces gráficas implementadas no mesmo, bem como se explicam alguns parâmetros definidos nestas interfaces.

Capítulo 2

Problemas de transferência de calor

2.1 Introdução

O motor propulsor para que se dê transferência de calor entre dois sistemas é a existência de diferenças de temperatura entre os mesmos, que geram fluxos de calor direcionados das temperaturas mais elevadas para as mais baixas.

Existem três mecanismos de transferência de calor, nomeadamente, a condução, a convecção e a radiação. Ao longo deste capítulo estes mecanismos vão ser brevemente descritos.

2.2 Condução

O mecanismo de condução ocorre em todas as formas de matéria, incluindo sólidos, líquidos, gases e plasmas sendo, no entanto, mais eficaz nos sólidos. Este tipo de mecanismo não envolve transferência de massa já que a transferência de energia se realiza através da vibração e agitação molecular.

A condução pode ocorrer dentro de um material ou entre materiais que estejam em contacto uns com os outros.

O mecanismo de condução encontra-se ilustrado na figura 2.1 para o caso de um corpo com espessura $\Delta x[m]$, cujas superfícies laterais, de área $A[m^2]$, estão sujeitas às temperaturas $T_1[K]$ e $T_2[K]$, respetivamente ($T_2 > T_1$). Assumindo, por simplicidade, que as temperaturas T_1 e T_2 são constantes nas superfícies laterais do corpo, a variação da temperatura em regime estacionário resulta linear (figura 2.1).

A quantidade de calor Q que atravessa a área A por unidade de tempo, é definida como

$$Q = -kA \frac{\Delta T}{\Delta x} \quad [W] \quad (2.1)$$

onde $k [W/mK]$ representa a condutibilidade térmica e $\Delta T = T_2 - T_1$. A condutibilidade térmica, k , é uma característica do material considerada, neste exemplo, constante na espessura do corpo.

A equação (2.1) é aplicável na sua forma diferencial (2.2) mesmo que a variação da temperatura ao longo da espessura Δx não seja linear (como acontece, por exemplo, para

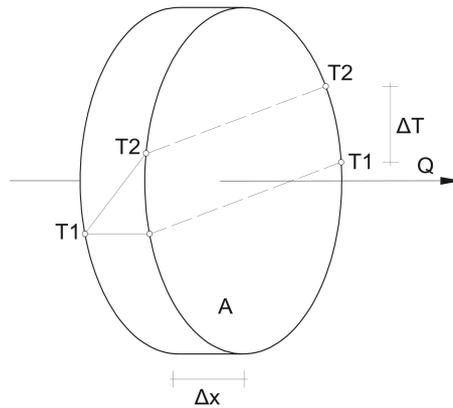


Figura 2.1: Transmissão de calor por condução

regimes transitórios ou quando a distribuição da temperatura na superfície lateral não é constante),

$$Q = -kA \frac{\partial T}{\partial x} \quad (2.2)$$

Define-se como fluxo de calor, a quantidade de calor Q que atravessa uma unidade de área numa unidade de tempo,

$$q = \frac{Q}{A} \quad \left[\frac{W}{m^2} \right] \quad (2.3)$$

A lei da condução térmica, também conhecida como lei de Fourier, é obtida das equações (2.2) e (2.3) e estabelece que o fluxo de calor que passa através de um material é proporcional ao gradiente (negativo) de temperatura:

$$q = \frac{Q}{A} = -k \frac{\partial T}{\partial x} \quad (2.4)$$

Na equação (2.4), o sinal negativo aparece devido ao sentido da transferência do calor, que ocorre da temperatura mais elevada para a temperatura mais baixa. A definição (2.3) do fluxo é generalizada para referenciais Cartesianos em três dimensões como,

$$\mathbf{q}(\mathbf{x}, t) = -k \nabla T(\mathbf{x}, t), \text{ com } \mathbf{x} = (x \ y \ z)^T, \text{ ou} \quad (2.5)$$

$$\begin{cases} q_x(\mathbf{x}, t) = -k \frac{\partial T}{\partial x}(\mathbf{x}, t) \\ q_y(\mathbf{x}, t) = -k \frac{\partial T}{\partial y}(\mathbf{x}, t) \\ q_z(\mathbf{x}, t) = -k \frac{\partial T}{\partial z}(\mathbf{x}, t) \end{cases}$$

onde ∇ é o operador gradiente dado por:

$$\nabla = \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{array} \right\} \quad (2.6)$$

Em consequência da generalização (2.5), o fluxo de calor na direção normal à área A é definido como,

$$\mathbf{q}_\Gamma(\mathbf{x}, t) = -k \mathbf{n} \nabla T(\mathbf{x}, t) \quad (2.7)$$

onde o vetor \mathbf{n} lista as componentes da normal exterior da área A .

Considerando um elemento com volume infinitesimal $dV = dxdydz$, com as faces paralelas aos eixos coordenados, os fluxos normais a atuarem nas suas facetas, representados na figura 2.2, devem estar em equilíbrio com o calor gerado no interior do elemento. A forma matemática deste equilíbrio é definida de seguida.

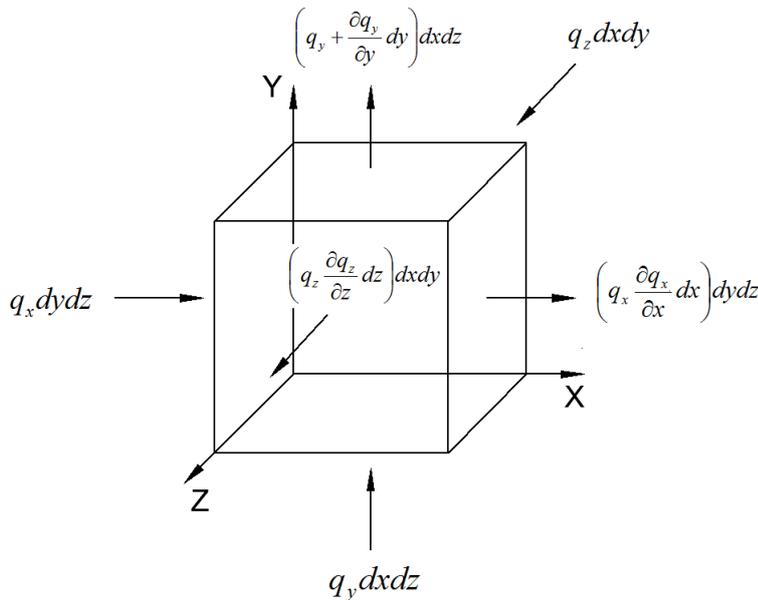


Figura 2.2: Condução térmica num elemento de volume infinitesimal

A diferença entre os fluxos de calor (q_x, q_y, q_z) que entram e saem do elemento diferencial é,

$$\Delta q = dydz \left(q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x} dx - q_x \right) + dx dz \left(q_y + \frac{\partial q_y}{\partial y} dy - q_y \right) + dx dy \left(q_z + \frac{\partial q_z}{\partial z} dz - q_z \right) \quad (2.8)$$

De acordo com o princípio da conservação da energia, a energia não pode ser criada nem destruída, apenas transformada. Deste modo, de forma a poder existir conservação da energia, a diferença (2.8) entre o fluxo que entra e o que saí do elemento deve ser igual ao calor gerado internamente, $Q dV$, mais o calor ganho no elemento na unidade de

tempo, $\rho c \frac{\partial T}{\partial t} dV$ (onde t é o tempo e, ρ e c , são a massa e o calor específicos do material, respetivamente).

Posto isto, é obtida a equação diferencial da condução de calor:

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = Q - \left(\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z} \right) \quad (2.9)$$

Substituindo a expressão (2.5) dos fluxos de calor, a equação (2.9) fica:

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = Q + \frac{\partial}{\partial x} k \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} k \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} k \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right) \quad (2.10)$$

ou, na forma vetorial,

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t}(\mathbf{x}, t) = Q(\mathbf{x}, t) + \nabla^T k \nabla T(\mathbf{x}, t) \quad (2.11)$$

De referir que, para certos materiais, o valor da condutibilidade térmica, k , pode não ser constante em todas as direções, como foi assumido até aqui. Nesse caso, a equação (2.11) mantém-se, passando a condutibilidade k a representar uma matriz com valores diferentes para cada direção.

No caso em que o material é homogéneo ($k = \text{constante}$) e não existe geração interna de calor, a equação (2.11) fica:

$$\nabla^2 T(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t}(\mathbf{x}, t) \quad (2.12)$$

a que se dá o nome de equação da difusão, onde α é uma característica termo-física dos materiais designada por difusividade térmica, com $\alpha = \frac{k}{\rho c}$.

Por outro lado, se considerarmos um regime estacionário $\left(\frac{\partial T}{\partial t} \rightarrow 0 \right)$ e com geração de calor Q , a equação da condução de calor (2.11) toma a forma,

$$\nabla^T k \nabla T(\mathbf{x}) + Q(\mathbf{x}) = 0 \quad (2.13)$$

Considerando a equação (2.13) e assumindo que o material é homogéneo ($k = \text{constante}$), a equação (2.13) simplifica-se a uma equação de Poisson, e tem a forma:

$$\nabla^2 T(\mathbf{x}) + \frac{1}{k} Q(\mathbf{x}) = 0 \quad (2.14)$$

Particularizando esta equação para o caso de não existir geração de calor ($Q = 0$), chega-se à forma homogénea da equação de Poisson, a equação de Laplace:

$$\nabla^2 T(\mathbf{x}) = 0 \quad (2.15)$$

2.3 Condições de fronteira

Para a definição completa do problema de transferência de calor, têm ainda de ser definidas as condições iniciais e de fronteira. Essa definição é feita considerando as notações da figura 2.3, que é apresentada em $2D$ para ser mais fácil a perceção das condições definidas nas fronteiras do elemento.

Relativamente às condições iniciais, deve ser definida a temperatura no instante inicial, $t = t_0$, no domínio, Ω , do problema,

$$T(\mathbf{x}, 0) = T_0(\mathbf{x}) \quad \text{em } \Omega \quad (2.16)$$

No que toca às condições de fronteira, podem ser impostos a temperatura ou o fluxo normal de calor. Quando se define a temperatura, diz-se que se trata de uma condição de fronteira de Dirichlet (Γ_u na figura 2.3).

O valor da temperatura imposta, T_Γ , pode ser constante ou variável ao longo do tempo, sendo a condição de fronteira de Dirichlet dada por,

$$T(\mathbf{x}, t) = T_\Gamma(\mathbf{x}, t) \quad \text{em } \Gamma_u \quad (2.17)$$

Quanto estamos perante um problema em regime estacionário, a condição de fronteira de Dirichlet fica,

$$T(\mathbf{x}) = T_\Gamma(\mathbf{x}) \quad \text{em } \Gamma_u \quad (2.18)$$

Quando, em vez de temperaturas, são definidos valores de fluxos de calor numa fronteira, estamos perante uma condição de fronteira de Neumann (Γ_σ na figura 2.3). Para este caso, a condição de fronteira de Neumann fica,

$$-k \frac{\partial T}{\partial n}(\mathbf{x}, t) = q_\Gamma(\mathbf{x}, t) \quad \text{em } \Gamma_\sigma \quad (2.19)$$

Para problemas em regime estacionário, a forma (2.19) da condição de fronteira de Neumann preserva-se, mas sem a variável que representa o tempo.

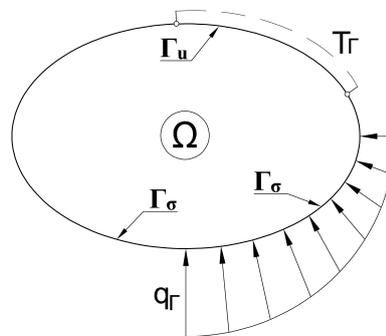


Figura 2.3: Domínio (Ω) e fronteiras de Dirichlet (Γ_u) e de Neumann (Γ_σ)

2.4 Convecção

A convecção é um tipo de transmissão de calor onde a energia térmica é transmitida por massas fluidas que se deslocam de uma região para outra em virtude da diferença de densidade existente nessas regiões. A diferença de densidade pode dever-se ao facto de haver zonas dos fluidos que se encontram a temperaturas diferentes. No caso de um fluido mais quente, a densidade é menor logo este tende a subir, já um fluido mais frio é mais

denso e então, tende a descer. Na figura (2.4), é possível ver um exemplo de transferência de calor por convecção num líquido aquecido na parte inferior do recipiente.

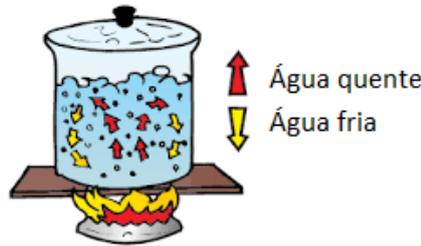


Figura 2.4: Transmissão de calor por convecção

A equação básica da transferência de calor por convecção entre um fluido e um sólido é escrita na superfície onde a mesma tem lugar,

$$Q = h_s A (T_\Gamma - T_s) \quad (2.20)$$

Na equação (2.20), Q é a quantidade de calor transferida [W] através da superfície de área A [m^2], h_s [$Wm^{-2}K^{-1}$] é o coeficiente de transmissão da superfície, T_Γ é a temperatura da superfície e T_s é a temperatura média do fluido que a rodeia.

O efeito da transmissão de calor por convecção sobre o material sólido que delimita um domínio ocupado por um fluido é regido por uma condição de fronteira do tipo Robin,

$$q_r = -k \frac{\partial T}{\partial n} = h(T_\Gamma - T_s) \quad \text{em } \Gamma_r \quad (2.21)$$

2.5 Radiação

A transferência de calor pode não só acontecer através da transmissão de energia em matéria, mas também através de ondas eletromagnéticas. A este fenómeno damos o nome de radiação. Este tipo de transferência de calor não necessita de um meio substancial para acontecer, podendo aliás, ocorrer até no vácuo. Um exemplo típico desta situação ocorre na transmissão de calor entre o Sol e a Terra, que se faz através da radiação (figura 2.5).

O fluxo de calor emitido de uma superfície, por radiação, é dado por:

$$q = \epsilon \sigma T^4 \quad (2.22)$$

onde ϵ é a emissividade da superfície $\left[\frac{W'}{W} \right]$ (rácio entre a energia emitida por um corpo cinzento (W') e um corpo negro (W), podendo variar entre os valores $0 < \epsilon \leq 1$ onde o 1 corresponde ao valor da emissividade de um corpo negro), σ é a constante de Stefan Boltzmann, que tem um valor de $5,669 \times 10^{-8}$ [$Wm^{-2}K^{-4}$] e T é a temperatura absoluta da superfície do corpo.

Tendo em conta que a radiação só ocorre quando existem dois corpos, o fluxo de calor trocado tem a seguinte expressão:

$$q_\Gamma = \epsilon \sigma (T_1^4 - T_2^4) \quad (2.23)$$

em que T_1 e T_2 , representam a temperatura dos dois corpos. Tendo em conta que todos os corpos com temperatura acima de $0^\circ K$ emitem radiação, todos os corpos emitem e absorvem energia.

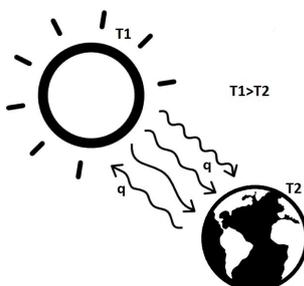


Figura 2.5: Transmissão de calor por radiação

2.6 Hipóteses simplificativas

Ao longo deste trabalho, são assumidas as seguintes hipóteses simplificativas:

- O material é homogêneo e uniforme por troços, sendo o domínio composto por uma ou mais áreas que apresentam as mesmas propriedades térmicas em todos os seus pontos. Em consequência desta hipótese, podem ser adotados materiais diferentes desprezando, no entanto, as discontinuidades nas temperaturas nas interfaces dos mesmos.
- O material é isotrópico, o que significa que as características mecânicas são iguais em todas as direções;
- O comportamento do material é fisicamente linear com a condutibilidade térmica, k , constante (por troços);
- A transmissão de calor é feita apenas pelo mecanismo de condução;
- A condução de calor dá-se em regime estacionário. Por consequência, o termo dependente do tempo na equação da difusão (2.12) desaparece e a equação governativa no domínio passa a ser a equação de Poisson (2.14);
- A temperatura e os fluxos de calor são constantes ao longo da direção (z) do espaço. Esta hipótese reduz o problema de três dimensões para um problema definido somente no plano (x, y) ;
- O calor gerado internamente num elemento é constante por troços podendo, no entanto, adotar valores diferentes em elementos diferentes;
- Não são adotadas condições de fronteira de Robin (convecção), apenas condições de fronteira de Dirichlet (temperatura imposta) e de Neumann (fluxos de calor impostos).

Capítulo 3

Elementos finitos híbridos-Trefftz de temperatura

3.1 Introdução

Neste capítulo são formulados elementos finitos híbridos-Trefftz de temperatura para a análise da condução térmica em regime estacionário.

A solução exata do problema indicado implica que a equação diferencial (2.14) seja satisfeita em todos os pontos do domínio e as condições de fronteira, (2.18) e (2.19), sejam satisfeitas em todos os pontos das fronteiras. No entanto, devido à elevada complexidade das condições de fronteira do problema, geralmente não é possível encontrar uma solução exata (analítica) para este problema. Deste modo, é necessário o uso de métodos aproximados, sendo propostos neste trabalho os elementos finitos híbridos-Trefftz, no seu modelo de temperatura.

À semelhança dos outros elementos finitos híbridos, a formulação aqui utilizada distingue-se da formulação (convencional) de elementos finitos conformes de temperatura pelo facto de apresentar aproximações distintas do campo das temperaturas no domínio dos elementos e do campo dos fluxos de calor normais às suas fronteiras de Dirichlet e interiores. Ambas as aproximações utilizam variáveis generalizadas (não-nodais) e funções de aproximação hierárquicas, independentes da geometria dos elementos e dos respetivos nós.

O que especifica os elementos híbridos-Trefftz relativamente a outras classes de elementos finitos híbridos é que as bases de aproximação do domínio são extraídas do conjunto de soluções da equação que governa o problema a ser modelado, neste caso a equação de Poisson (2.14). Por outro lado, tais condicionamentos não se aplicam às funções de aproximação nas fronteiras dos elementos, cuja escolha é consideravelmente mais flexível.

3.2 Discretização do espaço

Consideremos que o domínio do problema é dividido em elementos finitos, conforme ilustrado na figura 3.1. Denota-se por Γ^e a sua fronteira, formada pelas parcelas disjuntas de Dirichlet (Γ_u^e), Neumann (Γ_σ^e) e interiores (Γ_i^e), onde $\Gamma^e = \Gamma_u^e \cup \Gamma_\sigma^e \cup \Gamma_i^e$ e $\emptyset = \Gamma_u^e \cap \Gamma_\sigma^e = \Gamma_u^e \cap \Gamma_i^e = \Gamma_\sigma^e \cap \Gamma_i^e$.

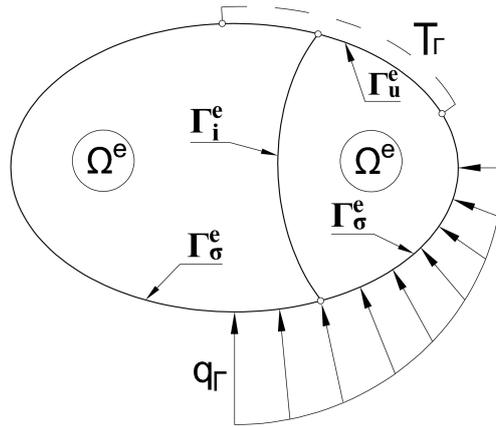


Figura 3.1: Domínio do problema e fronteiras de Dirichlet, Neumann e interiores

No caso de existir mais do que um elemento, como representado na figura 3.1, é necessário garantir as continuidades das temperaturas nas fronteiras interelementares, Γ_i^e . Considerando que na vizinhança da fronteira interior entre os elementos 1 e 2 existem as temperaturas T_Γ^1 e T_Γ^2 , calculadas nos respectivos elementos, tem de se garantir que,

$$T_\Gamma^1 = T_\Gamma^2 \text{ em } \Gamma_i^e \quad (3.1)$$

Uma outra condição que tem de se verificar em fronteiras interelementares é que os fluxos normais, calculados em cada elemento têm de se anular,

$$q_\Gamma^1 + q_\Gamma^2 = 0 \text{ em } \Gamma_i^e \quad (3.2)$$

3.3 Bases de aproximação

3.3.1 Bases no domínio

Como já foi referido anteriormente, a formulação híbrida-Trefftz de temperatura baseia-se na aproximação direta do campo das temperaturas no domínio (Ω^e) de cada elemento:

$$T(x, y) = \sum_{i=1}^{N_D} U_i(x, y)X_i + U_p(x, y) = \mathbf{U}(x, y)\mathbf{X} + U_p(x, y) \quad (3.3)$$

onde $T(x, y)$ é a aproximação do campo das temperaturas, $U_i(x, y)$ são o conjunto de N_D soluções homogêneas da equação de Poisson (2.14), X_i são os respetivos coeficientes e $U_p(x, y)$ é uma solução particular.

A estimativa do campo de fluxos de calor no domínio do elemento é derivada da aproximação da temperatura (3.3), através da imposição da lei de Fourier (2.4),

$$\mathbf{q}(x, y) = \mathbf{S}(x, y)\mathbf{X} + \mathbf{q}_p(x, y), \text{ com } \begin{cases} \mathbf{S}(x, y) = -k\nabla\mathbf{U}(x, y) \\ \mathbf{q}_p(x, y) = -k\nabla U_p(x, y) \end{cases} \quad (3.4)$$

A solução da equação de Poisson é dada pela soma da solução complementar da equação homogénea, com uma solução particular. Deste modo, sabendo que a equação de Poisson, (2.14), tem a seguinte expressão:

$$\nabla^2 T(x, y) + \frac{1}{k} Q(x, y) = 0 \quad (3.5)$$

a sua equação homogénea, deve satisfazer a equação de Laplace,

$$\nabla^2 \mathbf{U}(x, y) = \mathbf{0} \quad (3.6)$$

enquanto as soluções particulares satisfazem a seguinte equação,

$$\nabla^2 U_p(x, y) = -\frac{1}{k} Q(x, y) \quad (3.7)$$

As soluções das equações 3.6 e 3.7 são derivadas de seguida, em coordenadas polares. A opção de utilizar este tipo de coordenadas justifica-se pela experiência favorável da equipa de investigação em trabalhar com funções de forma resultantes [11].

Solução complementar (homogénea)

As funções de aproximação $U_i(x, y)$ incluídas na base (3.3) devem satisfazer a equação homogénea (3.6) que se escreve, em coordenadas polares,

$$\frac{\partial U_i}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U_i}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial U_i}{\partial \theta^2} = 0 \quad (3.8)$$

Procuram-se soluções da forma:

$$U_i(r, \theta) = U_i^r(r) e^{i\lambda_i \theta} \quad (3.9)$$

onde i é a unidade imaginária.

Substituindo a definição 3.9 na expressão (3.8), obtém-se,

$$\frac{\partial^2 U_i^r(r)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U_i^r(r)}{\partial r} - \frac{\lambda_i^2}{r^2} U_i^r(r) = 0 \quad (3.10)$$

A equação (3.10) admite soluções do tipo r^{λ_i} , das quais vai ser considerada apenas a parte com λ_i inteiro e positivo para evitar descontinuidades e singularidades nas soluções.

O seguinte conjunto de soluções complementares é então incluído na base de aproximação dos elementos finitos híbridos-Trefftz.

$$U_i(r, \theta) = r^{|\lambda_i|} e^{i\lambda_i \theta} \quad (3.11)$$

onde, $\lambda_i = \{-n_D, \dots, n_D\}$.

Resulta que para uma ordem n_D da base de aproximação no domínio, o número total de funções existentes na base U_i é,

$$N_D = 2 n_D + 1 \quad (3.12)$$

Solução particular

A existência de uma solução particular com forma analítica conhecida para a equação diferencial (2.14) depende da distribuição no domínio da quantidade de calor gerada, $Q(x, y)$. Neste trabalho, considera-se apenas o caso da geração de calor constante, que é o mais comum nos meios homogêneos e isotrópicos considerados aqui.

Deste modo uma solução particular possível da equação (2.14) é,

$$U_p(r, \theta) = -\frac{Q}{4k}r^2 \quad (3.13)$$

3.3.2 Bases nas fronteiras

Além da aproximação (3.3) das temperaturas no domínio, o fluxo de calor normal à fronteira é aproximado de forma independente nas fronteiras essenciais (Dirichlet e interiores) de cada elemento,

$$\mathbf{nq} = \sum_{j=1}^{N_\Gamma} Z_j(s)Y_j = \mathbf{Z}(s)\mathbf{Y} \quad (3.14)$$

onde N_Γ é o número de termos considerados na base de aproximação \mathbf{Z} , que é definida num referencial da fronteira, $s \in [-1, 1]$. Finalmente, \mathbf{Y} é o vetor dos fluxos generalizados que contém os coeficientes correspondentes às funções da base \mathbf{Z} . Ao contrário da base \mathbf{U} , a base \mathbf{Z} apenas está sujeita às restrições de ser completa e linearmente independente podendo, assim, ser constituída por um considerável leque de funções. Como consequência de usar funções de aproximação independentes dos nós, os pesos \mathbf{Y} perdem o significado físico que tinham nos elementos convencionais, o que é uma desvantagem. No entanto, a independência dos nós confere muito mais liberdade na definição das malhas, que já não necessitam de ser conformes.

As funções escolhidas, neste trabalho, para a base de aproximação \mathbf{Z} , são os polinómios de Chebychev, que formam uma base polinomial completa e numericamente estável. Estes polinómios podem ser obtidos facilmente de forma recursiva ou direta. De forma recursiva, depois de conhecer os polinómios de primeiro tipo, $C_0(s) = 1$ e $C_1(s) = s$, todos os polinómios seguintes $C_n(s)$, $n \geq 2$ podem ser obtidos através da fórmula de recorrência:

$$C_{n+1}(s) = 2s C_n(s) - C_{n-1}(s) \quad (3.15)$$

Como alternativa, e conforme foi usado neste trabalho, o polinómio de Chebychev de grau n pode ser obtido através da relação trigonométrica:

$$C_n(s) = \cos[n \arccos(s)] \text{ para } n = 0, 1, 2, 3... \text{ e } s \in [-1, 1] \quad (3.16)$$

Sendo n_Γ a ordem das funções de aproximação na fronteira, o número total N_Γ de funções na base \mathbf{Z} é,

$$N_\Gamma = n_\Gamma + 1 \quad (3.17)$$

3.4 Formas fracas

Para obter uma solução aproximada do problema definido pelas equações 2.14, 2.18 e 2.19, a formulação do método dos elementos finitos pode ser derivada a partir de princípios variacionais ou a partir do método dos resíduos pesados. Neste trabalho, foi utilizado o método dos resíduos pesados, que impõe a equação governativa do problema em forma fraca, ou seja, em sentido "médio".

Para ilustrar o procedimento matemático que conduz à forma fraca de uma equação diferencial, consideremos um caso geral de um problema físico descrito por uma equação diferencial genérica,

$$Du(x, y) - f(x, y) = 0 \quad (3.18)$$

definida num domínio Ω .

A equação diferencial (3.18) pode ser imediatamente particularizada para o problema de transferência de calor num material isotrópico com geração de calor, substituindo o operador diferencial genérico D pelo operador Laplaciano ∇^2 , $u(x, y)$ pelo campo de temperaturas, e $f(x, y)$ por $-\frac{1}{k}Q(x, y)$.

A equação (3.18), complementada pelas condições de fronteira próprias para o problema em causa, constitui a forma forte do problema. Para se obter uma solução exata, do mesmo problema, tem de se garantir que a equação (3.18) e as condições de fronteira sejam satisfeitas localmente, ou seja, em todos os pontos do domínio Ω e em todos os pontos das suas fronteiras.

No entanto, como já foi referido, a forma forte do problema apenas se pode resolver em situações muito particulares, nos restantes casos procurando-se soluções aproximadas. Esta abordagem leva a que se origine um erro de aproximação a que chamamos de resíduo, $R(x, y)$. O objetivo do método de resíduos pesados é minimizar o mais que possível este erro de aproximação. Para a equação (3.18), o resíduo toma a forma de,

$$R(x, y) = D\bar{u}(x, y) - f(x, y) \quad (3.19)$$

onde a função $\bar{u}(x, y)$ representa a solução aproximada, que é, em geral, uma combinação linear de funções pertencentes a uma base de aproximação, $N_i(x, y)$,

$$\bar{u}(x) = \sum_{i=1}^n N_i(x, y) a_i \quad (3.20)$$

sendo a_i o coeficiente correspondente ao termo i da base e n a dimensão da mesma base.

A forma fraca da equação (3.18) é expressa pela seguinte expressão:

$$\int_{\Omega} W_j(x, y) R(x, y) d\Omega = 0, \text{ para } j = 1, \dots, n \quad (3.21)$$

Na expressão (3.21) cada multiplicador $W_j(x)$ é uma função arbitrária denominada de função de peso (ou função de teste). Cada nova função de peso W_j reduz o resíduo do problema. Com efeito, se se pudesse determinar um campo de soluções $\bar{u}(x, y)$ que satisfizesse a equação (3.21) para qualquer função arbitrária $W_j(x, y)$, então esse campo seria a solução exata da equação (3.18) e o resíduo seria exatamente nulo. Porém, a imposição da forma fraca (3.21) não se pode fazer utilizando uma infinidade de funções

de peso, pelo que o resíduo não será, geralmente, nulo. Na prática é comum impor a equação (3.21) utilizando tantas funções quantas necessárias para determinar os pesos da aproximação (3.20) do campo no domínio de cada elemento finito. Isto justifica a escolha de “ n ” funções de peso na forma fraca (3.21), tantas quantos pesos a_i existem na definição (3.20). A escolha das funções de peso faz a distinção entre os vários tipos de formas fracas utilizáveis para a resolução aproximada do problema (3.18).

No método de Galerkin, as funções $W_j(x, y)$ são iguais às conjugadas das funções $N_i(x, y)$ incluídas nas bases de aproximação do campo $\bar{u}(x, y)$. Desta maneira, este método garante que o sistema (3.21) é Hermitiano o que é uma vantagem do ponto de vista computacional. O método de Galerkin é adotado neste trabalho.

3.5 Equações no domínio

A equação (2.14) no domínio do problema é imposta na forma fraca (3.21), utilizando as conjugadas das funções de aproximação da base (3.11) como funções de peso,

$$\int_{\Omega^e} \hat{U}_i [k\nabla^2 T + Q] d\Omega^e = 0 \quad (3.22)$$

onde \hat{U}_i é a conjugada da função de peso U_i .

De seguida, é feita a integração por partes da equação (3.22) segundo o teorema de Green, de modo a permitir a imposição das condições de fronteira de Neumann e Dirichlet. Assim, o primeiro termo da equação (3.22) fica,

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega^e} \hat{U}_i [k\nabla^2 T] d\Omega^e = \\ & - \int_{\Omega^e} \nabla^T \hat{U}_i k \nabla T d\Omega^e + \int_{\Gamma^e} \hat{U}_i \mathbf{n} k \nabla T d\Gamma^e \end{aligned} \quad (3.23)$$

Tendo em conta que,

$$\Gamma^e = \Gamma_u^e \cup \Gamma_\sigma^e \quad (3.24)$$

e

$$\mathbf{n} k \nabla T = -\mathbf{n} \mathbf{q} \quad (3.25)$$

a equação (3.22) passa a ser representada da seguinte maneira,

$$\int_{\Omega^e} \nabla \hat{U}_i k \nabla T d\Omega^e + \int_{\Gamma_u^e} \hat{U}_i \mathbf{n} \mathbf{q} d\Gamma_u^e + \int_{\Gamma_\sigma^e} \hat{U}_i q_\Gamma d\Gamma_\sigma^e - \int_{\Omega^e} \hat{U}_i Q d\Omega^e = 0 \quad (3.26)$$

onde a condição (2.19) foi imposta na fronteira de Neumann Γ_σ^e .

A equação (3.26) é imposta utilizando todas as funções U_i que formam a base das temperaturas \mathbf{U} . A equação no domínio do modelo de temperaturas dos elementos finitos híbridos-Trefftz resulta,

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega^e} (\nabla \hat{\mathbf{U}})^T k \nabla T d\Omega^e + \int_{\Gamma_u^e} \hat{\mathbf{U}}^T \mathbf{n} \mathbf{q} d\Gamma_u^e + \int_{\Gamma_\sigma^e} \hat{\mathbf{U}}^T q_\Gamma d\Gamma_\sigma^e + \\ & - \int_{\Omega^e} \hat{\mathbf{U}}^T Q d\Omega^e = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (3.27)$$

Inserindo as aproximações (3.3) e (3.14) dos campos de temperatura no domínio do elemento e dos fluxos normais nas fronteiras de Dirichlet, a equação (3.27) assume a forma,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega^e} (\nabla \hat{\mathbf{U}})^T k \nabla \mathbf{U} d\Omega^e \mathbf{X} + \int_{\Omega^e} (\nabla \hat{\mathbf{U}})^T k \nabla U_p d\Omega^e + \int_{\Gamma_u^e} \hat{\mathbf{U}}^T \mathbf{Z} d\Gamma_u^e \mathbf{Y} + \\ \int_{\Gamma_\sigma^e} \hat{\mathbf{U}}^T q_\Gamma d\Gamma_\sigma^e - \int_{\Omega^e} \hat{\mathbf{U}}^T Q d\Omega^e = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (3.28)$$

Uma característica dos elementos híbridos-Trefftz é que todos os integrais da equação (3.28) podem ser reduzidos a integrais na fronteira.

Para ilustrar isso, começa-se por se fazer uma integração por partes do primeiro termo da equação (3.28), dando origem à seguinte expressão:

$$\int_{\Omega^e} (\nabla \hat{\mathbf{U}})^T k \nabla \mathbf{U} d\Omega^e = - \int_{\Omega^e} \hat{\mathbf{U}}^T k \nabla^2 \mathbf{U} d\Omega^e + \int_{\Gamma^e} \hat{\mathbf{U}}^T \mathbf{n} k \nabla \mathbf{U} d\Gamma^e \quad (3.29)$$

Agora, tendo em conta que a base \mathbf{U} verifica a equação (3.6), o termo de domínio anula-se,

$$\int_{\Omega^e} (\nabla \hat{\mathbf{U}})^T k \nabla \mathbf{U} d\Omega^e = \int_{\Gamma^e} \hat{\mathbf{U}}^T \mathbf{n} k \nabla \mathbf{U} d\Gamma^e \quad (3.30)$$

Aplicando o teorema de Green ao segundo termo da equação (3.28), obtém-se:

$$\int_{\Omega^e} (\nabla \hat{\mathbf{U}})^T k \nabla U_p d\Omega^e = - \int_{\Omega^e} \hat{\mathbf{U}}^T k \nabla^2 U_p d\Omega^e + \int_{\Gamma^e} \hat{\mathbf{U}}^T \mathbf{n} k \nabla U_p d\Gamma^e \quad (3.31)$$

Substituindo as equações (3.30) e (3.31) na equação (3.28), esta fica:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma^e} \hat{\mathbf{U}}^T \mathbf{n} k \nabla \mathbf{U} d\Gamma^e \mathbf{X} + \int_{\Gamma^e} \hat{\mathbf{U}}^T (\mathbf{n} k \nabla U_p) d\Gamma^e - \int_{\Omega^e} \hat{\mathbf{U}}^T k \nabla^2 U_p d\Omega^e + \\ \int_{\Gamma_u^e} \hat{\mathbf{U}}^T \mathbf{Z} d\Gamma_u^e \mathbf{Y} + \int_{\Gamma_\sigma^e} \hat{\mathbf{U}}^T q_\Gamma d\Gamma_\sigma^e - \int_{\Omega^e} \hat{\mathbf{U}}^T Q d\Omega^e = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (3.32)$$

Tendo em conta que a solução particular U_p satisfaz a equação de Poisson (3.7), conclui-se que o terceiro e o último termo da equação acima se anulam, originando finalmente, a última forma da equação governativa no domínio do elemento,

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma^e} \hat{\mathbf{U}}^T \mathbf{n} k \nabla \mathbf{U} d\Gamma^e \mathbf{X} + \int_{\Gamma^e} \hat{\mathbf{U}}^T \mathbf{n} k \nabla U_p d\Gamma^e + \\ \int_{\Gamma_u^e} \hat{\mathbf{U}}^T \mathbf{Z} d\Gamma_u^e \mathbf{Y} + \int_{\Gamma_\sigma^e} \hat{\mathbf{U}}^T q_\Gamma d\Gamma_\sigma^e = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (3.33)$$

A equação (3.33) também pode ser escrita da seguinte maneira:

$$\mathbf{KX} + \mathbf{BY} = -\mathbf{K}_p - \mathbf{q}_\Gamma \quad (3.34)$$

onde,

$$\mathbf{K} = \int_{\Gamma^e} \hat{\mathbf{U}}^T (\mathbf{n} k \nabla \mathbf{U}) d\Gamma^e \quad (3.35)$$

$$\mathbf{B} = \int_{\Gamma_u^e} \hat{\mathbf{U}}^T \mathbf{Z} d\Gamma_u^e \quad (3.36)$$

$$\mathbf{K}_p = \int_{\Gamma^e} \hat{\mathbf{U}}^T (\mathbf{n}k \nabla U_p) d\Gamma^e \quad (3.37)$$

$$\mathbf{q}_\Gamma = \int_{\Gamma_\sigma^e} \hat{\mathbf{U}}^T q_\Gamma d\Gamma_\sigma^e \quad (3.38)$$

3.6 Equações nas fronteiras

No modelo de temperaturas dos elementos finitos híbridos-Trefftz, a continuidade das temperaturas nas fronteiras entre elementos adjacentes assim como a recuperação da temperatura imposta nas fronteiras de Dirichlet são impostas separadamente, usando as funções de aproximação da base \mathbf{Z} como funções de peso.

Assim a condição de fronteira de Dirichlet (2.18) fica,

$$\int_{\Gamma_u^e} \mathbf{Z}^T T d\Gamma_u^e = \int_{\Gamma_u^e} \mathbf{Z}^T T_\Gamma d\Gamma_u^e \quad (3.39)$$

Substituindo a aproximação do campo de temperatura, dada pela equação (3.3), obtemos:

$$\int_{\Gamma_u^e} \mathbf{Z}^T \mathbf{U} d\Gamma_u^e \mathbf{X} + \int_{\Gamma_u^e} \mathbf{Z}^T U_p d\Gamma_u^e = \int_{\Gamma_u^e} \mathbf{Z}^T T_\Gamma d\Gamma_u^e \quad (3.40)$$

ou

$$\hat{\mathbf{B}}^T \mathbf{X} = \mathbf{t}_\Gamma - \mathbf{t}_p \quad (3.41)$$

onde,

$$\mathbf{t}_\Gamma = \int_{\Gamma_u^e} \mathbf{Z}^T T_\Gamma d\Gamma_u^e \quad (3.42)$$

$$\mathbf{t}_p = \int_{\Gamma_u^e} \mathbf{Z}^T U_p d\Gamma_u^e \quad (3.43)$$

A imposição fraca da continuidade da temperatura entre os elementos adjacentes escreve-se,

$$\int_{\Gamma_i^e} \mathbf{Z}^T (T_1 - T_2) d\Gamma_i^e = 0 \quad (3.44)$$

onde Γ_i^e é a fronteira interior, partilhada pelos elementos. A equação (3.44) é rescrita, substituindo as aproximações (3.3) para as temperaturas T_1 e T_2 ,

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_i^e} \mathbf{Z}^T \mathbf{U}_1 d\Gamma_i^e \mathbf{X}_1 + \int_{\Gamma_i^e} \mathbf{Z}^T U_{p1} d\Gamma_i^e - \int_{\Gamma_i^e} \mathbf{Z}^T \mathbf{U}_2 d\Gamma_i^e \mathbf{X}_2 - \\ \int_{\Gamma_i^e} \mathbf{Z}^T U_{p2} d\Gamma_i^e = 0 \end{aligned} \quad (3.45)$$

ou

$$\hat{\mathbf{B}}_1^T \mathbf{X}_1 - \hat{\mathbf{B}}_2^T \mathbf{X}_2 = \mathbf{t}_{p2} - \mathbf{t}_{p1} \quad (3.46)$$

onde,

$$\mathbf{t}_{pi} = \int_{\Gamma_i^e} \mathbf{Z}^T U_{pi} d\Gamma_i^e \quad (3.47)$$

3.7 Sistema resolutivo

O sistema resolutivo (3.48) do modelo de temperaturas do elemento finito híbrido-Trefftz é obtido juntando as equações (3.34), escritas no domínio do elemento e (3.41) ou (3.46), escritas na sua fronteira essencial.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{B} \\ \hat{\mathbf{B}}^T & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{Y} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\mathbf{K}_p - \mathbf{q}_\Gamma \\ \mathbf{t}_\Gamma - \mathbf{t}_p \end{Bmatrix} \quad (3.48)$$

O sistema (3.48) é Hermitiano, muito esparso e localizado já que as temperaturas generalizadas que entram no vetor \mathbf{X} dependem estritamente do elemento, enquanto os fluxos generalizados, \mathbf{Y} , são partilhados no máximo por dois elementos adjacentes. A matriz de condutibilidade \mathbf{K} é diagonal por blocos, onde cada bloco é a matriz de condutibilidade de um elemento da malha, não ocorrendo somatório por elementos adjacentes. Consequentemente, diferentes elementos e/ou fronteiras essenciais podem ter bases de aproximação de ordens diferentes.

Finalmente, todas as bases de aproximação têm carácter hierárquico, significando que o aumento do refinamento das mesmas não requer que se tenha de re-calcular as funções de aproximação anteriores. Todas estas características levam a que sejam criadas condições muito favoráveis à implementação de procedimentos adaptativos, aproveitando as matrizes e vetores da iteração anterior.

3.8 Indeterminação estática e cinemática

Para que o sistema resolutivo (3.48) não apresente equações linearmente dependentes, uma condição necessária é garantir que o mesmo seja estática e cinematicamente (in)determinado.

A indeterminação estática do sistema resolutivo (3.48) é garantida se os graus de liberdade \mathbf{Y} , correspondentes aos fluxos de calor nas fronteiras essenciais não se conseguirem determinar apenas pelas equações de equilíbrio (3.34).

Notando por N_D o número de termos presentes no vetor \mathbf{X} e por N_Γ o número de termos presentes no vetor \mathbf{Y} , o número total de equações de equilíbrio é de N_D , enquanto o total número de incógnitas é $N_D + N_\Gamma - 1$ (excetua-se o modo que corresponde ao fluxo nulo). Deste modo, o valor de indeterminação estática α é,

$$\alpha = (N_D + N_\Gamma - 1) - N_D = N_\Gamma - 1 \geq 0 \quad (3.49)$$

A existência de fronteiras Dirichlet, garante a existência de termos no vetor \mathbf{Y} e portanto a sua dimensão $N_\Gamma > 0$, o que garante que o sistema (3.48) fique estaticamente indeterminado.

O sistema (3.48) é cinematicamente indeterminado caso os graus de liberdade da temperatura presentes no vetor \mathbf{X} não sejam determinados apenas pelas equações de compatibilidade (3.41) e (3.46). Uma vez que existem N_Γ equações de compatibilidade no sistema e N_D temperaturas generalizadas no vetor \mathbf{X} , o valor de indeterminação cinemática β é,

$$\beta = N_D - N_\Gamma \geq 0 \quad (3.50)$$

A equação (3.50) revela que o sistema resolutivo (3.48) é cinematicamente indeterminado só quando $N_D \geq N_\Gamma$, o que vai condicionar os refinamentos relativos das bases \mathbf{U} e \mathbf{Z} , nos domínios e nas fronteiras essenciais da malha.

É importante referir que para evitar um condicionamento excessivo das bases de aproximação da temperatura nos domínios de alguns elementos, a equação (3.50) é imposta neste trabalho utilizando o operador ' $>$ ' em vez de ' \geq ' e a nível de cada elemento, em vez de ser imposta a nível da estrutura global.

3.9 Energia térmica

A energia térmica é definida pela seguinte expressão,

$$U = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\nabla \hat{T})^T k (\nabla T) d\Omega \quad (3.51)$$

Substituindo T pela sua aproximação (3.3) na expressão (3.51), a estimativa da energia térmica recuperada pelos elementos finitos híbridos-Trefftz resulta,

$$\begin{aligned} 2 \cdot U_{EF} &= \int_{\Omega^e} \left[\nabla (\hat{\mathbf{U}} \hat{\mathbf{X}} + U_p) \right]^T k [\nabla (\mathbf{U} \mathbf{X} + U_p)] d\Omega^e \\ &= \int_{\Omega^e} \left[\hat{\mathbf{X}}^T (\nabla \hat{\mathbf{U}})^T + (\nabla U_p)^T \right] k [(\nabla \mathbf{U}) \mathbf{X} + (\nabla U_p)] d\Omega^e \\ &= \hat{\mathbf{X}}^T \int_{\Omega^e} (\nabla \hat{\mathbf{U}})^T k (\nabla \mathbf{U}) d\Omega^e \mathbf{X} + \hat{\mathbf{X}}^T \int_{\Omega} (\nabla \hat{\mathbf{U}})^T k (\nabla U_p) d\Omega^e + \\ &\quad \int_{\Omega^e} (\nabla U_p)^T k (\nabla \mathbf{U}) d\Omega^e \mathbf{X} + \int_{\Omega^e} (\nabla U_p)^T k (\nabla U_p) d\Omega^e \end{aligned} \quad (3.52)$$

Na expressão (3.52) os segundo e terceiro integrais são conjugados transpostos um do outro. Então a expressão (3.52) reduz-se para,

$$\begin{aligned} 2 \cdot U_{EF} &= \hat{\mathbf{X}}^T \int_{\Omega^e} (\nabla \hat{\mathbf{U}})^T k (\nabla \mathbf{U}) d\Omega^e \mathbf{X} + 2Re \left[\int_{\Omega^e} (\nabla U_p)^T k (\nabla \mathbf{U}) d\Omega^e \mathbf{X} \right] + \\ &\quad \int_{\Omega^e} (\nabla U_p)^T k (\nabla U_p) d\Omega^e \end{aligned} \quad (3.53)$$

A condição de Trefftz (3.6) permite a simplificação dos dois primeiros termos da expressão (3.53) para integrais de fronteira. Integrando por partes o primeiro integral no domínio temos,

$$\int_{\Omega^e} (\nabla \hat{\mathbf{U}})^T k (\nabla \mathbf{U}) d\Omega^e = \int_{\Gamma^e} \hat{\mathbf{U}}^T \mathbf{n} [k (\nabla \mathbf{U})] d\Gamma^e - \int_{\Omega^e} \hat{\mathbf{U}}^T k (\nabla^2 \mathbf{U}) d\Omega^e \quad (3.54)$$

Tendo em conta a aproximação do fluxo normal no domínio (3.4) e a condição de Trefftz (3.6), o integral (3.54) reduz-se a

$$\mathbf{K} = \int_{\Omega^e} (\nabla \hat{\mathbf{U}})^T k (\nabla \mathbf{U}) d\Omega^e = - \int_{\Gamma^e} \hat{\mathbf{U}}^T \mathbf{n} \mathbf{S} d\Gamma^e \quad (3.55)$$

Seguindo a mesma metodologia mas para o segundo termo da equação (3.53),

$$\int_{\Omega^e} (\nabla U_p)^T k (\nabla \mathbf{U}) d\Omega^e = \int_{\Gamma^e} U_p \mathbf{n} [k (\nabla \mathbf{U})] d\Gamma^e - \int_{\Omega^e} U_p k (\nabla^2 \mathbf{U}) d\Omega^e$$

$$\mathbf{k}_p = \int_{\Omega^e} (\nabla U_p)^T k (\nabla \mathbf{U}) d\Omega^e = - \int_{\Gamma^e} U_p \mathbf{n} \mathbf{S} d\Gamma^e \quad (3.56)$$

O terceiro termo da expressão (3.53) não pode ser reduzido a um integral na fronteira pois a solução particular não é harmónica ($\nabla^2 U_p \neq 0$). No entanto, a sua expressão pode ser calculada analiticamente em domínios retangulares com lados L e B e com a origem do referencial local no centro geométrico do elemento. Neste caso,

$$\int_{\Omega^e} (\nabla U_p)^T k (\nabla U_p) d\Omega^e = \frac{Q^2}{4k} \int_{\Omega^e} r^2 d\Omega^e = \frac{Q^2}{48k} LB(L^2 + B^2) \quad (3.57)$$

Usando as definições (3.55) e (3.57) chegamos à expressão final da energia térmica,

$$U_{EF} = \frac{1}{2} (\hat{\mathbf{X}}^T \mathbf{K} \mathbf{X}) + Re [\mathbf{k}_p] \mathbf{X} + \frac{Q^2}{96k} LB(L^2 + B^2) \quad (3.58)$$

Caso o elemento não seja retangular, o integral (3.57) não pode ser resolvido analiticamente e precisa de ser calculado através do integral no volume.

Capítulo 4

Implementação dos elementos finitos híbridos-Trefftz

4.1 Introdução

O programa desenvolvido neste trabalho tem na base da sua organização e da sua implementação um programa desenvolvido noutra trabalho, para problemas de condução térmica, utilizando elementos finitos puramente híbridos [49].

Os elementos finitos utilizados na referência [49] e os desenvolvidos neste trabalho partilham a mesma estrutura de dados relativa à topologia das malhas de elementos retangulares e a mesma estrutura dos sistemas resolutivos, permitindo assim a uniformização das respetivas implementações. Por outro lado, as bases de aproximação e as expressões que definem os termos dos sistemas resolutivos são completamente diferentes para os dois tipos de elementos, tendo, por isso, sido implementadas de raiz. O programa existente foi ainda melhorado para permitir a definição de malhas não regulares formadas por elementos triangulares, opção que não existe na implementação dos elementos finitos puramente híbridos.

O presente capítulo está organizado de forma a mostrar a implementação e o funcionamento do programa computacional nas três fases distintas que o definem: os pré-processamento, processamento e pós-processamento.

A primeira fase consiste na introdução de dados feita pelo utilizador, seguida da geração da malha, definição da topologia da mesma e criação da estrutura de dados onde se guarda toda a informação gerada.

A fase seguinte corresponde à montagem do sistema resolutivo, calculando os termos que o compõem, tendo em conta a dimensão das bases de aproximação, no domínio e na fronteira. Para a resolução deste sistema, são necessárias a definição da metodologia de integração numérica utilizada, bem como a descrição do controlo da estabilidade numérica do sistema resolutivo.

Por fim, relativamente à fase de pós-processamento, descreve-se a construção dos campos das soluções (temperaturas e fluxos de calor).

4.2 Sistemas de referência

Para a definição do modelo e posterior funcionamento eficiente do algoritmo é necessário utilizar vários tipos de referenciais ao longo da execução do programa. Estes estão apresentados na figura 4.1, com os respectivos sentidos positivos, e são descritos de seguida.

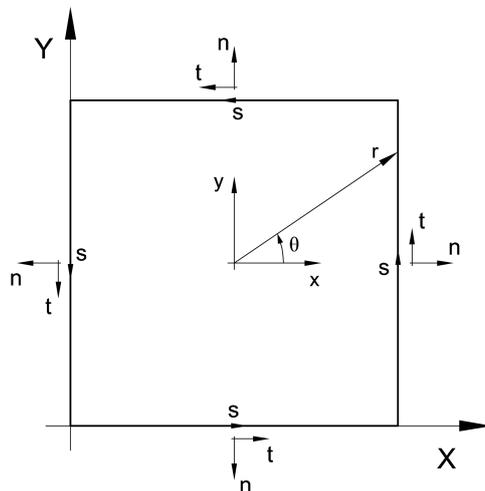


Figura 4.1: Sistemas de referência

- Referencial global Cartesiano (X, Y) - serve para definir a geometria da estrutura bem como as expressões paramétricas das fronteiras. É ainda o referencial usado na apresentação dos campos da solução. Tem a origem na extremidade inferior-esquerda da estrutura se para a sua discretização for utilizado o gerador regular. A origem é definida pelo utilizador no caso de se utilizar o gerador não regular.
- Referencial local Cartesiano (x, y) - serve para definir a geometria local de cada elemento. Tem a sua origem localizada no centróide do elemento e os seus eixos orientados paralelamente aos eixos globais coordenados.
- Referencial local polar (r, θ) - serve para a definição das funções de aproximação do domínio dos elementos. Tem a sua origem no centróide do elemento e o eixo $\theta = 0$ é coincidente com o eixo x local.
- Referencial Cartesiano da fronteira (n, t) - tem a sua origem no centro da fronteira e o eixo normal direcionado sempre para fora do elemento. O eixo tangencial contorna a estrutura no sentido anti-horário. Serve para definir as condições de fronteira.
- Referencial da fronteira (s) - serve para definir as funções da base de aproximação nas fronteiras dos elementos e a localização dos pontos de Gauss-Legendre para os processos de integração numérica necessários para calcular os coeficientes do sistema resolutivo. Adquire valores no intervalo entre $s \in [-1, 1]$. A sua origem está localizada no centro da fronteira.

4.3 Pré-processamento

4.3.1 Interface gráfica

Para facilitar o manuseamento do programa por parte do utilizador, foi implementada uma série de interfaces gráficas (GUI), que facilitam a inserção de todos os dados de entrada do programa. Esta secção destina-se a descrever muito brevemente as interfaces gráficas implementadas no programa, no entanto, a sua explicação mais pormenorizada pode ser encontrada no anexo B.

A estrutura geral das interfaces gráficas é apresentada na figura 4.2, num formato de fluxograma. Estão implementadas quatro interfaces principais (GUI1 a GUI4) nas quais são definidos os diversos parâmetros necessários ao funcionamento do programa, complementadas pela interface do gerador de malha e por uma interface de visualização.

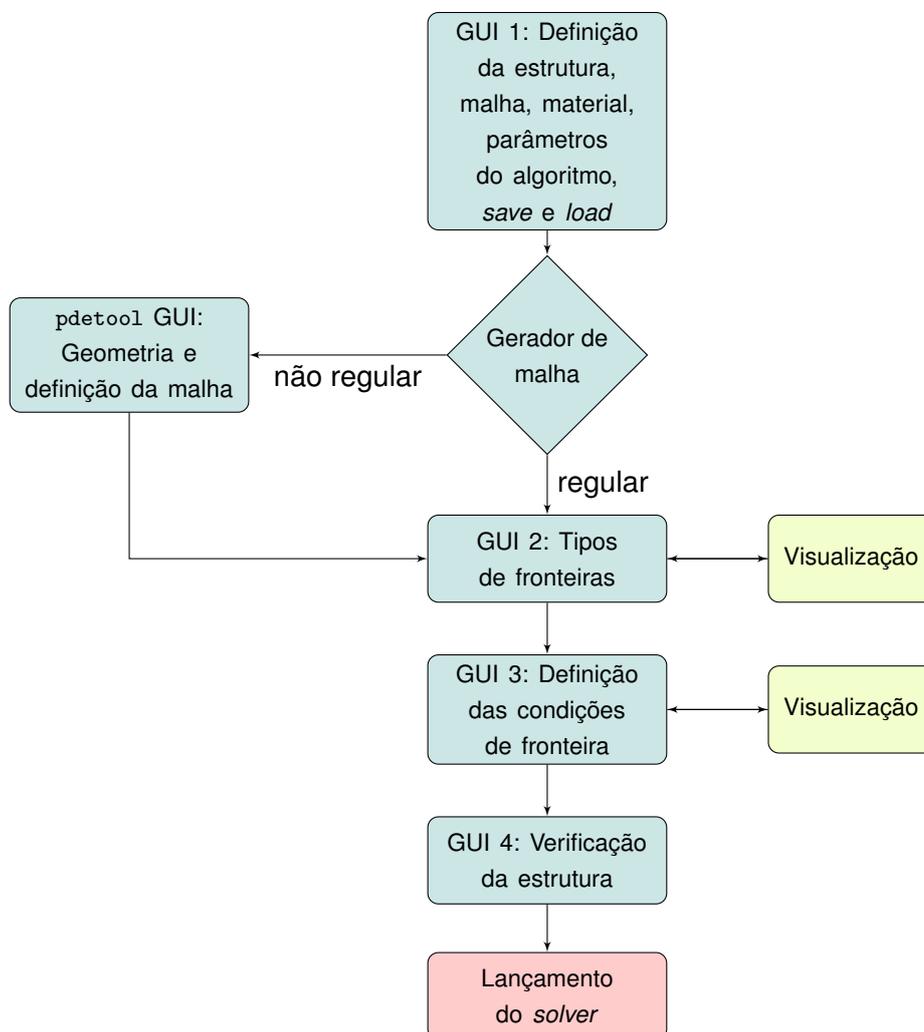


Figura 4.2: Fluxograma das interfaces gráficas

Os dados inseridos na GUI 1 dizem respeito à definição da geometria do modelo da malha, à escolha dos graus das bases de aproximação, no domínio e nas fronteiras

essenciais dos elementos da malha, e também ao número de pontos de Gauss-Legendre para a integração numérica. É nesta interface que se escolhe ainda o tipo de análise desejado, nomeadamente, análise singular ou análise adaptativa (conforme vai ser explicado no capítulo 5).

Na GUI 2 são definidos os tipos das fronteiras exteriores (Dirichlet ou Neumann) e na GUI 3 definem-se as temperaturas impostas nas fronteiras de Dirichlet e os fluxos impostos nas fronteiras de Neumann.

O modelo de elementos finitos pode ser definido através de uma malha regular, composta por elementos retangulares, ou de uma malha não regular, composta por elementos triangulares. Deste modo, as interfaces existentes são complementadas com uma interface `pdetool`, para a definição das malhas e estruturas não regulares, e ainda com uma interface opcional que permite a visualização mais pormenorizada dos nós, fronteiras e elementos.

4.3.2 Geração da malha

Nesta secção são descritos a forma como é gerada a malha e os dados topológicos que daí resultam. Depois são explicadas, detalhadamente, as estruturas de dados utilizadas no programa.

Gerador de malha regular

A geração da malha regular é automática e simples, mas adequada apenas para estruturas retangulares. O utilizador é responsável pela inserção das dimensões e dos números de elementos em X e Y . Depois de introduzidos estes dados, o gerador produz uma malha formada apenas por elementos retangulares, de dimensões idênticas. Pode ser visto um exemplo de malha regular na figura 4.3, com a representação da orientação dos referenciais das fronteiras.

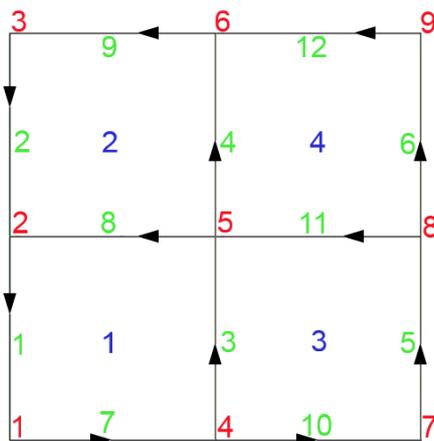


Figura 4.3: Malha regular de elementos finitos e orientação das arestas

Gerador de malha não regular

No gerador de malha não-regular, o utilizador define a geometria da malha a partir da interface gráfica `pdetool` incorporada no ambiente Matlab (ver anexo B). Nesta interface o utilizador tem a liberdade de definir geometrias muito flexíveis, sendo estas posteriormente discretizadas, automaticamente, em elementos triangulares, como é possível ver na figura 4.4. Esta interface gráfica permite ainda ao utilizador definir a dimensão máxima dos elementos a utilizar na malha e garante a opção de refinamento progressivo.

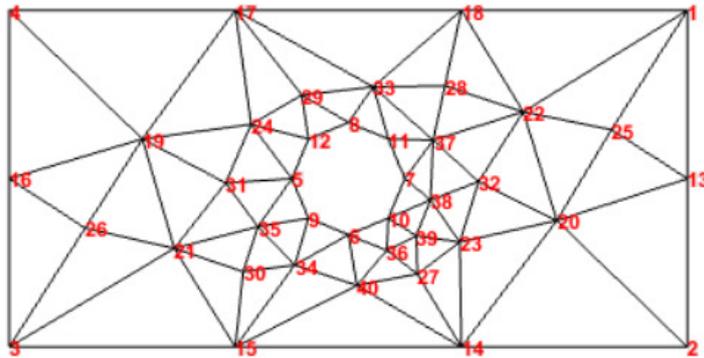


Figura 4.4: Exemplo de malha não regular de elementos finitos

Dados topológicos

Depois da definição de todos os dados geométricos, como a matriz **Nodes** onde estão definidas as coordenadas dos nós, e da geração da malha, o programa cria os respetivos dados topológicos. Os dados topológicos são um conjunto coerente de informações obtidas a partir da descrição geométrica de um objeto. Estas informações são armazenadas e estruturadas de acordo com uma lógica que garanta a consistência das relações espaciais dos nós com as fronteiras e os respetivos elementos. Esta forma de organizar os dados fornece uma abordagem eficiente para a manipulação da informação e reduz o esforço computacional, evitando que se tenham de realizar sucessivas consultas globais à geometria do modelo. A informação topológica assim construída, é organizada nos conjuntos de dados listados na tabela 4.1, que são sucintamente descritos de seguida.

Tabela 4.1: Dados topológicos

Loops_nodes

Edges_nodes

Edges_loops

Loops_edges

- **Loops_nodes** : matriz, de dimensão igual ao número de elementos da malha, onde as colunas contêm o índice dos nós pertencentes a cada elemento. O número de colunas pode ser quatro ou três, caso a malha seja regular ou não-regular, respetivamente.
- **Edges_nodes** : matriz, de dimensão igual ao número de fronteiras existentes na malha por dois, onde as colunas contêm o índice dos nós inicial e final de cada fronteira.
- **Edges_loops** : matriz, de dimensão igual ao número de fronteiras existentes na malha por dois, onde as colunas contêm os índices dos elementos que se encontram à esquerda e à direita de cada fronteira. Esta matriz ajuda a que se possa distinguir fronteiras exteriores de fronteiras interiores. Caso uma fronteira seja exterior e portanto não tenha elemento à direita, o respetivo valor na matriz fica nulo. Segundo a topologia definida, existe sempre um elemento à esquerda de cada fronteira.
- **Loops_edges** : matriz, de dimensão igual ao número de elementos da malha por quatro ou três (conforme seja uma malha regular ou não regular), onde as colunas contêm o índice das fronteiras pertencentes a cada elemento.

4.3.3 Estruturas de dados

Com base nos dados topológicos descritos na secção anterior, o programa constrói três estruturas de dados, **Edges**, **Loops** e **BConds**. Estas estruturas estão divididas, por sua vez, em membros que ajudam a manter a simplicidade na organização do algoritmo.

Estrutura Edges

A estrutura **Edges** (tabela 4.2) armazena toda a informação referente às fronteiras da malha. São apresentados e explicados de seguida os seus vários membros.

Tabela 4.2: Estrutura de dados **Edges**

Edges	Edges.nini
	Edges.nfin
	Edges.parametric
	Edges.lleft
	Edges.lright
	Edges.type
	Edges.order
	Edges.insert
	Edges.dim

- **Edges.nini** : vetor, de dimensão igual ao número de fronteiras existentes na malha, onde cada termo corresponde aos índices dos nós iniciais de cada fronteira.

- **Edges.nfin** : vetor, de dimensão igual ao número de fronteiras existentes na malha, onde cada termo corresponde aos índices dos nós finais de cada fronteira.
- **Edges.parametric** : matriz, de dimensão igual ao número de fronteiras existentes na malha por quatro colunas. Estas são compostas pelas coordenadas Cartesianas globais do nó inicial e pela diferença entre os nós final e inicial, expressa nas mesmas coordenadas.
- **Edges.lleft** : vetor, de dimensão igual ao número de fronteiras existentes na malha, onde cada termo corresponde aos índices dos elementos que estão à esquerda de cada fronteira.
- **Edges.lright** : vetor, de dimensão igual ao número de fronteiras existentes na malha, onde cada termo corresponde aos índices dos elementos que estão à direita de cada fronteira. Caso se trate de uma fronteira exterior, o valor do termo fica nulo.
- **Edges.type** : vetor, de dimensão igual ao número de fronteiras existentes, onde cada termo define se se trata de uma fronteira Dirichlet ('D') ou Neuman ('N'). As fronteiras interiores são implicitamente designadas do tipo Dirichlet. Esta definição das fronteiras é feita pelo utilizador, na segunda interface gráfica (GUI2, figura 4.2).
- **Edges.order** : vetor, de dimensão igual ao número de fronteiras existentes na malha, onde cada termo corresponde ao grau da base das funções de aproximação da respetiva fronteira. A escolha dos graus das funções de aproximação é feita pelo utilizador na primeira interface gráfica (GUI1, figura 4.2).
- **Edges.dim** : vetor, de dimensão igual ao número total de fronteiras, onde cada termo indica a dimensão N_T da base de aproximação de cada fronteira.
- **Edges.insert** : vetor, de dimensão igual ao número total de fronteiras, onde cada termo indica a posição de entrada da matriz **B** da fronteira no sistema resolutivo (3.48).

Estrutura Loops

A estrutura **Loops** (tabela 4.3) é responsável por armazenar toda a informação relativa aos elementos da malha. São apresentados e explicados de seguida os seus vários membros.

Tabela 4.3: Estrutura de dados **Loops**

Loops	Loops.nodes
	Loops.edges
	Loops.center
	Loops.area
	Loops.material
	Loops.order
	Loops.dim
	Loops.insert

- **Loops.nodes**: matriz, idêntica à matriz topológica **Loops_nodes** devolvida pelo gerador de malha.
- **Loops.edges** : matriz, idêntica à matriz topológica **Loops_edges** devolvida pelo gerador de malha.
- **Loops.center** : matriz, de dimensão igual ao número de elementos da malha por duas colunas, onde em cada linha está representada a posição do centroíde do elemento relativamente ao referencial global da estrutura. O centroíde do elemento corresponde, por sua vez, à origem do referencial local do elemento.
- **Loops.area** : vetor, de dimensão igual ao número de elementos da malha onde cada termo apresenta a área do respetivo elemento.
- **Loops.material** : matriz, de dimensão igual ao número de elementos da malha, por duas colunas. Na primeira coluna estão os valores correspondentes à geração interna de calor (Q) de cada elemento, na segunda coluna estão os valores correspondentes à condutibilidade térmica (k) de cada elemento.
- **Loops.order** : vetor, de dimensão igual ao número de elementos da malha, onde cada termo apresenta o grau da base de funções de aproximação do domínio do respetivo elemento. A escolha dos graus das funções de aproximação é feita pelo utilizador na primeira interface gráfica (GUI1, figura 4.2).
- **Loops.dim** : vetor, de dimensão igual ao número total de elementos da malha, onde cada termo indica a dimensão da base de aproximação do respetivo elemento, N_D .
- **Loops.insert** : vetor, de dimensão igual ao número total de elementos da malha, onde cada termo indica a posição de entrada do respetivo bloco da matriz de condutibilidade K , no sistema resolutivo (3.48).

Estrutura **BConds**

A estrutura **BConds** (tabela 4.4) é responsável por armazenar toda a informação relativa às condições de fronteira. São apresentados e explicados de seguida os seus

Tabela 4.4: Estrutura de dados **BConds**

BConds	BConds.Dirichlet
	BConds.Neumann

membros.

- **BConds.Dirichlet**: lista, de dimensão igual ao número total de fronteiras. Nas posições correspondentes às fronteiras de Dirichlet, são guardados os valores das temperaturas impostas. As entradas que não correspondem a fronteiras de Dirichlet tomam o valor 'NaN' (operador sem input).
- **BConds.Neumann**: lista, de dimensão igual ao número total de fronteiras. Nas posições correspondentes às fronteiras de Neumann, são guardados os valores dos fluxos de calor impostos. As entradas que não correspondem a fronteiras de Neumann tomam o valor 'NaN'.

4.4 Processamento

A fase de processamento corresponde ao cálculo dos coeficientes do sistema resolutivo e à posterior resolução do mesmo. As suas principais etapas são apresentadas de seguida.

4.4.1 Mapeamento do sistema

O armazenamento do sistema é feito numa lógica de sub-matrizes (ou blocos) associados aos elementos finitos que lhes dão origem. O acesso a cada sub-matriz é feito com base na informação obtida através do mapeamento do sistema.

O mapeamento do sistema consiste na definição de todos os pontos de entrada de cada elemento e de cada fronteira essencial no sistema resolutivo, assim como no cálculo das dimensões das matrizes que lhes são associadas, de maneira a permitir a pré-alocação de memória.

Para ilustrar o mapeamento do sistema, considerou-se um exemplo prático onde foi utilizada a mesma malha apresentada na figura 4.3, onde todas as fronteiras são do tipo Dirichlet e as bases de aproximação têm ordens, $n_D = 4$, para o domínio e $n_\Gamma = 1$, para as fronteiras exteriores e interiores.

Na figura 4.5 estão representadas as matrizes que compõem o sistema resolutivo, onde os pontos a azul correspondem aos valores não nulos, e o espaço a branco aos valores nulos, sendo muito perceptível a alta esparsidade do sistema, conforme explicado na secção 3.7.

Na figura 4.5 (a) podemos observar as matrizes de condutibilidade **K** de cada elemento delimitadas a vermelho. Já na figura 4.5 (b), é possível observar as matrizes **B** de cada fronteira e as suas transpostas também delimitadas a vermelho.

A forma como o programa define o mapeamento do sistema através da informação guardada na estrutura de dados é apresentada na figura 4.6. O programa calcula, a nível

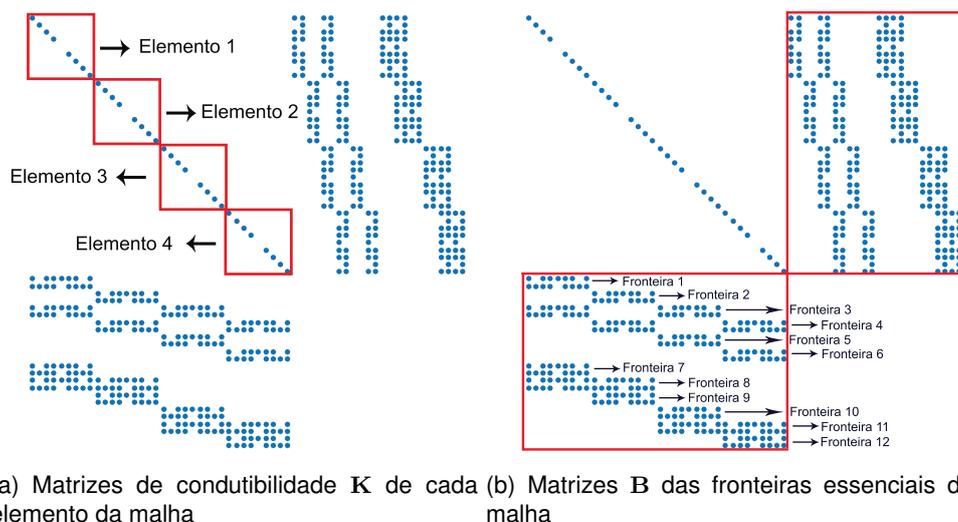


Figura 4.5: Matrizes \mathbf{K} e \mathbf{B} constituintes do sistema resolutivo para o exemplo da figura 4.3 com todas as fronteiras do tipo Dirichlet, ordem $n_D = 4$ no domínio e ordem $n_\Gamma = 1$ nas fronteiras.

de cada elemento, a dimensão (N_D) dos blocos de cada matriz de condutividade (\mathbf{K}) em função da ordem das funções de aproximação no domínio (n_D) definida no vetor **Loops.order**, conforme à relação (3.12). Da mesma maneira, as dimensões dos blocos das matrizes de fronteira (\mathbf{B}), são calculadas tendo em conta as ordens das funções de aproximação das fronteiras (n_Γ), através da expressão (3.17).

Na sequência deste processo, são gerados os pontos de inserção dos blocos que constituem o sistema resolutivo e as respetivas dimensões, e guardados nos membros `insert` e `dim` das estruturas **Loops** e **Edges**. Essa informação é ilustrada, apenas na matriz dos coeficientes, na figura 4.6 para os dois primeiros elementos e fronteiras essenciais.

4.4.2 Integração numérica

O cálculo dos integrais nas formulações de elementos finitos é feito recorrendo a técnicas de integração numérica, uma vez que a sua resolução analítica não é, muitas vezes, viável. Deste modo, para o cálculo dos integrais que definem os vários coeficientes do sistema resolutivo (3.48) foi utilizado o método de integração numérica de Gauss-Legendre. Neste método, o integral é reduzido a uma soma ponderada dos valores da função a integrar, em determinados pontos críticos pertencentes ao domínio de valores dessa função. Neste caso o domínio de integração é representado pela fronteira, sendo a mesma mapeada para o intervalo $s \in [-1, 1]$. O integral de uma função genérica $f(s)$ definida no referencial da fronteira fica,

$$I = \frac{L}{2} \int_{-1}^1 f(s) ds = \frac{L}{2} \sum_{i=1}^n W_i f(a_i) \quad (4.1)$$

onde L é o comprimento da fronteira que representa o domínio da integração, n é o número total dos pontos de Gauss-Legendre, a_i são as abcissas que correspondem a esses pontos

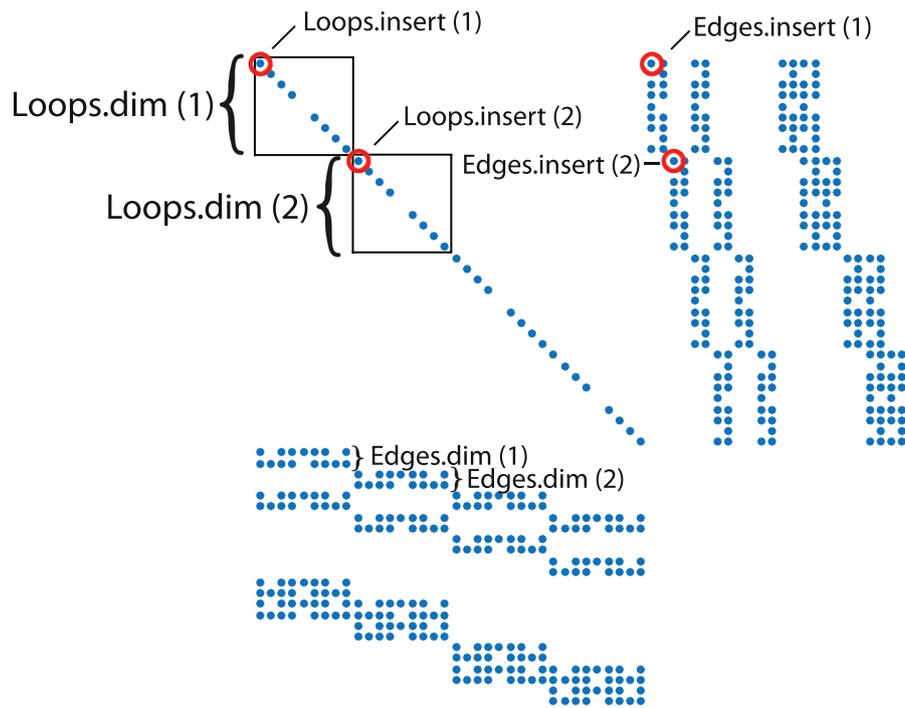


Figura 4.6: Mapeamento da matriz dos coeficientes

e W_i os respectivos pesos. A regra de quadratura de Gauss é construída para produzir um resultado exato para polinômios de grau $2n - 1$ ou inferior. Neste trabalho foi sempre adotado um número de pontos de Gauss suficientemente elevado de modo a evitar erros numéricos de integração.

O método numérico usado para calcular os vários termos do sistema resolutivo foi programado seguindo um paradigma completamente vetorizado. Em ambiente Matlab, este tipo de programação é geralmente mais rápido que um código semelhante mas com ciclos `for`, tendo em conta a natureza interpretativa da linguagem Matlab. Outra vantagem deste tipo de programação está na aparência. Um código vetorizado parece-se mais com expressões matemáticas correntes, o que o torna mais fácil de entender. Para além disso, um código sem ciclos `for` é mais sucinto, o que também contribui para melhorar a sua legibilidade.

As matrizes \mathbf{K} e \mathbf{B} são calculadas a partir de estruturas de dados tridimensionais. Estas estruturas têm nas linhas e colunas as ordens das bases correspondentes às funções de aproximação de cada matriz, e nas páginas (isto é, a terceira dimensão) ficam os seus valores nas abcissas a_i . A abordagem encontra-se apresentada na figura 4.7, para a matriz de condutibilidade \mathbf{K} , onde **NPG** representa o número de pontos de Gauss.

No caso dos vetores que compõem o lado direito do sistema, os mesmos são calculados a partir de estruturas bidimensionais, estando nas linhas os valores correspondentes aos graus das funções de aproximação e nas colunas os valores que correspondem às respetivas abcissas.

A integração numérica (4.1) é feita multiplicando o integrando $f(a_i)$ pelos pesos W_i (figura 4.7) e realizando posteriormente o somatório na direção correspondente às abcissas.

4.4.4 Resolução do sistema

Verificar a estabilidade numérica do sistema resolutivo é um processo obrigatório antes de se calcular a solução, tendo em conta as consequências que podem advir da resolução numérica de sistemas mal condicionados aplicando técnicas que assumem o seu bom condicionamento. Por isso, bastante esforço foi investido, no âmbito deste trabalho, na compreensão dos sintomas de instabilidade do sistema, bem como no seu subsequente tratamento numérico. As principais conclusões deste investimento são apresentadas de seguida.

Número de condição

Para efeitos de controlo da estabilidade numérica de sistemas algébricos, utiliza-se, geralmente, o número de condição, definido como o quociente entre o maior valor singular e o menor valor singular da matriz dos coeficientes do sistema (3.48).

Um sistema costuma ser considerado mal condicionado caso a inversa do seu número de condição seja inferior à precisão da máquina ($\epsilon_{ps} = 2.2204^{-16}$).

Se o sistema é mal condicionado, o protocolo usado para o resolver baseia-se na utilização da pseudo-inversa, que garante a eliminação dos valores singulares inferiores a um certo limite. Para definir este limite, é necessária uma análise mais elaborada da evolução dos valores singulares com o refinamento das bases de aproximação [7].

Por outro lado, um número de condição superior a ϵ_{ps} nem sempre garante um sistema robusto numericamente. Isto pode ser visto no exemplo prático apresentado de seguida.

Considerou-se a mesma estrutura apresentada na figura 4.3, com a condutibilidade térmica $k = 1$ e geração interna de calor $Q = 20$. Uma temperatura uniforme, $t_{\Gamma} = 0$ é imposta em todas as fronteiras exteriores. Visto que existe bi-simetria, em x e y , os graus das funções de aproximação nas fronteiras interiores são fixados a $n_{\Gamma_i} = 0$, já para as fronteiras exteriores são testados refinamentos na gama $n_{\Gamma_e} \in [0, 5]$. No domínio, o grau da base é mantido constante, $n_D = 7$.

Na figura 4.8 estão representados os valores singulares da matriz dos coeficientes e os respetivos números de condição, para todos os refinamentos testados. O eixo das abcissas corresponde ao número total de valores singulares, o eixo das ordenadas é definido (em escala logarítmica) pelos valores singulares.

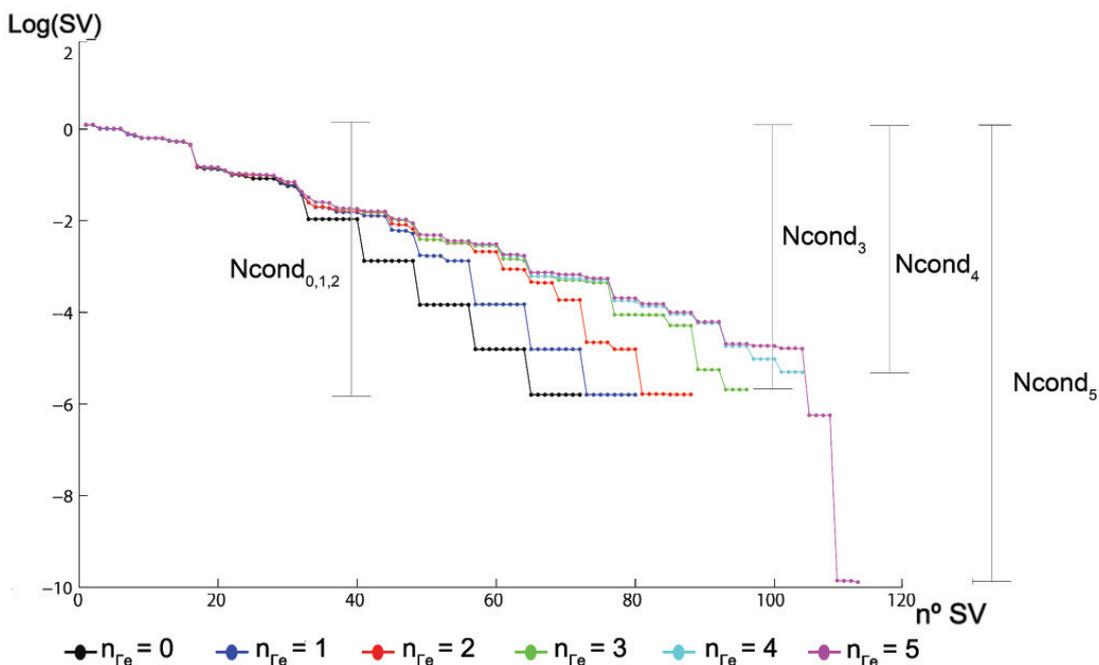


Figura 4.8: Valores singulares (VS) e números de condição

Pelo gráfico da figura 4.8 é possível observar que até $n_{\Gamma e} = 2$, os valores singulares máximo e mínimo não se alteraram e, logo, o número de condição mantém-se constante, sendo no entanto, observado um maior alinhamento dos valores singulares para $n_{\Gamma e} = 2$. À medida que se aumenta o grau de refinamento $n_{\Gamma e}$ para, $n_{\Gamma e} = 3$ e $n_{\Gamma e} = 4$, para além do alinhamento cada vez melhor dos valores singulares, o número de condição diminui, encontrando-se a melhor solução para $n_{\Gamma e} = 4$.

No entanto, quando o grau é aumentado para $n_{\Gamma e} = 5$ observa-se claramente uma descontinuidade brusca entre valores singulares mais baixos, o que leva a um aumento bastante acentuado do número de condição, embora a inversa deste continue a ser muito superior à precisão da máquina ($cond^{-1} \gg eps$).

Apesar do número de condição estar bem dentro dos limites considerados, na prática corrente, como aceitáveis, as soluções obtidas para $n_{\Gamma e} = 4$ e $n_{\Gamma e} = 5$ são muito diferentes, conforme ilustrado nas figuras 4.9 e 4.10, respetivamente. Ao contrário do que seria, porventura, expectável, o aumento num grau do refinamento nas fronteiras exteriores provoca uma deterioração muito considerável, tanto da solução das temperaturas como da dos fluxos, que não se pode explicar somente pela deterioração do valor do número de condição.

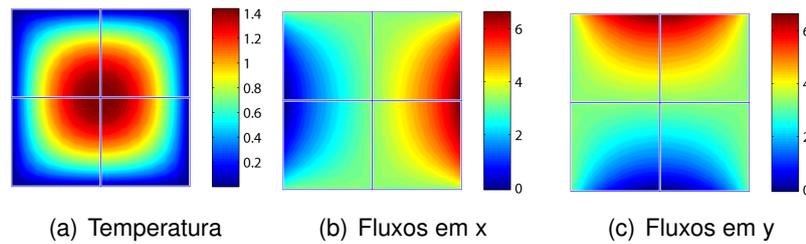


Figura 4.9: Temperatura e fluxos, em x e y, para o caso ($n_D=7$, $n_{\Gamma_i}=0$ e $n_{\Gamma_e}=4$)

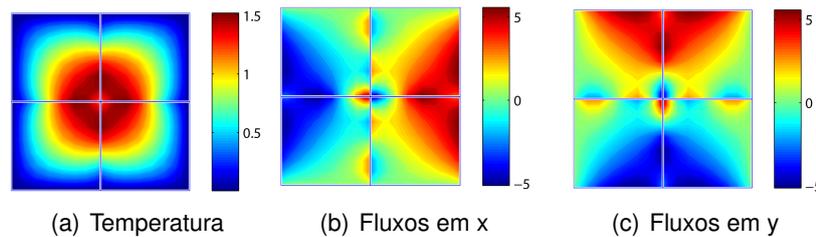


Figura 4.10: Temperatura e fluxos, em x e y, para o caso ($n_D=7$, $n_{\Gamma_i}=0$ e $n_{\Gamma_e}=5$)

Conjetura-se aqui que os problemas numéricos que provocaram a deterioração da solução do problema testado prendem-se mais com os hiatos entre valores singulares consecutivos e com o conseqüente desalinhamento dos mesmos, do que com a razão entre o maior e o menor valor singular.

Deste modo, o número de condição revelou-se um método ineficaz na detecção destas variações bruscas, tendo, por isso, sido introduzidas no programa duas novas metodologias, com o objetivo de detetar de forma mais eficiente estas variações bruscas entre valores singulares consecutivos.

Valores singulares outliers

Duas novas metodologias são introduzidas com o objetivo de controlar a estabilidade numérica do sistema (3.48), detetando valores singulares (VS) da matriz dos coeficientes, que sejam prejudiciais à sua solução.

Os valores singulares prejudiciais, ou outliers, são definidos como tendo uma ordem de grandeza excessivamente pequena em relação ao VS anterior. Por isso ambas as metodologias procuram essencialmente hiatos ou desalinhamentos dos VS que sejam superiores a certos valores, considerados como aceitáveis.

O primeiro método é baseado na quantificação direta dos hiatos entre os VS. São considerados para a definição do hiato máximo aceitável os primeiros 85% de todos os VS. É, depois, definido como hiato máximo aceitável um valor superior em 20% ao hiato máximo registado na gama de VS utilizada para calibração. O primeiro VS que regista um hiato em relação ao anterior maior que o valor máximo aceitável é identificado como outlier.

O segundo método é baseado na quantificação do alinhamento dos VS e tem como fundamento a observação de que as melhores soluções correspondem, geralmente, a sistemas resolutivos cujas matrizes dos coeficientes apresentam VS (logaritmicamente) alinhados. Na maioria dos casos testados, esse alinhamento ocorre naturalmente nos VS

maiores (conforme ilustrado na figura 4.8), perdendo-se, nos casos mais problemáticos, nos VS mais baixos. É feita então, uma interpolação linear entre os VS de referência, considerados, neste contexto, como sendo os primeiros 85% de todos os VS. De seguida, é calculado o desvio padrão dos VS da zona de referência face a essa interpolação. O primeiro valor singular que tenha um desvio superior a 8 vezes esse desvio padrão é considerado um outlier.

De notar que todos os procedimentos acima referidos operam sobre os logaritmos dos VS, conforme representado na figura 4.8. Os valores utilizados para a calibração dos algoritmos foram estabelecidos heurísticamente, de maneira a mitigar a probabilidade de ocorrência de falsos negativos, que podiam permitir que o algoritmo chegasse, sem aviso, a resultados errados.

Para o mesmo exemplo prático usado na figura 4.3, usando as mesmas condições impostas anteriormente, são apresentados, na figura 4.11, os VS para os casos ($n_D = 7, n_{\Gamma_e} = 4$) e ($n_D = 7, n_{\Gamma_e} = 5$). Os dois procedimentos estão em sintonia, não identificando outlier na primeira situação, e identificando o mesmo outlier na segunda. Esse outlier está contornado a vermelho, na mesma figura.

Uma vantagem adicional destes procedimentos é que o valor do outlier identificado pode ser usado como parâmetro de calibração para a rotina de resolução do sistema numericamente instável, utilizando a pseudo-inversa [7], conforme referido anteriormente. Com efeito, essa rotina é calibrada no Matlab de maneira a considerar como nulos todos os VS inferiores ao outlier.

O uso desta metodologia para o controlo da estabilidade numérica do sistema, possibilita que se recuperem campos de soluções não distorcidas, mesmo para o caso em que $n_{\Gamma_e} = 5$. De facto, a solução resultante fica idêntica à da figura 4.9.

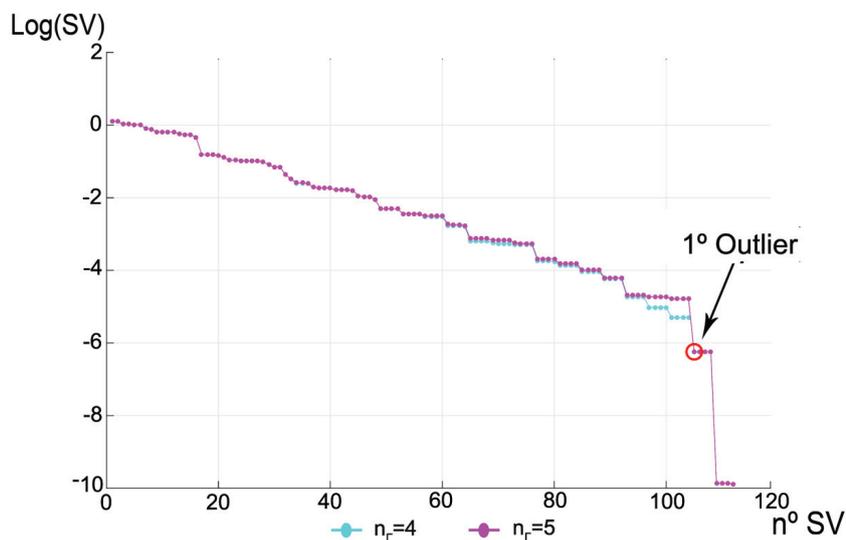


Figura 4.11: Detecção de valores singulares para os casos $n_{\Gamma_e} = 4$ e $n_{\Gamma_e} = 5$

4.5 Pós-processamento

Na fase de pós-processamento, o programa constrói, com base na solução do sistema governativo as aproximações dos campos da temperatura e fluxos e apresenta os resultados graficamente. Se solicitado pelo utilizador, os valores destes campos nos pontos da quadratura de Gauss-Legendre são também guardados num ficheiro de texto para posterior visualização através de programas dedicados.

É possível consultar o vetor das soluções generalizadas \mathbf{X} de um elemento através da informação guardada em **Loops.insert**, onde se sabe o ponto de inserção do elemento, e em **Loops.dim** onde está guardada a dimensão do elemento (ver figura 4.6).

A solução do sistema (3.48) fornece uma estimativa única para o campo de temperaturas, tanto nos domínios dos elementos como nas fronteiras. Este campo é obtido com base na aproximação (3.3),

$$T(r, \theta) = \mathbf{U}(r, \theta)\mathbf{X} + U_p(r, \theta) \quad (4.6)$$

No domínio existe também uma única estimativa do campo dos fluxos de calor, obtida a partir do campo de temperaturas pela lei de Fourier (2.4),

$$\mathbf{q}(r, \theta) = -k [\nabla \mathbf{U}(r, \theta)\mathbf{X} + \nabla U_p(r, \theta)] \quad (4.7)$$

Para a apresentação final dos campos dos fluxos, é ainda necessário passar das coordenadas polares (r, θ) para as Cartesianas (x, y) , através da lei de transformação,

$$\begin{pmatrix} q_x \\ q_y \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{pmatrix} q_r \\ q_\theta \end{pmatrix} \quad (4.8)$$

Nas fronteiras essenciais, os campos de fluxos normais podem ser obtidos através de duas estimativas independentes, uma através da projeção do campo de fluxos (4.7) na fronteira e a outra utilizando a aproximação independente (3.14). As duas estimativas devem coincidir quando se atinge a convergência da solução.

Finalmente, após obtidos os campos da temperatura e dos fluxos, é calculada estimativa da energia térmica através da expressão (3.58). O último termo da mesma é obtido através do integral no volume (3.57) no caso de malhas não regulares.

Capítulo 5

Refinamento ' p '-adaptativo

5.1 Introdução

O objetivo principal de um refinamento ' p '-adaptativo é determinar os graus "ótimos" das funções de aproximação nos elementos e nas fronteiras essenciais da malha através do aumento gradual dos mesmos em zonas consideradas críticas, de modo a tornar mais expedita a convergência da solução.

O método dos elementos finitos permite três principais tipos de refinamentos, denominados correntemente de ' h ', ' p ' e ' h - p '.

O refinamento ' h ' é o mais comum nos programas comerciais e consiste em aumentar o número de elementos da malha, discretizando-a na zonas onde os erros são maiores [5, 59].

O refinamento ' p ' consiste em aumentar os graus das funções de aproximação no domínio e na fronteira dos elementos. Este método de refinamento foi alvo de muita atenção nos anos 80, tendo sido realizadas muitas publicações sobre a definição e desenvolvimento do mesmo [3, 18, 31, 34]. É este tipo de refinamento que vai ser implementado neste trabalho.

Por fim, o refinamento ' h - p ' é um misto dos dois refinamentos referidos anteriormente [4].

O algoritmo ' p '-adaptativo descrito a seguir foi desenvolvido com o objetivo de produzir soluções fiáveis sem que o utilizador tenha de escolher adequadamente os graus das fronteiras essenciais e dos elementos da malha, e permitindo, assim, a utilização dos elementos híbridos-Trefftz de temperatura por parte de utilizadores menos experientes. A implementação computacional deste algoritmo é simples e económica, garantindo, nos casos testados, a convergência da solução.

O algoritmo adaptativo melhora, local e gradualmente, o modelo de elementos finitos aumentando as ordens das funções de aproximação em certas fronteiras essenciais que são selecionadas tendo em conta dois critérios alternativos, significativos e consistentes.

Considera-se, neste caso, que um critério é significativo se a sua aplicação leva a que as soluções sejam convergentes, já a consistência de um critério tem a ver com o facto de este não depender de nenhuma condição que esteja predisposta a ser alterada ao longo da execução do algoritmo. Outro dos objetivos do algoritmo é garantir que situações de constrangimento e refinamento excessivos são evitadas automaticamente.

Nesta secção, são definidos e apresentados, em detalhe, os principais pontos do

algoritmo, começando pela estratégia do refinamento das fronteiras e dos elementos, seguido da explicação do procedimento algorítmico, incluindo os critérios de seleção das fronteiras a refinar e de paragem.

5.2 Refinamento na fronteira

O refinamento na fronteira consiste no aumento (unitário) do grau n_Γ das funções de aproximação da fronteira essencial escolhida para o refinamento. Assim, quando se dá o aumento do grau das funções de aproximação na base dos fluxos normais das fronteiras, a base \mathbf{Z} é enriquecida com uma nova função, \bar{Z} . Deste modo, a aproximação do fluxo na fronteira refinada é definida como,

$$\mathbf{nq} = \mathbf{Z}(\mathbf{Y} + \Delta\mathbf{y}) + \bar{Z}\bar{Y} \quad (5.1)$$

onde $\Delta\mathbf{y}$ representa o incremento do vetor dos fluxos generalizados, causado pela inserção da nova função na base, e \bar{Y} é o fluxo generalizado associado a esta nova função. A adição de um novo grau de liberdade acrescenta uma nova equação de compatibilidade ao sistema resolutivo (3.48), assim,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{B} & \bar{\mathbf{B}} \\ \hat{\mathbf{B}}^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \hat{\mathbf{B}}^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{X} + \Delta\mathbf{x} \\ \mathbf{Y} + \Delta\mathbf{y} \\ \bar{Y} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\mathbf{K}_p - \mathbf{q}_\Gamma \\ \mathbf{t}_\Gamma - \mathbf{t}_p \\ \bar{t}_\Gamma - \bar{t}_p \end{Bmatrix} \quad (5.2)$$

onde,

$$\bar{\mathbf{B}} = \int_{\Gamma_u^e} \hat{\mathbf{U}}^T \bar{Z} d\Gamma_u^e \quad (5.3)$$

$$\bar{t}_\Gamma = \int_{\Gamma_u^e} \bar{Z} T_\Gamma d\Gamma_u^e \quad (5.4)$$

$$\bar{t}_p = \int_{\Gamma_u^e} \bar{Z} U_p d\Gamma_u^e \quad (5.5)$$

Tendo em conta que os vetores \mathbf{X} e \mathbf{Y} foram obtidos no passo anterior e satisfazem o sistema (3.48), o sistema (5.2) pode ser reescrito na sua forma incremental equivalente,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{B} & \bar{\mathbf{B}} \\ \hat{\mathbf{B}}^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \hat{\mathbf{B}}^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta\mathbf{x} \\ \Delta\mathbf{y} \\ \bar{Y} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \bar{t}_\Gamma - \bar{t}_p - \hat{\mathbf{B}}^T \mathbf{X} \end{Bmatrix} \quad (5.6)$$

Ao analisar o sistema (5.6), é possível verificar que o termo $(\bar{t}_\Gamma - \bar{t}_p - \hat{\mathbf{B}}^T \mathbf{X})$ é um indicador de quanto a solução da última iteração é alterada na presente iteração. Assim, este termo representa o resíduo na equação de continuidade da temperatura que é corrigido, na iteração corrente, pelo acréscimo da função de forma na base da fronteira escolhida para ser refinada. Se o mesmo termo for nulo, a função de forma que foi acrescentada à base (5.1) é ortogonal à variação da solução, ou seja, não adiciona nenhuma informação relevante à base, em relação à iteração anterior. Uma função que esteja nesta situação é denominada de modo espúrio.

De maneira a simplificar o sistema (5.6), isolando as partes que já são conhecidas da interação anterior, são efetuadas as seguintes notações,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{B} \\ \hat{\mathbf{B}}^T & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (5.7) \quad \bar{\mathbf{B}}^* = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{B}} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (5.8) \quad \Delta \mathbf{X} = \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{x} \\ \Delta \mathbf{y} \end{bmatrix} \quad (5.9)$$

Usando estas simplificações o sistema (5.6) resulta,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \bar{\mathbf{B}}^* \\ \hat{\mathbf{B}}^{*T} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \mathbf{X} \\ \bar{Y} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \bar{t}_\Gamma - \bar{t}_p - \hat{\mathbf{B}}^T \mathbf{X} \end{Bmatrix} \quad (5.10)$$

ou,

$$\begin{cases} \mathbf{A} \Delta \mathbf{X} = -\bar{\mathbf{B}}^* \bar{Y} \\ \hat{\mathbf{B}}^{*T} \Delta \mathbf{X} = \bar{t}_\Gamma - \bar{t}_p - \hat{\mathbf{B}}^T \mathbf{X} \end{cases} \quad (5.11)$$

Define-se o gradiente da solução corrente, $\dot{\mathbf{X}}$, como sendo o incremento do vetor da solução, $\Delta \mathbf{X}$, causado pelo aparecimento de um novo fluxo generalizado, $\bar{Y} = 1$,

$$\Delta \mathbf{X} = \dot{\mathbf{X}} \bar{Y} \quad (5.12)$$

Substituindo a definição (5.12) na primeira equação do sistema (5.11) temos que,

$$\mathbf{A} \dot{\mathbf{X}} = -\bar{\mathbf{B}}^* \quad (5.13)$$

Esta equação é facilmente resolvida de maneira a obter o gradiente $\dot{\mathbf{X}}$ pois a matriz \mathbf{A} é conhecida da iteração anterior.

O fluxo generalizado, \bar{Y} , associado à nova função de forma, \bar{Z} , passa a poder ser calculado através da segunda equação do sistema (5.11). Substituindo a definição (5.12) na segunda equação do sistema (5.11), o fluxo \bar{Y} fica,

$$\bar{Y} = \frac{\bar{t}_\Gamma - \bar{t}_p - \hat{\mathbf{B}}^T \mathbf{X}}{\hat{\mathbf{B}}^{*T} \dot{\mathbf{X}}} \quad (5.14)$$

Determinados os parâmetros $\dot{\mathbf{X}}$ e \bar{Y} , a variação da solução é calculada através da equação (5.12). É então possível calcular a diferença de energia entre a iteração corrente e a anterior para todas as fronteiras. O objetivo é saber qual a variação na energia causada pela variação da solução $\Delta \mathbf{x}$. Assim,

$$\Delta U = |U_i - U_{i-1}| \quad (5.15)$$

onde U_{i-1} é a energia da iteração anterior, e U_i a energia da iteração atual. Tendo em conta a definição de energia térmica (3.58), os termos na expressão (5.15) são definidos por,

$$U_{i-1} = \frac{1}{2} (\hat{\mathbf{X}}_{i-1}^T \mathbf{K}_{i-1} \mathbf{X}_{i-1}) + Re [\mathbf{k}_{p(i-1)} \mathbf{X}_{i-1}] + \frac{Q^2}{96k} LB(L^2 + B^2) \quad (5.16)$$

e,

$$U_i = \frac{1}{2} (\hat{\mathbf{X}}_{i-1} + \Delta \hat{\mathbf{x}}_i)^T \mathbf{K}_{i-1} (\mathbf{X}_{i-1} + \Delta \mathbf{x}_i) + Re [\mathbf{k}_{p(i-1)} (\mathbf{X}_{i-1} + \Delta \mathbf{x}_i)] + \frac{Q^2}{96k} LB(L^2 + B^2) \quad (5.17)$$

e a expressão (5.15) fica resumida a,

$$\Delta U = \left| \frac{1}{2} (\Delta \hat{\mathbf{x}}_i^T \mathbf{K}_{i-1} \Delta \mathbf{x}_i + \Delta \hat{\mathbf{x}}_i^T \mathbf{K}_{i-1} \mathbf{X}_{i-1} + \hat{\mathbf{X}}_{i-1}^T \mathbf{K}_{i-1} \Delta \mathbf{x}_i) + Re [\mathbf{k}_{p(i-1)} \Delta \mathbf{x}_i] \right| \quad (5.18)$$

5.3 Refinamento no domínio

Neste trabalho, o refinamento no domínio não é realizado de maneira independente, sendo uma consequência do refinamento das fronteiras e da avaliação da estabilidade numérica do sistema resolutivo.

Três dos critérios de refinamento no domínio visam evitar o sobre-condicionamento das respectivas bases de aproximação. O constrangimento excessivo dessas bases pode acontecer quando se impõem condições de fronteira usando demasiadas equações, pois isso pode colocar demasiadas condições sobre as funções dos elementos aos quais as fronteiras pertencem.

O primeiro critério que tem de ser respeitado é garantir um grau de indeterminação cinemática positivo ($\beta > 0$) para todos os elementos da malha (ver secção 3.8). Se, devido ao aumento do grau das bases nas fronteiras, o grau de indeterminação cinemática ficar nulo num ou mais elementos, então procede-se ao refinamento das bases de aproximação desses elementos.

O segundo critério de refinamento do domínio surge se alguma fronteira listada para refinamento também esteja registada como uma fronteira que causa modos espúrios (ver secção 5.2). Neste caso, todos os elementos adjacentes a essa fronteira são refinados.

Finalmente, é também necessário verificar se a ordem da base de aproximação do domínio de um elemento é menor ou igual à ordem máxima das bases das suas fronteiras adjacentes ($\max(n_\Gamma) \geq n_D$). Esta situação representa um caso típico de sobre-condicionamento e impõe o refinamento do respetivo elemento.

Relativamente ao critério da estabilidade numérica do sistema resolutivo (5.2), a mesma é verificada utilizando um dos métodos alternativos descritos na secção 4.4.4, já depois da montagem do sistema correspondente ao modelo refinado. Assim, este critério é verificado depois dos três anteriores e pode levar a que o mesmo elemento tenha a base refinada mais que uma vez numa determinada iteração. Assim, sempre que um *outlier* é detetado pelos métodos acima referidos, refinam-se os elementos adjacentes às fronteiras que foram refinadas naquela iteração.

5.4 Procedimento adaptativo

A implementação do procedimento de refinamento 'p' apresentado nas secções 5.2 e 5.3 baseia-se na seleção automática das fronteiras a refinar e na verificação da convergência da solução a seguir a cada iteração. Os critérios de refinamento e de paragem do algoritmo são sucintamente descritos de seguida.

5.4.1 Critérios de refinamento

Os critérios de refinamento servem como base de decisão do programa na seleção das fronteiras a refinar. As fronteira(s) escolhida(s) para o refinamento são aquelas que

apresentarem os maiores valores do critério de seleção escolhido.

Critério da variação da energia térmica

Este critério de refinamento é um critério global e baseia-se na listagem da variação da energia térmica de uma iteração para a outra, causada pelo enriquecimento da base de aproximação de cada fronteira essencial (5.18). A fronteira que produz a maior variação energética é selecionada para refinamento.

Critério da densidade máxima do resíduo da temperatura na fronteira

Este critério de refinamento é um critério local que visa escolher a fronteira cujo refinamento minimize o respetivo resíduo.

Conforme discutido na secção 5.2, isso corresponde a maximizar o termo livre do sistema (5.10),

$$\epsilon_{\Gamma} = \left\| \frac{\bar{t}_{\Gamma} - \bar{t}_p - \hat{\mathbf{B}}^T \mathbf{X}}{L} \right\| \quad (5.19)$$

onde o fator de escala L representa o comprimento da respetiva fronteira. O termo ϵ_{Γ} é calculado, a cada iteração, para cada fronteira essencial, sendo selecionada para refinamento aquela que o maximiza.

5.4.2 Critérios de paragem

Os critérios de paragem servem para controlar a execução do programa, e têm como objetivo principal quantificar a convergência da solução ou identificar situações nas quais a solução deixa de registar melhorias. Foram implementados no programa dois critérios de paragem por convergência, o da convergência da energia térmica e o da convergência do resíduo da temperatura na fronteira. Os critérios de convergência são os critérios de paragem mais pretendidos pelos utilizadores pois significam, essencialmente, que se atingiu a convergência da solução.

Para além dos critérios de convergência, foram implementados outros três mecanismos de paragem para casos em que a solução não melhora mais com o aumento do refinamento.

De notar que o aumento excessivo do refinamento pode gerar erros numéricos superiores à precisão ganha pelo incremento da base, levando, por fim, a que a solução divirja.

Critério da convergência da energia térmica

A cada iteração, é calculada a variação do valor da energia térmica (3.58) relativamente à iteração anterior, utilizando a seguinte expressão:

$$\Delta U_{EF} = \left\| \frac{U_i - U_{i-1}}{U_{i-1}} \right\| \quad (5.20)$$

onde i representa a iteração corrente e $i - 1$ a iteração anterior.

Deste modo, o algoritmo foi programado para parar quando o valor médio da variação da energia (5.20) nas últimas n iterações, é inferior a um parâmetro estipulado (tolerância de

convergência). O valor do número n de iterações e a tolerância de convergência são dados de entrada explicados em mais pormenor no anexo B.

Assim, a expressão que define o critério de convergência da energia térmica tem a forma,

$$\epsilon_{\Delta U} = \frac{\sum_{a=i-n}^i \Delta U_{EFa}}{n+1} \leq \text{tolerância de convergência} \quad (5.21)$$

Critério de convergência da densidade máxima do resíduo na fronteira

No caso em que o critério de convergência da densidade do resíduo na fronteira (5.19) é selecionado como critério de paragem, a convergência é obtida quando o valor médio do resíduo nas últimas n iterações (5.22), normalizado ao mesmo valor na primeira iteração, é inferior a uma tolerância de convergência definida pelo utilizador.

$$\epsilon_{\epsilon_{\Gamma}} = \|\epsilon_{\Gamma 1}^{-1}\| \frac{\sum_{a=i-n}^i \|\epsilon_{\Gamma a}\|}{n+1} \leq \text{tolerância de convergência} \quad (5.22)$$

Nesta expressão, $\epsilon_{\Gamma a}$ corresponde ao valor da densidade do resíduo na iteração a . Conforme mencionado acima, o valor das n iterações e a tolerância de convergência são dados explicados em mais pormenor no anexo B.

Solução exata

Em algumas situações, não tão frequentes, a solução analítica do problema pode ser recuperada pelas funções de aproximação. Isto acontece maioritariamente em problemas mais simples, por exemplo casos envolvendo campos de temperatura constantes ou lineares, onde as bases de aproximação, mesmo de ordens baixas, já contêm a solução exata. Se isto acontecer, qualquer acréscimo de funções de aproximação, a qualquer uma das bases das fronteiras, irá resultar numa densidade do resíduo (5.19) nula. Esta situação é identificada pelo algoritmo 'p'-adaptativo e a execução é interrompida.

Ordem máxima das bases de aproximação

Um refinamento excessivo é geralmente responsável pelo aparecimento de erros numéricos superiores à precisão ganha pelo incremento da base. Deste modo, é definido, pelo utilizador, um valor limite para o refinamento das bases no domínio dos elementos (ver valores recomendados no anexo B). Se o algoritmo detetar que esse valor limite foi atingido, a execução pára e a solução é apresentada.

Número máximo de iterações para deteção de outliers

Em certas circunstâncias envolvendo bases altamente refinadas, o aumento do refinamento no domínio pode não eliminar os outliers dos valores singulares da matriz dos coeficientes (conforme explicado na secção 4.4.4). Se se identificarem outliers num número de iterações sucessivas superior a um certo limite (definido pelo utilizador, ver anexo B), o programa pára e a solução é revertida para a última solução numericamente estável.

Capítulo 6

Implementação do refinamento '*p*'-adaptativo

6.1 Introdução

Este capítulo incide sobre a implementação do processo *p*-adaptativo, explicando as várias fases da sua execução e detalhando a sequência de decisões implementada no programa. À semelhança do capítulo 4, dedicado à implementação dos elementos finitos híbridos-Trefftz, o presente capítulo está dividido nas três fases, pré-processamento, processamento e pós-processamento.

A fase de pré-processamento incide sobretudo na descrição da interface gráfica e da estrutura de dados específica ao processo adaptativo.

A fase de processamento está dividida nas secções referentes aos refinamentos das fronteiras, dos domínios e aos critérios de paragem.

Por fim, na fase de pós-processamento, são referidas as funções responsáveis pela representação gráfica das soluções.

Em todas as fases são apresentados fluxogramas que facilitam a perceção da execução do algoritmo.

6.2 Pré-processamento

A introdução dos dados de entrada por parte do utilizador segue o mesmo padrão referido no capítulo 4. Uma interface gráfica adicional é acrescentada para permitir a definição dos dados essenciais à execução do algoritmo adaptativo, como os critérios de seleção e paragem, parâmetros de controlo da execução e valores de tolerância.

Posteriormente à inserção dos dados, o programa realiza uma análise inicial, com os graus das funções de aproximação inicialmente escolhidos pelo utilizador, de forma a adquirir a informação necessária à inicialização do processo adaptativo.

6.2.1 Interface gráfica

Na secção 4.3.1 estão apresentadas, através de um fluxograma, as interfaces que estão implementadas no programa. Todas as interfaces ali descritas mantêm-se na análise

'p'-adaptativa e são complementadas por uma interface adicional, que tem como objectivo definir os critérios de seleção e convergência que estão na essência das decisões do algoritmo, e os valores limite e de tolerância necessários para a implementação dos critérios de paragem descritos na secção 5.4.2

Esta interface está, juntamente com as outras, apresentada em mais pormenor no anexo B.

6.2.2 Estrutura de dados

Toda a informação em relação ao algoritmo adaptativo é guardada numa nova estrutura de dados denominada de **List**.

Esta estrutura está dividida em dois tipos de sub-estruturas, a que contém as variáveis locais, que são sobrescritas em todas as iterações, e a das variáveis globais que são guardadas em todas as iterações. As variáveis globais têm nomes acabados em 'It' e servem maioritariamente para se fazerem os plots dos gráficos e tabelas de convergência na fase do pós-processamento.

Uma descrição sucinta das variáveis contidas na estrutura **List** é apresentada de seguida.

Tabela 6.1: Estrutura **List** - Variáveis locais

List	List.Edge
	List.EdgesToRefine
	List.SpuriousEdges
	List.SpurEdgeToRefine
	List.LoopsToRefine

- **List.Edge**: Matriz, de dimensão igual ao número total de fronteiras da malha por 3 colunas. Destas três colunas, a primeira é constituída pelo índice de todas as fronteiras da malha, enquanto nas últimas duas estão os valores correspondentes aos dois critérios de seleção apresentados na secção 5.4.1. As fronteiras são ordenadas por ordem decrescente de forma a que a(s) primeira(s) tenha(m) o maior valor do critério de seleção escolhido, para depois ser(em) refinada(s).
- **List.EdgesToRefine**: Vetor que contém os índices das fronteiras a refinar tendo em conta a "tolerância de seleção" descrita na secção B.2.4.
- **List.SpuriousEdges**: Vetor, de dimensão igual ao número de fronteiras que têm a densidade do resíduo (5.19) menor que um zero numérico definido pelo utilizador (ver secção B.2.4). Assim, neste vetor estão listadas as fronteiras cujo refinamento pode vir a causar modos espúrios no sistema resolutivo.
- **List.SpurEdgeToRefine**: Vetor que contém os índices das fronteiras listadas para o refinamento e que também podem vir a causar modos espúrios. Os seus elementos correspondem à intersecção dos conjuntos **List.EdgesToRefine** e **List.SpuriousEdges**.

- **List.LoopsToRefine:** Vetor que contém os índices dos elementos a refinar conforme os critérios apresentados na secção 5.3.

Tabela 6.2: Estrutura **List** - Variáveis globais

List	List.Energylt
	List.EnergyVariationlt
	List.ErrorEdgeNormlt
	List.ErrorEdgeVariationlt
	List.GDL_It
	List.RefinedEdgeslt
	List.EdgesOrderlt
	List.RefinedLoopslt
	List.LoopsOrderlt
	List.Betalt

- **List.Energylt:** Vetor de dimensão igual ao número total de iterações, onde é guardada a energia térmica em cada iteração. É usado para verificar a convergência da solução. No final do algoritmo, os seus elementos são plotados em função do número total de graus de liberdade.
- **List.EnergyVariationlt:** Vetor de dimensão igual ao número total de iterações, onde é guardada a variação relativa (5.20) da energia térmica a cada iteração. Serve para verificar a convergência pelo critério da energia (5.21) e, no final do algoritmo, é feita a sua representação gráfica em função do número total de graus de liberdade.
- **List.ErrorEdgeNormlt:** Vetor de dimensão igual ao número total de iterações, onde é guardado o valor máximo da densidade do resíduo (5.19). Os seus elementos são representados graficamente, no final do algoritmo, em função do número total de graus de liberdade.
- **List.ErrorEdgeVariationlt:** Vetor de dimensão igual ao número total de iterações, onde é guardado o quociente da redução da densidade do resíduo na fronteira (5.19) a cada iteração. Serve para verificar a convergência do critério da densidade do resíduo máximo da temperatura na fronteira (secção 5.4.1) e os seus elementos são representados graficamente em função do número total de graus de liberdade, no final do algoritmo.
- **List.GDL_It:** Lista onde são guardados os números totais de graus de liberdade em cada iteração.
- **List.RefinedEdgeslt:** Lista que guarda as fronteiras refinadas a cada iteração. Os valores são utilizados para a construção da tabela que resume o processo iterativo.

- **List.EdgesOrderIt**: Lista que guarda as ordens das bases de funções de aproximação das fronteiras a cada iteração. Os valores são utilizados para a construção da tabela que resume o processo iterativo.
- **List.RefinedLoopsIt**: Lista que guarda os elementos refinados a cada iteração. Os valores são utilizados para a construção da tabela que resume o processo iterativo.
- **List.LoopsOrderIt**: Lista que guarda as ordens das bases de aproximação dos elementos a cada iteração. Os valores são utilizados para a construção da tabela que resume o processo iterativo.
- **List.Betalt**: Lista que guarda os graus de indeterminação cinemática (3.50) de todos os elementos a cada iteração. Os valores são utilizados para a construção da tabela que resume o processo iterativo.

6.3 Processamento

6.3.1 Descrição do algoritmo

A fase de processamento corresponde ao processo iterativo no qual o programa refina continuamente, de acordo com critérios previamente definidos, os graus das bases de funções de aproximação das fronteiras e dos domínios, até se atingir convergência ou até se verificar um dos critérios de paragem definidos na secção 5.4.2. São apresentados de seguida as principais etapas deste algoritmo.

1. Verificação da indeterminação cinemática do modelo inicial: a indeterminação cinemática é verificada para cada elemento da malha e caso um elemento não seja cinematicamente indeterminado, o grau do respetivo elemento é aumentado até que se verifique $\beta > 0$.
2. Análise do sistema com os graus inicialmente propostos pelo utilizador: é realizada a análise inicial, sendo verificada a existência de valores singulares *outlier* (ver secção 4.4.4) no sistema inicial. Se o sistema inicial tiver possibilidade de ser numericamente instável, a análise adaptativa é interrompida. Caso contrário, os valores obtidos servem de referência e ponto de partida para o processo de refinamento adaptativo.
3. Inicia-se o processo iterativo. O primeiro passo de cada iteração é o refinamento nas fronteiras. Para construir a lista **List.Edges** (secção 6.2.2) obtém-se, para cada fronteira essencial, uma estimativa da norma da densidade do resíduo (5.19) e da variação de energia (5.18) que o respetivo refinamento provocaria. Estes valores são ordenados de forma decrescente.
4. A(s) primeira(s) fronteira(s) (dependendo do valor adotado para a tolerância de seleção, ver secção B.2.4) listada(s) em **List.Edges** é(são) registada(s) na lista **List.EdgesToRefine** e os modos espúrios são guardados na lista **List.SpuriousEdges**. Caso alguma fronteira seja comum a estas duas listas, passa a ser listada em **List.SpurEdgeToRefine**.
5. Com as listas **List.EdgesToRefine** e **List.SpurEdgeToRefine** construídas, são verificados os critérios de refinamento no domínio descritos na secção 5.3.

6. É construído um novo sistema resolutivo, tendo em conta os refinamentos efetuados. Depois é feita a deteção de *outliers* nos valores singulares do sistema. Sempre que um *outlier* é detetado, aumenta-se um grau nas bases de aproximação dos elementos adjacentes às fronteiras refinadas, conforme referido na secção 5.3.
7. É verificado o número máximo de iterações para se detetar *outliers* e o grau máximo das bases de aproximação, do domínio e fronteiras essenciais. Caso estes valores sejam ultrapassados, o processo é interrompido e a última solução estável é apresentada.
8. Caso o programa não seja interrompido devido aos critérios de paragem referidos no ponto 7, é testada a convergência da energia térmica ou a convergência da densidade do resíduo nas fronteiras (ver secção 5.4.2). Quando se dá a convergência, o programa apresenta a solução correspondente à última iteração.
9. Após se obter a solução final, faz-se ainda a listagem de toda a informação referente aos refinamentos efetuados.

6.3.2 Refinamento na fronteira

O primeiro procedimento a ser realizado na fase iterativa do processamento é o refinamento nas fronteiras (passos 3-5 na secção 6.3.1). A descrição matemática deste procedimento foi vista na secção 5.2, pelo que o objetivo da apresentação que se segue é limitado a explicar de que modo este refinamento está implementado no algoritmo. Pode ser visto na figura 6.1 o fluxograma onde é resumido o processo de refinamento na fronteira.

- No início de cada iteração é testado o refinamento de cada uma das fronteiras essenciais da malha. Para cada fronteira, é gerada a nova função de aproximação nas fronteiras, \bar{Z} (secção 5.2). Desta forma, são gerados o vetor $\bar{\mathbf{B}}$ (5.3) associado à nova base e os escalares, \bar{t}_Γ e \bar{t}_p , definidos em (5.4) e (5.5), respetivamente.
- Depois são calculados o gradiente $\dot{\mathbf{X}}$ (5.13), e a densidade do resíduo das temperaturas na fronteira ($\bar{t}_\Gamma - \bar{t}_p - \hat{\mathbf{B}}^T \mathbf{X}$). De seguida, é calculado o fluxo generalizado \bar{Y} através da equação (5.14). Se a densidade do resíduo for nula, todos os critérios de seleção são listados como sendo nulos e o programa avança para a próxima fronteira. Caso contrário, é calculado o resíduo normalizado (5.19), para posterior listagem.
- Finalmente, é calculado o incremento da solução $\Delta \mathbf{X}$ pela relação (5.12), permitindo que se determine a variação na energia (5.18) causada pela variação da solução $\Delta \mathbf{x}$.
- Com estes valores é construída a matriz **List.Edges** que depois é usada para escolher a fronteira que vai ser efetivamente refinada.
- O último passo é verificar se os valores dos critérios de refinamento (ver secção 5.4.1) são inferiores à quantidade definida como zero numérico (*thresh*). Caso sejam, então o programa avança diretamente para a fase de pós-processamento. No caso de os valores não serem todos inferiores, é finalmente criada a lista **List.EdgesToRefine** onde se encontra(m) o(s) índice(s) da(s) fronteira(s) a ser(em) refinada(s).

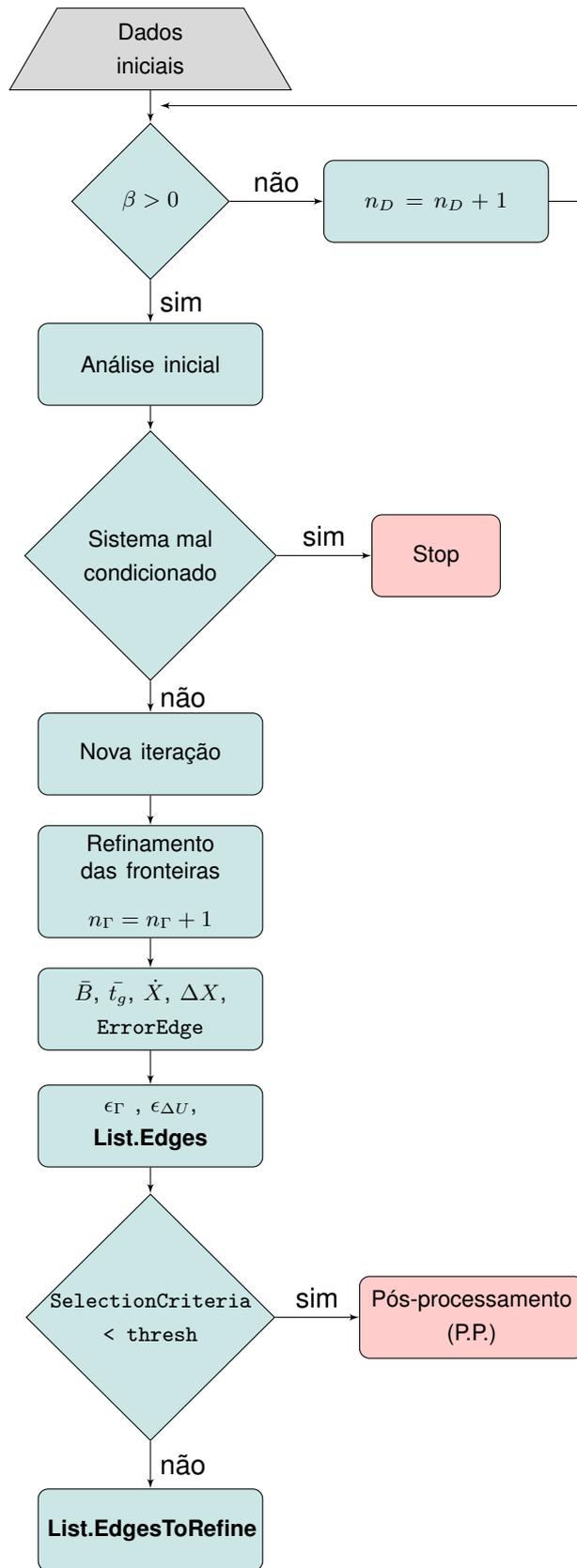


Figura 6.1: Fluxograma do pré-processamento, análise inicial e refinamento nas fronteiras

6.3.3 Refinamento no domínio

O passo seguinte na execução do algoritmo é o refinamento do domínio dos elementos. Na figura 6.2, é possível observar um fluxograma representativo desta fase do algoritmo.

Como já foi referido referido e explicado na secção 5.3, o refinamento no domínio pode ocorrer de quatro maneiras diferentes.

- Desde logo é verificado se há fronteiras selecionadas para o refinamento, que também estejam identificadas como propícias a originar modos espúrios. Caso haja, os elementos adjacentes a essas fronteiras são selecionados para o refinamento e adicionados na lista **List.LoopsToRefine**.
- Seguidamente é calculado o grau de indeterminação cinemática (β), para todos os elementos e verifica-se se são cinematicamente indeterminados. Se algum não for, esse elemento é listado para refinamento.
- Por último, compara-se o grau máximo das fronteiras adjacentes a cada elemento com o grau da base do mesmo, de modo a verificar que, $n_D > \max(n_\Gamma)$. Se em algum caso isto não se confirmar, lista-se para o refinamento o elemento em causa.
- Juntando toda esta informação, é construída a lista final de elementos a refinar, **List.LoopsToRefine**.
- Seguidamente, procede-se à resolução do sistema com os novos graus de liberdade (GDL) acrescentados e é feito o controlo da estabilidade numérica do mesmo. Nesta fase, caso seja necessário, refinam-se os elementos adjacentes às fronteiras refinadas conforme explicado na secção 4.4.4.

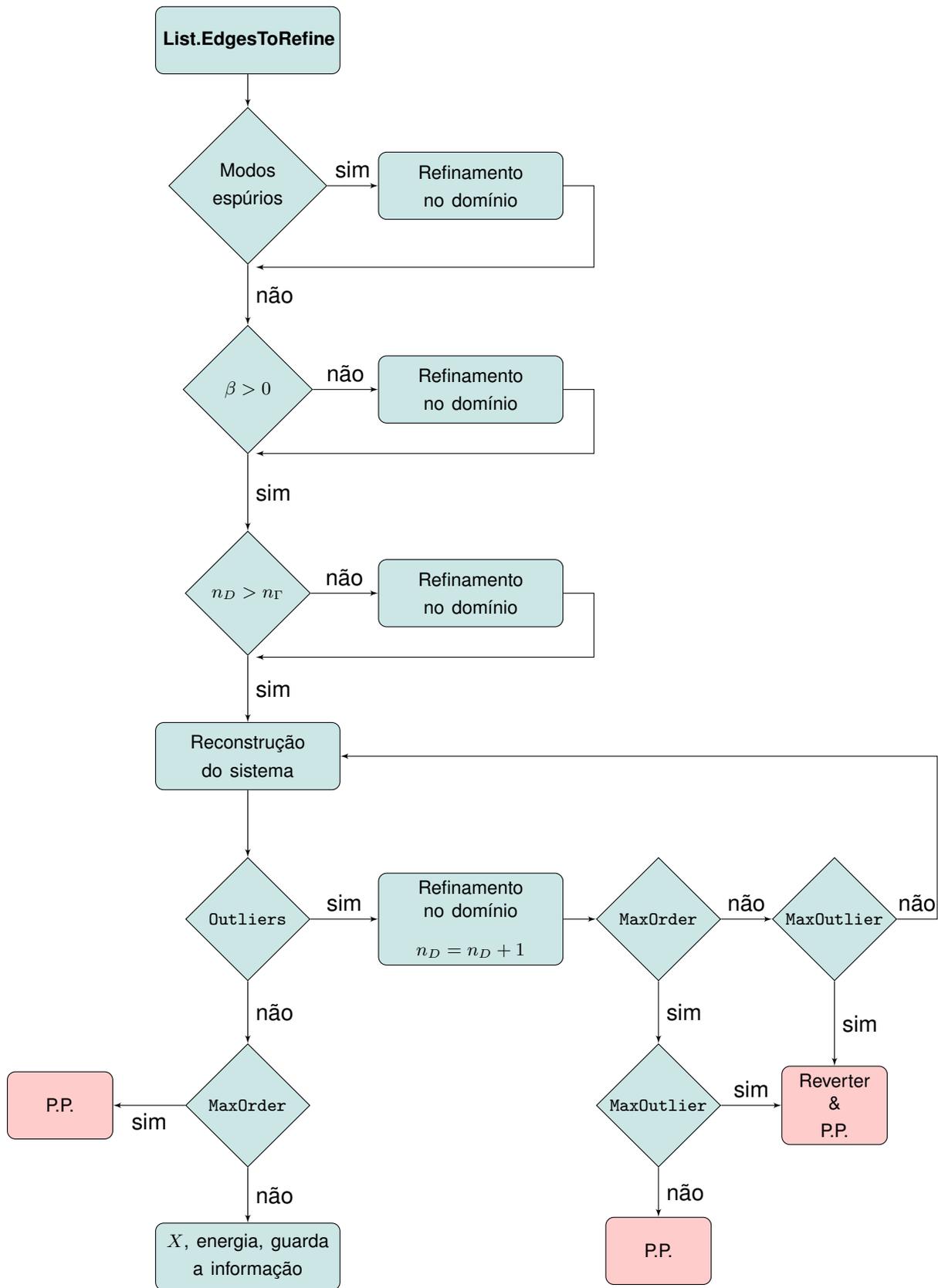


Figura 6.2: Fluxograma do refinamento no domínio e critérios de paragem

6.3.4 Critérios de paragem

Os vários critérios de paragem que não são de convergência, descritos na secção 5.4.2, estão implementados ao longo do algoritmo ' p '-adaptativo conforme se pode ver no fluxograma 6.2. O algoritmo está programado para passar à próxima fase (pós-processamento) de várias maneiras diferentes, dependendo do tipo de critério pelo qual o processo iterativo foi interrompido. Sempre que o critério de paragem "número máximo de iterações para deteção de outliers" se verifica, o algoritmo reverte para a última solução estável e passa para o pós-processamento. No caso de se verificar um dos outros critérios de paragem o algoritmo recupera a solução mais refinada e passa ao pós-processamento.

No caso de ser um critério de convergência (ver secção 5.4.2) que interrompe o processo iterativo, o procedimento que o algoritmo efetua, está representado na figura 6.3.

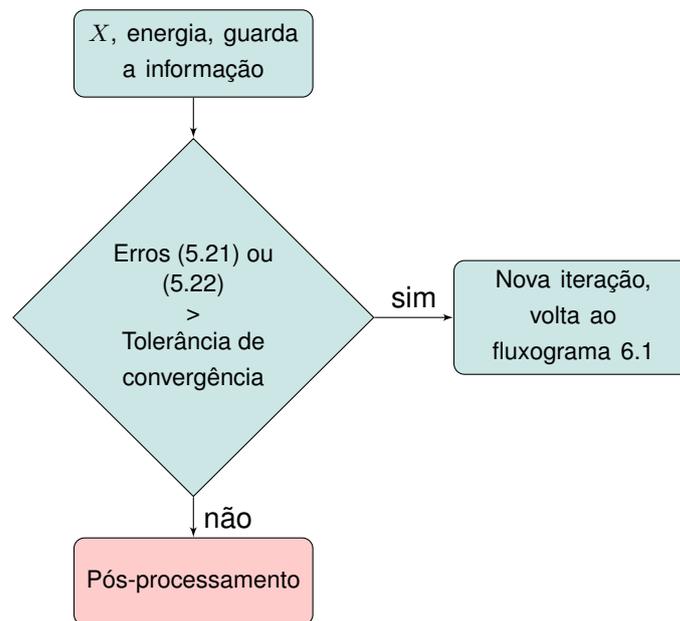


Figura 6.3: Fluxograma dos critérios de convergência

6.4 Pós-processamento

Após a saída do processo iterativo, as estimativas dos campos de temperaturas e fluxos de calor são obtidas pelas relações (4.6) e (4.7) utilizando as bases de aproximação que resultaram da fase do processamento.

Depois é feita a plotagem desses campos e o processo de refinamento é resumido na forma de tabelas e gráficos de convergência recorrendo à informação guardada na estrutura **List** (ver exemplo de aplicação apresentado na secção B.3).

As etapas de pós-processamento encontram-se resumidas no fluxograma 6.4.

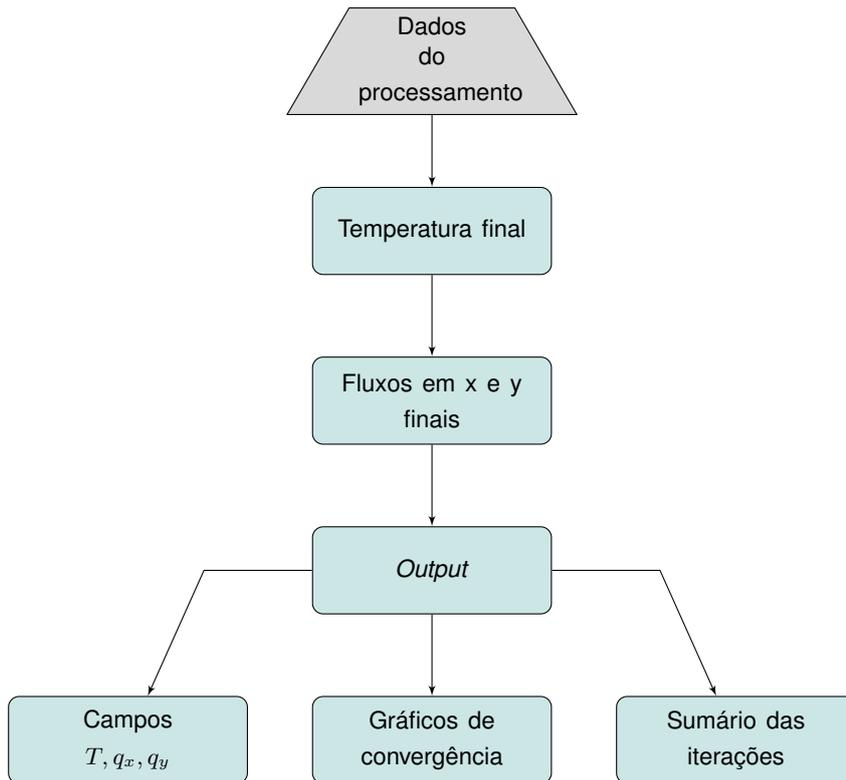


Figura 6.4: Fluxograma do pós-processamento

Capítulo 7

Estudo numérico dos elementos finitos híbridos-Trefftz de temperatura

7.1 Introdução

O objetivo deste capítulo é avaliar o desempenho da formulação de elementos finitos híbridos-Trefftz apresentada no capítulo 3.

Em primeiro lugar, é realizada uma análise de convergência destes elementos sob refinamentos ' p ' e ' h ', dando especial atenção às diferenças entre a discretização da malha (refinamento ' h ') e o refinamento das funções de aproximação utilizadas (refinamento ' p '). Os testes de convergência são efetuados em problemas onde se conhece a solução analítica, comparando-a com a solução obtida através da utilização de elementos finitos híbridos-Trefftz.

De notar que a escolha das ordens atribuídas às funções de aproximação nos domínios e fronteiras essenciais é feita de maneira a assegurar sistemas resolutivos estática e cinematicamente indeterminados.

Seguidamente, é apresentado um problema cujas soluções foram obtidas na referência [55] utilizando os elementos finitos conformes de temperatura implementados no programa ANSYS [1]. Consequentemente, procede-se à comparação das soluções obtidas, pelos elementos finitos convencionais e pelos elementos finitos híbridos-Trefftz de temperatura.

Finalmente, é apresentada a resolução de um problema mais complexo onde é necessária a utilização do gerador de malha não-regular.

7.2 Análise da convergência

De forma a testar a convergência dos elementos finitos híbridos-Trefftz desenvolvidos neste trabalho, procede-se à realização de testes numéricos para a análise de um problema com solução analítica conhecida mas não incluída na base de aproximação dos elementos. Em cada teste numérico, fazem-se tanto refinamentos ' p ', aumentando os graus das bases de aproximação nos domínios e fronteiras essenciais, como ' h ', aumentando o número

CAPÍTULO 7. ESTUDO NUMÉRICO DOS ELEMENTOS FINITOS HÍBRIDOS-TREFFTZ DE TEMPERATURA

de elementos finitos da malha. Depois, comparam-se os resultados aproximados pelos elementos finitos híbridos-Trefftz com a solução exata e faz-se uma análise da convergência em termos da energia térmica. Os testes são realizados aplicando tanto condições de Neumann como de Dirichlet, nas fronteiras do corpo.

7.2.1 Solução analítica

As soluções analíticas do problema analisado, que verificam a equação de Poisson (2.14), são da forma,

$$T(x, y) = e^{ax} \sin(ay) \quad (7.1)$$

onde os fluxos de calor, segundo a lei de Fourier (2.4), são dados por,

$$q_x(x, y) = -kae^{ax} \sin(ay) \quad (7.2)$$

$$q_y(x, y) = -kae^{ax} \cos(ay) \quad (7.3)$$

e a é um parâmetro arbitrário. As equações (7.1) a (7.3) são utilizadas para definir as soluções analíticas dos problemas a resolver. Note-se que os campos de temperatura e fluxos definidos pelas mesmas equações são linearmente independentes das funções de aproximação incluídas nas bases (3.3) e (3.14). O parâmetro a é utilizado para controlar as características da solução analítica, sendo que o aumento do seu valor leva a soluções mais oscilatórias e com maiores gradientes. Os valores adotados são $a = \{\frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi\}$. À medida que estes valores aumentam, o nível de exigência numérica do problema também aumenta.

O domínio do problema é o quadrado de dimensões unitárias representado na figura (7.1). Na mesma figura estão representadas, de forma ilustrativa, as condições de fronteira impostas nos modelos. Os valores dos fluxos impostos nas fronteiras verticais são calculados pela expressão (7.2), ao passo que nas fronteiras horizontais as condições de fronteira são definidas pelas expressões (7.1) e (7.3). As características do material usado são, $k = 1[W/mK]$ para a condutibilidade térmica e $Q = 0[W/m^3]$ para a geração de calor interna.

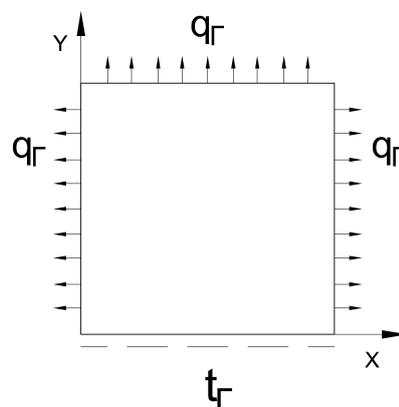


Figura 7.1: Condições de fronteira do modelo em análise

De seguida são apresentadas, a título ilustrativo, as soluções analíticas para cada valor de a considerado nos testes.

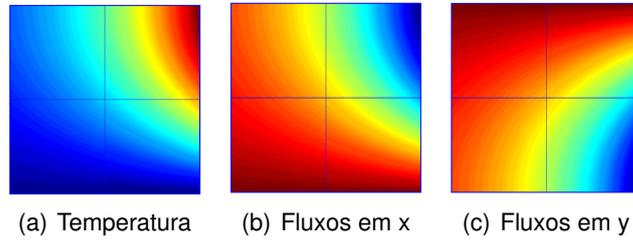


Figura 7.2: Temperatura e fluxos, em x e y, para $a = \frac{\pi}{2}$

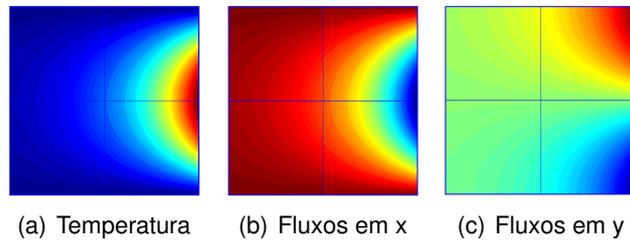


Figura 7.3: Temperatura e fluxos, em x e y, para $a = \pi$

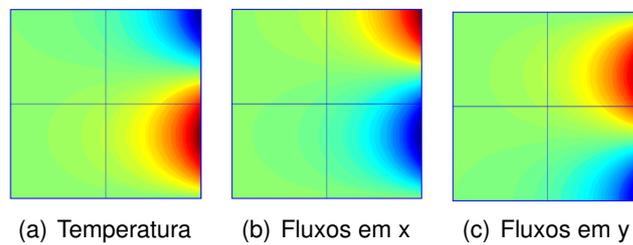


Figura 7.4: Temperatura e fluxos, em x e y, para $a = \frac{3\pi}{2}$

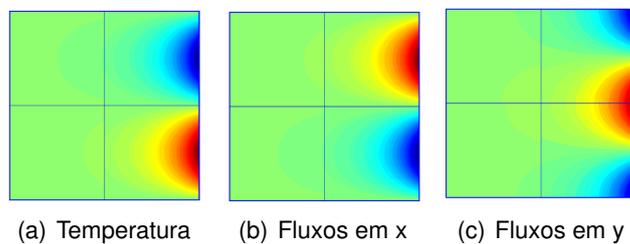


Figura 7.5: Temperatura e fluxos, em x e y, para $a = 2\pi$

Sabendo os campos da temperatura (7.1) e fluxos de calor (7.2) e (7.3), obtém-se o valor da energia térmica exata do problema,

$$U_E = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\nabla T)^T k (\nabla T) d\Omega U = \frac{a}{4} (e^{2a} - 1) \quad (7.4)$$

Este valor é utilizado como referência para os testes de convergência apresentados de seguida.

7.2.2 Modelo de teste

Vários níveis de refinamento 'h' e 'p' são utilizados para resolver o problema descrito na secção anterior.

No que toca ao refinamento 'h', a convergência é estudada para refinamentos da malha de 1, 4, 9 e 16 elementos. As malhas resultantes são apresentadas na figura 7.6.

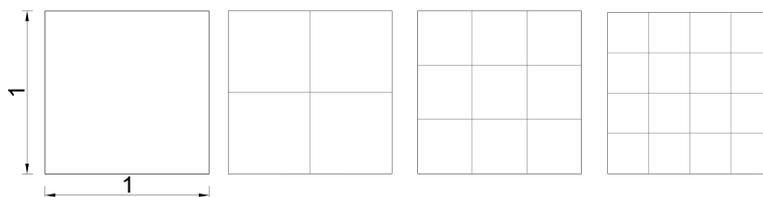


Figura 7.6: Refinamentos 'h' utilizados

Para testar a convergência dos elementos finitos híbridos-Trefftz sob refinamento 'p', é aumentado o grau das funções presentes nas bases de aproximação nos domínios e fronteiras essenciais dos elementos. Nos domínios, os graus das funções de aproximação são $n_D = \{3, 4, 5, 8\}$, e nas fronteiras essenciais, $n_{\Gamma} = \{0, 1, 2, 3\}$ (ver tabela 7.1).

A comparação entre a solução analítica do problema e a solução obtida através da utilização do programa desenvolvido é feita utilizando uma medida do erro da energia térmica, definida por,

$$E_U = \left| \frac{U_{HT} - U_E}{U_E} \right| \quad (7.5)$$

onde U_E é a solução exata (7.4) e U_{HT} é a sua aproximação obtida pelos elementos finitos híbridos-Trefftz.

7.2.3 Resultados

Apresentam-se na figura 7.7 os gráficos que avaliam a convergência da energia térmica, através da análise da variação da medida do erro (7.5). Os valores são determinados para todos os casos de refinamentos 'h' e 'p' apresentados na secção anterior e representados em função do número total de graus de liberdade (N) de cada modelo. Ambos os eixos utilizam escala logarítmica.

Tabela 7.1: Refinamentos 'p' utilizados

n_D	3	4	5	8
n_{Γ}	0	1	2	3

7.2. ANÁLISE DA CONVERGÊNCIA

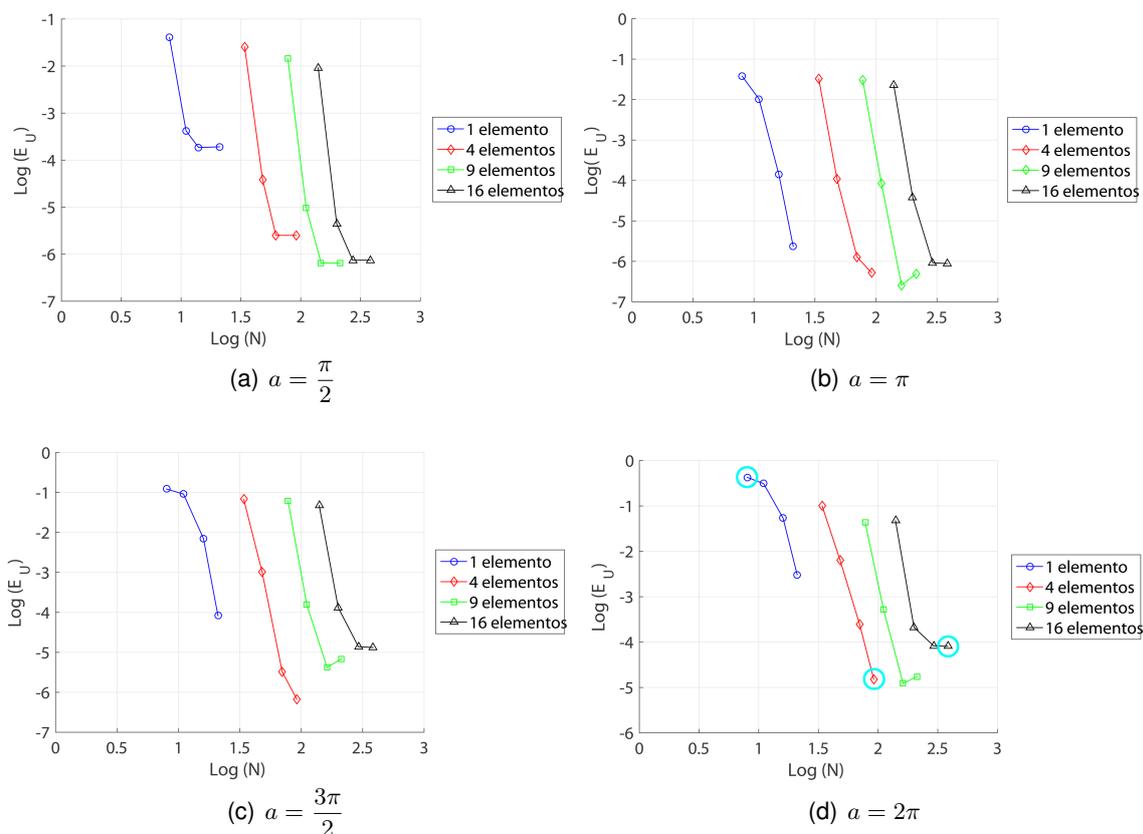


Figura 7.7: Convergência da solução para refinamentos ‘ p ’ e ‘ h ’

Observa-se que a solução analítica é recuperada com precisão superior a 10^{-4} para todos os casos com mais do que 1 elemento. No entanto, visto que os elementos híbridos-Trefftz não são nem localmente equilibrados nem localmente compatíveis, a convergência da energia térmica não é monótona [50], significando que a energia térmica exata não é, geralmente, nem um mínimo nem um máximo da energia recuperada por estes elementos. Deste modo, é necessária uma abordagem cautelosa à gestão da taxa de convergência quando são utilizados elementos híbridos-Trefftz, pois esta pode variar significativamente durante o processo de refinamento.

Como se pode verificar nos gráficos apresentados na figura 7.7, a taxa de convergência pode ser menor na fase inicial do processo (ver os gráficos relativos a um único elemento), aumentando consideravelmente quando se introduzem funções nas bases de aproximação no domínio que têm padrões oscilatórios semelhantes à solução correta do problema. Nesta fase a convergência sob refinamento ‘ p ’ é muito mais rápida do que sob refinamento ‘ h ’. Quando a solução aproximada está perto da solução correta, a taxa de convergência tem tendência a decrescer podendo mesmo ser negativa (como acontece para o caso de 9 elementos com $n_D = 8$, nas figuras 7.7 (b), (c) e (d)) uma vez que a solução calculada oscila à volta da solução exata.

Para ilustrar a qualidade das soluções obtidas, apresentam-se nas figuras 7.8, 7.9 e 7.10 os campos de temperatura e fluxos (em x e y) obtidos para o problema numericamente mais complexo ($a = 2\pi$), com os refinamentos marcados na figura 7.7 (d).

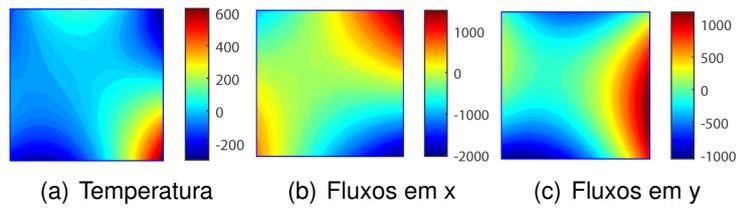


Figura 7.8: Campos da temperatura e fluxos de calor para 1 elemento e refinamentos nos domínios e fronteiras essenciais de $n_D = 3$ e $n_\Gamma = 0$, respetivamente.

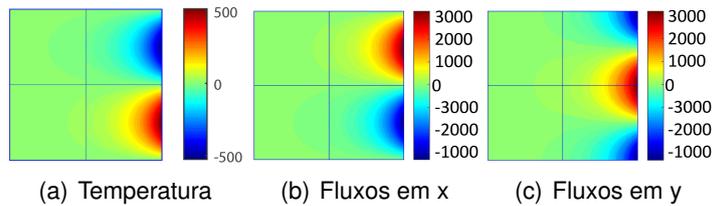


Figura 7.9: Campos da temperatura e fluxos de calor para 4 elementos e refinamentos nos domínios e fronteiras essenciais de $n_D = 8$ e $n_\Gamma = 3$, respetivamente.

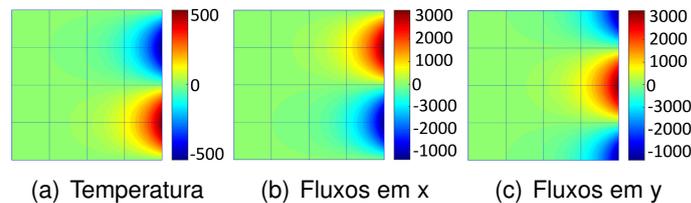


Figura 7.10: Campos da temperatura e fluxos de calor para 16 elementos e refinamentos nos domínios e fronteiras essenciais de $n_D = 8$ e $n_\Gamma = 3$, respetivamente.

É possível observar na figura 7.8 que os campos das soluções apresentam fraca qualidade, uma vez que este caso representa um modelo com baixo refinamento tanto ' h ' como ' ρ '. Assim, a solução fica muito longe da solução analítica apresentada na figura 7.5. No entanto, para as soluções apresentadas nas figuras 7.9 e 7.10, é conseguida uma boa aproximação das soluções analíticas para todos os campos. Mesmo com o aumento de refinamento ' h ' entre os modelos de 4 para 16 elementos as soluções são praticamente idênticas o que sugere que os gastos em termos de tempo computacional possam não compensar a melhoria da solução.

7.3 Comparação dos elementos finitos híbridos-Trefftz com elementos finitos convencionais

Nesta secção é feita uma comparação entre os resultados obtidos com os elementos finitos híbridos-Trefftz desenvolvidos no presente trabalho e os obtidos com elementos finitos convencionais (conformes de temperatura), para o problema apresentado na figura 7.11.

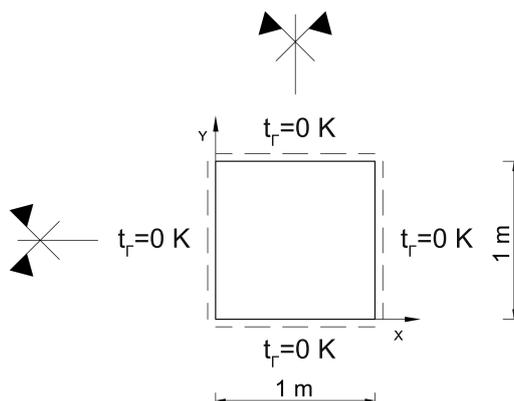


Figura 7.11: Definição do problema

Todas as fronteiras exteriores do modelo são do tipo Dirichlet, com temperaturas impostas $t_r = 0 [K]$. No que toca às características do material, nomeadamente, a condutibilidade térmica (k) é igual a $1 [W/mK]$, e o calor gerado internamente (Q) é igual a $20 [W/m^3]$.

Nas figuras 7.12 e 7.13 são apresentadas as soluções em temperatura e fluxos para este problema, obtidas utilizando os elementos finitos convencionais com bases de aproximação bi-lineares implementados no programa comercial ANSYS e retiradas da referência [55].

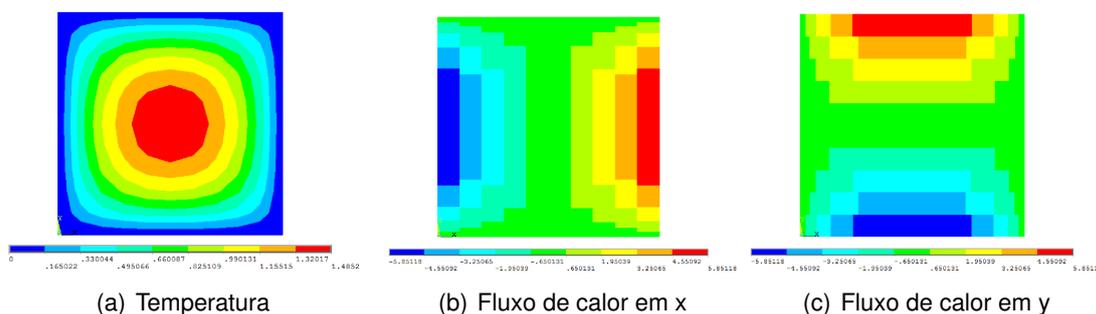


Figura 7.12: Campo da temperatura e campos dos fluxos em x e y utilizando elementos finitos convencionais [55]

A malha utilizada para obter as soluções na figura 7.12 consiste em 100 elementos finitos de dimensões iguais e 121 graus de liberdade. Os resultados apresentados na figura 7.13 foram obtidos utilizando uma malha 25 vezes mais refinada, de 2500 elementos finitos e 2601 graus de liberdade.

CAPÍTULO 7. ESTUDO NUMÉRICO DOS ELEMENTOS FINITOS HÍBRIDOS-TREFFTZ DE TEMPERATURA

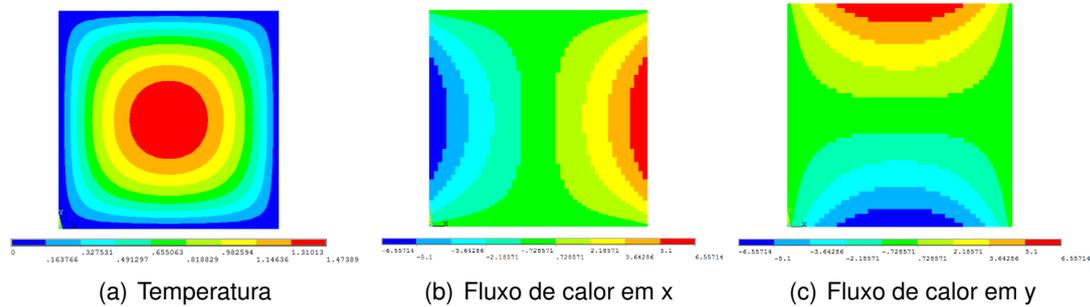


Figura 7.13: Campo da temperatura e campos dos fluxos em x e y utilizando elementos finitos convencionais [55]

A compatibilidade local dos elementos finitos convencionais faz com que o campo das temperaturas seja relativamente bem recuperado, mesmo para o refinamento inferior. Por outro lado, nota-se claramente a dificuldade que este tipo de elementos apresenta na representação dos campos de fluxos de calor. Isto é uma consequência da maneira como as equações de continuidade entre elementos adjacentes são impostas, sendo a continuidade das temperaturas imposta localmente, e a continuidade dos fluxos de calor imposta apenas ao nível dos nós do elemento.

São apresentadas de seguida as soluções obtidas utilizando elementos finitos híbridos-Trefftz (figura 7.14) para que se possa fazer uma comparação direta com os elementos finitos convencionais. As escalas dos mapas de cores utilizadas nas figuras 7.14 são idênticas às da solução mais refinada dos elementos finitos convencionais (7.13), para facilitar a comparação.

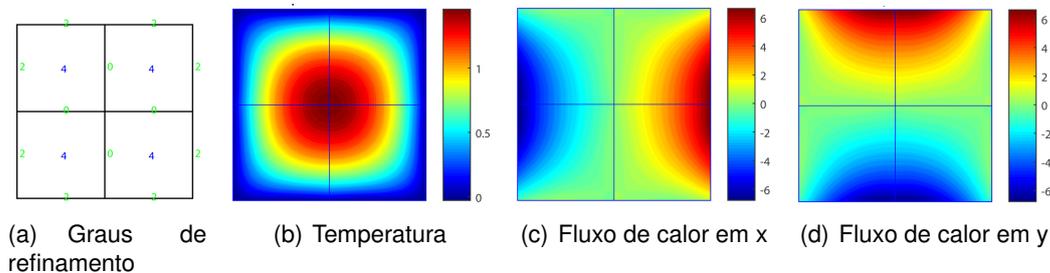


Figura 7.14: Campo da temperatura e campos dos fluxos em x e y utilizando elementos finitos híbridos-Trefftz

Na figura 7.14 (a) está representado o refinamento usado para a resolução do problema. A malha foi refinada em quatro elementos de igual dimensão. O refinamento ‘ p ’ utilizado tem em conta que o problema é bi-simétrico, tendo-se mantido nulos os graus na base de aproximação das fronteiras interiores. Para as fronteiras exteriores e domínios dos elementos foram usados refinamentos das funções de aproximação de $n_{\Gamma} = 2$ e $n_D = 4$, respetivamente. O número total de graus de liberdade do modelo híbrido-Trefftz é de 48.

As principais diferenças entre as soluções de elementos finitos convencionais e elementos finitos híbridos-Trefftz prendem-se com a qualidade dos campos dos fluxos de calor e o número total de graus de liberdade. É possível verificar que, mesmo para modelos bastante refinados (figura 7.13), existem descontinuidades consideráveis nos

campos de fluxos de calor recuperados pelos elementos convencionais, em comparação com os campos que resultam da utilização de elementos finitos híbridos-Trefftz, mesmo que relativamente pouco refinados. O facto de os elementos finitos híbridos-Trefftz não serem nem localmente compatíveis nem localmente equilibrados, ao contrário dos convencionais, permite um maior equilíbrio entre as qualidades dos campos das soluções de temperatura e fluxos de calor. Para além disso, o baixo número de graus de liberdade nos elementos finitos híbridos-Trefftz contribui para mitigar consideravelmente o esforço computacional necessário para obter a solução apresentada na figura 7.14 para este tipo de elementos finitos.

7.4 Caso de estudo de maior complexidade

Após ter sido validada a convergência do programa de elementos finitos híbridos-Trefftz tanto sob refinamento ' h ' como ' p ', é apresentado de seguida um caso com um nível de complexidade mais elevado, onde se encontram situações de concentração de fluxos e uma geometria mais irregular. Assim, foi necessária a utilização do gerador de malha não-regular para a criação do modelo.

Na figura 7.15 (a), está ilustrada a situação analisada, que corresponde ao aquecimento do banzo inferior de um perfil metálico IPE300, com isolamento térmico nas zonas adjacentes à alma. Foi considerado que este isolamento promove uma total ausência de fluxo de calor nas suas zonas de aplicação. Assim, as zonas exteriores dos banzos são sujeitas a temperaturas impostas (de 1000 °C), ao passo que na zona isolada impõe-se um fluxo de calor nulo. As condições de fronteira impostas e as dimensões da estrutura, em [mm], podem ser observadas na figura 7.15 (b). As características do material são $k = 30 [W/m^{\circ}C]$ (condutibilidade térmica do aço para $t_{\Gamma} = 1000[^{\circ}C]$) e $Q = 0 [W/m^3]$.

Na figura 7.15 (c) está representada a malha de elementos finitos usada para modelar este problema. A malha utilizada consta de 58 elementos finitos híbridos-Trefftz, sendo mais refinadas nas zonas de descontinuidade geométrica onde se esperam maiores concentrações de fluxos. Foi adotado um grau de $n_D = 11$ para as funções de aproximação no domínio, e $n_{\Gamma} = 4$ para as funções de aproximação nas fronteiras essenciais. O número total de graus de liberdade do modelo é de 1719. O tempo total de análise foi de 9,73 segundos, num processador Intel I7, com 2.6-GHz e 16 GB de memória RAM.

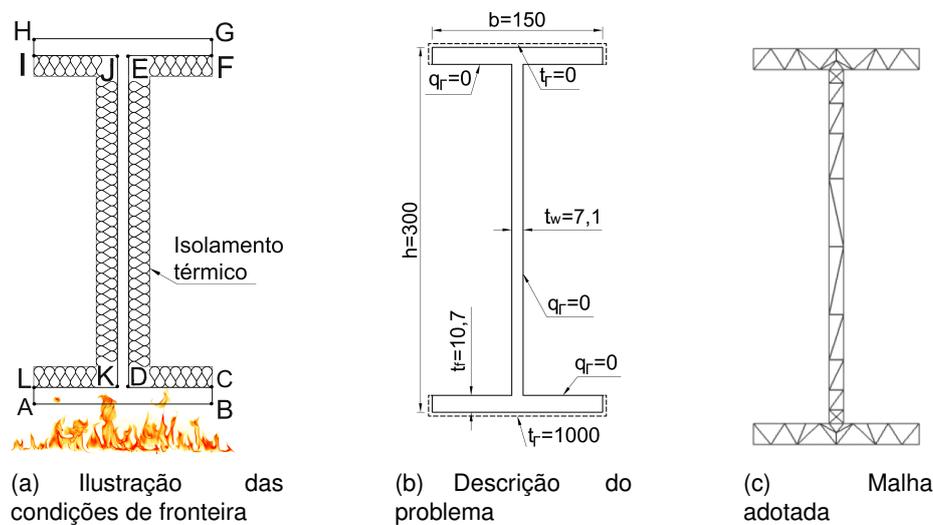


Figura 7.15: Características do problema

Os campos da temperatura e fluxos de calor em x e y recuperados pelo modelo, são apresentados nas figuras 7.16 (a), (b), (c), respetivamente. Observando a figura 7.16 (a), é possível verificar que as condições cinemáticas impostas nas fronteiras exteriores de Dirichlet, são bem recuperadas (fronteiras LA, AB e BC, $t_T = 1000[^\circ C]$, e FG, GH e HI, $t_T = 0[^\circ C]$). Nas figuras 7.16 (b) e (c) verifica-se que as condições estáticas impostas nas fronteiras de Neumann também são bem recuperadas (DE e JK, em x , e CD, EF, IJ e KL, em y , todos com $q_T = 0$). A continuidade interelementar dos campos de fluxos de calor é verificada, mesmo não sendo imposta explicitamente na formulação. São ainda recuperadas as concentrações esperadas de fluxos de calor na direção x nos pontos D, E, J e K, devido à geometria não ser convexa.

Uma vez que se considera um isolamento térmico perfeito nas fronteiras DE e JK (fluxo em x nulo), a temperatura apenas pode variar na direção y , sendo esta variação bastante perceptível na figura 7.16 (c), onde o fluxo de calor em q_y é muito significativo ao longo da alma.

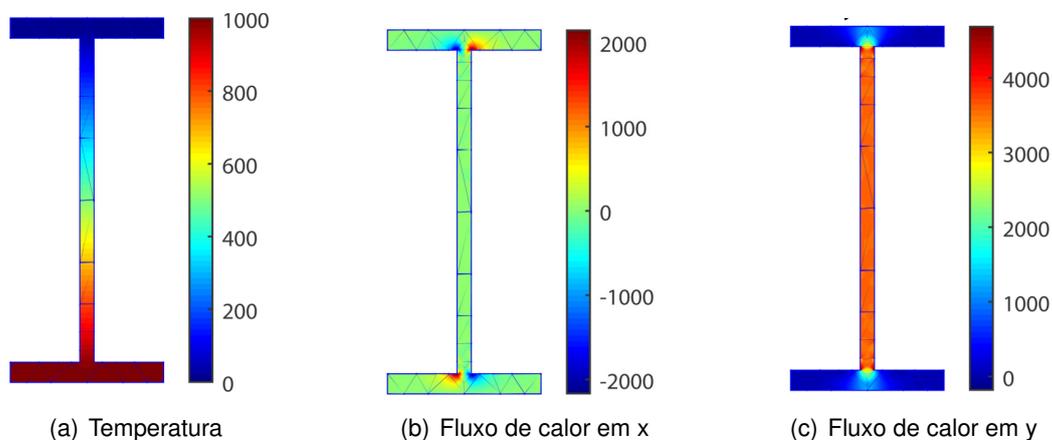


Figura 7.16: Campos das soluções

Capítulo 8

Estudo numérico do refinamento ' p '-adaptativo

8.1 Introdução

Neste capítulo é avaliado o desempenho do algoritmo de refinamento ' p '-adaptativo descrito no capítulo 5, através da análise de dois problemas, um simétrico (logo apresentando várias fronteiras com valores semelhantes dos critérios de seleção) e outro não-simétrico.

Os parâmetros escolhidos para a calibração do algoritmo ' p '-adaptativo são definidos na tabela 8.1, juntamente com uma breve explicação dos seus significados (ver secção B.2.4 para uma descrição mais pormenorizada). A avaliação da convergência do algoritmo, nos dois problemas, é feita com base na escolha de apenas um critério de paragem, nomeadamente o critério de convergência da energia térmica (5.21).

O valor para a tolerância de convergência é inicialmente definido muito baixo de modo a realizar todas as iterações até que se registem instabilidades numéricas no sistema (conforme explicado na secção 5.4.2). Assim, a paragem do algoritmo acontece quando se atingem 10 iterações sucessivas onde se detetam *outliers* nos valores singulares das matrizes dos coeficientes. Ambos os critérios de refinamento, nomeadamente, a variação da energia térmica (5.18) e a densidade do resíduo máximo na fronteira (5.19), são testados, comparando-se os seus desempenhos.

Os restantes parâmetros presentes na tabela 8.1 foram mantidos constantes ao longo de cada problema, admitindo-se que o valor máximo dos graus das bases de aproximação no domínio e nas fronteiras nunca deveria ultrapassar 25 de modo a evitar situações que levassem à divergência das soluções.

De forma a validar as duas metodologias de controlo da estabilidade do sistema (descritas na secção 4.4.4) foi utilizado, para o problema bi-simétrico, o método que se baseia na quantificação dos hiatos entre valores singulares consecutivos. Para o problema assimétrico foi utilizado o método que se baseia na quantificação do alinhamento dos valores singulares.

Critério de convergência	Energia térmica
Critério de refinamento	Varição da energia térmica
	Densidade do resíduo na fronteira
Tolerâncias de seleção na escolha das fronteiras a refinar	0.99/0.9/0.6
Tolerância de convergência	10^{-8}
Número de iterações para calcular o valor médio do critério de convergência	4
Número máximo de iterações com outliers nos valores singulares do sistema resolutivo	10
Ordem máxima das bases de aproximação	25

Tabela 8.1: Parâmetros essenciais ao funcionamento do algoritmo 'p'-adaptativo.

8.2 Problema bi-simétrico

8.2.1 Descrição do problema

O primeiro problema é numericamente pouco exigente, com condições de fronteira simples e com a particularidade de ter dois eixos de simetria. A escolha do mesmo justifica-se pela polarização considerável dos valores dos critérios de seleção, que são iguais (dentro da precisão da máquina) para todas as fronteiras exteriores e para todas as fronteiras interiores, respetivamente, garantindo assim que, em cada iteração, mais do que uma fronteira será refinada.

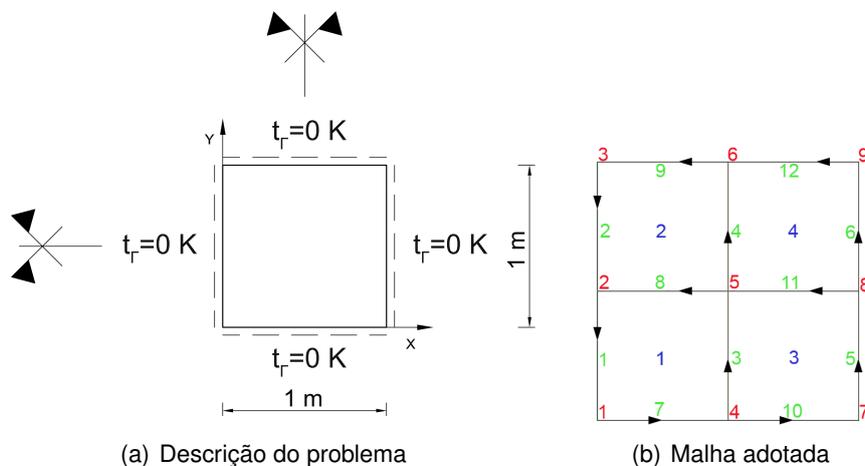


Figura 8.1: Modelo bi-simétrico e refinamento 'h' adotado

O modelo bi-simétrico encontra-se representado na figura 8.1 (a). Todas as fronteiras são do tipo Dirichlet, com temperaturas impostas $t_{\Gamma} = 0$ [K] nas fronteiras exteriores. Relativamente às características do material, a condutibilidade térmica (k) é igual a 1 [W/mK], e o calor gerado internamente (Q) é igual a 20 [Wm⁻³]. A malha é composta por quatro elementos, de dimensões iguais, e os graus iniciais das bases de aproximação nos domínios dos elementos são $n_D = 3$ e nas fronteiras $n_{\Gamma} = 0$.

Visto que este problema apresenta simetria em relação aos dois eixos coordenados, é natural que haja várias fronteiras a serem refinadas ao mesmo tempo. Para permitir isso, a tolerância de seleção (ver secção B.2.4) é definida igual a 0.99, significando que todas as fronteiras cujos valores dos critérios de seleção sejam diferentes em menos de 1% são selecionadas para refinamento.

8.2.2 Gráficos de convergência

Na figura 8.2 estão representados os gráficos da evolução da energia térmica ao longo do processo iterativo, para os dois critérios de refinamento descritos na secção 5.4.1 (figura 8.2 (a)) e da evolução da densidade máxima do resíduo nas fronteiras, também para os dois critérios de refinamento (figura 8.2 (b)).

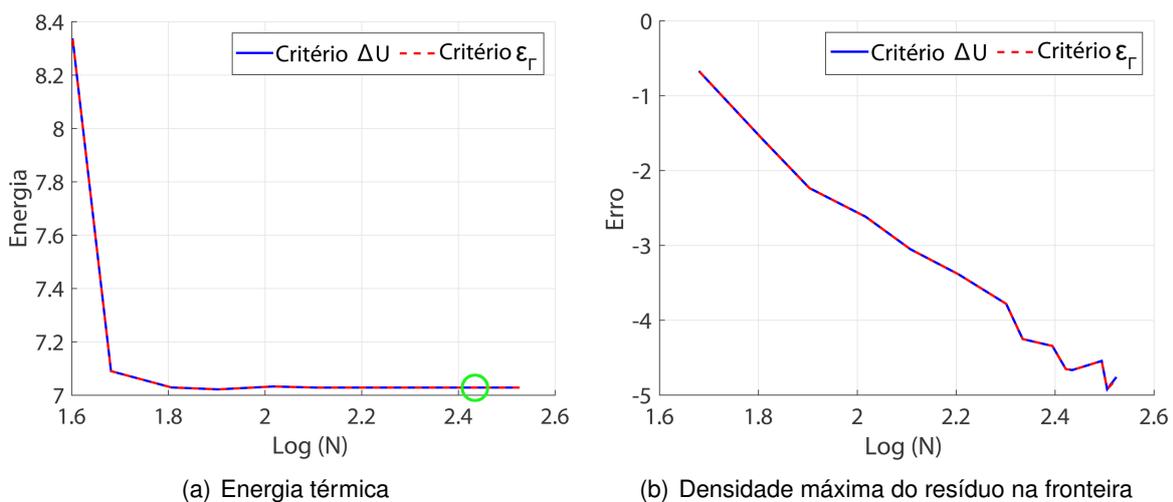


Figura 8.2: Energia térmica e densidade máxima do resíduo na fronteira ao longo do processo iterativo para uma tolerância de seleção de 0.99

Na figura 8.2 (a), a ordenada corresponde ao valor da energia térmica ao longo do processo iterativo e a abcissa corresponde ao número total de graus de liberdade, em escala logarítmica.

Na figura 8.2 (b), a ordenada corresponde ao valor da densidade máxima do resíduo nas fronteiras ao longo do processo iterativo e a abcissa corresponde ao número total de graus de liberdade. Ambos os eixos estão em escala logarítmica.

No gráfico correspondente à energia térmica, é clara a sua convergência, estabilizando rapidamente para um valor na vizinhança de 7,0289. No entanto, conforme já foi referido na secção 7.2.3, esta convergência não é monótona, pelo que são registadas algumas oscilações de baixa amplitude à volta deste valor.

Observa-se que ambos os gráficos são caracterizados por uma sobreposição perfeita das soluções obtidas utilizando os dois critérios de seleção. Isto deve-se sobretudo à simetria da estrutura, que faz com que os valores dos critérios de seleção sejam muito superiores nas fronteiras exteriores do que nas interiores, sendo as primeiras escolhidas para o refinamento nos dois casos.

Na figura 8.2 (a), observa-se um círculo verde, correspondente à convergência pelo critério da variação da energia térmica quando é adotada uma tolerância de convergência com o valor de 10^{-4} . Admite-se que o valor 10^{-4} para a tolerância de convergência origina, para este problema, uma solução com um rácio favorável entre a qualidade da solução e o esforço computacional. O mesmo valor provou ser aceitável em diversas experiências realizadas ao longo da execução deste trabalho, pelo que está definido como valor padrão na respetiva interface (ver secção B.2.4).

8.2.3 Campos das soluções

Os campos das temperaturas e dos fluxos de calor nas direções Cartesianas são apresentados na figura 8.3, para o refinamento indicado pelo marcador circular na figura 8.2 (a). Para a mesma situação, apresenta-se ainda o mapa dos refinamentos dos elementos e das fronteiras essenciais (figura 8.3 (a)).

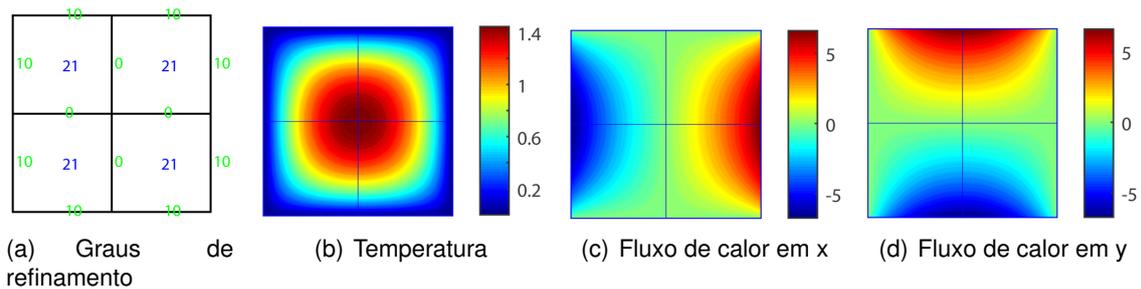


Figura 8.3: Graus de refinamento, campo da temperatura e campos dos fluxos em x e y para ambos os critérios de refinamento e tolerância de seleção de 0.99

Pela figura 8.3, pode-se concluir que as soluções recuperam bem as condições de fronteira aplicadas, bem como a continuidade interelementar em temperatura e fluxos, apesar de a continuidade em fluxos não ser imposta de todo pela formulação.

As fronteiras interiores nunca são selecionadas para o refinamento, uma vez que o seu refinamento não melhora a continuidade interelementar das temperaturas, que já está garantida devido à simetria do problema. Assim, os respetivos critérios de seleção resultam numericamente nulos. Conforme esperado, as fronteiras exteriores são sempre refinadas em conjunto, devido à bi-simetria do problema que uniformiza os valores dos critérios de refinamento destas fronteiras.

8.2.4 Comparação com elementos finitos híbridos

Nesta secção são comparadas as soluções provenientes do processo 'p'-adaptativo apresentado neste trabalho e da utilização de um procedimento similar, baseado nos elementos finitos híbridos apresentados na referência [49], para o problema bi-simétrico.

Para as duas formulações, os processos 'p'-adaptativos são controlados utilizando os parâmetros listados na tabela (8.1) e uma tolerância de convergência de 10^{-4} . Assim, a solução obtida pela formulação híbrida-Trefftz já está representada na figura 8.3, sendo aqui apenas apresentados os campos das soluções e graus de refinamento finais para os elementos finitos híbridos.

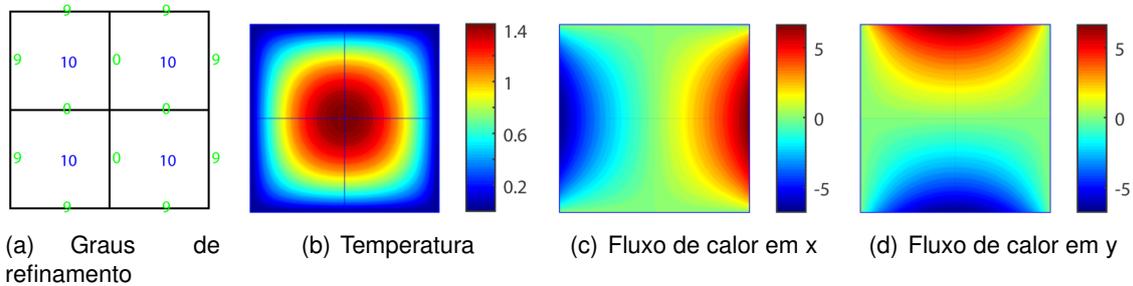


Figura 8.4: Graus de refinamento, campo da temperatura e campos dos fluxos em x e y para uma tolerância de seleção de 0.99 (elementos finitos híbridos)

Analisando as figuras 8.3 e 8.4, verifica-se que as soluções são praticamente idênticas. A similaridade dos resultados estende-se aos refinamentos das fronteiras exteriores (10 nos elementos finitos híbridos-Trefftz e 9 nos elementos finitos híbridos), mas não aos refinamentos dos domínios, que são bastante diferentes nos dois casos.

A grande diferença no grau das bases de aproximação no domínio justifica-se pelo número muito mais alto de funções que correspondem a um determinado grau no caso dos elementos híbridos (todos os monómios do triângulo de Pascal) do que no caso dos elementos finitos híbridos-Trefftz. De facto, o número total de graus de liberdade da formulação híbrida (348) aumentou em relação à formulação híbrida-Trefftz (264). Por consequência, o tempo de computação até à convergência, utilizando elementos híbridos-Trefftz é bastante inferior ao dos elementos híbridos.

8.3 Problema assimétrico

8.3.1 Descrição do problema

O desempenho do algoritmo 'p'-adaptativo é avaliado nesta secção através de um teste numérico mais exigente, em que são impostas tanto condições de fronteira de Neumann como de Dirichlet, numa configuração sem eixos de simetria.

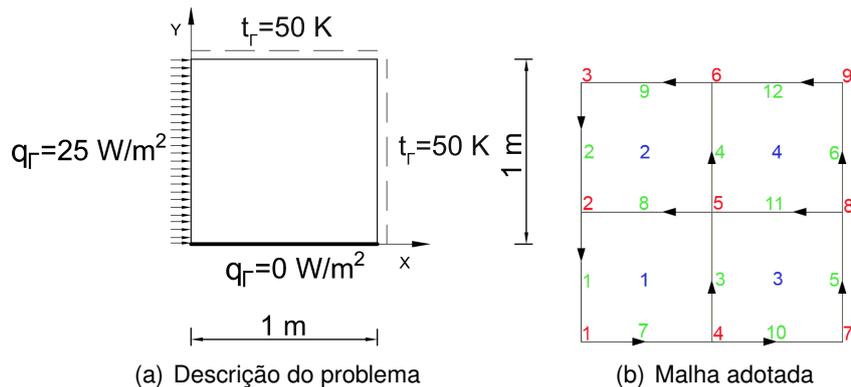


Figura 8.5: Caso de estudo assimétrico e refinamento 'h' adotado

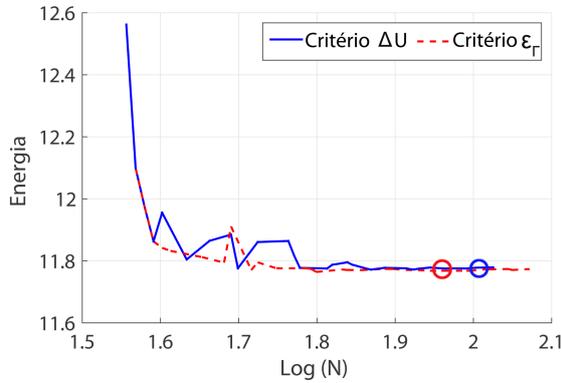
O meio estudado (figura 8.5) tem as mesmas dimensões e o mesmo refinamento 'h' (4 elementos) que o do exemplo anterior, mas as condições de fronteira são consideravelmente diferentes. Nas fronteiras Neumann foram impostos fluxos de calor de $25 [W/m^2]$ e $0 [W/m^2]$ e nas fronteiras Dirichlet foram impostas temperaturas de $50 [K]$. As características do material são, $30 [W/mK]$ e $100 [Wm^{-3}]$ para a condutibilidade térmica k e geração interna de calor Q , respetivamente. Os graus iniciais da base de aproximação nos domínios dos elementos são $n_D = 3$ e nas fronteiras $n_Γ = 0$.

Ao contrário do que acontece no problema bi-simétrico apresentado na secção 8.2, este problema não tem eixos de simetria o que o torna num problema interessante para testar várias tolerâncias de seleção de modo a averiguar se, quando se refina um maior número de fronteiras ao mesmo tempo, se ganha algum tipo de vantagem em termos de esforço computacional, número de iterações realizadas, ou rapidez na convergência. Assim, são testados os valores $\{0.99, 0.9, 0.6\}$ para a tolerância de seleção, significando que são selecionadas para refinamento todas as fronteiras cujos valores do critério de seleção estejam dentro de 1%, 10% e 40%, respetivamente, da fronteira com valor mais elevado.

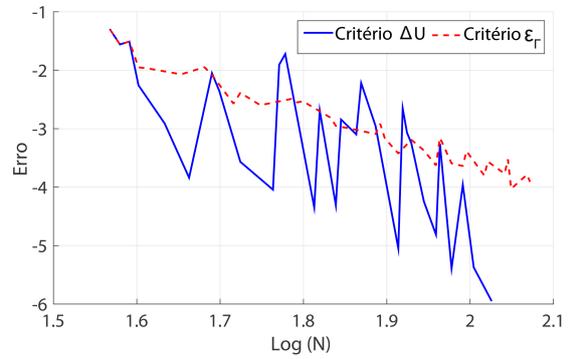
8.3.2 Gráficos de convergência

Os gráficos que estão representados nas figuras 8.6, 8.7 e 8.8 mostram a convergência da energia térmica e da densidade máxima do resíduo na fronteira para todo o processo iterativo até a deteção de instabilidade numérica no sistema resolutivo. Os resultados são apresentados para os dois critérios de refinamento, nomeadamente a variação da energia (5.18), a azul, e a densidade máxima do resíduo na fronteira (5.19), a

vermelho, e para cada um dos valores da tolerância de seleção.

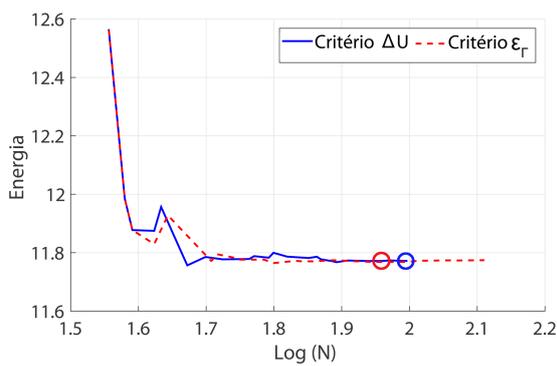


(a) Energia térmica

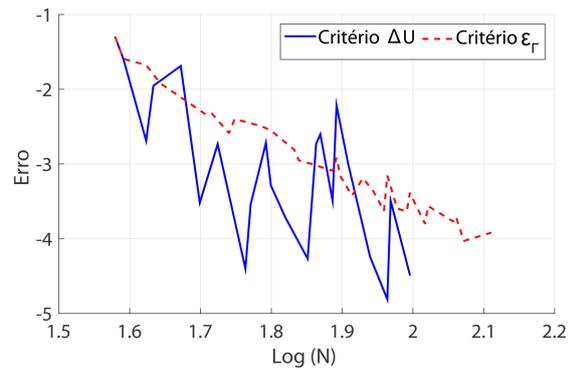


(b) Densidade máxima do resíduo na fronteira

Figura 8.6: Energia térmica e densidade máxima do resíduo na fronteira ao longo do processo iterativo para uma tolerância de seleção de 0.99

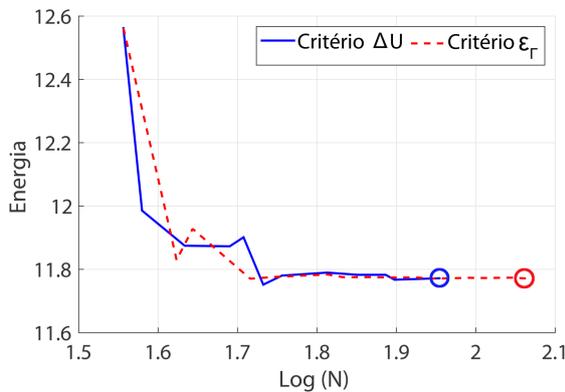


(a) Energia térmica

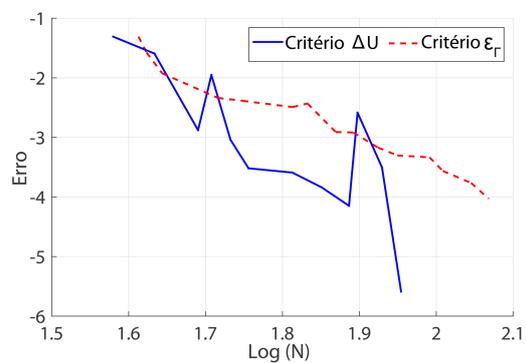


(b) Densidade máxima do resíduo na fronteira

Figura 8.7: Energia térmica e densidade máxima do resíduo na fronteira ao longo do processo iterativo para uma tolerância de seleção de 0.9



(a) Energia térmica



(b) Densidade máxima do resíduo na fronteira

Figura 8.8: Energia térmica e densidade máxima do resíduo na fronteira ao longo do processo iterativo para uma tolerância de seleção de 0.6

Nos gráficos das figuras 8.6 (a), 8.7 (a) e 8.8 (a), as ordenadas correspondem aos valores da energia térmica ao longo do processo iterativo e as abcissas correspondem ao número total de graus de liberdade, em escala logarítmica. Nos gráficos das figuras 8.6 (b), 8.7 (b) e 8.8 (b), as ordenadas correspondem aos valores da densidade máxima do resíduo na fronteira ao longo do processo iterativo e as abcissas correspondem ao número total de graus de liberdade. Ambos os eixos estão representados em escala logarítmica.

Todos os casos testados apresentam convergência da energia, que acaba por estabilizar para um valor próximo de 11,7681. Contudo, esta convergência não é monótona devido às características da formulação usada, como já foi explicado na secção 7.2.3.

Nos gráficos correspondentes às energias, os dois marcadores, o vermelho e o azul, correspondem aos pontos de convergência por cada um dos critérios de seleção quando é adotada uma tolerância do resíduo máximo da energia ($\epsilon_{\Delta U}$, ver secção 5.4.2) igual a 10^{-4} . O valor desta tolerância foi escolhido pelas razões já mencionadas no problema bi-simétrico.

Se o marcador está posicionado no último ponto do gráfico (última iteração), significa que não se deu a convergência para o valor de tolerância 10^{-4} tendo a análise sido interrompida devido à deteção de instabilidades numéricas no sistema.

Deste modo, analisando a posição dos círculos para as várias tolerâncias de seleção usadas identificou-se que, à medida que o valor da tolerância de refinamento é menor (isto é, a escolha das fronteiras a refinar é menos restrita), a convergência é obtida mais dificilmente. Esta observação atesta a eficiência dos critérios que influenciam a tomada de decisões do algoritmo uma vez que, quando os mesmos são relaxados, a convergência alcança-se mais dificilmente. Por outro lado, o aumento do rigor na seleção das fronteiras a refinar aumenta o número de iterações necessárias para alcançar a convergência (menos fronteiras são refinadas a cada iteração), aumentando o tempo computacional.

Verificou-se que o tempo computacional é menor se a seleção for menos restrita, ou seja, quando se permite o refinamento de mais fronteiras em simultâneo.

Na próxima secção são apresentados os campos das soluções finais juntamente com os graus de refinamento, relativos aos marcadores circulares nos gráficos das figuras 8.6 (a), 8.7 (a) e 8.8 (a).

8.3.3 Campos das soluções

Os campos das temperaturas e dos fluxos de calor nas direções Cartesianas obtidos pelos dois critérios de seleção, são apresentados nas figuras 8.9 e 8.10 para uma tolerância de seleção de 0.99, 8.11 e 8.12 para uma tolerância de seleção de 0.9 e 8.13 e 8.14 para uma tolerância de seleção de 0.6, nos pontos dos respetivos marcadores circulares registados nas figuras 8.6 (a), 8.7 (a) e 8.8 (a).

8.3. PROBLEMA ASSIMÉTRICO

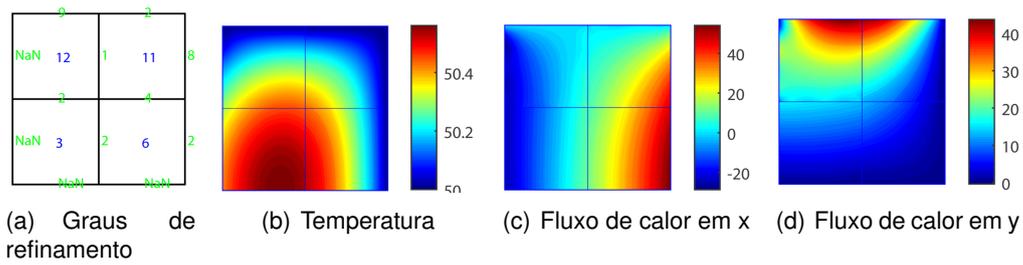


Figura 8.9: Graus de refinamento, campo da temperatura e campos dos fluxos em x e y para o critério de refinamento da energia térmica e tolerância de seleção 0.99

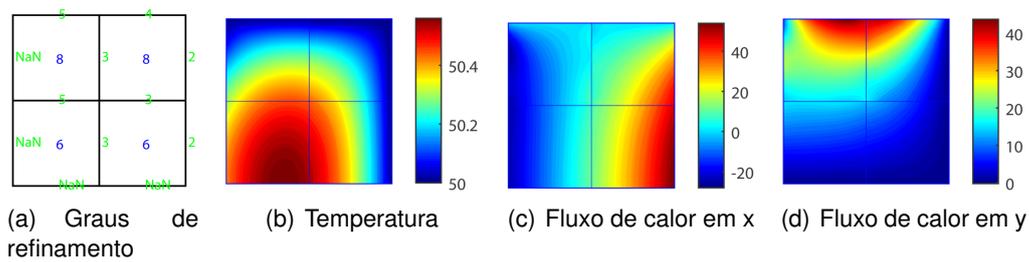


Figura 8.10: Graus de refinamento, campo da temperatura, campos dos fluxos em x e y para o critério de refinamento da densidade máxima do resíduo na fronteira e tolerância de seleção 0.99

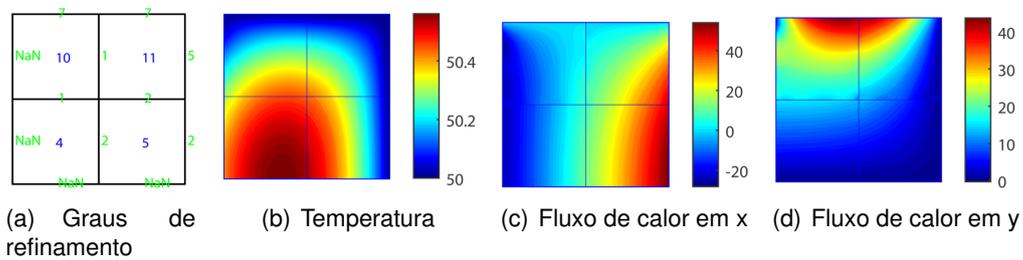


Figura 8.11: Graus de refinamento, campo da temperatura, campos dos fluxos em x e y para o critério de refinamento da energia térmica e tolerância de seleção 0.9

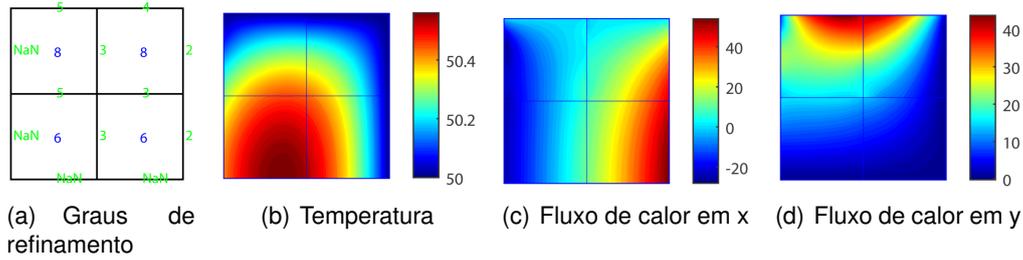


Figura 8.12: Graus de refinamento, campo da temperatura, campos dos fluxos em x e y para o critério de refinamento da densidade máxima do resíduo na fronteira e tolerância de seleção 0.9

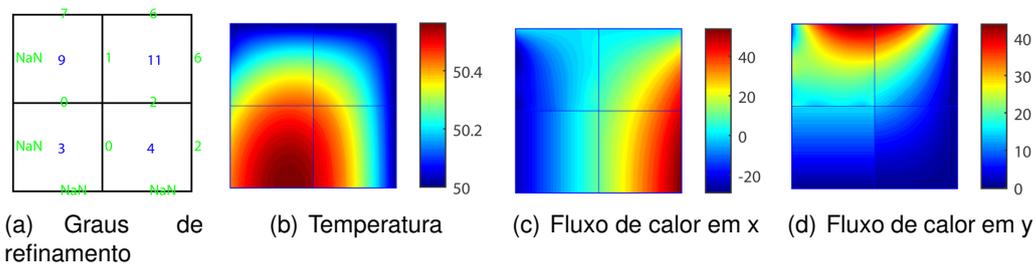


Figura 8.13: Graus de refinamento, campo da temperatura, campos dos fluxos em x e y para o critério de refinamento da energia térmica e tolerância de seleção 0.6

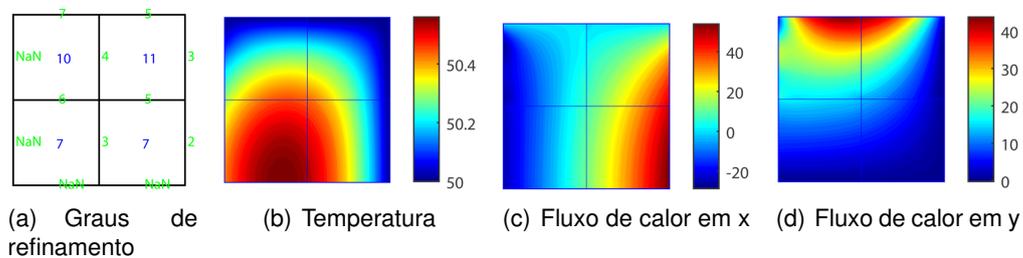


Figura 8.14: Graus de refinamento, campo da temperatura, campos dos fluxos em x e y para o critério de refinamento da densidade do resíduo na fronteira e tolerância de seleção 0.6

A comparação dos resultados obtidos revela que não existem diferenças significativas na qualidade das soluções, verificando-se a continuidade interelementar e nas fronteiras exteriores tanto para as temperaturas como para os fluxos de calor. No entanto, comparando os níveis de refinamento 'p' resultados dos dois critérios de seleção das fronteiras a refinar, observa-se que o critério da variação da energia térmica produz um refinamento mais concentrado nas zonas de maiores gradientes da solução, enquanto o critério da densidade máxima do resíduo na fronteira gera padrões de refinamento mais dispersos nos elementos e fronteiras da malha. Essa tendência é visível em todos os mapas de refinamento apresentados nas figuras de 8.9 (a) a 8.14 (a) e foi confirmada ainda na vasta maioria dos testes numéricos realizados durante este trabalho.

8.3.4 Comparação com elementos finitos híbridos

Nesta secção são comparadas a formulação usada neste trabalho e a formulação híbrida desenvolvida na referência [49]. Para esta comparação são adotados os parâmetros de controlo do processo 'p'-adaptativo listados na tabela 8.1, uma tolerância de seleção de 0.99 e uma tolerância de convergência de 10^{-4} . Nas figuras 8.15 a 8.18 são apresentados os campos da temperatura e fluxos de calor para ambas as formulações, assim como os graus finais de refinamento.

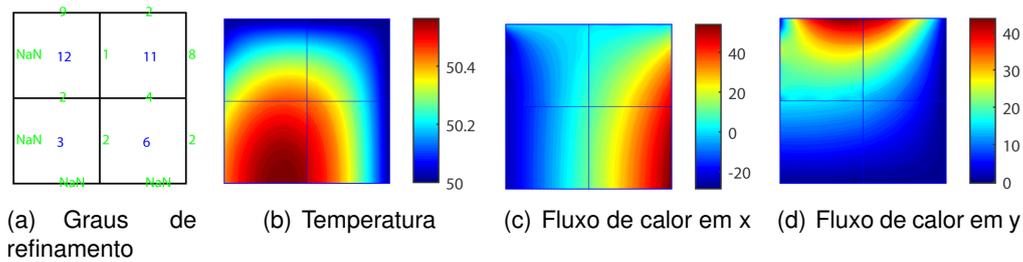


Figura 8.15: Graus de refinamento, campo da temperatura, campo dos fluxos em x e y para formulação híbrida-Trefftz, utilizando o critério de variação da energia térmica e tolerância de seleção 0.99

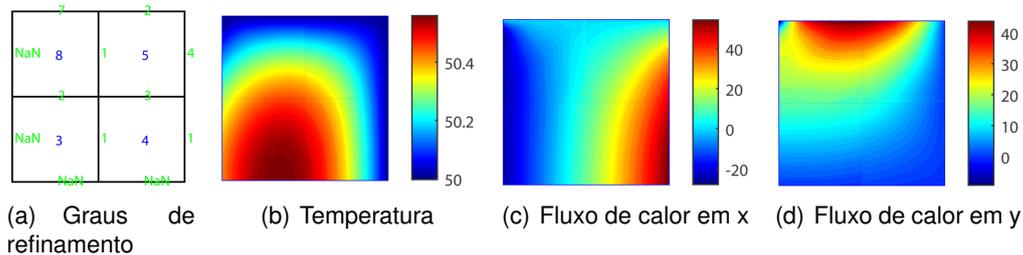


Figura 8.16: Graus de refinamento, campo da temperatura, campo dos fluxos em x e y para a formulação híbrida, utilizando o critério de variação da energia térmica e tolerância de seleção 0.99

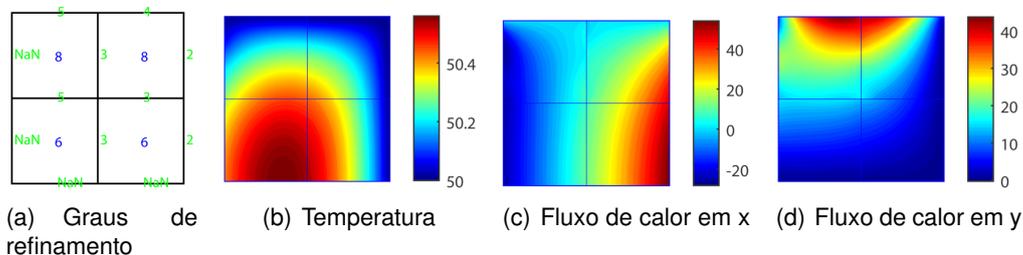


Figura 8.17: Graus de refinamento, campo da temperatura, campo dos fluxos em x e y para a formulação híbrida-Trefftz, utilizando o critério de refinamento da densidade máxima do resíduo na fronteira e tolerância de seleção 0.99

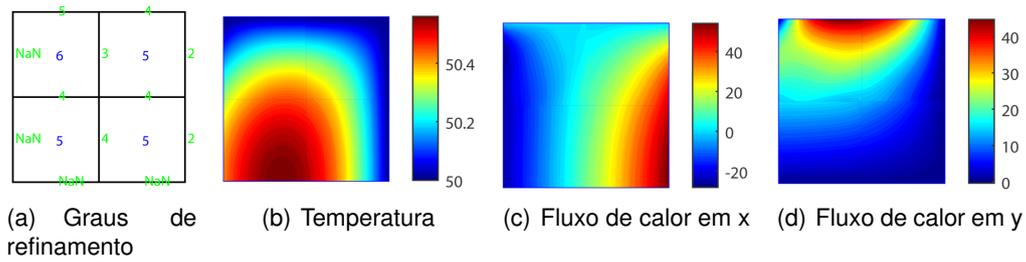


Figura 8.18: Graus de refinamento, campo da temperatura, campo dos fluxos em x e y para a formulação híbrida, utilizando o critério de refinamento da densidade máxima do resíduo na fronteira e tolerância de seleção 0.99

Apesar de todas as soluções apresentadas nas figuras de 8.15 a 8.18 não apresentarem diferenças visualmente notórias em termos de qualidade, surgem diferenças significativas no número de graus de liberdade utilizados. Assim, os elementos híbridos apresentam, para todos os casos, mais graus de liberdade que os elementos híbridos-Trefftz, mesmo quando estes últimos apresentam ordens maiores nos graus das funções de aproximação, nos domínios e fronteiras. Isto deve-se à diferença entre o número de funções de aproximação, para um determinado grau incluídas nas bases dos elementos finitos híbridos e híbridos-Trefftz, conforme explicado na secção 3.3.

Por outro lado, os elementos finitos híbridos tendem a produzir sistemas resolutivos geralmente mais estáveis.

Capítulo 9

Conclusões e desenvolvimentos futuros

9.1 Conclusões

O objetivo deste trabalho consistiu no desenvolvimento de uma plataforma computacional que utiliza elementos finitos híbridos-Trefftz de temperatura para problemas de transferência de calor por condução em regime estacionário, utilizando procedimentos de refinamento ' p '-adaptativos.

No modelo de temperatura dos elementos finitos híbridos-Trefftz, o campo das temperaturas é aproximado no domínio dos elementos, sendo condicionado de modo a respeitar, localmente, a equação governativa do problema (equação de Poisson). Consequentemente, as funções de aproximação passam a conter informação referente às características do problema modelado, permitindo que se obtenham soluções muito precisas com um número de graus de liberdade relativamente baixo. Além disso, os termos que pertencem ao sistema resolutivo passam a ser definidos por integrais na fronteira.

Como é habitual nas formulações híbridas, as bases de aproximação são naturalmente hierárquicas e associadas a variáveis generalizadas (não-nodais), o que potenciou a eficiência do algoritmo ' p '-adaptativo tendo em conta que o refinamento das bases de aproximação não requer recalculer os termos de grau inferior. Pelo contrário, o novo sistema resolutivo obtém-se do anterior acrescentando-lhe apenas as linhas e colunas que correspondem às funções adicionadas à base.

O preço a pagar por estas vantagens prende-se sobretudo com a ocorrência de sistemas resolutivos mais instáveis do que nas formulações de elementos finitos convencionais, que requerem um investimento de tempo computacional significativo na sua análise e estabilização. No decorrer deste trabalho foram identificados limites na utilização do número de condição que não garantiu, por si só, a estabilidade do sistema. Assim, foi desenvolvida outra metodologia, baseada na análise dos valores singulares do sistema e que comprovou ser mais fidedigna e segura no que toca ao controlo da estabilidade do mesmo.

A convergência dos elementos finitos híbridos-Trefftz foi testada sob refinamentos ' p ' e ' h ', onde se analisaram vários problemas com soluções analíticas conhecidas. Deste modo, confirmou-se a convergência da formulação para ambos os refinamentos, tendo-se destacado que a mesma é obtida mais rapidamente utilizando o refinamento ' p '.

Constatou-se que a convergência obtida não é monótona uma vez que os elementos finitos híbridos-Trefftz não são nem localmente compatíveis, nem localmente equilibrados.

Foi ainda comparado o desempenho dos elementos finitos híbridos-Trefftz com o dos elementos finitos conformes de temperatura (convencionais) implementados no programa comercial ANSYS, nomeadamente no que toca à qualidade dos campos da solução, avaliando a recuperação das condições de fronteira impostas e da continuidade interelementar. Verificou-se que ambas as formulações apresentam uma boa qualidade dos campos das temperaturas, no entanto, os campos de fluxos de calor obtidos pelos elementos convencionais apresentaram uma qualidade muito inferior (grandes descontinuidades entre elementos) comparativamente aos campos de fluxos obtidos pelos elementos finitos híbridos-Trefftz. Isto deve-se ao facto de os elementos convencionais serem localmente compatíveis, mas não localmente equilibrados. Para além disso, no modelo de elementos finitos híbridos-Trefftz, o número total de graus de liberdade foi muito inferior ao usado no modelo de elementos finitos convencionais.

A eficiência do algoritmo ' p '-adaptativo implementado foi testada para dois problemas, um simétrico e outro não simétrico. Foram testados dois critérios de seleção das fronteiras a refinar, um baseado na variação da energia térmica e o outro na variação da densidade do resíduo na fronteira refinada. Para ambos os problemas, o critério de paragem do algoritmo baseia-se na convergência da energia térmica total.

No primeiro problema, o valor para a tolerância de seleção foi definido de forma a garantir que as condições de simetria eram mantidas (ou seja, que fronteiras simétricas eram refinadas ao mesmo tempo). Comprovou-se que a energia térmica converge para um erro relativo de 0,01%. Os dois critérios geraram exatamente os mesmos resultados.

No segundo problema, o desempenho dos dois critérios de refinamento foi analisado para várias tolerâncias de seleção, de maneira a testar se, ao refinar um maior número de fronteiras ao mesmo tempo, se ganhava alguma vantagem em termos de esforço computacional ou na rapidez da convergência. Notou-se que, para uma tolerância de seleção maior, isto é, refinando mais fronteiras ao mesmo tempo, mais graus de liberdade são necessários para alcançar a convergência da energia, mas o número de iterações e o tempo computacional são menores. Detetou-se ainda uma diferença no refinamento ' p ' entre os dois critérios de refinamento, concluindo-se que o critério da variação da energia térmica origina um refinamento mais localizado que o critério da densidade do resíduo na fronteira.

Finalmente, fez-se a comparação das soluções obtidas pela utilização do processo de refinamento ' p '-adaptativo com elementos finitos híbridos-Trefftz e com elementos finitos híbridos, tendo-se verificado que ambas as formulações apresentam soluções de boa qualidade. Constatou-se, no entanto, que os elementos finitos híbridos tendem a utilizar um maior número de graus de liberdade que os elementos finitos híbridos-Trefftz para obter soluções com a mesma qualidade, levando a maiores custos em termos do tempo computacional.

Em suma, o programa desenvolvido no presente trabalho mostrou ser eficaz em diversos casos, prevenindo a divergência da energia térmica bem como originando sempre soluções que conseguiram aproximar bem as condições de fronteira impostas e a continuidade interelementar tanto para a temperatura como para os fluxos de calor (mesmo que a continuidade dos fluxos não esteja imposta na formulação). Apesar dos elementos finitos híbridos-Trefftz apresentarem mais tendência para originar sistemas resolutivos mais instáveis, estes tendem a oferecer mais eficiência em termos de tempo computacional quando comparados com os elementos puramente híbridos.

9.2 Desenvolvimentos futuros

Finalizado o trabalho desta dissertação, são apresentados de seguida alguns pontos de possível interesse para trabalhos futuros, relacionados com o tema aqui desenvolvido.

- Adaptação das formulações híbridas-Trefftz com refinamento ' p '-adaptativo, para análise dinâmica de problemas de condução de calor.
- Adaptação das formulações híbridas-Trefftz com refinamento ' p '-adaptativo, para a análise não-linear de problemas de condução de calor.
- Inserção, na plataforma computacional, de condições de fronteira de tipo Robin para permitir modelar o efeito da transferência de calor através de convecção.

Referências bibliográficas

- [1] Alberta, University of: *UofA ANSYS Tutorial*. <http://www.mece.ualberta.ca/tutorials/ansys/index.html>, 2001, consultado em Julho de 2016.
- [2] Argyris, J. e Kelsey, S.: *Energy theorems and structural analysis*. Springer, 1955.
- [3] Babuška, I. e Szabo, B. e Katz I.: *The p-version of the finite element method*. SIAM journal on numerical analysis, 18(3):515–545, 1981.
- [4] Babuška, I. e Suri, M.: *The p and h-p versions of the finite element method, basic principles and properties*. SIAM review, 36(4):578–632, 1994.
- [5] Bank, R. e Sherman, A. e Weiser A.: *Some refinement algorithms and data structures for regular local mesh refinement*. Scientific Computing, Applications of Mathematics and Computing to the Physical Sciences, 1:3–17, 1983.
- [6] Bank, R. e Dupont, T.: *An optimal order process for solving finite element equations*. Mathematics of Computation, 36(153):35–51, 1981.
- [7] Castanon, J.: *On l1 minimization for ill-conditioned linear systems with piecewise polynomial solutions*. 2013.
- [8] Chao, T. e Chow, W.: *A Review on the Applications of Finite Element Method to Heat Transfer and Fluid Flow*. International Journal on Architectural Science, 3(1):1–19, 2002.
- [9] Cismaisu, I.: *Parallel Algorithms for Non-Conventional Finite Element Computations on Distributed Architectures*. Instituto Superior Técnico, Tese de doutoramento, Lisboa, Portugal, 2001.
- [10] Cismaisu, I. e Almeida, J.: *Parallel solution techniques for hybrid mixed finite element models*. Innovative computational methods for structural mechanics(A 00-13326 02-64), Edinburgh, United Kingdom, Saxe-Coburg Publications, 1999, 109-126, 1999.
- [11] Cismasiu, C.: *The hybrid-Trefftz displacement element for static and dynamic structural analysis problems*. Instituto Superior Técnico, Tese de doutoramento, Lisboa, Portugal, 2000.
- [12] Clough, R.: *The finite element method in plane stress analysis*. Conference on Electronic Computation, 1960.
- [13] Cook, R.: *Concepts and applications of finite element analysis*. John Wiley & Sons, 2007.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [14] Courant, R.: *Variational methods for the solution of problems of equilibrium and vibrations*. Bulletin of the American Mathematical Society, 49(1):1–23, 1943.
- [15] Forsythe, G. e Moler, C.: *Computer solution of linear algebraic systems*, volume 7. Prentice-Hall Englewood Cliffs, NJ, 1967.
- [16] Freitas, J. e Cismaşiu, C.: *Formulation of hybrid-Trefftz displacement elements*. Advances in Finite Element Technology, Topping BHV (ed.) Civil-Comp Press, Edinburgh, 195-202, 1996.
- [17] Freitas, J. e Cismaşiu, C.: *Hybrid displacement element for elastodynamics based on Chebyshev series approximation*. Em *International Conference in Numerical Methods in Continuum Mechanics (NMCM), High Tatras, República Checa, 16-18, 1996*.
- [18] Freitas, J. e Cismaşiu, C.: *Adaptive p-refinement of hybrid-Trefftz finite element solutions*. Finite Elements in Analysis and Design, 39(11):1095–1121, 2003.
- [19] Freitas, J. e Bussamra, F.: *Three-dimensional hybrid-Trefftz stress elements*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 47(5):927–950, 2000.
- [20] Freitas, J. e Moldovan, I.: *Hybrid-Trefftz stress element for bounded and unbounded poroelastic media*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 85(10):1280–1305, 2011.
- [21] Freitas, J. e Moldovan, I. e Cismaşiu C.: *Hybrid-Trefftz displacement element for poroelastic media*. Computational Mechanics, 48(6):659–673, 2011.
- [22] Freitas, J. e Moldovan, I. e Toma M.: *Mixed and hybrid stress elements for biphasic media*. Computers & Structures, 88(23):1286–1299, 2010.
- [23] Freitas, J.: *Hybrid-Trefftz displacement and stress elements for elastodynamic analysis in the frequency domain*. Computer Assisted Mechanics and Engineering Sciences, 4(3):345–368, 1997.
- [24] Freitas, J.: *Formulation of elastostatic hybrid-Trefftz stress elements*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 153(1):127–151, 1998.
- [25] Freitas, J.: *Hybrid finite element formulations for elastodynamic analysis in the frequency domain*. International Journal of Solids and Structures, 36(13):1883–1923, 1999.
- [26] Freitas, J. e Almeida, J. e Pereira E.: *Non-conventional formulations for the finite element method*. Computational Mechanics, 23(5-6):488–501, 1999.
- [27] Freitas, J. e Ji, Z.: *Hybrid-Trefftz equilibrium model for crack problems*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 39(4):569–584, 1996.
- [28] Freitas, J. e Ji, Z.: *Hybrid-Trefftz finite element formulation for simulation of singular stress field*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 39(2):281–308, 1996.
- [29] Freitas, J. e Wang, Z.: *Hybrid-Trefftz stress elements for elastoplasticity*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 43(4):655–683, 1998.

- [30] Herrera, I.: *Boundary methods: A criterion for completeness*. Proceedings of the National Academy of Sciences, 77(8):4395–4398, 1980.
- [31] Hoffman, R. e Busby, H.: *Stress-based convergence analysis for p-adaptive hierarchical finite element analysis*. Finite Elements in Analysis and Design, 34(1):25–35, 2000.
- [32] Hoffman, J. e Frankel, S.: *Numerical methods for engineers and scientists*. CRC press, 2001.
- [33] Hrennikoff, A.: *Solution of problems of elasticity by the framework method*. Journal of Applied Mechanics, 8(4):169–175, 1941.
- [34] Jesus, A. e Cismasiu, I. e Freitas J.: *Fully automatic p-adaptive hybrid-Trefftz displacement elements*. 19th International Conference on Computer Methods in Mechanics, 2011.
- [35] Jirousek, J. e Venkatesh, A.: *A simple stress error estimator for Hybrid-Trefftz p-version elements*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 28(1):211–236, 1989.
- [36] Jirousek, J. e Venkatesh, A.: *Adaptivity in hybrid-Trefftz finite element formulation*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 29(2):391–405, 1990.
- [37] Jirousek, J. e Zielinski, A.: *Dual hybrid-Trefftz element formulation based on independent boundary traction frame*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 36(17):2955–2980, 1993.
- [38] Jirousek, J. e Wroblewski, A. e Szybiński B.: *A new 12 DOF quadrilateral element for analysis of thick and thin plates*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 38(15):2619–2638, 1995.
- [39] Jirousek, J.: *Basis for development of large finite elements locally satisfying all field equations*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 14(1):65–92, 1978.
- [40] Jirousek, J. e Guex, L.: *The hybrid-Trefftz finite element model and its application to plate bending*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 23(4):651–693, 1986.
- [41] Jirousek, J. e N'Diaye, M.: *Solution of orthotropic plates based on p-extension of the hybrid-Trefftz finite element model*. Computers & Structures, 34(1):51–62, 1990.
- [42] Jirousek, J. e Teodorescu, P.: *Large finite elements method for the solution of problems in the theory of elasticity*. Computers & Structures, 15(5):575–587, 1982.
- [43] Jirousek, J. e Qin, Q.: *Application of hybrid-Trefftz element approach to transient heat conduction analysis*. Computers & Structures, 58(1):195–201, 1996.
- [44] Leitão, V.: *On the implementation of a multi-region Trefftz-collocation formulation for 2-D potential problems*. Engineering Analysis With Boundary Elements, 20(1):51–61, 1997.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [45] Moldovan, I.: *Hybrid-Trefftz finite elements for elastodynamic analysis of saturated porous media*. Instituto Superior Técnico, Tese de doutoramento, Lisboa, Portugal, 2008.
- [46] Moldovan, I. e Cao, T. e Freitas J.: *Hybrid-Trefftz finite elements for biphasic elastostatics*. *Finite Elements in Analysis and Design*, 66:68–82, 2013.
- [47] Moldovan, I. e Cao, T. e Freitas J.: *Elastic wave propagation in unsaturated porous media using hybrid-Trefftz stress elements*. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 97(1):32–67, 2014.
- [48] Moldovan, I. e Cao, T. e Freitas J.: *Hybrid-Trefftz displacement finite elements for elastic unsaturated soils*. *International Journal of Computational Methods*, 11(02):1342005, 2014.
- [49] Pereira, D.: *Elementos finitos híbridos com refinamento p-adaptativo para modelação de problemas de transferência de calor*. Faculdade de Ciências e Tecnologia, Tese de mestrado, Lisboa, Portugal, 2015.
- [50] Pian, T. e Wu, C.: *Hybrid and incompatible finite element methods*. Chapman, Boca Raton, 2006.
- [51] Piltner, I.: *The application of a complex 3-dimensional elasticity solution representation for the analysis of a thick rectangular plate*. *Acta Mechanica*, 75(1-4):77–91, 1988.
- [52] Piteri, M.: *Geração automática de malhas hierárquico-adaptativas em domínios bidimensionais e tridimensionais*. Instituto Superior Técnico, Tese de doutoramento, Lisboa, Portugal, 1998.
- [53] Qin, Q.: *Hybrid-Trefftz finite element method for Reissner plates on an elastic foundation*. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 122(3):379–392, 1995.
- [54] Shaw, R. e Huang, S. e Zhao C.: *The embedding integral and the Trefftz method for potential problems with partitioning*. *Engineering Analysis With Boundary Elements*, 9(1):83–90, 1992.
- [55] Silva, C.: *Desenvolvimento de formulações de elementos finitos para problemas de transferência de calor*. Tese de Mestrado, Faculdade de Ciências e Tecnologia, Lisboa, Portugal, 2014.
- [56] Stein, E.: *Die Kombination des modifizierten Trefftzschen Verfahrens mit der Methode der finiten Elemente*. *Finite Elemente in der Statik*, 172-185, 1973.
- [57] Sydenstricker, R. e Coutinho, A. e Martins M. e Landau L. e Alves J.: *A posteriori error estimate for stress analysis of homogeneous and heterogeneous materials: An engineering approach*. *Finite Elements in Analysis and Design*, 42(3):171–188, 2005.
- [58] Synge, J.: *Triangulation in the hypercircle method for plane problems*. Em *Proceedings of the Royal Irish Academy. Section A: Mathematical and Physical Sciences*, 54, 341-367. JSTOR, 1951.

- [59] Tang, X. e Sato, T.: *Adaptive mesh refinement and error estimate for 3-D seismic analysis of liquefiable soil considering large deformation*. Journal of Natural Disaster Science, 26(1):37–48, 2004.
- [60] Trefftz, E.: *Ein gegenstück zum ritzschen verfahren*. Proceedings 2nd International Congress Applied Mechanics, Zurich, 1926, 131-137, 1926.
- [61] Turner, M.: *Stiffness and deflection analysis of complex structures*. Journal of the Aeronautical Sciences, 23:805–823, 1956.
- [62] Varga, R.: *Matrix iterative analysis*. Springer Science & Business Media, 2009.
- [63] Venkatesh, A. e Jirousek, J.: *Accurate representation of local effects due to concentrated and discontinuous loads in hybrid-Trefftz plate bending elements*. Computers & Structures, 57(5):863–870, 1995.
- [64] Veubeke, D. e Fraeijs, B.: *Variational principles and the patch test*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 8(4):783–801, 1974.
- [65] Wang, H. e Qin, Q.: *Hybrid FEM with fundamental solutions as trial functions for heat conduction simulation*. Acta Mechanica Solida Sinica, 22(5):487–498, 2009.
- [66] Wilson, E. e Nickell, R.: *Application of the finite element method to heat conduction analysis*. Nuclear Engineering and Design, 4(3):276–286, 1966.
- [67] Wroblewski, A. e Qin, Q. e He X. Jirousek J. e: *A family of quadrilateral hybrid-Trefftz p-elements for thick plate analysis*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 127(1):315–344, 1995.
- [68] Zhu, J. e Taylor, Z. e Zienkiewicz O.: *The finite element method: its basis and fundamentals*. Elsevier, 2013.
- [69] Zielinski, A. e Zienkiewicz, O.: *Generalized finite element analysis with T-complete boundary solution functions*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 21(3):509–528, 1985.
- [70] Zienkiewicz, O. e Phillips, D.: *An automatic mesh generation scheme for plane and curved surfaces by isoparametric co-ordinates*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 3(4):519–528, 1971.
- [71] Zienkiewicz, O. Cheung, K.: *The finite element method in structural and continuum mechanics*. McGraw-Hill.
- [72] Zienkiewicz, O. e Cheung, Y.: *Finite elements in the solution of field problems*. The Engineer, 507-510, 1965.

Anexo A

Funções do programa

Neste anexo são descritas as funções implementadas no programa. Uma vez que é possível a utilização de dois tipos de geradores de malha diferentes, regular e não regular, algumas funções variam ligeiramente de acordo com a malha utilizada. Deste modo, foram acrescentadas as abreviações "Reg" e "Tri" nos nomes das funções associadas às malhas regular e não regular, respetivamente.

As funções são agrupadas por três categorias e listadas na ordem em que aparecem no código.

A.1 Funções de interface gráfica

- `comp_struct`: função utilizada para identificar qual a versão Matlab que é utilizada para correr a aplicação. Serve para estabelecer o protocolo de pré-preenchimento da primeira interface gráfica, pela função `HeatStructDef`.
- `CreateEdgeLoop`: função responsável por transformar a informação proveniente do gerador de malhas não regular nas estruturas de dados topológicos do programa descritos na secção 4.3.2.
- `SHOWEDGES`: função com o objetivo de mostrar e ocultar os índices das fronteiras (ver descrição das interfaces na secção B.2).
- `SHOWELEMENTS`: cria e controla o funcionamento do botão que mostra e oculta os índices dos elementos (ver descrição das interfaces na secção B.2).
- `SHOWNODES`: função com o objetivo de mostrar e ocultar os índices dos nós (ver descrição das interfaces na secção B.2).
- `HeatStructDef`: função responsável por criar ou para voltar a abrir a interface gráfica, GUI 1 (ver figura B.2).
- `HeatBC1 Reg/Tri`: função responsável por criar ou para voltar a abrir a interface gráfica, GUI 2 (ver figura B.10).
- `HeatBC2 Reg/Tri`: função responsável por criar ou para voltar a abrir a interface gráfica, GUI 3 (ver figura B.12).

- `AdaptiveReg`: função responsável por criar ou para voltar a abrir a interface gráfica, GUI 4 (ver figura B.13).
- `CheckHeat Reg/Tri`: função responsável por criar ou para voltar a abrir a interface gráfica de visualização (ver figura B.14).

A.2 Funções do tronco principal do programa

- `Main Reg/Tri`: função que funciona como centro de comando do programa. Efetua chamadas às outras funções, realiza o pré-condicionamento bem como a resolução do sistema governativo e coordena a tomada de decisões no processo de refinamento 'p'-adaptativo. Não recebe dados de entrada nem devolve dados de saída.
- `InputProc Reg/Tri`: função que recebe os dados de entrada do utilizador e gera as estruturas de dados necessárias ao programa. Funciona também como ficheiro de dados de entrada do programa alternativo à interface gráfica e permite ao utilizador sobre-escrever todas as informações sobre a geometria da estrutura, características do material, condições de fronteira, malha de elementos finitos e as respetivas bases de aproximação. Não recebe dados de entrada da função `Main`, mas devolve-lhe as estruturas **Edges**, **Loops** e **BConds**, a matriz **Nodes** e o número de pontos de Gauss-Legendre a utilizar na integração numérica.
- `CheckMinDegrees`: função que recebe os graus de refinamento das bases de aproximação definidas pelo utilizador e calcula as dimensões das respetivas bases de aproximação, modo a verificar se os elementos são cinematicamente indeterminados. Se não forem, a função aumenta os graus de refinamento no domínio até a condição ser satisfeita. Devolve à função `Main` as estruturas **Edges** e **Loops** com os graus validados.
- `AssignParts`: função que define e aloca memória para os pontos de entrada de cada bloco do sistema resolutivo. Recebe as estruturas **Edges**, **Loops** e **BConds** e devolve à função `Main` as estruturas **Edges** e **Loops**, acrescidas de dois novos membros referentes aos ponto de inserção e dimensão de cada bloco. Devolve também a dimensão total do sistema, `Dim`.
- `Gen_K_Matrix`: função responsável pelo cálculo da matriz de condutividade do sistema resolutivo. Recebe como dados de entrada, as estruturas **Edges** e **Loops**, a matriz dos coeficientes inicializada (`left-hand-side`, LHS), o vetor das abscissas de Gauss-Legendre (`abscissa`), o vetor dos pesos de Gauss (`weight`). Devolve à função `Main` a matriz dos coeficientes preenchida.
- `Gen_B_Matrix`: função responsável pelo cálculo da matriz de fronteira do sistema resolutivo. Recebe como dados de entrada, as estruturas **Edges** e **Loops**, a matriz inicializada (LHS), o vetor das abscissas de Gauss-Legendre (`abscissa`), o vetor dos pesos de Gauss (`weight`). Devolve à função `Main` a matriz dos coeficientes preenchida.
- `Gen_tg_Vector`: função responsável pelo cálculo do vetor das temperaturas aplicadas nas fronteiras de Dirichlet. Recebe como dados de entrada, as estruturas **Edges** e **Loops**, o vetor livre inicializado (RHS), o vetor das abscissas de Gauss-Legendre

A.2. FUNÇÕES DO TRONCO PRINCIPAL DO PROGRAMA

(abscissa), e o vetor dos pesos de Gauss (*weight*). Devolve à função *Main* o vetor livre preenchido.

- *Gen_qg_Vector*: função responsável pelo cálculo do vetor dos fluxos aplicados nas fronteiras de Neumann. Recebe como dados de entrada, as estruturas **Edges** e **Loops**, o vetor livre inicializado (RHS), o vetor das abscissas de Gauss-Legendre (*abscissa*), e o vetor dos pesos de Gauss (*weight*). Devolve à função *Main* o vetor livre preenchido.
- *Gen_Kp_Vector*: função responsável pelo cálculo do vetor da solução particular no domínio dos elementos. Recebe como dados de entrada, as estruturas **Edges** e **Loops**, o vetor livre inicializado (RHS), o vetor das abscissas de Gauss-Legendre (*abscissa*), e o vetor dos pesos de Gauss (*weight*). Devolve à função *Main* o vetor livre preenchido.
- *Gen_tp_Vector*: função responsável pelo cálculo do vetor da solução particular nas fronteiras. Recebe como dados de entrada, as estruturas **Edges** e **Loops**, o vetor livre inicializado (RHS), o vetor das abscissas de Gauss-Legendre (*abscissa*), e o vetor dos pesos de Gauss (*weight*). Devolve à função *Main* o vetor livre preenchido.
- *FindSvdOutliers*: função que implementa o algoritmo de deteção de valores singulares *outlier* na matriz dos coeficientes (LHS), conforme descrito na secção 4.4.4. Os dois métodos ali descritos são implementados na função. Recebe como dados de entrada, a matriz dos coeficientes (LHS) e a identificação do procedimento a utilizar. Devolve à função *Main* o valor *RemovePow* abaixo do qual os valores singulares são eliminados.
- *EdgeRefinement*: função responsável pelo cálculo dos valores dos dois critérios de seleção relativos a cada fronteira essencial e pela construção da matriz **List.Edges** (ver secção 6.2.2) com a ordenação pelos valores do critério de seleção escolhido pelo utilizador. Recebe como dados de entrada, as estruturas **Edges** e **Loops**, a matriz dos coeficientes (LHS), o vetor das abscissas de Gauss-Legendre (*abscissa*), o vetor dos pesos de Gauss (*weight*), a solução *X*, a estrutura **List**, a dimensão do sistema resolutivo (*Dim*), a lista das fronteiras essenciais (*index*), o número da iteração corrente (*iteration*), a energia térmica inicial (*Energy0*), a energia térmica da iteração corrente (*EnergyIteration*) e o critério escolhido pelo utilizador (*SelectionCriteria*). Devolve à função *Main* as estruturas **Edges**, **Loops** e **List**, com a subestrutura **List.Edges** preenchida.
- *Gen_Bbar_Matrix*: função responsável pelo cálculo do termo $\bar{\mathbf{B}}$ (ver secção 5.2). Recebe como dados de entrada, as estruturas **Edges** e **Loops**, a matriz dos coeficientes (LHS), o vetor das abscissas de Gauss-Legendre (*abscissa*), o vetor dos pesos de Gauss (*weight*), a dimensão do sistema resolutivo (*Dim*) e a lista das fronteiras essenciais (*index*). Devolve à função *EdgeRefinement* a matriz dos coeficientes, alterada devido à adição de um novo grau de liberdade (ver secção 5.2).
- *Gen_tgbar_Vector*: função responsável pelo cálculo do termo $\bar{\mathbf{t}}_{\Gamma}$ (ver secção 5.2). Recebe como dados de entrada, as estruturas **Edges** e **BConds**, o vetor das abscissas de Gauss-Legendre (*abscissa*), o vetor dos pesos de Gauss (*weight*),

a dimensão do sistema resolutivo (Dim) e a lista das fronteiras essenciais ($index$). Devolve à função `EdgeRefinement` o termo \bar{t}_T que é acrescentado ao vetor livre devido à adição de um novo grau de liberdade (ver secção 5.2).

- `Gen_tpbars_Vector`: função responsável pelo cálculo do termo \bar{t}_p (ver secção 5.2). Recebe como dados de entrada, as estruturas **Edges** e **BConds**, o vetor das abscissas de Gauss-Legendre ($abscissa$), o vetor dos pesos de Gauss ($weight$), a dimensão do sistema resolutivo (Dim) e a lista das fronteiras essenciais ($index$). Devolve à função `EdgeRefinement` o termo \bar{t}_p que é acrescentado ao vetor livre devido à adição de um novo grau de liberdade (ver secção 5.2).
- `SelectEdgesToRefine`: função onde se define efetivamente quais as fronteiras que vão ser refinadas com base na informação contida na matriz **List.Edges** e na tolerância de seleção definida pelo utilizador. Recebe como dados de entrada, a estrutura **List**, o critério de seleção (`SelectionCriteria`), a tolerância de seleção definida pelo utilizador (ou `SelectionTol`, ver tabela B.2) e o valor do zero numérico (`thresh`, ver tabela B.2). Devolve à função `Main`, a estrutura **List** com a subestrutura **List.EdgesToRefine** preenchida.
- `SelectLoopsToRefine`: função responsável pelo refinamento do domínio dos elementos com base nas matrizes **List.SpurEdgeToRefine** e **List.Betalt**. Recebe como dados de entrada, **Loops**, **Edges**, **List** e `iteration`. Devolve à função `Main` a estrutura **List**, com a subestrutura **List.LoopsToRefine** preenchida.
- `CheckMaxDegrees`: função onde se verifica se as ordens das bases de aproximação do domínio atingiram o máximo definido pelo utilizador.
- `StoreIterationInfo`: função onde se guarda informação proveniente da iteração, com propósitos de uso para a próxima iteração ou em pós-processamento. Recebe como dados de entrada, as estruturas **Loops**, **Edges**, **List** e os escalares `iteration` e `Energy0`. Devolve à função `Main` a lista **List**, com as subestruturas **List.EdgesOrderIt**, **List.LoopsOrderIt**, **List.GDL_It** e **List.EnergyVariationIt** preenchidas.
- `ComputeFields Reg/Tri`: função que serve para o cálculo da temperatura e fluxos de calor finais, nos pontos de Gauss-Legendre de cada elemento. Recebe como dados de entrada, as estruturas **Loops**, **Nodes**, **X**, a iteração corrente (`iteration`) e o vetor das abscissas de Gauss-Legendre ($abscissa$). Devolve à função `Main` a estrutura **Loops** preenchida com os valores calculados para permitir a representação gráfica das soluções.
- `PlotFields Reg/Tri`: realiza as representações gráficas finais das soluções, T , q_x e q_y . Recebe como dados de entrada, **Edges**, **Loops**, **Nodes**, e o vetor das abscissas de Gauss-Legendre ($abscissa$).
- `TABLE`: função responsável pela construção da tabela iterativa. Recebe como dado de entrada, a estrutura **List**.
- `GRAPHS`: função responsável pela construção dos gráficos de convergência. Recebe como dados de entrada, o número de graus de liberdade totais (`GDLTotal`), e a estrutura **List**.

- `Energy_ct Reg/Trig`: função responsável pelo cálculo da parcela constante da energia térmica (3.57). O protocolo de cálculo varia caso se trate de uma malha com elementos retangulares ou triangulares. Quando a malha é composta por elementos retangulares esta constante é calculada através da expressão (3.57), ao passo que para estruturas triangulares o seu valor é calculado através do integral no domínio presente na definição (3.53).
- `Energy_p`: função responsável pelo cálculo da parcela (3.56), da energia térmica.

A.3 Funções de biblioteca

- `gauleg`: rotina de biblioteca, gera as abscissas e os pesos dos pontos de integração de Gauss-Legendre no intervalo de integração $[-1, 1]$. Devolve à função `Main` o vetor das abscissas de Gauss-Legendre (`abscissa`), e o vetor dos respetivos pesos (`weight`).
- `createLine`: função de biblioteca responsável pela criação de uma linha a partir das coordenadas de dois pontos. A linha criada é representada na forma do vetor $[x0, y0, dx, dy]$, conforme descrito na secção 4.3.3.
- `polygonArea`: função de biblioteca responsável pelo cálculo da área de um polígono, conhecendo as coordenadas dos seus vértices. Os vértices devem ser orientados na direção oposta ao sentido dos ponteiros do relógio de forma a originar uma área positiva.
- `polygonCentroid`: função de biblioteca responsável pelo cálculo do centroíde de um polígono através das coordenadas dos seus vértices.
- `triquad`: função de biblioteca que recebe as coordenadas dos nós de um elemento triangular e devolve os pontos de Gauss-Legendre para integração no domínio do mesmo.

Anexo B

Exemplo de utilização do software

Neste anexo é ilustrada a utilização do programa computacional desenvolvido no presente trabalho. Para isso, resolve-se um problema através de uma análise num único passo e uma adaptativa, e descrevem-se todas as etapas envolvidas na introdução dos dados e obtenção dos resultados, pela perspectiva do utilizador (ver fluxograma 4.2).

B.1 Descrição do problema

Considere-se a estrutura apresentada na figura B.1, de dimensões de $6[m]$ por $3[m]$ em que a condutibilidade térmica é $k = 100[W/m^2K]$ e existe geração interna de calor de $Q = 10[W/m^3]$. Nas fronteiras do problema foram impostas tanto condições de fronteira de Dirichlet como de Neumann. Na fronteira $Y = 3$, pode-se verificar uma variação linear do fluxo de calor, de $q_{\Gamma}(0, 3) = 0[W/m^2K]$ para $q_{\Gamma}(6, 3) = -60[W/m^2K]$. Na fronteira $Y = 0$, o fluxo de calor imposto é $q_{\Gamma} = 0[W/m^2K]$, e nas fronteiras $X = 0$ e $X = 6$ são impostas temperaturas com o valor de $t_{\Gamma} = 100[K]$. É possível verificar a existência de uma abertura circular, com o centro em $(X, Y) = (3, 1.5)$ e com um diâmetro de $\varnothing = 1[m]$, nas fronteiras da qual foi aplicada uma temperatura de $t_{\Gamma} = 100[K]$.

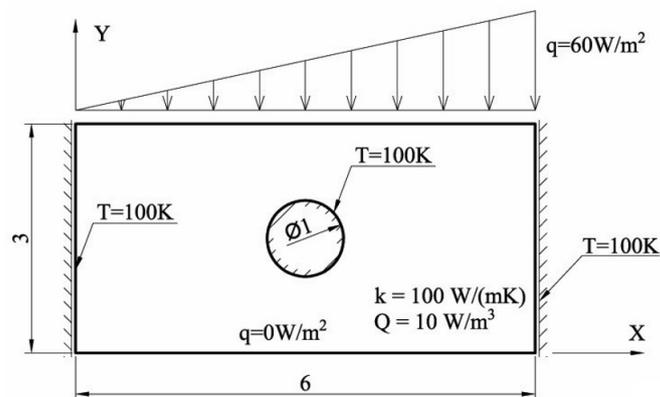


Figura B.1: Descrição do problema

B.2 Interfaces gráficas

B.2.1 Interface gráfica 1: Definições da estrutura e algoritmos

A primeira interface gráfica (GUI 1) é usada para definir a geometria da estrutura e da malha, os refinamentos ' p ' e ' h ', as características do material, as opções do algoritmo e da gravação do modelo, ou para carregar modelos gravados anteriormente.

A configuração da GUI 1 é apresentada na figura B.2. Podem-se ver contornadas a vermelho as áreas de dados mais importantes. Estas áreas são explicadas de seguida.

The screenshot shows the GUI 1 configuration window. The title is "Structure definition (except boundary conditions)". The main text describes the program's purpose and assumptions. The configuration is divided into several sections, each highlighted with a red box:

- Geometry and meshing:** Dimensions in x (6), Dimensions in y (3), Number of elements in x (4), Number of elements in y (2).
- Initial boundary and domain orders:** Edges order (0), Loops order (3).
- Material properties:** Thermal conductivity (100), Internal heating (10).
- Algorithmic definitions:** Number of Gauss points (20), Type of analysis (Adaptive p-refinement), Mesh type (Regular mesh, rectangular elements).
- Save/Load/Clear:** Buttons for Save, Load, and Clear.

A warning message at the bottom states: "THE MODEL WILL NOT BE SAVED! Please press Save if you wish to save the model."

Figura B.2: Configuração da GUI 1

Funções gerais da interface

- *Material properties:* Área onde se definem as características do material a analisar, mais concretamente, a condutibilidade térmica, k , e a geração de calor interno, Q .
- *Geometry and meshing:* Área onde se define a geometria da malha regular, nomeadamente, a dimensão dos elementos em x e y , e o número de elementos em x e y . Esta área só é editável se for escolhida a opção *Regular mesh* no menu *Mesh type*. Caso seja escolhida uma malha não regular, as propriedades da mesma passam a ser definidas noutra interface gráfica, `pdetool`, que é lançada automaticamente após o utilizador premir `Next` (ver figura B.6).
- *Initial boundary and domain orders:* Área onde são definidas as ordens (iniciais, no caso de análise adaptativa) do refinamento ' p ' nas fronteiras essenciais e nos domínios dos elementos. Para apoiar o utilizador menos experiente na escolha dos refinamentos ' p ', apresentam-se na tabela B.1 algumas combinações de ordens de refinamento nas fronteiras e nos domínios que respeitam as condições de indeterminação estática e

cinemática apresentadas na secção 3.8 e que foram amplamente testados no decorrer deste trabalho.

- *Algorithmic definitions*: Área onde se define o número de pontos de Gauss-Legendre para a realização das integrações, se escolhe o tipo de malha que se vai utilizar (regular ou não regular) e o tipo de análise que se pretende (adaptativa ou única).

n_Γ	n_D (triangulares)	n_D (retangulares)
1	4	4
2	5	6
3	7	8
4	8	10
5	10	12
6	11	14
7	13	16

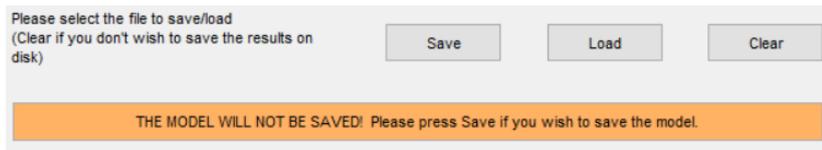
Tabela B.1: Valores recomendados para as ordens das bases de aproximação nos domínios e fronteiras essenciais

Save e load

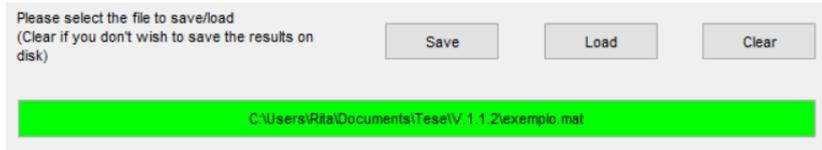
O programa tem implementadas duas maneiras para guardar os dados utilizados numa corrida, a implícita e a explícita.

- *Implícita*: A maneira implícita corresponde a um procedimento automático que acontece sem a intervenção do utilizador. Sempre que o botão `Next` é pressionado numa interface, a informação introduzida pelo utilizador é guardada em ficheiros do tipo `*.mat`. Quando esta interface gráfica é lançada novamente, a informação que foi guardada no ficheiro `*.mat` é carregada automaticamente. No entanto, só a última corrida realizada fica assim guardada, ou seja, se um novo modelo for definido, a informação do modelo anterior é sobrescrita.
- *Explícita*: De modo a guardar permanentemente a informação de um modelo, pressiona-se o botão `Save`. Quando o guardar dos dados é bem sucedido, o caminho do ficheiro guardado aparece na área *Save/Load* da interface, substituindo o aviso "The model will not be saved" (figura B.3).

ANEXO B. EXEMPLO DE UTILIZAÇÃO DO SOFTWARE



(a)



(b)

Figura B.3: Interface gráfica GUI 1 com os dados não guardados (a), e com os dados guardados (b)

Desta maneira, é guardado um único ficheiro com toda a informação do modelo, que pode ser posteriormente carregado pressionando o botão Load.

Gerador de malhas regulares

O gerador de malha regular divide a estrutura num conjunto de elementos retangulares com dimensões definidas pelo utilizador, conforme ilustrado na figura B.4.

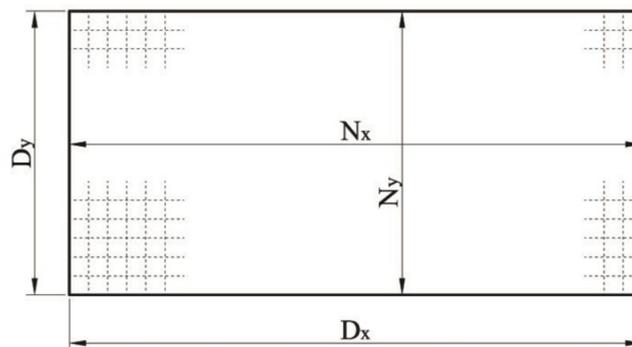


Figura B.4: Definição de uma malha regular numa estrutura retangular

A definição da malha regular é feita na interface gráfica apresentada na figura B.2 e requer apenas especificar as dimensões da estrutura em x (D_x) e y (D_y), e os números de elementos finitos nas direções x (N_x) e y (N_y). Por outro lado, a utilização do gerador regular é limitada a problemas de geometria retangular e sem descontinuidades internas (e.g. orifícios).

Gerador de malhas não regulares

No caso do problema definido na secção B.1, para a definição da sua geometria é utilizado o gerador de malha não regular, que divide a estrutura em elementos finitos triangulares. Este gerador utiliza a interface `pdetool` (figura B.6) onde se cria a geometria da estrutura através da sobreposição de formas retangulares, elípticas e poligonais.

Ao ser selecionado o gerador de malha não regular, a opção de alterar as dimensões da malha e o seu número de elementos finitos deixa de estar ativa (ver área a vermelho, na figura B.5), ao contrário do que acontecia na figura B.2.

The screenshot shows the 'pdetool' interface for defining a non-regular mesh. The 'Geometry and meshing' section is highlighted with a red box and contains the following input fields:

- Dimensions in x: 6
- Dimensions in y: 3
- Number of elements in x: 4
- Number of elements in y: 2

The 'Mesh type' dropdown menu is also highlighted with a red box and shows 'Non-regular mesh, triangular elements' selected. Other sections include:

- Material properties:** Thermal conductivity (100), Internal heating (10).
- Initial boundary and domain orders:** Edges order (0), Loops order (3).
- Algorithmic definitions:** Number of Gauss points (20), Type of analysis (Adaptive p-refinement), Mesh type (Non-regular mesh, triangular elements).

At the bottom, there are buttons for 'Save', 'Load', 'Clear', 'Reset', and 'Next'. A warning message at the bottom reads: 'THE MODEL WILL NOT BE SAVED! Please press Save if you wish to save the model.'

Figura B.5: Interface gráfica 1, para gerador de malha não regular

A interface gráfica `pdetool` (figura B.6), onde se define a malha não regular, é automaticamente chamada, quando se pressiona o botão `Next` na GUI 1.

Na figura B.6, estão apresentadas as áreas mais importantes da interface `pdetool`, sendo que os passos necessários para a completa definição da estrutura e da malha são apresentados de seguida.

O primeiro passo envolve seleccionar as formas que definem o problema representado na figura B.1, neste caso o retângulo R1 para a geometria exterior e a elipse E1 para o orifício circular. O aspeto da interface `pdetool` com a primeira aproximação à geometria da estrutura é apresentado na figura B.7.

ANEXO B. EXEMPLO DE UTILIZAÇÃO DO SOFTWARE

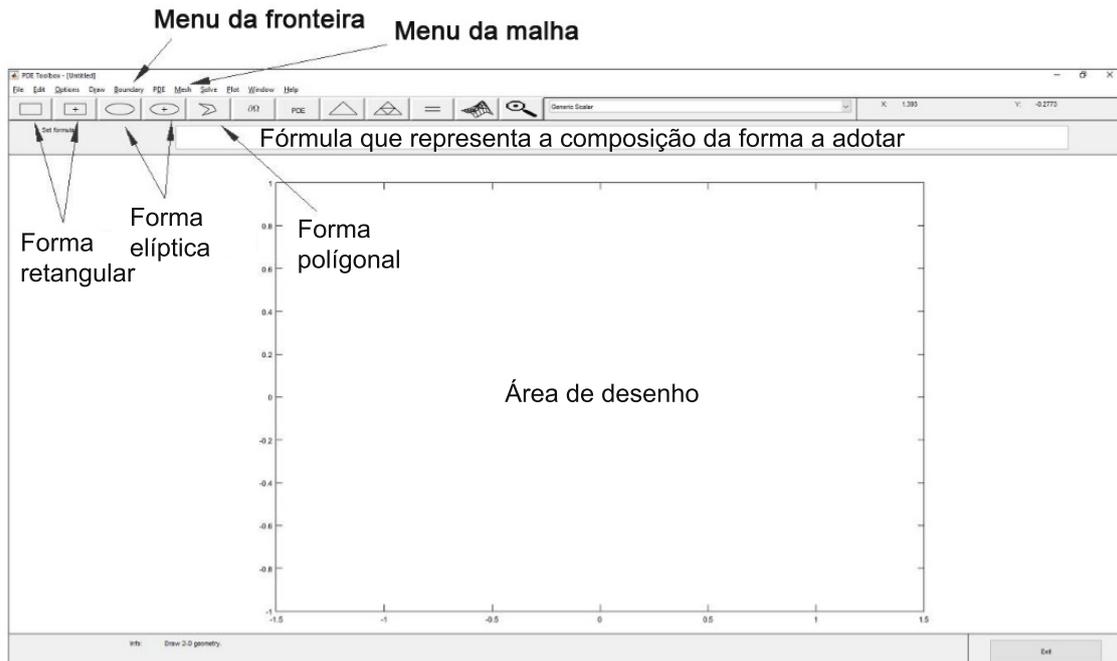


Figura B.6: Descrição do ecrã inicial da interface pdetool

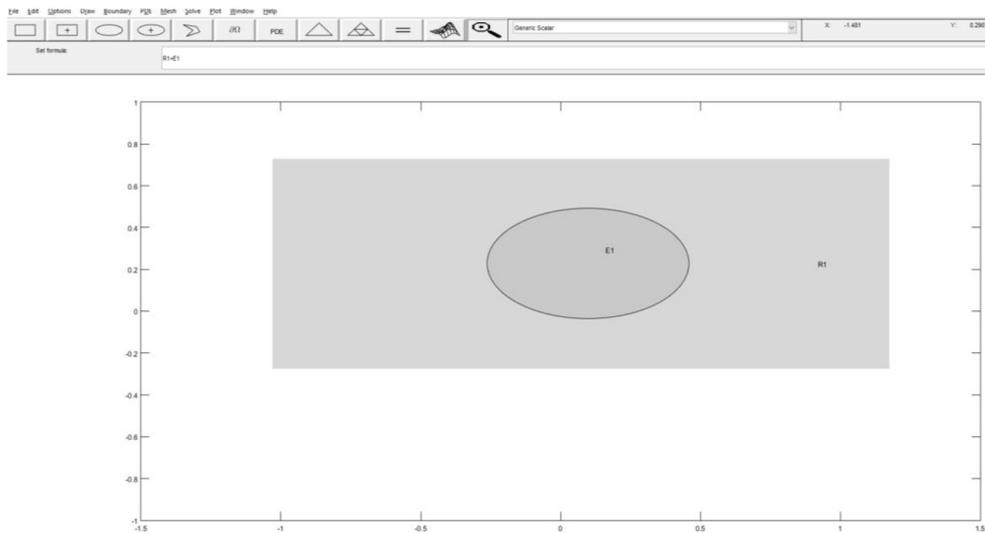


Figura B.7: Definição inicial da geometria

O controlo da combinação das formas simples que compõem a estrutura é feito definindo a sua relação no menu "Set formula". Assim, de modo a criar a abertura que se encontra no problema descrito na secção B.1, subtraiu-se a forma elíptica (E1) à forma retangular (R1). Finalmente, as dimensões das formas geométricas que compõem a estrutura são definidas nos menus "Object dialog" conforme ilustrado na figura B.8.

Quando a geometria da estrutura está concluída, o próximo passo é a geração da malha de elementos finitos. Para isso é necessário executar os seguintes passos:

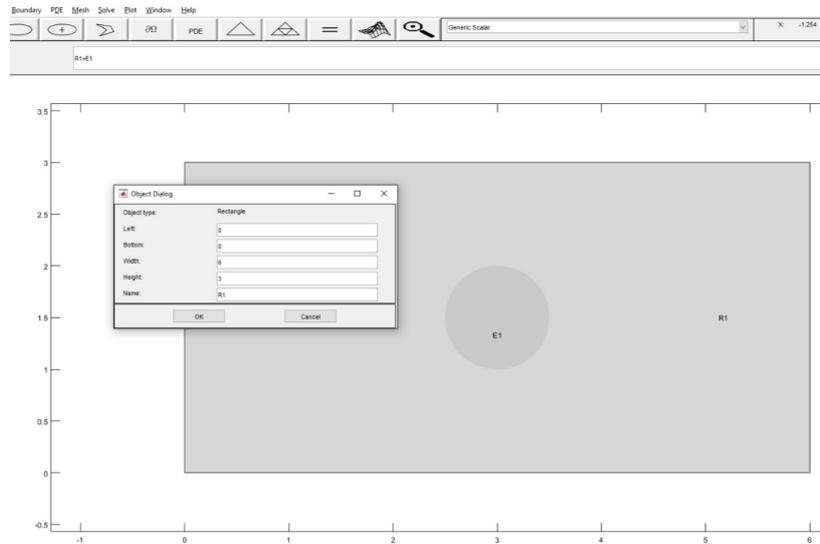


Figura B.8: Definição final da geometria

- Definir os parâmetros da malha: No menu da malha (ver figura B.6), os parâmetros que controlam a sua definição podem ser alterados conforme os objetivos do utilizador. Um parâmetro importante na definição da malha é o maior comprimento da fronteira do elemento triangular. Para a definição da estrutura apresentada na figura B.1 foram utilizados os valores de 2 e ∞ (maior comprimento possível), de forma a mostrar a diferença nas malhas que resultam. Outro parâmetro importante é o que define a taxa de crescimento do tamanho do elemento fora das zonas de maior refinamento, em que se pode optar por valores entre 1 (toda a geometria é refinada de acordo com a região que exige um nível de refinamento maior) e 2. Tendo em conta que uma das vantagens principais dos elementos finitos híbridos-Trefftz é o facto de se poderem usar elementos de grande dimensão sem comprometer a qualidade da solução, no presente trabalho, usou-se o valor 2 para este parâmetro.
- Gerar a malha: Finalmente, utilizando o comando *Initiate Mesh*, obtêm-se as malhas representadas nas figuras B.9 (a) e (b). As duas malhas são muito pouco refinadas pelos critérios dos elementos finitos convencionais, com especial destaque para a segunda que, para além de apresentar elementos finitos de grandes dimensões, apresenta ainda grandes distorções dos mesmos.

É possível observar nas figuras B.9 (a) e (b), que a abertura circular existente é o fator que condiciona a discretização da malha. Uma vez que são utilizados elementos triangulares para discretizar a estrutura, a abertura circular é modelada como um polígono. Na figura B.9 (a) a modelação da abertura circular requer o uso de elementos finitos relativamente pequenos em seu redor, já nas zonas mais afastadas podem ser usados elementos de maior dimensão, uma vez que a formulação híbrida-Trefftz assim o permite. Na figura B.9 (b), o valor adotado para o parâmetro que define o maior comprimento das fronteiras dos elementos originou elementos finitos extremamente grandes e uma discretização da malha de fraca qualidade.

Finalmente, ao concluir a geração da malha, é possível avançar para o próximo passo,

ANEXO B. EXEMPLO DE UTILIZAÇÃO DO SOFTWARE

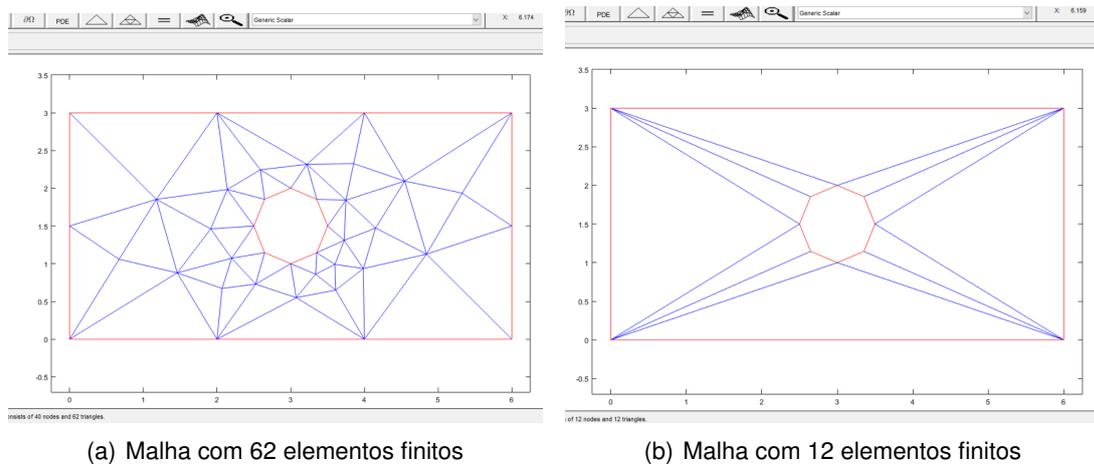


Figura B.9: Malhas utilizadas para o problema apresentado na figura B.1

a definição do tipo de fronteiras.

B.2.2 Interface gráfica 2: Definição do tipo de fronteiras

A segunda interface gráfica (GUI 2) é usada para definir o tipo (Dirichlet ou Neumann) de fronteiras exteriores da malha. Na figura B.10 podem-se ver contornadas a vermelho, as áreas de dados mais importantes da interface. Estas áreas são explicadas de seguida.

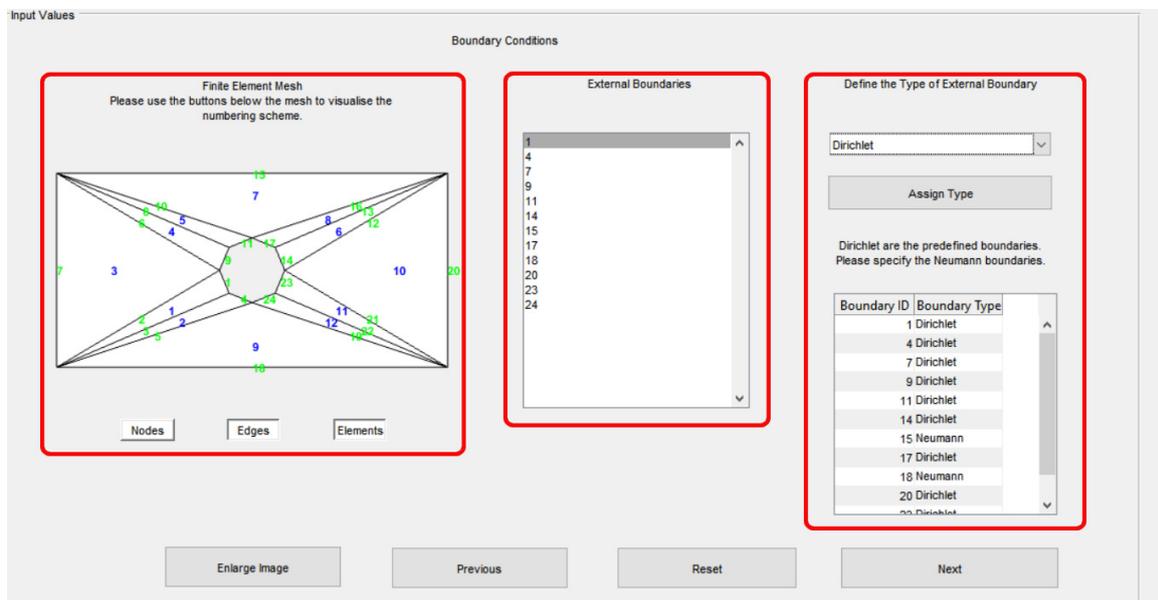


Figura B.10: Configuração da GUI 2

Na área a vermelho mais a esquerda da figura B.10 está representada a malha adotada e a numeração para os elementos e fronteiras. Por vezes, é difícil conseguir visualizar de forma clara a numeração da estrutura de dados, principalmente para malhas

ANEXO B. EXEMPLO DE UTILIZAÇÃO DO SOFTWARE

No centro e no lado direito estão as zonas correspondentes aos dois tipos de fronteira, Dirichlet e Neumann, respetivamente. Em cada uma destas zonas, existe um campo editável para o utilizador introduzir os valores das condições de fronteira que deseja impor (temperaturas e fluxos de calor, respetivamente). Para finalizar, carrega-se nos botões *Assign Temperature* e *Assign Heat Flux* e as condições introduzidas ficam associadas às fronteiras escolhidas.

B.2.4 Interface gráfica 4: Definições do algoritmo adaptativo

A quarta interface (GUI 4) só surge caso seja escolhida uma análise adaptativa na GUI 1 (figura B.2).

Na GUI 4 são escolhidos os critérios de refinamento e de paragem do algoritmo adaptativo e são definidos os parâmetros essenciais a um funcionamento fiável do mesmo. Na figura B.13 está apresentada a configuração da GUI 4.

Section	Parameter	Value
Selection of the boundary to refine	Selection Criterion	Maximize the Error Density on Boundary
	Tolerance for Choosing Multiple Boundaries	9.900000e-01
Numerical Zero for Calling a Spurious Mode	Numerical Zero for Calling a Spurious Mode	1.000000e-12
	Stopping Criterion	Avg Energy Variation
Minimum Number of Iterations	Minimum Number of Iterations	5
	Number of Iterations to Compute the Average Errors	3
Tolerance for Convergence	Tolerance for Convergence	1.000000e-04
	Maximum number of SVD outlier iterations	10
Maximum order for domain and boundary refinement	Maximum order for domain and boundary refinement	20

Figura B.13: Configuração da GUI 4

Os parâmetros introduzidos nesta interface são: a tolerância de seleção, a tolerância de convergência, o valor do zero numérico ($thresh$), o número mínimo de iterações e o número de iterações para calcular a média do valor do critério de convergência ($AvgNVa1$).

A utilidade destes parâmetros no âmbito do algoritmo 'p'-adaptativo foi descrita na secção 6.3.1.

Na tabela B.2 são descritos resumidamente esses parâmetros e listados os valores recomendados para os mesmos.

Nome	Descrição	Valores Recomendados
Tolerância de seleção	Tolerância para a escolha de múltiplas fronteiras	0.99
thresh	Zero numérico	10^{-12}
Número máximo de iterações para detecção de outliers	Número máximo de iterações consecutivas com valores singulares outliers	10
Número mínimo de iterações	Número mínimo de iterações para prevenir convergências espúrias	5
AvgNVal	Número de iterações para calcular a média da variação do critério de paragem escolhido	3
Tolerância de convergência	Valor limite de convergência (quando se utiliza o critério da convergência da energia térmica)	10^{-4}
Tolerância de convergência	Valor limite de convergência (quando se utiliza o critério da convergência da densidade máxima do resíduo na fronteira)	10^{-2}
Ordem máxima	Valor máximo permitido para os graus de refinamento	20

Tabela B.2: Parâmetros que calibram o procedimento automático de refinamento e valores recomendados

B.2.5 Interface gráfica de verificação

Após a conclusão da fase de introdução de dados, é apresentada a interface de verificação. Esta interface possibilita que o utilizador verifique as definições e as condições de fronteira adotadas na estrutura antes de correr o resto do programa. A interface é lançada com a visualização da malha, conforme ilustrado na figura B.14.

Para se observar as condições de fronteira aplicadas seleciona-se a opção *Boundary conditions* no menu *pop-up* e pressiona-se o botão **Update**. Assim é possível visualizar os valores das condições de fronteira impostos no início e no final de cada fronteira exterior. As fronteiras Dirichlet são apresentadas a preto e as fronteiras Neumann são apresentadas a vermelho (figura B.15).

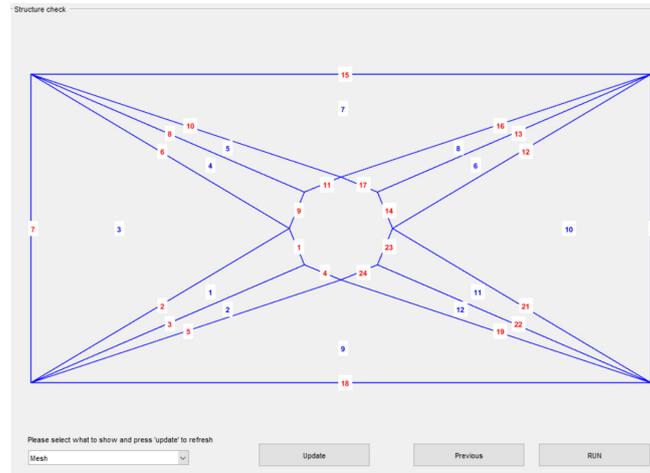


Figura B.14: Visualização da malha na interface de verificação

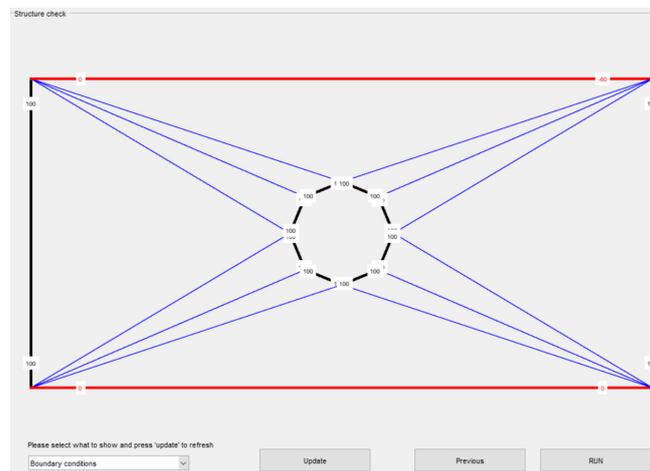


Figura B.15: Visualização das condições de fronteira da estrutura na interface de verificação

Esta interface gráfica representa o último passo antes de se proceder à análise da estrutura.

B.3 Pós-processamento

O pós-processamento consta da representação gráfica dos resultados da análise efetuada e, no caso da análise adaptativa, do resumo do processo de convergência, através de gráficos e tabelas. Os campos da solução apresentados são os da temperatura e dos fluxos de calor, nas direções x e y .

B.3.1 Análise não adaptativa

O pós-processamento de um problema resolvido através de uma análise não adaptativa é ilustrado aqui para as malhas mais e menos refinadas utilizadas para discretizar

o problema apresentado na figura B.1.

Os graus de refinamento utilizados para as funções de aproximação no domínio são $n_D = 9$ e $n_D = 20$ para as malhas mais refinada e menos refinada, respetivamente. Nas fronteiras essenciais, os graus das funções de aproximação são $n_\Gamma = 5$ e $n_\Gamma = 12$ para as malhas mais e menos refinadas, respetivamente.

Nas figuras B.16 e B.17 estão apresentados os campos da temperatura e fluxos de calor para os dois casos.

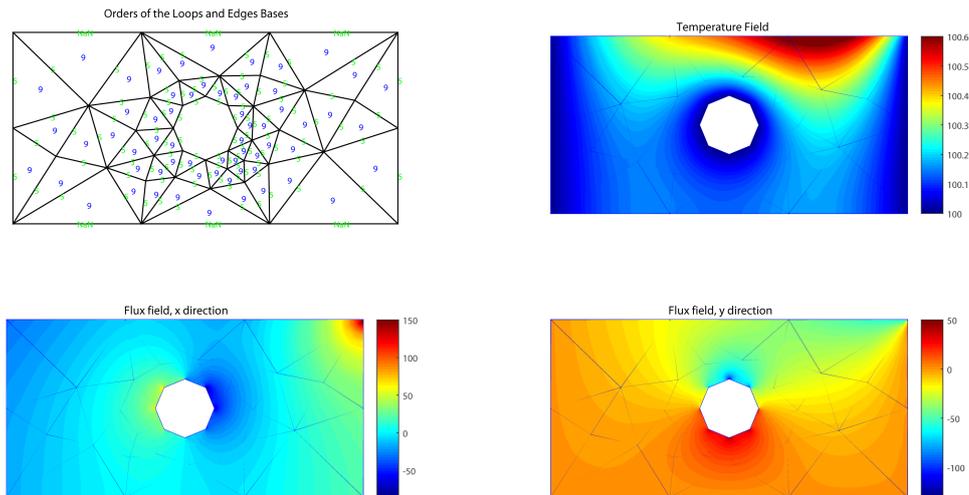


Figura B.16: Campos de temperatura e fluxos de calor para a análise não adaptativa utilizando a malha mais refinada

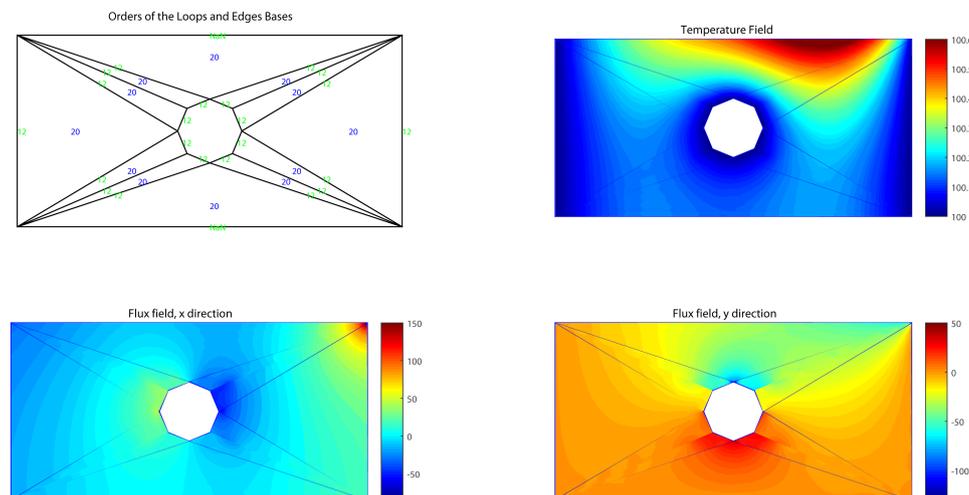


Figura B.17: Campos de temperatura e fluxos de calor para a análise não adaptativa utilizando a malha menos refinada

Observa-se que o campo das temperaturas é bem aproximado e quase idêntico nas duas figuras, apesar da fraca qualidade da malha da figura B.17 que tem um elevado grau de distorção e elementos finitos de grandes dimensões. No entanto, é evidente no segundo

caso a existência de descontinuidades no campo dos fluxos de calor entre elementos adjacentes, na vizinhança da abertura existente na estrutura. O tempo de análise decorrido até se obterem os resultados no caso da malha mais refinada foi de 12.17 segundos (com 1754 graus de liberdade) e de 0,61 segundos para a malha menos refinada (com 778 graus de liberdade).

B.3.2 Análise adaptativa

A análise adaptativa do problema da figura B.1 foi realizada utilizando apenas a malha menos refinada, e graus de refinamento iniciais, de $n_D = 3$ e $n_\Gamma = 0$. Para esta análise, o critério de seleção das fronteiras a refinar foi a densidade do resíduo máximo nas fronteiras (ver secção 5.4.1). O critério da convergência da energia térmica foi o critério de paragem escolhido (ver secção 5.4.2). Todos os parâmetros que controlam o funcionamento do algoritmo adaptativo têm os valores que se encontram na tabela B.2 a não ser o valor da tolerância de convergência, que é 10^{-5} .

Os graus de refinamento finais e as soluções de temperatura e fluxos de calor derivados do processo iterativo estão presentes na figura B.18.

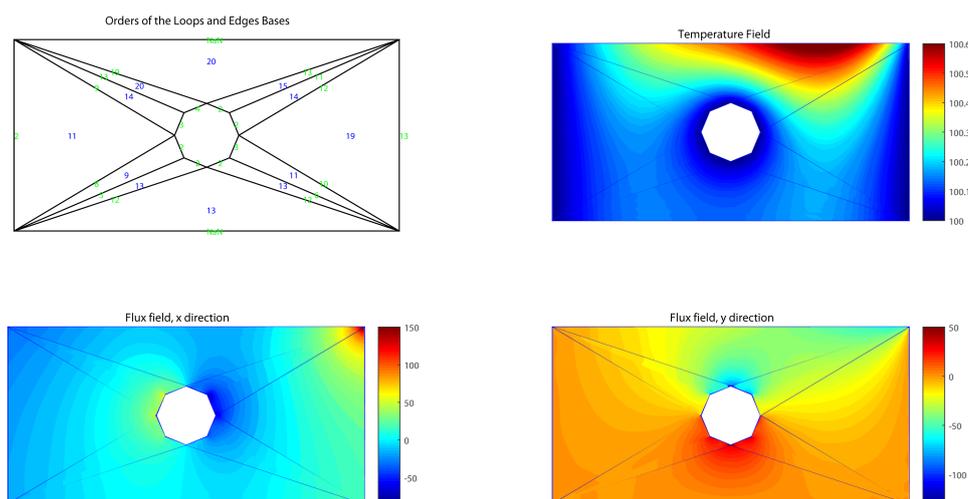


Figura B.18: Graus de refinamento finais e campos de temperatura e fluxos de calor para a análise adaptativa do problema apresentado na figura B.1, utilizando a malha menos refinada

É possível observar, no canto superior esquerdo da figura B.18, o efeito do refinamento p -adaptativo, onde as ordens finais de refinamento no domínio e nas fronteiras deixam de ser uniformes e passam a ter um comportamento muito distinto. De facto, os graus de refinamento tendem a ser maiores na parte superior da estrutura, onde se encontra uma maior variação dos campos, tomando valores entre 9 e 20 nos domínios dos elementos, e entre 2 e 13 nas suas fronteiras essenciais. Comparando com as soluções apresentadas na figura B.17, os fluxos apresentam uma maior continuidade, principalmente nas zonas adjacentes à abertura circular.

No entanto, esta análise levou 153 iterações e um tempo computacional de 185.36 sec, 300 vezes mais tempo que a análise apresentada na secção B.3.1.

Para além dos graus de refinamento finais e dos campos de soluções apresentados na figura B.18, o programa também apresenta os gráficos de convergência (ver figura B.19), que são resumidamente explicados de seguida.

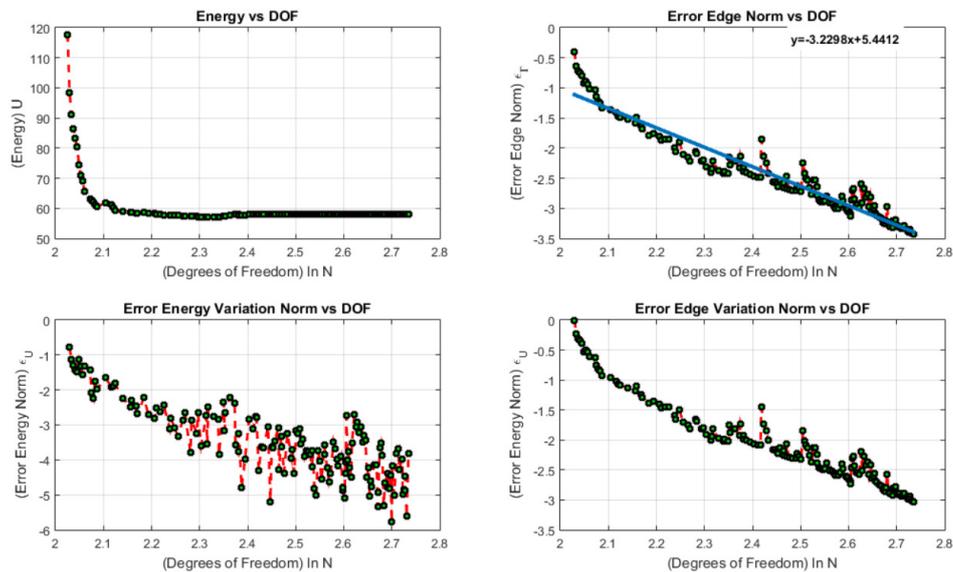


Figura B.19: Gráficos de convergência resultantes da análise adaptativa do problema apresentado na figura B.1, utilizando a malha menos refinada

- *Energy vs DOF*: Representa graficamente a variação da energia térmica com o número total de graus de liberdade do modelo. Cada ponto representa uma iteração e o eixo das abcissas está em escala logarítmica. A estabilização deste gráfico é um indicador importante de convergência;
- *Normalized energy variation norm vs DOF*: Representa graficamente a diferença entre as energias térmicas U_i e U_{i-1} (ver secção 5.4.2), em duas iterações sucessivas (ou dois pontos no gráfico *Energy vs DOF*). Ambos os eixos estão em escala logarítmica. A quantidade apresentada é usada pelo critério de convergência da energia térmica (conforme explicado na secção 5.4.2);
- *Edge error density vs DOF*: Representa graficamente a variação da densidade máxima do resíduo na fronteira com o número total de graus de liberdade do modelo. Ambos os eixos estão em escala logarítmica. A densidade máxima do resíduo na fronteira é usada como critério de seleção (ver secção 5.4.1) e reflete o máximo desequilíbrio de temperatura entre dois elementos adjacentes. A linha a azul neste gráfico representa a regressão linear do decréscimo da densidade do resíduo e $y(x)$ é a sua expressão matemática, em que o coeficiente da variável x serve de medida de convergência do processo de refinamento;
- *Normalized edge error density vs DOF*: Este gráfico apresenta a mesma informação que o gráfico anterior, mas a densidade de resíduo máxima na fronteira é normalizada em relação ao valor na primeira iteração. A informação representada neste gráfico é usada como critério de convergência (ver secção 5.4.2).