



**Inês Silva Matos Gregório**

Licenciatura em Ciências da Engenharia e Gestão Industrial

## **Avaliação do Desempenho da Carta CUSCORE: Estudo Comparativo com a Estatística CUSUM**

Dissertação para obtenção do Grau de Mestre em  
Engenharia e Gestão Industrial

Orientadora: Doutora Ana Sofia Leonardo Vilela de  
Matos, Professora Auxiliar da Faculdade de Ciências e  
Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa

Júri:

Presidente: Prof<sup>a</sup>. Doutora Virgínia Arimateia de Campos Machado

Arguente: Prof<sup>a</sup>. Doutora Helena Maria Pereira Pinto Dourado e Alvelos

Vogal: Prof<sup>a</sup>. Doutora Ana Sofia Leonardo Vilela de Matos



FACULDADE DE  
CIÊNCIAS E TECNOLOGIA  
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA

**Março de 2015**



**Inês Silva Matos Gregório**

Licenciatura em Ciências da Engenharia e Gestão Industrial

**Avaliação do Desempenho da Carta  
CUSCORE: Estudo Comparativo com a  
Estatística CUSUM**

Dissertação para obtenção do Grau de Mestre em  
Engenharia e Gestão Industrial

Orientadora: Doutora Ana Sofia Leonardo Vilela de Matos  
Professora Auxiliar da Faculdade de Ciências e Tecnologia  
da Universidade Nova de Lisboa

**Março de 2015**



**Avaliação do Desempenho da Carta CUSCORE: Estudo Comparativo com a Estatística CUSUM**

Copyright © Inês Silva Matos Gregório, FCT/UNL e UNL

A Faculdade de Ciências e Tecnologia e a Universidade Nova de Lisboa têm o direito, perpétuo e sem limites geográficos, de arquivar e publicar esta dissertação através de exemplares impressos reproduzidos em papel ou de forma digital, ou por qualquer outro meio conhecido ou que venha a ser inventado, e de a divulgar através de repositórios científicos e de admitir a sua cópia e distribuição com objectivos educacionais ou de investigação, não comerciais, desde que seja dado crédito ao autor e editor.



*Aos meus pais, pelo apoio incondicional*

*Ao meu irmão e cunhada, pelo carinho interminável*

*Ao David, por tudo o que é e me faz ser*



## **Agradecimentos**

A presente dissertação, apesar de ser um trabalho individual, foi possível graças ao apoio e colaboração de diversas pessoas, às quais expresso aqui os meus sinceros agradecimentos.

À Professora Ana Sofia Matos, a minha orientadora, pela sua disponibilidade, apoio, motivação e interesse sempre manifestado ao longo da realização desta dissertação. Os meus sinceros agradecimentos pela oportunidade de realização deste trabalho e, acima de tudo, pela sua amizade.

Aos meus pais, por todo o carinho, dedicação, paciência e apoio incondicional ao longo do meu percurso académico. Um enorme obrigado por tudo o que me têm proporcionado.

Ao meu irmão, por todo o apoio, carinho, amizade e cumplicidade.

Ao David, um especial agradecimento, acima de tudo pela sua paciência, carinho e motivação transmitida nos momentos mais difíceis.

Por fim, agradeço a toda a minha família pela compreensão devido à minha ausência em alguns momentos e aos meus amigos, nomeadamente ao David Rodrigues, pelo apoio essencial à concretização deste trabalho.



## Resumo

A evolução da qualidade tem sido fundamental na monitorização de processos produtivos, quer de produtos ou de serviços, e é um conceito que está cada vez mais presente nas organizações. Actualmente existem diversas metodologias que auxiliam e contribuem para o alcance da qualidade, sendo o controlo estatístico do processo uma das que mais se destaca em contexto industrial, representada pela aplicação das cartas de controlo.

As cartas de controlo são ferramentas que têm cativado o interesse das organizações que se dedicam a processos industriais modernos. No entanto, existem alguns factores, nomeadamente, a auto-correlação de dados (ocorre quando, num dado instante, uma observação depende de outras ocorridas em instantes antecedentes), que dificultam a interpretação sobre a estabilidade do processo ao nível estatístico.

Neste sentido, a presente dissertação tem como objectivo apresentar um estudo comparativo entre o desempenho da carta *CUSCORE Trigger CUSUM* de resíduos, *CUSCORE* e a carta *CUSUM* de resíduos quando um processo caracterizado por um modelo auto-regressivo de primeira ordem fica sujeito a perturbações do tipo salto. Esta comparação será feita com base em modelos de simulação construídos no *software* MATLAB e, posteriormente, serão retiradas conclusões através dos resultados fornecidos pelas medidas de desempenho como o *ARL* (*Average Run Length*) e respectivo *SDRL* (*Standard Deviation of the Run Length*) face a alterações na média do processo. Será realizado também um estudo com o propósito de determinar o intervalo do parâmetro auto-regressivo para o qual os valores de *ARLs* obtidos, quando o processo se encontra sob controlo estatístico, não são significativamente diferentes entre si.

Serão indicadas as principais vantagens e as desvantagens das cartas alvo deste estudo, segundo a óptica do utilizador, que aplica cartas de controlo univariadas para monitorizar processos dinâmicos contínuos.

**Palavras chave:** Carta *CUSCORE*, Carta *CUSUM* de resíduos, *Average Run Length*, Parâmetro auto-regressivo, Modelo auto-regressivo de primeira ordem



## Abstract

The evolution of quality has been crucial in monitoring productive processes, whether they're centred in products or services, and it's a concept that is growing in presence in today's organizations. Currently there are several methods that aid and contribute to achieve quality, with statistical process control, represented by the application of control charts, being among the more relevant in the industrial context.

Control charts are tools which have increasingly captivated the interest of organizations who are dedicated to modern industrial processes. There are, however, some factors, namely the autocorrelation of data (occurs when, in a given moment, an observation depends on others that occurred in prior instants), that difficult the interpretation of process stability at a statistical level.

Considering the previous facts, the main purpose of this dissertation is to present a comparative study between the performance of the *CUSCORE* Trigger residual-based *CUSUM*, *CUSCORE* and residual-based *CUSUM* charts when a process, characterized by a first order autoregressive model, is subject to spike signal interference. This comparison will be based on simulation models inputted in MATLAB software and conclusions will be drawn through the results provided by *ARL* (Average Run Length) and *SDRL* (Standard Deviation of the Run Length) regarding mean shift occurrences. A study will also be conducted to determine the autoregressive parameters' interval for which the obtained *ARL* values, when the process is in statistical control, aren't significantly different from each other.

The main advantages and disadvantages of the charts targeted by this study will be shown, from the end users' perspective, which applies the control charts to the monitoring of continuous dynamic processes.

**Key words:** *CUSCORE* chart, Residual-based *CUSUM* chart, Average Run Length, Autoregressive parameter, First order autoregressive model



# Índice de Matérias

1.	Introdução.....	1
1.1	Enquadramento do Tema .....	1
1.2	Objectivos.....	2
1.3	Estrutura da Dissertação.....	2
2.	Controlo Estatístico do Processo.....	5
2.1	Breve Referência Histórica.....	6
2.2	Relação entre Processos e Variabilidade .....	7
2.3	Princípios das Cartas de Controlo.....	10
2.3.1	Fases de Implementação das Cartas de Controlo .....	12
2.3.2	Erros Associados às Cartas de Controlo .....	13
2.3.3	Medidas de Desempenho e Métricas das Cartas de Controlo.....	14
2.4	Recolha de Dados .....	15
2.4.1	Dimensão das Amostras e Frequência de Amostragem .....	16
2.4.2	Subgrupos Racionais.....	16
2.5	Detecção de Causas Especiais de Variação .....	18
2.6	Condições de Aplicabilidade do <i>SPC</i> .....	20
2.6.1	Aleatoriedade dos Dados .....	21
2.6.2	Normalidade dos Dados.....	21
2.6.3	Independência dos Dados.....	22
2.7	Cartas de Controlo.....	23
2.7.1	Cartas de Controlo de Variáveis e de Atributos .....	23
2.7.2	Cartas de Controlo Especiais.....	24
2.7.3	Outros tipos de Cartas de Controlo .....	28
3.	Carta de Controlo <i>CUSCORE</i> .....	29
3.1	Teoria Subjacente à Estatística <i>CUSCORE</i> .....	29
3.2	Detecção de Sinais em Ruído Branco .....	32
3.3	Importância para Processos Auto-Correlacionados .....	34
3.4	Algumas Desvantagens .....	35
4.	Metodologia .....	37
4.1	Metodologia Proposta .....	38

4.2	Construção do Programa de Simulação.....	41
4.3	Comparação do Desempenho das Cartas de Controlo.....	47
4.4	Interpretação das Cartas de Controlo.....	48
4.5	Aplicação Prática.....	48
5.	Desenvolvimento Prático.....	49
5.1	Apresentação do Processo e das Condições Iniciais das Cartas.....	49
5.2	Análise de Desempenho das Cartas: Ocorrência de Sinal.....	53
5.3	Análise de Sensibilidade: Alteração no Parâmetro Auto-Regressivo.....	55
5.3.1	Análise de Desempenho das Cartas: Detecção de Sinais em Processos $AR(1)$ de Parâmetro Dinâmico.....	56
5.3.2	Determinação do Intervalo de $\phi$ de Variação Admissível.....	61
5.4	Vantagens e Desvantagens das Cartas de Controlo.....	68
6.	Conclusões.....	71
6.1	Conclusões Gerais.....	71
6.2	Sugestões para Trabalho Futuros.....	73
	Bibliografia.....	75
	Anexos.....	79

## Índice de Figuras

Figura 1.1 Estrutura da Dissertação .....	3
Figura 2.1 Artigos publicados por área de aplicação de cartas de controlo .....	7
Figura 2.2 Esquema de um processo produtivo.....	7
Figura 2.3 Carta de Controlo .....	11
Figura 2.4 Zonas de uma Carta de Controlo.....	19
Figura 2.5 Tipos de Cartas de Controlo <i>CUSUM</i> .....	25
Figura 2.6 Tipos de cartas de controlo <i>EWMA</i> .....	26
Figura 4.1 Representação dos intervalos de $\phi$ estudados .....	39
Figura 4.2 Síntese das etapas da metodologia.....	40
Figura 4.3 Construção da carta <i>CUSUMres</i> e determinação do <i>ARLEC</i> e <i>SDRLEC</i> .....	41
Figura 4.4 Construção da carta <i>CUSCORE</i> e determinação do <i>ARLEC</i> e <i>SDRLEC</i> .....	42
Figura 4.5 Construção da carta <i>Triggered CUSCORE</i> e determinação do <i>ARLEC</i> e <i>SDRLEC</i> .....	44
Figura 4.6 Estudo do desempenho das cartas de controlo face a alterações no parâmetro médio 45	
Figura 4.7 Estudo do desempenho das cartas de controlo face a alterações no parâmetro auto-regressivo.....	46
Figura 5.1 Comportamento da variável de estudo $Y_t$ .....	49
Figura 5.2 Carta de Observações Individuais da variável $Y_t$ .....	50
Figura 5.3 Carta de Médias Móveis da variável $Y_t$ .....	50
Figura 5.4 Carta de observações individuais dos resíduos .....	51
Figura 5.5 Carta de médias móveis dos resíduos .....	51
Figura 5.6 Tipos de perturbação mais comuns num processo .....	53
Figura 5.7 Alteração no parâmetro médio do processo.....	54
Figura 5.8 Alteração no parâmetro auto-regressivo .....	56
Figura 5.9 Comportamento típico das cartas em estudo face a alterações no parâmetro <i>AR(1)</i> ....	57
Figura 5.10 Alterações no parâmetro médio, quando $\phi = 0,5997$ .....	59
Figura 5.11 Alterações no parâmetro médio, quando $\phi = 0,6003$ .....	60
Figura 5.12 Alterações no parâmetro médio, quando $\phi = 0,545$ .....	60
Figura 5.13 Alterações no parâmetro médio, quando $\phi = 0,670$ .....	61
Figura 5.14 Comportamento de <i>ARL</i> para alterações de $\phi$ .....	66

Figura I.1 Esquema para a selecção de cartas de controlo em processos univariados.....	80
Figura III.1 Tabela referente a constantes para as cartas tradicionais de variáveis .....	84
Figura III.2 Tabela da distribuição $t$ -Student .....	85

## Índice de Tabelas

Tabela 2.1 Cartas de controlo de variáveis e de atributos.....	24
Tabela 5.1 Condições e resultados iniciais de simulação das cartas.....	52
Tabela 5.2 Valores de <i>ARL</i> e <i>SDRL</i> para alterações no parâmetro médio do processo.....	54
Tabela 5.3 Valores de <i>ARL</i> e <i>SDRL</i> para alterações no parâmetro auto-regressivo .....	55
Tabela 5.4 Amostras de <i>ARLs</i> recolhidas para $\phi A1$ e $\phi A2$ .....	62
Tabela 5.5 Comparação dos valores de <i>ARL</i> obtidos por simulação e regressão polinomial .....	67
Tabela II.1 Estudo da variação do parâmetro auto-regressivo para 20 séries de 500 observações .....	81
Tabela II.2 Desempenho das cartas para $\phi A1$ .....	81
Tabela II.3 Desempenho das cartas para $\phi A2$ .....	82
Tabela II.4 Desempenho das cartas para $\phi B1$ .....	82
Tabela II.5 Desempenho das cartas para $\phi B2$ .....	83



## Lista de Abreviaturas e Símbolos

### Abreviaturas

$AMA(q)$	Modelo de médias móveis aritméticas de ordem $q$	<i>Arithmetic Moving Average Model</i>
$AR(p)$	Modelo auto-regressivo de ordem $p$	<i>Autorregressive Model</i>
$ARIMA(p, d, q)$	Modelo auto-regressivo de ordem $p$ , diferenciação de ordem $d$ e de médias móveis de ordem $q$	<i>Autoregressive Moving Average Model</i>
$ARL$	Número médio de observações ao fim do qual se detecta uma situação fora de controlo	<i>Average Run Length</i>
$\overline{ARL}_1$	Média amostral de $ARL$ s recolhidos para a amostra 1	
$\overline{ARL}_2$	Média amostral de $ARL$ s recolhidos para a amostra 2	
$ARL_{Em\ Controlo}/$ $ARL_{EC}$	$ARL$ para quando o processo se encontra sob controlo estatístico	<i>In Control Average Run Length</i>
$ARL_{Fora\ de\ Controlo}/$ $ARL_{FC}$	$ARL$ para quando o processo não se encontra sob controlo estatístico	<i>Out of Control Average Run Length</i>
$ARL_{Trigg}$	$ARL$ da carta de gatilho	<i>Trigger ARL</i>
$ARMA(p, q)$	Modelo autorregressivo de ordem $p$ , de médias móveis de ordem $q$	<i>Autorregressive Moving Average Model</i>
$ATS$	Tempo médio ao fim do qual se detecta uma situação fora de controlo	<i>Average Time to Signal</i>
Carta $CUSCORE$		<i>Cumulative Score Chart</i>

Carta <i>CUSUM</i>	Carta de Somas Acumuladas	<i>Cumulative Sums Chart</i>
Carta <i>CUSUM<sub>res</sub></i>	Carta de Somas Acumuladas de Resíduos	<i>Residual-based Cumulative Sums Chart</i>
Carta <i>EWMA</i>	Carta de Média Móvel Exponencialmente Amortecida	<i>Exponentially Weighted Moving Average Chart</i>
Carta <i>CUSUM<sub>res</sub> Triggered CUSCORE/ Triggered CUSCORE</i>	Carta <i>CUSCORE</i> com carta de gatilho/ alarme <i>CUSUM<sub>res</sub></i>	<i>Cumulative Sums-triggered Cumulative Score Chart</i>
<i>CS</i>	Estatística <i>CUSCORE</i>	<i>Cumulative Score Statistics</i>
EPC	Engenharia de Controlo do Processo	<i>Engineering Process Control</i>
FAC	Função de Autocorrelação	<i>Autocorrelation Function</i>
FACP	Função de Autocorrelação Parcial	<i>Partial Autocorrelation Function</i>
iid	Independentes e Identicamente Distribuídos	<i>Independent and Identically Distributed</i>
LC	Linha Central	<i>Center Line</i>
LIC	Limite Inferior de Controlo	<i>Lower Control Limit</i>
LR	Rácio de Probabilidade	<i>Likelihood Ratio</i>
LSC	Limite Superior de Controlo	<i>Upper Control Limit</i>

$MA(q)$	Modelo de médias móveis de ordem $q$	<i>Moving Average Model</i>
$RL$		<i>Run Length</i>
$SDRL$	Desvio padrão da distribuição de <i>Run Length</i>	<i>Standard Deviation of the Run Length</i>
$SDRL_{Em\ Controlo}/$ $SDRL_{EC}$	$SDRL$ para quando o processo está sob controlo estatístico	<i>In Control Standard Deviation of the Run Length</i>
$SDRL_{Fora\ de\ Controlo}/$ $SDRL_{FC}$	$SDRL$ para quando o processo não está sob controlo estatístico	<i>Out of Control Standard Deviation of the Run Length</i>
SPC	Controlo Estatístico do Processo	<i>Statistical Process Control</i>
SPRT	Teste Sequencial da Razão de Verossimilhança	<i>Sequential Probability Ratio Test</i>

## Símbolos

$B$	Operador de defasamentos
$C$	Número de ciclos de simulação
$C_{m\acute{a}x}$	Número máximo de ciclos de simulação definido
$C_t$	Estatística <i>CUSUM</i> para detectar um aumento na média
$CS_t$	Estatística <i>CUSCORE</i> para o instante de tempo $t$
$d_i$	Detector
$\varepsilon_t$	Ruído branco
$\varepsilon_{t0}$	Valores residuais
$f(t)$	Sinal que gera alterações em séries temporais
$h$	Intervalo de decisão para a carta <i>CUSUM</i>
$h_{trigg}$	Intervalo de decisão para a carta de gatilho
$H$	Intervalo de decisão para a carta <i>CUSCORE</i>
$H_0$	Hipótese nula de um teste de hipóteses
$H_1$	Hipótese alternativa de um teste de hipóteses
$k$	Valor de referência
$l$	<i>ARL</i> da carta de gatilho
$\lambda$	Número de subgrupos racionais
$m$	<i>SDRL</i> da carta de gatilho
$\overline{MSSD}$	Quadrado médio das diferenças sucessivas
$n$	Dimensão de um subgrupo racional/ amostra
$N$	Número de observações por série de simulação
$Pr(signal)$	Parâmetro da variável aleatória geométrica da distribuição de <i>Run Length</i>
$r$	Medida de desempenho para testar a racionalidade de subgrupos

$R^2$	Coeficiente de determinação
$S$	Desvio padrão amostral
$S^2$	Variância amostral
$\overline{S^2}$	Variância média amostral
$S_p$	Desvio padrão combinado de duas amostras
$T$	Valor alvo
$t$	Instante de tempo $t$
$t_0$	Estatística de teste para a distribuição $t$ -Student
$t_{critico}$	Estatística de decisão para a distribuição $t$ -Student
$v$	Número de graus de liberdade
$\bar{X}$	Média amostral
$x_1, x_2, \dots, x_p$	Factores controláveis de um processo produtivo
$y$	Característica da Qualidade
$Y_t$	Valor da resposta no instante $t$
$z$	Variável normal reduzida, de média nula e desvio padrão unitário
$z_1, z_2, \dots, z_q$	Factores não controláveis de um processo produtivo
$\alpha$	Probabilidade de se cometer um erro do tipo I ou risco do produtor
$\beta$	Probabilidade de se cometer um erro do tipo II ou risco do consumidor
$\omega$	Estatística referente a uma característica da qualidade $y$
$\mu$	Média de uma população
$\mu_{ARL_{\phi_A^1}}$	Média da população para os $ARLs$ para o extremo $\phi_A^1$
$\mu_{ARL_{\phi_A^2}}$	Média da população para os $ARLs$ para o extremo $\phi_A^2$
$\mu_w$	Média referente à estatística $\omega$
$\delta$	Parâmetro desconhecido associado à dimensão de alterações

$\sigma$	Desvio padrão de uma população
$\sigma_w$	Desvio padrão referente à estatística $\omega$
$\sigma^2$	Variância de uma população
$\lambda$	Número de subgrupos racionais
$\theta$	Parâmetro de médias móveis
$\phi$	Parâmetro auto-regressivo
$\phi_A$	Intervalo A estabelecido para a variação de $\phi$
$\phi_A^1$	Extremo inferior do intervalo $\phi_A$
$\phi_A^2$	Extremo superior do intervalo $\phi_A$
$\phi_B$	Intervalo B estabelecido para a variação de $\phi$
$\phi_B^1$	Extremo inferior do intervalo $\phi_B$
$\phi_B^2$	Extremo superior do intervalo $\phi_B$

# 1. Introdução

Este capítulo tem como objectivo apresentar a temática que será abordada na presente dissertação. Inicialmente é desenvolvido um breve enquadramento do tema que mostra a importância do desenvolvimento do mesmo. Serão definidos os principais objectivos que se pretendem atingir, bem como as razões que motivaram a concretização deste trabalho. No final deste capítulo e de modo a facilitar a compreensão da dissertação, apresenta-se uma estrutura de como o trabalho foi desenvolvido e se encontra organizado.

## 1.1 Enquadramento do Tema

Actualmente, as organizações enfrentam muita pressão para se diferenciarem no mercado. A competitividade é um dos factores que mais contribui para se alcançar esta diferenciação e a melhoria contínua dos processos produtivos é uma realidade cada vez mais presente para se atingir o sucesso. Neste sentido, novas estratégias devem ser abordadas a fim de tornar as actividades das organizações mais eficientes, isto é, com um consumo otimizado de recursos para se minimizarem custos, tendo em consideração as expectativas dos clientes.

A Qualidade é uma área que auxilia na melhoria dos processos. Esta prende-se com a consistência daquilo que é produzido, quer sejam serviços ou produtos. O uso de técnicas estatísticas adequadas asseguram o controlo dos processos produtivos, de modo a reduzirem a variabilidade associadas aos mesmos. Neste sentido, o Controlo Estatístico do Processo permite, através do uso de cartas de controlo, a monitorização de uma característica da qualidade, de um determinado produto que se pretenda controlar. A detecção de causas especiais de variação, como se passa a explicar no Capítulo 2, é um dos grandes objectivos das cartas de controlo, que é o que permite distinguir quando um processo se encontra sob controlo estatístico ou não.

Os meios tecnológicos disponíveis nos processos industriais actuais permitem a monitorização *on time* não apenas de uma, mas de diversas variáveis. No entanto, por vezes, mesmo apenas monitorizando uma característica da qualidade e dependendo do tipo de processo, podem existir alterações nos processos mais difíceis de detectar. Quando os dados exibem auto-correlação, isto é, quando uma observação num determinado instante depende de observações de instantes de tempo anteriores, a monitorização dos processos requer outro tipo de práticas. Estas situações exigem técnicas mais sofisticadas de modo a se evidenciar as causas que provocam as alterações nos processos e, conseqüentemente, a se implementar melhorias.

O controlo estatístico univariado de processos com dados auto-correlacionados revela-se bastante vantajoso, nomeadamente para indústrias de processos químicos, onde mais se evidenciam dados que violam o pressuposto da independência.

## 1.2 Objectivos

Na presente dissertação pretende-se desenvolver uma metodologia que permita dar resposta ao controlo estatístico univariado com dados auto-correlacionados, ao explorar as potencialidades das cartas *CUSCORE* face ao desempenho de cartas tipicamente utilizadas nestes processos.

Os principais objectivos são apresentar um estudo comparativo entre o desempenho da carta *CUSCORE Trigger CUSUMres* (carta *CUSCORE* com carta de gatilho *CUSUM* de resíduos), a carta *CUSUMres* (carta *CUSUM* de resíduos) e a carta *CUSCORE* no caso em que:

- O processo é caracterizado por dados-autocorrelacionados que podem ser modelados por um modelo auto-regressivo de primeira ordem,  $AR(1)$ ;
- O processo mencionado sofre alterações do tipo salto.

Este estudo será feito com o auxílio do *software* MATLAB, através da construção de modelos de simulação adequados. Posteriormente, serão retiradas conclusões através dos resultados fornecidos pelas principais medidas de desempenho como o *ARL* (*Average Run Length*) e o respectivo *SDRL* (*Standard Deviation of the Run Length*) face a alterações na média do processo.

Também será averiguado qual o intervalo da gama de valores do parâmetro auto-regressivo,  $\phi$ , para o qual o valor de  $ARL_{Em\ Controlado}$  não é estatisticamente diferente de 370. Desta forma, é possível existir um equilíbrio na variação do parâmetro auto-regressivo para que não exista um número elevado de falsos alarmes dados pelas cartas ou, por outro lado, uma elevada insensibilidade que não permitam às cartas detectarem variações na média do processo.

Serão indicadas as principais vantagens e as desvantagens das cartas alvo deste estudo, conforme a óptica do utilizador, que aplica cartas de controlo univariadas para monitorizar processos dinâmicos contínuos.

## 1.3 Estrutura da Dissertação

Em termos globais, o presente trabalho está repartido em três blocos. O primeiro, meramente informativo, debate-se com o resumo da dissertação, os índices geral, de figuras e de tabelas, abreviaturas e símbolos. No segundo bloco encontra-se o corpo principal que inclui seis capítulos e o conjunto das referências bibliográficas. Por fim, o último bloco contém informação adicional ao trabalho desenvolvido no segundo bloco, os anexos. A Figura 1.1 ilustra a estrutura descrita.

Como se verifica na seguinte figura, no segundo bloco agrupou-se quatro capítulos em duas partes distintas com vista a facilitar a leitura e compreensão do corpo do trabalho:

- Fundamentos Teóricos – apresentação do estado da arte;

- Metodologia, Aplicação & Resultados – apresentação do caso de estudo, metodologia proposta, a sua aplicação (parte prática) e respectivos resultados.

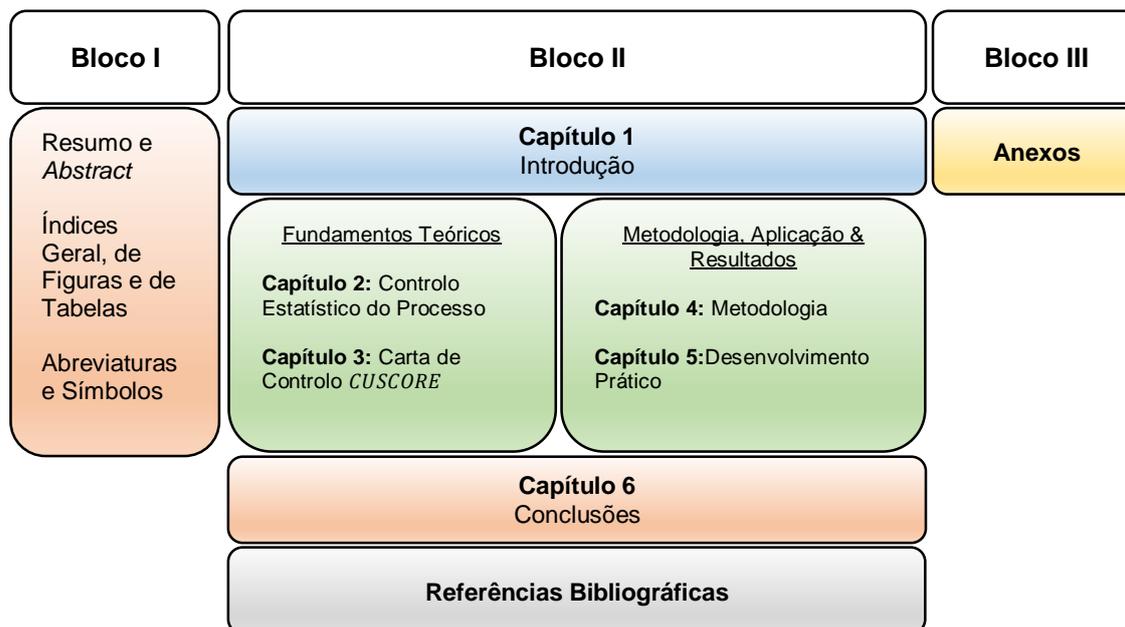


Figura 1.1 Estrutura da Dissertação

A presente dissertação está repartida em seis capítulos que se passam a descrever resumidamente.

No Capítulo 1 é abordada uma introdução generalizada sobre o tema deste trabalho. São definidos objectivos e expectativas, bem como o que se irá desenvolver. Também são demonstrados os contributos que se pretendem alcançar para complementar o estado da arte relativamente ao Controlo Estatístico do Processo. Este capítulo é concluído com a apresentação da estrutura desta dissertação e com os principais pontos referidos em cada capítulo.

Os Capítulos 2 e 3 centram-se na fundamentação teórica que serve como base para a compreensão de toda a parte prática da dissertação.

O segundo relaciona-se com o Controlo Estatístico do Processo e explica como esta ferramenta é importante nos processos produtivos. Posteriormente é descrita a metodologia desta ferramenta, os principais pressupostos em que assenta e são descritas também as principais cartas de controlo utilizadas actualmente. Neste capítulo também se encontra a teoria subjacente à carta *CUSUM* de resíduos, sendo uma das ferramentas possíveis de se utilizar em processos auto-correlacionados. Também são referidos os motivos pelos quais esta carta foi seleccionada como alvo de estudo da presente dissertação.

O terceiro capítulo apresenta a carta *CUSCORE*: mostra como obter a estatística associada a esta carta e em que situações pode ser aplicada. Descreve também as suas potencialidades face às cartas tradicionais em situações específicas. São descritos pontos de vista de autores estudiosos desta carta e também são destacadas as suas desvantagens.

## 1. Introdução

---

No Capítulo 4 encontra-se a metodologia apresentada, bem como a construção do programa de simulação associados à construção de cada carta e à determinação dos valores de  $\phi$  para os quais o *ARL*, quando o processo está sob controlo estatístico, não é significativamente diferente do valor habitual de 370.

O Capítulo 5 é um capítulo onde se apresenta uma discussão sobre as características dos processos estudados, sustentada pelos Capítulos 2 e 3. Contém os principais resultados face a diferentes cenários relativamente ao comportamento das cartas.

Por fim, no Capítulo 6, designado por “Conclusões”, são apresentadas as conclusões a retirar de todo o trabalho realizado e são deixadas algumas recomendações para trabalhos futuros, no âmbito da temática abordada.

# FUNDAMENTOS TEÓRICOS

---

## 2. Controlo Estatístico do Processo

O presente capítulo tem como objectivo descrever o estado da arte em relação ao Controlo Estatístico do Processo (adiante designado por *SPC*, *Statistical Process Control*). Retracta a importância do mesmo em ambientes industriais, bem como a sua evolução ao longo do tempo. Os conceitos abordados nos subcapítulos posteriores mostram-se essenciais para a compreensão do tema, pelo que são a base de construção de todo o trabalho. Também serão abordadas diferentes perspectivas e opiniões de alguns autores que se dedicam a esta temática.

### 2.1 Breve Referência Histórica

A Qualidade é um conceito inequivocamente importante na actualidade e está presente tanto a nível de produtos como de serviços. Tradicionalmente, a sua definição baseia-se na satisfação dos requisitos do utilizador ou cliente. Segundo Montgomery (2009), Qualidade não é mais que a adequabilidade para o uso.

Este conceito já era aplicado nos tempos das civilizações primitivas: um exemplo mencionado por Quesenberry (1997) trata-se da preocupação do caçador, da Idade da Pedra, em possuir uma lança cuja ponta fosse devidamente afiada para servir o seu propósito quando fosse lançada a um mamute.

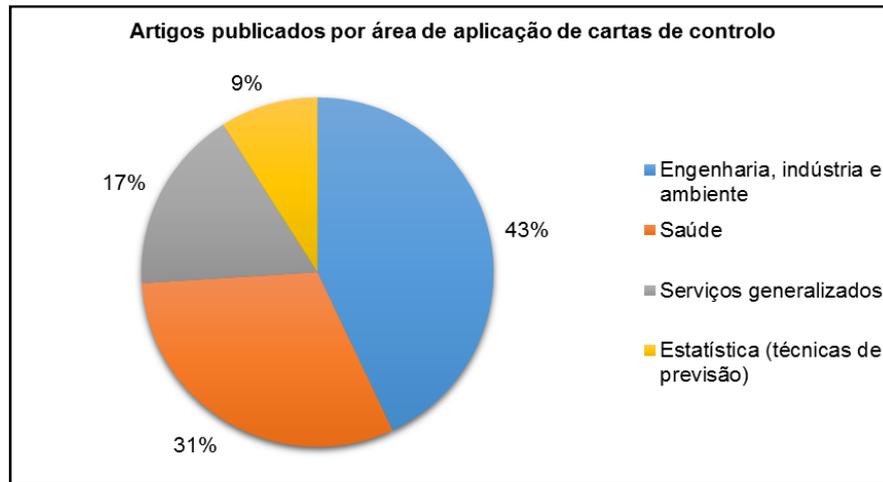
O termo Qualidade foi continuamente evoluindo reflectindo-se, por exemplo, nas práticas dos artesãos da Idade Média e, posteriormente, no aparecimento de departamentos de inspecção em unidades fabris durante a 1ª Guerra Mundial (Pereira e Requeijo, 2012).

Por outro lado, segundo Quesenberry (1997), no final do século XIX e no início do século XX deram-se desenvolvimentos muito importantes sobre estatística. Estes desenvolvimentos ocorreram na Grã-Bretanha graças a Pearson, entre outros, e posteriormente na Índia e nos Estados Unidos da América. Uma vez que a estatística trata essencialmente a variabilidade existente num conjunto de dados, a sua evolução potenciou o progresso do controlo da Qualidade. Este facto permitiu o aparecimento de determinadas técnicas que, por sua vez, possibilitaram o aumento do fabrico de produtos cujas características e parâmetros iam ao encontro do que era considerado conforme.

Nos laboratórios *Bell Telephone* despontaram, em 1924, as primeiras aplicações de estatística a questões relacionadas com a Qualidade. Walter A. Shewhart foi protagonista, juntamente com Harold F. Dodge, nesta inovação. Segundo Smith (2009), Shewhart acreditava que não só se deveria garantir a qualidade de produtos acabados mas também a Qualidade dos processos que concebiam os mesmos. Através do estudo estatístico tal era conseguido. Shewhart introduziu o conceito de cartas de controlo no campo da Qualidade ao conceber as conhecidas cartas de Shewhart. Este é o principal método do *SPC* (Quesenberry, 1997).

A melhoria da Qualidade através do *SPC* revelou-se de tal modo importante que grande parte dos conceitos introduzidos por Shewhart, na década dos anos 20, são aplicados na actualidade, promovendo uma maior conformidade de produtos gerados.

Actualmente existe uma grande aceitação das cartas de controlo e não apenas a nível industrial: MacCarthy e Wasusri (2002) destacam diversas áreas de aplicação das cartas, agregando diversos artigos publicados sobre as mesmas, por área. A Figura 2.1 proporciona uma noção da quantidade de artigos publicados nos anos de 1994 até 2000, por área de utilização das cartas de controlo.



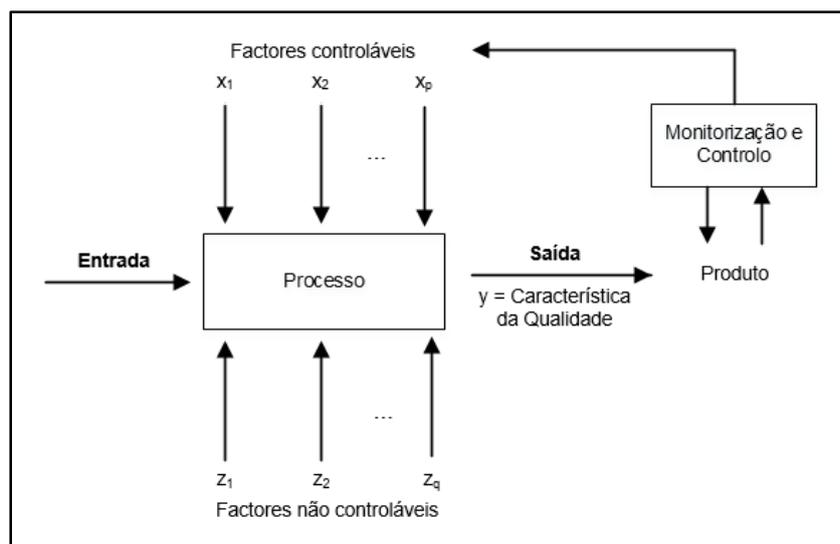
**Figura 2.1** Artigos publicados por área de aplicação de cartas de controlo

(adaptado de MacCarthy e Wasusri (2002))

## 2.2 Relação entre Processos e Variabilidade

Como mencionado na secção anterior, o *SPC* foi inicialmente desenvolvido por Walter A. Shewhart. Esta técnica revelou-se muito importante no que diz respeito à melhoria da Qualidade, essencialmente no controlo de processos.

Um processo, segundo Pereira e Requeijo (2012), é “um conjunto de actividades interrelacionadas e inter-actuantes que transformam entradas em saídas” em que as entradas ou *inputs* podem ser factores controláveis (e. g. temperatura, pressão, etc.) ou factores não controláveis - ou difíceis de controlar - (e. g. condições ambientais) e as saídas ou *outputs* não são mais que os produtos. A Figura 2.2 ilustra como um processo produtivo interage com as diferentes entidades actuantes.



**Figura 2.2** Esquema de um processo produtivo

(adaptado de Montgomery (2009))

São as saídas, ou *outputs*, do processo que devem ir ao encontro da satisfação do cliente. Desta forma, os parâmetros inerentes ao produto, ou seja, as características da qualidade devem estar em conformidade com o que foi previamente especificado. A variável de saída  $y$  não é mais que uma medida da qualidade do processo.

As características da qualidade são descritas por Montgomery (2009) como elementos que, conjuntamente, descrevem o que o consumidor pensa que é qualidade. O autor considera que existem três tipos de características da qualidade: físicas (comprimento, peso, viscosidade), sensoriais (aparência, cor) e de orientação temporal (fiabilidade, durabilidade). Estas podem interagir unicamente com o processo, em conjunto com as dimensões da qualidade (desempenho, fiabilidade, durabilidade, etc.) ou podem estar relacionadas entre si (caso dos dados auto-correlacionados).

Para se nomear as características da qualidade, há que elaborar previamente uma análise cuidada do processo produtivo: este deve ser repartido em processos de menor dimensão de modo a facilitar a identificação das características críticas, contidas em processos críticos. Faz sentido, posteriormente, proceder-se à construção de planos de controlo. É através destes que é possível reconhecer as características que deverão ser tratadas através de uma análise estatística. Esta análise deverá ser realizada juntamente com informações de dimensões de amostras, nível de frequência de amostragem, especificações técnicas e equipamento de medição (Ferreira, 2012).

Como mencionado anteriormente, o resultado final de um processo deve ir ao encontro dos requisitos previamente estabelecidos pelo utilizador. Todavia, existem sempre fontes de variação que influenciam o processo mesmo que este esteja “bem concebido, desenvolvido e implementado” (Pereira e Requeijo, 2012). Assim, as características da qualidade, que devem ser asseguradas, são afectadas por fontes de variação. Estas, segundo Pereira e Requeijo (2012), são tipicamente agrupadas em seis categorias:

- Equipamento – desgaste de ferramentas e vibrações de equipamentos, etc.;
- Matéria-prima;
- Mão-de-obra – estado físico e emocional dos operadores, nível de conhecimento dos operadores, etc.;
- Meio ambiente – temperatura, luminosidade, etc.;
- Métodos – métodos inadequados às necessidades, fraca definição das operações, etc.;
- Metrologia – uso inadequado do equipamento de medição, erro de medição da característica, etc.

Doty (1996) enumera mais três tipos de fontes de variação, além dos referidos:

- Controlo da Qualidade – fraco conhecimento das implicações das técnicas de controlo estatístico por parte dos inspectores de qualidade;
- Engenharia – concepção inadequada de processos, especificações de engenharia que estão fora do alcance da capacidade do processo, etc.;

- Gestão (sistemas ou erros organizacionais).

As fontes de variação originam modificações que se podem manifestar de forma distinta a nível temporal. Existem alterações que podem ser graduais, como é o caso do desgaste de equipamentos; outras são esporádicas, como a alteração de métodos; e outras ambientais, como variações bruscas na fonte de alimentação (Pereira e Requeijo, 2012).

Para efeitos de controlo da qualidade, existem dois tipos de causas de variação cuja identificação é fundamental para gerir um processo de forma adequada: causas comuns (ou naturais, ou aleatórias) e causas especiais (ou assinaláveis) de variação.

Quando um processo opera apenas com causas comuns de variação, diz-se sob controlo estatístico. As causas comuns de variação são dotadas de estabilidade e repetibilidade; podem ser definidas por uma distribuição de probabilidade. Geralmente, a redução das causas comuns de variação é uma decisão que é tomada pela gestão de topo das organizações. São exemplos a aquisição de novos equipamentos, alteração de fornecedores, etc. (Pereira e Requeijo, 2012).

Por outro lado, as causas especiais de variação, quando presentes num processo, indicam que este está fora de controlo estatístico. Estas causas de variação precisam de ser eliminadas o mais depressa possível a fim de serem produzidas o mínimo de unidades não conformes (Montgomery, 2009). O resultado final de um processo que contém causas especiais de variação não é previsível nem estável, sendo as suas variações bastante superiores relativamente às provocadas por causas comuns (Pereira e Requeijo, 2012). Tipicamente, a detecção e eliminação de causas especiais de variações são feitas por operadores que lidam directamente com o processo.

Geralmente assume-se que, numa carta de controlo, a presença de uma causa especial de variação que provoque uma alteração nos parâmetros do processo irá persistir até que a causa especial seja detectada. No entanto, existem causas especiais que originam alterações que actuam num curto intervalo de tempo. Estas alterações denominam-se por alterações transitórias (*transient shift*). Por outro lado, uma alteração no processo que permaneça até ser detectada por uma carta de controlo denomina-se alteração contínua (*sustained shift*) (Reynolds e Stoumbos, 2004).

É intenção de cada produtor gerar correctamente um produto à primeira vez que este é concebido. Para tal, é necessário que o processo produtivo seja estável e que todas as entidades envolvidas estejam dispostas a trabalhar em função da melhoria contínua do desempenho do processo e da redução da variabilidade dos principais parâmetros (Montgomery, 2009). É fundamental a adopção de metodologias que permitam evitar processos produtivos que não satisfaçam as condições nomeadas por Montgomery (2009), especialmente no que diz respeito à redução da variabilidade em processos e produtos. Por norma, o excesso de variabilidade existente em processos resulta em desperdícios.

É extremamente difícil proceder-se à completa eliminação da variação provocada por causas comuns, no entanto, as organizações devem orientar o seu trabalho para que esta variação seja a

menor possível. Existem algumas ferramentas da qualidade (*the magnificent seven*) que podem auxiliar neste sentido:

- Fluxograma;
- Folha de Registo e Verificação;
- Histograma;
- Diagrama de Dispersão;
- Diagrama de Causa-e-Efeito;
- Diagrama de Pareto;
- Cartas de Controlo.

Estas ferramentas constituem uma parte fundamental do *SPC* mas, no entanto, apenas compreendem aspectos técnicos a implementar. Segundo Montgomery (2009), o *SPC* tem a capacidade de construir um ambiente no qual todas as entidades de uma organização desejam uma melhoria contínua da qualidade e produtividade. É neste ambiente que as “sete magníficas” devem ser aplicadas, pertencendo a uma rotina que dirija a organização para o sucesso.

Em suma, o *SPC* permite o acompanhamento e a monitorização do comportamento do processo por intermédio de cartas de controlo estatístico. Desta forma, possibilita a detecção de alterações no comportamento do processo num período de tempo reduzido, desencadeando, atempadamente, acções correctivas que resultam numa redução do número de unidades produzidas não conformes e, conseqüentemente, na redução de custos.

### 2.3 Princípios das Cartas de Controlo

Uma carta de controlo é uma representação gráfica que evidencia a evolução de uma certa característica da qualidade ao longo do tempo. Esta característica da qualidade é estudada em termos de uma estatística ( $\omega$ ) cujo valor é recolhido através da sua medição numa determinada amostra. Em termos gráficos, segundo Montgomery (2009), a estatística  $\omega$  pode ser representada em função do tempo ou em função do número da amostra recolhida. Tipicamente, as amostras são seleccionadas em períodos de tempo regulares. Além do conjunto de valores representativos pelos eixos cartesianos, tal como ilustrado na Figura 2.3, as cartas de controlo também são dotadas de uma linha central (*LC*) e de duas linhas horizontais, o limite superior de controlo (*LSC*) e o limite inferior de controlo (*LIC*).

A linha central representa o valor médio da característica da qualidade quando o processo se encontra sob controlo estatístico (Montgomery e Runger, 2011). Os limites de controlo definem uma área onde os valores das amostras retiradas devem variar de forma aleatória, quando o processo se encontra sob controlo estatístico (Pereira e Requeijo, 2012).

Geralmente, enquanto as observações se encontrarem entre os limites de controlo, o processo está sob controlo estatístico pelo que não é necessário adoptar acções correctivas.

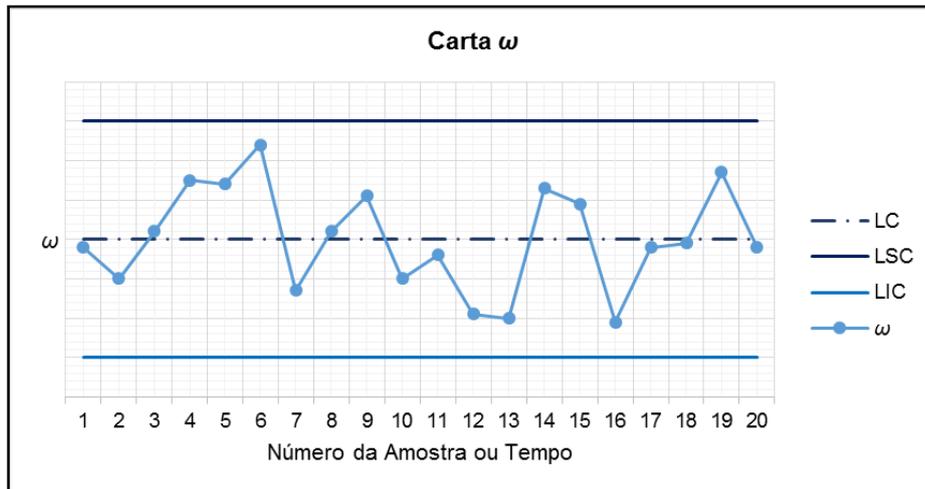


Figura 2.3 Carta de Controle

No entanto, se um ou mais pontos se encontrar fora dos limites de controlo, existe evidência que o processo não está sob controlo estatístico, sendo necessária uma investigação e a aplicação de acções de correcção para eliminar as fontes responsáveis por este comportamento. Por vezes as observações exibem um padrão sistemático ou não aleatório, mesmo estando dentro dos limites de controlo da carta. Este comportamento pode indicar que o processo não está sob controlo e que estão presentes causas especiais de variação que devem ser eliminadas. Existem algumas regras que auxiliam na identificação destes comportamentos que serão abordadas posteriormente na Secção 2.5.

Assumindo que os valores obtidos da estatística  $\omega$  seguem uma distribuição Normal, de média  $\mu_\omega$  e desvio padrão  $\sigma_\omega$ , os limites de controlo e a linha central são dados por Montgomery (2009):

$$\begin{aligned} LSC &= \mu_\omega + L\sigma_\omega \\ LC &= \mu_\omega \\ LIC &= \mu_\omega - L\sigma_\omega \end{aligned} \quad (2.1)$$

$L$  é expresso em unidades de desvio padrão e não é mais que a distância entre os limites de controlo à linha central. Por norma, o valor escolhido para  $L$  é 3 e, portanto, os limites de controlo estão a uma distância de  $\pm 3\sigma_\omega$  da linha central. Neste sentido, e atendendo que as observações seguem uma distribuição Normal, a probabilidade de qualquer observação se encontrar entre os limites de controlo é 99,73%. Esta foi a teoria de carta de controlo sugerida por Walter Shewhart, pelo que todas as cartas de controlo que sigam estes princípios são designadas por cartas de controlo de Shewhart (Montgomery, 2009).

Sempre que uma observação se encontrar fora dos limites de controlo, considera-se que o valor dessa observação não pertence à distribuição estatística que se pretende controlar. Pereira e Requeijo (2012) explicam que existe um risco  $\alpha$  de um ponto que pertence à distribuição de  $\omega$  estar fora dos limites de controlo. Este risco equivale a 0,27% e corresponde a um risco de ocorrer um erro de tipo I como é explicado posteriormente, neste capítulo.

A potencialidade das cartas de controlo tem-se vindo a revelar ao longo dos anos, provando que existem diversas vantagens inerentes à sua utilização. Pereira e Requeijo (2012) destacam alguns motivos para a utilização de cartas de controlo:

- Prevenção de produção de produto não conforme;
- Distinção entre causas comuns e especiais de variação;
- Facilidade de utilização das cartas pelo operador no seu posto de trabalho, evitando-se ajustamentos desnecessários;
- Consistência e previsão da qualidade e custos, ou seja, existe um comportamento previsível do processo;
- Menor custo por cada unidade produzida, aumentando a produtividade;
- Utilização de uma linguagem comum, fornecendo informações do processo que podem ser entendidas por qualquer entidade interessada no seu desempenho.

### **2.3.1 Fases de Implementação das Cartas de Controlo**

Autores como Pereira e Requeijo (2012), Montgomery (2009) e Quesenberry (1997) mencionam que, habitualmente, existem duas fases de implementação para a construção de cartas de controlo: a Fase I e a Fase II. A Fase I tem início quando ainda se desconhecem os parâmetros do processo. Esta fase é caracterizada pela recolha de dados e pela construção posterior da carta de controlo. Quando se verifica a presença de uma causa especial na carta obtida, as observações responsáveis são removidas e deve ser construída uma carta de controlo revista. Na carta de controlo revista devem apenas constar causas comuns de variação. Posto isto, estimam-se os parâmetros do processo, média e variância, e procede-se à análise de capacidade do processo. Pereira e Requeijo (2012) definem capacidade do processo como a sua capacidade de “produzir consistentemente dentro dos limites de especificação”. Assim, dá-se por concluída a Fase I e segue-se para a Fase II. Esta refere-se à monitorização do processo e tem como objectivo a detecção de causas especiais de variação.

Alguns autores defendem opiniões divergentes em relação às fases de implementação das cartas de controlo. Palm (2000) considera que existem três estágios: os estágios A, B e C. O estágio A, ou estágio de configuração da carta de controlo, corresponde à iniciação do processo, em que os dados são recolhidos e os limites de controlo da carta são calculados. Este estágio corresponde a um controlo retrospectivo do processo. O estágio B, ou estágio de melhoria do processo, tem como objectivo detectar irregularidades nos padrões das observações e eliminar as causas que deram origem às anomalias. O estágio C, ou estágio de monitorização do processo, tem como objectivo a eliminação de causas especiais de variação futuras.

### 2.3.2 Erros Associados às Cartas de Controlo

Há que ter em conta alguns conceitos sobre testes de hipóteses para se compreender mais facilmente a noção de risco em relação a cartas de controlo. O teste de hipóteses é um método que permite verificar se uma hipótese, assumida como verdadeira, deve ou não ser rejeitada. Esta hipótese denomina-se Hipótese Nula ( $H_0$ ) e é rejeitada quando existe evidência estatística que o permita fazer. A Hipótese Alternativa ( $H_1$ ) estabelece a alternativa à Hipótese Nula. Quando se faz um teste de hipóteses existe a possibilidade de se cometerem dois tipos de erros:

- Erro do tipo I: rejeitar a Hipótese Nula quando esta é verdadeira.
- Erro do tipo II: não rejeitar a Hipótese Nula quando esta é falsa.

A probabilidade de se cometer um erro do tipo I, também designado como risco do produtor, é denotado por  $\alpha$ . Por outro lado, a probabilidade de se cometer um erro do tipo II, ou risco do consumidor, é denotado por  $\beta$ .

De certo modo, uma carta de controlo pode ser encarada como um teste de hipóteses (Montgomery, 2009). A hipótese a testar ( $H_0$ ) é se o processo se encontra sob controlo estatístico, ou seja, testa-se a hipótese de cada observação apresentada na carta de controlo estar dentro ou fora dos limites de controlo. Desta forma, se uma observação se encontrar dentro dos limites de controlo, não se rejeita a hipótese de o processo se encontrar sob controlo estatístico. No caso contrário, esta hipótese é rejeitada.

Da mesma forma que existem erros associados aos testes de hipóteses, estes também existem quando se procede à análise de uma carta de controlo. Existe risco de ocorrer um erro de tipo I quando se assume que o processo não está sob controlo estatístico quando, na realidade, está. Existe risco de ocorrer um erro de tipo II quando se considera que o processo está sob controlo estatístico, quando, na verdade, não está.

A especificação dos limites de controlo é uma decisão crítica no planeamento das cartas. Quanto maior for a distância dos limites de controlo à linha central, a probabilidade de ocorrer um erro do tipo I diminui uma vez que, como a área entre os limites de controlo é superior, existe uma maior probabilidade de as observações se encontrarem dentro dela. Por outro lado, a probabilidade de ocorrer um erro de tipo II aumenta. Quanto menor for a distância dos limites de controlo à linha central, ocorre precisamente o oposto da situação anterior: a probabilidade de ocorrer um erro do tipo I aumenta, enquanto a probabilidade de ocorrer um erro do tipo II diminui. Pereira e Requeijo (2012) referem que deve existir um compromisso entre os dois tipos de erro, visto não ser possível diminuir conjuntamente os riscos de probabilidade de ocorrência dos erros do tipo I e II.

Woodall (2000) aborda diversos autores de opinião concordante com Montgomery (2009), ou seja, que uma carta de controlo é um teste à hipótese de um processo se encontrar sob controlo estatístico. Woodall (2000) destaca autores como Juran (1997), Box e Kramer (1992), entre outros. No entanto, Woodall (2000) também faz referência a autores cuja opinião diverge dos anteriores

como Deming (1986) e Nelson (1999). De uma maneira geral, as divergências das opiniões dos autores surgem da dificuldade em distinguir as aplicações entre a Fase I e a Fase II. A abordagem teórica de monitorização do processo na Fase II é semelhante a sucessivos testes de hipóteses, uma vez que já é conhecida a distribuição de probabilidades dos dados, bem como os parâmetros do processo. No entanto, segundo Woodall (2000), na Fase I as cartas de controlo são como uma ferramenta para a análise exploratória de dados, ou seja, os parâmetros do processo são desconhecidos, pelo que é inviável comparar cartas de controlo com testes de hipóteses. Pereira e Requeijo (2012) mencionam que esta controvérsia é pouco relevante em termos práticos.

Woodall e Faltin (1996) recordam que é necessário ter em consideração o facto da introdução do conceito de carta de controlo, em 1926, ter antecedido o artigo de referência de Neyman e Pearson (1928) sobre testes de hipóteses. Woodall e Faltin (1996) mencionam, no entanto, que Shewhart (1931) tomou o trabalho de Neyman e Pearson como referência.

### 2.3.3 Medidas de Desempenho e Métricas das Cartas de Controlo

Nas cartas tradicionais de Walter Shewhart pressupõe-se que as observações a estudar seguem uma distribuição Normal de média  $\mu$  e variância  $\sigma^2$  conhecidas. As medidas de desempenho são essenciais para medir e comparar o desempenho das cartas de controlo.

O *Run Length (RL)* de uma carta de controlo é uma variável aleatória que representa o número de observações até que ocorra uma situação fora de controlo (*signal*). No caso das cartas de Shewhart, o *RL* é uma variável aleatória geométrica de parâmetro  $Pr(\text{signal})$ , que representa a probabilidade de uma observação se encontrar fora dos limites de controlo. O *RL* segue uma distribuição geométrica desde que os dados recolhidos sejam variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas. Se o processo se encontrar sob controlo estatístico, a probabilidade de ocorrer uma situação fora de controlo está relacionada com a frequência de falsos alarmes. No entanto, quando os parâmetros do processo são estimados, a distribuição do *RL* não é geométrica e, assim, a probabilidade de ocorrer uma situação irregular deixa de ter qualquer relevância (Jensen *et al.*, 2006).

A medida de desempenho mais utilizada para medir a performance de uma carta de controlo é o *Average Run Length (ARL)*. O *ARL* é, essencialmente, o número médio de observações representadas numa carta de controlo antes de uma observação indicar uma ocorrência fora de controlo (Montgomery, 2009). Quando o processo se encontra sob controlo estatístico, pretende-se que o *ARL* seja o maior possível, de forma a minimizar o número de falsos alarmes. Por outro lado, quando o processo não se encontra sob controlo estatístico, pretende-se que o *ARL* seja o menor possível, a fim de se detectar uma alteração do processo o mais rápido possível (Pereira e Requeijo, 2012). Assim, uma carta eficaz para um determinado caso de estudo é uma carta que apresente o maior valor de  $ARL_{Em\ Controlo}$  e o menor valor de  $ARL_{Fora\ de\ Controlo}$ . Se as observações não forem correlacionadas entre si então, para qualquer carta de Shewhart, o  $ARL_{EC}$  é dado por:

$$ARL_{Em\ Controlo} = \frac{1}{\alpha} \quad (2.2)$$

Onde  $\alpha$  é a probabilidade de qualquer observação estar fora dos limites de controlo, ou risco de ocorrência do erro de tipo I. No caso das cartas de Shewhart, como mencionado na secção 2.3,  $\alpha$  corresponde a um valor de 0,0027. Assim, conclui-se que de 370 em 370 observações existirá, em média, um falso alarme.

O desvio padrão, *Standard Deviation of the Run Length (SDRL)* em controlo,  $SDRL_{Em\ Controlo}$ , é dado pela seguinte equação:

$$SDRL_{Em\ Controlo} = \frac{\sqrt{1-\alpha}}{\alpha} \quad (2.3)$$

Uma vez que o desvio padrão assume um valor aproximado ao valor da média ( $\sqrt{1-\alpha}/\alpha \approx 370$ ), conseqüentemente, em muitos casos é possível que o  $ARL_{EC}$  varie bastante (Pereira e Requeijo, 2012).

Numa situação fora de controlo, o  $ARL_{FC}$  é dado por:

$$ARL_{Fora\ de\ Controlo} = \frac{1}{1-\beta} \quad (2.4)$$

Onde  $\beta$  é a probabilidade de se cometer um erro do tipo II. O desvio padrão numa situação fora de controlo,  $SDRL_{FC}$  é dado por:

$$SDRL_{Fora\ de\ Controlo} = \frac{\sqrt{\beta}}{1-\beta} \quad (2.5)$$

Existem outras medidas de desempenho como a Curva Característica Operacional e o *Average Time to Signal (ATS)*. A Curva Característica Operacional, segundo Pereira e Requeijo (2012), fornece resultados análogos aos do  $ARL$ . O  $ATS$  é utilizado quando é conveniente expressar o desempenho de uma carta de controlo em termos de tempo (Montgomery, 2009). Se as observações numa carta forem feitas num intervalo de tempo fixo, de  $h$  em  $h$  horas, tem-se:

$$ATS = ARL \times h \quad (2.6)$$

A equação (2.6) indica que a cada 370 horas, em média, ocorre um falso alarme.

## 2.4 Recolha de Dados

O processo de recolha de dados é fundamental para a implementação do  $SPC$ . As conclusões provenientes da aplicação das cartas de controlo podem ser comprometidas caso o processo de recolha de dados não seja realizado da forma mais adequada (Pereira e Requeijo, 2012). Para a construção de uma carta de controlo é importante definir a dimensão da amostra e a frequência de amostragem.

### **2.4.1 Dimensão das Amostras e Frequência de Amostragem**

A fim de se determinar a dimensão de uma amostra, segundo Montgomery (2009), há que ter alguma noção da dimensão da alteração do processo que se pretende detectar. De um modo geral, amostras de dimensão superior facilitam a detecção de pequenas alterações no processo. Por outro lado, se a alteração do processo é relativamente acentuada, amostras de menor dimensão são mais adequadas (Montgomery, 2009). Pereira e Requeijo (2012) fazem a distinção relativamente à dimensão de amostras utilizadas para o controlo de variáveis contínuas e o controlo de variáveis discretas: na primeira situação, a dimensão das amostras é geralmente pequena devido a questões económicas; na segunda situação a dimensão das amostras depende dos parâmetros da distribuição da variável.

Relativamente à frequência de amostragem, a situação ideal seria a recolha de amostras de grande dimensão muito frequentemente, visto que facilitaria a detecção de alterações no processo. Contudo, este método não é economicamente viável (Montgomery, 2009). Montgomery (2009) salienta o principal dilema a nível de recolha de dados: ou se procede à recolha de amostras de pequena dimensão em intervalos de tempo curtos ou à recolha de amostras de grande dimensão em intervalos de tempo mais longos. Pereira e Requeijo (2012) referem que, para grandes volumes de produção, é costume recolher-se amostras com muita frequência em intervalos de tempo curtos para se detectar alterações frequentes do processo ou para se observar se o processo se mantém estável. Porém, alertam para a auto-correlação dos dados quando se aumenta em excesso a frequência de amostragem. Por outro lado, quando o processo se mantém estável, Pereira e Requeijo (2012) recomendam a diminuição da frequência de amostragem.

Montgomery (2009) refere que se deve ter em conta diversos factores relativamente à decisão da frequência de amostragem como o custo de amostragem, as perdas associadas à permissibilidade do processo funcionar fora de controlo estatístico, a taxa de produção e as probabilidades de ocorrência de diversas alterações no processo.

As cartas de controlo são ferramentas poderosas no que concerne à melhoria de processos, através da detecção de causas especiais de variação. Todavia, uma carta de controlo apenas revela o seu potencial se o plano de amostragem for o mais adequado. Um bom plano de amostragem reflecte-se numa carta de controlo que detecte anomalias; um mau plano de amostragem encobre as anomalias, pelo que existe uma baixa probabilidade de a carta de controlo as detectar (Palm, 1992).

### **2.4.2 Subgrupos Racionais**

Um conceito introduzido por Shewhart, no que respeita ao processo de amostragem das cartas de controlo, é o princípio dos subgrupos racionais. Para as cartas de controlo detectarem alterações no processo, as amostras devem seguir este princípio. O conceito de subgrupos racionais consiste em seleccionar subgrupos ou amostras tal que, na presença de uma causa especial de variação, a

probabilidade de se detectar diferenças entre os subgrupos seja maximizada e a probabilidade de se detectar diferenças dentro dos subgrupos seja minimizada (Montgomery, 2009). Idealmente, os dados escolhidos para cada subgrupo devem pertencer à mesma população, ou seja, não se deve misturar dados de operadores diferentes, turnos diferentes, máquinas diferentes, entre outros (Ryan, 2011). Desta forma, devem ser constituídas amostras homogéneas, retiradas em intervalos de tempo regulares, uma vez que tal permite conferir a variação dentro das amostras a causas aleatórias e a variação entre amostras a causas especiais (Pereira e Requeijo, 2012).

No entanto, existem determinadas indústrias, como a química e a de processos, em que alguma variação devido a causas especiais é tolerada e considerada normal. Nestes casos, as cartas de Shewhart não são adequadas uma vez que assinalam situações fora de controlo estatístico quando, na realidade, não existe relevância significativa das mesmas. Segundo Freund (1957) e Freund (1960), mencionado por Holmes e Mergen (1988), existem três abordagens para se ultrapassar este problema:

- Alterar o número de desvios padrão que define os limites da carta de controlo;
- Variar o tamanho do subgrupo ou amostra;
- Variar a forma de como os subgrupos são formados.

Holmes e Mergen (1988) apresentaram um modelo que permite constituir subgrupos com alguma variação entre os mesmos, optando pela terceira abordagem. Este modelo possibilita averiguar qual a dimensão de cada subgrupo de tal modo que haja uma variação (tolerada) entre cada um, permitindo que o produto final esteja dentro dos limites de especificação. Para a determinação da dimensão adequada do subgrupo, Holmes e Mergen (1988) utilizam dois tipos de testes:

- Teste ANOVA para determinar a dimensão do subgrupo para a qual a média do processo está sob controlo;
- Teste de Bartlett para determinar a dimensão do subgrupo para a qual a variância do processo está sob controlo.

No sentido de se testar a racionalidade dos subgrupos, Holmes e Mergen (1989) apresentaram um modelo que tem como objectivo testar a hipótese referida. O modelo consiste numa medida de desempenho que é o rácio entre o quadrado médio das diferenças sucessivas, *average of the mean square successive differences*, ( $\overline{MSSD}$ ) e a variância média dos subgrupos ( $\overline{s^2}$ ):

$$r = \frac{\overline{MSSD}/2}{\overline{s^2}} \quad (2.7)$$

A transformação de  $r$  numa variável aproximadamente normal, isto é, de média de valor 0 e desvio padrão de valor 1, permite verificar se a variação dentro do subgrupo é aleatória. Esta transformação é dada pela seguinte equação:

$$z = \frac{1-r}{\sqrt{[(\lambda n-2)/(\lambda n-1)(\lambda n+1)]}} \quad (2.8)$$

Onde  $z$  é a uma variável normal,  $n$  é a dimensão do subgrupo e  $\lambda$  é o número de subgrupos. Apenas quando a variável  $z$  assume valores compreendidos no intervalo  $[-3; 3]$  é que existe aleatoriedade dentro dos subgrupos, pelo que se pode concluir se são racionais.

Palm (1992) recomenda alguns cuidados em três situações na determinação de subgrupos como:

- Mistura de observações de dois fluxos de produção;
- Mistura de observações de sequências de produção diferentes;
- Mistura de dimensões num produto.

Nestas três ocorrências Palm (1992) explica que, muitas vezes, embora o processo pareça estar sob controlo estatístico, quando se separam as observações mencionadas em subgrupos diferentes (subgrupos para cada fluxo de produção, para cada sequência de produção e para dimensões semelhantes), é possível detectar causas especiais de variação. É importante ter algum cuidado uma vez que, desta forma, está presente a possibilidade de se perder oportunidades de melhoria.

Reynolds e Stoumbos (2004) apresentam uma diferente perspectiva a nível de subgrupos racionais: as amostras recolhidas em intervalos de tempo regulares são adequadas para detectarem alterações do tipo contínuas, mas não se adequam à detecção de alterações transitórias. As alterações transitórias nem sempre são detectadas através de amostras recolhidas em intervalos de tempo constantes. Desta forma, Reynolds e Stoumbos (2004) distinguem amostragem concentrada (recolha de observações no mesmo momento, em intervalos de tempo regulares) para alterações contínuas e amostragem dispersa (recolha de observações ao longo do intervalo de tempo) para alterações transitórias.

### **2.5 Detecção de Causas Especiais de Variação**

Tal como mencionado anteriormente, quando um conjunto de observações de uma carta de controlo apresenta um comportamento sistemático ou não aleatório, é provável que exista uma causa especial de variação que esteja a desencadear esse padrão. É necessário averiguar a razão para este tipo de comportamento. No entanto, a capacidade de identificação de um padrão duvidoso, em termos de causas especiais de variação, envolve experiência e conhecimento do processo produtivo, não sendo suficiente o conhecimento dos princípios das cartas de controlo (Montgomery, 2009).

Existe um conjunto de regras sugeridas por algumas obras que se destinam à detecção de causas especiais de variação às cartas de controlo de Shewhart. Para a aplicação das regras, há que ter em consideração que uma carta de controlo é dividida em seis zonas iguais, como é ilustrado na Figura 2.4: a zona C, ou zona estável que é simétrica em relação à linha central, a zona B, ou zona de aviso, e a zona A, ou zona de acção que está localizada junto aos limites de controlo (Oakland, 2003).



**Figura 2.4** Zonas de uma Carta de Controlo

A obra *Western Electric Handbook* (1956) proporciona algumas regras, estabelecendo que um processo não está sob controlo estatístico quando:

- Uma qualquer observação se encontra fora dos limites  $\pm 3\sigma$ ;
- Duas de três observações consecutivas se encontram acima de  $\pm 2\sigma$  mas dentro dos limites de controlo;
- Quatro de cinco observações consecutivas se encontram a uma distância  $\pm 1\sigma$  ou superior, em relação à linha central;
- Oito observações consecutivas se encontram num dos lados da linha central.

Estas regras aplicam-se a um lado de cada vez da linha central. A utilização destas regras permite detectar mais rapidamente pequenas alterações no processo em relação à utilização singular do critério de uma ou mais observações se encontrarem fora dos limites de controlo (Montgomery, 2009).

As regras estabelecidas pela norma ISO 7870-2:2013, antiga ISO 8258:1991, indicam que existe uma causa especial de variação quando:

- **Regra 1:** Uma qualquer observação se encontra fora dos limites de controlo;
- **Regra 2:** Nove observações consecutivas se encontram na zona C ou, além desta zona, do mesmo lado da linha central;
- **Regra 3:** Seis observações consecutivas formam uma sequência ascendente ou descendente;
- **Regra 4:** Catorze observações consecutivas crescendo e decrescendo alternadamente;
- **Regra 5:** Duas de três observações consecutivas se encontram na zona A ou, além desta zona, do mesmo lado da linha central;
- **Regra 6:** Quatro de cinco observações consecutivas se encontram na zona B ou A ou, além destas zonas, no mesmo lado da linha central;
- **Regra 7:** Quinze observações consecutivas se encontram na zona C, acima e abaixo da linha central;

- **Regra 8:** Oito observações consecutivas se encontram de ambos os lados da linha central, sem nenhuma na zona C.

Nelson (1984) destaca algumas observações em relação aos testes de causas especiais de variação:

- Os testes às regras 1, 2, 5 e 6 devem ser aplicadas nas metades superior e inferior da carta separadamente, enquanto os testes às regras 3, 4, 7 e 8 devem ser aplicadas na totalidade da área da carta;
- Quando o processo se encontra sob controlo estatístico, a probabilidade de ocorrer um falso alarme, ou a probabilidade de ocorrer um erro do tipo I, é inferior a 0,5% para os testes de cada regra;
- Os testes às regras 1, 2, 3 e 4 devem ser aplicados com alguma regularidade, no entanto a probabilidade global de ocorrer um falso alarme destes testes é cerca de 1%;
- Quando é desejável, em termos económicos, de existir um sinal de aviso precoce, deve-se optar por acrescentar à observação anterior a regularidade da aplicação de testes às regras 5 e 6. Todavia, a probabilidade de ocorrer um falso alarme aumenta para cerca de 2%.

Estas regras têm como objectivo aumentar a sensibilidade das cartas de Shewhart a fim de se detectar causas especiais de variação. No entanto, tal como referido nas observações de Nelson (1984), a aplicação simultânea de diversas regras pode aumentar o número de falsos alarmes. Pereira e Requeijo (2012) desaconselham o uso frequente destas regras quando as alterações a detectar são pequenas. Nestes casos existem cartas de aplicação mais adequada, como será abordado na Secção 2.7.

### 2.6 Condições de Aplicabilidade do SPC

O Controlo Estatístico do Processo tem por base alguns pressupostos para ser implementado com sucesso. Segundo Pereira e Requeijo (2012), estes pressupostos baseiam-se em três condições relativas aos dados da característica da qualidade em estudo:

- Aleatoriedade dos dados;
- Normalidade dos dados;
- Independência dos dados.

Existem algumas metodologias, que serão abordadas posteriormente na presente secção, que permitem ultrapassar discrepâncias dos dados com as condições mencionadas.

A desconsideração pelos três pressupostos relativos aos dados recolhidos pode adulterar o desempenho das cartas de controlo na monitorização de um processo, inviabilizando as conclusões que se podem retirar das mesmas.

### 2.6.1 Aleatoriedade dos Dados

A aleatoriedade dos dados verifica-se quando estes descrevem um comportamento que não é previsível, ou seja, que não é sistemático. Existem determinados factores que podem contribuir para a não aleatoriedade dos dados. São exemplos a mistura de diferentes populações e a correlação entre observações consecutivas. Pereira e Requeijo (2012) sugerem alguns métodos para a verificação da aleatoriedade dos dados, como o Teste das Sequências, o Teste das Sequências Ascendentes e Descendentes e o Teste Modificado do Quadrado Médio das Diferenças Sucessivas.

### 2.6.2 Normalidade dos Dados

Como mencionado anteriormente, os dados da característica da qualidade em estudo devem seguir uma distribuição Normal ou Gaussiana. Existem algumas técnicas para apurar a Normalidade dos dados, nomeadamente o teste do *Qui-Quadrado* e o teste de *Kolmogorov-Smirnov*. Segundo Pereira e Requeijo (2012), o teste de *Kolmogorov-Smirnov* apresenta algumas vantagens em relação ao teste *Qui-Quadrado*: para uma distribuição contínua da população cujos parâmetros e forma são conhecidos, a distribuição da estatística de teste é definida de forma rigorosa em relação ao teste *Kolmogorov-Smirnov*, ao reverso do teste do *Qui-Quadrado* que possui uma distribuição aproximada; outra vantagem está relacionada com o facto de o teste *Kolmogorov-Smirnov* ser, tipicamente, mais potente que o teste do *Qui-Quadrado*. Por outro lado, a utilização do teste do *Qui-Quadrado* não implica que as distribuições populacionais sejam contínuas e completamente especificadas, ao contrário do teste *Kolmogorov-Smirnov*.

Pereira e Requeijo (2012) sugerem três abordagens quando se verifica a não Normalidade dos dados:

- Caracterização da distribuição dos dados da característica da qualidade em estudo;
- Transformação dos dados, através do método de Box e Cox ou recorrendo ao Sistema de Distribuições de Johnson, de modo a obter-se uma variável Normalmente distribuída;
- Método da Variância Ponderada para distribuições assimétricas.

Existem vários estudos sobre o efeito da não Normalidade no desempenho das cartas de controlo que têm sido publicados ao longo dos anos. Destacam-se autores como Burr (1967), Spedding e Rawlings (1994), Stoumbos e Reynolds (2000), Schoonhoven e Does (2009), Amhemad (2010), entre outros.

Shewhart, em 1931, após ter realizado uma série de experiências em distribuições rectangulares e triangulares à direita, verificou que a distribuição de médias da amostra é aproximadamente Normal, para amostras cuja dimensão seja igual a quatro. Esta conclusão deriva do Teorema do Limite Central (Spedding e Rawlings, 1994). No entanto, Spedding e Rawlings (1994) recordam que as distribuições testadas por Shewhart não apresentam um desvio muito significativo da Normalidade, ao contrário de muitas utilizadas em processos de engenharia. Assim, os autores recomendam uma

dimensão amostral superior a quatro nestes casos, de modo a que a distribuição de médias amostral seja aproximadamente Normal.

Neste sentido, a necessidade de verificar a hipótese da Normalidade deixa de ter efeito quando a dimensão amostral é igual ou superior a quatro, caso contrário deve-se optar pelas abordagens apresentadas por Pereira e Requeijo (2012).

### 2.6.3 Independência dos Dados

Geralmente, nas aplicações do *SPC*, um processo que se encontre sob controlo estatístico é identificado através de um processo que tem a capacidade de gerar variáveis aleatórias, independentes e identicamente distribuídas (iid) (Alwan e Roberts, 1988).

A independência dos dados é um pressuposto que deve ser verificado para uma utilização eficaz das cartas de controlo. Este pressuposto reflecte-se pela inexistência de auto-correlação significativa entre os dados, o que significa que o valor que a característica da qualidade possui num determinado instante de tempo não depende do seu valor no instante antecedente, nem em qualquer instante (Pereira e Requeijo, 2012).

Geralmente, nas indústrias de produção o pressuposto da independência é verificado (Matos, 2005). Todavia, o mesmo não se verifica na indústria química cujos processos apresentam dados muito correlacionados. Estes processos são gerados por elementos de inércia, dando origem a uma dinâmica nas características da qualidade, e o facto de os intervalos entre amostras se tornarem pequenos em relação a estas forças permite a correlação das observações ao longo do tempo (Montgomery, 2009).

Segundo Montgomery (2009), quando se assume a independência dos dados de uma determinada característica da qualidade, existindo correlação entre os mesmos, as cartas de controlo tradicionais não geram resultados fiáveis. Se os dados exibirem auto-correlação positiva, estas cartas de controlo irão dar origem a resultados falaciosos, traduzindo-se num número excessivo de falsos alarmes. Pereira e Requeijo (2012) explicam que o aumento do número de falsos alarmes deve-se à diminuição do  $ARL_{EC}$  que, por sua vez, deve-se ao facto de os parâmetros do processo e os limites das cartas de controlo serem estimados de modo inadequado. Alwan e Roberts (1988) também apontam alguns aspectos negativos relacionados com a presença de auto-correlação nos dados, nomeadamente no que respeita à dificuldade em distinguir causas especiais das causas comuns de variação.

A verificação da existência, ou não, da independência dos dados de uma determinada característica da qualidade, pode ser feita através da aplicação da Função de Auto-Correlação (FAC) e da Função de Auto-Correlação Parcial (FACP) (Pereira e Requeijo, 2012).

Durante a monitorização de um processo de dados auto-correlacionados, Reynolds e Lu (1997)

recomendam uma verificação se o comportamento dos dados corresponde a uma causa especial ou comum de variação. No primeiro caso, devem ser desencadeadas acções de modo a eliminar a causa especial de variação. No segundo caso, por outro lado, se a auto-correlação for intrínseca ao processo e a causa comum de variação não poder ser eliminada, então devem-se adoptar metodologias que contornem a situação.

Montgomery (2009) sugere duas abordagens para a monitorização deste tipo de processos: a primeira é baseada num modelo matemático, sendo a segunda livre de modelo. A primeira abordagem consiste num ajustamento de um modelo matemático, denominado *ARIMA* (*Autoregressive Integrated Moving Average*) e desenvolvido por Box e Jenkins (1970), à série temporal que define os dados auto-correlacionados. Segundo Matos (2005), assim, é possível eliminar a auto-correlação dos dados e “obter uma previsão para cada observação”. Através da previsão obtida, determinam-se os erros de previsão e estes são monitorizados em cartas de controlo tradicionais. A segunda abordagem consiste na aplicação de cartas de controlo tradicionais em que ou os seus limites de controlo são ajustados à auto-correlação do processo ou se realizam transformações nos dados de modo a que a auto-correlação seja eliminada (Matos, 2005).

## **2.7 Cartas de Controlo**

Actualmente existem diversas cartas de controlo. A contínua evolução dos sistemas produtivos actuais gera a necessidade da utilização de metodologias que acompanhem esta evolução. Através de estudos realizados por vários especialistas, as cartas de controlo progrediram consideravelmente e adaptaram-se às necessidades das organizações. As cartas têm o objectivo de detectar causas comuns de variação mas diferenciam-se na rapidez com que o conseguem fazer. Assim, estas são dotadas de uma certa sofisticação que, dependendo das condições em que o processo se encontra, são capazes de detectar alterações de dimensão variável, dependendo da carta a utilizar. No Anexo I, Figura I.1, encontra-se um guia rápido na selecção da carta de controlo adequada face ao contexto em que o processo produtivo se encontra.

### **2.7.1 Cartas de Controlo de Variáveis e de Atributos**

As cartas de controlo de variáveis e de atributos foram desenvolvidas por Walter Shewhart. As primeiras monitorizam características que podem ser mensuráveis numa escala contínua como, por exemplo, o peso e as dimensões. Como a dispersão da população não depende apenas da medida de tendência central, devem ser construídas duas cartas de controlo: uma para controlar o parâmetro de localização e outra para controlar o parâmetro de dispersão da população. Por outro lado, as cartas de atributos têm como objectivo monitorizar características que assumem valores discretos como, por exemplo, o número de defeitos numa ou mais unidades do produto. Note-se que deve ficar bem claro o que é considerado defeito e o que é considerado uma unidade não conforme. Nesta situação, basta contruir uma carta de controlo visto que o desvio padrão é em função da média e da dimensão da amostra (Pereira e Requeijo, 2012).

As cartas de controlo de variáveis e atributos mais utilizadas encontram-se sintetizadas na Tabela 2.1:

**Tabela 2.1** Cartas de controlo de variáveis e de atributos  
(adaptado de Pereira e Requeijo (2012))

<b>Cartas de controlo de variáveis</b>	<b>Cartas de controlo de atributos</b>
Média – Carta $\bar{X}$ Amplitude – Carta <b>R</b>	Proporção de unidades não conformes – Carta <i>p</i>
Média – Carta $\bar{X}$ Desvio Padrão – Carta <b>S</b>	Número de unidades não conformes – Carta <i>np</i>
Média – Carta $\bar{X}$ Variância – Carta <b>S<sup>2</sup></b>	Número de defeitos – Carta <i>c</i>
Mediana – Carta $\tilde{X}$ Amplitude – Carta <b>R</b>	Número de defeitos por unidade – Carta <i>u</i>
Observações Individuais – Carta <b>X</b> Amplitudes Móveis – Carta <b>MR</b>	

As cartas de Shewhart apresentam algumas desvantagens, como o facto de apenas considerarem as últimas informações relacionadas com o processo. Estas desvantagens podem ser ultrapassadas com a aplicação de regras para a detecção de causas especiais de variação, embora o número de falsos alarmes aumente (Pereira e Requeijo, 2012). A utilização de cartas especiais é mais adequada nesta situação uma vez que estas cartas são mais sensíveis à detecção de causas especiais de variação que as cartas de Shewhart. Para mais informações sobre as cartas que constam na Tabela 2.1, recomenda-se a consulta da referência Pereira e Requeijo (2012).

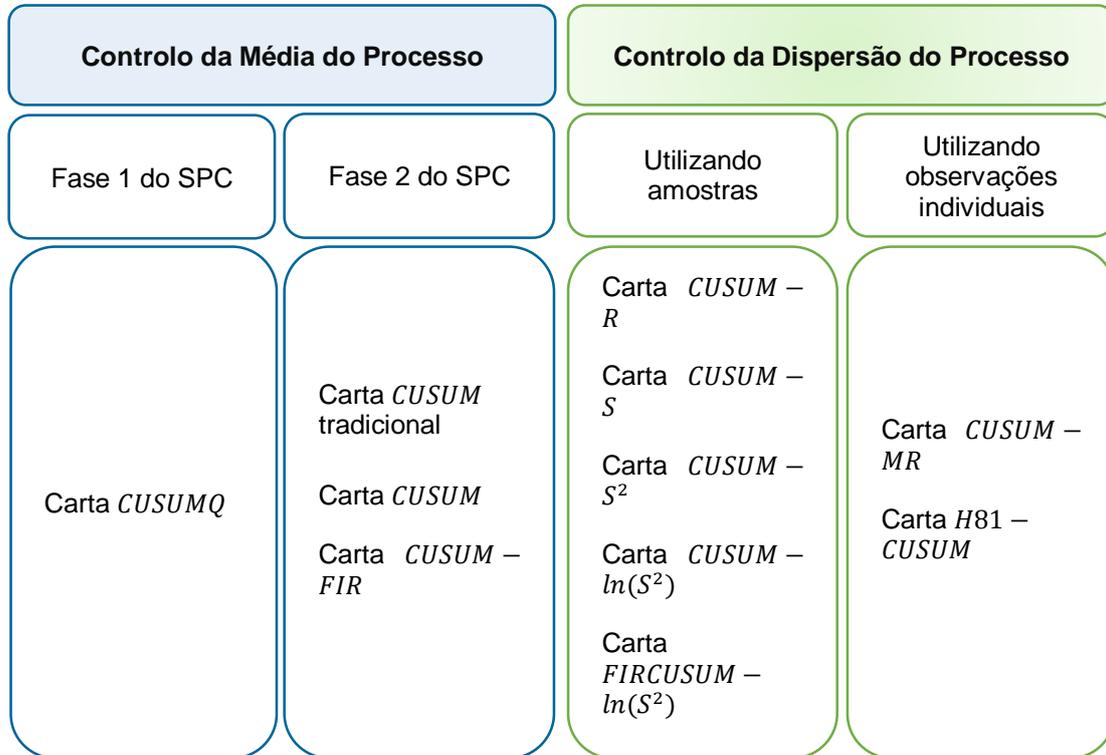
### 2.7.2 Cartas de Controlo Especiais

As cartas de controlo especiais têm sido alvo de estudo de muitos especialistas, principalmente se estas podem ser utilizadas como complemento ou como substitutas das cartas de Shewhart.

Existem duas cartas de controlo especiais, a Carta de Somas Acumuladas (*CUSUM*) e a Carta da Média Móvel Exponencialmente Amortecida (*EWMA*) que têm a capacidade de detectar alterações pequenas e moderadas na média e na variância do processo (Pereira e Requeijo, 2012).

Na Figura 2.5 encontram-se os diferentes tipos de cartas *CUSUM* para controlo da média e da variância do processo. A carta *CUSUM* foi introduzida por Page em 1954 e, posteriormente, também desenvolvida por Barnard (1959). Existe uma distinção entre a carta *CUSUM* tradicional e a carta

*CUSUM*, uma vez que a primeira compreende a construção de um dispositivo *V-Mask*, que requer alguma manipulação manual enquanto a segunda é constituída por duas semi-cartas. É recomendável utilizar-se a carta *CUSUMQ* na fase 1 do SPC em casos de produções do tipo *short run*, em que em existe um número restrito de dados e se tem curtas produções (Pereira e Requeijo, 2012).



**Figura 2.5** Tipos de Cartas de Controlo *CUSUM*

Na Figura 2.6 encontram-se os diferentes tipos de cartas *EWMA* para controlo da média e da variância do processo, individualmente e em conjunto. A carta *EWMA* foi introduzida em 1959 por Roberts (1959) e, mais tarde, foi também desenvolvida por Hunter (1986). Como mencionado anteriormente, a carta *EWMA* é adequada na detecção de alterações pequenas a moderadas no processo e possui a particularidade de também ser adequada para estabelecer previsões relativas ao parâmetro do processo. Tal como acontece na carta *CUSUM*, é recomendável utilizar-se uma carta *EWMAQ* para os casos de pequenas produções, pelo mesmo motivo identificado anteriormente (Pereira e Requeijo, 2012).

Tanto como nas cartas *CUSUM* como nas *EWMA*, o procedimento *FIR* deve ser utilizado quando se pretende aumentar a sensibilidade das cartas no início da análise do processo; a estatística  $\ln(S^2)$  está relacionada com a sua distribuição, aproximando-se a uma distribuição Normal caso a variável  $X$  também siga esta distribuição (Pereira e Requeijo, 2012).

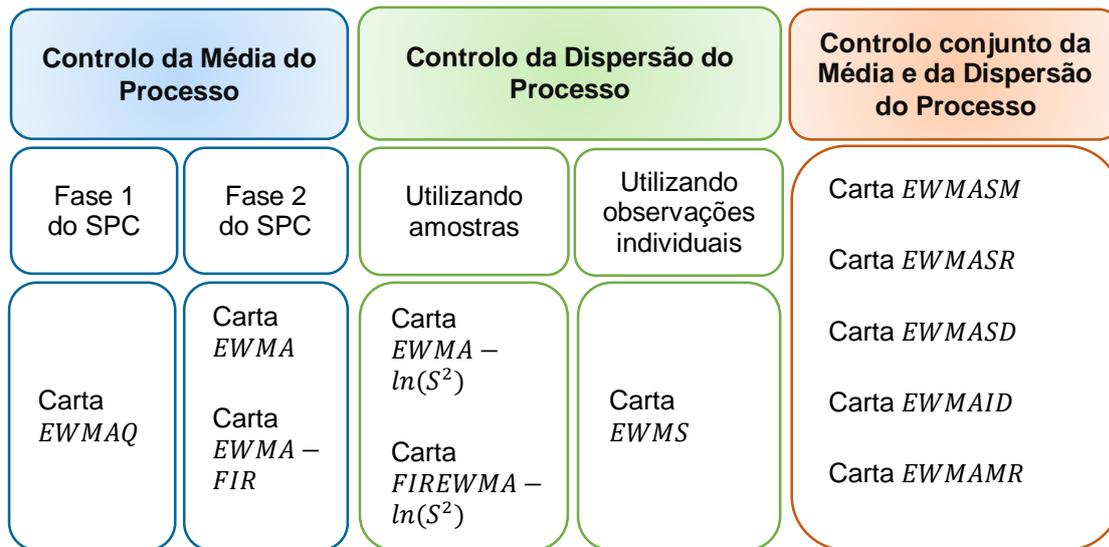


Figura 2.6 Tipos de cartas de controlo *EWMA*

Caso se pretenda obter mais informações sobre as cartas apresentadas nas Figuras 2.5 e 2.6, recomenda-se a consulta da referência Pereira e Requeijo (2012).

➤ Carta *CUSUM* de resíduos

Como se referiu, a auto-correlação dos dados de um processo produtivo tem impacto no desempenho das cartas de controlo. Se for assumida a independência dos dados num processo auto-correlacionado, os limites das cartas serão estimados de forma errada. O risco do consumidor aumentará e o  $ARL_{Em\ Controlo}$  irá decrescer, pelo que o número de falsos alarmes aumentarão.

Existem três abordagens possíveis para este tipo de processos:

- A utilização de cartas de controlo de Shewhart, *CUSUM* ou *EWMA* com limites modificados;
- A determinação do modelo matemático que se ajusta melhor aos dados e a construção de cartas de controlo de Shewhart, *CUSUM* ou *EWMA* de resíduos (*CUSUM<sub>res</sub>* ou *EWMA<sub>res</sub>*);
- A utilização de cartas específicas como a *MCEWMA* ou *EWMA<sub>ST</sub>*.

Segundo Matos (2005), a carta *CUSCORE* é mais eficaz na detecção de pequenas alterações na média do processo ( $\delta = 0,5$ ) face às cartas *EWMA* de resíduos, *MCEWMA* e *EWMA<sub>ST</sub>*. Matos (2005) ainda refere que a carta *CUSCORE* actua melhor conjuntamente com a carta *CUSUM<sub>res</sub>* de gatilho para pequenas variações na média do processo ( $\delta \leq 1$ ) face às mesmas cartas.

A carta *CUSUM* de resíduos será particularmente abordada pois pretende-se analisar o seu comportamento face à carta *CUSCORE* *Trigger CUSUM<sub>res</sub>* (provou ser melhor que a *CUSCORE* isolada na detecção de pequenas alterações na média do processo).

A carta *CUSUM<sub>res</sub>*, tal como a carta *CUSUM*, assenta na construção de duas semi-cartas em que uma detecta um aumento da média do processo e a outra detecta um decréscimo. As variáveis associadas a esta carta são um valor de referência,  $k$ , o limite de controlo,  $h$ , e o *ARL*. As primeiras

variáveis devem ser seleccionadas de modo a que a curva de  $ARL$  contemple dois pontos:  $(0, L(0))$  e  $(\delta, L(\delta))$ , onde  $L(0)$  é o  $ARL_{Em\ Controlo}$  e  $L(\delta)$  é o  $ARL_{Fora\ de\ Controlo}$  após a ocorrência de uma alteração  $\Delta = \delta\sigma_{\bar{x}}$  da média do processo (Pereira e Requeijo, 2012).

É necessário definir as duas variáveis que sinalizam o decréscimo e o aumento na média do processo,  $T_t$  e  $C_t$ , respectivamente:

$$\begin{aligned} T_t &= \min(0, T_{t-1} + (Z_t + k)) \\ C_t &= \max(0, C_{t-1} + (Z_t - k)) \end{aligned} \quad (2.9)$$

Onde,

$$\begin{aligned} T_0 &= 0 \\ C_0 &= 0 \end{aligned} \quad (2.10)$$

$$Z_t = \frac{\bar{e}_t - \mu}{\sigma_{\bar{e}}} = \frac{\bar{e}_t - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \quad (2.11)$$

$$\Delta = \delta\sigma_{\bar{e}} \quad (2.12)$$

$$\delta = \frac{\Delta}{\sigma_{\bar{e}}} = \frac{\Delta\sqrt{n}}{\sigma} \quad (2.13)$$

$$k = \frac{\delta}{2} \quad (2.14)$$

Nas seis equações anteriores:  $\bar{e}_t$  é a média da amostra, no instante  $t$ , dos resíduos,  $\mu$  é o valor esperado dos resíduos,  $\sigma$  é o desvio padrão dos resíduos,  $n$  é a dimensão da amostra e  $Z_t$  é a variável Normal Reduzida referente a  $\bar{e}_t$ .

Considera-se o processo fora de controlo estatístico quando ocorre uma das seguintes situações:

$$\begin{aligned} T_t &< -h \\ C_t &> h \end{aligned} \quad (2.15)$$

Caso ocorra uma alteração no valor da média, é possível determinar o seu novo valor ao recorrer à expressão (2.16), onde  $N_T$  e  $N_C$  indicam o número de períodos consecutivos em que  $T$  e  $C$ , respectivamente, diferem de zero:

$$\mu_{novo} = \begin{cases} \mu + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \left( k + \frac{C_t}{N_C} \right), & \text{se } C_t > h \\ \mu - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \left( k - \frac{T_t}{N_T} \right), & \text{se } T_t < -h \end{cases} \quad (2.16)$$

Segundo Pereira e Requeijo (2012), existem diversos estudos que demonstram, quando os dados são independentes, que o melhor valor para de  $k$  é  $\delta/2$ . Este será o valor de  $k$  considerado na presente dissertação. Para determinar o valor do parâmetro  $h$  (que depende de  $k$  e do valor de  $ARL_{EC}$ ) pode utilizar-se os ábacos desenvolvidos por Gan (1991). No entanto, para este estudo, optou-se por determinar  $h$  através de simulações.

### **2.7.3 Outros tipos de Cartas de Controlo**

Existem outros tipos de cartas de controlo aplicadas em contextos muito específicos que não serão, em termos práticos, desenvolvidos na presente dissertação. A monitorização de processos nestes contextos exige a aplicação de metodologias adequadas de modo a se conseguir obter soluções fiáveis. Estes contextos podem ser:

- O controlo estatístico de “pequenas produções”;
- O controlo estatístico multivariado.

A carta de controlo *CUSCORE* é uma carta de carácter muito específico, com o objectivo de detectar pequenas alterações não constantes, ou seja, dinâmicas. Será alvo de estudo nesta dissertação, mais pormenorizadamente no capítulo seguinte.

### 3. Carta de Controlo *CUSCORE*

Como referido anteriormente, o controlo estatístico tradicional de um processo assenta na detecção de causas especiais de variação através da sua monitorização. As cartas de Shewhart convencionais baseiam-se essencialmente na detecção de sinais aberrantes cujas características, como a natureza e a dimensão, podem ajudar a identificar o que está a provocar esse fenómeno. Porém, os especialistas na área de controlo estatístico do processo rapidamente se aperceberam que as cartas de Shewhart não são tão eficazes em detectar pequenas alterações no processo como em detectar alterações mais acentuadas (Nembhard, 2006). Para contornar esta situação, alguns peritos conceberam cartas complementares como a *CUSUM* e a *EWMA* a fim de se detectarem pequenas alterações no processo.

Existem determinados sinais que são característicos de um processo produtivo: geralmente, quando um operador trabalha num determinado processo, este fica com uma ideia do comportamento esperado do mesmo. A carta *CUSCORE* representa um meio eficaz na detecção deste tipo de sinais, uma vez que a experiência e conhecimento do processo podem ser incorporados na função de monitorização (Nembhard, 2006). O mecanismo de detecção de sinais presente na carta *CUSCORE* tem como base a estatística (*efficient score statistics*) de Fisher (1925) e foi introduzida por Box e Jenkins (1966). Posteriormente, autores como Bagshaw e Johnson (1977), Box e Ramírez (1992), Box e Luceño (1997) e Ramírez (1998) dedicaram-se ao estudo da carta. A carta *CUSCORE* é uma generalização das cartas de Shewhart, *CUSUM* e *EWMA*, com a vantagem de se poder aplicar a grande parte de qualquer tipo de sinal escondido em grande parte de qualquer tipo de ruído (Box *et al.*, 2009).

#### 3.1 Teoria Subjacente à Estatística *CUSCORE*

Considere-se um modelo característico de um *output* de um determinado processo que é definido pela soma do valor alvo,  $T$ , com um modelo temporal *ARIMA*:

$$Y_t = T + \frac{\theta(B)}{\phi(B)} \varepsilon_{t0} \quad (3.1)$$

em que

$$B^k = \frac{X_{t-k}}{X_t} \quad (3.2)$$

$$\phi(B) = 1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \dots - \phi_p B^p \quad (3.3)$$

$$\theta(B) = 1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \dots - \theta_q B^q \quad (3.4)$$

Nas quatro equações anteriores considera-se  $Y_t$  como o valor da resposta para o instante  $t$ ,  $B$  como o operador de defasamentos,  $\phi(B)$  como o polinómio auto-regressivo (*AR*) de ordem  $p$ ,  $\theta(B)$  como o polinómio de médias móveis (*MA*) de ordem  $q$  e  $\varepsilon_t$  como valores independentes e identicamente distribuídos em que  $\varepsilon \sim N(0, \sigma_\varepsilon^2)$ , ou seja, ruído branco. No modelo expresso pela Equação (3.1) foi

acrescentado um zero à variável  $\varepsilon_t$ , para assinalar que os valores de  $\varepsilon_{t0}$  são residuais e não correspondem a ruído branco a menos que o modelo seja verdadeiro. A Equação (3.1) representa o modelo para o qual corresponde uma situação de controlo estatístico.

Na ocorrência de um sinal esperado no instante de tempo  $t$ , o modelo expresso pela Equação (3.1) altera-se segundo a seguinte expressão:

$$Y_t = T + \frac{\theta(B)}{\phi(B)} \varepsilon_t + \delta f(t) \quad (3.5)$$

em que  $\delta$  é um parâmetro desconhecido e  $f(t)$  é uma função indicativa da natureza do sinal. Este modelo é assumido como verdadeiro quando o valor correcto de  $\delta$  é utilizado e denomina-se como modelo de discrepância.

Box e Ramírez (1989 e 1992) apresentaram uma representação da carta *CUSCORE* para monitorização de um processo em que ocorrem sinais esperados. É baseado no modelo expresso pela Equação (3.5) em termos de ruído branco:

$$\varepsilon_i = \varepsilon(Y_i, X_i, \delta), \quad i = 1, 2, \dots, t \quad (3.6)$$

onde  $Y_i$  representa as observações,  $X_i$  representa constantes conhecidas, nomeadamente os níveis conhecidos das variáveis de *inputs*, e  $\delta$  representa um parâmetro desconhecido. O sistema está bem modelado quando existe apenas ruído branco na ausência de sinais. Após o funcionamento do modelo descrito na Equação (3.5), um conjunto de valores de  $\varepsilon_i$  podem ser recolhidos para cada valor escolhido de  $\delta$  através da Equação (3.6).

Seja  $\delta_0$  um valor, possivelmente diferente do valor real do parâmetro  $\delta$ . O teste sequencial da razão de verosimilhança (SPRT – *Sequential Probability Ratio Test*) entre  $\delta_0$  e outro valor  $\delta_1$  detém um rácio de probabilidade,  $LR$  (*Likelihood Ratio*):

$$LR_t = \prod_{i=1}^t \exp \left\{ \frac{1}{2\sigma_\varepsilon^2} [\varepsilon_i^2(\delta_0) - \varepsilon_i^2(\delta_1)] \right\} \quad (3.7)$$

Uma vez removido o logaritmo da expressão anterior, esta conduz à soma acumulada:

$$\begin{aligned} S_t &= \frac{1}{2\sigma_\varepsilon^2} \sum_{i=1}^t [\varepsilon_i^2(\delta_0) - \varepsilon_i^2(\delta_1)] \\ &= \frac{1}{2\sigma_\varepsilon^2} \sum_{i=1}^t [\varepsilon^2(Y_i, X_i, \delta_0) - \varepsilon^2(Y_i, X_i, \delta_1)] \end{aligned} \quad (3.8)$$

Desenvolvendo  $\varepsilon_i^2 = \varepsilon^2(Y_i, X_i, \delta)$  em torno de  $\delta_0$ , sendo  $\eta = (\delta_1 - \delta_0)$  e  $d_i = -\frac{\partial \varepsilon_i}{\partial \delta} \Big|_{\delta=\delta_0}$  tem-se:

$$\begin{aligned}
S_t &= \frac{1}{2\sigma_\varepsilon^2} \sum_{i=1}^t [2\eta\varepsilon_i(\delta_0)d_i(\delta_0) - \eta^2 d_i^2(\delta_0)] \\
&= \frac{\eta}{\sigma_\varepsilon^2} \sum_{i=1}^t \left[ \varepsilon_i(\delta_0)d_i(\delta_0) - \frac{\eta}{2} d_i^2(\delta_0) \right] \\
&= \frac{\eta}{\sigma_\varepsilon^2} \sum_{i=1}^t q_i
\end{aligned} \tag{3.9}$$

A quantidade

$$CS_t = \sum_{i=1}^t q_i \tag{3.10}$$

é a *cumulative score* associada a um parâmetro cujo valor é  $\delta = \delta_0$  e  $d_i$  é o detector. O detector tem como objectivo medir a taxa de alteração instantânea no modelo de discrepância quando ocorre um sinal. Box e Luceño (1997) e Box *et. al* (2009) comparam o papel do detector com um sincronizador de rádio devido ao facto de o detector conseguir sincronizar com qualquer padrão de componente semelhante presente nos resíduos. Desta forma, é tipicamente concebido com o mesmo comprimento (*length*) que o sinal antecipado. O termo  $\frac{\eta}{2} d_i^2(\delta_0)$  é o valor em torno do qual é esperado que  $\varepsilon_i(\delta_0)d_i(\delta_0)$  varie, quando não existem alterações no parâmetro. Este último termo é equivalente à estatística de Fisher (Fisher, 1925). Assim, a carta *CUSCORE* tem como objectivo detectar um sinal específico  $f(t)$  presente quando  $\delta \neq \delta_0$ .

A estatística *CUSCORE* é dada pela expressão seguinte

$$\begin{aligned}
CS_t^+ &= \max[0, CS_{t-1}^+ + q_t] \\
CS_t^- &= \min[0, CS_{t-1}^- + q_t]
\end{aligned} \tag{3.11}$$

em que  $CS_{t=0}^+ = CS_{t=0}^- = 0$  e  $CS_t = \max[CS_t^+; CS_t^-]$ . O processo que se pretende monitorizar diz-se fora de controlo estatístico quando os valores de  $CS_t^+$  ou  $CS_t^-$  se encontram fora do intervalo de decisão  $H$ . Segundo Box e Ramírez (1989), este intervalo é obtido como uma função da probabilidade de ocorrência de erro do tipo I,  $\alpha$ , da dimensão de alteração no parâmetro  $\delta = (\delta_1 - \delta_0)$  e da variância dos valores de  $\varepsilon_t$ :

$$H = \frac{\sigma_\varepsilon^2 \ln(1/\alpha)}{\delta} \tag{3.12}$$

Para modelos simples, é possível desenvolver os limites de controlo através da estimação directa do desvio padrão da estatística *CUSCORE* ao passo que, para modelos complexos é recomendável recorrer à simulação a fim de avaliar o *ARL* associado a determinadas condições que estabelecem o processo fora de controlo estatístico (Nembhard, 2006). Tal como outros autores, Matos (2005) recorreu à simulação, através do *software* MATLAB, para avaliar o desempenho das cartas de controlo perante alterações na média do processo. Na presente dissertação este passo também foi concretizado ao recorrer ao mesmo *software*.

### 3.2 Detecção de Sinais em Ruído Branco

Tal como as cartas de Shewhart, *EWMA* e *CUSUM*, as cartas *CUSCORE* podem ser utilizadas para detectar alterações em ruído branco, como referido anteriormente. O modelo descrito pela Equação (3.1) pode reduzir-se a  $Y_t = T + \varepsilon_{t0}$ , quando os parâmetros  $\phi$  e  $\theta$  são estabelecidos como nulos. Note-se, assim, que cada resíduo,  $\varepsilon_{t0}$ , não é mais que a diferença entre o valor de *output*,  $Y_t$ , e o valor alvo,  $T$ . Na ausência de sinais, o resultado é representativo de uma sequência de ruído branco. Por outro lado, na presença de sinais, o modelo será:

$$Y_t = T + \varepsilon_t + \delta f(t) \quad (3.13)$$

que, em termos de ruído branco, pode ser descrito como:

$$\varepsilon_t = Y_t - T - \delta f(t) \quad (3.14)$$

A forma do detector e da estatística *CUSCORE* depende da forma do sinal.

As cartas de Shewhart detectam com maior eficácia sinais do tipo salto, expressos pela seguinte expressão:

$$f_t = \begin{cases} 0, & t \neq t_0 \\ 1, & t = t_0 \end{cases} \quad (3.15)$$

Atendendo ao modelo descrito em (2.22), o detector para sinais do tipo salto é dado por:

$$d_t = -\left. \frac{\partial \varepsilon_t}{\partial \delta} \right|_{\delta=\delta_0} = 1 \quad (3.16)$$

Pelas Equações descritas em (3.9), (3.10), (3.14) e (3.16) e atendendo que para um sinal do tipo salto o detector do sinal é válido para um instante de tempo  $t$ , conclui-se que a estatística *CUSCORE* é dada por:

$$CS_t = \sum_{i=1}^t \varepsilon_{i0} d_i = \varepsilon_{t0} \quad (3.17)$$

Esta estatística representa o resíduo “actual”, tal como as cartas de Shewhart preconizam. Ma *et al.* (2011) apresentam um método eficaz na detecção de sinais do tipo salto em processos industriais.

A carta *EWMA* foi concebida para detectar sinais do tipo exponenciais de parâmetro  $\delta$ . Este tipo de sinal é expresso por:

$$f(t) = \begin{cases} 1 + \delta_{t-1} + \delta_{t-2}^2 + \delta_{t-3}^3 + \dots, & t \leq t_0 \\ 0, & t > t_0 \end{cases} \quad (3.18)$$

Atendendo ao modelo descrito em (3.14), o detector para sinais do tipo exponencial é dado por:

$$d_t = -\frac{\partial \varepsilon_t}{\partial \delta} \Big|_{\delta=\delta_0} = 1 + \delta_{t-1} + \delta_{t-2}^2 + \delta_{t-3}^3 + \dots \quad (3.19)$$

Pelas equações descritas em (3.9), (3.10), (3.14) e (3.19) a estatística *CUSCORE* é dada por:

$$CS_t = \sum_{i=1}^t \varepsilon_{i0} d_i = \varepsilon_{t0} + \delta \varepsilon_{t0-1} + \delta^2 \varepsilon_{t0-2} + \delta^3 \varepsilon_{t0-3} + \dots \quad (3.20)$$

Neste caso específico, a estatística *CUSCORE* refere-se à soma dos resíduos “actual” e “anteriores”, aplicando um peso exponencial a cada termo do passado, tal como a carta *EWMA*.

A carta de somas acumuladas ou *CUSUM* pode detectar sinais do tipo degrau na alteração de média. Este tipo de sinal é dado por:

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t < t_0 \\ 1, & t \geq t_0 \end{cases} \quad (3.21)$$

Nesta situação, o detector é idêntico ao caso de um sinal do tipo salto (Equação (3.16)). No entanto, o detector é aplicado em todos os instantes de tempo, ao contrário do detector para o sinal do tipo salto. Assim, a estatística *CUSCORE* é dada por:

$$CS_t = \sum_{i=1}^t \varepsilon_{i0} \quad (3.22)$$

Esta estatística *CUSCORE* corresponde ao conceito preconizado pela carta *CUSUM* uma vez que, na expressão anterior, são somados todos os resíduos.

Um sinal temporário do tipo salto (*bump signal*), que dure  $b$  unidades de tempo, expressa-se pela seguinte equação:

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t \notin [t_{0-b+1}; t_0] \\ 1, & t \in [t_{0-b+1}; t_0] \end{cases} \quad (3.23)$$

O detector é aplicado durante as  $b$  unidades de tempo que o sinal permanecer no ruído branco, sendo que a estatística *CUSCORE*, equivalente a uma média móvel aritmética (*AMA*), é dada por:

$$CS_t = \sum_{i=1}^t \varepsilon_{i0-b-1} \quad (3.24)$$

Um sinal do tipo rampa que possa ocorrer num instante de tempo  $t_{0-r}$ , onde  $r$  representa a duração do sinal cujo valor final seja  $m$ , é dado por:

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t \notin [t_{0-r}; t_0] \\ \frac{m}{r}t, & t \in [t_{0-r}; t_0] \end{cases} \quad (3.25)$$

Para este tipo de sinal o detector é dado pela seguinte expressão:

$$d_t = -\left. \frac{\partial \varepsilon_t}{\partial \delta} \right|_{\delta=\delta_0} = t \quad (3.26)$$

A estatística *CUSCORE* será então:

$$CS_t = \sum_{i=1}^t \varepsilon_{i0} d_i = \sum_{i=1}^t \varepsilon_{i0} t = \sum_{i=1}^t (Y_t - T)t \quad (3.27)$$

### 3.3 Importância para Processos Auto-Correlacionados

No que concerne a séries temporais cujos dados exibam auto-correlação, a estatística *CUSCORE* veio gerar um contributo muito importante. Este é evidente em estudos desenvolvidos por Ramirez (1998), Luceño (1999), Runger e Testik (2003), Luceño (2004), Chen (2006), Han e Tsung (2006), Changpetch e Nembhard (2008). Em Luceño (1999) e Luceño (2004) podem constatar-se métodos que avaliam medidas de desempenho, como o *ARL* e o *SDRL*, sob controlo e fora de controlo estatístico, a fim de se detectarem alterações na média do processo.

Luceño (2004) mostra que é possível traduzir para a série filtrada de ruído branco, a perturbação que ocorre na série original, isto é, a informação associada à dinâmica do processo é aproveitada. Assim, o desempenho da carta depende do instante de tempo em que esta é iniciada, segundo Shu *et al.* (2002). Estes autores sugerem a utilização conjunta da carta *CUSCORE* e de uma carta de alarme: a carta *CUSUM* de resíduos (*Trigger CUSUMres*). A carta de alarme tem como objectivo alertar para a possibilidade de ocorrer uma alteração na média do processo e não detectar a alteração em si. A estatística *CUSUM* pode ser dada pela seguinte expressão:

$$C_t = \max[C_{t-1} + \varepsilon_t + k], \quad t = 1, 2, \dots, t_{\text{alarme}} \quad (3.28)$$

$\varepsilon_t$  corresponde aos valores da série de ruído e  $k$  corresponde a um valor de referência que deve ser idêntico em ambas as cartas. Luceño (2004) sugere que o valor de referência corresponda a metade do valor da dimensão da perturbação média, tal como referido por Pereira e Requeijo (2012). Para a definição do intervalo de decisão ( $h$ ) da carta *CUSUM* há que ter em consideração um valor de *ARL*, sob controlo estatístico, relativamente baixo em relação ao *ARL*, sob controlo estatístico, utilizado para definir o intervalo de decisão para a carta *CUSCORE*. No instante de tempo em que um qualquer valor de  $C_t$  ultrapassar os limites definidos por  $h$ , a possibilidade de existir uma alteração da média do processo é considerada. Assim, posteriormente, a carta *CUSCORE* tem início no instante em que se registou o último zero da carta *CUSUM*.

### 3.4 Algumas Desvantagens

Tal como referido no início desta secção, as cartas *CUSCORE* representam um meio eficaz na detecção de sinais quando estes são esperados, ou seja, característicos de um processo produtivo. No caso de processos com dados auto-correlacionados, a sensibilidade da carta *CUSCORE* em detectar sinais é vantajosa em relação aos métodos tradicionais devido à sincronização entre os resíduos do processo e o detector (Box *et al.*, 2009). No entanto, o processo de sincronização é bem-sucedido apenas quando é conhecido o momento em que o sinal irá ocorrer. Luceño (2004) proporciona o exemplo de quando um novo lote dá entrada no processo. Todavia, tal como Changpetch e Nembhard (2008) mencionam, em termos práticos, poderá ser necessário detectar um sinal uma vez que o seu momento de ocorrência é desconhecido. Seria impraticável a utilização da carta quando se dá esta situação. Este é o principal inconveniente da utilização da carta *CUSCORE* e foi levantado por determinados autores como Shu *et al.* (2002), Runger e Testik (2003) e Nembhard e Valverde-Ventura (2007). Para ultrapassar esta dificuldade autores como Nembhard e Changpetch (2007) e Changpetch e Nembhard (2007) apresentam duas abordagens distintas. A primeira abordagem relaciona-se com a reinicialização da estatística *CUSCORE* a um ciclo prescrito; a segunda abordagem considera os períodos de tempo mais recentes para calcular a estatística *CUSCORE*, ou seja, trata-se da utilização de cartas *CUSCORE* periódicas. Estas foram concebidas para modelos de séries temporais sazonais.

Na presente dissertação é utilizada a carta *CUSCORE* em conjunto com a carta de gatilho *CUSUM* de resíduos. Esta última proporciona uma maior eficácia à carta *CUSCORE* na detecção de sinais. Posteriormente serão retiradas conclusões quanto à sua eficácia.



# METODOLOGIA, APLICAÇÃO & RESULTADOS

---

## **4. Metodologia**

Este capítulo tem como objectivo propor uma metodologia para a realização do estudo comparativo entre três cartas de controlo univariadas e para aplicar a processos de dados auto-correlacionados,  $AR(1)$ . Também será realizada uma análise de sensibilidade das cartas face a alterações no parâmetro auto-regressivo. De modo a facilitar a leitura e a compreensão dos passos sugeridos por esta metodologia, ir-se-á recorrer a fluxogramas e a figuras esquemáticas representativas da informação proveniente da primeira parte desta dissertação (segundo e terceiro capítulos).

### 4.1 Metodologia Proposta

Salienta-se que os objectivos deste trabalho são o desenvolvimento de uma metodologia que faculte uma comparação entre o comportamento das cartas de controlo univariadas *CUSUMres* e *Triggered CUSCORE* e *CUSCORE*, quando ocorre um sinal do tipo salto, e o estabelecimento de um intervalo de valores do parâmetro do modelo auto-regressivo de primeira ordem,  $[\phi^-, \phi^+]$ , para o qual os valores de *ARL* das cartas não apresentam diferenças significativas no seu valor, quando o processo se encontra sob controlo estatístico.

O estudo comparativo é realizado através da construção de modelos, associados ao funcionamento das cartas, à introdução de sinais no modelo e à alteração do parâmetro auto-regressivo, que são simulados no *software* MATLAB, num computador de 3ª geração do processador Intel® Core™ i7-3630QM e com um disco rígido de 500 GB. As medidas de desempenho utilizadas para comparar o desempenho das cartas de controlo são o *ARL* e *SDRL*.

Inicialmente, e a fim de a comparar as cartas de modo equivalente, determinaram-se os seus limites de controlo (*CUSUMres* e *CUSUMres Triggered CUSCORE* e *CUSCORE*), de maneira que os valores de  $ARL_{Em\ Controlo}$  fossem equivalentes a 370. Este valor pressupõe que a probabilidade de uma observação exceder os limites de controlo,  $\alpha$ , equivale a 0,27% e que, em média, de 370 em 370 observações irá ocorrer uma situação de falso alarme.

Uma vez que a carta *CUSUMres Triggered CUSCORE* utiliza duas cartas, determinou-se, em primeiro lugar, o limite de controlo da carta *CUSUMres* de gatilho. O seu valor de  $ARL_{Em\ Controlo}$  escolhido (de valor 39) é consideravelmente mais reduzido que o da carta global uma vez que a carta de gatilho tem como função alertar para uma alteração potencial no processo. O valor 39 foi o conseguido para que na carta global o valor de *ARL* fosse 370, como referido. Sendo o *ARL* da carta gatilho mais reduzido, a detecção de um sinal potencial é mais rápida. Poderia colocar-se a hipótese de se aumentar o número de falsos alarmes mas há que ter em atenção que a carta de gatilho não serve para sinalizar uma alteração, mas sim para inicializar a carta *CUSCORE*, aproximando o seu instante de tempo de iniciação ao instante de tempo em que ocorre uma alteração para que esta seja detectada pela carta *CUSCORE*.

Para se conseguir os resultados associados aos *ARL* das cartas, foi necessário algum esforço computacional e ajustar o número de ciclos (*C*) e de comprimento de cada ciclo, ou série, (*N*). Estas condições iniciais das simulações serão exploradas no Capítulo 5.

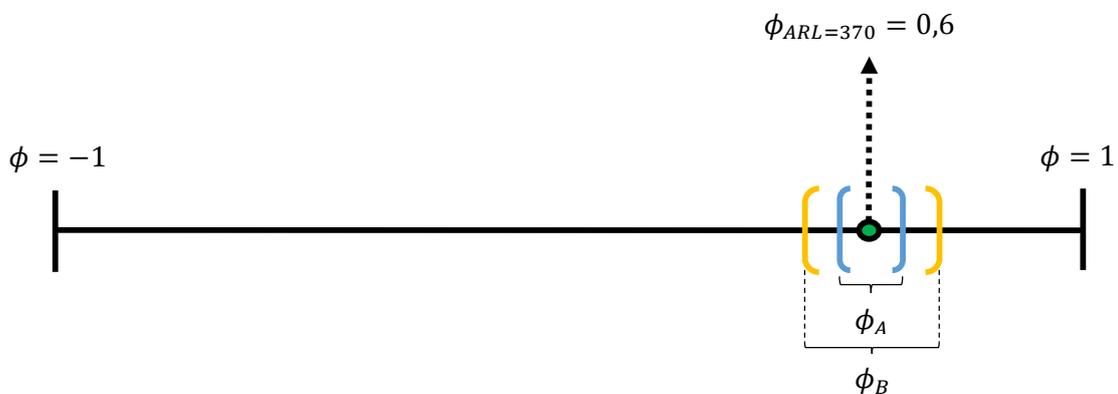
Estas informações associadas às condições iniciais das cartas são essenciais para se proceder à sua comparação. Após a obtenção destas informações, já se está em condições de se proceder à análise do comportamento das cartas quando ocorre a perturbação que se pretende analisar.

Para a avaliação do desempenho das cartas face a uma alteração na média, devido a um sinal do tipo salto, considerou-se uma alteração variável de dimensão mínima 0,5 e máxima 3, incrementada em 0,5 “unidades de alteração”, ou seja,  $0,5\delta$ .

Em relação à análise de sensibilidade do parâmetro auto-regressivo, inicialmente foram estabelecidos dois intervalos de  $\phi$ , em torno do valor  $ARL$  equivalente a 370:

- Intervalo  $\phi_A$ : apresenta diferenças reduzidas nos valores de  $ARL$ s correspondentes aos extremos do intervalo;
- Intervalo  $\phi_B$ : apresenta diferenças evidentes nos valores de  $ARL$ s correspondentes aos extremos do intervalo.

Para cada um dos valores extremos dos intervalos estabelecidos, avaliou-se o desempenho das cartas de controlo a alterações na média do tipo salto através de incrementos de  $0,5\phi$ , para uma dimensão de alteração mínima de 0,5 e máxima 3. A Figura 4.1 ajuda na compreensão dos intervalos estabelecidos (de notar que a figura não se encontra na escala correcta, esta é meramente ilustrativa):



**Figura 4.1** Representação dos intervalos de  $\phi$  estudados

Posteriormente realizou-se um teste de hipóteses, para um nível de confiança de 95%, de modo a se averiguar qual o intervalo para o qual os valores de  $ARL$  não são significativamente diferentes entre si, para cada carta. Como neste intervalo está compreendido o valor de  $ARL$  igual a 370, caso os  $ARL$ s dos extremos não sejam significativamente diferentes entre si, também não serão de 370. Através da regressão polinomial, recorreu-se à modelação dos modelos que se ajustam aos valores definidos pela variação de  $ARL$  segundo os valores de  $\phi$ , para auxiliar nos cálculos destas variáveis. Através desta técnica estatística obtém-se resultados mais rapidamente que por simulação.

Na Figura 4.2 encontra-se uma síntese representativa das etapas seguidas no âmbito da metodologia.

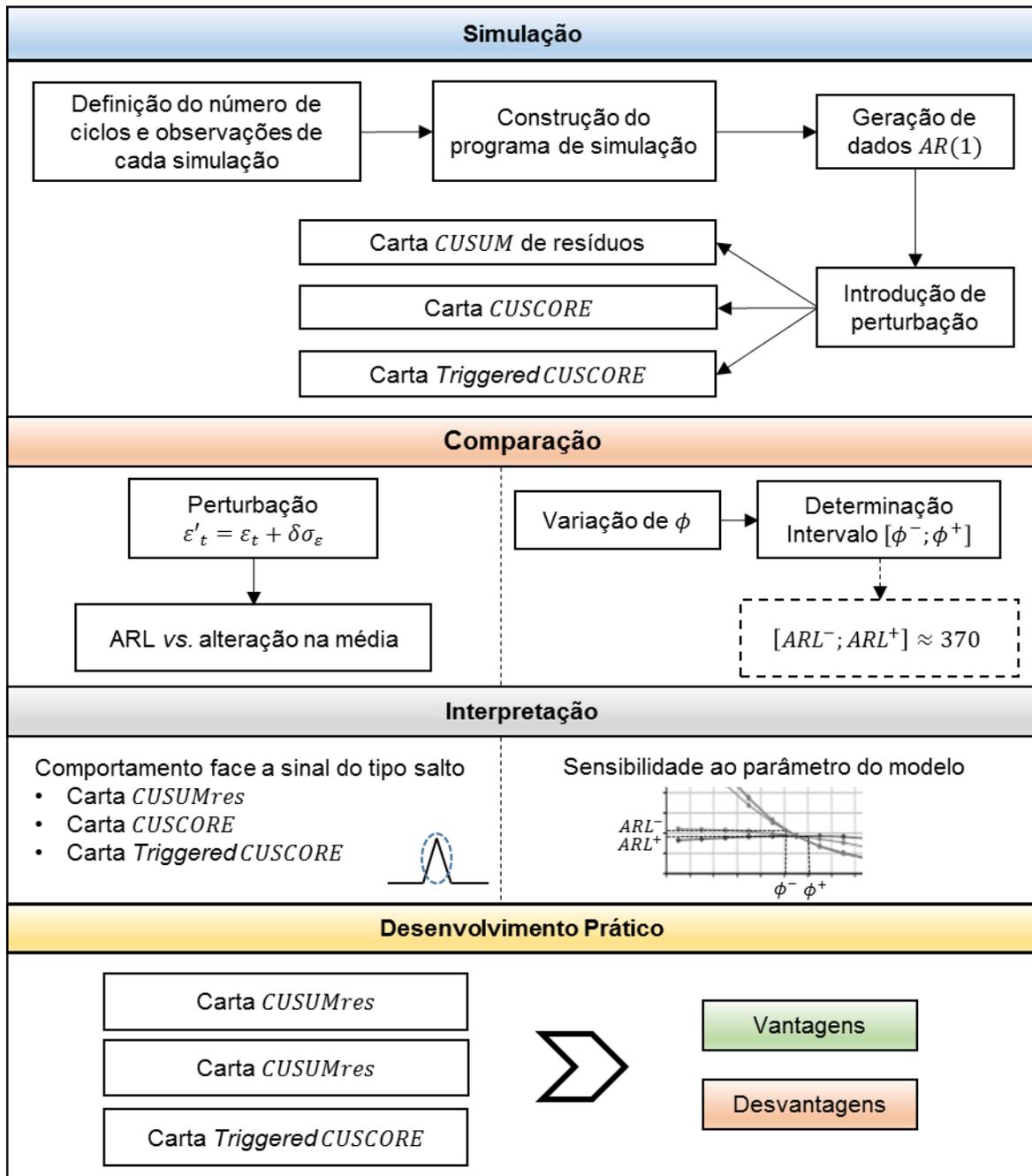


Figura 4.2 Síntese das etapas da metodologia

## 4.2 Construção do Programa de Simulação

Os modelos esquematizados nas figuras seguintes indicam as etapas construídas nos programas de simulação que, posteriormente, foram reproduzidos no *software* MATLAB.

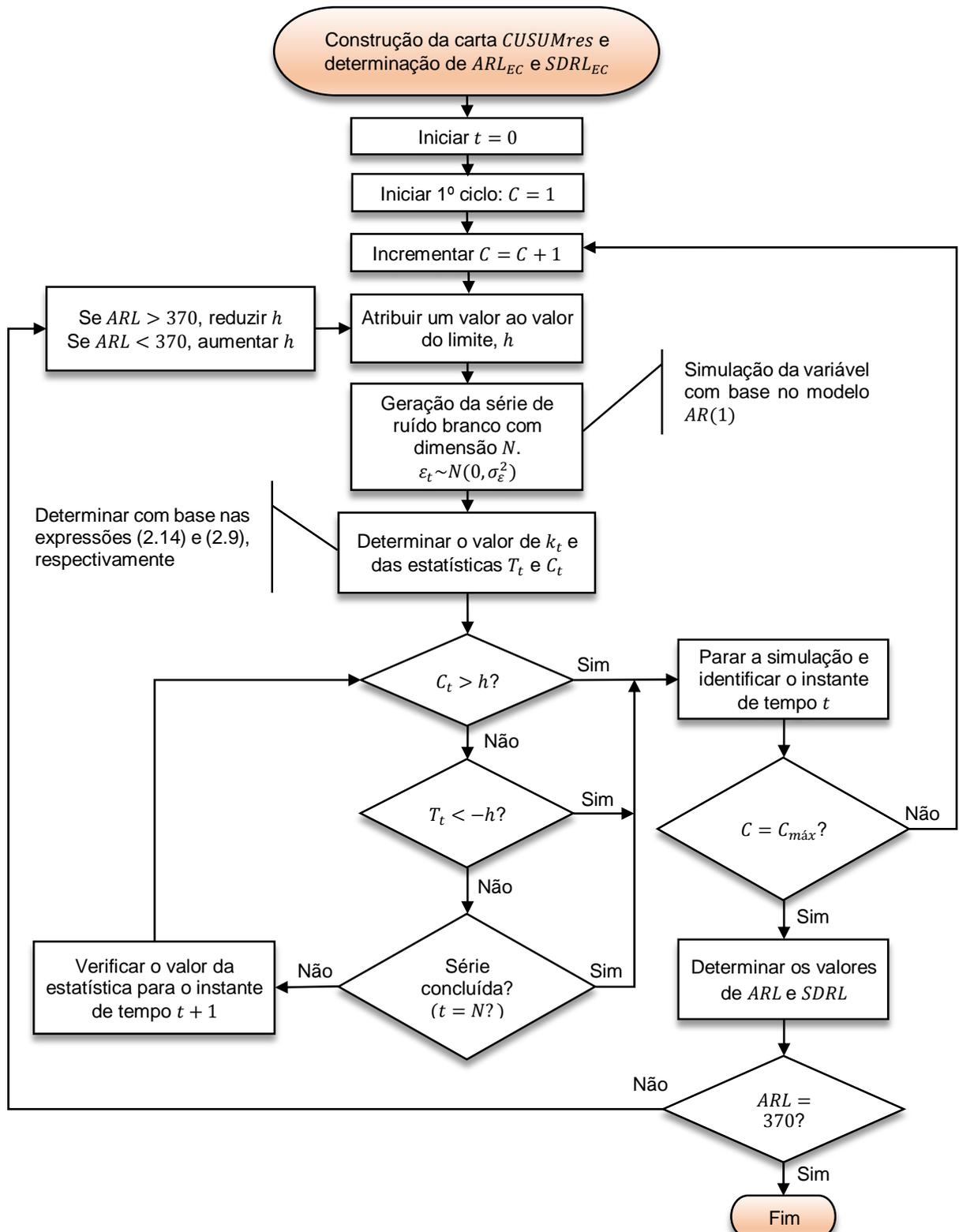


Figura 4.3 Construção da carta  $CUSUM_{res}$  e determinação do  $ARL_{EC}$  e  $SDRL_{EC}$

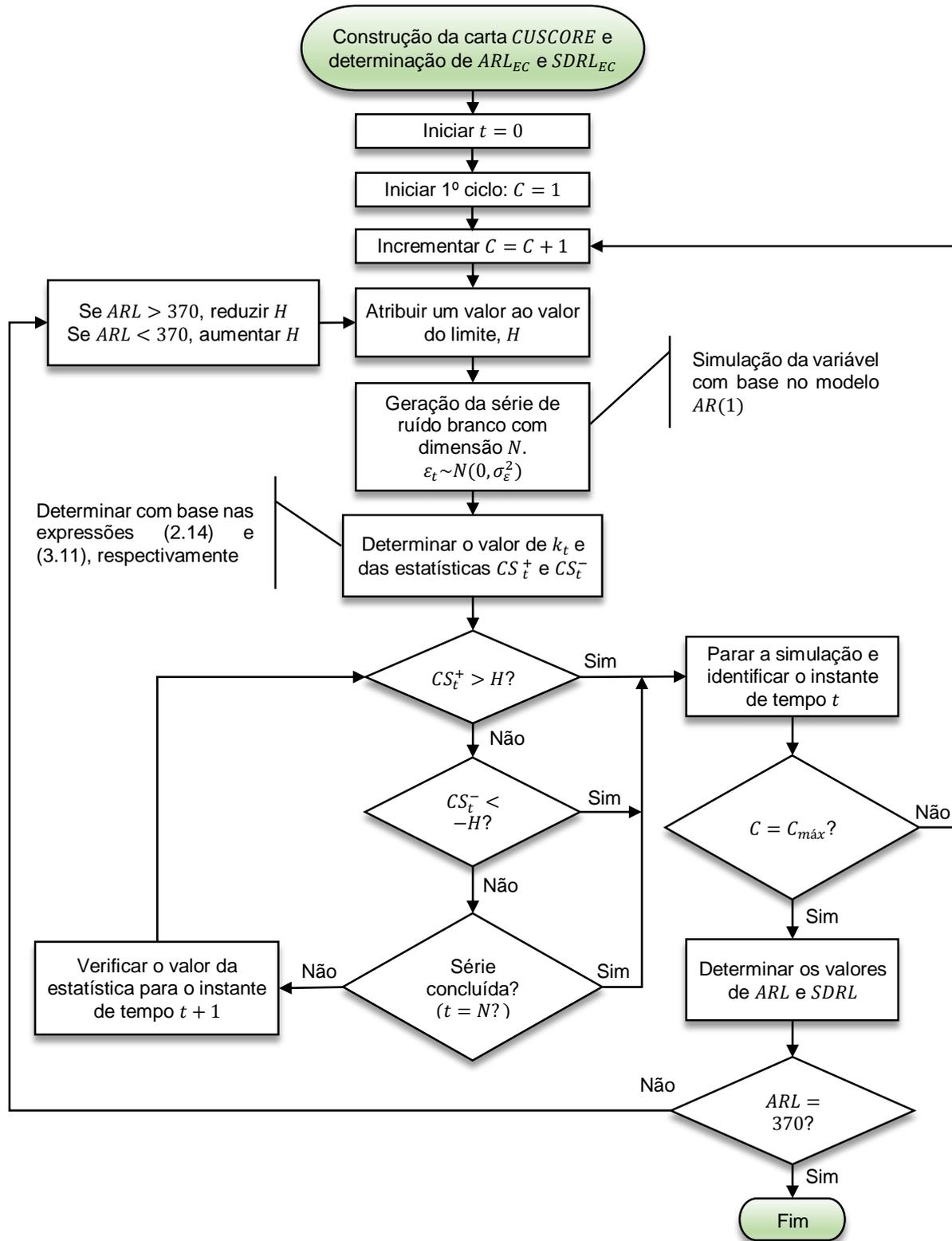
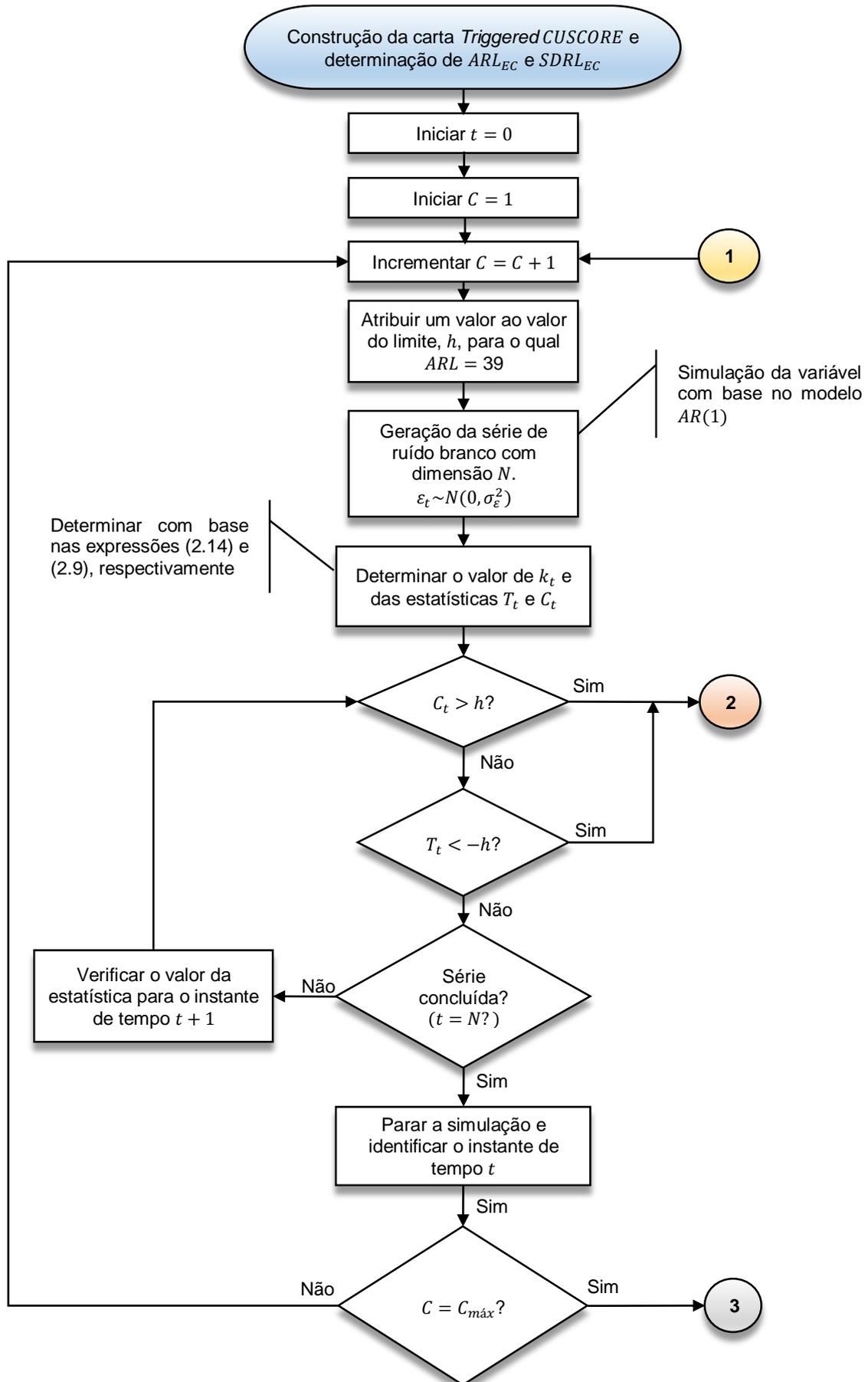
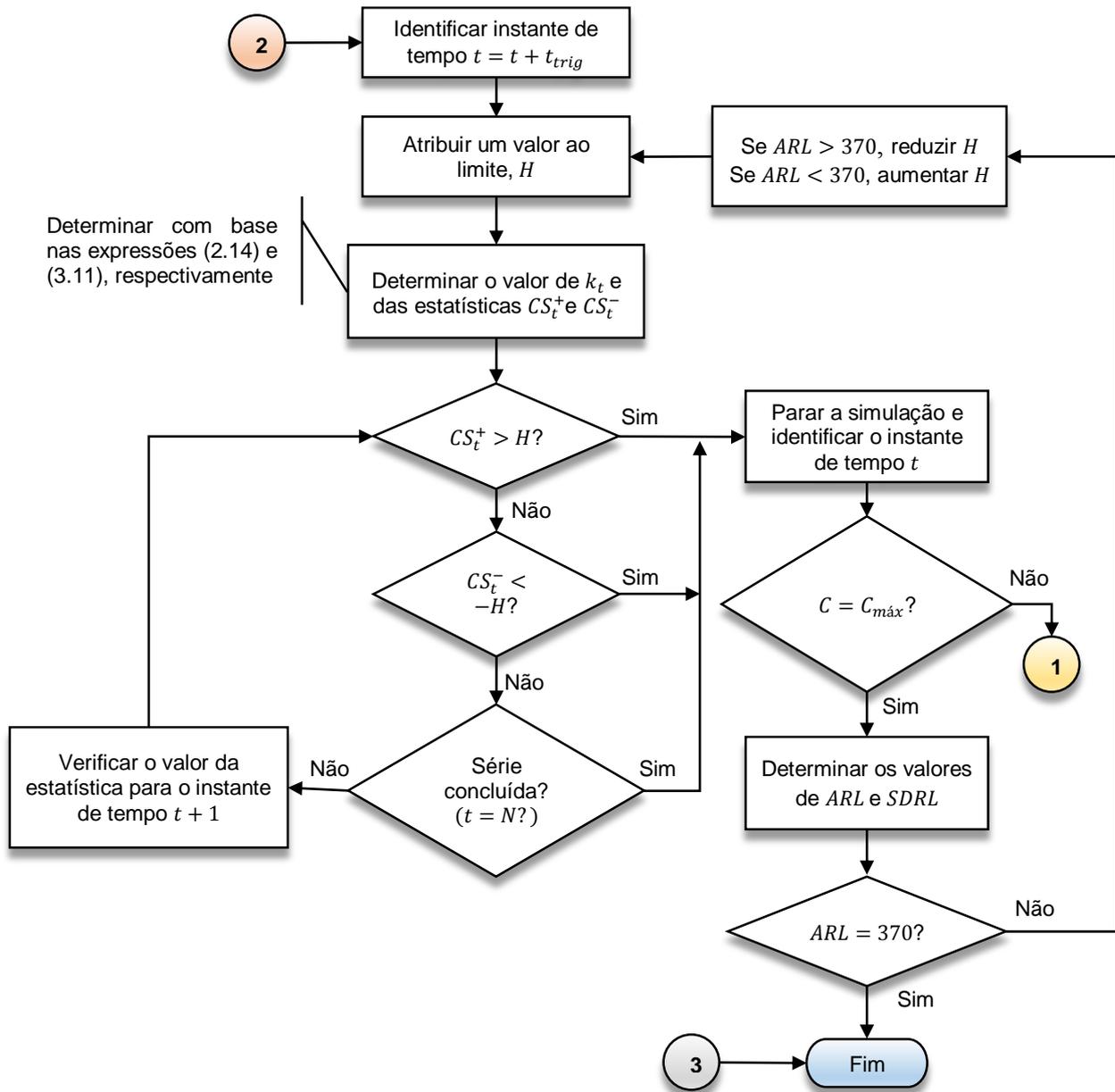


Figura 4.4 Construção da carta CUSCORE e determinação do ARL<sub>EC</sub> e SDRL<sub>EC</sub>





**Figura 4.5** Construção da carta *Triggered CUSCORE* e determinação do  $ARL_{EC}$  e  $SDRL_{EC}$

As Figuras 4.3, 4.4 e 4.5 referem-se, respectivamente à construção das cartas *CUSUMres*, *CUSCORE* e *CUSUMres Triggered CUSCORE* e à determinação dos seus  $ARL$  e  $SDRL$  em controlo. De notar que no programa esquematizado pela Figura 4.5, o limite de controlo da carta de gatilho foi determinado a partir do modelo representado no esquema da Figura 4.3, isto é, determinou-se  $h$ , com base num  $ARL$  equivalente a 39.

A Figura 4.6 refere-se à construção do modelo de simulação para quando existe alguma alteração no parâmetro médio das cartas e a Figura 4.7 para quando existe uma alteração no parâmetro do modelo auto-regressivo de primeira ordem.

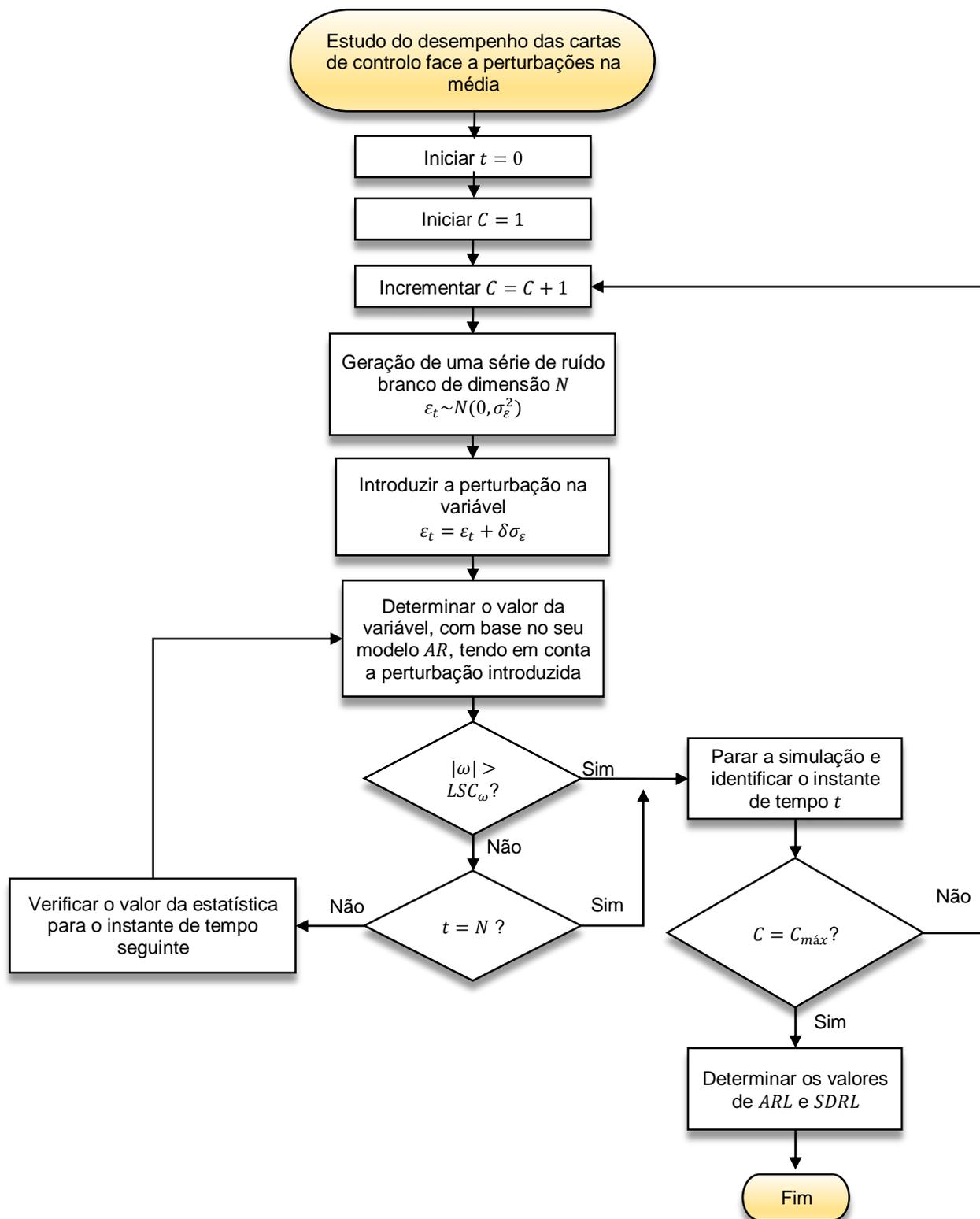
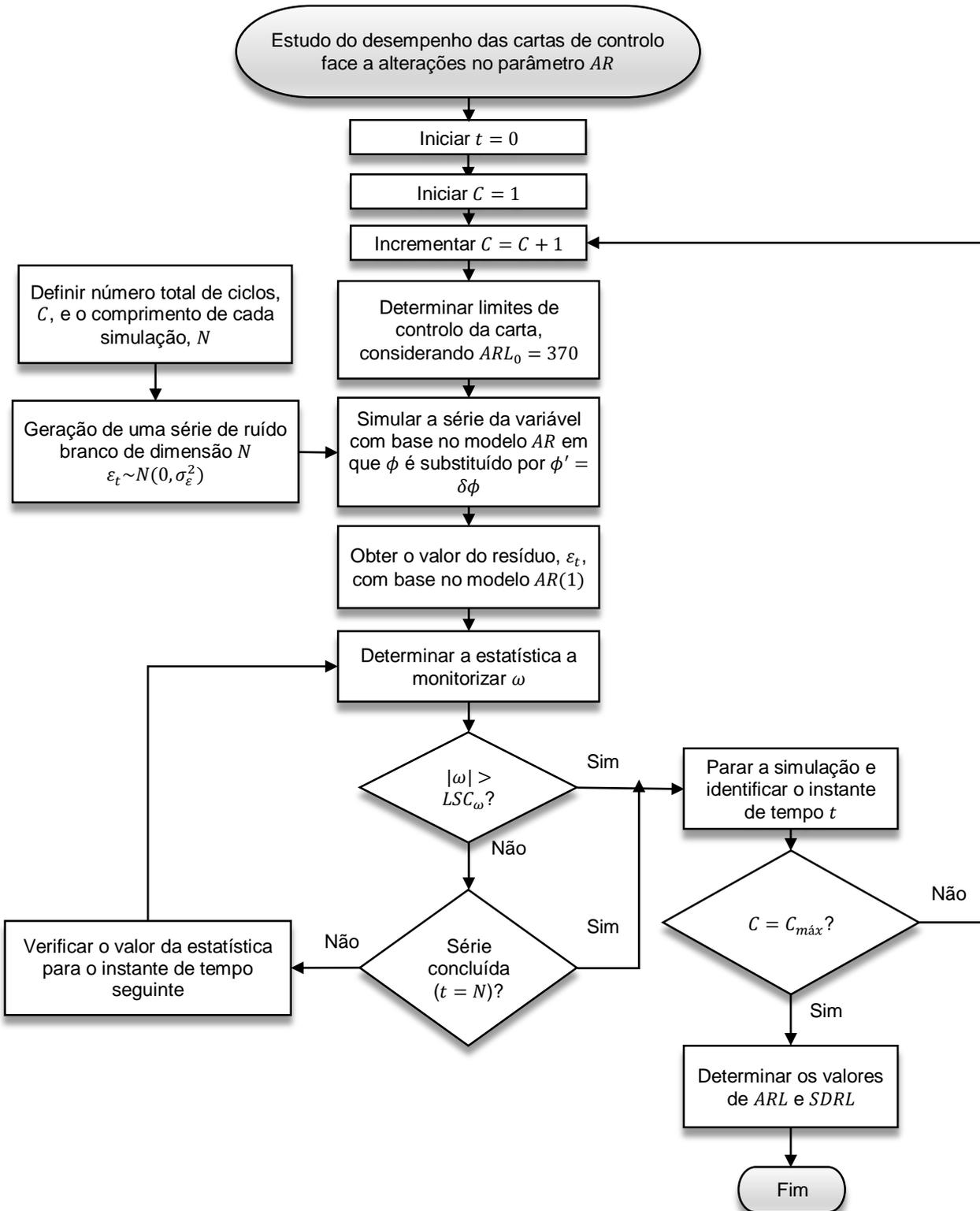


Figura 4.6 Estudo do desempenho das cartas de controlo face a alterações no parâmetro médio



**Figura 4.7** Estudo do desempenho das cartas de controlo face a alterações no parâmetro auto-regressivo

Uma vez que se pretende extrair resultados fidedignos das simulações para uma análise posterior com qualidade, o número de ciclos e o comprimento de cada ciclo são *inputs* fundamentais dos modelos, pelo que se teve algum cuidado na escolha dos mesmos durante as simulações.

### 4.3 Comparação do Desempenho das Cartas de Controlo

A escolha da comparação das cartas *CUSUMres*, *CUSCORE* e *Triggered CUSCORE*, como mencionado anteriormente, não foi aleatória. Uma vez que Matos (2005) demonstrou que a carta *CUSCORE* actua melhor conjuntamente com a carta *CUSUMres* de gatilho para pequenas variações na média do processo ( $\delta \leq 1$ ) face às cartas *EWMA* de resíduos, *MCEWMA* e *EWMAS*, pretende-se analisar então se é também mais eficaz que a carta *CUSUMres*.

A medida de desempenho tipicamente utilizada para comparar o desempenho das cartas de controlo é o *ARL*. Neste estudo, além da primeira medida de desempenho mencionada, também é considerado o *SDRL*. A grande maioria dos estudos não recorre ao estudo deste resultado. No entanto, o seu estudo pode revelar alguns aspectos fundamentais no âmbito da interpretação das cartas de controlo. Note-se o seguinte exemplo: uma carta de controlo poderá apresentar um valor de *ARL* relativamente baixo; todavia, se o seu *SDRL* for superior em relação às restantes cartas a comparar, significa que existe muita variabilidade.

Também se poderia calcular o *ATS* mas esta medida é meramente indicativa do tempo médio em que poderá ocorrer uma situação fora de controlo. Esta também se poderá revelar útil no controlo estatístico do processo.

A interpretação dos resultados provenientes destas medidas de desempenho é a base de todo o estudo comparativo das cartas. É o que permite retirar conclusões que suportam a tomada de decisão no momento da escolha da melhor carta, quando um processo é sujeito a um determinado tipo de perturbação.

O estudo das cartas face à alteração do parâmetro do processo auto-regressivo de primeira ordem tem como objectivo verificar de que forma as cartas de controlo reagem à ocorrência de alterações pequenas a moderadas. O valor considerado de  $\phi$  é 0,6 e para a reprodução deste estudo via simulação considerou-se o esquema representado na Figura 4.7. Antes de se proceder à reprodução das simulações, há que ter em consideração a gama de variação admissível do parâmetro.

Tal como para o estudo das cartas face a alterações no parâmetro médio, as medidas de desempenho a analisar para a análise de sensibilidade do parâmetro auto-regressivo de primeira ordem são o *ARL* e o *SDRL*.

#### 4.4 Interpretação das Cartas de Controlo

A fim de se realizar uma boa análise comparativa, a interpretação correcta das cartas de controlo é um aspecto fundamental. Desta forma, é necessário simplificar a detecção de situações fora de controlo, tal como uma observação fora dos limites de controlo. As etapas principais para a interpretação das cartas de controlo revêem-se nos seguintes pontos:

1. Determinação dos limites de controlo: cálculo dos limites  $h$  e  $H$ , com base num  $ARL_{Em\ Controlo}$  equivalente a 370 e tendo em conta o parâmetro definido para o processo  $AR(1)$ ;
2. Comparação do desempenho das cartas: cálculo do valor das medidas de desempenho consideradas para cada carta, atendendo os níveis da dimensão da alteração da média,  $\delta$ .

Em situações reais, quando se detectam observações fora dos limites de controlo, estas não podem ser eliminadas visto que o processo se debate com dados auto-correlacionados. Estas devem ser substituídas pelos valores que mais se aproximam dos valores que se esperam obter, isto é, os valores são substituídos pelos valores estimados, considerando o modelo  $AR(1)$  (Equação (5.1)). Posto isto, obtém-se uma série nova de valores.

No entanto, existe um detalhe muito importante que se deve ter em consideração quando se ajusta um conjunto de dados a uma série cronológica: não existem evidências que demonstrem que o modelo ajustado aos dados se ajuste igualmente bem às observações futuras. Por isso, o ponto 2 supramencionado será avaliado também neste trabalho, para diferentes variações do parâmetro auto-regressivo.

#### 4.5 Aplicação Prática

A aplicação prática trata-se da última fase associada à metodologia proposta. O seu objectivo consiste em identificar, segundo a óptica do utilizador, as principais vantagens e desvantagens das cartas de controlo nos cenários identificados nos Capítulos 1 e 4.

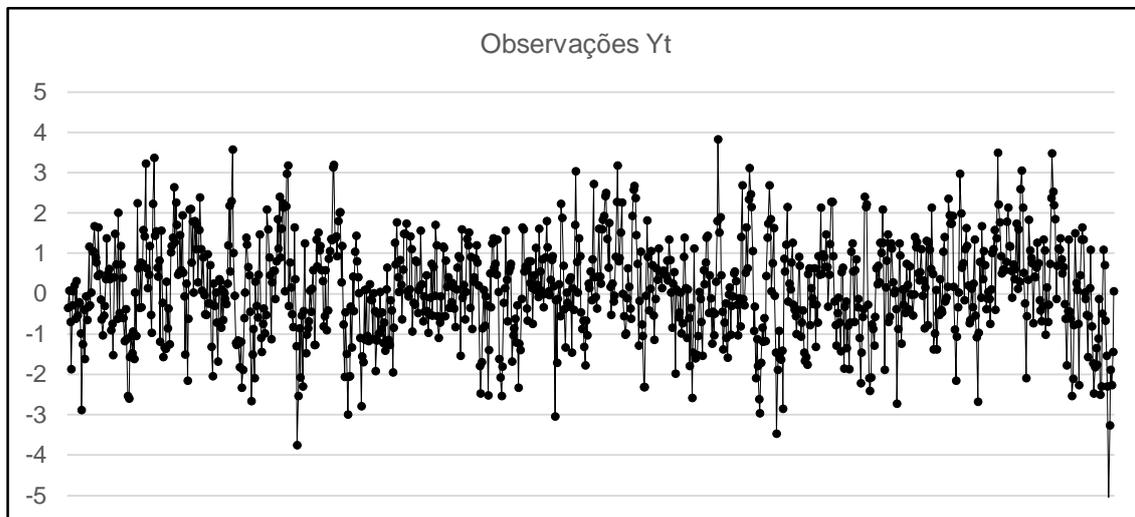
## 5. Desenvolvimento Prático

O presente capítulo consiste em analisar o desempenho das cartas *CUSUMres*, *CUSCORE* e *Triggered CUSCORE*. Este capítulo segue uma ordem de etapas nas quais se destacam os pontos seguidamente descritos. No primeiro é apresentado o modelo matemático a estudar para efeitos de simulação e as condições iniciais estabelecidas para as cartas. O segundo ponto debate-se com uma análise do desempenho das três cartas *CUSUMres*, *CUSCORE* e *Triggered CUSCORE*, através das medidas de desempenho mencionadas, para quando ocorre um sinal do tipo salto no processo. Seguidamente, o terceiro ponto está associado a uma análise de sensibilidade das cartas devido a uma alteração do parâmetro médio. Por fim, no quarto ponto serão apresentadas as vantagens e desvantagens de ambas as cartas em relação aos pontos dois e três.

### 5.1 Apresentação do Processo e das Condições Iniciais das Cartas

Foi considerada uma variável neste estudo segundo um processo auto-regressivo de primeira ordem, *AR(1)*. Para efeitos de simulação considerou-se um parâmetro do processo,  $\phi$ , de valor 0,6, pelo que o processo segue o modelo descrito na seguinte expressão e pode ser visualizado o seu comportamento na Figura 5.1.

$$Y_t = 0,6Y_{t-1} + \varepsilon_t \quad (5.1)$$



**Figura 5.1** Comportamento da variável de estudo  $Y_t$

Como se pode verificar na figura acima, a variável  $Y_t$  apresenta um comportamento estacionário, típico de um modelo auto-regressivo de primeira ordem.

➤ Fase I da Monitorização do Processo

Supondo que se está na Fase I do controlo estatístico deste processo, o objectivo seria de detectar causas especiais de variação de dimensão superior. As cartas mais adequadas a este estudo são

as cartas de Shewhart.

Há que ter em atenção que o processo segue o modelo descrito pela Equação (5.1), ou seja, os dados são auto-correlacionados. Se porventura, na Fase I do processo, a auto-correlação presente nos dados fosse ignorada e caso se aplicasse uma carta de controlo de observações individuais e médias móveis ( $n = 2$ ) ir-se-ia obter as cartas ilustradas pelas Figuras 5.2 e 5.3.

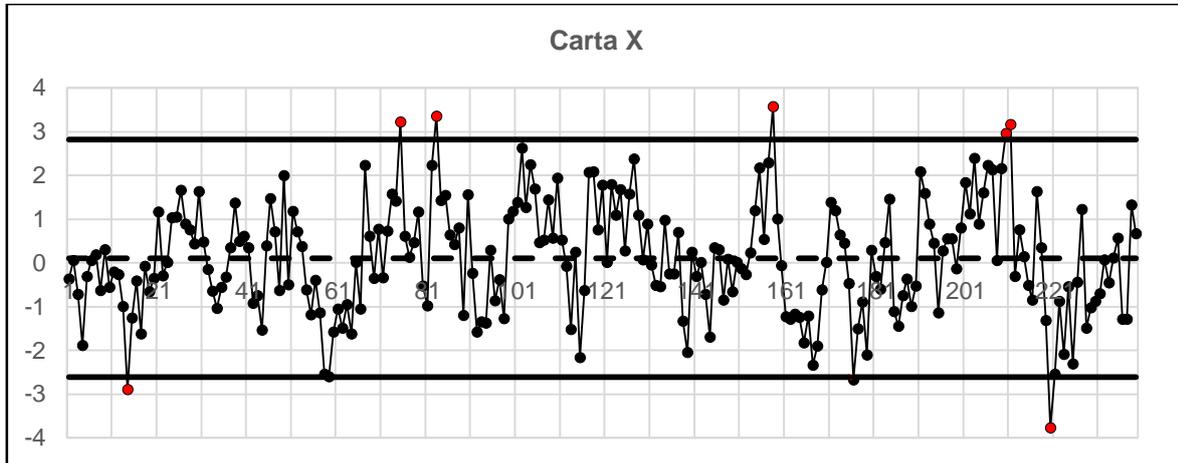


Figura 5.2 Carta de Observações Individuais da variável  $Y_t$

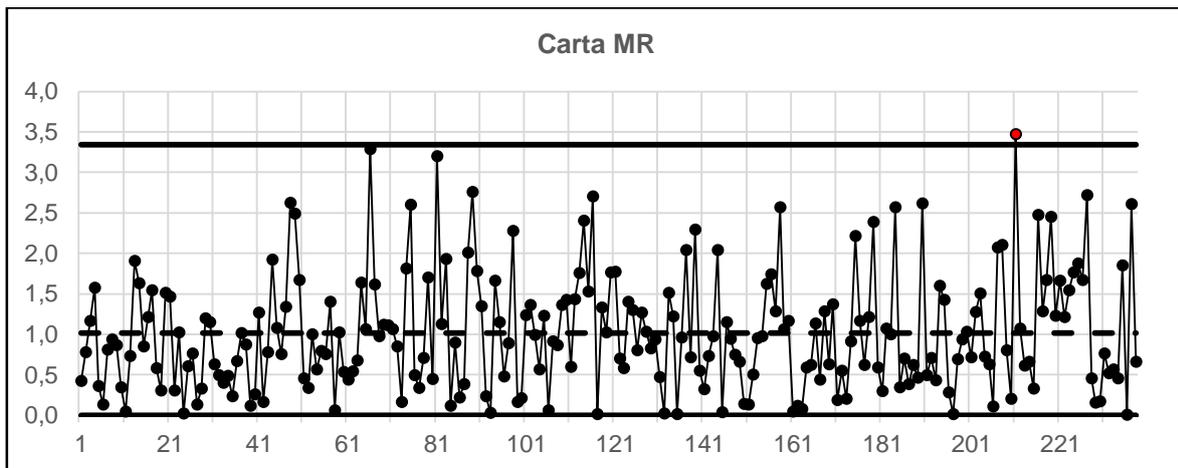


Figura 5.3 Carta de Médias Móveis da variável  $Y_t$

Os limites de controlo para a carta de observações individuais e de médias móveis foram calculados por:

$$\begin{cases} LSC_Y = \bar{Y} + \frac{3\overline{MR}}{d_2} \\ LC_Y = \bar{Y} \\ LIC_Y = \bar{Y} - \frac{3\overline{MR}}{d_2} \end{cases} \quad (5.2)$$

$$\begin{cases} LSC_{MR} = D_4\overline{MR} \\ LC_{MR} = \overline{MR} \\ LIC_{MR} = D_3\overline{MR} \end{cases} \quad (5.3)$$

Como foram utilizadas médias móveis de duas observações, as constantes utilizadas para os cálculos, que se encontram no Anexo III, Figura III.1, foram  $d_2 = 1,128$ ,  $D_3 = 0$  e  $D_4 = 3,267$ .

Como se pode verificar nas Figuras 5.2 e 5.3, existe um número elevado de falsos alarmes (marcadores de preenchimento de cor vermelha). Esta situação vai ao encontro de determinados estudos, referidos no Capítulo 2, como o de Montgomery (2009), em que se refere que, quando um processo é representativo de um modelo auto-regressivo positivo, o número de falsos alarmes é elevado. Assim, neste tipo de processos não é recomendável ignorar a existência de auto-correlação entre as observações, devendo-se proceder à utilização de cartas de resíduos e de médias móveis dos resíduos, por exemplo, como está esquematizado nas Figuras 5.4 e 5.5.

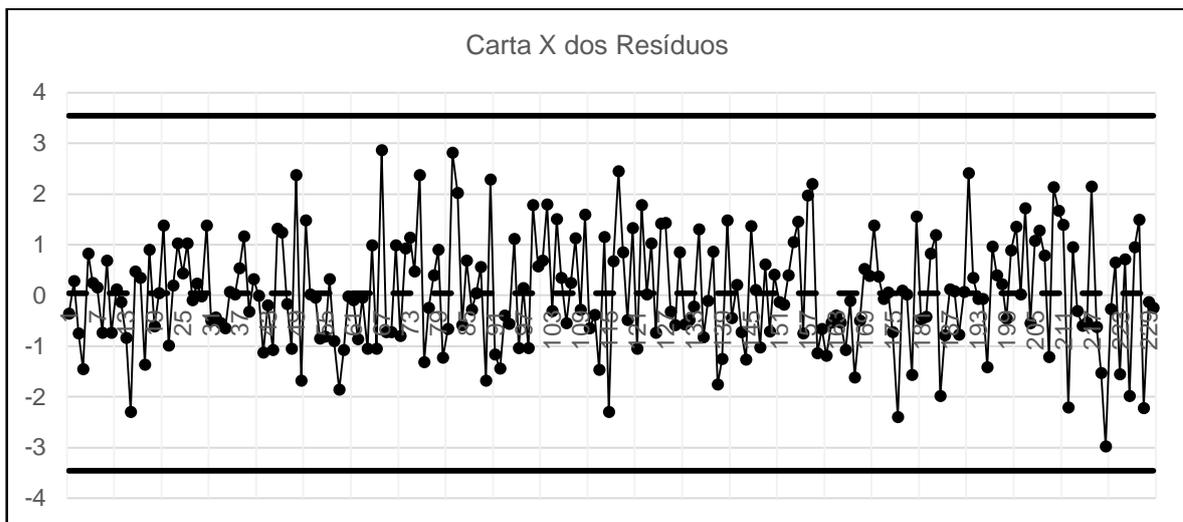


Figura 5.4 Carta de Observações Individuais dos resíduos

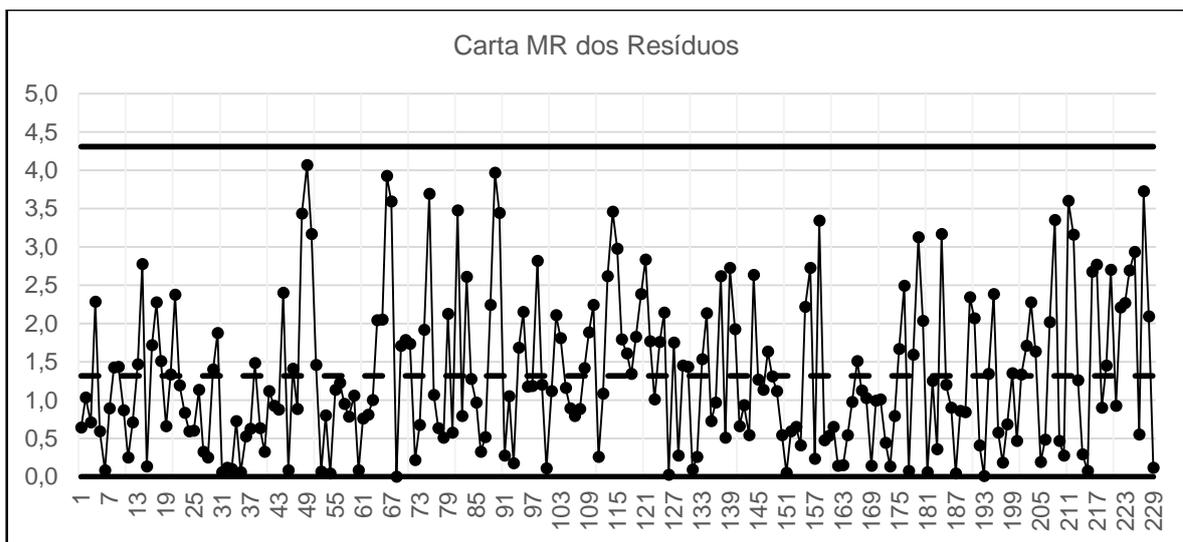


Figura 5.5 Carta de Médias Móveis dos resíduos

Analisando as Figuras 5.4 e 5.5 não se verificam causas especiais de variação. No entanto, caso estas existissem, os seus pontos não poderiam ser eliminados pelo facto de os dados serem auto-correlacionados. Estes deveriam ser substituídos pelos valores que se esperariam obter,

considerando o modelo  $AR(1)$  expresso pela Equação (5.1) e posteriormente obter-se-ia a nova série de valores.

Para este exemplo era expectável que não se verificassem causas especiais de variação, uma vez que as observações foram geradas através de uma série de dados aleatórios que seguem uma distribuição Normal de média nula e desvio padrão unitário, numa folha de cálculo.

➤ Fase II da Monitorização do Processo

Na Fase II do processo já é adequado utilizar, entre outras, as cartas alvo de estudo na presente dissertação. Determinaram-se as medidas de desempenho,  $ARL_{EC}$  e  $SDRL_{EC}$ , das cartas através dos modelos de simulação. Inicialmente foi necessário definir o número de ciclos a efectuar bem como o comprimento de cada ciclo pois estes valores podem comprometer a qualidade dos resultados provenientes da simulação. Para se determinar o número de observações em cada ciclo deve ter-se em consideração os valores de  $ARL_{EC}$  e  $SDRL_{EC}$ , enquanto que em relação ao número de ciclos total, deve ter-se em consideração o tempo associado à concretização de cada ciclo. As simulações foram realizadas para um total de 50 000 ciclos e 4 000 observações por cada ciclo.

Recorreu-se aos esquemas das Figuras 4.2, 4.3 e 4.4 para determinar as medidas de desempenho das cartas  $CUSUM_{res}$ ,  $CUSCORE$  e  $Triggered CUSCORE$ , respectivamente. Os resultados extraídos das simulações estão apresentados na Tabela 5.1. Atendendo que as cartas em estudo são dotadas de um  $ARL_{EC}$  de valor semelhante, analisando a Tabela 5.1, já se está em condições de se avançar à análise comparativa das mesmas.

**Tabela 5.1** Condições e resultados iniciais de simulação das cartas

<b>Cartas</b>	<b><math>CUSUM_{res}</math></b>	<b><math>CUSCORE</math></b>	<b><math>CUSUM_{res}</math> (gatilho)</b>	<b>Triggered <math>CUSCORE</math></b>
<b>Tempo de Simulação (seg)</b>	537,20 (~ 9 minutos)	493,01 (~ 8 minutos)	107,49 (~ 2 minutos)	1039,40 (~ 17 minutos)
<b><math>ARL_{EC}</math></b>	370,660	370,649	38,638	370,082
<b><math>SDLR_{EC}</math></b>	348,820	348,259	41,057	407,160
<b>Limites de Controlo</b>	$h = 9,243$	$H = 3,699$	$h_{trigg} = 4,900$	$H = 3,860$
<b>Nível de Significância, <math>\alpha</math></b>	0,0027	0,0027	0,0200	0,0027

Para a determinação do limite de controlo da carta *CUSCORE* poder-se-ia ter utilizado a expressão definida pela Equação (3.12). No entanto, optou-se por fazê-lo via simulação pois, caso se o estudo se tratasse de um caso real, não se saberia a dimensão da alteração a medir que a expressão pressupõe que se deve saber *a priori*.

## 5.2 Análise de Desempenho das Cartas: Ocorrência de Sinal

O objectivo deste subcapítulo é a avaliação das cartas, através das suas medidas de desempenho referidas, quando se introduz uma perturbação na média do processo.

Existem alguns tipos de perturbação que podem afectar um processo, ganhando algum destaque as do tipo salto e degrau (Figura 5.6). Uma perturbação do tipo salto pode ocorrer devido a várias situações, como, por exemplo, uma peça errada que entrou no sistema ou um gesto equivocado de um operador. Tipicamente estas perturbações ocorrem num curto espaço de tempo, o que dificulta a sua detecção. Por outro lado, uma alteração do tipo degrau pode ser despoletada por uma alteração na matéria-prima ou a avaria de um sensor. Ao contrário das perturbações do tipo salto, as perturbações do tipo degrau permanecem no processo, o que facilita a sua detecção.

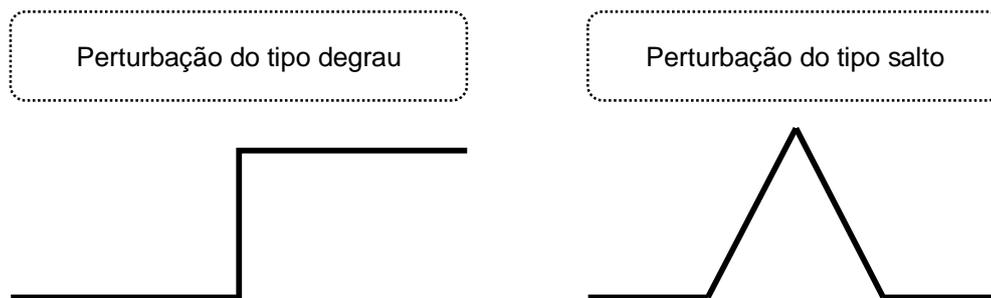


Figura 5.6 Tipos de perturbação mais comuns num processo

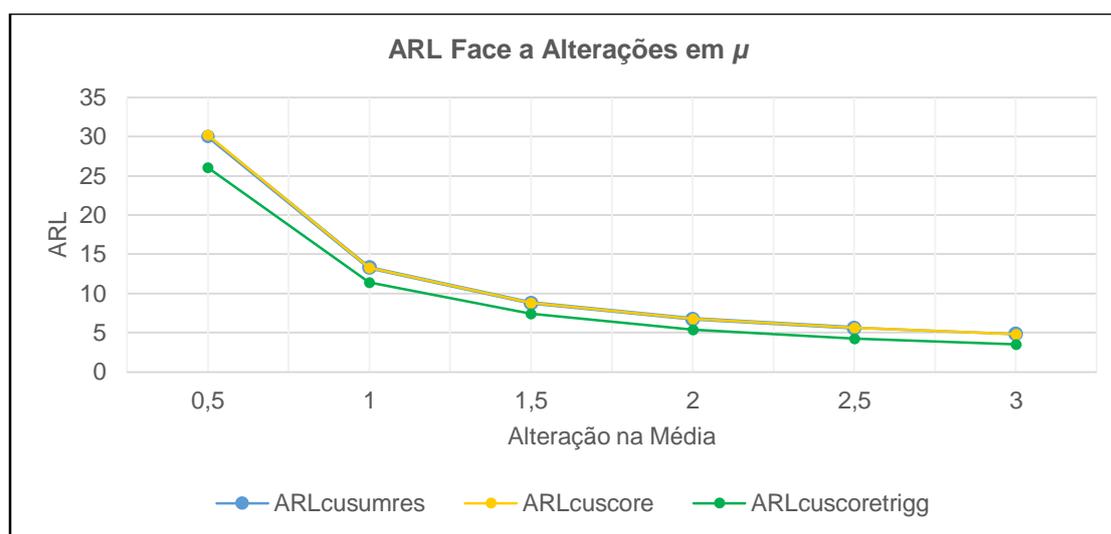
Para efeitos de estudo, considera-se uma perturbação do tipo salto para se averiguar a capacidade em se detectar a perturbação introduzida. Esta ir-se-á reflectir no parâmetro da média através do incremento de um valor  $\delta\sigma_\varepsilon$  aos valores da série de ruído branco. Optou-se por variar o parâmetro  $\delta$ , dimensão de alteração da média, entre 0 e 3 através de adições de 0,5 unidades. O valor do novo parâmetro médio será calculado por  $\mu + \delta\sigma$ . Para estas simulações foram considerados  $C = 50\,000$  e  $N = 1\,000$ .

Os resultados provenientes da simulação encontram-se discriminados na Tabela 5.2, onde se considera os seis níveis de alteração no parâmetro da média. Na mesma tabela,  $m$  representa o valor de *ARL* para a carta de gatilho *CUSUMres*. O parâmetro “T. Incre.” refere-se ao tempo de simulação de cada carta, em média e em segundos, de um incremento de 0,5 de alteração na média.

Para uma melhor compreensão da Tabela 5.2, encontra-se na seguinte figura uma representação da evolução do *ARL* das cartas face às alterações na média.

**Tabela 5.2** Valores de *ARL* e *SDRL* para alterações no parâmetro médio do processo

Cartas	<i>CUSUMres</i>		<i>CUSCORE</i>		<i>Triggered CUSCORE</i>			
	<i>ARL</i>	<i>SDRL</i>	<i>ARL</i>	<i>SDRL</i>	<i>ARL</i>	<i>SDRL</i>	<i>m</i>	<i>l</i>
$\delta$								
0,0	370,672	348,826	370,650	348,260	370,082	405,335	38,735	41,045
0,5	30,051	15,089	30,180	15,254	26,099	14,509	5,300	7,009
1,0	13,319	4,195	13,275	4,164	11,457	4,312	1,590	1,310
1,5	8,811	2,078	8,781	2,082	7,395	2,370	1,150	0,475
2,0	6,772	1,320	6,755	1,330	5,433	1,631	1,040	0,225
2,5	5,615	0,939	5,605	0,935	4,269	1,242	1,010	0,181
3,0	4,866	0,726	4,867	0,726	3,520	0,981	1,000	0,053
<b>T. Incre.</b>	112,46 seg (~ 2,0 min)		98,00 seg (~ 1,6 min)		158,00 seg (~ 2,6 min)			

**Figura 5.7** Alteração no parâmetro médio do processo

Verificando conjuntamente a Tabela 5.2 e a Figura 5.7, podem ser retiradas algumas conclusões em relação ao desempenho das cartas. No geral, todas as cartas exibem um comportamento semelhante: quanto maior o sinal a detectar, menor é o *ARL* (existe uma rapidez superior na detecção de sinais) e vice-versa. É possível também observar que não existem diferenças significativas nas cartas *CUSUMres* e *CUSCORE*: as suas medidas de desempenho possuem valores muito semelhantes para cada  $\delta$ . Em relação à carta *Triggered CUSCORE* pode concluir-se que esta possui um melhor desempenho na detecção de alterações no parâmetro médio. Verifica-se, no entanto, que esta carta possui um *SDRL* superior em relação às restantes cartas. Possivelmente esta situação deve-se ao facto do valor do *ARL* da carta de gatilho, *m*, possuir um valor relativamente baixo ( $ARL_{trigg} = 39$ ).

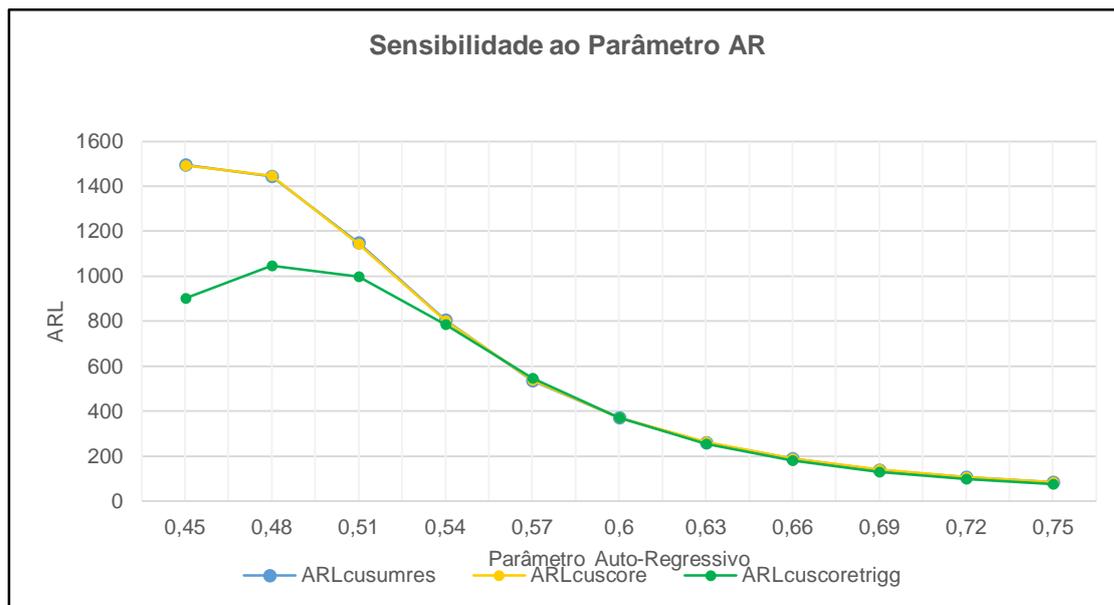
### 5.3 Análise de Sensibilidade: Alteração no Parâmetro Auto-Regressivo

Quando se ajusta um conjunto de dados a uma série cronológica, são definidos *a priori* os parâmetros associados a esse mesmo modelo. No entanto, não é possível ter o conhecimento prévio se o modelo inicialmente ajustado é adequado às observações futuras, isto é, pode existir uma alteração na estrutura dinâmica dos dados que conduza a uma alteração dos parâmetros. Esta alteração pode comprometer o desempenho das cartas de controlo, pelo que é importante avaliá-las quando esta situação ocorre.

Este estudo tem como objectivo verificar como as cartas de controlo reagem à ocorrência de alterações pequenas a moderadas. Antes de se proceder à reprodução das simulações, há que ter em consideração a gama de variação admissível do parâmetro. Considerando o valor previamente definido para o parâmetro ( $\phi = 0,6$ ), dificilmente iriam ocorrer alterações na estrutura de dados no processo de forma a se obter valores de  $\phi$  superiores a 0,80 ou inferiores a 0,40. Assim, consideram-se alterações de 5% ( $\pm 0,05\phi$ ), em que o menor valor corresponde a 0,45 e o maior a 0,75. Na seguinte tabela e figura encontram-se os resultados obtidos para  $C = 50\,000$  e  $N = 4\,000$ .

**Tabela 5.3** Valores de *ARL* e *SDRL* para alterações no parâmetro auto-regressivo

Cartas	<i>CUSUMres</i>		<i>CUSCORE</i>		<i>Triggered CUSCORE</i>			
	<i>ARL</i>	<i>SDRL</i>	<i>ARL</i>	<i>SDRL</i>	<i>ARL</i>	<i>SDRL</i>	<i>m</i>	<i>l</i>
0,45	1494,200	1438,500	1492,400	1439,200	903,449	1171,500	99,910	104,454
0,48	1442,900	1271,400	1448,200	1267,600	1046,300	1133,600	81,810	84,364
0,51	1148,100	1029,200	1143,700	1031,400	998,173	1010,900	67,979	70,027
0,54	804,777	756,529	801,868	755,558	786,344	821,777	56,204	59,062
0,57	536,573	511,771	540,099	514,733	546,782	595,867	46,782	49,010
0,60	371,759	348,671	372,863	350,632	371,897	406,181	39,090	41,734
0,63	260,857	240,752	262,530	241,033	254,050	273,579	32,724	35,187
0,66	189,066	170,638	189,995	170,395	181,922	190,429	27,341	30,075
0,69	139,882	122,464	141,223	124,551	131,665	134,893	23,153	25,576
0,72	107,978	91,808	108,361	92,217	98,994	97,199	19,660	22,161
0,75	83,892	69,121	84,046	69,405	76,400	72,042	16,752	19,025
<b>T.incre.</b>	465,73 seg (~ 8 min)		606,50 seg (~ 10 min)		850,80 seg (~ 14 min)			



**Figura 5.8** Alteração no parâmetro auto-regressivo

Analisando a Figura 5.8 é possível concluir que as cartas são sensíveis a alterações no parâmetro auto-regressivo, isto é, a alterações na estrutura dinâmica dos dados.

No geral, quando o parâmetro  $\phi$  aumenta, as cartas apresentam um comportamento similar na detecção de uma alteração, sendo que a carta com gatilho apresenta valores de *ARL*s mais baixos. No entanto, quando  $\phi$  fica sujeito a decréscimos, as cartas perdem sensibilidade na detecção de uma alteração. De notar que, nesta situação, para valores de  $\phi$  compreendidos no intervalo  $[0,45; 0,54]$  a carta *CUSCORE* com gatilho é mais sensível que as restantes, mas para  $\phi = 0,57$  a carta *CUSUMres* é a que apresenta um menor valor de *ARL*.

Em suma, verifica-se que estas três cartas não apresentam robustez quando ocorrem alterações no parâmetro auto-regressivo, isto é, existem alterações significativas no *ARL* para as alterações de  $\phi$  estudadas.

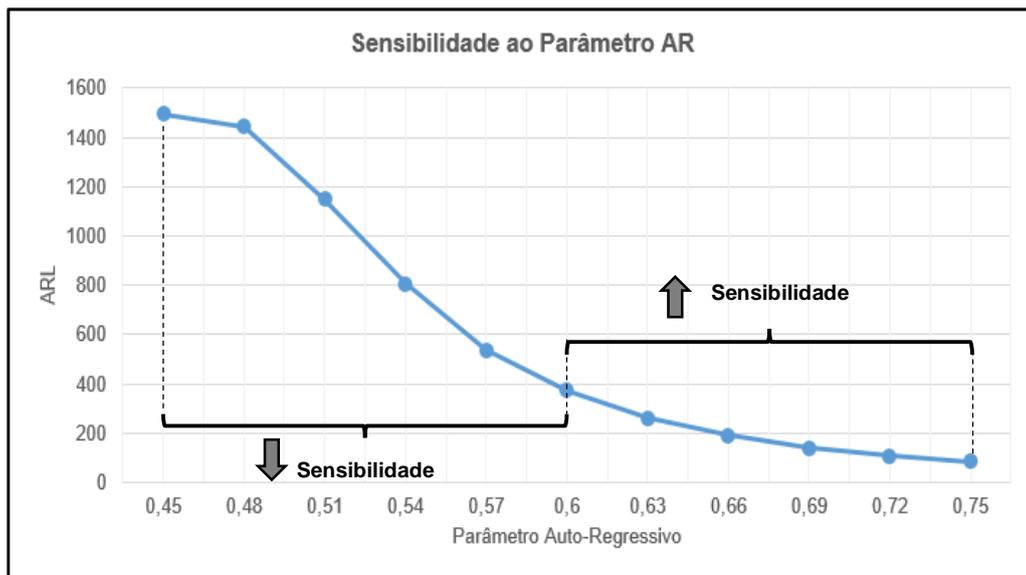
### 5.3.1 Análise de Desempenho das Cartas: Detecção de Sinais em Processos $AR(1)$ de Parâmetro Dinâmico

Frequentemente, quando se estima um modelo de uma série cronológica de dados, pode existir um erro de estimação no parâmetro do modelo ajustado. Este erro de estimação pode reflectir-se quando são recolhidas amostras dos dados em janelas temporais distintas. Como tal, este erro pode comprometer o desempenho das cartas de controlo na detecção de sinais.

Na Figura 5.9 está represento o comportamento típico das cartas em estudo quando se verificam alterações no parâmetro-auto regressivo. Ao analisar este comportamento é possível concluir que, para valores de  $\phi$  superiores a 0,6 a sensibilidade das cartas face uma variação do parâmetro

aumenta, uma vez que os valores de  $ARL$  são reduzidos. Nesta situação, o número de falsos alarmes ocorre com muita frequência. Por outro lado, para valores de  $\phi$  inferiores a 0,6 a sensibilidade das cartas diminui: os valores de  $ARL$  são mais elevados, o que conduz a uma probabilidade inferior de se detectarem alterações no parâmetro médio.

Neste sentido, este subcapítulo dedica-se ao estudo do desempenho das cartas na detecção de sinais do tipo salto em casos específicos de alterações no parâmetro auto-regressivo.



**Figura 5.9** Comportamento típico das cartas em estudo face a alterações no parâmetro  $AR(1)$

➤ Definição dos Intervalos de  $\phi$

Como referido no Capítulo 4, foram definidos dois intervalos de  $\phi$ , em torno do seu valor do modelo original (0,6):  $\phi_A$  e  $\phi_B$ .

O segundo intervalo mencionado foi estabelecido de um modo muito simples: numa folha de cálculo foram geradas 20 séries de 500 observações aleatórias, que seguem uma distribuição Normal, de média nula e desvio padrão unitário (geração de ruído branco). Posteriormente estes dados foram ajustados a um modelo auto-regressivo de primeira ordem com  $\phi$  equivalente a 0,6. Por fim, para cada série modelada, foi estimado novamente o parâmetro auto-regressivo através do *software Statistica*. Os resultados obtidos foram remetidos para o Anexo II, Tabela II.1, e ao serem analisados verifica-se, de facto, a existência de variação nos valores dos parâmetros. O valor máximo estimado de  $\phi$  foi de 0,6696 e o mínimo de 0,5451. Estes valores correspondem a uma variação máxima de 11,60% e mínima de 9,15% de  $\phi$ , respectivamente, e são estes os valores que definem os extremos do intervalo  $\phi_B$ . Como se pode verificar na Figura 5.9, o valor de  $ARL$  para  $\phi = 0,5451$  é muito superior ao valor de  $ARL$  quando  $\phi = 0,6696$ . Esta situação verifica-se para as três cartas em estudo pois, como verificado anteriormente, estas não são robustas a alterações de  $\phi$ . É expectável que as cartas sinalizem uma potencial alteração muito mais rapidamente quando  $\phi = 0,6696$  do que quando  $\phi = 0,5451$ , mas também que sinalizem um maior número de falsos alarmes.

O intervalo  $\phi_A$ , por outro lado, foi definido de uma forma diferente. Ao contrário do intervalo  $\phi_B$ , definiu-se um par de valores de  $\phi$  de modo a que, potencialmente, os seus *ARLs* correspondentes não diferissem significativamente entre si. O intervalo corresponde a  $\phi_A = [0,5997; 0,6003]$ . Como este intervalo contém o valor de  $\phi = 0,6$ , consequentemente os valores de *ARL* não serão significativamente diferentes de 370, caso se verifique que os extremos não são significativamente diferentes entre si. Portanto é expectável que, para este intervalo, o comportamento das cartas, face a uma alteração do tipo salto no parâmetro médio, seja semelhante aos esquematizados na Figura 5.7 e Tabela 5.2.

Os valores dos *ARLs* de  $\phi_B$  foram conseguidos, para cada carta, através da modelação da série de dados de  $\phi$  em função de *ARL* (ver Figura 5.8) a um modelo de regressão polinomial. Os valores de  $\phi_A^1$  e  $\phi_A^2$ , que são fixos para cada carta, também foram obtidos da dessa forma. Também é possível obter os mesmos valores por simulação mas, ao contrário da regressão polinomial, trata-se de um processo moroso.

➤ Modelação das Séries Temporais: Regressão Polinomial

As modelações associadas a cada carta foram conseguidas através do *software* MATLAB e são avaliadas consoante o seu valor do coeficiente de determinação,  $R^2$ . Quanto maior for  $R^2$ , mais o modelo tem capacidade para explicar a variância existente nas observações, ou seja, o modelo ajusta-se melhor aos dados. Este pode ser calculado a partir da expressão (5.4).

$$R^2 = \frac{(\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{X})Y_i)^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{X})^2 \sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2} \quad (5.4)$$

Para a carta *CUSUMres* obteve-se o modelo descrito na seguinte equação, para um coeficiente de determinação equivalente a 0,9998:

$$ARL_{cusumres} = 1 \times 10^{10} [0,2216\phi^8 - 1,0814\phi^7 + 2,2965\phi^6 - 2,7708\phi^5 + 2,0766\phi^4 - 0,9895\phi^3 + 0,2926\phi^2 - 0,0491\phi + 0,0036] \quad (5.5)$$

Segundo a Equação (5.5) é possível calcular os valores de *ARLs* para os intervalos  $\phi_A$  e  $\phi_B$ . Substituindo na expressão os valores definidos para os extremos dos intervalos, obtém-se os seguintes resultados (de notar que o menor valor de  $\phi$  corresponde ao maior de *ARL* e vice-versa):

- $\phi_A = [0,5997; 0,6003] \rightarrow ARL_A = [368,4634; 371,0887]$ ;
- $\phi_B = [0,5451; 0,669] \rightarrow ARL_B = [169,4729; 752,3134]$ .

Para a carta *CUSCORE* obteve-se o modelo descrito pela Equação (5.6), para  $R^2 = 0,9999$ :

$$ARL_{cuscore} = 1 \times 10^8 [-0,2964\phi^6 + 1,1499\phi^5 - 1,8506\phi^4 + 1,5801\phi^3 - 0,7542\phi^2 + 0,1905\phi - 0,0199] \quad (5.6)$$

Substituindo os valores definidos para os extremos dos intervalos de  $\phi$  na Equação (5.6), obtém-se os seguintes resultados:

- $\phi_A = [0,5997; 0,6003] \rightarrow ARL_A = [368,5166; 371,2232]$ ;
- $\phi_B = [0,5451; 0,669] \rightarrow ARL_B = [172,7852; 754,1363]$ .

Para a carta *Triggered CUSCORE* obteve-se o modelo descrito pela Equação (5.7), para  $R^2 = 0,9996$ :

$$ARL_{cusctrigg} = 1 \times 10^8 [0,3206\phi^6 - 1,1224\phi^5 + 1,6133\phi^4 - 1,2158\phi^3 + 0,5053\phi^2 - 0,1095\phi + 0,0096] \quad (5.7)$$

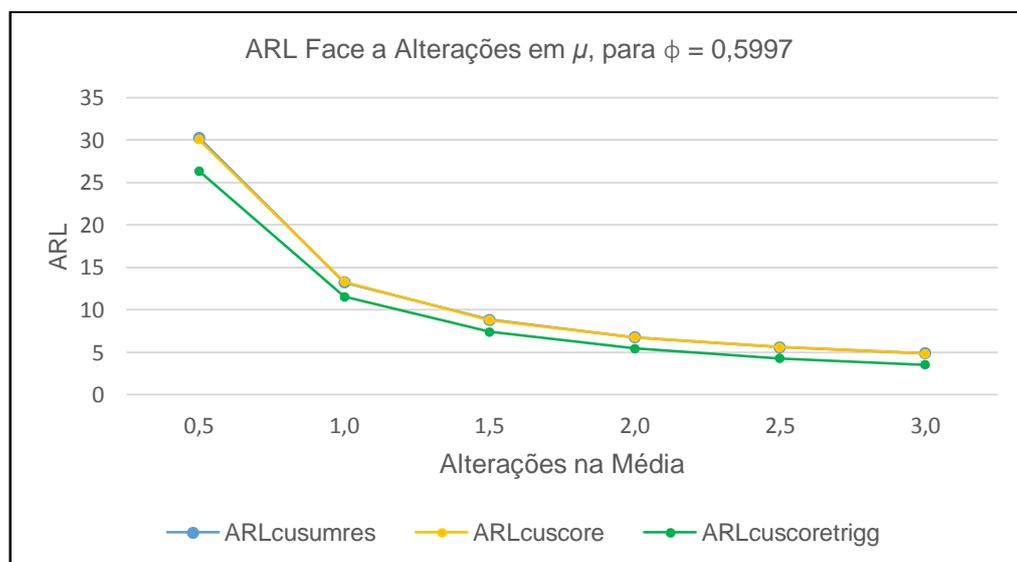
- $\phi_A = [0,5997; 0,6003] \rightarrow ARL_A = [366,2755; 369,4086]$ ;
- $\phi_B = [0,5451; 0,669] \rightarrow ARL_B = [168,1312; 749,3607]$ .

Tal como se verifica na Figura 5.9 e, neste ponto, nos resultados das três equações que descrevem os modelos de regressão polinomial, pequenas variações de  $\phi$  podem alterar consideravelmente os valores de  $ARL$ , pelo que em situações reais as alterações de  $\phi$  devem ser algo a ter-se em consideração neste tipo de processos. Uma vez constatado que existem alterações consideráveis de  $ARL$  quando  $\phi$  varia, é importante verificar se as cartas detectam com a mesma eficácia alterações no parâmetro médio do processo, nos extremos dos intervalos.

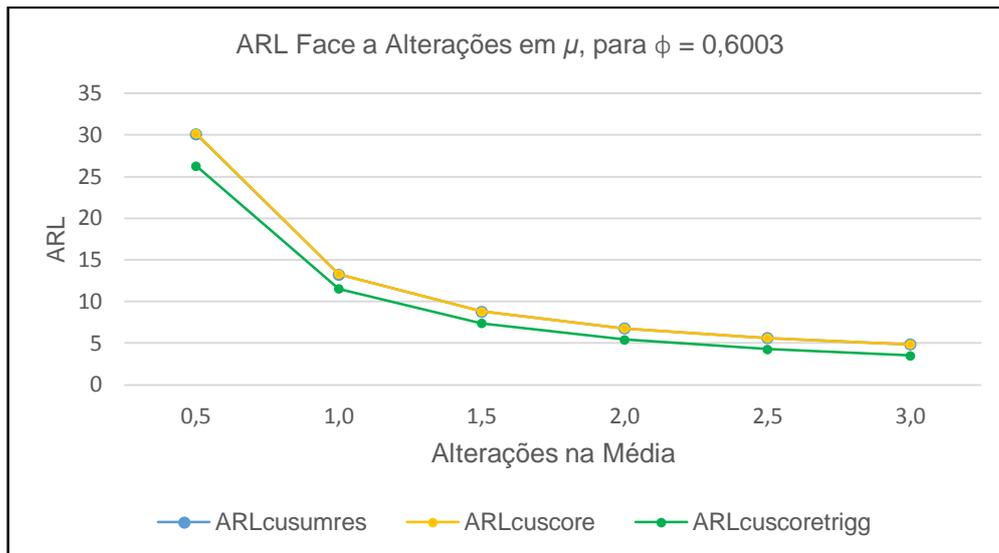
- Análise de desempenho das cartas na detecção de sinais, nos extremos dos intervalos  $\phi_A$  e  $\phi_B$ .

Neste ponto foi aplicada a mesma metodologia seguida pelo subcapítulo 5.2 para quando ocorrem perturbações do tipo salto na média do processo (através de incrementos de  $0,5\sigma$ ) e se assume que o valor do parâmetro auto-regressivo é 0,6, quando na verdade se alterou do seu valor correcto. Foram analisados os comportamentos das cartas para os extremos dos intervalos  $\phi_A$  e  $\phi_B$  e os resultados obtidos encontram-se nas figuras seguintes:

- Intervalo  $\phi_A$ :



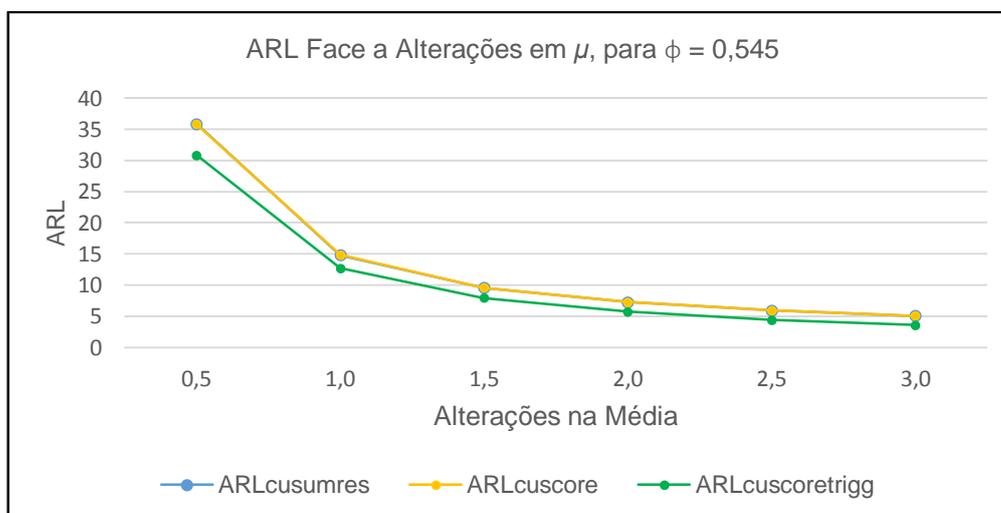
**Figura 5.10** Alterações no parâmetro médio, quando  $\phi = 0,5997$



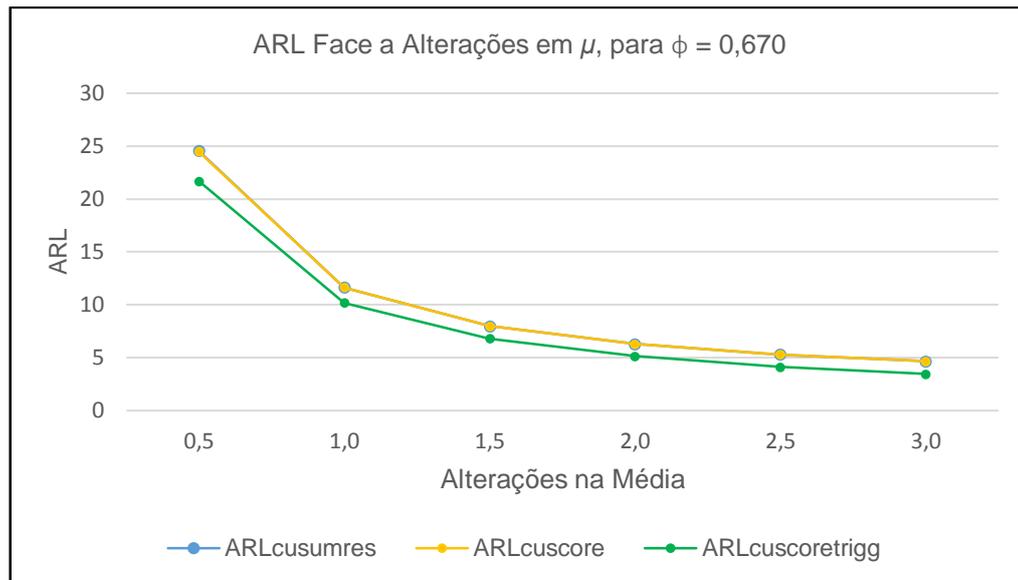
**Figura 5.11** Alterações no parâmetro médio, quando  $\phi = 0,6003$

Foi definido um intervalo de  $\phi_A$ , de modo a que, potencialmente, os seus *ARLs* correspondentes não diferissem significativamente entre si e, conseqüentemente de 370. Neste ponto, isso ainda não se pode concluir. No entanto, tanto para a Figura 5.10 e 5.11 verifica-se um comportamento das cartas muito semelhante ao da Figura 5.7, quando  $\phi = 0,6$  e no processo apenas constam causas comuns de variação. Os valores das medidas de desempenho das cartas para estas alterações de parâmetro auto-regressivo, ver Anexo II, Tabelas II.2 e II.3, também são semelhantes aos apresentados na Tabela 5.2. Não se verificam diferenças significativas nas cartas *CUSUMres* e *CUSCORE* pois as suas medidas de desempenho continuam com valores muito semelhantes para cada  $\delta$ , o mesmo verificado para quando  $\phi = 0,6$ . A carta *Triggered CUSCORE* também continua com um melhor desempenho na detecção de sinais. Como era esperado para esta gama de  $\phi$ , os seus valores podem ser alterados sem comprometer o desempenho das cartas de controlo.

- Intervalo  $\phi_B$ :



**Figura 5.12** Alterações no parâmetro médio, quando  $\phi = 0,545$



**Figura 5.13** Alterações no parâmetro médio, quando  $\phi = 0,670$

Para a gama de valores definidos pelo intervalo  $\phi_B$ , o desempenho das cartas de controlo é completamente diferente (ver Anexo II, Tabelas II.4 e II.5). Por um lado, quando  $\phi = 0,545$  (Figura 5.12), os *ARLs* das cartas são bastante superiores para a detecção de sinais, isto é, o sinal é detectado mais lentamente, comparando com os valores de  $\phi_A$ . Por outro lado, quando  $\phi = 0,670$  (Figura 5.13), ocorre precisamente o contrário: os *ARLs* das cartas são consideravelmente mais reduzidos. Como se sabe à partida que o valor correcto de  $\phi$  corresponde a 0,6, provavelmente os *ARLs* das cartas nesta situação, iria conduzir a um número elevado de falsos alarmes.

Tal como para o intervalo  $\phi_A$ , comparando o desempenho das cartas entre cada uma verifica-se que o seu comportamento se manteve: não se verificam diferenças acentuadas nas cartas *CUSUMres* e *CUSCORE* e a carta *Triggered CUSCORE* também continua com um melhor desempenho na detecção de sinais. No entanto, ao contrário do intervalo  $\phi_A$ , a gama de valores definida pelo intervalo  $\phi_B$  compromete o desempenho das cartas de controlo e quanto mais distantes forem estes valores de  $\phi = 0,6$ , menos eficazes serão as cartas na detecção de sinais.

### 5.3.2 Determinação do Intervalo de $\phi$ de Variação Admissível

Neste ponto pretende-se determinar qual o intervalo máximo de  $\phi$  para o qual o intervalo correspondente de *ARLs* que não apresenta diferenças significativas entre os seus extremos. Estando dentro deste intervalo o valor  $\phi = 0,6$ , ou seja,  $ARL = 370$ , ambos os extremos não apresentam diferenças significativas para o valor de 370. Foi verificado no subcapítulo anterior que para o intervalo de  $\phi_A = [0,5997; 0,6003]$  não existiam diferenças acentuadas nas medidas de desempenho das cartas. Desta forma, estes valores foram utilizados para determinar o intervalo pretendido.

A determinação desse intervalo envolveu, inicialmente, a realização de simulações de  $C = 50\,000$

e  $N = 4\,000$  para determinar três amostras de valores de  $ARLs$ , para cada carta, quando  $\phi_A^1 = 0,5997$  e  $\phi_A^2 = 0,6003$ . Estes resultados encontram-se na tabela seguinte, respectivamente com os seus valores de média e desvio padrão amostrais:

**Tabela 5.4** Amostras de  $ARLs$  recolhidas para  $\phi_A^1$  e  $\phi_A^2$

Cartas	$CUSUMres$		$CUSCORE$		$Triggered\ CUSCORE$	
	$\phi_A^1$	$\phi_A^2$	$\phi_A^1$	$\phi_A^2$	$\phi_A^1$	$\phi_A^2$
$n_1$	369,169	368,346	373,776	369,689	370,204	366,471
$n_2$	368,222	368,345	372,509	372,878	371,031	368,508
$n_3$	369,592	369,960	373,832	367,440	368,821	369,778
$\bar{X}$	368,995	368,884	373,372	370,002	370,019	368,252
$S$	0,701	0,932	0,748	2,733	1,116	1,668

Com a recolha destas amostras é possível recorrer a um teste de hipóteses para verificar se, de facto, os valores de  $ARL_A$  são significativamente diferentes entre si, ou não.

Considerando duas populações Normais independentes, com médias  $\mu_{ARL\phi_1}$  e  $\mu_{ARL\phi_2}$ , a hipótese a testar para verificar se a diferença das médias é nula encontra-se na seguinte equação:

$$\begin{cases} H_0: \mu_{ARL\phi_1} - \mu_{ARL\phi_2} = 0 \\ H_1: \mu_{ARL\phi_1} - \mu_{ARL\phi_2} \neq 0 \end{cases} \quad (5.8)$$

Recolheram-se duas amostras, para cada carta, com dimensão  $n_1 = n_2 = 3$ . Como as populações seguem uma distribuição Normal e são independentes, a distribuição Normal pode ser aproximada à distribuição  $t$ -Student, pois a dimensão das amostras recolhidas é inferior a 30.

Estando os valores das médias amostrais calculados, procede-se ao cálculo da estatística de teste,  $t_0$ , e o desvio padrão combinado das amostras,  $S_p$ , dados pelas seguintes expressões:

$$t_0 = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{S_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \quad (5.9)$$

$$S_p = \sqrt{\frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}} \quad (5.10)$$

De notar que apenas quando os desvios padrão não forem significativamente diferentes entre si é que se pode recorrer à Equação (5.10).

É o valor de  $t_0$  que, comparado com o valor de decisão  $t_{critico} = t_{\alpha/2; n_1+n_2-2}$ , vai permitir retirar conclusões sobre a existência de diferenças significativas entre os valores de  $ARL_{S_A}$ . Caso  $|t_0| > t_{critico}$ , então pode concluir-se que existem diferenças significativas para um determinado nível de significância definido *a priori*,  $\alpha$ . Encontra-se na Figura III.2 do Anexo III os valores de  $t_{\alpha;v}$ , para os

valores de probabilidade  $\alpha$  e do número de graus de liberdade  $v = n_1 + n_2 - 2$ .

Para estes casos foi considerado um valor de  $\alpha$  equivalente a 5%, o que corresponde a um valor de decisão  $t_{crítico} = t_{\frac{\alpha}{2}, v} = t_{0,05/2; 3+3-2} = 2,7764$ .

➤ Determinação do Intervalo para a Carta  $CUSUM_{res}$

Atendendo aos valores da Tabela 5.4 obtidos para a carta  $CUSUM_{res}$ ,  $\bar{X}$  e  $S$ , e às Equações (5.9) e (5.10), obtém-se os seguintes valores para o desvio padrão combinado e estatística de teste:

- $S_p \approx 0,8250$ ;
- $t_0 \approx 0,1650$ .

Uma vez que o valor de  $t_0$  é inferior a  $t_{crítico}$ , para um nível de confiança de 95%, não existem evidências estatísticas para rejeitar a hipótese nula. Portanto, não se rejeita o facto de os valores  $ARL_{S_A}$  serem significativamente diferentes. Os valores máximos de  $ARLs$  que estabelecem o limite admissível de variação de  $\phi$  estão, neste ponto, em condições de serem calculados através da manipulação da Equação (5.9):

$$\overline{ARL}_1 - \overline{ARL}_2 = S_p \times t_{crítico} \times \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} \quad (5.11)$$

Substituindo os valores de  $S_p$ ,  $t_{crítico}$  e das dimensões das amostras, obtém-se uma diferença de médias  $\overline{ARL}_1 - \overline{ARL}_2 = 1,8698$ . Para simplificar o cálculo dos valores destas médias optou-se pelo método descrito na Equação (5.12):

$$\begin{cases} \overline{ARL}_1 = 370 + \frac{\overline{ARL}_1 - \overline{ARL}_2}{2} \\ \overline{ARL}_2 = 370 + \frac{\overline{ARL}_1 + \overline{ARL}_2}{2} \end{cases} \quad (5.12)$$

Substituindo na equação os valores de  $\overline{ARL}_1 - \overline{ARL}_2$ , obtém-se:

- $\overline{ARL}_1 = 370,938$ ;
- $\overline{ARL}_2 = 369,065$ .

Falta apenas determinar os valores de  $\phi_1$  e  $\phi_2$  que correspondem aos valores dos  $ARLs$  calculados. Para isso, foi definido um modelo de regressão polinomial que se ajusta à série de dados de  $\phi$  em função de  $ARL$ , através do *software* MATLAB:

$$\phi = -3,0508 \times 10^{-10} ARL^3 + 8,3902 \times 10^{-7} ARL^2 - 8,0037 \times 10^{-4} ARL + 0,7952 \quad (5.13)$$

Este modelo possui um coeficiente de determinação equivalente a 0,9910. Substituindo os valores dos  $ARLs$  calculados na Equação (5.13), obtém-se os seguintes valores de  $\phi$ :

- $\phi_1 = 0,5982$ ;

- $\phi_2 = 0,5987$ .

De notar que  $\phi(370) = 0,5984$ . Portanto para a carta *CUSUMres* o intervalo de valores que  $\phi$  pode variar sem que o valor de *ARL* seja significativamente diferente de 370, para  $\alpha$  igual a 5%, é  $[0,5982; 0,5987]$ . A diferença entre estes valores é muito reduzida mas estabelecem o limite que se deve controlar se se pretende manter um *ARL* de 370 no processo.

Os intervalos de  $\phi$  para as restantes duas cartas foram calculados também segundo este procedimento.

➤ Determinação do Intervalo para a Carta *CUSCORE*

Atendendo aos valores da Tabela 5.4 obtidos para a carta *CUSCORE*,  $\bar{X}$  e  $S$ , e às Equações (5.9) e (5.10), obtém-se os seguintes valores para o desvio padrão combinado e estatística de teste:

- $S_p \approx 2,003$ ;
- $t_0 \approx 2,060$ .

Uma vez que o valor de  $t_0$  é inferior a  $t_{critico}$  (2,7764), para um nível de confiança de 95%, não existem evidências estatísticas para rejeitar a hipótese nula.

A diferença dos valores máximos de *ARLs* que estabelecem o limite admissível de variação de  $\phi$  pode ser calculada através da Equação (5.9) e obtém-se uma diferença de médias  $\overline{ARL}_1 - \overline{ARL}_2 = 4,5416$ .

Recorrendo à expressão (5.12), obtém-se para os *ARLs* os valores:

- $\overline{ARL}_1 = 372,271$ ;
- $\overline{ARL}_2 = 367,729$ .

Para determinar os valores de  $\phi_1$  e  $\phi_2$  que correspondem aos valores dos *ARLs* calculados foi definido um modelo de regressão polinomial que se ajusta à série de dados de  $\phi$  em função de *ARL*:

$$\phi = -3,0131 \times 10^{-10}ARL^3 + 8,3118 \times 10^{-7}ARL^2 - 7,9671 \times 10^{-4}ARL + 0,7952 \quad (5.14)$$

Este modelo possui um coeficiente de determinação equivalente a 0,9908. Substituindo os valores dos *ARLs* calculados na Equação (5.14), obtém-se os seguintes valores de  $\phi$ :

- $\phi_1 = 0,5983$ ;
- $\phi_2 = 0,5997$ .

De notar que  $\phi(370) = 0,5990$ . Portanto para a carta *CUSCORE* o intervalo de valores que  $\phi$  pode variar sem que o valor de *ARL* seja significativamente diferente de 370, para  $\alpha$  igual a 5%, é  $[0,5983; 0,5997]$ .

➤ Determinação do Intervalo para a Carta Triggered CUSCORE

Atendendo aos valores da Tabela 5.4 obtidos para a carta *Triggered CUSCORE*,  $\bar{X}$  e  $S$ , e às Equações (5.9) e (5.10), obtêm-se os seguintes valores para o desvio padrão combinado e estatística de teste:

- $S_p \approx 1,419$ ;
- $t_0 \approx 1,524$ .

Uma vez que o valor de  $t_0$  é inferior a  $t_{crítico}$  (2,7764), para um nível de confiança de 95%, não existem evidências estatísticas para rejeitar a hipótese nula.

A diferença dos valores máximos de *ARLs* que estabelecem o limite admissível de variação de  $\phi$  pode ser calculada através da Equação (5.11) e obtêm-se uma diferença de médias  $\overline{ARL}_1 - \overline{ARL}_2 = 3,2177$ .

Recorrendo à expressão (5.12), obtêm-se para os *ARLs* os valores:

- $\overline{ARL}_1 = 371,609$ ;
- $\overline{ARL}_2 = 368,391$ .

Para determinar os valores de  $\phi_1$  e  $\phi_2$  que correspondem aos valores dos *ARLs* calculados foi definido um modelo de regressão polinomial que se ajusta à série de dados de  $\phi$  em função de *ARL*:

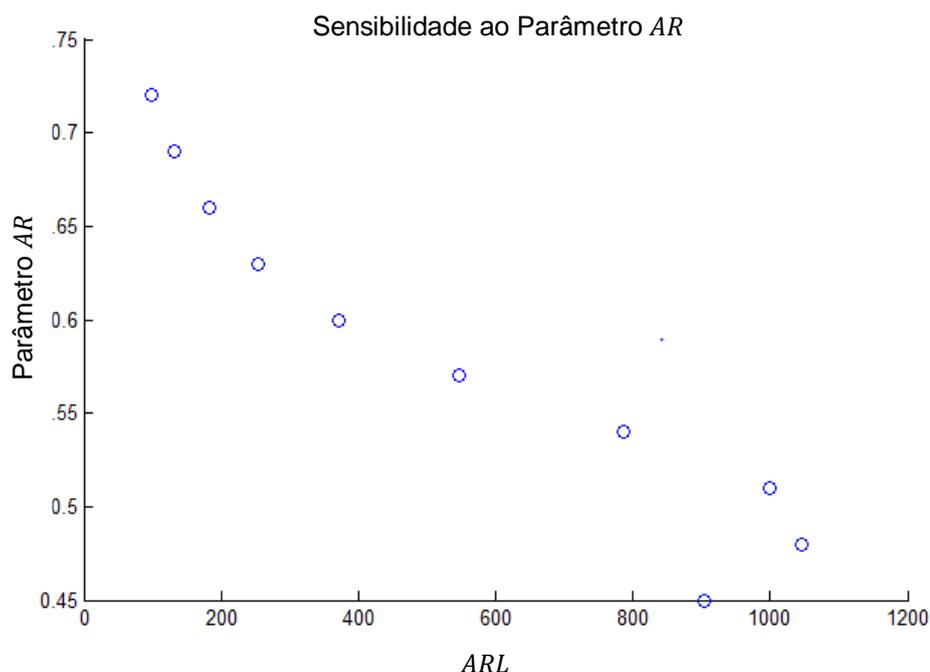
$$\phi = -3,6223 \times 10^{-10} ARL^3 + 8,3470 \times 10^{-7} ARL^2 - 7,7357 \times 10^{-4} ARL + 0,7875 \quad (5.15)$$

Este modelo possui um coeficiente de determinação equivalente a 0,9531. Substituindo os valores dos *ARLs* calculados na Equação (5.15), obtêm-se os seguintes valores de  $\phi$ :

- $\phi_1 = 0,5968$ ;
- $\phi_2 = 0,5977$ .

De notar que  $\phi(370) = 0,5972$ . Portanto para a carta *CUSCORE* o intervalo de valores que  $\phi$  pode variar sem que o valor de *ARL* seja significativamente diferente de 370, para  $\alpha$  igual a 5%, é [0,5968; 0,5977].

O ajustamento deste modelo não possui tanta qualidade como os das outras cartas, pois o comportamento das observações para  $\phi < 0,51$  é um pouco irregular, como se pode observar na Figura 5.14. O facto deste modelo não ser tão bem ajustado como os restantes significa que os resultados fornecidos pelo modelo podem apresentar alguma discrepância dos reais.



**Figura 5.14** Comportamento de *ARL* para alterações de  $\phi$

➤ Algumas considerações sobre os Intervalos determinados

Como se pôde constatar, para qualquer carta envolvida neste estudo, os parâmetros auto-regressivos dos modelos,  $\phi$ , podem apenas variar nos intervalos definidos pelos extremos  $\phi_1$  e  $\phi_2$ , sempre que se pretenda que o *ARL* não sejam significativamente diferente de 370, para um nível de confiança de 95%. No entanto, há que ter em consideração as limitações dos modelos obtidos por regressão polinomial: nenhum dos três modelos consegue explicar 100% da variância das observações, ou seja, não são modelos perfeitamente ajustados aos dados. A grande vantagem da modelação destes modelos trata-se da rapidez com que se obtém resultados.

Os modelos definidos pelas Equações (5.5), (5.6) e (5.7) não foram utilizados para a determinação dos intervalos admissíveis para a variação de  $\phi$  em cada carta pelo seguinte motivo: existiu uma certa dificuldade em extrair os valores de  $\phi$  em MATLAB pois estes estão em função de *ARL* para estas equações mencionadas. A extracção dos valores de  $\phi$  torna-se muito mais simples quando estes valores estão como variável independente, como é o caso das expressões referentes às Equações (5.13), (5.14) e (5.15). Por outro lado, os valores do parâmetro auto-regressivo seriam mais precisos se retirados pelos primeiros modelos referidos pois estes apresentam coeficientes de determinação um pouco melhores.

Para os intervalos determinados, o relativo à carta *CUSUM* é o que apresenta menos possibilidades de variação de  $\phi$  dentro do intervalo. Verifica-se este detalhe uma vez que as médias das amostras recolhidas,  $\overline{ARL}_1$  e  $\overline{ARL}_2$ , apresentam valores muito semelhantes e com desvio padrões muito reduzidos. Nas outras cartas já não se verifica esta situação, pois existe mais variabilidade nos dados e as médias das amostras não apresentam valores tão semelhantes.

Para este estudo, a carta *CUSCORE* foi a que apresentou um intervalo admissível maior para a variação de  $\phi$ . O que significa que esta carta é mais robusta que as restantes para variações de  $\phi$  dentro da sua gama de valores estabelecidos pelo intervalo.

➤ Comparação de ARLs: simulação e regressão polinomial

Uma regressão, linear ou polinomial, é um modelo que se pode ajustar a uma série de dados e, como referido anteriormente, o seu ajustamento é tanto melhor, quanto maior for o valor de  $R^2$ . Neste capítulo foi demonstrado que se pode determinar os *ARLs* das cartas não só por simulação, mas também pelo ajustamento destes modelos às séries de variação de  $\phi$  em função de *ARL*. Numa primeira fase é sempre necessário recorrer a simulações para se verificar o comportamento e identificar os valores de *ARL* para pequenas variações de  $\phi$ . Posteriormente é que se recorre ao ajustamento de um modelo de regressão.

Na Tabela 5.5 encontra-se os resultados obtidos de *ARL* para quando  $\phi = 0,6$ , por via simulação e regressão polinomial.

**Tabela 5.5** Comparação dos valores de *ARL* obtidos por simulação e regressão polinomial

$\phi = 0,6$	Carta <i>CUSUMres</i>	Carta <i>CUSCORE</i>	Carta <i>Triggered CUSCORE</i>
Simulação	370,6496	370,6715	370,0821
Regressão Polinomial	369,8660	369,7730	367,8384

Para se determinarem os valores da medida de desempenho em questão por via regressão polinomial, foram consideradas as Equações (5.5), (5.6) e (5.7), respectivamente, para as cartas *CUSUMres*, *CUSCORE* e *Triggered CUSCORE*.

Analisando a Tabela 5.5, conclui-se que não existem diferenças muito evidentes nos resultados para cada carta. Os resultados mais discrepantes são os da carta de gatilho mas este facto já era de esperar, pois o coeficiente de determinação deste modelo é mais reduzido face aos das restantes cartas.

A grande vantagem de se recorrer a simulações é a precisão dos resultados, que depende do número de ciclos e do número de observações por cada ciclo. Por outro lado, é um processo que exige muito tempo, que mais uma vez depende do número de ciclos e do número de observações por ciclo. Os modelos obtidos por regressão fornecem resultados rápidos mas há que se ter em consideração o valor do coeficiente de determinação. Caso este valor seja menor que 0,95, os resultados podem ser inviáveis.

## 5.4 Vantagens e Desvantagens das Cartas de Controlo

Após a realização do estudo comparativo da performance das três cartas de controlo, *CUSUM* de resíduos, *CUSCORE* e *CUSUMres Triggered CUSCORE*, destaca-se este subcapítulo cujo objectivo é a identificação das principais vantagens e desvantagens na óptica da aplicação das cartas em ambientes industriais.

➤ *Carta CUSUM de resíduos:*

É uma carta de aplicação relativamente fácil e, desde que aplicada aos valores residuais, consegue adaptar-se em processos com dados auto-correlacionados.

Tem uma desvantagem, que também é comum às restantes duas cartas, que se trata da definição *a priori* de qual o menor valor da alteração da média do processo que se pretende detectar. Para esta definição é necessário ter muito conhecimento sobre o comportamento do processo produtivo em questão.

O seu desempenho na detecção de sinais e quando existem, ou não, variações do parâmetro auto-regressivo manteve-se muito semelhante ao da carta *CUSCORE*, sendo por vezes ligeiramente melhor na detecção de sinais cuja dimensão fosse igual ou superior a 2.

Tal como as restantes duas cartas do presente estudo, é uma carta muito sensível a alterações no parâmetro auto-regressivo e isso reflecte-se negativamente na detecção de sinais quando o parâmetro se alterou. Em relação ao estudo da determinação do intervalo admissível de variação do parâmetro auto-regressivo, esta carta revelou-se ser a mais sensível na gama de valores encontrados, pois é a que possui um intervalo mais reduzido para  $R^2 = 0,991$ .

➤ *Carta CUSCORE:*

É uma carta também de fácil aplicação e que pode ser aplicada a processos com dados que não sejam independentes. Esta carta recolhe a informação contida na dinâmica do processo, o que facilita a detecção de sinais.

No entanto, esta carta funciona melhor quando se tem conhecimento *a priori* do momento em que irá ocorrer um sinal, como por exemplo quando ocorre uma alteração de fornecedores de matéria-prima.

A sua performance, em termos de medidas de desempenho, na detecção de sinais e para variações do parâmetro auto-regressivo é semelhante à da carta *CUSUM* de resíduos, sendo ligeiramente melhor na detecção de sinais de pequena dimensão ( $\delta < 1$ ).

Não é uma carta robusta a alterações no parâmetro auto-regressivo, sendo que, face a alterações na média do processo quando o parâmetro auto-regressivo se altera, as suas medidas de desempenho também variam significativamente. Mas revelou-se como sendo a carta mais robusta, no estudo do intervalo admissível de variação do parâmetro auto-regressivo pois apresentou um

intervalo de dimensões ligeiramente superiores para  $R^2 = 0,9908$ .

➤ *Carta Triggered CUSCORE:*

Tem precisamente as mesmas qualidades que a carta *CUSCORE* singular, com o acréscimo de potenciar muito melhor o seu desempenho na alteração de sinais. A sua aplicação não é tão simples como a carta *CUSCORE* ou *CUSUM<sub>res</sub>* pois esta carta exige uma harmonia nos *ARLs* da carta principal e da carta de gatilho. Se o *ARL* da carta de gatilho for dotado de um valor incorrecto para um determinado processo, a performance global da carta *Triggered CUSCORE* pode ser afectada. Um valor mais pequeno escolhido para o *ARL* da carta de gatilho pode conduzir ligeiramente a uma melhor detecção de sinais para um tempo de ocorrência curto e o oposto para um tempo de ocorrência de sinal mais longo.

Esta carta revelou ser mais sensível que as outras duas cartas para qualquer dimensão de alteração da média estudada. É mais precisa na detecção de sinais pequenos que médios e moderados. De facto, a carta *CUSUM* de resíduos completa a *CUSCORE* na melhoria de detecção de sinais.

Todavia, também apresenta as mesmas desvantagens que a carta *CUSCORE*: funciona melhor quando se tem conhecimento prévio do momento em que irá ocorrer um sinal. Também se verifica que não é uma carta robusta a alterações no parâmetro auto-regressivo pois quando este se altera, as suas medidas de desempenho variam significativamente.



## 6. Conclusões

O presente capítulo tem como objectivo apresentar as principais conclusões que são passíveis de serem retiradas de cada capítulo que constitui este trabalho de investigação. São também deixadas algumas sugestões e recomendações para trabalhos futuros no âmbito do controlo estatístico univariado do processo para dados auto-correlacionados.

### 6.1 Conclusões Gerais

Um dos objectivos deste trabalho de investigação foi a realização de uma análise comparativa do desempenho de três cartas de controlo univariadas, para dados auto-correlacionados, de modo a se poder retirar conclusões de qual a melhor. As cartas alvo deste estudo foram as cartas *CUSUMres*, *CUSCORE* e *CUSUMres Triggered CUSCORE* e foram avaliadas segundo um processo auto-regressivo de primeira ordem. O segundo objectivo foi a determinação do intervalo de variação admissível do parâmetro auto-regressivo, sem que as cartas de controlo perdessem robustez.

O desenvolvimento desses estudos foi feito com base numa perspectiva teórica e prática. Na primeira perspectiva, consta a fundamentação teórica necessária ao desenvolvimento da metodologia seguida; para o seu desenvolvimento foi necessário recorrer a diversos recursos, como livros e artigos científicos, cujo âmbito se dedica ao estudo do controlo da qualidade. Na perspectiva prática pretendeu-se validar os desenvolvimentos sugeridos.

O capítulo dedicado ao estudo das cartas de controlo foi repartido em algumas etapas de modo a fasear os cenários em que se pretendiam testar as cartas.

O primeiro estudo teve como objectivo comparar as cartas para quando o processo estava sujeito a causas especiais de variação que se reflectiam como sinais do tipo salto no parâmetro médio do processo. Este foi realizado através de simulações que, posteriormente forneceram os resultados. Não se observaram grandes discrepâncias entre os comportamentos das cartas *CUSUMres* e *CUSCORE*, pelo que entre optar por uma ou outra seria indiferente. Por outro lado, a carta *Triggered CUSCORE* já evidenciou detectar mais rapidamente a alteração na média do que as restantes duas cartas. Todavia esta carta apresentava valores de *SDRL* mais elevados que as anteriores. Este detalhe está directamente relacionado com o facto do *ARL* da carta de gatilho possuir um valor muito pequeno.

O segundo estudo debateu-se com o comportamento das cartas para quando ocorria uma alteração do parâmetro auto-regressivo, assumindo que o processo continuava a operar com o valor do parâmetro  $\phi$  correcto. Nesta situação, verificou-se que, de um modo geral, as cartas não são robustas a alterações no parâmetro do modelo: estas exibem alterações muito acentuadas nos valores de *ARL*, mesmo para pequenas variações de  $\phi$ . Uma vez mais, concluiu-se que as cartas *CUSUMres* e *CUSCORE*, exibiam um padrão semelhante nos seus valores de *ARL* e que, por outro

lado, a carta *Triggered CUSCORE* era a mais sensível a variações do parâmetro inferiores a 0,6. Esta carta apresentou valores inferiores de *ARL* comparativamente aos das restantes duas.

Uma vez que não se consegue assegurar que um modelo que presentemente se ajusta bem a um conjunto de dados, se ajuste igualmente bem a um conjunto futuro de novos dados, é necessário uma monitorização periódica do parâmetro auto-regressivo para este tipo de modelos. Como se verificou, pequenas variações no parâmetro podem gerar situações indesejáveis como: a ocorrência de um número elevado de falsos alarmes (para um caso de aumento do parâmetro auto-regressivo) ou então a pouca sensibilidade das cartas na detecção de sinais (para um caso de decréscimo no parâmetro auto-regressivo).

Chegando-se a essas conclusões, posteriormente pretendeu-se então estudar o comportamento das cartas face a detecção de sinais, quando existem alterações no parâmetro auto-regressivo. Para isso definiram-se à partida dois intervalos de  $\phi$ , sempre de valores superiores ou inferiores ao valor do parâmetro correcto, 0,6. No primeiro intervalo ( $\phi_A$ ) optou-se por escolher dois extremos para os quais os valores de *ARL* não fossem muito diferentes do *ARL* para quando  $\phi$  é igual a 0,6, ou seja, do valor 370. O segundo intervalo ( $\phi_B$ ) foi definido segundo dois extremos que definem uma distância entre si superior em relação ao do primeiro intervalo.

O comportamento das cartas foi estudado para cada extremo dos dois intervalos. Este estudo foi auxiliado pela modelação do comportamento das cartas face a variações de  $\phi$  através de modelos polinomiais. Estes modelos podem não fornecer resultados tão precisos como os de simulação, mas a sua obtenção é certamente mais rápida.

Para o primeiro intervalo verificou-se que o comportamento das cartas, em cada extremo não diferia muito do seu desempenho para quando foi feito o estudo das cartas face a variações no parâmetro auto-regressivo sem introdução de perturbações. Os resultados foram muito semelhantes. Neste ponto ainda não se poderia chegar à conclusão que os extremos do intervalo forneciam *ARLs* que não diferiam significativamente entre si, pois esta conclusão apenas poderia ser considerada caso se recorresse a um teste de hipóteses como, posteriormente, foi realizado.

No segundo intervalo ( $\phi_B$ ), as medidas de desempenho das cartas foram fortemente influenciadas pela variação do parâmetro. No extremo menor do intervalo, verificaram-se valores muito elevados de *ARL*: as cartas detectavam alterações no parâmetro médio muito mais tarde do que quando o parâmetro do modelo era dotado do valor correcto. Por outro lado, verificaram-se valores muito reduzidos de *ARL*, para o extremo maior do intervalo. Estes valores poderiam vir a gerar um grande número de falsos alarmes.

Atendendo que as cartas exibiam um comportamento muito instável quando ocorriam alterações no parâmetro auto-regressivo, calculou-se o intervalo de variação admissível do parâmetro para que os seus valores de *ARL* correspondentes aos extremos não diferissem significativamente do valor de *ARL* em controlo, 370. O ajustamento dos modelos matemáticos associados a cada carta a modelos de regressão polinomial também foi uma grande ajuda para se conseguir atingir este

objectivo. Recorreu-se também à utilização de testes de hipóteses para se conseguir provar, para um nível de confiança de 95%, que os valores de *ARL*s correspondentes aos extremos dos intervalos não diferiam significativamente entre si.

A partir deste estudo concluiu-se que a carta *CUSUM* é a carta mais sensível na gama de valores encontrados para o intervalo, pois é a que possui uma diferença menor entre extremos para  $R^2 = 0,991$ . A carta mais robusta foi a carta *CUSCORE* pois é a carta que, para  $R^2 = 0,9908$ , apresenta uma menor diferença de valores de  $\phi$ , para os quais estes podem variar, sem que o valor de *ARL* seja significativamente diferente de 370, para um nível de confiança de 95%.

Através da realização do desenvolvimento prático conseguiu-se alcançar os objectivos pretendidos e definidos no Capítulo 1, “Introdução”.

## 6.2 Sugestões para Trabalho Futuros

Ao longo da realização deste trabalho foram surgindo algumas questões que não foram possíveis de serem exploradas. Assim, dando continuidade ao desenvolvimento deste estudo apresentam-se algumas sugestões.

Seria interessante explorar mais a carta *CUSCORE* com gatilho ao experimentar números diferentes de *ARL* de gatilho e ao introduzir outra carta de gatilho (como por exemplo a *EWMA*) a fim de serem estudadas nos extremos dos intervalos definidos de variação do parâmetro auto-regressivo. A exploração da robustez da carta a alterações de  $\phi$  seria muito importante pois, como se verificou, as cartas em estudo exibiam muita sensibilidade.

Por outro lado, também seria importante aplicar o presente estudo a dados reais, para se avaliar o impacto da variação do parâmetro auto-regressivo no desempenho das cartas de controlo, para um caso real. O mesmo caso de estudo poderia ser realizado com a utilização das variantes da carta *CUSCORE* de gatilho supramencionadas.

Por fim, uma outra sugestão trata-se da aplicação do mesmo procedimento seguido por esta dissertação em processos caracterizados por modelos de médias móveis (*MA*) e auto-regressivos de médias móveis (*ARMA*) e da posterior avaliação do desempenho da carta *CUSCORE* e respectivas variantes nestes processos.



## Bibliografia

- Alwan, L. C., e Roberts, H. V. (1988). Time-Series Modeling for Statistical Process Control. *Journal of Business & Economic Statistics*, Vol. 6, No. 1, pp. 87-95.
- Amhemad, A. Z. (2010). *Effect of Non Normality on Statistical Control Charts*. International Conference on Networking and Information Technology, pp. 512-515.
- Bagshaw, M., e Johnson, R. A. (1977). Sequential Procedures for Detecting Parameter Changes in a Time-Series Model. *Journal of the American Statistical Association*, Vol. 72, No. 359, pp. 593-597.
- Barnard, G. A. (1959). Control Charts and Stochastic Processes. *Journal of the Royal Statistical Society, Series B*, Vol. 21, pp. 239-271.
- Box, G., e Ramírez, J. (1992). Cumulative Score Charts. *Quality and Reliability Engineering International*, Vol. 8, pp. 17-27.
- Box, G. E. P., e Jenkins, G. M. (1966). Models for Prediction and Control: VI Diagnostic Checking. *Technical Report No. 99*, Department of Statistics, University of Wisconsin-Madison, Wisconsin.
- Box, G. E. P., e Jenkins, G. M. (1970). *Time Series Analysis: Forecasting and Control* (1<sup>st</sup> ed.). Holden-Day, San Francisco.
- Box, G. E. P., e Ramírez, J. G. (1989). Sequential Methods in Statistical Process Monitoring. *Report No. 67*, Center for Quality and Productivity Improvement, University of Wisconsin-Madison, Wisconsin.
- Box, G. E. P., e Kramer, T. (1992). Statistical Process Monitoring and Feedback Adjustment. A Discussion. *Technometrics*, Vol. 34, No. 3, pp. 251-285.
- Box, G. E. P., e Luceño, A. (1997). *Statistical Control by Monitoring and Feedback Adjustment* (1<sup>st</sup> ed.). Wiley, New York.
- Box, G. E. P., Luceño, A., e Paniagua-Quiñones, M. D. C. (2009). *Statistical Control by Monitoring and Adjustment* (2<sup>nd</sup> ed.). John Wiley and Sons, New Jersey.
- Burr, I. W. (1967). The Effect of Non-Normality on Constants for X and R Charts. *Industrial Quality Control*, Vol. 23, pp. 563-569.
- Changpetch, P., e Nembhard, H. B. (2008). Periodic Cuscore Charts to Detect Step Shifts in Autocorrelated Processes. *Quality and Reliability Engineering International*, Vol. 24, No. 8, pp. 911-926.
- Chen, S. (2006). The Cuscore and High-Dimensional Control Charts for Statistical Monitoring of Autocorrelated Process Data, A Thesis in Industrial Engineering, Degree of Doctor of Philosophy, The Pennsylvania State University, Pennsylvania.
- Chen, S., e Nembhard, H. B. (2011). Multivariate Cuscore Control Charts for Monitoring the Mean Vector in Autocorrelated Processes. *IIE Transactions*, Vol. 43, No. 4, pp. 291-307.
- Deming, W. E. (1986). *Out of the Crisis*. Massachusetts Institute of Technology, Center for Advanced Engineering Study, Cambridge, Mass.
- Doty, L. A. (1996). *Statistical Process Control* (2<sup>nd</sup> ed.). Industrial Press, New York.

- Ferreira, D. M. F. (2012). Desenvolvimento da carta multivariada DMPCA para dados autocorrelacionados - comparação com as cartas  $T^2$  e DPCA, Dissertação de Mestrado de Engenharia e Gestão Industrial, FCT/ UNL, Lisboa.
- Fisher, R. A., Sir. (1925). Theory of Statistical Estimation. *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, Vol. 22, pp. 700-725.
- Gan, F. F. (1991). An Optimal Design of CUSUM Quality Control Charts. *Journal of Quality Technology*, Vol. 23, No. 4, pp. 279-286.
- Han, D., e Tsung, F. (2006). A Reference-Free Cuscore Chart for Dynamic Mean Change Detection and a Unified Framework for Charting Performance Comparison. *Journal of the American Statistical Association*, Vol. 101, No. 473, pp. 368-386.
- Holmes, D. S., e Mergen, A. E. (1988). Proper Subgroup Size for Statistical Process Control. *Quality and Reliability Engineering International*, Vol. 4, No. 4, pp. 339-345.
- Holmes, D. S., e Mergen, A. E. (1989). Testing Control Chart Subgroups for Rationality. *Quality and Reliability Engineering International*, Vol. 5, No. 2, pp. 143-147.
- Hunter, J. S. (1986). The Exponentially Weighted Moving Average. *Journal of Quality Technology*, Vol. 18, pp. 203-210.
- Jensen, W. A., Jones-Farmer, L. A., Champ, C. W., e Woodall, W. H. (2006). Effects of Parameter Estimation on Control Chart Properties: A Literature Review. *Journal of Quality Technology*, Vol. 38, No. 4, pp. 349-364.
- Juran, J. M. (1997). Early SQC: A Historical Supplement. *Quality Progress*, Vol. 30, No. 9, pp. 73-81.
- Luceño, A. (1999). Average Run Lengths and Run Length Probability Distributions for Cuscore Charts to Control Normal Mean. *Computational Statistics & Data Analysis*, Vol. 32, No. 2, pp. 177-195.
- Luceño, A. (2004). Cuscore Charts to Detect Level Shifts in Autocorrelated Noise. *Quality Technology & Quantitative Management*, Vol. 1, No. 1, pp. 27-45.
- Ma, Y.-z., Wu, F., e Liu, L.-p. (2011). *Cuscore Charts Detecting Spike Signals in Feedback Control Scheme*. 2011 IEEE 18<sup>th</sup> International Conference on Industrial Engineering and Engineering Management (IE&EM), Vol. 2, pp. 1010-1013.
- MacCarthy, B. L., e Wasusri, T. (2002). A review of non-standard applications of statistical process control (SPC) charts. *International Journal of Quality & Reliability Management*, Vol. 19, No. 3, pp. 295-320.
- Matos, A. S. (2005). Engenharia de Controlo do Processo e Controlo Estatístico da Qualidade: Metodologia de Integração Aplicada na Indústria da Pasta de Papel, Tese de Doutoramento em Engenharia Industrial, FCT/ UNL, Lisboa.
- Montgomery, D. C. (2009). *Introduction to Statistical Quality Control* (6<sup>th</sup> ed.). John Wiley & Sons, New York.
- Montgomery, D. C., e Runger, G. C. (2011). *Applied Statistics and Probability for Engineers* (5<sup>th</sup> ed.). John Wiley & Sons, New York.
- Nelson, L. S. (1984). The Shewhart Control Chart - Tests for Special Causes. *Journal of Quality Technology*, Vol. 16, No. 4, pp. 237-239.
- Nelson, L. S. (1999). Notes on the Shewhart Control Chart. *Journal of Quality Technology*, Vol. 31, No. 1, pp. 124-126.

- Nembhard, H. B. (2006). Cuscore Statistics: Directed Process Monitoring for Early Problem Detection. In *Springer Handbook of Engineering Statistics*, 1<sup>st</sup> ed. (Pham, H., ed, pp. 249-261). Springer, London.
- Nembhard, H. B., e Changpetch, P. (2007). Directed Monitoring Using Cuscore Charts for Seasonal Time Series. *Quality and Reliability Engineering International*, Vol. 23, pp. 219-232.
- Nembhard, H. B., e Chen, S. (2007). Cuscore Control Charts for Generalized Feedback-Control Systems. *Quality and Reliability Engineering International*, Vol. 23, No. 4, pp. 483-502.
- Nembhard, H. B., e Valverde-Ventura, R. (2007). Cuscore Statistics to Monitor a Non-Stationary System. *Quality and Reliability Engineering International*, Vol. 23, pp. 303-325.
- Oakland, J. S. (2003). *Statistical Process Control* (5<sup>th</sup> ed.). Butterworth-Heinemann, Oxford.
- Page, E. S. (1954). Continuous Inspection Schemes. *Biometrika*, Vol. 41, pp. 100-115.
- Palm, A. C. (1992). Some Aspects of Sampling for Control Charts. *ASQC Statistics Division Newsletter*, Vol. 12, No. 4, pp. 20-23.
- Palm, A. C. (2000). Discussion: Controversies and Contradictions in Statistical Process Control. *Journal of Quality Technology*, Vol. 32, No. 4, pp. 356-360.
- Pereira, Z. L., e Requeijo, J. G. (2012). *Qualidade: Planeamento e Controlo Estatístico de Processos* (2<sup>a</sup> ed.). FFCT - Fundação da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa, Caparica.
- Quesenberry, C. P. (1997). *SPC Methods for Quality Improvement*. John Wiley & Sons, New York.
- Ramírez, J. G. (1998). Monitoring Clean Room Air Using Cuscore Charts. *Quality and Reliability Engineering International*, Vol. 14, pp. 281-289.
- Reynolds, M. R., Jr., e Lu, C.-W. (1997). Control Charts for Monitoring Processes with Autocorrelated Data. *Nonlinear Analysis, Theory, Methods & Applications*, Vol. 30, No. 7, pp. 4059-4067.
- Reynolds, M. R., Jr., e Stoumbos, Z. G. (2004). Should Observations Be Grouped for Effective Process Monitoring? *Journal of Quality Technology*, Vol. 36, No. 4, pp. 343-366.
- Roberts, S. W. (1959). Control Chart Tests Based on Geometric Moving Averages. *Technometrics*, Vol. 1, pp. 239-250.
- Runger, G. C., e Testik, M. C. (2003). Control Charts for Monitoring Fault Signatures: Cuscore vs. GLR. *Quality and Reliability Engineering International*, Vol. 19, pp. 387-396.
- Ryan, T. P. (2011). *Statistical Methods for Quality Improvement* (3<sup>rd</sup> ed.). John Wiley & Sons, New Jersey.
- Schoonhoven, M., e Does, R. J. M. M. (2009). The  $\bar{X}$  Control Chart Under Non-Normality. *Quality and Reliability Engineering International*, Vol. 26, pp. 167-176.
- Shu, L., Apley, D. W., e Tsung, F. (2002). Autocorrelated Process Monitoring Using Triggered Cuscore Charts. *Quality and Reliability Engineering International*, Vol. 18, No. 5, pp. 411-421.
- Smith, J. (2009). *The History of Modern Quality*. Central Illinois Business Publishers (consultado a 21-02-2014). Disponível em: <http://www.peoriamagazines.com/ibi/2009/jul/history-modern-quality>.

Spedding, T. A., e Rawlings, P. L. (1994). Non-Normality in Statistical Process Control Measurements. *International Journal of Quality & Reliability Management*, Vol. 11, No. 6, pp. 27-37.

Stoumbos, Z. G. B., e Reynolds, M. R., Jr. (2000). Non-Normality and Autocorrelation of Individuals Control Charts. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, Vol. 66, No. 2, pp. 145-187.

Western Electric (1956). *Statistical Quality Control Handbook* (1<sup>st</sup> ed.). Western Electric Corporation, Indianapolis.

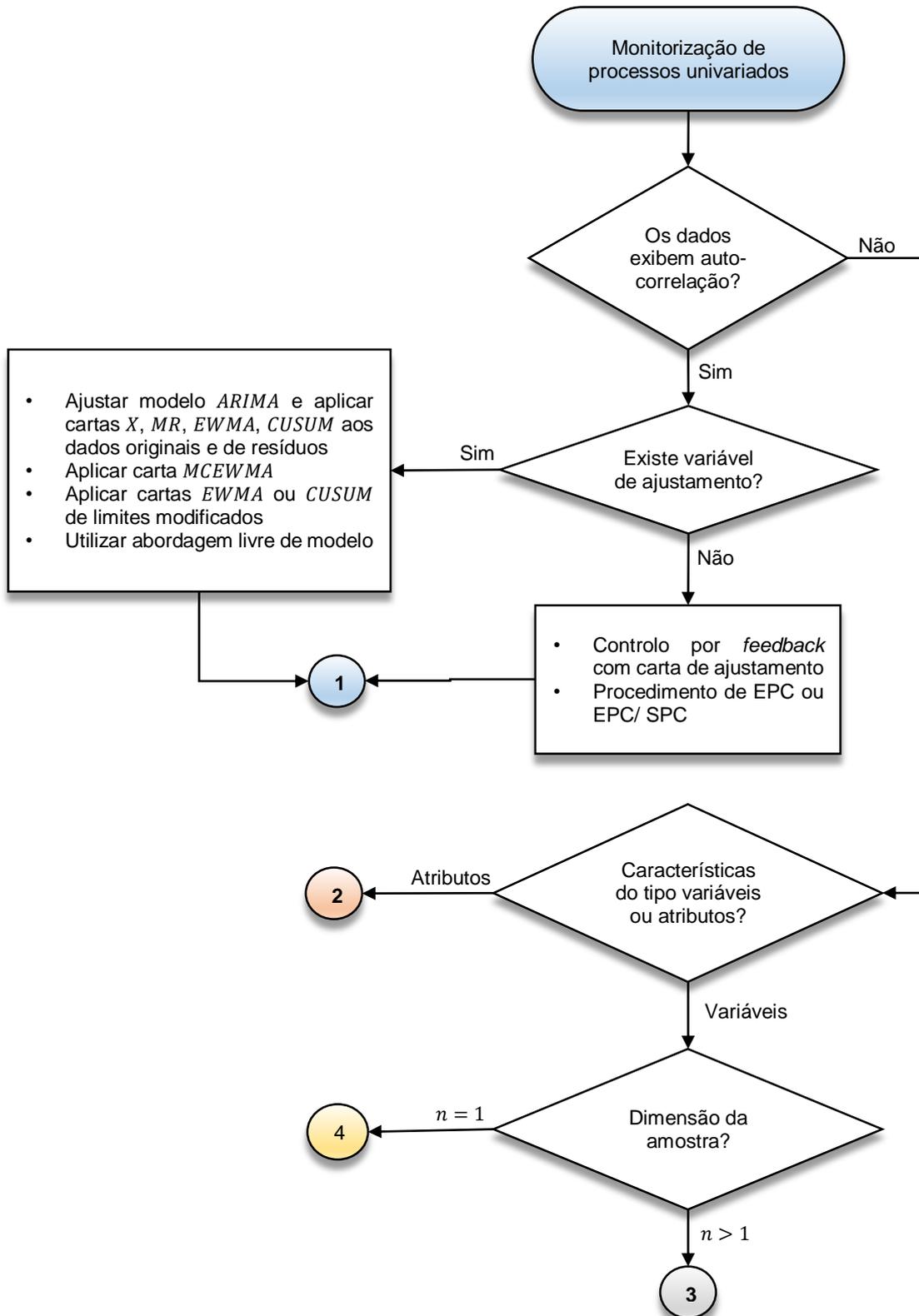
Woodall, W. H., e Faltin, F. W. (1996). An Overview and Perspective on Control Charting. In *Statistical Applications in Process Control* (Keats, J. B., and Montgomery, D. C., eds.), pp. 7-17. Marcell Dekker, New York.

Woodall, W. H. (2000). Controversies and Contradictions in Statistical Process Control. *Journal of Quality Technology*, Vol. 32, No. 4, pp. 341-350.

# Anexos

## Anexo I – Selecção de Cartas de Controlo para Processos Univariados

### I.1 Metodologia para a selecção de cartas em processos univariados



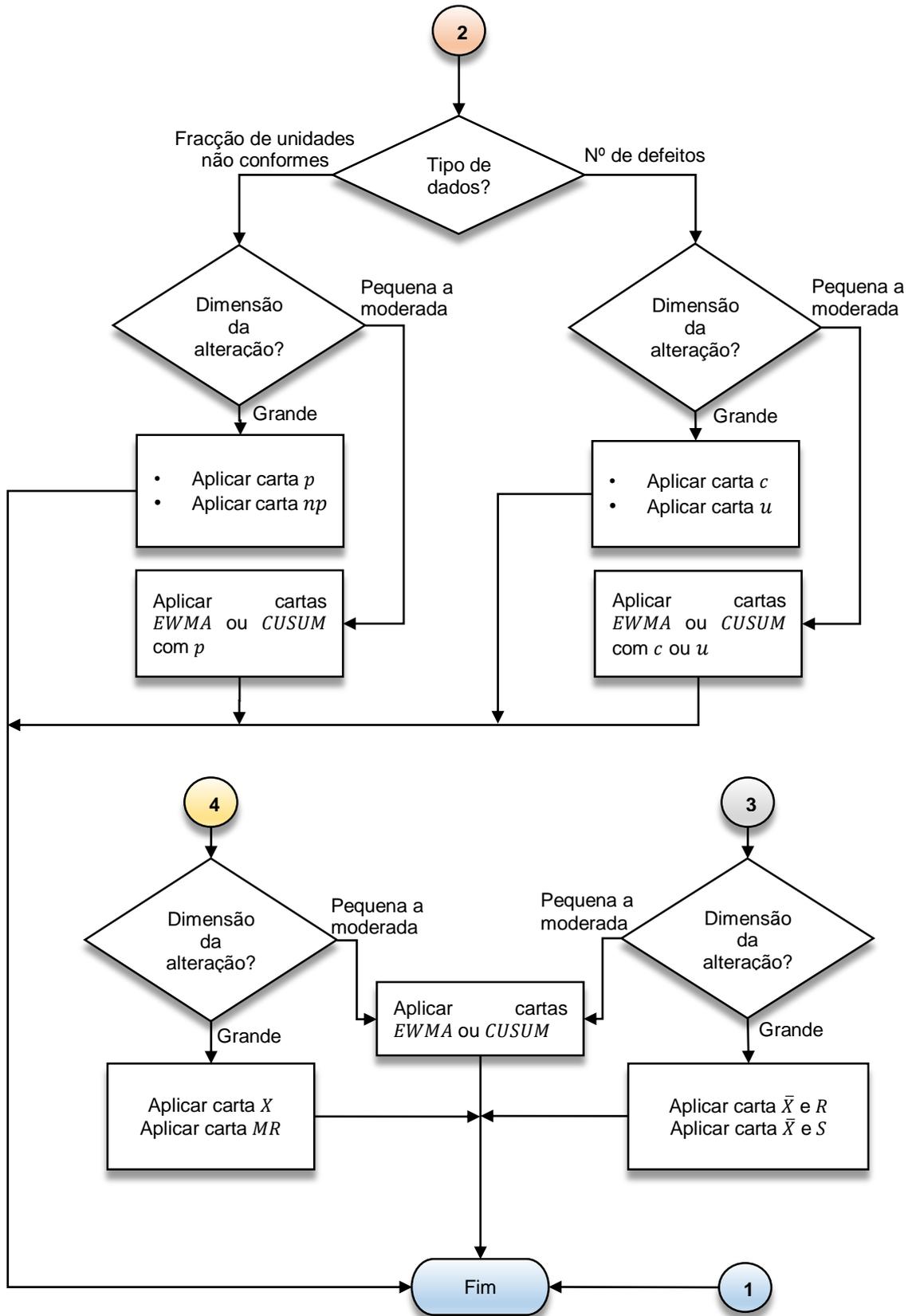


Figura I.1 Esquema para a selecção de cartas de controlo em processos univariados

## Anexo II – Estudo do Desempenho das Cartas de Controle

### II.1 Estudo das Cartas Face a Variações no Parâmetro Auto-Regressivo

**Tabela II.1** Estudo da variação do parâmetro auto-regressivo para 20 séries de 500 observações

Série	Parâmetro $\phi$
1	0,6338
2	0,5877
3	0,5451
4	0,5998
5	0,6696
6	0,6087
7	0,6102
8	0,5760
9	0,6223
10	0,6339
11	0,5788
12	0,5902
13	0,6389
14	0,6457
15	0,6036
16	0,5914
17	0,6281
18	0,6166
19	0,6350
20	0,5618

**Tabela II.2** Desempenho das cartas para  $\phi_A^1$

$\delta$	Carta <i>CUSUMres</i>		Carta <i>CUSCORE</i>		Carta <i>Triggered CUSCORE</i>			
	<i>ARL</i>	<i>SDRL</i>	<i>ARL</i>	<i>SDRL</i>	<i>ARL</i>	<i>SDRL</i>	<i>m</i>	<i>l</i>
0,5	30,251	15,286	30,079	15,201	26,361	14,630	5,384	7,103
1,0	13,237	4,139	13,296	4,133	11,530	4,354	1,592	1,330
1,5	8,816	2,093	8,814	2,083	7,406	2,380	1,150	0,490
2,0	6,772	1,315	6,770	1,319	5,435	1,633	1,041	0,224
2,5	5,614	0,938	5,610	0,944	4,270	1,238	1,011	0,109
3,0	4,871	0,725	4,861	0,729	3,523	0,988	1,002	0,049
<b>T. incr.</b>	167,880 seg (~ 3 min)		120,870 seg (~ 2 min)		218,190 seg (~ 4 min)			

**Tabela II.3** Desempenho das cartas para  $\phi_A^2$ 

$\phi = 0,6003$	<b>Carta <i>CUSUMres</i></b>		<b>Carta <i>CUSCORE</i></b>		<b>Carta <i>Triggered CUSCORE</i></b>			
	<i>ARL</i>	<i>SDRL</i>	<i>ARL</i>	<i>SDRL</i>	<i>ARL</i>	<i>SDRL</i>	<i>m</i>	<i>l</i>
0,5	30,119	15,250	30,191	15,187	26,272	14,595	5,349	7,013
1,0	13,260	4,143	13,274	4,411	11,531	4,314	1,606	1,3627
1,5	8,818	2,099	8,817	2,088	7,402	2,386	1,150	0,4868
2,0	6,764	1,318	6,767	1,317	5,431	1,637	1,042	0,2227
2,5	5,608	0,935	5,616	0,942	4,275	1,239	1,011	0,1104
3,0	4,867	0,730	4,867	0,727	3,519	0,992	1,003	0,0505
<b>T. incr.</b>	161,000 seg (~ 3 min)		126,000 seg (~ 2 min)		218,150 seg (~ 4 min)			

**Tabela II.4** Desempenho das cartas para  $\phi_B^1$ 

$\phi = 0,545$	<b>Carta <i>CUSUMres</i></b>		<b>Carta <i>CUSCORE</i></b>		<b>Carta <i>Triggered CUSCORE</i></b>			
	<i>ARL</i>	<i>SDRL</i>	<i>ARL</i>	<i>SDRL</i>	<i>ARL</i>	<i>SDRL</i>	<i>m</i>	<i>l</i>
0,5	35,834	18,345	35,758	18,178	30,800	17,354	6,240	8,308
1,0	14,806	4,644	14,862	4,645	12,680	4,831	1,645	1,434
1,5	9,578	2,293	9,585	2,301	7,948	2,646	1,154	0,497
2,0	7,241	1,444	7,250	1,447	5,710	1,775	1,043	0,226
2,5	5,906	1,022	5,914	1,017	4,414	1,337	1,011	0,109
3,0	5,073	0,783	5,076	0,781	3,584	1,046	1,003	0,053
<b>T. incr.</b>	165,451 seg (~ 3 min)		122,992 seg (~ 2 min)		215,524 seg (~ 4 min)			

Tabela II.5 Desempenho das cartas para  $\phi_B^2$ 

$\phi = 0,670$	Carta <i>CUSUMres</i>		Carta <i>CUSCORE</i>		Carta <i>Triggered CUSCORE</i>			
	<i>ARL</i>	<i>SDRL</i>	<i>ARL</i>	<i>SDRL</i>	<i>ARL</i>	<i>SDRL</i>	<i>m</i>	<i>l</i>
0,5	24,542	12,280	24,485	12,224	21,689	11,871	4,502	5,803
1,0	11,614	3,574	11,614	3,599	10,175	3,716	1,541	1,206
1,5	7,979	1,846	7,975	1,841	6,793	2,112	1,144	0,471
2,0	6,273	1,167	6,276	1,168	5,131	1,465	1,041	0,216
2,5	5,291	0,847	5,290	0,850	4,120	1,139	1,011	0,109
3,0	4,641	0,667	4,642	0,666	3,446	0,924	1,003	0,050
<b>T. incr.</b>	166,691 seg (~ 3 min)		125,000 seg (~ 2 min)		216,532 seg (~ 4 min)			

**Anexo III – Tabelas Auxiliares**

**III.1 Factores para as Cartas de Controlo**

Dimensão Amostra	cartas de médias				cartas de desvios padrão				cartas de amplitudes					
	factores limites controlo			factores linha central	factores limites controlo			factores limites controlo	factores limites controlo					
n	A	A <sub>2</sub>	A <sub>3</sub>	d <sub>4</sub>	c <sub>4</sub>	B <sub>3</sub>	B <sub>4</sub>	B <sub>5</sub>	B <sub>6</sub>	d <sub>3</sub>	D <sub>1</sub>	D <sub>2</sub>	D <sub>3</sub>	D <sub>4</sub>
2	2,121	1,881	2,659	1,128	0,7979	0	3,267	0	2,606	0,853	0	3,686	0	3,267
3	1,732	1,023	1,954	1,693	0,8862	0	2,568	0	2,276	0,888	0	4,358	0	2,575
4	1,500	0,729	1,628	2,059	0,9213	0	2,266	0	2,088	0,880	0	4,698	0	2,282
5	1,342	0,577	1,427	2,326	0,9400	0	2,089	0	1,964	0,864	0	4,918	0	2,115
6	1,225	0,483	1,287	2,534	0,9515	0,030	1,970	0,029	1,874	0,848	0	5,078	0	2,004
7	1,134	0,419	1,182	2,704	0,9594	0,118	1,882	0,113	1,806	0,833	0,204	5,204	0,076	1,924
8	1,061	0,373	1,099	2,847	0,9650	0,185	1,815	0,179	1,751	0,820	0,388	5,306	0,136	1,864
9	1,000	0,337	1,032	2,970	0,9693	0,239	1,761	0,232	1,707	0,808	0,547	5,393	0,184	1,816
10	0,949	0,308	0,975	3,078	0,9727	0,284	1,716	0,276	1,669	0,797	0,687	5,469	0,223	1,777
11	0,905	0,285	0,927	3,173	0,9754	0,321	1,679	0,313	1,637	0,787	0,811	5,535	0,256	1,744
12	0,866	0,266	0,886	3,258	0,9776	0,354	1,646	0,346	1,610	0,778	0,922	5,594	0,283	1,717
13	0,832	0,249	0,850	3,336	0,9794	0,382	1,618	0,374	1,585	0,770	1,025	5,647	0,307	1,693
14	0,802	0,235	0,817	3,407	0,9810	0,406	1,594	0,399	1,563	0,763	1,118	5,696	0,328	1,672
15	0,775	0,223	0,789	3,472	0,9823	0,428	1,572	0,421	1,544	0,756	1,203	5,741	0,347	1,653
16	0,750	0,212	0,763	3,532	0,9835	0,448	1,552	0,440	1,526	0,750	1,282	5,782	0,363	1,637
17	0,728	0,203	0,739	3,588	0,9845	0,466	1,534	0,458	1,511	0,744	1,356	5,820	0,378	1,622
18	0,707	0,194	0,718	3,640	0,9854	0,482	1,518	0,475	1,496	0,739	1,424	5,856	0,391	1,608
19	0,688	0,187	0,698	3,689	0,9862	0,497	1,503	0,490	1,483	0,734	1,487	5,891	0,403	1,597
20	0,671	0,180	0,680	3,735	0,9869	0,510	1,490	0,504	1,470	0,729	1,549	5,921	0,415	1,585
21	0,655	0,173	0,663	3,778	0,9876	0,523	1,477	0,516	1,459	0,724	1,605	5,951	0,425	1,575
22	0,640	0,167	0,647	3,819	0,9882	0,534	1,466	0,528	1,448	0,720	1,659	5,979	0,434	1,566
23	0,626	0,162	0,633	3,858	0,9887	0,545	1,455	0,539	1,438	0,716	1,710	6,006	0,443	1,557
24	0,612	0,157	0,619	3,895	0,9892	0,555	1,445	0,549	1,429	0,712	1,759	6,031	0,451	1,548
25	0,600	0,153	0,606	3,931	0,9896	0,565	1,435	0,559	1,420	0,708	1,806	6,056	0,459	1,541

**Figura III.1** Tabela referente a constantes para as cartas tradicionais de variáveis

III.2 Tabela da Distribuição t-Student

V	α													
	45%	40%	35%	30%	25%	20%	15%	10%	5%	2,5%	2%	1%	0,5%	0,25%
1	0,1584	0,3249	0,5095	0,7265	1,0000	1,3764	1,9626	3,0777	6,3138	12,706	15,895	31,821	63,657	127,321
2	0,1421	0,2887	0,4447	0,6172	0,8165	1,0607	1,3862	1,8856	2,9200	4,3027	4,8487	6,9646	9,9248	14,0890
3	0,1366	0,2767	0,4242	0,5844	0,7649	0,9785	1,2498	1,6377	2,3534	3,1824	3,4819	4,5407	5,8409	7,4533
4	0,1338	0,2707	0,4142	0,5686	0,7407	0,9410	1,1896	1,5332	2,1318	2,7764	2,9985	3,7469	4,6041	5,5976
5	0,1322	0,2672	0,4082	0,5594	0,7267	0,9195	1,1558	1,4759	2,0150	2,5706	2,7565	3,3649	4,0321	4,7733
6	0,1311	0,2648	0,4043	0,5534	0,7176	0,9057	1,1342	1,4398	1,9432	2,4469	2,6122	3,1427	3,7074	4,3168
7	0,1303	0,2632	0,4015	0,5491	0,7111	0,8960	1,1192	1,4149	1,8946	2,3646	2,5168	2,9980	3,4995	4,0293
8	0,1297	0,2619	0,3995	0,5459	0,7064	0,8889	1,1081	1,3968	1,8595	2,3060	2,4490	2,8965	3,3554	3,8325
9	0,1293	0,2610	0,3979	0,5435	0,7027	0,8834	1,0997	1,3830	1,8331	2,2622	2,3984	2,8214	3,2498	3,6897
10	0,1289	0,2602	0,3966	0,5415	0,6998	0,8791	1,0931	1,3722	1,8125	2,2281	2,3593	2,7638	3,1693	3,5814
11	0,1286	0,2596	0,3956	0,5399	0,6974	0,8755	1,0877	1,3634	1,7959	2,2010	2,3281	2,7181	3,1058	3,4966
12	0,1283	0,2590	0,3947	0,5386	0,6955	0,8726	1,0832	1,3562	1,7823	2,1788	2,3027	2,6810	3,0545	3,4284
13	0,1281	0,2586	0,3940	0,5375	0,6938	0,8702	1,0795	1,3502	1,7709	2,1604	2,2816	2,6503	3,0123	3,3725
14	0,1280	0,2582	0,3933	0,5366	0,6924	0,8681	1,0763	1,3450	1,7613	2,1448	2,2638	2,6245	2,9768	3,3257
15	0,1278	0,2579	0,3928	0,5357	0,6912	0,8662	1,0735	1,3406	1,7531	2,1314	2,2485	2,6025	2,9467	3,2860
16	0,1277	0,2576	0,3923	0,5350	0,6901	0,8647	1,0711	1,3368	1,7459	2,1199	2,2354	2,5835	2,9208	3,2520
17	0,1276	0,2573	0,3919	0,5344	0,6892	0,8633	1,0690	1,3334	1,7396	2,1098	2,2238	2,5669	2,8982	3,2224
18	0,1274	0,2571	0,3915	0,5338	0,6884	0,8620	1,0672	1,3304	1,7341	2,1009	2,2137	2,5524	2,8784	3,1966
19	0,1274	0,2569	0,3912	0,5333	0,6876	0,8610	1,0655	1,3277	1,7291	2,0930	2,2047	2,5395	2,8609	3,1737
20	0,1273	0,2567	0,3909	0,5329	0,6870	0,8600	1,0640	1,3253	1,7247	2,0860	2,1967	2,5280	2,8453	3,1534
21	0,1272	0,2566	0,3906	0,5325	0,6864	0,8591	1,0627	1,3232	1,7207	2,0796	2,1894	2,5176	2,8314	3,1352
22	0,1271	0,2564	0,3904	0,5321	0,6858	0,8583	1,0614	1,3212	1,7171	2,0739	2,1829	2,5083	2,8188	3,1188
23	0,1271	0,2563	0,3902	0,5317	0,6853	0,8575	1,0603	1,3195	1,7139	2,0687	2,1770	2,4999	2,8073	3,1040
24	0,1270	0,2562	0,3900	0,5314	0,6848	0,8569	1,0593	1,3178	1,7109	2,0639	2,1715	2,4922	2,7969	3,0905
25	0,1269	0,2561	0,3898	0,5312	0,6844	0,8562	1,0584	1,3163	1,7081	2,0595	2,1666	2,4851	2,7874	3,0782
26	0,1269	0,2560	0,3896	0,5309	0,6840	0,8557	1,0575	1,3150	1,7056	2,0555	2,1620	2,4786	2,7787	3,0669
27	0,1268	0,2559	0,3894	0,5306	0,6837	0,8551	1,0567	1,3137	1,7033	2,0518	2,1578	2,4727	2,7707	3,0565
28	0,1268	0,2558	0,3893	0,5304	0,6834	0,8546	1,0560	1,3125	1,7011	2,0484	2,1539	2,4671	2,7633	3,0469
29	0,1268	0,2557	0,3892	0,5302	0,6830	0,8542	1,0553	1,3114	1,6991	2,0452	2,1503	2,4620	2,7564	3,0380
30	0,1267	0,2556	0,3890	0,5300	0,6828	0,8538	1,0547	1,3104	1,6973	2,0423	2,1470	2,4573	2,7500	3,0298
35	0,1266	0,2553	0,3885	0,5292	0,6816	0,8520	1,0520	1,3062	1,6896	2,0301	2,1332	2,4377	2,7238	2,9960
40	0,1265	0,2550	0,3881	0,5286	0,6807	0,8507	1,0500	1,3031	1,6839	2,0211	2,1229	2,4233	2,7045	2,9712
45	0,1264	0,2549	0,3878	0,5281	0,6800	0,8497	1,0485	1,3006	1,6794	2,0141	2,1150	2,4121	2,6896	2,9521
50	0,1263	0,2547	0,3875	0,5278	0,6794	0,8489	1,0473	1,2987	1,6759	2,0086	2,1087	2,4033	2,6778	2,9370
55	0,1262	0,2546	0,3873	0,5275	0,6790	0,8482	1,0463	1,2971	1,6730	2,0040	2,1036	2,3961	2,6682	2,9247
60	0,1262	0,2545	0,3872	0,5272	0,6786	0,8477	1,0455	1,2958	1,6706	2,0003	2,0994	2,3901	2,6603	2,9146
65	0,1262	0,2544	0,3870	0,5270	0,6783	0,8472	1,0448	1,2947	1,6686	1,9971	2,0958	2,3851	2,6536	2,9060
70	0,1261	0,2543	0,3869	0,5268	0,6780	0,8468	1,0442	1,2938	1,6669	1,9944	2,0927	2,3808	2,6479	2,8987
75	0,1261	0,2542	0,3868	0,5266	0,6778	0,8464	1,0436	1,2929	1,6654	1,9921	2,0901	2,3771	2,6430	2,8924
80	0,1261	0,2542	0,3867	0,5265	0,6776	0,8461	1,0432	1,2922	1,6641	1,9901	2,0878	2,3739	2,6387	2,8870
85	0,1260	0,2541	0,3866	0,5264	0,6774	0,8459	1,0428	1,2916	1,6630	1,9883	2,0857	2,3710	2,6349	2,8822
90	0,1260	0,2541	0,3866	0,5263	0,6772	0,8456	1,0424	1,2910	1,6620	1,9867	2,0839	2,3685	2,6316	2,8779
95	0,1260	0,2541	0,3865	0,5262	0,6771	0,8454	1,0421	1,2905	1,6611	1,9853	2,0823	2,3662	2,6286	2,8741
100	0,1260	0,2540	0,3864	0,5261	0,6770	0,8452	1,0418	1,2901	1,6602	1,9840	2,0809	2,3642	2,6259	2,8707
120	0,1259	0,2539	0,3862	0,5258	0,6765	0,8446	1,0409	1,2886	1,6577	1,9799	2,0763	2,3578	2,6174	2,8599
150	0,1259	0,2538	0,3861	0,5255	0,6761	0,8440	1,0400	1,2872	1,6551	1,9759	2,0718	2,3515	2,6090	2,8492
200	0,1258	0,2537	0,3859	0,5252	0,6757	0,8434	1,0391	1,2858	1,6525	1,9719	2,0672	2,3451	2,6006	2,8385
250	0,1258	0,2536	0,3858	0,5251	0,6755	0,8431	1,0386	1,2849	1,6510	1,9695	2,0645	2,3414	2,5956	2,8322
300	0,1258	0,2536	0,3857	0,5250	0,6753	0,8428	1,0382	1,2844	1,6499	1,9679	2,0627	2,3388	2,5923	2,8279
400	0,1257	0,2535	0,3856	0,5248	0,6751	0,8425	1,0378	1,2837	1,6487	1,9659	2,0605	2,3357	2,5882	2,8227
500	0,1257	0,2535	0,3855	0,5247	0,6750	0,8423	1,0375	1,2832	1,6479	1,9647	2,0591	2,3338	2,5857	2,8195
600	0,1257	0,2535	0,3855	0,5246	0,6749	0,8422	1,0373	1,2830	1,6474	1,9639	2,0582	2,3326	2,5840	2,8175
750	0,1257	0,2534	0,3855	0,5246	0,6748	0,8421	1,0372	1,2827	1,6469	1,9631	2,0573	2,3313	2,5824	2,8154
1000	0,1257	0,2534	0,3854	0,5246	0,6747	0,8420	1,0370	1,2824	1,6464	1,9623	2,0564	2,3301	2,5808	2,8133

Figura III.2 Tabela da distribuição t-Student