

POLÍTICAS de AMOSTRAGEM
em
CONTROLO ESTATÍSTICO
da QUALIDADE

por

Mestre Manuel António Coelho do Carmo

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de
DOUTOR EM GESTÃO DE INFORMAÇÃO
pelo
Instituto Superior de Estatística e Gestão de Informação
da
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA

Lisboa, 2014

POLÍTICAS de AMOSTRAGEM
em
CONTROLO ESTATÍSTICO
da QUALIDADE

por

Mestre Manuel António Coelho do Carmo

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de

DOUTOR EM GESTÃO DE INFORMAÇÃO

pelo

Instituto Superior de Estatística e Gestão de Informação

da

UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA

Sob a Orientação de:

Professor Doutor Paulo Infante
Professor Doutor Jorge M. Mendes

Lisboa, 2014

Este trabalho não inclui as críticas e sugestões feitas pelo júri.

À memória do meu Pai.
À minha Mãe

À Sílvia
À Bárbara e ao Martim

Aos meus Orientadores

AGRADECIMENTOS

Ao Professor Doutor Paulo Infante, pelas orientações constantes, pela sua disponibilidade, pelo seu Saber, pelos seus incentivos constantes, manifesto o meu sincero e profundo agradecimento.

Ao Professor Doutor Jorge M. Mendes, pelas suas correções e orientações, pela sua disponibilidade e incentivos expresso a minha gratidão.

À minha Família, agradeço, do fundo do coração, todo o apoio e incentivos constantes.

Ao Professor Doutor Tawfiq Rkibi, agradeço pela confiança inicial depositada, sem a qual não teria entrado neste projeto de vida, e pelo incentivo e interesse manifestados ao longo de todo o trajeto.

Ao Mestre João Atanásio, agradeço o apoio atribuído e a honradez da sua palavra.

Ao Mestre Daniel Olivença, pelo apoio e disponibilidade dados no desenvolvimento de inputs do software R.

Ao Drº Carlos Conceição, pela ajuda na construção do protótipo em C#.

RESUMO

Nesta Dissertação apresentam-se e estudam-se, de uma forma crítica, dois novos métodos de amostragem adaptativa e uma nova medida de desempenho de métodos de amostragem, no contexto do controlo estatístico da qualidade.

Considerando como base uma carta de controlo para a média do tipo *Shewhart*, estudamos as suas propriedades estatísticas e realizamos estudos comparativos, em termos do seu desempenho estatístico, com alguns dos métodos mais referenciados na literatura.

Inicialmente, desenvolvemos um novo método adaptativo de amostragem no qual os intervalos entre amostras são obtidos com base na função densidade da distribuição de *Laplace* reduzida. Este método revela-se, particularmente, eficiente na deteção de moderadas e grandes alterações da média, pouco sensível à limitação do menor intervalo de amostragem e robusto face a diferentes situações consideradas para a não normalidade da característica da qualidade. Em determinadas situações, este método é sempre mais eficiente do que o método com intervalos de amostragem adaptativos, dimensões amostrais fixas e coeficientes dos limites de controlo fixos.

Tendo como base o método de amostragem definido no ponto anterior e um método no qual os intervalos de amostragem são definidos antes do início do controlo do processo com base na taxa cumulativa de risco do sistema, apresentamos um novo método de amostragem que combina o método de intervalos predefinidos com o método de intervalos adaptativos. Neste método, os instantes de amostragem são definidos pela média ponderada dos instantes dos dois métodos, atribuindo-se maior peso ao método adaptativo para alterações moderadas (onde o método predefinido é menos eficaz) e maior peso ao método predefinido nos restantes casos (onde o método adaptativo é menos eficaz). Desta forma, os instantes de amostragem, inicialmente

calendarizados de acordo com as expectativas de ocorrência de uma alteração tomando como base a distribuição do tempo de vida do sistema, são adaptados em função do valor da estatística amostral calculada no instante anterior. Este método é sempre mais eficiente do que o método periódico clássico, o que não acontece com nenhum outro esquema adaptativo, e do que o método de amostragem VSI para alguns pares de amostragem, posicionando-se como uma forte alternativa aos procedimentos de amostragem encontrados na literatura.

Por fim, apresentamos uma nova medida de desempenho de métodos de amostragem. Considerando que dois métodos em comparação têm o mesmo tempo médio de mau funcionamento, o desempenho dos métodos é comparado através do número médio de amostras recolhidas sob controlo. Tendo em conta o tempo de vida do sistema, com diferentes taxas de risco, esta medida mostra-se robusta e permite, num contexto económico, um melhor controlo de custos por unidade de tempo.

Palavras-chave: controlo estatístico da qualidade, amostragem adaptativa, robustez, amostragem predefinida, medidas de desempenho.

ABSTRACT

In this dissertation one presents and studies, in a critical way, two new adaptive sampling methods and a new measure of performance of sampling methods in the context of statistical quality control.

Based on a *Shewhart* type control chart for the mean, their statistical properties are studied and performance comparative studies to the most popular methods reported in the literature are performed.

Initially, we developed a new adaptive sampling method in which the intervals between samples are obtained based on the density distribution function of the *Laplace* standard distribution. This method proves to be particularly efficient in detecting moderate and large changes of means, somewhat less sensitive to the limited sampling interval and robust to different situations of the non-normality of the quality characteristic being assessed. In certain situations, this proposed method is always more efficient than the method of adaptive sampling intervals, fixed sample size and fixed control limits coefficients.

Based on the sampling method defined in the previous paragraph and a method in which sampling intervals are set before starting the control process based on the cumulative hazard rate of the system, one introduces a new sampling method that combines the method of predefined intervals with the method of adaptive intervals. In this methodology, the sampling instants are defined by the weighted average of the moments of the two methods, assigning larger weight to the adaptive method for moderate changes (where the default method is less effective) and larger weight to the default method in the remaining cases (where adaptive method is less effective). Thus, the sampling instants, originally scheduled according to the expectations of the

occurrence of a change taking as a basis the distribution of the lifetime of the system, are adapted according to the value of the sample statistic computed at the previous instant. This method is always more efficient than the classical periodic method, which does not happen with any other adaptive scheme. It is even more efficient than some pairs of VSI sampling method. This makes it a strong alternative to sampling procedures found in literature.

Finally, one presents a new measure of performance of sampling methods. Whereas two methods being compared have the same average time of malfunction, performance of the methods is compared by the average number of samples taken in control. Taking into account the lifetime of the system, with different hazard rate, this measure proves to be robust and for a better control of costs per unit time.

Keywords: statistical process control, quality, adaptive sampling, robustness, predetermined sampling, effectiveness measures.

ÍNDICE GERAL

Agradecimentos.....	
Resumo.....	i
Abstract.....	ii
Índice Geral.....	iii

CAPÍTULO I – INTRODUÇÃO

1.1. Apresentação Genérica do Problema.....	1
1.2. Abordagem Económica do Problema.....	12
1.3. Políticas de Amostragem.....	17
1.4. Medidas do Desempenho Estatístico das Cartas de Controlo.....	23
1.5. Objetivos desta Dissertação.....	27
1.6. Pressupostos para os Objetivos da Dissertação.....	28
1.7. Referências Bibliográficas.....	33

CAPÍTULO II – AMOSTRAGEM PERIÓDICA

2.1. Introdução.....	44
2.2. Dimensão Fixa das Amostras: Amostragem FSI.....	45
2.2.1. Propriedades Estatísticas.....	46
2.3. Dimensão Adaptativa das Amostras.....	52
2.3.1. Amostragem VSS.....	52
2.3.2. Outras políticas de Amostragem Adaptativas.....	59
2.4. Referências Bibliográficas.....	64

CAPÍTULO III – AMOSTRAGEM NÃO PERIÓDICA

3.1. Introdução.....	67
3.2. Instantes de Amostragem Predefinidos.....	69
3.2.1. Amostragem PSI.....	74
3.3. Instantes de Amostragem Adaptativos.....	80
3.3.1. Amostragem VSI.....	81
3.3.2. Amostragem VSSI.....	88
3.3.3. Amostragem VP.....	92
3.3.4. Outras Políticas de Amostragem Adaptativas.....	96
3.3.5. Nova Política de Amostragem: Amostragem LSI.....	99
3.3.5.1. A Metodologia.....	100
3.3.5.2. Alguns Indicadores Iniciais.....	103
3.3.5.3. Propriedades Estatísticas.....	105
3.3.5.4. Considerações sobre o Método LSI.....	112
3.3.5.5. Comparação de LSI com FSI e VSI.....	114
3.3.5.6. Comparação de LSI com VSS, VSSI e VP.....	119
3.3.5.7. Um Estudo de Sensibilidade.....	125
3.3.5.7.1. O Truncamento do Menor Intervalo de Amostragem.....	126
3.3.5.7.2. Comparação com FSI e VSI.....	130
3.3.5.8. Um Estudo de Robustez.....	133
3.3.5.8.1. Metodologia e Simulação.....	133
3.3.5.8.2. Ajustamento das Distribuições por Amostragem.....	139
3.3.5.8.3. Qualidade com Distribuição de Mistura de Normais, t-Student e Gama	142
3.4. Comparação do Desempenho Estatístico do Método PSI com o Desempenho dos Métodos LSI, VSSI, VSS e VP.....	160
3.5. Novo Método de Amostragem: Método CAPSI.....	163
3.5.1. Propriedade Elementares do Método CAPSI.....	164

3.5.2. Comparação com os Métodos FSI, PSI e LSI.....	166
3.5.3. Comparação com o Método VSI.....	173
3.6. Referências Bibliográficas.....	177

CAPÍTULO IV – MEDIDAS DE DESEMPENHO ESTATÍSTICO

Artigo publicado em abril de 2014

<i>International Journal of Quality and Reliability Management</i>	183
--	-----

Carmo *et al.* (2014)

Carmo, M.; Infante, P.; Mendes, J. M. (2014). A different and simple approach for comparing sampling methods in quality control. *International Journal Quality & Reliability Management*, 31(5), 478-499.

CAPÍTULO V – CONCLUSÕES FINAIS	210
---	-----

ANEXOS

A1 – Input no Software SAS, para obter o intervalo de amostragem em FSI

A2 – Input em R para simulação dos AATS da política CSI

A3 – PrintScreen de um Protótipo para simular AATS da política CSI

CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO

1.1. Apresentação Genérica do Problema

Num contexto de enorme crise económica, após a segunda guerra mundial, os japoneses tornaram-se mestres na inspeção de sistemas produtivos e, em particular, no SQC (“*Statistical Quality Control*”). Na atual crise económica mundial, todo o bem (de produção, serviço ou motivacional) com qualidade é uma vantagem competitiva para toda e qualquer organização.

Diz-se que um bem ou serviço tem qualidade quando satisfaz uma ou várias características que nele se pretende(m) (ou necessita(m)) encontrar. Além disso, uma organização certificada cativa mais consumidores para os produtos ou serviços que disponibiliza, desde bens de primeira necessidade à formação graduada e pós graduada. Como estratégia de gestão, um vasto leque de organizações, sejam de pequena, média ou grande dimensão, integra um departamento para medir, permanentemente, a qualidade dos seus produtos ou serviços.

A avaliação da qualidade pode passar por três momentos: **antes** da execução (por exemplo, avaliando a qualidade da matéria prima que se vai utilizar no fabrico de um determinado produto ou avaliando o rigor com que foi executado determinado projeto de implementação de um sistema de informação), **durante** a execução (por exemplo,

avaliando a qualidade do produto durante a sua produção ou avaliando os timings das tarefas de implementação do projeto de modo a não se verificarem atrasos na entrega do projeto) e **após** a conclusão de um projeto ou a obtenção do produto (avaliando a qualidade final do produto ou avaliando o cumprimento de todas as tarefas dentro dos timings e dos custos acordados inicialmente).

Assim, o grande desafio que se coloca às organizações, em geral, é o de melhorar a qualidade dos seus produtos e serviços, modernizar as práticas de Controlo da Qualidade e, em simultâneo, obter reduções substanciais no custo da qualidade.

Nesse sentido, para melhorarmos a qualidade de um determinado produto devemos reduzir a variabilidade de uma ou mais das suas características. Em Montgomery (2009) podem ler-se as seguintes definições: “*Quality is inversely proportional to variability*” (p. 6) e “*Quality improvement is the reduction of variability in processes and products*” (p. 7).

É neste contexto que o Controlo Estatístico de Qualidade assume primordial importância, porque os seus métodos estatísticos possibilitam a deteção de formas invulgares de variação, ou seja, permitem determinar alterações nos valores dos parâmetros do processo e identificar alguns dos fatores que podem influenciar as características do processo. Contudo, a implementação desses métodos estatísticos deve ser efetuada de forma integrada num sistema de gestão da qualidade com uma filosofia mais abrangente, e que comporta diferentes estratégias como, por exemplo, o TQM (“*Total Quality Management*”) que envolve as boas práticas de gestão de recursos humanos, relações com fornecedores, desenvolvimento de novos produtos (aproveitando as sinergias dos departamentos de I&D), gestão dos processos produtivos e o enfoque na satisfação do cliente. Relativamente a esta área podem consultar-se, por exemplo, as obras de Juran (1974) (1ª ed., 1957), Ishikawa (1985), Deming (1986), Feigenbaum (1994) (1ª ed., 1951), Pekar (1995), Winston (1999), e mais recentemente, a de Dahlgaard *et al.* (2007).

O controlo estatístico de qualidade agrega diferentes técnicas estatísticas, sendo cada uma delas mais (ou menos) indicada para ser utilizada na análise dos diferentes problemas e na melhoria do desempenho de processos.

Woodall e Montgomery (1999) definem quatro áreas principais para o controlo estatístico de qualidade: controlo estatístico do processo, delineamento de experiências, amostragem por aceitação e análise de capacidade do processo. Em Montgomery (2009), partindo do princípio que os processos são definidos de modo a suportarem limites de especificação nas características da qualidade, geralmente impostos pelos clientes, e a suportarem uma permanente análise ao desempenho dos sistemas de medição, como por exemplo às características do viés, à calibragem e à precisão, resume o controlo estatístico de qualidade às três primeiras áreas.

Ainda assim, o delineamento de experiências, técnica *off-line*, permite realizar um planeamento adequado a qualquer processo, tendo por objetivo a redução da variabilidade das características da qualidade e permite identificar níveis ótimos dessas mesmas características – variáveis controláveis – por forma a otimizar o funcionamento do processo (aumento da produção, melhoria da qualidade e redução de custos). É uma técnica muito utilizada durante o desenvolvimento das atividades em fases primárias da produção. Uma vez identificada a lista das variáveis que podem influenciar, significativamente, o *output* do processo, são modeladas relações entre as variáveis de *input* por forma a influenciar as características da qualidade no *output*. Para construir os modelos de relações são utilizadas, por exemplo, a análise de regressão e a análise de séries temporais.

A amostragem por aceitação, técnica *off-line*, é utilizada na tomada de decisão sobre lotes de bens ou serviços – aceita/rejeita – à entrada (chegada de matérias primas) e/ou à saída (ao produto final para ser enviado ao cliente) de um processo com base na informação dada por uma amostra aleatória. Trata-se de uma medida defensiva, entre outras, e implementada como dispositivo de proteção a ameaças de deterioração

da qualidade. A amostragem por aceitação pode ser feita por atributos ou por variáveis. Deve ser utilizada de forma descontinuada e a favor de procedimentos de controlo do processo. Os diferentes contextos em que se utiliza esta técnica, bem como de outras utilizadas em controlo da qualidade, podem encontrar-se, por exemplo, em Duncan (1986), Schilling e Neubauer (2008) e em Montgomery (2009), pois trata-se de uma área que tem merecido, e continua a merecer, atenção da comunidade científica.

O controlo estatístico do processo (CEP) (usualmente designado na literatura por SPC – “*Statistical Process Control*”) é, na generalidade, a área que tem merecido maior atenção por parte da comunidade científica. O CEP utiliza procedimentos que procuram detetar alterações no processo ao longo do tempo, tratando-se de uma técnica *on-line* (Gomes et al. (2010), p. 3). São diversas as ferramentas da estatística, com especial destaque para as cartas de controlo, com aplicação no controlo estatístico do processo, sendo que a sua utilização tem sempre como objetivo eliminar, ou reduzir, a variabilidade oriunda de causas externas e não a variabilidade inerente ao processo, pois essa não se pode eliminar. Num contexto *DMAIC* (**D**efine, **M**easure, **A**nalyse, **I**mprove and **C**ontrol, contexto “*SixSigma*”) introduzido por Montgomery (2009) (p. 47) o controlo estatístico do processo é incluído nos âmbitos da “*Measure*”, “*Analyse*” and “*Control*”.

Introduzida por *Walter Shewhart* (Shewhart (1930)), considerado por muitos o criador do moderno controlo estatístico do processo, a carta de controlo é uma das principais, e poderosas, ferramentas estatísticas utilizadas no controlo estatístico do processo. É uma ferramenta simples que permite avaliar, e controlar, o desempenho do processo ao longo do tempo.

A carta de controlo possibilita a distinção entre causas de variações aleatórias e causas de variações assinaláveis. As primeiras são inerentes ao processo, constituindo-se como variabilidade natural do processo (por exemplo, micro variações da matéria prima) não sendo facilmente eliminadas sem haver alterações profundas no

próprio processo (por exemplo, nova matéria prima vindo de um novo fornecedor). Quando as causas aleatórias são únicas no processo dizemos que o processo está sob controlo. Em contraponto, as causas assinaláveis correspondem a maiores variações quando comparadas com as causas aleatórias, provocando alterações nas características da qualidade que podem ser inaceitáveis (por exemplo, alterações na regularidade das máquinas, variação da matéria prima ou erros de operador/controlador). Devem ser detetadas e eliminadas do processo (usualmente à custa da intervenção humana) sempre que tal contribua para uma melhoria do processo. Na presença de causas assinaláveis, um processo diz-se fora de controlo. Ainda assim a diferença entre causas aleatórias e causas assinaláveis depende do contexto de aplicação de um determinado processo, pois como afirma Infante (2004) *“...pode uma causa aleatória no presente ser considerada uma causa assinalável no futuro”*.

A carta de controlo é uma representação gráfica dos valores de uma estatística, por exemplo a média ou a mediana, em função do tempo. A estatística mede uma determinada característica da qualidade tendo por base os elementos aleatoriamente selecionados do processo.

Se a característica da qualidade é de natureza quantitativa (por exemplo, a temperatura, a pressão, o comprimento, o diâmetro, a quantidade de iodo presente na água, etc.) são utilizadas cartas por variáveis (carta de controlo para a média – carta \bar{X} , carta de controlo para a amplitude – carta R, carta de controlo para o desvio padrão – carta S, carta de controlo para a variância – carta S^2 , cartas de controlo simultâneo - \bar{X} -R e \bar{X} -S, entre outras que se podem encontrar na literatura, por exemplo, carta de controlo para a mediana e para a amplitude ou para a mediana e para a amplitude total). Se a característica da qualidade é de natureza qualitativa, onde cada unidade de produto é classificada como defeituosa ou não defeituosa, como resultado de possuir, ou não, um determinado atributo (por exemplo, sabor, cheiro ou aspeto), ou se é

possível contar o número de defeitos numa determinada unidade do produto (por exemplo, número de defeitos na pintura de um automóvel ou o número de defeitos nas riscas de uma camisola), utilizamos cartas de controlo por atributos (carta de controlo para a proporção de defeituosos – carta p e a carta para o número de defeitos por unidade – carta c, carta para o número médio de defeitos – carta k ou carta para o número médio de defeitos por unidade – carta u).

Na Fig. 1.1 podemos ver uma carta de controlo do tipo *Shewhart*, que é constituída por uma linha central (representando o valor médio da característica da qualidade na situação em que o processo está sob controlo) e por duas linhas colocadas, de forma simétrica, acima e abaixo da referida linha central, designadas por limites de controlo.

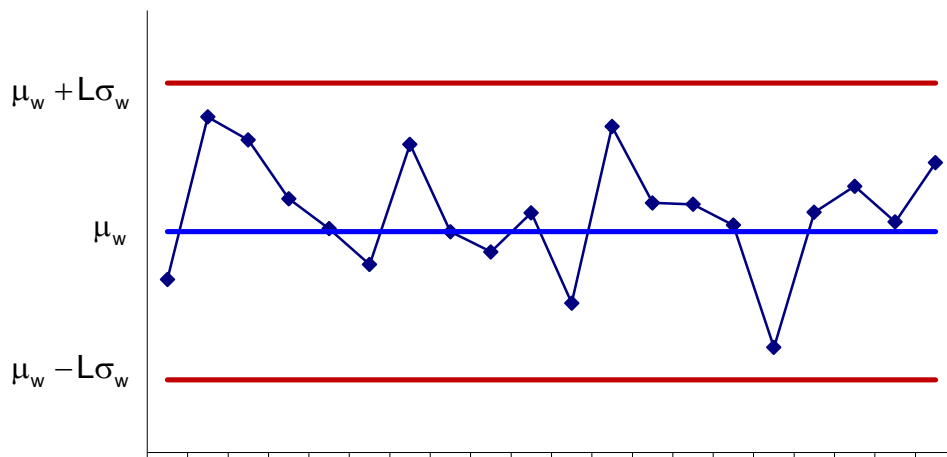


Fig. 1.1. – Carta de controlo de *Shewhart*

Designando por W uma estatística amostral que mede uma determinada característica da qualidade com média μ_w e desvio padrão σ_w , a carta fica definida com uma linha central igual a μ_w , limite superior de controlo (LSC) igual a $\mu_w + L\sigma_w$ e limite inferior de controlo (LIC) igual a $\mu_w - L\sigma_w$. O coeficiente L representa a distância dos limites de controlo à linha central medida em unidades de desvio padrão da estatística amostral. Sendo conhecidos os limites de controlo, usualmente utiliza-se $L=3$ (valor usual na literatura americana) ou $L=3,09$ (valor usual na literatura inglesa) a carta fica totalmente definida.

Quando utilizamos uma carta para a média com limites “3,09-sigma”, caso o processo esteja sob controlo estatístico, vão aparecer, em média, 20 médias amostrais fora dos limites de controlo em cada 10000. No caso mais usual, quando se utiliza uma carta para a média com limites “3-sigma”, estando o processo sob controlo estatístico, aparecem, em média, 27 médias amostrais fora dos limites de controlo, por cada 10000.

Esta carta de controlo foi sempre muito utilizada ao longo do tempo, e continua a ser, tanto a nível teórico, como ao nível da implementação prática. Contudo, com o objetivo de conseguir uma maior rapidez na deteção de alterações pequenas e moderadas, foram aparecendo outras cartas de controlo. Uma destas especiais, como as cartas de médias móveis, introduzidas por Roberts (1959) (e utilizadas, p. e., nos trabalhos de Vanderwiel (1996), Stoumbos e Reynolds (2000) e Dyer *et al.* (2003)), as cartas CUSUM, introduzidas por Page (1954) (e usadas, por exemplo, em Runger *et al.* (1995), Hawkins e Olwell (1997), Shu *et al.* (2010) e Wu *et al.* (2010)), as cartas EWMA (consideradas, p. e., nos trabalhos de Amin *et al.* (1999), Borrer *et al.* (1999), Lu e Reynolds (1999b), Reynolds e Stoumbos (2004), Maravelakis e Castagliola (2009) e Simoes *et al.* (2010)) e outras, mais específicas para determinados contextos, como por exemplo as cartas “*short runs*” para processos com uma baixa taxa de produção (Chan *et al.* (1996), Nenes e Tagaras (2007), Capizzi e Masarotto (2012) e Castagliola *et al.* (2013)), as cartas “*batch processes*” para os processos em que podem ser produzidos itens em grandes quantidades de uma só vez e as cartas “*multiple stream*” utilizadas em processos que podem envolver diferentes máquinas e/ou diferentes operadores (p. e., nos trabalhos de Dong e Mcavoy (1995), Yoo *et al.* (2006), Zhao *et al.* (2007), Xiang e Tsung (2008) e Yin *et al.* (2012)).

Com o exponencial desenvolvimento tecnológico e a rápida expansão das redes sociais, surgiram novas áreas, multivariadas, de aplicação do controlo de qualidade. Nesse contexto, de controlo de qualidade multivariado, surgiu a denominada carta de

controlo T^2 utilizada em muitos dos trabalhos que se podem encontrar na literatura como, por exemplo, em Sullivan e Jones (2002), Faraz e Parsian (2006), Chen (2007), Champ e Aparisi (2008), Aparisi e De Luna (2009) e Zou *et al.* (2011), podendo ver-se uma revisão bibliográfica e as diferentes áreas de aplicação em Tsung e Wang (2010). Em Wu e Spedding (2000) é apresentada uma carta para detetar pequenas alterações da média, a qual foi designada por carta de controlo sintética, surgindo a partir dessa data diferentes aplicações e versões da mesma, como se pode ver nos trabalhos de Calzada e Scariano (2001), Chen e Huang (2005), Huang e Chen (2005), Costa *et al.* (2009) e Machado *et al.* (2009).

Chakraborti *et al.* (2001) apresentam um resumo da literatura para cartas univariadas de variáveis não paramétricas. Existem várias razões para a utilização de cartas de controlo não paramétricas, entre as quais, apontadas por Chakraborti *et al.* (2001), destacamos o serem mais robustas, mais resistentes à presença de *outliers* e mais eficientes a detetar alterações no processo quando a verdadeira distribuição da qualidade é claramente não normal, em particular quando apresenta caudas pesadas. No grupo deste tipo de cartas podem ver-se, por exemplo, os trabalhos de Hackl e Ledolter (1992), Amin *et al.* (1995), Janacek e Meikle (1997) e, mais recentemente, os trabalhos de Chakraborti *et al.* (2009) e Zou e Tsung (2010).

Para concluir, entre a grande diversidade de cartas de controlo existentes, podemos encontrar cartas baseadas em algoritmos genéticos (He *et al.* (2002), Aparisi e Carlos García-Díaz (2004), Kaya (2009) e De Vries e Reneau (2010)), em redes neuronais (Chang e Aw (1996), Abbasi (2009) e Hosseinifard e Abbasi (2012)) e em metodologias *Bayesianas* (Nair *et al.* (2001), Makis (2008), Kooli e Limam (2009) e Nenes e Panagiotidou (2011)). Os princípios básicos das cartas supra podem ser vistos, por exemplo, em Montgomery (2009).

Em termos de operacionalização, a carta de controlo é utilizada em duas fases diferentes. Numa fase inicial (denominada por fase I) onde é utilizado um conjunto de

dados históricos ou, em alternativa, um conjunto de dados recolhidos do processo (no caso da carta de controlo clássica, para a média, é normal usar-se um conjunto de 20 a 25 amostras de dimensão 4 ou 5) para diagnosticar o seu estado, aferindo-se se está sob controlo e, dessa forma, estimar os parâmetros do processo. É uma fase importante e interativa onde se pretende colocar o processo num estado de controlo estatístico, procurando sinais de possíveis causas assinaláveis, detetando-as e eliminando-as e, se caso necessário, calculando/recalculando limites de controlo (Hawkins *et al.* (2003), Chakraborti *et al.* (2009) e Jones-Farmer *et al.* (2009)).

Na fase I, em que a média e/ou variância são desconhecidas, a estimação dos limites de controlo assume uma importância fundamental como o comprovam, por exemplo, os trabalhos de Yang *et al.* (2002), Shu *et al.* (2004), Jensen *et al.* (2006), Bischak e Trietsch (2007) e Capizzi e Masarotto (2009).

Numa fase de normal funcionamento do processo (denominada por fase II), já com o mesmo sob controlo, são recolhidas amostras em tempo real (“*just-in-time*”) e a utilização da carta torna-se imprescindível para detetar eventuais alterações da qualidade dos produtos, como resultado da ocorrência de novas causas assinaláveis. Geralmente, nesta fase, assume-se que a distribuição sob controlo é perfeitamente conhecida e o efeito de uma alteração no processo traduz-se numa alteração no(s) parâmetro(s) da distribuição de probabilidade, que modela a variabilidade do mesmo. É a fase mais estudada na literatura e a que também vamos considerar nesta tese.

Deste modo, além do papel fundamental que têm no controlo estatístico do processo, as cartas possibilitam a estimação de diferentes parâmetros do processo, a diferenciação entre causas aleatórias e causas assinaláveis e ajudam a evitar muitos ajustamentos desnecessários e/ou prejudiciais no processo. A informação acumulada, e guardada, pela carta de controlo possibilita avaliações às capacidades que o processo tem para cumprir determinadas especificações. Estes estudos de capacidade do processo têm um impacto considerável em tomadas de decisões administrativas

relacionadas com os problemas que ocorrem durante o processo, incluindo as decisões para a melhoria do processo e, por exemplo, acordos contratuais com fornecedores e clientes efetuados por observação da qualidade produzida.

Inicialmente a aplicação das cartas de controlo restringiu-se a processos industriais. Atualmente esse propósito é muito mais abrangente, pois podem aplicar-se a quase todas as áreas (veja-se Ryan (2011), p. 372), desde a saúde ao desporto, passando pela educação e pela produção animal. Na literatura já são significativos os trabalhos em diferentes áreas de aplicação como, por exemplo, os trabalhos de Jenny (1994), Woodall (2006), Saniga *et al.* (2009), De Vries e Reneau (2010), Larsson *et al.* (2011) e a revisão bibliográfica de Tennant *et al.* (2007) com aplicações em saúde. Em Maccarthy e Wasusri (2002) é feita uma revisão bibliográfica sobre áreas de aplicação, do controlo estatístico do processo, classificadas como “não standard”.

Um processo produtivo, seja de que bem for, está sujeito a falhas, das quais resulta uma produção defeituosa a partir de um determinado instante e até que a respetiva reparação seja feita. O conhecimento dessa produção defeituosa é, na maior parte das situações, apenas possível se, em determinados instantes, forem retiradas da linha de produção amostras que são sujeitas a análise. A partir desses resultados podemos concluir sobre o estado do sistema. É claro que à obtenção e análise das amostras está associado um custo, que pode ser considerável.

Encontrando-se o processo sob controlo estatístico, sempre que retiramos, analisamos e representamos a estatística amostral na carta de controlo estamos a testar a hipótese do processo continuar sob o mesmo, pelo que, independentemente da regra ou regras de decisão estabelecidas, estamos em presença de erros de 1ª e 2ª espécie (erros tipo I e tipo II). Assim, o operador pode ser induzido a concluir que o sistema está a funcionar corretamente quando na realidade o não está ou, então, o operador pode ser induzido a concluir que o sistema não está a funcionar corretamente quando de facto o está (falso alarme).

Quando elaboramos e utilizamos uma carta de controlo, deparamo-nos com três questões fundamentais:

Quando recolher amostras (qual o método de amostragem mais apropriado)?

Qual a dimensão das amostras (amostras de dimensão igual ou diferente)?

Quais os limites de controlo (pequena ou grande taxa de falsos alarmes)?

Com um aumento da frequência amostral aumentamos a rapidez da deteção de determinada alteração, mas aumentamos o número de amostras inspecionadas e, por consequência, a taxa de falsos alarmes. Pelo contrário, se reduzirmos a frequência de amostragem, reduzimos o número de amostras inspecionadas e, consequentemente, a taxa de falsos alarmes, aumentando o período médio de tempo para deteção de uma alteração.

Em relação à dimensão das amostras a utilizar sabe-se que às amostras de maior dimensão está associada uma maior eficácia da carta de controlo na deteção de alterações, em particular se estas forem de reduzidas dimensões. Contudo, quanto maior for a dimensão amostral, mais elementos têm de ser analisados o que, num contexto económico, pode conduzir a um aumento relevante nos custos associados.

Para finalizar, se apertarmos os limites de controlo, a eficácia da carta na deteção de uma possível falha aumenta, mas também aumenta o risco do operador concluir que a qualidade foi alterada quando na realidade o não foi. Pelo contrário, se afastamos os limites de controlo da linha central obtemos uma redução do número de falsos alarmes, mas reduzimos a eficácia da carta na deteção de uma possível falha. Trata-se de um problema sensível, pois uma elevada taxa de falsos alarmes produz uma taxa elevada de ajustamentos do processo, aumenta a variabilidade da característica da qualidade e pode provocar uma rotura de confiança do operador sobre a carta.

Desta forma, em aplicações práticas, este problema torna-se mais complexo. O instante de ocorrência da alteração do processo, provocada pelo aparecimento de uma causa assinalável, normalmente denominado como instante de ocorrência de uma

falha, é de todo imprevisível. Ou seja, o intervalo de tempo entre o instante em que o sistema inicia em estado novo (eventualmente após uma reparação) e o instante em que falha (tempo de vida do sistema) é uma variável aleatória. Samuel *et al.* (1998) recomendam e analisam (considerando 27 amostras de dimensão 4) o desempenho de um estimador para o instante de ocorrência da falha, aplicado após a deteção da alteração pela carta, simplificando a procura da causa assinalável.

Desconhecendo-se o instante em que a falha ocorre, antes da sua deteção pela carta de controlo, estamos em presença de um problema de otimização.

1.2. Abordagem Económica do Problema

Para responder às três questões levantadas no ponto anterior podem considerar-se diferentes vias. A que utiliza critérios económico-estatísticos, a via que utiliza critérios estatísticos e a via com base em critérios económicos. Assim, se o objetivo é alcançar o design económico ótimo de uma carta de controlo do tipo *Shewhart*, devemos obter os instantes de amostragem, a dimensão das amostras e os coeficientes dos limites de controlo que minimizam um custo total de funcionamento de um sistema. Em geral, o custo total de funcionamento de um sistema pode ser decomposto em custos de amostragem, custos de mau funcionamento e associados à deteção de causas assinaláveis e sua eliminação e custos associados à deteção de falsos alarmes.

Duncan (1956) foi pioneiro nas propostas de abordagem económica ótima. Propôs métodos de otimização para determinar o valor dos parâmetros de uma carta de controlo para a média. O modelo proposto considera inspeções periódicas e a distribuição exponencial (hipótese mais utilizada em trabalhos à *posteriori*) para tempo de vida do sistema.

Propondo alterações ao modelo apresentado por Duncan (1956), diversos autores realizaram novos trabalhos tentando uma maior aproximação a diferentes situações encontradas nos processos industriais. Nesse contexto podem destacar-se os trabalhos de Lorenzen e Vance (1986) que realizam uma unificação de notações para

este tipo de problemas, generalizando o modelo de *Duncan* que permite atingir o design económico ótimo de uma qualquer carta de controlo do tipo *Shewhart* e que possibilita a modelação de diferentes tipos de sistemas de produção. Von Collani (1988a) apresenta um modelo simplificado que necessita, apenas, da estimação de três parâmetros económicos. Von Collani (1997) desenvolve um modelo simplificado que permite uma abordagem em contexto real e que reduz, significativamente, o número de parâmetros da função objetivo, separando o procedimento de otimização em duas etapas.

Em relação a esta temática podem encontrar-se alguns trabalhos de síntese bibliográfica (por exemplo, Montgomery (1980), Von Collani (1988a), Ho e Case (1994) e Woodall (1997)) e diversos trabalhos de índole teórica/prática (por exemplo, Celano (2009), Makis (2009), Koeppen e Lenz (2010) e Faraz *et al.* (2012)).

No geral, os trabalhos de abordagens económicas que encontramos na literatura admitem que o tempo de vida, dos sistemas, segue uma distribuição exponencial. Contudo, ainda existem situações onde são considerados para tempo de vida do sistema distribuições não exponenciais, como por exemplo os trabalhos de Banerjee e Rahim (1988), Parkhideh e Case (1989), Rahim (1997) e Al-Oraini e Rahim (2003). Inicialmente, esses trabalhos consideravam intervalos constantes entre amostras e os restantes parâmetros (dimensão amostral e coeficientes dos limites de controlo) fixos ao longo do controlo do processo. Nos últimos anos essa abordagem tem-se vindo a alterar, considerando-se outro tipo de cartas de controlo e casos em que um ou mais parâmetros não permanecem fixos ao longo do tempo. Neste contexto, encontramos em Infante (2004) uma síntese dos principais trabalhos realizados até finais do ano 2000. A partir dessa data são vários os trabalhos publicados que utilizam outro tipo de cartas, com um, ou mais, parâmetros adaptativos e, em alguns dos casos, considerando que a característica da qualidade não é normalmente distribuída.

Park *et al.* (2004) desenvolvem um design estatístico-económico recorrendo às cadeias de *Markov* para obter as propriedades estatísticas de uma carta EWMA com amostragem VSR (“*Variable Sampling Rate*”) (considerada mais à frente), considerando no modelo económico custos de amostragem, de falsos alarmes, de mau funcionamento, de análise e de reparação. Utilizando diferentes combinações dos parâmetros, os autores concluem que EWMA-VSR pode ser uma boa alternativa, em termos de custos, ao design EWMA-FSR.

Stoumbos e Reynolds (2005) apresentam um esquema que combina a carta tipo *Shewhart* com carta EWMA, utilizam amostragem VSI (“*Variable Sampling Intervals*”) (descrita e utilizada em comparações de desempenho, mais à frente) e concluem que estas combinações produzem reduções, substanciais, nos custos por unidade de tempo quando as comparam com os tradicionais métodos de taxas de amostragem fixos.

Jensen *et al.* (2006) realizam uma revisão bibliográfica da influência dos parâmetros estimados sobre as propriedades de uma carta de controlo, fazendo recomendações e apresentando ideias para futuros trabalhos.

Nenes e Tagaras (2007) estudam um modelo económico com abordagem *Bayesiana*, utilizam uma carta de controlo do tipo *Shewhart* para ciclos de produção curtos, considerando que os diferentes parâmetros da carta são adaptáveis em função da probabilidade do processo operar, ou não, sob o efeito de uma causa assinalável. Os resultados obtidos permitem concluir que a abordagem *Bayesiana* tem um, significativo, potencial de redução de custos quando comparada, em particular, com a abordagem tradicional de baixa produção. Nenes e Tagaras (2008) utilizam um modelo económico simples e comparam o desempenho de uma carta CUSUM com o desempenho de uma carta tipo *Shewhart*, concluindo que o desempenho económico da carta CUSUM só é melhor para observações individuais ou amostras de dimensão reduzida.

Rosmaninho e Infante (2007) efetuam uma análise estatística e económica à utilização simultânea de cartas para a média e para a amplitude, considerando um método de amostragem combinado e diferentes taxas de risco para o tempo de vida do sistema. Quando comparado com o método VSI, os autores concluem que o método combinado conduz, globalmente, a um menor custo total médio por unidade de tempo.

Serel e Moskowitz (2008) utilizam uma carta EWMA para analisar alterações simultâneas na média e na variância. Minimizam os custos, associados à produção e calculados através de uma função de perda quadrática de *Taguchi*, utilizando uma abordagem estatística e outra económica. Os parâmetros ótimos da carta de controlo são determinados através de análise numérica. O ARL (*“Average Run Length”*) da carta é obtido por recurso a cadeias de *Markov*, e os resultados permitiram concluir que a dimensão ideal das amostras diminui quando aumenta a magnitude da alteração ocorrida na média e/ou na variância e a maiores coeficientes de perda correspondem menores intervalos de amostragem.

Em Rodrigues Dias (2009) é apresentada uma solução ótima para o custo total médio por ciclo, utilizando um modelo económico derivado do modelo de *Duncan* e uma carta de controlo para a média com amostragem adaptativa NSI (considerada mais à frente). Para as soluções ótimas associadas a FSI (*“Fixed Sampling Intervals”*) e a NSI (*“Normal Sampling Intervals”*), o autor conclui que os custos associados à política de amostragem NSI são inferiores aos associados à política de amostragem FSI, em reduzidas e moderadas alterações da média e para uma alteração do desvio padrão. Quando compara os custos associados a FSI com os associados a VSI e com os associados a NSI, utilizando a solução ótima associada a FSI, conclui que a redução de custos associados à solução ótima aumenta quando aumenta a dimensão amostral e quando aumenta a magnitude da alteração da qualidade. Os custos associados a NSI são inferiores aos associados a VSI, pois as reduções obtidas com a solução ótima de FSI são superiores quando compara FSI com VSI.

Chen e Yeh (2010) apresentam um modelo económico com carta de controlo para médias e amostragem VSI com dados não normais, seguindo distribuição Gama ($\lambda, 2$) com taxas de risco crescentes. Realizando estudos de sensibilidade, os autores concluem que pode ser insustentável assumir-se que a distribuição de amostragem é normal, que a hipótese da não normalidade necessita do conhecimento prévio da dimensão amostral e que, a mesma hipótese, pode implicar o aumento do menor intervalo de amostragem, a redução do maior intervalo de amostragem, uma diminuição da área compreendida entre os limites de controlo e a uma redução de custos por unidade de tempo. Chen e Yeh (2011) consideram que a característica da qualidade segue uma distribuição de *Burr*, tempo de vida do sistema com distribuição de *Weibull*, carta de controlo para a média e o modelo económico adotado por Banerjee e Rahim (1988). Os autores realizam estudos de sensibilidade, utilizando simulação, e concluem que um aumento do coeficiente de assimetria resulta numa, ligeira, redução da dimensão amostral e que um aumento do coeficiente de curtose leva a um, considerável, aumento da área entre limites de controlo.

Yeh *et al.* (2011) realizam uma extensão do trabalho referido no parágrafo anterior. Contudo, neste trabalho estendem a análise de sensibilidade às políticas FSI e VSI e à medida de desempenho ATS (detalhada mais adiante).

Em Faraz *et al.* (2012) é utilizado um design estatístico-económico e são comparados os custos associados a cartas MEWMA (multivariadas EWMA) com os custos associados a cartas T^2 , utilizando políticas de amostragem DS e VSR (referidas mais à frente). O estudo revela que os custos totais médio por ciclo são inferiores quando é utilizada uma carta T^2 nos diferentes contextos considerados.

Em Niaki *et al.* (2012) os autores consideram que a característica da qualidade é não normal, utilizam amostragem VSSI (descrita e considerada para comparação de desempenho, mais à frente) e uma carta de controlo para a média. É utilizada uma função de prejuízo para avaliar o desempenho económico e efetuada uma análise de

sensibilidade ao modelo proposto, tendo em conta os custos e os parâmetros de entrada.

Não sendo o objetivo principal desta tese, neste contexto económico outras referências, e mais pormenorizadas, poderiam ser feitas. Contudo, no Capítulo 4, num contexto de design estatístico-económico, serão referidos e aprofundados outros trabalhos de interesse.

1.3. Políticas de Amostragem

Durante muitos anos as cartas de controlo do tipo *Shewhart* foram as mais utilizadas. Pela sua simplicidade de aplicação, também o são atualmente. O procedimento tradicional, quando se utiliza uma carta de controlo para a média, consiste em retirar amostras de dimensão fixa (4 ou 5 unidades), em intervalos de tempo fixos com os coeficientes dos limites de controlo fixos (usualmente igual a 3 unidades), sendo a carta de controlo com este procedimento designada por carta para a média de *Shewhart* clássica ou standard (SS).

Para melhorar o desempenho deste tipo de cartas, em particular para reduzidas e moderadas magnitudes nas alterações da média, a partir de finais da década de 80, princípios dos anos 90, começaram a surgir novas metodologias para obter os parâmetros associados à carta de controlo. Assim, foram desenvolvidas cartas de controlo em que os parâmetros não permanecem constantes durante o controlo do processo, que são classificadas, quanto à sua implementação, em: *cartas com parâmetros que são fixos, mas não obrigatoriamente constantes ao longo do controlo, sendo definidos no início do controlo do processo e cartas em que pelo menos um dos parâmetros é variável em tempo real e em função da informação retirada da estatística amostral.*

As primeiras são conhecidas como cartas com parâmetros predefinidos. Nos poucos trabalhos em que são propostas verifica-se uma melhoria do seu desempenho, quando

a distribuição do tempo de vida do sistema tem uma taxa de risco crescente. Em geral, são adotadas abordagens económicas. Em Banerjee e Rahim (1988) é estudado um modelo em que o intervalo de amostragem é um parâmetro predefinido, a dimensão das amostras e o coeficiente dos limites de controlo são fixos, sob a hipótese de que o tempo de vida do sistema segue uma distribuição de *Weibull*. Parkhideh e Case (1989) abordam um modelo em que os três parâmetros são predefinidos e Rahim e Banerjee (1993) generalizam o modelo de 1988 considerando uma distribuição generalizada com taxa de risco crescente, incluindo a possibilidade de terminar o ciclo de produção num determinado instante, independentemente de ter sido detetada alguma alteração. Otha e Rahim (1997), considerando para tempo de vida uma distribuição de *Weibull*, propõem um modelo modificado e simplificado ao proposto por Parkhideh e Case (1989).

Neste trabalho, e no âmbito deste tipo de cartas (com parâmetros predefinidos), vamos considerar uma metodologia, apresentada por Rodrigues Dias (2002), para obter os instantes de amostragem que é definida com base na taxa cumulativa de risco, denominada PSI (*“Predetermined Sampling Intervals”*). Esta metodologia permite-nos, por um lado, a aplicação a sistemas com todo o tipo de taxas de risco (decrecentes, constantes e crescentes) e, por outro lado, possibilita a realização de estudos comparativos do desempenho estatístico com outros métodos de amostragem. Utilizando uma carta de controlo para a média com parâmetros predefinidos, Infante (2004) realizou comparações do desempenho estatístico desta carta com o desempenho estatístico de uma carta de controlo para a média com a amostragem fixa e com amostragem fixa e regras suplementares. Efetuou, também, estudos de comparação com duas cartas de controlo EWMA, um esquema de controlo *Shewhart-CUSUM* e um esquema CUSUM, esquemas particularmente eficazes na deteção de pequenas alterações da média.

Em Carmo (2004), a carta de controlo para a média, com amostragem predefinida, é comparada com a carta de controlo para a média com amostragem fixa e com a carta de controlo para a média com amostragem adaptativa.

Rodrigues Dias e Infante (2008), considerando o método apresentado em 2002, comparam o desempenho de uma carta de controlo do tipo *Shewhart* com o desempenho de uma carta de controlo para a média com diferentes métodos adaptativos e com amostragem predefinida. Concluem que a carta de controlo com amostragem predefinida é a única que tem sempre melhor desempenho do que a carta com amostragem fixa para sistema com taxas de risco crescente.

Esta abordagem, de amostragem predefinida, continua atual e tem sido aplicada a outras problemáticas, considerando, por exemplo, situações em que a característica da qualidade não é normal (Chen e Yeh (2011)).

As cartas de controlo em que a metodologia assenta na variação de, pelo menos, um dos seus parâmetros em função da informação fornecida pela estatística amostral, são denominadas cartas de controlo dinâmicas ou adaptativas. O trabalho de Reynolds *et al.* (1988) foi pioneiro nesta área e, simultaneamente, impulsionador dos inúmeros trabalhos realizados a partir de então. No referido trabalho, os autores apresentam um procedimento de amostragem denominado VSI ("*Variable Sampling Intervals*"), em que o valor do intervalo de amostragem seguinte depende da informação dada pela estatística amostral atual. Na situação mais usual, a região entre os limites de controlo da carta para a média é dividido em duas sub-regiões, considerando-se um intervalo de amostragem pequeno sempre que a média de uma amostra pertencer a uma das regiões mais próximas dos limites de controlo e um intervalo de amostragem maior quando a média de uma amostra pertencer à região central (região mais afastada dos limites de controlo).

Daudin (1992) propôs um método, denominado DS (*“Double Sampling”*), que retira, em cada recolha, duas amostras de dimensões diferentes, só analisando a segunda amostra caso seja necessário.

Prabhu *et al.* (1993) e Costa (1994), em trabalhos independentes, apresentam um método denominado VSS (*“Variable Sample Size”*), com operacionalização idêntica à do método de intervalos variáveis, mas com duas dimensões amostrais, permanecendo fixos os limites de controlo e os instantes de amostragem. Quando a média de uma amostra pertence à região que contém a linha central a amostra seguinte é retirada com menor dimensão, mas se pertence a uma das sub-regiões mais próximas dos limites de controlo, a próxima amostra é retirada com maior dimensão.

Variar, simultaneamente, o intervalo de amostragem e a dimensão das amostras, foi uma ideia concretizada por Prabhu *et al.* (1994) e ao qual chamaram método VSSI (*“Variable Sample Size and Sampling Intervals”*). O método consiste em considerar, na recolha seguinte, um longo intervalo de amostragem e uma amostra de pequena dimensão se a média de uma amostra da recolha atual pertence à região que contém a linha central e, por outro lado, um pequeno intervalo de amostragem e uma amostra de maior dimensão quando a média de uma amostra pertence a uma das regiões mais próximas dos limites de controlo.

Tagaras (1998) apresenta uma síntese bibliográfica de artigos que estudam cartas de controlo com parâmetros predefinidos e cartas de controlo com procedimentos adaptativos.

Costa (1999b) propõe um método dinâmico, denominado VP (*“Variable Parameters”*) onde os três parâmetros, intervalos de amostragem, dimensão das amostras e coeficiente dos limites de controlo, são variáveis.

Rodrigues Dias (1999b) e Rodrigues Dias (1999a) apresenta uma metodologia simples, recorrendo à função densidade de probabilidade da distribuição normal reduzida, para obter intervalos de amostragem diferentes. Nesta metodologia,

denominada mais tarde por NSI (“*Normal Sampling Intervals*”), são considerados infinitos intervalos de amostragem que dependem de um único parâmetro k .

Carot *et al.* (2002) apresentam um método que combina a amostragem dupla (DS) com intervalos variáveis, denominada DSVSI (“*Double Sampling and Variable Sampling Intervals*”).

Em Infante (2004) são apresentados, e estudados, dois novos métodos de amostragem: um que tem por base a metodologia NSI com dimensões de amostras adaptativas e, outro que combina o método NSI com o método PSI, sendo os instantes de amostragem dados pela média aritmética dos instantes de amostragem dos dois métodos. Em ambos os casos o autor apresenta diversas propriedades estatísticas dos métodos que complementa, em relação ao método combinado, com uma análise crítica comparativa entre o método combinado e outros métodos apresentados em Infante e Rodrigues Dias (2004).

Em Infante e Rosmaninho (2007) é apresentado um método que combina amostragem dupla (DS) com amostragem predefinida (PSI). O método, denominado DSPSI (“*Double Sampling and Predetermined Sampling Intervals*”), é analisado e comparado com diferentes métodos adaptativos.

Quando no design de uma carta de controlo só se consideram critérios estatísticos, o objetivo é obter valores dos parâmetros da carta de modo a que o seu desempenho estatístico, satisfaça determinados requisitos preestabelecidos como, por exemplo, o número médio de amostras até ao aparecimento de um falso alarme ser igual a um determinado valor ou o tempo médio para deteção de uma alteração igual a um valor específico. Como tal, os critérios estatísticos e a experimentação influenciaram, e continuam a influenciar, as linhas de orientação para a escolha dos valores dos parâmetros.

Em relação às cartas adaptativas, é usual considerarem-se combinações dos parâmetros de modo a que a carta tenha o melhor desempenho possível para

determinadas alterações (geralmente pequenas). Contudo, a magnitude da alteração é, geralmente, desconhecida. Nesse contexto, importa efetuar comparações para diferentes combinações dos parâmetros mas, também, para diferentes magnitudes da alteração, incluindo as magnitudes moderadas e elevadas. Quando o objetivo é determinar parâmetros que minimizam a estatística usada no desempenho da carta de controlo, a combinação de parâmetros apenas é ótima para a alteração de interesse. Em geral, é pior para outras alterações de uma outra combinação de parâmetros e, por vezes, para valores dos parâmetros que dificilmente são utilizados na prática. Por exemplo Costa (1994), utilizando o método VSS, obtém o par (1, 230) de dimensões amostrais que minimiza o número médio de amostras necessário analisar para detetar uma alteração de magnitude 0,2 com coeficiente de limites de controlo 2,5, mas já obtém o par (1, 250) para detetar a mesma magnitude com coeficiente de limites de controlo “3-sigma”. Yeh *et al.* (2011), utilizam um cenário de não normalidade com tempo de vida *Weibull* e obtêm diferentes conjuntos de parâmetros que minimizam o custo médio por hora. Num contexto de amostragem predefinida (utilizam o método proposto por Banerjee e Rahim (1988)) e considerando, por exemplo, amostras de dimensão 23 e uma magnitude da alteração de 0,5, obtêm para o primeiro intervalo de amostragem (h_1) 335,85 minutos e para o coeficiente dos limites de controlo 1,44. Outros exemplos, noutros contextos, podem ser encontrados na literatura.

Na prática, conhecendo-se históricos de processos, nem sempre se conhece a magnitude das alterações e os instantes em que ocorrem. Assim, é de todo importante dispor de esquemas de controlo que sejam eficientes para a maior diversidade possível de alterações bem como para diferentes cenários.

1.4. Medidas do Desempenho Estatístico das Cartas de Controlo

Numa perspetiva económica, a avaliação de um esquema de controlo é feito através dos custos médios totais associados a um ciclo de produção ou, em alternativa, através dos custos médios por unidade de tempo.

Num esquema de controlo com design estatístico a eficiência é determinada pela rapidez na deteção das causas assinaláveis, pela frequência dos falsos alarmes e pelo número de amostras e itens analisados.

O ARL (*“Average Run Length”*) ou ANSS (*“Average Number of Samples to Signal”*) tem sido a medida mais utilizada para avaliar o desempenho estatístico de uma carta de controlo. Esta medida é definida como o número médio de amostras recolhidas desde o instante de (re)início do processo, denominado instante zero, até ao instante em que é emitido o sinal de perda de controlo (que pode ser um falso alarme no caso do processo estar sob controlo). Na contagem das amostras, são contabilizadas a amostra recolhida no instante de (re)início do processo produtivo bem como todas as recolhidas posteriormente, incluindo a amostra que emite o sinal.

Para os esquemas de controlo que considerem um intervalo de amostragem constante e igual, o intervalo de tempo até à deteção de uma alteração, ou de um falso alarme é diretamente proporcional ao ARL (ANSS).

No caso de uma carta de controlo para a média do tipo *Shewhart*, o ARL (ANSS) é dado por

$$ARL = \frac{1}{1-\beta}, \quad (1.1)$$

onde β representa a probabilidade da média amostral estar entre os limites de controlo (erro do Tipo II), qualquer que seja o método de amostragem adotado.

Para o caso em que os intervalos de amostragem não são constantes, a proporcionalidade supra deixa de se verificar e, conseqüentemente, o ARL deixa de ser uma medida apropriada da eficácia do esquema de controlo.

O ATS (“Average Time to Signal”) é definido como o intervalo médio de tempo decorrido desde o (re)início do processo até ao instante em que é recolhida a amostra que emite o sinal da perda de controlo (eventualmente um falso alarme). No caso da carta de controlo do tipo *Shewhart* com intervalos de amostragem variáveis, mantendo-se o estado do processo constante, os intervalos adaptativos são independentes e têm a mesma distribuição de uma variável genérica D . Por conseguinte, e pela identidade de *Wald* (Ross (1970)), temos

$$ATS = E(D) \times ARL, \quad (1.2)$$

assumindo-se que o primeiro intervalo de amostragem tem a mesma distribuição dos restantes, o que na prática nem sempre acontece. O ATS é uma medida utilizada, normalmente, quando se admite que o processo se inicia já com a presença de uma ou mais causas assinaláveis.

Pode acontecer que as alterações estejam presentes desde que o processo de controlo se (re)inicia mas, em geral, o processo inicia-se sob controlo e as alterações ocorrem posteriormente, possivelmente entre a recolha de duas amostras (Reynolds *et al.* (1988), p. 185, “*Although there are situations in which this is realistic, we believe that in most practical applications a process would shift at some random point in time between samples*”). Como tal, para avaliar a eficácia de um esquema de controlo é usual utilizar-se o AATS (“Adjusted Average Time to Signal”), definido como o intervalo médio de tempo decorrido desde o instante em que ocorre uma falha até esta ser detetada pela carta. No caso de uma carta de controlo do tipo *Shewhart* com intervalos variáveis, temos

$$AATS = E(G) + E(D) \times [ARL - 1], \quad (1.3)$$

onde G é a variável aleatória que representa o intervalo de tempo entre o instante em que ocorre a falha e o instante em que é inspecionada a amostra seguinte. Assim, o AATS é, por muitos autores, considerada como a medida de comparação que mais se

adequa às diferentes situações e, também, será uma das medidas utilizadas neste trabalho.

Nos estudos que recorrem à simulação é usual designar o AATS por SSATS (*“Steady State Average Time to Signal”*), considerando que a falha ocorre após o processo estar a decorrer há algum tempo, e que a estatística de controlo atingiu uma distribuição estacionária no instante de recolha da amostra anterior à falha, sabendo que não existem falsos alarmes (Runger e Montgomery (1993), p. 42, *“The steady state performance of a control chart is often a more meaningful measure than the inicial performance”*).

Quando se trabalha com cartas de dimensões amostrais adaptativas, devido às diferenças entre as dimensões amostrais, o ARL é insuficiente para realizar a avaliação de desempenho em termos de amostragem. Nesses casos, o número médio de itens inspecionados desde o (re)início do processo até à emissão de um sinal de fora de controlo é uma medida adequada, sendo denominada, na literatura, por ANI (*“Average Number of Itens”*) ou por ANOS (*“Average Number of Observations to Signal”*). No caso de uma carta de controlo clássica para a média, temos

$$\text{ANOS} = E(N) \times \text{ARL}, \quad (1.4)$$

onde $E(N)$ é o número médio de amostras.

Neste trabalho, sempre que se efetuam comparações de eficácia que envolvam métodos com dimensões amostrais adaptativas, iremos considerar (1.3) e (1.4).

Em Carmo (2004) foi apresentada uma medida de desempenho que compara métodos de amostragem através do número médio de amostras recolhidas sob controlo. Em Carmo *et al.* (2014) a ideia foi recuperada, realizando-se então a sua implementação e avaliação como critério de comparabilidade entre métodos, segundo as perspetivas económica e estatística, sendo denominada ANSIC (*“Average Number Sample In Control”*). Esta medida, apresentada mais à frente, é definida como o número médio de amostras necessário recolher sob controlo de modo a que dois

métodos de amostragem tenham o mesmo AATS, considerando um deles como referência.

Uma abordagem diferente pode ser vista em Morais e Pacheco (2001a, b), trabalhos onde os autores estabelecem relações de ordem estocástica que envolvem o RL (“*Run Length*”), e que permitem comparar diferentes esquemas de controlo sem calcular numericamente os seus desempenhos.

Na literatura são frequentes os estudos sobre o desempenho de cartas de controlo que consideram outros contextos. Por exemplo, podem encontrar-se trabalhos que consideram que a presença de autocorrelação e a não normalidade, dos dados subjacentes ao processo, têm influência no desempenho dos esquemas de controlo sob a hipótese de independência e normalidade, assim como a eventual estimação de alguns dos parâmetros associados ao processo, obtendo-se em geral um esquema de controlo com uma diferente taxa de falsos alarmes (superior ou inferior) (vejam-se, por exemplo, os trabalhos de Reynolds e Lu (1997), Apley e Shi (1999), Borrer *et al.* (1999), Lu e Reynolds (1999a), Lu e Reynolds (1999b), Stoumbos e Reynolds (2000), Yang *et al.* (2002), Infante e Rodrigues Dias (2003), Stoumbos e Reynolds (2004), Castagliola e Tsung (2005), Lin e Chou (2005b), Chen e Cheng (2007), Noorossana *et al.* (2008), Schoonhoven e Does (2010), Noorossana *et al.* (2011), Lin e Chou (2011) e Carmo *et al.* (2013), entre outros).

Quando existe a necessidade de estimar os parâmetros das cartas, alguns estudos sugerem o recurso a um elevado número de subgrupos iniciais (20 a 25 amostras de dimensão 4 ou 5) para a estimação e determinação dos limites de controlo de forma robusta, de modo a se obterem cartas com propriedades estatísticas semelhantes às cartas implementadas com os limites exatos (vejam-se, por exemplo, os trabalhos de Quesenberry (1993), Sullivan e Jones (2002), Jones *et al.* (2004), Capizzi e Masarotto (2009), Zhang, Y. *et al.* (2012) e Castagliola *et al.* (2012)).

Noutros contextos são usados estimadores robustos adequados ao SPC e algumas cartas de controlo mais robustas do que as, normalmente, utilizadas na prática. Como exemplo deste tipo de cartas, podem encontrar-se na literatura os trabalhos de Janacek e Meikle (1997), Pignatiello e Simpson (2002), Figueiredo e Gomes (2004), Figueiredo e Gomes (2009), Adekeye e Azubuike (2012) e outros em Gomes *et al.* (2010).

1.5. Objetivos desta Dissertação

Depois de efetuada a contextualização do problema e o respetivo estado da arte, várias questões para investigação se poderiam propor. Contudo, no seguimento de trabalho realizado anteriormente, vamos considerar três questões para investigação, às quais pretendemos responder ao longo desta dissertação.

Como podemos constatar pelo estado da arte, existem diferentes cartas de controlo, que podem utilizar diferentes metodologias de amostragem. Quanto mais parâmetros forem necessários para implementar uma carta de controlo e/ou um método de amostragem, maior a dificuldade da sua implementação a contextos práticos. Por outro lado, muitos dos processos produtivos, quer sejam de bens ou serviços, estão cada vez mais sujeitos a falhas cujas magnitudes são, normalmente, desconhecidas.

Assim, nos referidos contextos e numa perspetiva global de um ciclo produtivo, de forma inovadora, pretendemos:

- 1)** Apresentar e estudar, incluindo estudos de sensibilidade e robustez, um método de amostragem adaptativo simples (que dependa de um único parâmetro) que seja uma real alternativa, incluindo a da aplicação prática, aos métodos de amostragem mais conhecidos e divulgados na literatura; que o método a apresentar seja mais eficiente do que os restantes na deteção de diferentes alterações da característica da qualidade.
- 2)** Apresentar, e estudar, um método de amostragem adaptativo, de aplicação e operacionalização simples, que seja mais eficiente, do que alguns dos métodos de

amostragem existentes, a detetar falhas quando o tempo de vida do sistema tem de taxa de risco crescente; é desejável, que o método seja mais eficiente, do que alguns dos métodos existentes, em todas as magnitudes de alteração do processo, pelo menos em determinados contextos de, possíveis, aplicações práticas.

- 3)** Apresentar, e estudar, um novo método de comparação de eficiência de métodos de amostragem, considerando que dois métodos de amostragem em comparação têm o mesmo tempo médio de mau funcionamento e, dessa forma, abandonarmos as preocupações, usuais, com custo por unidade de tempo, pois os ciclos totais de produção serão iguais nos dois métodos; é desejável, que o novo método de comparação de eficiência permita um melhor controlo de falsos alarmes.

Para tentar atingir os objetivos a que nos propomos, elaboramos um conjunto de dez pressupostos que apresentamos no ponto seguinte.

1.6. Pressupostos para os Objetivos da Dissertação

Como suporte às questões de investigação a que pretendemos responder neste trabalho, vamos considerar um conjunto de hipóteses, que julgamos fundamentais, e dar algumas justificações para as mesmas. Assim, vamos considerar que:

- I)** O sistema tem apenas dois estados de funcionamento. Um estado de bom funcionamento, correspondente ao tempo de vida do sistema, e no qual o processo se (re)inicia encontrando-se sob controlo estatístico, e outro de mau funcionamento, como resultado do aparecimento de uma causa assinalável.
- II)** O tempo de vida do sistema tem distribuição com função densidade $f(t)$, $t > 0$, que supomos conhecida.
- III)** Quando o processo se encontra sob controlo estatístico, a característica da qualidade tem distribuição aproximadamente normal com média μ_0 e desvio padrão σ_0 ; é seguido o pressuposto mais utilizado na literatura. Contudo, se uma característica da qualidade não é normalmente distribuída (o que acontece em

muitas das situações práticas), utilizando-se técnicas com base na distribuição normal, podem cometer-se erros importantes. Na literatura, existem alguns trabalhos com abordagens que permitem ultrapassar esta problemática. Por exemplo, Yourstone e Zimmer (1992) determinam limites assimétricos para a carta para média do tipo *Shewhart* no caso em que a distribuição das médias segue uma distribuição de *Burr*. Chou *et al.* (1998) efetuam uma transformação de *Johnson* para normalizar os dados da característica da qualidade. Shore (2004) apresenta uma revisão bibliográfica das abordagens utilizadas neste tipo de contexto. Lin e Chou (2005b) consideram que a característica da qualidade e a distribuição por amostragem (com parâmetros estimados seguindo a metodologia de *Burr* (1973)) seguem distribuição de *Burr*. Figueiredo (2003) considera transformações do tipo *Box-Cox* para transformar dados não normais em normais. Infante (2004) considera, por um lado, que a característica da qualidade não é normal (mistura de normais) e distribuição normal para as médias amostrais, avaliando erros cometidos. Por outro lado, considera que a característica da qualidade e a distribuição das médias amostrais têm distribuição de *Burr*. Chen e Cheng (2007) consideram que a qualidade tem distribuição de *Weibull* e utilizam técnicas de *Johnson* para normalizar os dados. Num contexto de amostragem de aceitação, Carolino (2012) utiliza transformações do tipo *Box-Cox* para estudar variáveis não gaussianas. Carmo *et al.* (2013) recorrem à simulação para obter os parâmetros da carta de controlo, considerando que a característica da qualidade pode ser uma distribuição *t-Student* ou uma normal contaminada com diferentes graus de contaminação. Estudos de robustez, face à não normalidade, têm sido realizados em diversos trabalhos. Considerando antigos ou novos esquemas de amostragem e/ou estatísticas mais robustas do que a média amostral, como, por exemplo, a mediana, a mediana total e amplitude total podem ver-se os trabalhos de Amin e Miller (1993), Borrer *et al.* (1999), Calzada e Scariano

(2001), Stoumbos e Reynolds (2004), Figueiredo e Gomes (2004), Lin e Chou (2005c), Figueiredo e Gomes (2009), Lin e Chou (2011) e Ou *et al.* (2012).

IV) A ocorrência de uma causa assinalável provoca uma alteração da média μ_0 para $\mu_1 = \mu_0 \mp \lambda \sigma_0$, $\lambda > 0$, e/ou uma alteração do desvio padrão de σ_0 para $\sigma_1 = \rho \sigma_0$, $\rho > 0$. Em relação aos pressupostos relacionados com uma alteração da média (o próximo pressuposto também refere esta alteração) podemos referir que se trata do mais usual na literatura. Contudo, outros pressupostos têm sido considerados. Por exemplo, Duncan (1971), utilizando design económico, considera múltiplas causas assinaláveis com diferentes tempos de ocorrência para cada causa, concluindo que um modelo com uma única causa assinalável é uma boa aproximação do modelo de múltiplas causas; Costa (1993) considera o processo sujeito ao aparecimento de duas causas assinaláveis, admitindo que um dos parâmetros se pode alterar depois do processo estar fora de controlo; Costa e Rahim (2000), considerando uma abordagem económica, apresentam uma generalização do modelo proposto por Costa (2003) em que uma das causas assinaláveis provoca alteração na média do processo e a outra na variância, sendo a sua ocorrência independente; Nenes e Tagaras (2007) utilizam uma abordagem *Bayesiana*, fazendo depender os instantes de amostragem, a dimensão amostral e os limites de controlo da probabilidade de ocorrência da causa assinalável; Nenes e Panagiotidou (2011) propõem uma abordagem *Bayesiana* para obter os parâmetros que minimizam o custo total médio por unidade de tempo.

V) Após a ocorrência de uma alteração da média e/ou do desvio padrão, os valores da média e do desvio padrão mantém-se até a alteração ser detetada; em determinadas situações deste trabalho consideramos que, também, o desvio padrão se altera. Não é o pressuposto mais utilizado, na prática é usual considerar-se a carta para a média em conjunto com a carta para a amplitude ou para o desvio padrão, porém utilizamo-lo com o objetivo de comprovar o estatuto adaptativo dos

novos métodos de amostragem apresentados. Na literatura podem encontrar-se diferentes trabalhos que utilizam cartas conjuntas. Como exemplo, podem ver-se os trabalhos de Chou *et al.* (2006) que utilizam uma carta X-R com amostragem VSI, para determinar os valores ótimos de sete parâmetros do esquema de controlo; Costa e Magalhães (2007) que utilizam uma estatística com distribuição do qui-quadrado para avaliar o desempenho de uma carta para a média em simultâneo com uma carta para amplitudes, X-R, com diferentes métodos de amostragem; Zhang, J. C. *et al.* (2012) que propõem o uso de uma carta de controlo que incorpora o procedimento EWMA com rácios de probabilidade generalizados para monitorizar média e variância de um processo, Lee (2013) que avalia o desempenho de uma carta de controlo para a média em simultâneo com uma para o desvio padrão, X-S, com procedimento de amostragem DSVSI.

VI) O estado de mau funcionamento do sistema só é conhecido se o sistema for inspecionado.

VII) No controlo do estado do processo utilizamos uma carta de controlo para a média do tipo *Shewhart*, que designaremos só por carta de controlo clássica; quando os principais procedimentos de amostragem foram propostos, a análise inicial de desempenho foi feita com esta carta de controlo e só à *posteriori* apareceram trabalhos com extensões a outro tipo de cartas (como exemplo, VSI-X em Reynolds *et al.* (1988); VSI-CUSUM em Reynolds *et al.* (1990); VSI-EWMA em Reynolds (1996a); VSIFT em Reynolds (1996b); VSS-X em Prabhu *et al.* (1993) e Costa (1994); VSS-X em Zimmer *et al.* (1998) e Zhang e Wu (2007); VSSI-X em Prabhu *et al.* (1994) e Costa (1997); VSSI-X&R em Costa (1999a); VSSI em Zimmer *et al.* (2000); VP-X em Costa (1999b); VP-X&R em Costa (1998b) e Costa e Rahim (2004); VPFT em Lin e Chou (2005a); VP-R em Lee (2011)).

VIII) Se a média de uma amostra é marcada fora dos limites de controlo, consideramos que o processo está fora de controlo. Trata-se da regra de decisão usual, no entanto

outras regras foram introduzidas nas cartas *Shewhart*, em particular na carta para médias, tendo como objetivo melhorar a eficácia na deteção de alterações reduzidas e moderadas. Tais regras são designadas como regras suplementares, e conduzem, no geral, a um maior número de falsos alarmes.

Champ e Woodall (1987), apresentam um método para obter o ARL de cartas de controlo com regras suplementares e Champ e Woodall (1990) um programa, em linguagem FORTRAN, que permite estudar as propriedades da distribuição do RL de uma carta de controlo clássica, Champ (1992) combina as regras de Champ e Woodall (1987) com as regras introduzidas por Crosier (1986) e efetua um estudo da distribuição do “*steady-state RL*”, Lowry *et al.* (1995) apresentam regras suplementares alternativas para detetar alterações na dispersão, Zhang e Wu (2005) estudam a distribuição do “*steady-state RL*” e comparam os resultados obtidos com a distribuição do convencional “*zero-state ARL*” e Celano *et al.* (2006) incluem regras suplementares num esquema com amostragem VSSI.

IX) As amostras retiradas do processo são independentes e identicamente distribuídas.

É uma regra usual na literatura, contudo podem ver-se alguns exemplos em que se impõe, como hipótese, a não independência das amostras. A presença de autocorrelação tem muito impacto no desempenho das cartas de controlo, em particular, aumentando muito o número de falsos alarmes. Esta temática tem sido discutida por diferentes autores em diferentes trabalhos, dos quais destacamos Reynolds e Arnold (1996) que consideram uma carta de controlo para a média com amostragem VSI e amostras correlacionadas. Reynolds e Lu (1997) e Lu e Reynolds (1999a) que comparam diferentes cartas dentro deste contexto. Stoumbos e Reynolds (2000) considerando cartas do tipo *Shewhart* e de médias móveis, estudam o seu desempenho sob a não normalidade e a autocorrelação dos dados. Costa e Claro (2008) consideram amostragem DS e que as observações são representadas por um modelo autorregressivo de primeira ordem (ARMA(1,1)). Chen

e Cheng (2009) consideram que os dados da característica da qualidade são autocorrelacionados com matriz de covariâncias conhecida e a distribuição marginal com forma desconhecida e Sheu e Lu (2009) consideram que os dados são representados por um modelo autorregressivo de primeira ordem e estudam o desempenho de uma carta EWMA, recorrendo à simulação para obter o ARL.

X) Após o sinal dado pela carta de controlo e a causa assinalável ter sido eliminada, consideramos que o processo volta ao estado em que estava antes do aparecimento da causa assinalável, iniciando-se um novo ciclo.

1.7. Referências Bibliográficas

- Abbasi, B. (2009). A neural network applied to estimate process capability of non-normal processes. *Expert Systems with Applications*, 36(2), 3093-3100.
- Adekeye, K. S.; Azubuike, P. I. (2012). Derivation of the limits for control chart using the median absolute deviation for monitoring non-normal process. *Journal of Mathematics and Statistics*, 8(1), 37-41.
- Al-Oraini, H.; Rahim, M. A. (2003). Economic statistical design of X-bar control charts for systems with Gamma (5, 2) in-control times. *Journal of Applied Statistics*, 30(4), 397-409.
- Amin, R. W.; Miller, R. W. (1993). A robustness study of X-bar charts with variable sampling intervals. *Journal of Quality Technology*, 25(1), 36-44.
- Amin, R. W.; Reynolds, M. R.; Bakir, S. T. (1995). Nonparametric quality control charts based on the sign statistics. *Communication and Statistics - Theory and Methods*, 24, 1597-1623.
- Amin, R. W.; Wolff, H.; Besenfelder, W.; Baxley, R. (1999). EWMA control charts for the smallest and largest observations. *Journal of Quality Technology*, 31(2), 189-206.
- Aparisi, F.; Carlos García-Díaz, J. (2004). Optimization of univariate and multivariate exponentially weighted moving-average control charts using genetic algorithms. *Computers & Operations Research*, 31(9), 1437-1454.
- Aparisi, F.; de Luna, M. A. (2009). The design and performance of the multivariate synthetic-T² control chart. [Article]. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, 38(2), 173-192.
- Apley, D. W.; Shi, J. (1999). The GLRT for statistical process control of autocorrelated processes. [Article]. *IIE Transactions*, 31(12), 1123-1134.
- Banerjee, P. K.; Rahim, M. A. (1988). Economic design of X-bar control charts under Weibull shock models. *Technometrics*, 30(4), 407-414.
- Bischak, D. P.; Trietsch, D. (2007). The rate of false signals in X-bar control charts with estimated limits. *Journal of Quality Technology*, 39(1), 54-65.
- Borror, C. M.; Montgomery, D. C.; Runger, G. C. (1999). Robustness of the EWMA control chart to non-normality. *Journal of Quality Technology*, 31(3), 309-316.

- Burr, I. W. (1973). Parameters for a general system of distributions to match a grid of α_3 and α_4 . *Communications in Statistics*, 2(1), 1-21.
- Calzada, M. E.; Scariano, S. M. (2001). The robustness of the synthetic control chart to non-normality. *Communications in Statistics - Simulation and Computation*, 30(2), 311-326.
- Capizzi, G.; Masarotto, G. (2009). Combined Shewhart–EWMA control charts with estimated parameters. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 80(7), 793-807.
- Capizzi, G.; Masarotto, G. (2012). An enhanced control chart for start-up processes and short runs. [Article]. *Quality Technology and Quantitative Management*, 9(2), 189-202.
- Carmo, M. (2004). *Problemas de Amostragem em Controlo Estatístico de Qualidade*. ISEG-NOVA, New University of Lisbon, Lisbon.
- Carmo, M.; Infante, P.; Mendes, J. M. (2013). Alguns resultados da robustez de um método de amostragem adaptativo em controlo de qualidade In Maia, M., Campos, P. & Silva, P. D. (Eds.), *Estatística: Novos Desenvolvimentos e Inspirações, SPE* (pp. 95-108). Porto.
- Carmo, M.; Infante, P.; Mendes, J. M. (2014). A different and simple approach for comparing sampling methods in quality control. *International Journal Quality & Reliability Management*, 31(5), 478-499.
- Carolino, E. (2012). *Amostragem de Aceitação para Variáveis não Gaussianas*. Faculdade de Ciências de Lisboa, Lisboa.
- Carot, V.; Jabaloyes, J. M.; Carot, T. (2002). Combined double sampling and variable sampling interval X-bar chart. *International Journal of Production Research*, 40(9), 2175-2186.
- Castagliola, P.; Celano, G.; Fichera, S.; Nenes, G. (2013). The variable sample size t control chart for monitoring short production runs. *International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 66(9-12), 1353-1366.
- Castagliola, P.; Tsung, F. (2005). Autocorrelated SPC for non-normal situations. *Quality and Reliability Engineering International*, 21(2), 131-161.
- Castagliola, P.; Zhang, Y.; Costa, A.; Maravelakis, P. (2012). The variable sample size X-bar chart with estimated parameters. *Quality and Reliability Engineering International*, 28(7), 687-699.
- Celano, G. (2009). Robust design of adaptive control charts for manual manufacturing/inspection workstations. *Journal of Applied Statistics*, 36(2), 181-203.
- Celano, G.; Costa, A.; Fichera, S. (2006). Statistical design of variable sample size and sampling interval X-bar control charts with run rules. *International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 28(9), 966-977.
- Chakraborti, S.; Human, S. W.; Graham, M. A. (2009). Phase I statistical process control charts: an overview and some results. *Quality Engineering*, 21(1), 52-62.
- Chakraborti, S.; Van der Laan, P.; Bakir, S. T. (2001). Nonparametric Control Charts: An Overview and Some Results. [Article]. *Journal of Quality Technology*, 33(3), 304-315.
- Champ, C. W. (1992). Steady-state run length analysis of a Shewhart quality control chart with supplementary runs rules. [Article]. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, 21(3), 765-777.
- Champ, C. W.; Aparisi, F. (2008). Double sampling Hotelling's T^2 charts. *Quality and Reliability Engineering International*, 24(2), 153-166.

- Champ, C. W.; Woodall, W. H. (1987). Exact results for Shewhart control charts with supplementary runs rules. *Technometrics*, 29(4), 393-399.
- Champ, C. W.; Woodall, W. H. (1990). A program to evaluate the run length distribution of a control chart with supplementary run rules. *Journal of Quality Technology*, 22(1), 68-73.
- Chan, L. K.; MacPherson, D. B.; Xiao, P. H. (1996). Standardized p control charts for short runs. *International Journal of Quality & Reliability Management*, 13, 88-95.
- Chang, S. I.; Aw, C. A. (1996). A neural fuzzy control chart for detecting and classifying process mean shifts. [Article]. *International Journal of Production Research*, 34(8), 2265-2278.
- Chen, F. L.; Huang, H. J. (2005). A synthetic control chart for monitoring process dispersion with sample range. [Article]. *International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 26(7-8), 842-851.
- Chen, F. L.; Yeh, C. H. (2010). Economic design of VSI X-bar control charts for non normally distributed data under Gamma (λ , 2) failure models. *Communications in Statistics - Theory and Methods*, 39(10), 1743-1760.
- Chen, F. L.; Yeh, C. H. (2011). Economic statistical design for X-bar control charts under non-normal distributed data with Weibull in-control time. *Journal of the Operational Research Society*, 62(4), 750-759.
- Chen, H.; Cheng, Y. (2007). Non-normality effects on the economic-statistical design of X-bar charts with Weibull in-control time. *European Journal of Operational Research*, 176(2), 986-998.
- Chen, H.; Cheng, Y. (2009). Designing X-bar charts for known autocorrelations and unknown marginal distribution. *European Journal of Operational Research*, 198(2), 520-529.
- Chen, Y.-K. (2007). Adaptive sampling enhancement for Hotelling's T^2 charts. *European Journal of Operational Research*, 178(3), 841-857.
- Chou, C.-Y.; Wu, C.-C.; Chen, C.-H. (2006). Joint economic design of variable sampling intervals X-bar and R charts using genetic algorithms. *Communications in Statistics-Simulation and Computation*, 35(4), 1027-1043.
- Chou, Y. M.; Polansky, A. M.; Mason, R. L. (1998). Transforming non-normal data to normality in statistical process control. *Journal of Quality Technology*, 30(2), 133-141.
- Costa, A. F. B. (1993). Joint economic design of X-bar and R control charts for processes subject to two independent assignable causes. *IIE Transactions*, 25(6), 27-33.
- Costa, A. F. B. (1994). X-bar charts with variable sample size. *Journal of Quality Technology*, 26(3), 155-163.
- Costa, A. F. B. (1997). X-bar charts with variable sample size and sampling intervals. *Journal of Quality Technology*, 29(2), 197-205.
- Costa, A. F. B. (1998b). Joint X-bar and R charts with variable parameters. *IIE Transactions*, 30(6), 505-514.
- Costa, A. F. B. (1999a). Joint X-bar and R charts with variable sample sizes and sampling intervals. *Journal of Quality Technology*, 31(4), 387-397.
- Costa, A. F. B. (1999b). X-bar charts with variable parameters. *Journal of Quality Technology*, 31(4), 408-416.

- Costa, A. F. B.; Claro, F. A. E. (2008). Double sampling X-bar control chart for a first-order autoregressive moving average process model. *International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 39(5-6), 521-542.
- Costa, A. F. B.; de Magalhaes, M. S.; Epprecht, E. K. (2009). Monitoring the process mean and variance using a synthetic control chart with two-stage testing. *International Journal of Production Research*, 47(18), 5067-5086.
- Costa, A. F. B.; Magalhães, M. S. D. (2007). An adaptive chart for monitoring the process mean and variance. *Quality and Reliability Engineering International*, 23(7), 821-831.
- Costa, A. F. B.; Rahim, M. A. (2000). Economic design of X-bar and R charts under Weibull shock models. *Quality and Reliability Engineering International*, 16(2), 143-156.
- Costa, A. F. B.; Rahim, M. A. (2004). Joint X-bar and R charts with two-stage samplings. *Quality and Reliability Engineering International*, 20(7), 699-708.
- Crosier, R. B. (1986). A new two-sided cumulative sum quality control scheme. *Technometrics*, 28(3), 187-194.
- Dahlgaard, J. J.; Kristensen, K.; Kanji, G. K. (2007). *Fundamentals of Total Quality Management*. London and New York: Taylor & Francis.
- Daudin, J. J. (1992). Double sampling X-bar charts. *Journal of Quality Technology*, 24(2), 78-87.
- de Vries, A.; Reneau, J. K. (2010). Application of statistical process control charts to monitor changes in animal production systems. *J Anim Sci*, 88(13 Suppl), E11-24.
- Deming, W. E. (1986). *Out of the Crisis*: Center for Advanced Engineering Study, MIT, Cambridge.
- Dong, D.; McAvoy, T. J. (1995, 21-23 Jun 1995). *Multistage batch process monitoring*. Paper presented at the American Control Conference, Proceedings of the 1995.
- Duncan, A. J. (1956). The economic design of X-bar charts used to maintain current control of a process. *Journal of the American Statistical Association*, 51(274), 228-242.
- Duncan, A. J. (1971). The economic design of X-bar charts when there is a multiplicity of assignable causes. *Journal of American Statistical Association*, 66(333), pp.107-121.
- Duncan, A. J. (1986). *Quality Control and Industrial Statistics* (5th ed.): Richard D. Irwin.
- Dyer, J. N.; Adams, B. M.; Conerly, M. D. (2003). The reverse moving average control chart for monitoring autocorrelated processes. *Journal of Quality Technology*, 35, 138-152.
- Faraz, A.; Heuchenne, C.; Saniga, E. (2012). Optimal T^2 control chart with a double sampling scheme – an alternative to the MEWMA chart. *Quality and Reliability Engineering International*, 28(7), 751-760.
- Faraz, A.; Parsian, A. (2006). Hotelling's T^2 control chart with double warning lines. *Statistical Papers*, 47(4), 569-593.
- Feigenbaum, A. V. (1994). *Controlo da Qualidade Total* (4^a ed.): McGraw-Hill, Makron Books.
- Figueiredo, F. (2003). *Controlo Estatístico da Qualidade e Cartas Robustas*. Faculdade de Ciências de Lisboa, Lisboa.

- Figueiredo, M. F.; Gomes, M. I. (2004). The total median in statistical quality control. *Applied Stochastic Models in Business and Industry*, 20, 339-353.
- Figueiredo, M. F.; Gomes, M. I. (2009). Monitoring industrial processes with robust control charts. [Article]. *Revstat-Statistical Journal*, 7(2), 151-170.
- Gomes, M. I.; Figueiredo, M. F.; Barão, M. I. (2010). *Controlo Estatístico da Qualidade* (SPE ed.). Lisboa: SPE.
- Hackl, P.; Ledolter, J. (1992). A New Nonparametric Quality-Control Technique. [Article]. *Communications in Statistics-Simulation and Computation*, 21(2), 423-443.
- Hawkins, D.; Olwell, D. (1997). Inverse gaussian cumulative sum control charts for location and shape. *Journal of the Royal Statistical Society (Series D): The Statistician*, 46(3), 323-335.
- Hawkins, D. M.; Qiu, P. H.; Kang, C. W. (2003). The changepoint model for statistical process control. [Article]. *Journal of Quality Technology*, 35(4), 355-366.
- He, D.; Grigoryan, A.; Sigh, M. (2002). Design of double-and triple-sampling X-bar control charts using genetic algorithms. *International Journal of Production Research*, 40(6), 1387-1404.
- Ho, C.; Case, K. E. (1994). Economic design of control charts: a literature review for 1981-1991. *Journal of Quality Technology*, 26(1), 39-53.
- Hosseini-fard, S. Z.; Abbasi, B. (2012). Process capability analysis in non normal linear regression profiles. *Communications in Statistics - Simulation and Computation*, 41(10), 1761-1784.
- Huang, H. J.; Chen, F. L. (2005). A synthetic control chart for monitoring process dispersion with sample standard deviation. [Article]. *Computers & Industrial Engineering*, 49(2), 221-240.
- Infante, P. (2004). *Métodos de Amostragem em Controlo de Qualidade*. Unpublished PhD, Universidade de Évora, Évora.
- Infante, P.; Rodrigues Dias, J. (2003). Robustez de um método dinâmico de amostragem em controlo de qualidade. In Brito, P., Figueiredo, A., Sousa, F., P. Teles & Rosado, F. (Eds.), *Literacia e Estatística* (pp. 345-360): Sociedade Portuguesa de Estatística.
- Infante, P.; Rodrigues Dias, J. (2004). Esquema combinado de amostragem em controlo estatístico de qualidade com intervalos predefinidos adaptáveis *Estatística com acaso e Necessidade*, Editores: P. Rodrigues, E. Rebelo e F. Rosado, pp. 335-347.
- Infante, P.; Rosmaninho, E. (2007). *A combined double sampling and predetermined sampling intervals control chart*. Paper presented at the 56th Session of the International Statistical Institute (ISI 2007), Lisboa.
- Ishikawa, K. (1985). *What is Total Quality Control? The Japanese Way*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs.
- Janacek, G. J.; Meikle, S. E. (1997). Control charts based on medians. *Journal of the Royal Statistical Society: Series D (The Statistician)*, 46(1), 19-31.
- Jenny, R. W. (1994). Process capability and stability of analytical systems assessed from proficiency testing data. *Clin Chem*, 40(5), 723-728.

- Jensen, W. A.; Jones-Farmer, L. A.; Champ, C. W.; Woodall, W. H. (2006). Effects of parameter estimation on control chart properties: A literature review. *Journal of Quality Technology*, 38(4), 349-364.
- Jones-Farmer, L. A.; Jordan, V.; Champ, C. W. (2009). Distribution-free phase I control charts for subgroup location. *Journal of Quality Technology*, 41(3), 304-316.
- Jones, L. A.; Champ, C. W.; Rigdon, S. E. (2004). The run length distribution of the CUSUM with estimated parameters. *Journal of Quality Technology*, 36(1), 95-108.
- Juran, J. M. (1974). *Quality Control Handbook* (3rd ed.): McGraw-Hill.
- Kaya, I. (2009). A genetic algorithm approach to determine the sample size for attribute control charts. *Information Sciences*, 179(10), 1552-1566.
- Koeppen, V.; Lenz, H.-J. (2010). *Data Quality Control Based on Metric Data Models*.
- Kooli, I.; Limam, M. (2009). Bayesian np control charts with adaptive sample size for finite production runs. *Quality and Reliability Engineering International*, 25(4), 439-448.
- Larsson, J.; Landstad, B. J.; Wiklund, H.; Vinberg, S. (2011). Control charts as an early-warning system for workplace health outcomes. *Work*, 39(4), 409-425.
- Lee, P.-H. (2011). Adaptive R charts with variable parameters. *Computational Statistics & Data Analysis*, 55(5), 2003-2010.
- Lee, P. H. (2013). Joint statistical design of X-bar and S charts with combined double sampling and variable sampling interval. *European Journal of Operational Research*, 225(2), 285-297.
- Lin, Y.-C.; Chou, C.-Y. (2005a). Adaptive X-bar control charts with sampling at fixed times. *Quality and Reliability Engineering International*, 21(2), 163-175.
- Lin, Y.-C.; Chou, C.-Y. (2005b). On the design of variable sample size and sampling intervals charts under non-normality. *International Journal of Production Economics*, 96(2), 249-261.
- Lin, Y.-C.; Chou, C.-Y. (2005c). Robustness of the variable sample size and control limit X-bar chart to non-normality. *Communications in Statistics - Theory and Methods*, 34(3), 721-743.
- Lin, Y.-C.; Chou, C.-Y. (2011). Robustness of the EWMA and the combined X-bar-EWMA control charts with variable sampling intervals to non-normality. *Journal of Applied Statistics*, 38(3), 553-570.
- Lorenzen, T. J.; Vance, L. C. (1986). The economic design of control charts: a unified approach. *Technometrics*, 28(1), 3-10.
- Lowry, C. A.; Champ, C. W.; Woodall, W. H. (1995). The performance of control charts for monitoring process variation. *Communications in Statistics - Simulation and Computation*, 24(2), 409-437.
- Lu, C. W.; Reynolds, M. R. (1999a). Control charts for monitoring the mean and variance of autocorrelated processes. [Article]. *Journal of Quality Technology*, 31(3), 259-274.
- Lu, C. W.; Reynolds, M. R. (1999b). EWMA control charts for monitoring the mean of autocorrelated processes. [Article]. *Journal of Quality Technology*, 31(2), 166-188.
- MacCarthy, B. L.; Wasusri, T. (2002). A review of non-standard applications of statistical process control (SPC) charts. *International Journal of Quality & Reliability Management*, 19(3), 295-232o.

- Machado, M. A. G.; Costa, A. F. B.; Rahim, M. A. (2009). The synthetic control chart based on two sample variances for monitoring the covariance matrix. *Quality and Reliability Engineering International*, 25(5), 595-606.
- Makis, V. (2008). Multivariate bayesian control chart. *Operations Research*, 56(2), 487-496.
- Makis, V. (2009). Multivariate Bayesian process control for a finite production run. *European Journal of Operational Research*, 194(3), 795-806.
- Maravelakis, P. E.; Castagliola, P. (2009). An EWMA chart for monitoring the process standard deviation when parameters are estimated. *Computational Statistics & Data Analysis*, 53(7), 2653-2664.
- Montgomery, D. C. (1980). Economic design of control charts: a review and literature survey. *Journal of Quality Technology*, 12(2), 75-87.
- Montgomery, D. C. (2009). *Introduction to Statistical Quality Control* (6th ed.): John Wiley & Sons, Inc.
- Morais, M. C.; Pacheco, A. (2001a). Ordenação estocástica na análise de desempenho de esquemas de controlo de qualidade. In Neves, M. M., Cadima, J., Martins, M. J. & Rosado, F. (Eds.), *A Estatística em Movimento* (pp. 247-260).
- Morais, M. C.; Pacheco, A. (2001b). Some stochastic properties of upper one-sided X-bar EWMA charts for μ in the presence of shifts in σ . *Sequential Analysis*, 20(1), 1-12.
- Nair, V. N.; Tang, B.; Yu, L. A. (2001). Bayesian inference for some mixture problems in quality and reliability. *Journal of Quality Technology*, 33(1), 16-28.
- Nenes, G.; Panagiotidou, S. (2011). A Bayesian model for the joint optimization of quality and maintenance decisions. *Quality and Reliability Engineering International*, 27(2), 149-163.
- Nenes, G.; Tagaras, G. (2007). The economically designed two-sided Bayesian X-bar control chart. *European Journal of Operational Research*, 183(1), 263-277.
- Nenes, G.; Tagaras, G. (2008). An economic comparison of CUSUM and Shewhart charts. [Article]. *IIE Transactions*, 40(2), 133-146.
- Niaki, S. T. A.; Gazaneh, F. M.; Karimifar, J. (2012). Economic design of X-bar control chart with variable sample size and sampling interval under non-normality assumption: a genetic algorithm. *Economic Computation and Economic Cybernetics Studies and Research*, 46(1), 159-182.
- Noorossana, R.; Vaghefi, A.; Dorri, M. (2011). Effect of Non-normality on the Monitoring of Simple Linear Profiles. *Quality and Reliability Engineering International*, 27(4), 425-436.
- Noorossana, R.; Vaghefi, A.; Dorri, M.; Ieee. (2008). *The effect of non-normality on performance of linear profile monitoring*.
- Otha, H.; Rahim, M. A. (1997). A dynamic economic model for an X-bar control chart design. *IIE Transactions*, 29(6), 481-486.
- Ou, Y.; Wu, Z.; Tsung, F. (2012). A comparison study of effectiveness and robustness of control charts for monitoring process mean. *International Journal of Production Economics*, 135, 479-490.
- Page, E. S. (1954). Continuous Inspection Schemes. *Biometrika*, 41, pp. 100-114.

- Park, C.; Lee, J.; Kim, Y. (2004). Economic design of a variable sampling rate EWMA chart. *IIE Transactions*, 36(5), 387-399.
- Parkhideh, B.; Case, K. E. (1989). The economic design of a dynamic X-bar control chart. *IIE Transactions*, 21(4), 313-323.
- Pekar, J. P. (1995). *Total Quality Management: Guiding Principles for Application*: ASTM.
- Pignatiello, J. J.; Simpson, J. R. (2002). A magnitude-robust control chart for monitoring and estimating step changes for normal process means. [Article]. *Quality and Reliability Engineering International*, 18(6), 429-441.
- Prabhu, S. S.; Montgomery, D. C.; Runger, G. C. (1994). A combined adaptive sample size and sampling interval X-bar control scheme. *Journal of Quality Technology*, 26(3), pp.164-176.
- Prabhu, S. S.; Runger, G. C.; Keats, J. B. (1993). An adaptive sample size X-bar chart. *International Journal of Production Research*, 31(2), 2895-2909.
- Quesenberry, D. C. (1993). The effect of sample size on estimated limits for X-bar and X control charts. *Journal of Quality Technology*, 25, 237-247.
- Rahim, M. A. (1997). Economically optimal design of X-bar control charts assuming Gamma distributed in-control times *Optimization in Quality Control*, edited by K. S. Al-Sultan and M. A. Rahim: Kluwer Academic Publishers, pp. 175-196.
- Rahim, M. A.; Banerjee, P. K. (1993). A generalized model for the economic design of X-bar control charts for production systems with increasing failure rate and early replacement. *Naval Research Logistics (NRL)*, 40(6), 787-809.
- Reynolds, M. R. (1996a). Shewhart and EWMA variable sampling interval control charts with sampling at fixed times. [Article]. *Journal of Quality Technology*, 28(2), 199-212.
- Reynolds, M. R. (1996b). Variable sampling interval control charts with sampling at fixed times. [Article]. *IIE Transactions*, 28(6), 497-510.
- Reynolds, M. R.; Amin, R. W.; Arnold, J. C.; Healy, J.; Lucas, J. M.; Saccucci, M. S., et al. (1990). CUSUM charts with variable sampling intervals. *Technometrics*, 32(4), 371-396.
- Reynolds, M. R.; Amin, R. W.; Arnold, J. C.; Nachlas, J. A. (1988). X-bar charts with variable sampling intervals. *Technometrics*, 30(2), 181-192.
- Reynolds, M. R.; Arnold, J. C. (1996). Variable sampling interval X-bar charts in the presence of correlation. [Article]. *Journal of Quality Technology*, 28(1), 12-30.
- Reynolds, M. R.; Lu, C. W. (1997). Control charts for monitoring processes with autocorrelated data. [Proceedings Paper]. *Nonlinear Analysis-Theory Methods & Applications*, 30(7), 4059-4067.
- Reynolds, M. R.; Stoumbos, Z. G. (2004). Should observations be grouped for effective process monitoring? [Article]. *Journal of Quality Technology*, 36(4), 343-366.
- Roberts, S. W. (1959). Control chart tests based on geometric moving averages. *Technometrics*, 1, pp. 239-250.
- Rodrigues Dias, J. (1999a). Analysis of a new method to obtain different sampling intervals in statistical quality control. *Atas do IV Congresso Galego de Estadística e Investigación de Operacions, Universidade de Santiago de Compostela*, pp.155-158.

- Rodrigues Dias, J. (1999b). A new method to obtain different sampling intervals in statistical quality control. *Universidade de Évora*, 18 pp.
- Rodrigues Dias, J. (2002). Amostragem em controlo de qualidade com intervalos diferentes predefinidos: uma nova abordagem. *JOCLAD02, VIII Jornadas de Classificação e Análise de Dados*, 10 pp., Lisboa.
- Rodrigues Dias, J. (2009). Optimal economic solution for a normal sampling intervals method in quality control. *International Journal of Quality and Reliability Management*, 26(1), 59-75.
- Rodrigues Dias, J.; Infante, P. (2008). Control charts with predetermined sampling intervals. *International Journal of Quality and Reliability Management*, 25(4), 423-435.
- Rosmaninho, E.; Infante, P. (2007). *Métodos de amostragem com parâmetros predefinidos adaptáveis: uma análise estatística e económica*. Paper presented at the XIV Congresso Anual da Sociedade Portuguesa de Estatística, Covilhã.
- Ross, S. M. (1970). *Applied Probability Models with Optimization Applications*: Dover Publications.
- Runger, G. C.; Montgomery, D. C. (1993). Adaptive sampling enhancements for Shewhart control charts. *IIE Transactions*, 25(3), 41-51.
- Runger, G. C.; Willemain, T. R.; Prabhu, S. S. (1995). Average run lengths for CUSUM control charts applied to residuals. [Article]. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, 24(1), 273-282.
- Ryan, T. P. (2011). *Statistical Methods for Quality Improvement*. 3th, John Wiley & Sons, Inc., Publication.
- Samuel, T. R.; Pignateillo, J.; Joseph, J.; Calvin, J. A. (1998). Identifying the time of a step change with X-bar control charts. *Quality Engineering*, 10(3), 521-527.
- Saniga, E. M.; Davis, D. J.; Lucas, J. M. (2009). Using shewhart and CUSUM charts for diagnosis with count data in a vendor certification study. [Article]. *Journal of Quality Technology*, 41(3), 217-227.
- Schilling, E. G.; Neubauer, D. V. (2008). *Acceptance Sampling in Quality Control* (2th ed.). New York: CRC Press, Taylor & Francis Group.
- Schoonhoven, M.; Does, R. J. M. M. (2010). The X-bar control chart under non-normality. *Quality and Reliability Engineering International*, 26, 167-176.
- Serel, D. A.; Moskowitz, H. (2008). Joint economic design of EWMA control charts for mean and variance. *European Journal of Operational Research*, 184, 157-168.
- Sheu, S. H.; Lu, S. L. (2009). Monitoring the mean of autocorrelated observations with one generally weighted moving average control chart. [Article]. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 79(12), 1393-1406.
- Shewhart, W. A. (1930). Economic Quality Control of Manufactured Product. *Bell System Technical Journal IX*, N° 2(April 1930), 364-389.
- Shore, H. (2004). Non-normal populations in quality applications: a revisited perspective. *Quality and Reliability Engineering International*, 20(4), 375-382.
- Shu, L.; Tsung, F.; Tsui, K.-L. (2004). Run-length performance of regression control charts with estimated parameters. *Journal of Quality Technology*, 36(3), 280-292.

- Shu, L. J.; Yeung, H. F.; Jiang, W. (2010). An adaptive CUSUM procedure for signaling process variance changes of unknown sizes. [Article]. *Journal of Quality Technology*, 42(1), 69-85.
- Simoes, B. F. T.; Epprecht, E. K.; Costa, A. F. B. (2010). Performance comparisons of EWMA control chart schemes. *Quality Technology and Quantitative Management*, 7(3), 249-261.
- Stoumbos, Z. G.; Reynolds, M. R. (2000). Robustness to non-normality and autocorrelation of individuals control charts. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 66(2), 145-187.
- Stoumbos, Z. G.; Reynolds, M. R. (2004). *The robustness and performance of CUSUM control charts based on the double-exponential and normal distributions*.
- Stoumbos, Z. G.; Reynolds, M. R. (2005). Economic statistical design of adaptive control schemes for monitoring the mean and variance: An application to analyzers. [Article]. *Nonlinear Analysis-Real World Applications*, 6(5), 817-844.
- Sullivan, J. H.; Jones, L. A. (2002). A self-starting control chart for multivariate individual observations. *Technometrics*, 44(1), 24-33.
- Tagaras, G. (1998). A survey of recent developments in the design of adaptive control charts. *Journal of Quality Technology*, 30(3), 212-231.
- Tennant, R.; Mohammed, M. A.; Coleman, J. J.; Martin, U. (2007). Monitoring patients using control charts: a systematic review. *International Journal for Quality in Health Care*, 19(4), 187-194.
- Tsung, F.; Wang, K. (2010). Adaptive charting techniques: literature review and extensions. In Lens, H. J., Wilrich, P. T. & Schmid, W. (Eds.), *Frontiers in Statistical Quality control 9* (pp. 19-35).
- VanderWiel, S. A. (1996). Monitoring processes that wander using integrated moving average models. [Article]. *Technometrics*, 38(2), 139-151.
- Von Collani, E. (1988a). An updated bibliography of economic quality control procedures. *Economic Quality Control*(3), 48-62.
- Von Collani, E. (1997). Determination of the economic design of control charts simplified. In Al-Sultan, K. & Rahim, M. A. (Eds.), *Optimization in Quality Control* (pp. 89-143): Springer New York US.
- Winston, B. E. (1999). Total Quality Management. In Regent University, S. o. B. (Eds.)
- Woodall, W. H. (1997). Control charts based on attribute data: bibliography and review. *Journal of Quality Technology*, 29(2), 172-183.
- Woodall, W. H. (2006). The use of control charts in health-care and public-health surveillance. *Journal of Quality Technology*, 38, pp. 89-104.
- Woodall, W. H.; Montgomery, D. C. (1999). Research issues and ideas in statistical process control. *Journal of Quality Technology*, 31(4), 376-386.
- Wu, Z.; Spedding, T. A. (2000). A synthetic control chart for detecting small shifts in the process mean. *Journal of Quality Technology*, 32, pp. 32-38.
- Wu, Z.; Yang, M.; Khoo, M. B. C.; Yu, F. J. (2010). Optimization designs and performance comparison of two CUSUM schemes for monitoring process shifts in mean and variance. [Article]. *European Journal of Operational Research*, 205(1), 136-150.

- Xiang, L.; Tsung, F. (2008). Statistical monitoring of multistage processes based on engineering models. *IIE Transactions*, 40(10), 957-970.
- Yang, Z. L.; Xie, M.; Kuralmani, V.; Tsui, K. L. (2002). On the performance of geometric charts with estimated control limits. *Journal of Quality Technology*, 34(4), 448-458.
- Yeh, L. L.; Wang, P. K.; Li, F. C.; Yeh, Y. M. (2011). An extension of economic design of X-bar control charts for non normally distributed data under Weibull shock models. *Communications in Statistics - Theory and Methods*, 40(21), 3879-3902.
- Yin, S.; Ding, S. X.; Abandan Sari, A. H.; Hao, H. (2012). Data-driven monitoring for stochastic systems and its application on batch process. *International Journal of Systems Science*, 44(7), 1366-1376.
- Yoo, C.; Lee, I.-B.; Vanrolleghem, P. (2006). On-line adaptive and nonlinear process monitoring of a pilot-scale sequencing batch reactor. *Environmental Monitoring and Assessment*, 119(1-3), 349-366.
- Yourstone, S. A.; Zimmer, W. J. (1992). Non-normality and the design of control charts for averages. [Article]. *Decision Sciences*, 23(5), 1099-1113.
- Zhang, J. C.; Li, Z. H.; Wang, Z. J. (2012). A new adaptive control chart for monitoring process mean and variability. *International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 60(9-12), 1031-1038.
- Zhang, S.; Wu, Z. (2005). Designs of control charts with supplementary runs rules. *Journal Computers and Industrial Engineering*, 49(1), 76-97.
- Zhang, S.; Wu, Z. (2007). A CUSUM scheme with variable sample sizes for monitoring process shifts. *International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 33(9-10), 977-987.
- Zhang, Y.; Castagliola, P.; Wu, Z.; Khoo, M. B. C. (2012). The variable sampling interval X chart with estimated parameters. *Quality and Reliability Engineering International*, 28(1), 19-34.
- Zhao, C.; Wang, F.; Lu, N.; Jia, M. (2007). Stage-based soft-transition multiple PCA modeling and on-line monitoring strategy for batch processes. *Journal of Process Control*, 17(9), 728-741.
- Zimmer, L. S.; Montgomery, D. C.; Runger, G. C. (1998). Evaluation of a three-state adaptive sample size X-bar control chart. [Article]. *International Journal of Production Research*, 36(3), 733-743.
- Zimmer, L. S.; Montgomery, D. C.; Runger, G. C. (2000). Guidelines for the application of adaptive control charting schemes. *International Journal of Production Research*, 38, 1977-1992.
- Zou, C.; Jiang, W.; Tsung, F. (2011). A LASSO-based diagnostic framework for multivariate statistical process control. *Technometrics*, 53(3), 297-309.
- Zou, C. L.; Tsung, F. (2010). Likelihood Ratio-Based Distribution-Free EWMA Control Charts. *Journal of Quality Technology*, 42(2), 174-196.

CAPÍTULO II

AMOSTRAGEM PERIÓDICA

2.1. Introdução

Em termos de implementação e de operacionalização em contexto prático, a amostragem efetuada, por exemplo, de hora a hora (instantes fixos e igualmente espaçados no tempo) torna-se apelativa e cómoda, para quem faz o planeamento e a execução do controlo da qualidade. Acreditamos que foi esta a principal razão de, até finais dos anos 80, a grande maioria dos trabalhos estudar este tipo de inspeção de sistemas. Atualmente, devido ao incremento da complexidade dos sistemas e, principalmente, à utilização de tecnologias de ponta nas empresas, é difícil encontrarem-se trabalhos com estudos que considerem este tipo de abordagem.

Contudo, o controlo estatístico do processo ainda é feito retirando periodicamente as amostras. Algumas das empresas, de menor dimensão e com falta de recursos para adquirir tecnologia avançada, fazem-no por razões económicas, outras, sem escassez de recursos, pela comodidade de quem faz o próprio controlo, e outras por inerência ao processo cuja natureza pode inspirar, ou determinar, o uso de uma frequência de amostragem constante, impossibilitando a utilização de intervalos de amostragem não periódicos.

Neste Capítulo, apresentamos as principais propriedades estatísticas de dois métodos de amostragem com parâmetros fixos. Um método no qual todos os parâmetros da carta de controlo são fixos (FSI¹) e, outro, em que os instantes de amostragem e os limites de controlo são fixos, sendo as dimensões amostrais adaptativas (VSS²). Além dos métodos supra, será feita uma revisão da literatura de outros métodos de amostragem nos quais os intervalos de tempo entre a inspeção de amostras são constantes, podendo ser ou não a dimensão das amostras.

Resumidamente, neste Capítulo serão abordados os seguintes pontos:

(A) Apresentação do procedimento de amostragem mais usual no controlo estatístico do processo, o qual será designado por política de amostragem FSI, e das suas propriedades estatísticas fundamentais.

(B) Apresentação de um procedimento com dimensões amostrais adaptativas, que designaremos por política de amostragem VSS, bem como das suas principais propriedades estatísticas.

(C) Apresentação e revisão literária de políticas de amostragem com intervalos de amostragem fixos, podendo ser as dimensões amostrais fixas ou adaptativas.

2.2. Dimensão Fixa das Amostras: Amostragem FSI

Na conceção e utilização de qualquer carta de controlo é necessário ter em conta três aspetos fundamentais: *os instantes de amostragem, as dimensões das amostras e os limites de controlo.*

Nas cartas de controlo do tipo *Shewhart*, os valores das referidas grandezas são fixos durante todo o processo produtivo. Consideram-se limites de controlo fixos, amostras de dimensão fixa e recolhidas para análise em instantes fixos e, igualmente, espaçados no tempo. A carta de controlo com este procedimento é denominada, na literatura e neste trabalho, por carta FSI (*“Fixed Sampling Intervals”*). Quando em

¹ Designação usual na literatura - Fixed Sampling Intervals

² Designação usual na literatura - Variable Sample Size

confronto com políticas de amostragem não periódicas, é denominada carta FSS (“Fixed Sample Sizes”), e em confronto com políticas de amostragem com intervalos e dimensões amostrais variáveis, é denominada carta FSR (“Fixed Sampling Rate”) ou, unicamente, carta tipo *Shewhart* clássica.

2.2.1. Propriedades Estatísticas

Considere-se T a variável aleatória que representa o tempo de vida do sistema (ou como a variável aleatória de tempo até à ocorrência de uma causa assinalável) com função densidade $f(t)$ conhecida e contínua.

Designando por N_0 a variável aleatória que representa o número de amostras desde o (re)início do processo até à primeira amostra após a falha, o seu valor esperado é dado por

$$E(N_0) = \sum_{i=0}^{+\infty} (i+1) \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(t) dt, \quad (2.1)$$

onde t_i designam os instantes de inspeção, com $t_0 = 0$.

Em amostragem periódica, de período d , tem-se $t_i = id$, e o valor esperado de N_0 , após simplificações algébricas, é dado por

$$E(N_0) = \sum_{i=1}^{+\infty} i [F(id) - F[(i-1)d]] = \sum_{i=0}^{+\infty} R(id), \quad (2.2)$$

sendo $R(t)$ a função de fiabilidade do sistema definida por

$$R(t) = 1 - F(t), \quad (2.3)$$

que se pode também obter à custa de $f(t)$ e da taxa de risco do sistema, $h(t)$, definida por

$$h(t) = \frac{f(t)}{R(t)}, \quad (2.4)$$

considerando que $h(t)dt$ é a probabilidade, condicionada, do sistema falhar no intervalo $[t, t + dt]$, dado que não falhou até ao instante t .

Seja G a variável aleatória que representa o intervalo de tempo entre o instante em que ocorre a falha e o instante em que é recolhida a amostra seguinte. O valor esperado de G é dado por

$$E(G) = d \times E(N_0) - E(T). \quad (2.5)$$

Considerando (2.2) e que o tempo médio de vida do sistema é dado por

$$E(T) = \int_0^{+\infty} R(t) dt, \quad (2.6)$$

podemos escrever (2.5) como

$$E(G) = d \times \sum_{i=0}^{+\infty} R(id) - \int_0^{+\infty} R(t) dt. \quad (2.7)$$

Rodrigues Dias (1987), em contexto de inspeções perfeitas de sistemas, apresenta interpretações geométricas simples para as expressões (2.2), (2.6) e (2.7) e, com base na interpretação geométrica, uma aproximação para $E(G)$, dada por

$$E(G) \cong \frac{d}{2}. \quad (2.8)$$

Em Rodrigues Dias (1983b), num contexto económico, e em Rodrigues Dias (1986b), numa abordagem que utiliza a correspondência entre os resultados relativos à inspeção periódica de sistemas e uma política de inspeção não periódica, considera diferentes distribuições para o tempo de vida e conclui que $E(G)$ pode ser superior ou inferior a metade do intervalo de inspeção. Rodrigues Dias (1988) conclui que a aproximação (2.8) é tanto melhor quanto menor for o intervalo de amostragem relativamente ao tempo médio de vida do sistema. Em Infante (1997) e Infante e Rodrigues Dias (2002a), recorrendo a estudos de simulação, são consideradas diferentes abordagens, incluindo diferentes distribuições com diferentes tipos de taxas de risco para o tempo de vida do sistema, tendo sido retiradas conclusões idênticas às retiradas por Rodrigues Dias (1983b).

Em Infante (2004) foi realizado um estudo pormenorizado para avaliar a influência da distribuição do tempo de vida do sistema na aproximação (2.8). O autor considera cinco distribuições para tempo de vida do sistema com diferentes tipos de taxas de risco e o método dos mínimos quadrados para ajustar os valores de $E(G)$ a uma reta do tipo $E(G) = md$, concluindo que, para todos os casos considerados, os ajustamentos obtidos são muito bons, pois o pior coeficiente de determinação obtido (quando considera tempo de vida de *Hjorth*) foi de 0.994.

Defina-se β como a probabilidade da média de uma amostra de dimensão n se situar entre os limites de controlo de uma carta de controlo para a média. A expressão algébrica que permite calcular β é dada por

$$\beta = \Phi\left(\frac{L - \lambda\sqrt{n}}{\rho}\right) - \Phi\left(\frac{-L - \lambda\sqrt{n}}{\rho}\right), \quad (2.9)$$

onde $\Phi(x)$ é a função distribuição da variável normal reduzida, L é o múltiplo do desvio padrão nos limites de controlo e λ e ρ as magnitudes das alterações na média e no desvio padrão dadas, respetivamente, por

$$\lambda = \frac{|\mu_1 - \mu_0|}{\sigma_0}, \quad (2.10)$$

$$\rho = \frac{\sigma_1}{\sigma_0}, \quad (2.11)$$

onde μ_0 e σ_0 são os valores da média e do desvio padrão, com o processo sob controlo, e μ_1 e σ_1 os valores da média e do desvio padrão após a ocorrência de uma falha.

Seja **RL** (“*Run Length*”) a variável aleatória que representa o número de amostras analisadas até uma média amostral cair fora dos limites de controlo (regra usual quando utilizamos uma carta de controlo para a média, podendo ser falso alarme caso estejamos sob controlo). Neste caso, RL segue uma distribuição geométrica de parâmetro $1-\beta$, sendo o seu valor médio e a sua variância dados, respetivamente, por

$$ARL = \frac{1}{1-\beta}, \quad (2.12)$$

$$\text{Var}(\text{RL}) = \frac{\beta}{(1-\beta)^2}. \quad (2.13)$$

Ryan (2011) (p. 128) e Montgomery (2009) (p. 192) referem que a utilização do ARL (“*Average Run Length*”) para avaliação do desempenho das cartas de controlo tem sido muito criticada devido ao facto da distribuição do RL, para uma carta de controlo do tipo *Shewhart*, ser a distribuição geométrica, que tem um desvio padrão muito grande e a curva, correspondente, muito achatada, implicando que a sua média (ARL) não seja, forçosamente, um valor “típico” do RL.

Ainda assim, a distribuição do RL tem sido objeto de investigação em vários artigos. Champ e Woodall (1987) desenvolvem um método para obter as propriedades do RL de cartas de controlo do tipo *Shewhart* com regras suplementares, recorrendo às cadeias de *Markov*, e apresentam tabelas com os valores do ARL para as regras mais comuns. Champ e Woodall (1990) apresentam um programa, em linguagem FORTRAN, que permite avaliar as propriedades do RL das referidas cartas de controlo com regras suplementares. Champ (1992) combina o método de distribuição cíclica, para “*steady-state*”, com o método desenvolvido em 1987 e calcula o SSARL (“*Steady-State Average Run Lengths*”), obtido quando a estatística de controlo já atingiu uma distribuição estacionária no instante de recolha da amostra imediatamente anterior à ocorrência de alteração, para cartas do tipo *Shewhart* comparando-o com o ARL de cartas EWMA e CUSUM.

Amin *et al.* (1999) apresentam uma carta EWMA com base no mínimo e no máximo valores de cada amostra. Com recurso às cadeias de *Markov* obtêm o ARL da carta, denominada MaxMinEWMA, concluindo que desempenho da carta melhora, em termos do ARL, para alterações simultâneas da média e do desvio padrão.

Chakraborti (2000) obtém expressões exatas para o RL e para o ARL de uma carta de controlo do tipo *Shewhart* para a média, quando a média e/ou a variância do processo são desconhecidas, concluindo que o facto da variância ser desconhecida pode ter mais influência no valor do ARL. No mesmo trabalho, o autor apresenta tabelas com o número de amostras a inspecionar para estimar limites de controlo e dimensão das amostras de modo a se obter um determinado ARL sob controlo dado o valor da proporção de falsos alarmes.

Morais e Pacheco (2001b) estabelecem propriedades estocásticas do RL para cartas unilaterais superiores *Shewhart* e EWMA para a média. As propriedades apresentadas permitem estudar o desempenho das cartas para alterações da média e/ou desvio padrão e analisar o RLMS ("*Run Length to a Misleading Signal*"), definido como o número de amostras analisadas até à emissão de um sinal pela carta de controlo para a média, quando ocorre apenas uma alteração do desvio padrão. Em Morais e Pacheco (2001c) encontram-se outras referências a diversos resultados de ordenação estocástica envolvendo o RL.

Jones *et al.* (2004) estudam a distribuição do RL, obtendo aproximações dos momentos, para cartas de controlo CUSUM com parâmetros estimados. Champ e Aparisi (2008), utilizando amostragem dupla, uma carta de controlo T^2 e um algoritmo genético, obtêm o design ótimo da carta com base no ARL.

Finalmente, em Costa e Machado (2008) é considerada uma carta para a variância com duas características da qualidade. Os autores utilizam o ARL para avaliar a performance da carta com a performance da carta para a variância generalizada, concluindo que a carta proposta tem, na generalidade, melhor performance.

Outras referências à distribuição do RL, e utilização de diferentes cartas de controlo, podem encontrar-se nos trabalhos referidos anteriormente ou em qualquer bom livro sobre a temática, como, por exemplo, em Montgomery (2009) onde são apresentadas diversas técnicas para obter o ARL de cartas EWMA, CUSUM, EWMA por atributos,

entre outras, bem como diversas tabelas com valores do ARL para condições particulares.

Tendo em conta que o ARL é uma medida pouco apropriada, por exemplo, para realizar comparações de diferentes métodos de controlo com instantes de amostragem adaptativos, pois o intervalo entre amostras não é constante e igual para os diferentes métodos, foram introduzidas outras medidas do desempenho estatístico, como o ATS (*“Average Time to Signal”*), intervalo médio de tempo decorrido desde o (re)início do processo até ao instante em que é recolhida a amostra que emite o sinal da falha, e o AATS (*“Adjusted Average Time to Signal”*), intervalo médio de tempo decorrido desde o instante em que ocorre uma falha até esta ser detetada pela carta.

Assim, considerando uma carta de controlo para a média, com um período constante entre amostras igual a d , o tempo médio desde o instante inicial até uma média sair fora dos limites de controlo é dado por

$$ATS = d \times ARL, \quad (2.14)$$

e o intervalo médio de tempo entre o instante em que o sistema falha e o instante em que a falha é detetada pela carta de controlo, denominado período médio de mau funcionamento do sistema, e designado, na literatura e neste trabalho, por AATS, é dado por

$$AATS = d \times [E(N_0) + ARL - 1] - E(T). \quad (2.15)$$

Considerando (2.2), (2.6) e (2.12) e a aproximação (2.8), podemos obter uma aproximação para o AATS dada por

$$AATS \cong \frac{d}{1-\beta} - \frac{d}{2} = d(ARL - 0,5). \quad (2.16)$$

Em Infante e Rodrigues Dias (2002a, b) são apresentadas aproximações, que generalizam uma aproximação obtida por Nakagawa e Yasui (1979) em sistemas com inspeções perfeitas, para o período de inspeção que minimiza o custo total médio de funcionamento de um sistema por ciclo, utilizando a aproximação (2.16). No primeiro

trabalho, os autores concluem que as aproximações para o período de inspeção podem ser consideradas ótimas ou quase ótimas.

A aproximação (2.16) é de grande utilidade, pois permite, sem perda de generalidade, considerar o período de amostragem igual a uma unidade de tempo e determinar os parâmetros de métodos não periódicos de modo a que estejam nas mesmas condições quando o processo está sob controlo.

2.3. Dimensão Adaptativa das Amostras

Apesar da sua simplicidade, as cartas de controlo com o método de amostragem FSI são pouco eficazes na deteção de alterações reduzidas e moderadas. Perante a necessidade de melhorar a eficácia dessas cartas, foram sendo introduzidas modificações ao nível das dimensões amostrais, dos intervalos de amostragem ou dos limites de controlo.

Neste ponto, expomos um procedimento com intervalos de amostragem fixos, mas com as dimensões amostrais a variarem em função do valor da estatística amostral. Este procedimento servirá de referência para avaliar a eficácia dos métodos, inovadores, apresentados e estudados neste trabalho.

Além do exposto, outros procedimentos de amostragem, que se podem encontrar na literatura, serão referidos.

2.3.1. Amostragem VSS

De modo a incrementar a eficácia da carta de controlo em reduzidas e moderadas alterações do processo, Prabhu *et al.* (1993) e Costa (1994), em estudos independentes, apresentaram uma carta de controlo para a média com duas dimensões amostrais que variam em função da média amostral. Trata-se de uma carta cuja operacionalização é idêntica à da carta com o método de amostragem VSI

("Variable Sampling Intervals"), de intervalos diferentes, introduzido por Reynolds *et al.* (1988) e que será apresentado no próximo Capítulo.

Tendo por base o método de amostragem FSI, o método de amostragem com dimensões amostrais variáveis, denominado na literatura e neste trabalho por VSS ("Variable Sample Size"), é baseado na ideia de que a dimensão da amostra deve ser maior quando o valor da mesma indicar que o processo se alterou e que a dimensão da amostra deve ser menor se o seu valor não indicar uma possível alteração do processo.

Nos trabalhos de Prabhu *et al.* (1993) e de Costa (1994) são estudadas as propriedades estatísticas e o desempenho da carta de controlo, para a média, com método de amostragem VSS utilizando duas dimensões amostrais, denotadas n_1 e n_2 , com $n_1 < n < n_2$, sendo n a dimensão amostral no método FSI. O intervalo entre os limites de controlo standardizados (denominada região de continuação, C) é dividido em duas regiões:

$$C_1 =]-w, w[, \quad (2.17)$$

$$C_2 =]-L, -w] \cup [w, L[, \quad (2.18)$$

com $C_1 \cap C_2 = \emptyset$, $C_1 \cup C_2 = C$ e $0 < w < L$. Definida a partição da região de continuação, verificamos que a região C_1 corresponde a valores próximos da linha central e a região C_2 a valores mais próximos dos limites de controlo. Em termos de operacionalização, utiliza-se uma amostra de dimensão n_1 quando a estatística amostral cai na região C_1 e uma amostra de dimensão n_2 quando a estatística amostral é marcada na região C_2 .

Prabhu *et al.* (1993) justificam esta metodologia com a natureza inerente ao processo em avaliação, sendo que esta pode implicar uma frequência de amostragem constante mas com dimensões amostrais adaptativas. Por outro lado, consideram que

o aumento da dimensão amostral pode ser uma vantagem, no aumento da eficácia de uma carta, em comparação com métodos que utilizam dimensão amostral fixa.

Considerando alterações apenas da média ($\rho = 1$), e os pressuposto dos autores, a dimensão média das amostras é dada por

$$E(N|\lambda) = \frac{n_1 p_1 + n_2 p_2}{\beta}, \quad (2.19)$$

onde β é a probabilidade da média amostral cair dentro dos limites de controlo, dada por (2.9), e

$$p_i = P(\bar{X} \in C_i | \lambda), i = 1, 2. \quad (2.20)$$

As propriedades estatísticas de uma carta de controlo com intervalos de amostragem fixos, limites de controlo fixos e dimensões amostrais variáveis são, usualmente, obtidas pelo número médio de amostras até haver sinal de fora de controlo (ARL) e pelo número médio de itens inspecionados até uma média ser marcada fora dos limites de controlo (ANOS).

Prabhu *et al.* (1993), recorrendo às propriedades das cadeias de *Markov*, obtêm o ARL da carta de controlo para a média com método de amostragem VSS e apresentam várias tabelas de valores para diferentes pares de dimensões amostrais. Costa (1994) obtém, igualmente com recurso às cadeias de *Markov*, expressões para o ARL e para o ANOS, apresentadas em Infante (2004), de forma simplificada, e dadas por

$$ARL = p_0 \left[\frac{1 - p_{22} + p_{12}}{(1 - p_{11})(1 - p_{22}) - p_{12}p_{21}} \right] + (1 - p_0) \left[\frac{1 - p_{11} + p_{21}}{(1 - p_{11})(1 - p_{22}) - p_{12}p_{21}} \right], \quad (2.21)$$

$$ANOS = n_1 \left[\frac{p_0(1 - p_{22}) + (1 - p_0)p_{21}}{(1 - p_{11})(1 - p_{22}) - p_{12}p_{21}} \right] + n_2 \left[\frac{p_0 p_{12} + (1 - p_0)(1 - p_{11})}{(1 - p_{11})(1 - p_{22}) - p_{12}p_{21}} \right], \quad (2.22)$$

com

$$p_0 = P(|Z| < w \mid |Z| < L), \quad (2.23)$$

$$p_{i1} = \Phi(w - \lambda\sqrt{n_i}) - \Phi(-w - \lambda\sqrt{n_i}), i = 1, 2, \quad (2.24)$$

$$p_{i2} = \Phi(-w - \lambda\sqrt{n_i}) - \Phi(-L - \lambda\sqrt{n_i}) + \Phi(L - \lambda\sqrt{n_i}) - \Phi(w - \lambda\sqrt{n_i}). \quad (2.25)$$

Para obter o ATS e o AATS do método VSS consideram-se as expressões (2.14), (2.15) e (2.21), sendo estas medidas dadas, respetivamente, por

$$\text{ATS} = d \times \text{ARL}, \quad (2.26)$$

$$\text{AATS} = d \times (\text{ARL} - 0,5). \quad (2.27)$$

O coeficiente w , que divide a região de continuação em duas regiões, é obtido, naturalmente, de modo a que a dimensão média das amostras, quando o processo está sob controlo ($\lambda = 0$ e $\rho = 1$), seja igual à dimensão das amostras usando o método FSI. Nesse pressuposto, igualando (2.19) a n e considerando o valor L para o múltiplo do desvio padrão nos limites de controlo, obtemos

$$w = \Phi^{-1} \left[\frac{2 \times \Phi(L) \times (n_2 - n) + n - n_1}{2(n_2 - n_1)} \right], \quad (2.28)$$

sendo os limites de vigilância e os limites de controlo, de uma carta para a média com método VSS, dados, respetivamente, por

$$\text{LVS} = \mu_0 + w \frac{\sigma_0}{\sqrt{n_i}}, \quad \text{LVI} = \mu_0 - w \frac{\sigma_0}{\sqrt{n_i}}, \quad (2.29)$$

e por

$$\text{LCS} = \mu_0 + L \frac{\sigma_0}{\sqrt{n_i}}, \quad \text{LCI} = \mu_0 - L \frac{\sigma_0}{\sqrt{n_i}}. \quad (2.30)$$

Para comparar desempenhos, entre cartas de controlo que utilizam método VSS cartas que utilizam método FSI, consideramos que as cartas estão nas mesmas condições sob controlo, ou seja, com o mesmo número médio de falsos alarmes, o mesmo número médio de amostras analisadas e o mesmo número médio de itens inspecionados, só necessitando de selecionar o mesmo valor do coeficiente dos limites de controlo e o mesmo período de inspeção para FSI (d).

Os resultados apresentados em Prabhu *et al.* (1993) foram obtidos para $L = 3$, concluindo os autores que, para diferentes alterações da média, λ , o ARL da carta de

controlo para a média com método VSS pode ser menor que o ARL da carta de controlo para a média com método FSI (geralmente em reduzidas e moderadas alterações da média). Ainda assim, para algumas das alterações consideradas (grandes alterações da média), o ARL da carta com método FSI é menor do que o ARL da carta com método VSS como se pode constatar pelos valores da Tabela 2.1 apresentada a seguir. No mesmo trabalho, os autores também apresentam os valores da maior dimensão amostral n_2 que minimizam o ARL para um determinado valor de λ , fixando a menor dimensão amostral n_1 e a dimensão amostral do método FSI, n .

λ	0,00	0,25	0,50	0,75	1,00	1,25	1,50	1,75	2,00	2,50	3,00
ARL_{FSI} ($n = 5$)	370,40	133,16	33,40	10,76	4,50	2,39	1,57	1,22	1,08	1,00	1,00
ARL_{VSS} ($n_1, n_2 = (1, 15)$)	370,40	101,08	12,45	4,02	2,65	2,21	1,99	1,84	1,73	1,53	1,37
ARL_{VSS} ($n_1, n_2 = (1, 10)$)	370,40	114,60	18,30	5,05	2,64	1,95	1,70	1,59	1,52	1,40	1,28
ARL_{VSS} ($n_1, n_2 = (2, 7)$)	370,40	125,78	25,85	7,34	3,21	1,98	1,53	1,33	1,24	1,12	1,04

Tabela 2.1. – Valores do ARL da carta para a média com método FSI e método VSS para diferentes pares de dimensões amostrais.

Flaig (1991) propôs um método VSS com três dimensões amostrais, a que correspondem três regiões definidas por limites situados à distância da linha central de um desvio padrão, dois desvios padrão e três desvios padrão da média amostral (situação correspondente aos limites de controlo), obtendo expressões para algumas medidas do desempenho estatístico da carta de controlo com este procedimento.

Costa (1994) considerou diferentes valores para L , nomeadamente $L = 2.5, 3$ e 3.5 , e obteve o par de dimensões amostrais que minimizam o ARL para determinadas valores de λ na média. O autor também compara o desempenho da carta de controlo com o método VSS com o desempenho da carta de controlo com os métodos FSI, VSI e DS, concluindo que a carta VSS é mais eficaz a detetar alterações cuja magnitude é inferior a 1 ($\lambda < 1$) e que necessita de inspecionar menos itens, contudo o número de itens inspecionados pode ser considerável para grandes alterações, deixando o método VSS de ser a melhor alternativa nesses contextos. Quando $\lambda > 1$, a carta com o método VSI é mais rápida a detetar alterações na média e necessita de inspecionar

menos itens. Por fim, conclui que o método VSS melhora o desempenho da carta de controlo para a média em comparação com o desempenho das cartas EWMA, CUSUM e carta para a média com regras suplementares, embora seja necessário inspecionar, em média, mais itens.

Park e Reynolds (1994), numa abordagem económica, comparam o desempenho da carta de controlo para a média com método VSS com o desempenho da carta de controlo para a média com método FSI, utilizando como critério o custo total médio por unidade de tempo. Admitindo que o processo está sujeito a diferentes causas assinaláveis, os autores utilizam duas dimensões amostrais e determinam o intervalo de amostragem, o coeficiente dos limites de controlo e as dimensões das amostras que minimizam o custo esperado por unidade de tempo de funcionamento do sistema. Os resultados numéricos que apresentam indicam que o método VSS é tanto mais vantajoso quanto menor o custo administrativo e o custo de amostragem.

Zimmer *et al.* (1998) consideram um método VSS com uma terceira dimensão amostral e comparam-no com o método VSS com duas dimensões amostrais e com o método FSI, concluindo que a melhoria de desempenho da carta com três dimensões amostrais não compensa o aumento da sua complexidade na aplicação.

Zimmer *et al.* (2000) apresentam um método VSS com quatro dimensões amostrais e comparam o seu desempenho com o de métodos com três dimensões amostrais e intervalos variáveis, concluindo, novamente, que o aumento da complexidade do método não compensa a ligeira melhoria de eficácia.

Reynolds e Arnold (2001) estudam o desempenho de uma carta de controlo EWMA com o método VSS e concluem que esta é consideravelmente mais eficaz a detetar todo o tipo de alterações da média com exceção de grandes alterações.

Lin e Chou (2005) realizam um estudo de robustez para uma carta de controlo para a média com o método VSS, considerando que a característica da qualidade tem distribuição de *Burr*. O desempenho da carta é comparado com o da carta de controlo

para a média com métodos FSI, VSI e VSSI, considerando limites simétricos e assimétricos em probabilidade, concluindo os autores que a escolha dos limites assimétricos em probabilidade melhora o desempenho da carta e torna-a robusta, sendo por isso uma boa alternativa em aplicações práticas onde, em geral, a característica da qualidade se afasta da distribuição normal.

Yang e Su (2006) propõem a utilização do método VSS com três dimensões amostrais para estudar dois processos dependentes e duas causas assinaláveis independentes. Os autores consideram que os processos têm tempo de vida exponencial e utilizam, em simultâneo, uma carta de controlo para a média amostral da variável explicativa e uma carta de controlo para os erros do modelo de regressão linear ajustado. Considerando alterações para as duas causas assinaláveis, recorrem às cadeias de *Markov* para obter expressões do AATS, sendo a eficácia do procedimento comparada com a eficácia de um procedimento com método FSS, concluindo que o procedimento proposto é ligeiramente mais eficaz, em reduzidas alterações, do que o procedimento que utiliza o método FSS.

Zhang e Wu (2007) apresentam um procedimento, com amostragem VSS, para detetar alterações na média e na variância considerando uma carta de controlo CUSUM e uma função de prejuízo (em termos de lucro) com um fator de ponderação. Os autores concluem que o design proposto é mais simples de implementar e mais eficiente do que os procedimentos que utilizam amostragem VSI ou VSSI.

Em Castagliola *et al.* (2012) é estudada uma carta de controlo para a média utilizando o método VSS e considerando que os restantes parâmetros da carta são desconhecidos, os quais são estimados na fase I do controlo do processo. Com base em cadeias de *Markov*, os autores obtêm o RL e o ARL da carta para comparar o seu desempenho com o de uma carta com parâmetros conhecidos, concluindo que uso dos parâmetros estimados influencia fortemente o desempenho da carta estudada, em particular para pequenas alterações da média.

2.3.2. Outras Políticas de Amostragem

No ponto anterior só referimos trabalhos realizados com base num método de amostragem com dimensões amostrais variáveis (VSS), por ser aquele que vamos utilizar em comparações posteriores. Contudo, na literatura podem encontrar-se outros métodos de amostragem com dimensões adaptativas. Em seguida efetuamos uma síntese de alguns desses métodos, bem como outros relacionados.

Assim, Daudin (1992) propôs um método de amostragem que utiliza duas amostras de dimensões diferentes, retiradas periodicamente do processo produtivo. Neste método, denominado DS (*“Double Sampling”*), em cada instante de amostragem recolhem-se duas amostras de dimensão n_1 e n_2 ($n_1 < n_2$), se a inspeção da primeira amostra, n_1 , não permitir concluir sobre o estado do processo, inspecionam-se as restantes n_2 unidades e considera-se a informação recolhida do conjunto das duas amostras para decidir sobre o estado do processo. Pela sua definição, o método considera cinco parâmetros de decisão: duas dimensões amostrais (n_1 e n_2), o coeficiente w , dos limites de vigilância, e dois coeficientes dos limites de controlo, L_1 e L_2 . São apresentadas expressões para a dimensão média das amostras, para o número médio de amostras inspecionadas e para o número médio de itens inspecionados, recorrendo, nos dois últimos casos, à integração numérica. Para realizar comparações de eficácia são utilizadas diferentes combinações dos cinco parâmetros de decisão de modo a que o número médio de falsos alarmes e o número médio de itens inspecionados sejam iguais aos obtidos com os restantes procedimentos em comparação. Em particular, o autor refere que o método DS tem um bom desempenho para diferentes alterações da média, quando $L_2 = 4$ ou $L_2 = 5$, w assume um valor entre 1.3 e 1.8 e $n_2 = 2n_1$ ou $n_2 = 3n_1$, e que a carta de controlo para a média, com o método DS, tem um menor ARL que a carta de controlo para a média com o método FSI e um menor ARL que as cartas de controlo EWMA e CUSUM para grandes alterações. No mesmo trabalho, o autor conclui que a carta de controlo para a

média com o método DS é mais eficiente que a carta de controlo para a média com o método adaptativo VSI.

Costa (1994) compara o método DS com o método VSS, concluindo que a carta com método DS tem melhor desempenho para alterações moderadas e que é necessário inspecionar um menor número de itens, confirmando-se as conclusões de Daudin (1992) que apontavam para que o método DS reduzia o número de elementos inspecionados e mantinha a eficácia da carta na deteção das alterações na média.

He e Grigoryan (2006) estudam um procedimento com duas cartas de controlo conjuntas, uma para a média e outra para o desvio padrão, com o método de amostragem DS e concluem que o procedimento proposto é mais eficiente, em termos de ARL, do que os procedimentos que combinam cartas EWMA e CUSUM.

Champ e Aparisi (2008) utilizam uma carta T^2 com método DS. Considerando um algoritmo genético, os autores obtêm o design ótimo da carta com base no ARL e concluem que esta tem melhor desempenho que a carta Hotelling's T^2 e do que a carta EWMA multivariada (MEWMA) para reduzidas e moderadas alterações.

Costa e Claro (2008) utilizam amostragem DS para controlar um processo em que as observações são representadas por um modelo autorregressivo de primeira ordem de médias móveis (ARMA(1,1)). Considerando subgrupos relacionais, as propriedades estatísticas deste procedimento são comparadas com as de um procedimento que utiliza uma carta de controlo do tipo *Shewhart* com o método de amostragem VSS, concluindo os autores que a correlação dentro dos subgrupos tem um impacto significativo nas propriedades das cartas, e que, em processos com níveis de correlação baixos e moderados, a carta com o método de amostragem DS é, substancialmente, mais eficiente.

Torng e Lee (2009) avaliam o desempenho de uma carta de controlo para média com o método DS considerando que a característica da qualidade não é normal (segue distribuição Gama e *t-Student*, com diferentes parâmetros). O desempenho da carta

com o método DS é comparado com o desempenho de uma carta do tipo *Shewhart* e com o desempenho de uma carta para média com o método VP através do AATS e do ANOS. Os autores concluem que as diferenças entre desempenhos das cartas com métodos DS e VP, são pouco significativas, bem como os desempenhos sob normalidade e sob não normalidade.

Torng *et al.* (2009), numa perspetiva económica-estatística, e recorrendo a um modelo de custos adaptado do modelo de *Duncan*, obtêm os parâmetros ótimos de uma carta de controlo com o método DS. Posteriormente realizam uma análise de sensibilidade aos parâmetros do modelo e concluem que a carta de controlo para a média do tipo *Shewhart* é preferível à carta de controlo com o método DS em grandes alterações da média. Concluem ainda, que retirando amostras dos dois estados do processo o modelo económico-estatístico usado pode permitir uma amostragem mais equilibrada.

Stoumbos e Reynolds (1997) propõem um método de amostragem que utiliza um teste sequencial de uma hipótese nula em que a média é igual à média inicial contra a hipótese alternativa de que a média se alterou. O procedimento, denominado SPRT ("*Sequential Probability Ratio Test*"), faz variar a dimensão da amostra em função da informação recolhida em cada instante, através da amostragem sequencial de uma observação de cada vez, sendo muito próximo do procedimento usado num plano de amostragem sequencial. É um procedimento análogo ao método DS, divergindo na possibilidade da dimensão amostral ser um valor qualquer, enquanto que no método DS a dimensão amostral varia entre dois valores. Os autores aconselham a utilização do método em testes destrutivos e/ou muito dispendiosos, bem como em contextos onde o tempo gasto na recolha e análise de uma observação pode ser desprezado. Ao método são apontadas como limitações o facto das observações serem retiradas individualmente e o de não se conhecer antecipadamente a dimensão da amostra. Considerando cartas de controlo para a média unilaterais ("*lower-sided*" and "*upper-*

sided” SPRT charts”), os autores também concluem que a carta de controlo com este procedimento é mais eficaz do que a carta com o procedimento FSI, que a carta CUSUM e que as cartas CUSUM-VSS e CUSUM-VSI, num maior número de alterações da média.

Stoumbos e Reynolds (1997b) realizam um estudo da eficácia de aproximações de algumas das propriedades estatísticas (ARL e ASN – “*Average Sample Number*”) do procedimento SPRT. Comparando os valores obtidos com as aproximações, com os obtidos com expressões algébricas, concluem que as entre metodologias podem ser desprezadas por serem muito próximas de zero.

Reynolds e Stoumbos (1998) aplicam o procedimento SPRT a uma carta para a proporção e, considerando uma dada frequência de amostragem e uma dada frequência de falsos alarmes, concluem que a carta com este procedimento é mais eficaz do que a carta p e que a carta CUSUM para a proporção.

Stoumbos e Reynolds (2001) apresentam um procedimento SPRT que especifica instantes fixos para recolher as observações iniciais, denominado SPRTFT (“*Sequential Probability Ratio Test at Fixed Times*”). Os autores concluem que o método é bastante mais eficaz a detetar alterações na média do que os métodos FSI e VSI com cartas de controlo para a média e CUSUM.

Ou *et al.* (2011a) apresentam um procedimento SPRT para monitorizar, simultaneamente, a média e a variância de observações. Considerando o ASN, são realizados estudos de comparação de desempenho entre o procedimento apresentado, denominado ABS SPRT, e os procedimentos CUSUM-FSSI (“*Fixed Sample Size and Sampling Interval*”), CUSUM-VSS e um procedimento com cartas unilaterais para a média (“*lower-sided*” and “*upper-sided*”), concluindo os autores que, no geral, o procedimento ABS SPRT é mais eficaz do que os restantes para diferentes pares de alterações simultâneas da média e da variância.

Ou *et al.* (2011b) propõem um método SPRT com intervalos de amostragem adaptativos, denominado VSI SPRT. Estudam as principais propriedades estatísticas do método, em particular o ATS, e realizam um estudo de comparação com o método FSI SPRT, concluindo que o método proposto é mais eficaz, principalmente, em moderadas alterações da média. Outros procedimentos utilizando o método SPRT podem encontrar-se, por exemplo, em Ou *et al.* (2012a), Ou *et al.* (2012b), Haridy *et al.* (2013) e em Ou *et al.* (2014).

Seif *et al.* (2011) estudam, numa perspetiva económica-estatística, o desempenho de uma carta T^2 com múltiplas causas assinaláveis (utilizam um método de amostragem com dimensões amostrais e limites de controlo variáveis, denominado VSSC ("*Variable Sample Size and Control Limits*"). Considerando custos de falsos alarmes, de procura e eliminação de causas assinaláveis, de mau funcionamento e custos de amostragem e teste, os autores obtêm os valores que minimizam os custos médios por unidade de tempo.

Infante (2004) e Infante e Rodrigues Dias (2006) propõem um novo procedimento adaptativo, relativo a amostras de diferentes dimensões, denominado RDN. De acordo com este método, que tem por base a ideia apresentada por Rodrigues Dias (1999) para obter intervalos de amostragem variáveis, a dimensão da amostra seguinte depende da informação obtida no instante de inspeção anterior, podendo assumir vários valores, de uma forma diferente do que acontece com o método VSS, que considera, usualmente, duas dimensões amostrais. Recorrendo às cadeias de *Markov* para estudar algumas propriedades estatísticas, e utilizando uma carta de controlo para a média, neste trabalho é comparado o desempenho do método RDN com o dos métodos FSI, VSS e DS, concluindo que o método tem um bom desempenho, em particular, para pequenas e moderadas alterações da média e que é robusto, quando se limita a dimensão da maior amostra a inspecionar.

2.4. Referências Bibliográficas

- Amin, R. W.; Wolff, H.; Besenfelder, W.; Baxley, R. (1999). EWMA control charts for the smallest and largest observations. *Journal of Quality Technology*, 31(2), 189-206.
- Castagliola, P.; Zhang, Y.; Costa, A.; Maravelakis, P. (2012). The variable sample size X-bar chart with estimated parameters. [Article]. *Quality & Reliability Engineering International*, 28(7), 687-699.
- Chakraborti, S. (2000). Run length average run length and false alarm rate of Shewhart X-bar chart: exact derivations by conditioning. *Communications in Statistics - Simulation and Computation*, 29(1), 61-81.
- Champ, C. W. (1992). Steady-state run length analysis of a Shewhart quality control chart with supplementary runs rules. [Article]. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, 21(3), 765-777.
- Champ, C. W.; Aparisi, F. (2008). Double sampling Hotelling's T^2 charts. *Quality and Reliability Engineering International*, 24(2), 153-166.
- Champ, C. W.; Woodall, W. H. (1987). Exact results for Shewhart control charts with supplementary runs rules. *Technometrics*, 29(4), 393-399.
- Champ, C. W.; Woodall, W. H. (1990). A program to evaluate the run length distribution of a control chart with supplementary run rules. *Journal of Quality Technology*, 22(1), 68-73.
- Costa, A. F. B. (1994). X-bar charts with variable sample size. *Journal of Quality Technology*, 26(3), 155-163.
- Costa, A. F. B.; Claro, F. A. E. (2008). Double sampling X-bar control chart for a first-order autoregressive moving average process model. *International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 39(5-6), 521-542.
- Costa, A. F. B.; Machado, M. A. G. (2008). A new chart for monitoring the covariance matrix of bivariate processes. *Communications in Statistics-Simulation and Computation*, 37(7), 1453-1465.
- Daudin, J. J. (1992). Double sampling X-bar charts. *Journal of Quality Technology*, 24(2), 78-87.
- Flaig, J. J. (1991). Adaptive control charts *Statistical Process Control in Manufacturing*, edited by J. B. Keats and D. C. Montgomery, Marcel Dekker: ASQC Quality Press, pp. 111-122.
- Haridy, S.; Wu, Z.; Lee, K. M.; Bhuiyan, N. (2013). Optimal average sample number of the SPRT chart for monitoring fraction nonconforming. *European Journal of Operational Research*, 229(2), 411-421.
- He, D.; Grigoryan, A. (2006). Joint statistical design of double sampling X-bar and S charts. *European Journal of Operational Research*, 168(1), 122-142.
- Infante, P. (1997). Optimização em Controlo Estatístico de Qualidade. In PAPCC (Ed.), *Trabalho de Síntese*. Universidade de Évora.
- Infante, P. (2004). *Métodos de Amostragem em Controlo de Qualidade*. Unpublished PhD, Universidade de Évora, Évora.

- Infante, P.; Rodrigues Dias, J. (2002a). Análise da importância da distribuição do tempo de vida no período de inspeção em controlo estatístico de qualidade. *Investigação Operacional*, 22(2), 167-179.
- Infante, P.; Rodrigues Dias, J. (2002b). Influência dos limites de controlo na minimização de custos em controlo estatístico de qualidade. *Economia e Sociologia*(73), 197-210.
- Infante, P.; Rodrigues Dias, J. (2006). Carta X-barra com amostras de tamanho variável: um novo procedimento dinâmico. *Investigação Operacional*, 26, 45-63.
- Jones, L. A.; Champ, C. W.; Rigdon, S. E. (2004). The run length distribution of the CUSUM with estimated parameters. *Journal of Quality Technology*, 36(1), 95-108.
- Lin, Y.-C.; Chou, C.-Y. (2005). Robustness of the variable sample size and control limit X-bar chart to non-normality. *Communications in Statistics - Theory and Methods*, 34(3), 721-743.
- Montgomery, D. C. (2009). *Introduction to Statistical Quality Control* (6th ed.): John Wiley & Sons, Inc.
- Morais, M. C.; Pacheco, A. (2001b). Some stochastic properties of upper one-sided X-bar EWMA charts for μ in the presence of shifts in σ . *Sequential Analysis*, 20(1), 1-12.
- Morais, M. C.; Pacheco, A. (2001c). Ordenação estocástica na análise de desempenho de esquemas de controlo de qualidade. In Neves, M. M., Cadima, J., Martins, M. J. & Rosado, F. (Eds.), *A Estatística em Movimento* (pp. 247-260).
- Nakagawa, T.; Yasui, K. (1979). Approximate calculation of inspection policy with Weibull failure times. *IEEE Transactions on Reliability*, R-28(5), 403-404.
- Ou, Y.; Wu, Z.; Goh, T. N. (2011a). A new SPRT chart for monitoring process mean and variance. *International Journal of Production Economics*, 132(2), 303-314.
- Ou, Y.; Wu, Z.; Khoo, M. B. C.; Chen, N. (2014). A rational sequential probability ratio test control chart for monitoring process shifts in mean and variance. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 1-17.
- Ou, Y.; Wu, Z.; Lee, K. M.; Chen, S. (2012a). An optimal design algorithm of the SPRT chart for minimizing weighted ATS. *International Journal of Production Economics*, 139(2), 564-574.
- Ou, Y.; Wu, Z.; Tsung, F. (2012b). A comparison study of effectiveness and robustness of control charts for monitoring process mean. *International Journal of Production Economics*, 135, 479-490.
- Ou, Y.; Wu, Z.; Yu, F.-J. (2011b). An SPRT control chart with variable sampling intervals. *International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 56(9-12), 1149-1158.
- Park, C.; Reynolds, M. R., JR. (1994). Economic design of a variable sample size X-bar charts. *Communications in Statistics - Simulation and Computation*, 23(2), 467-483.
- Prabhu, S. S.; Runger, G. C.; Keats, J. B. (1993). An adaptive sample size X-bar chart. *International Journal of Production Research*, 31(2), 2895-2909.
- Reynolds, M. R.; Amin, R. W.; Arnold, J. C.; Nachlas, J. A. (1988). X-bar charts with variable sampling intervals. *Technometrics*, 30(2), 181-192.
- Reynolds, M. R.; Arnold, J. C. (2001). EWMA control charts with variable sample sizes and variable sampling intervals. *IIE Transactions*, 33(6), 511-530.

- Reynolds, M. R.; Stoumbos, Z. G. (1998). The SPRT chart for monitoring a proportion. *IIE Transactions*, 30(6), 545-561.
- Rodrigues Dias, J. (1983b). Influence de la période d'inspection sur les coûts dans l'inspection périodique de systèmes. *Revue de Statistique Appliquée*, 31(4), pp.5-15.
- Rodrigues Dias, J. (1986b). Correspondência entre resultados relativos à inspeção periódica de sistemas e uma política de inspeção não periódica. *XI Jornadas Hispano-Lusas de Matemática, II*, Badajoz.
- Rodrigues Dias, J. (1987). *Políticas Periódicas de Inspeção*. PhD, Universidade de Évora, Évora, Portugal.
- Rodrigues Dias, J. (1988). Validade de uma solução aproximada para o período de inspeção de sistemas com diferentes tipos de taxas de risco. *Investigação Operacional*, 8(1), pp.107-116.
- Rodrigues Dias, J. (1999). A new method to obtain different sampling intervals in statistical quality control. *Universidade de Évora*, 18 pp.
- Ryan, T. P. (2011). *Statistical Methods for Quality Improvement*. 3th, John Wiley & Sons, Inc., Publication.
- Seif, A.; Moghadam, M. B.; Faraz, A.; Heuchenne, C. (2011). Statistical merits and economic evaluation of T² control charts with the VSSC scheme. *Arabian Journal for Science and Engineering*, 36(7), 1461-1470.
- Stoumbos, Z. G.; Reynolds, M. R. (1997). Control charts applying a sequential test at fixed sampling intervals. *Journal of Quality Technology*, 29(1), pp. 21-40.
- Stoumbos, Z. G.; Reynolds, M. R. (2001). The SPRT control chart for the process mean with samples starting at fixed times. [Article]. *Nonlinear Analysis-Real World Applications*, 2(1), 1-34.
- Stoumbos, Z. G.; Reynolds, M. R. J. (1997b). Corrected diffusion theory approximations in evaluating properties of SPRT charts for monitoring a process mean. *Nonlinear Analysis, Theory, Methods & Applications*, 30(7), 3987-3996, Proceedings of the Second World Congress of Nonlinear Analysis.
- Torng, C.-C.; Lee, P.-H.; Liao, N.-Y. (2009). An economic-statistical design of double sampling control chart. *International Journal of Production Economics*, 120(2), 495-500.
- Torng, C. C.; Lee, P. H. (2009). The performance of double sampling X-bar control charts under non normality. *Communication and Statistics - Simulation and Computation*, 38, 541-557.
- Yang, S.-F.; Su, H.-C. (2006). Controlling-dependent process steps using variable sample size control charts. *Applied Stochastic Models in Business and Industry*, 22(5-6), 503-517.
- Zhang, S.; Wu, Z. (2007). A CUSUM scheme with variable sample sizes for monitoring process shifts. *International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 33(9-10), 977-987.
- Zimmer, L. S.; Montgomery, D. C.; Runger, G. C. (1998). Evaluation of a three-state adaptive sample size X-bar control chart. [Article]. *International Journal of Production Research*, 36(3), 733-743.
- Zimmer, L. S.; Montgomery, D. C.; Runger, G. C. (2000). Guidelines for the application of adaptive control charting schemes. *International Journal of Production Research*, 38, 1977-1992.

CAPÍTULO III

AMOSTRAGEM NÃO PERIÓDICA

3.1. Introdução

Retirar amostras periodicamente de um qualquer sistema produtivo é muito apetecível para a implementação prática, pois o operador sabe antecipadamente quais os momentos para recolher as amostras e não o obriga a ter uma formação específica e/ou a uma atualização constante de competências. Porém, em muitos dos casos, o doseamento do tempo que decorre entre recolhas amostrais, tendo em atenção a maior ou menor probabilidade de ocorrência de uma alteração do sistema, permite reduzir o tempo de mau funcionamento e/ou o número de amostras inspecionadas bem como de falsos alarmes. Como consequência, em determinados contextos, o custo mínimo associado a um método de amostragem não periódica pode ser, consideravelmente, inferior ao associado a um método de amostragem periódica.

Neste Capítulo apresentamos alguns dos métodos de amostragem mais referenciados em controlo da qualidade, considerando, em todos eles, que os intervalos de tempo entre as recolhas e análise das amostras não são constantes.

Por outro lado, propomos, e estudamos, dois novos métodos de amostragem adaptativos, dos quais já apresentamos, submetemos e/ou publicamos alguns resultados e propriedades (Carmo *et al.* (2013b), Carmo *et al.* (2013a) e Carmo *et al.*

(2014)), estando mais dois trabalhos em preparação (um sobre a robustez do método adaptativo e outro sobre o método combinado) para submeter a revistas indexadas.

Resumidamente, neste Capítulo serão abordados os seguintes pontos:

(A) Apresentação dos procedimentos de amostragem predefinidos mais utilizados na literatura.

(B) Apresentação das principais propriedades estatísticas da metodologia de Rodrigues Dias (2002) para obter instantes de amostragem predefinidos, denominada PSI¹.

(C) Apresentação de um procedimento com instantes de amostragem adaptativos, designado por política de amostragem VSI, bem como das suas principais propriedades estatísticas.

(D) Apresentação das propriedades estatísticas de um procedimento que faz variar, em simultâneo, as dimensões amostrais e os instantes de amostragem, designado por política de amostragem VSSI.

(E) Apresentação das principais propriedades estatísticas de um procedimento que faz variar, simultaneamente, as dimensões amostrais, os instantes de amostragem e o coeficiente dos limites de controlo, designado por VP.

(F) Proposta de um novo procedimento com instantes de amostragem adaptativos, designado por LSI², e estudo das suas propriedades estatísticas.

(G) Análise comparativa entre o desempenho estatístico do método LSI e os métodos FSI, VSI, VSS, VSSI e VP, em termos de AATS e/ou ANOS.

(H) Análise de sensibilidade do método LSI, quando o menor intervalo de amostragem é truncado, através da comparação do desempenho, em termos de AATS, com o desempenho dos métodos FSI e VSI.

¹ Designação dada na literatura: "*Predetermined Sampling Intervals*"

² Designação dada por ter por base a função densidade de probabilidade da distribuição de *Laplace*.

- (I) Estudo de robustez do método LSI quando a característica da qualidade não é normal, em particular, quando segue uma distribuição que é uma mistura de normais, *t-Student* e Gama.
- (J) Ajustamento das distribuições por amostragem e análise comparativa com os métodos FSI, VSI, VSS, VSSI e VP nas mesmas condições, em termos de AATS e de ANOS.
- (K) Comparação, em termos de AATS, do método PSI com os métodos adaptativos LSI, VSSI, VSS e VP.
- (L) Proposta de um novo método de amostragem combinando o método LSI com o método PSI, que denominamos por CAPSI³.
- (M) Por fim, uma análise comparativa entre o procedimento de amostragem CAPSI e os métodos FSI, PSI, LSI e VSI em termos de AATS, e em sistemas cujo tempo de vida tem distribuição de *Weibull*.

3.2. Instantes de Amostragem Predefinidos

Neste ponto efetuamos uma breve referência a diferentes métodos com um ou mais parâmetros predefinidos e apresentamos, mais detalhadamente, um método proposto por Rodrigues Dias (2002) e estudado por Rodrigues Dias e Infante (2008).

Na literatura são escassos os trabalhos que apresentam, e estudam, métodos de amostragem nos quais pelo menos um dos parâmetros das cartas de controlo (intervalos de amostragem, dimensões amostrais e coeficientes dos limites de controlo), ainda que fixo, não é constante ao longo do controlo do processo. O foco principal destas abordagens é a melhoria do desempenho das cartas de controlo em sistemas com uma taxa de risco crescente, sendo feita, em todos eles, uma abordagem económica ou económica-estatística. A minimização do custo total, do modelo considerado, é conseguida determinando os instantes de amostragem e/ou as

³ Por ser um método com instantes de amostragem combinados: "*Combined Adaptive and Predetermined Sampling Intervals*"

dimensões amostrais e/ou os coeficientes do limites de controlo, sendo a solução ótima específica desse modelo.

Banerjee e Rahim (1988) consideram um processo produtivo no qual o tempo de vida do sistema segue uma distribuição de *Weibull* com taxa de risco crescente (parâmetro de forma, δ , superior a um), e apresentam um modelo económico no qual os intervalos de amostragem variam ao longo do tempo. Os autores consideram uma carta de controlo para a média com limites de controlo e dimensões amostrais fixos, sendo os intervalos de amostragem determinados de modo a que seja constante, para todos os intervalos, a probabilidade de ocorrer uma alteração num intervalo de amostragem, condicionada à não ocorrência de qualquer alteração até ao início do intervalo. Assim, os intervalos de amostragem d_i , $i > 1$, são definidos, em função de d_1 , através da expressão

$$d_i = \left(\sqrt[\delta]{i} - \sqrt[\delta]{i-1} \right) d_1. \quad (3.1)$$

Desta forma, quando $\delta > 1$ (taxas de risco crescentes), os intervalos entre amostras consecutivas vão diminuindo, e quando $\delta = 1$ (taxa de risco constante) os intervalos entre amostras consecutivas são iguais e o procedimento equipara-se ao método de amostragem periódico. Na análise de desempenho, os autores comparam os custos mínimos obtidos com o procedimento de amostragem proposto e com o procedimento periódico, considerando uma magnitude de 0,5 ($\lambda = 0,5$) para a alteração da média, concluindo que o procedimento proposto permite uma redução significativa de custos, dependendo, essa redução, dos parâmetros considerados na distribuição de *Weibull*.

Em Rahim e Banerjee (1993) é realizada uma generalização do trabalho anterior. Os autores consideram uma distribuição arbitrária com taxa de risco crescente e introduzem no modelo a possibilidade de terminar o ciclo produtivo num determinado instante t_m (sendo $t_i = j=1 di$, $j = 1, 2, \dots, m$), sem a carta de controlo para a média ter detetado uma falha, passando m a ser variável de decisão, pois indiretamente

determina a duração máxima do ciclo. São apresentados resultados quando se consideram as distribuições de *Weibull* e gama, para uma magnitude 0,5 da alteração da média ($\lambda = 0,5$). No caso da distribuição gama, é proposto um procedimento de amostragem em que apenas o primeiro intervalo de amostragem é diferente dos restantes, concluindo, os autores, que o custo associado a este procedimento é muito próximo do ótimo.

Rahim (1994), considera uma carta de controlo para a média e faz uma integração do modelo anterior com um modelo EPQ (*Economic Production Quantity*), introduzindo novos custos ao modelo existente. Os resultados obtidos, em condições idênticas às dos trabalhos referidos anteriormente (ao nível de combinações de valores/parâmetros) indicam uma redução, significativa, de custos em relação ao procedimento periódico.

Rahim (1997), considera a distribuição gama com taxas de risco crescentes e determina o valor ótimo dos parâmetros do modelo e cinco, diferentes, esquemas de inspeção: um esquema (A) em que admite a substituição do equipamento antes de uma falha e com intervalos de amostragem decrescentes; um esquema (B) que admite a substituição do equipamento antes da falha e em que o primeiro intervalo (d_1) é superior aos restantes, sendo os restantes iguais; um esquema (C) em que admite, também, a substituição do equipamento antes da falha mas todos os intervalos de amostragem são iguais; um esquema (D) em que não admite a substituição do equipamento antes da falha e em que os intervalos de amostragem são considerados como no esquema (B); por fim um esquema (E) igual ao esquema periódico. O autor conclui que o esquema (A) tem associado o menor custo e a maior eficácia.

Rahim e Al-Sultan (1997) fornecem uma visão geral dos trabalhos mais recentes, até à data, sobre modelos de otimização no controle da qualidade, com abordagem económica, para determinação dos ciclos ideais de produção. É feita uma breve

descrição de cada um dos problemas abordados sendo destacadas as conclusões mais importantes e sugeridas direções para trabalhos futuros.

Nos trabalhos referidos apenas os intervalos de amostragem variam ao longo do tempo. Contudo, neste tipo de procedimento também as dimensões amostrais e os coeficientes dos limites de controlo podem variar ao longo do processo, sendo predefinidos no início, tal como acontece com os intervalos de amostragem.

Em Parkhideh e Case (1989), os valores dos parâmetros (d_i , n_i e L_i), da carta de controlo para a média, obedecem a determinadas relações que dependem do primeiro intervalo de amostragem, da dimensão inicial da amostra e do coeficiente inicial dos limites de controlo com fatores que permitem variar os mesmos ao longo de todo o controlo do processo. O problema, principal, consiste em determinar os valores iniciais dos respetivos parâmetros (d_1 , n_1 e L_1). Os autores, consideram que o tempo de vida do sistema segue uma distribuição de *Weibull* e apresentam vários resultados que indicam significativas reduções no custo mínimo em relação ao método periódico, dependendo a percentagem de redução do custo mínimo dos valores atribuídos aos custos e aos parâmetros da distribuição. Os resultados obtidos indicam, também, que os valores ótimos dos fatores que permitem obter os parâmetros da carta são muito próximos de 1, indicando, esse valor, que os parâmetros da carta variam muito lentamente.

Otha e Rahim (1997), consideram um sistema com tempo de vida com distribuição de *Weibull* e propõem uma metodologia, mais simples, alternativa à desenvolvida por Parkhideh e Case (1989) que permite a redução do número de variáveis de decisão para metade. Nesta metodologia, os intervalos de amostragem são obtidos de acordo com princípios considerados nos trabalhos de Banerjee e Rahim (1988), Rahim e Banerjee (1993) e Rahim (1994); as dimensões amostrais são obtidas de modo a ser constante a dimensão relativa das amostras por unidade de tempo em cada intervalo de amostragem; por fim, os coeficientes dos limites de controlo são obtidos de modo a

que a probabilidade de uma média cair fora dos limites de controlo seja constante em cada intervalo de amostragem. Os autores concluem, que a utilização da metodologia proposta consegue reduções, muito significativas, no custo total, quando é comparada com a metodologia proposta por Parkhideh e Case (1989).

Feng-Chia *et al.* (2009), propõem uma metodologia para estudar a robustez do modelo proposto por Banerjee e Rahim (1988), considerando os três parâmetros (intervalos de amostragem, dimensão amostral e coeficientes dos limites de controlo) de uma carta de controlo para a média predefinidos com designs económico e económico-estatístico. Considerando um tempo de vida com distribuição de *Weibull* e que a característica da qualidade em avaliação tem distribuição de *Burr* (não é normal), os autores avaliam a influência que o grau de assimetria e de curtose da distribuição da característica da qualidade pode ter no custo total ótimo, utilizando aplicações práticas (com exemplos de aplicações às indústrias mecânica e elétrica). Os autores apresentam resultados para várias combinações dos valores de α_3 (parâmetro de assimetria) e α_4 (parâmetro de curtose) da distribuição de *Burr* e comparam os valores dos diferentes parâmetros obtidos segundo os design de cartas considerados, concluindo que os parâmetros obtidos com design económico e sob a não normalidade dos dados levam a um menor custo total.

Em Chen e Cheng (2007) e Chen e Yeh (2009) são apresentados estudos idênticos ao anterior, considerando pequenas diferenças nas abordagens aos modelos de Banerjee e Rahim (1988), Parkhideh e Case (1989) e de Rahim e Banerjee (1993) e, por exemplo, a função gama para tempo de vida do sistema, retirando-se conclusões idênticas.

Chen e Yeh (2011), apresentam um estudo de sensibilidade para o procedimento apresentado anteriormente. Utilizando metodologia “*grid*” para obter os parâmetros ótimos da carta de controlo para a média, os autores concluem que o aumento do coeficiente de assimetria, da distribuição de *Burr*, reduz, ligeiramente, a dimensão das

amostras mas aumenta a robustez da carta relativamente aos coeficientes dos limites de controlo. Por outro lado, concluem que o aumento do coeficiente de curtose aumenta os coeficientes dos limites de controlo.

Em Infante (2004) pode ver-se uma análise crítica, mais aprofundada, relativa a este tipo de amostragem.

3.2.1. Amostragem PSI

Tal como em Banerjee e Rahim (1988) e em Rahim e Banerjee (1993), no método estudado por Rodrigues Dias e Infante (2008) o comprimento de cada intervalo de amostragem é definido de maneira que a probabilidade de ocorrer uma dada alteração na média do processo num determinado intervalo de amostragem, sabendo que não ocorreu nenhuma até ao início desse intervalo, seja constante para todos os intervalos. Refira-se que esta metodologia foi apresentada e desenvolvida, inicialmente, para sistemas com inspeções perfeitas (não tendo em conta a presença dos erros de tipos I e II), tendo sido abordado este problema em Barlow *et al.* (1963), Munford e Shahani (1972) e Rodrigues Dias (1987).

Assim, considere-se um sistema cujo tempo de vida é uma variável aleatória T com função densidade de probabilidade $f(t)$ conhecida e contínua e com função distribuição $F(t)$.

Define-se taxa cumulativa de risco do sistema, $H(t)$, pela relação

$$H(t) = \int_0^t h(t) dt = -\ln R(t), \quad (3.2)$$

onde $R(t)$ é a função de fiabilidade dos sistema e $h(t)$ a taxa de risco, dadas, respetivamente, por (2.3) e (2.4). Rodrigues Dias (1987) considera $H(t)$ como variável aleatória e demonstra que $H(t)$ tem distribuição exponencial com média e variância unitárias.

A representação gráfica de $H(t)$ é uma reta no caso da taxa de risco ser constante (distribuição exponencial) e é uma curva côncava ou convexa conforme a taxa de risco é crescente ou decrescente, sendo importante na interpretação geométrica da metodologia PSI (Rodrigues Dias (2002)).

Assim, de acordo com a metodologia PSI, os instantes de amostragem t_i , $i = 1, 2, \dots$, com $t_0 = 0$, são determinados de acordo com a relação

$$H(t_i) = i\Delta H, \quad (3.3)$$

podendo, o intervalo de tempo entre dois instantes consecutivos de recolha de amostras, definir-se por

$$H(t_{i+1}) - H(t_i) = \Delta H. \quad (3.4)$$

Desta forma, os instantes de amostragem, t_i , são determinados de modo a que a taxa cumulativa de risco entre quaisquer recolhas amostrais consecutivas seja constante, ou seja, a probabilidade de ocorrer uma falha do processo num intervalo de amostragem, condicionada à não ocorrência de nenhuma falha até ao início do intervalo, é constante para todos os intervalos.

Então, a partir de (3.3) escreve-se

$$t_i = H^{-1}(i\Delta H), \quad (3.5)$$

e, tendo em conta (3.2) em conjunto com (3.3), escrevemos

$$R(t_i) = \exp(-i\Delta H), \quad (3.6)$$

obtendo os instantes de amostragem através de

$$t_i = R^{-1}[\exp(-i\Delta H)], \text{ com } t_0 = 0. \quad (3.7)$$

A expressão (3.7) permite obter os instantes de amostragem para qualquer sistema com função de fiabilidade conhecida e, obviamente, admitindo inversa. Noutros casos, em que seja possível obter a inversa da função de fiabilidade através de métodos numéricos, também se podem obter os intervalos de amostragem. Neste trabalho

vamos considerar a distribuição de *Weibull* para tempo de vida do sistema, mas outras, como por exemplo a distribuição de *Burr* ou de *Hjorth*, poderiam ser consideradas, tal como é feito em Infante (2004).

Como referido anteriormente, os intervalos de amostragem são definidos no início do processo produtivo, de acordo com as características do tempo de vida do sistema. Intuitivamente, este método manifesta a ideia de que se deve reduzir a amostragem quando a taxa de risco do sistema é pequena e se deve aumentar a amostragem quando a taxa de risco do sistema é grande, podendo traduzir-se numa enorme vantagem competitiva, em particular, na aplicação a sistemas produtivos das áreas industrial e energética que têm associados grandes desgastes de componentes. Consequentemente, e ainda de acordo com esta metodologia, se a taxa de risco aumenta (diminui) os intervalos de tempo diminuem (aumentam), sendo constantes quando a taxa de risco é constante. Em Infante (2004) podem ver-se as demonstrações da monotonia dos intervalos de amostragem para qualquer taxa de risco, com recurso ao teorema dos acréscimos finitos e a tratamento algébrico.

Este procedimento de amostragem, definido através de ΔH , possibilita-nos estabelecer uma correspondência com o método de amostragem FSI de intervalo de amostragem igual a d , considerando as semelhanças existentes entre o período de amostragem d e o incremento constante ΔH . Numa perspetiva económica, o valor de ΔH pode ser obtido por forma a minimizar uma determinada função custo, à semelhança com o que pode acontecer com o cálculo do período d num esquema de amostragem FSI.

Como referido anteriormente, vamos considerar um sistema cujo tempo de vida segue uma distribuição de *Weibull* com parâmetro de escala α e parâmetro de forma δ , e com função densidade dada por

$$f(t) = \frac{\delta}{\alpha} \left(\frac{t}{\alpha} \right)^{\delta-1} \exp \left[- \left(\frac{t}{\alpha} \right)^{\delta} \right], t \geq 0, \alpha, \delta > 0. \quad (3.8)$$

Para esta formulação da distribuição de *Weibull*, o valor esperado e a variância de T são dados, respetivamente, por

$$E(T) = \alpha \Gamma\left(1 + \frac{1}{\delta}\right), \quad (3.9)$$

e por

$$\text{Var}(T) = \alpha^2 \left[\Gamma\left(1 + \frac{2}{\delta}\right) - \Gamma^2\left(1 + \frac{1}{\delta}\right) \right], \quad (3.9)$$

onde $\Gamma(x)$ é a função gama definida por

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} u^{x-1} \exp(-u) du, \quad (3.11)$$

e a função de fiabilidade dada pela expressão

$$R(t) = \exp\left[-\left(\frac{t}{\alpha}\right)^\delta\right], t \geq 0. \quad (3.12)$$

Assim, tendo em conta (3.7), no método PSI os instantes de inspeção são definidos por

$$t_i = \alpha \sqrt[\delta]{i \Delta H}, i = 1, 2, \dots, \quad (3.13)$$

e os intervalos de amostragem definidos pela expressão

$$\Delta t_i = \left(\sqrt[\delta]{i} - \sqrt[\delta]{i-1}\right) t_1, i = 1, 2, \dots, \quad (3.14)$$

obtida por Banerjee e Rahim (1988).

Nesta dissertação é considerada a distribuição de *Weibull* por ser a mais utilizada na literatura, e por assumir grande variabilidade de formas, consoante o valor atribuído ao seu parâmetro δ . Quando $\delta = 1$, a distribuição de *Weibull* reduz-se à distribuição exponencial, e quando δ é um valor próximo de 3.8 aproxima-se da distribuição normal. Em geral, os valores atribuídos ao parâmetro δ variam entre 1 e 3, contudo neste trabalho vamos considerar, também, os valores 4, 5 e 7 (sendo 7, um caso pouco usual) para analisar diferentes situações. Outras distribuições, como por exemplo a de

Burr, podiam ser consideradas pois, também, podem assumir diferentes formas bem como diferentes pesos de caudas (diferentes graus de assimetria e curtose).

Concluída a apresentação, vamos em seguida apresentar algumas das propriedades mais importantes do método PSI.

Assim, considere-se a variável aleatória que representa o número de amostras desde o início do processo até à primeira amostra após a falha, que foi designada no Capítulo II por N_0 . Para o valor esperado de N_0 temos

$$E(N_0) = \sum_{i=0}^{+\infty} (i+1) \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(t) dt = \sum_{i=0}^{+\infty} R(t_i) = \frac{1}{1 - \exp(-\Delta H)}, \quad (3.15)$$

atendendo a (2.1), (3.6) e a que os instantes t_i obedecem à condição (3.7).

Considere-se, agora, G a variável aleatória que representa o intervalo de tempo desde a falha até à recolha da amostra a seguir à falha, também definida no Capítulo II. Em geral, o valor esperado de G é dado pela expressão

$$E(G) = \sum_{i=0}^{+\infty} t_i [F(t_i) - F(t_{i-1})] - E(T), \quad (3.16)$$

que, atendendo a (3.6) e a (3.7), podemos escrever como

$$E(G) = [\exp(\Delta H) - 1] \sum_{i=0}^{+\infty} R^{-1}[\exp(-i\Delta H)] \exp(-i\Delta H) - E(T). \quad (3.17)$$

O intervalo médio de tempo desde a falha do processo até uma amostra cair fora dos limites de controlo da carta (ou período médio de mau funcionamento do sistema), AATS, é dado pela expressão (Rodrigues Dias (2002))

$$AATS = (1 - e^{-\Delta H}) \left[\sum_{i=0}^{+\infty} t_i e^{-(i-1)\Delta H} + \frac{\beta \sum_{i=1}^{+\infty} (t_{i+1} - t_i) (\beta^i - e^{-i\Delta H})}{\beta - e^{-\Delta H}} \right] - E(T), \quad (3.18)$$

onde os instantes t_i são obtidos pela expressão (3.7) e β é a probabilidade de cometer um erro de tipo II, dada por (2.9).

Em Rodrigues Dias (1987), num contexto inspeções perfeitas, foram estabelecidas correspondências entre os resultados deste método com resultados do método FSI, demonstrando que a variável H tem distribuição exponencial com média e variâncias unitárias.

Em Infante (2004), num contexto mais usual, o de inspeções que consideram erros de tipo I e II, foram estabelecidas correspondências entre os principais resultados de PSI e FSI, das quais se destaca uma aproximação para obter o valor do parâmetro que define o método PSI, ΔH .

Considerando que o número médio de amostras recolhidas sob controlo é o mesmo para o método FSI e para o método PSI, Rodrigues Dias (1987) e Infante (2004) realizando vários estudos de simulação, nos quais consideram diferentes distribuições e tempos de vida do sistema e diferentes períodos de amostragem para o método FSI, obtiveram para ΔH a aproximação

$$\Delta H \cong \frac{d}{E(T)}, \quad (3.19)$$

que não depende da distribuição do tempo de vida do sistema, e onde d é o período de amostragem em FSI e $E(T)$ o tempo médio de vida do sistema. Tendo em conta os resultados obtidos pelos autores, em ambos os contextos, trata-se de uma aproximação muito boa (tendo em conta os erros relativos obtidos) e muito importante, pois conhecendo-se o valor de ΔH o método fica perfeitamente definido.

Em Rodrigues Dias (1987) são, ainda, estabelecidas aproximações para ΔH que procuram obter o valor do parâmetro que minimiza uma determinada função custo, analogamente ao que acontece com a determinação do período de amostragem em FSI.

Rodrigues Dias e Infante (2008), considerando cartas de controlo para a média com distribuições de *Weibull* e de *Burr* para o tempo de vida do sistema, diferentes taxas de risco, limites de controlo “3-sigma” e a aproximação (3.19), concluem que:

- 1) Exceto no caso em que a taxa de risco do sistema é constante, o método PSI é sempre mais eficaz do que o método FSI para todas as alterações da média, o que nem sempre acontece com nenhum dos métodos adaptativos comparados. Em alguns dos casos, o valor da redução, no AATS, é muito significativa.
- 2) O uso do método PSI justifica-se tanto mais quanto menor for a probabilidade de detetar uma determinada alteração, λ .
- 3) Quanto maior for o valor do parâmetro de forma δ (correspondendo a taxas de risco crescente) da distribuição de *Weibull*, mais eficaz é o método PSI, ou seja, a eficácia de PSI é tanto melhor, quanto mais acentuadamente for a taxa de risco do sistema.
- 4) Quando diminui o tempo médio de vida do sistema, o desempenho de PSI melhora ligeiramente, porque essa redução permite diminuir o número de amostras sob controlo e melhorar a calendarização dos instantes de amostragem ao longo processo, visto que estes não se repartem de forma linear.

Mais pormenores sobre o desempenho deste método de amostragem, considerando outras dimensões amostrais e diferentes valores para o intervalo de amostragem em FSI, podem ser vistas em Infante (2004).

3.3. Instantes de Amostragem Adaptativos

Ao longo dos anos têm sido desenvolvidos novos procedimentos de amostragem. Em geral, no início são aplicados a cartas de controlo para a média, mas à posteriori são, por vezes, aplicados a cartas conjuntas, a cartas especiais, são combinados com outros métodos de amostragem e são-lhes introduzidas novas condições, económicas, estatísticas ou económicas-estatísticas.

Os novos procedimentos, nos quais pelo menos um dos parâmetros das cartas de controlo varia em função da estatística amostral (que contém a informação de cada amostra), são designados por procedimentos dinâmicos ou adaptativos. Neste ponto,

vamos apresentar e estudar procedimentos cujos intervalos de amostragem variam em função da estatística amostral.

3.3.1. Amostragem VSI

Menos utilizado na prática, do que o método FSI, mas mais eficaz, no que ao AATS diz respeito, em determinadas magnitudes de alteração do processo, este procedimento foi introduzido por Reynolds *et al.* (1988) com a ideia de melhorar o desempenho da carta de controlo para a média. Trata-se de um método com uma operacionalização diferentes das anteriores, FSI e PSI, em que o intervalo de tempo entre amostras varia em função da informação recolhida a partir da amostra retirada.

Tendo como base o método FSI, o método VSI assenta na ideia de que o intervalo de tempo entre amostras deve ser menor, quando existe informação na amostra de que no processo pode ter ocorrido alteração, e que o mesmo intervalo de tempo entre amostras deve ser alargado, se a amostra não indicar uma possível alteração. Deste modo, este procedimento permite-nos *antecipar* (usando um intervalo de tempo menor do que o intervalo fixo) a recolha, e análise, da próxima amostra, caso a média amostral esteja na região mais próxima dos limites de controlo e *retardar* (usando um intervalo de tempo maior do que o intervalo de tempo fixo usual) a recolha, e análise, da próxima amostra, caso a média amostral caia na região que contém a linha central (e o valor de μ_0).

O método permite considerar mais do que dois intervalos, dividindo a, denominada, região de continuação em várias sub-regiões, cada uma correspondendo a um intervalo de amostragem, continuando o menor intervalo de amostragem a ser utilizado caso a média amostral cai na região mais próxima dos limites de controlo e o maior intervalo de amostragem a ser utilizado quando a média amostral cai na região central. Contudo, um maior número de intervalos de amostragem aumenta, significativamente, a complexidade de qualquer design que seja considerado.

A análise dos resultados numéricos apresentada em Reynolds *et al.* (1988), levam à conclusão empírica de que, para $\mu \neq \mu_0$, o intervalo médio de tempo até um ponto sair fora dos limites de controlo (ATS) é menor, quando apenas são utilizados dois intervalos de amostragem, sendo minimizado, quando se utilizam o menor e o maior dos intervalos. Para minimizar o AATS, os autores concluem que o menor intervalo deve ser o menor possível e que o maior intervalo de amostragem deve ser grande, se houver pretensão de detetar pequenas alterações e deve ser pequeno no caso oposto. Na literatura podem encontrar-se várias justificações para a utilização de dois intervalos.

Reynolds (1989), considerando uma carta de controlo para a média com um limite, apresentam resultados teóricos que mostram que a utilização de dois intervalos de amostragem, considerando o menor e o maior η intervalos, é ótimo em termos da minimização do ATS.

Reynolds e Arnold (1989), considerando uma carta de controlo para a média com dois limites de controlo, e também apresentam razões teóricas que justificam a utilização de dois intervalos.

Runger e Pignatiello (1991), em trabalho autónomo, apresentam uma versão, diferente, do método VSI com dois intervalos amostrais. Os autores consideram que o processo se inicia fora de controlo, e mostram que o uso de dois intervalos de amostragem corresponde a uma política ótima. Porém, salientam que o esquema de amostragem com dois intervalos não é ótimo quando o processo se inicia sob controlo, ocorrendo a falha algures num instante futuro (designado por “steady-state”). Com base na análise dos muitos exemplos considerados, os autores recomendam que o valor do maior intervalo de amostragem deve ser entre 2 a 5 vezes superior ao período de amostragem do método FSI.

Runger e Montgomery (1993), estudaram o desempenho do método VSI com dois intervalos de amostragem, quando o processo se inicia sob controlo. Utilizando uma

carta de controlo para a média, obtiveram uma função do intervalo de amostragem que minimiza o valor do AATS para determinada alteração da média, impondo que o intervalo médio de amostragem em VSI fosse igual ao período de amostragem em FSI, sob controlo, ou seja, que o número médio de amostras recolhidas sob controlo fosse o mesmo nos dois métodos. A função do intervalo de amostragem considerada não usa apenas dois intervalos de amostragem, e depende da magnitude da alteração do processo, que não é conhecida à partida. Desse modo, os autores concluem que um método com dois intervalos de amostragem tem um desempenho comparável a uma política ótima ao longo de diferentes alterações. Apesar deste esquema de amostragem otimizar o desempenho da carta quando o processo se inicia sob controlo e a alteração da qualidade ocorre num instante futuro, apresentando uma pequena vantagem em casos particulares, os autores recomendam o uso de dois intervalos de amostragem em aplicações práticas devido, por um lado, à sua maior simplicidade e, por outro, a que apenas registaram pequenos aumentos nos valores do AATS, quando utilizam o método VSI com dois intervalos.

Utilizando cartas de controlo para a média com limites “3-sigma”, Runger e Montgomery (1993) recomendam que d_2 deve ser um valor entre 1.5 e 4 vezes o intervalo de amostragem do método FSI, devendo estar próximo da margem inferior destes valores, se pretendermos detetar grandes alterações no processo. Recomendações idênticas são feitas por Reynolds *et al.* (1988) e por Runger e Pignatiello (1991).

Considerando uma carta de controlo para a média, tal como nos métodos apresentados anteriormente, no método VSI, usando dois intervalos de amostragem, daqui em diante denotados por d_1 (o menor intervalo) e por d_2 (o maior intervalo), a região de continuação, C , definida como o intervalo entre os limites de controlo standardizados, é dividida em duas sub-regiões definidas por

$$C_1 = \left] \mu_0 - L \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}, \mu_0 - w \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} \right] \cup \left[\mu_0 + w \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}, \mu_0 + L \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} \right], \quad (3.20)$$

$$C_2 = \left] \mu_0 - w \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}, \mu_0 + w \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} \right[, \quad (3.21)$$

com $C_1 \cap C_2 = \emptyset$, $C_1 \cup C_2 = C$ e $0 < w < L$. O menor intervalo de amostragem, d_1 , é usado sempre que um ponto correspondente a uma média amostral seja marcado na sub-região C_1 e o maior intervalo de amostragem, d_2 , é utilizado quando um ponto correspondente a uma média amostral seja marcado na região C_2 . A Fig. 3.1. dá uma ideia do que acontece na prática.

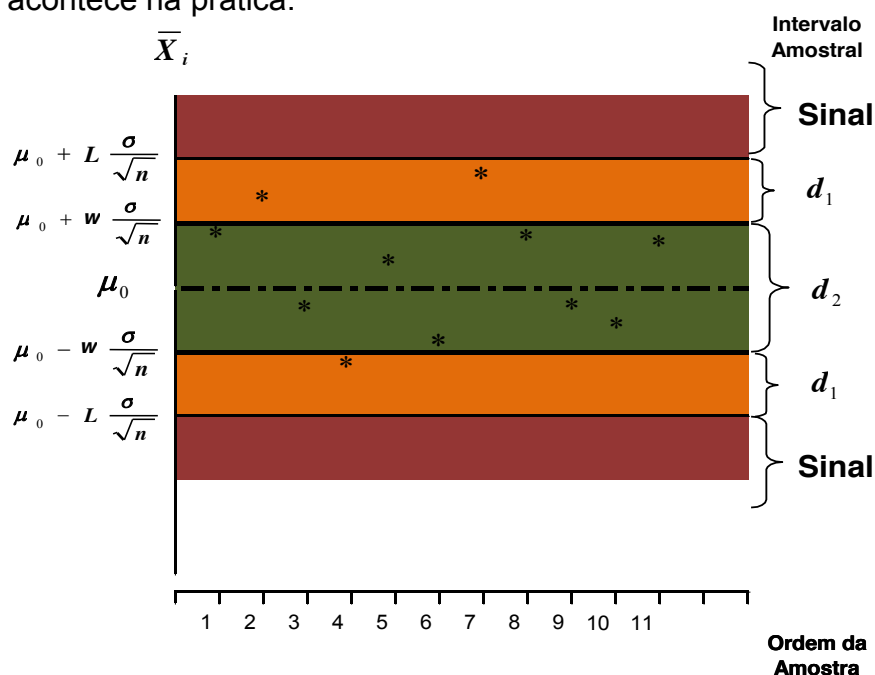


Fig. 3.1. – Carta de controlo para a média com método de amostragem VSI.

Analisando a figura, verificamos que o instante para recolha de ordem dois foi determinado usando o intervalo d_2 , porque a média da amostra, de ordem um, foi marcada na sub-região C_2 . A amostra de ordem três foi retirada usando o intervalo d_1 , porque a média da amostra, de ordem dois, foi marcada na sub-região C_1 .

Desta forma, o intervalo médio de amostragem é dado, para uma dada alteração da média e/ou do desvio padrão, por:

$$E(D|\lambda, \rho) = \frac{d_1 \times p_1 + d_2 \times p_2}{\beta}, \quad (3.22)$$

onde β é a probabilidade da média amostral ser marcada dentro dos limites de controlo, dada por (2.9), e

$$p_i = P(\bar{X} \in C_i | \lambda, \rho), i = 1, 2. \quad (3.23)$$

Segundo Reynolds *et al.* (1988), o tempo médio até sinal (ATS), utilizado quando o processo se inicia fora de controlo, é dado por

$$ATS = \frac{d_1 p_1 + d_2 p_2}{\beta(1-\beta)}, \quad (3.24)$$

e o intervalo médio de mau funcionamento, AATS, pode ser obtido por

$$AATS = \frac{d_1^2 p_{01} + d_2^2 p_{02}}{2(d_1 p_{01} + d_2 p_{02})} + \frac{d_1 p_{11} + d_2 p_{12}}{1-\beta}, \quad (3.25)$$

onde p_{0j} , $j = 1, 2$, representam as probabilidades de um ponto correspondente a uma média amostral ser marcado na sub-região C_j quando o processo está sob controlo, $\lambda = 0$ e $\rho = 1$, dadas por

$$p_{01} = 2[\Phi(L) - \Phi(w)], \quad (3.26)$$

$$p_{02} = 2\Phi(w) - 1, \quad (3.27)$$

e p_{1j} , $j = 1, 2$, representam as probabilidades de um ponto correspondente a uma média amostral ser marcado na sub-região C_j , quando o processo está fora de controlo, $\lambda \neq 0$ e $\rho \neq 1$, dadas por

$$p_{11} = \Phi\left(\frac{L - \lambda\sqrt{n}}{\rho}\right) - \Phi\left(\frac{w - \lambda\sqrt{n}}{\rho}\right) + \Phi\left(\frac{-w - \lambda\sqrt{n}}{\rho}\right) - \Phi\left(\frac{-L - \lambda\sqrt{n}}{\rho}\right), \quad (3.28)$$

$$p_{12} = \Phi\left(\frac{w - \lambda\sqrt{n}}{\rho}\right) - \Phi\left(\frac{-w - \lambda\sqrt{n}}{\rho}\right). \quad (3.29)$$

A eficácia deste método foi analisada através de comparações do seu desempenho com o método FSI, impondo que ambos os métodos estejam nas mesmas condições sob controlo. Assim, para que o intervalo médio de amostragem, $E(D)$, em VSI, seja

igual ao período de amostragem, d , de FSI, o valor do coeficiente w é, no caso da distribuição por amostragem ser normal, obtido pela expressão

$$w = \Phi^{-1} \left[\frac{2 \times \Phi(L) \times (d - d_1) + d_2 - d}{2(d_2 - d_1)} \right], \quad (3.30)$$

podendo encontrar-se uma expressão análoga em Runger e Pignatiello (1991) para cartas só com um limite de controlo.

Reynolds *et al.* (1988), Runger e Pignatiello (1991) e Runger e Montgomery (1993) concluem que o desempenho das cartas de médias com método VSI, e dois intervalos de amostragem, é sempre mais eficaz do que o método FSI, em termos de ATS. Contudo, quando os métodos são comparados em termos de AATS, o desempenho de VSI é melhor em reduzidas e moderadas alterações da média mas é pior em grandes alterações da média, sendo as reduções no ATS e no AATS mais acentuadas quando é considerada uma carta de controlo com um só limite.

Durante os trabalhos desta dissertação podemos também constatar que a redução do maior intervalo de amostragem, d_2 , em VSI, melhora o desempenho do método num maior número de alterações, porque diminui o coeficiente w dos limites de vigilância e aumenta a probabilidade de utilizar o menor intervalo de amostragem, aumentando, dessa forma, o número médio de amostras recolhidas.

Em Rodrigues Dias e Infante (2008) o desempenho do método VSI é comparado com PSI, em termos de AATS, concluindo os autores que a eficiência do método VSI, na deteção de alterações na média, diminui à medida que aumenta a taxa de risco do sistema e que, quando a taxa de risco é constante ou crescente, $\delta \geq 1$, PSI é mais eficiente do que VSI em reduzidas e grandes alterações da média.

Ao longo dos anos, o procedimento VSI foi sendo utilizado com outras cartas, considerado para resolver novas problemáticas e em novas versões de métodos de amostragem.

Em relação à utilização com novas cartas podem ver-se, por exemplo, os trabalhos de Chengalur *et al.* (1989), que consideram o uso simultâneo de cartas para a média e para a variância, Saccucci *et al.* (1992) que estudam as propriedades e o desempenho de, por exemplo, esquemas VSI-EWMA, VSI-CUSUM com recurso às cadeias de *Markov*, Ramalhoto e Morais (1994) que estudam cartas *Shewhart*, EWMA e CUSUM para a média com método VSI, Morais e Natário (1998) que consideram uma carta unilateral superior, Reynolds e Stoumbos (2001) que consideram cartas simultâneas para a média e para a variância com observações individuais, Stoumbos e Reynolds (2005) que comparam o desempenho de esquemas VSI-*Shewhart* e VSI-EWMA para médias, num contexto económico de aplicações práticas, Chou, C. Y. *et al.* (2006) que utilizam um algoritmo genético para obter os parâmetros ótimos de cartas EWMA para a média com método VSI, e que minimizam o custo total, Chou, C.-Y. *et al.* (2006) que realizam um estudo idêntico ao anterior, mas considerando cartas conjuntas para a média e para a amplitude, Castagliola *et al.* (2007) que estudam uma carta EWMA para a variância com método VSI e Luo *et al.* (2009) que consideram uma carta CUSUM para a média.

Na resolução de novas problemáticas, podem citar-se os trabalhos de Amin e Letsinger (1991), que consideram o número de transições (“*switches*”) entre os intervalos de amostragem em diferentes cartas com método VSI introduzindo regras suplementares, Amin e Hemasinha (1993) que também estudaram o problema dos autores anteriores, Ramalhoto e Morais (1995) e Ramalhoto e Morais (1999) que estudam cartas do tipo *Shewhart* com amostragem fixa e variável e Ramalhoto e Morais (1998) que estudam esquemas VSI-EWMA, para detetar alterações do parâmetro de escala da distribuição de *Weibull*, Reynolds e Arnold (1996) que comparam o desempenho de uma carta de controlo para a média com métodos VSI e FSI, considerando a presença de correlação entre as amostra, Stoumbos *et al.* (2001) que estudam o “*steady-state optimal*” de uma carta de controlo para a média com VSI,

Chen (2003) que estuda o desempenho de um design económico-estatístico com método VSI e carta de controlo para a média, quando a característica da qualidade não é normal, Zhang e Wu (2006) que estudam uma carta CUSUM, com método VSI, que inclui uma função de prejuízo com influência nos limites de controlo, Chen e Yeh (2010) que estudam a influência da não normalidade da característica da qualidade no desempenho de uma carta para a média, com método VSI, num contexto económico e Lin e Chou (2011) que realizam um estudo de robustez para cartas EWMA e cartas conjuntas *Shewhart*-EWMA, com amostragem VSI, sob a não normalidade.

Relativamente a novas versões do método, podemos considerar como exemplos os trabalhos de Baxley (1995) que apresenta um novo procedimento com VSI, denominado VSI-FT ("*Variable Sampling Intervals with Fixed Times*"), Epprecht *et al.* (2010) que apresenta um procedimento VSI com carta EWMA num contexto de amostragem por atributos e Torabian *et al.* (2010) que consideram uma carta Hotelling's T^2 com amostragem VSI e limites adaptativos, denominada VSICL ("*Variable Sampling Intervals and Control Limits*").

3.3.2. Amostragem VSSI

A conceção de um método de amostragem que permitisse variar, simultaneamente, intervalos de amostragem e dimensões amostrais foi proposta em Prabhu *et al.* (1994) sendo o método denominado VSSI ("*Variable Sample Sizes and Sampling Intervals*"). No método VSSI, considerando uma carta de controlo para a média, são utilizados, normalmente, dois intervalos de amostragem, d_1 e d_2 ($d_1 < d_2$), e duas dimensões amostrais, n_1 e n_2 ($n_1 < n_2$). Quando se utiliza o maior intervalo (d_2) considera-se a menor dimensão amostral (n_1) e quando se utiliza o menor intervalo (d_1) considera-se a maior dimensão amostral (n_2).

A divisão da região de continuação da carta de controlo é feita de um modo semelhante ao efetuado nos métodos VSI e VSS. Se a média, reduzida, da amostra cai

na sub-região C_1 , a próxima amostra é retardada (utilizando-se d_2) e de menor dimensão (n_1), mas se o ponto correspondente à média, reduzida, da amostra é marcado na sub-região C_2 , a próxima amostra é antecipada (utilizamos d_1) e de maior dimensão (n_2).

A eficiência de VSSI foi comparada com a eficiência dos métodos FSI, VSI e VSS, considerando-se os métodos nas mesmas condições sob controlo, ou seja: que têm o mesmo número médio de falsos alarmes, o mesmo número médio de amostras e o mesmo número médio de itens inspecionados.

Assim, no estado sob controlo, para que o intervalo médio entre amostras usando o método VSSI, $E(D)_{VSSI}$, seja igual ao período de amostragem, d , do método FSI, e para que a dimensão média das amostras, $E(N)$, seja igual à dimensão das amostras, n , dos métodos com dimensões amostrais fixas, o valor do coeficiente w , que define as sub-regiões da região de continuação, é, caso a distribuição por amostragem seja normal, dado por

$$w = \Phi^{-1} \left[\frac{2 \times \Phi(L) \times (n_2 - n) + n - n_1}{2(n_2 - n_1)} \right], \quad (3.31)$$

que é equivalente à expressão (3.30). Assim, o coeficiente w pode ser obtido seleccionando as duas dimensões amostrais ou os dois intervalos de amostragem. Com um par de parâmetros, e um elemento do outro par, definidos o outro parâmetro fica univocamente determinado. Prabhu *et al.* (1994) fazem recomendações sobre a escolha dos parâmetros. Os autores recomendam a escolha das dimensões amostrais para evitar erros de arredondamento e a seleção do menor intervalo de amostragem, que frequentemente depende do tipo de inspeção e do facto do processo de amostragem ser manual ou automático. Dessa forma, os autores determinam o maior intervalo de amostragem através da expressão

$$d_2 = \frac{d(n_2 - n_1) + 2(d - d_1)(n_1 - n_2)\Phi(L) + d_1[2(n - n_2)\Phi(L) + n_1 - n]}{n_2 - n + 2(n - n_2)\Phi(L)}. \quad (3.32)$$

Em Prabhu *et al.* (1994) é realizado um estudo de desempenho do método VSSI, em termos do ATS, recorrendo a cadeias de *Markov*, concluindo os autores que o método VSSI é muito mais eficiente do que o método FSI. Por outro lado, concluem que o método VSSI é mais eficaz do que o método VSI em reduzidas alterações da média mas é menos eficaz em grandes alterações. Quando comparam VSSI com VSS, concluem que o ATS do método VSSI é sempre menor do que o ATS do método VSS.

Costa (1997), considera uma carta de controlo para a média com amostragem VSSI e que o tempo de vida tem distribuição exponencial, recorrendo às cadeias de *Markov* para obter o AATS. O autor compara o procedimento com os procedimentos VSI e VSS, em termos de AATS, e retira conclusões idênticas às de Prabhu *et al.* (1994). No mesmo trabalho, a carta para a média é também comparada, através da mesma medida de desempenho, com a carta para a média com regras suplementares, com a carta EWMA e com a carta *Shewhart-CUSUM*, revelando-se mais eficaz para grandes alterações da média, mas considerando condições específicas pré-estabelecidas, mais concretamente a minimização de um custo total médio por unidade de tempo com $\lambda = 1$ (fora de controlo).

Zimmer *et al.* (2000) estudam modificações do método, considerando três dimensões amostrais e três intervalos de amostragem e duas versões com três dimensões amostrais e dois intervalos de amostragem. Os autores concluíram que o aumento de complexidade (pelo aumento do número de parâmetros) dos esquemas não compensava as pequenas melhorias obtidas.

Costa (1999b) considera a utilização conjunta de uma carta para a média e outra para a amplitude com método VSSI. Admitindo tempo de vida exponencial e recorrendo às cadeias de *Markov* para determinar o AATS, o autor conclui que este procedimento melhora consideravelmente o desempenho das cartas, com uma deteção mais rápida de alterações na média e/ou no desvio padrão.

Reynolds e Arnold (2001) concluem que o método VSSI melhora, consideravelmente, a eficácia de uma carta EWMA exceto em grandes alterações da média, retirando conclusões idênticas quando consideram cartas CUSUM.

Lu e Wu (2002) determinam o design ótimo de uma carta de controlo para o número de elementos defeituosos com amostragem VSSI, concluindo que a eficácia da carta na deteção de alterações pequenas e moderadas aumenta.

Lin e Chou (2005b), estudam o desempenho de cartas para a média com limites simétricos e assimétricos em probabilidade, com método VSSI e a característica da qualidade com distribuição de *Burr*. Os autores comparam o desempenho dos procedimentos propostos com um procedimento idêntico mas com método VSS, concluindo que os procedimentos que utilizam os métodos VSS e VSSI são mais eficientes do que aqueles que utilizam os métodos FSI e VSI, em pequenas alterações da média, e que os métodos VSS e VSSI são mais robustos sob a não normalidade dos dados.

Wu *et al.* (2005) estudam um procedimento com uma função de prejuízo e uma carta conjunta para a média e para a variância, com método VSSI, denominado VSSI AL (*“Variable Sample sizes and Sampling Intervals with Adjusted Loss function”*). Os autores mostram que o novo procedimento é mais simples e de fácil implementação, concluindo que a sua utilização melhora a eficácia da carta tradicional com método VSSI em 10%.

Chen *et al.* (2007), utilizam um modelo económico combinado e multivariado, com método VSSI, para avaliar a influência da correlação entre os parâmetros da carta, procurando determinar os parâmetros ótimos e realizando uma análise de sensibilidade aos mesmos.

Wu *et al.* (2007), consideram uma carta CUSUM com método VSSI e uma função de prejuízo ponderado. O procedimento é definido de modo a detetar alterações na média e no desvio padrão, com base na função de prejuízo ponderado. Os autores mostram

que o procedimento, denominado VSSI WLC (*“Variable Sample sizes and Sampling Intervals with Weighted-Loss-function-based CUSUM”*). Os autores apresentam-no como mais fácil de utilizar, quando comparado com o esquema VSSI CCC (composto por três cartas CUSUM individuais), e concluem que é mais eficaz do que os procedimentos com a carta $\bar{X}-S$ e FSI, com a carta $\bar{X}-S$ e VSSI, FSI WLC e do que VSSI CCC.

Niaki *et al.* (2012), consideram um design económico com carta de controlo para a média e amostragem VSSI, sob a não normalidade dos dados. Considerando um algoritmo genético, os resultados obtidos, em termos de custos por unidade de tempo, são comparados com os obtidos sob a normalidade sendo, também, realizada uma análise de sensibilidade aos parâmetros do modelo.

3.3.3. Amostragem VP

Na procura de melhoria de eficácia para as diferentes cartas, Costa (1999c) desenvolveu um método de amostragem no qual todos os parâmetros envolvidos no desenho são adaptativos: intervalos de amostragem, dimensões amostrais e limites de controlo. Este método, denominado VP (*“Variable Parameters”*), foi concebido com aplicação à carta de controlo para médias. A operacionalização do método consiste em: reduzir o controlo, retardando a recolha da próxima amostra, reduzir a respetiva dimensão amostral e ampliar os limites da carta, quando a média, reduzida, da amostra é marcada próximo da linha central; reforçar o controlo, antecipando a recolha da próxima amostra, aumentar a respetiva dimensão amostral e apertar os limites da carta, se a média, reduzida, da amostra é marcada numa região próxima dos limites de controlo.

As médias amostrais são representadas numa carta de controlo para a média com limites de controlo dados por

$$LSC_i = \mu_0 + L_i \frac{\sigma_0}{\sqrt{n_i}} \text{ e por } LIC_i = \mu_0 - L_i \frac{\sigma_0}{\sqrt{n_i}}, \quad (3.33)$$

e limites de vigilância dados por

$$LSV_i = \mu_0 + w_i \frac{\sigma_0}{\sqrt{n_i}} \text{ e por } LIV_i = \mu_0 - w_i \frac{\sigma_0}{\sqrt{n_i}}, \quad (3.34)$$

com $L_1 > L > L_2$ e $w_1 > w_2$, onde $i = 1$ se a amostra atual é pequena e $i = 2$ se a amostra atual é grande e L é, usualmente, igual a 3 unidades.

Os coeficientes dos limites, w_i e L_i , com $i = 1, 2$, são obtidos de modo a que o número médio de falsos alarmes seja igual ao do esquema FSI e que o número médio de itens inspecionados seja o mesmo nos dois esquemas, sob controlo. Costa (1999c) recomenda que se escolha um valor para a maior dimensão amostral, n_2 , e um valor para o menor intervalo de amostragem, d_1 , que dependem do tempo necessário para analisar um item. Tratando-se de um método concebido com o objetivo de detetar pequenas alterações da média, o autor recomenda que se considerem dimensões unitárias para n_1 , e que o valor de L_1 seja tão grande quanto o necessário para que a probabilidade de um falso alarme seja, praticamente, nula. Assim, os restantes parâmetros são obtidos através das expressões:

$$L_2 = \Phi^{-1} \left[\frac{(n_2 - n_1)\Phi(L) - (n_2 - n)\Phi(L_1)}{n - n_1} \right], \quad (3.35)$$

$$w_i = \Phi^{-1} \left[\frac{2(n_2 - n)\Phi(L_i) + n - n_1}{2(n_2 - n_1)} \right], i = 1, 2, \quad (3.36)$$

e

$$d_2 = \frac{d(n_2 - n_1) - d_1(n - n_1)}{n_2 - n}. \quad (3.37)$$

Quando $n_1 = n = n_2$, o autor recomenda a escolha do par de intervalos de amostragem e um valor para L_1 sendo, dessa forma, os restantes parâmetros obtidos pelas expressões:

$$L_2 = \Phi^{-1} \left[\frac{(d_2 - d_1)\Phi(L) - (d - d_1)\Phi(L_1)}{d_2 - d} \right], \quad (3.38)$$

$$w_i = \Phi^{-1} \left[\frac{2(d - d_1)\Phi(L_i) + d_2 - d}{2(d_2 - d_1)} \right], i = 1, 2, \quad (3.39)$$

Recorrendo a cadeias de *Markov*, Costa (1999c) obtém expressões para o ATS e para o AATS, supondo que o processo se inicia no estado sob controlo, com média μ_0 . Quando o processo está fora de controlo, a ocorrência de uma causa assinalável resulta numa alteração da média para $\mu_0 + \lambda\sigma$ e o autor considera um modelo com três estados transientes, o estado 1, em que o processo está sob controlo e a média amostral é marcada na região central, o estado 2, em que o processo está sob controlo e a média amostral é marcada numa das sub-regiões de aviso, e o estado 3, quando o processo está fora de controlo (estado de absorção). Por simplificação, considera que não ocorrem alterações na variância do processo.

Com base na ideia do autor, Infante (2004) obteve expressões simplificadas para o cálculo do ATS, do AATS e do ANOS com método VP. Considerando cartas de controlo para a média, as expressões do ATS e do AATS são dadas, respetivamente, por:

$$ATS = p_0 \left[\frac{d_2(1 - p_{22}) + d_1 p_{12}}{(1 - p_{11})(1 - p_{22}) - p_{12} p_{21}} \right] + (1 - p_0) \left[\frac{d_1(1 - p_{11}) + d_2 p_{21}}{(1 - p_{11})(1 - p_{22}) - p_{12} p_{21}} \right], \quad (3.40)$$

e por

$$AATS = \frac{(p_{11}r + p_{21}s)[d_2(1 - p_{22}) + d_1 p_{12}] + (p_{12}r + p_{22}s)[d_1(1 - p_{11}) + d_2 p_{21}]}{(1 - p_{11})(1 - p_{22}) - p_{12} p_{21}} + \frac{d_2 r + d_1 s}{2} \quad (3.41)$$

com

$$r = \frac{p_0 d_2}{p_0 d_2 + (1 - p_0) d_1}, \quad (3.42)$$

$$s = \frac{(1 - p_0) d_1}{p_0 d_2 + (1 - p_0) d_1}, \quad (3.43)$$

$$p_0 = P(|Z| < w_1 | |Z| < L_1) = P(|Z| < w_2 | |Z| < L_2), \quad (3.44)$$

$$e \quad p_{ij} = \begin{cases} \Phi(w_i - \lambda\sqrt{n_i}) - \Phi(-w_i - \lambda\sqrt{n_i}), & j = 1 \\ \Phi(-w_i - \lambda\sqrt{n_i}) - \Phi(-L_i - \lambda\sqrt{n_i}) + \Phi(L_i - \lambda\sqrt{n_i}) - \Phi(w_i - \lambda\sqrt{n_i}), & j = 2 \end{cases} \quad (3.45)$$

Em Costa (1999c) não é apresentada uma expressão para o cálculo do número médio de itens inspecionados, com o método VP, necessária para realizar uma análise comparativa entre métodos diferentes ao nível das dimensões amostrais.

Infante (2004), utilizando um raciocínio análogo ao efetuado por Costa (1999c) para o cálculo do AATS, obtém uma expressão para o ANOS com amostragem VP, que é dada por

$$ANOS = \frac{(p_{11}r + p_{21}s)[n_1(1 - p_{22}) + n_2p_{12}] + (p_{12}r + p_{22}s)[n_2(1 - p_{11}) + n_1p_{21}]}{(1 - p_{11})(1 - p_{22}) - p_{12}p_{21}} + n_1r + n_2s \quad (3.46)$$

com r e s dados pelas expressões (3.42) e (3.43), respetivamente.

As propriedades deste método tornam-se vantajosas na obtenção de alguns resultados, pois quando $L_1 = L = L_2$, o método VP equipara-se ao método VSSI; quando $L_1 = L = L_2$ e $d_1 = d = d_2$, o método VP equipara-se ao método VSS e, por fim, quando $L_1 = L = L_2$, e $n_1 = n = n_2$, o método equipara-se ao método VSI.

Neste trabalho utilizamos as expressões (3.41) e (3.46) para obtermos o AATS e o ANOS dos métodos VSS, VSSI e VP. Costa (1999a) apresenta um programa em FORTRAN que permite calcular o AATS para métodos de amostragem adaptativos, em particular, para os métodos VSI, VSS, VSSI e VP.

Costa (1999c) compara o desempenho deste método com o dos métodos VSI, VSS e VSSI, concluindo que a eficiência da carta das médias aumenta para pequenas alterações, que a carta das médias com VP é mais eficaz do que a carta CUSUM em pequenas alterações e que VP melhora o desempenho da carta de controlo para a média com regras suplementares.

Em Costa (1998b) é aplicado o método VP ao uso conjunto de carta para a média e carta para a amplitude, concluindo-se que o método VP melhora, razoavelmente, o desempenho conjunto das cartas.

Lin e Chou (2007), considera que a característica da qualidade não tem distribuição normal (Gama e *t-Student*) e uma carta de controlo para a média (com limites simétricos e limites assimétricos em probabilidade). O autor estuda o desempenho das cartas para médias com métodos FSI, VSI, VSS, VSSI e VP, e conclui que o método VP melhora o desempenho da carta e reduz, substancialmente, o risco de falso alarme.

Lee (2011), considera uma carta de controlo para amplitudes com método VP para estudar a sensibilidade da carta à alteração da variância e, recorrendo às cadeias de *Markov*, conclui que a carta R com método VP é mais sensível ao aumento da variância, do que a carta R com método FSI.

3.3.4. Outras Políticas de Amostragem Adaptativa

Entretanto, e sempre com a intenção de melhorar o desempenho de cartas e metodologias existentes, foram aparecendo novas versões das metodologias já existentes, novos métodos ou a utilização de diferentes cartas.

Por exemplo, em Reynolds (1996a) é estudado um procedimento denominado VSIFT (“*Variable Sampling Intervals with Fixed Times*”), aplicado às cartas *Shewhart* e EWMA, para ultrapassar a impossibilidade de prever os instantes de inspeção das amostras. O autor considera que as amostras são retiradas em pontos fixos e igualmente espaçados no tempo, podendo retirar amostras adicionais entre esses instantes adicionais quando existir alguma indicação de que o processo se possa ter alterado. O autor conclui que o incremento de complexidade do método, tendo em conta o retorno, não justifica a sua utilização.

Em Reynolds (1996b) é aplicada a metodologia VSIFT a cartas de controlo para a média, CUSUM e EWMA, concluindo-se que o desempenho é idêntico ao do método

VSI, melhor do que o desempenho de VSS em grandes alterações e de menor eficácia em pequenas alterações.

Costa (1998), estuda um procedimento, denominado VSSIFT (*“Variable Sample Sizes and Sampling Intervals with Fixed Times”*), que é uma modificação do método VSSI onde instantes de tempo igualmente espaçados são fixos antecipadamente. O método revela-se, ligeiramente, menos eficaz do que o método VSSI, mas de maior simplicidade de implementação.

Lin e Chou (2005a) apresentam uma extensão da ideia de Reynolds (1996a) a duas cartas: uma com taxa de amostragem variável em pontos fixos, VSRFT (*“Variable Sampling Rate with sampling at Fixed Times”*), e outra com parâmetros variáveis com amostragem em pontos fixos, VPFT (*“Variable Parameters with Fixed Times”*), denominadas cartas adaptativas com amostragem em tempos fixos, AFT (*“Adaptive with sampling at Fixed Times”*). Os autores concluem que, do ponto de vista prático, o procedimento apresentado é mais fácil de aplicar e gerir.

Zou *et al.* (2008) consideram um processo autorregressivo de primeira ordem com erro aleatório, com amostragem VSRFT e VSIFT, que denominam VSFT (*“Variable Sampling at Fixed Times”*). Recorrendo a cadeias de *Markov*, concluem que as VSFT são mais rápidas, em média, a detetar alterações no processo, quando comparadas com FSI, mas são menos apelativas para aplicações práticas.

Faraz e Saniga (2011) consideram um modelo económico (Lorenzen e Vance (1986)) com carta de controlo multivariada MEWMA e amostragem VSS e VSI com limites de aviso duplos, DWL (*“Double Warning Line”*). Considerando cartas T^2 na comparação, utilizam um método de otimização de algoritmo genético para obter os parâmetros da carta que minimizam a função custo, e concluem que os procedimentos com DWL e EWMA reduzem significativamente os custos.

Torabian *et al.* (2010) apresentam um método que faz variar os intervalos de amostragem e os limites de controlo entre um valor mínimo e um valor máximo,

mantendo fixas as dimensões amostrais, denominado VSICL (“*Variable Sampling Intervals and Control Limits*”). Os autores utilizam cartas de controlo multivariadas de tipo Hotelling’s T^2 , com um design económico, para determinar os valores ótimos dos parâmetros do modelo que minimizam a função custo, comparando o seu desempenho, em termos de custo médio por unidade de tempo, com o desempenho de VSI.

Mahadik (2013b) estudam as propriedades estatísticas de um método com amostragem VSSI e limites de aviso variáveis, denominado VSSIWL (“*Variable Sample Size, sampling Intervals and Warning Limits*”), para reduzir o número de transições entre os pares de dimensões amostrais e os pares de intervalos de amostragem. Os autores consideram uma carta de controlo para a média com diferentes cenários e regras, concluindo que o procedimento VSSIWL reduz ligeiramente os custos de operacionalização, quando comparado com o tradicional VSSI. Mahadik (2013a) estuda um procedimento idêntico ao anterior, com os mesmos objetivos, considerando “run rules” em vez de limites de aviso variáveis. Os autores concluem que as regras consideradas pouco alteram o desempenho da carta de controlo do tipo *Shewhart* com amostragem VSSI, obtendo-se as diferenças mais significativas em grandes alterações da média.

Em Carot *et al.* (2002) é apresentado um procedimento de amostragem que combina a amostragem dupla (DS) com os intervalos variáveis, designado por DSVSI (“*Double Sampling Variable Sampling Interval*”). Os autores consideram uma carta de controlo para a média e obtêm as propriedades estatísticas do método, concluindo que este deteta mais rapidamente pequenas alterações da média do que os métodos adaptativos VSI, VSS, VSSI e VP e também é mais rápido do que as cartas das médias com regras suplementares e a carta CUSUM. Devido ao elevado número de parâmetros (oito), a carta de controlo para a média com este procedimento é de difícil aplicação prática.

Infante e Rosmaninho (2007) apresentam um método que combina amostragem dupla (DS) com amostragem predefinida (PSI), obtendo expressões para AATS e para o ANOS. Considerando a distribuição de *Weibull*, com taxa de risco crescente, para tempo de vida do sistema e uma carta de controlo para a média do tipo *Shewhart*, os autores concluem que o método é sempre mais eficaz, em termos de AATS, do que os métodos FSI e VSI. Em termos de ANOS, DSPSI (“*Double Sample and Predetermined Sampling Intervals*”) é sempre mais eficaz do que os métodos VSS e VSSI.

Torng *et al.* (2010) estudam o efeito da não normalidade dos dados, da característica da qualidade, no desempenho de uma carta de controlo para a média com método DSVSI, concluindo que é mais eficaz, do que a carta do tipo *Shewhart* nas mesmas condições, a detetar pequenas alterações da média.

Lee *et al.* (2012) alargam a ideia de Carot *et al.* (2002) à utilização de uma carta de controlo S, de modo a aumentar a eficácia na deteção de pequenas alterações no desvio padrão.

Lee (2013) estudam as propriedades estatísticas, recorrendo às cadeias de *Markov*, do método DSVSI com utilização de cartas conjuntas para a média e para o desvio padrão. O desempenho estatístico do método é comparado com o desempenho do procedimento que utiliza cartas R, EWMA e CUSUM.

Em Infante (2004) pode ver-se uma síntese de trabalhos que referem outras metodologias até 2002.

3.3.5. Nova Política de Amostragem: Amostragem LSI

Apresentamos, anteriormente, as políticas de amostragem mais divulgadas pela literatura. Neste ponto, vamos utilizá-las na avaliação do desempenho estatístico de uma nova política de amostragem, que se pretende que seja uma alternativa a algumas das políticas apresentadas, em particular na simplicidade de aplicação (envolvendo menos parâmetros) e, também, na eficácia para detetar alterações na média.

Alguns dos resultados apresentados a seguir já foram publicados (Carmo *et al.* (2013a)), outros submetidos para publicação (Carmo *et al.* (2014)) e está em preparação um trabalho para submeter com os resultados da robustez.

Assim, propomos a seguir uma nova metodologia de amostragem, as suas propriedades estatísticas, efetuamos uma análise de sensibilidade e, por fim, um estudo de robustez do método, denominado a partir de agora LSI (“**Laplace Sampling Intervals**”).

3.3.5.1. A metodologia

Sejam μ_0 e σ_0 , respetivamente, a média e o desvio padrão de uma característica da qualidade em estudo, X , que supomos com distribuição normal. Representando por t_i o instante de amostragem de ordem i e por \bar{x}_i a média da amostra analisada nesse instante, de acordo com o método LSI, o próximo instante de amostragem (de ordem $i+1$) é dado por

$$t_{i+1} = t_i + \frac{k \exp(-|u_i|)}{2}, \quad (3.47)$$

onde

$$u_i = \sqrt{n} \frac{\bar{x}_i - \mu_0}{\sigma_0}, \quad t_0 = 0, \quad t_1 = \frac{k}{2}, \quad \bar{x}_0 = \mu_0, \quad (3.48)$$

n é o tamanho da amostra, k uma constante conveniente de escala. Assim, os intervalos de amostragem, $d_i = t_i - t_{i-1} = k l(u_{i-1})$, $i = 1, 2, \dots$, onde $l(\cdot)$ é a função densidade de probabilidade da distribuição de *Laplace* standard, são i.i.d. com a mesma distribuição da uma variável genérica D , definida por

$$D = t_{i+1} - t_i = \frac{k \exp(-|u_i|)}{2} \quad (3.49)$$

onde k pode depender de vários fatores, em particular dos custos associados ao processo monitorizado, não se impondo, por agora, quaisquer limites à carta de controlo para a média.

Como se sabe, sendo a característica da qualidade uma variável aleatória, X , com distribuição normal a distribuição das médias amostrais tem distribuição normal, ou aproximadamente normal, com base no teorema do limite central. Intuitivamente, um método de amostragem que utilize uma função densidade com forma idêntica à da função densidade da distribuição normal pode constituir-se como boa alternativa aos métodos existentes.

Em Rodrigues Dias (1999a, b) foi apresentado um método que utiliza a função densidade da distribuição normal para obter os instantes de amostragem. Contudo, e apesar do bom desempenho do método em moderadas e grandes alterações da média, o menor intervalo de amostragem é muito pequeno, logo de difícil aplicação na prática, e o maior intervalo afasta-se dos valores recomendados por Reynolds *et al.* (1988) para o método VSI.

Uma, possível, solução para este problema passava por considerarmos uma função densidade com maior peso nas caudas. Devido às suas características, e após alguns estudos exploratórios (onde se colocou a hipótese de utilizar a distribuição de *Cauchy*), consideramos a utilização da distribuição de *Laplace* como a mais apropriada. No referido trabalho de pesquisa, simulamos intervalos de amostragem para obtidos através das funções densidade de probabilidade da distribuição normal, da distribuição de *Cauchy* e da distribuição de *Laplace*. Considerando limites de controlo “3-sigma” e um intervalo médio de amostragem igual à unidade sob controlo, obtivemos os seguintes resultados:

- i) Distribuição normal: $\text{pdf}(0, 0, 1) = 0.399$, $k = 3.535$, menor intervalo de amostragem = 0.016, maior intervalo de amostragem = 1.410.
- ii) Distribuição de Cauchy: $\text{pdf}(0, \text{não definida}, \text{não definida}) = 0.318$, $k = 4.778$, menor intervalo de amostragem = 0.152, maior intervalo de amostragem = 1.521.
- iii) Distribuição de Laplace: $\text{pdf}(0, 0, 1) = 0.500$, $k = 3.813$, menor intervalo de amostragem = 0.095, maior intervalo de amostragem = 1.907.

Com base nestes resultados, escolhemos a função densidade de probabilidade da distribuição de *Laplace*. Todos os parâmetros da distribuição são definidos, permite reduzir a frequência amostral quando uma média amostral é marcada próximo dos limites de controlo e o menor intervalo de amostragem é assume um valor muito próximo do menor intervalo de amostragem mais utilizado em métodos adaptativos, por exemplo em VSI ($d_1 = 0.1$).

Tal como referido, a utilização deste método, adaptativo e contínuo, consiste em diminuir a frequência da amostragem (instantes de amostragem mais espaçados no tempo) quando as médias amostrais estão próximas da linha central e aumentar a frequência de amostragem (instantes de amostragem menos espaçados no tempo) quando as médias amostrais estão afastadas da linha central, com maior probabilidade de alteração. A utilização de uma função densidade de probabilidade com caudas mais pesadas que as da distribuição normal, reduz fortemente o intervalo de amostragem quando a média amostral cai próximo dos limites de controlo. Esta característica aumenta as possibilidades de aplicação prática, ao contrário da utilização da função densidade de probabilidade da distribuição normal. Tal como o método VSI trata-se de um método adaptativo, em que o intervalo de tempo até à amostra seguinte depende da informação contida na amostra atual. Porém, no método VSI são considerados um pequeno número de intervalos de amostragem, normalmente dois, e neste método temos uma infinidade de possíveis valores para os intervalos de amostragem. Esta característica de LSI pode ser encarada como uma desvantagem relativamente ao método VSI, mas a facilidade na determinação dos instantes de amostragem, o tipo de processo que se pretende controlar (por exemplo, um processo de produtos nano tecnológicos) e os objetivos pretendidos, poderão torná-lo numa vantagem competitiva para qualquer organização. Por outro lado, o menor e o maior intervalo de amostragem obtidos com LSI são, praticamente, iguais ao par de intervalos de amostragem mais utilizados em VSI.

3.3.5.2. Alguns Indicadores Iniciais

Do estudo exploratório realizado inicialmente, sem considerarmos restrições para limites de controlo, apresentamos em seguida alguns resultados que consideramos mais importantes.

Sob as condições enunciadas em (3.50) e (3.52), e após uma alteração do processo, μ_0 e σ_0 podem assumir novos valores $\mu_1 = \mu_0 \pm \lambda\sigma_0$ e $\sigma_1 = \rho\sigma_0$, onde λ é o coeficiente de alteração da média e $\rho > 0$ o coeficiente da alteração do desvio padrão. Assim, após integração e algumas simplificações algébricas, obtivemos a seguinte expressão para intervalo médio de amostragem

$$\begin{aligned}
 E(D|\lambda, \rho, n) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{k e^{-\left|\sqrt{n} \frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma_0}\right|}}{2} \frac{\sqrt{n} e^{-\frac{n(\bar{x}-\mu_0-\lambda\sigma_0)^2}{2\rho^2\sigma_0^2}}}{\rho\sigma_0\sqrt{2\pi}} d\bar{x} = \\
 &= \frac{k}{2} \left[e^{\lambda\sqrt{n} + \frac{\rho^2}{2}} \Phi\left(\frac{-\rho^2 - \lambda\sqrt{n}}{\rho}\right) + e^{-\lambda\sqrt{n} + \frac{\rho^2}{2}} \left(1 - \Phi\left(\frac{\rho^2 - \lambda\sqrt{n}}{\rho}\right)\right) \right]
 \end{aligned} \tag{3.50}$$

que depende de n , λ e ρ . Com este resultado algébrico é possível comparar o método LSI, em termos de intervalos de amostragem, com o método de amostragem clássico, considerando que o número médio de amostras recolhidas nos dois métodos é o mesmo (antes e depois da falha). Assim, designando por d o intervalo de amostragem em periódico, comparamos os métodos pela grandeza

$$Q_{3,1} = \left(\frac{d}{E(D)} - 1 \right) \times 100\% \tag{3.51}$$

que representa o aumento relativo, em %, dos intervalos de amostragem fixos, considerando o intervalo médio de LSI como referência.

Considerando alterações na média e/ou no desvio padrão, foram obtidos resultados numéricos importantes, inicialmente obtidos por simulação, alguns dos quais apresentamos nas três tabelas seguintes. A partir de (3.51) e dos resultados apresentados em Tabela 3.1, Tabela 3.2 e Tabela 3.3 podemos concluir que:

- 1) $Q_{3,1}$ aumenta, consideravelmente, em função da dimensão da amostra, n , o que indicia que quanto maior for a dimensão amostral mais eficaz é o método LSI;
- 2) Para os mesmos valores de n , $Q_{3,1}$ aumenta, consideravelmente, com a magnitude da alteração da média, λ , o que indicia que a eficácia de LSI aumenta quando aumenta a alteração da média.
- 3) Os valores de $Q_{3,1}$ são, na generalidade, muito elevados, o que significa que a utilização do método LSI reduz, em relação ao método periódico, o tempo de mau funcionamento do sistema.

n	λ										
	0,00	0,25	0,50	0,75	1,00	1,25	1,50	1,75	2,00	2,50	3,00
2	0,0	3,3	13,8	33,2	64,4	112,3	184,2	290,3	445,2	991,2	2108,7
3	0,0	5,0	21,3	52,6	106,5	195,2	337,8	563,6	916,6	2310,5	5630,0
4	0,0	6,7	29,1	74,2	156,2	299,5	543,8	953,4	1633,3	4609,4	12701,4
5	0,0	8,5	37,3	98,1	214,2	428,0	811,6	1489,4	2678,1	8397,1	25891,2
9	0,0	15,7	74,2	218,1	543,8	1250,8	2756,6	5947,0	12701,4	57271,8	257022,5

Tabela 3.1. – Valores de $Q_{3,4}$, %, com $\rho = 1$ e diferentes valores de n e de λ .

- 4) Os valores de $Q_{3,1}$ aumentam quando a dispersão aumenta e são negativos quando esta diminui. Este facto indica que quando a dispersão aumenta, o intervalo médio entre amostras diminui, aumentando a frequência amostral. Dessa forma, o método LSI é mais eficaz a tratar a variabilidade do processo, característica muito importante nestes contextos. Quando diminui a dispersão, o intervalo médio entre amostras aumenta, o que implica uma redução de frequência de inspeção ao sistema, podendo provocar reduções em determinados custos. A reação positiva ou negativa do método, em função de ρ , demonstra possuir características de método adaptativo.
- 5) Nas situações em que ocorre só alteração da dispersão do processo, verificamos que os resultados não dependem do tamanho da amostra.
- 6) Quando se verificam alterações simultâneas, de μ e de σ , o efeito do aumento no desvio padrão compensa o efeito do aumento da média. Para os mesmos valores de n e λ , $Q_{3,1}$ não aumenta necessariamente quando ρ aumenta.

n	ρ			
	0,5	1	1,5	2
3	-25,2	0,0	27,1	55,6
5	-25,2	0,0	27,1	55,6
9	-25,2	0,0	27,1	55,6

Tabela 3.2. – Valores de $Q_{3,1}$, %, com $\lambda = 0$ e diferentes valores de n e de ρ .

ρ	n	λ										
		0,00	0,25	0,50	0,75	1,00	1,25	1,50	1,75	2,00	2,50	3,00
0,5	3	-25,2	-16,0	14,0	70,1	161,0	302,4	520,4	856,6	1375,0	3406,7	8237,0
	5	-25,2	-9,6	43,0	147,1	332,0	655,5	1221,4	2211,0	3941,8	12263,2	37716,9
	9	-25,2	3,6	107,2	338,0	827,3	1863,2	4056,0	8698,2	18525,9	83375,5	374011,1
1,5	3	27,1	30,6	41,8	62,2	95,2	146,4	224,8	344,8	529,5	1257,3	3009,0
	5	27,1	33,0	52,4	90,2	157,1	273,1	474,8	828,1	1450,2	4479,3	13821,7
	9	27,1	38,0	75,7	159,3	334,4	703,7	1491,4	3177,1	6773,5	30612,0	137528,0
2	3	55,6	58,6	66,9	82,0	105,4	139,7	189,0	259,4	360,4	720,6	1509,0
	5	55,6	60,2	74,8	101,9	146,6	217,9	331,1	513,2	810,9	2143,7	6063,1
	9	55,6	64,0	91,7	148,0	253,4	450,7	830,0	1582,3	3116,6	13036,0	57477,5

Tabela 3.3. – Valores de $Q_{3,1}$, %, para diferentes valores de n, λ e ρ .

3.3.5.3. Propriedades Estatísticas

Considere-se, agora, uma carta de controlo para a média com limites de controlo “L-sigma”. Sendo u_i a média amostral reduzida, quando $|u_i| > L$ estamos numa situação de fora de controlo ou estamos numa situação que pode corresponder a um falso alarme.

Tendo em conta os pressupostos considerados para (3.49), que a distribuição de **D** agora está condicionada aos limites de controlo (os instantes de amostragem são definidos, apenas, para os valores da média amostral dentro dos referidos limites) e que $f(\bar{x})$ é a função densidade da média amostral, então a função densidade de **D** é definida por

$$f^*(\bar{x}) = \frac{\sqrt{n}}{\beta \rho \sigma_0 \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{n(\bar{x} - \mu_0 - \lambda \sigma_0)^2}{2\rho^2 \sigma_0^2}}, \quad LIC < \bar{x} < LSC, \quad (3.52)$$

onde β é a probabilidade da média amostral estar dentro dos limites de controlo, dada por

$$\beta = \Phi\left(\frac{L - \lambda\sqrt{n}}{\rho}\right) - \Phi\left(\frac{-L - \lambda\sqrt{n}}{\rho}\right), \quad (3.53)$$

e LIC e LSC são, respetivamente, os limites inferior e superior de controlo e $\Phi(u)$ é a função distribuição da variável normal reduzida.

Então, o intervalo médio de amostragem para o método LSI, $E(D)$, condicionado aos limites de controlo, é dado por

$$E(D|\lambda, \rho, n) = \int_{LIC}^{LSC} D f^*(\bar{x}) d\bar{x} = \int_{LIC}^{LSC} \frac{k}{2} e^{-\left|\sqrt{n} \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma_0}\right|} \frac{\sqrt{n}}{\beta \rho \sigma_0 \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{n(\bar{x} - \mu_0 - \lambda \sigma_0)^2}{2\rho^2 \sigma_0^2}} d\bar{x}, \quad (3.54)$$

$$E(D|\lambda, \rho, n) = \frac{k}{2\beta} \left[e^{\lambda \sqrt{n} + \frac{\rho^2}{2}} A(L, \lambda, \rho, n) + e^{-\lambda \sqrt{n} + \frac{\rho^2}{2}} B(L, \lambda, \rho, n) \right], \quad (3.55)$$

onde

$$A(L, \lambda, \rho, n) = \Phi\left(\frac{-\rho^2 - \lambda \sqrt{n}}{\rho}\right) - \Phi\left(\frac{-L - \rho^2 - \lambda \sqrt{n}}{\rho}\right) \quad e \quad B(L, \lambda, \rho, n) = \Phi\left(\frac{L + \rho^2 - \lambda \sqrt{n}}{\rho}\right) - \Phi\left(\frac{\rho^2 - \lambda \sqrt{n}}{\rho}\right). \quad (3.56)$$

A expressão (3.55) depende de n , do coeficiente dos limites de controlo L , de λ e ρ , e de β (erro de tipo II se a média estiver fora dos limites de controlo) e não depende, diretamente, dos valores da média nem do desvio padrão da característica da qualidade X .

A partir da expressão algébrica obtida, (3.55), podemos considerar três casos particulares. Um primeiro caso em que apenas consideramos alterações na média, mantendo o desvio padrão, ou seja $\rho = 1$. Assim, o intervalo médio entre amostras é dado por

$$E(D|\lambda, n, L) = \frac{\sqrt{e} k}{2\beta} \left[e^{\lambda \sqrt{n}} \left\{ \Phi(-1 - \lambda \sqrt{n}) - \Phi(-L - 1 - \lambda \sqrt{n}) \right\} + e^{-\lambda \sqrt{n}} \left\{ \Phi(L + 1 - \lambda \sqrt{n}) - \Phi(1 - \lambda \sqrt{n}) \right\} \right], \quad (3.57)$$

onde $\beta = \Phi(L - \lambda \sqrt{n}) - \Phi(-L - \lambda \sqrt{n})$, dado por (3.53) fazendo $\rho = 1$.

No segundo caso consideramos, apenas, alterações no desvio padrão, mantendo o valor da média, $\lambda = 0$, obtemos para o intervalo médio de amostragem

$$E(D|\rho, L) = \frac{k e^{\frac{\rho^2}{2}}}{\beta} \left[\Phi\left(\frac{L + \rho^2}{\rho}\right) - \Phi(\rho) \right], \quad (3.58)$$

onde $\beta = 2\Phi\left(\frac{L}{\rho}\right) - 1$, dado por (3.53) fazendo $\lambda = 0$. Esta expressão está em concordância com os resultados apresentados na Tabela 3.2, relativamente à eficácia da carta para a média só com alteração no desvio padrão.

Por fim, quando estamos numa situação sob controlo, o respetivo intervalo médio de amostragem, quando $\lambda=0$ e $\rho=1$, é dado por

$$E(D|L) = \frac{\sqrt{e} k}{\beta} [\Phi(L+1) - \Phi(1)], \quad (3.59)$$

onde $\beta = 2\Phi(L) - 1$, dado por (3.56) fazendo $\lambda = 0$ e $\rho = 1$.

Tal como no caso anterior, também a expressão (3.59) não depende da dimensão da amostra, o que já se esperava. Assim, se quisermos que o intervalo médio de amostragem seja igual, sob controlo, à unidade de tempo, podemos obter a constante k através da expressão

$$k = \frac{\beta}{\sqrt{e} [\Phi(L+1) - \Phi(1)]}, \quad (3.60)$$

que é igual a 3.8134, quando consideramos os usuais limites “3-sigma”. Este resultado foi verificado por integração e por simulação de amostras no software **R**.

Seguindo a mesma linha de raciocínio, podemos obter uma expressão analítica para a variância dos intervalos de amostragem através da igualdade $\text{Var}(D) = E(D^2) - [E(D)]^2$, necessitando, inicialmente, de encontrar uma expressão algébrica para $E(D^2)$.

Assim, considerando os pressupostos utilizados para obter (3.54), fazendo integração e simplificações algébricas, obtemos a expressão

$$\begin{aligned} E(D^2 | \lambda, \rho, n) &= \int_{LIC}^{LSC} D^2 f^*(\bar{x}) d\bar{x} = \int_{LIC}^{LSC} \left[\frac{k}{2} e^{-\left| \frac{\sqrt{n}\bar{x} - \mu_0}{\sigma_0} \right|} \right]^2 \frac{\sqrt{n}}{\beta \rho \sigma_0 \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{n(\bar{x} - \mu_0 - \lambda \sigma_0)^2}{2\sigma_0^2 \rho^2}} d\bar{x} = \\ &= \frac{k^2}{4\beta} \left\{ e^{2\rho^2 + 2\lambda\sqrt{n}} \left[\Phi\left(\frac{-2\rho^2 - \lambda\sqrt{n}}{\rho}\right) - \Phi\left(\frac{-L - 2\rho^2 - \lambda\sqrt{n}}{\rho}\right) \right] + e^{2\rho^2 - 2\lambda\sqrt{n}} \left[\Phi\left(\frac{L + 2\rho^2 - \lambda\sqrt{n}}{\rho}\right) - \Phi\left(\frac{2\rho^2 - \lambda\sqrt{n}}{\rho}\right) \right] \right\}, \end{aligned}$$

(3.61)

que nos permite obter $\text{Var}(D)$ e, de forma quase automática, o coeficiente de variação.

Relembre-se, agora, que o **RL** é a variável aleatória que representa o número de amostras inspecionadas desde (re)início do processo até uma amostra cair fora dos limites de controlo. O **RL** tem distribuição geométrica de parâmetro $1 - \beta$ com média e desvio padrão dados, respetivamente, por

$$\text{ARL} = \frac{1}{1 - \beta}, \quad (3.62)$$

$$\text{Var}(\text{RL}) = \frac{\beta}{(1 - \beta)^2}. \quad (3.63)$$

O ARL é uma das medidas de eficácia menos utilizadas, mas necessária, em particular, para o cálculo de outras medidas, sendo igual para todos os métodos de amostragem.

O ATS, tempo médio desde o (re)início do processo até à emissão de um sinal de fora de controlo (eventualmente um falso alarme) pela carta. Para uma carta de controlo do tipo *Shewhart* com intervalos variáveis, mantendo-se o estado do processo constante, os intervalos adaptativos são independentes e com a mesma distribuição de uma variável genérica **D**, pelo que, e pela identidade de *Wald* (Ross (1970)), o ATS é dado por

$$\begin{aligned} \text{ATS} &= k I(0) + (\text{ARL} - 1) E(D | \lambda, \rho) \\ &= \frac{k}{2} + \frac{k}{2(1 - \beta)} \left[e^{\lambda\sqrt{n} + \frac{\rho^2}{2}} A(L, \lambda, \rho, n) + e^{-\lambda\sqrt{n} + \frac{\rho^2}{2}} B(L, \lambda, \rho, n) \right], \end{aligned} \quad (3.64)$$

com β dado por (3.53) e $A(L, \lambda, \rho, n)$ e $B(L, \lambda, \rho, n)$ definidos por (3.56), na situação em que se admite que o processo se inicia sob controlo, considerando-se para primeiro instante de amostragem o maior intervalo. Por outro lado, se considerarmos que o processo se inicia fora de controlo, consideramos como instante para recolha da primeira amostra o menor intervalo possível, obtendo-se, para o ATS, a expressão

$$\begin{aligned} \text{ATS} &= k I(L) + (\text{ARL} - 1) E(D|\lambda, \rho) \\ &= \frac{k}{2} e^{-|L|} + \frac{k}{2(1-\beta)} \left[e^{\lambda\sqrt{n} + \frac{\rho^2}{2}} A(L, \lambda, \rho, n) + e^{-\lambda\sqrt{n} + \frac{\rho^2}{2}} B(L, \lambda, \rho, n) \right], \end{aligned} \quad (3.65)$$

análoga a (3.64), substituindo $I(0)$ por $I(L)$. Refira-se, que em grande parte das aplicações práticas o processo se inicia sob controlo. A falha, devido a determinada causa assinalável, aparece durante o processo. Por conseguinte, o intervalo de tempo desde a falha do processo até esta ser detetada pela carta de controlo é fundamental. Por exemplo, num processo produtivo em que os custos de mau funcionamento sejam elevados, pode aumentar em muito o custo total médio de um ciclo produtivo. Como uma falha pode ocorrer num intervalo de tempo entre duas amostras, é essencial ajustar o ATS.

Assim, considere-se \mathbf{G} como o intervalo de tempo entre o instante em que ocorre a falha do processo e o instante em que a primeira amostra é analisada. O valor do ATS ajustado AATS (“*Adjusted Average Time to Signal*”) é dado por

$$\text{AATS} = E(\mathbf{G}) + (\text{ARL} - 1) E(D), \quad (3.66)$$

necessitando-se, adicionalmente, de calcular o valor esperado de \mathbf{G} .

No método FSI, o valor esperado de \mathbf{G} pode aproximar-se por metade do período de inspeção utilizado. Contudo, neste método adaptativo, não temos um valor constante para o intervalo de amostragem. A distribuição da variável \mathbf{G} depende do momento em que ocorre a alteração. Como tal, vamos admitir que a ocorrência da falha se distribui uniformemente em cada um dos intervalos de amostragem. Se a falha do processo ocorrer num intervalo de amostragem de comprimento d , o tempo médio até à próxima amostra é $0.5d$. Apesar de, neste método de amostragem, o número de intervalos de amostragem possível ser infinito, também podemos supor, tal como Reynolds *et al.* (1988) e Runger e Pignatiello (1991) o fizeram para o método VSI, que a probabilidade da alteração ocorrer num intervalo de amostragem de comprimento d é proporcional ao produto do comprimento desse intervalo pela probabilidade de obtermos esse intervalo,

quando o processo está sob controlo. Tendo em conta que a variável G é contínua, podemos obter uma expressão para o seu valor esperado, idêntica à obtida por Reynolds *et al.* (1988) no caso de VSI. Assim, considerando os referidos pressupostos, obtemos para o valor médio de G a expressão

$$E(G|L) = \frac{E(D^2 | \lambda = 0, \rho = 1)}{2 E(D | \lambda = 0, \rho = 1)} = \frac{k \int_{LIC}^{LSC} e^{-2 \left| \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma_0} \right| - \frac{n(\bar{x} - \mu_0)^2}{2\sigma_0^2}} d\bar{x}}{4 \int_{LIC}^{LSC} e^{-\left| \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma_0} \right| - \frac{n(\bar{x} - \mu_0)^2}{2\sigma_0^2}} d\bar{x}} = \frac{k e^{3/2} [\Phi(L+2) - \Phi(2)]}{4 [\Phi(L+1) - \Phi(1)]}, \quad (3.67)$$

que após simplificações algébricas e integração, podemos escrever como

$$E(G) = k e^{3/2} C(L), \quad (3.68)$$

onde

$$C(L) = \frac{\Phi(L+2) - \Phi(2)}{4 [\Phi(L+1) - \Phi(1)]}. \quad (3.69)$$

A expressão (3.69) depende, unicamente, dos limites de controlo, podendo-se simplificar e apresentar como

$$E(G) \cong 0.036 k e^{3/2}, \quad (3.70)$$

pois, como se pode verificar pelos valores obtidos e apresentados na Tabela 3.4, para valores de $L \geq 2$ o valor 0.036 é uma ótima aproximação de $C(L)$. A aproximação não é tão boa para valores de $L < 2$, contudo esta situação pode considerar-se irrelevante em aplicações práticas pois provoca um elevado número de falsos alarmes. Esta expressão, simplificada, vai ter utilidade em futuros tratamentos algébricos.

L	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5
$C(L)$	0,0394	0,0369	0,0361	0,0359	0,0359	0,0358	0,0358	0,0358	0,0358

Tabela 3.4. – Valores de $C(L)$ para diferentes múltiplos L do desvio padrão.

De acordo com (3.70), deduz-se que o valor de AATS pode ser representado por

$$AATS \cong 0.036 k e^{3/2} + \left(\frac{\beta}{1-\beta} \right) E(D). \quad (3.71)$$

Atendendo a que a distribuição de cada intervalo de amostragem D_i é a distribuição condicional da média amostral dado esta estar entre os limites de controlo, tem-se que D_1, D_2, \dots são independentes de RL e a variância do ATS ajustado é dada por

$$\text{Var}(\text{ATS}) = \text{Var}(G) + E(\text{RL} - 1)\text{Var}(D) + \text{Var}(\text{RL} - 1)[E(D)]^2, \quad (3.72)$$

para a qual necessitamos do valor da $\text{Var}(G)$.

Começamos por determinar $E(G^2)$ e, tal como foi feito em Reynolds *et al.* (1988), no caso do método VSI e em Infante (2004), no caso do método NSI, também neste caso podemos obter uma expressão para o valor procurado. Assim, efetuando simplificações algébricas e de integração, obtemos a expressão

$$\begin{aligned} E(G^2) &= \frac{E(D^3 | \lambda = 0, \rho = 1)}{3E(D | \lambda = 0, \rho = 1)} = \frac{\frac{k^3 \sqrt{n}}{8\beta\sigma_0 \sqrt{2\pi}} \int_{\text{LIC}}^{\text{LSC}} e^{-3\left|\frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma_0}\right| \frac{n(\bar{x}-\mu_0)^2}{2\sigma_0^2}} d\bar{x}}{\frac{3k\sqrt{n}}{2\beta\sigma_0 \sqrt{2\pi}} \int_{\text{LIC}}^{\text{LSC}} e^{-\left|\frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma_0}\right| \frac{n(\bar{x}-\mu_0)^2}{2\sigma_0^2}} d\bar{x}} = \\ &= \frac{k^2 e^4}{12} \frac{\Phi(L+3) - \Phi(3)}{\Phi(L+1) - \Phi(1)} \end{aligned} \quad (3.73)$$

que só depende de L. Consequentemente, a variância da variável G é dada por

$$\text{Var}(G) = E(G^2) - [E(G)]^2 = \frac{k^2 e^4}{12} \frac{\Phi(L+3) - \Phi(3)}{\Phi(L+1) - \Phi(1)} - \frac{k^2 e^3}{16} \left[\frac{\Phi(L+2) - \Phi(2)}{\Phi(L+1) - \Phi(1)} \right]^2. \quad (3.74)$$

A partir de (3.55) e (3.61) obtemos a $\text{Var}(D)$. Obtidas as expressões da $\text{Var}(D)$ e da $\text{Var}(G)$ basta substituir na expressão (3.72) para determinar a variância pretendida.

Em relação à forma como foi obtida a expressão de $E(G)$, justificam-se algumas considerações. As hipóteses que consideramos tiveram por base diferentes trabalhos, autores e diferentes métodos de amostragem. Assim, relativamente às hipóteses que colocamos para obter o valor esperado de G , refira-se que Reynolds *et al.* (1988) a justificam baseando-se em estudos de simulação em que consideram diferentes distribuições para o tempo de vida. No mesmo estudo referem que o único caso em que tais suposições podem não ser aceitáveis ocorre quando a média da distribuição é muito pequena e a falha ocorre pouco tempo depois do início do processo. Runger e

Montgomery (1993) também discutem a questão, admitindo as mesmas hipóteses, em ambos os casos para o método VSI. Infante e Rodrigues Dias (2002), através de estudos de simulação, considerando diferentes distribuições, com diferentes taxas de risco, analisam a influência do tempo de vida do sistema no valor de $E(G)$ para o método FSI, concluindo que $E(G)$ é uma muito boa aproximação a metade do intervalo de amostragem. Infante (2004) para o método NSI, considerando diferentes distribuições, com diferentes taxas de risco (decrecentes, constantes e crescentes) e a constante k igual à unidade, efetua um estudo de simulação e conclui que a distribuição do tempo de vida é pouco relevante na determinação do valor de $E(G)$, considerando a expressão que obteve para $E(G)$ como muito precisa. O único caso em que se verificou um maior afastamento, em relação à expressão que obteve, correspondeu a um tempo de vida de *Weibull* com parâmetro de forma 0.5, caso em que a taxa de risco do sistema é decrescente e de reduzido interesse prático.

3.3.5.4. Considerações sobre o Método LSI

Após a exposição das principais propriedades estatísticas do novo método, vamos agora fazer algumas considerações sobre o mesmo, em particular no que respeita à forma como são definidos os instantes de amostragem.

Observe-se que nenhuma restrição é imposta ao tamanho dos intervalos de amostragem, ou seja, não se considera qualquer restrição do tipo $t_{i+1} - t_i = kl(u_i) \geq d_0 > 0$ (será feito mais à frente). Contudo, na prática, existe um intervalo mínimo de tempo para executar uma inspeção, obter os dados a partir da amostra e analisar os mesmos. Em determinados contextos práticos, devido ao enorme poder computacional dos computadores, dos servidores e de todos os sistemas de informação (que devem funcionar de forma integrada), em particular os que inspecionam os sistemas, d_0 pode assumir um valor muito próximo de zero. Neste trabalho, a questão de intervalo mínimo necessário não nos parece relevante, nem de todo fundamental, pois o menor intervalo

de amostragem obtido com o método LSI é igual a 0.095, aproximadamente igual ao menor intervalo de amostragem mais utilizado em métodos de amostragem adaptativos, $d_1 = 0.1$. Ainda assim, em casos que não seja fisicamente possível ou administrativamente difícil retirar amostras no intervalo de amostragem obtido com o método LSI, a utilização do mesmo será ainda viável, bastando para tal estabelecer, inicialmente, um critério para o menor intervalo de amostragem e utilizá-lo sempre que se obtém um valor inferior. Podemos constatar mais à frente, que o desempenho do método será pouco afetado pela imposição dessa restrição.

Ainda em relação ao menor intervalo de amostragem, devemos referir que o valor obtido com o método LSI está de acordo com algumas das considerações feitas na literatura. Reynolds *et al.* (1988) consideram impraticável inspecionar uma amostra em menos tempo que 1/10 do intervalo de amostragem fixo. Runger e Pignatiello (1991) consideram 0.01, 0.1, 0.25 e 0.5 para o menor intervalo de amostragem e Runger e Montgomery (1993) o valor 0.01, quando o intervalo médio de amostragem sob controlo é igual à unidade (1). Outros trabalhos, com valores idênticos e tendo em comum os valores 0.01 e 0.1, podiam ser referidos. Do nosso ponto de vista, consideramos o valor 0.1 como razoável, pois se considerarmos a hora (60 m) como unidade de tempo de referência, o menor intervalo de amostragem é de 6 minutos (5.7 minutos em LSI), que nos contextos atuais (de desenvolvimento tecnológico) é perfeitamente aceitável.

Para concluir, refira-se que esta, possível, questão se coloca quando o processo se (re)inicia fora de controlo, pois o primeiro intervalo de amostragem considerado deve ser o menor. Neste trabalho tal não acontece, pois consideramos que o (re)início do processo ocorre sob controlo. Outra problemática que se poderia colocar, mas que não entra no âmbito deste trabalho, seria a de saber que intervalo de amostragem utilizar quando ocorre um falso alarme. De futuro pretendemos explorar esta questão.

3.3.5.5. Comparação de LSI com FSI e VSI

Para compararmos dois métodos de amostragem, vamos novamente considerar que estão nas mesmas condições sob controlo. Neste ponto, por só considerarmos métodos com dimensões amostrais fixas (FSI, VSI e LSI), essas comparações serão feitas através do AATS.

Considerem-se o AATS do método FSI dado por (2.16) e o AATS do método LSI dado por (3.71). Com $L = 3$, $d = 1$ em FSI, $k = 3.8134$ em LSI e que a característica da qualidade tem distribuição normal, a eficácia dos métodos FSI e LSI é comparada através do rácio $Q_{3,2}$ dado por

$$Q_{3,2} = \left(\frac{\text{AATS}_{[MC]}}{\text{AATS}_{\text{LSI}}} - 1 \right) \times 100\%, \quad (3.75)$$

onde [MC], que designa o método em comparação, é substituído por FSI, e $Q_{3,2}$ é uma medida de variação relativa, em %, no valor do AATS, quando se usa o método [MC] em vez do método LSI.

Durante esta investigação fomos obtendo resultados com alterações da média, no desvio padrão e na média e no desvio padrão. Contudo, perante as sugestões que fomos recebendo, dos revisores dos trabalhos que fomos submetendo (em particular, a de ser mais adequado utilizar em conjunto uma carta para médias e uma carta para a dispersão, o que na literatura, e em geral, só acontece à *posteriori*), optámos por só apresentar resultados com alterações na média. Assim, os valores do rácio (3.75), para a comparação de eficácia de LSI com FSI são apresentados na Fig. 3.2 a partir da qual podemos concluir que:

- 1) Não consideramos os valores do rácio para $\lambda = 0$ porque se trata da situação em que o processo se encontra sob controlo e os métodos são equivalentes.
- 2) Em geral, a carta de controlo para a média com o método LSI é mais eficaz do que a carta de controlo para a média com método FSI na deteção de pequenas e moderadas alterações da média, ou seja, na deteção de alterações cuja

probabilidade não é elevada; a redução máxima do AATS obtidas com LSI é, significativamente, superior a redução máxima do AATS obtida com FSI.

3) Para alterações cuja probabilidade de deteção é muito elevada, o método FSI tem melhor desempenho do que o método LSI. Nesta situação, o número médio de amostras até sinal (ou falso alarme) é muito reduzido, pelo que o intervalo entre o instante em que ocorre a falha e o instante em que é recolhida a amostra após a falha é de extrema importância, igualando o período de mau funcionamento sempre que seja necessária apenas uma amostra para detetar a alteração. No caso de um intervalo médio de amostragem igual à unidade, o valor médio desse intervalo, $E(G)$, é igual a 0.61 no método LSI e 0.5 no método FSI.

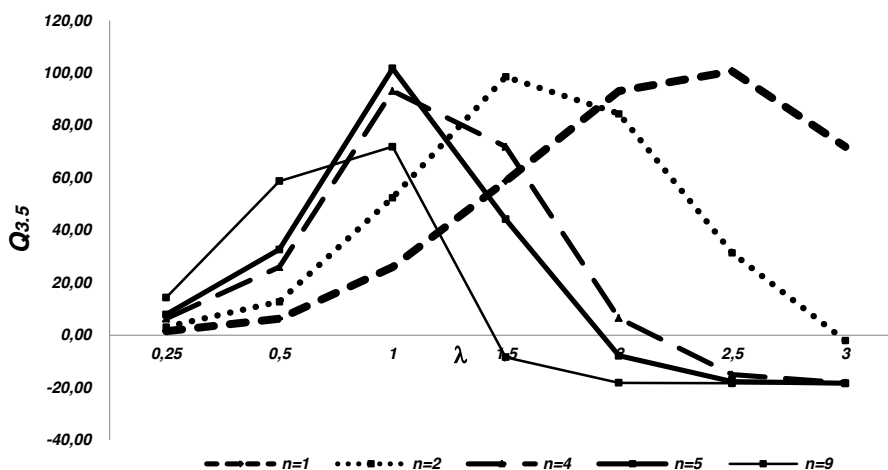


Fig. 3.2. – Valores de $Q_{3,2}$, %, com [MC] = FSI, em função de λ , com $\rho = 1$, $d = 1$ em FSI e diferentes dimensões amostrais.

4) Quanto à monotonia, os valores do rácio começam por crescer, atingem um máximo e depois decrescem. Os valores da alteração na média, λ , para os quais se verifica um crescimento mais rápido do rácio são tanto menores quanto maior for a dimensão da amostra; os valores de λ para os quais se verifica um decrescimento mais lento do rácio são tanto maiores quanto menor for a dimensão da amostra.

5) As curvas do rácio sofrem uma dilatação à medida que diminui a dimensão da amostra, ou seja, os valores dos maximizantes, λ , da redução obtida com método

LSI vão aumentando com a redução da amostra, sendo os valores máximos dessas reduções, praticamente, iguais para as dimensões da amostra consideradas.

6) Quando se utilizam observações individuais, situação pouco usual, o método LSI é sempre mais eficaz do que o método FSI.

De futuro, pretendemos determinar os valores dos maximizantes, λ , do rácio (3.75) para um conjunto alargado de dimensões amostrais, de modo a aferir das diferenças (ou não) entre máximos.

Em seguida apresentamos os resultados da comparação do desempenho de LSI com VSI, considerando quatro pares de intervalos de amostragem em VSI. Na escolha dos pares de intervalos de amostragem, em particular para valor para d_1 , tivemos em conta indicações dadas na literatura (por exemplo em Reynolds *et al.* (1988) e Amin e Miller (1993)) e o valor do menor e do maior intervalos de amostragem em LSI.

Considerem-se o $AATS_{VSI}$ dado por (3.25) e o $AATS_{LSI}$ dado por (3.71). Com $L = 3$, $E(D_0) = 1$ em VSI, $k = 3.8134$ em LSI, diferentes pares de amostragem em VSI e que a característica da qualidade tem distribuição normal, a eficácia dos métodos VSI e LSI é comparada através do rácio $Q_{3,2}$ dado em (3.75), substituindo-se [MC] por VSI, cujos resultados são apresentados na Tabela 3.5 da qual podemos concluir que:

- 1) Quando consideramos um par de amostragem em VSI com um valor mais elevado em d_1 , $d_1 = 0.5$, o desempenho de LSI é sempre melhor; como em LSI se obtêm intervalos de amostragem inferiores a 0.5, neste método recolhem-se mais amostras logo a rapidez de deteção aumenta.
- 2) Na situação referida em 1), os valores do rácio aumentam com o aumento de λ até atingirem um máximo, diminuindo a partir desse valor e mantendo-se idênticos para os maiores valores de λ .
- 3) Na mesma situação, os valores do rácio aumentam, ligeiramente, quando diminui o maior intervalo em pequenas e moderadas alterações na média; em grandes alterações da média, os valores do rácio diminuem de forma mais acentuada.

- 4) Quando utilizamos $d_1 = 0.1$, e nas dimensões amostrais mais utilizadas na literatura, $n \geq 4$, o método LSI só é mais rápido, do que o método VSI, a detetar alterações na média com magnitudes superiores a 1.5, $\lambda \geq 1.5$, ou seja em situações cuja probabilidade de deteção é elevada.
- 5) Na situação considerada em 4), e se utilizam observações individuais, situação pouco interessante em termos práticos, o método LSI só é mais rápido do que o método VSI quando $\lambda = 3$.

n	(d ₁ , d ₂) AATS _{LSI}	λ						
		0,25	0,5	1	1,5	2	2,5	3
1	(0.1, 2)	-0,7	-3,0	-11,0	-19,3	-18,3	-0,5	24,1
	(0.5, 2)	0,2	0,7	4,1	13,2	29,1	43,1	44,8
	(0.1, 1.5)	-0,4	-1,8	-7,1	-14,1	-17,8	-11,8	0,5
	(0.5, 1.5)	0,3	1,1	5,4	14,5	27,6	35,6	31,1
	AATS _{LSI}	276,43	145,61	34,46	9,12	3,01	1,37	0,87
2	(0.1, 2)	-1,5	-5,9	-18,2	-15,5	16,0	42,3	52,0
	(0.5, 2)	0,4	1,7	11,1	33,2	45,7	37,3	27,9
	(0.1, 1.5)	-0,9	-3,6	-13,0	-17,3	-3,8	10,7	16,5
	(0.5, 1.5)	0,6	2,4	12,5	30,4	33,9	19,6	8,2
	AATS _{LSI}	216,71	79,98	11,31	2,40	0,98	0,70	0,63
4	(0.1, 2)	-3,0	-11,0	-18,3	24,1	49,9	54,5	55,0
	(0.5, 2)	0,7	4,1	29,1	44,8	30,5	23,6	22,5
	(0.1, 1.5)	-1,8	-7,1	-17,8	0,5	15,2	18,0	18,3
	(0.5, 1.5)	1,1	5,4	27,6	31,1	11,3	3,3	2,1
	AATS _{LSI}	145,61	34,46	3,01	0,87	0,65	0,62	0,61
5	(0.1, 2)	-3,7	-13,2	-11,9	37,4	53,2	54,9	55,0
	(0.5, 2)	0,9	5,6	36,8	40,2	26,1	22,7	22,4
	(0.1, 1.5)	-2,3	-8,7	-16,3	7,9	17,2	18,3	18,3
	(0.5, 1.5)	1,4	7,0	32,7	23,6	6,1	2,3	2,0
	AATS _{LSI}	122,99	24,81	1,98	0,74	0,63	0,61	0,61
9	(0.1, 2)	-6,5	-19,3	24,1	53,3	55,0	55,0	55,0
	(0.5, 2)	1,9	13,2	44,8	25,9	22,5	22,4	22,4
	(0.1, 1.5)	-4,0	-14,1	0,5	17,3	18,3	18,3	18,3
	(0.5, 1.5)	2,8	14,5	31,1	5,9	2,1	2,0	2,0
	AATS _{LSI}	70,59	9,12	0,87	0,62	0,61	0,61	0,61

Tabela 3.5. – Valores de Q_{3,2}, com [MC] = VSI, em função de λ , com $\rho = 1$, diferentes pares de amostragem em VSI e diferentes dimensões amostrais.

- 6) Em geral, as diferenças entre métodos são mais significativas quando $d_2 = 2$ em VSI.
- 7) Em geral, a eficácia do método LSI aumenta com o aumento da dimensão amostral, em moderadas e grandes alterações da média, quando utilizamos $d_1 = 0.1$; quando se utiliza $d_1 = 0.5$, a eficácia de LSI aumenta até $n = 5$, mas diminui quando $n \geq 5$.
- 8) As maiores reduções são, em geral, sempre obtidas com o método LSI, bastantes superiores às obtidas com VSI; lembre-se que, devido ao valor do menor e do

maior intervalo de amostragem obtidos com o método LSI, o par de amostragem $(d_1, d_2) = (0.1, 2)$ é o que mais aproxima os métodos.

Deste modo verificamos que em determinadas situações, com elevados custos de amostragem e de mau funcionamento, LSI pode ser uma boa alternativa ao método VSI. Para confirmar o que acabamos de concluir, apresentamos em seguida um exemplo de ganhos/perdas de custos associados a cada um dos métodos, sem utilização de qualquer modelo económico.

Exemplo de aplicação a contexto real

Suponhamos que o tempo médio de vida do sistema é 100; que o custo de amostragem é de 1€ por cada item inspecionado; que o custo de mau funcionamento do sistema é de 100€/unidade defeituosa em pequenas alterações da média, e de 1000€/unidade defeituosa em grandes alterações da média (pois a probabilidade do produto não verificar as especificações definidas é alta e podemos ter que deitar todo o produto fora, como acontece, por exemplo, com a água engarrafada).

Suponhamos que o intervalo médio de amostragem, sob controlo, é igual à unidade nos métodos VSI e LSI e $n = 5$. Em média, acontecem 0,3 falsos alarmes, podendo desprezar-se os custos associados aos mesmos. Assim, caso ocorra uma alteração na média de magnitude de 0.5 ($\lambda = 0.5$), são necessárias, em média, 33,4 amostras para detetar a alteração. Os custos de amostragem são de 667€ (100×5 (sob controlo) + $33,4 \times 5$ (fora de controlo)):

- se $(d_1, d_2) = (0.1, 2)$ em VSI, os custos de mau funcionamento são de $21,53 \times 100 = 2153€$;

- usando método LSI, os custos de mau funcionamento são de $24,81 \times 100 = 2481€$; nesta situação, os custos por unidade de tempo associados à utilização do método LSI são, aproximadamente, 9% superiores aos custos por unidade de tempo associados à utilização de VSI (23,20 vs 25,22).

Quando ocorre uma alteração na média de magnitude 2 ($\lambda = 2$), são necessárias, em média, 1,08 amostras para detetar a alteração. Os custos de amostragem são de 505,4€ (100×5 (sob controlo) + 1,08×5 (fora de controlo)):

- se $(d_1, d_2) = (0.1, 2)$ em VSI, os custos de mau funcionamento são de $0,95 \times 1000 = 950$ €;

- usando método LSI, os custos de mau funcionamento são de $0,63 \times 1000 = 630$ €; nesta situação, os custos por unidade de tempo associados à utilização do método LSI são, aproximadamente, 22% inferiores aos custos por unidade de tempo associados à utilização de VSI (14,42 vs 11,28).

Naturalmente podemos concluir que, nas situações em que pode ocorrer qualquer tipo de alteração na média pode ocorrer (pequenas, moderadas ou grandes), os ganhos monetários obtidos com a utilização de LSI podem ser, significativamente, superiores aos ganhos obtidos com a utilização do método VSI.

3.3.5.6. Comparação de LSI com VSS, VSSI e VP

Neste ponto pretendemos comparar o desempenho estatístico do método LSI com o desempenho dos métodos adaptativos VSS, VSSI e VP (adaptativos em termos de dimensões amostrais, em dimensões amostrais e intervalos de amostragem e em dimensões amostrais, intervalos de amostragem e coeficientes dos limites de controlo), utilizando-se para tal o AATS e o ANOS. Por simplificação, e pelas razões apresentadas anteriormente, só vamos considerar alterações na média.

Para tal, consideramos as expressões (3.41) (para obter o AATS de VSS, VSSI e VP) e (3.46) (para obter o ANOS de VSS, VSSI e VP, fazemos em ambas as expressões, $L_1 = L = L_2$ e $d_1 = d = d_2$ para equiparar VP a VSS e $L_1 = L = L_2$ para equiparar VP a VSSI) e a expressão (3.71) para obter $AATS_{LSI}$.

Pressupondo-se que, dois métodos em comparação estão nas mesmas condições sob controlo ($\lambda = 0$ e $\rho = 1$), ou seja: $E(D_0) = d$ (sem perda de generalidade, $d=1$ em

FSI), $E(N_0) = n$ e os limites de controlo são “3-sigma” ($L = 3$), obtemos $k = 3.8134$ em LSI.

Sob as condições apresentadas nos dois últimos parágrafos, e que a característica da qualidade tem distribuição normal, consideramos três pares para as dimensões amostrais, dois valores para o menor intervalo de amostragem e $L_1 = 6$ para coeficiente dos limites de controlo. Para avaliar, respetivamente, a rapidez na deteção de alterações da média e o número médio de itens necessários inspecionar, consideramos os rácios $Q_{3.3}$ e $Q_{3.4}$, dados por

$$Q_{3.3} = \left(\frac{AATS_{[MC]}}{AATS_{LSI}} - 1 \right) \times 100\%, \quad (3.76)$$

$$Q_{3.4} = \left(\frac{ANOS_{[MC]}}{ANOS_{LSI}} - 1 \right) \times 100\%, \quad (3.77)$$

onde [MC] designa o método em comparação, podendo ser substituído por VSS, VSSI ou VP, e $Q_{3.3}$ é uma medida de variação relativa, em %, no valor do AATS, quando se usa o método [MC] em vez do método LSI e $Q_{3.4}$ uma medida de variação relativa, em %, no valor do ANOS, quando se usa o método [MC] em vez do método LSI.

Na Tabela 3.6. são apresentados os resultados obtidos com $Q_{3.3}$ e na Tabela 3.7. os resultados obtidos através de $Q_{3.4}$, quando $d_1 = 0.1$, $L_1 = 6$ e diferentes pares de amostragem. Da observação da Tabela 3.6, podemos retirar as seguintes conclusões:

- 1) Quando $(n_1, n_2) = (1, 15)$ e $(n_1, n_2) = (1, 10)$, a carta com o método LSI é mais rápida do que a carta com VSS a detetar moderadas e grandes alterações da média ($\lambda \geq 1$); quando $(n_1, n_2) = (2, 7)$, a carta com o método LSI é mais rápida, do que a que utiliza o método VSS, em todo o tipo de alterações, exceto quando se recolhe, em média, uma amostra para detetar a alteração ($\lambda = 3$).
- 2) Quando reduzimos n_2 , a eficácia do método VSS melhora, conseqüentemente os valores dos rácios diminuem, a diferença entre métodos é menor; quando aumentamos n_1 e diminuimos n_2 , os valores dos rácios diminuem (menor diferença

entre métodos) mas LSI passa a ser mais eficaz em pequenas alterações e menos eficaz quando $\lambda = 3$.

- 3) Em geral, os valores de $Q_{3,3}$ são elevados, o que permite concluir que a diferença entre LSI e VSS, em termos de AATS, pode ser bastante significativa.
- 4) De 2) e de 3) podemos afirmar que quanto melhor o desempenho do método VSS, relativamente ao método LSI, para pequenas alterações ($\lambda < 1$), mais eficaz é o método LSI em moderadas e grandes alterações ($1 \leq \lambda \leq 2,5$).
- 5) A carta com método LSI é mais rápida, do que a carta com esquemas VSSI e VP, a detetar moderadas e grandes alterações na média, $\lambda \geq 1,25$, para os diferentes pares de dimensões amostrais e para a alteração de magnitude $\lambda = 1$ quando se utiliza o par $(n_1, n_2) = (1, 15)$.
- 6) O aumento de n_2 melhora o desempenho dos métodos VSSI e VP em pequenas e moderadas alterações ($\lambda \leq 1,5$), mas reduz, ligeiramente, o seu desempenho para alterações de magnitude $\lambda > 1,5$.

	LSI	VSS			VSSI			VP		
(n_1, n_2)	(5, 5)	(1, 15)	(1, 10)	(2, 7)	(1, 15)	(1, 10)	(2, 7)	(1, 15)	(1, 10)	(2, 7)
(d_1, d_2)	---	(1,00; 1,00)			(0,10; 1,36)	(0,10; 1,72)	(0,10; 2,35)	(0,10; 1,36)	(0,10; 1,72)	(0,10; 2,35)
(L_1, L_2)	(3,00; 3,00)	(3,00; 3,00)			(3,00; 3,00)			(6,00; 2,60)	(6,00; 2,74)	(6,00; 2,84)
(w_1, w_2)	---	(1,06; 1,06)	(0,76; 0,76)	(0,52; 0,52)	(1,06; 1,06)	(0,76; 0,76)	(0,52; 0,52)	(1,07; 1,05)	(0,76; 0,76)	(0,52; 0,52)
λ	AATS	$Q_{3,3}$								
0	370,01	0,0	0,0	0,0	0,0	0,1	0,1	0,3	0,3	0,4
0,25	122,99	-18,2	-7,2	1,9	-25,4	-16,8	-9,4	-59,2	-43,7	-25,2
0,5	24,81	-51,8	-28,3	2,2	-64,5	-51,6	-34,1	-73,9	-64,5	-46,6
0,75	5,97	-41,1	-23,7	14,7	-50,0	-48,5	-38,7	-51,5	-52,2	-44,0
1	1,98	8,4	7,8	36,8	7,9	0,0	-4,2	8,0	-1,0	-5,8
1,25	1,01	68,6	43,5	46,3	67,6	59,1	47,1	68,8	59,3	47,6
1,5	0,74	101,6	62,8	38,6	87,8	85,9	78,2	89,7	87,1	80,6
1,75	0,65	105,7	67,3	27,7	79,2	85,3	88,3	81,7	87,3	92,8
2	0,63	96,3	63,6	18,2	62,8	75,3	89,4	66,1	78,1	96,0
2,5	0,61	68,6	46,8	0,9	36,0	56,2	85,5	41,4	61,3	96,2
3	0,61	41,5	27,5	-11,4	21,6	45,6	82,4	29,8	53,5	95,5

Tabela 3.6. – Valores de $Q_{3,3}$, em função de λ , com $\rho = 1$ e $n = 5$ em LSI, $d_1 = 0.1$ em VSSI e em VP e três dimensões amostrais em VSS, VSSI e VP.

- 7) Consequentemente, podemos afirmar que quanto melhor é o desempenho dos métodos VSSI e VP em $\lambda \leq 1,5$, quanto melhor será o desempenho do método LSI quando $\lambda > 1,5$, nos dois primeiros pares de dimensões amostrais.

- 8) Quando reduzimos n_2 e aumentamos n_1 , o desempenho de VSSI e VP diminui e aumenta o desempenho de LSI.
- 9) Os ganhos de eficácia obtidos com a utilização de LSI serão, em geral, superiores aos obtidos com qualquer um dos outros esquemas em comparação.
- 10) A utilização da carta de controlo para a média com o esquema LSI permite inspecionar menos itens do que os inspecionados com os restantes métodos para alterações com magnitude $\lambda \geq 1,25$, exceto quando consideramos o par $(n_1, n_2) = (2, 7)$ em alteração $\lambda = 1,25$ em VSS e alterações $\lambda \geq 2,5$ em VSSI.
- 11) Em geral, quando aumenta a maior dimensão amostral e quando o afastamento entre dimensões amostrais aumenta, a diferença entre os métodos também aumenta (entre LSI e cada um dos restantes).
- 12) Consequentemente, podemos afirmar que quando se inspecionam menos itens com VSS, VSSI e VP em $\lambda \leq 1$, também se inspecionam menos itens com LSI em $\lambda > 1$, com a exceção referida em 10).

	LSI	VSS			VSSI			VP		
(n_1, n_2)	(5, 5)	(1, 15)	(1, 10)	(2, 7)	(1, 15)	(1, 10)	(2, 7)	(1, 15)	(1, 10)	(2, 7)
(d_1, d_2)	---	(1,00; 1,00)			(0,10; 1,36)	(0,10; 1,72)	(0,10; 2,35)	(0,10; 1,36)	(0,10; 1,72)	(0,10; 2,35)
(L_1, L_2)	(3,00; 3,00)	(3,00; 3,00)			(3,00; 3,00)			(6,00; 2,60)	(6,00; 2,74)	(6,00; 2,84)
(w_1, w_2)	---	(1,06; 1,06)	(0,76; 0,76)	(0,52; 0,52)	(1,06; 1,06)	(0,76; 0,76)	(0,52; 0,52)	(1,07; 1,05)	(0,76; 0,76)	(0,52; 0,52)
λ	ANOS	$Q_{3,4}$								
0	1851,99	0,0	0,0	0,0	-0,2	-0,2	-0,1	0,0	0,0	0,1
0,25	665,80	-8,2	-3,4	-0,6	-8,3	-3,6	-0,7	-51,3	-35,6	-18,3
0,5	167,00	-36,4	-22,6	-9,2	-36,3	-22,5	-9,0	-61,8	-48,1	-28,5
0,75	53,81	-37,5	-28,5	-14,4	-36,8	-27,8	-13,3	-50,5	-44,0	-27,3
1	22,48	-13,7	-18,8	-11,7	-12,4	-17,1	-9,1	-17,0	-26,0	-16,0
1,25	11,94	33,8	4,4	-2,6	35,2	6,8	1,2	41,2	5,8	3,8
1,5	7,83	91,9	35,8	9,4	91,9	37,8	12,3	110,1	46,3	28,0
1,75	6,10	136,8	64,1	19,5	133,5	63,7	17,6	166,9	82,9	50,6
2	5,38	156,7	79,2	23,6	148,7	74,3	12,9	200,7	105,8	66,3
2,5	5,02	142,8	75,0	16,0	122,7	57,7	-15,5	219,4	118,8	75,9
3	5,00	104,6	55,0	6,0	70,3	22,6	-39,9	219,5	119,1	72,4

Tabela 3.7. – Valores de $Q_{3,4}$, em função de λ , com $\rho = 1$ e $n = 5$ em LSI, $d_1 = 0.1$ em VSSI e em VP e três dimensões amostrais em VSS, VSSI e VP.

Quando aumentamos o menor intervalo de amostragem, $d_1 = 0.5$, em VSSI e VP, o maior intervalo de amostragem diminui, provocando alterações, significativas, no desempenho dos esquemas com intervalos de amostragem adaptativos.

Na Tabela 3.8. são apresentados os resultados obtidos com $Q_{3,3}$ e na Tabela 3.9. os resultados obtidos através de $Q_{3,4}$, das quais podemos concluir que:

- 13) O método LSI melhora, ligeiramente, o seu desempenho para todo o tipo de alterações, quando utilizamos o par $(n_1, n_2) = (1, 15)$ nos métodos VSSI e VP; os valores negativos (quando VSSI e VP são mais eficazes) do rácio diminuem e os valores positivos (quando LSI é mais eficaz) aumentam.
- 14) O desempenho de LSI melhora, ligeiramente, para magnitudes $\lambda \leq 1$ e diminui quando as magnitudes são do superiores a um e utilizamos o par $(n_1, n_2) = (1, 10)$ em VSSI; quando utilizamos o mesmo par de dimensões amostrais em VP, o método LSI melhora o seu desempenho nas alterações com $\lambda \leq 0,75$ e $2,5 \leq \lambda \leq 3$, mas piora o desempenho nas alterações com $0,75 < \lambda < 2,5$.
- 15) Quando se considera o par $(n_1, n_2) = (2, 7)$, a eficácia de LSI melhora, em relação a VSSI e VP, em alterações do tipo $\lambda \leq 1$ (onde o desempenho de VSSI e VP é melhor) e diminui para alterações do tipo $\lambda > 1$ (onde o desempenho de LSI é melhor).

	LSI	VSSI			VP		
(n_1, n_2)	(5, 5)	(1, 15)	(1, 10)	(2, 7)	(1, 15)	(1, 10)	(2, 7)
(d_1, d_2)	---	(0,50; 1,20)	(0,50; 1,40)	(0,50; 1,75)	(0,50; 1,20)	(0,50; 1,40)	(0,50; 1,75)
(L_1, L_2)	(3,00; 3,00)	(3,00; 3,00)			(6,00; 2,60)	(6,00; 2,74)	(6,00; 2,84)
(w_1, w_2)	---	(1,06; 1,06)	(0,76; 0,76)	(0,52; 0,52)	(1,07; 1,05)	(0,76; 0,76)	(0,52; 0,52)
λ	AATS	$Q_{3,3}$					
0	370,01	0,0	0,0	0,0	0,1	0,1	0,2
0,25	122,99	-22,2	-12,6	-4,5	-57,9	-41,3	-21,5
0,5	24,81	-59,0	-41,5	-18,5	-71,9	-59,1	-35,6
0,75	5,97	-46,4	-38,4	-16,8	-51,2	-47,6	-28,8
1	1,98	7,6	1,5	9,7	6,1	-3,8	2,7
1,25	1,01	67,7	49,6	39,6	70,2	48,6	39,5
1,5	0,74	94,0	73,0	51,4	100,1	76,7	59,3
1,75	0,65	91,2	74,9	50,2	100,8	82,3	66,3
2	0,63	77,9	67,6	44,2	91,3	78,8	68,5
2,5	0,61	49,9	48,3	29,2	73,3	68,7	69,0
3	0,61	28,3	31,5	18,3	64,2	63,6	67,1

Tabela 3.8. – Valores de $Q_{3,3}$, em função de λ , com $\rho = 1$ e $n = 5$ em LSI, $d_1 = 0.5$ em VSSI e em VP e três dimensões amostrais em VSS, VSSI e VP.

- 16) O aumento de d_1 conduz a um ligeiro aumento do número médio de itens inspecionados em VSSI para alterações de magnitude $\lambda \geq 1,5$ nos pares $(d_1, d_2) = (0.5; 1.20)$ e $(d_1, d_2) = (0.5; 1.40)$ e para $\lambda \geq 1,75$ com o par $(d_1, d_2) = (0.5; 1.75)$; nas

alterações $0,75 \leq \lambda \leq 1,25$, quando se utiliza $(d_1, d_2) = (0.5; 1.20)$ e $(d_1, d_2) = (0.5; 1.40)$, recolhem-se menos itens em VSSI, sendo os métodos idênticos (VSSI e LSI) nas restantes alterações; quando se utiliza $(d_1, d_2) = (0.5; 1.75)$, verifica-se uma redução do número médio de itens em VSSI para $\lambda < 1,75$.

	LSI		VSSI			VP	
(n_1, n_2)	(5, 5)	(1, 15)	(1, 10)	(2, 7)	(1, 15)	(1, 10)	(2, 7)
(d_1, d_2)	---	(0,50; 1,20)	(0,50; 1,40)	(0,50; 1,75)	(0,50; 1,20)	(0,50; 1,40)	(0,50; 1,75)
(L_1, L_2)	(3,00; 3,00)	(3,00; 3,00)			(6,00; 2,60)	(6,00; 2,74)	(6,00; 2,84)
(w_1, w_2)	---	(1,06; 1,06)	(0,76; 0,76)	(0,52; 0,52)	(1,07; 1,05)	(0,76; 0,76)	(0,52; 0,52)
λ	ANOS		$Q_{3,4}$				
0	1851,99	-0,1	-0,1	-0,1	0,0	0,0	0,1
0,25	665,80	-8,3	-3,6	-0,8	-51,4	-35,6	-18,4
0,5	167,00	-36,3	-22,5	-9,1	-62,0	-48,3	-28,9
0,75	53,81	-37,2	-28,1	-13,8	-51,0	-44,6	-28,5
1	22,48	-13,0	-17,9	-10,3	-18,0	-27,3	-18,5
1,25	11,94	34,6	5,7	-0,5	39,5	3,7	-0,7
1,5	7,83	92,9	37,9	11,0	107,9	43,4	21,5
1,75	6,10	135,0	63,9	18,5	164,4	79,4	42,6
2	5,38	152,3	76,5	17,7	198,1	102,1	57,3
2,5	5,02	131,6	65,4	-1,5	217,0	115,1	66,6
3	5,00	85,5	37,0	-19,5	217,2	115,5	64,1

Tabela 3.9. – Valores de $Q_{3,4}$, em função de λ , com $\rho = 1$ e $n = 5$ em LSI, $d_1 = 0.5$ em VSSI e em VP e três dimensões amostrais em VSS, VSSI e VP.

- 17) As diferenças, entre os métodos VP e LSI, mantêm-se com a alteração de d_1 para 0.5, nas alterações com $\lambda \leq 0,25$; nas restantes alterações, dos diferentes pares de amostragem e de dimensão amostral, verifica-se uma ligeira redução do $ANOS_{VP}$.
- 18) A redução de d_1 nos métodos VSSI e VP não causa mudanças significativas nas diferenças com LSI, quer ao nível do AATS como em relação ao ANOS.
- 19) Em algumas das situações mencionadas, só o recurso aos custos envolvidos no processo pode ajudar a tomar a decisão na escolha do método a utilizar, pois um método pode ser muito eficaz para um dado tipo de alteração mas, para a mesma alteração, ser necessário inspecionar muitos mais itens.

Para concluir refira-se que, para alguns dos processos pode ser, eventualmente, possível especificar a magnitude da alteração da média da qualidade que é provável ocorrer e desse modo escolher o método que melhor se lhe adequa (mais rápido em deteção e que pode necessitar de inspecionar menos itens). Contudo, eventualmente o método que melhor se adequa pode ser de difícil implementação, devido, por exemplo,

a restrições administrativas (não ser possível retirar amostras de dimensão 15 e/ou em intervalos de tempo inferiores a 1/10 da hora) e/ou de limitações do próprio método (dependência de um elevado número de parâmetros). Neste contexto, um método que dependa de um elevado número de parâmetros aumenta a sua complexidade e reduz as probabilidades de ser escolhido, independentemente de poder ser a escolha acertada.

Ainda assim, na maioria dos processos, a magnitude da alteração e a sua frequência é desconhecida. É fundamental ter à disposição um método que seja eficaz para um alargado número de alterações da média da qualidade, podendo o mesmo ganhar vantagem em relação a métodos que sejam mais eficazes para determinadas alterações.

Com base nas comparações efetuadas, o método LSI poderá posicionar-se como essa alternativa, em determinados contextos. O menor intervalo de amostragem pode, em determinados processos, ser executado em tempo real (5,7 minutos, tendo por referencia a hora), depende de um único parâmetro (k , obtido com relativa facilidade) e, não sendo o mais eficaz para todo o tipo de alterações, é equilibrado em termos de eficácia (AATS) e em termos do número médio de itens que é necessário inspecionar, podendo, com estas características, ter vantagens competitivas em contextos de redução de custos.

3.3.5.7. Um Estudo de Sensibilidade

De forma a avaliar a consistência dos resultados obtidos com o método LSI realizamos dois estudos, um de sensibilidade e outro de robustez, que apresentamos no ponto seguinte (3.3.5.8).

Neste ponto desenvolvemos um estudo de sensibilidade, limitando valor do menor intervalo de amostragem obtido com o método LSI. A restrição imposta permite-nos avaliar o desempenho do método em contextos onde não seja possível (fisicamente ou

administrativamente) recolher a analisar amostras em, aproximadamente, 6 minutos, considerando como unidade de tempo a hora.

3.3.5.7.1. O Truncamento do Menor Intervalo de Amostragem

Seja D a variável aleatória que representa o intervalo de tempo entre inspeções consecutivas. De acordo com (3.47), D é definida por

$$D = \frac{k}{2} e^{-|u|}. \quad (3.78)$$

Seja d_1 o menor intervalo amostral possível. Então, considerando a restrição ao menor intervalo de amostragem, tem-se

$$D \leq d_1 \Leftrightarrow \frac{k}{2} e^{-|u|} \leq d_1 \Leftrightarrow u \geq \underbrace{-\ln\left(\frac{2 d_1}{k}\right)}_{L^*} \vee u \leq \ln\left(\frac{2 d_1}{k}\right), \quad (3.79)$$

onde L^* é múltiplo do desvio padrão e podendo ser interpretado como w na metodologia VSI.

Considerando apenas alterações na média e designando por D^* o intervalo de tempo entre amostras consecutivas quando a média da amostra cai no intervalo

$\left] \mu_0 - L^* \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}, \mu_0 + L^* \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} \right]$, a distribuição de D^* é a distribuição condicional da média

sabendo que esta se encontra entre os referidos limites de controlo e dada a alteração

da média. Desta forma, a função densidade de D^* é

$$f^{**}(\bar{x}) = \frac{\sqrt{n}}{\beta^* \sigma_0 \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{n(\bar{x} - \mu_0 - \lambda \sigma_0)^2}{2\sigma_0^2}}, \quad (3.80)$$

$$\text{com } \beta^* = \Phi(L^* - \lambda \sqrt{n}) - \Phi(-L^* - \lambda \sqrt{n}). \quad (3.81)$$

Por um raciocínio idêntico ao efetuado para os estudos das propriedades estatísticas do método LSI, tem-se

$$\begin{aligned} E(D^* | \lambda, n, L) &= \\ &= \frac{\sqrt{e} k}{2\beta^*} \left[e^{\lambda \sqrt{n}} \left\{ \Phi(-1 - \lambda \sqrt{n}) - \Phi(-L^* - 1 - \lambda \sqrt{n}) \right\} + e^{-\lambda \sqrt{n}} \left\{ \Phi(L^* + 1 - \lambda \sqrt{n}) - \Phi(1 - \lambda \sqrt{n}) \right\} \right], \end{aligned} \quad (3.82)$$

alterando-se a probabilidade de utilização dos intervalos de amostragem, e que a probabilidade de utilização do intervalo de amostragem d_1 dada por

$$p_1 = P(D = d_1 | \lambda) = 1 - P\left(\mu_0 - L^* \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} \leq \bar{X} \leq \mu_0 + L^* \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} \mid LCL \leq \bar{X} \leq UCL\right) = 1 - \frac{\beta^*}{\beta}. \quad (3.83)$$

Nas condições apresentadas, o intervalo médio de amostragem é dado por

$$E(D) = \frac{\beta^*}{\beta} E(D^*) + d_1 \left(1 - \frac{\beta^*}{\beta}\right). \quad (3.84)$$

Considerando (3.84), sob controlo, igual à unidade, obtivemos por simulação os valores de k^* e de L^* que apresentamos na Tabela 3.10, para os diferentes valores de d_1 considerados.

Analisando a Tabela 3.10, concluímos que os valores de k^* diminuem quando aumenta o valor de d_1 , reduzindo os múltiplos de desvio padrão. Esta característica de LSI mostra que o método se pode equiparar a VSI em termos de operacionalização, pois quando aumentamos d_1 , em VSI, o valor de w também diminui.

d_1	k^*	L^*
0,1	3.8134	2,9480
0,2	3.8099	2,2539
0,3	3.7942	1,8443
0,4	3.7591	1,5473
0,5	3.6976	1,3077

Tabela 3.10. – Valores de k^* e de L^* , para diferentes valores de d_1 , com $\rho = 1$.

Contudo, em contextos de aplicação prática, esta situação de aumento do menor intervalo pode significar aumento dos custos associados ao ciclo produtivo, e em particular dos custos associados ao período de mau funcionamento do sistema. Por outro lado, e no atual cenário de desenvolvimento tecnológico, com modernos instrumentos de medida e tarefas automatizadas, é pouco provável termos de esperar, por exemplo, 18 minutos para retirar a próxima amostra (situação de fora de controlo, considerando como unidade de tempo a hora e $d_1 = 0,3$).

Para avaliar o impacto causado pelo truncamento do menor intervalo de amostragem nos valores de AATS, reescrevemos a expressão (3.66) adaptada às novas condições, tendo-se obtido

$$\text{AATS} = E(G) + (\text{ARL} - 1)E(D) = E(G) + \frac{E(D^*)\beta^* + d_1(\beta - \beta^*)}{1 - \beta}, \quad (3.85)$$

onde o valor de $E(G)$ pode ser obtido por simulação, e que nos vai permitir efetuar novas comparações do método, em particular com os métodos FSI e VSI.

Por intuição, o aumento do valor de d_1 deve conduzir a um aumento da sua probabilidade de utilização. Com o aumento dessa probabilidade, o método reduz a sua eficácia na deteção da alteração na média da qualidade, tal como acontece com VSI. Desse modo, interessa-nos avaliar o impacto causado na eficácia do método, ou seja, até que ponto o aumento do menor intervalo de amostragem altera o seu desempenho.

Assim, neste ponto vamos avaliar o impacto, em termos de AATS, do aumento do menor intervalo nos métodos LSI e VSI, de modo a percebermos qual deles é o mais sensível à alteração de d_1 . Para tal considerámos as situações em que é possível utilizar $d_1 \in \{0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5\}$, contra um valor (0.1) muito aproximado do menor intervalo de amostragem obtido com o método LSI (0.095). Para cada um dos valores de d_1 considerados, o valor da constante k^* foi obtido para que o intervalo médio de amostragem sob controlo se mantivesse igual à unidade de tempo.

Dessa forma, os resultados obtidos são apresentados, respetivamente, nas Fig. 3.3. e Fig. 3.4, sendo utilizadas duas medidas de variação relativa (sensibilidade à alteração do menor intervalo), em %, no valor do AATS, considerando o $\text{AATS}_{\text{LSI}^*}$ e o $\text{AATS}_{\text{VSI}^*}$ como referência e os valores obtidos para k^* e de L^* em LSI^* , definidas por

$$Q_{3.5} = \left(\frac{\text{AATS}_{\text{LSI}}}{\text{AATS}_{\text{LSI}^*}} - 1 \right) \times 100\%, \quad (3.86)$$

$$Q_{3.6} = \left(\frac{\text{AATS}_{\text{VSI}}}{\text{AATS}_{\text{VSI}^*}} - 1 \right) \times 100\%. \quad (3.87)$$

A partir da Fig. 3.3. podemos concluir que o aumento do menor intervalo de amostragem aumenta a sua probabilidade da sua utilização, de forma mais acentuada, em reduzidas e moderadas alterações do processo. Consequentemente, a eficácia do método LSI diminui à medida que aumenta d_1 , pois aumenta o intervalo médio de amostragem e o tempo de mau funcionamento do sistema. As diferenças entre AATS's

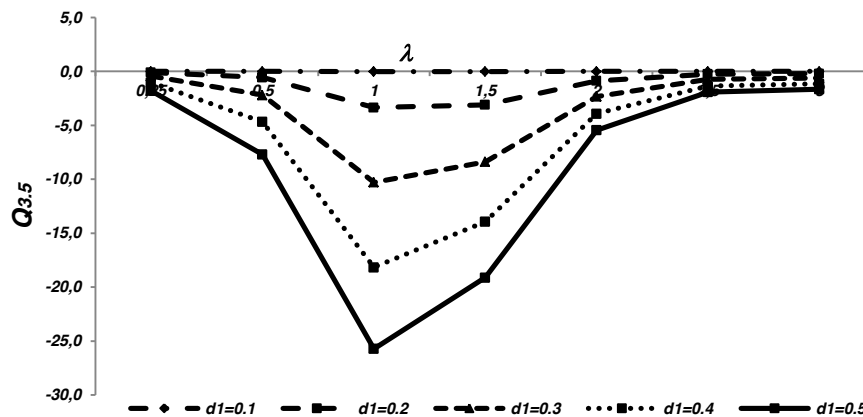


Fig. 3.3. – Valores de $Q_{3,5}$, em função de λ , para diferentes valores de d_1 , com $\rho = 1$ e $n = 5$.

aumentam com o aumento da probabilidade de detetar alterações, atingindo o seu máximo próximo de alterações com magnitude $\lambda = 1$. A partir desse instante a eficácia dos métodos, ainda diferentes, tende a aproximar-se, sendo idêntica em $\lambda \geq 2$. Em suma, a versão inicial do método LSI é sempre mais eficaz do que a versão alterada (LSI*).

Em seguida, efetuámos o mesmo tipo de análise considerando o método VSI com o menor intervalo de amostragem muito próximo do menor possível em LSI, 0.1, tendo-se considerado dois valores para o maior intervalo, 2 e 1.5. Com $L = 3$, obtivemos o parâmetro w de modo a que o intervalo médio de amostragem sob controlo fosse igual à unidade. Assim foram obtidos os valores do AATS para os pares $(d_1, d_2) = (0.1, 2)$ e $(d_1, d_2) = (0.1, 1.5)$, contra os valores de $d_1 \in \{0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5\}$ mantendo fixo o valor de d_2 , 2 ou 1.5.

A partir da Fig. 3.4., podemos concluir que o método VSI é mais sensível, do que o método LSI, ao aumento do menor intervalo de amostragem. Em pequenas e moderadas alterações da média ($\lambda < 1.5$ se $(d_1, d_2) = (0.1, 2)$ e $\lambda < 1.75$ se $(d_1, d_2) =$

(0.1, 1.5)), o método perde eficácia à medida que aumentamos d_1 , e ganha eficácia, quando aumentamos o mesmo valor, em grandes alterações ($(\lambda > 1.5$ se $(d_1, d_2) = (0.1, 2)$ e $\lambda > 1.75$ se $(d_1, d_2) = (0.1, 1.5)$). Nas situações em que o método perde eficácia, os valores do rácio $Q_{3.6}$ são idênticos nos dois gráficos, contudo, nas situações em que o método ganha eficácia, as diferenças são mais significativas, entre os valores de d_1 considerados e entre os valores de d_2 (entre gráficos).

A elevada sensibilidade, apresentada por VSI, à alteração de d_1 , pode tornar-se, em determinados contextos, numa vantagem para o método LSI, pois algumas das perdas de eficácia, em pequenas e moderadas alterações da média, podem ser compensadas com ganhos de eficácia em grandes alterações e ganhos de estabilidade.

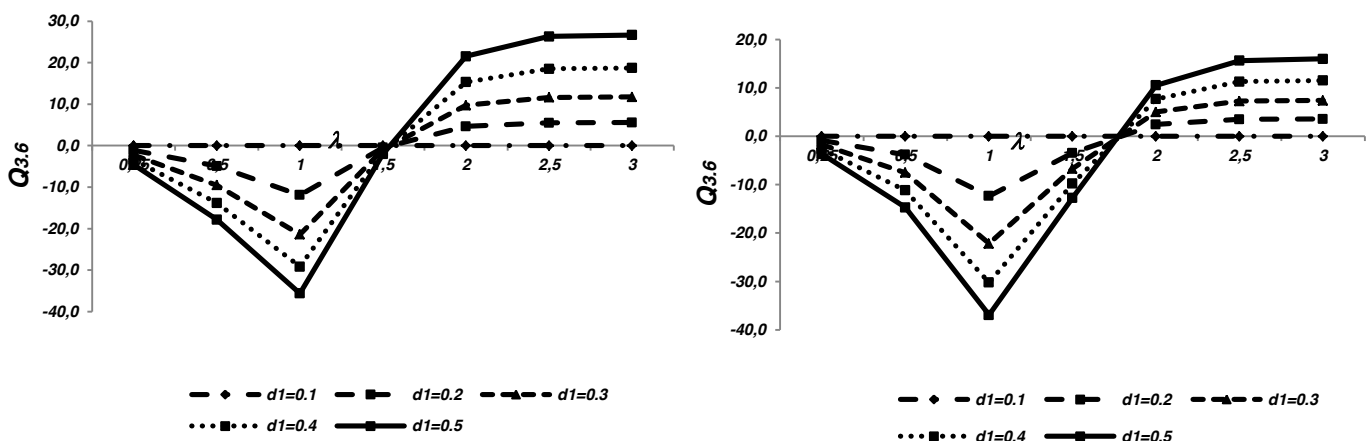


Fig. 3.4. – Valores de $Q_{3.6}$, em função de λ , para diferentes valores de d_1 , $(d_1, d_2) = (0.1, 2)$ à esquerda e $(d_1, d_2) = (0.1, 1.5)$ à direita em VSI, com $\rho = 1$ e $n = 5$.

3.3.5.7.2. Comparação com FSI e VSI

Neste ponto, voltamos a considerar as situações em que é possível utilizar $d_1 \in \{0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5\}$ contra o valor de $d_1 = 0.1$, utilizando os valores obtidos para a constante k^* , de modo a podermos comparar, em termos de AATS, o desempenho do método LSI, truncando o menor intervalo de amostragem, com os métodos FSI e VSI.

Para comparar o desempenho dos métodos, vamos utilizar os rácios $Q_{3.7}$ e $Q_{3.8}$ que são medidas de variação relativa, em %, no valor do AATS, quando se usa o método FSI, ou o método VSI, em vez da versão alterada de LSI, dadas, respetivamente, por

$$Q_{3.7} = \left(\frac{AATS_{FSI}}{AATS_{LSI^*}} - 1 \right) \times 100\%, \quad (3.88)$$

$$Q_{3.8} = \left(\frac{AATS_{VSI}}{AATS_{LSI^*}} - 1 \right) \times 100\%. \quad (3.89)$$

Os resultados obtidos para o rácio $Q_{3.7}$ são apresentados na Fig. 3.5., a partir da qual se podem retirar as seguintes conclusões:

- 1) O método LSI continua a ser mais eficaz do que o método FSI nas mesmas alterações da média, contudo os ganhos de eficácia com a utilização de LSI vão-se diluindo à medida que aumentamos o valor do menor intervalo de amostragem.
- 2) As maiores perdas de eficácia ocorrem quando as alterações na média têm magnitudes de $\lambda \in [0.5, 1.5]$, intervalo de maior sensibilidade de LSI ao truncamento do menor intervalo de amostragem.
- 3) As reduções obtidas com LSI continuam a ser, significativamente, superiores às obtidas com FSI.
- 4) Nas situações em que a probabilidade de deteção é grande ($\lambda \geq 2.5$), FSI continua a ser mais eficaz do que LSI, contudo o aumento do menor intervalo tem pouco impacto.
- 5) O aumento de d_1 não é proporcional à redução de eficácia do método LSI (por exemplo, quando mudamos $d_1 = 0.1$ para $d_1 = 0.3$, $Q_{3.10}$ passa de 101,7% 80,9%).

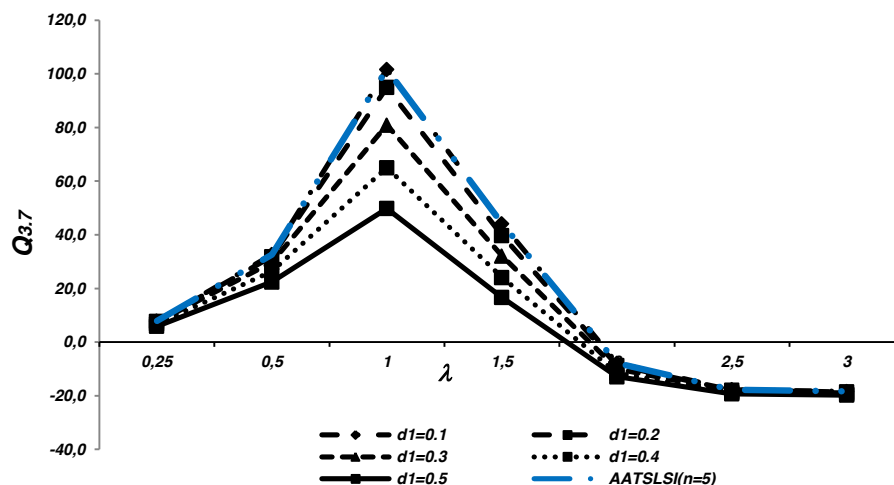


Fig. 3.5. – Valores de $Q_{3.7}$ e de $AATS_{LSI}$, em função de λ , para diferentes valores de d_1 , com $\rho = 1$ e $n = 5$.

Os resultados obtidos para o rácio $Q_{3,8}$ são apresentados na Tabela 3.11., a partir da qual se podem retirar as seguintes conclusões:

- 1) Os valores de $AATS_{LSI^*}$ vão aumentando, ligeiramente, à medida que aumenta d_1 .
- 2) No geral, o desempenho dos métodos, LSI e VSI, piora; há uma aproximação entre os dois métodos para todo o tipo de alterações da média, o que significa que o método LSI, relativamente ao método VSI, perde um pouco da sua eficácia para grandes alterações e ganha eficácia para pequenas e moderadas alterações.

d_1	VSI*	λ						
		0.25	0.50	1.00	1.50	2.00	2.50	3.00
0.1	(0.1, 2)	-3,7	-13,2	-11,9	37,4	53,2	54,9	55,0
	(0.1, 1.5)	-2,3	-8,7	-16,3	7,9	17,2	18,3	18,3
	$AATS_{LSI^*}$	122,99	24,81	1,98	0,74	0,63	0,61	0,61
0.2	(0.2, 2)	-2,7	-9,2	-3,3	33,8	45,1	46,5	46,6
	(0.2, 1.5)	-1,5	-5,6	-7,7	8,3	13,4	14,0	14,0
	$AATS_{LSI^*}$	123,12	24,95	2,05	0,76	0,63	0,62	0,61
0.3	(0.3, 2)	-1,9	-6,2	0,6	27,1	36,4	37,8	37,8
	(0.3, 1.5)	-1,0	-3,4	-3,5	5,9	9,1	9,4	9,5
	$AATS_{LSI^*}$	123,55	25,36	2,21	0,81	0,64	0,62	0,62
0.4	(0.4, 2)	-1,3	-4,0	1,8	20,0	27,6	28,9	29,0
	(0.4, 1.5)	-0,6	-2,0	-1,8	2,9	4,6	4,8	4,8
	$AATS_{LSI^*}$	124,26	26,02	2,42	0,86	0,65	0,62	0,62
0.5	(0.5, 2)	-0,9	-2,5	1,6	13,4	19,2	20,3	20,4
	(0.5, 1.5)	-0,4	-1,2	-1,4	0,0	0,3	0,3	0,3
	$AATS_{LSI^*}$	125,24	26,88	2,67	0,91	0,66	0,63	0,62

Tabela 3.11. – Valores de $Q_{3,8}$ e de $AATS_{LSI^*}$, em função de λ , para diferentes valores de d_1 e diferentes pares de amostragem em VSI, com $\rho = 1$ e $n = 5$.

- 3) As reduções obtidas com o método LSI continuam a ser superiores às obtidas com o método VSI.
- 4) Contrariamente à situação inicial, versões usuais dos métodos, não obtivemos nenhum par de amostragem em VSI de modo que a sua eficácia seja, para qualquer tipo de alteração, inferior à eficácia de LSI.
- 5) Quando $(d_1, d_2) = (0.5, 1.5)$ em VSI e $d_1 = 0.5$ em LSI, situação pouco usual, o desempenho dos métodos pode considerar-se equivalente; nesta situação, a decisão entre qual dos métodos escolher será baseada, essencialmente, nos custos de amostragem e noutros fatores inerentes ao processo.

Por fim, refira-se que a imposição de um valor para o menor intervalo de amostragem superior a 0.1 não será muito usual em contextos práticos, em especial

para a dimensão da amostra que utilizamos, pois tal significa que, considerando a unidade de tempo a hora, eram necessários mais de 6 minutos para retirar e analisar a próxima amostra. Na atualidade, a utilização de modernos e sofisticados instrumentos de medida e a automatização de tarefas torna este cenário pouco provável.

3.3.5.8. Um Estudo de Robustez

Em aplicações práticas a característica da qualidade monitorizada nem sempre tem distribuição normal. Desse modo, interessa-nos avaliar a eficácia do novo método de amostragem quando a característica X da qualidade não tem distribuição normal. Para tal, vamos considerar diferentes níveis de afastamento à normalidade, à semelhança do que se fez em Stoumbos e Reynolds (2000), Calzada e Scariano (2001), Figueiredo e Gomes (2004), Lin e Chou (2007) e em Schoonhoven e Does (2010) onde são utilizadas diferentes distribuições e, por vezes, outras estatísticas, tais como a mediana, a mediana total ou a amplitude total.

Nesta dissertação, vamos considerar apenas o caso em que a estatística amostral é a média, mas outros resultados estão a ser obtidos no caso em que a estatística amostral é a mediana.

Ao nível do afastamento da distribuição normal, vamos considerar três situações: uma situação em que consideramos que a característica X da qualidade é uma mistura de normais; outra situação que supomos ter distribuição *t-Student* e, por fim, uma situação em que X segue uma distribuição Gama.

3.3.5.8.1. Metodologia e Simulação

Suponha-se que se retiram sucessivas observações independentes de uma população $N(0, 1)$ e que, ocasionalmente, há uma perturbação no sistema de que resulta uma observação anómala de uma população $N(0, \sigma_c)$; ou seja, denominando p como a proporção de contaminação, $0 < p < 1$, supondo que em $100 \cdot (1 - p)\%$ das vezes se observa uma população $N(0, 1)$ (contaminada) e que em $100 \cdot p\%$ das vezes

se observa uma população $N(0, \sigma_c)$ (contaminante), as amostras vão ser retiradas de uma população cuja função densidade de probabilidade é definida por

$$f(x) = \frac{1-p}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) + \frac{p}{\sigma_c \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_c^2}\right), \quad -\infty < x < +\infty, \quad (3.90)$$

com $E(X) = 0$ e $\text{Var}(X) = 1-p + p\sigma_c^2$.

Esta distribuição é aproximadamente simétrica, e o seu grau de assimetria, tal como o peso de caudas, depende da percentagem de contaminação e da variância da distribuição contaminante.

Na situação em que a população tem distribuição *t-Student*, com V graus de liberdade, as amostras são retiradas de uma população cuja função densidade de probabilidade é definida por

$$f(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) \sqrt{\pi\nu}} \left(1 + \frac{x^2}{\nu}\right)^{-\frac{\nu+1}{2}}, \quad -\infty < x < +\infty, \quad (3.91)$$

com $E(X) = 0$ e $\text{Var}(X) = \frac{\nu}{\nu-2}$, para $\nu > 2$. Esta distribuição é simétrica com peso de caudas superior ao da distribuição normal.

Na situação em que consideramos que a população tem distribuição Gama, com parâmetro de forma a e parâmetro de escala b , as amostras são retiradas de uma população cuja função densidade de probabilidade é definida por

$$f(x) = \frac{1}{b^a \Gamma(a)} x^{a-1} \exp\left(-\frac{x}{b}\right), \quad x > 0, a, b > 0, \quad (3.92)$$

com $E(X) = ab$ e $\text{Var}(X) = ab^2$, a e b , respetivamente, parâmetros de forma e de escala. Neste caso, a distribuição é assimétrica, positiva ou negativa, consoante o parâmetro de forma a . Quando $a = 1$, a distribuição reduz-se à distribuição Exponencial com média $1/b$.

Refira-se que outras distribuições de probabilidade se poderiam considerar para as populações, escolhemos estas por serem das mais utilizadas neste tipo de estudos.

Como exemplo, além dos trabalhos citados anteriormente, podemos referir que Borrór *et al.* (1999) estudaram a robustez da carta EWMA e da carta *Shewhart* com observações individuais, considerando a distribuição *t-Student* com diferentes graus de liberdade e a distribuição Gama com diferentes valores para o parâmetro de forma.

Infante (2004) estudou a robustez de uma carta de controlo para a média considerando para a distribuição X uma mistura de normais e a distribuição de *Burr*.

Lin e Chou (2005c), considerando limites simétricos e assimétricos em probabilidade, estudaram a robustez de uma carta de controlo para a média em que a característica X da qualidade tem distribuição de *Burr*.

Figueiredo e Gomes (2009), num estudo sobre as vantagens da utilização de estatísticas robustas em processos industriais, consideraram a distribuição normal, a de *Laplace* e uma normal contaminada com diferentes graus de contaminação.

Lin e Chou (2011) estudaram a robustez de uma carta EWMA e da utilização, simultânea, de uma carta para a média e uma carta EWMA, onde consideram que a distribuição da característica X da qualidade pode ser Gama, *Weibull* ou *t-Student*, de modo a avaliarem o comportamento das cartas em cenários com diferentes graus de assimetria e de curtose.

Assim, quando se retiram amostras de uma população com função densidade de probabilidade dada por (3.90), em geral, não se conhece a distribuição por amostragem. Nos casos em que os valores de p e σ_c são reduzidos, podemos considerar, com a devida margem de erro, que a distribuição das médias amostrais é normal com $E(\bar{X}) \approx 0$ e $Var(\bar{X}) = \frac{1-p+p\sigma_c^2}{n}$, onde n é a dimensão da amostra e p e σ_c são, respetivamente, a proporção de contaminação e o desvio padrão da distribuição contaminante.

Pelo contrário, nos casos em que o valor de p e/ou o valor de σ_c são elevados, \bar{X} continua a ser um estimador não-enviesado da média populacional mas é, facilmente,

influenciado pela elevada variância. Nestas situações, e em particular devido à utilização de amostras de dimensão reduzida (não sendo possível aplicar o teorema do limite central), a distribuição de amostragem é desconhecida.

Na situação em que a característica X da qualidade tem distribuição com função densidade de probabilidade dada por (3.91), os reduzidos valores considerados para v , e a reduzida dimensão das amostras não permitem conhecer a distribuição de amostragem.

Contrariamente às situações anteriores, quando se retiram amostras de uma população com função densidade de probabilidade definida por (3.92), a distribuição por amostragem é conhecida. Sendo \bar{X} a média de uma amostra, de dimensão n , retirada de uma população com distribuição $G(a, b)$, aplicando a função geradora de momentos de \bar{X} , demonstra-se que a distribuição das médias amostrais é $G(na, b/n)$.

Assim, nas duas primeiras situações, em que não foi possível obter os resultados por via analítica, recorreremos a técnicas de simulação, seguidas de ajustamentos, para obter os resultados que mais à frente apresentamos.

Para a simulação, geraram-se 200 000 amostras de dimensão 5 nas condições correspondentes a cada uma das situações descritas anteriormente, e que podemos agrupar da seguinte forma:

- i) Um primeiro grupo onde se considera que a distribuição de X corresponde a uma mistura de normais. Nesta situação, consideramos que uma distribuição normal base pode ser contaminada, com níveis de contaminação de 5%, 10% e 30%, por outra distribuição normal, obtendo-se, assim, uma mistura de normais. No contexto deste estudo, consideramos que a distribuição contaminante tem a mesma média que a distribuição contaminada mas com desvio padrão, σ_c , diferente (1.5, 2 e 3), adotando-se um procedimento semelhante, neste aspeto, ao que foi considerado em Infante (2004). A partir de agora, este grupo será denominado **NC**.

ii) Um segundo grupo em que se considera que a distribuição X segue uma distribuição t -Student, com diferentes graus de liberdade (4, 7 e 10), obtendo-se, assim, distribuições com diferentes graus de curtose. Daqui em diante, este grupo será denominado **sT**.

iii) Por fim, um grupo em que se considera que a distribuição de X é Gama com diferentes valores para o parâmetro de forma, a , igual a 2, 3 e 4, e com parâmetro de escala, b , igual a 1, obtendo-se, desta forma, distribuições com diferentes graus de assimetria e de curtose, que designaremos de grupo **G**.

Após a simulação e a standardização das amostras nas condições já referidas, realizamos uma avaliação de simetria e curtose, ajustando cada uma das distribuições por amostragem à curva da distribuição normal (Fig. A 3.1, em Anexos) e calculando, além de outras medidas, o coeficiente de assimetria de *Bowley*, γ_F , dado por

$$\gamma_F = \frac{F^{-1}(0.75) + F^{-1}(0.25) - 2F^{-1}(0.5)}{F^{-1}(0.75) - F^{-1}(0.25)}, \quad (3.93)$$

onde F^{-1} representa a função inversa da distribuição em avaliação, F , e o coeficiente de peso de caudas, τ_F , dado por

$$\tau_F = \frac{1}{2} \frac{\frac{F^{-1}(0.99) - F^{-1}(0.5)}{F^{-1}(0.75) - F^{-1}(0.5)} + \frac{F^{-1}(0.5) - F^{-1}(0.01)}{F^{-1}(0.5) - F^{-1}(0.25)}}{[\Phi^{-1}(0.99) - \Phi^{-1}(0.5)] / [\Phi^{-1}(0.75) - \Phi^{-1}(0.5)]}, \quad (3.94)$$

onde F^{-1} representa a função inversa da distribuição em avaliação, F , e Φ^{-1} a função inversa da distribuição normal standardizada, Φ .

Os resultados obtidos para os grupos **NC**, **sT** e **G**, são apresentados na Tabela 3.12 da qual podemos retirar as seguintes conclusões:

1) Nos casos **NC** e **sT** as distribuições das médias amostrais são aproximadamente simétricas, γ_F é zero ou muito próximo de zero; no caso **G**, as distribuições das médias amostrais são assimétricas, diminuindo o coeficiente de assimetria à medida que aumenta o parâmetro de forma, a , da distribuição Gama.

- 2) Em todos os casos, os pesos das caudas são superiores aos pesos das caudas da distribuição normal.
- 3) No grupo **NC**, os valores de τ_F aumentam à medida que aumenta a contaminação, p , e o desvio padrão, σ_c , da distribuição contaminante; no grupo **sT**, τ_F diminui à medida que aumentamos o número de graus de liberdade, v , da distribuição *t-Student*; no grupo **G**, os valores de τ_F são idênticos para os três valores do parâmetro de forma considerados.
- 4) Em relação ao intervalo interquartilício, IIQ, e ao intervalo de variação, IV, verificamos que no grupo **NC**, tanto os valores de IIQ, como os de IV, vão aumentando à medida que aumenta a contaminação e o desvio padrão da distribuição contaminante; no grupo **sT**, os valores de ambos os intervalos vão diminuindo à medida que aumenta o número de graus de liberdade da distribuição, pois o aumento de v aproxima a distribuição *t-Student* da distribuição normal; no grupo **G**, ambos os intervalos, IIQ e IV, vão aumentando à medida que aumenta o parâmetro de forma da distribuição Gama.

F	σ_c	τ_F	γ_F	$\chi_{0.1\%}$	$\chi_{1\%}$	$\chi_{25\%}$	$\chi_{50\%}$	$\chi_{75\%}$	$\chi_{99\%}$	$\chi_{99.9\%}$	IIQ	IV
NC(0%)	1	1,00	0,00	-1,401	-1,050	-0,304	-0,001	0,300	1,042	1,384	0,604	2,786
NC(5%)	1,5	1,01	0,00	-1,419	-1,074	-0,310	0,001	0,310	1,081	1,446	0,619	2,865
	2	1,03	0,00	-1,600	-1,137	-0,321	-0,001	0,319	1,131	1,575	0,640	3,174
	3	1,14	0,00	-2,007	-1,310	-0,337	-0,002	0,332	1,308	1,928	0,668	3,935
NC(10%)	1,5	1,01	0,00	-1,518	-1,108	-0,317	0,000	0,318	1,106	1,483	0,635	3,001
	2	1,05	-0,01	-1,663	-1,216	-0,336	0,001	0,334	1,219	1,660	0,671	3,322
	3	1,21	0,00	-2,181	-1,524	-0,369	-0,003	0,363	1,529	2,207	0,732	4,388
NC(30%)	1,5	1,02	0,00	-1,657	-1,237	-0,349	0,002	0,352	1,238	1,681	0,701	3,338
	2	1,07	-0,01	-1,990	-1,473	-0,405	-0,002	0,395	1,470	2,040	0,800	4,029
	3	1,21	0,00	-2,889	-2,142	-0,506	0,002	0,504	2,078	2,846	1,010	5,735
F	df	τ_F	γ_F	$\chi_{0.1\%}$	$\chi_{1\%}$	$\chi_{25\%}$	$\chi_{50\%}$	$\chi_{75\%}$	$\chi_{99\%}$	$\chi_{99.9\%}$	IIQ	IV
t	4	1,18	0,00	-2,569	-1,569	-0,386	0,000	0,387	1,571	2,513	0,773	5,082
	7	1,05	-0,01	-1,773	-1,259	-0,349	0,001	0,347	1,263	1,785	0,696	3,558
	10	1,04	0,00	-1,633	-1,188	-0,331	-0,002	0,327	1,184	1,596	0,658	3,229
F	(a, b)	τ_F	γ_F	$\chi_{0.1\%}$	$\chi_{1\%}$	$\chi_{25\%}$	$\chi_{50\%}$	$\chi_{75\%}$	$\chi_{99\%}$	$\chi_{99.9\%}$	IIQ	IV
Gama	(2, 1)	1,01	0,07	0,586	0,826	1,549	1,939	2,388	3,771	4,569	0,838	3,982
	(3, 1)	1,01	0,06	1,165	1,510	2,450	2,933	3,476	5,128	6,037	1,027	4,872
	(4, 1)	1,00	0,05	1,799	2,216	3,362	3,932	4,568	6,389	7,369	1,205	5,571

Tabela 3.12. – Valores dos coeficientes de assimetria de *Bowley* (γ_F), peso de caudas (τ_F), IIQ e IV e diferentes quantis, para os diferentes grupos, com $n = 5$.

5) Os valores de IIQ e de IV, nos diferentes grupos, são sempre superiores aos correspondentes valores da distribuição normal.

6) Nos grupos **NC** e **sT**, os valores dos quantis $\chi_{0.1\%}$ e $\chi_{99.9\%}$ e dos quantis $\chi_{1\%}$ e $\chi_{99\%}$ não são simétricos, o que desde já aponta para que os limites de controlo da carta para médias sejam ligeiramente assimétricos, apesar de simétricos em probabilidade.

Das conclusões retiradas a partir da Tabela 3.12. e dos ajustamentos de cada uma das situações à curva de Gauss (em Anexo), podemos concluir que as situações em que existe maior probabilidade de ajustamento a uma distribuição normal são as dos casos **NC** (0.05; 1.5) e **NC** (0.1; 1.5), com menor grau de contaminação e menor desvio padrão da distribuição contaminante.

3.3.5.8.2. Ajustamento das Distribuições por Amostragem

Nas situações em que se desconhece a distribuição por amostragem, os parâmetros das cartas de controlo podem ser obtidos de diferentes formas.

Por exemplo, Infante (2004), em duas das situações consideradas, distribuição normal contaminada e distribuição de *Burr*, obtém os parâmetros da carta de controlo para a média através de simulação. Lin e Chou (2007) recorrem à simulação para estimar os parâmetros da distribuição por amostragem se ajusta às amostras reduzidas retiradas de populações com distribuições *t-Student* e Gama. Yeh *et al.* (2011), recorrendo à simulação, utilizam a metodologia de Burr (1973) para obter os parâmetros de distribuição de *Burr* que melhor se ajusta à distribuição das médias amostrais.

Neste estudo, utilizamos uma metodologia idêntica à de Yeh *et al.* (2011). Simulamos amostras, de dimensão 5, a partir de populações com a distribuição de interesse (normal contaminada e *t-Student*). Estandardizamos as amostras obtidas e procedemos ao ajustamento através do suplemento EasyFitXL do Excel, que utiliza o

método da máxima verossimilhança para estimar todos os parâmetros da distribuição ajustada. O melhor ajustamento é dado com base no teste de Anderson e Darling (1952) (porque utilizamos amostras com dimensão inferior a 25). Posto isto, estamos em condições de obter qualquer parâmetro da carta de controlo e qualquer uma das medidas de desempenho pretendidas.

Para os grupos NC e sT, foram obtidas três situações de ajustamento à normal, duas delas que já suspeitávamos, três situações de bom ajustamento a uma distribuição de *Burr (4P)* (Burr (1942)) e seis situações de bom ajustamento a uma distribuição de *JohnsonSU* (Johnson *et al.* (1994)).

A distribuição de *Burr*, com quatro parâmetros, tem função densidade de probabilidade e função distribuição, respetivamente, por:

$$f(x) = \frac{\alpha \kappa \left(\frac{x-\gamma}{\beta}\right)^{\alpha-1}}{\beta \left[1 + \left(\frac{x-\gamma}{\beta}\right)^\alpha\right]^{\kappa+1}}, \kappa, \alpha, \beta > 0, \gamma \leq x < +\infty, \quad (3.95)$$

$$F(x) = 1 - \left[1 + \left(\frac{x-\gamma}{\beta}\right)^\alpha\right]^{-\kappa}, \quad (3.96)$$

onde k e α são parâmetros de forma, β parâmetro de escala e γ parâmetro de localização.

A distribuição de *JohnsonSU*, tem função densidade de probabilidade e função distribuição definidas, respetivamente, por:

$$f(x) = \frac{\delta}{\lambda \sqrt{2\pi} \sqrt{z^2 + 1}} \exp\left[-\frac{1}{2} \left[\gamma + \delta \ln(z + \sqrt{z^2 + 1})\right]^2\right], \gamma, \xi \in \mathbb{R}; \delta, \lambda > 0, -\infty < x < +\infty, \quad (3.97)$$

$$F(x) = \Phi\left[\gamma + \delta \ln(z + \sqrt{z^2 + 1})\right], \quad (3.98)$$

onde $z \equiv \frac{x-\xi}{\lambda}$, γ e δ são parâmetros de forma, λ parâmetro de escala, ξ parâmetro de

localização e Φ o integral de *Laplace*.

Na literatura podem encontrar-se diversos trabalhos que apresentam expressões algébricas para o cálculo dos limites de controlo. Uns consideram limites assimétricos em probabilidade (por exemplo, Yourstone e Zimmer (1992) e Lin e Chou (2007)), outros consideram limites simétricos (por exemplo Infante (2004) e Yeh *et al.* (2011)), sendo considerada, em geral, distribuição de *Burr* para ajustamento à distribuição das médias amostrais.

Neste estudo vamos considerar limites simétricos em probabilidade, de modo que a probabilidade de cometer um erro do tipo I seja igual a 0,0027.

Assim, considerando M_i e S_i , respetivamente, a média e o desvio padrão da distribuição ajustada e p_l e p_s tais que $F(LIC) = p_l$ e $F(LSC) = p_s$, os limites de controlo são dados por

$$LIC = \mu_0 - \left(\frac{M_i - F^{-1}(p_l)}{S_i} \right) \frac{\sigma_0}{\sqrt{n_i}} \quad \text{e} \quad LSC = \mu_0 + \left(\frac{F^{-1}(p_s) - M_i}{S_i} \right) \frac{\sigma_0}{\sqrt{n_i}}, \quad (3.99)$$

onde $p_l = 0,00135$, $p_s = 0,99865$ de modo a que ocorram, em média, 27 falsos alarmes a cada 10 000 amostras.

Considerando uma alteração do processo, de μ_0 para $\mu_0 + \lambda\sigma$, $\lambda > 0$, a transformação $\frac{\bar{X}_i - (\mu_0 + \lambda\sigma)}{\sigma / \sqrt{n_i}} = \frac{Y_i - M_i}{S_i}$, $i = 1, 2$, em que Y_i tem distribuição F (Normal, *Burr*, *JohnsonSU* ou *Gama*) com média M_i e desvio padrão S_i , permite-nos obter o valor estimado da probabilidade de se cometer um erro de tipo II, dada por

$$\hat{\beta} = F(M_i + L_i S_i - S_i \lambda \sqrt{n_i}) - F(M_i - L_i S_i - S_i \lambda \sqrt{n_i}), \quad i = 1, 2, \quad (3.100)$$

onde $n_1 = n_2 = n$ em LSI, FSI e VSI, e os valores das probabilidades estimadas para p_{i1} e p_{i2} , apresentadas em (3.15), (3.16) e (3.17), dadas por

$$\hat{p}_i = \frac{F(M_i + w_i S_i - S_i \lambda \sqrt{n_i}) - F(M_i - w_i S_i - S_i \lambda \sqrt{n_i})}{F(M_i + L_i S_i - S_i \lambda \sqrt{n_i}) - F(M_i - L_i S_i - S_i \lambda \sqrt{n_i})}, \quad i = 1, 2, \quad (3.101)$$

$$\hat{p}_{i1} = F\left(M_i + w_i S_i - S_i \lambda \sqrt{n_i}\right) - F\left(M_i - w_i S_i - S_i \lambda \sqrt{n_i}\right), \quad (3.102)$$

$$\begin{aligned} \hat{p}_{i2} = & F\left(M_i + L_i S_i - S_i \lambda \sqrt{n_i}\right) - F\left(M_i + w_i S_i - S_i \lambda \sqrt{n_i}\right) + \\ & + F\left(M_i - w_i S_i - S_i \lambda \sqrt{n_i}\right) - F\left(M_i - L_i S_i - S_i \lambda \sqrt{n_i}\right), \end{aligned} \quad (3.103)$$

sendo os valores de (3.36), (3.38), (3.39) também estimados, substituindo-se Φ e Φ^{-1} por F e F^{-1} nas respectivas expressões.

Na Tabela 3.13. e Tabela 3.21. são apresentadas as distribuições obtidas por ajustamento para os grupos NC e sT, os respetivos parâmetros e os limites controlo obtidos de acordo com a simetria de probabilidade.

Na Tabela 3.27. é apresentada a distribuição Gama por amostragem, os parâmetros da distribuição e os limites da carta de controlo para a média, obtidos quando a probabilidade de obter um erro do tipo I é 0,0027.

Os parâmetros de escala e de localização, nos casos de ajustamento, bem como os limites de controlo, em todas as situações, dão indicações claras sobre o afastamento à normalidade. Por exemplo, os limites de controlo em $t(4)$ e $G(2,1)$ são as situações de maior afastamento, o que também já tinha sido comprovado pelos coeficientes de assimetria e de pesos de caudas.

3.3.5.8.3. Qualidade com Distribuição de Mistura de Normais,

t-Student e Gama

Em relação aos grupos NC e sT, obtivemos ajustamentos para todas as situações consideradas. Os parâmetros das distribuições ajustadas, os valores a 5% do teste de *Anderson Darling*, os múltiplos do desvio padrão nos limites de controlo e os respetivos limites de controlo são apresentados na Tabela 3.13. e na Tabela 3.21.. Contudo, devido à quantidade de combinações possíveis vamos apresentar os resultados relativos aos maiores afastamentos da distribuição normal, deixando para consulta os restantes em Anexos.

Da Tabela 3.13. podemos concluir que:

- 1) Para cada valor do desvio padrão, σ_C , quanto maior é a contaminação, mais afastados estão os limites de controlo, apesar de termos considerado a simetria em probabilidade para os mesmos.
- 2) Quando o desvio padrão aumenta, para o mesmo nível de contaminação, mais afastados entre si estão os limites de controlo.
- 3) Com base no teste A-D, todos os ajustamentos se podem considerar muitos bons, com exceção do corresponde à situação NC($p = 0.3$; $\sigma_C = 3$).
- 4) No caso referido em 3) existe ajustamento, mas o *p-value* ($p = \exp(1.2937 - 5.709A^{*2} - 0.0186(A^{*2})^2)$), com $A^{*2} = A^2(1 + 0.75/n + 2.25/n^2)$, que depende do valor do A^2 , está muito próximo de zero, levando a concluir que o ajustamento à distribuição de *Burr* (4P) é fraco.

Distribuição da Qualidade		Distribuição por Amostragem	Teste A-D Valor Crítico (5%) 2,5018	Ajustamento						
% Cont.	σ_c			Parâmetros	Média	DP	-L	L	LIC	LSC
0	---	Normal	---	$\mu = 0; \sigma = 1$	0,0000	1,0000	2,999	3,027	-1,341	1,354
5	1,5	Normal	$A^2 = 0,5599$	$\mu = 0,0012; \sigma = 1,0012$	0,0012	1,0012	-3,003	3,005	-1,388	1,408
	2	JohnsonSU	$A^2 = 0,3342$	$\gamma = 0,0048; \delta = 4,9765;$ $\lambda = 4,8848; \xi = 0,0060$	0,0012	1,0017	-3,126	3,127	-1,496	1,502
	3	JohnsonSU	$A^2 = 0,6298$	$\gamma = 0,0061; \delta = 2,4556;$ $\lambda = 2,2605; \xi = 0,0075$	0,0014	1,0024	-3,505	3,499	-1,873	1,870
10	1,5	Normal	$A^2 = 0,6862$	$\mu = -0,0038; \sigma = 1,0024$	-0,0038	1,0024	-3,011	3,004	-1,462	1,426
	2	JohnsonSU	$A^2 = 0,2852$	$\gamma = -0,1143; \delta = 3,8753;$ $\lambda = 3,7531; \xi = -0,1103$	0,0042	1,0021	-3,171	3,241	-1,621	1,630
	3	Burr (4P)	$A^2 = 0,8879$	$\kappa = 1,1396; \alpha = 69,6310;$ $\beta = 40,4000; \gamma = -40,2870$	0,0045	1,0022	-3,613	3,618	-2,119	2,141
30	1,5	Normal	$A^2 = 1,4302$	$\mu = 0,0009; \sigma = 0,9962$	0,0009	0,9962	-2,998	3,000	-1,611	1,617
	2	JohnsonSU	$A^2 = 0,4084$	$\gamma = -0,0742; \delta = 3,6107;$ $\lambda = 3,4734; \xi = -0,0733$	0,0008	1,0003	-3,206	3,254	-1,964	1,989
	3	Burr (4P)	$A^2 = 2,3136$	$\kappa = 1,3701; \alpha = 21,0820;$ $\beta = 13,2540; \gamma = -12,9940$	-0,0022	1,0041	-3,446	3,648	-2,762	2,805

Tabela 3.13. – Distribuições por amostragem ajustadas, parâmetros, valores de L e dos limites de controlo para o grupo NC, com diferentes graus de contaminação, p, e diferentes σ_C da distribuição contaminante, com $n = 5$.

Vamos agora comparar o desempenho do método LSI com os métodos FSI e VSI, quando a característica X da qualidade é normal contaminada (NC). Para tal, vamos utilizar os rácios $Q_{3.9}$ e $Q_{3.10}$ que designam a variação relativa, em %, no valor do AATS, quando se usa o método FSI, ou o método VSI, em vez do método LSI, dados, respetivamente, por

$$Q_{3,9} = \left(\frac{AATS_{FSI}}{AATS_{LSI}} - 1 \right) \times 100\% , \tag{3.104}$$

e por
$$Q_{3,10} = \left(\frac{AATS_{VSI}}{AATS_{LSI}} - 1 \right) \times 100\% . \tag{3.105}$$

Alguns dos valores obtidos para $Q_{3,9}$ estão na Tabela 3.14. da qual podemos retirar as seguintes conclusões:

- 1) O método LSI continua a ser mais eficaz do que FSI, no mesmo tipo de alterações da média, aumentando a sua eficácia até $\lambda=2$ quando $\sigma_C = 3$.
- 2) LSI aumenta a eficácia, relativamente a FSI, à medida que aumenta o desvio padrão da distriminante.
- 3) Para os mesmos valores do desvio padrão, a eficácia de LSI aumenta, ligeiramente, com o aumento da contaminação.
- 4) As reduções obtidas com LSI chegam a ser dez vezes superiores às obtidas com FSI.

(p, σ_c)	LSI		FSI		LSI		FSI		LSI		FSI		LSI		FSI	
	$(0,1, 1,5)$		$(0,1, 2)$		$(0,1, 3)$		$(0,3, 1,5)$		$(0,3, 2)$		$(0,3, 3)$					
λ	AATS	$Q_{3,9}$	AATS	$Q_{3,9}$	AATS	$Q_{3,9}$	AATS	$Q_{3,9}$	AATS	$Q_{3,9}$	AATS	$Q_{3,9}$	AATS	$Q_{3,9}$		
0	370,02	0,0	370,04	0,0	370,06	-0,1	370,03	0,0	370,01	0,0	368,82	-0,1				
0,25	123,42	7,9	163,73	8,1	212,54	8,2	128,40	7,9	167,58	8,1	232,88	8,3				
0,5	24,96	32,6	38,55	34,4	65,03	35,7	26,29	32,8	40,15	34,5	74,78	35,9				
0,75	6,01	72,1	9,06	80,9	16,37	88,5	6,26	72,8	9,43	81,5	19,55	90,5				
1	1,99	102,2	2,62	128,9	4,23	160,4	2,04	103,7	2,70	131,1	5,02	171,1				
1,25	1,01	87,5	1,15	125,6	1,47	187,9	1,03	88,4	1,16	128,6	1,63	219,1				
1,5	0,74	45,0	0,77	72,0	0,84	122,7	0,75	44,9	0,78	73,9	0,87	156,3				
1,75	0,65	10,7	0,66	24,1	0,68	48,5	0,66	10,4	0,66	24,9	0,68	66,9				
2	0,63	-7,6	0,63	-1,8	0,64	8,5	0,63	-7,8	0,63	-1,5	0,63	16,6				
2,5	0,61	-17,7	0,61	-16,8	0,61	-14,7	0,61	-17,7	0,61	-16,7	0,61	-13,6				
3	0,61	-18,4	0,61	-18,3	0,61	-17,9	0,61	-18,4	0,61	-18,3	0,61	-17,9				

Tabela 3.14. – Valores de $AATS_{LSI}$ e de $Q_{3,9}$ em função de λ , no grupo NC, com $d = 1$ em FSI, $p = 10\%$ e 30% e diferentes σ_C da distribuição contaminante, com $n = 5$.

Os valores relativos ao rácio $Q_{3,10}$, encontram-se na Tabela 3.15. e na Tabela 3.16., das quais podemos retirar as seguintes conclusões:

- 5) O comportamento do rácio $Q_{3,10}$ é idêntico ao do rácio $Q_{3,2}$, o que indica que LSI continua a ser mais eficaz, do que VSI, para alterações do tipo $\lambda \geq 1,5$.

(p, σ_c)	LSI VSI			LSI VSI			LSI VSI		
	$(0.1, 1.5)$			$(0.1, 2)$			$(0.1, 3)$		
(d_1, d_2)	---	$(0.1, 1.5)$	$(0.1, 2.0)$	---	$(0.1, 1.5)$	$(0.1, 2.0)$	---	$(0.1, 1.5)$	$(0.1, 2.0)$
w	---	0,916	0,629	---	0,901	0,617	---	0,860	0,587
λ	AATS		$Q_{3,10}$	AATS		$Q_{3,10}$	AATS		$Q_{3,10}$
0	370,02	-0,2	-0,1	370,04	0,2	0,3	370,06	0,2	0,0
0,25	123,42	-2,4	-4,0	163,73	-2,6	-4,5	212,54	-4,7	-7,3
0,5	24,96	-8,6	-13,2	38,55	-10,96	-16,8	65,03	-17,0	-24,1
0,75	6,01	-16,0	-20,5	9,06	-20,6	-27,0	16,37	-29,1	-36,3
1	1,99	-16,1	-11,8	2,62	-21,6	-20,1	4,23	-29,7	-30,6
1,25	1,01	-4,5	14,4	1,15	-7,85	8,5	1,47	-12,6	-0,3
1,5	0,74	7,9	37,4	0,77	7,2	35,4	0,84	6,9	32,5
1,75	0,65	14,7	48,9	0,66	14,7	48,4	0,68	15,2	47,8
2	0,63	17,3	53,2	0,63	17,3	53,1	0,64	17,6	52,9
2,5	0,61	18,3	55,0	0,61	18,3	54,9	0,61	18,4	55,0
3	0,61	18,3	55,0	0,61	18,3	55,0	0,61	18,4	55,1

Tabela 3.15. – Valores de AATS_{LSI}, de $Q_{3,10}$ em função de λ , no grupo NC, com $(d_1, d_2) = (0.1, 1.5)$ e $(d_1, d_2) = (0.1, 2)$ em VSI, $p = 10\%$ e diferentes σ_c da distribuição contaminante, com $n = 5$.

- 6) Quando $(d_1, d_2) = (0.1, 1.5)$ em VSI, com o aumento do desvio padrão VSI perde eficácia nas alterações em que é mais eficaz e LSI ganha eficácia nas alterações em que é mais eficaz.
- 7) Em geral, quando $(d_1, d_2) = (0.1, 2)$ em VSI, ambos os métodos perdem eficácia, sendo mais notória quando a percentagem de contaminação é de 10%.

(p, σ_c)	LSI VSI			LSI VSI			LSI VSI		
	$(0.3, 1.5)$			$(0.3, 2)$			$(0.3, 3)$		
(d_1, d_2)	---	$(0.1, 1.5)$	$(0.1, 2.0)$	---	$(0.1, 1.5)$	$(0.1, 2.0)$	---	$(0.1, 1.5)$	$(0.1, 2.0)$
w	---	0,911	0,627	---	0,893	0,610	---	0,850	0,577
λ	AATS		$Q_{3,10}$	AATS		$Q_{3,10}$	AATS		$Q_{3,10}$
0	370,03	0,1	0,2	370,01	0,0	0,0	368,82	-0,3	-0,3
0,25	128,40	-2,5	-4,0	167,58	-3,0	-5,1	232,88	-5,2	-8,4
0,5	26,29	-9,6	-14,3	40,15	-11,7	-17,7	74,78	-17,3	-24,8
0,75	6,26	-17,6	-22,2	9,43	-21,6	-28,1	19,55	-29,1	-36,6
1	2,04	-17,7	-13,4	2,70	-22,5	-21,1	5,02	-29,9	-31,9
1,25	1,03	-5,6	13,2	1,16	-8,3	7,8	1,63	-13,1	-2,6
1,5	0,75	7,3	36,6	0,78	7,1	35,1	0,87	7,7	32,6
1,75	0,66	14,3	48,4	0,66	14,6	48,2	0,68	16,5	49,1
2	0,63	17,1	53,0	0,63	17,3	53,0	0,63	18,4	53,8
2,5	0,61	18,3	54,9	0,61	18,3	55,0	0,61	18,6	55,2
3	0,61	18,3	55,0	0,61	18,3	55,0	0,61	18,4	55,1

Tabela 3.16. – Valores de AATS_{LSI}, de $Q_{3,10}$ em função de λ , no grupo NC, com $(d_1, d_2) = (0.1, 1.5)$ e $(d_1, d_2) = (0.1, 2)$ em VSI, $p = 30\%$ e diferentes σ_c da distribuição contaminante, com $n = 5$.

- 8) O método LSI perde eficácia quando aumenta o desvio padrão da distribuição contaminante.
- 9) Para os mesmos valores do desvio padrão, o aumento da contaminação tem uma reduzida influência no desempenho dos métodos.

Tal como foi feito para as recentes comparações, vamos considerar os valores do AATS e do ANOS, dados por (3.41) e por (3.46) e os valores obtidos com (3.100), (3.101), (3.102) e (3.103), para comparar LSI com VSSI, VSS e VP.

Para a comparação de LSI com VSSI, vamos utilizar os rácios $Q_{3.11}$ e $Q_{3.12}$ que designam a variação relativa, em %, no valor do AATS, quando se usa o método VSSI, em vez do método LSI, e a variação relativa, em %, no valor do ANOS, quando se usa VSSI, em vez de LSI, dados, respetivamente, por

$$Q_{3.11} = \left(\frac{AATS_{VSSI}}{AATS_{LSI}} - 1 \right) \times 100\% . \quad (3.106)$$

e por

$$Q_{3.12} = \left(\frac{ANOS_{VSSI}}{ANOS_{LSI}} - 1 \right) \times 100\% . \quad (3.107)$$

Dos resultados apresentados na Tabela 3.17., podemos concluir que:

- 1) O comportamento do rácio $Q_{3.11}$ é idêntico ao do rácio $Q_{3.3}$, pois o tipo de alterações em que LSI é mais eficaz, do que VSSI, é o mesmo, $\lambda \geq 1.25$.
- 2) De igual forma, o comportamento do rácio $Q_{3.12}$ é idêntico ao do rácio $Q_{3.4}$, pois o tipo de alterações em que se inspecionam menos itens em LSI, relativamente a VSSI, é o mesmo, $\lambda \geq 1.5$.
- 3) A eficácia, em termos de AATS, do método LSI piora para $1.25 \leq \lambda < 2$ e melhora para $\lambda \geq 2$, quando aumenta o desvio padrão da distribuição contaminante.
- 4) LSI melhora a sua eficácia, em relação à normalidade e a VSSI, em grandes alterações da média, $\lambda \geq 2.5$, para o par de dimensões amostrais $(n_1, n_2) = (2, 7)$.
- 5) O aumento da contaminação melhora o desempenho de LSI, em termos de AATS, nas alterações em que LSI é mais eficaz; nas alterações em que VSSI é mais eficaz, o aumento da contaminação melhora o desempenho de VSSI.
- 6) Em termos de ANOS, o aumento da contaminação não provoca alterações significativas nos valores do rácio.

(p, σ_c)		$(0,1,1,5)$						(p, σ_c)		$(0,1,2)$						(p, σ_c)		$(0,1,3)$					
(n_1, n_2)		$(1, 15)$		$(1, 10)$		$(2, 7)$		(n_1, n_2)		$(1, 15)$		$(1, 10)$		$(2, 7)$		(n_1, n_2)		$(1, 15)$		$(1, 10)$		$(2, 7)$	
(d_1, d_2)		$(0,1, 1,36)$		$(0,1, 1,72)$		$(0,1, 2,35)$		(d_1, d_2)		$(0,1, 1,36)$		$(0,1, 1,72)$		$(0,1, 2,35)$		(d_1, d_2)		$(0,1, 1,36)$		$(0,1, 1,72)$		$(0,1, 2,35)$	
(w_1, w_2)		$(1,06, 1,06)$		$(0,76, 0,76)$		$(0,52, 0,52)$		(w_1, w_2)		$(1,05, 1,05)$		$(0,75, 0,75)$		$(0,51, 0,51)$		(w_1, w_2)		$(1,00, 1,00)$		$(0,71, 0,71)$		$(0,49, 0,49)$	
λ	ANOS	$Q_{3,11}$	$Q_{3,12}$	$Q_{3,11}$	$Q_{3,12}$	$Q_{3,11}$	$Q_{3,12}$	ANOS	$Q_{3,11}$	$Q_{3,12}$	$Q_{3,11}$	$Q_{3,12}$	$Q_{3,11}$	$Q_{3,12}$	ANOS	$Q_{3,11}$	$Q_{3,12}$	$Q_{3,11}$	$Q_{3,12}$	$Q_{3,11}$	$Q_{3,12}$	$Q_{3,11}$	$Q_{3,12}$
0	1851,99	-0,2	0,4	-0,3	0,4	-0,2	0,2	1851,95	0,2	-0,4	0,2	-0,3	0,3	-0,1	1851,90	0,2	-0,3	0,3	-0,2	0,4	-0,4		
0,25	668,12	-25,5	-8,0	-17,0	-3,3	-9,9	-0,5	887,15	-22,3	-2,8	-15,5	-0,1	-9,8	0,8	1152,41	-19,4	7,1	-15,3	5,8	-11,7	3,2		
0,5	168,02	-64,5	-36,3	-51,6	-22,5	-34,1	-9,1	261,53	-70,7	-38,7	-57,0	-22,5	-39,3	-8,6	443,55	-75,6	-34,4	-61,8	-16,9	-45,9	-5,2		
0,75	54,19	-50,3	-37,6	-48,7	-28,5	-38,7	-14,4	84,49	-66,2	-49,9	-62,8	-36,0	-51,2	-17,9	156,80	-80,7	-60,3	-75,4	-41,1	-62,8	-19,3		
1	22,64	7,4	-14,1	-0,4	-19,0	-4,6	-11,8	32,55	-19,4	-34,8	-24,2	-32,4	-23,9	-18,8	57,54	-52,3	-57,7	-52,9	-47,8	-46,7	-26,9		
1,25	12,01	67,4	33,1	58,8	4,0	46,8	-2,8	15,46	44,6	7,2	37,7	-12,4	30,9	-11,0	23,72	5,6	-27,0	2,8	-35,1	5,1	-23,7		
1,5	7,87	88,0	91,1	85,9	35,4	78,1	9,2	9,15	75,7	69,2	74,2	21,0	71,4	2,9	11,89	51,0	33,6	52,5	-1,9	58,6	-9,1		
1,75	6,12	79,5	136,3	85,4	63,8	88,3	19,4	6,62	73,0	126,6	79,4	56,0	86,8	17,1	7,57	59,4	103,9	68,3	40,8	83,4	10,9		
2	5,39	63,1	156,6	75,4	79,1	89,3	23,7	5,58	59,7	159,7	72,6	78,8	90,1	25,1	5,95	52,1	154,2	67,1	73,5	90,5	25,3		
2,5	5,03	36,2	143,3	56,3	75,3	85,5	16,3	5,05	36,1	160,8	56,8	83,7	87,0	20,0	5,12	35,3	177,8	57,1	91,5	89,2	25,2		
3	5,00	21,7	105,4	45,6	55,5	82,3	6,3	5,00	23,0	125,9	47,2	65,8	83,2	8,4	5,02	24,9	152,5	49,5	79,2	84,7	11,8		

(p, σ_c)		$(0,3,1,5)$						(p, σ_c)		$(0,3,2)$						(p, σ_c)		$(0,3,3)$					
(n_1, n_2)		$(1, 15)$		$(1, 10)$		$(2, 7)$		(n_1, n_2)		$(1, 15)$		$(1, 10)$		$(2, 7)$		(n_1, n_2)		$(1, 15)$		$(1, 10)$		$(2, 7)$	
(d_1, d_2)		$(0,1, 1,36)$		$(0,1, 1,72)$		$(0,1, 2,35)$		(d_1, d_2)		$(0,1, 1,36)$		$(0,1, 1,72)$		$(0,1, 2,35)$		(d_1, d_2)		$(0,1, 1,36)$		$(0,1, 1,72)$		$(0,1, 2,35)$	
(w_1, w_2)		$(1,06, 1,06)$		$(0,76, 0,76)$		$(0,52, 0,52)$		(w_1, w_2)		$(1,04, 1,04)$		$(0,74, 0,74)$		$(0,50, 0,50)$		(w_1, w_2)		$(0,99, 0,99)$		$(0,70, 0,70)$		$(0,48, 0,48)$	
λ	ANOS	$Q_{3,14}$	$Q_{3,12}$	$Q_{3,11}$	$Q_{3,12}$	$Q_{3,11}$	$Q_{3,12}$	ANOS	$Q_{3,11}$	$Q_{3,12}$	$Q_{3,11}$	$Q_{3,12}$	$Q_{3,11}$	$Q_{3,12}$	ANOS	$Q_{3,11}$	$Q_{3,12}$	$Q_{3,11}$	$Q_{3,12}$	$Q_{3,11}$	$Q_{3,12}$	$Q_{3,11}$	$Q_{3,12}$
0	1851,96	0,01	-0,1	0,2	-0,2	0,3	-0,1	1851,77	0,1	-0,1	-0,0	0,1	-0,1	0,1	1845,72	-0,1	0,3	-0,1	0,3	0,1	0,2		
0,25	695,11	-25,5	-7,6	-16,9	-3,1	-9,7	-0,4	908,10	-22,5	-2,0	-15,9	0,5	-10,4	1,1	1263,07	-19,5	8,6	-16,3	6,8	-13,3	3,8		
0,5	177,13	-66,1	-37,4	-53,2	-23,1	-35,5	-9,4	272,53	-71,5	-38,9	-57,8	-22,4	-40,3	-8,5	510,83	-75,1	-30,9	-61,4	-14,1	-46,2	-3,8		
0,75	56,60	-52,7	-39,6	-50,9	-30,0	-41,0	-15,2	88,13	-67,7	-51,0	-64,1	-36,8	-52,5	-18,2	188,66	-83,1	-60,8	-77,1	-40,2	-63,7	-18,3		
1	23,26	3,9	-16,2	-3,4	-20,6	-7,1	-12,7	33,66	-22,2	-36,7	-26,6	-33,8	-25,8	-19,6	70,54	-59,8	-62,6	-59,4	-50,6	-51,6	-27,8		
1,25	12,17	63,5	31,7	55,6	2,9	44,6	-3,4	15,80	41,6	5,1	35,1	-13,9	29,2	-11,9	28,52	-4,7	-37,8	-6,8	-41,9	-2,6	-27,4		
1,5	7,90	84,5	91,0	83,0	35,1	76,6	9,1	9,25	73,6	67,6	72,4	20,0	70,4	2,3	13,61	47,0	17,6	48,6	-11,9	55,8	-14,5		
1,75	6,12	76,9	137,1	83,3	64,2	87,6	19,6	6,65	71,6	126,0	78,3	55,6	86,4	16,9	8,20	59,5	89,3	68,4	31,3	84,0	6,3		
2	5,39	61,3	157,9	74,1	79,7	89,2	23,9	5,60	58,8	160,1	71,9	78,8	90,0	25,3	6,19	53,0	146,2	67,9	67,8	91,5	23,3		
2,5	5,03	35,6	144,7	56,0	75,9	85,6	16,2	5,06	35,9	162,2	56,7	84,3	87,0	20,4	5,15	36,0	181,5	57,6	92,9	89,7	27,4		
3	5,00	21,6	106,2	45,7	55,7	82,5	6,0	5,00	23,1	127,6	47,3	66,7	83,2	8,7	5,02	25,6	162,2	50,0	84,2	84,9	14,5		

Tabela 3.17. – Valores de ANOS_{LSI}, $Q_{3,11}$ e de $Q_{3,12}$ em função de λ , no grupo NC, com diferentes pares de amostragem e de dimensões amostrais em VSSI, $p = 10\%$ e 30% e diferentes σ_c da distribuição contaminante, com $n = 5$.

7) O aumento da contaminação melhora o desempenho de LSI, em termos de AATS, nas alterações em que LSI é mais eficaz; nas alterações em que VSSI é mais eficaz, o aumento da contaminação melhora o desempenho de VSSI.

8) Em termos de ANOS, o aumento da contaminação não provoca alterações significativas nos valores do rácio.

Na comparação dos desempenhos de LSI e de VSS, vamos utilizar os rácios $Q_{3,13}$ e $Q_{3,14}$ que designam a variação relativa, em %, no valor do AATS, quando se usa o método VSS, em vez do método LSI, e a variação relativa, em %, no valor do ANOS, quando se usa VSS, em vez de LSI, dados, respetivamente, por

$$Q_{3,13} = \left(\frac{AATS_{VSS}}{AATS_{LSI}} - 1 \right) \times 100\% . \tag{3.108}$$

e por

$$Q_{3,14} = \left(\frac{ANOS_{VSS}}{ANOS_{LSI}} - 1 \right) \times 100\% . \tag{3.109}$$

Dos resultados obtidos, que apresentamos na Tabela 3.18. e na Tabela 3.19., podemos tirar as seguintes conclusões:

- 1) O comportamento dos rácios $Q_{3,13}$ e $Q_{3,14}$ é bastante idêntico ao comportamento dos rácios $Q_{3,3}$ e $Q_{3,4}$, significando que a não normalidade da característica da qualidade não altera (ou altera muito pouco) o desempenho dos métodos.
- 2) O facto de a característica da qualidade ter distribuição normal contaminada não altera o tipo de alterações em que LSI tem melhor desempenho do que VSS, tanto em termos de AATS como em termos de ANOS.
- 3) Nas alterações do tipo $\lambda \leq 2$, o desempenho do método LSI, em termos de AATS, piora, mas melhora quando $\lambda \geq 2.5$, com o aumento do desvio padrão, e quando a contaminação é de 10%.

(p, α_c)		$(0.1, 1.5)$						(p, α_c)		$(0.1, 2)$						(p, α_c)		$(0.1, 3)$					
(n_1, n_2)		$(1, 15)$		$(1, 10)$		$(2, 7)$		(n_1, n_2)		$(1, 15)$		$(1, 10)$		$(2, 7)$		(n_1, n_2)		$(1, 15)$		$(1, 10)$		$(2, 7)$	
(d_1, d_2)		$(1, 1)$						(d_1, d_2)		$(1, 1)$						(d_1, d_2)		$(1, 1)$					
(w_1, w_2)		$(1.07, 1.07)$		$(0.76, 0.76)$		$(0.52, 0.52)$		(w_1, w_2)		$(1.05, 1.05)$		$(0.75, 0.75)$		$(0.51, 0.51)$		(w_1, w_2)		$(1.00, 1.00)$		$(0.71, 0.71)$		$(0.49, 0.49)$	
λ	ANOS	$Q_{3,13}$	$Q_{3,14}$	$Q_{3,13}$	$Q_{3,14}$	$Q_{3,13}$	$Q_{3,14}$	ANOS	$Q_{3,13}$	$Q_{3,14}$	$Q_{3,13}$	$Q_{3,14}$	$Q_{3,13}$	$Q_{3,14}$	ANOS	$Q_{3,13}$	$Q_{3,14}$	$Q_{3,13}$	$Q_{3,14}$	$Q_{3,13}$	$Q_{3,14}$	$Q_{3,13}$	$Q_{3,14}$
0	1851,99	0,1	0,0	0,1	0,0	0,1	-0,1	1851,95	0,1	-0,3	0,1	-0,2	0,1	-0,1	1851,90	0,1	-0,2	0,1	-0,3	0,1	-0,3	0,1	-0,3
0,25	668,12	-17,6	-8,1	-6,6	-3,4	2,4	-0,6	887,15	-13,8	-2,8	-4,3	-1,1	3,3	0,8	1152,41	-8,4	7,1	-1,1	5,8	4,6	3,2		
0,5	168,02	-49,6	-36,3	-26,0	-22,5	4,4	-9,1	261,53	-54,5	-38,7	-28,2	-22,5	4,1	-8,6	443,55	-55,7	-34,4	-26,6	-16,9	6,0	-5,2		
0,75	54,19	-32,8	-37,6	-15,2	-28,5	23,2	-14,4	84,49	-49,0	-49,9	-26,1	-36,0	19,3	-17,9	156,80	-63,6	-60,3	-34,7	-41,1	17,6	-19,3		
1	22,64	33,4	-14,1	33,0	-19,0	62,3	-11,8	32,55	5,0	-34,8	14,5	-32,4	58,5	-18,8	57,54	-31,3	-57,7	-10,3	-47,8	51,9	-26,9		
1,25	12,01	118,0	33,1	93,0	4,0	96,0	-2,8	15,46	94,0	7,2	78,4	-12,4	98,7	-11,0	23,72	50,8	-27,0	50,1	-35,1	97,1	-23,7		
1,5	7,87	169,5	91,1	130,5	35,4	106,6	9,2	9,15	159,6	69,2	125,0	21,0	112,9	2,9	11,89	135,7	33,6	111,0	-1,9	119,0	-9,1		
1,75	6,12	182,6	136,2	144,0	63,8	104,5	19,4	6,62	181,7	126,6	143,9	56,0	111,0	17,1	7,57	173,2	103,9	140,0	40,8	118,9	10,9		
2	5,39	176,7	156,5	143,9	79,1	98,4	23,6	5,58	180,9	159,7	147,2	78,8	104,9	25,1	5,95	180,7	154,2	148,6	73,5	113,6	25,3		
2,5	5,03	150,5	143,1	128,6	75,2	82,6	16,1	5,05	160,3	160,8	136,1	83,6	87,9	20,0	5,12	170,1	177,8	144,4	91,5	96,3	25,2		
3	5,00	123,4	105,2	109,4	55,3	70,3	6,1	5,00	134,9	125,9	118,3	65,8	73,2	8,4	5,02	149,6	152,5	130,0	79,2	78,0	11,8		

Tabela 3.18. – Valores de ANOS_{LSI}, $Q_{3,13}$ e de $Q_{3,14}$ em função de λ , no grupo NC, com diferentes pares de amostragem em VSS, $p = 10\%$ e diferentes σ_c da distribuição contaminante, com $n = 5$.

- 4) Quando a contaminação é de 30%, nas alterações do tipo $\lambda < 2$ o desempenho de LSI, em termos de AATS, piora, e melhora em alterações do tipo $\lambda \geq 2$, com o aumento do desvio padrão.
- 5) O aumento da contaminação não provoca alterações significativas do desempenho dos métodos, em termos de AATS; em termos de ANOS, essas diferenças já são mais significativas, em particular quando $(n_1, n_2) = (2, 7)$ em VSS.

(p, σ_c)		$(0,3,1,5)$						(p, σ_c)		$(0,3,2)$						(p, σ_c)		$(0,3,3)$					
(n_1, n_2)		$(1, 15)$		$(1, 10)$		$(2, 7)$		(n_1, n_2)		$(1, 15)$		$(1, 10)$		$(2, 7)$		(n_1, n_2)		$(1, 15)$		$(1, 10)$		$(2, 7)$	
(d_1, d_2)		$(1, 1)$						(d_1, d_2)		$(1, 1)$						(d_1, d_2)		$(1, 1)$					
(w_1, w_2)		$(1,06, 1,06)$		$(0,76, 0,76)$		$(0,52, 0,52)$		(w_1, w_2)		$(1,04, 1,04)$		$(0,74, 0,74)$		$(0,50, 0,50)$		(w_1, w_2)		$(0,99, 0,99)$		$(0,70, 0,70)$		$(0,48, 0,48)$	
λ	ANOS	$Q_{3,13}$	$Q_{3,14}$	$Q_{3,13}$	$Q_{3,14}$	$Q_{3,13}$	$Q_{3,14}$	ANOS	$Q_{3,13}$	$Q_{3,14}$	$Q_{3,13}$	$Q_{3,14}$	$Q_{3,13}$	$Q_{3,14}$	ANOS	$Q_{3,13}$	$Q_{3,14}$	$Q_{3,13}$	$Q_{3,14}$	$Q_{3,13}$	$Q_{3,14}$	$Q_{3,13}$	$Q_{3,14}$
0	1851,96	0,1	-0,1	0,1	-0,1	0,1	-0,1	1851,77	0,1	-0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	1845,72	0,4	0,2	0,4	0,1	0,2	0,2		
0,25	695,11	-17,7	-7,6	-6,7	-3,0	2,3	-0,4	908,10	-13,6	-2,0	-4,2	0,5	3,3	1,1	1263,07	-7,9	8,5	-1,1	6,8	4,6	3,8		
0,5	177,13	-51,3	-37,4	-27,3	-23,1	3,7	-9,3	272,53	-55,1	-38,9	-28,5	-22,4	3,9	-8,5	510,83	-53,8	-30,9	-24,4	-14,1	7,3	-3,8		
0,75	56,60	-35,4	-39,6	-17,4	-30,0	21,9	-15,1	88,13	-50,6	-51,0	-27,3	-36,8	18,8	-18,2	188,66	-65,3	-60,8	-34,2	-40,2	19,7	-18,3		
1	23,26	29,7	-16,2	30,2	-20,6	60,7	-12,7	33,66	2,0	-36,7	12,3	-33,7	57,6	-19,6	70,54	-39,7	-62,6	-14,9	-50,6	53,3	-27,8		
1,25	12,17	114,5	31,7	90,4	2,9	94,7	-3,4	15,80	91,0	5,1	76,4	-13,9	98,2	-11,9	28,52	37,5	-37,8	42,3	-41,9	100,8	-27,4		
1,5	7,90	166,8	91,0	128,8	35,1	105,7	9,1	9,25	157,7	67,6	123,7	20,0	112,7	2,3	13,61	129,6	17,6	108,3	-11,9	126,2	-14,5		
1,75	6,12	181,0	137,1	143,1	64,2	104,2	19,6	6,65	180,7	127,0	143,3	55,6	111,0	16,9	8,20	173,3	89,3	140,7	31,3	124,8	6,3		
2	5,39	176,1	157,9	143,6	79,7	98,5	23,9	5,60	180,6	160,1	146,9	78,8	105,1	25,3	6,19	182,3	146,2	149,6	67,8	117,5	23,3		
2,5	5,03	150,9	144,6	129,0	75,9	82,7	16,2	5,06	160,7	162,2	136,4	84,3	88,2	20,4	5,15	172,7	181,5	145,9	93,0	99,5	27,6		
3	5,00	123,9	106,2	109,8	55,7	70,3	6,0	5,00	135,6	127,6	118,7	66,7	73,3	8,7	5,02	154,2	162,2	133,1	84,2	80,4	14,5		

Tabela 3.19. – Valores de ANOS_{LSI}, $Q_{3,13}$ e de $Q_{3,14}$ em função de λ , no grupo NC, com diferentes pares de amostragem em VSS, $p = 30\%$ e diferentes σ_c da distribuição contaminante, com $n = 5$.

Para comparar os desempenhos de LSI e de VP, vamos utilizar os rácios $Q_{3,15}$ e $Q_{3,16}$ que designam a variação relativa, em %, no valor do AATS, quando se usa o método VP, em vez do método LSI, e a variação relativa, em %, no valor do ANOS, quando se usa VP, em vez de LSI, dados, respetivamente, por

$$Q_{3,15} = \left(\frac{AATS_{VP}}{AATS_{LSI}} - 1 \right) \times 100\% . \quad (3.110)$$

$$Q_{3,16} = \left(\frac{ANOS_{VP}}{ANOS_{LSI}} - 1 \right) \times 100\% . \quad (3.111)$$

Os resultados obtidos para os rácios (3.110) e (3.111) são apresentados na Tabela 3.20, a partir da qual podemos retirar as seguintes conclusões:

- 1) Os rácios $Q_{3,15}$ e $Q_{3,16}$ têm o mesmo comportamento dos rácios $Q_{3,3}$ e $Q_{3,4}$, ou seja, o facto da característica da qualidade não ser normal, não afeta o desempenho de cada um dos métodos.
- 2) A eficácia do método LSI, em termos de AATS, é afetada negativamente, quando aumenta o desvio padrão para as mesmas percentagens de contaminação.
- 3) Para os mesmos valores do desvio padrão, a eficácia de LSI piora ligeiramente, em relação a VP e em termos de AATS, quando aumentamos a contaminação.
- 4) Tendo em conta 2) e 3), as diferenças entre os métodos, em termos de AATS, aumentam, quando aumentamos o desvio padrão e a percentagem de contaminação.

(p, σ_c)		$(0.1, 1.5)$						(p, σ_c)		$(0.1, 2)$						(p, σ_c)		$(0.1, 3)$													
(n_1, n_2)		$(1, 15)$	$(1, 10)$	$(2, 7)$				(n_1, n_2)		$(1, 15)$	$(1, 10)$	$(2, 7)$				(n_1, n_2)		$(1, 15)$	$(1, 10)$	$(2, 7)$				(n_1, n_2)		$(1, 15)$	$(1, 10)$	$(2, 7)$			
(d_1, d_2)		$(0.1, 1.36)$	$(0.1, 1.72)$	$(0.1, 2.35)$				(d_1, d_2)		$(0.1, 1.36)$	$(0.1, 1.72)$	$(0.1, 2.35)$				(d_1, d_2)		$(0.1, 1.36)$	$(0.1, 1.72)$	$(0.1, 2.35)$				(d_1, d_2)		$(0.1, 1.36)$	$(0.1, 1.72)$	$(0.1, 2.35)$			
(L_1, L_2)		$(6, 2.60)$	$(6, 2.75)$	$(6, 2.85)$				(L_1, L_2)		$(6, 2.70)$	$(6, 2.89)$	$(6, 3.01)$				(L_1, L_2)		$(6, 2.90)$	$(6, 3.13)$	$(6, 3.29)$				(L_1, L_2)		$(6, 2.90)$	$(6, 3.13)$	$(6, 3.29)$			
(w_1, w_2)		$(1.05, 1.07)$	$(0.76, 0.78)$	$(0.52, 0.53)$				(w_1, w_2)		$(1.04, 1.05)$	$(0.74, 0.75)$	$(0.51, 0.52)$				(w_1, w_2)		$(0.99, 1.01)$	$(0.70, 0.72)$	$(0.48, 0.50)$				(w_1, w_2)		$(0.99, 1.01)$	$(0.70, 0.72)$	$(0.48, 0.50)$			
λ	ANOS	$Q_{3.15}$	$Q_{3.16}$	$Q_{3.15}$	$Q_{3.16}$	$Q_{3.15}$	$Q_{3.16}$	ANOS	$Q_{3.15}$	$Q_{3.16}$	$Q_{3.15}$	$Q_{3.16}$	$Q_{3.15}$	$Q_{3.16}$	ANOS	$Q_{3.15}$	$Q_{3.16}$	$Q_{3.15}$	$Q_{3.16}$	$Q_{3.15}$	$Q_{3.16}$	$Q_{3.15}$	$Q_{3.16}$	ANOS	$Q_{3.15}$	$Q_{3.16}$	$Q_{3.15}$	$Q_{3.16}$	$Q_{3.15}$	$Q_{3.16}$	
0	1851,99	0,1	0,3	0,0	0,4	-0,1	0,3	1851,95	0,0	-0,4	0,2	-0,2	0,1	0,3	1851,90	0,1	-0,2	0,2	-0,4	0,3	-0,4				1851,90	0,1	-0,2	0,2	-0,4	0,3	-0,4
0,25	668,12	-58,8	-51,1	-43,2	-35,0	-24,6	-17,6	887,15	-63,7	-56,2	-48,6	-40,2	-31,7	-24,4	1152,41	-62,1	-51,0	-45,2	-32,3	-28,4	-17,0				1152,41	-62,1	-51,0	-45,2	-32,3	-28,4	-17,0
0,5	168,02	-73,8	-63,2	-64,3	-48,7	-46,2	-29,4	261,53	-82,2	-72,7	-73,6	-58,0	-57,3	-39,1	443,55	-88,4	-77,4	-79,4	-59,4	-63,1	-37,6				443,55	-88,4	-77,4	-79,4	-59,4	-63,1	-37,6
0,75	54,19	-51,7	-54,8	-52,3	-46,9	-43,9	-31,4	84,49	-68,2	-69,3	-67,8	-60,1	-59,7	-43,3	156,80	-83,0	-81,1	-81,2	-69,2	-72,1	-48,1				156,80	-83,0	-81,1	-81,2	-69,2	-72,1	-48,1
1	22,64	7,6	-26,1	-1,4	-32,7	-6,1	-25,6	32,55	-19,7	-47,8	-26,1	-49,8	-27,8	-39,1	57,54	-53,1	-69,3	-55,7	-66,4	-52,4	-50,1				57,54	-53,1	-69,3	-55,7	-66,4	-52,4	-50,1
1,25	12,01	68,5	26,5	58,9	-5,8	47,3	-13,6	15,46	45,2	-1,2	37,1	-24,9	29,5	-27,1	23,72	5,6	-34,9	1,3	-48,1	1,7	-42,3				23,72	5,6	-34,9	1,3	-48,1	1,7	-42,3
1,5	7,87	89,8	90,7	87,1	30,1	80,5	2,5	9,15	77,1	64,2	74,7	12,8	72,2	-8,6	11,89	51,7	26,7	52,3	-11,4	57,8	-23,7				11,89	51,7	26,7	52,3	-11,4	57,8	-23,7
1,75	6,12	82,1	145,1	87,4	63,8	92,6	18,9	6,62	74,8	126,7	80,7	51,9	89,7	11,4	7,57	60,3	98,2	68,8	33,6	84,6	0,6				7,57	60,3	98,2	68,8	33,6	84,6	0,6
2	5,39	66,4	178,4	78,2	85,6	95,8	30,9	5,58	61,9	168,5	74,4	79,1	95,1	26,9	5,95	53,3	152,1	68,1	68,5	93,6	20,3				5,95	53,3	152,1	68,1	68,5	93,6	20,3
2,5	5,03	41,6	198,5	61,3	99,0	96,1	39,3	5,05	40,1	196,8	60,4	97,9	96,3	38,5	5,12	37,6	192,9	59,3	95,3	96,7	37,0				5,12	37,6	192,9	59,3	95,3	96,7	37,0
3	5,00	29,8	199,9	53,4	99,9	95,3	39,8	5,00	29,6	199,8	53,5	99,8	95,5	39,9	5,02	29,4	199,1	53,8	99,4	96,0	39,6				5,02	29,4	199,1	53,8	99,4	96,0	39,6

Tabela 3.20. – Valores de ANOS_{LSI}, $Q_{3.15}$ e de $Q_{3.16}$ em função de λ , no grupo NC, com diferentes pares de amostragem, de dimensões amostrais e de múltiplos do desvio padrão em VP, $p = 10\%$ e 30% e diferentes σ_c da distribuição contaminante, e $n = 5$.

5) Em termos de ANOS, o desempenho do método LSI está alinhado com o desempenho em termos de AATS; o número de itens necessários inspecionar com método LSI, aumenta, consideravelmente, quando aumenta o desvio padrão da distribuição contaminante.

Vamos, de seguida, realizar o mesmo tipo de comparações de desempenho, considerando os rácios anteriores, os valores obtidos para os parâmetros das distribuições ajustadas em cada caso do grupo **st** e os limites de controlo correspondentes.

Da Tabela 3.21., que contém a informação referida, podemos concluir que:

- 1) Apesar de se considerarem limites simétricos em probabilidade, os limites de controlo não são exatamente simétricos, aumentando as diferenças entre eles à medida que diminui o número de graus de liberdade da distribuição *t-Student*.

2) Pelo valor do A^2 , e correspondente p -value, o ajustamento mais fraco corresponde ao maior afastamento da distribuição normal, $t(4)$.

Distribuição da Qualidade	Distribuição por Amostragem	Teste A-D Valor Crítico (5%) 2,5018	Ajustamento						
			Parâmetros	Média	DP	-L	L	LIC	LSC
$t(4)$	<i>Burr (4P)</i>	$A^2 = 1,5052$	$\kappa = 1,0838; \alpha = 77,8850; \beta = 44,2660; \gamma = -44,2020$	0,0015	1,0001	-3,578	3,667	-2,259	2,317
$t(7)$	<i>JohnsonSU</i>	$A^2 = 0,5381$	$\gamma = 0,0071; \delta = 3,5674; \lambda = 3,4354; \xi = 0,0065$	-0,0006	1,0021	-3,245	3,239	-1,714	1,712
$t(10)$	<i>JohnsonSU</i>	$A^2 = 0,2367$	$\gamma = 0,0711; \delta = 4,1087; \lambda = 3,9854; \xi = 0,0665$	-0,0045	0,9996	-3,198	3,154	-1,602	1,581

Tabela 3.21. – Distribuições por amostragem ajustadas, parâmetros das distribuições, valores de L e dos limites de controlo para o grupo sT, com diferentes graus de liberdade em $t(v)$, com $n = 5$.

Vamos, então, retomar os rácios $Q_{3,9}$ e $Q_{3,10}$, definidos em (3.104) e (3.105) para comparar o desempenho do método LSI com o dos métodos FSI e VSI, relativamente ao grupo sT, ou seja, quando a característica X da qualidade tem distribuição t -Student e diferentes graus de liberdade.

Os resultados obtidos, para o rácio $Q_{3,9}$, são apresentados na Tabela 3.22., a partir da qual podemos retirar as seguintes conclusões:

1) Quanto menor é o número de graus de liberdade da distribuição t -Student, maior é o afastamento à normalidade e melhor é o desempenho do método LSI, em termos de AATS e em relação ao método FSI; as diferenças entre métodos acentuam-se quando se reduz o número de graus de liberdade.

t (df)	LSI		FSI		LSI		FSI		LSI		FSI	
	$t(4)$		$t(7)$		$t(10)$		$t(4)$		$t(7)$		$t(10)$	
	λ	AATS	$Q_{3,9}$	AATS	$Q_{3,9}$	AATS	$Q_{3,9}$	AATS	$Q_{3,9}$	AATS	$Q_{3,9}$	$Q_{3,9}$
0	368,29	-0,1	370,03	0,0	370,03	0,0	370,03	0,0	370,03	0,0	370,03	0,0
0,25	225,44	8,2	165,69	8,1	117,25	7,7	117,25	7,7	117,25	7,7	117,25	7,7
0,5	73,56	35,9	39,44	34,4	20,97	31,5	20,97	31,5	20,97	31,5	20,97	31,5
0,75	19,61	90,0	9,24	81,1	4,57	62,4	4,57	62,4	4,57	62,4	4,57	62,4
1	5,14	169,4	2,65	128,9	1,56	65,5	1,56	65,5	1,56	65,5	1,56	65,5
1,25	1,69	215,9	1,16	124,6	0,90	30,8	0,90	30,8	0,90	30,8	0,90	30,8
1,5	0,89	153,2	0,78	70,8	0,72	-0,5	0,72	-0,5	0,72	-0,5	0,72	-0,5
1,75	0,70	63,8	0,67	23,4	0,65	-14,3	0,65	-14,3	0,65	-14,3	0,65	-14,3
2	0,64	14,5	0,63	-2,0	0,63	-18,0	0,63	-18,0	0,63	-18,0	0,63	-18,0
2,5	0,62	-13,8	0,61	-16,7	0,61	-18,5	0,61	-18,5	0,61	-18,5	0,61	-18,5
3	0,61	-17,8	0,61	-18,2	0,61	-18,4	0,61	-18,4	0,61	-18,4	0,61	-18,4

Tabela 3.22. – Valores de $AATS_{LSI}$ e de $Q_{3,9}$ em função de λ , no grupo sT, com $d = 1$ em FSI, $v = 4, 7$ e 10 e $n = 5$.

2) O comportamento do rácio $Q_{3,9}$ é ligeiramente diferente ao rácio $Q_{3,2}$; quando $t(4)$ LSI é mais eficaz do que FSI para alterações do tipo $\lambda \leq 2$ e para $t(7)$ LSI é mais eficaz do que FSI em alterações do tipo $\lambda \leq 1.75$.

3) O comportamento dos rácios $Q_{3,9}$ e $Q_{3,2}$ é mais aproximado quando $t(10)$, situação mais aproximada da população normal.

As reduções obtidas com LSI aumentam à medida que diminui o número de graus de liberdade e, conseqüentemente, a população se afasta da distribuição normal

Os resultados obtidos para o rácio $Q_{3,10}$, relativo à comparação de eficácia entre os métodos LSI e VSI, são apresentados na Tabela 3.23., a partir da qual se podem retirar as seguintes conclusões:

- 1) Que o comportamento do rácio $Q_{3,10}$, relativamente ao rácio $Q_{3,2}$, é pouco ou nada afetado.
- 2) Nas alterações em que LSI é mais eficaz, os valores do rácio aumentam com o aumento do número de graus de liberdade.
- 3) Nas alterações em que VSI é mais eficaz, o desempenho de VSI piora quando aumentamos de 4 para 7 o número de graus de liberdade, mas quando aumentamos de 7 para 10 o desempenho de VSI melhora.
- 4) As melhorias de desempenho são mais acentuadas no método VSI, apesar de LSI continuar a ser mais eficaz do que VSI no mesmo tipo de alterações da média.
- 5) Ao contrário do que acontecia com população normal, as reduções obtidas com LSI nem sempre são superiores às obtidas com VSI.

	LSI		VSI		LSI		VSI		LSI		VSI	
t (df)	t (4)				t (7)				t (10)			
(d_1, d_2)	---	(0.1, 2.0)	(0.1, 1.5)	---	(0.1, 2.0)	(0.1, 1.5)	---	(0.1, 2.0)	(0.1, 1.5)	---	(0.1, 2.0)	(0.1, 1.5)
w	---	0,570	0,841	---	0,612	0,894	---	0,517	0,734	---	0,517	0,734
λ	AATS		$Q_{3,10}$		AATS		$Q_{3,10}$		AATS		$Q_{3,10}$	
0	368,29	0,1	0,0	370,03	0,1	0,0	370,03	0,3	0,2			
0,25	225,44	-8,6	-5,2	165,69	-5,2	-3,1	117,25	-10,3	-7,7			
0,5	73,56	-26,6	-18,6	39,44	-17,7	-11,8	20,97	-31,6	-26,0			
0,75	19,61	-38,9	-31,5	9,24	-27,8	-21,6	4,57	-39,1	-37,9			
1	5,14	-34,1	-32,3	2,65	-20,5	-22,1	1,56	-15,1	-26,7			
1,25	1,69	-5,2	-15,5	1,16	8,2	-8,1	0,90	19,1	-5,1			
1,5	0,89	29,6	5,3	0,78	34,9	6,9	0,72	44,2	11,9			
1,75	0,70	46,6	14,6	0,67	47,9	14,7	0,65	54,6	18,7			
2	0,64	52,3	17,2	0,63	52,8	17,4	0,63	55,2	18,7			
2,5	0,62	55,0	18,3	0,61	55,0	18,3	0,61	55,1	18,3			
3	0,61	55,1	18,2	0,61	55,0	18,3	0,61	55,0	18,3			

Tabela 3.23. – Valores de $AATS_{LSI}$, de $Q_{3,10}$ em função de λ , no grupo sT, com $(d_1, d_2) = (0.1, 1.5)$ e $(d_1, d_2) = (0.1, 2)$ em VSI, $v = 4, 7$ e 10 , com $n = 5$.

Para a comparar o desempenho de LSI com VSSI, vamos retomar os rácios $Q_{3,11}$ e $Q_{3,12}$, para os quais obtivemos os resultados apresentados na Tabela 3.24., e a partir da qual podemos retirar as seguintes conclusões:

- 1) O comportamento dos rácios $Q_{3,11}$ e $Q_{3,12}$ aproxima-se do comportamento dos rácios $Q_{3,3}$ e $Q_{3,4}$ à medida que aumenta o número de graus de liberdade da distribuição da população.
- 2) A eficácia de LSI, em relação a VSSI e em termos de AATS, melhora quando passamos da situação de $t(4)$ para $t(7)$, mas piora quando passamos de $t(7)$ para $t(10)$.
- 3) Em termos de ANOS, o desempenho de LSI, relativamente a VSSI, vai piorando quando aumentamos o número de graus de liberdade.
- 4) LSI melhora o desempenho, ao nível do ANOS, relativamente à normalidade da população, em alterações do tipo $\lambda = 0,25$, quando $t(4)$ para todos os pares de dimensões amostrais e quando $t(7)$ nos pares $(n_1, n_2) = (1, 10)$ e $(n_1, n_2) = (2, 7)$.

t (df)		t (4)						t (df)		t (7)						t (df)		t (10)					
(n_1, n_2)		$(1, 15)$		$(1, 10)$		$(2, 7)$		(n_1, n_2)		$(1, 15)$		$(1, 10)$		$(2, 7)$		(n_1, n_2)		$(1, 15)$		$(1, 10)$		$(2, 7)$	
(d_1, d_2)		$(0,1, 1,36)$		$(0,1, 1,72)$		$(0,1, 2,35)$		(d_1, d_2)		$(0,1, 1,36)$		$(0,1, 1,72)$		$(0,1, 2,35)$		(d_1, d_2)		$(0,1, 1,36)$		$(0,1, 1,72)$		$(0,1, 2,35)$	
(w_1, w_2)		$(0,99, 0,99)$		$(0,69, 0,69)$		$(0,47, 0,47)$		(w_1, w_2)		$(1,04, 1,04)$		$(0,74, 0,74)$		$(0,51, 0,51)$		(w_1, w_2)		$(0,87, 0,87)$		$(0,62, 0,62)$		$(0,43, 0,43)$	
λ	ANOS	$Q_{3,11}$	$Q_{3,12}$	$Q_{3,11}$	$Q_{3,12}$	$Q_{3,11}$	$Q_{3,12}$	ANOS	$Q_{3,11}$	$Q_{3,12}$	$Q_{3,11}$	$Q_{3,12}$	$Q_{3,11}$	$Q_{3,12}$	ANOS	$Q_{3,11}$	$Q_{3,12}$	$Q_{3,11}$	$Q_{3,12}$	$Q_{3,11}$	$Q_{3,12}$	$Q_{3,11}$	$Q_{3,12}$
0	1851,85	0,1	0,0	0,2	0,0	0,2	-0,1	1851,85	-0,1	-0,1	0,0	-0,1	0,0	0,0	1851,85	0,3	-0,2	0,1	-0,3	0,3	-0,4		
0,25	1224,04	-18,6	9,4	-15,9	7,4	-13,3	4,0	897,77	-22,5	-2,1	-15,8	0,4	-10,2	1,0	634,39	-39,2	-11,9	-28,0	-4,9	-18,1	-0,8		
0,5	502,42	-75,3	-29,1	-62,2	-12,8	-47,7	-3,2	267,58	-71,3	-39,1	-57,6	-22,7	-40,0	-8,6	140,37	-76,4	-46,4	-68,2	-30,5	-53,8	-13,5		
0,75	188,86	-83,2	-59,9	-77,4	-39,1	-64,8	-17,5	86,13	-66,9	-50,7	-63,3	-36,7	-51,6	-18,2	39,64	-49,1	-38,8	-51,3	-33,1	-48,5	-18,3		
1	71,76	-61,0	-63,2	-60,6	-50,5	-52,8	-27,4	32,88	-20,5	-35,5	-25,1	-33,1	-24,3	-19,3	15,45	9,0	8,0	3,7	-11,1	-1,7	-10,1		
1,25	29,17	-9,1	-39,3	-11,1	-43,2	-6,1	-28,0	15,49	42,8	7,0	36,3	-12,6	30,4	-11,3	8,40	48,2	82,5	48,0	29,4	45,9	6,6		
1,5	13,78	40,8	16,1	42,6	-13,2	51,1	-15,6	9,13	73,7	69,7	72,7	21,4	70,8	3,0	6,07	58,7	142,6	67,2	67,1	76,7	21,1		
1,75	8,20	54,5	89,5	63,6	31,4	80,6	6,1	6,61	71,5	127,1	78,3	56,5	86,4	17,3	5,29	51,4	164,8	67,1	83,8	88,3	25,0		
2	6,17	49,7	147,4	64,9	68,6	89,6	23,9	5,59	58,8	160,1	72,0	78,9	89,9	25,2	5,07	38,3	159,0	58,4	82,7	87,1	19,9		
2,5	5,15	35,0	182,1	56,9	93,3	89,7	27,9	5,06	36,0	161,0	56,9	83,7	87,0	20,0	5,00	22,0	115,4	46,5	60,2	82,8	6,3		
3	5,02	25,5	163,0	50,1	84,6	85,0	14,2	5,00	23,1	126,0	47,4	65,8	83,2	8,4	5,00	14,3	64,8	40,2	33,5	81,5	0,6		

Tabela 3.24. – Valores de ANOS_{LSI}, $Q_{3,11}$ e de $Q_{3,12}$ em função de λ , no grupo sT, com diferentes pares de amostragem e de dimensões amostrais em VSSI, $v = 4, 7$ e 10 , com $n = 5$.

Na comparação de desempenho entre LSI e VSS, vamos retomar os rácios $Q_{3,13}$ e $Q_{3,14}$, tendo-se obtido os resultados que apresentamos na Tabela 3.25., e a partir dos quais podemos concluir que:

- 1) O comportamento dos rácios $Q_{3,13}$ e $Q_{3,14}$ é praticamente igual ao dos rácios $Q_{3,3}$ e $Q_{3,4}$, verificando-se a diferença mais significativa em $\lambda = 0,25$ quando $t(4)$ e $t(7)$, situações de maior afastamento à normalidade da população.
- 2) Para alterações do tipo $1 \leq \lambda \leq 1.75$, a eficácia de LSI melhora, em termos de AATS, quando passamos de população $t(4)$ para população $t(7)$, mas piora quando passamos de $t(7)$ para $t(10)$; no entanto, à medida que aumentamos v , aumenta o número de alterações em que LSI é mais eficaz do que VSS.
- 3) Quando as alterações são do tipo $\lambda \geq 2$, a eficácia de LSI vai diminuindo à medida que aumenta o número de graus de liberdade, v .
- 4) Em termos de ANOS, desempenho de LSI vai sempre diminuindo em percentagem de rácio mas aumentando em número de alterações, à medida que aumenta o número de graus de liberdade da população.

t (df)		t (4)						t (df)		t (7)						t (df)		t (10)					
(n_1, n_2)		$(1, 15)$		$(1, 10)$		$(2, 7)$		(n_1, n_2)		$(1, 15)$		$(1, 10)$		$(2, 7)$		(n_1, n_2)		$(1, 15)$		$(1, 10)$		$(2, 7)$	
(d_1, d_2)		$(1, 1)$						(d_1, d_2)		$(1, 1)$						(d_1, d_2)		$(1, 1)$					
(w_1, w_2)		$(0.99, 0.99)$		$(0.69, 0.69)$		$(0.47, 0.47)$		(w_1, w_2)		$(1.04, 1.04)$		$(0.74, 0.74)$		$(0.51, 0.51)$		(w_1, w_2)		$(0.87, 0.87)$		$(0.62, 0.62)$		$(0.43, 0.43)$	
λ	ANOS	$Q_{3,13}$	$Q_{3,14}$	$Q_{3,13}$	$Q_{3,14}$	$Q_{3,13}$	$Q_{3,14}$	ANOS	$Q_{3,13}$	$Q_{3,14}$	$Q_{3,13}$	$Q_{3,14}$	$Q_{3,13}$	$Q_{3,14}$	ANOS	$Q_{3,13}$	$Q_{3,14}$	$Q_{3,13}$	$Q_{3,14}$	$Q_{3,13}$	$Q_{3,14}$	$Q_{3,13}$	$Q_{3,14}$
0	1851,85	0,3	0,0	0,3	0,0	0,3	-0,1	1851,85	0,0	-0,1	0,0	-0,1	0,0	0,0	1851,85	0,0	-0,2	0,0	-0,3	0,0	-0,4		
0,25	1224,04	-7,2	9,4	-0,8	7,4	4,5	4,0	897,77	-14,3	-2,1	-4,7	0,4	2,9	1,0	634,39	-29,0	-11,9	-14,0	-4,9	-1,1	-0,8		
0,5	502,42	-53,8	-29,1	-24,7	-12,8	6,7	-3,2	267,58	-56,5	-39,1	-30,0	-22,7	2,4	-8,6	140,37	-64,6	-46,4	-42,7	-30,5	-8,9	-13,5		
0,75	188,86	-67,5	-59,9	-35,9	-39,1	17,6	-17,5	86,13	-55,5	-50,7	-32,5	-36,7	13,2	-18,2	39,64	-43,9	-38,8	-33,5	-33,1	0,2	-18,3		
1	71,76	-50,8	-63,2	-25,5	-50,5	43,1	-27,4	32,88	-15,7	-35,5	-5,9	-33,1	38,5	-19,3	15,45	12,6	8,0	1,4	-11,1	15,9	-10,0		
1,25	29,17	2,7	-39,3	7,6	-43,2	66,9	-28,0	15,49	48,5	7,0	33,4	-12,7	54,0	-11,3	8,40	65,1	82,5	35,3	29,4	20,3	6,6		
1,5	13,78	66,6	16,1	45,9	-13,2	64,0	-15,6	9,13	92,9	69,7	59,0	21,4	47,3	3,0	6,07	91,9	142,6	58,1	67,1	18,1	21,1		
1,75	8,20	96,0	89,5	64,5	31,4	48,8	6,1	6,61	104,8	127,1	67,7	56,5	35,2	17,3	5,29	93,1	164,8	63,2	83,8	13,2	25,0		
2	6,17	101,0	147,4	69,2	68,6	37,6	23,9	5,59	100,4	160,1	67,1	78,9	25,1	25,2	5,07	79,4	159,0	55,1	82,7	5,3	19,9		
2,5	5,15	91,3	182,1	64,7	93,3	18,3	27,9	5,06	78,6	161,0	54,5	83,7	6,3	19,9	5,00	47,8	115,4	32,7	60,2	-10,1	6,3		
3	5,02	73,5	163,0	52,3	84,6	-1,3	14,2	5,00	53,1	126,1	36,5	65,9	-8,4	8,4	5,00	18,2	64,8	10,1	33,5	-16,7	0,6		

Tabela 3.25. – Valores de ANOS_{LSI}, $Q_{3,13}$ e de $Q_{3,14}$ em função de λ , no grupo sT, com diferentes pares de amostragem em VSS, $v = 4, 7$ e 10 , com $n = 5$.

Para efetuar a comparação entre os métodos LSI e VP, em termos de AATS e de ANOS, consideramos, novamente, os rácios $Q_{3,15}$ e $Q_{3,16}$, tendo-se obtido os resultados que são apresentados na Tabela 3.26., e a partir da qual concluímos que:

- 1) O comportamento dos rácios $Q_{3,15}$ e $Q_{3,16}$ é análogo ao comportamento dos rácios $Q_{3,3}$ e $Q_{3,4}$.
- 2) Em termos de AATS, a eficácia de LSI aumenta, em % e número de alterações, quando passamos de população $t(4)$ para população $t(7)$; quando se passa de $t(7)$

para $t(10)$, a eficácia de LSI aumenta em numero de alterações mas diminui em % do rácio.

- 3) Em termos de ANOS, o comportamento do método LSI é igual ao comportamento do método em termos de AATS.
- 4) As maiores reduções, em termos de AATS e de ANOS, continuam a ser obtidas com a utilização do método LSI.
- 5) Nas alterações em que VP tem melhor desempenho, em termos de AATS, a eficácia de LSI piora com o aumento do número de graus de liberdade, v .

$t(df)$	$t(4)$						$t(df)$	$t(7)$						$t(df)$	$t(10)$						
(n_1, n_2)	$(1, 15)$		$(1, 10)$		$(2, 7)$		(n_1, n_2)	$(1, 15)$		$(1, 10)$		$(2, 7)$		(n_1, n_2)	$(1, 15)$		$(1, 10)$		$(2, 7)$		
(d_1, d_2)	$(0.1, 1.36)$		$(0.1, 1.72)$		$(0.1, 2.35)$		(d_1, d_2)	$(0.1, 1.36)$		$(0.1, 1.72)$		$(0.1, 2.35)$		(d_1, d_2)	$(0.1, 1.36)$		$(0.1, 1.72)$		$(0.1, 2.35)$		
(L_1, L_2)	$(6, 2.94)$		$(6, 3.19)$		$(6, 3.36)$		(L_1, L_2)	$(6, 2.72)$		$(6, 2.91)$		$(6, 3.03)$		(L_1, L_2)	$(6, 2.21)$		$(6, 2.35)$		$(6, 2.45)$		
(w_1, w_2)	$(0.98, 0.99)$		$(0.69, 0.70)$		$(0.46, 0.47)$		(w_1, w_2)	$(1.03, 1.05)$		$(0.73, 0.74)$		$(0.50, 0.51)$		(w_1, w_2)	$(0.86, 0.87)$		$(0.61, 0.62)$		$(0.42, 0.43)$		
λ	ANOS	$Q_{3.15}$	$Q_{3.16}$	$Q_{3.15}$	$Q_{3.16}$	$Q_{3.15}$	$Q_{3.16}$	ANOS	$Q_{3.15}$	$Q_{3.16}$	$Q_{3.15}$	$Q_{3.16}$	$Q_{3.15}$	$Q_{3.16}$	ANOS	$Q_{3.15}$	$Q_{3.16}$	$Q_{3.15}$	$Q_{3.16}$	$Q_{3.15}$	$Q_{3.16}$
0	1851,85	0,2	-0,1	0,3	0,4	0,2	0,3	1851,85	-0,4	-0,4	-0,4	-0,3	-0,3	-0,2	1851,85	0,1	-0,2	0,2	-0,3	0,1	-0,3
0,25	1224,04	-62,9	-51,2	-47,6	-33,9	-32,8	-19,9	897,77	-62,3	-53,9	-46,3	-36,6	-28,3	-19,9	634,39	-71,0	-60,6	-56,1	-43,5	-37,2	-25,0
0,5	502,42	-89,4	-77,6	-80,9	-59,9	-66,3	-39,8	267,58	-82,5	-72,2	-73,5	-56,5	-56,1	-36,1	140,37	-80,7	-70,7	-76,1	-57,7	-64,0	-38,5
0,75	188,86	-85,8	-82,6	-84,0	-70,7	-75,4	-50,2	86,13	-68,9	-69,5	-68,5	-59,5	-59,4	-41,4	39,64	-49,6	-53,1	-53,1	-50,8	-51,7	-37,5
1	71,76	-61,8	-73,3	-63,9	-70,2	-59,8	-53,4	32,88	-21,0	-48,1	-27,5	-49,5	-27,9	-37,8	15,45	9,5	-0,6	3,3	-23,3	-2,4	-24,6
1,25	29,17	-9,0	-43,0	-12,8	-54,5	-10,9	-46,7	15,49	42,7	-1,3	35,2	-24,6	28,8	-26,1	8,40	49,4	78,8	48,6	22,3	47,2	-2,8
1,5	13,78	41,6	16,6	42,2	-18,2	49,3	-26,2	9,13	74,5	64,6	72,9	13,4	71,5	-7,8	6,07	55,2	147,2	63,0	65,2	80,5	19,2
1,75	8,20	55,5	93,7	64,0	31,3	81,2	3,9	6,61	73,0	127,0	79,3	52,2	89,3	12,0	5,29	48,2	183,3	62,9	88,9	94,9	32,9
2	6,17	50,8	156,5	65,7	72,4	92,1	29,9	5,59	60,9	168,5	73,8	79,2	94,9	27,1	5,07	39,9	196,0	59,4	97,4	96,5	38,2
2,5	5,15	36,9	205,5	58,7	105,1	96,3	51,2	5,06	39,9	196,6	60,5	97,8	96,3	38,5	5,00	29,2	199,9	53,4	99,9	96,5	39,9
3	5,02	29,2	212,5	53,7	110,0	95,7	53,3	5,00	29,7	199,8	53,7	99,8	95,6	39,9	5,00	25,3	200,0	51,0	100,0	96,2	40,0

Tabela 3.26. – Valores de ANOS_{LSI}, $Q_{3.15}$ e de $Q_{3.16}$ em função de λ , no grupo sT, com diferentes pares de amostragem, de dimensões amostrais e de múltiplos do desvio padrão em VP, $v = 4, 7$ e 10 , com $n = 5$.

Por último, vamos repetir as comparações, entre métodos, considerando que a característica X da qualidade tem distribuição Gama, correspondente ao grupo G.

Os parâmetros das distribuições por amostragem, e os respetivos limites de controlo, são apresentados na Tabela 3.27., podendo verificar-se que aumenta a diferença entre limites de controlo quando aumentamos o parâmetro de forma da distribuição Gama, ou seja, à medida que diminui o coeficiente de assimetria e o coeficiente de curtose da distribuição. Tal como esperado, os limites de controlo não são simétricos, apesar de se terem obtido na condição de simetria em probabilidade.

Distribuição da Qualidade	Distribuição por Amostragem						
	$G(a, b)$	$G(na, b/n)$	EX	SDX	-L	L	LIC
$G(2,1)$	$G(10, 1/5)$	2	0,6325	-2,189	3,856	0,616	4,439
$G(3,1)$	$G(15, 1/5)$	3	0,7746	-2,316	3,721	0,206	4,882
$G(4,1)$	$G(20, 1/5)$	4	0,8944	-2,402	3,637	-0,148	5,253

Tabela 3.27. – Distribuições por amostragem ajustadas, parâmetros das distribuições, valores de L e dos limites de controlo para o grupo G, com diferentes valores do parâmetro de forma em Gama, com $n = 5$.

Retomem-se os rácios $Q_{3,9}$ e $Q_{3,10}$, definidos em (3.104) e (3.105) para realizarmos a comparação do desempenho do método LSI com o desempenho dos métodos FSI e VSI, relativamente ao grupo **G**, ou seja, quando a característica **X** da qualidade tem distribuição Gama e diferentes valores para o parâmetro de forma.

Nas condições definidas, foram obtidos os valores do rácio $Q_{3,9}$ que apresentamos na Tabela 3.28., podendo concluir-se que:

- 1) A eficácia de LSI aumenta quando consideramos que a característica X da qualidade tem distribuição Gama; aumenta o número de alterações em que LSI é mais eficaz, relativamente a FSI.
- 2) O método LSI perde eficácia à medida que diminui o coeficiente de assimetria e o coeficiente de curtose da distribuição Gama, ou seja, quando aumenta o valor do parâmetro de forma da distribuição.
- 3) As reduções obtidas com LSI continuam a ser bastante superiores às obtidas com o uso de FSI; nesta situação, grupo G, alguns dos valores das reduções passam ao dobro das obtidas com a normalidade da característica da qualidade.

$G(\alpha, \beta)$	LSI		FSI		LSI		FSI		LSI		FSI	
	$G(2, 1)$		$G(3, 1)$		$G(4, 1)$		$G(2, 1)$		$G(3, 1)$		$G(4, 1)$	
λ	AATS	$Q_{3,12}$	AATS	$Q_{3,12}$	AATS	$Q_{3,12}$	AATS	$Q_{3,12}$	AATS	$Q_{3,12}$	AATS	$Q_{3,12}$
0	370,05	0,0	370,03	0,0	370,03	0,0	370,03	0,0	370,03	0,0	370,03	0,0
0,25	233,56	8,3	217,71	8,2	206,84	8,2	206,84	8,2	206,84	8,2	206,84	8,2
0,5	67,32	35,7	59,65	35,6	54,81	35,4	54,81	35,4	54,81	35,4	54,81	35,4
0,75	18,51	89,5	15,85	88,8	14,26	88,0	14,26	88,0	14,26	88,0	14,26	88,0
1	5,32	171,0	4,50	167,2	4,05	163,0	4,05	163,0	4,05	163,0	4,05	163,0
1,25	1,88	238,9	1,63	224,4	1,50	210,5	1,50	210,5	1,50	210,5	1,50	210,5
1,5	0,97	212,4	0,88	185,9	0,85	165,4	0,85	165,4	0,85	165,4	0,85	165,4
1,75	0,72	117,9	0,69	95,0	0,68	80,2	0,68	80,2	0,68	80,2	0,68	80,2
2	0,64	39,9	0,63	27,8	0,63	20,9	0,63	20,9	0,63	20,9	0,63	20,9
2,5	0,62	-15,7	0,61	-16,3	0,61	-16,6	0,61	-16,6	0,61	-16,6	0,61	-16,6
3	0,61	-18,4	0,61	-18,4	0,61	-18,4	0,61	-18,4	0,61	-18,4	0,61	-18,4

Tabela 3.28. – Valores de $AATS_{LSI}$ e de $Q_{3,12}$ em função de λ , no grupo G, com $d = 1$ em FSI, $a = 2, 3$ e 4 e $n = 5$.

Os resultados obtidos para o rácio $Q_{3,10}$, referentes à comparação de eficácia entre os métodos LSI e VSI, são apresentados na Tabela 3.29., a partir da qual se podem retirar as seguintes conclusões:

- 1) O desempenho de LSI melhora em todas as situações, quando aumenta o parâmetro de forma da distribuição Gama; o método perde eficácia em reduzidas e moderadas alterações da média e o método LSI ganha eficácia grandes alterações.
- 2) O comportamento do rácio $Q_{3,10}$ é igual ao do rácio $Q_{3,2}$ em moderadas e grandes alterações da média, mas em reduzidas alterações, $\lambda = 0,25$, sofre alterações, pois nesse caso LSI passa a ser mais eficaz do que VSI.

$G(\alpha, \beta)$	LSI		VSI		LSI		VSI		LSI		VSI	
	$G(2,1)$				$G(3,1)$				$G(4,1)$			
(d_1, d_2)		$(0.1, 2.0)$		$(0.1, 1.5)$		$(0.1, 2.0)$		$(0.1, 1.5)$		$(0.1, 2.0)$		$(0.1, 1.5)$
$(-w, w)$		$(-0.67, 0.57)$		$(-0.91, 0.897)$		$(-0.67, 0.58)$		$(-0.92, 0.898)$		$(-0.67, 0.58)$		$(-0.92, 0.90)$
λ	AATS	$Q_{3,13}$		AATS	$Q_{3,13}$		AATS	$Q_{3,13}$				
0	370,05	0,1	0,0	370,03	0,1	0,0	370,03	0,1	0,0			
0,25	233,56	4,4	4,8	217,71	3,0	3,7	206,84	2,2	3,0			
0,5	67,32	-7,5	-0,7	59,65	-8,1	-1,5	54,81	-8,5	-2,1			
0,75	18,51	-32,4	-17,1	15,85	-29,6	-16,2	14,26	-27,8	-15,6			
1	5,32	-43,9	-33,7	4,50	-38,2	-29,5	4,05	-34,4	-27,0			
1,25	1,88	-17,4	-26,0	1,63	-10,5	-20,2	1,50	-6,6	-17,0			
1,5	0,97	24,3	1,1	0,88	30,4	5,2	0,85	32,5	6,4			
1,75	0,72	47,4	16,0	0,69	50,6	17,8	0,68	51,0	17,7			
2	0,64	53,8	18,9	0,63	55,1	19,5	0,63	55,0	19,3			
2,5	0,62	54,8	18,2	0,61	55,2	18,5	0,61	55,2	18,5			
3	0,61	55,0	18,3	0,61	55,0	18,3	0,61	55,0	18,3			

Tabela 3.29. – Valores de $AATS_{LSI}$, de $Q_{3,13}$ em função de λ , no grupo G, com $(d_1, d_2) = (0.1, 1.5)$ e $(d_1, d_2) = (0.1, 2)$ em VSI, $a = 2, 3$ e 4 , com $n = 5$.

De modo a compararmos o desempenho de LSI com VSSI, retomamos os rácios $Q_{3,11}$ e $Q_{3,12}$, para os quais foram obtidos os resultados apresentados na Tabela 3.30., podendo concluir-se que:

- 1) Nas alterações da média em que LSI é mais eficaz, em termos de AATS, do que VSSI, $\lambda \geq 1,25$, a eficácia de LSI aumenta, em % e número, com o aumento do parâmetro de forma da distribuição Gama.
- 2) Em geral, o desempenho do método também melhora em termos de ANOS; no grupo G, são necessários menos itens, com LSI, para detetar alterações do tipo $\lambda = 0,25$;

3) Considerando os dois rácios, as diferenças entre métodos vão diminuindo  medida que aumenta o parâmetro de forma da distribuição Gama, ou seja,  medida que diminui a assimetria e a curtose da distribuição.

$G(\alpha, \beta)$		$G(2, 1)$						$G(\alpha, \beta)$		$G(3, 1)$						$G(\alpha, \beta)$		$G(4, 1)$													
(n_1, n_2)		$(1, 15)$		$(1, 10)$		$(2, 7)$		(n_1, n_2)		$(1, 15)$		$(1, 10)$		$(2, 7)$		(n_1, n_2)		$(1, 15)$		$(1, 10)$		$(2, 7)$		(n_1, n_2)		$(1, 15)$		$(1, 10)$		$(2, 7)$	
(d_1, d_2)		$(0.1, 1.36)$		$(0.1, 1.72)$		$(0.1, 2.35)$		(d_1, d_2)		$(0.1, 1.36)$		$(0.1, 1.72)$		$(0.1, 2.35)$		(d_1, d_2)		$(0.1, 1.36)$		$(0.1, 1.72)$		$(0.1, 2.35)$		(d_1, d_2)		$(0.1, 1.36)$		$(0.1, 1.72)$		$(0.1, 2.35)$	
(w_1, w_2)		$(1.05, 1.05)$		$(0.70, 0.70)$		$(0.44, 0.44)$		(w_1, w_2)		$(1.05, 1.05)$		$(0.71, 0.71)$		$(0.45, 0.45)$		(w_1, w_2)		$(1.06, 1.06)$		$(0.72, 0.72)$		$(0.46, 0.46)$		(w_1, w_2)		$(1.06, 1.06)$		$(0.72, 0.72)$		$(0.46, 0.46)$	
λ	ANOS	$Q_{3.11}$	$Q_{3.12}$	$Q_{3.11}$	$Q_{3.12}$	$Q_{3.11}$	$Q_{3.12}$	ANOS	$Q_{3.11}$	$Q_{3.12}$	$Q_{3.11}$	$Q_{3.12}$	$Q_{3.11}$	$Q_{3.12}$	ANOS	$Q_{3.11}$	$Q_{3.12}$	$Q_{3.11}$	$Q_{3.12}$	$Q_{3.11}$	$Q_{3.12}$	$Q_{3.11}$	$Q_{3.12}$	ANOS	$Q_{3.11}$	$Q_{3.12}$	$Q_{3.11}$	$Q_{3.12}$	$Q_{3.11}$	$Q_{3.12}$	
0	1851,85	0,2	-0,3	-0,1	0,3	-0,2	0,4	1851,85	0,1	-0,2	-0,2	0,3	-0,1	0,3	1851,85	0,1	-0,1	-0,2	0,2	0,0	0,1										
0,25	1266,65	-5,1	2,0	-6,7	3,4	-9,7	2,8	1180,69	-8,7	0,6	-8,9	2,3	-10,3	2,3	1121,68	-10,8	-0,3	-9,9	1,5	-10,1	1,9										
0,5	459,19	-63,6	-24,0	-50,8	-11,0	-35,6	-3,0	406,83	-64,6	-27,0	-51,2	-13,3	-35,6	-4,1	373,64	-65,0	-28,9	-51,3	-14,7	-35,3	-4,8										
0,75	177,92	-79,5	-49,1	-76,3	-30,9	-66,0	-13,7	152,10	-76,8	-49,6	-73,6	-32,1	-62,5	-14,5	136,54	-74,8	-49,5	-71,4	-32,6	-60,0	-15,0										
1	74,57	-52,7	-55,5	-56,2	-40,7	-56,5	-21,0	62,65	-45,5	-52,7	-50,1	-39,7	-50,8	-20,9	55,75	-40,4	-50,3	-45,5	-38,7	-46,4	-20,6										
1,25	34,30	0,5	-45,3	-7,3	-40,2	-14,6	-23,0	28,87	14,5	-37,5	5,4	-36,2	-3,5	-21,4	25,82	23,0	-31,5	13,3	-33,0	3,4	-19,9										
1,5	17,62	52,9	-10,0	43,5	-27,3	36,0	-19,3	15,14	66,5	4,2	57,2	-19,2	48,3	-15,6	13,78	72,7	14,1	63,8	-13,3	54,2	-12,9										
1,75	10,31	68,3	50,4	63,8	3,2	68,6	-8,4	9,19	75,8	67,8	72,7	14,7	76,1	-2,9	8,60	78,4	78,7	76,4	22,2	78,9	0,7										
2	7,00	58,3	117,8	62,2	47,1	81,6	4,5	6,54	61,9	131,5	67,2	56,8	85,5	14,9	6,31	63,3	138,8	69,4	62,1	86,5	17,8										
2,5	5,09	33,1	187,9	51,0	96,8	87,5	34,9	5,07	34,4	184,8	52,3	95,6	87,2	32,9	5,06	35,2	182,0	53,1	94,4	86,9	31,3										
3	5,00	22,3	173,6	46,4	90,7	83,6	24,0	5,00	22,4	166,2	46,2	87,0	83,1	20,9	5,00	22,5	160,6	46,2	84,3	82,9	18,8										

Tabela 3.30. – Valores de ANOS_{LSI}, $Q_{3.11}$ e de $Q_{3.12}$ em função de λ , no grupo G, com diferentes pares de amostragem e de dimensoes amostrais em VSSI, $a = 2, 3$ e 4 , com $n = 5$.

Na comparação de desempenho entre LSI e VSS, consideramos novamente os rácios $Q_{3.13}$ e $Q_{3.14}$, para os quais obtivemos os resultados que são apresentados na Tabela 3.31., podendo retirar-se as seguintes conclusoes:

- 1) O método LSI perde eficácia em reduzidas e moderadas alteraoes da mdia e ganha em grandes alteraoes, quando aumenta o parâmetro de forma da distribuição Gama; contudo, relativamente  normalidade, o método aumenta a eficácia em reduzidas alteraoes.
- 2) Em termos de ANOS, o método LSI tmbm melhora o desempenho  medida que aumenta o parâmetro de forma da distribuição populacional, tanto nas situaoes em que se recolhem menos itens em LSI como nas situaoes em que se recolhem mais itens.
- 3) Quer em termos de AATS, como em termos de ANOS, o desempenho de LSI melhora, em relação  situação em que a característica X da qualidade tinha distribuição normal, em alteraoes com magnitude $\lambda = 0,25$.

$G(\alpha, \beta)$		$G(2, 1)$						$G(\alpha, \beta)$		$G(3, 1)$						$G(\alpha, \beta)$		$G(4, 1)$					
(n_1, n_2)		$(1, 15)$		$(1, 10)$		$(2, 7)$		(n_1, n_2)		$(1, 15)$		$(1, 10)$		$(2, 7)$		(n_1, n_2)		$(1, 15)$		$(1, 10)$		$(2, 7)$	
(d_1, d_2)		$(1, 1)$						(d_1, d_2)		$(1, 1)$						(d_1, d_2)		$(1, 1)$					
(w_1, w_2)		$(1.07, 1.07)$		$(0.72, 0.72)$		$(0.45, 0.45)$		(w_1, w_2)		$(1.07, 1.07)$		$(0.72, 0.72)$		$(0.46, 0.46)$		(w_1, w_2)		$(1.07, 1.07)$		$(0.73, 0.73)$		$(0.47, 0.47)$	
λ	ANOS	$Q_{3.13}$	$Q_{3.14}$	$Q_{3.13}$	$Q_{3.14}$	$Q_{3.13}$	$Q_{3.14}$	ANOS	$Q_{3.13}$	$Q_{3.14}$	$Q_{3.13}$	$Q_{3.14}$	$Q_{3.13}$	$Q_{3.14}$	ANOS	$Q_{3.13}$	$Q_{3.14}$	$Q_{3.13}$	$Q_{3.14}$	$Q_{3.13}$	$Q_{3.14}$		
0	1851,85	0,1	-0,2	-0,1	0,2	-0,1	0,3	1851,85	0,0	-0,1	0,0	0,2	0,0	0,2	1851,85	0,0	-0,2	0,0	0,3	0,0	0,1		
0,25	1266,65	1,0	0,8	2,6	2,8	4,9	2,6	1180,69	-2,3	-0,2	0,7	1,9	4,3	2,1	1121,68	-4,2	-1,1	-0,2	1,2	4,0	1,8		
0,5	459,19	-42,6	-24,1	-17,1	-11,0	10,6	-3,1	406,83	-45,0	-27,1	-19,1	-13,3	9,4	-4,1	373,64	-46,4	-28,9	-20,3	-14,8	8,6	-4,8		
0,75	177,92	-58,8	-49,0	-28,7	-30,9	21,6	-13,6	152,10	-57,9	-49,5	-29,0	-32,1	20,8	-14,5	136,54	-57,0	-49,5	-29,1	-32,6	20,2	-15,0		
1	74,57	-38,6	-55,5	-11,1	-40,6	54,5	-21,0	62,65	-33,5	-52,7	-9,5	-39,7	53,1	-20,9	55,75	-29,7	-50,3	-8,2	-38,6	51,9	-20,6		
1,25	34,30	7,7	-45,2	19,7	-40,1	88,4	-23,0	28,87	20,0	-37,4	25,2	-36,2	85,4	-21,3	25,82	27,5	-31,4	28,2	-33,0	81,8	-19,9		
1,5	17,62	67,6	-9,9	44,1	-27,3	84,5	-19,2	15,14	81,3	4,3	51,5	-19,2	79,2	-15,6	13,78	87,5	14,2	54,7	-13,3	74,0	-12,8		
1,75	10,31	103,0	50,6	56,3	3,2	53,2	-8,3	9,19	110,0	67,9	62,5	14,8	49,9	-2,8	8,60	112,0	78,7	64,9	22,2	47,3	0,7		
2	7,00	108,0	117,9	62,9	47,2	31,2	9,7	6,54	109,9	131,5	65,9	56,8	30,6	14,9	6,31	109,9	138,8	66,9	62,1	29,8	17,8		
2,5	5,09	94,3	187,8	60,6	96,8	18,6	34,9	5,07	92,0	184,7	59,6	95,6	16,3	32,9	5,06	90,4	181,9	59,1	94,3	14,8	31,2		
3	5,00	78,6	173,2	51,9	90,6	3,0	23,7	5,00	74,2	165,8	49,1	86,9	9,3	20,7	5,00	71,2	160,3	47,4	84,1	7,6	18,6		

Tabela 3.31. – Valores de ANOS_{LSI}, $Q_{3.13}$ e de $Q_{3.14}$ em função de λ , no grupo G, com diferentes pares de amostragem em VSS, $a = 2, 3$ e 4 , com $n = 5$.

Para efetuar a comparação entre os métodos LSI e VP, em termos de AATS e de ANOS, consideramos, novamente, os rácios $Q_{3.15}$ e $Q_{3.16}$, para os quais obtivemos os resultados que são apresentados na Tabela 3.32., e a partir da qual podemos concluir que:

- 1) O comportamento dos rácios é idêntico ao dos rácios $Q_{3.3}$ e $Q_{3.4}$.
- 2) Tanto em termos de AATS como em termos de ANOS, o método LSI melhora o desempenho quando diminui a assimetria e a curtose da distribuição Gama, ou seja, quando aumentamos o parâmetro de forma da distribuição.
- 3) O desempenho de VP também diminui com o aumento do parâmetro de forma, quer nas situações em que é melhor do que LSI, quer nas restantes situações.

$G(\alpha, \beta)$		$G(2, 1)$						$G(\alpha, \beta)$		$G(3, 1)$						$G(\alpha, \beta)$		$G(4, 1)$					
(n_1, n_2)		$(1, 15)$		$(1, 10)$		$(2, 7)$		(n_1, n_2)		$(1, 15)$		$(1, 10)$		$(2, 7)$		(n_1, n_2)		$(1, 15)$		$(1, 10)$		$(2, 7)$	
(d_1, d_2)		$(0.1, 1.36)$						(d_1, d_2)		$(0.1, 1.36)$						(d_1, d_2)		$(0.1, 1.36)$					
(L_1, L_2)		$(6, 2.79)$		$(6, 3.12)$		$(6, 3.34)$		(L_1, L_2)		$(6, 2.73)$		$(6, 3.02)$		$(6, 3.23)$		(L_1, L_2)		$(6, 2.69)$		$(6, 2.97)$		$(6, 3.15)$	
(w_1, w_2)		$(1.04, 1.08)$		$(0.71, 0.72)$		$(0.44, 0.45)$		(w_1, w_2)		$(1.04, 1.07)$		$(0.71, 0.72)$		$(0.45, 0.46)$		(w_1, w_2)		$(1.04, 1.07)$		$(0.72, 0.73)$		$(0.46, 0.47)$	
λ	ANOS	$Q_{3.15}$	$Q_{3.16}$	$Q_{3.15}$	$Q_{3.16}$	$Q_{3.15}$	$Q_{3.16}$	ANOS	$Q_{3.15}$	$Q_{3.16}$	$Q_{3.15}$	$Q_{3.16}$	$Q_{3.15}$	$Q_{3.16}$	ANOS	$Q_{3.15}$	$Q_{3.16}$	$Q_{3.15}$	$Q_{3.16}$	$Q_{3.15}$	$Q_{3.16}$		
0	1851,85	0,1	-0,3	0,2	0,3	0,1	0,3	1851,85	0,1	-0,2	-0,1	0,3	-0,1	0,4	1851,85	0,1	-0,3	0,2	0,4	-0,2	0,3		
0,25	1266,65	-72,4	-72,7	-62,6	-60,3	-52,5	-47,3	1180,69	-72,9	-72,3	-63,8	-60,9	-53,8	-48,6	1121,68	-73,2	-72,2	-64,1	-61,0	-54,3	-49,4		
0,5	459,19	-86,8	-82,0	-80,3	-69,9	-67,7	-54,9	406,83	-86,1	-81,2	-79,9	-69,9	-67,7	-55,5	373,64	-85,5	-80,6	-79,3	-69,6	-67,5	-55,9		
0,75	177,92	-81,8	-83,3	-83,0	-73,6	-78,4	-59,1	152,10	-79,3	-81,5	-80,5	-72,6	-75,7	-58,8	136,54	-77,3	-80,2	-78,6	-71,7	-73,6	-58,5		
1	74,57	-53,1	-76,9	-59,8	-72,0	-63,7	-58,8	62,65	-45,8	-72,9	-53,4	-69,4	-57,8	-57,4	55,75	-40,6	-69,8	-48,7	-67,3	-53,4	-56,2		
1,25	34,30	2,3	-56,1	-9,8	-63,3	-21,5	-54,4	28,87	16,4	-47,8	3,3	-57,9	-9,7	-51,4	25,82	24,9	-41,6	11,5	-53,8	-2,2	-49,0		
1,5	17,62	56,8	-14,8	43,4	-41,6	31,5	-44,6	15,14	70,1	-0,9	57,4	-32,3	44,8	-39,3	13,78	76,1	8,8	64,2	-25,8	51,4	-35,4		
1,75	10,31	72,3	45,5	65,5	-2,9	67,6	-26,3	9,19	79,4	63,2	74,4	8,8	75,9	-18,8	8,60	81,8	74,4	78,0	16,4	79,3	-13,9		
2	7,00	61,7	114,2	64,1	42,8	84,1	0,6	6,54	65,1	129,3	69,0	52,9	87,9	7,6	6,31	66,3	137,9	71,2	58,6	89,3	11,6		
2,5	5,09	35,9	194,8	53,0	96,6	92,7	37,6	5,07	37,3	196,1	54,5	97,4	93,2	38,2	5,06	38,2	196,6	55,5	97,7	93,6	38,4		
3	5,00	25,5	199,9	49,5	99,9	92,4	40,0	5,00	26,2	199,9	49,8	100,0	92,8	40,0	5,00	26,7	200,0	50,2	100,0	93,1	40,0		

Tabela 3.32. – Valores de ANOS_{LSI}, $Q_{3.15}$ e de $Q_{3.16}$ em função de λ , no grupo G, com diferentes pares de amostragem, de dimensões amostrais e de múltiplos do desvio padrão em VP, $a = 2, 3$ e 4 , com $n = 5$.

Por fim, podemos concluir que o método LSI mantém a eficácia demonstrada sob a normalidade da característica da qualidade, melhorando-a em determinadas situações e populações não noemais, podendo afirmar-se como um método de amostragem robusto.

3.4. Comparação do Desempenho Estatístico do método PSI com o Desempenho dos Métodos LSI, VSSI, VSS e VP

Num procedimento com intervalos predefinidos, os intervalos de amostragem são definidos no início do processo, de acordo com o tempo de vida do sistema. A ideia implícita a este método, neste contexto de controlo da qualidade, assenta no doseamento da intensidade da amostragem em função das necessidades previsíveis, com base nas expectativas de aparecimento de uma determinada causa assinalável (que provocará uma alteração na característica da qualidade monitorizada).

Este procedimento de calendarização pode tornar-se muito importante no funcionamento de uma organização, independentemente do seu grau de complexidade, não existindo nos procedimentos com intervalos adaptativos. Relembre-se que, o facto do profissional não poder calendarizar os instantes em que são retiradas as amostras do processo, devido ao grande número de “*switches*”, é uma desvantagem apontada aos métodos adaptativos com intervalos variáveis. Os trabalhos de Amin e Letsinger (1991) e de Amin e Hemasinha (1993) admitem que um grande número de “*switches*” entre os diferentes intervalos de amostragem pode ser um fator de complexidade na aplicação das cartas com intervalos variáveis, procurando introduzir procedimentos que diminuam esse número de transições. Reynolds (1996a, b) propõem-se resolver esse problema para as cartas VSI com a introdução do método VSIFT. Costa (1998) visa resolver o mesmo tipo de problema para as cartas VSSI com a introdução do método VSSIFT. Stoumbos e Reynolds (2001) introduzem o mesmo conceito de tempos fixos nas cartas com método SPRT e apresentam o procedimento SPRTFT. Lin e Chou

(2005a), de modo a ultrapassarem o problema para as cartas VP e VSR, introduzem os métodos VPFT e VSRFT.

Por outro lado, a maioria dos artigos que abordam os diferentes procedimentos de amostragem, independentemente das abordagens serem de índole económica, estatística ou económica-estatística, considera que a distribuição do tempo de vida do sistema é exponencial, caso em que a taxa de risco é constante, reduzindo-se o método com intervalos predefinidos ao método periódico clássico.

Apesar da distribuição do tempo de vida de componentes eletrónicos, por exemplo, ou de outros sistemas com um grande número de componentes poder ser bem ajustada pela distribuição exponencial, existem muitos processos, mecânicos, para os quais uma distribuição de tempo de vida do sistema com taxa de risco crescente é mais apropriada (devido, em particular, aos fenómenos de desgaste inerentes ao processo) e outros processos em que a taxa de risco apresenta outras formas.

Neste contexto, justifica-se uma comparação de desempenho entre o método PSI e os diferentes métodos com intervalos adaptativos, em termos de AATS, que contemple as diferentes situações.

Para tal, vamos considerar que o tempo de vida do sistema segue uma distribuição de *Weibull* com $E(T) = 1000$ e taxa de risco crescente ($\delta = 2, 3, 4$ e 5), que o intervalo médio de amostragem, sob controlo, é igual à unidade ($d = 1$ em FSI, sem perda de generalidade), que o número médio de amostras recolhida sob controlo é igual à dimensão amostral, n , em FSI e que $L = 3$. Considere-se o rácio (3.112) que representa a variação relativa, em %, do $AATS_{PSI}$ relativamente ao AATS de um dos outros métodos em comparação (MC na expressão pode representar LSI, VSSI, VSS ou VP), dado por

$$Q_{3.17} = \left(1 - \frac{AATS_{[MC]}}{AATS_{PSI}} \right) \times 100\%. \quad (3.112)$$

Nas condições enunciadas, foram obtidos resultados para diferentes pares de amostragem, diferentes pares de dimensões amostrais e diferentes pares de valores para os múltiplos do desvio padrão, contudo, tratando-se de um estudo exploratório que nos vai permitir expor um novo método, optámos por apresentar só um caso para cada situação.

Para cada uma das situações, apresentamos os resultados nas Fig. 3.6. e Fig. 3.7. a partir das quais podemos concluir que:

- 1) A carta de controlo para a média com método PSI é mais eficaz que a carta com métodos LSI, VSSI, VSS e VP na deteção de alterações muito pequenas da média, $\lambda \leq 0.25$ nos três primeiros métodos e $\lambda \leq 0.125$ no caso de VP, e na deteção de alterações grandes/moderadas da média, $\lambda \geq 1.75$ com LSI e $\lambda \geq 1.25$ nos restantes

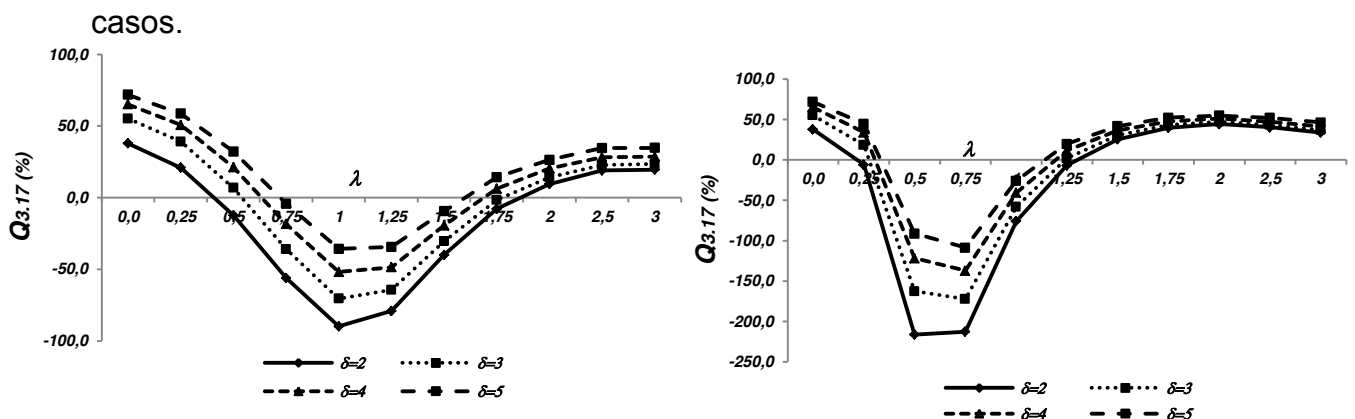


Fig. 3.6. – Valores de $Q_{3.17}$ em função de λ , com $\Delta H = 0.001$ em PSI, $k = 3.8134$ em LSI, $(n_1, n_2) = (1, 15)$ e $(d_1, d_2) = (0.1, 1.36)$ em VSSI, com $n = 5$.

- 2) O método PSI é menos eficaz do que os outros métodos em comparação, nas restantes situações.
- 3) Em todas as situações, o método PSI melhora o desempenho quando aumenta a taxa de risco do sistema.
- 4) Quando a probabilidade de deteção, de uma alteração na média, é elevada ($\lambda > 2$), as reduções obtidas com o método PSI tendem a estabilizar, em comparação com LSI e com VP; quando comparamos PSI com VSSI e VSS, as reduções obtidas com PSI atingem um máximo à volta de $\lambda = 2$ e em seguida diminuem ligeiramente.

5) Qualquer um dos métodos, em comparação, é mais eficaz do que PSI, em moderadas alterações da média ($0.5 \leq \lambda \leq 1.25$).

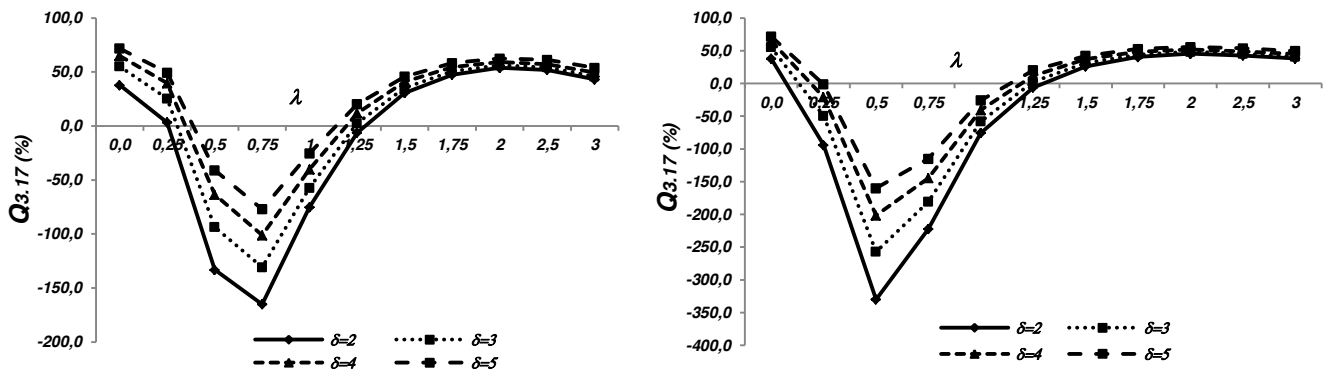


Fig. 3.7. – Valores de $Q_{3,17}$ em função de λ , com $\Delta H = 0.01$ em PSI, $(n_1, n_2) = (1, 15)$ em VSS, $(n_1, n_2) = (1, 15)$, $(d_1, d_2) = (0.1, 1.36)$ e $(L_1, L_2) = (6, 2.60)$ em VP, com $n = 5$.

Pelo conjunto de resultados obtido e de conclusões retiradas, fica-se com a ideia que o método PSI pode ser uma importante alternativa a alguns dos métodos adaptativos em processos onde ocorram diferentes tipos de alterações da média. Ainda assim, para que a sua aplicação seja possível, temos de conhecer a distribuição do tempo de vida do sistema e que seja possível obter a função inversa da mesma.

3.5. Novo Método de Amostragem: Método CAPSI

Com o método PSI, a calendarização das inspeções é definida antes do início do processo tendo por base as possibilidades de ocorrência de uma dada alteração em cada instante, não sendo atualizada com a informação dada em cada amostra. Sabendo-se que o método eficaz a detetar reduzidas e grandes alterações na média.

Por outro lado, os resultados obtidos com a carta de controlo para a média e amostragem LSI mostraram que a carta é muito eficiente na deteção de alterações moderadas e grandes da média. No método LSI não existe calendarização das inspeções ao sistema, sendo conhecido o instante de recolha da próxima amostra com base na informação dada pela amostra corrente. A única informação sob o estado do processo está contida em cada amostra que vai sendo retirada, sendo o processo de obtenção dos intervalos de amostragem (com base na função densidade da

distribuição de *Laplace* reduzida) o mesmo e independente da distribuição do tempo de vida do sistema.

À semelhança do que foi feito por Carot *et al.* (2002), combinando os métodos DS e VSI, por Infante (2004), que combinou um método de amostragem em que os intervalos entre recolhas são definidos com base na função densidade da distribuição normal reduzida com o método PSI e por Infante e Rosmaninho (2007) com a combinação dos métodos DS e PSI, pensamos que faz todo o sentido, dadas as suas características de complementaridade, combinar os métodos LSI e PSI, embora outras hipóteses fossem possíveis.

Assim, considerando uma carta de controlo para a média, o método que propomos define os instantes de amostragem com base numa média ponderada dos instantes dos métodos LSI e PSI, dando maior peso aos instantes do método LSI para alterações moderadas (onde PSI é menos eficaz) e maior peso aos instantes do método PSI nos restantes casos (onde LSI é menos eficaz). Desta forma, os instantes de amostragem, inicialmente calendarizados de acordo com as expectativas de ocorrência de uma alteração, tomando como base a distribuição do tempo de vida do sistema, são adaptados em função do valor da estatística amostral calculada no instante anterior.

3.5.1. Propriedades Elementares do Método CAPSI

Sejam μ_0 e σ_0 , respetivamente, média e desvio padrão da característica da qualidade X , que se admite ter distribuição aproximadamente normal.

Designem-se por t_i^{LSI} os instantes de amostragem obtidos com o método LSI, dados por (3.47), e adaptados para

$$t_{i+1}^{\text{LSI}} = t_i^{\text{LSI}} + kI(u_i), \quad (3.113)$$

com $u_i = \sqrt{n} \frac{\bar{x}_i - \mu_0}{\sigma_0}$, $t_0^{\text{LSI}} = 0$, $t_1^{\text{LSI}} = kI(0)$, $\bar{x}_0 = \mu_0$ e $-L < u_i < L$.

Do mesmo modo, designem-se por t_i^{PSI} os instantes de amostragem obtidos com o método PSI, dados por (3.7), e adaptados para

$$t_i^{\text{LSI}} = R^{-1}[\exp(-i\Delta H)], \quad (3.114)$$

com $t_0^{\text{PSI}} = 0$.

De acordo com o método combinado proposto, denominado CAPSI (“*Combined Adaptive and Predetermined Sampling Intervals*”) a partir de agora, o instante de amostragem de ordem $i + 1$ é dado por

$$\begin{aligned} t_{i+1} &= \theta t_{i+1}^{\text{LSI}} + (1-\theta)t_{i+1}^{\text{PSI}} = \\ &= \theta [t_i^{\text{LSI}} + kI(u_i)] + (1-\theta)R^{-1}[\exp(-i\Delta H - \Delta H)], \quad 0 \leq \theta \leq 1, \end{aligned} \quad (3.115)$$

$$\text{com } t_0 = 0 \text{ e } t_1 = \theta \frac{k}{2} + (1-\theta)R^{-1}[\exp(-\Delta H)], \quad 0 \leq \theta \leq 1, \quad (3.116)$$

onde θ é o peso atribuído ao instante de amostragem do método LSI.

De acordo com CAPSI, os instantes de amostragem começam por ser predefinidos antes do início do controlo do processo de acordo com a distribuição do tempo de vida do sistema, sendo atualizados em cada instante pela informação contida na média da amostra. Trata-se, assim, de um método com intervalos de amostragem adaptativos, exigindo-se, para a sua implementação, o conhecimento da função de fiabilidade do sistema e, por outro lado, que a mesma admita inversa.

No caso do tempo de vida ter distribuição de *Weibull*, caso que vamos considerar neste estudo para analisar o comportamento estatístico do método CAPSI estando em preparação resultados com outras distribuições, os intervalos de amostragem são dados por

$$\Delta t_i = \theta \frac{k \exp(-|u_i|)}{2} + (1-\theta)(\sqrt[i]{i} - \sqrt[i]{i-1})\alpha \sqrt[i]{\Delta H}, \quad 0 \leq \theta \leq 1, \quad (3.117)$$

$$\text{com } \Delta t_1 = \theta \frac{k}{2} + (1-\theta)\alpha \sqrt[i]{\Delta H}, \quad 0 \leq \theta \leq 1, \quad (3.118)$$

onde α e δ são, respetivamente, o parâmetro de escala e de forma da distribuição de *Weibull* e θ o peso atribuído ao instante de amostragem do método LSI.

Quando ocorre um falso alarme, pode-se estabelecer que a próxima amostra é retirada após um intervalo de tempo dado pela média ponderada entre o intervalo de amostragem PSI e o menor intervalo de amostragem obtido com o método LSI (sendo igual a $k.l(L)$).

Os valores de k e de ΔH são obtidos, novamente, de modo a que o número médio de amostras recolhidas sob controlo seja igual ao intervalo de amostragem do método FSI. Assim, quando o intervalo médio de amostragem, sob controlo, é igual à unidade de tempo, tem-se

$$k = \frac{\beta}{e^{1/2} [\Phi(L+1) - \Phi(1)]}, \quad (3.119)$$

$$e \quad \Delta H = \frac{d}{E(T)}. \quad (3.120)$$

3.5.2. Comparação com os Métodos FSI, PSI e LSI

Considerem-se limites de controlo “3-sigma”, distribuição de *Weibull* para o tempo de vida do sistema com $E(T) = 1000$ (e $E(T) = 100$ em Anexos), amostras com dimensões 5 e 9, uma alteração no desvio padrão ($\rho = 1.5$, de modo a confirmar o carácter adaptativo do método) e dois valores para o peso do intervalo de amostragem do método LSI (outros valores são apresentados em Anexos), recorrendo-se à simulação para calcular o AATS da carta de controlo para a média com CAPSI, para diferentes valores de λ .

Para obter os resultados por simulação, elaboramos um *input* no software R, disponibilizado em Anexos, que tem a particularidade de nos permitir simular resultados para o método CAPSI, para o método LSI (quando $\theta = 1$) e para o método PSI (quando $\theta = 0$). Contudo, e apesar de todas as virtudes da simulação, para o profissional sem

experiência, esta não é muito apelativa. Para ultrapassar uma possível desvantagem do método em aplicações práticas, elaboramos um protótipo (em C#, do qual apresentamos um *PrntScrn* em Anexos) que permite introduzir os parâmetros necessários à simulação e obter, de forma mais simplificada, todos os resultados pretendidos.

Refira-se, que apesar do intervalo médio de amostragem, sob controlo, ser igual a uma unidade de tempo, nos métodos LSI e PSI, os diferentes resultados obtidos permitiram mostrar que no método CAPSI isso não acontece, apesar do intervalo médio de tempo sob controlo seja muito próximo da unidade. Nas diferentes simulações, foram registadas algumas reduções no número médio de amostras recolhidas sob controlo, que em determinados contextos, sobretudo económicos, podem ser significativas, e que nos propomos estudar de futuro. Contudo, acreditamos que tais reduções se devem à grande influência que o primeiro intervalo de amostragem tem neste método, ao contrário do que acontece com outros métodos.

Feitas algumas considerações, vamos comparar o desempenho estatístico do método CAPSI com o desempenho dos métodos FSI, PSI, LSI e VSI, considerando o intervalo médio de amostragem, sob controlo, igual ao período de tempo entre amostras no método periódico clássico, limites de controlo “3-sigma”, distribuição de *Weibull* para o tempo de vida do sistema com $E(T) = 1000$ e taxas de risco crescente, com $d = 1$ no método FSI, $\Delta H = 0.001$ (utilizando a aproximação (3.19)) no método PSI, $k = 3.8134$ em LSI e quatro pares de intervalos de amostragem em VSI.

Sob as condições apresentadas, obtivemos resultados para os rácios $Q_{3.18}$, $Q_{3.19}$ e $Q_{3.20}$ que representam uma medida de variação relativa, em %, do $AATS_{CAPSI}$ relativamente ao $AATS_{FSI}$, ao $AATS_{PSI}$ e ao $AATS_{LSI}$, dados, respetivamente, por:

$$Q_{3.18} = \left(1 - \frac{AATS_{CAPSI}}{AATS_{FSI}} \right) \times 100\%, \quad (3.121)$$

$$Q_{3.19} = \left(1 - \frac{AATS_{CAPSI}}{AATS_{PSI}}\right) \times 100\%, \quad (3.122)$$

e por

$$Q_{3.20} = \left(1 - \frac{AATS_{CAPSI}}{AATS_{LSI}}\right) \times 100\%. \quad (3.123)$$

Assim, suponhamos um processo no qual as pequenas e/ou grandes alterações na média ocorrem em maior número. De acordo com o método CAPSI, atribui-se um maior peso ao intervalo de amostragem do método PSI. Considerando $\theta = 0.4$, os resultados obtidos para os rácios $Q_{3.18}$, $Q_{3.22}$ e $Q_{3.20}$ são apresentados na Tabela 3.33., Tabela 3.34. e Tabela 3.35., das quais podemos retirar as seguintes conclusões:

- 1) O método CAPSI é sempre mais eficaz do que o método FSI, melhorando a eficácia à medida que aumenta a taxa de risco do sistema.
- 2) Quando aumentamos a dimensão amostral, de 5 para 9, o método melhora o seu desempenho, relativamente a FSI, em alterações do tipo $\lambda \leq 0.75$, exceto quando $\lambda = 0.25$ e $\delta = 2$; o método CAPSI também melhora a sua eficácia, em relação a FSI, quando $\delta = 2$ e $\lambda \geq 2.5$; a eficácia de CAPSI piora nos restantes valores de λ e δ .
- 3) Quando consideramos alteração no desvio padrão, $\rho = 1.5$, o método CAPSI melhora a sua eficácia, em relação a FSI, para $\delta \geq 3$ e $\lambda = 0.25$, $\delta \in \{3, 5\}$ e $\lambda = 0.5$ e para $\lambda \geq 1.75$ em todas as taxas de risco exceto quando $\delta \in \{4, 7\}$ com $\lambda = 3$; a eficácia de CAPSI piora nos restantes valores de λ e δ .

$E(T)$ 1000	δ					δ					δ				
	2	3	4	5	7	2	3	4	5	7	2	3	4	5	7
λ	$Q_{3.18}$					$Q_{3.19}$					$Q_{3.20}$				
0,25	23,7	30,9	43,5	47,2	51,8	-4,1	-22,3	-23,6	-37,8	-66,9	17,7	25,5	39,0	43,0	48,0
0,5	24,6	36,3	47,3	52,2	58,7	10,9	9,4	11,2	6,6	-3,4	-0,0	15,6	30,1	36,6	45,3
0,75	31,3	42,9	52,8	58,2	65,5	24,3	27,9	31,5	31,1	28,9	-18,2	1,9	18,9	28,2	40,6
1,0	33,0	48,7	55,4	61,6	68,7	28,8	39,3	40,7	43,0	42,9	-35,1	-3,5	10,0	22,6	36,8
1,25	31,5	44,6	55,4	60,8	66,3	28,6	37,1	44,1	45,5	43,7	-27,8	-3,4	16,9	26,8	37,1
1,5	24,9	38,9	49,8	55,1	61,3	22,7	32,5	39,4	40,8	39,3	-8,2	11,9	27,6	35,2	44,2
1,75	18,2	30,4	41,2	46,4	53,1	16,4	24,5	30,9	31,0	29,1	9,9	23,3	35,2	40,9	48,3
2,0	11,1	23,6	33,1	38,6	46,4	9,5	18,0	22,6	23,1	20,8	18,1	29,7	38,3	43,4	50,6
2,5	6,9	19,6	29,0	34,6	40,2	5,5	14,1	18,7	17,6	13,5	23,4	33,8	41,6	46,2	50,8
3,0	6,1	19,4	29,1	34,0	42,1	4,7	14,1	18,9	17,5	17,3	23,3	34,3	42,1	46,2	52,7

Tabela 3.33. – Valores de $Q_{3.18}$, $Q_{3.19}$ e de $Q_{3.20}$ em função de λ , com $\rho = 1$, $\theta = 0.4$, $d = 1$ em FSI, $k = 3.8134$ e $\Delta H = 0.001$ em CAPSI, LSI e PSI, com $n = 5$.

- 4) O novo método é sempre mais eficaz do que PSI, exceto quando $\lambda = 0.25$ e quando $\lambda = 0.5$ e $\delta = 7$; a eficácia do método aumenta quando aumentamos δ até 5 mas decresce para valores superiores.
- 5) Quando aumentamos a dimensão amostral, o método CAPSI melhora o seu desempenho, relativamente a PSI, em $\lambda \leq 0.75$ e em $\lambda = 1$ com $\delta \geq 4$; nos restantes valores de λ e de δ o método CAPSI piora a sua eficácia.
- 6) Quando consideramos alteração no desvio padrão, $\rho = 1.5$, o método melhora sempre a sua eficácia para $\lambda \geq 1.75$, exceto quando $\lambda = 3$ e $\delta = 3$; ainda em relação a PSI, a eficácia de CAPSI melhora, sempre, quando $\lambda \leq 0.5$ e quando $\lambda = 0.75$ e $\delta \in \{3, 4\}$; nos restantes casos, a eficácia de CAPSI piora.

$E(T)$ 1000	δ					δ					δ				
	2	3	4	5	7	2	3	4	5	7	2	3	4	5	7
λ	$Q_{3,18}$					$Q_{3,19}$					$Q_{3,20}$				
0,25	21,5	34,8	43,6	49,3	56,0	13,1	12,9	12,3	8,3	1,5	2,8	19,3	30,1	37,2	45,6
0,5	23,8	36,5	46,5	53,0	58,1	16,5	19,0	25,3	22,7	14,9	-0,8	15,9	29,3	37,8	44,5
0,75	24,1	38,8	48,1	53,0	60,1	18,0	28,3	34,4	27,3	27,5	-8,9	12,2	25,7	32,6	42,7
1,0	25,4	39,1	47,9	55,4	61,8	23,3	31,8	31,2	36,7	37,3	-12,6	8,1	21,3	32,7	42,4
1,25	25,4	40,6	48,7	54,3	62,2	20,7	33,7	34,1	31,6	38,2	-10,9	11,7	23,7	32,1	43,7
1,5	24,0	36,0	46,6	52,6	58,5	22,5	31,2	36,0	34,3	35,3	-3,6	12,8	27,2	35,4	43,5
1,75	20,4	33,7	43,8	48,2	56,1	18,9	27,1	35,2	30,9	35,4	4,9	20,8	32,8	38,1	47,5
2,0	16,0	29,8	39,9	44,9	51,4	13,4	26,8	26,5	25,5	32,0	12,3	26,7	37,2	42,4	49,3
2,5	9,8	22,4	30,3	38,5	44,0	7,4	22,5	19,8	29,8	16,7	21,1	32,1	39,0	46,2	51,0
3,0	7,5	20,0	28,9	34,8	41,4	7,6	12,8	20,1	18,6	18,5	23,7	33,9	41,3	46,2	51,6

Tabela 3.34. – Valores de $Q_{3,18}$, $Q_{3,19}$ e de $Q_{3,20}$ em função de λ , com $\rho = 1.5$, $\theta = 0.4$, $d = 1$ em FSI, $k = 3.8134$ e $\Delta H = 0.001$ em CAPSI, LSI e PSI, com $n = 5$.

- 7) O método CAPSI é sempre mais eficaz do que o método LSI em todas as alterações da média com taxas de risco $\delta \geq 4$; quando $\delta = 2$ com $\lambda < 0.5$ ou $\lambda \geq 1.75$ e quando $\delta = 3$ com $\lambda < 1$ ou $\lambda \geq 1.5$, o método CAPSI também é mais eficaz do que LSI.

$E(T)$ 1000	δ					δ					δ				
	2	3	4	5	7	2	3	4	5	7	2	3	4	5	7
λ	$Q_{3,18}$					$Q_{3,19}$					$Q_{3,20}$				
0,25	23,3	36,6	46,2	49,6	54,7	-1,2	-3,5	-5,7	-18,3	-40,1	12,3	27,5	38,5	42,4	48,1
0,5	29,1	42,2	51,3	56,5	64,1	24,0	23,8	28,2	26,7	24,2	-12,5	8,2	22,8	31,0	43,0
0,75	32,1	46,9	55,4	61,9	68,3	28,3	36,8	37,6	45,1	42,6	-37,1	-7,3	9,9	23,0	35,9
1,0	30,3	43,2	50,6	58,3	65,3	27,8	35,0	41,6	43,5	44,7	-19,8	2,3	15,1	28,3	40,3
1,25	22,0	34,4	42,5	49,2	55,4	20,6	27,0	30,0	35,4	36,6	7,7	22,3	31,9	39,9	47,2
1,5	12,0	22,8	34,1	38,4	46,0	10,4	16,4	27,5	25,9	17,5	19,4	29,3	39,6	43,6	50,6
1,75	8,9	18,1	28,1	33,8	41,3	7,7	13,3	22,2	20,9	16,5	24,1	31,7	40,1	44,8	51,0
2,0	6,6	16,7	28,3	33,8	41,1	4,1	11,5	21,7	14,3	17,0	23,6	31,9	41,3	45,9	51,8
2,5	7,2	19,0	27,9	34,1	41,0	4,4	11,9	21,5	14,2	14,4	24,3	33,9	41,2	46,2	51,9
3,0	7,6	19,3	30,0	34,3	41,4	4,0	11,2	21,0	13,1	14,9	24,6	34,2	42,9	46,4	52,2

Tabela 3.35. – Valores de $Q_{3,18}$, $Q_{3,19}$ e de $Q_{3,20}$ em função de λ , com $\rho = 1$, $\theta = 0.4$, $d = 1$ em FSI, $k = 3.8134$ e $\Delta H = 0.001$ em CAPSI, LSI e PSI, com $n = 9$.

- 8) Quando aumentamos a dimensão amostral, CAPSI melhora de eficácia, relativamente a LSI, para valores de $\lambda \geq 1$ e em todas as taxas de risco do sistema, exceto quando $\lambda = 2.5$ e $\delta \in \{4, 5\}$ e quando $\lambda = 3$ e $\delta \in \{3, 7\}$; também melhora de desempenho quando $\lambda = 0.25$ e $\delta \in \{3, 7\}$; nas restantes situações, o método piora o desempenho.
- 9) Quando consideramos $\rho = 1.5$, a eficácia de CAPSI, em relação a LSI, melhora sempre para valores $0.75 \leq \lambda \leq 1.25$, quando $\lambda = 0.5$ e $\delta = \{3, 5\}$, quando $\lambda = 1.5$ e $\delta = \{2, 3, 5\}$, quando $\lambda = 2.5$ e $\delta = 7$ e quando $\lambda = 3$ e $\delta = 2$; nos restantes casos a eficácia do método é pior do que a do método LSI.
- 10) Em geral, nas situações em que o aumento da dimensão amostral melhora a eficácia de CAPSI, relativamente a LSI, piora a eficácia do método em relação a FSI e a PSI, e vice-versa; o mesmo acontecendo nas situações com alteração no desvio padrão.

Suponha-se, agora, um processo no qual as moderadas alterações na média ocorrem em maior número. De acordo com o método CAPSI, atribui-se um maior peso ao intervalo de amostragem do método LSI. Considerando $\theta = 0.6$, os resultados obtidos para os rácios $Q_{3.18}$, $Q_{3.19}$ e $Q_{3.20}$ são apresentados na Tabela 3.36., Tabela 3.37. e Tabela 3.38., das quais podemos retirar as seguintes conclusões:

- 1) O método CAPSI é sempre mais eficaz do que o método FSI, melhorando a eficácia à medida que aumenta a taxa de risco do sistema.
- 2) Quando aumentamos a dimensão amostral, para 9, o método melhora o seu desempenho, relativamente a FSI, para todas as taxas de risco com alterações do tipo $\lambda \leq 0.75$ e do tipo $\lambda = 3$; quando $\delta = 7$ e $\lambda = 2.5$ a eficácia de CAPSI também melhora, piorando nas restantes situações.
- 3) Quando consideramos alteração no desvio padrão, $\rho = 1.5$, o método CAPSI melhora a sua eficácia, em relação a FSI, em todas as taxas de risco com alterações

$\lambda = 0.25$ e $1.75 \leq \lambda \leq 2.5$, melhorando ainda quando $\delta = 2$ com $\lambda \in \{0.5, 3\}$; o método piora de eficácia, relativamente a FSI, nas restantes situações.

$E(T)$ 1000	δ					δ					δ				
	2	3	4	5	7	2	3	4	5	7	2	3	4	5	7
λ	$Q_{3,18}$					$Q_{3,19}$					$Q_{3,20}$				
0,25	17,2	28,6	32,8	35,2	38,0	-12,9	-26,4	-46,9	-69,1	-114,4	10,7	22,9	27,6	30,1	33,2
0,5	27,0	35,4	42,1	45,4	48,6	13,8	8,1	2,4	-6,7	-28,9	3,2	14,3	23,2	27,6	31,8
0,75	36,9	46,3	52,3	55,6	58,6	30,5	32,1	30,7	26,7	14,6	-8,4	7,7	18,0	23,6	28,8
1,0	40,7	50,4	56,1	60,0	64,1	37,0	41,3	41,6	40,6	34,5	-19,6	-0,0	11,4	19,3	27,6
1,25	38,6	49,4	54,4	58,4	60,7	36,0	42,5	42,8	42,2	34,4	-14,5	5,5	14,9	22,3	26,7
1,5	30,3	40,2	45,6	48,9	52,0	28,2	33,9	34,2	32,8	24,7	-0,5	13,8	21,5	26,4	30,8
1,75	19,1	28,3	33,5	36,7	39,6	17,4	22,3	21,9	18,6	8,9	10,9	21,0	26,8	30,3	33,5
2,0	9,0	18,1	23,2	26,0	29,3	7,4	12,1	11,2	7,3	-4,3	16,1	24,6	29,3	31,8	34,9
2,5	2,5	10,6	15,7	18,7	21,6	1,0	4,5	3,5	-2,4	-13,5	19,8	26,4	30,6	33,1	35,5
3,0	1,2	9,8	15,0	18,1	21,6	-0,3	3,8	2,8	-2,4	-12,1	19,4	26,4	30,7	33,1	36,0

Tabela 3.36. – Valores de $Q_{3,18}$, $Q_{3,19}$ e de $Q_{3,20}$ em função de λ , com $\rho = 1$, $\theta = 0.6$, $d = 1$ em FSI, $k = 3.8134$ e $\Delta H = 0.001$ em CAPSI, LSI e PSI, com $n = 5$.

- 4) CAPSI é mais eficaz do que PSI, quando as taxas de risco são do tipo $\delta \in \{2, 3, 4\}$ com $0.5 \leq \lambda \leq 3$ exceto quando $\lambda = 3$ e $\delta = 2$; quando as taxas de risco são do tipo $\delta \in \{5, 7\}$, CAPSI é mais eficaz do que PSI em alterações do tipo $0.75 \leq \lambda \leq 2$ com exceção de $\lambda = 2$ e $\delta = 7$; a eficácia do método aumenta quando aumentamos δ até 4, mas decresce para valores superiores.
- 5) Quando aumentamos a dimensão amostral, o método CAPSI melhora o seu desempenho, relativamente a PSI, em todas as taxas de risco do sistema com alterações do tipo $\lambda \leq 0.75$ e em $\lambda \geq 2.5$ com $\delta = 4$; nos restantes valores de λ e de δ o método CAPSI piora a sua eficácia.
- 6) Quando se considera alteração no desvio padrão, o método CAPSI melhora o seu desempenho, relativamente a PSI, em $\lambda \leq 0.5$ e todas as taxas de risco do sistema, bem como para $\lambda \geq 1.75$, exceto quando $\lambda = 3$ e $\delta \in \{3, 5\}$; nos restantes valores de λ e de δ o método CAPSI piora a sua eficácia.
- 7) CAPSI é sempre mais eficaz do que o método LSI em todas as alterações da média com taxas de risco $\delta \geq 3$ e quando $\delta = 2$ com $\lambda < 0.75$ ou $\lambda \geq 1.75$.
- 8) O método CAPSI melhora a sua eficácia, em relação ao método LSI, quando aumentamos a dimensão amostral, para valores de $1 \leq \lambda \leq 2$ e todas as taxas de

risco, em $\lambda = 2.5$ e $\delta \geq 4$ e em $\lambda = 3$ e $\delta \in \{2, 4, 5\}$; nas restantes situações, o método piora o desempenho.

$E(T)$ 1000	δ					δ					δ				
	2	3	4	5	7	2	3	4	5	7	2	3	4	5	7
λ	$Q_{3,18}$					$Q_{3,19}$					$Q_{3,20}$				
0,25	23,1	32,0	40,2	41,5	44,7	14,9	9,2	7,1	-5,7	-23,8	4,8	15,8	26,0	27,6	31,6
0,5	27,5	35,4	41,5	45,4	47,1	20,5	17,7	18,2	10,1	-7,4	4,0	14,5	22,5	27,7	30,0
0,75	30,9	38,6	44,8	47,3	51,5	25,4	28,1	30,2	18,5	12,0	1,0	12,0	20,9	24,4	30,5
1,0	30,4	41,2	47,2	50,0	53,7	28,4	34,1	30,3	29,0	24,0	-5,1	11,2	20,3	24,5	30,2
1,25	30,4	40,5	47,5	50,9	53,2	25,9	33,5	32,5	26,4	23,5	-3,6	11,5	21,9	26,9	30,3
1,5	29,4	36,6	43,4	46,1	49,8	28,1	31,8	32,2	25,4	21,7	3,8	13,6	22,9	26,6	31,6
1,75	22,1	31,4	38,3	40,9	43,5	20,6	24,6	28,8	21,2	16,9	6,9	18,0	26,3	29,4	32,5
2,0	16,2	24,1	30,2	34,0	37,1	13,6	20,9	14,6	10,8	12,0	12,5	20,8	27,1	31,0	34,3
2,5	4,7	14,2	20,2	22,7	26,3	2,1	14,4	4,8	11,7	-9,6	16,6	25,0	30,2	32,4	35,5
3,0	2,4	9,8	15,0	17,7	21,6	2,5	1,8	4,6	-2,8	-9,0	19,4	25,6	29,9	32,1	35,3

Tabela 3.37. – Valores de $Q_{3,18}$, $Q_{3,19}$ e de $Q_{3,20}$ em função de λ , com $\rho = 1.5$, $\theta = 0.6$, $d = 1$ em FSI, $k = 3.8134$ e $\Delta H = 0.001$ em CAPSI, LSI e PSI, com $n = 5$.

9) Quando consideramos $\rho = 1.5$, a eficácia de CAPSI, em relação a LSI, melhora para todas as taxas de risco com valores do intervalo $0.5 \leq \lambda \leq 1.5$ exceto quando $\lambda = 0.5$ e $\delta = \{4, 7\}$ e quando $\lambda = 1.5$ e $\delta = 3$; nos restantes casos a eficácia de CAPSI é pior do que a do método LSI.

10) Tal como anteriormente, nas situações (aumento da dimensão amostral e alterações no desvio padrão) em que o desempenho de CAPSI melhora, em relação a LSI, piora em relação a FSI e a PSI, e vice-versa.

$E(T)$ 1000	δ					δ					δ				
	2	3	4	5	7	2	3	4	5	7	2	3	4	5	7
λ	$Q_{3,18}$					$Q_{3,19}$					$Q_{3,20}$				
0,25	19,7	30,9	35,1	38,7	40,5	-6,1	-12,8	-27,6	-44,0	-83,7	8,1	21,0	25,8	29,9	32,0
0,5	33,2	43,6	48,7	51,6	56,2	28,4	25,6	24,3	18,4	7,5	-5,9	10,5	18,5	23,2	30,4
0,75	40,8	51,3	56,7	60,1	63,5	37,5	42,1	39,5	42,5	33,9	-19,5	1,8	12,7	19,4	26,3
1,0	36,8	46,1	52,0	55,1	58,8	34,6	38,4	43,4	39,1	34,4	-8,5	7,3	17,6	22,8	29,3
1,25	22,9	31,7	36,2	40,0	43,7	21,4	24,1	22,3	23,8	19,8	8,7	19,2	24,5	29,0	33,3
1,5	9,5	17,5	21,6	25,6	29,6	7,8	10,7	13,7	10,5	-7,5	17,1	24,5	28,2	31,9	35,6
1,75	2,1	10,3	16,3	19,9	21,9	0,8	5,0	9,4	4,3	-11,0	18,4	25,2	30,2	33,2	34,8
2,0	1,4	9,3	15,3	18,6	22,2	-1,2	3,7	7,6	-5,4	-9,5	19,3	25,9	30,7	33,4	36,4
2,5	1,6	9,7	15,3	18,4	23,7	-1,4	1,8	7,7	-6,2	-10,7	19,7	26,3	30,9	33,4	37,7
3,0	1,6	10,7	15,6	18,9	24,8	-2,2	1,7	4,7	-7,3	-9,2	19,7	27,1	31,1	33,8	38,7

Tabela 3.38. – Valores de $Q_{3,18}$, $Q_{3,19}$ e de $Q_{3,20}$ em função de λ , com $\rho = 1$, $\theta = 0.6$, $d = 1$ em FSI, $k = 3.8134$ e $\Delta H = 0.001$ em CAPSI, LSI e PSI, com $n = 9$.

11) No geral, quando aumentamos a dimensão amostral e consideramos alterações no desvio padrão, verificam-se alterações na monotonia dos rácios em função da taxa de risco do sistema.

12) Em geral, as reduções obtidas com o método CAPSI são superiores às obtidas com os restantes métodos em comparação.

Dadas as possíveis combinações de parâmetros, θ , n e ρ , decidimo-nos por apresentar estes resultados, que nos pareceram mais adequados à situação, remetendo outros, que podem reforçar as conclusões retiradas, para Anexos.

3.5.3. Comparação com o Método VSI

Sob as mesmas condições, vamos comparar o desempenho estatístico do método CAPSI, em termos de AATS, com o desempenho do método VSI, considerando 4 pares de amostragem em VSI e o rácio $Q_{3,21}$ que representa uma medida de variação relativa, em %, do $AATS_{CAPSI}$ relativamente ao $AATS_{VSI}$, dado por:

$$Q_{3,21} = \left(1 - \frac{AATS_{CAPSI}}{AATS_{VSI}} \right) \times 100\% . \quad (3.124)$$

Considerando a situação em que as alterações pequenas e/ou grandes são em maior número, vamos fazer novamente $\theta = 0.4$ para o peso do intervalos do método LSI, para os quais obtivemos os resultados que apresentamos na Tabela 3.39., na Tabela 3.40. e na Tabela 3.41., das quais podemos concluir que:

- 1) A eficácia do método CAPSI, relativamente ao método VSI, aumenta com a taxa de risco do sistema.
- 2) Quando $d_1 = 0.5$ em VSI, o método CAPSI é sempre mais eficaz exceto quando $\lambda = 1$ e $\delta = 2$ e quando $\lambda = 0.75$, $\delta = 2$ e $\rho = 1.5$.

$E(T)$ 1000	δ					δ					δ					δ				
	2	3	4	5	7	2	3	4	5	7	2	3	4	5	7	2	3	4	5	7
λ	$Q_{3,21}(0.1, 2)$					$Q_{3,21}(0.1, 1.5)$					$Q_{3,21}(0.5, 2)$					$Q_{3,21}(0.5, 1.5)$				
0,25	14,5	22,6	36,7	40,8	46,0	15,8	23,7	37,6	41,7	46,8	18,4	26,2	39,6	43,6	48,5	18,8	26,5	39,9	43,8	48,7
0,5	-15,2	2,7	19,4	26,9	36,9	-9,5	7,5	23,4	30,5	40,1	5,3	20,0	33,8	39,9	48,2	6,6	21,1	34,7	40,7	48,9
0,75	-48,9	-23,6	-2,2	9,5	25,2	-41,0	-17,1	3,2	14,3	29,2	0,1	17,1	31,4	39,3	49,8	0,6	17,5	31,8	39,7	50,1
1,0	-53,3	-17,4	-2,1	12,2	28,3	-61,4	-23,6	-7,4	7,6	24,6	1,2	24,4	34,3	43,5	53,8	-1,8	22,0	32,2	41,7	52,4
1,25	-11,7	9,5	27,3	36,0	45,0	-34,0	-8,5	12,8	23,2	34,0	12,3	29,0	42,9	49,7	56,8	4,9	23,0	38,1	45,5	53,2
1,5	21,2	35,9	47,3	52,8	59,4	-0,3	18,3	32,9	39,9	48,3	22,8	37,2	48,4	53,8	60,2	12,4	28,7	41,4	47,5	54,9
1,75	39,4	48,5	56,5	60,3	65,3	21,4	33,1	43,5	48,4	54,9	31,5	41,8	50,8	55,1	60,7	19,9	31,9	42,5	47,5	54,1
2,0	46,5	54,1	59,7	63,1	67,7	30,1	40,0	47,4	51,8	57,9	35,0	44,2	51,1	55,1	60,8	22,8	33,7	41,9	46,7	53,4
2,5	50,6	57,3	62,3	65,3	68,2	35,3	44,0	50,6	54,5	58,4	37,6	46,0	52,4	56,1	59,9	25,1	35,3	42,9	47,4	51,9
3,0	50,6	57,6	62,7	65,3	69,5	35,2	44,4	51,1	54,5	60,1	37,4	46,3	52,7	56,0	61,4	24,8	35,6	43,3	47,2	53,7

Tabela 3.39. – Valores de $Q_{3,21}$ em função de λ , com $\rho = 1$, $\theta = 0.4$, $k = 3.8134$ e $\Delta H = 0.001$ em CAPSI, diferentes pares de amostragem em VSI e $n = 5$.

- 3) Em geral o método CAPSI melhora de desempenho, em relação a VSI, para $\lambda \geq 1$, diminuindo os valores do rácio quando diminui o maior intervalo de amostragem em VSI (d_2).
- 4) Quando consideramos alteração no desvio padrão, $\rho = 1.5$, o desempenho do método CAPSI melhora em todos os casos, relativamente ao método VSI, exceto quando $\delta = 2$ e $\lambda = 0.25$ nos pares com $d_1 = 0.1$.

$E(T)$ 1000	δ					δ					δ					δ				
	2	3	4	5	7	2	3	4	5	7	2	3	4	5	7	2	3	4	5	7
λ	$Q_{3,21}(0.1, 2)$					$Q_{3,21}(0.1, 1.5)$					$Q_{3,21}(0.5, 2)$					$Q_{3,21}(0.5, 1.5)$				
0,25	-3,9	13,7	25,3	32,8	41,8	-2,5	14,9	26,3	33,8	42,6	8,4	23,9	34,1	40,8	48,7	8,5	24,0	34,2	40,9	48,7
0,5	-7,8	10,2	24,4	33,6	40,7	-7,5	10,4	24,6	33,7	40,8	8,2	23,4	35,6	43,4	49,4	7,6	23,0	35,2	43,1	49,1
0,75	-13,5	8,5	22,5	29,7	40,3	-16,7	5,9	20,3	27,8	38,6	6,0	24,3	35,8	41,8	50,6	4,1	22,7	34,5	40,6	49,6
1,0	-9,5	10,6	23,5	34,5	44,0	-18,8	3,0	16,9	28,9	39,2	8,6	25,4	36,1	45,3	53,2	4,3	21,9	33,1	42,8	51,1
1,25	3,3	23,1	33,5	40,8	51,0	-12,1	10,7	22,9	31,3	43,1	14,0	31,6	40,9	47,3	56,4	7,1	26,1	36,1	43,1	52,9
1,5	19,3	32,1	43,4	49,7	56,0	1,1	16,8	30,6	38,4	46,1	21,1	33,6	44,6	50,8	57,0	12,0	25,9	38,2	45,1	52,0
1,75	32,0	43,3	52,0	55,8	62,5	13,7	28,1	39,1	43,9	52,4	27,1	39,3	48,5	52,6	59,8	16,4	30,3	41,0	45,6	53,9
2,0	40,5	50,2	57,4	60,9	65,6	23,1	35,7	45,0	49,5	55,5	31,6	42,8	51,0	55,1	60,4	19,9	33,0	42,7	47,5	53,7
2,5	48,6	55,8	60,3	65,0	68,1	32,8	42,2	48,1	54,2	58,3	36,5	45,3	50,9	56,7	60,6	24,2	34,8	41,4	48,3	53,0
3,0	50,7	57,3	62,1	65,3	68,8	35,4	44,1	50,3	54,5	59,1	37,8	46,2	52,2	56,2	60,6	25,4	35,5	42,6	47,4	52,8

Tabela 3.40. – Valores de $Q_{3,21}$ em função de λ , com $\rho = 1.5$, $\theta = 0.4$, $k = 3.8134$ e $\Delta H = 0.001$ em CAPSI, diferentes pares de amostragem em VSI e $n = 5$.

- 5) Com a alteração no desvio padrão, a eficácia de CAPSI é sempre melhor do que a de VSI, quando $d_1 = 0.5$ em VSI, confirmando-se a elevada sensibilidade do método VSI à alteração do menor intervalo.
- 6) Em geral, o desempenho do método CAPSI melhora, relativamente a VSI, para $\lambda \geq 1.5$ com o aumento da dimensão da amostra.

$E(T)$ 1000	δ					δ					δ					δ				
	2	3	4	5	7	2	3	4	5	7	2	3	4	5	7	2	3	4	5	7
λ	$Q_{3,21}(0.1, 2)$					$Q_{3,21}(0.1, 1.5)$					$Q_{3,21}(0.5, 2)$					$Q_{3,21}(0.5, 1.5)$				
0,25	6,2	22,4	34,2	38,3	44,5	8,6	24,4	35,9	39,9	46,0	14,0	28,9	39,7	43,5	49,1	14,7	29,4	40,2	43,9	49,5
0,5	-39,4	-13,8	4,3	14,5	29,3	-31,0	-6,9	10,1	19,6	33,6	0,7	19,0	31,8	39,1	49,7	1,8	19,8	32,5	39,7	50,2
0,75	-54,7	-21,1	-1,6	13,1	27,7	-63,4	-27,9	-7,4	8,2	23,7	0,1	21,8	34,4	43,9	53,3	-3,1	19,3	32,3	42,1	51,8
1,0	3,5	21,3	31,6	42,2	51,9	-19,2	2,8	15,5	28,6	40,6	17,3	32,6	41,4	50,5	58,8	8,6	25,5	35,2	45,3	54,5
1,25	37,0	47,0	53,5	59,0	64,0	18,5	31,4	39,8	46,9	53,4	31,1	42,0	49,2	55,1	60,6	20,0	32,7	41,0	47,9	54,3
1,5	47,4	53,9	60,6	63,2	67,8	31,3	39,7	48,5	51,9	57,9	36,0	43,8	52,0	55,2	60,7	23,9	33,2	43,0	46,7	53,3
1,75	50,9	55,9	61,3	64,4	68,4	35,7	42,2	49,3	53,3	58,6	38,3	44,5	51,3	55,2	60,2	26,1	33,5	41,6	46,3	52,3
2,0	50,7	56,1	62,1	65,1	68,9	35,4	42,4	50,4	54,2	59,3	37,6	44,4	52,1	55,8	60,7	25,2	33,3	42,5	47,0	52,8
2,5	51,2	57,3	62,1	65,3	69,0	36,0	44,1	50,3	54,5	59,3	38,2	46,0	52,0	56,1	60,7	25,8	35,2	42,3	47,3	52,8
3,0	51,3	57,5	63,1	65,4	69,2	36,2	44,4	51,7	54,7	59,6	38,4	46,2	53,3	56,2	61,0	26,0	35,4	44,0	47,4	53,1

Tabela 3.41. – Valores de $Q_{3,21}$ em função de λ , com $\rho = 1$, $\theta = 0.4$, $k = 3.8134$ e $\Delta H = 0.001$ em CAPSI, diferentes pares de amostragem em VSI e $n = 9$.

Supondo, agora, que estamos numa situação em que as alterações moderadas são em maior número, vamos considerar $\theta = 0.6$ para o peso do intervalos do método LSI, tendo-se obtido os resultados que apresentamos na Tabela 3.42., na Tabela 3.43. e na Tabela 3.44., a partir das quais se podem retirar as seguintes conclusões:

- 1) O aumento do peso do intervalo do método LSI mantém, ou melhora, a eficácia do método CAPSI, em relação a VSI, particularmente quando $d_2 = 1.5$ em VSI.

$E(T)$ 1000	δ					δ					δ					δ				
	2	3	4	5	7	2	3	4	5	7	2	3	4	5	7	2	3	4	5	7
λ	$Q_{3,21}(0.1, 2)$					$Q_{3,21}(0.1, 1.5)$					$Q_{3,21}(0.5, 2)$					$Q_{3,21}(0.5, 1.5)$				
0,25	7,3	20,0	24,8	27,4	30,6	8,7	21,2	25,9	28,5	31,6	11,6	23,7	28,2	30,8	33,8	12,0	24,0	28,6	31,1	34,1
0,5	-11,5	1,3	11,5	16,6	21,4	-6,0	6,2	15,8	20,7	25,3	8,4	18,9	27,3	31,5	35,4	9,6	20,0	28,2	32,4	36,3
0,75	-36,6	-16,3	-3,4	3,7	10,2	-29,4	-10,2	2,1	8,8	15,0	8,3	22,0	30,6	35,4	39,8	8,8	22,4	31,0	35,8	40,1
1,0	-35,7	-13,5	-0,6	8,4	17,8	-42,8	-19,5	-5,8	3,6	13,5	12,6	26,9	35,2	41,0	47,1	9,9	24,6	33,2	39,2	45,4
1,25	-0,2	17,4	25,6	32,1	35,9	-20,1	0,9	10,8	18,6	23,1	21,4	35,1	41,6	46,7	49,7	14,7	29,6	36,7	42,2	45,4
1,5	26,8	37,2	42,9	46,4	49,6	6,8	20,1	27,2	31,8	35,9	28,3	38,5	44,0	47,5	50,7	18,6	30,2	36,5	40,4	44,0
1,75	40,1	47,0	50,8	53,2	55,3	22,3	31,1	36,1	39,2	42,0	32,3	40,0	44,4	47,0	49,5	20,8	29,9	34,9	38,1	40,9
2,0	45,3	50,8	53,8	55,5	57,5	28,5	35,7	39,7	41,8	44,5	33,5	40,2	43,9	45,9	48,4	20,9	28,9	33,3	35,7	38,6
2,5	48,2	52,5	55,2	56,8	58,3	32,2	37,8	41,3	43,4	45,4	34,6	40,0	43,4	45,5	47,4	21,5	28,0	32,1	34,6	36,9
3,0	48,0	52,5	55,3	56,9	58,7	31,9	37,8	41,4	43,5	45,9	34,1	39,8	43,3	45,4	47,7	21,0	27,8	32,0	34,4	37,2

Tabela 3.42. – Valores de $Q_{3,21}$ em função de λ , com $\rho = 1$, $\theta = 0.6$, $k = 3.8134$ e $\Delta H = 0.001$ em CAPSI, diferentes pares de amostragem em VSI e $n = 5$.

- 2) No geral, os valores do rácio diminuem com o aumento de θ , sendo menores as diferenças entre métodos.
- 3) Quando consideramos alteração no desvio padrão, o método CAPSI melhora a eficácia, em relação ao método VSI, mas piora relativamente à situação em que o peso dos intervalos de LSI é 0.4.

$E(T)$ 1000	δ					δ					δ					δ				
	2	3	4	5	7	2	3	4	5	7	2	3	4	5	7	2	3	4	5	7
λ	$Q_{3,21}(0.1, 2)$					$Q_{3,21}(0.1, 1.5)$					$Q_{3,21}(0.5, 2)$					$Q_{3,21}(0.5, 1.5)$				
0,25	-1,9	9,9	20,8	22,6	26,8	-0,5	11,2	21,9	23,6	27,8	10,2	20,6	30,2	31,8	35,5	10,3	20,7	30,3	31,8	35,6
0,5	-2,6	8,6	17,2	22,7	25,1	-2,3	8,9	17,4	22,9	25,3	12,6	22,1	29,4	34,2	36,2	12,1	21,7	29,0	33,8	35,8
0,75	-3,3	8,2	17,5	21,2	27,5	-6,2	5,7	15,2	19,0	25,5	14,5	24,1	31,7	34,8	40,0	12,7	22,5	30,3	33,4	38,8
1,0	-2,2	13,7	22,5	26,6	32,1	-11,0	6,3	15,9	20,3	26,3	14,6	27,9	35,3	38,7	43,3	10,7	24,6	32,3	35,9	40,7
1,25	9,8	22,9	31,9	36,3	39,3	-4,7	10,6	21,0	26,1	29,5	19,7	31,4	39,5	43,3	46,0	13,3	25,9	34,6	38,8	41,6
1,5	25,1	32,8	40,0	42,9	46,8	8,2	17,6	26,4	29,9	34,8	26,8	34,3	41,3	44,1	48,0	18,3	26,6	34,5	37,6	41,9
1,75	33,4	41,4	47,3	49,5	51,8	15,5	25,6	33,1	36,0	38,8	28,7	37,2	43,5	45,9	48,3	18,2	27,9	35,2	38,0	40,7
2,0	40,6	46,2	50,6	53,2	55,4	23,3	30,5	36,1	39,5	42,4	31,7	38,2	43,2	46,2	48,8	20,1	27,7	33,5	37,0	40,1
2,5	45,7	51,2	54,6	56,0	58,0	29,0	36,2	40,6	42,4	45,1	32,9	39,6	43,8	45,5	48,1	19,9	27,9	33,0	35,0	38,1
3,0	48,0	51,9	54,7	56,1	58,2	31,8	37,0	40,7	42,6	45,2	34,3	39,3	42,9	44,7	47,3	21,3	27,3	31,5	33,7	36,8

Tabela 3.43. – Valores de $Q_{3,21}$ em função de λ , com $\rho = 1.5$, $\theta = 0.6$, $k = 3.8134$ e $\Delta H = 0.001$ em CAPSI, diferentes pares de amostragem em VSI e $n = 5$.

- 4) Os valores dos rácios aumentam com o aumento da dimensão amostral, mas diminuem em relação aos valores homólogos com $\theta = 0.4$.
- 5) Em todas as situações, os valores do rácio aumentam quando aumenta a taxa de risco do sistema.

$E(T)$ 1000	δ					δ					δ					δ				
	2	3	4	5	7	2	3	4	5	7	2	3	4	5	7	2	3	4	5	7
λ	$Q_{3,21}(0.1, 2)$					$Q_{3,21}(0.1, 1.5)$					$Q_{3,21}(0.5, 2)$					$Q_{3,21}(0.5, 1.5)$				
0,25	1,7	15,4	20,7	25,0	27,2	4,3	17,7	22,7	26,9	29,1	9,9	22,5	27,2	31,2	33,3	10,6	23,1	27,8	31,8	33,8
0,5	-31,3	-11,0	-1,0	4,8	13,7	-23,4	-4,3	5,1	10,5	19,0	6,5	20,9	28,0	32,2	38,6	7,5	21,8	28,8	32,9	39,2
0,75	-34,8	-10,8	1,5	9,0	16,8	-42,4	-17,1	-4,1	3,9	12,2	12,9	28,4	36,4	41,2	46,3	10,1	26,1	34,3	39,4	44,6
1,0	12,5	25,3	33,6	37,8	43,0	-8,0	7,8	18,0	23,2	29,6	25,1	36,0	43,1	46,7	51,1	17,2	29,3	37,2	41,1	46,0
1,25	37,7	44,8	48,4	51,6	54,5	19,4	28,6	33,3	37,3	41,1	31,8	39,7	43,6	47,0	50,2	20,9	30,0	34,5	38,5	42,2
1,5	45,9	50,8	53,2	55,6	58,0	29,4	35,6	38,8	42,0	45,1	34,2	40,0	42,9	45,9	48,8	21,7	28,7	32,2	35,7	39,1
1,75	47,3	51,7	54,9	56,9	57,9	30,9	36,7	40,9	43,5	44,9	33,7	39,2	43,3	45,7	47,1	20,5	27,2	32,0	35,0	36,6
2,0	48,0	52,2	55,3	57,0	59,0	31,8	37,3	41,5	43,7	46,2	34,1	39,5	43,4	45,6	48,1	21,0	27,4	32,2	34,8	37,7
2,5	48,2	52,5	55,4	57,1	59,8	32,1	37,7	41,6	43,7	47,4	34,4	39,8	43,5	45,6	49,1	21,3	27,8	32,2	34,7	38,9
3,0	48,2	53,0	55,6	57,3	60,4	32,1	38,4	41,8	44,1	48,2	34,4	40,4	43,7	45,9	49,9	21,3	28,5	32,5	35,1	39,9

Tabela 3.44. – Valores de $Q_{3,21}$ em função de λ , com $\rho = 1$, $\theta = 0.6$, $k = 3.8134$ e $\Delta H = 0.001$ em CAPSI, diferentes pares de amostragem em VSI e $n = 9$.

- 6) No geral, a redução do peso dos intervalos de amostragem do método LSI afeta, de forma positiva mas ligeira, o desempenho do método CAPSI, refletindo-se, em particular, em sistemas com uma taxa de risco acentuadamente crescente ($\lambda \geq 4$).

Por fim, refira-se que a questão relativa à dificuldade de implementação de um método, devido ao reduzido valor do menor intervalo de amostragem obtido, não se coloca ao método CAPSI, porque, ao longo das diferentes simulações, os menores intervalos de amostragem foram obtidos em situações pouco usuais, $\delta = 5$ e 7 , e próximos do menor intervalo mais utilizado em VSI, sendo igual a 0.09493 quando $\delta = 5$ e $\lambda = 0$, 0.10894 quando $\delta = 5$ e $\lambda = 3$, 0.09493 quando $\delta = 7$ e $\lambda = 0$, 0.1068 quando $\delta = 7$ e $\lambda = 3$.

Por tudo o que acabamos de concluir, acreditamos que o método CAPSI pode tornar-se numa boa alternativa a alguns dos métodos mais divulgados, tendo em conta o reduzido número de parâmetros necessários para elaborar o design estatístico de uma carta de controlo para médias.

3.6. Referências Bibliográficas

- Amin, R. W.; Hemasinha, R. (1993). The switching behavior of charts with variable sampling intervals. *Communications in Statistics - Theory and Methods*, 22(7), 2081-2102.
- Amin, R. W.; Letsinger, W. C. (1991). Improved switching rules in control procedures using variable sampling intervals. [Article]. *Communications in Statistics-Simulation and Computation*, 20(1), 205-230.
- Amin, R. W.; Miller, R. W. (1993). A robustness study of X-bar charts with variable sampling intervals. *Journal of Quality Technology*, 25(1), 36-44.
- Anderson, T. W.; Darling, D. A. (1952). Asymptotic theory of certain "Goodness of Fit" criteria based on stochastic processes. *The Annals of Mathematical Statistics*, 23(2), 193-212.
- Banerjee, P. K.; Rahim, M. A. (1988). Economic design of X-bar control charts under Weibull shock models. *Technometrics*, 30(4), 407-414.
- Barlow, R. E.; Hunter, L. C.; Proschan, F. (1963). Optimum checking procedures. *SIAM Journal*, 11(4), 1078-1095.
- Baxley, R. V. (1995). An application of variable sampling interval control charts. [Article]. *Journal of Quality Technology*, 27(4), 275-282.
- Borror, C. M.; Montgomery, D. C.; Runger, G. C. (1999). Robustness of the EWMA control chart to non-normality. *Journal of Quality Technology*, 31(3), 309-316.
- Burr, I. W. (1942). Cumulative Frequency Functions. *Annals of Mathematical Statistics*, 13, pp. 215-232.
- Burr, I. W. (1973). Parameters for a general system of distributions to match a grid of α_3 and α_4 . *Communications in Statistics*, 2(1), 1-21.
- Calzada, M. E.; Scariano, S. M. (2001). The robustness of the synthetic control chart to non-normality. *Communications in Statistics - Simulation and Computation*, 30(2), 311-326.
- Carmo, M.; Infante, P.; Mendes, J. M. (2013a). Alguns resultados da robustez de um método de amostragem adaptativo em controlo de qualidade In Maia, M., Campos, P. & Silva, P. D. (Eds.), *Estatística: Novos Desenvolvimentos e Inspirações*, SPE (pp. 95-108). Porto.
- Carmo, M.; Infante, P.; Mendes, J. M. (2013b). *Cartas de controlo com intervalos de amostragem dinâmicos inicialmente predefinidos para um risco cumulativo constante*. Paper presented at the XXI Congresso Anual da Sociedade Portuguesa de Estatística, Aveiro.
- Carmo, M.; Infante, P.; Mendes, J. M. (2014). Statistical properties and sensitivity of a new adaptive sampling method for quality control. *Submitted with revisions*, 18p.
- Carot, V.; Jabaloyes, J. M.; Carot, T. (2002). Combined double sampling and variable sampling interval X-bar chart. *International Journal of Production Research*, 40(9), 2175-2186.
- Castagliola, P.; Celano, G.; Fichera, S.; Giuffrida, F. (2007). A variable sampling interval S²-EWMA control chart for monitoring the process variance. [Article]. *International Journal of Technology Management*, 37(1-2), 125-146.
- Chen, F. L.; Yeh, C. H. (2009). Economic statistical design of non-uniform sampling scheme X-bar control charts under non-normality and Gamma shock using genetic algorithm. *Expert Systems with Applications*, 36(5), 9488-9497.

- Chen, F. L.; Yeh, C. H. (2010). Economic design of VSI X-bar control charts for non normally distributed data under Gamma (λ , 2) failure models. *Communications in Statistics - Theory and Methods*, 39(10), 1743-1760.
- Chen, F. L.; Yeh, C. H. (2011). Economic statistical design for X-bar control charts under non-normal distributed data with Weibull in-control time. *Journal of the Operational Research Society*, 62(4), 750-759.
- Chen, H.; Cheng, Y. (2007). Non-normality effects on the economic-statistical design of X-bar charts with Weibull in-control time. *European Journal of Operational Research*, 176(2), 986-998.
- Chen, Y.-K.; Hsieh, K.-L.; Chang, C.-C. (2007). Economic design of the VSSI X-bar control charts for correlated data. *International Journal of Production Economics*, 107(2), 528-539.
- Chen, Y. K. (2003). An evolutionary economic-statistical design for VSI X-bar control charts under non-normality. *International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 22(7-8), 602-610.
- Chengalur, I. N.; Arnold, J. C.; Reynolds, M. R. (1989). Variable sampling intervals for multiparameter Shewhart charts. *Communications in Statistics - Theory and Methods*, 18, 1769-1792.
- Chou, C.-Y.; Wu, C.-C.; Chen, C.-H. (2006). Joint economic design of variable sampling intervals X-bar and R charts using genetic algorithms. *Communications in Statistics-Simulation and Computation*, 35(4), 1027-1043.
- Chou, C. Y.; Chen, C. H.; Liu, H. R. (2006). Economic design of EWMA charts with variable sampling intervals. [Article]. *Quality & Quantity*, 40(6), 879-896.
- Costa, A. F. B. (1997). X-bar charts with variable sample size and sampling intervals. *Journal of Quality Technology*, 29(2), 197-205.
- Costa, A. F. B. (1998). VSSI X-bar charts with sampling at fixed times. *Communications in Statistics - Theory and Methods*, 27(11), 2853-2869.
- Costa, A. F. B. (1998b). Joint X-bar and R charts with variable parameters. *IIE Transactions*, 30(6), 505-514.
- Costa, A. F. B. (1999a). AATS for the X-bar chart with variable parameters. *Journal of Quality Technology*, 31(4), 455-458.
- Costa, A. F. B. (1999b). Joint X-bar and R charts with variable sample sizes and sampling intervals. *Journal of Quality Technology*, 31(4), 387-397.
- Costa, A. F. B. (1999c). X-bar charts with variable parameters. *Journal of Quality Technology*, 31(4), 408-416.
- Epprecht, E. K.; Simoes, B. F. T.; Mendes, F. C. T. (2010). A variable sampling interval EWMA chart for attributes. *International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 49(1-4), 281-292.
- Faraz, A.; Saniga, E. (2011). Economic Statistical Design of a T-2 Control Chart with Double Warning Lines. *Quality and Reliability Engineering International*, 27(2), 125-139.
- Feng-Chia, L.; Tzu-Chin, C.; Li-Lon, Y.; Yen-Fu, C. (2009, 8-11 Dec. 2009). *The restrictions in economic design model for an X-bar control chart under non-normally distributed data with Weibull shock model*. Paper presented at the Industrial Engineering and Engineering Management, 2009. IEEM 2009. IEEE International Conference on.

- Figueiredo, M. F.; Gomes, M. I. (2004). The total median in statistical quality control. *Applied Stochastic Models in Business and Industry*, 20, 339-353.
- Figueiredo, M. F.; Gomes, M. I. (2009). Monitoring industrial processes with robust control charts. [Article]. *Revstat-Statistical Journal*, 7(2), 151-170.
- Infante, P. (2004). *Métodos de Amostragem em Controlo de Qualidade*. Unpublished PhD, Universidade de Évora, Évora.
- Infante, P.; Rodrigues Dias, J. (2002). Análise da importância da distribuição do tempo de vida no período de inspeção em controlo estatístico de qualidade. *Investigação Operacional*, 22(2), 167-179.
- Infante, P.; Rosmaninho, E. (2007). *A combined double sampling and predetermined sampling intervals control chart*. Paper presented at the 56th Session of the International Statistical Institute (ISI 2007), Lisboa.
- Johnson, N. L.; Kotz, S.; Balakrishnan, N. (1994). *Continuous Univariate Distributions* (Second Edition ed. Vol. I). New York: John Wiley & Sons, Inc.
- Lee, P.-H. (2011). Adaptive R charts with variable parameters. *Computational Statistics & Data Analysis*, 55(5), 2003-2010.
- Lee, P.-H.; Chang, Y.-C.; Torng, C.-C. (2012). A design of S control charts with a combined double sampling and variable sampling interval scheme. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, 41(1), 153-165.
- Lee, P. H. (2013). Joint statistical design of X-bar and S charts with combined double sampling and variable sampling interval. *European Journal of Operational Research*, 225(2), 285-297.
- Lin, Y.-C.; Chou, C.-Y. (2005a). Adaptive X-bar control charts with sampling at fixed times. *Quality and Reliability Engineering International*, 21(2), 163-175.
- Lin, Y.-C.; Chou, C.-Y. (2005b). On the design of variable sample size and sampling intervals charts under non-normality. *International Journal of Production Economics*, 96(2), 249-261.
- Lin, Y.-C.; Chou, C.-Y. (2005c). Robustness of the variable sample size and control limit X-bar chart to non-normality. *Communications in Statistics - Theory and Methods*, 34(3), 721-743.
- Lin, Y.-C.; Chou, C.-Y. (2007). Non-normality and the variable parameters X bar control charts. *European Journal of Operational Research*, 176(1), 361-373.
- Lin, Y.-C.; Chou, C.-Y. (2011). Robustness of the EWMA and the combined X-bar-EWMA control charts with variable sampling intervals to non-normality. *Journal of Applied Statistics*, 38(3), 553-570.
- Lorenzen, T. J.; Vance, L. C. (1986). The economic design of control charts: a unified approach. *Technometrics*, 28(1), 3-10.
- Lu, H.; Wu, Z. (2002). Optimal np Control Charts with Variable Sample Sizes or Variable Sampling Intervals. *Economic Quality Control*, 17, pp. 39-61.
- Luo, Y. Z.; Li, Z. H.; Wang, Z. J. (2009). Adaptive CUSUM control chart with variable sampling intervals. [Article]. *Computational Statistics & Data Analysis*, 53(7), 2693-2701.
- Mahadik, S. B. (2013a). Variable Sample Size and Sampling Interval (X)over-bar Charts with Runs Rules for Switching Between Sample Sizes and Sampling Interval Lengths. *Quality and Reliability Engineering International*, 29(1), 63-76.

- Mahadik, S. B. (2013b). X Bar Charts with Variable Sample Size, Sampling Interval, and Warning Limits. *Quality and Reliability Engineering International*, 29(4), 535-544.
- Morais, M. C.; Natário, I. (1998). Improving an upper one-sided c-chart. *Communications in Statistics - Theory and Methods*, 27(2), 353-364.
- Munford, A. G.; Shahani, A. K. (1972). A nearly optimal inspection policy. *Operational Research Quarterly*, 24(3), 453-458.
- Niaki, S. T. A.; Gazaneh, F. M.; Karimifar, J. (2012). Economic design of X-bar control chart with variable sample size and sampling interval under non-normality assumption: a genetic algorithm. *Economic Computation and Economic Cybernetics Studies and Research*, 46(1), 159-182.
- Otha, H.; Rahim, M. A. (1997). A dynamic economic model for an X-bar control chart design. *IIE Transactions*, 29(6), 481-486.
- Parkhideh, B.; Case, K. E. (1989). The economic design of a dynamic X-bar control chart. *IIE Transactions*, 21(4), 313-323.
- Prabhu, S. S.; Montgomery, D. C.; Runger, G. C. (1994). A combined adaptive sample size and sampling interval X-bar control scheme. *Journal of Quality Technology*, 26(3), pp.164-176.
- Rahim, M. A. (1994). Joint determination of production quantity, inspection schedule and control chart design. *IIE Transactions*, 24(1), 2-11.
- Rahim, M. A. (1997). Economically optimal design of X-bar control charts assuming Gamma distributed in-control times *Optimization in Quality Control*, edited by K. S. Al-Sultan and M. A. Rahim: Kluwer Academic Publishers, pp. 175-196.
- Rahim, M. A.; Al-Sultan, K. S. (1997). Some contemporary approaches to optimization models in process control *Optimization in Quality Control*, edited by K. S. Al-Sultan and M. A. Rahim: Kluwer Academic Publishers, pp. 55-86.
- Rahim, M. A.; Banerjee, P. K. (1993). A generalized model for the economic design of X-bar control charts for production systems with increasing failure rate and early replacement. *Naval Research Logistics (NRL)*, 40(6), 787-809.
- Ramalhoto, M. F.; Morais, M. C. (1994). Política VSI aplicada às cartas de controlo X barra, CUSUM e EWMA *A Estatística e o Futuro e o Futuro da Estatística*, Editores: D. Pestana, A. Turkman, J. Branco, L. Duarte e A. Pires: Edições Salamandra, pp. 99-114.
- Ramalhoto, M. F.; Morais, M. C. (1995). Cartas de controlo para o parâmetro de escala da população Weibull triparmétrica. *Atas do II Congresso Anual da Sociedade Portuguesa de Estatística*, 345-371.
- Ramalhoto, M. F.; Morais, M. C. (1998). EWMA control charts for the scale parameter of a Weibull control with fixed and variable sampling intervals. *Economic Quality Control-Journal and Newsletter for Quality and Reliability*, 13(1), 23-46.
- Ramalhoto, M. F.; Morais, M. C. (1999). Shewhart control charts for the scale parameter of a Weibull control variable with fixed and variable sampling intervals. *Journal of Applied Statistics*, 26(1), 129-160.
- Reynolds, M. R. (1989). Optimal variable sampling interval control chart. *Sequential Analysis*, 8(4), 361-379.
- Reynolds, M. R. (1996a). Shewhart and EWMA variable sampling interval control charts with sampling at fixed times. [Article]. *Journal of Quality Technology*, 28(2), 199-212.

- Reynolds, M. R. (1996b). Variable sampling interval control charts with sampling at fixed times. [Article]. *IIE Transactions*, 28(6), 497-510.
- Reynolds, M. R.; Amin, R. W.; Arnold, J. C.; Nachlas, J. A. (1988). X-bar charts with variables sampling intervals. *Technometrics*, 30(2), 181-192.
- Reynolds, M. R.; Arnold, J. C. (1989). Optimal one-sided Shewhart control charts with variable sampling intervals. *Sequential Analysis*, 8(1), 51-77.
- Reynolds, M. R.; Arnold, J. C. (1996). Variable sampling interval X-bar charts in the presence of correlation. [Article]. *Journal of Quality Technology*, 28(1), 12-30.
- Reynolds, M. R.; Arnold, J. C. (2001). EWMA control charts with variable sample sizes and variable sampling intervals. *IIE Transactions*, 33(6), 511-530.
- Reynolds, M. R.; Stoumbos, Z. G. (2001). Monitoring the process mean and variance using individual observations and variable sampling intervals. [Article]. *Journal of Quality Technology*, 33(2), 181-205.
- Rodrigues Dias, J. (1987). *Políticas Periódicas de Inspeção*. PhD, Universidade de Évora, Évora, Portugal.
- Rodrigues Dias, J. (1999a). Analysis of a new method to obtain different sampling intervals in statistical quality control. *Atas do IV Congresso Galego de Estadística e Investigación de Operacions, Universidade de Santiago de Compostela*, pp.155-158.
- Rodrigues Dias, J. (1999b). A new method to obtain different sampling intervals in statistical quality control. *Universidade de Évora*, 18 pp.
- Rodrigues Dias, J. (2002). Amostragem em controlo de qualidade com intervalos diferentes predefinidos: uma nova abordagem. *JOCLAD02, VIII Jornadas de Classificação e Análise de Dados*, 10 pp., Lisboa.
- Rodrigues Dias, J.; Infante, P. (2008). Control charts with predetermined sampling intervals. *International Journal of Quality and Reliability Management*, 25(4), 423-435.
- Ross, S. M. (1970). *Applied Probability Models with Optimization Applications*: Dover Publications.
- Runger, G. C.; Montgomery, D. C. (1993). Adaptive sampling enhancements for Shewhart control charts. *IIE Transactions*, 25(3), 41-51.
- Runger, G. C.; Pignatiello, J. J. (1991). Adaptive sampling for process control. *Journal of Quality Technology*, 23(2), 133-155.
- Saccucci, M. S.; Amin, R. W.; Lucas, J. M. (1992). Exponentially weighted moving average control schemes with variable sampling intervals. [Article]. *Communications in Statistics-Simulation and Computation*, 21(3), 627-657.
- Schoonhoven, M.; Does, R. J. M. M. (2010). The X-bar control chart under non-normality. *Quality and Reliability Engineering International*, 26, 167-176.
- Stoumbos, Z. G.; Mittenthal, J.; Runger, G. C. (2001). Steady-state-optimal adaptive control charts based on variable sampling intervals. *Stochastic Analysis and Applications*, 19(6), 1025-1057.
- Stoumbos, Z. G.; Reynolds, M. R. (2000). Robustness to non-normality and autocorrelation of individuals control charts. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 66(2), 145-187.

- Stoumbos, Z. G.; Reynolds, M. R. (2001). The SPRT control chart for the process mean with samples starting at fixed times. [Article]. *Nonlinear Analysis-Real World Applications*, 2(1), 1-34.
- Stoumbos, Z. G.; Reynolds, M. R. (2005). Economic statistical design of adaptive control schemes for monitoring the mean and variance: An application to analyzers. [Article]. *Nonlinear Analysis-Real World Applications*, 6(5), 817-844.
- Torabian, M.; Moghadam, M. B.; Faraz, A. (2010). Economically designed Hotelling's T^2 control chart using VSICL scheme. *Arabian Journal for Science and Engineering*, 35(2D), 251-263.
- Torng, C.-C.; Tseng, C.-C.; Lee, P.-H. (2010). Non-normality and combined double sampling and variable sampling interval image omitted control charts. *Journal of Applied Statistics*, 37(6), 955-967.
- Wu, Z.; Tian, Y.; Zhang, S. (2005). Adjusted-loss-function charts with variable sample sizes and sampling intervals. *Journal of Applied Statistics*, 32(3), 221-242.
- Wu, Z.; Zhang, S.; Wang, P. H. (2007). A CUSUM scheme with variable sample sizes and sampling intervals for monitoring the process mean and variance. [Article]. *Quality and Reliability Engineering International*, 23(2), 157-170.
- Yeh, L. L.; Wang, P. K.; Li, F. C.; Yeh, Y. M. (2011). An extension of economic design of X-bar control charts for non normally distributed data under Weibull shock models. *Communications in Statistics - Theory and Methods*, 40(21), 3879-3902.
- Yourstone, S. A.; Zimmer, W. J. (1992). Non-normality and the design of control charts for averages. [Article]. *Decision Sciences*, 23(5), 1099-1113.
- Zhang, S.; Wu, Z. (2006). Monitoring the process mean and variance using a weighted loss function CUSUM scheme with variable sampling intervals. *IIE Transactions*, 38(4), 377-387.
- Zimmer, L. S.; Montgomery, D. C.; Runger, G. C. (2000). Guidelines for the application of adaptive control charting schemes. *International Journal of Production Research*, 38, 1977-1992.
- Zou, C.; Wang, Z.; Tsung, F. (2008). Monitoring autocorrelated processes using variable sampling schemes at fixed-times. *Quality and Reliability Engineering International*, 24(1), 55-69.

CAPÍTULO IV

MEDIDAS DE DESEMPENHO ESTATÍSTICO

Uma pequena Introdução

Todos os resultados que fomos apresentando, ao longo desta dissertação, foram apresentados em congressos nacionais ou internacionais. Na sequência dessas apresentações, temos trabalhos submetidos e outros já publicados.

Assim, e dentro do regulamentado, neste Capítulo vamos reproduzir, a versão portuguesa, de um trabalho publicado em abril último na *International Journal of Quality & Reliability Management*.

Resumidamente, neste Capítulo/Artigo serão abordados os seguintes pontos:

- (A) Apresentamos um resumo do que é feito ao longo do artigo.
- (B) Revisão bibliográfica, reduzida, sobre a temática, seguida da descrição do que será feito nos pontos seguintes.
- (C) Apresentação da nova metodologia de comparação de métodos de amostragem em controlo da qualidade.
- (D) Apresentação e discussão dos resultados numa perspetiva económica.

Uma Abordagem Diferente e Simples para Comparação de Métodos de Amostragem em Controlo da Qualidade

Manuel do Carmo

Universidade Europeia, Lisboa
e CIMA-UE, Universidade de Évora

Paulo Infante

DMAT/ECT, Universidade de Évora
e CIMA-UE, Universidade de Évora

Jorge M. Mendes

ISEGI-NOVA, Universidade Nova de Lisboa
e CEAUL, FCUL, Universidade de Lisboa

Objetivo – Neste trabalho propomos uma medida do desempenho de métodos de amostragem que utiliza o número médio de amostras recolhidas sob controlo.

Desenho/metodologia/abordagem – Igualam-se os AATS de dois métodos de amostragem e, considerando como referência o AATS de um deles, obtemos os parâmetros do outro método. Desta forma, é possível obter, sob controlo, o número médio de amostras que é necessário recolher para que o AATS de qualquer método seja igual ao AATS de referência.

Inovação – Medida de desempenho mais robusta na comparação de métodos de amostragem, pois em muitos dos casos o período de tempo no qual o processo está sob controlo é superior aquele em que está fora de controlo. Com esta medida é possível comparar métodos de amostragem através do custo total médio por ciclo. Considerando que o tempo de vida do sistema tem distribuição de *Weibull*, analisam-se as seguintes situações: três sistemas com taxa de risco crescente (parâmetro de forma $\delta = 2, 4$ e 7) e um sistema com taxa de risco decrescente ($\delta = 0,8$).

Implicações práticas – Melhoraria no planeamento de um processo produtivo no qual o período de tempo sob controlo é, substancialmente, mais elevado do que o período de tempo fora de controlo.

Originalidade/valor – Para comparar o desempenho estatístico entre diferentes métodos de amostragem, utiliza-se o número médio de amostras que é necessário recolher sob controlo. Em particular, compara-se o desempenho estatístico e económico de diferentes métodos de amostragem considerados na literatura. É proposta uma aproximação para o tempo médio entre o instante em que ocorre a falha e o instante em que é recolhida a amostra seguinte, a metade do maior intervalo de amostragem em método VSI.

Palavras-chave – Controlo Estatístico do Processo, ARL, AATS, ANSIC, Custos do tempo de vida.

4.1. Introdução

Nos anos 30, Shewhart (1930) introduziu as cartas de controlo da qualidade e, dessa forma, os processos produtivos ficaram a dispor de uma ferramenta estatística simples, mas poderosa, para avaliar e controlar o seu desempenho, em particular as alterações devidas a causas assinaláveis. Contudo, as cartas de controlo para médias, do tipo *Shewhart*, sendo as mais utilizadas, tanto a nível teórico como a nível de implementação prática, são mais lentas que as cartas CUSUM e EWMA, a detetar pequenas e moderadas alterações da média.

Inicialmente as cartas de controlo restringiram-se a aplicações industriais, mas, hoje em dia, são usadas em quase todas as áreas (indústria, administração, epidemiologia, saúde, biologia, ecologia, finanças, laboratórios clínicos, entre outros). Montgomery (2009) refere que *“Actually, if we can make measurements on the product that are reflective of quality, function or performance, then the nature of the product has no bearing on the general applicability of control charts.”*

Estando presentes os erros de tipo I (falso alarme) e de tipo II importa, na conceção de uma carta de controlo, definir a que distância situar os limites de controlo da linha central, quantos elementos amostrar de cada vez e quando retirar as amostras para análise. Dessa forma, o tipo de carta utilizada, o intervalo de amostragem, a dimensão

da amostra e os limites de controlo são fatores determinantes na melhoria da qualidade. Em particular, os intervalos de amostragem utilizados podem ser fixos (FSI – *fixed sampling intervals*, política de amostragem clássica), adaptativos (VSI – *variable sampling intervals*; Reynolds *et al.* (1988)) ou predefinidos (PSI - *a predetermined fixed sampling instants method*; Rodrigues Dias (2002)). Além dos métodos de amostragem referidos, outros se podem encontrar na vasta literatura sobre a temática. Em particular, os métodos de amostragem desenvolvidos por Banerjee e Rahim (1988), Daudin (1992), Prabhu *et al.* (1993), Costa (1994), Prabhu *et al.* (1994), Stoumbos e Reynolds (1997) e Costa (1999). Novas cartas, novos procedimentos de amostragem, novas versões dos já existentes e novas técnicas em SPC (*Statistical Process Control*) têm sido propostas nos últimos anos (por exemplo, vejam-se os trabalhos de Wu *et al.* (2010) e Khoo *et al.* (2010)).

Com a intenção de avaliar o desempenho de determinado método de amostragem, foram desenvolvidas, ao longo do tempo, várias medidas. A rapidez com que se detetam causas assinaláveis, a frequência de falsos alarmes e o número de amostras e itens analisados, são normalmente utilizados para avaliar esse desempenho. O ARL ("*Average Run Length*") será, talvez, a medida estatística mais usada para avaliar o desempenho estatístico de uma carta de controlo. É definida como o número médio de amostras necessário analisar até haver indicação do processo estar fora de controlo. Caso os esquemas de controlo tenham um intervalo de amostragem constante e igual, então o intervalo de tempo até à deteção de uma alteração é diretamente proporcional ao ARL. No caso dos intervalos de amostragem não serem constantes, a proporcionalidade anteriormente referida deixa de se verificar e, o ARL, deixa de ser uma medida de eficiência do esquema de controlo.

Desta forma, e tendo por objetivo avaliar o esquema de controlo que melhor se adequa à situação que se nos depara, Ryan (2011) e Montgomery (2009) referem que, nos últimos anos, a utilização do ARL para avaliar o desempenho das cartas de

controlo tem sido muito criticado pelo facto da distribuição do RL para uma carta tipo *Shewhart* ser geométrica, a qual tem um desvio padrão muito grande e é muito achatada, pelo que a sua média (ARL) não é necessariamente um valor “típico” do RL.

O AATS ("*Adjusted Average Time to Signal*"), também designado na literatura como "*steady-state performance*", é definido como o intervalo médio de tempo desde o instante em que ocorre uma falha no sistema até esta ser detetada pela carta de controlo. No caso de uma carta de controlo, do tipo *Shewhart*, com intervalos variáveis, temos $AATS = E(G) + E(D) (ARL - 1)$, onde G representa o intervalo de tempo entre o instante em que o sistema falha e o instante em que é inspecionada a primeira amostra após a falha, tratando-se da medida que se adequa à maioria das situações práticas.

Em Morais (2002), Carmo (2004) e Rodrigues Dias e Carmo (2009) podem encontrar-se abordagens diferentes às anteriormente descritas. Em Morais e Pacheco (2001) são estabelecidas relações de ordem estocástica envolvendo o RL, permitindo a comparação de diferentes esquemas de controlo de qualidade sem calcular numericamente os seus desempenhos.

Do ponto de vista económico, Duncan (1956) foi pioneiro nesse tipo de trabalho, propondo um modelo económico para obter o *design* económico ótimo de uma carta de controlo para a média. Ao longo dos anos foram desenvolvidos, por diferentes autores, vários modelos, em diferentes contextos, utilizando diferentes tipos de cartas e diferentes metodologias de amostragem. Os trabalhos de Ho e Case (1994), Otha e Rahim (1997), Keats *et al.* (1997), Woodall (1997), Costa e Rahim (2001), Nikolaidis *et al.* (2007), Kim *et al.* (2009), Panagiotidou e Nenes (2009), Carolan *et al.* (2010) e Nil *et al.* (2010) são alguns exemplos do que acabamos de referir.

Neste trabalho apresentamos uma metodologia diferente, baseada na ideia apresentada por Carmo (2004), que compara dois métodos de amostragem através do número médio de amostras retiradas sob controlo, considerando que os tempos médios de mau funcionamento são iguais nos métodos em comparação, denominado, daqui

em diante, ANSIC (“Average Number of Samples In Control”). Os resultados obtidos com a nova metodologia são comparados com os obtidos através do AATS para os métodos FSI e VSI, tendo como referência o método PSI.

Nas secções seguintes apresentamos, de forma resumida, os métodos considerados para avaliação e algumas das suas propriedades estatísticas.

Em seguida é proposta uma aproximação do intervalo médio de tempo entre o instante em que ocorre a falha e o instante de recolha da amostra seguinte a metade do intervalo maior, em amostragem VSI. É proposta a nova metodologia de comparação de desempenho e os resultados de custos associados a um ciclo produtivo, tendo em conta um determinado modelo económico. Por fim, são retiradas conclusões e proposto trabalho para o futuro.

4.2. Alguns Pressupostos sobre o Sistema Utilizado

Seja T a variável aleatória, não negativa, que designa o tempo de vida de um qualquer sistema, isto é, o intervalo de tempo entre o instante em que o sistema começa a funcionar em estado de novo (pode ser depois de uma eventual reparação) e o instante em que o sistema falha. Considera-se, neste caso, que T segue uma distribuição de *Weibull*, com função densidade dada por

$$f(t) = \frac{\delta}{\alpha} \left(\frac{t}{\alpha} \right)^{\delta-1} \exp \left[- \left(\frac{t}{\alpha} \right)^{\delta} \right], t \geq 0, \alpha, \delta > 0, \quad (4.1)$$

onde α é o parâmetro de escala e δ é o parâmetro de forma. A média e a variância são dadas, respetivamente, por

$$E(T) = \alpha \Gamma \left(1 + \frac{1}{\delta} \right), \quad (4.2)$$

e por

$$\text{Var}(T) = \alpha^2 \left[\Gamma \left(1 + \frac{2}{\delta} \right) - \Gamma^2 \left(1 + \frac{1}{\delta} \right) \right], \quad (4.3)$$

sendo a função de fiabilidade dada pela expressão

$$R(t) = \exp\left[-\left(\frac{t}{\alpha}\right)^\delta\right], t \geq 0, \quad (4.4)$$

onde $\Gamma(x)$ é a função gama definida por $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} u^{x-1} \exp(-u) du$.

Seja X uma variável aleatória que representa a característica da qualidade em estudo, normalmente distribuída, e que o processo tem (re)início sob controlo, com média $\mu = \mu_0$ e desvio padrão $\sigma = \sigma_0$. Como resultado da ocorrência de uma causa assinalável, a qualidade da produção sofre uma alteração, passando a produzir-se com média $\mu_1 = \mu_0 + \lambda \sigma_0$, onde $\lambda > 0$ representa a magnitude da alteração da média.

4.3. Os Métodos de Amostragem FSI, VSI e PSI

Seja RL (“*Run Length*”) a variável aleatória que representa o número de amostras necessárias para que ocorra um falso alarme ou uma falha, independentemente do método de amostragem utilizado. Então,

$$RL \cap \text{Geom}(1-\beta), \quad (4.5)$$

onde β é a probabilidade de encontrar um média amostral entre os limites de controlo, dada por:

$$\beta = \Phi(L - \lambda\sqrt{n}) - \Phi(-L - \lambda\sqrt{n}), \quad (4.6)$$

onde L é múltiplo do desvio padrão na carta de control do tipo *Shewhart*.

O valor esperado de RL , e a variância, são dados, respetivamente, por:

$$ARL = \frac{1}{1-\beta} \text{ e por } \text{Var}(RL) = \frac{\beta}{(1-\beta)^2}. \quad (4.7)$$

4.3.1.O Método de Amostragem de Parâmetros Fixos

Nas cartas *Shewhart* clássicas, os instantes de amostragem, as dimensões das amostras e os limites de controlo são fixos durante todo o processo. Considerando d o intervalo fixo de amostragem, e G a variável aleatória que representa o intervalo de tempo entre o instante em que ocorre a falha e o instante em que é retirada a amostra seguinte, a variável G tem valor esperado dado por:

$$E(G) = dE(N_0) - E(T), \quad (4.8)$$

onde

$$E(N_0) = \sum_{i=0}^{\infty} R(id) = \sum_{i=0}^{\infty} \exp\left[-\left(\frac{id}{\alpha}\right)^{\delta}\right], \quad (4.9)$$

representa o número médio de amostras recolhidas sob controlo.

Rodrigues Dias (1983), num contexto de inspeções perfeitas, apresentada interpretações geométricas muito simples e sugestivas, concluindo que $E(G)$ pode ser uma boa aproximação de metade do período de inspeção.

Infante e Rodrigues Dias (2002) e Carmo (2004) analisam a referida aproximação para diferentes distribuições de tempos de vida, concluindo no mesmo sentido. Assim, e a partir de agora, consideramos que

$$E(G) \cong \frac{d}{2}. \quad (4.10)$$

O tempo médio de mau funcionamento, designado a partir de agora por AATS, é dado, em função da magnitude da alteração do processo, por:

O tempo médio de mau funcionamento, AATS, é dado por:

$$AATS = dE(N_0) - E(T) + d(ARL - 1) \cong \frac{d}{1 - \beta} - \frac{d}{2}, \quad (4.11)$$

e a variância dada por:

$$\text{Var}(ATS) = \frac{d\beta}{(1 - \beta)^2}, \quad (4.12)$$

o que nos permite obter, de forma quase imediata, uma expressão para o número médio de amostras recolhidas sob controlo, e dada por:

$$E(N_0) \cong \frac{E(T)}{d} + \frac{1}{2}. \quad (4.13)$$

4.3.2.O Método VSI

O método VSI é um método de amostragem introduzido por Reynolds *et al.* (1988), com o objetivo de melhorar o desempenho da carta de controlo clássica. Este método divide região de continuação, $C =]-L, L[$, em duas sub-regiões, $C_1 =]-L, -w[\cup]w, L[$ e $C_2 = [-w, w]$, e utiliza dois intervalos de amostragem, d_1 e d_2 , com $d_1 < d < d_2$, permitindo antecipar (usando d_1) ou retardar (usando d_2) a recolha da amostra seguinte.

Reynolds e Arnold (1989), Reynolds (1989), Runger e Pignatiello (1991) e Reynolds (1995), em contextos diferentes, dão justificações teóricas para o uso de dois intervalos. Considerando dois intervalos, o intervalo médio de amostragem é dado por:

$$E(D|\lambda) = \frac{d_1 p_1 + d_2 p_2}{\beta}, \quad (4.14)$$

com

$$p_1 = \Phi(L - \lambda\sqrt{n}) - \Phi(w - \lambda\sqrt{n}) + \Phi(-w - \lambda\sqrt{n}) - \Phi(-L - \lambda\sqrt{n}),$$

$$p_2 = \Phi(w - \lambda\sqrt{n}) - \Phi(-w - \lambda\sqrt{n}), \quad (4.15)$$

e

$$W = \Phi^{-1} \left[\frac{2\Phi(L)(d - d_1) + d_2 - d}{2(d_2 - d_1)} \right], \quad (4.16)$$

obtida por Runger e Pignatiello (1991), quando o intervalo médio de amostragem, em VSI, sob controlo, é igual ao período de amostragem em FSI.

Dessa forma, o tempo médio de mau funcionamento, em método VSI, é dado por

$$AATS = \frac{d_1^2 p_{01} + d_2^2 p_{02}}{2(d_1 p_{01} + d_2 p_{02})} + \frac{d_1 p_1 + d_2 p_2}{1 - \beta}, \quad (4.17)$$

$$\text{onde } p_{01} = 2[\Phi(L) - \Phi(w)] \text{ e } p_{02} = 2\Phi(w) - 1, \quad (4.18)$$

$$\text{retirando-se que (Reynolds et al. (1988)) } E(G) = \frac{d_1^2 p_{01} + d_2^2 p_{02}}{2(d_1 p_{01} + d_2 p_{02})}. \quad (4.19)$$

Para este estudo foram obtidos resultados que, tendo por base a ideia que permitiu obter a aproximação (4.10), nos permitiram concluir que $E(G)$ ser aproximada por metade do maior intervalo de amostragem, d_2 . Assim, podemos reescrever o AATS, do método VSI, como

$$\text{AATS} \cong \frac{d_2}{2} + \frac{d_1 p_1 + d_2 p_2}{1 - \beta}. \quad (4.20)$$

Runger e Montgomery (1993) fazem recomendações no sentido de que d_2 deve ser um valor entre 1.5 e 4 vezes o intervalo de amostragem em FSI, devendo ser um valor próximo da margem inferior destes valores se pretendermos detetar grandes alterações no processo. Tendo em conta as recomendações dos autores, obtiveram-se ajustamentos de regressão linear para cada um dos valores de d_1 , usando d_2 como variável independente e $E(G)$ como variável dependente. Considerando m como declive da reta ajustada, consideramos o rácio

$$Q_{4.1} = \frac{0,5 - m}{0,5} \times 100\%, \quad (4.21)$$

que representa o erro relativo quando a aproximação $E(G) \cong \frac{d_2}{2}$ é usada.

Na Tabela 4.1. e na Tabela 4.2. apresentamos os resultados obtidos.

d_1	0,01	0,025	0,05	0,075	0,1	0,125	0,15
m	0,498	0,495	0,491	0,486	0,481	0,477	0,472
R^2	1,000	0,999	0,998	0,997	0,994	0,991	0,986
Q (%)	0,4	1,0	1,8	2,8	3,8	4,6	5,6

Tabela 4.1. – Valores de m , Q e R^2 para diferentes valores de d_1 , com $1 \leq d_2 \leq 2$

d_1	0,01	0,025	0,05	0,075	0,1	0,125	0,15
m	0,496	0,491	0,483	0,475	0,467	0,459	0,451
R^2	1,000	0,999	0,999	0,999	0,998	0,997	0,995
Q (%)	0,8	1,8	3,4	5,0	6,6	8,2	9,8

Tabela 4.2. – Valores de m , Q e R^2 para diferentes valores de d_1 com $1 \leq d_2 \leq 4$

Considerando os pares de intervalos de amostragem mais usados na literatura, podemos concluir que a qualidade do ajustamento é muito boa. As diferenças entre metade do intervalo d_2 e 0,5 são consideráveis quando $1 \leq d_2 \leq 4$ e aumentam quando aumenta o valor de d_1 . Contudo, em geral, as diferenças obtidas são inferiores a 10%. Tendo em conta este e outros resultados, podemos considerar que a aproximação (4.20) é boa e de utilidade prática, como se poderá constatar mais à frente.

Assim, considerando o tempo de vida do sistema e o intervalo médio de amostragem em VSI, dado por (4.14), podemos reescrever o AATS como

$$AATS = E(D_0)E(N_0) - E(T) + E(D_\lambda)(ARL - 1). \quad (4.22)$$

Igualando (4.20) a (4.22) obtemos uma expressão, simples, que nos permite calcular o número médio de amostras sob controlo, em método VSI, dada por

$$E(N_0) \cong \frac{E(T) + 0.5d_2}{E(D_0)}. \quad (4.23)$$

4.3.3.O Método com Intervalos de Amostragem Predefinidos

Em Rodrigues Dias (2002) é apresentada e em Rodrigues Dias e Infante (2008) estudada a política de amostragem de instantes predefinidos, tendo por base a taxa cumulativa de risco. Dessa forma, os instantes de amostragem, t_i , são obtidos de acordo com a seguinte relação:

$$H(t_i) = i\Delta H, \quad (4.24)$$

considerando
$$R(t_i) = \exp(-i\Delta H), \quad (4.25)$$

obtemos
$$t_i = R^{-1}[\exp(-i\Delta H)], \quad (4.26)$$

a partir da qual se obtém o tempo médio de mau funcionamento do sistema, dado por

$$AATS = (1 - e^{-\Delta H}) \left[\sum_{i=0}^{+\infty} t_i e^{-(i-1)\Delta H} + \frac{\beta \sum_{i=1}^{+\infty} (t_{i+1} - t_i)(\beta^i - e^{-i\Delta H})}{\beta - e^{-\Delta H}} \right] - E(T), \quad (4.27)$$

em função da magnitude da alteração do processo e do parâmetro ΔH , que se obtém igualando o número médio de amostras, sob controlo, em política FSI e o número médio de amostras, sob controlo, em PSI. Assim, recorrendo à função de fiabilidade, ΔH é dado por

$$\Delta H = -\ln \left[1 - \frac{1}{\sum_{i=0}^{\infty} R(id)} \right], \quad (4.28)$$

Com a obtenção de ΔH , a política de amostragem fica definida. Em Rodrigues Dias (1986, (1987)), e num contexto de inspeções perfeitas, são apresentadas aproximações para ΔH e para $E(G)$. Apoiado em resultados obtidos por simulação, o autor conclui que

$$\Delta H \cong \frac{d}{E(T)}, \quad (4.29)$$

e que

$$E(G) \cong \frac{\Delta H}{2}. \quad (4.30)$$

Estas aproximações foram avaliadas, também recorrendo à simulação, em Infante (2004) que constatou da sua excelência, em particular quando d é muito pequeno em relação a $E(T)$.

Rodrigues Dias e Infante (2008) mostram que o método PSI é muito eficaz, particularmente, em sistemas com taxa de risco acentuadamente crescente.

4.4. Uma Nova Medida para Comparação de Métodos de Amostragem

Na literatura, tradicionalmente, o desempenho dos métodos de amostragem é comparado através do AATS. Neste estudo, e com base na ideia proposta por Carmo (2004), vamos considerar exatamente o oposto: igualamos o AATS de um método de referência (neste estudo será o AATS do método PSI) ao AATS de um método que queiramos avaliar (neste caso de FSI ou de VSI).

Dessa forma, resolvendo as respetivas equações em ordem a d (no caso do método

em comparação ser FSI) ou a w (no caso do método em comparação ser VSI), obtemos os valores de d e de w que devemos utilizar para obter uma maior (menor) frequência amostral sob controlo. Assim o desempenho da política de amostragem é avaliado pelo número médio de amostras recolhidas sob controlo, de modo a que o respetivo AATS seja igual ao AATS de PSI. Em Carmo *et al.* (2014) é feita uma descrição passo a passo da metodologia.

4.4.1. Comparação entre os Métodos FSI e PSI

Considerando a aproximação apresentada em (4.10), e igualando as expressões (4.11) e (4.27), obtemos

$$d = \frac{AATS_{PSI}}{ARL - 0.5}, \quad (4.31)$$

que é o intervalo de amostragem, d , a ser usado no método FSI para calcular o número médio de amostras sob controlo. Para comparar FSI com PSI, em termos de AATS e de ANSIC, vamos considerar os rácios $Q_{4.2}$ e $Q_{4.3}$, dados, respetivamente, por:

$$Q_{4.2} = \left(\frac{AATS_{FSI}}{AATS_{PSI}} - 1 \right) \times 100\% \text{ e por } Q_{4.3} = \left(\frac{ANSIC_{FSI}}{ANSIC_{PSI}} - 1 \right) \times 100\%. \quad (4.32)$$

Tomando o método PSI como referência, podemos interpretar $Q_{4.2}$ como uma medida de redução relativa em termos de AATS e $Q_{4.3}$ interpretada como uma medida de redução relativa em termos de ANSIC. Os resultados obtidos, para diferentes alterações da média e diferentes valores do parâmetro de forma da distribuição de Weibull, são apresentados na Tabela 4.3..

Para uma melhor interpretação dos valores obtidos para $Q_{4.2}$ e para $Q_{4.3}$, apresentamos o seguinte exemplo: considerando $E(T) = 1000$, $\delta = 7$ e $\lambda = 0,25$, o valor do AATS de FSI é 132,7 e o valor do AATS de PSI é 38,3, obtendo-se $d = 0,21$ e $ANSIC = 3460,6$. Assim, temos $Q_{4.2} = 246,0\%$ e $Q_{4.3} = 246,2\%$.

Com base nos resultados apresentados na Tabela 4.3, podemos concluir que os valores obtidos com as duas medidas de desempenho são idênticos, como já se

esperava. As maiores diferenças são obtidas para grandes alterações da média e podem ser justificadas pela utilização da aproximação (4.10) no cálculo de ANSIC, mas ainda assim nunca excedem os 0,23%. Estes resultados validam o método de comparação. Em relação à igualdade entre o AATS do método FSI e o AATS do método PSI, verificamos que a frequência amostral tanto é crescente como decrescente. Como a frequência amostral só depende do valor de d , esta torna-se, quase diretamente proporcional, permitindo que se obtenham resultados idênticos nos dois métodos de medidas de desempenho.

λ	$Q_{FSI, PSI}$ (%)	δ			
		0,8	2	4	7
0,25	$Q_{4,2}$	-5,72	36,42	118,75	246,01
	$Q_{4,3}$	-5,62	36,54	118,91	246,24
0,5	$Q_{4,2}$	-1,91	8,14	68,44	150,53
	$Q_{4,3}$	-1,82	8,25	68,58	150,70
0,75	$Q_{4,2}$	-0,70	10,12	45,13	106,04
	$Q_{4,3}$	-0,60	10,22	45,26	106,19
1	$Q_{4,2}$	-0,29	6,27	32,87	82,15
	$Q_{4,3}$	-0,20	6,38	32,99	82,29
1,25	$Q_{4,2}$	-0,12	4,21	25,57	67,55
	$Q_{4,3}$	-0,05	4,31	25,68	67,68
1,5	Q_1	-0,03	2,98	20,76	57,73
	Q_2	0,02	3,08	20,87	57,86
1,75	$Q_{4,2}$	0,02	2,20	17,53	51,05
	$Q_{4,3}$	0,05	2,31	17,63	51,18
2	$Q_{4,2}$	0,05	1,76	15,61	47,09
	$Q_{4,3}$	0,06	1,86	15,72	47,22
2,5	$Q_{4,2}$	0,07	1,49	14,43	44,67
	$Q_{4,3}$	0,07	1,59	14,54	44,79
3	$Q_{4,2}$	0,08	1,47	14,35	44,49
	$Q_{4,3}$	0,07	1,57	14,45	44,62

Tabela 4.3. – Valores de $Q_{4,2}$ e $Q_{4,3}$ obtidos, quando se compara PSI com FSI, através do AATS e do ANSIC

4.4.2. Comparação entre os Métodos VSI e PSI

Para realizar esta comparação necessitamos de obter os valores de w , que definem a partição da região de continuação do método de amostragem VSI. Para atingir o objetivo a que nos propomos, vamos escrever (4.17) em função de d , d_1 e de d_2 , utilizando (4.16). Igualando (4.17) a (4.27) e atribuindo valores ao par de amostragem em VSI, obtemos, através de método de simulação de Newton, o período de amostragem, d , em FSI. Com os valores de d obtidos calculamos w e definimos a partição da região de continuação do método VSI. Definida a partição da região de continuação, obtemos o intervalo médio de amostragem, sob controlo, que permite

calcular o número médio de amostras necessárias para que o AATS de VSI seja igual ao AATS de PSI. Desta forma, não é definida uma única partição da região de continuação, mas várias. Cada valor de d obtido dá um valor de w diferente, e conseqüentemente uma partição da região de continuação, também, diferente bem como diferentes intervalos médios de amostragem para serem utilizados sob controlo.

Para comparar os dois métodos, em termos de AATS e de ANSIC, consideramos $Q_{4.4}$ e $Q_{4.5}$, dados, respetivamente, por:

$$Q_{4.4} = \left(\frac{AATS_{VSI}}{AATS_{PSI}} - 1 \right) \times 100\%, \text{ e por } Q_{4.5} = \left(\frac{ANSIC_{VSI}}{ANSIC_{PSI}} - 1 \right) \times 100\%. \quad (4.33)$$

Tomando, novamente, o método PSI como referência, $Q_{4.4}$ pode ser interpretado como uma medida de aumento/redução relativo(a) em termos de AATS e $Q_{4.5}$ como uma medida de aumento/redução relativo(a) em termos de ANSIC, quando o método de amostragem em comparação é usado em vez do método PSI. Os resultados obtidos para diferentes magnitudes de alteração da média e diferentes valores do parâmetro de forma da distribuição de *Weibull* são apresentados na Tabela 4.4. e na Tabela 4.5.

Como exemplo, considere-se que $E(T) = 1000$, $\delta = 7$, $\lambda = 0,25$ e $(d_1, d_2) = (0,1, 1,9)$. Nestas condições, temos $AATS_{VSI} = 118,6$ e $AATS_{PSI} = 38,3$ e um valor de $Q_{4.4} = 209,4\%$. Igualando os AATS's, obtemos $d = 0,315$, $w = 0,150$, $E(D_0) = 0,315$ e $ANSIC = 3179,9$. Então, obtemos $Q_{4.5} = 218,2\%$.

Contrariamente ao que acontecia na comparação anterior, neste caso os rácios para os valores de AATS e de ANSIC são diferentes. Embora com sinais iguais, o que significa que as diferenças entre os métodos de amostragem ocorrem no mesmo sentido, as diferenças entre as medidas de desempenho acentuam-se quando a probabilidade de detetar uma alteração, β , diminui. Sobre os resultados dos rácios, podemos concluir que:

1) $Q_{4.4}$ e $Q_{4.5}$ aumentam, quando aumenta a taxa de risco do sistema.

- 2) $Q_{4,4}$ diminuem quando $\lambda \leq 1$ e aumentam com $\lambda \geq 1,25$; $Q_{4,5}$ decresce quando $\lambda \leq 1,25$ e cresce quando $\lambda \geq 1,5$.
- 3) As diferenças entre os dois rácios são pequenas quando VSI tem melhor desempenho.
- 4) Para qualquer um dos pares de intervalos de amostragem considerados no método VSI, o valor de d aumenta quando a probabilidade de deteção, β , aumenta, até $\lambda \leq 1,25$ e diminui quando $\lambda \geq 1,5$; os valores de w têm o mesmo comportamento.
- 5) A redução do valor de w implica um aumento na frequência de utilização do intervalo d_1 , que por sua vez provoca um aumento do número médio de amostras recolhidas sob controlo. Como justificação, veja-se o seguinte exemplo: quando $\lambda = 3$, $\delta = 2$ e $AATS = 0,346$ no método PSI e igualando (4.20) a (4.27), temos:
- a) Quando $(d_1, d_2) = (0.01, 1.5)$, $AATS = 0,748$; temos $d = 0,029$, $w = 0,016$, $E(D_0) = 0,029$ e $ANSIC = 34508$;
- b) Quando $(d_1, d_2) = (0.1, 1.5)$, $AATS = 0,725$; temos $d = 0,224$, $w = 0,129$, $E(D_0) = 0,224$ e $ANSIC = 4097$;

λ	$Q_{VSI, PSI}$ (%)	δ com $d_2 = 1.5$				δ com $d_2 = 1.9$			
		0,8	2	4	7	0,8	2	4	7
0,25	$Q_{4,4}$	-15,18	22,73	96,80	211,29	-16,49	20,84	93,76	206,48
	$Q_{4,5}$	-13,69	21,28	92,33	205,07	-15,84	20,22	92,22	206,25
0,5	$Q_{4,4}$	-34,77	-21,44	12,01	66,60	-38,27	-25,64	6,02	57,68
	$Q_{4,5}$	-23,57	-15,15	9,31	54,99	-30,93	-21,15	5,45	53,95
0,75	$Q_{4,4}$	-55,78	-50,96	-35,37	-8,24	-58,75	-54,25	-39,70	-14,40
	$Q_{4,5}$	-29,49	-27,45	-20,54	-5,54	-40,39	-38,18	-29,97	-12,15
1	$Q_{4,4}$	-63,73	-61,34	-51,67	-33,74	-62,41	-59,93	-49,90	-31,32
	$Q_{4,5}$	-31,42	-30,95	-28,48	-21,78	-44,05	-43,10	-39,67	-30,45
1,25	$Q_{4,4}$	-53,49	-51,46	-41,52	-21,96	-44,88	-42,47	-30,69	-7,51
	$Q_{4,5}$	-31,89	-31,89	-29,98	-23,57	-44,67	-44,36	-41,09	-23,55
1,5	$Q_{4,4}$	-27,62	-25,40	-12,52	14,26	-9,76	-6,99	9,07	42,46
	$Q_{4,5}$	-31,89	-31,42	-27,97	1037,78	-40,74	-38,18	548,19	2901,95
1,75	$Q_{4,4}$	4,41	6,77	22,77	57,80	31,70	34,68	54,87	99,04
	$Q_{4,5}$	384,87	531,31	1825,48	3636,01	2403,63	2558,48	3528,44	4962,95
2	$Q_{4,4}$	29,95	32,29	50,30	91,23	64,29	67,25	90,01	141,76
	$Q_{4,5}$	2283,93	2403,13	3352,59	4760,44	3905,80	4004,31	4714,67	5861,02
2,5	$Q_{4,4}$	48,04	50,29	69,45	114,23	87,24	90,10	114,34	170,97
	$Q_{4,5}$	3237,50	3352,59	4089,33	5312,17	4646,21	4737,93	5313,25	6278,67
3	$Q_{4,4}$	49,42	51,67	70,91	115,98	89,00	91,84	116,18	173,18
	$Q_{4,5}$	3352,59	3400,88	4142,59	5371,31	4691,63	4761,41	5372,41	6319,56

Tabela 4.4. – Valores de $Q_{4,4}$ e $Q_{4,5}$ obtidos, quando se compara PSI com VSI, e $d_1 = 0.01$ em VSI, através do AATS e do ANSIC

- c) Quando $(d_1, d_2) = (0.01, 1.9)$, $AATS = 0,946$; temos $d = 0,021$, $w = 0,007$, $E(D_0) = 0,021$ e $ANSIC = 48590$;

d) Quando $(d_1, d_2) = (0.1, 1.9)$, AATS = 0,905; temos $d = 0,187$, $w = 0,061$,
 $E(D_0) = 0,187$ e ANSIC = 5342;

λ	$Q_{VSI, PSI}$ (%)	δ com $d_2 = 1.5$				δ com $d_2 = 1.9$			
		0,8	2	4	7	0,8	2	4	7
0,25	$Q_{4,4}$	-14,56	23,63	98,24	213,58	-15,69	22,00	95,62	209,43
	$Q_{4,5}$	-12,93	22,60	96,76	217,05	-15,13	21,84	96,89	218,15
0,5	$Q_{4,4}$	-32,47	-18,66	15,98	72,49	-35,45	-22,25	10,86	64,89
	$Q_{4,5}$	-23,57	-14,42	13,53	68,08	-29,97	-19,88	10,53	68,27
0,75	$Q_{4,4}$	-51,61	-46,33	-29,27	0,41	-54,03	-49,02	-32,81	-14,62
	$Q_{4,5}$	-29,49	-27,45	-19,25	0,45	-40,03	-37,41	-27,95	-24,73
1	$Q_{4,4}$	-58,60	-55,87	-44,83	-24,37	-57,16	-54,33	-42,91	-21,73
	$Q_{4,5}$	-31,42	-30,95	-27,45	-18,60	-43,74	-42,77	-38,56	-26,36
1,25	$Q_{4,4}$	-48,98	-46,76	-35,85	-14,40	-41,01	-38,43	-25,82	-1,01
	$Q_{4,5}$	-31,89	-31,42	-29,49	-20,54	-44,36	-44,05	-39,67	-4,62
1,5	$Q_{4,4}$	-25,25	-22,96	-9,66	18,00	-8,95	-6,15	10,05	43,74
	$Q_{4,5}$	-31,42	-30,95	-25,28	143,86	-37,80	-32,79	86,14	302,19
1,75	$Q_{4,4}$	3,97	6,32	22,25	57,13	28,80	31,71	51,45	94,66
	$Q_{4,5}$	35,95	56,97	179,30	360,73	217,48	234,34	331,27	474,59
2	$Q_{4,4}$	27,22	29,51	47,13	87,20	58,44	61,29	83,24	133,15
	$Q_{4,5}$	209,18	222,53	313,30	456,15	354,96	365,51	437,17	549,98
2,5	$Q_{4,4}$	43,67	45,86	64,45	107,91	79,31	82,04	105,25	159,49
	$Q_{4,5}$	294,50	305,15	379,92	502,73	422,32	430,75	489,78	586,77
3	$Q_{4,4}$	44,93	47,11	65,77	109,48	80,91	83,63	106,93	161,48
	$Q_{4,5}$	300,52	309,86	384,61	506,12	427,09	434,47	493,49	589,43

Tabela 4.5. – Valores de $Q_{4,4}$ e $Q_{4,5}$ obtidos, quando se compara PSI com VSI, e $d_1 = 0.1$ em VSI, através do AATS e do ANSIC

- 6) As maiores diferenças entre os rácios $Q_{4,4}$ e $Q_{4,5}$ ocorrem, em geral, quando $\lambda \geq 1,75$, o que pode ser justificado pela utilização da aproximação de $E(G)$ a metade do maior intervalo utilizado no método VSI.
- 7) O par de intervalos de amostragem utilizados no método VSI tem uma elevada influência sobre os resultados obtidos; assim, podemos concluir que quando fixamos d_1 e aumentamos d_2 , aumenta o valor de $E(G)$ e de ANSIC; quando fixamos d_2 e aumentamos d_1 , diminuem $E(G)$ e ANSIC.

4.5. Discussão dos Resultados numa Perspetiva Económica

Neste trabalho, consideramos um modelo adaptado daquele que foi utilizado em Carmo (2004) e em Rodrigues Dias (2009), tendo como base uma abordagem económica global apresentada na literatura, incluindo alguns estudos onde é considerada a distribuição de *Weibull* para tempo de vida do sistema, como é feito em Banerjee e Rahim (1988) e Otha e Rahim (1997), mas tendo sempre presente a

utilidade prática.

Considerem-se custos de amostragem, C_{ca} , custos de falso alarme, C_{fa} e custos de mau funcionamento, C_{AATS} . O custo total médio por ciclo de controlo, depende do número médio de amostras recolhidas sob controlo e fora de controlo e do tempo médio de mau funcionamento, e é dado por:

$$E(C) = C_{ca} [E(N_0) + ARL_{\lambda}] + C_{AATS} \times AATS + \alpha_0 C_{fa} E(N_0). \quad (4.34)$$

Trata-se de uma expressão simplificada, na qual foi feita a separação entre o número médio de amostras retiradas e o tempo médio de mau funcionamento.

Seja o custo total médio por ciclo, dado por (4.34). Considerem-se dois métodos de amostragem com o mesmo AATS bem como o seu ARL (por definição). De acordo com os pressupostos mencionados anteriormente, o ANSIC mede a eficácia dos métodos de amostragem, sendo o método mais eficaz aquele que necessitar de uma menor frequência de amostragem.

Neste trabalho vamos considerar que o tempo de vida do sistema tem distribuição de *Weibull* com $E(T) = 1000$ e $\delta \in \{0,8, 2, 4, 7\}$, que, $\Delta H = 0,001$ no método PSI (obtido por (4.29)), $C_{ca} \in \{10, 50, 100\}$, $C_{AATS} = 500$, $C_{fa} = 50$, $L = 3$ e $n = 5$.

Para comparar os dois métodos, em termos de custo total médio por ciclo, vamos considerar o rácio $Q_{4.6}$, dado por

$$Q_{4.6} = \left(\frac{E(C_{\text{Comparado}})}{E(C_{\text{PSI}})} - 1 \right) \times 100\%. \quad (4.35)$$

onde $E(C_{\text{Comparado}})$ pode ser substituído pelo custo total médio por ciclo associado ao método em comparação.

Usando como base de comparação o método PSI, $Q_{4.6}$ pode ser interpretado como uma medida aumento/redução relativa, em %, em termos de $E(C)$, quando o método de amostragem em comparação é usado na vez do método PSI.

Apresentamos a seguir, um conjunto de resultados que medem a eficácia, em termos económicos, de cada um dos métodos aqui considerados.

4.5.1. Comparação entre os Métodos FSI e PSI

Em Rodrigues Dias e Infante (2008) o desempenho estatístico do método PSI, e de outros métodos, foi comparado considerando $\Delta H = 0,001$ ($E(T) = 1000$, $d = 1$ e a aproximação (4.29)). Várias conclusões foram retiradas. Sob as mesmas condições, mas segundo uma perspetiva económica, obtivemos os resultados que apresentamos na Tabela 4.6., da qual podemos retirar as seguintes conclusões:

- 1) Quando $\delta = 0,8$, situação em que a taxa de risco é decrescente, FSI é mais eficaz do que PSI, para valores de $\lambda \leq 1,25$ (reduzida e moderada probabilidade da média de uma amostra cair fora dos limites de controlo); para valores $1,25 < \lambda \leq 3$ (elevada probabilidade da média de uma amostra cair fora dos limites de controlo) PSI é mais eficaz.

$Q_{4,6}$ (%)		δ			
λ	C_{Ca}/C_{AATS}	0,8	2	4	7
0,25	2%	-0,70	6,16	28,83	81,43
	10%	-2,22	17,37	68,42	162,49
	20%	-3,06	22,57	82,81	185,90
0,5	2%	-0,68	7,58	34,34	89,64
	10%	-1,33	13,91	55,84	129,43
	20%	-1,51	15,56	60,64	137,13
0,75	2%	-0,40	6,95	33,29	84,52
	10%	-0,54	9,26	41,86	100,14
	20%	-0,57	9,67	43,26	102,54
1	2%	-0,17	5,36	28,61	73,95
	10%	-0,19	6,12	31,89	80,17
	20%	-0,19	6,23	32,36	81,04
1,25	2%	-0,04	3,95	23,85	63,98
	10%	-0,05	4,23	25,24	66,77
	20%	-0,05	4,27	25,43	67,15
1,5	2%	0,02	2,93	19,97	55,90
	10%	0,02	3,04	20,65	57,38
	20%	0,02	3,06	20,74	57,57
1,75	2%	0,05	2,23	17,10	49,94
	10%	0,05	2,29	17,51	50,87
	20%	0,05	2,30	17,56	51,00
2	2%	0,06	1,81	15,32	46,27
	10%	0,06	1,85	15,62	46,98
	20%	0,06	1,85	15,66	47,07
2,5	2%	0,07	1,55	14,22	43,99
	10%	0,07	1,58	14,46	44,59
	20%	0,07	1,59	14,49	44,67
3	2%	0,07	1,53	14,13	43,83
	10%	0,07	1,56	14,38	44,42
	20%	0,07	1,57	14,41	44,50

Tabela 4.6. – Valores de $Q_{4,6}$ obtidos, quando se compara FSI com PSI.

- 3) Para taxas de risco crescentes, valores de $\delta \in \{2, 4, 7\}$, PSI é sempre mais eficaz do que o método FSI, independentemente da magnitude da alteração na média; a eficácia do método PSI aumenta à medida que a taxa de risco é acentuadamente

crescente.

- 4) Para taxas de risco crescentes, e $C_{ca}/C_{AATS} = 2\%$, a eficácia de PSI também aumenta quando a alteração na média é moderada, atingindo um “máximo” de eficácia para $\lambda = 0,5$ e diminui para valores de $\lambda \geq 2,5$; para $C_{ca}/C_{AATS} = 10\%$ e $C_{ca}/C_{AATS} = 20\%$ a eficácia de PSI diminui para todo o tipo de magnitudes consideradas.
- 5) Quando $\delta = 0,8$ e $\lambda \geq 1,5$, o custo total médio por ciclo não aumenta quando consideramos elevados custos de amostragem; quando aumenta a taxa de risco, as diferenças são menores;
- 6) Quando aumentam os custos de amostragem, em relação aos custos de mau funcionamento, obtemos um aumento muito relevante de custos, em particular quando a probabilidade de uma média amostral cair fora dos limites de controlo é baixa e o parâmetro de forma da distribuição de *Weibull* aumenta. Estes resultados podem ser muito importantes quando trabalhamos em contextos preventivos (por exemplo, na produção de purificadores de ar para automóveis ou na produção de chips para computadores de última geração). Os aumentos são mais relevantes quando passamos o rácio de custos de 2% para 10% (5 vezes maior) do que aqueles que obtemos quando passamos de 10% para 20% (2 vezes maior), não sendo proporcionais nas diferentes situações consideradas. Por fim, quando $\lambda \geq 1,75$ os valores de $Q_{4.6}$ são idênticos.

4.5.2. Comparação entre os Métodos VSI e PSI

No trabalho de Rodrigues Dias e Infante (2008), o método PSI é comparado com três versões do método VSI, (ou seja, três combinações de pares de intervalos de amostragem) sujeito à condição do intervalo médio de amostragem, sob controlo, em VSI ser igual a uma unidade de tempo. Esta condição implica que $\Delta H = 0,001$, por

(4.29). Neste trabalho, e de acordo com a metodologia ANSIC, consideramos dois pares de intervalos de amostragem para o método VSI: os valores de d são obtidos através do método de simulação de Newton quando comparamos VSI com PSI, com $d_1 < d < d_2$, que permitem obter os diferentes valores para w e, conseqüentemente, os diferentes intervalos médios de amostragem para calcular o número médio de amostras sob controle dado por (4.23). Sob estas condições, e utilizando o rácio (4.35), obtivemos os resultados que apresentamos na Tabela 4.7. e na Tabela 4.8. a partir das quais podemos retirar as seguintes conclusões:

- 1) Os custos associados ao método PSI são inferiores aos associados ao método VSI, em particular, quando: $\lambda = 0,25$ e $\delta \in \{2, 4, 7\}$; $\lambda = 0,5$ e $\delta \in \{4, 7\}$; e para $\lambda \geq 1,75$ em qualquer taxa de risco.
- 2) A taxa de risco do sistema tem influencia nos custos associados a um ciclo produtivo.
- 3) As reduções de custos obtidas com o método VSI são menores que os aumentos quando se usa o método PSI.
- 4) Quando aumentam os custos de amostragem e o parâmetro de forma da distribuição de Weibull, aumentam os custos associados ao método VSI; as diferenças são mais significativas quando $\lambda = 0,25$ ou $\lambda \geq 1,75$ com $d_1 = 0,01$; quando $\lambda \geq 1,75$ e $d_1 = 0,1$ essas diferenças são menores, mas relevantes quando $\lambda = 0,25$.
- 5) Em geral, o aumento nos custos associados ao método PSI são inferiores aos associados ao método VSI; há casos, excepcionais, em que isso não acontece (por exemplo quando $\lambda \in \{0,5; 0,75\}$ e $\delta \in \{2, 4\}$); tal como anteriormente, a utilização do método PSI pode ser uma vantagem competitiva em contextos preventivos. O aumento dos custos são mais relevantes quando passamos de 2% para 10% (5 vezes superior) do que aqueles que obtemos quando passamos 10% para 20% (2 vezes superior) e não são proporcionais ao aumento nas diferentes situações.

Q _{4,6} (%)		δ with d ₂ = 1.5				δ with d ₂ = 1.9			
λ	C _{ca} /C _{AAATS}	0,8	2	4	7	0,8	2	4	7
0,25	2%	-1,69	3,59	22,38	67,82	-1,96	3,41	22,36	68,21
	10%	-5,39	10,12	53,12	135,32	-6,25	9,62	53,06	136,10
	20%	-7,45	13,14	64,29	154,82	-8,63	12,49	64,22	155,71
0,5	2%	-8,77	-6,29	4,66	32,71	-11,51	-8,78	2,73	32,09
	10%	-17,23	-11,55	7,58	47,23	-22,61	-16,13	4,44	46,34
	20%	-19,63	-12,92	8,23	50,04	-25,76	-18,03	4,82	49,09
0,75	2%	-19,39	-18,66	-15,10	-4,41	-26,56	-25,96	-22,04	-9,67
	10%	-26,48	-24,87	-18,99	-5,23	-36,26	-34,59	-27,72	-11,46
	20%	-27,76	-25,96	-19,63	-5,35	-38,02	-36,11	-28,65	-11,74
1	2%	-26,14	-26,01	-24,71	-19,57	-36,64	-36,22	-34,41	-27,37
	10%	-30,08	-29,70	-27,53	-21,22	-42,18	-41,36	-38,35	-29,67
	20%	-30,67	-30,24	-27,94	-21,45	-43,00	-42,12	-38,91	-29,99
1,25	2%	-29,10	-29,21	-27,85	-22,28	-40,77	-40,64	-38,17	-22,26
	10%	-31,22	-31,25	-29,47	-23,25	-43,74	-43,47	-40,39	-23,24
	20%	-31,51	-31,53	-29,69	-23,38	-44,15	-43,86	-40,69	-23,37
1,5	2%	-30,25	-29,85	-26,76	1002,77	-38,65	-36,27	524,51	2804,03
	10%	-31,50	-31,05	-27,68	1029,23	-40,25	-37,73	542,56	2878,03
	20%	-31,67	-31,21	-27,80	1032,68	-40,46	-37,93	544,93	2887,68
1,75	2%	371,21	512,85	1769,80	3548,21	2318,35	2469,59	3420,83	4843,11
	10%	381,66	526,96	1812,19	3614,41	2383,58	2537,55	3502,76	4933,46
	20%	383,02	528,80	1817,70	3622,96	2392,10	2546,41	3513,40	4945,13
2	2%	2218,49	2335,42	3268,75	4665,34	3793,90	3891,48	4596,77	5743,93
	10%	2268,45	2387,09	3332,45	4736,85	3879,34	3977,58	4686,35	5831,97
	20%	2274,94	2393,79	3340,68	4746,06	3890,42	3988,74	4697,93	5843,31
2,5	2%	3155,71	3269,09	3998,31	5217,13	4528,83	4619,92	5194,97	6166,34
	10%	3218,06	3332,71	4067,35	5288,45	4618,31	4709,83	5284,69	6250,64
	20%	3226,12	3340,93	4076,26	5297,61	4629,88	4721,45	5296,26	6261,47
3	2%	3268,65	3316,91	4051,13	5275,97	4574,16	4643,86	5253,80	6207,38
	10%	3332,63	3380,88	4120,49	5347,51	4663,69	4733,41	5343,76	6291,55
	20%	3340,90	3389,15	4129,44	5356,70	4675,27	4744,99	5355,36	6302,36

Tabela 4.7. – Valores de Q_{4,6} obtidos, quando se compara PSI com VSI, e d₁ = 0.01 em VSI.

Q _{4,6}		δ com d ₂ = 1.5				δ com d ₂ = 1.9			
λ	C _{ca} /C _{AAATS}	0,8	2	4	7	0,8	2	4	7
0,25	2%	-1,60	3,81	23,46	71,78	-1,87	3,68	23,49	72,14
	10%	-5,10	10,74	55,68	143,23	-5,96	10,38	55,75	143,95
	20%	-7,05	13,96	67,38	163,86	-8,24	13,49	67,47	164,69
0,5	2%	-8,77	-5,99	6,78	40,50	-11,15	-8,26	5,27	40,61
	10%	-17,23	-11,00	11,02	58,47	-21,91	-15,16	8,57	58,64
	20%	-19,63	-12,30	11,97	61,95	-24,95	-16,96	9,31	62,13
0,75	2%	-19,39	-18,66	-14,16	0,36	-26,33	-25,44	-20,56	-19,68
	10%	-26,48	-24,87	-17,81	0,42	-35,94	-33,89	-25,85	-23,32
	20%	-27,76	-25,96	-18,41	0,43	-37,68	-35,38	-26,72	-23,88
1	2%	-26,14	-26,01	-23,81	-16,71	-36,38	-35,94	-33,45	-23,69
	10%	-30,08	-29,70	-26,53	-18,12	-41,88	-41,05	-37,28	-25,69
	20%	-30,67	-30,24	-26,92	-18,31	-42,69	-41,80	-37,82	-25,96
1,25	2%	-29,10	-28,78	-27,39	-19,41	-40,49	-40,35	-36,85	-4,37
	10%	-31,22	-30,79	-28,99	-20,26	-43,44	-43,17	-38,99	-4,56
	20%	-31,51	-31,07	-29,20	-20,37	-43,85	-43,55	-39,28	-4,59
1,5	2%	-29,80	-29,40	-24,19	139,01	-35,85	-31,15	82,42	291,99
	10%	-31,04	-30,58	-25,02	142,68	-37,34	-32,40	85,26	299,70
	20%	-31,21	-30,74	-25,13	143,15	-37,54	-32,57	85,63	300,70
1,75	2%	34,67	54,99	173,83	352,02	209,77	226,19	321,17	463,13
	10%	35,65	56,50	177,99	358,58	215,67	232,42	328,86	471,77
	20%	35,77	56,70	178,53	359,43	216,44	233,23	329,86	472,89
2	2%	203,19	216,26	305,46	447,03	344,79	355,21	426,24	538,99
	10%	207,76	221,04	311,41	453,89	352,56	363,07	434,54	547,26
	20%	208,36	221,66	312,18	454,77	353,57	364,09	435,62	548,32
2,5	2%	287,06	297,55	371,46	493,73	411,65	420,02	478,88	576,27
	10%	292,74	303,34	377,87	500,48	419,79	428,20	487,15	584,15
	20%	293,47	304,09	378,70	501,35	420,84	429,25	488,22	585,16
3	2%	292,99	302,21	376,12	497,14	416,40	423,74	482,59	578,97
	10%	298,73	308,04	382,56	503,88	424,55	431,91	490,86	586,82
	20%	299,47	308,79	383,39	504,74	425,60	432,97	491,92	587,83

Tabela 4.8. – Valores de Q_{4,6} obtidos, quando se compara PSI com VSI, e d₁ = 0.1 em VSI.

6) Nas situações em que os custos associados ao método VSI são reduzidos, o aumento do valor de d₁ tem pouco peso nos resultados; porque a diferença entre o

número médio de amostras retiradas sob controlo, em ambos os métodos, é desprezável.

- 7) Nas situações em que os custos associados ao método PSI são reduzidos, as reduções de custos são inversamente proporcionais ao aumento do menor intervalo em VSI, d_1 .

4.6. Conclusões e Trabalho Futuro

Com base nas conclusões anteriormente retiradas, podemos inferir que o método PSI é sempre mais eficaz do que o método VSI em sistemas com taxas de risco crescentes. Para grandes alterações na media, $\lambda \geq 1,75$, o desempenho de PSI é sempre melhor.

A situação não é a mesma quando a comparação é feita com o método VSI. Independentemente da taxa de risco, a utilização de PSI traz eficácia em determinados contextos, mas é menos eficaz noutros, sendo mais eficaz em sistemas cuja taxa de risco é acentuadamente crescente.

Concluimos que a utilização do novo critério de comparação pode ajudar a decidir melhor sobre qual dos métodos de amostragem escolher de acordo com cada contexto e característica (estatísticas ou outras) do sistema a ser monitorizado. Uma observação final para a vantagem matemática deste critério: não necessitamos de trabalhar com custos unitários quando efetuamos comparações de custos, uma vez que os métodos em comparação têm o mesmo ciclo de vida.

Por fim, alertamos para a vantagem que o uso desta metodologia pode ter: num contexto económico adverso, o controlo eficaz dos custos de amostragem será uma vantagem competitiva para qualquer organização com sistemas produtivos. Considerando a sua simplicidade e a capacidade de controlar custos de amostragem, e consequentemente, custos de falsos alarmes, acreditamos que a metodologia ANSIC é de utilidade prática.

Como trabalho future, tencionamos, com a utilização deste critério de comparação, formular um problema de programação linear que permita comparar dois métodos de amostragem através dos seus parâmetros ótimos.

Agradecimentos

The authors are grateful to the Editor e referees for their careful reviews e helpful suggestions that have improved considerably the final manuscript.

The first two authors are CIMA-U.E. members, a research center funded by the FEDER program, administrated by FCT pluriannual funding.

Anexo 1.

$E(T)=1000$	δ			
λ	0,8	2	4	7
0,25	140,704	97,242	60,643	38,339
0,5	33,543	27,850	19,532	13,133
0,75	10,334	9,318	7,070	4,980
1	4,007	3,759	3,007	2,193
1,25	1,890	1,811	1,503	1,127
1,5	1,067	1,036	0,883	0,676
1,75	0,721	0,705	0,613	0,477
2	0,576	0,566	0,498	0,391
2,5	0,505	0,497	0,441	0,349
3	0,500	0,493	0,437	0,346

Table A 1.1. – Values of the $AATS_{PSI}$ for different values of δ e λ

$E(T)=1000$	δ				
λ		0,8	2	4	7
0,25	d	1,06	0,73	0,46	0,29
	ANSIC	943,33	1364,72	2188,03	3460,65
0,5	d	1,02	0,85	0,59	0,40
	ANSIC	981,34	1181,86	1684,94	2505,78
0,75	d	1,01	0,91	0,69	0,49
	ANSIC	993,49	1101,67	1451,85	2060,86
1	d	1,00	0,94	0,75	0,55
	ANSIC	997,52	1063,24	1329,21	1821,96
1,25	d	1,00	0,96	0,80	0,60
	ANSIC	999,03	1042,62	1256,17	1676,00
1,5	d	1,00	0,97	0,83	0,63
	ANSIC	999,67	1030,30	1208,09	1577,78
1,75	d	1,00	0,98	0,85	0,66
	ANSIC	999,97	1022,55	1175,76	1511,03
2	d	1,00	0,98	0,87	0,68
	ANSIC	1000,116	1018,11	1156,58	1471,43
2,5	d	1,00	0,99	0,87	0,69
	ANSIC	1000,18	1015,42	1144,82	1447,21
3	d	1,00	0,99	0,88	0,69
	ANSIC	1000,18	1015,23	1143,97	1445,45

Table A 1.2. – Values of the d e ANSIC for different values of δ e λ

$E(T) = 1000$		$\delta \text{ com } d_2 = 1.5$				$\delta \text{ com } d_2 = 1.9$			
λ		0,8	2	4	7	0,8	2	4	7
0,25	d	1,15	0,82	0,51	0,316	1,180	0,82	0,51	0,32
	W	1,15	0,69	0,37	0,194	0,839	0,52	0,29	0,15
	ANSIC	870,22	1225,36	1966,65	3168,936	848,263	1217,79	1967,93	3179,87
0,5	d	1,31	1,17	0,88	0,596	1,430	1,25	0,91	0,60
	W	1,48	1,18	0,77	0,458	1,119	0,91	0,59	0,35
	ANSIC	763,93	855,34	1134,78	1679,956	699,965	800,76	1104,74	1681,90
0,75	d	1,42	1,38	1,24	1,00	1,67	1,60	1,39	1,05
	W	1,88	1,71	1,32	0,91	1,51	1,38	1,07	1,00
	ANSIC	704,75	725,18	807,06	1004,00	599,37	625,59	720,11	752,36
1	d	1,46	1,45	1,38	1,23	1,78	1,75	1,63	1,36
	W	2,16	2,07	1,71	1,30	1,82	1,72	1,43	1,03
	ANSIC	685,45	690,17	725,18	813,62	562,33	571,97	614,08	735,99
1,25	d	1,47	1,46	1,42	1,26	1,80	1,79	1,66	1,05
	W	2,26	2,16	1,88	1,36	1,90	1,86	1,49	0,72
	ANSIC	680,78	685,45	704,75	794,25	556,08	559,19	602,98	953,29
1,5	d	1,46	1,45	1,34	0,41	1,61	1,49	0,54	0,25
	W	2,16	2,07	1,57	0,28	1,39	1,20	0,31	0,10
	ANSIC	685,45	690,17	746,83	2437,41	621,71	671,78	1860,50	4019,88
1,75	d	0,74	0,64	0,36	0,22	0,32	0,30	0,23	0,17
	W	0,60	0,50	0,23	0,11	0,15	0,14	0,09	0,05
	ANSIC	1358,79	1568,89	2791,57	4604,96	3173,23	3341,69	4310,54	5743,02
2	d	0,32	0,31	0,24	0,18	0,22	0,22	0,19	0,15
	W	0,20	0,19	0,13	0,07	0,08	0,08	0,06	0,04
	ANSIC	3090,26	3223,65	4130,89	5558,67	4547,37	4652,77	5369,01	6496,55
2,5	d	0,25	0,25	0,21	0,17	0,19	0,19	0,17	0,15
	W	0,14	0,13	0,10	0,06	0,06	0,06	0,05	0,03
	ANSIC	3943,07	4049,49	4796,77	6024,26	5220,62	5304,85	5894,88	6864,29
3	d	0,25	0,24	0,21	0,17	0,19	0,19	0,17	0,15
	W	0,13	0,13	0,10	0,06	0,06	0,06	0,05	0,03
	ANSIC	4003,16	4096,57	4843,67	6058,18	5268,27	5342,02	5931,91	6890,84

Table A 1.3. – Values of the d , W e ANSIC with $d_1 = 0,1$, for different values of δ e λ

4.7. Referências Bibliográficas

- Banerjee, P. K.; Rahim, M. A. (1988). Economic design of X-bar control charts under Weibull shock models. *Technometrics*, 30(4), 407-414.
- Carmo, M. (2004). *Problemas de Amostragem em Controlo Estatístico de Qualidade*. ISEGI-NOVA, New University of Lisbon, Lisbon.
- Carmo, M.; Infante, P.; Mendes, J. M. (2014). A different and simple approach for comparing sampling methods in quality control. *International Journal Quality & Reliability Management*, 31(5), 478-499.
- Carolan, C. A.; Kros, J. F.; Said, S. E. (2010). Economic Design of X Bar Control Charts with Continuously Variable Sampling Intervals. *Quality and Reliability Engineering International*, 26(3), 235-245.
- Costa, A. F. B. (1994). X-bar charts with variable sample size. *Journal of Quality Technology*, 26(3), 155-163.
- Costa, A. F. B. (1999). X-bar charts with variable parameters. *Journal of Quality Technology*, 31(4), 408-416.
- Costa, A. F. B.; Rahim, M. A. (2001). Economic design of X charts with variable parameters: The Markov chain approach. *Journal of Applied Statistics*, 28(7), 875 - 885.
- Daudin, J. J. (1992). Double sampling X-bar charts. *Journal of Quality Technology*, 24(2), 78-87.
- Duncan, A. J. (1956). The economic design of X-bar charts used to maintain current control of a process. *Journal of the American Statistical Association*, 51(274), 228-242.

- Ho, C.; Case, K. E. (1994). Economic design of control charts: a literature review for 1981-1991. *Journal of Quality Technology*, 26(1), 39-53.
- Infante, P. (2004). *Métodos de Amostragem em Controlo de Qualidade*. Unpublished PhD, Universidade de Évora, Évora.
- Infante, P.; Rodrigues Dias, J. (2002). Análise da importância da distribuição do tempo de vida no período de inspeção em controlo estatístico de qualidade. *Investigação Operacional*, 22(2), 167-179.
- Keats, J. B.; Del Castillo, E.; Collani, E. V.; Saniga, E. A. (1997). Economic Modeling for Statistical Process Control. *Journal of Quality Technology*, 29(2), 144-147.
- Khoo, M. B. C.; Lee, H. C.; Wu, Z.; Chen, C.-H.; Castagliola, P. (2010). A synthetic double sampling control chart for the process mean. *IIE Transactions*, 43(1), 23-38.
- Kim, Y.-B.; Hong, J.-S.; Lie, C.-H. (2009). Economic-Statistical Design of 2-of-2 and 2-of-3 Runs Rule Scheme. *Quality and Reliability Engineering International*, 25(2), 215-228.
- Montgomery, D. C. (2009). *Introduction to Statistical Quality Control* (6th ed.): John Wiley & Sons, Inc.
- Morais, M. C. (2002). *Ordenação Estocástica na Análise de Desempenho de Esquemas de Controlo de Qualidade*. Instituto Superior Técnico.
- Morais, M. C.; Pacheco, A. (2001). Ordenação estocástica na análise de desempenho de esquemas de controlo de qualidade. In Neves, M. M., Cadima, J., Martins, M. J. & Rosado, F. (Eds.), *A Estatística em Movimento* (pp. 247-260).
- Nikolaidis, Y.; Rigas, G.; Tagaras, G. (2007). Using economically designed Shewhart, and adaptive X charts for monitoring the quality of tiles. *Quality and Reliability Engineering International*, 23(2), 233-245.
- Nil, N.; Kraleti, S. R.; Kambagowni, V. S. (2010). Optimal design of X-bar control chart with Pareto in-control times. *International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 48(9-12), 829-837.
- Otha, H.; Rahim, M. A. (1997). A dynamic economic model for an X-bar control chart design. *IIE Transactions*, 29(6), 481-486.
- Panagiotidou, S.; Nenes, G. (2009). An economically designed, integrated quality and maintenance model using an adaptive Shewhart chart. *Reliability Engineering & System Safety*, 94(3), 732-741.
- Prabhu, S. S.; Montgomery, D. C.; Runger, G. C. (1994). A combined adaptive sample size and sampling interval X-bar control scheme. *Journal of Quality Technology*, 26(3), pp.164-176.
- Prabhu, S. S.; Runger, G. C.; Keats, J. B. (1993). An adaptive sample size X-bar chart. *International Journal of Production Research*, 31(2), 2895-2909.
- Reynolds, M. R. (1989). Optimal variable sampling interval control chart. *Sequential Analysis*, 8(4), 361-379.
- Reynolds, M. R. (1995). Evaluation properties of variable sampling interval control charts. *Sequential Analysis*, 14(1), 59-97.
- Reynolds, M. R.; Amin, R. W.; Arnold, J. C.; Nachlas, J. A. (1988). X-bar charts with variable sampling intervals. *Technometrics*, 30(2), 181-192.

- Reynolds, M. R.; Arnold, J. C. (1989). Optimal one-sided Shewhart control charts with variable sampling intervals. *Sequential Analysis*, 8(1), 51-77.
- Rodrigues Dias, J. (1983). Importância do Controlo Estatístico de Qualidade na Vida das Empresas. *Economia e Sociologia*(36), pp.53-66.
- Rodrigues Dias, J. (1986). Correspondência entre resultados relativos à inspeção periódica de sistemas e uma política de inspeção não periódica. *XI Jornadas Hispano-Lusas de Matemática, II*, Badajoz.
- Rodrigues Dias, J. (1987). *Políticas Periódicas de Inspeção*. PhD, Universidade de Évora, Évora, Portugal.
- Rodrigues Dias, J. (2002). Amostragem em controlo de qualidade com intervalos diferentes predefinidos: uma nova abordagem. *JOCLAD02, VIII Jornadas de Classificação e Análise de Dados*, 10 pp., Lisboa.
- Rodrigues Dias, J.; Carmo, M. (2009). *A new approach for comparing economic sampling methods in quality control in systems with different failure rates*. Paper presented at the IRF'2009 – 3rd International Conference on Integrity, Reliability & Failure , Challenges and Opportunities, Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, Porto, Portugal.
- Rodrigues Dias, J.; Infante, P. (2008). Control charts with predetermined sampling intervals. *International Journal of Quality and Reliability Management*, 25(4), 423-435.
- Runger, G. C.; Montgomery, D. C. (1993). Adaptive sampling enhancements for Shewhart control charts. *IIE Transactions*, 25(3), 41-51.
- Runger, G. C.; Pignatiello, J. J. (1991). Adaptive sampling for process control. *Journal of Quality Technology*, 23(2), 133-155.
- Ryan, T. P. (2011). *Statistical Methods for Quality Improvement*. 3th, John Wiley & Sons, Inc., Publication.
- Shewhart, W. A. (1930). Economic Quality Control of Manufactured Product. *Bell System Technical Journal IX, N° 2*(April 1930), 364-389.
- Stoumbos, Z. G.; Reynolds, M. R. (1997). Control charts applying a sequential test at fixed sampling intervals. *Journal of Quality Technology*, 29(1), pp. 21-40.
- Woodall, W. H. (1997). Control charts based on attribute data: bibliography and review. *Journal of Quality Technology*, 29(2), 172-183.
- Wu, Z.; Wang, Z.; Jiang, W. (2010). A generalized Conforming Run Length control chart for monitoring the mean of a variable. *Computers & Industrial Engineering*, 59(2), 185-192.

CAPÍTULO V

CONCLUSÕES FINAIS

Para além da apresentação do estado da arte, e de uma longa revisão bibliográfica, ao longo dos dois últimos capítulos desta dissertação pretendemos avaliar de uma forma crítica dois novos métodos de amostragem e um novo critério de comparação do desempenho de métodos de amostragem, num contexto de controlo estatístico da qualidade. Para tal, estudámos as suas principais propriedades estatísticas e realizámos análises críticas comparativas com outros métodos anteriormente apresentados na literatura, em termos do desempenho estatístico e económico de uma carta de controlo *Shewhart* para a média. Um amplo conjunto de resultados foi obtido, os quais tentámos analisar e interpretar da forma mais abrangente possível. Além das conclusões que fomos retirando em cada ponto de análise, neste capítulo final vamos tentar fazer a sua síntese.

Assim, podemos salientar os seguintes resultados e conclusões que julgamos mais relevantes:

- 1) Apresentação de um novo método adaptativo para definir instantes de amostragem, o qual designámos por LSI. Os instantes de amostragem são definidos através da função densidade da distribuição de *Laplace* standardizada, reduzindo a frequência de amostragem (maiores intervalos de tempo entre amostras) quando as médias

amostrais estão próximas da linha central e aumentando a frequência de amostragem (menores intervalos de tempo entre amostras) quando as médias amostrais estão afastadas da linha central, logo com maior hipótese de ter ocorrido uma alteração. O método é de fácil implementação não necessitando da adição de novos limites à carta de controlo clássica.

- 2) Obtenção das principais propriedades estatísticas do método LSI. Em particular, obtivemos uma aproximação, quase ótima, para o AATS que permite efetuar comparações de uma forma mais simplificada.
- 3) Obtenção de uma aproximação, muito boa, do tempo médio entre o instante em que ocorre a falha e o instante em que é retirada a amostra seguinte, a metade do maior intervalo de amostragem (d_2) utilizado em método VSI.
- 4) Conclusão, de que o método LSI é sempre mais rápido do que o método FSI em reduzidas e moderadas alterações da média. Em geral, as diferenças de eficácia entre o método LSI e os restantes métodos são mais acentuadas nas situações em que o método LSI é melhor.
- 5) Conclusão, de que o método LSI é mais eficaz, em termos de AATS, do que o VSI, em grandes alterações da média, existindo determinados pares para os quais LSI é sempre mais eficaz do que VSI.
- 6) Conclusão, de que o método LSI é mais eficaz, em termos de AATS e em termos de ANOS, do que os métodos VSSI, VSS e VP, em grandes alterações da média, existindo determinados pares de dimensões amostrais para os quais LSI também é mais eficaz, do que VSS, em moderadas alterações da média.
- 7) Conclusão, a partir de um estudo de sensibilidade, de que o método LSI é menos sensível, do que o método VSI, ao truncamento do menor intervalo de amostragem.
- 8) Conclusão, a partir de um estudo de robustez em que consideramos que a característica X da qualidade tem distribuição normal contaminada, *t-Student* e Gama, de que o método LSI é robusto, pois mantém, em algumas das situações, e

melhora, noutras, o seu desempenho, quando comparado com o desempenho dos métodos FSI, VSI, VSSI, VSS e VP nas mesmas condições.

- 9) Proposta de um novo método de amostragem que combina instantes de amostragem do método LSI com instantes de amostragem do método PSI, denominado CAPSI. Considerando uma carta de controlo para a média, o método que propomos define os instantes de amostragem com base numa média ponderada dos instantes dos métodos LSI e PSI, dando maior peso aos instantes do método LSI para alterações moderadas (onde PSI é menos eficaz) e maior peso aos instantes do método PSI nos restantes casos (onde LSI é menos eficaz). Desta forma, os instantes de amostragem, inicialmente calendarizados de acordo com as expectativas de ocorrência de uma alteração, tomando como base a distribuição do tempo de vida do sistema, são adaptados em função do valor da estatística amostral calculada no instante anterior. Apresentação das expressões que permitem obter os instantes e os intervalos de amostragem do método CAPSI.
- 10) Conclusão, a partir de um vasto conjunto de resultados obtidos por simulação, de que o método CAPSI é sempre mais eficaz, em termos de AATS, do que o método FSI, em sistemas com tempo de vida cuja taxa de risco é acentuadamente crescente.
- 11) Conclusão, de que o método CAPSI só em alterações moderadas da média tem um desempenho inferior ao método VSI.
- 12) Conclusão, de que CAPSI é sempre mais eficaz, em termos de AATS, do que PSI quando o peso dos intervalos de LSI é menor, em todas as taxas de risco e para alterações do tipo $\lambda \geq 0,25$.
- 13) Elaboração de um protótipo, em linguagem C#, para obter as principais medidas do método CAPSI. O mesmo protótipo permite obter, através da simulação, medidas para os métodos LSI e PSI.

- 14) Proposta de um novo critério de comparação de métodos de amostragem, num contexto de controlo da qualidade. Com este método, que denominamos ANSIC (*“Average Number of Samples In Control”*), comparam-se dois métodos de amostragem através do número médio de amostras retiradas sob controlo, considerando que os tempos médios de mau funcionamento (AATS) são iguais. Desta forma, podem comparar-se métodos de amostragem através do custo total médio por ciclo e fazer um controlo mais adequado dos falsos alarmes.
- 15) Conclusão, a partir de resultados estatísticos e económicos, de que se ANSIC é uma medida robusta, pois em muitos dos casos o período de tempo no qual o processo está sob controlo é superior aquele em que está fora de controlo. Nos casos em que os custos de amostragem e de falso alarme são superiores aos custos de mau funcionamento, esta metodologia possibilita escolher o método de amostragem mais apropriado a cada situação.

DESAFIOS DE TRABALHO FUTURO

Finalmente, refira-se que ao longo desta Dissertação surgiram situações e resultados cuja análise e interpretação continuarão a merecer a nossa atenção no futuro. Algumas questões que poderemos considerar em aberto irão, com toda a certeza, merecer a nossa atenção, como, por exemplo:

- 1) A comparação do desempenho dos métodos propostos numa perspetiva económica.
- 2) O considerar a utilização de uma carta para a média e uma carta para a amplitude ou para o desvio padrão.
- 3) O considerar, para os métodos propostos, uma carta EWMA e/ou uma carta CUSUM.

- 4) A obtenção do valor da constante de escala k , método LSI, de modo a minimizar o tempo médio de mau funcionamento para determinadas alterações ou diminuir o número médio de itens inspecionados.
- 5) A obtenção do valor da constante de escala k e do parâmetro ΔH , em CAPSI, de modo a minimizar o AATS.
- 6) Obtenção de expressões analíticas para o cálculo do ARL, ATS e AATS no método CAPSI.
- 7) Determinar o AATS do método CAPSI em função da probabilidade de ocorrência de uma alteração, ou seja, considerando para ponderador, θ , dos instantes de amostragem do método LSI a probabilidade de ocorrência da alteração na média.
- 8) Determinar o peso, θ , ótimo de modo a minimizar o tempo médio de mau funcionamento.
- 9) Realizar comparações de desempenho entre os diferentes métodos de amostragem, usando o critério de comparação proposto, ANSIC.
- 10) Realizar comparações de desempenho através do ANSIC, considerando para referência o AATS do método CAPSI.

Por outro lado, a área do controlo estatístico da qualidade tem um vasto número de questões e ideias em aberto e vários artigos, recolhidos e analisados para esta dissertação, têm uma questão em aberto ou uma potencial ideia a explorar.

São estes alguns dos desafios que se nos deparam hoje e, talvez, também no futuro!

APÊNDICE

CAPÍTULO III

3.2. Ajustamento das Distribuições por Amostragem

Histogramas das distribuições de amostragem ajustadas a uma Normal com a mesma média

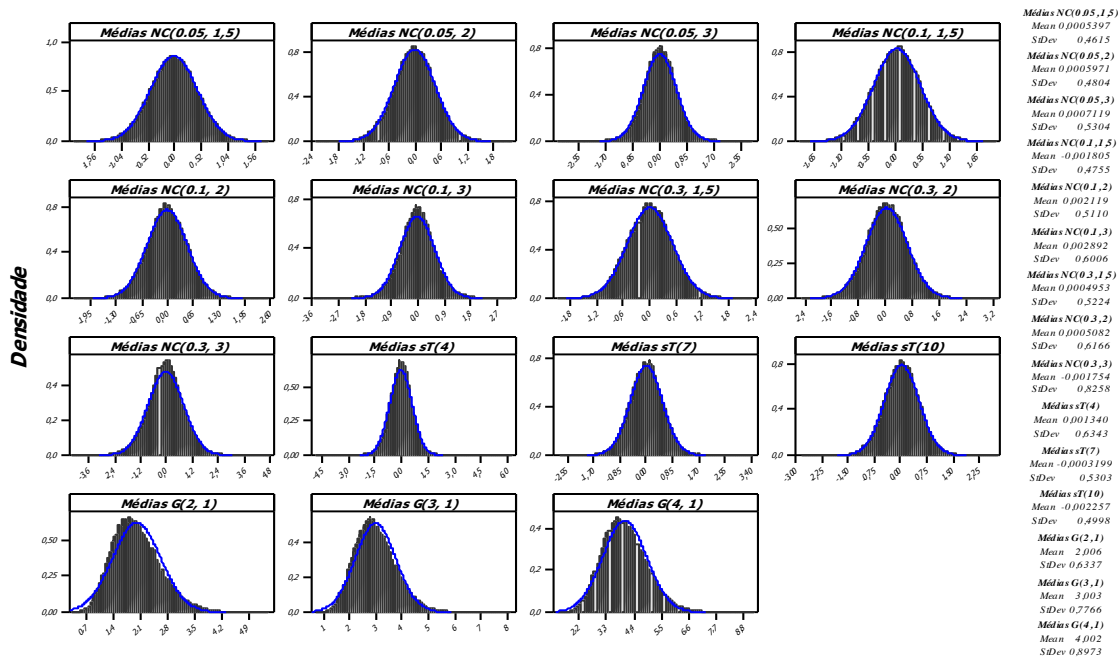


Fig. A 3.1. – Distribuições por amostragem, simuladas a partir das diferentes distribuições e ajustadas à curva de Gauss estandardizada e n = 5.

3.2. Comparação de LSI com VSI, VSSI e VP

(p, σ_c)	LSI		VSI		LSI		VSI		LSI		VSI	
	$(0.1, 1.5)$		$(0.1, 2)$		$(0.1, 3)$		$(0.5, 1.5)$		$(0.5, 2)$		$(0.5, 2.0)$	
(d_1, d_2)	---	$(0.5, 1.5)$	$(0.5, 2.0)$	---	$(0.5, 1.5)$	$(0.5, 2.0)$	---	$(0.5, 1.5)$	$(0.5, 2.0)$	---	$(0.5, 1.5)$	$(0.5, 2.0)$
w	---	0,670	0,427	---	0,657	0,418	---	0,625	0,400	---	0,625	0,400
λ	AATS		$Q_{3,10}$		AATS		$Q_{3,10}$		AATS		$Q_{3,10}$	
0	370,02	0,2	-0,0	370,04	0,1	0,1	370,06	0,3	0,3			
0,25	123,42	1,3	0,7	163,73	1,1	0,5	212,54	-0,3	-1,0			
0,5	24,96	7,1	5,6	38,55	6,1	4,2	65,03	2,8	0,6			
0,75	6,01	19,2	18,5	9,06	20,1	18,6	16,37	19,2	17,4			
1	1,99	33,3	37,3	2,62	41,8	44,4	4,23	52,6	53,8			
1,25	1,01	35,1	46,4	1,15	49,8	59,7	1,47	77,3	84,9			
1,5	0,74	24,3	40,9	0,77	35,5	51,5	0,84	60,7	75,2			
1,75	0,65	13,0	32,1	0,66	18,7	37,5	0,68	31,9	50,2			
2	0,63	6,3	26,3	0,63	8,8	28,7	0,64	14,6	34,3			
2,5	0,61	2,3	22,7	0,61	2,7	23,1	0,61	3,9	24,2			
3	0,61	2,0	22,4	0,61	2,0	22,4	0,61	2,3	22,7			

Tabela A 3.2.1. – Valores de AATS_{LSI} e de Q_{3,10}, com (d₁, d₂) = (0.5, 1.5) e (d₁, d₂) = (0.5, 2) em VSI, e ajustamento da distribuição por amostragem, respetivamente, à distribuição Normal, JohnsonSU e Burr(4P) com n = 5.

(p, σ_c)	LSI		VSI		LSI		VSI		LSI		VSI	
	$(0,3, 1,5)$				$(0,3, 2)$				$(0,3, 3)$			
(d_1, d_2)	---	$(0,5, 1,5)$	$(0,5, 2,0)$	---	$(0,5, 1,5)$	$(0,5, 2,0)$	---	$(0,5, 1,5)$	$(0,5, 2,0)$	---	$(0,5, 1,5)$	$(0,5, 2,0)$
w	---	0,668	0,427	---	0,650	0,413	---	0,615	0,390	---	0,615	0,390
λ	AATS		$Q_{3,10}$		AATS		$Q_{3,10}$		AATS		$Q_{3,10}$	
0	370,03	0,1	0,2	370,01	-0,1	-0,1	368,82	-0,2	-0,1			
0,25	128,40	1,3	0,8	167,58	0,9	0,1	232,88	-0,8	-2,0			
0,5	26,29	6,6	5,2	40,15	5,7	3,6	74,78	2,5	0,1			
0,75	6,26	18,6	17,9	9,43	19,9	18,3	19,55	19,8	17,8			
1	2,04	33,1	37,1	2,70	42,2	44,7	5,02	56,2	56,8			
1,25	1,03	34,9	46,1	1,16	50,8	60,6	1,63	88,4	95,2			
1,5	0,75	23,8	40,3	0,78	36,1	52,0	0,87	73,2	87,3			
1,75	0,66	12,6	31,6	0,66	18,9	37,7	0,68	38,7	56,9			
2	0,63	6,1	26,0	0,63	8,9	28,7	0,63	17,5	37,2			
2,5	0,61	2,3	22,7	0,61	2,7	23,1	0,61	4,3	24,6			
3	0,61	2,0	22,4	0,61	2,1	22,5	0,61	2,3	22,7			

Tabela A 3.2.2. – Valores de AATS_{LSI} e de $Q_{3,10}$, com $(d_1, d_2) = (0.5, 1.5)$ e $(d_1, d_2) = (0.5, 2)$ em VSI, e ajustamento da distribuição por amostragem, respetivamente, à distribuição Normal, JohnsonSU e Burr(4P) com n = 5.

I

(p, σ_c)		$(0,1, 1,5)$						(p, σ_c)		$(0,1, 2)$						(p, σ_c)		$(0,1, 3)$					
(n_1, n_2)		$(1, 15)$		$(1, 10)$		$(2, 7)$		(n_1, n_2)		$(1, 15)$		$(1, 10)$		$(2, 7)$		(n_1, n_2)		$(1, 15)$		$(1, 10)$		$(2, 7)$	
(d_1, d_2)		$(0,5, 1,20)$		$(0,5, 1,40)$		$(0,5, 1,75)$		(d_1, d_2)		$(0,5, 1,20)$		$(0,5, 1,40)$		$(0,5, 1,75)$		(d_1, d_2)		$(0,5, 1,20)$		$(0,5, 1,40)$		$(0,5, 1,75)$	
(w_1, w_2)		$(1,06, 1,06)$		$(0,76, 0,76)$		$(0,52, 0,52)$		(w_1, w_2)		$(1,05, 1,05)$		$(0,75, 0,75)$		$(0,51, 0,51)$		(w_1, w_2)		$(1,00, 1,00)$		$(0,71, 0,71)$		$(0,49, 0,49)$	
λ	ANOS	$Q_{3,11}$	$Q_{3,12}$	$Q_{3,11}$	$Q_{3,12}$	$Q_{3,11}$	$Q_{3,12}$	ANOS	$Q_{3,11}$	$Q_{3,12}$	$Q_{3,11}$	$Q_{3,12}$	$Q_{3,11}$	$Q_{3,12}$	ANOS	$Q_{3,11}$	$Q_{3,12}$	$Q_{3,11}$	$Q_{3,12}$	$Q_{3,11}$	$Q_{3,12}$	$Q_{3,11}$	$Q_{3,12}$
0	1851,99	-0,2	0,4	-0,2	0,4	-0,3	0,2	1851,95	0,1	-0,5	0,1	-0,1	0,1	-0,1	1851,90	0,1	-0,3	0,3	-0,3	0,3	0,3	-0,3	
0,25	668,12	-22,3	-8,0	-12,8	-3,3	-4,8	-0,5	887,15	-18,7	-2,8	-10,7	-0,3	-4,2	0,8	1152,41	-14,6	7,1	-9,1	5,8	-4,6	3,2		
0,5	168,02	-59,0	-36,3	-41,5	-22,5	-18,5	-9,1	261,53	-64,2	-38,7	-44,9	-22,5	-21,0	-8,6	443,55	-67,1	-34,4	-46,6	-16,9	-23,4	-5,2		
0,75	54,19	-46,6	-37,6	-38,5	-28,5	-16,8	-14,4	84,49	-61,2	-49,9	-49,5	-36,0	-23,4	-17,9	156,80	-74,6	-60,3	-59,0	-41,1	-29,0	-19,3		
1	22,64	7,2	-14,1	1,2	-19,0	9,5	-11,8	32,55	-17,3	-34,8	-16,8	-32,4	1,2	-18,8	57,54	-48,3	-57,7	-39,9	-47,8	-9,8	-26,9		
1,25	12,01	67,4	33,1	49,2	4,0	39,4	-2,8	15,46	47,1	7,2	34,5	-12,4	36,1	-11,0	23,72	10,8	-27,0	7,7	-35,1	27,3	-23,7		
1,5	7,87	93,9	91,1	72,8	35,4	51,2	9,2	9,15	84,6	69,2	66,2	21,0	53,4	2,9	11,89	63,1	33,6	51,2	-1,9	53,4	-9,1		
1,75	6,12	91,4	136,3	74,8	63,8	50,0	19,4	6,62	88,6	126,6	73,1	56,0	54,6	17,1	7,57	78,7	103,9	67,1	40,8	59,4	10,9		
2	5,39	78,1	156,6	67,6	79,1	44,0	23,7	5,58	79,1	159,7	69,0	78,8	49,7	25,1	5,95	75,9	154,2	68,0	73,5	56,7	25,3		
2,5	5,03	50,0	143,3	48,3	75,3	29,1	16,3	5,05	55,4	160,8	53,5	83,7	34,2	20,0	5,12	60,3	177,8	58,9	91,5	41,8	25,2		
3	5,00	28,5	105,4	31,5	55,5	18,2	6,3	5,00	35,4	125,9	38,0	65,8	21,0	8,4	5,02	44,1	152,5	46,3	79,2	25,7	11,8		
(p, σ_c)		$(0,3, 1,5)$						(p, σ_c)		$(0,3, 2)$						(p, σ_c)		$(0,3, 3)$					
(n_1, n_2)		$(1, 15)$		$(1, 10)$		$(2, 7)$		(n_1, n_2)		$(1, 15)$		$(1, 10)$		$(2, 7)$		(n_1, n_2)		$(1, 15)$		$(1, 10)$		$(2, 7)$	
(d_1, d_2)		$(0,5, 1,20)$		$(0,5, 1,40)$		$(0,5, 1,75)$		(d_1, d_2)		$(0,5, 1,20)$		$(0,5, 1,40)$		$(0,5, 1,75)$		(d_1, d_2)		$(0,5, 1,20)$		$(0,5, 1,40)$		$(0,5, 1,75)$	
(w_1, w_2)		$(1,06, 1,06)$		$(0,76, 0,76)$		$(0,52, 0,52)$		(w_1, w_2)		$(1,04, 1,04)$		$(0,74, 0,74)$		$(0,50, 0,50)$		(w_1, w_2)		$(0,99, 0,99)$		$(0,70, 0,70)$		$(0,48, 0,48)$	
λ	ANOS	$Q_{3,11}$	$Q_{3,12}$	$Q_{3,11}$	$Q_{3,12}$	$Q_{3,11}$	$Q_{3,12}$	ANOS	$Q_{3,11}$	$Q_{3,12}$	$Q_{3,11}$	$Q_{3,12}$	$Q_{3,11}$	$Q_{3,12}$	ANOS	$Q_{3,11}$	$Q_{3,12}$	$Q_{3,11}$	$Q_{3,12}$	$Q_{3,11}$	$Q_{3,12}$	$Q_{3,11}$	$Q_{3,12}$
0	1851,96	0,0	-0,1	0,1	-0,1	0,1	-0,1	1851,77	0,0	-0,1	-0,0	0,1	-0,1	0,1	1845,72	0,1	0,3	0,1	0,3	0,1	0,2		
0,25	695,11	-22,3	-7,6	-12,7	-3,05	-4,6	-0,4	908,10	-18,7	-2,0	-10,9	0,5	-4,5	1,1	1263,07	-14,4	8,6	-9,7	6,8	-5,5	3,8		
0,5	177,13	-60,5	-37,4	-42,8	-23,1	-19,5	-9,4	272,53	-64,9	-38,9	-45,5	-22,4	-21,6	-8,5	510,83	-66,0	-31,9	-45,4	-14,1	-22,9	-3,8		
0,75	56,60	-48,8	-39,6	-40,4	-30,0	-18,3	-15,2	88,13	-62,6	-51,0	-50,7	-36,8	-24,3	-18,2	188,66	-76,4	-60,8	-59,4	-40,2	-28,3	-18,3		
1	23,26	4,0	-16,2	-1,2	-20,6	8,1	-12,7	33,66	-19,9	-36,7	-18,8	-33,8	0,1	-19,6	70,54	-55,4	-62,6	-44,7	-50,6	-10,8	-27,8		
1,25	12,17	64,3	31,7	47,0	2,9	38,4	-3,4	15,80	44,4	5,1	32,4	-13,9	35,2	-11,9	28,52	0,5	-37,8	0,3	-41,9	26,2	-27,4		
1,5	7,90	91,4	91,0	71,2	35,1	50,8	9,1	9,25	82,8	67,6	64,8	20,0	53,0	2,3	13,61	58,8	17,6	48,4	-11,9	55,6	-14,5		
1,75	6,12	89,7	137,1	73,9	64,2	50,2	19,6	6,65	87,5	126,0	72,3	55,6	54,5	16,9	8,20	78,8	89,3	67,3	31,3	62,3	6,3		
2	5,39	77,2	157,9	67,3	79,7	44,5	23,9	5,60	78,5	160,1	68,5	78,8	49,7	25,3	6,19	77,0	146,2	68,7	67,8	59,1	23,3		
2,5	5,03	50,1	144,7	48,7	75,9	29,6	16,2	5,06	55,5	162,2	53,6	84,3	34,3	20,4	5,15	61,9	181,5	60,0	92,9	43,9	27,4		
3	5,00	28,8	106,2	32,0	55,7	18,5	6,0	5,00	35,7	127,6	38,3	66,7	21,0	8,7	5,02	46,9	162,2	48,4	84,2	27,2	14,5		

Tabela A 3.2.3. – Valores de ANOS_{LSI}, de $Q_{3,11}$ e $Q_{3,12}$, com $d_1 = 0.5$ e diferentes pares de dimensões amostrais em VSSI, e ajustamento da distribuição por amostragem respetivamente, à distribuição Normal, JohnsonSU e Burr(4P) com n = 5.

t (df)	LSI		VSI		LSI		VSI		LSI		VSI							
	t (4)						t (7)						t (10)					
(d ₁ , d ₂)	---	(0,5, 2,0)	(0,5, 1,5)	---	(0,5, 2,0)	(0,5, 1,5)	---	(0,5, 2,0)	(0,5, 1,5)	---	(0,5, 2,0)	(0,5, 1,5)						
w	---	0,383	0,607	---	0,415	0,652	---	0,354	0,550	---	0,354	0,550						
λ	AATS			Q _{3,10}			AATS			Q _{3,10}			AATS			Q _{3,10}		
0	368,29	0,0	0,0	370,03	0,0	0,0	370,03	0,2	0,2	370,03	0,2	0,2						
0,25	225,44	-2,2	-0,9	165,69	0,1	0,8	117,25	-2,8	-1,9	117,25	-2,8	-1,9						
0,5	73,56	-1,1	1,5	39,44	3,6	5,6	20,97	-3,7	-2,1	20,97	-3,7	-2,1						
0,75	19,61	16,3	18,6	9,24	18,3	19,7	4,57	11,3	10,5	4,57	11,3	10,5						
1	5,14	54,9	54,3	2,65	44,2	41,6	1,56	37,0	29,8	1,56	37,0	29,8						
1,25	1,69	92,3	85,8	1,16	59,2	49,3	0,90	46,1	32,4	0,90	46,1	32,4						
1,5	0,89	84,2	70,4	0,78	50,7	34,8	0,72	43,1	25,1	0,72	43,1	25,1						
1,75	0,70	54,2	36,3	0,67	37,0	18,3	0,65	34,2	14,3	0,65	34,2	14,3						
2	0,64	35,5	16,0	0,63	28,5	8,6	0,63	26,2	5,9	0,63	26,2	5,9						
2,5	0,62	24,9	4,1	0,61	23,2	2,8	0,61	22,6	2,2	0,61	22,6	2,2						
3	0,61	22,7	2,4	0,61	22,5	2,1	0,61	22,4	2,0	0,61	22,4	2,0						

Tabela A 3.2.4. – Valores de AATS_{LSI} e de Q_{3,10}, com (d₁, d₂) = (0.5, 2.0) e (d₁, d₂) = (0.5, 1.5) em VSI, e ajustamento da distribuição por amostragem, respectivamente, à distribuição Burr (4P), JohnsonSU e JohnsonSU com n = 5.

t (df)	t (4)						t (df)	t (7)						t (df)	t (10)						
	(n ₁ , n ₂)	(1, 15)	(1, 10)	(2, 7)	(n ₁ , n ₂)	(1, 15)		(1, 10)	(2, 7)	(n ₁ , n ₂)	(1, 15)	(1, 10)	(2, 7)								
(d ₁ , d ₂)	(0,5, 1,20)	(0,5, 1,40)	(0,5, 1,75)	(d ₁ , d ₂)	(0,5, 1,20)	(0,5, 1,40)	(0,5, 1,75)	(d ₁ , d ₂)	(0,5, 1,20)	(0,5, 1,40)	(0,5, 1,75)										
(w ₁ , w ₂)	(0,99, 0,99)	(0,69, 0,69)	(0,47, 0,47)	(w ₁ , w ₂)	(1,04, 1,04)	(0,74, 0,74)	(0,51, 0,51)	(w ₁ , w ₂)	(0,87, 0,87)	(0,62, 0,62)	(0,43, 0,43)										
λ	ANOS	Q _{3,11}	Q _{3,12}	Q _{3,11}	Q _{3,12}	Q _{3,11}	Q _{3,12}	ANOS	Q _{3,11}	Q _{3,12}	Q _{3,11}	Q _{3,12}	Q _{3,11}	Q _{3,12}	ANOS	Q _{3,11}	Q _{3,12}	Q _{3,11}	Q _{3,12}	Q _{3,11}	Q _{3,12}
0	1851,85	0,3	0,0	0,3	0,0	0,1	-0,1	1851,85	-0,1	-0,1	-0,1	-0,1	-0,1	0,0	1851,85	0,2	-0,2	0,2	-0,3	0,2	-0,4
0,25	1224,04	-13,6	9,4	-9,2	7,4	-5,4	4,0	897,77	-18,7	-2,1	-10,8	0,4	-4,3	1,0	634,39	-34,7	-11,9	-21,9	-4,9	-10,6	-0,8
0,5	502,42	-65,8	-29,1	-45,6	-12,8	-23,7	-3,2	267,58	-64,7	-39,1	-45,3	-22,7	-21,2	-8,6	140,37	-71,3	-46,4	-57,2	-30,5	-34,4	-13,5
0,75	188,86	-76,3	-59,9	-59,2	-39,1	-28,7	-17,5	86,13	-61,9	-50,7	-50,0	-36,7	-23,6	-18,2	39,64	-47,1	-38,8	-44,2	-33,1	-28,7	-18,3
1	71,76	-56,6	-63,2	-45,5	-50,5	-11,6	-27,4	32,88	-18,4	-35,5	-17,6	-33,1	1,0	-19,3	15,45	10,5	8,0	1,3	-11,1	2,0	-10,0
1,25	29,17	-3,7	-39,3	-3,7	-43,2	23,0	-28,0	15,49	45,6	7,0	33,4	-12,6	35,6	-11,3	8,40	56,0	82,5	40,9	29,4	28,0	6,6
1,5	13,78	53,0	16,1	43,1	-13,2	51,4	-15,6	9,13	82,9	69,7	64,9	21,4	52,8	3,0	6,07	74,2	142,6	61,7	67,1	43,0	21,1
1,75	8,20	74,3	89,5	63,5	31,4	59,5	6,1	6,61	87,3	127,1	72,2	56,5	54,2	17,3	5,29	70,6	164,8	63,7	83,8	44,0	25,0
2	6,17	74,1	147,4	66,5	68,6	58,0	23,9	5,59	78,3	160,1	68,5	78,9	49,5	25,2	5,07	56,8	159,0	54,6	82,7	35,2	19,9
2,5	5,15	61,5	182,1	59,8	93,3	44,4	27,9	5,06	55,3	161,0	53,5	83,7	34,0	20,0	5,00	31,9	115,4	35,3	60,2	20,0	6,3
3	5,02	47,3	163,0	49,0	84,6	27,3	14,2	5,00	35,4	126,0	38,0	65,8	21,0	8,4	5,00	12,4	64,8	18,4	33,5	14,3	0,6

Tabela A 3.2.5. – Valores de ANOS_{LSI}, de Q_{3,11} e Q_{3,12}, com d₁ = 0.5 e diferentes pares de dimensões amostrais em VSSI, e ajustamento da distribuição por amostragem, respectivamente, à distribuição Burr (4P), JohnsonSU e JohnsonSU com n = 5.

G(α, β)	LSI		VSI		LSI		VSI		LSI		VSI							
	G(2,1)						G(3,1)						G(4,1)					
(d ₁ , d ₂)	---	(0,5, 2,0)	(0,5, 1,5)	---	(0,5, 2,0)	(0,5, 1,5)	---	(0,5, 2,0)	(0,5, 1,5)	---	(0,5, 2,0)	(0,5, 1,5)						
(-w, w)	---	(-0,50, 0,35)	(-0,71, 0,61)	---	(-0,49, 0,36)	(-0,71, 0,62)	---	(-0,49, 0,37)	(-0,71, 0,63)	---	(-0,49, 0,37)	(-0,71, 0,63)						
λ	AATS			Q _{3,10}			AATS			Q _{3,10}			AATS			Q _{3,10}		
0	370,05	0,0	0,0	370,03	0,0	0,0	370,03	0,0	0,0	370,03	0,0	0,0						
0,25	233,56	5,9	6,1	217,71	5,1	5,3	206,84	4,6	4,9	206,84	4,6	4,9						
0,5	67,32	9,5	12,0	59,65	9,2	11,6	54,81	9,0	11,3	54,81	9,0	11,3						
0,75	18,51	17,0	22,2	15,85	18,8	23,2	14,26	19,7	23,7	14,26	19,7	23,7						
1	5,32	48,5	50,1	4,50	50,0	51,2	4,05	50,3	51,0	4,05	50,3	51,0						
1,25	1,88	96,2	90,0	1,63	93,3	86,4	1,50	89,1	81,8	1,50	89,1	81,8						
1,5	0,97	107,9	95,0	0,88	99,5	85,4	0,85	91,5	76,8	0,85	91,5	76,8						
1,75	0,72	78,7	61,3	0,69	70,4	52,1	0,68	63,9	45,5	0,68	63,9	45,5						
2	0,64	47,6	28,2	0,63	43,0	23,2	0,63	39,8	20,0	0,63	39,8	20,0						
2,5	0,62	23,9	3,6	0,61	23,7	3,3	0,61	23,5	3,1	0,61	23,5	3,1						
3	0,61	22,4	2,0	0,61	22,4	2,0	0,61	22,4	2,0	0,61	22,4	2,0						

Tabela A 3.2.6. – Valores de AATS_{LSI} e de Q_{3,10}, com (d₁, d₂) = (0.5, 2.0) e (d₁, d₂) = (0.5, 1.5) em VSI, e distribuições por amostragem, respectivamente, G(10,1/5), G(15,1/5) e G(20,1/5) e com n = 5

$G(\alpha, \beta)$		$G(2, 1)$						$G(\alpha, \beta)$		$G(3, 1)$						$G(\alpha, \beta)$		$G(4, 1)$					
(n_1, n_2)		$(1, 15)$		$(1, 10)$		$(2, 7)$		(n_1, n_2)		$(1, 15)$		$(1, 10)$		$(2, 7)$		(n_1, n_2)		$(1, 15)$		$(1, 10)$		$(2, 7)$	
(d_1, d_2)		$(0.5, 1.20)$		$(0.5, 1.40)$		$(0.5, 1.75)$		(d_1, d_2)		$(0.5, 1.20)$		$(0.5, 1.40)$		$(0.5, 1.75)$		(d_1, d_2)		$(0.5, 1.20)$		$(0.5, 1.40)$		$(0.5, 1.75)$	
(w_1, w_2)		$(1.05, 1.05)$		$(0.70, 0.70)$		$(0.44, 0.44)$		(w_1, w_2)		$(1.05, 1.05)$		$(0.71, 0.71)$		$(0.45, 0.45)$		(w_1, w_2)		$(1.06, 1.06)$		$(0.72, 0.72)$		$(0.46, 0.46)$	
λ	ANOS	$Q_{2,11}$	$Q_{2,12}$	$Q_{2,11}$	$Q_{2,12}$	$Q_{2,11}$	$Q_{2,12}$	ANOS	$Q_{3,11}$	$Q_{3,12}$	$Q_{3,11}$	$Q_{3,12}$	$Q_{3,11}$	$Q_{3,12}$	ANOS	$Q_{4,11}$	$Q_{4,12}$	$Q_{4,11}$	$Q_{4,12}$	$Q_{4,11}$	$Q_{4,12}$	$Q_{4,11}$	$Q_{4,12}$
0	1851,85	0,2	-0,3	-0,1	0,2	-0,2	0,2	1851,85	0,0	-0,2	-0,1	0,2	-0,1	0,2	1851,85	0,0	-0,1	-0,3	0,2	-0,3	0,1		
0,25	1266,65	-3,0	2,0	-2,9	3,4	-3,4	2,8	1180,69	-6,4	0,6	-4,9	2,3	-3,9	2,3	1121,68	-8,3	-0,3	-5,8	1,5	-4,0	1,9		
0,5	459,19	-54,9	-24,0	-36,3	-11,0	-15,5	-3,0	406,83	-56,4	-27,0	-37,4	-13,3	-16,0	-4,1	373,64	-57,1	-28,9	-37,9	-14,7	-16,2	-4,8		
0,75	177,92	-70,6	-49,1	-55,7	-30,9	-28,0	-13,7	152,10	-68,8	-49,6	-54,4	-32,1	-26,5	-14,5	136,54	-67,3	-49,5	-53,2	-32,6	-25,4	-15,0		
1	74,57	-47,1	-55,5	-37,4	-40,7	-9,4	-21,0	62,65	-40,9	-52,7	-33,4	-39,7	-7,1	-20,9	55,75	-36,3	-50,3	-30,3	-38,7	-5,5	-20,6		
1,25	34,30	2,6	-45,3	2,4	-40,2	26,4	-23,0	28,87	15,9	-37,5	11,7	-36,2	30,6	-21,4	25,82	24,1	-31,5	17,3	-33,0	32,5	-19,9		
1,5	17,62	58,4	-10,0	40,9	-27,3	49,7	-19,3	15,14	72,3	4,2	51,7	-19,2	53,6	-15,6	13,78	78,6	14,1	56,8	-13,3	54,5	-12,9		
1,75	10,31	83,3	50,4	58,0	3,2	51,6	-8,4	9,19	90,8	67,8	65,7	14,7	54,0	-2,9	8,60	93,3	78,7	68,9	22,2	54,4	0,7		
2	7,00	80,7	117,8	60,8	47,1	44,0	4,5	6,54	83,7	131,5	64,8	56,8	49,0	14,9	6,31	84,5	138,8	66,4	62,1	49,3	17,8		
2,5	5,09	61,2	187,9	53,8	96,8	41,0	34,9	5,07	60,8	184,8	53,8	95,6	39,3	32,9	5,06	60,4	182,0	54,0	94,4	38,5	31,3		
3	5,00	47,7	173,6	46,3	90,7	26,5	24,0	5,00	45,6	166,2	44,6	87,0	24,4	20,9	5,00	44,2	160,6	43,6	84,3	23,4	18,8		

Tabela A 3.2.7. – Valores de ANOS_{LSI}, de $Q_{3,11}$ e $Q_{3,12}$, com $d_1 = 0.5$ e diferentes pares de dimensões amostrais em VSSI, e distribuições por amostragem, respetivamente, $G(10, 1/5)$, $G(15, 1/5)$ e $G(20, 1/5)$ e com $n = 5$.

3.3. Comparação com FSI, VSI, VSSI, VSS e VP

(p, σ_c)	LSI		FSI		LSI		FSI	
	$(0.05, 1.5)$		$(0.05, 2)$		$(0.05, 3)$			
λ	AATS	$Q_{3,9}$	AATS	$Q_{3,9}$	AATS	$Q_{3,9}$	AATS	$Q_{3,9}$
0	370,14	0,0	370,04	0,0	370,11	-0,1		
0,25	123,25	7,9	145,34	8,1	205,58	8,2		
0,5	24,90	32,6	31,75	33,7	60,14	35,5		
0,75	6,00	71,8	7,46	77,1	14,89	87,5		
1	1,99	101,3	2,29	116,1	3,90	155,8		
1,25	1,02	86,3	1,08	105,3	1,41	177,4		
1,5	0,74	44,1	0,76	56,9	0,83	113,9		
1,75	0,66	10,2	0,66	16,6	0,68	44,6		
2	0,63	-7,9	0,63	-5,0	0,63	6,9		
2,25	0,62	-15,3	0,62	-14,1	0,62	-9,1		
2,5	0,61	-17,7	0,61	-17,2	0,61	-15,1		
2,75	0,61	-18,3	0,61	-18,1	0,61	-17,3		
3	0,61	-18,4	0,61	-18,4	0,61	-18,1		

Tabela A 3.2.8. – Valores de AATS_{LSI} e de $Q_{3,9}$, $d = 1$ em FSI, e distribuições por amostragem, respetivamente, *Normal*, *JohnsonSU* e *JohnsonSU* com $n = 5$.

(p, σ_c)	LSI				VSI				LSI				VSI			
	$(0.05, 1.5)$				$(0.05, 2)$				$(0.05, 3)$							
(d_1, d_2)	---	(0,1, 1,5)	(0,1, 2,0)	(0,5, 1,5)	(0,5, 2,0)	---	(0,1, 1,5)	(0,1, 2,0)	(0,5, 1,5)	(0,5, 2,0)	---	(0,1, 1,5)	(0,1, 2,0)	(0,5, 1,5)	(0,5, 2,0)	
w	---	0,920	0,634	0,674	0,431	---	0,907	0,623	0,663	0,423	---	0,866	0,590	0,628	0,399	
λ	AATS	$Q_{3,10}$				AATS	$Q_{3,10}$				AATS	$Q_{3,10}$				
0	370,14	-0,1	-0,2	0,1	0,1	370,04	-0,1	-0,2	0,1	0,2	370,11	-0,1	-0,2	-0,1	-0,1	
0,25	123,25	-2,2	-3,6	1,5	1,0	145,34	-2,7	-4,4	1,2	0,6	205,58	-4,2	-6,9	-0,4	-1,1	
0,5	24,90	-8,6	-13,1	7,0	5,7	31,75	-10,3	-15,5	6,4	4,7	60,14	-15,6	-22,6	3,5	1,2	
0,75	6,00	-16,2	-20,6	18,9	18,2	7,46	-18,9	-24,4	19,6	18,4	14,89	-27,4	-34,7	19,4	17,4	
1	1,99	-16,4	-12,1	32,5	36,5	2,29	-19,2	-16,3	37,5	40,8	3,90	-28,5	-29,2	50,2	51,5	
1,25	1,02	-5,1	13,8	33,9	45,3	1,08	-6,3	11,4	41,7	52,4	1,41	-12,4	0,5	70,5	78,4	
1,5	0,74	7,5	36,9	23,3	39,9	0,76	7,4	36,2	28,9	45,2	0,83	6,1	32,2	53,6	68,3	
1,75	0,66	14,4	48,5	12,4	31,4	0,66	14,5	48,4	15,4	34,3	0,68	14,5	47,3	27,8	46,1	
2	0,63	17,1	53,0	6,0	25,9	0,63	17,2	53,0	7,3	27,3	0,63	17,3	52,6	12,7	32,3	
2,25	0,62	18,0	54,5	3,2	23,5	0,62	18,1	54,6	3,8	24,1	0,62	18,2	54,5	6,1	26,3	
2,5	0,61	18,3	54,9	2,3	22,6	0,61	18,3	54,9	2,5	22,9	0,61	18,4	55,1	3,5	23,8	
2,75	0,61	18,3	55,0	2,0	22,4	0,61	18,3	55,0	2,1	22,5	0,61	18,4	55,1	2,5	22,9	
3	0,61	18,3	55,0	2,0	22,4	0,61	18,3	55,0	2,0	22,4	0,61	18,4	55,1	2,2	22,6	

Tabela A 3.2.9. – Valores de AATS_{LSI} e de $Q_{3,10}$, para diferentes pares de amostragem em VSI, e distribuições por amostragem, respetivamente, *Normal*, *JohnsonSU* e *JohnsonSU* com $n = 5$.

(p, α)		$(0.05, 1.5)$						(p, α)		$(0.05, 2)$						(p, α)		$(0.05, 3)$					
(n_1, n_2)		$(1, 15)$		$(1, 10)$		$(2, 7)$		(n_1, n_2)		$(1, 15)$		$(1, 10)$		$(2, 7)$		(n_1, n_2)		$(1, 15)$		$(1, 10)$		$(2, 7)$	
(d_1, d_2)		$(0.1, 1.36)$		$(0.1, 1.72)$		$(0.1, 2.35)$		(d_1, d_2)		$(0.1, 1.36)$		$(0.1, 1.72)$		$(0.1, 2.35)$		(d_1, d_2)		$(0.1, 1.36)$		$(0.1, 1.72)$		$(0.1, 2.35)$	
(w_1, w_2)		$(1.07, 1.07)$		$(0.76, 0.76)$		$(0.52, 0.52)$		(w_1, w_2)		$(1.07, 1.07)$		$(0.77, 0.77)$		$(0.53, 0.53)$		(w_1, w_2)		$(1.01, 1.01)$		$(0.71, 0.71)$		$(0.49, 0.49)$	
λ	ANOS	$Q_{3.11}$	$Q_{3.12}$	$Q_{3.11}$	$Q_{3.12}$	$Q_{3.11}$	$Q_{3.12}$	ANOS	$Q_{3.11}$	$Q_{3.12}$	$Q_{3.11}$	$Q_{3.12}$	$Q_{3.11}$	$Q_{3.12}$	ANOS	$Q_{3.11}$	$Q_{3.12}$	$Q_{3.11}$	$Q_{3.12}$	$Q_{3.11}$	$Q_{3.12}$	$Q_{3.11}$	$Q_{3.12}$
0	1852,60	0,0	-0,2	0,1	-0,2	0,3	-0,1	1852,00	0,1	-0,2	0,1	-0,1	0,3	-0,1	1852,12	0,1	-0,1	0,1	-0,2	0,3	-0,1		
0,25	667,15	-25,3	-8,2	-16,6	-3,5	-9,3	-0,6	787,19	-19,9	-1,1	-12,2	2,4	-5,8	4,0	1114,53	-19,7	5,2	-15,3	4,8	-11,6	2,8		
0,5	167,55	-64,4	-36,4	-51,5	-22,6	-33,9	-9,2	214,73	-65,6	-33,6	-50,8	-17,3	-31,7	-2,7	409,92	-74,8	-35,6	-61,0	-18,2	-44,8	-5,9		
0,75	54,01	-50,2	-37,6	-48,6	-28,5	-38,7	-14,4	68,52	-58,2	-41,4	-54,4	-28,0	-41,6	-9,8	142,12	-78,8	-58,9	-73,8	-40,6	-61,2	-19,3		
1	22,56	7,4	-13,9	-0,4	-18,9	-4,6	-11,8	27,18	-5,38	-22,8	-11,4	-22,1	-11,8	-9,5	52,38	-47,6	-54,4	-48,9	-45,5	-43,6	-25,7		
1,25	11,98	66,9	33,4	58,4	4,2	46,4	-2,7	13,56	58,4	21,8	50,3	-1,1	41,3	-1,8	22,09	12,1	-22,1	8,4	-31,6	9,0	-21,7		
1,5	7,85	87,2	91,5	85,3	35,6	77,6	9,3	8,44	84,8	82,3	82,4	30,7	76,6	10,1	11,41	55,5	38,8	56,1	1,5	60,3	-7,2		
1,75	6,11	79,0	136,5	85,0	63,9	88,0	19,5	6,34	79,3	134,2	84,7	61,8	89,0	21,2	7,42	62,0	107,3	70,1	43,0	83,5	11,8		
2	5,38	62,8	156,6	75,2	79,1	89,3	23,6	5,48	64,1	161,5	76,1	80,7	90,8	26,4	5,90	53,6	155,2	68,0	74,2	90,1	25,2		
2,25	5,11	47,8	155,7	64,8	81,0	87,7	21,5	5,15	49,6	166,0	66,3	85,7	89,3	25,0	5,32	43,8	175,2	62,5	88,5	90,6	28,6		
2,5	5,02	36,1	142,9	56,3	75,1	85,6	16,0	5,04	38,2	156,7	58,2	81,8	86,9	19,7	5,11	35,5	175,8	57,1	90,6	88,7	24,6		
2,75	5,00	27,6	124,9	50,1	65,7	83,8	10,4	5,01	29,8	140,6	52,0	73,7	84,8	13,5	5,04	29,3	165,5	52,7	85,9	86,3	17,9		
3	5,00	21,7	104,8	45,6	55,1	82,5	6,0	5,00	23,7	121,5	47,5	63,6	83,2	8,3	5,01	24,6	148,9	49,1	77,5	84,3	11,6		

Tabela A 3.2.10. – Valores de ANOS_{LSI}, de $Q_{3.11}$ e de $Q_{3.12}$, com $d_1 = 0.1$ e diferentes dimensões amostrais em VSSI, e distribuições por amostragem, respectivamente, *Normal*, *JohnsonSU* e *JohnsonSU* com $n = 5$.

(p, α)		$(0.05, 1.5)$						(p, α)		$(0.05, 2)$						(p, α)		$(0.05, 3)$					
(n_1, n_2)		$(1, 15)$		$(1, 10)$		$(2, 7)$		(n_1, n_2)		$(1, 15)$		$(1, 10)$		$(2, 7)$		(n_1, n_2)		$(1, 15)$		$(1, 10)$		$(2, 7)$	
(d_1, d_2)		$(0.5, 1.20)$		$(0.5, 1.40)$		$(0.5, 1.75)$		(d_1, d_2)		$(0.5, 1.20)$		$(0.5, 1.40)$		$(0.5, 1.75)$		(d_1, d_2)		$(0.5, 1.20)$		$(0.5, 1.40)$		$(0.5, 1.75)$	
(w_1, w_2)		$(1.07, 1.07)$		$(0.76, 0.76)$		$(0.52, 0.52)$		(w_1, w_2)		$(1.07, 1.07)$		$(0.77, 0.77)$		$(0.53, 0.53)$		(w_1, w_2)		$(1.01, 1.01)$		$(0.71, 0.71)$		$(0.49, 0.49)$	
λ	ANOS	$Q_{3.11}$	$Q_{3.12}$	$Q_{3.11}$	$Q_{3.12}$	$Q_{3.11}$	$Q_{3.12}$	ANOS	$Q_{3.11}$	$Q_{3.12}$	$Q_{3.11}$	$Q_{3.12}$	$Q_{3.11}$	$Q_{3.12}$	ANOS	$Q_{3.11}$	$Q_{3.12}$	$Q_{3.11}$	$Q_{3.12}$	$Q_{3.11}$	$Q_{3.12}$	$Q_{3.11}$	$Q_{3.12}$
0	1852,60	0,0	-0,2	0,0	-0,2	0,1	-0,1	1852,00	0,0	-0,2	0,0	-0,1	0,1	-0,1	1852,12	0,0	-0,2	0,1	-0,2	0,2	-0,1		
0,25	667,15	-22,1	-8,2	-12,5	-3,5	-4,5	-0,6	787,19	-16,4	-1,1	-7,6	2,4	-0,5	4,0	1114,53	-15,2	5,2	-9,4	4,8	-4,7	2,8		
0,5	167,55	-58,9	-36,4	-41,5	-22,6	-18,4	-9,2	214,73	-59,1	-33,6	-38,9	-17,3	-13,6	-2,7	409,92	-66,8	-35,6	-46,4	-18,1	-23,0	-5,9		
0,75	54,01	-46,5	-37,6	-38,4	-28,5	-16,8	-14,4	68,52	-53,1	-41,4	-41,1	-28,0	-14,0	-9,8	142,12	-72,8	-58,9	-57,8	-40,6	-28,4	-19,3		
1	22,56	7,2	-13,9	1,2	-18,9	9,4	-11,8	27,18	-3,8	-22,8	-5,0	-22,1	11,6	-9,5	52,38	-43,9	-54,4	-36,6	-45,5	-8,3	-25,7		
1,25	11,98	67,0	33,4	49,0	4,2	39,1	-2,7	13,56	59,8	21,8	45,1	-1,1	43,3	-1,8	22,09	16,7	-22,1	12,0	-31,6	28,6	-21,7		
1,5	7,85	93,4	91,5	72,6	35,6	51,0	9,3	8,44	92,1	82,3	72,2	30,7	56,2	10,1	11,41	66,8	38,9	53,4	1,5	53,0	-7,2		
1,75	6,11	91,0	136,5	74,7	63,9	50,0	19,5	6,34	92,9	134,2	76,2	61,8	55,1	21,2	7,42	80,6	107,3	67,8	43,0	58,1	11,8		
2	5,38	77,9	156,6	67,7	79,1	44,2	23,6	5,48	81,5	161,5	70,5	80,7	49,1	26,4	5,90	76,6	155,2	68,0	74,2	55,1	25,2		
2,25	5,11	63,3	155,7	58,1	81,0	36,8	21,5	5,15	68,0	166,0	62,0	85,7	41,5	25,0	5,32	68,4	175,2	63,7	88,5	48,7	28,6		
2,5	5,02	50,0	142,9	48,5	75,1	29,3	16,0	5,04	55,5	156,7	53,2	81,8	33,5	19,7	5,11	59,6	175,8	57,9	90,6	40,2	24,6		
2,75	5,00	38,5	124,9	39,7	65,7	23,1	10,4	5,01	44,4	140,6	44,8	73,7	26,4	13,5	5,04	51,2	165,5	51,6	85,9	31,7	17,9		
3	5,00	28,5	104,8	31,7	55,1	18,5	6,0	5,00	34,5	121,4	37,0	63,6	20,9	8,3	5,01	42,8	148,9	44,9	77,5	24,6	11,6		

Tabela A 3.2.11. – Valores de ANOS_{LSI}, de $Q_{3.11}$ e de $Q_{3.12}$, com $d_1 = 0.5$ e diferentes dimensões amostrais em VSSI, e distribuições por amostragem, respectivamente, *Normal*, *JohnsonSU* e *JohnsonSU* com $n = 5$.

(p, α)		$(0.05, 1.5)$						(p, α)		$(0.05, 2)$						(p, α)		$(0.05, 3)$					
(n_1, n_2)		$(1, 15)$		$(1, 10)$		$(2, 7)$		(n_1, n_2)		$(1, 15)$		$(1, 10)$		$(2, 7)$		(n_1, n_2)		$(1, 15)$		$(1, 10)$		$(2, 7)$	
(d_1, d_2)		$(1, 1)$		$(1, 1)$		$(1, 1)$		(d_1, d_2)		$(1, 1)$		$(1, 1)$		$(1, 1)$		(d_1, d_2)		$(1, 1)$		$(1, 1)$		$(1, 1)$	
(w_1, w_2)		$(1.07, 1.07)$		$(0.76, 0.76)$		$(0.52, 0.52)$		(w_1, w_2)		$(1.05, 1.05)$		$(0.75, 0.75)$		$(0.52, 0.52)$		(w_1, w_2)		$(1.01, 1.01)$		$(0.71, 0.71)$		$(0.49, 0.49)$	
λ	ANOS	$Q_{3.13}$	$Q_{3.14}$	$Q_{3.13}$	$Q_{3.14}$	$Q_{3.13}$	$Q_{3.14}$	ANOS	$Q_{3.13}$	$Q_{3.14}$	$Q_{3.13}$	$Q_{3.14}$	$Q_{3.13}$	$Q_{3.14}$	ANOS	$Q_{3.13}$	$Q_{3.14}$	$Q_{3.13}$	$Q_{3.14}$	$Q_{3.13}$	$Q_{3.14}$	$Q_{3.13}$	$Q_{3.14}$
0	1852,60	0,1	-0,2	0,1	-0,2	0,1	-0,1	1852,00	0,1	-0,2	0,1	-0,2	0,1	-0,1	1852,12	0,1	-0,2	0,1	-0,2	0,1	-0,1		
0,25	667,15	-17,7	-8,2	-6,8	-3,5	2,3	-0,6	787,19	-15,8	-5,1	-5,4	-1,4	3,0	0,4	1114,53	-9,2	5,2	-1,7	4,8	4,3	2,8		
0,5	167,55	-49,8	-36,4	-26,2	-22,6	4,2	-9,2	214,73	-53,2	-38,5	-28,0	-23,1	3,9	-9,0	409,92	-55,7	-35,6	-27,0	-18,2	5,5	-5,9		
0,75	54,01	-32,9	-37,6	-15,4	-28,5	22,9	-14,4	68,52	-42,4	-45,0	-21,9	-33,2	20,7	-16,6	142,12	-61,7	-58,9	-33,7	-40,6	17,6	-19,3		
1	22,56	33,1	-13,9	32,6	-18,9	61,7	-11,8	27,18	17,9	-25,4	22,8	-26,4	60,0	-15,7	52,38	-26,0	-54,4	-6,6	-45,5	52,9	-25,7		
1,25	11,98	117,0	33,4	92,2	4,2	95,0	-2,7	13,56	105,4	20,2	85,4	-4,2	97,0	-6,9	22,09	57,7	-22,1	54,7	-31,6	97,6	-21,7		
1,5	7,85	168,3	91,5	129,6	35,6	105,7	9,3	8,44	163,9	81,2	127,5	28,9	109,4	6,5	11,41	139,5	38,8	112,9	1,5	117,7	-7,2		
1,75	6,11	181,7	136,5	143,4	63,9	103,9	19,5	6,34	181,7	132,8	143,8	60,7	107,6	18,7	7,42	174,5	107,3	140,2	43,0	117,2	11,8		
2	5,38	176,2	156,6	143,5	79,1	98,1	23,6	5,48	178,8	159,4	145,6	79,5	101,6	24,6	5,90	180,8	155,2	148,0	74,2	111,7	25,2		
2,25	5,11	164,1	155,7	137,2	81,0	90,5	21,5	5,15	168,3	163,0	140,5	84,1	93,7	23,3	5,32	176,9	175,2	147,6	88,5	104,3	28,6		
2,5	5,02	150,3	142,9	128,5	75,1	82,5	16,0	5,04	155,6	152,7	132,6	79,8	85,2	18,0	5,11	168,7	175,8	142,9	90,6	94,7	24,6		
2,75	5,00	136,5	124,9	118,9	65,7	75,5	10,4	5,01	142,4	135,7	123,4	71,1	77,5	12,0	5,04	158,8	165,5	136,2	85,9	85,2	17,9		
3	5,00	123,3	104,8	109,3	55,1	70,3	6,0	5,00	129,2	115,7	113,9	60,6	71,7	7,1	5,01	147,4	1						

(p, α)		$(0,05,1,5)$						(p, α)		$(0,05,2)$						(p, α)		$(0,05,3)$					
(n_1, n_2)		$(1, 15)$		$(1, 10)$		$(2, 7)$		(n_1, n_2)		$(1, 15)$		$(1, 10)$		$(2, 7)$		(n_1, n_2)		$(1, 15)$		$(1, 10)$		$(2, 7)$	
(d_1, d_2)		$(0,1, 1,36)$		$(0,1, 1,72)$		$(0,1, 2,35)$		(d_1, d_2)		$(0,1, 1,36)$		$(0,1, 1,72)$		$(0,1, 2,35)$		(d_1, d_2)		$(0,1, 1,36)$		$(0,1, 1,72)$		$(0,1, 2,35)$	
(L_1, L_2)		$(6, 2,60)$		$(6, 2,75)$		$(6, 2,84)$		(L_1, L_2)		$(6, 2,66)$		$(6, 2,83)$		$(6, 2,94)$		(L_1, L_2)		$(6, 2,86)$		$(6, 3,09)$		$(6, 3,24)$	
(w_1, w_2)		$(1,06, 1,07)$		$(0,76, 0,77)$		$(0,52, 0,53)$		(w_1, w_2)		$(1,04, 1,06)$		$(0,75, 0,75)$		$(0,51, 0,52)$		(w_1, w_2)		$(1,00, 1,02)$		$(0,71, 0,72)$		$(0,49, 0,50)$	
λ	ANOS	$Q_{3,15}$	$Q_{3,16}$	$Q_{3,15}$	$Q_{3,16}$	$Q_{3,15}$	$Q_{3,16}$	ANOS	$Q_{3,15}$	$Q_{3,16}$	$Q_{3,15}$	$Q_{3,16}$	$Q_{3,15}$	$Q_{3,16}$	ANOS	$Q_{3,15}$	$Q_{3,16}$	$Q_{3,15}$	$Q_{3,16}$	$Q_{3,15}$	$Q_{3,16}$	$Q_{3,15}$	$Q_{3,16}$
0	1852,60	0,0	-0,1	0,1	-0,3	0,2	-0,3	1852,00	0,1	-0,2	0,2	-0,3	0,2	-0,2	1852,12	0,1	-0,3	0,2	-0,4	0,3	-0,4		
0,25	667,15	-59,3	-52,0	-43,9	-36,2	-25,5	-19,2	787,19	-61,3	-53,4	-45,5	-36,8	-27,2	-19,8	1114,53	-62,8	-52,6	-46,4	-34,5	-29,9	-19,1		
0,5	167,55	-73,9	-63,6	-64,6	-49,4	-46,7	-30,5	214,73	-78,9	-68,6	-69,7	-53,6	-52,1	-33,8	409,92	-87,7	-77,1	-78,8	-59,9	-62,7	-38,8		
0,75	54,01	-51,7	-55,1	-52,3	-47,3	-44,1	-32,2	68,52	-61,4	-63,1	-61,3	-54,1	-52,7	-37,3	142,12	-81,1	-79,5	-79,6	-68,2	-70,7	-48,1		
1	22,56	7,5	-26,0	-1,4	-32,9	-6,2	-26,1	27,18	-7,5	-37,9	-14,9	-41,8	-17,5	-32,2	52,38	-48,3	-66,6	-51,6	-64,1	-49,1	-48,8		
1,25	11,98	68,0	26,8	58,6	-5,8	46,9	-13,8	13,56	55,8	12,3	47,3	-15,4	38,3	-20,0	22,09	12,2	-30,2	7,3	-44,9	5,8	-40,2		
1,5	7,85	89,1	91,2	86,5	30,4	79,9	2,5	8,44	82,2	77,9	80,1	21,9	76,2	-2,5	11,41	56,3	32,3	56,0	-7,9	59,7	-21,5		
1,75	6,11	81,5	145,5	87,0	64,1	92,3	18,9	6,34	77,4	136,4	83,3	58,2	91,1	15,6	7,42	63,1	102,1	70,7	36,1	85,1	2,1		
2	5,38	66,1	178,6	78,1	85,8	95,8	30,9	5,48	63,5	173,7	76,1	82,7	95,5	29,1	5,90	55,0	154,4	69,1	70,1	93,5	21,5		
2,25	5,11	52,1	193,6	68,7	95,7	96,4	37,1	5,15	50,5	191,3	67,6	94,2	96,5	36,2	5,32	45,7	182,1	64,2	88,2	96,2	32,5		
2,5	5,02	41,5	198,5	61,4	99,0	96,2	39,3	5,04	40,6	197,6	60,9	98,4	96,3	38,9	5,11	38,1	193,7	59,5	95,8	96,5	37,2		
2,75	5,00	34,4	199,7	56,5	99,8	95,9	39,9	5,01	34,0	199,5	56,4	99,6	96,0	39,8	5,04	32,9	197,9	56,0	98,6	96,2	39,1		
3	5,00	29,8	200,1	53,5	99,9	95,5	39,9	5,00	29,7	199,8	53,6	99,9	95,5	39,9	5,01	29,4	199,2	53,7	99,5	95,7	39,8		

Tabela A 3.2.13. – Valores de ANOS_{LSI}, de $Q_{3,15}$ e de $Q_{3,16}$, diferentes pares de amostragem, de dimensões amostrais e $L_1 = 6$ em VP, e distribuições por amostragem, respetivamente, *Normal*, *JohnsonSU* e *JohnsonSU* com $n = 5$.

3.4. Comparação do Desempenho Estatístico entre a Nova Política de Amostragem Combinada (CAPSI) e as Políticas FSI, PSI, LSI e VSI

3.5.1. Tempo de Vida 1000

$E(T)$ 1000	δ					δ					δ				
	2	3	4	5	7	2	3	4	5	7	2	3	4	5	7
	$Q_{3,18}$					$Q_{3,19}$					$Q_{3,20}$				
0,25	25,1	39,2	49,7	55,4	62,5	-2,1	-7,7	-9,9	-16,3	-29,9	19,3	34,4	45,8	51,9	59,5
0,5	22,1	38,5	50,1	55,1	64,7	8,0	12,5	16,0	12,3	11,6	-3,3	18,5	33,9	40,4	53,2
0,75	25,4	39,7	49,5	57,7	67,3	17,9	23,8	26,8	30,3	32,6	-28,2	-3,6	13,3	27,3	43,7
1,0	22,9	39,2	51,6	57,2	69,0	18,1	28,1	35,6	36,5	43,4	-55,5	-22,6	2,3	13,7	37,4
1,25	22,5	36,2	49,8	56,9	68,5	19,2	27,5	37,0	40,2	47,4	-44,7	-19,2	6,4	19,6	41,2
1,5	18,7	35,0	44,3	52,2	63,5	16,2	28,1	32,8	37,1	42,7	-17,3	6,2	19,7	31,1	47,3
1,75	15,4	28,7	40,0	48,1	57,1	13,5	22,7	29,5	33,2	35,2	6,7	21,5	33,8	42,8	52,7
2,0	11,3	23,5	34,9	44,0	54,4	9,7	17,8	24,8	29,9	32,6	18,3	29,5	40,0	48,4	58,0
2,5	7,4	21,1	31,3	41,0	49,9	5,9	15,8	21,4	25,7	27,5	23,8	35,1	43,5	51,4	58,8
3,0	6,9	21,2	31,4	41,9	50,0	5,5	16,0	21,6	27,4	28,5	24,0	35,7	44,0	52,6	59,2

Tabela A 3.5.1. – Valores de $Q_{3,18}$, de $Q_{3,19}$ e de $Q_{3,20}$, com $d = 1$ em FSI, $\Delta H = 0,001$ em PSI e $k = 3,8134$ em LSI, e $E(T) = 1000$, $n = 5$, $\rho = 1$ e $\theta = 0,25$.

$E(T)$ 1000	δ					δ					δ					δ				
	2	3	4	5	7	2	3	4	5	7	2	3	4	5	7	2	3	4	5	7
	$Q_{3,24}(0,1, 2)$					$Q_{3,24}(0,1, 1,5)$					$Q_{3,24}(0,5, 2)$					$Q_{3,24}(0,5, 1,5)$				
0,25	16,1	31,9	43,7	50,1	58,0	17,4	32,9	44,5	50,8	58,6	20,0	35,0	46,3	52,4	59,9	20,4	35,3	46,6	52,6	60,1
0,5	-19,0	6,1	23,8	31,4	46,1	-13,1	10,7	27,6	34,8	48,7	2,2	22,8	37,4	43,6	55,7	3,5	23,8	38,2	44,4	56,3
0,75	-61,6	-30,6	-9,3	8,4	29,1	-53,1	-23,7	-3,5	13,3	32,9	-8,4	12,4	26,7	38,6	52,4	-7,8	12,9	27,1	38,9	52,7
1,0	-76,4	-39,1	-10,9	2,1	29,0	-85,7	-46,4	-16,7	-3,0	25,2	-13,6	10,4	28,6	36,9	54,2	-17,1	7,6	26,4	35,0	52,8
1,25	-26,6	-4,2	18,1	29,7	48,6	-51,8	-25,0	1,8	15,7	38,4	0,7	18,2	35,7	44,8	59,7	-7,7	11,3	30,3	40,1	56,2
1,5	14,6	31,8	41,6	49,8	61,7	-8,7	13,1	25,6	36,1	51,2	16,3	33,1	42,8	50,8	62,4	5,1	24,1	35,0	44,2	57,4
1,75	37,3	47,3	55,6	61,6	68,2	18,6	31,5	42,3	50,1	58,8	29,1	40,4	49,8	56,6	64,1	17,1	30,2	41,2	49,2	58,0
2,0	46,7	54,0	60,9	66,3	72,6	30,3	39,9	48,9	56,0	64,1	35,2	44,1	52,4	59,1	66,7	23,0	33,5	43,5	51,4	60,4
2,5	50,8	58,1	63,5	68,7	73,4	35,6	45,1	52,2	58,9	65,1	37,9	47,0	53,9	60,4	66,4	25,5	36,5	44,7	52,5	59,7
3,0	51,0	58,5	63,9	69,4	73,7	35,8	45,7	52,7	59,9	65,5	37,9	47,5	54,3	61,3	66,7	25,5	37,0	45,1	53,5	60,0

Tabela A 3.5.2. – Valores de $Q_{3,21}$, com $(d_1, d_2) = (0,1, 2)$, $(d_1, d_2) = (0,1, 1,5)$, $(d_1, d_2) = (0,5, 2)$, $(d_1, d_2) = (0,5, 1,5)$ em VSI, $\Delta H = 0,001$ em PSI e $k = 3,8134$ em LSI, e $E(T) = 1000$, $n = 5$, $\rho = 1$ e $\theta = 0,25$.

$E(T)$ 1000	δ					δ					δ				
	2	3	4	5	7	2	3	4	5	7	2	3	4	5	7
λ	$Q_{3,18}$					$Q_{3,19}$					$Q_{3,20}$				
0,25	21,8	33,9	38,1	42,0	45,5	-6,6	-17,1	-35,3	-51,4	-88,4	15,7	28,7	33,3	37,4	41,3
0,5	26,5	37,9	45,0	49,0	54,1	13,2	11,6	7,3	0,3	-15,0	2,6	17,6	27,0	32,3	39,1
0,75	32,1	46,2	52,8	56,6	62,4	25,3	32,0	31,4	28,4	22,6	-16,7	7,5	18,8	25,4	35,4
1,0	37,9	48,9	56,6	61,9	66,9	34,1	39,6	42,3	43,4	39,6	-25,1	-3,0	12,4	23,1	33,2
1,25	35,0	47,8	55,5	59,4	64,2	32,3	40,7	44,1	43,6	40,2	-21,2	2,5	16,9	24,2	33,2
1,5	29,5	40,2	47,2	52,3	57,1	27,4	33,9	36,2	37,1	32,8	-1,7	13,7	23,8	31,2	38,2
1,75	19,3	30,4	38,3	43,0	46,9	17,5	24,5	27,5	26,6	19,8	11,1	23,3	32,0	37,1	41,5
2,0	10,8	21,8	29,3	32,4	38,2	9,2	16,0	18,2	15,3	8,8	17,8	28,0	34,8	37,7	43,1
2,5	4,8	16,5	22,7	27,5	31,8	3,3	10,9	11,5	8,8	1,3	21,7	31,3	36,4	40,4	43,8
3,0	4,5	15,8	22,5	27,5	31,1	3,1	10,3	11,4	9,4	1,6	22,0	31,3	36,7	40,9	43,8

Tabela A 3.5.3. – Valores de $Q_{3,18}$, de $Q_{3,19}$ e de $Q_{3,20}$, com $d = 1$ em FSI, $\Delta H = 0.001$ em PSI e $k = 3.8134$ em LSI, e $E(T) = 1000$, $n = 5$, $\rho = 1$ e $\theta = 0.5$.

$E(T)$ 1000	δ					δ					δ					δ				
	2	3	4	5	7	2	3	4	5	7	2	3	4	5	7	2	3	4	5	7
λ	$Q_{3,24}(0.1, 2)$					$Q_{3,24}(0.1, 1.5)$					$Q_{3,24}(0.5, 2)$					$Q_{3,24}(0.5, 1.5)$				
0,25	12,4	25,9	30,7	35,0	39,0	13,8	27,0	31,7	36,0	39,9	16,5	29,3	33,9	38,0	41,8	16,9	29,7	34,2	38,3	42,1
0,5	-12,3	5,1	15,9	22,0	29,9	-6,7	9,8	20,1	25,9	33,3	7,8	22,0	30,9	35,9	42,4	9,0	23,1	31,8	36,8	43,1
0,75	-47,0	-16,5	-2,4	5,9	18,6	-39,2	-10,4	3,1	10,9	22,9	1,4	21,8	31,3	36,9	45,4	1,9	22,3	31,7	37,2	45,7
1,0	-42,0	-16,9	0,6	12,8	24,2	-49,5	-23,0	-4,6	8,2	20,2	8,5	24,7	36,0	43,8	51,2	5,7	22,4	34,0	42,1	49,7
1,25	-6,0	14,8	27,3	33,7	41,6	-27,1	-2,2	12,8	20,5	29,9	16,8	33,1	42,9	48,0	54,2	9,7	27,4	38,1	43,5	50,3
1,5	26,0	37,2	44,5	49,9	55,0	5,7	20,0	29,4	36,2	42,7	27,5	38,5	45,7	50,9	55,9	17,7	30,2	38,3	44,3	50,0
1,75	40,3	48,5	54,4	57,8	60,7	22,4	33,1	40,7	45,2	49,0	32,5	41,8	48,4	52,2	55,6	21,0	31,9	39,6	44,2	48,0
2,0	46,4	53,0	57,5	59,3	62,9	29,9	38,6	44,4	46,9	51,5	34,8	42,9	48,3	50,6	54,9	22,5	32,1	38,6	41,3	46,4
2,5	49,5	55,6	58,9	61,5	63,8	33,8	41,9	46,2	49,6	52,5	36,2	44,0	48,1	51,4	54,2	23,4	32,8	37,8	41,7	45,1
3,0	49,7	55,7	59,2	61,9	63,7	34,1	42,0	46,5	50,0	52,5	36,3	43,9	48,3	51,7	54,1	23,6	32,7	38,0	42,0	44,9

Tabela A 3.5.4. – Valores de $Q_{3,21}$, com $(d_1, d_2) = (0.1, 2)$, $(d_1, d_2) = (0.1, 1.5)$, $(d_1, d_2) = (0.5, 2)$, $(d_1, d_2) = (0.5, 1.5)$ em VSI, $\Delta H = 0.001$ em PSI e $k = 3.8134$ em LSI, e $E(T) = 1000$, $n = 5$, $\rho = 1$ e $\theta = 0.5$.

$E(T)$ 1000	δ					δ					δ				
	2	3	4	5	7	2	3	4	5	7	2	3	4	5	7
λ	$Q_{3,18}$					$Q_{3,19}$					$Q_{3,20}$				
0,25	15,1	20,4	23,2	24,4	26,8	-15,8	-40,8	-67,9	-97,3	-153,3	8,4	14,2	17,2	18,4	21,0
0,5	26,5	32,6	35,9	37,4	39,9	13,2	4,0	-8,1	-22,3	-50,6	2,6	10,6	14,9	17,0	20,3
0,75	38,8	45,0	48,9	50,9	53,1	32,7	30,4	25,9	19,1	3,4	-5,1	5,4	12,2	15,7	19,4
1,0	44,8	51,3	55,3	56,7	59,0	41,4	42,4	40,6	35,6	25,3	-11,2	1,8	9,8	12,6	17,4
1,25	43,6	49,6	53,0	53,7	55,7	41,2	42,7	41,0	35,7	26,1	-5,3	5,9	12,3	13,5	17,4
1,5	32,3	38,5	40,9	42,5	45,2	30,2	32,0	28,6	24,3	14,0	2,3	11,3	14,7	17,1	20,9
1,75	16,7	22,1	25,3	27,2	28,7	14,9	15,5	12,2	6,4	-7,7	8,3	14,2	17,7	19,8	21,4
2,0	3,3	10,0	11,6	14,8	16,2	1,5	3,4	-2,2	-6,6	-23,8	10,9	17,1	18,6	21,5	22,8
2,5	-6,9	0,0	2,8	4,1	6,1	-8,6	-6,7	-11,3	-20,8	-35,8	12,1	17,7	20,0	21,1	22,8
3,0	-7,2	-0,4	2,1	3,3	7,4	-8,8	-7,0	-11,9	-20,9	-32,4	12,5	18,1	20,1	21,1	24,4

Tabela A 3.5.5. – Valores de $Q_{3,18}$, de $Q_{3,19}$ e de $Q_{3,20}$, com $d = 1$ em FSI, $\Delta H = 0.001$ em PSI e $k = 3.8134$ em LSI, e $E(T) = 1000$, $n = 5$, $\rho = 1$ e $\theta = 0.75$.

E(T) 1000	δ					δ					δ					δ				
	2	3	4	5	7	2	3	4	5	7	2	3	4	5	7	2	3	4	5	7
λ	$Q_{3,21}(0.1, 2)$					$Q_{3,21}(0.1, 1.5)$					$Q_{3,21}(0.5, 2)$					$Q_{3,21}(0.5, 1.5)$				
0,25	4,9	10,9	14,0	15,3	18,0	6,3	12,2	15,3	16,6	19,2	9,3	15,0	18,0	19,2	21,8	9,7	15,4	18,4	19,6	22,2
0,5	-12,3	-3,0	2,0	4,4	8,2	-6,7	2,0	6,8	9,1	12,7	7,8	15,3	19,5	21,4	24,5	9,0	16,4	20,5	22,5	25,5
0,75	-32,5	-19,2	-10,7	-6,3	-1,6	-25,5	-12,9	-4,8	-0,7	3,8	11,1	20,0	25,7	28,7	31,8	11,6	20,5	26,2	29,1	32,2
1,0	-26,2	-11,4	-2,3	0,8	6,3	-32,9	-17,3	-7,7	-4,4	1,3	18,7	28,2	34,1	36,1	39,6	16,2	26,0	32,1	34,1	37,8
1,25	7,9	17,7	23,3	24,4	27,8	-10,4	1,3	8,0	9,3	13,4	27,8	35,4	39,8	40,6	43,3	21,6	29,9	34,7	35,6	38,5
1,5	28,9	35,5	37,9	39,7	42,4	9,5	17,8	21,0	23,2	26,7	30,3	36,8	39,2	40,9	43,6	20,9	28,2	31,0	32,9	36,0
1,75	38,4	42,4	44,7	46,1	47,2	20,0	25,1	28,2	30,0	31,4	30,3	34,8	37,5	39,1	40,3	18,5	23,8	26,9	28,8	30,2
2,0	41,8	45,9	46,8	48,8	49,6	24,0	29,3	30,5	33,1	34,1	29,3	34,2	35,4	37,8	38,7	16,0	21,9	23,2	26,0	27,2
2,5	43,2	46,9	48,4	49,0	50,2	25,6	30,4	32,3	33,2	34,7	28,3	32,9	34,8	35,6	37,0	14,0	19,6	21,8	22,8	24,5
3,0	43,6	47,2	48,5	49,1	51,2	26,1	30,8	32,5	33,3	36,1	28,5	33,1	34,7	35,5	38,2	14,2	19,7	21,7	22,6	25,9

Tabela A 3.5.6. – Valores de $Q_{3,21}$, com $(d_1, d_2) = (0.1, 2)$, $(d_1, d_2) = (0.1, 1.5)$, $(d_1, d_2) = (0.5, 2)$, $(d_1, d_2) = (0.5, 1.5)$ em VSI, $\Delta H = 0.001$ em PSI e $k = 3.8134$ em LSI, e $E(T) = 1000$, $n = 5$, $\rho = 1$ e $\theta = 0.75$.

3.5.2. Tempo de Vida 100

E(T) 100	δ					δ					δ				
	2	3	4	5	7	2	3	4	5	7	2	3	4	5	7
λ	$Q_{3,18}$					$Q_{3,19}$					$Q_{3,20}$				
0,25	42,0	55,3	61,6	65,1	69,3	-24,9	-46,5	-70,6	-96,1	-143,9	37,5	51,8	58,5	62,3	66,9
0,5	35,7	50,1	58,0	62,9	68,9	-2,2	-8,7	-16,2	-23,4	-42,4	14,7	33,8	44,4	50,8	58,8
0,75	31,9	47,7	56,8	64,1	70,6	9,6	12,9	11,9	11,0	5,8	-17,1	10,0	25,7	38,3	49,4
1,0	28,6	45,5	56,2	62,8	71,1	13,6	21,4	24,4	23,8	27,0	-44,1	-9,9	11,6	24,9	41,7
1,25	25,9	40,3	52,5	59,3	69,2	17,0	21,9	27,1	26,4	31,3	-38,3	-11,4	11,4	24,1	42,5
1,5	20,8	37,0	46,9	55,8	65,4	12,0	20,0	24,3	28,9	33,0	-14,2	9,1	23,4	36,2	50,1
1,75	15,7	30,7	40,5	50,7	60,5	9,5	15,5	18,0	25,1	25,0	7,1	23,6	34,5	45,7	56,4
2,0	12,0	26,0	37,6	45,3	55,8	7,7	11,2	18,7	18,4	21,9	19,0	31,8	42,5	49,6	59,3
2,5	9,6	23,0	34,6	43,2	52,6	4,7	10,9	15,2	17,7	16,6	25,6	36,7	46,2	53,2	61,0
3,0	10,1	23,9	35,8	42,4	53,3	6,2	12,0	17,5	17,3	17,1	26,6	37,9	47,6	53,0	61,9

Tabela A 3.5.7. – Valores de $Q_{3,18}$, de $Q_{3,19}$ e de $Q_{3,20}$, com $d = 1$ em FSI, $\Delta H = 0.01$ em PSI e $k = 3.8134$ em LSI, e $E(T) = 100$, $n = 5$, $\rho = 1$ e $\theta = 0.25$.

E(T) 100	δ					δ					δ					δ				
	2	3	4	5	7	2	3	4	5	7	2	3	4	5	7	2	3	4	5	7
λ	$Q_{3,21}(0.1, 2)$					$Q_{3,21}(0.1, 1.5)$					$Q_{3,21}(0.5, 2)$					$Q_{3,21}(0.5, 1.5)$				
0,25	35,1	50,0	57,0	60,9	65,6	36,0	50,7	57,6	61,5	66,1	38,1	52,3	58,9	62,7	67,2	38,4	52,5	59,1	62,9	67,4
0,5	1,8	23,8	35,9	43,3	52,5	6,6	27,5	39,1	46,1	54,9	19,3	37,4	47,3	53,4	61,0	20,3	38,2	48,0	54,0	61,5
0,75	-47,5	-13,4	6,3	22,3	36,2	-39,7	-7,4	11,3	26,4	39,6	1,0	23,9	37,1	47,8	57,2	1,6	24,4	37,5	48,1	57,5
1,0	-63,5	-24,8	-0,3	14,8	33,9	-72,0	-31,3	-5,6	10,3	30,4	-5,3	19,6	35,4	45,1	57,4	-8,5	17,2	33,4	43,4	56,1
1,25	-21,0	2,6	22,5	33,6	49,7	-45,1	-16,8	7,0	20,4	39,7	5,1	23,6	39,2	47,9	60,5	-3,0	17,1	34,0	43,5	57,2
1,5	16,9	33,8	44,3	53,6	63,7	-5,9	15,7	29,0	40,9	53,7	18,5	35,2	45,4	54,5	64,4	7,6	26,4	38,0	48,4	59,6
1,75	37,6	48,7	56,0	63,5	70,7	19,0	33,3	42,8	52,6	62,0	29,5	42,0	50,2	58,7	66,9	17,5	32,1	41,8	51,7	61,3
2,0	47,1	55,5	62,5	67,1	73,4	30,9	41,9	51,0	57,0	65,3	35,7	45,9	54,4	60,0	67,7	23,6	35,7	45,8	52,5	61,6
2,5	52,0	59,1	65,3	69,8	74,8	37,1	46,4	54,5	60,4	67,0	39,3	48,4	56,1	61,9	68,2	27,3	38,1	47,4	54,3	61,8
3,0	52,7	59,9	66,2	69,7	75,4	38,0	47,5	55,7	60,3	67,8	40,0	49,3	57,2	61,6	68,9	28,1	39,1	48,6	53,9	62,6

Tabela A 3.5.8. – Valores de $Q_{3,21}$, com $(d_1, d_2) = (0.1, 2)$, $(d_1, d_2) = (0.1, 1.5)$, $(d_1, d_2) = (0.5, 2)$, $(d_1, d_2) = (0.5, 1.5)$ em VSI, $\Delta H = 0.001$ em PSI e $k = 3.8134$ em LSI, e $E(T) = 1000$, $n = 5$, $\rho = 1$ e $\theta = 0.25$.

$E(T)$ 100	δ					δ					δ				
	2	3	4	5	7	2	3	4	5	7	2	3	4	5	7
λ	$Q_{3,18}$					$Q_{3,19}$					$Q_{3,20}$				
0,25	35,0	46,5	51,9	54,4	56,8	-40,0	-75,3	-113,6	-156,0	-243,1	29,9	42,3	48,1	50,8	53,4
0,5	34,6	46,2	53,6	56,2	61,7	-4,0	-17,2	-28,5	-45,6	-75,4	13,2	28,7	38,5	41,9	49,3
0,75	35,3	49,1	56,1	61,4	66,4	14,1	15,2	10,5	4,4	-7,4	-11,3	12,5	24,5	33,7	42,3
1,0	36,9	49,4	56,7	62,7	69,9	23,7	27,0	25,4	23,7	24,0	-27,3	-2,1	12,8	24,8	39,3
1,25	34,0	47,4	56,6	61,3	67,7	26,1	31,1	33,5	30,0	28,0	-23,1	1,8	19,1	27,9	39,8
1,5	28,1	40,8	49,9	54,4	61,6	20,2	24,9	28,7	26,7	25,7	-3,6	14,7	27,8	34,3	44,6
1,75	19,5	32,6	40,8	46,6	53,0	13,5	17,8	18,3	18,8	10,9	11,2	25,7	34,8	41,1	48,2
2,0	11,7	25,0	33,6	40,4	46,7	7,3	10,0	13,5	11,1	5,8	18,6	30,9	38,9	45,1	50,9
2,5	6,7	20,6	29,7	35,0	42,0	1,7	8,1	8,9	5,9	-2,1	23,3	34,7	42,1	46,5	52,2
3,0	9,0	20,6	32,1	35,0	43,2	5,1	8,2	12,9	6,7	-0,9	25,7	35,2	44,6	47,0	53,6

Tabela A 3.5.9. – Valores de $Q_{3,18}$, de $Q_{3,19}$ e de $Q_{3,20}$, com $d = 1$ em FSI, $\Delta H = 0.01$ em PSI e $k = 3.8134$ em LSI, e $E(T) = 100$, $n = 5$, $\rho = 1$ e $\theta = 0.40$.

$E(T)$ 100	δ					δ					δ				
	2	3	4	5	7	2	3	4	5	7	2	3	4	5	7
λ	$Q_{3,18}$					$Q_{3,19}$					$Q_{3,20}$				
0,25	29,7	40,4	48,8	53,0	57,8	0,3	-8,7	-18,5	-26,3	-52,9	12,9	26,2	36,6	41,9	47,8
0,5	29,1	41,3	48,5	54,3	59,8	6,4	4,2	-2,4	-7,7	-24,2	6,1	22,3	31,8	39,6	46,8
0,75	28,6	42,5	50,1	55,5	61,5	13,4	13,6	11,8	7,5	-3,4	-2,4	17,6	28,5	36,1	44,8
1,0	27,5	42,1	50,8	56,0	62,8	15,4	20,0	19,6	15,0	8,6	-9,5	12,6	25,7	33,6	43,8
1,25	27,3	42,4	49,9	55,9	62,1	15,4	26,6	23,9	24,0	17,1	-8,2	14,2	25,5	34,4	43,6
1,5	26,1	38,9	47,7	53,3	59,2	19,7	23,1	25,0	23,4	14,0	-0,7	16,7	28,7	36,3	44,4
1,75	22,5	35,8	43,7	49,8	55,5	18,2	21,6	19,9	18,5	14,4	7,4	23,3	32,7	40,0	46,8
2,0	18,4	30,9	39,9	44,9	50,9	12,4	16,8	17,1	19,4	9,1	14,8	27,8	37,3	42,4	48,7
2,5	10,8	23,3	31,8	38,4	44,1	5,6	12,5	10,4	7,2	0,3	22,0	32,9	40,3	46,1	51,1
3,0	7,6	21,0	29,1	35,9	42,5	4,0	8,3	10,7	7,7	-4,8	23,7	34,8	41,5	47,1	52,5

Tabela A 3.5.10. – Valores de $Q_{3,18}$, de $Q_{3,19}$ e de $Q_{3,20}$, com $d = 1$ em FSI, $\Delta H = 0.01$ em PSI e $k = 3.8134$ em LSI, e $E(T) = 100$, $n = 5$, $\rho = 1.5$ e $\theta = 0.40$.

$E(T)$ 100	δ					δ					δ				
	2	3	4	5	7	2	3	4	5	7	2	3	4	5	7
λ	$Q_{3,18}$					$Q_{3,19}$					$Q_{3,20}$				
0,25	34,5	45,7	51,0	54,8	58,8	-24,2	-52,9	-80,9	-106,8	-159,3	25,0	37,9	44,0	48,3	52,9
0,5	34,8	47,6	55,0	59,7	65,2	9,3	5,9	0,6	-4,8	-24,5	-3,4	16,9	28,6	36,1	44,8
0,75	36,4	50,1	57,5	63,7	69,4	24,1	27,1	27,1	27,1	23,6	-28,5	-0,7	14,2	26,7	38,1
1,0	30,9	44,2	53,8	59,1	65,7	20,6	25,1	31,7	30,5	24,2	-18,7	4,1	20,7	29,7	41,0
1,25	21,7	34,1	44,2	48,9	55,6	14,7	21,5	24,7	23,1	17,3	7,3	22,0	33,9	39,6	47,4
1,5	12,3	24,7	33,2	39,5	46,3	7,9	10,5	13,6	10,4	0,6	19,7	31,1	38,8	44,7	50,8
1,75	7,7	20,0	29,5	35,5	42,1	4,7	8,1	13,1	11,8	-1,7	23,1	33,3	41,2	46,2	51,8
2,0	5,9	20,2	29,1	35,0	41,3	4,0	8,7	7,4	5,6	-3,0	23,0	34,8	42,0	46,8	52,0
2,5	5,7	20,2	29,3	34,5	41,1	1,1	8,6	7,8	6,5	-7,9	23,1	34,9	42,3	46,6	51,9
3,0	6,5	19,0	29,5	34,2	41,5	2,2	4,9	6,1	4,6	-7,6	23,7	33,9	42,5	46,3	52,3

Tabela A 3.5.11. – Valores de $Q_{3,18}$, de $Q_{3,19}$ e de $Q_{3,20}$, com $d = 1$ em FSI, $\Delta H = 0.01$ em PSI e $k = 3.8134$ em LSI, e $E(T) = 100$, $n = 9$, $\rho = 1$ e $\theta = 0.40$.

E(T) 100	δ					δ					δ					δ				
	2	3	4	5	7	2	3	4	5	7	2	3	4	5	7	2	3	4	5	7
λ	$Q_{3,21}(0.1, 2)$					$Q_{3,21}(0.1, 1.5)$					$Q_{3,21}(0.5, 2)$					$Q_{3,21}(0.5, 1.5)$				
0,25	27,2	40,1	46,1	48,9	51,6	28,3	41,0	46,9	49,7	52,4	30,6	42,9	48,6	51,3	53,9	30,9	43,2	48,8	51,5	54,1
0,5	0,0	17,8	29,1	33,1	41,5	5,0	21,9	32,6	36,4	44,4	17,9	32,5	41,7	45,0	52,0	18,9	33,4	42,5	45,7	52,6
0,75	-40,2	-10,3	4,8	16,5	27,3	-32,8	-4,4	9,9	20,9	31,1	5,9	26,0	36,1	44,0	51,2	6,4	26,4	36,5	44,3	51,5
1,0	-44,5	-15,8	1,0	14,7	31,1	-52,0	-21,9	-4,2	10,2	27,5	7,0	25,4	36,2	45,1	55,6	4,1	23,1	34,3	43,4	54,3
1,25	-7,7	14,1	29,2	36,9	47,3	-29,1	-3,0	15,2	24,3	36,9	15,5	32,6	44,5	50,5	58,7	8,3	26,9	39,8	46,3	55,2
1,5	24,6	37,9	47,4	52,2	59,7	4,0	20,9	33,1	39,1	48,7	26,1	39,1	48,5	53,1	60,5	16,2	30,9	41,6	46,8	55,2
1,75	40,4	50,1	56,2	60,4	65,2	22,6	35,2	43,1	48,6	54,8	32,6	43,6	50,5	55,3	60,7	21,2	34,0	42,1	47,7	54,0
2,0	46,9	54,9	60,1	64,1	67,9	30,6	41,1	47,9	53,1	58,1	35,4	45,2	51,5	56,4	61,0	23,3	34,9	42,4	48,2	53,7
2,5	50,5	57,8	62,7	65,5	69,2	35,1	44,8	51,1	54,8	59,6	37,4	46,7	52,8	56,4	61,1	25,0	36,1	43,4	47,7	53,3
3,0	52,1	58,2	64,3	65,8	70,1	37,2	45,2	53,2	55,2	60,8	39,3	47,1	54,8	56,7	62,1	27,2	36,5	45,7	48,0	54,5

Tabela A 3.5.12. – Valores de $Q_{3,21}$, com $(d_1, d_2) = (0.1, 2)$, $(d_1, d_2) = (0.1, 1.5)$, $(d_1, d_2) = (0.5, 2)$, $(d_1, d_2) = (0.5, 1.5)$ em VSI, $\Delta H = 0.01$ em PSI e $k = 3.8134$ em LSI, e $E(T) = 100$, $n = 5$, $\rho = 1$ e $\theta = 0.40$.

E(T) 100	δ					δ					δ					δ				
	2	3	4	5	7	2	3	4	5	7	2	3	4	5	7	2	3	4	5	7
λ	$Q_{3,21}(0.1, 2)$					$Q_{3,21}(0.1, 1.5)$					$Q_{3,21}(0.5, 2)$					$Q_{3,21}(0.5, 1.5)$				
0,25	6,9	21,1	32,2	37,8	44,1	8,2	22,2	33,2	38,7	44,9	17,9	30,4	40,3	45,2	50,8	18,0	30,5	40,3	45,3	50,8
0,5	-0,3	17,0	27,1	35,4	43,2	-0,1	17,2	27,3	35,6	43,3	14,5	29,3	37,9	45,0	51,6	14,0	28,8	37,5	44,6	51,3
0,75	-6,8	14,1	25,4	33,4	42,4	-9,8	11,7	23,3	31,5	40,8	11,6	28,9	38,3	44,9	52,3	9,8	27,4	37,0	43,7	51,3
1,0	-6,5	15,0	27,7	35,5	45,4	-15,6	7,7	21,5	30,0	40,7	11,1	29,0	39,6	46,1	54,4	7,0	25,7	36,8	43,6	52,3
1,25	5,8	25,3	35,1	42,8	50,9	-9,3	13,3	24,7	33,7	43,0	16,2	33,5	42,3	49,2	56,3	9,5	28,2	37,6	45,1	52,8
1,5	21,6	35,1	44,5	50,4	56,8	3,9	20,5	32,0	39,2	47,0	23,4	36,6	45,8	51,5	57,7	14,5	29,2	39,4	45,9	52,8
1,75	33,8	45,2	51,9	57,1	62,0	16,0	30,4	39,0	45,6	51,7	29,0	41,2	48,4	54,0	59,2	18,6	32,6	40,8	47,3	53,2
2,0	42,2	51,0	57,4	60,9	65,2	25,3	36,7	45,0	49,5	55,0	33,5	43,7	51,0	55,1	60,0	22,2	34,1	42,7	47,4	53,2
2,5	49,2	56,3	61,1	64,9	68,1	33,6	42,9	49,2	54,1	58,4	37,2	46,0	51,9	56,6	60,6	25,0	35,6	42,7	48,2	53,0
3,0	50,7	57,9	62,2	65,8	69,3	35,5	44,9	50,5	55,2	59,8	37,8	46,9	52,3	56,9	61,3	25,5	36,3	42,8	48,3	53,6

Tabela A 3.5.13. – Valores de $Q_{3,21}$, com $(d_1, d_2) = (0.1, 2)$, $(d_1, d_2) = (0.1, 1.5)$, $(d_1, d_2) = (0.5, 2)$, $(d_1, d_2) = (0.5, 1.5)$ em VSI, $\Delta H = 0.01$ em PSI e $k = 3.8134$ em LSI, e $E(T) = 100$, $n = 5$, $\rho = 1.5$ e $\theta = 0.40$.

E(T) 100	δ					δ					δ					δ				
	2	3	4	5	7	2	3	4	5	7	2	3	4	5	7	2	3	4	5	7
λ	$Q_{3,21}(0.1, 2)$					$Q_{3,21}(0.1, 1.5)$					$Q_{3,21}(0.5, 2)$					$Q_{3,21}(0.5, 1.5)$				
0,25	19,8	33,5	40,1	44,7	49,6	21,9	35,2	41,7	46,1	50,9	26,5	39,0	45,1	49,3	53,8	27,1	39,5	45,5	49,7	54,2
0,5	-28,2	-3,0	11,5	20,7	31,5	-20,5	3,2	16,8	25,5	35,7	8,7	26,6	36,9	43,5	51,2	9,7	27,4	37,6	44,2	51,8
0,75	-45,0	-13,7	3,2	17,3	30,2	-53,1	-20,1	-2,3	12,7	26,2	6,4	26,6	37,5	46,6	54,9	3,4	24,2	35,5	44,9	53,5
1,0	4,4	22,7	36,1	43,4	52,5	-18,1	4,5	21,1	30,0	41,3	18,1	33,8	45,2	51,5	59,3	9,5	26,8	39,5	46,4	55,0
1,25	36,7	46,7	54,9	58,7	64,1	18,1	31,1	41,6	46,6	53,6	30,8	41,7	50,7	54,9	60,7	19,7	32,4	42,7	47,6	54,4
1,5	47,6	55,1	60,1	63,9	67,9	31,6	41,3	47,8	52,8	58,1	36,2	45,3	51,4	56,0	60,9	24,1	34,9	42,2	47,7	53,5
1,75	50,3	56,9	62,0	65,2	68,8	34,9	43,6	50,3	54,5	59,2	37,5	45,8	52,2	56,3	60,8	25,1	35,1	42,8	47,6	53,0
2,0	50,4	57,9	62,6	65,7	69,0	35,0	44,9	51,0	55,0	59,4	37,2	46,7	52,7	56,6	60,8	24,6	36,1	43,2	47,9	53,0
2,5	50,4	58,0	62,8	65,5	69,0	35,0	45,0	51,2	54,9	59,4	37,2	46,8	52,9	56,4	60,7	24,6	36,2	43,4	47,6	52,9
3,0	50,8	57,4	62,9	65,4	69,2	35,5	44,2	51,4	54,6	59,7	37,6	46,0	53,0	56,1	61,0	25,2	35,2	43,6	47,3	53,2

Tabela A 3.5.14. – Valores de $Q_{3,21}$, com $(d_1, d_2) = (0.1, 2)$, $(d_1, d_2) = (0.1, 1.5)$, $(d_1, d_2) = (0.5, 2)$, $(d_1, d_2) = (0.5, 1.5)$ em VSI, $\Delta H = 0.01$ em PSI e $k = 3.8134$ em LSI, e $E(T) = 100$, $n = 9$, $\rho = 1$ e $\theta = 0.40$.

E(T) 100	δ					δ					δ				
	2	3	4	5	7	2	3	4	5	7	2	3	4	5	7
λ	$Q_{3,18}$					$Q_{3,19}$					$Q_{3,20}$				
0,25	31,2	40,6	44,4	47,5	48,2	-48,2	-94,7	-146,7	-194,7	-311,6	25,8	36,0	40,0	43,4	44,1
0,5	32,4	43,6	48,3	52,9	56,0	-7,4	-23,0	-43,1	-56,4	-101,5	10,4	25,2	31,4	37,6	41,7
0,75	36,2	48,7	54,9	59,1	63,0	15,3	14,6	8,1	-1,5	-18,3	-9,7	11,8	22,5	29,6	36,4
1,0	40,3	50,9	57,6	61,4	66,6	27,8	29,2	27,0	20,9	15,7	-20,4	0,9	14,6	22,1	32,7
1,25	36,7	48,7	56,0	59,9	64,4	29,1	32,8	32,4	27,5	20,6	-18,1	4,2	17,8	25,2	33,6
1,5	30,3	41,3	48,6	53,0	57,0	22,6	25,5	26,7	24,3	16,8	-0,4	15,3	25,8	32,2	37,9
1,75	18,7	29,8	38,3	42,0	46,8	12,6	14,4	14,9	11,9	-0,8	10,4	22,6	32,0	36,1	41,4
2,0	11,3	21,2	28,9	33,8	38,5	6,9	5,4	7,3	1,3	-8,8	18,3	27,4	34,5	39,0	43,3
2,5	4,4	16,7	23,0	27,8	31,8	4,8	3,5	0,2	-4,5	-20,0	21,3	31,5	36,6	40,6	43,9
3,0	5,9	17,1	22,8	27,8	31,7	1,8	4,1	0,8	-3,7	-21,3	23,2	32,4	37,0	41,1	44,2

Tabela A 3.5.15. – Valores de $Q_{3,18}$, de $Q_{3,19}$ e de $Q_{3,20}$, com $d = 1$ em FSI, $\Delta H = 0.01$ em PSI e $k = 3.8134$ em LSI, e $E(T) = 100$, $n = 5$, $\rho = 1$ e $\theta = 0.50$.

E(T) 100	δ					δ					δ					δ				
	2	3	4	5	7	2	3	4	5	7	2	3	4	5	7	2	3	4	5	7
λ	$Q_{3,21}(0.1, 2)$					$Q_{3,21}(0.1, 1.5)$					$Q_{3,21}(0.5, 2)$					$Q_{3,21}(0.5, 1.5)$				
0,25	22,9	33,5	37,7	41,2	42,0	24,1	34,5	38,7	42,1	42,9	26,5	36,6	40,6	43,9	44,7	26,9	36,9	40,9	44,2	44,9
0,5	-3,3	13,8	21,0	28,1	32,8	1,8	18,1	24,9	31,6	36,1	15,1	29,2	35,1	40,9	44,8	16,2	30,1	35,9	41,7	45,5
0,75	-38,2	-11,1	2,3	11,3	19,9	-30,9	-5,2	7,5	16,0	24,1	7,3	25,5	34,5	40,5	46,3	7,8	25,9	34,8	40,8	46,6
1,0	-36,7	-12,4	3,1	11,6	23,7	-43,8	-18,3	-2,0	6,9	19,7	12,0	27,6	37,6	43,0	50,8	9,3	25,4	35,7	41,3	49,3
1,25	-3,3	16,3	28,1	34,6	41,9	-23,9	-0,4	13,8	21,6	30,3	18,9	34,3	43,6	48,7	54,4	12,1	28,7	38,8	44,3	50,5
1,5	26,9	38,4	46,0	50,6	54,8	6,9	21,5	31,2	37,1	42,5	28,4	39,6	47,1	51,6	55,7	18,7	31,5	40,0	45,1	49,8
1,75	39,8	48,0	54,3	57,1	60,6	21,8	32,5	40,7	44,2	48,9	31,9	41,2	48,4	51,4	55,5	20,4	31,2	39,6	43,2	48,0
2,0	46,6	52,6	57,2	60,2	63,0	30,3	38,1	44,1	48,0	51,7	35,2	42,4	48,0	51,6	55,0	22,9	31,6	38,2	42,5	46,6
2,5	49,2	55,8	59,1	61,6	63,8	33,5	42,1	46,4	49,7	52,5	35,8	44,1	48,3	51,5	54,2	23,1	33,0	38,0	41,9	45,1
3,0	50,4	56,4	59,4	62,0	64,0	35,1	42,8	46,7	50,2	52,9	37,2	44,8	48,5	51,9	54,4	24,7	33,7	38,2	42,2	45,3

Tabela A 3.5.16. – Valores de $Q_{3,21}$, com $(d_1, d_2) = (0.1, 2)$, $(d_1, d_2) = (0.1, 1.5)$, $(d_1, d_2) = (0.5, 2)$, $(d_1, d_2) = (0.5, 1.5)$ em VSI, $\Delta H = 0.01$ em PSI e $k = 3.8134$ em LSI, e $E(T) = 100$, $n = 5$, $\rho = 1$ e $\theta = 0.50$.

E(T) 100	δ					δ					δ				
	2	3	4	5	7	2	3	4	5	7	2	3	4	5	7
λ	$Q_{3,18}$					$Q_{3,19}$					$Q_{3,20}$				
0,25	27,4	34,3	36,6	38,8	40,5	-56,5	-115,5	-181,5	-243,6	-372,6	21,7	29,1	31,6	34,0	35,9
0,5	31,6	39,2	44,2	47,1	50,2	-8,8	-32,6	-54,5	-75,9	-128,1	9,3	19,3	26,0	29,8	34,0
0,75	39,8	49,2	52,5	56,4	59,5	20,1	15,4	3,3	-8,1	-29,6	-3,5	12,7	18,4	25,1	30,4
1,0	42,7	51,9	57,2	60,1	64,1	30,8	30,7	26,2	18,4	9,3	-15,5	3,1	13,7	19,6	27,6
1,25	40,2	48,3	54,7	58,2	61,3	33,0	32,3	30,4	24,3	13,7	-11,7	3,4	15,4	21,9	27,8
1,5	31,0	41,1	46,5	49,1	52,4	23,3	25,2	23,7	18,2	7,9	0,4	15,0	22,8	26,7	31,3
1,75	19,1	28,5	34,0	35,9	39,5	13,1	12,8	9,0	2,7	-14,7	10,9	21,2	27,3	29,4	33,4
2,0	9,9	18,4	22,1	25,6	29,9	5,5	2,1	-1,5	-10,9	-23,9	17,0	24,8	28,2	31,5	35,4
2,5	1,3	10,9	15,4	17,6	21,9	-4,0	-3,2	-9,6	-19,3	-37,4	18,8	26,7	30,4	32,2	35,7
3,0	1,6	11,8	15,4	18,3	23,0	-2,6	-2,1	-8,7	-17,4	-36,7	19,7	28,0	30,9	33,3	37,2

Tabela A 3.5.17. – Valores de $Q_{3,18}$, de $Q_{3,19}$ e de $Q_{3,20}$, com $d = 1$ em FSI, $\Delta H = 0.01$ em PSI e $k = 3.8134$ em LSI, e $E(T) = 100$, $n = 5$, $\rho = 1$ e $\theta = 0.60$.

$E(T)$ 100	δ					δ					δ				
	2	3	4	5	7	2	3	4	5	7	2	3	4	5	7
λ	$Q_{3,18}$					$Q_{3,19}$					$Q_{3,20}$				
0,25	26,8	34,5	40,8	43,1	46,6	-3,7	-19,4	-37,1	-53,1	-93,6	9,5	18,9	26,7	29,5	33,9
0,5	28,7	36,5	42,8	44,7	48,0	5,9	-3,6	-13,7	-30,3	-60,6	5,6	16,0	24,3	26,9	31,2
0,75	30,3	40,7	45,5	48,3	52,1	15,6	10,9	3,7	-7,5	-28,6	0,1	15,0	21,9	25,8	31,3
1,0	31,3	42,4	47,3	50,3	53,8	19,9	20,5	14,0	4,0	-13,5	-3,8	13,1	20,5	25,0	30,3
1,25	32,8	41,7	47,0	49,4	53,9	21,8	25,7	19,4	12,8	-0,7	0,0	13,2	21,1	24,7	31,5
1,5	27,6	39,1	43,3	46,5	49,5	21,3	23,4	18,7	12,2	-6,5	1,3	16,9	22,7	27,0	31,2
1,75	23,1	32,0	37,4	40,3	43,5	18,9	16,9	11,0	3,1	-8,6	8,1	18,8	25,2	28,7	32,5
2,0	15,4	25,2	30,4	32,9	36,6	9,2	9,9	4,0	2,0	-17,2	11,6	21,9	27,3	29,9	33,8
2,5	5,8	14,1	19,8	22,2	25,8	0,3	1,9	-5,3	-17,1	-32,3	17,7	24,8	29,9	32,0	35,1
3,0	2,4	9,5	14,6	18,8	21,6	-1,4	-5,0	-7,6	-16,8	-42,9	19,4	25,3	29,6	33,0	35,3

Tabela A 3.5.18. – Valores de $Q_{3,18}$, de $Q_{3,19}$ e de $Q_{3,20}$, com $d = 1$ em FSI, $\Delta H = 0.01$ em PSI e $k = 3.8134$ em LSI, e $E(T) = 100$, $n = 5$, $\rho = 1.5$ e $\theta = 0.60$.

$E(T)$ 100	δ					δ					δ				
	2	3	4	5	7	2	3	4	5	7	2	3	4	5	7
λ	$Q_{3,18}$					$Q_{3,19}$					$Q_{3,20}$				
0,25	28,3	35,0	38,3	40,5	43,4	-35,8	-82,9	-127,8	-172,1	-256,5	18,1	25,6	29,5	32,0	35,2
0,5	37,5	46,3	51,0	54,1	56,0	13,0	3,5	-8,2	-19,4	-57,5	0,9	14,7	22,3	27,2	30,1
0,75	43,3	51,9	57,5	60,7	64,0	32,3	29,6	27,1	21,1	10,2	-14,6	2,8	14,2	20,6	27,2
1,0	37,8	47,3	52,2	55,6	58,5	28,5	29,2	29,3	24,5	8,2	-6,8	9,4	17,9	23,6	28,7
1,25	22,3	32,0	37,5	40,6	43,0	15,3	19,1	15,7	10,5	-6,1	8,0	19,5	26,1	29,7	32,6
1,5	5,5	18,1	22,0	25,7	28,8	0,8	2,6	-0,8	-10,2	-31,7	13,5	25,0	28,6	32,0	34,8
1,75	1,5	11,3	16,4	19,2	23,0	-1,7	-1,9	-3,1	-10,4	-35,4	17,9	26,0	30,3	32,6	35,8
2,0	0,4	10,4	14,5	17,7	21,7	-1,6	-2,5	-11,6	-19,5	-37,4	18,5	26,7	30,1	32,7	36,0
2,5	0,4	10,0	15,1	18,6	21,9	-4,5	-3,1	-10,7	-16,3	-43,1	18,7	26,6	30,7	33,6	36,2
3,0	0,1	10,3	15,2	19,2	22,5	-4,5	-5,3	-12,9	-17,0	-42,5	18,5	26,8	30,8	34,1	36,8

Tabela A 3.5.19. – Valores de $Q_{3,18}$, de $Q_{3,19}$ e de $Q_{3,20}$, com $d = 1$ em FSI, $\Delta H = 0.01$ em PSI e $k = 3.8134$ em LSI, e $E(T) = 100$, $n = 9$, $\rho = 1$ e $\theta = 0.60$.

$E(T)$ 100	δ					δ					δ					δ				
	2	3	4	5	7	2	3	4	5	7	2	3	4	5	7	2	3	4	5	7
λ	$Q_{3,21}(0.1, 2)$					$Q_{3,21}(0.1, 1.5)$					$Q_{3,21}(0.5, 2)$					$Q_{3,21}(0.5, 1.5)$				
0,25	18,6	26,4	28,9	31,4	33,4	19,9	27,5	30,0	32,5	34,4	22,4	29,8	32,2	34,6	36,5	22,8	30,1	32,6	34,9	36,8
0,5	-4,5	7,0	14,7	19,2	24,0	0,6	11,6	19,0	23,2	27,7	14,1	23,6	29,9	33,6	37,5	15,2	24,6	30,9	34,4	38,3
0,75	-30,4	-10,1	-2,8	5,6	12,3	-23,5	-4,3	2,6	10,5	16,9	12,5	26,1	31,0	36,6	41,2	13,0	26,6	31,4	37,0	41,5
1,0	-31,0	-10,0	2,0	8,8	17,8	-37,9	-15,8	-3,1	4,0	13,5	15,6	29,1	36,9	41,2	47,1	13,0	27,0	35,0	39,4	45,5
1,25	2,3	15,5	26,0	31,7	36,9	-17,1	-1,3	11,3	18,1	24,3	23,4	33,7	41,9	46,4	50,5	16,8	28,1	37,0	41,9	46,3
1,5	27,5	38,1	43,8	46,6	50,0	7,7	21,2	28,5	32,0	36,3	29,0	39,4	45,0	47,7	51,0	19,4	31,2	37,6	40,7	44,4
1,75	40,1	47,0	51,2	52,6	55,2	22,3	31,2	36,6	38,4	41,9	32,3	40,1	44,8	46,4	49,4	20,8	30,0	35,4	37,3	40,8
2,0	45,8	50,9	53,2	55,3	57,9	29,2	35,9	38,8	41,6	44,9	34,2	40,4	43,1	45,6	48,8	21,7	29,1	32,3	35,4	39,1
2,5	47,6	52,7	55,1	56,2	58,5	31,3	38,0	41,1	42,7	45,7	33,8	40,2	43,3	44,7	47,6	20,6	28,3	31,9	33,7	37,2
3,0	48,2	53,5	55,5	57,0	59,5	32,1	39,1	41,6	43,6	46,9	34,4	41,2	43,6	45,5	48,7	21,3	29,4	32,3	34,6	38,4

Tabela A 3.5.20. – Valores de $Q_{3,21}$, com $(d_1, d_2) = (0.1, 2)$, $(d_1, d_2) = (0.1, 1.5)$, $(d_1, d_2) = (0.5, 2)$, $(d_1, d_2) = (0.5, 1.5)$ em VSI, $\Delta H = 0.01$ em PSI e $k = 3.8134$ em LSI, e $E(T) = 100$, $n = 5$, $\rho = 1$ e $\theta = 0.60$.

E(T) 100	δ					δ					δ					δ				
	2	3	4	5	7	2	3	4	5	7	2	3	4	5	7	2	3	4	5	7
λ	$Q_{3,21}(0.1, 2)$					$Q_{3,21}(0.1, 1.5)$					$Q_{3,21}(0.5, 2)$					$Q_{3,21}(0.5, 1.5)$				
0,25	3,1	13,3	21,6	24,6	29,3	4,5	14,5	22,7	25,7	30,2	14,7	23,6	30,9	33,6	37,7	14,7	23,7	31,0	33,6	37,7
0,5	-0,9	10,2	19,1	21,8	26,5	-0,6	10,4	19,3	22,0	26,7	14,0	23,5	31,1	33,4	37,4	13,5	23,0	30,7	33,0	37,0
0,75	-4,2	11,3	18,5	22,6	28,3	-7,1	8,8	16,2	20,5	26,3	13,8	26,6	32,6	36,0	40,7	12,0	25,1	31,2	34,6	39,5
1,0	-0,9	15,5	22,7	27,1	32,2	-9,5	8,2	16,1	20,8	26,4	15,7	29,4	35,4	39,1	43,4	11,8	26,1	32,4	36,3	40,8
1,25	12,9	24,4	31,3	34,4	40,3	-1,1	12,3	20,3	23,9	30,7	22,5	32,8	38,9	41,6	46,9	16,3	27,4	34,0	37,0	42,6
1,5	23,2	35,4	39,9	43,2	46,5	5,8	20,8	26,3	30,4	34,4	24,9	36,8	41,2	44,5	47,7	16,1	29,5	34,4	38,0	41,6
1,75	34,3	41,9	46,5	49,0	51,7	16,7	26,3	32,2	35,3	38,7	29,6	37,7	42,7	45,3	48,3	19,2	28,6	34,3	37,3	40,6
2,0	40,0	47,0	50,7	52,5	55,1	22,5	31,5	36,3	38,6	42,0	31,0	39,0	43,3	45,3	48,4	19,3	28,7	33,7	36,0	39,6
2,5	46,4	51,1	54,3	55,7	57,7	29,9	36,0	40,3	42,1	44,7	33,7	39,5	43,5	45,2	47,7	20,9	27,8	32,6	34,7	37,6
3,0	48,0	51,8	54,5	56,7	58,2	31,8	36,8	40,4	43,3	45,3	34,3	39,1	42,6	45,4	47,3	21,3	27,0	31,2	34,5	36,8

Tabela A 3.5.21. – Valores de $Q_{3,21}$, com $(d_1, d_2) = (0.1, 2)$, $(d_1, d_2) = (0.1, 1.5)$, $(d_1, d_2) = (0.5, 2)$, $(d_1, d_2) = (0.5, 1.5)$ em VSI, $\Delta H = 0.01$ em PSI e $k = 3.8134$ em LSI, e $E(T) = 100$, $n = 5$, $\rho = 1.5$ e $\theta = 0.60$.

E(T) 100	δ					δ					δ					δ				
	2	3	4	5	7	2	3	4	5	7	2	3	4	5	7	2	3	4	5	7
λ	$Q_{3,21}(0.1, 2)$					$Q_{3,21}(0.1, 1.5)$					$Q_{3,21}(0.5, 2)$					$Q_{3,21}(0.5, 1.5)$				
0,25	12,3	20,4	24,5	27,2	30,7	14,6	22,5	26,5	29,1	32,5	19,6	27,0	30,8	33,3	36,5	20,3	27,6	31,4	33,8	37,0
0,5	-22,9	-5,7	3,7	9,7	13,4	-15,5	0,7	9,5	15,2	18,6	12,5	24,7	31,4	35,7	38,3	13,4	25,5	32,1	36,4	39,0
0,75	-29,3	-9,7	3,2	10,5	17,9	-36,6	-15,9	-2,3	5,4	13,3	16,5	29,2	37,5	42,2	47,0	13,8	26,9	35,5	40,3	45,3
1,0	13,9	27,0	33,8	38,5	42,5	-6,3	9,8	18,3	24,0	29,0	26,3	37,4	43,3	47,3	50,7	18,6	30,9	37,4	41,8	45,6
1,25	37,2	45,1	49,5	52,0	54,0	18,7	28,9	34,7	37,9	40,5	31,3	39,9	44,8	47,5	49,7	20,3	30,2	35,9	39,1	41,6
1,5	43,6	51,1	53,4	55,6	57,5	26,3	36,0	39,1	42,0	44,4	31,3	40,4	43,3	45,9	48,2	18,3	29,1	32,5	35,7	38,4
1,75	46,9	52,2	55,0	56,5	58,5	30,5	37,4	41,0	43,0	45,7	33,3	39,9	43,4	45,2	47,8	20,0	28,0	32,2	34,4	37,5
2,0	47,4	52,7	54,9	56,6	58,7	31,1	38,1	40,9	43,1	45,9	33,5	40,2	42,9	45,0	47,7	20,2	28,2	31,5	34,0	37,3
2,5	47,6	52,7	55,3	57,2	58,9	31,3	38,0	41,5	43,9	46,1	33,6	40,0	43,4	45,8	47,9	20,3	28,0	32,1	34,9	37,5
3,0	47,4	52,8	55,4	57,5	59,2	31,1	38,1	41,5	44,3	46,6	33,4	40,2	43,5	46,1	48,3	20,1	28,2	32,2	35,4	38,0

Tabela A 3.5.22. – Valores de $Q_{3,21}$, com $(d_1, d_2) = (0.1, 2)$, $(d_1, d_2) = (0.1, 1.5)$, $(d_1, d_2) = (0.5, 2)$, $(d_1, d_2) = (0.5, 1.5)$ em VSI, $\Delta H = 0.01$ em PSI e $k = 3.8134$ em LSI, e $E(T) = 100$, $n = 9$, $\rho = 1$ e $\theta = 0.60$.

E(T) 100	δ					δ					δ				
	2	3	4	5	7	2	3	4	5	7	2	3	4	5	7
λ	$Q_{3,18}$					$Q_{3,19}$					$Q_{3,20}$				
0,25	19,6	24,1	25,8	26,3	27,1	-73,2	-148,9	-229,2	-314,0	-479,5	13,3	18,2	20,0	20,5	21,4
0,5	29,0	34,9	36,9	38,8	41,2	-12,9	-41,9	-74,6	-103,3	-169,6	5,8	13,7	16,4	18,9	22,0
0,75	40,6	45,8	49,4	50,7	52,9	21,1	9,7	-3,0	-22,2	-50,6	-2,1	6,8	13,1	15,3	19,1
1,0	46,3	53,4	55,6	57,2	58,5	35,1	32,9	23,4	12,4	-4,7	-8,3	6,1	10,4	13,6	16,4
1,25	42,5	48,7	52,1	54,0	55,7	35,5	32,9	26,5	16,8	1,2	-7,4	4,4	10,7	14,2	17,4
1,5	32,0	37,8	41,1	42,7	44,7	24,5	21,0	16,0	7,8	-6,9	1,9	10,2	15,0	17,4	20,3
1,75	17,1	22,6	25,0	26,6	28,8	10,9	5,6	-3,5	-11,5	-35,0	8,6	14,7	17,3	19,1	21,5
2,0	3,4	8,5	12,1	13,8	15,6	-1,3	-9,8	-14,5	-28,6	-49,2	11,0	15,7	19,1	20,6	22,2
2,5	-6,7	-1,3	1,9	3,9	5,5	-12,5	-17,3	-27,2	-39,1	-66,2	12,2	16,7	19,3	20,9	22,2
3,0	-5,6	-0,9	2,9	3,3	5,2	-10,2	-16,7	-24,6	-39,0	-68,3	13,8	17,7	20,8	21,1	22,6

Tabela A 3.5.23. – Valores de $Q_{3,18}$, de $Q_{3,19}$ e de $Q_{3,20}$, com $d = 1$ em FSI, $\Delta H = 0.01$ em PSI e $k = 3.8134$ em LSI, e $E(T) = 100$, $n = 5$, $\rho = 1$ e $\theta = 0.75$.

E(T) 100	δ					δ					δ					δ				
	2	3	4	5	7	2	3	4	5	7	2	3	4	5	7	2	3	4	5	7
λ	$Q_{3,21}(0.1, 2)$					$Q_{3,21}(0.1, 1.5)$					$Q_{3,21}(0.5, 2)$					$Q_{3,21}(0.5, 1.5)$				
0,25	9,9	15,0	16,9	17,4	18,3	11,3	16,3	18,2	18,6	19,5	14,1	18,9	20,7	21,2	22,1	14,5	19,3	21,1	21,6	22,5
0,5	-8,5	0,5	3,6	6,5	10,1	-3,2	5,4	8,4	11,2	14,6	10,8	18,3	20,8	23,2	26,1	12,0	19,3	21,9	24,2	27,1
0,75	-28,7	-17,5	-9,6	-6,8	-2,0	-21,9	-11,3	-3,8	-1,1	3,4	13,7	21,2	26,5	28,3	31,6	14,1	21,6	26,9	28,8	32,0
1,0	6,1	-6,6	-1,7	2,0	5,1	-29,3	-12,1	-7,0	-3,2	0,2	20,9	31,4	34,5	36,9	38,9	18,4	29,3	32,5	34,9	37,0
1,25	6,1	16,4	21,9	25,0	27,8	-12,6	-0,3	6,3	10,0	13,4	26,3	34,4	38,7	41,1	43,3	20,1	28,8	33,5	36,1	38,5
1,5	28,6	34,7	38,1	39,9	42,0	9,1	16,8	21,2	23,4	26,1	30,1	36,0	39,4	41,1	43,2	20,6	27,4	31,2	33,1	35,5
1,75	38,6	42,7	44,5	45,7	47,3	20,3	25,6	27,9	29,4	31,6	30,6	35,2	37,2	38,5	40,4	18,8	24,2	26,5	28,1	30,3
2,0	41,9	45,0	47,2	48,2	49,2	24,1	28,1	31,0	32,3	33,7	29,4	33,1	35,8	37,0	38,3	16,1	20,5	23,7	25,1	26,7
2,5	43,3	46,2	47,9	48,9	49,8	25,8	29,5	31,7	33,1	34,2	28,4	32,1	34,2	35,5	36,6	14,2	18,5	21,1	22,7	24,0
3,0	44,4	46,9	48,9	49,1	50,1	27,1	30,4	33,0	33,3	34,6	29,6	32,7	35,3	35,5	36,8	15,5	19,3	22,3	22,6	24,2

Tabela A 3.5.24. – Valores de $Q_{3,21}$, com $(d_1, d_2) = (0.1, 2)$, $(d_1, d_2) = (0.1, 1.5)$, $(d_1, d_2) = (0.5, 2)$, $(d_1, d_2) = (0.5, 1.5)$ em VSI, $\Delta H = 0.01$ em PSI e $k = 3.8134$ em LSI, e $E(T) = 100$, $n = 5$, $\rho = 1$ e $\theta = 0.75$.

A 3.5.3. – Exemplo do Input no R para simulação dos AATS em CAPSI

```

rm(list=ls())

### Parâmetros alteráveis
alfa=1069.0184      # Parâmetro de escala do tempo de vida da Weibull
delta=7            # Parâmetro de forma do tempo de vida Weibull
u0=0              # Média da qualidade na fase de controlo
s0=1              # Desvio padrão da qualidade na fase de controlo
u1=3              # Média da qualidade depois de uma falha
s1=1              # Desvio padrão da qualidade após uma falha
n=5               # Dimensão da amostra
L=3               # Coeficiente dos limites de controlo
k=3.8134         # Constante de escala do método LSI
deltah=0.001     # Delta
teta=0.75        # Ponderação dos intervalos do método LSI
tempo=10000      # Tempo de simulação

Fweibull=function(o,alfa,delta)
{
  re=runif(1, min=0, max=1)
  if (o%%2 != 0) {
    tvs= alfa*exp((1/delta)*log(-log(re)))
  }
  else
    {tvs= alfa*exp((1/delta)*log(-log(1-re)))}
  tvs
}

amostsemalter=function(j,u0,s0,n)
{
  r1=runif(1, min=0, max=1)
  r2=runif(1, min=0, max=1)
  if (j%%2 != 0) {
    m=u0+(s0/sqrt(n))*sqrt(-2*log(r1))*cos(2*pi*r2)
  }
  else
    {m=u0+(s0/sqrt(n))*sqrt(-2*log(r1))*sin(2*pi*r2)}
  m
}

amostcomalter=function(j,u1,s1,n)
{
  r1=runif(1, min=0, max=1)
  r2=runif(1, min=0, max=1)
  if (j%%2 != 0) {
    m=u1+(s1/sqrt(n))*sqrt(-2*log(r1))*cos(2*pi*r2)
  }
  else
    {m=u1+(s1/sqrt(n))*sqrt(-2*log(r1))*sin(2*pi*r2)}
  m
}

min=1
FI0=1/2
FI3=(1/2)*exp(-abs(L))

randseed=2
teta=0.75
somatkd=0
somatk=0
somatvs=0
namost=0
namosd=0
nk=0
g=0
o=1

while (o <= tempo){
  q=2
  t      vs=Fweibull(o,alfa,delta)
        somatvs=somatvs+tvs
}

```



```

# instante de amostragem inicial
tp1=alfa*exp((1/delta)*log(delta))
tk=teta*k*FI0+(1-teta)*tp1
j=1
while (tk < tvs) {
    namost=namost+1
    m=amostsealter(j,u0,s0,n)
    ui=(m-u0)/(s0/sqrt(n))
    # instante de amostragem no caso de falso alarme
    if (ui>L | ui<(-L)) {
        tp=tp1*(exp(log(q)/delta)-
exp(log(q-1)/delta))
        tk=tk+(1-teta)*tp+teta*k*FI3
        q=q+1
    }
    # instante de amostragem com o processo sob controle
    if (ui<=L & ui>=(-L)) {
        tp=tp1*(exp(log(q)/delta)-
exp(log(q-1)/delta))
        FI=(1/2)*exp(-abs(ui))
        tk=tk+(1-teta)*tp+teta*k*FI
        q=q+1
    }
    j=j+1
}
somat=tk
namost=namost+1
# intervalo de tempo entre o instante em que ocorre a falha e a amostra
seguinte
g=g+tk-tvs
j=1
d=0
while (d==0) {
    m=amostcomalter(j,u1,s1,n)
    nk=nk+1
    ui=(m-u0)/(s0/sqrt(n))
    # instante de amostragem com processo fora de controle
    if (ui<L & ui>(-L)) {
        tp=tp1*(exp(log(q)/delta)-exp(log(q-1)/delta))
        FI=(1/2)*exp(-abs(ui))
        namosd=namosd+1
        somatkd=somatkd+(1-teta)*tp+teta*k*FI
        if ((1-teta)*tp+teta*k*FI < min)
{min=(1-teta)*tp+teta*k*FI} else {}
        q=q+1
    }
    j=j+1
    if (ui>L | ui<(-L)) {d=1} else {d=0}
}
o=o+1
# controle do tempo de simulação
if (o%%1000) {o} else {}
}

```

###resultados da simulação

#tempo médio de vida - E(T)

somatvs/tempo

#intervalo médio de amostragem sob controle - E(D₀)

somat/namost

#número médio de amostras sob controle - E(N₀)

namost/tempo

#intervalo H - E(G)

g/tempo

#probabilidade de detecção da falha -

1/(nk/tempo)

#intervalo médio de amostragem fora de controle - E(D_λ)

somatkd/namosd

#menor intervalo de amostragem - d₁

min

#intervalo médio de mau funcionamento - AATS

(somatkd+g)/tempo

A 3.5.4. – PrintScreen de um Protótipo para simular AATS's de CAPSI



Fig. A 3.1 – Distribuições por amostragem, simuladas a partir das diferentes distribuições e ajustadas à curva de Gauss estandardizada e $n = 5$.

CAPÍTULO IV – MEDIDAS DE DESEMPENHO ESTATÍSTICO

4.1. Uma Nova Medida do Desempenho Estatístico de Cartas de Controlo: ANSIC

A 4 – Input no SAS, para obter d em FSI

Example the Input in Software SAS, for calculate the sampling period d in FSI method with $\beta = 2$, $\delta = 3$ and $(d_1, d_2) = (0.1, 1.9)$

```

data init;                                ** supply initial values for Newton Method**;
    d=1;
run;
** delta is value of L; with (d1, d2) sampling pair of VSI method**
proc model data=init;
    d1=0.1; d2=1.9; delta=3;

** AATSVSI = AATSPSI ⇔ eq.one = AATSVSI - AATSPSI with AATSVSI in function of d, d1 and d2
**

eq.one = (d1**2*(2*(probnorm(3)-probnorm(probit((2*probnorm(3)*(d-d1)+
d2-d)/(2*(d2-d1))))))+d2**2*(2*probnorm(probit((2*probnorm(3)*(d-d1)+d2-d)/(2*(d2-
d1))))-1))/(2*(d1*(2*(probnorm(3)-probnorm(probit((2*probnorm(3)*(d-d1)+d2-d)/(2*(d2-
d1))))))+d2*(2*probnorm(probit((2*probnorm(3)*(d-d1)+d2-d)/(2*(d2-d1))))-1)))
+(d1*(probnorm(3-delta*sqrt(5))-probnorm(probit((2*probnorm(3)*(d-d1)+d2-d)/(2*(d2-
d1))-delta*sqrt(5))-probnorm(-3-delta*sqrt(5))+probnorm(-(probit((2*probnorm(3)*(d-
d1)+d2-d)/(2*(d2-d1))))-delta*sqrt(5)))
+d2*(probnorm(probit((2*probnorm(3)*(d-d1)+d2-d)/(2*(d2-d1)))-delta*sqrt(5))-
probnorm(-(probit((2*probnorm(3)*(d-d1)+d2-d)/(2*(d2-d1)))-delta*sqrt(5))))/(1-
probnorm(3-delta*sqrt(5))+probnorm(-3-delta*sqrt(5)))-0.493;
solve d/itprint out=solved outpredict;
run;

proc print data=solved;
run;

```

Texto escrito conforme o Acordo Ortográfico - convertido pelo Lince.