



Telma Margarida Cotovio Guerra Santos

Mestre em Matemática Aplicada

Controle Ótimo de Fluidos não Newtonianos

Dissertação para obtenção do Grau de Doutor em
Matemática

Orientador: Luís Manuel Trabucho de Campos, Professor
Catedrático, Faculdade de Ciências e Tecnologia da
Universidade Nova de Lisboa

Co-orientador: Adélia da Costa Sequeira dos Ramos
Silva, Professora Catedrática, Instituto Superior Técnico
da Universidade de Lisboa

Júri:

Presidente: Prof. Doutor Jorge Orestes Lasbarrères Cerdeira
Arguentes: Prof. Doutor Hugo João Reinhardt Beirão da Veiga
Prof. Doutora Ana Leonor Mestre Vicente Silvestre

Vogais: Prof. Doutora Maria Luísa Martins Macedo de Faria Mascarenhas
Prof. Doutora Adélia da Costa Sequeira dos Ramos Silva
Prof. Doutor Luís Manuel Trabucho de Campos
Prof. Doutor Jorge Filipe Duarte Tiago



FAÇULDADE DE
CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA

Dezembro de 2013



Telma Margarida Cotovio Guerra Santos

Mestre em Matemática Aplicada

Controle Ótimo de Fluidos não Newtonianos

Dissertação para obtenção do Grau de Doutor em
Matemática

Orientador: Luís Manuel Trabucho de Campos, Professor
Catedrático, Faculdade de Ciências e Tecnologia da
Universidade Nova de Lisboa

Co-orientador: Adélia da Costa Sequeira dos Ramos
Silva, Professora Catedrática, Instituto Superior Técnico
da Universidade de Lisboa

Júri:

Presidente: Prof. Doutor Jorge Orestes Lasbarrères Cerdeira
Arguentes: Prof. Doutor Hugo João Reinhardt Beirão da Veiga
Prof. Doutora Ana Leonor Mestre Vicente Silvestre

Vogais: Prof. Doutora Maria Luísa Martins Macedo de Faria Mascarenhas
Prof. Doutora Adélia da Costa Sequeira dos Ramos Silva
Prof. Doutor Luís Manuel Trabucho de Campos
Prof. Doutor Jorge Filipe Duarte Tiago



Dezembro de 2013

Controle Ótimo de Fluidos não Newtonianos

Copyright em nome de

Telma Margarida Cotovio Guerra Santos, FCT/UNL e UNL

A Faculdade de Ciências e Tecnologia e a Universidade Nova de Lisboa têm o direito, perpétuo e sem limites geográficos, de arquivar e publicar esta dissertação através de exemplares impressos reproduzidos em papel ou de forma digital, ou por qualquer outro meio conhecido ou que venha a ser inventado, e de a divulgar através de repositórios científicos e de admitir a sua cópia e distribuição com objectivos educacionais ou de investigação, não comerciais, desde que seja dado crédito ao autor e editor.

A elaboração desta tese beneficiou de uma Bolsa de Estudos com a referência SFRH/BD/38326/2007, concedida pela Fundação para a Ciência e Tecnologia (FCT) de Abril de 2008 a Dezembro de 2010 e do regime de isenção de propinas de Doutoramento, no âmbito do Protocolo de Cooperação existente entre a Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa e o Instituto Politécnico de Setúbal. Foi também apoiada no âmbito do Projecto *Optimization Methods in Continuum Mechanics*, CMA/FCT.UNL PTDC/MAT/109973/2009, financiado pela FCT.

Agradecimentos

Durante todo o tempo que levei a realizar este trabalho, nas suas diferentes fases, pude contar com a preciosa ajuda e apoio de várias pessoas, sem os quais me teria faltado a coragem e a motivação para seguir em frente.

Em primeiro lugar, e como católica que me considero, agradeço a Deus pela perseverança que me deu, pela força para resistir, mesmo nas alturas mais difíceis, quando eu própria não acreditava ser capaz.

Aos Professores Luís Trabucho e Adélia Sequeira, agradeço por terem aceite ser meus orientadores, naquela que foi a fase mais crítica deste meu percurso. Pelas sugestões e críticas que ajudaram a construir e que enriqueceram este trabalho. O meu muito obrigada aos dois! Se continuei, foi pela preciosa ajuda e disponibilidade que me prestaram. Foi um privilégio ter sido vossa aluna!

Ao meu colega e amigo de longa data, Jorge Tiago, expesso o meu profundo agradecimento pelas horas, dias, semanas sem fim que passámos juntos nos últimos dois anos, a rever conceitos, a tentar perceber o software utilizado, a discutir resultados, a delinear objectivos. Jorge, foste incansável! Obrigada por acreditares em mim quando nem eu própria acreditava. Muito obrigada por tudo! Não tenho palavras...

Aos Professores Luísa Mascarenhas e Hugo Beirão da Veiga não posso deixar de agradecer toda a ajuda que me prestaram na fase mais difícil, contribuindo para que este trabalho fosse levado a avante. Muito obrigado!

Aos meus colegas de trabalho, que são também amigos, Otília, Anabela, Clara, Raquel, Eugénia, João Paulo, o meu muito obrigado pela amizade sempre demonstrada e também por tantas vezes me libertarem de tarefas para que pudesse dispôr de mais tempo para a investigação. Fica a promessa de retribuir quando precisarem!

Como não podia deixar de ser, agradeço ao meu marido, Nuno, por ter compreendido as minhas ausências, o tempo que estive indisponível, e por todo o apoio moral que me prestou nas alturas mais difíceis. Aos meus filhos, Martim e Tomás, pequeninos, que se viram privados da presença da mãe em tantas ocasiões, sem perceberem bem porquê! Aos meus pais e irmã que me incentivaram e apoiaram incondicionalmente desde o início. Obrigado a todos vocês, que são as pessoas mais importantes da minha vida!

A todas as pessoas, colegas, amigos, familiares que não foram aqui citados, mas que directa ou indirectamente contribuíram para a elaboração deste trabalho, deixo aqui o meu profundo agradecimento!

aos meus filhos, Martim e Tomás

Resumo

O estudo de problemas de controlo óptimo tem conhecido um crescente impulso na últimas décadas, motivado principalmente pelas aplicações que surgiram nas mais diversas áreas da engenharia. A necessidade de controlar sistemas dinâmicos e de obter objectivos pré-determinados usando controlos, foi o principal motor desta evolução. Em particular, a aplicação da teoria do controlo aos fluidos, tem sido alvo de grande interesse por parte dos investigadores na área.

Este trabalho baseia-se no estudo de problemas de controlo óptimo de uma classe de fluidos não-Newtonianos, cuja viscosidade varia com a taxa de cisalhamento.

Em primeiro lugar apresenta-se um conjunto de resultados teóricos relacionados com o estudo das equações de estado, do tipo sistemas de Navier-Stokes generalizados, no caso estacionário, e com a existência de solução para o problema de controlo para um fluido não-Newtoniano, incompressível regido por essas equações, assim como a dedução das condições de optimalidade de 1ª ordem. Em segundo lugar, apresentam-se simulações numéricas de problemas de controlo do tipo "Assimilação de Dados" aplicados à Hemodinâmica, assunto de grande interesse em Biomedicina.

Consideram-se geometrias bidimensionais e tridimensionais com interesse fisiológico, nomeadamente artérias com estenoses idealizadas, assim como uma artéria cerebral real em que se desenvolveu um aneurisma sacular.

Através da resolução de problemas do tipo "Assimilação de Dados" na forma de problemas de controlo, o objectivo é obter soluções numéricas para os problemas propostos que coincidam, a menos de um determinado erro, com dados medidos em algumas partes do domínio, impondo um controlo do tipo Dirichlet na fronteira de entrada do fluido.

Usando a abordagem "discretizar e em seguida otimizar" resolveu-se o problema de controlo óptimo cujo funcional de custo proposto é uma ponderação que consegue recuperar com precisão os perfis da velocidade e da tensão tangencial na parede da geometria.

Termos chave: Controlo Óptimo, Assimilação de Dados, Hemodinâmica, Fluidos não-Newtonianos.

Abstract

Optimal control problems had a tremendous advance in the last few decades mainly motivated by several areas of engineering applications. The requirement of handling with dynamic systems to obtain some prescribed targets was the main force leading this evolution. In particular, applications of optimal control techniques to fluid flows has been a matter of great interest for researchers in the field.

This thesis is based on the study of control problems for a class of non-Newtonian fluids, with shear-dependent viscosity.

First, we present some theoretical results related to the steady, Navier-Stokes generalized state equations, and to the existence of solution for the control problem of a non-Newtonian, incompressible fluid governed by these equations, as well as the derivation of the first order optimality conditions. On the other hand we present numerical simulations of Data Assimilation control problems applied to Hemodynamics with great interest in Biomedicine.

We consider bidimensional and tridimensional geometries with physiological interest, in particular idealized stenosed arteries are studied and also a realistic cerebral artery with a saccular aneurysm is considered.

The goal is to obtain numerical solutions to the proposed problems implementing Data Assimilation techniques in a variational approach and prescribing a Dirichlet control at the inlet boundary. The results should coincide, within a certain error, to observed data measured at certain parts of the domain.

Using a "discretize then optimize" approach, we solve the nonlinear optimal control problem and we propose a weighted cost function that accurately recovers both the velocity and wall shear stress profiles.

Keywords: Optimal Control, Data Assimilation, Hemodynamics, non-Newtonian Fluids.

Apoios	iii
Agradecimentos	v
Resumo	ix
Abstract	xi
Lista de Figuras	xv
Lista de Tabelas	xix
Lista de Abreviaturas e Notação	xx
1 Introdução	1
1.1 O problema de controlo óptimo distribuído	3
1.2 Simulações numéricas aplicadas à Hemodinâmica	5
1.3 Descrição geral do conteúdo da dissertação	7
2 Nota Introdutória à Mecânica dos Fluidos	9
2.1 Noções principais	10
2.2 Propriedades dos fluidos	10
2.3 Fluidos Newtonianos e não-Newtonianos	12
2.4 Dedução das equações básicas da dinâmica de fluidos	13
2.5 Particularidades sobre as condições de fronteira	19
3 Controlo Distribuído para Problemas não-Newtonianos	25
3.1 Resultados clássicos e algumas hipóteses a considerar	26
3.2 Estudo da equação de estado	31
3.3 O problema de controlo óptimo e existência de solução	40
3.4 Estimativas de Lipschitz	45
3.5 Linearização do sistema	48

3.6	Diferenciabilidade do estado com respeito ao controlo	52
3.7	Condições de optimalidade de 1ª ordem	59
3.8	Existência de solução para o problema de controlo de fluidos electro-reológicos	61
4	Generalidades sobre a Hemodinâmica	73
4.1	Constituição do sangue	74
4.2	A viscosidade do sangue e o seu comportamento não-Newtoniano	75
4.3	Modelos para a viscosidade do sangue	76
5	Simulações de Problemas de Controlo Óptimo Aplicados à Hemodinâmica - Caso Bidimensional	81
5.1	O Método da "Assimilação de Dados"	82
5.2	Discretização do problema	85
5.2.1	Programação Quadrática Sequencial (SQP)	90
5.3	Resultados Numéricos	91
5.3.1	Escolha dos parâmetros e validação	92
5.3.2	Robustez dos parâmetros	98
5.3.3	Efeito da filtragem de ruído	103
6	Simulações de Problemas de Controlo Óptimo Aplicados à Hemodinâmica - Caso Tridimensional	107
6.1	O Método "Assimilação de Dados" e discretização	108
6.2	Resultados Numéricos	111
6.2.1	Cilindro	112
6.2.2	Canal curvo	116
6.2.3	Estenose	124
6.2.4	Aneurisma	129
7	Conclusões e Perspectivas de Trabalhos Futuros	137
8	Anexo	141
8.1	Anexo A - Simulação numérica de um problema de controlo distribuído num cilindro	141
8.2	Anexo B - Resultados clássicos	146
	Referências Bibliográficas	151

Lista de Figuras

2.1	Canal bidimensional.	20
2.2	Parte da fronteira de saída. Esquerda: efeito da condição de fronteira Neumann homogénea, à saída; direita: efeito da condição de fronteira pressão nula.	22
5.1	Representação do domínio computacional em dimensão 2.	83
5.2	Magnitude do campo de velocidades evidenciando a região de recirculação. À esquerda: caso não-Newtoniano; à direita: caso Newtoniano.	91
5.3	Magnitude do WSS obtida através da resolução do problema directo.	92
5.4	À esquerda: controlo para $(10^6, 10^6, 10^{-3})$; à direita: controlo para $(10^6, 0, 10^{-3})$	95
5.5	À esquerda: controlo para $(0, 10^6, 10^{-3})$; à direita: controlo para $(10^6, 10^6, 0)$	95
5.6	Magnitude do campo de velocidades evidenciando a zona de recirculação. À esquerda: problema directo (dados do problema); à direita: problema controlado.	96
5.7	Linhas de corrente do campo de velocidades. À esquerda: problema directo; à direita: problema controlado.	96
5.8	Perfil do campo de velocidades. À esquerda: problema directo; à direita: problema controlado.	97
5.9	Superfícies de nível da pressão. À esquerda: problema directo; à direita: problema controlado.	97
5.10	Magnitude do WSS obtida com o problema controlado.	97
5.11	Diferentes Leis de Potência com expoente 4 (à esquerda) e expoente 9 (à direita) como perfis de entrada para o campo de velocidades.	98
5.12	Lei da Potência com expoente 4. Esquerda: $(10^6, 10^6, 10^{-3})$; direita: $(10^6, 0, 10^{-3})$	100
5.13	Lei da Potência com expoente 4. Esquerda: $(0, 10^6, 10^{-3})$; direita: $(10^6, 10^6, 0)$	100
5.14	Lei da Potência com expoente 9. Esquerda: $(10^6, 10^6, 10^{-3})$; direita: $(10^6, 0, 10^{-3})$	101
5.15	Lei da Potência com expoente 9. Esquerda: $(0, 10^6, 10^{-3})$; direita: $(10^6, 10^6, 0)$	101
5.16	Canto superior esquerdo: estenose com $d = 3R/4$; canto superior direito: estenose com $d = R$; canto inferior esquerdo: estenose com $d = 5R/4$; canto inferior direito: canal. DOFS: 100000 aproximadamente.	102
5.17	À esquerda: abordagem directa; à direita: resolução do problema DA.	105

6.1	Cilindro: domínio computacional.	112
6.2	Cilindro: representação do domínio computacional e de Ω_{part}	112
6.3	Magnitude da velocidade no cilindro. À esquerda: problema directo; à direita: problema controlado com controlo unidimensional.	113
6.4	Superfícies de nível da pressão no cilindro. À esquerda: problema directo; à direita: problema controlado com controlo unidimensional.	113
6.5	Magnitude da velocidade no cilindro para o problema de controlo em dimensão infinita.	114
6.6	Superfícies de nível da pressão no cilindro para o problema de controlo em dimensão infinita.	114
6.7	Representação da condição parabólica na fronteira de entrada no cilindro: $U_0(1 - (x/R)^2 - (y/R)^2)$ e da função com controlo $u(1 - (x/R)^2 - (y/R)^2)$	116
6.8	Representação da condição parabólica na fronteira de entrada no cilindro: $U_0(1 - (x/R)^2 - (y/R)^2)$ e da função controlo u	116
6.9	Canal curvo: representação do domínio computacional e de Ω_{part}	117
6.10	Canal curvo: representação da malha.	117
6.11	Problema directo: representação dos vectores do campo de velocidades no canal curvo. A escala representa a magnitude da velocidade.	118
6.12	Problema controlado: representação dos vectores do campo de velocidade no canal curvo. A escala representa a magnitude da velocidade.	118
6.13	Problema directo: superfícies de nível da pressão no canal curvo.	119
6.14	Problema controlado: superfícies de nível da pressão no canal curvo.	119
6.15	Problema directo: representação das superfícies de nível (do tipo preenchido) da magnitude do WSS no canal curvo.	119
6.16	Problema controlado: representação das superfícies de nível (do tipo preenchido) da magnitude do WSS no canal curvo.	120
6.17	Problema directo: magnitude da velocidade no canal curvo em função do comprimento de arco. A preto está representada a magnitude do WSS na curva interior do canal curvo e a rosa a magnitude na curva exterior.	120
6.18	Problema controlado: magnitude da velocidade no canal curvo em função do comprimento de arco. A verde está representada a magnitude do WSS na curva interior do canal curvo e a azul a magnitude na curva exterior.	120
6.19	Representação do perfil de entrada com a Lei de Potência em 3D de expoente 2, isto é, perfil de Poiseuille.	121
6.20	Representação do perfil de entrada com a Lei de potência em 3D de expoente 4.	122
6.21	Representação do perfil de entrada com a Lei de potência em 3D de expoente 9.	122
6.22	Representação dos vectores velocidade no canal curvo com o perfil de Poiseuille.	122
6.23	Representação dos vectores velocidade no canal curvo com o perfil da Lei de Potência com expoente 4.	123
6.24	Representação dos vectores velocidade no canal curvo com o perfil da Lei de Potência com expoente 9.	123
6.25	Estenose: representação do domínio computacional.	124
6.26	Estenose: representação de Ω_{part}	125

6.27	Magnitude da velocidade na estenose. À esquerda: problema directo; à direita: problema controlado com controlo unidimensional.	125
6.28	Pormenor da região da estenose onde estão representadas as linhas de corrente e são visíveis as recirculações do fluido. À esquerda: problema directo; à direita: problema controlado com controlo unidimensional.	126
6.29	Superfícies de nível da pressão na estenose. Esquerda: problema directo; direita: problema controlado com controlo unidimensional.	126
6.30	Superfícies de nível (do tipo preenchido) do WSS na estenose. À esquerda: problema directo; à direita: problema controlado com controlo unidimensional.	127
6.31	Magnitude do WSS na estenose em função do comprimento de arco.	127
6.32	Aneurisma: representação do domínio computacional e de Ω_{part}	130
6.33	Problema directo: representação dos vectores velocidade no aneurisma	130
6.34	Problema controlado: representação dos vectores velocidade no aneurisma	131
6.35	Representação das linhas de corrente no aneurisma, evidenciando a região das recirculações, que corresponde à região do aneurisma sacular. À esquerda: resultados do problema directo; à direita: resultados do problema controlado.	131
6.36	Representação das superfícies de nível da pressão no aneurisma. Problema directo	132
6.37	Representação das superfícies de nível da pressão no aneurisma. Problema controlado. . .	132
6.38	Representação da magnitude do WSS do problema directo.	133
6.39	Representação da magnitude do WSS do problema controlado.	133
6.40	Representação da linha no aneurisma ao longo da qual calculamos os valores para a magnitude do WSS.	134
6.41	Magnitude do WSS no aneurisma em função do comprimento de arco.	134
8.1	Domínio computacional.	141
8.2	Perfil da velocidade no canal. Em cima: problema directo; em baixo: problema controlado.	143
8.3	Representação da magnitude da velocidade. Em cima: problema directo; em baixo: problema controlado.	143
8.4	Representação das linhas de corrente para a velocidade. Em cima: problema directo; em baixo: problema controlado.	144
8.5	Representação dos valores para a pressão. Em cima: problema directo; em baixo: problema controlado.	144

Lista de Tabelas

4.1	Modelos usuais para o comportamento da viscosidade do sangue [8].	79
5.1	Valores obtidos para os termos da função custo fixando w_2 e w_3 e variando w_1	93
5.2	Valores obtidos para os termos da função custo fixando w_1 e w_3 e variando w_2	93
5.3	Valores obtidos para os termos da função custo fixando w_1 e w_2 e variando w_3	94
5.4	Erros relativos e absolutos calculados em Ω_{part}	96
5.5	Resultados obtidos usando como perfil de entrada a Lei de Potência com expoente igual a 4.	99
5.6	Resultados obtidos usando como perfil de entrada a Lei de Potência com expoente igual a 9.	99
5.7	Erros absolutos e relativos calculados em Ω_{part} para a Lei de Potência com expoente 4.	99
5.8	Erros absolutos e relativos calculados em Ω_{part} para a Lei de Potência com expoente 9.	100
5.9	Erros relativos e absolutos calculados para os diferentes perfis de entrada.	101
5.10	Comparação dos resultados obtidos nas três diferentes estenoses e no canal.	103
5.11	Comparação entre o problema controlado (CP) e o problema directo (DP) com diferentes ruídos adicionados. Os erros R_e e A_e foram calculados em todo o domínio.	104
6.1	Resultados para o controlo unidimensional e o controlo em dimensão infinita no cilindro.	115
6.2	Canal curvo 3D: resultados para o controlo unidimensional nos três perfis de entrada para o campo de velocidades.	124
6.3	Estenose 3D: resultados obtidos com e sem o WSS no funcional de custo.	128
6.4	Estenose 3D: resultados para o controlo unidimensional nos três perfis de entrada para o campo de velocidades.	129
6.5	Aneurisma: resultados obtidos com e sem o WSS no funcional de custo.	135
6.6	Aneurisma: resultados para o controlo unidimensional nos três perfis de entrada para o campo de velocidades.	135
8.1	Comparação entre os valores do problema directo e os valores do problema controlado no cilindro.	145

Lista de Abreviaturas e Notações

Abreviaturas

A_e - Erro absoluto

BFGS - algoritmo Broyden - Fletcher - Goldfarb - Shanno

CP - Problema controlado

DA - Processo de Assimilação de dados

DO - Discretizar e depois otimizar

DOFS - Graus de liberdade

DP - Problema directo

MEF - Método dos Elementos Finitos

OD - Otimizar e depois discretizar

QP - Programação quadrática

PARDISO - método de resolução directa paralelizado, para sistemas lineares com matrizes esparsas
(*parallel sparse direct solver*, em inglês)

R_e - Erro relativo

SNOPT - Optimização esparsa não linear

SQOPT - Programação quadrática esparsa

SQP - Programação quadrática sequencial

WSS - Tensão de cisalhamento na parede

Notações

Ω - Conjunto aberto limitado contido em \mathbb{R}^n onde $n = 2, 3$

\mathbf{y} - Campo de velocidades

p - Pressão

\mathbf{u} - Controlo

μ - Viscosidade dinâmica

ν - Viscosidade cinemática

ρ - Massa específica

$\dot{\gamma}$ - Taxa de cisalhamento

Dy - Parte simétrica do gradiente do campo de velocidades

τ - Tensor das tensões viscosas ou tensor das tensões suplementares

T - Tensor das tensões de Cauchy

U_{ad} - Conjunto dos controlos admissíveis

Espaços das funções contínuas e Hölder contínuas

$C(\Omega)$ - Conjunto das funções contínuas sobre Ω

$C(\bar{\Omega})$ - Conjunto das funções contínuas sobre Ω , que se prolongam continuamente até à fronteira

$D(\Omega)$ - Conjunto das funções continuamente diferenciáveis com suporte compacto em Ω

$D'(\Omega)$ - Espaço dual de $D(\Omega)$

$$C^{m,\gamma}(\bar{\Omega}) = \{\mathbf{y} \in C^m(\bar{\Omega}) : \|\mathbf{y}\|_{C^{m,\gamma}(\bar{\Omega})} < +\infty\}, \quad m \geq 0, \quad 0 < \gamma \leq 1$$

$$\|\mathbf{y}\|_{C^{m,\gamma}(\bar{\Omega})} = \sum_{|\alpha|=0}^m \|D^\alpha \mathbf{y}\|_\infty + [\mathbf{y}]_{C^{m,\gamma}(\bar{\Omega})}$$

$$[\mathbf{y}]_{C^{m,\gamma}(\bar{\Omega})} = \sum_{|\alpha|=m} \sup_{\{x_1, x_2 \in \bar{\Omega}, x_1 \neq x_2\}} \frac{|D^\alpha \mathbf{y}(x_1) - D^\alpha \mathbf{y}(x_2)|}{|x_1 - x_2|^\gamma} < +\infty$$

$$D^\alpha \mathbf{y} \equiv \frac{\partial^{|\alpha|} \mathbf{y}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$$

Espaços de Lebesgue

$$\mathbf{L}^\alpha(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbf{R} \text{ mensuráveis} : \|f\|_\alpha < +\infty\}$$

$$\|f\|_\alpha = \left(\int_\Omega |f(x)|^\alpha dx \right)^{\frac{1}{\alpha}}$$

$$\mathbf{L}^\infty(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbf{R} \text{ mensuráveis} : \|f\|_\infty < +\infty\}$$

$$\|f\|_\infty = \inf\{c : |f(x)| < c \text{ quase sempre}\}$$

Espaços de Sobolev

$$\mathbf{W}^{1,\alpha}(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbf{R} \text{ diferenciáveis no sentido das distribuições} : \|f\|_{1,\alpha} < +\infty\}$$

$\mathbf{W}_0^{1,\alpha}(\Omega)$ é o fecho de $D(\Omega)$ em $\mathbf{W}^{1,\alpha}(\Omega)$ munido da norma em $\mathbf{W}^{1,\alpha}(\Omega)$

$$\|f\|_{1,\alpha} = \|f\|_\alpha + \|\nabla f\|_\alpha \text{ ou } \|f\|_{1,\alpha} = (\|f\|_\alpha^\alpha + \|\nabla f\|_\alpha^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}, \text{ onde } 1 \leq \alpha < +\infty$$

$$\mathbf{W}^{1,\infty}(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbf{R} \text{ diferenciáveis no sentido das distribuições} : \|f\|_{1,\infty} < +\infty\}$$

$$\|f\|_{1,\infty} = \max\{\|f\|_\infty, \|\nabla f\|_\infty\}$$

$\mathbf{W}^{-1,\alpha'}(\Omega)$ - Espaço dual de $\mathbf{W}_0^{1,\alpha}(\Omega)$

$$V = \{\psi \in D(\Omega) : \text{div } \phi = 0\}$$

$$\mathbf{V}_\alpha = \{\psi \in \mathbf{W}_0^{1,\alpha}(\Omega) : \text{div } \phi = 0\}$$

CAPÍTULO 1

Introdução

Easier to me was to find the laws that move the heavenly bodies, which are millions of miles, than defining the laws of motion of water seeping front of my eyes.

Galileu Galilei
(1564 - 1642)

A teoria Matemática do controlo óptimo, apesar de recente, foi alvo de grande evolução nas últimas décadas, motivada por problemas físicos que surgiram nas mais diversas áreas da Engenharia, nomeadamente na Aviação, na Robótica, ou na Mecânica, as quais têm um denominador comum: controlar-optimizar uma determinada função ou desempenho.

A ideia geral de um problema de controlo consiste em controlar o estado de um sistema dinâmico, que evolui no tempo, com vista a atingir um determinado objectivo definido que respeite eventualmente algumas restrições, com a introdução de controlos no sistema. Se o objectivo atingido é o melhor possível para aquele sistema, então temos um problema de controlo óptimo.

De um problema de controlo fazem parte determinados elementos essenciais à sua resolução:

- *a existência de um controlo u* , escolhido de acordo com o objectivo que se pretende atingir, dentro de um conjunto U_{ad} de controlos admissíveis. Como variáveis de controlo podemos considerar: controlos de fronteira, por exemplo o perfil de velocidade na fronteira de entrada de um fluido; controlos distribuídos, por exemplo uma fonte de calor; e controlos de forma, como por exemplo parâmetros que determinam a forma de um domínio pretendido.
- *o estado do sistema y* , que se pretende controlar e que depende da variável de controlo. Algumas restrições podem ser impostas a y , de modo que nem todos os estados são satisfatórios para atingir o objectivo. No caso da Mecânica dos Fluidos, as variáveis de estado podem ser as variáveis

mecânicas e termodinâmicas que descrevem o fluido, como por exemplo o campo de velocidades do fluido, a pressão, a massa específica ou a temperatura;

- *a equação de estado*, que estabelece a relação entre o estado e o controlo de modo que, qualquer variação no controlo produz variações no estado. A equação de estado faz parte do conjunto de restrições do problema à qual podemos acrescentar, entre outras, restrições nas fronteiras de entrada e saída do fluido ou limitações na norma do controlo;
- *a função custo ou função objectivo* que consiste na função que se pretende minimizar/maximizar (optimizar) e que dependerá do controlo e do estado. Por exemplo, podemos pretender minimizar a diferença entre um campo de velocidades calculado e um campo de velocidades desejado (onde este último faz parte dos dados do problema), ou minimizar as variações de temperatura de um determinado sistema.

De um modo geral podemos definir, por exemplo, φ como as variáveis de estado e h as variáveis de controlo. O funcional $J(\varphi, h)$ representa o custo ou objectivo e $F(\varphi, h) = 0$ e $G(\varphi, h) \leq 0$ as restrições do problema. Pretende-se encontrar as variáveis φ e h sujeitas às restrições F e G que minimizem o funcional J . Matematicamente, a formulação abstracta de um problema de controlo tem a seguinte forma:

$$\left\{ \begin{array}{l} \min J(\varphi, h) \\ \text{sujeito às restrições} \\ F(\varphi, h) = 0 \\ G(\varphi, h) \leq 0. \end{array} \right.$$

A bibliografia existente sobre este tópico é muito vasta. Os problemas de controlo são estudados detalhadamente com equações de estado que podem ser equações diferenciais ordinárias ou equações diferenciais parciais (ver por exemplo [20, 22, 46]).

O objectivo desta dissertação, é o estudo de problemas de controlo óptimo aplicados a um área que tem despertado o interesse dos investigadores desde sempre, a Mecânica dos Fluidos.

O estudo dos fluidos surge, em particular, pela necessidade de utilizar a água disponível na natureza, de a armazenar, distribuir e fornecer às populações. Desde a antiguidade muitas foram as contribuições para o avanço nesta área. Uma das contribuições mais antigas de que se tem conhecimento para a Mecânica dos Fluidos, foi a de Arquimedes, que formulou e aplicou o Princípio de Arquimedes [1]. Já no século XV, XVI, Leonardo Da Vinci, foi um dos pioneiros no avanço desta área; para além de ter sido um excelente experimentalista, desenvolveu também conceitos sobre a origem das forças. Outros se seguiram como Galileu, Torricelli, Euler, Newton ou Bernoulli, [21]. Nesta altura os estudos teóricos e os experimentais apresentavam algumas discrepâncias, o que demonstrou que a teoria só por si tem limitações nas resoluções dos problemas práticos. Por outro lado, os estudos empíricos muitas vezes resultavam em fórmulas cuja relação entre a física e as suas propriedades não faziam muito sentido.

No século XIX Claude-Louis Navier e George Gabriel Stokes, em separado, deduziram as equações que descrevem o movimento dos fluidos, as famosas equações de Navier-Stokes que devido ao seu grau de

complexidade foram consideradas sem resolução durante muitos anos. Mais tarde, já no final do século XX, o impressionante avanço no conhecimento científico assim como o avanço e desenvolvimento da tecnologia informática e da programação computacional vieram impulsionar o desenvolvimento desta área e tornaram possível a resolução numérica das equações, a obtenção de soluções aproximadas com grande precisão e consequentemente a resolução de problemas, que até então tinham permanecido sem resolução [21].

O estudo teórico e experimental dos fluidos é abrangente, no sentido em que a sua abordagem diferenciada está relacionada não só com as características distintas que apresentam mas também com o seu comportamento. Este último varia com diversos factores, como a viscosidade, a temperatura, as tensões a que estão sujeitos, etc. Os fluidos estudados neste trabalho são complexos e não se regem pela lei de Newton da viscosidade, ou seja, os problemas de controlo óptimo são aplicados aos fluidos não-Newtonianos.

1.1 O problema de controlo óptimo distribuído

Um dos nossos objectivos consiste no estudo matemático e teórico de um problema de controlo aplicado a uma classe particular de fluidos não-Newtonianos.

Consideramos no Capítulo 3 um problema de controlo óptimo de um fluido viscoso e incompressível, cujo controlo actua como uma força imposta em todo o domínio do problema, tratando-se por isso de um problema de controlo distribuído.

Os fluidos aqui estudados são fluidos incompressíveis, governados por equações do tipo de Navier-Stokes generalizadas, quasi-lineares e estacionárias, que apresentam uma viscosidade não constante e que varia com a taxa de cisalhamento (*shear rate*, em inglês) $\dot{\gamma}$, que se escreve como

$$\dot{\gamma} = \sqrt{\frac{1}{2}(\nabla \mathbf{y} + (\nabla \mathbf{y})^T) : (\nabla \mathbf{y} + (\nabla \mathbf{y})^T)} = \sqrt{2} |D\mathbf{y}|. \quad (1.1.1)$$

em que \mathbf{y} é o campo de velocidades do fluido e $D\mathbf{y}$ é a parte simétrica do gradiente de \mathbf{y} (*strain rate tensor*, em inglês) ou seja ,

$$D\mathbf{y} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{y} + (\nabla \mathbf{y})^T). \quad (1.1.2)$$

Caso a viscosidade diminua com a taxa de cisalhamento, diz-se que o fluido tem um comportamento do tipo pseudoplástico (*shear-thinning*, em inglês); no caso contrário, isto é, se aumenta com a taxa de cisalhamento, o fluido diz-se dilatante (*shear-thickening*, em inglês). Na maior parte do trabalho, iremos considerar fluidos cuja viscosidade tem um comportamento do primeiro tipo.

Consideramos um domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ com interesse físico, onde $n = 2, 3$. Pretendemos formular matematicamente e efectuar o estudo teórico do problema, tendo como objectivo o controlo do sistema

introduzindo uma força na dinâmica que conduza o estado do sistema, ou seja a velocidade, ao objectivo proposto.

Pretendemos ainda mostrar a existência de solução para esta classe de problemas e escrever as condições de optimalidade de 1ª ordem. O controlo \mathbf{u} e o campo de velocidades \mathbf{y} estão relacionados através do seguinte sistema de estado

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(\tau(D\mathbf{y})) + (\mathbf{y} \cdot \nabla)\mathbf{y} + \nabla p = \mathbf{u} & \text{em } \Omega, \\ \operatorname{div} \mathbf{y} = 0 & \text{em } \Omega, \\ \mathbf{y} = 0 & \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \quad (1.1.3)$$

onde p designa a pressão. O tensor

$$\tau = 2\mu(|D\mathbf{y}|)D\mathbf{y} \quad (1.1.4)$$

é frequentemente denominado tensor das tensões viscosas ou tensor das tensões suplementar (*extra stress tensor*, em inglês). Este tensor depende de $D\mathbf{y}$ de forma não linear.

A viscosidade, dada por μ , varia com $\dot{\gamma}$. O vector \mathbf{u} é a força, que no problema, corresponde ao controlo imposto em todo o domínio. Designamos por \mathbf{y}_u a solução do sistema (1.1.3) relativamente ao controlo \mathbf{u} . O problema de controlo que pretendemos estudar é o seguinte:

$$(P_\alpha) \quad \begin{cases} \min J(\mathbf{u}, \mathbf{y}) \\ \text{sujeito à restrição (1.1.3).} \end{cases} \quad (1.1.5)$$

onde o funcional $J : \mathbf{L}^2(\Omega) \times \mathbf{W}_0^{1,\alpha}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ é dado por:

$$J(\mathbf{u}, \mathbf{y}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\mathbf{y}_u - \mathbf{y}_d|^2 dx + \frac{\nu}{2} \int_{\Omega} |\mathbf{u}|^2 dx. \quad (1.1.6)$$

No funcional J , a função \mathbf{y}_d é um elemento fixo que corresponde aos dados conhecidos do problema e que pertence ao espaço de Lebesgue $\mathbf{L}^2(\Omega)$ que representa o espaço das funções mensuráveis de quadrado integrável, definidas em Ω e com valores em \mathbb{R} e ν é uma constante não negativa. O espaço $\mathbf{W}_0^{1,\alpha}(\Omega)$ é o espaço de Sobolev das funções em $\mathbf{L}^\alpha(\Omega)$ com derivadas de 1ª ordem em $\mathbf{L}^\alpha(\Omega)$.

A classe de fluidos considerada neste trabalho é descrita por equações diferenciais parciais do tipo quasi-linear que generalizam as equações de Navier-Stokes, onde o laplaciano é substituído pela divergência de τ . Este tipo de fluidos são frequentemente usados na literatura em engenharia (ver por exemplo [32, 33, 59]).

Os primeiros estudos matemáticos que surgiram sobre estas equações devem-se ao trabalho de [53, 54, 55] e de [29] onde se mostra a existência de soluções fracas usando argumentos de compacidade e a

teoria dos operadores monótonos. Para uma leitura mais detalhada, sugerimos também [30].

Hoje em dia, encontramos literatura diversificada que contém resultados de existência, unicidade e regularidade das soluções. Neste contexto, em dimensão $n \geq 2$, salientamos o trabalho de [18], para o caso pseudoplástico ($1 < \alpha < 2$). Sob determinadas condições no termo da força, nomeadamente o uso de dados pequenos, e sem restrições adicionais no expoente α do modelo para a viscosidade, foi demonstrada a continuidade Hölderiana até à fronteira do campo de velocidades. Estes resultados foram generalizados em [19] ao caso em que α é uma função contínua e limitada em $\bar{\Omega}$.

Outros trabalhos que tiveram grande importância na regularidade até à fronteira em domínios tridimensionais foram, por exemplo [12, 31]. Em [12], foi obtido um grande progresso no seguimento do trabalho de [31] usando o método clássico da translação de Nirenberg, o que abriu a porta a novas ideias neste campo de investigação. Esses resultados foram posteriormente estendidos a fronteiras curvilíneas em [14]. Novas ideias foram introduzidas em [13] e [15] nos casos $1 < \alpha < 2$ e $\alpha \geq 2$, respectivamente, ambos sem assumir a hipótese de que o termo da força tem que ser pequeno. Outros trabalhos nesta área são, por exemplo [28, 31, 34, 36, 48, 58, 66, 67].

Os problemas de controlo óptimo de fluidos não-Newtonianos começaram a ser estudados num passado mais recente. No caso bidimensional estacionário destacamos [16] e [17] onde se demonstrou a diferenciabilidade de Gâteaux para equações elípticas, quasi-lineares. Considerou-se o problema sem a condição de divergência, em que a equação de estado é uma equação de Stokes generalizada. Estes resultados foram posteriormente generalizados em [68].

Em [11] foram estudados os casos bidimensionais evolutivos e em [47] o caso tridimensional acoplado das equações the Navier-Stokes modificadas com equações de Maxwell. Mais recentemente, destacamos ainda o trabalho de [52] para problemas de controlo não-Newtonianos em domínios tridimensionais.

Para o estudo analítico do problema de controlo descrito acima usamos resultados de regularidade para as soluções obtidas em [18] num domínio tridimensional. Explicitamos uma condição para a solução da equação de estado, segundo a qual se permite concluir que a solução fraca do problema (1.1.3) é, de facto, a $C^{1,\gamma}$ -solução obtida em [18]. Mostra-se a diferenciabilidade de Gâteaux para a aplicação que a cada controlo faz corresponder um estado e obtém-se as condições de optimalidade.

1.2 Simulações numéricas aplicadas à Hemodinâmica

De um modo geral, nas ciências e na engenharia, as simulações numéricas constituem uma poderosa ferramenta, no sentido em que fornecem aproximações precisas do comportamento de sistemas físicos, governados, em particular, por equações diferenciais parciais. Neste contexto, nos Capítulos 5 e 6, apresentamos os resultados de simulações efectuadas para problemas de controlo óptimo aplicados a uma área actualmente em grande expansão, que é a Hemodinâmica.

Nos tempos actuais as comunidades médica e científica trabalham conjuntamente com o propósito de explicar questões relevantes relacionadas com as propriedades mecânicas do sangue, que não estão completamente esclarecidas. Esse estudo é feito com base em simulações numéricas dos sistemas cardiovascular e cerebrovascular do ser humano e têm sido obtidos grandes avanços na compreensão

do comportamento mecânico do sangue em casos normais e patológicos.

A colaboração entre as comunidades médica e científica nas áreas da bioengenharia, modelação e simulação computacional proporciona, não só um intercâmbio entre estas vertentes do conhecimento, mas também um intercâmbio de dados médicos reais, que podem ser usados por estes cientistas nas simulações numéricas, prevendo assim, com um maior realismo, o comportamento do sangue sob condições normais e patológicas.

O avanço das técnicas médicas em imagiologia, desenvolvimentos no domínio da modelação do sangue, nas técnicas de simulação numérica e também na capacidade computacional vieram permitir resultados mais realistas e uma maior precisão nos modelos simulados. A disponibilização de tais ferramentas à comunidade médica tem vantagens na prevenção e tratamento de determinadas doenças e eventualmente nos custos desse tratamento. Daí a importância de se conseguirem efectuar simulações numéricas recorrendo a dados reais e com a maior precisão possível. O procedimento que considera, nas simulações numéricas, a informação usualmente recolhida pelos médicos é conhecido por "Processo de Assimilação de Dados", (*Data Assimilation Procedure (DA)*, em inglês). Doravante usaremos a sigla DA quando nos referirmos a este procedimento. A utilização destas técnicas é já usual em outras áreas da engenharia como a Geofísica e a Meteorologia. De facto, uma das mais importantes aplicações da técnica DA, de que diariamente tomamos conhecimento, é por exemplo, na previsão do tempo. Trabalhos recentes, [40, 41, 43], mostraram que estas técnicas podem também ser aplicadas com sucesso no campo da modelação em Hemodinâmica, no caso em que se assume para o sangue um comportamento Newtoniano.

Uma das doenças mais frequentes do sistema vascular é a obstrução parcial dos vasos sanguíneos, relacionada com a aterosclerose, e que dá origem à ocorrência de estenoses nas artérias. Esta redução no diâmetro dos vasos compromete o comportamento normal da circulação do sangue e conseqüentemente conduz a uma alteração no estado de saúde do indivíduo. Embora não esteja completamente esclarecido ainda, sabe-se do estudo da Hemodinâmica, que existem factores como a acção da tensão tangencial (ou de cisalhamento) exercida pelo fluxo de sangue na parede dos vasos, que designaremos por WSS daqui em diante, que podem afectar a progressão desta e de outras patologias ([24, 26, 69]). Sabe-se também que o desenvolvimento de aneurismas cerebrais e vasculares e a sua conseqüente ruptura estão, em particular, relacionados não só com a estrutura das vasos sanguíneos mas também com fenómenos locais da Hemodinâmica. O diâmetro das artérias, a curvatura e ramificações e o comportamento reológico do sangue têm um papel importante nestas patologias [2, 5].

Em situações normais, o fluxo sanguíneo tem um comportamento Newtoniano na maior parte do sistema arterial. De facto, quando os efeitos não-Newtonianos são observados nas grandes artérias, isto pode indicar a ocorrência de uma eventual patologia. Tais efeitos são, por exemplo, a observação de uma recirculação estável do sangue na região posterior à estenose, ou no interior de um aneurisma sacular. Nesses casos torna-se importante o estudo do comportamento não-Newtoniano, pseudoplástico do sangue, assim como a variação da viscosidade em função do tempo (tixotropia) e eventualmente a sua viscoelasticidade.

O comportamento não-Newtoniano do sangue está maioritariamente relacionado com o comportamento mecânico dos glóbulos vermelhos [8]. Para valores baixos da taxa de cisalhamento, dada a sua elevada deformabilidade, os glóbulos vermelhos adquirem a capacidade de se agregarem e formarem microestruturas tridimensionais em forma de pilhas de bastonetes chamadas *rouleaux*. Este fenómeno

leva a um aumento da viscosidade. Inversamente, para elevados valores da taxa de cisalhamento, a sua tendência é a deformação e alinhamento na direcção do fluxo. Neste sentido, é indispensável a escolha de modelos constitutivos, que permitam resultados mais realistas de acordo com as condições fisiológicas do sangue. Dada a instabilidade das microestruturas tridimensionais dos glóbulos vermelhos, estudos experimentais sugerem o uso do modelo Newtoniano na maioria do sistema arterial em indivíduos saudáveis [5, 8]. Contudo, em estados patológicos em que se observem alterações na circulação sanguínea, devem ser usados modelos mais complexos, do tipo não-Newtoniano.

Nas simulações numéricas que iremos apresentar nos Capítulos 5 e 6, abordamos estes aspectos do fluxo sanguíneo. Neste sentido, propomos e validamos o método DA, baseado numa abordagem variacional [43], em domínios bidimensionais e tridimensionais com interesse físico. Em particular, consideramos geometrias idealizadas representativas de artérias com estenoses e admitimos que a viscosidade tem um comportamento não-Newtoniano do tipo Cross generalizado (ver Tabela 4.1). Para o caso tridimensional, além da estenose, consideramos também um canal com uma curva e um canal direito e ainda uma geometria real que consiste num aneurisma sacular que se desenvolveu numa artéria cerebral, e para a viscosidade do sangue, neste último, consideramos o modelo de Carreau (Tabela 4.1). No método DA considerámos no custo a influência do WSS e verificámos que esta opção conduz a uma melhor precisão na aproximação da velocidade e do próprio WSS.

Os dados usados nas simulações, que se designam por sintéticos, não são neste caso fornecidos pelos médicos, dado que a maioria das geometrias usadas são idealizadas. Estes dados foram gerados através da resolução das equações da dinâmica, para serem mais tarde usados no problema de controlo, em todos os domínios estudados. Todavia, no futuro, a fim de tornar as simulações mais realistas do ponto de vista das aplicações, e sempre que seja possível, é nosso objectivo o uso de dados reais.

1.3 Descrição geral do conteúdo da dissertação

Nesta secção descrevemos a forma como foi organizado o trabalho. No Capítulo 2 fazemos uma breve introdução à Mecânica dos Fluidos com o objectivo de contextualizar o trabalho face aos problemas de controlo em estudo. As propriedades dos fluidos são aqui apresentadas, assim como a dedução das equações que regem o seu movimento e o tipo de condições de fronteira mais usados nas simulações numéricas.

No Capítulo 3, procedemos ao estudo teórico de um problema de controlo distribuído para fluidos não-Newtonianos com viscosidade satisfazendo a lei de Carreau com comportamento pseudoplástico. Estudamos a equação de estado e estabelecemos a existência de soluções para o problema de controlo óptimo. Obtemos uma estimativa de Lipschitz e a diferenciabilidade do estado com respeito ao controlo. Estudamos a equação adjunta e escrevemos as condições de optimalidade de 1ª ordem. Consideramos também um modelo do tipo Carreau para a viscosidade cujo expoente α é uma função contínua e positiva, e demonstramos a existência de solução para o problema de controlo associado. O conteúdo deste capítulo é original e foi publicado em [63] e [64].

O Capítulo 4 é dedicado à apresentação de generalidades sobre a Hemodinâmica, a fim de introduzir as

simulações numéricas aplicadas à circulação sanguínea. Fazemos uma breve descrição da constituição do sangue, da sua viscosidade e dos factores que influenciam o seu comportamento não-Newtoniano. Apresentamos ainda alguns dos modelos constitutivos usualmente considerados para modelar a viscosidade do sangue. Alguns destes modelos são usados nos Capítulos 5 e 6.

No Capítulo 5, definimos o problema em estudo e efectuamos a discretização do problema com elementos finitos. Apresentamos os resultados numéricos numa primeira instância para o caso bidimensional, no que respeita à escolha dos parâmetros para o funcional de custo e à sua validação através da aplicação do método a diferentes geometrias e a diferentes perfis de entrada. Testamos ainda a eficácia do método na filtragem de ruído, comparando os resultados obtidos com a resolução directa do problema. O conteúdo deste capítulo foi submetido para publicação.

No Capítulo 6, aplicamos o método descrito no Capítulo 5 a geometrias tridimensionais, embora com um alteração no que se refere à dimensão do controlo, considerando-o em dimensão 1. Esta alteração diminui a complexidade dos problemas e constitui uma primeira abordagem a um trabalho futuro e mais complexo com geometrias reais. É comprovada a eficácia do método nas geometrias consideradas no que respeita às aproximações obtidas para a velocidade e para o WSS e nalgumas delas testa-se a robustez do método para diferentes perfis de entrada, à semelhança do Capítulo 5.

Segue-se o Capítulo das Conclusões que inclui também as ideias e objectivos de trabalhos futuros que darão continuidade à investigação aqui iniciada.

Finalmente apresentamos um Anexo, dividido em duas partes, Anexo A e Anexo B. No primeiro apresentamos a simulação de um problema de controlo distribuído, isto é, do tipo de problemas estudado no Capítulo 3, num cilindro, que representa um vaso sanguíneo idealizado, com dimensões e parâmetros fisiológicos. No Anexo B apresentamos os resultados clássicos usados neste trabalho.

Nota Introdutória à Mecânica dos Fluidos

O enquadramento geral deste trabalho posiciona-se numa área do conhecimento com aplicações físicas da maior relevância no mundo actual, a qual tem sofrido uma demarcada evolução ao longo dos anos: trata-se da Mecânica dos Meios Contínuos.

Esta área divide-se em duas sub-áreas que têm como base comum as leis físicas da Mecânica clássica com que se regem. A diferença entre elas e a consequente divisão é motivada pela natureza dos materiais que são objecto do seu estudo e pelas propriedades específicas desses materiais. Assim, a Mecânica dos meios contínuos divide-se em Mecânica dos Sólidos e Mecânica dos Fluidos.

Não existe uma fronteira claramente demarcada entre as duas áreas, uma vez que existem materiais difíceis de posicionar numa das duas vertentes. A diferença entre os sólidos e os fluidos baseia-se na sua capacidade de resistirem a tensões de cisalhamento ou tangenciais, descritas mais à frente na Secção 2.3, que tendem a deformá-los. Nos sólidos existe uma tendência para resistirem à deformação, ao passo que nos fluidos o comportamento é o de se deformarem continuamente sob a acção das tensões. Contudo, o asfalto por exemplo, é um material que se apresenta como sólido, uma vez que resiste às tensões durante curtos períodos de tempo, mas que se deforma lentamente como um fluido quando as tensões são exercidas durante longos períodos de tempo. Outros exemplos de materiais em que a distinção sólido/fluido não é clara são por exemplo alguns plásticos, chumbo ou misturas de argila, [1]. De um modo geral estes materiais designam-se por fluidos não-Newtonianos.

É na Mecânica dos Fluidos que este trabalho se insere. Como primeira abordagem, neste Capítulo, faremos um breve resumo das propriedades principais que nos ajudam a compreender o movimento dos fluidos, seguindo entre outros [1, 4, 7, 21, 51]. De seguida faremos uma breve incursão na dedução das equações básicas da dinâmica dos fluidos, que regem o seu movimento [1, 5, 44]. Finalmente, apresentamos algumas particularidades da sua modelação, como a definição da geometria e condições de fronteira.

2.1 Noções principais

A Mecânica dos Fluidos estuda o comportamento físico dos fluidos e as suas propriedades reológicas. Trata da análise destes materiais quando se encontram em repouso ou em movimento e dos efeitos que decorrem aquando do seu contacto com superfícies ou com outros fluidos. Segue daí uma outra divisão em dois diferentes grupos:

- Estática dos fluidos;
- Dinâmica dos fluidos.

O primeiro é responsável pelo estudo das propriedades e das leis físicas que regem o seu comportamento quando não estão sob a acção de forças externas, isto é, quando se encontram em repouso, ou em movimento com velocidade constante. O segundo trata dos fluidos que se movem segundo uma força de aceleração sob a acção de forças externas responsáveis pelo transporte de massa e das suas propriedades, como a velocidade, a pressão, a massa específica e a temperatura. O conhecimento destas matérias é fundamental para a resolução de problemas de engenharia relacionados com as mais diversas áreas, tais como a Aerodinâmica, a Hidráulica, a Meteorologia, a Oceanografia, a Indústria Petrolífera, ou a Hemodinâmica.

Os materiais que são objecto de estudo desta área, os fluidos, são substâncias cuja estrutura molecular apresenta um certo grau de liberdade de movimentos, devido à pequena força de atracção que as moléculas exercem entre si, o que faz com que não possuam um formato próprio. De um modo geral, a estrutura molecular dos fluidos não oferece resistência às tensões externas e portanto os fluidos possuem a capacidade de se deformarem continuamente quando submetidos a essas tensões, assumindo a forma dos recipientes que os contêm.

Nos fluidos distinguimos os líquidos e os gases, cuja principal diferença consiste na forma como ocupam o espaço dentro de um recipiente. Os gases ocupam todo o volume do recipiente uma vez que as suas partículas flutuam e a atracção entre elas é desprezável. Os líquidos ocupam um determinado volume fixo. Quando em repouso, estes apresentam uma superfície estacionária não determinada pelo recipiente que os contêm, ao passo que os gases expandem-se livremente se não estiverem fechados no recipiente. A distância entre as moléculas nos gases é muito superior à distância entre as moléculas nos líquidos e por isso, a facilidade com que ambos se deformam, quando sujeitos a tensões, é também uma característica que os distingue [1].

2.2 Propriedades dos fluidos

A descrição das propriedades dos fluidos pode ser encontrada em qualquer livro de Mecânica dos Fluidos ou de Hidráulica, citamos por exemplo [4, 7]. Os fluidos são catalogados segundo as propriedades que

os caracterizam, dividindo-se estas últimas em propriedades extensivas e intensivas se dependem ou não da massa, respectivamente. Explicitamos as que são mais relevantes no estudo dos fluidos:

- massa específica (ρ);
- a pressão (p);
- a compressibilidade/ incompressibilidade;
- a viscosidade (μ);

embora também se possam analisar outras, como o módulo de elasticidade volumétrico, a pressão de vapor ou cavitação e a tensão superficial. As definições que apresentamos de seguida são para os valores médios de cada uma das propriedades.

Define-se massa específica de um fluido como a razão entre a massa do fluido e o volume ocupado por ela,

$$\rho = \frac{m}{V} \text{ kg/m}^3.$$

A pressão é a razão entre a força normal (F) e a área sobre a qual essa força é aplicada, isto é

$$p = \frac{F}{A} \text{ Pa},$$

onde $\text{Pa} = \text{N/m}^2$ com $\text{N} = \text{Kg.m/s}^2$ são medidas em unidades SI, Pascal e Newton, respectivamente. A compressibilidade está relacionada com a resistência que o fluido apresenta à redução do seu próprio volume quando submetido à acção de forças. Um fluido diz-se compressível, se não apresentar resistência, e responder com uma redução do seu volume, enquanto que um fluido incompressível apresenta resistência à redução do seu volume. No caso dos fluidos incompressíveis, a massa específica de uma partícula de fluido não se altera durante o movimento.

Por outro lado, a viscosidade μ , denominada também viscosidade dinâmica ou absoluta, medida em Pa.s , é a grandeza associada à resistência do fluido às deformações e ao movimento. Principalmente no caso de fluidos contidos em recipientes, isto é, confinados a regiões que apresentam fronteiras, observa-se uma grande influência da viscosidade no movimento, com maior expressão nas regiões mais próximas da fronteira.

Nos fluidos sem viscosidade, os chamados fluidos invíscidos ou ideais, as forças tangenciais são nulas entre as camadas do fluido e apenas se observa a acção das forças normais, ocasionadas por gradientes de pressão. Do ponto de vista das aplicações, quando um fluido tem uma viscosidade muito pequena pode ser modelado, por simplicidade, como um fluido invíscido. No entanto, na grande maioria das aplicações da dinâmica de fluidos com interesse, os fluidos são viscosos, o que faz com que, deste ponto de vista, o estudo dos fluidos invíscidos seja menos interessante.

Nos fluidos a viscosidade adopta comportamentos diferentes perante a variação da temperatura e o tipo de fluido em questão. Nos líquidos, a viscosidade diminui com o aumento da temperatura, enquanto

que nos gases o comportamento é inverso, isto é, a viscosidade aumenta com o aumento da temperatura. Esta característica é uma função que depende fortemente da temperatura, pelo que o valor da viscosidade deve vir acompanhado da temperatura do fluido a que esse valor foi determinado.

Considera-se também a viscosidade cinemática

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} \text{ m}^2/\text{s}.$$

expressa pela razão entre a viscosidade dinâmica (μ) e a massa específica (ρ).

2.3 Fluidos Newtonianos e não-Newtonianos

A Dinâmica de Fluidos, além de se ocupar do estudo das propriedades que os caracterizam, estuda também a natureza das forças e das tensões a que os fluidos em movimento estão sujeitos e que alteram o seu comportamento. As forças a que as partículas de fluido estão sujeitas, são caracterizadas como forças de volume (de corpo ou de campo) e como forças de superfície. As primeiras são aquelas que agem sobre todas as partículas do fluido, e são proporcionais à massa por ele ocupada. São exemplos destas forças a força da gravidade ou as forças electromagnéticas. Em geral as variações deste tipo de forças nos fluidos são muito pequenas, pelo que são consideradas como constantes. As forças de superfície resultam do contacto entre as partículas do fluido, sendo responsáveis por manter a continuidade do material durante o movimento. Dão origem a tensões normais e tangenciais (ou de cisalhamento) que, de um modo geral, se definem como a razão entre a força aplicada e a área sobre a qual essa força actua [1]. As tensões normais correspondem à componente normal da força que actua sobre a superfície por unidade de área e são responsáveis por deformar as partículas do fluido perpendicularmente à sua superfície, representando geralmente um encolhimento ou dilatação da partícula segundo uma determinada direcção. Estas tensões são usualmente originadas por diferenças de pressão no fluido. As tensões tangenciais ou de cisalhamento, correspondem à componente tangencial da força que actua sobre uma superfície por unidade de área. São responsáveis pela deformação das partículas de fluido, actuando tangencialmente à superfície e representam uma média da quantidade de força tangencial por unidade de área. Estas estão relacionadas com os gradientes da velocidade na direcção perpendicular às tensões. A natureza da relação entre as tensões de cisalhamento e os gradientes da velocidade, divide o comportamento dos fluidos em dois tipos:

- fluidos Newtonianos;
- fluidos não-Newtonianos.

Se a relação entre as tensões de cisalhamento e os gradientes da velocidade for linear, diz-se que o fluido é Newtoniano, e neste caso a viscosidade não varia com a força aplicada, ou seja, é constante. Os

fluidos Newtonianos são os modelos mais simples de fluidos viscosos. Entre os fluidos Newtonianos encontram-se por exemplo o ar e a água assim como o plasma sanguíneo. O sangue também é considerado na maioria das vezes como um fluido Newtoniano, dependendo essencialmente das dimensões das artérias em que circula. A tensão de cisalhamento para um fluido Newtoniano é dada pela Lei da viscosidade de Newton $\tau = 2\mu D\mathbf{y}$, como já foi referido em (1.1.4). Outros fluidos, como por exemplo algumas tintas, ou shampoo, têm um comportamento que não obedece a esta relação linear, o que aumenta o grau de complexidade do estudo destes fluidos por apresentarem uma viscosidade que varia com a força aplicada e por serem viscoelásticos. O próprio sangue, em determinadas condições, como veremos no Capítulo 4, é também considerado como não-Newtoniano. A complexidade da sua constituição e das suas propriedades mecânicas, bem como a da geometria vascular têm como consequência uma variação da viscosidade com a tensão que é exercida sobre as paredes dos vasos sanguíneos.

2.4 Dedução das equações básicas da dinâmica de fluidos

Da relação entre o estudo teórico e o estudo empírico dos fluidos, surge a necessidade de descrever o seu movimento de uma forma matematicamente rigorosa. É neste sentido que surgem as equações de Navier-Stokes, deduzidas no século XIX por Claude-Louis Navier e George Gabriel Stokes, como já foi referido na Introdução. Trata-se de equações diferenciais parciais que permitem descrever o escoamento de substâncias fluidas, sendo possível determinar a pressão e a velocidade dos fluidos. A sua dedução é baseada na aplicação de princípios fundamentais da Mecânica clássica:

- Princípio da Conservação da Massa;
- Princípio da Conservação do Momento Linear;
- Princípio da Conservação do Momento Angular;
- Princípio da Conservação da Energia ou 1ª Lei da Termodinâmica;
- 2ª Lei da Termodinâmica.

No que segue não é considerada explicitamente a influência da temperatura no movimento do fluido, pelo que os dois últimos princípios dão origem a equações independentes e portanto apenas os três primeiros serão considerados.

Nesta breve incursão, seguimos alguns autores como [1, 5, 44], mas a literatura nesta área é vasta e podemos encontrar a dedução das equações de Navier-Stokes em vários livros de Mecânica dos Fluidos e sob diversos pontos de vista.

Seja Ω um subconjunto de \mathbb{R}^3 (em \mathbb{R}^2 o raciocínio é análogo, [5]) e I um intervalo de variação do tempo. Consideremos $\rho : I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ uma função mensurável estritamente positiva, e que representa a massa específica, tal que, para cada $\Omega_0 \subset \Omega$ se tem

$$\int_{\Omega_0} \rho(t, x) dx = m(\Omega_0),$$

onde $m(\Omega_0)$ é a massa do material em estudo contido em Ω_0 .

De acordo com o Princípio da Conservação de Massa, num sistema isolado a massa mantém-se constante ao longo do tempo, isto é, a quantidade de massa existente no sistema não se altera durante o movimento. Em termos matemáticos, este princípio traduz-se na igualdade

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_0} \rho(t, x) dx = 0. \quad (2.4.1)$$

Aplicamos o Teorema de Transporte de Reynolds (ver Anexo B, Teorema 8.2.1), que se refere à taxa de variação de uma determinada propriedade num determinado subconjunto de Ω , expressa em termos da derivada material $\frac{D(\cdot)}{Dt}$ definida abaixo em (2.4.3). E portanto, relativamente ao integral que define a variação da massa específica, com base no Teorema de Reynolds, podemos escrever (não indicando a dependência das variáveis para simplificar a escrita)

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_0} \rho = \int_{\Omega_0} \left(\frac{D\rho}{Dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{y} \right) = \int_{\Omega_0} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{y}) \right) \quad (2.4.2)$$

onde \mathbf{y} é a velocidade do fluido e

$$\frac{D(\cdot)}{Dt} = \frac{\partial(\cdot)}{\partial t} + (\mathbf{y} \cdot \nabla)(\cdot) \quad (2.4.3)$$

é a derivada material. Tendo em conta as igualdades (2.4.1) e (2.4.2) vem

$$\int_{\Omega_0} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{y}) \right) = 0.$$

Assumindo a continuidade da função integranda e a arbitrariedade do domínio Ω_0 , deduz-se que

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{y}) = 0.$$

Nos casos em que ρ é constante $\left(\frac{D\rho}{Dt} = 0 \right)$, como é o caso do sangue por exemplo, temos que

$$\operatorname{div} \mathbf{y} = 0,$$

igualdade que define a chamada condição de incompressibilidade. Concluimos que os fluidos em que ρ é uma constante são fluidos incompressíveis, no entanto, a implicação contrária não se verifica em geral [5].

As restantes equações que modelam o movimento de fluidos são deduzidas tendo por base o Princípio da Conservação do Momento Linear. O momento linear, \mathbf{p} , de uma partícula de massa m e velocidade \mathbf{y} é definido por

$$\mathbf{p} = m\mathbf{y}.$$

A variação do momento linear relativamente ao tempo satisfaz a igualdade

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{d(m\mathbf{y})}{dt} = m \frac{d\mathbf{y}}{dt}.$$

A derivada $\frac{d\mathbf{y}}{dt}$ representa a aceleração das partículas. Se não existirem forças a actuar sobre as partículas, o momento linear permanecerá constante ao longo do tempo. Na verdade, o Princípio da Conservação do Momento Linear é uma generalização da 2ª Lei de Newton, que postula que a soma de todas as forças que actuam sobre um determinado corpo é igual à massa do corpo multiplicada pela aceleração. Esta igualdade estabelece que a variação do momento linear é igual à resultante das forças que actuam sobre as partículas do fluido, ou seja

$$\sum \mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}.$$

Tendo em conta que a massa específica e a velocidade podem variar no sistema, podemos escrever

$$\sum \mathbf{F} = \frac{d}{dt} \int_{\Omega_0} \rho \mathbf{y} dV,$$

onde ρdV é a massa de um elemento de volume infinitesimal dV e $\rho \mathbf{y} dV$ é o seu momento. É necessário agora especificar quais as forças que actuam no fluido num determinado domínio Ω . Estas forças são, por um lado, as forças de volume (de campo ou de corpo) descritas por

$$\int_{\Omega_0} \rho(t, x) \mathbf{f}(t, x) dx,$$

onde \mathbf{f} é um campo vectorial de $I \times \Omega$ em \mathbf{R}^3 medido em m/s^2 . Daqui segue que as forças descritas pelo integral acima são medidas em Newton (N). Por outro lado, temos as forças de superfície que resultam

do contacto entre as partículas do fluido, dando origem às tensões normais e tangenciais. A descrição destas forças foi introduzida neste capítulo, na Secção 2.3.

De acordo com o Princípio de Cauchy (ver Anexo B, Teorema 8.2.2), o resultado das forças que as partículas exercem entre si é dado por

$$\int_{\partial\Omega_0} \mathbf{t}(t, x, \mathbf{n}) ds, \quad (2.4.4)$$

onde $\mathbf{t} : I \times \Omega \times S \rightarrow \mathbb{R}^3$ é a tensão de Cauchy, medida em N/m^2 e consequentemente a força resultante do cálculo do integral é medida em N . O vector \mathbf{n} é o vector unitário normal exterior a $\partial\Omega_0$.

Pelo Princípio da Conservação do Momento Linear, a variação do momento de um material em $\Omega_0 \subset \Omega$ para um certo $t \in I$ é igual à soma das forças que actuam nesse material, isto é,

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_0} \rho(t, x) \mathbf{y}(t, x) dx = \int_{\Omega_0} \rho(t, x) \mathbf{f}(t, x) dx + \int_{\partial\Omega_0} \mathbf{t}(t, x, \mathbf{n}) ds. \quad (2.4.5)$$

Usando o Teorema do Tensor das Tensões de Cauchy (ver Anexo B, Teorema 8.2.3), relacionamos as forças de superfície com um campo tensorial. Assim, sob as hipóteses do Teorema, existe um campo tensorial $T : I \times \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^{3 \times 3}$, simétrico e continuamente diferenciável, chamado tensor das tensões de Cauchy tal que

$$\mathbf{t}(t, x, \mathbf{n}) = T(t, x) \cdot \mathbf{n} \quad \forall t \in I, \forall x \in \Omega, \forall \mathbf{n} \in S.$$

onde $S = \{\mathbf{n} \in \mathbb{R}^3 : |\mathbf{n}| = 1\}$, e o integral (2.4.4) pode vir escrito como

$$\int_{\partial\Omega_0} T(t, x) \cdot \mathbf{n} ds,$$

e consequentemente, reescrevendo o Princípio da Conservação do Momento Linear (2.4.5) de uma forma simplificada vem

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_0} \rho \mathbf{y} = \int_{\Omega_0} \rho \mathbf{f} + \int_{\partial\Omega_0} T \cdot \mathbf{n} \quad (2.4.6)$$

Aplicando uma vez mais o Teorema do Transporte de Reynolds, tendo em conta que ρ é constante e portanto que $div \mathbf{y} = 0$, o primeiro membro de (2.4.6) representa-se da seguinte forma

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_0} \rho \mathbf{y} = \int_{\Omega_0} \left(\frac{D(\rho \mathbf{y})}{Dt} + (\rho \mathbf{y}) div \mathbf{y} \right) = \int_{\Omega_0} \rho \frac{D\mathbf{y}}{Dt}. \quad (2.4.7)$$

Pelo Teorema da Divergência (ver Anexo B, Teorema 8.2.4) e supondo que $div T$ é integrável, podemos escrever o segundo membro de (2.4.6) como

$$\int_{\Omega_0} (\rho \mathbf{f} + div T). \quad (2.4.8)$$

Juntando (2.4.7) e (2.4.8) obtemos

$$\int_{\Omega_0} \left(\rho \frac{D\mathbf{y}}{Dt} - div T - \rho \mathbf{f} \right) = 0.$$

Dada a arbitrariedade de Ω_0 vem

$$\rho \frac{D\mathbf{y}}{Dt} - div T - \rho \mathbf{f} = 0,$$

e por conseguinte, usando a definição de derivada material (2.4.3), segue que

$$\rho \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial t} + \rho(\mathbf{y} \cdot \nabla)\mathbf{y} - div T = \rho \mathbf{f}. \quad (2.4.9)$$

O termo não linear $\rho(\mathbf{y} \cdot \nabla)\mathbf{y}$ é o termo convectivo ou o termo da convexão ou transporte. O termo $\rho \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial t}$ indica a dependência do problema relativamente ao tempo t . Para problemas estacionários, como os que são estudados neste trabalho, temos $\rho \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial t} = 0$.

Para fluidos Newtonianos incompressíveis, o tensor das tensões de Cauchy, T , que é dado por

$$T = -PI + 2\mu Dy, \quad (2.4.10)$$

estabelece uma relação linear relativamente ao tensor Dy dado por (1.1.2), onde P é a pressão, que é uma função escalar e I é a matriz identidade. O termo $2\mu Dy$ é referido como a componente viscosa do tensor das tensões, identificado como τ em (1.1.4), e μ é a viscosidade dinâmica do fluido, como já referimos. Usando a igualdade (2.4.10) podemos calcular

$$\begin{aligned} div T &= -div(PI) + 2div(\mu Dy) \\ &= -\nabla P + 2\mu div(Dy) \end{aligned}$$

donde a igualdade (2.4.9) se pode reescrever na forma

$$\rho \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial t} + \rho(\mathbf{y} \cdot \nabla)\mathbf{y} + \nabla P - 2\mu \operatorname{div}(D\mathbf{y}) = \rho \mathbf{f}.$$

Uma vez que ρ é uma constante não nula, podemos dividir a igualdade anterior por ρ e obtemos

$$\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial t} + (\mathbf{y} \cdot \nabla)\mathbf{y} + \nabla p - 2\nu \operatorname{div}(D\mathbf{y}) = \mathbf{f}. \quad (2.4.11)$$

onde $p = \frac{P}{\rho} \text{ m}^2/\text{s}^2$, $\nu = \frac{\mu}{\rho} \text{ m}^2/\text{s}$.

Finalmente, tendo em conta (1.1.2) e que $\operatorname{div} \mathbf{y} = 0$ vem

$$\operatorname{div}(\nabla \mathbf{y}) = \Delta \mathbf{y} \quad \text{e} \quad \operatorname{div}((\nabla \mathbf{y})^T) = 0,$$

e portanto, a equação (2.4.11) toma a forma

$$\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial t} + (\mathbf{y} \cdot \nabla)\mathbf{y} + \nabla p - \nu \Delta \mathbf{y} = \mathbf{f}.$$

As componentes do tensor $D\mathbf{y}$ são dadas por

$$D_{ij}\mathbf{y} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial y_i}{\partial x_j} + \frac{\partial y_j}{\partial x_i} \right), \quad i, j = 1, \dots, 3.$$

e, na forma matricial por

$$D\mathbf{y} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} + \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_3} + \frac{\partial y_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} + \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & 2 \frac{\partial y_2}{\partial x_2} & \frac{\partial y_2}{\partial x_3} + \frac{\partial y_3}{\partial x_2} \\ \frac{\partial y_3}{\partial x_1} + \frac{\partial y_1}{\partial x_3} & \frac{\partial y_3}{\partial x_2} + \frac{\partial y_2}{\partial x_3} & 2 \frac{\partial y_3}{\partial x_3} \end{bmatrix}$$

cujos elementos dizem respeito ao conjunto das tensões normais e tangenciais que actuam sobre as superfícies das partículas do fluido, dadas pelo tensor das tensões cuja expressão se apresenta em (2.4.10). Os elementos na diagonal principal da matriz estão relacionados com as tensões normais e os restantes, com as tensões tangenciais.

Os fluidos que verificam a lei (2.4.10) para uma viscosidade μ constante tal que T depende de D de forma linear, são os fluidos Newtonianos, enquanto que os que não verificam esta lei se designam por não-Newtonianos (introduzidos na Secção 2.3). Entre estes consideramos aqueles cuja viscosidade é

função do tensor $D\mathbf{y}$, isto é, $\mu = \mu(|D\mathbf{y}|)$ e conseqüentemente a dependência de T relativamente a D é não linear. Neste caso a equação (2.4.11) pode reescrever-se na forma

$$\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial t} + (\mathbf{y} \cdot \nabla)\mathbf{y} + \nabla p - \frac{2}{\rho} \operatorname{div}(\mu(|D\mathbf{y}|)D\mathbf{y}) = \mathbf{f}, \quad (2.4.12)$$

que é a equação de Navier-Stokes generalizada. Neste trabalho utilizaremos modelos deste tipo, considerando para a viscosidade uma função μ específica que depende de $D\mathbf{y}$.

Existem vários modelos para descrever a viscosidade μ dos fluidos a estudar e a aplicação de um determinado modelo está relacionada com o tipo de material e com as suas propriedades. No Capítulo 4 apresentamos a Tabela 4.1 que contém alguns dos modelos de viscosidade mais usados na modelação do sangue.

2.5 Particularidades sobre as condições de fronteira

Para resolvermos as equações da dinâmica que governam o movimento dos fluidos, é necessário definir o domínio do fluido, e conseqüentemente as condições de fronteira apropriadas para a velocidade e/ou pressão do fluido na fronteira do domínio, de modo que o problema fique bem definido (bem posto).

Do ponto de vista do estudo dos fluidos, por se tornar complicada a observação de um conjunto de partículas fixas de fluido ao longo de todo o seu movimento (abordagem lagrangeana), uma vez que macroscopicamente o fluido é um material contínuo, a abordagem mais comum na descrição do seu movimento é a abordagem euleriana. Nesta última é definido um volume de controlo, onde o fluido se movimenta num determinado intervalo de tempo, e são estudadas as propriedades (pressão, massa específica, velocidade) de todas as partículas de fluido que passam naquele volume de controlo, descritas em função das coordenadas espaciais e temporais. Foi com base na abordagem euleriana, que na Secção 2.4 foram deduzidas as equações que regem o movimento dos fluidos.

De acordo com esta abordagem, no caso dos fluidos, e em particular no caso do sangue em Hemodinâmica, a modelação é usualmente efectuada numa parte do domínio, de acordo com os nossos interesses. Essa parte constitui a geometria onde se formula o problema, cuja representação pode ser dada, por exemplo, como na Figura 2.1, que representa um canal no espaço bidimensional.

A selecção de um determinado troço, implica que tenhamos de introduzir, no domínio, duas fronteiras artificiais de entrada e saída do fluido.

No caso dos fluidos é natural considerarmos as paredes da geometria escolhida como fronteiras rígidas Γ_{wall} (ver Figura 2.1), ou seja, prescrevendo a velocidade $\mathbf{y} = 0$ nessas fronteiras. Esta condição designa-se por condição de Dirichlet homogénea ou de aderência (*no-slip*, em inglês) [60]. No entanto, já não é tão natural a escolha das condições a impôr nas fronteiras Γ_{in} e Γ_{out} que resultam de seccionar artificialmente o canal. Podemos supôr que essas secções fazem um ângulo recto com as fronteiras Γ_{wall} , caso contrário serão necessárias outras alterações.

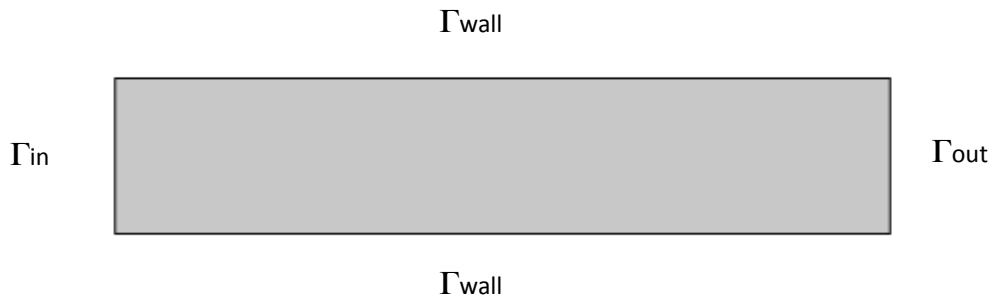


Figura 2.1: Canal bidimensional.

Consideramos as equações de Navier-Stokes, incompressíveis, com condição de Dirichlet homogénea na fronteira Γ_{wall} , onde \mathbf{y} é a velocidade e p a pressão,

$$\begin{cases} -\nu \Delta \mathbf{y} + \mathbf{y} \cdot \nabla \mathbf{y} + \nabla p = 0 & \text{em } \Omega, \\ \operatorname{div} \mathbf{y} = 0 & \text{em } \Omega, \\ \mathbf{y} = 0 & \text{em } \Gamma_{wall}. \end{cases} \quad (2.5.1)$$

No caso das fronteiras Γ_{in} e Γ_{out} , a prescrição das condições de fronteira depende da situação física que pretendemos modelar, e dos dados disponíveis. Algumas condições que podem ser usadas são [60]:

- Fluxo impulsionado pelo perfil de entrada da velocidade (condição de fronteira de Dirichlet),

$$\mathbf{y} = \mathbf{y}_0, \quad \text{em } \Gamma_{in};$$

em que \mathbf{y}_0 é do tipo parabólico (por exemplo $\mathbf{y}_0 = U_0(1 - x_1^2 - x_2^2)$ onde U_0 é a velocidade máxima na fronteira de entrada), e se designa por escoamento de Poiseuille ou $\mathbf{y}_0 = \text{constante}$.

- Fluxo impulsionado por uma velocidade média:

$$\int_{\Gamma_{in}} \mathbf{y} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{F},$$

onde \mathbf{n} é o vector unitário normal à fronteira Γ_{in} .

- Fluxo impulsionado pelo perfil de entrada da pressão

$$p = p_0, \quad \text{em } \Gamma_{in}.$$

- Fluxo impulsionado pela média da queda de pressão:

$$\int_{\Gamma_{out}} p - \int_{\Gamma_{in}} p = p_m.$$

A escolha de cada um dos perfis de entrada, depende dos dados de que dispomos para o problema a resolver, sendo mais natural prescrever velocidades ou quedas de pressão médias. Se não tivermos informação acerca do comportamento do fluido fora do canal que estamos a estudar, é natural considerar que o fluido se comporta como que em camadas paralelas ao longo do canal em estudo e para além dele (fluido laminar). Na fronteira de saída do fluido (Γ_{out}) podemos impôr as seguintes condições:

- Condição de Dirichlet

$$\mathbf{y} = \mathbf{y}^P \quad \text{em } \Gamma_{out},$$

em que \mathbf{y}^P representa o escoamento de Poiseuille.

- Condição de Neumann

$$\nu \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial n} - p \mathbf{n} = \mathbf{s}, \quad \text{em } \Gamma_{out}.$$

Fazendo $\mathbf{s} = 0$ obtemos a condição de Neumann homogénea (*do-nothing*, em inglês).

- Condição de periodicidade:

$$\mathbf{y}(\Gamma_{in}) = \mathbf{y}(\Gamma_{out}).$$

As condições que surgem de forma natural da formulação variacional com a aplicação do Teorema da Divergência, são as condições naturais. As outras, que tem de ser incorporadas nos espaços das soluções são as condições essenciais.

Na modelação dos fluidos é comum usar-se na fronteira Γ_{out} a condição mais simples, que é a condição de Neumann homogénea, uma vez que não impõe qualquer restrição na fronteira de saída do fluido. No entanto, de acordo com [5], no caso da modelação do sangue, esta condição não é tão conveniente por se comportar como se a geometria em estudo não fizesse parte de um domínio maior, ou seja, não tem em conta a restante parte do sistema vascular, no caso das aplicações à Hemodinâmica. De facto, podem surgir alguns problemas aquando do uso desta condição. Por exemplo, alterações na formulação variacional podem conduzir a efeitos indesejáveis na simulação numérica, como por exemplo em ondas de pressão com direcção inversa. Se substituirmos na formulação variacional da equação (2.5.1) o gradiente de \mathbf{y} , que surge após a aplicação do Teorema da Divergência, por $D\mathbf{y}$, onde D é o tensor

definido em (1.1.2), não veremos alterações no caso de condições de Dirichlet puras, no entanto, a condição de Neumann homogénea imposta na fronteira Γ_{out} toma a forma

$$\mathbf{n}D\mathbf{y} - p\mathbf{n} = 0,$$

e esta igualdade não é satisfeita pela condição do escoamento de Poiseuille [60].

Nas simulações que iremos apresentar nos Capítulos 5 e 6, resolvemos o sistema de Navier-Stokes generalizado em várias geometrias bidimensionais e tridimensionais, onde impusémos o perfil de Poiseuille à entrada e condição de Dirichlet homogénea na fronteira Γ_{wall} para o fluido. Na fronteira Γ_{out} experimentámos impôr a condição "do-nothing" na fronteira, e embora o nosso problema fosse não-Newtoniano, foi observado o mesmo comportamento descrito em [60] à saída do fluido. Isto é, os vectores da velocidade à saída do canal, junto à fronteira Γ_{wall} apontavam para fora, como se observa na Figura 2.2 à esquerda, onde se ampliou a parte superior da fronteira Γ_{out} , muito próximo da fronteira Γ_{wall} .

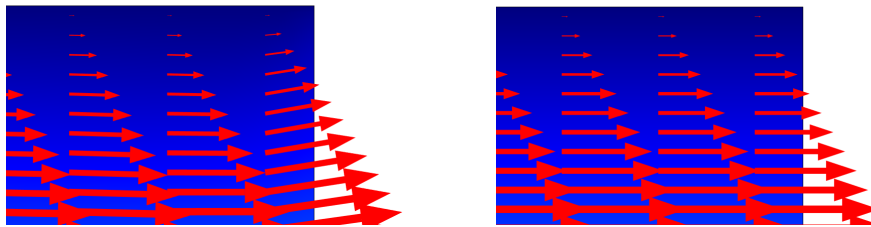


Figura 2.2: Parte da fronteira de saída. Esquerda: efeito da condição de fronteira Neumann homogénea, à saída; direita: efeito da condição de fronteira pressão nula.

Comparámos depois com a situação em que se resolveu o mesmo problema, mas com a condição de pressão nula à saída. E os efeitos são os que se observam na Figura 2.2 à direita. Por outro lado, no caso de condições de Dirichlet puras está provado que, para dados suficientemente pequenos, temos a garantia da existência, unicidade e estabilidade das soluções. No caso das condições de Neumann homogéneas, tanto quando sabemos, não são ainda conhecidos resultados teóricos (consultar pormenores em [60]). No entanto, é relativamente comum o uso desta condição, por ser de fácil implementação e produzir resultados fiáveis, uma vez que na restante parte do domínio reproduz correctamente o comportamento do fluido.

O problema em estudar quais as condições de fronteira mais adequadas, que complementem as equações e que garantam a existência e unicidade de solução é uma matéria muito importante do ponto de vista da modelação. No caso da Hemodinâmica, os investigadores tem-se deparado com dificuldades na escolha de condições de fronteira apropriadas para os problemas em estudo. Este é um assunto que tem sido alvo de uma investigação bastante activa [5].

Nas simulações apresentadas nos Capítulos 5 e 6, o nosso objectivo não passa exactamente pela modelação dos fluidos, mas sim pela resolução de problemas do tipo de "Assimilação de Dados" na forma de problemas de controlo, cujo objectivo é obter as soluções numéricas para os problemas que coincidam, com uma determinada precisão, com certos dados medidos em algumas partes do domínio. De acordo com o teste feito à condição de fronteira de Neumann homogénea e à comparação

com outra condição onde o comportamento do fluido é o esperado, como se observa na Figura 2.2, concluímos que as diferenças observadas na fronteira de saída não têm relevância suficiente para impedir o bom desempenho do problema de "Assimilação de Dados". Portanto, nas nossas simulações usamos esta condição de fronteira, pela sua simplicidade de tratamento. Falaremos mais detalhadamente dos pormenores da formulação do problema de controlo nestes capítulos.

Controlo Distribuído para Problemas não-Newtonianos

Neste capítulo apresentamos a formulação matemática e o estudo teórico de um problema de controlo óptimo modelado por um sistema de equações de Navier-Stokes generalizadas incompressíveis, independentes do tempo, já introduzido em (1.1.3), baseando-nos essencialmente em [63] e também em outros trabalhos como [16, 17, 52, 68]. Apesar de efectuarmos um estudo, essencialmente teórico, deste tipo de problemas, apresentamos no Anexo A uma simulação numérica de um problema de controlo distribuído num cilindro que representa um vaso sanguíneo idealizado.

Seja Ω um subconjunto limitado de \mathbb{R}^n , $n = 2, 3$. O objectivo é controlar o sistema através da introdução de uma força distribuída em Ω , o controlo, que conduza o campo de velocidades ao objectivo proposto. O controlo \mathbf{u} e a variável de estado \mathbf{y} estão relacionados através do seguinte sistema de estado

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(\tau(D\mathbf{y})) + \mathbf{y} \cdot \nabla \mathbf{y} + \nabla p = \mathbf{u} & \text{em } \Omega, \\ \operatorname{div} \mathbf{y} = 0 & \text{em } \Omega, \\ \mathbf{y} = 0 & \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \quad (3.0.1)$$

onde \mathbf{y} designa o campo de velocidades e p a pressão. O tensor τ é o tensor das tensões viscosas dado por (1.1.4) e que depende de $D\mathbf{y}$, de forma não linear. A viscosidade é dada por $\mu(|D\mathbf{y}|)$ que, neste caso, supomos ter um comportamento do tipo pseudoplástico, isto é, a viscosidade diminui à medida que a taxa de cisalhamento, $\dot{\gamma}$ definida em (1.1.1) aumenta. O vector \mathbf{u} é a força que actua no sistema e que corresponde ao controlo imposto no domínio Ω . Designemos por \mathbf{y}_u a solução do sistema (3.0.1) relativamente ao controlo \mathbf{u} . O problema de controlo que se pretende estudar é o seguinte:

$$(P_\alpha) \begin{cases} \min J(\mathbf{u}, \mathbf{y}) \\ \text{sujeito à restrição (3.0.1)}. \end{cases} \quad (3.0.2)$$

onde o funcional de custo, $J : \mathbf{L}^2(\Omega) \times \mathbf{W}_0^{1,\alpha}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$, é dado por:

$$J(\mathbf{u}, \mathbf{y}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\mathbf{y}_u - \mathbf{y}_d|^2 dx + \frac{\nu}{2} \int_{\Omega} |\mathbf{u}|^2 dx. \quad (3.0.3)$$

No funcional J , a função \mathbf{y}_d é um elemento fixo de $\mathbf{L}^2(\Omega)$, e ν é uma constante não negativa.

3.1 Resultados clássicos e algumas hipóteses a considerar

Consideramos que o tensor $\tau : \mathbb{R}_{sym}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}_{sym}^{n \times n}$ admite um potencial, isto é, existe uma função escalar $\Phi \in C^2(\mathbb{R}_0^+, \mathbb{R}_0^+)$, com $\Phi(0) = 0$ tal que

$$\begin{cases} \tau_{ij}(\eta) = \frac{\partial \Phi(|\eta|)}{\partial \eta_{ij}} = \Phi'(|\eta|) \eta_{ij}, \\ \tau_{ij}(0) = \frac{\partial \Phi(0)}{\partial \eta_{ij}} = 0, \quad i, j = 1, \dots, n \end{cases}$$

para qualquer $\eta \in \mathbb{R}_{sym}^{n \times n}$ (espaço das matrizes simétricas do tipo $(n \times n)$).

Exemplos típicos de tensores usados nas aplicações são

$$\tau(\eta) = (1 + |\eta|^2)^{\frac{\alpha-2}{2}} \eta \quad (3.1.1)$$

ou

$$\tau(\eta) = (1 + |\eta|)^{\alpha-2} \eta, \quad (3.1.2)$$

onde o expoente α pode verificar duas condições: uma delas corresponde ao caso $1 < \alpha < 2$ e está relacionada com o comportamento pseudoplástico do fluido, a outra corresponde ao caso $\alpha > 2$ e está relacionada com o comportamento dilatante. Para $\alpha = 2$ temos o caso particular $\tau(\eta) = \eta$, constante, que corresponde ao caso Newtoniano.

No que se segue consideramos o caso pseudoplástico. As seguintes condições são clássicas neste tipo de problemas [30]:

Proposição 3.1.1. *Sejam $\eta, \zeta \in \mathbb{R}_{sym}^{n \times n}$ quaisquer e $1 < \alpha < +\infty$.*

A1: *Existe uma constante positiva δ , tal que, para quaisquer $i, j, k, l = 1, \dots, n$ tem-se*

$$\left| \frac{\partial \tau_{kl}(\eta)}{\partial \eta_{ij}} \right| \leq \delta (1 + |\eta|)^{\alpha-2}. \quad (3.1.3)$$

A2: Existe uma constante positiva ν , tal que

$$\tau'(\eta) : \zeta : \zeta = \sum_{ijkl} \frac{\partial \tau_{kl}(\eta)}{\partial \eta_{ij}} \zeta_{kl} \zeta_{ij} \geq \nu (1 + |\eta|)^{\alpha-2} |\zeta|^2. \quad (3.1.4)$$

Demonstração. De facto,

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial \tau_{kl}}{\partial \eta_{ij}} \right| &= \left| (\alpha - 2) (1 + |\eta|)^{\alpha-3} \frac{\eta_{ij}}{|\eta|} \eta_{kl} + (1 + |\eta|)^{\alpha-2} \delta_{ik} \delta_{jl} \right| \\ &\leq |(\alpha - 2)| (1 + |\eta|)^{\alpha-3} \frac{|\eta_{ij} \eta_{kl}|}{|\eta|} + (1 + |\eta|)^{\alpha-2} |\delta_{ik} \delta_{jl}|. \end{aligned} \quad (3.1.5)$$

tendo em conta que

$$\delta_{ik} \delta_{jl} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = k, j = l \\ 0 & \text{no caso contrário} \end{cases}$$

e

$$|\eta_{ij} \eta_{kl}| \leq |\eta|^2.$$

Assim, podemos escrever

$$\begin{aligned} (3.1.5) &\leq |\alpha - 2| (1 + |\eta|)^{\alpha-3} \frac{|\eta|^2}{|\eta|} + (1 + |\eta|)^{\alpha-2} \\ &\leq |\alpha - 2| (1 + |\eta|)^{\alpha-3} (1 + |\eta|) + (1 + |\eta|)^{\alpha-2} \\ &= |\alpha - 2| (1 + |\eta|)^{\alpha-2} + (1 + |\eta|)^{\alpha-2} \\ &= (|\alpha - 2| + 1) (1 + |\eta|)^{\alpha-2}, \end{aligned} \quad (3.1.6)$$

como $\alpha - 2 < 0$ vem $(|\alpha - 2| + 1) = 3 - \alpha$, donde resulta **A1** com $\delta = 3 - \alpha$. Para obtermos **A2** escrevemos

$$\begin{aligned}
\tau'(\eta) : \zeta : \zeta &= \sum_{ijkl} \frac{\partial \tau_{kl}(\eta)}{\partial \eta_{ij}} \zeta_{kl} \zeta_{ij} \\
&= \sum_{ijkl} \left[(\alpha - 2) (1 + |\eta|)^{\alpha-3} \frac{\eta_{ij} \eta_{kl}}{|\eta|} + (1 + |\eta|)^{\alpha-2} \delta_{ik} \delta_{jl} \right] \zeta_{ij} \zeta_{kl} \\
&= (\alpha - 2) \frac{(1 + |\eta|)^{\alpha-3}}{|\eta|} \sum_{ijkl} \eta_{ij} \eta_{kl} \zeta_{ij} \zeta_{kl} + (1 + |\eta|)^{\alpha-2} \sum_{ijkl} \delta_{ik} \delta_{jl} \zeta_{ij} \zeta_{kl}. \quad (3.1.7)
\end{aligned}$$

Considerando que

$$\begin{aligned}
\sum_{ijkl} \eta_{ij} \eta_{kl} \zeta_{ij} \zeta_{kl} &= \sum_{ij} \eta_{ij} \zeta_{ij} \sum_{kl} \eta_{kl} \zeta_{kl} \\
&= (\eta : \zeta)^2 \leq |\eta|^2 |\zeta|^2
\end{aligned}$$

e

$$\sum_{ijkl} \delta_{ik} \delta_{jl} \zeta_{ij} \zeta_{kl} = \sum_{ij} \zeta_{ij} \zeta_{ij} = |\zeta|^2$$

e sabendo que $\alpha - 2 < 0$, podemos escrever

$$\begin{aligned}
(3.1.7) &\geq (\alpha - 2) \frac{(1 + |\eta|)^{\alpha-3}}{|\eta|} |\eta|^2 |\zeta|^2 + (1 + |\eta|)^{\alpha-2} |\zeta|^2 \\
&= \left((\alpha - 2) (1 + |\eta|)^{\alpha-3} |\eta| + (1 + |\eta|)^{\alpha-2} \right) |\zeta|^2 \\
&\geq \left((\alpha - 2) (1 + |\eta|)^{\alpha-3} (1 + |\eta|) + (1 + |\eta|)^{\alpha-2} \right) |\zeta|^2 \\
&= \left((\alpha - 2) (1 + |\eta|)^{\alpha-2} + (1 + |\eta|)^{\alpha-2} \right) |\zeta|^2 \\
&= (\alpha - 1) (1 + |\eta|)^{\alpha-2} |\zeta|^2,
\end{aligned}$$

e temos **A2** com $\nu = \alpha - 1$. □

As condições **A1-A2** abrangem uma vasta gama de aplicações no contexto dos fluidos não-Newtonianos e implicam as seguintes propriedades usuais para τ :

Corolário 3.1.1. *Seja $\tau : \mathbb{R}_{sym}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}_{sym}^{n \times n}$ a função associada ao tensor τ . Verificam-se as seguintes propriedades:*

- *Continuidade*

$$|\tau(\eta)| \leq k_0 \delta (1 + |\eta|)^{\alpha-2} |\eta|, \quad (3.1.8)$$

onde $k_0 \equiv k_0(\alpha, n)$.

- *Coercividade*

$$\tau(\eta) : \eta \geq \nu(1 + |\eta|)^{\alpha-2} |\eta|^2. \quad (3.1.9)$$

- *Monotonia*

$$(\tau(\eta) - \tau(\zeta)) : (\eta - \zeta) \geq \nu(1 + |\eta| + |\zeta|)^{\alpha-2} |\eta - \zeta|^2. \quad (3.1.10)$$

Demonstração. Para (3.1.8), consultar [30]. A desigualdade (3.1.9) é um caso particular de (3.1.10). Provemos então esta última: Tendo em conta que

$$\begin{aligned} \tau_{ij}(\eta) - \tau_{ij}(\zeta) &= \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t} \tau_{ij}(t\eta + (1-t)\zeta) dt \\ &= \int_0^1 \sum_{kl} \frac{\partial \tau_{ij}(t\eta + (1-t)\zeta)}{\partial D_{kl}} (\eta - \zeta)_{kl} dt, \end{aligned}$$

podemos escrever

$$\begin{aligned} (\tau(\eta) - \tau(\zeta)) : (\eta - \zeta) &= \int_0^1 \sum_{ij} \sum_{kl} \frac{\partial \tau_{ij}(t\eta + (1-t)\zeta)}{\partial D_{kl}} (\eta - \zeta)_{kl} (\eta - \zeta)_{ij} dt \\ &= \int_0^1 \tau'(t\eta + (1-t)\zeta) : (\eta - \zeta) : (\eta - \zeta) dt. \end{aligned} \quad (3.1.11)$$

Usando **A2** e recordando que $\alpha - 2 < 0$ temos

$$(3.1.11) \geq \int_0^1 (\alpha - 1) (1 + |t\eta + (1-t)\zeta|)^{\alpha-2} (\eta - \zeta)^2 dt. \quad (3.1.12)$$

Uma vez que $t \in [0, 1]$

$$1 + |t\eta + (1-t)\zeta| \leq 1 + |\eta + \zeta| \leq 1 + |\eta| + |\zeta|$$

podemos escrever

$$(3.1.12) \geq \int_0^1 (\alpha - 1) (1 + |\eta| + |\zeta|)^{\alpha-2} (\eta - \zeta)^2 dt.$$

□

Neste capítulo, usamos funções com valores em \mathbb{R}^n ou em $\mathbb{R}^{n \times n}$ ($n = 2, 3$). Designamos o espaço das funções continuamente diferenciáveis com suporte compacto em Ω por $D(\Omega)$ e o seu dual (o espaço das distribuições) por $D'(\Omega)$. Os espaços usuais de Sobolev designam-se por $\mathbf{W}^{k,\alpha}(\Omega)$ ($k \in \mathbb{N}$ com $1 < \alpha < \infty$), e as suas normas por $\|\cdot\|_{k,p}$. Fazemos $\mathbf{W}^{0,\alpha}(\Omega) \equiv \mathbf{L}^\alpha(\Omega)$ e $\|\cdot\|_\alpha \equiv \|\cdot\|_{L^\alpha}$. O espaço dual do espaço $\mathbf{W}_0^{1,\alpha}(\Omega)$ é dado por $\mathbf{W}^{-1,\alpha'}(\Omega)$ e a sua norma por $\|\cdot\|_{-1,\alpha'}$. Com o objectivo de eliminar a pressão na formulação fraca da equação de estado, usaremos também o espaço das funções com divergência nula, definido por:

$$V = \{\psi \in D(\Omega) : \operatorname{div} \psi = 0\},$$

e designamos por \mathbf{V}_α a aderência de V com respeito à norma do gradiente em \mathbf{L}^α :

$$\mathbf{V}_\alpha = \{\psi \in \mathbf{W}_0^{1,\alpha}(\Omega) : \operatorname{div} \psi = 0\}.$$

O espaço das funções de Hölder contínuas é um espaço de Banach definido por

$$C^{m,\gamma}(\bar{\Omega}) \equiv \{\mathbf{y} \in C^m(\bar{\Omega}) : \|\mathbf{y}\|_{C^{m,\gamma}(\bar{\Omega})} < \infty\}$$

com a norma

$$\|\mathbf{y}\|_{C^{m,\gamma}(\bar{\Omega})} \equiv \sum_{|\alpha|=0}^m \|D^\alpha \mathbf{y}\|_\infty + [\mathbf{y}]_{C^{m,\gamma}(\bar{\Omega})}, \quad (3.1.13)$$

e a semi-norma (condição de Hölder) dada por

$$[\mathbf{y}]_{C^{m,\gamma}(\bar{\Omega})} \equiv \sum_{|\alpha|=m} \sup_{\{x_1, x_2 \in \Omega, x_1 \neq x_2\}} \frac{|D^\alpha \mathbf{y}(x_1) - D^\alpha \mathbf{y}(x_2)|}{|x_1 - x_2|^\gamma} < +\infty,$$

para um inteiro não negativo m e $0 < \gamma < 1$ onde

$$D^\alpha \mathbf{y} \equiv \frac{\partial^{|\alpha|} \mathbf{y}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}},$$

com $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $\alpha_i \in \mathbf{N} \cup \{0\}$ e $|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i$.

Usamos também duas desigualdades clássicas, as desigualdades de Poincaré e de Korn:

Lema 3.1.1 (Desigualdade de Poincaré). *Seja $\mathbf{y} \in \mathbf{W}_0^{1,\alpha}(\Omega)$ com $1 \leq \alpha < +\infty$. Então existe uma constante $C_{P,\alpha}$ dependente de α e Ω tal que*

$$\|\mathbf{y}\|_\alpha \leq C_{P,\alpha} \|\nabla \mathbf{y}\|_\alpha.$$

Demonstração. Consultar [23]. □

Lema 3.1.2 (Desigualdade de Korn). *Seja $\mathbf{y} \in \mathbf{W}_0^{1,\alpha}(\Omega)$ com $1 < \alpha < +\infty$. Então existe uma constante $C_{K,\alpha}$ dependente de Ω tal que*

$$C_{K,\alpha} \|\mathbf{y}\|_{1,\alpha} \leq \|D\mathbf{y}\|_\alpha.$$

Demonstração. Consultar [30]. □

Designamos por C_P e C_K as constantes correspondentes ao caso $\alpha = 2$. Em conformidade, consideramos $\frac{C_{P,\alpha}}{C_{K,\alpha}} = C_{P,K,\alpha}$ e $\frac{C_P}{C_K} = C_{P,K}$. Assinalamos ainda duas propriedades simples, mas muito úteis, do termo convectivo.

Lema 3.1.3. *Consideremos \mathbf{y}_1 em \mathbf{V}_α e $\mathbf{y}_2, \mathbf{y}_3$ em $\mathbf{W}_0^{1,\alpha}(\Omega)$, então*

$$(\mathbf{y}_1 \cdot \nabla \mathbf{y}_2, \mathbf{y}_3) = -(\mathbf{y}_1 \cdot \nabla \mathbf{y}_3, \mathbf{y}_2) \quad e \quad (\mathbf{y}_1 \cdot \nabla \mathbf{y}_2, \mathbf{y}_2) = 0. \quad (3.1.14)$$

Demonstração. Consultar [38]. □

3.2 Estudo da equação de estado

Nesta secção apresentamos a formulação fraca da equação de estado (3.0.1) e escrevemos as condições para a existência e unicidade de solução fraca. Conclui-se em [18] a existência de uma única $C^{1,\gamma}$ -solução sob determinadas hipóteses (Proposição 3.2.3). Conclui-se também que as soluções são a mesma desde que a condição (3.2.10), definida mais à frente na Proposição 3.2.2, se verifique.

Seja $\varphi \in \mathbf{V}_\alpha$ uma função teste. Formalmente, multipliquemos a primeira equação (3.0.1) por φ e integremos em Ω , obtemos

$$-\int_{\Omega} \operatorname{div}(\tau(D\mathbf{y})) \cdot \varphi + \int_{\Omega} ((\mathbf{y} \cdot \nabla)\mathbf{y}) \cdot \varphi + \int_{\Omega} \nabla p \varphi = \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \varphi$$

Aplicando a fórmula de Green ao primeiro e ao terceiro integrais da igualdade anterior, vem, para qualquer $\varphi \in \mathbf{V}_{\alpha}$

$$-\left(\int_{\partial\Omega} \mathbf{n} \tau(D\mathbf{y}) \cdot \varphi - \int_{\Omega} \tau(D\mathbf{y}) : \nabla \varphi \right) + \int_{\Omega} ((\mathbf{y} \cdot \nabla)\mathbf{y}) \cdot \varphi + \left(\int_{\partial\Omega} p \mathbf{n} \varphi - \int_{\Omega} p \operatorname{div} \varphi \right) = \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \varphi,$$

onde \mathbf{n} é o vector unitário normal e exterior à fronteira $\partial\Omega$. Tendo em conta que $\varphi \in \mathbf{V}_{\alpha}$, os integrais na fronteira tomam o valor zero e uma vez que a divergência de φ é zero, a pressão é eliminada da igualdade anterior, cuja expressão surge simplificada da seguinte forma

$$\int_{\Omega} \tau(D\mathbf{y}) : \nabla \varphi + \int_{\Omega} ((\mathbf{y} \cdot \nabla)\mathbf{y}) \cdot \varphi = \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \varphi, \quad \forall \varphi \in \mathbf{V}_{\alpha}.$$

Uma forma equivalente de escrever esta igualdade é

$$(\tau(D\mathbf{y}), D\varphi) + ((\mathbf{y} \cdot \nabla)\mathbf{y}, \varphi) = \langle \mathbf{u}, \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathbf{V}_{\alpha}. \quad (3.2.1)$$

Segue a seguinte definição:

Definição 3.2.1. *Seja $\mathbf{u} \in \mathbf{W}^{-1,\alpha'}(\Omega)$. A função $\mathbf{y} \in \mathbf{V}_{\alpha}$ é uma solução fraca da equação (3.0.1) se a igualdade (3.2.1) se verifica para todo o $\varphi \in \mathbf{V}_{\alpha}$.*

As primeiras investigações matemáticas do sistema de equações (3.0.1) verificando as condições (3.1.8)-(3.1.10) encontram-se em [53, 54, 55] e [29] onde se provou a existência de solução fraca, usando argumentos de compacidade e a teoria dos operadores monótonos para $\alpha \geq \frac{3n+2}{n+2}$ no caso não estacionário. Estes resultados foram estendidos ao caso estacionário em [29] para $\alpha \geq \frac{3n}{n+2}$. Outros estudos de existência de solução com restrição no expoente α se seguiram, consultar por exemplo [30].

A restrição no expoente $\alpha \geq \frac{3n}{n+2}$ assegura que o termo convectivo pertence a $\mathbf{L}^1(\Omega)$ quando escolhermos funções teste no espaço \mathbf{V}_{α} . De facto, usando o Teorema de Rellich-Kondrachov (ver Anexo B, Teorema 8.2.7), temos a injeção compacta de $\mathbf{W}^{1,\alpha}(\Omega)$ em $\mathbf{L}^q(\Omega)$ para $q \in [1, p^*]$, onde $p^* = \frac{n\alpha}{n-\alpha}$ e n é a dimensão do espaço que contém Ω e por outro lado, temos a injeção contínua de $\mathbf{W}^{1,\alpha}(\Omega)$ em $\mathbf{L}^{\frac{n\alpha}{n-\alpha}}(\Omega)$. Para que o termo $((\mathbf{y} \cdot \nabla)\mathbf{y}) \cdot \varphi$ pertença a $\mathbf{L}^1(\Omega)$ é necessário que $q = \frac{2\alpha}{\alpha-1} \leq \frac{n\alpha}{n-\alpha}$, donde resulta $\alpha \geq \frac{3n}{n+2}$.

Lema 3.2.1. *Consideremos $1 < \alpha < 2$.*

i) *Sejam $f \in \mathbf{L}^{\infty}(\Omega)$, $g \in \mathbf{L}^1(\Omega)$ e $h \in \mathbf{L}^2(\Omega)$ funções não negativas satisfazendo*

$$h^2(x) \leq f(x)g(x), \quad \text{para quase todo } x \in \Omega,$$

então

$$\|h\|_2^2 \leq \|f\|_\infty \|g\|_1.$$

ii) Sejam $f \in \mathbf{L}^{\frac{\alpha}{2-\alpha}}(\Omega)$, $g \in \mathbf{L}^1(\Omega)$ e $h \in \mathbf{L}^\alpha(\Omega)$ funções não negativas satisfazendo

$$h^2(x) \leq f(x)g(x), \quad \text{para quase todo } x \in \Omega, \quad (3.2.2)$$

então

$$\|h\|_\alpha^2 \leq \|f\|_{\frac{\alpha}{2-\alpha}} \|g\|_1.$$

Demonstração. Para mostrar *i*), consideremos a norma em $\mathbf{L}^2(\Omega)$ de h e a desigualdade de Hölder, (dada no Anexo B no Lema 8.2.2), e escrevemos

$$\|h\|_2^2 = \int_{\Omega} (h(x))^2 dx \leq \int_{\Omega} f(x)g(x) dx \leq \|f\|_\infty \|g\|_1.$$

Para mostrar *ii*) elevamos a desigualdade (3.2.2) a $\frac{\alpha}{2}$ e integrando em Ω , vem

$$\|h\|_\alpha^\alpha = \int_{\Omega} (h(x)^2)^{\frac{\alpha}{2}} dx \leq \int_{\Omega} f(x)^{\frac{\alpha}{2}} g(x)^{\frac{\alpha}{2}} dx \quad (3.2.3)$$

Aplicando a desigualdade de Hölder ao segundo membro da desigualdade anterior com os expoentes conjugados $\frac{2}{2-\alpha}$ e $\frac{2}{\alpha}$, obtém-se

$$\int_{\Omega} f(x)^{\frac{\alpha}{2}} g(x)^{\frac{\alpha}{2}} dx \leq \left\| f^{\frac{\alpha}{2}} \right\|_{\frac{2}{2-\alpha}} \left\| g^{\frac{\alpha}{2}} \right\|_{\frac{2}{\alpha}} = \|f\|_{\frac{\alpha}{2-\alpha}} \|g\|_1^{\frac{\alpha}{2}}. \quad (3.2.4)$$

donde

$$\|h\|_\alpha^\alpha \leq \|f\|_{\frac{\alpha}{2-\alpha}} \|g\|_1^{\frac{\alpha}{2}}.$$

Elevando a desigualdade a $\frac{2}{\alpha}$ concluímos o pretendido. \square

Proposição 3.2.1. Consideremos $1 < \alpha \leq 2$.

i) Sejam \mathbf{y}_1 e \mathbf{y}_2 duas soluções em $C^{1,\gamma}(\bar{\Omega})$, então

$$(\tau(D\mathbf{y}_1) - \tau(D\mathbf{y}_2), D(\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2)) \geq \frac{\nu \|D(\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2)\|_2^2}{1 + \|D\mathbf{y}_1\|_\infty^{2-\alpha} + \|D\mathbf{y}_2\|_\infty^{2-\alpha}} \quad (3.2.5)$$

ii) Sejam \mathbf{y}_1 e \mathbf{y}_2 duas soluções em $\mathbf{W}_0^{1,\alpha}(\Omega)$, então

$$(\tau(D\mathbf{y}_1) - \tau(D\mathbf{y}_2), D(\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2)) \geq \frac{\nu \|D(\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2)\|_\alpha^2}{|\Omega|^{\frac{2-\alpha}{\alpha}} + \|D\mathbf{y}_1\|_\alpha^{2-\alpha} + \|D\mathbf{y}_2\|_\alpha^{2-\alpha}} \quad (3.2.6)$$

Demonstração. Reescrevemos a expressão (3.1.10) da seguinte forma

$$|\eta - \zeta|^2 \leq \frac{1}{\nu} [(\tau(\eta) - \tau(\zeta)) : (\eta - \zeta)] (1 + |\eta| + |\zeta|)^{2-\alpha} \quad (3.2.7)$$

e fazemos, em (3.2.7),

$$\eta = |D\mathbf{y}_1|, \quad \zeta = |D\mathbf{y}_2|$$

e

$$f = (1 + |D\mathbf{y}_1| + |D\mathbf{y}_2|)^{2-\alpha},$$

$$g = \frac{1}{\nu} (\tau(D\mathbf{y}_1) - \tau(D\mathbf{y}_2)) : D(\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2),$$

$$h = |D(\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2)|.$$

Como \mathbf{y}_1 e \mathbf{y}_2 pertencem a $C^{1,\gamma}(\bar{\Omega})$, vem que $D\mathbf{y}_1$ e $D\mathbf{y}_2$ são limitadas, e portanto $f \in \mathbf{L}^\infty(\Omega)$, $g \in \mathbf{L}^1(\Omega)$ e $h \in \mathbf{L}^2(\Omega)$. De acordo com o Lema 3.2.1 i) e tendo em conta que $1 < \alpha \leq 2$ vem

$$\begin{aligned} \|D(\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2)\|_2^2 &\leq \|(1 + |D\mathbf{y}_1| + |D\mathbf{y}_2|)^{2-\alpha}\|_\infty \left\| \frac{1}{\nu} (\tau(D\mathbf{y}_1) - \tau(D\mathbf{y}_2)) : D(\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2) \right\|_1 \\ &\leq \frac{1}{\nu} \|(1 + |D\mathbf{y}_1|^{2-\alpha} + |D\mathbf{y}_2|^{2-\alpha})\|_\infty (\tau(D\mathbf{y}_1) - \tau(D\mathbf{y}_2), D(\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2)) \\ &\leq \frac{1}{\nu} (1 + \|D\mathbf{y}_1\|_\infty^{2-\alpha} + \|D\mathbf{y}_2\|_\infty^{2-\alpha}) (\tau(D\mathbf{y}_1) - \tau(D\mathbf{y}_2), D(\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2)) \end{aligned}$$

donde resulta (3.2.5). Mostremos agora ii): para $\alpha = 2$, o resultado é uma consequência directa de (3.1.10). Para $1 < \alpha < 2$, sabendo que $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2 \in \mathbf{W}_0^{1,\alpha}(\Omega)$, e portanto que $D\mathbf{y}_1, D\mathbf{y}_2 \in \mathbf{L}^\alpha(\Omega)$ vem que $f \in \mathbf{L}^{\frac{\alpha}{2-\alpha}}(\Omega)$, $g \in \mathbf{L}^1(\Omega)$ e $h \in \mathbf{L}^\alpha(\Omega)$. De forma similar usando o Lema 3.2.1 ii), obtemos

$$\|D(\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2)\|_\alpha^2 \leq \|(1 + |D\mathbf{y}_1| + |D\mathbf{y}_2|)^{2-\alpha}\|_{\frac{\alpha}{2-\alpha}} \left\| \frac{1}{\nu} (\tau(D\mathbf{y}_1) - \tau(D\mathbf{y}_2)) : D(\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2) \right\|_1. \quad (3.2.8)$$

Tendo em conta que

$$\begin{aligned} \|(1 + |D\mathbf{y}_1| + |D\mathbf{y}_2|)^{2-\alpha}\|_{\frac{\alpha}{2-\alpha}} &\leq \|1 + |D\mathbf{y}_1|^{2-\alpha} + |D\mathbf{y}_2|^{2-\alpha}\|_{\frac{\alpha}{2-\alpha}} \\ &\leq \|1\|_{\frac{\alpha}{2-\alpha}} + \|D\mathbf{y}_1^{2-\alpha}\|_{\frac{\alpha}{2-\alpha}} + \|D\mathbf{y}_2^{2-\alpha}\|_{\frac{\alpha}{2-\alpha}} \\ &\leq |\Omega|^{\frac{2-\alpha}{\alpha}} + \|D\mathbf{y}_1\|_\alpha^{2-\alpha} + \|D\mathbf{y}_2\|_\alpha^{2-\alpha} \end{aligned}$$

a desigualdade (3.2.8) pode escrever-se na forma

$$\|D(\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2)\|_\alpha^2 \leq \frac{1}{\nu} (|\Omega|^{\frac{2-\alpha}{\alpha}} + \|D\mathbf{y}_1\|_\alpha^{2-\alpha} + \|D\mathbf{y}_2\|_\alpha^{2-\alpha}) (\tau(D\mathbf{y}_1) - \tau(D\mathbf{y}_2), D(\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2))$$

o que nos dá (3.2.6). □

Proposição 3.2.2. *Supomos que as condições A1-A2 são válidas para $\frac{3n}{n+2} \leq \alpha < 2$. Então, para $\mathbf{u} \in \mathbf{L}^2(\Omega)$ a equação (3.0.1) admite pelo menos uma solução fraca $\mathbf{y}_u \in \mathbf{V}_\alpha$ e verifica-se a seguinte estimativa:*

$$\|D\mathbf{y}_u\|_\alpha \leq F \left(\frac{\|\mathbf{u}\|_2}{\nu} \right), \quad (3.2.9)$$

onde $F : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ é uma função real de variável real definida por $F(x) = (k_1 x)^{\frac{1}{\alpha-1}} + k_2 x$, e k_1 e k_2 são constantes. Além disso, se \mathbf{u} satisfaz a seguinte condição

$$F \left(\frac{\|\mathbf{u}\|_2}{\nu} \right) \left(|\Omega|^{\frac{2-\alpha}{\alpha}} + 2F^{2-\alpha} \left(\frac{\|\mathbf{u}\|_2}{\nu} \right) \right) < \frac{\nu}{k_3}, \quad (3.2.10)$$

onde k_3 é também uma constante, então a solução fraca é única.

Demonstração. Para a demonstração de existência de solução, sugerimos [29]. Para demonstrar a estimativa de energia, consideramos $\varphi = \mathbf{y}_u$ em (3.2.1) e usamos (3.1.14) para obter

$$(\tau(D\mathbf{y}_u), D\mathbf{y}_u) = (\mathbf{u}, \mathbf{y}_u). \quad (3.2.11)$$

Sabendo que $\mathbf{W}_0^{1,\alpha}(\Omega) \hookrightarrow \mathbf{L}^2(\Omega)$ para $\alpha \geq \frac{2n}{n+2}$ e usando as desigualdades de Poincaré e de Korn verifica-se

$$\begin{aligned}
|(\mathbf{u}, \mathbf{y}_u)| &\leq \|\mathbf{u}\|_{-1, \alpha'} \|\mathbf{y}_u\|_{1, \alpha} \leq \frac{1}{C_{K, \alpha}} \|\mathbf{u}\|_{-1, \alpha'} \|D\mathbf{y}_u\|_{\alpha} \\
&\leq \frac{C_{2, \alpha}}{C_{K, \alpha}} \|\mathbf{u}\|_2 \|D\mathbf{y}_u\|_{\alpha} = C \|\mathbf{u}\|_2 \|D\mathbf{y}_u\|_{\alpha}.
\end{aligned} \tag{3.2.12}$$

onde $C_{2, \alpha}$ é a constante de injeção e $C = \frac{C_{2, \alpha}}{C_{K, \alpha}}$. Por outro lado, usando (3.2.6) com $\mathbf{y}_1 = \mathbf{y}_u$ e $\mathbf{y}_2 = 0$ segue

$$(\tau(D\mathbf{y}_u), D\mathbf{y}_u) \geq \frac{\nu \|D\mathbf{y}_u\|_{\alpha}^2}{|\Omega|^{\frac{2-\alpha}{\alpha}} + \|D\mathbf{y}_u\|_{\alpha}^{2-\alpha}}. \tag{3.2.13}$$

Combinando (3.2.11), (3.2.12) e (3.2.13) vem

$$\frac{\nu \|D\mathbf{y}_u\|_{\alpha}^2}{|\Omega|^{\frac{2-\alpha}{\alpha}} + \|D\mathbf{y}_u\|_{\alpha}^{2-\alpha}} \leq C \|\mathbf{u}\|_2 \|D\mathbf{y}_u\|_{\alpha}, \tag{3.2.14}$$

ou seja

$$\|D\mathbf{y}_u\|_{\alpha} \leq C \frac{\|\mathbf{u}\|_2}{\nu} \left(|\Omega|^{\frac{2-\alpha}{\alpha}} + \|D\mathbf{y}_u\|_{\alpha}^{2-\alpha} \right). \tag{3.2.15}$$

Aplicamos a desigualdade de Young (ver Anexo B, Lema 8.2.1), ao termo $C \frac{\|\mathbf{u}\|_2}{\nu} \|D\mathbf{y}_u\|_{\alpha}^{2-\alpha}$, fazendo $a = C \frac{\|\mathbf{u}\|_2}{\nu}$ e $b = \|D\mathbf{y}_u\|_{\alpha}^{2-\alpha}$ com os expoentes conjugados $p = \frac{1}{\alpha-1}$ e $q = \frac{1}{2-\alpha}$ obtém-se

$$C \frac{\|\mathbf{u}\|_2}{\nu} \|D\mathbf{y}_u\|_{\alpha}^{2-\alpha} \leq (\alpha-1) \left(C \frac{\|\mathbf{u}\|_2}{\nu} \right)^{\frac{1}{\alpha-1}} + (2-\alpha) \|D\mathbf{y}_u\|_{\alpha}. \tag{3.2.16}$$

Usando (3.2.16), podemos escrever (3.2.15) da seguinte forma

$$\|D\mathbf{y}_u\|_{\alpha} \leq C |\Omega|^{\frac{2-\alpha}{\alpha}} \frac{\|\mathbf{u}\|_2}{\nu} + (\alpha-1) \left(C \frac{\|\mathbf{u}\|_2}{\nu} \right)^{\frac{1}{\alpha-1}} + (2-\alpha) \|D\mathbf{y}_u\|_{\alpha}, \tag{3.2.17}$$

que é equivalente a

$$\|D\mathbf{y}_u\|_{\alpha} \leq \frac{C}{\alpha-1} |\Omega|^{\frac{2-\alpha}{\alpha}} \frac{\|\mathbf{u}\|_2}{\nu} + \left(C \frac{\|\mathbf{u}\|_2}{\nu} \right)^{\frac{1}{\alpha-1}}, \tag{3.2.18}$$

donde se conclui o pretendido com $k_1 = C$ e $k_2 = \frac{C}{\alpha-1} |\Omega|^{\frac{2-\alpha}{\alpha}}$.

Para mostrar a unicidade da solução fraca, supomos que \mathbf{y}_1 e \mathbf{y}_2 são duas soluções fracas relativas ao controlo \mathbf{u} e fazemos $\varphi = \mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2$ na correspondente formulação fraca para obter

$$(\tau(D\mathbf{y}_1) - \tau(D\mathbf{y}_2), D(\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2)) + (\mathbf{y}_1 \cdot \nabla \mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2 \cdot \nabla \mathbf{y}_2, \mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2) = 0. \quad (3.2.19)$$

Devido a (3.1.14), o termo convectivo pode ser escrito na seguinte forma

$$\begin{aligned} (\mathbf{y}_1 \cdot \nabla \mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2 \cdot \nabla \mathbf{y}_2, \mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2) &= (\mathbf{y}_1 \cdot \nabla \mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2 \cdot \nabla \mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2 \cdot \nabla \mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2 \cdot \nabla \mathbf{y}_2, \mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2) \\ &= ((\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2) \cdot \nabla \mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2 \cdot \nabla (\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2), \mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2) \\ &= ((\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2) \cdot \nabla \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2) + (\mathbf{y}_2 \cdot \nabla (\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2), \mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2) \\ &= ((\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2) \cdot \nabla \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2) \\ &= -((\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2) \cdot \nabla (\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2), \mathbf{y}_1), \end{aligned} \quad (3.2.20)$$

donde, de (3.2.19), segue que

$$(\tau(D\mathbf{y}_1) - \tau(D\mathbf{y}_2), D(\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2)) = ((\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2) \cdot \nabla (\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2), \mathbf{y}_1). \quad (3.2.21)$$

Usando (3.2.6) e a estimativa (3.2.9), obtemos

$$\begin{aligned} (\tau(D\mathbf{y}_1) - \tau(D\mathbf{y}_2), D(\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2)) &\geq \frac{\nu \|D(\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2)\|_\alpha^2}{|\Omega|^{\frac{2-\alpha}{\alpha}} + \|D\mathbf{y}_1\|_\alpha^{2-\alpha} + \|D\mathbf{y}_2\|_\alpha^{2-\alpha}} \\ &\geq \frac{\nu \|D(\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2)\|_\alpha^2}{|\Omega|^{\frac{2-\alpha}{\alpha}} + 2F^{2-\alpha} \left(\frac{\|\mathbf{u}\|_2}{\nu} \right)}. \end{aligned} \quad (3.2.22)$$

Por outro lado, usando as desigualdades de Poincaré e de Korn e resultados clássicos das injecções de Sobolev (ver o Teorema 8.2.7 no Anexo B) tem-se

$$\begin{aligned} |((\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2) \cdot \nabla (\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2), \mathbf{y}_1)| &= |((\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2) \cdot \nabla \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2)| \\ &\leq \|\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2\|_{\frac{2\alpha}{\alpha-1}} \|\nabla \mathbf{y}_1\|_\alpha \|\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2\|_{\frac{2\alpha}{\alpha-1}} \\ &\leq \|\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2\|_{\frac{2\alpha}{\alpha-1}}^2 \|\nabla \mathbf{y}_1\|_\alpha \\ &\leq C_{E,\alpha}^2 \|\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2\|_{1,\alpha}^2 \|\nabla \mathbf{y}_1\|_\alpha \\ &\leq k_3 \|D(\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2)\|_\alpha^2 \|D\mathbf{y}_1\|_\alpha \\ &\leq k_3 \|D(\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2)\|_\alpha^2 F \left(\frac{\|\mathbf{u}\|_2}{\nu} \right), \end{aligned} \quad (3.2.23)$$

onde $C_{E,\alpha}$ é a constante de injeção e $k_3 = \frac{C_{E,\alpha}^2}{C_{K,\alpha}^3}$. Tendo em conta (3.2.21), (3.2.22) e (3.2.23) segue

$$\frac{\nu \|D(\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2)\|_\alpha^2}{|\Omega|^{\frac{2-\alpha}{\alpha}} + 2F^{2-\alpha} \left(\frac{\|\mathbf{u}\|_2}{\nu}\right)} \leq k_3 \|D(\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2)\|_\alpha^2 F \left(\frac{\|\mathbf{u}\|_2}{\nu}\right),$$

o que é equivalente a

$$\nu \|D(\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2)\|_\alpha^2 \leq k_3 F \left(\frac{\|\mathbf{u}\|_2}{\nu}\right) \left(|\Omega|^{\frac{2-\alpha}{\alpha}} + 2F^{2-\alpha} \left(\frac{\|\mathbf{u}\|_2}{\nu}\right)\right) \|D(\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2)\|_\alpha^2,$$

ou seja

$$\left[\nu - k_3 F \left(\frac{\|\mathbf{u}\|_2}{\nu}\right) \left(|\Omega|^{\frac{2-\alpha}{\alpha}} + 2F^{2-\alpha} \left(\frac{\|\mathbf{u}\|_2}{\nu}\right)\right) \right] \|D(\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2)\|_\alpha^2 \leq 0. \quad (3.2.24)$$

Portanto, se

$$\nu > k_3 F \left(\frac{\|\mathbf{u}\|_2}{\nu}\right) \left(|\Omega|^{\frac{2-\alpha}{\alpha}} + 2F^{2-\alpha} \left(\frac{\|\mathbf{u}\|_2}{\nu}\right)\right)$$

então

$$\|D(\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2)\|_\alpha^2 = 0$$

e obtemos o pretendido. □

Definição 3.2.2. *Seja $\mathbf{u} \in \mathbf{L}^2(\Omega)$. A função \mathbf{y} diz-se uma $C^{1,\gamma}$ -solução do problema (3.0.1) se $\mathbf{y} \in C^{1,\gamma}(\bar{\Omega})$, para algum $\gamma \in (0, 1)$, $\operatorname{div} \mathbf{y} = 0$, $\mathbf{y}|_{\partial\Omega} = 0$ e ainda se \mathbf{y} satisfaz a seguinte igualdade:*

$$(\tau(D\mathbf{y}), D\varphi) + (\mathbf{y} \cdot \nabla \mathbf{y}, \varphi) = \langle \mathbf{u}, \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathbf{V}_2. \quad (3.2.25)$$

A Proposição seguinte (ver [18]), apresenta-nos um resultado de existência e unicidade de uma $C^{1,\gamma}$ -solução para o problema (3.0.1) em que o tensor τ tem a forma (3.1.2), sob determinadas condições em \mathbf{u} , mas sem qualquer condição adicional no expoente α .

Proposição 3.2.3. *Supomos $1 < \alpha < 2$ e $q > n$. Seja Ω um domínio de classe C^{1,γ_0} , $\gamma_0 = 1 - \frac{n}{q}$ e seja $\mathbf{u} \in \mathbf{L}^q(\Omega)$. Se $\|\mathbf{u}\|_q \leq \Delta$ onde $\Delta = \Delta(\gamma_0, n, \alpha)$ é uma constante positiva (no sentido precisado na Observação 3.2.1), então existe uma única $C^{1,\gamma}$ -solução, (\mathbf{y}_u, p) , do problema (3.0.1) tal que $\mathbf{y}_u \in C^{1,\gamma}(\bar{\Omega})$, $p \in C^{0,\gamma}(\bar{\Omega})$ para qualquer $\gamma < \gamma_0$, e*

$$\|\mathbf{y}_u\|_{C^{1,\gamma}(\bar{\Omega})} + \|p\|_{C^{0,\gamma}(\bar{\Omega})} \leq k_4 \|\mathbf{u}\|_q. \quad (3.2.26)$$

Observação 3.2.1. 1. Em [18] mostra-se que, para haver unicidade de solução, os dados do problema têm que ser pequenos num determinado sentido, isto é, \mathbf{u} tem que ser limitado por uma constante com a seguinte forma

$$\Delta \equiv \min \left\{ 1, \frac{1}{c_1(2^{r+4-\alpha}c(r+4-\alpha))^{\frac{1}{r+3-\alpha}}}, \frac{1}{k_4(1+k_4)^{2-\alpha}(2-\alpha+2c)} \right\}, \quad (3.2.27)$$

e a estimativa em $C^{1,\gamma}$ é obtida considerando

$$k_4 = 2c \left(\frac{r+4-\alpha}{r+3-\alpha} \right), \quad (3.2.28)$$

onde $r = r(\gamma_0, n, \alpha)$ é um número real positivo maior que 2, c_1 e c são constantes positivas apropriadas. Em [18] mostra-se também que, considerando $q > 2n$, Ω um domínio de classe C^2 e $\|\mathbf{u}\|_q$ suficientemente pequeno, a única solução do problema (\mathbf{y}_u, p) está em $\mathbf{W}^{2,2}(\Omega) \cap C^{1,\gamma}(\bar{\Omega})$ e $\mathbf{W}^{1,2}(\Omega) \cap C^{0,\gamma}(\bar{\Omega})$ respectivamente, para qualquer $\gamma < \gamma_0$.

2. Por outro lado, se \mathbf{y} é uma $C^{1,\gamma}(\bar{\Omega})$ -solução então a pressão p está pelo menos em $\mathbf{L}^2(\Omega)$ tal que o par (\mathbf{y}, p) satisfaz a seguinte igualdade:

$$(\tau(D\mathbf{y}), D\varphi) + (\mathbf{y} \cdot \nabla \mathbf{y}, \varphi) - (p, \operatorname{div} \varphi) = \langle \mathbf{u}, \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in D(\Omega).$$

Consideremos \mathbf{y}_1 a $C^{1,\gamma}$ -solução do problema (3.0.1), cuja existência é garantida pela Proposição 3.2.3 e $\mathbf{y}_2 \in \mathbf{V}_\alpha$ a solução fraca garantida pela Proposição 3.2.2. Mostramos a seguir que a desigualdade (3.2.10) é uma condição explícita para que \mathbf{y}_1 e \mathbf{y}_2 sejam a mesma solução do problema (3.0.1).

Proposição 3.2.4. *Suponhamos que as condições A1-A2 (ver (3.1.3) e (3.1.4)) são satisfeitas com $\frac{3n}{n+2} \leq \alpha < 2$. Então se as condições da Proposição 3.2.3 se verificarem e se \mathbf{y}_1 é uma $C^{1,\gamma}$ -solução e \mathbf{y}_2 uma solução fraca do problema (3.0.1) satisfazendo a condição (3.2.10), temos que $\mathbf{y}_1 \equiv \mathbf{y}_2$.*

Demonstração. Claramente se \mathbf{y}_1 é uma $C^{1,\gamma}$ -solução, então \mathbf{y}_1 é também uma solução fraca no sentido da Definição 3.2.1. Então, podemos usar funções teste $\varphi \in \mathbf{V}_\alpha$ e fazer $\varphi = \mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2$ para obter

$$(\tau(D\mathbf{y}_1) - \tau(D\mathbf{y}_2), D(\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2)) + (\mathbf{y}_1 \cdot \nabla \mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2 \cdot \nabla \mathbf{y}_2, \mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2) = 0. \quad (3.2.29)$$

Usando (3.1.14) podemos reescrever o termo convectivo na forma

$$(\mathbf{y}_1 \cdot \nabla \mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2 \cdot \nabla \mathbf{y}_2, \mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2) = ((\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2) \cdot \nabla \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2)$$

e (3.2.29) é equivalente a

$$(\tau(D\mathbf{y}_1) - \tau(D\mathbf{y}_2), D(\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2)) = -((\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2) \cdot \nabla \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2).$$

Usando (3.2.6) e a estimativa (3.2.9) uma vez mais, obtemos

$$(\tau(D\mathbf{y}_1) - \tau(D\mathbf{y}_2), D(\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2)) \geq \frac{\nu \|D(\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2)\|_\alpha^2}{|\Omega|^{\frac{2-\alpha}{\alpha}} + 2F^{2-\alpha} \left(\frac{\|\mathbf{u}\|_2}{\nu}\right)}.$$

Por outro lado, usando as desigualdade de Hölder, Poincaré e Korn, as injeções de Sobolev e a estimativa (3.2.9) temos

$$|((\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2) \cdot \nabla \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2)| \leq k_3 F \left(\frac{\|\mathbf{u}\|_2}{\nu}\right) \|D(\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2)\|_\alpha^2,$$

onde $k_3 = \frac{C_{E,\alpha}^2}{C_{K,\alpha}^3}$ é a constante de injeção. Por conseguinte,

$$\nu \|D(\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2)\|_\alpha^2 \leq \left(|\Omega|^{\frac{2-\alpha}{\alpha}} + 2F^{2-\alpha} \left(\frac{\|\mathbf{u}\|_2}{\nu}\right)\right) k_3 F \left(\frac{\|\mathbf{u}\|_2}{\nu}\right) \|D(\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2)\|_\alpha^2,$$

o que é equivalente a

$$\left(\nu - \left(|\Omega|^{\frac{2-\alpha}{\alpha}} + 2F^{2-\alpha} \left(\frac{\|\mathbf{u}\|_2}{\nu}\right)\right) k_3 F \left(\frac{\|\mathbf{u}\|_2}{\nu}\right)\right) \|D(\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2)\|_\alpha^2 \leq 0,$$

donde segue o pretendido. □

3.3 O problema de controlo óptimo e existência de solução

Nesta secção estabelecemos a existência de solução para o problema de controlo óptimo (P_α) dado por (3.0.2), cujo funcional de custo está representado por (3.0.3). Seguimos as referências [16], [52] e [68] para demonstrar a convergência forte de $(\mathbf{y}_k)_k$ para \mathbf{y}_u em $\mathbf{W}_0^{1,\alpha}(\Omega)$. Os resultados de regularidade em y e a estimativa (3.2.26) permitem-nos obter informação adicional relativamente à sucessão $(\mathbf{y}_k)_k$. No entanto, para provar que $(\mathbf{y}_k)_k$ converge fortemente para \mathbf{y}_u em $\mathbf{W}_0^{1,\alpha}(\Omega)$, é suficiente o uso da

convergência em espaços de Lebesgue.

Proposição 3.3.1. *Suponhamos que $(\mathbf{u}_k)_k$ converge fracamente para \mathbf{u} em $\mathbf{L}^2(\Omega)$. Seja \mathbf{y}_k a sucessão dos estados associados a \mathbf{u}_k então $(\mathbf{y}_k)_k$ converge fortemente para \mathbf{y}_u em $\mathbf{W}_0^{1,\alpha}(\Omega)$.*

Demonstração. A convergência da sucessão $(\mathbf{u}_k)_k$ para \mathbf{u} na topologia fraca de $\mathbf{L}^2(\Omega)$ implica que $(\mathbf{u}_k)_k$ é limitada, i. e., existe uma constante $M > 0$ tal que

$$\|\mathbf{u}_k\|_2 \leq M, \quad \text{para } k > \bar{k}.$$

Pela Proposição 3.2.2, segue que

$$\|D\mathbf{y}_k\|_\alpha \leq F \left(\frac{\|\mathbf{u}_k\|_2}{\nu} \right) \leq F \left(\frac{M}{\nu} \right), \quad \text{para } k > \bar{k} \quad (3.3.1)$$

e consequentemente, usando a desigualdade de Korn, a sucessão $(\mathbf{y}_k)_k$ é limitada em \mathbf{V}_α . A estimativa (3.3.1) juntamente com a condição de continuidade para τ , (3.1.8), implica que

$$\begin{aligned} \|\tau(D\mathbf{y}_k)\|_{\alpha'}^{\alpha'} &\leq (k_0\delta)^{\alpha'} \int_{\Omega} (1 + |D\mathbf{y}_k|)^{(\alpha-2)\alpha'} |D\mathbf{y}_k|^{\alpha'} dx \\ &\leq (k_0\delta)^{\alpha'} \int_{\Omega} (1 + |D\mathbf{y}_k|)^{(\alpha-2)\alpha'} (1 + |D\mathbf{y}_k|)^{\alpha'} dx \\ &= (k_0\delta)^{\alpha'} \int_{\Omega} (1 + |D\mathbf{y}_k|)^\alpha dx \\ &\leq (k_0\delta)^{\alpha'} \int_{\Omega} 2^{\alpha-1} (1 + |D\mathbf{y}_k|^\alpha) dx \\ &\leq (k_0\delta)^{\alpha'} 2^{\alpha-1} (|\Omega| + \|D\mathbf{y}_k\|_\alpha^\alpha) \\ &\leq (k_0\delta)^{\alpha'} 2^{\alpha-1} \left(|\Omega| + F^\alpha \left(\frac{\|\mathbf{u}_k\|_2}{\nu} \right) \right) \\ &\leq (k_0\delta)^{\alpha'} 2^{\alpha-1} \left(|\Omega| + F^\alpha \left(\frac{M}{\nu} \right) \right), \quad \text{para } k > \bar{k} \end{aligned}$$

onde $\alpha' = \frac{\alpha}{\alpha-1}$, e portanto, a sucessão $(\tau(D\mathbf{y}_k))_k$ é limitada em $\mathbf{L}^{\alpha'}(\Omega)$. Então existem subsucessões, indexadas em k , $(\mathbf{y}_k)_k$ e $(\tau(D\mathbf{y}_k))_k$ tais que $(\mathbf{y}_k)_k$ converge fracamente para $\mathbf{y} \in \mathbf{V}_\alpha$ e $(\tau(D\mathbf{y}_k))_k$ converge fracamente para $\tilde{\tau} \in \mathbf{L}^{\alpha'}(\Omega)$. Por outro lado, temos que $\mathbf{W}^{1,\alpha}(\Omega) \hookrightarrow \mathbf{L}^q(\Omega)$ com injeção

compacta, para qualquer $q \in [1, \alpha^*[$ e $\alpha^* = \frac{n\alpha}{n-\alpha}$ (ver o Teorema 8.2.7 no Anexo B). Assim, para $\alpha > \frac{3n}{n+2}$ temos a injeção compacta $\mathbf{W}^{1,\alpha}(\Omega) \hookrightarrow \mathbf{L}^{\frac{2\alpha}{\alpha-1}}(\Omega)$ e conseqüentemente a convergência forte de $(\mathbf{y}_k)_{k>0}$ em $\mathbf{L}^{\frac{2\alpha}{\alpha-1}}(\Omega)$. Consideramos a igualdade

$$(\tau(D\mathbf{y}_k) - \tau(D\mathbf{y}), D\varphi) + (\mathbf{y}_k \cdot \nabla \mathbf{y}_k - \mathbf{y} \cdot \nabla \mathbf{y}, \varphi) = (\mathbf{u}_k - \mathbf{u}, \varphi), \quad \forall \varphi \in \mathbf{V}_\alpha. \quad (3.3.2)$$

Temos que

$$\begin{aligned} |(\mathbf{y}_k \cdot \nabla \mathbf{y}_k - \mathbf{y} \cdot \nabla \mathbf{y}, \varphi)| &= |((\mathbf{y}_k - \mathbf{y}) \cdot \nabla \mathbf{y}_k, \varphi) + (\mathbf{y} \cdot \nabla (\mathbf{y}_k - \mathbf{y}), \varphi)| \\ &= |((\mathbf{y}_k - \mathbf{y}) \cdot \nabla \mathbf{y}_k, \varphi) - (\mathbf{y} \cdot \nabla \varphi, (\mathbf{y}_k - \mathbf{y}))| \\ &\leq |((\mathbf{y}_k - \mathbf{y}) \cdot \nabla \mathbf{y}_k, \varphi)| + |(\mathbf{y} \cdot \nabla \varphi, (\mathbf{y}_k - \mathbf{y}))| \\ &\leq \left(\|\nabla \mathbf{y}_k\|_\alpha \|\varphi\|_{\frac{2\alpha}{\alpha-1}} + \|\mathbf{y}\|_{\frac{2\alpha}{\alpha-1}} \|\nabla \varphi\|_\alpha \right) \|\mathbf{y}_k - \mathbf{y}\|_{\frac{2\alpha}{\alpha-1}} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

quando $k \rightarrow +\infty$. Então, passando ao limite na formulação fraca correspondente a \mathbf{y}_k ,

$$(\tau(D\mathbf{y}_k), D\varphi) + (\mathbf{y}_k \cdot \nabla \mathbf{y}_k, \varphi) = (\mathbf{u}_k, \varphi), \quad \forall \varphi \in \mathbf{V}_\alpha,$$

obtemos

$$(\tilde{\tau}, D\varphi) + (\mathbf{y} \cdot \nabla \mathbf{y}, \varphi) = (\mathbf{u}, \varphi), \quad \forall \varphi \in \mathbf{V}_\alpha. \quad (3.3.3)$$

Em particular, fazendo $\varphi = \mathbf{y}$ e tomando em consideração (3.1.14) podemos escrever a expressão anterior na forma

$$(\tilde{\tau}, D\mathbf{y}) = (\tilde{\tau}, D\mathbf{y}) + (\mathbf{y} \cdot \nabla \mathbf{y}, \mathbf{y}) = (\mathbf{u}, \mathbf{y}). \quad (3.3.4)$$

Por outro lado, a condição de monotonia (3.1.10) dá-nos

$$(\tau(D\mathbf{y}_k) - \tau(D\varphi), D\mathbf{y}_k - D\varphi) \geq 0, \quad \forall \varphi \in \mathbf{V}_\alpha. \quad (3.3.5)$$

Dado que

$$(\tau(D\mathbf{y}_k), D\mathbf{y}_k) = (\mathbf{u}_k, \mathbf{y}_k),$$

substituindo em (3.3.5), obtemos

$$(\mathbf{u}_k, \mathbf{y}_k) - (\tau(D\mathbf{y}_k), D\varphi) - (\tau(D\varphi), D\mathbf{y}_k - D\varphi) \geq 0, \quad \forall \varphi \in \mathbf{V}_\alpha.$$

Passando ao limite vem

$$(\mathbf{u}, \mathbf{y}) - (\tilde{\tau}, D\varphi) - (\tau(D\varphi), D\mathbf{y} - D\varphi) \geq 0, \quad \forall \varphi \in \mathbf{V}_\alpha.$$

Esta desigualdade juntamente com (3.3.4) implica que

$$(\tilde{\tau} - \tau(D\varphi), D\mathbf{y} - D\varphi) \geq 0, \quad \forall \varphi \in \mathbf{V}_\alpha.$$

Tomando $\varphi = \mathbf{y} - \lambda\theta$ (com $\lambda > 0$), o que é possível considerando $\theta \in \mathbf{V}_\alpha$, temos que

$$(\tilde{\tau} - \tau(D(\mathbf{y} - \lambda\theta)), D\mathbf{y} - D(\mathbf{y} - \lambda\theta)) \geq 0 \quad \forall \theta \in \mathbf{V}_\alpha$$

que é equivalente a

$$\lambda(\tilde{\tau} - \tau(D(\mathbf{y} - \lambda\theta)), D\theta) \geq 0, \quad \forall \theta \in \mathbf{V}_\alpha.$$

Como $\lambda > 0$, então

$$(\tilde{\tau} - \tau(D(\mathbf{y} - \lambda\theta)), D\theta) \geq 0, \quad \forall \theta \in \mathbf{V}_\alpha$$

Passando ao limite quando $\lambda \rightarrow 0$ e tendo em consideração a continuidade de τ vem

$$(\tilde{\tau} - \tau(D(\mathbf{y})), D\theta) \geq 0, \quad \forall \theta \in \mathbf{V}_\alpha,$$

e isto implica que

$$\tilde{\tau} = \tau(D\mathbf{y}),$$

e portanto

$$(\tau(D\mathbf{y}), D\varphi) + (\mathbf{y} \cdot \nabla \mathbf{y}, \varphi) = (\mathbf{u}, \varphi) \quad \forall \varphi \in \mathbf{V}_\alpha.$$

donde resulta $\mathbf{y} \equiv \mathbf{y}_u$ e \mathbf{y}_k converge fracamente para \mathbf{y}_u em $\mathbf{W}_0^{1,\alpha}(\Omega)$ onde $(\mathbf{u}, \mathbf{y}_u)$ satisfazem a equação (3.0.1).

Provemos finalmente que $(\mathbf{y}_k)_{k>0}$ converge fortemente para $\mathbf{y}_u \in \mathbf{W}_0^{1,\alpha}(\Omega)$. Substituindo na formulação fraca (3.2.1) $\varphi = \mathbf{y}_k - \mathbf{y}_u$ e tendo em conta a desigualdade (3.2.6) da Proposição 3.2.1, obtemos

$$\begin{aligned} (\tau(D\mathbf{y}_k) - \tau(D\mathbf{y}_u), D(\mathbf{y}_k - \mathbf{y}_u)) &\geq \frac{\nu}{|\Omega|^{\frac{2-\alpha}{\alpha}} + \|D\mathbf{y}_k\|_\alpha^{2-\alpha} + \|D\mathbf{y}_u\|_\alpha^{2-\alpha}} \|D(\mathbf{y}_k - \mathbf{y}_u)\|_\alpha^2 \\ &\geq \frac{\nu}{|\Omega|^{\frac{2-\alpha}{\alpha}} + F^{2-\alpha} \left(\frac{\|\mathbf{u}_k\|_2}{\nu}\right) + F^{2-\alpha} \left(\frac{\|\mathbf{u}\|_2}{\nu}\right)} \|D(\mathbf{y}_k - \mathbf{y}_u)\|_\alpha^2 \\ &\geq \frac{\nu}{|\Omega|^{\frac{2-\alpha}{\alpha}} + F^{2-\alpha} \left(\frac{M}{\nu}\right) + F^{2-\alpha} \left(\frac{\|\mathbf{u}\|_2}{\nu}\right)} \|D(\mathbf{y}_k - \mathbf{y}_u)\|_\alpha^2 \quad \forall k > \bar{k}. \end{aligned}$$

Daqui, usando (3.1.14) e resultados clássicos de injeção de Sobolev, obtemos

$$\begin{aligned} &\frac{\nu}{|\Omega|^{\frac{2-\alpha}{\alpha}} + F^{2-\alpha} \left(\frac{M}{\nu}\right) + F^{2-\alpha} \left(\frac{\|\mathbf{u}\|_2}{\nu}\right)} \|D(\mathbf{y}_k - \mathbf{y}_u)\|_\alpha^2 \\ &\leq (\tau(D\mathbf{y}_k) - \tau(D\mathbf{y}_u), D(\mathbf{y}_k - \mathbf{y}_u)) \\ &= ((\mathbf{u}_k - \mathbf{u}, \mathbf{y}_k - \mathbf{y}_u) - (\mathbf{y}_k \cdot \nabla \mathbf{y}_k - \mathbf{y}_u \cdot \nabla \mathbf{y}_u, \mathbf{y}_k - \mathbf{y}_u)) \\ &= ((\mathbf{u}_k - \mathbf{u}, \mathbf{y}_k - \mathbf{y}_u) - ((\mathbf{y}_k - \mathbf{y}_u) \cdot \nabla \mathbf{y}_u, \mathbf{y}_k - \mathbf{y}_u)) \\ &\leq \left((\mathbf{u}_k - \mathbf{u}, \mathbf{y}_k - \mathbf{y}_u) - \|\mathbf{y}_k - \mathbf{y}_u\|_{\frac{2\alpha}{\alpha-1}}^2 \|\nabla \mathbf{y}_u\|_\alpha \right) \rightarrow 0, \end{aligned}$$

quando $k \rightarrow +\infty$, o que completa a demonstração. \square

Proposição 3.3.2. *Suponhamos que as condições A1-A2 (ver (3.1.3) e (3.1.4)), se verificam para $\frac{3n}{n+2} < \alpha \leq 2$. Então (P_α) admite pelo menos uma solução.*

Demonstração. Seja $(\mathbf{u}_k)_k$ uma sucessão minimizante e $(\mathbf{y}_k)_k$ a sucessão dos estados associados. Então

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} J(\mathbf{u}_k, \mathbf{y}_k) = m = \inf(P_\alpha).$$

Considerando as propriedades do funcional J , obtemos

$$\frac{\nu}{2} \|\mathbf{u}_k\|_2^2 \leq J(\mathbf{u}_k, \mathbf{y}_k) \leq J(0, y_0)$$

para $k > \bar{k}$, o que implica que $(\mathbf{u}_k)_k$ é limitada em $\mathbf{L}^2(\Omega)$. Da Proposição 3.3.1, deduzimos que (\mathbf{y}_k) converge fortemente para \mathbf{y} em $\mathbf{W}_0^{1,\alpha}(\Omega)$.

Por um lado J é convexo uma vez que é a soma de funções quadráticas

$$J(\mathbf{u}, \mathbf{y}) = \frac{1}{2} \|\mathbf{y} - \mathbf{y}_d\|_2^2 + \frac{\nu}{2} \|\mathbf{u}\|_2^2,$$

por outro, se

$$(\mathbf{v}_k, \mathbf{z}_k) \rightarrow (\mathbf{v}, \mathbf{z}) \quad \text{em } \mathbf{L}^2(\Omega) \times \mathbf{W}_0^{1,2}(\Omega)$$

então

$$J(\mathbf{v}_k, \mathbf{z}_k) \rightarrow J(\mathbf{v}, \mathbf{z}) \quad \text{em } \mathbb{R}$$

donde J é uma função contínua. De facto,

$$\begin{aligned} |J(\mathbf{v}_k, \mathbf{z}_k) - J(\mathbf{v}, \mathbf{z})| &= \left| \frac{1}{2} \|\mathbf{z}_k - \mathbf{y}_d\|_2^2 + \frac{\nu}{2} \|\mathbf{v}_k\|_2^2 - \frac{1}{2} \|\mathbf{z} - \mathbf{y}_d\|_2^2 - \frac{\nu}{2} \|\mathbf{v}\|_2^2 \right| \\ &\leq \frac{1}{2} (\|\mathbf{z}_k - \mathbf{y}_d\|_2 - \|\mathbf{z} - \mathbf{y}_d\|_2)^2 + \|\mathbf{z} - \mathbf{y}_d\|_2^2 \\ &\quad + \frac{\nu}{2} (\|\mathbf{v}_k - \mathbf{v}\|_2 + \|\mathbf{v}\|_2)^2 - \frac{1}{2} \|\mathbf{z} - \mathbf{y}_d\|_2^2 - \frac{\nu}{2} \|\mathbf{v}\|_2^2 \\ &\leq \left| \frac{1}{2} (\|\mathbf{z}_k - \mathbf{z}\|_2 + \|\mathbf{z} - \mathbf{y}_d\|_2)^2 + \frac{\nu}{2} (\|\mathbf{v}_k - \mathbf{v}\|_2 + \|\mathbf{v}\|_2)^2 - \frac{1}{2} \|\mathbf{z} - \mathbf{y}_d\|_2^2 - \frac{\nu}{2} \|\mathbf{v}\|_2^2 \right|. \end{aligned}$$

Uma vez que $\mathbf{z}_k \rightarrow \mathbf{z}$ fortemente também em $\mathbf{L}^2(\Omega)$, a última expressão converge para zero quando $k \rightarrow \infty$. Portanto, J é semicontínuo inferiormente (ver o resultado em [23]). Podemos aplicar o Método Directo do Cálculo das Variações (ver [10], por exemplo)

$$m \leq J(\mathbf{u}, \mathbf{y}) \leq \liminf_k J(\mathbf{u}_k, \mathbf{y}_k) \leq \lim_k J(\mathbf{u}_k, \mathbf{y}_k) = m$$

ou seja, (\mathbf{u}, \mathbf{y}) é solução do problema (P_α) . □

3.4 Estimativas de Lipschitz

Nesta secção estabelecemos uma desigualdade de Lipschitz, útil na dedução de estimativas usadas na demonstração da diferenciabilidade do estado com respeito ao controlo. Restringimos o espaço dos controlos a um conjunto de controlos admissíveis \mathbf{U}_{ad} , de forma a termos uma $C^{1,\gamma}$ -solução do problema

(3.0.1) para cada controlo em \mathbf{U}_{ad} .

Definimos o conjunto dos controlos \mathbf{U}_{ad} admissíveis como

$$\mathbf{U}_{ad} = \{\mathbf{v} \in \mathbf{L}^q(\Omega) : \|\mathbf{v}\|_q \leq K, \quad q > n\}$$

onde

$$K = \min\{\Delta, \bar{\Delta}\}, \quad (3.4.1)$$

sendo Δ a constante que surge na Proposição 3.2.3, especificada em (3.2.27) e

$$\bar{\Delta} = \sup \{x \in \mathbb{R}^+ : \nu > k_4 C_{P,K}^2 x (1 + 2k_4 x^{2-\alpha})\}, \quad (3.4.2)$$

onde k_4 é a constante definida por (3.2.28). Como veremos mais adiante, na Secção 3.5, a constante $\bar{\Delta}$ é obtida de modo que o sistema linearizado (3.5.1) tenha solução única.

Lema 3.4.1. *Consideremos \mathbf{u}_1 e \mathbf{u}_2 em \mathbf{U}_{ad} , e sejam \mathbf{y}_{u_1} e \mathbf{y}_{u_2} as correspondentes $C^{1,\gamma}$ -soluções de (3.0.1). Então verifica-se a seguinte estimativa*

$$\|D(\mathbf{y}_{u_1} - \mathbf{y}_{u_2})\|_2 \leq L(K) \|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\|_2, \quad (3.4.3)$$

onde $L : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ é uma função definida por

$$L(x) = \frac{C_{P,K} (1 + 2k_4 x^{2-\alpha})}{\nu - k_4 x C_{P,K}^2 (1 + 2k_4 x^{2-\alpha})}.$$

Demonstração. Consideremos a igualdade (3.2.25) para a diferença entre as soluções \mathbf{y}_{u_1} e \mathbf{y}_{u_2} . Tem-se então

$$(\tau(D\mathbf{y}_{u_1}) - \tau(D\mathbf{y}_{u_2}), D\varphi) + (\mathbf{y}_{u_1} \cdot \nabla \mathbf{y}_{u_1} - \mathbf{y}_{u_2} \cdot \nabla \mathbf{y}_{u_2}, \varphi) = (\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2, \varphi) \quad (3.4.4)$$

para qualquer $\varphi \in \mathbf{V}_2$. Fazendo $\varphi = \mathbf{y}_{u_1} - \mathbf{y}_{u_2}$ em (3.4.4) e tendo em consideração (3.1.14), o termo convectivo pode ser reescrito mais uma vez na forma

$$(\mathbf{y}_{u_1} \cdot \nabla \mathbf{y}_{u_1} - \mathbf{y}_{u_2} \cdot \nabla \mathbf{y}_{u_2}, \mathbf{y}_{u_1} - \mathbf{y}_{u_2}) = -((\mathbf{y}_{u_1} - \mathbf{y}_{u_2}) \cdot \nabla (\mathbf{y}_{u_1} - \mathbf{y}_{u_2}), \mathbf{y}_{u_1}),$$

donde resulta

$$(\tau(D\mathbf{y}_{u_1}) - \tau(D\mathbf{y}_{u_2}), D(\mathbf{y}_{u_1} - \mathbf{y}_{u_2})) = (\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2, \mathbf{y}_{u_1} - \mathbf{y}_{u_2}) + ((\mathbf{y}_{u_1} - \mathbf{y}_{u_2}) \cdot \nabla(\mathbf{y}_{u_1} - \mathbf{y}_{u_2}), \mathbf{y}_{u_1}).$$

Por um lado, usando as desigualdades de Poincaré e de Korn, vem

$$|(\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2, \mathbf{y}_{u_1} - \mathbf{y}_{u_2})| \leq \|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\|_2 \|\mathbf{y}_{u_1} - \mathbf{y}_{u_2}\|_2 \leq C_{P,K} \|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\|_2 \|D(\mathbf{y}_{u_1} - \mathbf{y}_{u_2})\|_2,$$

e por outro, dada a regularidade de \mathbf{y}_{u_1} e \mathbf{y}_{u_2} e em particular o facto de que $\nabla \mathbf{y}_{u_1}$ é limitado, vem

$$\begin{aligned} |((\mathbf{y}_{u_1} - \mathbf{y}_{u_2}) \cdot \nabla(\mathbf{y}_{u_1} - \mathbf{y}_{u_2}), \mathbf{y}_{u_1})| &= |((\mathbf{y}_{u_1} - \mathbf{y}_{u_2}) \cdot \nabla \mathbf{y}_{u_1}, \mathbf{y}_{u_1} - \mathbf{y}_{u_2})| \\ &\leq \|(\mathbf{y}_{u_1} - \mathbf{y}_{u_2})^2\|_1 \|\nabla \mathbf{y}_{u_1}\|_\infty \\ &\leq \|\mathbf{y}_{u_1} - \mathbf{y}_{u_2}\|_2^2 \|\nabla \mathbf{y}_{u_1}\|_\infty \end{aligned} \quad (3.4.5)$$

Usando a desigualdade de Korn e a definição de \mathbf{U}_{ad} obtemos

$$\begin{aligned} (3.4.5) &\leq C_{P,K}^2 k_4 \|D(\mathbf{y}_{u_1} - \mathbf{y}_{u_2})\|_2^2 \|\mathbf{u}_1\|_q \\ &\leq C_{P,K}^2 k_4 K \|D(\mathbf{y}_{u_1} - \mathbf{y}_{u_2})\|_2^2. \end{aligned}$$

Finalmente, devido a (3.2.5) e à estimativa (3.2.26)

$$\begin{aligned} (\tau(D\mathbf{y}_{u_1}) - \tau(D\mathbf{y}_{u_2}), D(\mathbf{y}_{u_1} - \mathbf{y}_{u_2})) &\geq \frac{\nu \|D(\mathbf{y}_{u_1} - \mathbf{y}_{u_2})\|_2^2}{1 + \|D\mathbf{y}_{u_1}\|_\infty^{2-\alpha} + \|D\mathbf{y}_{u_2}\|_\infty^{2-\alpha}} \\ &\geq \frac{\nu \|D(\mathbf{y}_{u_1} - \mathbf{y}_{u_2})\|_2^2}{1 + k_4 \|\mathbf{u}_1\|_q^{2-\alpha} + k_4 \|\mathbf{u}_2\|_q^{2-\alpha}} \\ &\geq \frac{\nu \|D(\mathbf{y}_{u_1} - \mathbf{y}_{u_2})\|_2^2}{1 + 2k_4 K^{2-\alpha}}, \end{aligned}$$

para $q > n$. Juntando as duas últimas desigualdades concluímos

$$\frac{\nu \|D(\mathbf{y}_{u_1} - \mathbf{y}_{u_2})\|_2^2}{1 + 2k_4 K^{2-\alpha}} \leq C_{P,K} \|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\|_2 \|D(\mathbf{y}_{u_1} - \mathbf{y}_{u_2})\|_2 + C_{P,K}^2 k_4 K \|D(\mathbf{y}_{u_1} - \mathbf{y}_{u_2})\|_2^2$$

ou seja

$$\left(\frac{\nu}{1 + 2k_4 K^{2-\alpha}} - C_{P,K}^2 k_4 K \right) \|D(\mathbf{y}_{u_1} - \mathbf{y}_{u_2})\|_2^2 \leq C_{P,K} \|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\|_2 \|D(\mathbf{y}_{u_1} - \mathbf{y}_{u_2})\|_2$$

o que é equivalente a

$$\|D(\mathbf{y}_{u_1} - \mathbf{y}_{u_2})\|_2 \leq \frac{C_{P,K}(1 + 2k_4 K^{2-\alpha})}{\nu - C_{P,K}^2 k_4 K(1 + 2k_4 K^{2-\alpha})} \|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\|_2$$

e a demonstração fica completa. □

3.5 Linearização do sistema

Para mostrarmos a diferenciabilidade do operador \mathbf{G} definido mais adiante em (3.6.8), iremos estudar o sistema linearizado (3.5.2). Segue em primeiro lugar a demonstração de um resultado auxiliar:

Proposição 3.5.1. *Sejam $1 < \alpha \leq 2$, $\mathbf{z} \in \mathbf{V}_2$ e $\mathbf{y} \in C^{1,\gamma}(\bar{\Omega})$. Então*

$$\int_{\Omega} (1 + |D\mathbf{y}|)^{\alpha-2} |D\mathbf{z}|^2 dx \geq \frac{\|D\mathbf{z}\|_2^2}{1 + \|D\mathbf{y}\|_{\infty}^{2-\alpha}}.$$

Demonstração. Consideremos

$$f = (1 + |D\mathbf{y}|)^{2-\alpha}, \quad g = |D\mathbf{z}|^2(1 + |D\mathbf{y}|)^{\alpha-2}, \quad h = |D\mathbf{z}|.$$

Tendo em conta as propriedades de \mathbf{y} e \mathbf{z} , concluímos que $f \in \mathbf{L}^{\infty}(\Omega)$, $g \in \mathbf{L}^1(\Omega)$ e $h \in \mathbf{L}^2(\Omega)$. Assim, podemos usar o Lema 3.2.1 *i*), que juntamente com a desigualdade de Hölder nos permite obter

$$\begin{aligned} \|D\mathbf{z}\|_2^2 &\leq \|(1 + |D\mathbf{y}|)^{2-\alpha}\|_{\infty} \| |D\mathbf{z}|^2(1 + |D\mathbf{y}|)^{\alpha-2} \|_1 \\ &\leq \|1 + |D\mathbf{y}|^{2-\alpha}\|_{\infty} \| |D\mathbf{z}|^2(1 + |D\mathbf{y}|)^{\alpha-2} \|_1 \\ &\leq (1 + \|D\mathbf{y}\|_{\infty}^{2-\alpha}) \int_{\Omega} (1 + |D\mathbf{y}|)^{\alpha-2} |D\mathbf{z}|^2 dx \end{aligned}$$

o que nos dá o resultado. □

Consideremos o sistema linearizado obtido a partir de (3.0.1). Pretende-se determinar $\mathbf{z} \in \mathbf{V}_2$ tal que

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(\tau'(D\mathbf{y}_u) : D\mathbf{z}) + \mathbf{z} \cdot \nabla \mathbf{y}_u + \mathbf{y}_u \cdot \nabla \mathbf{z} + \nabla \pi = \mathbf{w} & \text{em } \Omega, \\ \nabla \cdot \mathbf{z} = 0 & \text{em } \Omega, \\ \mathbf{z} = 0 & \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \quad (3.5.1)$$

onde \mathbf{y}_u é a $C^{1,\gamma}$ -solução de (3.0.1), $\mathbf{u} \in \mathbf{U}_{ad}$ e $\mathbf{w} \in \mathbf{L}^2(\Omega)$.

Multiplicando a equação (3.5.1) por uma função teste e integrando obtemos

$$(\tau'(D\mathbf{y}_u) : D\mathbf{z}, D\varphi) + (\mathbf{z} \cdot \nabla \mathbf{y}_u + \mathbf{y}_u \cdot \nabla \mathbf{z}, \varphi) = \langle \mathbf{w}, \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathbf{V}_2. \quad (3.5.2)$$

e segue a seguinte definição

Definição 3.5.1. *Seja $\mathbf{w} \in \mathbf{L}^2(\Omega)$. A função $\mathbf{z} \in \mathbf{V}_2$ é uma solução fraca do problema (3.5.1) se e só se verificar (3.5.2) para qualquer $\varphi \in \mathbf{V}_2$.*

A Proposição que se segue garante a existência e unicidade de solução para o sistema (3.5.1) com base no Teorema de Lax-Milgram (ver o Teorema 8.2.5 no Anexo B), e apresenta uma estimativa em $\mathbf{L}^2(\Omega)$ para essa solução.

Proposição 3.5.2. *Suponhamos que **A1** e **A2** se verificam para $\frac{3n}{n+2} \leq \alpha \leq 2$. Seja $\mathbf{u} \in \mathbf{U}_{ad}$ e \mathbf{y}_u a correspondente solução do sistema (3.0.1). Para $\mathbf{w} \in \mathbf{L}^2(\Omega)$, o problema (3.5.1) admite uma única solução $\mathbf{z}_{uw} \in \mathbf{V}_2$. Além disso verifica-se a seguinte estimativa*

$$\|D\mathbf{z}_{uw}\|_2 \leq L(\|\mathbf{u}\|_q)\|\mathbf{w}\|_2, \quad (3.5.3)$$

onde L é a função obtida no Lema 3.4.1.

Demonstração. Consideremos a forma bilinear definida por

$$B(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2) = (\tau'(D\mathbf{y}_u) : D\mathbf{z}_1, D\mathbf{z}_2) + (\mathbf{z}_1 \cdot \nabla \mathbf{y}_u + \mathbf{y}_u \cdot \nabla \mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2).$$

Fazendo $\mathbf{z}_1 = \mathbf{z}_2 = \mathbf{z}$ e com base em (3.1.14) temos

$$\begin{aligned}
B(\mathbf{z}, \mathbf{z}) &= (\tau'(D\mathbf{y}_u) : D\mathbf{z}, D\mathbf{z}) + (\mathbf{y}_u \cdot \nabla \mathbf{z}, \mathbf{z}) + (\mathbf{z} \cdot \nabla \mathbf{y}_u, \mathbf{z}) \\
&= (\tau'(D\mathbf{y}_u) : D\mathbf{z}, D\mathbf{z}) + (\mathbf{z} \cdot \nabla \mathbf{y}_u, \mathbf{z}), \quad \forall \mathbf{z} \in \mathbf{V}_2
\end{aligned}$$

Tendo em conta as condições **A1-A2**, a Proposição 3.5.1 e a estimativa (3.2.26) deduzimos que

$$(\tau'(D\mathbf{y}_u) : D\mathbf{z}, D\mathbf{z}) \geq \nu \int_{\Omega} (1 + |D\mathbf{y}_u|)^{\alpha-2} |D\mathbf{z}|^2 dx \quad (3.5.4)$$

$$\geq \frac{\nu \|D\mathbf{z}\|_2^2}{1 + \|D\mathbf{y}_u\|_{\infty}^{2-\alpha}} \quad (3.5.5)$$

$$\geq \frac{\nu \|D\mathbf{z}\|_2^2}{1 + \|\nabla \mathbf{y}_u\|_{\infty}^{2-\alpha}} \quad (3.5.6)$$

$$\geq \frac{\nu \|D\mathbf{z}\|_2^2}{1 + k_4 \|\mathbf{u}\|_q^{2-\alpha}} \geq \frac{\nu \|D\mathbf{z}\|_2^2}{1 + 2k_4 \|\mathbf{u}\|_q^{2-\alpha}}, \quad (3.5.7)$$

onde k_4 é a constante dada por (3.2.28). Por outro lado, usando a desigualdade de Hölder, a estimativa (3.2.26) e as desigualdades de Poincaré e Korn obtemos

$$|(\mathbf{z} \cdot \nabla \mathbf{y}_u, \mathbf{z})| \leq \|\mathbf{z}\|_2^2 \|\nabla \mathbf{y}_u\|_{\infty} \leq C_{P,K}^2 \|D\mathbf{z}\|_2^2 \|\nabla \mathbf{y}_u\|_{\infty} \leq k_4 C_{P,K}^2 \|D\mathbf{z}\|_2^2 \|\mathbf{u}\|_q.$$

Daqui resulta

$$\begin{aligned}
B(\mathbf{z}, \mathbf{z}) &\geq \frac{\nu \|D\mathbf{z}\|_2^2}{1 + 2k_4 \|\mathbf{u}\|_q^{2-\alpha}} - k_4 C_{P,K}^2 \|D\mathbf{z}\|_2^2 \|\mathbf{u}\|_q \\
&= \left(\frac{\nu}{1 + 2k_4 \|\mathbf{u}\|_q^{2-\alpha}} - k_4 C_{P,K}^2 \|\mathbf{u}\|_q \right) \|D\mathbf{z}\|_2^2
\end{aligned} \quad (3.5.8)$$

o que mostra que $B(\mathbf{z}, \mathbf{z})$ é coerciva em \mathbf{V}_2 se $\nu > k_4 C_{P,K}^2 \|\mathbf{u}\|_q (1 + 2k_4 \|\mathbf{u}\|_q^{2-\alpha})$, o que é verdade porque definimos \mathbf{U}_{ad} de forma a verificar esta condição e $\mathbf{u} \in \mathbf{U}_{ad}$. Mostremos agora que B é uma forma bilinear contínua. Usando argumentos similares, devido a **A1** e ao facto de $\frac{3n}{n+2} \leq \alpha \leq 2$ vem

$$\begin{aligned}
|\tau'(D\mathbf{y}_u) : D\mathbf{z}_1, D\mathbf{z}_2| &\leq \delta \int_{\Omega} (1 + |D\mathbf{y}_u|)^{\alpha-2} |D\mathbf{z}_1| |D\mathbf{z}_2| dx \\
&\leq \delta \int_{\Omega} |D\mathbf{z}_1| |D\mathbf{z}_2| dx \\
&\leq \delta \|D\mathbf{z}_1\|_2 \|D\mathbf{z}_2\|_2.
\end{aligned} \quad (3.5.9)$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
|(\mathbf{z}_1 \nabla \mathbf{y}_u + \mathbf{y}_u \nabla \mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2)| &= |(\mathbf{z}_1 \nabla \mathbf{y}_u, \mathbf{z}_2)| + |(\mathbf{y}_u \nabla \mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2)| \\
&\leq \|\mathbf{z}_1\|_2 \|\nabla \mathbf{y}_u\|_\infty \|\mathbf{z}_2\|_2 + \|\mathbf{y}_u\|_\infty \|\nabla \mathbf{z}_1\|_2 \|\mathbf{z}_2\|_2 \\
&\leq C_P^2 \|\nabla \mathbf{y}_u\|_\infty \|\nabla \mathbf{z}_1\|_2 \|\nabla \mathbf{z}_2\|_2 + C_P \|\mathbf{y}_u\|_\infty \|\nabla \mathbf{z}_1\|_2 \|\nabla \mathbf{z}_2\|_2 \\
&\leq C_P^2 \|\nabla \mathbf{y}_u\|_\infty \|\mathbf{z}_1\|_{1,2} \|\mathbf{z}_2\|_{1,2} + C_P \|\nabla \mathbf{y}_u\|_\infty \|\mathbf{z}_1\|_{1,2} \|\mathbf{z}_2\|_{1,2} \\
&\leq C_{P,K}^2 \|\nabla \mathbf{y}_u\|_\infty \|D\mathbf{z}_1\|_2 \|D\mathbf{z}_2\|_2 + \frac{C_{P,K}}{C_K} \|\nabla \mathbf{y}_u\|_\infty \|D\mathbf{z}_1\|_2 \|D\mathbf{z}_2\|_2 \\
&\leq C_{P,K}^2 k_4 \|\mathbf{u}\|_q \|D\mathbf{z}_1\|_2 \|D\mathbf{z}_2\|_2 + \frac{C_{P,K}}{C_K} k_4 \|\mathbf{u}\|_q \|D\mathbf{z}_1\|_2 \|D\mathbf{z}_2\|_2 \\
&= \left(C_{P,K}^2 + \frac{C_{P,K}}{C_K} \right) k_4 \|\mathbf{u}\|_q \|D\mathbf{z}_1\|_2 \|D\mathbf{z}_2\|_2. \tag{3.5.10}
\end{aligned}$$

E portanto, juntando (3.5.9) e (3.5.10) vem

$$|B(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2)| \leq \delta \|D\mathbf{z}_1\|_2 \|D\mathbf{z}_2\|_2 + \left(C_{P,K}^2 + \frac{C_{P,K}}{C_K} \right) k_4 \|\mathbf{u}\|_q \|D\mathbf{z}_1\|_2 \|D\mathbf{z}_2\|_2$$

que é equivalente a

$$|B(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2)| \leq \left(\delta + \left(C_{P,K}^2 + \frac{C_{P,K}}{C_K} \right) k_4 \|\mathbf{u}\|_q \right) \|D\mathbf{z}_1\|_2 \|D\mathbf{z}_2\|_2.$$

Ou seja, a forma bilinear B é contínua e coerciva em \mathbf{V}_2 . Aplicando o Teorema de Lax-Milgram (Anexo B), deduzimos que a equação (3.5.1) admite uma única solução $\mathbf{z}_{uw} \in \mathbf{V}_2$. Finalmente, para provar a estimativa (3.5.3), consideramos a desigualdade (3.5.8), donde resulta

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\nu}{1 + 2k_4 \|\mathbf{u}\|_q^{2-\alpha}} - k_4 C_{P,K}^2 \|\mathbf{u}\|_q \right) \|D\mathbf{z}_{uw}\|_2^2 &\leq B(\mathbf{z}_{uw}, \mathbf{z}_{uw}) \\
&= (\mathbf{w}, \mathbf{z}_{uw}) \\
&\leq \|\mathbf{w}\|_2 \|\mathbf{z}_{uw}\|_2 \\
&\leq C_{P,K} \|\mathbf{w}\|_2 \|D\mathbf{z}_{uw}\|_2,
\end{aligned}$$

o que nos dá o resultado pretendido. \square

3.6 Diferenciabilidade do estado com respeito ao controlo

Seguindo o método usado em [16], [52] e [68] iremos agora provar a diferenciabilidade de Gâteaux da aplicação que a cada controlo \mathbf{u} faz corresponder um estado \mathbf{y}_u . Para \mathbf{u} e \mathbf{v} em \mathbf{U}_{ad} e $\rho \in]0, 1[$, seja $\mathbf{u}_\rho = \mathbf{u} + \rho(\mathbf{v} - \mathbf{u})$, e consideremos $\mathbf{y}_\rho \equiv \mathbf{y}_{u_\rho}$ o correspondente estado. Fazendo a diferença entre as equações (3.2.25) correspondentes aos pares de soluções $(\mathbf{u}_\rho, \mathbf{y}_\rho)$ e $(\mathbf{u}, \mathbf{y}_u)$, obtemos

$$\begin{aligned} & (\tau(D\mathbf{y}_\rho) - \tau(D\mathbf{y}_u), D\varphi) + (\mathbf{y}_\rho \cdot \nabla \mathbf{y}_\rho - \mathbf{y}_u \cdot \nabla \mathbf{y}_u, \varphi) \\ &= (\mathbf{u}_\rho - \mathbf{u}, \varphi) = \rho(\mathbf{v} - \mathbf{u}, \varphi), \quad \forall \varphi \in \mathbf{V}_2. \end{aligned} \quad (3.6.1)$$

Seja $\mathbf{z}_\rho = \frac{\mathbf{y}_\rho - \mathbf{y}_u}{\rho}$. Em consequência do Lema 3.4.1, segue a seguinte estimativa para $D\mathbf{z}_\rho$ em $\mathbf{L}^2(\Omega)$:

Lema 3.6.1. *Sejam \mathbf{u} e \mathbf{v} elementos do conjunto \mathbf{U}_{ad} . Então verifica-se:*

$$\|D\mathbf{z}_\rho\|_2 \leq L(K)\|\mathbf{v} - \mathbf{u}\|_2, \quad (3.6.2)$$

onde L é a função obtida no Lema 3.4.1.

Demonstração. De facto,

$$\left\| D \left(\frac{\mathbf{y}_\rho - \mathbf{y}_u}{\rho} \right) \right\|_2 = \frac{1}{\rho} \|D(\mathbf{y}_\rho - \mathbf{y}_u)\|_2 \leq \frac{1}{\rho} L(K) \|\mathbf{u}_\rho - \mathbf{u}\|_2 = L(K) \|\mathbf{v} - \mathbf{u}\|_2.$$

□

Lema 3.6.2. *Suponhamos que \mathbf{z}_{ρ_k} converge fracamente para \mathbf{z} pertencente a \mathbf{V}_2 , para alguma sucessão $(\rho_k)_k$ convergente para zero. Então, para qualquer $\varphi \in V$ tem-se*

- i)
$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{\rho_k} (\mathbf{y}_{\rho_k} \cdot \nabla \mathbf{y}_{\rho_k} - \mathbf{y}_u \cdot \nabla \mathbf{y}_u, \varphi) = (\mathbf{z} \cdot \nabla \mathbf{y}_u + \mathbf{y}_u \cdot \nabla \mathbf{z}, \varphi),$$
- ii)
$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{\rho_k} (\tau(D\mathbf{y}_{\rho_k}) - \tau(D\mathbf{y}_u), D\varphi) = (\tau'(D\mathbf{y}_u) : D\mathbf{z}, D\varphi).$$

Demonstração. i) Note-se que

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{1}{\rho_k} (\mathbf{y}_{\rho_k} \cdot \nabla \mathbf{y}_{\rho_k} - \mathbf{y}_u \cdot \nabla \mathbf{y}_u, \varphi) - (\mathbf{z} \cdot \nabla \mathbf{y}_u + \mathbf{y}_u \cdot \nabla \mathbf{z}, \varphi) \right| \\
&= \left| \frac{1}{\rho_k} ((\mathbf{y}_{\rho_k} - \mathbf{y}_u) \cdot \nabla \mathbf{y}_{\rho_k} + \mathbf{y}_u \cdot \nabla (\mathbf{y}_{\rho_k} - \mathbf{y}_u), \varphi) - (\mathbf{z} \cdot \nabla \mathbf{y}_u + \mathbf{y}_u \cdot \nabla \mathbf{z}, \varphi) \right| \\
&= \left| (\mathbf{z}_{\rho_k} \cdot \nabla \mathbf{y}_{\rho_k} + \mathbf{y}_u \cdot \nabla \mathbf{z}_{\rho_k}, \varphi) - (\mathbf{z} \cdot \nabla \mathbf{y}_u + \mathbf{y}_u \cdot \nabla \mathbf{z}, \varphi) \right| \\
&= \left| (\mathbf{z}_{\rho_k} \cdot \nabla \mathbf{y}_{\rho_k} + \mathbf{y}_u \cdot \nabla \mathbf{z}_{\rho_k} - \mathbf{z} \cdot \nabla \mathbf{y}_u - \mathbf{y}_u \cdot \nabla \mathbf{z}, \varphi) \right| \\
&\leq \left| ((\mathbf{z}_{\rho_k} - \mathbf{z}) \cdot \nabla \mathbf{y}_{\rho_k}, \varphi) \right| + \left| \mathbf{z} \cdot \nabla (\mathbf{y}_{\rho_k} - \mathbf{y}_u), \varphi \right| \\
&+ \left| (\mathbf{y}_u \cdot \nabla \mathbf{z}_{\rho_k}, \varphi) - (\mathbf{y}_u \cdot \nabla \mathbf{z}, \varphi) \right| \\
&\leq \|\mathbf{z}_{\rho_k} - \mathbf{z}\|_2 \|\nabla \mathbf{y}_{\rho_k}\|_\infty \|\varphi\|_2 + \|\mathbf{z}\|_4 \|\nabla (\mathbf{y}_{\rho_k} - \mathbf{y}_u)\|_2 \|\varphi\|_4 \\
&+ \left| (\mathbf{y}_u \cdot \nabla (\mathbf{z}_{\rho_k} - \mathbf{z}), \varphi) \right|.
\end{aligned}$$

O resultado é uma consequência da convergência forte de $(\mathbf{y}_{\rho_k})_k$ para \mathbf{y}_u em $\mathbf{W}_0^{1,2}(\Omega)$, da convergência fraca de $(\mathbf{z}_{\rho_k})_k$ para \mathbf{z} em $\mathbf{W}_0^{1,2}(\Omega)$ e da injeção compacta, $\mathbf{W}^{1,2}(\Omega) \hookrightarrow \mathbf{L}^q(\Omega)$, para qualquer $1 \leq q < \frac{2n}{n-2}$. Com $n = 3$ temos a injeção compacta em todos os espaços $\mathbf{L}^q(\Omega)$ com $1 \leq q < 6$, e em particular a convergência forte em $\mathbf{L}^2(\Omega)$, e também das propriedades de regularidade de \mathbf{y}_{ρ_k} e \mathbf{y}_u .

ii) Seja $\varphi \in V$ uma função fixa. Usando o Teorema do Valor Médio de Lagrange, obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\rho_k} (\tau(D\mathbf{y}_{\rho_k}) - \tau(D\mathbf{y}_u), D\varphi) &= (\tau'(\sigma_{\rho_k}) : D\mathbf{z}_{\rho_k}, D\varphi) \\
&= (\tau'(\sigma_{\rho_k}) : D\varphi, D\mathbf{z}_{\rho_k}),
\end{aligned}$$

onde

$$\sigma_{\rho_k}(x) = s(x) (D\mathbf{y}_{\rho_k}(x) - D\mathbf{y}_u(x)) + D\mathbf{y}_u(x)$$

com $0 < s(x) < 1$. A convergência de $(\sigma_{\rho_k})_k$ para $D\mathbf{y}_u$ em $\mathbf{L}^2(\Omega)$ e a continuidade de τ' , implicam que para qualquer $\varphi \in V$, se tem

$$D\varphi : \tau'(\sigma_{\rho_k}) \rightarrow D\varphi : \tau'(D\mathbf{y}_u) \quad \text{em quase todo o } \Omega. \quad (3.6.3)$$

Por outro lado, tendo em conta a condição **A1**, para qualquer $x \in \Omega$ e considerando $i, j, m, l = 1, \dots, n$, resulta

$$|(\tau'(\sigma_{\rho_k})(x))_{ijml}| \leq \delta (1 + |\sigma_{\rho_k}(x)|)^{\alpha-2} \leq \delta$$

uma vez que $\alpha - 2 \leq 0$, e consequentemente

$$|(D\varphi(x) : \tau'(\sigma_{\rho_k})(x))_{ml}| = \left| \sum_{i,j} D_{ij}\varphi(x) (\tau'(\sigma_{\rho_k})(x))_{ijml} \right| \leq \delta \sum_{ij} |D_{ij}\varphi(x)| \leq n\delta |D\varphi|. \quad (3.6.4)$$

Tendo em conta (3.6.3) e (3.6.4), estamos em condições de aplicar o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue (ver o Teorema 8.2.6 no Anexo B). Deduzimos que

$$\|D\varphi : \tau'(\sigma_{\rho_k}) - D\varphi : \tau'(D\mathbf{y}_u)\|_2 \rightarrow 0.$$

Este resultado, juntamente com a convergência de $(D\mathbf{z}_{\rho_k})$ para $D\mathbf{z}$ na topology fraca de $\mathbf{L}^2(\Omega)$ completa a demonstração. \square

Proposição 3.6.1. *Se $(\mathbf{z}_{\rho_k})_k$ converge fracamente para \mathbf{z} em \mathbf{V}_2 para alguma sucessão $(\rho_k)_k$ convergente para zero, então \mathbf{z} é a única solução do problema linearizado (3.5.1) correspondente a $(\mathbf{y}_u, \mathbf{v} - \mathbf{u})$. Além disso, $(\mathbf{z}_{\rho_k})_k$ converge fortemente para \mathbf{z} em \mathbf{V}_2 .*

Demonstração. A unicidade é uma consequência directa do Lema 3.6.2, e da densidade de V em \mathbf{V}_2 . Para mostrarmos a convergência forte de $(\mathbf{z}_{\rho_k})_k$ para \mathbf{z} em \mathbf{V}_2 fazemos a identificação

$$\mathbf{M}(x) := \tau'(D\mathbf{y}(x)), \quad \mathbf{M}_\rho(x) := \tau'(\sigma_\rho(x)),$$

onde $\sigma_\rho(x) = s(x) (D\mathbf{y}_\rho(x) - D\mathbf{y}_u(x)) + D\mathbf{y}_u(x)$, com $0 < s(x) < 1$ e

$$\mathbf{M}^s(x) = \frac{\mathbf{M}(x) + \mathbf{M}^T(x)}{2}, \quad \mathbf{M}_\rho^s(x) = \frac{\mathbf{M}_\rho(x) + \mathbf{M}_\rho^T(x)}{2}.$$

Devido a **A2**, as matrizes $\mathbf{M}^s(x)$ e $\mathbf{M}_\rho^s(x)$ são simétricas e definidas positivas. Nestas condições, podemos aplicar o método de Cholesky (consultar [27]) a $\mathbf{M}^s(x)$ e $\mathbf{M}_\rho^s(x)$, isto é, se as matrizes $\mathbf{M}^s(x)$ e $\mathbf{M}_\rho^s(x)$ são definidas positivas, podem ser decompostas nos produtos

$$\mathbf{M}^s(x) = \mathbf{L}(x)\mathbf{L}^T(x) \quad \text{e} \quad \mathbf{M}_\rho^s(x) = \mathbf{L}_\rho(x)\mathbf{L}_\rho^T(x).$$

onde $\mathbf{L}(x)$ e $\mathbf{L}_\rho(x)$ são matrizes triangulares inferiores com elementos positivos na diagonal. Usando o Teorema do Valor Médio obtemos

$$\frac{1}{\rho_k} (\tau(D\mathbf{y}_{\rho_k}) - \tau(D\mathbf{y}_u), D\varphi) = (\tau'(\sigma_{\rho_k}) : D\mathbf{z}_{\rho_k}, D\varphi), \quad (3.6.5)$$

onde $\sigma_{\rho_k}(x) = s(x) (D\mathbf{y}_{\rho_k}(x) - D\mathbf{y}_u(x)) + D\mathbf{y}_u(x)$ e $0 < s(x) < 1$. Além disso, tendo em conta a igualdade (3.6.5), temos que

$$\begin{aligned} \left\| \mathbf{L}_{\rho_k}^T D\mathbf{z}_{\rho_k} \right\|_2^2 &= (\mathbf{M}_{\rho_k} : D\mathbf{z}_{\rho_k}, D\mathbf{z}_{\rho_k}) \\ &= (\tau'(\sigma_{\rho_k}) : D\mathbf{z}_{\rho_k}, D\mathbf{z}_{\rho_k}) \\ &= -\frac{1}{\rho_k} (\mathbf{y}_{\rho_k} \cdot \nabla \mathbf{y}_{\rho_k} - \mathbf{y}_u \cdot \nabla \mathbf{y}_u, \mathbf{z}_{\rho_k}) + (\mathbf{v} - \mathbf{u}, \mathbf{z}_{\rho_k}) \\ &= -(\mathbf{z}_{\rho_k} \cdot \nabla \mathbf{y}_{\rho_k} + \mathbf{y}_u \cdot \nabla \mathbf{z}_{\rho_k}, \mathbf{z}_{\rho_k}) + (\mathbf{v} - \mathbf{u}, \mathbf{z}_{\rho_k}) \\ &= -(\mathbf{z}_{\rho_k} \cdot \nabla \mathbf{y}_{\rho_k}, \mathbf{z}_{\rho_k}) + (\mathbf{v} - \mathbf{u}, \mathbf{z}_{\rho_k}) \\ &\leq \|\nabla \mathbf{y}_{\rho_k}\|_{\infty} \|\mathbf{z}_{\rho_k}\|_1 + \|\mathbf{v} - \mathbf{u}\|_2 \|\mathbf{z}_{\rho_k}\|_2 \\ &\leq \|\nabla \mathbf{y}_{\rho_k}\|_{\infty} \|\mathbf{z}_{\rho_k}\|_2^2 + C_{P,K} \|\mathbf{v} - \mathbf{u}\|_2 \|D\mathbf{z}_{\rho_k}\|_2 \\ &\leq C_{P,K} \|\nabla \mathbf{y}_{\rho_k}\|_{\infty} \|D\mathbf{z}_{\rho_k}\|_2^2 + C_{P,K} \|\mathbf{v} - \mathbf{u}\|_2 \|D\mathbf{z}_{\rho_k}\|_2 \\ &\leq C_{P,K} k_4 \|\mathbf{u}_{\rho_k}\|_q L^2(K) \|\mathbf{v} - \mathbf{u}\|_2^2 + C_{P,K} L(K) \|\mathbf{v} - \mathbf{u}\|_2^2 \\ &\leq C_{P,K} L(K) \|\mathbf{v} - \mathbf{u}\|_2^2 (k_4 \|\mathbf{u}_{\rho_k}\|_q L(K) + 1). \end{aligned} \quad (3.6.6)$$

As últimas desigualdades seguem de (3.6.2) e portanto a sucessão $(\mathbf{L}_{\rho_k}^T D\mathbf{z}_{\rho_k})_k$ é limitada em $\mathbf{L}^2(\Omega)$. Por outro lado, devido a **A1** temos que

$$|\mathbf{L}_{\rho_k}(x)|^2 = |\mathbf{M}_{\rho_k}(x)| \leq C(\delta, n), \quad \forall x \in \Omega.$$

Tendo em conta a convergência de $(D\mathbf{y}_{\rho_k})_k$ para $D\mathbf{y}_u$ em $\mathbf{L}^2(\Omega)$, e a continuidade de τ' , deduzimos que $\mathbf{M}_{\rho_k}(x)$ converge para $\mathbf{M}(x)$ e portanto

$$\mathbf{L}_{\rho_k}(x) \longrightarrow \mathbf{L}(x) \quad \text{para quase todo o } x \in \Omega.$$

O Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, implica que

$$\mathbf{L}_{\rho_k} \longrightarrow \mathbf{L} \quad \text{fortemente em } \mathbf{L}^2(\Omega) \quad (3.6.7)$$

o que juntamente com a convergência fraca de $(\mathbf{z}_{\rho_k})_k$ para \mathbf{z} em \mathbf{V}_2 , implica

$$\mathbf{L}_{\rho_k}^T D\mathbf{z}_{\rho_k} \rightharpoonup \mathbf{L}^T D\mathbf{z} \quad \text{fracamente em } \mathbf{L}^2(\Omega).$$

Além disso, tendo em conta (3.6.6), vem

$$\begin{aligned} \|\mathbf{L}^T D\mathbf{z}\|_2^2 &\leq \liminf_k \left\| \mathbf{L}_{\rho_k}^T D\mathbf{z}_{\rho_k} \right\|_2^2 \\ &\leq \limsup_k \left\| \mathbf{L}_{\rho_k}^T D\mathbf{z}_{\rho_k} \right\|_2^2 \\ &= \limsup_k (\mathbf{M}_{\rho_k} : D\mathbf{z}_{\rho_k}, D\mathbf{z}_{\rho_k}) \\ &= \limsup_k \left(-\frac{1}{\rho_k} (\mathbf{y}_{\rho_k} \cdot \nabla \mathbf{y}_{\rho_k} - \mathbf{y}_u \cdot \nabla \mathbf{y}_u, \mathbf{z}_{\rho_k}) + (\mathbf{v} - \mathbf{u}, \mathbf{z}_{\rho_k}) \right) \\ &= \limsup_k (-(\mathbf{z}_{\rho_k} \cdot \nabla \mathbf{y}_{\rho_k} + \mathbf{y}_u \cdot \nabla \mathbf{z}_{\rho_k}, \mathbf{z}_{\rho_k}) + (\mathbf{v} - \mathbf{u}, \mathbf{z}_{\rho_k})) \\ &= \limsup_k (-(\mathbf{z}_{\rho_k} \cdot \nabla \mathbf{y}_{\rho_k}, \mathbf{z}_{\rho_k}) + (\mathbf{v} - \mathbf{u}, \mathbf{z}_{\rho_k})) \\ &= -(\mathbf{z} \cdot \nabla \mathbf{y}_u, \mathbf{z}) + (\mathbf{v} - \mathbf{u}, \mathbf{z}) = -(\mathbf{z} \cdot \nabla \mathbf{y}_u - \mathbf{y}_u \cdot \nabla \mathbf{z}, \mathbf{z}) + (\mathbf{v} - \mathbf{u}, \mathbf{z}) \\ &= (\mathbf{M} : D\mathbf{z}, D\mathbf{z}) = \|\mathbf{L}^T D\mathbf{z}\|_2^2. \end{aligned}$$

A convergência fraca juntamente com a convergência em norma implica a convergência forte de $(\mathbf{L}_{\rho_k}^T D\mathbf{z}_{\rho_k})_k$ para $\mathbf{L}^T D\mathbf{z}$ em $\mathbf{L}^2(\Omega)$. Então existem uma subsucessão, indexada em ρ_k , e uma função $H \in \mathbf{L}^2(\Omega)$ tais que

$$\left| \mathbf{L}_{\rho_k}^T(x) D\mathbf{z}_{\rho_k}(x) \right| \leq H(x), \quad \text{para quase todo o } x \in \Omega \text{ e } k > k_1,$$

$$\mathbf{L}_{\rho_k}^T(x) D\mathbf{z}_{\rho_k}(x) \longrightarrow \mathbf{L}^T(x) \mathbf{z}(x), \quad \text{para quase todo o } x \in \Omega.$$

Além disso, tendo em conta a condição **A2**, obtemos

$$\begin{aligned}
 |D\mathbf{z}_{\rho_k}(x)|^2 &= D\mathbf{z}_{\rho_k}(x) : D\mathbf{z}_{\rho_k}(x) \\
 &\leq \mathbf{M}_{\rho_k}(x) : D\mathbf{z}_{\rho_k}(x) : D\mathbf{z}_{\rho_k}(x) \\
 &= D\mathbf{z}_{\rho_k}^T(x) \mathbf{M}_{\rho_k}(x) D\mathbf{z}_{\rho_k}(x) \\
 &= \left| \mathbf{L}_{\rho_k}^T(x) D\mathbf{z}_{\rho_k}(x) \right|^2 \leq H^2(x), \quad \text{para quase todo } x \in \Omega \text{ e } k > k_1.
 \end{aligned}$$

Uma vez que (3.6.7) implica

$$\left(\mathbf{L}_{\rho_k}^T(x) \right)^{-1} \longrightarrow \left(\mathbf{L}^T(x) \right)^{-1} \quad \text{para quase todo } x \in \Omega,$$

segue que

$$D\mathbf{z}_{\rho_k}(x) = \left(\mathbf{L}_{\rho_k}^T(x) \right)^{-1} \mathbf{L}_{\rho_k}^T(x) D\mathbf{z}_{\rho_k}(x) \longrightarrow \left(\mathbf{L}^T(x) \right)^{-1} \mathbf{L}^T(x) D\mathbf{z}(x) = D\mathbf{z}(x),$$

para quase todo o x em Ω . A conclusão obtém-se aplicando uma vez mais o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue. \square

Finalmente, demonstramos a diferenciabilidade do estado \mathbf{y} com respeito ao controle \mathbf{u} . Seja

$$\mathbf{G} : \mathbf{U}_{ad} \subset \mathbf{L}^2(\Omega) \longrightarrow \mathbf{V}_\alpha \tag{3.6.8}$$

o funcional definido por

$$\mathbf{G}(\mathbf{u}) = \mathbf{y}_u,$$

onde \mathbf{y}_u é a $C^{1,\gamma}$ -solução da equação (3.0.1) com respeito ao controle \mathbf{u} . Segue a Proposição

Proposição 3.6.2. *O funcional \mathbf{G} é Gâteaux diferenciável em \mathbf{u} e a sua derivada na direcção $\mathbf{v} - \mathbf{u}$ é dada por*

$$(\mathbf{G})'(\mathbf{u})(\mathbf{v} - \mathbf{u}) = \mathbf{z},$$

onde $\mathbf{z} \in \mathbf{V}_2$ é a única solução do problema (3.5.1) correspondente a $(\mathbf{y}_u, \mathbf{v} - \mathbf{u})$. Além disso, verifica-se a seguinte igualdade

$$\bar{J}'(\mathbf{u})(\mathbf{v} - \mathbf{u}) = (\mathbf{z}, \mathbf{y}_u - \mathbf{y}_d) + \nu(\mathbf{u}, \mathbf{v} - \mathbf{u}), \tag{3.6.9}$$

onde $\bar{J}(\mathbf{u}) = J(\mathbf{u}, \mathbf{y})$.

Demonstração. Seja $\mathbf{u}_\rho = \mathbf{u} + \rho(\mathbf{v} - \mathbf{u})$, $\mathbf{y}_\rho \equiv \mathbf{y}_{u_\rho}$ e $\mathbf{y} \equiv \mathbf{y}_u$ para $0 < \rho < 1$. Devido ao Lema 3.6.1, deduzimos que a sucessão $\left(\mathbf{z}_\rho = \frac{\mathbf{y}_\rho - \mathbf{y}}{\rho}\right)_\rho$ é limitada em \mathbf{V}_2 . Então, existe uma subsucessão $(\mathbf{z}_{\rho_k})_k$ e $\mathbf{z} \in \mathbf{V}_2$ tal que $(\mathbf{z}_{\rho_k})_k$ converge fracamente para \mathbf{z} . Tendo em conta a Proposição 3.6.1, \mathbf{z} é a solução do sistema linearizado (3.5.1) e $(\mathbf{z}_{\rho_k})_k$ converge fortemente para \mathbf{z} em \mathbf{V}_2 . Considerando, uma vez mais o Lema 3.6.1, deduzimos que

$$\|D\mathbf{z}\|_2 = \lim_k \|D\mathbf{z}_{\rho_k}\|_2 \leq L(K) \|\mathbf{v} - \mathbf{u}\|_2,$$

o que implica a continuidade de $(\mathbf{G})'(\mathbf{u}) : \mathbf{L}^2(\Omega) \rightarrow \mathbf{V}_2$, e portanto a diferenciabilidade de Gâteaux de \mathbf{G} . Finalmente,

$$\begin{aligned} \bar{J}'(\mathbf{u})(\mathbf{v} - \mathbf{u}) &= \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\bar{J}(\mathbf{u}_\rho) - \bar{J}(\mathbf{u})}{\rho} \\ &= \lim_{\rho \rightarrow 0} \left(\frac{1}{2} \frac{\|\mathbf{y}_\rho - \mathbf{y}_d\|_2^2 - \|\mathbf{y} - \mathbf{y}_d\|_2^2}{\rho} + \frac{\nu}{2} \frac{\|\mathbf{u}_\rho\|_2^2 - \|\mathbf{u}\|_2^2}{\rho} \right) \end{aligned} \quad (3.6.10)$$

Por um lado, temos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\rho} (\|\mathbf{y}_\rho - \mathbf{y}_d\|_2^2 - \|\mathbf{y} - \mathbf{y}_d\|_2^2) &= \frac{1}{2\rho} ((\mathbf{y}_\rho - \mathbf{y}_d, \mathbf{y}_\rho - \mathbf{y}_d) - (\mathbf{y} - \mathbf{y}_d, \mathbf{y} - \mathbf{y}_d)) \\ &= \frac{1}{2\rho} ((\mathbf{y}_\rho - \mathbf{y}_d + \mathbf{y} - \mathbf{y}, \mathbf{y}_\rho - \mathbf{y}_d + \mathbf{y} - \mathbf{y}) - (\mathbf{y} - \mathbf{y}_d, \mathbf{y} - \mathbf{y}_d)) \\ &= \frac{1}{2\rho} (((\mathbf{y}_\rho - \mathbf{y}) + (\mathbf{y} - \mathbf{y}_d), (\mathbf{y}_\rho - \mathbf{y}) + (\mathbf{y} - \mathbf{y}_d)) - (\mathbf{y} - \mathbf{y}_d, \mathbf{y} - \mathbf{y}_d)) \\ &= \frac{1}{2\rho} ((\mathbf{y}_\rho - \mathbf{y}, \mathbf{y}_\rho - \mathbf{y}) + 2(\mathbf{y}_\rho - \mathbf{y}, \mathbf{y} - \mathbf{y}_d)) \\ &= \frac{\rho}{2} \left(\frac{\mathbf{y}_\rho - \mathbf{y}}{\rho}, \frac{\mathbf{y}_\rho - \mathbf{y}}{\rho} \right) + \left(\frac{\mathbf{y}_\rho - \mathbf{y}}{\rho}, \mathbf{y} - \mathbf{y}_d \right) \\ &= \frac{\rho}{2} \|\mathbf{z}_\rho\|_2^2 + (\mathbf{z}_\rho, \mathbf{y} - \mathbf{y}_d). \end{aligned}$$

Por outro lado, temos ainda

$$\begin{aligned}
 \frac{\nu}{2\rho}(\|\mathbf{u}_\rho\|_2^2 - \|\mathbf{u}\|_2^2) &= \frac{\nu}{2\rho}[(\mathbf{u}_\rho, \mathbf{u}_\rho) - (\mathbf{u}, \mathbf{u})] \\
 &= \frac{\nu}{2\rho}((\mathbf{u}_\rho + \mathbf{u} - \mathbf{u}, \mathbf{u}_\rho + \mathbf{u} - \mathbf{u}) - (\mathbf{u}, \mathbf{u})) \\
 &= \frac{\nu}{2\rho}((\mathbf{u}_\rho - \mathbf{u}, \mathbf{u}_\rho - \mathbf{u}) + 2(\mathbf{u}_\rho - \mathbf{u}, \mathbf{u})) \\
 &= \frac{\nu}{2\rho}((\rho(\mathbf{v} - \mathbf{u}), \rho(\mathbf{v} - \mathbf{u})) + 2(\rho(\mathbf{v} - \mathbf{u}), \mathbf{u})) \\
 &= \frac{\nu\rho}{2}\|\mathbf{v} - \mathbf{u}\|_2^2 + \nu(\mathbf{v} - \mathbf{u}, \mathbf{u})
 \end{aligned}$$

Assim, o limite (3.6.10) vem escrito na seguinte forma simplificada

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \left((\mathbf{z}_\rho, \mathbf{y} - \mathbf{y}_d) + \frac{\rho}{2}\|\mathbf{z}_\rho\|_2^2 + \nu(\mathbf{u}, \mathbf{v} - \mathbf{u}) + \frac{\nu\rho}{2}\|\mathbf{v} - \mathbf{u}\|_2^2 \right) = (\mathbf{z}, \mathbf{y} - \mathbf{y}_d) + \nu(\mathbf{u}, \mathbf{v} - \mathbf{u})$$

o que nos dá o resultado. □

3.7 Condições de optimalidade de 1ª ordem

Tendo em conta a diferenciabilidade do funcional J , podemos agora apresentar as condições de optimalidade de 1ª ordem para o problema (P_α) . Seja $\mathbf{u} \in \mathbf{U}_{ad}$ e seja \mathbf{y}_u a solução correspondente da equação (3.0.1). Consideremos o sistema adjunto

$$\begin{cases} -div(\tau'(D\mathbf{y}_u) : D\mathbf{p}) + (\nabla\mathbf{y}_u)^T \cdot \mathbf{p} - \mathbf{y}_u \cdot \nabla\mathbf{p} + \nabla\pi = \mathbf{f} & \text{em } \Omega, \\ div \mathbf{p} = 0 & \text{em } \Omega, \\ \mathbf{p} = 0 & \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \quad (3.7.1)$$

onde $\mathbf{f} \in \mathbf{L}^2(\Omega)$.

Definição 3.7.1. *Uma função \mathbf{p} é uma solução fraca do sistema (3.7.1) sse*

$$(\tau'(D\mathbf{y}_u) : D\mathbf{p}, D\varphi) + ((\nabla\mathbf{y}_u)^T \mathbf{p} - \mathbf{y}_u \cdot \nabla\mathbf{p}, \varphi) = \langle \mathbf{f}, \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathbf{V}_2$$

Proposição 3.7.1. *Seja $\mathbf{u} \in \mathbf{U}_{ad}$ e $\mathbf{y}_u \in \mathbf{V}_2$ a correspondente $C^{1,\gamma}$ -solução (3.0.1). Para $\mathbf{f} \in \mathbf{L}^2(\Omega)$, o sistema (3.7.1) admite uma única solução \mathbf{p} em \mathbf{V}_2 . Além disso, verifica-se a seguinte estimativa:*

$$\|D\mathbf{p}\| \leq L(\|\mathbf{u}\|_q)\|\mathbf{f}\|_2, \quad (3.7.2)$$

onde L é a função dada no Lema 3.4.1, e temos

$$(\tau'(D\mathbf{y}_u) : D\mathbf{p}, D\varphi) + (\varphi \cdot \nabla \mathbf{y}_u + \mathbf{y}_u \cdot \nabla \varphi, \mathbf{p}) = (\mathbf{f}, \varphi), \quad \forall \varphi \in \mathbf{V}_2. \quad (3.7.3)$$

Demonstração. A existência e unicidade da solução, assim como a estimativa, podem ser obtidas usando argumentos semelhantes aos usados para demonstrar a Proposição 3.5.2. Além disso, observando que

$$((\nabla \mathbf{y}_u)^T \mathbf{p}, \varphi) = (\varphi \cdot \nabla \mathbf{y}_u, \mathbf{p})$$

e

$$-(\mathbf{y}_u \cdot \nabla \mathbf{p}, \varphi) = (\mathbf{y}_u \cdot \nabla \varphi, \mathbf{p}),$$

obtemos (3.7.3). □

Seguem então as condições de optimalidade.

Teorema 3.7.1. *Assumimos que são válidas as condições A1-A2, com $\frac{3n}{n+2} \leq \alpha \leq 2$. Seja $(\bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{y}}) \in \mathbf{U}_{ad} \times \mathbf{V}_\alpha$, solução de (P_α) onde $\bar{\mathbf{y}}$ é o estado associado a $\bar{\mathbf{u}}$. Então existe um único $\bar{\mathbf{p}} \in \mathbf{V}_2$, tal que*

$$(\tau(D\bar{\mathbf{y}}), D\varphi) + (\bar{\mathbf{y}} \cdot \nabla \bar{\mathbf{y}}, \varphi) = (\bar{\mathbf{u}}, \varphi), \quad \forall \varphi \in \mathbf{V}_\alpha$$

$$(\tau'(D\bar{\mathbf{y}}) : D\bar{\mathbf{p}}, D\varphi) + ((\nabla \bar{\mathbf{y}})^T \bar{\mathbf{p}} - \bar{\mathbf{y}} \cdot \nabla \bar{\mathbf{p}}, \varphi) = (\bar{\mathbf{y}} - \mathbf{y}_d, \varphi), \quad \forall \varphi \in \mathbf{V}_2 \quad (3.7.4)$$

$$(\bar{\mathbf{p}} + \nu \bar{\mathbf{u}}, \mathbf{v} - \bar{\mathbf{u}}) \geq 0, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{U}_{ad}, \quad (3.7.5)$$

Além disso, $\bar{\mathbf{p}}$ satisfaz a seguinte desigualdade

$$(\tau'(D\bar{\mathbf{y}}) : D\bar{\mathbf{p}}, D\bar{\mathbf{p}}) + (\bar{\mathbf{p}} \cdot \nabla \bar{\mathbf{y}}, \bar{\mathbf{p}}) \leq (\bar{\mathbf{y}} - \mathbf{y}_d, \bar{\mathbf{p}}).$$

Demonstração. Uma vez que o funcional J é Gâteaux diferenciável e \mathbf{U}_{ad} é convexo, vem que

$$J'(\bar{\mathbf{u}})(\mathbf{v} - \bar{\mathbf{u}}) \geq 0, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{U}_{ad}. \quad (3.7.6)$$

Tendo em conta a igualdade (3.6.9) temos

$$J'(\bar{\mathbf{u}})(\mathbf{v} - \bar{\mathbf{u}}) = (\bar{\mathbf{y}} - \mathbf{y}_d, \mathbf{z}) + \nu(\bar{\mathbf{u}}, \mathbf{v} - \bar{\mathbf{u}}), \quad (3.7.7)$$

onde \mathbf{z} é a solução do sistema linearizado (3.5.1) correspondente a $(\bar{\mathbf{y}}, \mathbf{v} - \bar{\mathbf{u}})$. Seja $\bar{\mathbf{p}}$ a única solução fraca da equação adjunta (3.7.1) para $\mathbf{f} = \bar{\mathbf{y}} - \mathbf{y}_d$. Fazendo $\varphi = \mathbf{z}$ obtemos

$$\begin{aligned} (\bar{\mathbf{y}} - \mathbf{y}_d, \mathbf{z}) &= (\tau'(D\bar{\mathbf{y}}) : D\bar{\mathbf{p}}, D\mathbf{z}) + ((\nabla\bar{\mathbf{y}})^T \bar{\mathbf{p}} - \bar{\mathbf{y}} \cdot \nabla\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{z}) \\ &= (\tau'(D\bar{\mathbf{y}}) : D\mathbf{z}, D\bar{\mathbf{p}}) + (\mathbf{z} \cdot \nabla\bar{\mathbf{y}} + \bar{\mathbf{y}} \cdot \nabla\mathbf{z}, \bar{\mathbf{p}}) \\ &= (\mathbf{v} - \bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{p}}). \end{aligned} \quad (3.7.8)$$

O resultado segue combinando (3.7.6), (3.7.7) e (3.7.8). \square

3.8 Existência de solução para o problema de controlo de fluidos electro-reológicos

Consideramos o seguinte problema: determinar $\mathbf{y} \in \mathbf{W}_0^{1,2}(\Omega)$ tal que

$$\begin{cases} -div (S(D\mathbf{y})) + \mathbf{y} \cdot \nabla\mathbf{y} + \nabla p = \mathbf{u} & \text{em } \Omega \\ div \mathbf{y} = 0 & \text{em } \Omega \\ \mathbf{y} = 0 & \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \quad (3.8.1)$$

onde S é o tensor das tensões suplementar definido pela função $S : \mathbf{R}^{3 \times 3} \times \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^{3 \times 3}$ tal que

$$S(\eta, x) = (1 + |\eta|)^{\alpha(x)-2} \eta,$$

e $\alpha(x)$ é uma função contínua positiva e limitada verificando

$$\alpha(x) : \bar{\Omega} \rightarrow (1, +\infty),$$

e

$$1 < \alpha_0 \leq \alpha(x) \leq \alpha_\infty < +\infty \quad (3.8.2)$$

$$\min \alpha(x) = \alpha_0,$$

$$\max \alpha(x) \leq \alpha_\infty \quad \text{para} \quad \alpha_\infty > 2.$$

Nota 3.8.1. Para cada η fixo, S depende da função $\alpha(x)$ e portanto escreve-se em função da variável x . No entanto, uma vez que as propriedades que demonstramos são propriedades que dependem da variável η , no que segue, para simplificar a escrita escrevemos $S(\eta)$ em vez de $S(\eta, x)$.

O sistema (3.8.1) pode ser usado para modelar fluidos incompressíveis electro-reológicos estacionários, baseando-se na suposição de que estes materiais, compostos por suspensões de partículas num fluido, podem ser considerados como um meio contínuo homogéneo. A viscosidade correspondente alterna entre o comportamento pseudoplástico e o comportamento dilatante sob a aplicação de um campo magnético. Este modelo é, entre outros, descrito e analisado em [35, 49, 50] ou [37]. Mais recentemente, em [19], foi provada a existência e unicidade de uma solução em $C^{1,\gamma}(\bar{\Omega}) \cap \mathbf{W}^{2,2}(\Omega)$ para o sistema (3.8.1) para dados pequenos. Este resultado de regularidade constituiu a motivação para a análise da existência de solução para o problema de controlo óptimo distribuído descrito abaixo.

Consideremos o controlo \mathbf{u} e a solução correspondente \mathbf{y}_u da equação (3.8.1) tal que o par $(\mathbf{u}, \mathbf{y}_u)$ é solução do sistema

$$(P_\alpha) \begin{cases} \min J(\mathbf{u}, \mathbf{y}_u) \\ \text{sujeito a (3.8.1)} \end{cases} \quad (3.8.3)$$

onde $J : \mathbf{L}^2(\Omega) \times \mathbf{W}_0^{1,2}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ é dado por

$$J(\mathbf{u}, \mathbf{y}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\mathbf{y}_u - \mathbf{y}_d|^2 dx + \frac{\nu}{2} \int_{\Omega} |\mathbf{u}|^2 dx. \quad (3.8.4)$$

Para mostrar a existência de solução para o problema de controlo óptimo, mencionamos por exemplo [11, 16, 17, 25, 52, 63, 68], onde a técnica descrita consiste em explorar correctamente as propriedades de S , com o objectivo de estabelecer resultados de compacidade necessários para a aplicação do Método Directo do Cálculo das Variações. O objectivo é mostrar que, baseados nos resultados de [19], estas

técnicas se podem aplicar ao caso dos fluidos electro-reológicos modelados por (3.8.1). As condições de optimalidade para este problema são também importantes mas delicadas e não são abordadas aqui. Trata-se de um assunto que pretendemos estudar em trabalho futuro.

Com $\alpha(x)$ definido em (3.8.2), podem ser demonstradas para o tensor S as propriedades **A1** e **A2** que recordamos de seguida.

Proposição 3.8.1. *Consideremos $\alpha(x) \in (1, \infty)$, δ e ν constantes positivas, temos*

A1 -

$$\left| \frac{\partial S_{kl}(\eta)}{\partial \eta_{ij}} \right| \leq \delta (1 + |\eta|)^{\alpha(x)-2} \quad \forall x \in \bar{\Omega}.$$

A2 -

$$S'(\eta) : \zeta : \zeta = \sum_{ijkl} \frac{\partial S_{kl}(\eta)}{\partial \eta_{ij}} \zeta_{kl} \zeta_{ij} \geq \nu (1 + |\eta|)^{\alpha(x)-2} |\zeta|^2 \quad \forall x \in \bar{\Omega}$$

para quaisquer $\eta, \zeta \in \mathbb{R}_{sym}^{n \times n}$ e $i, j, k, l = 1, \dots, d$.

Nota 3.8.2. *A demonstração de **A1** e **A2** para o tensor S é semelhante à demonstração das mesmas propriedades para o tensor τ , apresentada na Secção 3.1. Recordemos que as propriedades referidas foram demonstradas para α contante com $1 < \alpha < 2$. Aqui, iremos demonstrar para o caso em que α é a função dada em (3.8.2) onde $1 < \alpha(x) < 2$ e $\alpha(x) \geq 2$.*

Demonstração. Sabemos que

$$\left| \frac{\partial S_{kl}}{\partial \eta_{ij}} \right| \leq (|\alpha(x) - 2| + 1) (1 + |\eta|)^{\alpha(x)-2}. \quad (3.8.5)$$

Se $\alpha(x) - 2 \geq 0$ e uma vez que $\alpha(x) \leq \alpha_\infty$, temos

$$\begin{aligned} (3.8.5) &= (\alpha(x) - 1) (1 + |\eta|)^{\alpha(x)-2} \\ &\leq (\alpha_\infty - 1) (1 + |\eta|)^{\alpha(x)-2}. \end{aligned}$$

Se $\alpha(x) - 2 < 0$ e sabendo que $\alpha_0 \leq \alpha(x)$, vem

$$\begin{aligned} (3.8.5) &= (3 - \alpha(x)) (1 + |\eta|)^{\alpha(x)-2} \\ &\leq (3 - \alpha_0) (1 + |\eta|)^{\alpha(x)-2}, \end{aligned}$$

e segue portanto

$$\left| \frac{\partial S_{kl}(\eta)}{\partial \eta_{ij}} \right| \leq \begin{cases} (3 - \alpha_0) (1 + |\eta|)^{\alpha(x)-2} & \text{se } \alpha(x) - 2 < 0 \\ (\alpha_\infty - 1) (1 + |\eta|)^{\alpha(x)-2} & \text{se } \alpha(x) - 2 \geq 0. \end{cases}$$

Para obtermos **A2**, escrevemos

$$\begin{aligned} S'(\eta) : \zeta : \zeta & \\ = (\alpha(x) - 2) \frac{(1 + |\eta|)^{\alpha(x)-3}}{|\eta|} |\eta : \zeta|^2 + (1 + |\eta|)^{\alpha(x)-2} |\zeta|^2 & \quad (3.8.6) \end{aligned}$$

Tendo em conta que $\alpha(x) - 2 < 0$, $\alpha_0 \leq \alpha(x)$ e $|\eta : \zeta|^2 \leq |\eta|^2 |\zeta|^2$, resulta

$$\begin{aligned} (3.8.6) & \geq (\alpha(x) - 2) \frac{(1 + |\eta|)^{\alpha(x)-3}}{|\eta|} |\eta|^2 |\zeta|^2 + (1 + |\eta|)^{\alpha(x)-2} |\zeta|^2 \\ & = \left((\alpha(x) - 2) (1 + |\eta|)^{\alpha(x)-3} |\eta| + (1 + |\eta|)^{\alpha(x)-2} \right) |\zeta|^2 \\ & \geq \left((\alpha(x) - 2) (1 + |\eta|)^{\alpha(x)-3} (1 + |\eta|) + (1 + |\eta|)^{\alpha(x)-2} \right) |\zeta|^2 \\ & = \left((\alpha(x) - 2) (1 + |\eta|)^{\alpha(x)-2} + (1 + |\eta|)^{\alpha(x)-2} \right) |\zeta|^2 \\ & = (\alpha(x) - 1) (1 + |\eta|)^{\alpha(x)-2} |\zeta|^2 \\ & \geq (\alpha_0 - 1) (1 + |\eta|)^{\alpha(x)-2} |\zeta|^2. \end{aligned}$$

Por outro lado, $\alpha(x) - 2 \geq 0$ dá-nos

$$\begin{aligned} (3.8.6) & \geq (1 + |\eta|)^{\alpha(x)-3} \left((\alpha(x) - 2) \frac{|\eta : \zeta|^2}{|\eta|} + (1 + |\eta|) |\zeta|^2 \right) \\ & \geq (1 + |\eta|)^{\alpha(x)-3} (1 + |\eta|) |\zeta|^2 \\ & = (1 + |\eta|)^{\alpha(x)-2} |\zeta|^2 \end{aligned}$$

e portanto

$$S'(\eta) : \zeta : \zeta \geq \begin{cases} (\alpha_0 - 1) (1 + |\eta|)^{\alpha(x)-2} |\zeta|^2 & \text{if } \alpha(x) - 2 < 0 \\ (1 + |\eta|)^{\alpha(x)-2} |\zeta|^2 & \text{if } \alpha(x) - 2 \geq 0. \end{cases}$$

□

Mais uma vez, **A1** e **A2** implicam as seguintes propriedades para a função S :

Proposição 3.8.2. *Nas mesmas condições temos*

- *Continuidade*

$$|S(\eta)| \leq (1 + |\eta|)^{\alpha(x)-2} |\eta|, \quad \forall x \in \bar{\Omega} \quad (3.8.7)$$

- *Coercividade*

$$S(\eta) : \eta \geq \begin{cases} \nu(1 + |\eta|)^{\alpha(x)-2} |\eta|^2 & \text{se } \alpha(x) - 2 < 0 \\ |\eta|^2 & \text{se } \alpha(x) - 2 \geq 0 \end{cases} \quad \forall x \in \bar{\Omega} \quad (3.8.8)$$

- *Monotonia*

$$S(\eta) - S(\zeta) : (\eta - \zeta) \geq \begin{cases} (\alpha_0 - 1)(1 + |\eta| + |\zeta|)^{\alpha(x)-2} |\eta - \zeta|^2 & \text{se } \alpha(x) - 2 < 0 \\ |\eta - \zeta|^2 & \text{se } \alpha(x) - 2 \geq 0 \end{cases} \quad (3.8.9)$$

$$\forall x \in \bar{\Omega}.$$

Demonstração. Provemos a monotonia de S . Tem-se

$$\begin{aligned} (S(\eta) - S(\zeta)) : (\eta - \zeta) &= \int_0^1 \sum_{ij} \sum_{kl} \frac{\partial S_{ij}(t\eta + (1-t)\zeta)}{\partial D_{kl}} (\eta - \zeta)_{kl} (\eta - \zeta)_{ij} dt \\ &= \int_0^1 S'(t\eta + (1-t)\zeta) : (\eta - \zeta) : (\eta - \zeta) dt \end{aligned} \quad (3.8.10)$$

Usando **A2** e considerando $\alpha(x) - 2 < 0$, resulta

$$(3.8.10) \geq \int_0^1 (\alpha_0 - 1) ((1 + |\eta| + |\zeta|))^{\alpha(x)-2} |\eta - \zeta|^2 dt. \quad (3.8.11)$$

Usando **A2** e considerando $\alpha(x) - 2 \geq 0$, vem

$$\begin{aligned}
(3.8.10) &\geq \int_0^1 (1 + |t\eta + (1-t)\zeta|)^{\alpha(x)-2} |\eta - \zeta|^2 dt \\
&\geq \int_0^1 1^{\alpha(x)-2} |\eta - \zeta|^2 dt \\
&\geq |\eta - \zeta|^2
\end{aligned}$$

e concluímos o pretendido. \square

A seguinte proposição, retirada de [19] dá-nos um resultado de existência e unicidade de solução em C^{1,γ_0} do sistema (3.8.1) sob certas condições em \mathbf{u} e sem restrições no expoente α .

Proposição 3.8.3. *Seja $\mathbf{u} \in \mathbf{L}^q(\Omega)$ para $q > n$, Ω um domínio C^{1,γ_0} e $\alpha \in C^{0,\gamma_0}(\bar{\Omega})$, com $\gamma_0 = 1 - \frac{n}{q}$. Então, existem constantes positivas C_1 e C_2 , dependentes de $\|\alpha\|_{C^{0,\gamma}(\bar{\Omega})}$, n , q e Ω tais que, se $\|\mathbf{u}\|_q < C_1$, para algum $\gamma < \gamma_0$, existe uma $C^{1,\gamma}$ -solução, (\mathbf{y}, p) , do problema (3.8.1) verificando*

$$\|\mathbf{y}\|_{C^{1,\gamma}(\bar{\Omega})} + \|p\|_{C^{0,\gamma}(\bar{\Omega})} \leq C_2 \|\mathbf{u}\|_q. \quad (3.8.12)$$

Além disso, existe uma constante C_3 dependente de α_0 , $\|\alpha\|_{C^{0,\gamma}(\bar{\Omega})}$, n , q e Ω tal que se $\|\mathbf{u}\|_q \leq C_3$ a solução é única.

Recordemos que, para $\mathbf{u} \in \mathbf{L}^2(\Omega)$, a função \mathbf{y} é uma $C^{1,\gamma}$ -solução da equação (3.8.1) se $\mathbf{y} \in C^{1,\gamma}(\bar{\Omega})$, para $\gamma \in (0, 1)$, $\text{div } \mathbf{y} = 0$, $\mathbf{y}|_{\partial\Omega} = 0$ e ainda se se verificar a seguinte igualdade integral

$$(S(D\mathbf{y}), D\varphi) + (\mathbf{y} \cdot \nabla \mathbf{y}, \varphi) = (\mathbf{u}, \varphi), \quad \forall \varphi \in \mathbf{V}_2. \quad (3.8.13)$$

Proposição 3.8.4. *Suponhamos que se verificam as condições **A1** e **A2**. Considerando $\mathbf{y} \in C^{1,\gamma}(\bar{\Omega})$ temos que*

$$\|D\mathbf{y}\|_2 \leq C_4 \|\mathbf{u}\|_2, \quad (3.8.14)$$

onde \mathbf{y} é o estado associado a \mathbf{u} .

Demonstração. Fazendo $\varphi = \mathbf{y}$ em (3.8.13) e considerando as propriedades do termo convectivo temos que

$$(S(D\mathbf{y}), D\mathbf{y}) = (\mathbf{u}, \mathbf{y}). \quad (3.8.15)$$

O facto de $\mathbf{y} \in C^{1,\gamma}(\bar{\Omega})$ implica que \mathbf{y} pertence a $C^1(\bar{\Omega})$ o que significa que \mathbf{y} e $D\mathbf{y}$ são funções limitadas em $\bar{\Omega}$ e consequentemente pertencem a $\mathbf{L}^\alpha(\Omega)$ para qualquer $\alpha > 1$. Em particular

$\mathbf{y} \in \mathbf{W}_0^{1,2}(\Omega)$. Então, por um lado, usando as desigualdades de Hölder, de Poincaré e de Korn, existe uma constante C_4 tal que

$$|(\mathbf{u}, \mathbf{y})| \leq \|\mathbf{u}\|_2 \|\mathbf{y}\|_2 \leq C_4 \|\mathbf{u}\|_2 \|D\mathbf{y}\|_2.$$

Por outro lado, usando a coercividade, tem-se

$$\|D\mathbf{y}\|_2^2 \leq (S(D\mathbf{y}), D\mathbf{y}).$$

Juntando ambas as desigualdades com (3.8.15) temos o resultado pretendido. □

Uma vez garantida a existência de solução para o problema (3.8.1), tendo em conta a Proposição 3.8.3 e encontrada a estimativa de energia para $D\mathbf{y}$ dada por (3.8.14), podemos agora formular e provar o seguinte resultado de existência para o problema de controle (P_α).

Teorema 3.8.1. *Suponhamos verificadas as condições A1-A2. Então (P_α) admite pelo menos uma solução.*

Para demonstrar este teorema é necessário utilizar alguns resultados auxiliares.

Proposição 3.8.5. *Supomos que $(\mathbf{u}_k)_{k>0}$ converge para \mathbf{u} fracamente em $\mathbf{L}^2(\Omega)$. Seja \mathbf{y}_k o estado associado a \mathbf{u}_k para cada k . Então, existem $\mathbf{y} \in \mathbf{W}_0^{1,2}(\Omega)$ e $\tilde{S} \in \mathbf{L}^2(\Omega)$ tais que*

$$(\mathbf{y}_k)_k \rightharpoonup \mathbf{y} \quad \text{em} \quad \mathbf{W}_0^{1,2}(\Omega); \tag{3.8.16}$$

$$(D\mathbf{y}_k)_k \rightharpoonup D\mathbf{y} \quad \text{em} \quad \mathbf{L}^2(\Omega); \tag{3.8.17}$$

$$(S(D\mathbf{y}_k))_k \rightharpoonup \tilde{S} \quad \text{em} \quad \mathbf{L}^2(\Omega). \tag{3.8.18}$$

Demonstração. A convergência de $(\mathbf{u}_k)_{k>0}$ para \mathbf{u} na topologia fraca de $\mathbf{L}^2(\Omega)$ implica que a sucessão $(\mathbf{u}_k)_{k>0}$ é limitada, isto é, existe uma constante positiva M tal que

$$\|\mathbf{u}_k\|_2 \leq M, \quad \text{para } k > k_0. \tag{3.8.19}$$

Devido a (3.8.14) e (3.8.19), segue que

$$\|D\mathbf{y}_k\|_2 \leq C_4 M.$$

Pela desigualdade de Korn \mathbf{y}_k é limitada em $\mathbf{W}_0^{1,2}(\Omega)$ e portanto existe uma subsequência indexada em k que converge fracamente para um certo \mathbf{y} em $\mathbf{W}_0^{1,2}(\Omega)$. Além disso, usando uma injeção compacta de Sobolev, \mathbf{y}_k converge fortemente (logo fracamente) para \mathbf{y} em $\mathbf{L}^2(\Omega)$. Assim concluímos (3.8.16) e (3.8.17).

Finalmente, a estimativa anterior juntamente com (3.8.7) implicam

$$\begin{aligned} \|S(D\mathbf{y}_k)\|_2^2 &\leq \int_{\Omega} (1 + |D\mathbf{y}_k|)^{(\alpha(x)-2)2} |D\mathbf{y}_k|^2 dx \\ &\leq \int_{\Omega} (1 + |D\mathbf{y}_k|)^{(\alpha(x)-2)2} (1 + |D\mathbf{y}_k|)^2 dx \\ &= \int_{\Omega} (1 + |D\mathbf{y}_k|)^{2(\alpha(x)-1)} dx \\ &\leq C_4 \int_{\Omega} (1 + |D\mathbf{y}_k|^{2(\alpha(x)-1)}) dx \\ &\leq C_4 \left(|\Omega| + \int_{\Omega} |D\mathbf{y}_k|^{2(\alpha_{\infty}-1)} dx \right) \\ &= C_4 \left(|\Omega| + \|D\mathbf{y}_k\|_{2(\alpha_{\infty}-1)}^{2(\alpha_{\infty}-1)} \right). \end{aligned}$$

A última expressão é portanto limitada uma vez que $D\mathbf{y}_k \in C(\bar{\Omega})$ e conseqüentemente a sucessão $(S(D\mathbf{y}_k))_k$ é limitada em $\mathbf{L}^2(\Omega)$. Terminamos estabelecendo a existência de uma subsequência, indexada em k , e $\tilde{S} \in \mathbf{L}^2(\Omega)$ tal que $(S(D\mathbf{y}_k))_{k>0}$ converge fracamente para $\tilde{S} \in \mathbf{L}^2(\Omega)$, ou seja, verifica-se (3.8.18). \square

Proposição 3.8.6. *Suponhamos que (3.8.16), (3.8.17) e (3.8.18) se verificam. Então $\mathbf{y} \in \mathbf{W}_0^{1,2}(\Omega)$, o limite fraco de $(\mathbf{y}_k)_k$, é a solução de (3.8.13) correspondente a $\mathbf{u} \in \mathbf{L}^2(\Omega)$.*

Demonstração. Consideremos

$$(S(D\mathbf{y}_k) - S(\mathbf{y}), D\varphi) + (\mathbf{y}_k \cdot \nabla \mathbf{y}_k - \mathbf{y} \cdot \nabla \mathbf{y}, \varphi) = (\mathbf{u}_k - \mathbf{u}, \varphi), \quad \forall \varphi \in \mathbf{V}_2. \quad (3.8.20)$$

Tendo em conta as propriedades do termo convectivo e os resultados de regularidade verificados por \mathbf{y} , temos

$$\begin{aligned}
 |(\mathbf{y}_k \cdot \nabla \mathbf{y}_k - \mathbf{y} \cdot \nabla \mathbf{y}, \varphi)| &= |((\mathbf{y}_k - \mathbf{y}) \cdot \nabla \mathbf{y}_k, \varphi) + (\mathbf{y} \cdot \nabla (\mathbf{y}_k - \mathbf{y}), \varphi)| \\
 &= |((\mathbf{y}_k - \mathbf{y}) \cdot \nabla \mathbf{y}_k, \varphi) - (\mathbf{y} \cdot \nabla \varphi, (\mathbf{y}_k - \mathbf{y}))| \\
 &\leq |((\mathbf{y}_k - \mathbf{y}) \cdot \nabla \mathbf{y}_k, \varphi)| + |(\mathbf{y} \cdot \nabla \varphi, (\mathbf{y}_k - \mathbf{y}))| \\
 &\leq C_E^2 (\|\nabla \mathbf{y}_k\|_2 \|\varphi\|_4 + \|\mathbf{y}\|_4 \|\nabla \varphi\|_2) \|\mathbf{y}_k - \mathbf{y}\|_4 \\
 &\rightarrow 0, \quad \text{quando } k \rightarrow +\infty.
 \end{aligned}$$

Este resultado é uma consequência da injeção compacta de $\mathbf{W}_0^{1,2}(\Omega)$ em $\mathbf{L}^4(\Omega)$ o que implica a convergência forte em $\mathbf{L}^4(\Omega)$, uma vez que se verifica (3.8.16). A constante C_E corresponde à constante de injeção. Então, passando ao limite em

$$(S(D\mathbf{y}_k), D\varphi) + (\mathbf{y}_k \cdot \nabla \mathbf{y}_k, \varphi) = (\mathbf{u}_k, \varphi), \quad \forall \varphi \in \mathbf{V}_2,$$

obtemos

$$(\tilde{S}, D\varphi) + (\mathbf{y} \cdot \nabla \mathbf{y}, \varphi) = (\mathbf{u}, \varphi) \quad \forall \varphi \in \mathbf{V}_2, \quad (3.8.21)$$

Em particular, tomando $\varphi = \mathbf{y}$ e considerando (3.1.14) escrevemos

$$(\tilde{S}, D\mathbf{y}) = (\tilde{S}, D\mathbf{y}) + (\mathbf{y} \cdot \nabla \mathbf{y}, \mathbf{y}) = (\mathbf{u}, \mathbf{y}). \quad (3.8.22)$$

Por outro lado, a monotonia (3.8.9) dá-nos

$$(S(D\mathbf{y}_k) - S(D\varphi), D(\mathbf{y}_k) - D\varphi) \geq 0 \quad \forall \varphi \in \mathbf{V}_2. \quad (3.8.23)$$

Uma vez que

$$(S(D\mathbf{y}_k), D\mathbf{y}_k) = (\mathbf{u}_k, \mathbf{y}_k),$$

substituindo o primeiro termo em (3.8.23), obtemos

$$(\mathbf{u}_k, \mathbf{y}_k) - (S(D\mathbf{y}_k), D\varphi) - (S(D\varphi), D\mathbf{y}_k - D\varphi) \geq 0 \quad \forall \varphi \in \mathbf{V}_2.$$

Passando ao limite segue que

$$(\mathbf{u}, \mathbf{y}) - (\tilde{S}, D\varphi) - (S(D\varphi), D\mathbf{y} - D\varphi) \geq 0 \quad \forall \varphi \in \mathbf{V}_2.$$

Esta desigualdade juntamente com (3.8.22), implicam que

$$(\tilde{S} - S(D\varphi), D\mathbf{y} - D\varphi) \geq 0 \quad \forall \varphi \in \mathbf{V}_2$$

Tomando $\varphi = \mathbf{y} - \lambda\theta$ (ver [29]), o que é possível considerando qualquer $\theta \in \mathbf{V}_2$ e $\lambda > 0$, temos

$$(\tilde{S} - S(D(\mathbf{y} - \lambda\theta)), D\mathbf{y} - D(\mathbf{y} - \lambda\theta)) \geq 0 \quad \forall \theta \in \mathbf{V}_2 \quad (3.8.24)$$

o que é equivalente a

$$\lambda(\tilde{S} - S(D(\mathbf{y} - \lambda\theta)), D\theta) \geq 0 \quad \forall \theta \in \mathbf{V}_2. \quad (3.8.25)$$

Uma vez que $\lambda > 0$,

$$(\tilde{S} - S(D(\mathbf{y} - \lambda\theta)), D\theta) \geq 0 \quad \forall \theta \in \mathbf{V}_2. \quad (3.8.26)$$

Passando ao limite quando $\lambda \rightarrow 0$ e considerando a continuidade de S obtemos

$$(\tilde{S} - S(D\mathbf{y}), D\theta) \geq 0 \quad \forall \theta \in \mathbf{V}_2, \quad (3.8.27)$$

e isto implica

$$\tilde{S} = S(D\mathbf{y})$$

e portanto

$$(S(D\mathbf{y}), D\varphi) + (\mathbf{y} \cdot \nabla \mathbf{y}, \varphi) = (\mathbf{u}, \varphi) \quad \forall \varphi \in \mathbf{V}_2.$$

Logo, $\mathbf{y} \equiv \mathbf{y}_u$, isto é, \mathbf{y} é a solução de (3.8.13) associada a \mathbf{u} . □

Proposição 3.8.7. *Suponhamos verificadas as condições \mathbf{A}_1 e \mathbf{A}_2 . Então $(\mathbf{y}_k)_k$ converge fortemente para \mathbf{y}_u em $\mathbf{W}_0^{1,2}(\Omega)$.*

Demonstração. Fazendo $\varphi = \mathbf{y}_k - \mathbf{y}_u$ para a diferença das equações em (3.8.13) e considerando (3.8.9)

obtemos

$$(S(D\mathbf{y}_k) - S(D\mathbf{y}_u), D(\mathbf{y}_k - \mathbf{y}_u)) \geq \|D(\mathbf{y}_k - \mathbf{y}_u)\|_2^2. \quad (3.8.28)$$

Assim, usando (3.1.14) e resultados clássicos de injeccção, obtemos

$$\begin{aligned} \|D(\mathbf{y}_k - \mathbf{y}_u)\|_2^2 &\leq (S(D\mathbf{y}_k) - S(D\mathbf{y}_u), D(\mathbf{y}_k - \mathbf{y}_u)) \\ &= ((\mathbf{u}_k - \mathbf{u}, \mathbf{y}_k - \mathbf{y}_u) - (\mathbf{y}_k \cdot \nabla \mathbf{y}_k - \mathbf{y}_u \cdot \nabla \mathbf{y}_u, \mathbf{y}_k - \mathbf{y}_u)) \\ &= ((\mathbf{u}_k - \mathbf{u}, \mathbf{y}_k - \mathbf{y}_u) - ((\mathbf{y}_k - \mathbf{y}_u) \cdot \nabla \mathbf{y}_u, \mathbf{y}_k - \mathbf{y}_u)) \\ &\leq ((\mathbf{u}_k - \mathbf{u}, \mathbf{y}_k - \mathbf{y}_u) - \|\mathbf{y}_k - \mathbf{y}_u\|_4^2 \|\nabla \mathbf{y}_u\|_2) \rightarrow 0. \end{aligned}$$

quando $k \rightarrow +\infty$, donde pela desigualdade de Korn, resulta que

$$\|\mathbf{y}_k - \mathbf{y}\|_{1,2} \rightarrow 0.$$

□

Provemos agora o resultado de existência.

Demonstração. (do Teorema 3.8.1). Seja $(\mathbf{u}_k)_k$ uma sucessão minimizante em $\mathbf{L}^2(\Omega)$ e $(\mathbf{y}_k)_k$ a sucessão dos estados associados. Considerando as propriedades do funcional J , obtemos

$$\frac{\nu}{2} \|\mathbf{u}_k\|_2^2 \leq J(\mathbf{u}_k, \mathbf{y}_k) \leq J(0, \mathbf{y}_0), \quad \text{para } k > k_0$$

implicando que $(\mathbf{u}_k)_k$ é uma sucessão limitada em $\mathbf{L}^2(\Omega)$. Pela Proposição 3.8.7, deduzimos que (\mathbf{y}_k) converge fortemente para \mathbf{y}_u . Pela forma como está definido, J é convexo e contínuo, e portanto semicontínuo inferiormente (ver resultado em [23]). Podemos aplicar o Método Directo do Cálculo das Variações (ver, por exemplo, [10])

$$\inf_k J \leq J(\mathbf{u}, \mathbf{y}_u) \leq \liminf_k J(\mathbf{u}_k, \mathbf{y}_k) \leq \inf_k J$$

para concluirmos que $(\mathbf{u}, \mathbf{y}_u)$ é, de facto, um minimizante e portanto uma solução do problema (P_α) . □

Nota 3.8.3. Como foi dito no início deste capítulo, tratámos essencialmente do estudo teórico de problemas de controlo distribuído para sistemas não-Newtonianos. No entanto para relacionarmos a

teoria, por um lado com as simulações numéricas, por outro, com os problemas da Hemodinâmica, apresentamos no Anexo A, uma simulação numérica de um problema de controlo distribuído num cilindro, que pretende representar um vaso sanguíneo idealizado, com dimensões e parâmetros fisiológicos.

Generalidades sobre a Hemodinâmica

Após um estudo teórico e genérico sobre problemas de controlo aplicados aos fluidos, apresentaremos nos Capítulos 5 e 6 simulações de problemas de controlo aplicadas a um modelo específico para o sangue. Dentro desta perspectiva fazemos um breve resumo sobre as funções do sangue, a sua constituição e o seu comportamento no que respeita às variações da viscosidade, tendo por base [5, 8].

O sangue é um fluido complexo que circula num sistema de vasos sanguíneos, o sistema vascular, que irriga todas as partes do corpo humano. Em geral, pode ser considerado como um fluido homogéneo e com comportamento Newtoniano, salvo em certas situações que explicitaremos mais à frente.

O sistema vascular é constituído por veias e artérias, por onde circulam o sangue venoso e o sangue arterial, respectivamente. As artérias subdividem-se, segundo o seu calibre, em artérias largas, médias, arteríolas e capilares. As primeiras são vasos deformáveis com diâmetros que variam entre 1 e 3 *cm* e transportam o sangue do coração até às zonas periféricas do corpo humano. As artérias mais pequenas tem diâmetros entre 0.2 *mm* e 1 *cm* e caracterizam-se por possuírem muitas ramificações, enquanto que as arteríolas se caracterizam por desempenharem um papel de regulação do sangue na periferia. Os capilares são vasos com dimensões na mesma ordem de grandeza dos componentes do sangue, o que torna desaproprada a modelação do sangue como um fluido homogéneo neste tipo de vasculatura. A permeabilidade dos capilares tem, neste caso, um papel relevante e deve introduzir-se na modelação uma escolha de parâmetros adicionais [5].

Na circulação sanguínea, arritmias da frequência cardíaca podem conduzir a grandes alterações da pressão do sangue nas artérias e ao aparecimento de doenças. Por exemplo, a acumulação de placas lipídicas em determinadas zonas pode causar a redução do calibre dos vasos, ou seja o surgimento de estenoses. Também o desenvolvimento de aneurismas está relacionado com a estrutura dos vasos, o seu calibre, e com outros fenómenos locais da Hemodinâmica.

Nas simulações numéricas efectuadas nos Capítulos 5 e 6 iremos considerar geometrias idealizadas representativas de partes de artérias largas com este tipo de patologias. É considerada também uma artéria cerebral real com um aneurisma sacular desenvolvido.

No que respeita às funções que desempenha no corpo humano, o sangue é um fluido cuja função principal consiste em transportar substâncias através da complexa rede de vasos até aos tecidos do corpo. De uma

forma geral, o sangue

- fornece oxigénio e combustível metabólico às células de todo o corpo humano;
- remove do interior das células os resíduos do metabolismo como a água e o dióxido de carbono;
- absorve os nutrientes: hidratos de carbono, gorduras, proteínas;
- absorve oxigénio e liberta dióxido de carbono enquanto circula nos pulmões;
- remove resíduos não gasosos resultantes dos processos metabólicos, depositando-os nos rins.

Além das funções do sangue, é importante conhecer os elementos que o constituem, uma vez estes têm uma importante influência nas suas propriedades mecânicas. A próxima secção é dedicada a este tema.

4.1 Constituição do sangue

O sangue é um fluido constituído por uma suspensão de vários elementos celulares e por plasma, todos com funções distintas. Os elementos celulares da suspensão são

- glóbulos vermelhos (hemácias ou eritrócitos);
- glóbulos brancos (leucócitos);
- plaquetas (trombócitos).

Na sua grande maioria, a formação dos elementos do sangue ocorre na medula óssea. No caso dos glóbulos brancos, parte deles são formados nos tecidos linfáticos.

Os glóbulos vermelhos, são células altamente flexíveis em forma de disco bicôncavo, preenchidas com uma solução saturada de hemoglobina em água, assim como elementos inorgânicos como o potássio, o sódio, o cálcio, o magnésio. Cabe aos glóbulos vermelhos a tarefa de transportar o oxigénio e o dióxido de carbono entre os pulmões e os tecidos do corpo e representam aproximadamente 45% do volume de sangue de um indivíduo normal. Este valor designa-se por hematócrito, como se irá referir mais adiante. Os glóbulos brancos, são células grosseiramente esféricas, de aparência granulosa, cuja função é a defesa do organismo, a destruição de corpos estranhos ao indivíduo e a produção de anticorpos. Fazem parte dos glóbulos brancos, os basófilos, os eosinófilos, os neutrófilos, os monócitos e os linfócitos. São células rapidamente transportadas para áreas de infecção ou inflamação e submetem-se a deformações para penetrarem nos capilares, uma vez que o seu diâmetro é maior que a maioria dos diâmetros dos capilares.

A plaquetas são pequenas células sem núcleo em forma de disco, muito mais pequenas que os glóbulos vermelhos, cuja função está relacionada com a coagulação do sangue. Quando em contacto com os tecidos danificados, alteram a sua forma física e libertam substâncias químicas que activam as plaquetas nas redondezas, que ao aderirem umas às outras impedem o sangramento. No seu conjunto, as plaquetas e os glóbulos brancos representam cerca de 1% do volume do sangue.

O plasma é constituído maioritariamente por água, cerca de 90%, por substâncias orgânicas e inorgânicas, aproximadamente 1 a 2%, por proteínas, como a albumina, a globulina, fibrinogéneo e outros componentes. A sua principal função é o transporte de substâncias dissolvidas na água, como os nutrientes, resíduos e elementos celulares através do sistema circulatório.

Uma das principais questões que se pode colocar é: qual a influência dos constituintes do sangue nas suas propriedades mecânicas? De um modo geral, os glóbulos brancos têm pouca relevância nas propriedades reológicas do sangue, excepto em vasos de muito pequeno calibre, como capilares ou em situações patológicas. Já os glóbulos vermelhos, sabe-se que têm forte influência no comportamento mecânico do sangue, daí que seja importante ter em conta o valor do hematócrito nas simulações do seu comportamento.

O hematócrito é a concentração de glóbulos vermelhos no sangue por unidade de volume. Em condições normais o seu valor é de 45% nos homens e de 40% nas mulheres. É medido agitando o sangue num tubo e medindo o volume ocupado pelos glóbulos vermelhos no fundo do tubo. Cerca de 96% desse volume, é o hematócrito. Nestas medições, deve ter-se em conta a existência de factores que alteram o hematócrito como o sexo do indivíduo, condições patológicas de que o indivíduo seja portador, o nível de actividade física a que se sujeita e ainda a altitude a que vive. As propriedades mecânicas do sangue estão fortemente relacionadas com o nível do hematócrito, e em particular, com uma das suas mais importantes propriedades, que é a viscosidade (consultar [8]).

4.2 A viscosidade do sangue e o seu comportamento não-Newtoniano

O sangue, de acordo com a sua constituição e o comportamento dos glóbulos vermelhos, apresenta uma diminuição da viscosidade com o aumento da taxa de cisalhamento. Esta sua característica é uma das mais estudadas em Hemorreologia.

Para baixos valores da taxa de cisalhamento, é muito difícil empreender estudos experimentais de referência, razão pela qual existem ainda muitas dúvidas sobre o comportamento do sangue quando a taxa de cisalhamento tende para zero. Nestes casos, o valor máximo da viscosidade, μ_0 , é aproximado experimentalmente e portanto, a precisão do resultado está relacionada com a precisão do equipamento com que a viscosidade é medida. O mínimo atingido pela viscosidade é uma convenção matemática, quando a taxa de cisalhamento tende para infinito. Na verdade, este valor tem menos importância uma vez que, quando a taxa de cisalhamento aumenta, a viscosidade decresce até atingir um determinado valor, a que frequentemente se chama viscosidade assintótica e designa-se por μ_∞ , (ver (4.3.4)). A maioria dos modelos constitutivos para a viscosidade do sangue contém estas duas constantes (ver (4.3.3) e a Tabela 4.1).

Estudos experimentais (consultar [8]) mostram que em indivíduos saudáveis, a viscosidade é praticamente constante, salvo algumas exceções, pelo que, devem ser usados modelos constitutivos fracamente pseudoplásticos ou simplesmente um modelo Newtoniano. No entanto, é importante considerar a variação da taxa de cisalhamento em zonas de recirculação do sangue, como por exemplo, numa artéria, logo após uma estenose ou no interior de uma aneurisma sacular, regiões consideradas no nosso estudo. No caso do sistema venoso o comportamento do sangue é também pseudoplástico.

O comportamento não-Newtoniano do sangue está maioritariamente relacionado com o comportamento, forma e constituição dos glóbulos vermelhos. Na presença de fibrinogénio e das globulinas, que são proteínas existentes no plasma sanguíneo, os glóbulos vermelhos adquirem a capacidade de se agregarem em microestruturas com a forma de pilhas de bastonetes de células individuais chamadas *rouleaux*. Para valores muito baixos da taxa de cisalhamento, os *rouleaux* alinham-se e formam uma estrutura secundária de ramos tridimensionais de agregados de *rouleaux*. Na ausência das proteínas, fibrinogénio e globulinas, as pilhas de *rouleaux* não se formam.

A agregação e desagregação dos glóbulos vermelhos são fenómenos dinâmicos, reversíveis e são considerados como os maiores responsáveis pelo comportamento pseudoplástico do sangue.

Foi demonstrado que a formação de *rouleaux* acontece para baixos valores da taxa de cisalhamento, quer em condições fisiológicas, quer em condições patológicas. Acredita-se que na maior parte da circulação, em indivíduos saudáveis, os valores da taxa de cisalhamento são demasiado elevados para permitirem o surgimento de *rouleaux*, com excepção de alguns vasos. Em algumas doenças, a tendência do sangue para formar microestruturas tridimensionais de glóbulos vermelhos é significativamente aumentada. No sangue em repouso, ou para baixos valores da taxa de cisalhamento, a estrutura tridimensional dos glóbulos vermelhos parece sólida, resistente ao fluido, sugerindo que o sangue possa ter um limite de elasticidade, assunto que tem gerado muita controvérsia.

Quando a taxa de cisalhamento aumenta, o sangue começa a fluir e a estrutura sólida parte-se em redes tridimensionais de vários tamanhos que parecem movimentar-se como unidades individuais atingindo um tamanho de equilíbrio, que depende dos valores da taxa de cisalhamento. O crescimento desta, conduz a um desarranjo dos agregados até à individualização dos glóbulos vermelhos e ao seu alinhamento com o fluxo sanguíneo segundo o eixo longitudinal do vaso sanguíneo. Este fenómeno tem como resultado uma diminuição acentuada da viscosidade.

4.3 Modelos para a viscosidade do sangue

Tal como já foi referido no Capítulo 2, existem fluidos como o próprio sangue cujo comportamento não pode ser descrito pelas equações de Navier-Stokes. Trata-se dos fluidos não-Newtonianos cujas propriedades se traduzem numa relação não linear entre T e D , o que conduz a dificuldades acrescidas no seu tratamento matemático. Uma generalização de (2.4.10) pode escrever-se na forma:

$$T = (-P + \varphi_0)I + \varphi_1 D + \varphi_2 D^2 \quad (4.3.1)$$

onde T depende do tensor D , de forma quadrática, os coeficientes φ_1 e φ_2 dependem também de D e I é a matriz identidade. Fluidos incompressíveis e viscosos com esta lei constitutiva não linear designam-se por fluidos não-Newtonianos de Reiner-Rivlin. Note-se que, para

$$\varphi_0 = \varphi_2 = 0, \quad \varphi_1 = \text{constante},$$

obtemos o caso particular dos fluidos Newtonianos.

Uma sub-classe dos fluidos não-Newtonianos descritos pela lei (4.3.1) é a classe dos fluidos Newtonianos generalizados, que se obtém fazendo

$$\varphi_0 = \varphi_2 = 0, \quad \varphi_1 = h(|D|)$$

na fórmula (4.3.1) onde h é uma função real de variável real. Neste caso escrevermos

$$T = -PI + 2\mu(|D|)D \quad (4.3.2)$$

onde $h(|D|) = 2\mu(|D|)$.

Diferentes escolhas para a função μ correspondem a diferentes modelos de viscosidade para os fluidos não-Newtonianos escolhidos de acordo com o fluido que se pretende modelar. Uma escolha adequada permite resultados mais realistas nas simulações e os parâmetros da viscosidade de cada modelo devem ser escolhidos de acordo com as suas especificidades que, no caso do sangue, têm em conta a temperatura, o hematócrito e as condições de saúde do indivíduo dador.

Recentemente realizaram-se estudos experimentais no sentido de perceber qual o modelo que melhor se ajusta a dados recolhidos no sangue de um dador em condições normais de saúde, a uma temperatura sanguínea de $37^\circ C$ e um hematócrito de 40%. Por exemplo, em [2], foram usadas estimativas conhecidas para converter os dados e obter valores realistas para a viscosidade. Comparando os dados com os modelos de viscosidade, obtiveram-se os parâmetros para cada modelo usando o ajustamento pelo método dos mínimos quadrados não linear a partir dos dados da viscosidade. Apesar das diferenças observadas nos diversos modelos para a taxa de cisalhamento igual a zero, facto que se deveu à falta de dados para a viscosidade para valores próximos de zero da taxa de cisalhamento, concluiu-se ainda em [2] que o modelo de Carreau e o modelo de Cross ajustam bem os dados experimentais.

Fazemos, de seguida, uma breve descrição dos modelos para a viscosidade mais usados na modelação dos fluidos, e em particular do sangue (escrevemos μ em função de $\dot{\gamma}$, a taxa de cisalhamento, para simplificar a notação dos modelos). Um dos modelos não-Newtonianos mais simples usados na modelação do fluxo sanguíneo é o modelo da Lei de Potência (*Power Law*, em inglês), dado por

$$\mu(\dot{\gamma}) = \mu_1 \dot{\gamma}^{(\alpha-1)},$$

em que a constante $\mu_1 > 0$ é a consistência do fluido e α é o índice da Lei de Potência. Fazendo $\alpha = 1$ obtemos o caso particular de viscosidade constante ou seja um modelo Newtoniano. Para $\alpha > 1$ verifica-se que μ é uma função crescente de $\dot{\gamma}$, pelo que a viscosidade aumenta com o crescimento da taxa de cisalhamento, que corresponde ao comportamento dilatante da viscosidade. Para $\alpha < 1$, temos a situação inversa, isto é, a viscosidade decresce com o aumento da taxa de cisalhamento, ou seja, com comportamento pseudoplástico.

A Lei de Potência com $0 < \alpha < 1$ é frequentemente usada em simulações do sangue por ser mais fácil a obtenção de soluções numéricas. Todavia para $\dot{\gamma} = 0$, μ deixa de ter sentido por se tornar ilimitado e no extremo oposto, fazendo $\dot{\gamma} \rightarrow \infty$, este modelo dar-nos-ia uma viscosidade nula, o que fisicamente não tem sentido.

Com o objectivo de colmatar estas dificuldades físicas, consideram-se outros modelos mais adequados para a viscosidade do sangue. Por exemplo

$$\mu(\dot{\gamma}) = \mu_\infty + (\mu_0 - \mu_\infty) F(\dot{\gamma}), \quad (4.3.3)$$

onde μ_0 e μ_∞ são viscosidades assimpóticas e F é uma função limitada, real de variável real, tal que

$$\lim_{\dot{\gamma} \rightarrow 0^+} F(\dot{\gamma}) = 1 \quad \text{e} \quad \lim_{\dot{\gamma} \rightarrow +\infty} F(\dot{\gamma}) = 0, \quad (4.3.4)$$

e portanto, $\mu(\dot{\gamma}) = \mu_0$ quando $\dot{\gamma} \rightarrow 0$ e $\mu(\dot{\gamma}) = \mu_\infty$ quando $\dot{\gamma} \rightarrow \infty$.

Escolhendo diferentes funções para F que verifiquem as condições (4.3.4) obtemos diferentes modelos de viscosidade para o sangue. Na Tabela 4.1 apresentamos alguns dos modelos usados em simulações na Hemodinâmica cujos parâmetros podem ser encontrados em [2, 3, 8, 62].

Para o modelo de Carreau, as constantes materiais foram obtidas através do método não linear dos mínimos quadrados (ver [2]) usando dados de viscosidade medidos para um hematócrito de $Ht = 40\%$ e uma temperatura de $T = 37^\circ C$. Para o modelo generalizado de Cross as constantes usadas estão de acordo com [3, 62]. As constantes dos restantes modelos foram obtidas usando uma análise de regressão linear de dados experimentais para os valores do hematócrito e temperatura, $Ht = 40\%$ e $T = 23^\circ C$, repectivamente (ver [8]).

Baseados nas conclusões de [2] adoptámos nas simulações numéricas efectuadas, o modelo generalizado de Cross para o caso das geometrias idealizadas e no caso do aneurisma sacular reconstruído a partir de imagens médicas usámos o modelo de Carreau, ambos com os respectivos parâmetros descritos na Tabela 4.1.

Tabela 4.1: Modelos usuais para o comportamento da viscosidade do sangue [8].

Modelo	$F(\dot{\gamma})$	Parâmetros
Lei de Potência	$\mu_1 \dot{\gamma}^{(\alpha-1)}$	$\mu_1 = 2.02 \text{ Pa.s}, \alpha = 0.628$
Cross simplificado	$\frac{1}{1 + \lambda \dot{\gamma}}$	$\mu_0 = 0.0073 \text{ Pa.s}, \mu_\infty = 0.000518 \text{ Pa.s}, \lambda = 4.84 \text{ s}$
Cross	$\frac{1}{1 + (\lambda \dot{\gamma})^m}$	$\mu_0 = 0.00875 \text{ Pa.s}, \mu_\infty = 0.00470 \text{ Pa.s}, \lambda = 8 \text{ s}, m = 0.801$
Cross generalizado	$\frac{1}{(1 + (\lambda \dot{\gamma})^b)^a}$	$\mu_0 = 0.16 \text{ Pa.s}, \mu_\infty = 0.0036 \text{ Pa.s}, \lambda = 8.2 \text{ s}, a = 1.23, b = 0.64$
Carreau	$\frac{1}{(1 + (\lambda \dot{\gamma})^2)^{\frac{1-\alpha}{2}}}$	$\mu_0 = 0.0456 \text{ Pa.s}, \mu_\infty = 0.0032 \text{ Pa.s}, \lambda = 10.03 \text{ s}, \alpha = 0.344$
Carreau-Yasuda	$\frac{1}{(1 + (\lambda \dot{\gamma})^a)^{\frac{1-\alpha}{a}}}$	$\mu_0 = 0.00657 \text{ Pa.s}, \mu_\infty = 0.00447 \text{ Pa.s}, \lambda = 10.4 \text{ s}, \alpha = 0.34, a = 1.76$

Simulações de Problemas de Controlo Óptimo Aplicados à Hemodinâmica - Caso Bidimensional

O estudo matemático e numérico, assim como a modelação da circulação sanguínea nos seres humanos veio permitir uma melhor compreensão do comportamento do sangue e da sua relação com determinados factores que alteram esse comportamento. Por exemplo, a separação do fluxo, a existência de zonas de recirculação ou de zonas com valores baixos e oscilatórios da tensão de cisalhamento, são factores reconhecidos pela comunidade médica como indicadores do desenvolvimento de doenças arteriais [8].

A relevância dos novos saberes adquiridos, está relacionada com um melhor conhecimento e prevenção de doenças que afectam o sistema cardiovascular, que são presentemente a maior causa de morte nos Países desenvolvidos. A hipertensão arterial, o colesterol, o tabagismo e as dietas extra calóricas são factores de risco para essas doenças, amplamente conhecidos.

Uma das mais frequentes doenças que atinge o sistema vascular, é a obstrução parcial dos vasos sanguíneos como consequência do depósito de ateromas (aterosclerose), como referido no Capítulo 4, que são placas formadas essencialmente por gordura e tecido fibroso. Este depósito de gordura diminui o diâmetro dos vasos e impede o normal fluxo sanguíneo, comprometendo o estado de saúde do indivíduo. De acordo com [5, 8], sabe-se que zonas como a bifurcação da carótida desenvolvem recirculações do sangue, que potenciam a acumulação de gordura e consequentemente a redução do diâmetro dos vasos sanguíneos. Outro dos factores que pode estar relacionado com a acumulação de gordura é a natureza oscilatória das tensões exercidas na parede dos vasos, nomeadamente na zona das recirculações.

Por outro lado, acredita-se que o desenvolvimento de aneurismas intracraniais, o seu crescimento e a consequente ruptura estão relacionados não só com a estrutura dos vasos sanguíneos, mas também com fenómenos locais da Hemodinâmica e usualmente ocorrem nos vértices das bifurcações ou nas curvaturas exteriores das artérias. O calibre das artérias, a curvatura e ramificações têm também um papel importante no crescimento e ruptura dos aneurismas. Alguns parâmetros como o WSS medido nas paredes dos vasos, podem também fornecer uma informação importante sobre a condição do paciente. Valores anormais do WSS podem estar associados a alterações anormais da circulação do sangue ([2]). O intercâmbio de dados e saberes entre as comunidades médica e científica possui aqui contornos de extrema importância, uma vez que através de dados recolhidos e fornecidos pelos médicos, é possível

efectuar simulações numéricas dos sistemas cardiovascular e cerebrovascular podendo prever, com um maior realismo, o comportamento do sangue com impacto no tratamento e prevenção de doenças.

Neste capítulo, pretendemos apresentar os resultados de simulações numéricas de problemas do tipo DA (Assimilação de Dados), que é um procedimento que, como foi dito na Introdução, inclui nas simulações numéricas, dados usualmente fornecidos pelos médicos. Neste caso, são usados dados sintéticos, ou seja, gerados através da resolução das equações da dinâmica. Como é evidente o caso com maior interesse, do ponto de vista das aplicações, é aquele em que se usam dados reais nas simulações numéricas e por isso no futuro é o que pretendemos implementar.

Neste sentido, propomos e validamos o método DA baseado numa abordagem variacional [43], para numericamente reconstruirmos o fluxo sanguíneo nas geometrias propostas, supondo que o sangue tem comportamento reológico não-Newtoniano. No método DA incluímos o WSS na função custo e verificamos uma melhor precisão nos resultados obtidos. A robustez do método foi validada de várias formas. No caso bidimensional, usámos três estenoses idealizadas com diferentes graus de estreitamento e obtivemos bons resultados em todas elas. Usámos também diferentes perfis de entrada para o fluido e verificámos a capacidade de filtragem de ruído do método, com resultados concordantes com os já existentes para fluidos Newtonianos [40].

5.1 O Método da "Assimilação de Dados"

Nesta secção descrevemos a nossa abordagem ao problema DA. O objectivo é obter soluções numéricas para o problema estacionário,

$$\begin{cases} -div(\tau(D\mathbf{y})) + \rho(\mathbf{y} \cdot \nabla \mathbf{y}) + \nabla p = \mathbf{f} & \text{em } \Omega \\ div \mathbf{y} = 0 & \text{em } \Omega \end{cases} \quad (5.1.1)$$

definido no domínio computacional Ω , representado na Figura 5.1, soluções estas que deverão coincidir, com um determinado erro, com dados observados em certas partes do domínio. Há diferentes técnicas que podem ser usadas para este efeito, nomeadamente, a aproximação variacional, a matriz de actualização ou a divisão do domínio, todos a nível discreto. Em [42] mostra-se que a aproximação variacional é melhor do que as restantes metodologias.

A aproximação variacional baseia-se na suposição de que somos livres de ajustar ou controlar alguns dos parâmetros dos modelos e de escolher a melhor solução de acordo com um determinado critério. Na situação mais simples o critério pode ser, por exemplo, a minimização do funcional de custo

$$\int_{\Omega_{part}} |\mathbf{y} - \mathbf{y}_d|^2 dx \quad (5.1.2)$$

constituído pela diferença entre as soluções obtidas y e as observadas y_d medidas numa determinada parte do domínio designada por Ω_{part} . Tomando os parâmetros ajustáveis como uma função de controlo u definido num determinado conjunto designado por Ω_c , possivelmente diferente de Ω_{part} , estamos perante um problema de controlo óptimo que corresponde também a um problema inverso.

É conhecido que, quando lidamos com modelos não lineares, a possibilidade de estarmos perante um problema mal posto pode ser evitada, adicionando ao nosso critério, ou seja, ao funcional de custo, um termo regularizador como por exemplo

$$\int_{\Omega_c} |u|^2 dx \quad \text{ou} \quad \int_{\Omega_c} |\nabla u|^2 dx. \quad (5.1.3)$$

Usando este tipo de funcionais de custo é possível demonstrar, sob determinadas hipóteses, a unicidade da solução para o correspondente problema de controlo óptimo, e portanto, a garantia de que o problema está bem posto.

Neste capítulo, supomos que o domínio Ω representa uma artéria truncada por duas fronteiras artificiais Γ_{in} e Γ_{out} , a fronteira de entrada de fluido e a fronteira de saída, respectivamente, como representado na Figura 5.1.

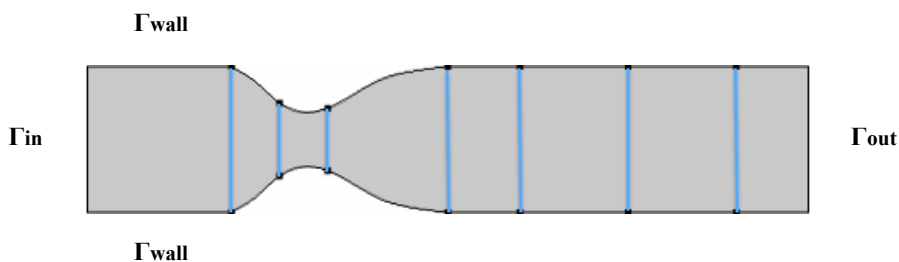


Figura 5.1: Representação do domínio computacional em dimensão 2.

A função de controlo corresponde ao perfil da velocidade na fronteira de entrada. Supomos ainda que os dados correspondem à velocidade observada em $\Omega_{part} \subset \Omega$. Além disso, podemos ainda admitir que conhecemos o WSS nalguma parte da fronteira Γ_{wall} . De facto, como mencionado atrás, o WSS é um indicador importante para monitorizar certas patologias. Portanto, é espectável que o método DA possa reconstruir com precisão o WSS desejado. Neste sentido, introduzimos também o integral

$$\int_{\Gamma_{wall}} |w - w_d|^2$$

da diferença entre a magnitude do WSS obtido w e a magnitude do WSS observado w_d . Recordemos que WSS é a componente tangencial da tensão exercida pelo fluido na parede dos vasos, dado por

$$WSS = \sigma_n - (\sigma_n \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} \quad (5.1.4)$$

onde \mathbf{n} é o vector unitário normal exterior à superfície da parede do vaso e $\sigma_n = \sigma\mathbf{n}$ é usualmente chamada de componente normal do tensor das tensões, aqui representado por σ . Supondo que $\sigma = -p\mathbf{I} + \tau$ a igualdade (5.1.4) pode ser escrita como

$$WSS = \mu(\nabla\mathbf{y} + (\nabla\mathbf{y})^T)\mathbf{n} - \mu[(\nabla\mathbf{y} + (\nabla\mathbf{y})^T)\mathbf{n}] \cdot \mathbf{n}. \quad (5.1.5)$$

Assim o método DA consiste na resolução do seguinte problema de controlo óptimo

$$\min \quad \mathbf{J}(\mathbf{y}, \mathbf{u}) = w_1 \int_{\Omega_{part}} |\mathbf{y} - \mathbf{y}_d|^2 dx + w_2 \int_{\Gamma_{wall}} |w - w_d|^2 dx + w_3 \int_{\Gamma_{in}} |\nabla\mathbf{u}|^2 dx. \quad (5.1.6)$$

sujeito às restrições

$$\left\{ \begin{array}{ll} -div \tau + \rho(\mathbf{y} \cdot \nabla)\mathbf{y} + \nabla p = \mathbf{f} & \text{em } \Omega \\ div \mathbf{y} = 0 & \text{em } \Omega \\ \mathbf{y} = 0 & \text{em } \Gamma_{wall} \\ \mathbf{y} = \mathbf{u} & \text{em } \Gamma_{in} \\ \sigma\mathbf{n} = 0 & \text{em } \Gamma_{out}. \end{array} \right. \quad (5.1.7)$$

Os pesos w_1 , w_2 e w_3 devem ser escolhidos de forma a que o problema (5.1.6 - 5.1.7) admita uma solução, preferencialmente única.

Tanto quanto sabemos, o problema (5.1.6 - 5.1.7) não foi estudado em termos teóricos no que respeita à existência de solução, mesmo para o custo quadrático, que se obtém fazendo $w_2 = 0$. De facto, os problemas de controlo óptimo para fluidos não-Newtonianos começaram a ser estudados muito recentemente. Para o caso bidimensional estacionário damos relevo ao trabalho de [17] para controlo na fronteira de equações elípticas quasilineares, [16, 68] ambos para controlo distribuído. Para o caso bidimensional evolutivo referimos [11] e para o caso tridimensional das equações modificadas de Navier-Stokes e Maxwell acopladas, [47]. Além disso, para o controlo distribuído no caso tridimensional citamos [52] e [63]. Note-se que nenhum dos trabalhos citados se refere ao problema de controlo de fronteira para o sistema não linear (5.1.7).

Na ausência de teoria apropriada, supomos a regularidade necessária para as variáveis do nosso problema e propomos uma aproximação numérica para a sua resolução. Este é o tema da próxima secção.

5.2 Discretização do problema

Para resolvermos numericamente um problema de controlo óptimo, podemos adoptar uma das seguintes abordagens: Discretizar e depois Optimizar (DO) ou Optimizar e depois Discretizar (OD). Existe ainda alguma controvérsia no que se refere à preferência na utilização de cada um destes métodos. As simulações que apresentamos baseiam-se em [43] onde é usado o método DO em vez de OD (ver, por exemplo, [45] para alguns comentários sobre este assunto).

O Método DO consiste em discretizar primeiro o problema de controlo óptimo e posteriormente resolver o problema de optimização em dimensão finita resultante da discretização. Para o primeiro passo, usamos o Método dos Elementos Finitos (MEF) que descrevemos em seguida. A escrita é genérica e aplica-se a domínios $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ com $n = 2, 3$. Consideremos a formulação fraca do sistema (5.1.1).

Suponhamos que $\mathbf{y} \in \mathbf{H}$ e $p \in \mathbf{Q}$, ambos espaços de Hilbert. Consideramos os espaços para as funções teste

$$\mathbf{V} = \{\mathbf{v} \in \mathbf{H} : \mathbf{v}|_{\partial\Omega_D} = 0\} \quad (5.2.1)$$

e

$$\mathbf{Q} \quad (5.2.2)$$

correspondentes a \mathbf{y} e p respectivamente, onde $\partial\Omega_D = \Gamma_{in} \cup \Gamma_{wall}$. Multiplicando (5.1.1) por funções teste adequadas, \mathbf{v} e q , e integrando por partes, formalmente obtemos

$$\begin{cases} \int_{\Omega} \tau(D\mathbf{y}) : \nabla \mathbf{v} \, dx + \int_{\Omega} (\rho(\mathbf{y} \cdot \nabla)\mathbf{y}) \cdot \mathbf{v} \, dx - \int_{\Omega} p \operatorname{div} \mathbf{v} \, dx = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \, dx, & \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V} \\ \int_{\Omega} q \operatorname{div} \mathbf{y} \, dx = 0, & \forall q \in \mathbf{Q} \end{cases} \quad (5.2.3)$$

Consideremos os subespaços de dimensão finita $\mathbf{V}_h \subset \mathbf{V}$ e $\mathbf{Q}_h \subset \mathbf{Q}$ onde $h > 0$, $\dim(\mathbf{V}_h) = N_y$ e $\dim(\mathbf{Q}_h) = N_p$. Podemos usar as seguintes aproximações em dimensão finita para \mathbf{y} e para p

$$\mathbf{y}_h = \sum_{j=1}^{N_y} y_j \phi_j \in \mathbf{V}_h, \quad p_h = \sum_{k=1}^{N_p} p_k \psi_k \in \mathbf{Q}_h \quad (5.2.4)$$

onde ϕ_j e ψ_k são funções de base pertencentes a \mathbf{V}_h e \mathbf{Q}_h , respectivamente. Os coeficientes y_j e p_k são valores desconhecidos a determinar.

Considerando que o espaço das funções de base coincide com o espaço das funções teste, obtemos o seguinte problema aproximado: encontrar $\mathbf{y}_h \in \mathbf{V}_h$ e $p_h \in \mathbf{Q}_h$ tais que

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega} \tau(D\mathbf{y}_h) : \nabla \mathbf{v}_h dx + \int_{\Omega} (\rho(\mathbf{y}_h \cdot \nabla) \mathbf{y}_h) \cdot \mathbf{v}_h dx - \int_{\Omega} p_h \operatorname{div} \mathbf{v}_h dx \\ = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}_h dx \\ \int_{\Omega} q_h \operatorname{div} \mathbf{y}_h dx = 0. \end{array} \right. \quad (5.2.5)$$

Se escolhermos \mathbf{V}_h e \mathbf{Q}_h correctamente, então é possível mostrar a existência de solução para o problema aproximado e verificar que (\mathbf{y}_h, p_h) converge para a solução (\mathbf{y}, p) da equação (5.2.3) (consultar, por exemplo, [39]). Para a escolha dos espaços \mathbf{V}_h e \mathbf{Q}_h associados à discretização do problema (5.2.5) usamos os elementos finitos do tipo $(P2-P1)$ para as funções de base e para as funções teste.

A discretização dos termos viscoso e convectivo é mais complexa dada a natureza altamente não linear destes termos. Começemos por considerar o termo convectivo

$$\int_{\Omega} (\rho(\mathbf{y}_h \cdot \nabla) \mathbf{y}_h) \cdot \mathbf{v}_h dx.$$

Substituindo \mathbf{y}_h pela correspondente aproximação finita (5.2.4) e \mathbf{v}_h pelas funções teste ϕ_i , $i = 1 \dots N_y$ obtemos

$$\int_{\Omega} \left[\left(\rho \sum_{j=1}^{N_y} y_j \phi_j \cdot \nabla \right) \sum_{k=1}^{N_y} y_k \phi_k \cdot \phi_i \right] dx, \quad i = 1 \dots N_y. \quad (5.2.6)$$

Supondo que os vectores têm duas dimensões (o caso tridimensional é análogo), (5.2.6) pode ser escrito na forma

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left[\left(\rho \sum_{j=1}^{N_y} y_j (\phi_j^1 \partial x + \phi_j^2 \partial y) \right) \sum_{k=1}^{N_y} y_k \phi_k \cdot \phi_i \right] dx \\ &= \int_{\Omega} \rho \sum_{j=1}^{N_y} \sum_{k=1}^{N_y} (y_j \phi_j^1 \partial x y_k \phi_k + y_j \phi_j^2 \partial y y_k \phi_k) \phi_i dx \\ &= \int_{\Omega} \rho \sum_{j=1}^{N_y} y_j \sum_{k=1}^{N_y} y_k (\phi_j^1 \partial x \phi_k + \phi_j^2 \partial y \phi_k) \phi_i dx, \end{aligned}$$

donde se obtém

$$\left(\sum_{j=1}^{N_y} y_j \sum_{k=1}^{N_y} y_k \int_{\Omega} (\rho \phi_j \cdot \nabla) \phi_k \cdot \phi_i dx \right)_{i=1 \dots N_y} = \mathbf{G}(Y)Y$$

5.2. Discretização do problema

onde $Y = (y_1, \dots, y_{N_y})^T$ e

$$\mathbf{G}(Y) = \sum_{k=1}^{N_y} y_k \int_{\Omega} (\rho \phi_j \cdot \nabla) \phi_k \cdot \phi_i dx.$$

Consideremos agora a parte viscosa τ do tensor das tensões. O termo que pretendemos discretizar é

$$\int_{\Omega} \tau(D\mathbf{y}_h) : \nabla \mathbf{v}_h dx. \quad (5.2.7)$$

Recordemos que τ pode ser escrito como

$$\tau = 2\mu(|D\mathbf{y}|)D\mathbf{y},$$

onde $\mu(|D\mathbf{y}|)$ é representado pelo modelo de Cross para a viscosidade (Tabela 4.1), isto é,

$$\mu(|D\mathbf{y}|) = \mu_{\infty} + (\mu_0 - \mu_{\infty}) \frac{1}{(1 + 2\lambda|D\mathbf{y}|^b)^a}.$$

Substituindo \mathbf{y}_h em (5.2.7) pela sua correspondente aproximação finita, temos

$$\left(\int_{\Omega} 2\mu \left(\left| \sum_{j=1}^{N_y} y_j D\phi_j \right| \right) \sum_{k=1}^{N_y} y_k D\phi_k : \nabla \phi_i dx \right)_{i=1 \dots N_y} = \mathbf{Q}(Y).$$

E o sistema (5.2.5) vem escrito na forma matricial

$$\begin{cases} \mathbf{Q}(Y) + \mathbf{G}(Y)Y + B^T P = F \\ BY = 0. \end{cases} \quad (5.2.8)$$

onde os elementos da matriz B são dados por $b_{ij} = \int_{\Omega} \psi_i \operatorname{div} \phi_j dx$, $i = 1, \dots, N_p$, $j = 1, \dots, N_u$. Para discretizar a função custo (5.1.6), usamos novamente as funções base do Método dos Elementos Finitos. Assumindo que a malha de Ω está fixa, referimo-nos às funções de base associadas aos nós em Ω_{part} como $(\phi_i)_{i=1 \dots N_o}$ e para os nós de Γ_{in} como $(\phi_k)_{k=1 \dots N_u}$. A aproximação finita da função controlo é portanto definida por

$$\mathbf{u}_h = \sum_{j=1}^{N_u} u_j \phi_j.$$

Para discretizarmos o primeiro termo substituímos \mathbf{y} e \mathbf{y}_d pelas respectivas aproximações finitas \mathbf{y}_h e \mathbf{y}_{h_d} onde

$$\mathbf{y}_{h_d} = \sum_{i=1}^{N_0} y_{d_i} \phi_i.$$

Obtemos assim

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_{part}} \left| \sum_i^{N_0} (y_i - y_{d_i}) \phi_i \right|^2 dx \\ &= \int_{\Omega_{part}} \left\langle \sum_i^{N_0} (y_i - y_{d_i}) \phi_i, \sum_j^{N_0} (y_j - y_{d_j}) \phi_j \right\rangle dx \\ &= \int_{\Omega_{part}} \sum_i^{N_0} (y_i - y_{d_i}) \sum_j^{N_0} (y_j - y_{d_j}) \langle \phi_i, \phi_j \rangle dx \\ &= \sum_i^{N_0} (y_i - y_{d_i}) \sum_j^{N_0} (y_j - y_{d_j}) \int_{\Omega_{part}} \langle \phi_i, \phi_j \rangle dx \\ &= (Y - Y_d)^T \mathbf{M} (Y - Y_d) = \langle (Y - Y_d), \mathbf{M} (Y - Y_d) \rangle \\ &= (Y - Y_d, Y - Y_d)_M = \|Y - Y_d\|_{N_y}^2 \end{aligned} \tag{5.2.9}$$

onde $\|\cdot\|_{N_y}$ é a norma induzida pelo produto interno $(\cdot, \cdot)_M$, $Y_d \in \mathbb{R}^{N_y}$ é um vector constituído pelos elementos y_{d_i} nas componentes correspondentes aos nós das observações e zero nas restantes. A matriz \mathbf{M} , de dimensão $N_y \times N_y$, é nula em todo o lado, excepto nos elementos

$$m_{ij} = \int_{\Omega_{part}} \phi_i \phi_j dx$$

nas posições correspondentes aos nós das observações. Vejamos agora o termo relacionado com o WSS. Tomando (5.1.5) em consideração e fazendo

$$\mathbf{w} = 2\mu(|D\mathbf{y}|) D\mathbf{y} \mathbf{n} - [2\mu(|D\mathbf{y}|)(D\mathbf{y} \mathbf{n}) \cdot \mathbf{n}] \mathbf{n}$$

temos

$$w = \sqrt{\langle \mathbf{w}, \mathbf{w} \rangle}.$$

em que w é a magnitude do vector do WSS. Uma vez que w é avaliada na fronteira de aderência (Γ_{wall}), Dy deve ser aproximado por uma expressão $D(Y)$ dependente dos elementos da vizinhança onde a velocidade não se anula. Tal expressão pode ser obtida usando diferenças finitas ou usando uma média desses valores (consultar [71]). Então, para aproximar w por w_h podemos escrever

$$w_h(Y) = \sqrt{\langle \mathbf{w}_h(Y), \mathbf{w}_h(Y) \rangle}.$$

onde

$$\mathbf{w}_h(Y) = 2\mu(D(Y))(D(Y)\mathbf{n} - (D(Y)\mathbf{n} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}).$$

Procedendo de forma semelhante para os valores observados de WSS, w_d , podemos aproximar

$$\int_{\Gamma_{wall}} |w - w_d|^2 ds$$

por

$$\int_{\Gamma_{wall}} |w_h - w_{hd}|^2 ds = \mathbf{W}(Y) \quad (5.2.10)$$

onde \mathbf{W} , obtido por uma quadratura de Gauss, depende de Y de forma não linear. Finalmente, para o termo regularizador temos

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma_{in}} \left| \sum_i^{N_u} u_i \nabla \phi_i \right|^2 ds \\ &= \int_{\Gamma_{in}} \left\langle \sum_i^{N_u} u_i \nabla \phi_i, \sum_j^{N_u} u_j \nabla \phi_j \right\rangle ds \\ &= \sum_i^{N_u} u_i \sum_j^{N_u} u_j \int_{\Gamma_{in}} \nabla \phi_i : \nabla \phi_j ds \\ &= U^T \mathbf{A} U = \langle U, \mathbf{A} U \rangle = (U, U)_A = \|U\|_{N_u}^2 \end{aligned}$$

onde $\|\cdot\|_{N_u}$ é a norma induzida pelo produto interno $(\cdot, \cdot)_A$ e \mathbf{A} é uma matriz simétrica $N_u \times N_u$ com elementos dados por

$$a_{ij} = \int_{\Gamma_{in}} \nabla \phi_i : \nabla \phi_j ds.$$

Tendo em consideração (5.2.8), (5.2.9), (5.2.10) e (5.2.11), a forma discreta do problema de controlo (5.1.6 - 5.1.7) é dada por

$$\min J(Y, U) = w_1 \|Y - Y_d\|_{N_y}^2 + w_2 \mathbf{W}(Y) + w_3 \|U\|_{N_u}^2 \quad (5.2.11)$$

sujeito às restrições

$$\begin{cases} \mathbf{Q}(Y) + \mathbf{G}(Y)Y + B^T P = F. \\ BY = 0. \end{cases} \quad (5.2.12)$$

O vector $Y = (Y_u, U)$ inclui os coeficientes da velocidade controlada, U , e os não controlados representados por $Y_u = Y_u(U)$.

5.2.1 Programação Quadrática Sequencial (SQP)

O problema de programação matemática (5.2.11 - 5.2.12) é um problema não linear com respeito à função de custo e às restrições. Para resolver este problema usamos uma abordagem particular da Programação Quadrática Sequencial (SQP) implementada no pacote *Sparse Nonlinear Optimization* (SNOPT) que vamos descrever brevemente (consultar [56, 72]). O primeiro passo consiste em aproximar o problema não linear por um problema de programação quadrática (QP). As restrições da aproximação correspondem a uma linearização de (5.2.12) e o custo quadrático é uma aproximação de 2ª ordem à função lagrangeana modificada associada a (5.2.11 - 5.2.12). A matriz hessiana é substituída por uma aproximação de quasi-Newton obtida por actualização de BFGS. O segundo passo consiste em resolver o problema (QP), através do método iterativo de redução da hessiana implementado em SQOPT (ver [57]). A solução da aproximação (QP) é usada para calcular a direcção de descida para o problema (5.2.11 - 5.2.12). Um método de minimização em linha é então executado para encontrar a nova solução para o problema não linear.

O ponto forte desta abordagem está no facto de ter sido testada em larga escala para problemas de optimização não lineares acima das 40000 variáveis (consultar [56]).

5.3 Resultados Numéricos

Como dados conhecidos y_d e w_d usámos dados sintéticos gerados numericamente. Para o efeito, considerámos artérias bidimensionais com estenoses (ver Figura 5.1) com comprimento $L = 10R$, diâmetro máximo $D = 2R$ e diâmetro mínimo $d = R$, onde $R = 3.1mm$, de acordo com medidas fisiológicas ([62]). Para a viscosidade considerámos o modelo de Cross generalizado (ver Tabela 4.1) com os parâmetros lá indicados e com as condições de fronteira definidas em (5.1.7). A massa específica do sangue é dada pela constante $\rho = 1050 kg/m^3$.

Para construir os domínios considerados e implementar o Método dos Elementos Finitos usámos o programa COMSOL Multiphysics ([73]). Usando as opções disponíveis para o fluxo laminar, construímos uma malha composta por 3398 elementos triangulares e quadrilaterais com 15986 graus de liberdade (DOFS) para a velocidade. Os elementos quadrilaterais foram usados para refinar a malha ao longo das fronteiras de aderência do fluido, as regiões das camadas limite. A qualidade mínima registada para os elementos da malha foi de 0.2628 e a média de 0.8262, onde o mínimo é 0 e corresponde a um elemento degenerado e o máximo é 1 e corresponde a um elemento completamente simétrico (ver [70]). O modelo foi resolvido impondo o perfil de Poiseuille para a velocidade na fronteira de entrada com uma velocidade máxima de $U_0 = 0.0993 m/s$, o que corresponde a um número médio de Reynolds de 120. O problema não linear foi resolvido pelo método de Newton, onde cada sistema linear resultante foi resolvido com o PARDISO. Usámos o método de *nested dissection*, como algoritmo de pré- ordem, para minimizar os elementos iguais a zero depois da factorização. Todos estes métodos estão disponíveis no COMSOL Multiphysics.

Na Figura 5.2 representamos a magnitude da velocidade obtida da forma descrita acima através da resolução do problema directo, correspondente aos dados do problema, onde se evidencia uma zona de recirculação do fluxo que surge a seguir ao estreitamento representada a branco. Comparamos com o caso Newtoniano onde tomámos a viscosidade igual a μ_∞ . Os resultados são consistentes com [62] mesmo considerando que as estenoses não são exactamente iguais.

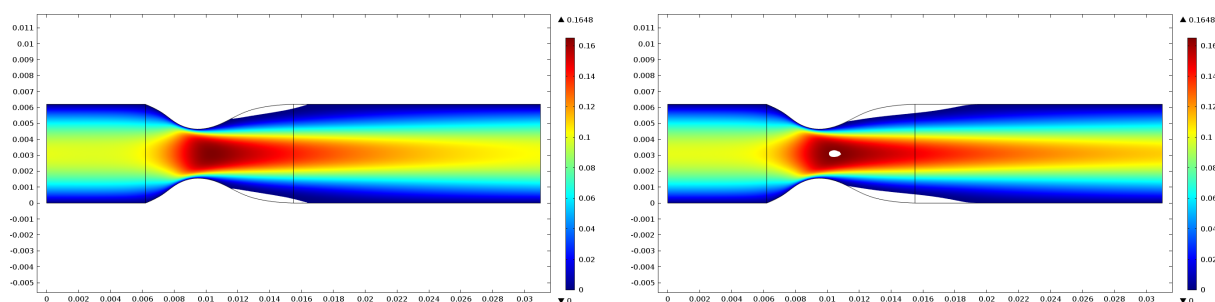


Figura 5.2: Magnitude do campo de velocidades evidenciando a região de recirculação. À esquerda: caso não-Newtoniano; à direita: caso Newtoniano.

A Figura 5.3 representa a magnitude do WSS correspondente aos dados do problema para o caso não-Newtoniano. Podemos observar um grande crescimento da magnitude na área da obstrução parcial do fluxo, quando comparamos com a parte restante.

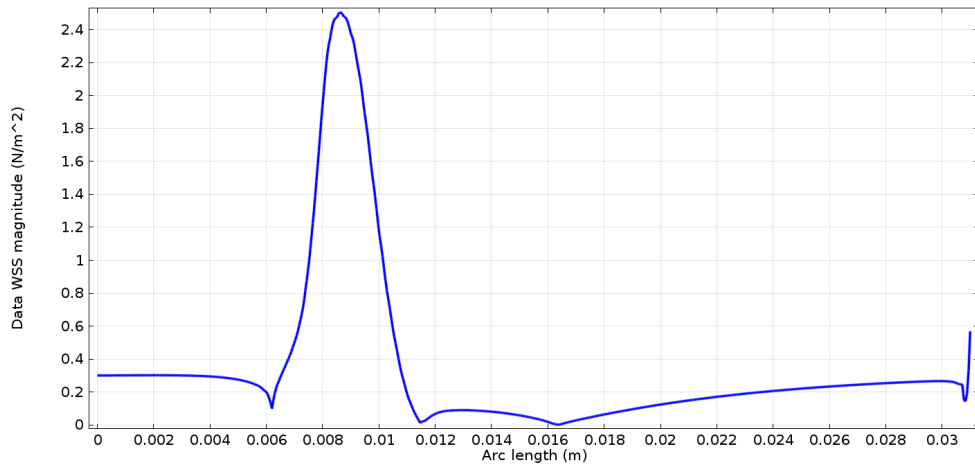


Figura 5.3: Magnitude do WSS obtida através da resolução do problema directo.

5.3.1 Escolha dos parâmetros e validação

A função custo (5.1.6) tem um papel importante no desempenho do método DA. Este depende da região onde observamos os dados Ω_{part} e dos parâmetros que ponderam os termos do integral (w_1, w_2, w_3). A escolha correcta do domínio dos dados é uma questão importante [25, 46] e foi estudada para as equações de Navier-Stokes, discretas e linearizadas em [43], onde se considerou Ω_{part} como um número finito de pontos. Este não é o nosso objectivo aqui, e assumimos que $\mathbf{y}_d = \mathbf{y}_d(x, y)$ é completamente determinado sobre Ω_{part} , que corresponde às linhas verticais representadas na Figura 5.1. A nossa preocupação será com a escolha correcta dos parâmetros para a função custo.

É clássico que um equilíbrio dos termos num custo do tipo quadrático ($w_2 = 0$) pode ser tratado pelas técnicas de regularização de Tikhonov (ver algumas aplicações em [43]). Mas, tanto quanto sabemos, tais técnicas podem não ser de fácil aplicação para um custo não linear do tipo (5.2.11). Portanto, apresentamos um estudo numérico heurístico para investigar o conjunto de parâmetros (w_1, w_2, w_3) que fornecem uma melhor aproximação aos dados, incluindo a velocidade, o WSS, através da variável de controlo óptimo imposta como perfil da velocidade na fronteira de entrada do fluido.

A fim de resolvermos o problema do tipo (5.2.11 - 5.2.12) usamos o método SQP implementado no SNOPT, como foi resumidamente descrito na Secção 5.2.1. Para calcular o gradiente da função custo com respeito às variáveis de controlo usámos o método adjunto ([71]). A tolerância optimal determina a precisão da aproximação das condições de optimalidade de 1ª ordem ([56, 57]). Assim, a última iteração é considerada óptima se verifica as condições de optimalidade a menos de uma determinada precisão, dada pela tolerância optimal. Neste caso fixámos a tolerância optimal em 10^{-6} . Para o QP solver, impusémos que o factor de Cholesky da hessiana reduzida deve ser mantido. Os problemas de controlo foram resolvidos usando a malha descrita acima com 37 DOFS para a variável de controlo imposta na

fronteira de entrada.

Podemos ver os resultados quantitativos nas Tabelas 5.1, 5.2 e 5.3 onde fazemos $Y = \mathbf{y} - \mathbf{y}_d$ e $W = w - w_d$ e CF representa o valor do custo no final do processo iterativo. Podemos verificar que se obtém melhores aproximações para a velocidade e para o WSS quando todos os parâmetros são não nulos.

Tabela 5.1: Valores obtidos para os termos da função custo fixando w_2 e w_3 e variando w_1 .

Parâmetros	$\int_{\Omega_{part}} Y ^2$	$\int_{\Gamma_{wall}} W ^2$	$\int_{\Gamma_{in}} \nabla \mathbf{u} ^2$	CF
$(0, 10^6, 10^{-3})$	4.152000×10^{-7}	1.838053×10^{-13}	8.190109	0.0081902934
$(10^5, 10^6, 10^{-3})$	2.049161×10^{-11}	2.284326×10^{-16}	8.477968	0.0084800177
$(10^6, 10^6, 10^{-3})$	2.196835×10^{-13}	6.982916×10^{-18}	8.481701	0.0084819206
$(10^7, 10^6, 10^{-3})$	2.225967×10^{-15}	1.029709×10^{-19}	8.482097	0.0084821196

Tabela 5.2: Valores obtidos para os termos da função custo fixando w_1 e w_3 e variando w_2 .

Parâmetros	$\int_{\Omega_{part}} Y ^2$	$\int_{\Gamma_{wall}} W ^2$	$\int_{\Gamma_{in}} \nabla \mathbf{u} ^2$	CF
$(10^6, 0, 10^{-3})$	2.229353×10^{-13}	4.493504×10^{-13}	8.481696	0.0084819189
$(10^6, 10^5, 10^{-3})$	2.198003×10^{-13}	6.444382×10^{-16}	8.481701	0.0084819206
$(10^6, 10^7, 10^{-3})$	2.196719×10^{-13}	7.027137×10^{-20}	8.481701	0.0084819206

Tabela 5.3: Valores obtidos para os termos da função custo fixando w_1 e w_2 e variando w_3 .

Parâmetros	$\int_{\Omega_{part}} Y ^2$	$\int_{\Gamma_{wall}} W ^2$	$\int_{\Gamma_{in}} \nabla \mathbf{u} ^2$	CF
$(10^6, 10^6, 10^{-5})$	7.794634×10^{-14}	1.479646×10^{-16}	8.529495	$8.53730414 \times 10^{-5}$
$(10^6, 10^6, 10^{-4})$	2.224927×10^{-15}	1.898105×10^{-21}	8.482097	$8.48211969 \times 10^{-4}$
$(10^6, 10^6, 10^{-2})$	2.052022×10^{-11}	2.194004×10^{-14}	8.477961	0.0848001567
$(10^6, 10^6, 10^{-1})$	1.727427×10^{-9}	2.725338×10^{-11}	8.445729	0.8463276594
$(10^6, 10^6, 0)$	6.029549×10^{-14}	9.237606×10^{-17}	171.890855	$6.03878696 \times 10^{-8}$
$(10^6, 10^6, 10^1)$	4.600914×10^{-6}	3.811922×10^{-6}	6.645082	74.863651813

Na Tabela 5.1 podemos também observar, como esperado, que se obtém melhores resultados para a velocidade e para o WSS à medida que w_1 vai crescendo. Tal crescimento requer um número de iterações do SNOPT também crescente para resolver o sistema (5.2.11 - 5.2.12). Por essa razão, apresentamos apenas os resultados para os casos com menos de 400 iterações. Se considerarmos $w_1 = 0$ na função custo, obtém-se os piores resultados na aproximação da velocidade e um dos piores na aproximação do WSS. Mantendo w_1 e w_3 e aumentando w_2 , na Tabela 5.2, podemos observar melhores resultados para o WSS e para a velocidade, embora com menos expressividade para esta última. Concluimos que a existência do termo $\int_{\Omega_{part}} |\mathbf{y} - \mathbf{y}_d|^2$ é crucial para obtermos boas aproximações para a velocidade e WSS. Os resultados são ainda melhores se considerarmos o termo $\int_{\Gamma_{wall}} |w - w_d|^2$ na função custo, do que na sua ausência.

Consideremos agora o conhecido termo de regularização $\int_{\Gamma_{in}} |\nabla \mathbf{u}|^2$. É evidente que, observando a Tabela 5.3, o valor da função custo é altamente afectado por este termo, como podemos ver quando alteramos o valor de w_3 mantendo w_1 e w_2 . Podemos também observar que, se $w_3 = 0$ obtemos boas aproximações para a velocidade e WSS, uma vez que o processo de minimização apenas tem em consideração estes dois factores. No entanto, a ausência deste termo pode induzir a um falso mínimo (ver [25, 46]). É esse o caso aqui, como confirma a Figura 5.5 à direita. O controlo óptimo para $w_3 = 0$ é altamente irregular e bastante afastado do perfil parabólico pretendido. Assim, embora corresponda a um mínimo para o problema de controlo discreto, ele não representa uma função de controlo admissível para o nosso problema DA.

Observando as três tabelas, podemos concluir que, tendo em conta os testes efectuados (menos de 400 iterações do SNOPT no total), o conjunto de parâmetros que corresponde a melhores aproximações é $(10^7, 10^7, 10^{-3})$. Contudo, ainda assim precisamos de 381 iterações para encontrar a solução optimal, o que corresponde a um tempo computacional considerável. Para definir um equilíbrio razoável entre

precisão e esforço computacional, e uma vez que os parâmetros

$$(w_1, w_2, w_3) = (10^6, 10^6, 10^{-3}) \quad (5.3.1)$$

também conduzem a boas aproximações, com 281 iterações para o processo de minimização, definimos este como a nossa escolha referência para o problema DA. Portanto, no que segue, iremos focar-nos em mostrar como com o conjunto de parâmetros (5.3.1) se obtém melhores resultados do que nos casos limites, isto é, quando um dos parâmetros é zero. Este é o objectivo das figuras 5.4 e 5.5 que representam o controlo óptimo obtido em comparação com o perfil da velocidade na fronteira de entrada usado para gerar \mathbf{y}_d .

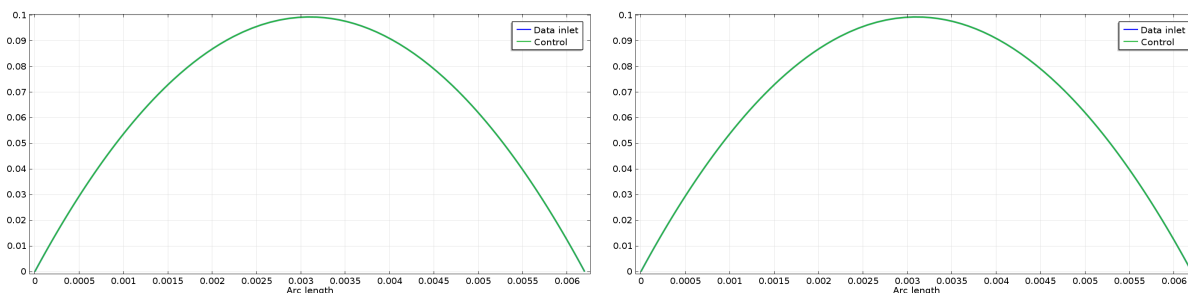


Figura 5.4: À esquerda: controlo para $(10^6, 10^6, 10^{-3})$; à direita: controlo para $(10^6, 0, 10^{-3})$.

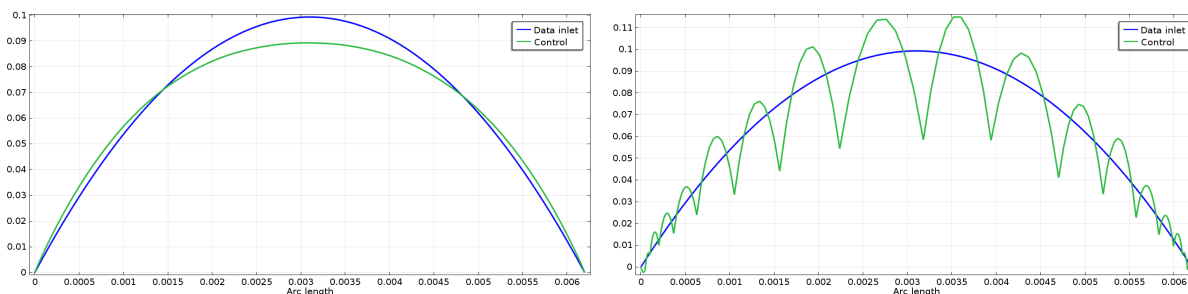


Figura 5.5: À esquerda: controlo para $(0, 10^6, 10^{-3})$; à direita: controlo para $(10^6, 10^6, 0)$.

Para comparar o efeito das diferentes escolhas de parâmetros, não apenas na minimização de cada termo da função custo, mas também na qualidade da aproximação da velocidade, reportamos na Tabela 5.4 os erros relativos e absolutos dados por

$$R_e = \frac{\|\mathbf{y} - \mathbf{y}_d\|_2}{\|\mathbf{y}_d\|_2} \quad \text{e} \quad A_e = \|\mathbf{y} - \mathbf{y}_d\|_2,$$

onde $\|\cdot\|_2$ é a norma em \mathbf{L}^2 .

Para concluir, podemos facilmente confirmar que a função custo a que correspondem os piores resultados

Tabela 5.4: Erros relativos e absolutos calculados em Ω_{part} .

Erros	$(0, 10^6, 10^{-3})$	$(10^6, 10^6, 10^{-3})$	$(10^6, 0, 10^{-3})$	$(1e^6, 1e^6, 0)$
R_e	0.037254	2.709809×10^{-5}	2.729791×10^{-5}	1.419653×10^{-5}
A_e	6.443602×10^{-4}	4.687041×10^{-7}	4.721603×10^{-7}	2.455514×10^{-7}

é, de facto, aquela em que o termo da velocidade não está presente e que é preferível considerar o termo do WSS em vez de o preterir.

Resolver o problema de controlo com (5.3.1) é a nossa melhor opção tendo em conta um certo limite para o esforço computacional. Como ilustração, representamos nas figuras 5.6 - 5.10, a velocidade, pressão e a magnitude do WSS correspondente à solução optimal e comparamo-las com a solução obtida quando gerámos os dados y_d e w_d .

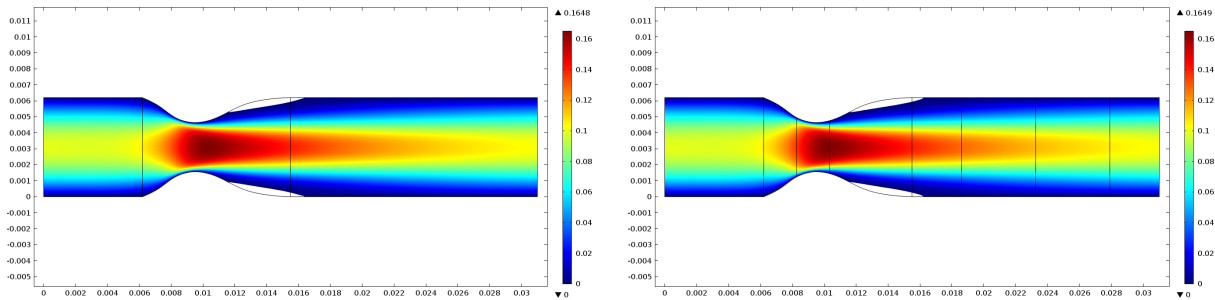


Figura 5.6: Magnitude do campo de velocidades evidenciando a zona de recirculação. À esquerda: problema directo (dados do problema); à direita: problema controlado.

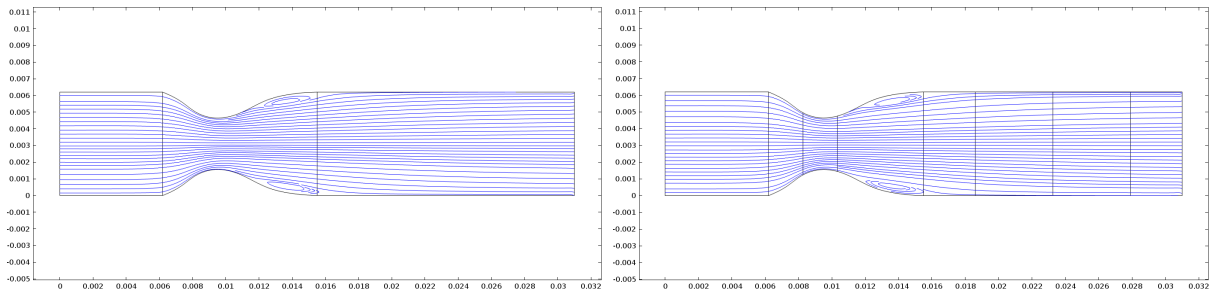


Figura 5.7: Linhas de corrente do campo de velocidades. À esquerda: problema directo; à direita: problema controlado.

5.3. Resultados Numéricos

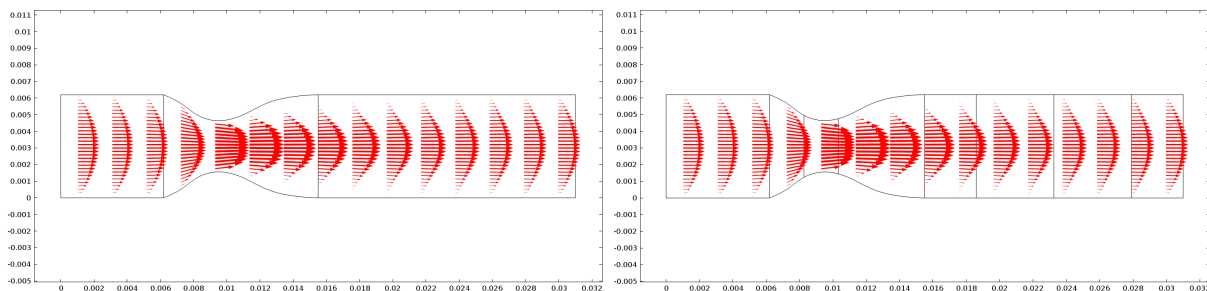


Figura 5.8: Perfil do campo de velocidades. À esquerda: problema directo; à direita: problema controlado.

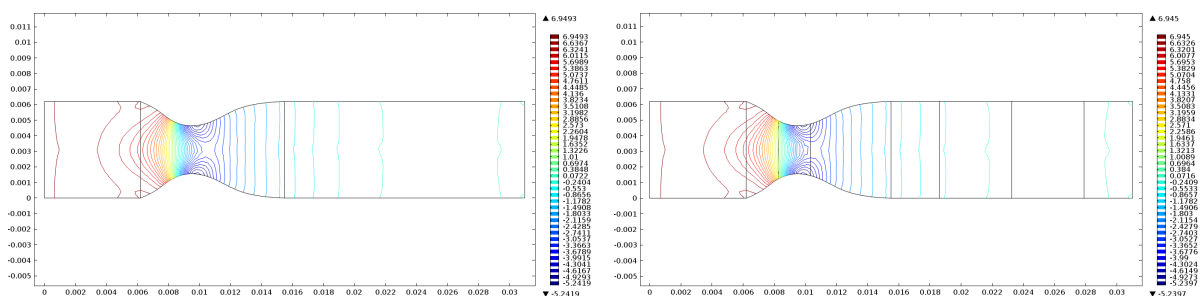


Figura 5.9: Superfícies de nível da pressão. À esquerda: problema directo; à direita: problema controlado.

A Figura 5.10 representa a magnitude do WSS e podemos observar uma correspondência perfeita entre os dados da magnitude do WSS e a magnitude do WSS controlado. Como esperado, observa-se um valor mais alto na área da obstrução parcial do fluido quando comparado com o restante. Podemos concluir que, graficamente, a solução original foi perfeitamente reconstruída a partir dos dados observados em Ω_{part} .

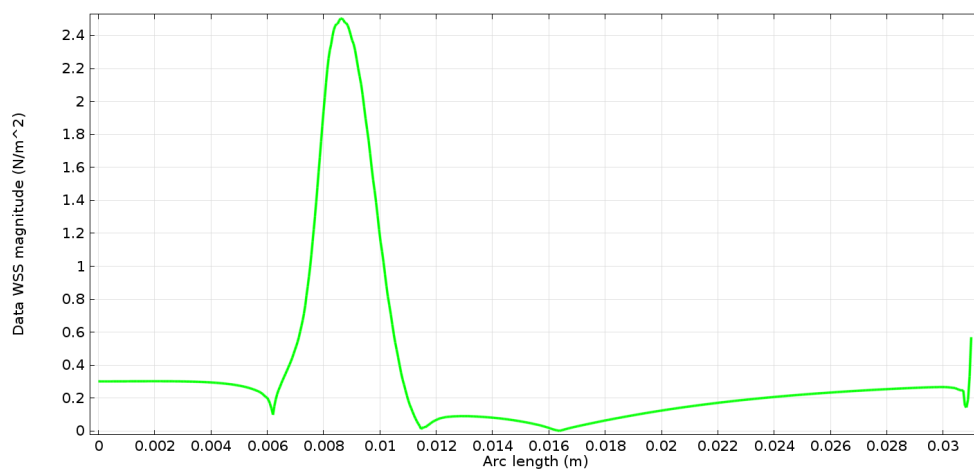


Figura 5.10: Magnitude do WSS obtida com o problema controlado.

5.3.2 Robustez dos parâmetros

Nesta secção mostramos a robustez dos parâmetros propostos no problema DA, dados por (5.3.1), com respeito à imposição de diferentes perfis de entrada do campo de velocidades e com respeito a diferentes tipos de estenoses.

Robustez do perfil de entrada

Gerámos dados para o problema usando diferentes Leis de Potência impostas na fronteira de entrada (ver [6]) dadas por

$$\frac{\xi + 2}{\xi} U_1 \left(1 - \left(\frac{x_1 - R}{R} \right)^\xi \right). \quad (5.3.2)$$

Note-se que, para $\xi = 2$, a expressão (5.3.2) corresponde ao caso particular do fluxo de Poiseuille. Nas nossas simulações considerámos $\xi = 4$ e $\xi = 9$ cujos perfis estão representados na Figura 5.11, à esquerda para $\xi = 4$ e à direita para $\xi = 9$. A constante U_1 foi escolhida de modo a manter o número de Reynolds igual a 120, de acordo com os testes feitos anteriormente. Testámos o caso $\xi = 9$ uma vez que é comum nas simulações do fluxo sanguíneo em artérias [5], e $\xi = 4$ por ser um valor intermédio entre 2 e 9.

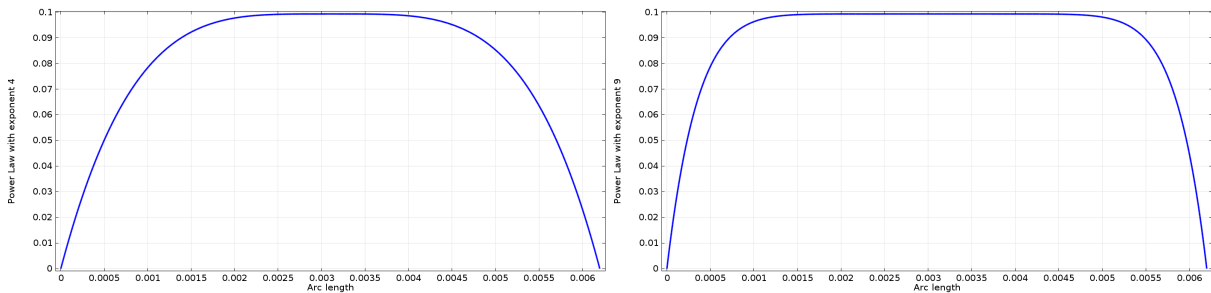


Figura 5.11: Diferentes Leis de Potência com expoente 4 (à esquerda) e expoente 9 (à direita) como perfis de entrada para o campo de velocidades.

Como na secção anterior, comparamos os testes feitos com os parâmetros (5.3.1) com os casos limite. Os resultados quantitativos estão nas tabelas 5.5 e 5.6. Conclusões similares podem ser inferidas a partir de ambos os perfis. A importância do termo do WSS na função custo é mais expressiva nestes dois casos, relativamente ao perfil parabólico ($\xi = 2$). Confirmemos estas conclusões nas tabelas 5.7 e 5.8 onde comparamos os erros relativos e absolutos dos dois perfis.

Tabela 5.5: Resultados obtidos usando como perfil de entrada a Lei de Potência com expoente igual a 4.

$\xi = 4$	$\int_{\Omega_{part}} Y ^2$	$\int_{\Gamma_{wall}} W ^2$	$\int_{\Gamma_{in}} \nabla \mathbf{u} ^2$	CF
$(0, 10^6, 10^{-3})$	1.017793×10^{-6}	2.595413×10^{-13}	13.747798	0.0137480578
$(10^6, 10^6, 10^{-3})$	2.083886×10^{-12}	1.033918×10^{-12}	14.513515	0.0145166331
$(10^6, 0, 10^{-3})$	7.946703×10^{-11}	7.098585×10^{-8}	14.168067	0.0142475338
$(10^6, 10^6, 0)$	6.535708×10^{-12}	1.204306×10^{-11}	392.3837	$1.8578771535 \times 10^{-5}$

Tabela 5.6: Resultados obtidos usando como perfil de entrada a Lei de Potência com expoente igual a 9.

$\xi = 9$	$\int_{\Omega_{part}} Y ^2$	$\int_{\Gamma_{wall}} W ^2$	$\int_{\Gamma_{in}} \nabla \mathbf{u} ^2$	CF
$(0, 10^6, 10^{-3})$	1.001349×10^{-5}	3.259272×10^{-13}	20.106642	0.020106968
$(10^6, 10^6, 10^{-3})$	7.801032×10^{-11}	2.094571×10^{-11}	29.855718	0.0299546736
$(10^6, 0, 10^{-3})$	7.960777×10^{-10}	1.294974×10^{-6}	24.151194	0.0249472714
$(10^6, 10^6, 0)$	1.582331×10^{-15}	7.475844×10^{-22}	565.871393	1.582331×10^{-9}

Tabela 5.7: Erros absolutos e relativos calculados em Ω_{part} para a Lei de Potência com expoente 4.

$\xi = 4$	$(0, 10^6, 10^{-3})$	$(10^6, 10^6, 10^{-3})$	$(10^6, 0, 10^{-3})$	$(10^6, 10^6, 0)$
R_e	0.048416	6.927796×10^{-5}	4.278107×10^{-4}	1.226887×10^{-4}
A_e	0.001009	1.443567×10^{-6}	8.914428×10^{-6}	2.556503×10^{-6}

Tabela 5.8: Erros absolutos e relativos calculados em Ω_{part} para a Lei de Potência com expoente 9.

$\xi = 9$	$(0, 10^6, 10^{-3})$	$(10^6, 10^6, 10^{-3})$	$(10^6, 0, 10^{-3})$	$(10^6, 10^6, 0)$
R_e	0.134635	3.757856×10^{-4}	0.0012	1.692438×10^{-6}
A_e	0.003164	8.832345×10^{-6}	2.821485×10^{-5}	3.977852×10^{-8}

Por outro lado, no que se refere ao ajuste do controlo ao perfil de entrada para a velocidade considerado, a única função custo cujo controlo tem um ajuste perfeito ao perfil de entrada é precisamente aquele cujos parâmetros são definidos por (5.3.1). Observamos também que o ajustamento do controlo tem menor precisão no caso $\xi = 9$. As figuras 5.12, 5.13, 5.14 e 5.15 ilustram estas conclusões.

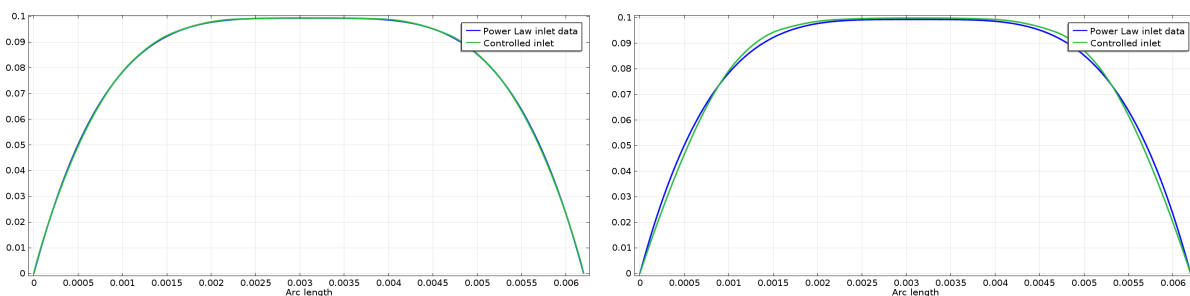


Figura 5.12: Lei da Potência com expoente 4. Esquerda: $(10^6, 10^6, 10^{-3})$; direita: $(10^6, 0, 10^{-3})$.

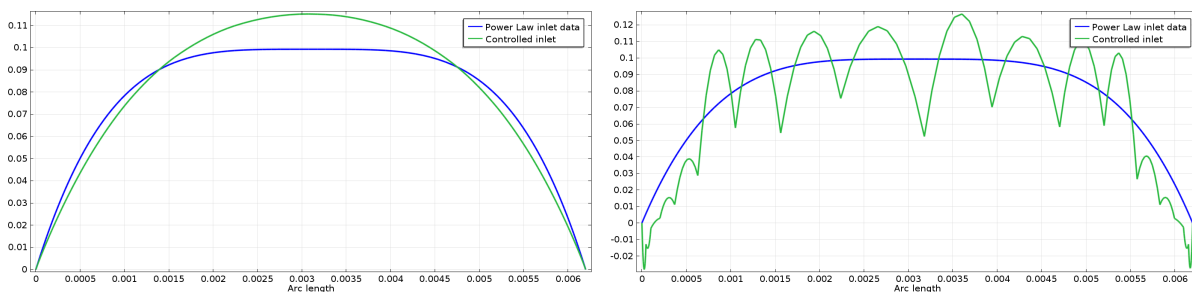


Figura 5.13: Lei da Potência com expoente 4. Esquerda: $(0, 10^6, 10^{-3})$; direita $(10^6, 10^6, 0)$.

5.3. Resultados Numéricos

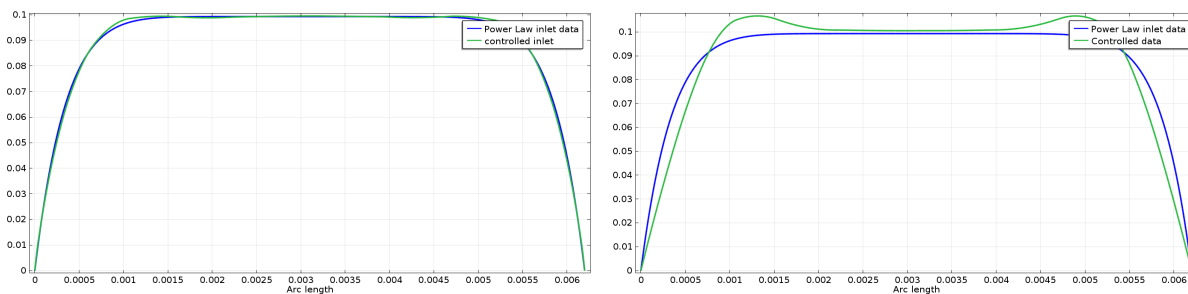


Figura 5.14: Lei da Potência com expoente 9. Esquerda: $(10^6, 10^6, 10^{-3})$; direita: $(10^6, 0, 10^{-3})$.

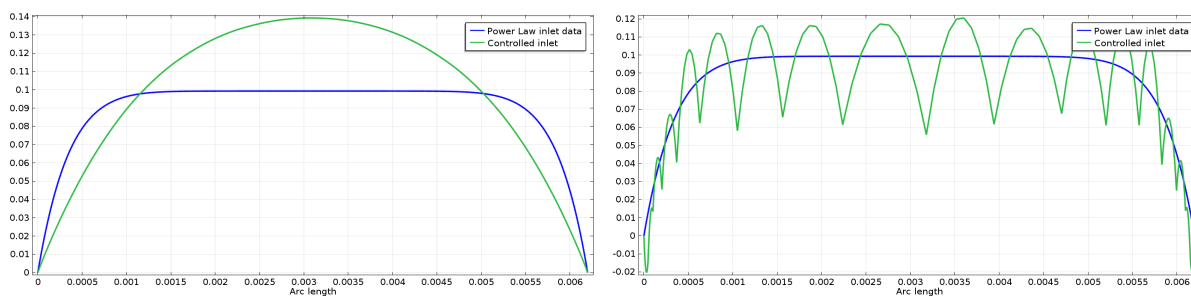


Figura 5.15: Lei da Potência com expoente 9. Esquerda: $(0, 10^6, 10^{-3})$; direita: $(10^6, 10^6, 0)$.

Finalmente, na Tabela 5.9 efectuamos a comparação entre os erros relativos e absolutos dos diferentes perfis de entrada obtidos para (5.3.1) calculados em Ω_{part} . O problema de DA proposto, resolvido com qualquer dos perfis de entrada apresentados, conduz a boas aproximações para o campo de velocidades. Todavia, quanto mais perto estivermos do perfil parabólico, mais pequenos são os erros calculados.

Tabela 5.9: Erros relativos e absolutos calculados para os diferentes perfis de entrada.

Erros	Poiseuille	Lei de Potência $\xi = 4$	Lei de Potência $\xi = 9$
R_e	2.709809×10^{-5}	6.927796×10^{-5}	3.757856×10^{-4}
A_e	4.687041×10^{-7}	1.443567×10^{-6}	8.832345×10^{-6}

Robustez relativamente à alteração da geometria

Nesta subsecção comparamos as soluções do problema de controlo obtidas para o funcional de custo com (5.3.1) em quatro geometrias: três estenoses com diferentes níveis de estreitamento e um canal rectilíneo. As quatro geometrias consideradas são as que estão representadas na Figura 5.16. Recordemos que as medidas dos diâmetros inferiores, d , dependem de $R = 3.1mm$. Para todas as geometrias, o comprimento é de $L = 10R$ e o diâmetro máximo de $D = 2R$.

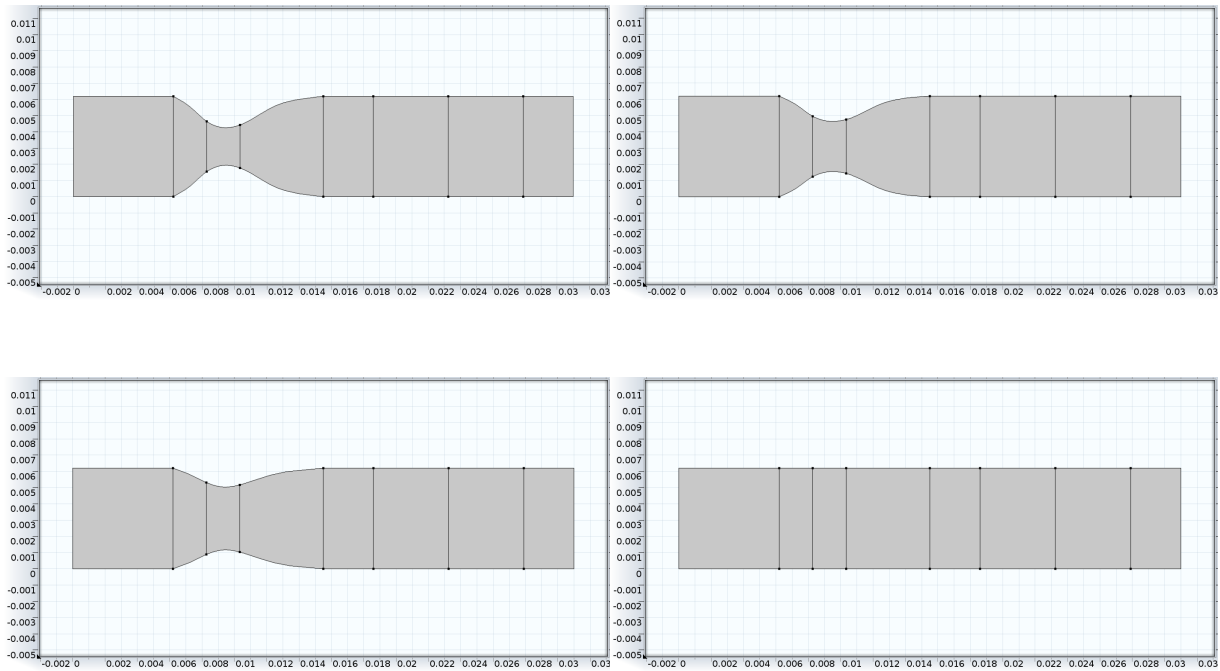


Figura 5.16: Canto superior esquerdo: estenose com $d = 3R/4$; canto superior direito: estenose com $d = R$; canto inferior esquerdo: estenose com $d = 5R/4$; canto inferior direito: canal. DOFS: 100000 aproximadamente.

Pretendemos mostrar que a nossa escolha de parâmetros dada por (5.3.1) obtida na Secção 5.3.1 é robusta com respeito a alterações da geometria. De facto, mudando a geometria, observamos que as soluções numéricas para o problema de controlo óptimo ainda se conseguem obter e que as aproximações à velocidade, WSS e pressão originais são muito boas. A Tabela 5.10 mostra a ordem das aproximações para os diferentes termos do custo, e também para a pressão. Os erros absolutos e relativos calculados em Ω_{part} são também apresentados.

Tabela 5.10: Comparação dos resultados obtidos nas três diferentes estenoses e no canal.

	$3R/4$	R	$5R/4$	Canal
$\int_{\Omega_{part}} \mathbf{y} - \mathbf{y}_d ^2$	6.708702×10^{-12}	9.949255×10^{-14}	1.191667×10^{-13}	1.432199×10^{-13}
$\int_{\Gamma_{wall}} w - w_d ^2$	1.440641×10^{-14}	4.622893×10^{-18}	5.574397×10^{-18}	1.055882×10^{-17}
$\int_{\Gamma_{in}} \nabla \mathbf{y} ^2$	3.768463	3.769641	3.769602	3.769553
CF	0.0084819835	0.0084819208	0.0084818721	0.0084818125
$\int_{\Omega} \mathbf{y} - \mathbf{y}_d ^2$	3.697847×10^{-14}	5.305023×10^{-16}	6.444288×10^{-16}	8.120041×10^{-16}
R_e	2.068563×10^{-5}	2.709878×10^{-5}	3.19736×10^{-5}	3.803092×10^{-5}
A_e	3.960592×10^{-7}	4.687051×10^{-7}	5.176455×10^{-7}	5.703546×10^{-7}
$\int_{\Omega} p - p_d ^2$	1.453415×10^{-10}	8.469274×10^{-13}	3.768693×10^{-13}	4.116292×10^{-13}

5.3.3 Efeito da filtragem de ruído

Nesta secção estudamos o efeito do método DA proposto, na filtragem de ruído que pode vir adicionado aos dados \mathbf{y}_d . Em aplicações reais o ruído pode dever-se a diferentes razões, tais como a falta de precisão nos instrumentos através dos quais se registam os dados ou mesmo a erros intrínsecos dos modelos.

No que segue, as amostras de ruído foram geradas de forma aleatória, através de uma distribuição normal com média zero e desvio padrão igual a $\bar{\sigma}_1 = 0.05 \frac{U_0}{3}$, $\bar{\sigma}_2 = 0.1 \frac{U_0}{3}$ e $\bar{\sigma}_3 = 0.2 \frac{U_0}{3}$, respectivamente. Para os dados usámos a estenose de referência com raio e perfil de velocidade descrito na imagem da esquerda da Figura 5.2. A fronteira de entrada foi incluída nos dados conhecidos, ou seja, em Ω_{part} .

Para compreendermos o efeito de filtragem do sistema (5.2.11 - 5.2.12), comparámos a solução obtida com os parâmetros de referência (5.3.1) com a abordagem directa ao problema. Esta abordagem consiste em obter a solução numérica para o modelo não-Newtoniano (3.3.3), usando um perfil parabólico com ruído como condição de fronteira na entrada. Esta técnica pode ser vista como a técnica de filtragem menos exigente do ponto de vista computacional quando queremos recuperar a solução a jusante dos dados observados.

Observemos, contudo, que este método não pode ser usado se pretendemos reconstruir a solução a montante dos dados observados. Uma comparação semelhante foi feita em [40] para as equações de Navier-Stokes.

As diferenças das soluções obtidas usando ambos os métodos de filtragem de ruído, são apresentadas na Tabela 5.11. Como índice de precisão, calculámos à posteriori o erro relativo R_e e o erro absoluto A_e no domínio inteiro Ω .

As conclusões que obtivemos para os fluidos não-Newtonianos foram semelhantes às conclusões obtidas em [40] para o caso Newtoniano. A abordagem directa é computacionalmente muito menos exigente, embora a abordagem através da resolução do problema DA dê sempre origem a melhores resultados na aproximação das soluções. Observamos também, como era esperado, que a valores mais altos de ruído correspondem piores valores para R_e e A_e .

Na Figura 5.17 apresentamos uma comparação entre o perfil parabólico desejado para o problema e os resultados obtidos através da resolução directa (à esquerda) e da resolução do problema DA, na forma de problema controlado (à direita), ambos com ruído. É visível uma melhor correcção do ruído no caso do problema controlado.

Tabela 5.11: Comparação entre o problema controlado (CP) e o problema directo (DP) com diferentes ruídos adicionados. Os erros R_e e A_e foram calculados em todo o domínio.

Ruído	Tipo de problema	R_e	A_e
$\bar{\sigma} = 0.05 \frac{U_0}{3}$	CP	0.001968	2.193509×10^{-6}
	DP	0.004606	5.134504×10^{-6}
$\bar{\sigma} = 0.1 \frac{U_0}{3}$	CP	0.004974	5.545074×10^{-6}
	DP	0.009214	1.027040×10^{-5}
$\bar{\sigma} = 0.2 \frac{U_0}{3}$	CP	0.009164	1.021493×10^{-5}
	DP	0.018324	2.049306×10^{-5}

5.3. Resultados Numéricos

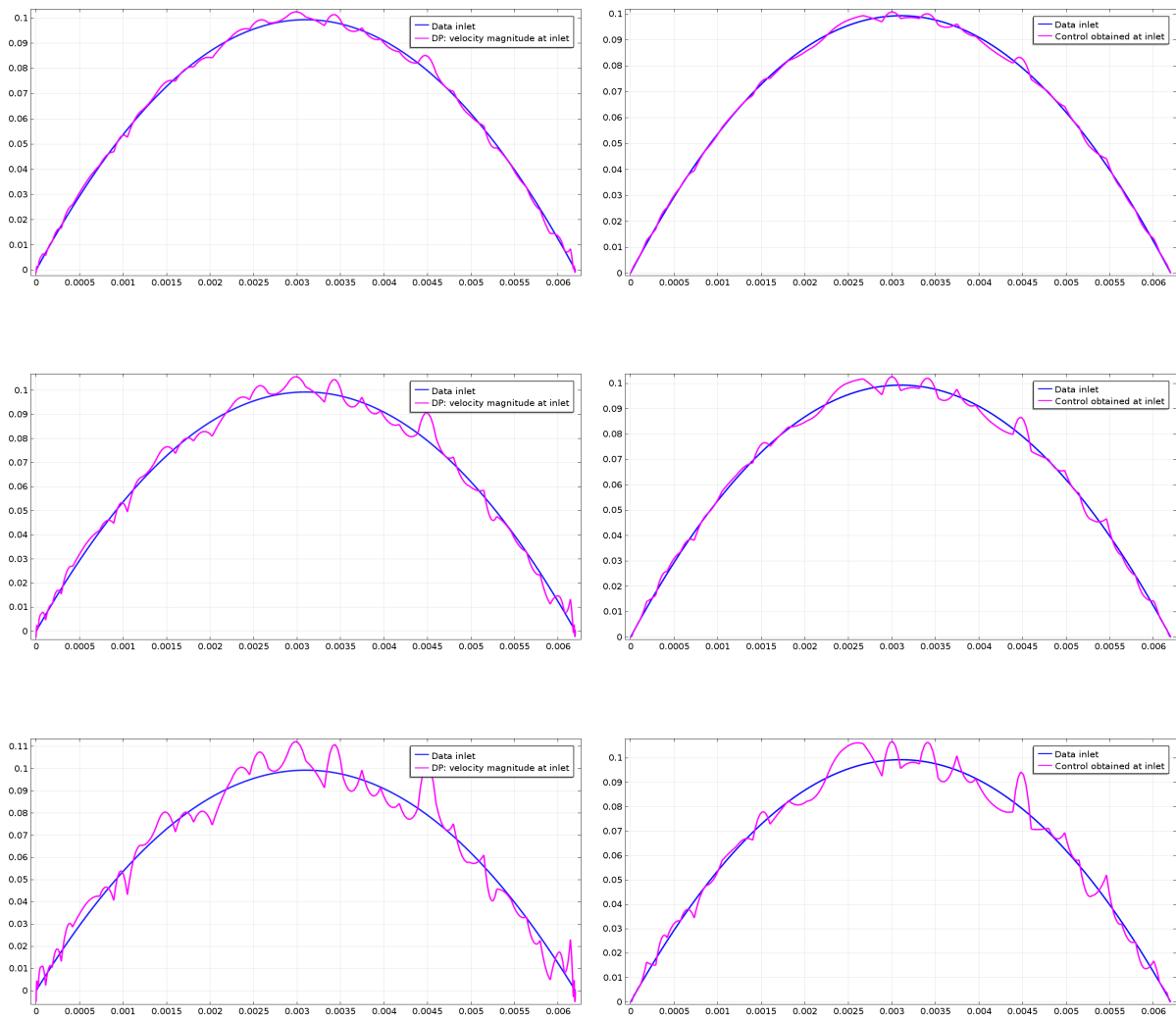


Figura 5.17: À esquerda: abordagem direta; à direita: resolução do problema DA.

Simulações de Problemas de Controlo Óptimo Aplicados à Hemodinâmica - Caso Tridimensional

As simulações numéricas de fluidos obtidas para geometrias tridimensionais estão mais próximas daquilo que é o seu comportamento no mundo físico real. Deste ponto de vista é importante desenhar geometrias com realismo adequadas ao fluido que pretendemos estudar ou, no caso de ser possível, usar geometrias reais que permitem uma maior precisão nos modelos simulados o que torna o estudo muito mais interessante do ponto de vista das aplicações.

Neste capítulo, por um lado, usamos geometrias tridimensionais idealizadas construídas com a forma de um cilindro e de um canal curvo e com a forma de uma artéria com estenose, à semelhança do que foi feito no Capítulo 5. Por outro lado, usamos uma geometria real reconstruída a partir de uma imagem médica, que consiste numa artéria cerebral contendo um aneurisma sacular desenvolvido.

Pretendemos validar o método DA apresentado no Capítulo 5 para diferentes geometrias tridimensionais. Usamos, à semelhança do que foi feito para o caso bidimensional, dados gerados através da resolução do problema directo. Descreveremos o problema que pretendemos resolver, isto é, o funcional que pretendemos minimizar, a equação de estado que as soluções devem verificar e as condições de fronteira impostas.

Dada a complexidade das geometrias tridimensionais, quer pelo próprio formato, quer pela discretização das variáveis e consequentemente pelo esforço computacional que a resolução deste tipo de problemas exige, optamos por, numa primeira abordagem, resolver uma classe de problemas mais simples considerando um controlo unidimensional. Explicaremos, na secção que se segue, este tipo de abordagem. No futuro, pretendemos resolver os mesmos problemas com o controlo em dimensão infinita. Aqui, apenas para o caso mais simples considerado, que é o cilindro, apresentamos também os resultados com o controlo em dimensão infinita.

Em todos os casos estudados, apresentamos os resultados obtidos através da resolução do problema de controlo no caso unidimensional, para o campo de velocidades e para a pressão e também a sua comparação com respeito aos valores obtidos no problema directo. Avaliamos os termos do funcional de custo, isto é, a diferença das velocidades calculada nas regiões correspondentes às observações e a diferença das magnitudes do WSS na superfície e calculamos os erros relativo e absoluto com respeito ao

campo de velocidades. No caso do canal curvo, da estenose e do aneurisma, são também apresentados os gráficos com respeito à magnitude do WSS. Como os valores do WSS alteram quando deformamos um canal, em regiões de curvas ou de estreitamento, por exemplo, são visíveis as diferenças de magnitude entre as várias regiões destas geometrias. Também nestes três casos, testamos diferentes perfis para o campo de velocidades na fronteira de entrada, cuja expressão é dada mais à frente por (6.2.1). E finalmente, de modo a não tornar o estudo demasiado exaustivo, apenas para o caso da estenose e do aneurisma, efectuamos um teste de parâmetros (w_1, w_2) do funcional de custo, comparando os casos em que $w_2 = 0$ e $w_2 = 10^6$, isto é, o caso em que consideramos a presença do WSS no funcional de custo, de acordo com o que foi proposto no Capítulo 5 em comparação com o caso em que não o consideramos, sendo o funcional de custo constituído apenas pelo termo dado por $\int_{\Omega_{part}} |\mathbf{y} - \mathbf{y}_d|^2$.

6.1 O Método "Assimilação de Dados" e discretização

Recordemos o problema que pretendemos estudar: obter soluções numéricas que, em algumas partes do domínio, Ω_{part} , são iguais aos dados observados a menos de um certo erro pré-definido. A técnica é a mesma que foi usada no Capítulo 5 e consiste na optimização de um determinado critério do nosso interesse - abordagem variacional. No Capítulo 5 o critério usado foi

$$\min J(\mathbf{y}, \mathbf{u}) = w_1 \int_{\Omega_{part}} |\mathbf{y} - \mathbf{y}_d|^2 dx + w_2 \int_{\Gamma_{wall}} |w - w_d|^2 dx + w_3 \int_{\Gamma_{in}} |\nabla \mathbf{u}|^2 dx, \quad (6.1.1)$$

sujeito às restrições

$$\left\{ \begin{array}{ll} -div \tau + \rho(\mathbf{y} \cdot \nabla) \mathbf{y} + \nabla p = \mathbf{f} & \text{em } \Omega \\ div \mathbf{y} = 0 & \text{em } \Omega \\ \mathbf{y} = 0 & \text{em } \Gamma_{wall} \\ \mathbf{y} = \mathbf{u} & \text{em } \Gamma_{in} \\ -\sigma \mathbf{n} = 0 & \text{em } \Gamma_{out} \end{array} \right. \quad (6.1.2)$$

onde as constantes w_1 , w_2 e w_3 são os parâmetros dos termos do funcional de custo, escolhidos preferencialmente de forma a que o problema esteja bem posto.

Numa primeira abordagem ao caso tridimensional, a ideia é resolver uma forma simplificada do problema (6.1.1) - (6.1.2), considerando um controlo unidimensional e como tal, o termo regularizador deixa de ter sentido no funcional de custo e (6.1.1) dá lugar a

$$\min J(\mathbf{y}, \mathbf{u}) = w_1 \int_{\Omega_{part}} |\mathbf{y} - \mathbf{y}_d|^2 dx + w_2 \int_{\Gamma_{wall}} |w - w_d|^2 dx, \quad (6.1.3)$$

e a condição de fronteira na entrada (Γ_{in}), no sentido longitudinal da geometria (eixo dos z) é dada por

$$u \left(1 - \left(\frac{x}{R} \right)^2 - \left(\frac{y}{R} \right)^2 \right), \quad (6.1.4)$$

onde u é o controlo (constante). Para resolver numericamente o problema de controlo usamos a metodologia DO, a mesma que anteriormente, que consiste em primeiro lugar na discretização do problema de controlo óptimo e depois na optimização do problema resultante em dimensão finita. Seguimos o Método dos Elementos Finitos considerando $\mathbf{y} \in \mathbf{H}$ e $p \in \mathbf{Q}$, onde \mathbf{H} e \mathbf{Q} são espaços de Hilbert. Considerando os espaços para as funções teste \mathbf{V} e \mathbf{Q} definidos na Secção 5.2, e multiplicando por funções teste adequadas, obtemos a formulação fraca de (6.1.2). Tendo em conta os espaços em dimensão finita \mathbf{V}_h e \mathbf{Q}_h e as aproximações finitas dadas em (5.2.4), e ainda que o espaço das funções de base coincide com o espaço das funções teste, recordemos o problema aproximado que se obtém: encontrar $\mathbf{y}_h \in \mathbf{V}_h \subset \mathbf{V}$ e $p_h \in \mathbf{Q}_h \subset \mathbf{Q}$ tais que

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega} \tau(D\mathbf{y}_h) : \nabla \mathbf{v}_h + \int_{\Omega} (\rho(\mathbf{y}_h \cdot \nabla) \mathbf{y}_h) \cdot \mathbf{v}_h - \int_{\Omega} p_h \operatorname{div} \mathbf{v}_h \\ \qquad \qquad \qquad = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}_h \\ \int_{\Omega} q_h \operatorname{div} \mathbf{y}_h = 0. \end{array} \right. \quad (6.1.5)$$

A escolha correcta dos espaços de dimensão finita \mathbf{V}_h e \mathbf{Q}_h permite mostrar a existência de solução para o problema aproximado e a convergência das soluções aproximadas (\mathbf{y}_h, p_h) para a solução (\mathbf{y}, p) da equação em dimensão infinita ([39]).

Neste capítulo, usamos os espaços correspondentes aos elementos ($P1-P1$) estabilizados, para as funções de base e para as funções teste, por serem computacionalmente menos exigentes, principalmente no caso tridimensional. No entanto os elementos ($P1-P1$) para Navier-Stokes tornam-se instáveis por não verificarem a condição de compatibilidade de Ladyzhenskaya-Babuska-Brezzi (LBB) (consultar, por exemplo [44]), que se traduz no facto das funções de base para a pressão serem de ordem inferior às funções de base para a velocidade. Para colmatar esta dificuldade utilizamos os métodos de estabilização consistente *streamline diffusion* e *crosswind diffusion*. O primeiro assegura a condição de LBB [65] e adiciona difusão artificial na direcção das linhas de corrente para obter soluções numéricas suaves, desde que a solução exacta da equação não contenha descontinuidades. Para corrigir regiões de gradientes irregulares utilizamos o método *crosswind diffusion* que adiciona difusão ortogonal à direcção das linhas de corrente. São obtidos melhores resultados quando os dois métodos são usados em simultâneo. Mais pormenores sobre esta matéria podem ser encontrados em [70, 71].

A discretização da equação de estado é igual à descrita na Secção 5.2 e o funcional de custo (6.1.3), mesmo não apresentando o termo regularizador, pode ser escrito na forma discretizada de modo semelhante ao anterior. Assim, a forma discreta do problema de controlo (6.1.3 - 6.1.2) é dada por

$$\min J(Y, U) = w_1 \|Y - Y_d\|_{N_y}^2 + w_2 \mathbf{W}(Y) \quad (6.1.6)$$

sujeito a

$$\begin{cases} \mathbf{Q}(Y) + \mathbf{G}(Y)Y + B^T P = F \\ BY = 0. \end{cases} \quad (6.1.7)$$

onde o vector $Y = (Y_u, U)$ inclui os coeficientes da velocidade controlada U e os não controlados representados por $Y_u = Y_u(U)$, $Y_d \in \mathbb{R}^{N_y}$ é um vector constituído pelos elementos y_{d_i} nas componentes correspondentes aos nós das observações e zero nas restantes, como anteriormente. A norma $\|\cdot\|_{N_y}$ é induzida pelo produto interno $(\cdot, \cdot)_M$ onde a matriz \mathbf{M} dimensão $N_y \times N_y$ é nula em todo o lado, excepto nos elementos

$$m_{ij} = \int_{\Omega_{part}} \phi_i \phi_j dx,$$

nas posições correspondentes aos nós das observações. O termo correspondente ao WSS escreve-se na forma

$$\mathbf{W}(Y) = \int_{\Gamma_{wall}} |w_h - w_{hd}|^2, \quad (6.1.8)$$

sendo \mathbf{W} dependente de forma não linear de Y obtido por uma quadratura de Gauss. Nas restrições temos

$$\mathbf{G}(Y)Y = \left(\sum_{j=1}^{N_y} y_j \sum_{k=1}^{N_y} y_k \int_{\Omega} (\rho \phi_j \cdot \nabla) \phi_k \cdot \phi_i \right)_{i=1 \dots N_y}$$

onde $Y = (y_1, \dots, y_{N_y})^T$ e

$$\mathbf{G}(Y) = \sum_{k=1}^{N_y} y_k \int_{\Omega} (\rho \phi_j \cdot \nabla) \phi_k \cdot \phi_i,$$

e ainda

$$\mathbf{Q}(Y) = \left(\int_{\Omega} 2\mu \left(\left| \sum_{j=1}^{N_y} y_j D\phi_j \right| \right) \sum_{k=1}^{N_y} y_k D\phi_k : \nabla \phi_i \right)_{i=1 \dots N_y}.$$

De seguida é utilizado o método SQP implementado no SNOPT para resolver este problema não linear em dimensão finita através da resolução de sub-problemas de programação quadrática (QP), cujas restrições são linearizações das restrições originais. Este método é sucintamente descrito na Secção 5.2.1.

6.2 Resultados Numéricos

Nesta secção descrevemos os resultados obtidos nas simulações. Como dados conhecidos y_d e w_d usámos dados sintéticos gerados numericamente. Para os casos tridimensionais com geometrias idealizadas adoptámos para a viscosidade o modelo generalizado de Cross, como já tínhamos feito no caso bidimensional, e para o aneurisma optámos pelo modelo de Carreau. Para os dois modelos, os parâmetros utilizados são os dados na Tabela 4.1 e a massa específica do sangue $\rho = 1050 \text{ Kg/m}^3$.

Usámos o método de Newton para resolver o problema não-linear e em cada problema linear resultante foi usado o PARDISO, à semelhança do caso bidimensional (ver Secção 5.3).

Os diferentes modelos, com as diferentes geometrias, foram resolvidos impondo o perfil de Poiseuille para a velocidade na fronteira de entrada com velocidade máxima U_0 .

No caso bidimensional, nos modelos resolvidos, a função de controlo foi imposta na fronteira de entrada e pretendia reproduzir o perfil parabólico da velocidade utilizado nos dados. Neste caso, como já foi referido atrás, vamos considerar o controlo em dimensão 1, também imposto na entrada do domínio, dado na condição (6.1.4), onde u é o controlo, e portanto o objectivo deste é aproximar a constante U_0 .

Em todos os domínios à excepção do aneurisma, usámos $U_0 = 0.0993 \text{ m/s}$, com um número médio de Reynolds de 90. No caso do aneurisma, de acordo com [2], fixámos $U_0 = 0.314630 \text{ m/s}$ o que corresponde a um número médio de Reynolds de 327. Os parâmetros w_1 , w_2 e w_3 usados na função custo são os dados em (5.3.1) mas com $w_3 = 0$, uma vez que neste caso o termo que diz respeito à função controlo deixa de ter sentido no funcional de custo.

Os problemas de controlo, em cada um dos domínios apresentados, foram resolvidos usando o método SQP implementado no SNOPT, à semelhança do que foi feito no caso bidimensional. Usámos uma tolerância optimal igual a 10^{-6} , em todos os casos, à excepção do problema cujo domínio é o aneurisma, onde a tolerância foi fixada em 10^{-5} , uma vez que a sua diminuição aumentava o tempo computacional consideravelmente, e não melhorava os resultados (recordemos que uma solução é considerada óptima se verifica as condições de optimalidade de 1ª ordem a menos de uma determinada precisão fixada pela tolerância optimal).

Em todos os casos, para iniciar o método de Newton, foi usada a solução nula como solução inicial, para a velocidade e pressão à excepção do aneurisma, que requereu uma solução mais próxima da pretendida. Neste caso usámos como solução inicial a solução do problema de Stokes com os mesmos parâmetros e com perfil de Poiseuille na entrada, com constante U_0 igual à estimativa inicial escolhida para o controlo.

6.2.1 Cilindro

Começamos por considerar uma geometria idealizada, simples, na forma de um cilindro com comprimento $L = 10R$ e diâmetro $D = 2R$ com $R = 3.1 \text{ mm}$, de acordo com a Figura 6.1.

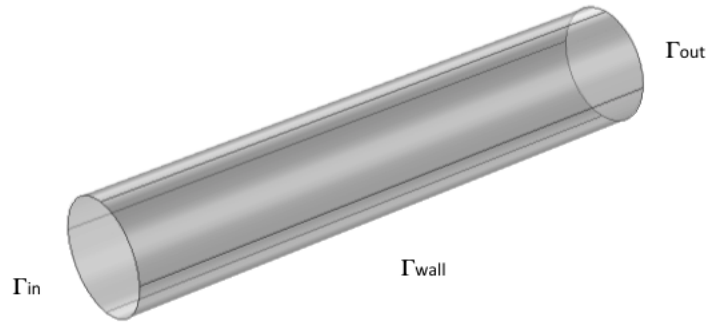


Figura 6.1: Cilindro: domínio computacional.

As simulações numéricas foram efectuadas numa parte do domínio correspondente a $1/4$ da geometria e os resultados foram estendidos ao resto do domínio por simetria. O conjunto Ω_{part} do qual fazem parte os dados conhecidos do problema está representado pelas secções a azul na Figura 6.2.

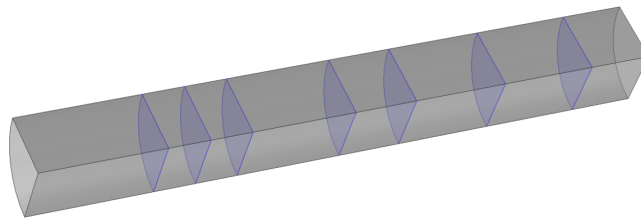


Figura 6.2: Cilindro: representação do domínio computacional e de Ω_{part} .

Para gerar os dados, considerámos uma malha construída com aproximadamente 91500 elementos do tipo tetraedros, triângulos, prismas e quadriláteros com 47580 DOFS para a velocidade. A qualidade mínima registada para os elementos foi de 0.2187 e a média de 0.7663 (recorde-se que o mínimo é 0 e corresponde a um elemento degenerado e o máximo é 1 e corresponde a um elemento completamente simétrico), um pouco inferior à qualidade da malha conseguida para o caso bidimensional.

Os problemas com controlo em dimensão finita e em dimensão infinita, foram resolvidos com a mesma malha do problema que gerou os dados (problema directo), com a diferença que o controlo em dimensão infinita é ele próprio uma função que tem de ser discretizada com elementos finitos, como se fez no Capítulo 5, e neste caso usámos 345 DOFS para o controlo. Nas figuras 6.3, 6.4, fazemos uma comparação qualitativa entre o problema directo (donde são recolhidos os dados do problema) e o problema controlado com controlo unidimensional e nas figuras 6.5 e 6.6 apresentamos os resultados para o problema controlado com controlo em dimensão infinita. Na Figura 6.7 podemos observar um ajuste perfeito da função $u((1 - (x/R)^2 - (y/R)^2))$ à condição parabólica de entrada do fluido, o que não acontece na Figura 6.8, onde o controlo é uma função, observando-se ligeiras irregularidades.

6.2. Resultados Numéricos

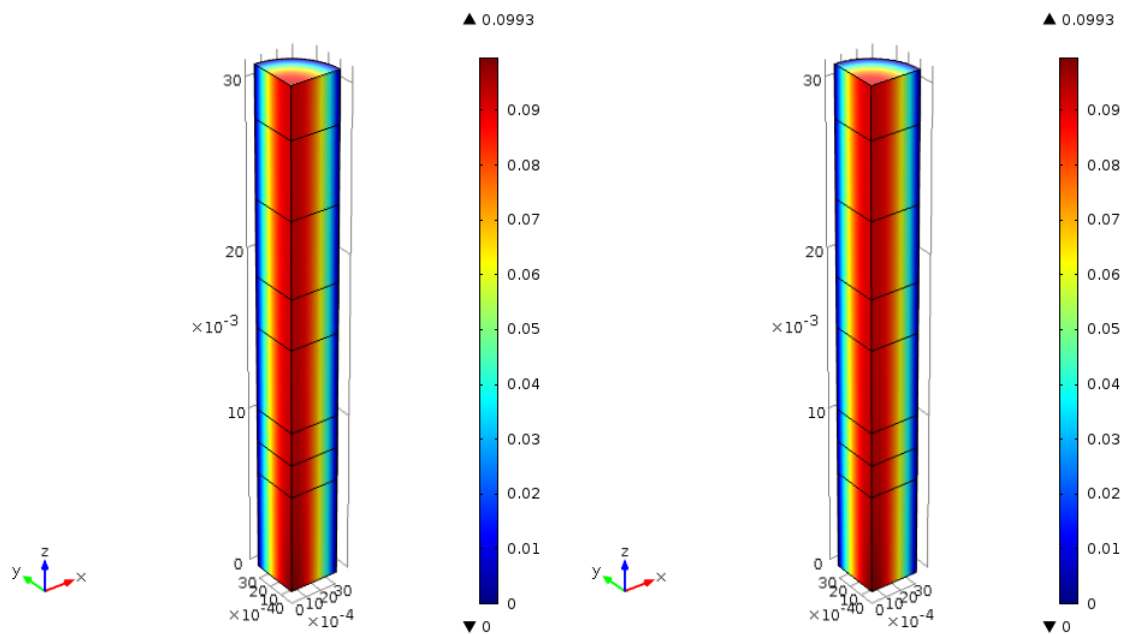


Figura 6.3: Magnitude da velocidade no cilindro. À esquerda: problema directo; à direita: problema controlado com controlo unidimensional.

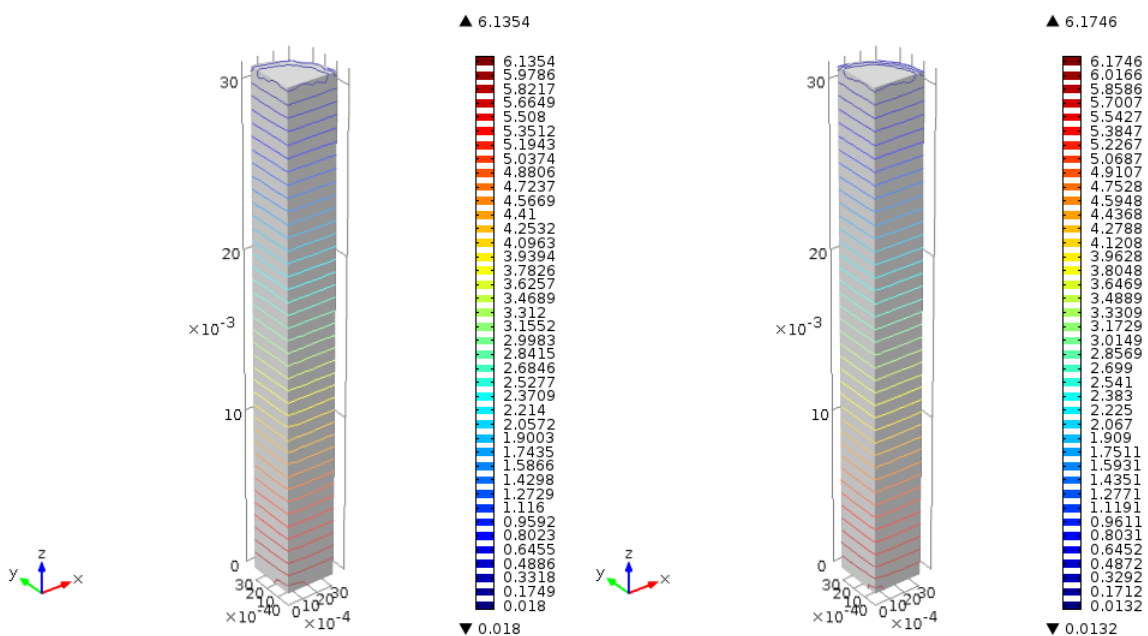


Figura 6.4: Superfícies de nível da pressão no cilindro. À esquerda: problema directo; à direita: problema controlado com controlo unidimensional.

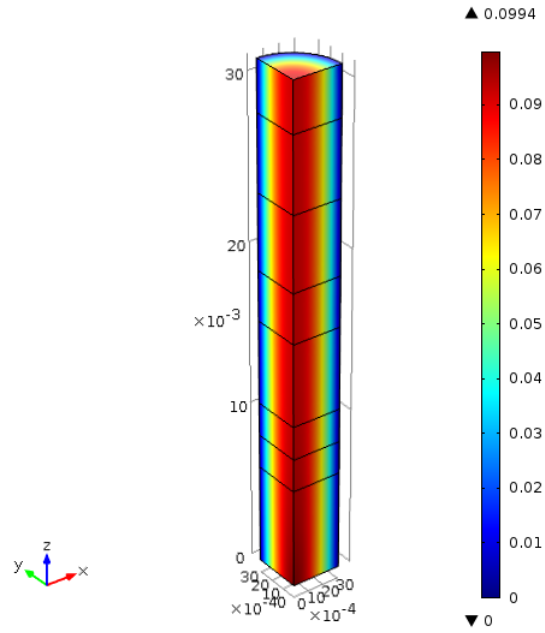


Figura 6.5: Magnitude da velocidade no cilindro para o problema de controle em dimensão infinita.

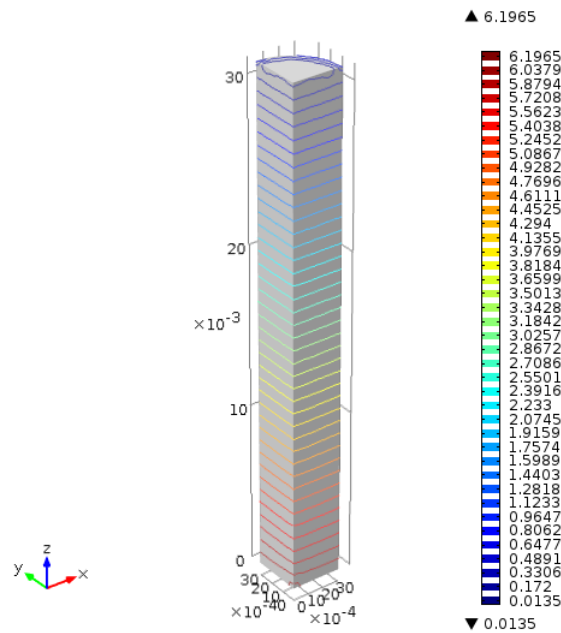


Figura 6.6: Superfícies de nível da pressão no cilindro para o problema de controle em dimensão infinita.

Na Tabela 6.1 comparamos os valores obtidos com os dois tipos de controlo. Os resultados obtidos com o controlo unidimensional são bastante melhores que os resultados obtidos com o controlo em dimensão infinita, uma vez que a complexidade do problema fica muito mais reduzida com o controlo unidimensional. Observe-se também que a diferença de grandeza nos valores para o custo do funcional se devem ao facto de, no caso do controlo em dimensão infinita, a presença do controlo aumentar consideravelmente o seu valor.

Recordemos que os erros relativos e absolutos calculados na Tabela 6.1 são dados por

$$R_e = \frac{\|\mathbf{y} - \mathbf{y}_d\|_2}{\|\mathbf{y}_d\|_2} \quad \text{e} \quad A_e = \|\mathbf{y} - \mathbf{y}_d\|_2,$$

onde $\|\cdot\|_2$ é a norma em \mathbf{L}^2 .

Tabela 6.1: Resultados para o controlo unidimensional e o controlo em dimensão infinita no cilindro.

	Controlo 1D	Controlo Inf
$\int_{\Omega_{part}} \mathbf{y} - \mathbf{y}_d ^2$	5.384463×10^{-28}	2.351574×10^{-17}
$\int_{\Gamma_{wall}} w - w_d ^2$	2.677024×10^{-26}	2.855320×10^{-15}
$\int_{\Gamma_{in}} \nabla \mathbf{y} ^2$	—	0.015305
CF	2.730868×10^{-20}	1.530764×10^{-5}
$\int_{\Omega} \mathbf{y} - \mathbf{y}_d ^2$	2.387187×10^{-30}	1.132242×10^{-16}
R_e	5.654043×10^{-11}	3.795628×10^{-4}
A_e	1.545052×10^{-15}	1.064069×10^{-8}
$\int_{\Omega} p - p_d ^2$	5.746372×10^{-27}	2.697432×10^{-24}

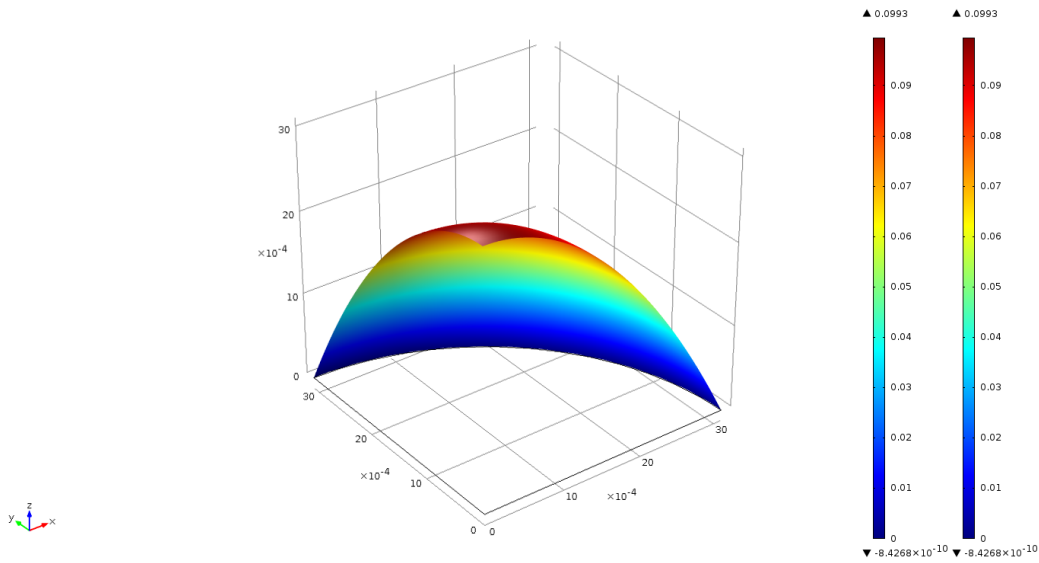


Figura 6.7: Representação da condição parabólica na fronteira de entrada no cilindro: $U_0 (1 - (x/R)^2 - (y/R)^2)$ e da função com controle $u (1 - (x/R)^2 - (y/R)^2)$.

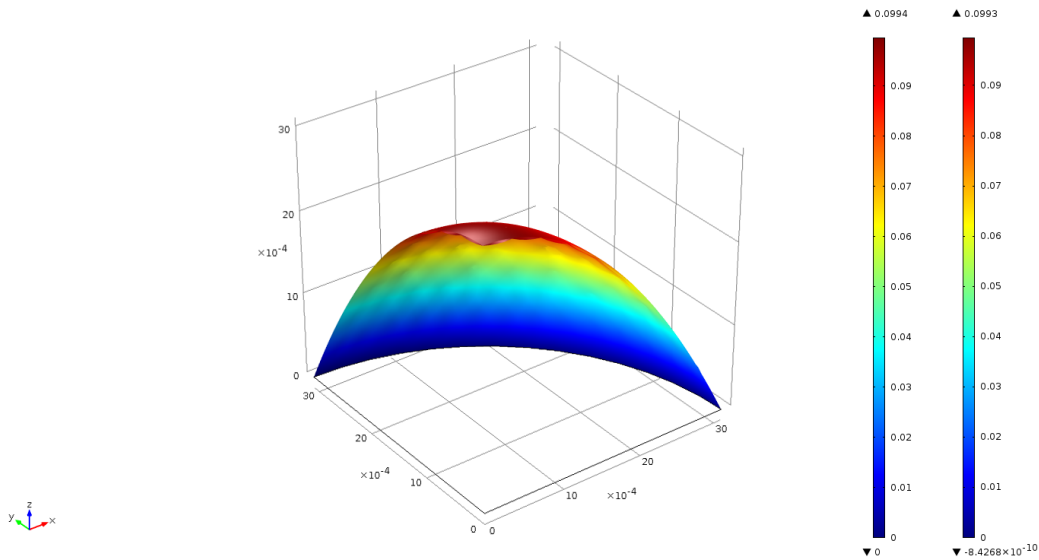


Figura 6.8: Representação da condição parabólica na fronteira de entrada no cilindro: $U_0 (1 - (x/R)^2 - (y/R)^2)$ e da função controle u .

6.2.2 Canal curvo

Estudamos agora o mesmo problema que anteriormente num domínio ligeiramente mais complexo que o canal anterior, pelo facto de se tratar de um domínio curvo. Considerámos portanto um canal com comprimento relativamente à curva exterior igual a 39.41 mm e relativamente à curva interior igual a 29.67 mm . O diâmetro do canal é o mesmo que anteriormente, $D = 2R$ com $R = 3.1 \text{ mm}$. A

representação geométrica deste domínio está na Figura 6.9 onde podemos ver as fronteiras de entrada e saída do fluido. O conjunto Ω_{part} do qual fazem parte os dados conhecidos do problema é constituído pelas secções circulares representadas a azul.

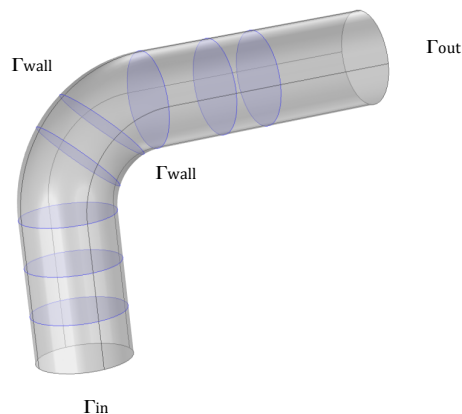


Figura 6.9: Canal curvo: representação do domínio computacional e de Ω_{part} .

Os detalhes da malha são os seguintes: aproximadamente 135800 elementos do mesmo tipo que o exemplo anterior, com 97941 DOFS para a velocidade. A qualidade mínima dos elementos foi de 0.05312 e a média de 0.6456. A malha pode ser observada na Figura 6.10. As curvas a azul que surgem na imagem são as curvas que limitam as secções que constituem Ω_{part} .

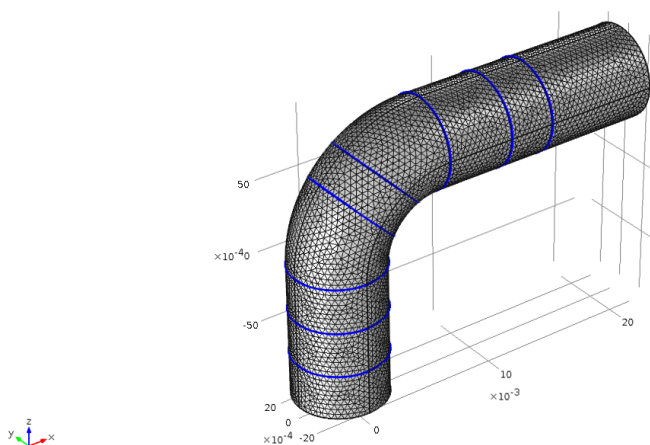


Figura 6.10: Canal curvo: representação da malha.

O problema controlado foi resolvido com a mesma malha que o problema directo. Podemos observar nas figuras 6.11 - 6.14 a comparação entre os vectores orientados do campo de velocidades e a pressão gerados pelos dados e obtidos através da resolução do problema de controlo em dimensão um.

Nas figuras 6.15 e 6.16 representamos a magnitude do WSS medido nas paredes do canal curvo no problema directo e no problema controlado. Observamos que as zonas de maior tensão são a parte interior da curva do canal e a parte exterior que sucede à curva. Nas figuras 6.17 e 6.18 estão

representadas as curvas da magnitude dos problemas directo e controlado em função do comprimento de arco, ao longo de um linha que vai da fronteira de entrada até à fronteira de saída pela parte interior da curva da geometria, e ao longo de outra linha similar, mas que passa do lado exterior. É visível um pico elevado da magnitude do WSS na zona correspondente à curva, na parte interior e outro pico da magnitude do WSS a região posterior à curva, na parte exterior, o que é consistente com as figuras 6.15 - 6.16.

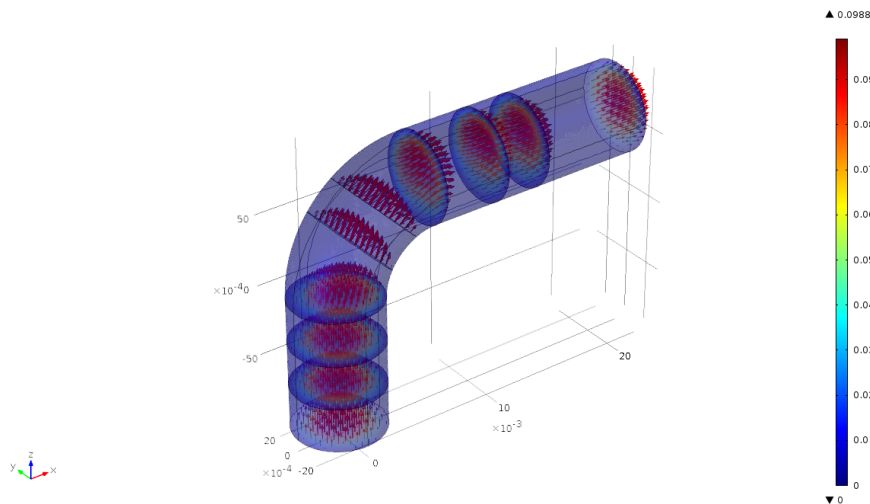


Figura 6.11: Problema directo: representação dos vectores do campo de velocidades no canal curvo. A escala representa a magnitude da velocidade.

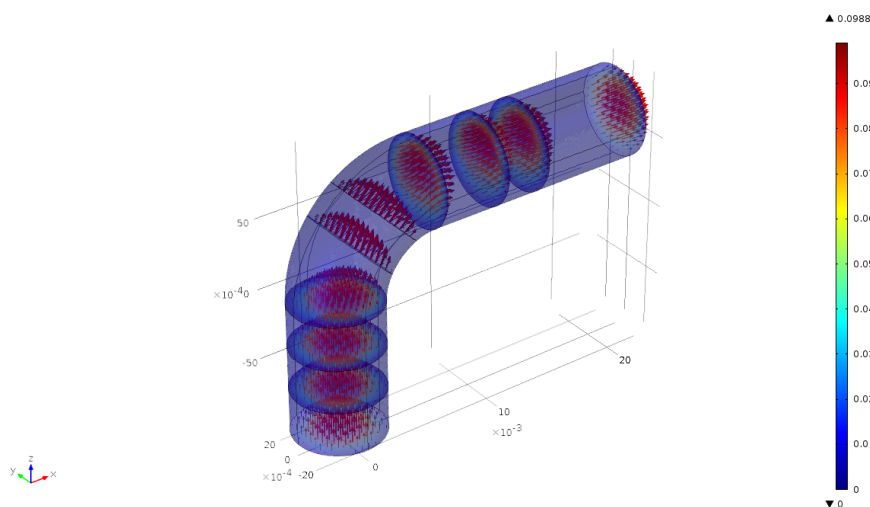


Figura 6.12: Problema controlado: representação dos vectores do campo de velocidade no canal curvo. A escala representa a magnitude da velocidade.

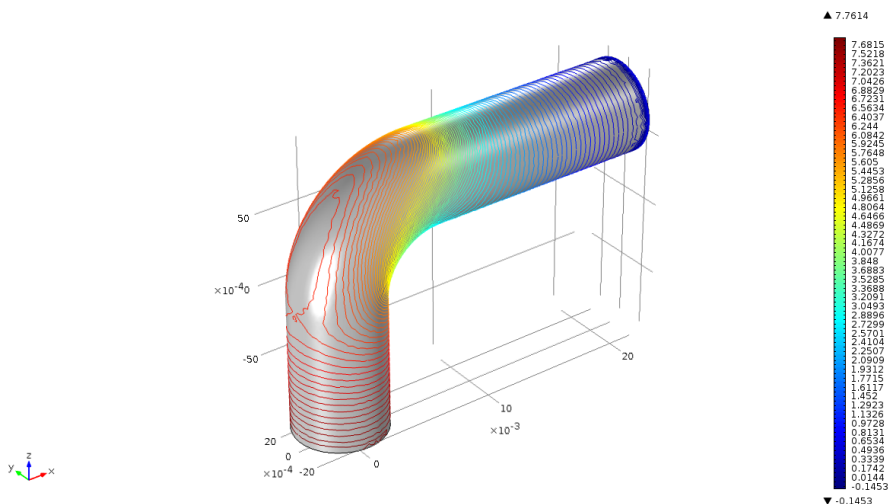


Figura 6.13: Problema directo: superfícies de nível da pressão no canal curvo.

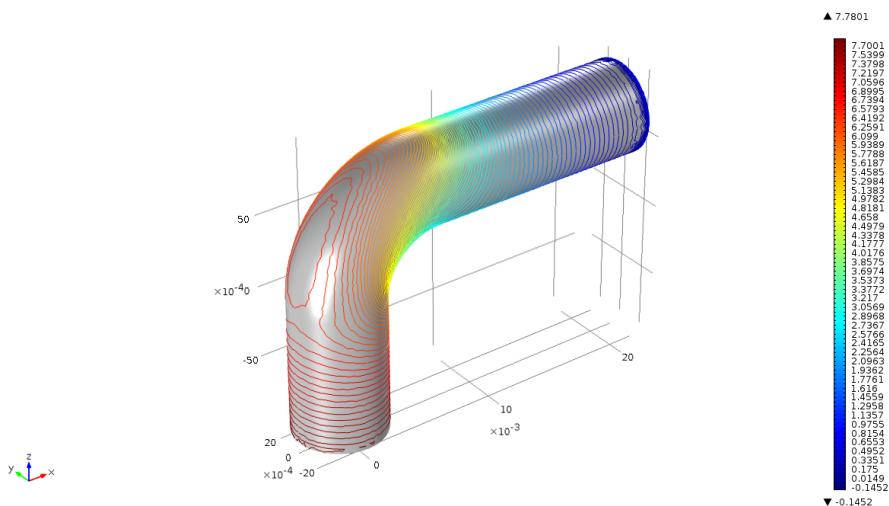


Figura 6.14: Problema controlado: superfícies de nível da pressão no canal curvo.

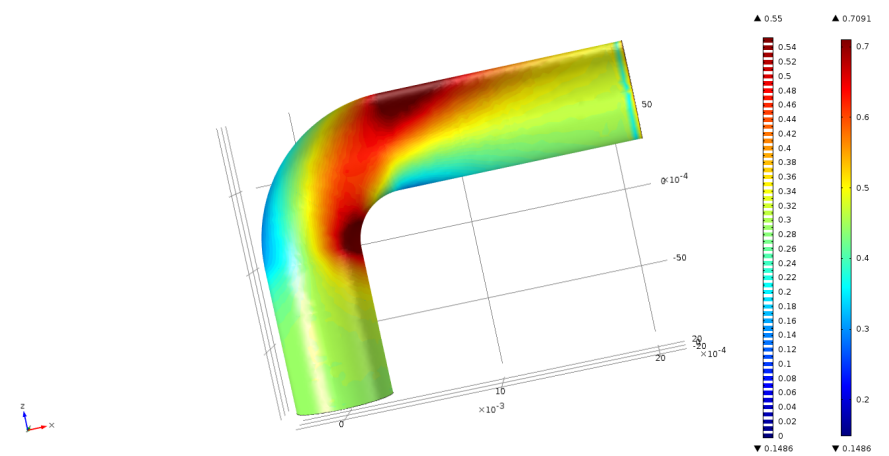


Figura 6.15: Problema directo: representação das superfícies de nível (do tipo preenchido) da magnitude do WSS no canal curvo.

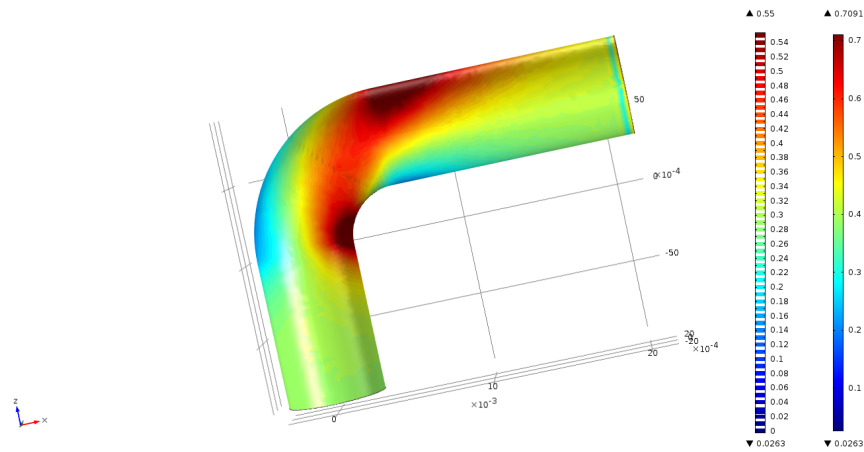


Figura 6.16: Problema controlado: representação das superfícies de nível (do tipo preenchido) da magnitude do WSS no canal curvo.

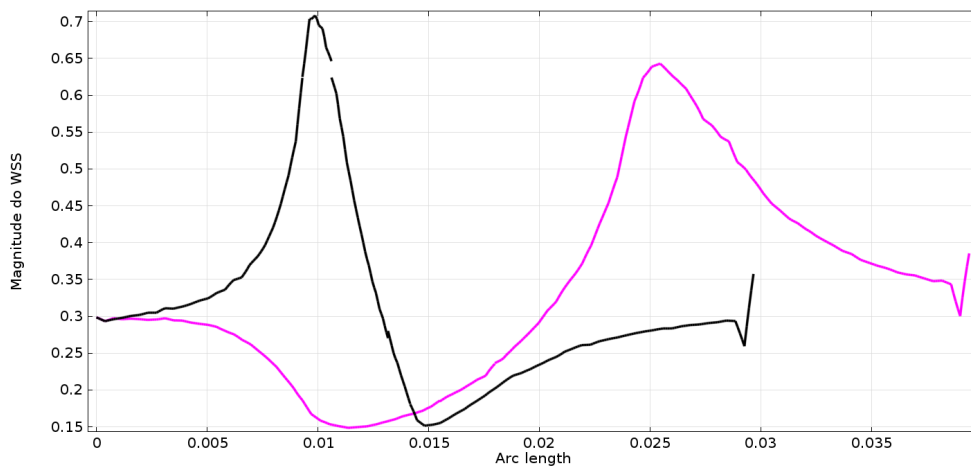


Figura 6.17: Problema directo: magnitude da velocidade no canal curvo em função do comprimento de arco. A preto está representada a magnitude do WSS na curva interior do canal curvo e a rosa a magnitude na curva exterior.

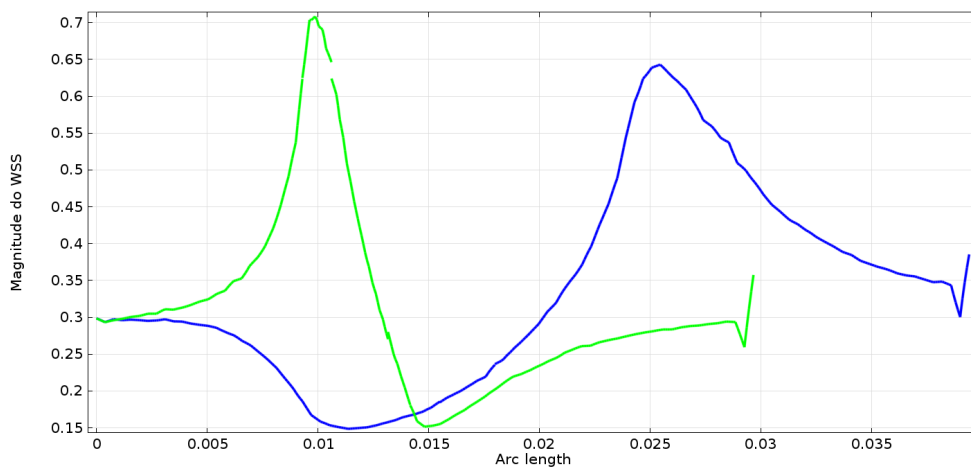


Figura 6.18: Problema controlado: magnitude da velocidade no canal curvo em função do comprimento de arco. A verde está representada a magnitude do WSS na curva interior do canal curvo e a azul a magnitude na curva exterior.

No Capítulo 5 testámos a robustez do método proposto com respeito a diferentes perfis de entrada para a velocidade. Considerámos a Lei de Potência dada por (5.3.2) com $\xi = 4$ e $\xi = 9$ e comparámos os resultados obtidos com o perfil de Poiseuille. Verificamos agora que quando impomos estes perfis de entrada no canal curvo em 3 dimensões, o método com controlo unidimensional ainda é eficaz, reproduzindo os dados do problema com erros muito pequenos. A Lei de Potência (5.3.2), neste caso é dada por

$$\frac{\xi + 2}{\xi} U_1 \left(1 - \left(\frac{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}{R} \right)^\xi \right), \quad (6.2.1)$$

com $\xi = 4$ e $\xi = 9$. Nas figuras 6.19 - 6.21 estão representados os três perfis de entrada que usámos. Resolvemos o problema de controlo com os mesmos dados iniciais e com a mesma malha que anteriormente, escolhendo em (6.2.1) a constante U_1 de forma a manter o mesmo número de Reynolds que no caso de Poiseuille. Nos três casos estudados, perfil de Poiseuille, Lei de Potência com $\xi = 4$ e $\xi = 9$, obtivemos um ajuste perfeito do perfil de entrada calculado relativamente ao perfil dos dados, em que o controlo representa a constante da lei (6.2.1), isto é, $u = \frac{\xi+2}{\xi} U_1$.

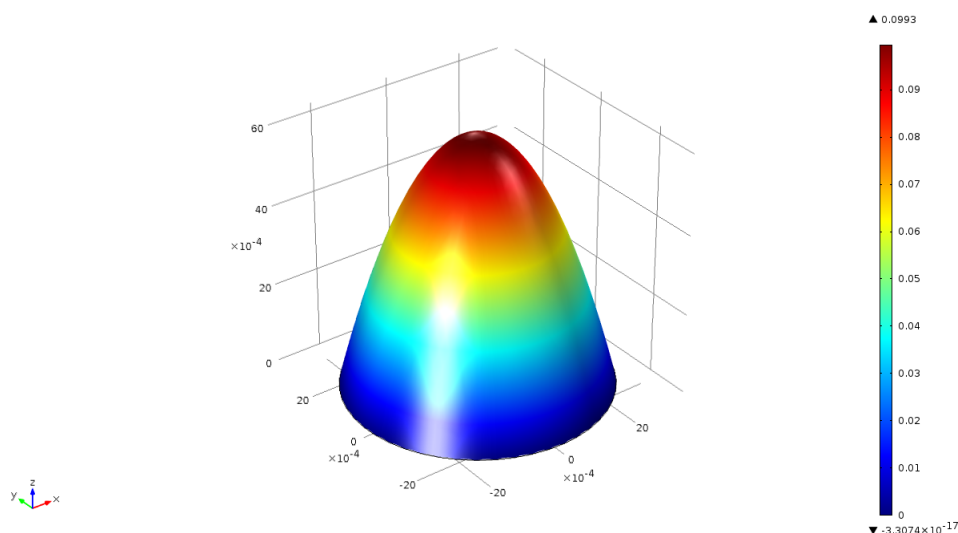


Figura 6.19: Representação do perfil de entrada com a Lei de Potência em 3D de expoente 2, isto é, perfil de Poiseuille.

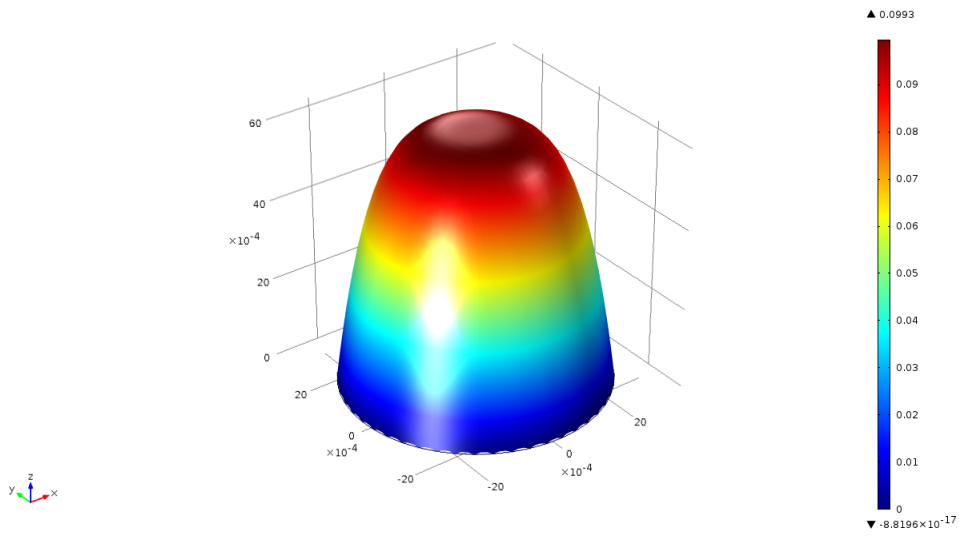


Figura 6.20: Representação do perfil de entrada com a Lei de potência em 3D de expoente 4.

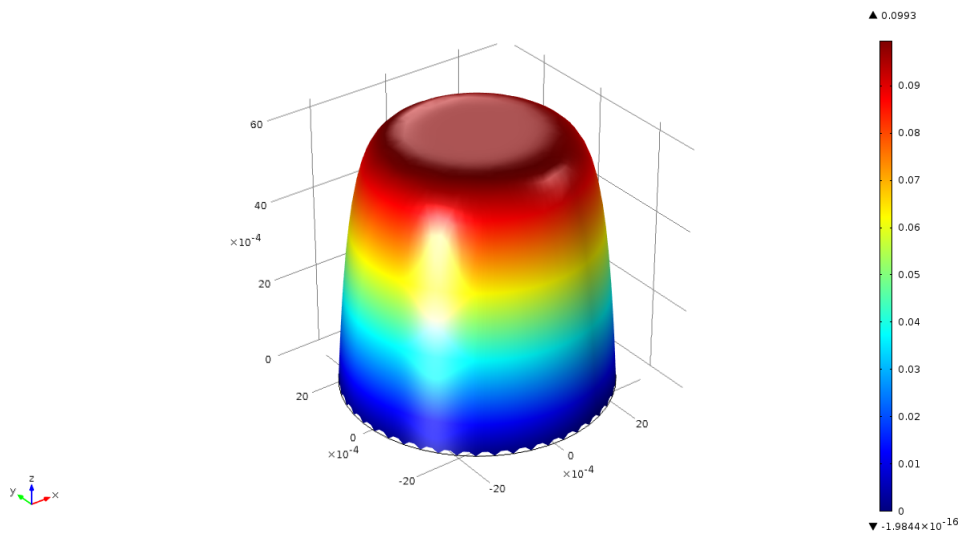


Figura 6.21: Representação do perfil de entrada com a Lei de potência em 3D de expoente 9.

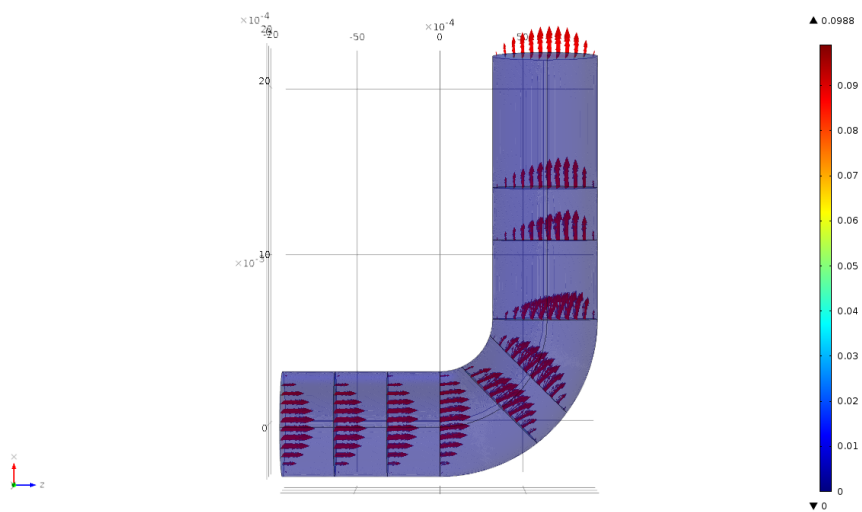


Figura 6.22: Representação dos vectores velocidade no canal curvo com o perfil de Poiseuille.

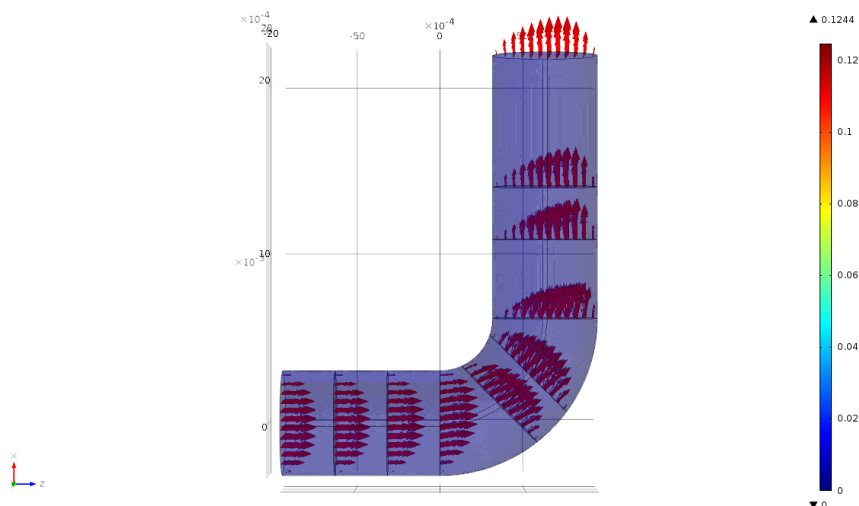


Figura 6.23: Representação dos vectores velocidade no canal curvo com o perfil da Lei de Potência com expoente 4.

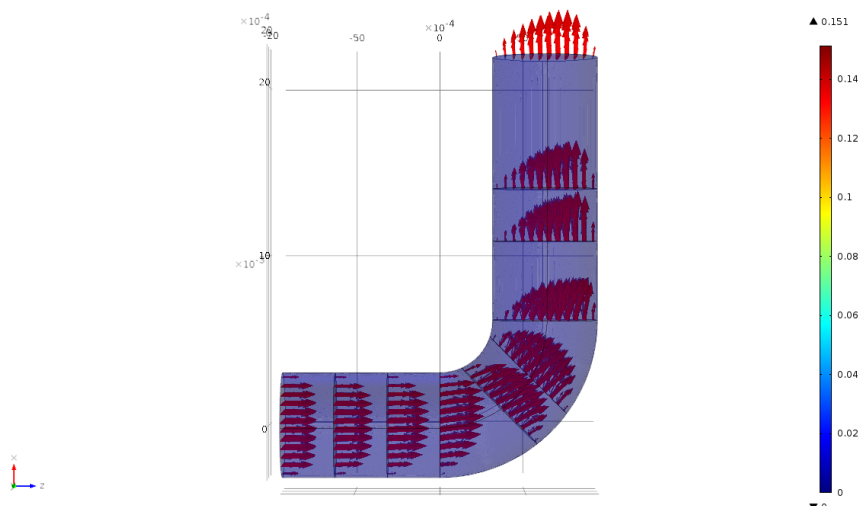


Figura 6.24: Representação dos vectores velocidade no canal curvo com o perfil da Lei de Potência com expoente 9.

Nas figuras 6.22 - 6.24 observam-se as diferenças no comportamento dos vectores do campo de velocidades quando impomos os três perfis de entrada descritos. Note-se que à medida que elevamos o valor da potência, maior é a velocidade que o fluido atinge, embora a velocidade máxima na entrada seja a mesma para os três perfis.

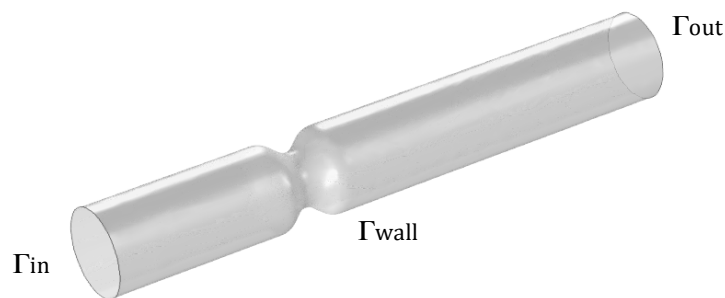
A Tabela 6.2 apresenta os resultados quantitativos obtidos para os três perfis de entrada estudados, onde se observa o bom desempenho do problema controlado, tendo em conta a ordem dos erros calculados. Por outro lado, concluímos também que, neste caso, os erros melhoram à medida que se aumenta a potência.

Tabela 6.2: Canal curvo 3D: resultados para o controlo unidimensional nos três perfis de entrada para o campo de velocidades.

	Poiseuille	Lei de Potência $\xi = 4$	Lei de Potência $\xi = 9$
$\int_{\Omega_{part}} \mathbf{y} - \mathbf{y}_d ^2$	2.186205×10^{-25}	2.186072×10^{-27}	1.371053×10^{-28}
$\int_{\Gamma_{wall}} w - w_d ^2$	2.724455×10^{-23}	3.757941×10^{-25}	2.97739×10^{-25}
CF	2.746317×10^{-17}	3.779802×10^{-19}	2.991101×10^{-20}
$\int_{\Omega} \mathbf{y} - \mathbf{y}_d ^2$	9.332191×10^{-28}	9.319013×10^{-30}	5.83473×10^{-31}
R_e	5.352887×10^{-10}	4.053715×10^{-11}	8.322291×10^{-12}
A_e	3.054864×10^{-14}	3.052706×10^{-15}	7.63854×10^{-16}
$\int_{\Omega} p - p_d ^2$	7.748142×10^{-24}	1.130542×10^{-25}	9.163838×10^{-27}

6.2.3 Estenose

Consideremos uma estenose idealizada, com comprimento $L = 10R$ e diâmetro $D = 2R$ com $R = 3.162 \text{ mm}$ de acordo com a Figura 6.25. O diâmetro da zona mais estreita é de $0.63219R$.

**Figura 6.25:** Estenose: representação do domínio computacional.

À semelhança do primeiro caso estudado, as simulações numéricas foram feitas em $1/4$ da geometria e os resultados foram estendidos ao resto do domínio por simetria. A região correspondente aos dados conhecidos está representada pelas secções a azul na Figura 6.26.

Para gerar os dados, foi considerada uma malha com aproximadamente 208777 elementos do mesmo tipo que os anteriores, com 146700 DOFS para a velocidade. A qualidade mínima registada para os elementos foi de 0.2187 e a média de 0.7663. O problema de controlo foi resolvido com o mesmo número de DOFS que o problema directo. Apresentamos a comparação entre os resultados do problema que gerou os dados e o problema controlado nas figuras 6.27 - 6.31.

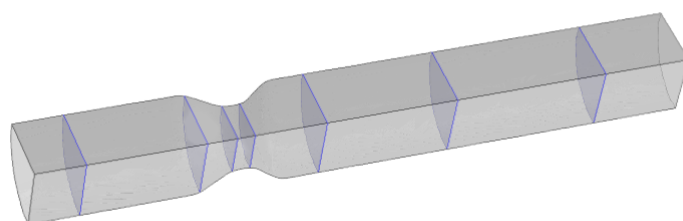


Figura 6.26: Estenose: representação de Ω_{part} .

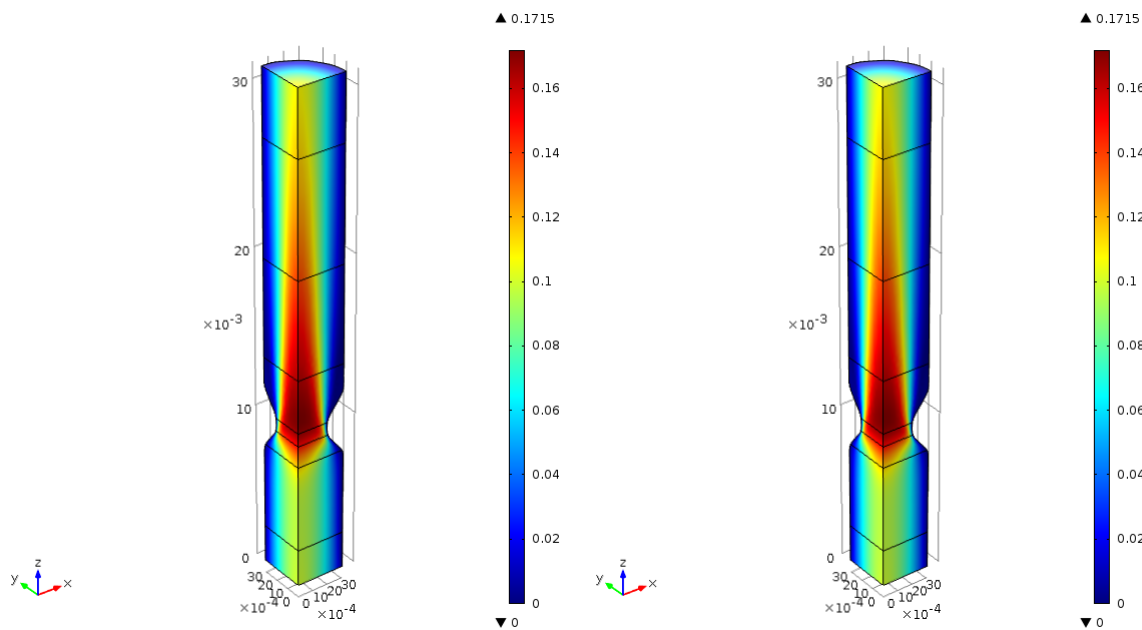


Figura 6.27: Magnitude da velocidade na estenose. À esquerda: problema directo; à direita: problema controlado com controlo unidimensional.

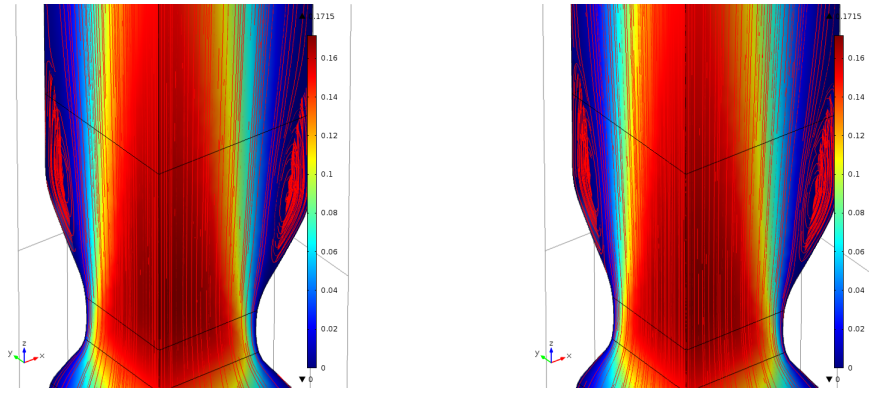


Figura 6.28: Pormenor da região da estenose onde estão representadas as linhas de corrente e são visíveis as recirculações do fluido. À esquerda: problema directo; à direita: problema controlado com controlo unidimensional.

A Figura 6.28, é uma ampliação da região da estenose onde se dá o estreitamento e onde estão representadas as linhas de corrente. Note-se que são visíveis as recirculações do fluido na região junto à fronteira imediatamente a seguir à diminuição do raio, como era expectável. Na Figura 6.31 é calculada a magnitude do WSS ao longo de uma linha longitudinal da superfície da estenose entre a fronteira de entrada e a fronteira de saída nos problemas directo (pontinhos a azul) e controlado (linha cheia a rosa).

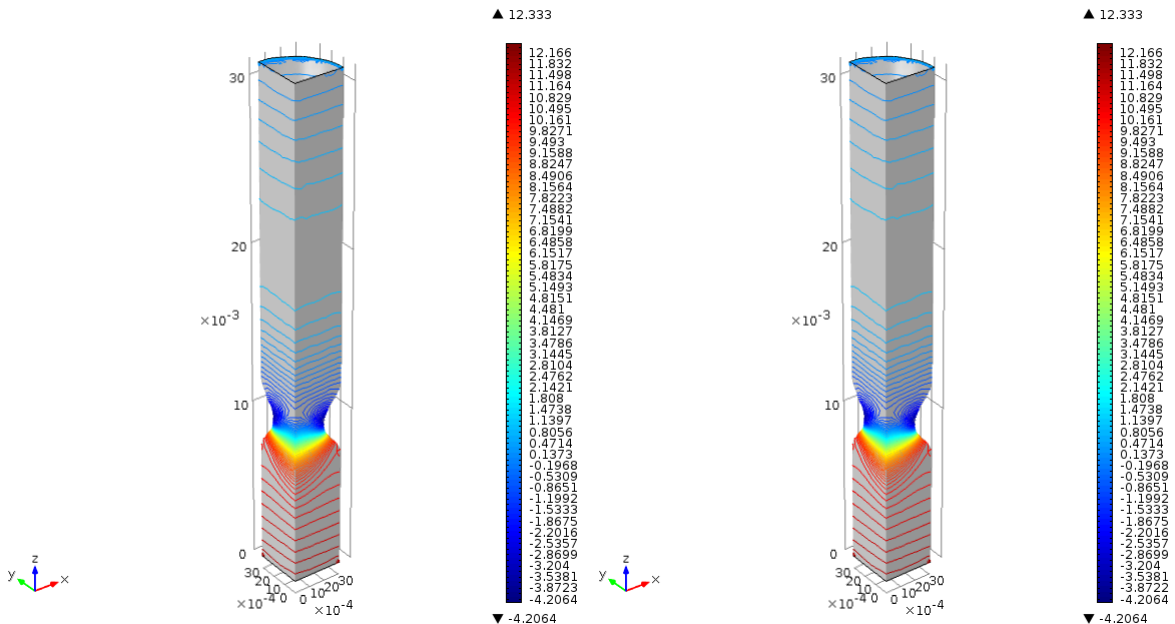


Figura 6.29: Superfícies de nível da pressão na estenose. Esquerda: problema directo; direita: problema controlado com controlo unidimensional.

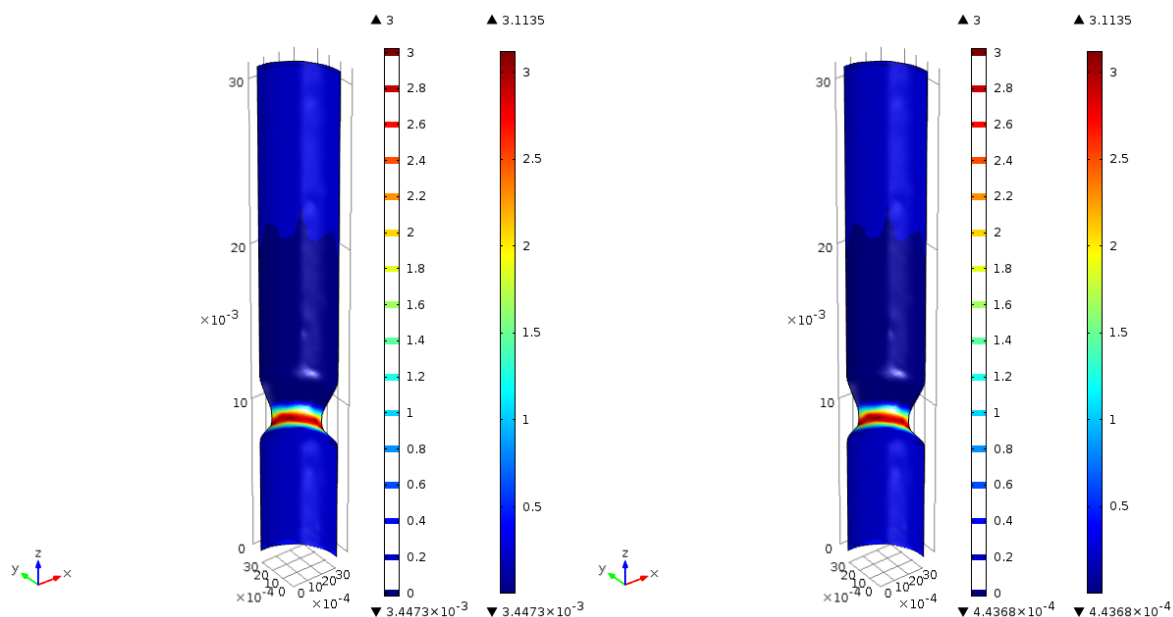


Figura 6.30: Superfícies de nível (do tipo preenchido) do WSS na estenose. À esquerda: problema directo; à direita: problema controlado com controlo unidimensional.

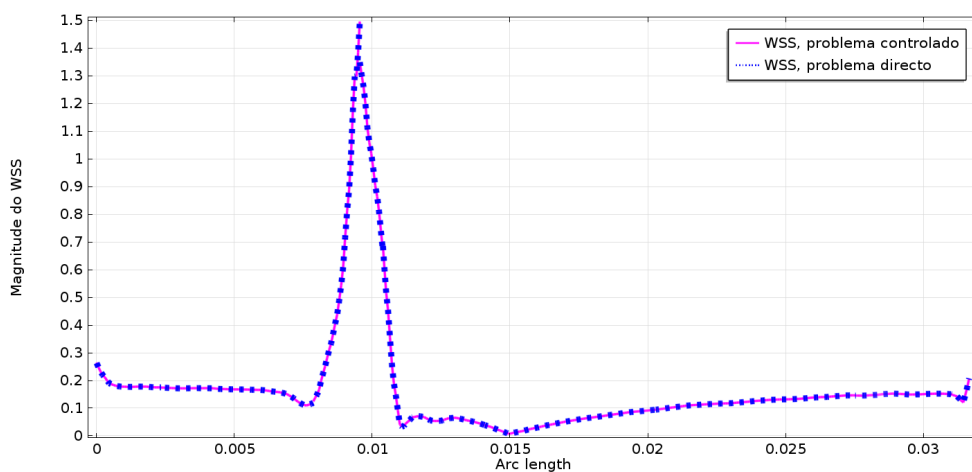


Figura 6.31: Magnitude do WSS na estenose em função do comprimento de arco.

O problema de controlo resolvido e que conduziu aos resultados qualitativos apresentados atrás, incluiu no funcional de custo o termo relacionado com o WSS, ou seja, $\int_{\Gamma_{wall}} |w - w_d|^2$, como se pode ver em (6.1.3). Queremos mostrar, experimentalmente, que a presença deste termo no funcional de custo melhora as aproximações do campo de velocidades e do WSS, à semelhança do que foi feito no Capítulo 5. E de facto, as conclusões obtidas no caso bidimensional estendem-se ao caso tridimensional. Na Tabela 6.3 comparamos os resultados obtidos com a resolução do problema de controlo com e sem o

termo do WSS, isto é, com os conjuntos de parâmetros (w_1, w_2) para o funcional de custo dados por $(10^6, 10^6)$ e $(10^6, 0)$. É notória a diferença entre as aproximações nos diversos termos que medimos, e em particular, no termo do WSS, salientamos que a ordem da aproximação diminui de 10^{-23} para 10^{-11} com a ausência do WSS. E portanto o funcional de custo dado por (6.1.3) com os parâmetros $(10^6, 10^6)$ aproxima melhor o campo de velocidades e o WSS.

Também neste caso, testamos a robustez do método implementado variando os perfis de entrada do campo de velocidades na fronteira de entrada. Mantendo os parâmetros $(10^6, 10^6)$ no funcional de custo (6.1.3), usámos a Lei de Potência dada em (6.2.1) com $\xi = 4$ e $\xi = 9$ como anteriormente no caso do canal curvo. O problema de controlo foi resolvido nas mesmas condições que o directo, mantendo o mesmo número de Reynolds que no caso do perfil de Poiseuille, à semelhança do que já tinha sido feito. Na Tabela 6.4 apresentamos os resultados quantitativos das aproximações obtidas com os três perfis. Em qualquer dos casos foram obtidos bons resultados na aproximação do campo de velocidades e do WSS, o que mostra que o método é robusto, para diferentes perfis de entrada também na estenose. Em todos os casos obtivemos um ajuste perfeito da condição de entrada controlada à condição de entrada dos dados.

Tabela 6.3: Estenose 3D: resultados obtidos com e sem o WSS no funcional de custo.

	$(10^6, 10^6)$	$(10^6, 0)$
$\int_{\Omega_{part}} \mathbf{y} - \mathbf{y}_d ^2$	6.424999×10^{-26}	2.523×10^{-20}
$\int_{\Gamma_{wall}} w - w_d ^2$	1.187839×10^{-23}	3.566017×10^{-11}
CF	1.194264×10^{-17}	2.523×10^{-14}
$\int_{\Omega} \mathbf{y} - \mathbf{y}_d ^2$	2.622935×10^{-28}	1.574004×10^{-21}
R_e	5.077869×10^{-10}	1.243915×10^{-6}
A_e	1.619548×10^{-14}	3.967372×10^{-11}
$\int_{\Omega} p - p_d ^2$	6.395432×10^{-32}	1.783883×10^{-27}

Tabela 6.4: Estenose 3D: resultados para o controlo unidimensional nos três perfis de entrada para o campo de velocidades.

	Poiseuille	Lei de Potência $\xi = 4$	Lei de Potência $\xi = 9$
$\int_{\Omega_{part}} \mathbf{y} - \mathbf{y}_d ^2$	6.424999×10^{-26}	1.494263×10^{-26}	2.062089×10^{-26}
$\int_{\Gamma_{wall}} w - w_d ^2$	1.187839×10^{-23}	3.722373×10^{-24}	6.529021×10^{-24}
CF	1.194264×10^{-17}	3.737316×10^{-18}	6.549642×10^{-18}
$\int_{\Omega} \mathbf{y} - \mathbf{y}_d ^2$	2.622935×10^{-28}	6.145612×10^{-29}	8.530609×10^{-29}
R_e	5.077869×10^{-10}	1.829152×10^{-10}	1.748084×10^{-10}
A_e	1.619548×10^{-14}	7.839395×10^{-15}	9.23613×10^{-15}
$\int_{\Omega} p - p_d ^2$	6.395432×10^{-32}	2.197997×10^{-32}	4.242509×10^{-32}

6.2.4 Aneurisma

O maior desafio deste procedimento consiste na verificação da sua validade numa geometria real, como aquela que nos propusemos estudar, o aneurisma sacular cerebral, por apresentar uma maior complexidade que as restantes geometrias estudadas. O raio da artéria na fronteira de entrada é de 2.71015 mm , não se mantendo ao longo da artéria. Representamos na Figura 6.32 o domínio computacional, onde é visível o aneurisma sacular, as secções que escolhemos para recolher os dados do problema e os cortes que representam as fronteiras de entrada e saída do fluido.

Considerámos uma malha com aproximadamente 234700 elementos do mesmo tipo que nos casos anteriores, com 180810 DOFS para a velocidade. A qualidade mínima registada dos elementos foi de 0.005029 e a média de 0.6142.

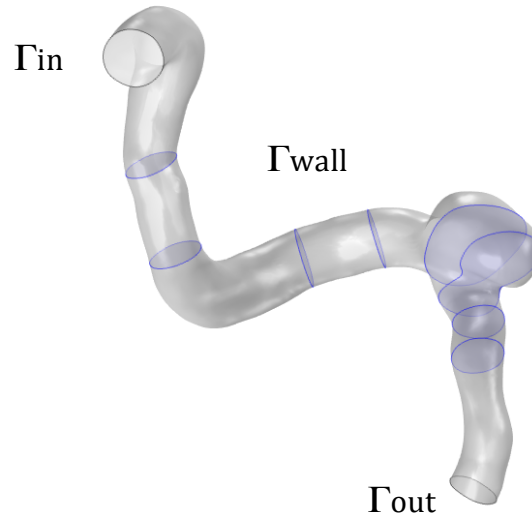


Figura 6.32: Aneurisma: representação do domínio computacional e de Ω_{part} .

O problema de controlo foi resolvido nas mesmas condições que o directo. Os resultados qualitativos que comparam o problema directo com o problema controlado podem ser observados nas figuras 6.33 - 6.41. Nas figuras 6.33 e 6.34 representamos os vectores do campo de velocidades no aneurisma, onde se consegue observar, na figura ampliada, uma forte recirculação do fluido dentro do aneurisma sacular. As linhas de corrente, na Figura 6.35 mostram exactamente o mesmo efeito da recirculação mas com maior detalhe.

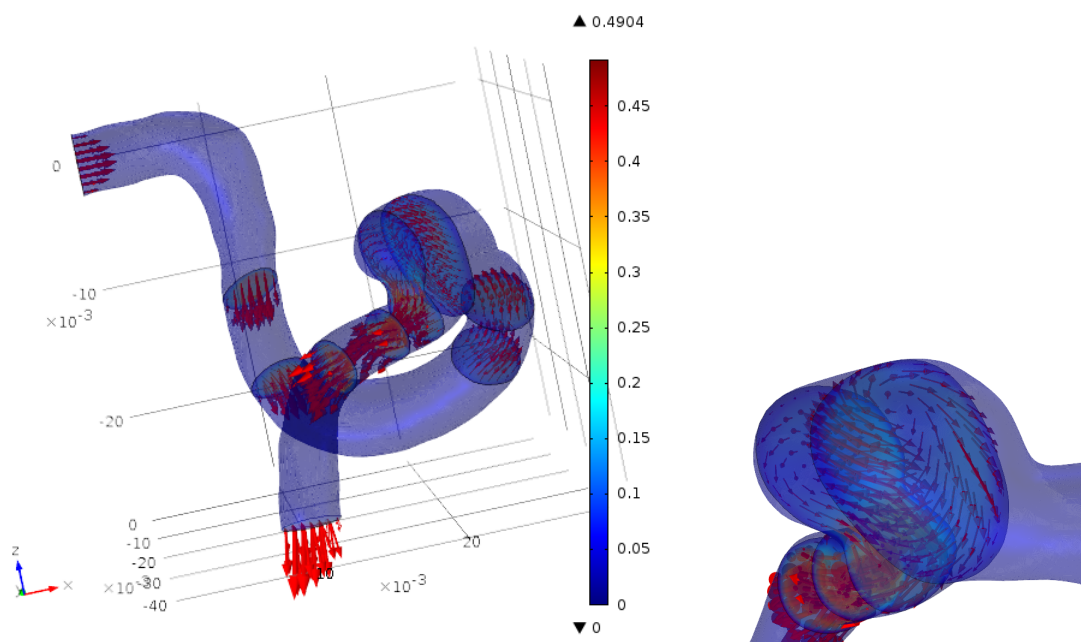


Figura 6.33: Problema directo: representação dos vectores velocidade no aneurisma

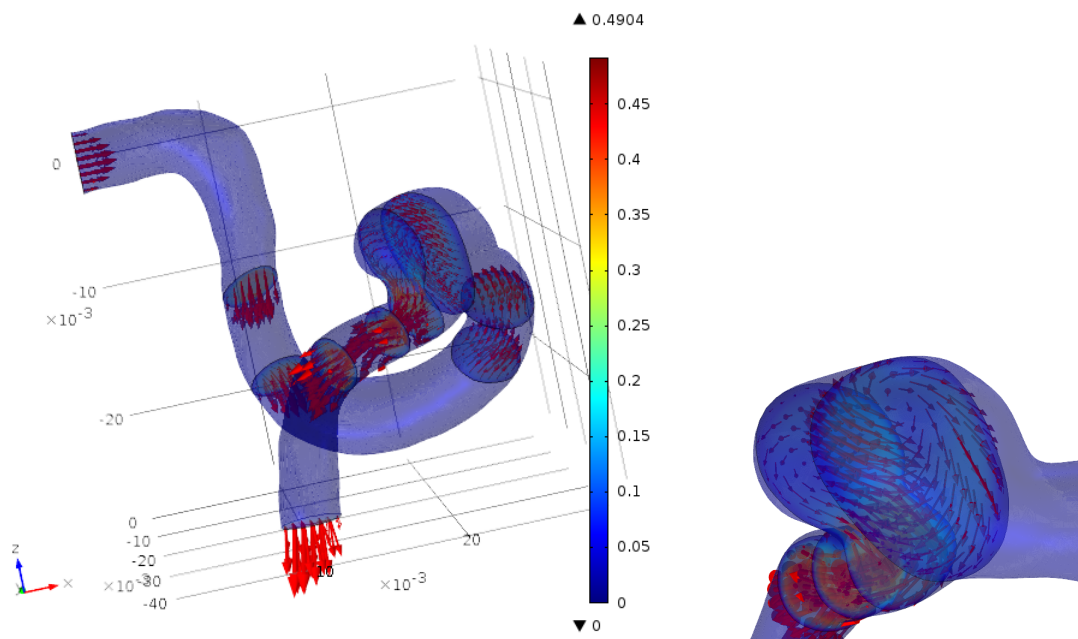


Figura 6.34: Problema controlado: representação dos vectores velocidade no aneurisma

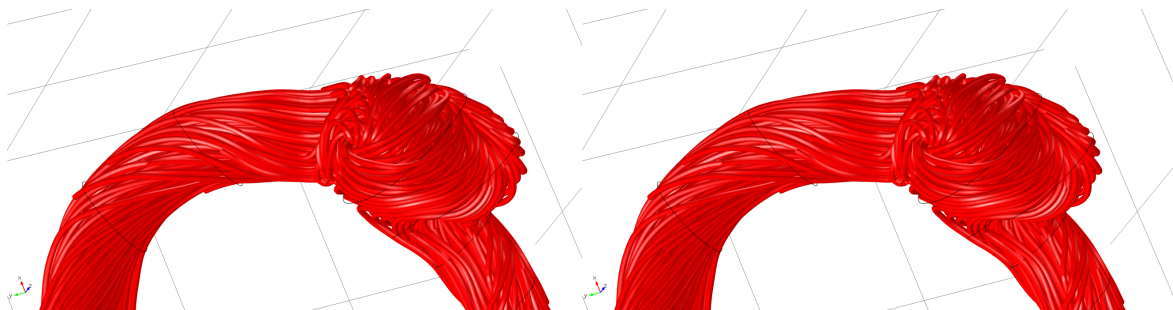


Figura 6.35: Representação das linhas de corrente no aneurisma, evidenciando a região das recirculações, que corresponde à região do aneurisma sacular. À esquerda: resultados do problema directo; à direita: resultados do problema controlado.

Nas figuras 6.36 e 6.37 representamos os valores da pressão e nas figuras 6.38 e 6.39 que representam a magnitude do WSS, conseguimos observar a vermelho, a grande tensão tangencial na parede da artéria na região inferior do aneurisma exercida pelo fluido.

Apresentamos também o comportamento da magnitude do WSS em função do comprimento de arco, calculada ao longo da linha representada a azul na Figura 6.40 e os resultados obtidos estão representados na Figura 6.41 para o problema directo (pontinhos a azul) e para o controlado (linha cheia a rosa). O pico do WSS que se observa corresponde à região a vermelho nas figuras 6.38 e 6.39.

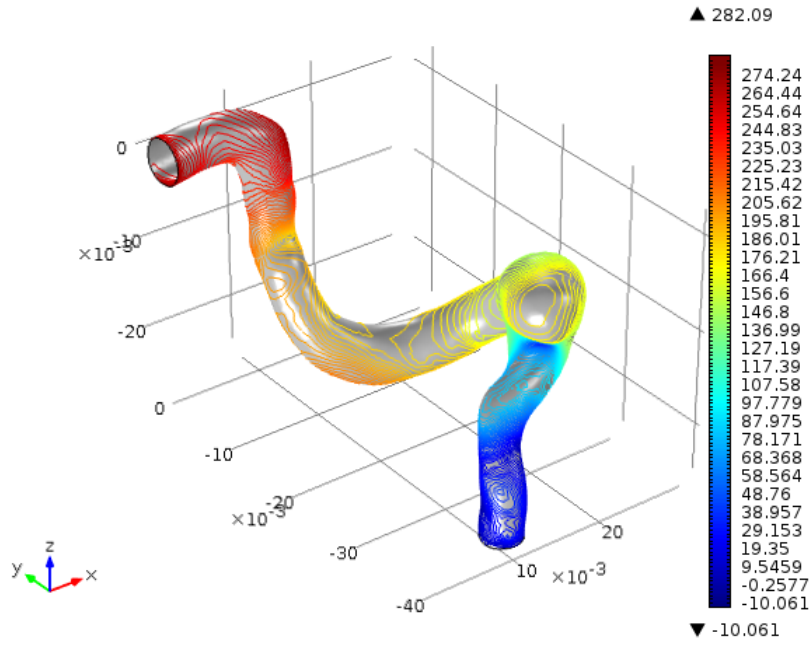


Figura 6.36: Representação das superfícies de nível da pressão no aneurisma. Problema directo

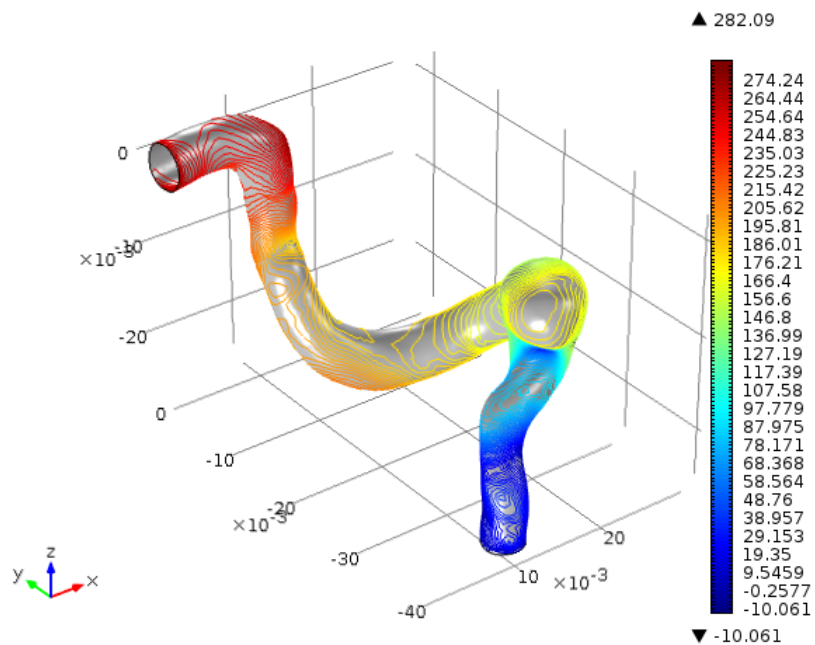


Figura 6.37: Representação das superfícies de nível da pressão no aneurisma. Problema controlado.

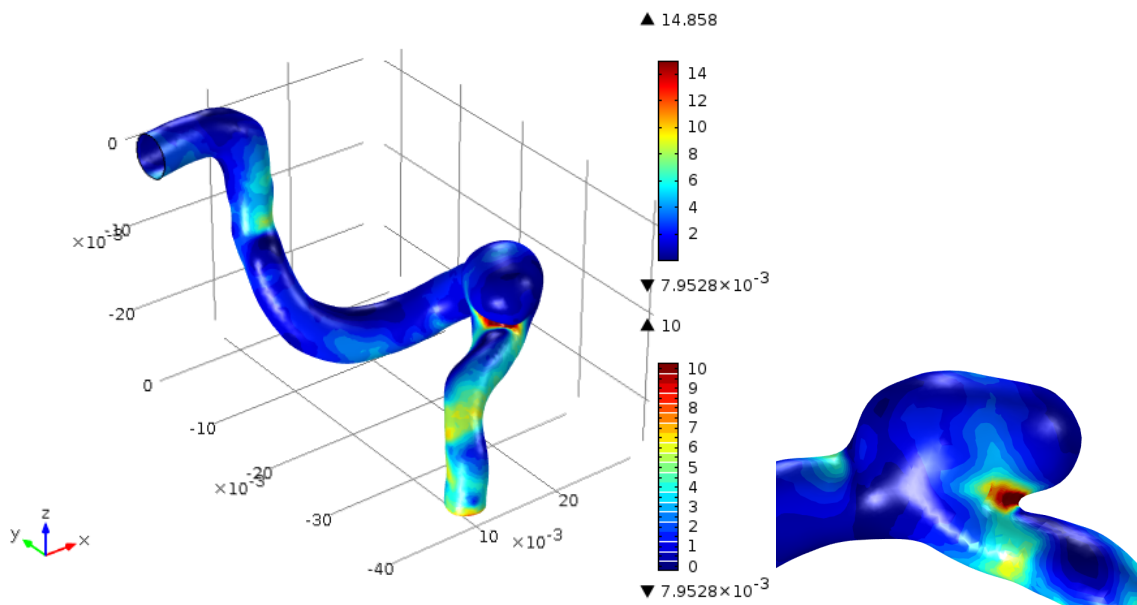


Figura 6.38: Representação da magnitude do WSS do problema directo.

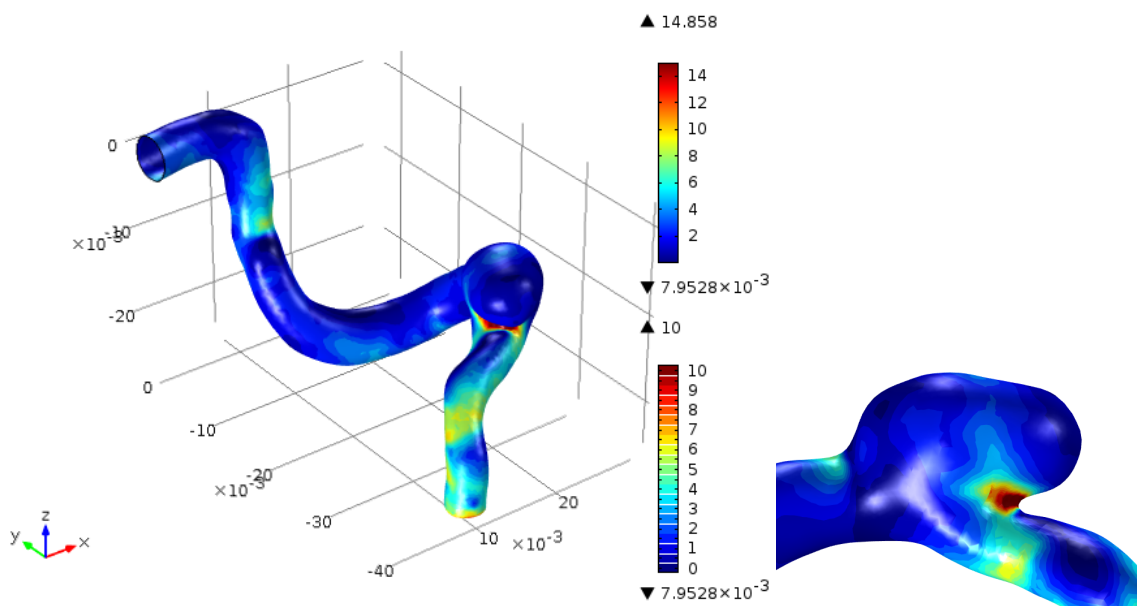


Figura 6.39: Representação da magnitude do WSS do problema controlado.

Também no caso referente ao aneurisma, foi testado o funcional de custo sem o termo do WSS, cujos resultados vieram reforçar as nossas conclusões. Mais uma vez, a presença deste termo no funcional de custo veio melhorar as aproximações do campo de velocidades e do WSS aos dados do problema, com uma melhoria na ordem das 6 casas decimais para a velocidade e de 8 para o WSS, como se apresenta na Tabela 6.5.

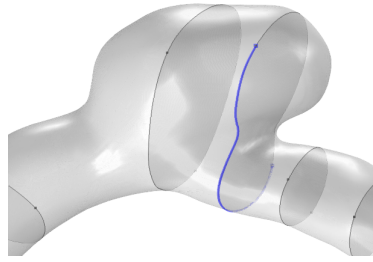


Figura 6.40: Representação da linha no aneurisma ao longo da qual calculamos os valores para a magnitude do WSS.

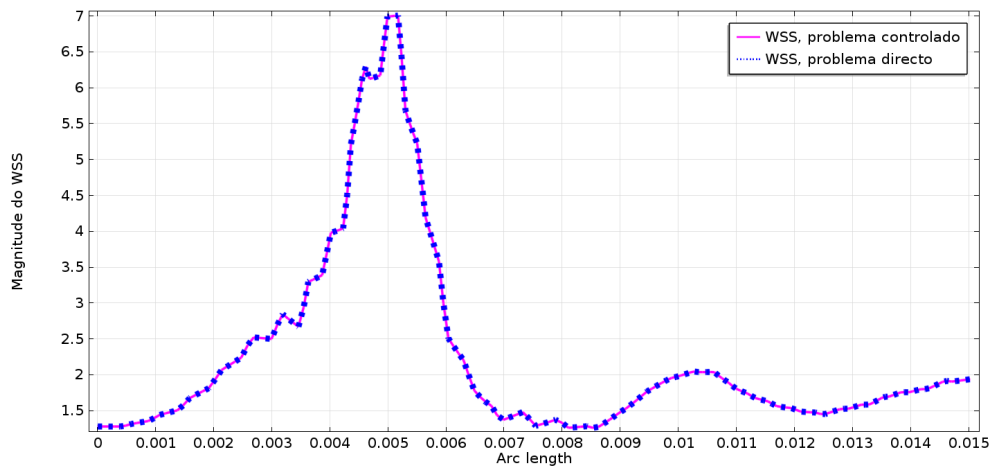


Figura 6.41: Magnitude do WSS no aneurisma em função do comprimento de arco.

Finalmente, os três perfis de entrada já testados anteriormente no canal curvo e no aneurisma, foram também aqui considerados e o problema de controlo resolvido nas mesmas condições e com o mesmo número de Reynolds, com bons resultados obtidos em qualquer um deles. A Tabela 6.6 mostra essas conclusões onde se observam boas aproximações em qualquer dos casos. Mais uma vez a condição de fronteira de entrada controlada foi perfeitamente ajustada à condição de fronteira de entrada dos dados do problema.

Tabela 6.5: Aneurisma: resultados obtidos com e sem o WSS no funcional de custo.

	$(10^6, 10^6)$	$(10^6, 0)$
$\int_{\Omega_{part}} \mathbf{y} - \mathbf{y}_d ^2$	1.241794×10^{-25}	3.993406×10^{-19}
$\int_{\Gamma_{wall}} w - w_d ^2$	2.455794×10^{-22}	7.818832×10^{-16}
CF	2.457036×10^{-16}	3.993406×10^{-13}
$\int_{\Omega} \mathbf{y} - \mathbf{y}_d ^2$	1.148473×10^{-27}	3.667877×10^{-21}
R_e	1.18863×10^{-10}	2.124192×10^{-7}
A_e	3.388912×10^{-14}	6.0563×10^{-11}
$\int_{\Omega} p - p_d ^2$	4.179057×10^{-27}	1.32726×10^{-20}

Tabela 6.6: Aneurisma: resultados para o controle unidimensional nos três perfis de entrada para o campo de velocidades.

	Poiseuille	Lei de Potência $\xi = 4$	Lei de Potência $\xi = 9$
$\int_{\Omega_{part}} \mathbf{y} - \mathbf{y}_d ^2$	1.241794×10^{-25}	4.025603×10^{-27}	5.068999×10^{-27}
$\int_{\Gamma_{wall}} w - w_d ^2$	2.455794×10^{-22}	9.592248×10^{-24}	1.410522×10^{-23}
CF	2.457036×10^{-16}	9.596274×10^{-18}	1.411029×10^{-17}
$\int_{\Omega} \mathbf{y} - \mathbf{y}_d ^2$	1.148473×10^{-27}	3.725043×10^{-29}	4.757373×10^{-29}
R_e	1.18863×10^{-10}	1.634102×10^{-11}	1.554667×10^{-11}
A_e	3.388912×10^{-14}	6.103313×10^{-15}	6.897371×10^{-15}
$\int_{\Omega} p - p_d ^2$	4.179057×10^{-27}	1.982263×10^{-28}	3.267234×10^{-28}

Todos os testes efectuados com o funcional de custo proposto, como o teste de parâmetros, a alteração de geometrias, a alteração do perfil de entrada do campo de velocidades e no caso bidimensional o teste à filtragem de ruído, permitem concluir, quer no caso de controlo em dimensão infinita, quer em dimensão um, ainda que de forma empírica, que o funcional de custo proposto incluindo o WSS é robusto na aproximação do campo de velocidades e do WSS aos dados do problema.

Conclusões e Perspectivas de Trabalhos Futuros

Como tem sido amplamente referido, o conhecimento da reologia do sangue e a possibilidade do intercâmbio de informação e de dados clínicos entre médicos, bioengenheiros e outros cientistas da área têm contribuído para a obtenção de simulações numéricas mais precisas e de resultados mais realistas. Uma das grandes motivações para o estudo de problemas de fluidos, e em particular, da Hemodinâmica, é a contribuição para a prevenção e tratamento de doenças cardiovasculares, uma das actuais grandes causas de morte.

Os resultados teóricos que obtivemos constituem uma contribuição para o estudo de problemas de controlo distribuído aplicados a uma classe particular de fluidos não-Newtonianos, incompressíveis, no espaço tridimensional. Usando resultados conhecidos para a regularidade das soluções da equação de estado, no caso pseudoplástico, mostrámos a existência de solução para o problema de controlo associado usando o Método Directo do Cálculo das Variações. Foram deduzidas estimativas de energia e uma estimativa de Lipschitz para a solução. Estudámos a equação de estado linearizada com vista a provar a diferenciabilidade de Gâteaux da aplicação que a cada controlo u faz corresponder um estado y e finalmente, deduzimos as condições de optimalidade.

Por outro lado, para fluidos electro-reológicos, cujo comportamento alterna entre pseudoplástico e dilatante, foi também demonstrada a existência de solução para o problema de controlo à semelhança do caso anterior. Muito trabalho há ainda a fazer neste caso, e faz parte dos nossos objectivos num futuro próximo.

Relativamente às simulações numéricas efectuadas, sempre no quadro estacionário, o trabalho foi dividido em duas partes, a primeira consistiu em efectuar simulações em domínios bidimensionais e a segunda em tridimensionais, em ambos os casos com dados sintéticos, gerados a partir da resolução do problema directo.

No caso bidimensional, foi proposto um método DA baseado numa abordagem variacional que permitisse reconstruir numericamente o comportamento mecânico da circulação do sangue nos domínios propostos.

Introduzimos um funcional de custo diferente do que é habitual que tem em conta o papel do WSS no processo de optimização e concluímos, testando os parâmetros w_1 , w_2 e w_3 , que a inclusão do WSS

no custo permite obter melhores resultados na aproximação do campo de velocidades e também do próprio WSS, aos dados correspondentes. Esta conclusão é válida tanto no caso bidimensional como no tridimensional. A importância da presença de um termo regularizador no custo foi também testada. Observámos que, na ausência do termo regularizador, obtemos um controlo completamente irregular conduzindo a um falso mínimo.

Propusémos um conjunto de parâmetros para (w_1, w_2, w_3) , com os quais obtivemos bons resultados tendo em conta o equilíbrio entre a precisão das aproximações e o esforço computacional. Concluimos que o conjunto de parâmetros $(w_1, w_2, w_3) = (10^6, 10^6, 10^{-3})$ é uma boa escolha quando comparado com os outros conjuntos testados tendo em conta a relação entre o objectivo de obter boas aproximações e número de iterações para chegar aos resultados.

O método foi validado através dos vários testes que efectuámos quer no caso bidimensional, quer no caso tridimensional. Testámos a robustez do método com respeito à alteração dos domínios do problema e também com respeito à mudança de perfil para o campo de velocidades na fronteira de entrada usando a Lei de Potência com expoentes 4 e 9. Em qualquer dos casos o funcional de custo foi minimizado e o campo de velocidades assim como o WSS foram aproximados aos dados com erros bastante pequenos.

Ainda no caso bidimensional, testámos a eficácia do método com respeito à filtragem de ruído, adicionando diferentes quantidades de ruído aos dados do problema incluindo a fronteira de entrada. As conclusões são consistentes com os resultados obtidos em [43] para o problema Newtoniano. O método DA apresenta melhores resultados na correcção do ruído que a resolução directa do problema (problema directo).

No caso tridimensional, deparámo-nos com dificuldades acrescidas, por um lado por existir mais uma dimensão nas variáveis, e por outro, porque os domínios se tornam mais complexos. Como forma de abordar o problema optámos por resolver um problema mais simples, com controlo unidimensional, isto é, em vez de aproximarmos o perfil parabólico da velocidade na fronteira de entrada, introduzimos um controlo cujo objectivo é aproximar a velocidade máxima na entrada, ou seja, uma constante. Desta forma, o termo com respeito ao controlo deixou de fazer sentido no funcional de custo introduzido antes, e foi portanto retirado. Para os termos da velocidade e do WSS, os parâmetros foram mantidos.

O problema de controlo unidimensional foi resolvido em vários domínios tridimensionais e em todos os casos foram obtidas boas aproximações aos dados considerados. Nos casos referentes à estenose e ao aneurisma, resolvemos também o problema de controlo sem o termo do WSS e a conclusão a que chegámos veio reforçar a que já tínhamos obtido no caso bidimensional: a presença do termo do WSS é um factor que aumenta a precisão das aproximações, quer do campo de velocidades quer do WSS.

Nos domínios referentes ao canal curvo, à estenose e ao aneurisma foram também testados os diferentes perfis da Lei de Potência, com expoentes 4 e 9 para o campo de velocidades na entrada, com sucesso, à semelhança do que tinha sido feito no caso bidimensional.

O próximo passo seria então, nas mesmas condições, implementar o controlo em dimensão infinita. No caso do canal, foram apresentados os resultados obtidos, embora sejam ainda resultados preliminares. As aproximações do campo de velocidades e do WSS foram boas e obtivemos uma aproximação do controlo ao perfil do campo de velocidades na entrada quase perfeita, mas que apresenta ainda assim, ligeiras irregularidades. Nos restantes casos, não foi conseguido um ajuste aceitável, pelo que, será necessário um estudo suplementar que permita identificar quais os factores que contribuem para a insensibilidade do custo relativamente ao controlo. Esse estudo não está ainda completo, e é por isso que não se apresenta

neste trabalho, embora seja nosso objectivo terminá-lo em breve.

Como já referimos, existe muito trabalho a ser feito, o que nos motiva para a investigação e para o estudo nesta área. Para dar continuidade ao trabalho feito aqui, elencamos alguns pontos que fazem parte dos nossos objectivos:

- i) terminar o estudo de problemas com domínios tridimensionais e com controlo em dimensão infinita;
- ii) usar diferentes geometrias reais e dados reais nas simulações;
- iii) introduzir a variável do tempo nos cálculos, resolvendo problemas evolutivos;
- iv) introduzir mais do que um controlo no sistema, eventualmente um controlo para a velocidade ou um controlo para a pressão. Recordemos que o funcional de custo proposto neste trabalho não contém nenhum termo para a pressão. Ou ainda um controlo do tipo de Neumann;
- v) considerar, no funcional de custo, o WSS calculado apenas em algumas partes da fronteira da geometria. Recordemos que, nos casos que estudámos, o termo do funcional de custo referente ao WSS é calculado em toda a fronteira da geometria, isto é, assumindo como dados conhecidos o WSS em toda a fronteira, o que torna o problema menos realista, do ponto de vista das aplicações. Este é também um aspecto que pretendemos melhorar no futuro, onde o nosso objectivo será incluir no custo um termo do WSS, considerando-o conhecido em apenas algumas regiões da fronteira, onde existam pontos onde a velocidade também seja conhecida. Este é um procedimento que está em fase de estudo preliminar.
- vi) estudar, do ponto de vista teórico, o problema de controlo aqui tratado, no que diz respeito à demonstração de existência de solução e dedução das condições de optimalidade. Note-se que, para efectuarmos as simulações cujos resultados apresentámos aqui, tivémos de assumir a regularidade suficiente das soluções que garantissem que o problema estava bem posto. Tanto quanto sabemos, o problema de controlo com o funcional de custo incluindo um termo para o WSS não foi ainda tratado. Este é outro dos caminhos que pretendemos seguir.

Mas a investigação é um trabalho imprevisível. O aprofundamento do conhecimento e a obtenção de resultados traçam os caminhos, muitas vezes inesperados, e as metas a atingir. Outros desafios se colocam e novos problemas surgem. Sabemos que o percurso não será fácil, mas será decerto desafiante.

8.1 Anexo A - Simulação numérica de um problema de controlo distribuído num cilindro

Neste anexo consideramos o problema de controlo distribuído (3.0.2) com $\nu = 1$, estudado no Capítulo 3 com alterações relativamente às condições de fronteira, por se tratar de um caso mais interessante em termos das aplicações. O domínio Ω é um cilindro de raio $R = 3.1 \text{ mm}$ e comprimento $10R$ (usamos as mesmas dimensões que anteriormente) que representa um vaso sanguíneo idealizado (ver Figura 8.1) onde circula o sangue, para o qual iremos usar valores fisiológicos. Supomos que na fronteira de entrada do cilindro, Γ_{in} , o campo de velocidades tem um comportamento do tipo de Poiseuille, na fronteira de saída Γ_{out} , supomos que a pressão é nula e na fronteira Γ_{wall} , isto é, nas paredes do vaso sanguíneo impomos uma condição de Dirichlet homogénea (ou aderência) $\mathbf{y} = 0$.

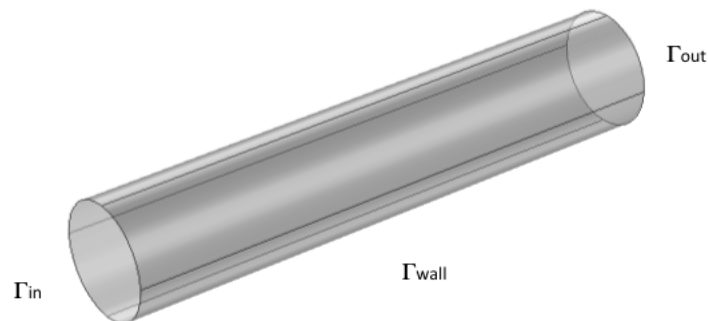


Figura 8.1: Domínio computacional.

Usamos o Método dos Elementos Finitos, descrito na Secção 5.2, com as aproximações finitas para a

velocidade e pressão dadas por (5.2.4), os espaços para as funções teste \mathbf{V} e \mathbf{Q} dados por (5.2.1) e (5.2.2) e os correspondentes espaços em dimensão finita \mathbf{V}_h e \mathbf{Q}_h , correspondentes aos elementos ($P1-P1$) estabilizados, ou seja, funções lineares para a velocidade e para a pressão. Usamos os estabilizadores *streamline diffusion* e *crosswind diffusion* descritos sucintamente na Secção 6.1.

Considera-se um fluido Newtoniano generalizado definido pelas equações

$$\begin{cases} -div(\tau(D\mathbf{y})) + \mathbf{y} \cdot \nabla \mathbf{y} + \nabla p = \mathbf{u} & \text{em } \Omega, \\ div \mathbf{y} = 0 & \text{em } \Omega, \end{cases} \quad (8.1.1)$$

com viscosidade pseudoplástica definida pela lei de Carreau e com as condições de fronteira acima descritas. As equações foram resolvidas com $\mathbf{u} = (-1, 0, 0)$, que representa a imposição de uma força com magnitude 1 e sentido contrário ao sentido do movimento do fluido.

Como soluções iniciais para o processo iterativo, usámos velocidade e pressão iguais a zero e os parâmetros usados para a viscosidade são os fornecidos na Tabela 4.1. Usamos a massa específica do sangue $\rho = 1050 \text{ Kg/m}^3$, e uma velocidade máxima à entrada do canal de $U_0 = 0.0993 \text{ m/s}$ que corresponde a um número de Reynolds médio de 90.

Usámos uma malha constituída por elementos do tipo tetraedros, prismas, triangulares e quadriláteros, num total de 35781 elementos. A qualidade mínima registada foi de 0.08412 e a média de 0.5992 num máximo de 1.

As soluções obtidas através da resolução das equações (8.1.1) com \mathbf{u} dado, foram consideradas como dados observados em todo o domínio para o problema de controlo. O objectivo do problema de controlo é minimizar a diferença entre as soluções obtidas para o problema directo e as soluções obtidas para o problema de controlo, a menos de um determinado erro, em todo o cilindro Ω .

Na resolução do problema de controlo, considerámos valores iniciais para a velocidade e pressão iguais a zero, à semelhança do problema directo. O controlo foi imposto em todo o domínio Ω , através da substituição da força \mathbf{u} por uma função vectorial

$$cont = (cont_x, cont_y, cont_z),$$

cujo objectivo é aproximar a força \mathbf{u} dada no problema e minimizar a função custo. Para o controlo usámos os valores iniciais iguais a $cont_0 = (0.5, 0.5, 0.5)$ para iniciar o processo iterativo.

Os resultados obtidos para a velocidade e pressão nos problemas directo e controlado podem ser observados nas figuras 8.2 - 8.5.

8.1. Anexo A - Simulação numérica de um problema de controlo distribuído num cilindro

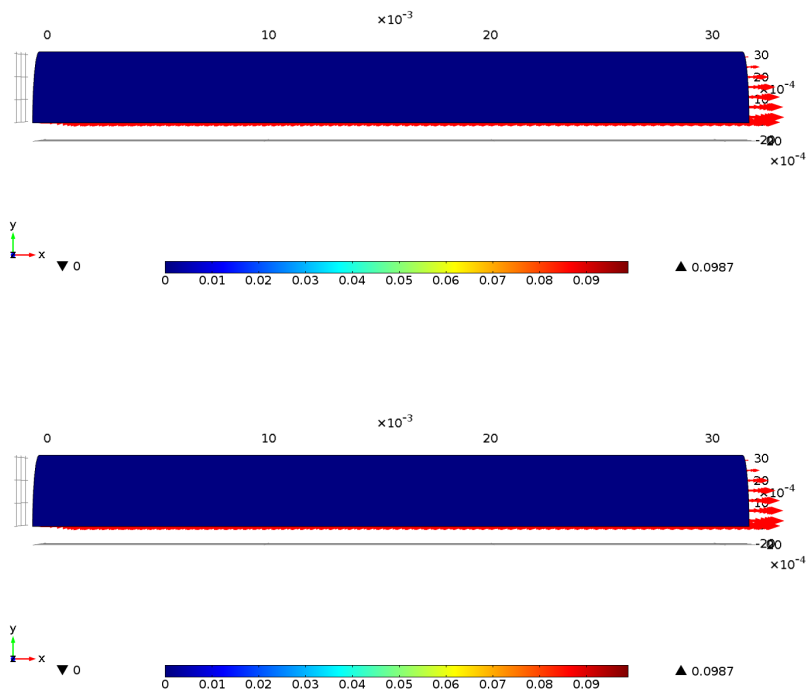


Figura 8.2: Perfil da velocidade no canal. Em cima: problema directo; em baixo: problema controlado.

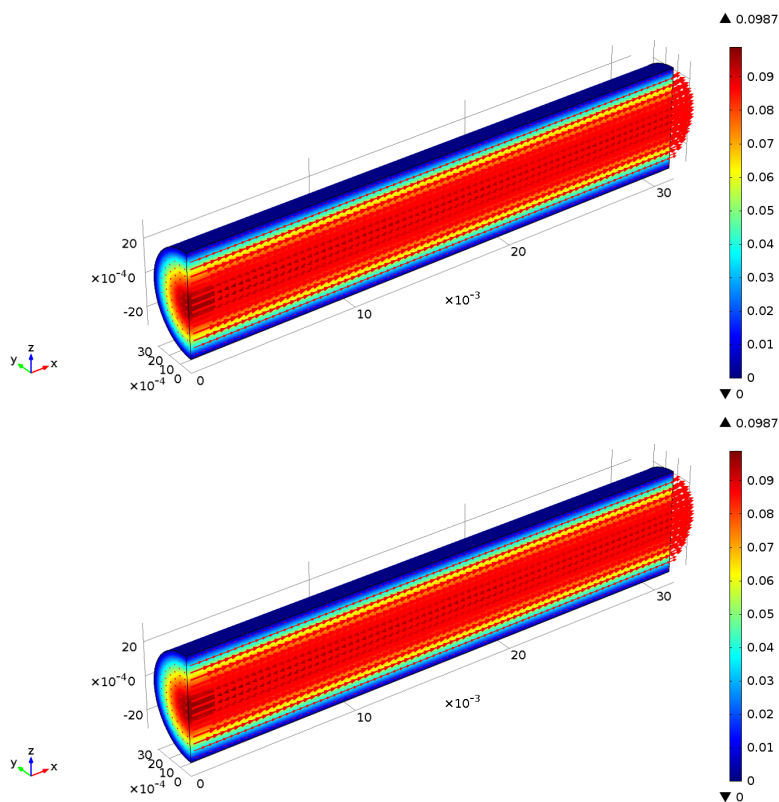


Figura 8.3: Representação da magnitude da velocidade. Em cima: problema directo; em baixo: problema controlado.

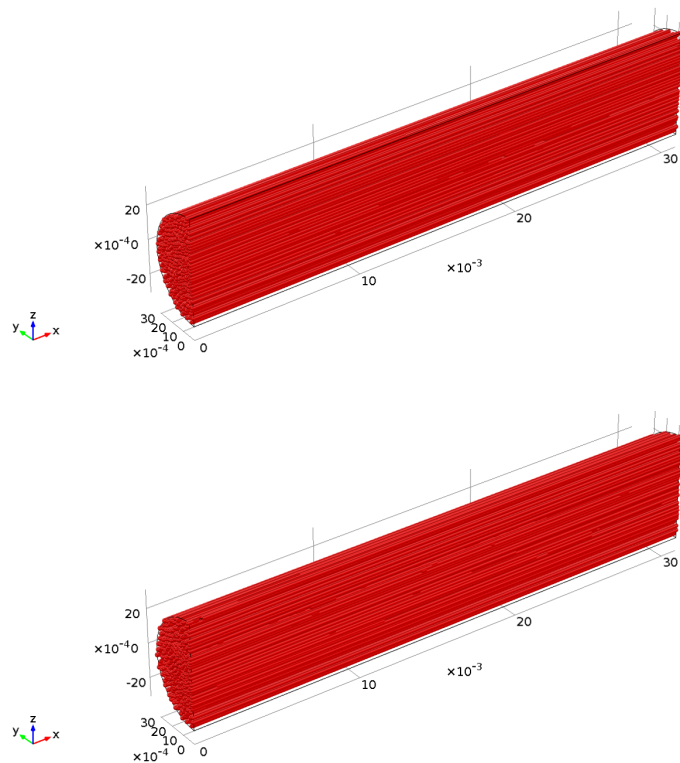


Figura 8.4: Representação das linhas de corrente para a velocidade. Em cima: problema directo; em baixo: problema controlado.

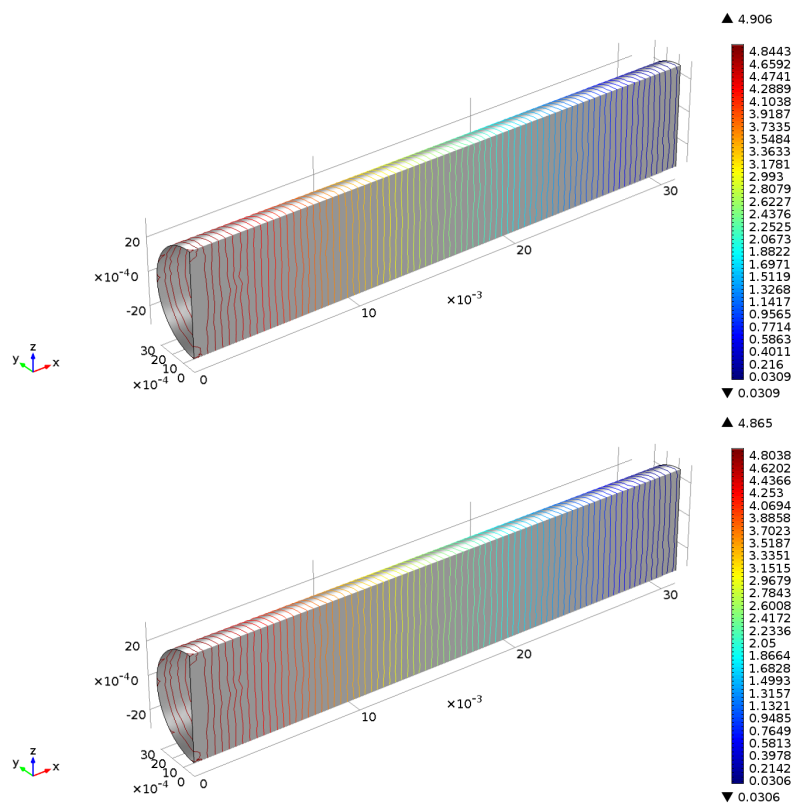


Figura 8.5: Representação dos valores para a pressão. Em cima: problema directo; em baixo: problema controlado.

Na Tabela 8.1 apresentamos os resultados obtidos e que ilustram a ordem das aproximações obtidas para cada um dos integrais na resolução do problema de controlo. Além das componentes do custo, a diferença de velocidades e o controlo, e do próprio valor da função custo, avaliamos também outros factores, como as diferenças da pressão, $\int_{\Omega} |p - p_d|^2$, da vorticidade, $\int_{\Omega} |vort - vort_d|^2$, e da taxa de cisalhamento, $\int_{\Omega} |shr - shr_d|^2$, entre os problemas directo e controlado. A norma $\|\cdot\|_2$ representa a norma no espaço de Lebesgue L^2 . Pode observar-se que nas vertentes avaliadas, o problema controlado conseguiu aproximar bem o problema inicial, incluindo a velocidade e a pressão, que são as variáveis da equação de estado. A função custo foi minimizada na ordem de 10^{-7} .

Tabela 8.1: Comparação entre os valores do problema directo e os valores do problema controlado no cilindro.

	Valores obtidos
$\int_{\Omega} \mathbf{y} - \mathbf{y}_d ^2$	7.143612×10^{-17}
$\int_{\Omega} \mathbf{u} ^2$	2.652581×10^{-7}
CF	1.326291×10^{-7}
$\frac{\ \mathbf{y} - \mathbf{y}_d\ _2}{\ \mathbf{y}_d\ _2}$	3.350096×10^{-4}
$\ \mathbf{y} - \mathbf{y}_d\ _2$	8.451989×10^{-9}
$\int_{\Omega} p - p_d ^2$	9.109211×10^{-17}
$\int_{\Omega} vort - vort_d ^2$	1.404399×10^{-10}
$\int_{\Omega} shr - shr_d ^2$	1.422828×10^{-10}

8.2 Anexo B - Resultados clássicos

Neste anexo incluímos alguns resultados básicos de Análise Matemática que são usados frequentemente nos Capítulos anteriores.

Seja L_t uma família de funções que a cada $\xi \in \Omega_0$ associa uma posição x de uma partícula de fluido num tempo $t \in I$. O domínio Ω_0 é o domínio ocupado pelo fluido no tempo t_0 , e Ω_t é o domínio ocupado pelo fluido no tempo t ,

$$L_t : \Omega_0 \rightarrow \Omega_t$$

$$\xi \rightarrow L_t(\xi) = x = x(t, \xi).$$

L_t é uma função lagrangeana no tempo t , e supõem-se que é contínua e invertível em $\bar{\Omega}_0$ com inversa contínua.

Teorema 8.2.1 (Teorema do Transporte de Reynolds). *Seja $V_0 \subset \Omega_0$, e $V_t \subset \Omega_t$ onde V_t é a imagem de V_0 através da aplicação L_t . Seja $f : I \times \Omega_t \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua e diferenciável com respeito a x, t . Então*

$$\frac{d}{dt} \int_{V_t} f = \int_{V_t} \left(\frac{Df}{Dt} + f \operatorname{div} \mathbf{y} \right) = \int_{V_t} \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \operatorname{div}(f \mathbf{y}) \right) \quad (8.2.1)$$

onde $\frac{Df}{Dt}$ é a derivada material de f e \mathbf{y} é a velocidade do fluido. A equação (8.2.1) diz-se a fórmula do transporte de Reynolds.

Demonstração. Ver por exemplo [5]. □

Nota 8.2.1. *Aplicando o Teorema da Divergência, a equação (8.2.1) pode escrever-se na forma*

$$\frac{d}{dt} \int_{V_t} f = \int_{V_t} \frac{\partial f}{\partial t} + \int_{\partial V_t} f \mathbf{y} \cdot \mathbf{n} \quad (8.2.2)$$

Teorema 8.2.2 (Princípio de Cauchy). *Existe um campo vectorial \mathbf{t} , chamado tensão de Cauchy,*

$$\mathbf{t} : I \times \Omega_t \times S \rightarrow \mathbb{R}^3$$

onde

$$S = \{ \mathbf{n} \in \mathbb{R}^3 : |\mathbf{n}| = 1 \}$$

tal que o integral na superfície de um domínio material $V_t \subset \Omega_t$, dado por

$$\int_{\partial V_t} \mathbf{t}(t, x, \mathbf{n}),$$

onde \mathbf{n} é o vector normal exterior a ∂V_t , é equivalente à resultante das forças de continuidade actuando em V_t onde as forças de continuidade são as forças que as partículas exercem entre si e são responsáveis por manter a continuidade do material durante o movimento (forças de superfície).

Demonstração. Consultar [5] para algumas ideias. □

Teorema 8.2.3 (Teorema do Tensor das Tensões de Cauchy). *Suponhamos que para qualquer $t \in I$, as forças de volume ou de corpo f , a massa específica ρ e a derivada material $\frac{Dy}{Dt}$ são funções limitadas em Ω_t e que o vector da tensão de Cauchy \mathbf{t} é continuamente diferenciável com respeito à variável x para cada $\mathbf{n} \in S$ e contínuo com respeito a \mathbf{n} . Então, existe um tensor simétrico, continuamente diferenciável, chamado tensor das tensões de Cauchy,*

$$T : I \times \bar{\Omega}_t \rightarrow \mathbb{R}^{3 \times 3},$$

medido em N/m^2 , tal que

$$\mathbf{t}(t, x, \mathbf{n}) = T(t, x) \cdot \mathbf{n} \quad \forall t \in I, \forall x \in \Omega_t, \forall \mathbf{n} \in S.$$

Demonstração. Ver [9]. □

Teorema 8.2.4 (Teorema da Divergência). *Seja V um sólido limitado por uma superfície fechada e orientada S no espaço tridimensional e seja \mathbf{n} o vector unitário normal a S . Se F é um campo vectorial continuamente diferenciável definido em V , então*

$$\int_V \operatorname{div} F \, dx = \int_S F \cdot \mathbf{n} \, dS.$$

Demonstração. Ver [61]. □

Lema 8.2.1 (Desigualdade de Young). *Suponhamos que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, para $1 < p, q < \infty$ ou $p = 1$, $q = \infty$ e $a, b \geq 0$. Então,*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Demonstração. Ver [30]. □

Lema 8.2.2 (Desigualdade de Hölder). *Suponhamos que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, para $1 < p, q < \infty$ ou $p = 1$, $q = \infty$. Então, para $u \in \mathbf{L}^p(\Omega)$ e $v \in \mathbf{L}^q(\Omega)$ tem-se que*

1. $uv \in \mathbf{L}^1(\Omega)$;

$$2. \|uv\|_1 \leq \|u\|_p \|v\|_q.$$

Demonstração. A demonstração é feita com base na desigualdade de Young, ver [30]. \square

Teorema 8.2.5 (Teorema de Lax-Milgram). *Seja \mathbf{H} um espaço de Hilbert e $a(u, v) : \mathbf{H} \times \mathbf{H} \rightarrow \mathbb{R}$ uma forma bilinear verificando as seguintes condições:*

1. *existe uma constante $C > 0$ tal que*

$$|a(u, v)| \leq C \|u\|_H \|v\|_H, \quad \forall u, v \in \mathbf{H} \quad (\text{continuidade});$$

2. *existe uma constante $\alpha > 0$ tal que*

$$a(v, v) \geq \alpha \|v\|_H^2, \quad \forall v \in \mathbf{H} \quad (\text{coercividade}).$$

Então, para qualquer $\varphi \in \mathbf{H}'$, existe um único $u \in \mathbf{H}$ tal que

$$a(u, v) = \langle \varphi, v \rangle, \quad \forall v \in \mathbf{H}.$$

Além disso, se a for simétrica, então caracteriza-se pela propriedade

$$u \in \mathbf{H} \quad e \quad \frac{1}{2}a(u, u) - \langle \varphi, u \rangle = \min_{v \in \mathbf{H}} \left\{ \frac{1}{2}a(v, v) - \langle \varphi, v \rangle \right\}.$$

Demonstração. Consultar [23]. \square

Teorema 8.2.6 (Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue). *Seja (f_n) uma sucessão de funções em $\mathbf{L}^1(\Omega)$. Suponhamos que*

1. $f_n(x) \rightarrow f(x)$ para quase todo $x \in \Omega$;
2. *existe uma função $g \in \mathbf{L}^1(\Omega)$ tal que, para cada $n \in \mathbf{N}$ temos*

$$|f_n(x)| \leq |g(x)|$$

para quase todo $x \in \Omega$.

Então $f \in \mathbf{L}^1(\Omega)$ e

$$\|f_n - f\|_1 \rightarrow 0.$$

Demonstração. Consultar [23]. \square

Teorema 8.2.7 (Teorema de Rellich-Kondrachov). *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio limitado de classe C^1 . Tem-se que*

1. *se $\alpha < n$ então $\mathbf{W}^{1,\alpha}(\Omega) \hookrightarrow \mathbf{L}^q(\Omega)$, para qualquer $1 \leq q < \alpha^*$ onde $\alpha^* = \frac{\alpha n}{n-\alpha}$;*
2. *se $\alpha = n$ então $\mathbf{W}^{1,\alpha}(\Omega) \hookrightarrow \mathbf{L}^q(\Omega)$, para qualquer $1 \leq q < +\infty$;*
3. *se $\alpha > n$ então $\mathbf{W}^{1,\alpha}(\Omega) \hookrightarrow \mathbf{C}(\bar{\Omega})$.*

com injecções compactas. Em particular, $\mathbf{W}^{1,\alpha}(\Omega) \hookrightarrow \mathbf{L}^\alpha(\Omega)$, com injecção compacta, para qualquer α .

Demonstração. Consultar [23]. □

Definição 8.2.1. *Seja Ω um aberto de \mathbb{R}^n ,*

1. *se $1 \leq \alpha \leq \infty$, dizemos que $f_n \in L^\alpha(\Omega)$ converge (fortemente) para $f \in L^\alpha(\Omega)$ se*

$$\|f_n - f\|_\alpha \rightarrow 0,$$

e escrevemos $f_n \rightarrow f$ em $L^\alpha(\Omega)$.

2. *se $1 \leq \alpha < \infty$, dizemos que $f_n \in L^\alpha(\Omega)$ converge fracamente para $f \in L^\alpha(\Omega)$ se*

$$(f_n, \varphi) \rightarrow (f, \varphi), \quad \forall \varphi \in L^{\alpha'}(\Omega),$$

onde $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha'} = 1$ e escrevemos $f_n \rightharpoonup f$ em $L^\alpha(\Omega)$.

Teorema 8.2.8 (Relação entre convergência forte e convergência fraca em espaços de Lebesgue). *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado. Temos que*

1. *$f_n \rightarrow f$ em $L^\alpha(\Omega) \Rightarrow f_n \rightharpoonup f$ em $L^\alpha(\Omega) \quad \forall 1 \leq \alpha < \infty$;*
2. *$f_n \rightarrow f$ em $L^\alpha(\Omega) \Rightarrow \|f_n\|_\alpha \rightarrow \|f\|_\alpha$ em $L^\alpha(\Omega) \quad \forall 1 \leq \alpha \leq \infty$;*
3. *Se $1 \leq \alpha < \infty$ e se $f_n \rightharpoonup f$ em $L^\alpha(\Omega)$, então existe uma constante $k > 0$ tal que $\|f_n\|_\alpha \leq k$ e $\|f\|_\alpha \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|f_n\|_\alpha$.*
4. *Se $1 < \alpha < \infty$ e se existe uma constante $k > 0$ tal que $\|f_n\|_\alpha \leq k$, então existe uma subsucessão $\{f_{n_i}\}$ e $f \in L^\alpha(\Omega)$ tal que $f_{n_i} \rightharpoonup f$ em $L^\alpha(\Omega)$.*
5. *Seja $1 \leq \alpha \leq \infty$ e $f_n \rightarrow f$ em $L^\alpha(\Omega)$, então existe uma subsucessão $\{f_{n_i}\}$ tal que $f_{n_i} \rightarrow f$ q.s. e $|f_{n_i}| \leq h$ q.s. com $h \in L^\alpha(\Omega)$.*

Demonstração. Consultar [23] e [10]. □

Referências Bibliográficas

- [1] A. Çengel and J.M. Cimbala, *Mecânica dos Fluidos, Fundamentos e Aplicações*. McGraw-Hill, 1 edição, 2007. Citado na pág. 2, 9, 10, 12, 13
- [2] A. Gambaruto, J. Janela, A. Moura and A. Sequeira, Sensitivity of hemodynamics in a patient specific cerebral aneurysm to vascular geometry and blood rheology. *Mathematical Biosciences and Engineering*, 8(2):409–423, 2011. Citado na pág. 6, 77, 78, 81, 111
- [3] A. Leuprecht and K. Perktold, Computer Simulation of Non-Newtonian Effects on Blood Flow in Large Arteries. *Computer Methods in Biomechanics and Biomechanical Engineering*, 4(2): 149–163, 2001. Citado na pág. 78
- [4] A. Manzanares, *Hidráulica Geral I*. Técnica, 1979. Citado na pág. 9, 10
- [5] A. Quarteroni and L. Formaggia, *Mathematical Modelling and Numerical Simulation of the Cardiovascular System, Modelling of Living Systems*. Handbook of Numerical Analysis Series, Elsevier, Amsterdam, 2002. Citado na pág. 6, 7, 9, 13, 15, 21, 22, 73, 81, 98, 146, 147
- [6] A. Quarteroni, *Numerical Models for Differential Problems*. Springer-Verlag MS&A, vol.2, Milano, 2009. Citado na pág. 98
- [7] A. Quintela, *Hidráulica*. Fundação Calouste Gulbenkian, 2002. Citado na pág. 9, 10
- [8] A. Robertson, A. Sequeira and M. Kameneva, *Hemorheology. Hemodynamical Flows. Modeling, Analysis and Simulation*. Birkhauser Verlag Basel/Switzerland, 37:63–120, 2008. Citado na pág. xix, 6, 7, 73, 75, 76, 78, 79, 81
- [9] A. Rutherford, *Vectors, Tensors and the Basic Equations of Fluid Mechanics*. Prentice Hall, 1962. Citado na pág. 147
- [10] B. Dacorogna, *Introduction au Calcul des Variations*. Presses Polytechniques et Universitaires Romandes, 1992. Citado na pág. 45, 71, 149
- [11] D. Wachsmuth and T. Roubíček, Optimal control of incompressible non-Newtonian fluids. *Z. Anal. Anwendungen*, (29):351–376, 2010. Citado na pág. 5, 62, 84
- [12] H. Beirão da Veiga, On the regularity of flows with Ladyzhenskaya shear-dependent viscosity and slip or non-slip boundary conditions. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 58(4): 552–577, 2005. Citado na pág. 5
- [13] H. Beirão da Veiga, On the global regularity of shear-thinning flows in smooth domains. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 349(2):335–360, 2009. Citado na pág. 5

- [14] H. Beirão da Veiga, On the Ladyzhenskaya-Smagorinsky turbulence model of the Navier-Stokes equations in smooth domains. The regularity problem. *Journal of European Mathematical Society*, 11:127–167, 2009. Citado na pág. 5
- [15] H. Beirão da Veiga, P. Kaplický, and M. Růžička, Boundary regularity of shear-thickening flows. *Journal of Mathematical Fluid Mechanics*, 13(3):387–404, 2011. Citado na pág. 5
- [16] E. Casas and L. A. Fernandez, Distributed control of systems governed by a general class of quasilinear elliptic equations. *Journal of Differential Equations*, 104(1):20–47, 1993. Citado na pág. 5, 25, 40, 52, 62, 84
- [17] E. Casas and L. A. Fernandez, Boundary control of quasilinear elliptic equations. *Rapports de Recherche, INRIA*, (782), 1988. Citado na pág. 5, 25, 62, 84
- [18] F. Crispo and C. R. Grisanti, On the existence, uniqueness and $C^{1,\gamma}(\bar{\Omega}) \cap W^{2,2}(\Omega)$ regularity for a class of shear-thinning fluids. *Journal of Mathematical Fluid Mechanics*, 10(4):445–487, 2008. Citado na pág. 5, 31, 38, 39
- [19] F. Crispo and C. R. Grisanti, On the $C^{1,\gamma}(\bar{\Omega}) \cap W^{2,2}(\Omega)$ regularity for a class of electro-rheological fluids. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 356(1):119–132, 2009. Citado na pág. 5, 62, 66
- [20] F. Tröltzsch, *Optimal Control of Partial Differential Equations, Theory, Methods and Applications*. vol. 112. American Mathematical Society, 2010. Citado na pág. 2
- [21] G. Bar-Meir, *Basics of Fluid Mechanics*. Free Software Foundation, Inc., 2011. Citado na pág. 2, 3, 9
- [22] G. Smirnov and V. Bushenkov, *Curso de Optimização. Programação Matemática, Cálculo das Variações, Controlo Ótimo*. Escolar Editora, 2005. Citado na pág. 2
- [23] H. Brézis, *Análisis funcional, Teoría y Aplicaciones*. Alianza Editorial, S.A, Madrid, 1984. Citado na pág. 31, 45, 71, 148, 149
- [24] H. Meng, Z. Wang, Y. Hoi, L. Gao, E. Metaxa, D. Swartz and J. Kolega, Complex hemodynamics at the apex of an arterial bifurcation induces vascular remodeling resembling cerebral aneurysm initiation. *Stroke*, 38:1924 – 1931, 2007. Citado na pág. 6
- [25] J. Burkardt, M. Gunzburger and J. Peterson, Insensitive Functionals, Inconsistent Gradients, Spurious Minima, and Regularized Functionals in Flow Optimization Problems. *International Journal of Computational Fluid Dynamics*, 16(3):171–185, 2002. Citado na pág. 62, 92, 94
- [26] J. Cezbral, M. Castro, J. Burgess, R. Pergolizzi, M. Sheridan and C. Putman, Characterization of Cerebral Aneurysms for Assessing Risk of Rupture by Using Patient-Specific Computational Hemodynamics Models. *American Journal of Neuroradiology*, 26:2550–2559, 2005. Citado na pág. 6
- [27] J. Claes, *Numerical Solution of Partial Differential Equations by the Finite Element Method*. Studentlitteratur, 1987. Citado na pág. 54
- [28] J. Frehse, J. Málek and M. Steinhauer, On analysis of steady flows of fluids with shear-dependent viscosity based on the Lipschitz truncation method. *SIAM Journal of Mathematical Analysis*, 34(5):1064–1083, 2003. Citado na pág. 5
- [29] J. Lions, *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires*. Dunod, Gauthier-Villars, Paris, 1969. Citado na pág. 4, 32, 35, 70
- [30] J. Málek, J. Nečas, J. Rokyta and M. Růžička, *Weak and Measure-Valued Solutions to Evolutionary PDEs*, vol. 13, Chapman and Hall, London, 1996. Citado na pág. 5, 26, 29, 31, 32, 147, 148

- [31] J. Málek, J. Nečas and M. Růžička, On weak solutions to a class of non-Newtonian incompressible fluids in bounded three-dimensional domains: the case $p \geq 2$. *Advances in Differential Equations*, 6(3):257–302, 2001. Citado na pág. 5
- [32] J. Málek and K. Rajagopal, Mathematical issues concerning the Navier-Stokes equations and some of its generalizations. *Handbook of Differential Equations, Evolutionary Equations*, 2:371–459, 2005. Citado na pág. 4
- [33] J. Málek, K. Rajagopal and M. Růžička, Existence and regularity of solutions and the stability of the rest state for fluids with shear dependent viscosity. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, 5(6):789–812, 1995. Citado na pág. 4
- [34] J. Málek and T. Roubíček, Optimization of steady flows for incompressible viscous fluids. *Applied Nonlinear Analysis*, 355–372, 2002. Citado na pág. 5
- [35] K. Rajagopal and M. Růžička, Mathematical Modeling of Electrorheological Materials. *Continuum Mechanics and Thermodynamics*, 13(1):59–78, 2001. Citado na pág. 62
- [36] L. Berselli, L. Diening and M. Růžička, Existence of Strong Solutions for Incompressible Fluids with Shear Dependent Viscosities. *Journal of Mathematical Fluid Mechanics*, 12(1):101–132, 2010. Citado na pág. 5
- [37] L. Diening and M. Růžička, Non-Newtonian fluids and function spaces. *Nonlinear Analysis, Function Spaces and Applications*, 8:95–143, 2007. Citado na pág. 62
- [38] L. Formaggia, F. Saleri and A. Veneziani, *Solving Numerical PDEs: Problems, Applications, Exercises*. Springer, Milan, 2011. Citado na pág. 31
- [39] M. J. Crochet, A. R. Davies and K. Walters, *Numerical Simulation of Non-Newtonian Flow*. Elsevier Science Publishers B.V., New York, 1984. Citado na pág. 86, 109
- [40] M. D’Elia and A. Veneziani, A Data Assimilation technique for including noisy measurements of the velocity field into Navier-Stokes simulations. *Proc. of V European Conference on Computational Fluid Dynamics, ECCOMAS*, 2010. Citado na pág. 6, 82, 104
- [41] M. D’Elia, *Assimilation of velocity data into fluid dynamic simulations, an application to computational hemodynamics*. PhD thesis, Emory University, 2011. Citado na pág. 6
- [42] M. D’Elia and A. Veneziani, Methods for assimilating blood velocity measures in hemodynamics simulations: preliminary results. *Procedia Computer Science*, 1(1):1225–1233, 2010. Citado na pág. 82
- [43] M. D’Elia, M. Perego and A. Veneziani, A Variational Data Assimilation Procedure for the Incompressible Navier-Stokes Equations in Hemodynamics. *Journal of Scientific Computing*, 52(2):340–359, 2012. Citado na pág. 6, 7, 82, 85, 92, 138
- [44] H. Elman, D. Silvester and A. Wathen, *Finite Elements and Fast Iterative Solvers with Applications in Incompressible Fluid Dynamics*. Oxford University Press, 2005. Citado na pág. 9, 13, 109
- [45] M. Gunzburger, Adjoint Equation-Based Methods for Control Problems in Incompressible, Viscous Flows. *Flow, Turbulence and Combustion*, 65(3):249–272, 2000. Citado na pág. 85
- [46] M. Gunzburger, *Perspectives in Flow Control and Optimization*. SIAM, Philadelphia, 2003. Citado na pág. 2, 92, 94
- [47] M. Gunzburger and C. Trenchea, Analysis of an optimal control problem for the three-dimensional coupled modified Navier-Stokes and Maxwell equations. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 333(1):295–310, 2007. Citado na pág. 5, 84

- [48] M. Pošta and T. Roubíček, Optimal control of Navier-Stokes equations by Oseen approximation. *Computers and Mathematics with Applications*, 53(3-4):569–581, 2007. Citado na pág. 5
- [49] M. Růžička, *Electrorheological Fluids: Modeling and Mathematical Theory, Lecture Notes in Math*, vol. 1748. Springer-Verlag, 2000. Citado na pág. 62
- [50] M. Růžička, Modeling, Mathematical and Numerical Analysis of Electrorheological Fluids. *Applications of Mathematics*, 49(6):565–609, 2004. Citado na pág. 62
- [51] F. M. White, *Fluid Mechanics*. McGraw-Hill, 2003. Citado na pág. 9
- [52] N. Arada, Optimal control of shear-thinning fluids. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 50(4):2515–2542, 2012. Citado na pág. 5, 25, 40, 52, 62, 84
- [53] O. Ladyzhenskaya, *The Mathematical Theory of Viscous Incompressible Flow*. Gordon and Breach, New York, 1969. Citado na pág. 4, 32
- [54] O. Ladyzhenskaya, *New equations for the description of the viscous incompressible fluids and solvability in the large of the boundary value problems for them. Boundary Value Problems of Mathematical Physics V.* American Mathematical Society, Providence, Rhode Island Citado na pág. 4, 32
- [55] O. Ladyzhenskaya, *Modification of the Navier-Stokes equations for the large velocity gradients. Boundary Value Problems of Mathematical and Related Aspects of Function Theory II.* Consultants Bureau, New York, 57–59 Citado na pág. 4, 32
- [56] P. Gill, W. Murray and M. A. Saunders, *SNOPT: An SQP Algorithm for Large-Scale Constrained Optimization*. Society for Industrial and Applied Mathematics, 47(1):99–131, 2005. Citado na pág. 90, 92
- [57] P. Gill, W. Murray and M. A. Saunders, User’s guide for SQOPT version 7: Software for large-scale linear and quadratic programming. Numerical Analysis Report 06-1, Department of Mathematics, University of California, San Diego, La Jolla, CA, 2006. Citado na pág. 90, 92
- [58] P. Kaplický, J. Málek and J. Stará, $C^{1,\alpha}$ -solutions to a class of nonlinear fluids in two dimensions-stationary Dirichlet problem. *Zapiski Nauchnykh Semiranov POMI*, 259:89–121, 1999. Citado na pág. 5
- [59] R. Bird, R. C. Armstrong and O. Hassager, *Dynamics of Polymeric Liquids*, vol 1. 2^a edição, 1987. Citado na pág. 4
- [60] R. Rannacher, Methods for numerical flow simulation. hemodynamical flows. modeling, analysis and simulation. *Oberwolfach Seminars*, 37:275–332, 2008. Citado na pág. 19, 20, 22
- [61] T. Apostol, *Calculus*. Consulting Editor, 1969. Citado na pág. 147
- [62] T. Bodnár, A. Sequeira and M. Prosi, On the shear-thinning and viscoelastic effects of blood flow under various flow rates. *Applied Mathematics and Computation*, Elsevier, 217:5055–5067, 2011. Citado na pág. 78, 91
- [63] T. Guerra, Distributed control for shear-thinning non-Newtonian fluids. *Journal of Mathematical Fluid Mechanics*, 14(4):771–789, 2012. Citado na pág. 7, 25, 62, 84
- [64] T. Guerra, J. Tiago and A. Sequeira, On the optimal control of a class of non-Newtonian fluids. *Annali, Dell’ Università di Ferrara*, DOI: 10.1007/s1 1565-013-0195-7, 2013. Citado na pág. 7

- [65] T. Hughes, L. Franca and M. Balestra, A new finite element formulation for computational fluid dynamics: V. circumventing the Babuska-Brezzi condition: A stable Petrov-Galerkin formulation of the Stokes problem accommodating equal-order interpolations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 59(1):85–99, 1986. Citado na pág. 109
- [66] T. Roubíček, Optimization of Steady-State Flow of Incompressible Fluids. *Analysis and Optimization of Differential Systems*, 121:357–368, 2003. Citado na pág. 5
- [67] T. Roubíček and F. Tröltzsch, Lipschitz stability of optimal controls for the steady-state Navier-Stokes equations. *Control and Cybernetics*, 32(3):683–705, 2003. Citado na pág. 5
- [68] T. Slawig, Distributed control for a class of non-Newtonian fluids. *Journal of Differential Equations*, 219(1):116–143, 2005. Citado na pág. 5, 25, 40, 52, 62, 84
- [69] V. Calvez, J. G. Houot, N. Meunier, A. Raoult and G. Rusnakova, Mathematical and Numerical Modeling of Early Atherosclerotic Lesions. *ESAIM: Proceedings*, 30:1–14, 2010. Citado na pág. 6
- [70] *COMSOL Multiphysics, Reference Guide, COMSOL 4.3*, 2012. Citado na pág. 91, 109
- [71] *COMSOL Multiphysics, Users Guide, COMSOL 4.3*, 2012. Citado na pág. 89, 92, 109
- [72] *Optimization Module, Users Guide, COMSOL 4.3*. 2012. Citado na pág. 90
- [73] *COMSOL Multiphysics, <http://www.comsol.com>*. 2012. Citado na pág. 91