Cátia Mariana de Oliveira

Ferreira Salvador

Licenciatura em Matemática, ensino de

Geometria: um estudo sobre ângulos e polígonos, no 9º ano de escolaridade, com recurso ao *GeoGebra*

Dissertação para obtenção do Grau de Mestre em Ensino de Matemática no 3º ciclo do Ensino Básico e no Secundário

Orientador: Doutor António Manuel Dias Domingos, Professor Auxiliar, Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa

Júri:

Presidente: Prof. Doutora Maria Helena Coutinho Gomes de Almeida Santos

Arguente: Prof. Doutora Ana Elisa Esteves Santiago

Vogais: Prof. Doutor António Manuel Dias Domingos

FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA

Março 2013

Cátia Mariana de Oliveira

Ferreira Salvador

Licenciatura em Matemática, ensino de

Geometria: um estudo sobre ângulos e polígonos, no 9º ano de escolaridade, com recurso ao *GeoGebra*

Dissertação para obtenção do Grau de Mestre em Ensino de Matemática no 3º ciclo do Ensino Básico e no Secundário

Orientador: Doutor António Manuel Dias Domingos, Professor Auxiliar, Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa

Júri:

Presidente: Prof. Doutora Maria Helena Coutinho Gomes de Almeida Santos

Arguente: Prof. Doutora Ana Elisa Esteves Santiago

Vogais: Prof. Doutor António Manuel Dias Domingos

FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA

Março 2013

Copyright

Ao Ricky e ao Pipas

Agradecimentos

Agradeço ao meu orientador a prontidão, simpatia e rigor que desde cedo me encorajou com a tese.

Agradeço à Elisabete Mariano que se disponibilizou para me ajudar desde o início.

Agradeço aos alunos que participaram e que mostraram sempre muita alegria em poder fazer parte deste estudo.

Agradeço à minha família pelo carinho, compreensão, e pelo calor que transmitem mesmo que por vezes estejam longe. A vida sem eles não fazia sentido!

Agradeço aos meus amigos e às minhas amigas pela companhia e as alegrias que me dão.

Agradeço à Beta, porque dá cor à minha vida.

Agradeço à Bertinha que é a madrinha muito querida, que me ouve, aconselha e está sempre presente.

Resumo

O presente estudo pretende analisar qual o contributo do ambiente de geometria dinâmica – *GeoGebra* - na aprendizagem da geometria, nomeadamente, no estudo de ângulos e polígonos, com alunos do 9º ano de escolaridade. Através do uso deste *software* em sala de aula, procurou-se ter uma melhor compreensão do interesse e motivação dos discentes, e de que modo o seu uso contribui para a aprendizagem de novos conceitos.

A revisão de literatura baseou-se essencialmente na utilização das tecnologias na escola, nomeadamente, no ensino da matemática e particularizou-se para a aprendizagem em ambientes de geometria dinâmica.

A metodologia utilizada foi de natureza qualitativa e recorreu a estudo de caso. A investigadora assumiu o papel de observadora participante e assistiu a todas as aulas que fazem parte deste trabalho. Na recolha de dados foram utilizados os seguintes instrumentos: notas de campo, registo de vídeo, inquéritos, entrevistas semiestruturada e documentos produzidos pelos alunos.

Na análise de dados são descritas e analisadas as tarefas e exercícios realizados pelos quatro alunos em estudo. Estes apresentaram, de início, algumas dificuldades no manuseamento da ferramenta, no entanto, com o decorrer das aulas notou-se um melhor desempenho, o que os levou a ter mais confiança na resolução das tarefas e, consequentemente, menos tempo de execução. Nas últimas aulas apresentaram fluidez de raciocínio e confiança no trabalho realizado, mostrando que tinham aprendido os conceitos de ângulo, ângulo ao centro e ângulos inscrito numa circunferência, as propriedades que relacionam os ângulos ao centro, ângulos inscritos e arcos de uma mesma circunferência e as propriedades relativas à soma dos ângulos internos de polígonos convexos.

Palavras-chave: Ambientes de geometria dinâmica, *GeoGebra,* Geometria, Tecnologias.

Abstract

This investigation's objective is to analyze the contribute of the dynamic geometry software – the GeoGebra – in the process of learning geometry specially the study of angles and polygons with 9th grade students. It also tries to understand the student's interest and motivation that the use of software can give while learning new concepts.

The literature review was based on the use of schools technologies, namely in mathematic teaching and, in particularly, for dynamic software teaching.

The methodology of this study was qualitative and used a case study. The investigator appears as a participant observer and attended all the classes registered in this work. For the data collection were used the following methods: observation notes, video recordings, semi-structured interviews, questionnaires and written documents.

In the data analysis, the tasks and exercises perform by the four students are described and analyzed. In the beginning they experienced some difficulties to understand the handling of the software, but as classes went by, students shown some progresses and become more confident performing tasks and, therefore, quicker. In the last classes they shown fast thinking and confidence while solving problems with the software proving that they had learned the concepts of angle, central angle, inscribed angle and arches of the same circumference and the properties of the internal angles sum of convex polygons.

Keywords: Dynamic geometry software, Geometry, GeoGebra, Technology.

Índice

Índice de figuras

Índice de tabelas

"Um dos maiores problemas na educação decorre do facto que muitos professores consideram os conceitos matemáticos como objetos prontos, não percebendo que estes conceitos devem ser construídos pelos alunos... De alguma maneira os alunos devem vivenciar as mesmas dificuldades concetuais e superar os mesmos obstáculos epistemológicos encontrados pelos matemáticos... Solucionando problemas, discutindo conjeturas e métodos, tornando-se conscientes de suas conceções e dificuldades, os alunos sofrem importantes mudanças nas suas ideias..." (Vergnaud, 1990).

CAPÍTULO I

1. INTRODUÇÃO

Neste capítulo pretende-se dar a conhecer as motivações pessoais para o estudo, a relevância que tem para a comunidade científica, bem como, para a sociedade. Esclarece-se o que se vai refletir com a investigação e, por fim, apresentam-se os objetivos do estudo em forma de questões de investigação.

1.1 Motivações Pessoais

A formação profissional, o estudo, o aprender e o ensinar são motivações suficientes para ter um dia-a-dia saudável e feliz; a mente precisa de ser exercitada tal como o físico. Na opinião da investigadora os docentes não deviam parar a sua formação com a conclusão da formação inicial, pois o mundo está em constante mudança e os alunos trazem essas novidades para a sala de aula todos os dias. Atualmente vive-se na era das tecnologias onde as mudanças se fazem cada vez mais depressa.

É com esta maneira de estar na vida que, a investigadora após a conclusão do curso de Ensino de Matemática, decidiu ingressar no curso de Informática ramo educacional. A Matemática como suporte para muitas das ciências e a Informática com o seu pensamento abstrato e lógico necessário na sua base, têm bastantes laços em comum.

Após a conclusão da segunda licenciatura a investigadora achou que fazia sentido continuar o trabalho académico, nomeadamente, um mestrado onde fosse possível conciliar um pouco das duas áreas. Sendo a Matemática a formação inicial, portanto a primeira paixão, ter a oportunidade de retomar a olhar para ela com outros olhos, tendo como auxiliar as novas tecnologias de informação, pareceu ser um motivo bastante forte e aliciante para a investigadora se lançar.

Aquando da formação em Matemática as novas tecnologias ainda não estavam tão bem divulgadas e, também, não existia a panóplia que há neste momento. Apenas foram usados alguns *softwares* em disciplinas muito específicas, o *Matlab*, *software* de aplicações informáticas de escritório (*Microsoft Office Word*, *Microsoft Office Excel* e *Microsoft Office PowerPoint*) para a realização de trabalhos, e algum *software* didático para alguns conteúdos programáticos, na disciplina de Didática da Matemática, o *Cabri*, a *Cinderella* e o *Geometer's Sketchpad*.

A investigadora ingressou no curso de Ensino de Informática uns anos mais tarde após ter concluído a sua formação inicial em Matemática, nessa altura as ferramentas tecnológicas já existiam com mais abundância e começavam a ser usadas dentro e fora das salas de aulas com mais frequência. As novas tecnologias eram vistas como importantes ferramentas de trabalho, por isso eram lecionadas, de forma exaustiva, em várias disciplinas ao longo do curso. O objetivo de existirem disciplinas onde eram trabalhadas várias tecnologias era aprender a manuseá-las, mas sobretudo conhecer a melhor maneira de as levar para a sala de aula, para os alunos as usufruírem da melhor forma no processo ensino-aprendizagem. O potencial que a tecnologia traz pode ser enorme, ela está disponível para todos, o importante é conhecer bem várias ferramentas e saber tirar partido delas.

As tecnologias fazem parte do dia-a-dia de qualquer cidadão, este faz uso delas tanto a nível pessoal (lazer, comunicação, entretenimento, formação, entre outras) como profissional (na candidatura a um emprego, para receber o vencimento, para inscrever alunos nos exames nacionais, entre tantos outros). É neste contexto que a escola, sendo composta por cidadãos, deve fazer uso das tecnologias, tanto a nível administrativo, como de gestão, mas também, no processo de ensino-aprendizagem. A grande maioria dos alunos utiliza-as de um modo bastante eficiente e alguns destacam-se por as manusearem tão bem ou melhor que um adulto. É certo que os discentes usam-nas mais numa vertente de entretenimento e comunicação com os amigos por isso, na perspetiva da investigadora, é importante que lhes seja mostrado as potencialidades de cada uma delas.

Robert (2006) fez parte de um grupo de representantes de vários países que visitaram a Finlândia com o objetivo de conhecer o seu sistema de ensino. Os docentes visitaram a Finlândia, percorrendo várias escolas de todos os níveis escolares, contataram com professores de várias disciplinas, alunos e responsáveis locais da educação, para conseguirem perceber «o segredo» dos alunos finlandeses conseguirem atingir bons resultados académicos nos estudos internacionais.

Estes docentes realizaram um estudo que começa por abordar o papel que os professores e a Escola têm para com os seus alunos, o seu lema é – O aluno é o centro – os seus gostos e o seu ritmo de estudo são valorizados acima de tudo.

> A ideia de que o aluno feliz, livre para se desenvolver ao seu ritmo, adquirirá mais facilmente os saberes fundamentais não tem nada a ver com uma qualquer utopia de pedagogo iluminado […] A Finlândia respeita profundamente os saberes, mas respeita ainda mais os indivíduos que os hão-se adquirir. (Robert, 2006, p.10)

As salas de aula, tal como as suas casas, estão equipadas com livros, dicionários, enciclopédias, meios audiovisuais, computadores, jogos pedagógicos, para consulta tanto do professor como do aluno e são utilizados para muitas situações das várias disciplinas.

Para a professora de Inglês, Sirkky Pyy, (2006), "o professor não está na sala de aula para fazer tudo, mas para organizar e ajudar os alunos a aprender". O professor é o guia/orientador do estudo e não o detentor da informação. Cabe ao docente criar ambientes e situações de aprendizagem diversificadas e estimulantes, não impondo o seu saber, e muitas das vezes fazendo-se valer das novas tecnologias.

Os professores finlandeses usufruem de salas de aula espaçosas, munidas com material moderno, onde o número de alunos por turma não ultrapassa os 25.

> O docente tem uma espécie de posto de comando […] que lhe permite passar de um meio tecnológico para outro com toda a liberdade. Cada departamento beneficia de uma sala de trabalho com biblioteca especializada. Além disso, cada professor possui o seu próprio gabinete de trabalho. (Robert, 2006, p.23)

Após a conclusão do curso, os docentes cultivam um contacto próximo com a universidade, tanto para instruir os universitários, partilhando experiências e abrindo as suas aulas para eventuais estudos, como para se atualizarem ao longo do seu trajeto profissional.

Em forma de conclusão, a ideia principal deixada por Paul Robert é que os alunos sendo o centro de todo o sistema, o ambiente criado pela escola é a pensar em respeitar o seu ritmo de aprendizagem e o seu intelecto. Os ambientes de aprendizagem são criados de modo que sejam os próprios discentes a chegar ao conhecimento e que não lhe sejam apenas apresentadas regras que eles têm de aprender e cumprir. É neste contexto que as novas tecnologias vêm ajudar os alunos e os professores nesta nova etapa que a escola atravessa, pois a tecnologia ajuda a criar estes novos ambientes de aprendizagem permitindo aos alunos seguirem mais facilmente o seu ritmo de estudo. Foi após a leitura deste artigo de Paul Robert, sobre a realidade inspiradora do sistema educativo da Finlândia, que a investigadora se encontrou mais motivada e interessada em realizar um estudo envolvendo a matemática e a tecnologia.

Dentro da área da matemática, a geometria falou mais alto, por ser mais visual e por se associar a outras disciplinas, como as Artes, a Geografia, entre outras. Presentemente, existem muitas ferramentas tecnológicas ligadas a esta área da Matemática, especialmente, *softwares* de ambientes geometria dinâmica. Dentro do vasto leque existente deste tipo de *softwares* o *GeoGebra* foi o eleito.

1.2 Relevância do estudo

A comunidade escolar utiliza meios tecnológicos todos os dias para diversos fins. Alguns docentes já utilizam nas suas aulas muitos *softwares* educativos para poder cativar os seus alunos e criar ambientes de aprendizagem diversificados e desafiantes.

Ao pegar numa ferramenta específica de geometria dinâmica, o *GeoGebra*, pretende-se mostrar algumas das suas potencialidades ao conjeturar algumas propriedades dos ângulos numa circunferência e dos ângulos internos de polígonos. Os docentes interessados em tecnologia, poderão querer saber de que forma abordar alguns conceitos de geometria com o auxílio do *GeoGebra*.

Umas das principais motivações da investigadora, para realizar este estudo, foi poder trabalhar a geometria usufruindo do poder da tecnologia, por isso no seu entender só fazia sentido utilizando ambientes de geometria dinâmica. Estes ambientes permitem, dentro de muitas outras vantagens, que os alunos num curto espaço de tempo, consigam realizar mais experimentações do que em papel. Muita da investigação já realizada neste âmbito afirma que os ambientes de geometria dinâmica favorecem a compreensão dos conceitos e das relações geométricas, pelo que devem ser usadas para analisar, observar, relacionar e construir figuras geométricas e operar com elas.

Dentro do grande leque existente deste tipo de *softwares*, o *GeoGebra* atualmente destaca-se pelo facto de interligar gráficos, álgebra e tabelas, para além de ser de fácil manuseamento, de código aberto e gratuito. Quando comparado com outros ambientes de geometria dinâmica muito conhecidos como, o *Geometer´s Sketchpad*, o *Cabri-géomètre* e o *Cinderella*, o *GeoGebra* é um dos que permite manipular graficamente um objeto e ter acesso à sua representação algébrica.

Para além de todos os benefícios referidos, a escolha do *GeoGebra* também se prendeu com o facto de este ter sido o único *software,* de geometria dinâmica, já manipulado pelos alunos participantes no estudo, em anos letivos anteriores. Partindo então deste prossuposto, pretende-se que os alunos percam menos tempo a conhecer e a saber manusear a ferramenta e mais tempo a aprender novos conceitos através dela. Espera-se que os alunos encarem o *software* como o foco da aprendizagem, não necessitando de tanta ajuda como se fosse uma novidade. A investigadora acredita que os discentes possam entender o *GeoGebra* como uma ferramenta comum na sala de aula, como o compasso, o lápis ou a borracha.

O estudo realizou-se com o intuito, de chamar à atenção para a importância do uso das tecnologias no contexto escolar, para além do grande peso que já tem no setor administrativo na maior parte das escolas. Neste momento existem muitas ferramentas educativas disponíveis tanto para os vários níveis de ensino, como para as várias matérias, nas diversas áreas disciplinares. A disciplina de matemática não foge à regra, os docentes que a lecionam têm uma vasta gama de *softwares*, *e-books*, *applets*, entre outras, para ajudar no processo ensino-aprendizagem, criando ambientes estimulantes e apelativos para os alunos. Para a investigadora é importante que os professores as saibam integrar de forma a tirar o melhor partido das suas potencialidades, sendo para isso necessário preparar/planificar as aulas de forma adequada. No entanto, para que isto seja realidade é necessário que tanto na formação inicial de professores como na formação contínua durante a prática profissional, se aborde este tipo de práticas de forma atualizada. A tecnologia está sempre a evoluir, tal como o ser humano, e tem de ser acompanhada.

1.3 Objetivos

Partindo do princípio que o uso das novas tecnologias na educação proporciona ao aluno a possibilidade de novas vivências em ambientes que resultam de cálculos complexos que os *softwares* efetuam, este estudo tem como objetivo geral saber qual o papel do ambiente de geometria dinâmica criado pelo *GeoGebra* na aprendizagem da geometria.

Particularizando, temos as seguintes questões:

- Qual o papel do *GeoGebra* na compreensão do conceito de ângulo?
- Qual a sua influência na consolidação dos conceitos de ângulo ao centro e ângulo inscrito numa circunferência?
- Como é que o *GeoGebra* pode potenciar a descoberta das propriedades que relacionam os ângulos ao centro, ângulos inscritos e arcos de uma mesma circunferência?

- Qual o papel do *GeoGebra* no estabelecimento de propriedades relativas à soma dos ângulos internos de polígonos convexos?
- Qual o papel do *GeoGebra* na motivação e interesse na aprendizagem dos conceitos matemáticos?

Este é o ponto de partida para esta investigação. Para responder a estas questões os alunos resolveram tarefas e exercícios, que foram criados de forma a atrair-lhes a atenção e motivá-los a questionar, analisar e tirar conclusões, através de um processo interativo, implementado com a ajuda do *GeoGebra*.

CAPÍTULO II

2. Revisão de literatura

Este capítulo está dividido em duas partes, tecnologias na educação e aprendizagem em ambientes de geometria dinâmica. O que se apresenta de seguida serviu de base teórica para o estudo desta tese.

Inicia-se o capítulo com uma reflexão sobre as tecnologias na educação, dentro da escola e depois mais propriamente na disciplina de matemática. Posteriormente, aborda-se os ambientes de geometria dinâmica, onde são apresentados alguns estudos já realizados nesta área. Por fim, dentro dos ambientes de geometria dinâmica é realçada a aprendizagem da geometria com o auxílio do *GeoGebra*, referindo-se as principais vantagens e desvantagens do seu uso e alguns estudos já efetuados nesse âmbito.

2.1 Tecnologias na educação

Atualmente a influência exercida pelas tecnologias, muitas vezes também designadas por tecnologias de informação e comunicação, estende-se aos mais variados domínios da sociedade. Progressivamente, a escola vem incorporando estas tecnologias tanto na sua atividade geral como nas áreas curriculares e, em particular, na disciplina de matemática. É neste contexto que surge este tópico dividido em dois subtemas, tecnologias na escola e tecnologias na educação da matemática.

2.1.1 Tecnologias na escola

Hoje vivemos numa Sociedade de Informação, esta é uma sociedade “onde o acesso à informação e ao seu tratamento se democratizou e facilitou de um modo nunca antes imaginado” (Lagarto, 2005, p.3). As tecnologias vieram alterar, de forma profunda, o perfil de muitas profissões e atividades do dia-a-dia, desde um simples pagamento, a consultar jornais *online*, ao telemóvel para enviar fotografias, ao facto de controlar a temperatura ambiente de casa a partir de qualquer parte do mundo, por exemplo.

Os adolescentes e crianças de hoje nasceram e nascem rodeados de ferramentas tecnológicas como o computador, a televisão ou o telemóvel, e adaptaram-se desde cedo a elas, tornando-se “nativos digitais” (Prensky, 2001, p.5). Em 2001, em média, os estudantes universitários na Inglaterra tinham passado menos de 5000 horas das suas vidas a ler, mas mais de 10 000 horas a jogar computador e 20 000 horas a ver televisão. Prensky (2001) afirmou que os estudantes tinham mudado radicalmente, eles já não são as pessoas para as quais o sistema de ensino foi desenhado. Os alunos pensam e processam a informação de forma bastante diferente dos seus precedentes.

A Escola, sendo parte integrante desta Sociedade de Informação e incluindo estes adolescentes e crianças como alunos, tem vindo a atravessar momentos de mudança a todos os níveis, tanto pedagógico, como administrativo e de gestão (Lagarto, 2005, p.7). A sociedade está a atravessar profundas mudanças, passando de uma Sociedade de Conhecimento para uma Sociedade de Informação, no entanto, para que isto seja realidade, é necessário que todos consigam transformar a informação em conhecimento. A Escola desde cedo que assume esse papel, a informação era, e continua a ser, concentrada em livros e cadernos e transmitida nas salas de aula, o professor também se assume como uma importante fonte de informação. No entanto, porque vivemos outra realidade e temos acesso à internet a partir de muitos lugares, a informação está muito mais acessível a todos e deixou de se restringir apenas ao espaço da sala de aula. É neste contexto que o desafio que se coloca à Escola, neste momento, é muito diferente do que se colocava há umas décadas atrás.

> A Escola deve assumir um papel preponderante e posicionar-se como um fator de mudança, fundamental para o desenvolvimento da Sociedade da Informação para o Conhecimento. Se a Escola conseguir acolher e desenvolver no seu seio, os novos instrumentos e metodologias disponíveis, os alunos que deles usufruírem serão com certeza cidadãos melhor preparados para a vida. (Lagarto, 2005, p.8)

O autor defende ainda que a Escola e a comunidade educativa têm a obrigação de utilizar, nas suas práticas, novas ferramentas e que os professores têm um papel preponderante neste processo.

Os docentes na sua atividade profissional, para além de lecionarem, desempenham inúmeras e variadas tarefas (direção de turma, direção de departamento, gestão da escola, entre outras), e todas são executadas com a ajuda de instrumentos tecnológicos de forma a facilitar e agilizar o trabalho. Grande parte dos processos burocráticos estão informatizados, pautas finais de período, pautas de exames, listagens de alunos, horários, etc., nalgumas escolas utilizam-se sumários eletrónicos e muitas possuem *site* para difusão de toda a informação que acham pertinente para os seus alunos e respetivos encarregados de educação, no entanto, continua a existir alguma relutância na utilização das tecnologias em sala de aula. Utilizar ferramentas tecnológicas com os alunos é um grande desafio, pois os docentes têm de dominar tecnicamente a ferramenta, mas acima de tudo, saber utilizá-la no processo ensino-aprendizagem. Para Prensky (2009) muitos dos professores sabem que a tecnologia é importante na educação dos estudantes, mas ainda não sabem como usá-la na sala de aula. Muitos professores procuram perceber como a usar de forma significativa no ensino.

Lagarto (2005) afirma que ainda existem bastantes constrangimentos para a implementação das tecnologias como uma prática comum no processo de ensino, ele realça quatro, que no seu parecer, são os mais importantes, a logística, a formação de professores, a liderança na escola e abordagens pedagógicas diferentes. A logística, a Escola deve utilizar o equipamento que possui de forma racional e garantir a sua funcionalidade de forma continuada, apesar de considerar que o equipamento não é o mais importante, nada se faz sem ele. A formação de professores é outro constrangimento apontado, a grande maioria dos docentes não detém as aptidões informáticas suficientes para reconhecer a sua utilização fácil no espaço Escola a todos os níveis exigidos, pedagógico, administrativo e de gestão. A formação contínua de professores deve privilegiar a área das Tecnologias de Informação e Comunicação (TIC) de forma "integrada – formação em TIC e para a didática das TIC" (Lagarto, 2005, p.7). Muitos professores continuam a preferir lecionar da mesma forma ano após ano. A mudança para o uso de ferramentas tecnológicas obriga a novas abordagens estratégicas, apesar de muitos dos programas continuarem inalteráveis, e é neste domínio que a formação poderá fazer a diferença. A liderança na Escola, os gestores escolares, administrativos, pedagógicos e políticos devem ser o motor de desenvolvimento da inovação nas escolas. E por fim, terão de existir mudanças nas abordagens pedagógicas, deve-se incluir nos currículos componentes a trabalhar com o auxílio das tecnologias.

Lagarto (2005) afirma que a Escola tem de acompanhar as novas exigências, ter mais computadores e quadros interativos e menos cadernos e quadros de giz, as estratégias dos professores passarão por ajudar o aluno na construção do conhecimento, na passagem da informação para o conhecimento com o apoio das novas tecnologias. A maioria das escolas têm apenas as salas para lecionar a disciplina de TIC e a biblioteca equipadas com computadores. Normalmente, os professores de outras áreas disciplinares têm de requisitar estas salas ou os computadores portáteis (se os houver na escola), para que os alunos possam usufruir desta tecnologia. Em algumas escolas existe um computador (para uso do professor) e quadro interativo, por sala de aula, mas isto ainda não é uma realidade comum a todas. Um computador por sala é o princípio, mas está longe de ser o melhor. Quando se pretende que o aluno aprenda com a tecnologia não é a ver o professor fazer, que vai aprender, mas sim fazendo... como em qualquer outro exercício. O docente deve ser um mero guia na sua experimentação e não um ditador de algoritmos e de regras a cumprir na resolução de um problema.

No ano de 2000, Ribeiro & Ponte (2000) afirmavam que as tecnologias tinham um papel pouco relevante na Escola e acreditavam que com a massificação do computador tornar-se-ia impossível não as utilizar devido, maioritariamente a três fatores: a grande indústria, a revolução na aprendizagem e o poder das crianças que dispõem de computador em casa. Lagarto (2005) e Prensky (2009) confirmaram o mesmo. Hoje verifica-se que a grande maioria dos alunos têm computador em casa, desses grande parte tem acesso à internet, no entanto, a tecnologia continua a não ser um hábito instalado nas salas de aula.

Prensky (2009) afirma ainda que o papel do professor, em aulas usando a tecnologia, é de treinador e guia no uso da tecnologia para uma aprendizagem eficaz. E para isso é necessário que os professores façam boas perguntas, garantindo rigor e avaliando a qualidade do trabalho dos alunos.

É neste contexto que se pode falar das tecnologias em várias disciplinas, nomeadamente na matemática. Os novos programas de Matemática referem explicitamente o uso das novas tecnologias nas orientações metodológicas, elas são consideradas recursos essenciais para se atingir as competências gerais.

> O uso das novas tecnologias na escola […] permite aos alunos usarem as ferramentas correntes na sociedade em geral mas também […] os torna capazes

> de se envolverem ativamente na exploração das ideias matemáticas. (Ponte, 2000, p.21)

Neste sentido, o nosso país assemelha-se às tendências internacionais para o ensino da matemática, já existentes nos EUA e nos países mais desenvolvidos da Europa.

2.1.2 Tecnologias na Educação Matemática

Já em 1998 Abrantes, Matos & Ponte (1998) consideravam que se viviam tempos de integração das novas tecnologias na escola, tanto nas suas atividades administrativas bem como nas várias áreas curriculares e, em particular, na disciplina de Matemática. A investigação em educação matemática atribui-lhe significativas potencialidades de inovação e mudança.

Ribeiro & Ponte (2000) dizem-nos que a Sociedade de Informação coloca novos desafios a todos os que a ela pertencem, como aprender a aprender, a comunicar, a pensar, a decidir. A Escola precisa de responder a estes desafios, pois faz parte desta nova sociedade. O ensino da matemática precisa de ser renovado e modernizado, o professor necessita de saber quando e como usar a tecnologia, e porquê e para quê. Os autores salientam que a formação contínua, neste âmbito, é bastante importante e deve contribuir para que haja debate sobre o seu uso, mas principalmente para que o professor tenha novas atitudes e compromissos em sala de aula. Evidenciam ainda que a formação deve contemplar não só o domínio técnico das ferramentas tecnológicas, bem como, as potencialidades de cada uma no ensino de vários tópicos da matemática, como podem ser usadas em sala de aula e o modo como implementar estas medidas na escola de forma a serem efetivamente usadas. Não basta colocar as ferramentas tecnológicas ao dispor de todos, é preciso haver a manutenção dos equipamentos e dos espaços, para que seja fácil detetar dificuldades e perspetivar novas soluções.

Uma questão importante a ter em conta é: será que as conceções dos professores são as mesmas que os investigadores acerca da introdução das tecnologias na sala de aula? Canavarro (1993), depois de analisar um estudo de caso, destaca três modos de ver a utilização do computador no ensino da matemática:

> (i) como elemento de animação, com capacidade para melhorar o ambiente geral da aula; (ii) como elemento facilitador, permitindo realizar determinadas tarefas tradicionalmente realizadas à mão; e (iii) como elemento de possibilidade, permitindo equacionar a realização de atividades que seriam difíceis de efetuar de outro modo. (Canavarro, 1993, p.46)

Canavarro (1993) afirma que os dois primeiros modos apresentados não têm implicações diretas no ensino nem no método de ensinar, mas destaca o terceiro como inovador. Para que haja inovação é essencial alterar as práticas em sala de aula, bem como a preparação das aulas. No entanto, a maior parte dos professores, introduz o uso das tecnologias da forma menos trabalhosa possível, apenas acrescentam o novo elemento, sem fazer uma análise de como alterar as suas aulas para aproveitar melhor a nova ferramenta. Para Ponte & Thompson (1992, p.26) os professores "integram os novos elementos nas estruturas conceptuais pré-existentes, modificando-os sem pôr em causa as estruturas existentes".

A introdução das novas tecnologias é uma questão que sempre se colocou à escola. Silva (2003) refere o exemplo que nos anos 40, Bento de Jesus Caraça defendia o uso das réguas de cálculo e máquinas de calcular no ensino da Matemática, pelo seu interesse prático e não as tábuas de logaritmos, por serem na altura tecnologia já ultrapassada. Outro exemplo, referido pelo mesmo autor é do Sebastião da Silva vir a defender, 20 anos depois de Jesus Caraça, o estudo da estatística com o auxílio de máquinas de calcular por esta exigir cálculos muito laboriosos.

As mudanças podem ocorrer de forma harmoniosa e gradual, afirmaram Ribeiro e Ponte (2000) depois de analisar um estudo de caso, com docentes universitários, sobre o uso das calculadoras nas aulas do ensino superior. Os autores verificaram que os professores quando integraram o uso das calculadoras nas suas aulas, de início mostraram algum ceticismo que foi ultrapassado com a prática adquirida no decorrer das aulas. Para Ribeiro e Ponte (2000) a experiência tornou-se bastante importante no processo de aquisição da ferramenta, a situação descrita reflete a ideia que existe uma relação entre as conceções do docente e as suas práticas.

É claro que, um professor que domine bem uma ferramenta tecnológica não significa que implemente as mudanças fundamentais nas suas práticas e conceções. Ribeiro e Ponte (2000) mencionam, baseando-se numa pesquisa realizada, que a experiência com calculadoras gráficas ou o interesse em usá-las não é suficiente para alterar as conceções relacionadas com a importância do domínio de conceitos e procedimentos antes do seu uso. Bottino e Furinghetti (1994) referem que existem dois níveis de apropriação da tecnologia, o "nível superficial" que é quando a tecnologia ajuda o processo de ensino/aprendizagem e o "nível profundo" onde a tecnologia é um meio de construção de conhecimento de forma inovadora. Para que este último nível seja atingido, as autoras concordam que na formação dos professores de matemática deve existir disciplinas onde possam aprender a utilizar várias ferramentas tecnológicas, tanto a sua manipulação como a melhor forma de atingir as metas da disciplina através delas.

2.2 Aprendizagem em ambientes de geometria dinâmica

Os ambientes de geometria dinâmica utilizam *softwares* que possibilitam o utilizador de construir, a partir das ferramentas de geometria plana ou espacial, figuras que se podem movimentar conforme se desejar, proporcionando a visualização em várias perspetivas. Esta ideia de movimento não é de agora, os geómetras cedo pensaram na criação de instrumentos para descrever curvas mecanicamente definidas, no entanto, o uso do movimento era interdito no raciocínio estritamente geométrico, mais por razões metafísicas que científicas. No século XVII houve uma quebra da tradição grega e no uso do movimento para estabelecer propriedades geométricas ou na realização de construções. Durante muitos séculos os instrumentos usados na geometria clássica eram o lápis, papel, régua, compasso e esquadro, apenas nos anos 80 surgiu a geometria dinâmica através do uso do computador. Alguns matemáticos começaram a pensar em criar *softwares* para ajudar no processo dos traçados de figuras geométricas que pudessem trazer outros benefícios. No início, uma ferramenta deste tipo tinha o intuito de agilizar o trabalho manual, garantindo uma precisão muito melhor no traçado, permitindo também a reprodução exata e facilitada dos desenhos.

A geometria é uma das áreas da matemática que mais tem beneficiado com progresso e o uso da tecnologia, tanto a nível de *software* como de *hardware*. Osta (1998) afirmava que a matemática, de uma forma geral, estava a ser afetada pelo crescimento da tecnologia, em particular pela capacidade que o computador tinha em apresentar múltiplas representações de um conceito: algébrica, gráfica ou simbólica, o que ainda hoje se verifica.

A geometria dinâmica, segundo Braviano e Rodrigues (2002), originou a necessidade de definir um novo sistema de representação de objetos da geometria, aproveitando as capacidades do computador.

> [Desta forma, esta geometria] permite aproximar as propriedades percetivas dessas representações das propriedades formais dos objetos representados. (Braviano & Rodrigues, 2002, p.4)

O utilizador cria pontos, retas, circunferências, entre outras e através da régua e compasso eletrónico desenha as figuras desejadas. O seu conjunto de ações possibilita, a quem o usa, interagir e visualizar as figuras em movimento e consegue com isto, ter uma melhor compreensão das noções trabalhadas. Neste poder mexer a figura, encontra-se o dinamismo que o *software* oferece e que tem a grande vantagem de preservar as relações existentes entre os elementos da figura.

Presentemente, a geometria dinâmica oferece um leque muito mais vasto de opções incluindo elementos algébricos, de modo a abranger um maior número de problemas matemáticos, no entanto, o princípio base mantêm-se, a precisão. Para desenhos complexos que exijam muitos traçados para a sua construção, torna-se difícil fazer uma abordagem com papel, régua, compasso e lápis, mas com o recurso aos *softwares* fica muito mais simples.

A interatividade intrínseca aos *softwares* de geometria dinâmica permite que os utilizadores adquiram hábitos de raciocínio ao chegar à solução de um problema, identificando pontos-chave, analisando as propriedades e as relações entre os elementos da figura construída. Neste sentido, um aluno que usufrua deste tipo de ferramenta tem como principal objetivo organizar o seu "pensamento geométrico" (Braviano & Rodrigues, 2002, p.5) e não apenas resolver os exercícios por memorização de algoritmos. Os professores têm um papel fundamental neste processo, tanto na forma como introduzem as ferramentas em sala de aula, como na maneira de organizar as tarefas para os alunos.

Para Osta (1998) existem dois tipos de professores de matemática, os que acham essenciais as novas tecnologias no ensino da geometria e os outros que não consideram haver essa necessidade. De acordo com o primeiro ponto de vista, os computadores são vistos como algo de muito importante de uma nova cultura que envolve novos modelos de trabalho e de vida, e defendem a integração do seu uso nas escolas. Como as capacidades gráficas se tornaram mais acessíveis e influentes, os alunos praticam geometria de maneira diferente, a geometria é vista de forma mais prática e ligada a outras disciplinas. Realça ainda que, os *softwares* de geometria dinâmica, permitem gerar questões e tentativas de resposta pelos alunos, usando dois tipos de conhecimento: o conhecimento geométrico anteriormente adquirido e as experiências empíricas. Estes *softwares* são vistos como uma ferramenta que potencia um ambiente rico para resolver problemas que permite ao aprendiz interagir livremente.

Segundo o ponto vista dos outros docentes, o uso dos computadores não deve afetar os objetivos fundamentais da geometria clássica e/ou do seu ensinamento. A tecnologia deve apenas ser usada em situações específicas como ferramenta demonstrativa, ou para facilitar ou enriquecer determinados tópicos em situações pontuais, em problemas geométricos que sejam difíceis ou impossíveis de resolver sem estes recursos.

Osta (1998) refere que, de uma forma geral, os professores concordam que o computador é um meio muito importante para a visualização de situações geométricas. Os *softwares* de geometria dinâmica ajudam os alunos porque usam a animação para construir, mover e girar sólidos, podendo assim ser observados sob vários ângulos. As potencialidades que estes *softwares* apresentam fazem com que tenham um papel mais funcional. Eles são encarados como ferramentas de exploração, fazendo com que a intuição, a construção e a noção espacial sejam fatores muito importantes, enaltecendo também os aspetos teóricos.

Apesar de muitos considerarem a utilização do computador e dos *softwares* de geometria dinâmica em sala de aula, uma atividade lúdica, é importante que todos percebam que são ferramentas muitas vezes utilizadas por matemáticos. Whiteley (2000) afirma que são ferramentas preponderantes utilizadas pelos geómetras e que não devem ser encaradas como brinquedos educacionais. Destaca ainda que as atividades propostas aos alunos devem-se parecer com as explorações feitas por geómetras.

Para Mackrell e Johnston-Wilder (2005) a essência dos *softwares* de geometria dinâmica está na maneira como os alunos podem interagir livremente com figuras geométricas construídas por eles ou para eles. Esta interação ocorre de forma contínua e dinâmica, e realçam ainda o facto de, ser possível "animar" a construção, para que as imagens se movimentem sozinhas. Os alunos através deste tipo de *softwares* podem criar e transformar continuamente figuras e outras construções matemáticas, da mesma forma que as imaginam na sua mente. Mas ao contrário da imagem mental, o computador pode, "parar" as imagens para contemplação. Destacam ainda que, as imagens no computador podem ser vistas e manipuladas por outros, noutros locais como num laboratório ou numa sala de aula. Para os autores o mais importante é que na busca para uma solução matemática, os alunos explorem com as "mãos" o que têm na sua mente e realçam que este tipo de *software* é uma ferramenta poderosa para facilitar a aprendizagem da matemática, na exploração e na resolução de problemas.

Alguns autores (Canavarro, 2008; Costa, 2008) referem-se a estes *softwares* como elementos que permitem a visualização, experimentação, construção e investigação proporcionando aos alunos o levantamento de conjeturas.

De seguida são descritos alguns exemplos de pequenos estudos, levados a cabo por Mackrell e Johnston-Wilder (2005), observando grupos de professores que usaram vários *softwares* de geometria dinâmica, no estudo de quadriláteros. Cada grupo de professores abordou a utilização do *software* escolhido de forma diferente. Os autores escolheram quatro grupos como exemplo para ilustrar alguns dos problemas que envolvem o uso dos *softwares*.

Numa primeira experiência os professores pediam aos alunos para construírem quadriláteros e explorar as suas propriedades. Os professores, depois de verem um vídeo demonstrativo do *software*, assumiram que os alunos não iriam encontrar dificuldades e fariam as construções rapidamente, no entanto, para alguns discentes a tarefa mostrou-se difícil. A complexidade da tarefa foi sobrestimada pelos professores que não souberam reconhecer que para um novato o *software* pode ser uma ferramenta de difícil utilização.

Mackrell e Johnston-Wilder (2005) afirmam que para qualquer *software*, há uma curva de aprendizagem para conhecer e trabalhar facilmente com a ferramenta. Uma tarefa que parece simples quando demonstrada por uma pessoa experiente, pode envolver passos que não são tão facilmente descobertos por um novato. Alguns alunos entusiasmaram-se com a pesquisa livre, explorando ao seu ritmo, outros acharam a ferramenta pesada inicialmente, pela variedade de opções nos menus e pelo facto de que cada opção fazer algo matemático que se visualiza automaticamente no ecrã, relacionando conceitos geométricos. Os *softwares* de geometria dinâmica são muito abertos, e oferecem um leque muito vasto de menus e facilidades, no entanto, neste estudo depois de algumas explicações e da visualização de algumas figuras construídas, os alunos adquiriram confiança e mostraram ter adquirido conhecimentos.

Num segundo estudo os professores reconheceram que o processo de construção de quadriláteros não era fácil e prepararam uma ficha de trabalho orientada para os seus alunos. A Figura 1 mostra um excerto de uma dessas fichas de trabalho.

Para desenhar um quadrado usando o *software*:

1. Constrói dois pontos e dá-lhes o nome de A e B.
2. Constrói um segmento de reta que passe pelos pontos A e B.
3. Constrói retas, que passem por ambos os pontos, perpendiculares ao segmento de reta.
4. Desenha uma circunferência com centro em A e raio no ponto B e chama ao ponto de interseção entre a perpendicular que passa pelo ponto A e a circunferência, de D.
5. Desenha uma circunferência de centro B e radio no ponto A e chama ao ponto de interseção entre a perpendicular que passa pelo ponto B e a circunferência, de C.
6. Une os pontos ABCD para formar o quadrado.

Figura 1– Excerto da ficha de trabalho.

Quando a ficha de trabalho foi apresentada à turma, alguns alunos tiveram problemas em seguir as instruções, mesmo com diagramas a explicar. As instruções mostraram-se insuficientes, enquanto alguns alunos conseguiram resolver os problemas sozinhos ou a trabalhar em colaboração com outros grupos de alunos ao seu lado (alguns tinham mais experiência com ambientes de *software* do que os seus professores), outros tinham dificuldades em encontrar as opções adequadas no menu do *software*.

Alguns alunos sentiram que a ficha orientada era mais complicada do que as figuras que eles tinham de criar. Certos discentes tentaram criar quadriláteros e depois arrastaram os vértices para a forma de um quadrado. Estes alunos mostraram-se confusos quando o seu professor insistiu em afirmar que as figuras não estavam bem construídas e arrastou os vértices para o demonstrar (arrastando os vértices de forma que os lados deixassem de fazer um ângulo reto).

Segundo Laborde (1995) ao usar *software* de geometria dinâmica, os alunos precisam de distinguir entre um "desenho" e uma "figura". Os quadriláteros dos alunos que pareciam um quadrado podiam simplesmente ser um "desenho" de um quadrado (não ter as suas propriedades inerentes a um quadrado, mas a olho nu dar a entender que é um quadrado), este "quadrado" desmanchava-se quando qualquer um dos seus vértices era arrastado (Mackrell & Johnston-Wilder, 2005).

A ficha orientada foi elaborada de forma a que a figura criada fosse um quadrado, movendo os vértices, ampliando ou arrastando, seria sempre um quadrado. As propriedades programadas pela sequência de comandos garantiam que a figura criada fosse um quadrado, independentemente das movimentações que lhe fizessem. Para Mackrell e Johnston-Wilder (2005) isto poderá dar origem a novos desafios dentro da sala de aula, os alunos podem criar figuras para que os seus colegas as tentem "destruir". As figuras que resistam, que se mantenham como foram inicialmente concebidas, são "figuras" em vez de "desenhos". O estudo demonstrou que quando os alunos são desafiados usando ambientes tecnológicos, a inovação de uns é rapidamente identificada, o criador aplaudido e o "truque" é rapidamente transmitido aos outros que mostram bastante interesse em aprender.

Mais uma vez, existe o desafio para os alunos que usam este tipo de *software*: saber distinguir entre um desenho que "parece certo" e uma construção matematicamente "correta". Com a geometria dinâmica, a distinção é fácil de fazer, pois as figuras tem de ter a sua identidade geométrica e as suas propriedades têm de se manter quando são arrastados os seus vértices.

Este estudo é um pouco semelhante ao desenvolvido na presente investigação. Os alunos realizaram fichas orientadas, que a investigadora elaborou em conjunto com a professora da turma, com o sentido de criar passos claros para que os alunos construíssem as figuras desejadas e conjeturassem o pretendido. O problema residiu na construção das figuras pedidas, algumas figuras não respeitavam as propriedades inerentes, no entanto, facilmente eram identificadas e alteradas até estarem corretas.

Num terceiro estudo os professores ofereceram, aos alunos, tempo suficiente para se familiarizarem com o *software* antes de começarem as construções dos quadriláteros. Existem duas maneiras diferentes, apesar de relacionadas, de aprender a usar um *software*, a instrumental e a conceptual. Para Mackrell e Johnston-Wilder (2005) a aprendizagem instrumental é conhecer o modo de executar as tarefas pretendidas, no *software*: como criar pontos, linhas, círculos, como operar com os menus ("rodar" um objeto ou "construir a bissetriz de um ângulo"), como efetuar cálculos (medir amplitudes de ângulos ou medir áreas). Estas ações matemáticas estão apresentadas no *software* de acordo com a visão do criador do *software*, por isso o utilizador não tem apenas de perceber matemática, mas também como funciona a ferramenta. Por exemplo, para ser um bom utilizador do *software*, o aluno ao construir um ponto médio de um segmento de reta pode precisar de encontrar e usar a opção que permite tal ação e não necessitar obrigatoriamente de construir duas circunferências com centro nos seus extremos. Ao aprender como manipular o *software* poderá não se estar apenas a desenvolver a aprendizagem matemática.

Uma coisa marcante na geometria dinâmica é que a aprendizagem instrumental é também conceptual. Os professores, que levaram a cabo este estudo, constataram que a compreensão de muitos dos termos matemáticos foi adquirida no ambiente criado por esta geometria.

No entanto, o uso do *software* também requer aprendizagem conceptual, por exemplo, na resolução dos exercícios da ficha orientada a construção do quadrado requeria do aluno a noção de circunferência para criar segmentos de reta com a mesma distância. Um aluno do estudo escreveu no seu caderno diário: "alguns *softwares* são difíceis de usar! Eu precisei de desenhar pontos equidistantes numa reta, encontrar a opção foi fácil, mas no início não fui capaz de a usar.". Apesar do aluno considerar que o seu problema era instrumental (como usar a opção), a tarefa requeria compreensão conceptual para resolver geometricamente o problema. Uma solução seria usar uma série de circunferências intersetadas com raio igual e centro na reta (Figura 2), outra solução poderia envolver translações repetidas ou reflexões de um ponto.

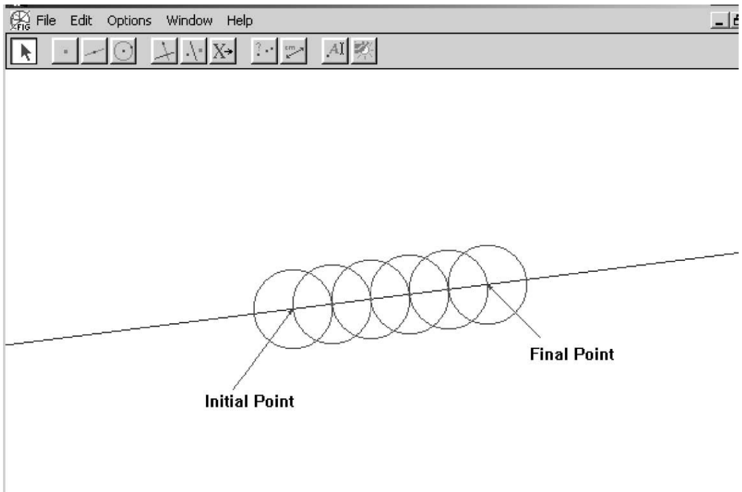


Figura 2 – Pontos equidistantes.

Mackrell e Johnston-Wilder (2005) afirmam que uma tarefa que para um aluno requer apenas aprendizagem instrumental, pode para outro necessitar de aprendizagem conceptual. Os autores apresentam o exemplo, de um aluno que esteja familiarizado com o conceito de bissetriz sabe que, para desenhá-la, apenas precisa de conhecer os princípios gerais de construção da geometria dinâmica e localizar a opção própria. Por outro lado, um aluno que não esteja familiarizado com a noção pode precisar de aprender primeiro mais sobre o conceito, ou possivelmente pode aprender ambas as maneiras simultaneamente, uma reforçando a outra. Outros haverá que irão simplesmente explorar, perguntando "o que é que isto faz?" e "porque é que não posso usar esta opção neste objeto?".

Regra geral, um professor de matemática experiente interage com o *software* de forma diferente que um aluno que ainda está a aprender a matemática (Hoyles & Healy, 1997). O professor deve reconhecer que a maneira como aprendeu a usar o *software* pode não ser a apropriada para os seus alunos.

A aprendizagem conceptual desenvolve-se gradualmente, através de experiências com a geometria. Um aluno que desenhe circunferências com um compasso pode compreender melhor o facto que os pontos da circunferência estão todos à mesma distancia do centro, do que um aluno que desenhe circunferências num *software* de geometria dinâmica. Dobrar um triângulo de papel de forma a que os seus vértices se unam, pode inicialmente ser mais significativo visualmente que construir a bissetriz de um lado do triângulo usando a geometria dinâmica. Mas, a experiência de ver no ecrã pode também aprofundar a sua compreensão do que se pode "fazer e não fazer" com as construções geométricas.

Alguma da aprendizagem conceptual necessária para a geometria dinâmica não faz parte do programa da matemática. Por exemplo, é essencial distinguir três tipos de pontos: o ponto básico, que pode ser arrastado livremente; o ponto num objeto, como numa circunferência ou numa linha, que apenas pode ser movimentado ao longo desse objeto; e o ponto de intersecção, que não se move (relativamente aos objetos que pertence) quando é arrastado. Um comum equívoco é que a intersecção é a "cola" que mantêm os objetos juntos, como se eles fossem rebites ou parafusos (Jones, 1999). Os alunos precisam de entender a ideia de dependência funcional (Jones, 1996), por outras palavras, eles precisam de perceber que certas partes de uma figura dependem de outras partes e que essas figuras precisam de ser construídas de uma determinada sequência. Existirão sempre alunos que para criar um quadrado começam por desenhar quatro segmentos de reta com o mesmo comprimento e depois tentam, sem sucesso, fazer com que sejam perpendiculares aos pares.

No quarto grupo os professores dedicaram uma aula para criações no papel e uma segunda aula usando *software* de geometria dinâmica. Em consequência, na terceira aula, muitos dos alunos conseguiram seguir as instruções para criar quadriláteros. No entanto, na exploração das propriedades dos quadriláteros, alguns alunos não conseguiram dizer o que precisavam de ter em atenção. Eles concentram-se mais nos detalhes em vez na figura no seu todo. Algumas vezes, a ação de arrastar um ponto, desfazia a figura.

Nalgumas vezes, pode ser difícil para o aluno perceber as figuras num ecrã de computador cheio e em constante mudança. Os alunos podem não ser capazes de ver os quadriláteros que eles criaram, por trás da complexidade de linhas e círculos usados na sua construção. Um aluno mais experiente aprende a "esconder" os objetos usados na construção e constrói segmentos de reta onde necessitam de ser visíveis.

As questões colocadas aos alunos precisam de ser trabalhadas de maneira a direcionar a sua atenção de forma produtiva e para os encorajar a explorar. Podem ser usadas para focar a sua atenção nas propriedades que se alteram (Mackrell & Johnston-Wilder, 2005). Isto pode requerer que o professor ensine a medir comprimentos e ângulos, mas também pode envolvê-los num raciocínio geométrico sobre o que é verdade sobre a sua figura a partir da forma como foi construída.

Os estudos apresentados anteriormente são baseados numa suposição comum, quando se usa as TIC na educação matemática: a interação com a situação de aprendizagem depende de como os alunos, individualmente, constroem as suas figuras a partir de uma tela em branco.

Uma maneira de desenvolver a interação seria fazer uma aula onde o professor seja o centro, e tenha um computador ligado ao projetor ou a um quadro interativo. O problema de construir diferentes tipos de quadriláteros podia ser o tema central de uma discussão, com as ideias de diferentes alunos a serem experimentadas e as respetivas consequências exploradas. Uma segunda possibilidade seria fornecer aos alunos, documentos pré-construídos. Nesses documentos, os alunos podiam manipular as figuras que apareciam, muitos dos problemas iniciais podiam ser ultrapassados. Mas, como sempre, existem prós e contras e sacrifícios em ambas as abordagens.

Os professores de todos os grupos concordaram que os alunos se sentiram motivados quando trabalharam com *softwares* de geometria dinâmica, havia animação no ecrã do computador e na sala de aula.

Estes estudos com as diferentes abordagens salientam essencialmente que se deve esperar dos alunos reações bastante diferentes uns dos outros, e que mesmo para o professor certas tarefas possam parecer óbvias o mesmo poderá não se refletir nos alunos. Os docentes devem ter em atenção o público a quem vão aplicar a tarefa, sabendo de antemão se estão familiarizados com o ambiente de geometria dinâmica escolhida. É necessário que os alunos aprendam a manusear bem o *software* para que consigam aprender os conceitos desejados, podendo fazê-lo em simultâneo.

2.2.1 Aprendizagem da geometria no *GeoGebra*

Muitos estudos realizados afirmam que as aplicações de geometria dinâmica auxiliam a compreensão de conceitos e de relações geométricas pelo que devem ser utilizadas para observar, analisar, relacionar e construir figuras geométricas e operar com elas. A capacidade que o *GeoGebra* tem de permitir manipular graficamente um objeto e ter acesso à sua representação algébrica, constitui a diferença crucial quando comparado com outros ambientes de geometria dinâmica, tal como, o *Geometer´s Sketchpad*, o *Cabri-géomètre*, o *Cinderella*, entre outros.

Fernandes e Viseu (2010) levaram a cabo um estudo sobre o desenvolvimento da capacidade de argumentação, de alunos de 9º ano, na aprendizagem da geometria com a ajuda do *GeoGebra*. Os alunos realizaram duas tarefas, uma de natureza exploratória, e outra de natureza investigativa, sendo esta última intitulada Quadrado Inscrito e Circunscrito na mesma circunferência e descrita de seguida.

A tarefa tinha como principal objetivo relacionar a área de um quadrado circunscrito numa circunferência e a área de outro quadrado inscrito na mesma circunferência, numa fase mais avançada foi pedido aos alunos para investigarem se as conclusões obtidas para os quadrados eram semelhantes para outros polígonos regulares.

Uma das alunas conjeturou corretamente o que se pretendia, arrastando a figura dentro da circunferência verificou que as relações do quadrado se mantinham inalteradas, para a segunda parte da tarefa, arranjou contraexemplos. Os autores concluíram que o *software* de geometria dinâmica é uma ótima ferramenta para a criação de contraexemplos e na verificação de conjeturas. A aluna revelou que teve algumas dificuldades em escrever as suas reflexões e conjeturas realizadas ao mexer com as figuras no *software*.

Os autores mencionam também que quando as conjeturas são questionadas, os alunos são levados à procura de novos argumentos:

> O simples facto de perguntar aos discentes a veracidade das suas reflexões, despertou-lhes a curiosidade e um reconhecimento de que a verificação indutiva/experimental apenas confirma o resultado e não desenvolve o conhecimento nem a compreensão. (Fernandes & Viseu, 2010, p.4)

Para Fernandes e Viseu (2010) as conjeturas geométricas exploradas e formuladas, pelos alunos no estudo, foram resultado da consecução das tarefas, conjuntamente com os recursos tecnológicos utilizados. Estas explorações foram caraterizadas por um conjunto de evidências com alguma regularidade, condição indispensável para os alunos conceberem afirmações. Emergiu assim a necessidade de verificar a veracidade dos resultados, o que permitiu aos alunos começarem a provar, "caraterizado como um misto de intuição, verificação quase empírica e prova lógica, não necessariamente rigorosa" (Fernandes & Viseu, 2010).

Coelho e Saraiva (2002) dizem-nos que a interação entre aluno, professor e *software* de geometria dinâmica leva os alunos a construírem o seu próprio pensamento (Fernandes & Viseu, 2010). Com o uso contínuo desta prática pedagógica as dificuldades foram diminuindo, muito devido ao uso do *GeoGebra*. A potencialidade de arrastar as figuras, permitiu aos alunos explorar de uma forma dinâmica e rápida as suas construções, levando-os a obter conclusões sobre propriedades e relações geométricas, permitiu também a identificação dos elementos fixos e variantes e a elaboração de inferências a partir de informação visual. No entanto, notaram-se dificuldades nas provas matemáticas devido à falta de domínio da ferramenta.

Delgado (2008) levou a cabo um estudo com alunos do 11º ano de escolaridade sobre problemas geométricos no *GeoGebra* e concluiu que:

> o facto de ter sido usado um programa de geometria dinâmica permitiu a manipulação virtual dos elementos básicos, mostrando de outros ângulos e de várias formas os elementos construídos a partir deles, sem alterar suas posições relativas, criando um dinamismo que preserva as relações entre os elementos da figura. Esta potencialidade permitiu que os alunos, ao manipular estas estruturas dinâmicas, se apercebessem das relações existentes, sendo, desta forma, mais fácil estabelecer conjeturas a que, como alguns referem, nunca teriam chegado caso trabalhassem apenas com papel e lápis. Esta capacidade manipulativa contribuiu para uma abordagem experimental e indutiva, desenvolvendo a construção de generalizações a partir de múltiplas observações. (Delgado, 2008, p. 14)

Esta investigadora afirmou ainda que a resolução de problemas, através do *GeoGebra*, agradou e motivou os discentes na aprendizagem da matemática e na aquisição de novos conceitos da geometria.

> [Os *softwares* de geometria dinâmica são] ambientes propícios à descoberta de propriedades e relações geométricas, favorecendo a aprendizagem, beneficiando a aquisição de conhecimentos e incluindo a produção de provas (Fernandes & Viseu, 2010, p. 6).

Apesar de existirem ideias divergentes, os ambientes de geometria dinâmica influenciam positivamente a forma de analisar e de argumentar.

CAPÍTULO III

3. METODOLOGIA

Neste capítulo aborda-se a metodologia de investigação utilizada na realização do estudo, caraterizando-a e destacando os procedimentos realizados ao longo da investigação. Descreve-se a escola, a turma e os alunos participantes, salientando os motivos das escolhas efetuadas e a relação existente com a investigadora. Descrevem-se as várias técnicas utilizadas na recolha de dados, apresentam-se a planificação e calendarização das atividades a desenvolver no decorrer do estudo. Por fim, faz-se uma referência à ferramenta utilizada no estudo – o *GeoGebra*.

3.1 Investigação qualitativa em educação

No início dos anos setenta começou a surgir e a ser aceite a investigação qualitativa pelos investigadores educacionais, ganhando peso a observação participante. Foi nessa altura que o National Institute of Education apoiou investigações qualitativas de caráter avaliativo, pois antes não era vista com bons olhos, pelos resultados não chegarem a dados concretos. Nos anos oitenta e noventa houve uma crescente publicação de artigos, surgindo uma nova revista dedicada unicamente à publicação de investigação qualitativa em educação, denominada *International Journal for Qualitative Studies in Education*.

Para Bogdan e Biklen (1994), a investigação qualitativa tem cinco caraterísticas em comum:

- Os dados são recolhidos no seu ambiente natural sendo o investigador e instrumento principal, este coloca-se no espaço a estudar durante bastante tempo, isto porque se preocupa com o contexto dos investigados e para melhor compreender as ações observadas no seu ambiente habitual de ocorrência. Os locais de estudo também têm de ser estudados no seu contexto histórico.

  > Para o investigador divorciar o ato, a palavra ou o gesto do seu contexto é perder de vista o significado. (Bogdan & Biklen, 1994, p.47).

  Mesmo que os dados recolhidos sejam utilizando câmaras de filmar ou recorrendo à entrevista ou à observação participante, os investigadores deslocam-se sempre ao local pois acreditam que o comportamento humano é influenciado pelo contexto onde ocorre.

- É uma investigação descritiva, os dados recolhidos não são em forma de número mas sim de palavras ou imagens e podem ser recolhidos através de entrevistas, notas de campo, fotografias, vídeos, documentos pessoais e outros registos oficiais, tudo para poder ilustrar da melhor forma o que se pretende estudar.

> A descrição funciona bem como método de recolha de dados, quando se pretende que nenhum detalhe escape ao escrutínio. (Bogdan & Biklen, 1994, p.48)

- É dada mais importância ao processo do que aos resultados ou produtos.

- Os dados são analisados de forma indutiva, não são recolhidos para confirmar hipóteses pré-construídas. Uma teoria sobre um objeto de estudo só começa a ser esboçada depois de recolher dados e de passar tempo com os sujeitos.

- O significado é muito importante.

> Os investigadores estão constantemente a inquirir os sujeitos para tentar perceber aquilo que eles experimentam, o modo como eles interpretam as suas experiências e o modo como eles próprios estruturam o mundo social em que vivem. (Psathas, 1973, p.32)

Uma pergunta que se impõe quanto à investigação qualitativa é se ela poderá ser alvo de generalização. Bogdan e Biklen (1994) dizem que não são todos os investigadores que se inquietam com estas questões.

> O comportamento humano não é aleatório ou idiossincrático. Deste modo, a preocupação central não é a de se os resultados são suscetíveis de generalização, mas sim a de que outros contextos e sujeitos a eles podem ser generalizados. (Bogdan & Biklen, 1994, p.48)

O objetivo principal dos investigadores qualitativos é o de compreenderem a experiência e o comportamento dos indivíduos em estudo, tal como a investigadora pretende.

Este método foi o escolhido para o estudo por ser o que mais coadunava o trabalho que a investigadora queria desenvolver. Primeiro porque os dados foram recolhidos no seu ambiente natural. A investigadora deslocou-se à escola, mais propriamente à sala de aula, durante o processo para recolher todos os dados possíveis. Foi estudado também o contexto histórico da escola e dos alunos. A investigação teve um caráter descritivo, através de vários tipos de recolha de dados, a investigadora pretendeu descrever detalhadamente tudo o que se passou nas aulas em estudo. O resultado da análise das aulas é tão importante como o processo pelo qual os alunos passaram. A investigadora não tinha em antemão uma teoria que queria provar com as conclusões, à medida que foram recolhidos e analisados os dados, foi-se esboçando o caminho a percorrer. A investigadora manteve um contato próximo com os alunos de modo a inquiri-los e perceber as suas ideias e experiências com as tarefas desenvolvidas.

3.1.1 Estudo de caso

O investigador depois de decidir o que quer vir a estudar, procura o local ou locais e as pessoas que possam ser o seu objeto de estudo ou fonte de dados. Ao encontrar o que é procurado, começa a pensar como se deve proceder para a sua concretização. Inicia-se com a recolha de dados, analisando-os e revendo-os, de forma a tomar decisões acerca do objetivo do estudo. Com o decorrer do tempo, os investigadores podem colocar algumas ideias e planos de parte para dar início a outros. Conhecendo melhor o tema em estudo, os planos vão sendo alterados e as estratégias vão sendo escolhidas e afinadas.

> [Para Merriam (1988)] o estudo de caso consiste na observação detalhada de um contexto, ou indivíduo, de uma única fonte de documentos ou de um acontecimento específico" (Bogdan & Biklen, 1994, p.89).

Neste estudo foi escolhido o estudo de caso de observação, pois a recolha de dados consistiu, maioritariamente, na observação participante e o foco do estudo centrou-se no desenvolvimento de tarefas em sala de aula.

> Os setores da organização que, tradicionalmente, se focam nestes estudos são os seguintes:
>
> 1. Um local específico dentro da organização (a sala de aulas, a sala de professores, o refeitório).
>
> 2. Um grupo específico de pessoas (membros da equipa de basquetebol do liceu, professores de um determinado departamento académico).
>
> 3. Qualquer atividade da escola (planeamento do currículo ou o "namoro").
>
> (Bogdan & Biklen, 1994, p.90)

O local de estudo específico escolhido, dentro da organização escola, foi a sala de aula. O grupo específico de pessoas selecionadas foram quatro alunos de uma turma de nono ano de escolaridade. A atividade elegida foi um conjunto de aulas que se debruçaram sobre o estudo da geometria.

Segundo Bogdan e Biklen (1994) os estudos de caso que se socorrem da observação contêm um tratamento histórico do ambiente, para se compreender melhor a situação atual dos investigados. A escolha de um aspeto particular de uma organização "é sempre um ato artificial, uma vez que implica a fragmentação do todo onde ele está integrado" (Bogdan & Biklen, 1994, p.91). O investigador tem de ter em linha de conta a relação existente entre essa parte e o todo. O contexto histórico da escola e dos alunos foi estudado e a análise dos dados teve em atenção o contexto global da turma.

3.2 Participantes

Para caraterizar os alunos participantes no estudo, começa-se por descrever o ambiente socioeconómico, cultural, as infraestruturas e o projeto educativo da escola onde estão inseridos. Seguidamente carateriza-se a turma e posteriormente, explica-se a maneira como foi elaborada a escolha dos discentes. Estes são caraterizados de forma particular, tanto a nível pessoal como a nível académico. Menciona-se também a relação existente entre a investigadora e os discentes selecionados.

3.2.1 Caracterização da Escola

O estudo foi realizado numa escola básica, pertencente ao Concelho de Setúbal. Esta escola é sede de agrupamento constituído por mais cinco escolas básicas de primeiro ciclo e Jardim de Infância. Em termos de localização e estruturas físicas, as escolas são completamente distintas bem como as suas respetivas comunidades escolares. A noção de agrupamento como um todo tem vindo a amadurecer, notando-se já alguma evolução no que respeita à interação entre os diversos intervenientes, a vários níveis. No Projeto Educativo de Agrupamento, são evidenciados pontos fortes e pontos fracos referentes aos mais diversos aspetos. Como pontos fortes, o documento refere o funcionamento dos serviços, a formação contínua dos diversos intervenientes do agrupamento, diversidade de estratégias, nomeadamente o recurso às Tecnologias de Informação e Comunicação, dinamização de projetos e relacionamento entre as diversas estruturas educativas, sociais e de segurança, entre outros. De facto, o equipamento informático, nomeadamente a sala de TIC existente na escola sede, foi um fator essencial para a realização desta investigação. Em relação aos pontos fracos, são destacados no documento a sobrelotação das escolas, a falta de humanização dos espaços nas escolas do 1º ciclo, a deficiente circulação de informação entre os vários intervenientes, a falta de articulação entre ciclos, a falta de espaços cobertos para a prática de Educação Física ou espaços adequados para a prática de atividades extracurriculares. É ainda destacada falta de motivação, autonomia e responsabilidade por parte dos alunos.

Tem de ser destacado o facto do Projeto Educativo referir que:

> Os alunos têm de ter acesso a materiais didáticos, a propostas de atividades e a metodologias de investigação que contribuam para a melhoria das condições do processo de ensino e de aprendizagem da Matemática. A articulação e o trabalho conjunto entre os três ciclos e a procura de um fio condutor no que concerne ao desenvolvimento de atividades, que envolvam os alunos em experiências de aprendizagem diversificadas, permitirão aumentar o nível de exigência e de qualidade no ensino da disciplina. (Projeto Educativo, 2011, p.7)

De uma forma geral, o Agrupamento definiu o seu projeto em quatro domínios: o curricular, o psicossocial, o comunitário e o organizacional, todos com o fim de melhorar as condições físicas e sociais; formar cidadãos responsáveis, tolerantes, justos e solidários; e finalmente aumentar o sucesso educativo. A operacionalização do projeto passa por colocar em prática um conjunto de estratégias que visam atingir os objetivos propostos.

A escola situa-se na zona central da cidade de Setúbal e entrou em funcionamento em 15 de Outubro de 1984. O edifício é constituído por 5 blocos (sendo 3 blocos de salas de aula, outro para a papelaria, cantina e bar e outro para a direção, sala de professores e secretaria) e o pavilhão gimnodesportivo. De entre os recursos físicos existentes destaca-se a cozinha, onde são confecionados os almoços, o refeitório, a biblioteca escolar e centro de recursos educativos, a sala de TIC, a sala multimédia, o gabinete de estudo, a sala de animação, o bar dos alunos e dos professores, o gabinete de saúde, o gabinete de psicologia e orientação, o gabinete de educação especial e dois campos de jogos. O espaço exterior é bastante grande e agradável pois tem espaços verdes acarinhados pelos alunos do Clube de Ecologia.

A população alvo da escola pertence à classe média/baixa, os alunos são filhos de pais, na grande maioria, operários fabris ou de famílias onde, pelo menos, um membro se encontra desempregado.

3.2.2 Caracterização da turma

A turma pertence ao nono ano de escolaridade e tem na sua constituição vinte e quatro alunos, sendo treze do sexo feminino e onze do sexo masculino. Seis alunos são repetentes do nono ano e não existem discentes com necessidades educativas especiais. A idade destes alunos varia entre os catorze e os dezoito anos, sendo a média das idades de 14,8 anos.

Em relação ao aproveitamento, a turma apresenta bons resultados, quatro a cinco alunos (o que corresponde a mais de 20% da turma) destacam-se com resultados acima dos 90% nas fichas de avaliação sumativa e nas competências transversais na disciplina de matemática. A turma é caracterizada por ter alunos interessados, empenhados e trabalhadores, que respeitam a professora, os colegas e o espaço onde se encontram, apesar de existir uma margem de discentes que revelam dificuldades. Todos estão habituados a trabalhar com tecnologia dentro da sala de aula desde o 7º ano de escolaridade, destaca-se que este ano letivo, os alunos desenvolveram tarefas com recurso a *applets*, folha de cálculo e ao *GeoGebra* e elaboraram os relatórios correspondentes a cada tarefa.

Na avaliação final do primeiro período 13% dos alunos obtiveram nível dois, 29% nível três, 38% nível quatro e 21% nível cinco.

3.2.3 Escolha dos participantes

A escolha da turma prendeu-se com o facto da investigadora conhecer a maior parte dos alunos pois foi professora da disciplina de Área de Projeto do ano letivo 2010-2011 (ano anterior ao estudo). O contato com estes alunos, durante um ano letivo, permitiu saber de antemão as suas competências, aptidões e o comportamento em sala de aula, o que na opinião da investigadora pode ser benéfico na preparação das tarefas. Para além de que a relação existente com os alunos poderá ser facilitador na recolha de dados e na fiabilidade dos depoimentos prestados. Outro fator, igualmente importante, pretendeu-se com a professora de Matemática da turma se ter disponibilizado de imediato para facilitar a realização do estudo. A docente prontificou-se a abrir as portas das suas aulas para o que fosse necessário, nomeadamente, para que a investigadora pudesse assistir ao número de aulas que achasse pertinente ou para falar com os alunos sempre que o desejasse. Outro facto, não menos importante, foi a escola também não ser um espaço desconhecido para a investigadora, o seu ambiente e as suas infraestruturas, nomeadamente, a sala de TIC onde decorreram algumas aulas assistidas. A sala dos computadores estar disponível no horário da turma e o horário da turma ser compatível com o horário da investigadora foi outro fator importante. O facto dos alunos já estarem familiarizados com a tecnologia nas aulas de matemática, particularmente, com o *software* escolhido para o estudo. E por último, porque a turma se mostrou, desde o início, muito recetiva e participativa quando lhes foi apresentado o estudo que se iria desenvolver, levando a querer que perante o processo de investigação iriam ser bons informantes e cooperantes.

Para este estudo foram escolhidos quatro alunos da turma. Esta seleção privilegiou a heterogeneidade ao nível das avaliações obtidas nos anos anteriores e no primeiro período, à disciplina de matemática. Depois de uma reflexão, com a professora da turma, acerca do comportamento/postura em sala de aula dos discentes escolhidos foi também tomada em consideração a forma como realizam tarefas. A escolha teve em atenção se os alunos, de uma forma geral, terminam as tarefas, o modo como encararam cada uma delas, o modo de pensar e o desenvolvimento do raciocínio, favorecendo a diversidade em cada dos pontos referidos. Houve o cuidado de escolher alunos comunicativos e participativos, para que o diálogo entre a investigadora e os alunos na análise de dados fosse o mais credível possível.

3.2.4 Caraterização dos alunos participantes

Os alunos encontram-se no terceiro ciclo, pertencem a uma turma do ensino regular e são avaliados numa escala de 1 a 5.

Para a caraterização dos participantes é importante salientar que os alunos irão formar grupos de trabalho de dois elementos, por isso para além de os caraterizar individualmente também se evidenciam as suas particularidades enquanto grupo. De seguida, serão apresentados os quatro alunos de dois grupos de trabalho, as suas identidades serão salvaguardadas, por isso os seus nomes são ficcionados.

A Carlota é uma aluna inteligente, que gosta dos desafios propostos pela professora, é empenhada, gosta de estudar e de trabalhar, não apresenta muitas dificuldades e solicita a ajuda da professora quando acha que necessita. Nas aulas mostra-se interessada e cooperante, ajuda os colegas ao seu lado quando vê que têm dificuldade. É uma aluna comunicativa, simpática e meiga e apresenta bons resultados à disciplina de matemática, o seu nível de avaliação varia entre o 4 e o 5.

A Marta é uma aluna com algumas dificuldades, que se mostra esforçada nas aulas mas que em casa não trabalha o suficiente para chegar ao nível positivo, as suas avaliações variam entre o 2 e o 3. Apesar disso é trabalhadora e empenhada nas aulas, faz o trabalho que é pedido e quando sente necessidade pede ajuda aos colegas, principalmente à colega de carteira. A Marta é muito educada, simpática e alegre, fica triste quando não consegue atingir o nível positivo e procurar saber sempre onde errou.

A Carlota e a Marta formam um grupo de trabalho porque são amigas e dão-se bem, por serem alunas bastante diferentes, tanto a nível pessoal como académico. Enquanto perante um obstáculo a Marta tenta repetidas vezes até chegar a um resultado, a Carlota desiste mais facilmente. No entanto, a Carlota é mais comunicativa e ao sentir dificuldades será ela que tem mais à vontade para chamar pela professora. Por isto é esperado que criem um bom equilíbrio na execução das tarefas.

O António é um aluno que gosta de estar sossegado, é comunicativo mas apenas fala quando é solicitado, por iniciativa própria apenas levanta o braço para tirar algumas dúvidas, é inteligente, empenhado e interessado. Mostra bastante interesse pelas atividades propostas e pela resolução de exercícios e problemas, é um aluno participativo e a sua avaliação de final de período varia entre o três e o quatro.

O Carlos é conversador, gosta de chamar à atenção dos colegas, às vezes para destabilizar outras para ajudar a acalmar a turma e outras apenas para fazer um apontamento humorístico. Dado o seu modo de estar acaba por se destacar da turma, pois em momentos de silêncio ele é o primeiro a falar, quer seja para dizer o resultado de um exercício quer para transmitir que está cansado, no entanto, todos gostam dele. Como aluno apresenta algumas dificuldades e gosta de tirar as suas dúvidas junto da professora. É um discente bastante participativo, sabendo ou não a resolução do exercício. Quando encontra um obstáculo realiza algumas tentativas, mas desiste com alguma facilidade. O Carlos é aluno de nível três, mas precisa de trabalhar para atingir a positiva.

O António e o Carlos fazem o segundo grupo de trabalho, mais uma vez enquanto pessoas e alunos, são bastante diferentes. O António é ponderado, gosta de trabalhar com calma e pensar sobre as questões antes de começar a responder, enquanto que o Carlos trabalha mais de forma impulsiva, muita das vezes executa o que lhe é pedido sem ler o enunciado até ao fim. No entanto, são amigos e gostam de trabalhar um com o outro.

Os alunos participantes demonstraram ser, educados e cumpridores das regras a ter em sala de aula, bons comunicadores, cooperantes e souberam trabalhar em grupo de forma organizada.

3.2.5 Relação com os participantes

A investigadora foi professora da grande maioria dos alunos da turma à disciplina de Área de Projeto no ano anterior à realização deste estudo. Essa disciplina tinha como principal objetivo desenvolver um ou mais projetos, utilizando as tecnologias. Nesse âmbito foram trabalhados vários *softwares*, nomeadamente, o *Microsoft Office Excel*, que também é utilizado nas atividades desenvolvidas neste estudo. Os alunos aprenderam a trabalhar com várias ferramentas tecnológicas com o intuito de, no final do ano, todos entenderem bem a diferença entre elas. Ao distinguirem bem as ferramentas puderam tirar melhor partido de cada uma delas no projeto final realizado para a disciplina. Não era suficiente saber trabalhar com elas, mas sim saber quando as usar e de que forma. A Carlota mostrou-se sempre muito interessada e obteve bons resultados, o seu empenho sobressaia na turma e os seus projetos eram dos mais elaborados e apreciados tanto pela professora como pelos colegas. O António era um aluno que gostava de cumprir as regras da sala de aula e respeitar as exigências da professora, os seus trabalhos cumpriam o pretendido, mas mostravam pouca originalidade. O Carlos apesar de se mostrar distraído conseguia sempre desenvolver projetos com tudo o que era pedido de uma forma única, punha sempre o seu cunho de humor, fazendo com que os trabalhos se destacassem dessa forma.

Resumidamente, a grande maioria dos alunos já conhecia a investigadora, não sendo assim um elemento estranho nas aulas que assistiu, o que revelou ser uma mais valia. É de salientar que dos alunos selecionados para o estudo, apenas a Marta era nova na turma.

O papel assumido pela investigadora foi de observadora/participante.

3.3 Técnicas de recolha de dados

Como foi referido anteriormente, as aulas escolhidas para o desenvolvimento do estudo foram orientadas pela professora de matemática da turma e assistidas pela investigadora. Em todas as aulas selecionadas para o estudo, a investigadora observou e tomou notas, nas específicas de resolução de tarefas no *GeoGebra*, para além disso também participou na aula, prestando esclarecimentos aos alunos sempre que eles solicitaram.

A recolha de dados foi realizada através de gravação áudio/vídeo das aulas assistidas, da gravação dos ecrãs de trabalho durante a execução das tarefas, da observação direta e participante na resolução das tarefas e da resolução de exercícios, da análise das questões da ficha de avaliação e por fim, foram realizados inquéritos e entrevistas aos alunos envolvidos. As entrevistas foram realizadas a pares, para melhor se compreender a forma como as tarefas foram realizadas e entender os raciocínios que desenvolveram na execução das mesmas.

3.3.1 Notas de campo

As notas de campo, segundo Bogdan e Biklen (1994, p.102), são “o relato escrito daquilo que o investigador ouve, vê, experiencia e pensa no decurso da recolha e refletindo sobre os dados” (Bogdan & Biklen, 1994, p.102). Neste caso é a descrição dos alunos, da sala de aula, das tarefas, das atividades, das conversas e dos acontecimentos. A investigadora tirou notas de forma a serem detalhadas, precisas e extensas. Elas são um suplemento importante aos outros métodos de recolha de dados.

A investigadora optou por ter uma observação direta e participante. Enquanto observadora, esteve atenta às questões que foram colocadas, o tempo de execução das tarefas e a maneira como comunicaram entre grupos e dentro do grupo. Como participante, sempre que foi necessário, tirou dúvidas aos alunos, de forma a facilitar o manuseamento do *software* e também como forma de compreender os processos e raciocínios de cada um. Tentou também perceber se os alunos se mostraram empenhados e interessados e se houve momentos de pausa ou de trabalho sistemático.

A investigadora participou nas duas aulas de resolução de tarefas no computador, nas aulas de exercícios sem recurso à tecnologia esteve presente apenas como observadora. O papel escolhido pela investigadora foi com o sentido de minimizar o comportamento diferente nos alunos, optando por uma presença mais discreta.

Para Bogdan e Biklen (1994) a presença do investigador modifica o comportamento dos alunos e estas modificações chamam-se “efeito do observador”, no entanto, a interação existente entre investigadora/aluno foi feita de forma natural, não intrusiva e não ameaçadora, de forma a minimizar esse efeito. Para os autores, se os alunos forem tratados como “sujeitos de investigação” vão comportar-se como tal, de forma diferente do seu normal. Como a investigadora estava interessada em observar o seu comportamento natural em sala de aula, tentou que as atividades, na sua presença, não diferissem muito daquilo que se passava na sua ausência.

3.3.2 Registo de vídeo

O registo de vídeo é um instrumento muito importante na recolha de informação oral e visual. Para Grando (2010) pode capturar comportamentos valiosos e interações complexas e permite ao investigador reexaminar continuamente os dados. O vídeo supera a limitação humana de observação e é superior às notas do observador, uma vez que não envolve edição automática.

Todas as aulas selecionadas para o estudo foram gravadas, através de uma câmara de filmar colocada num local estratégico da sala de aula. Nas aulas que decorreram na sala de TIC, a câmara estava direcionada apenas para os alunos em estudo, pois estes sentaram-se apenas numa fila e consecutivamente. Nas aulas desenvolvidas na sala sem computadores, a câmara foi posicionada num canto da sala de forma a obter uma imagem de toda a turma.

Através de um *software* específico de captura de ecrãs, foram ainda filmados os ecrãs dos dois computadores onde se encontravam os alunos que se pretendia investigar. O programa é de código aberto e serviu para registrar, em vídeo, todas as atividades realizadas nos computadores dos alunos, com a finalidade de posteriormente serem reproduzidos e analisados.

A investigadora, na análise das tarefas executadas no computador, visionou os vídeos realizados tanto com a câmara de filmar como com o programa de captura de ecrãs, em simultâneo, para ter uma melhor perceção da reação e trabalho dos alunos.

A presença do *software* de captura de ecrãs não causou qualquer tipo de comentário depreciativo por parte dos alunos, estes nem mostraram que a sua privacidade fosse invadida nem algum tipo de vergonha dos seus passos serem gravados. Quanto à câmara de filmar, as alunas mais junto dela mostram-se tensas nos primeiros momentos da primeira aula, no entanto, conseguiram abstrair-se da sua presença. Bogdan e Biklen (1994) afirmam que se houver atividades cativantes no decorrer do estudo/atividade, os alunos darão pouco importância à câmara de filmar, tornando-se mais fiel à sua postura normal.

3.3.3 Inquéritos

O inquérito é um instrumento de investigação que também foi utilizado neste estudo. Ele é usado preferencialmente nas ciências sociais e é uma técnica de caráter qualitativo. Para Serrano (1994) é um meio útil e eficaz de recolher informação num espaço curto de tempo, e que pode conter perguntas fechadas, abertas ou mistas.

A investigadora construiu um inquérito (Anexo 4) para os alunos do estudo com o objetivo principal de perceber em que medida os alunos gostaram de executar as tarefas propostas. Particularizando, pretendia-se obter a opinião, dos alunos, se o papel assumido pela professora foi importante na aprendizagem dos tópicos abordados, se as tecnologias na aula foram vistas como uma mais-valia, se os alunos compreenderam os conteúdos lecionados, o que acharam do manuseamento do *GeoGebra,* se o consideraram uma ferramenta importante nas aulas de matemática e, por fim, perceber quais as vantagens e desvantagens de aulas deste tipo.

Os alunos realizaram o inquérito após a conclusão da ficha de avaliação, pois nesta etapa já tinham decorrido todas as aulas assistidas e já tinham sido analisadas parte das tarefas.

3.3.4 Entrevistas

A entrevista para Bogdan e Biklen (1994) consiste numa conversa intencional, regra geral entre duas pessoas, dirigida pelo entrevistador com o objetivo de recolher informações sobre o entrevistado. Esta serve para recolher dados descritivos na linguagem do entrevistado, para que o entrevistador consiga desenvolver intuitivamente uma ideia sobre a maneira como o entrevistado interpreta certos aspetos.

Neste estudo o principal objetivo da investigadora, ao realizar as entrevistas aos alunos em estudo, era recolher dados descritivos dos alunos com o intuito de tentar perceber o raciocínio desenvolvido ao resolver as questões da ficha de avaliação, relativas à geometria na circunferência. A investigadora tinha consigo os testes e analisou em conjunto a resolução das questões, os alunos explicaram os seus raciocínios e todas as informações pertinentes foram anotadas.

As entrevistas decorreram de forma natural, o guião das questões foi semiestruturado, pois cada par teve uma maneira de pensar diferente por isso algumas perguntas surgiram conforme o que os alunos foram respondendo. Para Bogdan e Biklen (1994) neste tipo de entrevistas são boas para se obter dados comparáveis entre os vários alunos em estudo.

Apesar de conhecer os alunos a investigadora pretendeu ser imparcial nas suas questões e tentou que se assemelhasse a uma conversa descontraída, com o sentido de os alunos serem o mais sinceros possível, expressando-se livremente.

As entrevistas foram realizadas após a conclusão do preenchimento dos inquéritos.

3.3.5 Documentos escritos

As fichas de trabalho tinham questões para responder no enunciado por isso foram analisadas.

A ficha de avaliação foi realizada a seguir às quatro aulas assistidas (duas de desenvolvimento das tarefas no computador e duas sem recorrer à tecnologia) e continha três questões relacionadas com a temática abordada nas tarefas desenvolvidas com recurso ao computador.

> Os dados produzidos pelos alunos são utilizados como parte dos estudos em que a tónica principal é a observação participante ou a entrevista, embora às vezes possam ser utilizados em exclusivo. (Bogdan & Biklen, 1994, p.112)

Estes documentos escritos são parte integrante de um leque das técnicas descritas anteriormente e serviram de base para discussão com os alunos nas entrevistas.

3.4 Planificação e calendarização das atividades

O estudo necessitou de preparação prévia para que as aulas se realizassem nos prazos estipulados. Deste modo, a sala de TIC teve de ser requisitada para os dias indicados e as autorizações aos Encarregados de Educação e à Escola, foram feitas com a devida antecedência.

De seguida, apresenta-se a planificação do estudo resumida numa tabela, para que a sua leitura seja mais simples. Posteriormente, descreve-se a organização do trabalho, onde se explica qual a forma física da sala de aula e de que maneira foram distribuídos os alunos.

3.4.1 Planificação do estudo

O estudo foi realizado no final do segundo período, dele fazem parte seis aulas assistidas, a aula de realização da ficha de avaliação e o momento do preenchimento dos inquéritos e das entrevistas. As primeiras cinco aulas foram consecutivas, sendo as duas primeiras de resolução de tarefas no computador (Anexo 1), seguindo-se duas aulas de resolução de exercícios do manual adotado na sala da turma, sem recurso a computadores. Depois teve lugar uma aula de revisões e outra para a resolução do teste, que antecederam uma aula de realização de tarefas no computador (Anexo 2). Por fim, na última aula do segundo período, a investigadora entrevistou os alunos numa sala reservada para esse efeito.

As aulas selecionadas foram na sua maioria consecutivas, dentro de um espaço limitado de tempo, pois o manuseamento interrompido de algumas ferramentas podia levar ao esquecimento e assim os alunos poderiam perder mais tempo a conhecer o *GeoGebra* e dispensar menos tempo para a aprendizagem dos conceitos desejados.

Todos os materiais manipulados pelos alunos foram preparados com a antecedência devida para que tudo corresse como desejado. Por fim, procedeu-se à recolha e análise de dados.

Na página seguinte apresenta-se uma tabela que sumaria todos os momentos do estudo e os respetivos instrumentos utilizados (Tabela 1).

Tabela 1 – Tabela organizacional dos momentos do estudo e dos instrumentos usados.

Data	Sumário	Sala	Instrumentos utilizados
Final do primeiro período	Elaboração da planificação do estudo; Escolha dos alunos e distribuição em grupos; Elaboração das tarefas a desenvolver.		Projeto de Escola; Computador; Manuais escolares; Programa de matemática para 9º ano.
Início de Fevereiro	Instalação do *software* de gravação de ecrãs; Verificação do *GeoGebra* em todos os computadores da sala de T.I.C..	Sala de TIC	CD de instalação do *software*.
2012-02-29	Propriedades geométricas da circunferência: relações entre ângulos ao centro e inscrito, ângulos inscritos que contém o mesmo arco e ângulos inscritos numa semicircunferência – atividade de investigação.	Sala de TIC	Ficha de Trabalho com as tarefas 1, 2 e 3.
2012-03-01	Conclusão das tarefas da aula anterior. Ângulos, arcos, cordas e tangentes numa circunferência – atividade de investigação.	Sala de TIC.	Ficha de Trabalho com as tarefas 4, 5 e 6.
2012-03-07	Síntese das propriedades das circunferências. Resolução de problemas.	Sala da turma	Manual adotado
2012-03-08	Conclusão da aula anterior.	Sala da turma	Manual adotado
2012-03-15	Realização da ficha de avaliação.	Sala da turma	Fichas de avaliação
2012-03-21	Entrega das fichas de avaliação. Atividade: Soma das amplitudes dos ângulos internos e externos de um polígono. Resolução de exercícios.	Sala de TIC	Ficha de Trabalho com as tarefas 7, 8 e 9.
2012-03-22	Preenchimentos dos inquéritos. Realização das entrevistas.	Sala de TIC	Inquéritos Fichas de avaliação corrigidas
Final do segundo período/Início do terceiro	Análise dos dados.		Tarefas desenvolvidas; Filmagens; Gravação de ecrãs; Inquéritos e entrevistas.

3.4.2 Organização do trabalho

A disposição dos computadores na sala de TIC é apresentada na Figura 3 e como se pode constatar é de bom visionamento dos alunos, quer para tirar dúvidas, ou simplesmente para estar atenta ao seu trabalho.

	PC 5	PC 6	PC 7	PC 8	PC 9
PC 4					PC 10
PC 3					PC 11
PC 2					PC 12
PC 1					PC 13
		PC do professor			
Porta	Quadro				

Figura 3 – Disposição da sala de T.I.C.

Após a escolha dos participantes e de os organizar em grupos de dois, constituíram-se os restantes grupos dos discentes da turma. Realizada esta tarefa, preparou-se a distribuição destes pelos computadores da sala. Como se referiu anteriormente, os alunos em estudo sentaram-se apenas numa fila de computadores, para que fosse mais fácil a sua observação e a obtenção das imagens pela câmara de filmar. A distribuição prévia dos alunos foi muito importante para que o início da aula fosse calmo e de respeito pelo professor, caso contrário os alunos poder-se-iam mostrar barulhentos, correndo dentro da sala para escolherem os lugares e os seus companheiros de trabalho.

Na primeira aula foi indicado a cada aluno o computador que lhe pertencia, nas restantes aulas, que decorreram nesta sala, os alunos já sabiam que lugar ocupar. Os pares em estudo sentaram-se nos computadores 1 e 2.

Para as aulas na sala de TIC foram elaboradas duas fichas de trabalho com seis tarefas para execução com a ajuda do *GeoGebra* (Anexo 1 e Anexo 2).

Nos computadores destinados aos alunos em estudo foi instalado um *software* de gravação de ecrãs e em todos foi confirmado se o *GeoGebra* estava instalado.

3.5 O *GeoGebra*

O *software* de geometria dinâmica eleito para o estudo foi o *GeoGebra*. As suas primeiras versões remontam a 2001 na Universidade de Salzburg, por Markus Hohenwarter, com o intuito de se utilizar em sala de aula. O projeto, cujo seu nome aglutina as palavras Geometria e Álgebra, tem sido continuamente trabalhado na Universidade da Flórida.

Na página oficial (http://www.geogebra.org/cms/pt_PT/) pode ler-se que o *GeoGebra* é um *software* que, numa única aplicação, combina geometria, álgebra, tabelas, gráficos, estatística e cálculo, e é uma multiplataforma para todos os níveis de ensino. Esta ferramenta gratuita de matemática dinâmica tem recebido variadíssimos prémios tanto na Europa como nos Estados Unidos da América.

Das suas principais caraterísticas destaca-se o facto de interligar gráficos, álgebra e tabelas, ou seja, consegue representar ao mesmo tempo, num ambiente visual, as características geométricas e algébricas de um mesmo objeto. Possui um interface amigável de fácil manuseamento e recursos sofisticados. É um *software* gratuito, por isso acessível a qualquer pessoa que tenha um computador e de código aberto, o que permite efetuar alterações de forma a melhorar ou aperfeiçoar ou apenas para personalizar.

É de realçar que a construção das figuras geométricas não é imediata, é necessário que o aluno tenha conhecimentos essenciais, saber conjugá-los e aplicá-los para que as suas construções estejam corretas, de forma a poder manipulá-las o mais fiel possível à realidade. O processo de construção das figuras assenta no conceito de ponto, todos os menus estão disponíveis para seleção. Por exemplo, para construir a mediatriz de um segmento de reta é necessário um segmento de reta, este define-se por dois pontos, desta forma, ao construir, dois pontos o *GeoGebra* fornece logo a mediatriz. Na construção de uma reta paralela ou perpendicular, apenas aparece o menu depois de se definir a reta em relação à qual se pretende a perpendicular ou a paralela. Pois o *software* distingue uma reta de um ponto e quando não está nada selecionado o menu constrói pontos.

Destaca-se, por curiosidade, que a página oficial apresenta materiais de apoio, fórum de utilizadores para tirar dúvidas e uma *wiki* a que qualquer um pode ser acesso.

CAPÍTULO IV

4. ANÁLISE DE DADOS

Neste capítulo serão analisados os dados recolhidos ao longo de todo o estudo. Parte-se da descrição de três aulas, em cada uma delas é evidenciada a tarefa executada com recurso ao *GeoGebra*, a forma como os alunos a executaram e os raciocínios levados a cabo. Posteriormente apresenta-se o desempenho dos alunos nas aulas através das análises dos exercícios sem o uso da tecnologia, das fichas de avaliação e dos inquéritos. O conteúdo das entrevistas aparecerá ao longo das descrições das resoluções dos exercícios, das tarefas e da ficha de avaliação.

Todas as aulas aqui apresentadas foram assistidas pela investigadora e dirigidas pela professora da turma.

4.1 Descrição e análise da primeira aula

Na primeira aula os alunos, ao entrarem, foram distribuídos por grupos sendo-lhes indicados os respetivos computadores de trabalho. Ao entrarem na sala de aula, sentiu-se um clima de entusiasmo, por saberem que os esperava uma aula diferente do comum. Não eram olhares de espanto ou de vislumbre, pois já estavam habituados a trabalhar nos computadores nas aulas de matemática, mas de alegria e interesse no que se iria passar.

Depois de todos os alunos acomodados nos seus lugares, a professora começou a aula relembrando os alunos dos trabalhos que iriam ser desenvolvidos nas próximas aulas e chamou à atenção para a presença da investigadora. Evidenciou, uma vez mais, que as regras fundamentais de uma sala de aula tinham de ser cumpridas, alertou para o facto de a próxima aula voltar a ser na sala dos computadores e comunicou ainda que sempre que surgissem dúvidas para não hesitarem e perguntarem às professoras presentes, salientando ainda que o trabalho realizado iria contar para a avaliação. Os alunos estiveram atentos e calados durante esta pequena exposição, e de seguida a professora ditou o sumário para ser registado no caderno diário.

Após a escrita do sumário, os alunos ligaram os computadores e foi-lhes entregue a ficha de trabalho com as tarefas a realizar (Anexo 1). Nos computadores dos alunos em estudo, a investigadora ativou o *software* de gravação de ecrãs enquanto os alunos liam a ficha de trabalho, para que começassem assim que desejassem. Os discentes abriram o *GeoGebra* e só depois começaram a executar os passos pedidos na primeira tarefa a realizar.

Embora nos primeiros minutos, os alunos em estudo, pudessem parecer pouco à vontade, tudo se esvaneceu num curto espaço de tempo e começaram a adotar atitudes mais descontraídas, não mostrando tensão com a presença da câmara de filmar.

Decorridos 10 minutos após o início da primeira tarefa as professoras verificaram que muitos alunos apresentavam dificuldades no manuseamento do *GeoGebra,* por exemplo, como fixar um ponto, mas principalmente na noção de ângulo. A professora dirigiu-se à turma levando-os a relembrar a noção de ângulo e alertando para o facto de os terem de construir a partir de duas semirretas com a mesma origem.

De um modo geral os alunos apenas pediram ajuda depois de passarem por várias tentativas falhadas e quando se apercebiam que não conseguiam avançar.

Todos os grupos da turma, conseguiram observar um padrão na primeira tarefa, mas não conseguiram especificar logo o que era pretendido, sem a ajuda ou as alertas das professoras. A maioria da turma apenas realizou a primeira tarefa, das três que componham a ficha de trabalho, mas todos chegaram a conjeturas corretas.

Passados 50 minutos da resolução da ficha, a professora decidiu fazer um ponto da situação e chamou ao quadro um aluno para explicar à turma as conclusões a que tinha chegado. O aluno apesar de ter respondido corretamente à questão, não conseguiu utilizar uma argumentação que convencesse os seus colegas, criando assim uma discussão saudável na sala de aula. A discussão levou a que fossem apresentados outros exemplos (através do videoprojector ligado ao computador da professora) e todos pareceram perceber o intuito da tarefa. Apesar de ter levado mais tempo do que tinha sido previsto, esta abordagem mostrou-se bastante benéfica.

No final da aula a investigadora recolheu as gravações dos ecrãs dos computadores dos alunos selecionados para a investigação e a professora recolheu todos os trabalhos dos alunos.

4.1.1 Tarefa 1 – Ângulo ao centro e ângulo inscrito

Na tarefa 1 os alunos tinham de seguir 12 passos para poderem conjeturar o pretendido.

A tarefa consistia em começar por desenhar um ângulo inscrito na circunferência, como se mostra na Figura 4, e de seguida desenhar um ângulo ao centro, como mostra a Figura 5.

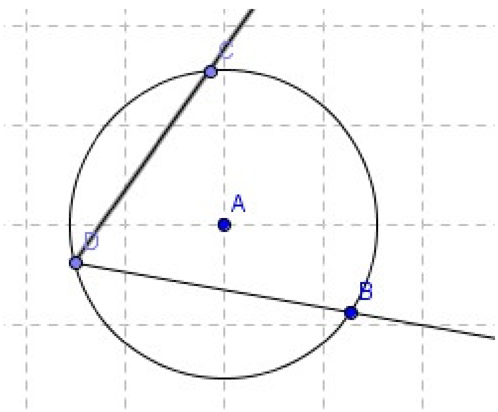


Figura 4 – Ângulo inscrito na circunferência.

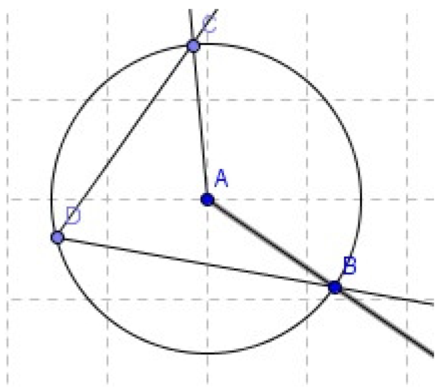
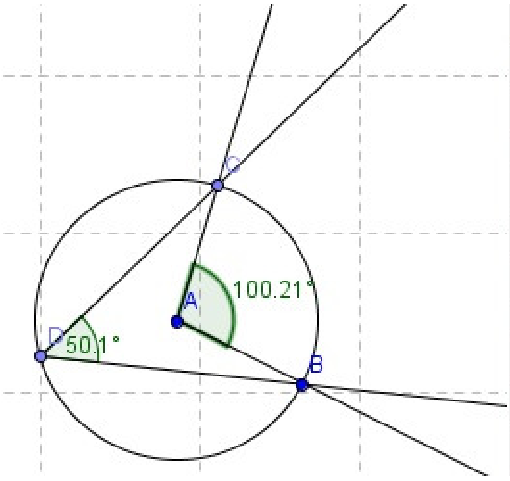


Figura 5 – Ângulo inscrito e ao centro.

Depois era pedido para medir as amplitudes dos dois ângulos, registar numa tabela da Folha de Cálculo e voltar a repetir o processo até obter dez pares de medições no total, como se exemplifica na Figura 6.



1	Ângulo Inscrito	Ângulo ao Centro
2	67.27°	134.54°
3	49.62°	99.24°
4	75.18°	150.35°
5	99.31°	198.61°
6	50.1°	100.21°
7		
8		
9		
10		
11		

Figura 6 – Simulação da construção da tabela.

A questão 13 pedia para analisar cada linha da tabela e registar conclusões. Os alunos deviam concluir que “A amplitude de um ângulo inscrito numa circunferência é metade da amplitude do ângulo ao centro que interseta o mesmo arco” ou “A amplitude do ângulo ao centro é o dobro da amplitude do ângulo inscrito na circunferência que interseta o mesmo arco”.

Na questão 14 pretendia-se saber qual a relação existente entre a amplitude do ângulo ao centro e do seu arco correspondente e entre o ângulo inscrito e o mesmo arco.

Por fim, era pedido para desenhar três circunferências concêntricas em A, para além da já existente, como mostra a Figura 7.

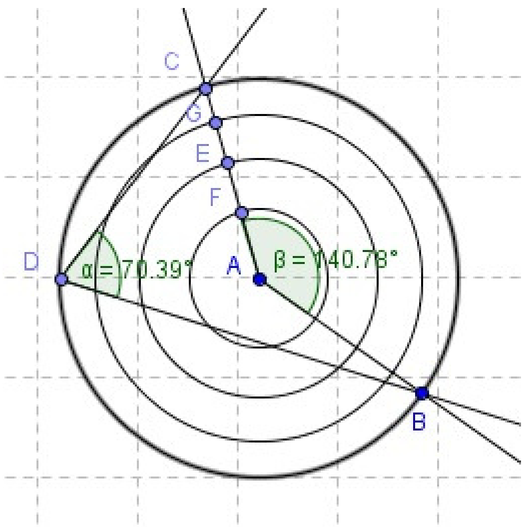


Figura 7 – Circunferências concêntricas em A.

A última questão (pergunta 17) pedia para mover o ponto C e relacionar a amplitude do ângulo ao centro com a amplitude dos vários arcos.

4.1.2. Grupo Carlota e Marta

O par constituído pela Carlota e pela Marta começou por ler a tarefa e realizar os primeiros passos pedidos. Cedo encontraram as primeiras dificuldades na manipulação da ferramenta, não conseguiram fixar o ponto B (passo número 3). Depois de várias tentativas percorrendo os vários separadores, chamaram a investigadora para as ajudar. Para construir o ângulo inscrito na circunferência, a Marta começou por desenhar uma reta, como mostra a Figura 8.

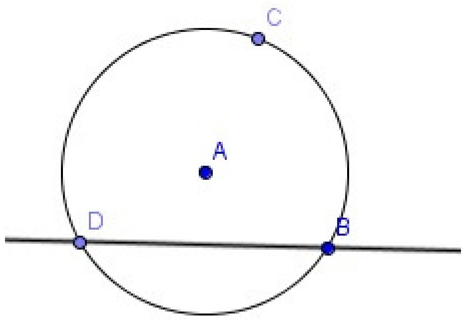


Figura 8 – Reta desenhada pela Marta.

Carlota: Tás a fazer retas! Não é essa! Volta para atrás!

[A Marta apaga a última ação.]

Carlota: Volta ao menu!

[A Marta passou o rato entre as opções de construir uma reta, uma semirreta ou um segmento de reta. Mostrou-se indecisa entre as duas últimas opções, passando o rato constantemente entre elas.]

Carlota: Para!! Para!!! Pode ser essa! Segmentos de reta, para unir BDC!

[A Marta constrói o triângulo BDC.]

Carlota: Boa!!!

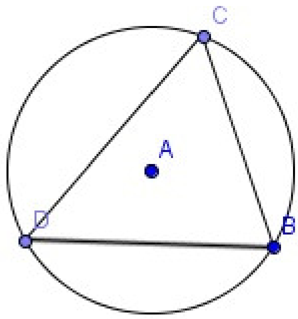


Figura 9 – Triângulo construído pelas alunas.

As alunas ficaram satisfeitas quando conseguiram construir o triângulo. Isto poderá mostrar que as discentes confundiram a notação de ângulo com a de triângulo, pois ambos necessitam de três pontos. Ao longo desta construção as alunas mencionam várias vezes BDC uma para a outra. Não devem ter reparado que a alínea pedia para construírem um ângulo com vértice em D, ou poderiam pensar que conseguiriam medir o ângulo apenas se estivesse presente num triângulo.

A Marta olhou para o computador dos colegas do lado e verificou que, estes não tinham construído um triângulo, por isso chamou a investigadora para se certificar que estavam no bom caminho. A investigadora chamou à atenção para o facto da ficha pedir para construir o ângulo BDC e não o triângulo BDC e relembrou, com as alunas, a noção de ângulo. As alunas chegaram à conclusão que tinham de apagar o triângulo e desenhar duas semirretas, no entanto, desenharam duas retas, a reta DC e a reta DB. Para a alínea que pede para desenhar o ângulo ao centro $C\hat{A}B$, construíram as retas AC e AB, como mostra a Figura 10. Daqui pode-se depreender que as alunas confundiram as três noções, reta, semirreta e segmento de reta. Mesmo depois de terem refletido que era necessário construir duas semirretas as discentes construíram retas.

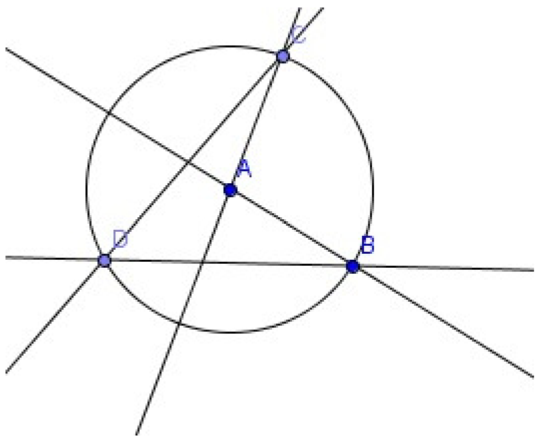


Figura 10 – Retas construídas pelas alunas.

Passaram então à medição dos ângulos, abriram a folha de cálculo para construir a tabela pedida, colocaram as amplitudes dos ângulos digitando os valores e anotaram as primeiras medições. Quando lhes era pedido para mover o ponto C, não o conseguiram fazer, desiludidas de necessitarem novamente de auxílio, chamaram a investigadora que as ajudou a refletirem, mais uma vez, sobre a noção de ângulo. Depois apagaram todas as retas desenhadas e construíram duas semirretas mas sem a mesma origem, como ilustra a Figura 11 e fizeram o mesmo na construção do ângulo ao centro.

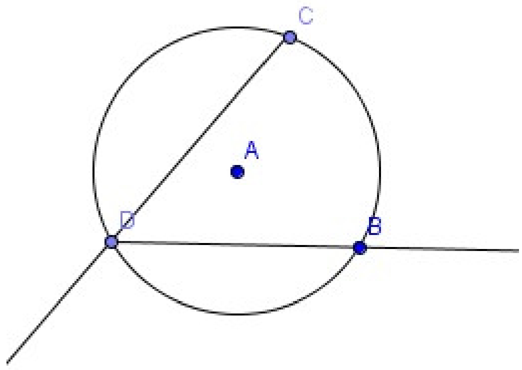


Figura 11 – Duas semirretas sem a mesma origem para a construção do ângulo inscrito.

As alunas continuaram a mostrar não ter presente a noção de ângulo, parece que o importante para elas é que retas, semirretas ou segmentos de reta se cruzem.

Voltaram a construir a tabela na folha de cálculo, desta vez arrastando os valores das amplitudes para a tabela. No entanto ao verificarem que não conseguiam mover, novamente o ponto C, voltaram a pedir ajuda. A investigadora refletiu com elas que as semirretas têm de ter a mesma origem e construíram as semirretas de forma correta.

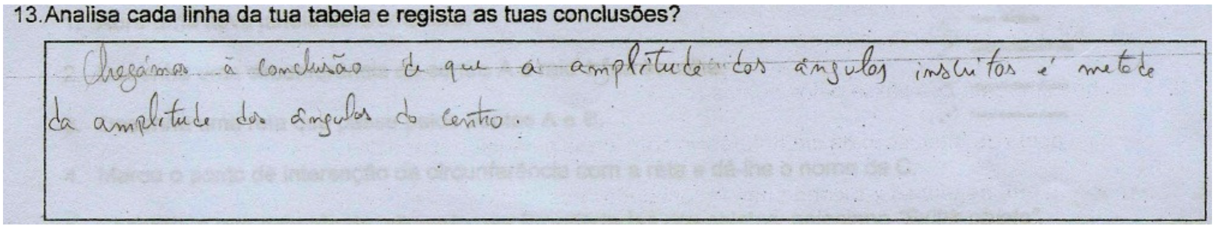
Finalmente conseguiram preencher a tabela com os valores pretendidos, ao quinto par de amplitudes ângulos registado ouve-se o seguinte diálogo:

Carlota: O ângulo ao centro é sempre maior que o ângulo inscrito! [disse entusiasmada.]

Marta: Se calhar é essa a conclusão da tarefa!!

As alunas preencheram a tabela de maneira a perfazer os dez pares de amplitudes de ângulos solicitados. De seguida a Carlota começou a guardar o projeto e a Marta a escrever a sua conclusão no enunciado da ficha. No entanto, houve um pequeno problema com o computador e a aluna não conseguiu guardá-lo (este erro foi devido ao computador ter instalado duas versões do *GeoGebra* que nenhuma das professoras se apercebeu antes). As alunas ainda perderam algum tempo neste processo o que atrasou ainda mais a conclusão da tarefa.

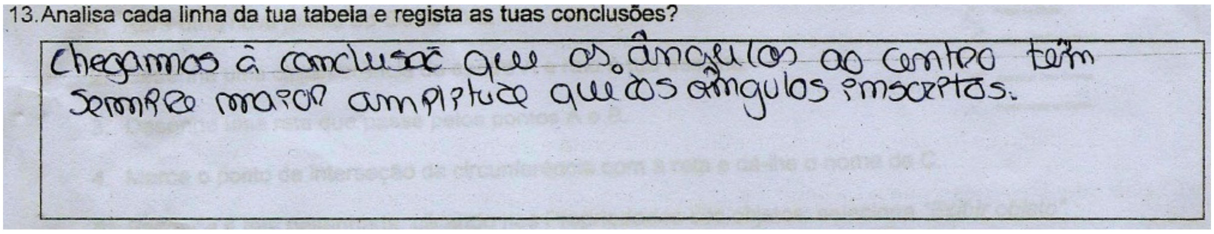
Por fim, chegaram a conclusões diferentes, a Carlota chegou à conclusão correta, enquanto a Marta apenas concluiu que o ângulo ao centro é maior que o ângulo inscrito no mesmo arco, como se pode ver nas figuras Figura 12 e Figura 13. A Marta escreveu a primeira conclusão que o grupo chegou e, apesar de demonstrar que também chegou à mesma conclusão, não a redigiu. Quando a investigadora se aproximou do grupo para as ajudar a verificar o porquê do *software* não estar a gravar o projeto, perguntou às alunas a conclusão a que tinham chegado e ambas disseram a correta sem olhar para as fichas. A Marta talvez porque queria passar rapidamente para a próxima tarefa não corrigiu a sua resposta.



13. Analisa cada linha da tua tabela e regista as tuas conclusões?

Chegámos à conclusão de que a amplitude dos ângulos inscritos é metade da amplitude dos ângulos do centro.

Figura 12 – Resposta à questão 13 da Carlota.



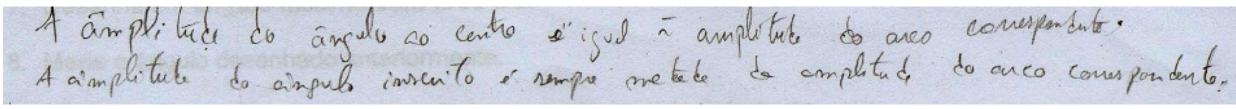
13. Analisa cada linha da tua tabela e regista as tuas conclusões?

Chegamos à conclusão que os ângulos ao centro têm sempre maior amplitude que os ângulos inscritos.

Figura 13 – Resposta à questão 13 da Marta.

Para a questão 14 ambas as alunas chegaram à conclusão correta, pois ao alterarem o raio da circunferência verificaram que o pequeno arco verde (símbolo do arco no *GeoGebra*) onde aparece a amplitude do ângulo ao centro, coincidia com o próprio arco da circunferência, quando alteravam o raio da circunferência.

> [A Marta achou curioso e perguntou à Carlota]
>
> **Marta**: Qual é a amplitude deste arco?
>
> **Carlota**: É a mesma que o ângulo ao centro! Acho eu!?! Vou ao livro ver a definição.
>
> **Marta**: Boa!!
>
> **Carlota**: Aqui diz*: Designa-se como amplitude de um arco, de uma circunferência, a medida do ângulo com vértice no centro da circunferência correspondente e definido pelos extremos do arco.*"
>
> **Marta**: Pois é! Afinal tinhas razão!!



A amplitude do ângulo ao centro é igual à amplitude do arco correspondente.
A amplitude do ângulo inscrito é sempre metade da amplitude do arco correspondente.

Figura 14 - Resposta à questão 14 da Carlota e da Marta.

Os últimos passos foram feitos sem problemas, as alunas desenharam as três circunferências concêntricas e moveram o ponto C, para observarem mais uma vez a amplitude dos ângulos inscritos e ao centro.

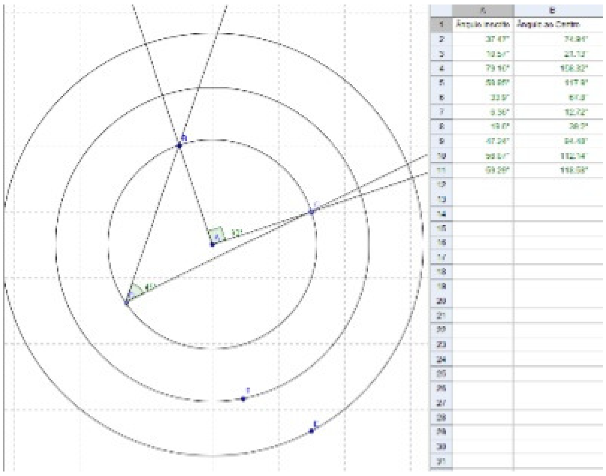


Figura 15 – Circunferências concêntricas desenhadas pela Carlota e pela Marta.

Depois de visualizarem a figura e de relerem a conclusão anterior, conseguiram aferir o que se pretendia, apesar de não o terem expressado da melhor forma.

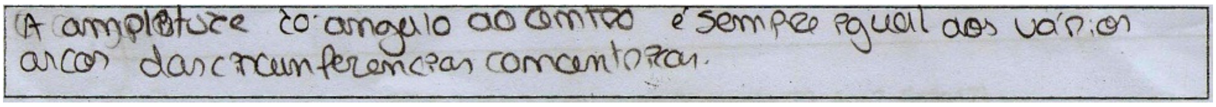


Figura 16 - Resposta à questão 17 da Carlota e da Marta.

As alunas acabaram por ir confrontar as suas respostas com o manual, talvez por se sentirem um pouco perdidas, e porque viam os colegas mais à frente de resolução da ficha de trabalho.

Nesta aula apesar da professora ter pedido para resolverem as três tarefas da ficha de trabalho, a Carlota e a Marta apenas conseguiram realizar a primeira. Demoraram mais tempo que os restantes colegas, mas conseguiram chegar às conclusões pretendidas nas questões que realizaram. O atraso deu-se em parte aos obstáculos relativos à utilização da ferramenta, que foram encontrando no desenrolar da tarefa, ao facto de não saberem o conceito de ângulo, reta, semirreta e segmento de reta.

As alunas sentiram dificuldades tanto ao nível do manuseamento do *software* como na execução da tarefa. Começaram por apresentar dificuldades em fixar o ponto B, apesar da alínea explicar a opção a recorrer. Poderá depreender-se que tiveram dificuldades da leitura do passo e/ou no manuseamento do *GeoGebra*. Mostraram bastantes dúvidas no conceito de ângulo. A Marta começou por desenhar uma reta e apesar da Carlota não concordar com ela, também não soube o que construir, e decidiu, sem grande convicção, pelo segmento de reta. Daqui poderá depreender-se que as alunas não tinham interiorizado as noções de reta, semirreta e segmento de reta. Quando optaram por construir segmentos de reta, poderiam ter confundido a notação de ângulo com triângulo, pois ambos apresentam, na sua notação, três pontos. Ao longo da construção do triângulo foi mencionado várias vezes BDC, enquanto a Carlota pronunciava os pontos, em voz alta, a Marta ia-os ligando por segmentos de reta.

Quando se aperceberam que algo podia não estar correto, chamaram a investigadora, mas mesmo depois de refletirem sobre a noção de ângulo, as alunas construíram retas. Mais uma vez as alunas não conseguiram distinguir entre reta, semirreta e segmento de reta. Para além disso, elas continuaram a mostrar que não entendiam a noção de ângulo, pois mesmo construindo as semirretas, não as fizeram com a mesma origem. Para a Carlota e para a Marta o que lhes parecia interessar era que as retas/semirretas/segmentos de reta se cruzassem.

No fim desta atribulada construção do ângulo ao centro e inscrito numa mesma circunferência, as alunas registaram conclusões diferentes ainda que as tenham verbalizado de forma correta. Poderá depreender-se que depois de algum tempo, queriam apenas passar aos passos seguintes, já que estavam atrasadas comparativamente com os restantes colegas.

Na questão 14, onde pedia a relação entre as amplitudes do ângulo ao centro e do arco corresponde, as alunas recorreram ao manual para se certificarem do seu raciocínio. As alunas poderiam não querer pedir auxílio à investigadora e achar que teriam a ajuda necessária no livro.

4.1.3. Grupo António e Carlos

O grupo composto pelo António e pelo Carlos começou por construir a circunferência solicitada. De seguida, tentaram repetidas vezes fixar o ponto B e como não o conseguiram fazer, chamaram a investigadora para os ajudar. Continuaram a resolução da tarefa e construíram duas retas como mostra a Figura 17.

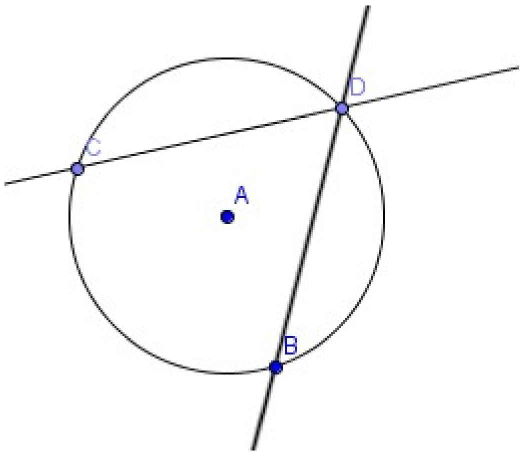


Figura 17 – Retas construídas pelo Carlos.

Aqui começaram a ter dificuldades na medição da amplitude do ângulo e pediram novamente ajuda. Enquanto esperavam pela investigadora, a professora percebe que existe esta dúvida em comum a muitos alunos e relembrou, com toda a turma, que o ângulo é toda a região plana existente entre duas semirretas que possuem a origem em comum. Perante a chamada de atenção, os alunos apagaram as retas desenhadas e construíram duas semirretas, mas com origens distintas, tal como fizeram a Carlota e a Marta. Voltaram a tentar medir a amplitude do ângulo inscrito, para isso selecionavam as duas semirretas, o que não lhes permitiam aceder ao resultado pretendido (Figura 18).

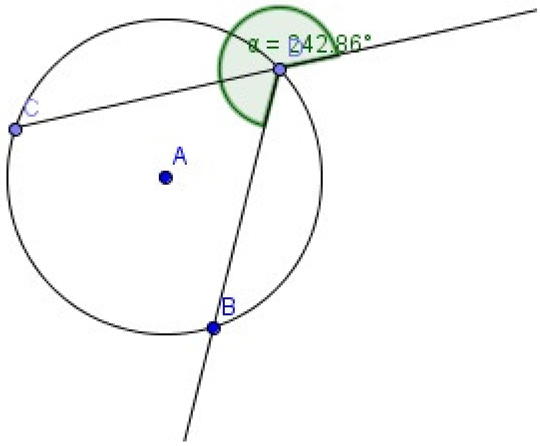


Figura 18 – Tentativa da medição do ângulo BDC.

A professora ao passar ao lado dos alunos reparou que a origem das semirretas não era a mesma e chamou-os à atenção para esse facto. Os discentes voltaram a construir o ângulo inscrito, mas desta vez corretamente. De seguida construíram o ângulo ao centro e alteraram a cor das semirretas, como era pedido (Figura 19).

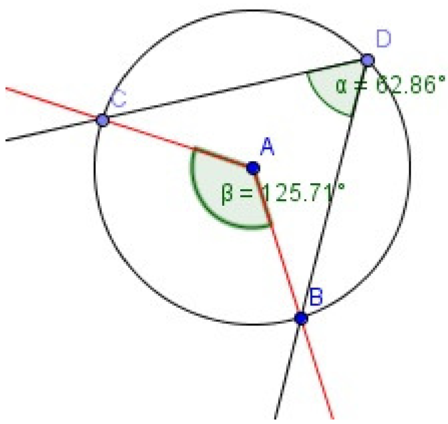


Figura 19 – Ângulo inscrito e ângulo ao centro diferenciado por cores.

Passaram então à medição das amplitudes dos ângulos. Moviam o ponto C e registavam os valores numa tabela da folha de cálculo. O procedimento usado foi - moverem o ponto C e escrever os respetivos valores na tabela, pois desconheciam que podiam arrastar os valores da folha algébrica para a folha de cálculo.

Na versão 4.0 do *GeoGebra*, a utilizada pelos alunos, a amplitude dos ângulos indicada na ferramenta corresponde sempre aos ângulos convexos, por isso os alunos não poderiam medir ângulos ao centro com amplitudes superiores a 180º, pois nessa altura a medida representada passaria a ser do ângulo convexo. Os alunos, desconhecendo desta particularidade do *software*, registaram alguns valores das amplitudes dos ângulos incorretamente. No entanto, a professora ao detetar isso em alguns alunos, alertou a turma para esse problema do programa. O António e o Carlos apagaram todos os registos da tabela, retomaram o movimento do ponto C e anotaram corretamente os respetivos valores das amplitudes na folha de cálculo. No fim de completarem os dez registos pedidos, o António parou um pouco para olhar para a tabela e constatou que o ângulo inscrito era sempre menor que o ângulo ao centro. O Carlos concordou e redigiram a resposta no enunciado, no entanto, apesar de considerarem a resposta correta, discutiram que a resposta poderia ser demasiado simples e chamaram a investigadora para saberem se estava correta. A investigadora pediu para analisarem atentamente a tabela que poderiam aferir um pouco mais sobre os seus dados. Quando a investigadora se retirou, os alunos abriram a calculadora do computador e começaram a dividir as amplitudes dos ângulos ao centro pelas dos ângulos inscritos e verificam que todas as divisões davam uma contante: 0,5. Entretanto a investigadora voltou e perguntou se tinham conseguido concluir mais alguma coisa, ao que o Carlos respondeu: “Sabemos que se dividirmos o ângulo ao centro pelo ângulo inscrito dá sempre 0,5!” o que os levou a completar a sua conclusão, como mostra a Figura 20.

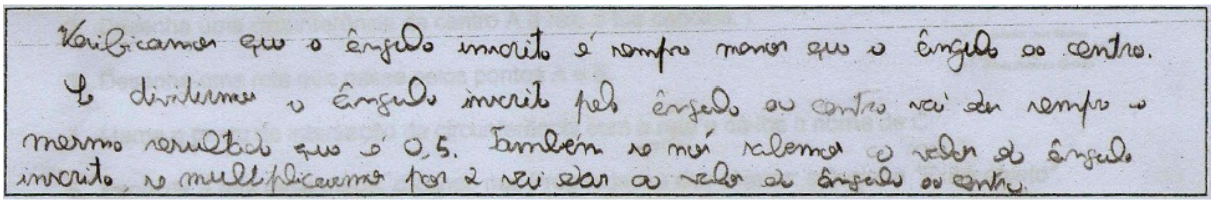

Verificamos que o ângulo inscrito é sempre menor que o ângulo ao centro. Se dividirmos o ângulo inscrito pelo ângulo ao centro vai dar sempre o mesmo resultado que é 0,5. Também se nós sabemos o valor do ângulo inscrito, se multiplicarmos por 2 vai dar o valor do ângulo ao centro.

Figura 20 - Resposta à questão 13 do António e do Carlos.

Para responder à questão 14 os alunos, nada alteraram na figura, apenas analisaram a questão anterior e escreveram:

> Se sabemos o valor do ângulo inscrito, basta multiplicar por dois e chega-se ao valor do ângulo ao centro. O valor do arco é sempre igual ao valor do ângulo ao centro.

Na construção das circunferências concêntricas, os alunos voltaram a preocuparem-se em distingui-las com várias cores. Depois, sentiram dificuldade e chamaram a investigadora, para os ajudar a refletir sobre o que era pedido.

Investigadora: Qual a relação existente entre a amplitude do ângulo ao centro e do arco correspondente?

Carlos: É igual!

Investigadora: Muito bem! – [então apontou para o desenho criado pelos alunos e perguntou]: Qual a amplitude do ângulo ao centro?

Carlos: É 99,4º!

Investigadora: E este, quanto mede? [apontando para o arco da primeira circunferência]

Carlos: 99,4º!

Investigadora [apontou para mais dois arcos e repetiu a pergunta]: E este, quanto mede?

Carlos [repetiu a resposta e comentou]: Ah, então a amplitude do ângulo ao centro é o valor dos vários arcos! [e escreveram a conclusão como mostra a Figura 21.]

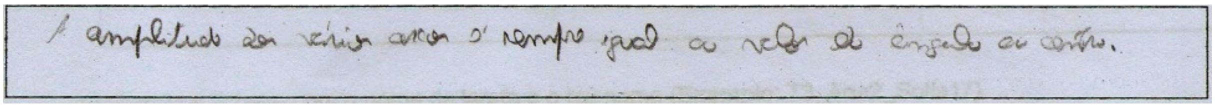

A amplitude dos vários arcos é sempre igual ao valor do ângulo ao centro.

Figura 21 - Resposta à questão 17 do António e do Carlos.

Os alunos fizeram a tarefa calmamente e em conjunto, leram com calma o que lhes era pedido e executaram com alguma exatidão. Sempre que precisaram de ajuda pediram, mas nunca ficaram muito tempo no mesmo passo.

O grupo apresentou dificuldade em fixar o ponto B, tal como a Carlota e a Marta. Para as professoras o passo parecia bastante explícito, o que não se veio a verificar na realidade. Os alunos ou não interpretaram bem os passos a seguir, ou tiveram dificuldade no manuseamento com o *GeoGebra*. O António e o Carlos apresentaram menos dificuldades na construção dos ângulos, no entanto, mostraram também desconhecer a noção de ângulo. Os alunos só conseguiram ver que o ângulo não era formado por retas nem por semirretas sem a mesma origem, quando tentaram medir a amplitude e não o conseguiam fazer. Depois da tabela construída os alunos conseguiram chegar facilmente à conclusão pretendida, quando a investigadora os chamou à atenção para refletirem um pouco mais, os alunos instantaneamente abriram a calculadora para tentar achar uma relação entre as amplitudes. O *GeoGebra* ajudou-os a representar e identificar o conceito de ângulo, a construir dez ângulos por manipulação do *software* e registar numa tabela dos valores as suas amplitudes.

O António e o Carlos utilizaram a calculadora do computador e mostraram mais agilidade no manuseamento do *GeoGebra* e do computador, em relação à Carlota e à Marta, tornando o tempo de execução da tarefa mais curto.

Para ambos os grupos o *GeoGebra* ajudou a que alunos reconhecessem que ainda não tinham adquirido a noção de ângulo, e foi através das várias construções sucessivas que a assimilaram e entenderam. O *software* obrigou os alunos a compreender que se tratava de semirretas, nem retas nem segmentos de reta, com a mesma origem. Através dos erros contínuos na construção dos ângulos pedidos, os alunos puderam perceber o que em papel ainda não tinham entendido. Se no papel para medirem vários ângulos inscritos numa circunferência é necessário desenha-los todos, no *GeoGebra* basta apenas mover um dos pontos definidos para criar um ângulo diferente. Enquanto no papel consegue-se ler a amplitude dos vários ângulos desenhados, com este *software* se o ângulo não estiver bem desenhado não é permitido mover os pontos e consequentemente, não se obtém novos ângulos para se medir, como a tarefa assim o exigia.

Através da movimentação do vértice do ângulo os alunos puderam aperceber-se que este apenas se movia na circunferência, o que visualmente foi bastante importante para que consolidassem o conceito de ângulo inscrito numa circunferência. O conceito de ângulo ao centro foi igualmente importante ser aprendido com a ajuda do *software* pois após compreenderem a noção de ângulo, assimilaram que a origem das semirretas tinha de ser no centro da circunferência, mais um exercício de consolidação da noção de ângulo.

O *GeoGebra* ajudou na consolidação das propriedades que relacionam os ângulos ao centro, ângulos inscritos e arcos de uma mesma circunferência. O facto de ao apenas mover um dos pontos comuns aos dois ângulos poder-se para criar novos ângulos, e consequentemente perceber que o arco compreendido por ambos é o mesmo, é mais simples e prático do que se fosse necessário construir várias figuras. Mais uma vez a visualização e a facilidade de alterar as figuras é verificado como uma mais-valia dos *softwares* de geometria dinâmica.

Ambos os grupos se mostraram interessados e empenhados durante toda a aula, o *GeoGebra* abriu espaço para os alunos se questionarem e discutirem as conclusões a que iam chegando. Apesar da Carlota e a Marta apresentarem algumas dificuldades na execução dos vários passos, não baixaram os braços e trabalharam com entusiasmo e dedicação.

4.2 Descrição e análise da segunda aula

A segunda aula foi consecutiva à descrita anteriormente e tomou lugar, novamente na sala de TIC. Após o toque de entrada os alunos dirigiram-se à sala, entraram calmamente, sentaram-se nos lugares já atribuídos e ligaram os computadores.

Logo que todos se acomodaram, a professora iniciou a aula ditando o sumário que todos registaram no caderno diário, seguidamente, comunicou as tarefas a realizar durante a aula e registou no quadro (tarefa 2 e 3 da Primeira Ficha de Trabalho - Anexo 1).

A investigadora ativou o *software* de gravação de ecrãs, os alunos começaram a ler a tarefa 2 e abriram o *GeoGebra* para começar a executar os passos pedidos.

De uma maneira geral, os alunos da turma mostraram-se interessados e discutiram amenamente com os colegas de grupo, ou com os que lhes estavam mais próximos, as questões da ficha, sem se dispersarem. A resolução das tarefas foi feita muito mais rapidamente que na aula anterior, não apresentaram tantas dificuldades na manipulação da ferramenta nem na interpretação dos passos da ficha de trabalho.

No final da aula a investigadora recolheu as gravações de ecrã e os projetos realizados no *GeoGebra* e a professora recolheu a ficha de trabalho, para que as respostas fossem analisadas.

4.2.1. Tarefa 2 – Ângulos inscritos numa semicircunferência

A segunda tarefa proposta fazia parte da primeira ficha de trabalho, em que os alunos tinham oito passos para executar no *GeoGebra,* pretendendo-se que chegassem à conclusão que "Qualquer ângulo inscrito numa semicircunferência tem de amplitude 90º, ou seja, é um ângulo reto".

A tarefa consistia na construção de uma circunferência de centro A e raio AB. De seguida era pedido para desenhar uma reta que passasse pelos pontos A e B, para se achar um outro ponto de interseção entre a reta AB e a circunferência, designando-se por ponto D, como ilustra a Figura 22.

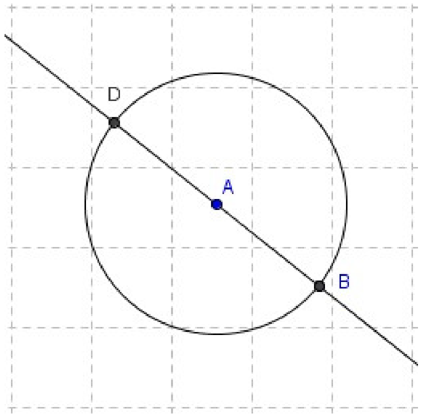


Figura 22 – Construção do ponto D.

Para um melhor visionamento da figura final, solicitava-se que se escondesse a reta AB para, de seguida, se construir o segmento de reta BD. Posteriormente desenhava-se o ângulo inscrito com arco BD e media-se o ângulo, como mostra a Figura 23.

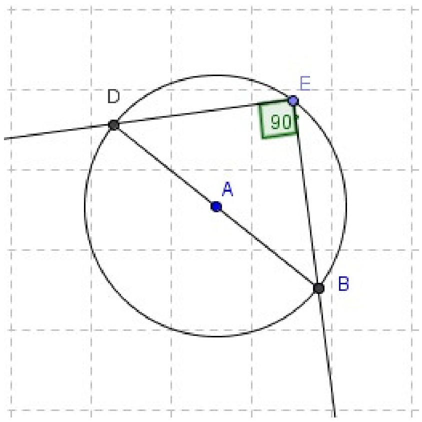


Figura 23 – Ângulo inscrito na semicircunferência.

A construção do ângulo inscrito poderia ser realizada como mostra a figura ou com o vértice na outra semicircunferência. Por fim era pedido, aos alunos, para moverem o vértice do ângulo (ponto E) ou o ponto B, ao longo da semicircunferência e indicarem a propriedade que observavam.

4.2.2 Grupo Carlota e Marta

A Carlota e a Marta começaram por desenhar uma circunferência, como era pedido, traçaram uma reta que passava pelo centro e por um ponto aleatório da circunferência diferente de B, como mostra a Figura 24.

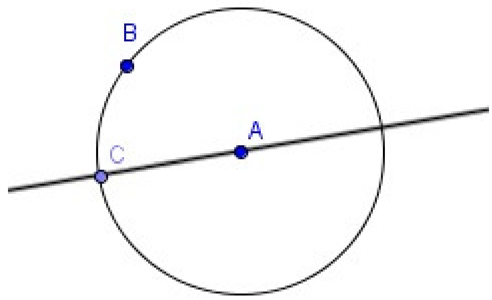


Figura 24 – Construção de reta que passa na origem.

Mas ao relerem a alínea reparam que a sua reta não passava no ponto B, por isso apagaram a reta e voltaram a construir outra, desta vez a passar pelos pontos A e B. Na construção do ponto de interseção da circunferência com a reta AB sentiram dificuldades em construí-lo. Primeiro construíram outra reta a intersetar a circunferência e a reta AB, mas logo verificaram que o resultado não era o pedido, voltaram a tentar, mas desta vez da maneira correta. As alunas clicaram na opção de construção de retas e não na construção de pontos (poderá ter sido apenas um lapso na escolha do menu no *software*). Cedo descobriram onde se escondia a reta e passaram para o passo de desenhar o diâmetro da circunferência de extremos B e C. Construíram uma semirreta que passava em A e B, mais uma vez apercebem-se que o diâmetro de uma circunferência não é uma semirreta e ao tentar apagar o último passo, apagam os últimos efetuados. Por isso voltaram a construir a reta AB, o ponto de interseção e chamaram a investigadora para se certificarem que o ponto de interseção estava bem construído. Depois de procurarem pelo segmento de reta, construíram o diâmetro.

A construção do ângulo foi feita corretamente, construíram uma semirreta com origem na circunferência a passar pelo ponto B e de seguida, outra semirreta com origem no ponto de origem da semirreta anterior a passar pelo ponto C e, por fim fizeram a medição da amplitude do ângulo criado. As alunas mostraram terem compreendido a noção de ângulo da aula anterior, souberam distinguir reta, semirreta e segmento de reta e também apresentaram uma melhor destreza no manuseamento do *GeoGebra,* solicitaram muito menos ajuda mostrando mais confiança na execução dos passos pedidos.

Por fim, variaram o vértice do ângulo e o ponto B energeticamente. A Marta ficou surpreendida com o facto da amplitude do ângulo não variar. A investigadora ao verificar que as alunas estavam a escrever a conclusão, decidiu questioná-las.

Marta: Ai, que fixe! Isto é muito giro!

Investigadora: Chegaram a alguma conclusão? [perguntou ao chegar junto delas.]

Carlota: Sim, a amplitude do ângulo inscrito é sempre a mesma…

Investigadora: E quanto é a amplitude?

Carlota: 90º! Sempre 90º!

As alunas mostraram-se bastante alegres ao constatarem a existência de uma constante e de terem levado muito menos tempo que na aula anterior na resolução da tarefa.

Ambas escrevem o que verificaram na ficha de trabalho, como se apresenta na Figura 25.

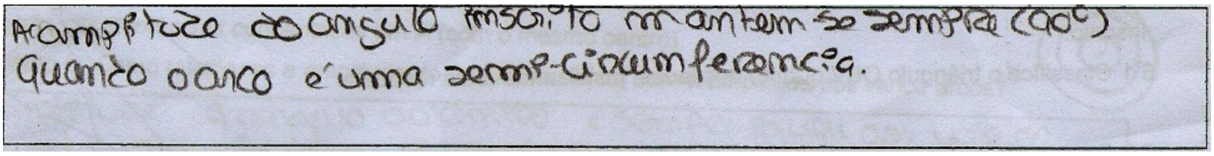

A amplitude do angulo inscrito mantem-se sempre (90º) quando o arco é uma semi-circunferência.

Figura 25 - Resposta à questão 9 da Carlota e da Marta.

As alunas demoraram cerca de doze minutos para realizar a tarefa. Demostraram mais destreza a manipular o *software*, do que na aula anterior, apenas pediram ajuda uma vez e somente para confirmar a resposta. Houve uma evolução da aula antecedente para esta, talvez por terem estado a trabalhar com as mesmas ferramentas pela segunda vez consecutiva. As alunas mostraram-se mais confiantes na execução das tarefas também devido ao problema, verificado na aula anterior, do *software* estar resolvido.

A Carlota e a Marta não apresentaram qualquer dificuldade na construção do ângulo, a noção estava presente nas suas mentes e a forma de o construir no *GeoGebra* também. No entanto, viram-se perante um obstáculo aquando da marcação do ponto de interseção da circunferência com a reta BC. As discentes poderiam não ser ter lembrado que pretendiam construir apenas um ponto e associar a interseção à existência de duas retas, daí construírem uma para obter um ponto, ou poderão ter apenas confundido os menus. Na construção do diâmetro da circunferência, as alunas não reconheceram de imediato que teriam de construir um segmento de reta, no entanto, posteriormente construíram-no sem dificuldades. As alunas mostraram saber a diferença entre reta, semirreta e segmento de reta.

O que se pode destacar da resolução desta tarefa foi o facto das alunas demonstraram estar a evoluir no manuseamento da ferramenta, terem presente a noção de ângulo, de ângulo inscrito na circunferência e conseguirem medir amplitude desse ângulo. O *GeoGebra* auxiliou as alunas a concluírem que os ângulos inscritos numa semicircunferência tem de amplitude 90º, pois ao moverem o vértice ou o ponto B, a amplitude nunca se alterou. As alunas afirmaram que ao mover os pontos o ângulo parecia estar "congelado". O *software* permitiu-lhes ter uma melhor perceção, visualmente falando, da propriedade.

4.2.3 Grupo António e Carlos

O António e o Carlos começaram por procurar como desenhar a circunferência em todos os separadores do menu, e quando encontraram o separador adequado desenharam-na com facilidade. De seguida construíram a reta que passava nos pontos A e B. Voltaram a percorrer o menu para marcar o ponto de interseção, como não encontraram facilmente, pediram auxílio à investigadora. Os alunos esperavam encontrar nas opções do *GeoGebra* "Ponto de interseção", por isso procuravam mais dentro da área da construção de pontos e de retas. A investigadora orientou-os nesse sentido.

> **Carlos**: Não conseguimos construir o ponto de interseção…
> **Investigadora**: Porquê?
> **Carlos**: Não encontramos a opção…
> **Investigadora**: Então… o que querem construir? Um ponto, uma reta, uma circunferência, …?
> **António**: Um ponto! [interrompeu a investigadora e respondeu prontamente.]
> **Investigadora**: Então têm de procurar em que separador?
> **Carlos**: No dos pontos! Hum… pois é!
> **Investigadora**: Muito bem!
> [Depois de procurar apontou para a opção "Interseção de dois objetos" perguntou:]
> **Carlos**: É este?
> **Investigadora**: É!

Os alunos depois de se aperceberem qual a opção a escolher, marcaram o ponto e esconderam a reta.

Posteriormente, começaram a tentar desenhar o diâmetro da circunferência, novamente depois de percorrer todas as opções nos separadores, primeiro construíram uma semirreta mas rapidamente verificam que está incorreto e na segunda tentativa desenham o segmento de reta pretendido.

Após a marcação do diâmetro, construíram o ângulo inscrito na semicircunferência, sem qualquer dificuldade, e mediram a sua amplitude. Seguidamente moveram lentamente o vértice do ângulo ao longo da circunferência e depois moveram, também calmamente, o ponto B. Verificaram que o valor da amplitude não se alterava. Entusiasmaram-se e continuaram a mover energeticamente os dois pontos, só depois escreveram a sua conclusão na ficha de trabalho.

> O ângulo inscrito na semicircunferência, nunca varia, é sempre 90º. (António e Carlos)

Para cada passo realizado os alunos leram atentamente e calmamente a ficha de trabalho e só depois executaram o que lhes era pedido. Este grupo começou a realizar esta tarefa mais cedo que o par Carlota e Marta, terminando mais cedo e mais rápido. A execução da tarefa demorou oito minutos. O António e o Carlos foram alunos que se dispersaram pouco e que demonstraram querer resolver as tarefas de forma rápida e eficaz.

Este grupo mostrou estar mais apto no manuseamento do *software* e na abordagem das tarefas que na aula anterior. Pediram ajuda logo que sentiram necessidade (apesar de pedirem muito menos que na aula anterior) o que fez como que rentabilizassem melhor o seu tempo.

Os alunos apresentaram dificuldades na marcação do ponto de interseção, ao percorrerem os menus do *GeoGebra* esperavam encontrar algo que dissesse "Ponto de interseção". Mais uma vez os alunos puderam ter associado a marcação do ponto de interseção à interseção de duas retas, pois percorreram os menus dedicados às retas e aos pontos. Tal como as alunas anteriores, também construíram uma semirreta para a construção do diâmetro, o que se poderá dizer, mais uma vez, que eles não têm bem presente as noções de reta, semirreta e segmento de reta. Apenas após a visualização na figura é que se aperceberam do erro. Poderiam estar a confundir apenas a denominação de cada uma delas.

O António e o Carlos também não apresentaram qualquer dificuldade na construção do ângulo, poderá depreender-se que assimilaram a noção relembrada na aula anterior. O que fez com que a marcação do ângulo inscrito na circunferência também se demonstrasse uma noção adquirida e de fácil construção. Os alunos, por se mostrarem muito mais à vontade na ferramenta, demoraram pouco tempo de execução e demonstraram empenho na execução da tarefa. O *GeoGebra* permitiu criar uma tarefa simples e clara para atingir a conclusão desejada. Os alunos ao moverem o ponto primeiro lentamente, serviu-lhes para observar com calma as possíveis variações na amplitude do ângulo inscrito na circunferência e só depois o fizeram vigorosamente, num tom mais de entusiasmo. Após redigirem a conclusão na ficha de trabalho, partiram para a tarefa seguinte motivados para que corresse tão bem como esta.

4.3 Descrição e análise da terceira aula

Esta aula foi precedida de três aulas de resolução de exercícios e da realização da ficha de avaliação, sem recurso aos computadores. Teve como objetivo a entrega dos testes e a realização da segunda ficha de trabalho. A tarefa destacada, a realizar no *GeoGebra,* tinha o intuito dos alunos descobrirem a fórmula da soma das amplitudes dos ângulos internos de um polígono convexo.

Os alunos entraram calmamente na sala e sentaram-se em frente aos respetivos computadores, ligaram-nos e escreveram o sumário ditado pela professora. Antes de começarem a realizar a ficha de trabalho, a professora entregou as fichas de avaliação corrigidas e falou um pouco das principais dificuldades sentidas pelos alunos.

Depois da breve análise às respetivas fichas de avaliação, a professora entregou a ficha de trabalho, a investigadora ativou o *software* de captura de ecrãs e, posteriormente, os alunos abriram o *GeoGebra*.

A ficha de trabalho (Anexo 2) era composta por três tarefas, a primeira para conjeturarem a soma dos ângulos internos de um triângulo, a segunda para encontrarem a fórmula da soma dos ângulos internos de polígonos convexos e a terceira para descobrirem a soma das amplitudes dos ângulos externos de polígonos convexos.

A primeira tarefa foi realizada por todos os alunos de forma correta. Era uma tarefa onde os alunos tinham de construir vários triângulos de diferentes tamanhos, medir as amplitudes dos ângulos internos e calcular a sua soma numa tabela da folha de cálculo. No decorrer da tarefa, a professora constatou que muitos alunos não estavam a conseguir escrever corretamente a fórmula da soma na folha de cálculo, então relembrou que para realizar uma função ou uma fórmula é necessário colocar o símbolo "=" no início. Os alunos, de uma forma geral, também apresentaram alguma dificuldade em medir os ângulos internos.

A segunda tarefa requeria a conjetura da primeira e foi a estudada nesta aula. Nesta tarefa os alunos tinham de desenhar polígonos convexos de vários lados, desenhar todas as diagonais possíveis a partir do mesmo vértice e preencher uma tabela que os levava a descobrir a fórmula da soma dos ângulos internos de um polígono convexo. Os alunos da turma apresentaram dificuldades a desenhar as diagonais dos polígonos, necessitando da ajuda das professoras para o fazerem corretamente. A docente, depois de verificar que muitos dos alunos estavam a medir as amplitudes dos ângulos internos dos polígonos sem necessidade (pois a conclusão é apenas tirada ao observar um padrão da tabela), alertou para o facto de não haver essa necessidade, e apelou ao raciocínio dos alunos.

Na terceira tarefa, à semelhança da anterior, pedia para construir polígonos, mas neste caso para medir as respetivas amplitudes dos ângulos externos e por fim preencher uma tabela para verificarem que a soma dava sempre 360º.

A vinte minutos do final da aula, a professora fez um ponto da situação com a turma, chamou alguns alunos ao quadro para explicarem e discutirem as conclusões a que tinham chegado. As discussões foram realizadas num ambiente saudável e de partilha de ideias, das figuras construídas e dos respetivos processos de construção.

Por fim, a professora recolheu os enunciados, a investigadora reuniu as vídeos das capturas feitas aos ecrãs e da câmara de vídeo, e os alunos abandonaram a sala de aula.

4.3.1 Tarefa 3 – Ângulos internos de polígonos convexos

A tarefa três era a segunda tarefa da segunda ficha de trabalho (Anexo 2) e tinha como principal objetivo que os discentes concluíssem que "A soma das amplitudes dos ângulos internos de um polígono convexo com *n* lados é (n – 2) x 180º".

No entanto, para a resolução desta tarefa tinham de concluir com sucesso a primeira tarefa da ficha, intitulada “Ângulos internos de um triângulo”. Esta tinha como objetivo conjeturarem a soma das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo, através da construção desse polígono e medição dos seus ângulos internos. Depois teriam de colocar esses valores numa tabela da folha de cálculo e calcular a sua soma. A Figura 26 ilustra um triângulo e a tabela, apenas com os valores para esse triângulo, no entanto, os alunos tinham de construir 10 diferentes, podendo para isso mover apenas um dos vértices.

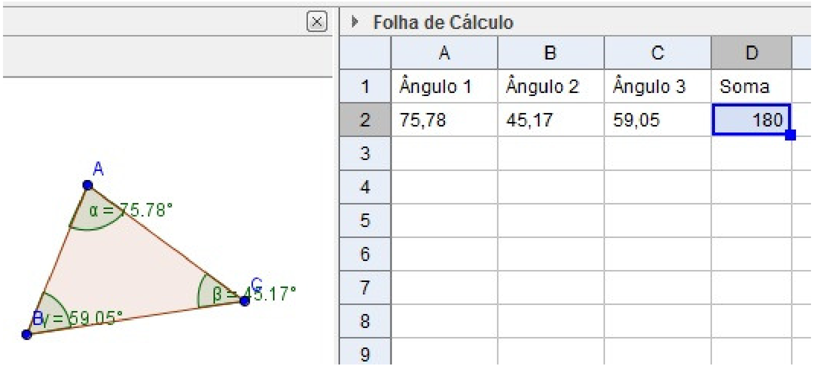


Figura 26 – Triângulo e tabela ilustrativa do que era requerido.

Por fim, ao analisar a tabela teriam de conjeturar que “A soma dos ângulos internos de triângulo é sempre de 180º”.

A segunda tarefa da ficha, que foi a escolhida para fazer parte do estudo, denominava-se “Ângulos internos de polígonos convexos”. Os alunos tinham de construir vários polígonos convexos, cada um com um número de lados diferente, e desenhar todas as diagonais possíveis a partir de um só vértice, como se ilustra na Figura 27.

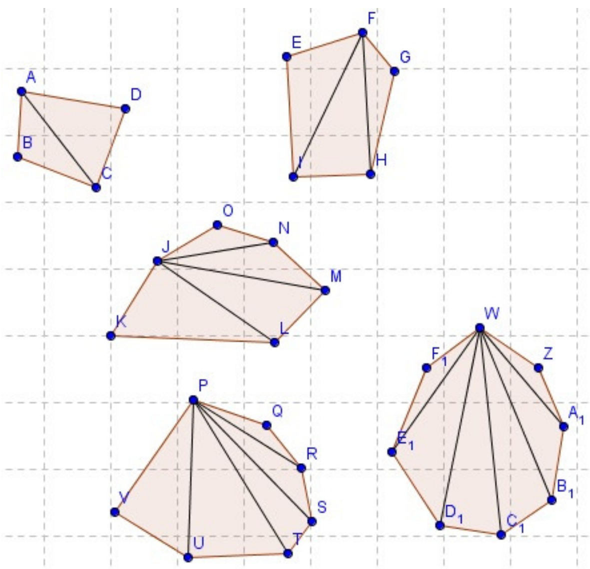


Figura 27 – Alguns polígonos convexos com as respetivas diagonais.

Depois de feitas as construções de vários polígonos convexos com as dimensões desejadas pelos alunos, era necessário preencher uma tabela semelhante à Tabela 2. Com a tabela corretamente preenchida pretendia-se que os alunos conseguissem chegar à conclusão pretendida, respondendo assim à última questão.

Tabela 2 – Tabela semelhante à apresentada na questão 4 da 2ª ficha de trabalho.

Polígono	N.º de Lados	N.º triângulos em que ficou dividido	Soma das amplitudes dos ângulos internos
Triângulo			
Quadrilátero			
Pentágono			
…			
Polígono com n lados			

Nesta tarefa os alunos não necessitavam de medir amplitudes de ângulos, para preencherem a última coluna da tabela. Apenas precisavam de saber o valor da soma dos ângulos internos de um triângulo, que era a conjetura que deveriam ter chegado com a primeira tarefa da ficha de trabalho.

4.3.2 Grupo Carlota e Marta

As alunas realizaram a primeira tarefa da ficha de trabalho sem percalços a realçar, apenas a Marta mostrou algumas dificuldades na medição das amplitudes dos ângulos internos do triângulo, mas a Carlota ajudou-a sempre que foi necessário. Realizaram-na rapidamente e conjeturaram corretamente que a soma dos ângulos internos de um triângulo é de 180º.

A Carlota e a Marta começaram por construir um polígono de seis lados, mas na primeira tentativa construíram-no côncavo. Apagaram-no e tentaram construir de novo, voltaram a cometer o mesmo erro, e um pouco frustradas decidem reiniciar o *software*. Ao reiniciar o *software* pode-se depreender que as alunas pensavam que o erro era do programa, ou que queriam começaram do início, como para principiar o raciocínio novamente. Enquanto o *GeoGebra* reiniciou, as alunas pareciam mostrar um pouco de receio de voltarem a levar mais tempo que os colegas como na primeira aula. No entanto, pegaram na tarefa com outro ânimo, construindo um polígono de quatro lados, depois outro de cinco e outro de seis todos convexos, através da opção “Polígono” (opção que permite construir tanto polígonos convexos como côncavos).

Quando começaram a desenhar as diagonais sentiram dificuldades em construí-las e discutiram, uma com a outra, se seria para construir retas, semirretas ou segmentos de reta, como não chegaram a uma conclusão, pediram a ajuda da investigadora. As alunas pareciam não conhecer o conceito de diagonal, daí a sua relutância em começar a desenhar e a discussão entre elas. Depois de concluírem que necessitavam de construir segmentos de reta, a Carlota desenhou duas diagonais no quadrilátero mas cada uma a partir de vértices diferentes e fez o mesmo para o polígono de 6 lados. Ao reparem que as diagonais se cruzavam e como no exemplo da ficha não se apresentavam dessa forma, aperceberam-se que não era o pretendido e apagaram tudo. A investigadora que passou perto do grupo e viu que os polígonos tinham desaparecido, decidiu dirigir-se às alunas.

Investigadora: Porque é que apagaram os polígonos?

Carlota: As diagonais estavam mal construídas e os polígonos estavam todos tortos!

Investigadora: Não faz mal, eles podem estar tortos, desde que sejam convexos, não têm que ser regulares. [E apontou para a ficha de trabalho onde aparecia a definição de convexo e alertou para a correta construção das diagonais, que também aparece na ficha.]

Alunas: Ah! Está bem!

[A investigadora voltou a apontar para o polígono convexo que estava na ficha.]

Investigadora: Vocês têm de construir as diagonais sempre a partir do mesmo vértice, sabem porquê?

Alunas: Não!

Investigadora: Reparem na figura dividida pelas diagonais… [disse apontando para a figura de exemplo na ficha de trabalho.]

Carlota: Ficou dividida em triângulos! [disse de repente.]

Investigadora: O que é que a tabela pede?

Carlota: O número de triângulos em que ficou dividida o polígono… Ahh!

Investigadora: E como acham que se preenche a última coluna da tabela onde é pedido a soma das amplitudes dos ângulos internos?

Carlota: Hum... Bom, sabemos o número de triângulos em que foi dividido o polígono por isso, pelo exercício anterior, também sabemos quanto é a soma…Ahhhhhhhhh, é isso!

De seguida voltaram ao *GeoGebra* e começaram por colocar o visionamento da grelha para servir de pano de fundo às suas construções. Reiniciaram a tarefa desenhando, um polígono com quatro, outro com cinco e outro com oito lados, depois traçaram as suas respetivas diagonais a partir de um só vértice. Posteriormente desenharam um triângulo e começaram a preencher as linhas da tabela correspondente aos polígonos construídos. Para preencher a coluna das somas, mediram a amplitude dos ângulos internos dos polígonos e adicionaram-nas recorrendo à máquina calculadora. Deve-se salientar que as alunas mediram, também, as amplitudes dos ângulos internos do triângulo e somaram as suas amplitudes para verificarem, mais uma vez, que dava 180º. A professora ao passar junto delas, olhou para a tabela da ficha de trabalho e verificou que estava corretamente preenchida, elas ficam bastante contentes e continuam.

A Marta depois de construir um polígono de sete lados perguntou à Carlota se estava correto, esta constata que não é convexo, apagou-o e construiu um de novo. Voltaram a medir a amplitude dos ângulos, a somar e a registar na tabela. A investigadora passou junto delas e reparou nos passos que as alunas estavam a tomar, por isso decidiu ajudá-las.

Investigadora: Não precisam de fazer isto…[disse enquanto apontava para o valor da amplitude dos ângulos.]

[As alunas mostraram-se surpresas com a afirmação]

Carlota: Hum… não?!?

Investigadora: Então… quanto é a soma das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo? [perguntou enquanto apontava para o triângulo construído pelas alunas no *GeoGebra*.]

Alunas: 180º!

Investigadora: Então quanto será a soma dos ângulos internos do quadrilátero? [perguntou enquanto apontava para o quadrilátero construído e dividido pela diagonal.]

Marta:: Ahhh… 180º mais 180º?

Investigadora: Pois, é isso!

Marta: 180º mais 180º mais 180º mais 180º mais 180º mais 180º [disse enquanto apontava para os vários triângulos em que está dividida a figura de oito lados.]

Investigadora: É esse o raciocínio que têm de seguir para preencher a tabela!

As alunas apagaram as somas efetuadas na tabela da ficha de trabalho e reescreveram da forma como mostra a Tabela 3.

Tabela 3 – Tabela representativa da resposta da Carlota e da Marta.

Polígono	N.º de Lados	N.º triângulos em que ficou dividido	Soma das amplitudes dos ângulos internos
Triângulo	3	1	180
Quadrilátero	4	2	180 + 180
Pentágono	5	3	180 + 180 + 180
Hexágono			
Heptágono			

De seguida, construíram o polígono de seis e sete lados, as respetivas diagonais e acrescentaram valores nas suas tabelas.

> **Carlota**: Então é assim… Se temos os polígonos divididos em triângulos, por exemplo, o hexágono [e apontou para o polígono de seis lados] tem quatro triângulos lá dentro, a soma é 180º por cada triângulo.
>
> **Marta**: Ah! [e fez uma cara de espanto.]
>
> **Carlota**: E isto vai dar a soma das amplitudes dos ângulos deste polígono! [mais uma vez apontou para o polígono construído.]
>
> **Marta**: E neste é a mesma coisa… [disse apontando para o polígono de cinco lados.]
>
> **Carlota**: É isso mesmo!
>
> **Marta**: É 180º x 3!
>
> **Carlota**: Exatamente!

Tiveram um momento de pausa, analisaram alternadamente a tabela e os polígonos construídos no ecrã do computador e preencheram a linha relativa ao polígono de dez lados, seguindo o raciocínio anterior. Para completar a linha do polígono com *n* lados, tiveram o seguinte diálogo.

> **Carlota:** Eu acho que o número de triângulos é sempre dois a menos que o número de lados… Olha! [disse apontando para as colunas respetivas.]
>
> **Marta:** Epá! És mesmo esperta!
>
> **Carlota:** E agora como vai ser a seguir? [disse pensando alto] Vai ser… *n* vezes… espera… *n* menos 2 vezes 180º.

Por fim, escreveram a conclusão a retirar do preenchimento da tabela, alteraram a cor de cada polígono e gravaram como era pedido.

As alunas, de uma forma geral, mostraram-se mais confiantes na resolução das tarefas. Apresentaram algumas dificuldades mas conseguiram ultrapassá-las com mais facilidade que nas aulas anteriores e as dúvidas não foram relativas ao manuseamento do *software*.

O primeiro obstáculo que a Carlota e a Marta encontraram foi na construção dos polígonos convexos. O facto das alunas não estarem a construir polígonos regulares pode-lhes ter confundido um pouco, pensarem que não conseguiam construir polígonos convexos sem serem regulares. Mostraram não conseguir distinguir um polígono convexo de um côncavo. Isto pode ter sido por ser o primeiro contato com estas definições e nos manuais escolares, geralmente, os polígonos que aparecem são regulares. O facto de ser o primeiro contato com estas definições dificultou um pouco a construção dos polígonos, ler a definição e ver um exemplo na ficha não foi suficiente para que as alunas interiorizassem todas as suas propriedades. A preocupação era mostrada sempre que construíam um novo e agravava-se quando o polígono tinha um grande número de lados. Por norma os polígonos existentes nos manuais escolares são com poucos lados, a necessidade de construir polígonos que não estão familiarizadas a ver ou a construir, pode ter contribuído para a apreensão demonstrada.

A Carlota e a Marta mesmo afirmando que tinham compreendido as noções, as suas construções assumem um nível cognitivo mais alto de raciocínio. Não basta os alunos terem presentes os conceitos no campo teórico, é necessário construir repetidamente para compreender as propriedades inerentes. Após algumas construções de polígonos as alunas perceberam e continuaram a construir corretamente os restantes. O *GeoGebra* teve um papel fundamental como meio para as construções dos polígonos, como de compreensão de novos conceitos.

Depois de construírem alguns polígonos as discentes discutiram, entre si e questionaram a investigadora, sobre o que construir para obter uma diagonal, aparentemente demostraram não conhecer esta noção. O *GeoGebra* ajudou as alunas a perceberem o conceito de diagonal, a dificuldade em desenha-las levantou uma pequena discussão entre a Carlota e a Marta, pois não sabiam se era necessário construir retas, semirretas ou segmentos de reta. As alunas também apresentaram algumas dificuldades em construir as diagonais a partir do mesmo vértice, isto pode ter-se dado por se lembrarem que um quadrado tem duas diagonais (que foi das primeiras diagonais que desenharam) e que normalmente são ambas representadas quando solicitadas. Desde o 1º ciclo que sempre que se aborda o conceito de diagonal, por norma desenha-se todas as diagonais do polígono em questão, e esta poderá ter sido a sua primeira abordagem de forma diferente. As alunas apresentaram estarem tão ligadas ao que se lembravam dos anos anteriores que lhes poderá ter sido difícil representar todas as diagonais de um polígono partindo apenas de um vértice. Mais uma vez se pode realçar que os conhecimentos anteriores são importantes mas muitas das vezes dificultam a abstração de um primeiro contato com um conceito.

Depois das diagonais construídas, mediram as amplitudes dos ângulos internos dos polígonos já construídos e calcularam a sua soma. As discentes não se aperceberam que as diagonais dividiam os polígonos em triângulos. Como na tarefa anterior tiveram de medir os ângulos internos de um triângulo, seguiram o mesmo raciocínio, mas desta vez não apresentaram qualquer dificuldade na sua medição. Só depois de uma pequena orientação da investigadora, as alunas facilmente entenderam porque desenharam as diagonais e tomaram o raciocínio necessário ao preenchimento da tabela. Em consequência disso conseguiram chegar mais rapidamente à conclusão pretendida. As alunas demonstraram não ter interiorizado o facto de a soma das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo dar sempre 180º. Elas reconheceram isso na tarefa anterior, no entanto, ainda não era um objeto matemático que elas eram capazes de manipular. As discentes encontram-se ainda no domínio dos procedimentos, necessitavam de ter realizado repetidamente a mesma tarefa.

O grupo ao adicionar as amplitudes dos ângulos internos fê-lo através da máquina de calcular, apesar de poderem ter recorrido à folha de cálculo ou à calculadora no computador. A ficha de trabalho não tinham nenhuma referência de como efetuar os cálculos, os alunos eram livres de escolher o seu caminho. A Carlota e a Marta devem associar a máquina calculadora às aulas de matemática e não se lembraram da existente nos Acessórios do computador. Para além disso, esta escolha também poderá demonstrar que as alunas não sabiam editar as fórmulas na folha de cálculo ou porque tinham que somar muitos ângulos.

Pelo facto da primeira tarefa lhes ter corrido bem, pareceu que as alunas adquiriram mais confiança e parece que o pensamento melhora com a manipulação dos conceitos. Depois de algumas repetições dos vários passos nas tarefas, as alunas demonstram menos dificuldade em executá-los e mostram que os compreenderam. Quando surge um novo verificam-se alguns impasses.

O *GeoGebra* teve um papel fundamental na construção os polígonos convexos e nas diagonais, e na facilidade de construção de vários triângulos para conjeturar a soma das amplitudes dos ângulos internos dos referidos polígonos. Principalmente na repetição das ações que ajudou a que as alunas interiorizassem o conceito de diagonal.

4.3.3 Grupo António e Carlos

O António e o Carlos foram os primeiros a terminar a primeira tarefa da ficha de trabalho, que consistia em construir vários triângulos, medir as amplitudes dos seus ângulos internos e verificar que o valor da sua soma era sempre 180º. Construíram o primeiro triângulo com facilidade, na medição depararam-se com a dificuldade de medir os ângulos internos, pois ao tentarem medir, eram sempre apresentados os ângulos externos. Para medir a amplitude de um ângulo, no *GeoGebra* é necessário escolher ou três pontos, ou duas semirretas ou dois segmentos de reta no sentido dos ponteiros do relógio. Como os alunos escolhiam no sentido anti-horário era-lhes apresentado o ângulo externo. A investigadora ao verificar que estavam a medir o ângulo externo e que nas várias tentativas repetiam sempre o mesmo processo, ajudou-os a fazer a escolha certa dos pontos. Após a medição dos ângulos internos, os alunos começaram a preencher a tabela da folha cálculo, no entanto, ao tentarem calcular a soma dos ângulos, escrevem a fórmula sem o sinal de igual. Como se apercebem que na célula, em vez de aparecer o resultado da soma, era mostrado o seu conteúdo, chamaram a investigadora. Esta relembrou que necessitam de escrever o sinal “=” no início de fórmula. De resto não apresentaram grandes dificuldades na execução da tarefa, nem no manuseamento da ferramenta, e conjeturaram corretamente o pretendido.

Na segunda tarefa da ficha de trabalho começaram por lê-la atentamente, calados e sem mexer no computador. Iniciaram a sua execução construindo um pentágono, através da função “Polígono” e as respetivas diagonais partindo de um só vértice. Depois desenharam um triângulo e um quadrado através da função “Polígono Regular” (através desta funcionalidade o *GeoGebra*, permite escolher o tamanho da aresta e o número de lados do polígono a desenhar, assim os polígonos são convexos e com os lados todos de igual comprimento). Ao terem os três polígonos, com as respetivas diagonais partindo apenas de um vértice, construídos sentiram alguma dificuldade em preencher a tabela e chamaram a investigadora com o intuito de perceber como a preencher.

Investigadora: Porque acham que construíram as diagonais dos polígonos?

Carlos: Não sei…

António: Hum… o pentágono ficou dividido em triângulos, é isso?

Investigadora: É!

António: "Em 3 triângulos!"

Investigadora: "Quanto é a soma das amplitudes de um triângulo?"

Carlos: "180º… Ah! Então somamos 180º + 180º + 180º! Já percebi!"

Preenchem a linha da tabela relativa ao pentágono, e depois construíram os polígonos de seis, sete e dez lados com a mesma técnica e as respetivas diagonais. De seguida preencheram calmamente a tabela. A investigadora ao ver que os alunos apenas estavam a escrever o valor numérico da soma das amplitudes dos ângulos internos, alertou-os para escreverem os valores da multiplicação, com o sentido de lhes facilitar o preenchimento da última linha da tabela, como mostra a Figura 28.

Polígono	N.º de Lados	N.º triângulos em que ficou dividido	Soma das amplitudes dos ângulos internos
Triângulo	3	1	180º
Quadrilátero	4	2	180x2= 360º
Pentágono	5	3	180x3 = 540º
Hexágono	6	4	180x4= 720
Heptágono	7	5	180x5= 900
…			
Polígono com 10 lados	10	8	180x10= 1800
…			

Figura 28 – Parte da tabela preenchida pelo Carlos.

Na linha relativa ao polígono com 10 lados, os alunos multiplicaram 180 pelo número de lados da figura, pode presumir-se que seja um erro por distração. A última linha da tabela, referente ao polígono de *n* lados, que era um prelúdio à conclusão que deviam tirar, os alunos conversaram um com o outro para tentarem chegar a um consenso, mas cedo conseguiram chegar à relação pretendida.

António: Olha Carlos! A soma dos ângulos das figuras que fizemos é sempre 180 a multiplicar pelo número de triângulos!

Carlos: Pois é! Pois é! E o número de triângulos em que fica dividido o polígono é o número de lados menos 2!

António: Pois é! Ou seja, *n* e *n – 2*!

Carlos: Então já conseguimos preencher duas coisas da última coluna…

António: Então… um polígono de *n* lados tem *n – 2* triângulos, por isso a soma é *180º x* (*n – 2*)

No texto pedido para sintetizar as justificações e a conclusão da tabela, os alunos responderam o seguinte:

> À medida que o número de lados aumenta, o número de triângulos em que fica dividido também aumenta. A relação que existe entre o número de lados e do número de triângulos em que ficou dividido é *n – 2* e como a soma dos ângulos internos vai dar 180º, faz-se 180º vezes o número de triângulos que ficou dividido. (António e Carlos)

Os alunos executaram a tarefa mais rapidamente que os restantes colegas da turma e, em comparação com as aulas anteriores foram mais eficazes, executaram-na sem interrupções, com vontade e bastante interesse na execução de todos os passos.

Notou-se uma grande evolução tanto ao nível do manuseamento da ferramenta, demostraram ter mais destreza, como ao nível do raciocínio que apresentaram, a execução dos passos pretendidos era feita eficazmente, sem necessidade de correções. Mas também há que destacar a forma como se expressaram tanto oralmente como por escrito, explicando as suas ideias com os vocábulos matemáticos corretos.

Na primeira tarefa era necessário utilizar as fórmulas e muitos dos alunos da turma, inclusivamente os discentes em estudo, apesar de já terem trabalhado com elas, não se lembravam de como se introduziam. Os alunos apresentaram algumas dificuldades na medição dos ângulos internos do triângulo, talvez pela mesma razão apontada, ou seja, ter passado algum tempo sem fazer essa ação. Ela requer que a escolha dos pontos seja feita no sentido horário e os alunos selecionavam no sentido anti-horário.

O António e o Carlos, na segunda tarefa, apresentaram dificuldades no preenchimento da tabela, em particular, na soma das amplitudes dos ângulos internos. Os alunos apesar de terem construído, corretamente e sem ajuda, os polígonos e as respetivas diagonais, não conseguiram ver os triângulos e raciocinar com base no que tinham concluído na tarefa anterior. Apesar deste grupo se apresentar numa fase mais avançada relativamente ao da Carlota e da Marta, também não tiveram o tempo necessário de assimilação das aprendizagens requeridas para esta tarefa. Só depois da investigadora os alertar, é que conseguiram verificar que as diagonais permitiam dividir os polígonos em triângulos. Com a chamada de atenção para colocarem os valores da multiplicação na coluna das somas, os alunos não apresentaram grandes dificuldades na conclusão. O grupo conseguiu chegar ao resultado das somas e escrever os cálculos que levaram a cada uma delas, no entanto, como não era pedido para redigir os procedimentos que levavam ao resultado, no sentido de ajudar à abstração para o polígono de *n* lados, os alunos não o fizeram espontaneamente. Os discentes discutiram a fórmula da soma das amplitudes dos ângulos internos, mas foi o António quem se destacou a expor o seu raciocínio, o Carlos concordou e mostrou entender as ideias do seu colega. No preenchimento da linha referente ao polígono de dez lados, o lapso verificado não invalidou o restante raciocínio e a obtenção da conclusão.

A segunda ficha de trabalho não contemplou o tempo que os alunos iriam demorar a assimilar a aprendizagem que a primeira tarefa continha, o que comprometeu um pouco a resolução da segunda tarefa. Sem a ajuda da investigadora, os grupos não teriam chegado tão facilmente à conclusão pretendida. A ficha de trabalho deveria ter contemplado mais exercícios ou tarefas semelhantes após a execução da tarefa da soma dos ângulos internos de um triângulo, com o sentido dos discentes tornassem esse conhecimento em objeto matemático, para que posteriormente fossem capazes de manipular esse conhecimento noutros contextos.

4.4 Outras atividades desenvolvidas

Para a avaliação das aprendizagens realizadas nas aulas de execução de tarefas no *GeoGebra*, foram realizados exercícios e problemas, em aulas sem recurso ao computador, bem como uma ficha de avaliação.

A resolução dos exercícios, que a seguir se apresentam, decorreram após as duas primeiras aulas de resolução de tarefas na sala de TIC. Para estas a professora digitalizou as páginas do livro com os exercícios propostos e projetou-as no quadro interativo, assim todos os alunos tiveram a oportunidade de acompanhar a resolução de cada um com as imagens correspondentes. Neste tópico é muito importante o aspeto visual, sendo que o material de desenho para o quadro de giz é menos fiável que a precisão das ferramentas de um computador. No entanto, sempre que achou necessário recorreu ao quadro de giz para completar alguma ideia.

Relembra-se que nestas aulas a investigadora adotou o papel apenas de observadora e não participou na aula de forma ativa.

4.4.1 Aula sem recurso à tecnologia

Esta aula teve como objetivo fazer a síntese das propriedades da circunferência e resolver problemas sem recurso ao computador.

A professora começou por explicar como se iria desenrolar a aula, salientando o facto de se irem resolver exercícios, do manual escolar, aplicando as propriedades trabalhadas nas duas aulas anteriores e posteriormente escreveu o sumário.

O primeiro exercício realizado é o apresentado na Figura 29. Na alínea 8.1 a professora começou por perguntar qual o nome do ângulo pedido, a turma não respondeu, mas quando a professora questionou onde estava localizado o vértice do ângulo, ouve-se ao fundo da sala: "É no centro, por isso é um ângulo ao centro."

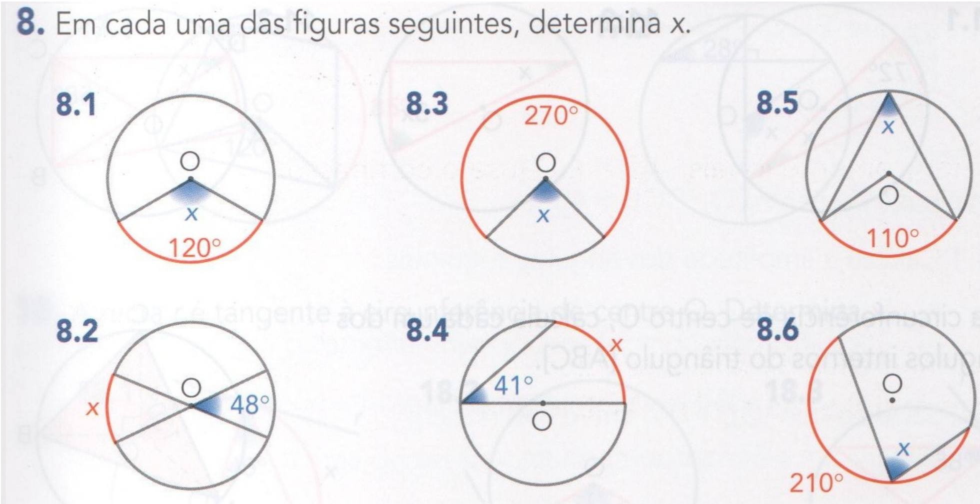


Figura 29 –Exercício 8 do manual escolar.

Na alínea 8.2 a docente aproveitou para relembrar, pedindo ajuda aos alunos, a noção de ângulos verticalmente opostos.

Na alínea 8.3 um aluno começou por explicar o seu raciocínio, dizendo que tinha de se dividir o valor do arco maior em dois para se encontrar o *x*, a turma não concordou e muitos dos alunos colocaram o dedo no ar. A Carlota explicou que no seu entender teria de primeiro calcular-se o valor do arco menor (tirando 270º a 360º) e como *x* é um ângulo ao centro tem o mesmo valor, a professora perguntou porque é que a amplitude do ângulo ao centro é igual à amplitude do arco correspondente e a aluna enunciou a propriedade pedida.

Para a alínea seguinte, surgiu o seguinte diálogo.

Professora: Como se chama este ângulo? [disse apontando para o ângulo de 41º.]

Marta: É um ângulo inscrito. [respondeu prontamente.]

Professora: Quanto mede?

Marta: 41º!

Professora: E o que é que nós queremos saber?

Marta: A amplitude do seu arco.

Professora: E quanto achas que mede?

Marta: 41º

Professora [dirigindo-se à turma]: Todos concordam?

Turma: Não!

Professora: Sabes porquê Marta?

Marta: Ah… Porque a amplitude do ângulo inscrito é metade do seu arco correspondente.

Professora [dirigindo-se à turma]: O que é que vocês dizem?

Turma: Sim!

A alínea 8.5 era um pouco mais elaborada e a professora, mais uma vez, decidiu acompanhar o raciocínio de um aluno na sua resolução e chamou-o ao quadro.

Professora: Vais-me dizer o que é que nós vemos aqui!! [disse apontando para a figura da alínea 8.5.]

António: Vemos que o arco menor é 110º!

Professora: E o que podes dizer acerca da figura?

António: Hum… hum… [disse enquanto apontava para o ângulo ao centro e o ângulo inscrito] Isto é um polígono côncavo de 4 lados!

Professora: Tenta ver a figura em separado.

António: Ah! Ok! É um ângulo ao centro e um ângulo inscrito.

Professora: Conhecendo o arco menor, como vamos saber o valor do *x*?

António: 110º a dividir por 2, vai dar o *x*… 55º!

Professora: Porquê?

António: Porque a amplitude do arco de um ângulo inscrito é o dobro da amplitude do ângulo!

Professora: E já agora… quanto é a amplitude deste ângulo? [perguntou enquanto apontava para o ângulo ao centro.]

António: É de 110º!

O António sentou-se e a professora fez uma síntese, em conjunto com o resto da turma, do que foi dito para que todos escrevessem corretamente a resposta.

Na última alínea do exercício 8 a Marta aprontou-se a responder, mesmo sem lhe ser pedido para tal, e apresentou um raciocínio correto.

Entretanto realizou-se o exercício 9, semelhante ao anterior, apenas com três alíneas, mas cada circunferência com pelo menos dois ângulos. Da mesma forma que o exercício 8, alguns alunos foram chamados ao quadro para explicar o seu raciocínio e todos foram resolvidos com pouca dificuldade, demonstrando lembrarem-se das propriedades aprendidas na execução das tarefas.

Seguiu-se a resolução do exercício 10 apresentado de seguida.

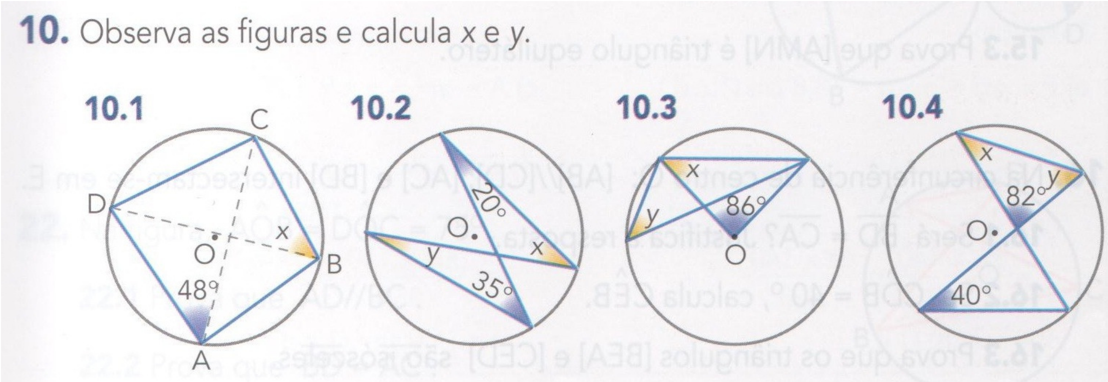


Figura 30 - Exercício 10 do manual escolar.

Destaca-se a resolução da alínea 4 realizada pelo Carlos.

Carlos: Se o ângulo inscrito de 40º tem o mesmo arco que o ângulo *x*, então *x* é igual a 40º!

Professora: Muito bem! Parabéns! Começaste muito bem! E qual será o valor de y?

Carlos [centrando-se apenas no triângulo de cima]: Como a soma das amplitudes de todos os ângulos de um triângulo é de 180º então tira-se a 180º, 82º e 40º (que é o valor de *x*)! [depois virou-se para a turma e pediu]: Ajudem-me a fazer os cálculos!

Alguns elementos da turma responderam: 58º!

Os colegas ficaram contentes com a destreza do Carlos e até lhe disseram que queriam que ele fosse o explicador deles.

Salienta-se que a professora não escreveu nem pediu para ler no manual as propriedades dos ângulos, a resolução dos exercícios foi feita apenas com recurso ao trabalho realizado nas duas últimas aulas. No final da aula a professora chamou à atenção dos alunos, que pela primeira vez, eles tinham resolvido exercícios sem recorrer à explicação teórica da professora ou à leitura e interpretação da matéria exibida no manual escolar. Os alunos mostraram-se bastante surpreendidos, pois ainda não se tinham apercebido dessa situação.

Nos primeiros exercícios, apesar dos alunos reconhecerem os valores pedidos, demonstraram alguma dificuldade em justificar como conseguiam chegar ao valor de *x*. Depois de algumas resoluções, os exercícios foram feitos mais rapidamente e com menos erros. Em nenhuma das alíneas eram pedidas justificações, no entanto, a professora achou importante para a consolidação da matéria. Em todas as alíneas, os alunos registaram o processo que os levou ao valor de *x*.

A turma, de uma maneira geral, mostrou-se bem comportada e acatou as ordens dadas pela professora. Os alunos funcionaram bem em grupo e quando houve espaço para conversa os alunos fizeram-no de forma calma, havendo poucas distrações ao longo de toda a aula.

A Carlota respondeu ao terceiro exercício elaborado na aula de forma exemplar, explicou muito bem o seu raciocínio e enunciou a propriedade utilizada para chegar ao valor de *x*.

A Marta apresentou algumas dificuldades, no exercício que a professora pediu para resolver. Talvez o impacto da pergunta a tivesse inibido e também por ter sido o quarto exercício a ser feito na aula. A aluna deve ter começado a responder sem refletir um pouco no que estava a dizer, já que ela não teve tempo de pensar no exercício antes da professora se dirigir a ela. Quando por iniciativa própria respondeu a outra questão já acertou, pois teve tempo para resolver mentalmente e desta vez já se achou confiante a responder, mostrando-se mais firme e convicta.

O António ao início não conseguiu ver a figura em separado, ou seja, em vez de visualizar dois ângulos na circunferência, via um polígono de quatro lados. O mesmo aconteceu na atividade dos polígonos divididos em triângulos, primeiro também só via a figura no seu todo e depois de chamado à atenção é que conseguiu ver o que se pretendia. Nestes dois casos é de salientar o facto do aluno não visualizar o que a investigadora achava que era expectável. Quando a professora o ajudou a ver os ângulos, teve o raciocínio correto e achou o valor de *x* facilmente.

O Carlos chegou aos valores corretos de *x* e *y*, demonstrando ter assimilado a noção de ângulo inscrito numa circunferência, a propriedade que relaciona os ângulos inscritos e arcos de uma mesma circunferência e reconhece que a soma dos ângulos internos de um triângulo é de 180º. Este aluno conseguiu abstrair-se dos dois triângulos representados na circunferência para visualizar o ângulo inscrito de 40º, crucial para a resolução da questão.

Os alunos mostraram que conseguem utilizar as três propriedades relativas aos ângulos, "A amplitude de um ângulo inscrito numa circunferência é metade da amplitude do ângulo ao centro que interseta o mesmo arco", "A amplitude de ângulo inscrito é igual a metade da amplitude do arco que ele contém" e "A amplitude de ângulo ao centro é igual à amplitude do arco correspondente" com recurso ao *GeoGebra*. Eles conseguiram aplicá-las em situações concretas embora demonstrem algumas dificuldades em enunciá-las usando uma linguagem mais formal.

Mesmo sem recurso ao *software* os alunos demonstraram reconhecer ângulos ao centro e inscritos numa circunferência e as propriedades que relacionam os ângulos ao centro, ângulos inscritos e arcos de uma mesma circunferência. O *GeoGebra* ajudou-os a consolidar os novos conceitos e a aplicar as propriedades, este foi fundamental na compreensão destes conceitos pois os alunos puderam experimentar e criar uma imagem mental dos ângulos através dele.

4.4.2 Descrição e análise das questões da ficha de avaliação

Os alunos realizaram, após as três aulas que envolveram tarefas de investigação, uma ficha de avaliação que continha três questões diretamente relacionadas com as propriedades dos ângulos na circunferência.

Os discentes admitiram lembrar-se das tarefas realizadas no *GeoGebra,* aquando da resolução das questões do teste. A Marta afirmou que o teste não lhe tinha corrido bem porque não se conseguiu concentrar, alegou ter tido um lapso de memória.

A primeira questão era para descobrir o valor de um arco sabendo a amplitude de um ângulo ao centro e outro inscrito. Os alunos tinham de efetuar cálculos simples e não era pedido para justificar o seu raciocínio.

A Figura 31 apresenta o enunciado do exercício 9, da versão A, da ficha de avaliação. A professora optou por fazer duas versões do teste, e na versão B a amplitude do ângulo DAB é de 50º e do ângulo DOC é de 60º.

9. Na figura ao lado, está representada uma circunferência, de centro O, em que:
   - *A, B, C* e *D* são pontos da circunferência;
   - $D\hat{A}B = 40º$ e $D\hat{O}C = 50º$.

   Qual é, em graus, a amplitude do arco CB?

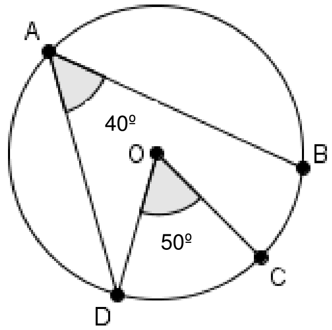
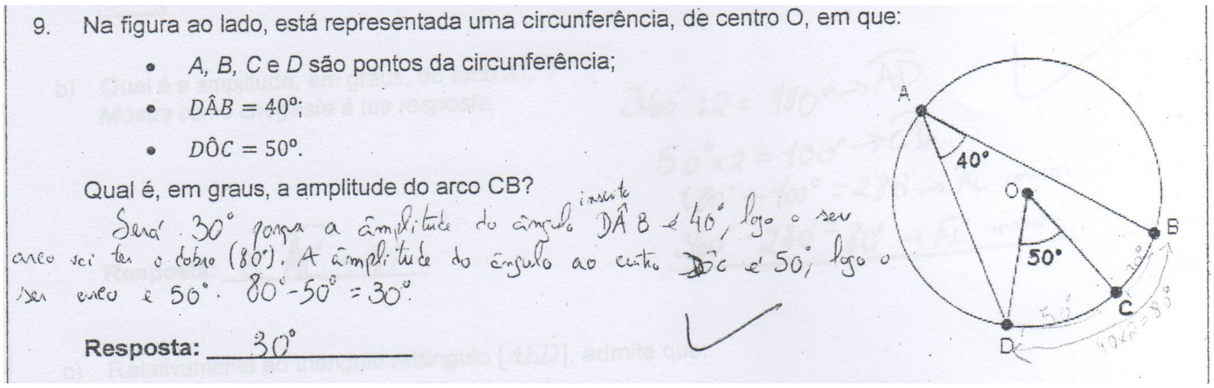


Figura 31 – Pergunta 9 da ficha de avaliação.

A Carlota apresentou todo o seu raciocínio na resposta e fê-lo de forma correta, como se pode ver na Figura 32. Na entrevista, efetuada depois das aulas de investigação, a Carlota mencionou que nesta questão se tinha recordado, das tarefas no *GeoGebra*, aquando da resolução da primeira ficha de trabalho.



9. Na figura ao lado, está representada uma circunferência, de centro O, em que:
   - *A, B, C* e *D* são pontos da circunferência;
   - $D\hat{A}B = 40°$;
   - $D\hat{O}C = 50°$.

Qual é, em graus, a amplitude do arco CB?

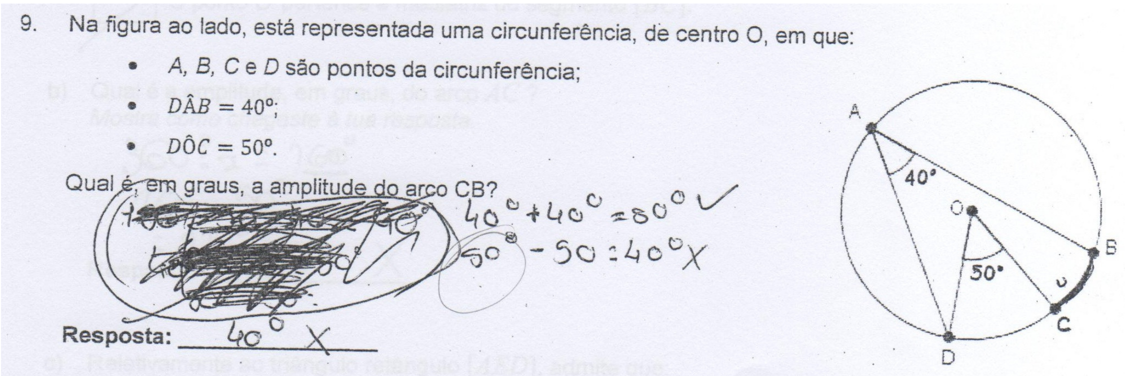
Será 30° porque a amplitude do ângulo inscrito DÂB é 40°, logo o seu arco vai ter o dobro (80°). A amplitude do ângulo ao centro DÔC é 50°, logo o seu arco é 50°. 80°-50° = 30°.

Resposta: 30°

Figura 32 – Resposta da Carlota à questão 9 da ficha de avaliação (versão B).

A aluna mostrou ter compreendido as propriedades abordadas nas aulas das tarefas no *GeoGebra*, tal como já antes o tinha demonstrado na aula de resolução de exercícios sem recurso à tecnologia. A aluna mencionou na entrevista, que o *software* tinha sido muito importante como elemento visual, principalmente a primeira tarefa.

A Marta respondeu de forma incorreta à questão, começou bem o raciocínio e depois enganou-se ao efetuar o segundo cálculo. Na entrevista a aluna salientou que se tinha distraído e colocado 90º em vez de 80º, por isso o resultado final não estava correto. Referiu ainda que se lembrou das tarefas da primeira ficha na resolução deste exercício, mais propriamente da primeira tarefa de todas, onde evocou, tal como a Carlota, a imagem criada no *GeoGebra*.


9. Na figura ao lado, está representada uma circunferência, de centro O, em que:

- *A, B, C* e *D* são pontos da circunferência;
- $D\hat{A}B = 40°$;
- $D\hat{O}C = 50°$.

Qual é, em graus, a amplitude do arco CB?

$40° + 40° = 80°$

$90° - 50 = 40°$

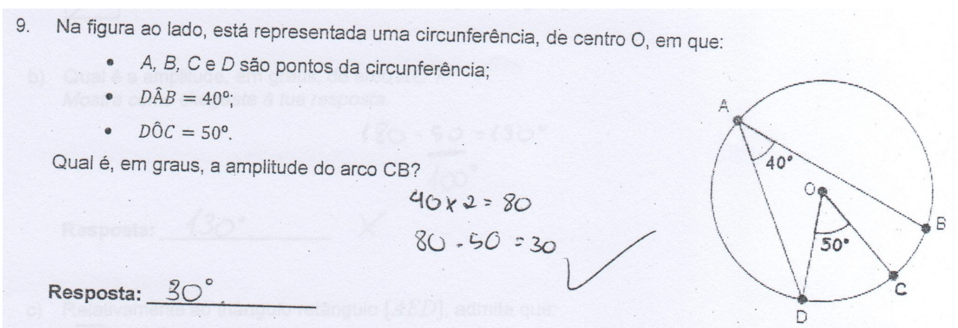
Resposta: 40°

Figura 33 - Resposta da Marta à questão 9 da ficha de avaliação (versão B).

A aluna no primeiro cálculo apresentado mostrou que sabia que o valor do arco DB é o dobro da amplitude do ângulo DAB, umas das propriedades abordadas. No segundo cálculo depreende-se que considerou que a amplitude do arco CD era igual à amplitude do ângulo DOC, por isso subtraiu 50º a outro valor, no entanto, nesta subtração enganou-se ao escrever 90º em vez de 80º. A Marta parece assim ter compreendido as propriedades relativas à amplitude dos ângulos na circunferência.

O Carlos respondeu 25º, como apenas deu a resposta e não apresentou qualquer tipo de cálculos, não deu para perceber o raciocínio desenvolvido. O aluno na entrevista também não se lembrava do raciocínio que tinha feito para dar a resposta à questão.

O António respondeu corretamente à questão e apresentou os cálculos associados de forma clara e concisa. Na entrevista o aluno referiu que a imagem visual da manipulação do *GeoGebra* foi muito importante na resolução desta questão, pois lembrou-se da tarefa que envolveu o relacionamento do ângulo inscrito e o seu arco e o ângulo ao centro e o seu arco.


9. Na figura ao lado, está representada uma circunferência, de centro O, em que:

- *A, B, C* e *D* são pontos da circunferência;
- $D\hat{A}B = 40°$;
- $D\hat{O}C = 50°$.

Qual é, em graus, a amplitude do arco CB?

$40 \times 2 = 80$

$80 - 50 = 30$

Resposta: 30°

Figura 34 - Resposta do António à questão 9 da ficha de avaliação (versão B).

O António com esta resposta demonstrou conhecer as propriedades estudadas.

Na segunda questão, da ficha de avaliação relacionada com ângulos na circunferência, os alunos tinham de relacionar a amplitude de um ângulo inscrito e o valor do arco de uma semicircunferência. Apenas um aluno, dos quatro em estudo, respondeu corretamente.

A Figura 35 mostra o enunciado do exercício 11 alínea b, da versão B. Na versão A, da ficha de avaliação, o valor da amplitude do ângulo CAD é de 40º.

11. Na figura está representada uma circunferência de centro no ponto *O.* Sabe-se que:

- os pontos *A, B, C, D* e *E* pertencem à circunferência;
- [*AD*] é um diâmetro da circunferência;
- o ponto *P* é o ponto de interseção dos segmentos de reta
- CÂD = 50º.

A figura não está desenhada à escala.

b) Qual é a amplitude, em graus, do arco $\overset{\frown}{AC}$?
Mostra como chegaste à tua resposta.

Resposta:______________________

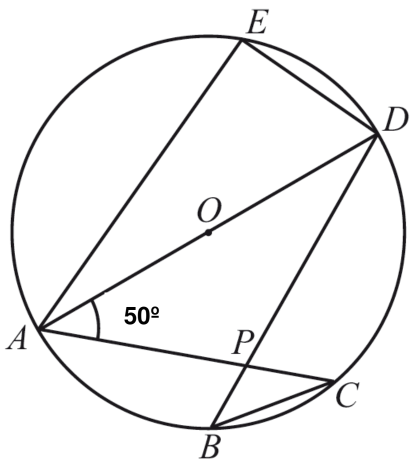
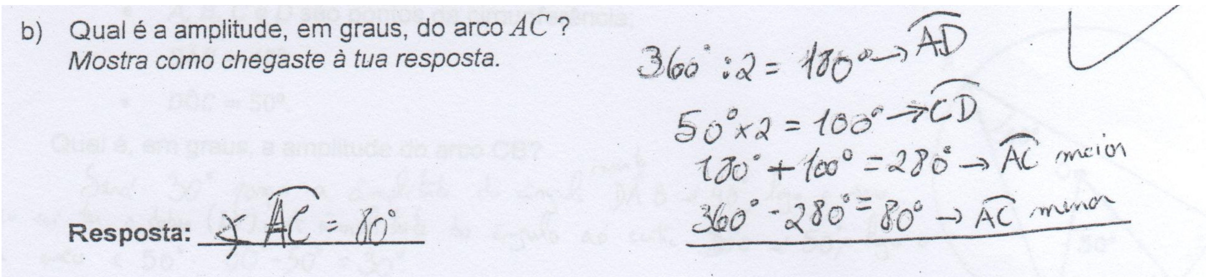


Figura 35 - Pergunta 11 da ficha de avaliação (versão B).

A Carlota respondeu corretamente à questão, apresentado todos os cálculos efetuados de uma maneira sucinta e explícita, de forma a dar para entender o seu raciocínio. É de salientar que a aluna, na entrevista, declarou ter-se recordado da tarefa que envolvia arcos maiores e menores.


b) Qual é a amplitude, em graus, do arco $\overset{\frown}{AC}$?
Mostra como chegaste à tua resposta.

$360° : 2 = 180° \rightarrow \overset{\frown}{AD}$

$50° \times 2 = 100° \rightarrow \overset{\frown}{CD}$

$180° + 100° = 280° \rightarrow \overset{\frown}{AC}$ maior

$360° - 280° = 80° \rightarrow \overset{\frown}{AC}$ menor

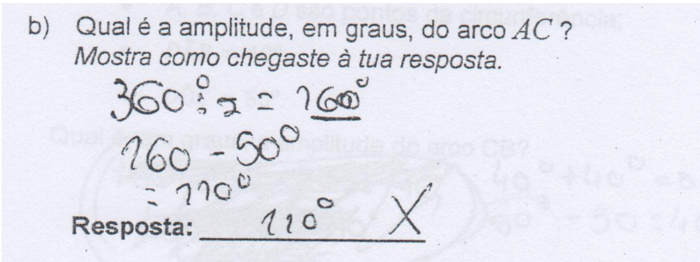
Resposta: $\overset{\frown}{AC} = 80°$

Figura 36 - Resposta da Carlota à questão 11 da ficha de avaliação (versão B).

Com o primeiro cálculo, a Carlota mostrou saber, que a amplitude de um arco é igual ao ângulo ao centro correspondente. No segundo, que a amplitude do arco DC é o dobro da amplitude do ângulo inscrito que o contém. Nos passos seguintes realizou os cálculos necessários para chegar ao valor do arco pedido. Mais uma vez, a aluna mostrou um bom domínio das propriedades abordadas nas tarefas realizadas com recurso ao *GeoGebra*.

A Marta confessou ter estado muito nervosa durante a resolução da ficha de avaliação, e disse: "Professora, deu-me uma branca e não me lembrei de nada, nem das aulas nos computadores nem das outras, não sei o que se passou comigo!”. A aluna obteve nível negativo na ficha e estava visivelmente triste aquando da entrevista, principalmente quando reviu a parte das perguntas acerca da resolução das questões. A aluna explicou que tinha gostado bastante das aulas nos computadores e “Professora, eu entendi o que fiz nas tarefas, e quando fiz os exercícios do livro, consegui fazê-los, não sei o que se passou comigo neste dia…”, a aluna admitiu estar um pouco mais à vontade neste tópico por isso se sentir triste de nem estas questões ela ter conseguido resolver corretamente.

A discente apresentou um raciocínio um pouco confuso e sem explicações, inclusivamente com cálculos mal efetuados. Reconheceu que a amplitude do arco de uma circunferência é de 360º, de seguida dividiu essa amplitude por 2 para obter o arco AD, mas efetuou mal os cálculos. No segundo cálculo mostra conseguir visualizar o ângulo inscrito na circunferência DAC, mas não aplica a propriedade necessária à resolução desta questão. Por fim fez, e bem, a subtração entre o seu valor total da amplitude do arco AD com a sua amplitude do arco DC, no entanto, com os erros efetuados anteriormente, não conseguiu chegar à resposta correta (Figura 37).


b) Qual é a amplitude, em graus, do arco AC ?
Mostra como chegaste à tua resposta.

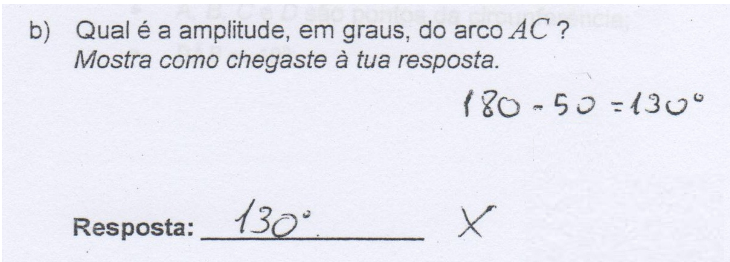
360º : 2 = 160º
160 - 50º
= 110º

Resposta: 110º X

Figura 37 - Resposta da Marta à questão 11 da ficha de avaliação (versão B).

O Carlos não respondeu à questão e alegou não ter tido tempo para a realizar porque tinha perdido muito tempo a resolver outras questões da ficha de avaliação. As questões aqui expostas eram as últimas do teste, por isso o aluno pode ter demorado demasiado tempo na resolução das questões anteriores.

O António também errou ao afirmar que a amplitude do arco DC era igual à amplitude do seu ângulo inscrito, no entanto, o restante raciocínio estava correto.


b) Qual é a amplitude, em graus, do arco AC ?
Mostra como chegaste à tua resposta.

180 - 50 = 130º

Resposta: 130º X

Figura 38 - Resposta do António à questão 11 da ficha de avaliação (versão B).

O aluno salientou que as aulas utilizando o *GeoGebra* foram mais produtivas que as aulas expositivas.

> O *GeoGebra* permite desenvolver a nossa memória visual, a nossa capacidade de experimentação e de aprender por nós próprios! É melhor que as explicações da professora! (António)

De uma maneira geral os resultados, das fichas de avaliação da turma, foram mais baixos comparativamente com as do período anterior, a média dos resultados foi de 54%. Relativamente aos alunos em estudo, a Carlota e o António destacaram-se pelo bom resultado na ficha, a Marta não obteve o resultado pretendido e o Carlos desceu relativamente ao período anterior.

Nas respostas aqui analisadas, destaca-se a Carlota por conseguir utilizar as propriedades estudadas em situações diversas e por demonstrar um bom raciocínio. Durante as aulas mostrou-se sempre muito interessada e empenhada na resolução das tarefas, apesar de no início ter apresentado algumas dificuldades no manuseamento da ferramenta o que tornou a resolução das tarefas um pouco mais lenta. O António foi um pouco mais sucinto nas suas explicações e apresentou um raciocínio claro, apesar de ter apresentado alguns erros nas suas respostas, demonstrou conhecer os conceitos de ângulo ao centro e inscrito numa circunferência e as propriedades que relacionam os ângulos e arcos da mesma circunferência.

A Marta e o Carlos, como já foi mencionado aquando da descrição dos participantes, são alunos com mais dificuldades. Apesar de em aula o Carlos se mostrar bastante participativo e rápido na resolução das tarefas, depois na concretização das questões na ficha de avaliação teve algumas dificuldades. A Marta durante as aulas precisava de ajuda para chegar às conclusões pretendidas e na ficha de avaliação apenas conseguiu reconhecer que a amplitude de ângulo inscrito é igual a metade da amplitude do arco que ele contém e que a amplitude de ângulo ao centro é igual à amplitude do arco correspondente na figura mais simples.

Os alunos, de uma forma geral, mostraram na resposta à questão 9, saber conseguir aplicar as propriedades estudadas através das tarefas desenvolvidas no *GeoGebra*, envolvendo um menor grau de abstração que na questão 11. Este exercício era relativamente simples e a figura assemelhava-se um pouco às construídas nas tarefas das fichas de trabalho. Na questão 11, já requeria abstraírem-se de alguns segmentos de reta traçados na figura e talvez isso os tivesse dificultado na resposta.

4.4.3 Inquéritos

No dia da entrevista os alunos em estudo preencheram os inquéritos (Anexo 4). O inquérito teve como principal objetivo perceber se os alunos gostaram de executar as tarefas, se o papel da professora (que durante o estudo teve um comportamento diferente do que os alunos estão habituados nas outras disciplinas e na maioria das aulas de matemática) foi importante na aprendizagem dos tópicos abordados, se as tecnologias na aula são uma mais valia, se os alunos compreenderam os conteúdos lecionados, o que acharam do manuseamento do *GeoGebra,* se se consideraram uma ferramenta valiosa para as aulas de matemática, nomeadamente, na parte da geometria e perceber quais as vantagens e desvantagens de aulas deste tipo.

Na primeira, questão, onde perguntava se o aluno utilizou anteriormente *softwares* de matemática, todos responderam afirmativamente e particularizaram com o *GeoGebra* e o *Microsoft Office Excel*. Também afirmaram que os utilizavam nas aulas, apenas o Carlos, referiu a sua casa e nas aulas. Quanto à finalidade do seu uso, o Carlos e o António referiram "realizar exercícios", a Carlota "realizar atividades" e a Marta "para ajudar na resolução de problemas".

Na segunda questão era pedido para preencher uma tabela de acordo com uma escala **DT**: Discordo Totalmente; **DP**: Discordo Parcialmente; **CP**: Concordo Parcialmente e **CA**: Concordo em Absoluto. Os alunos tinham de responder à questão de cada linha com uma cruz emitindo a sua sincera opinião. A **Erro! A origem da referência não foi encontrada.**, que se encontra abaixo, mostra o número de cruzes para os quatro alunos estudados.

Tabela 4 – Questão 2 do inquérito.

	DT	DP	CP	CA
Achas fácil trabalhar no *GeoGebra*?			4	
Achas os comandos do *GeoGebra* simples e intuitivos?			3	1
Achas que o *GeoGebra* promove o desenvolvimento do raciocínio, ou seja, faz-te pensar mais do que numa aula em que a professora expõe a matéria?			1	3
Achas que aprendes melhor os conceitos matemáticos, usando o *GeoGebra?*			2	2
Achas que o *GeoGebra* permite relacionar a geometria com a vida quotidiana e com outras disciplinas?			4	
Achas que o programa permite relacionar a geometria com outros conteúdos matemáticos?			2	2
Conseguiste conjeturar corretamente as propriedades geométricas pedidas nas fichas de trabalho?			3	1
Achas que o *GeoGebra* permite uma aprendizagem mais ativa, isto é, em que participas mais no processo da aprendizagem?			3	1
Achas que o *GeoGebra* estimula a imaginação e a criatividade, tornando-se desafiante?			4	
Achas que o *GeoGebra* permite testar mais vezes do que se fosse com papel e lápis?			1	3
Achas que com o *GeoGebra* consegues ir ao teu próprio ritmo de aprendizagem?			3	1
O *GeoGebra* ajudou-te a aprender as várias propriedades da circunferência?			2	2
O teu colega de grupo ajudou-te e trabalharam como uma equipa?				4
Achas importante usar as tecnologias nas aulas de matemática?			2	2

A terceira questão pedia para exprimirem a sua opinião acerca das aulas com tecnologia e de que maneira ela pode contribuir para a aprendizagem da matemática. Todos concordaram que preferem o uso das tecnologias no ensino, referem que é uma forma de os motivar mais, o Carlos afirma que "aprende-se muito mais facilmente, do que ser só a professora a explicar", salientam o facto de ser mais apelativo e criativo o processo de aprendizagem pois captam melhor a atenção dos alunos.

As duas perguntas seguintes pediam o que mais gostou e o que menos gostou nas aulas que usaram o *GeoGebra*. Na parte positiva a Carlota salienta o facto de o *software* respeitar o ritmo individual de trabalho, a Marta referiu "as atividades eram desafiantes […], gostei muito" os outros alunos evidenciam a facilidade de construir circunferências e polígonos relativamente ao papel e ao lápis. Na parte negativa, pouco houve a salientar, a Marta referiu o facto de o *software* por vezes paralisar (esse problema foi resolvido no fim da primeira aula) e o António não gostou da medição dos ângulos porque ter de respeitar uma ordem de escolha dos pontos ou das semirretas.

A sexta questão foi realizada com o propósito de se saber se os alunos utilizam as tecnologias em casa para realizar trabalhos para a escola, o António respondeu negativamente, no entanto, a Carlota e a Marta responderam afirmativamente destacaram o *Microsoft Word, Excel* e *PowerPoint*, apenas o Carlos mencionou o *GeoGebra*.

A pergunta sete inquere acerca do uso das tecnologias nas outras disciplinas, todos os alunos referiram apenas na disciplina de Tecnologias de Informação e Comunicação.

Por último são pedidos comentários, apenas o Carlos registou que gostaria de usar o *GeoGebra* mais vezes nas aulas de matemática.

CAPÍTULO V

5. CONCLUSÕES

Neste capítulo aborda-se as conclusões a que este estudo permitiu chegar, salientando-se os aspetos positivos e negativos. Procura-se dar resposta ao objetivo principal do estudo, saber qual o papel do ambiente de geometria dinâmica criado pelo *GeoGebra* na aprendizagem da geometria, e em particular respondendo às seguintes questões:

- Qual o papel do *GeoGebra* na compreensão do conceito de ângulo?
- Qual a sua influência na consolidação dos conceitos de ângulo ao centro e ângulo inscrito numa circunferência?
- Como é que o *GeoGebra* pode potenciar a descoberta das propriedades que relacionam os ângulos ao centro, ângulos inscritos e arcos de uma mesma circunferência?
- Qual o papel do *GeoGebra* no estabelecimento de propriedades relativas à soma dos ângulos internos de polígonos convexos?
- Qual o papel do *GeoGebra* na motivação e interesse na aprendizagem dos conceitos matemáticos?

Evidencia-se ainda as limitações do estudo, sentidas pela investigadora ao longo da escrita e da preparação das atividades. Salientam-se algumas ideias para estudos futuros, focando essencialmente a tecnologia dentro da sala de aula para que seja uma realidade bem-sucedida dentro de pouco tempo.

5.1 Conclusões do estudo

Com o sentido de dar resposta ao objetivo de perceber qual o papel do ambiente de geometria dinâmica criado pelo *GeoGebra* na aprendizagem da geometria, encontram-se de seguida as respostas às questões propostas.

- Qual o papel do *GeoGebra* na compreensão do conceito de ângulo?

No início da primeira tarefa os dois grupos de trabalho, e de uma maneira geral a turma no seu todo, apresentaram dificuldades na representação de ângulos mostrando complicações em lidar com este conceito. A Carlota e a Marta pareciam não distinguir retas, semirretas e segmentos de reta. Para estas alunas aparentemente para existir um ângulo era necessário haver um cruzamento entre retas, ou segmentos de reta, ou semirretas. O *GeoGebra* começou por ajudar os alunos a detetar que as suas construções estavam incorretas, o que no papel não seria tão facilmente detetado. No papel mesmo que se construa dois segmentos de reta com origens diferentes (como construíram na tarefa 1 ambos os grupos) conseguiriam medir a amplitude do "ângulo" criado com o transferidor. Por nunca se terem deparado anteriormente com este obstáculo, os alunos aparentavam ter uma noção de ângulo que se afastava da definição formal. Na segunda tarefa, os quatro alunos, já demostraram ter compreendido o conceito, pois construíram os ângulos solicitados com bastante facilidade.

O *GeoGebra* ajudou assim os alunos a reconhecerem os elementos constituintes do ângulo e foi através das várias construções que compreenderam melhor o conceito. O *software* auxiliou os discentes a perceber que um ângulo é constituído por duas semirretas com a mesma origem, ao mesmo tempo que permitiu que as alunas, Carlota e Marta, distinguissem retas, semirretas e segmentos de reta. No *GeoGebra* basta apenas mover um dos pontos que definem o ângulo para visualizar o outro ângulo que define a parte restante do plano, enquanto no papel é mais difícil de materializar essa visualização. O *software* ajudou essencialmente a reconhecer todas as construções incorretas tornando possível que os alunos compreendessem o conceito de ângulo, o que se constatou nas tarefas seguintes.

- Qual a sua influência na consolidação dos conceitos de ângulo ao centro e ângulo inscrito numa circunferência?

Aquando da resolução das tarefas envolvendo estes conceitos os alunos mostraram ter consolidado os conhecimentos acerca dos mesmos. A Carlota, o António e o Carlos responderam corretamente às questões propostas. A Marta quando solicitada para responder teve algumas dificuldades, mas posteriormente quando respondeu por iniciativa própria, fê-lo acertadamente.

A resolução da tarefa relativa aos conceitos de ângulo ao centro e ângulo inscrito numa circunferência apresentou resultados bastante satisfatórios. Na resolução da segunda tarefa era pedido para desenhar um ângulo inscrito numa circunferência e os alunos não apresentaram dificuldades na sua construção, mostrando já ter ultrapassado o obstáculo inicial sobre a compreensão do conceito de ângulo.

O António e a Carlota referiram que durante a realização da ficha de avaliação lembraram-se da imagem mental que o *GeoGebra* lhes tinha criado, e foi mais simples a resolução de certas alíneas. Estes alunos mencionaram que foi mais fácil recordarem-se de uma imagem criada por eles, no *GeoGebra,* do que as propriedades impressas no manual escolar, que eram exigidas noutras questões do teste.

A liberdade de movimentação do vértice do ângulo inscrito numa circunferência, que o *GeoGebra* oferece, permitiu aos alunos aperceberem-se que este apenas se movia na circunferência. Para o conceito de ângulo ao centro, foi igualmente importante pois permitiu aos discentes compreenderem que as semirretas, que o constituem, têm de ter origem no centro da circunferência. Os alunos aperceberam-se que ao mover as semirretas do ângulo ao centro, o vértice estava sempre no centro. O caráter visual que este *software* tem foi crucial para a consolidação destes dois conceitos.

- Como é que o *GeoGebra* pode potenciar a descoberta das propriedades que relacionam os ângulos ao centro, ângulos inscritos e arcos de uma mesma circunferência?

Relativamente à primeira tarefa, depois de ultrapassada a barreira da construção dos ângulos na circunferência, os alunos conseguiram fazer as medições das amplitudes dos ângulos e preencher uma tabela apresentada. Sem o *GeoGebra* só seria possível testar hipóteses fazendo vários desenhos para verificar regularidades, o que se fez apenas movendo um ponto ao longo da circunferência. Caso a tarefa fosse desenvolvida em papel, levaria mais tempo e seria suscetível de erros de aproximação que, em alguns casos, comprometeriam a conjetura. Ambos os grupos concluíram com sucesso a tarefa que pedia a relação existente entre a amplitude do ângulo ao centro e o arco correspondente e o ângulo inscrito e o mesmo arco.

Pelo facto do *GeoGebra* conciliar a representação gráfica com a algébrica, os alunos puderam transferir as amplitudes dos ângulos da folha algébrica para a folha de cálculo, havendo espaço para menos erro de digitação.

Os desempenhos da resolução das fichas de avaliação apresentaram uma diferença significativa relativamente à realização das tarefas anteriores. A Carlota demonstrou reconhecer as propriedades trabalhadas nas aulas e conseguiu realizar os exercícios da ficha de avaliação corretamente. A Marta e o Carlos apesar de demostrarem conhecer certos conceitos e propriedades, baralharam-se noutros e não conseguiram resolver corretamente as questões da ficha. O António declarou não ter tido tempo para resolver uma das questões, outra respondeu corretamente e a outra teve um pequeno erro de distração que comprometeu parte da resposta, o aluno admitiu o erro e disse: "pensei bem e depois escrevi mal!".

Os alunos admitiram que o *GeoGebra* os ajudou a consolidar as propriedades que relacionam os ângulos ao centro, ângulos inscritos e arcos de uma mesma circunferência, pelo facto de ao se mover um ponto comum aos dois ângulos se poder criar novos ângulos compreendidos pelo mesmo arco. A "capacidade manipulativa contribuiu para uma abordagem experimental e indutiva, desenvolvendo a construção de generalizações a partir de múltiplas observações" (Delgado, 2008, p. 14). Novamente o elemento visual e a facilidade de movimentação de figuras é uma grande potencialidade deste *software*.

- Qual o papel do *GeoGebra* no estabelecimento de propriedades relativas à soma dos ângulos internos de polígonos convexos?

Para a determinação da soma dos ângulos internos de um polígono convexo os alunos começaram por construir vários triângulos, medir as amplitudes dos seus ângulos internos e calcular a sua soma. O *GeoGebra* foi bastante importante na construção dos vários triângulos, pois apenas movendo um dos vértices, os alunos obtinham a figura com as mesmas propriedades, mas com ângulos diferentes. O *software* tornou esta tarefa mais simplificada e facilitada. Devido à tarefa ser a última elaborada pelos alunos, também foi realizada com mais destreza e rapidez.

O *GeoGebra* também teve um papel fundamental na construção os polígonos convexos e nas diagonais a partir de um só vértice. Destaca-se principalmente a repetição das ações que auxiliou as alunas a interiorizarem o conceito de diagonal. O António e o Carlos beneficiaram na construção de polígonos convexos, pois construíram-nos através da opção “Polígono regular”, escolhendo o número de lados do polígono e a medida do lado. Foi através da visualização, experimentação, construção e investigação que este *software* permitiu que os alunos fossem levados a conjeturar corretamente.

- Qual o papel do *GeoGebra* na motivação e interesse na aprendizagem dos conceitos matemáticos?

As alunas Carlota e Marta na primeira aula de resolução da primeira ficha de trabalho sentiram--se um pouco perdidas por demorarem demasiado tempo na resolução da primeira tarefa. Na segunda aula já se mostraram bastante à vontade no manuseamento do *GeoGebra* e a atenção foi apenas para o caráter investigativo ou exploratório das tarefas seguintes. O Carlos e o António como não apresentaram tanta dificuldade no primeiro dia, no segundo foram ainda mais rápidos, apresentaram um raciocínio mais simples e conciso e a uma linguagem mais fluída. O interesse e a motivação foram aumentando com o tempo devido às evoluções apresentadas ao longo das aulas.

Os alunos com o decorrer das aulas nos computadores ganharam prática e começaram a conhecer melhor os procedimentos do *GeoGebra,* o que fez com que se tornassem mais rápidos a manuseá-lo, dispensando a atenção apenas para a resolução dos passos das tarefas e foram-se mostrando mais calmos e confiantes. A maior evolução foi sentida no decorrer da primeira aula, em parte devido à ferramenta já não ser novidade para estes alunos, apesar de já não a utilizarem há algum tempo. Com a apropriação do instrumento os alunos mostraram-se motivados, interessados e mais propensos a conjeturar corretamente as propriedades pedidas. O *GeoGebra* abriu espaço para os alunos se questionarem e discutirem as conclusões a que iam chegando no final das várias tarefas. Mackrell e Johnston-Wilder (2005) dizem que para qualquer *software*, há uma curva de aprendizagem para conhecer e trabalhar facilmente com a ferramenta. Com estes alunos verificou-se isso mesmo, os alunos mostraram ir conhecendo cada vez melhor a ferramenta ao longo das aulas. Tal como os professores dos quatro estudos referidos na revisão de literatura por Mackrell e Johnston-Wilder, os alunos estudados também se sentiram motivados a trabalhar com o *GeoGebra*.

Para Abreu (2002) o gosto pela tecnologia tem de ser aproveitado e levar para a sala de aula ferramentas tecnológicas, em particular na área da geometria, de forma a poder cativar o interesse e a atenção dos alunos. Os alunos tanto nas entrevistas como nas respostas ao inquérito admitiram ter mais interesse pelas aulas em que usaram o *GeoGebra* do que pelas aulas expositivas da professora. O Carlos especificou que com a ajuda da “tecnologia aprende-se muito mais facilmente, do que com a professora a explicar”.

O *GeoGebra* criou, nos alunos, agilidade na execução das tarefas e facilidade de as concretizar, já para não mencionar a economia de tempo. Os grupos de trabalho conseguiram terminar as tarefas e chegar às conjeturas pretendidas, se as tarefas fossem realizadas em papel seriam se execução mais lentas. O tempo dispensado para a realização de uma tarefa foi bastante minimizado pelo facto do *software* permitir mover pontos e continuar a garantir as propriedades impressas à figura inicial.

Tomio (2006) defende que se o professor lecionar as aulas de matemática com um caráter mais investigativo, pode atingir o aluno de maneira mais eficaz. Além de o fazer participar na aula e de construir o seu próprio conhecimento, ainda traz uma alteração na rotina escolar do mesmo, o que poderá ser uma motivação para se empenhar no estudo. É um facto que os alunos do estudo encararam com bastante naturalidade a nova prática de frequentarem a sala de TIC e do ritmo das aulas ser distinto do que estavam habituados. Uma das alunas referiu que o *GeoGebra* ajudava-a a estudar ao seu ritmo, e mencionou isso como uma grande mais-valia. Sendo esta aluna das mais inteligentes da turma, sentirá alguns momentos "mortos" nas aulas de expositivas. Praticando tarefas no *software* sente-se mais livre para explorar mais lenta ou rapidamente conforme deseja.

5.2 Limitações do estudo

Do ponto de vista da investigadora uma das limitações principais do estudo foi o facto de este ter que decorrer num curto espaço de tempo. A investigação apenas se debruça sobre quatro alunos e uma pequena parte da geometria do nono ano de escolaridade. Outro aspeto importante que pode ter condicionado alguns resultados, foi o facto da segunda ficha de trabalho não ter exercícios de consolidação da primeira tarefa. Os alunos não tiveram o tempo necessário para assimilarem o facto de a soma das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo ser 180º.

Com o *software* houve o percalço de existir algumas paragens na primeira aula, no grupo das alunas, o que as condicionou um pouco na resolução das tarefas. Ao instalar uma nova versão do *GeoGebra*, não foi reconhecida outra anterior o que fez com que houvesse alguns conflitos.

Outra limitação, neste caso, do uso das ferramentas tecnológicas no geral, é necessário que os alunos conheçam bem o seu funcionamento para que a execução das tarefas seja fluída, para que sintam como um lápis, apenas um prolongamento ou uma peça fundamental na sala de aula. A grande maioria os alunos depois de se sentirem à vontade na ferramenta, executaram as tarefas alegremente, sem grandes obstáculos e sem pedir ajuda.

5.3 Trabalhos futuros

Depois do que foi descrito e pelos trabalhos já realizados no âmbito dos ambientes de geometria dinâmica, defende-se que os *softwares*, quando bem utilizados didaticamente, são muito úteis no processo de ensino-aprendizagem. Uma das sugestões para trabalhos futuros poderia ser aprofundar os aspetos interativos do *GeoGebra*, já que as ferramentas tecnológicas estão cada vez mais viradas para a interatividade, desde as mais simples até às mais complexas.

Um estudo interessante de se levar a cabo seria abordar a mesma matéria, o estudo de ângulos e polígonos porém com outro *software* de geometria dinâmica e tentar estabelecer comparações. Ou de uma forma mais geral, abordar uma matéria da matemática com vários *softwares* diferentes e estabelecer comparações entre eles, para saber qual o mais vantajoso para determinas situações ou abordagens.

Outro aspeto importante dentro do uso das tecnologias, seria a troca de experiências entre docentes, não basta saber trabalhar com as ferramentas, deve-se saber tirar o melhor partido delas. Um estudo poderia visar a troca de experiências *online*, como em fóruns, ou páginas *web*, ou em grupos das redes socais, para se tentar perceber se serão uma mais-valia na vida profissional de um docente.

Dentro ainda do estudo das tecnologias de uma forma mais geral e abrangente, outro assunto interessante seria estudar em que medida existe interdisciplinaridade entre a disciplina de Tecnologias de Informação e Comunicação e a disciplina de Matemática, a interdisciplinaridade é bastante importante e os novos currículos referem-na como uma prática a implementar.

Referências Bibliográficas

Abrantes, P., Ponte, J., Fonseca, H. e Brunheira, L. (1999). *Investigações Matemáticas na Aula e no Currículo*. Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

Abreu, I. C. (2002). *Proposta de abordagem do tema simetria usando o Cabri-Geometre* (Tese de mestrado) Florianópolis: SC.

Alves, N. (2006). *Investigação por inquérito*. (Tese de mestrado) Ponta Delgada, Departamento de Matemática da Universidade dos Açores, 2006 (Retirado de: http://www.amendes.uac.pt/monograf/tra06investgInq.pdf).

Braviano, G., Rodrigues, M. H. W. L. Revista do Professor de Matemática, SBM, nº 49, 2002.

Canavarro, A. P. (1993). *Concepções e práticas de professores de matemática: Três estudos de caso* (Tese de mestrado). Lisboa: APM.

Costa, A. I., & Canavarro, A. P. (2008). *Ensinar matemática com computador: Fatores de inibição ou motivação das práticas dos professores*. In A. P. Canavarro, D. Moreira, & M. I. Rocha (Orgs.), *Tecnologias e Educação Matemática*. Vieira de Leiria: SEM/SPCE

Cohen, L., Manion, L. e Morrison, K. (2000). *Research Methods in Education*. London and New York: RoutledgeFalmer, 5ª edição (2005).

Colaço, S. (2010). *A utilização do GeoGebra em contexto de sala de aula* (Tese de mestrado) Santarém: Instituto Politécnico de Santarém.

Delgado, M. F. T. (2008). *Webquest: Problemas geométricos com o GeoGebra. Um exemplo de aprendizagem colaborativa* (Tese de mestrado) Lisboa: Universidade Nova de Lisboa, Faculdade de Ciências e Tecnologia.

Grando, R., Pellatieri, M. (2010). *A importância da videogravação enquanto instrumento de registro para o professor do pensamento matemático de crianças pequenas* (Tese de mestrado) Horizontes, v. 28, n. 2, Dezembro 2010.

ICMI Study (1998). *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century*. Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Johnston-Wilder, S., Mackrell, A., Pimm, D. (2005). *Teaching Secondary Mathematics with ICT*. New York: Open University Press.

Kemmis, S. e McTaggart, R. (1988) *The Action Research Planner*, Geelong, Victoria: Deakin University Press.

Lagarto, J.R. (2005). *Rumo à Sociedade do Conhecimento, A Escola e Sociedade da Informação.* Lisboa: Diário de Notícias (Retirado de: http://joselagarto.no.sapo.pt/art_DN_7_2005.htm).

Lewin, K. (1948) *Resolving social conflicts; selected papers on group dynamics.* Gertrude W. Lewin (ed.). New York: Harper & Row.

Osta, I. (1998). *Computer technology and the teaching os geometry*. Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Ponte, J. P., Matos, J. M., & Abrantes, P. (1998). *Investigação em educação matemática: Implicações curriculares*. Lisboa: Quadrante, 9(2), 3-26.

Ponte, J. P., Ribeiro, M. J. B. (2000). *A formação em novas tecnologias e as conceções e práticas dos professores de Matemática*. Lisboa: Instituto de Inovação Educacional.

Prensky, M. (2001). *Digital Natives, Digital Immigrants*. On the Horizon. MCB University Press, Vol. 9 No. 5, October 2001.

Prensky, M. (2009). *Teaching Digital Natives, Partnering for real learning*. Centre for Excellence in Media Practice, Bournemouth University, UK.

Prensky, M. (2009). *Homo Sapiens Digital: From Digital Immigrants and Digital Natives to Digital Wisdom*. Innovate 5 (3). February 2009.

Psathas, G. (1973). *Phenomenological sociology*. New York: Wiley.

Robert, P. (2010). *A Educação na Finlândia, Os segredos de um sucesso*. Porto: Edições Afrontamento.

Serrano, G. P. (1994). *Investigación Cualitativa. Retos e Interrogantes.* Ed. La Muralla. Madrid.

Stenhouse, L. (1979). *What is action research?*. Norwich: Classroom Action Research Network.

Silva, J. C. (2003). *A Matemática, a Tecnologia e a Escola*. Em Educação e Matemática, nº 71. Janeiro/Fevereiro 2003.

Souza, L. D. (2004). *Interatividade nos ambientes de geometria dinâmica*. Florianópolis/SC.

Tomio, J. (2006). *Investigações matemáticas na geometria: estudo de áreas de figuras planas.* Instituto Superior Tupy Sociedade Educacional de Santa Catarina (Retirado de: http://www.ebah.com.br/content/ABAAAfqzYAB/apostila-julio-tomio)

Trindade, S. C. C. P. (2010). *Contributo dos ambientes de geometria dinâmica para o processo de ensino e aprendizagem da Matemática* (Tese de mestrado) Lisboa: Faculdade de Ciências e Tecnologia – Universidade Nova de Lisboa.

Viseu, F. A. V., Fernandes, A. C. P. (2010). *Os ambientes de geometria dinâmica no desenvolvimento da capacidade de argumentação de alunos de 9.º ano na aprendizagem da geometria*. *Atas do*

IX encontro de investigação em educação matemática, pp. 35-60. Fundão: Sociedade ProfMat 2011, pp. 34-42: APM.

Whiteley, D. (2000). *e-Commerce: Strategy, Technologies and Applications*. McGraw Hill, Maidenhead.

Anexos

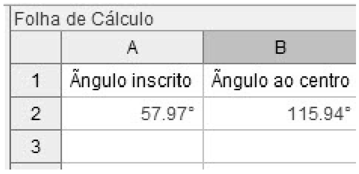
Anexo 1- Primeira Ficha de Trabalho

ESCOLA BÁSICA DOS 2º E 3º CICLOS	Data: __/__/__
Ficha de Trabalho de Matemática	*Propriedades Geométricas das circunferências*
Nome: ____ **N.º**: ____ **Turma**: B	9.º Ano

Objetivo: Estudar as propriedades geométricas das circunferências utilizando o *software Geogebra*.

Tarefa 1 – Ângulo ao centro e Ângulo inscrito

1. Abre o *GeoGebra*.
2. Desenha uma circunferência de centro A e raio à tua escolha .
3. Fixa o ponto B, nas propriedades dos objetos: seleciona *"Fixar objeto".*
4. Representa dois pontos na circunferência, C e D .
5. Sabendo que um ***ângulo inscrito numa circunferência*** *é o que tem vértice nesta e os lados contêm cordas*, desenha o ângulo $B\hat{D}C$.
6. Sabendo que um ***ângulo o centro numa circunferência*** *é o que tem o vértice no centro desta e os seus lados contêm raios*, desenha o ângulo $C\hat{A}B$ (*altera a cor das semirretas*).
7. Mede a amplitude do ângulo ao centro e do ângulo inscrito .
8. No menu Exibir, seleciona a Folha de Cálculo.
9. Regista os teus valores numa tabela da folha de cálculo, semelhante à da figura:



Folha de Cálculo

	A	B
1	Ângulo inscrito	Ângulo ao centro
2	57.97°	115.94°
3		

10. Move o ponto C e volta a registar os novos valores obtidos dos ângulos na tabela.
11. Repete o ponto 9 mais oito vezes, registando sempre os valores dos ângulos na tabela.
12. Guarda o ficheiro com o nome da tarefa e o teu nome (**Exemplo**: T1_Ana2_Sofia17)
13. Analisa cada linha da tua tabela e regista as tuas conclusões?

14. Qual a relação existente entre a amplitude do **ângulo ao centro** e do **arco** correspondente? E entre o **ângulo inscrito** e esse mesmo arco?

15. Esconde o ângulo inscrito, nas propriedades dos objetos: seleciona *"Exibir objeto*".
16. Desenha três circunferências concêntricas em A (com o mesmo centro).
17. Move o ponto C. Como relacionas a **amplitude do ângulo ao centro** com a **amplitude dos vários arcos**?

Tarefa 2 - Ângulos inscritos que contêm o mesmo arco

1. Abre uma nova janela do *GeoGebra*.
2. Desenha uma circunferência de centro A e raio à tua escolha.
3. Fixa o ponto B, nas propriedades dos objetos: seleciona *"Fixar objeto".*
4. Representa dois pontos na circunferência, C e D.
5. Desenha o ângulo inscrito $B\hat{D}C$.
6. Move o vértice do ângulo, ao longo do arco <u>maior</u>.

   Realiza a mesma operação mas ao longo do arco <u>menor</u>.

   Qual a relação existente entre os vários **ângulos inscritos** que obtiveste movendo o vértice e os **arcos correspondentes**?

7. Guarda o ficheiro com o nome da tarefa e o teu nome (**Exemplo**: T2_Ana2_Sofia17)

Tarefa 3 - Ângulos inscritos numa semicircunferência

1. Abre uma nova janela do *GeoGebra*.
2. Desenha uma circunferência de centro A e raio à tua escolha.
3. Desenha uma reta que passe pelos pontos A e B.
4. Marca o ponto de interseção da circunferência com a reta e dá-lhe o nome de C.
5. Esconde a reta desenhada, clicando nas Propriedades dos objetos: seleciona *"Exibir objeto".*
6. Desenha o diâmetro de extremos B e C.
7. Desenha um **ângulo inscrito com arco BC**.
8. Mede o ângulo desenhado anteriormente.
9. Move o vértice do ângulo e o ponto B, ao longo da semicircunferência.

   O que verificas?

10. Guarda o ficheiro com o nome da tarefa e o teu nome (**Exemplo**: T3_Ana2_Sofia17)

Anexo 2 - Segunda Ficha de Trabalho

ESCOLA BÁSICA DOS 2º E 3º CICLOS	Data: __/__/__
Ficha de Trabalho de Matemática	*Soma das amplitudes dos ângulos internos e externos de um polígono*
Nome: ____________________________________ **N.º**: ____	**Turma**: B 9.º Ano

Objetivo: Resolver problemas que envolvam a determinação das amplitudes dos ângulos internos e externos de um polígono utilizando o *software Geogebra*.

Tarefa 4 – Ângulos internos de um triângulo

1. Constrói um triângulo.
2. Mede as amplitudes dos ângulos internos do triângulo.
3. Exibe a Folha de Cálculo e regista as amplitudes, como se mostra na figura.

Folha de Cálculo

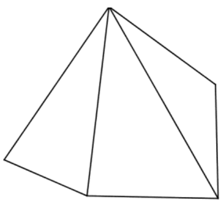
	A	B	C	D	E
1	Ângulo 1	Ângulo 2	Ângulo 3	Soma	
2	97.83°	46.97°	35.2°		

4. Acrescenta uma coluna e adiciona as amplitudes, escrevendo a fórmula necessária.
5. Arrasta um vértice qualquer do triângulo de modo a obter um novo triângulo e volta a registar os valores das amplitudes dos ângulos. Repete este processo 8 vezes.
6. Copia a fórmula para os triângulos desenhados no ponto 5 (para isso basta arrastar o ponto inferior direito da célula que queres copiar).
7. Escreve uma conjetura sobre o que observas.

8. Guarda o ficheiro com o nome da tarefa e o teu nome (**Exemplo**: T7_Ana2_Sofia17)

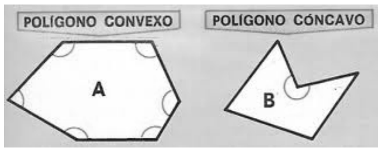
Tarefa 5 – Ângulos internos de polígonos convexos

1. Abre uma nova janela do *GeoGebra*.
2. Desenha outros polígonos convexos, tais como, quadrilátero, pentágono, ….
3. Desenha todas as diagonais possíveis a partir de um só vértice.



Nota: Na terceira coluna deves colocar o número de triângulos que se obtém traçando todas as diagonais possíveis a partir de um vértice; por exemplo, no pentágono, obtém-se 3 triângulos.

RECORDA:



Polígono convexo *é um polígono em que as amplitudes de todos os seus ângulos estão entre 0º a 180º.*

Polígono côncavo *é um polígono que tem, pelo menos, um ângulo com amplitude maior que 180º.*

4. Preenche a seguinte tabela.

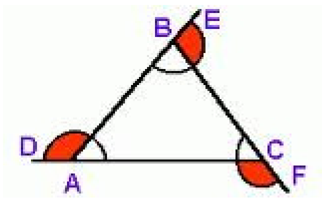
Polígono	N.º de Lados	N.º triângulos em que ficou dividido	Soma das amplitudes dos ângulos internos
Triângulo			
Quadrilátero			
Pentágono			
Hexágono			
Heptágono			
…			
Polígono com 10 lados			
…			
Polígono com n lados			

5. Num pequeno texto sintetiza as justificações e a conclusão.

6. Guarda o ficheiro com o nome da tarefa e o teu nome (**Exemplo**: T8_Ana2_Sofia17)

Tarefa 6 – Ângulos externos de polígonos convexos

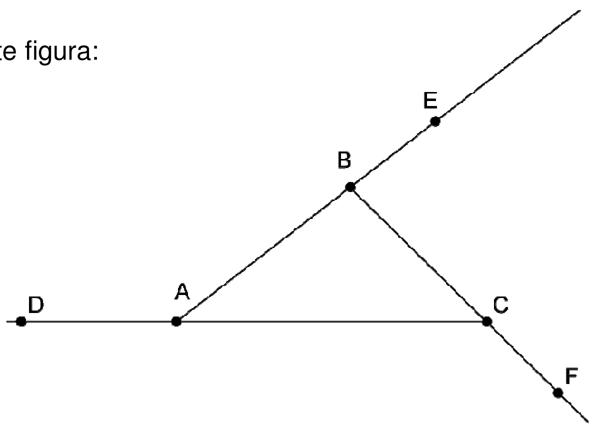
RECORDA:



Ângulos externos *são ângulos formados por um dos lados do triângulo e pelo prolongamento do lado adjacente a este lado.*

Exemplo: Ângulos DAB, ACF e EBC.

1. Abre uma nova janela do *GeoGebra*.
2. Desenha a seguinte figura:



3. Mede as amplitudes dos ângulos DAB, EBC e ACF.
4. Exibe a Folha de Cálculo e adiciona as amplitudes dos ângulos no ponto 3.
5. Arrasta um dos vértices do triângulo ABC e volta a registar as amplitudes dos triângulos.
6. Escreve uma conjetura sobre o valor da soma dos ângulos externos de um triângulo.

7. Procede de modo análogo para outros polígonos convexos e preenche a tabela seguinte:

Polígono	N.º de Lados	Soma das amplitudes dos ângulos externos
Triângulo		
Quadrilátero		
Pentágono		
Hexágono		
Heptágono		
…		
Polígono com 10 lados		
…		
Polígono com n lados		

8. Num pequeno texto sintetiza as justificações e a conclusão.

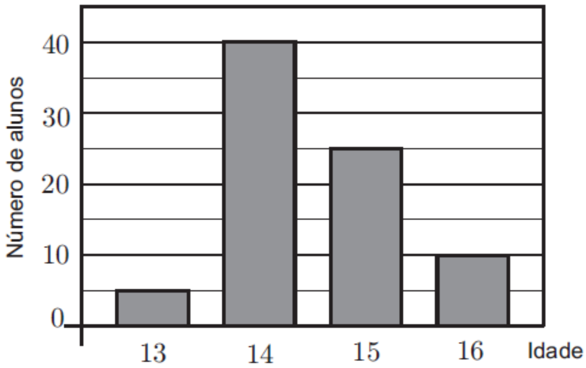
9. Guarda o ficheiro com o nome da tarefa e o teu nome (**Exemplo**: T9_Ana2_Sofia17).

Anexo 3 - Ficha de Avaliação

Escola Básica dos 2º e 3º Ciclos 4.ª Ficha de Avaliação de Matemática – A	Data: __/03/2012	Ano letivo: 2011/2012
	Classificação:	*Prof:*
	Enc. de Ed.	
Nome:	N.º Turma:	9.º Ano

Lê atentamente as questões antes de responderes. Podes utilizar a máquina de calcular, no entanto, deverás apresentar todos os cálculos que efetuares. A ficha deverá ser realizada com caneta de tinta azul ou preta. Não utilizes tinta corretora nem lápis.

1. Um dos trabalhos realizados pelo João para a disciplina de matemática consistiu em fazer o registo das idades dos alunos do 9.º ano da sua escola e em elaborar um gráfico da distribuição dos alunos por idades. Na figura está representado o gráfico que o João elaborou corretamente.



a) Qual é a média das idades dos alunos do 9.º ano da escola do João?
Mostra como chegaste à tua resposta.

Resposta: ________________

b) Escolheu-se, ao acaso, um aluno do 9.º ano da escola do João. Esse aluno tem menos de 15 anos.
Qual é a probabilidade de esse aluno ter 13 anos?
*Apresenta o resultado na forma de **fração irredutível**.*

Resposta: ________________

2. Considera o sistema de equações $\begin{cases} x - y = 2 \\ 2x = 1 - y \end{cases}$

Em qual das opções seguintes está um sistema equivalente a este sistema?

Assinala a opção correta.

☐ $\begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \end{cases}$ ☐ $\begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \end{cases}$ ☐ $\begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \end{cases}$ ☐ $\begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases}$

3. Qual dos números pertence ao intervalo $[-0{,}07\,;\,-0{,}06]$?

☐ $-0{,}065$ ☐ $-0{,}055$ ☐ $-0{,}65$ ☐ $-0{,}75$

4. Resolve a inequação seguinte.

$$-\frac{1}{2}(x-1) \leq x+1$$

Apresenta o conjunto solução na forma de um intervalo de números reais.
Apresenta os cálculos que efetuares.

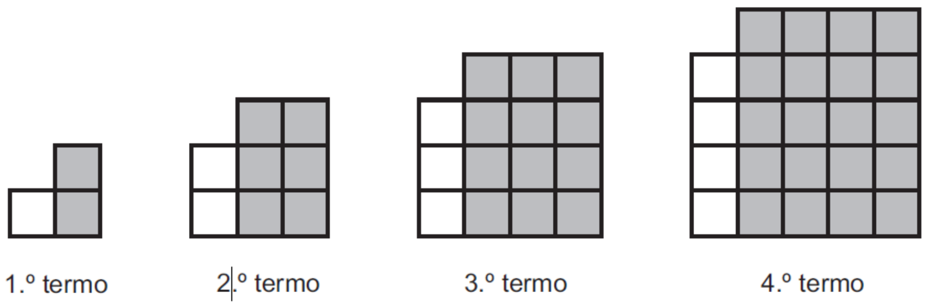
5. Seja $A =]-1{,}2[$ e seja $B =]-3{,}0[$.
Em qual das opções seguintes está representado o conjunto $A \cup B$?
Assinala a opção correta.

☐ $\{x \in \mathbb{R}: x > -1 \wedge x < 0\}$ ☐ $\{x \in \mathbb{R}: x > -1 \wedge x < 2\}$

☐ $\{x \in \mathbb{R}: x > -3 \wedge x < 0\}$ ☐ $\{x \in \mathbb{R}: x > -3 \wedge x < 2\}$

6. Na figura estão representados os quatro primeiros termos de uma sequência de conjuntos de azulejos quadrados que segue a lei de formação sugerida na figura.

Os azulejos são todos iguais, sendo uns brancos e outros cinzentos.



a) Quantos azulejos brancos tem o 2012.º termo da sequência?

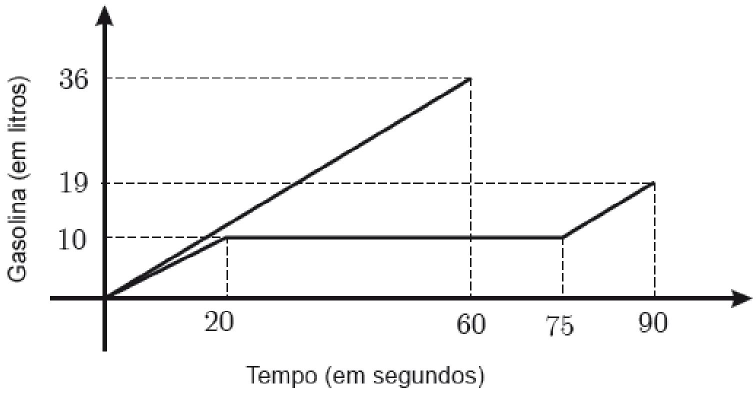
Resposta: ________________

b) Qual é o número total de azulejos do 9.º termo da sequência?
Mostra como chegaste à tua resposta.

7. A Carlota e o Carlos abasteceram os seus carros de gasolina.

A determinada altura, o Carlos interrompeu o abastecimento para verificar quanto dinheiro trazia na carteira. Em seguida, retomou o abastecimento.

Na figura estão representadas graficamente duas funções que dão o número de litros de gasolina introduzida por cada um no depósito do seu carro, t segundos depois de ter iniciado o respetivo abastecimento.



a) Uma das funções representadas graficamente na figura é uma função de proporcionalidade direta. Qual é a constante de proporcionalidade dessa função?

Resposta: ______________

b) Determina quanto pagou o Carlos no final do abastecimento, sabendo que o preço de cada litro de gasolina é $1{,}480$ euros e que beneficiou de um desconto de 5%.

Apresenta o resultado em euros, com **duas casas decimais**.

Mostra como chegaste à tua resposta.

Resposta: ____

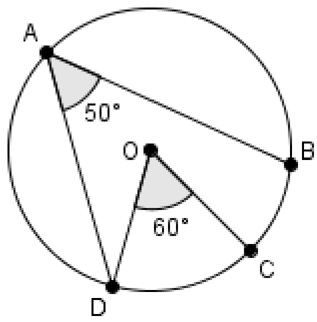
8. Qual das expressões seguintes é equivalente a $(x-1)^2 - x^2$?
Assinala a opção correta.

☐ -1 ☐ 1 ☐ $-2x-1$ ☐ $-2x+1$

9. Na figura ao lado, está representada uma circunferência, de centro O, em que:

- *A, B, C* e *D* são pontos da circunferência;
- $D\hat{A}B = 50º$;
- $D\hat{O}C = 60º$.

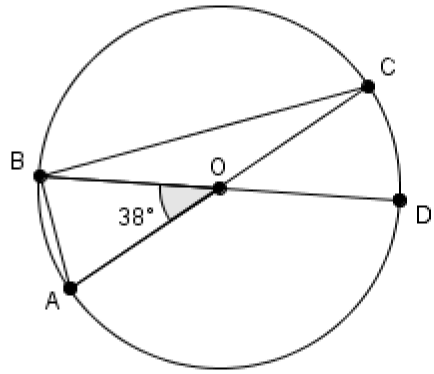
Qual é, em graus, a amplitude do arco CB?



Resposta: ________________

10. Na figura está representada uma circunferência de centro O e raio 2,5 cm, em que:

- A, B, C e D são pontos da circunferência;
- [AC] e [BD] são diâmetros da circunferência;
- [BC] é uma corda da circunferência;
- $A\hat{O}B = 38º$.



a) Calcula, *em graus*, as **amplitudes dos ângulos** BAC e DBC.
Explica a tua resposta.

Resposta: ____

b) Calcula o valor exato do comprimento do arco AB, *em centímetros.*

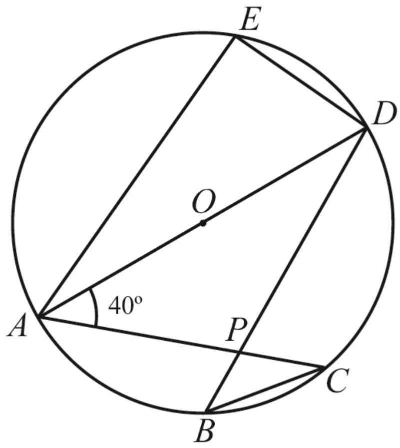
Resposta: ____

11. Na figura está representada uma circunferência de centro no ponto *O.*

Sabe-se que:

- os pontos *A, B, C, D* e *E* pertencem à circunferência;
- [*AD*] é um diâmetro da circunferência;
- o ponto *P* é o ponto de interseção dos segmentos de reta [*AC*] e [*BD*];
- CÂD = 40º.

A figura não está desenhada à escala.



a) Qual das afirmações seguintes é verdadeira?
Assinala a opção correta.

☐ O ponto O pertence à mediatriz do segmento $[AP]$.

☐ O ponto O pertence à mediatriz do segmento $[BC]$.

☐ O ponto B pertence à mediatriz do segmento $[BC]$.

☐ O ponto B pertence à mediatriz do segmento $[AP]$.

b) Qual é a amplitude, em graus, do arco AC ?
Mostra como chegaste à tua resposta.

Resposta: ________________

c) Relativamente ao triângulo retângulo $[AED]$, admite que: $\overline{AE} = 6{,}8\ cm$ e $\overline{DE} = 3{,}2\ cm$.

Determina o perímetro da circunferência representada na figura.

Apresenta os cálculos que efetuares e o resultado em centímetros, arredondado às décimas.

Nota – Sempre que, em cálculos intermédios, procederes a arredondamentos, conserva, no mínimo, duas casas decimais.

FIM

Anexo 4 - Inquérito

ESCOLA BÁSICA DOS 2º E 3º CICLOS	Data: _____/_____/ 2012		
Inquérito			
Nome: ____	N.º _____	Turma: B	9.º Ano

1. Já, alguma vez, utilizaste um *software* matemático? Sim ☐ Não ☐

   Se a tua resposta foi **sim**:

   a. Qual o *software* que utilizaste? R.: ____

   b. Onde utilizaste? Em casa ☐ Nas aulas ☐ Outro Sítio ☐ Onde: _________________________

   c. Em que contexto? R.: ____

2. Marca com **X** a tua opinião *(Onde **DT**: Discordo Totalmente; **DP**: Discordo Parcialmente; **CP**: Concordo Parcialmente e **CA**: Concordo em Absoluto).*

	DT	DP	CP	CA
Achas fácil trabalhar no *GeoGebra*?				
Achas os comandos do *GeoGebra* simples e intuitivos?				
Achas que o *GeoGebra* promove o desenvolvimento do raciocínio, ou seja, faz-te pensar mais do que numa aula em que a professora expõe a matéria?				
Achas que aprendes melhor os conceitos matemáticos, usando o *GeoGebra?*				
Achas que o *GeoGebra* permite relacionar a geometria com a vida quotidiana e com outras disciplinas?				
Achas que o programa permite relacionar a geometria com outros conteúdos matemáticos?				
Conseguiste conjeturar corretamente as propriedades geométricas pedidas nas fichas de trabalho?				
Achas que o *GeoGebra* permite uma aprendizagem mais ativa, isto é, em que participas mais no processo da aprendizagem?				
Achas que o *GeoGebra* estimula a imaginação e a criatividade, tornando-se desafiante?				
Achas que o *GeoGebra* permite testar mais vezes do que se fosse com papel e lápis?				
Achas que com o *GeoGebra* consegues ir ao teu próprio ritmo de aprendizagem?				
O *GeoGebra* ajudou-te a aprender as várias propriedades da circunferência?				
O teu colega de grupo ajudou-te e trabalharam como uma equipa?				
Achas importante usar as tecnologias nas aulas de matemática?				

3. Preferes aulas usando tecnologia? Na tua opinião, de que maneira é que é ela contribui para a aprendizagem de conceitos ou propriedades?

   R.: ____

   ____

   ____

4. O que é que gostaste **mais** nas aulas que usaste o *GeoGebra*?

   R.: ____

   ____

   ____

5. O que é que gostaste **menos** nas aulas que usaste o *GeoGebra*?

   R.: ____

   ____

   ____

6. Em casa costumas utilizar algum tipo de tecnologia para realizar trabalhos para a escola? Se **<u>sim</u>**, qual usas?

   R.: ____

   ____

   ____

7. Utilizas as tecnologias nas aulas de mais alguma disciplina? Se **<u>sim</u>**, Qual(ais) disciplina(s)?

   R.: ____

   ____

   ____

8. Comentários ou Sugestões:

   R.: ____

   ____

   ____

Obrigada!