



**Filipe Manuel Garcia Amarante**  
Licenciado em Ciências de Engenharia Civil

# **Encurvadura Lateral em Vigas Metálicas Sujeitas a Flexão Desviada**

Dissertação para obtenção do Grau de Mestre  
em Engenharia Civil - Perfil Estruturas

Orientador: Professor Doutor Rodrigo Moura Gonçalves  
FCT - UNL

Presidente: Professor Doutor Carlos Manuel Chastre Rodrigues  
Arguente: Professor Doutor João Carlos Gomes Rocha de Almeida  
Vogal: Professor Doutor Rodrigo Moura Gonçalves



“Copyright” Filipe Manuel Garcia Amarante, FCT/UNL e UNL

A Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa tem o direito, perpétuo e sem limites geográficos, de arquivar e publicar esta dissertação através de exemplares impressos reproduzidos em papel ou de forma digital, ou por qualquer outro meio conhecido ou que venha a ser inventado, e de a divulgar através de repositórios científicos e de admitir a sua cópia e distribuição com objetivos educacionais ou de investigação, não comerciais, desde que seja dado crédito ao autor e editor.



# Agradecimentos

Os mais sinceros agradecimentos a todas as pessoas que de algum modo contribuíram para a realização da presente dissertação, em especial ao Prof. Rodrigo Gonçalves, pelo interesse, dedicação, paciência e disponibilidade demonstrada no acompanhamento deste trabalho.

A todos os meus amigos e colegas que estiveram presentes e ao meu lado, os quais não me é necessário enumerar todos, pois a lista é extensa e será difícil de não me esquecer alguém.

Por fim um carinho muito especial ao meu irmão e à minha mãe que tanto desejava ver este dia chegar, um muito obrigado por tudo.

Um carinho especial para o meu pai, a quem dedico esta tese e todo meu trabalho.



# Resumo

Nesta dissertação aborda-se a resistência à encurvadura de vigas de aço com secção em I, sujeitas à flexão desviada. Em particular, avalia-se a precisão das fórmulas do Eurocódigo 3 (EC3) e propõe-se uma fórmula de interacção, baseada na teoria de segunda ordem de colunas-viga com imperfeições.

Apresentam-se os resultados de um estudo paramétrico envolvendo vigas com dois tipos de secção transversal, três condições de apoio e vários valores de esbelteza. Para cada caso, as curvas de resistência obtidas com o EC3 (Método 1 e Método 2) e as fórmula propostas são comparadas com os resultados obtidos com análises fisicamente e geometricamente não-lineares, incluindo imperfeições geométricas e tensões residuais (análises "exactas").

## Palavras chave:

Estruturas de aço; Eurocódigo 3; Equações de interacção de colunas-viga; Encurvadura lateral; Flexão desviada.





# Abstract

This work concerns the buckling of steel I-beams under biaxial bending. In particular, the accuracy of the interaction formulae of Eurocode 3 (EC3) is assessed and a new interaction formula is proposed, which is based on the second-order theory for beam-columns with imperfections.

The results of the parametric study are presented, involving beams with two different cross-sections, three support conditions and several slenderness values. For each case, the strength curves for the EC3 approach (Method 1 and Method 2) and the proposed formulas are compared with the ones obtained with physically and geometrically non-linear analyses, including geometric imperfections and residual stresses ("exact" analyses).

## Keywords:

Steel structures; Eurocode 3; Beam-column interaction equations; Lateral buckling; Biaxial bending.



# Índice de Matérias

<b>Copyright</b>	<b>i</b>
<b>Agradecimentos</b>	<b>iii</b>
<b>Resumo</b>	<b>v</b>
<b>Abstract</b>	<b>vii</b>
<b>Índice de Figuras</b>	<b>xi</b>
<b>Índice de Tabelas</b>	<b>xv</b>
<b>Lista de abreviaturas, siglas e símbolos</b>	<b>xvii</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
1.1 Motivação e objectivos . . . . .	1
1.2 Organização da tese . . . . .	1
<b>2 Comportamento de vigas com secção em I sujeitas a flexão desviada</b>	<b>3</b>
2.1 Introdução . . . . .	3
2.2 Teoria de segunda ordem para encurvadura lateral . . . . .	3
2.3 Equações de interacção do EC3 . . . . .	6
2.4 Resistência da secção . . . . .	8
2.5 Comportamento das equações de interacção . . . . .	12
2.5.1 Método 1 . . . . .	13
2.5.2 Método 2 . . . . .	16
<b>3 Modelação numérica</b>	<b>19</b>
3.1 Introdução . . . . .	19
3.2 Modelação numérica através do programa ANSYS . . . . .	19
3.2.1 Elemento finito . . . . .	19
3.2.2 Material . . . . .	19
3.2.3 Secção transversal do perfil metálico . . . . .	21
3.2.4 Tensões Residuais . . . . .	21
3.2.5 Imperfeições geométricas . . . . .	22
3.2.6 Condições de apoio . . . . .	23
3.2.7 Malha de elementos finitos . . . . .	23
3.2.8 Comprimentos das Colunas-Viga . . . . .	24
3.2.9 Aplicação de cargas . . . . .	25

3.2.10	Detalhes de análise . . . . .	25
3.3	Exemplos de validação . . . . .	27
3.3.1	Tensões Residuais . . . . .	27
3.3.2	Colunas-viga apoiadas-encastadas - comportamento plano . . . . .	27
3.3.3	Colunas-viga apoiadas-apoiadas - comportamento plano . . . . .	29
3.3.4	Coluna-viga apoiada-apoiada - comportamento espacial . . . . .	30
3.3.5	Pórtico - comportamento plano (Vogel, 1985) . . . . .	31
<b>4</b>	<b>Estudo paramétrico</b>	<b>35</b>
4.1	Introdução . . . . .	35
4.2	Metodologia de análise . . . . .	35
4.3	Resultados obtidos no programa ANSYS . . . . .	39
4.4	Comparação ANSYS/EC3 . . . . .	42
4.4.1	Vigas apoiadas-apoiadas . . . . .	45
4.4.2	Vigas encastadas-apoiadas . . . . .	47
4.4.3	Vigas em consola . . . . .	53
4.4.4	Conclusões . . . . .	58
4.5	Comparação ANSYS / fórmulas propostas . . . . .	59
4.5.1	Conclusões . . . . .	84
<b>5</b>	<b>Conclusões e desenvolvimentos futuros</b>	<b>85</b>
5.1	Conclusões . . . . .	85
5.2	Desenvolvimentos futuros . . . . .	86

# Índice de Figuras

2.1	Convenção de sinais dos deslocamentos e cargas aplicadas (Kaim, 2004) . . . . .	4
2.2	Valor de $M_z^{II}/M_z$ em função de $M_y/M_{cr}$ com $\hat{v}_i = 0$ . . . . .	7
2.3	Curva da resistência plástica da secção HEB300 . . . . .	13
2.4	Curva de interacção genérica do Método 1 do EC3 . . . . .	16
2.5	Curva de interacção genérica do Método 2 do EC3 . . . . .	18
3.1	Elemento Finito Beam 189 (ANSYS, 2004) . . . . .	20
3.2	Gráfico tensão-deformação ilustrativo da lei constitutiva do aço . . . . .	20
3.3	Discretização da secção transversal de um HEB300 com o ANSYS . . . . .	21
3.4	Tensões residuais de um perfil metálico H . . . . .	22
3.5	Imperfeições geométricas (Gonçalves et al.,2009) . . . . .	23
3.6	Condições de apoio e coluna-viga do tipo "forquilha" (Mendonça, 2006) . . . . .	23
3.7	Exemplo de uma viga modelada no ANSYS com elementos finitos BEAM189 . . . . .	24
3.8	Exemplo do método de comprimento de arco (ANSYS, 2004) . . . . .	26
3.9	Consola com tensões residuais: geometria, carregamento e distribuição de tensões residuais . . . . .	27
3.10	Trajectória de equilíbrio da consola com tensões residuais . . . . .	28
3.11	Geometria e carregamento das colunas-viga apoiadas-encastadas . . . . .	28
3.12	Diagramas de interacção das colunas-viga apoiadas-encastadas - comportamento plano . . . . .	29
3.13	Geometria e carregamento das colunas-viga apoiadas-apoiadas - comportamento plano . . . . .	29
3.14	Diagramas de interacção das colunas-viga apoiadas-apoiadas - comportamento plano . . . . .	30
3.15	Geometria e carregamento das colunas-viga apoiadas-apoiadas - comportamento espacial . . . . .	31
3.16	Diagramas de interacção das colunas-viga apoiadas-apoiadas - comportamento espacial . . . . .	32
3.17	Geometria e carregamento do pórtico de Vogel (Avery e Mahendran, 2000) . . . . .	32
3.18	Lei constitutiva do aço para o pórtico de Vogel (Avery e Mahendran, 2000) . . . . .	33
3.19	Trajectórias de equilíbrio do pórtico . . . . .	33
4.1	Lei constitutiva uniaxial adoptada para o aço . . . . .	36
4.2	Geometria da secção transversal dos Perfis a) HEB300 e b) IPE200 . . . . .	36
4.3	Condições de apoio e carregamento considerados: a) Apoiado-apoiado, b) Encastrado-apoiado e c) Consola . . . . .	38
4.4	Imperfeições geométricas (Gonçalves et al.,2009) . . . . .	39
4.5	Tensões residuais consideradas para o perfil: a) HEB300 b) IPE200 . . . . .	39
4.6	Curvas de resistência obtidas no ANSYS para os casos considerados: a) apoiado-apoiado, b) encastrado-apoiado e c) consola . . . . .	40

4.7	Trajectórias de carga/deslocamento do perfil HEB300 do caso viga em consola . . .	41
4.8	Trajectórias de carga/deslocamento do perfil HEB300 da viga apoiada-apoiada . . .	42
4.9	Curvas de encurvadura [extraído do EC3] . . . . .	43
4.10	Curvas de resistência obtidas com o Ansys e o EC3 para vigas apoiadas-apoiadas e $\bar{\lambda}_{LT} = 0,5$ . . . . .	45
4.11	Curvas de resistência obtidas com o Ansys e o EC3 para vigas apoiadas-apoiadas e $\bar{\lambda}_{LT} = 1,0$ . . . . .	46
4.12	Curvas de resistência obtidas com o Ansys e o EC3 para vigas apoiadas-apoiadas e $\bar{\lambda}_{LT} = 1,5$ . . . . .	46
4.13	Curvas de resistência obtidas com o Ansys e o EC3 para vigas apoiadas-apoiadas e $\bar{\lambda}_{LT} = 2,5$ . . . . .	47
4.14	Curvas de resistência e equações de interacção do EC3 de vigas encastradas-apoiadas com a esbelteza $\bar{\lambda}_{LT} = 0,5$ . . . . .	49
4.15	Curvas de resistência e equações de interacção do EC3 de vigas encastradas-apoiadas com $\bar{\lambda}_{LT} = 1,0$ . . . . .	50
4.16	Curvas de resistência e equações de interacção do EC3 de vigas encastradas-apoiadas com $\bar{\lambda}_{LT} = 1,5$ . . . . .	51
4.17	Curvas de resistência e equações de interacção do EC3 de vigas encastradas-apoiadas com $\bar{\lambda}_{LT} = 2,5$ . . . . .	52
4.18	Curvas de resistência e equações de interacção do EC3 de vigas em consola com $\bar{\lambda}_{LT} = 0,5$ . . . . .	54
4.19	Curvas de resistência e equações de interacção do EC3 de vigas em consola com $\bar{\lambda}_{LT} = 1,0$ . . . . .	55
4.20	Curvas de resistência e equações de interacção do EC3 de vigas em consola com $\bar{\lambda}_{LT} = 1,5$ . . . . .	56
4.21	Curvas de resistência e equações de interacção do EC3 de vigas em consola com $\bar{\lambda}_{LT} = 2,5$ . . . . .	57
4.22	Fórmula proposta e curva de resistência do ANSYS para $\bar{\lambda}_{LT} = 0,5$ do perfil HEB300 (caso apoiado-apoiado) . . . . .	60
4.23	Trajectória da $m_y^2$ para $\bar{\lambda}_{LT} = 0,5$ do perfil HEB300 (caso apoiado-apoiado) . . .	61
4.24	Fórmulas propostas e curva de resistência do ANSYS para $\bar{\lambda}_{LT} = 0,5$ perfil HEB300 (caso apoiado-apoiado) . . . . .	62
4.25	Fórmulas propostas e curva de resistência do ANSYS para $\bar{\lambda}_{LT} = 0,5$ do perfil IPE200 (caso apoiado-apoiado) . . . . .	63
4.26	Fórmulas propostas e curva de resistência do ANSYS para $\bar{\lambda}_{LT} = 0,5$ do perfil HEB300 (caso viga em consola) . . . . .	64
4.27	Fórmulas propostas e curva de resistência do ANSYS para $\bar{\lambda}_{LT} = 0,5$ do perfil IPE200 (caso viga em consola) . . . . .	65
4.28	Fórmulas propostas e curva de resistência do ANSYS para $\bar{\lambda}_{LT} = 0,5$ do perfil HEB300 (caso encastrado-apoiado) . . . . .	66
4.29	Fórmulas propostas e curva de resistência do ANSYS para $\bar{\lambda}_{LT} = 0,5$ do perfil IPE200 (caso encastrado-apoiado) . . . . .	67
4.30	Fórmulas propostas e curva de resistência do ANSYS para $\bar{\lambda}_{LT} = 1,0$ do perfil HEB300 (caso apoiado-apoiado) . . . . .	68
4.31	Fórmulas propostas e curva de resistência do ANSYS para $\bar{\lambda}_{LT} = 1,0$ do perfil IPE200 (caso apoiado-apoiado) . . . . .	69
4.32	Fórmulas propostas e curva de resistência do ANSYS para $\bar{\lambda}_{LT} = 1,0$ do perfil HEB300 (caso viga em consola) . . . . .	70

4.33	Fórmulas propostas e curva de resistência do ANSYS para $\bar{\lambda}_{LT} = 1,0$ do perfil IPE200 (caso viga em consola) . . . . .	71
4.34	Fórmulas propostas e curva de resistência do ANSYS para $\bar{\lambda}_{LT} = 1,0$ do perfil HEB300 (caso encastrado-apoiado) . . . . .	72
4.35	Fórmulas propostas e curva de resistência do ANSYS para $\bar{\lambda}_{LT} = 1,0$ do perfil IPE200 (caso encastrado-apoiado) . . . . .	73
4.36	Fórmulas propostas e curva de resistência do ANSYS para $\bar{\lambda}_{LT} = 1,5$ do perfil HEB300 (caso apoiado-apoiado) . . . . .	74
4.37	Fórmulas propostas e curva de resistência do ANSYS para $\bar{\lambda}_{LT} = 1,5$ do perfil IPE200 (caso apoiado-apoiado) . . . . .	75
4.38	Fórmulas propostas e curva de resistência do ANSYS para $\bar{\lambda}_{LT} = 1,5$ do perfil HEB300 (caso viga em consola) . . . . .	76
4.39	Fórmulas propostas e curva de resistência do ANSYS para $\bar{\lambda}_{LT} = 1,5$ do perfil IPE200 (caso viga em consola) . . . . .	77
4.40	Fórmulas propostas e curva de resistência do ANSYS para $\bar{\lambda}_{LT} = 1,5$ do perfil HEB300 (caso encastrado-apoiado) . . . . .	78
4.41	Fórmulas propostas e curva de resistência do ANSYS para $\bar{\lambda}_{LT} = 1,5$ do perfil IPE200 (caso encastrado-apoiado) . . . . .	79
4.42	Fórmulas propostas e curva de resistência do ANSYS para $\bar{\lambda}_{LT} = 2,5$ do perfil IPE200 (caso apoiado-apoiado) . . . . .	80
4.43	Fórmulas propostas e curva de resistência do ANSYS para $\bar{\lambda}_{LT} = 2,5$ do perfil IPE200 (caso viga em consola) . . . . .	81
4.44	Fórmulas propostas e curva de resistência do ANSYS para $\bar{\lambda}_{LT} = 2,5$ do perfil HEB300 (caso encastrado-apoiado) . . . . .	82
4.45	Fórmulas propostas e curva de resistência do ANSYS para $\bar{\lambda}_{LT} = 2,5$ do perfil IPE200 (caso encastrado-apoiado) . . . . .	83





# Índice de Tabelas

2.1	Factores de interacção $k_{ij}$ para o Método 1 e secções das classes 1 e 2 [extraído do EC3] . . . . .	8
2.2	Termos auxiliares dos factores de interacção $k_{ij}$ do Método 1 [Extraído do EC3] . . .	9
2.3	Factores de momento equivalente $C_{mi,0}$ para o Método 1 [extraído do EC3] . . . .	10
2.4	Factores $k_c$ para o Método 1 [extraído do EC3] . . . . .	10
2.5	Factores de interacção $k_{ij}$ do Método 2 para elementos susceptíveis à torção com secções de classe 1 ou 2[Extraído do EC3] . . . . .	11
2.6	Coefficientes de momento equivalente $C_m$ para o Método 2 [extraído do EC3] . . .	11
4.1	Propriedades geométricas, módulos de flexão dos perfis . . . . .	37
4.2	Esforços resistentes dos perfis metálicos . . . . .	37
4.3	Coefficientes de redução para encurvadura lateral obtidos pelo EC3 . . . . .	43
4.4	Valores de $\chi_{LT}$ obtidos no ANSYS e diferenças relativas para os valores do EC3 (caso apoiado-apoiado) . . . . .	43
4.5	Valores de $\chi_{LT}$ obtidos no ANSYS e diferenças relativas para os valores do EC3 (caso encastrado-apoiado) . . . . .	44
4.6	Valores de $\chi_{LT}$ obtidos no ANSYS e diferenças relativas para os valores do EC3 (consola) . . . . .	44
4.7	Comprimentos das vigas apoiadas-apoiadas . . . . .	45
4.8	Comprimentos das vigas encastradas-apoiadas . . . . .	48
4.9	Comprimentos das vigas em consola . . . . .	53



# Lista de abreviaturas, siglas e símbolos

## Abreviaturas

EC3 Eurocodigo 3

## Siglas

UNL Universidade Nova de Lisboa

FCT Faculdade de Ciências e Tecnologia

ECCS European Convention for Constructional Steelwork

CEN Comité Europeu de Normalização

## Letras Latinas

$A$  área

$C_m$  coeficientes de momento equivalente

$D_M$  factor de amplificação para flexão-torção

$E$  módulo de Elasticidade

$f_y$  tensão de cedência

$I_y$  momento de inércia em relação ao eixo  $y$

$I_z$  momento de inércia em relação ao eixo  $z$

$I_t$  rigidez de torção (Saint-Venant)

$I_w$  constante de empenamento

$i_s$  raio de giração polar da secção

$L$  comprimento

$M_y$  momento flector segundo o eixo  $y$

$M_y, pl$  valor característico da resistência da secção transversal à flexão segundo  $y$

$M_y^{II}$  momento flector de segunda ordem segundo o eixo  $y$

- $M_z$  momento flector segundo o eixo  $z$
- $M_{z,pl}$  valor característico da resistência da secção transversal à flexão segundo  $z$
- $M_z^{II}$  momento flector de segunda ordem segundo o eixo  $z$
- $N$  esfoço normal
- $N_{cr,y}$  valor crítico do esfoço axial relativo à instabilidade por flexão em torno do eixo  $y$
- $N_{cr,z}$  valor crítico do esfoço axial relativo à instabilidade por flexão em torno do eixo  $z$
- $N_{cr,T}$  valor crítico do esfoço axial relativo à instabilidade por torção
- $k_c$  factor de correcção
- $k_{yy}$  coeficiente de interacção segundo  $y$  quando o momentos actua segundo  $y$
- $k_{yz}$  coeficiente de interacção segundo  $y$  quando o momentos actua segundo  $z$
- $W_{y,el}$  módulo de flexão elástico em torno de  $y$
- $W_{y,pl}$  módulo de flexão plástico em torno de  $y$
- $W_{z,el}$  módulo de flexão elástico em torno de  $z$
- $W_{z,pl}$  módulo de flexão plástico em torno de  $z$

### Letras Gregas Minúsculas

- $\chi_y$  factor de redução para instabilidade por flexão em torno de  $y$
- $\chi_{LT}$  factor de redução para instabilidade lateral por flexão-torção
- $\gamma$  coeficiente parcial de segurança
- $\bar{\lambda}$  esbelteza normalizada
- $\bar{\lambda}_{LT}$  esbelteza normalizada para instabilidade por flexão-torção
- $\nu$  coeficiente de Poisson
- $v$  deslocamento horizontal
- $w$  deslocamento vertical
- $\phi$  rotação de torção

# Capítulo 1

## Introdução

### 1.1 Motivação e objectivos

No Eurocódigo 3 (CEN, 2005), abreviadamente designado por “EC3”, a verificação da segurança de barras comprimidas e flectidas (colunas-viga) é efectuada através de equações de interacção. Estas equações foram calibradas e validadas para colunas-viga com apoios do tipo “forquilha” (extremidades impedidas de se deslocar transversalmente ao eixo do elemento e impedidas de rodar no seu eixo) e, portanto, a sua aplicação a casos mais gerais tem sido objecto de análise em vários trabalhos (e.g., Gonçalves e Camotim, 2004; Boissonnade et al., 2006; Mendonça, 2006). Num trabalho recente, realizado por Rosa (2011), relativo ao estudo do comportamento das equações de interacção do Método 2 do EC3, foram apresentadas evidências de que existe alguma falta de precisão no caso de elementos sujeitos apenas a flexão desviada. Como este aspecto não era central para o trabalho, não foi totalmente explorado, tendo sido apontado como um potencial desenvolvimento futuro.

A presente dissertação constitui uma extensão do trabalho anterior e tem como principais objectivos:

- (i) Verificar a qualidade, em termos de precisão e segurança, das equações de interacção do Método 1 e Método 2 do EC3 quando aplicadas a vigas sujeitas apenas a flexão desviada. Para além das condições de apoio para os quais o EC3 foi calibrado, estudam-se vigas apoiadas-encastadas (apoio “forquilha”) e vigas em consola.
- (ii) Propor uma nova equação de interacção, baseada na teoria de 2ª ordem para colunas-viga com imperfeições.

### 1.2 Organização da tese

A dissertação encontra-se organizada em cinco capítulos. O primeiro e presente capítulo é o capítulo introdutório à dissertação, pelo que nos parágrafos seguintes se apresenta uma breve descrição dos restantes capítulos.

No segundo capítulo apresentam-se as equações de interacção de colunas-viga do EC3, bem como os dois métodos associados (Método 1 e Método 2). Para além disso, apresenta-se a teoria de 2ª ordem de colunas-viga com imperfeições (Kaim, 2004) e deduzem-se as expressões que serão utilizadas para formular uma equação de interacção proposta, no capítulo 4.

No terceiro capítulo introduz-se o programa de elemento finitos a utilizar para obter cargas de colapso “exactas”, Ansys, e abordam-se os detalhes mais relevantes para a modelar o comportamento estrutural das colunas-viga. Por fim descreve-se os estudos comparativos efectuados para validação da modelação.

O quarto capítulo é dedicado ao estudo paramétrico, no qual se descreve a metodologia de análise e se apresentam e discutem todos os resultados obtidos.

Finalmente, no quinto capítulo encontram-se as conclusões de todo o trabalho efectuado. Fazem-se ainda algumas sugestões relativas a possíveis extensões e desenvolvimentos futuros do trabalho realizado.

## Capítulo 2

# Comportamento de vigas com secção em I sujeitas a flexão desviada

### 2.1 Introdução

O presente capítulo tem como objectivo o estudo do comportamento estrutural de vigas com secção em I sujeitas a flexão desviada. Na secção 2.2 apresentam-se e estudam-se as expressões da teoria de segunda ordem para vigas à flexão desviada, com base no estudo de Kaim (2004).

Serão também apresentadas e estudadas as equações de interacção de colunas-viga de aço do EC3 (CEN, 2005). Existem dois métodos distintos para proceder ao cálculo das equações de interacção propostas no EC3, o Método 1 e o Método 2, que se distinguem maioritariamente pela complexidade e quantidade de cálculos necessários para os aplicar.

O Método 1 foi desenvolvido por uma equipa Franco-Belga, por forma a cumprir vários critérios, tais como a precisão e a transparência física dos vários parâmetros intervenientes. Este método contém expressões complexas e extensas, pois envolve um número elevado de parâmetros para contabilização dos variados efeitos que afectam a resistência última das colunas-viga, transformando-o num método adequado para o cálculo automático (Boissonnade et al., 2006; Lindner, 2003).

Por sua vez, o Método 2 foi criado por uma equipa Austro-Germânica, destacando-se pela simplicidade de cálculo das expressões, para uma aplicação "manual" (Lindner, 2003).

### 2.2 Teoria de segunda ordem para encurvadura lateral

A teoria de segunda ordem de vigas para membros com secção em I duplamente simétrica foi derivada por Kaim (2004). O ponto de partida deste estudo é o sistema de equações diferenciais (2.1) (ver figura 2.1):

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} E I_z v'''' + N(v'' + v_i'') \\ 0 \\ M_y(v'' + v_i'') \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ E I_y w'''' + N(w'' + w_i'') \\ M_z(w'' + w_i'') \end{bmatrix} + \\ & + \begin{bmatrix} M_y(\phi'' + \phi_i'') \\ M_z(\phi'' + \phi_i'') \\ E I_w (\phi'''' + \phi_i''') - (GI_T - Ni_s^2)(\phi'' + \phi_i'') \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_x \\ p_z \\ m_x \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.1)$$

onde:

- $N$ ,  $M_y$  e  $M_z$  são os esforços de primeira ordem (esforço axial e momentos flectores segundo  $y$  e  $z$ , respectivamente);
- $v$ ,  $w$  e  $\phi$  são os deslocamentos segundo  $y$  e  $z$  e a rotação de torção;
- $()''$  e  $()''''$  são, respectivamente, a segunda e quarta derivada em ordem a  $x$ ;
- $v_i$ ,  $w_i$  e  $\phi_i$  são as imperfeições geométricas iniciais;
- $p_x$  e  $p_z$  são as cargas distribuídas aplicadas segundo  $y$  e  $z$ ;  $m_x$  é o momento torsor aplicado.

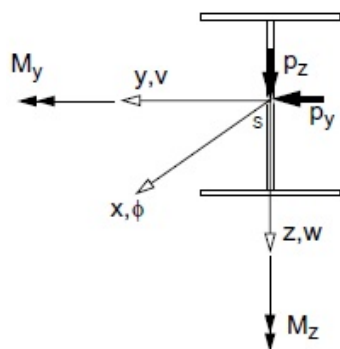


Figura 2.1: Convenção de sinais dos deslocamentos e cargas aplicadas (Kaim, 2004)

De modo a resolver o sistema de equações diferenciais, assume-se que a barra se encontra simplesmente apoiada (apoios tipo "forquilha", impedindo deslocamentos laterais e a rotação de torção) e que a deformada é sinusoidal (meia "onda"). Para além disso admite-se que  $v$ ,  $w$  e  $\phi$  são também sinusoidais, com as respectivas amplitudes  $\hat{v}$ ,  $\hat{w}$  e  $\hat{\phi}$ . A título de exemplo, refira-se que o deslocamento lateral e respectivas derivadas em ordem a  $x$ , são dados por

$$v = \hat{v} \sin \frac{\pi x}{L} \quad v'' = \hat{v} \frac{\pi^2}{L^2} \sin \frac{\pi x}{L} \quad v'''' = \hat{v} \frac{\pi^4}{L^4} \sin \frac{\pi x}{L} \quad (2.2)$$

onde, conforme foi referido,  $\hat{v}$  é a amplitude do deslocamento lateral e  $L$  é o comprimento de barra. Admite-se ainda que as imperfeições são também sinusoidais, com a amplitude  $\hat{v}_i$ ,  $\hat{w}_i$  e  $\hat{\phi}_i$



Para prosseguir, admite-se que  $p_y = p_z = m_x = 0$  e que  $N = 0$ , o que permite escrever, com as simplificações introduzidas, o sistema

$$\left( \begin{bmatrix} N_{cr,z} & 0 & 0 \\ 0 & N_{cr,y} & 0 \\ 0 & 0 & N_{cr,T}i_s^2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & M_y \\ 0 & 0 & M_z \\ M_y & M_z & Ni_s^2 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \hat{v} \\ \hat{w} \\ \hat{\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -M_z \\ M_y \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & M_y \\ 0 & 0 & M_z \\ M_y & M_z & Ni_s^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{v} \\ \hat{w} \\ \hat{\phi} \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

onde:

- $\hat{v}$ ,  $\hat{w}$  e  $\hat{\phi}$  são os deslocamentos segundo  $y$  e  $z$  e a rotação de torção a meio vão;
- $\hat{v}_i$ ,  $\hat{w}_i$  e  $\hat{\phi}_i$  são as imperfeições geométricas iniciais a meio vão;
- $N_{cr,z} = \frac{EI_z \pi^2}{L^2}$  é o valor crítico do esforço axial relativo à instabilidade por flexão em torno de  $z$ ;
- $N_{cr,y} = \frac{EI_y \pi^2}{L^2}$  é o valor crítico do esforço axial relativo à instabilidade por flexão em torno de  $y$ ;
- $N_{cr,T} = \left( \frac{EI_w \pi^2}{L^2} + GI_T \right) \frac{1}{i_s^2}$  é o valor crítico do esforço axial relativo à instabilidade por torção.
- $i_s^2 = \frac{I_y + I_z}{A}$  é o raio de giração polar da secção

Conforme demonstrado por Kaim (2004), é possível resolver o sistema de equações (2.3) em ordem às amplitudes  $\hat{v}$ ,  $\hat{w}$  e  $\hat{\phi}$ . Os esforços de segunda ordem são posteriormente calculados a partir dessas amplitudes. No caso particular de existir apenas a imperfeição  $\hat{v}_i$  ( $\hat{w}_i = \hat{\phi}_i = 0$ ), os momentos de segunda ordem segundos  $y$  e  $z$  são dados por:

$$M_y^{II} = M_y + \frac{M_z M_y N_{cr,y} \hat{v}_i}{M_{cr,y}^2 D_M} \quad (2.4)$$

$$M_z^{II} = \frac{M_z}{D_M} - \frac{M_z M_y^2 N_{cr,z}}{M_{cr,y}^2 N_{cr,y} D_M} - \frac{M_y^2 N_{cr,z} \hat{v}_i}{M_{cr,y}^2 D_M} \quad (2.5)$$

$$M_w^{II} = \frac{i_s^2 N_{cr,w}}{M_{cr,y}^2 D_M} \left( \frac{M_z M_y (N_{cr,y} - N_{cr,z})}{N_{cr,y}} - M_y N_{cr,z} \hat{v}_i \right) \quad (2.6)$$

onde

- $M_{cr,z} = N_{cr,z} N_{cr,T} i_s^2$  é o momento crítico associado à encurvadura por flexão-torção;
- $N_{cr,w} = \frac{EI_w \pi^2}{L^2}$ ;

- $D_M = \frac{M_y^2}{M_{cr}^2}$  é o factor de amplificação para flexão-torção.

Note-se que as primeiras parcelas correspondem à amplificação de esforços de primeira ordem sem imperfeições ( $M_w^I = 0$ ) e as últimas parcelas quantificam a amplificação resultante das imperfeições. Naturalmente, o efeito das imperfeições é mais significativo quando  $\hat{v}$  tem o sinal contrário ao de  $M_z$  (ver figura 2.1). No entanto, observa-se que o segundo termo de  $M_z^{II}$  (2.5), possui um sinal contrário aos restantes e por isso produz um efeito estabilizante. Em particular, com  $\hat{v}_i = 0$ , pode escrever-se

$$M_z^{II} = M_z D_M \left( 1 - \left( \frac{M_y}{M_{cr}} \right)^2 \left( \frac{N_{cr,z}}{N_{cr,y}} \right) \right) \quad (2.7)$$

e

$$\frac{M_z^{II}}{M_z} = \frac{1 - \left( \frac{M_y}{M_{cr}} \right)^2 \left( \frac{N_{cr,z}}{N_{cr,y}} \right)}{1 - \left( \frac{M_y}{M_{cr}} \right)^2} \quad (2.8)$$

Contudo, o sinal negativo no numerador não significa que  $M_z^{II} < M_z$ . Na figura 2.2 representa-se o gráfico da equação (2.8), onde se pode verificar, que a amplificação dos momentos de segunda ordem, sem imperfeições laterais iniciais, depende da proporção  $N_{cr,z}/N_{cr,y}$  ou, simplificando, da proporção da inércia  $I_y$  com  $I_z$ . Repara-se que a amplificação é sempre superior, ou igual à unidade e, portanto, apesar de existir um termo relativo, tem-se  $M_z^{II} > M_z$

O momento segundo  $y$  possui também um termo estabilizante para  $\hat{v}_i \leq 0$ , mas o seu efeito é reduzido para valores práticos dos parâmetros intervenientes.

## 2.3 Equações de interacção do EC3

Para verificar a resistência à encurvadura de barras uniformes de aço com secções transversal duplamente simétricas, com um único vão e apoios do tipo "forquilha" nas extremidades, o EC3 fornece as seguintes expressões:

Equação A:

$$\frac{N_{Ed}}{\frac{\chi_y N_{Rk}}{\gamma M1}} + k_{yy} \frac{M_{y,Ed}}{\chi_{LT} \frac{M_{y,Rk}}{\gamma M1}} + k_{yz} \frac{M_{z,Ed}}{\frac{M_{z,Rk}}{\gamma M1}} \quad (2.9)$$

Equação B:

$$\frac{N_{Ed}}{\frac{\chi_z N_{Rk}}{\gamma M1}} + k_{zy} \frac{M_{y,Ed}}{\chi_{LT} \frac{M_{y,Rk}}{\gamma M1}} + k_{zz} \frac{M_{z,Ed}}{\frac{M_{z,Rk}}{\gamma M1}} \quad (2.10)$$

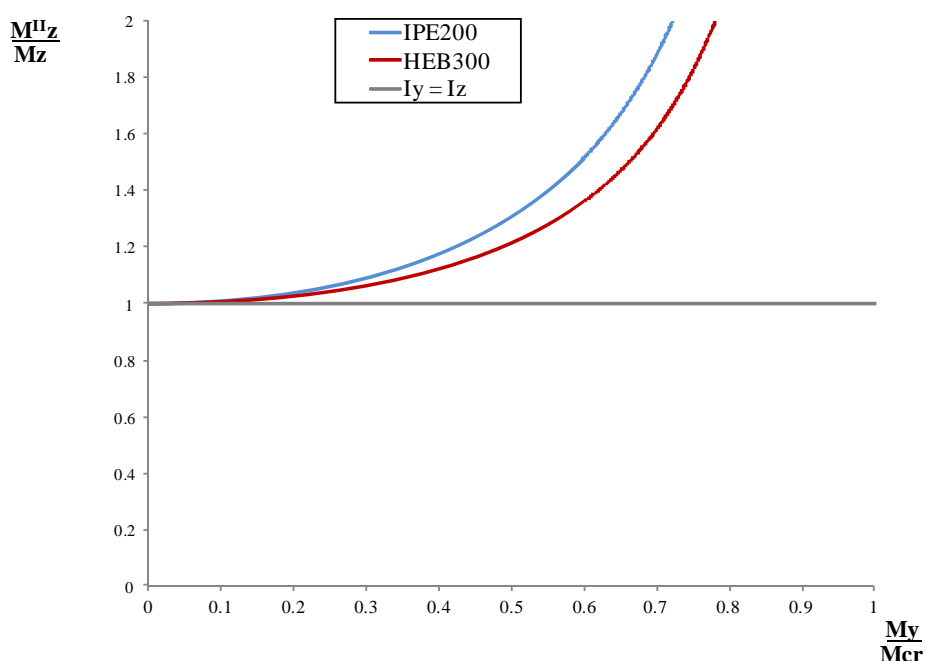


Figura 2.2: Valor de  $M_z^{II}/M_z$  em função de  $M_y/M_{cr}$  com  $\hat{v}_i = 0$

onde:

- $N_{Ed}$ ,  $M_{y,Ed}$  e  $M_{z,Ed}$  são os valores de cálculo de esforço axial e dos momentos flectores máximos actuantes ao longo da barra;
- $N_{Rk} = f_y A$ ,  $M_{y,Rk} = f_y W_{pl,y}$  e  $M_{z,Rk} = f_y W_{pl,z}$  são os valores característicos das resistências da secção transversal à compressão e à flexão segundo  $y$  e  $z$ , onde  $A$  corresponde à área da secção,  $W_{pl,y}$  e  $W_{pl,z}$  correspondem aos módulos de flexão plásticos segundo  $y$  e  $z$ ;
- $\chi_y$  e  $\chi_z$  são os factores de redução devido à encurvadura de coluna por flexão em torno de  $y$  e de  $z$ ;
- $\chi_{LT}$  é o coeficiente de redução devido à encurvadura lateral por flexão-torção;
- $\gamma_{M1}$  é o coeficiente parcial de segurança para a resistência dos elementos em relação a fenómenos de encurvadura, igual a 1,0;
- $k_{yy}$ ,  $k_{yz}$ ,  $k_{zy}$  e  $k_{zz}$  são os factores de interacção cujas expressões variam consoante se utiliza o Método 1 ou o Método 2.

Tabela 2.1: Factores de interacção  $k_{ij}$  para o Método 1 e secções das classes 1 e 2 [extraído do EC3]

$k_{yy} = C_{my} C_{mLT} \frac{\mu_y}{1 - \frac{N_{Ed}}{N_{cr,y}}} \frac{1}{C_{yy}}$
$k_{yz} = C_{mz} \frac{\mu_y}{1 - \frac{N_{Ed}}{N_{cr,z}}} \frac{1}{C_{yz}} 0,6 \sqrt{\frac{w_z}{w_y}}$
$k_{zy} = C_{my} C_{mLT} \frac{\mu_z}{1 - \frac{N_{Ed}}{N_{cr,y}}} \frac{1}{C_{zy}} 0,6 \sqrt{\frac{w_y}{w_z}}$
$k_{zz} = C_{mz} \frac{\mu_z}{1 - \frac{N_{Ed}}{N_{cr,z}}} \frac{1}{C_{zz}}$

Os factores de interacção  $k_{ij}$  encontram-se nos Anexos A e B do EC3, respectivamente para o Método 1 e Método 2. As expressões de cálculo do Método 1 encontram-se na Tabela 2.1 e os respectivos termos auxiliares nas Tabelas 2.2. Para o Método 2 as fórmulas variam consoante a coluna-viga seja susceptível, ou não, à deformação por torção (ver Tabela 2.5). No caso de membros não susceptíveis à torção as fórmulas não serão apresentadas por tal situação se encontrar fora do âmbito do presente trabalho. Note-se que todas as fórmulas serão apresentadas somente para as Classes 1 e Classe 2, visto que não serão consideradas secções de classes superiores.

Os parâmetros  $k_{ij}$  dependem dos auxiliares de cálculo  $C_{ij}$ , como se pode observar nas tabelas 2.1 e 2.5, e dos factores de momento equivalente ( $C_m$ ), indicados na tabela 2.3 e tabela 2.6, e que serão abordados nos parágrafos seguintes. O EC3 obriga ainda à verificação da resistência das secções de extremidade do elemento, o que será analisado na secção 2.4.

A segurança e precisão de ambos os métodos é fortemente influenciada pela escolha dos factores  $C_m$ , pelo que o seu cálculo com precisão é fundamental (Gonçalves e Camotim, 2004). A influência dos factores  $C_m$  será explicitada na secção 2.5. Estes factores relacionam o máximo momento de segunda ordem com o momento máximo de primeira ordem em barras sujeitas à compressão e refira-se que existem várias definições utilizadas na bibliografia, as quais variam consoante se utilizam amplificações baseadas em momentos uniformes ou sinusoidais (Boissonnade et al., 2006).

## 2.4 Resistência da secção

Conforme foi já referido, a verificação à encurvadura, obriga também à verificação da resistência das secções de extremidade. Para colunas-viga com secção em I (com banzos iguais) da classe 1 ou 2, sujeitas à flexão composta desviada, a verificação é dada por:

$$\left[ \frac{M_{y,Ed}}{M_{N,y,pl}} \right]^\alpha + \left[ \frac{M_{z,Ed}}{M_{N,z,pl}} \right]^\beta \leq 1 \quad (2.11)$$

Tabela 2.2: Termos auxiliares dos factores de interacção  $k_{ij}$  do Método 1 [Extraído do EC3]

$\mu_y = \frac{1 - \frac{N_{Ed}}{N_{cr,y}}}{1 - \chi_y \frac{N_{Ed}}{N_{cr,y}}}$ $\mu_z = \frac{1 - \frac{N_{Ed}}{N_{cr,z}}}{1 - \chi_z \frac{N_{Ed}}{N_{cr,z}}}$ $w_y = \frac{W_{pl,y}}{W_{el,y}} \leq 1,5$ $w_z = \frac{W_{pl,z}}{W_{el,z}} \leq 1,5$ $n_{pl} = \frac{N_{Ed}}{N_{Rk}/\gamma_{M0}}$ $C_{my} \text{ ver Tabela 2.3}$ $a_{LT} = 1 - \frac{I_T}{I_y}$	$C_{yy} = 1 + (w_y - 1) \left[ \left( 2 - \frac{1,6}{w_y} C_{my}^2 \bar{\lambda}_{max} - \frac{1,6}{w_y} C_{my}^2 \bar{\lambda}_{max}^2 \right) n_{pl} - b_{LT} \right] \geq \frac{W_{el,y}}{W_{pl,y}}$ <p>com <math>b_{LT} = 0,5 a_{LT} \bar{\lambda}_0^2 \frac{M_{y,Ed}}{\chi_{LT} M_{pl,y,Rd}} \frac{M_{z,Ed}}{M_{pl,z,Rd}}</math></p> $C_{yz} = 1 + (w_z - 1) \left[ \left( 2 - 14 \frac{C_{mz}^2 \bar{\lambda}_{max}^2}{w_z^5} \right) n_{pl} - c_{LT} \right] \geq 0,6 \sqrt{\frac{w_z}{w_y}} \frac{W_{el,z}}{W_{pl,z}}$ <p>com <math>c_{LT} = 10 a_{LT} \frac{\bar{\lambda}_0^2}{5 + \lambda_z^4} \frac{M_{y,Ed}}{C_{my} \chi_{LT} M_{pl,y,Rd}}</math></p> $C_{zy} = 1 + (w_y - 1) \left[ \left( 2 - 14 \frac{C_{my}^2 \bar{\lambda}_{max}^2}{w_y^5} \right) n_{pl} - d_{LT} \right] \geq 0,6 \sqrt{\frac{w_z}{w_y}} \frac{W_{el,y}}{W_{pl,y}}$ <p>com <math>d_{LT} = 2 a_{LT} \frac{\bar{\lambda}_0}{0,1 + \lambda_z^4} \frac{M_{y,Ed}}{C_{my} \chi_{LT} M_{pl,y,Rd}} \frac{M_{z,Ed}}{C_{mz} M_{pl,z,Rd}}</math></p> $C_{zz} = 1 + (w_z - 1) \left[ 2 - \frac{1,6}{w_z} C_{mz}^2 \bar{\lambda}_{max} - \frac{1,6}{w_z} C_{mz}^2 \bar{\lambda}_{max}^2 - e_{LT} \right] n_{pl} \geq \frac{W_{el,z}}{W_{pl,z}}$ <p>com <math>e_{LT} = 1,7 a_{LT} \frac{\bar{\lambda}_0}{0,1 + \lambda_z^4} \frac{M_{y,Ed}}{C_{my} \chi_{LT} M_{pl,y,Rd}}</math></p>
<p><math>\bar{\lambda}_{max} = \text{máximo } (\lambda_y; \lambda_z)</math>  <math>\bar{\lambda}_0 = \text{esbelteza normalizada relativa à encurvadura lateral para o caso de momento flector uniforme, ou seja, } \psi_y = 1,0 \text{ na Tabela 2.3}</math>  <math>\bar{\lambda}_{LT} = \text{esbelteza normalizada relativa à encurvadura lateral}</math></p> <p>Se <math>\bar{\lambda}_0 \leq 0,2 \sqrt{C_1} \sqrt[4]{\left(1 - \frac{N_{Ed}}{N_{cr,z}}\right) \left(1 - \frac{N_{Ed}}{N_{cr,TF}}\right)}</math>:</p> $C_{my} = C_{my,0}$ $C_{mz} = C_{mz,0}$ $C_{mLT} = 1,0$ $C_{my} = C_{my,0} + 1 - C_{my,0} \frac{\sqrt{\epsilon_y a_{LT}}}{1 + \sqrt{\epsilon_y a_{LT}}}$ <p>e <math>\bar{\lambda}_0 &gt; 0,2 \sqrt{C_1} \sqrt[4]{\left(1 - \frac{N_{Ed}}{N_{cr,z}}\right) \left(1 - \frac{N_{Ed}}{N_{cr,TF}}\right)}</math>:</p> $C_{mz} = C_{mz,0}$ $C_{mLT} = C_{my}^2 \frac{a_{LT}}{\sqrt{\left(1 - \frac{N_{Ed}}{N_{cr,z}}\right) \left(1 - \frac{N_{Ed}}{N_{cr,TF}}\right)}}$	
<p><math>C_1</math> coeficiente para ter em conta a distribuição de momentos e as condições de apoio nas extremidades; <math>C_1</math> poderá tomar-se igual a <math>k_c^{-2}</math>, em que <math>k_c</math> é obtido na Tabela 2.4</p> <p><math>C_{mi,0}</math> ver Tabela 2.3</p> <p><math>\epsilon_y = \frac{M_{y,Ed}}{N_{Ed}} \frac{A}{W_{el,y}}</math> para secções transversais das Classes 1,2 e 3</p> <p><math>\epsilon_y = \frac{M_{y,Ed}}{N_{Ed}} \frac{A_{eff}}{W_{eff,y}}</math> para secções transversais da Classes 4</p> <p><math>N_{cr,y} = \text{esforço normal crítico de encurvadura elástica por flexão em torno do eixo y-y}</math>  <math>N_{cr,z} = \text{esforço normal crítico de encurvadura elástica por flexão em torno do eixo z-z}</math>  <math>N_{cr,T} = \text{esforço normal crítico de encurvadura elástica por torção}</math>  <math>I_T = \text{constante de torção de St.Venant}</math>  <math>I_y = \text{momento de inércia em relação ao eixo y-y}</math></p>	

Tabela 2.3: Factores de momento equivalente  $C_{mi,0}$  para o Método 1 [extraído do EC3]

Diagrama de momentos	$C_{mi,0}$
<p><math>M_1</math> <math>\psi M_1</math></p> <p><math>-1 \leq \psi \leq 1</math></p>	$C_{mi,0} = 0,79 + 0,21\psi_i + 0,36(\psi_i - 0,33) \frac{N_{Ed}}{N_{cr,i}}$
<p><math>M(x)</math></p> <p><math>M(x)</math></p> <p><math>M_{i,Ed}(x)</math> valor máximo do momento <math>M_{y,Ed}</math> ou <math>M_{z,Ed}</math> correspondente a uma análise de primeira ordem</p> <p><math> \delta_x </math> flecha máxima ao longo do elemento</p>	$C_{mi,0} = 1 + \left( \frac{\pi^2 EI_1  \delta_x }{L^2  M_{i,Ed}(x) } - 1 \right) \frac{N_{Ed}}{N_{cr,i}}$
	$C_{mi,0} = 1 - 0,18 \frac{N_{Ed}}{N_{cr,i}}$
	$C_{mi,0} = 1 + 0,03 \frac{N_{Ed}}{N_{cr,i}}$


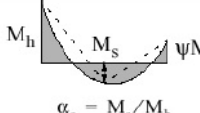
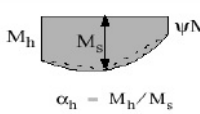
Tabela 2.4: Factores  $k_c$  para o Método 1 [extraído do EC3]

Distribuição de momentos	$k_c$
<p><math>\psi = 1</math></p>	1,0
<p><math>-1 \leq \psi \leq 1</math></p>	$\frac{1}{1,33 - 0,33\psi}$
	0,94
	0,90
	0,91
	0,86
	0,77
	0,82

Tabela 2.5: Factores de interacção  $k_{ij}$  do Método 2 para elementos susceptíveis à torção com secções de classe 1 ou 2 [Extraído do EC3]

$k_{yy} = C_{my} \left( 1 + (\bar{\lambda}_y - 0,2) \frac{N_{Ed}}{\chi_y N_{Rk} / \gamma_{M1}} \right) \leq C_{my} \left( 1 + 0,8 \frac{N_{Ed}}{\chi_y N_{Rk} / \gamma_{M1}} \right)$
$k_{yz} = 0,6 k_{zz}$
$k_{zy} = \left[ 1 - \frac{0,1 \bar{\lambda}_z}{C_{mLT} - 0,25} \frac{N_{Ed}}{\chi_z N_{Rk} / \gamma_{M1}} \right] \geq \left[ 1 - \frac{0,1}{C_{mLT} - 0,25} \frac{N_{Ed}}{\chi_z N_{Rk} / \gamma_{M1}} \right]$ para $\bar{\lambda}_z < 0,4$ :
$k_{zy} = 0,6 + \bar{\lambda}_z \leq 1 - \frac{0,1 \bar{\lambda}_z}{C_{mLT} - 0,25} \frac{N_{Ed}}{\chi_z N_{Rk} / \gamma_{M1}}$
$k_{zz} = C_{mz} \left( 1 + (2\bar{\lambda}_z - 0,6) \frac{N_{Ed}}{\chi_z N_{Rk} / \gamma_{M1}} \right) \leq C_{mz} \left( 1 + 1,4 \frac{N_{Ed}}{\chi_z N_{Rk} / \gamma_{M1}} \right)$

Tabela 2.6: Coeficientes de momento equivalente  $C_m$  para o Método 2 [extraído do EC3]

Diagrama de momentos	Domínio de aplicação	$C_{my}$ e $C_{mz}$ e $C_{mLT}$		
		Carga uniforme	Carga concentrada	
 $\psi M$	$-1 \leq \psi \leq 1$	$0,6 + 0,4\psi \geq 0,4$		
 $\psi M_h$ $\alpha_s = M_s / M_h$	$0 \leq \alpha_s \leq 1$	$-1 \leq \psi \leq 1$	$0,2 + 0,8\alpha_s \geq 0,4$	
	$-1 \leq \alpha_s < 0$	$0 \leq \psi \leq 1$	$0,1 - 0,8\alpha_s \geq 0,4$	
 $\psi M_h$ $\alpha_h = M_h / M_s$	$-1 \leq \alpha_h < 0$	$-1 \leq \psi \leq 1$	$0,1(1-\psi) - 0,8\alpha_s \geq 0,4$	
		$0 \leq \alpha_h \leq 1$	$0 \leq \psi \leq 1$	$0,2(-\psi) - 0,8\alpha_s \geq 0,4$
		$-1 \leq \psi < 0$	$0,95 + 0,05\alpha_h$	$0,90 + 0,10\alpha_h$
		$0 \leq \psi \leq 1$	$0,95 + 0,05\alpha_h$	$0,90 + 0,10\alpha_h$
		$-1 \leq \psi < 0$	$0,95 + 0,05\alpha_h(1+2\psi)$	$0,90 + 0,10\alpha_h(1+2\psi)$
Em elementos com modos de encurvadura associados a deslocamentos laterais, o coeficiente de momento uniforme equivalente deverá tomar-se igual a $C_{my} = 0,9$ ou $C_{mz} = 0,9$ , respectivamente.				
$C_{my}$ , $C_{mz}$ e $C_{mLT}$ deverão ser obtidos de acordo com o diagrama dos momentos flectores actuantes entre as secções de travamento, de acordo com:				
coeficiente de momento	eixo de flexão	travamento na direcção		
$C_{my}$	y-y	z-z		
$C_{mz}$	z-z	y-y		
$C_{mLT}$	y-y	y-y		

em que,

$$M_{N,y,pl} = M_{y,pl} \frac{(1-n)}{(1-0,5a)} \leq M_{y,pl}$$

se  $n \leq a$ :

$$M_{N,z,pl} = M_{z,pl}$$

se  $n > a$ :

$$M_{N,z,pl} = M_{z,pl} \left[ 1 - \left( \frac{n-a}{1-a} \right)^2 \right]$$

Os parâmetros  $n$  e  $a$  são definidos por:  $n = \frac{N_{Ed}}{N_{pl}}$  e  $a = \frac{(A-2bt_f)}{A} \leq 0,5$ ; onde  $b$  é a largura da secção e  $t_f$  é a espessura do banzo

Os parâmetros  $\alpha$  e  $\beta$ , para secções em I e H, são dados por:  $\alpha = 2$ ;  $\beta = 5n$  mas  $\beta \geq 1$ .

Para  $N_{Ed} = 0$ , a verificação da resistência plástica da secção, tanto para o perfil HEB300 como para o perfil IPE200 (perfis utilizados no estudo paramétrico da secção 4.2), tem-se

$$\left[ \frac{M_{y,Ed}}{M_{y,pl}} \right]^2 + \left[ \frac{M_{z,Ed}}{M_{z,pl}} \right] \leq 1 \quad (2.12)$$

A título de exemplo, representa-se na figura 2.3 a curva de interacção para uma secção HEB300, obtida através da fórmula (2.12) com  $N_{Ed} = 0$ .

## 2.5 Comportamento das equações de interacção

Nesta secção estuda-se o comportamento das equações de interacção A (equação (2.9)) e B (equação (2.10)), de acordo com ambos os métodos, para viga de secção em I, sujeitas à flexão desviada ( $N_{Ed} = 0$ ). Para simplificar as expressões, será adoptada a seguinte nomenclatura para os esforços

$$n = \frac{N_{Ed}}{(N_{Rk}/\gamma_{M1})} = 0$$

$$m_y = \frac{M_{y,Ed}}{(M_{y,Rk}/\gamma_{M1})}$$

$$m_z = \frac{M_{z,Ed}}{(M_{z,Rk}/\gamma_{M1})}$$



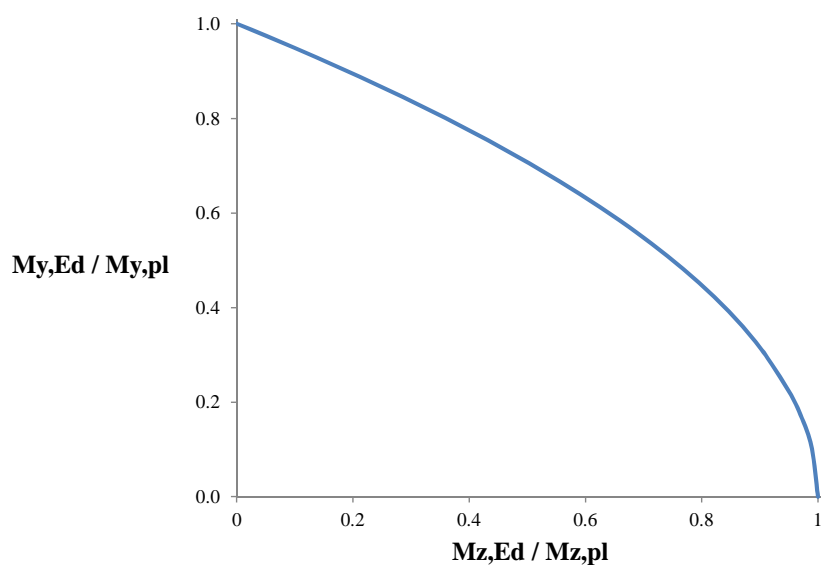


Figura 2.3: Curva da resistência plástica da secção HEB300

As equações de interacção (2.9) e (2.10), no caso de esforço normal nulo e com a nomenclatura adoptada, simplificam-se para:

Equação A:

$$m_y \frac{k_{yy}}{\chi_{LT}} + k_{yz} m_z \leq 1 \quad (2.13)$$

Equação B:

$$m_y \frac{k_{zy}}{\chi_{LT}} + k_{zz} m_z \leq 1 \quad (2.14)$$

### 2.5.1 Método 1

No caso do Método 1, com  $n = 0$ , os factores de interacção simplificam-se para:

$$k_{yy} = \frac{C_{my} C_{mLT}}{C_{yy}}$$

$$k_{yz} = \frac{C_{mz}}{C_{yy}} 0,6 \sqrt{\frac{w_z}{w_y}}$$

$$k_{zy} = \frac{C_{my} C_{mLT}}{C_{zy}} 0,6 \sqrt{\frac{w_y}{w_z}}$$

$$k_{zz} = \frac{C_{mz}}{C_{zz}}$$

e as equações de interacção assumem o seguinte formato:

Equação A:

$$m_y \frac{C_{my} C_{mLT}}{C_{yy} \chi_{LT}} + m_z \frac{C_{mz}}{C_{yz}} 0,6 \sqrt{\frac{w_z}{w_y}} \leq 1 \quad (2.15)$$

Equação B:

$$m_y \frac{C_{my} C_{mLT}}{C_{zy} \chi_{LT}} 0,6 \sqrt{\frac{w_y}{w_z}} + m_z \frac{C_{mz}}{C_{zz}} \leq 1 \quad (2.16)$$

onde:

$$C_{yy} = 1 + (w_y - 1)(-b_{LT}) \quad \text{com } b_{LT} = 0,5 a_{LT} \bar{\lambda}_0^2 \frac{m_y m_z}{\chi_{LT}}$$

$$C_{yz} = 1 + (w_z - 1)(-c_{LT}) \quad \text{com } c_{LT} = 10 a_{LT} \frac{\bar{\lambda}_0^2}{5 + \bar{\lambda}_z^4} \frac{m_y}{C_{my} \chi_{LT}}$$

$$C_{zy} = 1 + (w_y - 1)(-d_{LT}) \quad \text{com } d_{LT} = 2 a_{LT} \frac{\bar{\lambda}_0}{0,1 + \bar{\lambda}_z^4} \frac{m_y m_z}{C_{my} \chi_{LT} C_{mz}}$$

$$C_{zz} = 1$$

Os factores de momento equivalente  $C_{mi}$  dependem da esbelteza normalizada relativa à encurvadura lateral para o caso de momento flector uniforme ( $\bar{\lambda}_0$ ) e dos factores  $C_{mi,0}$ :

$$\text{se } \bar{\lambda}_0 \leq 0,2\sqrt{C_1}: \begin{cases} C_{my} = C_{my,0} \\ C_{mz} = C_{mz,0} \\ C_{mLT} = 1,0 \end{cases}$$

$$\text{se } \bar{\lambda}_0 > 0,2\sqrt{C_1}: \begin{cases} C_{my} = 1 \\ C_{mz} = C_{mz,0} \\ C_{mLT} = a_{LT} \geq 1 \end{cases}$$

Pode-se observar que a equação A (2.15) depende dos coeficientes de momento equivalente  $C_{my}$ ,  $C_{mz}$  e  $C_{LT}$ , dos auxiliares de cálculo  $C_{yy}$  e  $C_{yz}$ , de  $\chi_{LT}$  e ainda de  $w_y$  e  $w_y$ . A equação B depende dos mesmos parâmetros que a equação A, excepto nos auxiliares de cálculo  $C_{yy}$  e  $C_{yz}$ , que são substituídos por  $C_{zy}$ ,  $C_{zz}$ . Conclui-se assim que as expressões do Método 1, mesmo na ausência de esforço axial, apresentam uma complexidade significativa.

No caso em que  $m_y = 0$  e  $m_z \neq 0$  tem-se

Equação A:

$$m_z \leq \frac{1,67}{C_{mz} \sqrt{\frac{w_y}{w_z}}} \quad (2.17)$$

Equação B:

$$m_z \leq \frac{1}{C_{mz}} \quad (2.18)$$

O denominador da equação A contém um termo dependente dos módulos de flexão elástico e plástico dos perfis em análise ( $\sqrt{w_y/w_z}$ ). No presente trabalho os perfis utilizados são os perfis metálicos HEB300 e IPE200, pelo que o termo  $\sqrt{w_y/w_z}$  assume o valor de 0,86 para HEB300 e 0,87 para o IPE200. Substituindo o termo  $\sqrt{w_y/w_z}$  pelo valor 0,87 vem

Equação A:

$$m_z \leq \frac{1,92}{C_{mz}} \quad (2.19)$$

Equação B:

$$m_z \leq \frac{1}{C_{mz}} \quad (2.20)$$

Assim, pode-se afirmar que, neste caso, a equação B será sempre a condicionante.

No caso em que  $m_z = 0$  e  $m_y \neq 0$  tem-se antes

Equação A:

$$m_y \leq \frac{\chi_{LT}}{C_{my} C_{mLT}} \quad (2.21)$$

Equação B:

$$m_y \leq \frac{1,67 \chi_{LT}}{C_{my} C_{mLT} \sqrt{\frac{w_z}{w_y}}} \quad (2.22)$$

Novamente encontra-se o denominador da equação B dependente dos módulos de flexão, mas agora, inversamente, de  $\sqrt{w_z/w_y}$ , que assume o valor 1,16 para HEB300 e 1,15 para IPE200. Substituindo o termo  $\sqrt{w_z/w_y}$  por 1,16 vem

Equação A:

$$m_y \leq \frac{\chi_{LT}}{C_{my} C_{mLT}} \quad (2.23)$$

Equação B:

$$m_y \leq \frac{1,44 \chi_{LT}}{C_{my} C_{mLT}} \quad (2.24)$$

Assim, torna-se possível concluir que a equação A, ao contrário do caso anterior, será agora condicionante.

Na figura 2.4 pode observar-se o comportamento das equações de interação do Método 1. Devido à complexidade das equações não foi possível retirar conclusões acerca da concavidade das curvas,

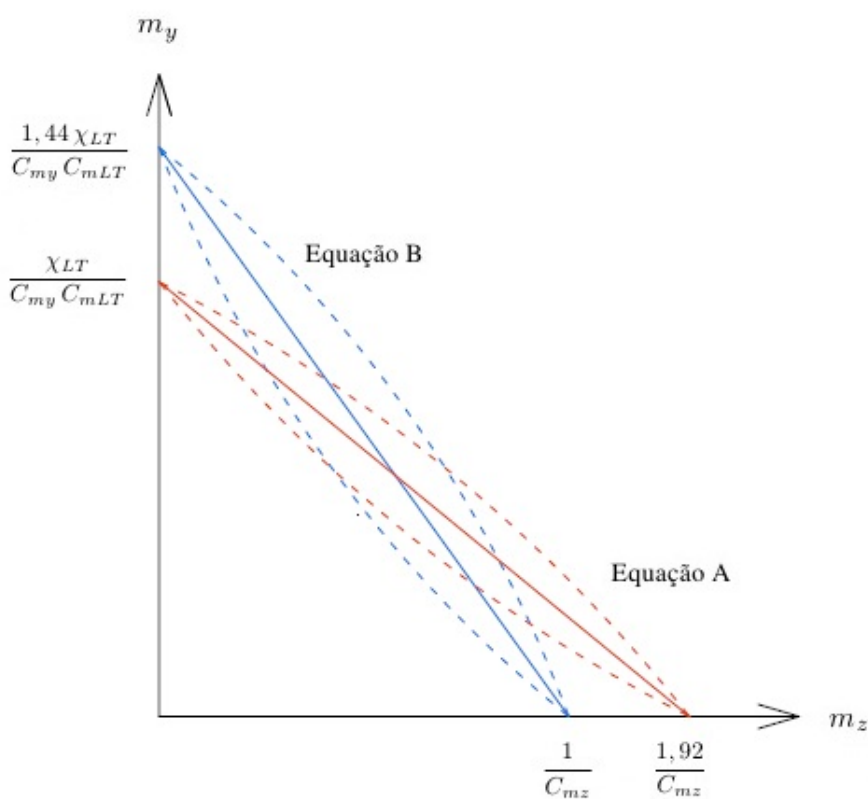


Figura 2.4: Curva de interacção genérica do Método 1 do EC3

podendo apresentar uma concavidade semelhante à da curva de resistência plástica da secção (para "dentro"), ou com a concavidade oposta, com com amplificação de esforços (para "fora").

### 2.5.2 Método 2

No caso do Método 2, as expressões simplificadas foram já estudadas por Rosa (2011), obtendo-se:

$$k_{yy} = C_{my}$$

$$k_{yz} = 0,6 C_{mz}$$

$$\begin{cases} k_{zy} = 1,0 & \text{se } \bar{\lambda}_z \geq 0,4 \\ k_{zy} = 0,6 + \bar{\lambda}_z & \text{se } \bar{\lambda}_z < 0,4 \end{cases}$$

$$k_{yy} = C_{mz}$$

As equações de interacção para o Método 2 assumem assim o seguinte formato:

Equação A:

$$m_y \frac{C_{m_y}}{\chi_{LT}} + 0,6 C_{m_z} m_z \leq 1 \quad (2.25)$$

Equação B:

$$m_y \frac{\min(0,6 + \bar{\lambda}_z; 1)}{\chi_{LT}} + C_{m_z} m_z \leq 1 \quad (2.26)$$

sendo que os factores de momento equivalente ( $C_m$ ) dependem do formato do diagrama do momento flector na direcção pretendida (ver 2.6). A equação A depende dos factores de momento equivalente  $C_{m_y}$ ,  $C_{m_z}$  e de  $\chi_{LT}$  e a equação B depende também de  $\chi_{LT}$ ,  $C_{m_z}$  e de  $\bar{\lambda}_z$  (só terá influência caso  $\bar{\lambda}_z \leq 0,4$ ).

No caso em que  $m_y = 0$  e  $m_z \neq 0$  tem-se

Equação A:

$$m_z \leq \frac{1,67}{C_{m_z}} \quad (2.27)$$

Equação B:

$$m_z \leq \frac{1}{C_{m_z}} \quad (2.28)$$

Neste caso o Método 1 e o Método 2 dão resultados idênticos, sendo novamente a equação B a condicionante. No entanto, é de salientar que o valor de  $C_{m_z}$  não é idêntico para os dois métodos (ver tabelas 2.3 e 2.6).

No caso em que  $m_z = 0$  e  $m_y \neq 0$  tem-se agora

Equação A:

$$m_y \leq \frac{\chi_{LT}}{C_{m_y}} \quad (2.29)$$

Equação B:

$$m_y \leq \frac{\chi_{LT}}{\min(0,6 + \bar{\lambda}_z; 1)} \quad (2.30)$$

Assim, a equação A será condicionante se  $C_{m_y} \leq \min(0,6 + \bar{\lambda}_z; 1)$ . Na figura 2.5 representam-se as curvas de interacção para o Método 2. Conforme se pode observar, a curva de interacção apresenta apenas um comportamento linear. Representou-se a equação B como a equação condicionante, mas como já referido, caso  $\bar{\lambda}_z < 0,4$ , a equação condicionante será a equação A.

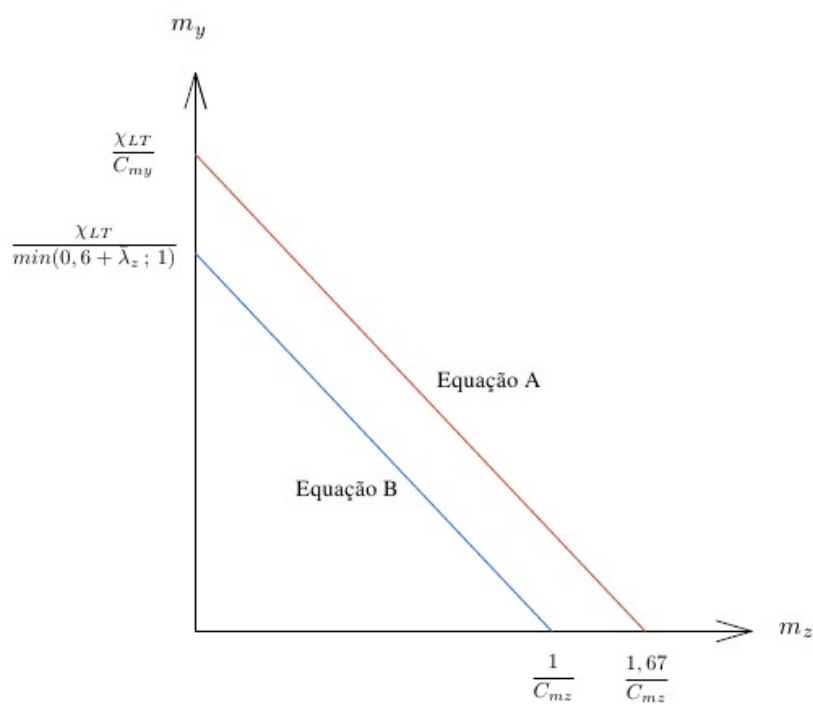


Figura 2.5: Curva de interação genérica do Método 2 do EC3

## Capítulo 3

# Modelação numérica

### 3.1 Introdução

No presente capítulo será abordado e explicado o processo de modelação numérica de colunas-viga através do programa de elementos finitos ANSYS (ANSYS, 2004). Descrevem-se os aspectos mais relevantes relacionados com a modelação, a forma como as análises foram realizadas e os resultados retirados do programa. Apresentam-se vários exemplos de validação. Os quais foram também analisados num trabalho anterior (Rosa, 2011).

### 3.2 Modelação numérica através do programa ANSYS

#### 3.2.1 Elemento finito

No presente trabalho adoptou-se o elemento de barra BEAM189, apropriado para efectuar análises física e geométrica não-lineares, incluindo imperfeições geométricas (falta de rectilinearidade) e tensões residuais. Este elemento é baseado na teoria de vigas de Timoshenko, que inclui deformações devido a esforços de corte (ANSYS, 2004).

O BEAM189 é um elemento quadrático de três nós (ver figura 3.1), com seis graus de liberdade por nó, que são os deslocamentos e as rotações nos três eixos ortogonais ( $x, y$  e  $z$ ). Opcionalmente, existe um sétimo grau de liberdade, o empenamento de torção, importante para a modelação de barras com secção de parede fina aberta.

#### 3.2.2 Material

O elemento BEAM189 suporta vários tipos de leis materiais. Na presente dissertação, o material utilizado é o aço S235, cuja relação constitutiva pode ser simplificada de acordo com a figura 3.2 (material elástico-perfeitamente plástico), onde  $f_y$  é a tensão de cedência e  $E$  é o módulo de elasticidade. Adopta-se o critério de cedência de Von Mises e o coeficiente de Poisson  $\nu$  é igual a 0,3. Refira-se que esta lei material está de acordo com o que tem sido adoptado em estudos semelhantes (Gonçalves et al., 2009; Boissonnade et al., 2006; Mendonça, 2006).

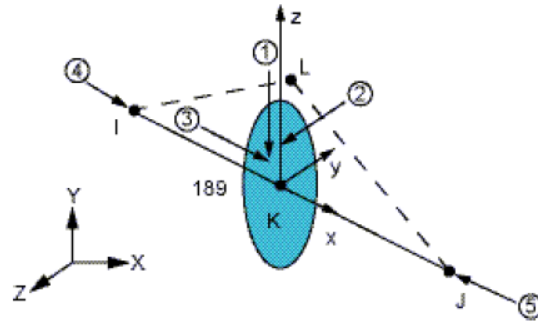


Figura 3.1: Elemento Finito Beam 189 (ANSYS, 2004)

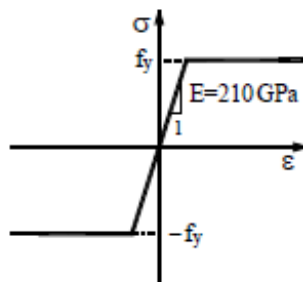


Figura 3.2: Gráfico tensão-deformação ilustrativo da lei constitutiva do aço



### 3.2.3 Secção transversal do perfil metálico

Com o BEAM 189 é possível modelar vários tipos de secções transversais, sendo ainda possível discretizar as mesmas em "células", as quais são utilizadas para efectuar a integração numérica e definir as tensões residuais. A divisão da secção num grande número de células conduz a uma maior precisão, mas simultaneamente torna o cálculo mais dispendioso em termos computacionais.

A modelação da secção transversal é feita através da introdução de todas as suas dimensões, seguida da especificação do número de células. Neste trabalho a secção será sempre dividida em 200 células, dado que se que isso conduz a resultados aceitáveis (Rosa, 2011). Na figura 3.3 mostra-se a discretização utilizada para a secção do perfil HEB300.

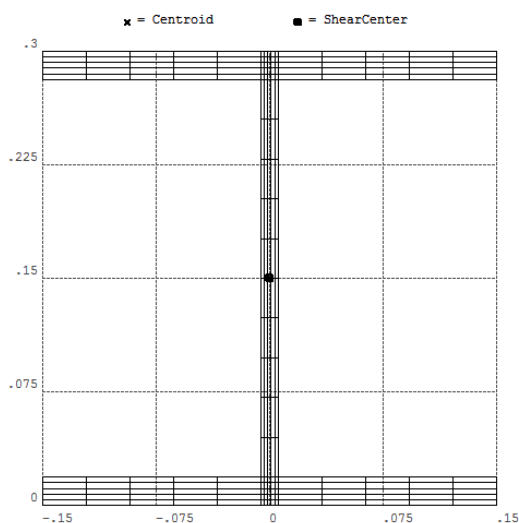


Figura 3.3: Discretização da secção transversal de um HEB300 com o ANSYS

### 3.2.4 Tensões Residuais

As tensões residuais resultam do arrefecimento diferencial no decurso do processo de fabrico. No caso dos perfis com secção em I, inicialmente arrefecem as extremidades dos banzos e a zona central da alma (zona comprimida), seguindo-se o arrefecimento das zonas de ligação banzo-alma (zona tracionada). Para efeitos de modelação de perfis H, é suficiente considerar o diagrama apresentado na figura 3.4 (Kaim, 2004; Boissonnade et al., 2006).

No ANSYS a aplicação das tensões residuais realiza-se através do comando:

*(inistate,define, ELID, Eint, Klayer, Parmint, Sxx, Syy, Szz, Sxy, Syz, Sxz)*

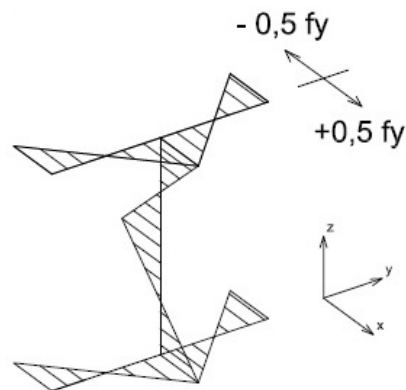


Figura 3.4: Tensões residuais de um perfil metálico H

onde:

- *ELID* - Identificação do elemento
- *Eint* - Identificação do ponto de integração
- *Klayer* - Número da célula
- *ParmInt* - Número do ponto de integração
- $S_{xx}$ ,  $S_{yy}$ ,  $S_{zz}$ ,  $S_{xy}$ ,  $S_{yz}$ ,  $S_{xz}$  - Valor da componente tensão a aplicar no ponto, para as tensões residuais apenas interessa  $S_{xx}$

Estes comandos são introduzidos na linha de comando do Ansys, em que cada parâmetro é preenchido com o seu valor. Caso se pretenda a aplicação em todos os valores dos parâmetros, deixa-se o campo em branco. Por exemplo, para aplicação da tensão residual  $S_{xx} = 0,5f_y = 117,5MPa$  numa célula, em todos os pontos de integração, o comando a aplicar será:

- *inis,defi, , , 10, , 117500,0,0,0,0,0*

### 3.2.5 Imperfeições geométricas

De modo a obter resultados mais próximos dos que seriam obtidos numa estrutura "real", as imperfeições geométricas devem ser contabilizadas. Na modelação das imperfeições geométricas consideram-se apenas as correspondentes a uma flexão segundo ambos os eixos principais, ignorando as possíveis rotações de torção iniciais (Boissonnade et al.,2006; Mendonça, 2006).

De acordo com a bibliografia, adoptou-se uma configuração parabólica para a imperfeição, independentemente das condições de apoio, na qual a viga terá um deslocamento máximo (segundo os eixos principais de flexão da secção) a meio vão de  $L/1000$ , onde  $L$  é o comprimento da viga,

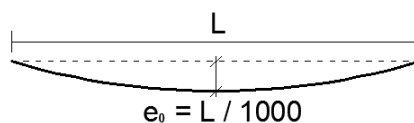


Figura 3.5: Imperfeições geométricas (Gonçalves et al.,2009)

como ilustrado na figura 3.5. Quando a viga é contraventada numa das direcções, não se justifica introduzir as imperfeições geométricas nessa direcção.

De modo a introduzir as imperfeições geométricas no ANSYS, as vigas foram modeladas através da definição de três pontos (*Keypoints*): ambas as extremidades com excentricidades nulas em relação à corda, e a meio-vão com excentricidade vertical e horizontal igual a  $L/1000$ . A união dos três pontos efectuou-se com uma *SPLine*, obtendo-se assim a configuração desejada.

### 3.2.6 Condições de apoio

Uma coluna-viga "simplesmente apoiada" encontra-se apoiada conforme ilustrado na figura 3.6, em que os apoios são materializados através de "forquilhas", que restringem o deslocamento vertical e horizontal (eixos  $z$  e  $y$ ) e a rotação de torção (eixo  $x$ ). No ANSYS o processo de introduzir as condições de apoio é bastante simples, bastando eliminar os deslocamentos relevantes *Keypoints* que definem as extremidades das vigas.

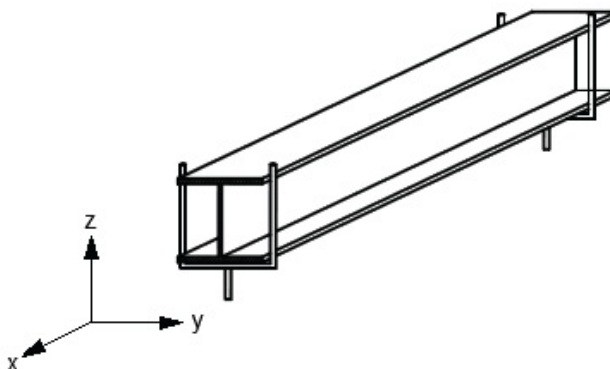


Figura 3.6: Condições de apoio e coluna-viga do tipo "forquilha" (Mendonça, 2006)

### 3.2.7 Malha de elementos finitos

As vigas, são divididas em vários elementos finitos. Na presente dissertação, inicialmente todas as vigas foram divididas em elementos finitos de 0,10m. Contudo, o esforço computacional exigido para processar as análises de elementos de comprimento elevado era significativo. Assim, sem significativa perda de precisão, as vigas de comprimentos superior a 4 metros foram divididas em elementos de maiores dimensões. Na figura 3.7 encontra-se um exemplo de uma viga modelada no ANSYS dividida em elementos finitos.

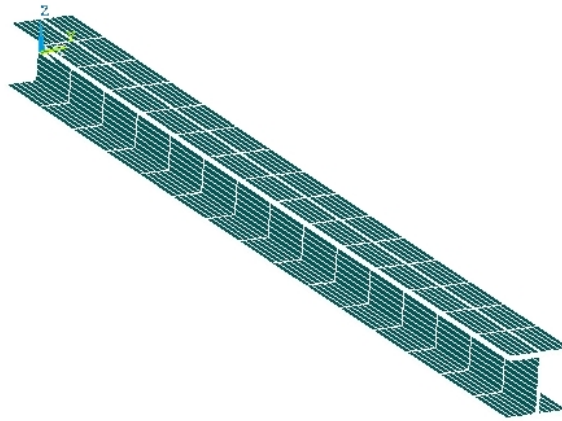


Figura 3.7: Exemplo de uma viga modelada no ANSYS com elementos finitos BEAM189

### 3.2.8 Comprimentos das Colunas-Viga

Nos vários casos de estudo (capítulo 4) e de validação (presente capítulo), foram sempre consideradas vigas com valores fixos de esbeltezas para a encurvadura de flexão ( $\bar{\lambda}_i$ ) ou por flexão-torção ( $\bar{\lambda}_{LT}$ ), dadas por

$$\bar{\lambda}_i = \sqrt{\frac{N_{i,pl}}{N_{cr}}} \quad (3.1)$$

$$\bar{\lambda}_{LT} = \sqrt{\frac{M_{y,pl}}{M_{cr}}} \quad (3.2)$$

onde:

$i$  é o eixo de flexão considerado;

$N_{pl} = A f_y$  é o esforço axial plástico da secção;

$N_{cr,i} = \frac{\pi^2 EI_i}{L_{cr}^2}$  é o valor crítico do esforço axial relativo à instabilidade por flexão em torno de  $i$ ;

$M_{pl,y} = W_{pl,y} f_y$  é o momento plástico da secção em torno de  $y$ ;

$M_{cr}$  é o momento crítico associado à encurvadura por flexão-torção.

O comprimento dos elementos para cada valor de esbelteza é obtido a partir destas formulas. Refira-se que o cálculo de  $M_{cr}$  é efectuado recorrendo ao programa LTBEAM (CTICM, 2011).

### 3.2.9 Aplicação de cargas

O programa ANSYS contém uma sistema de menus muito completo, com muitos sub-menus, que por sua vez se sub-dividem. É intuitivo ao utilizador onde encontrar a maior parte das opções a utilizar, a aplicação de acções (forças, deslocamentos, pressões, entre outras). Todavia, ser intuitivo não significa que seja simples ou rápido.

Para facilitar este processo, no que toca à aplicação de cargas, recorreu-se à linha de comandos, utilizando o seguinte comando:

$$FK,Keypoint,FX,Value$$

onde:

- *FK* - Indica que a força será aplica num *Keypoint*;
- *Keypoint* - Indica-se o número do *Keypoint* a qual se aplicará a força;
- *FX* - Força na direcção x, caso fosse um momento flector colocar-se-ia *MY* (momento flector no eixo y);
- *Value* - Coloca-se o valor da carga que se pretende aplicar.

### 3.2.10 Detalhes de análise

No presente trabalho, as análises foram efectuadas utilizando as seguintes opções:

- *Automatic time stepping*

Neste modo o ANSYS procede a um ajustamento automático do incremento de carga definido pelo utilizador. A análise é extremamente rápida, mas não é possível obter trajectórias de equilíbrio além dos pontos limites.

- Comprimento de arco (*arc-length*)

O método do comprimento de arco (ver figura 3.8) permite obter as trajectórias de equilíbrio para além dos pontos limites. Contudo, apresenta a desvantagem de ser muito demorado e exigente a nível computacional.

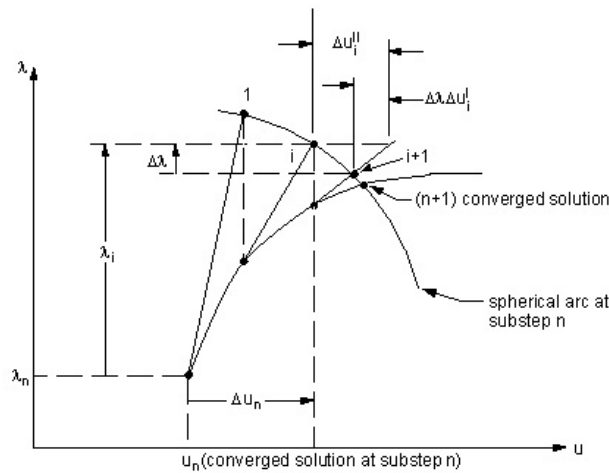


Figura 3.8: Exemplo do método de comprimento de arco (ANSYS, 2004)

O raio do comprimento de arco de referência é calculado a partir dos dados da primeira iteração do primeiro incremento. Nos incrementos seguintes o raio é ajustado pelo programa, com base no comportamento da solução. O raio é ainda ajustado de forma a não exceder os limites estabelecidos pelo utilizador (valores máximo e mínimo do raio de referência). Se a solução não convergir com o valor mínimo do raio, a análise termina.

- *Program Chosen*

Neste modo o próprio programa altera entre os dois métodos anteriormente descritos. Assim, as análises demoram relativamente menos tempo do que o método do comprimento de arco sem perda de precisão: o ANSYS inicia as análises com o modo *Automatic Time Stepping* e perto da carga de colapso, alterna a análise para o método do comprimento de arco.

No presente trabalho optou-se pelo método *program chosen*. Sempre que houve dúvidas relativamente à precisão dos resultados, foram observados as curvas cargas-deslocamento para averiguar se estas apresentam uma ponto limite.

Para alguns casos, com esbeltezas elevadas, as análises foram efectuadas em duas fases distintas, dado que se verificou existirem problemas no incremento inicial, em virtude das tensões residuais não serem exactamente auto-equilibradas. Em primeiro lugar aplica-se uma força de tracção longitudinalmente à viga, com um valor muito reduzido, comparativamente à resistência da viga ( $N_{Ed} = 1,0 \times 10^{-6} kN$ ) no modo *program chosen*. Assim o ANSYS consegue equilibrar as tensões residuais. Em segundo lugar aplica-se o carregamento para o qual se pretende calcular a carga de colapso. Nesta análise foram utilizados os métodos atrás descritos.

### 3.3 Exemplos de validação

#### 3.3.1 Tensões Residuais

Para validar a aplicação de tensões residuais procedeu-se à análise de uma barra em consola com um perfil HEB300 de aço S235, de 10 metros de comprimento, como esquematizado na figura 3.9. As tensões residuais são aplicadas como previamente explicado.

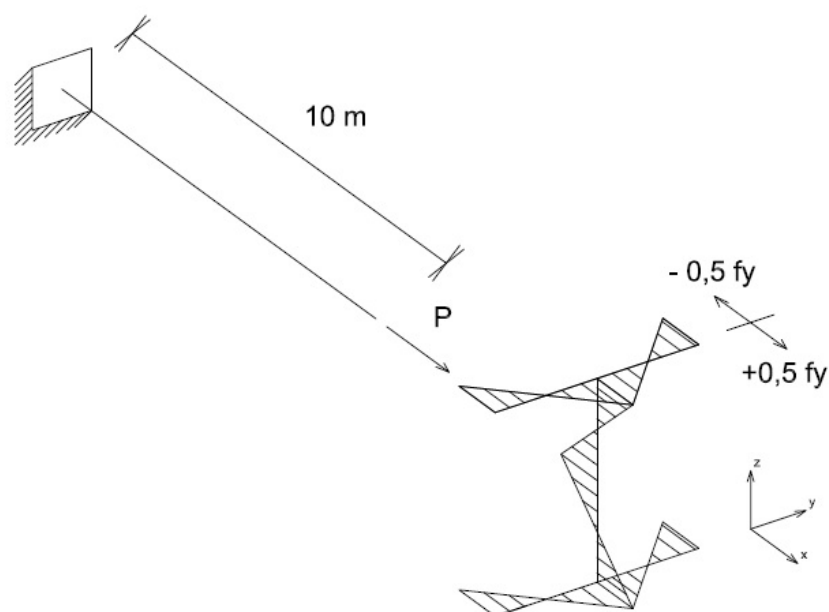


Figura 3.9: Consola com tensões residuais: geometria, carregamento e distribuição de tensões residuais

A figura 3.10 apresenta duas trajectórias de equilíbrio, uma antes de aplicar as tensões residuais e outra já com as tensões residuais. A trajectória sem tensões residuais apresenta um comportamento linear até atingir  $P = P_{col}$ . A trajectória com tensões residuais apresenta um crescimento linear até aproximadamente  $P = 0,5 P_{col}$ , pois para  $P > 0,5 P_{col}$  a tensão de cedência já terá sido atingida nas extremidades dos dois banzos e no centro da alma, registando-se um comportamento não-linear, convergindo assintoticamente para  $P = P_{col}$ .

#### 3.3.2 Colunas-viga apoiadas-encastadas - comportamento plano

O segundo exemplo de validação consiste numa coluna-viga HEB300 encastrada-apoiada de aço S235, sujeita a um momento e uma força de compressão na extremidade apoiada, como exemplificado na figura 3.11. As imperfeições geométricas e tensões residuais serão introduzidas como explicado previamente. O comprimento da viga será variado, correspondendo cada comprimento a um valor da esbelteza  $\bar{\lambda}_y = 0,5; 1,0; \text{ e } 1,5$ .

Na figura 3.12 encontram-se as curvas de resistência obtidas com o programa ABAQUS (Gonçalves e Camotim, 2004) e com o programa ANSYS. Para as esbeltezas consideradas, o ANSYS

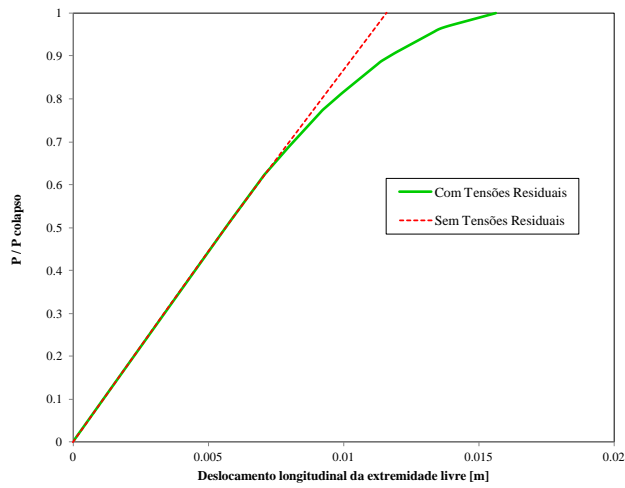


Figura 3.10: Trajectória de equilíbrio da consola com tensões residuais

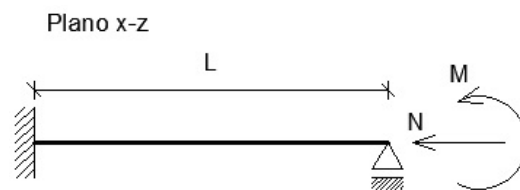


Figura 3.11: Geometria e carregamento das colunas-viga apoiadas-encastadas



conduz a cargas de colapso ligeiramente superiores, mas ambos os resultados são essencialmente coincidentes.

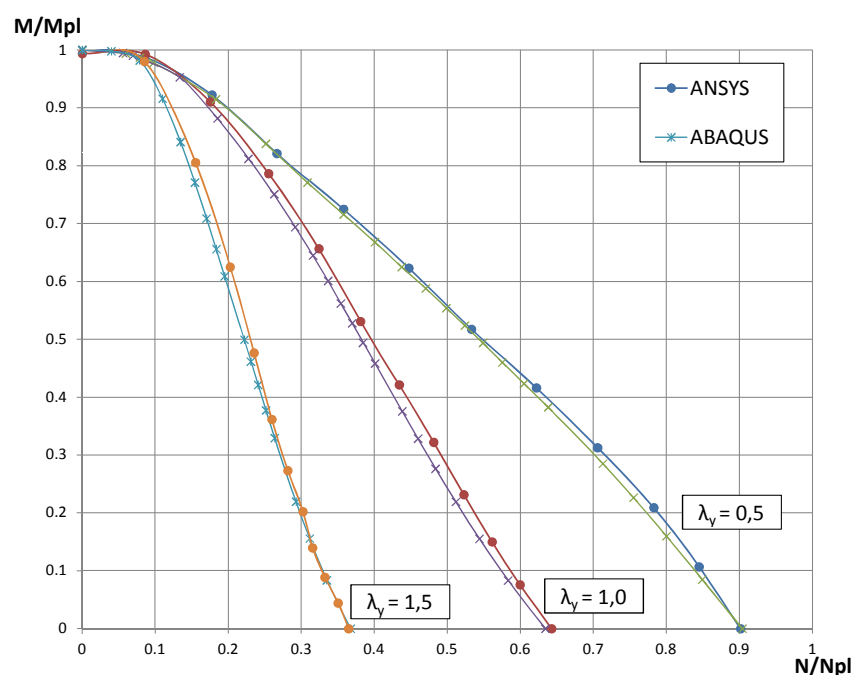


Figura 3.12: Diagramas de interacção das colunas-viga apoiadas-encastadas - comportamento plano

### 3.3.3 Colunas-viga apoiadas-apoiadas - comportamento plano

O presente exemplo de validação e os seguintes, apresentados nas secções 3.3.5 e 3.3.4, extraíram-se de um estudo realizado com um elemento finito baseado na teoria geometricamente exacta de vigas Reissner-Simo, para ilustrar as potencialidades deste tipo de elementos na determinação de trajectórias de equilíbrio e cargas de colapso (Gonçalves et al., 2009). Estes exemplos são considerados *benchmark problems*.



Figura 3.13: Geometria e carregamento das colunas-viga apoiadas-apoiadas - comportamento plano

O terceiro exemplo consiste na coluna-viga da figura 3.13, simplesmente apoiada e contraventada lateralmente, sujeita a uma força de compressão e a um momento aplicado segundo o eixo de maior inércia, numa extremidade. Novamente, utilizou-se o perfil HEB300 de aço S235 com tensões residuais e com as imperfeições geométricas aplicadas apenas numa direcção. Vários comprimentos foram analisados, correspondendo cada um a uma esbelteza diferente  $\bar{\lambda}_y = 0,5; 1,0$  e  $1,5$ .

Os resultados obtidos no ANSYS podem ser comparados na figura 3.14 com os resultados obtidos por Ofner (1997) e por Gonçalves et al. (2009), observando-se uma muito boa concordância, conduzindo o ANSYS a cargas de colapso ligeiramente superiores.

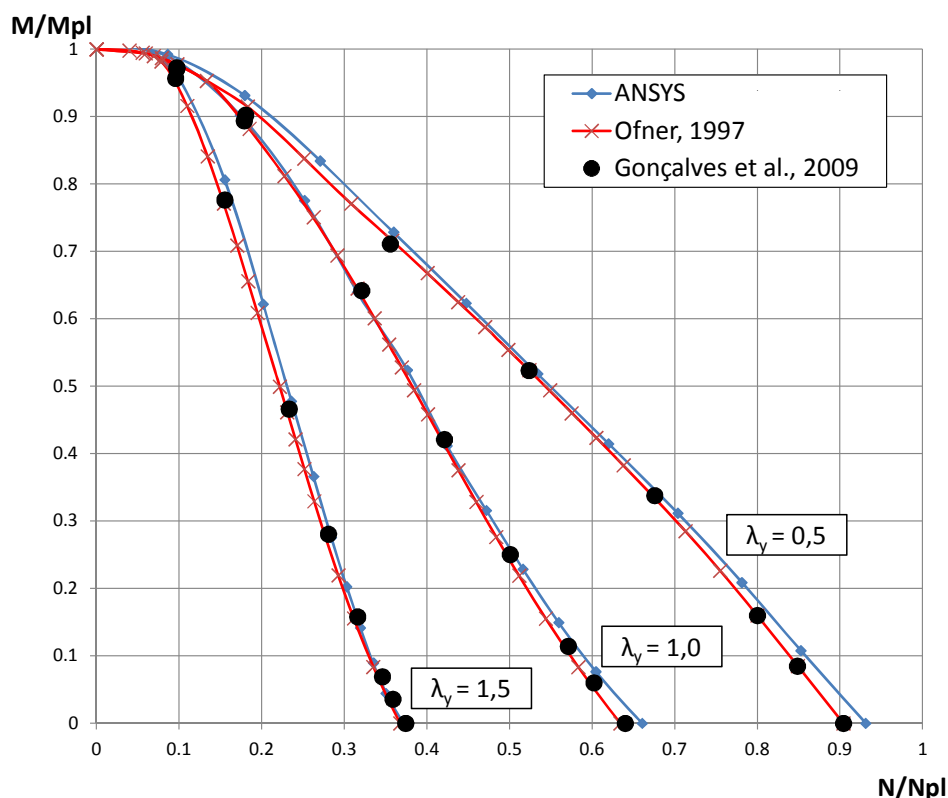


Figura 3.14: Diagramas de interacção das colunas-viga apoiadas-apoiadas - comportamento plano

### 3.3.4 Coluna-viga apoiada-apoiada - comportamento espacial

Este exemplo é idêntico ao anterior, excepto nas condições de apoio. A fim de se observar o comportamento espacial da viga, retirou-se o contraventamento lateral. O esquema de carregamento também foi alterado, deixando de se aplicar um momento na extremidade móvel, passando a aplicar-se uma força ( $F_z$ ) a meio vão da viga no centro de corte da secção, segundo a direcção do eixo de menor inércia, como demonstra a figura 3.15. As tensões residuais são idênticas às do caso anterior, mas as imperfeições geométricas serão aplicadas em ambas as direcções principais de inércia da secção.

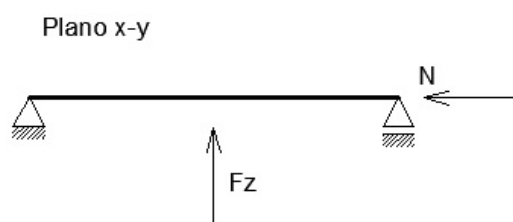


Figura 3.15: Geometria e carregamento das colunas-viga apoiadas-apoiadas - comportamento espacial

Os resultados do ANSYS são comparados com os resultados obtidos por Gonçalves et al. (2009) e Mendonça (2006) na figura 3.16, onde se observa novamente que as curvas são praticamente coincidentes.

### 3.3.5 Pórtico - comportamento plano (Vogel, 1985)

O pórtico de Vogel (1985) é também um clássico *benchmark problem*, tendo sido analisado por vários autores. Na figura 3.17 pode-se observar a geometria do pórtico, assim como a falta de verticalidade dos montantes ( $\psi_0 = L/400$ ). As tensões residuais são idênticas às utilizadas previamente, apesar do perfil da viga horizontal ser um HEB340, o procedimento de aplicação de tensões residuais e imperfeições geométricas é idêntico ao de um HEB300. A lei material é representada na figura 3.18, a qual inclui endurecimento.

Na figura 3.19 comparam-se as trajectórias de equilíbrio obtidas no ANSYS com as de outros autores. Cada um utilizou tipos de elementos finitos diferentes na modelação numérica do pórtico: Avery e Mahendran (2000) utilizaram elementos de casca; Ziemian (1993) e Vogel (1985) e Gonçalves et al.(2009) idêntico ao presente trabalho, utilizaram elementos finitos de barra. Observa-se que os resultados do ANSYS estão em excelente concordância, embora as cargas de colapso obtidas sejam ligeiramente inferiores às dos restantes autores.

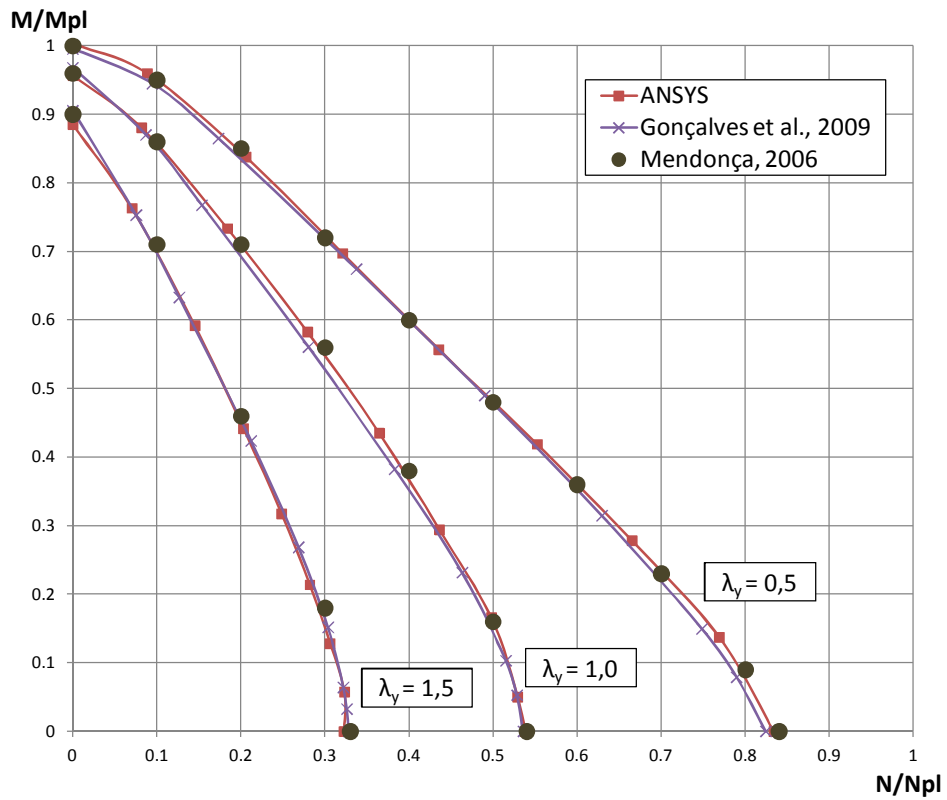


Figura 3.16: Diagramas de interação das colunas-viga apoiadas-apoiadas - comportamento espacial

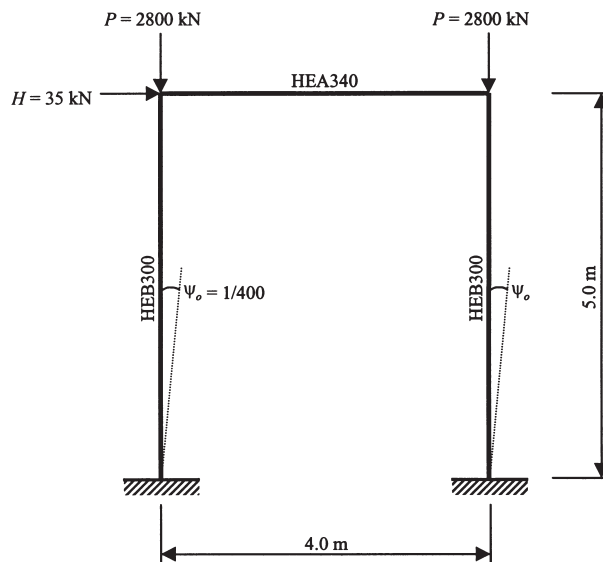


Figura 3.17: Geometria e carregamento do pórtico de Vogel (Avery e Mahendran, 2000)

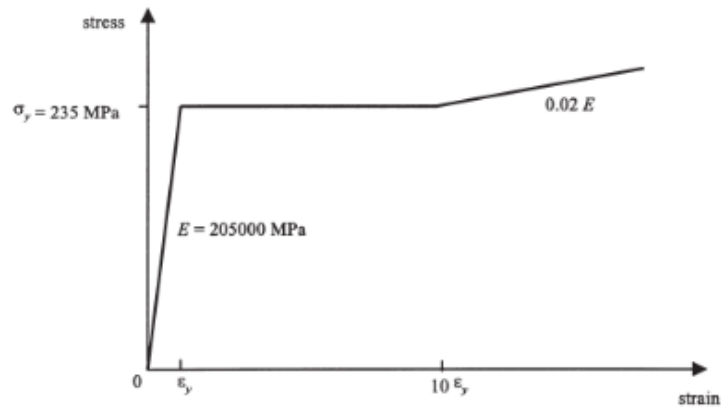


Figura 3.18: Lei constitutiva do aço para o pórtico de Vogel (Avery e Mahendran, 2000)

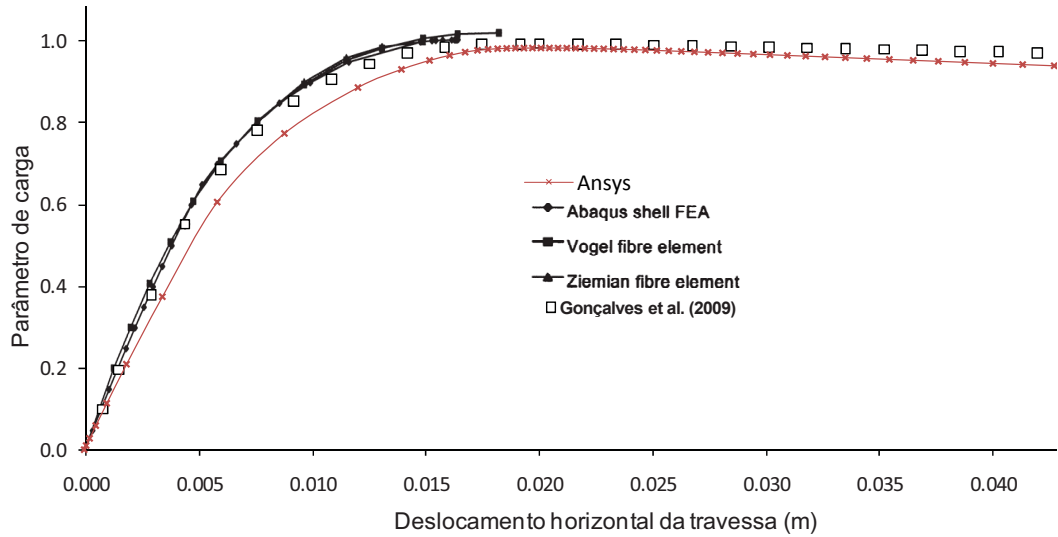


Figura 3.19: Trajectórias de equilíbrio do pórtico de Vogel



## Capítulo 4

# Estudo paramétrico

### 4.1 Introdução

No presente capítulo apresentam-se os resultados de um estudo paramétrico relativo à resistência à encurvadura de vigas de aço sujeitas a flexão desviada. Em particular, afere-se a precisão das equações de interacção do EC3, por comparação com resultados obtidos através de análises fisicamente e geometricamente não-lineares executadas no programa ANSYS, utilizando os elementos finitos Beam189, descritos no Capítulo 3.

Na secção 4.2 apresenta-se a metodologia de análise, define-se o âmbito do estudo e descreve-se detalhadamente a metodologia seguida para aferir a precisão e segurança dos dois conjuntos de fórmulas propostas no EC3 (CEN,2005) já detalhadamente abordadas na secção 2.3.

Por fim, apresentam-se os resultados do estudo paramétrico, comparando os valores da resistência última obtidos através dos dois conjuntos de fórmulas propostas no EC3 (CEN,2005), os valores considerados "exactos" obtidos pelo programa ANSYS e, por fim, os resultados obtidos com uma fórmula proposta, baseada nos resultados da secção 2.2.

### 4.2 Metodologia de análise

Conforme já se referiu, o estudo efectuado neste trabalho restringe-se ao caso de vigas sem contraventamento lateral, susceptíveis à deformação por torção, com as seguintes características:

- as secções transversais são em I, duplamente simétricas;
- as secções transversais são da classe 1 ou 2, o que implica que a resistência da secção é plástica;
- os raios de transição banzo-alma não são considerados, dado que o ANSYS não os permite considerar na definição da secção transversal;
- todos os elementos de barra modelados no ANSYS foram discretizadas em elementos de igual comprimento, como explicado no Capítulo 3.

À semelhança de outros estudos desta natureza (Boissonnade et al., 2006; Gonçalves et al., 2009), os perfis escolhidos são o HEB300 e o IPE200 (sem raio de transição banzo alma). No primeiro caso

a secção apresenta uma rigidez de flexão em torno do eixo de menor inércia significativa, o que já não se verifica no segundo caso. As geometrias das secções escolhidas são representadas na figura 4.2 e as respectivas propriedades geométricas apresentam-se na tabela 4.1. Finalmente, a tabela 4.2 mostra os valores característicos dos vários esforços resistentes. Nestas tabelas, os valores entre parêntesis foram retirados das tabelas técnicas e são incluídos para efeitos de comparação, dado que têm em consideração o raio de transição banzo-alma.

O material é o aço S235 ( $f_y = 235$  MPa;  $E = 210$  GPa e  $\nu = 0,3$ ) e a lei constitutiva uniaxial adoptada é a representada na figura 4.1.

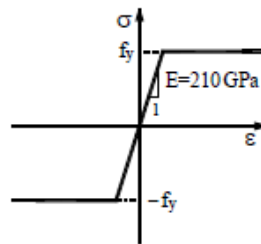


Figura 4.1: Lei constitutiva uniaxial adoptada para o aço

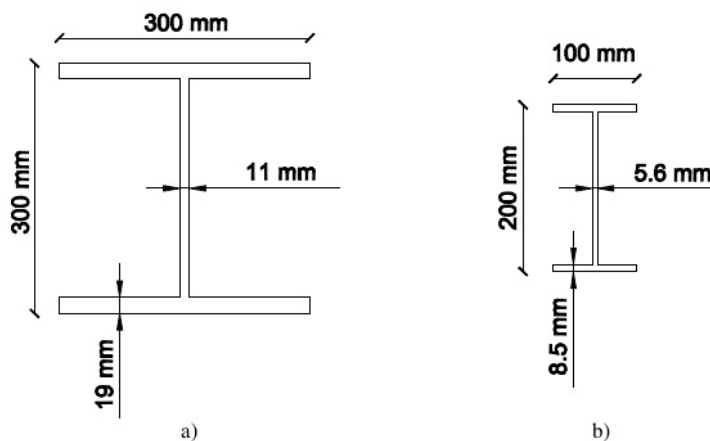


Figura 4.2: Geometria da secção transversal dos Perfis a) HEB300 e b) IPE200

Foram analisadas vigas com três condições de apoio e esquemas de carregamento, apresentando-se esquematicamente os casos considerados na figura 4.3. Refira-se que os encastramentos restringem todos os deslocamentos e rotações, incluindo o empenamento. Já os apoios, fixos ou móveis, impedem apenas os deslocamentos apropriados e a rotação de torção.



Tabela 4.1: Propriedades geométricas, módulos de flexão dos perfis

	<i>HEB300</i>	<i>IPE200</i>
$A (m^2)$	0,0143 (0,0149)	0,00272 (0,00284)
$I_y (m^4)$	$241,870 \times 10^{-6}$ ( $251,702 \times 10^{-6}$ )	$18,456 \times 10^{-6}$ ( $19,430 \times 10^{-6}$ )
$I_z (m^4)$	$85,530 \times 10^{-6}$ ( $85,631 \times 10^{-6}$ )	$1,419 \times 10^{-6}$ ( $1,424 \times 10^{-6}$ )
$I_w (mm^6)$	$1,688 \times 10^{12}$ ( $1,688 \times 10^{12}$ )	$1,301 \times 10^{10}$ ( $1,299 \times 10^{10}$ )
$I_t (mm^4)$	$1.488 \times 10^6$ ( $1.850 \times 10^6$ )	$5.165 \times 10^4$ ( $6.981 \times 10^4$ )
$W_{el,y} (mm^3)$	$1,612 \times 10^6$ ( $1,678 \times 10^6$ )	$1,846 \times 10^5$ ( $1,943 \times 10^5$ )
$W_{el,z} (mm^3)$	$5,702 \times 10^5$ ( $5,709 \times 10^5$ )	$2,839 \times 10^4$ ( $2,847 \times 10^4$ )
$W_{pl,y} (mm^3)$	$1,790 \times 10^6$ ( $1,869 \times 10^6$ )	$2,097 \times 10^5$ ( $2,206 \times 10^5$ )
$W_{pl,z} (mm^3)$	$8,629 \times 10^5$ ( $8,701 \times 10^5$ )	$4,393 \times 10^4$ ( $4,461 \times 10^5$ )

Tabela 4.2: Esforços resistentes dos perfis metálicos

Perfil	$N_{Rk} (kN)$	$M_{Rk,y} (kNm)$	$M_{Rk,z} (kNm)$
<i>HEB300</i>	3356,3 (3503,9)	420,8 (439,2)	202,8 (204,5)
<i>IPE200</i>	640,3 (669,3)	49,3 (51,8)	10,3 (10,5)

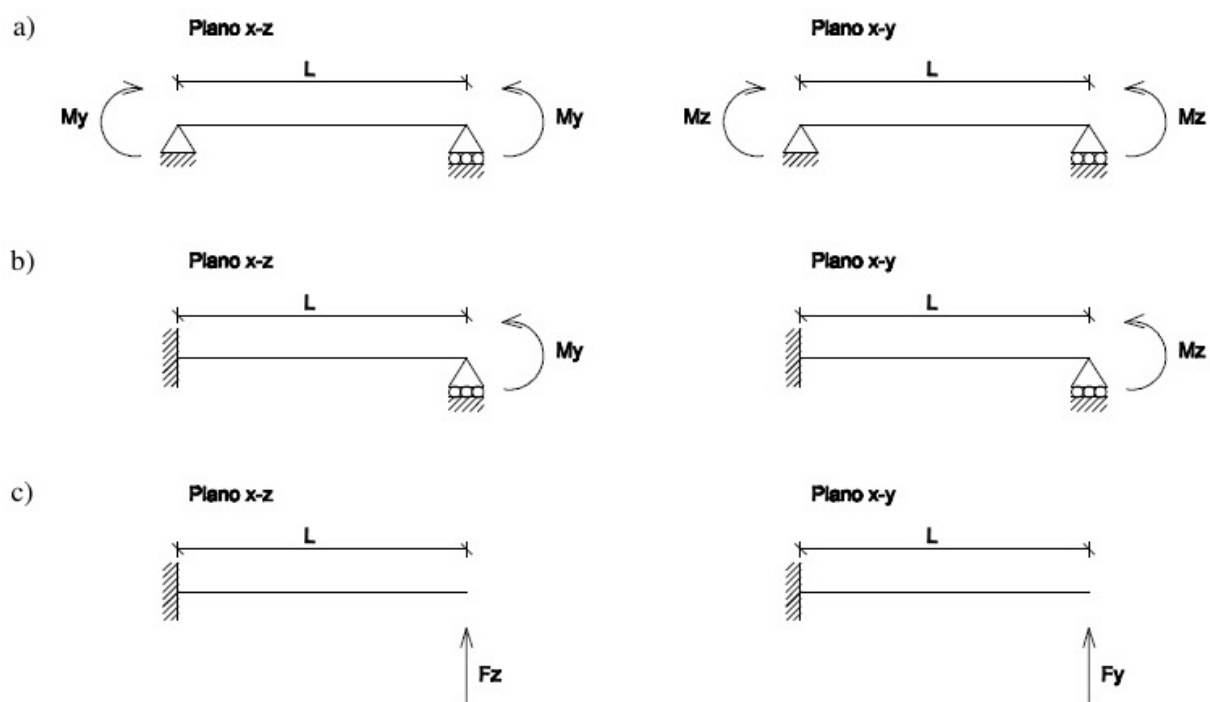


Figura 4.3: Condições de apoio e carregamento considerados: a) Apoiado-apoiado, b) Encastrado-apoiado e c) Consola

Em todos os casos foram tidas em conta as imperfeições geométricas iniciais simuladas através de flechas  $e_0 = L/1000$  em ambas as direcções principais de flexão, sendo  $L$  o comprimento da viga, tal como representado na figura 4.4.

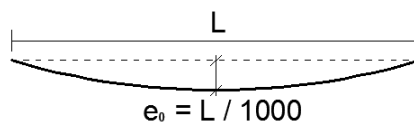


Figura 4.4: Imperfeições geométricas (Gonçalves et al.,2009)

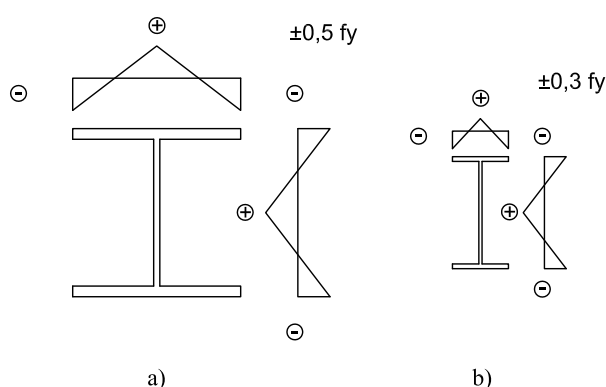


Figura 4.5: Tensões residuais consideradas para o perfil: a) HEB300 b) IPE200

Foram também introduzidas tensões residuais, como explicado previamente na secção 3.2.4, no entanto, para o perfil IPE200 as tensões residuais tomam um valor diferente do perfil HEB300 de acordo com os diagramas da figura 4.5: enquanto que para o HEB300 as tensões residuais máximas valem 50% da tensão de cedência  $f_y$ , para o IPE200 os valores máximos valem apenas 30% de  $f_y$ . É de referir que estas distribuições de tensões residuais estão de acordo com o recomendado na bibliografia (Boissonnade et al., 2006).

Os comprimentos das vigas foram escolhidos de forma a obter uma gama relativamente alargada de esbeltezas normalizadas para a instabilidade lateral por flexão-torção ( $\bar{\lambda}_{LT}$ ), nomeadamente esbeltezas iguais a 0,5, 1,0, 1,5 e 2,5. Recorde-se que o cálculo desta esbelteza e respectivos comprimentos das vigas através dos  $M_{cr}$  obtidos pelo programa LTBEAM (CTICM, 2011), já foi explicado na secção 3.2.8.

### 4.3 Resultados obtidos no programa ANSYS

Na figura 4.6 encontram-se representadas as curvas de resistência obtidas com o ANSYS para cada caso considerado (ver também figura 4.3). Cada um dos seis gráficos contém todos os resultados

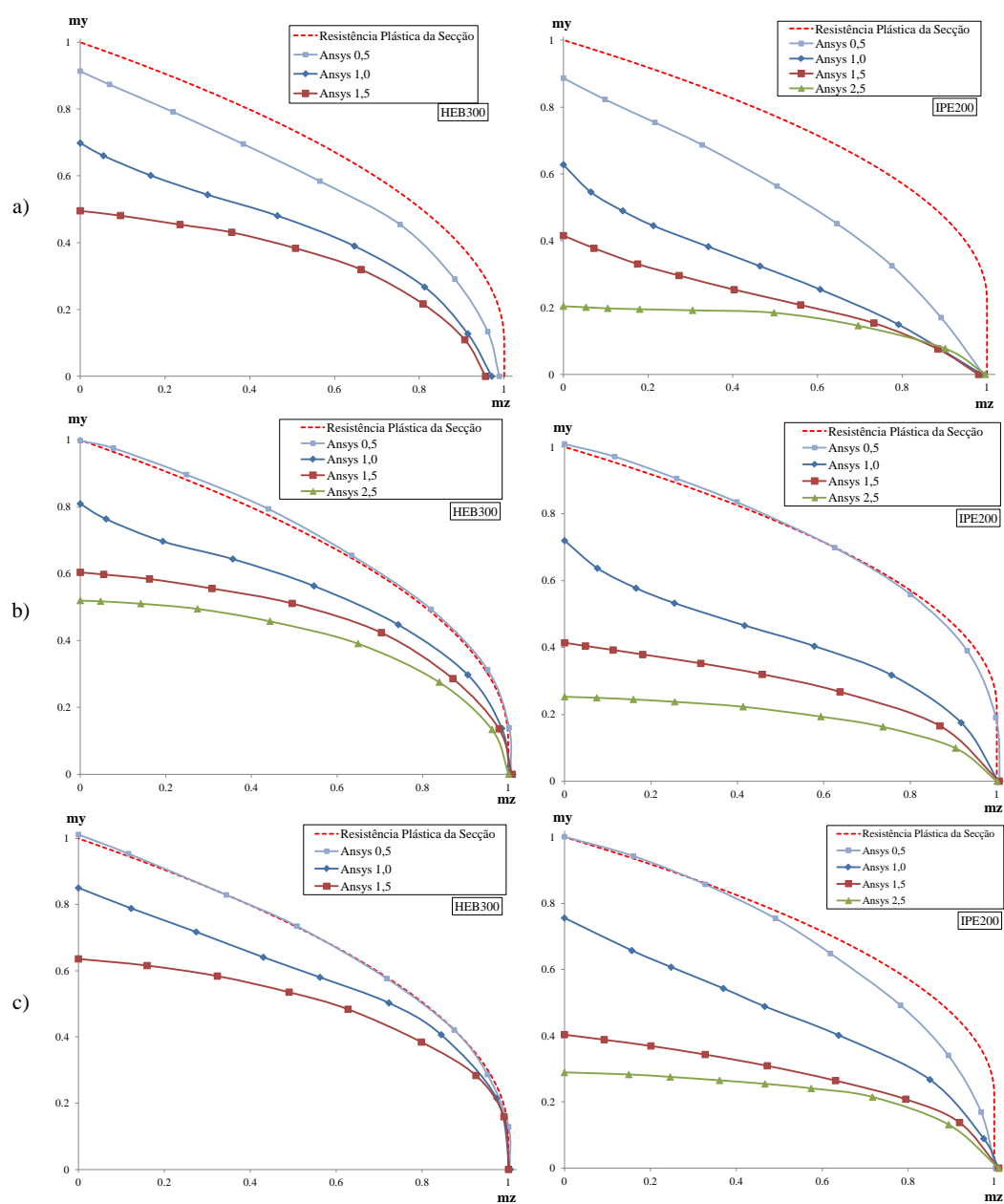


Figura 4.6: Curvas de resistência obtidas no ANSYS para os casos considerados: a) apoiado-apoiado, b) encastrado-apoiado e c) consola

associados a um determinado perfil e uma condição de apoio. Para além disso, representa-se a curva da resistência plástica da secção, para efeitos de comparação.

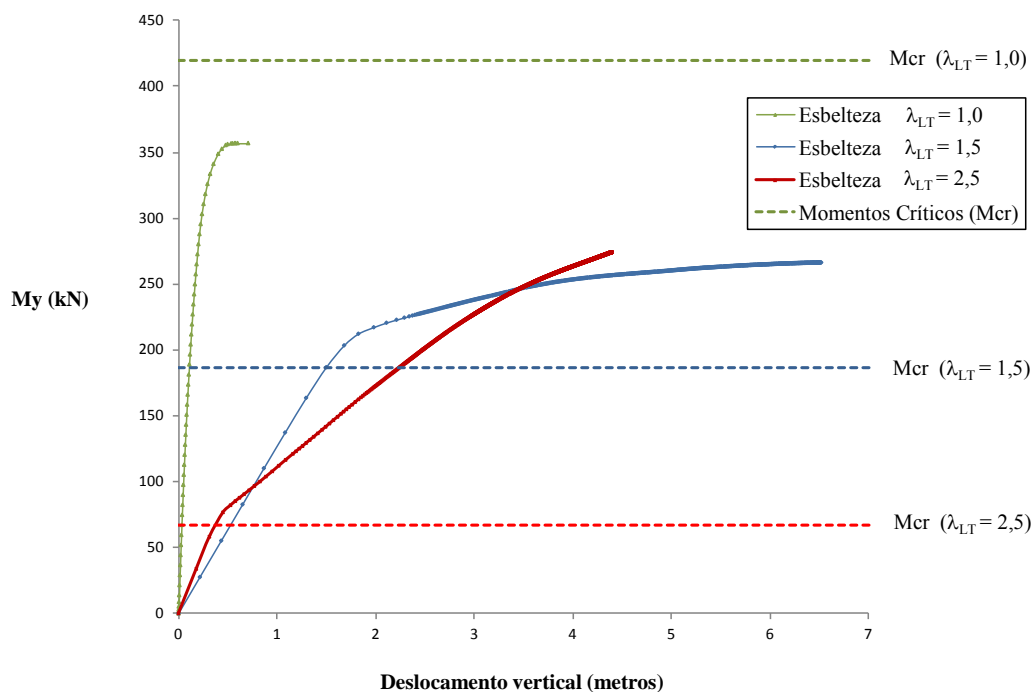


Figura 4.7: Trajectórias de carga/deslocamento do perfil HEB300 do caso viga em consola

Nos casos apoiado-apoiado e da viga em consola não se apresentam as curvas de resistência correspondentes a  $\bar{\lambda}_{LT} = 2,5$ , dado que se obtiveram valores superiores aos obtidos para  $\bar{\lambda}_{LT} = 1,5$ , tal como ilustram as trajectórias de equilíbrio apresentadas nas figuras 4.7 e 4.8, obtidas para  $m_z = 0$  para o perfil HEB300. Na verdade, os valores obtidos são mesmo significativamente superiores aos fornecidos pelo EC3 (ver secção 4.4) e, portanto, não foram incluídos na presente análise. O estudo aprofundado deste resultado paradoxal constitui um dos desenvolvimentos futuros propostos no capítulo 5.1, mas deve desde já salientar-se que, para os casos com esbelteza  $\bar{\lambda}_{LT} = 1,5/2,5$  para o HEB300 e para os casos com  $\bar{\lambda}_{LT} = 2,5$  para o IPE200, a resistência última obtida no ANSYS é mesmo superior ao  $M_{cr}$  calculado pelo LTBEAM, conforme se pode observar nas figuras 4.7 e 4.8.

Relativamente aos resultados apresentados na figura 4.6, a comparação das curvas obtidas permite concluir o seguinte:

- (i) Para valores reduzidos de  $\bar{\lambda}_{LT}$ , naturalmente, a curva é próxima da curva da resistência da secção, o que quer dizer que os efeitos da encurvadura são pouco significativos.

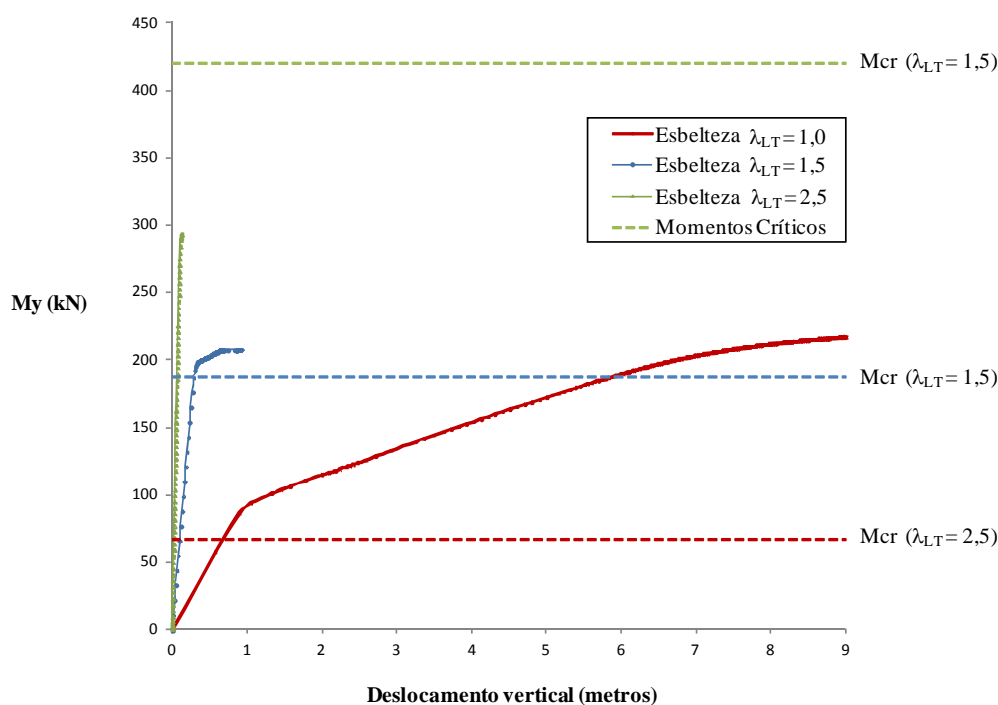


Figura 4.8: Trajectórias de carga/deslocamento do perfil HEB300 da viga apoiada-apoiada

- (ii) A concavidade das curvas é em geral voltada “para dentro”, mas para  $\bar{\lambda}_{LT} = 1$  observa-se que a curva exibe uma ligeira dupla curvatura (menos evidente no caso da viga em consola), com a curvatura “para fora” a surgir para valores reduzidos de  $m_y$ .
- (iii) Existe uma relativa coerência entre as curvas obtidas para os casos apoiado-encastado e consola (para cada perfil), em particular nos valores de  $m_y$  obtidos para  $m_z = 0$ . No entanto, para o caso simplesmente apoiado obtêm-se valores de  $m_z$  algo inferiores aos dos restantes casos. Este assunto será discutido na secção seguinte.
- (iv) Nos casos encastado-apoiado e consola tem-se sempre  $m_z = 1$  para  $m_y = 0$ . Contudo, no caso apoiado-apoiado verifica-se um ligeiro decréscimo de  $m_z$ , em particular para o perfil HEB300 e para maiores valores da esbelteza. No entanto, este decréscimo não excede 3%.

#### 4.4 Comparação ANSYS/EC3

O coeficiente de redução para encurvadura lateral ( $\chi_{LT}$ ) depende directamente da esbelteza de flexão-torção ( $\bar{\lambda}_{LT}$ ), e cada curva de encurvadura associada. Para o perfil HEB300 a curva é a *a* e para o perfil IPE200 é a curva *b*. Na figura 4.9 representam-se estas curvas e na tabela 4.3 encontram-se os valores de  $\chi_{LT}$  associados a cada valor da esbelteza utilizada no estudo paramétrico.

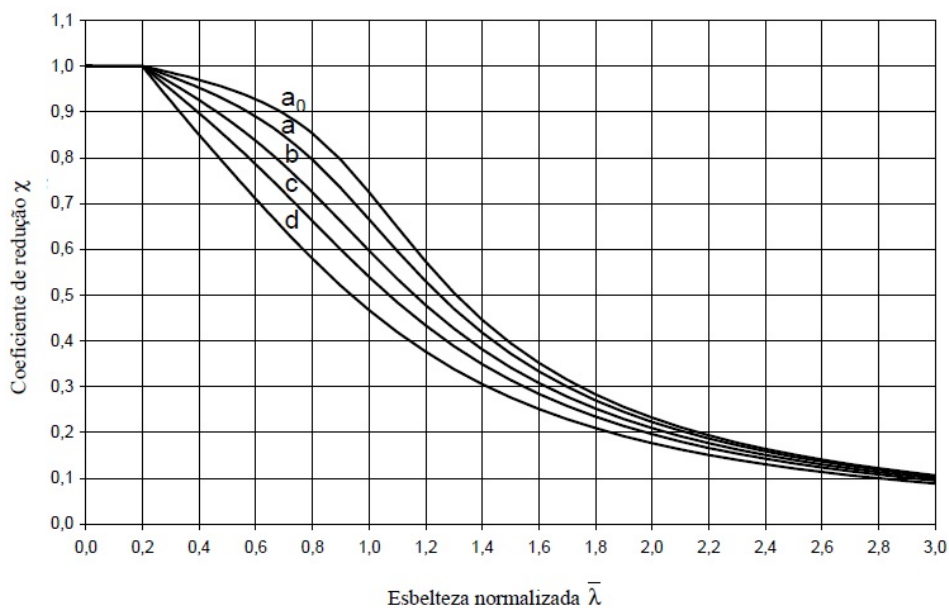


Figura 4.9: Curvas de encurvadura [extraído do EC3]

Tabela 4.3: Coeficientes de redução para encurvadura lateral obtidos pelo EC3

$\bar{\lambda}_{LT}$	HEB300	IPE200
0,5	$\chi_{LT} = 0,924$	$\chi_{LT} = 0,884$
1,0	$\chi_{LT} = 0,666$	$\chi_{LT} = 0,598$
1,5	$\chi_{LT} = 0,374$	$\chi_{LT} = 0,343$
2,5	$\chi_{LT} = 0,147$	$\chi_{LT} = 0,140$

Tabela 4.4: Valores de  $\chi_{LT}$  obtidos no ANSYS e diferenças relativas para os valores do EC3 (caso apoiado-apoiado)

$\bar{\lambda}_{LT}$	HEB300 (Diferença relativa%)	IPE200 (Diferença relativa %)
0,5	$\chi_{LT} = 0,913$ (1,2%)	$\chi_{LT} = 0,887$ (0,3%)
1,0	$\chi_{LT} = 0,698$ (4,8%)	$\chi_{LT} = 0,628$ (5,0%)
1,5	$\chi_{LT} = 0,495$ (32,5%)	$\chi_{LT} = 0,415$ (21,2%)
2,5		$\chi_{LT} = 0,204$ (46,1%)

Tabela 4.5: Valores de  $\chi_{LT}$  obtidos no ANSYS e diferenças relativas para os valores do EC3 (caso encastrado-apoiado)

$\bar{\lambda}_{LT}$	HEB300 (Diferença relativa%)	IPE200 (Diferença relativa%)
0,5	$\chi_{LT} = 0,999$ (8,1%)	$\chi_{LT} = 1,009$ (14,1%)
1,0	$\chi_{LT} = 0,810$ (21,6%)	$\chi_{LT} = 0,720$ (20,4%)
1,5	$\chi_{LT} = 0,604$ (61,7%)	$\chi_{LT} = 0,414$ (20,8%)
2,5	$\chi_{LT} = 0,520$ (254,5%)	$\chi_{LT} = 0,253$ (81,0%)

Tabela 4.6: Valores de  $\chi_{LT}$  obtidos no ANSYS e diferenças relativas para os valores do EC3 (consola)

$\bar{\lambda}_{LT}$	HEB300 (Diferença relativa%)	IPE200 (Diferença relativa%)
0,5	$\chi_{LT} = 1,012$ (9,5%)	$\chi_{LT} = 1,001$ (13,2%)
1,0	$\chi_{LT} = 0,850$ (27,7%)	$\chi_{LT} = 0,756$ (26,4%)
1,5	$\chi_{LT} = 0,636$ (70,2%)	$\chi_{LT} = 0,403$ (17,7%)
2,5		$\chi_{LT} = 0,289$ (106,8%)

As diferenças registadas entre os valores de  $\chi_{LT}$  obtidos no ANSYS e no EC3 foram calculadas, encontram-se nas tabelas 4.4, 4.5 e 4.6. A menor diferença regista-se para as esbeltezas mais baixas, e com o aumento da esbelteza, as diferenças relativas aumentam. Para o caso simplesmente apoiada, a diferença é, substancialmente menor, (quando comparada com os outros dois casos). O  $\chi_{LT}$  obtido no Ansys, em todos os casos, sobrestima o  $\chi_{LT}$  das curvas de encurvadura do EC3. Os casos para os quais a diferença relativa é superior a 30% são os casos que se obteve uma carga de colapso superior ao momentos crítico ( $M_{cr}$ ) referidos na secção 4.3.

De modo a ser possível obter as curvas de interacção  $m_y - m_z$  de acordo com os dois métodos do EC3, recorreu-se ao programa de cálculo automático Microsoft Office Excel (Microsoft, 2007). Criou-se uma folha de cálculo para cada método, que, preenchendo os dados necessários (geometria da secção transversal, propriedades do material utilizado,  $M_{cr}$  e esbeltezas  $\bar{\lambda}_y$ ,  $\bar{\lambda}_z$  e  $\bar{\lambda}_{LT}$  correspondentes, entre outros), calcula automaticamente as curvas de interacção e todos os parâmetros necessários para a sua definição, (arbitrando os valores de  $m_z$ , obtêm-se os valores de  $m_y$  correspondentes).

As curvas de interacção do Método 1 exigiram a utilização da funcionalidade de programação de Macros, programadas em *Visual Basic for Applications* (VBA), devido à complexidade das expressões. A Macro incrementa iterativamente o valor de  $m_y$  para um dado valor de  $m_z$ , até ao valor máximo que verificar as equações de interacção A (2.15) e B (2.16) do EC3 para o Método 1.

Para o Método 2, devido à sua simplicidade, exprimiu-se as equações de interacção A e B em função de  $m_y$ . Variando  $m_z$ , obtêm-se os valores de  $m_y$  correspondentes.



Tabela 4.7: Comprimentos das vigas apoiadas-apoiadas

$\bar{\lambda}_{LT}$	HEB300	IPE200
0,5	$L = 4,35m$	$L = 1,28m$
1,0	$L = 11,90m$	$L = 3,15m$
1,5	$L = 24,80m$	$L = 6,20m$
2,5	$L = 68,00m$	$L = 16,40m$

#### 4.4.1 Vigas apoiadas-apoiadas

Na tabela 4.7 apresentam-se os comprimentos das vigas correspondentes a cada valor da esbelteza considerado. Para vigas apoiadas-apoiadas com momento uniforme, tem-se  $k_c = 1$  e  $C_{my,0} = C_{mz,0} = C_{my} = C_{mz} = 1$ . Quanto a  $C_{mLT}$ , para o Método 1 apresenta valores ligeiramente distintos para cada perfil, visto depender de  $a_{LT} = 1 - I_y/I_z$ , obtendo-se para o perfil HEB300  $C_{mLT} = 0,999$  e para o perfil IPE200  $C_{mLT} = 0,997$ . Para o Método 2  $C_{mLT} = 1,0$ .

As curvas de resistência obtidas com o ANSYS e as curvas do EC3 para  $\bar{\lambda}_{LT} = 0,5$  encontram-se representadas na figura 4.10. Ambos os métodos do EC3 fornecem resultados do lado da segurança, algo exageradamente no caso do Método 2. De facto, o Método 1 conduz, claramente, a uma melhor aproximação à curva de resistência do ANSYS. A propósito, tal como referido na secção 2.5.2, a curva do Método 1 é influenciada pelas equações A e B mas o Método 2 é apenas influenciado por uma equação, a equação B. É importante salientar que, para traçar as curvas de interacção fornecidas pelo EC3, se utilizaram os valores de  $\chi_{LT}$  fornecidos pelo Ansys.

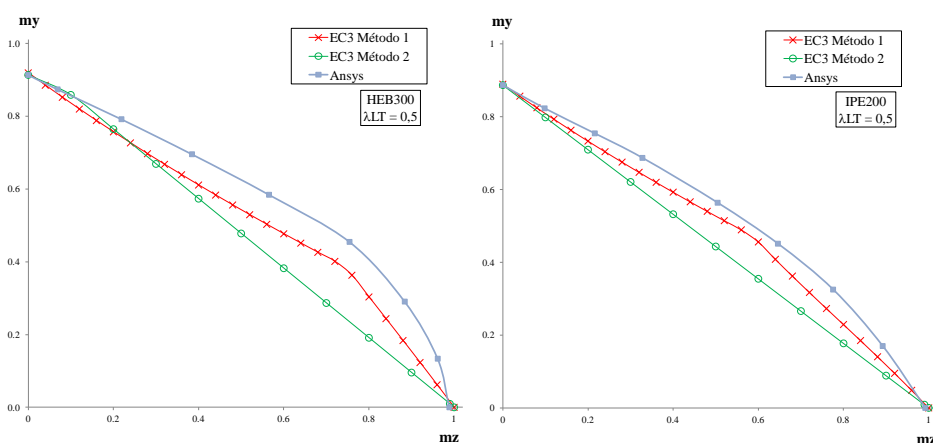


Figura 4.10: Curvas de resistência obtidas com o Ansys e o EC3 para vigas apoiadas-apoiadas e  $\bar{\lambda}_{LT} = 0,5$

Os resultados para  $\bar{\lambda}_{LT} = 1$  podem ser observados na figura 4.11. Neste caso a curva do Ansys exhibe dupla concavidade. Para o HEB300 observa-se que o Método 1 fornece melhores resultados

do que o Método 2, o qual conduz a estimativas da resistência demasiado conservativas. Para o IPE200 ambos os métodos fornecem resultados por vezes ligeiramente contra a segurança, embora seja de salientar que a curva do Método 1 exhibe também uma dupla concavidade que acompanha razoavelmente a curva do Ansys.

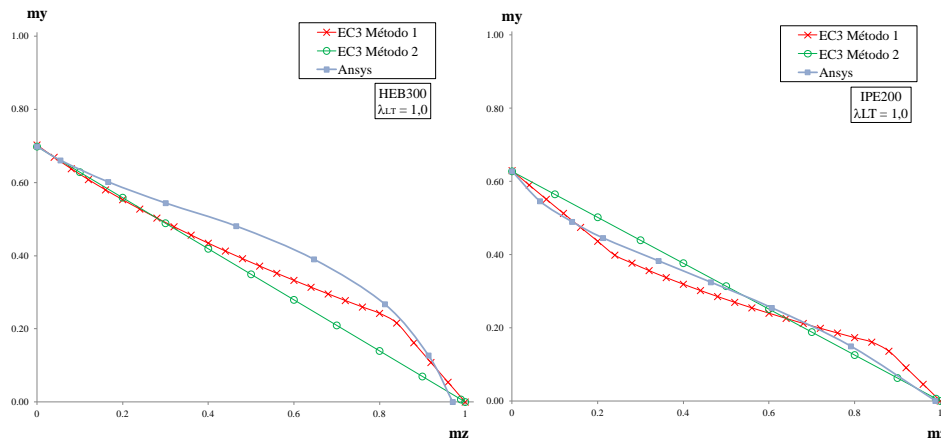


Figura 4.11: Curvas de resistência obtidas com o Ansys e o EC3 para vigas apoiadas-apoiadas e  $\bar{\lambda}_{LT} = 1,0$

Na figura 4.12 apresentam-se os resultados para  $\bar{\lambda}_{LT} = 1,5$ . Neste caso os resultados são em tudo semelhantes aos obtidos para  $\bar{\lambda}_{LT} = 1,0$ , sendo de referir que diminuem os casos contra a segurança verificados no Método 1 para o IPE200.

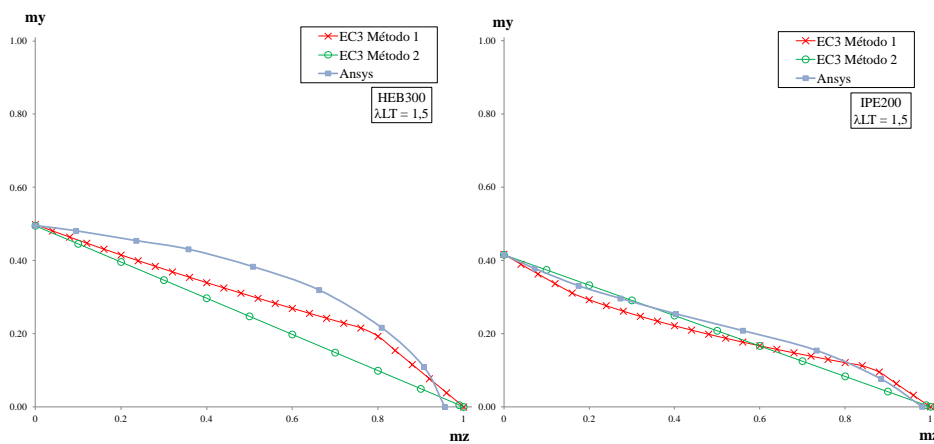


Figura 4.12: Curvas de resistência obtidas com o Ansys e o EC3 para vigas apoiadas-apoiadas e  $\bar{\lambda}_{LT} = 1,5$

Finalmente, apresentam-se na figura 4.12 os resultados obtidos para  $\bar{\lambda}_{LT} = 2,5$  e IPE200.

Observa-se que, as curvas do EC3 estão agora sempre do lado da segurança, sendo os melhores resultados obtidos com o Método 1.

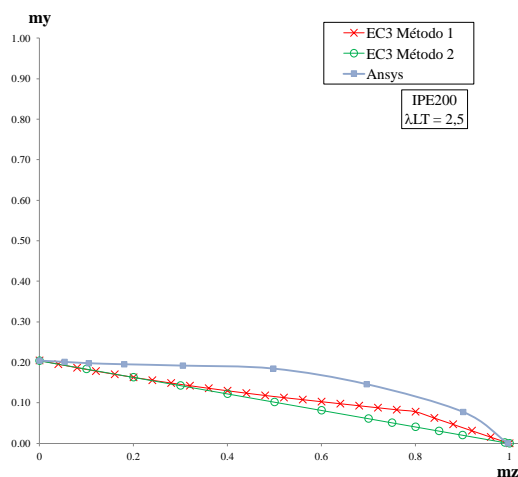


Figura 4.13: Curvas de resistência obtidas com o Ansys e o EC3 para vigas apoiadas-apoiadas e  $\bar{\lambda}_{LT} = 2,5$

#### 4.4.2 Vigas encastradas-apoiadas

Os coeficientes de momento equivalente ( $C_m$ ) relacionam o momento máximo de primeira ordem com o momento máximo de segunda ordem. As expressões fornecidas no EC3 (ver tabelas 2.3 e 2.6), são contudo válidas apenas para elementos simplesmente apoiados, os quais foram calibrados para o caso de uma coluna-viga simplesmente apoiada (Gonçalves e Camotim, 2004; Boissonnade et al., 2006).

Para ilustrar este facto, na análise que se segue efectua-se sempre dois cálculos, um com os valores de  $C_m$  fornecidos pelo EC3 (ver tabelas 2.3 e 2.6) e outro com os  $C_m$  "corrigidos", todos iguais à unidade para ambos os métodos. Com os  $C_m$  "corrigidos" para o Método 1 tem-se  $C_{my,0} = C_{mz,0} = 1$  e para o Método 2 vem  $C_{my} = C_{mz} = C_{mLT} = 1$ . A razão para se adaptarem estes valores decorre do facto de a deformada de primeira ordem ser muito semelhante à forma do modo de crítico (Gonçalves e Camotim, 2004).

Segundo o EC3, no caso da viga encastrada-apoiada ( $\psi = -0,5$ ), tem-se  $k_c = 0,669$ , logo os coeficientes de momentos uniforme equivalente do Método 1 são  $C_{my,0} = C_{mz,0} = 0,685$ , que resulta em  $C_{my} = 1; C_{mz} = 0,685; C_{mLT}(HEB300) = 0,999$  e  $C_{mLT}(IPE200) = 0,997$ . Os coeficientes de momento equivalente para o Método 2 tomam os valores de  $C_{my} = C_{mz} = C_{mLT} = 0,4$ . Na tabela 4.8 encontram-se os comprimentos das vigas encastradas-apoiadas correspondente a cada esbelteza considerada.

Assim sendo na presente secção, para o caso da viga encastrada-apoiada, e na secção seguinte, da viga em consola, apresentam-se dois gráficos para cada caso. Em ambos os gráficos apresentam-se

Tabela 4.8: Comprimentos das vigas encastradas-apoiadas

$\bar{\lambda}_{LT}$	HEB300	IPE200
0,5	$L = 9,10m$	$L = 2,60m$
1,0	$L = 27,80m$	$L = 7,10m$
1,5	$L = 60,00m$	$L = 15,00m$
2,5	$L = 163,00m$	$L = 40,00m$

as curvas de interacção do EC3 e as curvas de resistência do ANSYS. No entanto, no gráfico superior, as curvas de interacção calcularam-se com os coeficientes de momento equivalente segundo o EC3 e, no gráfico inferior, com os coeficientes de momentos equivalente "corrigidos".

Para a esbelteza  $\bar{\lambda}_{LT} = 0,5$ , as curvas de interacção do EC3 obtidas com os coeficientes de momento equivalente segundo o EC3 são ambas muito condicionadas pela curva de resistência plástica da secção, como pode observar na figura 4.14.

As curvas com os coeficientes de momento equivalente "corrigido" subestimam muito a resistência do ANSYS, especialmente o Método 2. Neste caso, as equações de interacção do EC3 com os coeficientes de momento equivalente calculados pelo EC3, apresentam uma excelente aproximação às curvas de resistência do ANSYS, mas esta tendência que será invertida para as restantes esbeltezas.

Para a esbelteza  $\bar{\lambda}_{LT} = 1,0$ , como se pode observar na figura 4.15, as curvas de interacção com os coeficientes de momento equivalente do EC3 sobrestimam a resistência do ANSYS, em maior evidência para o perfil IPE200. No entanto, as curvas de interacção do EC3 com os coeficientes de momento equivalente "corrigidos" subestimam a curva de resistência do ANSYS, excepto no perfil IPE200 para  $m_y > 0,45$ . As curvas de interacção do EC3, com os coeficientes de momento equivalente "corrigidos" apresentam valores mais conservativos que com os coeficientes de momento equivalente do EC3.

Por fim, para as maiores esbeltezas  $\bar{\lambda}_{LT} = 1,5$  (figura 4.16) e  $\bar{\lambda}_{LT} = 2,5$  (figura 4.17), o resultado é semelhante para ambas. As curvas de interacção com o coeficientes de momento equivalente do EC3 sobrestimam as curvas de resistência do ANSYS. Com os momentos equivalentes "corrigidos", ambas as curvas de interacção subestimam as curvas de resistência do ANSYS, com o Método 1 a apresentar os melhores resultados.

Para o caso encastrado-apoiado, exceptuando para a esbelteza  $\bar{\lambda}_{LT} = 0,5$ , as equações de interacção do EC3 com os coeficientes de momento equivalente "corrigidos", apresentam, claramente, resultados mais conservativos, nunca comprometendo a segurança. O Método 1 tem curvas mais próximas dos resultados "exactos" do ANSYS que o Método 2. O facto de o Método 2 ser condicionado apenas por uma equação, é uma "desvantagem" notável. Este métodos com os coeficientes de momento equivalente do EC3 sobrestima em demasia as curvas do ANSYS, e com os coeficientes de momento equivalente corrigidos, subestima exageradamente a resistência obtida pelo ANSYS.

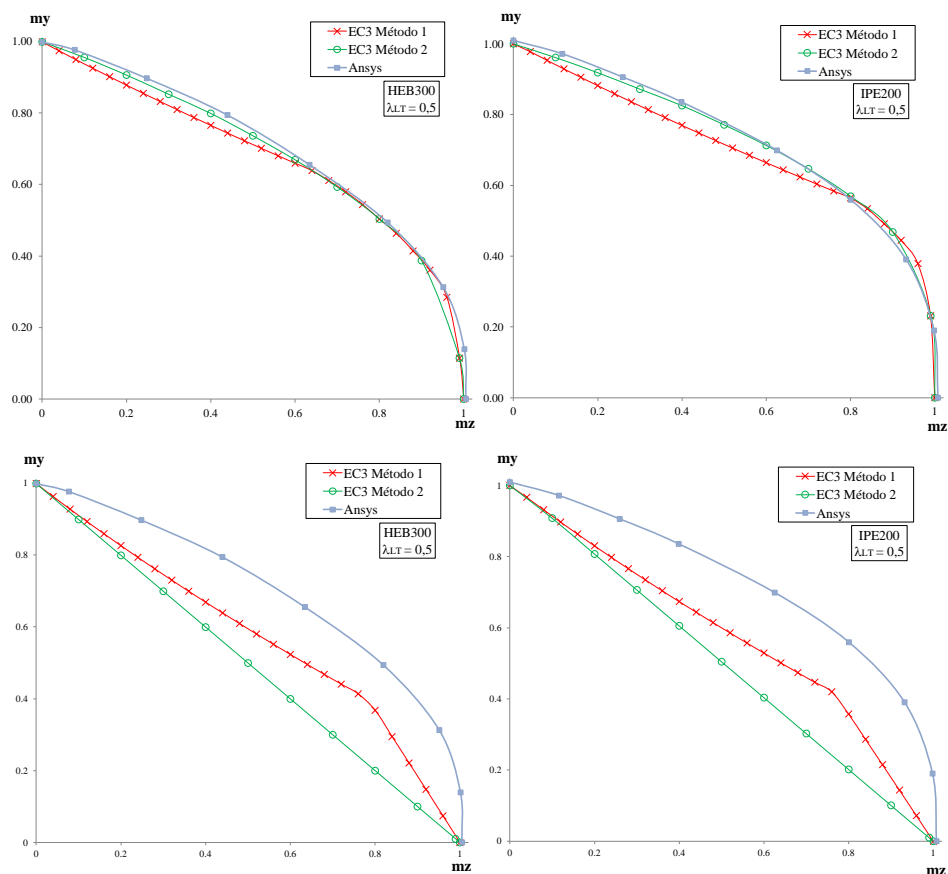


Figura 4.14: Curvas de resistência e equações de interação do EC3 de vigas encastradas-apoiadas com a esbelteza  $\bar{\lambda}_{LT} = 0,5$

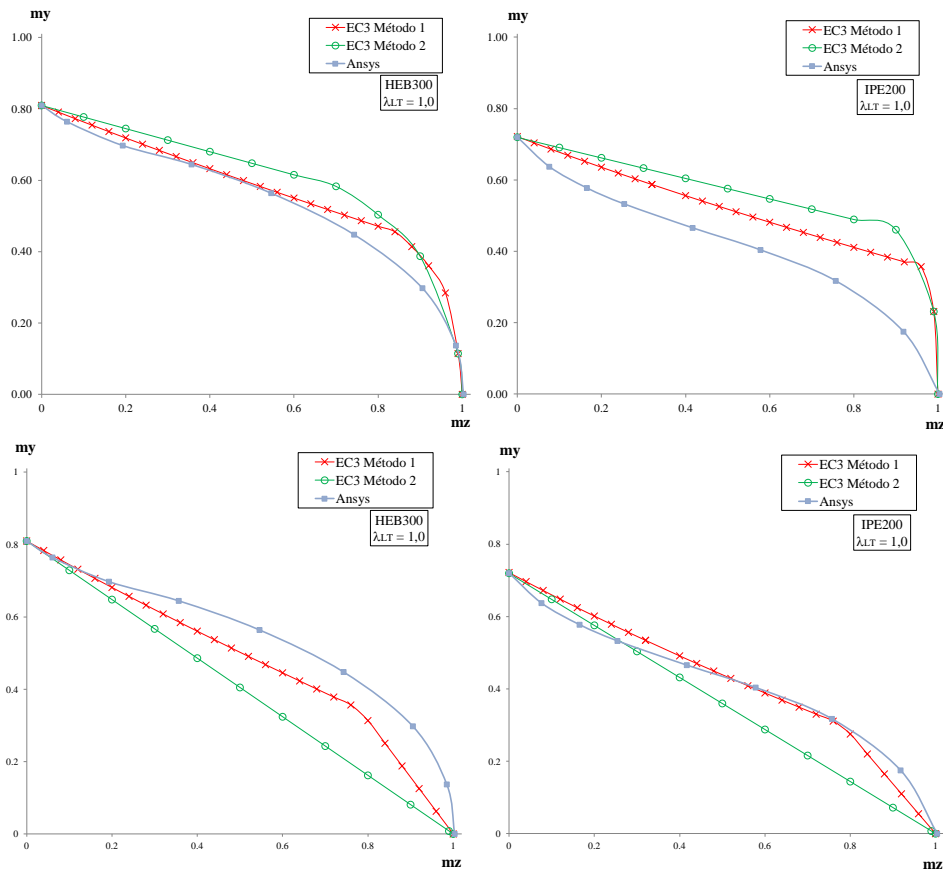


Figura 4.15: Curvas de resistência e equações de interacção do EC3 de vigas encastradas-apoiadas com  $\bar{\lambda}_{LT} = 1,0$

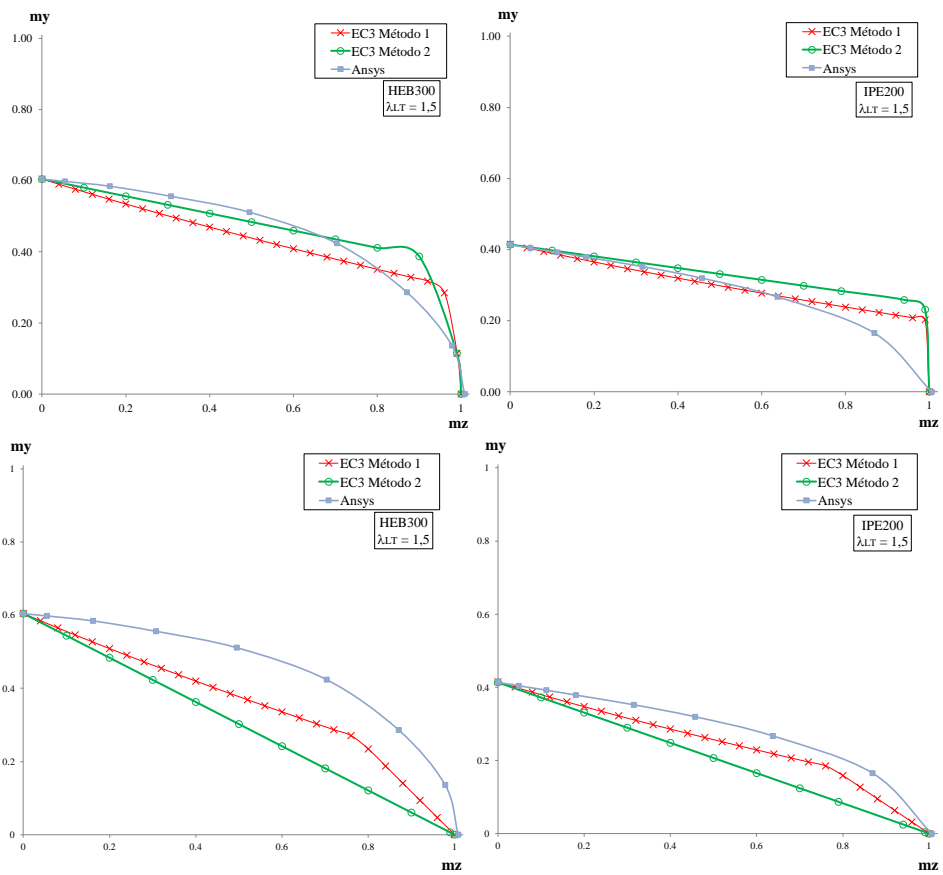


Figura 4.16: Curvas de resistência e equações de interação do EC3 de vigas encastradas-apoiadas com  $\bar{\lambda}_{LT} = 1,5$

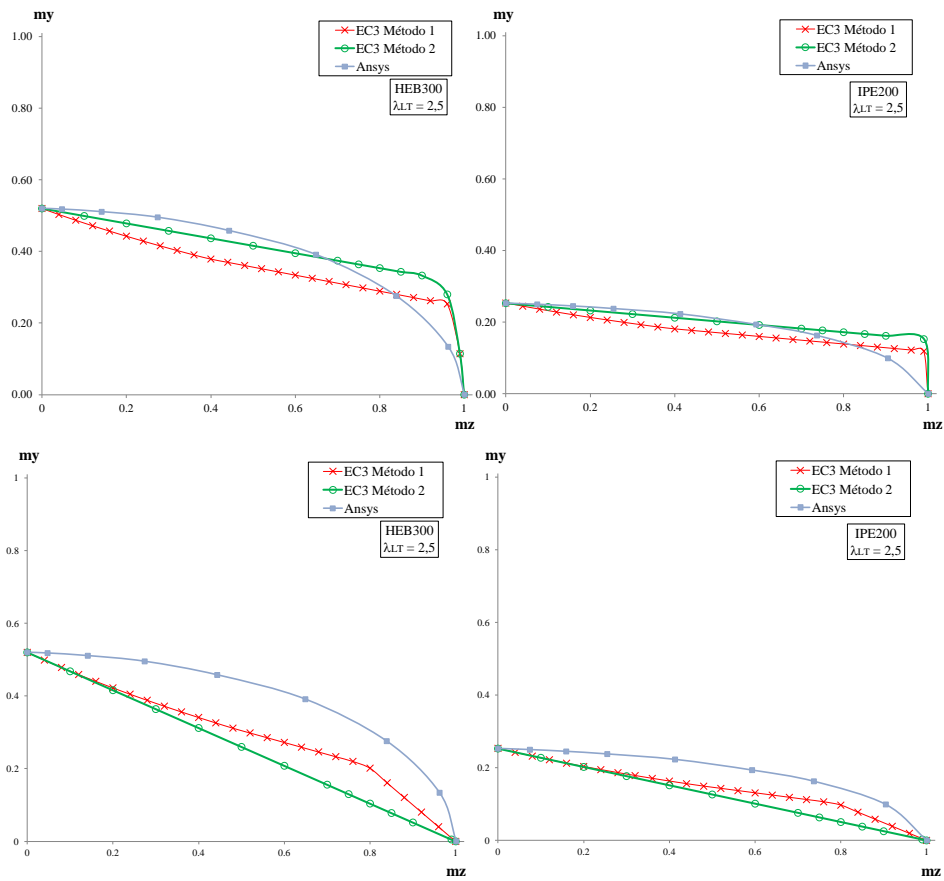


Figura 4.17: Curvas de resistência e equações de interação do EC3 de vigas encastradas-apoiadas com  $\bar{\lambda}_{LT} = 2,5$



Tabela 4.9: Comprimentos das vigas em consola

$\bar{\lambda}_{LT}$	HEB300	IPE200
0,5	$L = 6,20m$	$L = 1,77m$
1,0	$L = 17,30m$	$L = 4,65m$
1,5	$L = 34,50m$	$L = 8,90m$
2,5	$L = 90,00m$	$L = 22,20m$

### 4.4.3 Vigas em consola

Para uma consola com forças pontuais aplicadas na extremidade livre ( $\psi = 0$  e  $k_c = 0,752$ ) tem-se, para o Método 1,  $C_{m_y,0} = C_{m_z,0} = 0,790$ , que resulta nos coeficientes de momento equivalente  $C_{m_y,0} = 1$ ;  $C_{m_z,0} = 0,685$  e novamente  $C_{m_{LT}}(HEB300) = 0,999$  e  $C_{m_{LT}}(IPE200) = 0,997$ . Quanto ao Método 2 os coeficientes tomam o valor  $C_{m_y} = C_{m_z} = C_{m_{LT}} = 0,9$ , pois trata-se de um elemento com modos de encurvadura associados a deslocamentos laterais, ver Tabela 2.6. Recordando que os  $C_m$  do EC3 serão comparados com os  $C_m$  "corrigidos", que tomam todos o valor da unidade. Na tabela 4.9 encontram-se os comprimentos das vigas em consola correspondente a cada esbelteza considerada.

Na figura 4.18 representam-se os resultados para  $\bar{\lambda}_{LT} = 0,5$ . Tal como no caso encastrado-apoiado, ambas as curvas de resistência do EC3 atingem a curva da resistência da secção. Assim, as curvas de interação do EC3, com os coeficientes de momento equivalente calculados segundo o EC3, apresentam uma óptima aproximação às curvas de resistência do ANSYS. O Método 1 apresenta uma melhor aproximação que o Método 2, como se pode observar na figura 4.18. As curvas das equações de interação do EC3 com os coeficientes de momento equivalente corrigidos subestimam a resistência do ANSYS, contudo o Método 1 continua a apresentar uma melhor aproximação que o Método 2.

Para a esbelteza  $\bar{\lambda}_{LT} = 1,0$ , o Método 1 com os coeficientes de momentos equivalente do EC3 para o perfil IPE200 está contra a segurança, enquanto o Método 2, apesar de subestimar a resistência do ANSYS, está a favor da segurança, como se pode observar na figura 4.19. No entanto para o perfil IPE200, o Método 1 com os coeficientes de momentos equivalente "corrigidos" apresenta uma excelente aproximação à curva de resistência do ANSYS.

Para as esbeltezas maiores, o comportamento das equações de interação é idêntico para a esbelteza  $\bar{\lambda}_{LT} = 1,5$  como para a esbelteza  $\bar{\lambda}_{LT} = 2,5$ . O Método 1, com os coeficientes de momento equivalente do EC3, sobrestima a resistência do ANSYS para valores elevados de  $m_z$ , no entanto, o Método 2 continua do lado da segurança. Com os coeficientes de momento equivalente "corrigidos", os métodos encontram-se sempre do lado da segurança. O Método 1 com uma melhor aproximação que o Método 2.

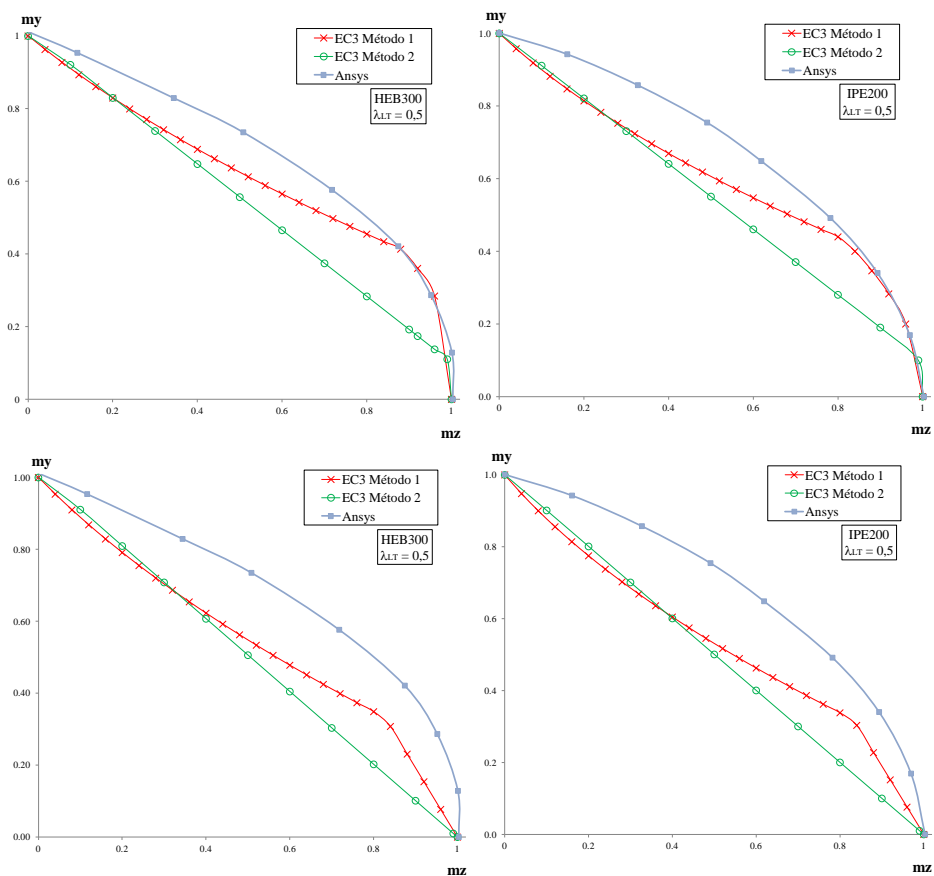


Figura 4.18: Curvas de resistência e equações de interacção do EC3 de vigas em consola com  $\lambda_{LT} = 0,5$

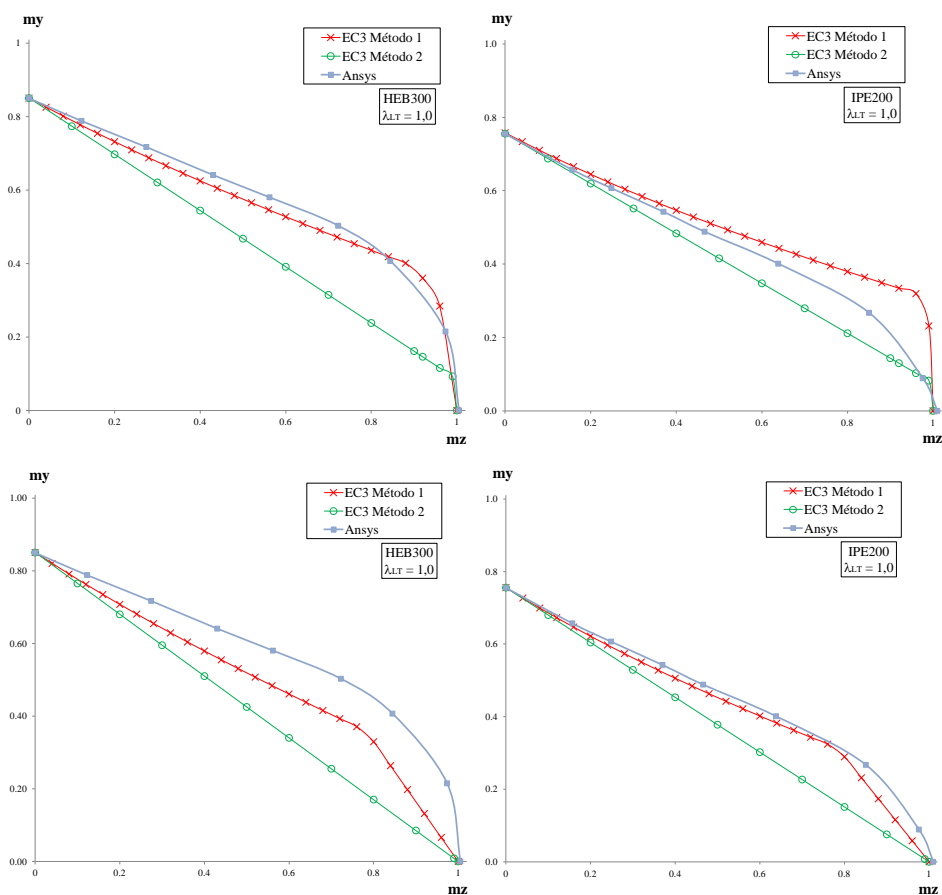


Figura 4.19: Curvas de resistência e equações de interação do EC3 de vigas em consola com  $\bar{\lambda}_{LT} = 1,0$

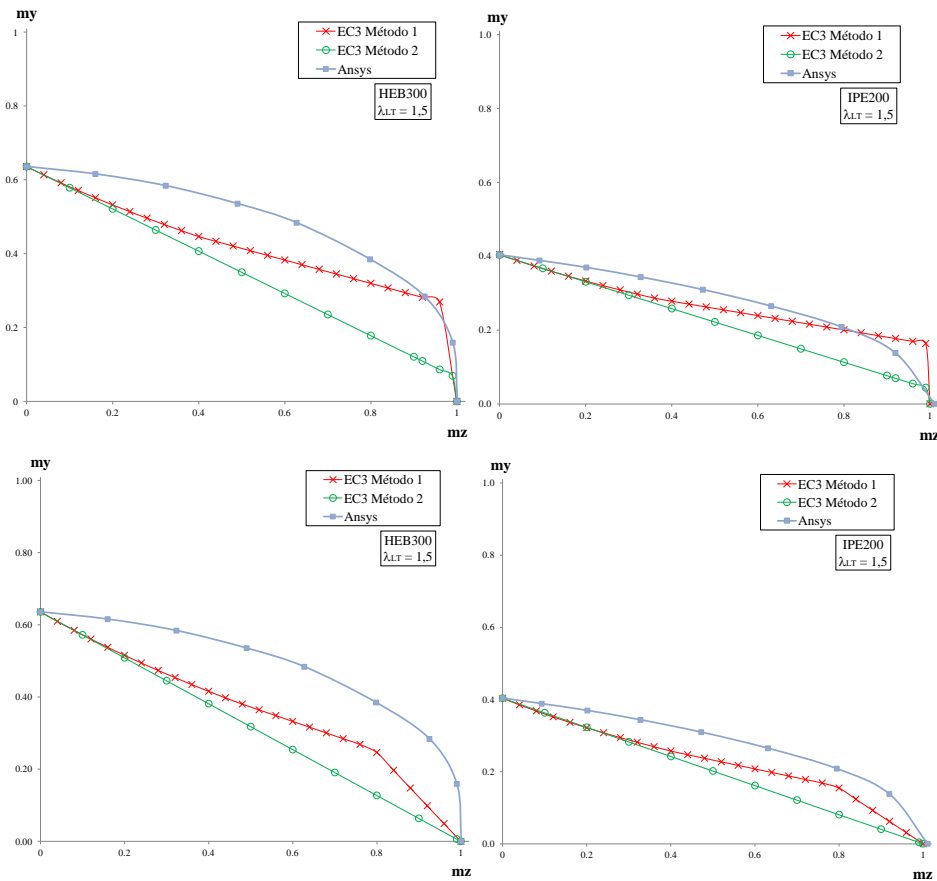


Figura 4.20: Curvas de resistência e equações de interacção do EC3 de vigas em consola com  $\lambda_{LT} = 1,5$

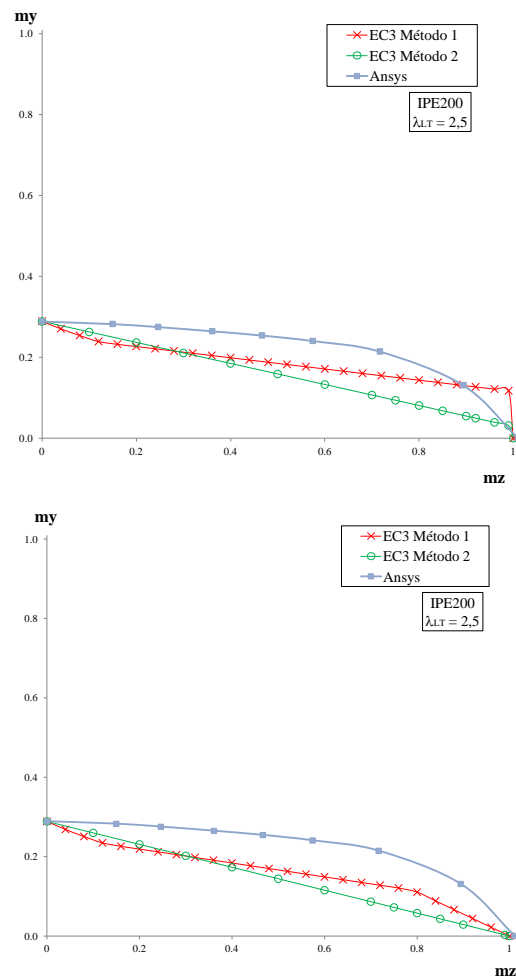


Figura 4.21: Curvas de resistência e equações de interação do EC3 de vigas em consola com  $\bar{\lambda}_{LT} = 2,5$

#### 4.4.4 Conclusões

Os resultados apresentados nesta secção mostram que as equações do EC3 de ambos os métodos conduzem a resultados em geral a resultados demasiado contra a segurança, no caso de se utilizarem os coeficientes de momento equivalente do EC3, ou demasiado a favor da segurança, com os valores de  $C_m$  "corrigidos". Estes resultados motivaram o estudo de equações alternativas, o que será discutido na próxima secção.

## 4.5 Comparação ANSYS / fórmulas propostas

Como ponto de partida, utilizando um critério de verificação de segurança "linear" relativo à capacidade de resistência plástica, tem-se a fórmula de interacção:

$$\frac{|M_y^{II}|}{M_{y,pl}} + \frac{|M_z^{II}|}{M_{z,pl}} + \frac{|M_w^{II}|}{M_{w,pl}} = 1 \quad (4.1)$$

que inclui os momentos de segunda ordem. Estes momentos são dados por (2.4), (2.5) e (2.6), ou seja

$$\begin{aligned} & \frac{M_y}{M_{y,pl}} \left( 1 + \frac{M_z N_{cr,y} \hat{v}_i}{M_{cr,y}^2 D_M} \right) && \text{parcela } M_y^{II} \\ & + \frac{1}{D_M M_{z,pl}} \left( -M_z + \frac{M_z M_y^2 N_{cr,z}}{M_{cr,y}^2 N_{cr,y}} + \frac{M_y^2 N_{cr,z} \hat{v}_i}{M_{cr,y}^2} \right) && \text{parcela } M_z^{II} \\ & + \frac{M_y i_s^2 N_{cr,w}}{D_M M_{cr,y}^2 M_{w,pl}} \left( N_{cr,z} \hat{v}_i + M_z \frac{N_{cr,z} - N_{cr,y}}{N_{cr,y}} \right) = 1 && \text{parcela } M_w^{II} \end{aligned} \quad (4.2)$$

onde:

- $D_M = 1 - \frac{M_y}{M_{cr,y}^2}$  é o factor de amplificação para a encurvadura por flexão-torção;
- $N_{cr,y} = \frac{EI_y \pi^2}{L^2}$  é o esforço axial crítico relativo à instabilidade por flexão em torno do eixo  $y$ ;
- $N_{cr,z} = \frac{EI_z \pi^2}{L^2}$  é o esforço axial crítico relativo à instabilidade por flexão em torno do eixo  $z$ ;
- $N_{cr,T} = \left( \frac{EI_w \pi^2}{L^2} + GI_T \right) \frac{1}{i_s^2}$  é o esforço axial crítico relativo à instabilidade por torção;
- $N_{cr,w} = \left( \frac{EI_w \pi^2}{L^2} \right)$ ;
- $M_{cr,y}$  é o momento crítico associado à encurvadura por flexão-torção;
- $i_s = \sqrt{\frac{I_y}{A}}$  é o raio de giração polar da secção transversal;
- $M_{y,pl} = f_y W_{y,el}$ ;  $M_{z,pl} = f_y W_{z,el}$ ;  $M_{w,pl} = M_{z,pl} \frac{h}{2}$  são os valores característicos das resistências da secção transversal à flexão segundo  $y$ ,  $z$  e empenamento;
- $\hat{v}_i$  é a imperfeição geométrica lateral.

Tal como foi discutido no capítulo 2, estas fórmulas foram deduzidas para vigas simplesmente apoiadas e sujeitas a momentos uniformes. Contudo, pode ser aplicada a outros casos, desde que a deformada de primeira ordem seja semelhante à forma do modo de instabilidade, como é o caso das

vigas encastradas-apoiadas com o momento de extremidade apoiada e das vigas em consola com cargas na extremidade livre.

A fim de conseguir as curvas de interacção da fórmula proposta (4.2), recorreu-se à programação de uma Macro. O termo  $\hat{v}_i$ , foi ajustado em cada caso de modo a que o  $\chi_{LT}$  da curva de interacção da fórmula proposta coincida com o factor de redução  $\chi_{LT}$  obtido através do ANSYS.

Como já abordado sucintamente na secção 2.2, o sentido da imperfeição geométrica inicial ( $\hat{v}_i$ ) tem um peso considerável nas curvas de interacção. Não é possível retirar uma conclusão sobre o sentido de  $\hat{v}_i$  somente analisando as fórmulas dado que produz numas parcelas da fórmula um efeito estabilizador e noutras um efeito desestabilizador. Assim, em todos os casos, considera-se as imperfeições positivas e negativas, de modo a apurar a direcção mais desfavorável.

É de referir ainda que apenas se considerou a imperfeição geométrica inicial lateral, considerando as imperfeições geométricas verticais e de torção nulas. Isto deve-se (i) à complexidade que a fórmula proposta tomara, tornando o estudo paramétrico mais extenso e difícil de concretizar e, (ii) ao facto de o fenómeno em análise ser a instabilidade lateral, para o qual a imperfeição geométrica lateral é a mais condicionante.

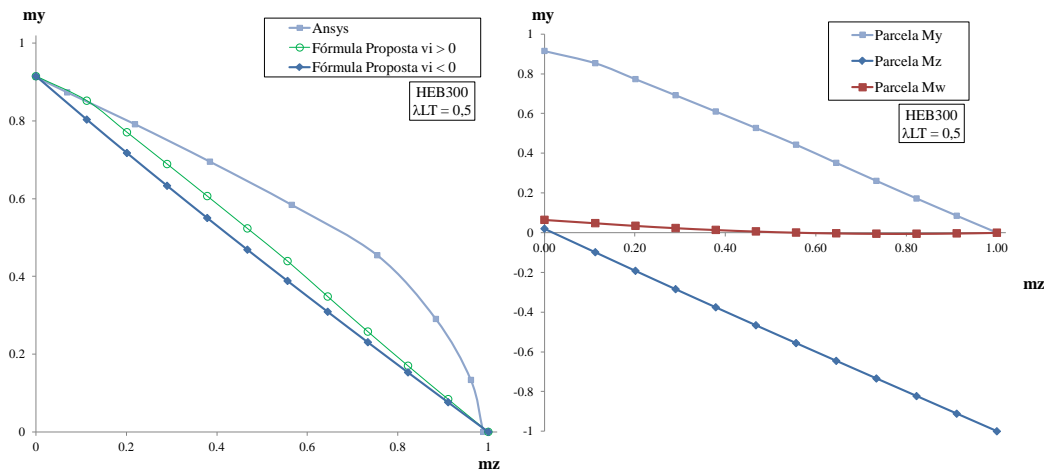


Figura 4.22: Fórmula proposta e curva de resistência do ANSYS para  $\bar{\lambda}_{LT} = 0,5$  do perfil HEB300 (caso apoiado-apoiado)

Na figura 4.22 encontram-se dois gráficos. O gráfico do lado esquerdo contém as curvas da interacção da fórmula proposta e as curvas de resistência do ANSYS. O gráfico do lado direito representa o efeito de cada parcela de momento de segunda ordem, na curva de interacção da fórmula proposta.

Observando a curva de interacção da fórmula proposta na figura 4.22, ressalta à vista a fraca aproximação que tem à curva de resistência do ANSYS. Como se trata de uma esbelteza baixa ( $\bar{\lambda}_{LT} = 0,5$ ), a curva de resistência do ANSYS é a curva da resistência da secção.

De modo a colmatar a fraca aproximação da fórmula proposta para os casos com a esbelteza baixa, introduziu-se na fórmula proposta a equação de verificação da resistência plástica da secção (2.12), na equação (4.1), tomando a verificação o seguinte formato:



$$\left(\frac{M_y^{II}}{M_{y,pl}}\right)^2 + \frac{|M_z^{II}|}{M_{z,pl}} + \frac{|M_w^{II}|}{M_{w,pl}} = 1 \quad (4.3)$$

Para cada caso e cada esbelteza serão comparadas as duas fórmulas propostas com as curvas do ANSYS. Para simplificação da apresentação de resultados e devida discussão, a primeira fórmula, sem os coeficientes da verificação da resistência plástica da secção denominou-se de "fórmula proposta". A segunda versão desta fórmula, com os coeficientes da verificação da resistência plástica da secção, denominou-se de "fórmula proposta ( $m_y^2$ )".

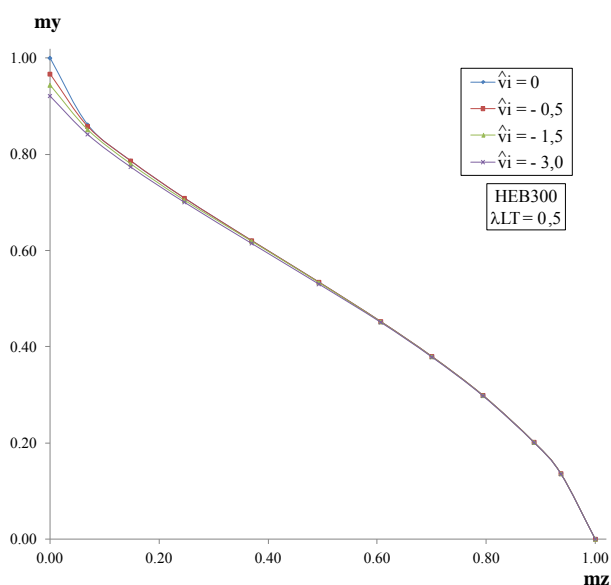


Figura 4.23: Trajectória da  $m_y^2$  para  $\bar{\lambda}_{LT} = 0,5$  do perfil HEB300 (caso apoiado-apoiado)

Na figura 4.23 representam-se várias curvas de interação obtidas pela fórmula proposta ( $m_y^2$ ), que evidenciam o fenómeno da dupla concavidade. Assim, observa-se que a dupla concavidade manifesta-se apenas para valores reduzidos de  $m_z$  e quando a imperfeição é reduzida, sendo máxima para o caso sem imperfeições geométricas ( $\hat{v}_i$ ). À medida que a imperfeição aumenta, a resistência para  $m_z = 0$  diminui e o efeito de dupla curvatura vai desaparecendo progressivamente.

Em primeiro lugar analisam-se todos os casos com  $\bar{\lambda}_{LT} = 0,5$ , sendo os resultados obtidos mostrados nas figuras 4.24 a 4.29. Observando a figura 4.24, é notória a melhoria da fórmula proposta ( $m_y^2$ ) em comparação com a fórmula proposta inicialmente para a esbelteza  $\bar{\lambda}_{LT} = 0,5$  do perfil HEB300.

Por sua vez, para o mesmo caso apoiado-apoiado, para o perfil IPE200, a fórmula proposta ( $m_y^2$ ) também apresenta valores mais conservativos que a fórmula proposta. Apesar de para valores  $m_z >$

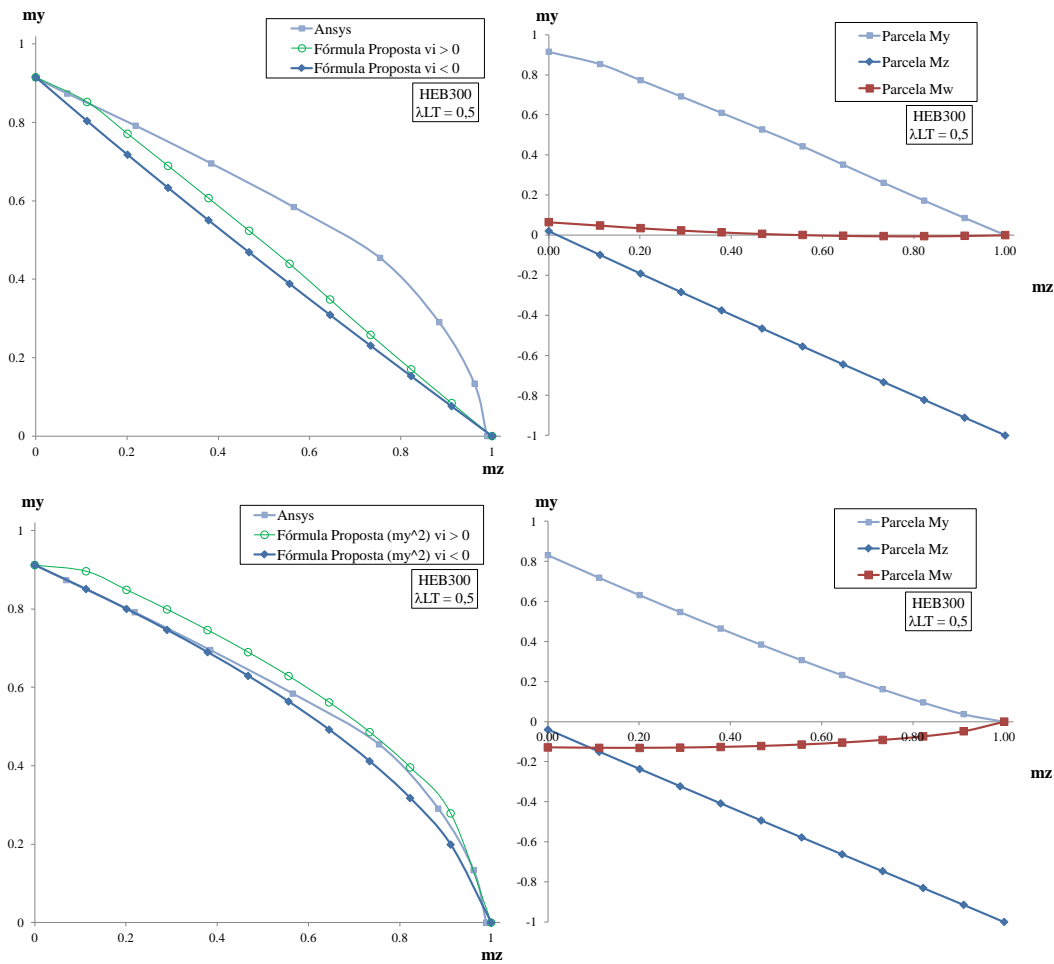


Figura 4.24: Fórmulas propostas e curva de resistência do ANSYS para  $\bar{\lambda}_{LT} = 0,5$  perfil HEB300 (caso apoiado-apoiado)

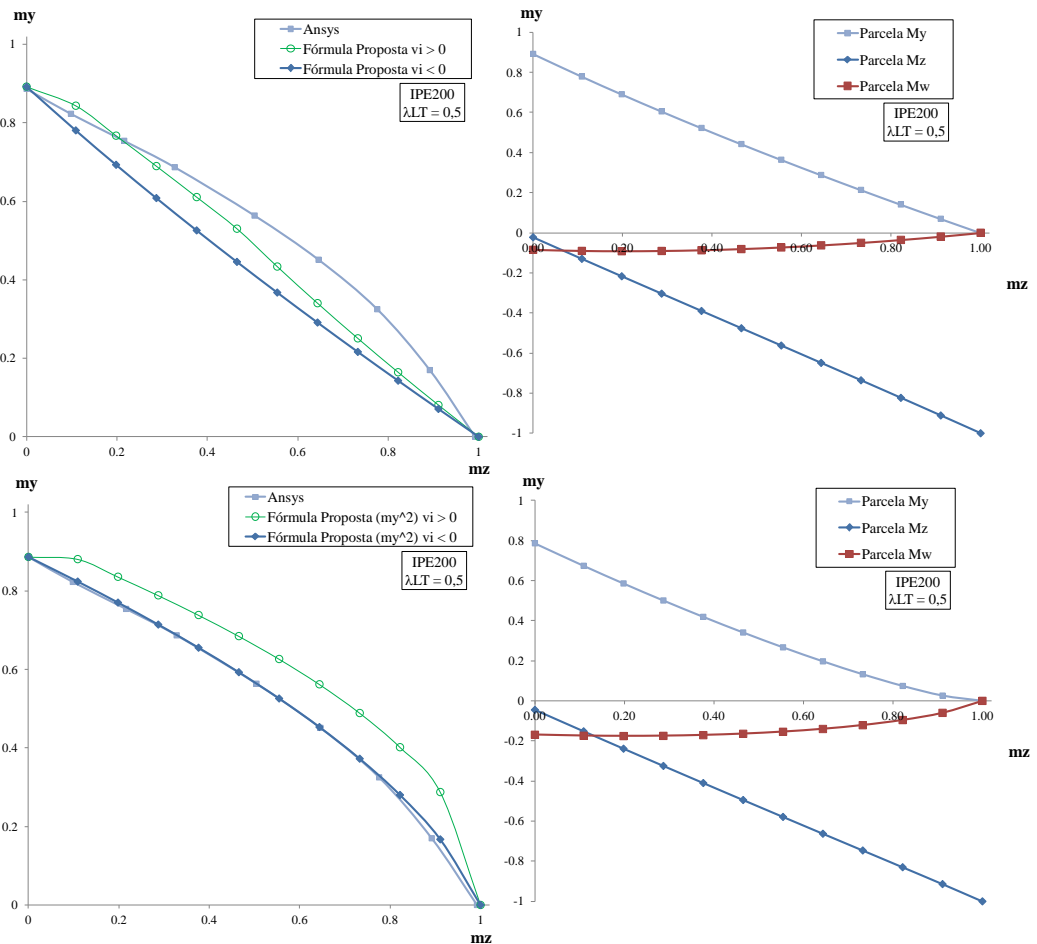


Figura 4.25: Fórmulas propostas e curva de resistência do ANSYS para  $\bar{\lambda}_{LT} = 0,5$  do perfil IPE200 (caso apoiado-apoiado)

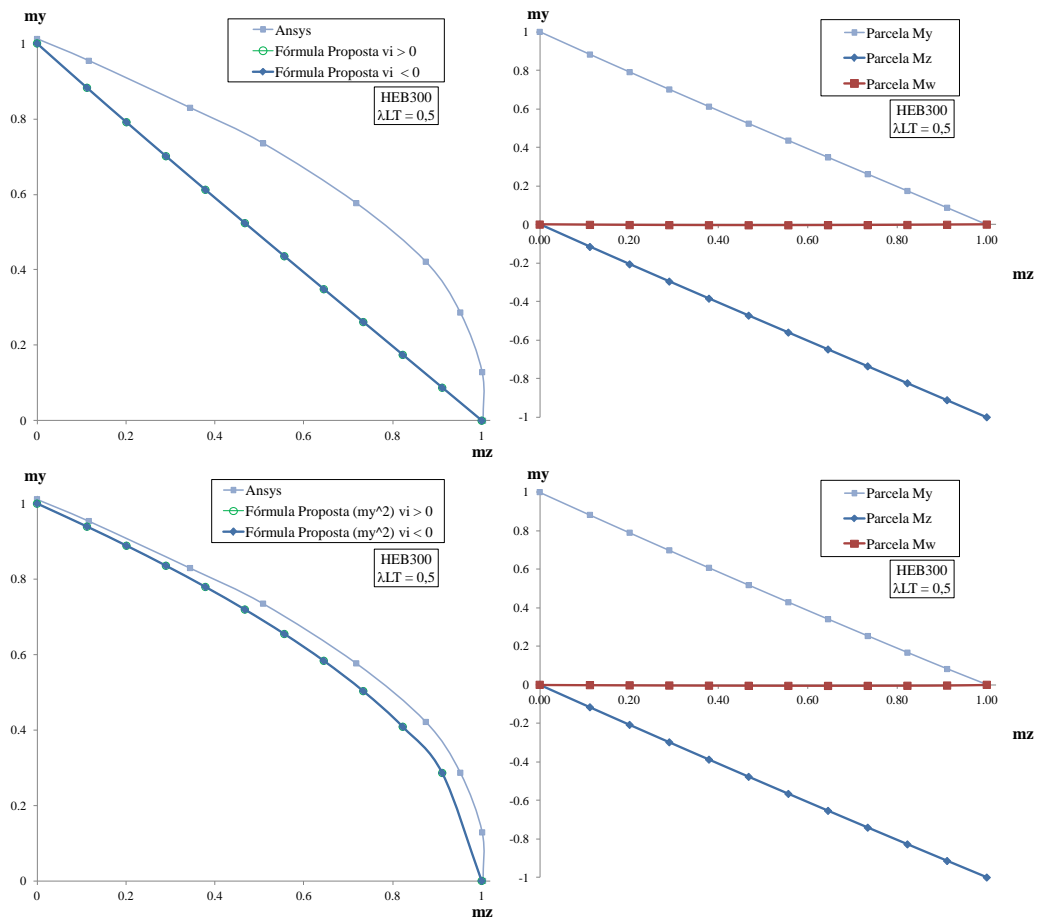


Figura 4.26: Fórmulas propostas e curva de resistência do ANSYS para  $\bar{\lambda}_{LT} = 0,5$  do perfil HEB300 (caso viga em consola)

0,8, apresentar valores ligeiramente contra a segurança, para este perfil, o sentido da imperfeição  $\hat{v}_i > 0$  é contra a segurança em ambas as fórmulas.

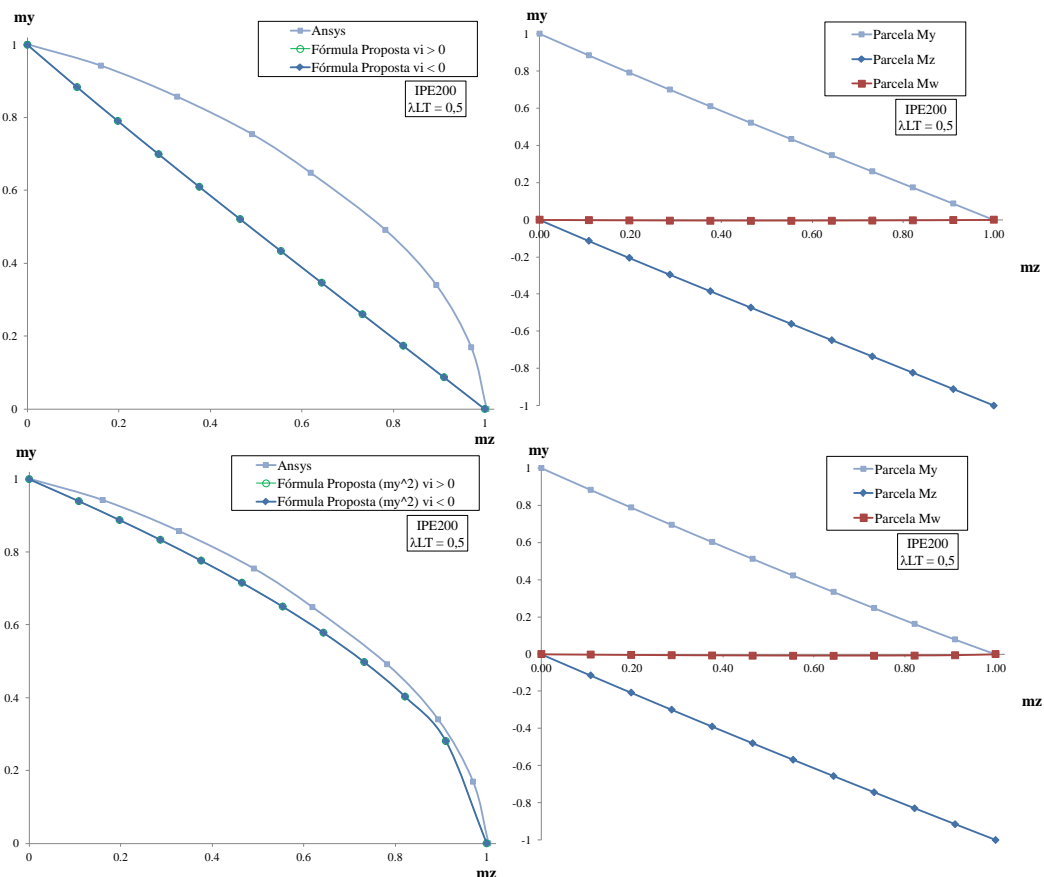


Figura 4.27: Fórmulas propostas e curva de resistência do ANSYS para  $\bar{\lambda}_{LT} = 0,5$  do perfil IPE200 (caso viga em consola)

Para o caso encastrado-apoiado e da viga em consola, com a mesma esbelteza  $\bar{\lambda}_{LT} = 0,5$ , a fórmula proposta ( $m_y^2$ ) apresenta melhores resultados. No entanto, para este caso não há diferença entre a imperfeição geométrica inicial ser positiva ou negativa, pois ambas as curvas são coincidentes, tanto para o perfil HEB300, como para o perfil IPE200. Isto deve-se é ao facto de ter  $\chi_{LT} \approx 1$  em ambos os casos e, portanto,  $\hat{v}_i = 0$ .

Observando os gráficos da direita com a influência de cada parcela de ambas as fórmulas propostas, repara-se que para o caso em que  $\hat{v}_i = 0$  a influência da parcela que contabiliza o momento de segunda ordem devido ao empenamento é praticamente nula. Para o caso apoiado-apoiado a parcela do momento de segunda ordem devido ao empenamento já toma um valor considerável.

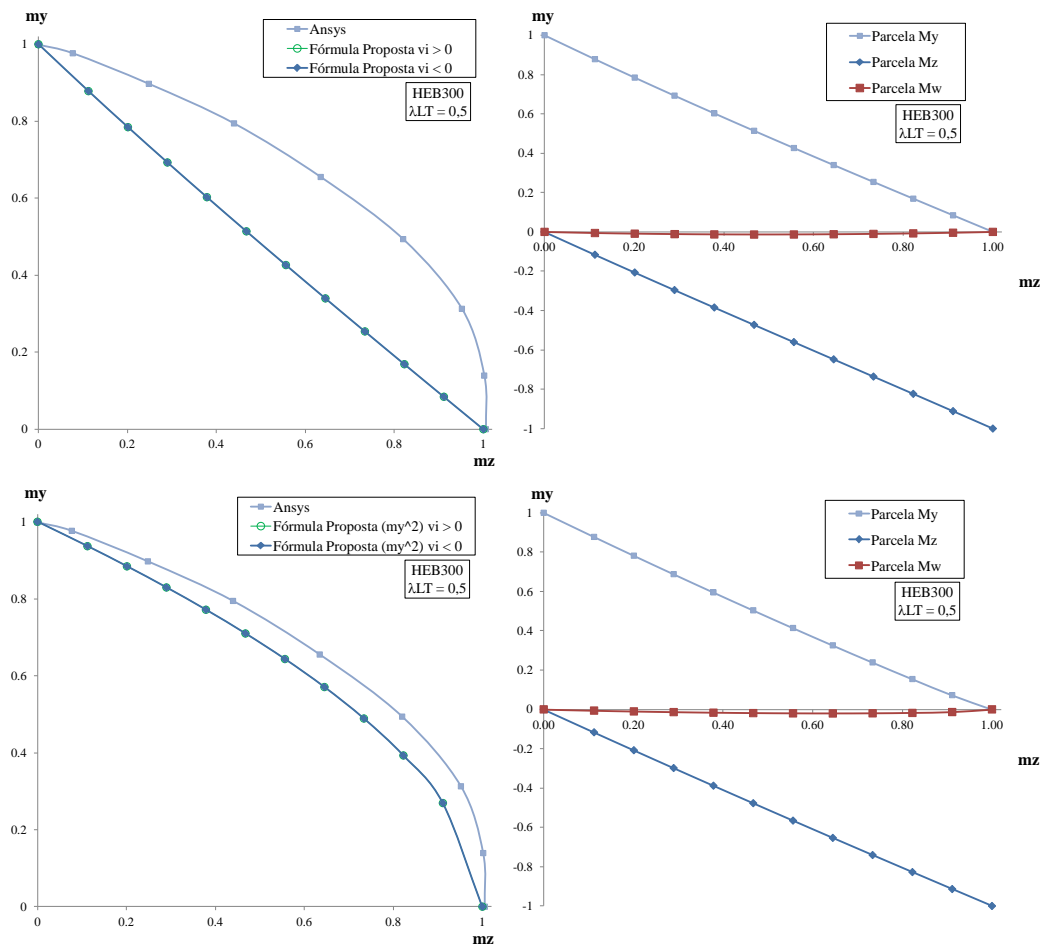


Figura 4.28: Fórmulas propostas e curva de resistência do ANSYS para  $\bar{\lambda}_{LT} = 0,5$  do perfil HEB300 (caso encastrado-apoiado)

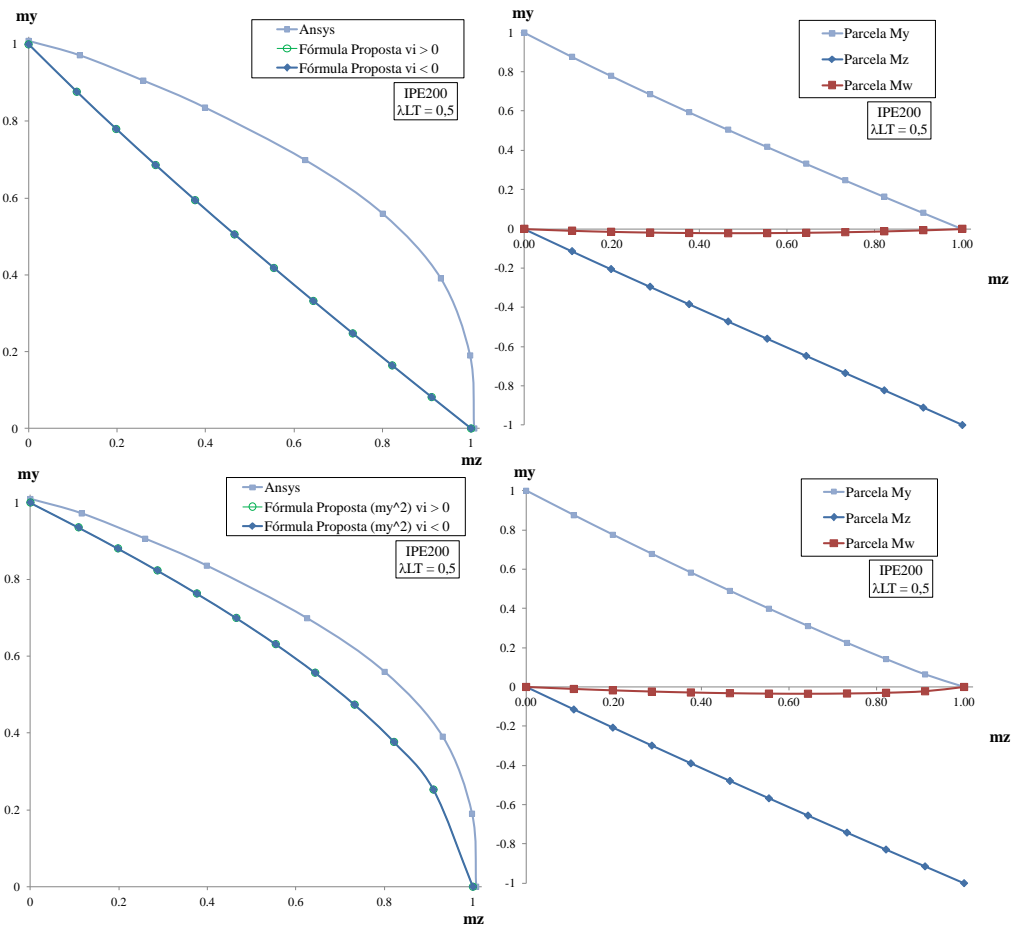


Figura 4.29: Fórmulas propostas e curva de resistência do ANSYS para  $\bar{\lambda}_{LT} = 0,5$  do perfil IPE200 (caso encastrado-apoiado)

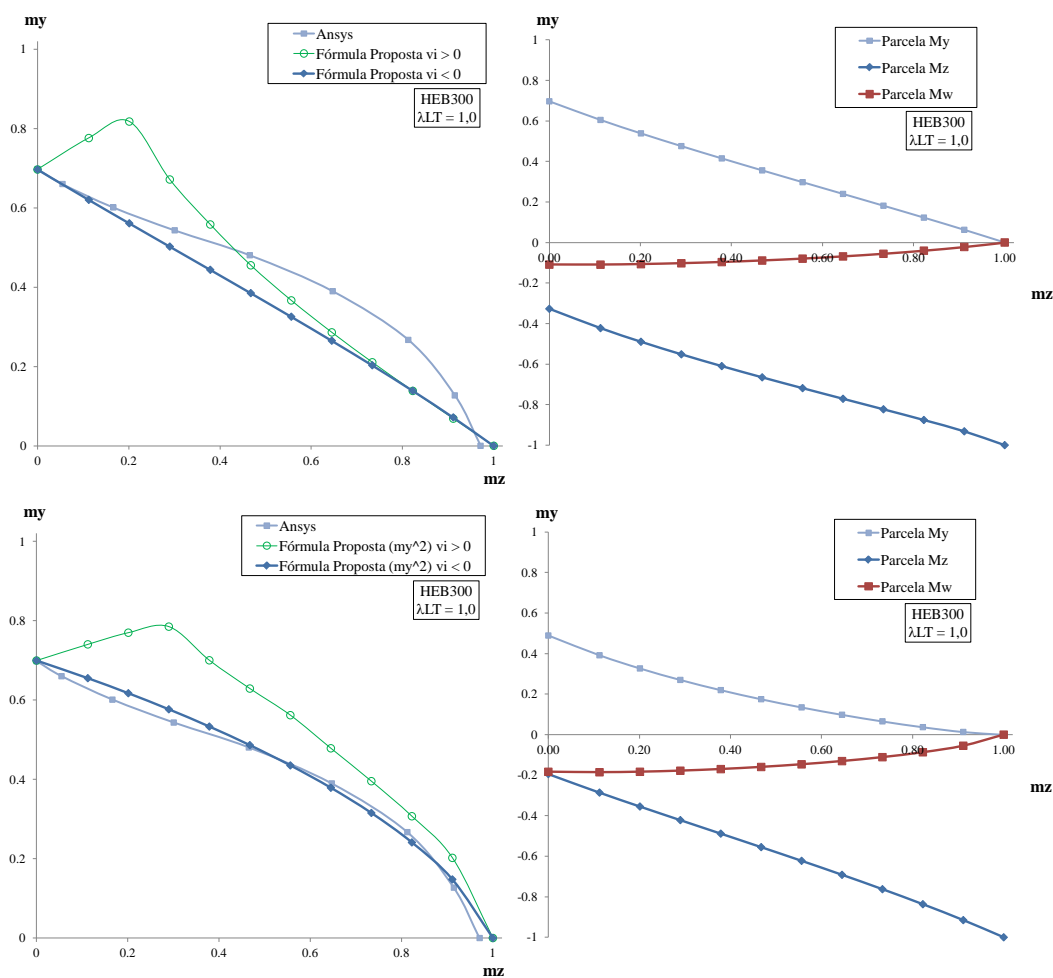


Figura 4.30: F6rmulas propostas e curva de resist6ncia do ANSYS para  $\bar{\lambda}_{LT} = 1,0$  do perfil HEB300 (caso apoiado-apoiado)



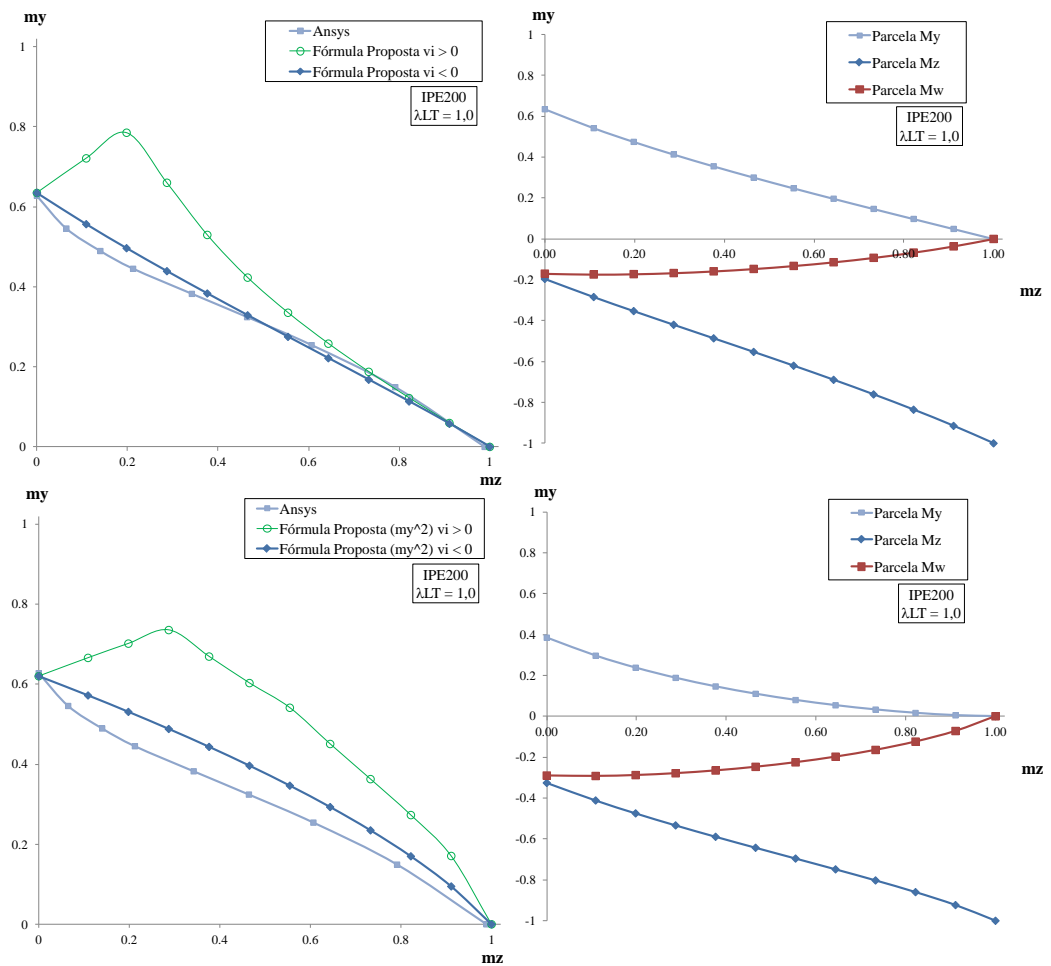


Figura 4.31: Fórmulas propostas e curva de resistência do ANSYS para  $\bar{\lambda}_{LT} = 1,0$  do perfil IPE200 (caso apoiado-apoiado)

Analisamos agora os casos com  $\bar{\lambda}_{LT} = 1$  (figuras 4.30 a 4.35). No caso apoiado-apoiado, na figura 4.30, a fórmula proposta ( $m_y^2$ ), apesar de apresentar uma curva muito idêntica à do ANSYS, não está a favor da segurança, novamente por valores ligeiros. A fórmula proposta já se encontra do lado da segurança, mas subestima os valores da resistência.

Para o mesmo caso, mas com o perfil IPE200, pode-se verificar na figura 4.31 que ambas as fórmulas não se encontram a favor da segurança. Neste caso a fórmula proposta ( $m_y^2$ ) apresenta a maior disparidade de valores.

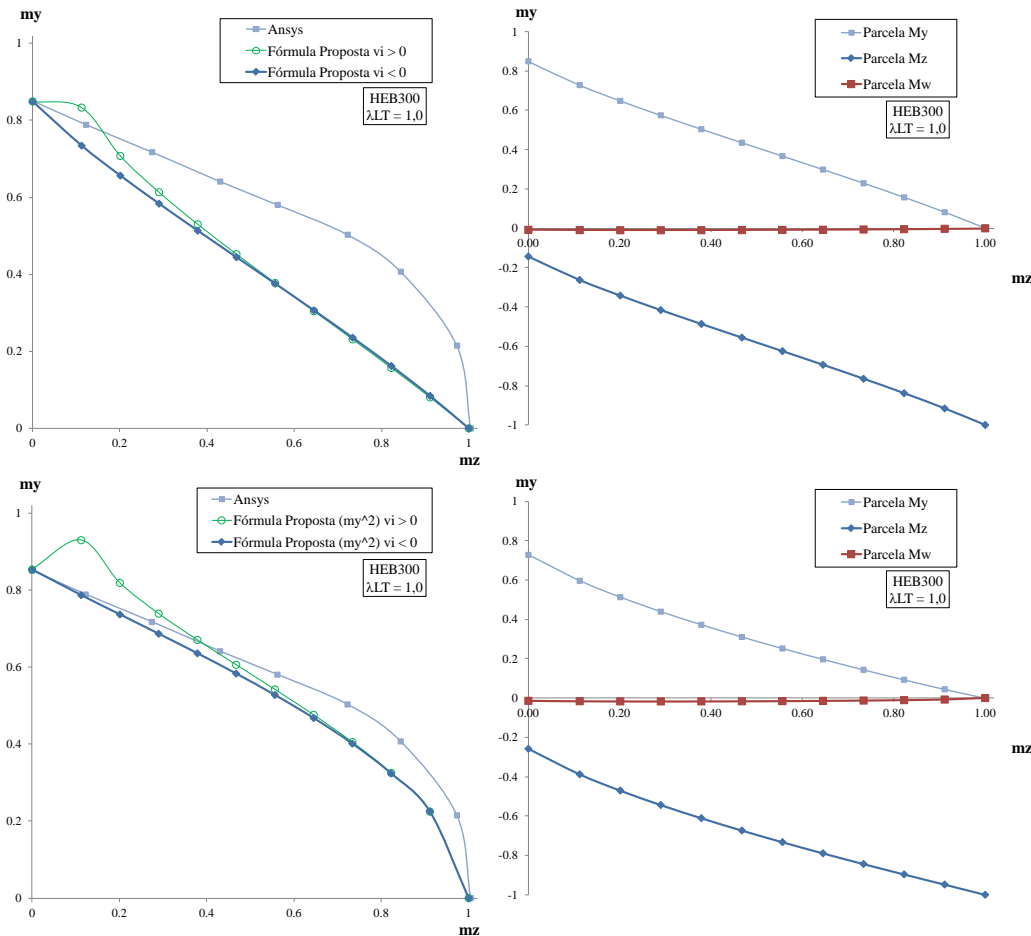


Figura 4.32: Fórmulas propostas e curva de resistência do ANSYS para  $\bar{\lambda}_{LT} = 1,0$  do perfil HEB300 (caso viga em consola)

Para a viga em consola (figuras 4.32 e 4.33), o comportamento das fórmulas propostas é melhor. Para o perfil HEB300 a fórmula proposta ( $m_y^2$ ) apresenta uma excelente aproximação, mas para o perfil IPE200 já apresenta novamente um ligeiro desvio contra a segurança.

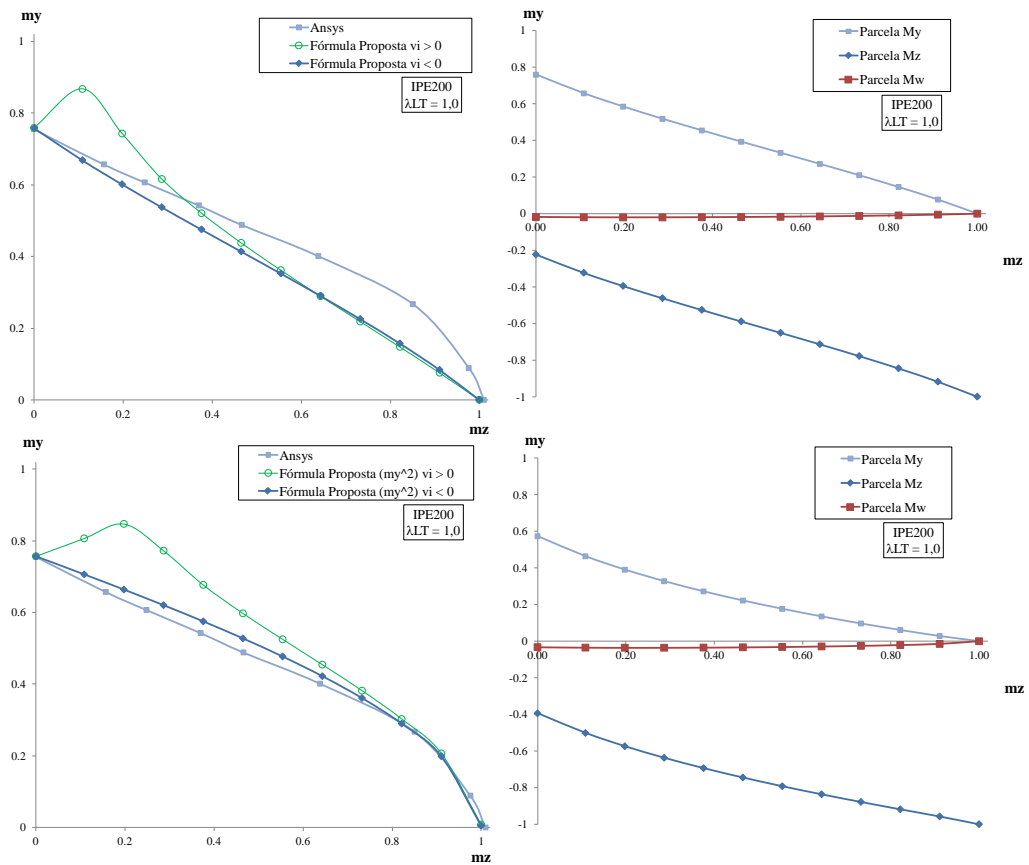


Figura 4.33: Fórmulas propostas e curva de resistência do ANSYS para  $\bar{\lambda}_{LT} = 1,0$  do perfil IPE200 (caso viga em consola)

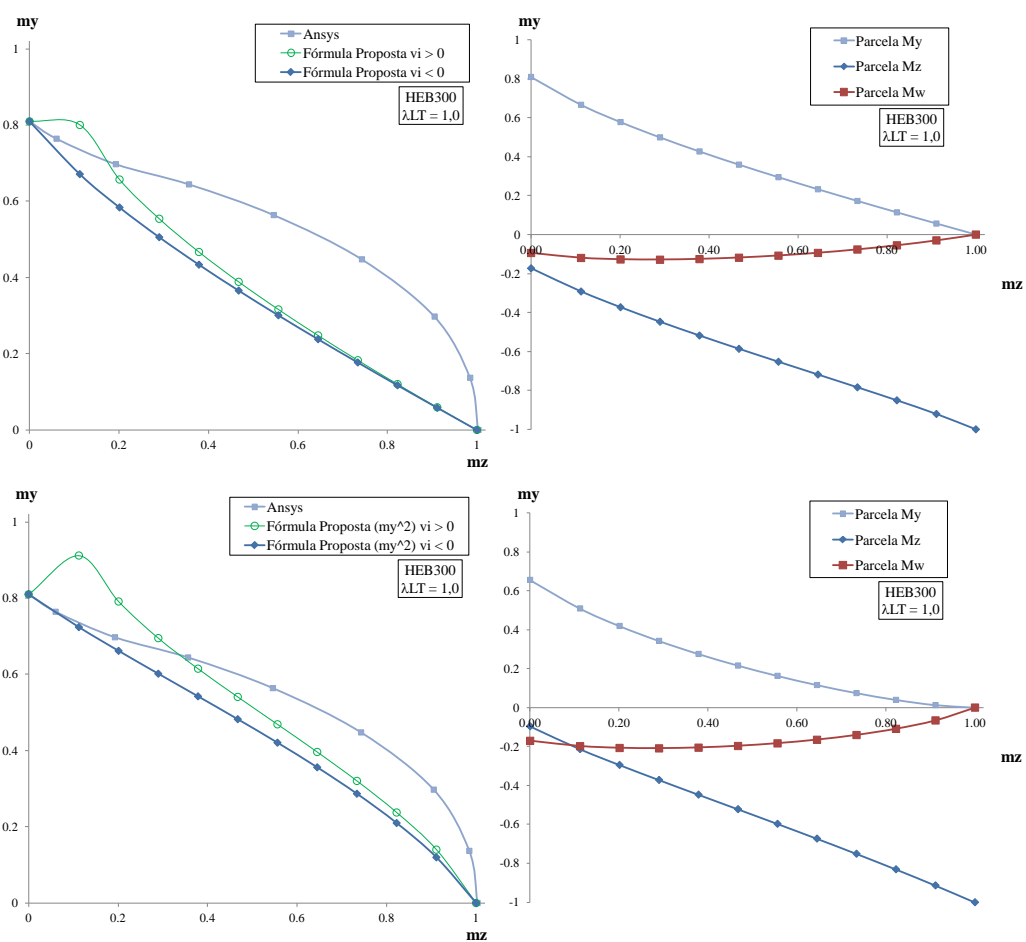


Figura 4.34: Fórmulas propostas e curva de resistência do ANSYS para  $\bar{\lambda}_{LT} = 1,0$  do perfil HEB300 (caso encastrado-apoiado)

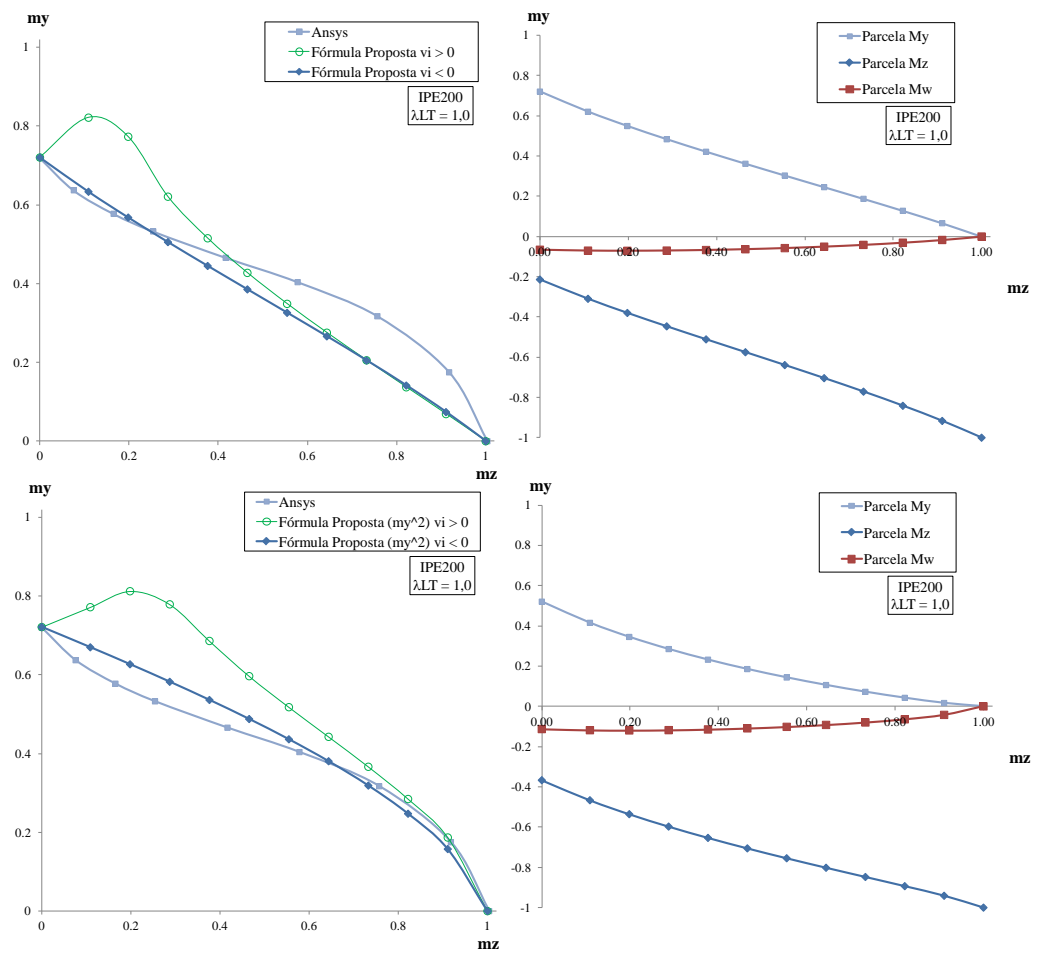


Figura 4.35: Fórmulas propostas e curva de resistência do ANSYS para  $\bar{\lambda}_{LT} = 1,0$  do perfil IPE200 (caso encastrado-apoiado)

No caso encastrado-apoiado a fórmula proposta ( $m_y^2$ ) está contra a segurança para o perfil IPE200, devido à dupla concavidade da curva de resistência do ANSYS. No perfil HEB300, apesar de também conter a dupla concavidade, a fórmula proposta ( $m_y^2$ ) está a favor da segurança.

Com o aumento da esbelteza para  $\bar{\lambda}_{LT} = 1$ , os resultados de ambas as fórmulas com  $\hat{v}_i > 0$  apresentam resultados contra a segurança.

Para as esbeltezas maiores (figuras 4.36 a 4.41), verificando-se já na esbelteza  $\bar{\lambda}_{LT} = 1,5$  e posteriormente na esbelteza  $\bar{\lambda}_{LT} = 2,5$ , observa-se o fenómeno previamente abordado na secção 4.3: o ANSYS conduziu a cargas de colapso superiores ao momento crítico associado à encurvadura ( $M_{cr}$ ). Nestes casos a fórmula proposta não permite que a curva de interacção ultrapasse o valor do  $M_{cr}$ . Deste modo, obtêm-se os resultados das figuras 4.36; 4.38; 4.40; 4.41; 4.42; 4.44; 4.43 e 4.45, em que as curvas de interacção das fórmulas propostas não coincidem com a curva de resistência do ANSYS para  $m_z = 0$ .

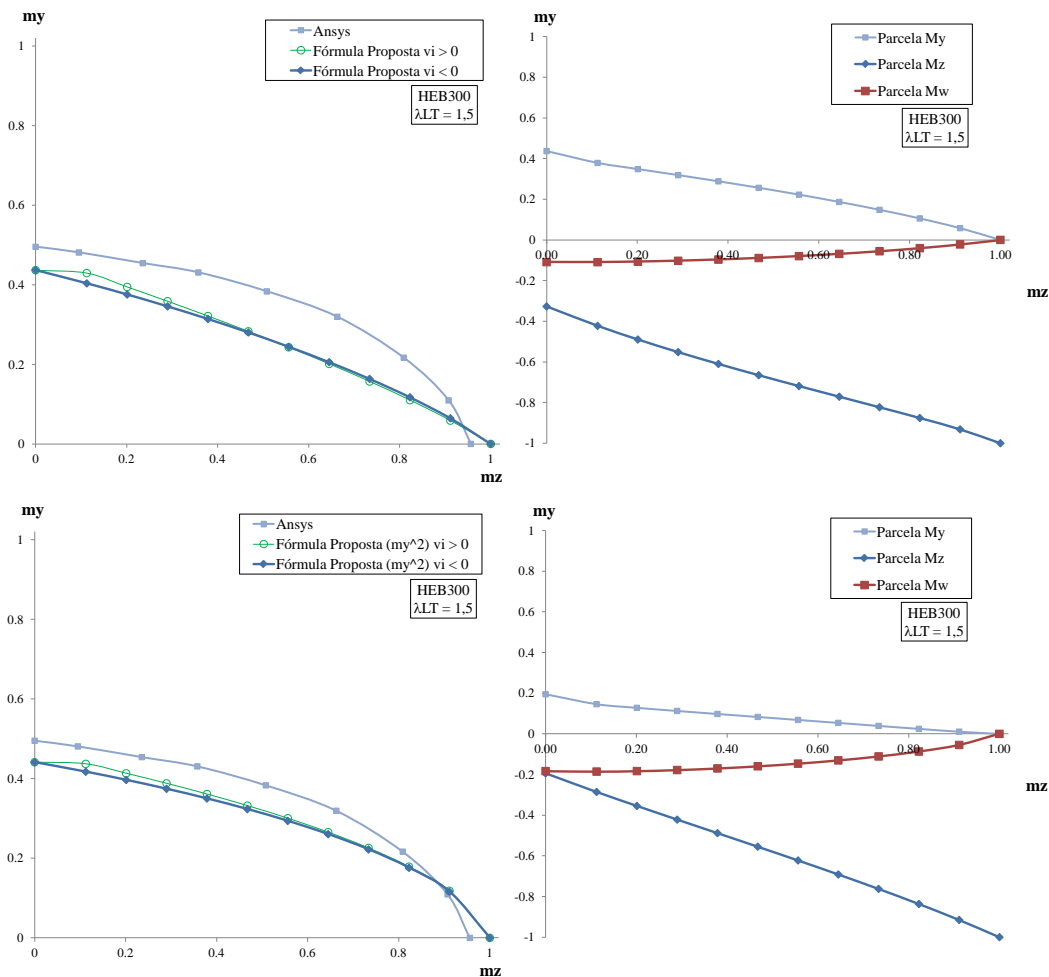


Figura 4.36: Fórmulas propostas e curva de resistência do ANSYS para  $\bar{\lambda}_{LT} = 1,5$  do perfil HEB300 (caso apoiado-apoiado)

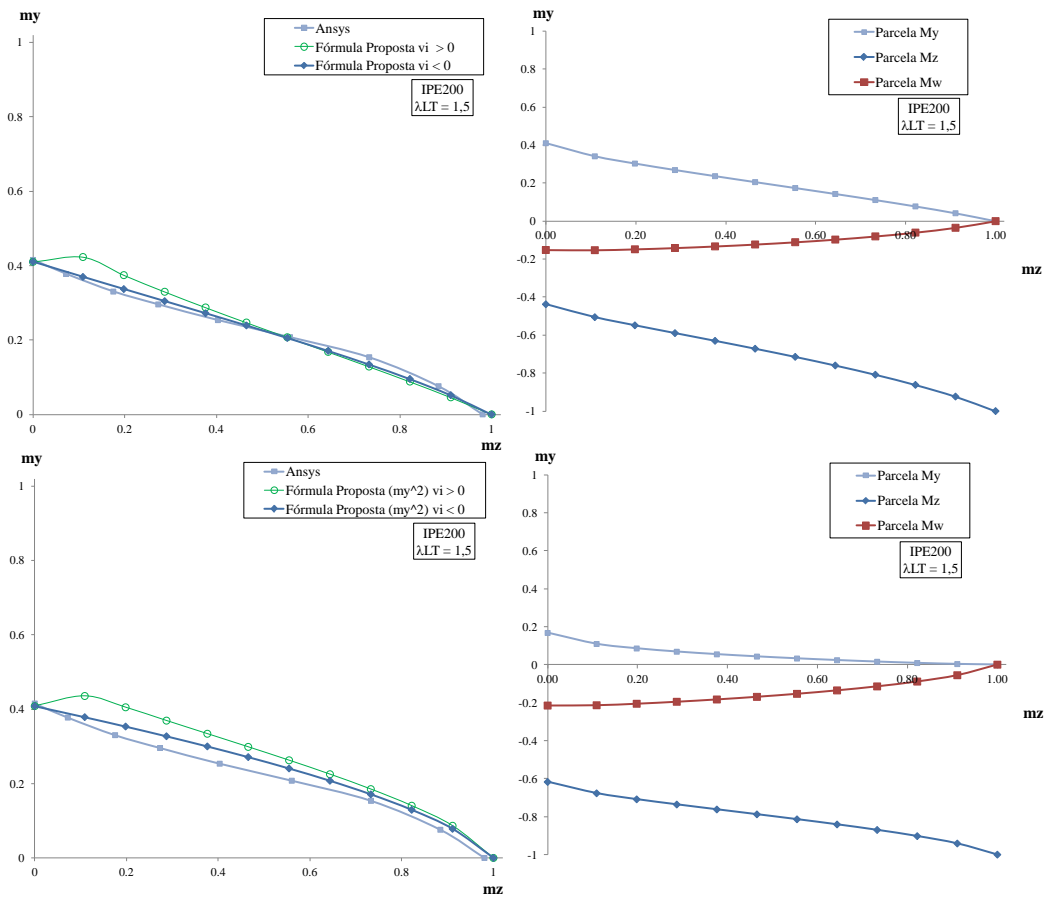


Figura 4.37: Fórmulas propostas e curva de resistência do ANSYS para  $\bar{\lambda}_{LT} = 1,5$  do perfil IPE200 (caso apoiado-apoiado)

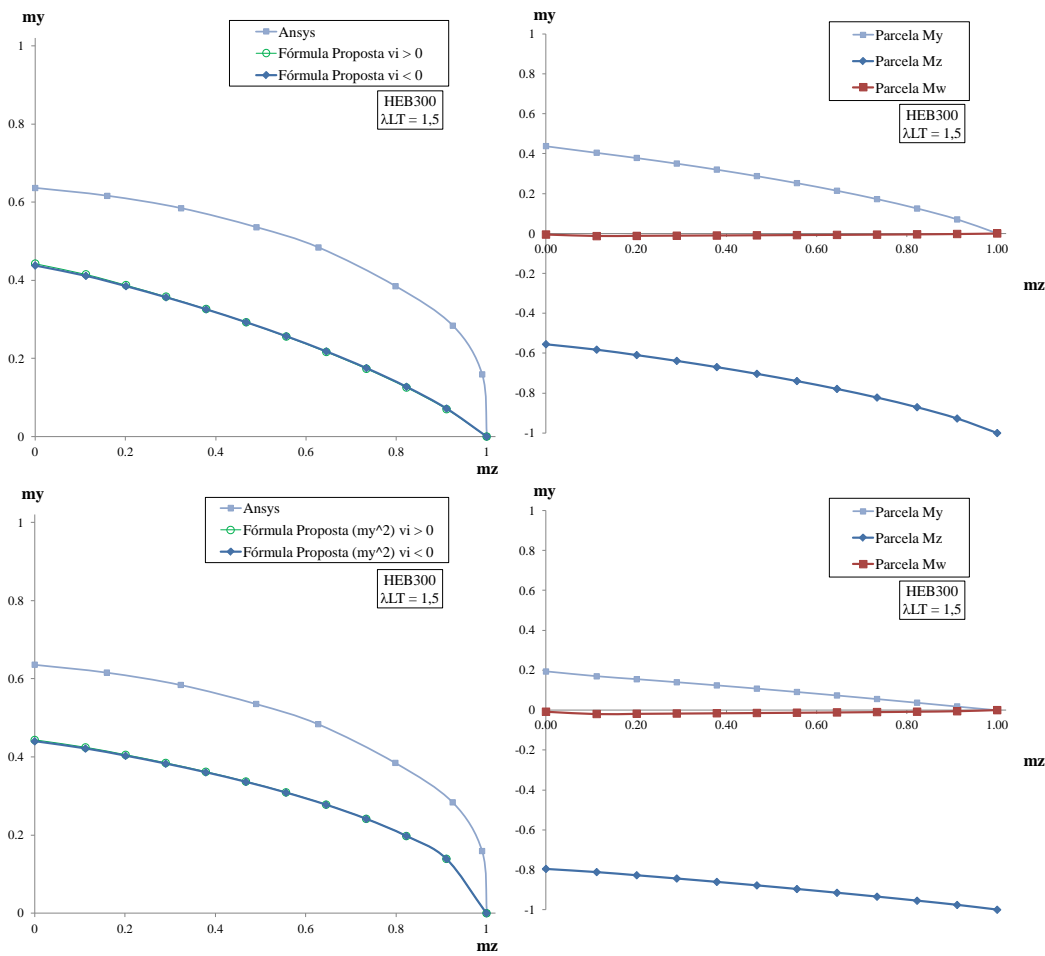


Figura 4.38: Fórmulas propostas e curva de resistência do ANSYS para  $\bar{\lambda}_{LT} = 1,5$  do perfil HEB300 (caso viga em consola)

Para a esbelteza  $\bar{\lambda}_{LT} = 1,5$  no caso apoiado-apoiado, ambas as fórmulas estão contra a segurança, embora a fórmula proposta ultrapasse apenas ligeiramente a curva de resistência do ANSYS (ver figura 4.37). Para o caso da viga em consola, a fórmula proposta ( $m_y^2$ ) apresenta uma aproximação perfeita à curva do ANSYS.

Por fim, repare-se também que à medida que a esbelteza aumenta, no gráfico da direita, a parcela correspondente ao momento de segunda ordem em torno do eixo de flexão  $y$  diminuiu, enquanto a parcela referente ao momento de segunda ordem segundo o eixo de flexão  $z$  aumentou.



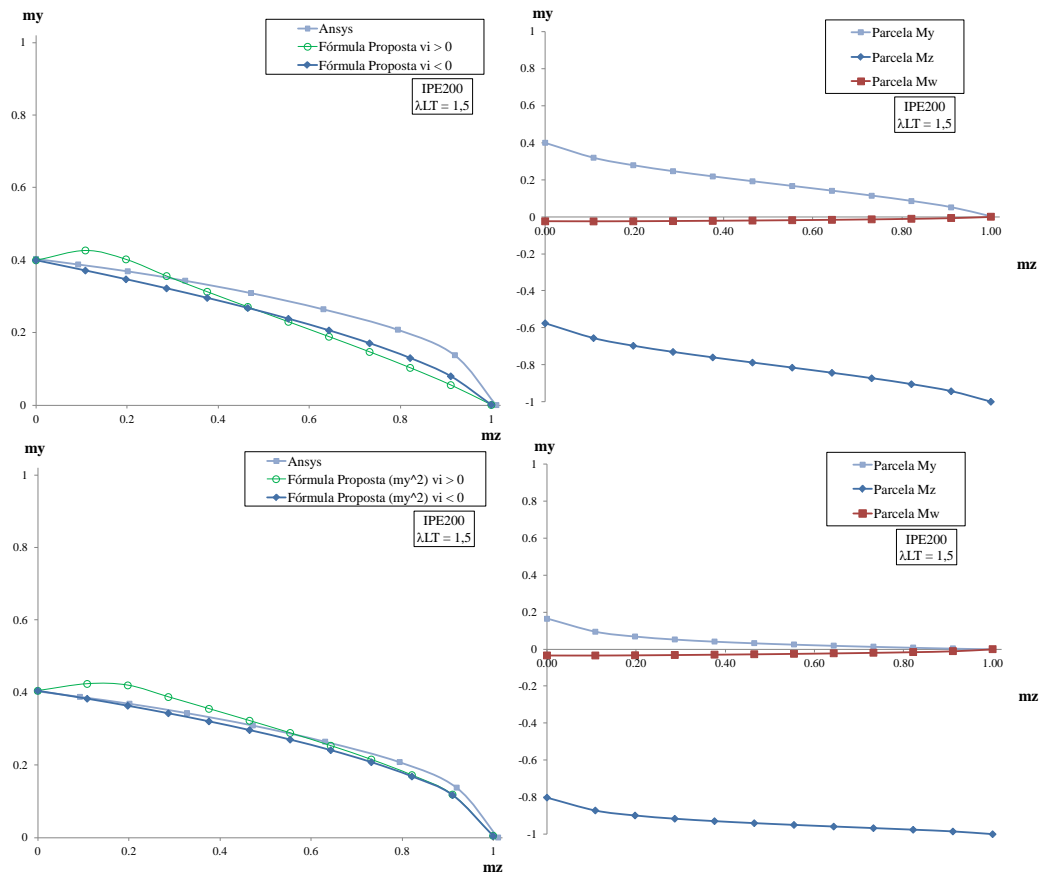


Figura 4.39: Fórmulas propostas e curva de resistência do ANSYS para  $\bar{\lambda}_{LT} = 1,5$  do perfil IPE200 (caso viga em consola)

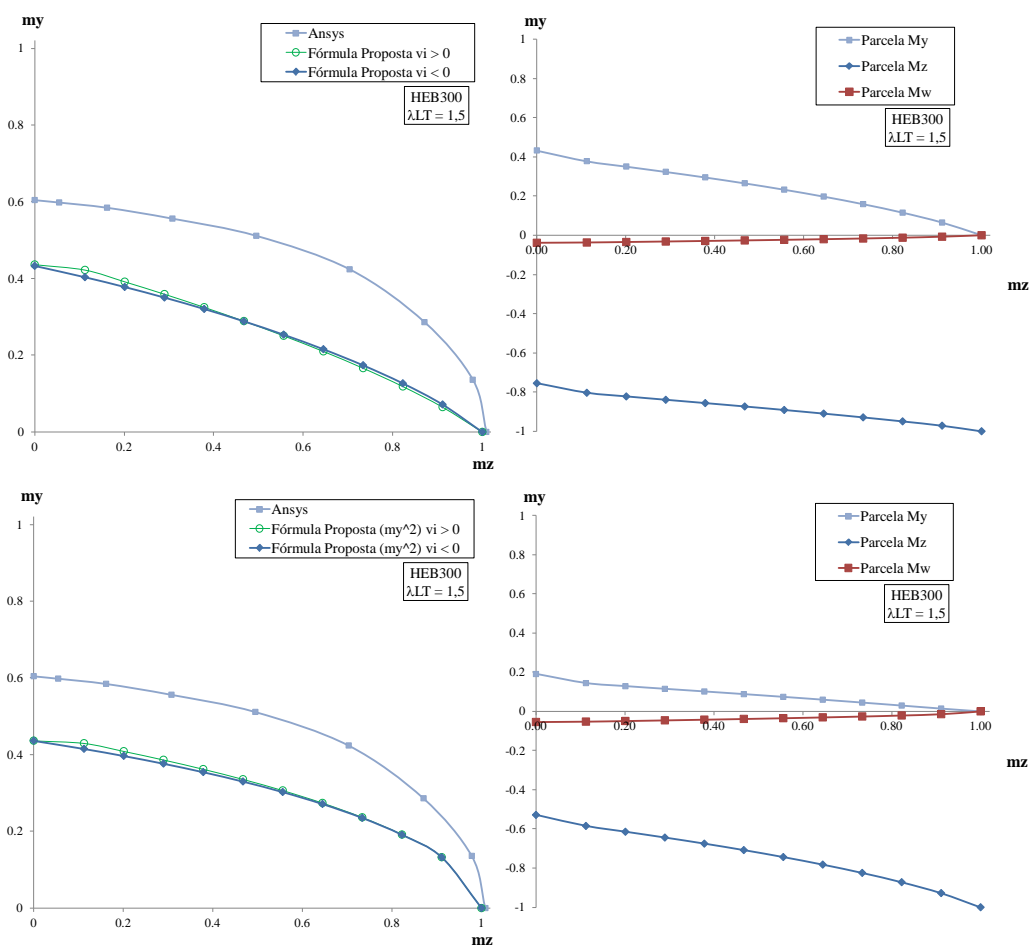


Figura 4.40: Fórmulas propostas e curva de resistência do ANSYS para  $\bar{\lambda}_{LT} = 1,5$  do perfil HEB300 (caso encastrado-apoiado)

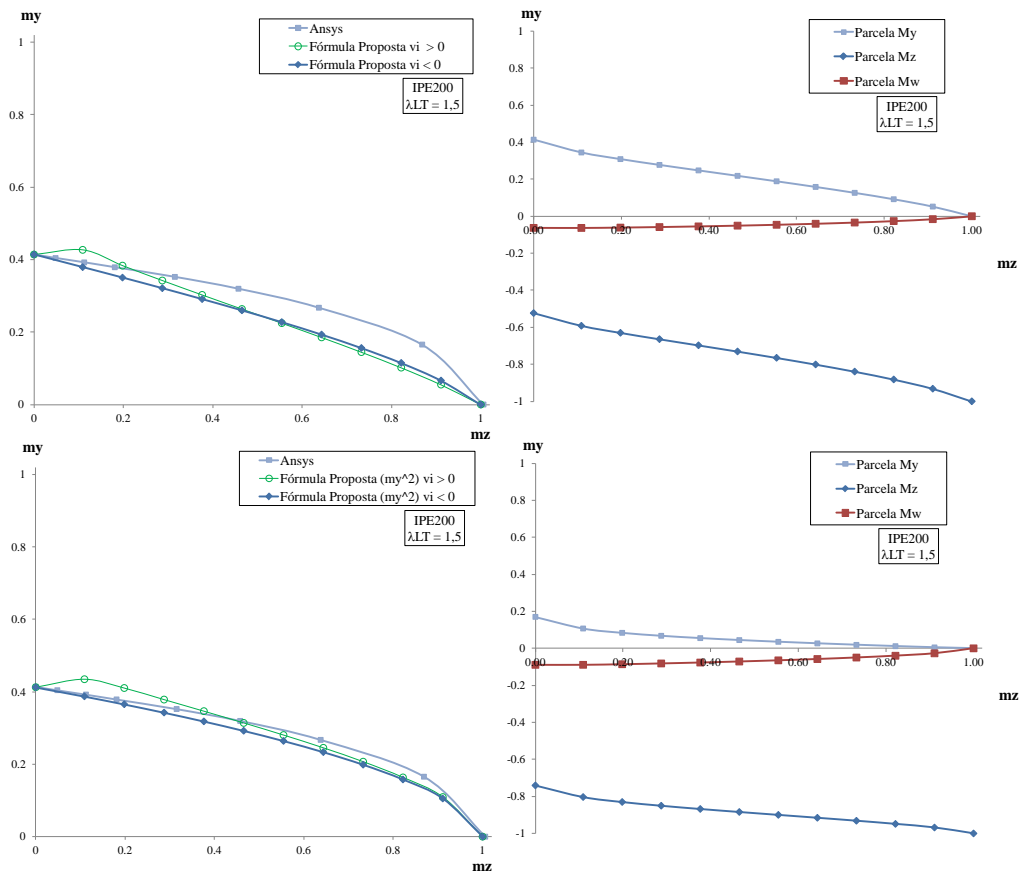


Figura 4.41: Fórmulas propostas e curva de resistência do ANSYS para  $\bar{\lambda}_{LT} = 1,5$  do perfil IPE200 (caso encastrado-apoiado)

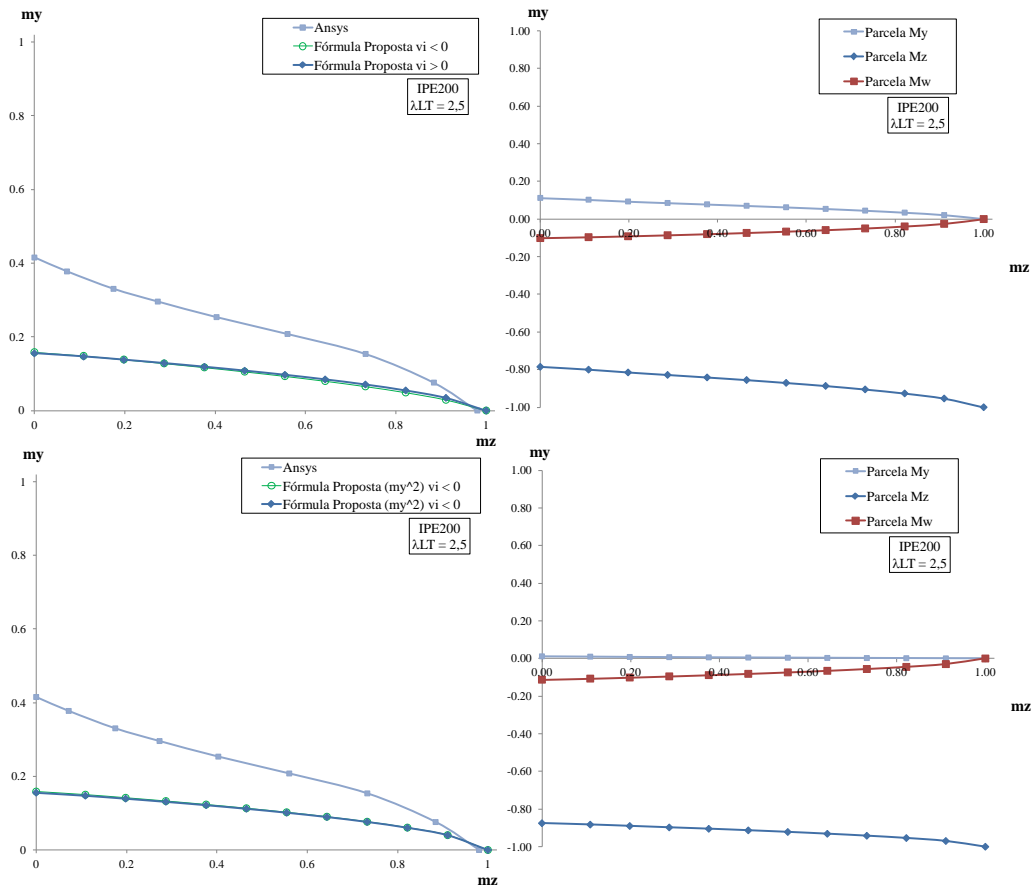


Figura 4.42: Fórmulas propostas e curva de resistência do ANSYS para  $\bar{\lambda}_{LT} = 2,5$  do perfil IPE200 (caso apoiado-apoiado)

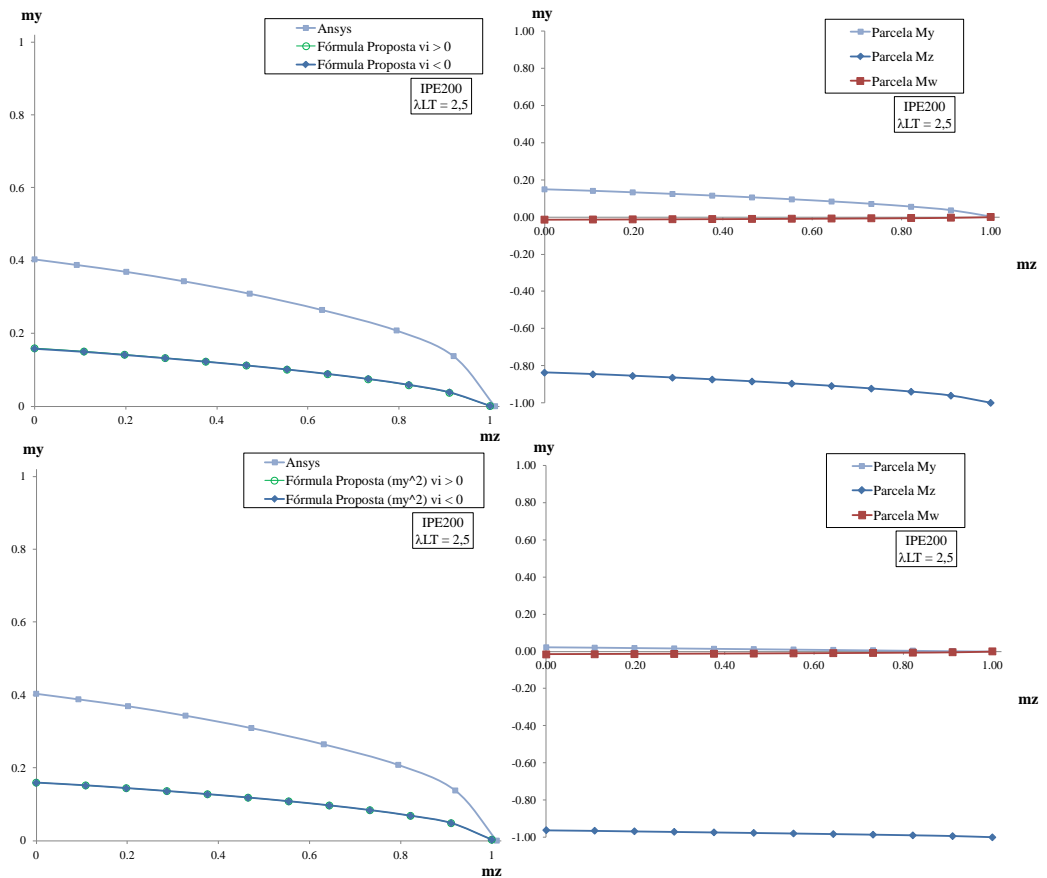


Figura 4.43: Fórmulas propostas e curva de resistência do ANSYS para  $\bar{\lambda}_{LT} = 2,5$  do perfil IPE200 (caso viga em consola)

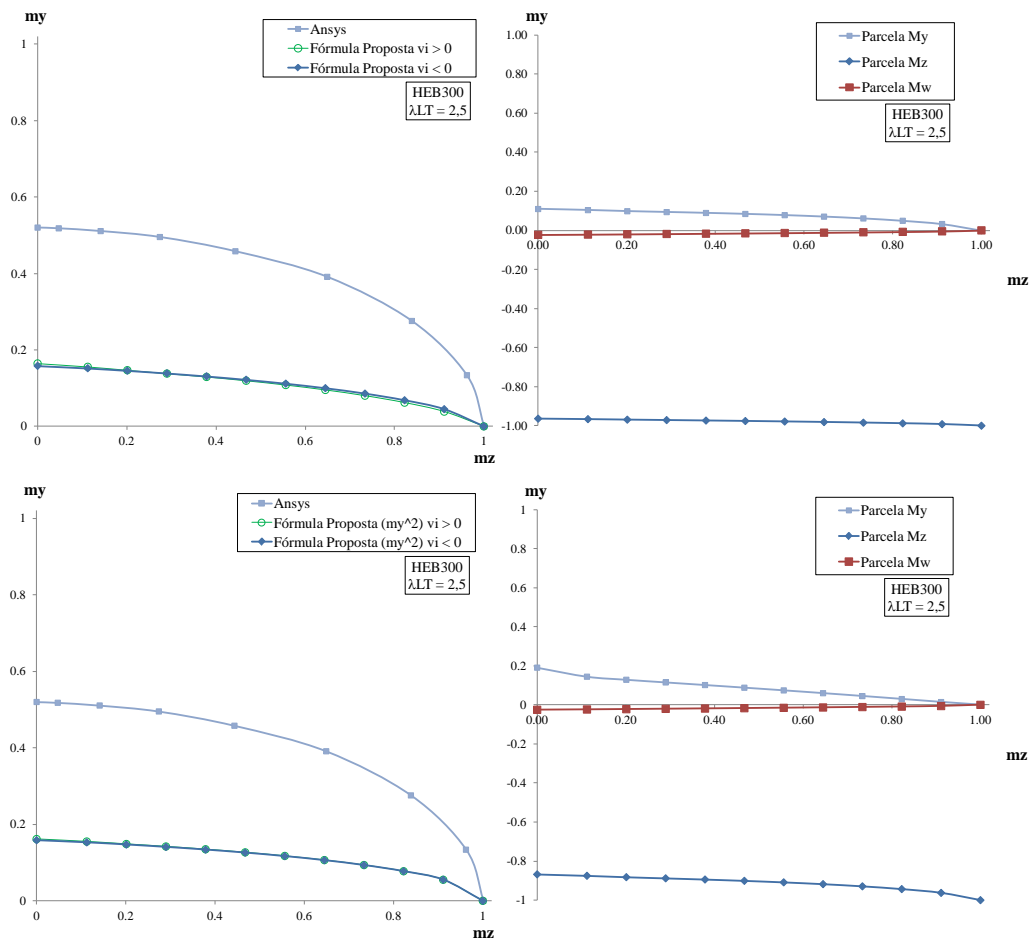


Figura 4.44: Fórmulas propostas e curva de resistência do ANSYS para  $\bar{\lambda}_{LT} = 2,5$  do perfil HEB300 (caso encastrado-apoiado)

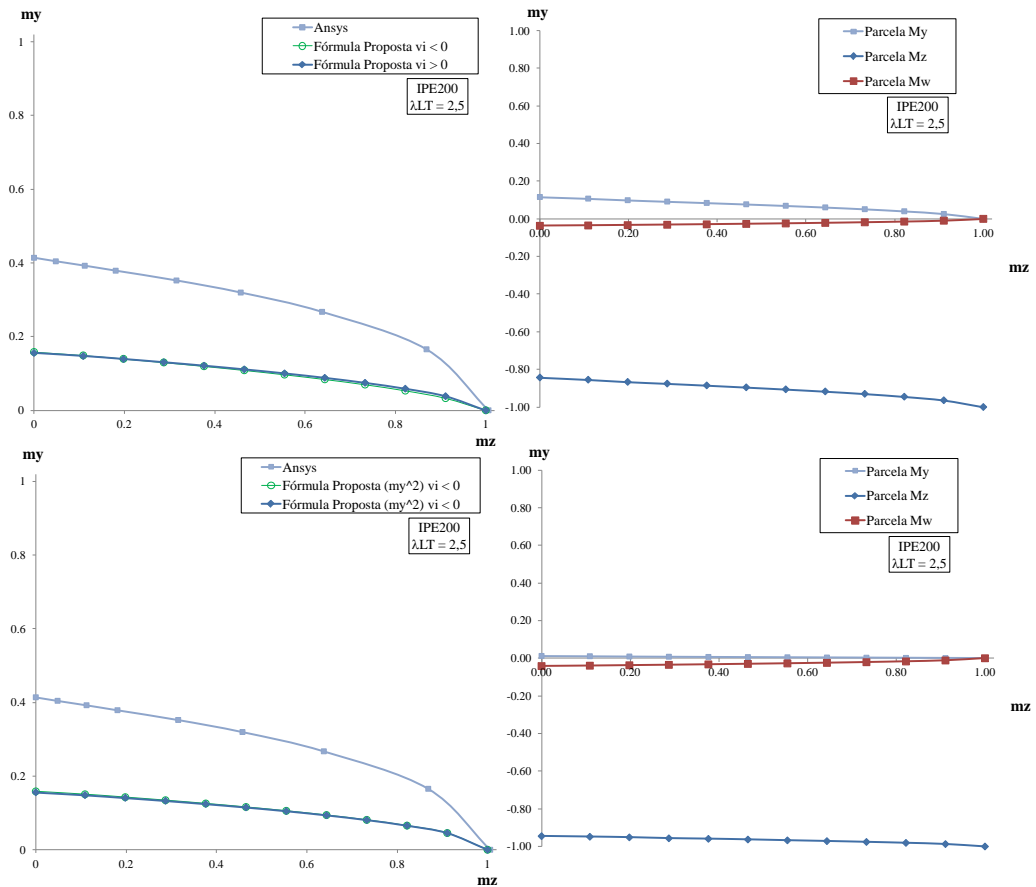


Figura 4.45: Fórmulas propostas e curva de resistência do ANSYS para  $\bar{\lambda}_{LT} = 2,5$  do perfil IPE200 (caso encastrado-apoiado)

### 4.5.1 Conclusões

Os resultados apresentados permitem concluir que a fórmula proposta ( $m_y^2$ ) (4.3) conduz a melhores resultados que a primeira fórmula proposta (4.2). No entanto, obtiveram-se valores contra a segurança em alguns casos, nomeadamente para  $\bar{\lambda}_{LT} = 1,0$  (4.15; 4.30; 4.31 e 4.33 ) e para  $\bar{\lambda}_{LT} = 1,5$  (4.12). Contudo, nestes casos as curvas de resistência do ANSYS exibem uma dupla curvatura.

Quando comparada com as equações de interacção do EC3, a fórmula proposta ( $m_y^2$ ) conduz a melhores estimativas da resistência. No entanto, como esta fórmula contabiliza explicitamente  $M_{cr}$ , não permite ajustar a imperfeição nos casos em que a resistência é superior a  $M_{cr}$ . Como é lógico, as equações de interacção do EC3 conduzem a melhores resultados nestes casos apenas porque não contabilizam explicitamente  $M_{cr}$  e permitem o ajuste directo através de  $\chi_{LT}$ . A investigação destes casos particulares constitui um dos desenvolvimentos futuros do presente trabalho.



## Capítulo 5

# Conclusões e desenvolvimentos futuros

### 5.1 Conclusões

No capítulo 2 estudou-se o comportamento de vigas sujeitas à flexão desviada, deste estudo conclui-se o seguinte:

- (1.) Nas fórmulas deduzidas por Kaim (2004) para obtenção dos momentos de segunda ordem, mesmo com esforço axial nulo, existe amplificação de esforços devido ao factor de amplificação de momentos ( $D_M$ );
- (2.) Com a utilização do Método 1, a equação A intersecta o eixo de  $m_y$  no ponto  $m_y \leq \chi_{LT}/(C_{m_y} C_{m_{LT}})$  e o eixo  $m_z$  no ponto  $m_z \leq 1,67/(C_{m_z} \sqrt{w_z/w_y})$ . A equação B intersecta o eixo de  $m_y$  no ponto  $m_y = 1,67 \chi_{LT}/(C_{m_y} C_{m_y} \sqrt{w_z/w_y})$  e o eixo de  $m_z$  no ponto  $m_z \leq 1/C_{m_z}$ . A equação B é sempre a equação condicionante para os perfis HEB300 e IPE200. Ambas as equações apresentam um comportamento linear.
- (3.) Com a utilização do Método 2, a equação A intersecta o eixo de  $m_y$  no ponto  $m_y \leq 1,67/C_{m_z}$  e o eixo  $m_z$  no ponto  $m_z \leq \chi_{LT}/C_{m_y}$ . A equação B intersecta o eixo de  $m_y$  no ponto  $m_y = 1/C_{m_z}$  e o eixo de  $m_z$  no ponto  $m_z \leq \chi_{LT}/(\min(0,6 + \bar{\lambda}_z; 1))$ . A equação A é condicionante se  $C_{m_y} \leq \min(0,6 + \bar{\lambda}_z; 1)$ . Para o caso em que  $C_{m_y} = 1$ , o parâmetro condicionante é a esbelteza normalizada em torno do eixo de flexão z.

No capítulo 4 apresentam-se os resultados de um estudo paramétrico e comparam-se as resistências obtidas com as equações de interacção do EC3, duas fórmulas propostas e análises geometricamente e fisicamente não-lineares com imperfeições geométricas e tensões residuais (ANSYS):

- (1.) O programa ANSYS, para elementos de esbelteza elevada (1,5 e 2,5), sujeitos a flexão desviada, conduziu a momentos de colapso superiores ao momento crítico ( $M_{cr}$ ).
- (2.) As curvas de resistência obtidas no ANSYS, para  $\bar{\lambda}_{LT} = 1,0$  exibem dupla concavidade.

- (3.) Para o caso apoiado-apoiado sujeito a flexão desviada, ambos os métodos do EC3 encontram-se a favor da segurança. O Método 1 conduz sempre a uma melhor aproximação que o Método 2. Por outro lado, o Método 1 é influenciado pelas duas equações e o Método 2 é sempre influenciado apenas por uma equação, a equação B.
- (4.) Para os casos encastrado-apoiado e viga em consola, os coeficientes de momento equivalente obtidos através das tabelas do EC3 conduzem a resultados, na maioria dos casos, contra a segurança.
- (5.) Propuseram-se duas fórmulas consistentes com a teoria de 2ª ordem para vigas com imperfeições laterais. Estas fórmulas são, por isso, mais “transparentes” que as do EC3 e incluem explicitamente o momento crítico e demais parâmetros de encurvadura. Em particular, a fórmula proposta com  $m_y^2$  conduz a melhores resultados. No entanto, obtiveram-se valores ligeiramente contra a segurança nos casos em que as curvas de resistência obtidas com o ANSYS exibem uma dupla curvatura.
- (6.) Quando comparada com as equações de interacção do EC3, a fórmula proposta ( $m_y^2$ ) conduz a melhores estimativas da resistência, com a excepção dos casos em que a resistência é superior a  $M_{cr}$ .

## 5.2 Desenvolvimentos futuros

Apresenta-se uma breve listagem e comentários de possíveis extensões e desenvolvimentos do trabalho efectuado, as quais foram identificados ao longo do presente trabalho:

- (1.) Desenvolver a fórmula proposta com  $m_y^2$  na secção 4.5 para contabilizar também imperfeições geométricas verticais e de torção.
- (2.) Estender as fórmulas propostas para ter em conta o efeito de diagramas de momentos e condições de apoio mais gerais. Para além disso, será interessante averiguar a precisão das fórmulas para secções de classe 3 e 4. Finalmente, será importante estudar o caso de elementos inseridos em estruturas.
- (3.) Analisar em detalhe os casos em que o ANSYS conduziu a cargas de colapso superiores ao momento crítico e também a razão, de no caso apoiado-apoiado, se ter registado um decréscimo de resistência segundo o eixo de flexão z, para o perfil HEB300.

# Referências Bibliográficas

Ansys Inc. (2004). ANSYS versão 12.1, Estados Unidos da América.

ProfilARBED (2001). Sales Programme (edição 3-2001), Luxemburgo.

Avery P. e Mahendran M. (2000). “Distributed Plasticity Analysis of Steel Frame Structures, Comprising Non-Compact Sections”. *Engineering Structures*, vol. 22, pp. 901-919.

Boissonnade N., Jaspart J., Lindner J., Greiner R. (2006). *Rules for Member Stability in EN1993-1-1 Background Documentation and Design Guidelines*. ECCS Technical Committee 8 – Stability.

Comité Europeu de Normalização (CEN) (2005). *Eurocode 3: Design of Steel Structures, Part 1-1: General Rules and Rules for Buildings*, Bruxelas.

Gonçalves R. e Camotim D. (2004). “On the Application of Beam-Column Interaction Formulae to Steel Members With Arbitrary Loading and Support Conditions”. *Journal of Constructional Steel Research*, vol 60, nº3-5, pp. 433-450.

Gonçalves R., Ritto-Corrêa M. e Camotim D. (2009). “Aplicação da Teoria Geometricamente Exacta de Vigas à Análise de Pórticos de Aço”. *Actas do VII Congresso de Construção Metálica e Mista*.

Galéa Y. (2012). LTBEAM versão 1.0.11. CTICM, França.

Gruttmann F., Sauer R. e Wagner W. (2000). “Theory and Numerics of Three-Dimensional Beams With Elastoplastic Material Behaviour”. *International Journal For Numerical Methods In Engineering*, pp. 1675-1702.

Kaim P. (2004). “Spatial Buckling Behaviour of Steel Members Under Bending and Compression”. *Tese de Doutoramento*, Technische Universität Graz.

- Lindner J. (2003). “Design of Beam and Beam-Columns”. *Progress in Structural Engineering and Mechanics*, vol. 5, pp. 38-47.
- Mendonça P. (2006). “Dimensionamento de Colunas-Viga Através das Equações de Interação do Eurocódigo 3”. *Tese de Mestrado*, Universidade Técnica de Lisboa, Instituto Superior Técnico.
- Ofner R. (1997). “Traglasten von Stäben aus Stahl bei Druck und Biegung”. *Tese de Doutoramento*, Technisch Universitat Graz.
- Rosa J. (2011). *Estudo das Equações de Interação de Colunas-Viga do Método 2 do Eurocódigo 3*. Dissertação de Mestrado, Universidade Nova de Lisboa, Faculdade de Ciências e Tecnologia.
- Vogel U. (1985). “Calibrating Frames”. *Stahlbau*, vol. 54, pp. 295-301.
- Ziemian R. D. (1993). “Examples of Frames Studies Used to Verify Advanced Methods of Inelastic Analyses”. *Plastic Hinge Based Methods for Advanced Analysis and Design of Steel Frames*. Structural Stability Research Council, Lehigh University, Bethlehem, PA.