Teresa Maria de Araújo Melo Quinteiro

Mestre em Matemática

Monóides de Transformações

Dissertação para obtenção do Grau de Doutor em Matemática

Orientador: Prof. Doutor Vítor Hugo Fernandes
Professor Auxiliar com Agregação
FCT-UNL

Co-orientador: Prof. Doutor João Carlos Ferreira
Professor Adjunto
ISEL-IPL

Júri:

Presidente: Prof. Doutora M. Luísa M. M. de Faria Mascarenhas
Arguentes: Prof. Doutora Gracinda Maria S. G. Moreira da Cunha
Prof. Doutor Manuel Augusto Fernandes Delgado
Vogais: Prof. Doutor José Carlos Cruz da Costa
Prof. Doutor Mário João de Jesus Branco
Prof. Doutor Vítor Hugo B. D. Fernandes
Prof. Doutor João Carlos Amaro Ferreira

FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA

Novembro de 2011

Teresa Maria de Araújo Melo Quinteiro

Mestre em Matemática

Monóides de Transformações

Dissertação para obtenção do Grau de Doutor em Matemática

Orientador: Prof. Doutor Vítor Hugo Fernandes
Professor Auxiliar com Agregação
FCT-UNL
Co-orientador: Prof. Doutor João Carlos Ferreira
Professor Adjunto
ISEL-IPL

Júri:

Presidente: Prof. Doutora M. Luísa M. M. de Faria Mascarenhas
Arguentes: Prof. Doutora Gracinda Maria S. G. Moreira da Cunha
Prof. Doutor Manuel Augusto Fernandes Delgado
Vogais: Prof. Doutor José Carlos Cruz da Costa
Prof. Doutor Mário João de Jesus Branco
Prof. Doutor Vítor Hugo B. D. Fernandes
Prof. Doutor João Carlos Amaro Ferreira

FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA

Novembro de 2011

Em memória de meu avô Luís

Agradecimentos

Gostaria de começar por expressar o meu agradecimento ao Professor Vítor Hugo Fernandes. Em primeiro lugar, estou-lhe grata por ter apostado no meu trabalho. Depois, agradeço-lhe pela orientação científica, pela disponibilidade, pelo apoio, pelo incentivo e pela paciência que me concedeu. Por fim, estou-lhe ainda grata pelo muito que de Matemática me ensinou.

À Professora Gracinda Gomes quero agradecer o interesse e a confiança que demonstrou por mim, assim como pela sua constante simpatia.

Estou grata ao Professor João Amaro Ferreira pela sua disponibilidade.

Aos meus avós, pais e marido agradeço o constante encorajamento que me deram.

Quero salientar o apreço que tenho pelo meu marido e pelos meus sogros pelo apoio que me deram substituindo-me muitas vezes junto dos meus filhos.

Aos amigos um muito obrigada pelo apoio e camaradagem.

Ao Instituto Superior de Engenharia de Lisboa, ao Centro de Álgebra da Universidade de Lisboa e ao Centro de Matemática e Aplicações da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa agradeço todas as facilidades e condições que me concederam tornando possível a preparação desta dissertação.

Este trabalho foi executado dentro das actividades dos projectos PTDC/MAT/69514/2006 e ISFL-1-143 do Centro de Álgebra da Universidade de Lisboa.

Resumo

Na Teoria dos Semigrupos é extremamente importante o papel dos semigrupos de transformações. De facto, estes desempenham o papel, na Teoria dos Semigrupos, correspondente ao dos grupos de permutações, na Teoria dos Grupos. Estão ainda presentes de modo crucial na Teoria dos Autómatos e Linguagens Formais, tendo assim aplicabilidade na Computação Teórica e na Linguística, bem como em muitas outras áreas do conhecimento.

As cardinalidades e as características de diversas classes de semigrupos de transformações (totais, parciais, parciais injectivas, que preservam a ordem, a orientação ou uma relação de equivalência) têm sido objecto de pesquisa de um número considerável de autores. Na primeira parte desta dissertação apresentamos a nossa contribuição para este estudo calculando as cardinalidades e as características de alguns monóides de transformações sobre uma cadeia finita que preservam uma partição uniforme.

A segunda parte deste trabalho é dedicada a uma construção de semigrupos, o produto semidirecto bilateral, introduzida para grupos por Zappa e estudada para semigrupos por Kunze. Usando várias estratégias, decompomos certos monóides de transformações como quocientes de um produto semidirecto bilateral de dois dos seus submonóides. Um dos procedimentos que utilizamos resulta de um processo geral para obter produtos semidirectos bilaterais, o qual consiste na construção de um produto semidirecto bilateral de dois monóides livres que, sob determinadas condições, induz um produto semidirecto bilateral de dois monóides definidos por apresentações associadas a esses monóides livres. Como aplicação, deduzimos decomposições de alguns monóides de transformações sobre uma cadeia finita, entre os quais salientamos o monóide das transformações crescentes. Os resultados obtidos têm aplicabilidade imediata às pseudovariedades geradas pelos monóides em questão permitindo-nos em particular concluir que a pseudovariedade O, gerada pela família dos monóides de transformações totais e crescentes sobre uma cadeia com n elementos, está propriamente contida no produto semidirecto bilateral da pseudovariedade J, dos monóides $\mathcal{J}$-triviais, por ela própria.

Palavras chave: monóides; transformações; ordem; orientação; equivalências; produto semidirecto bilateral.

Abstract

In Semigroup Theory, the role played by transformation semigroups is extremely important. In fact, they play the corresponding role of permutation groups, in Group Theory. They are also present in a crucial way in Automata and Formal Language Theory and thus have applications in Theoretical Computer Science and in Linguistics, as well as many other areas of knowledge.

The cardinalities and the ranks of several classes of transformation semigroups (total, partial, partial injective, order, orientation or equivalence-preserving) have been the subject of research by several authors. In the first part of this work we present our contribution to this study by calculating the cardinalities and the ranks of some monoids of transformations on a finite chain that preserve a uniform partition.

The second part of this work is devoted to a semigroup construction, the bilateral semidirect product, introduced for groups by Zappa and studied for semigroups by Kunze. Using several strategies, we decompose certain monoids of transformations as quotients of a bilateral semidirect product of two of their special submonoids. For instance, we developed a general method which consists in the construction of a bilateral semidirect product of two free monoids that, under certain conditions, induces a bilateral semidirect product of two monoids defined by presentations associated to these free monoids. As an application, we deduce decompositions of some monoids of full transformations on a finite chain, namely the monoid of all order-preserving full transformations. All these decompositions yield immediate results at the pseudovariety level. In particular, we conclude that the pseudovariety O, generated by the family of all monoids of order-preserving full transformations on a finite chain, is properly contained in the bilateral semidirect product of the pseudovariety J, the pseudovariety of $\mathcal{J}$-trivial monoids, by itself.

Keywords: monoids; transformations; order-preserving; orientation-preserving; equivalence-preserving; bilateral semidirect products.

Índice

Introdução

O estudo dos semigrupos de transformações é um assunto particularmente relevante em Álgebra, em especial na Teoria dos Semigrupos. Está ainda intimamente interligado com a Teoria dos Autómatos e Linguagens: dado um autómato sobre um certo alfabeto, está definida para cada letra do alfabeto uma função de transição; a um autómato está então naturalmente associado um semigrupo de transformações sobre os estados do autómato que, num certo sentido puramente algébrico, reconhece a linguagem aceite pelo autómato. A origem da Teoria dos Autómatos remonta a um trabalho de Kleene de há cerca de 50 anos motivado originalmente pelo estudo de redes neuronais ("neural networks"). Desde então, diferentes problemas de diversas áreas, nomeadamente da Computação Teórica e da Linguística, têm sido estudados usando diversos tipos de autómatos.

Do ponto de vista algébrico, os semigrupos de transformações desempenham, na Teoria dos Semigrupos, o papel correspondente ao dos grupos simétricos, na Teoria dos Grupos. A justificação desta afirmação passa pelo bem conhecido resultado, análogo ao Teorema de Cayley para grupos, que estabelece que todo o semigrupo é, a menos de um isomorfismo, um subsemigrupo de um semigrupo de transformações totais sobre um conjunto conveniente. No universo dos semigrupos finitos, estes resultados podem ser estabelecidos com semigrupos de transformações sobre conjuntos finitos.

Resultados sobre semigrupos finitos acrescentam relevância aos semigrupos de transformações. Simon em [66] prova que uma linguagem racional é testável por pedaços se e só se o seu semigrupo sintáctico é $\mathcal{J}$-trivial, estabelecendo assim uma dualidade entre a variedade das linguagens testáveis por pedaços e a pseudovariedade J dos semigrupos $\mathcal{J}$-triviais. É bem conhecido que a pseudovariedade J é gerada por todos os semigrupos de transformações totais extensivas e crescentes sobre uma cadeia finita [60]. Surge assim a questão, formulada por J.-E. Pin em 1987 no colóquio "Szeged International Semigroup Colloquium", acerca da decidibilidade da pseudovariedade O, gerada pela família $\{\mathcal{O}_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, dos semigrupos de transformações totais e crescentes sobre uma cadeia com n elementos. Apesar desta questão continuar sem resposta, foram feitos alguns progressos. A possibilidade de as pseudovariedades O e A (pseudovariedade dos semigrupos aperiódicos) serem iguais foi afastada após Higgins, em [39], ter mostrado que existem semigrupos $\mathcal{R}$-triviais finitos que não dividem nenhum $\mathcal{O}_n$. No mesmo artigo Higgins provou que O é auto-dual e que contém toda a banda finita. Este último resultado foi generalizado por Vernitskii e Volkov em [70] ao mostrarem que todo o semigrupo finito cujos idempotentes formam um ideal está na pseudovariedade O. Em [16] Fernandes prova que a pseudovariedade POI gerada por todos os semigrupos de transformações parciais injectivas e crescentes sobre uma cadeia com n elementos, $\mathcal{POI}_n$, é uma subpseudovariedade própria de O e em [21] o mesmo autor mostra que O contém todos os produtos semidirectos $\mathcal{C} \rtimes \mathcal{POI}_n$ sendo $\mathcal{C}$ uma cadeia (considerada como um semireticulado). Mais recentemente, Fernandes e Volkov em [32] generalizaram este resultado provando que todo o produto semidirecto de uma cadeia por um semigrupo que pertença a O também pertence a O. Em [3] Almeida e Volkov provaram que o intervalo $[\mathsf{O}, \mathsf{A}]$ do reticulado de todas as pseudovariedades de semigrupos tem a cardinalidade do contínuo e, em [62], Repnitskii e Volkov mostraram que a pseudovariedade O não é finitamente baseada. De facto, mais do que isso, mostraram que qualquer pseudovariedade de semigrupos V tal que $\mathsf{POI} \subseteq \mathsf{V} \subseteq \mathsf{O} \vee \mathsf{R} \vee \mathsf{L}$, sendo R e L as pseudovariedades dos semigrupos $\mathcal{R}$-triviais e $\mathcal{L}$-triviais, respectivamente, não é finitamente baseada.

No entanto, o interesse pelos monóides $\mathcal{O}_n$ surge muito antes, nos anos sessenta. De facto, em 1962, Aĭzenštat [1, 2] provou que as congruências de $\mathcal{O}_n$ são exactamente as congruências de Rees e forneceu uma apresentação para $\mathcal{O}_n$, com $2n-2$ geradores idempotentes, a partir da qual pode ser deduzido que o único automorfismo não trivial de $\mathcal{O}_n$, com $n > 1$, é o dado por conjugação pela permutação $(1\ n)(2\ n-1)\cdots(\lfloor n/2 \rfloor\ \lceil n/2 \rceil + 1)$. Ainda em relação ao monóide $\mathcal{O}_n$, em 1971, Howie [41] calculou o seu cardinal, $\binom{2n-1}{n-1}$, e o número de idempotentes e mais tarde (1992), juntamente com Gomes [36], determinou que n é a sua característica e que $2n-2$ é a sua característica idempotente. Em [71] Yang obteve a classificação dos subsemigrupos maximais de $\mathcal{O}_n$. Mais recentemente, Fernandes et al. [26] descreveram os endomorfismos do semigrupo $\mathcal{O}_n$ mostrando que existem três tipos de endomorfismos: automorfismos, constantes e um certo tipo de endomorfismo com dois idempotentes na imagem. Obtemos uma extensão do monóide $\mathcal{O}_n$ ao considerarmos todas as transformações totais monótonas (crescentes ou decrescentes) sobre uma cadeia com n elementos. Denotamos este monóide por $\mathcal{OD}_n$. Uma apresentação para $\mathcal{OD}_n$ com n geradores e $\frac{1}{2}(n^2+n+2)$ relações foi encontrada por Fernandes, Gomes e Jesus em [24]. Os mesmos autores, em [23], mostraram que $\mathcal{OD}_n$ possui $2n$ congruências e estabeleceram que o seu cardinal é $2\binom{2n-1}{n-1} - n$ e, para $n \geq 2$, que a sua característica é $\lceil \frac{n}{2} \rceil + 1$. Os monóides de transformações parciais crescentes sobre uma cadeia com n elementos e parciais monótonas sobre uma cadeia com n elementos são denotados, respectivamente, por $\mathcal{PO}_n$ e $\mathcal{POD}_n$. Em [36] Gomes e Howie mostraram que o cardinal de $\mathcal{PO}_n$ é dado pela expressão $\sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i}\binom{n+i-1}{i} + 1$ (ver também os artigos de Laradji e Umar [54, 55]), que a sua característica é $2n-1$ e que a sua característica idempotente é $3n-2$. Em [23] Fernandes, Gomes e Jesus estudaram a estrutura do monóide $\mathcal{PO}_n$ que, assim como o monóide $\mathcal{O}_n$, é aperiódico e tem como congruências apenas as $n+1$ congruências de Rees. Uma apresentação para este monóide com $3n-2$ geradores idempotentes e $\frac{1}{2}(7n^2-n-4)$ relações pode ser vista em [20] (ver também o artigo de Popova [61]). Em relação ao monóide $\mathcal{POD}_n$, ainda em [23] os autores provaram que o seu cardinal é $\sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i}\left(2\binom{n+i-1}{i} - n\right) + 1$, que a sua característica é $n+1$ e que, tal como $\mathcal{OD}_n$, tem $2n$ congruências. Os mesmo autores em [24] forneceram uma apresentação para $\mathcal{POD}_n$ com $\lceil n/2 \rceil + n$ geradores e $\frac{1}{4}\left(7n^2+2n+\frac{3}{2}[1-(-1)^n]\right)$ relações. O monóide $\mathcal{POI}_n$ foi objecto de estudo de várias publicações de Fernandes [16, 17, 19, 21, 20], de Cowan e Reilly [11], de Ganyushkin e Mazorchuk [34] e também de Dimitrova e Koppitz [15]. Em [19] Fernandes estudou propriedades estruturais do monóide $\mathcal{POI}_n$, obtendo, por exemplo, que as suas únicas congruências são as de Rees e que a sua característica é n. Determinou ainda uma sua apresentação com n geradores e $\frac{1}{2}(n^2+5n-4)$ relações. Em [35] Garba estabeleceu o cardinal de $\mathcal{POI}_n$ como sendo $\binom{2n}{n}$ (ver também [16]). Em [34] Ganyushkin e Mazorchuk descreveram os subsemigrupos maximais, subsemigrupos inversos maximais, subsemigrupos nilpotentes maximais e os automorfismos de $\mathcal{POI}_n$ e em [15] Dimitrova e Koppitz caracterizaram os subsemigrupos maximais dos seus ideais. Uma apresentação para o monóide $\mathcal{PODI}_n$, o monóide de todas as transformações parciais injectivas e monótonas sobre uma cadeia com n elementos, com $\frac{1}{2}(n^2+7n-2)$ relações e n geradores foi obtida por Fernandes, Gomes e Jesus em [22], artigo onde provaram também que a característica de $\mathcal{PODI}_n$ é $\lceil \frac{n}{2} \rceil + 1$. Em [23] os mesmos autores descreveram as $2n$ congruências de $\mathcal{PODI}_n$ e em [24] mostraram que o cardinal deste monóide é $2\binom{2n}{n}-n^2-1$. Dimitrova e Koppitz em [14] caracterizaram os subsemigrupos maximais de $\mathcal{PODI}_n$.

A noção de transformação que preserva a orientação foi introduzida por McAlister em [59] e independentemente por Catarino e Higgins em [8]. Várias propriedades dos monóides de transformações totais sobre uma cadeia com n elementos que preservam a orientação, $\mathcal{OP}_n$, e dos monóides de transformações totais sobre uma cadeia com n elementos que preservam ou revertem a orientação, $\mathcal{OR}_n$, foram estudadas nestes dois artigos, onde se provou também que as cardinalidades de $\mathcal{OP}_n$ e de $\mathcal{OR}_n$ são $n\binom{2n-1}{n-1}-n(n-1)$ e $n\binom{2n}{n}-\frac{n^2}{2}(n^2-2n+5)+n$, respectivamente. As congruências de $\mathcal{OP}_n$ e $\mathcal{OR}_n$ foram descritas por Fernandes, Gomes e Jesus em [25] e os subsemigrupos *locais* maximais e maximais de $\mathcal{OP}_n$ gerados por idempotentes foram caracterizados por Zhao, Bo e Mei em [74] e por Zhao em [73], respectivamente. Mais recentemente, em [13], Dimitrova, Fernandes e Koppitz descreveram os subsemigrupos maximais de $\mathcal{OP}_n$ e $\mathcal{OR}_n$. Uma apresentação para o monóide $\mathcal{OP}_n$ com $2n-1$ geradores foi obtida por Catarino em [7] e melhorada por Arthur e Ruškuc em [6] que forneceram uma nova apresentação para o mesmo monóide com 2 geradores (a característica do monóide) e $n+2$ relações, e outra para o monóide $\mathcal{OR}_n$ com 3 geradores (a sua característica) e $n+6$ relações. Denotamos por $\mathcal{POP}_n$ e $\mathcal{POR}_n$ os monóides das transformações parciais que preservam a orientação sobre uma cadeia com n elementos e das transformações parciais que preservam ou revertem a orientação sobre uma cadeia com n elementos, respectivamente. Resultados estruturais sobre estes monóides foram obtidos por Fernandes, Gomes e Jesus em [25]. Nesse artigo os autores provam ainda que os cardinais de $\mathcal{POP}_n$ e $\mathcal{POR}_n$ são, respectivamente, $1+(2^n-1)n+\sum_{k=2}^{n} k\binom{n}{k}^2 2^{n-k}$ e $1+(2^n-1)n+2\binom{n}{2}^2 2^{n-2}+\sum_{k=3}^{n} 2k\binom{n}{k}^2 2^{n-k}$, que $\mathcal{POP}_n$ tem característica 3 e que $\mathcal{POR}_n$ tem característica 4. Apresentações para $\mathcal{POP}_n$ com 3 geradores e $4n+2$ relações e para $\mathcal{POR}_n$ com 4 geradores e $4n+7$ relações foram obtidas por Fernandes, Gomes e Jesus em [24]. O monóide de todas as transformações parciais injectivas que preservam a orientação sobre uma cadeia com n elementos é denotado por $\mathcal{POPI}_n$. Várias propriedades deste monóide foram estudadas por Fernandes em [18]. Nesse artigo, Fernandes descreveu os ideais e as congruências de $\mathcal{POPI}_n$, calculou o seu cardinal, $1+\frac{n}{2}\binom{2n}{n}$, determinou a sua característica, 2, e exibiu duas apresentações para $\mathcal{POPI}_n$, uma com $n+1$ geradores e $\frac{1}{2}(n^2+7n-2)$ relações e, a partir desta, obteve outra apresentação com o mesmo número de relações mas apenas 2 geradores. O monóide $\mathcal{PORI}_n$, das transformações parciais injectivas que preservam ou revertem a orientação sobre uma cadeia com n elementos foi igualmente analisado por Fernandes, juntamente com Gomes e Jesus, em [22] e [25]. Em [22] é provado que o cardinal de $\mathcal{PORI}_n$ é $1+n\binom{2n}{n}-\frac{n^2}{2}(n^2-2n+3)$, que a sua característica é 3 e é exibida uma apresentação para $\mathcal{PORI}_n$ com 3 geradores e $2n+4$ relações. As congruências do monóide $\mathcal{PORI}_n$ aparecem em [25]. A estrutura dos monóides $\mathcal{POP}_n$, $\mathcal{POR}_n$, $\mathcal{POPI}_n$ e $\mathcal{PORI}_n$ é semelhante, em particular, são todos monóides regulares e as suas $\mathcal{J}$-classes são os conjuntos de todos os elementos com a mesma característica.

Por outro lado, o monóide $\mathcal{T}_\rho(X)$ de todas as transformações totais que preservam uma relação de equivalência ρ num conjunto X foi estudado em 2005 por Huisheng [44]. Mais tarde (2009), o mesmo autor juntamente com Zhou [47] analisou o seu correspondente parcial, $\mathcal{PT}_\rho(X)$, em relação às mesmas propriedades: elementos regulares e descrição das relações de Green. Ainda em relação ao monóide $\mathcal{T}_\rho(X)$, para o caso de X infinito, novamente Huisheng, desta vez com Deng, em [45] estabeleceu, em termos da relação de equivalência ρ, as condições para as quais as relações de Green $\mathcal{J}$ e $\mathcal{D}$ são iguais. O monóide das transformações totais sobre um conjunto X com mn elementos que preservam uma m-partição uniforme (partição com m classes em que todas as classes têm a mesma cardinalidade) de X, $\mathcal{T}_{m\times n}$, é um caso particular do monóide $\mathcal{T}_\rho(X)$ de especial interesse. Em relação à característica de $\mathcal{T}_{m\times n}$, primeiro, Huisheng [43] provou que é menor ou igual a 6 e, mais tarde, Araújo e Schneider [5] melhoraram este resultado mostrando que, para $m,n\geq 2$, a característica de $\mathcal{T}_{m\times n}$ é exactamente 4. As características dos monóides $\mathcal{PT}_{m\times n}$ e $\mathcal{I}_{m\times n}$, das transformações parciais sobre um conjunto com mn elementos que preservam uma m-partição uniforme e das transformações parciais injectivas sobre um conjunto com mn elementos que preservam uma m-partição uniforme, foram determinadas por Cicalò, Fernandes e Schneider em [10] e são, respectivamente, 5 e $3+\lfloor n/2\rfloor$. Em [46] Huisheng e Dingyu descrevem os elementos regulares e as relações de Green do submonóide de $\mathcal{T}_{m\times n}$ das transformações crescentes, $\mathcal{O}_{m\times n}$. Uma descrição dos elementos regulares e das relações de Green do submonóide $\mathcal{OP}_{m\times n}$ de $\mathcal{T}_{m\times n}$ constituído pelas transformações que preservam a orientação foi feita por Sun, Huisheng e Zhengxing em [69].

Uma abordagem comum para estudar um semigrupo consiste em decompo-lo noutros para os quais seja mais fácil obter informação. Em [48] Kunze estudou o produto semidirecto bilateral, uma construção introduzida para grupos por Zappa em 1940. Nesse artigo, abordou as aplicações do produto semidirecto bilateral, nomeadamente, a relação entre o produto semidirecto bilateral e as extensões de semigrupos, as congruências no produto semidirecto bilateral, o produto semidirecto bilateral na Teoria de Grupos, aplicações do produto semidirecto bilateral a semigrupos, decomposições de semigrupos e Teoria dos Autómatos. Podemos ainda ver as aplicações deste produto à Teoria dos Autómatos em [49] e [50]. Em [56] Lavers estabeleceu condições através das quais um produto semidirecto bilateral de dois monóides finitamente apresentáveis é finitamente apresentável e exibiu explicitamente a apresentação sujeita a essas condições. Ainda neste artigo a extensão de Bruck-Reilly de um monóide é obtida, como caso particular, de um produto semidirecto bilateral. Em [51] Kunze provou que $\mathcal{T}_n$, o semigrupo das transformações totais sobre um conjunto com n elementos, é um quociente de um produto semidirecto bilateral do grupo simétrico $\mathcal{S}_n$ e de $\mathcal{O}_n$. Ainda no mesmo artigo, Kunze mostrou que $\mathcal{O}_n$ é um quociente de um produto semidirecto bilateral dos seus subsemigrupos $\mathcal{O}_n^+$ das transformações extensivas e $\mathcal{O}_n^-$ das transformações co-extensivas. Estes resultados, assim como aplicações às Linguagens Formais, foram também discutidos por Kunze em [52].

Até agora fizemos uma revisão de alguns resultados que motivaram o estudo desenvolvido neste trabalho, cujos resultados originais constituem uma tentativa de levar adiante a Teoria dos Monóides de Transformações. A maioria dos resultados que apresentamos nesta tese surgiu ou vai surgir em quatro artigos [27, 28, 29, 30]. No entanto, salientamos que este trabalho não é uma compilação dos artigos. De facto, a ordem pela qual os assuntos aparecem aqui não corresponde à dos artigos pois estes foram escritos à medida que a investigação foi progredindo.

No primeiro capítulo apresentamos os conceitos e resultados gerais da Teoria de Semigrupos necessários para se compreender os capítulos seguintes.

A partir desse capítulo, a dissertação divide-se implicitamente em duas partes.

A primeira parte deste trabalho é constituída pelos capítulos 2 e 3 onde obtemos as cardinalidades e as características de alguns monóides de transformações. Para conseguirmos as características desses monóides, fornecemos conjuntos geradores que provamos serem de cardinal mínimo. Dada a complexidade desta tarefa nos monóides abordados é tecnicamente conveniente usar a descrição, em termos do produto em coroa, do monóide $\mathcal{T}_{m\times n}$ obtida por Araújo e Schneider em [5]. Usámos também algumas ferramentas computacionais. O uso do computador permitiu tratar inúmeros exemplos que ajudaram a criar a intuição necessária que levou à formulação de conjecturas que depois foram provadas e constituem alguns dos resultados mais importantes destes dois capítulos. Os sistemas usados foram o programa de MacAlister [57] e o GAP [33]. Refiro ainda a importância de poder usar em interacção com o GAP os pacotes "monoid"[58] (que permitiu tornar os cálculos mais rápidos) e "sgpviz"[12] (que permitiu visualizar exemplos).

Assim, no Capítulo 2, estabelecemos fórmulas para o cardinal e para a característica do monóide $\mathcal{OD}_{m\times n}$, das transformações totais monótonas sobre uma cadeia com mn elementos que preservam uma m-partição uniforme, e de alguns seus submonóides. Denotamos por $\mathcal{O}_{m\times n}^+$ e por $\mathcal{O}_{m\times n}^-$ os submonóides de $\mathcal{O}_{m\times n}$ das transformações extensivas e co-extensivas, respectivamente. Os cardinais de $\mathcal{O}_{m\times n}$, $\mathcal{O}_{m\times n}^+$ ($\mathcal{O}_{m\times n}^-$) e $\mathcal{OD}_{m\times n}$ podem ser encontrados, respectivamente, nos Teoremas 2.2.1, 2.2.8 e 2.2.2. No Teorema 2.3.7 mostramos que, para $m, n \geq 2$, a característica de $\mathcal{O}_{m\times n}$ é igual a $2mn - n$ e no Teorema 2.3.4 provamos que, para $m, n \geq 2$, a característica de $\mathcal{O}_{m\times n}^+$ ($\mathcal{O}_{m\times n}^-$) é igual a $2mn - m - n$. A característica de $\mathcal{OD}_{m\times n}$, para $m, n \geq 2$, aparece no Teorema 2.3.14 e é igual a $\lceil \frac{mn}{2} \rceil + \lceil \frac{(m-1)n}{2} \rceil + 1$.

No Capítulo 3, determinamos as cardinalidades e características do monóide $\mathcal{OP}_{m\times n}$ e do monóide $\mathcal{OR}_{m\times n}$, que é o monóide das transformações sobre uma cadeia com mn elementos que preservam uma m-partição uniforme e preservam ou revertem a orientação. Obtemos também conjuntos geradores e as características (Proposição 3.1.3) de certos subsemigrupos de imagem restringida de $\mathcal{OP}_n$, que nos vão ser úteis para calcularmos a característica de $\mathcal{OP}_{m\times n}$. Fórmulas para os cardinais $\mathcal{OP}_{m\times n}$ e $\mathcal{OR}_{m\times n}$ podem ser encontradas nos Teorema 3.3.1 e Teorema 3.3.2, respectivamente. Podemos ver no Teorema 3.4.9 que, para $n \geq 2$, a característica de $\mathcal{OP}_{m\times n}$ é igual a $2n + \lceil \frac{n-1}{2} \rceil + 1$, para $m > 2$, e que a característica de $\mathcal{OP}_{2\times n}$ é igual a $n + \lceil \frac{n-1}{2} \rceil + 1$. Em relação ao monóide $\mathcal{OR}_{m\times n}$, no Teorema 3.4.16 estabelecemos que, para $n \geq 2$, a sua característica é igual a $2\lceil \frac{n}{2} \rceil + \lceil \frac{n-1}{2} \rceil + 2$, para $m > 2$, e que a característica de $\mathcal{OR}_{2\times n}$ é igual a $\lceil \frac{n}{2} \rceil + \lceil \frac{n-1}{2} \rceil + 2$.

A segunda parte desta dissertação, composta pelo Capítulo 4, é dedicada ao produto semidirecto bilateral.

Começamos por decompor os monóides $\mathcal{POI}_n$, como quociente de um produto semidirecto bilateral dos seus submonóides $\mathcal{POI}_n^-$ e $\mathcal{POI}_n^+$ das transformações co-extensivas e extensivas respectivamente (Proposição 4.1.3), e $\mathcal{PODI}_n$, como quociente de um produto semidirecto (Proposição 4.1.5) e de um produto semidirecto reverso (Proposição 4.1.7) do seu submonóide $\mathcal{POI}_n$ e do grupo cíclico $\mathcal{C}_2$ de ordem 2. O que fazemos para ambos os monóides é definir directamente aplicações que nos permitem estabelecer um produto semidirecto bilateral de $\mathcal{POI}_n^-$ e $\mathcal{POI}_n^+$, um produto semidirecto e um produto semidirecto reverso de $\mathcal{POI}_n$ e $\mathcal{C}_2$. Apresentamos também o monóide $\mathcal{O}_{m\times n}$ como quociente dos seus submonóides $\mathcal{O}_{m\times n}^-$ e $\mathcal{O}_{m\times n}^+$ (Teorema 4.2.4). Este resultado generaliza a decomposição do monóide $\mathcal{O}_n$ através de um produto semidirecto bilateral dos seus submonóides $\mathcal{O}_n^-$ e $\mathcal{O}_n^+$, obtida por Kunze [51]. Como estratégia usamos as acções definidas por Kunze em $\mathcal{O}_{mn}^-$ e $\mathcal{O}_{mn}^+$ para induzir uma acção esquerda de $\mathcal{O}_{m\times n}^+$ em $\mathcal{O}_{m\times n}^-$ e uma acção direita de $\mathcal{O}_{m\times n}^-$ em $\mathcal{O}_{m\times n}^+$. Observamos que também o monóide $\mathcal{OD}_{m\times n}$ pode obter-se usando um quociente de um produto semidirecto (Proposição 4.2.5) ou de um produto semidirecto reverso (Proposição 4.2.6) dos seus submonóides $\mathcal{O}_{m\times n}$ e $\mathcal{C}_2$. De seguida, desenvolvemos um método geral para obter produtos semidirectos bilaterais que consiste na construção de um produto semidirecto bilateral de dois monóides livres que, sob determinadas condições, induz um produto semidirecto bilateral de dois monóides definidos por apresentações associadas a esses monóides livres. Este método é aplicado para obter decomposições dos monóides $\mathcal{O}_n$, $\mathcal{OD}_n$, $\mathcal{OP}_n$ e $\mathcal{OR}_n$ e, consequentemente, das pseudovariedades por eles geradas. Em particular obtemos uma nova demonstração, claramente mais simples, do resultado de Kunze [51] acima mencionado.

Terminamos esta dissertação formulando algumas questões que julgamos em aberto.

Esta tese foi escrita de acordo com a antiga ortografia.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo apresentamos sucintamente as definições e os resultados que serão necessários para os capítulos seguintes. As definições e os resultados clássicos da Teoria dos Semigrupos podem ser encontrados por exemplo em [38], [42], [53] ou [60]. Os resultados mais específicos estão referenciados. Os semigrupos e monóides que iremos considerar ao longo deste trabalho são finitos ou livres.

1.1 Relações

Se A é um conjunto denotamos por $|A|$ o *cardinal* de A.

Sejam A e B conjuntos. Uma *relação* de A em B é um subconjunto R do produto cartesiano $A \times B$. Dizemos que a está *R-relacionado* com b se $(a, b) \in R$. Se $A = B$ dizemos que R é uma *relação em A*. Salientamos duas relações especiais: a *relação universal*, $A \times B$ e, no caso de $A = B$, a *relação identidade*, $1_A = \{(a, a) \mid a \in A\}$.

Para uma relação R de A em B e a um elemento de A definimos *a imagem de a por meio de R* como sendo o conjunto $\{b \in B \mid (a, b) \in R\}$ que denotamos por $(a)R$ ou simplesmente por aR. Dado um subconjunto A' de A chamamos *imagem de A' por meio de R*, ao conjunto $(A')R = \{b \in B \mid (a, b) \in R$ para certo $a \in A'\}$ e, *imagem de R*, ao conjunto $\operatorname{Im} R = (A)R$. Designamos o subconjunto $\{a \in A \mid (a, b) \in R$ para certo $b \in B\}$ de A por *domínio de R* e denotamos por $\operatorname{Dom} R$.

Definimos a *relação inversa* de R como sendo a relação $R^{-1} = \{(b, a) \mid (a, b) \in R\}$ de B em A. Observemos que $\operatorname{Im} R^{-1} = \operatorname{Dom} R$ e $\operatorname{Dom} R^{-1} = \operatorname{Im} R$.

Uma relação R de A em B diz-se: *injectiva* se, para quaisquer $x, y \in A$, se $xR \cap yR \neq \varnothing$ então $x = y$; *sobrejectiva* se $\operatorname{Im} R = B$; e *bijectiva* se for simultaneamente injectiva e sobrejectiva.

Sejam R_1 uma relação de A em B e R_2 uma relação de B em C para certos conjuntos A, B e C. Definimos *a composição das relações R_1 e R_2* como sendo a relação

$$R_1R_2 = \{(a, c) \in A \times C \mid (a, b) \in R_1 \text{ e } (b, c) \in R_2, \text{ para certo } b \in B\}$$

de A em C.

Uma relação ρ em A diz-se uma *relação de equivalência* (ou simplesmente, uma *equivalência*) se for *reflexiva*, i.e. $(a,a) \in \rho$, para qualquer $a \in A$, *simétrica*, i.e. se $(a,b) \in \rho$ então $(b,a) \in \rho$, para quaisquer $a, b \in A$, e *transitiva*, i.e. se $(a,b) \in \rho$ e $(b,c) \in \rho$ então $(a,c) \in \rho$, para quaisquer $a, b, c \in A$. Neste contexto, é usual escrevermos $a\rho b$ em vez de $(a,b) \in \rho$.

Sejam ρ uma relação de equivalência em A e $a \in A$. A *classe de equivalência de a* ou *ρ-classe de a* é a imagem de a por meio de ρ, ou seja, $a\rho = \{x \in A \mid x\rho a\}$. Ao conjunto das ρ-classes de A, i.e. a $A/\rho = \{a\rho \mid a \in A\}$, chamamos *conjunto quociente de A por ρ*. Dado que cada elemento de A pertence a uma e uma só ρ-classe, A/ρ constitui uma partição de A.

Uma *aplicação parcial* de A em B é uma relação φ de A em B tal que $|a\varphi| \leq 1$, para qualquer $a \in A$, ou seja, tal que $|a\varphi| = 1$, para qualquer $a \in \operatorname{Dom}\varphi$. Dado $a \in \operatorname{Dom}\varphi$ e sendo b o (único) elemento de $a\varphi$, é usual escrever-se $a\varphi = b$. Notemos que se φ é uma aplicação parcial injectiva, então φ^{-1} é também uma aplicação parcial injectiva (de B em A). Além disso, temos $\varphi\varphi^{-1} = 1_{\operatorname{Dom}\varphi}$ e $\varphi^{-1}\varphi = 1_{\operatorname{Im}\varphi}$.

Uma *aplicação (total)* de A em B é uma aplicação parcial φ tal que $\operatorname{Dom}\varphi = A$. Para indicar que $\varphi \subseteq A \times B$ é uma aplicação escrevemos usualmente $\varphi : A \to B$. Observemos que a relação identidade em A é uma aplicação, a qual naturalmente também designamos por *aplicação identidade*.

Uma aplicação $\varphi : A \to B$ diz-se *invertível* se a relação φ^{-1} for uma aplicação de B em A. Claramente, uma aplicação é invertível se e só se for bijectiva.

Se $\varphi : A \to C$ e $\psi : B \to C$ são duas aplicações tais que $B \subseteq A$ e, para qualquer $b \in B$, temos $b\varphi = b\psi$, então dizemos que φ *estende* ψ, ou que ψ *é a restrição de* φ *a* B. Neste caso, denotamos ψ por $\varphi_{|_B}$.

Associada a uma aplicação $\varphi : A \to B$ temos a relação de equivalência em A definida por

$$\operatorname{Ker}\varphi = \{(a,a') \in A \times A \mid a\varphi = a'\varphi\},$$

que se designa por *núcleo de φ*.

1.2 Noções básicas de semigrupos

Um *semigrupo* é um par $(S,\cdot)$ formado por um conjunto S não vazio designado por *suporte* do semigrupo e por uma *operação binária* $\cdot$ sobre S (i.e. uma aplicação $\cdot : S \times S \longrightarrow S$) *associativa*, i.e. para quaisquer $a, b, c \in S$, temos $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$, em que $a \cdot b$ representa a imagem por $\cdot$ do par (a,b). Dado que vamos utilizar a *linguagem multiplicativa*, denominamos a operação binária $\cdot$ por *multiplicação* e em geral não usamos nenhum símbolo para a designar. Não havendo risco de confusão, representamos o semigrupo pelo seu suporte. Chamamos *semigrupo dual* de $S = (S,\cdot)$ ao semigrupo $S^r = (S,\cdot_r)$ em que a multiplicação está definida por $s \cdot_r t = t \cdot s$, para quaisquer $s, t \in S$.

Dizemos que um semigrupo S é *comutativo* se a multiplicação for uma *operação comutativa*, ou seja se, para quaisquer $a, b \in S$, $ab = ba$.

Num semigrupo S um elemento $e \in S$ diz-se *idempotente* se $e^2 = e$. Denotamos o conjunto dos elementos idempotentes de S por $E(S)$. Um semigrupo pode não ter elementos idempotentes (por exemplo, o conjunto dos números inteiros positivos com a adição usual). Por outro lado, pode ter alguns idempotentes com propriedades especiais. Assim, se e é um elemento de S tal que $ea = a$ [respectivamente, $ae = e$] para qualquer $a \in S$, então e diz-se uma *identidade esquerda* [respectivamente, *identidade direita*] de S. Se $e \in S$ é simultaneamente uma identidade esquerda e uma identidade direita de S então dizemos que e é uma *identidade de S* (a qual é necessariamente única). A um semigrupo com identidade damos o nome de *monóide*. Usualmente designamos a identidade de um monóide S por 1_S ou, não havendo ambiguidade, simplesmente por 1. Se o semigrupo S não tem identidade é fácil juntar-lhe um elemento extra para formar um monóide. Para tal basta acrescentarmos a S um elemento $1 \notin S$ e definirmos $1 \cdot 1 = 1$ e $1 \cdot a = a \cdot 1 = a$, para qualquer $a \in S$. O conjunto $S \cup \{1\}$ com a multiplicação assim definida é um monóide. Definimos

$$S^1 = \begin{cases} S & \text{se } S \text{ tem identidade} \\ S \cup \{1\} & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Dizemos que um elemento $u \in S$ é um *zero esquerdo* [respectivamente, *zero direito*] de S se, para qualquer $s \in S$, $us = u$ [respectivamente, $su = u$]. Um elemento que seja simultaneamente um zero esquerdo e um zero direito de S diz-se um *zero* de S (o qual é necessariamente único) e representa-se usualmente por 0.

Seja G um monóide. Se para qualquer $g \in G$ existe $g' \in G$ tal que $gg' = g'g = 1$, diz-se que G é um *grupo*. Dado $g \in G$, existe um único elemento g' nas condições anteriores. Se a multiplicação definida no grupo G for comutativa então G diz-se um *grupo comutativo* ou *grupo abeliano*.

Designamos por *semigrupo* [respectivamente, *monóide, grupo*] *trivial* um semigrupo [respectivamente, monóide, grupo] constituído por um único elemento.

Para A e B subconjuntos de um semigrupo S definimos

$$AB = \{ab \mid a \in A \text{ e } b \in B\}.$$

Se $b \in S$ então representamos $A\{b\}$ e $\{b\}A$ simplesmente por Ab e bA, respectivamente.

Sejam S um semigrupo e S' um subconjunto não vazio de S. Dizemos que S' é um *subsemigrupo* de S se for fechado para a operação binária definida em S, i.e. se $ab \in S'$, para quaisquer $a, b \in S'$. Se S é um monóide, então um *submonóide* de S é um subsemigrupo de S que contém a identidade de S. Um subsemigrupo de S que é um grupo (para a operação induzida) diz-se um *subgrupo* de S. Observamos que, com estas definições, um subgrupo de S pode não ser um submonóide de S. Num monóide S um elemento a que verifique $aa' = a'a = 1$ para algum $a' \in A$ diz-se uma *unidade*. As unidades de S formam um grupo (para a operação induzida) que designamos por *grupo das unidades* de S.

Seja A um subconjunto não vazio de um semigrupo S. O subsemigrupo S' de S *gerado* por A é o menor (para a relação de inclusão) subsemigrupo de S que contém A. É fácil ver que S'

é composto por todos os elementos de S que podem ser expressos como produto de um número finito de elementos de A. Se $S' = S$ dizemos que A é um *conjunto gerador* de S ou que A *gera* S. Observemos que todo o semigrupo tem pelo menos um conjunto gerador – o conjunto de todos os elementos do semigrupo. De um modo análogo, se S é um monóide, definimos *submonóide gerado* por um subconjunto A de S como sendo o menor submonóide de S que contém A. Chamamos *característica* de um semigrupo [respectivamente, de um monóide] S ao mínimo dos cardinais dos conjuntos geradores de S. Se um semigrupo [respectivamente, monóide] S é gerado pelo seu conjunto de idempotentes designamos por *característica idempotente* de S ao mínimo dos cardinais dos conjuntos geradores de S constituídos por elementos idempotentes.

Estamos agora em condições de apresentar duas famílias de grupos que usaremos no Capítulo 4: os grupos cíclicos e os grupos diedrais. Se G é um grupo finito e $g \in G$, então existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $g^k = 1$. Chamamos *ordem de* g ao número natural $\min\{k \in \mathbb{N} \mid g^k = 1\}$.

Exemplo 1.2.1 Sejam G um grupo finito, g um elemento de G de ordem n e G' o subsemigrupo de G gerado por g. Temos então que

$$G' = \{1, g, g^2, \ldots, g^{n-1}\}$$

é um grupo que designamos por *grupo cíclico* de ordem n e representamos por $\mathcal{C}_n$.

Exemplo 1.2.2 Seja G um grupo gerado por dois elementos g e h de ordens n e 2, respectivamente. Se $hg = g^{n-1}h$ então

$$G = \{1, g, g^2, \ldots, g^{n-1}, h, hg, hg^2, \ldots, hg^{n-1}\}$$

e dizemos que G é um *grupo diedral* de ordem $2n$, que representamos por $\mathcal{D}_{2n}$.

Dados dois semigrupos S e T dizemos que uma aplicação $\varphi : S \to T$ é um *homomorfismo* [respectivamente, *anti-homomorfismo*] (de semigrupos) se $(ab)\varphi = (a\varphi)(b\varphi)$ [respectivamente, $(ab)\varphi = (b\varphi)(a\varphi)$], para quaisquer $a, b \in S$. Neste caso, $S\varphi$ é um subsemigrupo de T e a $S\varphi$ chamamos *imagem homomorfa* de S por meio de φ. Se $S = T$ diz-se que φ é um *endomorfismo*. Denotamos por $End(S)$ o conjunto dos endomorfismos de S. Observemos que, para a composição de aplicações e com a aplicação identidade, $End(S)$ é um monóide. Se S e T são monóides, dizemos que um homomorfismo [respectivamente, anti-homomorfismo] $\varphi : S \to T$ é um *homomorfismo de monóides* [respectivamente, *anti-homomorfismo de monóides*] se φ *preserva a identidade*, isto é, se $1\varphi = 1$. Um homomorfismo bijectivo $\varphi : S \to T$ designa-se por *isomorfismo*. Neste caso, os semigrupos S e T dizem-se *isomorfos* e escreve-se $S \cong T$. Notemos que, se φ é um isomorfismo, então a aplicação inversa, $\varphi^{-1} : T \to S$, também é um isomorfismo.

Um semigrupo S diz-se uma *cobertura* de um semigrupo T se existe um homomorfismo sobrejectivo $\varphi : S \to T$ que *separa idempotentes*, i.e. se $e\varphi = f\varphi$ então $e = f$, para quaisquer $e, f \in E(S)$.

Uma relação de equivalência ρ num semigrupo S diz-se *compatível à esquerda* [respectivamente, *compatível à direita*] com a multiplicação de S se $a \,\rho\, b$ implica $ca \,\rho\, cb$ [respectivamente,

$ac\,\rho\,bc$], para quaisquer $a, b, c \in S$. Dizemos que ρ é uma *relação de congruência* de S se ρ é compatível à esquerda e à direita com a multiplicação de S.

Exemplo 1.2.3 Um exemplo muito importante de relação de congruência é a *congruência aritmética* $\equiv_n$ $(n \geq 1)$ sobre $\mathbb{Z}$ com a adição usual, a qual é definida por, para $a, b \in \mathbb{Z}$, $a \equiv_n b$ se e só se n divide $b-a$, i.e. se e só se existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $b - a = kn$. Para $a, b \in \mathbb{Z}$, escrevemos usualmente $a \equiv b \pmod n$ para representar que $a \equiv_n b$ e dizemos que a e b são *congruentes módulo* n. É fácil verificar que qualquer inteiro é congruente módulo n com um e um só dos inteiros não negativos $0, 1, 2, \ldots, n-1$. Assim, o conjunto quociente $\mathbb{Z}/{\equiv_n}$ tem exactamente n classes.

Sendo ρ uma relação de congruência de S, no conjunto quociente S/ρ definimos, de um modo natural, uma operação binária associativa: $(a\rho)(b\rho) = (ab)\rho$, para quaisquer $a, b \in S$. Deste modo S/ρ possui uma estrutura de semigrupo induzida por S. Além disso, temos um homomorfismo sobrejectivo

$$\begin{array}{rcccc} \rho^\natural & : & S & \longrightarrow & S/\rho \\ & & a & \longmapsto & a\rho \end{array}$$

usualmente designado por *homomorfismo canónico*. Observemos que

$$\operatorname{Ker} \rho^\natural = \{(a, b) \in S \times S \mid a\rho^\natural = b\rho^\natural\} = \{(a, b) \in S \times S \mid a\rho b\} = \rho.$$

Portanto, uma congruência ρ num semigrupo S conduz de forma natural a um homomorfismo $\rho^\natural$ e um homomorfismo de semigrupos $\varphi : S \to T$ define uma relação de congruência $\operatorname{Ker} \varphi$ em S.

Teorema 1.2.4 (Teorema do Homomorfismo) [42, Teorema 1.5.2]
Sejam S e T dois semigrupos, $\varphi : S \to T$ um homomorfismo e $\rho = \operatorname{Ker} \varphi$. Então existe um homomorfismo injectivo $\alpha : S/\rho \to T$ com $\operatorname{Im} \alpha = \operatorname{Im} \varphi$ tal que o seguinte diagrama

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\rho^\natural"'] & T \\ S/\rho \arrow[ur, dotted, "\alpha"'] & \end{tikzcd}$$

é comutativo, isto é, tal que $\varphi = \rho^\natural \alpha$. ∎

Sejam S e T dois semigrupos e $\varphi : S \to T$ um homomorfismo sobrejectivo. Com base no Teorema do Homomorfismo dizemos que o semigrupo T é um *quociente* do semigrupo S.

No semigrupo S definimos as seguintes relações de equivalência: para quaisquer $a, b \in S$,

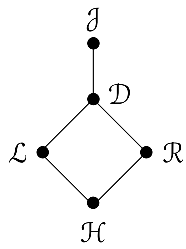
(a) $a\,\mathcal{R}\,b$ se e só se $aS^1 = bS^1$;

(b) $a\,\mathcal{L}\,b$ se e só se $S^1a = S^1b$;

(c) $a \mathcal{J} b$ se e só se $S^1aS^1 = S^1bS^1$.

As relações $\mathcal{R}$ e $\mathcal{L}$ são compatíveis com a multiplicação, respectivamente, à esquerda e à direita. Por outro lado, as relações $\mathcal{R}$ e $\mathcal{L}$ são *permutáveis*, isto é, $\mathcal{R}\mathcal{L} = \mathcal{L}\mathcal{R}$, pelo que $\mathcal{R}\mathcal{L}$ é a menor relação de equivalência de S que contém simultaneamente $\mathcal{R}$ e $\mathcal{L}$, a qual designamos por $\mathcal{D}$. Por último, definimos a relação $\mathcal{H}$ em S como sendo a intersecção das relações $\mathcal{R}$ e $\mathcal{L}$.

No caso em que as relações são distintas entre si, temos o seguinte diagrama respeitante à relação de inclusão:



As relações $\mathcal{H}$, $\mathcal{R}$, $\mathcal{L}$, $\mathcal{D}$ e $\mathcal{J}$ designam-se por *relações de Green*. Estas relações, muito importantes na Teoria dos Semigrupos, foram introduzidas e estudadas por J. A. Green em 1951.

Se S é um semigrupo finito temos $\mathcal{D} = \mathcal{J}$.

Seja $\mathcal{K}$ um dos símbolos $\mathcal{H}$, $\mathcal{R}$, $\mathcal{L}$, $\mathcal{D}$ ou $\mathcal{J}$. Denotamos por K_a a $\mathcal{K}$-classe de um elemento $a \in S$. Dizemos que S é $\mathcal{K}$-*trivial* se $\mathcal{K}$ é a relação identidade de S.

No que respeita a $\mathcal{H}$-classes convém ter presente o seguinte resultado:

Proposição 1.2.5 [**60, Corolário 1.7**]

Sejam S um semigrupo e H uma sua $\mathcal{H}$-classe. As seguintes condições são equivalentes:

(a) H contém um idempotente;

(b) Existem $a, b \in H$ tais que $ab \in H$;

(c) H é um subgrupo maximal em S. ■

Observemos que qualquer subgrupo de um semigrupo S está necessariamente contido numa $\mathcal{H}$-classe de S, donde os subgrupos maximais de S são exactamente as $\mathcal{H}$-classes de S que contêm um idempotente. Além disso, temos que:

Proposição 1.2.6 [**60, Proposição 1.8**]

Dois subgrupos maximais de um semigrupo S que estejam contidos numa mesma $\mathcal{D}$-classe são isomorfos. ■

Dizemos que um semigrupo S é *aperiódico* se os seus subgrupos são triviais.

Proposição 1.2.7 [**60, Proposição 4.2**]

Seja S um semigrupo finito. As seguintes condições são equivalentes:

(a) S é aperiódico;

(b) Para qualquer $a \in S$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $a^n = a^{n+1}$;

(c) Existe $m \in \mathbb{N}$ tal que, para qualquer $a \in S$, $a^m = a^{m+1}$;

(d) S é $\mathcal{H}$-trivial. ∎

1.3 Semigrupos livres e apresentações

Seja A um conjunto não vazio. Neste contexto, o conjunto A é designado por *alfabeto* e os seus elementos por *letras*. Denotamos por A^+ e A^* o *semigrupo livre sobre* A e o *monóide livre sobre* A, respectivamente, que são construídos da seguinte forma: os elementos de A^+ são todas as sequências não vazias de letras e que designamos por *palavras*, e os elementos de A^* são os elementos de A^+ juntamente com a sequência vazia, que designamos por *palavra vazia* e representamos por 1. Para simplificar a notação, representamos uma sequência $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ de A^+ (com $n \in \mathbb{N}$) justapondo ordenadamente os seus elementos: $a_1 a_2 \cdots a_n$. O produto de duas palavras $a_1 a_2 \cdots a_n$ e $b_1 b_2 \cdots b_m$ de A^+ é a palavra

$$(a_1 a_2 \cdots a_n)(b_1 b_2 \cdots b_m) = a_1 a_2 \cdots a_n b_1 b_2 \cdots b_m,$$

obtida por concatenação.

Seja $w \in A^*$. O número de letras de w (incluindo repetições) designa-se por *comprimento* de w e denota-se por $|w|$. Por exemplo, no alfabeto $A = \{a, b\}$, a palavra $w = aba^2$ tem comprimento 4.

Algebricamente, a importância dos monóides (ou mais geralmente, dos semigrupos) livres reside na *propriedade universal sobre* A que enunciamos a seguir. Denotamos por ι a *inclusão natural* de A em A^*, i.e. a aplicação $\iota : A \to A^*$ definida por $a\iota = a$.

Teorema 1.3.1 [53, Proposição 2.4.1]

Sejam A um alfabeto, M um monóide, $\theta : A \to M$ uma aplicação e $\iota : A \to A^*$ a inclusão natural. Então existe um único morfismo $\varphi : A^* \to M$ tal que o seguinte diagrama

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\theta"] \arrow[d, "\iota"'] & M \\ A^* \arrow[ur, dotted, "\varphi"'] & \end{tikzcd}$$

é comutativo, isto é, tal que $\theta = \iota\varphi$. ∎

No teorema anterior a propriedade do diagrama ser comutativo significa que φ coincide com θ no conjunto A, ou seja φ estende θ. Um resultado análogo é válido para semigrupos, com A^+ no lugar de A^*.

Se A é um conjunto de geradores de um monóide M então, pela propriedade universal, obtemos um homomorfismo sobrejectivo de monóides φ de A^* em M. Logo, pelo Teorema do Homomorfismo, $M \cong A^*/\operatorname{Ker}(\varphi)$. Portanto qualquer monóide é, a menos de um isomorfismo, um quociente de um monóide livre.

Seja A um alfabeto. Uma *apresentação de monóide* é um par ordenado $\langle A \mid R \rangle$, em que R é um subconjunto de $A^* \times A^*$. Designamos um elemento (u, v) de R por *relação* e representamo-lo usualmente por $u = v$. Para evitar ambiguidade, dados $u, v \in A^*$, escrevemos $u \equiv v$, em vez de $u = v$, sempre que queiramos afirmar que u e v são exactamente a mesma palavra de A^*.

Dizemos que um monóide M é *definido pela apresentação* $\langle A \mid R \rangle$ se M é isomorfo a A^*/ρ_R, em que ρ_R denota a menor congruência de A^* que contém R. Frequentemente, identificamos as palavras de A^* com os elementos de M que estas representam. Neste contexto, para $w, w' \in A^*$, dizer que $w = w'$ em M significa que $(w, w') \in \rho_R$. Se $w = w'$ em M então $w \equiv w'$ ou existe uma sequência

$$w \equiv w_0 \to w_1 \to \cdots \to w_n \equiv w'$$

de *transições elementares* de R, i.e. para cada $i \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$, existem $x, y \in A^*$ e $(u = v) \in R$ tais que $w_i \equiv xuy$ e $w_{i+1} \equiv xvy$ ou $w_i \equiv xvy$ e $w_{i+1} \equiv xuy$. Dizemos que a apresentação $\langle A \mid R \rangle$ é *irredundante nas letras* se $a \neq 1$ em M e $a = b$ em M se e só se $a \equiv b$, para $a, b \in A$.

Sejam M um monóide e A um seu conjunto de geradores. Seja s um elemento de M. Definimos o *comprimento de s em relação a A* como sendo o mínimo do conjunto de números inteiros positivos $\{n \in \mathbb{N} \mid s = a_1 \cdots a_n, \text{ para certos } a_1, \ldots, a_n \in A\}$, se s não é a identidade, ou zero, caso contrário. Denotamos este inteiro não negativo por $|s|_A$ ou, se não houver ambiguidade, simplesmente por $|s|$. Naturalmente, este número coincide com a noção usual de comprimento de uma palavra num monóide livre.

Conceitos similares podem ser estabelecidos para semigrupos. Para mais detalhes veja-se [53] ou [64].

1.4 Semigrupos de transformações

Seja X um conjunto. Designamos por $\mathcal{PT}(X)$ o conjunto de todas as *transformações parciais* sobre X, i.e. o conjunto de todas as aplicações parciais de X em X. Chamamos *característica* de um elemento $s \in \mathcal{PT}(X)$ ao cardinal do conjunto $\operatorname{Im}(s)$. Se munirmos o conjunto $\mathcal{PT}(X)$ com a operação de composição de relações obtemos um semigrupo: dados $s, t \in \mathcal{PT}(X)$, o produto st é a transformação parcial definida do seguinte modo

(a) $\operatorname{Dom}(st) = (\operatorname{Im}(s) \cap \operatorname{Dom}(t))s^{-1}$,

(b) $\operatorname{Im}(st) = (\operatorname{Im}(s) \cap \operatorname{Dom}(t))t$

e, para qualquer $x \in \operatorname{Dom}(st)$, $(x)st = ((x)s)t$.

Denotamos por $\mathcal{T}(X)$ o conjunto de todas as *transformações totais* sobre um conjunto X, i.e. o conjunto de todas as aplicações de X em X. Temos que $\mathcal{T}(X)$ é um subsemigrupo de $\mathcal{PT}(X)$. A aplicação identidade sobre X é a identidade de $\mathcal{PT}(X)$ e pertence a $\mathcal{T}(X)$, pelo que $\mathcal{PT}(X)$ é um monóide e $\mathcal{T}(X)$ é um submonóide de $\mathcal{PT}(X)$.

Dado um conjunto X, um subsemigrupo S de $\mathcal{T}(X)$ diz-se um *semigrupo de transformações totais*. É fácil ver que se S é um semigrupo de transformações totais e $s, t, r \in S$ são tais que $s = tr$ então $\operatorname{Ker} t \subseteq \operatorname{Ker} s$ e $\operatorname{Im} s \subseteq \operatorname{Im} r$. Se além disso X for finito e as transformações s e t [respectivamente, s e r] tiverem a mesma característica então $\operatorname{Ker} s = \operatorname{Ker} t$ [respectivamente, $\operatorname{Im} s = \operatorname{Im} r$].

Denotamos por $\mathcal{I}(X)$ o conjunto de todas as *transformações parciais injectivas* sobre X. Obviamente, a aplicação identidade é uma transformação injectiva e a composição de duas transformações parciais injectivas é ainda uma transformação injectiva, pelo que $\mathcal{I}(X)$ é um submonóide de $\mathcal{PT}(X)$.

Consideremos um conjunto X_n com n elementos. Em geral tomamos $X_n = \{1, \dots, n\}$. Designamos $\mathcal{T}(X_n)$ por $\mathcal{T}_n$, $\mathcal{PT}(X_n)$ por $\mathcal{PT}_n$ e $\mathcal{I}(X_n)$ por $\mathcal{I}_n$. Em relação a estes semigrupos interessa referir que, para $n \geq 3$, as características de $\mathcal{T}_n$, $\mathcal{PT}_n$ e $\mathcal{I}_n$ são, respectivamente, 3, 4 e 3, como podemos ver, por exemplo, em [42].

Definimos de seguida os monóides de transformações sobre X_n que serão objecto de nosso estudo, apresentando alguns resultados conhecidos que nos serão úteis neste trabalho.

Por vezes sem perigo de ambiguidade, designaremos simplesmente por transformação, uma transformação parcial ou total.

1.4.1 Os monóides $\mathcal{O}_n$, $\mathcal{O}_n^+$, $\mathcal{O}_n^-$ e $\mathcal{OD}_n$

Seja X_n uma cadeia com n elementos, $X_n = \{1 < 2 < \cdots < n\}$. Uma transformação parcial $s \in \mathcal{PT}_n$ diz-se *extensiva* [respectivamente, *co-extensiva*] se $x \leq xs$ [respectivamente, $xs \leq x$], para todo $x \in \operatorname{Dom}(s)$. Denotamos por $\mathcal{T}_n^+$ [respectivamente, $\mathcal{T}_n^-$] o submonóide de $\mathcal{T}_n$ de todas as transformações totais extensivas [respectivamente, co-extensivas].

Uma transformação s de $\mathcal{PT}_n$ diz-se *crescente* [respectivamente, *decrescente*] se $x \leq y$ implica $xs \leq ys$ [respectivamente, $xs \geq ys$], para quaisquer $x, y \in \operatorname{Dom}(s)$. Uma transformação crescente ou decrescente diz-se *monótona*. É claro que o produto de duas transformações crescentes ou de duas transformações decrescentes é uma transformação crescente e o produto de uma transformação crescente por uma transformação decrescente, ou vice-versa, é uma transformação decrescente. Designamos por $\mathcal{O}_n$ o submonóide de $\mathcal{T}_n$ constituído por todas as transformações totais crescentes e por $\mathcal{O}_n^+$ [respectivamente, $\mathcal{O}_n^-$] o submonóide de $\mathcal{O}_n$ das transformações extensivas [respectivamente, co-extensivas], ou seja, $\mathcal{O}_n^+ = \mathcal{O}_n \cap \mathcal{T}_n^+$ [respectivamente, $\mathcal{O}_n^- = \mathcal{O}_n \cap \mathcal{T}_n^-$].

Exemplo 1.4.1 Sejam

$$r = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 2 & 4 & 6 & 6 \end{pmatrix}, \ s = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 3 & 3 & 5 & 6 & 6 \end{pmatrix} \text{ e } t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & 3 & 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

Temos que $r \in \mathcal{O}_6$ mas $r \notin \mathcal{O}_6^+$ e $r \notin \mathcal{O}_6^-$, $s \in \mathcal{O}_6^+$ e $t \in \mathcal{O}_6^-$.

Observemos que os monóides $\mathcal{O}_n^-$ e $\mathcal{O}_n^+$ são isomorfos. De facto, a aplicação

$$\begin{array}{rccccl} \varphi: & \mathcal{O}_n^- & \longrightarrow & \mathcal{O}_n^+ & & \\ & s & \longmapsto & \bar{s}: & X_n & \longrightarrow & X_n \\ & & & & x & \longmapsto & n+1-(n+1-x)s \end{array}$$

é um isomorfismo de monóides. Além disso, $\mathcal{O}_n = \mathcal{O}_n^+\mathcal{O}_n^- = \mathcal{O}_n^-\mathcal{O}_n^+$. Com efeito, para $s \in \mathcal{O}_n$, temos $s = s_1s_2 = s_2s_1$ com (por exemplo) s_1 e s_2 as transformações definidas por

$$xs_1 = \begin{cases} xs & \text{se } xs \le x \\ x & \text{se } xs \ge x \end{cases} \quad \text{e} \quad xs_2 = \begin{cases} xs & \text{se } x \le xs \\ x & \text{se } x \ge xs \end{cases},$$

para qualquer $x \in X_n$. Notemos que, apesar das igualdades anteriores, em geral, os elementos de $\mathcal{O}_n^+$ e $\mathcal{O}_n^-$ não comutam.

Recordamos alguns factos bem conhecidos acerca dos monóides $\mathcal{O}_n$, $\mathcal{O}_n^+$ e $\mathcal{O}_n^-$, que podemos encontrar nos artigos de Aĭzenštat [1], Gomes e Howie [36] e Solomon [67]. Sejam

$$a_j = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & j & j+1 & j+2 & \cdots & n \\ 1 & \cdots & j & j & j+2 & \cdots & n \end{pmatrix} \text{ e } b_j = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & j-1 & j & j+1 & \cdots & n \\ 1 & \cdots & j-1 & j+1 & j+1 & \cdots & n \end{pmatrix},$$

para $j \in \{1, \dots, n-1\}$. Temos que $A = \{a_j \mid 1 \le j \le n-1\}$, $B = \{b_j \mid 1 \le j \le n-1\}$ e $A \cup B$ são conjuntos de geradores idempotentes de $\mathcal{O}_n^-$, $\mathcal{O}_n^+$ e $\mathcal{O}_n$, respectivamente. Além disso, $A \cup B$ é um conjunto gerador idempotente de $\mathcal{O}_n$ com um número mínimo de elementos, do que resulta o seguinte teorema de Gomes e Howie:

Teorema 1.4.2 [36, Teorema 2.8]
Para $n \ge 2$, a característica idempotente de $\mathcal{O}_n$ é $2n-2$. ∎

Uma apresentação para $\mathcal{O}_n$ com conjunto gerador $A \cup B$ foi obtida por Aĭzenštat em [2]. Dado que nos é conveniente tê-la presente na Subsecção 4.4.1, optámos por a exibir aí.

Por outro lado, é fácil verificar que as transformações $a_1, \dots, a_{n-1}$ e $b_1, \dots, b_{n-1}$ são elementos *indecomponíveis* (i.e. não são produtos de elementos distintos de eles próprios) de $\mathcal{O}_n^-$ e de $\mathcal{O}_n^+$, respectivamente. Concluímos que quer a característica quer a característica idempotente de $\mathcal{O}_n^-$ e de $\mathcal{O}_n^+$ são iguais a $n-1$. Apresentações para estes monóides com estes conjuntos geradores foram obtidas por Solomon em [67] e, pelas razões acima mencionadas, aparecem também neste trabalho na Subsecção 4.4.1.

A seguir, consideremos a transformação

$$c = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 1 & 1 & 2 & \cdots & n-1 \end{pmatrix} \in \mathcal{O}_n^-.$$

Gomes e Howie provaram que $\{b_1, \ldots, b_{n-1}, c\}$ é um conjunto gerador de $\mathcal{O}_n$ com um número mínimo de elementos obtendo assim, para $n \geq 2$, o teorema:

Teorema 1.4.3 [36, Teorema 2.7]

Para $n \geq 2$, a característica de $\mathcal{O}_n$ é n. ∎

No que respeita a subgrupos, o monóide $\mathcal{O}_n$ só tem subgrupos triviais. Chegamos então a um resultado que, apesar de evidente, é de extrema importância.

Proposição 1.4.4 *O monóide $\mathcal{O}_n$ é aperiódico.* ∎

Ao tomarmos transformações que podem ser crescentes ou decrescentes (transformações monótonas) conseguimos classes mais vastas de monóides. Deste modo, obtemos o monóide $\mathcal{OD}_n$ constituído por todas as transformações totais monótonas. Consideremos a seguinte permutação (reflexão) de X_n

$$h = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n-1 & n \\ n & n-1 & \cdots & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Observemos que $h \in \mathcal{OD}_n$ e, se s é uma transformação decrescente, então hs é uma transformação crescente e $s = h^2 s = h(hs)$. Temos assim que $\mathcal{OD}_n$ é gerado pelo seu submonóide $\mathcal{O}_n$ juntamente com a permutação h e podemos tomar o conjunto $A \cup B \cup \{h\}$ como conjunto gerador de $\mathcal{OD}_n$. Uma apresentação para o monóide $\mathcal{OD}_n$ com o conjunto gerador $A \cup B \cup \{h\}$ e $n^2 + n + 1$ relações foi obtida por Fernandes, Gomes e Jesus em [24, Teorema 2.2]. Mais uma vez por conveniência, exibimos esta apresentação na Subsecção 4.4.2.

No entanto, a característica de $\mathcal{OD}_n$ é, em geral, inferior a n.

Dado $x \in \mathbb{R}$, denotamos por $\lceil x \rceil$ o menor inteiro maior ou igual a x.

Temos o seguinte resultado de Fernandes, Gomes e Jesus:

Teorema 1.4.5 [23, Teorema 1.5]

Para $n \geq 2$, o monóide $\mathcal{OD}_n$ tem característica $\lceil \frac{n}{2} \rceil + 1$. ∎

Ainda dos mesmos autores, temos a seguinte proposição que caracteriza os subgrupos maximais de $\mathcal{OD}_n$.

Proposição 1.4.6 [23, Proposição 1.2]

Seja s um elemento de $\mathcal{OD}_n$ tal que $|\operatorname{Im}(s)| \geq 2$. Então $|H_s| = 2$. Além disso, os subgrupos maximais das $\mathcal{J}$-classes de $\mathcal{OD}_n$ dos elementos de característica pelo menos 2 são cíclicos de ordem 2. ∎

Em particular, o grupo das unidades de $\mathcal{OD}_n$, que é gerado pela transformação h, é um grupo cíclico de ordem 2.

1.4.2 Os monóides $\mathcal{OP}_n$ e $\mathcal{OR}_n$

Uma sequência $a = (a_1, a_2, \ldots, a_t)$ de t ($t \geq 0$) elementos de X_n diz-se *cíclica* [respectivamente, *anti-cíclica*] se não existir mais do que um índice $i \in \{1, \ldots, t\}$ tal que $a_i > a_{i+1}$ [respectivamente, $a_i < a_{i+1}$], convencionando que $a_{t+1} = a_1$. Observemos que uma sequência a é cíclica [respectivamente, anti-cíclica] se e só se a é constante ou existe um e um só índice $i \in \{1, \ldots, t\}$ tal que $a_i > a_{i+1}$ [respectivamente, $a_i < a_{i+1}$]. Isto ainda equivale a dizer que uma sequência a é cíclica [respectivamente, anti-cíclica] se e só se é vazia ou existe $i \in \{0, 1, \ldots, t-1\}$ tal que $a_{i+1} \leq a_{i+2} \leq \cdots \leq a_t \leq a_1 \leq \cdots \leq a_i$ [respectivamente, $a_{i+1} \geq a_{i+2} \geq \cdots \geq a_t \geq a_1 \geq \cdots \geq a_i$]. Nas condições anteriores, o índice $i \in \{0, 1, \ldots, t-1\}$ é único, excepto se a for constante e $t \geq 2$. É claro que nesta definição estamos a subentender que no caso $i = 0$, a sequência verifica $a_1 \leq \cdots \leq a_t$ [respectivamente, $a_1 \geq \cdots \geq a_t$].

Em relação a subsequências de sequências cíclicas temos a seguinte proposição:

Proposição 1.4.7 [**18, Proposição 2.1**]

Qualquer subsequência de uma sequência cíclica também é cíclica. ■

Seja $s \in \mathcal{T}_n$. Dizemos que a transformação *s preserva a orientação* [respectivamente, *reverte a orientação*] se a sequência das suas imagens $(1s, \ldots, ns)$ é cíclica [respectivamente, anti-cíclica]. É fácil mostrar que o produto de duas transformações que preservam a orientação ou de duas transformações que revertem a orientação é uma transformação que preserva a orientação e o produto de uma transformação que preserva a orientação por uma transformação que reverte a orientação, ou vice-versa, é uma transformação que reverte a orientação. Denotamos por $\mathcal{OP}_n$ o submonóide de $\mathcal{T}_n$ constituído por todas as transformações totais que preservam a orientação.

Exemplo 1.4.8 As transformações

$$r = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 5 & 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}, \quad s = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 1 \end{pmatrix}, \quad t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 2 & 4 & 6 & 6 \end{pmatrix}$$

pertencem a $\mathcal{OP}_6$ mas a transformação $u = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ não pertence a $\mathcal{OP}_6$.

Seja g a permutação $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n-1 & n \\ 2 & 3 & \cdots & n & 1 \end{pmatrix}$. Temos a seguinte factorização, obtida por Catarino e Higgins, para um elemento $s \in \mathcal{OP}_n$:

Teorema 1.4.9 [**8, Teorema 2.6**]

Qualquer elemento $s \in \mathcal{OP}_n$ admite uma factorização do tipo $s = g^r t$, com $0 \leq r \leq n-1$ e $t \in \mathcal{O}_n$, que é única se s não for constante. Em particular, $\mathcal{OP}_n = \mathcal{C}_n \mathcal{O}_n$. ■

Do teorema anterior podemos concluir que $A \cup B \cup \{g\}$ gera $\mathcal{OP}_n$, sendo A e B os conjuntos definidos na secção anterior. Uma apresentação para o monóide $\mathcal{OP}_n$ com o conjunto gerador $A \cup B \cup \{g\}$ foi fornecida por Catarino em [7, Teorema 3.2] e podemos encontrá-la nesta dissertação na Subsecção 4.4.3. A característica de $\mathcal{OP}_n$ não depende de n. De facto, temos:

Teorema 1.4.10 [**7, Teorema 2.1**]

O monóide $\mathcal{OP}_n$ é gerado por 2 elementos. ∎

Catarino mostrou que $\mathcal{OP}_n$ é gerado por $\{g, s\}$ com $s \in \mathcal{OP}_n$ um elemento idempotente (qualquer) que verifique $|\operatorname{Im} s| = n - 1$. Uma nova apresentação para $\mathcal{OP}_n$ com 2 geradores e $n + 2$ relações foi obtida por Arthur e Ruškuc em [6, Teorema 3.1].

Passamos de seguida aos subgrupos maximais de $\mathcal{OP}_n$, que se encontram caracterizados de acordo com a proposição:

Proposição 1.4.11 [**8, Corolário 3.6**]

Os subgrupos maximais das $\mathcal{D}$-classes dos elementos de $\mathcal{OP}_n$ de característica r são cíclicos de ordem r. Em particular, todo o subgrupo de $\mathcal{OP}_n$ é cíclico. ∎

Em particular, o grupo das unidades de $\mathcal{OP}_n$, que é gerado pela permutação g, é um grupo cíclico de ordem n.

Em [8] podemos ainda encontrar vários resultados estruturais de $\mathcal{OP}_n$ que iremos precisar no Capítulo 3. Salientamos os seguintes:

- Todas as classes do núcleo de uma transformação de $\mathcal{OP}_n$ são intervalos à excepção da que contém o elemento 1, que ou é um intervalo ou uma união de dois intervalos;
- O número de núcleos distintos (que coincide com o número de imagens distintas) de transformações de $\mathcal{OP}_n$ de característica igual a r é $\binom{n}{r}$;
- O número de transformações de $\mathcal{OP}_n$ de característica igual a r é $r\binom{n}{r}^2$.

Consideremos agora o monóide $\mathcal{OR}_n$ constituído por todas as transformações totais que preservam ou revertem a orientação. À semelhança da relação existente entre $\mathcal{O}_n$ e $\mathcal{OD}_n$, também temos que, dado $s \in \mathcal{T}_n$, então $s \in \mathcal{OR}_n$ se e só se $s \in \mathcal{OP}_n$ ou $hs \in \mathcal{OP}_n$. Assim, obtemos um conjunto de geradores de $\mathcal{OR}_n$ juntando a um conjunto de geradores de $\mathcal{O}_n$ as permutações g e h consideradas atrás. Além disso, a característica de $\mathcal{OR}_n$ é 3. Uma apresentação de $\mathcal{OR}_n$ com 3 geradores e $n + 6$ relações foi obtida por Arthur e Ruškuc e encontra-se em [6, Teorema 4.1].

No que se refere aos subgrupos maximais de $\mathcal{OR}_n$, temos a caracterização seguinte:

Proposição 1.4.12 [**8, Teorema 5.9**]

Para $r \geq 3$ os subgrupos maximais das $\mathcal{D}$-classes dos elementos de $\mathcal{OP}_n$ de característica r são grupos diedrais de ordem $2r$. ∎

Em particular, o grupo das unidades de $\mathcal{OR}_n$, que é gerado pelas permutações g e h, é um grupo diedral de ordem $2n$.

1.4.3 Os monóides $\mathcal{POI}_n$, $\mathcal{POI}_n^+$, $\mathcal{POI}_n^-$ e $\mathcal{PODI}_n$

Passamos agora às transformações parciais injectivas. Denotamos por $\mathcal{POI}_n$ o monóide de todas as transformações parciais injectivas e crescentes em X_n. Acerca dos elementos de $\mathcal{POI}_n$ temos o seguinte facto imediato:

Lema 1.4.13 [16, Lema 2.1]
Dois elementos de $\mathcal{POI}_n$ são iguais se e só se têm a mesma imagem e o mesmo domínio.

Concluímos deste lema que os elementos de $\mathcal{POI}_n$ ficam bem definidos através do seu domínio e da sua imagem.

A característica de $\mathcal{POI}_n$ é n [19, Proposição 2.8] e uma apresentação para este monóide com n geradores pode ser encontrada em [19, Teorema 3.16]. Estes resultados foram obtidos por Fernandes.

Designamos por $\mathcal{POI}_n^+$ [respectivamente, $\mathcal{POI}_n^-$] o submonóide de $\mathcal{POI}_n$ de todas as transformações parciais extensivas [respectivamente, co-extensivas].

Temos que os submonóides $\mathcal{POI}_n^-$ e $\mathcal{POI}_n^+$ de $\mathcal{POI}_n$ são anti-isomorfos. De facto, a função de $\mathcal{POI}_n^-$ em $\mathcal{POI}_n^+$ que aplica cada transformação parcial $s \in \mathcal{POI}_n^-$ na transformação parcial s^{-1} de $\mathcal{POI}_n^+$, ou seja, na transformação definida por $\operatorname{Dom} s^{-1} = \operatorname{Im} s$ e $\operatorname{Im} s^{-1} = \operatorname{Dom} s$, é um anti-homomorfismo de monóides.

Juntando a $\mathcal{POI}_n$ as transformações parciais decrescentes e injectivas, obtemos o monóide $\mathcal{PODI}_n$ das transformações parciais injectivas e monótonas.

Uma apresentação para este monóide com n geradores e $\frac{1}{2}(n^2+5n-4)$ relações foi obtida por Fernandes, Gomes e Jesus e pode ser encontrada em [22, Teorema 3].

No entanto, a característica de $\mathcal{PODI}_n$ é, em geral, inferior a n. De facto, como mostram os mesmos autores, é igual à característica de $\mathcal{OD}_n$, ou seja, é igual a $\lceil \frac{n}{2} \rceil + 1$. Este resultado, assim como um conjunto gerador com $\lceil \frac{n}{2} \rceil + 1$ elementos, aparece em [22, Teorema 4].

1.4.4 Os monóides $\mathcal{O}_{m\times n}$, $\mathcal{O}_{m\times n}^+$, $\mathcal{O}_{m\times n}^-$ e $\mathcal{OD}_{m\times n}$

Seja ρ uma relação de equivalência em X. Denotamos por $\mathcal{T}_\rho(X)$ o submonóide de $\mathcal{T}(X)$ de todas as transformações que *preservam a relação de equivalência* ρ, i.e.

$$\mathcal{T}_\rho(X) = \{\alpha \in \mathcal{T}(X) \mid (a\alpha, b\alpha) \in \rho, \text{para qualquer } (a,b) \in \rho\}.$$

Sejam $m, n \in \mathbb{N}$ e ρ a relação de equivalência em X_{mn} definida por

$$\rho = (A_1 \times A_1) \cup (A_2 \times A_2) \cup \cdots \cup (A_m \times A_m),$$

em que $A_i = \{(i-1)n+1, (i-1)n+2, \ldots, in\}$, para qualquer $i \in \{1, \ldots, m\}$. Fazemos notar que as ρ-classes A_i, com $1 \le i \le m$, formam uma partição de X_{mn} com m classes de equivalência em que cada classe é um intervalo com n elementos. Designamos esta partição por *m-partição uniforme* (em intervalos) de X_{mn}.

Denotamos por $\mathcal{T}_{m\times n}$ o submonóide $\mathcal{T}_\rho(X_{mn})$ de $\mathcal{T}_{mn}$ e por $\mathcal{T}^+_{m\times n}$ [respectivamente, $\mathcal{T}^-_{m\times n}$] o submonóide de $\mathcal{T}_{m\times n}$ das transformações extensivas [respectivamente, co-extensivas]. Começamos por salientar que os monóides $\mathcal{T}_{1\times n}$ e $\mathcal{T}_{n\times 1}$ são isomorfos a $\mathcal{T}_n$.

Em relação à característica do monóide $\mathcal{T}_{m\times n}$, para $m, n \geq 2$, Huisheng provou (em 2005) que era menor ou igual a 6 [43, Corolário 3.8]. Actualmente a característica é conhecida e foi obtida por Araújo e Schneider em 2008 [5, Teorema 1.1].

Teorema 1.4.14 *Para $m, n \geq 2$, a característica de $\mathcal{T}_{m\times n}$ é 4.* ■

Consideremos as transformações crescentes de $\mathcal{T}_{m\times n}$. Obtemos assim o submonóide de $\mathcal{T}_{m\times n}$ de todas as transformações crescentes que preservam uma m-partição uniforme e que denotamos por $\mathcal{O}_{m\times n}$. Por sua vez, considerando as transformações de $\mathcal{T}^+_{m\times n}\cap\mathcal{O}_{mn}$ [respectivamente, $\mathcal{T}^-_{m\times n}\cap\mathcal{O}_{mn}$], obtemos os monóides $\mathcal{O}^+_{m\times n}$ [respectivamente, $\mathcal{O}^-_{m\times n}$] de todas as transformações crescentes e extensivas [respectivamente, co-extensivas] que preservam a m-partição uniforme.

Exemplo 1.4.15 Sejam

$$r=\left(\begin{array}{cccc|cccc|cccc}1&2&3&4&5&6&7&8&9&10&11&12\\1&3&3&2&9&12&10&10&5&6&6&8\end{array}\right),\ s=\left(\begin{array}{cccc|cccc|cccc}1&2&3&4&5&6&7&8&9&10&11&12\\5&5&5&6&6&6&6&7&10&11&11&11\end{array}\right),$$
$$t=\left(\begin{array}{cccc|cccc|cccc}1&2&3&4&5&6&7&8&9&10&11&12\\1&3&3&4&9&9&10&10&10&11&11&12\end{array}\right)\ \text{e}\ u=\left(\begin{array}{cccc|cccc|cccc}1&2&3&4&5&6&7&8&9&10&11&12\\1&1&2&2&3&3&4&4&5&6&8&8\end{array}\right).$$

Temos: $r\in\mathcal{T}_{3\times 4}$ mas $r\notin\mathcal{O}_{3\times 4}$; $s\in\mathcal{O}_{3\times 4}$ mas $s\notin\mathcal{O}^+_{3\times 4}$ e $s\notin\mathcal{O}^-_{3\times 4}$; $t\in\mathcal{O}^+_{3\times 4}$ e $u\in\mathcal{O}^-_{3\times 4}$.

Concentramos agora a nossa atenção na aplicação φ e nas transformações s_1 e s_2 definidas na Subsecção 1.4.1. Tomando mn em vez de n, a aplicação φ define um isomorfismo de $\mathcal{O}^-_{mn}$ em $\mathcal{O}^+_{mn}$. Além disso, neste caso, $\mathcal{O}^-_{m\times n}\varphi\subseteq\mathcal{O}^+_{m\times n}$. De facto, tomando $s\in\mathcal{O}^-_{m\times n}$ e, para cada $1\leq i\leq m$, sendo $\bar{i}$ o elemento de $\{1,\ldots,m\}$ tal que $A_is\subseteq A_{\bar{i}}$, temos $A_i\bar{s}\subseteq A_{m+1-\overline{(m+1-i)}}$. Logo φ induz um isomorfismo de $\mathcal{O}^-_{m\times n}$ em $\mathcal{O}^+_{m\times n}$. Podemos igualmente supor que, para cada $s\in\mathcal{O}_{mn}$, temos as transfomações s_1 e s_2 definidas em X_{mn}. É fácil mostrar que, se $s\in\mathcal{O}_{m\times n}$ então $s_1\in\mathcal{O}^-_{m\times n}$, $s_2\in\mathcal{O}^+_{m\times n}$ e $s=s_1s_2=s_2s_1$. Acabámos de justificar a proposição seguinte:

Proposição 1.4.16 *Os submonóides $\mathcal{O}^-_{m\times n}$ e $\mathcal{O}^+_{m\times n}$ de $\mathcal{O}_{m\times n}$ são isomorfos. Além disso, temos $\mathcal{O}_{m\times n}=\mathcal{O}^-_{m\times n}\mathcal{O}^+_{m\times n}=\mathcal{O}^+_{m\times n}\mathcal{O}^-_{m\times n}$.* ■

Ao considerarmos transformações de $\mathcal{T}_{m\times n}$ crescentes ou decrescentes obtemos o monóide $\mathcal{OD}_{m\times n}=\mathcal{T}_{m\times n}\cap\mathcal{OD}_{mn}$ de todas as transformações totais monótonas que preservam uma m-partição uniforme.

Seja h a permutação de $\mathcal{OD}_{mn}$ definida por

$$h=\begin{pmatrix}1&2&\cdots&mn-1&mn\\mn&mn-1&\cdots&2&1\end{pmatrix}.$$

Observemos que h é uma permutação de ordem dois que preserva a partição $\{A_1, \dots, A_m\}$. Temos ainda que se $s \in \mathcal{T}_{m\times n}$ então $s = h^2 s = h(hs)$ e que s é uma transformação decrescente se e só se hs é uma transformação crescente. É assim claro que o monóide $\mathcal{OD}_{m\times n}$ é gerado por $\mathcal{O}_{m\times n} \cup \{h\}$. Além disso, o grupo cíclico $\mathcal{C}_2 = \{1, h\}$ de ordem 2 é o grupo das unidades de $\mathcal{OD}_{m\times n}$.

1.4.5 Os monóides $\mathcal{OP}_{m\times n}$ e $\mathcal{OR}_{m\times n}$

Designamos por $\mathcal{OP}_{m\times n}$ o monóide $\mathcal{T}_{m\times n} \cap \mathcal{OP}_{mn}$ de todas as transformações totais que preservam a orientação e uma m-partição uniforme.

Exemplo 1.4.17 As transformações

$$s_1 = \left(\begin{array}{cccc|cccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 9 & 10 & 10 & 12 & 1 & 1 & 2 & 3 & 3 & 3 & 4 & 4 \end{array}\right), s_2 = \left(\begin{array}{cccc|cccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 6 & 6 & 7 & 7 & 7 & 7 & 8 & 8 & 5 & 5 & 5 & 6 \end{array}\right),$$

$$s_3 = \left(\begin{array}{cccc|cccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 11 & 11 & 11 & 11 & 12 & 12 & 10 & 10 & 10 & 10 & 11 & 11 \end{array}\right)$$

pertencem a $\mathcal{OP}_{3\times 4}$, enquanto que as transformações

$$s_4 = \left(\begin{array}{cccc|cccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 11 & 11 & 11 & 12 & 12 & 7 & 7 & 8 & 9 & 9 & 10 & 10 \end{array}\right), s_5 = \left(\begin{array}{cccc|cccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 8 & 8 & 8 & 8 & 7 & 5 & 6 & 7 & 7 & 7 & 8 & 8 \end{array}\right)$$

não pertencem a $\mathcal{OP}_{3\times 4}$. De facto, $s_4 \notin \mathcal{T}_{3\times 4}$ e $s_5 \notin \mathcal{OP}_{12}$.

Consideremos as permutações de X_{mn}

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & mn-1 & mn \\ 2 & 3 & \cdots & mn & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{OP}_{mn} \quad \text{e}$$

$$f = g^n = \left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 1 & \cdots & n & n+1 & \cdots & mn-n & mn-n+1 & \cdots & mn \\ n+1 & \cdots & 2n & 2n+1 & \cdots & mn & 1 & \cdots & n \end{array}\right) \in \mathcal{OP}_{m\times n}.$$

Fazemos notar que a transformação g não preserva (em geral) a partição e assim g não é um elemento de $\mathcal{OP}_{m\times n}$. Por outro lado, a transformação $f = g^n$ preserva a partição. Além disso, é fácil ver que as únicas permutações de $\mathcal{OP}_{mn}$ que preservam a partição são as potências de f, pelo que o grupo das unidades de $\mathcal{OP}_{m\times n}$ é gerado por f e assim isomorfo ao grupo cíclico de ordem m. No entanto, ao contrário do que poderíamos julgar por analogia com o que se passa com $\mathcal{OP}_{mn}$, o monóide $\mathcal{OP}_{m\times n}$ não é gerado por $\mathcal{O}_{m\times n} \cup \{g^n\}$, como veremos no Capítulo 3.

Abrangendo transformações que preservam ou que revertem a orientação em $\mathcal{T}_{m\times n}$, temos o monóide $\mathcal{OR}_{m\times n} = \mathcal{T}_{m\times n} \cap \mathcal{OR}_{mn}$ de todas as transformações totais que preservam ou revertem a orientação e preservam uma m-partição uniforme.

Observemos que $s \in \mathcal{OR}_{m\times n}$ se e só se $s \in \mathcal{OP}_{m\times n}$ ou $hs \in \mathcal{OP}_{m\times n}$. Assim, o monóide $\mathcal{OR}_{m\times n}$ é gerado por $\mathcal{OP}_{m\times n} \cup \{h\}$.

É fácil verificar que o grupo das unidades de $\mathcal{OR}_{m\times n}$ é gerado por $\{f, h\}$ e é isomorfo ao grupo diedral $\mathcal{D}_{2m}$ de ordem $2m$.

1.5 Produtos semidirectos

Dados dois semigrupos S e T, designa-se por *produto directo* de S e T o semigrupo de suporte $S\times T$ e multiplicação definida por $(s,t)(r,u)=(sr,tu)$, para todos os pares $(s,t),(r,u)\in S\times T$. Esta definição pode ser estendida, de um modo natural, a um número $n\in\mathbb{N}$ arbitrário de semigrupos $S_1,\ldots,S_n$. Para $n\in\mathbb{N}$ denotamos por S^n o produto directo de n cópias do semigrupo S.

Se S e T são monóides então $S\times T$ é um monóide em que $(1_S,1_T)$ é o elemento identidade.

Sejam S e T dois semigrupos e

$$\begin{array}{rcccccc} \varphi: & T^1 & \longrightarrow & End(S) & & & \\ & t & \longmapsto & t\varphi: & S & \longrightarrow & S \\ & & & & s & \longmapsto & t\centerdot s \end{array}$$

um anti-homomorfismo de monóides, ou seja, φ satisfaz as condições:

1. $t\centerdot(sr)=(t\centerdot s)(t\centerdot r)$;
2. $(tu)\centerdot s=t\centerdot(u\centerdot s)$;
3. $1\centerdot s=s$,

para quaisquer $s,r\in S$ e $t,u\in T^1$. Neste contexto, dizemos que φ define uma *acção esquerda* de T sobre S. A este anti-homomorfismo associamos o semigrupo $S\rtimes_\varphi T$ de suporte $S\times T$ e multiplicação definida por

$$(s,t)(r,u)=(s(t\centerdot r),tu),$$

para quaisquer $s,r\in S$ e $t,u\in T$. Designamos o semigrupo $S\rtimes_\varphi T$ por *produto semidirecto* (associado a φ) e, se não houver ambiguidade, denotamo-lo simplesmente por $S\rtimes T$.

Podemos também definir, dualmente, o produto semidirecto reverso. Assim, sejam S e T dois semigrupos e

$$\begin{array}{rcccccc} \psi: & S^1 & \longrightarrow & End(T) & & & \\ & s & \longmapsto & s\psi: & T & \longrightarrow & T \\ & & & & t & \longmapsto & t^s \end{array}$$

um homomorfismo de monóides, ou seja, ψ satisfaz as condições:

1. $(tu)^s=(t^s)(u^s)$;
2. $t^{sr}=(t^s)^r$;
3. $t^1=t$,

para quaisquer $s,r\in S^1$ e $t,u\in T$. Neste contexto, dizemos que ψ define uma *acção direita* de S sobre T. Ao homomorfismo ψ associamos o semigrupo $S\ltimes_\psi T$ de suporte $S\times T$ e multiplicação definida por

$$(s,t)(r,u)=(sr,(t^r)u),$$

para quaisquer $s, r \in S$ e $t, u \in T$. Designamos o semigrupo $S \ltimes_\psi T$ por *produto semidirecto reverso* (associado a ψ) e denotamo-lo, se não houver ambiguidade, simplesmente por $S \ltimes T$.

Se S e T são monóides e a acção φ [respectivamente, ψ] satisfaz a condição $t \centerdot 1 = 1$, para qualquer $t \in T$ [respectivamente, $1^s = 1$, para qualquer $s \in S$] dizemos que a acção é *monoidal*. Se a acção φ [respectivamente, ψ] é monoidal então $S \rtimes T$ [respectivamente, $S \ltimes T$] é um monóide com identidade $(1_S, 1_T)$.

Sejam S e T dois semigrupos (ou monóides) para os quais está definido um produto semidirecto $S \rtimes T$. Então também podemos definir, de forma natural, um produto semidirecto $S^r \rtimes T$. De facto, para tal basta apenas considerarmos a acção esquerda definida da mesma forma que em $S \rtimes T$. Além disso, podemos ainda obter um produto semidirecto reverso $T^r \ltimes S^r$ definindo $s^t = t \centerdot s$, para cada $s \in S$ e $t \in T$. Facilmente se prova que $S \rtimes T$ é isomorfo a $(T^r \ltimes S^r)^r$. Se T for comutativo, a acção esquerda de T sobre S pode ser considerada uma acção direita de T sobre S e podemos assim definir um produto semidirecto reverso $T \ltimes S$. Neste caso, temos então que $T \ltimes S$ é isomorfo a $(S^r \rtimes T)^r$.

Observemos que o produto directo de dois semigrupos é um caso particular de um produto semidirecto (associado a uma *acção trivial*, ou seja, ao (anti-)homomorfismo que transforma todos os elementos na identidade).

O produto em coroa e, em particular, o produto em coroa em semigrupos de transformações, é um exemplo de um produto semidirecto. Araújo e Schneider usaram-no em [5] para mostrar que a característica de $\mathcal{T}_{m\times n}$, para $m, n \geq 2$, é quatro. Esta abordagem vai ser igualmente muito útil neste trabalho. Por conveniência, optámos por uma definição do produto em coroa em semigrupos de transformações com a notação simplificada.

Sejam S um monóide qualquer e T um submonóide de $\mathcal{T}_m$. Definimos o *produto em coroa* do monóide S pelo monóide T, que denotamos por $S \wr T$, como sendo o produto semidirecto $S^m \rtimes T$ associado à acção esquerda definida por

$$t \centerdot (s_1, \ldots, s_m) = (s_{1t}, \ldots, s_{mt})$$

para quaisquer $t \in T$ e $s_1, \ldots, s_m \in S$. Observemos que, dados elementos $(s_1, \ldots, s_m; t)$ e $(r_1, \ldots, r_m; u)$ de $S^m \times T$, temos (em $S \wr T$)

$$(s_1, \ldots, s_m; t)(r_1, \ldots, r_m; u) = (s_1 r_{1t}, \ldots, s_m r_{mt}; tu).$$

Apresentamos agora a caracterização de $\mathcal{T}_{m\times n}$, através do produto em coroa, de Araújo e Schneider. Para $m, n \in \mathbb{N}$, recordemos a relação de equivalência ρ em X_{mn} definida por

$$\rho = (A_1 \times A_1) \cup (A_2 \times A_2) \cup \cdots \cup (A_m \times A_m),$$

em que $A_i = \{(i-1)n+1, (i-1)n+2, \ldots, in\}$, para qualquer $i \in \{1, \ldots, m\}$ (cf. Subsecção 1.4.4). Seja $s \in \mathcal{T}_{m\times n}$ e seja t a aplicação (quociente de s por ρ) definida por: para $j \in \{1, \ldots, m\}$, $(j)t$ é o elemento de $\{1, \ldots, m\}$ tal que $(A_j)s \subseteq A_{(j)t}$. Para cada $j \in \{1, \ldots, m\}$, definimos uma transformação $s_j \in \mathcal{T}_n$ por

$$ks_j = ((j-1)n + k)s - ((j)t - 1)n,$$

para $k \in \{1, \ldots, n\}$. Seja $\overline{s} = (s_1, s_2, \ldots, s_m; t) \in \mathcal{T}_n^m \times \mathcal{T}_m$. Com esta notação, a aplicação

$$\begin{array}{rccc} \psi: & \mathcal{T}_{m\times n} & \longrightarrow & \mathcal{T}_n \wr \mathcal{T}_m \\ & s & \longmapsto & \overline{s} \end{array}$$

é um isomorfismo [5, Lema 2.1]. Fazemos notar que, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$ e cada $k \in A_i$ temos

$$ks = (k - (i-1)n)s_i + ((i)t - 1)n.$$

Exemplo 1.5.1 Consideremos a transformação

$$s = \left(\begin{array}{cccc|cccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 1 & 3 & 3 & 2 & 9 & 12 & 10 & 10 & 5 & 6 & 6 & 8 \end{array}\right) \in \mathcal{T}_{3\times 4}.$$

Sendo $t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, $s_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, $s_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ e $s_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, temos $\overline{s} = (s_1, s_2, s_3; t)$.

Dado que $\mathcal{T}_{m\times n} \cong \mathcal{T}_n \wr \mathcal{T}_m$ podemos imediatamente concluir que a cardinalidade de $\mathcal{T}_{m\times n}$ é $n^{nm}m^m$.

1.6 Produtos semidirectos bilaterais

Sejam S e T dois semigrupos. Sejam

$$\begin{array}{rcclccc} \delta: & T & \longrightarrow & \mathcal{T}(S) & & & \\ & u & \longmapsto & \delta_u: & S & \longrightarrow & S \\ & & & & s & \longmapsto & u \centerdot s \end{array}$$

um anti-homomorfismo de semigrupos e

$$\begin{array}{rcclccc} \varphi: & S & \longrightarrow & \mathcal{T}(T) & & & \\ & s & \longmapsto & \varphi_s: & T & \longrightarrow & T \\ & & & & u & \longmapsto & u^s \end{array}$$

um homomorfismo de semigrupos tais que:

(SPR) $(uv)^s = u^{v\centerdot s}v^s$, para quaisquer $s \in S$ e $u, v \in T$ (*Sequential Processing Rule*); e

(SCR) $u \centerdot (sr) = (u \centerdot s)(u^s \centerdot r)$, para quaisquer $s, r \in S$ e $u \in T$ (*Serial Composition Rule*).

Neste contexto, dizemos que δ é uma *acção esquerda* de T em S e que φ é uma *acção direita* de S em T. Além disso, o conjunto $S \times T$ é um semigrupo em relação à seguinte operação:

$$(s,u)(r,v) = (s(u \centerdot r), u^r v),$$

para quaisquer $s, r \in S$ e $u, v \in T$. Denotamos este semigrupo por $S_\delta \bowtie_\varphi T$ (ou, se não houver ambiguidade, simplesmente por $S \bowtie T$) e designamo-lo por *produto semidirecto bilateral* de S e T associado às acções δ e φ. O produto semidirecto bilateral foi introduzido para grupos por Zappa [72] e estudado para semigrupos por Kunze [48].

Se S e T são dois monóides, dizemos que a acção δ [respectivamente, φ] *preserva a identidade* se $1 \centerdot s = s$, para qualquer $s \in S$ [respectivamente, $u^1 = u$, para qualquer $u \in T$] e que é *monoidal* se $u \centerdot 1 = 1$, para qualquer $u \in T$ [respectivamente, $1^s = 1$, para qualquer $s \in S$]. Se S e T são monóides e ambas as acções δ e φ preservam a identidade e são monoidais então $S \bowtie T$, com a operação atrás definida, é um monóide com identidade $(1_S, 1_T)$.

Neste trabalho consideramos apenas produtos semidirectos bilaterais de monóides associados a acções monoidais que preservam a identidade.

Observemos que, se a acção direita φ é a acção trivial (i.e. $(S)\varphi = \{1_T\}$) então temos que $S \bowtie T = S \rtimes T$ é um produto semidirecto usual, se a acção esquerda δ é a acção trivial (i.e. $(T)\delta = \{1_S\}$) então $S \bowtie T$ coincide com um produto semidirecto reverso $S \ltimes T$ e se ambas as acções são triviais então $S \bowtie T$ é o produto directo usual $S \times T$. Notemos também que o produto semidirecto bilateral é significativamente diferente do produto semidirecto *duplo* definido por Rhodes e Tilson [63], onde a multiplicação na segunda componente é sempre como no produto directo.

1.7 Pseudovariedades

Uma *pseudovariedade de monóides* é uma classe de monóides finitos fechada para produtos directos finitos, submonóides e imagens homomorfas. Dada uma classe C de monóides finitos, a menor pseudovariedade de monóides que contém C é a classe de todas as imagens homomorfas de submonóides de um produto directo de um número finito de elementos de C. Esta pseudovariedade de monóides diz-se a *pseudovariedade de monóides gerada por* C. O *produto semidirecto* $\mathsf{V} \rtimes \mathsf{W}$ *das pseudovariedades de monóides* V *e* W é a pseudovariedade de monóides gerada por todos os produtos semidirectos monoidais $M \rtimes N$, com $M \in \mathsf{V}$ e $N \in \mathsf{W}$. Analogamente definimos o *produto semidirecto reverso* $\mathsf{V} \ltimes \mathsf{W}$ e o *produto semidirecto bilateral* $\mathsf{V} \bowtie \mathsf{W}$ das *pseudovariedades de monóides* V e W. Claramente temos $\mathsf{V} \rtimes \mathsf{W} \subseteq \mathsf{V} \bowtie \mathsf{W}$ e $\mathsf{V} \ltimes \mathsf{W} \subseteq \mathsf{V} \bowtie \mathsf{W}$.

Nesta dissertação fazemos referência às seguintes pseudovariedades de monóides:

1. Ecom, a pseudovariedade de todos os monóides finitos cujos idempotentes comutam;

2. J, a pseudovariedade de todos os monóides $\mathcal{J}$-triviais;

3. L, a pseudovariedades de todos os monóides $\mathcal{L}$-triviais;
4. R, a pseudovariedades de todos os monóides $\mathcal{R}$-triviais;
5. A, a pseudovariedade de todos os monóides aperiódicos;
6. Ab, a pseudovariedade de monóides de todos os grupos abelianos;
7. Ab_2, a pseudovariedade de monóides gerada por $\mathcal{C}_2$;
8. O, a pseudovariedade de monóides gerada por $\{\mathcal{O}_n \mid n \in \mathbb{N}\}$;
9. OD, a pseudovariedade de monóides gerada por $\{\mathcal{OD}_n \mid n \in \mathbb{N}\}$;
10. OP, a pseudovariedade de monóides gerada por $\{\mathcal{OP}_n \mid n \in \mathbb{N}\}$;
11. OR, a pseudovariedade de monóides gerada por $\{\mathcal{OR}_n \mid n \in \mathbb{N}\}$;
12. Dih, a pseudovariedade de monóides gerada por $\{\mathcal{D}_{2n} \mid n \in \mathbb{N}\}$;
13. POI, a pseudovariedade de monóides gerada por $\{\mathcal{POI}_n \mid n \in \mathbb{N}\}$;
14. PODI, a pseudovariedade de monóides gerada por $\{\mathcal{PODI}_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Para justificar a pertinência dos resultados obtidos no Capítulo 4 que envolvem estas pseudovariedades, seleccionámos certos factos acerca de algumas das pseudovariedades descritas em cima que mencionamos aqui. É bem conhecido que a pseudovariedade R é gerada por $\{\mathcal{T}_n^+ \mid n \in \mathbb{N}\}$ e que a pseudovariedade J é gerada pelos *monóides sintácticos das linguagens testáveis por pedaços* e é também gerada por $\{\mathcal{O}_n^+ \mid n \in \mathbb{N}\}$ [60]. Temos ainda que as pseudovariedades R e J, assim como a pseudovariedade O, estão contidas na pseudovariedade A. Por outro lado, a pseudovariedade O é auto-dual e não contém todos os semigrupos $\mathcal{R}$-triviais embora toda a *banda* finita pertença a O [39]. Na realidade, todo o semigrupo finito cujos idempotentes formam um ideal está contido na pseudovariedade O [70]. Temos ainda que a pseudovariedade POI está propriamente contida na pseudovariedade O [16, 40] e todo o produto semidirecto de uma *cadeia* (i.e. um semireticulado que forma uma cadeia para a ordem usual) por um semigrupo de O também pertence a O [32]. Finalmente, a pseudovariedade O não é finitamente baseada [62].

Em relação à pseudovariedade OP, sabemos que esta pseudovariedade é auto-dual e que contém todos os semigrupos comutativos [9].

Terminamos estas considerações referindo que a pseudovariedade $\mathsf{J} \cap \mathsf{Ecom}$ é gerada pelos monóides $\{\mathcal{POI}_n^+ \mid n \in \mathbb{N}\}$, como foi provado em [40].

Capítulo 2

Monóides de transformações totais monótonas que preservam uma partição uniforme numa cadeia finita

Neste capítulo determinamos os cardinais e as características dos monóides $\mathcal{O}_{m\times n}$, $\mathcal{O}^+_{m\times n}$, $\mathcal{O}^-_{m\times n}$ e $\mathcal{OD}_{m\times n}$. Começamos por observar que, para $m = 1$ ou $n = 1$, os monóides $\mathcal{O}_{m\times n}$, $\mathcal{O}^+_{m\times n}$, $\mathcal{O}^-_{m\times n}$ e $\mathcal{OD}_{m\times n}$ coincidem, respectivamente, com os monóides $\mathcal{O}_{mn}$, $\mathcal{O}^+_{mn}$, $\mathcal{O}^-_{mn}$ e $\mathcal{OD}_{mn}$. Relembramos que o cardinal de $\mathcal{O}_n$ é $\binom{2n-1}{n-1}$ e foi determinado por Howie em [41], que, juntamente com Gomes em [36], obteve a característica de $\mathcal{O}_n$, que é n. Por sua vez, o cardinal de $\mathcal{O}^+_n$ (que é igual ao de $\mathcal{O}^-_n$) é o n-ésimo número de Catalan, i.e. $\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$, e pode ser encontrado em [53], e as características de $\mathcal{O}^+_n$ e de $\mathcal{O}^-_n$ são $n-1$ (cf. Subsecção 1.4.1). Por fim, o cardinal de $\mathcal{OD}_n$ é $2\binom{2n-1}{n-1} - n$ e a sua característica é $\lceil \frac{n}{2} \rceil + 1$. Estas expressões foram obtidas por Fernandes, Gomes e Jesus em [23]. Assim, neste capítulo, consideramos $m, n \geq 2$.

Na primeira secção usamos o produto em coroa para caracterizar alguns destes monóides. Seguidamente, na segunda secção, fornecemos expressões para os cardinais dos monóides mencionados e terminamos, com a terceira secção, onde estabelecemos as características de $\mathcal{O}_{m\times n}$, $\mathcal{O}^+_{m\times n}$, $\mathcal{O}^-_{m\times n}$ e $\mathcal{OD}_{m\times n}$. Estes resultados encontram-se em [28], [29] e [30].

2.1 O produto em coroa

Tendo por objectivo neste capítulo encontrar os cardinais e as características dos monóides $\mathcal{O}_{m\times n}$, $\mathcal{O}^+_{m\times n}$, $\mathcal{O}^-_{m\times n}$ e $\mathcal{OD}_{m\times n}$, dedicamos esta secção ao produto em coroa. Começamos por recordar o isomorfismo entre $\mathcal{T}_{m\times n}$ e $\mathcal{T}_n \wr \mathcal{T}_m$ estabelecido por Araújo e Schneider em [5] e referido na Secção 1.5. Depois, usamos este isomorfismo para caracterizar o monóides $\mathcal{O}_{m\times n}$, $\mathcal{O}^+_{m\times n}$ e $\mathcal{O}^-_{m\times n}$.

Sejam $\alpha \in \mathcal{T}_{m\times n}$ e $\beta \in \mathcal{T}_m$ a aplicação definida por: para cada $j \in \{1, \dots, m\}$, $j\beta$ é o elemento de $\{1, \dots, m\}$ tal que $A_j\alpha \subseteq A_{j\beta}$. Para cada $j \in \{1, \dots, m\}$, seja $\alpha_j \in \mathcal{T}_n$ definida por

$$k\alpha_j = ((j-1)n+k)\alpha - (j\beta - 1)n,$$

com $k \in \{1,\ldots,n\}$. Sendo $\overline{\alpha} = (\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m;\beta) \in \mathcal{T}_n^m \times \mathcal{T}_m$, a função

$$\begin{array}{rccl} \psi: & \mathcal{T}_{m\times n} & \longrightarrow & \mathcal{T}_n \wr \mathcal{T}_m \\ & \alpha & \longmapsto & \overline{\alpha} \end{array}$$

é um isomorfismo.

Observamos que a restrição de ψ a $\mathcal{O}_{m\times n}$ não é, em geral, um isomorfismo de $\mathcal{O}_{m\times n}$ no produto semidirecto $\mathcal{O}_n \wr \mathcal{O}_m$. Por exemplo, para $m = n = 2$, tomemos $\alpha = (\alpha_1,\alpha_2;\beta)$, com $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ e $\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Então $\alpha \in \mathcal{O}_2 \wr \mathcal{O}_2$ e $\alpha\psi^{-1} = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right) \notin \mathcal{O}_{2\times 2}$.

De facto, o monóide $\mathcal{O}_{m\times n}$ não é, em geral, isomorfo a $\mathcal{O}_m \wr \mathcal{O}_n$. Por exemplo, podemos mostrar que $|\mathcal{O}_{2\times 2}| = 19$ enquanto $|\mathcal{O}_2 \wr \mathcal{O}_2| = 27$.

Consideremos

$$\overline{\mathcal{O}}_{m\times n} = \{(\alpha_1,\ldots,\alpha_m;\beta) \in \mathcal{O}_n^m \times \mathcal{O}_m \mid \begin{array}{l} j\beta = (j+1)\beta \text{ implica } n\alpha_j \le 1\alpha_{j+1}, \\ \text{para todo o } j \in \{1,\ldots,m-1\}\}. \end{array}$$

Notemos que, se $(\alpha_1,\ldots,\alpha_m;\beta) \in \overline{\mathcal{O}}_{m\times n}$ e $1 \le i < j \le m$ são tais que $i\beta = j\beta$, então $n\alpha_i \le 1\alpha_j$.

Proposição 2.1.1 *$\overline{\mathcal{O}}_{m\times n}$ é um submonóide de $\mathcal{T}_n \wr \mathcal{T}_m$ (e de $\mathcal{O}_n \wr \mathcal{O}_m$) isomorfo a $\mathcal{O}_{m\times n}$.*

Demonstração. O que faremos é demonstrar que $\overline{\mathcal{O}}_{m\times n} = \mathcal{O}_{m\times n}\psi$. Em particular obtemos que $\overline{\mathcal{O}}_{m\times n}$ é um submonóide de $\mathcal{O}_n \wr \mathcal{O}_m$. Seja $(\alpha_1,\ldots,\alpha_m;\beta) \in \overline{\mathcal{O}}_{m\times n}$ e tomemos $\alpha = (\alpha_1,\ldots,\alpha_m;\beta)\psi^{-1} \in \mathcal{T}_{m\times n}$. Sejam $x,y \in \{1,\ldots,mn\}$ tais que $x \le y$. Então $x \in A_i$ e $y \in A_j$, para alguns $1 \le i \le j \le m$. Assim, $x\alpha = (x-(i-1)n)\alpha_i + (i\beta-1)n$ e $y\alpha = (y-(j-1)n)\alpha_j + (j\beta-1)n$. Se $i = j$ então

$$\begin{aligned} x \le y &\Rightarrow x-(j-1)n \le y-(j-1)n \\ &\Rightarrow (x-(j-1)n)\alpha_j \le (y-(j-1)n)\alpha_j \\ &\Rightarrow x\alpha = (x-(j-1)n)\alpha_j + (j\beta-1)n \le (y-(j-1)n)\alpha_j + (j\beta-1)n = y\alpha\ . \end{aligned}$$

Se $i < j$ e $i\beta < j\beta$ então $x\alpha \le (i\beta)n \le (j\beta-1)n < (j\beta-1)n+1 \le y\alpha$.
Finalmente, se $i < j$ e $i\beta = j\beta$, então $(x-(i-1)n)\alpha_i \le n\alpha_i \le 1\alpha_j \le (y-(j-1)n)\alpha_j$, donde

$$x\alpha = (x-(i-1)n)\alpha_i + (i\beta-1)n \le (y-(j-1)n)\alpha_j + (i\beta-1)n = (y-(j-1)n)\alpha_j + (j\beta-1)n = y\alpha.$$

Consequentemente, α é uma transformação crescente e portanto $\overline{\mathcal{O}}_{m\times n} \subseteq \mathcal{O}_{m\times n}\psi$.

Reciprocamente, sejam $\alpha \in \mathcal{O}_{m\times n}$ e $(\alpha_1,\dots,\alpha_m;\beta) = \alpha\psi$.

Começamos por mostrar que $\beta \in \mathcal{O}_m$. Sejam $i,j \in \{1,\dots,m\}$ tais que $i \leq j$. Como $in \in A_i$ e $A_i\alpha \subseteq A_{i\beta}$, temos $(in)\alpha \in A_{i\beta}$. Analogamente, $(jn)\alpha \in A_{j\beta}$. Por outro lado, $i \leq j$ implica $in \leq jn$ e assim $(in)\alpha \leq (jn)\alpha$. Concluímos que $i\beta \leq j\beta$.

A seguir, provamos que $\alpha_j \in \mathcal{O}_n$, para qualquer $1 \leq j \leq m$. Sejam $j \in \{1,\dots,m\}$ e $x,y \in \{1,\dots,n\}$ tais que $x \leq y$. Então $(j-1)n+x \leq (j-1)n+y$, donde $((j-1)n+x)\alpha \leq ((j-1)n+y)\alpha$ e assim $x\alpha_j = ((j-1)n+x)\alpha-(j\beta-1)n \leq ((j-1)n+y)\alpha-(j\beta-1)n = y\alpha_j$.

Finalmente, seja $j \in \{1,\dots,m-1\}$ tal que $j\beta = (j+1)\beta$. Então, como $\alpha \in \mathcal{O}_{mn}$, temos

$$\begin{aligned} n\alpha_j &= ((j-1)n+n)\alpha-(j\beta-1)n = (jn)\alpha-(j\beta-1)n \\ &\leq (jn+1)\alpha-(j\beta-1)n = (jn+1)\alpha-((j+1)\beta-1)n = 1\alpha_{j+1}. \end{aligned}$$

Portanto, $\mathcal{O}_{m\times n}\psi \subseteq \overline{\mathcal{O}}_{m\times n}$ e assim $\overline{\mathcal{O}}_{m\times n} = \mathcal{O}_{m\times n}\psi$, como pretendíamos demonstrar. ∎

Consideremos

$$\overline{\mathcal{T}}^+_{m\times n} = \{(\alpha_1,\dots,\alpha_m;\beta) \in \mathcal{T}_n^m \times \mathcal{T}_m^+ \mid j\beta = j \text{ implica } \alpha_j \in \mathcal{T}_n^+, \text{ para todo o } j \in \{1,\dots,m\}\}.$$

Observemos que, como $\beta \in \mathcal{T}_m^+$ implica $m\beta = m$, então $\overline{\mathcal{T}}^+_{m\times n} \subseteq \mathcal{T}_n^{m-1} \times \mathcal{T}_n^+ \times \mathcal{T}_m^+$.

Proposição 2.1.2 *$\overline{\mathcal{T}}^+_{m\times n}$ é um submonóide de $\mathcal{T}_n \wr \mathcal{T}_m$ isomorfo a $\mathcal{T}^+_{m\times n}$.*

Demonstração. Com a finalidade de mostrar que $\overline{\mathcal{T}}^+_{m\times n} \subseteq \mathcal{T}^+_{m\times n}\psi$, seja $(\alpha_1,\dots,\alpha_m;\beta)$ um elemento de $\overline{\mathcal{T}}^+_{m\times n}$ e tomemos $\alpha = (\alpha_1,\dots,\alpha_m;\beta)\psi^{-1}$. Pretendemos provar que $\alpha \in \mathcal{T}^+_{mn}$. Seja $x \in \{1,\dots,mn\}$ e tomemos $j \in \{1,\dots,m\}$ tal que $x \in A_j$. Então $x\alpha \in A_{j\beta}$ e, como $\beta \in \mathcal{T}_m^+$, temos $j \leq j\beta$. Se $j < j\beta$ então $j \leq j\beta-1$ e assim $x \leq jn \leq (j\beta-1)n < (j\beta-1)n+1 \leq x\alpha$. Se $j\beta = j$ então $\alpha_j \in \mathcal{T}_m^+$ e assim $x = x-(j-1)n+(j-1)n \leq (x-(j-1)n)\alpha_j+(j-1)n = x\alpha$. Donde, concluímos que $\alpha \in \mathcal{T}^+_{mn}$.

Reciprocamente, sejam $\alpha \in \mathcal{T}^+_{m\times n}$ e $\alpha\psi = (\alpha_1,\dots,\alpha_m;\beta)$.

Primeiro, observemos que, para todo o $j \in \{1,\dots,m\}$, como $A_j\alpha \subseteq A_{j\beta}$ e $\alpha \in \mathcal{T}^+_{m\times n}$, temos $jn \leq (jn)\alpha \leq (j\beta)n$ e assim $j \leq j\beta$. Donde $\beta \in \mathcal{T}_m^+$.

Seja $j \in \{1,\dots,m\}$ tal que $j\beta = j$ e tomemos $k \in \{1,\dots,n\}$. Então

$$k\alpha_j = ((j-1)n+k)\alpha-(j\beta-1)n \geq (j-1)n+k-(j\beta-1)n = (j-1)n+k-(j-1)n = k.$$

Logo, $\alpha_j \in \mathcal{T}_n^+$ e assim $\mathcal{T}^+_{m\times n}\psi \subseteq \overline{\mathcal{T}}^+_{m\times n}$, como queríamos demonstrar e temos imediatamente provada a afirmação da proposição. ∎

Seja

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{O}}^+_{m\times n} &= \overline{\mathcal{O}}_{m\times n} \cap \overline{\mathcal{T}}^+_{m\times n} \\ &= \{(\alpha_1,\dots,\alpha_m;\beta) \in \mathcal{O}_n^{m-1} \times \mathcal{O}_n^+ \times \mathcal{O}_m^+ \mid j\beta = (j+1)\beta \text{ implica } n\alpha_j \leq 1\alpha_{j+1} \text{ e} \\ &\qquad\qquad j\beta = j \text{ implica } \alpha_j \in \mathcal{O}_n^+, \text{ para todo o } j \in \{1,\dots,m-1\}\}. \end{aligned}$$

Como ψ é injectiva, pelas Proposições 2.1.1 e 2.1.2, temos

$$\overline{\mathcal{O}}^+_{m\times n} = \mathcal{O}_{m\times n}\psi \cap \mathcal{T}^+_{m\times n}\psi = (\mathcal{O}_{m\times n} \cap \mathcal{T}^+_{m\times n})\psi = \mathcal{O}^+_{m\times n}\psi,$$

pelo que:

Corolário 2.1.3 $\overline{\mathcal{O}}^+_{m\times n}$ *é um submonóide de* $\mathcal{T}_n \wr \mathcal{T}_m$ *(e de* $\mathcal{O}_n \wr \mathcal{O}_m$*) isomorfo a* $\mathcal{O}^+_{m\times n}$. ■

Analogamente, sendo

$$\begin{aligned}\overline{\mathcal{O}}^-_{m\times n} = \{(\alpha_1,\ldots,\alpha_m;\beta) \in \mathcal{O}^-_n \times \mathcal{O}^{m-1}_n \times \mathcal{O}^-_m \mid & (j-1)\beta = j\beta \text{ implica } n\alpha_{j-1} \le 1\alpha_j \text{ e} \\ & j\beta = j \text{ implica } \alpha_j \in \mathcal{O}^-_n, \text{ para todo o } j \in \{2,\ldots,m\}\},\end{aligned}$$

temos:

Proposição 2.1.4 $\overline{\mathcal{O}}^-_{m\times n}$ *é um submonóide de* $\mathcal{T}_n \wr \mathcal{T}_m$ *(e de* $\mathcal{O}_n \wr \mathcal{O}_m$*) isomorfo a* $\mathcal{O}^-_{m\times n}$. ■

2.2 Cardinais

Nesta secção usamos as bijecções anteriores para obter fórmulas para o número de elementos dos monóides $\mathcal{O}_{m\times n}$, $\mathcal{OD}_{m\times n}$, $\mathcal{O}^+_{m\times n}$ e $\mathcal{O}^-_{m\times n}$.

Os cardinais de $\mathcal{O}_{m\times n}$ e de $\mathcal{OD}_{m\times n}$

Para contarmos os elementos de $\mathcal{O}_{m\times n}$, por um lado, para cada transformação $\beta \in \mathcal{O}_m$, determinamos o número de sequências $(\alpha_1,\ldots,\alpha_m) \in \mathcal{O}^m_n$ tais que $(\alpha_1,\ldots,\alpha_m;\beta) \in \overline{\mathcal{O}}_{m\times n}$ e, por outro lado, fazemos notar que este número depende apenas do núcleo de β (e não propriamente de β).

Com este propósito, seja $\beta \in \mathcal{O}_m$. Suponhamos que $\operatorname{Im}\beta = \{b_1 < b_2 < \cdots < b_t\}$, para algum $1 \le t \le m$, e definamos $k_i = |b_i\beta^{-1}|$, para $i = 1,\ldots,t$. Sendo β uma transformação crescente, a sequência $(k_1,\ldots,k_t)$ determina o núcleo de β: efectivamente, temos

$$\{k_1 + \cdots + k_{i-1} + 1, \ldots, k_1 + \cdots + k_i\}\beta = \{b_i\},$$

para qualquer $i = 1,\ldots,t$ (considerando $k_1 + \cdots + k_{i-1} + 1 = 1$, com $i = 1$).

Chamamos *tipo de núcleo* de β à sequência $(k_1,\ldots,k_t)$. Observemos que $1 \le k_i \le m$, para qualquer $i = 1,\ldots,t$, e $k_1 + k_2 + \cdots + k_t = m$.

Recordamos que o número de sequências crescentes de comprimento k de elementos de uma cadeia com n elementos é $\binom{n+k-1}{k} = \binom{n+k-1}{n-1}$ (ver [37], por exemplo). Este número coincide com o número de combinações de k elementos com repetição sobre um conjunto com n elementos. Notemos ainda que, como a sequência $(\alpha_1,\ldots,\alpha_k) \in \mathcal{O}^k_n$ satisfaz a condição $n\alpha_j \le 1\alpha_{j+1}$, para quaisquer $1 \le j \le k-1$, se e só se a sequência obtida por concatenação da sequência das imagens da transformação $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ (por esta ordem) é uma sequência crescente, então o conjunto

$$\{(\alpha_1, \ldots, \alpha_k) \in \mathcal{O}_n^k \mid n\alpha_j \leq 1\alpha_{j+1}, \text{para todo o } 1 \leq j \leq k-1\}$$

tem $\binom{n+kn-1}{n-1}$ elementos.

Como $(\alpha_1, \ldots, \alpha_m; \beta) \in \overline{\mathcal{O}}_{m\times n}$ se e só se, para todo o $1 \leq i \leq t$, $\alpha_{k_1+\cdots+k_{i-1}+1}, \ldots, \alpha_{k_1+\cdots+k_i}$ são k_i transformações crescentes tais que a concatenação da sequência das suas imagens (por esta ordem) ainda é uma sequência crescente, então temos precisamente $\prod_{i=1}^{t}\binom{k_in+n-1}{n-1}$ elementos em $\overline{\mathcal{O}}_{m\times n}$ cuja $(m+1)$-ésima componente é β.

Finalmente, também é claro que, se β e β' são dois elementos de $\mathcal{O}_m$ com o mesmo tipo de núcleo, então $(\alpha_1, \ldots, \alpha_m; \beta) \in \overline{\mathcal{O}}_{m\times n}$ se e só se $(\alpha_1, \ldots, \alpha_m; \beta') \in \overline{\mathcal{O}}_{m\times n}$. Assim, como o número de transformações $\beta \in \mathcal{O}_m$ com tipo de núcleo de comprimento t $(1 \leq t \leq m)$ coincide com o número de combinações (sem repetição) de t elementos de um conjunto com m elementos, i.e. $\binom{m}{t}$, temos:

Teorema 2.2.1 *Para $m, n \geq 2$, temos* $|\mathcal{O}_{m\times n}| = \displaystyle\sum_{\substack{1\leq k_1,\ldots,k_t\leq m\\ k_1+\cdots+k_t=m\\ 1\leq t\leq m}} \binom{m}{t}\prod_{i=1}^{t}\binom{k_in+n-1}{n-1}$. ∎

A tabela seguinte transmite-nos uma ideia do tamanho dos monóides $\mathcal{O}_{m\times n}$.

$m \setminus n$	1	2	3	4	5	6
1	1	3	10	35	126	462
2	3	19	156	1555	17878	225820
3	10	138	2845	78890	2768760	115865211
4	35	1059	55268	4284451	454664910	61824611940
5	126	8378	1109880	241505530	77543615751	34003513468232
6	462	67582	22752795	13924561150	13556873588212	19134117191404027

Tendo em vista o Teorema 2.2.1, determinar o cardinal de $\mathcal{OD}_{m\times n}$ não é difícil. Recordemos a permutação (reflexão)

$$h = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & mn-1 & mn \\ mn & mn-1 & \cdots & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

definida na Subsecção 1.4.4. Observemos que $h \in \mathcal{OD}_{m\times n}$ e, dado $\alpha \in \mathcal{T}_{m\times n}$, temos $\alpha \in \mathcal{OD}_{m\times n}$ se e só se $\alpha \in \mathcal{O}_{m\times n}$ ou $h\alpha \in \mathcal{O}_{m\times n}$. Por outro lado, como manifestamente $|\mathcal{O}_{m\times n}| = |h\mathcal{O}_{m\times n}|$ e $|\mathcal{O}_{m\times n} \cap h\mathcal{O}_{m\times n}| = |\{\alpha \in \mathcal{O}_{m\times n} \mid |\operatorname{Im}(\alpha)| = 1\}| = mn$, segue-se imediatamente que:

Teorema 2.2.2 *Para $m, n \geq 2$, temos*

$$|\mathcal{OD}_{m\times n}| = 2|\mathcal{O}_{m\times n}| - mn = 2\sum_{\substack{1\leq k_1,\ldots,k_t\leq m\\ k_1+\cdots+k_t=m\\ 1\leq t\leq m}} \binom{m}{t}\prod_{i=1}^{t}\binom{k_in+n-1}{n-1} - mn.$$

∎

Os cardinais de $\mathcal{O}^+_{m\times n}$ e de $\mathcal{O}^-_{m\times n}$

Vamos descrever um processo para contar o número de elementos de $\mathcal{O}^+_{m\times n}$.

Primeiro, recordemos que o cardinal de $\mathcal{O}^+_n$ é o n-ésimo número de Catalan, i.e. $|\mathcal{O}^+_n| = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$ (ver [67]).

Vai ser igualmente útil considerar os seguintes números:

$$\theta(n,i) = |\{\alpha \in \mathcal{O}^+_n \mid 1\alpha = i\}|,$$

para qualquer $1 \leq i \leq n$. Claramente, temos $|\mathcal{O}^+_n| = \sum_{i=1}^n \theta(n,i)$. Além disso, para qualquer $2 \leq i \leq n-1$, temos

$$\theta(n,i) = \theta(n,i+1) + \theta(n-1,i-1).$$

De facto, $\{\alpha \in \mathcal{O}^+_n \mid 1\alpha = i\} = \{\alpha \in \mathcal{O}^+_n \mid 1\alpha = i < 2\alpha\} \,\dot\cup\, \{\alpha \in \mathcal{O}^+_n \mid 1\alpha = 2\alpha = i\}$ e, como veremos a seguir, $|\{\alpha \in \mathcal{O}^+_n \mid 1\alpha = i < 2\alpha\}| = \theta(n,i+1)$ e $|\{\alpha \in \mathcal{O}^+_n \mid 1\alpha = 2\alpha = i\}| = \theta(n-1,i-1)$. Consideremos a função

$$\begin{array}{rccc} \zeta: & \{\alpha \in \mathcal{O}^+_n \mid 1\alpha = i < 2\alpha\} & \longrightarrow & \{\alpha \in \mathcal{O}^+_n \mid 1\alpha = i+1\} \\ & \beta & \longmapsto & \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ i+1 & 2\beta & \ldots & n\beta \end{pmatrix} \end{array}.$$

Temos que ζ é bijectiva. A injectividade é imediata. No que se refere à sobrejectividade, para $\alpha \in \mathcal{O}^+_n$ tal que $1\alpha = i+1$, temos $1 \leq i < i+1 \leq 2\alpha$. Logo α é a imagem através de ζ da transformação $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ i & 2\alpha & \ldots & n\alpha \end{pmatrix}$ de $\mathcal{O}^+_n$.

Consideremos agora a função

$$\begin{array}{rccc} \eta: & \{\alpha \in \mathcal{O}^+_{n-1} \mid 1\alpha = i-1\} & \longrightarrow & \{\alpha \in \mathcal{O}^+_n \mid 1\alpha = 2\alpha = i\} \\ & \beta & \longmapsto & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n-1 & n \\ i & i & 2\beta+1 & \ldots & (n-2)\beta+1 & (n-1)\beta+1 \end{pmatrix} \end{array}.$$

A função η também é uma bijecção. É fácil constatar que η é injectiva. Para mostrarmos a sobrejectividade, consideremos $\alpha \in \mathcal{O}^+_n$ tal que $1\alpha = 2\alpha = i$. Então $i-1 \leq 3\alpha - 1$. Donde α é a imagem da transformação $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n-1 \\ i-1 & 3\alpha-1 & \ldots & n\alpha-1 \end{pmatrix}$ de $\mathcal{O}^+_{n-1}$.

Consequentemente obtemos

$$\begin{aligned} \theta(n,i) &= |\{\alpha \in \mathcal{O}^+_n \mid 1\alpha = i < 2\alpha\}| + |\{\alpha \in \mathcal{O}^+_n \mid 1\alpha = 2\alpha = i\}| \\ &= |\{\alpha \in \mathcal{O}^+_n \mid 1\alpha = i+1\}| + |\{\alpha \in \mathcal{O}^+_{n-1} \mid 1\alpha = i-1\}| \\ &= \theta(n,i+1) + \theta(n-1,i-1). \end{aligned}$$

Além disso, a partir da definição de $\theta(n,i)$, com $1 \leq i \leq n-1$, facilmente se vê que $\theta(n,2) = \theta(n,1) = |\mathcal{O}^+_{n-1}|$.

Podemos agora demonstrar:

Lema 2.2.3 *Para todo o* $1 \leq i \leq n$, $\theta(n,i) = \frac{i}{n}\binom{2n-i-1}{n-i} = \frac{i}{n}\binom{2n-i-1}{n-1}$.

Demonstração. Demonstramos o lema por indução em n.

Para $n = 1$, é claro que $\theta(1,1) = 1 = \frac{1}{1}\binom{2-1-1}{1-1}$.

Seja $n \geq 2$ e suponhamos que a fórmula é válida para $n-1$. Provamos a fórmula para n, por indução em i.

Para $i = 1$, como foi observado atrás, temos $\theta(n,1) = |\mathcal{O}^+_{n-1}| = \frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1}$.

Para $i = 2$, temos

$$\theta(n,2) = \theta(n,1) = \frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1} = \frac{2}{n}\frac{(2n-2)!}{(n-1)!(n-1)!}\frac{n-1}{2n-2} = \frac{2}{n}\frac{(2n-3)!}{(n-1)!(n-2)!} = \frac{2}{n}\binom{2n-3}{n-1}.$$

Suponhamos agora que a fórmula é válida para $i-1$, com $3 \leq i \leq n$. Então, usando a hipótese de indução em i e em n na segunda igualdade, temos

$$\begin{aligned}
\theta(n,i) &= \theta(n,i-1) - \theta(n-1,i-2) \\
&= \tfrac{i-1}{n}\tbinom{2n-i}{n-1} - \tfrac{i-2}{n-1}\tbinom{2n-i-1}{n-2} \\
&= \tfrac{i-1}{n}\tfrac{(2n-i)!}{(n-1)!(n-i+1)!} - \tfrac{i-2}{n-1}\tfrac{(2n-i-1)!}{(n-2)!(n-i+1)!} \\
&= \tfrac{i-1}{n}\tfrac{(2n-i)!}{(n-1)!(n-i+1)!} - \tfrac{i-2}{2n-i}\tfrac{(2n-i)!}{(n-1)!(n-i+1)!} \\
&= \tfrac{i(n-i+1)}{n(2n-i)}\tfrac{(2n-i)!}{(n-1)!(n-i+1)!} \\
&= \tfrac{i}{n}\tfrac{(2n-i-1)!}{(n-1)!(n-i)!} \\
&= \tfrac{i}{n}\tbinom{2n-i-1}{n-1},
\end{aligned}$$

como queríamos demonstrar. ■

Recordemos que $(\alpha_1, \ldots, \alpha_m; \beta) \in \overline{\mathcal{O}}^+_{m\times n}$ se e só se $\beta \in \mathcal{O}^+_m$, $\alpha_m \in \mathcal{O}^+_n$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_{m-1} \in \mathcal{O}_n$ e, para todo o $j \in \{1, \ldots, m-1\}$, $j\beta = (j+1)\beta$ implica $n\alpha_j \leq 1\alpha_{j+1}$ e $j\beta = j$ implica $\alpha_j \in \mathcal{O}^+_n$.

Seja $\beta \in \mathcal{O}^+_m$. Assim, tal como para o monóide $\mathcal{O}_{m\times n}$, temos como objectivo contar o número de sequências $(\alpha_1, \ldots, \alpha_m) \in \mathcal{O}^m_n$ tais que $(\alpha_1, \ldots, \alpha_m; \beta) \in \overline{\mathcal{O}}^+_{m\times n}$.

Seja $(k_1, \ldots, k_t)$ o tipo de núcleo de β. Seja $K_i = \{k_1 + \cdots + k_{i-1} + 1, \ldots, k_1 + \cdots + k_i\}$, para qualquer $i = 1, \ldots, t$. Então, para qualquer $i = 1, \ldots, t$, β fixa um ponto em K_i se e só se β fixa $k_1 + \cdots + k_i$. Segue-se que $(\alpha_1, \ldots, \alpha_m; \beta) \in \overline{\mathcal{O}}^+_{m\times n}$ se e só se, para todo o $1 \leq i \leq t$:

1. Se β não fixa um ponto em K_i, então $\alpha_{k_1+\cdots+k_{i-1}+1}, \ldots, \alpha_{k_1+\cdots+k_i}$ são k_i transformações crescentes tais que a concatenação das sequências das suas imagens (por esta ordem) ainda é uma sequência crescente (neste caso, as subsequências $(\alpha_{k_1+\cdots+k_{i-1}+1}, \ldots, \alpha_{k_1+\cdots+k_i})$ possíveis são $\binom{k_in+n-1}{n-1}$);

2. Se β fixa um ponto em K_i, então $\alpha_{k_1+\cdots+k_{i-1}+1}, \ldots, \alpha_{k_1+\cdots+k_i-1}$ são $k_i - 1$ transformações crescentes tais que a concatenação das sequências das suas imagens (por esta ordem) ainda é uma sequência crescente, $n\alpha_{k_1+\cdots+k_i-1} \leq 1\alpha_{k_1+\cdots+k_i}$ e $\alpha_{k_1+\cdots+k_i} \in \mathcal{O}^+_n$ (neste caso, temos $\sum_{j=1}^n \binom{(k_i-1)n+j-1}{j-1}\theta(n,j)$ subsequências $(\alpha_{k_1+\cdots+k_{i-1}+1}, \ldots, \alpha_{k_1+\cdots+k_i})$ possíveis).

Definimos

$$\mathfrak{d}(\beta, i) = \begin{cases} \binom{k_i n+n-1}{n-1}, & \text{se } (k_1+\cdots+k_i)\beta \neq k_1+\cdots+k_i \\ \sum_{j=1}^{n} \frac{j}{n}\binom{2n-j-1}{n-1}\binom{(k_i-1)n+j-1}{j-1}, & \text{se } (k_1+\cdots+k_i)\beta = k_1+\cdots+k_i, \end{cases}$$

para qualquer $1 \leq i \leq t$.

Logo temos:

Proposição 2.2.4 *Para $m, n \geq 2$, temos* $|\mathcal{O}^+_{m\times n}| = \sum_{\beta\in\mathcal{O}^+_m} \prod_{i=1}^{t} \mathfrak{d}(\beta, i)$. ■

De seguida, vamos obter uma fórmula para o cardinal de $\mathcal{O}^+_{m\times n}$ que não depende de $\mathcal{O}^+_m$. Para tornar mais claro o que vamos fazer, intercalamos o texto com exemplos.

Seja β um elemento de $\mathcal{O}^+_m$ com tipo de núcleo $(k_1, \ldots, k_t)$. Definimos a sequência $s_\beta = (s_1, \ldots, s_t) \in \{0,1\}^{t-1} \times \{1\}$ por $s_i = 1$ se e só se $(k_1+\cdots+k_i)\beta = k_1+\cdots+k_i$, para qualquer $1 \leq i \leq t-1$.

Exemplo 2.2.5 Consideremos a transformação

$$\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 \\ 4 & 4 & 4 & 5 & 5 & 7 & 10 & 10 & 11 & 12 & 12 & 13 & 13 \end{pmatrix}.$$

Então o tipo de núcleo de β é a sequência $(3,2,1,2,1,2,2)$ e $s_\beta = (0,1,0,0,0,0,1)$.

Sejam $1 \leq t, k_1, \ldots, k_t \leq m$ tais que $k_1+\cdots+k_t = m$ e seja $(s_1, \ldots, s_t) \in \{0,1\}^{t-1} \times \{1\}$. Para $k = (k_1, \ldots, k_t)$ e $s = (s_1, \ldots, s_t)$, definimos

$$\Delta(k, s) = |\{\beta \in \mathcal{O}^+_m \mid \beta \text{ tem tipo de núcleo } k \text{ e } s_\beta = s\}|.$$

Pretendemos obter uma fórmula para $\Delta(k, s)$. Com esse objectivo, para $\beta \in \mathcal{O}^+_m$ com tipo de núcleo k e $s_\beta = s$, o que faremos é contar o número de restrições distintas a uniões de classes de partição do núcleo de β que correspondem a subsequências maximais de zeros consecutivos de s.

Seja β um elemento de $\mathcal{O}^+_m$ com tipo de núcleo k e tal que $s_\beta = s$.

Primeiro, notemos que, dado $i \in \{1, \ldots, t\}$, se $s_i = 1$ então $K_i\beta = \{k_1+\cdots+k_i\}$ e se $s_i = 0$ então o (único) elemento de $K_i\beta$ pertence a K_j, para algum $i < j \leq t$.

Sejam $i \in \{1, \ldots, t\}$ e $r \in \{1, \ldots, t-i\}$ tais que $s_j = 0$, para qualquer $j \in \{i, \ldots, i+r-1\}$, $s_{i+r} = 1$ e, se $i > 1$, $s_{i-1} = 1$ (i.e. $(s_i, \ldots, s_{i+r-1})$ é uma subsequência maximal de zeros consecutivos de s). Então

$$(K_i \cup \cdots \cup K_{i+r-2} \cup K_{i+r-1})\beta \subseteq K_{i+1} \cup \cdots \cup K_{i+r-1} \cup (K_{i+r} \setminus \{k_1+\cdots+k_{i+r}\}).$$

Seja $\ell_j = |K_{i+j} \cap (K_i \cup \cdots \cup K_{i+r-1})\beta|$, para qualquer $1 \leq j \leq r$. Temos $\ell_1, \ldots, \ell_{r-1} \geq 0$, $\ell_r \geq 1$, $\ell_1+\cdots+\ell_r = r$ e $0 \leq \ell_1+\cdots+\ell_j \leq j$, para qualquer $1 \leq j \leq r-1$.

Exemplo 2.2.6 Tendo em conta a transformação β do Exemplo 2.2.5, temos $K_1 = \{1,2,3\}$, $K_2 = \{4,5\}$, $K_3 = \{6\}$, $K_4 = \{7,8\}$, $K_5 = \{9\}$, $K_6 = \{10,11\}$ e $K_7 = \{12,13\}$. Assim, para $i = 3$, temos $\ell_1 = |K_4 \cap (K_3 \cup K_4 \cup K_5 \cup K_6)\beta| = |\{7,8\} \cap \{7,10,11,12\}| = 1$. Analogamente, $\ell_2 = |K_5 \cap (K_3 \cup K_4 \cup K_5 \cup K_6)\beta| = 0$, $\ell_3 = |K_6 \cap (K_3 \cup K_4 \cup K_5 \cup K_6)\beta| = 2$ e $\ell_4 = |K_7 \cap (K_3 \cup K_4 \cup K_5 \cup K_6)\beta| = 1$.

Por outro lado, dados $\ell_1,\ldots,\ell_r$ tais que $\ell_1,\ldots,\ell_{r-1} \geq 0$, $\ell_r \geq 1$, $\ell_1 + \cdots + \ell_r = r$ e $0 \leq \ell_1 + \cdots + \ell_j \leq j$, para todo o $1 \leq j \leq r-1$, temos precisamente

$$\binom{k_{i+1}}{\ell_1}\binom{k_{i+2}}{\ell_2}\cdots\binom{k_{i+r-1}}{\ell_{r-1}}\binom{k_{i+r}-1}{\ell_r} = \binom{k_{i+r}-1}{\ell_r}\prod_{j=1}^{r-1}\binom{k_{i+j}}{\ell_j}$$

restrições distintas a $K_i \cup \cdots \cup K_{i+r-1}$ de transformações β de $\mathcal{O}_m^+$, com tipo de núcleo k e $s_\beta = s$, tais que $\ell_j = |K_{i+j} \cap (K_i \cup \cdots \cup K_{i+r-1})\beta|$, para qualquer $1 \leq j \leq r$. Consequentemente, o número de restrições distintas a $K_i \cup \cdots \cup K_{i+r-1}$ de transformações β de $\mathcal{O}_m^+$ com tipo de núcleo k e $s_\beta = s$ é

$$\sum_{\substack{\ell_1+\cdots+\ell_r=r \\ 0\leq \ell_1+\cdots+\ell_j\leq j,\ 1\leq j\leq r-1 \\ \ell_1,\ldots,\ell_{r-1}\geq 0,\ \ell_r\geq 1}} \binom{k_{i+r}-1}{\ell_r}\prod_{j=1}^{r-1}\binom{k_{i+j}}{\ell_j}.$$

Exemplo 2.2.7 Seja $r = 3$. Para ℓ_1, ℓ_2 e ℓ_3 tais que $\ell_1, \ell_2 \geq 0$, $\ell_3 \geq 1$, $\ell_1 + \ell_2 + \ell_3 = 3$ e $0 \leq \ell_1 + \cdots + \ell_j \leq j$, para todo o $1 \leq j \leq 2$, temos as seguintes possibilidades:

	ℓ_1	ℓ_2	ℓ_3
p1	1	1	1
p2	1	0	2
p3	0	2	1
p4	0	1	2
p5	0	0	3

.

A subsequência maximal de zeros s_β é $(\ldots,1,0,0,0,1,\ldots)$, com o primeiro zero na i-ésima posição. Então, obtemos os seguintes casos

	$(K_i)\beta \subseteq$	$(K_{i+1})\beta \subseteq$	$(K_{i+2})\beta \subseteq$
p1	K_{i+1}	K_{i+2}	$K_{i+3}\backslash\{\max K_{i+3}\}$
p2	K_{i+1}	$K_{i+3}\backslash\{\max K_{i+3}\}$	$K_{i+3}\backslash\{\max K_{i+3}\}$
p3	K_{i+2}	K_{i+2}	$K_{i+3}\backslash\{\max K_{i+3}\}$
p4	K_{i+2}	$K_{i+3}\backslash\{\max K_{i+3}\}$	$K_{i+3}\backslash\{\max K_{i+3}\}$
p5	$K_{i+3}\backslash\{\max K_{i+3}\}$	$K_{i+3}\backslash\{\max K_{i+3}\}$	$K_{i+3}\backslash\{\max K_{i+3}\}$

,

que correspondem às possibilidades

p1	$\binom{k_{i+1}}{1}\binom{k_{i+2}}{1}\binom{k_{i+3}-1}{1}$
p2	$\binom{k_{i+1}}{1}\binom{k_{i+2}}{0}\binom{k_{i+3}-1}{2}$
p3	$\binom{k_{i+1}}{0}\binom{k_{i+2}}{2}\binom{k_{i+3}-1}{0}$
p4	$\binom{k_{i+1}}{0}\binom{k_{i+2}}{1}\binom{k_{i+3}-1}{2}$
p5	$\binom{k_{i+1}}{0}\binom{k_{i+2}}{0}\binom{k_{i+3}-1}{3}$

.

Seja agora p o número de subsequências maximais distintas de zeros consecutivos de s. Claramente, se $p=0$ então $\Delta(k,s)=1$. Suponhamos que temos $p\geq 1$ e sejam

$$1\leq u_1<v_1<u_2<v_2<\cdots<u_p<v_p\leq t \quad \text{tais que}$$

$$\{j\in\{1,\dots,t\}\mid\ s_j=0\}=\bigcup_{i=1}^{p}\{u_i,\dots,v_i-1\}$$

(i.e. $(s_{u_i},\dots,s_{v_i-1})$, com $1\leq i\leq p$, são as p subsequências maximais distintas de zeros consecutivos de s). Então, sendo $r_i=v_i-u_i$, para qualquer $1\leq i\leq p$, temos

$$\Delta(k,s)=\prod_{i=1}^{p}\sum_{\substack{\ell_1+\cdots+\ell_{r_i}=r_i\\ 0\leq\ell_1+\cdots+\ell_j\leq j\ \ 1\leq j\leq r_i-1\\ \ell_1,\dots,\ell_{r_i-1}\geq 0,\ \ell_{r_i}\geq 1}}\binom{k_{u_i+r_i}-1}{\ell_{r_i}}\prod_{j=1}^{r_i-1}\binom{k_{u_i+j}}{\ell_j}.$$

Finalmente, observemos que, se β e β' são dois elementos de $\mathcal{O}^+_m$ com tipo de núcleo $k=(k_1,\dots,k_t)$ tais que $s_{\beta'}=s_\beta$, então $\mathfrak{d}(\beta,i)=\mathfrak{d}(\beta',i)$, para qualquer $1\leq i\leq t$. Assim, definindo

$$\Lambda(k,s)=\prod_{i=1}^{t}\mathfrak{d}(\beta,i),$$

sendo β é uma transformação arbitrária de $\mathcal{O}^+_m$ com tipo de núcleo k e $s_\beta=s$, temos:

Teorema 2.2.8 *Para $m,n\geq 2$, temos* $|\mathcal{O}^+_{m\times n}|=\displaystyle\sum_{\substack{k=(k_1,\dots,k_t)\\ 1\leq k_1,\dots,k_t\leq m\\ k_1+\cdots+k_t=m\\ 1\leq t\leq m}}\ \sum_{s\in\{0,1\}^{t-1}\times\{1\}}\Delta(k,s)\Lambda(k,s).$ ■

Terminamos esta subsecção com uma tabela que nos permite ter uma ideia do tamanho dos monóides $\mathcal{O}^+_{m\times n}$.

$m\setminus n$	1	2	3	4	5	6
1	1	2	5	14	42	132
2	2	8	35	306	2401	21232
3	5	42	569	10024	210765	5089370
4	14	252	8482	410994	25366480	1847511492
5	42	1636	138348	18795636	3547275837	839181666224
6	132	11188	2388624	913768388	531098927994	415847258403464

Apesar de manifestamente complicada, a fórmula anterior possibilita-nos calcular o cardinal de $\mathcal{O}^+_{m\times n}$, mesmo para m e n "grandes". Por exemplo, temos

$$|\mathcal{O}^+_{10\times 10}| = 47016758951069862896388976221392645550606752244 \quad \text{e}$$

$$|\mathcal{O}_{10\times 10}| = 50120434239662576358898758426196210942315027691269.$$

Observemos que $\mathcal{O}^+_{10\times 10},\ \mathcal{O}_{10\times 10} \subseteq \mathcal{T}_{100}$ e $|\mathcal{T}_{100}| = 10^{200}$.

Dado que os monóides $\mathcal{O}^+_{m\times n}$ e $\mathcal{O}^-_{m\times n}$ são isomorfos, os seus cardinais são iguais. Podemos então usar a fórmula do Teorema 2.2.8 para obter o cardinal de $\mathcal{O}^-_{m\times n}$.

2.3 Características

A nossa finalidade nesta secção é determinar as características dos monóides $\mathcal{O}_{m\times n}$, $\mathcal{O}^+_{m\times n}$, $\mathcal{O}^-_{m\times n}$ e $\mathcal{OD}_{m\times n}$.

Relembramos os geradores de $\mathcal{O}^+_n$, definidos na Subsecção 1.4.1:

$$b_j = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & j-1 & j & j+1 & \cdots & n \\ 1 & \cdots & j-1 & j+1 & j+1 & \cdots & n \end{pmatrix},$$

com $1 \leq j \leq n-1$.

Para quaisquer $i \in \{1,\ldots,m\}$ e $j \in \{1,\ldots,n-1\}$, consideremos a transformação de $\mathcal{O}^+_{m\times n}$

$$b_{i,j} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \cdots & (i-1)n & (i-1)n+1 & \cdots & (i-1)n+j-1 \\ 1 & \cdots & (i-1)n & (i-1)n+1 & \cdots & (i-1)n+j-1 \end{array}\right.$$
$$\left.\begin{array}{cccc|ccc} (i-1)n+j & (i-1)n+j+1 & \cdots & in & in+1 & \cdots & mn \\ (i-1)n+j+1 & (i-1)n+j+1 & \cdots & in & in+1 & \cdots & mn \end{array}\right),$$

Observemos que, para $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq n-1$,

$$\bar{b}_{i,j} = b_{i,j}\psi = (1,\ldots,1,b_j,1,\ldots,1;1) \in \overline{\mathcal{O}}^+_{m\times n},$$

com $b_j \in \mathcal{O}^+_n$ na i-ésima componente e em que 1 representa a aplicação identidade (de $\mathcal{T}_n$ ou de $\mathcal{T}_m$).

A seguir, para $i \in \{1,\ldots,m-1\}$ e $j \in \{1,\ldots,n\}$, seja

$$t_{i,j} = \left(\begin{array}{ccc|cccccc|} 1 & \cdots & (i-1)n & (i-1)n+1 & \cdots & in-j+1 & in-j+2 & \cdots & in \\ 1 & \cdots & (i-1)n & in+1 & \cdots & in+1 & in+2 & \cdots & in+j \end{array}\right.$$
$$\left.\begin{array}{|cccccc|ccc} in+1 & \cdots & in+j & in+j+1 & \cdots & (i+1)n & (i+1)n+1 & \cdots & mn \\ in+j & \cdots & in+j & in+j+1 & \cdots & (i+1)n & (i+1)n+1 & \cdots & mn \end{array}\right) \in \mathcal{O}_{m\times n}.$$

Para $1 \leq j \leq n$, sendo

$$s_j = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & n-j+1 & n-j+2 & \cdots & n \\ 1 & \cdots & 1 & 2 & \cdots & j \end{pmatrix} \in \mathcal{O}^-_n \text{ e } t_j = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & j & j+1 & \cdots & n \\ j & \cdots & j & j+1 & \cdots & n \end{pmatrix} \in \mathcal{O}^+_n$$

(notemos que $s_n = 1$ e t_n é a aplicação constante de imagem n), temos

$$\bar{t}_{i,j} = t_{i,j}\psi = (1,\dots,1,s_j,t_j,1,\cdots,1;b_i) \in \overline{\mathcal{O}}^+_{m\times n},$$

com $b_i \in \mathcal{O}^+_m$ (notemos que podemos sem ambiguidade usar a mesma notação para os geradores de $\mathcal{O}^+_m$ e $\mathcal{O}^+_n$) e com s_j na i-ésima componente.

Exemplo 2.3.1 Para o monóide $\mathcal{O}^+_{2\times 4}$, temos:

$$b_{1,1} = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{array}\right), \quad t_{1,1} = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{array}\right),$$
$$b_{1,2} = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 3 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{array}\right), \quad t_{1,2} = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 5 & 5 & 6 & 6 & 6 & 7 & 8 \end{array}\right),$$
$$b_{1,3} = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 4 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{array}\right), \quad t_{1,3} = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 5 & 6 & 7 & 7 & 7 & 7 & 8 \end{array}\right),$$
$$b_{2,1} = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 6 & 6 & 7 & 8 \end{array}\right), \quad t_{1,4} = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 \end{array}\right),$$
$$b_{2,2} = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 7 & 7 & 8 \end{array}\right),$$
$$b_{2,3} = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 8 & 8 \end{array}\right).$$

e

$$\begin{array}{rclrclrcl} \bar{b}_{1,1} & = & (b_1,1;1), & \bar{b}_{1,2} & = & (b_2,1;1), & \bar{b}_{1,3} & = & (b_3,1;1), \\ \bar{b}_{2,1} & = & (1,b_1;1), & \bar{b}_{2,2} & = & (1,b_2;1), & \bar{b}_{2,3} & = & (1,b_3;1), \end{array}$$

$$\bar{t}_{1,1} = (s_1,t_1;b'_1),\ \bar{t}_{1,2} = (s_2,t_2;b'_1),\ \bar{t}_{1,3} = (s_3,t_3;b'_1),\ \bar{t}_{1,4} = (s_4,t_4;b'_1)$$

com $b'_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ e

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = t_2, \quad b_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad b_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 4 \end{pmatrix},$$
$$s_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad s_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad s_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix},$$
$$s_4 = 1 = t_1, \quad t_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad t_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}.$$

Seja $M = \{\alpha \in \mathcal{O}^+_{m\times n} \mid A_i\alpha \subseteq A_i, \text{para todo o } 1 \leq i \leq m\}$. Então temos

$$M\psi = \{(\alpha_1,\dots,\alpha_m;1) \mid \alpha_1,\dots,\alpha_m \in \mathcal{O}^+_n\},$$

que é claramente um monóide isomorfo a $(\mathcal{O}^+_n)^m$. Como o conjunto $\{b_j \mid 1 \leq j \leq n-1\}$ gera $\mathcal{O}^+_n$, então o conjunto $\{\bar{b}_{i,j} \mid 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n-1\}$ gera $M\psi$ e assim o conjunto $\{b_{i,j} \mid 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n-1\}$ gera o submonóide M de $\mathcal{O}^+_{m\times n}$.

Lema 2.3.2 *O monóide* $\mathcal{O}^+_{2\times n}$ *é gerado por* $\{b_{1,j}, b_{2,j}, t_{1,\ell} \mid 1 \le j \le n-1, 1 \le \ell \le n\}$.

Demonstração. Seja N o submonóide de $\overline{\mathcal{O}}^+_{2\times n}$ gerado por

$$\{\bar{b}_{1,j}, \bar{b}_{2,j}, \bar{t}_{1,\ell} \mid 1 \le j \le n-1, 1 \le \ell \le n\}.$$

Vamos mostrar que $N = \overline{\mathcal{O}}^+_{2\times n}$.

Observemos que, um elemento de $\overline{\mathcal{O}}^+_{2\times n}$ tem a forma $(\alpha_1, \alpha_2; 1)$, com $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathcal{O}^+_n$, ou a forma $(\alpha_1, \alpha_2; \beta)$, com $\beta = \left(\begin{smallmatrix}1 & 2\\ 2 & 2\end{smallmatrix}\right)$, $n\alpha_1 \le 1\alpha_2$, $\alpha_1 \in \mathcal{O}_n$ e $\alpha_2 \in \mathcal{O}^+_n$. De acordo com a observação anterior ao lema, os elementos da primeira forma pertencem a N. Assim resta-nos mostrar que os elementos da segunda forma também pertencem a N. Vamos considerar primeiro dois casos particulares. Notemos que $\bar{t}_{1,\ell} = (s_\ell, t_\ell; \beta)$, para qualquer $1 \le \ell \le n$.

CASO 1. Seja $\alpha = (\alpha_1, t_j; \beta)$, com $1 \le j \le n$ e $\alpha_1 \in \mathcal{O}_n$ tal que $\operatorname{Im}\alpha_1 = \{1, \ldots, j\}$.

Então, é fácil ver que $n\alpha_1 = j$ e, para qualquer $1 \le i \le n-1$, $i\alpha_1 \le (i+1)\alpha_1 \le i\alpha_1 + 1$. Tomemos $s'_j = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & j & j+1 & \cdots & n \\ n-j+1 & n-j+2 & \cdots & n & n & \cdots & n \end{pmatrix} \in \mathcal{O}^+_n$ e seja $\theta = \alpha_1 s'_j$. Claramente, $\theta \in \mathcal{O}_n$. Além disso, $\theta \in \mathcal{O}^+_n$. De facto, para qualquer $1 \le i \le n$, como $i\alpha_1 \le j$, então $i\theta = i\alpha_1 s'_j = n - j + i\alpha_1$. Como $n\theta = n$, se $\theta \notin \mathcal{O}^+_n$, então podemos encontrar $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ tal que $i\theta < i < (i+1)\theta$ (podemos tomar o primeiro índice da direita para a esquerda tal que $i\theta < i$), donde $n - j + i\alpha_1 < i < n - j + (i+1)\alpha_1$ e assim $i\alpha_1 + 1 < (i+1)\alpha_1$, o que é uma contradição. Então, temos que $(\theta, 1; 1) \in N$ e, como $\alpha_1 s'_j s_j = \alpha_1$, concluímos que

$$\alpha = (\alpha_1, t_j; \beta) = (\theta s_j, t_j; \beta) = (\theta, 1; 1)(s_j, t_j; \beta) = (\theta, 1; 1)\bar{t}_{1,j} \in N.$$

CASO 2. Seja $\alpha = (\alpha_1, t_{n\alpha_1}; \beta)$, com $\alpha_1 \in \mathcal{O}_n$.

Suponhamos que $\operatorname{Im}\alpha_1 = \{i_1 < i_2 < \cdots < i_j = n\alpha_1\}$, com $1 \le j \le n$. Tomemos θ como sendo o único elemento de $\mathcal{O}_n$ tal que $\operatorname{Im}\theta = \{1, \ldots, j\}$ e $\operatorname{Ker}\theta = \operatorname{Ker}\alpha_1$ (i.e. $(i_k\alpha_1^{-1})\theta = \{k\}$, para qualquer $1 \le k \le j$). Como $k \le i_k$, para qualquer $1 \le k \le j$, a transformação

$$\theta' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & j & \cdots & i_j & i_j+1 & \cdots & n \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_j & \cdots & i_j & i_j+1 & \cdots & n \end{pmatrix}$$

pertence a $\mathcal{O}^+_n$. Sejam $x \in \{1, \ldots, n\}$ e $k \in \{1, \ldots, j\}$. Como $x \in i_k\alpha_1^{-1}$ se e só se $x\theta = k$, deduzimos que $\theta\theta' = \alpha_1$. Além disso, claramente $t_j\theta' = t_{n\alpha_1}$. Donde, como $(\theta', \theta'; 1) \in N$ e, pelo CASO 1, $(\theta, t_j; \beta) \in N$, temos

$$\alpha = (\alpha_1, t_{n\alpha_1}; \beta) = (\theta\theta', t_j\theta'; \beta) = (\theta, t_j; \beta)(\theta', \theta'; 1) \in N.$$

CASO GERAL. Seja $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2; \beta)$, com $n\alpha_1 \le 1\alpha_2$, $\alpha_1 \in \mathcal{O}_n$ e $\alpha_2 \in \mathcal{O}^+_n$.

Consideremos a decomposição canónica (cf. Subsecção 1.4.1) $\alpha_1 = \theta_1\varepsilon_1$, sendo as transformações $\theta_1 \in \mathcal{O}^+_n$ e $\varepsilon_1 \in \mathcal{O}^-_n$ definidas por

$$i\theta_1 = \begin{cases} i & \text{se } i\alpha_1 \le i \\ i\alpha_1 & \text{se } i\alpha_1 \ge i \end{cases} \quad \text{e} \quad i\varepsilon_1 = \begin{cases} i\alpha_1 & \text{se } i\alpha_1 \le i \\ i & \text{se } i\alpha_1 \ge i \end{cases},$$

para qualquer $1 \leq i \leq n$. Como $n\varepsilon_1 = n\alpha_1 \leq 1\alpha_2$, então temos $\alpha_2 t_{n\varepsilon_1} = \alpha_2$. Logo, visto que $(\theta_1, \alpha_2; 1) \in N$ e, pelo caso CASO 2, $(\varepsilon_1, t_{n\varepsilon_1}; \beta) \in N$, concluímos que

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2; \beta) = (\theta_1\varepsilon_1, \alpha_2 t_{n\varepsilon_1}; \beta) = (\theta_1, \alpha_2; 1)(\varepsilon_1, t_{n\varepsilon_1}; \beta) \in N,$$

como queríamos demonstrar. ∎

De seguida, para $k \in \{1, \ldots, m-1\}$, consideremos o submonóide de $\mathcal{O}^+_{m\times n}$

$$T_k = \{\alpha \in \mathcal{O}^+_{m\times n} \mid (A_k \cup A_{k+1})\alpha \subseteq A_k \cup A_{k+1} \text{ e } x\alpha = x, \text{ para todo o } x \in X_{mn} \setminus (A_k \cup A_{k+1})\}.$$

É claro que, T_k é isomorfo a $\mathcal{O}^+_{2\times n}$ e assim, tendo em vista o Lema 2.3.2, é gerado por

$$\{b_{k,j}, b_{k+1,j}, t_{k,\ell} \mid 1 \leq j \leq n-1, 1 \leq \ell \leq n\}.$$

Podemos agora demonstrar que:

Proposição 2.3.3 *Para $m, n \geq 2$, o conjunto*

$$B = \{b_{i,j}, t_{k,\ell} \mid 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n-1, 1 \leq k \leq m-1, 1 \leq \ell \leq n\}$$

gera $\mathcal{O}^+_{m\times n}$.

Demonstração. Denotemos por N o submonóide de $\mathcal{O}^+_{m\times n}$ gerado por B. Já mostrámos que os submonóides $T_1, \ldots, T_{m-1}, M$ de $\mathcal{O}^+_{m\times n}$ estão contidos em N. Para cada $\alpha \in \mathcal{O}^+_{m\times n}$, seja $\mathtt{d}(\alpha) = |\{i \in \{1, \ldots, m\} \mid A_i\alpha \not\subseteq A_i\}|$. Vamos mostrar que $\mathcal{O}^+_{m\times n} \subseteq N$ por indução em $\mathtt{d}(\alpha)$.

Seja $\alpha \in \mathcal{O}^+_{m\times n}$ tal que $\mathtt{d}(\alpha) = 0$. Então $\alpha \in M$ e assim $\alpha \in N$.

Seja $p \geq 0$ e suponhamos, por hipótese de indução, que $\alpha \in N$, para todo o $\alpha \in \mathcal{O}^+_{m\times n}$ com $\mathtt{d}(\alpha) = p$. Seja $\alpha \in \mathcal{O}^+_{m\times n}$ tal que $\mathtt{d}(\alpha) = p+1$. Seja $i \in \{1, \ldots, m-1\}$ o menor índice tal que $A_i\alpha \not\subseteq A_i$ e seja $k \in \{i+1, \ldots, m\}$ tal que $A_i\alpha \subseteq A_k$. Tomemos

$$\alpha_1 = \left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 1 & \cdots & (i-1)n & (i-1)n+1 & \cdots & in & in+1 & \cdots & mn \\ 1\alpha & \cdots & ((i-1)n)\alpha & (i-1)n+1 & \cdots & in & (in+1)\alpha & \cdots & (mn)\alpha \end{array}\right) \quad \text{e}$$

$$\alpha_2 = \left(\begin{array}{ccc|ccc|} 1 & \cdots & (k-2)n & (k-2)n+1 & \cdots & (k-1)n \\ 1 & \cdots & (k-2)n & ((i-1)n+1)\alpha & \cdots & (in)\alpha \end{array}\right.$$
$$\left.\begin{array}{|ccccccc|ccc} (k-1)n+1 & \cdots & (in)\alpha & (in)\alpha+1 & \cdots & kn & kn+1 & \cdots & mn \\ (in)\alpha & \cdots & (in)\alpha & (in)\alpha+1 & \cdots & kn & kn+1 & \cdots & mn \end{array}\right).$$

Então $\alpha_1 \in \mathcal{O}^+_{m\times n}$ e $\mathtt{d}(\alpha_1) = p$, donde $\alpha_1 \in N$, por hipótese de indução. Além disso, também temos $\alpha_2 \in N$, visto que $\alpha_2 \in T_{k-1}$. Finalmente, tendo em conta que

$$t_{i,n} \cdots t_{k-2,n} = \left(\begin{array}{ccc|cccc|} 1 & \cdots & (i-1)n & (i-1)n+1 & (i-1)n+2 & \cdots & in \\ 1 & \cdots & (i-1)n & (k-2)n+1 & (k-2)n+2 & \cdots & (k-1)n \end{array}\right.$$
$$\left.\begin{array}{|ccc|ccc} in+1 & \cdots & (i+1)n & (i+1)n+1 & \cdots & mn \\ (k-1)n & \cdots & (k-1)n & (i+1)n+1 & \cdots & mn \end{array}\right),$$

então $\alpha = \alpha_1 t_{i,n} \cdots t_{k-2,n} \alpha_2$, pelo que $\alpha \in N$, como pretendíamos demonstrar. ∎

Observemos que $|B| = 2mn - m - n$. Provamos de seguida que B é um conjunto gerador de $\mathcal{O}^+_{m\times n}$ com um número mínimo de elementos.

Teorema 2.3.4 *Para $m, n \geq 2$, a característica de $\mathcal{O}^+_{m\times n}$ é $2mn - m - n$.*

Demonstração. Basta mostrar que todos os elementos de $B\psi$ são indecomponíveis em $\overline{\mathcal{O}}^+_{m\times n}$.

Sejam $i \in \{1, \ldots, m\}$ e $j \in \{1, \ldots, n-1\}$. Recordemos que $\bar{b}_{i,j} = (1, \ldots, 1, b_j, 1, \ldots, 1; 1)$, com $b_j \in \mathcal{O}^+_n$ na i-ésima componente. Como a identidade é indecomponível (em $\mathcal{O}^+_n$ e em $\mathcal{O}^+_m$) e b_j é indecomponível em $\mathcal{O}^+_n$, temos que $\bar{b}_{i,j}$ é indecomponível em $\overline{\mathcal{O}}^+_{m\times n}$.

Sejam $1 \leq i \leq m-1$ e $1 \leq j \leq n$. Provamos que $\bar{t}_{i,j} = (1, \ldots, 1, s_j, t_j, 1, \ldots, 1; b_i)$ também é indecomponível em $\overline{\mathcal{O}}^+_{m\times n}$ (notemos que s_j é a i-ésima componente de $\bar{t}_{i,j}$). Sejam $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_i, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_m; \beta), \alpha' = (\alpha'_1, \ldots, \alpha'_i, \alpha'_{i+1}, \ldots, \alpha'_m; \beta') \in \overline{\mathcal{O}}^+_{m\times n}$ tais que $\bar{t}_{i,j} = \alpha\alpha' = (\alpha_1\alpha'_{1\beta}, \ldots, \alpha_i\alpha'_{i\beta}, \alpha_{i+1}\alpha'_{(i+1)\beta}, \ldots, \alpha_m\alpha'_{m\beta}; \beta\beta')$. Como $\beta, \beta' \in \mathcal{O}^+_m$ e $\beta\beta' = b_i$, temos $\beta, \beta' \in \{1, b_i\}$. Donde, $\bar{t}_{i,j} = (\alpha_1\alpha'_1, \ldots, \alpha_i\alpha'_{i\beta}, \alpha_{i+1}\alpha'_{i+1}, \ldots, \alpha_m\alpha'_m; b_i)$ e assim $\alpha_k = \alpha'_k = 1$, para qualquer $k \in \{1, \ldots, m\} \setminus \{i, i+1\}$, $\alpha_{i+1}\alpha'_{i+1} = t_j$ e $\alpha_{i+1}, \alpha'_{i+1} \in \mathcal{O}^+_n$. Observemos que, da igualdade $\alpha_{i+1}\alpha'_{i+1} = t_j$ deduzimos que $\{j, \ldots, n\} = \operatorname{Im} t_j \subseteq \operatorname{Im} \alpha'_{i+1}$.

Suponhamos que $\beta = b_i$. Então $i\beta = i+1$, donde $\alpha_i\alpha'_{i+1} = s_j$ e assim temos $\{1, \ldots, j\} = \operatorname{Im} s_j \subseteq \operatorname{Im} \alpha'_{i+1}$. Concluímos que $\operatorname{Im} \alpha'_{i+1} = \{1, \ldots, n\}$, o que implica que $\alpha'_{i+1} = 1$. Por conseguinte, $\alpha_i = s_j$ e $\alpha_{i+1} = t_j$ e assim $\alpha = \bar{t}_{i,j}$.

Por outro lado, admitamos que $\beta = 1$. Então $\beta' = b_i$, $\alpha_i \in \mathcal{O}^+_n$ e $\alpha_i\alpha'_i = s_j$.

Primeiro, demonstramos que $\alpha'_i = s_j$. Como $\alpha_i \in \mathcal{O}^+_n$, temos então que $1 = (n-j+1)s_j = (n-j+1)\alpha_i\alpha'_i \geq (n-j+1)\alpha'_i$, donde $(n-j+1)\alpha'_i = 1$. Para além disso, da igualdade $\alpha_i\alpha'_i = s_j$ deduzimos que $\{1, \ldots, j\} = \operatorname{Im} s_j \subseteq \operatorname{Im} \alpha'_i$ e assim temos $\alpha'_i = s_j$.

Finalmente, provamos que $\alpha'_{i+1} = t_j$. Como $\alpha_i \in \mathcal{O}^+_n$, temos $n\alpha_i = n$ e assim $j = ns_j = n\alpha_i\alpha'_i = n\alpha'_i \leq 1\alpha'_{i+1}$, pelo que $\operatorname{Im} \alpha'_{i+1} \subseteq \{j, \ldots, n\}$. Concluímos assim que $\operatorname{Im} \alpha'_{i+1} = \{j, \ldots, n\}$. Além disso, como $\alpha_{i+1}, \alpha'_{i+1} \in \mathcal{O}^+_n$, temos $j \leq j\alpha_{i+1} \leq j\alpha_{i+1}\alpha'_{i+1} = jt_j = j$, donde $j = j\alpha_{i+1}$ e assim $j\alpha'_{i+1} = j\alpha_{i+1}\alpha'_{i+1} = jt_j = j$. Portanto, temos que $\alpha'_{i+1} = t_j$.

Concluímos que, se $\beta = 1$, então $\alpha' = \bar{t}_{i,j}$. Assim $\bar{t}_{i,j}$ é indecomponível em $\overline{\mathcal{O}}^+_{m\times n}$, como queríamos demonstrar. ■

Recordamos que o monóide $\mathcal{O}^-_{m\times n}$ é isomorfo a $\mathcal{O}^+_{m\times n}$. Logo $\mathcal{O}^-_{m\times n}$ tem característica igual a $2mn - m - n$ e um conjunto gerador de $\mathcal{O}^-_{m\times n}$ com um número mínimo de elementos pode ser obtido de B por isomorfismo. A seguir, descrevemos explicitamente um tal conjunto gerador de $\mathcal{O}^-_{m\times n}$.

Para $i \in \{1, \ldots, m\}$ e $j \in \{1, \ldots, n-1\}$, seja

$$a_{i,j} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \cdots & (i-1)n & (i-1)n+1 & \cdots & (i-1)n+j \\ 1 & \cdots & (i-1)n & (i-1)n+1 & \cdots & (i-1)n+j \end{array}\right.$$
$$\left.\begin{array}{cccc|ccc} (i-1)n+j+1 & (i-1)n+j+2 & \cdots & in & in+1 & \cdots & mn \\ (i-1)n+j & (i-1)n+j+2 & \cdots & in & in+1 & \cdots & mn \end{array}\right) \in \mathcal{O}^-_{m\times n}.$$

Para $i \in \{1,\ldots,m-1\}$ e $j \in \{1,\ldots,n\}$, seja

$$s_{i,j} = \left(\begin{array}{ccc|ccccccc|} 1 & \cdots & (i-1)n & (i-1)n+1 & \cdots & in-j+1 & in-j+2 & \cdots & in \\ 1 & \cdots & (i-1)n & (i-1)n+1 & \cdots & in-j+1 & in-j+1 & \cdots & in-j+1 \end{array}\right.$$
$$\left|\begin{array}{cccccc|ccc} in+1 & in+2 & \cdots & in+j & \cdots & (i+1)n & (i+1)n+1 & \cdots & mn \\ in-j+1 & in-j+2 & \cdots & in & \cdots & in & (i+1)n+1 & \cdots & mn \end{array}\right) \in \mathcal{O}^{-}_{m\times n}.$$

Então, $A = \{a_{i,j}, s_{k,\ell} \mid 1 \le i \le m, 1 \le j \le n-1, 1 \le k \le m-1, 1 \le \ell \le n\}$ é um conjunto gerador com um número mínimo de elementos de $\mathcal{O}^{-}_{m\times n}$.

Exemplo 2.3.5 Para o monóide $\mathcal{O}^{-}_{2\times 4}$, temos:

$$a_{1,1} = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 1 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{array}\right), \quad s_{1,1} = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \end{array}\right),$$
$$a_{1,2} = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 2 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{array}\right), \quad s_{1,2} = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & 3 & 4 & 4 & 4 \end{array}\right),$$
$$a_{1,3} = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{array}\right), \quad s_{1,3} = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 3 & 4 & 4 \end{array}\right),$$
$$a_{2,1} = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 5 & 7 & 8 \end{array}\right), \quad s_{1,4} = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{array}\right),$$
$$a_{2,2} = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 6 & 8 \end{array}\right),$$
$$a_{2,3} = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 7 \end{array}\right).$$

A seguir, para $i \in \{1,\ldots,m\}$, tomemos

$$c_i = \left(\begin{array}{ccc|cccccc|} 1 & \cdots & (i-1)n & (i-1)n+1 & (i-1)n+2 & (i-1)n+3 & \cdots & in \\ 1 & \cdots & (i-1)n & (i-1)n+1 & (i-1)n+1 & (i-1)n+2 & \cdots & in-1 \end{array}\right.$$
$$\left|\begin{array}{ccc} in+1 & \cdots & mn \\ in+1 & \cdots & mn \end{array}\right) \in \mathcal{O}^{-}_{m\times n}.$$

Por exemplo, em $\mathcal{O}^{-}_{2\times 4}$, temos

$$c_1 = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{array}\right) \quad \text{e} \quad c_2 = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 5 & 6 & 7 \end{array}\right).$$

Concentramos agora a nossa atenção no monóide $\mathcal{O}_{m\times n}$.

Como observámos na Subsecção 1.4.4, temos que $\mathcal{O}_{m\times n} = \mathcal{O}^{-}_{m\times n}\mathcal{O}^{+}_{m\times n}$, donde $A \cup B$ é um conjunto gerador de $\mathcal{O}_{m\times n}$.

Seja $i \in \{1, \ldots, m\}$. Claramente,

$$S_i = \{\alpha \in \mathcal{O}_{m\times n} \mid A_i\alpha \subseteq A_i \text{ e } x\alpha = x, \text{ para todo o } x \in X_{mn} \setminus A_i\}$$

é um submonóide de $\mathcal{O}_{m\times n}$ isomorfo a $\mathcal{O}_n$. Como $\{a_j, b_j \mid 1 \le j \le n-1\}$ e $\{c, b_1, \ldots, b_{n-1}\}$ são conjuntos geradores de $\mathcal{O}_n$ (ver Subsecção 1.4.1), então os conjuntos $\{a_{i,j}, b_{i,j} \mid \ 1 \le j \le n-1\}$ e $\{c_i, b_{i,j} \mid \ 1 \le j \le n-1\}$ geram S_i. Assim, o conjunto

$$\{c_i, s_{k,\ell} \mid 1 \le i \le m, 1 \le k \le m-1, 1 \le \ell \le n\} \cup B$$

gera $\mathcal{O}_{m\times n}$.

Por outro lado, é fácil verificar que $t_{k,1} = s_{k,n}t_{k,n}$, $s_{k,1} = t_{k,n}s_{k,n}$ e

$$\begin{aligned} s_{k,\ell} = (b_{k,n-\ell+1}\cdots b_{k,2})(b_{k,n-\ell+2}\cdots b_{k,3})\cdots(b_{k,n-1}\cdots b_{k,\ell})(b_{k+1,\ell}\cdots b_{k+1,2})(b_{k+1,\ell+1}\cdots b_{k+1,3})\cdots \\ \cdots(b_{k+1,n-1}\cdots b_{k+1,n-\ell+1})t_{k,n-\ell+1}s_{k,n}\ , \end{aligned}$$

para quaisquer $1 \le k \le m-1$ e $2 \le \ell \le n-1$. De facto, para $1 \le i \le l-1$, sendo $b_{k,n-\ell+i}$ a transformação

$$\left(\begin{array}{ccc|cccc} 1 & \cdots & mn & (k-1)n+1 & \cdots & (k-1)n+n-\ell+i-1 & (k-1)n+n-\ell+i \\ 1 & \cdots & mn & (k-1)n+1 & \cdots & (k-1)n+n-\ell+i-1 & (k-1)n+n-\ell+i+1 \end{array}\right.$$
$$\left.\begin{array}{ccc|ccc} (k-1)n+n-\ell+i+1 & \cdots & kn & (m-1)n+1 & \cdots & mn \\ (k-1)n+n-\ell+i+1 & \cdots & kn & (m-1)n+1 & \cdots & mn \end{array}\right),$$

$b_{k,n-\ell+i-1}$ a transformação

$$\left(\begin{array}{ccc|cccc} 1 & \cdots & mn & (k-1)n+1 & \cdots & (k-1)n+n-\ell+i & (k-1)n+n-\ell+i-1 \\ 1 & \cdots & mn & (k-1)n+1 & \cdots & (k-1)n+n-\ell+i & (k-1)n+n-\ell+i \end{array}\right.$$
$$\left.\begin{array}{ccc|ccc} (k-1)n+n-\ell+i & \cdots & kn & (m-1)n+1 & \cdots & mn \\ (k-1)n+n-\ell+i & \cdots & kn & (m-1)n+1 & \cdots & mn \end{array}\right),$$

e $b_{k,i+1}$ a transformação

$$\left(\begin{array}{ccc|cccc} 1 & \cdots & mn & (k-1)n+1 & \cdots & (k-1)n+i & (k-1)n+i+1 \\ 1 & \cdots & mn & (k-1)n+1 & \cdots & (k-1)n+i & (k-1)n+i+2 \end{array}\right.$$
$$\left.\begin{array}{ccc|ccc} (k-1)n+i+2 & \cdots & kn & (m-1)n+1 & \cdots & mn \\ (k-1)n+i+2 & \cdots & kn & (m-1)n+1 & \cdots & mn \end{array}\right),$$

temos que $b_{k,n-\ell+i}\cdots b_{k,i+1}$ é a transformação

$$\left(\begin{array}{ccc|cccccc} 1 & \cdots & (k-1)n & (k-1)n+1 & \cdots & (k-1)n+i & (k-1)n+i+1 & (k-1)n+i+2 & \cdots \\ 1 & \cdots & (k-1)n & (k-1)n+1 & \cdots & (k-1)n+i & (k-1)n+i+2 & (k-1)n+i+3 & \cdots \end{array}\right.$$
$$\left.\begin{array}{ccccc|ccc} \cdots & (k-1)n+n-\ell+i & (k-1)n+n-\ell+i+1 & \cdots & kn & kn+1 & \cdots & mn \\ \cdots & (k-1)n+n-\ell+i+1 & (k-1)n+n-\ell+i+1 & \cdots & kn & kn+1 & \cdots & mn \end{array}\right),$$

pelo que, o produto $(b_{k,n-\ell+1}\cdots b_{k,2})(b_{k,n-\ell+2}\cdots b_{k,3})\cdots(b_{k,n-1}\cdots b_{k,\ell})$ é a transformação

$$\left(\begin{array}{ccc|ccccccc|ccc} 1 & \cdots & (k-1)n & (k-1)n+1 & (k-1)n+2 & (k-1)n+3 & \cdots & (k-1)n+n-\ell+1 & \cdots & kn & kn+1 & \cdots & mn \\ 1 & \cdots & (k-1)n & (k-1)n+1 & (k-1)n+\ell+1 & (k-1)n+\ell+2 & \cdots & kn & \cdots & kn & kn+1 & \cdots & mn \end{array}\right).$$

Para $0\leq j\leq n-\ell-1$, temos que $b_{k+1,\ell+j}\cdots b_{k+1,j+2}$ é a transformação

$$\left(\begin{array}{ccc|ccccccccc|ccc} 1 & \cdots & kn & kn+1 & \cdots & kn+j+1 & kn+j+2 & kn+j+3 & \cdots & kn+\ell+j & kn+\ell+j+1 & \cdots & (k+1)n & (k+1)n+1 & \cdots & mn \\ 1 & \cdots & kn & kn+1 & \cdots & kn+j+1 & kn+j+3 & kn+j+4 & \cdots & kn+\ell+j+1 & kn+\ell+j+1 & \cdots & (k+1)n & (k+1)n+1 & \cdots & mn \end{array}\right),$$

donde, o produto $(b_{k+1,\ell}\cdots b_{k+1,2})(b_{k+1,\ell+1}\cdots b_{k+1,3})\cdots(b_{k+1,n-1}\cdots b_{k+1,n-\ell+1})$ é a transformação

$$\left(\begin{array}{ccc|ccccccc|ccc} 1 & \cdots & kn & kn+1 & kn+2 & kn+3 & \cdots & kn+\ell & \cdots & (k+1)n & (k+1)n+1 & \cdots & mn \\ 1 & \cdots & kn & kn+1 & kn+n-\ell+2 & kn+n-\ell+3 & \cdots & (k+1)n & \cdots & (k+1)n & (k+1)n+1 & \cdots & mn \end{array}\right).$$

Assim, salientando no produto $\displaystyle\prod_{i=1}^{\ell-1}(b_{k,n-\ell+i}\cdots b_{k,i+1})\prod_{j=0}^{n-\ell-1}(b_{k+1,\ell+j}\cdots b_{k+1,j+2})$ e na transformação $t_{k,n-\ell+1}$ as imagens dos conjuntos A_{kn} e $A_{(k+1)n}$ (as outras são fixas por estas transformações) obtemos as transformações

$$\left(\begin{array}{c|ccccccc|ccccccc|c} \cdots & (k-1)n+1 & (k-1)n+2 & (k-1)n+3 & \cdots & kn-\ell+1 & \cdots & kn & kn+1 & kn+2 & kn+3 & \cdots & kn+\ell & \cdots & (k+1)n & \cdots \\ \cdots & (k-1)n+1 & (k-1)n+\ell+1 & (k-1)n+\ell+2 & \cdots & kn & \cdots & kn & kn+1 & (k+1)n-\ell+2 & (k+1)n-\ell+3 & \cdots & (k+1)n & \cdots & (k+1)n & \cdots \end{array}\right)$$

e

$$\left(\begin{array}{c|cccccc|cccccc|c} \cdots & (k-1)n+1 & \cdots & (k-1)n+\ell & (k-1)n+\ell+1 & \cdots & kn & kn+1 & \cdots & (k+1)n-\ell+1 & (k+1)n-\ell+2 & \cdots & (k+1)n & \cdots \\ \cdots & kn+1 & \cdots & kn+1 & kn+2 & \cdots & (k+1)n-\ell+1 & (k+1)n-\ell+1 & \cdots & (k+1)n-\ell+1 & (k+1)n-\ell+2 & \cdots & (k+1)n & \cdots \end{array}\right),$$

respectivamente. Recordando que

$$s_{k,n}=\left(\begin{array}{ccc|ccc|cccc|ccc} 1 & \cdots & (k-1)n & (k-1)n+1 & \cdots & kn & kn+1 & kn+2 & \cdots & (k+1)n & (k+1)n+1 & \cdots & mn \\ 1 & \cdots & (k-1)n & (k-1)n+1 & \cdots & (k-1)n+1 & (k-1)n+1 & (k-1)n+2 & \cdots & kn & (k+1)n+1 & \cdots & mn \end{array}\right)$$

é agora fácil constatar que obtemos a igualdade pretendida.

Portanto, provámos que:

Proposição 2.3.6 *Para $m,n \geq 2$, o conjunto*

$$C = \{c_i, b_{i,j}, s_{k,n}, t_{k,\ell} \mid 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n-1, 1 \leq k \leq m-1, 2 \leq \ell \leq n\}$$

gera $\mathcal{O}_{m\times n}$. ■

Observemos que $|C| = 2mn - n$. Mostramos agora que C é um conjunto gerador de $\mathcal{O}_{m\times n}$ com um número mínimo de elementos.

Teorema 2.3.7 *Para $m,n \geq 2$, a característica de $\mathcal{O}_{m\times n}$ é igual a $2mn-n$.*

Demonstração. Primeiro, provamos que um conjunto gerador de $\mathcal{O}_{m\times n}$ contém pelo menos $(m-1)n$ elementos distintos de característica $(m-1)n$. Com esse fim, definimos

$$Q_{i,j} = \{\alpha \in \mathcal{O}_{m\times n} \mid |\operatorname{Im}\alpha| = (m-1)n \text{ e } (in)\alpha = (in+1)\alpha = (k-1)n+j, \text{ para algum } 1 \leq k \leq m\}$$

para quaisquer $i \in \{1,\dots,m-1\}$ e $j \in \{1,\dots,n\}$.

Notemos que é muito fácil constatar que a família $\{Q_{i,j} \mid 1 \leq i \leq m-1, 1 \leq j \leq n\}$ consiste em $(m-1)n$ subconjuntos de $\mathcal{O}_{m\times n}$, não vazios e disjuntos dois a dois: sejam $i,i' \in \{1,\dots,m-1\}$ e $j,j' \in \{1,\dots,n\}$ tais que $(i,j) \neq (i',j')$. É claro que, se $i = i'$ e $j \neq j'$ então $Q_{i,j} \cap Q_{i',j'} = \emptyset$. Por outro lado, se $i \neq i'$ então, para $\alpha \in Q_{i,j} \cap Q_{i',j'}$ teríamos $(A_i \cup A_{i+1})\,\alpha \subseteq A_k$ e $(A_{i'} \cup A_{i'+1})\,\alpha \subseteq A_t$ para alguns $1 \leq k,t \leq m$, pelo que $|\operatorname{Im}\alpha| < (m-1)n$, o que contradiz a definição de $Q_{i,j}$.

Sejam agora $i \in \{1,\dots,m-1\}$ e $j \in \{1,\dots,n\}$. Seja $\alpha \in Q_{i,j}$. Então, a característica de α é $(m-1)n$ e existe $k \in \{1,\dots,m\}$ tal que $(in)\alpha = (in+1)\alpha = (k-1)n+j$. Suponhamos que $\alpha = \alpha'\alpha''$, para certos $\alpha',\alpha'' \in \mathcal{O}_{m\times n}$. Pretendemos mostrar que $\alpha' \in Q_{i,j}$ ou $\alpha'' \in Q_{i,j}$.

Tomemos $\alpha\psi = (\alpha_1,\dots,\alpha_m;\beta)$, $\alpha'\psi = (\alpha'_1,\dots,\alpha'_m;\beta')$ e $\alpha''\psi = (\alpha''_1,\dots,\alpha''_m;\beta'')$. Observemos que $n\alpha_i = j = 1\alpha_{i+1}$, $\operatorname{Im}(\alpha_i) = \{1,\dots,j\}$, $\operatorname{Im}(\alpha_{i+1}) = \{j,\dots,n\}$ e $\alpha_\ell = 1$, para $\ell \in \{1,\dots,m\} \setminus \{i,i+1\}$. Além disso, temos $\alpha_\ell = \alpha'_\ell\alpha''_{\ell\beta'}$, para qualquer $\ell \in \{1,\dots,m\}$. Por outro lado, $\beta = \beta'\beta''$, a partir do que se conclui que β' tem característica $m-1$ ou β'' tem característica $m-1$, visto que a característica de β é $m-1$. Prosseguimos considerando dois casos.

Primeiro, admitamos que β' tem característica $m-1$. Então α' tem característica $(m-1)n$ e assim $\operatorname{Ker}(\alpha') = \operatorname{Ker}(\alpha)$. Donde, $\operatorname{Ker}(\alpha'_i) = \operatorname{Ker}(\alpha_i)$ e $\operatorname{Ker}(\alpha'_{i+1}) = \operatorname{Ker}(\alpha_{i+1})$, o que implica que $|\operatorname{Im}(\alpha'_i)| = |\operatorname{Im}(\alpha_i)| = j$ e $|\operatorname{Im}(\alpha'_{i+1})| = |\operatorname{Im}(\alpha_{i+1})| = n-j+1$. Logo $n\alpha'_i \geq j$ e $1\alpha'_{i+1} \leq j$. Por outro lado, a igualdade $\operatorname{Ker}(\alpha') = \operatorname{Ker}(\alpha)$ também implica que $(in)\alpha' = (in+1)\alpha'$, donde $n\alpha'_i = 1\alpha'_{i+1}$. Então $n\alpha'_i = 1\alpha'_{i+1} = j$ e assim $(in)\alpha' = (in+1)\alpha' = (i\beta'-1)n+j$. Concluímos assim que $\alpha' \in Q_{i,j}$.

Por outro lado, suponhamos que β' tem característica m. Temos que $\beta' = 1$. Então $\beta'' = \beta$ e portanto $i\beta'' = (i+1)\beta''$ o que implica que $n\alpha''_i \leq 1\alpha''_{i+1}$. Além disso, temos também que

α'' tem característica $(m-1)n$. Como $\alpha'_i\alpha''_i = \alpha_i$, então $\{1,\ldots,j\} = \mathrm{Im}(\alpha_i) \subseteq \mathrm{Im}(\alpha''_i)$, donde $n\alpha''_i \geq j$. Analogamente, como $\alpha'_{i+1}\alpha''_{i+1} = \alpha_{i+1}$, temos que $\{j,\ldots,n\} = \mathrm{Im}(\alpha_{i+1}) \subseteq \mathrm{Im}(\alpha''_{i+1})$ e obtemos $1\alpha''_{i+1} \leq j$. Logo, $j \leq n\alpha''_i \leq 1\alpha''_{i+1} \leq j$, i.e. $n\alpha''_i = 1\alpha''_{i+1} = j$, pelo que $(in)\alpha'' = (in+1)\alpha'' = (i\beta''-1)n+j$. Portanto, $\alpha'' \in Q_{i,j}$.

Por indução em t, é agora fácil demonstrar que para escrever um elemento de $Q_{i,j}$ como produto de t elementos de $\mathcal{O}_{m\times n}$ precisamos ter um factor em $Q_{i,j}$, para quaisquer $1 \leq i \leq m-1$ e $1 \leq j \leq n$. Assim, um conjunto gerador de $\mathcal{O}_{m\times n}$ contém pelo menos $(m-1)n$ transformações distintas de característica $(m-1)n$.

Para terminarmos a demonstração, observemos que, para $i \in \{1,\ldots,m\}$, os elementos de $S_i\psi$ são da forma $(1,\ldots,1,\alpha_i,1,\ldots,1;1)$, com $\alpha_i \in \mathcal{O}_n$ na i-ésima componente. Então, como a identidade é indecomponível (em $\mathcal{O}_n$ e em $\mathcal{O}_m$), dados $\alpha \in S_i$ e $\alpha',\alpha'' \in \mathcal{O}_{m\times n}$, é claro que $\alpha = \alpha'\alpha''$ implica $\alpha',\alpha'' \in S_i$. Por outro lado, visto que $\mathcal{O}_n$ tem característica n e S_i é isomorfo a $\mathcal{O}_n$, de forma a gerar em $\mathcal{O}_{m\times n}$ todos os elementos de S_i, precisamos de pelo menos n elementos distintos (diferentes da identidade) de S_i, para qualquer $i \in \{1,\ldots,m\}$. Assim, cada conjunto gerador de $\mathcal{O}_{m\times n}$ tem pelo menos mn elementos distintos cuja característica é superior ou igual $(m-1)n+1$.

Portanto, provámos que cada conjunto gerador de $\mathcal{O}_{m\times n}$ tem pelo menos $(m-1)n+mn$ elementos distintos e assim, tendo em vista a Proposição 2.3.6, concluímos que $\mathcal{O}_{m\times n}$ tem característica $2mn-n$, como pretendíamos demonstrar. ■

Passamos agora para o monóide $\mathcal{OD}_{m\times n}$.

Voltemos a considerar a permutação reflexão

$$h = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & mn-1 & mn \\ mn & mn-1 & \cdots & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Recordemos que o monóide $\mathcal{OD}_{m\times n}$ é gerado por $\mathcal{O}_{m\times n} \cup \{h\}$ (cf. Subsecção 1.4.4). Por outro lado, provou-se na Proposição 2.3.6 que o conjunto

$$C = \{c_i, b_{i,j}, s_{k,n}, t_{k,\ell} \mid 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n-1, 1 \leq k \leq m-1, 2 \leq \ell \leq n\}$$

é um conjunto gerador do monóide $\mathcal{O}_{m\times n}$ com $2mn-n$ elementos. Donde $C \cup \{h\}$ gera $\mathcal{OD}_{m\times n}$. Com o objectivo de reduzir o número de geradores, para m ímpar e $1 \leq j \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil$, consideremos a transformação $u_j \in \mathcal{O}_{m\times n}$ de característica $mn-1$, cuja imagem é $\{1,\ldots,mn\} \setminus \{\frac{m-1}{2}n+j\}$ e o núcleo é definido pela partição

$$\left\{\{1\},\ldots,\left\{\tfrac{m-1}{2}n+\lceil\tfrac{n}{2}\rceil-j\right\},\left\{\tfrac{m-1}{2}n+\lceil\tfrac{n}{2}\rceil-j+1, \tfrac{m-1}{2}n+\lceil\tfrac{n}{2}\rceil-j+2\right\},\right.$$
$$\left.\left\{\tfrac{m-1}{2}n+\lceil\tfrac{n}{2}\rceil-j+3\right\},\ldots,\{mn\}\right\}.$$

Exemplo 2.3.8 Em $\mathcal{OD}_{3\times 5}$ temos:

$$u_1 = \left(\begin{array}{ccccc|ccccc|ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 7 & 8 & 9 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \end{array}\right),$$

$$u_2 = \left(\begin{array}{ccccc|ccccc|ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 8 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \end{array}\right),$$

$$u_3 = \left(\begin{array}{ccccc|ccccc|ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 6 & 7 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \end{array}\right).$$

Lema 2.3.9 *As igualdades seguintes são verdadeiras:*

1. $c_i = hb_{m-i+1,n-1}b_{m-i+1,n-2}\cdots b_{m-i+1,1}h$, *para qualquer* $1 \leq i \leq m$;

2. $b_{i,1} = hb_{m-i+1,n-1}b_{m-i+1,n-2}\cdots b_{m-i+1,2}c_{m-i+1}h$, *para qualquer* $1 \leq i \leq m$;

3. $b_{i,j} = hb_{m-i+1,n-j}b_{m-i+1,n-j-1}\cdots b_{m-i+1,2}c_{m-i+1}b_{m-i+1,n-1}b_{m-i+1,n-2}\cdots b_{m-i+1,n-j+1}h$, *para quaisquer* $1 \leq i \leq m$ *e* $2 \leq j \leq n-1$;

4. $b_{\frac{m+1}{2},j} = u_{\lceil\frac{n}{2}\rceil-j+1}u_j$, *para* m *ímpar e qualquer* $1 \leq j \leq \lceil\frac{n}{2}\rceil$;

5. $b_{\frac{m+1}{2},n-j} = hu_{\lceil\frac{n}{2}\rceil-j+1}u_{j+1}h$, *para* m *ímpar e qualquer* $1 \leq j \leq n-\lceil\frac{n}{2}\rceil-1$;

6. $t_{i,j} = hs_{m-i,j}h$, *para quaisquer* $1 \leq i \leq m-1$ *e* $1 \leq j \leq n$;

7. $t_{i,j} = c_i^{n-j}hb'_2\cdots b'_jhs_{i,n-j+1}hs_{m-i,n}h$, *com* $b'_\ell = b_{m-i,n-j+\ell-1}b_{m-i,n-j+\ell-2}\cdots b_{m-i,\ell}$, *para quaisquer* $2 \leq \ell \leq j$, $1 \leq i \leq m-1$ *e* $2 \leq j \leq n-1$.

Demonstração. 1. Seja $1 \leq i \leq m$. Nas transformações $b_{m-i+1,n-1}$, $b_{m-i+1,n-2}$ e $b_{m-i+1,1}$ os elementos de X_{mn} não representados são fixos pela transformação. Tendo em conta que a transformação $b_{m-i+1,n-1}$ é igual a

$$\left(\begin{array}{c|ccccc|c} \cdots & (m-i)n+1 & (m-i)n+2 & \cdots & (m-i+1)n-1 & (m-i+1)n & \cdots \\ \cdots & (m-i)n+1 & (m-i)n+2 & \cdots & (m-i+1)n & (m-i+1)n & \cdots \end{array}\right),$$

a transformação $b_{m-i+1,n-2}$ é igual a

$$\left(\begin{array}{c|cccccc|c} \cdots & (m-i)n+1 & (m-i)n+2 & \cdots & (m-i+1)n-2 & (m-i+1)n-1 & (m-i+1)n & \cdots \\ \cdots & (m-i)n+1 & (m-i)n+2 & \cdots & (m-i+1)n-1 & (m-i+1)n-1 & (m-i+1)n & \cdots \end{array}\right)$$

e a transformação $b_{m-i+1,1}$ é igual a

$$\left(\begin{array}{c|cccc|c} \cdots & (m-i)n+1 & (m-i)n+2 & \cdots & (m-i+1)n & \cdots \\ \cdots & (m-i)n+2 & (m-i)n+2 & \cdots & (m-i+1)n & \cdots \end{array}\right),$$

efectuando o produto $b_{m-i+1,n-1}b_{m-i+1,n-2}\cdots b_{m-i+1,1}$ obtemos a transformação

$$\left(\begin{array}{c|cccccc|c} \cdots & (m-i)n+1 & \cdots & (m-i)n+n-j+1 & \cdots & (m-i+1)n-1 & (m-i+1)n & \cdots \\ \cdots & (m-i)n+2 & \cdots & (m-i)n+n-j+2 & \cdots & (m-i+1)n & (m-i+1)n & \cdots \end{array}\right).$$

Evidenciando, na transformação h, as imagens dos elementos do conjunto A_i temos

$$h = \left(\begin{array}{c|ccccc|c} \cdots & (i-1)n+1 & \cdots & (i-1)n+j & \cdots & in & \cdots \\ \cdots & (m-i+1)n & \cdots & (m-i)n+n-j+1 & \cdots & (m-i)n+1 & \cdots \end{array}\right),$$

donde o produto $hb_{m-i+1,n-1}b_{m-i+1,n-2}\cdots b_{m-i+1,1}$ é igual à transformação

$$\left(\begin{array}{cc|cccccc|cc} 1 & \cdots & (i-1)n+1 & (i-1)n+2 & \cdots & (i-1)n+j & \cdots & in & \cdots & mn \\ mn & \cdots & (m-i+1)n & (m-i+1)n & \cdots & (m-i)n+n-j+2 & \cdots & (m-i)n+2 & \cdots & 1 \end{array}\right).$$

Salientando agora, na transformação h, as imagens dos elementos do conjunto A_{m-i+1}, i.e.

$$h = \left(\begin{array}{c|ccccc} \cdots & (m-i)n+1 & (m-i)n+2 & \cdots & (m-i)n+n-j & (m-i)n+n-j+1 \\ \cdots & in & in-1 & \cdots & (i-1)n+j+1 & (i-1)n+j \end{array}\right.$$
$$\left.\begin{array}{ccc|c} (m-i)n+n-j+2 & \cdots & (m-i+1)n & \cdots \\ (i-1)n+j-1 & \cdots & (i-1)n+1 & \cdots \end{array}\right),$$

é fácil ver que obtemos a igualdade pretendida.

2. Seja $1 \leq i \leq m$. Novamente omitimos os elementos de X_{mn} que são fixos pelas seguintes três transformações: $b_{m-i+1,n-1}b_{m-i+1,n-2}\cdots b_{m-i+1,2}$, $b_{m-i+1,n-1}b_{m-i+1,n-2}\cdots b_{m-i+1,2}c_{m-i+1}$ e c_{m-i+1}.

O produto $b_{m-i+1,n-1}b_{m-i+1,n-2}\cdots b_{m-i+1,2}$ é igual à transformação

$$\left(\begin{array}{c|cccccc|c} \cdots & (m-i)n+1 & (m-i)n+2 & (m-i)n+3 & \cdots & (m-i+1)n-1 & (m-i+1)n & \cdots \\ \cdots & (m-i)n+1 & (m-i)n+3 & (m-i)n+4 & \cdots & (m-i+1)n & (m-i+1)n & \cdots \end{array}\right).$$

Recordando que

$$c_{m-i+1} = \left(\begin{array}{c|ccccc|c} \cdots & (m-i)n+1 & (m-i)n+2 & (m-i)n+3 & \cdots & (m-i+1)n & \cdots \\ \cdots & (m-i)n+1 & (m-i)n+1 & (m-i)n+2 & \cdots & (m-i+1)n-1 & \cdots \end{array}\right),$$

obtemos que a transformação $b_{m-i+1,n-1}b_{m-i+1,n-2}\cdots b_{m-i+1,2}c_{m-i+1}$ é igual a

$$\left(\begin{array}{c|ccccc|c} \cdots & (m-i)n+1 & (m-i)n+2 & \cdots & (m-i+1)n-1 & (m-i+1)n & \cdots \\ \cdots & (m-i)n+1 & (m-i)n+2 & \cdots & (m-i+1)n-1 & (m-i+1)n-1 & \cdots \end{array}\right).$$

Consequentemente o produto $hb_{m-i+1,n-1}b_{m-i+1,n-2}\cdots b_{m-i+1,2}c_{m-i+1}$ é a transformação

$$\left(\begin{array}{cc|ccccc|cc} 1 & \cdots & (i-1)n+1 & (i-1)n+2 & (i-1)n+3 & \cdots & in & \cdots & mn \\ mn & \cdots & (m-i+1)n-1 & (m-i+1)n-1 & (m-i+1)n-2 & \cdots & (m-i)n+1 & \cdots & 1 \end{array}\right).$$

Multiplicando a transformação anterior à direita por h obtemos então a transformação $b_{i,1}$.

3. Sejam $1 \leq i \leq m$ e $2 \leq j \leq n-1$. Continuando com o mesmo critério de não representar os elementos que são fixados, desta vez pelas transformações:
$b_{m-i+1,n-j}\ b_{m-i+1,n-j-1}\ \cdots\ b_{m-i+1,2}$, $\ b_{m-i+1,n-1}\ b_{m-i+1,n-2}\ \cdots\ b_{m-i+1,n-j+1}$ e $b_{m-i+1,n-j}\ b_{m-i+1,n-j-1}\ \cdots\ b_{m-i+1,2}\ c_{m-i+1}\ b_{m-i+1,n-1}\ b_{m-i+1,n-2}\ \cdots\ b_{m-i+1,n-j+1}$, temos que a transformação $b_{m-i+1,n-j}b_{m-i+1,n-j-1}\cdots b_{m-i+1,2}$ é igual a

$$\left(\begin{array}{c|cccccccc|c} \cdots & (m-i)n+1 & (m-i)n+2 & \cdots & (m-i)n+n-j & (m-i)n+n-j+1 & \cdots & (m-i+1)n & \cdots \\ \cdots & (m-i)n+1 & (m-i)n+3 & \cdots & (m-i)n+n-j+1 & (m-i)n+n-j+1 & \cdots & (m-i+1)n & \cdots \end{array}\right);$$

a transformação $b_{m-i+1,n-1}b_{m-i+1,n-2}\cdots b_{m-i+1,n-j+1}$ é igual a

$$\left(\begin{array}{c|cccccccc|c} \cdots & (m-i)n+1 & \cdots & (m-i)n+n-j & (m-i)n+n-j+1 & \cdots & (m-i+1)n-1 & (m-i+1)n & \cdots \\ \cdots & (m-i)n+1 & \cdots & (m-i)n+n-j & (m-i)n+n-j+2 & \cdots & (m-i+1)n & (m-i+1)n & \cdots \end{array}\right)$$

e assim $b_{m-i+1,n-j}b_{m-i+1,n-j-1}\cdots b_{m-i+1,2}c_{m-i+1}b_{m-i+1,n-1}b_{m-i+1,n-2}\cdots b_{m-i+1,n-j+1}$ é igual a

$$\left(\begin{array}{c|ccccccc|c} \cdots & (m-i)n+1 & \cdots & (m-i)n+n-j & (m-i)n+n-j+1 & (m-i)n+n-j+2 & \cdots & (m-i+1)n & \cdots \\ \cdots & (m-i)n+1 & \cdots & (m-i)n+n-j & (m-i)n+n-j & (m-i)n+n-j+2 & \cdots & (m-i+1)n & \cdots \end{array}\right).$$

Dado que $hb_{m-i+1,n-j}b_{m-i+1,n-j-1}\cdots b_{m-i+1,2}c_{m-i+1}b_{m-i+1,n-1}b_{m-i+1,n-2}\cdots b_{m-i+1,n-j+1}$ é igual a

$$\left(\begin{array}{cc|cccccccc|cc} 1 & \cdots & (i-1)n+1 & \cdots & (i-1)n+j & (i-1)n+j+1 & (i-1)n+j+2 & \cdots & in & \cdots & mn \\ mn & \cdots & (m-i+1)n & \cdots & (m-i)n+n-j & (m-i)n+n-j & (m-1)n+n-j-1 & \cdots & (m-i)n+1 & \cdots & 1 \end{array}\right),$$

então $hb_{m-i+1,n-j}b_{m-i+1,n-j-1}\cdots b_{m-i+1,2}c_{m-i+1}b_{m-i+1,n-1}b_{m-i+1,n-2}\cdots b_{m-i+1,n-j+1}h$ é igual a $b_{i,j}$.

4. Seja m ímpar. Temos de considerar três casos. Omitiremos os elementos fixos pelas transformações que aparecem na igualdade. Se $j < \lceil \frac{n}{2} \rceil - j + 1$, então a transformação $u_{\lceil \frac{n}{2} \rceil - j+1}$ é igual a

$$\left(\begin{array}{c|ccccccccc|c} \cdots & \frac{m-1}{2}n+1 & \cdots & \frac{m-1}{2}n+j & \frac{m-1}{2}n+j+1 & \cdots & \frac{m-1}{2}n+\lceil \frac{n}{2} \rceil - j+1 & \frac{m-1}{2}n+\lceil \frac{n}{2} \rceil - j+2 & \cdots & \frac{m+1}{2}n & \cdots \\ \cdots & \frac{m-1}{2}n+1 & \cdots & \frac{m-1}{2}n+j & \frac{m-1}{2}n+j & \cdots & \frac{m-1}{2}n+\lceil \frac{n}{2} \rceil - j & \frac{m-1}{2}n+\lceil \frac{n}{2} \rceil - j+2 & \cdots & \frac{m+1}{2}n & \cdots \end{array}\right)$$

e a transformação u_j é igual a

$$\left(\begin{array}{c|ccccc} \cdots & \frac{m-1}{2}n+1 & \cdots & \frac{m-1}{2}n+j-1 & \frac{m-1}{2}n+j & \cdots \\ \cdots & \frac{m-1}{2}n+1 & \cdots & \frac{m-1}{2}n+j-1 & \frac{m-1}{2}n+j+1 & \cdots \end{array}\right.$$
$$\left.\begin{array}{ccccc|c} \cdots & \frac{m-1}{2}n+\lceil\frac{n}{2}\rceil-j+1 & \frac{m-1}{2}n+\lceil\frac{n}{2}\rceil-j+2 & \cdots & \frac{m+1}{2}n & \cdots \\ \cdots & \frac{m-1}{2}n+\lceil\frac{n}{2}\rceil-j+2 & \frac{m-1}{2}n+\lceil\frac{n}{2}\rceil-j+2 & \cdots & \frac{m+1}{2}n & \cdots \end{array}\right).$$

Se $j > \lceil\frac{n}{2}\rceil - j + 1$, então a transformação $u_{\lceil\frac{n}{2}\rceil-j+1}$ é igual a

$$\left(\begin{array}{c|ccccc} \cdots & \frac{m-1}{2}n+1 & \cdots & \frac{m-1}{2}n+\lceil\frac{n}{2}\rceil-j & \frac{m-1}{2}n+\lceil\frac{n}{2}\rceil-j+1 & \cdots \\ \cdots & \frac{m-1}{2}n+1 & \cdots & \frac{m-1}{2}n+\lceil\frac{n}{2}\rceil-j & \frac{m-1}{2}n+\lceil\frac{n}{2}\rceil-j+2 & \cdots \end{array}\right.$$
$$\left.\begin{array}{ccccc|c} \cdots & \frac{m-1}{2}n+j & \frac{m-1}{2}n+j+1 & \cdots & \frac{m+1}{2}n & \cdots \\ \cdots & \frac{m-1}{2}n+j+1 & \frac{m-1}{2}n+j+1 & \cdots & \frac{m+1}{2}n & \cdots \end{array}\right)$$

e a transformação u_j é igual a

$$\left(\begin{array}{c|ccccc} \cdots & \frac{m-1}{2}n+1 & \cdots & \frac{m-1}{2}n+\lceil\frac{n}{2}\rceil-j+1 & \frac{m-1}{2}n+\lceil\frac{n}{2}\rceil-j+2 & \cdots \\ \cdots & \frac{m-1}{2}n+1 & \cdots & \frac{m-1}{2}n+\lceil\frac{n}{2}\rceil-j+1 & \frac{m-1}{2}n+\lceil\frac{n}{2}\rceil-j+1 & \cdots \end{array}\right.$$
$$\left.\begin{array}{ccccc|c} \cdots & \frac{m-1}{2}n+j & \frac{m-1}{2}n+j+1 & \cdots & \frac{m+1}{2}n & \cdots \\ \cdots & \frac{m-1}{2}n+j-1 & \frac{m-1}{2}n+j+1 & \cdots & \frac{m+1}{2}n & \cdots \end{array}\right).$$

Se $j = \lceil\frac{n}{2}\rceil - j + 1$, então temos que $u_{\lceil\frac{n}{2}\rceil-j+1} = u_j = b_{\frac{m+1}{2},j}$. Claramente, em qualquer dos casos, obtemos $b_{\frac{m+1}{2},j} = u_{\lceil\frac{n}{2}\rceil-j+1}u_j$.

5. Temos novamente três casos a considerar. Analogamente ao que temos feito, omitiremos os elemento fixos nas várias transformações que constam da igualdade. Se $j < \lceil\frac{n}{2}\rceil - j + 1$, então a transformação u_{j+1} é igual a

$$\left(\begin{array}{c|ccccc} \cdots & \frac{m-1}{2}n+1 & \cdots & \frac{m-1}{2}n+j & \frac{m-1}{2}n+j+1 & \cdots \\ \cdots & \frac{m-1}{2}n+1 & \cdots & \frac{m-1}{2}n+j & \frac{m-1}{2}n+j+2 & \cdots \end{array}\right.$$
$$\left.\begin{array}{ccccc|c} \cdots & \frac{m-1}{2}n+\lceil\frac{n}{2}\rceil-j & \frac{m-1}{2}n+\lceil\frac{n}{2}\rceil-j+1 & \cdots & \frac{m+1}{2}n & \cdots \\ \cdots & \frac{m-1}{2}n+\lceil\frac{n}{2}\rceil-j+1 & \frac{m-1}{2}n+\lceil\frac{n}{2}\rceil-j+1 & \cdots & \frac{m+1}{2}n & \cdots \end{array}\right).$$

Se $j > \lceil\frac{n}{2}\rceil - j + 1$, então a transformação u_{j+1} é igual a

$$\left(\begin{array}{c|ccccc} \cdots & \frac{m-1}{2}n+1 & \cdots & \frac{m-1}{2}n+\lceil\frac{n}{2}\rceil-j & \frac{m-1}{2}n+\lceil\frac{n}{2}\rceil-j+1 & \cdots \\ \cdots & \frac{m-1}{2}n+1 & \cdots & \frac{m-1}{2}n+\lceil\frac{n}{2}\rceil-j & \frac{m-1}{2}n+\lceil\frac{n}{2}\rceil-j & \cdots \end{array}\right.$$
$$\left.\begin{array}{ccccc|c} \cdots & \frac{m-1}{2}n+j+1 & \frac{m-1}{2}n+j+2 & \cdots & \frac{m+1}{2}n & \cdots \\ \cdots & \frac{m-1}{2}n+j & \frac{m-1}{2}n+j+2 & \cdots & \frac{m+1}{2}n & \cdots \end{array}\right).$$

Se $j = \lceil \frac{n}{2} \rceil - j + 1$, então u_{j+1} é a transformação

$$\left(\begin{array}{c|cccccccc|c} \cdots & \tfrac{m-1}{2}n+1 & \cdots & \tfrac{m-1}{2}n+j-1 & \tfrac{m-1}{2}n+j & \tfrac{m-1}{2}n+j+1 & \tfrac{m-1}{2}n+j+2 & \cdots & \tfrac{m+1}{2}n & \cdots \\ \cdots & \tfrac{m-1}{2}n+1 & \cdots & \tfrac{m-1}{2}n+j-1 & \tfrac{m-1}{2}n+j-1 & \tfrac{m-1}{2}n+j & \tfrac{m-1}{2}n+j+2 & \cdots & \tfrac{m+1}{2}n & \cdots \end{array} \right).$$

Assim, em todos os casos, o produto $u_{\lceil \frac{n}{2} \rceil - j+1} u_{j+1}$ é igual a

$$\left(\begin{array}{c|cccccccc|c} \cdots & \tfrac{m-1}{2}n+1 & \cdots & \tfrac{m-1}{2}n+j-1 & \tfrac{m-1}{2}n+j & \tfrac{m-1}{2}n+j+1 & \tfrac{m-1}{2}n+j+2 & \cdots & \tfrac{m+1}{2}n & \cdots \\ \cdots & \tfrac{m-1}{2}n+1 & \cdots & \tfrac{m-1}{2}n+j-1 & \tfrac{m-1}{2}n+j & \tfrac{m-1}{2}n+j & \tfrac{m-1}{2}n+j+2 & \cdots & \tfrac{m+1}{2}n & \cdots \end{array} \right).$$

Evidenciando, na transformação h, a imagem dos elementos do conjunto $A_{\frac{m+1}{2}}$ temos

$$\left(\begin{array}{c|cccccccc|c} \cdots & \left(\tfrac{m+1}{2}-1\right)n+1 & \cdots & \tfrac{m+1}{2}n-j-1 & \tfrac{m+1}{2}n-j & \tfrac{m+1}{2}n-j+1 & \tfrac{m+1}{2}n-j+2 & \cdots & \tfrac{m+1}{2}n & \cdots \\ \cdots & \tfrac{m+1}{2}n & \cdots & \tfrac{m-1}{2}n+j+2 & \tfrac{m-1}{2}n+j+1 & \tfrac{m-1}{2}n+j & \tfrac{m-1}{2}n+j-1 & \cdots & \tfrac{m-1}{2}n+1 & \cdots \end{array} \right).$$

Donde a transformação $hu_{\frac{m+1}{2}, \lceil \frac{n}{2} \rceil - j+1} u_{\frac{m+1}{2}, j+1}$ é igual a

$$\left(\begin{array}{c|cccccccc|c} \cdots & \left(\tfrac{m+1}{2}-1\right)n+1 & \cdots & \tfrac{m+1}{2}n-j-1 & \tfrac{m+1}{2}n-j & \tfrac{m+1}{2}n-j+1 & \tfrac{m+1}{2}n-j+2 & \cdots & \tfrac{m+1}{2}n & \cdots \\ \cdots & \tfrac{m+1}{2}n & \cdots & \tfrac{m-1}{2}n+j+2 & \tfrac{m-1}{2}n+j & \tfrac{m-1}{2}n+j & \tfrac{m-1}{2}n+j-1 & \cdots & \tfrac{m-1}{2}n+1 & \cdots \end{array} \right).$$

É agora fácil ver que, ao multiplicarmos esta transformação à direita por h, obtemos a igualdade pretendida.

6. Sejam $1 \leq i \leq m-1$ e $1 \leq j \leq n$. Recordemos a transformação $s_{m-i,j}$ onde omitimos os elementos fixos

$$\left(\begin{array}{c|cccccc|ccccccc|c} \cdots & (m-i-1)n+1 & \cdots & (m-i)n-j+1 & (m-i)n-j+2 & \cdots & (m-i)n & (m-i)n+1 & (m-i)n+2 & \cdots & (m-i)n+j & \cdots & (m-i+1)n & \cdots \\ \cdots & (m-i-1)n+1 & \cdots & (m-i)n-j+1 & (m-i)n-j+1 & \cdots & (m-i)n-j+1 & (m-i)n-j+1 & (m-i)n-j+2 & \cdots & (m-i)n & \cdots & (m-i)n & \cdots \end{array} \right)$$

e mais uma vez a transformação h salientando desta vez as imagens dos conjuntos A_i e A_{i+1}

$$\left(\begin{array}{cc|ccccc|ccccc|cc} 1 & \cdots & (i-1)n+1 & \cdots & in-j+1 & \cdots & in-1 & in & in+1 & \cdots & in+j-1 & in+j & \cdots & (i+1)n & \cdots & mn \\ mn & \cdots & (m-i+1)n & \cdots & (m-i)n+j & \cdots & (m-i)n+2 & (m-i)n+1 & (m-i)n & \cdots & (m-i)n-j+2 & (m-i)n-j+1 & \cdots & (m-i-1)n+1 & \cdots & 1 \end{array}\right).$$

Temos que o produto $hs_{m-i,j}$ é igual a

$$\left(\begin{array}{cc|cccccc|ccccc|cc} 1 & \cdots & (i-1)n+1 & \cdots & in-j+1 & \cdots & in-1 & in & in+1 & \cdots & in+j-1 & in+j & \cdots & (i+1)n & \cdots & mn \\ mn & \cdots & (m-i)n & \cdots & (m-i)n & \cdots & (m-i)n-j+2 & (m-i)n-j+1 & (m-i)n-j+1 & \cdots & (m-i)n-j+1 & (m-i)n-j+1 & \cdots & (m-i-1)n+1 & \cdots & 1 \end{array}\right).$$

É agora fácil ver que a igualdade $t_{i,j} = hs_{m-i,j}h$ é verdadeira.

7. Sejam $2 \leq \ell \leq j$, $1 \leq i \leq m-1$ e $2 \leq j \leq n-1$. Serão omitidos todos os elementos fixos pelas transformações envolvidas na igualdade. Temos que a transformação $b'_\ell = b_{m-i,n-j+\ell-1}b_{m-i,n-j+\ell-2}\cdots b_{m-i,\ell}$ é igual a

$$\left(\begin{array}{c|cccccccccc|c} \cdots & (m-i-1)n+1 & \cdots & (m-i-1)n+\ell-1 & (m-i-1)n+\ell & \cdots & \cdots & (m-i-1)n+n-j+\ell-1 & (m-i-1)n+n-j+\ell & \cdots & (m-i)n & \cdots \\ \cdots & (m-i-1)n+1 & \cdots & (m-i-1)n+\ell-1 & (m-i-1)n+\ell+1 & \cdots & \cdots & (m-i-1)n+n-j+\ell & (m-i-1)n+n-j+\ell & \cdots & (m-i)n & \cdots \end{array}\right).$$

O produto $b'_2\cdots b'_j$ é a transformação

$$\left(\begin{array}{c|ccccccccc|c} \cdots & (m-i-1)n+1 & (m-i-1)n+2 & (m-i-1)n+3 & \cdots & \cdots & (m-i)n-j+1 & \cdots & (m-i)n & \cdots \\ \cdots & (m-i-1)n+1 & (m-i-1)n+j+1 & (m-i-1)n+j+2 & \cdots & \cdots & (m-i)n & \cdots & (m-i)n & \cdots \end{array}\right),$$

donde a transformação $hb'_2\cdots b'_jh$ é igual a

$$\left(\begin{array}{c|ccccccc|c} \cdots & in+1 & \cdots & in+j & in+j+1 & \cdots & (i+1)n-1 & (i+1)n & \cdots \\ \cdots & in+1 & \cdots & in+1 & in+2 & \cdots & (i+1)n-j & (i+1)n & \cdots \end{array}\right).$$

Temos que a transformação ${c_i}^{n-j}$ é igual a

$$\left(\begin{array}{c|ccccccc|c} \cdots & (i-1)n+1 & \cdots & (i-1)n+n-j+1 & (i-1)n+n-j+2 & \cdots & in & \cdots \\ \cdots & (i-1)n+1 & \cdots & (i-1)n+1 & (i-1)n+2 & \cdots & (i-1)n+j & \cdots \end{array}\right)$$

e assim o produto $c_i^{n-j}hb'_2\cdots b'_jh$ é a transformação

$$\left(\begin{array}{c|cccccc|} \cdots & (i-1)n+1 & \cdots & in-j+1 & in-j+2 & \cdots & in \\ \cdots & (i-1)n+1 & \cdots & (i-1)n+1 & (i-1)n+2 & \cdots & (i-1)n+j \end{array}\right.$$
$$\left.\begin{array}{|ccccccc|c} in+1 & \cdots & in+j & in+j+1 & \cdots & (i+1)n-1 & (i+1)n & \cdots \\ in+1 & \cdots & in+1 & in+2 & \cdots & (i+1)n-j & (i+1)n & \cdots \end{array}\right).$$

Recordando a transformação

$$s_{i,n-j+1} = \left(\begin{array}{c|ccccc|} \cdots & (i-1)n+1 & \cdots & (i-1)n+j & \cdots & in \\ \cdots & (i-1)n+1 & \cdots & (i-1)n+j & \cdots & (i-1)n+j \end{array}\right.$$
$$\left.\begin{array}{|cccccc|c} in+1 & in+2 & \cdots & (i+1)n-j+1 & \cdots & (i+1)n & \cdots \\ (i-1)n+j & (i-1)n+j+1 & \cdots & in & \cdots & in & \cdots \end{array}\right)$$

e notando que, por 6., a transformação $hs_{m-i,n}h$ é igual à transformação $t_{1,n}$ que relembramos aqui

$$\left(\begin{array}{c|cccc|ccc|c} \cdots & (i-1)n+1 & (i-1)n+2 & \cdots & in & in+1 & \cdots & (i+1)n & \cdots \\ \cdots & in+1 & in+2 & \cdots & (i+1)n & (i+1)n & \cdots & (i+1)n & \cdots \end{array}\right),$$

obtemos que o produto $s_{i,n-j+1}hs_{m-i,n}h$ é igual a

$$\left(\begin{array}{c|ccccc|} \cdots & (i-1)n+1 & \cdots & (i-1)n+j & \cdots & in \\ \cdots & in+1 & \cdots & in+j & \cdots & in+j \end{array}\right.$$
$$\left.\begin{array}{|cccccc|c} in+1 & in+2 & \cdots & (i+1)n-j+1 & \cdots & (i+1)n & \cdots \\ in+j & in+j+1 & \cdots & (i+1)n & \cdots & (i+1)n & \cdots \end{array}\right).$$

Multiplicando agora $c_i^{n-j}hb'_2\cdots b'_jh$ por $s_{i,n-j+1}hs_{m-i,n}h$ à esquerda, chegamos à igualdade pretendida. ■

Seja D o conjunto

$$\Big\{c_i, b_{i,j}, s_{k,\ell}, s_{\frac{m}{2},r}, s_{t,n}, h \mid 1 \le i \le \frac{m}{2},\ 1 \le j \le n-1,\ 1 \le k \le \frac{m}{2}-1,\ 2 \le \ell \le n-1,$$
$$n - \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 1 \le r \le n-1,\ 1 \le t \le m-1\Big\},$$

se m é par, e o conjunto

$$\left\{c_i, b_{i,j}, u_k, s_{i,\ell}, s_{t,n}, h | 1 \le i \le \frac{m-1}{2}, 1 \le j \le n-1, 1 \le k \le \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil, 2 \le \ell \le n-1, 1 \le t \le m-1\right\},$$

se m é ímpar. Temos que:

Proposição 2.3.10 *Para $m, n \ge 2$, o conjunto D gera o monóide $\mathcal{OD}_{m\times n}$. Além disso, $|D| = \lceil \frac{mn}{2} \rceil + \left\lceil \frac{(m-1)n}{2} \right\rceil + 1$.*

Demonstração. Usando as igualdades do Lema 2.3.9, vamos mostrar que qualquer elemento de C é um produto de elementos de D.

Seja $\langle D\rangle$ o submonóide de $\mathcal{OD}_{m\times n}$ gerado pelo conjunto D.

Suponhamos que m é par.

Seja $1 \le i \le m$. Começamos por verificar que $c_i \in \langle D\rangle$. Se $1 \le i \le \frac{m}{2}$ então $c_i \in D$. Para quaisquer $\frac{m}{2}+1 \le i \le m$ e $1 \le j \le n-1$, temos que $b_{m-i+1,j} \in D$, dado que $1 \le m-i+1 \le \frac{m}{2}$. Assim, pelo Lema 2.3.9 (1) concluímos que $c_i \in \langle D\rangle$.

Sejam $1 \le i \le m$ e $1 \le j \le n-1$. Vejamos agora que $b_{i,j} \in \langle D\rangle$. Se $1 \le i \le \frac{m}{2}$ e $1 \le j \le n-1$ então $b_{i,j} \in D$. Para qualquer $\frac{m}{2}+1 \le i \le m$ temos que $b_{i,1} \in \langle D\rangle$, pelo Lema 2.3.9 (2) e, para $2 \le j \le n-1$, $b_{i,j} \in \langle D\rangle$, pelo Lema 2.3.9 (3).

Os elementos $s_{i,n}$, com $1 \le i \le m-1$, pertencem ao conjunto D.

Sejam $1 \le i \le m-1$ e $2 \le j \le n$. Terminamos o caso m par conferindo que as transformações $t_{i,j}$ também pertencem a $\langle D\rangle$. Observemos que $t_{i,n} \in \langle D\rangle$, pelo Lema 2.3.9 (6). Se $\frac{m}{2}+1 \le i \le m-1$ e $2 \le j \le n-1$ então $s_{m-i,j} \in D$ visto que $1 \le m-i \le \frac{m}{2}-1$. Donde, novamente pelo Lema 2.3.9 (6) temos que $t_{i,j} \in \langle D\rangle$. Seja $i = \frac{m}{2}$. Para qualquer $n-\lceil\frac{n}{2}\rceil+1 \le j \le n-1$, como $s_{\frac{m}{2},j} \in D$, então, mais uma vez pelo Lema 2.3.9 (6), $t_{\frac{m}{2},j} \in \langle D\rangle$. Suponhamos agora que $i = \frac{m}{2}$ e $2 \le j \le n-\lceil\frac{n}{2}\rceil$. Então $\left(n-\lceil\frac{n}{2}\rceil+1 \le\right) \lceil\frac{n}{2}\rceil+1 \le n-j+1 \le n-1$ e assim $s_{\frac{m}{2},n-j+1} \in D$. Usando (7) do Lema 2.3.9 temos que $t_{i,j} \in \langle D\rangle$. Por fim, sejam $1 \le i \le \frac{m}{2}-1$ e $2 \le j \le n-1$. É fácil ver que $s_{\frac{m}{2},n-j+1} \in D$ e consequentemente, pelo Lema 2.3.9 (7), $t_{i,j}$ pertence a $\langle D\rangle$.

Suponhamos agora que m é ímpar.

Sejam $1 \le i \le m$ e $1 \le j \le n-1$. Começamos por mostrar que $b_{i,j} \in \langle D\rangle$. Se $1 \le i \le \frac{m-1}{2}$ e $1 \le j \le n-1$ então $b_{i,j} \in D$. Suponhamos que $\frac{m+1}{2}+1 \le i \le m$ e $1 \le j \le n-1$. Temos que $1 \le m-i+1 \le \frac{m-1}{2}$, donde $c_{m-i+1}, b_{m-i+1,j} \in D$ e pelo Lema 2.3.9 (2), para $j=1$, e Lema 2.3.9 (3), para $j \ge 2$, concluímos que $b_{i,j} \in \langle D\rangle$. Sejam $i = \frac{m+1}{2}$ e $1 \le j \le n-1$. Pelo Lema 2.3.9 (5), se $1 \le j \le \lceil\frac{n}{2}\rceil$ e Lema 2.3.9 (6), se $\lceil\frac{n}{2}\rceil+1 \le j \le n-1$, obtemos que $b_{\frac{m+1}{2},j} \in \langle D\rangle$.

Seja $1 \le i \le m$. Verificamos agora que $c_i \in \langle D\rangle$. Se $1 \le i \le \frac{m-1}{2}$ temos que $c_i \in D$. Suponhamos que $\frac{m-1}{2}+1 \le i \le m$. Usando (1) do Lema 2.3.9, obtemos que $c_i \in \langle D\rangle$.

Notemos que, também no caso m ímpar, os elementos $s_{i,n}$, com $1 \le i \le m-1$, pertencem ao conjunto D.

Sejam $1 \le i \le m-1$ e $2 \le j \le n$. Terminamos a demonstração verificando que $t_{i,j} \in \langle D\rangle$. Usando o Lema 2.3.9 (6), obtemos que $t_{i,n} \in \langle D\rangle$. Se $1 \le i \le \frac{m-1}{2}$ e $2 \le j \le n-1$, pelo Lema 2.3.9 (7), temos que $t_{i,j} \in \langle D\rangle$. Para quaisquer $\frac{m-1}{2}+1 \le i \le m-1$ e $2 \le j \le n$, dado que $1 \le m-i \le \frac{m-1}{2}$ sabemos que $s_{m-i,j} \in D$ e assim pelo Lema 2.3.9 (6) concluímos que $t_{i,j} \in \langle D\rangle$.

Omitimos a demonstração da segunda parte da proposição dado ser fácil verificar que $|D| = \lceil\frac{mn}{2}\rceil + \left\lceil\frac{(m-1)n}{2}\right\rceil + 1$. ∎

Exemplo 2.3.11 No que respeita aos monóides $\mathcal{OD}_{4\times 4}$ e $\mathcal{OD}_{3\times 4}$ temos que $\mathcal{OD}_{4\times 4}$ é gerado pelo conjunto $\{h, c_1, b_{1,1}, b_{1,2}, b_{1,3}, c_2, b_{2,1}, b_{2,2}, b_{2,3}, s_{1,2}, s_{1,3}, s_{1,4}, s_{2,3}, s_{2,4}, s_{3,4}\}$ e $\mathcal{OD}_{3\times 4}$ é gerado pelo conjunto $\{h, c_1, b_{1,1}, b_{1,2}, b_{1,3}, u_1, u_2, s_{1,2}, s_{1,3}, s_{1,4}, s_{2,4}\}$.

Seguidamente, pretendemos mostrar que a característica do monóide $\mathcal{OD}_{m\times n}$ é precisamente $\lceil \frac{mn}{2} \rceil + \left\lceil \frac{(m-1)n}{2} \right\rceil + 1$.

Seja U um (qualquer) conjunto gerador de $\mathcal{OD}_{m\times n}$.

Primeiro, observemos que, como h é a única permutação diferente da identidade em $\mathcal{OD}_{m\times n}$, então $h \in U$.

Por outro lado, recordemos que, na demonstração de [23, Teorema 1.5], Fernandes et al. mostraram que um conjunto gerador do monóide $\mathcal{OD}_n$, para qualquer $n \geq 2$, tem pelo menos $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ elementos de característica $n-1$. Um argumento semelhante permite-nos concluir que U precisa de ter pelo menos $\lceil \frac{mn}{2} \rceil$ elementos de característica $mn-1$. De facto, tomemos $K_i = \{1, 2, \ldots, mn\} \setminus \{i\}$, para qualquer $1 \leq i \leq mn$, e sejam $\xi_1, \ldots, \xi_k$ todos os elementos de U de característica $mn-1$. Então $k \geq 1$ e, para todo o $1 \leq i \leq k$, existe $1 \leq \ell_i \leq mn$ tal que $\operatorname{Im}(\xi_i) = K_{\ell_i}$. Dado um elemento $\alpha \in \mathcal{OD}_{m\times n}$ de característica $mn-1$, temos $\alpha = \xi\xi_i$ ou $\alpha = \xi\xi_i h$, para alguns $\xi \in \mathcal{OD}_{m\times n}$ e $1 \leq i \leq k$. Assim, $\operatorname{Im}(\alpha) = \operatorname{Im}(\xi_i) = K_{\ell_i}$ ou $\operatorname{Im}(\alpha) = \operatorname{Im}(\xi_i h) = K_{mn-\ell_i+1}$. Como temos mn imagens distintas possíveis para uma transformação de $\mathcal{OD}_{m\times n}$ de característica $mn-1$, o conjunto $\{K_{\ell_1}, \ldots, K_{\ell_k}, K_{mn-\ell_1+1}, \ldots, K_{mn-\ell_k+1}\}$ tem pelo menos mn elementos (distintos). Segue-se que $2k \geq mn$ e assim $k \geq \lceil \frac{mn}{2} \rceil$.

Portanto, provámos que:

Lema 2.3.12 *Qualquer conjunto gerador de $\mathcal{OD}_{m\times n}$ contém h e pelo menos $\lceil \frac{mn}{2} \rceil$ elementos distintos de característica $mn-1$.* ■

No que respeita a geradores de característica $(m-1)n$, temos:

Lema 2.3.13 *Qualquer conjunto gerador de $\mathcal{OD}_{m\times n}$ contém pelo menos $\left\lceil \frac{(m-1)n}{2} \right\rceil$ elementos distintos de característica $(m-1)n$.*

Demonstração. Vimos, na demonstração do Teorema 2.3.7, que a família $\{Q_{i,j} \mid 1 \leq i \leq m-1, 1 \leq j \leq n\}$ consiste em $(m-1)n$ subconjuntos de $\mathcal{O}_{m\times n}$ não vazios e disjuntos dois a dois tais que, dados $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathcal{O}_{m\times n}$, se $\alpha_1\alpha_2 \in Q_{i,j}$ então $\alpha_1 \in Q_{i,j}$ ou $\alpha_2 \in Q_{i,j}$, para quaisquer $1 \leq i \leq m-1$ e $1 \leq j \leq n$. Por outro lado, dado $\alpha \in \mathcal{T}_{mn}$, é fácil ver que

$$\alpha \in Q_{i,j} \text{ se e só se } h\alpha h \in Q_{m-i,n-j+1} \tag{2.1}$$

e, consequentemente,

$$h\alpha \in Q_{i,j} \text{ se e só se } \alpha h \in Q_{m-i,n-j+1}, \tag{2.2}$$

para quaisquer $1 \leq i \leq m-1$ e $1 \leq j \leq n$. Com vista a mostrarmos a equivalência (2.1), suponhamos que $\alpha \in Q_{i,j}$. Observemos que $|\operatorname{Im}(h\alpha h)| = |\operatorname{Im}\alpha|$. Temos que

$$\begin{aligned}
(in)\alpha = (in+1)\alpha = (k-1)n+j \;\Leftrightarrow\; & (in)\alpha h = (in+1)\alpha h && = mn-(k-1)n-j+1 \\
& && = (m-k)n+n-j+1 \\
\Leftrightarrow\; & ((m-i)n)h\alpha h && = ((m-i)n+1)h\alpha h \\
& && = (m-k)n+n-j+1,
\end{aligned}$$

o que significa que $h\alpha h \in Q_{m-i,n-j+1}$.

A seguir, para $1 \leq i \leq m-1$ e $1 \leq j \leq n$, definimos

$$T_{i,j} = \{\alpha \in \mathcal{OD}_{m\times n} \mid \alpha \in Q_{i,j} \cup Q_{m-i,n-j+1} \text{ ou } h\alpha \in Q_{i,j} \cup Q_{m-i,n-j+1}\}.$$

Observemos que, temos claramente $T_{i,j} = T_{m-i,n-j+1}$, para quaisquer $1 \leq i \leq m-1$ e $1 \leq j \leq n$. Além disso, se $1 \leq i, i' \leq m-1$ e $1 \leq j, j' \leq n$ são tais que $T_{i,j} \cap T_{i',j'} \neq \emptyset$ então $(i',j') = (i,j)$ ou $(i',j') = (m-i, n-j+1)$. De facto, suponhamos que existe $\alpha \in T_{i,j} \cap T_{i',j'}$. Se $\alpha \in \mathcal{O}_{m\times n}$ então $\alpha \in (Q_{i,j} \cup Q_{m-i,n-j+1}) \cap (Q_{i',j'} \cup Q_{m-i',n-j'+1})$. Por outro lado, se $\alpha \notin \mathcal{O}_{m\times n}$ então $h\alpha \in (Q_{i,j} \cup Q_{m-i,n-j+1}) \cap (Q_{i',j'} \cup Q_{m-i',n-j'+1})$. Assim, em ambos os casos, $Q_{i,j} \cap Q_{i',j'} \neq \emptyset$ ou $Q_{i,j} \cap Q_{m-i',n-j'+1} \neq \emptyset$ ou $Q_{m-i,n-j+1} \cap Q_{i',j'} \neq \emptyset$ ou $Q_{m-i,n-j+1} \cap Q_{m-i',n-j'+1} \neq \emptyset$, a partir do que se conclui que $(i',j') = (i,j)$ ou $(i',j') = (m-i, n-j+1)$, tendo em conta que $\{Q_{i,j} \mid 1 \leq i \leq m-1, 1 \leq j \leq n\}$ tem $(m-1)n$ elementos distintos dois a dois.

Assim, podemos deduzir que a família $\{T_{i,j} \mid 1 \leq i \leq m-1, 1 \leq j \leq n\}$ consiste em $\left\lceil \frac{(m-1)n}{2} \right\rceil$ subconjuntos de $\mathcal{OD}_{m\times n}$ não vazios e disjuntos dois a dois.

Provando agora que um conjunto gerador arbitrário de $\mathcal{OD}_{m\times n}$ contém pelo menos um elemento de $T_{i,j}$, para todo o $1 \leq i \leq m-1$ e $1 \leq j \leq n$, a demonstração do lema fica concluída. Para atingirmos este objectivo, mostramos que, para quaisquer $1 \leq i \leq m-1$ e $1 \leq j \leq n$, dados $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathcal{OD}_{m\times n}$ ($k \in \mathbb{N}$) tais que $\alpha_1 \cdots \alpha_k \in T_{i,j}$, temos $\alpha_t \in T_{i,j}$, para algum $t \in \{1, \ldots, k\}$. Observemos que, de forma a provarmos esta última afirmação, por indução em k, é suficiente considerar $k = 2$.

Primeiro, notemos que, dado $\alpha \in \mathcal{T}_{mn}$, como consequência de (2.1) e (2.2) temos que

$$\{\alpha, h\alpha h, \alpha h, h\alpha\} \subseteq T_{i,j} \quad \text{ou} \quad \{\alpha, h\alpha h, \alpha h, h\alpha\} \cap T_{i,j} = \emptyset, \tag{2.3}$$

para quaisquer $1 \leq i \leq m-1$ e $1 \leq j \leq n$.

Sejam $1 \leq i \leq m-1$, $1 \leq j \leq n$ e $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathcal{OD}_{m\times n}$ tais que $\alpha_1\alpha_2 \in T_{i,j}$. A seguir, mostramos que $\alpha_1 \in T_{i,j}$ ou $\alpha_2 \in T_{i,j}$, considerando quatro casos, o que termina a demonstração.

caso 1. Se $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathcal{O}_{m\times n}$, então $\alpha_1\alpha_2 \in Q_{i,j} \cup Q_{m-i,n-j+1}$ e assim, pela observação no início da demonstração, temos $\alpha_1 \in Q_{i,j} \cup Q_{m-i,n-j+1}$ ou $\alpha_2 \in Q_{i,j} \cup Q_{m-i,n-j+1}$, donde $\alpha_1 \in T_{i,j}$ ou $\alpha_2 \in T_{i,j}$.

caso 2. Se $\alpha_1 \notin \mathcal{O}_{m\times n}$ e $\alpha_2 \notin \mathcal{O}_{m\times n}$, então $(\alpha_1 h)(h\alpha_2) = \alpha_1\alpha_2 \in T_{i,j}$ e $\alpha_1 h, h\alpha_2 \in \mathcal{O}_{m\times n}$ e assim, pelo caso 1, $\alpha_1 h \in T_{i,j}$ ou $h\alpha_2 \in T_{i,j}$. Donde, por (2.3), $\alpha_1 \in T_{i,j}$ ou $\alpha_2 \in T_{i,j}$.

caso 3. Se $\alpha_1 \notin \mathcal{O}_{m\times n}$ e $\alpha_2 \in \mathcal{O}_{m\times n}$, então $h\alpha_1 \in \mathcal{O}_{m\times n}$ e $\alpha_2 \in \mathcal{O}_{m\times n}$ e, por (2.3), $(h\alpha_1)\alpha_2 = h(\alpha_1\alpha_2) \in T_{i,j}$. Assim, pelo caso 1, $h\alpha_1 \in T_{i,j}$ ou $\alpha_2 \in T_{i,j}$ e assim, novamente por (2.3), $\alpha_1 \in T_{i,j}$ ou $\alpha_2 \in T_{i,j}$.

caso 4. Finalmente, se $\alpha_1 \in \mathcal{O}_{m\times n}$ e $\alpha_2 \notin \mathcal{O}_{m\times n}$, então $\alpha_1 \in \mathcal{O}_{m\times n}$ e $\alpha_2 h \in \mathcal{O}_{m\times n}$ e, por (2.3), $\alpha_1(\alpha_2 h) = (\alpha_1\alpha_2)h \in T_{i,j}$. Donde, pelo caso 1, $\alpha_1 \in T_{i,j}$ ou $\alpha_2 h \in T_{i,j}$ e assim, mais uma vez por (2.3), $\alpha_1 \in T_{i,j}$ ou $\alpha_2 \in T_{i,j}$, como pretendíamos demonstrar. ∎

Pela Proposição 2.3.10 e os Lemas 2.3.12 e 2.3.13, o resultado que queríamos obter é imediato.

Teorema 2.3.14 *Para $m, n \geq 2$, a característica de $\mathcal{OD}_{m\times n}$ é igual a* $\lceil \frac{mn}{2} \rceil + \lceil \frac{(m-1)n}{2} \rceil + 1$. ■

Capítulo 3

Monóides de transformações totais que preservam uma partição uniforme e preservam ou revertem a orientação numa cadeia finita

Neste capítulo estabelecemos os cardinais e as características dos monóides $\mathcal{OP}_{m\times n}$ e $\mathcal{OR}_{m\times n}$. Fazemos notar que, para $m = 1$ ou $n = 1$ os monóides $\mathcal{OP}_{m\times n}$ e $\mathcal{OR}_{m\times n}$ são, respectivamente, iguais ao monóides $\mathcal{OP}_{mn}$ e $\mathcal{OR}_{mn}$. Voltamos a lembrar que foi provado por McAlister em [59] e, independentemente, por Catarino e Higgins em [8], que o cardinal de $\mathcal{OP}_n$ é $n\binom{2n-1}{n-1} - n(n-1)$ e o cardinal de $\mathcal{OR}_n$ é $n\binom{2n}{n} - \frac{n^2}{2}(n^2 - 2n + 5) + n$. Catarino provou ainda em [7] que a característica de $\mathcal{OP}_n$ é 2, do que se deduz facilmente que a característica de $\mathcal{OR}_n$ é 3 (cf. Subsecção 1.4.2). Neste capítulo consideramos então $m, n \geq 2$.

Começamos por, na primeira secção, determinar um conjunto de geradores do semigrupo com imagem restringida $\mathcal{OP}_{n,r}$, o qual irá ser usado na secção seguinte. À semelhança do que foi feito no capítulo anterior, na segunda secção usamos o produto em coroa para caracterizar o monóide $\mathcal{OP}_{m\times n}$. Prosseguimos na terceira secção determinando os cardinais de $\mathcal{OP}_{m\times n}$ e $\mathcal{OR}_{m\times n}$ e, na quarta secção, obtemos as características destes monóides. Estes resultados podem ser encontrados em [29] e [30].

3.1 Os semigrupos $\mathcal{OP}_{n,r}$

Sejam X um conjunto e Y um subconjunto de X. Consideremos o *subsemigrupo com imagem restringida*

$$\mathcal{T}(X, Y) = \{\alpha \in \mathcal{T}(X) \mid X\alpha \subseteq Y\}$$

de $\mathcal{T}(X)$. Este semigrupo foi introduzido e estudado em 1975 por Symon [68] que descreveu os automorfismos de $\mathcal{T}(X, Y)$ e provou que, se $\mathcal{T}(X_1, Y_1)$ e $\mathcal{T}(X_2, Y_2)$ são isomorfos, então

$|Y_1| = |Y_2|$ e, ainda, que a afirmação recíproca é verdadeira no caso finito. Dado que $\mathcal{T}(X,Y)$, não é, em geral, um semigrupo regular, em [65] Sanwong e Sommanee obtiveram o seu maior subsemigrupo regular e mostraram que este subsemigrupo determina as relações de Green de $\mathcal{T}(X,Y)$, que foram também caracterizadas neste artigo. Resultados análogos a estes para os subsemigrupos com imagem restringida de $\mathcal{PT}(X)$, $\mathcal{PT}(X,Y) = \{\alpha \in \mathcal{PT}(X) \mid X\alpha \subseteq Y\}$ e $\mathcal{I}(X,Y) = \mathcal{PT}(X,Y) \cap \mathcal{I}(X)$, foram obtidos por Fernandes e Sanwong em [31]. Estes autores provaram que, à semelhança de $\mathcal{T}(X,Y)$, também temos que, se X for finito, então $\mathcal{PT}(X_1,Y_1)$ [respectivamente, $\mathcal{I}(X_1,Y_1)$] e $\mathcal{PT}(X_2,Y_2)$ [respectivamente, $\mathcal{I}(X_2,Y_2)$] são isomorfos se e só se $|Y_1| = |Y_2|$. Assim, se X for finito, é suficiente estudar os semigrupos $\mathcal{T}_{n,r} = \mathcal{T}(\{1,\dots,n\},\{1,\dots,r\})$, $\mathcal{PT}_{n,r} = \mathcal{PT}(\{1,\dots,n\},\{1,\dots,r\})$ e $\mathcal{I}_{n,r} = \mathcal{I}(\{1,\dots,n\},\{1,\dots,r\})$, com $1 \le r \le n$ e $n \in \mathbb{N}$. Ainda em [31] Fernandes e Sanwong estabelecem que, para $n \ge 2$ e $1 \le r \le n-1$, as características de $\mathcal{T}_{n,r}$ e de $\mathcal{PT}_{n,r}$ são, respectivamente, $\mathcal{S}(n,r)$ (o *número de Stirling* de segunda ordem) e $\mathcal{S}(n+1,r+1)$ e que, para $n \ge 2$, a característica de $\mathcal{I}_{n,r}$ é $\binom{n}{r}$, se $r \in \{1,2\}$, e $\binom{n}{r}+1$, se $3 \le r \le n-1$. Recordemos que, para $n \ge 3$, as características de $\mathcal{T}_n = \mathcal{T}_{n,n}$, $\mathcal{PT}_n = \mathcal{PT}_{n,n}$ e $\mathcal{I}_n = \mathcal{I}_{n,n}$ são, respectivamente, 3, 4 e 3 (cf. Secção 1.4).

Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $1 \le r \le n$. Consideremos agora o subsemigrupo de $\mathcal{OP}_n$ com imagem restringida

$$\mathcal{OP}_{n,r} = \{\alpha \in \mathcal{OP}_n \mid \mathrm{Im}(\alpha) \subseteq \{1,\dots,r\}\} = \mathcal{OP}_n \cap \mathcal{T}_{n,r}.$$

Observemos que não é, em geral, verdadeiro que, para X finito, se $|Y_1| = |Y_2|$ então $\mathcal{OP}(X_1,Y_1)$ e $\mathcal{OP}(X_2,Y_2)$ são isomorfos (ver a terceira questão do apêndice "Questões em Aberto").

A nossa intenção nesta secção é, como já referimos, a de obter um conjunto de geradores de $\mathcal{OP}_{n,r}$ que iremos usar na próxima secção. Além disso, deduzir que $\mathcal{OP}_{n,r}$ tem característica igual a $\binom{n}{r}$, para qualquer $2 \le r \le n-1$.

Notemos que, como $\mathcal{OP}_{n,1}$ é um semigrupo trivial e $\mathcal{OP}_{n,n} = \mathcal{OP}_n$, no que se segue consideramos $2 \le r \le n-1$.

Começamos por mostrar que $\mathcal{OP}_{n,r}$ é gerado pelos seus elementos de característica r.

Lema 3.1.1 *Qualquer transformação de $\mathcal{OP}_{n,r}$ de característica igual a k, com $1 \le k < r$, é um produto de elementos de $\mathcal{OP}_{n,r}$ de característica igual a $k+1$.*

Demonstração. Seja $\alpha = \left(\begin{array}{c|c|c|c} I_1 & I_2 & \cdots & I_k \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_k \end{array}\right)$ um elemento de $\mathcal{OP}_{n,r}$ de característica igual a k, $1 \le k < r$, onde $I_1, I_2, \dots, I_k$ são as classes do núcleo de α tais que $\min I_i < \min I_{i+1}$, para $i = 1,\dots,k-1$. Observemos que $I_2,\dots,I_k$ são intervalos e I_1 é um intervalo se e só se $n \in I_k$, caso contrário I_1 é uma união de dois intervalos (cf. Subsecção 1.4.2). Notemos ainda que $(a_1,a_2,\dots,a_k)$ é um k-ciclo. Por outro lado, como $k < n$, então existe $j \in \{1,\dots,k\}$ tal que $|I_j| > 1$.

Consideremos $\gamma = \left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 1 & \cdots & k-j & k-j+1 & \cdots & k & k+1 & \cdots & n \\ a_{j+1} & \cdots & a_k & a_1 & \cdots & a_j & a_j & \cdots & a_j \end{array}\right)$. Temos que

$\gamma \in \mathcal{OP}_{n,r}$ e tem característica igual a k. Se $2 \leq j \leq k$, tomemos

$$\beta = \left(\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c} I_1 & \cdots & I_{j-1} & \min I_j & I_j \backslash \{\min I_j\} & I_{j+1} & \cdots & I_k \\ k-j+1 & \cdots & k-1 & k & k+1 & 1 & \cdots & k-j \end{array}\right);$$

se $j = 1$ e $n \in I_k$, tomemos

$$\beta = \left(\begin{array}{c|ccc|c|c|c} 1 & 2 & \cdots & \max I_1 & I_2 & \cdots & I_k \\ k & k+1 & \cdots & k+1 & 1 & \cdots & k-1 \end{array}\right);$$

e, se $j = 1$ e $n \in I_1$, tomemos

$$\beta = \left(\begin{array}{c|c|c|c|c} I_1' & I_2 & \cdots & I_k & I_1'' \\ k+1 & 1 & \cdots & k-1 & k \end{array}\right),$$

onde I_1' e I_1'' são intervalos tais que $I_1' \cup I_1'' = I_1$ e $\max I_1' < \min I_1''$ (notemos que, também temos $\max I_k < \min I_1''$). Em todos os casos, é fácil verificar que β é um elemento de $\mathcal{OP}_{n,r}$ de característica igual a $k+1$ tal que $\alpha = \beta\gamma$.

Seja $(b_1, \ldots, b_k)$ o k-ciclo $(a_{j+1}, \ldots, a_k, a_1, \ldots, a_j)$. Observemos que

$$\gamma = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & k & k+1 & \cdots & n \\ b_1 & \cdots & b_k & b_k & \cdots & b_k \end{pmatrix}.$$

Tomemos $b \in \{1, \ldots, r\} \backslash \operatorname{Im}(\gamma)$. Se $b_k < b < b_1$ ou $b_1 < b_k < b$, tomemos

$$\gamma_1 = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & k & k+1 & \cdots & n \\ 1 & \cdots & k & k+1 & \cdots & k+1 \end{pmatrix} \text{ e } \gamma_2 = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & k & k+1 & k+2 & \cdots & n \\ b_1 & \cdots & b_k & b_k & b & \cdots & b \end{pmatrix}.$$

Por outro lado, se $b_i < b < b_{i+1}$ ou $b < b_{i+1} < b_i$ ou $b_{i+1} < b_i < b$, para algum $i \in \{1, \ldots, k-1\}$, tomemos

$$\gamma_1 = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & i-1 & i & i+1 & \cdots & k & k+1 & \cdots & n \\ k-i+2 & \cdots & k & k+1 & 1 & \cdots & k-i & k-i+1 & \cdots & k-i+1 \end{pmatrix} \text{ e}$$

$$\gamma_2 = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & k-i & k-i+1 & k-i+2 & \cdots & k+1 & k+2 & \cdots & n \\ b_{i+1} & \cdots & b_k & b_k & b_1 & \cdots & b_i & b & \cdots & b \end{pmatrix}$$

(notemos que $k < n-1$, donde $k+2 \leq n$). Então, em ambos os casos, temos que $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathcal{OP}_{n,r}$, γ_1 e γ_2 têm característica igual a $k+1$ e $\gamma = \gamma_1\gamma_2$.

Portanto, provámos que $\alpha = \beta\gamma_1\gamma_2$, com β, γ_1 e γ_2 elementos de $\mathcal{OP}_{n,r}$ de característica igual a $k+1$, como pretendíamos. ∎

De seguida, seja $g_{n,r} = \left(\begin{array}{ccccc|ccc} 1 & 2 & \cdots & r-1 & r & r+1 & \cdots & n \\ 2 & 3 & \cdots & r & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{array}\right) \in \mathcal{OP}_{n,r}$. Assim, temos:

Lema 3.1.2 *Sejam α e β dois elementos $\mathcal{OP}_{n,r}$ de característica igual a r tais que* $\operatorname{Ker}(\beta) = \operatorname{Ker}(\alpha)$. *Então $\beta = \alpha g_{n,r}^k$, para algum $k \in \{0, \ldots, r-1\}$.*

Demonstração. Sejam $\alpha = \left(\begin{array}{c|c|c|c} I_1 & I_2 & \cdots & I_r \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_r \end{array}\right)$ e $\beta = \left(\begin{array}{c|c|c|c} I_1 & I_2 & \cdots & I_r \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_r \end{array}\right)$, onde I_1,I_2,...,I_r são as classes do núcleo de α e β tais que $\min I_i < \min I_{i+1}$, para $i = 1, \ldots, r-1$. Então, como $(a_1, a_2, \ldots, a_r)$ e $(b_1, b_2, \ldots, b_r)$ são dois r-ciclos de $\{1, \ldots, r\}$ formados por elementos distintos dois a dois, temos $(a_1, \ldots, a_r) = (i+1, \ldots, r, 1, \ldots, i)$ e $(b_1, \ldots, b_r) = (j+1, \ldots, r, 1, \ldots, j)$, para alguns $1 \leq i, j \leq r$. Donde

$$\alpha = \left(\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c} I_1 & I_2 & \cdots & I_{r-i} & I_{r-i+1} & I_{r-i+2} & \cdots & I_r \\ i+1 & i+2 & \cdots & r & 1 & 2 & \cdots & i \end{array}\right) \text{ e}$$

$$\beta = \left(\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c} I_1 & I_2 & \cdots & I_{r-j} & I_{r-j+1} & I_{r-j+2} & \cdots & I_r \\ j+1 & j+2 & \cdots & r & 1 & 2 & \cdots & j \end{array}\right).$$

Tomemos $k = j-i$, se $i \leq j$, e $k = r-i+j$, caso contrário. Temos então que $k \in \{0, \ldots, r-1\}$,

$$g_{n,r}^{j-i} = \left(\begin{array}{cccccccccc|ccc} 1 & 2 & \cdots & i & \cdots & r-j+i & r-j+i+1 & \cdots & r & & r+1 & \cdots & n \\ j-i+1 & j-i+2 & \cdots & j & \cdots & r & 1 & \cdots & j-i & & j-i & \cdots & j-i \end{array}\right)$$

$$\text{e} \quad g_{n,r}^{r-i+j} = \left(\begin{array}{ccccccccc|ccc} 1 & 2 & \cdots & i-j & i-j+1 & \cdots & i & \cdots & r & r+1 & \cdots & n \\ r-i+j+1 & r-i+j+2 & \cdots & r & 1 & \cdots & j & \cdots & r-i+j & r-i+j & \cdots & r-i+j \end{array}\right).$$

Além disso, é fácil ver que $\beta = \alpha g_{n,r}^{k}$, como queríamos demonstrar. ∎

Observemos que o número de núcleos distintos de transformações de $\mathcal{OP}_{n,r}$ de característica igual a r coincide com o número de núcleos distintos de transformações de $\mathcal{OP}_n$ de característica igual a r, os quais são precisamente $\binom{n}{r}$ (cf. Subsecção 1.4.2). Iremos agora provar o resultado anunciado.

Teorema 3.1.3 *O semigrupo $\mathcal{OP}_{n,r}$, para $2 \leq r \leq n-1$, é gerado por qualquer subconjunto de transformações de característica igual a r contendo $g_{n,r}$ e pelo menos um elemento de cada núcleo distinto. Além disso, $\mathcal{OP}_{n,r}$ tem característica igual a $\binom{n}{r}$.*

Demonstração. A partir do Lema 3.1.1, por indução na característica das transformações, podemos deduzir que $\mathcal{OP}_{n,r}$ é gerado pelos seus elementos de característica igual a r. Por outro lado, pelo Lema 3.1.2 concluímos que desses elementos apenas precisamos de $g_{n,r}$ e de um representante de cada núcleo distinto num conjunto gerador de $\mathcal{OP}_{n,r}$. Obtemos assim a primeira afirmação do teorema. Seja α é um elemento de $\mathcal{OP}_{n,r}$ de característica igual a

r. Sejam $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathcal{OP}_{n,r}$ tais que $\alpha = \alpha_1\alpha_2$. Então α_1 e α_2 têm característica igual a r e $\mathrm{Ker}(\alpha_1) = \mathrm{Ker}(\alpha)$. Assim, qualquer conjunto gerador de $\mathcal{OP}_{n,r}$ tem de conter pelo menos um elemento de cada núcleo distinto. Logo a característica de $\mathcal{OP}_{n,r}$ é igual ao número de núcleos distintos de transformações de $\mathcal{OP}_{n,r}$ de característica igual a r que, pelo que observámos acima, é $\binom{n}{r}$. ∎

Exemplo 3.1.4 As transformações

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix};\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix};\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix};\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix};$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix};\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix};\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix};\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 2 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix};$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix};\ g_{5,3};$$

geram o semigrupo $\mathcal{OP}_{5,3}$.

3.2 O produto em coroa

Nesta secção usamos o produto em coroa para caracterizar o monóide $\mathcal{OP}_{m\times n}$.

Sejam $m, n \geq 2$. Seja $\alpha \in \mathcal{T}_{m\times n}$ e tomemos $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m; \beta) = \alpha\psi \in \mathcal{T}_n^m \times \mathcal{T}^m$, onde ψ é o isomorfismo de $\mathcal{T}_{m\times n}$ em $\mathcal{T}_n \wr \mathcal{T}_m$ definido na Secção 1.5. Recordemos que sendo $A_i = \{(i-1)n+1, (i-1)n+2, \ldots, in\}$, para qualquer $i \in \{1, \ldots, m\}$, então $\{A_1, \ldots, A_m\}$ é uma partição uniforme de X_{mn}. Além disso, para cada $j \in \{1, \ldots, m\}$ temos $A_j\alpha \subseteq A_{j\beta}$ e

$$k\alpha_j = ((j-1)n + k)\alpha - (j\beta - 1)n, \tag{3.1}$$

para qualquer $k \in \{1, \ldots, n\}$.

Observemos que, de (3.1), resulta

$$k\alpha_j < \ell\alpha_j \text{ se e só se } ((j-1)n + k)\alpha < ((j-1)n + \ell)\alpha, \tag{3.2}$$

para quaisquer $1 \leq k, \ell \leq n$ e $j \in \{1, \ldots, m\}$. Além disso, se para algum $j \in \{1, \ldots, m-1\}$, $j\beta = (j+1)\beta$, então

$$n\alpha_j < 1\alpha_{j+1} \text{ se e só se } (jn)\alpha < (jn+1)\alpha. \tag{3.3}$$

Ainda, se $m\beta = 1\beta$, então

$$n\alpha_m < 1\alpha_1 \text{ se e só se } (mn)\alpha < 1\alpha. \tag{3.4}$$

Admitamos agora que a transformação α preserva a orientação. Então:

1. $1\alpha \leq \cdots \leq (mn)\alpha$; ou

2. $(r+1)\alpha \leq \cdots \leq (mn)\alpha \leq 1\alpha \leq \cdots \leq r\alpha$ e $r\alpha > (r+1)\alpha$, para certo $r \in \{1,\ldots,mn-1\}$.

No primeiro caso (notemos que α é crescente), temos que $\alpha_j \in \mathcal{O}_n$, para qualquer $j \in \{1,\ldots,m\}$. Suponhamos agora que α satisfaz a segunda condição. Se $r \in A_j \setminus \{jn\}$, para algum $j \in \{1,\ldots,m\}$, então $\alpha_j \in \mathcal{OP}_n \setminus \mathcal{O}_n$ e $\alpha_i \in \mathcal{O}_n$, para qualquer $i \in \{1,\ldots,m\} \setminus \{j\}$. Além disso, $\mathrm{Im}(\alpha) \subseteq A_j\alpha$, donde β é constante. Caso contrário, (i.e. $r = jn$, para algum $j \in \{1,\ldots,m-1\}$), temos claramente $\alpha_i \in \mathcal{O}_n$, para qualquer $i \in \{1,\ldots,m\}$.

Por outro lado, ainda como consequência de (3.1), se $(in)\alpha \leq (jn)\alpha$ então $i\beta \leq j\beta$, para quaisquer $1 \leq i,j \leq m$. De facto, suponhamos que $i\beta > j\beta$, para certos $1 \leq i,j \leq m$. Então, $i\beta = j\beta + t$, para algum $t \geq 1$, e assim $(i\beta)n = (j\beta)n + tn$. Donde

$$\begin{aligned}(in)\alpha = ((i-1)n+n)\alpha = n\alpha_i + (i\beta-1)n = n\alpha_i + (j\beta-1)n + tn \\ > n\alpha_j + (j\beta-1)n = ((j-1)n+n)\alpha = (jn)\alpha,\end{aligned}$$

como pretendíamos. Se α é uma transformação que preserva a orientação então, como qualquer subsequência de uma sequência cíclica também é cíclica (cf. Subsecção 1.4.2), a sequência $(n\alpha, (2n)\alpha, \ldots, (mn)\alpha)$ é cíclica e assim, pelo que observamos atrás, a sequência $(1\beta, 2\beta, \ldots, m\beta)$ também é cíclica, i.e. $\beta \in \mathcal{OP}_m$.

Relembremos que foi mostrado na Proposição 2.1.1, que

$$\mathcal{O}_{m\times n}\psi = \{(\alpha_1,\ldots,\alpha_m;\beta) \in \mathcal{O}_n^m \times \mathcal{O}_m \mid \begin{array}{l} j\beta = (j+1)\beta \text{ implica } n\alpha_j \leq 1\alpha_{j+1}, \\ \text{para todo o } j \in \{1,\ldots,m-1\}\}. \end{array} \tag{3.5}$$

Considerando a adição módulo m (em particular, $m+1=1$), para $\mathcal{OP}_{m\times n}$, temos:

Proposição 3.2.1 *Um $(m+1)$-uplo $(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m;\beta)$ de $\mathcal{T}_n^m \times \mathcal{T}_m$ pertence a $\mathcal{OP}_{m\times n}\psi$ se e só se satisfaz uma das três condições seguintes:*

1. *β é uma transformação não constante de $\mathcal{OP}_m$,*

   para qualquer $i \in \{1,\ldots,m\}$, $\alpha_i \in \mathcal{O}_n$ e,

   para qualquer $j \in \{1,\ldots,m\}$, $j\beta = (j+1)\beta$ implica $n\alpha_j \leq 1\alpha_{j+1}$;

2. *β é uma transformação constante,*

   para qualquer $i \in \{1,\ldots,m\}$, $\alpha_i \in \mathcal{O}_n$ e

   existe quanto muito um índice $j \in \{1,\ldots,m\}$ tal que $n\alpha_j > 1\alpha_{j+1}$;

3. *β é uma transformação constante,*

   existe um índice $i \in \{1,\ldots,m\}$ tal que $\alpha_i \in \mathcal{OP}_n \setminus \mathcal{O}_n$ e,

   para qualquer $j \in \{1,\ldots,m\} \setminus \{i\}$, $\alpha_j \in \mathcal{O}_n$ e,

   para qualquer $j \in \{1,\ldots,m\}$, $n\alpha_j \leq 1\alpha_{j+1}$.

Demonstração. Começamos por supor que o $(m+1)$-uplo $(\alpha_1, \dots, \alpha_m; \beta)$ satisfaz 1, 2 ou 3. Então, sendo $\alpha \in \mathcal{T}_{m\times n}$ tal que $\alpha\psi = (\alpha_1, \dots, \alpha_m; \beta)$, vamos mostrar que $\alpha \in \mathcal{OP}_{m\times n}$.

CASO 1. Suponhamos que a afirmação 1 da proposição é satisfeita. Então, como $\beta \in \mathcal{OP}_n$, temos $(j+1)\beta \le \cdots \le m\beta \le 1\beta \le \cdots \le j\beta$, para certo $j \in \{1, \dots, m\}$ (recordemos que estamos a considerar a adição módulo m e assim $m+1 = 1$). Dado que $\alpha_i \in \mathcal{O}_n$, para qualquer $i \in \{1, \dots, m\}$, então $1\alpha_i \le 2\alpha_i \le \cdots \le n\alpha_i$, para qualquer $i \in \{1, \dots, m\}$. Atendendo a (3.2) temos que $((i-1)n+1)\alpha \le ((i-1)n+2)\alpha \le \cdots \le (in)\alpha$, para qualquer $i \in \{1, \dots, m\}$. Por outro lado, para cada $i \in \{1, \dots, m\} \setminus \{j\}$ temos $i\beta \le (i+1)\beta$. Se $i\beta < (i+1)\beta$, como $(in)\alpha \in A_{i\beta}$ e $(in+1)\alpha \in A_{(i+1)\beta}$, então $(in)\alpha < (in+1)\alpha$. Se $i\beta = (i+1)\beta$ então $n\alpha_i \le 1\alpha_{i+1}$ e assim por (3.3), no caso de $i < m$, e por (3.4), no caso de $i = m$, obtemos $(in)\alpha \le (in+1)\alpha$. Concluímos que,

$$(jn+1)\alpha \le \cdots \le ((j+1)n)\alpha \le ((j+1)n+1)\alpha \le \cdots \le (mn)\alpha \le 1\alpha \le \cdots \le (jn)\alpha.$$

Donde, $\alpha \in \mathcal{OP}_{m\times n}$.

CASO 2. Suponhamos agora que a afirmação 2 é verdadeira. Então β é constante. Começamos por observar que, se $n\alpha_j \le 1\alpha_{j+1}$, para qualquer $j \in \{1, \dots, m\}$, então α é constante. De facto, dado que, para qualquer $i \in \{1, \dots, m\}$, temos $\alpha_i \in \mathcal{O}_n$, se $n\alpha_j \le 1\alpha_{j+1}$, para qualquer $j \in \{1, \dots, m\}$, obtemos $1\alpha_1 \le 2\alpha_1 \le \cdots \le n\alpha_1 \le 1\alpha_2 \le \cdots \le n\alpha_m \le 1\alpha_1$ e assim $1\alpha_1 = 2\alpha_1 = \cdots = n\alpha_1 = 1\alpha_2 = \cdots = n\alpha_m = 1\alpha_1$. Donde α é constante. Seja $j \in \{1, \dots, m\}$ tal que $n\alpha_j > 1\alpha_{j+1}$. Temos que $1\alpha_{j+1} \le \ldots \le n\alpha_{j+1} \le 1\alpha_{j+2} \le \ldots \le n\alpha_j$. Por (3.2), (3.3) e (3.4) obtemos

$$(jn+1)\alpha \le \cdots \le ((j+1)n)\alpha \le ((j+1)n+1)\alpha \le \cdots \le (mn)\alpha \le 1\alpha \le \cdots \le (jn)\alpha.$$

Logo, $\alpha \in \mathcal{OP}_{m\times n}$.

CASO 3. Finalmente, suponhamos que a afirmação 3 é verdadeira. Temos mais uma vez que β é constante. Seja $i \in \{1, \dots, m\}$ tal que $\alpha_i \in \mathcal{OP}_n \setminus \mathcal{O}_n$. Então, para qualquer $j \in \{1, \dots, m\} \setminus \{i\}$, $\alpha_j \in \mathcal{O}_n$ e, para qualquer $j \in \{1, \dots, m\}$, $n\alpha_j \le 1\alpha_{j+1}$. Logo $(r+1)\alpha_i \le \cdots \le n\alpha_i \le 1\alpha_{i+1} \le \cdots \le n\alpha_m \le 1\alpha_1 \le \cdots \le r\alpha_i$, com $r\alpha_i > (r+1)\alpha_i$, para certo $r \in \{1, \dots, n\}$. Em termos de α, atendendo a (3.2), (3.3) e (3.4), concluímos que

$$((i-1)n+r+1)\alpha \le \cdots \le (in)\alpha \le (in+1)\alpha \le \cdots \le (mn)\alpha \le 1\alpha \le \cdots \le ((i-1)n+r)\alpha,$$

ou seja, $\alpha \in \mathcal{OP}_{m\times n}$.

Reciprocamente, seja $\alpha \in \mathcal{OP}_{m\times n}$ tal que $\overline{\alpha} = \alpha\psi = (\alpha_1, \dots, \alpha_m; \beta)$.

Se α é crescente então, por (3.5), $(\alpha_1, \dots, \alpha_m; \beta) \in \mathcal{O}_n^m \times \mathcal{O}_m$ e, para qualquer $1 \le j \le m-1$, $j\beta = (j+1)\beta$ implica $n\alpha_j \le 1\alpha_{j+1}$. Além disso temos que $n\alpha_m \ge 1\alpha_1$. Se β não é constante, então $m\beta \ne 1\beta$ e assim o $(m+1)$-uplo $\overline{\alpha}$ satisfaz 1. Caso contrário, $\overline{\alpha}$ satisfaz 2.

Por outro lado, suponhamos que $(r+1)\alpha \le \cdots \le (mn)\alpha \le 1\alpha \le \cdots \le r\alpha$ e $r\alpha > (r+1)\alpha$, para algum $r \in \{1, \dots, mn-1\}$. Se $r \in A_j \setminus \{jn\}$, para algum $j \in \{1, \dots, m\}$, então $\alpha_j \in$

$\mathcal{OP}_n \setminus \mathcal{O}_n$ e $\alpha_i \in \mathcal{O}_n$, para qualquer $i \in \{1, \ldots, m\} \setminus \{j\}$. Além disso, $r\alpha, (r+1)\alpha \in A_j\alpha$, pelo que $\mathrm{Im}(\alpha) \subseteq A_j\alpha$, donde β é constante. Neste caso, concluímos que $\overline{\alpha}$ satisfaz 3. Se $r = jn$, para algum $j \in \{1, \ldots, m-1\}$, temos $\alpha_i \in \mathcal{O}_n$, para qualquer $i \in \{1, \ldots, m\}$. Logo, se β é constante então $n\alpha_j > 1\alpha_{j+1}$ e, por (3.3) e (3.4), para qualquer $i \in \{1, \ldots, m\} \setminus \{j\}$, temos $n\alpha_i \leq 1\alpha_{i+1}$. Portanto, $\overline{\alpha}$ satisfaz 2. Caso contrário, como observámos atrás, $\beta \in \mathcal{OP}_m$. Para qualquer $i \in \{1, \ldots, m\}$, se $i\beta = (i+1)\beta$, por (3.3) e (3.4), temos que $n\alpha_i \leq 1\alpha_{i+1}$. Donde, $\overline{\alpha}$ satisfaz 1. ■

Seja $\alpha \in \mathcal{OP}_{m\times n}$. Para $i \in \{1, 2, 3\}$, dizemos que α e $\alpha\psi$ são do *tipo* i se $\alpha\psi$ satisfaz a condição i da proposição anterior. Relembremos que, se $(\alpha_1, \ldots, \alpha_m; \beta) = \alpha\psi$ é do tipo 2 e, para qualquer $j \in \{1, \ldots, m\}$, $n\alpha_j \leq 1\alpha_{j+1}$, então α tem de ser uma transformação constante.

Além disso, como claramente o produto de $(m+1)$-uplos dos tipos 1 ou 2 [respectivamente, 2 ou 3] não pode ser um $(m+1)$-uplo do tipo 3 [respectivamente, 1], então o subconjunto $\overline{M}$ [respectivamente, $\overline{N}$] de $\mathcal{OP}_{m\times n}\psi$ de todos os $(m+1)$-uplos dos tipos 1 ou 2 [respectivamente, 2 ou 3] é um submonóide [respectivamente, subsemigrupo] de $\mathcal{OP}_{m\times n}\psi$.

Seja $M = \overline{M}\psi^{-1}$. Então M é o submonóide de $\mathcal{OP}_{m\times n}$ cujos elementos são as transformações crescentes juntamente com as transformações $\alpha \in \mathcal{OP}_{m\times n}$ tais que $(jn+1)\alpha \leq \cdots \leq (mn)\alpha \leq 1\alpha \leq \cdots \leq (jn)\alpha$ e $(jn)\alpha > (jn+1)\alpha$, para algum $j \in \{1, \ldots, m-1\}$. Em particular, M contém $\mathcal{O}_{m\times n}$.

Relembremos que, sendo g_n o n-ciclo $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n-1 & n \\ 2 & 3 & \cdots & n & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{OP}_n$ (designado por g na Subsecção 1.4.2), cada elemento $s \in \mathcal{OP}_n$ admite a factorização $s = g_n^j u$, com $0 \leq j \leq n-1$ e $u \in \mathcal{O}_n$, que é única a menos que s seja constante (cf. Subsecção 1.4.2).

Terminamos esta secção com dois lemas que serão úteis nas Secções 3.3 e 3.4.

Consideremos as permutações (de $\{1, \ldots, mn\}$)

$$g = g_{mn} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & mn-1 & mn \\ 2 & 3 & \cdots & mn & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{OP}_{mn} \quad \text{e}$$

$$f = g^n = \left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 1 & \cdots & n & n+1 & \cdots & mn-n & mn-n+1 & \cdots & mn \\ n+1 & \cdots & 2n & 2n+1 & \cdots & mn & 1 & \cdots & n \end{array}\right) \in \mathcal{OP}_{m\times n}.$$

Seja $\alpha \in M \setminus \mathcal{O}_{m\times n}$ e tomemos $j \in \{1, \ldots, m-1\}$ tal que $(jn)\alpha > (jn+1)\alpha$. Então, como $(jn+1)\alpha \leq \cdots \leq (mn)\alpha \leq 1\alpha \leq \cdots \leq (jn)\alpha$, é claro que $f^j\alpha \in \mathcal{O}_{m\times n}$. Assim, temos:

Lema 3.2.2 *Cada elemento $\alpha \in M$ admite uma factorização $\alpha = f^j\gamma$, com $0 \leq j \leq m-1$ e $\gamma \in \mathcal{O}_{m\times n}$, a qual é única a menos que α seja constante. Em particular, o monóide M é gerado por $\mathcal{O}_{m\times n}$ e f.* ■

Observemos que, a unicidade afirmada no lema anterior é consequência imediata do facto de f ser uma potência de g e do resultado mencionado atrás.

Seja $N = \overline{N}\psi^{-1}$. Temos que N é o subsemigrupo de $\mathcal{OP}_{m\times n}$ cujos elementos são as transformações $\alpha \in \mathcal{OP}_{m\times n}$ tais que $\mathrm{Im}(\alpha) \subseteq A_j$, para algum $j \in \{1,\dots,m\}$.

O resultado que apresentamos a seguir justifica o estudo feito na secção anterior. Assim, comecemos por observar que $\mathcal{OP}_{mn,n}$ é um subsemigrupo de N. Para $j \in \{1,\dots,m\}$, seja $\overline{\nu}_j = (1,\gamma_2,\dots,\gamma_m;\beta_j)$, sendo $\gamma_2 = \cdots = \gamma_m = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & n \\ n & \cdots & n \end{pmatrix}$ e $\beta_j = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & m \\ j & \cdots & j \end{pmatrix}$. Então $\overline{\nu}_j \in \overline{N}$, para qualquer $j \in \{1,\dots,m\}$. Seguidamente, seja $\overline{\alpha} = (\alpha_1,\dots,\alpha_m;\beta_j) \in \overline{N}$, com $j \in \{1,\dots,m\}$. Logo $\overline{\gamma} = (\alpha_1,\dots,\alpha_m;\beta_1) \in \mathcal{OP}_{mn,n}\psi$ e $\overline{\alpha} = \overline{\gamma}\,\overline{\nu}_j$. Por outro lado, notando que $f\psi = (1,\dots,1;g_m)$, também temos que $\overline{\alpha}(f\psi)^{m-j+1} = \overline{\gamma}$, i.e. $\overline{\alpha} = \overline{\gamma}(f\psi)^{j-1}$.

Assim, sendo ν_j o elemento de N tal que $\nu_j\psi = \overline{\nu}_j$, com $j \in \{1,\dots,m\}$, temos:

Lema 3.2.3 *O semigrupo N é gerado por $\mathcal{OP}_{mn,n} \cup \{\nu_2,\dots,\nu_m\}$. Além disso, todo o elemento de N é um produto de um elemento de $\mathcal{OP}_{mn,n}$ por uma potência de f.* ∎

3.3 Cardinais

Nesta secção, obtemos os cardinais de $\mathcal{OP}_{m\times n}$ e $\mathcal{OR}_{m\times n}$.

Para contarmos o número de elementos do monóide $\mathcal{OP}_{m\times n}$, começamos por recordar que acabámos de ver no Lema 3.2.2 que cada elemento α pertencente a M admite uma factorização $\alpha = f^j\gamma$, com $0 \le j \le m-1$ e $\gamma \in \mathcal{O}_{m\times n}$, que é única a menos que α seja constante. Donde temos precisamente $m(|\mathcal{O}_{m\times n}|-mn)$ transformações não constantes de M e mn transformações constantes (estas últimas são elementos do tipo 2 de $\mathcal{OP}_{m\times n}$).

Seja α uma transformação de $\mathcal{OP}_{m\times n}$ do tipo 3. Como α não é constante, pode ser factorizada de maneira única como $g^r\gamma$, para algum $r \in \{0,\dots,mn-1\} \setminus \{jn \mid 0 \le j \le m-1\}$ e alguma transformação crescente não constante γ de $\{1,\dots,mn\}$ em A_i, para certo $1 \le i \le m$. Como apenas os elementos de $\mathcal{OP}_{m\times n}$ do tipo 3 admitem factorizações desta forma e o número de sequências crescentes não constantes de comprimento mn de uma cadeia com n elementos é igual a $\binom{mn+n-1}{n-1} - n$, temos precisamente $m(mn-m)\left(\binom{mn+n-1}{n-1} - n\right)$ elementos do tipo 3 em $\mathcal{OP}_{m\times n}$. Então $|\mathcal{OP}_{m\times n}| = m|\mathcal{O}_{m\times n}| + m^2(n-1)\binom{mn+n-1}{n-1} - mn(mn-1)$ e assim, tendo em conta o Teorema 2.2.1, obtemos o teorema seguinte.

Teorema 3.3.1 *Para $m, n \ge 2$ temos*

$$|\mathcal{OP}_{m\times n}| = m \sum_{\substack{1\le k_1,\dots,k_t\le m \\ k_1+\cdots+k_t=m \\ 1\le t\le m}} \binom{m}{t} \prod_{i=1}^{t} \binom{k_i n + n - 1}{n-1} + m^2(n-1)\binom{mn+n-1}{n-1} - mn(mn-1).$$

∎

Segue-se uma tabela com os cardinais do monóide $\mathcal{OP}_{m\times n}$ para alguns valores de m e n.

$m \setminus n$	1	2	3	4	5	6
1	1	4	24	128	610	2742
2	4	46	506	5034	51682	575268
3	24	447	9453	248823	8445606	349109532
4	128	4324	223852	17184076	1819339324	247307947608
5	610	42075	5555990	1207660095	387720453255	170017607919290
6	2742	405828	136530144	83547682248	81341248206546	114804703283314542

Terminamos esta secção calculando o cardinal do monóide $\mathcal{OR}_{m\times n}$. Notemos que, assim como entre $\mathcal{OD}_{m\times n}$ e $\mathcal{O}_{m\times n}$, temos uma relação semelhante entre $\mathcal{OR}_{m\times n}$ e $\mathcal{OP}_{m\times n}$. De facto, $\alpha \in \mathcal{OR}_{m\times n}$ se e só se $\alpha \in \mathcal{OP}_{m\times n}$ ou $h\alpha \in \mathcal{OP}_{m\times n}$. Visto que $|\mathcal{OP}_{m\times n}| = |h\mathcal{OP}_{m\times n}|$ e $\mathcal{OP}_{m\times n} \cap h\mathcal{OP}_{m\times n} = \{\alpha \in \mathcal{OP}_{m\times n} \mid |\operatorname{Im}(\alpha)| \leq 2\}$, temos

$$|\mathcal{OR}_{m\times n}| = 2|\mathcal{OP}_{m\times n}| - |\{\alpha \in \mathcal{OP}_{m\times n} \mid |\operatorname{Im}(\alpha)| = 2\}| - mn.$$

Resta-nos calcular o número de elementos de $A = \{\alpha \in \mathcal{OP}_{m\times n} \mid |\operatorname{Im}(\alpha)| = 2\}$.

Primeiro, contamos o número de elementos de A pertencentes a N. Seja α uma tal transformação. Então, existe $k \in \{1, \ldots, m\}$ tal que $|\operatorname{Im}(\alpha)| \subseteq A_k$. Claramente, neste caso, o número de núcleos distintos permitidos para α coincide com o número de núcleos distintos permitidos para transformações de $\mathcal{OP}_{mn}$ de característica 2, ou seja $\binom{mn}{2}$, como recordado na Secção 3.1. Por outro lado, é fácil verificar que temos $m\binom{n}{2}$ imagens distintas para α. Além disso, para cada um deste núcleos e imagens possíveis, temos duas transformações distintas de A. Assim, o número total de elementos de A pertencentes a N é precisamente $2m\binom{n}{2}\binom{mn}{2}$.

Finalmente, determinamos o número de elementos de A do tipo 1. Seja $\alpha \in A$ do tipo 1 e suponhamos que $\alpha\psi = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m; \beta)$. Então β tem característica 2 e assim, como $\beta \in \mathcal{OP}_m$, temos $2\binom{m}{2}^2$ possibilidades distintas para β (ver Subsecção 1.4.2). Além disso, para cada $1 \leq i \leq m$, α_i tem de ser uma transformação constante de $\mathcal{O}_n$ e, para $1 \leq i, j \leq m$, se $i\beta = j\beta$ então $\alpha_i = \alpha_j$. Logo, para um β fixo, como β tem característica 2, temos precisamente n^2 sequências $(\alpha_1, \ldots, \alpha_m; \beta)$ permitidas. Donde, A tem $2n^2\binom{m}{2}^2$ elementos distintos do tipo 1.

Portanto,

$$\begin{aligned} |\mathcal{OR}_{m\times n}| &= 2|\mathcal{OP}_{m\times n}| - 2m\tbinom{n}{2}\tbinom{mn}{2} - 2n^2\tbinom{m}{2}^2 - mn \\ &= 2m|\mathcal{O}_{m\times n}| + 2m^2(n-1)\tbinom{mn+n-1}{n-1} - 2m\tbinom{n}{2}\tbinom{mn}{2} - 2n^2\tbinom{m}{2}^2 - mn(2mn-1). \end{aligned}$$

Atendendo mais uma vez ao Teorema 2.2.1 concluímos o seguinte resultado.

Teorema 3.3.2 *Para $m, n \geq 2$ temos*

$$\begin{aligned} |\mathcal{OR}_{m\times n}| = \; & 2m \sum_{\substack{1\leq k_1,\ldots,k_t\leq m \\ k_1+\cdots+k_t=m \\ 1\leq t\leq m}} \tbinom{m}{t} \prod_{i=1}^{t} \tbinom{k_i n+n-1}{n-1} + \\ & +2m^2(n-1)\tbinom{mn+n-1}{n-1} - 2m\tbinom{n}{2}\tbinom{mn}{2} - 2n^2\tbinom{m}{2}^2 - mn(2mn-1). \end{aligned}$$

■

3.4 Características

Esta é a secção na qual determinamos, para $m, n \geq 2$, as características dos monóides $\mathcal{OP}_{m\times n}$ e $\mathcal{OR}_{m\times n}$.

Para cada $j \in \{1, \ldots, n-1\}$, seja

$$p_j = \left(\begin{array}{ccccccc|ccc|cccccc} 1 & 2 & \cdots & n-j & n-j+1 & \cdots & n & n+1 & \cdots & (m-1)n & (m-1)n+1 & \cdots & mn-j & mn-j+1 & \cdots & mn \\ j+1 & j+2 & \cdots & n & 1 & \cdots & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & \cdots & 1 & 2 & \cdots & j+1 \end{array}\right) \in \mathcal{OP}_{mn,n}.$$

Observemos que

$$p_1^i = \left(\begin{array}{cccccc|ccc|cccc} 1 & \cdots & n-i & n-i+1 & \cdots & n & n+1 & \cdots & (m-1)n & (m-1)n+1 & \cdots & mn-1 & mn \\ i+1 & \cdots & n & 1 & \cdots & i & i & \cdots & i & i & \cdots & i & i+1 \end{array}\right),$$

para qualquer $i \in \{1, \ldots, n-1\}$, e que

$$p_1^n = \left(\begin{array}{ccc|ccc|cccc} 1 & \cdots & n & n+1 & \cdots & (m-1)n & (m-1)n+1 & \cdots & mn-1 & mn \\ 1 & \cdots & n & n & \cdots & n & n & \cdots & n & 1 \end{array}\right)$$

é uma identidade direita de $\mathcal{OP}_{mn,n}$.

Lema 3.4.1 *Qualquer transformação do semigrupo $\mathcal{OP}_{mn,n}$ é um produto de elementos do conjunto $M \cup \{p_j \mid 1 \leq j \leq \lceil \frac{n-1}{2} \rceil\}$.*

Demonstração. Pelo Teorema 3.1.3, é suficiente considerar apenas transformações de $\mathcal{OP}_{mn,n}$ com característica igual a n. Seja γ uma tal transformação.

PASSO 1. Sejam $i = 1\gamma$ e $\alpha = \gamma p_1^{n-i+1}$. Então, $1\alpha = 1\gamma p_1^{n-i+1} = ip_1^{n-i+1} = 1$ e $\gamma = \alpha p_1^{n+i-1}$. Se $\alpha \in M$ então γ satisfaz a afirmação do lema.

Suponhamos que $\alpha \notin M$. Temos que $(mn)\alpha = 1$ (caso contrário $(mn)\alpha = n$, donde $\alpha \in \mathcal{O}_{mn}$ e assim $\alpha \in M$). Seja $r \in \{1, \ldots, mn\}$ o menor inteiro tal que $\{r, \ldots, mn\}\alpha = \{1\}$. Como α também tem característica igual a n e $1\alpha = 1$, então $r \geq n+1$. Portanto, $r = (t-1)n + k + 1$, para certos $t \in \{2, \ldots, m\}$ e $k \in \{1, \ldots, n-1\}$ (observemos que, se $k = 0$ então $\alpha \in M$).

Seja $j = ((t-1)n)\alpha - 1$ (notemos que $0 \leq j \leq n-1$). Se $j = 0$ então

$$\alpha = \left(\begin{array}{ccc|cccc|ccc} 1 & \cdots & (t-1)n & (t-1)n+1 & \cdots & tn-1 & tn & tn+1 & \cdots & mn \\ 1 & \cdots & 1 & 2 & \cdots & n & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{array}\right),$$

donde

$$\alpha p_1^{n-1} = \left(\begin{array}{ccc|cccc|ccc} 1 & \cdots & (t-1)n & (t-1)n+1 & \cdots & tn-1 & tn & tn+1 & \cdots & mn \\ n & \cdots & n & 1 & \cdots & n-1 & n & n & \cdots & n \end{array}\right) \in M$$

e assim, como $\gamma = \alpha p_1^{n+i-1} = (\alpha p_1^{n-1})p_1^i$, neste caso γ também satisfaz a afirmação do lema. Por outro lado, se $j \geq 1$, seja $\beta \in \mathcal{T}_{mn}$ definida por

$$x\beta = \begin{cases} mn-(j+1-x\alpha) & \text{se } 1 \leq x \leq (t-1)n \\ x\alpha - j & \text{se } (t-1)n+1 \leq x \leq (t-1)n+k \\ n & \text{se } (t-1)n+k+1 \leq x \leq mn. \end{cases}$$

Então, $\beta \in M$ e $\alpha = \beta p_j$.

PASSO 2. De forma a nos descartarmos das transformações p_ℓ, com $\ell > \lceil \frac{n-1}{2} \rceil$, para um dado $j \in \{1,\dots,n-1\}$, repetimos o PASSO 1 considerando, em particular, $\gamma = p_j$. Como $1p_j = j+1$, tomamos

$$\alpha_j = p_j p_1^{n-(j+1)+1} = p_j p_1^{n-j} = \left(\begin{array}{ccccccc|ccc} 1 & \cdots & n-j & n-j+1 & \cdots & n & & n+1 & \cdots \\ 1 & \cdots & n-j & n-j+1 & \cdots & n-j+1 & & n-j+1 & \cdots \end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{cc|cccccccc} \cdots & (m-1)n & (m-1)n+1 & \cdots & mn-j & mn-j+1 & \cdots & mn-1 & mn \\ \cdots & n-j+1 & n-j+1 & \cdots & n-j+1 & n-j+2 & \cdots & n & 1 \end{array}\right).$$

Observemos que $\alpha_j \notin M$. Pelo PASSO 1, existe $\beta_j \in M$ tal que $\alpha_j = \beta_j p_{(n-j+1)-1} = \beta_j p_{n-j}$. Logo, $p_j = \alpha_j p_1^j = \beta_j p_{n-j} p_1^j$, para algum $\beta_j \in M$.

Finalmente, notando que $\lceil \frac{n-1}{2} \rceil < j \leq n-1$ implica $1 \leq n-j \leq \lceil \frac{n-1}{2} \rceil$, podemos deduzir que qualquer transformação de $\mathcal{OP}_{mn,n}$ com característica igual a n é um produto de elementos de $M \cup \{p_j \mid 1 \leq j \leq \lceil \frac{n-1}{2} \rceil\}$, como queríamos demonstrar. ∎

Provámos na Proposição 2.3.6 que o conjunto

$$\{c_i, b_{i,j}, s_{k,n}, t_{k,\ell} \mid 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n-1, 1 \leq k \leq m-1, 2 \leq \ell \leq n\}$$

é um conjunto gerador para o monóide $\mathcal{O}_{m\times n}$. Por outro lado, atendendo a que

$$f^{m-i+1} = \left(\begin{array}{ccc|c|ccc|} 1 & \cdots & n & \cdots & (i-2)n+1 & \cdots & (i-1)n \\ (m-i+1)n+1 & \cdots & (m-i+2)n & \cdots & (mn-1)n+1 & \cdots & mn \end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{|ccc|c|ccc} (i-1)n+1 & \cdots & in & \cdots & (mn-1)n+1 & \cdots & mn \\ 1 & \cdots & n & \cdots & (m-i)n+1 & \cdots & (m-i+1)n \end{array}\right)$$

e

$$\text{e } f^{i-1} = \left(\begin{array}{ccc|c|ccc|} 1 & \cdots & n & \cdots & (m-i)n+1 & \cdots & (m-i+1)n \\ (i-1)n+1 & \cdots & in & \cdots & (mn-1)n+1 & \cdots & mn \end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{|ccc|c|ccc} (m-i+1)n+1 & \cdots & (m-i+2)n & \cdots & (mn-1)n+1 & \cdots & mn \\ 1 & \cdots & n & \cdots & (i-2)n+1 & \cdots & (i-1)n \end{array}\right),$$

é uma questão de rotina mostrar que:

1. $c_i = f^{m-i+1} c_1 f^{i-1}$, para qualquer $2 \leq i \leq m$;

2. $b_{i,j} = f^{m-i+1} b_{1,j} f^{i-1}$, para qualquer $2 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq n-1$;

3. $s_{i,n} = f^{m-i+1} s_{1,n} f^{i-1}$, para qualquer $2 \leq i \leq m-1$; e

4. $t_{i,j} = f^{m-i+1} t_{1,j} f^{i-1}$, para qualquer $2 \leq i \leq m-1$ e $2 \leq j \leq n$.

Estas observações combinadas com a Proposição 2.3.6 e os Lemas 3.2.2, 3.2.3 e 3.4.1, permitem-nos deduzir o seguinte resultado.

Proposição 3.4.2 *Para $m, n \geq 2$, $A = \{f, c_1, b_{1,1} \ldots, b_{1,n-1}, s_{1,n}, t_{1,2} \ldots, t_{1,n}, p_1, \ldots, p_{\lceil \frac{n-1}{2} \rceil}\}$ é um conjunto gerador, com $2n + \lceil \frac{n-1}{2} \rceil + 1$ elementos, do monóide $\mathcal{OP}_{m\times n}$.* ∎

Exemplo 3.4.3 O monóide $\mathcal{OP}_{3\times 4}$ é gerado pelas transformações seguintes:

$$f = \left(\begin{array}{cccc|cccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{array}\right);$$
$$c_1 = \left(\begin{array}{cccc|cccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \end{array}\right);$$
$$b_{1,1} = \left(\begin{array}{cccc|cccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 2 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \end{array}\right);$$
$$b_{1,2} = \left(\begin{array}{cccc|cccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 1 & 3 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \end{array}\right);$$
$$b_{1,3} = \left(\begin{array}{cccc|cccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 1 & 2 & 4 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \end{array}\right);$$
$$s_{1,4} = \left(\begin{array}{cccc|cccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 3 & 4 & 9 & 10 & 11 & 12 \end{array}\right);$$
$$t_{1,2} = \left(\begin{array}{cccc|cccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 5 & 5 & 5 & 6 & 6 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \end{array}\right);$$
$$t_{1,3} = \left(\begin{array}{cccc|cccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 5 & 5 & 6 & 7 & 7 & 7 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \end{array}\right);$$
$$t_{1,4} = \left(\begin{array}{cccc|cccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \end{array}\right);$$
$$p_1 = \left(\begin{array}{cccc|cccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right);$$
$$p_2 = \left(\begin{array}{cccc|cccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 3 & 4 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right).$$

A série de lemas que se segue vão possibilitar-nos concluir que, para $m > 2$, A é um conjunto gerador de cardinal mínimo de $\mathcal{OP}_{m\times n}$ e que A contém um conjunto gerador de cardinal mínimo de $\mathcal{OP}_{2\times n}$.

Lema 3.4.4 *Qualquer conjunto gerador de $\mathcal{OP}_{m\times n}$ contém pelo menos um elemento de característica igual a mn diferente da identidade e n elementos distintos de característica igual a $mn-1$.*

Demonstração. Seja X um conjunto gerador de $\mathcal{OP}_{m\times n}$.

Uma vez que o grupo das unidades de $\mathcal{OP}_{m\times n}$ é gerado pela permutação $f = g^n$ de ordem m (cf. Secção 1.4.5), naturalmente X precisa conter um elemento de característica igual a mn, diferente da identidade.

Por outro lado, sejam $\xi_1, \ldots, \xi_k$ todos os elementos de X de característica igual a $mn-1$. Então, $k \geq 1$ e qualquer elemento de $\mathcal{OP}_{m\times n}$ de característica igual a $mn-1$ é da forma $\alpha\xi_j f^i$, para certos $j \in \{1,\ldots,k\}$, $i \in \{0,\ldots,m-1\}$ e $\alpha \in \mathcal{OP}_{m\times n}$. Como os elementos de característica igual a $mn-1$ da forma anterior não podem ter mais do que mk imagens distintas e, por outro lado, temos precisamente mn imagens distintas possíveis para um elemento de $\mathcal{OP}_{m\times n}$ de característica igual a $mn-1$, deduzimos que $mn \leq mk$ e assim $k \geq n$. ∎

Lema 3.4.5 *Para $m > 2$, qualquer conjunto gerador de $\mathcal{OP}_{m\times n}$ contém pelo menos n elementos distintos de característica igual a $(m-1)n$.*

Demonstração. Sejam

$$T_j = \{\alpha \in \mathcal{OP}_{m\times n} \mid |\operatorname{Im}(\alpha)| = (m-1)n \text{ e } (kn)\alpha = (kn+1)\alpha = (i-1)n+j, \\ \text{para certos } 1 \leq i,k \leq m\},$$

com $j \in \{1,\ldots,n\}$. É fácil mostrar que $T_1,\ldots,T_n$ são n subconjuntos não vazios, disjuntos dois a dois, de elementos de característica igual a $(m-1)n$ de $\mathcal{OP}_{m\times n}$.

Seja $j \in \{1,\ldots,n\}$ e tomemos $\alpha \in T_j$. Sejam $i,k \in \{1,\ldots,m\}$ tais que $(kn)\alpha = (kn+1)\alpha = (i-1)n+j$.

Suponhamos que $\alpha = \alpha'\alpha''$, para certos $\alpha',\alpha'' \in \mathcal{OP}_{m\times n}$, e tomemos $\alpha\psi = (\alpha_1,\ldots,\alpha_m;\beta)$, $\alpha'\psi = (\alpha'_1,\ldots,\alpha'_m;\beta')$ e $\alpha''\psi = (\alpha''_1,\ldots,\alpha''_m;\beta'')$. Pretendemos mostrar que $\alpha' \in T_j$ ou $\alpha'' \in T_j$. Notemos que, α, α' e α'' são elementos de $\mathcal{OP}_{m\times n}$ do tipo 1 (donde $\alpha_\ell, \alpha'_\ell, \alpha''_\ell \in \mathcal{O}_n$, para qualquer $\ell \in \{1,\ldots,m\}$). Observemos ainda que $n\alpha_k = j = 1\alpha_{k+1}$, $\operatorname{Im}(\alpha_k) = \{1,\ldots,j\}$, $\operatorname{Im}(\alpha_{k+1}) = \{j,\ldots,n\}$ e $\alpha_\ell = 1$, para $\ell \in \{1,\ldots,m\} \setminus \{k,k+1\}$. Além disso, temos $\alpha_\ell = \alpha'_\ell\alpha''_{\ell\beta'}$, para qualquer $\ell \in \{1,\ldots,m\}$ e, por outro lado, $\beta = \beta'\beta''$. Logo $|\operatorname{Im}(\beta')| = m-1$ ou $|\operatorname{Im}(\beta'')| = m-1$, visto que $|\operatorname{Im}(\beta)| = m-1$.

Com o objectivo de mostrar que $\alpha' \in T_j$ ou $\alpha'' \in T_j$, consideramos dois casos: $|\operatorname{Im}(\beta')| = m-1$ ou $|\operatorname{Im}(\beta')| = m$.

Admitamos que β' tem característica $m-1$. Então α' tem característica $(m-1)n$ e assim $\operatorname{Ker}(\alpha') = \operatorname{Ker}(\alpha)$. Donde $\operatorname{Ker}(\alpha'_k) = \operatorname{Ker}(\alpha_k)$ e $\operatorname{Ker}(\alpha'_{k+1}) = \operatorname{Ker}(\alpha_{k+1})$, pelo que $|\operatorname{Im}(\alpha'_k)| = |\operatorname{Im}(\alpha_k)| = j$ e $|\operatorname{Im}(\alpha'_{k+1})| = |\operatorname{Im}(\alpha_{k+1})| = n-j+1$. Logo $n\alpha'_k \geq j$ e $1\alpha'_{k+1} \leq j$, visto que $1\alpha'_k \leq \cdots \leq n\alpha'_k$ e $1\alpha'_{k+1} \leq \cdots \leq n\alpha'_{k+1}$. Por outro lado, a igualdade $\operatorname{Ker}(\alpha') = \operatorname{Ker}(\alpha)$ também implica que $(kn)\alpha' = (kn+1)\alpha'$, donde $n\alpha'_k = 1\alpha'_{k+1}$ e assim $n\alpha'_k = 1\alpha'_{k+1} = j$. Então $(kn)\alpha' = (kn+1)\alpha' = (k\beta'-1)n+j$ e portanto $\alpha' \in T_j$.

Em segundo lugar, suponhamos que β' tem característica igual a m (i.e. β' é uma potência do m-ciclo g_m de $\mathcal{OP}_m$). Então β'' tem de ter característica igual a $m-1$ e assim α'' tem característica $(m-1)n$. Como $\alpha'_k\alpha''_{k\beta'} = \alpha_k$, então $\{1,\ldots,j\} = \operatorname{Im}(\alpha_k) \subseteq \operatorname{Im}(\alpha''_{k\beta'})$ e portanto $n\alpha''_{k\beta'} \geq$

j. Analogamente, como $\alpha'_{k+1}\alpha''_{(k+1)\beta'} = \alpha_{k+1}$, então $\{j,\ldots,n\} = \operatorname{Im}(\alpha_{k+1}) \subseteq \operatorname{Im}(\alpha''_{(k+1)\beta'})$ e $1\alpha''_{(k+1)\beta'} \leq j$. Tendo em conta que β' é uma potência de g_m, temos $(k+1)\beta' = k\beta' + 1$. Logo $(k\beta'+1)\beta'' = ((k+1)\beta')\beta'' = (k+1)\beta = k\beta = (k\beta')\beta''$. Portanto, $j \leq n\alpha''_{k\beta'} \leq 1\alpha''_{k\beta'+1} = 1\alpha''_{(k+1)\beta'} \leq j$, i.e. $n\alpha''_{k\beta'} = 1\alpha''_{k\beta'+1} = j$, donde se conclui que $((k\beta')n)\alpha'' = ((k\beta')n+1)\alpha'' = (k\beta-1)n+j$. Logo $\alpha'' \in T_j$, como pretendíamos demonstrar.

É agora fácil concluir, por indução em k, que para escrever um elemento de T_j como um produto de k elementos de $\mathcal{OP}_{m\times n}$, precisamos que, pelo menos, um dos factores pertença a T_j, para todo $1 \leq j \leq n$. A demonstração do lema fica assim terminada. ■

Segue-se um lema que nos será útil para encontrar o número mínimo de elementos de característica igual a n para um conjunto gerador de $\mathcal{OP}_{m\times n}$.

Lema 3.4.6 *Seja $(\alpha_1,\ldots,\alpha_m;\beta) \in \mathcal{OP}_{m\times n}\psi$ tal que $i\beta = j\beta$, para certos $1 \leq i < j \leq m$. Então $|\operatorname{Im}(\alpha_i)| + |\operatorname{Im}(\alpha_j)| \leq n+2$. Além disso, se $|\operatorname{Im}(\alpha_i)| + |\operatorname{Im}(\alpha_j)| = n+2$, então $(\alpha_1,\ldots,\alpha_m;\beta)$ é do tipo 3 e:*

1. *$\alpha_i \in \mathcal{OP}_n \setminus \mathcal{O}_n$ ou $\alpha_j \in \mathcal{OP}_n \setminus \mathcal{O}_n$;*
2. *$\operatorname{Im}(\alpha_i) \cup \operatorname{Im}(\alpha_j) = A_{i\beta}$ (e assim $(\alpha_1,\ldots,\alpha_m;\beta)\psi^{-1}$ é uma transformação de $\mathcal{OP}_{m\times n}$ de característica igual a n);*
3. *$|\operatorname{Im}(\alpha_k)| = 1$, para $k \in \{1,\ldots,m\} \setminus \{i,j\}$.*

Demonstração. Começamos por demonstrar que $|\operatorname{Im}(\alpha_i)| + |\operatorname{Im}(\alpha_j)| \leq n+2$.

Suponhamos que $\alpha_i, \alpha_j \in \mathcal{O}_n$. Então, como $i\beta = j\beta$, temos

$$1\alpha_i \leq \cdots \leq n\alpha_i \leq 1\alpha_j \leq \cdots \leq n\alpha_j \quad \text{ou} \quad 1\alpha_j \leq \cdots \leq n\alpha_j \leq 1\alpha_i \leq \cdots \leq n\alpha_i,$$

donde $\operatorname{Im}(\alpha_i) \cup \operatorname{Im}(\alpha_j)$ tem pelo menos $|\operatorname{Im}(\alpha_i)| + |\operatorname{Im}(\alpha_j)| - 1$ elementos distintos (notemos que podemos ter $n\alpha_i = 1\alpha_j$ ou $n\alpha_j = 1\alpha_i$). Como $\operatorname{Im}(\alpha_i) \cup \operatorname{Im}(\alpha_j) \subseteq A_{i\beta}$, então obtemos $|\operatorname{Im}(\alpha_i)| + |\operatorname{Im}(\alpha_j)| \leq n+1$.

A seguir, suponhamos que $\alpha_i \in \mathcal{OP}_n \setminus \mathcal{O}_n$. Então $\alpha_j \in \mathcal{O}_n$ e temos

$$(t+1)\alpha_i \leq \cdots \leq n\alpha_i \leq 1\alpha_j \leq \cdots \leq n\alpha_j \leq 1\alpha_i \leq \cdots \leq t\alpha_i,$$

para certo $1 \leq t \leq m-1$, donde $\operatorname{Im}(\alpha_i) \cup \operatorname{Im}(\alpha_j)$ tem pelo menos $|\operatorname{Im}(\alpha_i)| + |\operatorname{Im}(\alpha_j)| - 2$ elementos distintos (notemos que podemos ter $n\alpha_i = 1\alpha_j$ e $n\alpha_j = 1\alpha_i$) e assim

$$|\operatorname{Im}(\alpha_i)| + |\operatorname{Im}(\alpha_j)| \leq n+2.$$

Visto que o caso $\alpha_j \in \mathcal{OP}_n \setminus \mathcal{O}_n$ é semelhante ao anterior, concluímos que

$$|\operatorname{Im}(\alpha_i)| + |\operatorname{Im}(\alpha_j)| \leq n+2.$$

De forma a provarmos a segunda parte do lema, admitamos que $|\operatorname{Im}(\alpha_i)| + |\operatorname{Im}(\alpha_j)| = n+2$.

Pela primeira parte da demonstração temos que $\alpha_i \in \mathcal{OP}_n \setminus \mathcal{O}_n$ ou $\alpha_j \in \mathcal{OP}_n \setminus \mathcal{O}_n$ (e assim $(\alpha_1, \ldots, \alpha_m; \beta)$ tem de ser do tipo 3). Por outro lado, como $n \geq |\operatorname{Im}(\alpha_i) \cup \operatorname{Im}(\alpha_j)| \geq |\operatorname{Im}(\alpha_i)| + |\operatorname{Im}(\alpha_j)| - 2 = n$, temos $\operatorname{Im}(\alpha_i) \cup \operatorname{Im}(\alpha_j) = A_{i\beta}$.

Suponhamos que $\alpha_i \in \mathcal{OP}_n \setminus \mathcal{O}_n$ e seja $t \in \{1, \ldots, m-1\}$ como definido em cima. Sejam $k \in \{i+1, \ldots, j-1\}$ e $\ell \in \{1, \ldots, m\} \setminus \{i, \ldots, j\}$. Então (com a adaptação óbvia se k ou ℓ não existem) temos

$$(t+1)\alpha_i \leq \cdots \leq n\alpha_i \leq 1\alpha_k \leq \cdots \leq n\alpha_k \leq 1\alpha_j \leq \cdots \leq n\alpha_j \leq 1\alpha_\ell \leq \cdots \leq n\alpha_\ell \leq 1\alpha_i \leq \cdots \leq t\alpha_i.$$

Portanto, $n\alpha_i = 1\alpha_j$ e $n\alpha_j = 1\alpha_i$, caso contrário $\operatorname{Im}(\alpha_i) \cup \operatorname{Im}(\alpha_j)$ teria de ter pelo menos $|\operatorname{Im}(\alpha_i)| + |\operatorname{Im}(\alpha_j)| - 1 = n+1$ elementos distintos, o que é uma contradição. Assim, $n\alpha_i = 1\alpha_k = \cdots = n\alpha_k = 1\alpha_j$ (se k existe) e $n\alpha_j = 1\alpha_\ell = \cdots = n\alpha_\ell = 1\alpha_i$ (se ℓ existe). Em qualquer dos casos, provámos que $|\operatorname{Im}(\alpha_k)| = 1$, para $k \in \{1, \ldots, m\} \setminus \{i, j\}$.

De forma semelhante, se $\alpha_j \in \mathcal{OP}_n \setminus \mathcal{O}_n$, temos $|\operatorname{Im}(\alpha_k)| = 1$, para $k \in \{1, \ldots, m\} \setminus \{i, j\}$, como pretendíamos. ■

Lema 3.4.7 *Qualquer conjunto gerador de $\mathcal{OP}_{m\times n}$ contém pelo menos $\lceil \frac{n-1}{2} \rceil$ elementos de característica igual a n.*

Demonstração. Para $1 \leq i \leq \lceil \frac{n-1}{2} \rceil$, definimos

$$P_i = \{(\gamma_1, \ldots, \gamma_m; \lambda) \in \overline{N} \mid |\operatorname{Im}(\gamma_k)| = n-i+1 \text{ e } |\operatorname{Im}(\gamma_\ell)| = i+1, \\ \text{para certos } 1 \leq k, \ell \leq m \text{ tais que } k \neq \ell\}.$$

Observemos que $p_i\psi \in P_i$ e, pelo Lema 3.4.6, todos os elementos de P_i são do tipo 3 e todos os elementos de $P_i\psi^{-1}$ têm característica igual a n, para $1 \leq i \leq \lceil \frac{n-1}{2} \rceil$. Além disso, $P_1, \ldots, P_{\lceil \frac{n-1}{2} \rceil}$ são $\lceil \frac{n-1}{2} \rceil$ subconjuntos disjuntos dois a dois de $\mathcal{OP}_{m\times n}\psi$. De facto, suponhamos que existe $(\gamma_1, \ldots, \gamma_m; \lambda) \in P_i \cap P_j$, para alguns $1 \leq i < j \leq \lceil \frac{n-1}{2} \rceil$. Sejam $1 \leq k, \ell \leq m$, com $k \neq \ell$, tais que $|\operatorname{Im}(\gamma_k)| = n-i+1$ e $|\operatorname{Im}(\gamma_\ell)| = i+1$. Então, pelo Lema 3.4.6, temos que $|\operatorname{Im}(\gamma_t)| = 1$, para $t \in \{1, \ldots, m\} \setminus \{k, \ell\}$. Assim $|\operatorname{Im}(\gamma_k)| = n-j+1$ ou $|\operatorname{Im}(\gamma_k)| = j+1$. Se $|\operatorname{Im}(\gamma_k)| = n-j+1$ então $i = j$, o que é uma contradição. Por outro lado, se $|\operatorname{Im}(\gamma_k)| = j+1$ então $n = i + j < \lceil \frac{n-1}{2} \rceil + \lceil \frac{n-1}{2} \rceil \leq \frac{n}{2} + \frac{n}{2} = n$, e novamente obtemos uma contradição. Portanto, $P_i \cap P_j = \emptyset$, para $1 \leq i < j \leq \lceil \frac{n-1}{2} \rceil$.

Logo $P_1\psi^{-1}, \ldots, P_{\lceil \frac{n-1}{2} \rceil}\psi^{-1}$ são $\lceil \frac{n-1}{2} \rceil$ subconjuntos disjuntos de $\mathcal{OP}_{m\times n}$ de elementos de característica n.

Seja $i \in \{1, \ldots, \lceil \frac{n-1}{2} \rceil\}$ e tomemos $\overline{\gamma} = (\gamma_1, \ldots, \gamma_m; \lambda) \in P_i$. Sejam $1 \leq k, \ell \leq m$, com $k \neq \ell$, tais que $|\operatorname{Im}(\gamma_k)| = n-i+1$ e $|\operatorname{Im}(\gamma_\ell)| = i+1$.

Suponhamos que $\overline{\gamma} = \alpha\psi\alpha'\psi$, para certos $\alpha, \alpha' \in \mathcal{OP}_{m\times n}$, e tomemos $\alpha\psi = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m; \beta)$ e $\alpha'\psi = (\alpha'_1, \ldots, \alpha'_m; \beta')$. Notemos que $\gamma_j = \alpha_j\alpha'_{j\beta}$, para $1 \leq j \leq m$. Além disso, como $\overline{\gamma}$ é do tipo 3, então α é do tipo 3 ou α' é do tipo 3.

De seguida, o nosso objectivo é mostrar que $\alpha\psi \in P_i$ ou $\alpha'\psi \in P_i$.

Começamos por observar que se $k\beta = \ell\beta$ então, pelo Lema 3.4.6, temos a desigualdade $|\operatorname{Im}(\alpha_k)| + |\operatorname{Im}(\alpha_\ell)| \leq n+2$ e assim, como $n-i+1 = |\operatorname{Im}(\gamma_k)| = |(\operatorname{Im}(\alpha_k))\alpha'_{k\beta}| \leq |\operatorname{Im}(\alpha_k)|$ e $i+1 = |\operatorname{Im}(\gamma_\ell)| = |(\operatorname{Im}(\alpha_\ell))\alpha'_{\ell\beta}| \leq |\operatorname{Im}(\alpha_\ell)|$, deduzimos que $|\operatorname{Im}(\alpha_k)| = n-i+1$ e $|\operatorname{Im}(\alpha_\ell)| = i+1$. Vamos considerar dois casos.

Primeiro, se α é do tipo 3 (em particular, temos $\alpha\psi \in \overline{N}$), como β é uma transformação constante, temos $k\beta = \ell\beta$ e assim, pela observação anterior, podemos deduzir imediatamente que $\alpha\psi \in P_i$.

Por outro lado, admitamos que α não é do tipo 3. Então $k\beta \neq \ell\beta$. De facto, se $k\beta = \ell\beta$ então $|\operatorname{Im}(\alpha_k)| + |\operatorname{Im}(\alpha_\ell)| = (n-i+1)+(i+1) = n+2$ e assim, pelo Lema 3.4.6, uma das transformações α_k ou α_ℓ não é crescente, o que é uma contradição. Recordemos ainda que α' tem de ser do tipo 3, donde β' é uma transformação constante. Em particular, $(k\beta)\beta' = (\ell\beta)\beta'$. Logo, pelo Lema 3.4.6, temos $|\operatorname{Im}(\alpha'_{k\beta})| + |\operatorname{Im}(\alpha'_{\ell\beta})| \leq n+2$. Além disso, visto que $\operatorname{Im}(\gamma_k) = \operatorname{Im}(\alpha_k\alpha'_{k\beta}) \subseteq \operatorname{Im}(\alpha'_{k\beta})$ e $\operatorname{Im}(\gamma_\ell) = \operatorname{Im}(\alpha_\ell\alpha'_{\ell\beta}) \subseteq \operatorname{Im}(\alpha'_{\ell\beta})$, temos $n-i+1 = |\operatorname{Im}(\gamma_k)| \leq |\operatorname{Im}(\alpha'_{k\beta})|$ e $i+1 = |\operatorname{Im}(\gamma_\ell)| \leq |\operatorname{Im}(\alpha'_{\ell\beta})|$. Portanto obtemos precisamente $|\operatorname{Im}(\alpha'_{k\beta})| = n-i+1$ e $|\operatorname{Im}(\alpha'_{\ell\beta})| = i+1$, o que prova que $\alpha'\psi \in P_i$.

Podemos agora, por indução em k, facilmente provar que para escrever um elemento de $P_i\psi^{-1}$ como um produto k elementos de $\mathcal{OP}_{m\times n}$, precisamos de ter um factor que pertença a $P_i\psi^{-1}$, para todo $1 \leq i \leq \lceil \frac{n-1}{2} \rceil$. A demonstração do lema fica assim concluída. ■

Para $m > 2$, dos lemas anteriores, deduzimos imediatamente que A é um conjunto gerador de cardinal mínimo de $\mathcal{OP}_{m\times n}$. Por outro lado, no que respeita a $\mathcal{OP}_{2\times n}$, temos que:

Lema 3.4.8 *As seguintes igualdades são verdadeiras em* $\mathcal{OP}_{2\times n}$*:*

1. $s_{1,n} = b_{1,1}b_{1,2}\cdots b_{1,n-1}fp_1^n$;
2. $t_{1,j} = fc_1^{j-1}p_{j-1}f$, *para* $2 \leq j \leq \lceil \frac{n-1}{2} \rceil + 1$
3. $t_{1,j} = c_1^{n-1-j}b_{1,1}p_{n-j}{p_1}^{j-1}f$, *para* $\lceil \frac{n-1}{2} \rceil + 2 \leq j \leq n-2$; *e*
4. $t_{1,n-1} = b_{1,1}p_1^{n-1}f$ *e* $t_{1,n} = fc_1fp_1^nf$.

Demonstração. 1. Observemos que $b_{1,1}b_{1,2}\cdots b_{1,n-1} = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & \cdots & n & n+1 & n+2 & \cdots & 2n \\ n & n & \cdots & n & n+1 & n+2 & \cdots & 2n \end{array}\right)$.
Como

$$f = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \cdots & n & n+1 & \cdots & 2n \\ n+1 & \cdots & 2n & 1 & \cdots & n \end{array}\right) \text{ e } p_1^n = \left(\begin{array}{ccc|cccc} 1 & \cdots & n & n+1 & \cdots & 2n-1 & 2n \\ 1 & \cdots & n & n & \cdots & n & 1 \end{array}\right),$$

é fácil ver que obtemos a igualdade pretendida.

2. Seja $2 \leq j \leq \lceil \frac{n-1}{2} \rceil + 1$. Notemos que

$$c_1^{j-1} = \left(\begin{array}{cccccc|ccc} 1 & \cdots & j & j+1 & \cdots & n & n+1 & \cdots & 2n \\ 1 & \cdots & 1 & 2 & \cdots & n-j+1 & n+1 & \cdots & 2n \end{array}\right)$$

e

$$p_{j-1} = \left(\begin{array}{cccccc|cccccc} 1 & 2 & \cdots & n-j+1 & n-j+2 & \cdots & n & n+1 & \cdots & 2n-j+1 & 2n-j+2 & \cdots & 2n \\ j & j+1 & \cdots & n & 1 & \cdots & 1 & 1 & \cdots & 1 & 2 & \cdots & j \end{array}\right),$$

donde

$$fc_1^{j-1}p_{j-1} = \left(\begin{array}{cccccc|cccccc} 1 & \cdots & n-j+1 & n-j+2 & \cdots & n & n+1 & \cdots & n+j & n+j+1 & \cdots & 2n \\ 1 & \cdots & 1 & 2 & \cdots & j & j & \cdots & j & j+1 & \cdots & n \end{array}\right).$$

Como

$$t_{1,j} = \left(\begin{array}{cccccc|cccccc} 1 & \cdots & n-j+1 & n-j+2 & \cdots & n & n+1 & \cdots & n+j & n+j+1 & \cdots & 2n \\ n+1 & \cdots & n+1 & n+2 & \cdots & n+j & n+j & \cdots & n+j & n+j+1 & \cdots & 2n \end{array}\right),$$

multiplicando $fc_1^{j-1}p_{j-1}$ por f à direita, obtemos $t_{1,j} = fc_1^{j-1}p_{j-1}f$.

3. Seja $\lceil \frac{n-1}{2} \rceil + 2 \leq j \leq n-2$. Temos que

$$c_1^{n-1-j} = \left(\begin{array}{cccccc|ccc} 1 & \cdots & n-j & n-j+1 & \cdots & n & n+1 & \cdots & 2n \\ 1 & \cdots & 1 & 2 & \cdots & j+1 & n+1 & \cdots & 2n \end{array}\right),$$

$$b_{1,1} = \left(\begin{array}{ccccc|ccc} 1 & 2 & 3 & \cdots & n & n+1 & \cdots & 2n \\ 2 & 2 & 3 & \cdots & n & n+1 & \cdots & 2n \end{array}\right),$$

$$p_{n-j} = \left(\begin{array}{cccccc|cccccc} 1 & \cdots & j & j+1 & \cdots & n & n+1 & \cdots & n+j & n+j+1 & \cdots & 2n \\ n-j+1 & \cdots & n & 1 & \cdots & 1 & 1 & \cdots & 1 & 2 & \cdots & n-j+1 \end{array}\right)$$

e

$$p_1^{j-1} = \left(\begin{array}{cccccc|cccc} 1 & \cdots & n-j+1 & n-j+2 & \cdots & n & n+1 & \cdots & 2n-1 & 2n \\ j & \cdots & n & 1 & \cdots & j-1 & j-1 & \cdots & j-1 & j \end{array}\right).$$

Logo,

$$c_1^{n-1-j}b_{1,1} = \left(\begin{array}{ccccccc|ccc} 1 & \cdots & n-j & n-j+1 & n-j+2 & \cdots & n & n+1 & \cdots & 2n \\ 2 & \cdots & 2 & 2 & 3 & \cdots & j+1 & n+1 & \cdots & 2n \end{array}\right),$$

$$c_1^{n-1-j}b_{1,1}p_{n-j} = \left(\begin{array}{ccccccc|cccccc} 1 & \cdots & n-j+1 & n-j+2 & \cdots & n-1 & n & n+1 & \cdots & n+j & n+j+1 & \cdots & 2n \\ n-j+2 & \cdots & n-j+2 & n-j+3 & \cdots & n & 1 & 1 & \cdots & 1 & 2 & \cdots & n-j+1 \end{array}\right)$$

e

$$c_1^{n-1-j}b_{1,1}p_{n-j}p_1^{j-1} = \left(\begin{array}{cccccc|cccccc} 1 & \cdots & n-j+1 & n-j+2 & \cdots & n & n+1 & \cdots & n+j & n+j+1 & \cdots & 2n \\ 1 & \cdots & 1 & 2 & \cdots & j & j & \cdots & j & j+1 & \cdots & n \end{array}\right).$$

Mais uma vez, ao multiplicar à direita esta transformação por f, obtemos a igualdade pretendida.

4. Tendo em conta as transformações

$$t_{1,n-1} = \left(\begin{array}{ccccc|cccc} 1 & 2 & 3 & \cdots & n & n+1 & \cdots & 2n-1 & 2n \\ n+1 & n+1 & n+2 & \cdots & 2n-1 & 2n-1 & \cdots & 2n-1 & 2n \end{array}\right),$$

$$p_1^{n-1} = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & \cdots & n & n+1 & \cdots & 2n-1 & 2n \\ n & 1 & \cdots & n-1 & n-1 & \cdots & n-1 & n \end{array}\right)$$

e

$$b_{1,1}p_1^{n-1} = \left(\begin{array}{ccccc|cccc} 1 & 2 & 3 & \cdots & n & n+1 & \cdots & 2n-1 & 2n \\ 1 & 1 & 2 & \cdots & n-1 & n-1 & \cdots & n-1 & n \end{array}\right)$$

é fácil ver que se multiplicarmos a última transformação à direita por f obtemos a transformação $t_{1,n-1}$. Dado que

$$fc_1f = \left(\begin{array}{cccc|ccccc} 1 & 2 & \cdots & n & n+1 & n+2 & n+3 & \cdots & 2n \\ 1 & 2 & \cdots & n & n+1 & n+1 & n+2 & \cdots & 2n-1 \end{array}\right)$$

então

$$fc_1fp_1^n = \left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 2 & \cdots & n & n+1 & \cdots & 2n \\ 1 & 2 & \cdots & n & n & \cdots & n \end{array}\right).$$

Atendendo a que

$$t_{1,n} = \left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 2 & \cdots & n & n+1 & \cdots & 2n \\ n+1 & n+2 & \cdots & 2n & 2n & \cdots & 2n \end{array}\right)$$

concluímos que $fc_1fp_1^nf = t_{1,n}$. ∎

Assim, como consequência da Proposição 3.4.2 e dos Lemas 3.4.4, 3.4.7 e 3.4.8, temos que $B = \{f, c_1, b_{1,1} \ldots, b_{1,n-1}, p_1, \ldots, p_{\lceil \frac{n-1}{2} \rceil}\}$ é um conjunto gerador de cardinal mínimo de $\mathcal{OP}_{2\times n}$. Portanto, demonstrámos que:

Teorema 3.4.9 *A característica de $\mathcal{OP}_{m\times n}$ é igual a $2n + \lceil \frac{n-1}{2} \rceil + 1$, para $m > 2$, e é igual a $n + \lceil \frac{n-1}{2} \rceil + 1$, para $m = 2$.* ∎

Passamos agora ao estudo da característica de $\mathcal{OR}_{m\times n}$.

Relembramos que, à semelhança de $\mathcal{OD}_{m\times n}$, dado $\alpha \in \mathcal{T}_{mn}$, α é uma transformação que reverte a orientação se e só se $h\alpha$ [respectivamente, αh] é uma transformação que preserva a orientação. Donde, como $\alpha = h^2\alpha = h(h\alpha)$, é claro que o monóide $\mathcal{OR}_{m\times n}$ é gerado por $\mathcal{OP}_{m\times n} \cup \{h\}$.

De seguida, para $1 \leq j \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil$, seja v_j a transformação de $\mathcal{O}_{m\times n}$ (de característica igual a $mn-1$) de imagem $\{1,\ldots,mn\} \setminus \{j\}$ e núcleo definido pela partição

$$\left\{\{1\},\ldots,\left\{\lceil \tfrac{n}{2} \rceil - j\right\},\left\{\lceil \tfrac{n}{2} \rceil - j+1, \lceil \tfrac{n}{2} \rceil - j+2\right\},\left\{\lceil \tfrac{n}{2} \rceil - j+3\right\},\ldots,\{mn\}\right\}.$$

Exemplo 3.4.10 Para $m=3$ e $n=5$, temos

$$v_1 = \left(\begin{array}{ccccc|ccccc|ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 2 & 3 & 4 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \end{array}\right),$$

$$v_2 = \left(\begin{array}{ccccc|ccccc|ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 1 & 3 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \end{array}\right),$$

$$v_3 = \left(\begin{array}{ccccc|ccccc|ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 1 & 1 & 2 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \end{array}\right).$$

Lema 3.4.11 *As seguintes igualdades são verdadeiras:*

1. $b_{1,j} = v_{\lceil \frac{n}{2} \rceil - j+1} v_j$, *para qualquer* $1 \leq j \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil$;
2. $b_{1,n-j} = f^{m-1} h v_{\lceil \frac{n}{2} \rceil - j+1} v_{j+1} f^{m-1} h$, *para qualquer* $1 \leq j \leq n - \lceil \frac{n}{2} \rceil - 1$;
3. $c_1 = hfb_{1,n-1}b_{1,n-2}\cdots b_{1,2}b_{1,1}f^{m-1}h$;
4. $t_{1,n} = f^{m-2}hs_{1,n}f^{m-2}h$;
5. $t_{1,j} = c_1^{n-j}hf^2b'_2\cdots b'_j t_{1,n-j+1}s_{1,n}f^{m-2}h$, *com* $b'_\ell = b_{1,n-j+\ell-1}b_{1,n-j+\ell-2}\cdots b_{1,\ell}$, *para quaisquer* $2 \leq \ell \leq j$ *e* $2 \leq j \leq n-1$.

Demonstração. 1. Seja $1 \leq j \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil$. Vamos considerar três casos. Se $j < \lceil \frac{n}{2} \rceil - j + 1$, então

$$v_{\lceil \frac{n}{2} \rceil - j+1} = \left(\begin{array}{ccccccccc|ccc} 1 & \cdots & j & j+1 & \cdots & \lceil \frac{n}{2} \rceil - j+1 & \lceil \frac{n}{2} \rceil - j+2 & \cdots & n & n+1 & \cdots & mn \\ 1 & \cdots & j & j & \cdots & \lceil \frac{n}{2} \rceil - j & \lceil \frac{n}{2} \rceil - j+2 & \cdots & n & n+1 & \cdots & mn \end{array}\right)$$

e

$$v_j = \left(\begin{array}{cccccccc c|ccc} 1 & \cdots & j-1 & j & \cdots & \lceil \frac{n}{2} \rceil - j+1 & \lceil \frac{n}{2} \rceil - j+2 & \cdots & n & n+1 & \cdots & mn \\ 1 & \cdots & j-1 & j+1 & \cdots & \lceil \frac{n}{2} \rceil - j+2 & \lceil \frac{n}{2} \rceil - j+2 & \cdots & n & n+1 & \cdots & mn \end{array}\right).$$

Se $j > \lceil \frac{n}{2} \rceil - j + 1$, então

$$v_{\lceil \frac{n}{2} \rceil - j+1} = \left(\begin{array}{ccccccccc|ccc} 1 & \cdots & \lceil \frac{n}{2} \rceil - j & \lceil \frac{n}{2} \rceil - j+1 & \cdots & j & j+1 & \cdots & n & n+1 & \cdots & mn \\ 1 & \cdots & \lceil \frac{n}{2} \rceil - j & \lceil \frac{n}{2} \rceil - j+2 & \cdots & j+1 & j+1 & \cdots & n & n+1 & \cdots & mn \end{array}\right)$$

e

$$v_j = \left(\begin{array}{cccccccc|ccc} 1 & \cdots & \lceil\frac{n}{2}\rceil - j + 1 & \lceil\frac{n}{2}\rceil - j + 2 & \cdots & j & j+1 & \cdots & n & n+1 & \cdots & mn \\ 1 & \cdots & \lceil\frac{n}{2}\rceil - j + 1 & \lceil\frac{n}{2}\rceil - j + 1 & \cdots & j-1 & j+1 & \cdots & n & n+1 & \cdots & mn \end{array}\right).$$

Se $j = \lceil\frac{n}{2}\rceil - j + 1$, então temos que $v_{\lceil\frac{n}{2}\rceil - j+1} = v_j = b_{1,j}$. É fácil ver que, em qualquer dos casos, obtemos $b_{1,j} = v_{\lceil\frac{n}{2}\rceil-j+1}v_j$.

2. Mais uma vez consideramos três casos. Se $j < \lceil\frac{n}{2}\rceil - j + 1$, então

$$v_{j+1} = \left(\begin{array}{ccccccccc|ccc} 1 & \cdots & j & j+1 & \cdots & \lceil\frac{n}{2}\rceil - j & \lceil\frac{n}{2}\rceil - j + 1 & \cdots & n & n+1 & \cdots & mn \\ 1 & \cdots & j & j+2 & \cdots & \lceil\frac{n}{2}\rceil - j + 1 & \lceil\frac{n}{2}\rceil - j + 1 & \cdots & n & n+1 & \cdots & mn \end{array}\right).$$

Se $j > \lceil\frac{n}{2}\rceil - j + 1$, então

$$v_{j+1} = \left(\begin{array}{ccccccccc|ccc} 1 & \cdots & \lceil\frac{n}{2}\rceil - j & \lceil\frac{n}{2}\rceil - j + 1 & \cdots & j+1 & j+2 & \cdots & n & n+1 & \cdots & mn \\ 1 & \cdots & \lceil\frac{n}{2}\rceil - j & \lceil\frac{n}{2}\rceil - j & \cdots & j & j+2 & \cdots & n & n+1 & \cdots & mn \end{array}\right).$$

Se $j = \lceil\frac{n}{2}\rceil - j + 1$, então

$$v_{j+1} = \left(\begin{array}{cccccccc|ccc} 1 & \cdots & j-1 & j & j+1 & j+2 & \cdots & n & n+1 & \cdots & mn \\ 1 & \cdots & j-1 & j-1 & j & j+2 & \cdots & n & n+1 & \cdots & mn \end{array}\right).$$

Em todos os casos, o produto $v_{\lceil\frac{n}{2}\rceil-j+1}v_{j+1}$ é igual a

$$\left(\begin{array}{cccccccc|ccc} 1 & \cdots & j-1 & j & j+1 & j+2 & \cdots & n & n+1 & \cdots & mn \\ 1 & \cdots & j-1 & j & j & j+2 & \cdots & n & n+1 & \cdots & mm \end{array}\right).$$

Dado que

$$f^{m-1} = \left(\begin{array}{cccccc|ccc|c} 1 & \cdots & n-j & n-j+1 & \cdots & n & n+1 & \cdots & 2n & \cdots \\ (m-1)n+1 & \cdots & mn-j & mn-j+1 & \cdots & mn & 1 & \cdots & n & \cdots \end{array}\right.$$
$$\left.\begin{array}{c|ccc} \cdots & (m-1)n+1 & \cdots & mn \\ \cdots & (m-2)n+1 & \cdots & (m-1)n \end{array}\right)$$

e, recordando que

$$h = \left(\begin{array}{cccccc|ccc|c} 1 & 2 & \cdots & j & \cdots & n & n+1 & \cdots & 2n & \cdots \\ mn & mn-1 & \cdots & mn-j+1 & \cdots & (m-1)n+1 & (m-1)n & \cdots & (m-2)n+1 & \cdots \end{array}\right.$$
$$\left.\begin{array}{c|ccccccccc} \cdots & (m-1)n+1 & (m-1)n+2 & \cdots & mn-j & mn-j+1 & \cdots & mn-2 & mn-1 & mn \\ \cdots & n & n-1 & \cdots & j+1 & j & \cdots & 3 & 2 & 1 \end{array}\right),$$

temos

$$f^{m-1}h = \left(\begin{array}{cccccccc|} 1 & \cdots & n-j-1 & n-j & n-j+1 & n-j+2 & \cdots & n \\ n & \cdots & j+2 & j+1 & j & j-1 & \cdots & 1 \end{array}\right.$$
$$\left.\begin{array}{|ccc|c|ccc} n+1 & \cdots & 2n & \cdots & (m-1)n+1 & \cdots & mn \\ mn & \cdots & (m-1)n+1 & \cdots & 2n & \cdots & n+1 \end{array}\right)$$

e

$$f^{m-1}hv_{\lceil\frac{n}{2}\rceil-j+1}v_{j+1}=\left(\begin{array}{cccccccc|ccc|c|ccc} 1 & \cdots & n-j-1 & n-j & n-j+1 & n-j+2 & \cdots & n & n+1 & \cdots & 2n & \cdots & (m-1)n+1 & \cdots & mn \\ n & \cdots & j+2 & j & j & j-1 & \cdots & 1 & mn & \cdots & (m-1)n+1 & \cdots & 2n & \cdots & n+1 \end{array}\right).$$

É agora fácil ver que, ao multiplicarmos esta transformação à direita por $f^{m-1}h$, obtemos a transformação

$$b_{1,n-j}=\left(\begin{array}{cccccccc|ccc} 1 & \cdots & n-j-1 & n-j & n-j+1 & n-j+2 & \cdots & n & n+1 & \cdots & mn \\ 1 & \cdots & n-j-1 & n-j+1 & n-j+1 & n-j+2 & \cdots & n & n+1 & \cdots & mn \end{array}\right).$$

3. O produto $b_{1,n-1}b_{1,n-2}\cdots b_{1,1}$ é a transformação

$$\left(\begin{array}{ccccccccc|ccc} 1 & 2 & \cdots & n-j+1 & \cdots & n-2 & n-1 & n & n+1 & \cdots & mn \\ 2 & 3 & \cdots & n-j+2 & \cdots & n-1 & n & n & n+1 & \cdots & mn \end{array}\right),$$

donde

$$fb_{1,n-1}b_{1,n-2}\cdots b_{1,1}=\left(\begin{array}{cccc|ccc|ccccccccc} 1 & 2 & \cdots & n & n+1 & \cdots & (m-1)n & (m-1)n+1 & (m-1)n+2 & \cdots & (m-1)n+n-j+1 & \cdots & mn-2 & mn-1 & mn \\ n+1 & n+2 & \cdots & 2n & 2n+1 & \cdots & mn & 2 & 3 & \cdots & n-j+2 & \cdots & n-1 & n & n \end{array}\right)$$

e

$$fb_{1,n-1}b_{1,n-2}\cdots b_{1,1}f^{m-1}=\left(\begin{array}{cccc|ccc|ccccccccc} 1 & 2 & \cdots & n & n+1 & \cdots & (m-1)n & (m-1)n+1 & (m-1)n+2 & \cdots & (m-1)n+n-j+1 & \cdots & mn-2 & mn-1 & mn \\ 1 & 2 & \cdots & n & n+1 & \cdots & (m-1)n & (m-1)n+2 & (m-1)n+3 & \cdots & (m-1)n+n-j+2 & \cdots & mn-1 & mn & mn \end{array}\right).$$

Efectuando o produto $hfb_{1,n-1}b_{1,n-2}\cdots b_{1,1}f^{m-1}$ obtemos a transformação

$$\left(\begin{array}{ccccccc|ccc|ccccccccc} 1 & 2 & 3 & \cdots & j & \cdots & n & n+1 & \cdots & (m-1)n & (m-1)n+1 & (m-1)n+2 & \cdots & mn-j+1 & \cdots & mn-2 & mn-1 & mn \\ mn & mn & mn-1 & \cdots & mn-j+2 & \cdots & (m-1)n+2 & (m-1)n & \cdots & n+1 & n & n-1 & \cdots & j & \cdots & 3 & 2 & 1 \end{array}\right).$$

Ao multiplicarmos a transformação anterior por h à direita obtemos a igualdade 3.

4. Sendo

$$f^{m-2}=\left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc|c|ccc} 1 & \cdots & n & n+1 & \cdots & 2n & 2n+1 & \cdots & 3n & \cdots & (m-1)n+1 & \cdots & mn \\ (m-2)n+1 & \cdots & (m-1)n & (m-1)n+1 & \cdots & mn & 1 & \cdots & n & \cdots & (m-3)n+1 & \cdots & (m-2)n \end{array}\right)$$

então

$$f^{m-2}h=\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \cdots & n & n+1 & \cdots & 2n \\ 2n & \cdots & n+1 & n & \cdots & 1 \end{array}\right|$$
$$\left|\begin{array}{ccc|c|ccc} 2n+1 & \cdots & 3n & \cdots & (m-1)n+1 & \cdots & mn \\ mn & \cdots & (m-1)n+1 & \cdots & 3n & \cdots & 2n+1 \end{array}\right),$$

donde

$$s_{1,n}f^{m-2}h=\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \cdots & n & n+1 & \cdots & 2n \\ 2n & \cdots & 2n & 2n & \cdots & n+1 \end{array}\right|$$
$$\left|\begin{array}{ccc|c|ccc} 2n+1 & \cdots & 3n & \cdots & (m-1)n+1 & \cdots & mn \\ mn & \cdots & (m-1)n+1 & \cdots & 3n & \cdots & 2n+1 \end{array}\right).$$

Multiplicando esta última transformação à esquerda por $f^{m-2}h$ obtemos a transformação $t_{1,n}$.

5. Sejam $2\leq \ell\leq j$ e $2\leq j\leq n-1$. Temos que a transformação $b'_\ell=b_{1,n-j+\ell-1}b_{1,n-j+\ell-2}\cdots b_{1,\ell}$ é igual a

$$\left(\begin{array}{ccccccccc|ccc} 1 & \cdots & \ell-1 & \ell & \cdots & n-j+\ell-1 & n-j+\ell & \cdots & n & n+1 & \cdots & mn \\ 1 & \cdots & \ell-1 & \ell+1 & \cdots & n-j+\ell & n-j+\ell & \cdots & n & n+1 & \cdots & mn \end{array}\right)$$

e o produto $b'_2\cdots b'_j$ é a transformação

$$\left(\begin{array}{ccccccc|ccc} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-j+1 & \cdots & n & n+1 & \cdots & mn \\ 1 & j+1 & j+2 & \cdots & n & \cdots & n & n+1 & \cdots & 2n \end{array}\right).$$

Considerando a transformação

$$t_{1,n-j+1}=\left(\begin{array}{cccccc} 1 & \cdots & j & j+1 & \cdots & n \\ n+1 & \cdots & n+1 & n+2 & \cdots & 2n-j+1 \end{array}\right|$$
$$\left|\begin{array}{ccccc|ccc} n+1 & \cdots & 2n-j+1 & 2n-j+2 & \cdots & 2n & 2n+1 & \cdots & mn \\ 2n-j+1 & \cdots & 2n-j+1 & 2n-j+2 & \cdots & 2n & 2n+1 & \cdots & mn \end{array}\right)$$

então $t_{1,n-j+1}s_{1,n}f^{m-2}h$ é a transformação

$$\left(\begin{array}{ccccccc|ccccc} 1 & \cdots & j & j+1 & \cdots & n-1 & n & n+1 & \cdots & 2n-j+1 & 2n-j+2 & \cdots \\ 2n & \cdots & 2n & 2n-1 & \cdots & n+j+1 & n+j & n+j & \cdots & n+j & n+j-1 & \cdots \end{array}\right.$$
$$\left.\begin{array}{ccc|ccc|c|ccc} \cdots & 2n-1 & 2n & 2n+1 & \cdots & 3n & \cdots & (m-1)n+1 & \cdots & mn \\ \cdots & n+2 & n+1 & mn & \cdots & (m-1)n+1 & \cdots & 3n & \cdots & 2n+1 \end{array}\right).$$

Temos que

$$c_1^{n-j}=\left(\begin{array}{cccccc|ccc} 1 & \cdots & n-j+1 & n-j+2 & \cdots & n & n+1 & \cdots & mn \\ 1 & \cdots & 1 & 2 & \cdots & j & n+1 & \cdots & mn \end{array}\right),$$

logo

$$c_1^{n-j}h = \left(\begin{array}{cccccc|ccc|ccc|ccc} 1 & \cdots & n-j+1 & n-j+2 & \cdots & n & n+1 & \cdots & 2n & 2n+1 & \cdots & (m-1)n & (m-1)n+1 & \cdots & mn \\ mn & \cdots & mn & mn-1 & \cdots & mn-j+1 & (m-1)n & \cdots & (m-2)n+1 & (m-2)n & \cdots & n+1 & n & \cdots & 1 \end{array}\right).$$

Como

$$f^2 = \left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc|ccc|ccc} 1 & \cdots & n & n+1 & \cdots & 2n & 2n+1 & \cdots & (m-2)n & (m-2)n+1 & \cdots & (m-1)n & (m-1)n+1 & \cdots & mn \\ 2n+1 & \cdots & 3n & 3n+1 & \cdots & 4n & 4n+1 & \cdots & mn & 1 & \cdots & n & n+1 & \cdots & 2n \end{array}\right)$$

então

$$c_1^{n-j}hf^2 = \left(\begin{array}{cccccc|ccccc|ccc|ccc} 1 & \cdots & n-j+1 & n-j+2 & \cdots & n & n+1 & \cdots & n+j & \cdots & 2n & 2n+1 & \cdots & (m-1)n & (m-1)n+1 & \cdots & mn \\ 2n & \cdots & 2n & 2n-1 & \cdots & 2n-j+1 & n & \cdots & n-j+1 & \cdots & 1 & mn & \cdots & 3n+1 & 3n & \cdots & 2n+1 \end{array}\right)$$

e o produto $c_1^{n-j}hf^2b_2'\cdots b_j'$ é a transformação

$$\left(\begin{array}{cccccc|ccccccc|ccc|ccc} 1 & \cdots & n-j+1 & n-j+2 & \cdots & n & n+1 & \cdots & n+j & n+j+1 & \cdots & 2n-1 & 2n & 2n+1 & \cdots & (m-1)n & (m-1)n+1 & \cdots & mn \\ 2n & \cdots & 2n & 2n-1 & \cdots & 2n-j+1 & n & \cdots & n & n-1 & \cdots & j+1 & 1 & mn & \cdots & 3n+1 & 3n & \cdots & 2n+1 \end{array}\right).$$

Finalmente, multiplicando a transformação anterior por $t_{1,n-j+1}s_{1,n}f^{m-2}h$ à direita obtemos a transformação $t_{1,j}$. ∎

Proposição 3.4.12 *O conjunto* $C = \{f, h, s_{1,n}, t_{1,2} \ldots, t_{1,\lceil\frac{n}{2}\rceil}, p_1, \ldots, p_{\lceil\frac{n-1}{2}\rceil}, v_1, \ldots, v_{\lceil\frac{n}{2}\rceil}\}$ *tem* $2\lceil\frac{n}{2}\rceil + \lceil\frac{n-1}{2}\rceil + 2$ *elementos e gera* $\mathcal{OR}_{m\times n}$. *Além disso, para* $m = 2$, *o conjunto* $D = \{f, h, p_1, \ldots, p_{\lceil\frac{n-1}{2}\rceil}, v_1, \ldots, v_{\lceil\frac{n}{2}\rceil}\}$ *tem* $\lceil\frac{n}{2}\rceil + \lceil\frac{n-1}{2}\rceil + 2$ *elementos e gera* $\mathcal{OR}_{2\times n}$.

Demonstração. Vamos mostrar que todo o elemento do conjunto

$$A = \{f, c_1, b_{1,1} \ldots, b_{1,n-1}, s_{1,n}, t_{1,2} \ldots, t_{1,n}, p_1, \ldots, p_{\lceil\frac{n-1}{2}\rceil}\}$$

é produto de elementos do conjunto C e que todo o elemento do conjunto

$$B = \{f, c_1, b_{1,1} \ldots, b_{1,n-1}, p_1, \ldots, p_{\lceil\frac{n-1}{2}\rceil}\}$$

é produto de elementos do conjunto D, o que faremos em simultâneo.

Sejam $\langle C\rangle$ e $\langle D\rangle$ os submonóides de $\mathcal{OR}_{m\times n}$ gerados pelos conjuntos C e D, respectivamente.

Seja $1\leq j\leq n-1$. Temos que $b_{1,j}\in\langle D\rangle$, para $1\leq j\leq\lceil\frac{n}{2}\rceil$, pelo Lema 3.4.11 (1) e, para $\lceil\frac{n}{2}\rceil+1\leq j\leq n-1$, pelo Lema 3.4.11 (2). Como $D\subseteq C$ então temos igualmente que $b_{1,j}\in\langle C\rangle$.

Vejamos agora que $c_1\in\langle D\rangle$. Atendendo a que, para $1\leq j\leq n-1$, $b_{1,j}\in\langle D\rangle$, pelo Lema 3.4.11 (3) temos que $c_1\in\langle D\rangle\subseteq\langle C\rangle$.

Terminamos a demonstração verificando que $t_{1,j}\in\langle C\rangle$, para $2\leq j\leq n$. Se $2\leq j\leq\lceil\frac{n}{2}\rceil$ então $t_{1,j}\in C$. Por outro lado, suponhamos que $\lceil\frac{n}{2}\rceil+1\leq j\leq n-1$. Temos que $2\leq n-j+1\leq n-\lceil\frac{n}{2}\rceil\leq\lceil\frac{n}{2}\rceil$ e assim $t_{1,n-j+1}\in C$. Logo, pelo Lema 3.4.11 (5), $t_{1,j}\in\langle C\rangle$ e, pelo Lema 3.4.11 (4), $t_{1,n}\in\langle C\rangle$. ∎

Seguidamente, demonstramos que os conjuntos C e D do último resultado são conjuntos geradores de cardinal mínimo de $\mathcal{OR}_{m\times n}$, para $m>2$, e de $\mathcal{OR}_{2\times n}$, respectivamente.

Começamos por observar que um conjunto gerador de $\mathcal{OR}_{m\times n}$ tem de conter duas permutações distintas de X_{mn}, uma que preserve a orientação e outra que reverta a orientação.

A seguir, consideramos transformações de característica igual a $mn-1$.

Lema 3.4.13 *Qualquer conjunto gerador de $\mathcal{OR}_{m\times n}$ contém pelo menos $\lceil\frac{n}{2}\rceil$ elementos distintos de característica igual a $mn-1$.*

Demonstração. Para cada $1\leq t\leq mn$, tomemos $K_t=\{1,2,\ldots,mn\}\backslash\{t\}$. Seja U um conjunto gerador de $\mathcal{OR}_{m\times n}$ e sejam $\xi_1,\ldots,\xi_k$ todos os elementos de U de característica igual a $mn-1$. Então, $k\geq 1$ e para $1\leq j\leq k$, $\mathrm{Im}(\xi_j)=K_{\ell_j}$, para algum $1\leq\ell_j\leq mn$. Para $1\leq j\leq k$ e $1\leq i\leq m-1$, seja ℓ_{ik+j} o elemento de X_{mn} congruente módulo mn com ℓ_j+in.

De seguida, tomemos uma transformação $\gamma\in\mathcal{OR}_{m\times n}$ de característica igual a $mn-1$. Então, $\gamma=\alpha\xi_jf^i$ ou $\gamma=\alpha\xi_jf^ih$, para certos $j\in\{1,\ldots,k\}$, $i\in\{0,\ldots,m-1\}$ e $\alpha\in\mathcal{OR}_{m\times n}$. Donde, $\mathrm{Im}(\gamma)=K_{\ell_{ik+j}}$ ou $\mathrm{Im}(\gamma)=K_{mn-\ell_{ik+j}+1}$. Como temos precisamente mn imagens distintas possíveis para uma transformação de $\mathcal{OR}_{m\times n}$ de característica igual a $mn-1$, o conjunto $\{K_{\ell_1},\ldots,K_{\ell_{mk}},K_{mn-\ell_1+1},\ldots,K_{mn-\ell_{mk}+1}\}$ tem pelo menos mn elementos distintos. Assim $2mk\geq mn$ e portanto $k\geq\lceil\frac{n}{2}\rceil$, como queríamos demonstrar. ∎

Para as transformações de característica igual a $(m-1)n$, temos:

Lema 3.4.14 *Para $m>2$, qualquer conjunto gerador de $\mathcal{OR}_{m\times n}$ contém pelo menos $\lceil\frac{n}{2}\rceil$ elementos distintos de característica igual a $(m-1)n$.*

Demonstração. Para $j\in\{1,\ldots,n\}$, consideremos

$$T_j=\{\alpha\in\mathcal{OP}_{m\times n}\mid|\mathrm{Im}(\alpha)|=(m-1)n\text{ e }(kn)\alpha=(kn+1)\alpha=(i-1)n+j,\quad\text{para certos }1\leq i,k\leq m\}.$$

Relembramos que, na demonstração do Lema 3.4.5, mostrámos que $T_1,\ldots,T_n$ são n subconjuntos disjuntos dois a dois de $\mathcal{OP}_{m\times n}$ tais que, dados $\alpha_1,\alpha_2\in\mathcal{OP}_{m\times n}$, se $\alpha_1\alpha_2\in T_j$ então $\alpha_1\in T_j$ ou $\alpha_2\in T_j$, para $1\le j\le n$. Além disso, dado $\alpha\in\mathcal{T}_{mn}$, temos

$$\alpha\in T_j \text{ se e só se } h\alpha h\in T_{n-j+1} \tag{3.6}$$

e, consequentemente,

$$h\alpha\in T_j \text{ se e só se } \alpha h\in T_{n-j+1}, \tag{3.7}$$

para qualquer $1\le j\le n$. A justificação da equivalência (3.6) é semelhante à da (2.1) da demonstração do Lema 2.3.13, da Secção 2.3 do Capítulo 2 e por isso decidimos omiti-la. Definimos

$$U_j=\{\alpha\in\mathcal{OR}_{m\times n}\mid \alpha\in T_j\cup T_{n-j+1} \text{ ou } h\alpha\in T_j\cup T_{n-j+1}\},$$

para $1\le j\le n$.

Primeiro, observemos que $U_j=U_{n-j+1}$, para $1\le j\le n$. Além disso, veremos a seguir que se $j,j'\in\{1,\ldots,n\}$ são tais que $U_j\cap U_{j'}\neq\emptyset$ então $j'\in\{j,n-j+1\}$. Suponhamos que existe $\alpha\in U_j\cap U_{j'}$. Se $\alpha\in\mathcal{OP}_{m\times n}$ então $\alpha\in(T_j\cup T_{n-j+1})\cap(T_{j'}\cup T_{n-j'+1})$. Por outro lado, se $\alpha\notin\mathcal{OP}_{m\times n}$ então $h\alpha\in(T_j\cup T_{n-j+1})\cap(T_{j'}\cup T_{n-j'+1})$. Logo, para ambos os casos, $T_j\cap T_{j'}\neq\emptyset$ ou $T_j\cap T_{n-j'+1}\neq\emptyset$ ou $T_{n-j+1}\cap T_{j'}\neq\emptyset$ ou $T_{n-j+1}\cap T_{n-j'+1}\neq\emptyset$, e assim $j'=j$ ou $j'=n-j+1$, dado que $T_1,\ldots,T_n$ são n conjuntos disjuntos dois a dois, como observámos no início da demonstração. Então $U_1,\ldots,U_{\lceil\frac{n}{2}\rceil}$ são $\lceil\frac{n}{2}\rceil$ subconjuntos não vazios disjuntos dois a dois de $\mathcal{OR}_{m\times n}$.

Em segundo lugar, notemos que, dado $\alpha\in\mathcal{T}_{mn}$, como consequência de (3.6) e (3.7) temos que

$$\{\alpha,h\alpha h,\alpha h,h\alpha\}\subseteq U_j \quad\text{ou}\quad \{\alpha,h\alpha h,\alpha h,h\alpha\}\cap U_j=\emptyset \tag{3.8}$$

para $1\le j\le n$. De seguida provamos que, para $1\le j\le n$ e $\alpha_1,\alpha_2\in\mathcal{OR}_{m\times n}$ tais que $\alpha_1\alpha_2\in U_j$, então $\alpha_1\in U_j$ ou $\alpha_2\in U_j$. Sejam $1\le j\le n$ e $\alpha_1,\alpha_2\in\mathcal{OR}_{m\times n}$ tais que $\alpha_1\alpha_2\in U_j$.
caso 1. Se $\alpha_1,\alpha_2\in\mathcal{OP}_{m\times n}$, então $\alpha_1\alpha_2\in T_j\cup T_{n-j+1}$ e assim, de acordo com a prova do Lema 3.4.5, temos $\alpha_1\in T_j\cup T_{n-j+1}$ ou $\alpha_2\in T_j\cup T_{n-j+1}$, donde $\alpha_1\in U_j$ ou $\alpha_2\in U_j$.
caso 2. Se $\alpha_1\notin\mathcal{OP}_{m\times n}$ e $\alpha_2\notin\mathcal{OP}_{m\times n}$, então $(\alpha_1 h)(h\alpha_2)=\alpha_1\alpha_2\in U_j$ e $\alpha_1 h,h\alpha_2\in\mathcal{OP}_{m\times n}$. Logo, pelo caso 1, $\alpha_1 h\in U_j$ ou $h\alpha_2\in U_j$. Donde, por (3.8), $\alpha_1\in U_j$ ou $\alpha_2\in U_j$.
caso 3. Se $\alpha_1\notin\mathcal{OP}_{m\times n}$ e $\alpha_2\in\mathcal{OP}_{m\times n}$, então $h\alpha_1\in\mathcal{OP}_{m\times n}$ e $\alpha_2\in\mathcal{OP}_{m\times n}$ e, por (3.8), $(h\alpha_1)\alpha_2=h(\alpha_1\alpha_2)\in U_j$. Pelo caso 1, $h\alpha_1\in U_j$ ou $\alpha_2\in U_j$ e assim, mais uma vez por (3.8), $\alpha_1\in U_j$ ou $\alpha_2\in U_j$.
caso 4. Finalmente, se $\alpha_1\in\mathcal{OP}_{m\times n}$ e $\alpha_2\notin\mathcal{OP}_{m\times n}$, então $\alpha_1\in\mathcal{OP}_{m\times n}$ e $\alpha_2 h\in\mathcal{OP}_{m\times n}$ e, por (3.8), $\alpha_1(\alpha_2 h)=(\alpha_1\alpha_2)h\in U_j$. Donde, pelo caso 1, $\alpha_1\in U_j$ ou $\alpha_2 h\in U_j$ logo, por (3.8), $\alpha_1\in U_j$ ou $\alpha_2\in U_j$, como era nosso objectivo mostrar.

Deduzimos por indução em k, que para escrever um elemento de U_j como produto de k elementos de $\mathcal{OR}_{m\times n}$, precisamos ter um factor pertencente a U_j, para $1\le j\le\lceil\frac{n}{2}\rceil$, o que termina a demonstração do lema. ■

Seguidamente, lidamos com transformações de $\mathcal{OR}_{m\times n}$ de característica igual a n. Assim como fizemos para $\mathcal{OP}_{m\times n}$, pretendemos mostrar que, para gerar $\mathcal{OR}_{m\times n}$ são necessárias $\lceil\frac{n-1}{2}\rceil$ transformações distintas de característica igual a n.

Para cada $n\in\mathbb{N}$, relembramos a permutação reflexão (designada por h na Subsecção 1.4.1 do Capítulo 1) $h_n=\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & n-1 & n\\ n & n-1 & \cdots & 2 & 1\end{pmatrix}$ de X_n. Observemos que, com esta notação, temos $h=h_{mn}$ e, ainda, $h\psi=(h_n,h_n,\ldots,h_n;h_m)$. Além disso, sendo $\alpha\in\mathcal{T}_{m\times n}$ e $\alpha\psi=(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m;\beta)$, obtemos

$$(h\alpha h)\psi=(h_n\alpha_m h_n,h_n\alpha_{m-1}h_n,\ldots,h_n\alpha_1 h_n;h_m\beta h_m). \tag{3.9}$$

Além disso, claramente,

$$|\operatorname{Im}(h_m\beta h_m)|=|\operatorname{Im}(\beta)| \quad \text{e} \quad |\operatorname{Im}(h_n\alpha_i h_n)|=|\operatorname{Im}(\alpha_i)|, \tag{3.10}$$

para $1\le i\le m$.

Recordamos os $\lceil\frac{n-1}{2}\rceil$ subconjuntos disjuntos dois a dois de $\mathcal{OP}_{m\times n}\psi$

$$P_i=\{(\gamma_1,\ldots,\gamma_m;\lambda)\in\overline{N}\mid |\operatorname{Im}(\gamma_k)|=n-i+1 \text{ e } |\operatorname{Im}(\gamma_\ell)|=i+1,$$
$$\text{para certos } 1\le k,\ell\le m \text{ tais que } k\neq\ell\},$$

com $1\le i\le\lceil\frac{n-1}{2}\rceil$, considerados na demonstração do Lema 3.4.7. Dados $\alpha\in\mathcal{T}_{mn}$, de (3.9) e (3.10), temos imediatamente que

$$\alpha\psi\in P_i \text{ se e só se } (h\alpha h)\psi\in P_i \text{ e, consequentemente, } (h\alpha)\psi\in P_i \text{ se e só se } (\alpha h)\psi\in P_i, \tag{3.11}$$

para $1\le i\le\lceil\frac{n-1}{2}\rceil$.

Provamos agora o seguinte lema:

Lema 3.4.15 *Qualquer conjunto gerador de $\mathcal{OR}_{m\times n}$ contém pelo menos $\lceil\frac{n-1}{2}\rceil$ elementos distintos de característica igual a n.* ■

Demonstração. Usando a mesma estratégia dos Lemas 3.4.14 e 2.3.13, definimos

$$Q_i=\{\alpha\in\mathcal{OR}_{m\times n}\mid \alpha\psi\in P_i \text{ ou } (h\alpha)\psi\in P_i\},$$

para $1\le i\le\lceil\frac{n-1}{2}\rceil$.

Observemos que, como $P_1\psi^{-1},\ldots,P_{\lceil\frac{n-1}{2}\rceil}\psi^{-1}$ são $\lceil\frac{n-1}{2}\rceil$ subconjuntos disjuntos dois a dois de transformações de $\mathcal{OP}_{m\times n}$ de característica igual a n, é claro que também $Q_1,\ldots,Q_{\lceil\frac{n-1}{2}\rceil}$ são $\lceil\frac{n-1}{2}\rceil$ subconjuntos disjuntos dois a dois de transformações de $\mathcal{OR}_{m\times n}$ de característica igual a n.

Por outro lado, a partir de (3.11), podemos também deduzir que

$$\{\alpha,h\alpha h,\alpha h,h\alpha\}\subseteq Q_i \quad \text{ou} \quad \{\alpha,h\alpha h,\alpha h,h\alpha\}\cap Q_i=\emptyset, \tag{3.12}$$

para $\alpha \in \mathcal{T}_{mn}$ e $1 \leq i \leq \lceil \frac{n-1}{2} \rceil$. Recordemos que demonstrámos no Lema 3.4.7 que $\alpha_1\alpha_2 \in P_i\psi^{-1}$ implica $\alpha_1 \in P_i\psi^{-1}$ ou $\alpha_2 \in P_i\psi^{-1}$, para $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathcal{OP}_{m\times n}$ e $1 \leq i \leq \lceil \frac{n-1}{2} \rceil$.

À semelhança do que fizemos nas demonstrações dos Lemas 3.4.14 e 2.3.13, vamos verificar que, dados $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathcal{OR}_{m\times n}$, se $\alpha_1\alpha_2 \in Q_i$ então $\alpha_1 \in Q_i$ ou $\alpha_2 \in Q_i$, para $1 \leq i \leq \lceil \frac{n-1}{2} \rceil$. Sejam $1 \leq i \leq \lceil \frac{n-1}{2} \rceil$ e $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathcal{OR}_{m\times n}$ tais que $\alpha_1\alpha_2 \in Q_i$.

caso 1. Se $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathcal{OP}_{m\times n}$, então $(\alpha_1\alpha_2)\psi \in P_i$ ou seja $\alpha_1\alpha_2 \in P_i\psi^{-1}$ donde $\alpha_1 \in P_i\psi^{-1}$ ou $\alpha_2 \in P_i\psi^{-1}$, e assim $\alpha_1\psi \in P_i$ ou $\alpha_2\psi \in P_i$. Concluímos que $\alpha_1 \in Q_i$ ou $\alpha_2 \in Q_i$.

caso 2. Se $\alpha_1 \notin \mathcal{OP}_{m\times n}$ e $\alpha_2 \notin \mathcal{OP}_{m\times n}$, então $(\alpha_1 h)(h\alpha_2) = \alpha_1\alpha_2 \in Q_i$ e $\alpha_1 h, h\alpha_2 \in \mathcal{OP}_{m\times n}$ donde, pelo caso 1, $\alpha_1 h \in Q_i$ ou $h\alpha_2 \in Q_i$. Logo, por (3.12), $\alpha_1 \in Q_i$ ou $\alpha_2 \in Q_i$.

caso 3. Se $\alpha_1 \notin \mathcal{OP}_{m\times n}$ e $\alpha_2 \in \mathcal{OP}_{m\times n}$, então $h\alpha_1 \in \mathcal{OP}_{m\times n}$ e $\alpha_2 \in \mathcal{OP}_{m\times n}$ e, por (3.12), $(h\alpha_1)\alpha_2 = h(\alpha_1\alpha_2) \in Q_i$. Pelo caso 1, $h\alpha_1 \in Q_i$ ou $\alpha_2 \in Q_i$ e assim, novamente por (3.12), $\alpha_1 \in Q_i$ ou $\alpha_2 \in Q_i$.

caso 4. Por último, se $\alpha_1 \in \mathcal{OP}_{m\times n}$ e $\alpha_2 \notin \mathcal{OP}_{m\times n}$, então $\alpha_1 \in \mathcal{OP}_{m\times n}$ e $\alpha_2 h \in \mathcal{OP}_{m\times n}$ e, por (3.12), $\alpha_1(\alpha_2 h) = (\alpha_1\alpha_2)h \in Q_i$. Logo, pelo caso 1, $\alpha_1 \in Q_i$ ou $\alpha_2 h \in Q_i$ donde, por (3.12), $\alpha_1 \in Q_i$ ou $\alpha_2 \in Q_i$, como queríamos demonstrar.

Donde, por indução em k, concluímos facilmente que para escrever um elemento de Q_i como um produto de k elementos de $\mathcal{OR}_{m\times n}$, precisamos de ter um factor que pertença a Q_i, para $1 \leq i \leq \lceil \frac{n-1}{2} \rceil$. ∎

Finalmente, temos:

Teorema 3.4.16 *A característica de $\mathcal{OR}_{m\times n}$ é igual a $2\lceil \frac{n}{2} \rceil + \lceil \frac{n-1}{2} \rceil + 2$, para $m > 2$, e é igual a $\lceil \frac{n}{2} \rceil + \lceil \frac{n-1}{2} \rceil + 2$, para $m = 2$.*

Capítulo 4

Produto semidirecto bilateral

Neste capítulo construímos decomposições de certos monóides de transformações através de produtos semidirectos bilaterais e quocientes. Por *decomposição através de um produto semidirecto bilateral de um monóide S* entendemos representar S como um quociente de um produto semidirecto bilateral de dois monóides. Começamos, na primeira secção, com a obtenção do monóide $\mathcal{POI}_n$ como quociente de um produto semidirecto bilateral dos seus submonóides $\mathcal{POI}_n^-$ e $\mathcal{POI}_n^+$ e do monóide $\mathcal{PODI}_n$ como quociente de um produto semidirecto e de um produto semidirecto reverso dos seus submonóides $\mathcal{POI}_n$ e $\mathcal{C}_2$. Na segunda secção, generalizando a decomposição do monóide $\mathcal{O}_n$ obtida por Kunze em [51], obtemos o monóide $\mathcal{O}_{m\times n}$ como quociente dos seus submonóides $\mathcal{O}_{m\times n}^-$ e $\mathcal{O}_{m\times n}^+$. Obtemos ainda o monóide $\mathcal{OD}_{m\times n}$ como quociente de um produto semidirecto e de um produto semidirecto reverso dos seus submonóides $\mathcal{O}_{m\times n}$ e $\mathcal{C}_2$. Na terceira secção, a mais importante deste capítulo, descrevemos um processo para obter um monóide como quociente de um produto semidirecto bilateral de dois dos seus submonóides. Terminamos, na quarta secção, com a aplicação do processo descrito na secção anterior para a construção de decomposições dos monóides de transformações totais $\mathcal{O}_n$, $\mathcal{OD}_n$, $\mathcal{OP}_n$ e $\mathcal{OR}_n$. Os resultados a partir da segunda secção inclusive encontram-se publicados em [27] e [28].

4.1 Uma decomposição de $\mathcal{POI}_n$ e de $\mathcal{PODI}_n$

Nesta secção decompomos os monóides $\mathcal{POI}_n$, como quociente de um produto semidirecto bilateral dos seus submonóides $\mathcal{POI}_n^-$ e $\mathcal{POI}_n^+$, e $\mathcal{PODI}_n$, como quociente de um produto semidirecto e de um produto semidirecto reverso dos seus submonóides $\mathcal{POI}_n$ e $\mathcal{C}_2$. O que fazemos para ambos os monóides é definir directamente aplicações que nos permitam estabelecer um produto semidirecto bilateral de $\mathcal{POI}_n^-$ e $\mathcal{POI}_n^+$ e um produto semidirecto e um produto semidirecto reverso de $\mathcal{POI}_n$ e $\mathcal{C}_2$.

4.1.1 O monóide $\mathcal{POI}_n$

O monóide $\mathcal{POI}_n$, de todas as transformações parciais injectivas e crescentes em X_n, foi estudado por Fernandes [16, 17, 19, 21, 20], Cowan e Reilly [11], Ganyushkin e Mazorchuk [34] e Dimitrova e Koppitz [15]. Recordemos que em [19] Fernandes provou que os elementos de $\mathcal{POI}_n$ ficam bem definidos através do seu domínio e da sua imagem.

Consideremos as aplicações

$$\begin{array}{rcccl} \delta: \mathcal{POI}_n^+ & \longrightarrow & \mathcal{T}(\mathcal{POI}_n^-) & & \\ u & \longmapsto & \delta_u : \mathcal{POI}_n^- & \longrightarrow & \mathcal{POI}_n^- \\ & & s & \longmapsto & u\centerdot s \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{rcccl} \varphi: \mathcal{POI}_n^- & \longrightarrow & \mathcal{T}(\mathcal{POI}_n^+) & & \\ s & \longmapsto & \varphi_s : \mathcal{POI}_n^+ & \longrightarrow & \mathcal{POI}_n^+ \\ & & u & \longmapsto & u^s, \end{array}$$

com $\operatorname{Dom}(u\centerdot s) = \operatorname{Dom}(us)$, $\operatorname{Im}(u\centerdot s) = \{1,\dots,|\operatorname{Dom}(us)|\} = \{1,\dots,|\operatorname{Im}(us)|\} = \operatorname{Dom}(u^s)$, $\operatorname{Im}(u^s) = \operatorname{Im}(us)$, $1\centerdot s = s$, $u^1 = u$, $u\centerdot 1 = 1$, $1^s = 1$, $1\centerdot 1 = 1$ e $1^1 = 1$, para quaisquer $s \in \mathcal{POI}_n^-\backslash\{1\}$ e $u \in \mathcal{POI}_n^+\backslash\{1\}$.

Observemos que, a partir da definição destas aplicações, é imediato que

$$(u\centerdot s)u^s = us, \tag{4.1}$$

para quaisquer $u \in \mathcal{POI}_n^+$ e $s \in \mathcal{POI}_n^-$.

Lema 4.1.1 *Sejam $s, r \in \mathcal{POI}_n^-$ e $u, v \in \mathcal{POI}_n^+$. Então:*

(a) *$(uv)\centerdot s = u\centerdot(v\centerdot s)$;*

(b) *$u^{sr} = (u^s)^r$.*

Demonstração. Se algum dos elementos s, r, u ou v for a identidade, então as igualdades verificam-se de imediato. Suponhamos então que $s, r \in \mathcal{POI}_n^-\backslash\{1\}$ e $u, v \in \mathcal{POI}_n^+\backslash\{1\}$.

(a) Dado que $\operatorname{Dom}((uv)\centerdot s) = \operatorname{Dom}(uvs)$ e $\operatorname{Im}((uv)\centerdot s) = \{1,\dots,|\operatorname{Dom}(uvs)|\}$ e, por outro lado, $\operatorname{Dom}(u\centerdot(v\centerdot s)) = \operatorname{Dom}(u(v\centerdot s))$ e $\operatorname{Im}(u\centerdot(v\centerdot s)) = \{1,\dots,|\operatorname{Dom}(u(v\centerdot s))|$, basta então mostrar que $\operatorname{Dom}(uvs) = \operatorname{Dom}(u(v\centerdot s))$. Como $\operatorname{Dom}(v\centerdot s) = \operatorname{Dom}(vs)$ então

$$\operatorname{Dom}(uvs) = \operatorname{Dom}(u(vs)) = (\operatorname{Im} u \cap \operatorname{Dom}(vs))u^{-1} = (\operatorname{Im} u \cap \operatorname{Dom}(v\centerdot s))u^{-1} = \operatorname{Dom}(u(v\centerdot s)), \tag{4.2}$$

como queríamos.

(b) Temos agora que $\operatorname{Dom}(u^{sr}) = \{1,\dots,|\operatorname{Im}(usr)|\}$, $\operatorname{Im}(u^{sr}) = \operatorname{Im}(usr)$, $\operatorname{Dom}((u^s)^r) = \{1,\dots,|\operatorname{Im}(u^s r)|\}$ e $\operatorname{Im}((u^s)^r) = \operatorname{Im}(u^s r)$. Queremos então provar que $\operatorname{Im}(usr) = \operatorname{Im}(u^s r)$. Dado que $\operatorname{Im}(u^s) = \operatorname{Im}(us)$, obtemos

$$\operatorname{Im}(usr) = \operatorname{Im}((us)r) = (\operatorname{Im}(us) \cap \operatorname{Dom} r)r = (\operatorname{Im}(u^s) \cap \operatorname{Dom} r)r = \operatorname{Im}(u^s r), \tag{4.3}$$

como pretendíamos demonstrar. ∎

Lema 4.1.2 *Sejam $s, r \in \mathcal{POI}_n^-$ e $u, v \in \mathcal{POI}_n^+$. Temos:*

(SPR) $(uv)^s = u^{v \centerdot s} v^s$;

(SCR) $u \centerdot (sr) = (u \centerdot s)(u^s \centerdot r)$.

Demonstração. Mais uma vez, se algum dos elementos s, r, u ou v for a identidade, então as igualdades são imediatas. Assim, sejam $s, r \in \mathcal{POI}_n^- \backslash \{1\}$ e $u, v \in \mathcal{POI}_n^+ \backslash \{1\}$.

(SPR) Queremos mostrar que $(uv)^s = u^{v \centerdot s} v^s$. Temos que $\operatorname{Dom}((uv)^s) = \{1, \ldots, |\operatorname{Im}(uvs)|\}$ e $\operatorname{Im}((uv)^s) = \operatorname{Im}(uvs)$. De $\operatorname{Im}(u(v \centerdot s)) \subseteq \operatorname{Im}(v \centerdot s) = \{1, \ldots, |\operatorname{Im}(vs)|\}$ concluí-se que

$$\begin{aligned}
\operatorname{Dom}(u^{v \centerdot s} v^s) &= (\operatorname{Im}(u^{v \centerdot s}) \cap \operatorname{Dom}(v^s))(u^{v \centerdot s})^{-1} \\
&= (\operatorname{Im}(u(v \centerdot s)) \cap \{1, \ldots, |\operatorname{Im}(vs)|\})(u^{v \centerdot s})^{-1} \\
&= (\operatorname{Im}(u(v \centerdot s)))(u^{v \centerdot s})^{-1} = \operatorname{Dom}(u^{v \centerdot s}) = \{1, \ldots, |\operatorname{Im}(u(v \centerdot s))|\}.
\end{aligned}$$

Por outro lado, de (4.2) deduz-se que $|\operatorname{Im}(u(v \centerdot s))| = |\operatorname{Dom}(u(v \centerdot s))| = |\operatorname{Dom}(uvs)| = |\operatorname{Im}(uvs)|$ donde $\operatorname{Dom}((uv)^s) = \operatorname{Dom}(u^{v \centerdot s} v^s)$ e consequentemente $|\operatorname{Im}((uv)^s)| = |\operatorname{Im}(u^{v \centerdot s} v^s)|$. Portanto, para provar que $(uv)^s = u^{v \centerdot s} v^s$, é suficiente mostrar que, por exemplo, $\operatorname{Im}(u^{v \centerdot s} v^s) \subseteq \operatorname{Im}((uv)^s)$. Com esta finalidade, seja $\ell \in \operatorname{Im}(u^{v \centerdot s} v^s)$. Então, existe $k \in \{1, \ldots, |\operatorname{Im}(uvs)|\}$ tal que $\ell = k(u^{v \centerdot s} v^s)$, donde $j = k(u^{v \centerdot s}) \in \operatorname{Im}(u(v \centerdot s))$, pelo que $j = i(u(v \centerdot s))$, para algum $i \in \operatorname{Dom} u$. Dado que, por (4.1), $(v \centerdot s)v^s = vs$, temos $\ell = j(v^s) = i(u(v \centerdot s)v^s) = i(uvs)$ e assim $\ell \in \operatorname{Im}(uvs) = \operatorname{Im}((uv)^s)$.

(SCR) Provamos agora que $u \centerdot (sr) = (u \centerdot s)(u^s \centerdot r)$. Temos que $\operatorname{Dom}(u \centerdot (sr)) = \operatorname{Dom}(usr)$ e $\operatorname{Im}((u \centerdot (sr))) = \{1, \ldots, |\operatorname{Dom}(usr)|\}$. Da inclusão $\operatorname{Dom}(u^s r) \subseteq \operatorname{Dom}(u^s) = \{1, \ldots, |\operatorname{Im}(us)|\} = \{1, \ldots, |\operatorname{Dom}(us)|\}$ temos que

$$\begin{aligned}
\operatorname{Im}((u \centerdot s)(u^s \centerdot r)) &= (\operatorname{Im}(u \centerdot s) \cap \operatorname{Dom}(u^s \centerdot r))(u^s \centerdot r) \\
&= (\{1, \ldots, |\operatorname{Dom}(us)|\} \cap \operatorname{Dom}(u^s r))(u^s \centerdot r) \\
&= (\operatorname{Dom}(u^s r))(u^s \centerdot r) = \operatorname{Im}(u^s \centerdot r) = \{1, \ldots, |\operatorname{Dom}(u^s r)|\}.
\end{aligned}$$

Além disso, de (4.3) concluí-se que $|\operatorname{Dom}(u^s r)| = |\operatorname{Im}(u^s r)| = |\operatorname{Im}(usr)| = |\operatorname{Dom}(usr)|$ donde $\operatorname{Im}((u \centerdot s)(u^s \centerdot r)) = \operatorname{Im}(u \centerdot (sr))$. Assim, $|\operatorname{Dom}((u \centerdot s)(u^s \centerdot r))| = |\operatorname{Dom}(u \centerdot (sr))|$ e novamente, para provarmos neste caso que $u \centerdot (sr) = (u \centerdot s)(u^s \centerdot r)$, basta mostrarmos, por exemplo, que $\operatorname{Dom}((u \centerdot s)(u^s \centerdot r)) \subseteq \operatorname{Dom}(u \centerdot (sr))$. Seja $i \in \operatorname{Dom}((u \centerdot s)(u^s \centerdot r))$. Logo, $i(u \centerdot s) \in \operatorname{Dom}(u^s \centerdot r) = \operatorname{Dom}(u^s r)$, donde, por (4.1), $i(us) = i(u \centerdot s)u^s \in \operatorname{Dom} r$, pelo que $i \in \operatorname{Dom}(usr)$. ■

Os dois lemas anteriores permitem que consideremos um produto semidirecto bilateral $\mathcal{POI}_n^- \bowtie \mathcal{POI}_n^+$. Ademais:

Proposição 4.1.3 *O monóide $\mathcal{POI}_n^- \bowtie \mathcal{POI}_n^+$ é uma cobertura do monóide $\mathcal{POI}_n$.*

Demonstração. Consideremos a aplicação

$$\begin{array}{rccc}
\mu : & \mathcal{POI}_n^- \bowtie \mathcal{POI}_n^+ & \longrightarrow & \mathcal{POI}_n \\
& (s, u) & \longmapsto & su.
\end{array}$$

Temos como objectivo mostrar que a aplicação μ é um homomorfismo sobrejectivo que separa idempotentes. Sejam $(s,u),(r,v)\in\mathcal{POI}_n^-\bowtie\mathcal{POI}_n^+$. Como $(u\centerdot r)u^r=ur$, então $((s,u)(r,v))\mu=(s(u\centerdot r),u^rv)\mu=s(u\centerdot r)u^rv=surv=(s,u)\mu(r,v)\mu$, pelo que a aplicação μ é um homomorfismo. Seja $t\in\mathcal{POI}_n$. Então $t=su$, com $\operatorname{Dom}s=\operatorname{Dom}t$, $\operatorname{Im}s=\{1,\ldots,|\operatorname{Dom}t|\}$, $\operatorname{Dom}u=\{1,\ldots,|\operatorname{Im}t|\}$ e $\operatorname{Im}u=\operatorname{Im}t$. Dado que $s\in\mathcal{POI}_n^-$ e $t\in\mathcal{POI}_n^+$ concluímos que o homomorfismo μ é sobrejectivo. Sejam (s,u) e (r,v) elementos idempotentes de $\mathcal{POI}_n^-\bowtie\mathcal{POI}_n^+$. Então $s=s(u\centerdot s)$, $u=u^su$, $r=r(v\centerdot r)$ e $v=v^rv$. Com o objectivo de mostrar que μ separa idempotentes, suponhamos que $(s,u)\mu=(r,v)\mu$, i.e., $su=rv$. Seja $k=|\operatorname{Dom}(us)|=|\operatorname{Im}(us)|$. Temos que $k\leq|\operatorname{Im}s|$ e $k\leq|\operatorname{Dom}u|$. Por outro lado temos $s(u\centerdot s)=s$, donde $\operatorname{Im}s=\operatorname{Im}(s(u\centerdot s))\subseteq\operatorname{Im}(u\centerdot s)=\{1,\ldots,k\}$. Além disso, de $u^su=u$ resulta $\operatorname{Im}u=\operatorname{Im}(u^su)=(\operatorname{Im}(u^s)\cap\operatorname{Dom}u)u$, pelo que $\operatorname{Im}(u^s)\cap\operatorname{Dom}u=\operatorname{Dom}u$, donde $\operatorname{Dom}u\subseteq\operatorname{Im}(u^s)=\operatorname{Im}(us)\subseteq\operatorname{Im}(s)\subseteq\{1,\ldots,k\}$. Logo, $\operatorname{Im}s=\operatorname{Dom}u=\{1,\ldots,k\}$ e, portanto $\operatorname{Dom}(su)=\operatorname{Dom}s$ e $\operatorname{Im}(su)=\operatorname{Im}u$. De forma análoga para r e v, sendo $\ell=|\operatorname{Dom}(rv)|=|\operatorname{Im}(rv)|$, temos $\operatorname{Im}r=\operatorname{Dom}v=\{1,\ldots,\ell\}$ e, portanto $\operatorname{Dom}(rv)=\operatorname{Dom}r$ e $\operatorname{Im}(rv)=\operatorname{Im}v$. Como por hipótese $su=rv$ então $\operatorname{Dom}s=\operatorname{Dom}r$ e $\operatorname{Im}u=\operatorname{Im}v$. Assim $\ell=k$, donde $s=r$ e $u=v$, ou seja, $(s,u)=(r,v)$, como pretendíamos demonstrar. ∎

Recordemos que POI e $\mathsf{J}\cap\mathsf{Ecom}$ são as pseudovariedades de monóides geradas pelas famílias $\{\mathcal{POI}_n\mid n\in\mathbb{N}\}$ e $\{\mathcal{POI}_n^+\mid n\in\mathbb{N}\}$, respectivamente. Assim, no que respeita a pseudovariedades temos:

Corolário 4.1.4 $\mathsf{POI}\subseteq(\mathsf{J}\cap\mathsf{Ecom})\bowtie(\mathsf{J}\cap\mathsf{Ecom})$. ∎

4.1.2 O monóide $\mathcal{PODI}_n$

Pretendemos obter uma decomposição através de um produto semidirecto e de um produto semidirecto reverso do monóide $\mathcal{PODI}_n$ em relação aos seus submonóides $\mathcal{POI}_n$ e $\mathcal{C}_2$. Relembremos que $\mathcal{C}_2=\{1,h\}$ é um grupo cíclico de ordem 2 (ver o Exemplo 1.2.1). Logo dados $x,y\in\mathcal{C}_2$ temos $xy=yx$ e $x^2=y^2=1$.

Seja

$$\begin{array}{rccccc}\delta: & \mathcal{C}_2 & \longrightarrow & \mathcal{T}(\mathcal{POI}_n) & & \\ & x & \longmapsto & \delta_x:\mathcal{POI}_n & \longrightarrow & \mathcal{POI}_n \\ & & & s & \longmapsto & x\centerdot s=xsx.\end{array}$$

Dados $x,y\in\mathcal{C}_2$, $s\in\mathcal{POI}_n$ temos $(xy)\centerdot s=xysxy=xysyx=x\centerdot(ysy)=x\centerdot(y\centerdot s)$ e portanto δ é um anti-homomorfismo de monóides. Também, para quaisquer $x\in\mathcal{C}_2$, $s,r\in\mathcal{POI}_n$ temos $x\centerdot(sr)=xsrx=xs1rx=xsxxrx=(x\centerdot s)(x\centerdot r)$ e $1\centerdot s=s$. Obtemos então um produto semidirecto $\mathcal{POI}_n\rtimes\mathcal{C}_2$ induzido por δ. Além disso:

Proposição 4.1.5 *O monóide $\mathcal{POI}_n\rtimes\mathcal{C}_2$ é uma cobertura do monóide $\mathcal{PODI}_n$.*

Demonstração. Vamos mostrar que a aplicação

$$\begin{array}{rccc} \mu: & \mathcal{POI}_n \rtimes \mathcal{C}_2 & \longrightarrow & \mathcal{PODI}_n \\ & (s,x) & \longmapsto & sx \end{array}$$

é um homomorfismo sobrejectivo que separa idempotentes. Dado que, para quaisquer $s,r \in \mathcal{POI}_n$ e $x,y \in \mathcal{C}_2$, temos $((s,x)(r,y))\mu = (s(x \centerdot r), xy)\mu = (sxrx, xy)\mu = sxrx^2y = sxry = (s,x)\mu(r,y)\mu$ e, para qualquer $t \in \mathcal{PODI}_n$, temos que $t = t1 \in \mathcal{POI}_n$ ou $t = (th)h$ com $th \in \mathcal{POI}_n$, então a aplicação μ é um homomorfismo sobrejectivo. Por outro lado, observemos que, se $(s,x) \in E(\mathcal{POI}_n \rtimes \mathcal{C}_2)$ então $x = 1$. Como $(s,1)\mu = (r,1)\mu$ implica $s = r$, para quaisquer $s,r \in \mathcal{POI}_n$, então μ separa idempotentes. ∎

Recordemos que PODI e Ab_2 são as pseudovariedades de monóides geradas pelas famílias $\{\mathcal{PODI}_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ e $\mathcal{C}_2$, respectivamente. Então, como consequência da proposição anterior, temos a inclusão de pseudovariedades:

Corolário 4.1.6 $\mathsf{PODI} \subseteq \mathsf{POI} \rtimes \mathsf{Ab}_2$. ∎

Dado que $\mathcal{C}_2$ é um monóide comutativo, a acção esquerda δ pode ser considerada como uma acção direita de $\mathcal{C}_2$ em $\mathcal{POI}_n$: $s^x = xsx$, para quaisquer $x \in \mathcal{C}_2$ e $s \in \mathcal{POI}_n$. Obtemos assim um produto semidirecto reverso $\mathcal{C}_2 \ltimes \mathcal{POI}_n$, o qual, de acordo com o que foi observado na Secção 1.5, é isomorfo a $(\mathcal{POI}_n^r \rtimes \mathcal{C}_2)^r$. Além disso, também a aplicação

$$\begin{array}{rccc} \mu: & \mathcal{C}_2 \ltimes \mathcal{POI}_n & \longrightarrow & \mathcal{PODI}_n \\ & (x,s) & \longmapsto & xs \end{array}$$

é um homomorfismo sobrejectivo que separa idempotentes. Donde:

Proposição 4.1.7 *O monóide $\mathcal{C}_2 \ltimes \mathcal{POI}_n$ é uma cobertura do monóide $\mathcal{PODI}_n$.* ∎

Para pseudovariedades temos:

Corolário 4.1.8 $\mathsf{PODI} \subseteq \mathsf{Ab}_2 \ltimes \mathsf{POI}$. ∎

4.2 Uma decomposição de $\mathcal{O}_{m\times n}$ e de $\mathcal{OD}_{m\times n}$

Nesta secção, usando um produto semidirecto bilateral, obtemos o monóide $\mathcal{O}_{m\times n}$, de todas as transformações totais crescentes em X_{mn} que preservam uma m-partição uniforme como quociente dos seus submonóides $\mathcal{O}^-_{m\times n}$ e $\mathcal{O}^+_{m\times n}$. Este resultado generaliza a decomposição do monóide $\mathcal{O}_n$ através de um produto semidirecto bilateral dos seus submonóides $\mathcal{O}^-_n$ e $\mathcal{O}^+_n$, obtida por Kunze [51], a qual é também obtida, usando um processo diferente, na Subsecção 4.4.1. Aqui, a nossa estratégia é usar as acções definidas por Kunze em $\mathcal{O}^-_{mn}$ e $\mathcal{O}^+_{mn}$ para induzir uma acção esquerda de $\mathcal{O}^+_{m\times n}$ em $\mathcal{O}^-_{m\times n}$ e uma acção direita de $\mathcal{O}^-_{m\times n}$ em $\mathcal{O}^+_{m\times n}$. Terminamos observando que também o monóide $\mathcal{OD}_{m\times n}$, de todas as transformações totais monótonas (crescentes ou decrescentes) em X_{mn} que preservam uma m-partição uniforme, se pode obter, usando um produto semidirecto ou um produto semidirecto reverso, como quociente dos seus submonóides $\mathcal{O}_{m\times n}$ e $\mathcal{C}_2$.

Começamos por recordar, com algumas adaptações que tornam mais simples e clara a apresentação, a construção efectuada por Kunze [51], para mostrar que o monóide $\mathcal{O}_n$ é um quociente de um produto semidirecto bilateral de $\mathcal{O}_n^-$ e $\mathcal{O}_n^+$.

Para $i \in \{1,\ldots,n-1\}$ e $j \in \{2,\ldots,n\}$, definimos transformações $\sigma_{i,j} \in \mathcal{O}_n^-$ e $\varepsilon_{i,j} \in \mathcal{O}_n^+$ por

$$x\sigma_{i,j} = \begin{cases} i & \text{se } i \le x \le j \\ x & \text{caso contrário} \end{cases} \quad \text{e} \quad x\varepsilon_{i,j} = \begin{cases} j & \text{se } i \le x \le j \\ x & \text{caso contrário} \end{cases},$$

para todo o $x \in \{1,\ldots,n\}$.

Observemos que, para $i \neq j$ e $k \neq \ell$, temos $\sigma_{i,j} = \sigma_{k,\ell}$ se e só se $i = k$ e $j = \ell$. Analogamente, para $i \neq j$ e $k \neq \ell$, temos $\varepsilon_{i,j} = \varepsilon_{k,\ell}$ se e só se $i = k$ e $j = \ell$.

Estas transformações permitem-nos representar de uma forma canónica os elementos de $\mathcal{O}_n^-$ e de $\mathcal{O}_n^+$: dados $\sigma \in \mathcal{O}_n^-$ e $\varepsilon \in \mathcal{O}_n^+$, temos

$$\sigma = \sigma_{1,a_1} \cdots \sigma_{n-1,a_{n-1}},$$

com $a_i = \max(\{1,\ldots,i\}\sigma^{-1})$, para $i \in \{1,\ldots,n-1\}$, e

$$\varepsilon = \varepsilon_{b_n,n} \cdots \varepsilon_{b_2,2},$$

com $b_j = \min(\{j,\ldots,n\}\varepsilon^{-1})$, para $j \in \{2,\ldots,n\}$.

Por exemplo, dados

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 5 & 7 \end{pmatrix} \in \mathcal{O}_7^- \quad \text{e} \quad \varepsilon = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 3 & 5 & 6 & 6 & 7 & 7 \end{pmatrix} \in \mathcal{O}_7^+,$$

temos $\sigma = \sigma_{1,2}\sigma_{2,4}\sigma_{3,5}\sigma_{4,5}\sigma_{5,6}\sigma_{6,6}$ e $\varepsilon = \varepsilon_{6,7}\varepsilon_{4,6}\varepsilon_{3,5}\varepsilon_{3,4}\varepsilon_{1,3}\varepsilon_{1,2}$.

Podemos então definir uma acção esquerda de $\mathcal{O}_n^+$ em $\mathcal{O}_n^-$ e uma acção direita de $\mathcal{O}_n^-$ em $\mathcal{O}_n^+$ como se segue: dados $\sigma = \sigma_{1,a_1} \cdots \sigma_{n-1,a_{n-1}} \in \mathcal{O}_n^-$ e $\varepsilon = \varepsilon_{b_n,n} \cdots \varepsilon_{b_2,2} \in \mathcal{O}_n^+$ (canonicamente representados), sejam

$$\varepsilon\cdot\sigma = \sigma_{1,a'_1} \cdots \sigma_{n-1,a'_{n-1}}\ , \tag{4.4}$$

com $a'_i = \max\{i, \min\{a_i, b_{a_i+1} - 1\}\}$ (em que assumimos que $b_{n+1} = n+1$ para o caso $a_i = n$), para $1 \le i \le n-1$, e

$$\varepsilon^\sigma = \varepsilon_{b'_n,n} \cdots \varepsilon_{b'_2,2}\ , \tag{4.5}$$

com

$$b'_n = \begin{cases} b_n & \text{se } a_{n-1} = n-1 \\ n & \text{caso contrário} \end{cases} \quad \text{e} \quad b'_j = \begin{cases} b_j & \text{se } a_{j-1} = j-1 \\ \min\{j, b_{a_{j-1}+1}\} & \text{se } j \le a_{j-1} < a_j \\ \min\{j, b'_{j+1}\} & \text{se } a_j = a_{j-1}\ , \end{cases}$$

(definidos recursivamente) para $2 \le j \le n-1$.

Observemos que $\varepsilon\cdot\sigma$ e ε^σ estão ambos representados na forma canónica.

Exemplo 4.2.1 Sejam

$$\begin{aligned}\sigma &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 9 & 12 \end{pmatrix} \\ &= \sigma_{1,5}\sigma_{2,5}\sigma_{3,5}\sigma_{4,5}\sigma_{5,5}\sigma_{6,10}\sigma_{7,10}\sigma_{8,10}\sigma_{9,11}\sigma_{10,11}\sigma_{11,11} \in \mathcal{O}_{12}^{-} \text{ (notemos que } \sigma \notin \mathcal{O}_{3\times 4}^{-})\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\varepsilon &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 5 & 5 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 12 & 12 & 12 & 12 \end{pmatrix} \\ &= \varepsilon_{9,12}\varepsilon_{9,11}\varepsilon_{9,10}\varepsilon_{9,9}\varepsilon_{3,8}\varepsilon_{3,7}\varepsilon_{3,6}\varepsilon_{1,5}\varepsilon_{1,4}\varepsilon_{1,3}\varepsilon_{1,2} \in \mathcal{O}_{12}^{+} \text{ (notemos que } \varepsilon \in \mathcal{O}_{3\times 4}^{+}).\end{aligned}$$

Então

$$\begin{aligned}\varepsilon\,\centerdot\,\sigma &= \sigma_{1,2}\sigma_{2,2}\sigma_{3,3}\sigma_{4,4}\sigma_{5,5}\sigma_{6,8}\sigma_{7,8}\sigma_{8,8}\sigma_{9,9}\sigma_{10,10}\sigma_{11,11} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 1 & 1 & 3 & 4 & 5 & 6 & 6 & 6 & 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix} \in \mathcal{O}_{12}^{-} \text{ (notemos que } \varepsilon\,\centerdot\,\sigma \in \mathcal{O}_{3\times 4}^{-})\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\varepsilon^{\sigma} &= \varepsilon_{9,12}\varepsilon_{9,11}\varepsilon_{9,10}\varepsilon_{9,9}\varepsilon_{8,8}\varepsilon_{7,7}\varepsilon_{3,6}\varepsilon_{3,5}\varepsilon_{3,4}\varepsilon_{3,3}\varepsilon_{2,2} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 1 & 2 & 6 & 6 & 6 & 6 & 7 & 8 & 12 & 12 & 12 & 12 \end{pmatrix} \in \mathcal{O}_{12}^{+} \text{ (notemos que } \varepsilon^{\sigma} \notin \mathcal{O}_{3\times 4}^{+}).\end{aligned}$$

Relativamente a estas acções prova-se [51] que a função

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_n^{-} \bowtie \mathcal{O}_n^{+} & \longrightarrow & \mathcal{O}_n \\ (\sigma, \varepsilon) & \mapsto & \sigma\varepsilon \end{array}$$

é um homomorfismo sobrejectivo (ver também a Subsecção 4.4.1).

A nossa estratégia para construir um produto semidirecto bilateral $\mathcal{O}_{m\times n}^{-} \bowtie \mathcal{O}_{m\times n}^{+}$ baseia-se na observação geral que a seguir efectuamos.

Sejam S um monóide e S^- e S^+ dois submonóides de S. Consideremos uma acção esquerda δ de S^+ em S^- e uma acção direita φ de S^- em S^+,

$$\begin{array}{cccccccc} \delta: & S^+ & \longrightarrow & \mathcal{T}(S^-) & & & & \\ & u & \longmapsto & \delta_u: & S^- & \longrightarrow & S^- \\ & & & & s & \longmapsto & u\,\centerdot\, s \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{cccccccc} \varphi: & S^- & \longrightarrow & \mathcal{T}(S^+) & & & \\ & s & \longmapsto & \varphi_s: & S^+ & \longrightarrow & S^+ \\ & & & & u & \longmapsto & u^s \end{array},$$

tais que a função

$$\begin{array}{ccc} S^- \bowtie S^+ & \longrightarrow & S \\ (s, u) & \mapsto & su \end{array}$$

é um homomorfismo.

Consideremos agora um submonóide T de S, um submonóide T^- de S^- e um submonóide T^+ de S^+. É uma questão de rotina verificar que, se $u\,\centerdot\, s \in T^-$ e $u^s \in T^+$, para quaisquer

$s \in T^-$ e $u \in T^+$, então δ induz uma acção esquerda de T^+ em T^- e φ induz uma acção direita de T^- em T^+. Se, além disso, $T = T^-T^+$ então também a função

$$\begin{array}{ccc} T^- \bowtie T^+ & \longrightarrow & T \\ (s,u) & \mapsto & su \end{array} \tag{4.6}$$

é um homomorfismo sobrejectivo.

De seguida, focamos a nossa atenção nos monóides $\mathcal{O}_{m\times n}$, $\mathcal{O}^-_{m\times n}$ e $\mathcal{O}^+_{m\times n}$.

Primeiro, caracterizamos as formas canónicas dos elementos de $\mathcal{O}^-_{m\times n}$ e de $\mathcal{O}^+_{m\times n}$.

Proposição 4.2.2 *Sejam $\sigma = \sigma_{1,a_1}\cdots\sigma_{mn-1,a_{mn-1}} \in \mathcal{O}^-_{mn}$ e $\varepsilon = \varepsilon_{b_{mn},mn}\cdots\varepsilon_{b_2,2} \in \mathcal{O}^+_{mn}$ canonicamente representados. Então:*

1. *$\sigma \in \mathcal{O}^-_{m\times n}$ se e só se $i \equiv 0 \pmod{n}$ implica $a_i \equiv 0 \pmod{n}$, para $i \in \{1,\ldots,mn-1\}$;*

2. *$\varepsilon \in \mathcal{O}^+_{m\times n}$ se e só se $j \equiv 1 \pmod{n}$ implica $b_j \equiv 1 \pmod{n}$, para $j \in \{2,\ldots,mn\}$.*

Demonstração. Começamos por demonstrar a propriedade 1. Suponhamos que existe um elemento $i \in \{1,\ldots,mn-1\}$ tal que $i \equiv 0 \pmod{n}$ e $a_i \not\equiv 0 \pmod{n}$. Como σ está na forma canónica, temos $(a_i)\sigma \leq i$ e $(a_i+1)\sigma > i$. De facto, $a_i = \max(\{1,\ldots,i\}\sigma^{-1})$, pelo que $a_i \in \{1,\ldots,i\}\sigma^{-1}$ e $a_i + 1 \notin \{1,\ldots,i\}\sigma^{-1}$ donde $a_i\sigma \in \{1,\ldots,i\}$ e $(a_i+1)\sigma \notin \{1,\ldots,i\}$ e, portanto, $a_i\sigma \leq i$ e $(a_i+1)\sigma > i$. Como $i \equiv 0 \pmod{n}$, então $(a_i)\sigma, (a_i+1)\sigma \notin A_k$, para todo $k \in \{1,\ldots,m\}$. Por outro lado, como $a_i \not\equiv 0 \pmod{n}$, então $a_i, a_i+1 \in A_k$, para algum $k \in \{1,\ldots,m\}$. Assim $\sigma \notin \mathcal{O}^-_{m\times n}$.

Reciprocamente, suponhamos que $i \equiv 0 \pmod{n}$ implica $a_i \equiv 0 \pmod{n}$, para todo o elemento $i \in \{1,\ldots,mn-1\}$. Sejam $x, y \in X_{mn}$ tais que $x \leq y$. Suponhamos que $x\sigma, y\sigma \notin A_k$, para todo $k \in \{1,\ldots,m\}$. Então $x\sigma < y\sigma$ e existe $i \in \{x\sigma,\ldots,y\sigma-1\}$ tal que $i \equiv 0 \pmod{n}$. De $a_{x\sigma} = \max(\{1,\ldots,x\sigma\}\sigma^{-1})$ e $x\sigma \leq i$, resulta que $x \leq a_{x\sigma} \leq a_i$. Por outro lado, $y\sigma \notin \{1,\ldots,i\}$ e assim, como $a_i = \max(\{1,\ldots,i\}\sigma^{-1})$, temos que $a_i < y$. Donde, $x \leq a_{x\sigma} \leq a_i < y$ e, pela hipótese, $a_i \equiv 0 \pmod{n}$, portanto $x, y \notin A_k$, para todo $k \in \{1,\ldots,m\}$. Assim $\sigma \in \mathcal{O}^-_{m\times n}$.

De seguida demonstramos 2. Analogamente ao que fizemos em 1, suponhamos que existe um elemento $j \in \{2,\ldots,mn\}$ tal que $j \equiv 1 \pmod{n}$ e $b_j \not\equiv 1 \pmod{n}$. De acordo com a forma canónica de ε, temos $(b_j-1)\varepsilon < j \leq (b_j)\varepsilon$. Como $j \equiv 1 \pmod{n}$, então $(b_j-1)\varepsilon, (b_j)\varepsilon \notin A_k$, para todo $k \in \{1,\ldots,m\}$. No entanto, como $b_j \not\equiv 1 \pmod{n}$, então existe $k \in \{1,\ldots,m\}$ tal que $b_j - 1, b_j \in A_k$ e assim $\varepsilon \notin \mathcal{O}^+_{m\times n}$.

Para a proposição recíproca, usamos mais uma vez o mesmo tipo de raciocínio que usámos em 1. Suponhamos que $j \equiv 1 \pmod{n}$ implica $b_j \equiv 1 \pmod{n}$, para todo $j \in \{2,\ldots,mn\}$. Sejam $x, y \in X_{mn}$ tais que $x \leq y$. Suponhamos que $x\varepsilon, y\varepsilon \notin A_k$, para todo $k \in \{1,\ldots,m\}$. Então $x\varepsilon < y\varepsilon$ e existe $j \in \{x\varepsilon+1,\ldots,y\varepsilon\}$ tal que $j \equiv 1 \pmod{n}$. Temos que $x < b_j \leq b_{y\varepsilon} \leq y$ e, pela hipótese, $b_j \equiv 1 \pmod{n}$, donde $x, y \notin A_k$, para todo $k \in \{1,\ldots,m\}$ e assim $\varepsilon \in \mathcal{O}^+_{m\times n}$, como pretendíamos. ■

Lema 4.2.3 *Sejam* $\sigma = \sigma_{1,a_1}\cdots\sigma_{mn-1,a_{mn-1}} \in \mathcal{O}^-_{m\times n}$ *e* $\varepsilon = \varepsilon_{b_{mn},mn}\cdots\varepsilon_{b_2,2} \in \mathcal{O}^+_{m\times n}$. *Então* $\varepsilon\centerdot\sigma \in \mathcal{O}^-_{m\times n}$ *e* $\varepsilon^\sigma \in \mathcal{O}^+_{m\times n}$.

Demonstração. Começamos por demonstrar que $\varepsilon\centerdot\sigma \in \mathcal{O}^-_{m\times n}$. Suponhamos que $\varepsilon\centerdot\sigma = \sigma_{1,a'_1}\cdots\sigma_{mn-1,a'_{mn-1}}$ tal como foi definido em (4.4). Seja $i \in \{1,\ldots,mn-1\}$ tal que $i \equiv 0 \pmod n$. Então, como $\sigma \in \mathcal{O}^-_{m\times n}$, temos $a_i \equiv 0 \pmod n$. Se $a'_i = a_i$ ou $a'_i = i$, então trivialmente $a'_i \equiv 0 \pmod n$. Assim, admitamos que $a'_i = b_{a_i+1}-1$. Como $a_i \equiv 0 \pmod n$, então $a_i + 1 \equiv 1 \pmod n$. Agora, como $\varepsilon \in \mathcal{O}^+_{m\times n}$, então $b_{a_i+1} \equiv 1 \pmod n$ e assim $a'_i = b_{a_i+1} - 1 \equiv 0 \pmod n$. Logo $\varepsilon\centerdot\sigma \in \mathcal{O}^-_{m\times n}$.

Seguidamente, provamos que $\varepsilon^\sigma \in \mathcal{O}^+_{m\times n}$. Tomemos $\varepsilon^\sigma = \varepsilon_{b'_{mn},mn}\cdots\varepsilon_{b'_2,2}$, como definido em (4.5). Seja $j \in \{2,\ldots,mn\}$ tal que $j \equiv 1 \pmod n$. Assim, como $\varepsilon \in \mathcal{O}^+_{m\times n}$, então $b_j \equiv 1 \pmod n$. Observemos que $j < mn$. Analisemos os diferentes casos da definição de b'_j.

Se $a_{j-1} = j-1$ então $b'_j = b_j \equiv 1 \pmod n$.

Se $j \le a_{j-1} < a_j$ obtemos $b'_j = \min\{j, b_{a_{j-1}+1}\}$. Se $b'_j = j$, então trivialmente $b'_j \equiv 1 \pmod n$. Por outro lado admitamos que $b'_j = b_{a_{j-1}+1}$. Como $j-1 \equiv 0 \pmod n$ e $\sigma \in \mathcal{O}^-_{m\times n}$, então $a_{j-1} \equiv 0 \pmod n$, donde $a_{j-1}+1 \equiv 1 \pmod n$ e assim $b'_j = b_{a_{j-1}+1} \equiv 1 \pmod n$.

Resta-nos considerar $a_j = a_{j-1}$. Neste caso, $b'_j = \min\{j, b'_{j+1}\}$. Se $j \le b'_{j+1}$ então $b'_j = j \equiv 1 \pmod n$. Por conseguinte, admitamos que $j > b'_{j+1}$. Temos $b'_j = b'_{j+1} < j$.

Seja $k \in \{j,\ldots,mn-1\}$ o maior índice tal que $a_k = a_{k-1} = \cdots = a_j = a_{j-1}$.

Primeiro, mostramos que $b'_{k+1} = b'_k = \cdots = b'_{j+1} = b'_j$. De modo a obtermos uma contradição, suponhamos que existe $t \in \{j+1,\ldots,k+1\}$ tal que $b'_t > b'_{t-1} = \cdots = b'_j$. Então, como $a_{t-1} = a_{t-2}$, temos $b'_t > b'_{t-1} = \min\{t-1, b'_t\}$ (observemos que $t-1 \le k < mn$), assim $j \le t-1 = b'_{t-1} = b'_j < j$, o que é uma contradição.

A seguir, recordemos que $a_{j-1} \equiv 0 \pmod n$. Donde, $a_k \equiv 0 \pmod n$. Se $k = mn-1$ então, como $a_{mn-1} \ge mn-1$ e $a_{mn-1} \equiv 0 \pmod n$, teremos de ter $a_{mn-1} = mn$ e assim $j > b'_j = b'_{mn} = mn$, o que é uma contradição. Logo $k < mn-1$. Além disso, temos $a_{k+1} > a_k = a_{k-1} = \cdots = a_j = a_{j-1}$.

Se $a_k = k$ então $b'_j = b'_{k+1} = b_{k+1} \equiv 1 \pmod n$, visto que $k+1 = a_k + 1 \equiv 1 \pmod n$ e $\varepsilon \in \mathcal{O}^+_{m\times n}$.

Finalmente, suponhamos que $a_{k+1} > a_k \ge k+1$. Então $b'_j = b'_{k+1} = \min\{k+1, b_{a_k+1}\}$. Se $k+1 \le b_{a_k+1}$ então $j > b'_j = k+1 \ge j+1$, o que é uma contradição. Portanto, $k+1 > b_{a_k+1}$ e assim $b'_j = b_{a_k+1}$. De $a_k + 1 \equiv 1 \pmod n$, resulta que $b'_j = b_{a_k+1} \equiv 1 \pmod n$, como queríamos demonstrar. ∎

O lema anterior permite-nos considerar o produto semidirecto bilateral $\mathcal{O}^-_{m\times n} \bowtie \mathcal{O}^+_{m\times n}$ induzido pelo produto semidirecto bilateral $\mathcal{O}^-_{mn} \bowtie \mathcal{O}^+_{mn}$. Ademais, como $\mathcal{O}_{m\times n} = \mathcal{O}^-_{m\times n}\mathcal{O}^+_{m\times n}$ (ver a Subsecção 1.4.4), por (4.6) obtemos:

Teorema 4.2.4 *O monóide* $\mathcal{O}_{m\times n}$ *é uma imagem homomorfa de* $\mathcal{O}^-_{m\times n} \bowtie \mathcal{O}^+_{m\times n}$. ∎

Vimos, na Subsecção 1.4.4, que o monóide $\mathcal{OD}_{m\times n}$ é gerado por $\mathcal{O}_{m\times n}$ e $\mathcal{C}_2$. Tal como $\mathcal{PODI}_n$ se decompõe usando um produto semidirecto ou um produto semidirecto reverso através dos seus submonóides $\mathcal{POI}_n$ e $\mathcal{C}_2$, também, de uma forma análoga, podemos obter o monóide $\mathcal{OD}_{m\times n}$ como quociente de um produto semidirecto e de um produto semidirecto reverso dos seus submonóides $\mathcal{O}_{m\times n}$ e $\mathcal{C}_2$. Para isso, basta considerar a aplicação

$$\begin{array}{rccccc} \delta: & \mathcal{C}_2 & \longrightarrow & \mathcal{T}(\mathcal{O}_{m\times n}) & & \\ & x & \longmapsto & \delta_x : \mathcal{O}_{m\times n} & \longrightarrow & \mathcal{O}_{m\times n} \\ & & & s & \longmapsto & x\centerdot s = xsx. \end{array}$$

Apesar do contexto ser diferente, as justificações de que a aplicação que definimos é de facto um anti-homomorfismo de monóides e de que as condições $x\centerdot(sr) = (x\centerdot s)(x\centerdot r)$ e $1\centerdot s = s$ são verificadas, para quaisquer $x \in \mathcal{C}_2$ e $s, r \in \mathcal{O}_{m\times n}$, são semelhantes às da decomposição de $\mathcal{PODI}_n$ e por isso decidimos omiti-las. Temos assim uma acção esquerda de $\mathcal{C}_2$ em $\mathcal{O}_{m\times n}$. Relembremos a permutação $h = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & mn-1 & mn \\ mn & mn-1 & \cdots & 2 & 1 \end{pmatrix}$ definida na Subsecção 1.4.4. Dado que, para $s \in \mathcal{OD}_{m\times n}$ temos $s \in \mathcal{O}_{m\times n}$ ou $s = (sh)h$ com $sh \in \mathcal{O}_{m\times n}$, a aplicação

$$\begin{array}{rccc} \mu: & \mathcal{O}_{m\times n} \rtimes \mathcal{C}_2 & \longrightarrow & \mathcal{OD}_{m\times n} \\ & (s,x) & \longmapsto & sx \end{array}$$

é sobrejectiva. Por outro lado, mais uma vez à semelhança do que acontece com o monóide $\mathcal{PODI}_n$ em relação aos seus submonóides $\mathcal{POI}_n$ e $\mathcal{C}_2$, temos $((s,x)(r,y))\mu = (s(x\centerdot r), xy)\mu = (sxrx, xy)\mu = sxrx^2y = sxry = (s,x)\mu(r,y)\mu$, para quaisquer $s, r \in \mathcal{O}_{m\times n}$ e $x, y \in \mathcal{C}_2$, e assim μ é um homomorfismo.

Observemos agora que, se $(s,x) \in E(\mathcal{O}_{m\times n} \rtimes \mathcal{C}_2)$ então $x = 1$. Além disso, se $(s,1), (r,1) \in E(\mathcal{O}_{m\times n} \rtimes \mathcal{C}_2)$ verificam $(s,1)\mu = (r,1)\mu$ temos $s = r$. Logo, em particular, μ separa idempotentes.

Concluímos que:

Proposição 4.2.5 *O monóide $\mathcal{O}_{m\times n} \rtimes \mathcal{C}_2$ é uma cobertura do monóide $\mathcal{OD}_{m\times n}$.* ∎

Como $\mathcal{C}_2$ é um monóide comutativo, a acção esquerda de $\mathcal{C}_2$ em $\mathcal{O}_{m\times n}$ definida atrás pode ser considerada como uma acção direita de $\mathcal{C}_2$ em $\mathcal{O}_{m\times n}$: $s^x = xsx$, para quaisquer $s \in \mathcal{O}_{m\times n}$ e $x \in \mathcal{C}_2$. Temos então um produto semidirecto reverso $\mathcal{C}_2 \ltimes \mathcal{O}_{m\times n}$ que, de acordo com o que foi observado na Secção 1.5, é isomorfo a $(\mathcal{O}^r_{m\times n} \rtimes \mathcal{C}_2)^r$. Além disso, a aplicação

$$\begin{array}{rccc} \mu: & \mathcal{C}_2 \ltimes \mathcal{O}_{m\times n} & \longrightarrow & \mathcal{OD}_{m\times n} \\ & (x,s) & \longmapsto & xs \end{array}$$

é um homomorfismo sobrejectivo que separa idempotentes. Donde:

Proposição 4.2.6 *O monóide $\mathcal{C}_2 \ltimes \mathcal{O}_{m\times n}$ é uma cobertura do monóide $\mathcal{OD}_{m\times n}$.* ∎

4.3 Construindo produtos semidirectos bilaterais

Nesta secção desenvolvemos um método para obter produtos semidirectos bilaterais que consiste na construção de um produto semidirecto bilateral de dois monóides livres que, sob determinadas condições, induz um produto semidirecto bilateral de dois monóides definidos por apresentações associadas a esses monóides livres. Na secção seguinte, aplicamos esse método a alguns monóides de transformações. Em particular obtemos uma demonstração para o resultado de Kunze [51] do semigrupo $\mathcal{O}_n$ mencionado na secção anterior.

Sejam A e B dois alfabetos. Suponhamos que temos *acções definidas nas letras* $a \in A$ e $b \in B$ que verificam

$$b\centerdot a \in A \cup \{1\}, \quad 1\centerdot a = a, \quad b\centerdot 1 = 1, \quad 1\centerdot 1 = 1 \tag{4.7}$$

e

$$b^a \in B^*, \quad b^1 = b, \quad 1^a = 1, \quad 1^1 = 1. \tag{4.8}$$

Então primeiro, indutivamente no comprimento de $u \in B^+$, para $a \in A\cup\{1\}$ e $b \in B$, definimos

$$(ub)\centerdot a = u\centerdot(b\centerdot a) \tag{4.9}$$

e

$$(ub)^a = u^{b\centerdot a} b^a. \tag{4.10}$$

Segundo, indutivamente no comprimento $s \in A^+$, para $u \in B^*$ e $a \in A$, definimos

$$u\centerdot(as) = (u\centerdot a)(u^a\centerdot s) \tag{4.11}$$

e

$$u^{as} = (u^a)^s. \tag{4.12}$$

Assim, temos aplicações bem definidas

$$\begin{array}{rlcllcl} \delta: & B^* & \longrightarrow & \mathcal{T}(A^*) & & & \\ & u & \longmapsto & \delta_u: & A^* & \longrightarrow & A^* \\ & & & & s & \longmapsto & u\centerdot s \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{rlcllcl} \varphi: & A^* & \longrightarrow & \mathcal{T}(B^*) & & & \\ & s & \longmapsto & \varphi_s: & B^* & \longrightarrow & B^* \\ & & & & u & \longmapsto & u^s. \end{array}$$

Lema 4.3.1 *Sejam $s \in A^*$ e $u \in B^*$. Então:*

(a) $1\centerdot s = s$ *e* $1^s = 1$*;*

(b) $u\centerdot 1 = 1$ *e* $u^1 = u$.

Demonstração. (a) Para $|s| \leq 1$ as igualdades são consequência directa de (4.7) e (4.8), respectivamente. Agora, prosseguimos por indução no comprimento de s. Suponhamos que $|s| > 1$ e sejam $a \in A$ e $s' \in A^+$ tais que $s = as'$. Como $1 \leq |s'| < |s|$, por hipótese de indução, temos $1\centerdot s' = s'$ e $1^{s'} = 1$, assim

$$1\centerdot s = 1\centerdot(as') = (1\centerdot a)(1^a\centerdot s') = a(1\centerdot s') = as' = s,$$

aplicando (4.11), e

$$1^s = 1^{as'} = (1^a)^{s'} = 1^{s'} = 1,$$

usando (4.12).

(b) Para $|u| \leq 1$ as igualdades são novamente consequência directa de (4.7) e (4.8), respectivamente. Usaremos agora indução no comprimento de u. Suponhamos que $|u| > 1$ e sejam $b \in B$ e $u' \in B^+$ tais que $u = u'b$. Dado que $1 \leq |u'| < |u|$, por hipótese de indução, temos $u'_{\bullet}1 = 1$ e $u'^1 = u'$, donde

$$u_{\bullet}1 = (u'b)_{\bullet}1 = u'_{\bullet}(b_{\bullet}1) = u'_{\bullet}1 = 1,$$

aplicando (4.9), e

$$u^1 = (u'b)^1 = u'^{b_{\bullet}1}b^1 = u'^1 b = u'b = u,$$

usando (4.10). ■

Provamos agora que δ e φ verificam SPR e SCR.

Lema 4.3.2 *Sejam $s, r \in A^*$ e $u, v \in B^*$. Então:*

(SCR) $u_{\bullet}(sr) = (u_{\bullet}s)(u^s{}_{\bullet}r)$;

(SPR) $(uv)^s = u^{v_{\bullet}s}v^s$.

Demonstração. (SCR) Se $s = 1$ ou $r = 1$, a igualdade decorre do Lema 4.3.1 (b). Assim, admitimos que $s, r \in A^+$ e prosseguimos por indução no comprimento de s. Se $|s| = 1$ a igualdade resulta de (4.11). Então, seja $s = as'$, com $a \in A$ e $s' \in A^+$. Visto que $1 \leq |s'| < |s|$, temos

$$\begin{array}{rcll} u_{\bullet}(sr) & = & u_{\bullet}(as'r) & \\ & = & (u_{\bullet}a)(u^a{}_{\bullet}(s'r)) & \text{(por (4.11))} \\ & = & (u_{\bullet}a)(u^a{}_{\bullet}s')((u^a)^{s'}{}_{\bullet}r) & \text{(por hipótese de indução)} \\ & = & (u_{\bullet}(as'))(u^{as'}{}_{\bullet}r) & \text{(por (4.11) e (4.12))} \\ & = & (u_{\bullet}s)(u^s{}_{\bullet}r)\ . & \end{array}$$

(SPR) Primeiro, para $u \in B^*$ e $a \in A$, mostramos que $(uv)^a = u^{v_{\bullet}a}v^a$. Se $u = 1$ esta igualdade decorre de (4.8) (observemos que $v_{\bullet}a \in A \cup \{1\}$). Assim, suponhamos que $|u| \geq 1$. Continuamos por indução no comprimento de v. Se $v = 1$ esta igualdade é consequência de (4.7) e (4.8) e se $|v| = 1$ é consequência de (4.10). Tendo isto em conta, seja $v = v'b$, com $v' \in B^+$ e $b \in B$. Então, como $1 \leq |v'| < |v|$ e $b_{\bullet}a \in A \cup \{1\}$, temos

$$\begin{array}{rcll} (uv)^a & = & (uv'b)^a & \\ & = & (uv')^{b_{\bullet}a}b^a & \text{(por (4.10))} \\ & = & u^{v'_{\bullet}(b_{\bullet}a)}v'^{b_{\bullet}a}b^a & \text{(por hipótese de indução)} \\ & = & u^{(v'b)_{\bullet}a}(v'b)^a & \text{(por (4.9) e (4.10))} \\ & = & u^{v_{\bullet}a}v^a\ . & \end{array}$$

Demonstramos agora a igualdade para $s \in A^*$ por indução no comprimento de s. Estando o caso $|s| \leq 1$ provado, tomemos $s = as'$, com $a \in A$ e $s' \in A^+$. Então, como $1 \leq |s'| < |s|$ e $v{\scriptstyle\blacksquare}a \in A \cup \{1\}$, obtemos

$$\begin{array}{rcll}
(uv)^s & = & (uv)^{as'} & \\
& = & ((uv)^a)^{s'} & \text{(por (4.12))} \\
& = & (u^{v{\scriptstyle\blacksquare}a}v^a)^{s'} & \text{(pelo caso } |s| = 1) \\
& = & (u^{v{\scriptstyle\blacksquare}a})^{v^a{\scriptstyle\blacksquare}s'}(v^a)^{s'} & \text{(por hipótese de indução)} \\
& = & u^{(v{\scriptstyle\blacksquare}a)(v^a{\scriptstyle\blacksquare}s')}v^{as'} & \text{(por (4.12) e Lema 4.3.1 (b))} \\
& = & u^{v{\scriptstyle\blacksquare}(as')}v^{as'} & \text{(por (4.11))} \\
& = & u^{v{\scriptstyle\blacksquare}s}v^s\ , &
\end{array}$$

como pretendíamos. ∎

Lema 4.3.3 *Sejam $s, r \in A^*$ e $u, v \in B^*$. Então:*

(a) $(uv){\scriptstyle\blacksquare}s = u{\scriptstyle\blacksquare}(v{\scriptstyle\blacksquare}s)$;

(b) $u^{sr} = (u^s)^r$.

Demonstração. (a) Primeiro demonstramos que $(uv){\scriptstyle\blacksquare}a = u{\scriptstyle\blacksquare}(v{\scriptstyle\blacksquare}a)$, para $a \in A \cup \{1\}$, por indução no comprimento de v. Para $|v| \leq 1$ a igualdade resulta directamente de (4.7) e (4.9). Então, suponhamos que $|v| > 1$ e sejam $b \in B$ e $v' \in B^+$ tais que $v = v'b$. Como $1 \leq |v'| < |v|$ e $b{\scriptstyle\blacksquare}a \in A \cup \{1\}$, por (4.9) e pela hipótese de indução, temos

$$(uv){\scriptstyle\blacksquare}a = (uv'b){\scriptstyle\blacksquare}a = (uv'){\scriptstyle\blacksquare}(b{\scriptstyle\blacksquare}a) = u{\scriptstyle\blacksquare}(v'{\scriptstyle\blacksquare}(b{\scriptstyle\blacksquare}a)) = u{\scriptstyle\blacksquare}((v'b){\scriptstyle\blacksquare}a) = u{\scriptstyle\blacksquare}(v{\scriptstyle\blacksquare}a).$$

Continuamos por indução no comprimento de s. Suponhamos que $|s| > 1$ e sejam $a \in A$ e $s' \in A^+$ tais que $s = as'$. Então, como $1 \leq |s'| < |s|$, temos

$$\begin{array}{rcll}
(uv){\scriptstyle\blacksquare}s & = & (uv){\scriptstyle\blacksquare}(as') & \\
& = & ((uv){\scriptstyle\blacksquare}a)((uv)^a{\scriptstyle\blacksquare}s') & \text{(por (4.11))} \\
& = & (u{\scriptstyle\blacksquare}(v{\scriptstyle\blacksquare}a))((u^{v{\scriptstyle\blacksquare}a}v^a){\scriptstyle\blacksquare}s') & \text{(pelo caso } |s| = 1 \text{ e (SPR))} \\
& = & (u{\scriptstyle\blacksquare}(v{\scriptstyle\blacksquare}a))(u^{v{\scriptstyle\blacksquare}a}{\scriptstyle\blacksquare}(v^a{\scriptstyle\blacksquare}s')) & \text{(por hipótese de indução)} \\
& = & u{\scriptstyle\blacksquare}((v{\scriptstyle\blacksquare}a)(v^a{\scriptstyle\blacksquare}s')) & \text{(por (SCR))} \\
& = & u{\scriptstyle\blacksquare}(v{\scriptstyle\blacksquare}(as')) & \text{(por (4.11))} \\
& = & u{\scriptstyle\blacksquare}(v{\scriptstyle\blacksquare}s)\ . &
\end{array}$$

(b) Se $s = 1$ ou $r = 1$, a igualdade é consequência imediata do Lema 4.3.1(b). Admitamos que $s, r \in A^+$. Prosseguimos por indução no comprimento de s. Se $|s| = 1$ a igualdade vem de (4.12). Assim, seja $s = as'$, com $a \in A$ e $s' \in A^+$. Visto que $1 \leq |s'| < |s|$, temos

$$u^{sr} = u^{as'r} = (u^a)^{s'r} = ((u^a)^{s'})^r = (u^{as'})^r = (u^s)^r,$$

aplicando (4.12) nas segunda e quarta expressões e a hipótese de indução na terceira. ∎

Proposição 4.3.4 *As aplicações δ e φ são as únicas acção esquerda de B^* em A^* e direita de A^* em B^*, respectivamente, que estendem as acções dadas nas letras.*

Demonstração. Deduz-se imediatamente dos Lemas 4.3.1-4.3.3 que as operações definidas por (4.7)-(4.12) são uma acção esquerda de B^* em A^* e uma acção direita de A^* em B^*. Resta-nos apenas provar a unicidade.

Sejam δ' e φ' uma acção esquerda de B^* em A^* e uma acção direita de A^* em B^*, respectivamente, tais que $(a)\delta'_b = (a)\delta_b$ e $(b)\varphi'_a = (b)\varphi_a$, para quaisquer $a \in A$ e $b \in B$. Sejam $s \in A^*$ e $u \in B^*$. Pretendemos mostrar que $(s)\delta'_u = (s)\delta_u$ e $(u)\varphi'_s = (u)\varphi_s$. Se $s = 1$ ou $u = 1$, então, por definição, ambas as igualdades são válidas. Admitamos que $s \in A^+$ e $u \in B^+$. Prosseguimos por indução no comprimento de s. Suponhamos que $|s| = 1$. Então, por indução no comprimento de u, mostramos que $(a)\delta'_u = (a)\delta_u$ e $(u)\varphi'_a = (u)\varphi_a$, para quaisquer $a \in A$ e $u \in B^+$. Se $|u| = 1$ temos precisamente a nossa hipótese principal. Assim, tomemos $u = vb$, com $b \in B$ e $v \in B^+$. Seja $a' = (a)\delta'_b = (a)\delta_b$. Observemos que $a' \in A \cup \{1\}$. Então

$$(a)\delta'_u = (a)\delta'_{vb} = ((a)\delta'_b)\delta'_v = (a')\delta'_v = (a')\delta_v = ((a)\delta_b)\delta_v = (a)\delta_{vb} = (a)\delta_u \text{ e}$$

$$(u)\varphi'_a = (vb)\varphi'_a = (v)\varphi'_{(a)\delta'_b}(b)\varphi'_a = (v)\varphi'_{a'}(b)\varphi'_a = (v)\varphi_{a'}(b)\varphi_a = (v)\varphi_{(a)\delta_b}(b)\varphi_a = (vb)\varphi_a = (u)\varphi_a,$$

aplicando em ambas as cadeias de igualdades a hipótese de indução na quarta expressão. Suponhamos, por hipótese de indução, que $(r)\delta'_u = (r)\delta_u$ e $(u)\varphi'_r = (u)\varphi_r$, para qualquer $u \in B^+$ e qualquer $r \in A^+$ tal que $1 \leq |r| < |s|$. Tomemos $u \in B^+$ e $s = ar$ com $a \in A$ e $r \in A^+$. Portanto temos

$$(s)\delta'_u = (ar)\delta'_u = (a)\delta'_u(r)\delta'_{(u)\varphi'_a} = (a)\delta'_u(r)\delta'_{(u)\varphi_a} = (a)\delta_u(r)\delta_{(u)\varphi_a} = (ar)\delta_u = (s)\delta_u$$

e

$$(u)\varphi'_s = (u)\varphi'_{ar} = ((u)\varphi'_a)\varphi'_r = ((u)\varphi_a)\varphi'_r = ((u)\varphi_a)\varphi_r = (u)\varphi_{ar} = (u)\varphi_s,$$

como queríamos demonstrar. ∎

Dualmente, suponhamos que temos definidas acções nas letras $a \in A$ e $b \in B$ satisfazendo

$$b{\scriptstyle\blacksquare}a \in A^*, \quad 1{\scriptstyle\blacksquare}a = a, \quad b{\scriptstyle\blacksquare}1 = 1, \quad 1{\scriptstyle\blacksquare}1 = 1 \tag{4.13}$$

e

$$b^a \in B \cup \{1\}, \quad b^1 = b, \quad 1^a = 1, \quad 1^1 = 1. \tag{4.14}$$

Então primeiro, indutivamente no comprimento de $s \in A^+$, para $a \in A$ e $b \in B \cup \{1\}$, definimos

$$b^{as} = (b^a)^s \tag{4.15}$$

e

$$b{\scriptstyle\blacksquare}(as) = (b{\scriptstyle\blacksquare}a)(b^a{\scriptstyle\blacksquare}s). \tag{4.16}$$

Segundo, indutivamente no comprimento de $u \in B^+$, para $s \in A^*$ e $b \in B$, definimos

$$(ub)^s = u^{b_\centerdot s} b^s \tag{4.17}$$

e

$$(ub)_\centerdot s = u_\centerdot (b_\centerdot s). \tag{4.18}$$

De forma análoga temos:

Proposição 4.3.5 *As aplicações definidas por (4.13)-(4.18) são as únicas acção esquerda de B^* em A^* e acção direita de A^* em B^* que estendem as acções dadas nas letras.* ∎

Se tivermos (4.7) e (4.14), então as acções definidas por (4.9)-(4.12) e por (4.15)-(4.18) coincidem.

Observemos ainda que, como casos particulares de ambas as Proposições 4.3.4 e 4.3.5, obtemos construções de produtos semidirectos $A^* \rtimes B^*$ e de produtos semidirectos reversos $A^* \ltimes B^*$ apenas definindo acções nas letras (sem qualquer restrição para o caso de produtos semidirectos reversos, pela Proposição 4.3.4, e para produtos semidirectos, pela Proposição 4.3.5; e com a restrição (4.7) para produtos semidirectos, pela Proposição 4.3.4, e a restrição (4.14) para produtos semidirectos reversos, pela Proposição 4.3.5).

Sejam δ uma acção esquerda de B^* em A^* e φ uma acção direita de A^* em B^*.

Dizemos que δ [respectivamente, φ] *preserva letras* se δ satisfaz (4.7) [respectivamente, (4.14)], i.e. a acção de uma letra noutra letra é uma letra ou a palavra vazia.

Sejam R um conjunto de relações em A^* e U um conjunto de relações em B^*. Sejam S e T monóides definidos pelas apresentações $\langle A \mid R \rangle$ e $\langle B \mid U \rangle$, respectivamente. Assumimos que estas apresentações são irredundantes nas letras, i.e. letras distintas representam geradores distintos.

Dizemos que a acção δ [respectivamente, φ] *preserva* as apresentações $\langle A \mid R \rangle$ e $\langle B \mid U \rangle$ se

$$b_\centerdot s = b_\centerdot r \text{ em } S \text{ [respectivamente, } b^s = b^r \text{ em } T],$$

para quaisquer $(s = r) \in R$ e $b \in B$, e

$$u_\centerdot a = v_\centerdot a \text{ em } S \text{ [respectivamente } u^a = v^a \text{ em } T],$$

para quaisquer $(u = v) \in U$ e $a \in A$.

Para os próximos dois lemas fixamos uma acção esquerda de B^* em A^* e uma acção direita de A^* em B^*, que preservam letras e preservam as apresentações irredundantes nas letras $\langle A \mid R \rangle$ e $\langle B \mid U \rangle$. Pretendemos mostrar que estas acções nos monóides livres induzem um produto semidirecto bilateral $S \bowtie T$.

Lema 4.3.6 *Sejam $z \in A^*$ e $w_1, w_2 \in B^*$ tais que $w_1 = w_2$ em T. Então, temos $w_{1\centerdot} z = w_{2\centerdot} z$ em S e $w_1^z = w_2^z$ em T.*

Demonstração. É claro que, para $z = 1$ o lema é consequência da definição. Assim, supomos que $z \in A^+$ e prosseguimos por indução no comprimento de z.

Primeiro, observemos que, como a acção esquerda preserva letras e a apresentação $\langle A \mid R\rangle$ é irredundante nas letras, temos que $u \centerdot a = v \centerdot a$ em S se e só se $u \centerdot a \equiv v \centerdot a$, para quaisquer $u, v \in B^*$ e $a \in A \cup \{1\}$.

Seja $a \in A$. Temos como objectivo provar que $w_1 \centerdot a = w_2 \centerdot a$ em S (i.e. $w_1 \centerdot a \equiv w_2 \centerdot a$) e ${w_1}^a = {w_2}^a$ em T. É uma questão de rotina mostrar que é suficiente considerar transições elementares. Portanto, sem perda de generalidade, sejam $w_1 \equiv guh$ e $w_2 \equiv gvh$, com $g, h \in B^*$ e $(u = v) \in U$. Seja $a' = h \centerdot a \in A \cup \{1\}$. Temos que $u \centerdot a' = v \centerdot a'$ em S e assim $u \centerdot a' \equiv v \centerdot a'$, donde $g \centerdot (u \centerdot a') \equiv g \centerdot (v \centerdot a')$, i.e. $w_1 \centerdot a \equiv w_2 \centerdot a$. Por outro lado, $g^{u \centerdot a'} \equiv g^{v \centerdot a'}$ e $u^{a'} = v^{a'}$ em T, donde

$$w_1^a \equiv g^{u \centerdot (h \centerdot a)} u^{h \centerdot a} h^a \equiv g^{u \centerdot a'} u^{a'} h^a = g^{v \centerdot a'} v^{a'} h^a \equiv g^{v \centerdot (h \centerdot a)} v^{h \centerdot a} h^a \equiv w_2^a.$$

Seja $z = az'$, com $a \in A$ e $z' \in A^+$. Como $w_1^a = w_2^a$ em T e $1 \leq |z'| < |z|$, por hipótese de indução, temos $w_1^a \centerdot z' = w_2^a \centerdot z'$ em S e $(w_1^a)^{z'} = (w_2^a)^{z'}$ em T. Logo

$$w_1^z \equiv w_1^{az'} \equiv (w_1^a)^{z'} = (w_2^a)^{z'} \equiv w_2^{az'} \equiv w_2^z$$

e, como também $w_1 \centerdot a = w_2 \centerdot a$ em S,

$$w_1 \centerdot z \equiv w_1 \centerdot (az') \equiv (w_1 \centerdot a)(w_1^a \centerdot z') = (w_2 \centerdot a)(w_2^a \centerdot z') \equiv w_2 \centerdot (az') \equiv w_2 \centerdot z,$$

como pretendíamos. ■

Analogamente, por dualidade, temos:

Lema 4.3.7 *Sejam $z_1, z_2 \in A^*$ e $w \in B^*$ tais que $z_1 = z_2$ em S. Então, temos $w \centerdot z_1 = w \centerdot z_2$ em S e $w^{z_1} = w^{z_2}$ em T.* ■

De seguida combinamos os dois lemas anteriores. Tomemos então $z_1, z_2 \in A^*$ e $w_1, w_2 \in B^*$ tais que $z_1 = z_2$ em S e $w_1 = w_2$ em T. De $w_1 = w_2$ em T resulta, pelo Lema 4.3.6, que $w_1 \centerdot z_1 = w_2 \centerdot z_1$ em S e ${w_1}^{z_1} = {w_2}^{z_1}$ em T. Usando agora o Lema 4.3.7, de $z_1 = z_2$ em S obtemos $w_2 \centerdot z_1 = w_2 \centerdot z_2$ em S e ${w_2}^{z_1} = {w_2}^{z_2}$ em T. Então $w_1 \centerdot z_1 = w_2 \centerdot z_2$ em S e ${w_1}^{z_1} = {w_2}^{z_2}$ em T. Provámos assim:

Teorema 4.3.8 *Se uma acção esquerda de B^* em A^* e uma acção direita de A^* em B^* preservam letras e preservam as apresentações irredundantes nas letras $\langle A \mid R\rangle$ e $\langle B \mid U\rangle$ dos monóides S e T respectivamente, então induzem uma acção esquerda de T em S e uma acção direita de S em T, ou seja, induzem um produto semidirecto bilateral $S \bowtie T$.* ■

Sejam M um monóide e S e T dois submonóides de M. Sejam A e B conjuntos de geradores de S e T, respectivamente. Suponhamos que temos definido um produto semidirecto bilateral $S \bowtie T$.

Dizemos que a acção esquerda [respectivamente, direita] de T em S [respectivamente, de S em T] *preserva* A [respectivamente, B] se $b.a \in A \cup \{1\}$ [respectivamente, $b^a \in B \cup \{1\}$], para quaisquer $a \in A$ e $b \in B$. Notemos que, se a acção esquerda preserva A então $u.a \in A \cup \{1\}$, para quaisquer $a \in A$ e $u \in T$. Analogamente, se a acção direita preserva B então $b^s \in B \cup \{1\}$, para quaisquer $b \in B$ e $s \in S$. Nestas condições, temos:

Lema 4.3.9 *Se $ba = (b.a)b^a$ em M, para quaisquer $a \in A$ e $b \in B$, e a acção esquerda preserva A ou a acção direita preserva B, então $us = (u.s)u^s$ em M, para quaisquer $s \in S$ e $u \in T$.*

Demonstração. Demonstramos o lema admitindo que a acção esquerda preserva A. O outro caso é semelhante.

Sejam $s \in S$ e $u \in T$. Começamos por efectuar indução no comprimento de s em relação a A (cf. definição na página 14). Se $|s| = 0$ então a igualdade é consequência imediata da definição. Precisamos também de provar o caso $|s| = 1$, i.e. $ua = (u.a)u^a$, para $a \in A$ e $u \in T$.

Se $|u| = 0$ ou $|u| = 1$ a igualdade é consequência da definição ou da hipótese principal, respectivamente. Assim, prosseguindo por indução no comprimento de u (em relação a B), admitimos a igualdade para $1 \leq |u| < k$. Seja $u \in T$ tal que $|u| = k$. Então $u = bv$, para algum $b \in B$ e algum $v \in T$ com comprimento $k - 1$. Seja $a' = v.a \in A \cup \{1\}$. Donde

$$ua = b(va) = b((v.a)v^a) = (ba')v^a = (b.a')b^{a'}v^a = (b.(v.a))b^{v.a}v^a = ((bv).a)(bv)^a = (u.a)u^a,$$

aplicando a hipótese de indução na segunda expressão e (SPR) na sexta expressão.

Por hipótese de indução, suponhamos que $us = (u.s)u^s$, para $u \in T$ e $s \in S$ tal que $1 \leq |s| < n$. Sejam s um elemento de S com comprimento n e $u \in T$. Temos que $s = ra$, para algum $a \in A$ e algum $r \in S$ com comprimento $n - 1$. Seja $v = u^r \in T$. Assim temos

$$us = (ur)a = ((u.r)u^r)a = (u.r)(va) = (u.r)(v.a)v^a = (u.r)(u^r.a)(u^r)^a = (u.(ra))u^{ra} = (u.s)u^s,$$

aplicando a hipótese de indução na segunda expressão, o caso $|s| = 1$ na quarta expressão e (SCR) na sexta expressão. ∎

Podemos agora demonstrar o resultado principal desta secção.

Teorema 4.3.10 *Sejam M um monóide e S e T dois submonóides de M gerados por A e B, respectivamente. Seja $S \bowtie T$ um produto semidirecto bilateral de S e T tal que a acção esquerda preserva A ou a acção direita preserva B. Se $A \cup B$ gera M e $ba = (b.a)b^a$ em M, para quaisquer $a \in A$ e $b \in B$, então M é uma imagem homomorfa de $S \bowtie T$.*

Demonstração. Vamos demonstrar que a aplicação

$$\begin{array}{rccc} \mu: & S \bowtie T & \longrightarrow & M \\ & (s,u) & \longmapsto & su \end{array}$$

é um homomorfismo sobrejectivo.

Começamos por mostrar que μ é um homomorfismo. Sejam $(s,u),(r,v) \in S \bowtie T$. Então

$$(s,u)\mu(r,v)\mu = surv = s(u\centerdot r)u^r v = (s(u\centerdot r), u^r v)\mu = ((s,u)(r,v))\mu \ ,$$

aplicando o Lema 4.3.9 na segunda expressão.

Vejamos que μ é sobrejectiva. Seja $x \in M$. Como $A \cup B$ gera M, podemos escrever $x = s_1u_1 \cdots s_k u_k$, para certos $s_1, \ldots, s_k \in S$ e $u_1, \ldots, u_k \in T$. Podemos também admitir que k é o menor inteiro positivo para o qual tal decomposição existe. Suponhamos que $k \geq 2$. Então, aplicando o Lema 4.3.9, temos

$$x = s_1u_1 \cdots s_{k-1}(u_{k-1}s_k)u_k = s_1u_1 \cdots s_{k-1}(u_{k-1}\centerdot s_k)u_{k-1}^{s_k}u_k \ ,$$

o que contradiz a minimalidade de k, visto que $s_{k-1}(u_{k-1}\centerdot s_k) \in S$ e $u_{k-1}^{s_k}u_k \in T$. Concluímos assim que $k = 1$ e, portanto, μ é sobrejectiva. ∎

Veremos de seguida como podemos obter este último resultado de outra forma. Em [56] Lavers estabelece condições através das quais uma apresentação para um produto semidirecto bilateral de dois monóides finitamente apresentáveis é finitamente apresentável e fornece apresentações sujeitas a essas condições. Recordamos aqui alguns conceitos que podem ser encontrados em [56].

Sejam S e T dois monóides definidos pelas apresentações $\langle A \mid R\rangle$ e $\langle B \mid U\rangle$, respectivamente. Suponhamos que temos definido um produto semidirecto bilateral $S \bowtie T$. A acção direita de S em T induz uma acção direita de A^*/ρ_R em B^*/ρ_U e a acção esquerda de T em S induz uma acção esquerda de B^*/ρ_U em A^*/ρ_R de modo que $A^*/\rho_R \bowtie B^*/\rho_U$ é isomorfo a $S \bowtie T$. Sejam S' e T' conjuntos de representantes de ρ_R e ρ_U, respectivamente. Seja η a aplicação que transforma uma palavra de A^* no único elemento de S' com o qual é congruente e, analogamente, υ a aplicação que transforma uma palavra de B^* no único elemento de T' com o qual é congruente. Para $s \in A^*$ e $t \in B^*$ denotamos por $t\centerdot s$ [respectivamente, t^s] o elemento de S' [respectivamente, T'] que representa a classe de congruência de $[t]_{\rho_U}\centerdot[s]_{\rho_R}$ [respectivamente, $[t]_{\rho_U}^{[s]_{\rho_R}}$]. Para $X \subseteq A^*$ e $Y \subseteq B^*$ seja $Y\centerdot X = \{y\centerdot x \mid x \in X,\ y \in Y\}$. Observemos que $Y\centerdot X \subseteq S'$.

Definimos uma família de subconjuntos de A^* de forma recursiva que designamos por *cadeia orbital de B em A*:

$$\begin{array}{rcl} A_1 & = & \{a\eta \mid a \in A\}, \\ A_i & = & B\centerdot A_{i-1} \cup A_{i-1},\ i \geq 2. \end{array}$$

Claramente, esta família forma uma cadeia para a relação de inclusão:

$$A_1 \subseteq A_2 \subseteq \cdots \subseteq A_i \subseteq \cdots .$$

Para cada $i \geq 1$, seja

$$P_i = \{(ba, (b\centerdot a)b^a) \mid a \in A_i, b \in B\upsilon\}.$$

Tomemos também $P_\infty = \cup_{i=1}^{\infty} P_i$.

Dizemos que a cadeia $\{A_i \mid i \leq 1\}$ é *dócil* se para todo o $i \geq 1$ as relações de P_{i+1} são consequência das relações $R \cup U \cup P_i$.

Dualmente podemos definir uma *cadeia orbital dócil de A em B.*

Estamos agora em condições de enunciar o Teorema 3 de [56].

Teorema 4.3.11 *Se os monóides S e T definidos por apresentações $\langle A \mid R\rangle$ e $\langle B \mid U\rangle$, respectivamente, formam um produto semidirecto bilateral $S \bowtie T$ tal que a cadeia orbital de A em B ou a cadeia orbital de B em A é dócil, então o monóide $S \bowtie T$ é definido pela apresentação $\langle A \cup B \mid R, U, ba = (b{\centerdot}a)b^a, a \in A, b \in B\rangle$.* ∎

É evidente que, se a acção esquerda preserva A, i.e. $b{\centerdot}a \in A \cup \{1\}$, para quaisquer $a \in A$ e $b \in B$ [respectivamente, a acção direita preserva B, i.e. $b^a \in B \cup \{1\}$, para quaisquer $a \in A$ e $b \in B$], então a cadeia orbital de B em A [respectivamente, de A em B] é dócil e, pelo Teorema 4.3.11, $S \bowtie T$ é definido pela apresentação $\langle A \cup B \mid R, U, ba = (b{\centerdot}a)b^a, a \in A, b \in B\rangle$. Logo, se M, S e T forem monóides nas condições do Teorema 4.3.10 tais que S e T estão definidos por apresentações $\langle A \mid R\rangle$ e $\langle B \mid U\rangle$, respectivamente, então as relações R, U e $ba = (b{\centerdot}a)b^a$, para quaisquer $a \in A$ e $b \in B$, são válidas em M. Além disso, pela observação anterior, estamos nas condições do Teorema 4.3.11, pelo que $S \bowtie T$ é definido pela apresentação $\langle A \cup B \mid R, U, ba = (b{\centerdot}a)b^a, a \in A, b \in B\rangle$. Donde M é uma imagem homomorfa de $S \bowtie T$, ou seja, daqui concluímos o Teorema 4.3.10.

Como caso particular do Teorema 4.3.10, para produtos semidirectos, temos:

Corolário 4.3.12 *Sejam M um monóide e S e T dois submonóides de M gerados por A e B, respectivamente. Seja $S \rtimes T$ [respectivamente, $S \ltimes T$] um produto semidirecto [respectivamente, um produto semidirecto reverso] de S e T. Se $A \cup B$ gera M e $ba = (b{\centerdot}a)b$ [respectivamente, $ba = ab^a$] em M, para quaisquer $a \in A$ e $b \in B$, então M é uma imagem homomorfa de $S \rtimes T$ [respectivamente, $S \ltimes T$].* ∎

4.4 Aplicações

Nesta secção, construímos decomposições dos monóides $\mathcal{O}_n$, $\mathcal{OD}_n$, $\mathcal{OP}_n$ e $\mathcal{OR}_n$, através de um produto semidirecto bilateral, usando a técnica apresentada na última secção.

4.4.1 O monóide $\mathcal{O}_n$

A nossa primeira aplicação é uma nova demonstração para a decomposição de Kunze [51] através de um produto semidirecto bilateral do monóide $\mathcal{O}_n$ de todas as transformações totais crescentes de X_n, em termos dos seus submonóides $\mathcal{O}_n^-$ e $\mathcal{O}_n^+$.

Recordamos aqui as transformações definidas na Subsecção 1.4.1.

Para $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ tomemos

$$a_i = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & i & i+1 & i+2 & \cdots & n \\ 1 & 2 & \cdots & i & i & i+2 & \cdots & n \end{pmatrix} \text{ e } b_i = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & i-1 & i & i+1 & \cdots & n \\ 1 & 2 & \cdots & i-1 & i+1 & i+1 & \cdots & n \end{pmatrix}.$$

Sejam $A = \{a_1, \ldots, a_{n-1}\}$ e $B = \{b_1, \ldots, b_{n-1}\}$. Relembramos que A e B são conjuntos geradores de $\mathcal{O}_n^-$ e $\mathcal{O}_n^+$, respectivamente. Além disso, sendo R^- o conjunto de relações

- $a_i^2 = a_i$, para $1 \leq i \leq n-1$,
- $a_i a_{i+1} a_i = a_{i+1} a_i a_{i+1} = a_{i+1} a_i$, para $1 \leq i \leq n-2$, e
- $a_i a_j = a_j a_i$, para $1 \leq i, j \leq n-1$ e $|i-j| \geq 2$,

e R^+ o conjunto de relações

- $b_i^2 = b_i$, para $1 \leq i \leq n-1$,
- $b_i b_{i+1} b_i = b_{i+1} b_i b_{i+1} = b_i b_{i+1}$, para $1 \leq i \leq n-2$, e
- $b_i b_j = b_j b_i$, para $1 \leq i, j \leq n-1$ e $|i-j| \geq 2$,

os monóides $\mathcal{O}_n^-$ e $\mathcal{O}_n^+$ são definidos pelas apresentações $\langle A \mid R^- \rangle$ e $\langle B \mid R^+ \rangle$, respectivamente. Por outro lado, o monóide $\mathcal{O}_n$ é gerado por $A \cup B$ e é definido pela apresentação $\langle A \cup B \mid R \rangle$, em que R é o conjunto de relações

- $a_i b_i = b_i a_{i-1}$, para $2 \leq i \leq n-1$,
- $b_i a_i = a_i b_{i+1}$, para $1 \leq i \leq n-2$,
- $a_i b_i = b_i$, para $1 \leq i \leq n-1$,
- $b_i a_i = a_i$, para $1 \leq i \leq n-1$,
- $b_j a_i = a_i b_j$, para $1 \leq i, j \leq n-1$ e $j \notin \{i, i+1\}$,
- $a_{n-1} a_{n-2} a_{n-1} = a_{n-1} a_{n-2}$, e
- $b_1 b_2 b_1 = b_1 b_2$.

Esta apresentação foi obtida por Aĭzenštat em 1962 [1]. Ver também [20, 67].

Aplicando a Proposição 4.3.4 (ou 4.3.5), consideremos as acções esquerda δ de B^* em A^* e direita φ de A^* em B^* que estendem as seguintes acções nas letras:

$$b_j \centerdot a_i = \begin{cases} 1 & \text{se } j = i+1 \\ a_i & \text{caso contrário} \end{cases} \qquad \text{e} \qquad b_j^{a_i} = \begin{cases} 1 & \text{se } j = i \\ b_j & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

para $1 \leq i, j \leq n-1$.

Notemos que quer δ quer φ preservam letras. Por outro lado, é claro que ambas as apresentações $\langle A \mid R^- \rangle$ e $\langle B \mid R^+ \rangle$ são irredundantes nas letras (quando consideramos os elementos de $\mathcal{O}_n^-$ e $\mathcal{O}_n^+$ que correspondem às letras de A e B, respectivamente). Além disso, temos:

Lema 4.4.1 *As acções δ e φ preservam as apresentações $\langle A \mid R^- \rangle$ e $\langle B \mid R^+ \rangle$.*

Demonstração. Temos que provar as seguintes relações:

(i) Para $1 \leq j \leq n-1$,

$$\begin{cases} b_j \cdot a_i^2 = b_j \cdot a_i, & \text{para } 1 \leq i \leq n-1, \\ b_j \cdot (a_i a_{i+1} a_i) = b_j \cdot (a_{i+1} a_i a_{i+1}) = b_j \cdot (a_{i+1} a_i), & \text{para } 1 \leq i \leq n-2, \\ b_j \cdot (a_i a_k) = b_j \cdot (a_k a_i), & \text{para } 1 \leq i,k \leq n-1 \text{ e } |i-k| \geq 2, \\ & \\ b_j^{a_i^2} = b_j^{a_i}, & \text{para } 1 \leq i \leq n-1, \\ b_j^{a_i a_{i+1} a_i} = b_j^{a_{i+1} a_i a_{i+1}} = b_j^{a_{i+1} a_i}, & \text{para } 1 \leq i \leq n-2, \\ b_j^{a_i a_k} = b_j^{a_k a_i}, & \text{para } 1 \leq i,k \leq n-1 \text{ e } |i-k| \geq 2; \end{cases}$$

(ii) E, para $1 \leq i \leq n-1$,

$$\begin{cases} b_j^2 \cdot a_i = b_j \cdot a_i, & \text{para } 1 \leq j \leq n-1, \\ (b_j b_{j+1} b_j) \cdot a_i = (b_{j+1} b_j b_{j+1}) \cdot a_i = (b_{j+1} b_j) \cdot a_i, & \text{para } 1 \leq j \leq n-2, \\ (b_j b_k) \cdot a_i = (b_k b_j) \cdot a_i, & \text{para } 1 \leq j,k \leq n-1 \text{ e } |j-k| \geq 2, \\ & \\ (b_j^2)^{a_i} = b_j^{a_i}, & \text{para } 1 \leq j \leq n-1, \\ (b_j b_{j+1} b_j)^{a_i} = (b_{j+1} b_j b_{j+1})^{a_i} = (b_{j+1} b_j)^{a_i}, & \text{para } 1 \leq j \leq n-2, \\ (b_j b_k)^{a_i} = (b_k b_j)^{a_i}, & \text{para } 1 \leq j,k \leq n-1 \text{ e } |j-k| \geq 2. \end{cases}$$

Começamos por demonstrar (i). Seja $1 \leq j \leq n-1$. Então:
para $1 \leq i \leq n-1$,

$$\begin{aligned} b_j \cdot a_i^2 &= (b_j \cdot a_i)(b_j^{a_i} \cdot a_i) = \begin{cases} 1(b_j \cdot a_i) & \text{se } j = i+1 \\ a_i(1 \cdot a_i) & \text{se } j = i \\ a_i(b_j \cdot a_i) & \text{caso contrário} \end{cases} = \begin{cases} 1 & \text{se } j = i+1 \\ a_i^2 & \text{se } j = i \\ a_i^2 & \text{caso contrário} \end{cases} \\ &= \begin{cases} 1 & \text{se } j = i+1 \\ a_i & \text{caso contrário} \end{cases} = b_j \cdot a_i \ ; \end{aligned}$$

para $1 \leq i \leq n-2$,

$$b_j \cdot (a_i a_{i+1} a_i) = (b_j \cdot a_i)(b_j^{a_i} \cdot (a_{i+1} a_i)) = \begin{cases} 1(b_j \cdot (a_{i+1} a_i)) & \text{se } j = i+1 \\ a_i(a_{i+1} a_i) & \text{se } j = i \\ a_i(b_j \cdot (a_{i+1} a_i)) & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} (b_j \cdot a_{i+1})(b_j^{a_{i+1}} \cdot a_i) & \text{se } j = i+1 \\ a_i a_{i+1} a_i & \text{se } j = i \\ a_i (b_j \cdot a_{i+1})(b_j^{a_{i+1}} \cdot a_i) & \text{caso contrário} \end{cases} = \begin{cases} a_{i+1}(1 \cdot a_i) & \text{se } j = i+1 \\ a_i a_{i+1} a_i & \text{se } j = i \\ a_i (b_j \cdot a_{i+1})(b_j \cdot a_i) & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} a_{i+1} a_i & \text{se } j = i+1 \\ a_i a_{i+1} a_i & \text{se } j = i \\ a_i 1 a_i & \text{se } j = i+2 \\ a_i a_{i+1} a_i & \text{caso contrário} \end{cases} = \begin{cases} a_i & \text{se } j = i+2 \\ a_{i+1} a_i & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$= (b_j \cdot a_{i+1})(b_j^{a_{i+1}} \cdot a_i) = b_j \cdot (a_{i+1} a_i)$$

e, da mesma forma se mostra que $b_j{\cdot}(a_{i+1}a_ia_{i+1}) = b_j{\cdot}(a_{i+1}a_i)$;
para $1 \leq i, k \leq n-1$ e $|i-k| \geq 2$,

$$\begin{aligned} b_j{\cdot}(a_ia_k) &= (b_j{\cdot}a_i)(b_j^{a_i}{\cdot}a_k) = \begin{cases} 1(b_j{\cdot}a_k) & \text{se } j = i+1 \\ a_ia_k & \text{se } j = i \\ a_i(b_j{\cdot}a_k) & \text{caso contrário} \end{cases} = \begin{cases} a_k & \text{se } j = i+1 \\ a_i & \text{se } j = k+1 \\ a_ia_k & \text{caso contrário} \end{cases} \\ &= \begin{cases} a_k & \text{se } j = i+1 \\ a_i & \text{se } j = k+1 \\ a_ka_i & \text{caso contrário} \end{cases} = (b_j{\cdot}a_k)(b_j^{a_k}{\cdot}a_i) = \ b_j{\cdot}(a_ka_i)\ ; \end{aligned}$$

para $1 \leq i \leq n-1$,

$$b_j^{a_i^2} = (b_j^{a_i})^{a_i} = \begin{cases} 1 & \text{se } j = i \\ b_j & \text{caso contrário} \end{cases} = \ b_j^{a_i}\ ;$$

para $1 \leq i \leq n-2$,

$$b_j^{a_ia_{i+1}a_i} = ((b_j^{a_i})^{a_{i+1}})^{a_i} = \begin{cases} 1 & \text{se } j = i \text{ ou } j = i+1 \\ b_j & \text{caso contrário} \end{cases} = \ (b_j^{a_{i+1}})^{a_i} = b_j^{a_{i+1}a_i}$$

e, analogamente se prova que $b_j^{a_{i+1}a_ia_{i+1}} = b_j^{a_{i+1}a_i}$;
para $1 \leq i, k \leq n-1$ e $|i-k| \geq 2$,

$$b_j^{a_ia_k} = (b_j^{a_i})^{a_k} = \begin{cases} 1 & \text{se } j = i \text{ ou } j = k \\ b_j & \text{caso contrário} \end{cases} = \ (b_j^{a_k})^{a_i} = b_j^{a_ka_i},$$

como pretendíamos.

Passamos agora à demonstração de (ii).
Seja $1 \leq i \leq n-1$. Então:
para $1 \leq j \leq n-1$,

$$b_j^2{\cdot}a_i = b_j{\cdot}(b_j{\cdot}a_i) = \begin{cases} 1 & \text{se } j = i+1 \\ a_i & \text{caso contrário} \end{cases} = b_j{\cdot}a_i;$$

para $1 \leq j \leq n-2$,

$$(b_jb_{j+1}b_j){\cdot}a_i = b_j{\cdot}(b_{j+1}{\cdot}(b_j{\cdot}a_i)) = \begin{cases} 1 & \text{se } j = i+1 \text{ ou } j = i \\ a_i & \text{caso contrário} \end{cases} = b_j{\cdot}(b_{j+1}{\cdot}a_i) = (b_jb_{j+1}){\cdot}a_i$$

e, identicamente se mostra que $(b_{j+1}b_jb_{j+1}){\cdot}a_i = (b_jb_{j+1}){\cdot}a_i$;
para $1 \leq j, k \leq n-1$ e $|j-k| \geq 2$,

$$(b_jb_k){\cdot}a_i = b_j{\cdot}(b_k{\cdot}a_i) = \begin{cases} 1 & \text{se } k = i+1 \text{ ou } j = i+1 \\ a_i & \text{caso contrário} \end{cases} = \ b_k{\cdot}(b_j{\cdot}a_i) = (b_kb_j){\cdot}a_i,$$

para $1 \leq j \leq n-1$,

$$\begin{aligned} (b_j^2)^{a_i} &= b_j^{b_j{\cdot}a_i}b_j^{a_i} = \begin{cases} b_j^1b_j^{a_i} & \text{se } j = i+1 \\ 1 & \text{se } j = i \\ b_j^{a_i}b_j^{a_i} & \text{caso contrário} \end{cases} = \begin{cases} b_j^2 & \text{se } j = i+1 \\ 1 & \text{se } j = i \\ b_j^2 & \text{caso contrário} \end{cases} \\ &= \begin{cases} 1 & \text{se } j = i \\ b_j & \text{caso contrário} \end{cases} = b_j^{a_i}; \end{aligned}$$

para $1 \leq j \leq n-2$,

$$(b_jb_{j+1}b_j)^{a_i} = (b_jb_{j+1})^{b_j \cdot a_i} {b_j}^{a_i} = \begin{cases} (b_jb_{j+1})^{a_i}1 & \text{se } j=i \\ (b_jb_{j+1})b_j & \text{se } j=i+1 \\ (b_jb_{j+1})^{a_i}b_j & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} b_j^{b_{j+1} \cdot a_i} {b_{j+1}}^{a_i}1 & \text{se } j=i \\ b_jb_{j+1}b_j & \text{se } j=i+1 \\ b_j^{b_{j+1} \cdot a_i} {b_{j+1}}^{a_i}b_j & \text{caso contrário} \end{cases} = \begin{cases} b_j^1 {b_{j+1}}^{a_i} & \text{se } j=i \\ b_jb_{j+1}b_j & \text{se } j=i+1 \\ b_j^{a_i} {b_{j+1}}^{a_i}b_j & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} b_jb_{j+1} & \text{se } j=i \text{ ou } j=i+1 \\ {b_j}^{a_i}1b_j & \text{se } j=i-1 \\ b_jb_{j+1}b_j & \text{caso contrário} \end{cases} = \begin{cases} b_j & \text{se } j=i-1 \\ b_jb_{j+1} & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$= {b_j}^{b_{j+1} \cdot a_i} {b_{j+1}}^{a_i} = (b_jb_{j+1})^{a_i}$$

e, da mesma forma se prova que $(b_{j+1}b_jb_{j+1})^{a_i} = (b_jb_{j+1})^{a_i}$;
finalmente, para $1 \leq j,k \leq n-1$ e $|j-k| \geq 2$,

$$\begin{aligned} (b_jb_k)^{a_i} &= {b_j}^{b_k \cdot a_i} b_k^{a_i} = \begin{cases} b_j^{a_i}1 & \text{se } i=k \\ b_jb_k & \text{se } i=k-1 \\ b_j^{a_i}b_k & \text{caso contrário} \end{cases} = \begin{cases} b_j & \text{se } i=k \\ b_k & \text{se } i=j \\ b_jb_k & \text{caso contrário} \end{cases} \\ &= \begin{cases} b_j & \text{se } i=k \\ b_k & \text{se } i=j \\ b_kb_j & \text{caso contrário} \end{cases} \\ &= {b_k}^{b_j \cdot a_i} b_j^{a_i} = (b_kb_j)^{a_i} \end{aligned}$$

como queríamos demonstrar. ∎

Agora, de acordo com o Teorema 4.3.8, temos um produto semidirecto bilateral $\mathcal{O}_n^- \bowtie \mathcal{O}_n^+$ induzido pelas acções δ e φ. Além disso temos:

Lema 4.4.2 *Para quaisquer* $1 \leq i,j \leq n-1$, $b_ja_i = (b_j \cdot a_i)b_j^{a_i}$ *em* $\mathcal{O}_n$.

Demonstração. Sejam $1 \leq i,j \leq n-1$. Se $j=i$ então $b_ia_i = a_i = a_i1 = (b_i \cdot a_i)b_i^{a_i}$ e se $j=i+1$ então $1 \leq i \leq n-2$ e $b_{i+1}a_i = a_{i+1}b_{i+1} = b_{i+1} = 1b_{i+1} = (b_{i+1} \cdot a_i)b_{i+1}^{a_i}$. Caso contrário, $b_ja_i = a_ib_j = (b_j \cdot a_i)b_j^{a_i}$, como pretendíamos demonstrar. ∎

Como a acção esquerda em $\mathcal{O}_n^- \bowtie \mathcal{O}_n^+$ preserva A (de facto, também a acção direita preserva B) e $A \cup B$ gera $\mathcal{O}_n$, então todas as hipóteses do Teorema 4.3.10 são satisfeitas e assim temos:

Teorema 4.4.3 *O monóide* $\mathcal{O}_n$ *é uma imagem homomorfa de* $\mathcal{O}_n^- \bowtie \mathcal{O}_n^+$. ∎

Recordemos que O e J são as pseudovariedades de monóides geradas por $\{\mathcal{O}_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ e $\{\mathcal{O}_n^+ \mid n \in \mathbb{N}\}$ (ou $\{\mathcal{O}_n^- \mid n \in \mathbb{N}\}$), respectivamente (cf. Secção 1.7). Relembramos que J é a pseudovariedade dos monóides $\mathcal{J}$-triviais, que são gerados pelos monóides sintácticos das linguagens testáveis por pedaços. Além disso, sendo J, L, R e A as pseudovariedades de todos os monóides $\mathcal{J}$-triviais, $\mathcal{L}$-triviais, $\mathcal{R}$-triviais e de todos os monóides aperiódicos (i.e. $\mathcal{H}$-triviais), respectivamente, é fácil mostrar que $\mathsf{J} \bowtie \mathsf{J} \subseteq \mathsf{A}$. De facto, sejam S e T dois monóides $\mathcal{J}$-triviais. Pretendemos mostrar que $S \bowtie T$ é $\mathcal{H}$-trivial. Sejam $(s,u),(r,v) \in S \bowtie T$ tais que $(s,u)\mathcal{H}(r,v)$. Dado que $(s,u)\mathcal{L}(r,v)$, então existem $(a,x),(b,y) \in S \bowtie T$ tais que $(b,y)(s,u) = (r,v)$ e $(a,x)(r,v) = (s,u)$. Assim, $(b\, y{\cdot}s, y^s\, u) = (r,v)$ e $(a\, x{\cdot}r, x^r\, v) = (s,u)$, donde $v = y^s u$, $u = x^r v$, pelo que $u\mathcal{L}v$ em T. Como $T \in \mathsf{J}$ e $\mathsf{L} \subseteq \mathsf{J}$, concluímos que $u = v$. Analogamente, de $(s,u)\mathcal{R}(r,v)$, $S \in \mathsf{J}$ e $\mathsf{R} \subseteq \mathsf{J}$ resulta $s = r$. Logo, $\mathsf{J} \bowtie \mathsf{J} \subseteq \mathsf{A}$, como pretendíamos. Observemos que ainda não sabemos se esta inclusão é estrita (ver a primeira conjectura do apêndice "Questões em Aberto").

Como consequência imediata do Teorema 4.4.3, temos $\mathsf{O} \subseteq \mathsf{J} \bowtie \mathsf{J}$. Por outro lado, Higgins [39] mostrou que $\mathsf{R} \not\subseteq \mathsf{O}$ e, como uma instância particular de um resultado de Almeida e Weil [4, Corollary 8.6], temos a igualdade $\mathsf{J} \rtimes \mathsf{J} = \mathsf{J} \rtimes \mathsf{R}$, pelo que $\mathsf{R} \subseteq \mathsf{J} \rtimes \mathsf{R} = \mathsf{J} \rtimes \mathsf{J} \subseteq \mathsf{J} \bowtie \mathsf{J}$. Donde $\mathsf{J} \bowtie \mathsf{J} \not\subseteq \mathsf{O}$.

Assim, temos:

Corolário 4.4.4 $\mathsf{O} \subset \mathsf{J} \bowtie \mathsf{J} \subseteq \mathsf{A}$. ■

4.4.2 O monóide $\mathcal{OD}_n$

Recordamos que em [24] Fernandes, Gomes e Jesus mostraram que $\mathcal{OD}_n$ é gerado pelo seu submonóide $\mathcal{O}_n$ juntamente com a permutação reflexão

$$h = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n-1 & n \\ n & n-1 & \cdots & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Além disso, sendo A, B e R os conjuntos definidos na Subsecção 4.4.1, juntando a R as relações

- $h^2 = 1$,
- $ha_i = b_{n-i}h$, para $1 \leq i \leq n-1$, e
- $a_{n-1}a_{n-2}\cdots a_1 h = a_{n-1}a_{n-2}\cdots a_1 b_1 b_2 \cdots b_{n-1}$,

obtemos uma apresentação de $\mathcal{OD}_n$ com geradores $A \cup B \cup \{h\}$. Observemos que, como $b_1b_2\cdots b_{n-1}{=}a_{n-1}a_{n-2}\cdots a_1b_1b_2\cdots b_{n-1}$ em $\mathcal{O}_n$, podemos substituir a relação $a_{n-1}a_{n-2}\cdots a_1h{=}a_{n-1}a_{n-2}\cdots a_1b_1b_2\cdots b_{n-1}$ pela relação mais simples $a_{n-1}a_{n-2}\cdots a_1h = b_1b_2\cdots b_{n-1}$, o que será útil na Subsecção 4.4.4.

Recordemos que podemos tomar $\mathcal{C}_2$ como sendo o submonóide de $\mathcal{OD}_n$ gerado pela transformação h. Além disso, uma vez que $\mathcal{C}_2$ é um grupo cíclico de ordem dois, então é definido pela apresentação $\langle h \mid h^2 = 1\rangle$.

Temos por objectivo construir decomposições de $\mathcal{OD}_n$ através de um produto semidirecto e de um produto semidirecto reverso dos seus submonóides $\mathcal{C}_2$ e $\mathcal{O}_n$.

Primeiro, aplicando a Proposição 4.3.4 (ou 4.3.5), e considerando a acção direita trivial, seja δ_1 a acção esquerda de $\{h\}^*$ em $(A \cup B)^*$ que estende a acção nas letras seguinte:

$$h \centerdot a_i = b_{n-i} \text{ e } h \centerdot b_i = a_{n-i},$$

para quaisquer $1 \leq i \leq n-1$.

Observemos que δ_1 preserva letras (assim como a acção direita) e as apresentações $\langle A \cup B \mid R \rangle$ (de $\mathcal{O}_n$) e $\langle h \mid h^2 = 1 \rangle$ (de $\mathcal{C}_2$) são irredundantes nas letras. Temos ainda:

Lema 4.4.5 *A acção δ_1 preserva as apresentações $\langle A \cup B \mid R \rangle$ e $\langle h \mid h^2 = 1 \rangle$.*

Demonstração. (i) Queremos mostrar que

$$\begin{cases} h \centerdot (a_i b_i) = h \centerdot (b_i a_{i-1}), & \text{para } 2 \leq i \leq n-1, \\ h \centerdot (b_i a_i) = h \centerdot (a_i b_{i+1}), & \text{para } 1 \leq i \leq n-2, \\ h \centerdot (a_i b_i) = h \centerdot b_i, & \text{para } 1 \leq i \leq n-1, \\ h \centerdot (b_i a_i) = h \centerdot a_i, & \text{para } 1 \leq i \leq n-1, \\ h \centerdot (b_j a_i) = h \centerdot (a_i b_j), & \text{para } 1 \leq i, j \leq n-1 \text{ e } j \notin \{i, i+1\}, \\ h \centerdot (a_{n-1} a_{n-2} a_{n-1}) = h \centerdot (a_{n-1} a_{n-2}), & \text{e} \\ h \centerdot (b_1 b_2 b_1) = h \centerdot (b_1 b_2); & \end{cases}$$

(ii) E, para $1 \leq i \leq n-1$, que

$$\begin{cases} h^2 \centerdot a_i = 1 \centerdot a_i, & \text{e} \\ h^2 \centerdot b_i = 1 \centerdot b_i. & \end{cases}$$

(i) Começamos por provar que $h \centerdot (a_i b_i) = h \centerdot (b_i a_{i-1})$, para $2 \leq i \leq n-1$. Seja $i \in \{2, \ldots, n-1\}$. Temos que $h \centerdot (a_i b_i) = (h \centerdot a_i)(h^{a_i} \centerdot b_i) = b_{n-i} a_{n-i} = a_{n-i} b_{n-i+1} = (h \centerdot b_i)(h^{b_i} \centerdot a_{i-1}) = h \centerdot (b_i a_{i-1})$. Analogamente, se prova que $h \centerdot (b_i a_i) = h \centerdot (a_i b_{i+1})$, para $1 \leq i \leq n-2$.

Seja agora $1 \leq i \leq n-1$. Então, como vimos atrás, $h \centerdot (a_i b_i) = b_{n-i} a_{n-i} = a_{n-i} = h \centerdot b_i$ e analogamente se mostra que $h \centerdot (b_i a_i) = h \centerdot a_i$.

De seguida provamos que $h \centerdot (b_j a_i) = h \centerdot (a_i b_j)$, para $1 \leq i, j \leq n-1$ e $j \notin \{i, i+1\}$. Temos que $n - j \notin \{n-i, n-i+1\}$ e assim $h \centerdot (b_j a_i) = (h \centerdot b_j)(h^{b_j} \centerdot a_i) = a_{n-j} b_{n-i} = b_{n-i} a_{n-j} = (h \centerdot a_i)(h^{a_i} \centerdot b_j) = h \centerdot (a_i b_j)$.

Finalmente, $h \centerdot (a_{n-1} a_{n-2} a_{n-1}) = (h \centerdot a_{n-1})(h^{a_{n-1}} \centerdot a_{n-2})(h^{a_{n-1} a_{n-2}} \centerdot a_{n-1}) = b_1 b_2 b_1 = b_1 b_2 = (h \centerdot a_{n-1})(h^{a_{n-1}} \centerdot a_{n-2}) = h \centerdot (a_{n-1} a_{n-2})$. De forma semelhante, mostramos que $h \centerdot (b_1 b_2 b_1) = h \centerdot (b_1 b_2)$.

(ii) Seja $i \in \{1, \ldots, n-1\}$. Então $h^2 \centerdot a_i = h \centerdot (h \centerdot a_i) = h \centerdot b_{n-i} = a_i = 1 \centerdot a_i$. Analogamente provamos que $h^2 \centerdot b_i = 1 \centerdot b_i$.

■

Assim, pelo Teorema 4.3.8 (considerando a acção direita trivial), temos um produto semi-directo $\mathcal{O}_n \rtimes \mathcal{C}_2$ induzido pela acção δ_1. Por outro lado, temos $h a_i = b_{n-i} h$ em $\mathcal{OD}_n$, para qualquer $1 \leq i \leq n-1$, e destas relações e $h^2 = 1$, conclui-se também que $h b_i = a_{n-i} h$ em $\mathcal{OD}_n$, para qualquer $1 \leq i \leq n-1$. Assim, temos:

Lema 4.4.6 *Para* $1 \leq i \leq n-1$, $ha_i = (h{\scriptstyle\blacksquare}a_i)h$ *e* $hb_i = (h{\scriptstyle\blacksquare}b_i)h$ *em* $\mathcal{OD}_n$. ∎

Pelo Corolário 4.3.12, obtemos:

Teorema 4.4.7 *O monóide* $\mathcal{OD}_n$ *é uma imagem homomorfa de* $\mathcal{O}_n \bowtie \mathcal{C}_2$. ∎

Relembremos que OD é a pseudovariedade de monóides gerada por $\{\mathcal{OD}_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ e que Ab_2 é a pseudovariedade de monóides gerada por $\mathcal{C}_2$, a qual é também uma pseudovariedade de grupos abelianos (cf. Secção 1.7). Então:

Corolário 4.4.8 $\mathsf{OD} \subseteq \mathsf{O} \bowtie \mathsf{Ab}_2$. ∎

Como $\mathcal{C}_2$ é um monóide comutativo, a acção esquerda de $\mathcal{C}_2$ em $\mathcal{O}_n$ pode também ser considerada como uma acção direita (que coincide com a acção induzida pela acção direita de $\{h\}^*$ em $(A \cup B)^*$ que estende a acção nas letras seguinte: $a_i^h = b_{n-i}$ e $b_i^h = a_{n-i}$, para qualquer $1 \leq i \leq n-1$) e assim temos um produto semidirecto reverso $\mathcal{C}_2 \ltimes \mathcal{O}_n$. Como $a_i h = hb_{n-i}$ e $b_i h = ha_{n-i}$ em $\mathcal{OD}_n$, i.e. $a_i h = ha_i^h$ e $b_i h = hb_i^h$ em $\mathcal{OD}_n$, para qualquer $1 \leq i \leq n-1$, novamente pelo Corolário 4.3.12, temos:

Teorema 4.4.9 *O monóide* $\mathcal{OD}_n$ *é uma imagem homomorfa de* $\mathcal{C}_2 \ltimes \mathcal{O}_n$. ∎

E, consequentemente:

Corolário 4.4.10 $\mathsf{OD} \subseteq \mathsf{Ab}_2 \ltimes \mathsf{O}$. ∎

4.4.3 O monóide $\mathcal{OP}_n$

Um apresentação para o monóide $\mathcal{OP}_n$ de todas as transformações totais que preservam a orientação em X_n foi fornecida por Catarino em [7]. Sejam $A \cup B$ o conjunto de geradores de $\mathcal{O}_n$ considerado atrás e g a permutação

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n-1 & n \\ 2 & 3 & \cdots & n & 1 \end{pmatrix}.$$

Então $A \cup B \cup \{g\}$ gera $\mathcal{OP}_n$ (ver Subsecção 1.4.2) e, juntando as relações

- $g^n = 1$,
- $a_i g = ga_{i+1}$, para $1 \leq i \leq n-2$,
- $b_i g = gb_{i+1}$, para $1 \leq i \leq n-2$,
- $a_{n-1} g = b_{n-1} b_{n-2} \cdots b_1$,

- $b_{n-1}g = g^2 a_1 a_2 \cdots a_{n-1}$, e

- $g a_{n-1} a_{n-2} \cdots a_1 = a_{n-1} a_{n-2} \cdots a_1$,

a qualquer conjunto de relações sobre o conjunto gerador $A \cup B$ que defina $\mathcal{O}_n$, obtemos uma apresentação para $\mathcal{OP}_n$ com conjunto de geradores $A \cup B \cup \{g\}$. Veja-se [59, 8, 6].

Recordamos que $\mathcal{C}_n$ é um grupo cíclico de ordem n definido pela apresentação $\langle g \mid g^n = 1 \rangle$ e pode ser considerado como o submonóide de $\mathcal{OP}_n$ gerado pela permutação g (ver Subsecção 1.4.2).

O nosso objectivo é, usando um produto semidirecto bilateral, obter uma decomposição do monóide $\mathcal{OP}_n$ em relação aos seus submonóides $\mathcal{C}_n$ e $\mathcal{O}_n$.

Por conveniência, consideramos a apresentação (obviamente irredundante nas letras)

$$\langle C \mid N \rangle = \langle g_1, \ldots, g_{n-1} \mid g_1^n = 1, g_1^k = g_k, 2 \leq k \leq n-1 \rangle$$

de $\mathcal{C}_n$ (com $g_1 = g$, como elemento de $\mathcal{C}_n$) e, tomando dois símbolos a_n e b_n não pertencentes a $A \cup B$ e R como definido atrás, consideramos a apresentação

$$\langle X \mid R' \rangle = \langle A \cup B \cup \{a_n, b_n\} \mid R, a_1 a_2 \cdots a_{n-1} = a_n, b_{n-1} b_{n-2} \cdots b_1 = b_n \rangle$$

de $\mathcal{O}_n$. Observemos que, como elementos de $\mathcal{O}_n$, temos

$$a_n = c = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 1 & 1 & 2 & \cdots & n-1 \end{pmatrix} \text{ e } b_n = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n-1 & n \\ 2 & 3 & \cdots & n & n \end{pmatrix},$$

sendo c o elemento definido na Subsecção 1.4.1. Logo $\langle X \mid R' \rangle$ é também irredundante nas letras.

Consideremos a acção esquerda δ_2 de X^* em C^* e a acção direita φ_2 de C^* em X^* que estendem, pela Proposição 4.3.4 (ou 4.3.5), as seguintes acções nas letras:

$$a_i \cdot g_k = \begin{cases} 1 & \text{se } k = 1 \text{ e } i \in \{n-1, n\} \\ g_{k-1} & \text{se } k \geq 2 \text{ e } i \in \{n-k, n\} \\ g_k & \text{caso contrário,} \end{cases} \qquad b_i \cdot g_k = \begin{cases} 1 & \text{se } k = n-1 \text{ e } i \in \{1, n\} \\ g_{k+1} & \text{se } k < n-1 \text{ e } i \in \{n-k, n\} \\ g_k & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

$$a_i^{g_k} = \begin{cases} a_{i+k} & \text{se } i < n-k \\ b_n & \text{se } i = n-k \\ a_{i+k-n} & \text{se } n-k+1 \leq i \leq n-1 \\ b_k & \text{se } i = n, \end{cases} \qquad b_i^{g_k} = \begin{cases} b_{i+k} & \text{se } i < n-k \\ a_n & \text{se } i = n-k \\ b_{i+k-n} & \text{se } n-k+1 \leq i \leq n-1 \\ a_k & \text{se } i = n, \end{cases}$$

para $1 \leq i \leq n$ e $1 \leq k \leq n-1$.

Notemos que δ_2 e φ_2 preservam letras. Além disso, temos:

Lema 4.4.11 *As acções δ_2 e φ_2 preservam as apresentações $\langle C \mid N \rangle$ e $\langle X \mid R' \rangle$.*

Demonstração. Começamos por mostrar que as acções preservam $\langle C \mid N \rangle$.

(1) Primeiro, provamos que $x \centerdot g_1^k = x \centerdot g_k$ em $\mathcal{C}_n$, para $x \in X$ e $2 \leq k \leq n-1$, por indução em k. Sejam $k \geq 2$ e $i \in \{1, \ldots, n\}$. Então

$$\begin{aligned} a_i \centerdot g_1^k &= (a_i \centerdot g_1)(a_i^{g_1} \centerdot g_1^{k-1}) = \begin{cases} 1(b_1 \centerdot g_1^{k-1}) & \text{se } i = n \\ 1(b_n \centerdot g_1^{k-1}) & \text{se } i = n-1 \\ g_1(a_{i+1} \centerdot g_1^{k-1}) & \text{caso contrário} \end{cases} \\ &= \begin{cases} b_1 \centerdot g_1^{k-1} & \text{se } i = n \\ b_n \centerdot g_1^{k-1} & \text{se } i = n-1 \\ g_1(a_{i+1} \centerdot g_1^{k-1}) & \text{caso contrário .} \end{cases} \end{aligned}$$

Assim, para $k = 2$, temos

$$\begin{aligned} a_i \centerdot g_1^2 &= \begin{cases} b_1 \centerdot g_1 & \text{se } i = n \\ b_n \centerdot g_1 & \text{se } i = n-1 \\ g_1(a_{i+1} \centerdot g_1) & \text{caso contrário} \end{cases} = \begin{cases} g_1 & \text{se } i = n \\ g_2 & \text{se } i = n-1 \\ g_1 1 & \text{se } i = n-2 \\ g_1^2 & \text{caso contrário} \end{cases} \\ &= \begin{cases} g_1 & \text{se } i = n \text{ ou } i = n-2 \\ g_2 & \text{caso contrário} \end{cases} = a_i \centerdot g_2 \ . \end{aligned}$$

De forma análoga se prova que $b_i \centerdot g_1^2 = b_i \centerdot g_2$.

De seguida, admitimos por hipótese de indução que, para $2 \leq k < n-1$, $x \centerdot g_1^k = x \centerdot g_k$ em $\mathcal{C}_n$, para qualquer $x \in X$. Então

$$\begin{aligned} a_i \centerdot g_1^{k+1} &= \begin{cases} b_1 \centerdot g_1^k & \text{se } i = n \\ b_n \centerdot g_1^k & \text{se } i = n-1 \\ g_1(a_{i+1} \centerdot g_1^k) & \text{caso contrário} \end{cases} = \begin{cases} b_1 \centerdot g_k & \text{se } i = n \\ b_n \centerdot g_k & \text{se } i = n-1 \\ g_1(a_{i+1} \centerdot g_k) & \text{caso contrário} \end{cases} \\ &= \begin{cases} g_k & \text{se } i = n \\ g_{k+1} & \text{se } i = n-1 \\ g_1 g_{k-1} & \text{se } i = n-(k+1) \\ g_1 g_k & \text{caso contrário} \end{cases} = \begin{cases} g_k & \text{se } i = n \text{ ou } i = n-(k+1) \\ g_{k+1} & \text{caso contrário} \end{cases} \\ &= a_i \centerdot g_{k+1} \ . \end{aligned}$$

Mais uma vez a demonstração de $b_i \centerdot g_1^{k+1} = b_i \centerdot g_{k+1}$ é análoga.

(2) A seguir, provamos que $x \centerdot g_1^n = x \centerdot 1 (= 1)$ em $\mathcal{C}_n$, para $x \in X$. Seja $i \in \{1, \ldots, n\}$. Então, usando as relações que provámos atrás, temos

$$\begin{aligned} a_i \centerdot g_1^n &= \begin{cases} b_1 \centerdot g_1^{n-1} & \text{se } i = n \\ b_n \centerdot g_1^{n-1} & \text{se } i = n-1 \\ g_1(a_{i+1} \centerdot g_1^{n-1}) & \text{caso contrário} \end{cases} = \begin{cases} b_1 \centerdot g_{n-1} & \text{se } i = n \\ b_n \centerdot g_{n-1} & \text{se } i = n-1 \\ g_1(a_{i+1} \centerdot g_{n-1}) & \text{caso contrário} \end{cases} \\ &= \begin{cases} 1 & \text{se } i = n \text{ ou } i = n-1 \\ g_1 g_{n-1} & \text{caso contrário} \end{cases} = 1 = a_i \centerdot 1 \end{aligned}$$

e, do mesmo modo, mostramos que $b_i \centerdot g_1^n = 1 = b_i \centerdot 1$.

(3) Neste item provamos que $x^{g_1^k} = x^{g_k}$ em $\mathcal{O}_n$, para $x \in X$ e $2 \leq k \leq n-1$, por indução em k. Sejam $k \geq 2$ e $i \in \{1, \ldots, n\}$. Então

$$b_i^{g_1^k} = (b_i^{g_1})^{g_1^{k-1}} = \begin{cases} a_1^{g_1^{k-1}} & \text{se } i = n \\ a_n^{g_1^{k-1}} & \text{se } i = n-1 \\ b_{i+1}^{g_1^{k-1}} & \text{caso contrário .} \end{cases}$$

Assim, para $k = 2$, temos

$$b_i^{g_1^2} = \begin{cases} a_1^{g_1} & \text{se } i = n \\ a_n^{g_1} & \text{se } i = n-1 \\ b_{i+1}^{g_1} & \text{caso contrário} \end{cases} = \begin{cases} a_2 & \text{se } i = n \\ b_1 & \text{se } i = n-1 \\ a_n & \text{se } i = n-2 \\ b_{i+2} & \text{caso contrário} \end{cases} = b_i^{g_2}$$

e, analogamente, $a_i^{g_1^2} = a_i^{g_2}$.

De seguida, admitimos por hipótese de indução que, para $2 \leq k < n-1$, $x^{g_1^k} = x^{g_k}$ em $\mathcal{O}_n$, para $x \in X$. Então

$$\begin{aligned} b_i^{g_1^{k+1}} &= \begin{cases} a_1^{g_1^k} & \text{se } i = n \\ a_n^{g_1^k} & \text{se } i = n-1 \\ b_{i+1}^{g_1^k} & \text{caso contrário} \end{cases} = \begin{cases} a_1^{g_k} & \text{se } i = n \\ a_n^{g_k} & \text{se } i = n-1 \\ b_{i+1}^{g_k} & \text{caso contrário} \end{cases} \\ &= \begin{cases} a_{k+1} & \text{se } i = n \\ b_k & \text{se } i = n-1 \\ b_{i+k+1-n} & \text{se } n-k \leq i \leq n-2 \\ a_n & \text{se } i = n-(k+1) \\ b_{i+k+1} & \text{caso contrário} \end{cases} = \begin{cases} a_{k+1} & \text{se } i = n \\ b_{i+k+1-n} & \text{se } n-k \leq i \leq n-1 \\ a_n & \text{se } i = n-(k+1) \\ b_{i+k+1} & \text{caso contrário} \end{cases} \\ &= b_i^{g_{k+1}} \end{aligned}$$

e, de forma análoga, se prova que $a_i^{g_1^{k+1}} = a_i^{g_{k+1}}$.

(4) Finalmente, provamos que $x^{g_1^n} = x^1 (= x)$ em $\mathcal{O}_n$, para $x \in X$. Seja $i \in \{1, \ldots, n\}$. Então, usando as relações provadas atrás, temos

$$b_i^{g_1^n} = \begin{cases} a_1^{g_1^{n-1}} & \text{se } i = n \\ a_n^{g_1^{n-1}} & \text{se } i = n-1 \\ b_{i+1}^{g_1^{n-1}} & \text{caso contrário} \end{cases} = \begin{cases} a_1^{g_{n-1}} & \text{se } i = n \\ a_n^{g_{n-1}} & \text{se } i = n-1 \\ b_{i+1}^{g_{n-1}} & \text{caso contrário} \end{cases} = b_i = b_i^1$$

e, analogamente, $a_i^{g_1^n} = a_i = a_i^1$.

Agora, resta apenas demonstrar que as acções preservam a apresentação $\langle X \mid R' \rangle$. Seja $1 \leq k \leq n-1$.

(i) Relações $a_ib_i = b_ia_{i-1}$, com $2 \leq i \leq n-1$:

$$(a_ib_i)\cdot g_k = a_i\cdot(b_i\cdot g_k) = \begin{cases} a_i\cdot g_{k+1} & \text{se } k < n-1 \text{ e } i = n-k \\ a_i\cdot g_k & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} g_{k+1} & \text{se } k < n-1 \text{ e } i = n-k \\ g_k & \text{caso contrário} \end{cases} = \begin{cases} g_k & \text{se } 2 \leq k \leq n-1 \text{ e } i = n-k+1 \\ g_{k+1} & \text{se } k < n-1 \text{ e } i = n-k \\ g_k & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} b_i\cdot g_{k-1} & \text{se } k \geq 2 \text{ e } i = n-k+1 \\ b_i\cdot g_k & \text{caso contrário} \end{cases} = b_i\cdot(a_{i-1}\cdot g_k) = (b_ia_{i-1})\cdot g_k$$

e, como $a_1b_1 = b_1 = a_nb_n$ e $a_1a_n = a_n = a_na_{n-1}$ em $\mathcal{O}_n$,

$$(a_ib_i)^{g_k} = a_i^{b_i\cdot g_k} b_i^{g_k} = \begin{cases} a_i^{g_{k+1}} b_i^{g_k} & \text{se } k < n-1 \text{ e } i = n-k \\ a_i^{g_k} b_i^{g_k} & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} a_1a_n & \text{se } k < n-1 \text{ e } i = n-k \\ a_{i+k}b_{i+k} & \text{se } i < n-k \\ a_{i+k-n}b_{i+k-n} & \text{caso contrário} \end{cases} = \begin{cases} a_na_{n-1} & \text{se } i = n-k \\ b_{i+k}a_{i+k-1} & \text{se } i < n-k \\ a_nb_n & \text{se } k \geq 2 \text{ e } i = n-k+1 \\ b_{i+k-n}a_{i+k-n-1} & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} b_i^{g_k} a_{i-1}^{g_k} & \text{se } i < n-k+1 \\ b_{n-k+1}^{g_{k-1}} a_{n-k}^{g_k} & \text{se } k \geq 2 \text{ e } i = n-k+1 \\ b_i^{g_k} a_{i-1}^{g_k} & \text{caso contrário} \end{cases} = b_i^{a_{i-1}\cdot g_k} a_{i-1}^{g_k} = (b_ia_{i-1})^{g_k} .$$

Para $1 \leq i \leq n-2$, as demonstrações de $(b_ia_i)\cdot g_k = (a_ib_{i+1})\cdot g_k$ e $(b_ia_i)^{g_k} = (a_ib_{i+1})^{g_k}$ são semelhantes. Na demonstração de $(b_ia_i)^{g_k} = (a_ib_{i+1})^{g_k}$ usam-se as igualdades $b_{n-1}b_n = b_n = b_nb_1$ e $b_{n-1}a_{n-1} = a_{n-1} = b_na_n$, válidas em $\mathcal{O}_n$.

(ii) Relações $a_ib_i = b_i$, para $1 \leq i \leq n-1$:

$$\begin{aligned} (a_ib_i)\cdot g_k &= a_i\cdot(b_i\cdot g_k) = \begin{cases} a_i\cdot 1 & \text{se } k = n-1 \text{ e } i = 1 \\ a_i\cdot g_{k+1} & \text{se } k < n-1 \text{ e } i = n-k \\ a_i\cdot g_k & \text{caso contrário} \end{cases} \\ &= \begin{cases} 1 & \text{se } k = n-1 \text{ e } i = 1 \\ g_{k+1} & \text{se } k < n-1 \text{ e } i = n-k \\ g_k & \text{caso contrário} \end{cases} = b_i\cdot g_k. \end{aligned}$$

e, como $a_1a_n = a_n$ em $\mathcal{O}_n$,

$$\begin{aligned} (a_ib_i)^{g_k} &= a_i^{b_i\cdot g_k} b_i^{g_k} = \begin{cases} a_1a_n & \text{se } k \leq n-1 \text{ e } i = n-k \\ a_{i+k}b_{i+k} & \text{se } i < n-k \\ a_{i+k-n}b_{i+k-n} & \text{caso contrário} \end{cases} \\ &= \begin{cases} a_n & \text{se } i = n-k \\ b_{i+k} & \text{se } i < n-k \\ b_{i+k-n} & \text{caso contrário} \end{cases} = b_i^{g_k}. \end{aligned}$$

Analogamente, $(b_ia_i)\cdot g_k = a_i\cdot g_k$, $(b_ia_i)^{g_k} = a_i^{g_k}$, para $1 \leq i \leq n-1$, usando desta vez a igualdade $b_{n-1}b_n = b_n$ de $\mathcal{O}_n$.

(iii) Relações $b_j a_i = a_i b_j$, para $1 \leq i, j \leq n-1$ e $j \notin \{i, i+1\}$:

$$
\begin{aligned}
(b_j a_i)\cdot g_k &= b_j\cdot(a_i\cdot g_k) = \begin{cases} b_j\cdot 1 & \text{se } k=1 \text{ e } i=n-1 \\ b_j\cdot g_{k-1} & \text{se } k\geq 2 \text{ e } i=n-k \\ b_j\cdot g_k & \text{caso contrário} \end{cases} \\
&= \begin{cases} 1 & \text{se } k=1,\ i=n-1 \text{ e } j\neq n-1 \\ g_{k-1} & \text{se } k\geq 2,\ i=n-k,\ j\neq n-k \text{ e } j\neq n-k+1 \\ 1 & \text{se } k=n-1,\ i\neq 1 \text{ e } j=1 \\ g_{k+1} & \text{se } k<n-1,\ j=n-k,\ i\neq n-k \text{ e } i\neq n-k-1 \\ g_k & \text{caso contrário} \end{cases} \\
&= \begin{cases} a_i\cdot 1 & \text{se } k=n-1 \text{ e } j=1 \\ a_i\cdot g_{k+1} & \text{se } k<n-1 \text{ e } j=n-k \\ a_i\cdot g_k & \text{caso contrário} \end{cases} = a_i\cdot(b_j\cdot g_k) = (a_i b_j)\cdot g_k
\end{aligned}
$$

e, como para $1 \leq j \leq n-2$, $b_j b_n = b_n b_{j+1}$ e $a_n a_i = a_{i+1} a_n$ em $\mathcal{O}_n$,

$$
(b_j a_i)^{g_k} = b_j^{a_i\cdot g_k} a_i^{g_k} = \begin{cases} b_j^{1} b_n & \text{se } k=1 \text{ e } i=n-1 \\ b_j^{g_{k-1}} b_n & \text{se } k\geq 2 \text{ e } i=n-k \\ b_j^{g_k} a_{i+k} & \text{se } k\geq 1 \text{ e } i<n-k \\ b_j^{g_k} a_{i+k-n} & \text{se } k\geq 1 \text{ e } n-k+1\leq i\leq n-1 \end{cases}
$$

$$
= \begin{cases} b_j b_n & \text{se } k=1,\ i=n-1 \text{ e } j\neq n-1 \\ b_{j+k-1} b_n & \text{se } k\geq 2,\ i=n-k \text{ e } j<n-k \\ b_{j+k-n-1} b_n & \text{se } k\geq 2,\ i=n-k \text{ e } n-k+2\leq j\leq n-1 \\ b_{j+k} a_{i+k} & \text{se } k\geq 1,\ i,j<n-k \text{ e } j\notin\{i,i+1\} \\ a_n a_{i+k} & \text{se } k\geq 2,\ i<n-k-1 \text{ e } j=n-k \\ b_{j+k-n} a_{i+k} & \text{se } k\geq 1,\ i<n-k \text{ e } n-k+1\leq j\leq n-1 \\ b_{j+k} a_{i+k-n} & \text{se } k\geq 1,\ n-k+1\leq i\leq n-1 \text{ e } j<n-k \\ a_n a_{i+k-n} & \text{se } k\geq 2,\ n-k+1\leq i\leq n-1 \text{ e } j=n-k \\ b_{j+k-n} a_{i+k-n} & \text{se } k\geq 1,\ n-k+1\leq i\leq n-1,\ n-k+1\leq j\leq n-1 \text{ e } j\notin\{i,i+1\} \end{cases}
$$

$$
= \begin{cases} b_n b_{j+k} & \text{se } k\leq n-1,\ i=n-k \text{ e } j<n-k \\ b_n b_{j+k-n} & \text{se } k\leq n-1,\ i=n-k \text{ e } n-k+2\leq j\leq n-1 \\ a_{i+k} b_{j+k} & \text{se } k\leq n-1,\ i,j<n-k \text{ e } j\notin\{i,i+1\} \\ a_{i+k+1} a_n & \text{se } k<n-1,\ i<n-k-1 \text{ e } j=n-k \\ a_{i+k} b_{j+k-n} & \text{se } k\leq n-1,\ i<n-k \text{ e } n-k+1<j\leq n-1 \\ a_{i+k-n} b_{j+k} & \text{se } k\leq n-1,\ n-k+1\leq i\leq n-1 \text{ e } j<n-k \\ a_{i+k-n+1} a_n & \text{se } k<n-1,\ n-k+1\leq i\leq n-1 \text{ e } j=n-k \\ a_i a_n & \text{se } k=n-1,\ j=1 \text{ e } i\neq 1 \\ a_{i+k-n} b_{j+k-n} & \text{se } k\leq n-1,\ n-k+1\leq i\leq n-1,\ n-k+1\leq j\leq n-1 \text{ e } j\notin\{i,i+1\} \end{cases}
$$

$$
= \begin{cases} a_i^{g_k} b_{j+k} & \text{se } k\leq n-1 \text{ e } j<n-k \\ a_i^{g_k} b_{j+k-n} & \text{se } k\leq n-1 \text{ e } n-k+1\leq j\leq n-1 \\ a_i^{g_{k+1}} a_n & \text{se } k<n-1 \text{ e } j=n-k \\ a_i a_n & \text{se } k=n-1 \text{ e } j=1 \end{cases} = a_i^{b_j\cdot g_k} b_j^{g_k} = (a_i b_j)^{g_k} .
$$

(iv) Relações $a_{n-1}a_{n-2}a_{n-1} = a_{n-1}a_{n-2}$:

$$\begin{aligned}
(a_{n-1}a_{n-2}a_{n-1})\centerdot g_k &= a_{n-1}\centerdot(a_{n-2}\centerdot(a_{n-1}\centerdot g_k)) = \begin{cases} a_{n-1}\centerdot(a_{n-2}\centerdot 1) & \text{se } k=1 \\ a_{n-1}\centerdot(a_{n-2}\centerdot g_k) & \text{caso contrário} \end{cases} \\
&= \begin{cases} 1 & \text{se } k=1 \\ a_{n-1}\centerdot g_{k-1} & \text{se } k=2 \\ a_{n-1}\centerdot g_k & \text{caso contrário} \end{cases} = \begin{cases} 1 & \text{se } k\in\{1,2\} \\ g_k & \text{caso contrário} \end{cases} \\
&= a_{n-1}\centerdot(a_{n-2}\centerdot g_k) = (a_{n-1}a_{n-2})\centerdot g_k.
\end{aligned}$$

e, como $a_{n-1}a_{n-2}b_n = b_na_{n-1}$ e $b_n^2a_1 = b_n^2$ em $\mathcal{O}_n$,

$$\begin{aligned}
(a_{n-1}a_{n-2}a_{n-1})^{g_k} &= (a_{n-1}a_{n-2})^{a_{n-1}\centerdot g_k}a_{n-1}^{g_k} = a_{n-1}^{(a_{n-2}a_{n-1})\centerdot g_k}a_{n-2}^{a_{n-1}\centerdot g_k}a_{n-1}^{g_k} \\
&= \begin{cases} a_{n-1}a_{n-2}b_n & \text{se } k=1 \\ a_{n-1}^{g_{k-1}}a_{n-2}^{g_k}a_{n-1}^{g_k} & \text{se } k=2 \\ a_{n-1}^{g_k}a_{n-2}^{g_k}a_{n-1}^{g_k} & \text{caso contrário} \end{cases} = \begin{cases} a_{n-1}a_{n-2}b_n & \text{se } k=1 \\ b_n^2a_1 & \text{se } k=2 \\ a_{k-1}a_{k-2}a_{k-1} & \text{caso contrário} \end{cases} \\
&= \begin{cases} b_na_{n-1} & \text{se } k=1 \\ b_n^2 & \text{se } k=2 \\ a_{k-1}a_{k-2} & \text{caso contrário} \end{cases} = a_{n-1}^{a_{n-2}\centerdot g_k}a_{n-2}^{g_k} = (a_{n-1}a_{n-2})^{g_k}\ .
\end{aligned}$$

Do mesmo modo, se prova que $(b_1b_2b_1)\centerdot g_k = (b_1b_2)\centerdot g_k$ e, usando o facto de $a_n^2b_{n-1} = a_n^2$ e $b_1b_2a_n = a_nb_1$ em $\mathcal{O}_n$, também temos $(b_1b_2b_1)^{g_k} = (b_1b_2)^{g_k}$.

(v) Relação $a_1a_2\cdots a_{n-1} = a_n$:

$$(a_1a_2\cdots a_{n-1})\centerdot g_k = a_1\centerdot(a_2\centerdot(\cdots\centerdot(a_{n-1}\centerdot g_k))) = \begin{cases} 1 & \text{se } k=1 \\ g_{k-1} & \text{caso contrário} \end{cases} = a_n\centerdot g_k\ .$$

Para $2\le i\le n-1$, temos

$$(a_i\cdots a_{n-1})\centerdot g_k = \begin{cases} 1 & \text{se } k=1 \\ g_{k-1} & \text{se } 2\le k\le n-i \\ g_k & \text{caso contrário} \end{cases}$$

e

$$a_{i-1}{}^{(a_i\cdots a_{n-1})\centerdot g_k} = \begin{cases} a_{i-1} & \text{se } k=1 \\ a_{i+k-2} & \text{se } 2\le k\le n-i \\ a_{i+k-n-1} & \text{caso contrário} \end{cases}\ .$$

Assim, usando as relações R temos,

$$(a_1a_2\cdots a_{n-1})^{g_1} = a_1^{(a_2\cdots a_{n-1})\centerdot g_1}a_2^{(a_3\cdots a_{n-1})\centerdot g_1}\cdots a_{n-2}^{a_{n-1}\centerdot g_1}a_{n-1}^{g_1} = a_1a_2\cdots a_{n-2}b_n = b_1 = a_n^{g_1}\ .$$

e, para $2\le k\le n-1$,

$$\begin{aligned}
(a_1a_2\cdots a_{n-1})^{g_k} &= a_1^{(a_2\cdots a_{n-1})\centerdot g_k}a_2^{(a_3\cdots a_{n-1})\centerdot g_k}\cdots a_{n-k-1}^{(a_{n-k}\cdots a_{n-1})\centerdot g_k}a_{n-k}^{(a_{n-k+1}\cdots a_{n-1})\centerdot g_k} \\
&\quad a_{n-k+1}^{(a_{n-k+2}\cdots a_{n-1})\centerdot g_k}\cdots a_{n-2}^{a_{n-1}\centerdot g_k}a_{n-1}^{g_k} \\
&= a_ka_{k+1}\cdots a_{n-2}b_na_1a_2\cdots a_{k-2}a_{k-1} = b_k = a_n^{g_k}\ .
\end{aligned}$$

De forma análoga se prova que $(b_{n-1}b_{n-2}\cdots b_1)\centerdot g_k = b_n\centerdot g_k$ e $(b_{n-1}b_{n-2}\cdots b_1)^{g_k} = b_n^{g_k}$, usando desta vez as igualdades válidas em $\mathcal{O}_n$, $a_nb_{n-1}\cdots b_3b_2 = a_1$ e, para $2\le k\le n-1$, $b_kb_{k-1}\cdots b_2a_nb_{n-1}\cdots b_{k+2}b_{k+1} = a_k$. ■

Aplicando o Teorema 4.3.8, temos um produto semidirecto bilateral $\mathcal{C}_n \bowtie \mathcal{O}_n$ induzido pelas acções δ_2 e φ_2. Temos ainda que:

Lema 4.4.12 *Para $1 \leq i \leq n$, $a_i g = (a_i \centerdot g) a_i^g$ e $b_i g = (b_i \centerdot g) b_i^g$ em $\mathcal{OP}_n$.* ∎

Demonstração. Seja $1 \leq i \leq n$. Se $i = n$ temos $a_n g = a_1 a_2 \cdots a_{n-2} a_{n-1} g = a_1 a_2 \cdots a_{n-2} b_n = b_1 = 1 b_1 = (a_n \centerdot g) a_n^g$ e $b_n g = b_{n-1} b_{n-2} \cdots b_1 g = b_{n-1} g b_{n-1} \cdots b_2 = g^2 a_n b_{n-1} \cdots b_2 = g^2 a_1 = g_2 a_1 = (b_n \centerdot g) b_n^g$. Se $i = n-1$ então $a_{n-1} g = b_n = 1 b_n = (a_{n-1} \centerdot g) a_{n-1}^g$ e $b_{n-1} g = g^2 a_n = g_2 a_n = (b_{n-1} \centerdot g) b_{n-1}^g$. Para $1 \leq i \leq n-2$ temos $a_i g = g a_{i+1} = (a_i \centerdot g) a_i^g$ e $b_i g = g b_{i+1} = (b_i \centerdot g) b_i^g$. ∎

De acordo com as condições do Teorema 4.3.10 só precisamos que uma das acções (direita ou esquerda) preserve letras. Como a acção direita em $\mathcal{C}_n \bowtie \mathcal{O}_n$ preserva X, podemos então tomar X como conjunto gerador de $\mathcal{O}_n$ e $\{g\}$ como conjunto gerador de $\mathcal{C}_n$. Além disso, $\{g\} \cup X$ gera $\mathcal{OP}_n$ e o Lema 4.4.12 é válido. Pelo Teorema 4.3.10, temos:

Teorema 4.4.13 *O monóide $\mathcal{OP}_n$ é uma imagem homomorfa de $\mathcal{C}_n \bowtie \mathcal{O}_n$.* ∎

Recordemos que OP é a pseudovariedade de monóides gerada por $\{\mathcal{OP}_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ e Ab é a pseudovariedade (de monóides) de todos os grupos abelianos (cf. Secção 1.7). Então:

Corolário 4.4.14 $\mathsf{OP} \subseteq \mathsf{Ab} \bowtie \mathsf{O}$. ∎

4.4.4 O monóide $\mathcal{OR}_n$

Relembramos que, juntando a um conjunto de geradores de $\mathcal{O}_n$ a permutação g e a permutação h, obtemos um conjunto gerador de $\mathcal{OR}_n$. Assim $\mathcal{O}_n$, $\mathcal{OD}_n$, $\mathcal{OP}_n$, $\mathcal{C}_2$ e $\mathcal{C}_n$ são submonóides de $\mathcal{OR}_n$. Recordemos também que o grupo diedral de ordem $2n$ é definido pela apresentação $\langle g, h \mid h^2 = 1, g^n = 1, hg = g^{n-1} h \rangle$ e pode ser considerado como o submonóide de $\mathcal{OR}_n$ gerado pelas permutações g e h (ver Subsecção 1.4.2).

Nesta subsecção obtemos o monóide $\mathcal{OR}_n$ como vários quocientes de produtos semidirectos bilaterais envolvendo os seus submonóides $\mathcal{C}_2$, $\mathcal{C}_n$, $\mathcal{D}_{2n}$, $\mathcal{O}_n$, $\mathcal{OD}_n$ e $\mathcal{OP}_n$.

Começamos por $\mathcal{D}_{2n}$ e $\mathcal{O}_n$. Por conveniência, consideramos a apresentação irredundante nas letras

$$\langle D \mid N' \rangle = \langle g_1, \ldots, g_{n-1}, h \mid h^2 = 1, g_1^n = 1, h g_1 = g_{n-1} h, g_1^k = g_k, 2 \leq k \leq n-1 \rangle$$

de $\mathcal{D}_{2n}$ e novamente a apresentação também irredundante nas letras $\langle X \mid R' \rangle$ de $\mathcal{O}_n$.

Seja δ_3 a acção esquerda de X^* em D^* e φ_3 a acção direita de D^* em X^* que estendem, pela Proposição 4.3.4 (ou 4.3.5), as acções nas letras seguintes:

- $x \centerdot h$ e x^h como em $\{h\}^* \ltimes (A \cup B)^*$ (que induz o produto semidirecto reverso $\mathcal{C}_2 \ltimes \mathcal{O}_n$ considerado no Teorema 4.4.9), para $x \in A \cup B$;

- $a_n\centerdot h = b_n\centerdot h = h$ (assim $x\centerdot h = h$, para $x \in X$), $a_n^h = b_n$ e $b_n^h = a_n$;

- $x\centerdot g_k$ e x^{g_k} como em $C^* \bowtie X^*$ (que induz $\mathcal{C}_n \bowtie \mathcal{O}_n$), para $x \in X$ e $1 \leq k \leq n-1$.

Observemos que as acções δ_3 e φ_3 preservam letras. Temos também que:

Lema 4.4.15 *As acções δ_3 e φ_3 preservam as apresentações $\langle D \mid N' \rangle$ e $\langle X \mid R' \rangle$.*

Demonstração. Pelo Lema 4.4.11 e pelo *dual* do Lema 4.4.5 (ver o parágrafo entre o Corolário 4.4.8 e o Teorema 4.4.9), resta mostrar que:

(i) $(a_1 \cdots a_{n-1})\centerdot h = a_n\centerdot h$, $(b_{n-1} \cdots b_1)\centerdot h = b_n\centerdot h$, $(a_1 \cdots a_{n-1})^h = a_n^h$ e $(b_{n-1} \cdots b_1)^h = b_n^h$;

(ii) $a_n\centerdot h^2 = a_n\centerdot 1$, $b_n\centerdot h^2 = b_n\centerdot 1$, $a_n^{h^2} = a_n^1$ e $b_n^{h^2} = b_n^1$; e

(iii) $x\centerdot(hg_1) = x\centerdot(g_{n-1}h)$ e $x^{hg_1} = x^{g_{n-1}h}$, $x \in X$.

As primeiras duas relações de (i) são óbvias (visto que $w\centerdot h = h$, para $w \in X^*$). Por outro lado,

$$\begin{aligned}(a_1 a_2 \cdots a_{n-1})^h &= a_1^{(a_2 \cdots a_{n-1})\centerdot h} a_2^{(a_3 \cdots a_{n-1})\centerdot h} \cdots a_{n-2}^{a_{n-1}\centerdot h} a_{n-1}^h = a_1^h a_2^h \cdots a_{n-2}^h a_{n-1}^h \\ &= b_{n-1} b_{n-2} \cdots b_2 b_1 = b_n = a_n^h.\end{aligned}$$

Analogamente, se prova que $(b_{n-1} \cdots b_1)^h = b_n^h$. As relações de (ii) são fáceis de demonstrar. De seguida, demonstramos as relações de (iii), para $x \in \{a_1, \ldots, a_n\}$. Para $x \in \{b_1, \ldots, b_n\}$ a demonstração é semelhante. Assim, para $i = 1$, temos

$$a_1\centerdot(hg_1) = (a_1\centerdot h)(a_1^h\centerdot g_1) = h(b_{n-1}\centerdot g_1) = hg_2 = g_{n-2}h = (a_1\centerdot g_{n-1})(a_1^{g_{n-1}}\centerdot h) = a_1\centerdot(g_{n-1}h)$$

e

$$a_1^{hg_1} = (a_1^h)^{g_1} = b_{n-1}^{g_1} = a_n = b_n^h = (a_1^{g_{n-1}})^h = a_1^{g_{n-1}h}.$$

Para $2 \leq i \leq n-1$, temos

$$a_i\centerdot(hg_1) = (a_i\centerdot h)(a_i^h\centerdot g_1) = h(b_{n-i}\centerdot g_1) = hg_1 = g_{n-1}h = (a_i\centerdot g_{n-1})(a_i^{g_{n-1}}\centerdot h) = a_i\centerdot(g_{n-1}h)$$

e

$$a_i^{hg_1} = (a_i^h)^{g_1} = b_{n-i}^{g_1} = b_{n-i+1} = a_{i-1}^h = (a_i^{g_{n-1}})^h = a_i^{g_{n-1}h}.$$

Finalmente, para $i = n$, temos

$$a_n\centerdot(hg_1) = (a_n\centerdot h)(a_n^h\centerdot g_1) = h(b_n\centerdot g_1) = hg_2 = g_{n-2}h = (a_n\centerdot g_{n-1})(a_n^{g_{n-1}}\centerdot h) = a_n\centerdot(g_{n-1}h)$$

e

$$a_n^{hg_1} = (a_n^h)^{g_1} = b_n^{g_1} = a_1 = b_{n-1}^h = (a_n^{g_{n-1}})^h,$$

como pretendíamos demonstrar. ■

Novamente, aplicando o Teorema 4.3.8, temos um produto semidirecto bilateral $\mathcal{D}_{2n} \bowtie \mathcal{O}_n$ induzido pelas acções δ_3 e φ_3. Além disso, como $a_n h = hb_n$ (e $b_n h = ha_n$), temos $a_n h = (a_n \centerdot h)(a_n^h)$ e $b_n h = (b_n \centerdot h)(b_n^h)$ em $\mathcal{OR}_n$. Assim, tendo em consideração o Lema 4.4.12 e a observação anterior ao Teorema 4.4.9, é imediato que:

Lema 4.4.16 *Para qualquer $x \in X$, $xg = (x \centerdot g)x^g$ e $xh = (x \centerdot h)x^h$ em $\mathcal{OR}_n$.* ■

Como a acção direita em $\mathcal{D}_{2n} \bowtie \mathcal{O}_n$ preserva X e $\{g, h\} \cup X$ gera $\mathcal{OR}_n$, pelo Teorema 4.3.10, temos:

Teorema 4.4.17 *O monóide $\mathcal{OR}_n$ é uma imagem homomorfa de $\mathcal{D}_{2n} \bowtie \mathcal{O}_n$.* ■

Consequentemente, relembrando que OR e Dih são as pseudovariedades de monóides geradas por $\{\mathcal{OR}_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ e $\{\mathcal{D}_{2n} \mid n \in \mathbb{N}\}$, respectivamente (cf. Secção 1.7), temos:

Corolário 4.4.18 $\mathsf{OR} \subseteq \mathsf{Dih} \bowtie \mathsf{O}$. ■

De seguida, consideramos os submonóides $\mathcal{C}_n$ e $\mathcal{OD}_n$ de $\mathcal{OR}_n$, juntamente com as apresentações irredundantes nas letras $\langle C \mid N \rangle$ de $\mathcal{C}_n$ e

$$\langle Y \mid R_1 \rangle = \langle X \cup \{h\} \mid R', h^2 = 1, a_{n-1}a_{n-2} \cdots a_1 h = b_1 b_2 \cdots b_{n-1}, ha_i = b_{n-i}h, 1 \leq i \leq n-1 \rangle$$

de $\mathcal{OD}_n$.

Sejam δ_4 a acção esquerda de Y^* em C^* e φ_4 a acção direita de C^* em Y^* que estendem, pela Proposição 4.3.4 (ou 4.3.5), as acções nas letras seguintes:

- $x \centerdot g_k$ e x^{g_k} definidas como em $C^* \bowtie X^*$ (que induz $\mathcal{C}_n \bowtie \mathcal{O}_n$), para $x \in X$ e $1 \leq k \leq n-1$;
- $h \centerdot g_k = g_{n-k}$ e $h^{g_k} = h$, para $1 \leq k \leq n-1$.

Notemos que, ambas as acções δ_4 e φ_4 preservam letras. Além disso, temos:

Lema 4.4.19 *As acções δ_4 e φ_4 preservam as apresentações $\langle C \mid N \rangle$ e $\langle Y \mid R_1 \rangle$.*

Demonstração. Pelo Lema 4.4.11, resta mostrar que:

(i) $h \centerdot g_1^k = h \centerdot g_k$ e $h^{g_1^k} = h^{g_k}$, para $2 \leq k \leq n-1$;

(ii) $h \centerdot g_1^n = h \centerdot 1$ e $h^{g_1^n} = h^1$;

(iii) $h^2 \centerdot g_k = 1 \centerdot g_k$ e $(h^2)^{g_k} = 1^{g_k}$, para $1 \leq k \leq n-1$;

(iv) $(ha_i) \centerdot g_k = (b_{n-i}h) \centerdot g_k$ e $(ha_i)^{g_k} = (b_{n-i}h)^{g_k}$, para $1 \leq i, k \leq n-1$;

(v) $(a_{n-1}a_{n-2} \cdots a_1 h) \centerdot g_k = (b_1 b_2 \cdots b_{n-1}) \centerdot g_k$ e $(a_{n-1}a_{n-2} \cdots a_1 h)^{g_k} = (b_1 b_2 \cdots b_{n-1})^{g_k}$, para $1 \leq k \leq n-1$.

Começamos por demonstrar as primeiras igualdades de (i), (ii), (iii), (iv) e (v).

Primeiro provamos que $h\centerdot g_1^k = h\centerdot g_k$, para $2 \leq k \leq n-1$, por indução em k. Para $k=2$, temos

$$h\centerdot g_1^2 = (h\centerdot g_1)(h^{g_1}\centerdot g_1) = g_{n-1}(h\centerdot g_1) = g_{n-1}g_{n-1} = g^{n-1}g^{n-1} = g^{n-2} = g_{n-2} = h\centerdot g_2.$$

De seguida, suponhamos por hipótese de indução que $h\centerdot g_1^{k-1} = h\centerdot g_{k-1}$, para $2 < k \leq n-1$. Então

$$\begin{aligned} h\centerdot g_1^k &= (h\centerdot g_1)(h^{g_1}\centerdot g_1^{k-1}) = g_{n-1}(h\centerdot g_1^{k-1}) = g_{n-1}(h\centerdot g_{k-1}) = g_{n-1}g_{n-k+1} = g^{n-1}g^{n-k+1} \\ &= g^{n-k} = g_{n-k} = h\centerdot g_k. \end{aligned}$$

Para terminar a prova de (ii), temos:

$$h\centerdot g_1^n = (h\centerdot g_1)(h^{g_1}\centerdot g_1^{n-1}) = g_{n-1}(h\centerdot g_1^{n-1}) = g_{n-1}(h\centerdot g_{n-1}) = g_{n-1}g_1 = g^{n-1}g = 1 = h\centerdot 1.$$

A fim de provar (iii), seja $1 \leq k \leq n-1$. Então $h^2\centerdot g_k = h\centerdot(h\centerdot g_k) = h\centerdot g_{n-k} = g_k = 1\centerdot g_k$.

Agora, provamos (iv): para $1 \leq i, k \leq n-1$, temos

$$\begin{aligned} (ha_i)\centerdot g_k &= h\centerdot(a_i\centerdot g_k) = \begin{cases} h\centerdot 1 & \text{se } k=1,\ i=n-1 \\ h\centerdot g_{k-1} & \text{se } k\geq 2,\ i=n-k \\ h\centerdot g_k & \text{caso contrário} \end{cases} \\ &= \begin{cases} 1 & \text{se } k=1,\ i=n-1 \\ g_{n-k+1} & \text{se } k\geq 2,\ i=n-k \\ g_{n-k} & \text{caso contrário} \end{cases} = \begin{cases} 1 & \text{se } n-k=n-1,\ n-i=1 \\ g_{n-k+1} & \text{se } n-k\leq n-2,\ n-i=k \\ g_{n-k} & \text{caso contrário} \end{cases} \\ &= b_{n-i}\centerdot g_{n-k} = b_{n-i}\centerdot(h\centerdot g_k) = (b_{n-i}h)\centerdot g_k. \end{aligned}$$

Finalmente, provamos a primeira igualdade de (v). Seja $1 \leq k \leq n-1$. Então

$$\begin{aligned} (a_{n-1}a_{n-2}\cdots a_1 h)\centerdot g_k &= a_{n-1}\centerdot(a_{n-2}\centerdot(\cdots\centerdot(a_1\centerdot(h\centerdot g_k)))) \\ &= a_{n-1}\centerdot(a_{n-2}\centerdot(\cdots\centerdot(a_1\centerdot g_{n-k}))) \\ &= a_{n-1}\centerdot(a_{n-2}\centerdot(\cdots\centerdot(a_k\centerdot g_{n-k}))) \\ &= a_{n-1}\centerdot(a_{n-2}\centerdot(\cdots\centerdot(a_{k+1}\centerdot g_{n-(k+1)}))) \\ &= a_{n-1}\centerdot g_1 = 1 = b_1\centerdot g_{n-1} \\ &= b_1\centerdot(b_2\centerdot(\cdots\centerdot(b_{n-(k+1)}\centerdot g_{k+1}))) \\ &= b_1\centerdot(b_2\centerdot(\cdots\centerdot(b_{n-k}\centerdot g_k))) \\ &= b_1\centerdot(b_2\centerdot(\cdots\centerdot(b_{n-1}\centerdot g_k))) \\ &= (b_1b_2\cdots b_{n-1})\centerdot g_k, \end{aligned}$$

como pretendíamos demonstrar.

No que se refere às segundas igualdades, observemos que, como $h^{g_k} = h$, para $1 \leq k \leq n-1$, facilmente se vê que as de (i), (ii) e (iii) são verdadeiras.

Assim, começamos por provar que $(ha_i)^{g_k} = (b_{n-i}h)^{g_k}$, para $1 \leq i,k \leq n-1$. Sejam $1 \leq i,k \leq n-1$. Temos

$$\begin{array}{rcl} (ha_i)^{g_k} & = & h^{a_i \centerdot g_k} a_i^{g_k} = ha_i^{g_k} = \begin{cases} ha_{i+k} & \text{se } i < n-k \\ hb_n & \text{se } i = n-k \\ ha_{i+k-n} & \text{se } n-k+1 \leq i \leq n-1 \end{cases} \\ & = & \begin{cases} b_{n-i-k}h & \text{se } k+1 \leq n-i \leq n-1 \\ a_n h & \text{se } n-i = k \\ b_{n-i+n-k}h & \text{se } n-i < k \end{cases} \quad = b_{n-i}^{g_{n-k}} h = b_{n-i}^{h \centerdot g_k} h^{g_k} = (b_{n-i}h)^{g_k}. \end{array}$$

Terminamos esta demonstração provando que, para $1 \leq k \leq n-1$, $(a_{n-1}a_{n-2}\cdots a_1 h)^{g_k} = (b_1 b_2 \cdots b_{n-1})^{g_k}$. Seja $1 \leq k \leq n-1$. Para $k=1$ temos

$$\begin{array}{rcl} (a_{n-1}a_{n-2}\cdots a_1 h)^{g_1} & = & {a_{n-1}}^{(a_{n-2}a_{n-3}\cdots a_1 h)\centerdot g_1} {a_{n-2}}^{(a_{n-3}\cdots a_1 h)\centerdot g_1} \cdots {a_2}^{(a_1 h)\centerdot g_1} {a_1}^{h \centerdot g_1} h^{g_1} \\ & = & {a_{n-1}}^{(a_{n-2}a_{n-3}\cdots a_1)\centerdot g_{n-1}} {a_{n-2}}^{(a_{n-3}\cdots a_1)\centerdot g_{n-1}} \cdots {a_2}^{a_1 \centerdot g_{n-1}} {a_1}^{g_{n-1}} h \\ & = & b_n^{n-1} h = a_n^{n-1} \\ & = & {b_1}^{(b_2 b_3 \cdots b_{n-1})\centerdot g_1} {b_2}^{(b_3 \cdots b_{n-1})\centerdot g_1} \cdots {b_{n-2}}^{b_{n-1}\centerdot g_1} {b_{n-1}}^{g_1} \\ & = & (b_1 b_2 \cdots b_{n-1})^{g_1}. \end{array}$$

Se $2 \leq k \leq n-1$ então

$$\begin{array}{rcl} (a_{n-1}a_{n-2}\cdots a_1 h)^{g_k} & = & {a_{n-1}}^{(a_{n-2}a_{n-3}\cdots a_1 h)\centerdot g_k} {a_{n-2}}^{(a_{n-3}\cdots a_1 h)\centerdot g_k} \cdots {a_2}^{(a_1 h)\centerdot g_k} {a_1}^{h \centerdot g_k} h^{g_k} \\ & = & {a_{n-1}}^{(a_{n-2}a_{n-3}\cdots a_1)\centerdot g_{n-k}} {a_{n-2}}^{(a_{n-3}\cdots a_1)\centerdot g_{n-k}} \cdots {a_2}^{a_1 \centerdot g_{n-k}} {a_1}^{g_{n-k}} h \\ & = & b_n^{n-k} a_{n-1}a_{n-2}\cdots a_{n-k+1} h = a_n^{n-k} b_1 b_2 \cdots b_{k-1} \\ & = & {b_1}^{(b_2 b_3 \cdots b_{n-1})\centerdot g_k} {b_2}^{(b_3 \cdots b_{n-1})\centerdot g_k} \cdots {b_{n-2}}^{b_{n-1}\centerdot g_k} {b_{n-1}}^{g_k} \\ & = & (b_1 b_2 \cdots b_{n-1})^{g_k}, \end{array}$$

como queríamos demonstrar. ■

Assim, pelo Teorema 4.3.8, temos um produto semidirecto bilateral $\mathcal{C}_n \bowtie \mathcal{OD}_n$ induzido pelas acções δ_4 e φ_4. Por outro lado, como $hg = g^{n-1}h$, então $hg = (h \centerdot g)h^g$ em $\mathcal{OR}_n$ e assim, tomando também em consideração o Lema 4.4.12, temos imediatamente que:

Lema 4.4.20 *Para qualquer $x \in Y$, $xg = (x \centerdot g)x^g$.* ■

Como a acção direita em $\mathcal{C}_n \bowtie \mathcal{OD}_n$ preserva Y e $\{g\} \cup Y$ gera $\mathcal{OR}_n$, pelo Teorema 4.3.10, temos:

Teorema 4.4.21 *O monóide $\mathcal{OR}_n$ é uma imagem homomorfa de $\mathcal{C}_n \bowtie \mathcal{OD}_n$.* ■

Consequentemente:

Corolário 4.4.22 $\mathsf{OR} \subseteq \mathsf{Ab} \bowtie \mathsf{OD}$. ■

Finalmente, consideremos os submonóides $\mathcal{C}_2$ e $\mathcal{OP}_n$ de $\mathcal{OR}_n$ e as apresentações irredundantes nas letras $\langle h \mid h^2 = 1\rangle$ de $\mathcal{C}_2$ e

$$\begin{aligned}\langle Z \mid R_2\rangle = \langle A \cup B \cup C \mid R, N, \ & a_{n-1}g_1 = b_{n-1}b_{n-2}\cdots b_1, g_1a_{n-1}a_{n-2}\cdots a_1 = a_{n-1}a_{n-2}\cdots a_1, \\ & b_{n-1}g_1 = g_2a_1a_2\cdots a_{n-1}, a_ig_1 = g_1a_{i+1}, b_ig_1 = g_1b_{i+1}, \\ & 1 \leq i \leq n-2\rangle\end{aligned}$$

de $\mathcal{OP}_n$.

Aplicando a Proposição 4.3.4, ou 4.3.5, e considerando uma acção direita trivial, seja δ_5 a acção esquerda de $\{h\}^*$ em Z^* que estende a acção nas letras seguinte:

- $h \centerdot a_i = b_{n-i}$ e $h \centerdot b_i = a_{n-i}$, para $1 \leq i \leq n-1$ (como a acção esquerda δ_1 de $\{h\}^*$ em $(A \cup B)^*$);

- $h \centerdot g_k = g_{n-k}$, para $1 \leq k \leq n-1$.

Observemos que δ_5 preserva letras (assim como a acção direita). Além disso, temos:

Lema 4.4.23 *A acção δ_5 preserva as apresentações $\langle Z \mid R_2\rangle$ e $\langle h \mid h^2 = 1\rangle$.*

Demonstração. Pelo Lema 4.4.5, resta mostrar que:

(i) $h^2 \centerdot g_k = 1 \centerdot g_k$, para $1 \leq k \leq n-1$;

(ii) $h \centerdot g_1^n = h \centerdot 1$;

(iii) $h \centerdot g_1^k = h \centerdot g_k$, para $2 \leq k \leq n-1$;

(iv) $h \centerdot (a_{n-1}g_1) = h \centerdot (b_{n-1}b_{n-2}\cdots b_1)$;

(v) $h \centerdot (g_1a_{n-1}a_{n-2}\cdots a_1) = h \centerdot (a_{n-1}a_{n-2}\cdots a_1)$;

(vi) $h \centerdot (b_{n-1}g_1) = h \centerdot (g_2a_1a_2\cdots a_{n-1})$;

(vii) $h \centerdot (a_ig_1) = h \centerdot (g_1a_{i+1})$ e $h \centerdot (b_ig_1) = h \centerdot (g_1b_{i+1})$, para $1 \leq i \leq n-2$.

As igualdades de (i) a (iii) encontram-se provadas na demonstração do Lema 4.4.19.

Quanto a (iv), como $b_1g_{n-1} = a_1a_2\cdots a_{n-1}$ em $\mathcal{OP}_n$, temos

$$\begin{aligned} h \centerdot (a_{n-1}g_1) &= (h \centerdot a_{n-1})(h^{a_{n-1}} \centerdot g_1) = b_1(h \centerdot g_1) = b_1g_{n-1} = a_1a_2\cdots a_{n-1} \\ &= (h \centerdot b_{n-1})(h \centerdot b_{n-2})\cdots(h \centerdot b_1) \\ &= (h \centerdot b_{n-1})(h^{b_{n-1}} \centerdot b_{n-2})(h^{b_{n-1}b_{n-2}} \centerdot b_{n-3})\cdots(h^{b_{n-1}b_{n-2}\cdots b_2} \centerdot b_1) \\ &= h \centerdot (b_{n-1}b_{n-2}\cdots b_1).\end{aligned}$$

De seguida, como $b_1b_2\cdots b_{n-1} = g_{n-1}b_1b_2\cdots b_{n-1}$ (notemos que $b_1b_2\cdots b_{n-1} = \binom{1\ 2\ \cdots\ n}{n\ n\ \cdots\ n}$ é um zero direito em $\mathcal{OP}_n$), então

$$\begin{aligned} h_\centerdot(g_1a_{n-1}a_{n-2}\cdots a_1) &= (h_\centerdot g_1)(h^{g_1}\centerdot a_{n-1})(h^{g_1a_{n-1}}\centerdot a_{n-2})\cdots(h^{g_1a_{n-1}\cdots a_2}\centerdot a_1)\\ &= (h_\centerdot g_1)(h_\centerdot a_{n-1})(h_\centerdot a_{n-2})\cdots(h_\centerdot a_1)\\ &= g_{n-1}b_1b_2\cdots b_{n-1} = b_1b_2\cdots b_{n-1}\\ &= (h_\centerdot a_{n-1})(h_\centerdot a_{n-2})\cdots(h_\centerdot a_1)\\ &= (h_\centerdot a_{n-1})(h^{a_{n-1}}\centerdot a_{n-2})\cdots(h^{a_{n-1}\cdots a_2}\centerdot a_1)\\ &= h_\centerdot(a_{n-1}a_{n-2}\cdots a_1), \end{aligned}$$

o que prova (v).

Agora, demonstramos (vi), usando o facto de que $a_1g_{n-1} = g_{n-2}b_{n-1}\cdots b_1$ em $\mathcal{OP}_n$. Então,

$$\begin{aligned} h_\centerdot(b_{n-1}g_1) &= (h_\centerdot b_{n-1})(h^{b_{n-1}}\centerdot g_1) = a_1g_{n-1} = g_{n-2}b_{n-1}...b_1\\ &= (h_\centerdot g_2)(h_\centerdot a_1)(h_\centerdot a_2)\cdots(h_\centerdot a_{n-1})\\ &= (h_\centerdot g_2)(h^{g_2}\centerdot a_1)(h^{g_2a_1}\centerdot a_2)\cdots(h^{g_2a_1\cdots a_{n-2}}\centerdot a_{n-1})\\ &= h_\centerdot(g_2a_1a_2\cdots a_{n-1}). \end{aligned}$$

Finalmente, como $b_{n-i}g_{n-1} = g_{n-1}b_{n-i-1}$ e $a_{n-i}g_{n-1} = g_{n-1}a_{n-i-1}$, para $1 \leq i \leq n-2$, em $\mathcal{OP}_n$, temos que

$$h_\centerdot(a_ig_1) = (h_\centerdot a_i)(h^{a_i}\centerdot g_1) = b_{n-i}g_{n-1} = g_{n-1}b_{n-i-1} = (h_\centerdot g_1)(h^{g_1}\centerdot a_{i+1}) = h_\centerdot(g_1a_{i+1})$$

e

$$h_\centerdot(b_ig_1) = (h_\centerdot b_i)(h^{b_i}\centerdot g_1) = a_{n-i}g_{n-1} = g_{n-1}a_{n-i-1} = (h_\centerdot g_1)(h^{g_1}\centerdot b_{i+1}) = h_\centerdot(g_1b_{i+1}),$$

para $1 \leq i \leq n-2$, o que prova a última igualdade. ■

Por conseguinte, pelo Teorema 4.3.8 (considerando a acção direita trivial), temos um produto semidirecto $\mathcal{OP}_n \rtimes \mathcal{C}_2$ induzido pela acção δ_5. Por outro lado, temos $hg^k = g^{n-k}h$ donde $hg_k = (h_\centerdot g_k)h$, para $1 \leq k \leq n-1$. Então, tendo em consideração o Lema 4.4.6, concluímos imediatamente que:

Lema 4.4.24 *Para $x \in A \cup B \cup C$, $hx = (h_\centerdot x)h$ em $\mathcal{OR}_n$.* ■

Pelo Corolário 4.3.12, temos:

Teorema 4.4.25 *O monóide $\mathcal{OR}_n$ é uma imagem homomorfa de $\mathcal{OP}_n \rtimes \mathcal{C}_2$.* ■

E, portanto:

Corolário 4.4.26 $\mathsf{OR} \subseteq \mathsf{OP} \rtimes \mathsf{Ab}_2$. ■

Mais uma vez, como $\mathcal{C}_2$ é um monóide comutativo, a acção esquerda de $\mathcal{C}_2$ em $\mathcal{OP}_n$ pode também ser considerada como uma acção direita (que coincide com a induzida pela acção direita de $\{h\}^*$ em $(A\cup B\cup C)^*$ que estende a acção nas letras seguinte: $a_i^h = b_{n-i}$ e $b_i^h = a_{n-i}$, $g_i^h = g_{n-i}$, para $1 \leq i \leq n-1$). Assim também temos um produto semidirecto reverso $\mathcal{C}_2 \ltimes \mathcal{OP}_n$. Dado que, para $1 \leq i \leq n-1$, temos $a_i h = h b_{n-i}$, $b_i h = h a_{n-i}$ e $g_i h = h g_{n-i}$, então $xh = hx^h$ em $\mathcal{OR}_n$, para qualquer $x \in A\cup B\cup C$. Logo, novamente pelo Corolário 4.3.12, temos:

Teorema 4.4.27 *O monóide $\mathcal{OR}_n$ é uma imagem homomorfa de $\mathcal{C}_2 \ltimes \mathcal{OP}_n$.* ∎

Por conseguinte:

Corolário 4.4.28 $\mathsf{OR} \subseteq \mathsf{Ab}_2 \ltimes \mathsf{OP}$. ∎

Apêndice A

Questões em aberto

Questão 1. *Determinar os cardinais e as características de monóides de transformações parciais sobre uma cadeia com* mn *elementos que preservam uma* m*-partição uniforme e a ordem ou a orientação.*

Questão 2. *Encontrar apresentações para monóides de transformações crescentes sobre uma cadeia com* mn *elementos que preservam uma* m*-partição uniforme. Seguindo a estratégia de Solomon em [67] começámos por tentar obter uma apresentação para o monóide* $\mathcal{O}^+_{m\times n}$*. Assim, com os geradores descritos na Secção 2.3, exibimos de seguida um conjunto de relações satisfeitas pelo monóide* $\mathcal{O}^+_{m\times n}$ *que julgamos serem suficientes para o definirem. Este é ainda um trabalho em progresso.*

$$b_{i,j}{}^2 = b_{i,j}, \quad 1 \le i \le m, \quad 1 \le j \le n-1,$$

$$b_{i,j}b_{k,\ell} = b_{k,\ell}b_{i,j}, \quad 1 \le i \le m, \quad 1 \le j \le n-1, \ |\ell - j| \ge 2 \text{ ou } k \ne i,$$

$$b_{i,j}b_{i,j+1}b_{i,j} = b_{i,j}b_{i,j+1}, \quad 1 \le i \le m, \quad 1 \le j \le n-2,$$

$$b_{i,j+1}b_{i,j}b_{i,j+1} = b_{i,j}b_{i,j+1}, \quad 1 \le i \le m, \quad 1 \le j \le n-2,$$

$$b_{i,j}t_{k,\ell} = \begin{cases} t_{k,\ell} & k = i, \quad 1 \le j \le n-\ell, \\ & k = i-1, \quad 2 \le j+1 \le \ell \le n, \\ t_{k,\ell}b_{i+1,p} & k = i, \quad j = n-(\ell-p), \text{ com } 2 \le p < \ell < n \text{ ou } 1 \le p < \ell = n, \\ t_{k,\ell}b_{i,j}, & k = i, \quad 1 \le \ell \le n-j \le n-1, \\ & k = i-1, \quad 1 \le \ell < j \le n-1, \\ & k \ne i-1, i, \quad 1 \le j \le n-1, 1 \le \ell \le n, \end{cases}$$

$1 \le i \le m,$

$t_{i,j}b_{i,\ell} = t_{i,j}, \quad 1 \leq i \leq m-1, \quad 1 \leq j \leq n, \quad 1 \leq \ell \leq n-1,$

$t_{i,j}t_{i,2} = t_{i,j}b_{i+1,1}, \quad 1 \leq i \leq m-2, \quad 1 \leq j \leq n-1,$

$t_{i,n}t_{i,2} = b_{i,1}t_{i,n}, \quad 1 \leq i \leq m-1,$

$t_{i,j}t_{i,1} = t_{i,j}, \quad 1 \leq i \leq m-1, \quad 1 \leq j \leq n,$

$t_{i,j}t_{i,\ell} = t_{i,1}t_{i,\ell}, \quad 1 \leq i \leq m-1, \quad 2 \leq j \leq \ell \leq n,$

$t_{i,j}t_{i+1,\ell} = t_{i,1}t_{i+1,\ell}, \quad 1 \leq i \leq m-2, \quad 2 \leq j \leq n, \quad 1 \leq \ell \leq n-j+1 \leq n,$

$t_{i,j}t_{k,\ell} = t_{k,\ell}t_{i,j}, \quad 1 \leq i,k \leq m-1, \quad 1 \leq j,\ell \leq n, \quad k \neq i-1, i, i+1,$

$t_{i+1,j}t_{i,1}t_{i+1,1} = t_{i,1}t_{i+1,j}, \quad 1 \leq i \leq m-2, \quad 1 \leq j \leq n,$

$$\begin{aligned} t_{i,j}t_{i,k}t_{i,\ell} = t_{i,j}t_{i,k}, \quad & 1 \leq i \leq m-1, \\ & j=1, \quad 2 \leq \ell < k \leq n, \\ & j \neq 1 \quad 2 \leq \ell < k < j \leq n, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} t_{i,j}t_{i+1,k}t_{i,\ell} = t_{i,j}t_{i+1,k}, \quad & 1 \leq i \leq m-2, \\ & j=1, \quad 1 \leq k,\ell \leq n, \\ & 2 \leq j \leq n, \quad n-j+2 \leq k \leq n, \quad 1 \leq \ell \leq n, \end{aligned}$$

$t_{i+1,j}t_{i,1}t_{i+1,1} = t_{i,1}t_{i+1,j}, \quad 1 \leq i \leq m-2, \quad 1 \leq j \leq n,$

$$\begin{aligned} t_{i+1,j}t_{i,n}t_{i+1,\ell} = t_{i,t}t_{i+1,u}, \quad & 1 \leq i \leq m-2, \quad 1 \leq j \leq n \quad 2 \leq \ell \leq n, \\ & j \leq \ell \text{ então } t=n, \quad u=l, \\ & \ell < j \text{ então } t = n-j+\ell, \quad u=j, \end{aligned}$$

$b_{i+1,j}t_{i,j}b_{i+1,j} = t_{i,j}b_{i+1,j}, \quad 1 \leq i \leq m-1, \quad 1 \leq j \leq n-1,$

$b_{i,1}...b_{i,n-j}t_{i,\ell} = t_{i,\ell}t_{i,\ell-j+1}, \quad 1 \leq i \leq m-1, \quad 1 \leq j \leq \ell \leq n, \quad j \neq n,$

$$\left[\begin{array}{l} \left[\begin{array}{lcl} t_{i,n-1}b_{i+1,n-1}...b_{i+1,1} & = & t_{i,n}b_{i+1,1}, \\ b_{i,2}t_{i,n-1}b_{i+1,n-1}...b_{i+1,2} & = & t_{i,n}b_{i+1,2}, \\ & . & \\ & . & \\ & . & \\ b_{i,n-1}...b_{i,2}t_{i,n-1}b_{i+1,n-1} & = & t_{i,n}b_{i+1,n-1}, \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{lcl} t_{i,n-2}b_{i+1,n-2}...b_{i+1,1} & = & t_{i,n-1}b_{i+1,1}, \\ b_{i,3}t_{i,n-2}b_{i+1,n-2}...b_{i+1,2} & = & t_{i,n-1}b_{i+1,2}, \\ & . & \\ & . & \\ & . & \\ b_{i,n-1}...b_{i,3}t_{i,n-2}b_{i+1,n-2} & = & t_{i,n-1}b_{i+1,n-2}, \end{array}\right. \\ . \\ . \\ . \\ t_{i,1}b_{i+1,1} = t_{i,2}b_{i+1,1}, \end{array}\right. \qquad 1 \leq i \leq m-1,$$

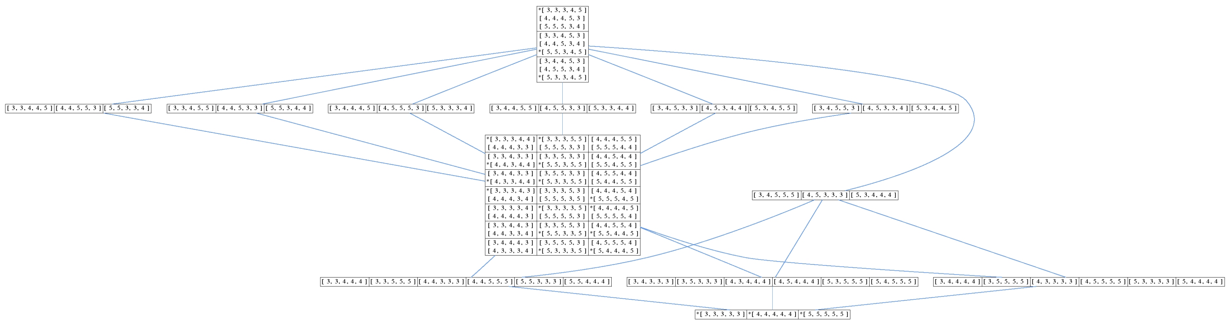
$t_{i,1}b_{i+1,1}...b_{i+1,n-1} = t_{i,1}t_{i,n}, \ 1 \leq i \leq m-1.$

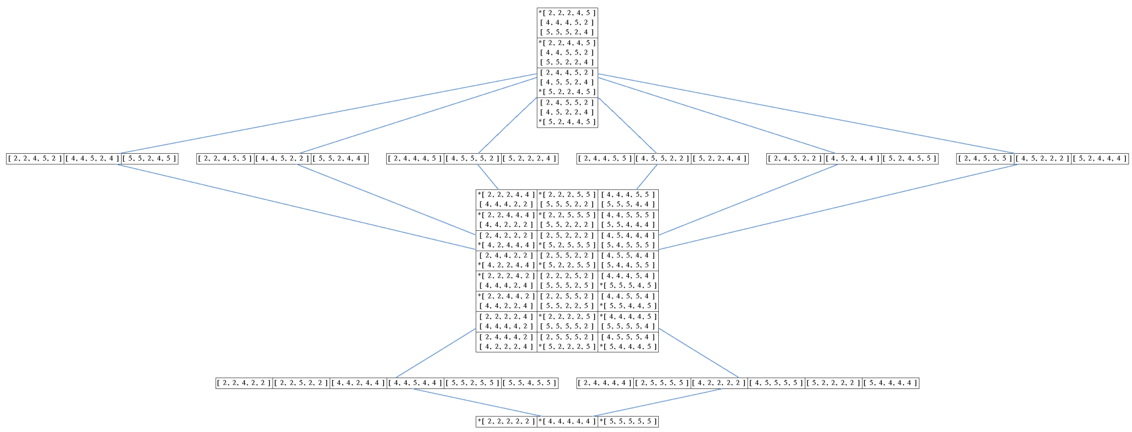
Questão 3. *Determinar a relação entre os subsemigrupos*

$$\mathcal{OP}(X_n, Y) = \{\alpha \in \mathcal{OP}_n \mid (X_n)\alpha \subseteq Y\}$$

de $\mathcal{OP}_n$ *com imagem restrita* $Y \subseteq X_n$*. Notemos que os semigrupos* $\mathcal{OP}_{n,r}$ *definidos na Secção*

3.1 constituem um caso particular destes. Não é, em geral, verdadeiro que, se $|Y_1| = |Y_2|$ então $\mathcal{OP}(X_n, Y_1)$ é isomorfo a $\mathcal{OP}(X_n, Y_2)$. A título de exemplo apresentamos dois diagramas das $\mathcal{D}$-classes de semigrupos $\mathcal{OP}(X_5, Y)$ com $|Y| = 3$. O primeiro diagrama corresponde às $\mathcal{D}$-classes das transformações do semigrupo $\{\alpha \in \mathcal{OP}_5 \mid \operatorname{Im}\alpha \subseteq \{3,4,5\}\}$ e o segundo diagrama corresponde às $\mathcal{D}$-classes das transformações do semigrupo $\{\alpha \in \mathcal{OP}_5 \mid \operatorname{Im}\alpha \subseteq \{2,4,5\}\}$. Através destes diagramas constatamos facilmente que estes dois semigrupos não são isomorfos.





Estes diagramas foram obtidos usando o pacote SgpViz [12] do programa GAP [33].

Questão 4. *Usar o método descrito na Secção 4.3 para decompor, através de um produto semidirecto bilateral, certos monóides de transformações parciais sobre uma cadeia com n elementos, nomeadamente os monóides $\mathcal{PO}_n$, $\mathcal{POD}_n$, $\mathcal{POP}_n$, $\mathcal{POR}_n$, $\mathcal{POPI}_n$ e $\mathcal{PORI}_n$.*

Questão 5. *Usando produtos semidirectos bilaterais, decompor os monóides $\mathcal{OP}_{m\times n}$ e $\mathcal{OR}_{m\times n}$.*

Terminamos formulando algumas conjecturas que derivam da Secção 4.4.

Conjectura 1. $\mathsf{J} \bowtie \mathsf{J} \subset \mathsf{A}$.

Conjectura 2. $\mathsf{OD} = \mathsf{Ab}_2 \ltimes \mathsf{O} = \mathsf{O} \rtimes \mathsf{Ab}_2$.

Observemos que a conjectura anterior é baseada no seguinte resultado:

Lema. O monóide $\mathcal{O}_n \rtimes \mathcal{C}_2$ pertence à pseudovariedade OD.

Demonstração. Prova-se que a aplicação

$$\begin{array}{rccc} \mu: & \mathcal{O}_n \rtimes \mathcal{C}_2 & \longrightarrow & \mathcal{OD}_n \times \mathcal{C}_2 \\ & (s,u) & \longmapsto & (su,u), \end{array}$$

é um homomorfismo injectivo. ∎

Analogamente, também temos que $\mathcal{C}_2 \ltimes \mathcal{O}_n \in \mathsf{OD}$.

Conjectura 3. $\mathsf{OP} = \mathsf{Ab} \bowtie \mathsf{O}$.

Conjectura 4. $\mathsf{OR} = \mathsf{Dih} \bowtie \mathsf{O} = \mathsf{Ab} \bowtie \mathsf{OD} = \mathsf{Ab}_2 \ltimes \mathsf{OP} = \mathsf{OP} \rtimes \mathsf{Ab}_2$.

Bibliografia

[1] A.Ya. Aĭzenštat, *The defining relations of the endomorphism semigroup of a finite linearly ordered set,* Sb. Math. **3** (1962), 161–169 (Russo).

[2] A.Ya. Aĭzenštat, *Homomorphisms of semigroups of endomorphisms of ordered sets,* Uch. Zap. Leningr. Gos. Pedagog. Inst. **238** (1962), 38–48 (Russo).

[3] J. Almeida and M.V. Volkov, *The gap between partial and full,* Internat. J. Algebra Comput. **8** (1998), 399–430.

[4] J. Almeida and P. Weil, *Profinite categories and semidirect products,* J. Pure Appl. Algebra **123** (1998), 1–50.

[5] J. Araújo and C. Schneider, *The rank of the endomorphism monoid of a uniform partition,* Semigroup Forum **78** (2009), 498–510.

[6] R.E. Arthur and N. Ruškuc, *Presentations for two extensions of the monoid of order-preserving mappings on a finite chain,* Southeast Asian Bull. Math. **24** (2000), 1–7.

[7] P.M. Catarino, *Monoids of orientation-preserving transformations of a finite chain and their presentation,* Semigroups and Applications, eds. J.M. Howie & N. Ruškuc, Proceedings of the Conference in St Andrews, Scotland, 1997 World Scientific (1998), 39–46.

[8] P.M. Catarino and P.M. Higgins, *The monoid of orientation-preserving mappings on a chain,* Semigroup Forum **58** (1999), 190–206.

[9] P.M. Catarino and P.M. Higgins, *The pseudovariety generated by all semigroups of orientation-preserving transformations on a finite cycle,* Internat. J. Algebra Comput. **12** (2002), 387–405.

[10] S. Cicalò, V.H. Fernandes and C. Schneider, *On the ranks of partial endomorphism monoids of a uniform partition,* em preparação.

[11] D.F. Cowan and N.R. Reilly, *Partial cross-sections of symmetric inverse semigroups,* Internat. J. Algebra Comput. **5** (1995), 259–287.

[12] M. Delgado and J. Morais, SgpViz – a GAP package, *Version 0.998*; 31.05.2008, (`http://www.gap-system.org/Packages/sgpviz.html`).

[13] I. Dimitrova,V.H. Fernandes and J. Koppitz, *The maximal subsemigroups of semigroups of transformations preserving or reversing the orientation on a finite chain,* submetido.

[14] I. Dimitrova and J. Koppitz, *The maximal subsemigroups of the semigroup of all monotone parcial injections,* submetido.

[15] I. Dimitrova and J. Koppitz, *The maximal subsemigroups of the ideals of some semigroups of parcial injections,* submetido.

[16] V.H. Fernandes, *Semigroups of order-preserving mappings on a finite chain: a new class of divisors,* Semigroup Forum **54** (1997), 230–236.

[17] V.H. Fernandes, *Normally ordered inverse semigroups,* Semigroup Forum **56** (1998), 418–433.

[18] V.H. Fernandes, *The monoid of all injective orientation-preserving partial transformations on a finite chain,* Comm. Algebra **28** (2000), 3401–3426.

[19] V.H. Fernandes, *The monoid of all injective order preserving partial transformations on a finite chain,* Semigroup Forum **62** (2001), 178–204.

[20] V.H. Fernandes, *Presentations for some monoids of partial transformations on a finite chain: a survey,* Semigroups, Algorithms, Automata and Languages, eds. Gracinda M. S. Gomes & Jean-Éric Pin & Pedro V. Silva, World Scientific, (2002), 363–378.

[21] V.H. Fernandes, *Semigroups of order-preserving mappings on a finite chain: another class of divisors,* Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat. **3** (478) (2002), 51–59 (Russo).

[22] V.H. Fernandes, G.M.S. Gomes and M.M. Jesus, *Presentations for some monoids of injective partial transformations on a finite chain,* Southeast Asian Bull. Math. **28** (2004), 903–918.

[23] V.H. Fernandes, G.M.S. Gomes and M.M. Jesus, *Congruences on monoids of order-preserving or order-reversing transformations on a finite chain,* Glasgow Math. J. **47** (2005), 413–424.

[24] V.H. Fernandes, G.M.S. Gomes and M.M. Jesus, *Presentations for some monoids of partial transformations on a finite chain,* Comm. Algebra **33** (2005), 587–604.

[25] V.H. Fernandes, G.M.S. Gomes and M.M. Jesus, *Congruences on monoids of transformations preserving the orientation on a finite chain,* Journal of Algebra **321** (2009), 743–757.

[26] V.H. Fernandes, M.M. Jesus, V. Maltcev and J.D. Mitchell, *Endomorphisms of the semigroup of order-preserving mappings,* submetido.

[27] V.H. Fernandes and T.M. Quinteiro, *Bilateral semidirect product decompositions of transformations monoids,* Semigroup Forum **82** (2) (2011), 271–287.

[28] V.H. Fernandes and T.M. Quinteiro, *On the monoids of transformations that preserve the order and a uniform partition,* Comm. Algebra **39.8** (2011), 2798–2815.

[29] V.H. Fernandes and T.M. Quinteiro, *On the ranks of certain monoids of transformations that preserve a uniform partition,* submetido.

[30] V.H. Fernandes and T.M. Quinteiro, *The cardinal of some monoids of transformations that preserve a uniform partition,* Bull. Malays. Math. Sci. Soc., aceite.

[31] V.H. Fernandes and J. Sanwong, *Semigroups of transformations with restricted range,* submetido.

[32] V.H. Fernandes and M.V. Volkov, *On divisors of semigroups of order-preserving mappings of a finite chain,* Semigroup Forum **81** (3) (2010), 551–554.

[33] The GAP Group, *GAP – Groups, Algorithms, and Programming, Version 4.4.12*; 2008, (`http://www.gap-system.org`).

[34] O. Ganyushkin and V. Mazorchuk, *On the structure of $\mathcal{IO}_n$,* Semigroup Forum **66** (2003), 455–483.

[35] G.U. Garba, *Nilpotents in semigroups of partial one-to-one order-preserving mappings,* Semigroup Forum **48** (1994), 37–49.

[36] G.M.S. Gomes and J.M. Howie, *On the ranks of certain semigroups of order-preserving transformations,* Semigroup Forum **45** (1992), 272–282.

[37] J.M. Harris et al., *Combinatorics and Graph Theory,* Springer-Verlag New York, 2000.

[38] P.M. Higgins, *Techniques of Semigroup Theory,* Oxford University Press, 1992.

[39] P.M. Higgins, *Divisors of semigroups of order-preserving mappings on a finite chain,* Internat. J. Algebra Comput. **5** (1995), 725–742.

[40] P.M. Higgins, *Pseudovarieties generated by transformations semigroups,* Semigroups and Their Applications Including Semigroup Rings, ed. S. Kublanovsky, A. Mikhalev, J. Ponizovskiı and P. Higgins, Proceedings of the Conference in St Petersburg, 1995, Russian State Hydrometeorological Institute, St Petersburg, 1996, 85–94.

[41] J.M. Howie, *Product of idempotents in certain semigroups of transformations,* Proc. Edinburgh Math. Soc. **17** (1971), 223–236.

[42] J.M. Howie, *Fundamentals of Semigroup Theory,* Oxford University Press, 1995.

[43] P. Huisheng, *On the rank of the semigroup $\mathcal{T}_E(X)$,* Semigroup Forum **70** (2005), 107–117.

[44] P. Huisheng, *Regularity and Green's relations for semigroups of transformations that preserve an equivalence,* Comm. Algebra **33** (2005), 109–118.

[45] P. Huisheng and W. Deng, *A note on Green's relations in the semigroups $T(X,\rho)$,* Semigroup Forum **79** (1) (2009), 210–213.

[46] P. Huisheng and Z. Dingyu, *Green's Equivalences on Semigroups of Transformations Preserving Order and an Equivalence Relation,* Semigroup Forum **71** (2005), 241–251.

[47] P. Huisheng and H. Zhou, *Semigroups of partial transformations preserving an equivalence relation,* Adv. Math. (China) **38** (1) (2009), 103–116.

[48] M. Kunze, *Zappa products,* Acta Math. Hungar. **41** (1983), 225–239.

[49] M. Kunze, *Lineare Parallelrechner I* [Linear parallel processing machines I], Elektron. Informationsverarb. Kybernet. **20** (1984), 9–39 (Alemão).

[50] M. Kunze, *Lineare Parallelrechner II* [Linear parallel processing machines II], Elektron. Informationsverarb. Kybernet. **20** (1984), 111–147 (Alemão).

[51] M. Kunze, *Bilateral semidirect products of transformation semigroups,* Semigroup Forum **45** (1992), 166–182.

[52] M. Kunze, *Standard automata and semidirect products of transformation semigroups,* Theoret. Comput. Sci. **108** (1993), 151–171.

[53] G. Lallement, *Semigroups and Combinatorial Applications,* John Wiley & Sons, 1979.

[54] A. Larandji and A. Umar, *Combinatorial results for semigroups of order-preserving partial transformations,* J. Algebra **278** (2004), 342–359.

[55] A. Larandji and A. Umar, *Combinatorial results for semigroups of order-preserving full transformations,* Semigroup Forum **72** (2006), 51–62.

[56] T.G. Lavers, *Presentations of general products of monoids,* J. Algebra **204** (1998), 733–741.

[57] D.B. McAlister, *Semigroup for Windows,* 1997.

[58] J. Mitchell, MONOID – a GAP package, *Version 3.1.4*; 08.05.2010, (`http://www.gap-system.org/Packages/monoid.html`).

[59] D.B. McAlister, *Semigroups generated by a group and an idempotent,* Comm. Algebra **26** (1998), 515–547.

[60] J.-E. Pin, *Varieties of Formal Languages,* Plenum, London, 1986.

[61] L.M. Popova, *The defining relations of the semigroup of partial endomorphisms of a finite linearly ordered set,* Leningraddskij gosudarstvennyj pedagogicheskij institut imeni A. I. Gerzena, Uchenye Zapiski **238** (1962), 78–88 (Russo).

[62] V.B. Repnitskiĭ and M.V. Volkov, *The finite basis problem for the pseudovariety $\mathcal{O}$,* Proc. R. Soc. Edinb., Sect. A, Math. **128** (1998), 661–669.

[63] J. Rhodes and B. Tilson, *The kernel of monoid morphisms,* J. Pure Appl. Algebra **62** (1989), 227–268.

[64] N. Ruškuc, *Semigroup Presentations,* Ph. D. Thesis, University of St-Andrews, 1995.

[65] J. Sanwong and W. Sommanee, *Regularity and Green's Relations on a Semigroup of Transformations with Restricted Range,* Int. J. Math. Sci. **2008**, (2008), Art. ID 794013, 11 pp.

[66] I. Simon *Piecewise testable events,* Proc. 2nd GI Conf., vol. **33** of Lect. Notes in Comput. Sci., Berlin, (1975), Springer, 214–222.

[67] A. Solomon, *Catalan monoids, monoids of local endomorphisms, and their presentations,* Semigroup Forum **53** (1996), 351–368.

[68] J.S.V. Symons, *Some results concerning a transformation semigroup,* J. Austral. Math. Soc. **19**, (Series A) (1975), 413–425.

[69] L. Sun, P. Huisheng and C. Zhengxing, *Regularity and Green's relations for semigroups of transformations preserving orientation and an equivalence,* Semigroup Forum **74** (2007), 473–486.

[70] A. Vernitskii and M.V. Volkov, *A proof and generalisation of Higgins' division theorem for semigroups of order-preserving mappings,* Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat. (1) (1995), 38–44 (Russo).

[71] X. Yang, *A classification of maximal subsemigroups of finite order-preserving transformation semigroups,* Comm. Algebra **28** (2000), 1503–1513.

[72] G. Zappa, *Sulla construzione dei gruppi di due dati sottogruppi permutabili tra loro,* Secundo Congresso Unione Matematica Italiana (1940), 119–125 (Bolonha).

[73] P. Zhao, *A classification of maximal idempotent-generated subsemigroups of singular orientation-preserving transformation semigroups,* Semigroup Forum **79** (2009), 377–384.

[74] P. Zhao, X. Bo and Y. Mei, *Locally maximal idempotent-generated subsemigroups of singular orientation-preserving transformation semigroups,* Semigroup Forum **77** (2) (2008), 187–195.

Índice Remissivo

Notações