

Modelos de Avistamento de Contactos no Mar:
Estimação com Distâncias de Detecção Inicial

por

Rui Pedro Gonçalves de Deus

Dissertação apresentada como requisito
parcial para a obtenção do grau de

Mestre em Estatística e Gestão da Informação

pelo

Instituto Superior de Estatística e Gestão da Informação

da

Universidade Nova de Lisboa

Modelos de Avistamento
de Contactos no Mar:
Estimação com Distâncias de Detecção Inicial

Dissertação orientada pelo

Professor Doutor José António Santos
Professor Auxiliar do Instituto Superior de Estatística e Gestão da
Informação da Universidade Nova de Lisboa

Novembro 2009

AGRADECIMENTOS

Gostaria de agradecer

Ao meu orientador Professor Doutor José António Santos, pela sua constante disponibilidade, amizade, dedicação e apoio na elaboração deste trabalho.

Ao Comandante João José Maia Martins, pelos bons ofícios prestados na elaboração da folha de registo de avistamentos e na articulação com a comunidade operacional que permitiu incluir nas instruções temporárias das unidades navais a tarefa adicional da recolha de dados de avistamentos.

Às guarnições dos navios da Marinha de Guerra Portuguesa que recolheram a informação que serve de base ao presente trabalho.

“Luck is tenacity of purpose”

Elbert Hubbard, 1856-1915

ÍNDICE

AGRADECIMENTOS	iii
LISTA E TABELAS	vii
LISTA DE FIGURAS	viii
LISTA DE ACRÓNIMOS	ix
RESUMO	x
ABSTRACT	xii
INTRODUÇÃO	1
1 CAPÍTULO 1 – TEORIA DE BUSCA	7
1.1 Probabilidade Cumulativa de Detecção	7
1.1.1 Definições básicas	8
1.1.2 Oportunidades discretas de detecção independentes	9
1.1.3 Buscas com oportunidades de tipo contínuo	10
1.2 Dependência da Detecção na Trajectória entre Sensor e Alvo	12
1.3 Curva de Distância Lateral	17
1.3.1 Detecção de alvos uniformemente distribuídos	21
1.3.2 Largura de varrimento (<i>Sweep width</i>)	24
1.4 Métodos para Avaliação de Planos de Busca	27
1.4.1 Modelo de busca aleatória	28
1.4.2 Buscas paralelas com vários sensores	32
1.4.3 Lei do cubo inverso	39
2 CAPÍTULO 2 – MODELOS DA CURVA DE DISTÂNCIA LATERAL	44
2.1 Estimação com Densidade de Contactos	45

2.2	Modelo de Neuendorffer.....	48
2.3	Modelo de Regressão Logística.....	51
2.3.1	Metodologia de recolha e tratamento de dados	53
2.4	Modelo da Lei de Detecção da Enésima Potência.....	56
2.4.1	Estimação dos parâmetros k e n a partir de uma experiência no mar	58
3	CAPÍTULO 3 – COMPARAÇÃO E SELECÇÃO DE MODELOS.....	62
3.1	Motivação para o uso de Distâncias Iniciais de Detecção	62
3.2	Dados, Factores e Tratamentos.....	64
3.3	Reamostragem e Método de Selecção	68
3.4	Resultados.....	70
3.4.1	Critério de estabilidade	71
3.4.2	Estimação da curva de distância lateral para um tratamento.....	72
4	DISCUSSÃO E COMENTÁRIOS FINAIS.....	76
4.1	Contribuições do Trabalho e Conclusões	76
4.2	Trabalho Futuro	77
	BIBLIOGRAFIA	79
	ANEXO A – Folha de Registo de Avistamentos.....	82
	ANEXO B – Tabelas de <i>Sweep Width</i>	83
	ANEXO C – Escala de <i>Beaufort</i>	84
	ANEXO D – Tabelas com medida de estabilidade.....	85
	ANEXO E – Rotinas implementadas em MATLAB.....	88

LISTA E TABELAS

Tabela 1. Frequências de detecções em fiadas a diferentes distâncias laterais.....	19
Tabela 2. Variáveis independentes para detecções visuais.....	55
Tabela 3. Distâncias iniciais vs distâncias laterais.....	64
Tabela 4. Níveis de 4 factores de um tratamento.....	66
Tabela 5. Registos por tratamentos com navios da categoria pesca	67
Tabela 6. Registos por tratamentos com navios da categoria mercante	67
Tabela 7. Registos por tratamentos com navios da categoria guerra.....	67
Tabela 8. Registos por tratamentos com navios da categoria recreio	67
Tabela 9. Quadro resumo dos modelos com menor variabilidade média.	71
Tabela 10. Largura de varrimento e variabilidade média do tratamento C2T2V10_	73
Tabela 11. Largura de varrimento para tratamento de navios de pesca/visibilidade.	83
Tabela 12. Largura de varrimento para tratamento de navios de mercantes/visibilidade. 83	
Tabela 13. Largura de varrimento para tratamento de navios de guerra/visibilidade.....	83
Tabela 14. Largura de varrimento para tratamento de navios de recreio/visibilidade.....	83
Tabela 15. Variabilidade média em $K = 100$ réplicas.....	85
Tabela 16. Variabilidade média em $K = 200$ réplicas.....	85
Tabela 17. Variabilidade média em $K = 500$ réplicas.....	86
Tabela 18. Variabilidade média em $K = 1000$ réplicas.....	86
Tabela 19. Variabilidade média em $K = 2500$ réplicas.....	86
Tabela 20. Variabilidade média em $K = 5000$ réplicas.....	87
Tabela 21. Variabilidade média em $K = 10000$ réplicas.....	87
Tabela 22. Descrição das rotinas implementadas em MATLAB	88

LISTA DE FIGURAS

Figura 1. Trajectória do movimento do alvo em relação ao sensor.	12
Figura 2. Trajectória rectilínea do alvo em relação ao sensor	15
Figura 3. Trajectória do movimento relativo entre sensor e alvo	17
Figura 4. Curva de distância lateral	18
Figura 5. Experiência para recolha de detecções a diferentes distâncias laterais	19
Figura 6. Histograma das frequências de detecção	20
Figura 7. Curva de distância lateral entre $-r_m$ e r_m	21
Figura 8. Barreira com sensor estático no centro.....	22
Figura 9. Curva de distância lateral triangular.....	23
Figura 10. Detecção de alvos em movimento relativo.....	25
Figura 11. Interpretação do afastamento lateral W	27
Figura 12. Busca aleatória sem trajectória específica.....	28
Figura 13. Busca sistemática em fiadas com igual afastamento.....	30
Figura 14. Detecção com modelo de busca aleatória.....	31
Figura 15. Busca aleatória em várias secções da região de busca	32
Figura 16. Sobreposição de curvas de distância lateral	34
Figura 17. Busca por fiadas com dois sensores em paralelo.....	35
Figura 18. Ângulo sólido da esteira de um navio	40
Figura 19. Comparação de leis de detecção.....	43
Figura 20. Obtenção da distância lateral para um avistamento.	46
Figura 21. Distância lateral para cada intervalo de azimutes.....	46
Figura 22. Padrão de busca para registo de detecções.....	55
Figura 23. Construção da medida de variabilidade média de um modelo.....	70
Figura 24. Histograma de $C2T2V10$	72
Figura 25. Curvas de distância lateral dos modelos em estudo	73
Figura 26. Gráfico da função associada à equação (104)	74
Figura 27. Gráfico da função associada à equação (110)	74

LISTA DE ACRÓNIMOS

ATP: *Allied Tactical Publication;*

CG: *Coast Guard;*

CPA: *closest point of approach;*

IAMSAR: *International Aeronautical Maritime Search and Rescue;*

IMO: *International Maritime Organization;*

NATO: *North Atlantic Treaty Organization;*

pcd: *probabilidade cumulativa de detecção;*

RADAR: *Radio Detection and Ranging;*

REGAVIST: *Registo de avistamentos;*

SAR: *Search and Rescue;*

SONAR: *Sound navigation and ranging*

RESUMO

Na Teoria de Busca, a capacidade de detecção de um sensor é representada por uma probabilidade de detecção condicional à distância entre o alvo e o sensor. Na busca e detecção de alvos no mar, com sistemas de detecção passivos (visuais) ou activos (radar), é natural que o sensor e o alvo se encontrem em movimento. A detecção é possível quando o movimento relativo entre o sensor e o alvo os aproxima o suficiente para que a detecção ocorra. A função que representa a probabilidade de detecção condicional à distância entre alvo e sensor é a curva de distância lateral. Esta função, $l(x)$, representa a probabilidade de detectar um alvo quando a distância lateral é x e o movimento relativo entre o sensor e o alvo é descrito por uma trajectória rectilínea. O conhecimento da curva de distância lateral, para as diversas combinações de sensor, alvo e condições ambientais, assume um papel essencial no planeamento de operações de busca e salvamento no mar, assim como no planeamento de operações de interdição marítima. A construção da curva de distância lateral requer o conhecimento prévio da distância lateral x entre o sensor e o alvo, independentemente da ocorrência ou não de uma detecção positiva do alvo. Esta particularidade dificulta a estimação desta curva, pois a recolha de dados de detecção só é possível mediante a realização de experiências previamente planeadas. Estas condições de planeamento não são plausíveis quando se pretende inferir sobre a capacidade de detecção de um sensor relativamente a um alvo não cooperante ou hostil. Nesta última situação, apenas são conhecidas as distâncias iniciais de detecção positiva entre o sensor e o alvo.

Neste trabalho, estima-se a curva de distância lateral e o parâmetro de afastamento lateral, recorrendo ao modelo de Neuendorffer e ao modelo da lei do inverso da enésima potência, com base nas distâncias iniciais de detecção recolhidas pela Marinha Portuguesa e não com base em distâncias laterais. A estimação da curva de distância lateral será feita de acordo com os dois modelos alternativos e tendo em atenção três factores determinantes: características do alvo, do sensor e das condições ambientais. Para cada tratamento resultante das combinações dos níveis dos três factores, efectua-se a comparação do desempenho dos dois modelos pelo critério da estabilidade de resultados com recurso à reamostragem dos dados e à partição dos mesmos. O objectivo final é a

produção de tabelas de estimativas do parâmetro afastamento lateral para todos os tratamentos resultantes da combinação dos níveis dos três factores acima mencionados.

Palavras-chave: curva de distância lateral, largura de varrimento, métodos de reamostragem, probabilidade de detecção, teoria de busca.

ABSTRACT

In Search Theory, the capability of a detection device is represented by a conditional detection probability given the distance from the sensor to the target. When searching and detecting for targets at sea, with passive (visual) or active (radar) detection systems, it is natural that the sensor and target are in motion. Detection is possible when the relative motion between the sensor and target brings them close enough so that detection occurs. The function that represents the probability of detection conditional on the distance between target and sensor is the lateral range curve. This function, $l(x)$, represents the probability of detecting a target when the lateral range is x and the relative motion between the sensor and the target is described by a straight line. Knowledge of the lateral range curve for various combinations of sensor, target and environmental conditions, plays a key role in planning search and rescue operations at sea and in planning maritime interdiction operations. The construction of the lateral range curve requires previous knowledge of the lateral distance x between the sensor and the target, regardless the occurrence or not of a positive detection of the target. This feature makes the estimation of this curve a difficult problem, because the collection of detection data is only possible through conducting sea trials planned in advance. These planning conditions are unrealistic when we want to infer about the ability to detect a non-cooperative or hostile target. In the latter situation, only positive detection distances are known between the sensor and the target.

In this work we estimate the lateral range curve and its natural parameter, the sweep width, using the Neuendorffer model and the N^{th} power law of detection, based on initial detection distances and not on lateral distances. The estimation of the lateral range curve is made under the two alternative models and taking into account three factors: characteristics of the target, sensor and environmental conditions. For each treatment resulting from the combinations of the levels of three factors, the performances of both models are compared by a stability criteria using resampling and partition of the data. The ultimate goal is to produce sweep width tables for all treatments resulting from the combination of the levels of the three factors mentioned above.

Key-words: detection probability, lateral range curve, resampling techniques, search theory, sweep width.

Introdução

Na busca e detecção de alvos no mar, com sistemas de detecção passivos (visuais) ou activos (radar), é natural que sensor e alvo se encontrem em movimento. A detecção é possível quando o movimento relativo entre sensor e alvo os aproxima o suficiente para que a detecção ocorra. Se a trajectória do alvo relativamente ao sensor for conhecida e se há um modelo para o processo de detecção, então pode ser estabelecida uma probabilidade cumulativa de detecção. O estudo de modelos de detecção assume um papel importante no planeamento de missões de Busca e Salvamento (SAR¹) e de Interdição Marítima.

Interligado à busca e detecção está o desempenho dos sensores empregues. Este desempenho é sintetizado por uma função designada por Curva de Distância Lateral, que constitui o objecto fundamental de estudo neste trabalho. Nas missões SAR duas categorias de sensores assumem um papel especialmente importante. Estes encontram-se na categoria dos sensores activos, a que corresponde o radar, e a categoria dos sensores passivos, onde se encontram os meios visuais. Para estes sensores interessa conhecer a Curva de Distância Lateral para um determinado alvo específico (pessoa à deriva, destroços, embarcações, etc.) e para um conjunto de condições ambientais (luminosidade, estado do mar, altura da ondulação) que definem o hipotético cenário de uma operação de busca e salvamento.

Grande parte da teoria sobre detecção no âmbito da Busca e Salvamento deriva de técnicas desenvolvidas para a guerra anti-submarina durante a Segunda Guerra Mundial (Koopman, 1956a, 1956b, 1957). A necessidade de rapidez implicou, em algumas casos, que a implementação rigorosa de “técnicas óptimas” fosse substituída por “regras a dedo”. Como resultado, os métodos correntes não eram os mais indicados para desenvolver estratégias de busca óptimas.

Muitas das metodologias, que reconhecidamente tem sido empregues com resultados satisfatórios nos últimos cinquenta anos baseiam-se na “*lei do cubo inverso*” derivada por Koopman (Koopman, 1957). Este modelo tem em vista a detecção aérea do rasto da

¹ SAR é o acrónimo de *Search and Rescue*.

navegação de navios e permite calcular a probabilidade de detecção na área com base num factor de cobertura. Contudo, quando um radar é utilizado, os pressupostos subjacentes à lei do cubo inverso não se verificam e não é claro como as características do radar influenciam o cálculo das distâncias de varrimento ou afastamento lateral². Tem-se também, que a largura de varrimento é, em geral, função da altura do olho, velocidade do vento, velocidade do navio, etc. A utilização da lei do cubo inverso não toma directamente em consideração todas estas grandezas.

Até à década de 90, a literatura sobre busca e detecção estava dividida em três grandes grupos. No primeiro, encontram-se artigos sobre a afectação do esforço de busca, em que a maioria examina o efeito de diferentes funções de custos relativamente à afectação de esforço. Especificamente, a questão de interesse é: “como varia a probabilidade de sucesso de detecção com o aumento do esforço de busca numa dada área?”. A afectação óptima do esforço é dependente do critério utilizado para medir o desempenho do sensor na operação de busca.

O segundo grupo de artigos trata de formulações de teoria de jogos. Estes analisam os resultados de possíveis combinações de acções pelo navio que realiza a busca e o alvo. Finalmente, o terceiro grupo trata do desenvolvimento de padrões de busca geométricos, com respeito a duas situações específicas: padrões utilizados para conduzir buscas sobre toda a área de operações e padrões utilizados em situações geométricas especiais.

De Groot (1970) discute outros problemas relacionados com busca e detecção, em particular o caso em que um objecto se encontra escondido em um de vários locais possíveis. Existe uma probabilidade *a priori* de o objecto se encontrar em cada um dos possíveis locais. O observador deve procurar o objecto numa localização de cada vez. A escolha de cada local a pesquisar é feita sequencialmente.

Somente na década de 90, foram utilizados, pela primeira vez, modelos de regressão logística para construir curvas de probabilidade de detecção e também para obter estimativas da largura de varrimento. Estes modelos foram utilizados também com dados recolhidos em ensaios no mar.

² Largura de varrimento ou afastamento lateral corresponde à tradução do termo “*sweep width*”. O *sweep width* é um parâmetro natural da Curva de Distância Lateral que é referido em maior detalhe na subsecção 1.3.2.

Um dos problemas que esta dissertação trata é o da estimação da curva de distância lateral e do afastamento lateral, que corresponde ao seu parâmetro natural. Sucede que este parâmetro é obtido integrando a respectiva curva de distância lateral. Aqui surge o problema de como estimar a curva de distância lateral para um determinado conjunto de níveis de factores de planeamento como as características do alvo, sensor e condições meteorológicas. Para estimar a curva de distância lateral são necessários dados. Estes dados podem ser de dois tipos: distâncias laterais (x) ou distâncias de detecção inicial (r). O ideal em termos teóricos, e que está em conformidade com o modelo de movimento relativo entre alvo e sensor subjacente à curva de distância lateral, será utilizar as distâncias laterais x , com a informação adicional do alvo ter sido detectado ou não (assim como todas as outras variáveis que descrevem o cenário onde ocorre a detecção, por exemplo, estado do mar, altura da ponte do navio onde se encontra o vigia, luminosidade, altura da vaga, etc.).

Historicamente, as primeiras tabelas de *sweep width* foram construídas a partir de avistamentos de alvos detectados por meios aéreos da Guarda Costeira Norte Americana. Estes dados começaram a ser recolhidos a partir de 1955, através de um programa conduzido pelo Guarda Costeira Norte Americana através da instrução operacional 58-55. Nestes primeiros estudos, não foram tomados em consideração os dados relativos a alvos não detectados, porque esta informação não era possível de recolher, pois os encontros ocorridos entre alvos na superfície do oceano e os meios aéreos eram totalmente fortuitos e resultantes do acaso (Richardson, 1968). Nesta altura, as curvas de distância lateral eram estimadas com base em distâncias laterais (método tratado em maior detalhe na secção 2.1) e com base na densidade, D , de alvos na área onde decorreu o registo dos avistamentos. Estava-se perante um problema de dados com truncatura. A questão que se pretendia responder era se a densidade D poderia ser determinada estatisticamente ou por inferência.

O problema dos dados de avistamento truncados foi tratado por Arnold e Bram (1962), onde propuseram um modelo para construir a curva de distância lateral a partir de distâncias iniciais de detecção (Arnold e Bram, 1963). Neste modelo, a capacidade de detecção dependia exclusivamente do sensor. A capacidade de detecção do sensor é modelada por uma variável aleatória R . A detecção ocorre se a distância lateral entre alvo

e sensor for inferior a R . Contudo, este modelo possui um parâmetro por estimar, que corresponde à probabilidade de não detectar o alvo. Arnold e Bram referem no seu *memorandum* de investigação (Arnold e Bram, 1963, pág. 5) que o problema de estimar o modelo da curva de distância lateral foi inicialmente estudado por J. Neuendorffer, pelo que se baptizou de “*modelo de Neuendorffer*” o modelo exposto na secção 2.2.

Em 1980, Edwards *et al* apresentaram um relatório sobre diferentes métodos de busca envolvendo diversos sensores, assim como modelos de probabilidade de detecção baseados em modelos de regressão logística (Edwards *et al*, 1980). Neste estudo, as variáveis consideradas incluem: distância lateral, altura das ondas, tempo em operação, velocidade do vento, visibilidade, tipo de unidade de busca, densidade de nuvens, características do alvo, etc. As variáveis que mostraram não possuir uma influência significativa na distância lateral de detecção incluem: velocidade de busca, altura do sol, localização geográfica da área de busca e localização do alvo.

Mais recentemente, Fitzgerald e Ryan apresentam resultados de um esforço conjunto entre a Guarda Costeira Norte Americana e a Guarda Costeira Canadiana (Fitzgerald, Ryan, 1990). Este esforço estabelece o procedimento padrão para a recolha e tratamento de dados relativos a detecções de alvos no mar. Fitzgerald (1995) descreve os ensaios de mar onde serão recolhidos dados relativos à detecção de um conjunto predefinido de alvos. A partir destes dados, Fitzgerald (1998) aplica modelos de regressão logística para construir curvas de distância lateral para alvos que se encontram à deriva. Com este trabalho foram construídas diversas curvas de distância lateral para diferentes combinações de navios da Guarda Costeira Norte Americana, jangadas de salvamento e diversos tipos de sensores.

Os principais manuais que contêm tabelas com valores da largura de varrimento são o manual do IAMSAR³ e o manual ATP-10 que corresponde à publicação NATO para busca e salvamento. Ambos os manuais possuem valores da largura de varrimento visual tabelados para um conjunto de objectos SAR (jangadas salva-vidas, embarcações a motor de diferentes dimensões, etc.), a partir de meios de superfície e aéreos. Para os avistamentos a partir de meios de superfície, apenas são contemplados dois valores para a

³ O manual IAMSAR (acrónimo de *International Aeronautical Maritime Search and Rescue*) é uma publicação da IMO (*International Maritime Organization*).

altura do olho humano: 8 e 14 pés (2,44 e 4,27 metros). Estes valores não correspondem à altura dos navios da armada portuguesa que são usualmente empenhados em missões SAR.

Com o propósito de criar curvas de probabilidade de detecção para os navios da Marinha Portuguesa, foi elaborado uma folha para registo de avistamentos, para proceder à recolha de informação sobre distâncias de avistamento visual e radar. Pretende-se com estes dados modelar para a probabilidade cumulativa de detecção para navios que integram a navegação costeira nas águas territoriais de Portugal, assim como a actualização das tabelas de largura de varrimento, específicas para as unidades navais portuguesas.

É importante sublinhar que não se pretende realizar um estudo dos dados recolhidos, em termos da análise dos factores determinantes na capacidade de detecção de um sensor. Este seria um outro estudo com outros objectivos bem definidos. Nesta dissertação, os dados recolhidos de acordo com o modelo REGAVIST (secção 3.2) serão utilizados para a construção das curvas de distância lateral e do seu parâmetro largura de varrimento, em função de um conjunto de tratamentos previamente escolhido.

Neste trabalho pretende-se estimar e comparar modelos para construir a curva de distância lateral a partir de distâncias iniciais de detecção em vez das distâncias laterais. O motivo reside no facto de as primeiras distâncias serem de fácil recolha em termos de custo e em termos da quantidade que é possível recolher. Por sua vez, a recolha de dados de detecção no contexto de distâncias laterais possui várias desvantagens. Entre estas, estão o custo do planeamento de experiências no mar para recolher estes dados, bem como o facto de serem recolhidas, em geral, poucas distâncias laterais. Tem-se ainda que para recolher distâncias laterais com informação associada a detecções e não detecções, é necessário ter alvos cooperativos. Na situação em que os alvos são não cooperativos, as únicas distâncias que podem ser recolhidas são as distâncias iniciais.

A presente dissertação está organizada da seguinte forma: no Capítulo 1 são apresentados conceitos fundamentais da Teoria de Busca, nomeadamente os conceitos de probabilidade cumulativa de detecção, curva de distância lateral e largura de varrimento.

No Capítulo 2 são apresentados os principais modelos e métodos para construir as curvas de distância lateral. Os modelos são apresentados em sequência cronológica de acordo com o ano em que foram elaborados e divulgados à comunidade científica.

No Capítulo 3 são descritos os dados que dão suporte a este trabalho e com os quais serão estimados os modelos para a curva de distância lateral. É também apresentado um método de reamostragem para comparar os modelos de estimação da largura de varrimento, constituindo um critério de estabilidade de resultados dos modelos estimados em cada tratamento.

Finalmente, no Capítulo 4 são apresentadas as principais conclusões sobre este estudo e possíveis linhas de investigação futura sobre este tema.

1 Capítulo 1 – Teoria de Busca

1.1 Probabilidade Cumulativa de Detecção

Considere-se a seguinte questão: se um sensor realiza uma busca com o objectivo de encontrar um alvo num determinado intervalo de tempo $[0, T]$, qual é a probabilidade do sensor detectar o alvo pelo menos uma vez? Esta probabilidade é designada por *probabilidade cumulativa de detecção* (*pcd*). Assume-se que em cada instante entre 0 e T , é conhecida a capacidade de detecção. A esta hipótese é necessário adicionar mais uma, que consiste em considerar a independência entre “oportunidades” de detecção em instantes consecutivos. Para um agente de decisão tático, e consequentemente para um analista tático, a *pcd* é geralmente mais importante que conhecer a probabilidade de detecção instantânea.

Qual a importância da *pcd*? Tipicamente um agente de decisão que gere um esforço de detecção (e.g., numa operação de busca e salvamento, ou num cenário de ameaça aérea) tem de tomar uma acção assim que ocorre a detecção (de um objecto de busca e salvamento, ou detecção de um míssil que tem como alvo o navio onde se encontra o agente de decisão, por exemplo). Usualmente o sucesso das acções tomadas depende da distância do alvo (ou ameaça) quando este é detectado, sendo tanto maior quanto maior essa distância for. Contudo, é por vezes crucial para os objectivos do agente de decisão que esta distância seja pelo menos um determinado valor crítico. Por exemplo, num Grupo Tarefa composto por vários navios de guerra com controlo tático relativamente a defesa anti-aérea, esta distância seria a distância de detecção para a qual é possível interceptar um alvo hostil antes que este se aproxime o suficiente para lançar o seu ataque. Assim, o sucesso do sistema ou tática de detecção é medida pela probabilidade de detecção para uma determinada distância crítica e distâncias superiores a esta, que é uma *pcd*.

Existem dois tipos diferentes de sensores que devem ser considerados separadamente: aqueles que usam “oportunidades” discretas (*discrete glimpses*) de detecção e aqueles usam “oportunidades” contínuas (*continuous looking*) ou varrimento contínuo, ou ainda, buscas de tipo contínuo. Estes termos, assim como o termo “probabilidade instantânea de

detecção” merecem ser clarificados. Na teoria de Busca, o conceito de “detecção” não é necessariamente uma detecção inicial. Corresponde sim, a uma indicação do par sensor/operador de que um alvo está presente num dado instante de tempo. Numa busca por oportunidades discretas, esta indicação ocorre em instantes discretos no tempo. Exemplos deste tipo de sensores são os sonares, através do *pinging*, e as antenas radar. Numa busca com sensores de tipo varrimento contínuo, as oportunidades de detecções ocorrem em cada instante numa janela temporal. Exemplos deste tipo de sensores são a recepção passiva de sinais acústicos ou electromagnéticos emitidos por um alvo. Em qualquer dos casos mencionados, a probabilidade instantânea de detecção corresponde à probabilidade de o alvo ser correctamente detectado num determinado instante de tempo, em função das condições existentes nesse instante e ignorando as condições que se verificaram noutros instantes.

1.1.1 Definições básicas

Considere-se a situação onde está a decorrer uma busca no tempo. A busca tem início no instante de tempo 0 e pode consistir numa sequência de varrimentos discretos ou num varrimento contínuo. No caso do varrimento contínuo, a busca decorre no intervalo de tempo $[0, T]$ e um instante de tempo nesse intervalo é denotado por t . No caso de varrimento discreto, assume-se a ocorrência de $n + 1$ oportunidades em intervalos de tempo uniformes de duração Δ , de forma que $n\Delta = T$. A condição de duração uniforme dos sub-intervalos é colocada para simplificar a notação, podendo alternativamente considerar-se intervalos com durações não-uniformes. Desta forma, as oportunidades de detecção discretas serão denotadas pelos índices $i = 0, \dots, n$, de modo que a oportunidade i ocorre no instante $i\Delta$ que é a i -ésima mais uma oportunidade a ocorrer.

Para $0 \leq t \leq T$, a probabilidade cumulativa de detecção (pcd) no instante t , denotada por $F_d(t)$, é definida como sendo a probabilidade de ocorrer pelo menos uma detecção no intervalo $[0, t]$, i.e.,

$$\begin{aligned} F_d(t) &= \Pr\{ \text{ocorre pelo menos uma detecção até ao instante } t \} \\ &= \Pr\{ \text{instante até à primeira detecção} \leq t \}. \end{aligned}$$

No caso das oportunidades discretas, a *pcd* quando ocorre a oportunidade i é $F_d(i\Delta)$, que será abreviado por F_{di} . Assim, F_{di} é uma função cumulativa de probabilidade para a variável aleatória instante-até-ocorrer-deteccção, garantindo que F_d aproxima-se de 1 à medida que o tempo tende para infinito. Esta hipótese é necessária para garantir que F_d é uma função cumulativa de probabilidade. Assume-se também que F_d é contínua à direita, i.e., para qualquer $u > 0$, $F_d(t)$ aproxima-se de $F_d(u)$ quando t se aproxima de u por valores superiores a u .

Para $0 \leq t \leq T$, numa busca de tipo contínuo, $p(t)$ representará a probabilidade instantânea de o alvo ser detectado no instante t , não sendo necessariamente a primeira deteção. O sensor poderá ter disponível informação adquirida antes do instante t assim como informação no próprio instante t de forma a indicar que nesse instante está um alvo presente. Na situação de busca por oportunidades discretas, a probabilidade instantânea na oportunidade i , $p(i\Delta)$, será abreviado por $p(i)$.

1.1.2 Oportunidades discretas de deteção independentes

Considere-se o caso, numa busca por oportunidades discretas, em que as oportunidades são independentes entre si. Então a probabilidade de não ocorrer deteção em nenhuma das n oportunidades, $1 - F_{dn}$, é a probabilidade de não ocorrer uma deteção positiva em todas as oportunidades, i.e.,

$$1 - F_{dn} = \prod_{i=0}^n (1 - p_i), \quad (1)$$

ou seja,

$$F_{dn} = 1 - \prod_{i=0}^n (1 - p_i). \quad (2)$$

Infelizmente, a independência entre oportunidades é uma boa hipótese quando as estas se encontram bem afastadas. Contudo, se as oportunidades forem relativamente próximas, então as características ambientais, do sensor e do alvo variam muito pouco de oportunidade para oportunidade, e desta forma espera-se que o resultado de uma oportunidade esteja relacionado com o resultado da oportunidade seguinte.

1.1.3 Buscas com oportunidades de tipo contínuo

Para estender a noção de independência no caso de uma busca de tipo contínuo, é necessário definir o seu significado nesta situação. Isto requer a noção de *taxa de detecção*. Suponha-se que numa busca de tipo contínuo, as detecções, não necessariamente iniciais, ocorrem segundo um processo de Poisson com parâmetro de dispersão variável, i.e., não homogéneo. Seja $\gamma(t)$ o valor deste parâmetro no instante t . Será necessário também referir a taxa de detecção em função da distância r percorrida pelo alvo relativamente ao sensor. Neste caso, a taxa de detecção será representada por $\delta(r)$, sendo r a distância entre alvo e sensor. Em ambos os casos, $\gamma(t)$ e $\delta(r)$ representam o número de detecções por unidade de tempo. Apesar da dependência de $\delta(r)$ do tempo decorrido, pois a distância percorrida é função do tempo e da velocidade com que o alvo se desloca em relação ao sensor, tem-se que $\delta(r)$ continua a representar o número de detecções por unidade de tempo. Então, a busca possui uma taxa de detecção $\gamma(t)$ no instante t . Isto implica o seguinte:

(1) para um instante t e $h > 0$ suficientemente pequeno, tem-se que

$$\Pr\{\text{Pelo menos uma detecção ocorrer no intervalo } [t, t + h] \approx h\gamma(t) \} \quad (3)$$

Tem-se também que $\Pr\{\text{ocorrer mais do que uma detecção no intervalo } [t, t + h]\}$ é negligenciável quando comparado com $h\gamma(t)$,

(2) detecções em intervalos de tempo distintos e separados são independentes.

Uma fórmula para a probabilidade cumulativa de detecção pode ser derivada a partir das duas propriedades estabelecidas atrás. A probabilidade de não detecção no intervalo $[0, t + h]$ é o produto das probabilidades de não detecção em $[0, t]$ e em $[t, t + h]$, i.e.,

$$1 - F_d(t + h) = [1 - F_d(t)][1 - \gamma(t)h], \quad (4)$$

donde vem,

$$\frac{-F_d(t + h) + F_d(t)}{h} = -[1 - F_d(t)]\gamma(t). \quad (5)$$

Tomando $h \rightarrow 0$ e dividindo por $1 - F_d(t)$ tem-se,

$$\frac{-F'_d(t)}{1 - F_d(t)} = -\gamma(t). \quad (6)$$

$F'_d(t)$ representa a derivada à direita, em consonância com a hipótese de que F_d é contínua à direita. (6) representa uma equação diferencial, com condição de fronteira $F_d(0) = 0$ e que tem como solução

$$F_d(t) = 1 - \exp\left(-\int_0^t \gamma(u) du\right). \quad (7)$$

A expressão em (7) permite obter o número esperado de detecções no intervalo $[0, T]$, dado por

$$E[\text{número de detecções em } [0, T]] = \int_0^T \gamma(u) du. \quad (8)$$

As dificuldades em aplicar a fórmula (7) está em encontrar uma expressão para γ e em saber até que ponto a condição de independência é válida.

O caso mais simples consiste em considerar uma taxa de detecção constante, ou seja, $\gamma(t)$ é constante, γ^* , para todo t em $[0, T]$. Neste caso, ocorrência de uma detecção é igualmente provável em todos os instantes t em $[0, T]$ com a mesma taxa de ocorrência. O instante de tempo até à primeira detecção é, então, uma variável aleatória com distribuição exponencial e

$$F_d(t) = 1 - e^{-\gamma^* t} \text{ para } 0 \leq t \leq T. \quad (9)$$

O tempo médio até à primeira detecção é $1/\gamma^*$.

1.2 Dependência da Detecção na Trajectória entre Sensor e Alvo

Quando o sensor e o alvo se deslocam no mar nas suas respectivas trajectórias, que poderão ser descritas por linhas rectas ou curvas, com velocidades constantes ou não, a constante alteração de posições vai afectar a probabilidade instantânea de detecção. No caso mais geral, o movimento do alvo em relação ao sensor é descrito por um caminho C como é descrito na Figura 1.

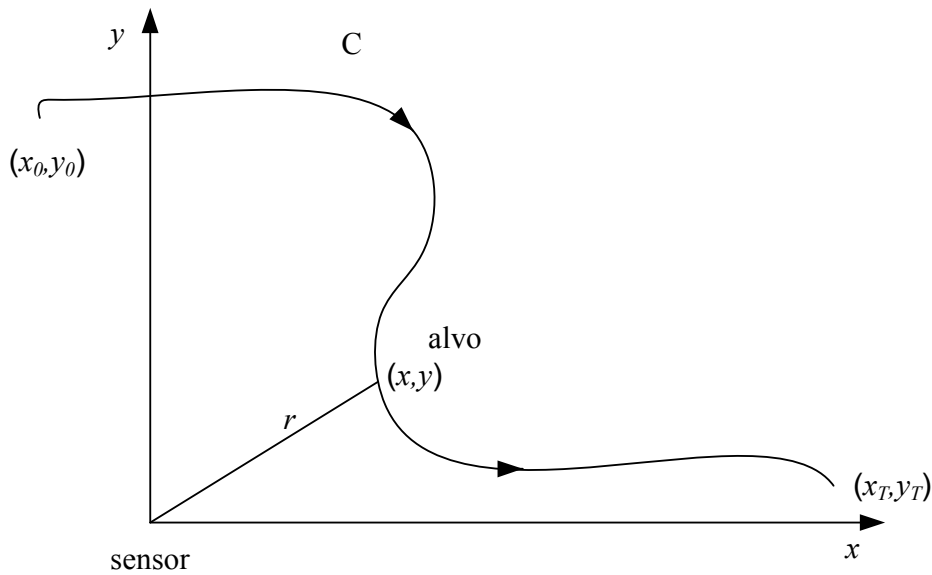


Figura 1. Trajectória do movimento do alvo em relação ao sensor.

Dado que o movimento do sensor e do alvo decorre no tempo, é necessário considerar funções p_t e \mathcal{Y}_t para as probabilidades instantâneas de detecção num instante t , para os casos discreto e contínuo respectivamente. Na Figura 1 é utilizada a métrica Euclidiana para representar a distância entre sensor e alvo num dado instante de tempo t . Inicialmente o alvo encontra-se na posição (x_0, y_0) no instante inicial, $t = 0$, e realiza um percurso relativamente ao sensor até atingir a posição (x_T, y_T) no instante $t = T$. As equações do movimento do alvo relativo ao sensor são dadas pela seguinte expressão:

$$x = x(t) , y = y(t). \quad (10)$$

Ao longo da trajectória C , a probabilidade instantânea de detecção dependerá desta trajectória através da distância entre sensor e alvo. As equações para a probabilidade instantânea de detecção são

$$\begin{aligned} p &= p\left(\sqrt{x_t^2 + y_t^2}\right) = p_t, \\ \gamma &= \gamma\left(\sqrt{x_t^2 + y_t^2}\right) = \gamma_t. \end{aligned} \tag{11}$$

Assim, de acordo com as equações (2) e (7), as probabilidades cumulativas de detecção no caminho C , durante o intervalo de tempo $[0, T]$, são

$$P_C = F_{dn} = 1 - \prod_{i=1}^n \left[1 - p\left(\sqrt{x_{t_i}^2 + y_{t_i}^2}\right)\right], \tag{12}$$

$$P_C = F_d = 1 - \exp\left[-\int_0^T \gamma\left(\sqrt{x_t^2 + y_t^2}\right) dt\right]. \tag{13}$$

Em (12), t_i representa o instante na i -ésima oportunidade de detecção e n representa o número total de oportunidades entre o instante inicial $t = 0$ e o instante final $t = T$, ou seja

$$0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n \leq T$$

O integral em (13) é o integral de linha ao longo da trajectória C . Se w for a velocidade do alvo (não necessariamente constante), sendo s o comprimento do caminho desde a posição (x_0, y_0) , (13) pode ser escrita como

$$P_C = 1 - e^{-\int_C \frac{\gamma(r)}{w} ds}. \tag{14}$$

As fórmulas (12) e (13) podem ser representadas pela expressão

$$P_C = 1 - e^{-\Psi[C]}. \tag{15}$$

No caso das oportunidades de detecção discretas, tem-se

$$\Psi[C] = -\sum_{i=1}^n \log\left[1 - p\left(\sqrt{x_{t_i}^2 + y_{t_i}^2}\right)\right]. \tag{16}$$

E no caso das oportunidades contínuas tem-se

$$\Psi[C] = \int_C \frac{\gamma(r)}{w} ds. \quad (17)$$

A quantidade $\Psi[C]$ tem o nome de *potencial de avistamento*. $\Psi[C]$ verifica a propriedade da aditividade, ou seja, se C_1 e C_2 são dois caminhos e $C = C_1 + C_2$ é a sua combinação ou soma, e se $P_C = P_{C_1+C_2}$ for a probabilidade de detectar o alvo pelo menos uma vez na trajectória C , então $P_{C_1+C_2}$ continua a ser obtido pela fórmula (15) e

$$\Psi[C_1 + C_2] = \Psi[C_1] + \Psi[C_2]. \quad (18)$$

Esta propriedade aplica-se para um número qualquer de caminhos. Uma aplicação deste resultado consiste no cálculo de P_C quando o caminho é um conjunto de trajectórias definidas por linhas rectas. Outra aplicação consiste no caso em que se têm dois observadores ou sensores onde cada um cobre o seu respectivo caminho do alvo: C_1 pode ser o caminho relativamente ao primeiro observador ou sensor e C_2 o caminho relativamente ao segundo observador.

O caso mais importante e que é objecto deste estudo é o caso em que o observador ou sensor e o alvo se deslocam com velocidade e rumo constante. Neste caso, a trajectória C é uma linha recta. Para exemplificar este caso será dado um exemplo simples. Considere-se a situação em que a capacidade de detecção de uma combinação sensor-alvo depende exclusivamente da distância r entre eles e que esta é caracterizada por uma taxa de detecção $\delta(r)$ (como definido na secção 1.1.3). Repare-se que a dependência de $\delta(r)$ do tempo decorrido resulta da relação entre a distância percorrida e o tempo e, portanto, a taxa de detecção continua a representar o número de detecções por unidade de tempo. De acordo com a definição de taxa de detecção, as ocorrências das oportunidades de detecção em intervalos de tempo consecutivos e mutuamente exclusivos são independentes.

Suponha-se que o sensor se encontra na origem no plano xy e que o alvo desloca-se segundo um eixo paralelo ao eixo- y e a uma velocidade de v unidades de distância por unidade de tempo. Este caso encontra-se ilustrado na Figura 2. Seja (x, y_0) a posição do alvo quando entra na zona de detecção possível do sensor. O alvo realiza um trajecto no plano xy com a abcissa x constante e ordenada y decrescente, sendo a distância máxima de detecção dada por

$$r_m = \sqrt{x^2 + y_0^2}. \quad (19)$$

No instante $t = 0$, o alvo encontra-se na posição (x, y_0) . A localização do alvo em relação ao sensor num instante t é dado por $(x, y(t)) = (x, y_0 - vt)$. A taxa de detecção no instante t é

$$\gamma(t) = \delta\left(\sqrt{x^2 + (y_0 - vt)^2}\right). \quad (20)$$

A probabilidade de o alvo ser detectado pelo menos uma vez antes de atingir a posição $(x, y(t))$ é

$$\Pr\{\text{detecção até ao instante } t\} = F_d(t) = 1 - \exp\left(-\int_0^t \gamma(u) du\right). \quad (21)$$

Note-se que o alvo atinge a menor distância ao sensor no instante $t = y_0/v$ e desloca-se para fora da zona de detecção possível no instante $t = 2y_0/v$.

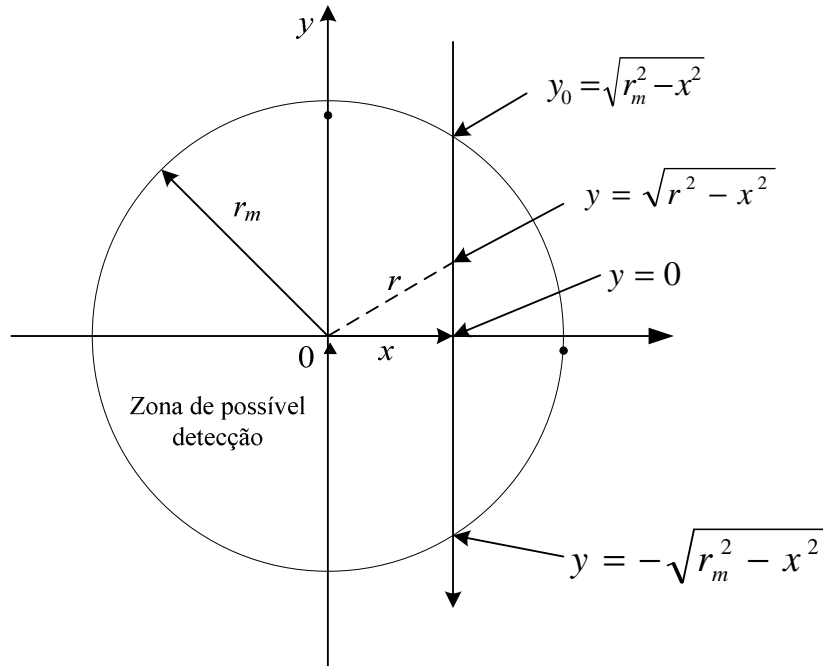


Figura 2. Trajectória rectilínea do alvo em relação ao sensor

Nesta situação, a probabilidade de o alvo ser detectado quando descreve uma trajectória rectilínea em relação ao sensor m que durante esse trajecto a menor distância entre eles é

x , deverá agregar todas as oportunidades de detecção que se verificaram durante a presença do alvo na zona de detecção possível. O tempo decorrido entre a entrada na zona de detecção possível até à saída desta zona é $2 y_0/v$. Na Figura 2, a probabilidade cumulativa de detecção não é condicional à distância r a que o alvo se encontra do sensor, mas sim em relação à menor distância x verificada durante o movimento do alvo desde o instante em que entra na zona de detecção até ao instante em que sai. A distância x mencionada na Figura 2 tem o nome de distância lateral. Desta forma, pode-se definir a probabilidade de detecção em função da distância x :

$$\Pr\{\text{detecção à distância lateral } x\} = F_d(x) = F_d(2 y_0/v). \quad (22)$$

A vantagem de definir a probabilidade cumulativa de detecção em relação à distância lateral x , em detrimento da distância efectiva r , reside no facto do alvo atingir várias vezes a mesma distância efectiva r num caminho C com durações de exposição ao sensor diferentes. No exemplo dado a mesma distância efectiva r é atingida duas vezes na trajectória efectuada. Naturalmente este problema não se coloca quando a probabilidade cumulativa de detecção é função do tempo decorrido.

Para tornar o exemplo mais claro, considere-se o caso em que a taxa de detecção na zona de detecção é constante e assume o valor de 0.6 detecções por unidade de tempo e 0 fora da zona de detecção. Assim, verifica-se $\delta(r) = 0.6$ detecções por unidade de tempo quando $r \leq r_m$ e $\gamma(t) = 0.6$ quando $0 \leq t \leq 2 y_0/v$. Tem-se

$$F_d(t) = 1 - \exp\left(-\int_0^{2y_0/v} 0.6 dt\right) = 1 - \exp\left(-\frac{1.2y_0}{v}\right). \quad (23)$$

Dado que $y_0^2 = r_m^2 + x^2$, substituindo na expressão (23), tem-se

$$F_d(x) = \begin{cases} 1 - \exp\left(-1.2\left(\sqrt{(r_m^2 - x^2)}/v\right)\right), & |x| \leq r_m \\ 0, & c. c. \end{cases} \quad (24)$$

Contudo, a hipótese de independência das probabilidades de detecção de oportunidades consecutivas na determinação da probabilidade cumulativa de detecção é irrealista.

1.3 Curva de Distância Lateral

Na Teoria de Busca, a capacidade de detecção de um sensor é dada por uma probabilidade de detecção condicional à distância entre alvo e sensor. Na busca e detecção de alvos no mar, com sistemas de detecção passivos (visuais) ou activos (radar), é natural que sensor e alvo se encontrem em movimento. A detecção é possível quando o movimento relativo entre sensor e alvo os aproxima o suficiente para que a detecção ocorra. A função da probabilidade de detecção condicional à distância entre alvo e sensor em relação à distância lateral é a Curva de Distância lateral. Esta função representa a probabilidade de detectar um alvo, quando a distância lateral é x e o movimento relativo entre sensor e alvo é descrito por uma trajectória rectilínea. A Figura 3 ilustra os conceitos de *distância lateral* e de ponto de afastamento mais próximo (*closest point of approach*, CPA) entre sensor e alvo.

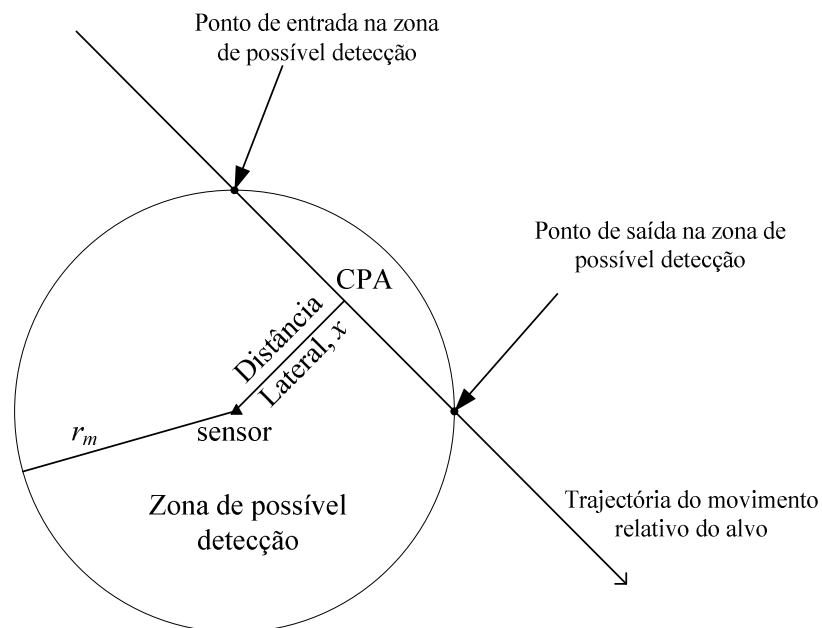


Figura 3. Trajectória do movimento relativo entre sensor e alvo

Convenciona-se que as distâncias laterais para um lado do sensor assumem valores positivos e distâncias laterais para o outro lado assumem valores negativos. Para sensores a bordo de navios ou de meios aéreos, convenciona-se que distâncias laterais assumem valores positivos para estibordo e valores negativos para bombordo. A curva de distância

lateral não é necessariamente simétrica, embora grande parte dos modelos matemáticos para estimar esta curva imponham a sua simetria (por exemplo, o modelo da enésima potência na secção 2.4). Na hipótese de um alvo estar a realizar um movimento segundo uma linha recta onde passará a uma distância lateral x do sensor, dentro da zona de detecção possível, a oportunidade cumulativa de detectar o alvo aumenta desde que este entra na zona de detecção possível até ao momento em saí dessa zona, de acordo com a Figura 3. Assim que o alvo sai da zona de detecção possível já não ocorre qualquer oportunidade de detecção. A probabilidade cumulativa de detecção ao longo de uma trajectória rectilínea, para a qual a distância lateral é x , é representada por $p_l(x)$, sendo designada por função de distância lateral. A representação gráfica de $p_l(x)$ para todos os valores de x é conhecida como Curva de Distância Lateral. No decorrer deste trabalho os termos “função de distância lateral” e “curva de distância lateral” serão usados indiferenciadamente. A correcta interpretação de $p_l(x)$ é a de uma probabilidade cumulativa de detecção, condicionada à distância lateral x , no ponto de afastamento mais próximo. A Figura 4 ilustra uma típica Curva de Distância Lateral.

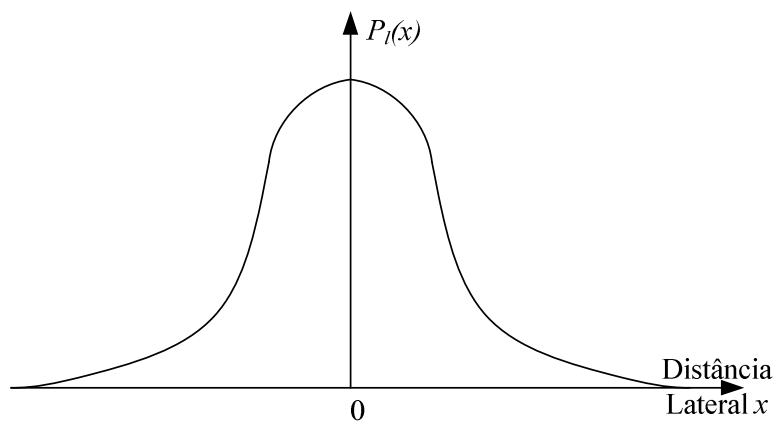


Figura 4. Curva de distância lateral

Para cada sensor e para cada conjunto de condições ambientais e do alvo, existe uma única Curva de Distância Lateral. Por exemplo, se a detectabilidade de um submarino se altera, devido a alterações do meio ambiente ou do envelhecimento físico que tem como consequência tornar-se menos silencioso, então a curva de distância lateral altera-se.

Existem várias formas de construir a curva de distância lateral. Esta pode ser deduzida teoricamente se for possível obter a probabilidade de detecção cumulativa de um alvo que

segue uma trajetória rectilínea relativamente ao sensor. Modelos estatísticos também podem ser utilizados para construir a Curva de Distância Lateral.

Estimativas para a curva de distância lateral podem ser obtidas caso se encontrem disponíveis dados recolhidos experimentalmente em exercícios ou provas de mar. Por exemplo, para aproximar a curva de distância lateral de uma sonobóia, para um dado conjunto de condições ambientais e uma classe de submarinos, poderão ser conduzidas provas de mar com o submarino a percorrer várias fiadas com diferentes CPA (distância lateral) numa zona de mar escolhida para o efeito. A Figura 5 exemplifica este tipo de experiência para recolha de distâncias laterais e respectivos números de detecções.

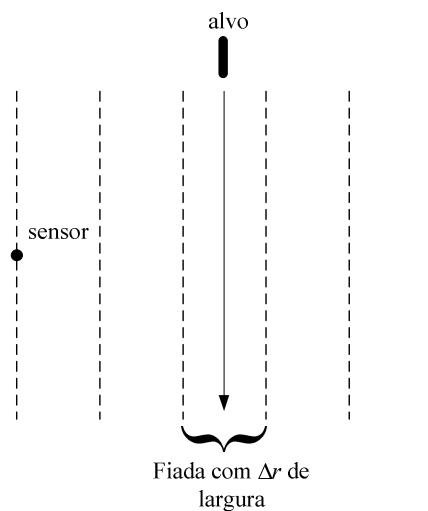


Figura 5. Experiência para recolha de detecções a diferentes distâncias laterais

Fiada $\Delta r = 0.5 \text{ nm}$	#Corridas do alvo na fiada	# Detecções na fiada	P_D
0-5	15	15	1.00
5-10	10	8	.80
10-15	12	6	.50
15-20	16	4	.25

Tabela 1. Frequências de detecções em fiadas a diferentes distâncias laterais

Estas probabilidades podem ser representadas num histograma, de forma a obter uma curva de distância lateral empírica, como se exemplifica na Figura 6.

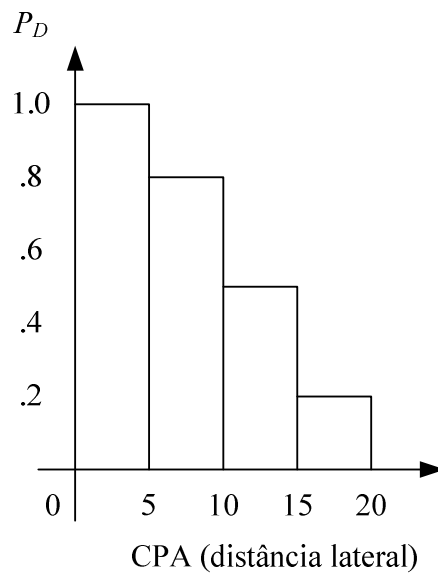


Figura 6. Histograma das frequências de detecção

Dado que a curva de distância lateral representa a probabilidade de detecção cumulativa para um dado *alvo*, um conjunto de *condições ou circunstâncias ambientais* e num *sensor específico*, vai existir uma família de curvas de distância lateral associada ao sensor em causa. Nesta família de curvas, cada função corresponde a uma combinação de um tipo de alvo e de um conjunto de circunstâncias ambientais que podem ser encontradas.

O dilema em desenvolver e manter um grande número de curvas de distância lateral, para um número considerável de equipamentos de detecção numa frota (incluindo o olho humano para detecções visuais) e para diferentes tipos de alvo numa grande variedade de situações, pode ser ultrapassado agrupando os alvos em categorias (pequeno, médio, grande), bem como o tipo de cenário tático (*brown waters*⁴, *blue waters*) e as condições ambientais (mar calmo, estado moderado, mar revolto). Cada curva de distância lateral representa, então, a média das condições verificadas em cada agrupamento. Mesmo com estes agrupamentos, estimar tal família de curvas requer um esforço considerável.

A curva de distância lateral é usualmente simétrica em torno do sensor. Pode-se pensar no sensor como uma plataforma que se move numa região que contém potenciais alvos.

⁴ “*Brown waters*” é o termo utilizado para referir águas costeiras enquanto que “*blue waters*” refere-se a águas oceânicas.

Neste contexto, a plataforma (navio ou meio aéreo) “varre” a região em causa. Este conceito pode ser aplicado a sensores estacionários, tal como sonobóias, onde os alvos passam por este sensor, ou em casos onde sensor e alvo se encontram em movimento, como é o mais habitual.

Deve ser devidamente sublinhado que a curva de distância lateral não é uma função densidade de probabilidade nem uma função de probabilidade cumulativa. É uma função de probabilidade cumulativa condicional. Com a função de distância lateral é possível escolher uma distância lateral x e encontrar a probabilidade de um alvo ser detectado em algum instante de tempo, se este passar num ponto de afastamento mais próximo correspondente a uma distância lateral x (CPA = x).

1.3.1 Detecção de alvos uniformemente distribuídos

Considere-se o caso em que alvo se encontra em movimento com velocidade constante e o sensor se encontra parado. Considere-se a linha que passa pelo sensor e é perpendicular à trajectória do alvo. A linha definida contém todas as distâncias laterais a que o alvo poderá distar do sensor na sua trajectória.

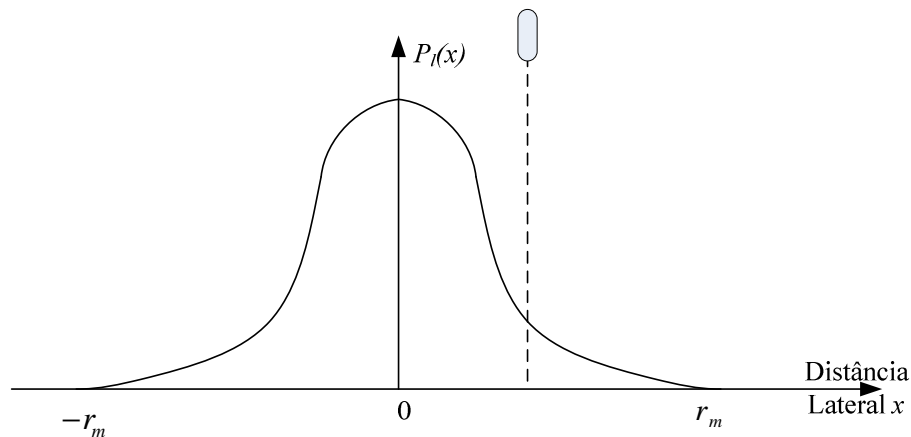


Figura 7. Curva de distância lateral entre $-r_m$ e r_m

Admita-se ainda que qualquer distância lateral x entre $-r_m$ e r_m poderá ser atingida com igual probabilidade. Isto significa que a distância lateral definida é uma variável aleatória com distribuição uniforme sobre os valores $-r_m$ e r_m . Tem-se que

$$f(x) = \begin{cases} 1/(2r_m), & \text{para } |x| < r_m \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (25)$$

$p_l(x)$ representa a probabilidade de detectar um alvo que realiza um trânsito relativo a uma determinada distância lateral x . Se f é a função densidade de probabilidade da variável aleatória X , então a probabilidade de detecção é dada por:

$$\Pr\{\text{detecção}\} = \int_{-\infty}^{+\infty} p_l(x)f(x)dx. \quad (26)$$

Admitindo que $p_l(x) = 0$ se $|x| > r_m$ e X é uniformemente distribuída entre $-r_m$ e $+r_m$, a probabilidade de detecção é

$$\Pr\{\text{detecção}\} = \frac{1}{2r_m} \int_{-r_m}^{+r_m} p_l(x)dx. \quad (27)$$

A expressão (27) representa a probabilidade de detectar um alvo que aleatoriamente transita a zona de detecção possível enquanto realiza uma trajetória rectilínea.

O exemplo descrito na Figura 8 pode representar uma operação de patrulha de barreira onde um sensor (o sonar de um submarino ou o observador num navio de superfície realizando uma busca visual) se encontra no centro da zona de passagem (barreira) de comprimento b .

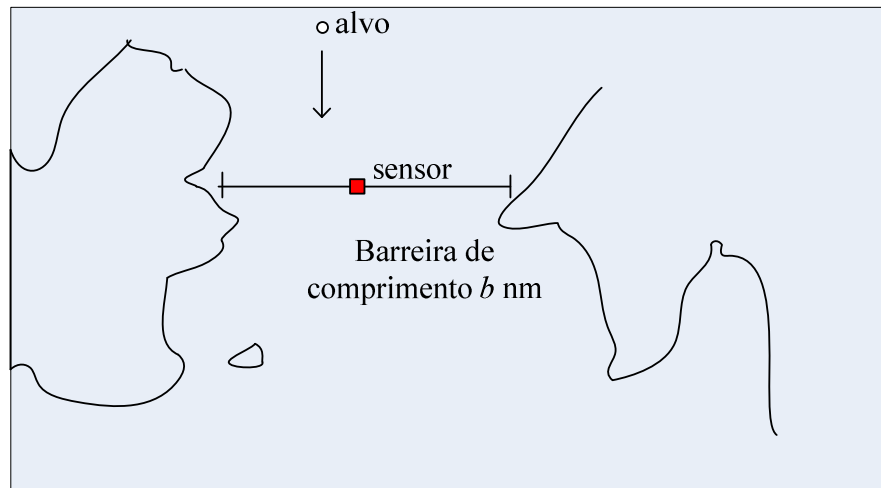


Figura 8. Barreira com sensor estático no centro

Suponha-se que se desconhece a trajetória (distância lateral ou CPA) a que um alvo irá atravessar a barreira, descrita na Figura 8. Na falta de melhor informação, é razoável

assumir que o alvo atravessará a barreira em qualquer ponto com igual probabilidade. Assim, assume-se que a distância lateral do alvo ao sensor está uniformemente distribuída entre $-b/2$ e $b/2$, e $f(x)$, a função densidade de probabilidade da distância lateral do alvo é dada por

$$f(x) = \begin{cases} 1/b, & \text{para } |x| < \frac{b}{2} \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (28)$$

Para concretizar a probabilidade de detecção neste exemplo específico, suponha-se que a probabilidade cumulativa de detecção do par sensor-alvo, $p_l(x)$, é dada por

$$p_l(x) = \begin{cases} 1 - |x|/25, & \text{para } |x| < 25 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (29)$$

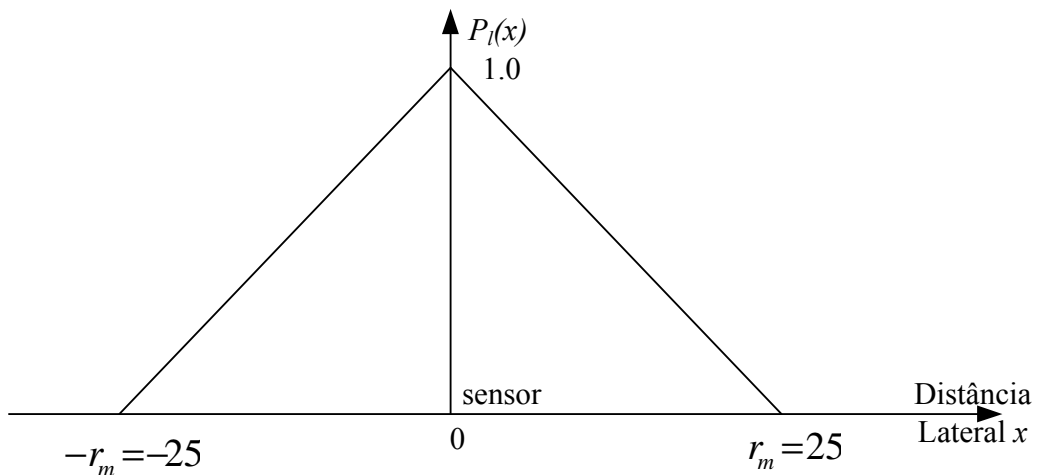


Figura 9. Curva de distância lateral triangular.

Admita-se que a barreira tem um comprimento de $b = 60$ milhas náuticas (*nm*) com o sensor localizado no centro e que o ponto de cruzamento é uniformemente distribuído. Então a probabilidade de detectar é

$$P_d = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{b} p_l(x) dx = \frac{1}{b} \int_{-\infty}^{+\infty} p_l(x) dx$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{60} \left[\int_0^{25} \left(1 + \frac{x}{25}\right) dx + \int_{-25}^0 \left(1 - \frac{x}{25}\right) dx \right] \\
&= \frac{1}{60} \left(\left[x + \frac{x^2}{50} \right]_0^{25} + \left[x + \frac{x^2}{50} \right]_{-25}^0 \right) \\
&= \frac{1}{60} [25 - 12,5 + 25 - 12,5] = \frac{25}{60} = 0,42.
\end{aligned}$$

Por conseguinte, considerar uma função distância lateral simétrica permite reduzir o esforço computacional da probabilidade de detecção.

Caso a barreira tenha um comprimento de $b = 25 \text{ nm}$, então a probabilidade de detecção seria um acontecimento certo, ou seja, $P_d = 1$. Este resultado permite considerar a utilização de vários sensores de forma a cobrir a barreira com o máximo de eficácia, como será visto na secção 1.4.2.

1.3.2 Largura de varrimento (*Sweep width*)

Sempre que possível, é desejável caracterizar a complexa capacidade de detecção de cada sensor (radar, sonar, olho humano, etc.) através de um único número que seja operacionalmente útil. Tal quantidade poderia ser a distância lateral correspondente a uma probabilidade de detecção de 50%. Outra poderia ser a distância lateral a partir da qual o número de alvos detectados é igual ao número de alvos não detectados a menores distâncias. Esta última quantidade é útil, por exemplo, quando é necessário decidir quão afastados devem estar as plataformas de forma conduzir uma busca eficaz. Qualquer que seja a quantidade utilizada, esta deverá ser claramente definida e compreendida por quem a utiliza.

O conceito com maior utilização que resume a capacidade de detecção de um sensor no planeamento de uma busca é o conceito de *sweep width*, ou largura de varrimento, ou ainda afastamento lateral como é mais conhecido no meio naval. Este conceito assume que um sensor realiza uma busca por alvos que se encontram aleatoriamente distribuídos numa certa região, enquanto o sensor “varre” efectivamente um caminho com uma determinada largura. No caso descrito na secção 1.3.1, verificou-se que quando a barreira

tem um comprimento igual ao integral da curva de distância lateral, então a probabilidade de detecção é 1. Isto significa que a área debaixo da Curva de Distância Lateral corresponde a uma distância que permite efectuar um varrimento efectivo de uma área de busca, na condição de ter distribuição uniforme da distância lateral x a que o alvo cruzará o sensor. A **largura de varrimento** (*sweep width*) é definida por

$$W = \int_{-\infty}^{+\infty} p_l(x) dx. \quad (30)$$

A definição (30) possui a seguinte interpretação: se um observador se desloca numa área (superfície do oceano) com velocidade constante v , onde se encontram um conjunto de alvos (N alvos por unidade de superfície) uniformemente distribuídos e parados ou em movimento com velocidade constante u , o número médio de alvos detectados por unidade de tempo N_0 é dado por

$$N_0 = NvW. \quad (31)$$

Suponha-se que t define um período de tempo em que a duração de tempo em que um alvo se encontra a uma distância do sensor que possa ser detectado é menor que t . O número total de alvos que passam a uma distância de detecção (podendo ser detectados) durante o período t e a uma distância lateral x e $x + dx$ é $Nvtdx$ (porque a área possui $vtdx$ milhas náuticas quadradas).

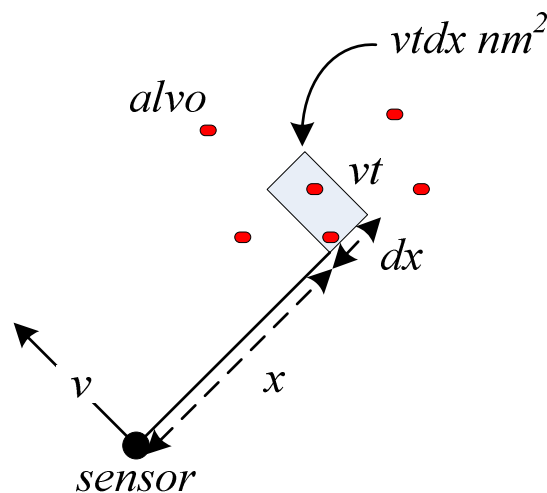


Figura 10. Detecção de alvos em movimento relativo.

Em média $p_l(x)Nvtdx$ destes contactos serão detectados. Portanto, em média o número total de contactos detectados é:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p_l(x)Nvtdx. \quad (32)$$

Dividindo por t , para ter número de contactos por unidade de tempo, e aplicando a equação (30) tem-se o resultado (31).

Quando um sensor detecta todos os alvos a menos de uma distância R e nenhum alvo para além dessa distância, a curva de distância lateral têm o nome de **lei de detecção definitiva** ou *definite range law*. Neste caso a curva de distância lateral é dada por

$$p_l(x) = \begin{cases} 1, & \text{para } |x| < R \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (33)$$

Repare-se que neste caso o afastamento lateral é $W = 2R$. Este resultado tem aplicação imediata em operações de busca com vários sensores, pois W é utilizado para definir o afastamento entre os sensores. Esta é a razão pela qual o termo W tem a designação de afastamento lateral.

Na secção 1.3.1, no caso da busca por um alvo em que a distância lateral é uniformemente distribuída sobre um intervalo que contém a distância máxima de detecção de um sensor, a probabilidade de detecção é proporcional ao afastamento lateral. No problema da barreira, em que esta possui um comprimento b , a probabilidade de detecção é

$$P_d = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{b} p_l(x) dx = \frac{1}{b} \int_{-\infty}^{+\infty} p_l(x) dx, \quad (34)$$

ou seja,

$$P_d = \frac{W}{b}. \quad (35)$$

No caso da distância lateral ser uniformemente distribuída a probabilidade de detecção é directamente proporcional ao afastamento lateral W . Portanto, W é uma medida da capacidade de detecção tão importante quanto a curva de distância lateral. Isto permite interpretar o afastamento lateral como a distância tal que $W/2$ é a distância lateral, onde

para além dela o número de alvos detectados é igual ao número de alvos não detectados a menores distâncias. Esta interpretação está representada na Figura 11.

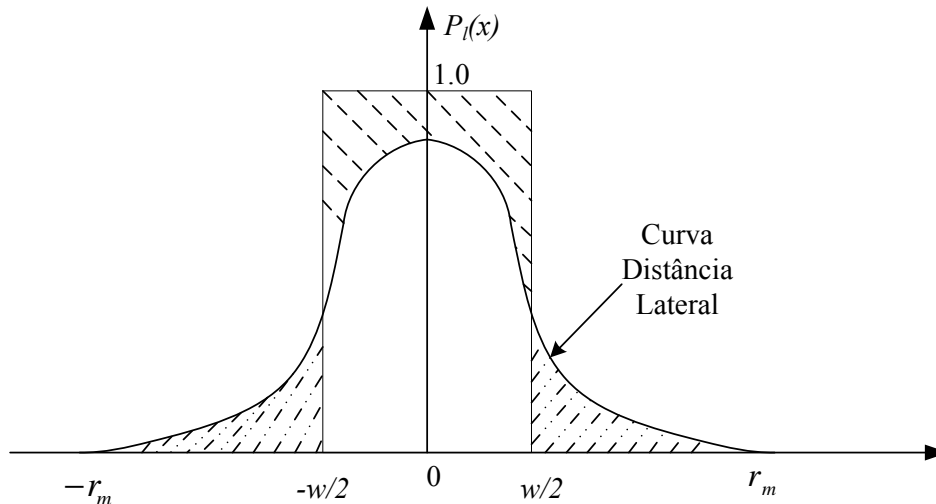


Figura 11. Interpretação do afastamento lateral W

A hipótese da distância lateral de um alvo ser uniformemente distribuída é plausível em cenário de operações de busca e salvamento, em que se conhece a última posição do objecto de busca e tem-se um erro associado que permite determinar uma área que o contenha com um determinado grau de certeza. Sem mais nenhuma informação sobre a localização do objecto é razoável que o agente de decisão que coordena o planeamento da operação de busca considere, com igual probabilidade, a localização do objecto em qualquer local na área de busca (normalmente um círculo de centro na última posição conhecida e raio determinado para garantir que área contém o objecto com um determinado grau de probabilidade).

1.4 Métodos para Avaliação de Planos de Busca

Nesta secção são apresentados métodos para avaliar planos de busca em termos da probabilidade de detecção. A construção de planos de busca é uma das aplicações relevantes de âmbito operacional onde as curvas de distância lateral assumem um papel essencial na obtenção de medidas de eficácia em operações de busca e salvamento.

1.4.1 Modelo de busca aleatória

Considere-se que é conhecida a localização de um contacto ou alvo numa determinada região de dimensão A . Sem mais informação, assume-se que a localização do alvo se encontra uniformemente distribuída em A e que a área de busca não possui nenhuma forma geométrica específica. Suponha-se que o sensor desloca-se na área com velocidade constante v e que não é utilizada nenhuma trajectória específica de busca relativamente ao alvo, de acordo com a Figura 12.

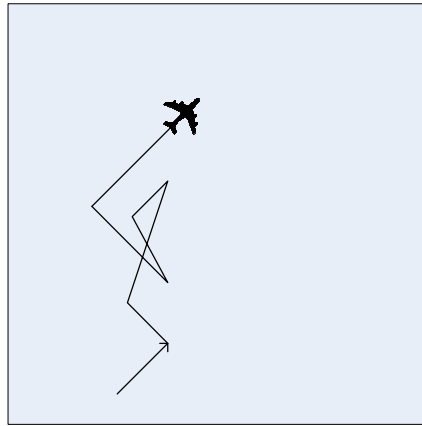


Figura 12. Busca aleatória sem trajectória específica.

Nesta busca aleatória, qual é a probabilidade de que a detecção ocorra até ao instante t ? No caso em que o sensor detecta o alvo apenas quando este se encontra a uma distância inferior a $R/2$ do sensor (caso mencionado em (33)), então a probabilidade de detecção é dada por

$$F_d(t) = 1 - e^{-Rvt/A}. \quad (36)$$

Para provar a equação (36) é necessário considerar o percurso do sensor durante o período $T = [0, t]$ dividido em n partes iguais de comprimento vt/n . Note-se que um alvo só é detectado se e só se a sua distância lateral for inferior a $R/2$. Se n for suficientemente grande para que a probabilidade de detecção seja independente entre as porções varridas pelo sensor, então a probabilidade de não detectar o contacto em todo o trajecto de comprimento vt resulta do produto da probabilidade de não detectar o contacto em cada uma das porções. Então, a probabilidade de o sensor detectar um alvo numa porção de área de dimensão Rvt/n é Rvt/nA . Desta forma, ao longo do percurso

de comprimento vt , a probabilidade de não detectar o contacto é $1 - 2Rvt/nA$, donde se tem

$$P_d = 1 - \left(1 - \frac{Rvt}{A}\right)^n. \quad (37)$$

Para n suficientemente grande, tem-se

$$P_d = 1 - e^{-Rvt/A}. \quad (38)$$

A fórmula (38) é designada por *fórmula de busca aleatória*. A importância deste modelo de detecção reside no facto de não representar um tipo de busca utilizado em operações navais, mas pelo facto de representar uma “busca teórica” num cenário caracterizado por total ausência de informação relativamente à localização do objecto e por não se considerar nenhuma tática de busca em concreto.

Em resumo, as hipóteses subjacentes ao modelo de busca aleatória que tem como função de probabilidade a expressão (38) são:

- 1) a localização do alvo é uniformemente distribuída na área de dimensão A ;
- 2) a trajetória do sensor é aleatória na área de busca e as ocorrências de detecção em porções de área distintas são independentes;
- 3) assume-se uma lei de detecção definitiva, onde o sensor detecta sempre o contacto caso este esteja a menos da distância lateral de $R/2$ e nunca o detecta a distância superiores.

A expressão (38) poderia ser obtida com um raciocínio semelhante ao efectuado na secção 1.1.3, para deduzir a probabilidade de detecção. Este raciocínio será utilizado para demonstrar a probabilidade de detecção quando a hipótese de independência em 2) não se verifica.

Na fórmula (38) assume-se a independência entre a ocorrência de detecção entre porções de área varrida distintas e subsequentes. Considere-se agora o caso em que o sensor varre a área de busca mas de forma sistemática.

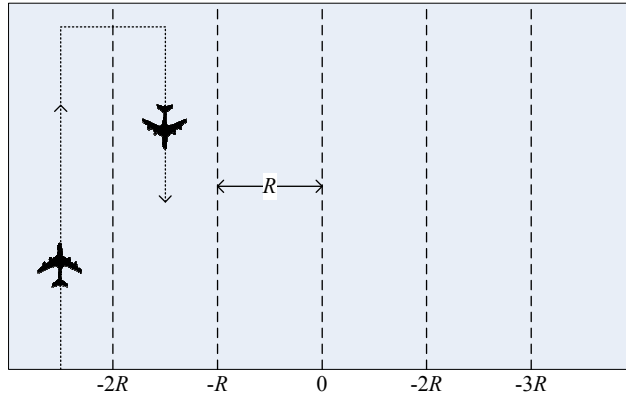


Figura 13. Busca sistemática em fiadas com igual afastamento.

Nesta busca, o sensor varre a área em fiadas com igual afastamento R , de acordo com a Figura 13. Considere-se que se está perante a lei de detecção definitiva onde um contacto é detectado se e só se estiver a uma distância lateral inferior a $R/2$ do sensor. Então o sensor “varre” a área de busca sem visitar as mesmas porções da área de busca (aqui ignora-se eventuais correcções durante as mudanças de rumo necessárias para realizar o trajecto ilustrado na Figura 13). Em função do tempo t decorrido desde o início da busca, se o sensor não encontrou o contacto na porção de área (com dimensão Rvt milhas náuticas), então é porque este não se encontra na porção de área varrida pelo sensor e, portanto, encontra-se na restante porção de área não varrida de dimensão $A - Rvt$.

Seja $q(t)$ a probabilidade de o sensor não detectar o contacto até ao instante t , assumindo que a localização do alvo na área de busca se encontra uniformemente distribuída. Tem-se que $q(t + dt) = q(t)f(t, dt)$, onde $f(t, dt)$ representa a probabilidade condicional de não detectar o contacto no intervalo de tempo $[t, dt]$, dado a não detecção no intervalo de tempo $[0, t]$. No caso de independência entre os intervalos, a probabilidade de detecção no intervalo $[0, t]$ seria dado pela expressão (38). Desta forma, a probabilidade condicional $f(t, dt)$ de não detectar o contacto em $[t, dt]$ é (quando $Rvt \leq A$)

$$f(t, dt) = 1 - \frac{Rvdt}{A - Rvt}. \quad (39)$$

Repare-se que a probabilidade condicional em (39) não é semelhante à probabilidade condicional $f(t, dt) = Rvdt/A$ caso se considerasse a independência entre os intervalos $[0, t[$ e $[t, dt[$. A probabilidade $P(t)$ de detectar um contacto no intervalo $[0, t[$, nas hipóteses do modelo de busca aleatória é $P(t) = 1 - q(t)$. No intervalo $[0, t + dt[$, tem-se

$$P(t + dt) = 1 - q(t)f(t, dt). \quad (40)$$

No caso da expressão (39), tem-se que a probabilidade de detecção $P(t)$ verifica a seguinte expressão

$$\frac{P(t + dt) - P(t)}{dt} = [1 - P(t)] \left[\frac{Rv}{A - Rvt} \right]. \quad (41)$$

Tomando $dt \rightarrow 0$ e dividindo por $1 - P(t)$ obtém-se,

$$\frac{P(t)'}{1 - P(t)} = \frac{Rv}{A - Rvt}. \quad (42)$$

A equação diferencial obtida acima, com $f(t, dt)$ dado em (39), origina $P(t) = Rvt/A$, quando $Rvt \leq A$ e $P(t) = 1$ caso contrário.

A quantidade Rvt/A tem o nome de **factor de cobertura**. O factor de cobertura representa o rácio entre a área varrida pelo sensor e a área total que se pretende varrer. Este valor mede o esforço empregue na busca e pode assumir valores superiores a 1 quando são utilizados vários meios de busca.

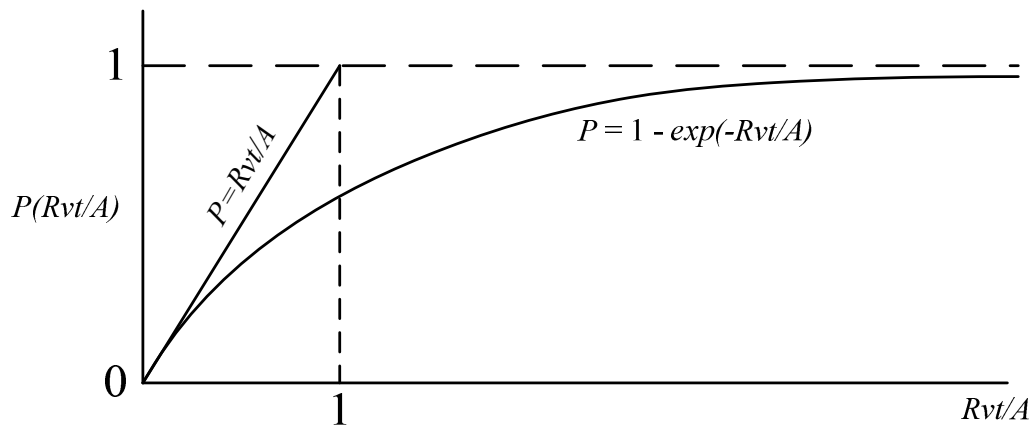


Figura 14. Detecção com modelo de busca aleatória

A Figura 14 mostra o efeito do factor de cobertura no aumento da probabilidade de detecção com o acréscimo do comprimento da trajectória do sensor (representado por vt). Quando o factor de cobertura aumenta, verifica-se que a probabilidade de detecção aproxima-se da unidade, exibindo um comportamento de saturação, que se deve em parte a um aumento de áreas já visitadas anteriormente. Desta forma, tem-se uma fórmula optimista para a probabilidade de detecção

$$P_d = \min \left\{ \frac{RL}{A}, 1 \right\}. \quad (43)$$

Note-se que o valor R , nas condições do modelo de busca aleatória (lei de detecção definitiva) corresponde ao afastamento lateral. A fórmula (43) constitui um limite superior para a probabilidade de detecção, enquanto a fórmula de busca aleatória é considerada um limite inferior para a probabilidade de detecção de uma operação busca bem conduzida.

1.4.2 Buscas paralelas com vários sensores

Outro caso onde o modelo de busca aleatória é utilizado corresponde à utilização de vários sensores na condução de uma busca. Considere-se uma região de busca dividida em n secções de largura s e comprimento b , tal que $A = nsb \text{ nm}^2$. Suponha-se que um sensor varre uma das secções através de uma busca aleatória com uma lei de detecção definitiva descrita pela expressão (33). Uma forma equivalente de cobrir toda a área de busca consiste em utilizar n sensores para varrer a região, atribuindo uma secção de dimensão $sb \text{ nm}^2$ a cada sensor.

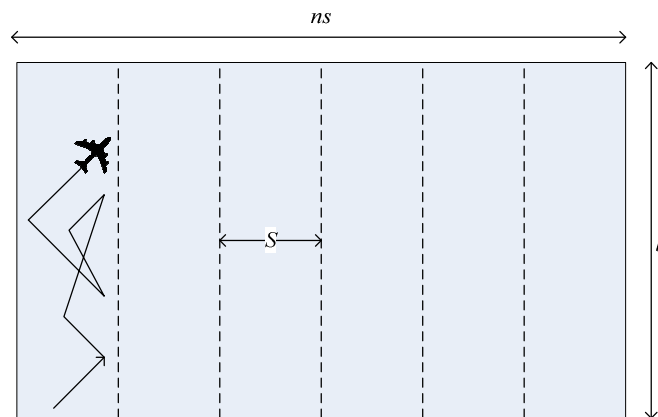


Figura 15. Busca aleatória em várias secções da região de busca

Suponha-se que n sensores realizam um trajecto cuja distância total é b em cada uma das n tiras representadas pela Figura 15. Se cada sensor realizar uma busca aleatória na sua secção de comprimento b durante o mesmo período de tempo, então os n sensores realizam um percurso total de comprimento nb . Seja $L = nb$ e $A = nsb$, então o factor de cobertura total é $RL/A = R(nb)/nsb = R/s$ e a probabilidade de detecção numa busca aleatória em secções é

$$P_d = 1 - e^{-R/s}. \quad (44)$$

Comparando a busca aleatória realizada por um só sensor a efectuar um trajecto de comprimento nb e a busca aleatória com n sensores a realizarem n trajectos de comprimento b , verifica-se que a probabilidades de detecção são equivalentes. No entanto, espera-se que no caso da busca aleatória com n sensores ocorra menos sobreposição de áreas varridas e, portanto, a verdadeira probabilidade de detecção poderá ser superior à da expressão (44). Repare-se ainda que no caso de haver apenas um só sensor, se este se deslocar a uma velocidade v , então demorará $t = nb/v$ a varrer a área A . No caso dos n sensores, cada um demorará $t = b/v$ horas a varrer apenas a sua secção. Desta forma, os n sensores varrem a área A em $t = b/v$ horas. Isto significa que usar apenas um sensor demora n vez mais tempo do que se fosse utilizado n sensores.

Suponha-se novamente, que um alvo se encontra numa região de busca e que a probabilidade de ele se encontrar em determinado local é igual à probabilidade de se encontrar em qualquer outro sítio na região. Um método comum para conduzir uma busca, para varrer a região de forma sistemática, é designado por *busca em fiadas paralelas*. Neste método são utilizados vários sensores ou meios de busca para varrer a região de busca que se encontra dividida em secções paralelas, com está representado na Figura 15. Os sensores realizam uma busca, percorrendo a linha central da sua secção, apresentando um afastamento lateral entre si de s nm.

Nesta secção, o objectivo é apresentar um método para obter a probabilidade de detecção quando a curva de distância lateral de cada sensor é conhecida. Num primeiro caso, vai-se considerar que as curvas de detecção lateral dos sensores são iguais e que são independentes.

Considere-se que a curva de distância lateral, p_l , para cada sensor, é conhecida e tem distribuição triangular dada por:

$$p_l(x) = \begin{cases} 1 - |x|/r_m, & \text{para } |x| < r_m \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (45)$$

Assuma-se ainda que a região de busca é varrida simultaneamente por vários sensores. Cada sensor varre a sua secção patrulhando ao longo da sua linha central. A probabilidade de detecção, quando não ocorre sobreposição dos sensores, é dada pela expressão (34) onde a largura é s nm.

Se a distância entre sensores for inferior a r_m então mais do que um sensor pode detectar o alvo. Considere-se o potencial de avistamento, relativo à detecção de um contacto que cruza a linha entre dois sensores. A probabilidade de detecção de um alvo que passa entre dois sensores, cujas curvas de distância lateral se cruzam, resultará da probabilidade dos dois sensores detectarem o alvo.

Se a distância lateral entre os dois sensores for inferior a $2r_m$, então o contacto pode ser detectado por mais do que um sensor. Considere-se o potencial de avistamento relativamente a um alvo que passe entre um par de sensores adjacentes com semelhante função de distância lateral relativamente ao mesmo alvo, de acordo com a Figura 16.

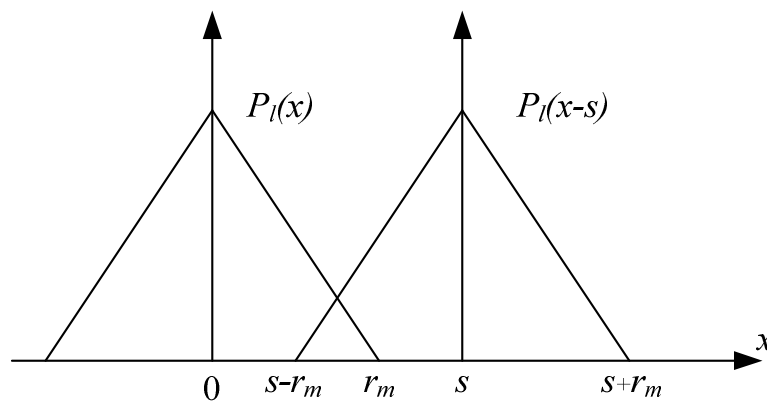


Figura 16. Sobreposição de curvas de distância lateral

Para avaliar a capacidade de detecção do par de sensores é necessário considerá-los como um só e determinar a função de distância lateral conjugada, $p_l^*(x)$, do par. Nas condições descritas, o alvo é detectado em três situações num total de quatro possíveis. Considere-se, sem perda de generalidade, que o primeiro sensor, designado sensor N°1 encontra-se localizado no referencial com abcissa zero e o segundo sensor, sensor N°2,

está em linha com o sensor N°1 e dista deste $s \text{ nm}$. O alvo, ao passar entre os dois sensores, poderá ser detectado pelo primeiro e pelo segundo, ou ser detectado pelo primeiro e não pelo segundo e, finalmente, não ser detectado pelo primeiro e ser detectado pelo segundo sensor. O último caso possível consiste em não ser detectado nem pelo primeiro sensor nem pelo segundo. Para estabelecer a função de distância lateral conjunta do par de sensores é conveniente usar o acontecimento complementar relativo a uma eventual detecção. Desta forma, para um alvo que transite entre $[-r_m, s + r_m]$, tem-se:

$$p_l^*(x) = 1 - (1 - p_l(x))(1 - p_l(x - s)), \quad \text{para } -r_m \leq x \leq s + r_m \quad (46)$$

Note-se que a equação (46) assume que as probabilidades de detecção de ambos os sensores são independentes.

Seja X a variável aleatória que representa a distância lateral do alvo em relação ao par de sensores e seja $f(x)$ a sua função densidade de probabilidade.

Considere-se ainda uma busca onde as fiadas distam entre si $w = s + 2r_m$ (distância coberta pelos par de sensores), como está exemplificado na Figura 17.

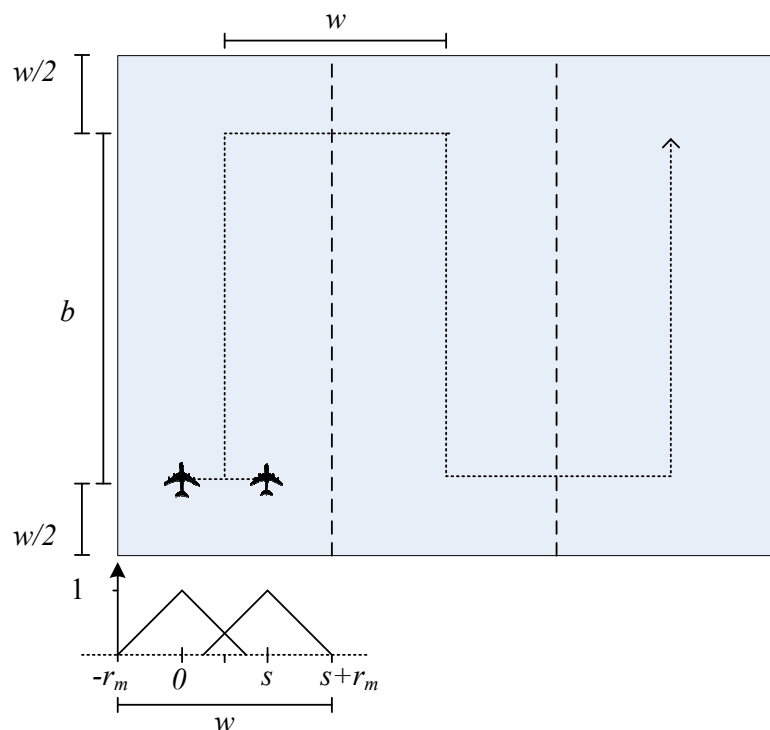


Figura 17. Busca por fiadas com dois sensores em paralelo.

Na Figura 17, ambos os sensores realizam a mesma trajectória em cada fiada. O tempo que demoram a varrer cada fiada não vai influenciar a probabilidade de detecção, pois está-se perante uma situação semelhante à patrulha de um canal, que foi mostrada na secção 1.3.2 para ilustrar o conceito de afastamento lateral. Nesta situação, o que vai influenciar a probabilidade de detecção é a distância lateral que o contacto irá praticar com o sensor. Recorde-se que apenas o sensor se encontra em movimento e o alvo ou objecto de busca está estático.

A distância percorrida nas três fiadas é $3b + 2w$. Se os sensores se deslocarem com velocidade constante v , então o tempo total para varrer a área é $T = (3b + 2w)/v$. Este resultado pode ser facilmente generalizado para uma área de busca com n fiadas. O tempo total de busca será $T = (n(b + w) - w)/v$. É natural que a distância b corresponda ao comprimento da área de busca, ao qual se retira w .

É importante reparar que a curva de distância lateral combinada, $p_i^*(x)$, não excede a largura da fiada w e, por conseguinte, com os sensores a varrerem uma fiada, não existe a possibilidade de detectar o contacto na fiada adjacente, ou seja, fora da sua fiada. Se assim não fosse, teria de ser equacionada a probabilidade de detecção extra na fiada adjacente.

A probabilidade de detecção do par de sensores e, portanto, de toda a busca é

$$P_d = \int_{-r_m}^{s+r_m} p_i^*(x) f(x) dx. \quad (47)$$

Considerando $s = 20 \text{ nm}$ e $r_m = 15 \text{ nm}$, tem-se $w = 50$ (afastamento entre fiadas). A curva de distância lateral combinada para os dois sensores é:

$$p_i^*(x) = \begin{cases} 1 - (1 - p_i^1(x)), & x \leq 0 \\ 1 - (1 - p_i^1(x))(1 - p_i^2(x - s)), & 0 \leq x \leq s = 20 \\ 1 - (1 - p_i^2(x - s)), & x \geq s = 20. \end{cases} \quad (48)$$

A curva de distância lateral de cada sensor é dada:

$$p_l^1(x) = p_l^2(x) = \begin{cases} \frac{(15+x)}{15}, & -15 \leq x \leq 0 \\ \frac{(15-x)}{15}, & 0 \leq x \leq 15 \\ 0, & \text{c. c.} \end{cases} \quad (49)$$

Assim, a probabilidade de detecção dos sensores, vem

$$P_d = \int_{-15}^{35} p_l^*(x) f(x) dx = \int_{-15}^{35} \frac{p_l^*(x)}{50} dx. \quad (50)$$

A combinação dos dois sensores origina a curva combinada, $p_l^*(x)$, dada pela seguinte expressão

$$p_l^*(x) = \begin{cases} 1 + \frac{x}{15}, & -15 \leq x \leq 0 \\ 1 - \frac{x}{15}, & 0 \leq x \leq 15 \\ 1 + \frac{x^2 - 20x}{15^2}, & 15 \leq x \leq 20 \\ \frac{x-5}{15}, & 20 \leq x \leq 25 \\ \frac{35-x}{15}, & 25 \leq x \leq 35. \end{cases} \quad (51)$$

Dado que $f(x) = 1/50$ (X é uniformemente distribuída entre -15 e 35 milhas), resulta que $P_d = 0,5019$.

Este resultado pode ser comparado com os resultados anteriores relativo à aplicação da fórmula de busca aleatória. Caso fosse utilizado apenas um sensor com a mesma largura entre fiadas (50 milhas), ter-se-ia um factor de cobertura, C , dado por:

$$C = \frac{\text{sweep width}}{\text{largura fiada}} = \frac{1}{50} \int_{-15}^{35} p_l^1(x) dx = \frac{15}{50} = 0,30.$$

Então a probabilidade de detecção correspondente a um esforço de busca resultante de uma busca aleatória em fiadas seria

$$P_d = 1 - e^{-0,3} = 0,26. \quad (52)$$

A equação (52) deriva da fórmula (38). O método de busca em paralelo foi desenvolvido assumindo que existe um número suficiente de observadores ou sensores de

forma a varrer cada fiada numa única vez. No entanto, se em cada fiada (assumindo que as fiadas possuem igual dimensão) a curva de distância lateral combinada, $p_l^*(x)$, for idêntica, então a probabilidade obtida na expressão (50) corresponde a usar apenas um grupo de sensores em paralelo em todas as fiadas na área de busca. No modelo da busca em paralelo assume-se que o contacto é fixo⁵ e a que a sua localização tem distribuição uniforme relativamente à linha onde se encontram os sensores.

O modelo de busca apresentado nesta secção permite calcular a probabilidade de detectar um alvo que atravessa uma linha de sensores estacionários num ponto aleatório nessa linha. Este modelo é estendido a uma busca em paralelo numa área de busca dividida em fiadas de igual dimensão. Aqui, a probabilidade de detectar um alvo estacionário na fiada resulta do conjunto de sensores em linha varrerem a fiada numa trajectória rectilínea e perpendicular ao eixo de menor dimensão da fiada. Esta probabilidade, descrita em (50), é semelhante para cada fiada e traduz a probabilidade final de varrer toda a área de acordo com o modelo de busca em paralelo. Este modelo pode ser generalizado para um qualquer número de sensores.

⁵ Por “fixo” entenda-se que o alvo possui rumo e velocidade nulos durante a busca.

1.4.3 Lei do cubo inverso

Na secção 1.1.3 foi introduzido o conceito de taxa de detecção, onde numa busca de tipo contínuo, as detecções, não necessariamente as iniciais, ocorrem segundo um processo de Poisson com parâmetro de dispersão variável, i.e., não homogéneo. Com base da taxa de detecção obteve-se a fórmula (7) para a probabilidade de detecção cumulativa. No modelo de busca aleatória a taxa de detecção considerada é constante, sendo proporcional à área varrida pelo sensor de acordo com a lei de detecção definitiva. Outro exemplo de aplicação da taxa de detecção ocorre quando um observador realiza uma busca visual e pretende encontrar a esteira de um navio na superfície do oceano. Este modelo foi primeiramente proposto por Koopman (1956b). O termo sensor e observador serão utilizados, a partir daqui, com o mesmo significado.



Ilustração 1. Esteira de um navio em vista aérea

Este exemplo é característico de operações onde aeronaves de patrulha marítima conduzem busca numa área do oceano com o objectivo de detectar navios ou submarinos inimigos através da detecção da sua esteira. Este modelo assenta sobre as seguintes assunções:

- 1) o observador encontra-se a uma altura h sobre o oceano, onde o alvo realiza a sua navegação;
- 2) o observador detecta o navio através da sua esteira. (Para um observador com meios visuais a bordo de um meio aéreo, a esteira é mais facilmente detectada do que o próprio navio);

3) a taxa de detecção instantânea $\gamma(t)$ é proporcional ao ângulo sólido da esteira do contacto relativamente ao ponto de observação.

O ângulo sólido corresponde à projecção da área da esteira no plano perpendicular à linha de visão a partir do observador. Na Figura 18 está representado o do ângulo sólido para uma área do oceano que corresponde a um rectângulo de largura a e comprimento b e que é perpendicular à direcção de observação. O ângulo sólido resulta do produto do ângulo α relativo à distância a e do ângulo β relativo ao comprimento b . O ângulo α mede em radianos, c/s . Pela similaridade de triângulos, tem-se $c/a \approx h/s$, donde $\alpha \approx ah/s^2$ e o valor em radianos de β é b/s .

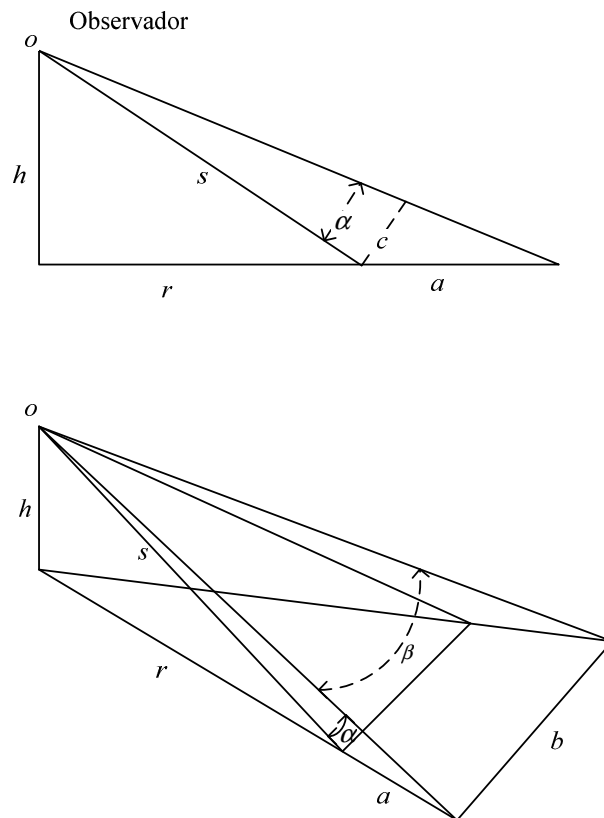


Figura 18. Ângulo sólido da esteira de um navio

A área A da esteira real de um navio não é na realidade um rectângulo, mas pode ser entendida como a soma de um grande número de pequenos rectângulos, de modo que o ângulo sólido da esteira resulte da soma dos ângulos sólidos dos rectângulos que a compõem.

Assim,

$$\text{\AA ngulo s\AA lido} = \alpha\beta = \frac{Ah}{s^3} = \frac{Ah}{(h^2 + r^2)^{3/2}}. \quad (53)$$

Como se considera que $\gamma(t)$ \AA proporcional ao \AA ngulo s\AA lido, tem-se

$$\gamma = \frac{kh}{s^3} = \frac{kh}{(h^2 + r^2)^{3/2}}. \quad (54)$$

A constante k representa todos os factores que podem ser considerados com fixos e que n\AA o s\AA o introduzidos no modelo explicitamente, como por exemplo o contraste da esteira com a superf\AA cie do oceano, o n\AA mero de observadores e a sua capacidade visual, condi\AA oes meteorol\AA gicas, etc. A constante k inclui a dimens\AA o da \AA rea A como factor e representa a \AA rea por unidade de tempo. Empiricamente, sucede que a dist\AA ncia r \AA muito superior \AA altura h a que o observador se encontra, e assim a express\AA o (53) \AA substituída pela aproxima\AA o

$$\gamma = \frac{kh}{r^3}. \quad (55)$$

\AA usual considerar a dist\AA ncia fun\AA o do tempo, por isso (46) surge como

$$\gamma = \frac{kh}{r(t)^3}, \quad t \geq 0, r(t) \gg h. \quad (56)$$

A propriedade de detec\AA o expressa pelas f\AA rmulas (54) e (55) \AA conhecida por ***lei de detec\AA o do cubo inverso***.

\AA importante frisar que os resultados expressos pelas f\AA rmulas (54) e (55) correspondem a lei de detec\AA oes que explicita a taxa de detec\AA o, que \AA um r\AA cio de ocorr\AA ncias por unidade de tempo em fun\AA o da dist\AA ncia. Portanto, esta lei de detec\AA o \AA \AA til quando a dist\AA ncia \AA fun\AA o do tempo.

O exemplo que se segue (Wagner, Mylander, Sanders, 2004, p\AA g. 146) revela como a probabilidade de detec\AA o, que \AA uma fun\AA o cumulativa de probabilidade, pode ser encontrada quando a taxa de detec\AA o depende da dist\AA ncia e perante a lei de detec\AA o do cubo inverso.

Suponha-se que no instante $t = 0$, uma esta\AA o fixa de radar detecta um m\AA ssil inimigo a 500 nm de dist\AA ncia e se aproxima de uma bateria anti-m\AA ssil a uma velocidade de 10.000 nm. De forma a realizar um contra-ataque, o m\AA ssil dever\AA ser adquirido pelo

sistema de controlo de tiro da bateria anti-míssil antes que o míssil se aproxime a menos de 200 *nm*. Se a taxa de detecção do sistema de controlo de tiro segue uma lei de detecção do cubo inverso com $kh = 10^9 \text{ nm}^3$ e $r(t)$ em *nm*, então a taxa de detecção no instante t é

$$\gamma(t) = \frac{10^9}{r(t)^3} \text{ hr}^{-1}. \quad (57)$$

Qual é a probabilidade de o sistema de controlo de tiro realizar a aquisição do alvo de forma a conseguir contra-atacar?

A distância entre o míssil e a estação de radar onde se encontra o sistema de controlo de tiro é dada por $r(t) = 500 - 10.000t \text{ nm}$, onde t são horas, e a taxa de detecção é dada por

$$\gamma(t) = \frac{10^9}{(500 - 10.000t)^3} \text{ hr}^{-1}. \quad (58)$$

Portanto, a probabilidade de adquirir o alvo até às 200 *nm* é equivalente à probabilidade de adquirir o alvo após 0,03 horas a partir do instante da primeira detecção ($t = 0$). Esta probabilidade pode ser calculada através da fórmula (7), dada na secção 1.1.3

$$F_d(0,03) = 1 - \int_0^{0,03} \frac{10^9}{(500 - 10,000t)^3} dt = 1 - e^{-1,05} = 0,65.$$

Na secção anterior apresentou-se um método para calcular a probabilidade de detecção numa busca com fiadas em paralelo. No exemplo dado, a probabilidade de detecção P_d encontrada foi de 0,5019, para uma largura de fiada de 50 *nm*.

A questão que se coloca é se a forma da curva de distância lateral afecta significativamente o resultado. Por exemplo, quando se realiza uma busca em paralelo, tal como exemplificada na secção anterior, empenhando um sensor com uma curva de distância lateral de forma diferente mas com o mesmo valor de largura de varrimento, será que $P_d = 0,5019$? A resposta é que para curvas de distância lateral com diferente forma (por exemplo, com caudas mais pesadas) mas com a mesma área, o resultado não difere significativamente. Sucede que é possível obter boas estimativas da probabilidade de detecção, utilizando o factor de cobertura, sem conhecer a expressão matemática da

curva de distância lateral de onde se retirou a largura de varrimento. Usando a lei do cubo inverso (Washburn, 2004, pág. 2-11), mostra-se que a probabilidade de detectar um alvo que passe entre dois sensores idênticos em linha, quando apenas é conhecida a sua largura de varrimento é dada por

$$P_d = 2 \int_0^z \varphi(t) dt = 2\Phi(z) - 1. \quad (59)$$

onde $\varphi(t)$ é função densidade de probabilidade de uma variável aleatória com distribuição normal de valor médio zero e variância unitária, e z é dado por:

$$z = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{W}{s} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} * 0,5019 = 0,629. \quad (60)$$

Utilizando a largura de varrimento combinada dos dois sensores a partir da curva de distância lateral combinada $p_l^*(x)$, tem-se

$$P_d = 2 \int_0^{0,629} \varphi(t) dt = 2\Phi(0,629) - 1 = 0,4707. \quad (61)$$

Na Figura 19 estão representadas as principais leis de detecção em função do factor de cobertura. Na condução de uma busca no mar, o próprio valor do factor de cobertura oferece uma boa estimativa da probabilidade de detecção quando o seu valor é pequeno ou quando a mesma porção de área é repetidamente varrida. Desta forma, o factor de cobertura fornece um limite superior sobre a probabilidade de detecção.

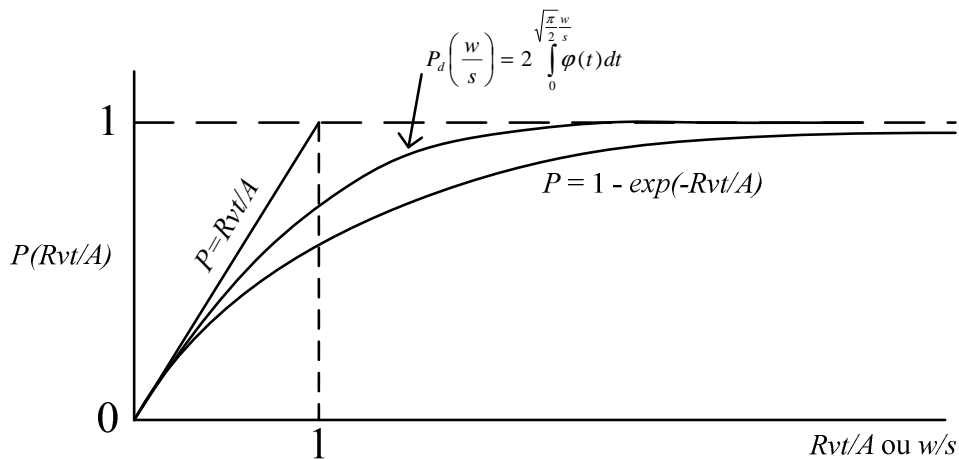


Figura 19. Comparação de leis de detecção

2 Capítulo 2 – Modelos da Curva de Distância Lateral

Neste capítulo serão apresentados os principais modelos e métodos para construir as curvas de distância lateral. A sequência apresentada dos modelos corresponde à sequência cronológica e ordem de complexidade dos mesmos. O primeiro modelo foi apresentado em 1955, quando foi iniciado um processo de recolha de registos de avistamento de contactos no mar pela Guarda Costeira Norte Americana. As magnitudes da probabilidade cumulativa de detecção condicional a uma distância lateral x são estimadas a partir do quociente entre o número de avistamentos registados e a densidade de contactos observada na área onde decorre o registo dos avistamentos. Neste método, não se conhece o número de contactos não detectados. Esta dificuldade é contornada com uma estimativa do número total de contactos na área.

O segundo modelo corresponde a uma tentativa de tornar a estimação da curva de distância lateral independente do conhecimento dos alvos não detectados. Por esta razão, a estimação é feita a partir de uma amostra com distâncias de detecção inicial e a probabilidade de detecção depende exclusivamente do sensor. Neste modelo continua a existir um parâmetro por estimar, que corresponde à probabilidade de não detectar um alvo.

O terceiro modelo corresponde à utilização da análise de regressão logística na abordagem da estimação da curva de distância lateral. Pela primeira vez são conduzidas experiências no mar para recolher dados de alvos detectados e não detectados e associada essa informação é associada a uma distância lateral x , assim como outros regressores encarados como relevantes.

Por fim, o último modelo apresentado corresponde a uma generalização da lei de detecção do cubo inverso, onde é proposto um método para estimar a curva de distância lateral com base numa amostra de distâncias iniciais de detecção.

De todos os modelos apresentados apenas o primeiro e o modelo regressão logística utilizam distâncias laterais para estimar a curva de distância lateral. O segundo e o último modelo utilizam distâncias iniciais. No Capítulo 4 é discutido em maior pormenor as vantagens, desvantagens e limitações da utilização das distâncias laterais.

2.1 Estimação com Densidade de Contactos

Em 1955, reconhecendo a falta de dados envolvendo pequenas embarcações e jangadas salva-vidas, a Guarda Costeira Norte-Americana ordenou a recolha de dados de avistamentos através da instrução operacional número 58-55. Esta instrução ordenava às unidades de busca e salvamento da Guarda Costeira que coligissem relatos de avistamento por cada tipo de avistamento considerado vantajoso para o estudo. Foram coligidos mais de 12.000 relatos de avistamentos, quer por meios de superfície, quer como por meios aéreos. Como estes avistamentos resultavam de encontros fortuitos entre os meios da Guarda Costeira e os respectivos contactos, surgiram dificuldades na análise dos dados. Em particular, os dados não forneciam qualquer informação relativa às oportunidades de detecção visual.

O objectivo deste programa foi, na altura, construir tabelas de avistamento (tabelas com largura de varrimento) utilizadas por meios aéreos na busca por alvos de superfície.

Entre os dados recolhidos pelos meios de busca, estava a data do avistamento, a unidade que realizava a busca, tipo de alvo (mercante, pesca, jangada, embarcação de recreio), distância inicial de avistamento, azimute do alvo relativamente ao meio de busca, altura da onda, existência ou não de auxiliares visuais, período do dia (dia, noite ou crepúsculo), altitude do meio aéreo ou altura do olho humano em meios de superfície, velocidade e direcção do vento, percentagem de nebulosidade, visibilidade meteorológica, posição relativa do sol, tipo de meio de busca empenhado. Estes dados foram recolhidos numa folha de registo desenhado para o efeito, com a designação técnica de “Form CG-3627”.

Nestes avistamentos, recolhia-se não só a distância inicial de detecção mas também o azimute do alvo relativamente à proa do meio aéreo. Com este ângulo, a distância lateral era calculada como a projecção da distância inicial de detecção sobre o eixo perpendicular ao rumo do veículo com sensor (meios de detecção visual a bordo de um meio aéreo), como mostra a Figura 20.

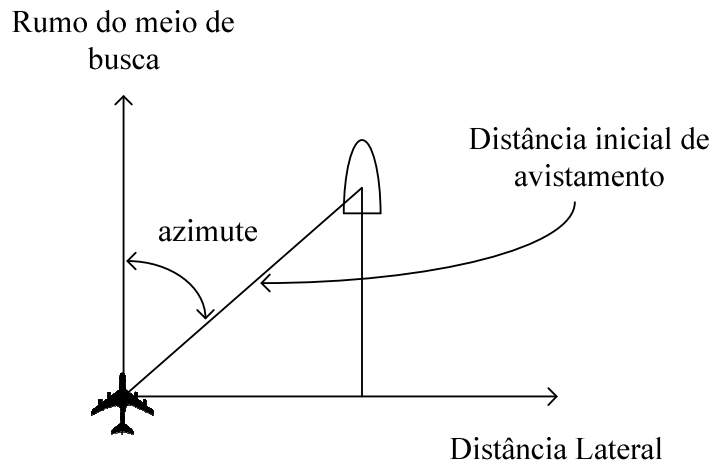


Figura 20. Obtenção da distância lateral para um avistamento.

Neste estudo, os azimutes foram agrupados em intervalos de ângulos no sentido dos ponteiros do relógio, sendo cada intervalo codificado por um número.

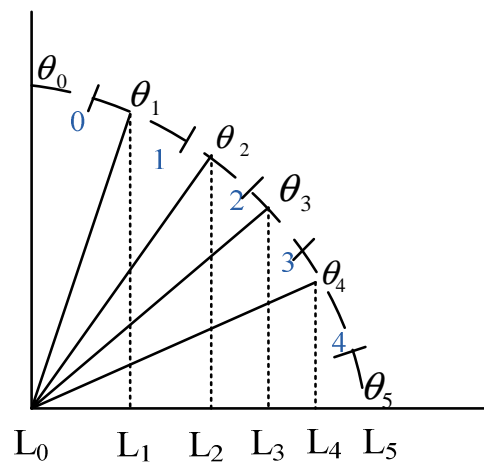


Figura 21. Distância lateral para cada intervalo de azimutes

A magnitude de cada intervalo de distâncias laterais é dado por:

$$f_{Ri}(L_j) = \frac{N_{Ri}}{L_{i+1} - L_i} \quad (62)$$

O índice j refere as distâncias laterais, L_j , que pertencem ao intervalo $[L_i, L_{i+1}]$, que no caso ilustrado, $i \in \{0,1,2,3,4\}$ e o índice i codifica os intervalos com distâncias laterais. Na Figura 21 $L_i = R \sin(\theta_i)$ e representa a distância lateral em milhas náuticas.

R representa a distância de detecção inicial e N_{Ri} representa o número de avistamentos à distância R no intervalo i .

A curva das fracções de distância lateral é dada pela seguinte expressão (Richardson, 1968):

$$f(L_j) = \sum_R \sum_i f_{Ri}(L_j) \quad (63)$$

Repare-se que esta expressão apenas contempla alvos detectados. Para estimar a largura de varrimento, é proposto incluir na expressão da largura de varrimento de Koopman (1956a), um parâmetro que quantifica a densidade de contactos na área. Considerando D a densidade de contactos por unidade de distância lateral L , a largura de varrimento proposta por Richardson é

$$W = \frac{2 \int_0^{+\infty} f(L) dL}{D}. \quad (64)$$

A fórmula (64) corresponde à fórmula (30) na secção 1.3.2 onde o termo $p_l(x)$ é substituído por $f(L)/D$ e considerando que a distribuição é simétrica.

Um dos objectivos do estudo em Richardson (1968) consistia em saber se o parâmetro D poderia ser determinado estatisticamente, deduzido ou por inferência. Para concretizar D assume-se que a densidade de contactos por unidade de distância lateral, L , na distribuição não é menor que a frequência máxima observada por unidade de distância lateral. Então D é tomado como

$$D = f(L_i)_{\max}. \quad (65)$$

A equação (64) é convertida para cálculos discretos como:

$$W = \frac{2 \sum_{i=0}^{\infty} f(L_i) \Delta L}{D}. \quad (66)$$

No estudo apresentado considerou-se $\Delta L = 1$. Seja W_{\max} a largura de varrimento obtida com $D = f(L_i)_{\max}$. Tem-se que W_{\max} é um limite superior para a largura de varrimento W . Repare-se que W_{\max} é máximo porque se D fosse maior que $f(L_i)_{\max}$ então W seria menor. Contudo, devido à impossibilidade de obter o verdadeiro parâmetro D , não é possível estabelecer que as estimativas da largura de varrimento obtidas pelo

método constituem limites superiores ou inferiores para os verdadeiros parâmetros da largura de varrimento.

2.2 Modelo de Neuendorffer

Considere-se um observador com um dado sensor e uma colecção de números, r_i , $i = 1 \dots, N$, que representam as distâncias a que os alvos são detectados pela primeira vez. Então $\{r_i: i = 1, \dots, N\}$ é uma colecção de distâncias iniciais de avistamento.

Neste modelo assume-se que o sensor possui uma distância R , designada por distância de detecção, que varia aleatoriamente com o tempo, mas é constante durante a passagem de um alvo.

Um alvo é considerado detectado, a uma distancia r , se e só se passa a uma distância r do sensor. Considera-se que o trajecto percorrido pelo alvo relativamente ao sensor é descrito por uma trajectória rectilínea.

É sabido que existem casos em que os alvos passam directamente pelo sensor e não são detectados. Pode-se considerar que o sensor, nestas condições, não se encontra a funcionar correctamente. Esta situação pode ser facilmente modelada, definindo que a distância de detecção r assume o valor $R = -1$ quando o sensor não está a funcionar correctamente. Se γ_0 for a probabilidade de o sensor não estar funcionar correctamente, então tem-se $R = -1$ com probabilidade γ_0 .

Não é possível estimar γ_0 na situação descrita atrás. Neste caso, é importante considerar a hipótese de que a distância de detecção para um determinado tipo de alvo é uma variável aleatória associada ao sensor.

Esta variável aleatória não depende do tipo de alvo, nem da presença ou ausência deste. Durante o período de tempo em que decorre a “experiência”, N alvos são detectados com distâncias r_1, r_2, \dots, r_N . Contudo, não se conhece quantos alvos não foram detectados.

A distância lateral de um alvo (sendo ou não detectado) é designado por ρ . Esta é a menor distância do observador à linha correspondente à trajectória rectilínea descrita pelo alvo. Pela definição de distância de detecção, observa-se que o alvo só é detectado se e só se $0 \leq \rho \leq R$. Ambos ρ e R são variáveis independentes.

Seja $r_0 \in \mathbb{R}$. Interessa considerar duas funções:

$$f^0(r_0) = 1 - F_R(r_0) = P[R \geq r_0] \quad (67)$$

e

$$L^0(r_0) = Pr[\text{alvo ser detectado, dado que a distância lateral é } r_0] \quad (68)$$

$f^0(r_0)$ é uma função que depende exclusivamente do sensor, mas é possível estimá-la através de distâncias de detecção inicial.

O espaço de probabilidade que tem interesse conhecer é o espaço (ρ, R) onde $\rho \geq 0$ e $R \geq -1$.

As distâncias r_1, r_2, \dots, r_N dos alvos detectados constituem realizações independentes de uma variável aleatória, R , com uma determinada distribuição probabilística. Esta distribuição não é mais do que a distribuição das distâncias de detecção (distâncias de detecção do sensor para um determinado alvo), ou seja, a distribuição de R dado que $0 \leq \rho \leq R$.

Tem-se que

$$L^0(r_0) = Pr[0 \leq \rho \leq R | \rho = r_0] = P[R \geq r_0 | \rho = r_0]. \quad (69)$$

Na última expressão os eventos $A = \{R \geq r_0\}$ e $B = \{\rho = r_0\}$ são independentes, logo

$$L^0(r_0) = Pr[R \geq r_0] = f^0(r_0) \quad (70)$$

É necessário obter uma estimativa para $f^0(r_0)$. Dado que existe uma amostra da distribuição de R dada a detecção ($0 \leq \rho \leq R$), tem-se:

$$Pr[r_0 \leq R \leq r_0 + \Delta_{r_0} | \text{detecção}] \cong \frac{\Delta_n}{N}, \quad (71)$$

em que Δ_n é o número de detecções cujas distâncias estão no intervalo $[r_0, r_0 + \Delta_{r_0}]$ e N é o número total de observações.

Mas, $Pr[r_0 \leq R \leq r_0 + \Delta_{r_0} | \text{detecção}] = Pr[r_0 \leq R \leq r_0 + \Delta_{r_0} | 0 \leq \rho \leq R]$ e pela probabilidade condicional tem-se

$$Pr[r_0 \leq R \leq r_0 + \Delta_{r_0} | \text{detecção}] = \frac{Pr[r_0 \leq R \leq r_0 + \Delta_{r_0} \wedge 0 \leq \rho \leq R]}{Pr[0 \leq \rho \leq R]} \quad (72)$$

Seja $\alpha = Pr[\rho \leq R] = Pr[\text{detecção}]$. O numerador em (72) difere negligenciavelmente de $Pr[r_0 \leq R \leq r_0 + \Delta_{r_0} \wedge 0 \leq \rho \leq r_0]$ se Δ_{r_0} é pequeno e ρ possuir uma distribuição contínua.

Dado que $\{r_0 \leq R \leq r_0 + \Delta_{r_0}\}$ e $\{\rho \leq r_0\}$ são eventos independentes, tem-se que as expressões (71) e (72) assumem

$$\frac{Pr[r_0 \leq R \leq r_0 + \Delta_{r_0}] \cdot P[\rho \leq r_0]}{\alpha} \cong \frac{\Delta_n}{N}. \quad (73)$$

Suponha-se que ρ possui distribuição uniforme no intervalo $0 \leq \rho \leq \rho^*$. Então a expressão (73) fica

$$P[r_0 \leq R \leq r_0 + \Delta_{r_0}] = \begin{cases} \frac{\alpha}{N} \cdot \frac{\rho^* \Delta_n}{r_0} & \text{se } r_0 \leq \rho^* \\ \frac{\alpha}{N} \cdot \Delta_n & \text{se } r_0 > \rho^* \end{cases} \quad (74)$$

A estimação de $f^0(r_0)$, ou de $1 - f^0(r_0)$, que é não decrescente, será feita usando a expressão (74). A equação será satisfeita nos valores discretos de $r = r_1, r_2, \dots, r_N$ em que o índice r_0 é substituído pelos valores de $r = -1$ e $r = r_1, r_2, \dots, r_N$, com magnitudes $\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_N$, em que

$$\gamma_0 = P[R = -1], \text{ desconhecido,}$$

$$\gamma_i = \frac{\alpha}{N} \cdot \frac{R}{r_i} \quad \text{se } r_i \leq R, \quad (75)$$

$$\gamma_i = \frac{\alpha}{N} \quad \text{se } r_i > R.$$

Se $\gamma_0 = P[R = -1]$ então $1 - \gamma_0 = P[R > -1]$, ou seja, $1 - \gamma_0 = P[R \geq 0]$.

Somando em $i = 1, \dots, N$ tem-se

$$1 - \gamma_0 = \sum_{i=1}^N \gamma_i = \sum_{r_i \leq R} \frac{\alpha R}{N r_i} + \sum_{r_i > R} \frac{\alpha}{N} = \frac{\alpha}{N} \cdot \left[\sum_{i=1}^N \frac{R}{r_i} + M \right], \quad (76)$$

em que (76) $M = \#\{r_i > R: i = 1, \dots, N\}$. Através de (68) é possível estimar α/N :

$$\frac{\alpha}{N} = \frac{1 - \gamma_0}{\sum_{i=1}^N \frac{R}{r_i} + M}. \quad (77)$$

Assim, a expressão (67) pode ser escrita como

$$\begin{aligned} \gamma_0 &= P[R = -1], \\ \gamma_i &= \frac{R}{r_i} \cdot \frac{1 - \gamma_0}{\sum_{i=1}^N \frac{R}{r_i} + M} \quad \text{se } r_i \leq R, \\ \gamma_i &= \frac{1 - \gamma_0}{\sum_{i=1}^N \frac{R}{r_i} + M} \quad \text{se } r_i > R. \end{aligned} \quad (78)$$

Finalmente, $f^0(r_0) = \sum_{r_i \geq r} \gamma_i = L^0(r)$.

2.3 Modelo de Regressão Logística

A aplicação de modelos de regressão logística para construir curvas de probabilidade de detecção surgiu primeiramente em 1981 por Edwards *et al* (1982). A utilização destes modelos sucede a experiências de detecção envolvendo navios de busca, helicópteros e aeronaves (Edwards, 1980), onde se verificou que as curvas empíricas de probabilidade de detecção ficavam abaixo das curvas baseadas na lei do cubo inverso de Koopman (1956a) e como resultado algumas modificações foram recomendadas. Até esse momento não era notório o efeito de diferentes condições ambientais na probabilidade de detecção, pois as curvas eram construídas em função da distância lateral e estavam associadas a uma combinação plataforma/sensor/alvo.

Com os modelos de regressão logística, Edwards *et al* (1982) apresenta estimativas da largura de varrimento sob diferentes condições ambientais. Os regressores considerados incluem: distância lateral, altura da vaga, tempo em serviço, velocidade do vento, visibilidade, tipo de plataforma de busca, densidade das nuvens e características do alvo. As variáveis que não apresentaram influência estatisticamente significativa na curva de distância lateral foram: velocidade de busca, elevação do sol, localização geográfica da área de busca e localização do alvo na área de busca.

No modelo de regressão logística, a probabilidade de detecção, P_d , é definida pela seguinte equação

$$P_d = \frac{e^{\beta_0 + \sum_{j=1}^m \beta_j x_j}}{1 + e^{\beta_0 + \sum_{j=1}^m \beta_j x_j}}, \quad (79)$$

ou de forma equivalente,

$$P_d = \frac{1}{1 + e^{-(\beta_0 + \sum_{j=1}^m \beta_j x_j)}}. \quad (80)$$

No modelo de regressão logística a variável resposta é dicotómica. Representando o evento “alvo detectado” pela variável binária Y ($Y = 1$ significa “alvo detectado” e $Y = 0$ “alvo não detectado”), a probabilidade de detecção para um conjunto de regressores representados pelo vector $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ é

$$P_d(Y = 1|x) = \frac{1}{1 + e^{-(\beta_0 + \sum_{j=1}^m \beta_j x_j)}} \quad (81)$$

Os modelos de regressão logística são estimados por métodos de máxima verosimilhança. A função de verosimilhança expressa a probabilidade de obter os valores observados na amostra como uma função dos parâmetros do modelo. O método de máxima verosimilhança procura os valores dos parâmetros do modelo que tornam a amostra mais provável, ou verosímil, de observar.

Este modelo de detecção pressupõe a existência de dados correspondentes a detecções e a não detecções. Perante a matriz de dados X , em que a linha i (corresponde ao i -ésimo registo de observações) contém valores de m variáveis associadas ao evento Y_i , então a probabilidade de $Y_i = y_i$, P_i , quando se observa X_i é:

$$P_i = P(Y_i = 1|X_i) = \frac{1}{1 + e^{-(\beta_0 + \sum_{j=1}^m \beta_j x_j)}} \quad (82)$$

A contribuição do i -ésimo registo para a função de verosimilhança é P_i quando $Y = 1$ e $1 - P_i$ quando $Y = 0$. Pode-se escrever a contribuição para a função verosimilhança como:

$$P_i^{Y_i} (1 - P_i)^{1-Y_i}. \quad (83)$$

Assumindo que as observações são independentes, a função verosimilhança é o produto das contribuições individuais:

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{\beta}) = \prod_{i=1}^n \{P_i^{Y_i}(1 - P_i)^{1-Y_i}\}. \quad (84)$$

Pretende-se obter estimativas dos parâmetros $\boldsymbol{\beta}$ para os quais corresponde o máximo da função verosimilhança. De forma equivalente maximiza-se o logaritmo de (84), designado por logaritmo da função verosimilhança:

$$\log \mathcal{L}(\boldsymbol{\beta}) = \sum_{i=1}^n \{Y_i \log(P_i) + (1 - Y_i) \log(1 - P_i)\} \quad (85)$$

Esta função é maximizada por métodos não lineares, pois as equações das derivadas parciais são não lineares relativamente aos parâmetros $\boldsymbol{\beta}$. Em Minka (2003) são comparados diferentes métodos numéricos para otimizar a função verosimilhança do modelo logístico.

2.3.1 Metodologia de recolha e tratamento de dados

Nas secções seguintes discute-se duas metodologias de recolha e tratamento dos dados obtidos em experiências de detecção no mar.

O procedimento de recolha de dados, que é prática comum para construir os histogramas de frequências relativas mencionados na secção 1.3, assenta na criação de oportunidades de detecção. Estas oportunidades assumem dois possíveis resultados: “*alvo detectado*” ou “*alvo não detectado*”. Associado a cada um destes possíveis resultados são registados os valores de diversos factores que influenciam a performance de detecção de um determinado sensor. Este procedimento requer a disponibilização de diversos meios (navios de busca, navios auxiliares, técnicos, alvos de busca) para planear e conduzir as experiências de detecção e não está isento de custos económicos. Em Fitzgerald (1995) são apresentados resultados de uma experiência deste tipo conduzida conjuntamente pelas Guarda Costeira do Canadá e pela Guarda Costeira Norte Americana.

A metodologia para obter estimativas da probabilidade de detecção em função da distância lateral consiste em planear e conduzir experiências de detecção no mar com meios necessários para recolher toda a informação fundamental de forma a atingir os

objectivos previamente delineados. Os objectivos de um estudo sobre o desempenho de sensores relativamente à sua capacidade de detecção variam de acordo com diferentes situações em que se pretende avaliar essa capacidade. Em Fitzgerald (1990), são apresentadas curvas de probabilidade de detecção e estimativas para a largura de varrimento para diversas combinações plataforma/sensor/contacto, em que o contacto se encontra estático na zona de busca, enquanto em Fitzgerald (1998) pretende-se analisar o efeito de o alvo se encontrar à deriva. Contudo, em ambos os estudos a metodologia subjacente ao planeamento e à condução das experiências no mar é idêntica.

Esta metodologia consiste em definir uma área de experiências que reúne boas características para a execução dos ensaios de mar. São escolhidos os navios de busca e salvamento, assim como o tipo de contacto, tipos de sensores e os efeitos (factores humanos, ambientais, etc.) que se pretendem medir. É também definida *a priori* a localização dos contactos na área de busca, assim como o padrão de busca a executar pelo navio. A experiência descrita em Fitzgerald (1993) está dividida em três fases distintas: uma primeira fase, correspondente ao desenho e planeamento da experiência; uma segunda fase correspondente à execução dos ensaios de mar onde é registada toda a informação relativa às detecções; e uma terceira fase em que é feito o tratamento e análise dos dados recolhidos.

Na prática, são escolhidos alguns padrões de busca e são definidas oportunidades de detecção durante o percurso do navio na área de busca. Estas experiências requerem a presença de um técnico a bordo do navio de busca, que controla a experiência e tem conhecimento da localização dos alvos e da sua distância ao navio. Por sua vez, a detecção de um alvo é registado pelos vigias do navio.

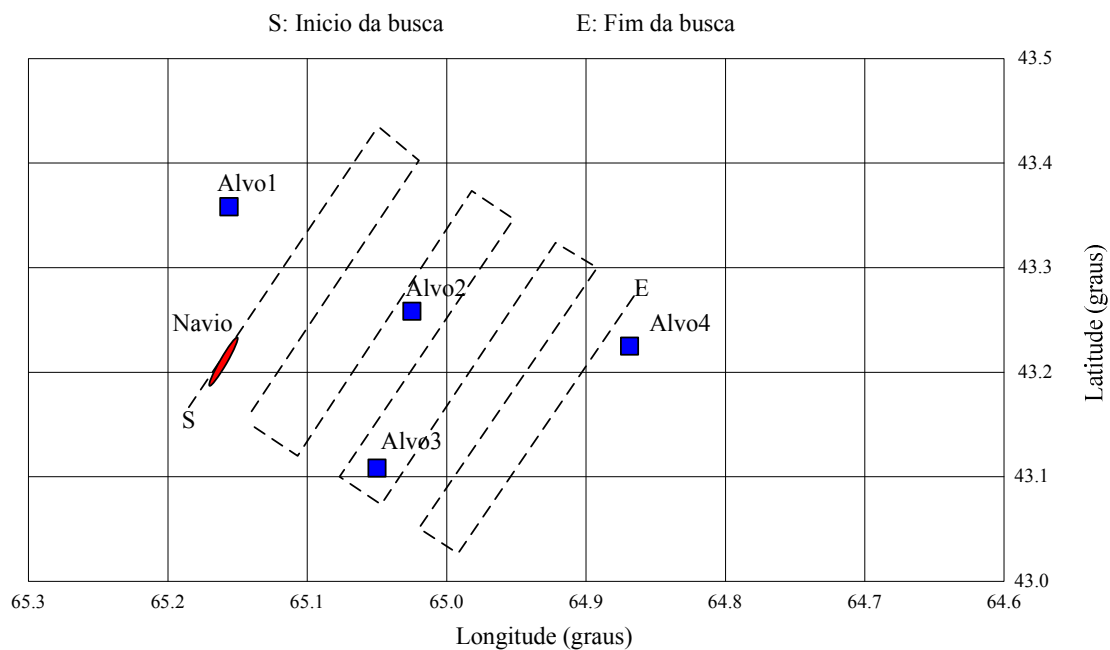


Figura 22. Padrão de busca para registo de detecções.

A Figura 22 ilustra um dos padrões de busca executados nos ensaios de mar realizados no Outono de 1995 nos Grandes Bancos da Terra Nova, pela Guarda Costeira do Canadá e pela Guarda Costeira Norte Americana inseridos no estudo de Fitzgerald (1998). As variáveis consideradas em Fitzgerald (1995), para detecções visuais, inserem-se em cinco grupos: alvo, navio de busca, condições ambientais, luminosidade e factor humano.

Alvo	Navio de Busca	Ambiente	Luminosidade	Humano
Tipo	Velocidade	Nuvens	Elevação sol	Posição
Cor	Altura da ponte	Visibilidade		Experiência
Tamanho	Passo da hélice	Precipitação		Tempo em tarefa
		Velocidade vento		
		Altura ondas		
		Espuma ondas		
		Temperatura ar		
		Temperatura água		

Tabela 2. Variáveis independentes para detecções visuais.

Após a recolha de toda a informação associada a cada oportunidade são construídas as curvas de probabilidade de detecção para diferentes combinações de plataforma/sensor/alvo através da estimação dos parâmetros do modelo logístico, em que são utilizadas todas as variáveis referidas na Tabela 2.

Para tratar os dados recolhidos foi utilizado um software comercial da SYSTAT, Inc. designado LOGIT. Este programa utiliza o método de máxima verosimilhança para ajustar a função logística à variável resposta Y . As variáveis são pré-seleccionadas e verificadas pela sua significância estatística ao nível de confiança de 90% num procedimento iterativo. As variáveis que não são significativas ao nível de 90% de confiança são rejeitadas sequencialmente, começando pela que tem menor significância estatística. A análise de regressão logística é repetida após a eliminação de uma variável até que todas as restantes variáveis contribuam significativamente para o modelo com uma função linear dos regressores

$$\lambda = \beta_0 + \sum_{j=1}^m \beta_j x_j. \quad (86)$$

Após a determinação de λ , a probabilidade de detecção, P_d , como função da distância lateral, pode ser determinada para outros valores das variáveis significativas. A largura de varrimento pode então ser calculada através da relação

$$W = 2 \int_0^{+\infty} P_d(x) dx. \quad (87)$$

2.4 Modelo da Lei de Detecção da Enésima Potência

Em Washburn (2004, 4-3) é apresentado um modelo genérico para a curva de distância lateral sempre que é necessário considerar esta curva como simétrica e unimodal. O modelo apresentado é dado por

$$P_l(x) = 1 - \exp\left(-\left|\frac{x_0}{x}\right|^b\right). \quad (88)$$

onde x é a distância lateral e x_0 e b são parâmetros. O parâmetro *sweep width* é dado por

$$W = 2x_0\Gamma\left(1 - \frac{1}{b}\right), \quad (89)$$

em que $\Gamma(\cdot)$ é a função Gama definida por $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$. A taxa de detecção associada à lei de detecção do cubo inverso é definida por

$$\delta(r) = \frac{k}{r^3}, \quad (90)$$

em que r é a distância do alvo ao sensor e k é um parâmetro que resume as condições circunstanciais em que alvo e sensor se encontram. Lida (2003) generaliza a expressão (66) e define a taxa de detecção em função de parâmetros k e n , da seguinte forma

$$f(r) = \left(\frac{k}{r^3}\right)^n. \quad (91)$$

À taxa de detecção em (91), Koji Lida dá o nome de “Lei de Detecção da Enésima Potência”. Se um sensor busca um contacto que se encontra a uma distância r durante um período de t horas independentes, então a probabilidade de detecção é dada por

$$P_d(r, t) = 1 - \exp(-f(r)t). \quad (92)$$

A curva de distância lateral para a lei de detecção da enésima potência surge considerando um cenário em que o sensor se desloca com velocidade v constante e ao longo de uma linha rectilínea com CPA x ao alvo. O potencial de avistamento, $F(x)$, do alvo para este cenário é

$$F(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{k^n}{(k^2 + x^2t)^{n/2}} dt = \frac{k^n\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{v|x|^{n-1}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}. \quad (93)$$

A curva de distância lateral é dada por:

$$P_l(x) = 1 - \exp(-F(x)) = 1 - \exp\left(-\frac{k^n\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{v|x|^{n-1}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\right). \quad (94)$$

Integrando $P_l(x)$ em x a tomar valores entre $(-\infty, +\infty)$, obtém-se o *sweep width* para a lei de detecção da enésima potência:

$$W = 2\Gamma\left(\frac{n-2}{n-1}\right)\left(\frac{k^n\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{v\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\right)^{1/n-1}. \quad (95)$$

Definindo $x_0 = \left(\frac{k^n\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{v\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\right)^{1/n-1}$, tem-se a curva de distância lateral e o parâmetro

sweep width dados por

$$P_l(x) = 1 - \exp\left(-\left|\frac{x_0}{x}\right|^{n-1}\right), \quad (96)$$

$$W = 2x_0\Gamma\left(\frac{n-2}{n-1}\right). \quad (97)$$

As expressões (96) e (97) coincidem exactamente com as funções (88) e (89). Com $n = 3$ nas equações, obtém-se $P_l(x)$ e W para a lei da detecção do cubo inverso, e considerando $n \rightarrow \infty$ tem-se a lei de detecção definitiva. Desta forma, a lei da detecção da Enésima Potência é uma lei de detecção que generaliza vários tipos de leis de detecção, que podem ser aproximadas através da escolha apropriada dos parâmetros k e n .

2.4.1 Estimação dos parâmetros k e n a partir de uma experiência no mar

Koji sugere a seguinte experiência para recolher dados de forma a estimar os parâmetros k e n . O sensor desloca-se com velocidade v constante e aproxima-se do alvo (que se encontra estático) com rumo constante de forma a obter uma distância lateral $x = 0$. Quando o sensor detecta o alvo, é registada a distância inicial de detecção e o sensor volta a atrás ao ponto de partida e repete o mesmo percurso, N vezes, até ocorrer detecção. Seja r_1, r_2, \dots, r_N as distâncias de detecção em N oportunidades de detecção realizadas. Aqui assume-se que o sensor detecta sempre o alvo, apenas varia a distância de detecção inicial. Considere-se, sem perda de generalidade, que $r_i \geq r_{i+1}$. A curva das fracções cumulativas é definida como uma função linear por troços conectando os pontos $\overline{G}_0(r_i), i = 1, 2, \dots, N$, sequencialmente:

$$\overline{G}_0(r_i) = \frac{i}{N}. \quad (98)$$

$\bar{G}_0(r_i)$ é a função distribuição cumulativa das distâncias de detecção r_i . Assumindo a equação (67) e calculando o potencial de avistamento no percurso do sensor segundo a trajectória rectilínea no *eixo* $-y$ com distância lateral $x = 0$, obtém-se a função distribuição cumulativa teórica das distâncias de detecção correspondentes a $\bar{G}_0(r_i)$, dada pela seguinte equação

$$\bar{G}(y) = 1 - \exp\left(-\int_y^\infty \frac{f(r)}{v} dr\right) = 1 - \exp\left(-\frac{k^n}{v(n-1)|y|^{n-1}}\right). \quad (99)$$

A função densidade de probabilidade $g(y)$ é obtida como

$$g(y) = -\frac{\partial \bar{G}(y)}{\partial y} = \frac{k^n}{v|y|^n} \exp\left(-\frac{k^n}{v(n-1)|y|^{n-1}}\right). \quad (100)$$

Em Lida (2003), Koji apresenta dois métodos para estimar os parâmetros k e n . São sugeridos o Método dos Momentos e o Método da Máxima Verosimilhança. A função de verosimilhança é definida por:

$$\mathcal{L}\{r_i\} = \prod_{i=1}^N g(r_i) = \frac{k^{nN}}{v^N} (\prod_{i=1}^N r_i)^{-n} \exp\left(-\frac{k^n}{v(n-1)} \sum_{i=1}^N r_i^{1-n}\right) \quad (101)$$

Os estimadores de máxima verosimilhança para k e n derivam das condições de 1ª ordem, isto é, são solução do sistema de equações das primeiras derivadas parciais igualadas a zero.

$$\begin{cases} \frac{\partial \log \mathcal{L}\{r_i\}}{\partial k} = 0: \frac{Nn}{k} - nk^{n-1} \frac{\sum_{i=1}^N r_i^{1-n}}{v(n-1)} = 0 \\ \frac{\partial \log \mathcal{L}\{r_i\}}{\partial n} = 0: N \log(k) - \sum_{i=1}^N \log(r_i) - \frac{k^n}{v(n-1)^2} \left[(n-1) \sum_{i=1}^N \{r_i^{1-n} \log(k/r_i)\} - \sum_{i=1}^N r_i^{1-n} \right] = 0. \end{cases} \quad (102)$$

Resolvendo em ordem a k , vem

$$k = \left(\frac{Nv(n-1)}{\sum_{i=1}^N r_i^{1-n}} \right)^{1/n}. \quad (103)$$

Substituindo a equação (103) em (102), tem-se

$$N(n-1) \sum_{i=1}^N \{r_i^{1-n} \log(r_i)\} + N \sum_{i=1}^N r_i^{1-n} - (n-1) \sum_{i=1}^N r_i^{1-n} \sum_{i=1}^N \log(r_i) = 0 \quad (104)$$

A equação (104) não pode ser resolvida analiticamente em ordem o parâmetro n , e portanto, tem de ser resolvida numericamente, por exemplo, através do método de Newton, e então k é obtido pela equação (103).

Usando a equação (100), é possível calcular o primeiro e o segundo momento das distâncias de detecção, dados por

$$E(R) = \int_0^{\infty} yg(y) dy = \left(\frac{k^n}{v(n-1)} \right)^{1/(n-1)} \Gamma\left(\frac{n-2}{n-1}\right), n > 2, \quad (105)$$

$$E(R^2) = \int_0^{\infty} y^2 g(y) dy = \left(\frac{k^n}{v(n-1)} \right)^{2/(n-1)} \Gamma\left(\frac{n-3}{n-1}\right), n > 3. \quad (106)$$

No método dos momentos são usadas as seguintes condições

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N r_i = \left(\frac{k^n}{v(n-1)} \right)^{1/(n-1)} \Gamma\left(\frac{n-2}{n-1}\right), n > 2, \quad (107)$$

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N r_i^2 = \left(\frac{k^n}{v(n-1)} \right)^{2/(n-1)} \Gamma\left(\frac{n-3}{n-1}\right), n > 3. \quad (108)$$

O parâmetro k é resolvido a partir da equação (107) como

$$k = \left[v(n-1) \left[\frac{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N r_i}{\Gamma((n-2)/(n-1))} \right]^{n-1} \right]^{1/n}. \quad (109)$$

Substituindo k na equação (108), obtém-se

$$\Gamma\left(\frac{n-2}{n-1}\right)^2 - a\Gamma\left(\frac{n-3}{n-1}\right) = 0, \quad a = \frac{\left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N r_i\right)^2}{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N r_i^2}. \quad (110)$$

A equação (110) terá de ser resolvida numericamente.

A ideia de que a curva de distância lateral pode ser estimada com base em distâncias iniciais através de uma experiência planeada, onde são gerados uma sequência de encontros ao longo de uma linha recta, foi inicialmente proposta por Washburn (2004, 4-6). No entanto, Koji alerta para o facto de este método não ser prático em aplicações no

mundo real, dado que necessita de um volume considerável de dados para estimar os parâmetros k e n . O notável do método proposta de recolha de dados está na possibilidade de estimar os parâmetros k e n da lei de detecção da enésima potência sem ser necessário considerar outras distâncias laterais para além da distância lateral $x = 0$.

O modelo proposto por Lida (1993) tem por hipótese que a função $\overline{G_0}(r_i)$ aproxima correctamente a “verdadeira” curva de distância lateral para o conjunto de factores para os quais foram recolhidas as distâncias de avistamento r_i . Em boa verdade esta “verdadeira” função de distância lateral pode nem ser possível de se conhecer, e ao usar $\overline{G_0}(r_i)$ na sua estimação pode-se estar a incorrer num erro que não é possível medir.

3 Capítulo 3 – Comparação e Seleção de Modelos

Neste capítulo serão comparados dois de entre os modelos apresentados no capítulo anterior. O objectivo consiste em comparar modelos que permitam estimar a curva de distância lateral e o seu parâmetro natural, o *sweep width* ou largura de varrimento, a partir de distâncias iniciais de detecção. O critério que será apresentado pode ser utilizado para comparar quaisquer modelos, independentemente de usarem um conjunto de distâncias iniciais ou de distâncias laterais. Como será evidenciado na próxima secção, o modelo de movimento relativo sobre o qual assenta a curva de distância lateral para uma combinação de sensor, alvo e condições ambientais, estabelece as distâncias laterais e os modelos de regressão logística, são ferramentas ideais para inferir sobre a capacidade de detecção de um sensor.

3.1 Motivação para o uso de Distâncias Iniciais de Detecção

Como já foi referido, a primeira experiência levada a cabo para coligir informação de avistamentos com vista à produção de tabelas com o parâmetro largura de varrimento ocorreu em 1955 com a Guarda Costeira Norte Americana (Richardson, 1968). Essencialmente, recolheu-se informação relativa a avistamentos visuais de contactos de superfície. As distâncias de avistamento recolhidas eram distâncias iniciais de avistamento. Na secção 2.1 é ilustrado como as distâncias de detecção inicial são transformadas em distâncias laterais. Desde muito cedo que se constatou a dificuldade em recolher as distâncias laterais. Repare-se que o modelo de movimento relativo entre sensor e alvo, sobre o qual é construída a probabilidade cumulativa de detecção, depende funcionalmente da distância lateral e não da distância inicial de detecção. De facto, a distância lateral é o argumento da curva de distância lateral à qual corresponde uma probabilidade cumulativa de detecção. Nas primeiras experiências de mar, efectuadas para recolher dados de avistamentos, as distâncias iniciais de detecção sempre foram de fácil registo. Contudo, a informação recolhida dos avistamentos estava condicionada a detecções positivas, ou seja, a alvos detectados. Nestas experiências não era possível recolher informação sobre os alvos não detectados.

Apenas mais tarde, em 1980, foram combinados esforços para conduzir experiências de mar, com o objectivo de recolher dados de avistamento com informação adicional relativo à detecção ou não de um contacto para uma determinada distância lateral x (Fitzgerald, 1995). Destes estudos, verificou-se que o delineamento de experiências de mar para construir oportunidades de detecção permite, de facto, recolher os 1's e 0's ("detecção" e "não detecção") associados a uma distância x , assim como outras variáveis de natureza ambiental e operacional que possam influenciar a probabilidade de detecção. No entanto, também se verificou que o número de oportunidades construídas era insuficiente para a estimação dos modelos de regressão logística. Nesta altura, os investigadores tinham na sua posse os dados "correctos" para aplicar os seus modelos, mas não tinham informação em quantidade suficiente para estimar a probabilidade de detecção cumulativa para as combinações dos níveis dos factores de planeamento definidos. Apesar de serem recolhidos imensos dados de avistamento, estes eram poucos quando agrupados segundo o tipo de contacto (jangada, navio de pesca, mercante, etc.), condições ambientais (luminosidade, visibilidade náutica, altura da vaga, etc.) e factores humanos (cansaço, número de vigias, tempo no serviço).

Associado ao pequeno volume de dados para as combinações dos níveis de factores de planeamento delineados, a realização deste tipo de experiências no mar requer o empenhamento de vários navios e tipos de contactos a estudar, com os respectivos custos económicos associados. A recolha destes dados de avistamento decorre normalmente em condições meteorológicas favoráveis, de forma a garantir a segurança das guarnições e equipas técnicas responsáveis pela investigação. Esta situação impede que sejam recolhidos dados de avistamento em condições meteorológicas mais adversas.

Estas experiências envolveram o empenhamento de vários navios da Guarda Costeira Norte Americana e da Guarda Costeira do Canadá (Fitzgerald, 1990), cuja principal missão é participar em operações de busca e salvamento e não em participar em missões de recolha de informação científica.

Para além das dificuldades já apontadas, existe ainda uma situação onde não é possível observar dados de detecção associados a distâncias laterais. Esta situação é muito relevante quando se pretende inferir sobre a capacidade de detecção relativamente a alvos hostis ou não cooperativos. Neste caso, apenas estão disponíveis as distâncias iniciais de

detecção. Sucede que pequenas distâncias de detecção são menos frequentes de observar que as maiores. Está-se perante um fenómeno de truncatura dos dados de detecção, onde a média das distâncias iniciais de detecção fornece um limite superior para metade da largura de varrimento (Washburn, 2004, pág. 11-6).

A Tabela 3 resume as vantagens e desvantagens das distâncias iniciais e das distâncias laterais, na construção das curvas de distância lateral.

	Distâncias Iniciais	Distâncias Laterais
Vantagens	<ul style="list-style-type: none"> • Recolha de dados resulta de encontros fortuitos (maior variabilidade de factores) • Grande volume de dados recolhidos • Baixo custo económico 	<ul style="list-style-type: none"> • Aplicação de modelos de regressão logística • Inferência estatística sobre o modelo e o parâmetro largura de varrimento
Desvantagens	<ul style="list-style-type: none"> • Dados sobre alvos não detectados não estão disponíveis • Modelos produzem estimativas enviesadas da largura de varrimento 	<ul style="list-style-type: none"> • Requer delineamento de experiências • Elevado custo económico na recolha de dados • Pequeno volume de dados recolhidos

Tabela 3. Distâncias iniciais vs distâncias laterais

3.2 Dados, Factores e Tratamentos

A folha de registo de avistamentos (REGAVIST) foi desenhada de forma a definir os dados necessários ao estudo, com o objectivo de permitir o registo rápido e simples de informação pertinente associada aos contactos. No total, foram coligidos 513 registos de avistamento durante dois períodos distintos de 16 de Março a 31 de Agosto de 2005 e de 6 de Fevereiro a 26 de Julho de 2006.

Como já foi referido, a curva de distância lateral é definida para uma combinação de níveis de factores de planeamento e, portanto, para cada tipo de sensor (por exemplo, sensor visual), existe uma família de curvas de distância lateral. Esta família contém uma função de distância lateral para cada combinação de tipo de alvo e de condições ambientais.

Foram considerados dez factores que influenciam as distâncias iniciais de detecção radar e visual, com o seguinte significado:

- **Luminosidade** – **D** caso a detecção tenha ocorrido durante o dia, **C** caso crepúsculo e **N** caso nocturno;
- **GDH** - Grupo Data Hora;
- **PrimDet** - **R** caso a detecção inicial tenha sido efectuada via radar, **V** caso visual;
- **DistRadar** - Distância Radar a que um contacto é detectado pela primeira vez (milhas náuticas);
- **DistVisual** - Distância Radar a que um contacto é detectado visualmente pela primeira vez (milhas náuticas), com ou sem auxiliares de visão;
- **CatNavio** – Categoria do contacto:
{P – Pesca; M – Mercante; G – Guerra; R – Recreio};
- **TipoNavio** – Tipo de contacto:
{P – Pequeno; M – Médio e G – Grande};
- **CondMeteo** – Condições meteorológicas de acordo com a escala de *Beaufort*;
- **Visib** – Visibilidade (milhas náuticas);
- **NumVig** – Número de vigias na ponte por ocasião da detecção visual;
- **Plataforma** – Navio da Marinha Portuguesa que recolhe os registos de avistamento.

A descrição da Categoria e Tipo de navio encontra-se no Anexo A. A escala de *Beaufort* encontra-se em Anexo C.

Neste estudo um tratamento consiste num conjunto de distâncias de detecção associado a uma dada combinação de níveis dos factores definidos. Por exemplo, considerando os factores, Sensor, Tipo, Categoria e CondMeteo, um tratamento possível

consiste em considerar todas as distâncias de avistamento para os níveis Visual (distâncias de detecção visual), Pesca, Pequeno e Fresco.

Sensor	Categoria	Tipo	Visibilidade
Visual	1	1	< 10 milhas

Tabela 4. Níveis de 4 factores de um tratamento

Na Tabela 4 estão representados os níveis de quatro factores num tratamento. Este tratamento inclui todas as distâncias de detecção visual de navio de pesca de tipo pequeno em condições de visibilidade inferior a 10 milhas náuticas. Por não referir os restantes factores, este tratamento integra todas as distâncias de detecção visual que ocorreram em todos os níveis dos restantes factores não considerados.

A relação entre o número de registos coligidos e o número possível de níveis para todos os factores definidos não permite construir um número considerável de tratamentos abarcando todos os casos possíveis. Por este motivo, decidiu-se utilizar apenas tratamentos com os factores Sensor, Categoria, Tipo e Visibilidade. Dado que o factor visibilidade é uma variável com escala intervalar, foi necessário categorizá-la. Nem todos os factores correspondem a variáveis categóricas, mas todos eles podem ser categorizados. Os níveis escolhidos para a nova variável categórica respeitante à visibilidade foram valores inferiores a 10 milhas náuticas e valores superiores a este valor. Testou-se outras possibilidades para categorizar a visibilidade, mas isso levaria a tratamentos com muito poucas observações. Também se testou a possibilidade de agrupar categorias para a escala de *Beaufort* (Anexo C), mas seriam obtidos tratamentos com poucas observações.

Para representar um contacto será utilizada a seguinte notação: CATBV\$\$\$ em que CA representa a Categoria ($A \in \{1 - \text{Pesca}; 2 - \text{Mercante}; 3 - \text{Guerra}; 4 - \text{Recreio}\}$), TB representa o Tipo de contacto ($B \in \{1 - \text{Pequeno}; 2 - \text{Médio}; 3 - \text{Grande}\}$) e V\$\$\$ a visibilidade ($$$$ \in \{_{10}, 10_{10}\}$). Um contacto da categoria Pesca Médio é representado pela simbologia C1T2, enquanto um mercante grande é representado por C2T3. Por exemplo, o tratamento C1T2V_10 representa todas as distâncias de avistamento visual de navios de pesca pequenos em condições de visibilidade inferior a 10 milhas náuticas (os

caracteres “_10” significam “inferior a 10 milhas náuticas”). Neste estudo, não são utilizadas as distâncias de detecção radar.

# distâncias de detecção visual em tratamento		Visibilidade	
		<10	≥10
Pescas	Pequeno	112	81
	Médio	4	23
	Grande	0	2

Tabela 5. Registos por tratamentos com navios da categoria pesca

# distâncias de detecção visual em tratamento		Visibilidade	
		<10	≥10
Mercantes	Pequeno	1	4
	Médio	12	44
	Grande	29	139

Tabela 6. Registos por tratamentos com navios da categoria mercante

# distâncias de detecção visual em tratamento		Visibilidade	
		<10	≥10
Guerra	Pequeno	1	0
	Médio	4	10
	Grande	6	4

Tabela 7. Registos por tratamentos com navios da categoria guerra

# distâncias de detecção visual em tratamento		Visibilidade	
		<10	≥10
Recreio	Pequeno	8	13
	Médio	0	7
	Grande	0	9

Tabela 8. Registos por tratamentos com navios da categoria recreio

Para todos os tratamentos com observações foi estimada a curva de distância lateral e respectivo parâmetro largura de varrimento. Os modelos utilizados foram o modelo de Neuendorffer e o modelo da lei da enésima potência com as variantes de estimação dos parâmetros k e n segundo o método da máxima verosimilhança e o método dos momentos. Os parâmetros utilizados na estimação da largura de varrimento foram:

1. Modelo Neuendorffer. O parâmetro γ_0 foi considerado nulo, ou seja, a probabilidade de o sensor não estar a funcionar correctamente é zero. Isto corresponde a assumir que todos os contactos com que os navios da Marinha Portuguesa se cruzaram foram todos detectados;
2. Modelo enésima potência em ambas as variantes (máxima verosimilhança e método dos momentos). Considerou-se a velocidade de navegação como $v = 10$ nós. A equação (100) foi resolvida tomando como ponto inicial do método de pesquisa $x_0 = 5$.

A escolha dos valores γ_0 é por si só uma questão de investigação em aberto a merecer trabalho futuro. Para cada tratamento tem-se a percepção de nem todos os contactos que se cruzam com os navios da Marinha Portuguesa são detectados. Portanto, a estimação de γ_0 terá de ser um assunto a abordar caso se pretenda conhecer com maior realismo as verdadeiras larguras de varrimento.

Os valores da largura de varrimento encontram-se em Anexo B.

3.3 Reamostragem e Método de Selecção

Nesta secção é apresentado um critério para seleccionar, ou eleger, um modelo para a curva de distância lateral de um tratamento com base em distâncias iniciais. Com os dois modelos apresentados, onde o modelo da lei de detecção da enésima potência pode ser estimado por dois métodos diferentes, tem-se três estimadores distintos para a curva de distância lateral. Um critério que permita esta comparação não deverá depender das hipóteses subjacentes aos modelos de detecção utilizados.

Na lei de detecção da enésima potência é utilizado o Desvio Quadrático Médio entre $\bar{G}_0(r_i)$ e $\bar{G}(r_i)$ (Lida, 1993, pág. 95) para escolher o parâmetro largura de varrimento de entre os dois métodos de estimação de k e n . Quando se considera outra lei de detecção

diferente para comparar as curvas obtidas, este critério deixa de ser adequado pois o modelo de Neuendorffer não assume que $\overline{G_0}(r_i)$ é uma boa aproximação da “verdadeira curva de distância lateral”.

Portanto, não é válida a utilização de métricas como o Erro Quadrático Médio para comparar o ajustamento das curvas de distância lateral construídas com o modelo de Neuendorffer e com o modelo da lei da enésima.

Dado que o parâmetro largura de varrimento, w , existe para qualquer modelo de curva de distância lateral, pode-se pensar na eficiência deste estimador, \hat{w} . Nesta linha de raciocínio, a ideia seria obter várias estimativas do parâmetro \hat{w} com base na reamostragem de um tratamento e escolher a curva de distância lateral correspondente ao modelo que apresenta menor variância de \hat{w} . O problema nesta abordagem é que o parâmetro w e o seu respectivo estimador \hat{w} emana de um modelo e não directamente da amostra ou tratamento. Por conseguinte, não se sabe se \hat{w} é centrado ou enviesado. Além disso, não é possível estimar o seu viés. Consequentemente, também este critério não se apresenta como uma hipótese válida para comparar modelos.

Procurar um estimador eficiente para w não se afigura uma tarefa fácil dado que o estimador \hat{w} depende sempre de um modelo matemático e não depende directamente de uma amostra de distâncias iniciais.

Neste cenário, propõe-se um critério para escolher o modelo de detecção usando o estimador de \hat{w} . Embora não dependa da variância de \hat{w} , este critério utiliza o conceito de estabilidade de resultados. A ideia consiste em construir K amostras ou réplicas com reposição das observações de um dado tratamento com dimensão igual à do tratamento. Seguidamente, cada réplica é particionada aleatoriamente em duas subamostras, também de igual dimensão. Assim se o tratamento tem dimensão N então cada réplica também terá dimensão N e as respectivas subamostras terão dimensão $[N/2]$. Para cada subamostra são aplicados os três estimadores de \hat{w} e é determinado o quadrado da diferença das respectivas estimativas entre as subamostras de cada réplica.

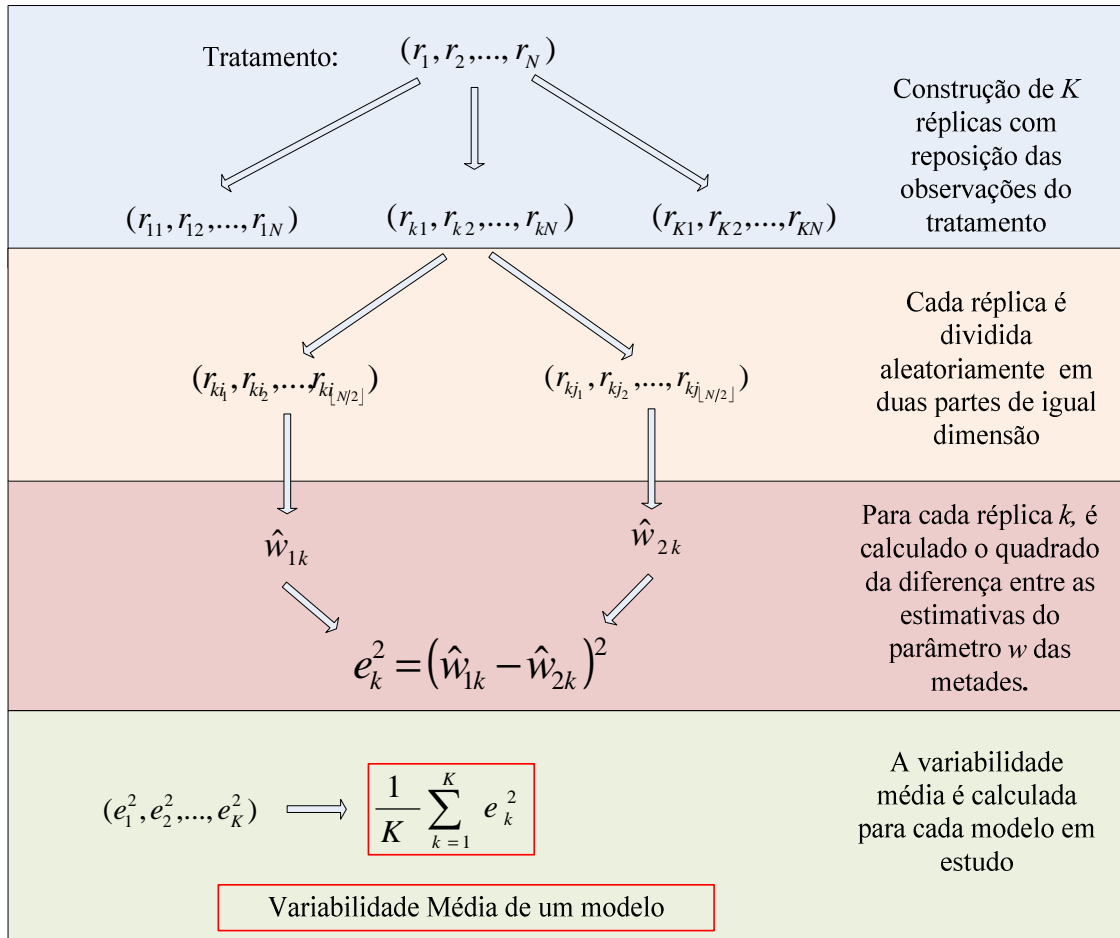


Figura 23. Construção da medida de variabilidade média de um modelo.

Na figura acima, é descrito o processo de obtenção de uma métrica, designada por **Variabilidade Média** de um modelo relativamente a um tratamento. O critério de estabilidade de resultados proposto consiste em escolher o modelo que apresenta menor variabilidade média.

A medida de variabilidade média foi construída para tratamentos com dimensão superior a 20 elementos. Por conseguinte, os tratamentos analisados foram C1T1V_10, C1T1V10_, C1T2V10_, C2T2V_10, C2T2V10_, C2T3V_10 e C2T3V10_.

3.4 Resultados

Nesta secção são apresentados os resultados computacionais e é descrito o processo de cálculo da variabilidade média para os tratamentos com mais de 20 observações. São ainda apresentados com maior detalhe as curvas estimadas com os modelos, assim como

os gráficos das equações que foram resolvidas numericamente nos métodos da máxima verosimilhança e método dos momentos.

3.4.1 Critério de estabilidade

O modelo de Neuendorffer e os modelos da lei de detecção da enésima potência foram implementados na linguagem MATLAB. As tabelas em Anexo D foram construídas com o script *reamostragem_regavist.m*, com os seguintes parâmetros:

- 1) As funções RAND, e RANDN, utilizadas na geração das réplicas e construção da medida de variabilidade média foram corridas com semente aleatória 0.
- 2) Modelo Neuendorffer. O parâmetro γ_0 foi considerado nulo, ou seja, a probabilidade de o sensor não estar a funcionar correctamente é zero. Isto corresponde a assumir que todos os contactos com que os navios da Marinha Portuguesa se cruzaram foram todos detectados.
- 3) Modelo enésima potência em ambas as variantes (máxima verosimilhança e método dos momentos). Considerou-se a velocidade de navegação como $v = 10$ nós. As equações (103) e (109) foram resolvidas tomando como ponto inicial do método de pesquisa $x_0 = 5$.

Com os parâmetros acima definidos obteve-se os seguintes resultados:

		Réplicas						
		100	200	500	1000	2500	5000	10000
Tratamentos	C1T1V_10	3	3	1	3	3	1	1
	C1T1V10_	1	3	3	3	1	1	3
	C1T2V10_	2	3	3	2	1	3	3
	C2T2V_10	1	2	1	1	2	1	3
	C2T2V10_	1	3	1	1	2	3	1
	C2T3V_10	3	2	2	3	3	2	3
	C2T3V10_	3	1	1	1	3	2	3

Tabela 9. Quadro resumo dos modelos com menor variabilidade média.

Na tabela acima os valores 1,2 e 3 correspondem, respectivamente, aos modelos de Neuendorffer, Enésima Potência com método da máxima verosimilhança e Enésima Potência com método dos momentos, respectivamente. Note-se que com 10000 réplicas o

modelo da lei de detecção da enésima potência estimado com o método da máxima verossimilhança tem sempre piores resultados que os restantes modelos. No geral, o método dos momentos aparenta ser um método de estimação que fornece resultados mais estáveis que o método da máxima verossimilhança. Contudo, o modelo de Neuendorffer surge para os tratamentos C1T1V_10 e C2T2V10_, como aquele que produz resultados mais estáveis em termos de largura de varrimento. É interessante notar que para os tratamentos C1T1V_10 e C1T1V10_ o modelo 2 nunca apresenta menor valor de variabilidade média. Neste caso, pode-se excluir o modelo 2 da estimação do parâmetro largura de varrimento. No entanto, este critério não é conclusivo não é conclusivo quanto à eleição entre o modelo 1 e 3 para estes tratamentos.

3.4.2 Estimação da curva de distância lateral para um tratamento

Nesta subsecção pretende-se ilustrar as curvas de distância lateral produzidas por cada um dos três modelos para um tratamento em particular. Considere-se o tratamento C2T2V10_. Este tratamento representa um conjunto de distâncias de detecção visual de navios de pesca de tipo médio em condições de visibilidade superiores a 10 *nm*.

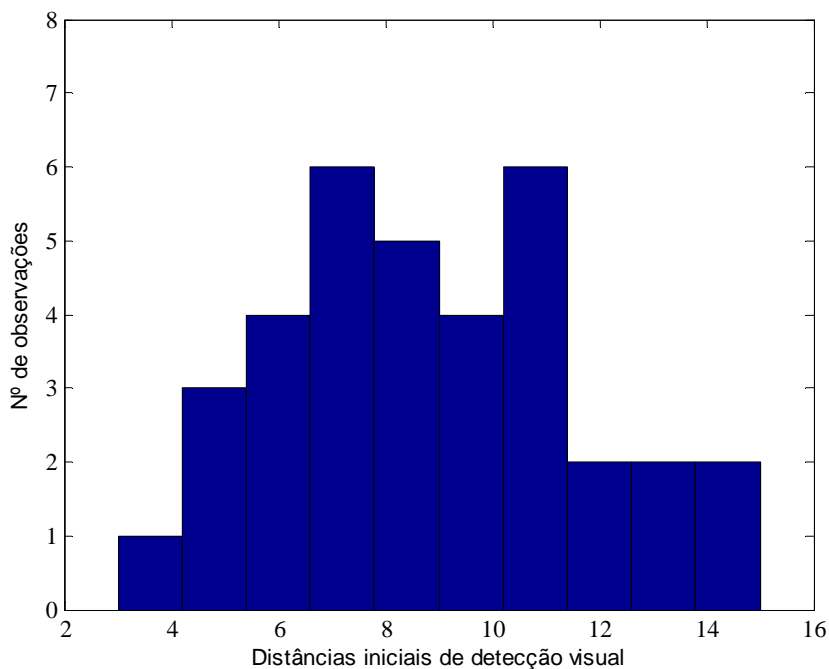


Figura 24. Histograma de C2T2V10_

Na Figura 24 tem-se o histograma das 23 distâncias de detecção visual para o tratamento C2T2V10_.

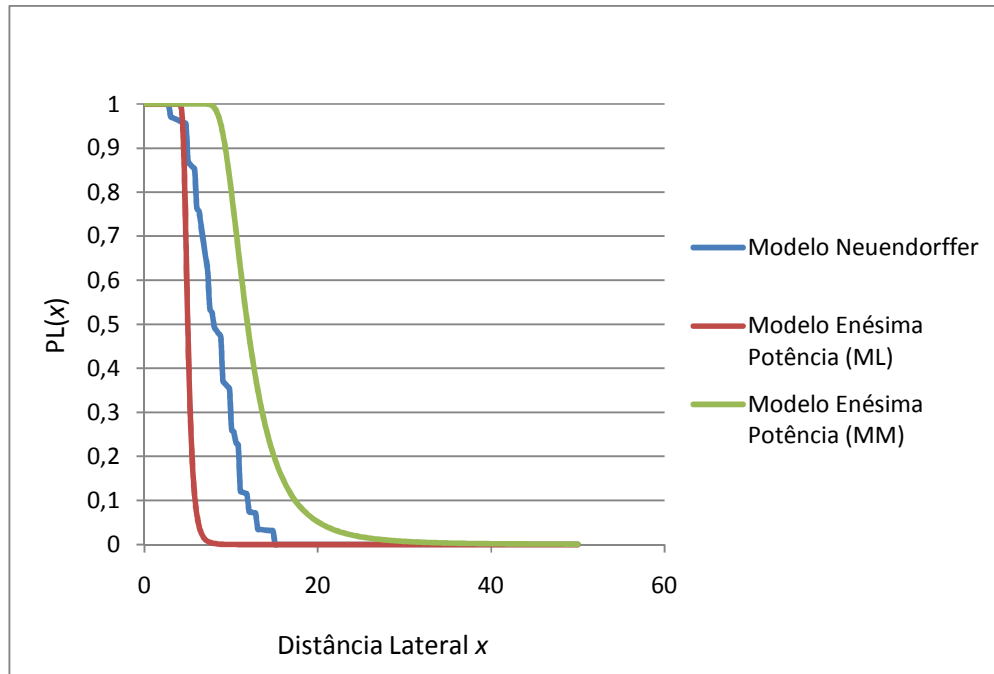


Figura 25. Curvas de distância lateral dos modelos em estudo

A Figura 25 indica que o modelo da lei da enésima potência, na variante que é estimada com o método dos momentos, fornece os valores mais otimistas da probabilidade de detecção de um navio mercante de tipo médio. Por outro lado, o mesmo modelo na variante estimada pelo método da máxima verosimilhança fornece os valores mais baixos de detectar o mesmo tipo de alvo.

	Largura de varrimento (\hat{w})	Variabilidade Média (10000 réplicas)	k	n
Modelo Neuendorffer	16,7	2,038	-	-
Modelo da Enésima Potência (ML)	10,2	14,774	6,59	17,44
Modelo da Enésima Potência (MM)	25,7	0,459	12,99	5,95

Tabela 10. Largura de varrimento e variabilidade média do tratamento C2T2V10_

Para o modelo da Enésima Potência, as figuras 26 e 27 ilustram as equações que permitem calcular o parâmetro n :

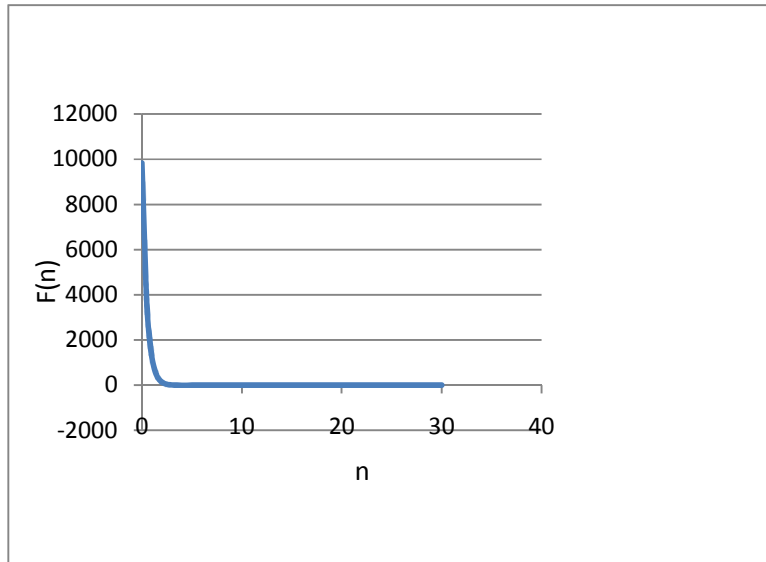


Figura 26. Gráfico da função associada à equação (104)

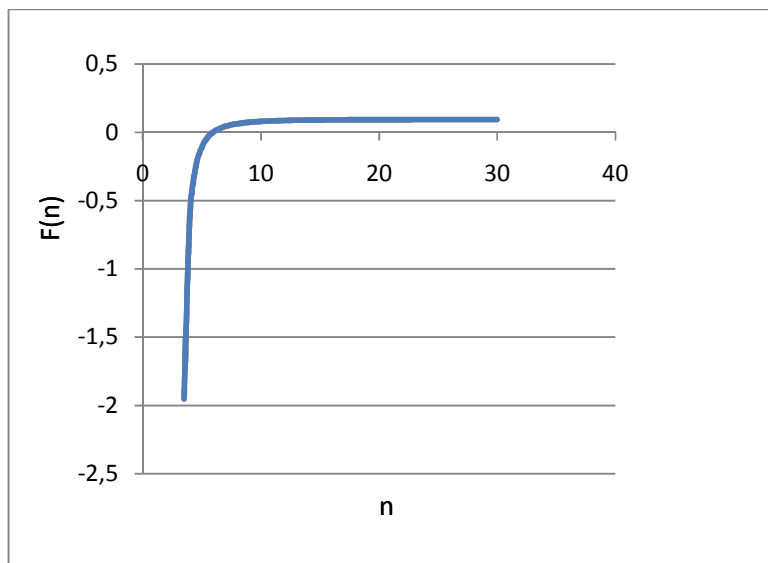


Figura 27. Gráfico da função associada à equação (110)

As equações (104) e (110) foram resolvidas numericamente através da função *fsolve.m* do MATLAB. Esta função permite resolver equações da forma $F(x) = 0$ e aplica uma variante do método de Gauss-Newton para encontrar o zero da função. Esta variante é

designada por algoritmo de *região de confiança dogleg* que se encontra descrito em Powell (1970) e é de natureza similar ao algoritmo implementado em Moré *et al* (1980). Contudo, observa-se que o zero encontrado, que neste caso corresponde ao parâmetro n , depende nalguns tratamentos do ponto inicial com que o algoritmo de pesquisa é inicializado. Esta situação pode originar diferentes valores para o parâmetro n e, conseqüentemente, originar mínimos locais para o método da máxima verosimilhança.

4 Discussão e Comentários Finais

4.1 Contribuições do Trabalho e Conclusões

Neste trabalho foram estimados os parâmetros largura de varrimento e construídas curvas de distância lateral para distâncias iniciais de detecção visual, agrupadas em tratamentos, de acordo com os factores tipo de alvo e condições ambientais. Os modelos apresentados, que permitem estimar a curva de distância lateral com base em distâncias iniciais, são a única forma de estimar a capacidade de detecção de alvos não cooperativos. Contudo, uma questão que se investigou foi em que medida estas distâncias podem ser utilizadas para conhecer a capacidade de detecção de um sensor face a diferentes combinações de factores, como o tipo de alvo e as condições ambientais. Esta questão é importante no âmbito das operações de busca e salvamento, pois a informação disponível nos manuais SAR apenas contempla alguns tipos de alvos e escassas situações ambientais. Uma das vantagens apontadas neste estudo para a utilização das distâncias iniciais reside no grande volume de dados que pode ser recolhido com um custo económico muito baixo. Por estas razões, é importante equacionar modelos de curvas de distância lateral que possam ser estimados a partir de distâncias iniciais de detecção. Para este fim, foram apresentados dois modelos distintos: o modelo de Neuendorffer e o modelo da Lei de Detecção da Enésima Potência. Neste último modelo, dada a possibilidade de obter os parâmetros k e n a partir de dois métodos de estimação, considera-se dois estimadores diferentes para o parâmetro largura de varrimento e respectiva curva de distância lateral. Assim sendo, apresentou-se três modelos para as curvas de distância lateral cuja estimação é feita com base em distâncias iniciais de detecção.

Face aos vários modelos disponíveis é necessário possuir um critério para escolher o modelo a utilizar. Para este fim, foi proposto um critério baseado na estabilidade de resultados. Este critério permite comparar modelos para a curva de distância lateral distintos, que assentam em pressupostos teóricos que não podem ser validados directamente com os dados. Por outro lado, o critério aqui estabelecido permite comparar, dentro do mesmo modelo, formas diferentes de estimação. O método da máxima verosimilhança e o método dos momentos podem ser comparados directamente através de

métricas do erro, como o erro quadrático médio, bem como podem ser comparados com o critério da estabilidade de resultados. Comparar estes métodos de estimação de um modelo com este critério fará sentido, pois a recolha de dados de avistamento é um processo contínuo que pode ser interrompido e futuramente retomado. É importante lembrar que a quantidade de dados de avistamentos apenas melhorará a qualidade das curvas de distância lateral estimadas. Neste sentido, os tratamentos construídos poderão vir a ter futuramente um maior número de observações, e poderá passar a haver tratamentos susceptíveis de serem considerados na estimação de curvas de distância lateral, porque terão um número mínimo de observações necessário para o efeito. Relativamente a esta matéria, espera-se que o critério da estabilidade de resultados aponte para um mesmo modelo, independente da dimensão em causa. Neste caso, pode afirmar-se que o modelo é robusto relativamente à dimensão do tratamento.

Relativamente aos testes computacionais efectuados, o método dos momentos no modelo da Lei de Detecção da Enésima Potência e o modelo de Neuendorffer suplantaram o método da máxima verosimilhança em termos da medida de variabilidade média. O critério proposto afigura-se como um bom critério para seleccionar leis de detecção com base em distâncias iniciais e apontar para o melhor estimador do parâmetro largura de varrimento.

4.2 Trabalho Futuro

Muitas são as questões de investigação que não foram abordadas nesta dissertação. Sumariamente tem-se:

- 1) No modelo de Neuendorffer considera-se a hipótese de que ρ possui distribuição uniforme no intervalo $0 \leq \rho \leq \rho^*$. Pode-se considerar uma formulação com distribuição diferente para ρ e obter um modelo de detecção diferente.
- 2) Ainda no modelo acima referido, está em aberto a questão da estimação de γ_0 , ou seja, da probabilidade de o sensor não estar a funcionar correctamente. Esta é uma das mais difíceis questões de investigação, pois implica conhecer ou estimar o número de alvos que não são detectados por um sensor ou navio.
- 3) Como foi referido anteriormente os modelos apresentados assentam em pressupostos teóricos que nem sempre são realistas e nem sempre adequados às

situações de avistamento que ocorrem no mar. Nomeadamente, o modelo da Lei da Enésima Potência tem como pressuposto que o alvo se encontra estático na área de busca. Esta hipótese dificilmente se verifica na realidade, pois os alvos que não se encontram em navegação, estão seguramente à deriva. Portanto, criar novos modelos de detecção mais flexíveis e matematicamente tratáveis é uma das possibilidades de investigação futura. A utilização de modelos de regressão não paramétrica poderá ser uma hipótese viável.

- 4) A criação de tratamentos permite estabelecer um conjunto relativamente pequeno de curvas de distância lateral e parâmetros de largura de varrimento para combinações de factores. Contudo, modelos de regressão paramétrica ou não paramétrica poderão ser utilizados para identificar quais os factores determinantes na probabilidade de detecção cumulativa de um sensor. Por exemplo, a ideia será procurar quantificar o decréscimo da probabilidade de detecção quando o número de vigias é reduzido ou o pessoal está cansado. Assim, as curvas de distância lateral poderão ser pesadas por um factor redutor ou potenciador.
- 5) Um outro desenvolvimento importante deverá merecer a atenção no sentido de ser um instrumento de validação de modelos da curva de distância lateral. Com efeito, para um dado tratamento, a curva de distância lateral obtida segundo cada um dos modelos especificados neste trabalho, $F_M(x)$, pode ser comparada com a curva de distância lateral obtida a partir de distâncias laterais recolhidas em condições experimentais, $F_E(x)$. O teste de Kolmogorv permite, então, avaliar a diferença estatística entre as duas curvas de distância lateral porque são dadas por $F(x) = 1 - F^*(x)$, em que $F^*(x)$ é uma função densidade cumulativa, sendo a probabilidade de não detecção. Então, testar $F_M^*(x) = F_E^*(x)$ é equivalente a testar $F_M(x) = 1 - F_M^*(x)$ e $F_E(x) = 1 - F_E^*(x)$.

BIBLIOGRAFIA

- Arnold, R. D., J. Bram, (1962), "*Estimating the Lateral range curve from observed detection ranges*", IRM.27, Center for Analysis, Washington, DC.
- De Groot, M. H., (1970), "*Optimal Statistical decisions*", McGraw-Hill Book Company.
- Dennis, J. E. Jr., (1977), "Nonlinear Least-Squares," *State of the Art in Numerical Analysis*, ed. D. Jacobs, Academic Press, pp. 269-312..
- Edwards, N. C. (1980), "*Evaluation of National SAR Manual Probability of Detection Curves*", CG-D-41-80.
- Edwards, N. C. (1982), "*Factors Affecting Coast Guard SAR Unit Visual Detection Performance*", CG-D-09-82.
- Fitzgerald, R. (1995), "*Target Detection Experiment – Phase I: Experiment Planning*", TP 12441E.
- Fitzgerald, R. (1998), "*Target Detection Experiment – Phase III: Data Analysis*", TP 13290E.
- Fitzgerald, R. e Ryan, J. (1990), "*Joint Search and Rescue Trials: Canadian Coast Guard and US Coast Guard Target Experiment- Canso Bank, 1990*"; TP 11654E.
- Fitzgerald, R.B. e J. P. Ryan (1993), "*Joint Search and Rescue Trials, Canadian Coast Guard and United States Coast Guard Target Detection Experiment – Canso Bank, 1990*", Final Report. Transport Canada Report, TP#11654e.
- Frost, J. (2001), Comparing SARPlan with Manual Methods and Actual Cases, R&D Defence Canada - Valcartier, Contract Report Number W7701-001992.
- Frost, J. and Stone, L. (2001), "*Review of Search Theory: Advances and Applications to Search and Rescue Decision Support*", U.S. Coast Guard Research and Development Center, Contract Report Number CG-D-15-01.

- IAMSAR. 2003. IAMSAR Manual, Vol. 2. International Civil Aviation Organization.
- Joint Chiefs of Staff & U.S. Coast Guard. (1991), "*National Search and Rescue Manual*", Vol. 1&2, Joint Pub 3-50, COMDNTINST M16120.5A/6A.
- Koopman, B.O. (1956a), "*The theory of Search, I. Kinematics Bases*", Operations Research, 4, 324-346.
- Koopman, B.O. (1956b), "*The theory of Search, II. Target Detection*", Operations Research, 4, 503-531.
- Koopman, B.O. (1957), "*The theory of Search, III. The Optimum Distribution of Searching Effort*", Operations Research, 5, 613-626.
- Koopman, B.O. (1980), "*Search and Screening General Principles with Historical Applications*", ISBN 0-08-023136, Pergamon Press.
- Lida, K. (1993), "*Inverse Nth Power detection law for Washburn's lateral range curve*", J. Oper. Res. Soc. Japan 36 90-101.
- Minka, T. P. (2003), "*A comparison of numerical optimizers for logistic regression*", Submitted Paper, October, 2003.
- Moré, J. J., B. S. Garbow, and K. E. Hillstom, (1980), "*User Guide for MINPACK 1*", Argonne National Laboratory, Rept. ANL-80-74.
- National SAR Manual (Canada) TP5421.
- Powell, M. J. D., (1970), "*A Fortran Subroutine for Solving Systems of Nonlinear Algebraic Equations*" Numerical Methods for Nonlinear Algebraic Equations, P. Rabinowitz, ed., Ch.7.
- Richardson, W. H. (1968), "*Empirical Sweep Width Analysis (air to surface)*", Scripps Institute of Oceanography, SIO Ref 68-30.
- Soza and Company, Ltd. (1996), "*The Theory of Search - A Simplified Explanation*", The Office of Search and Rescue, U.S. Coast Guard.
- Stone, Lawrence D. (1975), "*Theory of Optimal Search*". New York: Academic Press.

Stone, Lawrence D. (1989), "*Theory of Optimal Search*". 2nd Edition. Baltimore: Operations Research Society of America.

Wagner, D. H., Mylander W. C., Sanders, T.J. (1999), "*Naval Operations Analysis*", Third Edition, Naval Institute Press.

ANEXO B – Tabelas de *Sweep Width*

Nas tabelas abaixo, o modelo 1 corresponde ao modelo de Neuendorffer, o modelo 2 corresponde ao modelo da lei de detecção da enésima potência na variante de estimação segundo o método da máxima verosimilhança, e o modelo 3 corresponde ao mesmo modelo estimado pelo método dos momentos.

		Visibilidade					
		<10	>=10	<10	>=10	<10	>=10
Pescas	Pequeno	7,04	7,88	21,69	36,61	11,86	16,30
	Médio	5,28	10,67	-	19,27	16,51	15,98
	Grande	-	19,70	-	37,24	-	22,14
		Modelo 1	Modelo 2		Modelo 3		

Tabela 11. Largura de varrimento (*nm*) para tratamento de navios de pesca/visibilidade.

		Visibilidade					
		<10	>=10	<10	>=10	<10	>=10
Mercantes	Pequeno	3,54	12,34	5,27	19,63	4,43	19,49
	Médio	10,11	16,62	70,60	10,21	20,50	25,73
	Grande	11,01	19,47	7,08	124,59	18,68	33,38
		Modelo 1	Modelo 2		Modelo 3		

Tabela 12. Largura de varrimento (*nm*) para tratamento de navios de mercantes/visibilidade.

		Visibilidade					
		<10	>=10	<10	>=10	<10	>=10
Guerra	Pequeno	13,64	-	26,07	-	15,50	-
	Médio	9,21	14,68	13,37	22,09	11,23	22,80
	Grande	18,16	21,45	30,29	34,57	20,33	30,16
		Modelo 1	Modelo 2		Modelo 3		

Tabela 13. Largura de varrimento (*nm*) para tratamento de navios de guerra/visibilidade.

		Visibilidade					
		<10	>=10	<10	>=10	<10	>=10
Recreio	Pequeno	6,18	10,99	15,92	7,94	13,53	19,66
	Médio	-	8,60	-	3,54	-	16,25
	Grande	-	20,22	-	17,74	-	30,62
		Modelo 1	Modelo 2		Modelo 3		

Tabela 14. Largura de varrimento (*nm*) para tratamento de navios de recreio/visibilidade.

ANEXO C – Escala de *Beaufort*

Grau	Designação	Nós	Aspecto do mar	Efeitos em terra
0	<i>Calmaria</i>	<1	Espelhado	Fumaça sobe na vertical
1	<i>Bafagem</i>	1 a 3	Pequenas rugas na superfície do mar	Fumaça indica direcção do vento
2	<i>Aragem</i>	4 a 6	Ligeira ondulação sem rebentação	As folhas das árvores movem; os moinhos começam a trabalhar
3	<i>Fraco</i>	7 a 10	Ondulação até 60 cm, com alguns <i>carneiros</i>	As folhas agitam-se e as bandeiras desfraldam ao vento
4	<i>Moderado</i>	11 a 16	Ondulação até 1.5 m, <i>carneiros</i> frequentes	Poeira e pequenos papéis levantados; movem-se os galhos das árvores
5	<i>Fresco</i>	17 a 21	Ondulação até 2.5 m, muitos <i>carneiros</i>	Movimentação de árvores pequenas; superfície dos lagos ondula
6	<i>Muito Fresco</i>	22 a 27	Ondas grandes até 3.5 m; borrifos	Movem-se os ramos das árvores; dificuldade em manter um guarda chuva aberto
7	<i>Forte</i>	28 a 33	Mar revolto até 4.5 m com espuma e borrifos	Movem-se as árvores grandes; dificuldade em andar contra o vento
8	<i>Muito Forte</i>	34 a 40	Mar revolto até 7.5 m com rebentação e faixas de espuma	Quebram-se galhos de árvores; circulação de pessoas difícil
9	<i>Duro</i>	41 a 47	Mar revolto até 9 m; borrifos afectam visibilidade	Danos em árvores; impossível andar contra o vento
10	<i>Muito Duro</i>	48 a 55	Mar revolto até 12 m; superfície do mar branca	Árvores arrancadas; danos na estrutura de construções
11	<i>Tempestade</i>	56 a 63	Mar revolto até 14 m; pequenos navios sobem nas vagas	Estragos abundantes em telhados e árvores
12	<i>Furacão</i>	>64	Mar todo de espuma; visibilidade nula	Grandes estragos

ANEXO D – Tabelas com medida de estabilidade

Neste anexo os termos “irm27”, “ML” e “MM” referem-se aos modelos de Neuendorffer, modelo da lei de detecção da enésima potência estimado pelo método da máxima verosimilhança e pelo método dos momentos, respectivamente. A cor encontram-se os valores da medida de variabilidade média mais baixos de entre os três modelos.

		Visibilidade < 10 milhas			Visibilidade > 10 milhas		
		irm27	ML	MM	irm27	ML	MM
Pescas	P	1,245	449,901	0,258	1,563	381,330	19,102
	M	-	-	-	8,579	0,364	40,306
	G	-	-	-	-	-	-
		Visibilidade < 10 milhas			Visibilidade > 10 milhas		
		irm27	ML	MM	irm27	ML	MM
Mercantes	P	-	-	-	-	-	-
	M	2,019	2517,877	3,837	3,768	257,278	5,509
	G	4,727	2,603	0,004	2,997	95,580	0,113

Tabela 15. Variabilidade média em K = 100 réplicas.

		Visibilidade < 10 milhas			Visibilidade > 10 milhas		
		irm27	ML	MM	irm27	ML	MM
Pescas	P	2,090	32,533	0,000	6,118	17,496	2,559
	M	-	-	-	25,295	39,833	12,108
	G	-	-	-	-	-	-
		Visibilidade < 10 milhas			Visibilidade > 10 milhas		
		irm27	ML	MM	irm27	ML	MM
Mercantes	P	-	-	-	-	-	-
	M	17,013	0,063	173,234	0,818	64,280	0,051
	G	0,213	0,000	0,470	0,863	135,458	2,267

Tabela 16. Variabilidade média em K = 200 réplicas.

		Visibilidade < 10 milhas			Visibilidade > 10 milhas		
		irm27	ML	MM	irm27	ML	MM
Pescas	P	0,091	15,821	0,215	1,529	102,155	0,212
	M	-	-	-	1,988	6,032	0,262
	G	-	-	-	-	-	-
Mercantes	P	-	-	-	-	-	-
	M	13,904	107219,990	56,463	0,000	312,253	0,729
	G	32,098	0,011	49,646	0,545	58039,228	2,293

Tabela 17. Variabilidade média em K = 500 réplicas.

		Visibilidade < 10 milhas			Visibilidade > 10 milhas		
		irm27	ML	MM	irm27	ML	MM
Pescas	P	0,265	0,316	0,190	5,482	1596,497	0,087
	M	-	-	-	5,848	3,614	5,041
	G	-	-	-	-	-	-
Mercantes	P	-	-	-	-	-	-
	M	10,749	2220,491	77,203	0,029	80,236	0,816
	G	0,063	1,705	0,001	14,587	14390,437	16,148

Tabela 18. Variabilidade média em K = 1000 réplicas.

		Visibilidade < 10 milhas			Visibilidade > 10 milhas		
		irm27	ML	MM	irm27	ML	MM
Pescas	P	0,284	0,756	0,076	1,202	626,923	5,557
	M	-	-	-	0,024	0,183	0,312
	G	-	-	-	-	-	-
Mercantes	P	-	-	-	-	-	-
	M	13,674	5,776	22,415	1,047	0,022	0,018
	G	4,813	3,539	0,689	9,585	349,673	3,540

Tabela 19. Variabilidade média em K = 2500 réplicas.

		Visibilidade < 10 milhas			Visibilidade > 10 milhas		
		irm27	ML	MM	irm27	ML	MM
Pescas	P	0,024	0,894	0,318	2,649	1350,768	15,789
	M	-	-	-	1,323	0,669	0,436
	G	-	-	-	-	-	-
Mercantes	P	-	-	-	-	-	-
	M	0,000	0,021	0,169	5,685	327,799	2,345
	G	0,572	0,001	1,052	1,444	0,535	4,949

Tabela 20. Variabilidade média em K = 5000 réplicas.

		Visibilidade < 10 milhas			Visibilidade > 10 milhas		
		irm27	ML	MM	irm27	ML	MM
Pescas	P	0,536	20,955	1,217	29,736	25,497	2,815
	M	-	-	-	2,038	14,774	0,459
	G	-	-	-	-	-	-
Mercantes	P	-	-	-	-	-	-
	M	19,287	804,569	3,930	0,920	170,601	4,729
	G	1,768	343,812	0,440	5,732	48307,091	0,498

Tabela 21. Variabilidade média em K = 10000 réplicas.

ANEXO E – Rotinas implementadas em MATLAB

Nome Rotina	Tipo	Descrição
<i>cdf_npowerlaw_ml.m</i>	function	Constrói a curva de distância lateral e largura de varrimento para um conjunto de distâncias de detecção. É utilizado o método de estimação da máxima verosimilhança
<i>cdf_npowerlaw_mm.m</i>	function	Constrói a curva de distância lateral e largura de varrimento para um conjunto de distâncias de detecção. É utilizado o método de estimação dos momentos
<i>cdldensity_irm27.m</i>	function	Constrói a curva de distância lateral e largura de varrimento para um conjunto de distâncias de detecção com o modelo de Neuendorffer.
<i>curvefraction_koji.m</i>	function	Constrói a curva $\overline{G_0}(r_i)$ referida em (Koji,1993)
<i>myfun1_k.m</i>	function	Define a função associada à equação (103)
<i>myfunMM_k.m</i>	function	Define a função associada à equação (109)
<i>myfun1_n.m</i>	function	Define a função associada à equação (104)
<i>myfunMM_n.m</i>	function	Define a função associada à equação (110)
<i>resampling_func.m</i>	function	Calcula a variabilidade média para os três modelos de um tratamento
<i>reamostragem_regavist.m</i>	script	Constrói a variabilidade média para todos os tratamentos definidos

Tabela 22. Descrição das rotinas implementadas em MATLAB

```

function [L sw k n xn fn] = cdf_npowerlaw_ml(r,x,v,x0)

%%Implementação da Curva de distância Lateral proposta pelo paper
"inverse
%nth power law" de Koji Lida, National Defense Academy
%Modelo "Inverse Nth Power Law"
%
% Parametros de input:
%   r - amostra com distancias de avistamento iniciais (vector 1xN)
%   x - vector com valores criticos da curva de distância inicial que
será
%   construida nesta função.
%   v - velocidade do sensor
%   x0 - solução inicial do método de pesquisa que resolve numericamente
a
%   equação que fornece o parâmetro n
%
%
%
% Parâmetros de output:
%   L - vector com as densidades estimadas para cada valor do vector x
%   sw - sweep width estimado com base em L
%   k - parâmetro do modelo
%   n - parâmetro do modelo
%   xn - pontos no eixo x para construir gráfico da equação F(n) em
%       myfunl_n
%   fn - pontos no eixo y correspondentes a F(x)

if nargin<4
    v = 200;
    x0=10;
end

save dados r
options = optimset('Display','off'); % Turn off Display
n = fsolve(@myfunl_n,x0,options);
%Mostrar equação analitica
xn=0:0.5:30;
for i=1:numel(xn)
    fn(i)=myfunl_n(xn(i));
end

if n<2
    n=3;
end
k = myfunl_k(n,v);

x0 = (((k^n)*(pi^0.5)*gamma((n-1)/2))/(v*gamma(n/2)))^(1/(n-1));
L=zeros(1,numel(x));
for i=1:numel(x)
    L(i) = 1 - exp(-(x0/abs(x(i)))^(n-1));
end
sw = 2*x0*gamma((n-2)/(n-1));

```



```

%-----FIM DA FUNÇÃO-----

function [L sw k n xn fn] = cdf_npowerlaw_mm(r,x,v,x0)

%%Implementação da Curva de distância Lateral proposta pelo paper
"inverse
%nth power law" de Koji Lida, National Defense Academy
%Modelo "Inverse Nth Power Law"
%
%
% Parametros de input:
% r - amostra com distancias de avistamento iniciais (vector 1xN)
% x - vector com valores criticos da curva de distância inicial que
será
% construida nesta função.
% v - velocidade do sensor
% x0 - solução inicial do método de pesquisa que resolve numericamente
a
% equação que fornece o parâmetro n
%
%
% Parametros de output:
% L - vector com as densidades estimadas para cada valor do vector x
% sw - sweep width estimado com base em L
% k - parâmetro do modelo
% n - parâmetro do modelo
% xn - pontos no eixo x para construir gráfico da equação F(n) em
% myfunMM_n (MM - Método Momentos)
% fn - pontos no eixo y correspondentes a F(x)

if nargin<2
    x = linspace(0,50,100);
    v = 200;
elseif nargin<3;
    v = 200;
end

save dados r
options = optimset('Display','off'); % Turn off Display
n = fsolve(@myfunMM_n,x0,options);
%Mostrar equação analitica
xn=2:0.5:30;
for i=1:numel(xn)
    fn(i)=myfunMM_n(xn(i));
end

if n<2
    n=3;
end
k = myfunMM_k(n,v);

x0 = (((k^n)*(pi^0.5)*gamma((n-1)/2))/(v*gamma(n/2)))^(1/(n-1));
L=zeros(1,numel(x));

```

```

for i=1:numel(x)
    L(i) = 1 - exp(-(x0/abs(x(i)))^(n-1));
end
sw = 2*x0*gamma((n-2)/(n-1));
%-----FIM DA FUNÇÃO-----

function [L sw]= clddensity_irm27(r,x,g0)

%%Implementação da Curva de distância Lateral proposta pelo paper IRM-27
%%Modelo de Neuendorffer
%
% Parametros de input:
% r - amostra com distancias de avistamento iniciais (vector 1xN)
% x - vector com valores criticos da curva de distância inicial que
será
% construída nesta função.
% g0 - probabilidade de o sensor não estar a funcionar correctamente
%
% Parâmetros de output:
% L - vector com as densidades estimadas para cada valor do vector x
% sw - sweep width estimado com base em L
%

if nargin <2
    x=linespace(0,50,100);
    g0=0;%probabilidade de o sensor não detectar alvo
elseif nargin ==2
    g0=0;
end

N=numel(r);%numero de distancias de avistamento na amostra

g=zeros(1,numel(x));
L=g;
for i=1:numel(x)
    [I J]=find(r>=x(i));
    g(i)=0;
    for j=1:numel(I)
        if x(i)==I(j)
            [I1 J1]=find(r<=x(i));
            s=0;
            for k=1:numel(I1)
                s=s+1/(r(I1(k)));
            end
            g(i)=g(i)+(x(i)/r(I(j)))*((1-g0)/(x(i)*s+N-numel(I1)));
        else
            [I1 J1]=find(r<=x(i));
            s=0;
            for k=1:numel(I1)
                s=s+1/(r(I1(k)));
            end
            g(i)=g(i)+((1-g0)/(x(i)*s+N-numel(I1)));
        end
    end
    L(i)=g(i);
end
end

```

```

sw = 2*trapz(x,L);
%-----FIM DA FUNÇÃO-----

function F = myfunl_k(n,v)

% Implementa a função inerente à equação (103) no método da máxima
verosimilhança no
% modelo da Enésim Potência
%
% As distâncias iniciais encontram-se no vector r que está guardado no
% ficheiro dados.mat.
%
% Parametros de input:
%   n - estimador do parâmetro n no método da máxima verosimilhança
%   v - velocidade do sensor
%
% Parâmetros de output:
%   k - valor do estimador k no método da máxima verosimilhança

if nargin < 2
    v=200;
end

load('dados.mat');
N=numel(r);

S1=0;
for i=1:N
    S1=S1+r(i)^(1-n);
end

F = ((N*v*(n-1))/(S1))^(1/n);
%-----FIM DA FUNÇÃO-----

function F = myfunl_n(n)

% Implementa a função inerente à equação (104) no método da máxima
verosimilhança no
% modelo da Enésim Potência
%
% As distâncias iniciais encontram-se no vector r que está guardado no
% ficheiro dados.mat.
%
% Parametros de input:
%   n - estimador do parâmetro n no método da máxima verosimilhança
%
% Parâmetros de output:
%   F - valor de F(n)

load('dados.mat');
N=numel(r);

```

```

S1=0;S2=0;S3=0;
for i=1:N
    S1=S1+(r(i)^(1-n))*log(r(i));
    S2=S2+r(i)^(1-n);
    S3=S3+log(r(i));
end

F = (n-1)*N*S1+N*S2-(n-1)*(S2*S3);
%-----FIM DA FUNÇÃO-----

function F = myfunMM_k(n,v)

% Implementa a função inerente à equação (109) no método dos momentos no
% modelo da Enésim Potência
%
% As distâncias iniciais encontram-se no vector r que está guardado no
% ficheiro dados.mat.
%
% Parametros de input:
%   n - estimador do parâmetro n no método dos momentos
%   v - velocidade do sensor
%
% Parâmetros de output:
%   F - valor do estimador k no método dos momentos

load('dados.mat');
N=numel(r);

F = (v*(n-1)*(mean(r)/gamma((n-2)/(n-1)))^(n-1))^(1/n);
%-----FIM DA FUNÇÃO-----

function F = myfunMM_n(n)
% Implementa a função inerente à equação (104) no método dos moementos
no
% modelo da Enésim Potência
%
% As distâncias iniciais encontram-se no vector r que está guardado no
% ficheiro dados.mat.
%
% Parametros de input:
%   n - estimador do parâmetro n no método dos moementos
%
% Parâmetros de output:
%   F - valor de F(n)

load('dados.mat');
N=numel(r);

a=(mean(r)^2)/(sum(r.^2)/N);

F = gamma((n-2)/(n-1))^2-a*gamma((n-3)/(n-1));
%-----FIM DA FUNÇÃO-----

```

```

function [VM_irm27 VM_ml VM_mm] =
resampling_func(r,J,x,g0,v,rep,x0ML,x0MM)

%%Implementação de J réplicas de um tratamento e cálculo das respectivas
variabilidades
%%médias
%
% Parametros de input:
% r - amostra com distancias de avistamento iniciais (vector 1xN) de
um
% tratamento
% J - Numero de réplicas a construir
% x - vector com valores no eixo das abcissas para construir gráfico
da
% curva de distância lateral
% g0 - probabilidade de o sensor não estar a funcionar correctamente
% (modelo de neuendorffer)
% v - velocidade do sensor
% rep - 1 caso se pretenda replicas com reposição das observações, 0
caso
% contrário
% x0ML - ponto inicial para resolver numericamente a equação (103)
% x0MM - ponto inicial para resolver numericamente a equação (109)
%
%
% Parâmetros de output:
% VM_irm27 - variabilidade média do modelo de Neuendorffer
% VM_ml - variabilidade média do modelo da Enésima potência (Máxima
Verossimilhança)
% VM_mm - variabilidade média do modelo de Neuendorffer (Método dos
Momentos)
%
% Last Modified by Rui Deus 29-Dec-2008 22:24:18
if nargin<1
r=10*rand(10,1)+5;
J=50;
x=linspace(0,50,50);v=10;g0=0;
g0=0;
v=10;
rep=1;%com reposição
elseif nargin<2
J=50;
x=linspace(0,50,50);v=10;g0=0;
g0=0;
v=10;
rep=1;%com reposição
elseif nargin<3
x=linspace(0,50,50);v=10;g0=0;
g0=0;
v=10;
rep=1;%com reposição
elseif nargin<4
g0=0;
v=10;

```

```

        rep=1;%com reposiçãõ
elseif nargin<5
    v=10;
    rep=1;%com reposiçãõ
elseif nargin <6
    rep=1;
end

%Parâmetros da Reamostragem
N=numel(r);
metade=floor(N/2);

if rep%amostragem com reposiçãõ

    for j=1:J

        %construçãõ da replica r1
        r1=zeros(N,1);
        for i=1:N
            idx=randperm(N);
            r1(i)=r(idx(i));
        end

        p=randperm(N);
        k1=0;k2=0;
        for i=1:N
            if i <= metade
                k1=k1+1;
                amostral(k1)=r1(p(i));
            else
                k2=k2+1;
                amostra2(k2)=r1(p(i));
            end
        end
    end
end
else%sem reposiçãõ
    %Nãõ disponivel
end

for j=1:J
    [L sw1_irm27(j)]= clddensity_irm27(amostral,x,g0);
    [L sw2_irm27(j)]= clddensity_irm27(amostra2,x,g0);

    [L sw1_ml(j) k n xn fn]= cdf_npowerlaw_ml(amostral,x,v,x0MM);
    [L sw2_ml(j) k n xn fn]= cdf_npowerlaw_ml(amostra2,x,v,x0MM);

    [L sw1_mm(j) k n xn fn]= cdf_npowerlaw_mm(amostral,x,v,x0MM);
    [L sw2_mm(j) k n xn fn]= cdf_npowerlaw_mm(amostra2,x,v,x0MM);

    e2_irm27(j)=(sw1_irm27(j)-sw2_irm27(j))^2;
    e2_ml(j)=(sw1_ml(j)-sw2_ml(j))^2;
    e2_mm(j)=(sw1_mm(j)-sw2_mm(j))^2;

end
VM_irm27 = mean(e2_irm27);

```

```

VM_ml = mean(e2_ml);
VM_mm = mean(e2_mm);
%-----FIM DA FUNÇÃO-----

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%
%%reamostragem_regavist.m%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%
clear
clc
load dados_tratamentos
%inicializar semente para construção de distâncias iniciais aleatórias
semente = 0;
rand('state',semente)
randn('state',semente)

a=0;
b=30;
N=50;
x=linspace(a,b,N);
v = 10;
J=20000;
g0=0;
rep=1;
x01=5;
x02=5;

%Pescas
[C1T1V_10VM_irm27 C1T1V_10VM_ml C1T1V_10VM_mm] =
resampling_func(DC1T1V_10,J,x,g0,v,rep,x01,x02);

[C1T1V10_VM_irm27 C1T1V10_VM_ml C1T1V10_VM_mm] =
resampling_func(DC1T1V10_,J,x,g0,v,rep,x01,x02);
[C1T2V10_VM_irm27 C1T2V10_VM_ml C1T2V10_VM_mm] =
resampling_func(DC1T2V10_,J,x,g0,v,rep,x01,x02);
'pescas'
%Mercantes
[C2T2V_10VM_irm27 C2T2V_10VM_ml C2T2V_10VM_mm] =
resampling_func(DC2T2V_10,J,x,g0,v,rep,x01,x02);
[C2T3V_10VM_irm27 C2T3V_10VM_ml C2T3V_10VM_mm] =
resampling_func(DC2T3V_10,J,x,g0,v,rep,x01,x02);

[C2T2V10_VM_irm27 C2T2V10_VM_ml C2T2V10_VM_mm] =
resampling_func(DC2T2V10_,J,x,g0,v,rep,x01,x02);
[C2T3V10_VM_irm27 C2T3V10_VM_ml C2T3V10_VM_mm] =
resampling_func(DC2T3V10_,J,x,g0,v,rep,x01,x02);
'mercantes'

save dados_VM C1T1V_10VM_irm27 C1T1V_10VM_ml C1T1V_10VM_mm ...
C1T1V10_VM_irm27 C1T1V10_VM_ml C1T1V10_VM_mm ...
C1T2V10_VM_irm27 C1T2V10_VM_ml C1T2V10_VM_mm ...
C2T2V_10VM_irm27 C2T2V_10VM_ml C2T2V_10VM_mm ...
C2T3V_10VM_irm27 C2T3V_10VM_ml C2T3V_10VM_mm ...
C2T2V10_VM_irm27 C2T2V10_VM_ml C2T2V10_VM_mm ...
C2T3V10_VM_irm27 C2T3V10_VM_ml C2T3V10_VM_mm ...

```

```

tabela_C1T1V_10(1,1) = C1T1V_10VM_irm27;
tabela_C1T1V_10(1,2) = C1T1V_10VM_ml;
tabela_C1T1V_10(1,3) = C1T1V_10VM_mm;

tabela_C1T1V10_(1,1) = C1T1V10_VM_irm27;
tabela_C1T1V10_(1,2) = C1T1V10_VM_ml;
tabela_C1T1V10_(1,3) = C1T1V10_VM_mm;

tabela_C1T2V10_(1,1) = C1T2V10_VM_irm27;
tabela_C1T2V10_(1,2) = C1T2V10_VM_ml;
tabela_C1T2V10_(1,3) = C1T2V10_VM_mm;

tabela_C2T2V_10(1,1) = C2T2V_10VM_irm27;
tabela_C2T2V_10(1,2) = C2T2V_10VM_ml;
tabela_C2T2V_10(1,3) = C2T2V_10VM_mm;

tabela_C2T2V10_(1,1) = C2T2V10_VM_irm27;
tabela_C2T2V10_(1,2) = C2T2V10_VM_ml;
tabela_C2T2V10_(1,3) = C2T2V10_VM_mm;

tabela_C2T3V_10(1,1) = C2T3V_10VM_irm27;
tabela_C2T3V_10(1,2) = C2T3V_10VM_ml;
tabela_C2T3V_10(1,3) = C2T3V_10VM_mm;

tabela_C2T3V10_(1,1) = C2T3V10_VM_irm27;
tabela_C2T3V10_(1,2) = C2T3V10_VM_ml;
tabela_C2T3V10_(1,3) = C2T3V10_VM_mm;

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%
% GUARDAR INFORMAÇÃO EM FICHEIROS
nome_ficheiro = 'VM_dados20000.xls';
xlswrite(nome_ficheiro,tabela_C1T1V_10,'tabela_C1T1V_10')
xlswrite(nome_ficheiro,tabela_C1T1V10_,'tabela_C1T1V10_')
xlswrite(nome_ficheiro,tabela_C1T2V10_,'tabela_C1T2V10_')
xlswrite(nome_ficheiro,tabela_C2T2V_10,'tabela_C2T2V_10')
xlswrite(nome_ficheiro,tabela_C2T2V10_,'tabela_C2T2V10_')
xlswrite(nome_ficheiro,tabela_C2T3V_10,'tabela_C2T3V_10')
xlswrite(nome_ficheiro,tabela_C2T3V10_,'tabela_C2T3V10_')

%%FIM reamostragem_regavist.m

```