UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA
Faculdade de Ciências e Tecnologia
Secção Autónoma de Ciências Sociais Aplicadas
Ciências de Educação

A APRENDIZAGEM DA ESTIMAÇÃO MATEMÁTICA

Um estudo no 2º Ciclo

Por

Maria Manuela Duarte de Oliveira e Azevedo

Dissertação apresentada para a obtenção do grau de Mestre em Ciências de Educação, na especialidade de Educação e Desenvolvimento, pela Universidade Nova de Lisboa, Faculdade de Ciências e Tecnologia, sob a orientação conjunta da Professora Doutora Teresa Ambrósio e do Dr. José Manuel Matos.

Lisboa
1996

MARIA MANUELA DUARTE DE OLIVEIRA E AZEVEDO

A APRENDIZAGEM DA ESTIMAÇÃO MATEMÁTICA

Um estudo no 2º Ciclo

LISBOA
1996

MARIA MANUELA DUARTE DE OLIVEIRA E AZEVEDO

THE LEARNING OF MATHEMATIC ESTIMATION

A study in the 2 nd (second) "ciclo"

LISBOA
1996

MARIA MANUELA DUARTE DE OLIVEIRA E AZEVEDO

L'APPRENTISSAGE DE L'ESTIMATION MATHÉMATIQUE

Une étude dans le 2 ème cycle de l'enseignement préparatoire

LISBOA

Ao Filipe, à Ana Luísa e
ao Pedro.

Resumo

Este estudo incidiu sobre a aprendizagem escolar da estimação matemática, no 2º Ciclo do Ensino Básico com o objectivo de compreender os processos utilizados pelos alunos quando produzem estimativas em contexto de aula e de identificar as suas atitudes e concepções face à estimação.

Foi utilizada uma metodologia de natureza qualitativa com o recurso à observação de aulas, entrevistas, questionários, conversas informais e recolha de diversos artefactos, numa turma do 6º ano de escolaridade, de Janeiro a Junho de 1995.

Observaram-se, nas estimativas de cálculo, os processos de reformulação, comparação, translação e compensação, por ordem decrescente de frequência de utilização. O processo de reformulação, aquele que envolve um nível menos elevado do conhecimento matemático, foi o mais usado. Observou-se também a tendência dos alunos para apelar mentalmente a procedimentos algoritmicos e ao uso de estratégias pouco diversificadas.

Nas estimativas de medidas foram identificados os processos de iteração de unidades, comparação, uso de sinais de subdivisão e ajustamento. O uso de um ou de outro processo parece estar relacionado com a medida do objecto que se pede para estimar. Neste tipo de estimativas os alunos revelaram facilidade no uso de determinados referentes adquiridos anteriormente.

Os alunos consideraram uma estimativa como um cálculo mental aproximado, admitindo e encarando positivamente a existência de erro, o que foi referido até como uma das vantagens da estimação. Para alguns, fazer estimativas foi fácil e rápido, mas para mais de metade foi um processo difícil e confuso.

A maioria dos alunos foi melhor sucedida nas estimativas de medidas, que acharam mais fáceis.

De um modo geral, estes alunos evidenciaram atitudes favoráveis à estimação atribuindo-lhe importância, utilidade e considerando que desenvolve o cálculo mental e o raciocínio. Mas para eles é mais importante saber as regras e os algoritmos, porque, são também necessários para fazer estimativas e usam-se mais na Matemática. Finalmente, para estes alunos, fazer estimativas é "fazer" matemática que pode ser utilizada no dia-a-dia.

Palavras chave: Alunos, aprendizagem, estimação matemática, processos, estratégias, atitudes, concepções

Abstract

This study focused on the learning of mathematic estimation in the "2º Ciclo - Ensino Básico" (2nd Stage of Compulsory Schooling - corresponding to Years 5 and 6 - ages 10-11), with the purpose of understanding the processes used by the students when they produce estimates in the classroom context, and of identifying their attitudes and conceptions towards estimation.

The methodology used was one of a qualitative nature, by resorting to class observation, interviews, questionnaires, informal conversations and the gathering of several artefacts, in a class of Year 6, from January to June 1995.

In the computational estimation, several processes were observed: reformulation, comparison, translation, and compensation, in a decreasing order of frequency. The process of reformulation, which involves a lower level of mathematic knowledge, was the most frequently used. Also evident was the students' tendency to mentally apply algorithmic computational procedures and not to used a great variety of strategies.

In the measurement estimation the following processes were identified: unit iteration, comparison, use of subdivision clues and squeezing. The choice of process seems to be related to the size of the subject for estimation. In this kind of estimation the students showed no difficulty in using certain benchmarks previously learnt.

The students considered an estimate an approximate mental computation, and admitted the possibility of error, which they faced with a positive attitude. They even regarded this fact as one of the advantages of estimation. For some, estimating was easy and fast, but for over fifty percent of the students it was a difficult confusing process. The majority were more successful in measurement estimation, which they considered easier.

In general, those students showed favourable attitudes towards estimation, recognizing its importance and use, and considering that it develops mental computation and thinking. But, for them, it is more important to know the rules and the algorithms, because they are also necessary to estimation and they are more often used in mathematics. Finally, for these students, to estimate is to use mathematics in everyday life.

Key words: Students, learning, mathematic estimation, processes, strategies, attitudes, conceptions

Sommaire

Cette étude a eu comme objectif l'apprentissage scolaire de l'estimation mathématique, dans le 2ème cycle de l'enseignement préparatoire, avec le but de comprendre les procédés utilisés par les élèves quand ils produisent des estimations dans un contexte de classe, et d'identifier leurs attitudes et conceptions vis-à-vis de l'estimation mathématique.

On a utilisé une méthodologie de nature qualitative, avec le recours à l'observation de cours, à des interviews, des questionnaires, des conversations informelles avec les élèves et le recueil de différents "materiaux", dans une classe de 6 ème année de scolarité de janvier à juin de 1995.

On a observé dans les estimations de calcul les procédés de reformulation, comparaison, translation et compensation, par ordre décroissant, en ce qui concerne la fréquence d'utilisation. Le procédé de reformulation, celui qui implique un niveau moins approfondi de connaissances mathématiques, a été le plus utilisé. On a aussi observé que les élèves ont tendance à faire appel, mentalement, à des opérations algorithmiques et à utiliser des stratégies peu diversifiées.

Dans les estimations de mesure ont été identifiés les procédés d'itération des unités, de comparaison, d'usage des signes de subdivision et d'ajustement. L'usage de l'un ou de l'autre procédé semble être en rapport avec la mesure de l'objet que l'on demande à estimer. Dans ce genre d'estimations les élèves ont démontré une certaine facilité en ce qui concerne l'usage de certains référents acquis auparavant.

Les élèves ont considéré une estimation comme un calcul mental aproximatif, admettant et acceptant de bon gré l'existence de l'erreur, ce qui a été mentionné comme un des avantages de l'estimation. Pour certains, faire des estimations a été une tâche facile et rapide mais pour plus de la moitié d'entre eux ceci a été difficile et confus.

La plupart des élèves a eu plus de succès dans les estimations de mesure qu'ils ont trouvées plus faciles.

Généralement ces élèves ont demontré des attitudes favorables face à l'estimation en lui attribuant de l'importance et considérant que celle-ci développe le calcul mental et le raisonnement. Mais, pour eux il est plus important de savoir les règles et les algorithmiques parce qu'il s'agit d'aspects nécessaires et essentiels pour faire des estimations qu'ils utilisent davantage en mathématiques.

Finalement, pour ces élèves "faire" des estimations c'est pratiquer un genre de mathématique qui peut être utilisé quotidiennement.

Mots-cléfs: Élèves, apprentissage, estimation mathématique, procédé, stratégies, attitudes, conceptions

Índice de matérias

Capítulo 1 - **O problema e o contexto** 10

Capítulo 2 - **Enquadramento teórico e definição de conceitos** 15
Estimação e Matemática 16
Problematização do termo estimação 18
Estimação e aproximação 20
Estimação e cálculo mental 22
Algoritmo, processos e estratégias de estimação 22
A estimação no currículo escolar 23
Justificação para a introdução da estimação no currículo escolar 23
Integração no currículo escolar 26
Atitudes e concepções dos alunos acerca da Matemática 27
Definição de conceitos operativos 29

Capítulo 3 - **A investigação sobre estimação matemática** 30
Aprendizagem da estimação 31
Estimativas de cálculo 32
Processos cognitivos gerais observados entre os bons estimadores 33
Estimação e sua relação com outras capacidades matemáticas 40
O efeito do ensino na capacidade de estimação 44
Estimativas de medida e quantidade 46
Processos usados em estimativas de medidas de comprimento 48
Atitudes e concepções dos alunos face à estimação matemática 51

Capítulo 4 - **Metodologia** 54
Opções metodológicas 54
Participantes 57
Fases da investigação 57
Tipos de dados recolhidos 58
Análise de dados 61
Âmbito 64

Capítulo 5 - **Descrição do contexto do ensino** 65
A Professora 66
As aulas 70
Como surgiam as actividades nas aulas 71
Indicações aos alunos 72
Processo de resolução das actividades 73

Capítulo 6 - **Estimativas de cálculo efectuadas pelos alunos** 75
Identificação de processos usados em estimativas de cálculo 76
Estratégias usadas nas estimativas de cálculo 85
Processos mais comuns 88
Processos mais facilitadores em determinadas situações 98
Dificuldades e erros detectados durante o processo de estimação 104
Dificuldades 105
Erros de cálculo numérico 108
Erros a nível de compreensão das questões 108
Erros de nível conceptual 109
Outros tipos de erros 113

Capítulo 7 - **Estimativas de medidas efectuadas pelos alunos** 119
Identificação de processos usados em estimativas de medidas 120
Identificação de processos usados em estimativas de medidas de comprimento 120
Identificação de processos usados em estimativas de medidas de área 122
Processos mais comuns 123
Dificuldades e erros detectados durante o processo de estimação 126
Erros a nível da compreensão de conceitos 127
Erros a nível da compreensão das questões 130
Erros aritméticos ou de redução de unidades de medida 130

Capítulo 8 - **Atitudes e concepções dos alunos sobre a estimação matemática** 132
A estimação e a sua relação com a matemática 133
O que é uma estimativa? 133
Estimativa e erro 135
As estimativas e a Matemática 137
Estimação nas outras disciplinas 139
Preferências relativas à estimação 140
Gostar 141
Não gostar 142
Preferência entre estimação e fazer os cálculos com papel e lápis 145
Facilidade ou dificuldade da estimação 147
Importância e utilidade da estimação 152
A importância das estimativas versus a importância das regras e dos algoritmos 154
Utilidade prática 156

Capítulo 9 - **Estudo de quatro alunos** 158
Miguel 159
Processos e capacidades 160
Atitudes e concepções 164
Mariana 165
Processos e capacidades 166
Atitudes e concepções 169
Tomé 172
Processos e capacidades 173
Atitudes e concepções 177
Helder 180
Processos e capacidades 180
Atitudes e concepções 182

Capítulo 10 - **Conclusões e recomendações** 184
Processos usados pelos alunos em actividades de estimação 185
Estimativas de cálculo 185
Estimativas de medidas 189
Tipos de erros encontrados nas actividades de estimação 190
Características e capacidades dos alunos melhor sucedidos em estimação 191
Atitudes e concepções dos alunos em relação à estimação matemática 192
A estimativa é um cálculo mental aproximado 192
Numa estimativa admite-se a existência de erro 193
O cálculo de estimativas pode ser utilizado no dia-a-dia 193
Para uns, o cálculo de estimativas é fácil e rápido; para outros é difícil e confuso 194
As estimativas de medida são mais fáceis do que as de cálculo 195
É importante saber fazer estimativas, mas é mais importante saber as regras e os algoritmos de cálculo 196
Recomendações 197
Recomendações no âmbito da prática pedagógica 197
Recomendações para a formação de professores 202
Recomendações para futuras investigações 203

Agradecimentos 204

Bibliografia 205

Anexo 1 - **Questionário** (versão preliminar) 211
Anexo 2 - **Questionário** 213
Anexo 3 - **Questões base da entrevista** 215
Anexo 4 - **Actividades de estimação pedidas oralmente nas aulas** 216
Anexo 5 - **Actividades de estimação pedidas por escrito nas aulas** 218

Índice de tabelas

Tabela 6.1	89
Tabela 6.2	90
Tabela 6.3	91
Tabela 6.4	92
Tabela 6.5	93
Tabela 6.6	94
Tabela 6.7	95

Capítulo 1

O problema e o contexto

Nos últimos anos efectuaram-se mudanças na nossa sociedade, que vieram provocar uma necessidade de alteração nos objectivos educacionais. Enquanto que há umas décadas as necessidades básicas eram ler, escrever e efectuar cálculos, actualmente assistimos a uma exigência de novas capacidades e de novas competências, nomeadamente, a capacidade de resolução de problemas ligados à realidade e avaliação de resultados numéricos que surgem impostos pelo progresso a todo o momento.

Um documento da Associação de Professores de Matemática (APM), é explícito na recomendação de uma maior ênfase no desenvolvimento das capacidades de cálculo mental e de estimação, ao referir que deverá ser dada, no ensino:

> Uma atenção mais significativa ao cálculo mental e à estimação. Deve-se estimular o sentido do número e o espírito crítico perante os resultados obtidos com os instrumentos electrónicos de cálculo e desenvolver nos alunos a noção de quando é mais apropriado utilizar processos mentais ou esses instrumentos (1988, p. 25).

Também, num documento da Associação dos Supervisores de Matemática, (NCSM) dos E.U.A., considera-se a estimativa como uma competência matemática básica, ao referir que:

> Os alunos devem ser capazes de efectuar rapidamente cálculos aproximados através do cálculo mental e de técnicas de estimativa. Quando o cálculo é necessário num problema ou num cenário de consumo, a estimativa pode ser usada para verificar a razoabilidade da solução, para examinar uma conjectura ou tomar uma decisão. Os alunos devem adquirir técnicas simples para estimar medidas de comprimento, área, volume e massa. Devem ser capazes de decidir quando é que um resultado é suficientemente preciso para o objectivo em causa (NCSM, 1989).

Ainda, o documento "Normas para o currículo e a avaliação em Matemática escolar" (APM/IIE, 1991), refere em relação aos anos de escolaridade 5-8, que:

> O currículo de Matemática deve desenvolver os conceitos subjacentes ao cálculo e à estimação em vários contextos, de forma que os alunos:
>
> -desenvolvam, analisem e expliquem procedimentos de cálculo e técnicas de estimação.
>
> -usem o cálculo e a estimação para resolver problemas.
>
> -usem a estimação para avaliar resultados. (p.112).

No mesmo sentido, uma das finalidades do ensino da Matemática, no nosso país, expressa no programa do 1º Ciclo do Ensino Básico, é a de contribuir para que os alunos desenvolvam capacidades de raciocínio, de avaliação e de tomada de decisões. Assim, este programa aponta para a realização de actividades que permitam ao aluno desenvolver a capacidade de fazer estimativas, tanto em situações de cálculo como de medição. Também, no 2º Ciclo, o programa de Matemática dá ênfase ao desenvolvimento das capacidades de estimação e de crítica de resultados.

A estimação em Matemática é, pois, reconhecida como importante no currículo de Matemática desde os primeiros anos de escolaridade. No actual programa do 1º Ciclo, por exemplo, podemos ler, relativamente à Matemática que:

> Um dos objectivos gerais é: fazer e utilizar estimativas em situações de cálculo ou de medição (Ministério da Educação, 1990, p. 128).

E no programa do 2º Ciclo aparece também como objectivo:

> Desenvolver a capacidade de estimar e criticar um resultado (Ministério da Educação, 1990, p. 10).

Contudo, os programas do Ensino Primário, e do Ensino Preparatório anteriores à presente Reforma, não referem o termo estimativa. Assim, por ser um assunto de tratamento recente no nosso ensino será pertinente ter algumas indicações sobre a realidade educativa portuguesa.

Neste estudo, optou-se pelo 2º Ciclo, porque as aprendizagens a este nível são muito significativas e refletem-se na vida futura dos alunos (Mialaret, 1975). Também, porque, segundo Case (1985), uma verdadeira compreensão da estimativa de cálculo só ocorre quando a criança tem cerca dos 11-12 anos. Neste nível de ensino a estimação é incluída no programa da disciplina de Matemática de um modo mais completo e abrangente. Por outro lado, trata-se do final de um ciclo escolar.

Importante, também, referir que o termo "estimativa" surge nos actuais programas do 1º e do 2º Ciclo do Ensino Básico, sem no entanto ser muito clarificado, isto é, sem que as orientações metodológicas apresentadas ajudem muito a tornar claras e eficazes as intenções do programa, nomeadamente quanto ao seu desenvolvimento em sala de aula.

Por outro lado, são explícitas as recomendações curriculares, nomeadamente, de que as actividades a realizar na sala de aula deverão concretizar a aquisição de conhecimentos e atitudes, e o desenvolvimento de capacidades (Ministério da Educação, 1990).

A preocupação com os aspectos não cognitivos da aprendizagem está presente, no nosso país, nos programas elaborados pela última reforma educativa, em todos os níveis de ensino. Os objectivos destes programas estão definidos ao nível do conhecimento e das capacidades e também ao nível das atitudes e valores dos alunos. Estes programas, não são, no entanto, muito explícitos sobre a forma de integrar os vários tipos de objectivos, no entanto, sugerem que as actividades a desenvolver deverão contemplar esta tripla intenção.

Também não é universalmente defendido que as pessoas que sentem que a estimação é útil estejam mais aptas a estimar e sejam mais eficientes no seu uso. Bestgen et. al. (1980) encontraram que os melhores estimadores tinham atitudes favoráveis acerca da estimação. O estudo de Reys et. al. (1982) indicou que os bons estimadores eram mais confiantes acerca da sua capacidade de estimar. Noutro estudo, Morgan (1988) (citada em Sowder, 1992, p. 379), verificou que muitas das crianças que entrevistou consideravam a estimação uma alternativa inferior ao cálculo exacto. Sowder e Wheeler (1989), verificaram que a estimação é um processo complexo, mas atractivo. Reys et. al. (1991a), num estudo realizado com japoneses, indicam que "muito falta saber acerca do que significa para os estudantes uma estimativa (...)" (p. 40).

Neste sentido, será pertinente ter alguma indicação sobre as atitudes e concepções dos alunos face à estimação, nomeadamente: como é que eles encaram a estimação num contexto escolar, ou seja, se é útil fazer estimativas, ou se estimar é fazer Matemática, ou, ainda, se gostam de fazer estimativas, etc.

Apesar da ênfase dada nas recomendações curriculares, sobre a estimação não tenho conhecimento de pesquisas no nosso país. No entanto, têm sido feitos estudos nesta área, sobretudo nos E.U.A. referidos posteriormente no capítulo 3 sobre a investigação em estimação matemática.

Por outro lado, e enquanto motivação pessoal, a minha formação académica em Ensino da Matemática sempre me despertou o interesse pelo estudo de questões relacionadas com o ensino e a aprendizagem da Matemática, nomeadamente as que se prendem com a ligação à realidade.

Actualmente, enquanto docente da Escola Superior de Educação de Beja, leccionando Matemática em cursos de formação inicial de professores do 1º e do 2º Ciclos, apercebi-me da dificuldade que os meus alunos, futuros professores, têm em efectuar estimativas, nomeadamente em situações de cálculo e de medição.

Por tudo isto, o problema em estudo neste trabalho é a aprendizagem escolar da estimação matemática no 2º Ciclo do Ensino Básico.

Mais especificamente, pretende-se:

a) compreender os processos utilizados pelos alunos quando produzem estimativas em contexto de aula;

b) identificar as atitudes e concepções dos alunos face à estimação.

Assim, espera-se que este estudo contribua para clarificar alguns aspectos da aprendizagem da Matemática, nomeadamente os processos que as crianças usam quando estimam, as suas atitudes e concepções em relação à estimação.

Espera-se, também, contribuir para um domínio de conhecimentos que torne mais eficazes as práticas de ensino dos nossos professores, dado que a estimação pode contribuir como processo de diagnose de alguns conceitos e capacidades, que lhe estão mais directamente associadas, tais como sentido do número, ordem de grandeza, valor de posição, sentido das operações, etc.

Capítulo 2

Enquadramento teórico e definição de conceitos

Na primeira parte deste capítulo apresentam-se algumas reflexões sobre o porquê da inclusão da estimação na Matemática. Problematiza-se o termo estimação e definem-se alguns termos relacionados com este. Apresentam-se, também, algumas reflexões sobre a justificação da integração da estimação no currículo escolar e, ainda, sobre o processo desta integração.

Na segunda parte, apresentam-se algumas questões de terminologia em relação a atitudes e concepções dos alunos em relação à Matemática.

Finalmente, definem-se alguns termos que utilizaremos neste estudo.

Sabemos que a Matemática é uma ciência antiga e é reconhecido que nas suas origens preocupava-se com a resolução de problemas de carácter prático sobretudo para satisfazer necessidades concretas.

Desde que na antiguidade se começaram a medir áreas e tempo foram utilizadas estimativas. Por exemplo, há cerca de 2000 anos, Arquimedes estimou o valor de "pi" entre 223/71 e 22/7.

Nos últimos cem anos surgiu a Estatística como uma disciplina importante que estuda populações e onde a estimativa tem grande importância.

Por outro lado, se analisarmos as designações "matemático" e "matematicamente" em vários dicionários, realça-nos os termos "exacto, preciso" e "exactamente". Existe uma visão da Matemática que considera a "exactitude" como um atributo essencial da mesma.

Assim, em Matemática, sendo a precisão uma das suas principais características, falar de estimação pode parecer uma incongruência difícil de aceitar.

No entanto, em determinados contextos justifica-se e torna-se mais conveniente trabalhar com estimativas em vez de valores exactos, por exemplo:

- na impossibilidade de um valor exacto,

- na impossibilidade de tratamento numérico exacto,

- por limitações humanas ou carências de meios.

No primeiro caso, apenas podemos trabalhar sobre conjecturas razoáveis acerca de valores desconhecidos, dado que não é possível conhecer valores exactos. É o que acontece, por exemplo, nas previsões do futuro ou nas conjecturas sobre o passado. É o que acontece, também, noutras situações em que os valores são variáveis, (como por exemplo, temperatura, populações, etc.), e limitações das medidas (as medidas físicas são inexactas, devido à própria imperfeição dos objectos, etc.) impossibilita-nos de conhecer um valor exacto e obrigam-nos a estimar.

No segundo caso, existem situações que embora conhecendo o valor exacto não podemos usá-lo, devido ao sistema numérico ou ao seu emprego em medida. Como nos exemplos seguintes:

- Qual a quantidade de tecido necessário para revestir uma mesa redonda de 1 metro de diâmetro?

- Se 3 homens fazem 4 cadeiras num dia. Quantos homens são necessários para fazer 2 cadeiras no dia seguinte?

Estes exemplos, o primeiro de natureza algorítmica e o segundo de natureza conceptual, podem colocar-nos em situação de estimação.

No terceiro caso, as limitações humanas forçam-nos a estimar, por exemplo ao trabalhar com números grandes ou números decimais mais pequenos, ou ainda pela ausência de meios materiais de cálculo ou de medida.

Noutras situações, ainda, o uso da estimativa pode ser facilitador. Por vezes é benéfico sacrificar a precisão à clareza e à facilidade de compreensão de determinadas questões.

Como referimos anteriormente o termo "matemática" surge associado a valor exacto o que é confirmado por Cockcroft (1982), ao referir que a opinião que tem o cidadão acerca da Matemática, e especialmente da aritmética, é a de uma ciência que nos conduz a obter respostas exactas. No entanto, a obtenção de respostas exactas é apenas uma das facetas da Matemática, dado que a estimação e a aproximação tem grande importância na Estatística, no Cálculo Numérico e na Matemática Aplicada.

Usiskin (referido em Segovia et. al., 1989, p. 69) argumenta que um ensino dedicado por inteiro a determinar respostas únicas perde outras facetas da Matemática, porque dá uma visão destorcida desta e dos seus usos. Uma obsessão por respostas exactas e por cálculos muito precisos impede as pessoas de adquirir experiências e confiança em juízos de estimação.

O cálculo por estimativas é uma estratégia privilegiada na resolução de problemas do dia a dia quando não há necessidade de determinar, com rigor, o resultado de uma operação, ou quando não é possível conhecer os valores exactos e se pretende tratá-los quantitativamente.

Problematização do termo estimação

O termo "estimativa" tem um significado amplo, cuja descrição geral podemos encontrar em qualquer dicionário. Assim, no Grande Dicionário da Língua Portuguesa (1981), encontra-se:

> Estimativa: cálculo aproximado; juízo; avaliação; consideração (p. 624).

Por outro lado, no Oxford Reference Dictionary (1986), lê-se:

> Estimate: an approximate judgement of number, amount, quality (...) to form an estimate or opinion of (p. 280).

Ou ainda, na Grande Enciclopédia Portuguesa e Brasileira (1940), vem:

> Estimativa: Cálculo; avaliação; cômputo: "A segunda parte compreenderia a economia caseira, isto é (...) a estimativa do número e valor das refeições nas casas particulares", Castilho, colóquio Aldeões, cap. 17, p. 147 (p. 471).

A ideia geral transmitida por estas definições é a de avaliação ou juízo de valor sobre uma coisa, que pode ser moral, ética, estética ou quantitativa. Em Matemática, e neste estudo, limitamo-nos a considerar os casos em que o juízo ou a avaliação é quantitativa e resulta do resultado de uma operação numérica ou da medição de uma quantidade.

Estudos sobre a estimação matemática utilizaram diversas definições. Barbara Reys, Robert Reys e Peñafiel (1991b), por exemplo, utilizaram a palavra estimativa como o "resultado aproximado, não a resposta exacta, mas sim, mais ou menos" (p. 358).

Laurent (citado em Segovia et. al., 1989, p. 19) utiliza uma definição mais precisa: "estimação é a capacidade mental para fazer conjecturas em cálculo e medida com uma formação prévia". Segundo esta definição, para fazer conjecturas em cálculo e medida é necessário ter adquirido conhecimentos prévios. E "essas mesmas conjecturas servirão para adquirir nova formação para aperfeiçoar as habilidades e processos que se empregam nas conjecturas seguintes. Trata-se de uma descrição recursiva" (Segovia et. al., p.19).

Segovia et. al. (1989) explicitaram melhor as características de Laurent:

> 1) [Estimação] Consiste em avaliar uma quantidade ou o resultado de uma operação.
> 2) O sujeito que faz a avaliação tem alguma informação, referência ou experiência sobre a situação que deve ajuizar.
> 3) A avaliação realiza-se de forma mental.
> 4) Faz-se com rapidez empregando números mais simples possíveis.
> 5) O valor atribuído não tem que ser exacto.
> 6) O valor atribuído admite aproximações distintas, dependendo de quem realiza a avaliação. (p. 21)

Observando as definições anteriores verifica-se que estas investigações estudaram dois tipos de estimativas: estimativas de cálculo e estimativas de medida.

O tipo mais comum de estimativas de cálculo requer a estimação do resultado, executando alguns cálculos mentais com aproximações dos números originais. A resposta deve cair dentro de um certo intervalo. Podem também ser incluídas tarefas que exijam decisões, se uma resposta de cálculo é razoável, ou se um número dado é grande ou pequeno comparado com a resposta exacta.

Em relação às estimativas de medidas Bright [citado em Sowder, 1992, p. 382] define estimação de medidas como o processo de chegar a uma medida sem usar instrumentos de medida, considerando medir o processo de comparar um atributo de um objecto físico com alguma unidade pré-seleccionada. É um processo mental, embora existam aspectos visuais e manipulativos para o fazer.

Cada um destes tipos de estimação requer diferentes níveis de compreensão e diferentes tipos de capacidades e por essa razão convém diferenciá-los (Segovia et. al., 1989).

Neste estudo, considerou-se uma *estimativa* como uma previsão do valor aproximado de um resultado. Consideramos esta definição, por razões metodológicas, dado que foi aquela que a professora da turma apresentou aos seus alunos e foi com base nela que estes indicaram as suas estimativas.

E, ainda, por *estimação* consideramos o processo conducente à obtenção de um juízo (estimativa) acerca do resultado de uma operação numérica ou da medida de uma quantidade.

Distinguiram-se as estimativas de cálculo e as estimativas de medida, considerando-se as de cálculo os juízos acerca dos resultados das operações aritméticas e as de medida os juízos acerca do valor numérico de uma determinada quantidade ou do resultado de uma medição.

Estimação e aproximação

Os termos estimação e aproximação associados a proximidade surgem por vezes como sinónimos, pelo que importa fazer a distinção entre eles.

O significado de próximo depende do contexto em que se coloca a pergunta e como é dada a própria resposta. Por exemplo, supunhamos que no supermercado recolhemos alguns produtos que, naturalmente, desconhecendo o valor exacto estimamos em 3500$00. Esta estimativa poderia ser considerada boa a não ser que tivesse na carteira apenas 3500$00. Neste caso necessitaria de fazer uma estimativa mais próxima, para me sentir segura no momento de pagar.

Analisando as considerações feitas anteriormente sobre o conceito de estimação aparece entrelaçado o termo aproximação. Este termo surge, também, nas características apresentadas para a estimação por Segovia et. al. (1989) que referimos anteriormente.

No entanto, alguns autores, argumentam que estimação e aproximação não são sinónimos. Por exemplo, Hall (1984) justifica a sua argumentação considerando que "estimação é usualmente um exercício mental, aproximação usualmente requere instrumentos de alguma espécie" (p. 373).

Sowder (1992), refere que "Thompson (1979) chama uma estimativa, uma 'adivinha' educacional, usualmente feita no contexto do número de objectos numa colecção, o resultado de um cálculo numérico, ou a medida de um objecto. É muitas vezes difícil avaliar a magnitude do erro de uma estimativa. Aproximação, por outro lado, é tentativa para se aproximar de um valor alvo" (p. 373).

Quer a estimação como processo, quer a estimativa como juízo são intrinsecamente individuais, situação diferente de aproximação. Vejamos dois exemplos de estimação e de aproximação, respectivamente:

Estimação - 0,2 é uma estimativa de 4/17 (4/17 é um pouco menos do que 1/4).

Aproximação - 0,235 é uma aproximação, com três casas decimais, de 4/17.

Para encontrar uma aproximação de 4/17 é necessário usar "papel e lápis" ou a calculadora para efectuar a divisão de 4 por 17 e precisar o grau de aproximação necessário, neste caso três casas decimais. Estimação é assim um processo que resulta de uma actividade mental.

No entanto, Sowder (1992), refere que esta distinção entre estimação e aproximação não é universal. A aproximação tem um papel importante nas medidas. Todas as medições de quantidades contínuas são aproximações. Muitas actividades usualmente usadas nas salas de aula, "Estima e depois mede" começam por encontrar uma estimativa e depois encontrar o valor aproximado dessa medida.

Neste sentido, "aproximação é uma parte importante da estimação, mas não esgota as características da estimação" (Segovia et. al., p. 22).

Estimar é uma capacidade mental. Quando se estima não se usa papel e lápis ou calculadora. Aproximação não é uma actividade mental da mesma forma que é a estimação. Aproximação é encontrar um resultado numérico suficientemente preciso para um determinado propósito. Este estudo incide sobre a estimação e não sobre os processos que os alunos usam para fazer aproximações.

Estimação e cálculo mental

Como já referimos, uma estimativa é um valor que se obtém executando alguns cálculos mentais com aproximações dos números originais.

Alguns autores, por exemplo, Reys et. al. (1991a), Sowder, (1992) e Segovia et. al. (1989) referem que uma boa base para a estimação consiste em adquirir capacidades adequadas de cálculo mental.

Cálculo mental é entendido como a capacidade de calcular mentalmente um valor numérico exacto, sem a ajuda de qualquer instrumento de cálculo.

O cálculo mental produz uma resposta exacta e a estimativa produz respostas aproximadas. Estas diferenças têm implicações no ensino e na avaliação destas capacidades. A análise destas diferenças não é contudo, o objectivo deste estudo.

Para obter uma estimativa todo o trabalho se faz mentalmente. Muitos alunos, quando os números são "pequenos", seguem determinados algoritmos mentais, quando são "grandes", primeiro arredondam-os e seguidamente operam-nos mentalmente.

Algoritmo, processos e estratégias de estimação

Relacionados com a estimação surgem, frequentemente, os termos algoritmo, procedimentos algorítmicos, processos e estratégias.

Consideramos algoritmo como "uma série finita de regras a aplicar em determinada ordem a um número finito de dados para chegar sem ambiguidade, num número finito de etapas, a certo resultado" (Alfonso, 1989, p. 105).

Procedimento algorítmico é a utilização mecânica de algoritmos, previamente conhecidos para encontrar uma solução. Durante a aprendizagem da estimação os alunos são frequentemente confrontados perante situações para as quais não dispõem de procedimentos algorítmicos. Necessitam por isso de apelar ou recorrer a determinados processos ou seja a um conjunto de comportamentos ou actividades que constituem a procura de uma estimativa.

Ao conjunto de comportamentos ou actividades que integram a procura de uma estimativa consideramos processo de estimação, por analogia com Kantowski (1977) relativamente ao processo de resolução de problemas.

Ao estimar cada indivíduo opta ou elege o procedimento a que melhor se adaptam os seus conhecimentos e necessidades. Por este motivo, em estimação, facilmente se distinguem estratégias diferentes (Segovia, et. al., 1989).

Neste estudo, consideramos estratégia de estimação o plano geral de actuação para encontrar uma estimativa onde os alunos podem usar um ou mais processos de estimação (Segovia, et. al., 1989).

A Estimação no currículo escolar

Justificação para a introdução da estimação no currículo escolar

Já vimos que estimar é uma forma conveniente de trabalhar com números. Em muitas situações empregam-se números e podemos fazer uso de estimativas. Na escola actual trabalha-se intensamente com números, mas só recentemente se introduziu a estimação no currículo. As razões deste acontecimento poderá ter a ver com "uma determinada visão cultural do que é a matemática escolar e o que se espera dela" (Segovia et. al., 1989, p. 57).

Vários estudos sobre as concepções dos professores (Thompson, 1992) têm sugerido que muitos professores parecem ter uma visão acerca da Matemática que consiste basicamente em factos, regras e teoremas, ainda que alguns encarem a Matemática de forma mais dinâmica, evolutiva e caracterizada por problemas.

Em Portugal, algumas investigações estudaram as atitudes e concepções dos professores sobre a Matemática e o seu ensino. Guimarães (1988) observou uma tendência dos professores para caracterizar a Matemática com o seu carácter lógico, o rigor e a dedução. Abrantes (1986) identificou, nalguns casos, uma tendência para dar uma grande ênfase ao conhecimento e uso de regras para resolver exercícios em actividade de aprendizagem. Estas tendências necessitam não só de uma revisão profunda e também de uma maior abertura a novas possibilidades dentro de esquemas mais amplos.

É no sentido de alargar esta visão limitada que surge, no nosso país, no ensino da Matemática, a referência ao desenvolvimento de novas capacidades (nomeadamente a estimação) e a valorização de atitudes, (APM, 1988; MEC, 1990).

As justificações fundamentais para incluir a estimação no currículo escolar devem-se, segundo Segovia et. al. (1989), essencialmente, à sua utilidade prática e à necessidade de completar a formação escolar que os estudantes recebem.

A **utilidade prática** é uma das justificações porque se deve incluir a estimação no currículo escolar, pelo seguinte:

a) Emprega-se em múltiplas situações reais. Em determinadas situações do quotidiano o uso de estimativas pode ser facilitador e a via mais razoável para encontrar uma resolução. No entanto, sabemos que desde que o homem usa a Matemática para resolver problemas quotidianos, usa a estimação, mesmo não sendo considerada no currículo escolar. E Segovia et. al. (1989) argumentam que, "as pessoas que adquiriram a habilidade de estimar, empregam-na em situações quotidianas, mais frequentemente que as técnicas exactas" (p. 59).

b) Usa técnicas matemáticas que permitem melhorar a razoabilidade dos resultados dos nossos cálculos mentais. Ao adquirir técnicas de estimação, desenvolvem-se determinadas capacidades matemáticas, nomeadamente, o sentido de número e as intuições numéricas (Reys et. al., 1991a), que permitem melhorar a razoabilidade dos resultados quando nos encontramos em situações onde falham os métodos exactos e temos necessidade de ter uma certa intuição do número, de detectar erros ou de fazer estimativas aceitáveis.

Também, Cockcroft (1982) destaca como complemento necessário das necessidades básicas dos adultos, ter o sentido do número que permita fazer estimativas e aproximações aceitáveis.

c) Recurso de aprendizagem escolar. Na medida em que determinadas etapas de alguns temas matemáticos, por exemplo, medidas e a realização de actividades que impliquem estimação, permitem ao aluno reflectir sobre a unidade de medida e facilita a aprendizagem.

Outra justificação para introduzir estimação no currículo é de ordem **formativa**, na medida em que:

a) Completa a visão da Matemática. De facto, sendo a Matemática considerada como uma ciência exacta, onde o rigor é tomado como uma das suas principais características, poderia a estimação parecer-lhe um pouco alheia. No entanto, em determinadas circunstâncias, o valor preciso não é tão facilmente compreendido como o valor aproximado.

> Exemplo: Em vez de dizermos aos alunos que a taxa de juro anual é de 11,978%, é mais claro dizer que é cerca de 12%.

Assim, a aprendizagem da Matemática deve considerar este duplo aspecto da Matemática, exacto e aproximado, e deve também proporcionar aos estudantes actividades que permitam apreciar quais as circunstâncias em que convém utilizar um ou outro (Segovia et. al., 1989).

b) Pode tornar o ensino mais eficaz. Se, por exemplo, antes de efectuarmos os cálculos de uma determinada operação pedirmos uma estimativa do seu valor, o aluno dá-se conta da ordem de grandeza correcta. Assim, na aula devemos trabalhar a estimação de uma forma continuada que permita ao aluno familiarizar-se com as suas técnicas e realizar estimações com facilidade, (Segovia et. al., 1989).

Por outro lado, os alunos ao explicitarem as suas estratégias de estimação, indicam-nos o modo como aprendem algumas noções. Assim podemos considerar a estimativa como um precioso meio de diagnose de aprendizagem de alguns conceitos.

c) Contribui para a elaboração de estratégias próprias. Reys et. al. (1991a) afirmaram que "a maior parte das estratégias usadas por bons estimadores foram desenvolvidas por eles próprios, raramente foram ensinadas na escola e quando foram, eles ignoravam-nas e utilizavam as suas" (p.41).

Por outro lado, Segovia et. al. (1989) referem que excluir as estratégias desenvolvidas pelos próprios alunos não é correcto no aspecto pedagógico, pois algumas são muito válidas e que deve haver um ensino organizado destas estratégias, pois poucos descobririam por si só as mais importantes.

d) Melhora a capacidade de resolução de problemas. Analisando os processos usados pelos bons estimadores, verificamos que uma estimativa pode ser realizada de diferentes modos, por alunos diferentes, permitindo que cada aluno ponha em prática a sua própria estratégia.

Segundo Segovia et. al. (1989) a estimação pode-se considerar como parte integrante da resolução de problemas, quer como previsão, quer como valoração do resultado. Face a um problema é conveniente estimular os alunos a realizarem uma estimativa da solução. O processo de estimação liberta os alunos de pensarem no problema de uma forma mecânica e facilita a compreensão do mesmo.

Reys (1985) consideram que os processos de resolução de problemas podem ser reforçados e estimulados através do ensino de estratégias de estimação. Segundo este autor, a estimação e o pensamento matemático estão bastante relacionados. Assim, ao adquirir prática de estimação os alunos desenvolvem, também, algumas técnicas de pensamento matemático que são parte importante do processo de resolução de problemas, moneadamente, ler um problema e decidir que tipo de resposta é adequada, adquirir flexibilidade mental com os números, seleccionar a estratégia adequada, reconhecer que existe mais do que um caminho a seguir e verificar a razoabilidade do resultado.

Integração no currículo escolar

Diversos estudos sugerem que as estimativas devem ser trabalhadas de uma forma sistemática nos conteúdos que as proporcionem, não constituindo um tópico isolado. Desta forma os alunos podem aprender a usá-las e a reconhecer quando é apropriado estimar.

Neste sentido, Reys e Peñafiel (1991b), sugerem que "as estimativas não sejam ensinadas separadamente, mas sim integradas sistematicamente para fornecer experiências regulares de estimativas durante o ensino. Os professores deveriam ajudar os alunos a decidir quais das alternativas de cálculo (cálculo mental, cálculo escrito, ou estimação) são apropriados em certas ocasiões, e também ajudá-los a reconhecer quando uma estimativa é correcta ou não" (p. 373).

Segovia et. al. (1989), referem que "a estimação não é um conteúdo, tem um processo amplo de aprendizagem. Exige e necessita do desenrolar de uma variedade de habilidades durante um largo período de tempo" (p. 185).

Assim, quando falamos da integração da estimação no currículo de Matemática, não devemos pensar em introduzi-la da seguinte forma: estudar primeiro alguma teoria e depois resolver uns quantos exercícios relacionados com essa teoria. A estimação deve integrar-se em todo o currículo de Matemática, sendo tratada em todos os tópicos que o permitam.

Atitudes e concepções dos alunos acerca da Matemática

O documento "Normas para o currículo e a avaliação em Matemática escolar" (APM/IIE, 1991) apresenta, entre outras, como finalidades do ensino da Matemática que o aluno a) aprenda a valorizar a Matemática e b) a tornar-se confiante nas suas próprias capacidades. Estas finalidades situam-se no domínio afectivo da aprendizagem e estão relacionadas com as atitudes, valores e concepções dos alunos em relação à Matemática.

Também o Programa de Matemática do 2º Ciclo do Ensino Básico (MEC, 1990) é explícito nas referências a estes aspectos afectivos, de parceria com os aspectos cognitivos da aprendizagem, preconizando que tanto os conhecimentos a adquirir como as atitudes e capacidades a desenvolver são parte integrante dos conteúdos, em todas as unidades temáticas. Como refere Abrantes (1995) a respeito destes dois aspectos da aprendizagem, "uns e outros não podem ser separados".

Por outro lado, e de um modo geral, o estudo das atitudes e das concepções dos alunos em relação à Matemática constitui uma problemática importante em Educação, tendo sido objecto de vários estudos. Como resultados destes trabalhos, aceita-se hoje que de alguma forma estes aspectos afectivos intervêm significativamente na aprendizagem dos alunos.

Numa perspectiva construtivista, as atitudes são consideradas como parte integrante da construção do conhecimento pessoal acerca dos objectos, pessoas ou situações e assentam na ideia de que face a um estímulo exterior um indivíduo fornece respostas, por exemplo, tendendo a reagir com posições do tipo "concordo", "discordo", "gosto" ou "não gosto" e que antecedem o seu comportamento (Matos, 1992).

Por exemplo, McKnight et al. (referidos em McLeod, 1992) concluíram no seu estudo que os alunos geralmente gostam de utilizar a calculadora mas não gostam de memorizar regras ou procedimentos algorítmicos nas actividades de Matemática.

De um modo geral, muita da investigação em atitudes relativas à Matemática, ou a alguns dos seus tópicos, sugerem que embora exista uma correlação positiva entre a atitude e o aproveitamento escolar não existe uma dependência entre estas duas variáveis, mas uma interacção complexa e imprevisível (McLeod, 1992).

Por exemplo, um estudo internacional revelou que os estudantes japoneses não gostam tanto de Matemática como os estudantes de outros países, embora o seu aproveitamento escolar nesta disciplina seja muito alto (McLeod, 1992).

Em algumas investigações mais recentes neste domínio o interesse dos investigadores tem-se centrado no estudo das concepções. Por exemplo, Schoenfeld (1989) apresentou como resultados de um seu estudo a ideia de que os alunos encaram a Matemática como algo objectivo cuja aprendizagem se deve, no essencial, à memorização. Neste estudo, o autor identificou outras concepções nos alunos, nomeadamente, que há sempre fórmulas para resolver os problemas e que estes podem ser resolvidos em poucos minutos.

Matos (1990) considera as concepções como uma modalidade de conhecimento da qual o indivíduo se serve para a apreensão, avaliação e explicação da realidade que o rodeia. Abrantes (1995), referenciando Borasi (1990), preferiu adoptar uma expressão como *visão dos alunos* para, de uma forma ampla e abrangente, englobar um conjunto de concepções acerca do que é e como se aprende Matemática, concluindo, entre outras coisas, que "a visão dos alunos sobre a Matemática condiciona o modo como se envolvem nas tarefas matemáticas" (p. 602).

Será também neste sentido amplo que as concepções dos alunos sobre a estimação matemática serão consideradas.

Definição de conceitos operativos

Nesta secção pretende-se explicitar o significado atribuido neste trabalho a alguns conceitos fundamentais.

Algoritmo- "uma série finita de regras a aplicar em determinada ordem a um número finito de dados para chegar sem ambiguidade, num número finito de etapas, a certo resultado" (Alfonso, 1989, p. 105).

Cálculo mental- é a capacidade de calcular mentalmente um valor numérico exacto, sem a ajuda de qualquer instrumento de cálculo.

Estimação- o processo conducente à obtenção de um juízo (estimativa) acerca do resultado de uma operação numérica ou da medida de uma quantidade.

Estimativa- é uma previsão ou juízo do valor aproximado de um resultado.

Estimativas de cálculo- os juízos acerca dos resultados das operações aritméticas.

Estimativas de medida- os juízos acerca do valor numérico de uma determinada quantidade ou do resultado de uma medição.

Estratégia de estimação- o plano geral de actuação para encontrar uma estimativa onde os alunos podem usar um ou mais processos de estimação (Segovia, et. al., 1989).

Procedimento algoritmico- é a utilização mecânica de algoritmos, previamente conhecidos para encontrar uma solução.

Processo de estimação- O conjunto de comportamentos ou actividades que integram a procura de uma estimativa.

Capítulo 3

A investigação sobre estimação matemática

Neste capítulo discute-se trabalhos de investigação relacionados com as principais questões envolvidas no estudo. Descrevem-se quadros teóricos e resultados de investigações acerca da estimação matemática, nomeadamente, relativas à aprendizagem e ensino de estimativas de cálculo e de medida.

Na parte sobre estimativas de cálculo, que são as que foram objecto de um maior número de estudos, referem-se, essencialmente, os processos usados durante a estimação, as capacidades matemáticas relacionadas com a estimação e o efeito do ensino na capacidade de estimação.

Discutiremos, ainda, resultados de estudos realizados sobre as estimativas de medida e os processos usados neste tipo de estimativas.

Finalmente, apresentam-se resultados de investigações sobre atitudes dos alunos face à estimação matemática.

Aprendizagem da estimação

Poucas investigações se debruçaram sobre a problemática da aprendizagem da estimação. Sobre este assunto parece importante apresentar a teoria de Robie Case (1985).

Este autor, baseando-se na teoria de Piaget e em outras teorias cognitivistas da aprendizagem, em particular a de processamento da informação, considera dois estádios no processo de desenvolvimento cognitivo durante a idade escolar:

-Estádio dimensional (dos 5 aos 10 anos aproximadamente)

Este estádio caracteriza-se pelo número de dimensões em que as crianças conseguem centrar a sua atenção ao mesmo tempo.

Crianças neste estádio são capazes de centrar a sua atenção numa componente, tendo uma ou mais dimensões.

Assim, por exemplo, calcular mentalmente 4+3 é uma tarefa unidimensional, porque tem uma só dimensão quantitativa-unidades.

O cálculo mental de 25+24 é já uma tarefa bidimensional porque o número tem duas dimensões quantitativas- unidades e dezenas. A criança tem que realizar duas adições e relacioná-las de modo apropriado.

Quando a criança consegue focalizar-se e integrar três ou mais ordens de dimensões encontra-se no estádio seguinte.

-Estádio vectorial (dos 11 aos 18 anos aproximadamente).

Os subestádios neste estádio caracterizam-se pela evolução da capacidade de coordenar duas ou mais componentes complexas e qualitativamente diferentes de uma tarefa.

Segundo Case (1985), uma estimativa de cálculo é uma tarefa em que podem ser consideradas duas componentes complexas e multidimensionais que têm que ser coordenadas.

Uma dessas componentes é o cálculo aritmético, que numa estimativa é feito mentalmente, e a outra é a aproximação.

Assim, segundo Case, uma verdadeira compreensão da estimação envolvendo cálculo só ocorre quando a criança entra no estádio vectorial, isto é cerca dos 11-12 anos, uma vez que inclui a execução e coordenação de ambas as componentes.

Contudo, existem tarefas que envolvem apenas uma das componentes que podem ser resolvidas em anos anteriores, além de que a estimação não está apenas limitada a situações de cálculo. Por exemplo, a capacidade para estimar medidas e quantidades pode e deve ser desenvolvida no 1º Ciclo do Ensino Básico, desde muito cedo e de uma forma sistemática.

Logo, desde a aprendizagem dos primeiros números, é possível encontrar exercícios em que as crianças têm de estimar o valor numérico de um conjunto de objectos, por exemplo, de estimar a quantidade de bagos de feijão que estão dentro de um frasco, ou a quantidade de bolas dentro de uma caixa ou, ainda, o peso de um colega.

As crianças ainda pequenas compreendem, por exemplo, que são ligeiramente mais baixas que o seu irmão mais velho, mas muito mais baixas que o seu pai, e que de entre um monte de bombons qual deles é maior, etc.

Segundo a teoria de Case os alunos do 2º Ciclo encontram-se na transição entre os dois estádios, logo é possível que encontrem alguma dificuldade em efectuar estimativas, o que significa que se devem organizar actividades de diagnose e, em função dos resultados, organizar as actividades e propô-las aumentando progressivamente o grau de complexidade.

Estimativas de cálculo

Da análise das pesquisas realizadas sobre as estimativas de cálculo evidenciaram-se três aspectos sobre os quais os investigadores centraram o seu trabalho: processos cognitivos gerais observados entre os bons estimadores, estimação e sua relação com outras capacidades matemáticas, o efeito do ensino na capacidade de estimação.

Processos cognitivos gerais observados entre os bons estimadores

Os resultados de uma pesquisa efectuada por Reys, Bestgen, Rybolt, e Wyatt, nos E.U.A. em 1982, para identificar e caracterizar os processos usados em estimativas de cálculo por bons estimadores, permitiram formular o início de uma teoria acerca de como os bons estimadores (crianças e adultos) estimam. Nesse estudo, os pesquisadores administraram um teste com 55 itens de estimativas de cálculo a 1200 estudantes dos 7 aos 12 anos de escolaridade e a adultos. Neste teste foi limitado o tempo, entre 10-15 segundos para cada item. A estimação não fazia parte do currículo escolar destes estudantes.

Deste modo, seleccionaram um grupo de bons estimadores, os que se situavam nos 10% melhores de cada grupo de idades, que foram entrevistados para determinar que estratégias usavam na resolução de problemas de estimativas.

Foram identificados, durante as entrevistas, entre os bons estimadores, três processos cognitivos gerais, que designaram por reformulação, translação e compensação. E em cada um destes processos foram, também, identificadas uma ou mais estratégias de estimação.

Além destes três processos gerais foram, ainda, observadas um determinado número de estratégias, usadas com pouca regularidade e com carácter único e que por isso, não foram descritas e caracterizadas.

Reformulação - Neste processo os indivíduos alteram os valores numéricos de modo a obter valores mais fáceis de calcular mentalmente e mantêm a estrutura do problema intacta. Encontraram-se vários tipos de reformulação, conforme se descreve a seguir:

1- *Front-end*

a) Arredondamento para o próximo múltiplo de 5, 10, 100, etc.

Exemplo: 474257 : 8127

> Posso arredondar o dividendo para 480000 e o divisor para 8000, o que dá cerca de 60. [Aluno do 10º grau (Reys et.al, 1982, p. 188)].

b) Trabalhar com um ou mais dos maiores dígitos da esquerda.

Exemplo: 87419+92765+90045+80973+97103

> Junta-se os primeiros dígitos da esquerda e dá 43 ou 44, então a soma é 450000. [Aluno do 9º grau (Reys et. al, 1982, p. 187)].

2- Substituição de números

a) Usar números compatíveis relativamente próximos dos números originais para tornar as operações mais fáceis.

Exemplo: $\frac{348 \times 6}{41}$

> arredonda-se $\frac{350 \times 6}{42}$ o que dá 350, ou seja 50. [Aluno do 12º grau (Reys et. al, 1982, p. 188)].

b) Usar uma equivalência, ou uma forma equivalente aproximada dos números, tais como mudar uma fracção para uma percentagem ou para um número decimal.

Exemplo: Quanto é 30% de 105900?

> 30% é cerça de 1/3 e 1/3 de 105000 é 35000. [Aluno do 7º grau (Reys et. al, 1982, p. 188)].

Translação - É um processo em que se muda a estrutura matemática do problema para uma estrutura mental mais manejável, mais fácil. Por vezes os números e as operações são simultaneamente alterados de modo a obter-se essa forma mental mais fácil.

Foram observados diferentes tipos de procedimentos:

a) Processar as operações por uma forma diferente daquela que figura no problema inicial.

Exemplo: $\frac{348 \times 6}{41}$

É mais fácil dividir o 6 e 41 primeiro, o qual é cerca de 7, então 348:7 é cerca de 50. Aluno do 9º grau (Reys et. al, 1982, p. 188).

b) Mudar as operações apresentadas no problema para uma forma equivalente.

Exemplo: 87419+92765+90054+80974+98100

Todos os números são próximos de 90000, então deve ser 90000 x 5, o que cerca de 450000. [Aluno do 9º grau (Reys et. al, 1982, p. 189)].

A translação difere da reformulação. Por exemplo:

Seja 8947+7201+7814, um processo de reformulação envolve 9000+7000+800, o que dá 24000.

Por outro lado, para as mesmas operações, 8947+7201+7814 um processo de translação envolve 8000x3, o que dá 24000.

"Na reformulação os estudantes parecem concentrar-se nos números e mantêm a operação. Na translação o processo é mais flexível. O estudante parece ter uma panorâmica geral do problema e é menos constrangido pelos números envolvidos. Por vezes os números e as operações são simultaneamente alterados para uma forma mais manejável" (Reys et al., 1982, p. 189).

Compensação - Neste processo os números e a estrutura matemática do problema podem ser ambos alterados. Em virtude dessas alterações, nas quais podem aparecer variações numéricas, surge a necessidade de efectuar ajustamentos e assim este fenómeno manifesta-se por duas etapas distintas:

1) Compensação intermédia: ajustamentos feitos durante a etapa de cálculo mental.

Exemplo: Estimar 0,24×439

> Arredonda-se 0,24 para 0,2 e 439 para 450, então multiplica-se e obtem-se a estimativa de 90 (Rey et. al., 1991a, p. 40).

2) Compensação final: ajustamento feito no fim de todas as reflexões de cálculo mental e o conhecimento da estimativa da resposta exacta.

Exemplo: Estimar 0,24×439

> Dado que 0,24 é próximo de 1/5, então multiplica-se 1/5 por 400 para obter 80, mas como arredondei ambos os factores para baixo, então deve ser mais do que 80. Deve ser cerca de 90 (Reys et. al., 1991a, p. 40).

Levine (1982) com o objectivo de determinar como é que os alunos estimavam, realizou uma pesquisa com 89 estudantes universitários com vários níveis de Matemática. A cada estudante foram colocadas 20 questões de estimação, sendo 10 problemas com multiplicação e outras 10 com divisões, que envolviam números inteiros e decimais.

Na resolução das 20 questões não foi limitado o tempo, e foi solicitado que os indivíduos pensassem alto enquanto obtinham as suas estimativas. O uso da entrevista tipo pensar alto facilitou a identificação de estratégias de estimação usadas pelos estudantes.

Nesse estudo foram identificadas e caracterizadas diferentes estratégias, no cálculo de estimativas de produtos e quocientes, nomeadamente, a transformação de um número decimal em fracção, rescrever um número na forma de potência de dez, arredondar ambos os números, arredondar apenas um número, transformar um número no seu múltiplo de 10, 100, etc. mais próximo, alterar os números para outros cujo produto ou quociente é conhecido pelo estimador, usar produtos ou quocientes parciais e procedimentos algorítmicos.

Exemplo da estratégia tipo **arredondamento de ambos os números:**

a) Estimar 824 x 26 como 800 x 30.

b) Estimar 25410 : 65 como 25000: 60 (Levine, 1982, p. 352).

Exemplo da estratégia tipo **procedimento algorítmico:**

Estimar 64,6 x 0,16, calculando 6 x 646 = 3876 ou cerca de 3000, 10 x 646 = 6460 ou cerca de 6000, juntando os resultados obtém-se 9000 e recolocando o ponto decimal obtém-se uma estimativa final de 9 (Levine, 1982, p. 353).

Estas estratégias tinham também sido identificadas anteriormente por outros autores (Bestgen et. al., 1980; Johnson, 1979) mas, segundo Levine (1982) pouco se sabe acerca de como as pessoas estimam.

Levine (1982) verificou que as estratégias tipo arredondamento de ambos os números e procedimentos algorítmicos foram usadas mais frequentemente do que outras.

A estratégia tipo "procedimento algorítmico" foi usada mais frequentemente por estudantes com baixa pontuação num teste de capacidades quantitativas, facto que Levine (1982) justificou por este tipo de estratégia não requerer "qualquer sentido do número" (p. 358).

Também, neste estudo, Levine (1982) encontrou que os estudantes melhor pontuados no teste de capacidades quantitativas usaram um maior número de estratégias de estimação e foram melhores estimadores do que os estudantes pior pontuados nesse mesmo teste. Parece "que a capacidade quantitativa está mais proximamente relacionada com a capacidade de estimação, embora o número de diferentes estratégias de estimação usadas não fosse relacionado com a capacidade de estimação" (p. 358).

Tal como no estudo de Reys et. al. (1982), os bons estimadores usaram um maior número de estratégias e pareciam ser mais flexíveis no seu pensamento do que os piores estimadores.

As categorias de estratégias foram mais limitadas no estudo de Levine (1982) do que no estudo de Reys et al. (1982), logo torna-se difícil notar se alguma estratégia mais sofisticada encontrada no estudo de Reys et. al. estava enquadrada dentro das capacidades dos bons estudantes no estudo de Levine.

Os processos fundamentais encontrados, (reformulação, translação e compensação) foram também identificados por Sowder e Wheeler (1989) num estudo para investigar o desenvolvimento da compreensão de conceitos e processos mais directamente associados com estimativas de cálculo, realizado com 11 estudantes de cada um dos seguintes níveis de escolaridade 3, 5, 7 e 9, quando resolviam diferentes tipos de problemas de estimativas de cálculo.

Uma outra pesquisa realizada por Reys et. al. (1991a) para analisar o desempenho em estimativas de cálculo e as estratégias usadas por estudantes japoneses, do 5º e 8º grau, evidenciou os processos cognitivos de translação, reformulação e compensação usados por estes estudantes. Não obstante, a tendência de muitos era apelar previamente e mentalmente às técnicas algorítmicas de papel e lápis aprendidas. Esta tendência para usar processos de papel e lápis mentalmente muitas vezes interferia com o processo de estimação e tornava-o mais uma tarefa de cálculo mental. Tais processos foram não só inapropriados como também ineficientes. Segundo Reys et. al. (1991a), nem todos os estudantes usaram a totalidade dos processos durante todo o tempo. Contudo verificou-se que cada estudante usou um ou mais destes processos.

Tal como no estudo realizado nos Estados Unidos, o processo mais comum usado pelos estudantes japoneses foi a reformulação, seguido pela compensação e por último pela translação. Estes estudantes revelaram relutância em mudar a estrutura básica de um problema para uma forma equivalente.

Entre estes processos gerais foram encontradas um determinado número de estratégias específicas, como por exemplo o uso de unidades de referência, referentes (*benchmarks*), para estimar somas com fracções. Nestas situações observou-se, algumas vezes, que os alunos usaram unidades mentais de referência, como por exemplo

1/2, para produzir as suas estimativas. Outras vezes usaram a forma do tradicional algoritmo escrito para calcular mentalmente estimativas de somas com fracções.

Outra pesquisa realizada por Reys, B., Reys, R. e Peñafiel (1991b), para identificar e caracterizar as capacidades de cálculo de estimativas e as estratégias usadas pelos estudantes mexicanos do 5º e 8º grau, indicou que "algumas das estratégias e todos os processos gerais, reformulação, translação e compensação, descritos anteriormente, foram evidentes nas entrevistas com os estudantes mexicanos, que foram identificados como bons estimadores" (p. 371). Não foram encontrados estratégias ou processos novos.

As entrevistas revelaram uma limitada variedade de estratégias de estimação. A estratégia de arredondamento, contrariamente ao que se verificou numa pesquisa semelhante nos Estados Unidos, em 1982, só foi usada ocasionalmente nas entrevistas. Também foram usados referentes na estimação de fracções e de percentagens. No entanto, a estratégia usada mais frequentemente foi o apelo mental aos algoritmos com papel e lápis.

O outro objectivo deste estudo era replicar pesquisas anteriores feitas nos E.U.A. e Japão, num país diferente de ambos, cultural e educacionalmente, o México, de modo a validar e generalizar a estrutura que descreve os processos, estratégias e características dos bons estimadores.

Ainda, neste estudo observou-se que o baixo desempenho destes estudantes no teste escrito, especificamente os do 5º grau, reflete a ênfase curricular dada aos algoritmos com papel e lápis e às respostas exactas e também que muitos destes estudantes não desenvolveram estratégias de estimação por si próprios. A estimação não tinha sido ensinada a estes estudantes.

Uma das recomendações deste estudo foi a de que seria necessário pesquisas semelhantes noutros países para juntar mais conhecimento e validar a teoria existente sobre os processos e técnicas usadas por bons estimadores.

Nestes estudos verificou-se que se encontram algumas estratégias e os mesmos processos entre os bons estimadores em países muito diferentes culturalmente e educacionalmente.

Todas estas pesquisas referem que estes processos de estimar raramente são ensinados nas escolas, e mesmo quando são, os bons estimadores muitas vezes ignoram as regras ensinadas e arredondam os números para formas mais fáceis de trabalhar mentalmente.

Estimação e sua relação com outras capacidades matemáticas

Algumas capacidades matemáticas parecem estar muito naturalmente relacionadas com a capacidade de estimar.

No estudo de Reys et. al. (1982) com o objectivo de identificar e descrever os processos de cálculo de estimativas usados por bons estimadores, nos E.U.A., com alunos do 7º ao 12º grau e a adultos, observaram-se várias características nos bons estimadores. Estas características incluem conhecimento de factos básicos tais como: compreensão de valor posicional, capacidade de cálculo mental, tolerância para o erro, compreensão de propriedades aritméticas, confiança própria como estimador e uso de uma variedade de estratégias.

No estudo de Levine (1982) notou-se que a capacidade quantitativa, capacidades de raciocínio e cálculo está relacionada com a capacidade de estimar.

Rubenstein (1985) realizou um estudo com o objectivo de avaliar o desempenho em estimativas de cálculo e explorar as conexões entre as estimativas e outras capacidades matemáticas, com 144 raparigas e 165 rapazes do 8º grau. Nesta pesquisa estudaram-se algumas questões que tinham sido conjecturadas por investigadores anteriores como sendo pré-requisitos para o sucesso em estimativas de cálculo, nomeadamente "trabalhar com números arredondados, a compreensão de relações de ordem e a maturidade da compreensão da natureza do sistema de numeração decimal" (p.166).

Neste estudo, as capacidades que contribuiram mais para predizer o desempenho em estimação - operações com dezenas (isto é, multiplicar e dividir por potências de dez) fazer comparações e ajuizar o tamanho relativo- não foram as conjecturadas. De facto, "multiplicar e dividir por potências de dez, a qual era uma capacidade matemática difícil, teve uma relação forte com o desempenho em estimação" (Rubenstein, 1985, p. 117).

Também, neste estudo, Rubenstein (1985) indicou que o conhecimento do valor posicional dos algarismos, da representação de números, do arredondamento e das operações com múltiplos de dez, que eram prognosticadas como sendo importantes para a estimação, nomeadamente nos manuais escolares, não apareceram como factores relevantes no teste estatístico utilizado no estudo. Assim, Rubenstein (1985), diz que "estas capacidades podem ser necessárias para a estimação, mas outras capacidades contribuem mais. O ensino das estimativas não deveria ser limitado ao ensino em arredondamento, valor posicional e operações com números arredondados" (p. 117).

Este estudo não foi, neste aspecto, consistente com o de Reys et. al. (1982) que indica como primeira característica dos bons estimadores conhecimentos de factos básicos e de valor posicional.

Segundo Sowder (1992), esta inconsistência poderá ser resultado de "os outros factores encontrados por Rubenstein (1985) estarem tão relacionados com o valor posicional e o conhecimento de factos básicos, que estes não fossem significativos no teste estatístico, ou porque os itens usados por Rubenstein para testar estes factores não fossem apropriados, ou porque os alunos no seu estudo diferissem pouco nas suas capacidades para recordar estes factos básicos. Por outro lado, o facto de estes dois factores terem sido encontrados como características de bons estimadores, não implicam que estejam directamente relacionados com a estimação." (p. 375).

Sowder e Wheeler (1989), a partir de um estudo para averiguar o desenvolvimento de conceitos e capacidades relacionadas com o cálculo de estimativas realizado com estudantes dos graus 3, 5, 7 e 9, indicaram que, encontrar números e aproximá-los para um dado valor, reconhecer qual de dois números está entre um terceiro, cálculo mental, reconhecer quando um problema não exige uma resposta exacta são tópicos merecedores de mais tempo de ensino do que aquele que lhes é atribuído.

Por outro lado, este estudo indicou que as crianças devem desenvolver à priori conceitos e capacidades consideradas necessárias para serem boas estimadoras e evitar fracassos e frustrações. De facto, verificou-se que usualmente a capacidade de encontrar valores aproximados para os números, aumenta com a idade. Os mais novos, ainda, não tinham adquirido capacidades de arredondamento para empreender o processo de estimação por eles próprios. Este resultado é consistente com a teoria de Case (1985), onde se refere que uma verdadeira compreensão da estimativa de cálculo ocorre cerca dos 11-12 anos de idade.

As características indicadas no estudo de Reys et. al. (1982), efectuado nos Estados Unidos, foram também evidenciadas na pesquisa feita com alunos japoneses, realizada por Reys at. al. (1991a). Embora os japoneses possuíssem excelentes capacidades de cálculo mental, facilidade em usar técnicas de valor posicional e revelassem menor tolerância em aceitar o erro, tendiam a usar os algoritmos mais do que tentar fazer estimativas.

No entanto, essa pesquisa, indicou que "as capacidades de efectuar estimativas não evoluem necessariamente do desenvolvimento dos tradicionais algoritmos escritos. De facto, é possível que a aprendizagem intensa dos algoritmos escritos possa inibir um número de factores importantes que contribuem para o sucesso no cálculo de estimativas, nomeadamente, a flexibilidade do uso dos números, a tolerância para o erro, o uso de múltiplas estratégias e técnicas de ajustamento" (Reys et. al. , 1991a, p. 55).

Também, consistentemente com investigações paralelas no Japão e EUA, o estudo realizado por Reys et. al. (1991b) com estudantes mexicanos do 5º e do 8º grau, mostrou que os estudantes raramente reflectiam sobre as suas estimativas por iniciativa própria e raramente reconheciam estimativas não razoáveis. As ocasiões em que mudaram as suas estimativas foi durante a descrição oral das suas estratégias, ao entrevistador, quando descobriam um erro.

A capacidade exibida pelos estudantes mexicanos para formular estratégias alternativas de estimação mostra o seu sentido do número, característica dos bons estimadores indicada por Reys et. al. (1982).

Gliner (1991) realizou um estudo, com professores estagiários, cujos objectivos eram verificar se existem diferenças no desempenho de tarefas de estimação em situações de cálculo ou de aplicação prática e que atributos pessoais podem estar relacionados com o sucesso em estimação. Neste estudo foram apresentados aos sujeitos um teste com 25 problemas de aplicação prática e 25 questões numéricas idênticas às que existiam nos problemas práticos.

Neste estudo, notou-se que "a estimação parece ser um processo natural quando os problemas são apresentados numa forma de aplicação prática" (Gliner, 1991, p. 602).

Gliner (1991) verificou que os sujeitos foram melhor sucedidos nas questões de aplicação prática do que nas questões numéricas, resultado semelhante ao do estudo de Reys et. al. (1982) e contraditório com o encontrado por Rubenstein (1985), onde "as tarefas de estimação apresentadas na forma numérica não foram mais difíceis do que as apresentadas na forma verbal" (p. 117).

No entanto, a justificação pode estar no facto de os problemas do estudo de Gliner (1991) envolverem cálculos com dinheiro, um tipo de problemas acerca dos quais rapidamente se estimam as respostas.

Este resultado encontrado por Gliner (1991) parece contraditório com o usual sucesso nas respostas exactas usando papel e lápis, de facto "os problemas de aplicação prática usualmente traduzem valores de sucesso mais baixos do que os problemas de cálculo aritmético" (p. 602).

Ainda, neste estudo, encontrou-se uma variável muito relacionada com o sucesso em estimação matemática e que o autor designa por auto-percepção matemática. Todavia, "a média dos anos de Matemática, não só não foram indicadores do sucesso em estimação, como foram negativamente correlacionados com a pontuação em estimação" (Gliner, 1991, p. 602). Esta situação deve-se ao facto de aos alunos melhor sucedidos em Matemática não lhes ter sido ensinado estimação e eles não terem desenvolvido essa capacidade por si próprios.

Contudo, Levine (1982) encontrou uma correlação positiva entre a aptidão matemática e a capacidade de estimar. Segundo Gliner (1991), "pode ser que a estimação seja uma capacidade que cada um possa adquirir e pode não estar relacionada com o sucesso em matemática" (p. 603).

Ainda, da análise das várias leituras efectuadas, é claro que os bons estimadores são flexíveis no seu pensamento, usam uma variedade de estratégias, demonstram um conhecimento profundo dos números das operações e das suas propriedades, etc. [Reys et. al. (1982), Levine (1982), Sowder e Wheeler (1986), Gliner (1991), Reys et. al. (1991a)].

Efeito do ensino na capacidade de estimação

Foram realizadas algumas investigações para estudar o efeito do ensino na capacidade de estimação. Bestgen et. al. (1980), realizaram uma pesquisa para estudar a eficácia do ensino sistemático nas atitudes e capacidade de cálculo de estimativas, com professores estagiários.

Neste estudo existiam três grupos. Um grupo de controle, um grupo de tratamento onde foi dada prática semanalmente e um segundo grupo de tratamento, onde além de prática semanal foram ensinadas estratégias específicas de estimação, durante 5 minutos por semana durante dez semanas.

As conclusões mais significativas deste estudo foram que "os melhores estimadores tinham atitudes favoráveis e compreendiam os processos de estimação como mais compreensíveis e menos complicados do que os piores estimadores. No entanto, os melhores estimadores não sentiam que a estimação fosse tão necessária como os piores" (Bestgen et. al., 1980, p. 134).

O grupo que recebeu prática mostrou ganhos significativos em relação ao grupo que não recebeu. De facto, "o efeito do ensino e a prática regular de actividades foi evidente no desempenho e nas atitudes" (Bestgen, et. al., p. 135).

No entanto, não houve diferença significativa no desempenho em estimação entre o grupo que recebeu apenas prática e o grupo que recebeu prática e ensino de estratégias específicas. Este resultado pode dever-se ao facto de o tempo de ensino ter sido breve. Mas, segundo Bestgen et. al. (1980), "esta pesquisa documenta o valor de fornecer aos estagiários actividades de estimativas de cálculo" (p. 135).

Também, neste estudo, se verificou que os estagiários faziam melhor estimativas de problemas com adições e subtracções do que com multiplicações e divisões, tal como no estudo de Rubenstein (1985) e Gliner (1991). E, ainda, foram melhor sucedidos em problemas de estimação com números inteiros do que com números decimais, resultado consistente com o de Levine (1982), Rubenstein (1985) e Gliner (1991).

Outro resultado consistente com o estudo de Gliner (1991) foi a relação forte entre a auto-percepção enquanto estudantes de Matemática e o desempenho em estimativas de cálculo.

Na pesquisa realizada por Schoen et. al. (1981) foi avaliado o efeito de vários métodos de ensinar estimativas com números inteiros. Este estudo foi realizado com crianças do 4º, 5º e 6º grau, e indicou que "a estimação de cálculo com números inteiros pode ser ensinada num pequeno período de tempo" (Schoen et. al., 1981, p. 176). Estas crianças tornaram-se melhores estimadores e adoptaram a estratégia de estimação mais válida que tinham aprendido.

No entanto, não foi evidente que o ensino da estimação aumentasse ou interferisse com as capacidades de cálculo exacto. De facto, "depois do ensino da estimação os grupos podiam estimar melhor e calcular tão bem como o grupo que gastou o mesmo tempo com exercícios de cálculo" (Schoen, et. al., 1981, p. 176).

Mas, segundo Schoen et. al. (1981), foi evidente que os estudantes que melhor aprenderam a estimar somas e produtos foram melhor sucedidos a estimar a solução de problemas verbais. No entanto, não foi evidente que o ensino da estimação se transferisse para a capacidade de resolução de problemas.

Por outro lado, nas entrevistas com bons estimadores, verificou-se que "os bons estimadores foram capazes de ajuizar a magnitude da sua estimativa relativamente à resposta exacta. Alguns estudantes faziam esse juízo dizendo se tinham arredondado os números para cima ou para baixo" (p. 177).

Também se verificou que muitos estudantes não consideravam que a melhor estimativa fosse a resposta exacta. Este facto, pode ser resultado do ensino em estimação, dado que as crianças consideraram a estimação como um processo para ser aprendido e usado separado do cálculo. Segundo Schoen et. al. (1981), por vezes, "os estudantes sabiam a resposta exacta, pensada por cálculo mental, mas arredondavam-na para obter a sua estimativa" (p. 177).

De facto, nos estudos realizados por Reys et. al. (1982), nos EUA e por Reys et. al. (1991a), no Japão e por Reys et. al. (1991b), no México, com crianças do 5º e do 8º grau que não tinham estimação no currículo escolar, verificou-se que estas raramente reflectiam sobre as suas estimativas e raramente reconheciam estimativas incorrectas.

Mack (referido em Sowder, 1992, p. 378), realizou um estudo sobre a estimação com fracções. Segundo Sowder (1992), "enquanto nenhum estudante conseguia estimar 7/8+5/6 no início do ensino, todos se tornaram mais eficientes a estimar somas e diferenças com fracções e podiam usar estes conhecimentos para dar significado aos algoritmos de cálculo e escaparem-se aos erros mais comuns nas operações com fracções" (p. 378).

Assim, segundo Sowder (1992), Mack sugere que "todo o ensino do cálculo dos algoritmos com fracções seja adiado porque antes os estudantes devem ser capazes de formar estimativas para as operações" (p. 378).

Destes estudos, podemos concluir que o ensino das estimativas revelou-se eficaz, ou seja que é possível aprender a estimar. Quando sujeitas ao ensino as crianças tornam-se mais flexíveis nas suas aproximações ao estimar e são melhor sucedidas quando trabalham com problemas do tipo dos incluídos no ensino.

Estimativas de medida e de quantidade

Uma estimativa de medida pode ser feita sem usar qualquer operação aritmética, embora muitas vezes os dois tipos de estimação estejam frequentemente entrelaçados. No entanto, segundo Sowder (1992), as "estimativas de medidas exigem diferentes habilidades das de estimativas de cálculo e as estimativas de medidas e de quantidade (*numerosity*), exigem por vezes as mesmas capacidades" (p. 382). Por exemplo, para encontrar o comprimento de uma sala, podemos estimar o comprimento de um azulejo, contar o número de azulejos e seguidamente multiplicá-los pela estimativa efectuada. No entanto, estimar o comprimento de um azulejo exige um tipo diferente de capacidade das de estimativas de numerosidade, uma vez que, tal como diz Sowder (1992) "as estimativas de medidas referem-se a quantidades contínuas e as de quantidade a quantidades discretas" (p. 371).

Existe pouca pesquisa sobre as estimativas de medidas. Crawford e Zylstra (citados em Sowder, 1992, p. 382) encontraram que os alunos mais velhos das escolas superiores eram fracos a efectuar estimativas de medidas. Eles também referiram que o desempenho em estimativas de medidas têm uma correlação baixa com os resultados de testes mentais e as capacidades computacionais.

Sowder (1992), refere dois estudos, "Corle (1960; 1963), o primeiro estudo examinou o desempenho pelos alunos do 5º e 6º grau. O segundo focou o desempenho por professores primários e professores estagiários. As questões dadas às crianças incluíam estimativas de pesos, comprimento, diâmetro, temperatura, tempo e capacidade de líquidos. Aos adultos foram dados problemas de estimativas de medidas dos mesmos atributos, mais um problema de volume e outro de pressão. Os do 6º grau mostraram maior precisão nas suas estimativas do que os do 5º grau; os rapazes mostraram maior precisão do que as raparigas, embora nenhum grupo se desempenhasse bem. (...) Os dois grupos de adultos desempenharam-se melhor do que as crianças, mas os professores não mostraram maior acurácia do que os estagiários.

Foram encontradas mais correlações entre os "pontos" de estimativas e destreza aritmética, mas não foram dadas indicações de como é que as estimativas foram feitas" (p. 382).

Não é claro se estas crianças tinham recebido algum ensino em medições. Mas parece que não, dado os erros que surgiram, tais como: medir a temperatura com uma balança de mola e usar a régua para medir a parte de água de um jarro. Se as crianças não experienciam situações de medição elas não devem ser peritas em estimar medidas concluem os autores.

Sowder (1992), refere, ainda, dois estudos efectuados por Swan e Jones (1971; 1980), semelhantes aos de Corle (1963). Nestes estudos, os problemas dados incluíam encontrar muitas estimativas de "rua", tais como a altura de uma árvore, a distância entre dois prédios, e a área de um campo. Os investigadores encontraram uma progressão nas habilidades de estimação dos alunos, desde o primário até ao superior, com o desempenho dos adultos considerado melhor do que o dos alunos mais novos.

Os homens estimavam melhor distâncias e alturas do que as mulheres, mas esta diferença não se verificou para o peso e a temperatura. Pequenas distâncias foram mais fáceis de estimar do que as longas e ambas foram mais fáceis de estimar do que o peso.

Neste estudo, tal como o resultado obtido por Corle, Crawford e Zylstra, verificou-se que as crianças em idade escolar e os adultos não são bons a estimar. Porque, segundo o argumento utilizado para justificar estes resultados, eles eram inexperientes com os tipos de medida que tinham de estimar.

Outro estudo feito por Siegel, Goldsmith e Madson (1982) para estudar a capacidade de estimação em problemas de medição e numerosidade, tinha como objectivos: a) avaliar o desenvolvimento de diferenças na capacidade de estimação das crianças no seu desempenho numa variedade de problemas; b) avaliar a validade de um modelo de estimação proposto e c) sugerir modificações ao modelo.

O modelo continha dois procedimentos de estimativa relacionados, aplicação de uma medida conhecida, referente, e decomposição/recomposição (decompor em pequenas amostras de forma a aplicar a medida conhecida, e depois recompor para obter a estimativa final).

Ambos foram aplicados em situações de medida e de numerosidade. O estudo realizou-se com crianças de dois a oito anos de escolaridade. As tarefas incluíam estimativas do comprimento de uma pá e do número de nomes de uma página de uma lista telefónica (decomposição, numerosidade).

Os investigadores, entre outras conclusões, encontraram apenas uma fraca relação entre a precisão em estimação e o relatório do uso de estratégias. Mas, o que as crianças sabem acerca dos sistemas de medida, número e cálculo pode afectar fortemente as suas capacidades para efectuar estimativas precisas.

Processos usados em estimativas de medidas de comprimento

Como já foi referido, Siegel, Goldsmith e Madson (1982) para estudarem a capacidade de estimação em problemas de medição e numerosidade, usaram um modelo que continha dois procedimentos de estimativa relacionados:

referente - este procedimento consiste na aplicação de uma medida conhecida, é essencialmente um processo de comparação.

decomposição / recomposição - neste procedimento decompõe-se o objecto alvo em pequenas amostras de forma a aplicar a medida conhecida e, depois, recompõe-se para obter a estimativa final.

Hildreth (1983) identificou, durante um estudo exploratório, os seguintes processos (ele usou o termo estratégia) usados em estimativas de medida: iteração de unidades, uso de sinais de subdivisão, conhecimento prévio, comparação, partição (*chunking*), ajustamento (*squeezing*).

Hildreth (1983) descreveu cada um destes processos do seguinte modo:

Iteração de unidades - Sucessivo apelo a uma unidade mental de referência para o comprimento do objecto para de seguida determinar a contagem dessas unidades.

Notou-se que o uso de unidades iteradas é difícil quando o tamanho da unidade comparada com o tamanho do objecto é pequena.

Uso de sinais de subdivisão - Este processo consiste em subdividir o comprimento a estimar usando a informação dada ou conhecida pelo estimador. Seguidamente faz-se a contagem das várias medidas obtidas.

Conhecimento prévio - Neste processo usa-se informação que o estimador tem acerca do objecto alvo ou da unidade. Por exemplo, para estimar a medida de comprimento de uma sala pode-se usar o conhecimento que se tem de que a medida de um pé são 30 cm.

Comparação - compara-se o objecto alvo com outro objecto qualquer à vista ou fora dela, acerca do qual o estimador tem um conhecimento prévio.

Partição - subdivide-se o objecto mentalmente em segmentos congruentes (*chunks*) e seguidamente estima-se a medida de um.

Ajustamento - Neste processo fazem-se estimativas que são um pouco maiores ou menores do que o objecto alvo e, seguidamente, faz-se o "acerto" da medida.

Hildreth (1983) realizou um estudo, com alunos do 5º e 7º grau. A metade destes sujeitos foram ensinados os processos descritos anteriormente e à outra metade foram-lhes dados objectos para estimar e posteriormente medir. Não foram discutidas estratégias e processos de estimação. Todos os estudantes realizaram um teste de capacidade de percepção visual.

Nesse estudo, verificou-se que o grupo que recebeu ensino sobre os processos de estimação usou, posteriormente, um maior número desses processos no cálculo de estimativas. Encontrou-se, também, que a capacidade de estimação está relacionada com a capacidade de percepção visual, mas não com a capacidade matemática.

Segundo este autor os resultados deste estudo sugerem algumas ideias para o ensino da estimação, nomeadamente que:

- o ensino inicial da estimação deve incluir a discussão das estratégias usadas para estimar, e que exemplos existentes dentro da sala de aula podem servir para ilustrar cada estratégia.
- as crianças devem adquirir um conjunto de objectos de referência acerca dos quais elas saibam a sua medida.
- as crianças devem ter prática de estimação de medidas usando unidades de medida padrão e não padrão.
- as crianças devem ser encorajadas a fazer estimativas tão precisas quanto possível, e as mais velhas devem calcular também o erro relativo para cada medida.
- a estimação deve ser feita em pequenos grupos, para que assim as crianças possam discutir a melhor estratégia para cada tarefa de estimação.
- os professores podem aprender como é que os seus alunos pensam acerca das medidas observando-os nas tarefas de estimação.

Atitudes e concepções dos alunos face à estimação matemática

Segundo Sowder (1992), os indíviduos que acreditam que a estimação é útil e que sentem que a estimação é uma estratégia válida para obter informações necessárias estão mais aptos para a usar frequentemente e serem mais eficientes no seu uso. No entanto, para esta autora, esta atitude não parece ser universalmente aceite entre as crianças.

No estudo de Bestgen et. al. (1980), concluiu-se que "os melhores estimadores tinham atitudes favoráveis face à estimação e entendiam o processo como mais compreensível e menos complicado do que os piores estimadores. No entanto, os melhores estimadores não sentiam que a estimação fosse tão necessária como o sentiam os piores estimadores" (p. 134).

Num outro estudo, realizado por Reys et. al. (1982), nos graus 7 a 12 de escolaridade e com adultos, encontrou-se que os "bons estimadores eram confiantes relativamente às suas próprias capacidades de estimação, e esta confiança influenciou a sua consistência, rapidez e escolha de estratégias (...) excepto nalguns casos onde houveram alguns conflitos. Alguns estimadores tinham uma forte auto-confiança nas estratégias usadas quando estimavam" (p. 199).

Por outro lado, muitas crianças não comprendeem o que é a estimação e por isso não acreditam que ela seja útil. Morgan (1988) [citado em Sowder, 1992, p. 378], "encontrou que muitas crianças não tinham uma concepção clara do objectivo e da natureza da estimação".

Resultados consistentes com os de Reys et. al. (1982) foram os encontrados por Sowder e Wheeler (1989). Segundo Sowder e Wheeler (1989), os estudantes que eram bons estimadores eram confiantes nas suas capacidades matemáticas. Por exemplo, atribuíam o seu sucesso à capacidade e o fracasso a causas externas tais como tarefas difíceis ou necessidade de esforço, valorizando o cálculo mental e a estimação. Por outro lado, aos piores estimadores faltava-lhes confiança nas suas capacidades para fazer Matemática e atribuíam o sucesso a causas tais como esforço ou ajuda e o fracasso à falta de capacidade e não valorizavam muito o cálculo mental e a estimação.

Ainda, neste estudo, verificou-se que os estudantes consideraram a estimação como um processo complexo mas atractivo.

Outro factor que parece ter alguma influência na capacidade de estimar é a tolerância em aceitar o erro. Reys et. al. (1982) notaram que a tolerância para o erro era uma das características dos bons estimadores e acreditavam que era a compreensão do conceito de estimativa que os levava a confortarem-se com algum erro. De facto, "o conhecimento do que significa e o objectivo de uma estimativa foi encontrado no pensamento dos bons estimadores. Esta compreensão do conceito de estimativa permitiu-lhes confortarem-se com algum erro" (p. 198).

Também, no estudo realizado por Reys et. al. (1991a), com estudantes japoneses do 5º e do 8º grau, a tolerância em aceitar o erro, surgiu incluída nas características dos bons estimadores.

No estudo realizado por Reys et. al. (1991b), com estudantes mexicanos, o desempenho em estimação foi muito baixo e o teste utilizado considerado muito difícil. No entanto, encontrou-se uma elevada percentagem de estudantes que disseram que a estimação é importante mas só alguns, poucos, se consideraram bons estimadores.

Segundo Sowder (1992), "talvez os estudantes mais velhos tenham uma menor tolerância em aceitar o erro, resultado de vários anos de ensino, onde apenas a resposta exacta era aceite. Houve uma forte tendência na boa vontade dos estudantes em aceitar mais do que um processo de estimação e mais do que um resultado de uma estimativa. Apesar disso, foram relutantes em aceitar duas respostas certas" (p. 377). Este resultado parece ser também resultado da ênfase dada no ensino a uma resposta correcta desde os primeiros anos de escolaridade.

Num estudo de Gliner (1991), foi também referido que "a auto-percepção das suas capacidades em estimação matemática não contribui para predizer o sucesso em estimação matemática" (p. 603). De facto, houve sujeitos que pelo facto de terem pouco sucesso em estimação não sabiam se teriam sucesso ou não. Por outro lado, também existem estudantes, que não sendo bem sucedidos nas tarefas com papel e lápis, são bem sucedidos nas questões de estimação, e "este sucesso pode dar-lhe maior confiança para ser melhor sucedido em Matemática" (p. 603).

Destes estudos, parece ressaltar que a confiança na capacidade de estimar, a tolerância para o erro e o sentir a estimação como útil são atitudes favoráveis à estimação. Assim, de acordo com estes resultados, ao incluir estimativas no currículo escolar, afigura-se pertinente o conhecimento das atitudes dos alunos.

Capítulo 4

Metodologia

Opções metodológicas

O problema em estudo neste trabalho é a aprendizagem escolar da estimação matemática numa turma do 2º ano do 2º Ciclo do Ensino Básico.

Mais especificamente, pretende-se:

a) compreender os processos utilizados pelos alunos quando produzem estimativas em contexto de aula;

b) identificar as atitudes e concepções dos alunos face à estimação.

Pretende-se, por um lado, compreender processos e, por outro, identificar atitudes e concepções. Por isso impõe-se uma abordagem próxima e sistemática junto dos sujeitos e das situações vividas, o que pressupõe uma metodologia que privilegie esses contactos. Neste sentido, adoptou-se uma metodologia de natureza qualitativa.

É, também, uma metodologia de tipo naturalista, porque se pretendeu observar os sujeitos, os seus comportamentos e as situações de aprendizagem vividas na sala de aula através do contacto directo e prolongado do investigador com o ambiente e a situação em estudo, mas sem uma intervenção intencional.

Porque nos interessa mais estudar os processos envolvidos na resolução de determinado problema, verificando como eles se manifestam nas actividades e interagem entre si, do que com os produtos (Lüdke e André, 1986), optou-se por uma metodologia que permita uma abordagem deste tipo.

Pressupondo que o comportamento humano varia com o ambiente em que ocorre, o investigador em estudos de natureza qualitativa não se contenta em pedir a auxiliares seus que recolham os dados, sempre que possível vai ele próprio ao local. Como referem Lüdke e André (1986), "A justificativa para que o pesquisador mantenha um contacto estreito e directo com a situação onde os fenómenos ocorrem naturalmente é a de que estes são muito influenciados pelo seu contexto" (p. 12).

Por outro lado, "a abordagem da investigação qualitativa exige que o mundo seja examinado com a ideia de que nada é trivial, que tudo tem potencial para constituir uma pista que nos permita estabelecer uma compreensão mais esclarecedora do nosso objecto de estudo" (Bogdan e Biklen, 1991, p. 49).

Quanto à recolha e tratamento dos dados, procurando compreender os fenómenos em estudo, o investigador qualitativo não reduz o grande volume da narração a meros símbolos numéricos, uma vez que aqueles são predominantemente descritivos, incluindo narrações, transcrições de entrevistas, depoimentos, fotografias, etc. A recolha de dados é feita de forma exaustiva, não selectiva.

O investigador analisa os dados o mais perto possível da forma original. A escrita, nesta perspectiva, assume uma grande importância, dado que por vezes se publicam citações para melhor ilustrar a descrição, ou esclarecer um ponto de vista. Segundo Bisquerra (1989), a investigação de natureza qualitativa "em geral não permite uma análise estatística. Às vezes pode haver recursos a frequências e categorizações" (p. 258).

A complexidade da realidade educativa, tal como vivências na sala de aula, situações de aprendizagem, etc. é mais facilmente retratada nas pesquisas qualitativas.

Os investigadores qualitativos tendem a avaliar os seus dados de modo indutivo.

"Os pesquisadores não se preocupam em buscar evidências que comprovem hipóteses definidas antes do início dos estudos. (...) O desenvolvimento do estudo aproxima-se a um funil: no início há questões ou focos de interesse muito amplos, que no final se tornam mais directos e específicos. O pesquisador vai precisando melhor esses focos à medida que o estudo se desenvolve" (Lüdke e André, 1986, p. 13).

Segundo Bisquerra (1989), "A investigação qualitativa é holística - abarca o fenómeno no seu conjunto, e é recursiva - o desenho da investigação é emergente: vai-se elaborando à medida que avança a investigação" (p. 258).

É a própria análise dos dados que permite que se venha a descobrir quais são as hipóteses relevantes sobre o problema.

Assim, de um modo geral, podemos dizer que este estudo apresenta as características que, segundo Bogdan e Biklen (1991), caracterizam uma investigação de natureza qualitativa: - o investigador é o principal instrumento e o ambiente natural é a fonte directa dos dados; - os dados recolhidos são sobretudo descritivos;-a grande preocupação centra-se nos processos;-a análise dos dados tende a seguir um processo indutivo; - é dada especial atenção ao ponto de vista dos participantes.

Este estudo não teve características experimentais, procurando-se antes a compreensão dos fenómenos. Não é uma abordagem virada para o estudo de situações de intervenção conduzidas pelo investigador. Também não se tratava de comprovar ou testar hipóteses formuladas à partida.

Este estudo é uma investigação de natureza empírica, baseada fortemente no trabalho de campo, centrado num grupo de alunos, mais propriamente uma turma, onde as opções metodológicas tiveram sempre presente o carácter particular e descritivo das situações.

Participantes

O presente estudo foi realizado numa turma do 2º ano do 2º Ciclo do Ensino Básico, de uma Escola C+S de Beja.

A escolha da escola foi apenas determinada pelo facto de aí se encontrar a leccionar uma professora, com a qual a investigadora mantinha contactos no âmbito da Prática Pedagógica dos alunos da Escola Superior de Educação de Beja e que se mostrou interessada e disponível em participar neste estudo.

A turma foi escolhida de entre as duas turmas de Matemática que esta professora leccionava. A escolha incidiu nesta turma devido ao facto de não estar incluída, em actividades de Prática Pedagógica de alunos da Escola Superior de Educação.

Escolheu-se o 2º ano do 2º Ciclo por se tratar do final de um ciclo escolar. Neste nível de ensino a estimação é incluída no programa da disciplina de Matemática de um modo mais completo e abrangente. Por outro lado, uma verdadeira compreensão da estimação envolvendo cálculos ocorre cerca dos 11-12 anos (Case, 1985).

Fases da investigação

A estimação matemática é uma capacidade que requere um processo amplo de aprendizagem e dado que a professora optou por integrá-la em todo o currículo de Matemática, tratando-a em vários tópicos, este estudo decorreu de Janeiro a Junho de 1995.

Desenvolveu-se nas seguintes fases:

1. Convite à professora da turma efectuado por contacto pessoal em Outubro de 1994.

2. Apresentação ao Conselho Directivo da Escola C+S de Santa Maria, em Outubro de 1994, da proposta do projecto de investigação juntamente com o pedido de autorização para observar as aulas de Matemática da turma, e para efectuar a recolha dos dados necessários ao estudo durante aquele ano lectivo.

3. Observações das aulas, aplicação dos questionários, realização das entrevistas individuais, e recolha de todos os documentos escritos pelos alunos, ou pelo professor, que se julgaram necessários ao estudo, no período de Janeiro a Junho de 1995.

4. Análise dos dados e redacção da conclusão, a partir de Junho de 1995.

Tipos de dados recolhidos

Os dados recolhidos para este estudo foram do seguinte tipo:

- registos escritos feitos pela investigadora com base na observação das aulas;
- registos escritos feitos pela investigadora acerca de conversas informais com a professora e com os alunos;
- artefactos, isto é, documentos escritos produzidos pelos alunos e pela professora;
- entrevistas aos alunos;
- questionário feito aos alunos.

Registos de observações de aulas

A professora da turma teve a responsabilidade do processo de ensino, enquanto que à investigadora coube o papel de observadora sem qualquer intervenção intencional no processo educativo.

Segundo Patton (1980) a observação directa é uma importante recolha de dados na investigação qualitativa.

Neste sentido, para obter uma descrição detalhada das actividades realizadas ao longo do estudo, do modo como surgiam e eram colocadas à turma e dos processos que os alunos utilizavam, a investigadora empenhou-se na criação de um diário de campo, onde efectuou os registos escritos das observações das aulas e das conversas informais com a professora e com os alunos.

As observações foram orientadas em torno de alguns aspectos, que se julgaram necessários relativamente às questões do estudo, tais como o tipo de actividades que surgiam na aula, a forma como eram solicitadas aos alunos, o processo usado durante a sua resolução, os raciocínios usados pelos alunos na resolução destas actividades, etc, para não se terminar com um amontoado de informação irrelevante, nem de escapar dados importantes para a análise do problema. Assim, os registos, tiveram uma parte descritiva e outra reflexiva.

Na parte descritiva, constam os registos do que ocorreu na sala de aula (reconstrução de diálogos, descrição de actividades, artefactos usados pelo professor, etc.). Na parte reflexiva, incluem-se as observações pessoais do investigador, feitas durante a recolha de dados (dúvidas, incertezas, problemas, impressões, etc.).

Estas sugestões tiveram como objectivo orientar e seleccionar o que se pretende observar e ajudar a organizar os dados (Lüdke e André, 1986).

Artefactos

Estão incluídos nesta categoria os trabalhos escritos dos alunos e da professora. Os documentos escritos pelos alunos são as respostas a pequenas fichas de trabalho e a um teste de avaliação, propostos pela professora. Estes documentos eram recolhidos pela professora, e posteriormente fornecidos à investigadora, no sentido de os analisar e poder esclarecer algumas dúvidas que surgissem, através de pequenas conversas informais com os alunos.

Conversas informais

No final de cada aula, normalmente ocorriam conversas informais com a professora, como por exemplo, acerca das actividades propostas, do modo como os alunos aderiam a elas, dos processos que utilizavam na sua realização ou, ainda, de opiniões da própria professora sobre este assunto. Estas conversas eram de seguida registadas, por escrito, pela investigadora no seu diário de campo.

Neste estudo, estava em causa compreender os processos utilizados pelos alunos em actividades de estimação. Assim, à medida que o estudo decorria e nas aulas eram colocadas actividades de estimação, os raciocínios dos alunos eram registados e analisados. Por vezes surgiram dúvidas por parte da investigadora acerca da interpretação desses registos o que ocasionou conversas informais com os alunos para o seu esclarecimento.

Estas pequenas conversas informais ocasionais ocorreram ao longo de todo o estudo, foram feitas apenas a alguns alunos, quando era necessário compreender os processos mentais de cálculo utilizados por estes, durante o processo de estimação.

Por outro lado, estas pequenas conversas informais não tiveram como base um guião elaborado anteriormente, apenas tinham como referência algumas questões que resultavam da análise dos dados e que permitiam colocar as perguntas necessárias à compreensão do raciocínio utilizado inicialmente.

Questionário

No sentido de recolher informação sobre o modo como os alunos encaram a estimação matemática, foram elaborados pela investigadora dois questionários de resposta aberta (anexos 1 e 2).

O questionário (anexo 1) foi aplicado inicialmente numa outra turma da mesma professora e do mesmo ano de escolaridade, que após a reformulação de questões onde surgiram dúvidas, por parte dos alunos, e a inclusão de outras que se revelaram pertinentes permitiu a elaboração do questionário (anexo 2).

Este questionário (anexo 2) foi aplicado a todos os alunos da turma na segunda metade da investigação, em Maio de 1995, altura em que estes alunos já estavam familiarizados com as actividades de estimação.

Trata-se de um questionário de resposta aberta e foi dado o tempo necessário para darem a resposta. Não foi anónimo, porque poderiam surgir dúvidas nalgumas respostas e assim a investigadora poderia esclarecê-las junto desses alunos usando entrevistas, mas foi explicado aos alunos a sua intenção.

Entrevistas

Neste estudo realizaram-se entrevistas com o objectivo de obter informação sobre o modo como os alunos encaram a estimação matemática, nomeadamente, para completar os dados recolhidos pelo questionário (anexo 2). Estas foram feitas individualmente a todos os alunos da turma, na parte final do estudo, em Maio e Junho de 1995.

Nestas entrevistas adoptou-se um modelo de entrevista semi-estruturada por ser facilitador da interacção entre a investigadora e os alunos entrevistados e por permitir focar a recolha de dados necessários aos objectivos do estudo. Assim, teve-se como referência algumas questões do questionário referido anteriormente, onde subsistiam, por parte da investigadora dúvidas e, ainda, três questões (anexo 3), que não sendo questões directas, de algum modo, podiam complementar as respostas do questionário.

Análise de dados

A grande quantidade de informação fez com que fosse necessário usar um processo para a organizar e a interpretar. Assim, os dados recolhidos através dos vários instrumentos foram separados em várias partes.

Numa primeira parte, reuniram-se os dados que permitem compreender a forma como decorreu o ensino e, também, alguns pontos de vista da professora sobre o assunto que estava a ser estudado. Aqui, estão incluídos registos escritos da investigadora acerca da observação das aulas e de conversas informais com a professora. A descrição sobre o ensino foi validada pela própria professora da turma, isto é, foi-lhe dado a ler o texto inicial para eventuais correcções.

Na segunda parte, estão incluídos os dados relativos aos processos utilizados pelos alunos no cálculo de estimativas e são essencialmente os registos escritos das observações das aulas e das pequenas conversas informais com os alunos e, ainda, os artefactos, ou seja, os documentos escritos produzidos pelos alunos e pela professora.

Numa terceira parte, incluíram-se os dados que permitem compreender as atitudes e concepções destes alunos em relação à estimação matemática. Estes dados são as respostas ao questionário e à entrevista.

Por último, analisaram-se globalmente todos os registos escritos, os artefactos, os questionários e as entrevistas de todos os alunos, no sentido de seleccionar um grupo deles, três ou quatro, com características tais que fossem significativas, tendo em conta os objectivos deste estudo.

A análise dos dados pode ser feita durante as várias etapas da investigação, tornando-se mais sistemática e formal após o encerramento da recolha dos dados, altura em que o investigador já possui uma ideia mais precisa do seu estudo e assim pode construir um conjunto de categorias descritivas (Lüdke e André, 1986). Neste estudo a análise dos dados foi sendo feita à medida que eles iam sendo recolhidos, mas tornou-se sistemática e formal após a conclusão da recolha dos mesmos.

É a categorização que permite a passagem dos dados brutos aos dados organizados, dado que a categorização é a operação de classificação de elementos constitutivos de um conjunto por diferenciação e seguidamente por reagrupamento de acordo com critérios antes definidos (Bardin, 1977). Deste modo, nesta investigação recorreu-se à análise de conteúdo, como um conjunto de técnicas de análise dos documentos obtidos visando obter, por procedimentos sistemáticos e objectivos, indicadores qualitativos e quantitativos que permitam a inferência de conhecimentos relativos às questões em estudo (Bardin, 1977).

Em cada uma das partes referidas anteriormente, os dados obtidos foram lidos e analisados. Numa primeira etapa, os dados foram organizados, separando-os em partes onde se identificaram tendências consideradas relevantes. Numa segunda etapa, reavaliaram-se essas características dominantes e procurou-se relações e inferências tendentes à construção de categorias de análise (Bardin, 1977). Por último, surgiu a etapa da interpretação. No entanto, estas etapas não foram independentes umas das outras.

De facto, os dados obtidos, tanto as respostas ao questionário, à entrevista ou, ainda, os registos escritos das observações de aulas, foram, em primeiro lugar, lidos globalmente e, depois, sujeitos a leituras sucessivas, pergunta a pergunta. A partir da análise do conteúdo das respostas, definiram-se categorias referentes a determinada pergunta.

Deste trabalho resultou um conjunto de categorias, ou seja, rúbricas ou classes que reúnem um grupo de elementos com caracteres comuns sob um título genérico.

A questão da generalização

Convém referir que o objectivo deste tipo de investigação não é permitir formular generalizações, mas sim "produzir conhecimento acerca de objectos muito particulares (...). No entanto, poderá haver, a formulação de hipóteses de trabalho que poderão ser testadas em novas investigações" (Ponte, 1994, p. 11).

A produção de conhecimentos acerca de uma população em geral deve recorrer a outras abordagens metodológicas.

Assim, neste estudo, não se procurou proceder a generalizações mas, apenas, identificar e descrever determinadas situações com o propósito de conhecer melhor o objecto de investigação.

Âmbito

Este estudo foi muito localizado, realizou-se com um grupo de alunos de um determinado ano, logo quaisquer generalizações para outros alunos e outros anos terão que ser muito cautelosas.

Por outro lado, devido ao ensino da estimação ser um assunto recente no nosso país onde não há grandes orientações curriculares, metodológicas, onde não existe grande relevo por parte de muitos manuais escolares e sendo, ainda, um assunto pouco familiar ou relevante para muitos professores todas as extrapolações seriam limitadas.

Capítulo 5

Descrição do contexto do ensino

Neste capítulo descrevem-se aspectos gerais relacionados com o ensino na turma envolvida neste estudo. Apresenta-se uma descrição do contexto do ensino, porque tal poderá contribuir para uma clarificação do problema em estudo neste trabalho, que é a aprendizagem escolar da estimação matemática no 2º Ciclo do Ensino Básico. E, mais especificamente, a compreensão dos processos utilizados pelos alunos quando produzem estimativas em contexto de aula, e a identificação das atitudes e concepções dos alunos face à estimação.

Foi feita uma caracterização da professora desta turma, focando os aspectos mais importantes tais como: o interesse demonstrado em relação a esta investigação, os seus pontos de vista em relação à estimação matemática e ao seu ensino e o seu relacionamento com os alunos. Tal poderá ajudar a compreender melhor as situações de ensino em que esteve envolvida.

Descreve-se, ainda, a forma como decorreu o trabalho em sala de aula, nomeadamente, como surgiam as actividades nas aulas, as indicações que eram dadas aos alunos, e o processo usado para as resolver.

A professora

A professora da turma envolvida no estudo tem uma formação académica de base na área das Ciências Humanas e Sociais. Possui 21 anos de serviço docente, tendo feito a profissionalização em serviço no 4º grupo B-Matemática e Ciências da Natureza do então Ensino Preparatório, há cerca de dez anos. Pertence ao quadro de nomeação definitiva da escola onde lecciona.

Como foi referido atrás, no capítulo 4 Metodologia, esta professora colaborava com a Escola Superior de Educação, facultando turmas suas para os alunos efectuarem intervenções no âmbito da Prática Pedagógica. Deste modo, a investigadora, enquanto orientadora dos alunos da Escola Superior de Educação, em momentos anteriores, teve a oportunidade de a conhecer e com ela estabelecer algum relacionamento.

Primeiro contacto

Desde o primeiro momento que a professora pareceu entusiasmada com o estudo, embora começasse por dizer que "não sabia muito" sobre estimativas, por ser um assunto novo no programa de Matemática do 2º Ciclo. Mostrou-se interessada e disponível para aprender e poder participar. Logo numa primeira conversa informal referiu:

> "as estimativas podem fazer-se sempre, nos números, nas operações, nas medidas, etc. Existe quase sempre situações onde eles [os alunos] podem estimar. E será que estas situações não são mais interessantes do que ficar só a falar, sem ver aplicação no real?... Quando entrarmos nas proporções, nas percentagens e no cálculo de áreas surgem novamente muitas oportunidades para fazer estimativas."

No nosso primeiro contacto, referiu também episódios da sua experiência didáctica anterior:

"o ano passado, verifiquei que os alunos não tinham a noção das medidas quando estimavam, então arranjei uma fita métrica e umas réguas para medirem vários objectos depois de terem estimado a sua medida."

Pode dizer-se que a professora sentiu entusiasmo por este tipo de questões ligadas à estimação, como foi referido pela Cláudia, que já tinha sido sua aluna no ano anterior, ao dizer: "ela [professora] gosta de explorar este tipo de coisas."

E, também, pela professora ao referir:

"eu quando vejo coisas novas gosto de fazer, de experimentar, mas sei de muitos colegas que não fazem, não sabem..."

Durante a recolha de dados

Mais tarde, durante as observações das aulas, a professora referiu-se à importância da estimação:

"eu acho a estimação muito importante e interessante para eles aprenderem a pensar, para serem flexíveis no pensamento, para descobrirem estratégias por eles próprios, para compreenderem a estrutura dos números e o que eles representam."

A importância da estimação foi, ainda, realçada pela professora, pelo facto de permitir a identificação de dificuldades dos alunos no domínio de conceitos. Por exemplo, no final de umas actividades de estimação com fracções, durante uma conversa informal, referiu:

"o cálculo de estimativas é um processo que nos ajuda a detectar erros. Certas situações [os alunos], fazem correcto com papel e lápis, mecanizam, mas não conseguem estimar, porque não compreendem o que os números representam... Para o próximo ano vou insistir mais em situações deste tipo, porque são importantes para compreenderem o que a fracção significa."

Mas, também se referiu à extensão do programa e ao facto de ter que dar tudo a correr como um obstáculo ao desenvolvimento de actividades deste tipo.

A professora procurou transmitir aos seus alunos este interesse e importância que atribuía à estimação. De facto, algumas vezes, no final de uma actividade de estimação, referiu-lhes:

> "é muito importante que vocês não saibam só papaguear as coisinhas, as regras... aquilo que aprenderam. É preciso saber aplicar noutras situações, como por exemplo a estimação... Estão a ver... Estes exercícios são importantes ou não?"

No seu relacionamento com os alunos, a professora era afável, quase maternal e simpática. As aulas decorriam num ambiente de trabalho, calmo, disciplinado e onde se observava nos alunos interesse pelo que faziam.

Os alunos gostavam dela, como mostram alguns dos seus comentários. Por exemplo, o Rui disse:

> "[gosto de Matemática] porque também temos uma professora muito boa."

Também, o Paulo referiu:

> "é uma das aulas [Matemática] que eu gosto mais. A professora ensina muito bem."

Esta referência à maneira como a professora ensina é também expressa pela Cláudia quando diz:

> "não sou muito boa a Matemática, mas gosto da maneira como a professora ensina."

A professora procurava encorajá-los a estimar. Quando surgiam erros ela corrigia-os, mas se o raciocínio, ou o pensamento estava correcto, ela realçava-o. Por exemplo, ao ouvir a justificação de uma estimativa do Rui, ela referiu:

"o pensamento do Rui, também é viável, só que... onde acham que ele errou... [diálogo com os alunos]. Embora o raciocínio dele esteja correcto."

Numa outra situação, sobre proporcionalidade directa, onde o Miguel usou o processo de compensação, referindo-se ao seu raciocínio, disse:

"viram... o Miguel brincou com os números, não se prendeu ao cálculo exacto."

Valorizava sobretudo o raciocínio e o pensamento. Dizia que eram úteis em muitas situações, como por exemplo, quando não precisamos de encontrar o valor certo, como várias vezes o referiu aos seus alunos:

"por vezes não precisamos de fazer o algoritmo para obter o resultado certo, basta usar a nossa cabeça... é como se fosse um jogo com números... vocês muitas vezes falham, porque não sabem pensar... é preciso saber usar o nosso pensamento, o nosso raciocínio."

Fase final da recolha de dados

Cinco meses após o início das observações, a professora comentou:

"tem sido uma experiência muito gira, muito interessante... eu tenho aprendido muito."

No entanto, referiu que sentiu falta de formação sobre este assunto, para que assim pudesse, por exemplo, ser mais crítica em relação à escolha de determinadas actividades e à metodologia usada na sala de aula.

E, segundo ela, os alunos aprendem a estimar com a prática, facto que referiu:

"eles [os alunos] fazem razoavelmente bem estimativas de medidas e de números inteiros, porque já [as] faziam no ano anterior e eles aprenderam."

e, num outro dia, após realizarem algumas actividades de estimação disse:

"era interessante fazer esta ficha noutra turma, que nunca tivesse feito estimativas... é que estes alunos pelo facto de estimarem de vez em quando, já vão fazendo alguma coisa."

No entanto, também pensa que os alunos seriam melhor sucedidos se fossem mais "flexíveis no pensamento". De facto, referiu:

"os alunos têm uma forte tendência para apelar mentalmente aos algoritmos escritos... o que prejudica a estimação... deviam ser mais flexíveis no pensamento."

Por outro lado, a professora considera que "os alunos necessitam desenvolver capacidades de cálculo mental, ter conhecimentos acerca das operações e dos números para poderem estimar. Embora, também referisse que em certas actividades simples era mais fácil recorrer mentalmente ao algoritmo escrito do que usar processos de estimação.

As aulas

Feita uma caracterização breve da professora da turma, descreve-se agora, de forma geral, como decorriam as aulas onde surgiam actividades de estimação. Isto é, de que modo as actividades surgiam em contexto de aula, quais as indicações que a professora dava aos alunos e como essas actividades eram resolvidas.

Como surgiam as actividades nas aulas

As actividades de estimação ocorreram sempre na sala de aula da turma e eram realizadas individualmente. Os alunos por vezes interagiam uns com os outros, mas apenas na fase em que explicavam oralmente à professora os raciocínios utilizados. A sala de aula encontrava-se organizada na sua disposição tradicional com as carteiras alinhadas em fila de frente para o quadro.

Nos contactos com a professora da turma definiu-se que as actividades de estimação surgiriam nas aulas quando e sempre que esta julgasse oportuno, independentemente de eu, como investigadora, estar presente ou não.

Também se acordou que estas actividades seriam escolhidas e propostas pela própria professora da turma, a não ser que a investigadora, durante a fase de recolha de dados, tivesse necessidade de pedir alguma actividade em especial, no sentido de esclarecer alguma questão.

Como foi referido pela professora, ela não tinha muita informação nem experiência acerca das estimativas, porque o desenvolvimento desta capacidade surgiu recentemente nos objectivos do programa do 2º Ciclo. As suas fontes de informação foram manuais escolares, como reflectem as actividades propostas e a definição de estimativa que usou.

Algumas actividades foram propostas oralmente na aula e outras foram colocadas por escrito através da resolução de fichas de trabalho, anexos 4 e 5. Estas actividades estão apresentadas indicando o conteúdo onde foram integradas, a data e a fonte, para um melhor esclarecimento e exemplificação da integração destas ao longo do currículo.

As fichas, de A1 até A8 (anexo 5), constavam de um grupo de pequenas fichas diferentes que foram distribuídas ao acaso pela turma, pelo que nem todos os alunos responderam às mesmas questões. Contudo, a ficha de trabalho e a ficha de avaliação formativa indicadas, também, no anexo 5 foram propostas a todos os alunos.

A ficha de avaliação formativa sobre estimativas foi proposta na aula seguinte à realização de uma ficha de avaliação formativa e surgiu no seguimento de uma conversa entre a professora e os alunos. De facto, na aula anterior à realização da ficha de avaliação, os alunos questionaram a professora sobre a possibilidade de sair na ficha actividades sobre estimativas, ao que esta respondeu:

> "claro, temos dado bastante atenção a este assunto."

Algumas destas actividades foram adaptadas, pela professora, de alguns manuais escolares, outras são actividades propostas pelos manuais.

Indicações aos alunos

A professora considerou uma estimativa como sendo uma previsão do valor aproximado de um resultado. Segundo ela, nas estimativas de cálculo determina-se mentalmente um valor aproximado do valor correcto de determinada operação, ou de uma expressão numérica.

Nas estimativas de medida, estimar um comprimento, ou uma área, é indicar uma medida aproximada do valor real desse comprimento, ou dessa área, referindo a unidade utilizada.

Quando propôs as primeiras actividades disse-lhes "para estimar aproximam os valores, ou então usam as medidas que já conhecem para comparar e indicar o valor da estimativa pedida".

E normalmente quando, a professora pedia, oralmente, uma estimativa aos alunos, dizia-lhes, que pensassem e registassem o resultado no caderno. Várias vezes referiu:

> "pensem e registem o resultado no caderno. Não digam nada alto para não viciar o resultado dos outros. Pensem de cabeça, não façam com papel e lápis."

E pedia-lhes, ainda, para pensarem rápido, registarem o resultado e não o alterarem apesar de começarem a ver os registos dos outros no quadro. Portanto, não deviam efectuar os cálculos, mas sim pensar mentalmente e rápido. Por vezes era-lhes, ainda, recordado que uma estimativa será tanto mais correcta, quanto mais próxima estiver do valor exacto.

Processo de resolução das actividades

Quando surgiam actividades de estimação, colocadas oralmente na aula, a professora pedia aos alunos que estimassem, rápido, que registassem a sua estimativa no caderno. À medida que estimassem deveriam colocar o dedo no ar, para saber quem tinha terminado. De seguida, a professora registava no quadro os nomes dos alunos que tinham estimado e as suas estimativas. Finalmente, pedia a cada um que explicasse o processo que usou para obter aquela estimativa, isto é, o que pensaram para chegar aquele resultado.

Quando lhes pedia uma estimativa, a professora encorajáva-os a estimar, de facto, muitas vezes referiu: "todos vão estimar, todos vão dar a sua opinião."

Normalmente, ao pedir uma estimativa, a professora não lhes ensinava processos de estimação. Segundo ela, estes alunos no ano anterior já calculavam estimativas, embora as mais frequentes tivessem sido as de medidas.

No entanto, quando entendesse oportuno e necessário ensinava-lhes outros processos, ou chamava-os à atenção quando surgia um processo interessante, ou pouco coerente ou, ainda, no caso das medidas aproveitava para lhes recordar determinadas unidades mentais de referência, nomeadamente 0,5 m, 1 m, etc., já aprendidas.

Quando era possível, ou quando havia tempo na aula para confirmar os cálculos numéricos ou medir os objectos, a professora analisava a razoabilidade dos resultados. Por exemplo, uma vez quando acabaram de estimar o perímetro da sala, a professora e os alunos mediram com uma fita métrica o comprimento dos lados, registaram e efectuaram os cálculos. No final, a professora referiu:

> "não tiveram grande erro, primeiro consideraram a sala quadrada e depois estimaram entre 6 e 8 metros para a medida do lado, e a medida é 6,75 m para o comprimento e 6,70 m para a largura."

De facto, a professora esforçava-se para que nas estimativas de medidas eles, primeiro, estimassem e, seguidamente, medissem para verificar o resultado. Nas estimativas de cálculo, primeiro estimavam e depois efectuavam os cálculos.

Nas actividades pedidas por escrito, isto é, apresentadas em fichas de trabalho, a professora distribuía-as, pedindo-lhes para registarem a sua estimativa, rapidamente e tentarem justificar o processo que utilizavam.

Algumas situações destas actividades pedidas por escrito foram corrigidas pela professora, no quadro, com o sentido de lhes chamar à atenção acerca de determinados erros ou de respostas pouco razoáveis; como, por exemplo, as actividades apresentadas na ficha de avaliação formativa sobre estimativas.

Durante a correcção, a professora, essencialmente, chamou a atenção para o cálculo de estimativas, e ensinou alguns processos de estimação, nomeadamente, quando usaram procedimentos algorítmicos. Por exemplo, ensinou-lhes a alterar a estrutura do problema e a concentrar-se no significado dos números.

Em qualquer das actividades, a professora não contabilizou rigorosamente o tempo. Os alunos que se revelaram melhores estimadores indicavam uma estimativa durante os primeiros 45 segundos ou num minuto, mas isso dependia da complexidade das situações.

Contudo, na ficha de avaliação formativa (anexo 5) a professora contabilizou o tempo, dando cerca de 45 segundos para indicar cada estimativa, passado esse tempo estimavam a situação seguinte e assim sucessivamente.

No entanto, surgiram alguns problemas dado que este tempo apenas foi suficiente nas actividades nº 1 e nº 4, pelo que a professora no final pediu-lhes que voltassem a estimar no caso dos exercícios nº2 e nº 3, para os quais tiveram mais um minuto, e mais 30 segundos, respectivamente.

No final desta aula a professora questionou-se acerca do processo de avaliação desta capacidade, a estimação, e referiu que possivelmente esta capacidade deveria ser avaliada por observação directa e segundo um processo progressivo, dado que pedir por escrito estas actividades poderia viciar o processo.

Capítulo 6

Estimativas de cálculo efectuadas pelos alunos

Neste capítulo descrevem-se e analisam-se os dados relativos ao problema do estudo, que incide sobre a aprendizagem escolar da estimação matemática no 2º Ciclo do Ensino Básico e em que um dos objectivos pretende compreender os processos utilizados pelos alunos quando produzem estimativas em contexto de aula.

Estes dados são referentes às estimativas de cálculo e baseiam-se nos registos escritos das observações das aulas, nas resoluções escritas apresentadas pelos alunos e, ainda, em pequenos excertos de conversas informais com os alunos durante o processo de recolha dos dados.

Nas aulas observadas o número de actividades propostas sobre estimativas de cálculo foi maior do que as propostas sobre estimativas de medidas. E, geralmente, estas actividades foram colocadas a todos os alunos, o que facilitou a compreensão dos processos usados. Assim, apresentam-se os processos e as estratégias identificadas nos alunos e que foram usadas nas estimativas de cálculo, destacando-se os processos que foram usados com mais frequência e os que se revelaram mais facilitadores em determinadas situações.

Apresentam-se, ainda, alguns tipos de erros que emergiram do processo de estimação.

Identificação de processos usados em estimativas de cálculo

Neste estudo pretende-se identificar os processos utilizados pelos alunos em actividades de estimação em contexto de aula.

Foram identificados vários processos usados em estimativas de cálculo designados, respectivamente, por: reformulação, compensação, translação e comparação, seguindo de perto a terminologia utilizada por autores como (Reys et. al., 1982) para os mesmos processos.

No processo de reformulação os alunos concentram-se mais nos números e mantêm a operação. A translação é um processo que aparece quando se muda a estrutura do problema, por exemplo, uma multiplicação seguida de uma divisão, para uma divisão seguida de uma multiplicação. É um processo mais flexível, por vezes os números e as operações são simultaneamente alteradas para uma forma mais fácil. Os alunos são menos constrangidos pelos números e mostram ter uma visão geral das questões.

Na compensação os números e a estrutura matemática do problema podem ser ambos alterados. Neste processo são feitos ajustamentos. Estes ajustamentos têm por objectivo reduzir o erro produzido num dado sentido. Por exemplo ao aproximar os dados tentamos equilibrá-los com um ajustamento no sentido contrário.

Estes ajustamentos são feitos durante ou no final do cálculo mental, e dependem das alterações feitas no início da estimativa. A compensação não é independente, pois depende do erro produzido no decurso de uma translação ou de uma reformulação dos dados.

Estes três processos gerais- reformulação, translação e compensação- foram identificados por Reys et. al., (1982) como os três processos chave usados por bons estimadores em estimativas de cálculo. Foram, também, identificadas algumas estratégias específicas de pensamento onde surgiram um ou vários destes processos.

Por outro lado, no presente estudo, foi caracterizado outro processo, designado por processo de comparação. Este processo tem características semelhantes a uma estratégia descrita por Reys et. al., (1991a) para estimar somas de fracções. Nestas situações observou-se, algumas vezes, que os alunos usaram unidades mentais de referência [*benchmarks*] próximas de 1/2, para produzir as suas estimativas.

No presente estudo, observou-se o uso destas unidades mentais de referência e, com alguma regularidade, nomeadamente, nas estimativas com números fraccionários.

Neste processo, designado por comparação, os alunos não se prendem às operações, mas sim analisam a estrutura dos números e simultaneamente efectuam as suas estimativas fazendo comparações. Este processo envolve um nível mais elevado de conhecimento matemático, por exemplo, o conhecimento da estrutura dos números.

O uso de procedimentos algorítmicos segue de perto a terminologia usada por Reys et. al., (1982) e por Levine, (1982) para a descrição de uma estratégia semelhante. Ao usar os procedimentos algorítmicos os alunos realizam mentalmente as operações segundo a mesma ordem que realizam os algoritmos escritos. É um método que requer poucos conhecimentos matemáticos e que resulta do treino adquirido ao realizar os algoritmos escritos.

Cada um destes processos é difícil de definir. Contudo, cada processo é descrito e acompanhado de um excerto de uma conversa informal com os alunos para uma melhor ilustração.

Reformulação

No processo de reformulação os alunos mantêm a estrutura do problema intacta e alteram os valores numéricos de modo a obter valores mais fáceis de calcular mentalmente, ou seja, substituem os números originais por outros antes de efectuar o cálculo.

Foram identificados vários tipos, do processo de reformulação que passaremos a caracterizar de seguida.

Arredondamento de ambos os números

Neste tipo de reformulação os alunos arredondam ambos os números. Por exemplo, para estimar a soma 2,75 + 3,4 + 5,2, a Rosalina fez:

"3+3+5=11"

e, o Filipe,

"2,70+3,5+5,0=11,20"

No caso da Rosalina, os números decimais foram arredondados para o número inteiro mais próximo. No caso do Filipe, o arredondamento é feito com maior precisão, isto é, até às décimas, arredondando o algarismo das décimas ao número inteiro mais próximo.

Noutros casos os alunos trabalham apenas com o número inteiro desprezando as casas decimais. Por exemplo, para estimar o valor de 125,75+364,2+75,95 a Ana disse:

"125+364+75 aproximadamente 565"

Arredondamento para o próximo múltiplo de 5, 10, 100, etc.

Neste caso os números arredondam-se para múltiplos de 5, 10, 100, etc., para facilitar os cálculos. Por exemplo, na estimativa do quociente 483,5 : 99,9 a Mariana fez:

"485 : 100 = 4,85"

e, a Alexandra,

"480 : 100 = 4,8"

e, a Cláudia,

"500 : 100 = 5"

De facto, neste processo, o número 483,5 foi arredondado para 485, 480 e 500, um processo diferente do tipo de arredondamento do número anterior.

Trabalhar com um ou mais dos digitos da esquerda

Nestes casos considera-se o(s) primeiros algarismos da esquerda, opera-se com ele(s) e finalmente "acerta-se" o valor final consoante a ordem de grandeza dos outros dígitos que se desprezaram no início. No exemplo:

> Considera a soma: 4879 + 25728 + 90328
> Efectuando uma estimativa diz qual dos seguintes números poderá representar aquela soma:
> 12000 1100000 120000

a Ana disse:

> "Mentalmente fiz 4 mais 25 mais 90 e deu-me próximo de 120, logo 120000."

e o Miguel, por seu lado, justificou assim o cálculo que fez:

> "Somei o primeiro algarismo de cada número, sem contar com o primeiro número (4789) e deu-me 2+9 que é 11 e com a soma dos outros deverá ser 120000."

Neste problema, dos seis alunos que o resolveram, três utilizaram este processo e três utilizaram o processo de arredondamento para o próximo múltiplo de 10, 100, etc.

Substituição, ou o uso de uma forma equivalente dos números

Neste tipo de reformulação os números são substituídos por uma sua representação equivalente ou aproximada, nomeadamente 3/4 por 0,7. Por exemplo, para estimar 3/4 + 1/5 a Rosalina disse:

"3/4 é equivalente a 0,7 e 1/5 é igual a 0,2 logo 0,9"

Para estimar o produto 0,24x439 a Rosalina fez:

"0,24=24/100 e (24/100)x440 é 9000/1000=90"

e, a Mariana:

"0,24 é equivalente a 1/4 e 1/4 vezes 440 é igual a 110."

A Rosalina foi, dos oito alunos, a única a usar este processo na estimativa de 3/4+1/5. Cinco alunos calcularam o valor exacto determinando o mínimo múltiplo comum do denominador das duas fracções e dois tentaram aproximar 3/4 e 1/5 de um número inteiro ou de uma fracção mais fácil de trabalhar.

Compensação

No processo designado por compensação, a estrutura matemática do problema e as operações são ambas alteradas. Os ajustamentos podem reflectir variações numéricas que aparecem por vezes como resultado da reformulação ou da translação do problema. Estes ajustamentos podem ser feitos durante a etapa de cálculo mental ou no final.

A compensação consiste em reduzir o erro produzido. Por exemplo, vejamos como o Miguel estimou na resolução do seguinte problema:

Na loja B está afixada a seguinte tabela:

Nº de lápis	6	12	18	24
Preço	450	900	1350	?

Indica uma estimativa para o preço de uma caixa de 24 lápis, se o critério se mantiver.

O Miguel, único aluno a utilizar este processo, disse:

"do primeiro para o último quadruplicou, logo 4 vezes 500 é 2000, mas como havia um erro de 50 (do arredondamento de 450 para 500) então 4 vezes 50 é 200, logo a estimativa será 1800."

Dos doze alunos que efectuaram esta actividade, apenas o Miguel usou este processo; os outros onze calcularam o valor exacto usando procedimentos algorítmicos.

Neste caso, os ajustamentos foram feitos no fim de todas as reflexões de cálculo mental, onde as quantidades foram retiradas consoante o ajustamento feito no início da estimativa; portanto, a compensação foi feita no final.

Os ajustamentos feitos neste processo parecem ser função do tempo que se tem para dar a resposta e podem ser influenciados pelo manuseamento dos dados numéricos, pelo contexto do problema e pela tolerância individual para o erro.

Translação

A translação é um tipo de procedimento em que se muda a estrutura matemática do problema para uma estrutura mental mais fácil, mais manejável, embora por vezes os números e as operações sejam simultaneamente alterados de modo a obter-se uma forma mais fácil para trabalhar mentalmente. Por exemplo, para estimar (348x6)/41 o Miguel (único a usar este processo) fez:

"primeiro 348 a dividir por 41 é aproximadamente 7 e segundo 7 vezes 6 é 42, logo aproximadamente 42."

O Miguel mudou a estrutura do problema dividindo primeiro e multiplicando em seguida. Os outros quatro alunos usaram o processo de reformulação e realizaram as operações pela ordem indicada.

Como vimos no processo de reformulação os alunos concentram-se nos números e mantêm a operação ou as operações. A translação é um processo mais flexível, pois por vezes os números e as operações são ambos alterados para uma forma mental mais fácil.

Comparação

Para além dos processos descritos anteriormente foi, ainda, considerado um outro, devido ao facto de ter sido usado um número considerável de vezes e, que dado o seu carácter importante, designado por processo de comparação.

Este processo foi usado mais frequentemente nas estimativas de cálculo com fracções, embora, também tivesse sido usado noutras situações, como por exemplo, para estimar somas e diferenças de números inteiros e decimais.

Este processo envolve conhecimento dos números e da sua estrutura. Ao usar este processo os alunos não se prendem aos algoritmos, ou seja, não apelam mentalmente à forma dos tradicionais algoritmos escritos. Por vezes, apelam a unidades mentais de referência, tais como, por exemplo 1/2, outras vezes, analisam e concentram-se na estrutura dos números e do que eles representam para efectuar comparações.

Este processo exige um bom conhecimento da estrutura dos números e requer maior flexibilidade mental.

Por exemplo, para estimar se as somas 1/3 + 1/2 e, 1/3 + 1/5 são maiores ou menores do que 1, a Claúdia fez:

"um terço é menor do que um meio, logo um terço mais um meio é menor que 1.

Um terço é menor do que um meio e um quinto é aproximadamente um meio, logo um terço mais um quinto é menor que 1."

Para a mesma situação a Inês justificou-se assim:

"um meio é metade e um terço é menos que um meio, logo a soma é menor que 1.
Um quinto é menos que um meio, e um terço é menos que um meio, logo um terço com um quinto é menor que1."

Ainda, nesta actividade o Miguel disse:

"um meio é metade, e um terço não chega a metade por isso 1 é maior.
Um terço não chega a metade e um quinto também não chega por isso a soma é menor do que 1."

Também, para estimar se 5/7:3/7 é maior ou menor do que 1, o Miguel justificou assim:

"5/7 é maior do que 3/7 logo 5/7 a dividir por 3/7 é maior do que 1."

Estes alunos mostraram ter um bom conhecimento do conceito de fracção. Denotaram possuir um nível mais complexo do conhecimento matemático do que aqueles que usaram procedimentos algorítmicos.

Nalgumas situações, mais simples ou quando evidenciaram um cálculo mental mais desenvolvido, os alunos praticamente não estimaram. Por exemplo, para estimar (348x6)/41 a Rosalina calculou mentalmente o produto 348x6. Depois, arredondou 41 para 40 e, de novo mentalmente, dividiu apresentando 52 como resultado:

"(348x6)/41=2088/41 aproximadamente 2080/40 =52."

Noutros casos os alunos não usaram qualquer dos processos de estimação e determinaram o valor exacto apelando a procedimentos algorítmicos ou a regras de cálculo. Por exemplo, na situação: "estima 3/4 + 1/5", a Cátia disse:

> "quinze vinte avos mais quatro vinte avos é dezanove vinte avos, calculei mentalmente o m.m.c. entre 4 e 5 e depois somei."

Nas actividades sobre produtos de fracções os alunos não usaram processos de estimação, mas calcularam o valor exacto usando mentalmente o algoritmo para esta operação. Esta situação foi semelhante nas estimativas de quocientes com fracções onde apenas só nalguns casos surgiu o processo de comparação.

Síntese. Neste estudo foram identificados vários processos usados no cálculo de estimativas, nomeadamente, reformulação, compensação, translação e comparação.

No processo de reformulação encontraram-se vários tipos diferentes de processos, respectivamente, o arredondamento de ambos os números, o arredondamento para o próximo múltiplo de 5, 10, 100, etc., o trabalhar com um ou mais dos dígitos da esquerda e o de substituição.

Ao usar o processo de reformulação os alunos alteram os valores numéricos do problema de modo a obter valores mais fáceis de calcular mentalmente, mas não alteram a estrutura do problema.

Este processo foi usado mais frequentemente para estimar actividades com números inteiros e números decimais. Também, foi usado, embora poucas vezes, em situações onde apareceram números fraccionários.

O processo de compensação, foi usado apenas pelo Miguel, numa actividade sobre proporcionalidade directa.

Neste processo a estrutura matemática do problema e as operações são ambas alteradas, por este motivo é necessário efectuar ajustamentos. Estes ajustamentos podem ser feitos durante a etapa de cálculo mental ou no final.

O processo de translação foi usado por três alunos. O Miguel usou numa única actividade onde se pedia para estimar o valor de uma expressão numérica com multiplicações e divisões. A Mariana e o Tomé usaram este processo em conjunto com o de reformulação em duas actividades sobre percentagens. Este processo é mais flexível, pois por vezes alteram-se os números e as operações para uma forma mais fácil de trabalhar mentalmente.

Outro processo identificado neste estudo foi o de comparação. Este processo foi observado mais frequentemente nas estimativas de cálculo com fracções.

Os alunos ao usar este processo não se prendem às operações, analisam a estrutura dos números e fazem comparações. Estes alunos revelaram possuir um bom conhecimento da estrutura dos números com que tentavam estimar.

Estratégias usadas em estimativas de cálculo

Os processos de estimação têm por base a preparação dos dados e/ou das operações para que seja mais fácil calcular mentalmente.

Estes processos em conjunto com os algoritmos de cálculo formam um plano de actuação. O plano geral de actuação para encontrar uma estimativa onde se podem usar um ou mais processos de estimação constitui uma estratégia de estimação. Assim as diferentes maneiras a que se pode recorrer desde o início do problema até ao final constituem as diversas estratégias usadas em estimativas de cálculo.

Uma estratégia de um problema de estimação envolve a escolha do processo de estimação, a preparação dos dados e ou da operação, o cálculo algorítmico usual (mentalmente), a compensação (ou não), a avaliação e a indicação do resultado frequentemente por esta ordem.

Uma possível estratégia para estimar 16,99:0,99 pode ser por exemplo:

16,99:0,99 —> 17:1=17

Problema de estimação —> Reformulação —> Cálculo (mental) —> Resultado

Normalmente, em cada actividade de estimação os alunos usaram estratégias onde apenas foi observado um dos processos descritos anteriormente.

Por exemplo, podemos esquematizar a estratégia usada pela Rosalina para estimar a soma de 3/4+1/5 da seguinte forma:

Problema —> Reformulação (substituição) —> Cálculo mental —> Resultado
3/4+1/5 —> 0,7+0,2 —> 0,9

Por vezes na mesma actividade foram observadas diferentes estratégias de resolução, por exemplo para o problema anterior o Rui estimou 4 e fez:

Problema —> Reformulação(arredondamento número inteiro mais próximo)
—> Cálculo mental —> Resultado
3/4+1/5 —> 3+1=4

Por outro lado, nalgumas situações, muito poucas, observou-se o uso de estratégias onde surgiram dois processos de estimação em conjunto. Por exemplo, na actividade seguinte sobre percentagens, dois alunos usaram o processo de comparação e reformulação em conjunto. De facto, nesta actividade:

"estima se 63% de 275$00 é maior ou menor do que 150$00."

o Miguel e o Tomé justificaram o seu raciocínio deste modo:

"vi que 63% é maior do que 50%. Aproximei 275$00 de 300$00. Metade de 300$00 é 150$00. Como 63% tem alguma percentagem a mais do que 50%, então é maior do que 150$00."

Este raciocínio pode ser esquematizado da seguinte forma:

Problema —> Comparação —> Reformulação —> Cálculo —> Avaliação do resultado —> Resultado

E, ainda, outra aluna, a Mariana, para estimar na actividade anterior usou em conjunto, o processo de reformulação ao arredondar os dados e o processo de translação ao alterar a estrutura matemática do problema, como se pode verificar pela sua justificação:

> "arredondei 63% para 60%, e 275$00 para 280$00. Como 60% menos 10% é 50%, e 280$00 vezes 50% é 140$00 e como 10% de 280$00 é 28$00, então 140$00 mais 28$00 é maior do que 150$00."

Nas estratégias observadas raramente ocorreram as etapas de compensação e valorização do resultado, ou seja, os alunos a partir de uma actividade proposta usam determinado processo de estimação, efectuam o cálculo mental e indicam o resultado sem a preocupação de reflectir sobre o valor obtido.

E em determinadas situações como, por exemplo, ao estimar se um produto, quociente, soma ou uma diferença são maiores ou menores do que 1, os alunos fizeram frequentemente o seguinte:

Cálculo algorítmico usual (sem alterar os dados e a operação) —> Comparação com a unidade —> Resultado.

Nestas actividades os alunos não recorreram a processos de estimação, possivelmente porque não necessitaram devido ao facto do cálculo mental, usando o algoritmo, ser por vezes, mais simples.

Síntese. Neste estudo, de um modo geral, os alunos usaram estratégias onde apenas foi observado um processo de estimação. Mas numa mesma actividade foram observadas diferentes estratégias de resolução.

Na resolução de algumas actividades, muito poucas, observaram-se estratégias onde se usaram dois processos de estimação em conjunto.

Verificou-se, também, que nas estratégias observadas, raramente ocorreu a etapa de valorização do resultado.

Por outro lado, em determinadas actividades propostas, mais especificamente sobre produtos e quocientes de números fraccionários, os alunos usaram estratégias em que não recorreram a processos de estimação.

Processos mais comuns

Existem processos que foram usados mais frequentemente consoante o tipo de números, ou seja, os números inteiros, decimais, e fraccionários.

Foram escolhidas algumas actividades e registadas as frequências de cada processo. Nalgumas actividades o total de alunos que respondeu não coincide com o número total da alunos da turma, dado que nas actividades pedidas oralmente ou mesmo por escrito nem todos estimaram.

Números inteiros

As duas questões seguintes foram colocadas a seis alunos, dado que faziam parte de um conjunto de pequena fichas distribuídas ao acaso pelos alunos. Na primeira, "estima o valor de 249+612+987", quatro alunos usaram o processo de reformulação, ao fazerem o arredondamento para o múltiplo de 10 mais próximo: um usou o processo de comparação e outro calculou mentalmente sem arredondar.

E, na segunda questão, "estima o valor de 4879+25728+90328", foi usado o processo de reformulação: três alunos arredondaram para o múltiplo de 100 mais próximo e os outros três trabalharam com um ou mais dígitos da esquerda.

Também, noutras situações, para estimar valores com números inteiros, se verificou maioritariamente o uso do processo de reformulação.

Na tabela 6.1, seguinte, está indicada a frequência de processos que foram identificados na resolução da actividade "estima o valor de 125,75+364,2+75,95", colocada oralmente na aula:

Tabela 6.1

Frequência de processos usados na estimação de 125,75+364,2+75,95

Reformulação:	
-Desprezo das casas decimais Exemplo: 125+364+75	7
-Desprezo das casas decimais em 125,75 e 364,2 e apenas arredondaram 75,95 para 76	2
-Arredondamento múltiplo de 10 Exemplo: 130+360+80	1
-Arredondamento para o inteiro mais próximo Exemplo: 126+364+76	1
Total	11

Neste exemplo, com a adição de números decimais, o processo usado foi o de reformulação, sendo mais usado o tipo de reformulação em que se desprezam as casas decimais, usado por sete alunos dos onze que realizaram esta actividade.

A tabela 6.2 indica-nos a frequência de processos usados para estimar o valor de 37,5x9,9.

Na produção desta estimativa todos os alunos usaram o processo de reformulação ao arredondar ambos os números, sendo mais frequente o tipo de arredondamento de ambos os números para o inteiro mais próximo. Houve um aluno que fez o arredondamento de ambos os números desprezando as casas decimais.

Estes resultados são consistentes com o estudo de Reys, et. al. (1991a), onde numa situação semelhante 486x0,24 "a maioria dos estudantes escolheram o arredondamento de um ou de ambos os factores para produzir uma estimativa"(p. 50).

Tabela 6.2

Frequência de processos usados para estimar 37,5 x 9,9

Reformulação-Arredondamento ambos os números:	
38 x 10	9
40 x 10	8
37 x 10	4
37 x 99	1
37 x 9	1
Não fizeram	4
Errou	1
Total	28

A tabela 6.3 mostra-nos a frequência de processos usados para estimar 483,5:99,9.

Nesta situação os alunos usaram maioritariamente o seguinte tipo de reformulação: arredondamento para o próximo múltiplo de 10, ou de 100; por exemplo 480:100 foi um arredondamento de 483,5:99,9 usado por sete alunos e 500:100 foi igualmente usado por outros sete alunos.

Os restantes alunos usaram, ainda, o processo de reformulação mas, fazendo o arredondamento de um ou de ambos os números. E não surgiu qualquer outro processo.

No produto e quociente de números decimais a estratégia de reformulação mais utilizada foi a de arredondamento de ambos os números para o número inteiro mais próximo e para o próximo múltiplo de 10, 100, etc., consoante as situações.

Tabela 6.3

Frequência de processos usados para estimar 483,5 : 99,9

Reformulação-Arredondamento de ambos os números	
480 : 100	7
500 : 100	7
483 : 100	3
483 : 99	2
484 : 100	2
485 : 100	1
480 : 10	1
490 : 100	1
48 : 99	1
480 : 98	1
500 : 99,9	1
Não fizeram	1
Total	28

Números fraccionários

As tabelas seguintes mostram-nos os vários tipos de processos identificados na estimação de somas, diferenças, produtos e quocientes de números fraccionários.

Tabela 6.4

Frequência de processos usadas para estimar 3/4 + 1/5

Reformulação:	
-Substituição	1
Exemplo: "3/4 é aproximadamente 0,7 e 1/5 é aproximadamente 0,2, então uma estimativa é 0,9."	
-Arredondamento de cada fracção para o nº inteiro mais próximo	1
Exemplo: "3/4 aproximadamente 3 e 1/5 aproximadamente 1, assim uma estimativa é 4."	
-Arredondamento de ambos os termos de cada fracção para o próximo múltiplo de 5	1
Exemplo: "3/4 é próximo de 5/5 e 1/5 é próximo de 5/5, assim 5/5 mais 5/5 é 10/10."	
-Outro método: (cálculo m.m.c)	5
Total de alunos	8

Esta actividade foi pedida oralmente na aula e, dos vinte e oito alunos da turma, oito indicaram uma estimativa. Maioritariamente os alunos usaram procedimentos algorítmicos, isto é, tentaram calcular a resposta exacta usando mentalmente o algoritmo tradicional.

Surgiram, ainda, três casos de reformulação, sendo um de substituição e outro de arredondamento das fracções para o número inteiro mais próximo. Este último com pouca razoabilidade já que o aluno "arredondou" 3/4 para 3 e 1/5 para 1. O outro caso foi arredondamento de ambos os termos de cada fracção para o próximo múltiplo de 5, embora com erro no processo de cálculo, "5/5+5/5=10/10".

A tabela 6.5 indica-nos a frequência de processos usados pelos vinte e oito alunos da turma para estimarem se 3/4-1/3 é maior ou menor do que 1.

Tabela 6.5

Frequência de processos usados em "estima se 3/4-1/3 é maior ou menor do que 1"

-Comparação		6
Comparação e resolveram correctamente	5	
-Reformulação		
(Arredondamento de cada fracção para o inteiro mais próximo)		1
-Uso de representação gráfica		2
-Não fizeram		6
-Fizeram, mas não souberam explicar na entrevista		3
-Outro método: (cálculo m.m.c)		10
Procedimentos algorítmicos e resolveram correctamente	4	
	Total de alunos	28

Verificou-se que maioritariamente os alunos apelaram ao cálculo do mínimo múltiplo comum, calculando o valor exacto da diferença seguido da comparação com a unidade.

Curiosamente cinco alunos, dos seis que usaram o processo de comparação, responderam correctamente a questão e apenas quatro dos dez que usaram procedimentos algorítmicos acertaram.

A tabela 6.6 mostra-nos a frequência de métodos usados na produção de uma estimativa de um produto de números fraccionários.

Tabela 6.6

Frequência de métodos usados em "estima se 3/7x2/6 é maior ou menor do que 1".

-Procedimentos algorítmicos:		
(uso do algoritmo da multiplicação)		26
Procedimentos algorítmicos e resolveram correctamente	19	
-Arredondamento da fracções para outras mais simples		1
-Outro processo errado		1
Total de alunos		28

Como se pode verificar todos os alunos, à excepção de dois, usaram o algoritmo da multiplicação para obter a resposta exacta e, desses vinte e seis alunos, dezanove responderam correctamente à questão.

Verificou-se, assim, que no caso da adição e da multiplicação de números fraccionários os alunos maioritariamente recorreram a procedimentos algorítmicos. No caso da multiplicação, não usaram processos de estimação, no entanto, responderam correctamente às questões.

Esta situação não foi semelhante no caso da subtracção de números fraccionários, embora eles usassem maioritariamente procedimentos algorítmicos para obter o valor exacto. Foram melhor sucedidos os que usaram o processo de comparação.

Quanto ao quociente de números fraccionários a tabela 6.7 indica-nos a frequência de métodos usados.

Como se pode concluir, catorze alunos de um total de vinte e oito, recorreram mentalmente ao algoritmo da divisão; cinco alunos usaram processos de comparação e outros cinco usaram outros métodos mas, neste caso, errados. Dois alunos, embora efectuassem as estimativas pedidas, não conseguiram explicar os seus procedimentos. Finalmente, outros dois não apresentaram qualquer estimativa.

Tabela 6.7

Frequência de métodos usados no quociente de estimativas de números fraccionários

Problema: Estima se cada um dos quocientes é maior ou menor do que 1: 5/7:3/7 17/3:16/3 7/22:7/20		
-Procedimentos algorítmicos		14
Usaram procedimentos algorítmicos e resolveram correctamente as 3 questões	8	
-Processo de comparação		5
Usaram comparação e resolveram correctamente as 3 questões	1	
-Outro método (errado)		5
-Não fizeram		2
-Fizeram correctamente, mas na entrevista não souberam explicar o processo usado		1
-Fizeram errado e na entrevista não souberam explicar o processo usado		1
	Total	28

Como vimos foram várias as situações em que se verificou que o recurso a procedimentos algorítmicos foi utilizado frequentemente, talvez porque os alunos tenham uma forte tendência para usar mentalmente os algoritmos escritos e porque o nosso ensino lhe dê muita ênfase. Segundo a professora da turma,

> "o nosso ensino é muito mecanicista... Começa logo no 1º ciclo. Aprendem tudo com regras e fazendo algoritmos e depois não conseguem transpor para outras situações".

Percentagens

Nas actividades onde surgiu o cálculo de estimativas com percentagens poucos foram os alunos que tentaram estimar.

A actividade "estima se 63% de 275$00 é maior ou menor do que 150$00", foi efectuada por nove alunos e apenas três indicaram uma estimativa razoável.

O Miguel e o Tomé usaram um processo conjunto de comparação e reformulação. A Mariana usou reformulação e translação.

Nesta outra actividade, pedida oralmente na aula a todos os alunos:

> "O jantar da família Lança custou 3890$00 mais 17% de IVA. Estima o custo total do jantar",

cinco indicaram uma estimativa, e apenas três conseguiram explicar correctamente a sua estratégia. Todos eles usaram os processos de reformulação e translação.

No entanto, notou-se que nas aulas quase todos os exercícios sobre percentagens eram feitos usando a máquina de calcular, facto que eu observei e a professora confirmou. A este propósito, a professora referiu:

> "deixo os alunos usarem a máquina de calcular... é bom para aprenderem a trabalhar com ela."

De facto, eles sabiam trabalhar com a máquina de calcular. No entanto, no final do capítulo das percentagens a professora verificou que os alunos tinham dificuldade em estimar e também em trabalhar com papel e lápis. Numa destas aulas, a professora falou assim para a turma:

> "eu disse-vos que podiam utilizar três processos para o cálculo das percentagens, ou seja, a máquina de calcular, a passagem a número decimal e proporções. Mas já vi que usam o mais fácil, isto é, a máquina de calcular; isso é bom, mas também devem saber os outros processos, é que nem sempre andam com a

máquina no bolso, e só a trabalhar com ela não conseguem pensar, é um dos riscos."

Nalgumas situações, nomeadamente, as percentagens, o uso da máquina de calcular superou a necessidade de estimação.

Síntese. Nas estimativas onde surgiam números inteiros e números decimais foi usado maioritariamente o processo de reformulação, nos seus vários tipos, consoante as situações. Por exemplo, no produto e quociente de números decimais foi utilizado mais frequentemente o arredondamento de ambos os números para o número inteiro mais próximo e para o próximo múltiplo de 10, 100, etc.

Nalgumas estimativas com números fraccionários foi usado o processo de comparação e, ainda, algumas vezes, o processo de reformulação.

Nas estimativas com adições e subtracções de números fraccionários os alunos recorreram mais frequentemente a procedimentos algorítmicos, tentando obter o valor exacto sem usar processos de estimação. Embora nalgumas situações usassem mais o processo de comparação e menos frequentemente o de reformulação.

Nas actividades propostas sobre produtos de números fraccionários os alunos não recorreram a processos de estimação. Esta situação foi semelhante para o quociente onde usaram quase exclusivamente procedimentos algorítmicos, obtendo mentalmente o valor exacto, sendo observado apenas nalguns casos o processo de comparação.

No cálculo de estimativas sobre percentagens poucos alunos estimaram. Estes usaram estratégias onde surgiram dois processos de estimação, comparação e reformulação por duas vezes e reformulação e translação quatro vezes.

Nalgumas situações, nomeadamente, nas percentagens, o uso da máquina de calcular superou a necessidade de estimar.

Portanto, na produção de uma estimativa, foi bastante significativa a tendência para usar o processo de reformulação.

Em várias situações observou-se a tendência dos alunos em apelar mentalmente a procedimentos algorítmicos para obter a resposta exacta.

Processos mais facilitadores em determinadas situações

Neste estudo, durante a fase de identificação dos processos usados em estimação, encontraram-se processos cujo uso pareceu ser, em determinadas situações, mais facilitador do que outros.

Por exemplo, a actividade seguinte, foi pedida a seis alunos, dado que fazia parte de um conjunto de pequenas fichas distribuídas ao acaso pela turma:

> "estima, em cada linha, o valor de cada uma das expressões. Escreve uma afirmação verdadeira colocando entre as duas expressões um dos símbolos < ou>.
>
> 249 + 612 + 987 ---- 285 + 690 + 998
>
> 2,8 + 3,9 + 5,7 ---- 2,75 + 3,4 + 5,2
>
> 1/3 + 3/5 + 6/7 ----2/15 + 1/5 + 4/10 ."

Destes seis alunos, cinco responderam correctamente à primeira expressão, cinco responderam correctamente à segunda expressão, e um respondeu correctamente às três expressões.

Na primeira expressão, quatro alunos usaram o processo de reformulação, ao arredondarem os números, um aluno usou o processo de comparação e o outro tentou calcular o valor exacto.

Na segunda expressão os alunos repetiram os mesmos processos.

A terceira expressão, apenas um aluno conseguiu estimá-la e foi o que usou o processo de comparação na estimação das três expressões. Os outros alunos não conseguiram estimar esta última expressão, todos eles tentaram calcular o valor exacto das duas expressões através da determinação do mínimo múltiplo comum.

Na terceira expressão, verificou-se que os alunos usaram mais frequentemente processos onde apelaram ao cálculo mental e aos algoritmos escritos, em vez de analisarem e se concentrarem na estrutura dos números.

De facto, apenas um usou o processo de comparação e foi o único a conseguir resolver correctamente a terceira expressão. Os cinco que não conseguiram resolver a terceira expressão justificaram não serem capazes de encontrar o m.m.c.(3,5,7), para assim a poderem resolver, no entanto, não tentaram outro processo.

Nas duas primeiras expressões, por serem mais simples, o processo de reformulação e o cálculo mental usando procedimentos algorítmicos resultou, no entanto, na terceira expressão, mais complexa do que as anteriores, este método não resultou.

Nesta última expressão foi necessário recorrer a um processo mais complexo.

Parece que o apelo ao cálculo mental em vez dos algoritmos escritos resulta mais quando os cálculos são com números fáceis e expressões simples de trabalhar.

Numa outra actividade:

"estima se a soma $\frac{7}{8}+1\frac{12}{13}$ é maior ou menor 1."

Num total de vinte e oito alunos, seis alunos efectuaram-na correctamente e explicaram o seu raciocínio durante a entrevista; dez alunos efectuaram-na correctamente, mas durante a entrevista não conseguiram explicar o raciocínio; e quatro alunos erraram e não conseguiram explicar o raciocínio que utilizaram e oito alunos não fizeram.

Os seis alunos que efectuaram correctamente a actividade anterior justificaram a sua estimativa dizendo:

Rosalina: "Como 7/8 é aproximadamente 1 e 1 12/13 é maior que 1, quando somamos dá-nos maior que 1."

Miguel: "7/8 é quase 1 e 1 12/13 é quase 2, logo a soma é maior que 1."

Mariana: "1 12/13 é maior que 1 logo mais 7/8 fica maior que1."

Inês: "1 12/13 é maior que 1 e juntando 7/8 fica maior que 1."

Ana:"7/8 é quase 1 e 1 12/13 é maior que 1 logo somando fica maior que 1."

Rui:"1 mais 25/13 é maior que 1."

A actividade anterior era a alínea e) da questão seguinte:

-"Estima se as seguintes somas e diferenças são maiores ou menores que 1:

a) 1/3 + 1/2	c) 3/4 - 1/3	e) 7/8 + 1 12/13
b) 1/3 + 1/5	d) 7/5 - 1/7	f) 2 1/5 - 1 6/5"

Verificou-se, também, que nenhum dos seis alunos que realizaram correctamente a alínea e) tentaram encontrar o mínimo múltiplo comum em qualquer das outras alíneas, à excepção da Ana.

Todos os seis alunos que realizaram correctamente a alínea e) disseram não saber qual o m.m.c.(8,13), no entanto, sabiam qual era o mínimo múltiplo comum em relação às outras alíneas, mas não usaram esse método.

Estes alunos concentraram-se na estrutura dos números, neste caso, no significado das fracções e manifestaram possuir flexibilidade mental para trabalhar com os números fraccionários.

A Marta, a Andreia e o Mário fizeram correctamente as alíneas a) b) c) d) e f) utilizando procedimentos algorítmicos (m.m.c.), a Marta não fez a alínea e) porque não conseguiu encontrar o m.m.c.(8,13). A Andreia e o Mário fizeram-na correctamente mas, durante a entrevista disseram:

"eu penso que é maior que 1, mas não consigo explicar, não consegui encontrar o m.m.c. (8,13)."

Esta actividade surgiu algumas semanas depois dos alunos estimarem, na aula, 3/4+1/5. Quando os alunos estimaram o valor de 3/4+1/5 a professora realçou o raciocínio do Rui quando este tentou aproximar 3/4 e 1/5 de um número inteiro, só que errou. De facto, a professora referiu :

"o pensamento do Rui também é viável... o raciocínio do Rui está correcto."

Por outro lado, também, ainda, nesta aula a professora mostrou-lhes, com um exemplo, como podiam usar o processo de comparação.

Estas aprendizagens, anteriores, podem ter ajudado os alunos a estimar $\frac{7}{8}+1\frac{12}{13}$. De referir, ainda, que quando os alunos indicaram uma estimativa para a soma de 3/4+1/5 usaram maioritariamente procedimentos algorítmicos, como se pode observar analisando a tabela 6.4 e, posteriormente, já surgiram alguns casos de comparação.

Portanto, para estimar actividades sobre somas de fracções, o processo de comparação resultou mais eficiente.

Analisando os dados da tabela 6.5, apresentada anteriormente, que se referia a uma diferença de fracções, verifica-se que cinco dos seis alunos que usaram o processo de comparação fizeram correctamente a questão enquanto que apenas quatro dos dez que usaram procedimentos algorítmicos (m.m.c.) acertaram.

Por outro lado, no exemplo referido na tabela 6.7, que constava de quocientes de números fraccionários, verificou-se que dos cinco alunos que usaram o processo de comparação apenas um fez correctamente as três questões. Dos catorze alunos que usaram procedimentos algorítmicos, oito efectuaram correctamente as três questões.

Nesta actividade, aparece em cada caso apenas uma operação a divisão, talvez seja mais fácil mentalmente inverter o segundo termo, recorrer à regra de cálculo, calcular mentalmente e analisar quanto à ordem de grandeza, maior ou menor do que 1, do que usar o processo de comparação.

Para estes alunos foi mais difícil usar o processo de comparação no caso de divisões com fracções do que no caso de adições com fracções e maioritariamente os alunos não necessitaram de utilizar processos de estimação para efectuar a divisão.

Observando a tabela 6.6, anterior, que indica a frequência de processos usados na produção de uma estimativa de um produto de números fraccionários, verifica-se que vinte e seis alunos em vinte e oito apelaram à regra de cálculo para a multiplicação e seguidamente compararam. Estes alunos não necessitaram de recorrer a processos de estimação para resolver esta questão. Destes vinte e seis alunos dezanove resolveram correctamente a questão.

Assim, verificou-se que nas actividades pedidas sobre estimativas com divisões e multiplicações de fracções o apelo a procedimentos algorítmicos superou a necessidade de usar processos de estimação.

Por outro lado, foi, ainda, usado no cálculo com números fraccionários outro tipo de reformulação, arredondamento para o próximo múltiplo de 5, 10, etc. Por exemplo, para estimar se 5/16:5/17 é maior ou menor do que 1, o Tomé fez:

> "aproximou 5/16 de 5/15 e 5/17 de 5/15, dividiu e deu-lhe 1,[depois ficou sem saber se era maior ou menor do que 1]."

De facto, este processo não resultou nesta situação e, também, noutras, nomeadamente em actividades do tipo:

> -"Estima se 5/16 : 5/17 é maior ou menor do que 1."
> -"Estima se 1/3+1/5 é maior ou menor do que 1."

Observou-se também que em determinadas situações o apelo às regras de cálculo podem prejudicar o raciocínio e a estimação. Vejamos o exemplo:

> "Sem calculares, ordena os quocientes por ordem crescente:
> 37:2,5 ; 37:250 ; 37:25 ; 37:25,5".

A Rosalina respondeu do seguinte modo:

> "37 a dividir por 25 é maior que 37 a dividir por 250 e maior que 37 a dividir por 2,5 e maior que 37 a dividir por 25,5."

e, na entrevista justificou o seu procedimento assim:

> "37 a dividir por 25 é maior que 37 a dividir por 250, porque se o dividendo é maior do que o divisor logo o quociente é mais pequeno e em relação a 37 a dividir por 2,5 e 37 a dividir por 25,5 disse que se o dividendo tem vírgulas logo o quociente tem

que ter vírgulas e portanto é mais pequeno do que os outros que não têm".

A Rosalina errou a questão porque tentou aplicar as regras que tinha memorizado, mas não conseguiu. De facto, apelar às regras de cálculo, quando não se tem grande segurança nas mesmas não parece ser eficiente.

Outra situação observada e que importa referir foi o facto de nas aulas todos os alunos usarem a máquina de calcular. Por um lado, ao utilizá-la eles resolviam bem os exercícios de percentagens, no entanto, muito poucos conseguiram estimar este tipo de exercícios. Sendo certo que o uso da máquina de calcular superou a necessidade de estimar os cálculos.

Síntese. Neste estudo verificou-se que nas estimativas com números inteiros e números decimais o processo mais usado foi reformulação e, de um modo geral, este processo resultou bem.

Nalguns exercícios de estimação, com adições e subtracções de números fraccionários foram melhor sucedidos os que usaram o processo de comparação.

Observou-se que o uso de procedimentos algorítmicos resultou nas estimativas de adições com fracções, nas situações mais simples, isto é, quando facilmente se calcula mentalmente o mínimo múltiplo comum. No entanto, em situações mais complexas como, por exemplo, nalgumas actividades em que dificilmente se encontra o mínimo múltiplo comum, o uso do processo de comparação tornou-se mais fácil.

Pareceu, também, que nalgumas actividades com subtracções de números fraccionários o processo de comparação foi mais facilitador.

Nas actividades com multiplicações de fracções, os alunos não recorreram a processos de estimação para efectuá-las, usaram procedimentos algorítmicos. Embora, fossem bem sucedidos não se observou qual o processo mais eficiente para estimar estas actividades.

Nas estimativas com divisões de fracções, ainda, surgiu o processo de comparação, mas observou-se que os alunos tinham muita dificuldade em usar este processo nesta operação e o apelo mental ao algoritmo de cálculo foi suficiente.

Também, o tipo de reformulação de arredondamento para o próximo múltiplo de 5, 10, etc., embora usado raramente, não resultou na estimação de alguns tipos de actividades com números fraccionários.

Por outro lado, foi, ainda, bastante notória a tendência para apelar mentalmente ao uso de algoritmos escritos e a regras de cálculo em vez de usar processos de estimação, o que parece prejudicar a estimação, quando não se possui grande segurança no uso de tais algoritmos.

Por outro lado, poucos alunos se interessaram e estimaram as actividades com percentagens, embora, de um modo geral, calculassem correctamente o valor exacto utilizando a máquina de calcular.

Esta tendência para, apelar mentalmente aos algoritmos escritos pareceu prejudicar o cálculo de estimativas, dado que na estimação é necessário, pelo menos, possuir flexibilidade mental e ter um bom conhecimento da estrutura dos números para poder trabalhar, fácil mentalmente, com eles.

Dificuldades e erros detectados durante o processo de estimação

Embora não fosse objectivo deste estudo identificar as dificuldades e os erros que ocorrem durante o processo de estimação, pareceu importante apresentar os casos que se revelaram mais significativos.

Assim, foram analisadas as resoluções das actividades de estimação efectuadas pelos alunos, para verificar quais as situações que se tornaram mais fáceis ou mais difíceis para estes.

Deste modo, no cálculo de estimativas foram identificados erros, principalmente, no cálculo, na compreensão de conceitos e na compreensão das questões.

Dificuldades

As estimativas de somas com números inteiros foram facilmente realizadas pelos alunos, principalmente com números da ordem das dezenas e centenas.

No entanto, detectaram-se algumas dificuldades, na estimação de algumas actividades onde surgiam números muito grandes. Por exemplo, a actividade seguinte:

> Sem efectuares cálculos, apenas por estimativas, faz corresponder a cada expressão da coluna A, uma da coluna B que lhe corresponda:

A	B
32500 : 200	1994612
97322 x 5000	486610000
0,432 x 725	162,5
43270 + 593720	313,2
2144932-150320	636990

foi proposta a seis alunos, porque fazia parte de um conjunto de pequenas fichas diferentes, que foram distribuidas ao acaso pela turma.

Da análise das resoluções verificou-se que no caso da adição, houve três respostas correctas e três incorrectas. No caso da subtracção houve duas respostas correctas, três incorrectas e um não fez. No caso da multiplicação houve quatro respostas correctas uma incorrecta e um aluno não fez. No caso da divisão todos os seis alunos responderam correctamente.

Observando estes resultados e considerando a justificação dada nas entrevistas podemos verificar que houve mais respostas correctas no caso da divisão e da multiplicação.

No caso de 32500:200 a maioria justificou o seu raciocínio do seguinte modo:

> "Risquei os zeros em 32500 e em 200 e dividi mentalmente 325 por 2."

No caso do produto 97322x5000, a maioria dos que resolveram correctamente justificaram dizendo:

"tirei os zeros de 5000 e multipliquei 97322 por 5."

Em ambos os casos os números 32500, 200 e 5000 foram transformados em números muito mais pequenos, para se tornarem mais fáceis de trabalhar, o que de facto resultou.

No entanto, no caso da adição e da subtracção, que segundo alguns investigadores (Reys et. al., 1982) são operações mais fáceis de estimar, no caso do exemplo anterior não se verificou. De facto, todos os alunos responderam correctamente no caso da divisão. Possivelmente, deveu-se ao facto de em ambas as situações, da adição e da subtracção, aparecerem números muito grandes o que torna difícil o cálculo mental.

Os exemplos seguintes permitem analisar o grau de dificuldade existente na estimação das várias operações com números fraccionários.

Na estimação de: a) 1/3+1/2 e b) 3/4-1/3 , houve vinte e uma respostas correctas para a adição e doze para a subtracção, houve três respostas incorrectas para a adição e dez para a subtracção. Num total de vinte e oito alunos, quatro não fizeram a adição e seis não fizeram a subtracção.

Dos vinte e oito alunos da turma, vinte e um responderam correctamente, à estimativa de adição de fracções, e destes apenas doze acertaram na questão da subtracção. Parece que é mais fácil estimar adições do que subtracções, com números fraccionários.

Na observação das aulas verificou-se que quando surgiu a estimativa de uma adição de fracções, como por exemplo, "3/4+1/5", oito alunos indicaram uma estimativa, de seguida surgiu a estimativa de "2/5-2/4", e foi notória a diferença de braços no ar para indicarem à professora o seu resultado, de facto, a professora comentou "agora há menos braços no ar ... porquê?."

Quanto à estimação de produtos e quocientes de números fraccionários, neste exemplo:

Estima se cada produto e quociente é maior ou menor do que 1:

a) 2/3 : 1/3 b) 3/7 x 2/6

verificou-se que no quociente houve dezasseis respostas correctas, nove respostas incorrectas e três não fizeram. Em relação ao produto houve dezassete respostas correctas nove incorrectas e dois não fizeram.

Analisando estes dados verifica-se não existir diferença entre o grau de dificuldade nas respostas dadas para o produto e para o quociente. No entanto, não podemos verificar se é mais fácil ou mais difícil estimar produtos ou quocientes, uma vez que os alunos não usaram processos de estimação nestas actividades.

Comparando com o exemplo anterior é grande a diferença de respostas certas nas actividades com a adição, subtracção, multiplicação e divisão de números fraccionários, sendo a subtracção a operação onde surgiram mais respostas incorrectas e onde houve um maior número de alunos que não fizeram. A adição revelou-se ser a operação onde se verificou maior sucesso.

Nas actividades de estimação com adições de números decimais não se verificaram dificuldades.

Também, não se verificaram diferenças nos resultados de uma estimativa de produtos e de quocientes de números decimais. No entanto, o grau de dificuldade parece ser maior nestas duas operações do que na adição, como se observa nesta actividade:

Faz uma estimativa para o quociente e o produto seguinte:

a) 16,99 : 0,99 b) 37,5 x 9,9

em relação ao quociente, surgiram vinte respostas correctas, sete incorrectas e um aluno não respondeu. Quanto ao produto, houve dezassete respostas correctas, oito incorrectas e três alunos não fizeram.

Por outro lado, parece também que o grau de dificuldade entre o produto e o quociente de números decimais é semelhante no caso do produto e do quociente de números fraccionários.

A actividade seguinte:

Estima o valor de: a) (348x6)/41 b) 0,24x439

foi proposta a cinco alunos, pelo facto de fazer parte de um pequeno conjunto de fichas distribuídas ao acaso pela turma. Todos estimaram razoavelmente o valor da alínea a), e apenas dois indicaram uma estimativa razoável para a alínea b).

Assim, parece que o produto e quociente de inteiros revelou-se mais fácil do que o produto de decimais.

No cálculo destas estimativas foram detectados alguns erros, que serão enumerados de seguida.

Erros de cálculo numérico

Existem situações em que os erros detectados são erros no cálculo numérico, por exemplo a Mariana estimou em 700 o produto 6,8x10,2.

E, posteriormente, na entrevista disse que se tinha enganado porque 7 vezes 10 é 70.

Por outro lado, a Rosalina estimou o quociente entre 16,99 e 0,99 em 0,17, mas na entrevista reconheceu o erro e justificou:

> "está mal, porque é aproximadamente 17, porque 17 a dividir por 1 é 17."

Erros a nível de compreensão das questões

Por vezes, surgiram erros a nível de compreensão das questões. No exemplo seguinte:

Sem usares a máquina de calcular, prevê o valor correspondente aos quocientes seguintes:

1/9   2/9   3/9   4/9   5/9

a Andreia, respondeu:

"um nono mais quatro nonos é cinco nonos, cinco nonos mais cinco nonos é dez nonos, dois nonos mais três nonos é cinco nonos e dez nonos mais cinco nonos é quinze nonos."

Pela análise da entrevista podemos verificar que a Andreia não compreendeu a questão. De facto, quando me justificou o seu procedimento disse:

Andreia: Juntei tudo...
Investigadora: Mas porquê?
A: Diz aí o valor correspondente aos quocientes...
I: Bem, e o que representa 1/9, ...
A: 1 a dividir por 9, ...
I: E que valor será?
A: 1 a dividir por 9 é um valor muito pequeno, porque por exemplo uma "coisa" a dividir por 9 pessoas é muito pouco, ...
I: E 5 a dividir por 9?
A: É mais ou menos 0,5 porque 5 é mais ou menos metade de 9.

Erros de nível conceptual

Além das dificuldades e erros detectados a nível de cálculo existem também dificuldades e erros a nível conceptual isto é, erros que decorrem de uma incompleta compreensão de conceitos. Embora estimar o valor de 37:2,5 não seja muito difícil para os alunos, talvez porque exige apenas um aspecto ligado ao algoritmo e ao cálculo, o exemplo seguinte pode indicar uma deficiente compreensão do conceito de divisão.

Sem calculares, ordena os quocientes por ordem crescente:

37 : 2,5   37 : 250   37 : 25   37 : 25,5

Num total de vinte e oito alunos, apenas cinco responderam correctamente, dez responderam errado, quatro não fizeram e nove fizeram ao acaso. Esta aparente deficiente compreensão do conceito de divisão pode dever-se ao facto desta actividade não exigir apenas o aspecto algorítmico, mas envolver também a comparação de números.

Existem erros que revelam que os conceitos utilizados não estão, ainda, adquiridos em todas as suas dimensões. Por exemplo, para a divisão, o João "aproximou" o quociente 16,99:0,99 por 16:0 e depois por 16.

> "16,99 a dividir por 0,99 é aproximadamente 16, pois 16 a dividir por 0 é aproximadamente 16."

Este aluno, aparentemente, admite a divisão por zero. Na entrevista perguntei-lhe o que pensava sobre: "19,99:0,99 aproximadamente a 16:0 aproximadamente a 16" e disse-me:

> João: Bem, agora fazia assim 16 a dividir por 1 igual a 16 ...
> Investigadora: Então e 16 a dividir por 0 ?
> J. É 16.
> I: Tens a certeza?
> J: Sim.
> I: Assim, 16 a dividir por 1 igual a 16 é a mesma coisa que 16 a dividir por 0 igual a 16?
> J: Sim.
> I: Então o que significa o sinal de :?
> J: Partir uma parte por cada um daqueles que se quer dividir
> I: Assim...
> J: Em 16 a dividir por 1 igual a 16, vai tudo para 1, é só um...
> I: E 16 a dividir por 0?
> J: Não se divide por nenhum e fica 16 à mesma...
> I: Mas, repara, no primeiro caso divides por 1 e no segundo caso?
> J: Nenhum.
> I: Então?
> J: Bem, no primeiro caso vai tudo para a pessoa e no segundo caso fica tudo para mim...

I: Bem, e é a mesma coisa...

J: ... há agora percebi... é diferente, no primeiro caso vai tudo para a pessoa, e no segundo caso fica tudo para mim... não dividi.

Também o Helder faz muita confusão com a divisão, por exemplo, ele fez: "27,7:10,2 aproximadamente 27"

Na justificação escreveu que 27:10=27. Quando o questionei, posteriormente, na entrevista disse:

Helder: Não é 27.

Investigadora: É quanto?

H: É 2,7.

I: Porquê?

H: Não sei explicar.

Também se verificaram algumas dificuldades no conceito de multiplicação. Por exemplo, o Helder fez: "0,432x725 aproximadamente 636990". E na entrevista, quando lhe pedi para explicar como fez não o conseguiu.

Ainda, outra aluna, a Lúcia fez: "2x3,14x1,39=196,72". Depois de ser questionada sobre a sua resolução a Lúcia disse:

Lúcia: Não me lembro, não sei...

I: Achas que pode ser, que está certo?

L: Não pode ser...

I: Porquê?

L: Não sei explicar...

Também no conceito de fracção foram detectados bastantes erros. Por exemplo, o Rui aproximou 3/4 para 3, e neste exemplo:

Sem usares a máquina de calcular, prevê o valor correspondente aos quocientes seguintes:

1/9 2/9 3/9 4/9 5/9"

o Rui fez:

"1/9 é aproximadamente 9; 2/9 é aproximadamente 4,5; 3/9 é aproximadamente 3; 4/9 é aproximadamente 2 e 5/9 é aproximadamente 1."

E na entrevista, justificou o seu procedimento:

Rui: Calculei. Dividi de cabeça.
Investigadora: Mas, como?
R: Então 1/9, / é o traço de divisão, logo fiz 9 a dividir por 1 é 9 ; 9 a dividir por 2 é 4,5 e sucessivamente.

Este exemplo mostra-nos que o Rui, aparentemente, não compreendeu o significado de fracção, nem qual o papel do numerador e ou do denominador. Apenas apreendeu que uma fracção é uma divisão, logo dividiu.

Numa outra situação, o Mário fez:

"2 1/5=(5x2+1)/(5x2)=11/10."

Também, nas operações com fracções foram detectados bastantes erros, sendo a adição e a subtracção as operações onde estes ocorreram em maior número. Por exemplo, erros que se podem esquematizar do seguinte modo:

1/3 + 1/2 = (1+2)/(3+1) = 3/4 (Alexandra)

1/3 + 1/2 = 1/6 +1/6 = 1/12 (Alex)

1/3 + 1/2 = 1/6 + 1/6 = 2/6 (José)

5/5 + 5/5 = 10/10 (Tomé)

No caso do Tomé, em 5/5 +5/5 ele justificou dizendo:

"Bem, aí devia ser dez quintos... é um erro que eu faço frequentemente".

O Tomé afirmou que faz este erro frequentemente, mas tem consciência disso. Os outros alunos, referidos anteriormente, justificaram o seu procedimento, mas não detectaram o erro.

Também, ainda, no conceito de número decimal foram detectados alguns erros. Por exemplo, o Carlos aproximou 0,99 para 100, e pela justificação dada na entrevista podemos verificar que ele não adquiriu o conceito de número decimal:

Investigadora: Repara no teu exercício "0,99 aproximadamente 100". Está correcto?
Carlos: Enganei-me...
C: Não sei...
I: Bem, e 9,9?
C: De 10.
I: E agora este "99,9 aproximadamente 10". Está correcto?
C: Sim.

No conceito de percentagem evidenciaram-se também, alguns erros. Por exemplo, o Mário indicou 2700$00 como uma estimativa para 31% de 890$00.

E, na entrevista justificou, assim:

Mário: 31 por cento é aproximadamente 30 por cento e 890$00 é aproximadamente 900$00.
Investigadora: E 30% de 900$00 é?
M: É 2700$00.
I: É?
M: Sim [sem hesitar].

Outros tipos de erros

Alguns destes erros são de cálculo. Mas, a grande maioria dos erros detectados são do tipo conceptual. Outros, ainda, ocorrem porque os alunos não analisam a razoabilidade das suas respostas, ou porque realizam as actividades ao acaso, ou por falta de atenção e interesse no que estão a fazer, ou porque sabem que em estimação pode haver erro e portanto não faz mal ele acontecer, ou porque pensam que existem processos que se podem fazer na estimação e não se fazem fora dela.

Num determinado exercício o Helder fez o seguinte:

"2144932-150320=313,2"

Mais tarde, na entrevista questionei-o acerca do que fez:

> Investigadora: O que pensas de "2144932 menos150320 igual a 313,2"?
> Helder: Não sei, talvez fosse maior, os outros são muito grandes...
> I: Então, serias capaz de estimar agora?
> H: [Depois de muito pensar] 500 [segundos depois] menos... é menos.
> I: Porquê?
> H: ... [Não conseguiu explicar].

Aparentemente este aluno não analisou a razoabilidade do seu resultado.

Vejamos um outro exemplo, que pode ilustrar o facto de os alunos considerarem que em estimação pode haver erro e portanto não faz mal ele acontecer:

> Investigadora: Tomé, num exercício anterior fizeste 0,24 aproximadamente 1. O que achas disso?
> Tomé: Não é muito próximo, mas quando é uma estimativa passo o decimal para o inteiro mais próximo, se fosse 3,2 aproximava de 3.
> I: E se fosse 0,9?
> T: Para 1.
> I: Qual está mais perto de 1; 0,24 ou 0,9?
> T: É 0,9.

I: Na estimação não importa o erro?

T: Não, como é em estimativa, não estamos a achar o valor exacto é o valor aproximado.

I: Como estimavas 0,24 x 420?

T: 0,24 aproximava de 1 e fazia 1 vezes 420 igual a 420.

I: E com lápis... ou máquina como fazias?

T: Na máquina, dá 100,8.

I: Bem, 420 e 100,8 é uma grande diferença, não é?

T: Pois,... temos que ter algum cuidado.

Numa outra situação, o Filipe fez "37,5x9,9 aproximadamente 371,25" e justificou do seguinte modo:

"em 9,9 tirei a vírgula porque era uma estimativa..."

E na entrevista disse:

Investigadora: Tiraste a vírgula porque era uma estimativa?

Filipe: Sim.

I: Em estimação vale tudo?

F: Acho que sim.

I: Nas estimativas não faz mal haver erro?

F: Não, porque na estimação estamos a estimar um valor aproximado, não precisa ser o valor exacto...

I: E podemos errar muito?

F: Não convém haver muito erro, porque estamos a achar quase o valor exacto...

I: E como arredondavas 9,9?

F: Para 100.

I: E 99,9?

F: Para 1000.

I: E 0,9?

F: Para10.

O Filipe estava muito confuso. Ele disse que em estimação não fazia mal haver erro, "porque na estimação estamos a estimar um valor aproximado, não precisa ser o valor exacto".

Mais tarde, quando lhe perguntei se nas estimativas podemos errar muito, disse-me: "não convém haver muito erro, porque estamos a achar quase o valor exacto".

Na situação anterior o Filipe tirou a vírgula de 9,9 e passou a 99, talvez não porque julgasse que em estimação valesse tudo, mas porque não tinha a noção de valor próximo de 9,9; uma vez que arredondava 99,9 para 1000 e 0,9 para 10.

Por outro lado, provavelmente, os alunos pensam que existem processos que podem fazer na estimação, e não fora dela. Por exemplo, o Filipe, para responder à seguinte questão: "estima se a soma 1/3 + 1/2 é maior ou menor do que 1", fez:

"1/3 + 1/2 = (1+2)/3 + (1+1)/2 = 3/3 + 2/2 = 1 + 1 = 2 > 1"

e, na entrevista justificou:

> Investigadora: Porquê (1+2)/3 e (1+1)/2?
> Filipe: Para fazer 1 em cada um, como era uma estimativa...
> I: E como fazias com papel e lápis?
> F: Fazia 1/3 + 1/2 = 2/6 + 3/6 = 5/6 que é menor que 1

E, no exemplo seguinte, este aluno, o Filipe fez:

"2 1/5 = (2+1)/5 =3/5 e 1 6/5 = (6x1)/(1+5) = 6/6."

Na entrevista quando foi questionado em relação ao facto de não usar sempre o mesmo processo nas duas situações, disse:

> Filipe: Bem, como era uma estimativa tentei fazer as contas para dar próximo da unidade
> I: Como fazias com papel e lápis?
> F: 2 1/5=(2x1)/(2x1x5)=2/10 e 1 6/5= (1x6)/(1x6x5)=6/30.

Embora o Filipe errasse na passagem de numeral misto a fraccionário, com papel e lápis usou sempre o mesmo processo. No caso de uma estimativa fez as transformações mais convenientes para dar números próximos ou iguais à unidade e tornar os cálculos fáceis, situação que justificou dizendo que "em estimação apenas é necessário achar o valor próximo..."

Estes erros foram detectados por mim e pela professora da turma. Nalgumas situações, nomeadamente, em exercícios de estimação, verificou-se que alguns alunos não conseguem fazer mentalmente, ou fazem errado mas, quando se lhes pede para fazer com papel e lápis fazem correcto. Por exemplo, a Cátia não conseguiu estimar 22/7-13/6, mas depois, a pedido da professora, resolveu correctamente no quadro.

Segundo a opinião da professora eles concentram-se no cálculo dos algoritmos e não pensam no que os números representam, e por isso não conseguem transpor para outras situações nomeadamente a estimação, de facto, a professora disse:

> "já viu que a Cátia resolveu bem com papel e lápis e no entanto, não conseguiu estimar... É que eles concentram-se no cálculo dos algoritmos e não pensam no que a fracção significa... não são flexíveis no pensamento..., não conseguem ver o que a fracção representa e transpor para outras situações, nomeadamente a estimação."

<u>Síntese</u>. Neste estudo verificou-se que a estimação de números inteiros foi facilmente realizada pelos alunos, quando os números não são muito grandes, ou quando são se podem transformar em números mais pequenos. Por exemplo, 32500:200 e 97322x5000, em que os alunos "tiram" os zeros para tornar os cálculos mais fáceis.

Quanto aos números fraccionários verificou-se que a estimação com adições é mais fácil do que com subtracções. Em relação aos produtos e quocientes não foram encontradas diferenças quanto à facilidade ou dificuldade, mas também não foram usados processos de estimação.

Contudo, foi na subtracção onde se encontraram mais dificuldades, de facto foi nesta operação onde surgiram mais respostas incorrectas e onde houve mais alunos a não fazer. A operação onde se verificou maior sucesso foi a adição.

Em relação aos números decimais, a adição foi também a operação que se revelou mais fácil. Não foram encontradas diferenças no grau de dificuldade existente na estimação de multiplicações e de divisões de números decimais e, a dificuldade encontrada nestas operações foi semelhante à encontrada nas mesmas operações com os números fraccionários.

No entanto, verificou-se existir mais dificuldade na estimação de produtos e quocientes de decimais do que na estimação de produtos e quocientes de números inteiros.

Durante o processo de estimação foram detectados erros, respectivamente, erros de cálculo numérico, erros resultantes da não compreensão das questões e erros que decorrem de uma incompleta, ou não, compreensão de conceitos.

Foram observados alguns erros de cálculo numérico e outros resultantes da não compreensão das questões, no entanto, o maior número de erros detectados foram os de nível conceptual.

Em várias actividades observaram-se erros devido a uma deficiente compreensão, ou incompreensão, de conceitos, nomeadamente, na divisão, multiplicação, número decimal, fracção, nas operações com fracções; sendo a adição e a subtracção as operações onde estes erros ocorreram em maior número; e, ainda, no conceito de percentagem.

Embora, menos frequentes foram, também, detectados outros tipos de erros, como por exemplo, devido à falta de atenção e interesse no que estão a fazer, ou pelo facto de não analisarem as suas respostas, ou porque sabem que em estimação pode haver erro e portanto não faz mal ele acontecer, ou, ainda, como se verificou numa situação, porque pensam que nas estimativas podem usar os processos que lhes convém, para tornar os cálculos fáceis, processos esses que não usam fora da estimação.

Verificou-se, ainda, que em algumas actividades os alunos mostraram dificuldade em estimar, no entanto, se lhes pedissem, resolviam facilmente as questões usando papel e lápis. Esta situação deve-se possivelmente ao facto de os alunos estarem muito mecanizados ou familiarizados com o cálculo dos algoritmos escritos e não possuírem muita flexibilidade mental para analisar o que os números representam.

Capítulo 7

Estimativas de medidas efectuadas pelos alunos

Nesta investigação, o problema em estudo é a aprendizagem escolar da estimação matemática no 2º Ciclo do Ensino Básico sendo um dos objectivos compreender os processos utilizados pelos alunos quando produzem estimativas em contexto de aula.

Neste capítulo são analisados os dados relativos às estimativas de medidas que se baseiam nos registos escritos das observações das aulas, nas resoluções escritas apresentadas pelos alunos e, ainda, em pequenos excertos de conversas informais com os alunos.

Neste estudo, o número de actividades propostas sobre estimativas de medidas foi muito menor do que o proposto sobre estimativas de cálculo. E, muitas vezes, as actividades pedidas não foram as mesmas para todos os alunos. Contudo, foram identificados nos alunos processos quando produzem estimativas de medidas que se apresentam de seguida, destacando os que foram usados com mais frequência nas diferentes situações. Apresentam-se, ainda, alguns tipos de erros que emergiram do processo de estimação.

Identificação de processos usados em estimativas de medidas de comprimento

Foram identificados os seguintes procedimentos usados em estimativas de medida: iteração de unidades, comparação, uso de sinais de subdivisão, ajustamento [*squeezing*], seguindo de perto a terminologia utilizada por Hildreth, em 1983, para os mesmos processos.

Cada um destes processos é descrito e acompanhado de pequenos excertos de conversas informais com os alunos no sentido de uma melhor compreensão.

Iteração de unidades

Neste processo faz-se um apelo sucessivo a uma unidade mental de referência para o comprimento do objecto e, seguidamente, faz-se a contagem dessas unidades.

Este processo observou-se, por exemplo, numa das aulas em que a professora pediu aos alunos que estimassem o perímetro da sala. O Miguel apresentou um resultado e explicou assim como fez:

> "mentalmente pensei num metro e vi que estavam lá mais ou menos 7 metros."

Por outro lado, a Rosalina, outra aluna, explicou:

> "eu pensei assim: olhei para aquela "janela", que deve ter mais ou menos um metro e depois vi quantas vezes cabia no comprimento da sala."

Estes alunos apelaram a uma unidade "mental de referência", neste caso, o metro, para estimarem, por contagem, o comprimento do objecto. Podemos designar este processo por iteração de unidades.

Comparação

Ao usar este processo, o estimador compara o objecto alvo com outro objecto qualquer à vista ou fora dela, acerca do qual tem um conhecimento prévio. Como se exemplifica numa actividade onde a professora pediu para os alunos estimarem a altura dos colegas. O Mário fez:

> "disse para ela [a colega] se levantar e pensei se eu meço 1,35 m ela mede 1 m e mais ou menos o dobro em cm, logo 1,65 m."

Ainda, na mesma actividade, a Marta para justificar a sua estimativa disse:

> "eu meço 1,48 m, ela é um pouco mais baixa do que eu, mede 1,43 m."

Estes alunos, usaram a medida da sua altura, sua conhecida, para estimar a altura do colega. Podemos designar este processo de comparação.

Uso de sinais de subdivisão

Neste processo subdivide-se o comprimento a estimar usando a informação dada ou conhecida pelo estimador e seguidamente faz-se a contagem das várias medidas obtidas. Por exemplo, para estimar as dimensões da mesa da sala de aula o Filipe fez:

> "o comprimento é 1,20 m e a largura é 0,5 m. Porque, mais ou menos, até aqui [e indicava uma subdivisão na mesa] é um metro e o restante deve ter mais ou menos vinte centímetros."

Também a Cláudia justificou:

> "o ano passado a professora disse que um metro é mais ou menos assim [indicava uma determinada distância com os braços abertos] e trinta centímetros era assim [indicava com as mãos] por isso vi que era 1,30 m para o comprimento e 50 cm para a largura."

Ainda, no exercício para estimar a altura do colega, o Carlos disse:

> "1,55 m. Fiz 14 cm para a cabeça. Da cabeça às pernas 56 cm e da perna aos pés 84 cm."

Ajustamento

Neste processo fazem-se estimativas que são um pouco maiores ou menores do que o objecto alvo e, seguidamente, faz-se o "acerto" da medida. Este processo foi apenas identificado numa aluna, a Inês, quando estimou as dimensões da mesa. Nesta actividade, a Inês justificou dizendo:

> "comprimento 1,30 m. Com a ajuda dos meus braços vi o que era 1,50 m e depois estimei."

Identificação de processos usados em estimativas de medidas de área

A única situação observada foi o pedido de uma estimativa para a medida da área do tampo da mesa da sala de aula. Nesta situação apenas foi observado um único processo, o uso da regra para o cálculo da área rectangular, ou seja, a medida do comprimento vezes a medida da largura. Por exemplo, a Rosalina fez:

"o comprimento é 1,20 m, aproximei de 1m. A largura é 90 cm e aproximei de 1 m, então a área é 1m x 1m = $1m^2$."

<u>Síntese.</u> Neste estudo foram identificados quatro processos na estimação de medidas de comprimento, designados por, iteração de unidades, comparação, uso de sinais de subdivisão e ajustamento.

No processo de iteração de unidades os alunos apelam sucessivamente a uma unidade de referência para o comprimento do objecto e seguidamente determinam a contagem dessas unidades.

Ao usar o processo de comparação eles comparam o objecto que pretendem estimar a medida com outro objecto qualquer acerca do qual possuem um conhecimento anterior.

No processo de uso de sinais de subdivisão os alunos subdividem o comprimento a estimar em várias partes, usam informação sua conhecida e seguidamente fazem a contagem das várias medidas obtidas.

Quando usam o processo designado por ajustamento fazem estimativas que são um pouco maiores ou menores do que o objecto que se pretende estimar fazendo de seguida os acertos da medida final do objecto.

Iteração de unidades, comparação e uso de sinais de subdivisão foram processos usados em várias situações. Apenas o processo de ajustamento foi usado apenas por uma aluna, numa única actividade.

Quanto à estimação de medidas de área, apenas surgiu nas aulas uma única actividade e na estimação dessa actividade apenas foi identificado o processo em que se apela ao uso da regra para o cálculo da área.

Processos mais comuns

Em quase todas as actividades de estimação de medidas de comprimento surgiram pelo menos dois processos diferentes. O uso mais frequente de um ou de outro processo parece depender do tipo da estimativa pedida.

Algumas destas actividades faziam parte de um conjunto de pequenas fichas diferentes que foram distribuídas ao acaso pela turma, daí que determinadas actividades fossem efectuadas apenas por um pequeno número de alunos.

Por exemplo, "na estimativa da altura do teu colega", dos oito alunos a quem foi pedido esta estimativa, três usaram o processo de comparação e cinco usaram o processo de uso de sinais de subdivisão. Os que usaram o processo de comparação usaram a medida da sua própria altura, que conheciam, para estimar a altura do colega.

Os que usaram sinais de subdivisão recorreram ao uso de uma medida de referência que já conheciam, recorreram à ajuda dos próprios braços, para estimar as várias divisões efectuadas, mentalmente, no corpo do colega. Por exemplo, a Rosalina disse:

> "1,50 m. Com os meus braços vi mais ou menos quanto é 1 m e então vi que tinha 1 m mais 50 cm."

No exemplo "estima as dimensões do quadro" foram usados os processos iteração de unidades por dois alunos e o uso de sinais de subdivisão por cinco alunos.

Também, em "estima o perímetro do tampo da tua mesa" surgiram estes dois processos com igual frequência.

Na estimativa das dimensões da mesa da sala de aula surgiu iteração de unidades, uma vez; ajustamento, uma vez; e uso de sinais de subdivisão, seis vezes. Por exemplo, para essa estimativa, o Filipe disse:

> "porque mais ou menos até aqui é 1m [indicava com os braços uma medida] e depois temos mais 20 cm."

Nos exemplos anteriores o processo que surgiu mais frequentemente foi o de uso de sinais de subdivisão. Os alunos mostraram bastante facilidade em trabalhar com as medidas que já conheciam de experiências anteriores. Como, por exemplo, trinta centímetros, meio metro e um metro.

No entanto, na estimativa do perímetro da sala, os sete alunos a quem foi pedido essa estimativa usaram o processo de iteração de unidades para estimar a medida do seu comprimento, usando como referente o metro ou "uma janela que media próximo de 1m", ou ainda, o seu passo. Por exemplo, a Rosalina disse:

> "o comprimento são 6 m. Eu pensei assim: olhei para aquela janela de madeira, que deve ter mais ou menos 1 m e depois vi quantas vezes cabia no comprimento da sala."

O Miguel, justificou a sua estimativa, dizendo:

> "o comprimento da sala são 7 m. Mentalmente pensei num metro e vi que estavam lá mais ou menos 7 m."

Parece que para comprimentos maiores que o referente, o processo de iteração de unidades é mais fácil.

Por outro lado, para estimar o comprimento da esferográfica, dos sete alunos que responderam à questão, seis usaram o processo de comparação e apenas um usou o processo de iteração de unidades. Os que usaram o processo de comparação utilizaram como medida comparativa o seu palmo que é mais ou menos 15 cm. Por exemplo, o José disse:

> "17 cm. O meu palmo mede entre 15 e 20 cm e eu estimei para 17 cm."

A Marta usou o processo de unidades iteradas e justificou dizendo:

> "pensei na medida de 1 cm e depois vi quantas vezes estava 1 cm na esferográfica."

Síntese. Analisando os exemplos apresentados anteriormente, parece que o uso de um ou de outro processo tem a ver com a medida do objecto que se pede para estimar. Por exemplo, se a medida pedida for semelhante a qualquer medida conhecida é mais fácil usar o processo de comparação.

Se for uma medida muito maior do que as medidas de referência é mais fácil usar o processo de iteração de unidades, por exemplo, para estimar o comprimento da sala de aula.

No entanto, em quase todas as actividades propostas, o processo mais usado foi o uso de sinais de subdivisão.

Como vimos, neste processo os alunos subdividem o comprimento alvo, usam informação conhecida para estimarem as várias subdivisões e, seguidamente, fazem a contagem das várias medidas obtidas. De facto, verificou-se que os alunos usaram, como referentes, com bastante facilidade unidades de medida já suas conhecidas tais como, 1m, 0,5m, e 30cm. Situação que observei e que pude verificar, ainda, pelos argumentos dos alunos quando justificaram os seus resultados.

De facto, observei frequentemente os gestos que os alunos faziam com os braços e as mãos quando tentavam estimar medidas de comprimento. Por outro lado, nas suas justificações, foram frequentes argumentos do tipo "os braços abertos medem um metro" (Rui), "utilizei a técnica com os braços" (José), e também "o ano passado, a professora disse que trinta centímetros era assim [indicava uma medida entre as mãos]" (Cláudia).

Dificuldades e erros detectados durante o processo de estimação

Neste estudo verificou-se que os alunos, em geral, gostam de fazer este tipo de estimativas, mais do que as estimativas de cálculo.

Em quase todas as situações em que se pediu uma estimativa de uma medida os alunos mostraram-se interessados e quase todos tentaram indicar uma estimativa, situação que não se verificou com as estimativas de cálculo.

Estimaram com bastante razoabilidade medidas pequenas. De facto, as estimativas produzidas foram, de um modo geral, bastante razoáveis em "estima a altura do teu colega", "estima o comprimento da tua esferográfica", "estima as dimensões da tua mesa", "estima a medida da área do tampo da mesa", e em "estima o perímetro da sala de aula".

De referir que estes alunos já possuíam alguma experiência no cálculo de estimativas, do ano anterior. De facto, a professora da turma, também professora daquela turma no ano anterior, disse:

> "eles o ano passado já fizeram estimativas, principalmente de medidas. Eles não tinham a noção das medidas. Então mediram algumas partes do corpo, por exemplo, distância entre as mãos com os braços semi abertos [1 m], passo, semi braço pousado com a mão esticada [0,5 m], para tomarem como medida de referência e estimarem o comprimento da porta, as dimensões da mesa, etc."

Contudo, observaram-se alguns erros e respostas menos razoáveis em determinadas actividades, como por exemplo, nas estimativas das dimensões e do perímetro do quadro. Para o comprimento do quadro surgiram estimativas que variaram entre 4 m e 7,5 m. Para a largura do quadro as estimativas variaram entre 1,10 m e 2,20 m, tendo sido mais frequente as estimativas de 1,30 m ou 1,5 m.

Nestes dois casos, além dos alunos terem cometido erros no cálculo do perímetro, por exemplo, somando apenas as duas dimensões, ou multiplicando ambas, parece que houve mais dificuldade em estimar a medida do comprimento, talvez por ser uma medida muito maior do que as medidas mentais de referência que os alunos já possuíam.

Os erros detectados durante a estimação de medidas foram, essencialmente, erros na compreensão de conceitos, erros na compreensão das questões e erros aritméticos ou de redução de unidades de medida.

Erros a nível da compreensão de conceitos

Durante a explicação do processo usado para estimar foram detectados alguns erros devido à não compreensão dos conceitos. Por exemplo, na noção, ou uma representação mental, da própria unidade de medida, e ainda, no conceito de área e de perímetro.

Unidade de medida

Algumas situações mostram-nos que por vezes os alunos não possuem a noção, ou uma representação mental, de determinadas unidades de medida. Por exemplo, a Ilda, embora tenha indicado uma medida razoável para a altura do colega, 1,33 m, quando estimou o perímetro do tampo da mesa escreveu:

"larg+comp+larg+comp=4cm+10cm+4cm+10cm=28cm."

E para o perímetro do quadro: "8m+20m+8m+20m=56m."

A Ilda, quando indica 28 cm para o perímetro da mesa e 56 m para o perímetro do quadro, não parece ter a noção das medidas. Não tenho explicação para esta situação, possivelmente a aluna poderia estar distraída e ter efectuado a actividade sem interesse, ao acaso.

Também, a Alexandra ao estimar o perímetro do quadro escreveu:

"c x a = 2 m x 1m = 2m."

Neste caso, verificamos a ocorrência de dois erros, por um lado, a Alexandra revelou não saber o que significa o perímetro e, por outro, um desconhecimento das unidades de medida ao indicar 2 metros para o perímetro do quadro.

No entanto, não sabemos se de facto a Alexandra não possui um conhecimento correcto das unidades de medida, porque esta situação pode ter acontecido pelo facto da aluna ter errado o cálculo do perímetro e no final não analisar a razoabilidade do resultado, o que aconteceu frequentemente com vários alunos.

Situação semelhante, ocorreu quando a Ana indicou 3 m^2 para a área do tampo da mesa, cálculo que resultou da soma de $1m+1m+0,5m+0,5m=3m^2$. Esta situação revelou que a Ana não sabia como determinar a área, e por outro lado, pode também revelar um desconhecimento das unidades de medida, ou pode, ainda, dever-se ao facto de os alunos não verificarem a razoabilidade dos seus resultados. Perante esta situação a professora da turma referiu:

> "os miúdos não têm a noção de algumas unidades de medida, nomeadamente o m^2, ou então a Ana não dizia que a área do tampo da mesa é 3 m^2."

E, reforça, a importância destas noções ao dizer:

> "quando tiver tempo, vou lá para fora com eles desenhar 1 m^2 no chão, para verem."

Nas declarações da professora não há referência a aprendizagens anteriores acerca das medidas de área e de volume.

Durante o processo de estimação verificou-se, também, que alguns alunos mostraram não ter adquirido o conceito de perímetro e de área.

Para o cálculo do perímetro, fizeram por exemplo, a medida do comprimento vezes a medida da altura, ou, indicaram apenas a medida do comprimento, ou, ainda, indicaram a soma da medida do comprimento com a medida da altura. Por exemplo, o Mário para calcular o perímetro do tampo da mesa fez:

> "comprimento 1,20 m e largura 56 cm, logo 1,76 m."

Para estimar a medida da área do tampo da mesa da sala, dois alunos calcularam o perímetro e indicaram essa medida em m^2. De facto, o Luís fez:

> "comprimento 1,20 m e largura 0,5 m. A área é 3,04 m^2"

e a Ana também indicou como estimativa 3 m^2, realizando um processo semelhante indicando para a medida do comprimento 1 m e para a largura 0,5 m.

Erros a nível da compreensão das questões

Por vezes, verificou-se, através das suas respostas, que os alunos não compreenderam as questões ou, então, alguns termos presentes no enunciado destas. Por exemplo, para estimar as dimensões da mesa o Filipe indicou 1,20 m para o comprimento, não se referindo à largura. Situação que repetiu ao indicar 4 m para o comprimento do quadro, quando se lhe pediu uma estimativa das suas dimensões.

Erros aritméticos ou de redução de unidades de medida

Ocorreram erros aritméticos ou de redução de unidades de medida durante o processo de estimação, mas parece que pelo facto de eles ocorrerem não significa que os alunos não consigam estimar uma medida de comprimento. De facto, observou-se que os alunos estimaram o comprimento e a largura da mesa razoavelmente no entanto, ao estimarem a medida da área erraram na redução de unidades de medida e nos cálculos aritméticos.

Síntese. Neste estudo, verificou-se que, de um modo geral, os alunos interessaram-se e gostaram mais de estimar medidas do que estimar cálculos; e estimaram razoavelmente medidas pequenas.

Por outro lado, observou-se que os alunos estimaram mais facilmente estimativas de medidas pequenas do que estimativas de cálculo. Nas estimativas de medidas os alunos usaram processos de comparação, subdivisão de sinais e unidades iteradas e ao usar estes processos apelaram mentalmente a unidades de medida de comprimento já suas conhecidas, tais como, a medida da sua própria altura, um metro, meio metro ou trinta centímetros.

De referir, ainda, que as aprendizagens sobre estas unidades que usaram como referentes já tinham sido realizadas no ano anterior.

No entanto, notou-se um pouco mais de dificuldade na estimação de medidas grandes como, por exemplo, o cálculo do perímetro do quadro negro da sala.

Tal como se verificou nas estimativas de cálculo, também na estimação de medidas foram detectados erros. Estes erros foram, essencialmente: erros devido a uma deficiente compreensão dos conceitos, erros resultantes da não compreensão das questões e erros aritméticos e na redução das unidades de medidas.

De facto, nalgumas situações, verificou-se que os alunos erraram as estimativas devido a erros aritméticos ou de redução das unidades de medida.

Por outro lado, algumas vezes, observou-se que os alunos erravam porque não compreendiam, ou desconheciam, o significado de alguns termos presentes nas questões.

No entanto, o maior número de erros detectados deveu-se à não compreensão dos conceitos, nomeadamente, as noções de perímetro e de área.

Em determinadas situações detectaram-se erros que parecem ser devidos ao facto dos alunos não possuírem a noção, ou uma representação mental, do que significam concretamente determinadas unidades de medida como, por exemplo, um metro quadrado. No entanto, esses erros também podem dever-se ao facto de os alunos normalmente não analisarem a razoabilidade dos seus resultados.

É de realçar que as estimativas de medidas revelaram-se mais fáceis para os alunos do que as de cálculo. Nas estimativas de medidas os alunos usaram processos em que apelaram, frequentemente, a unidades de medida, chamadas referentes, sobre as quais já tinham conhecimento prévio de aprendizagens anteriores. Os alunos estimaram razoavelmente quando possuíam um bom conhecimento da unidade utilizada como referente para estimar e quando compreendiam os atributos, comprimento ou área, a estimar.

Capítulo 8

Atitudes e concepções dos alunos sobre a estimação matemática

No sentido de saber como é que os alunos encaram a estimação matemática em contexto escolar, foram analisados os questionários e as entrevistas realizados por estes, o que permitiu identificar alguns aspectos relevantes das suas atitudes e concepções sobre a estimação matemática.

Como já foi referido no capítulo sobre a Metodologia as entrevistas surgiram da necessidade de completar algumas informações do questionário. Estas entrevistas não obedeciam a um guião estruturado. Sempre que surgiam dúvidas em relação a alguma questão do questionário, essa questão era colocada de novo ao aluno.

Nas entrevistas foram, ainda, colocadas a todos os alunos questões (anexo 3) relacionadas com a definição de estimativa, o cálculo de estimativas nas outras disciplinas e a sua importância.

As respostas a estas questões permitiram analisar alguns aspectos importantes relacionados com a estimação e também completar informações relativas ao questionário.

Desta análise evidenciaram-se alguns pontos de vista dos alunos em relação à estimação, que apresentamos de seguida em três partes, nomeadamente, a estimação e a sua relação com a

Matemática, preferências relativas à estimação e importância e utilidade da estimação.

A estimação e a sua relação com a Matemática

Nesta parte esclarece-se o que os alunos entendem por uma estimativa, qual a relação da estimação com a Matemática e com as outras disciplinas.

O que é uma estimativa?

Quando questionados sobre o que é uma estimativa as respostas dos alunos foram consistentes entre si. De um modo geral eles consideraram uma estimativa como um cálculo mental ou um cálculo aproximado. Por exemplo, o José disse:

> "é uma coisa parecida ao cálculo, mas não se utiliza lápis, caneta e folha, é através do pensamento... é pensar e não fazer o cálculo... pensar a medida que há-de ser e encontrar o valor próximo não fazendo o cálculo."

Reforçando esta ideia de cálculo aproximado a Mariana justificou:

> "é um cálculo aproximado de um número, de uma expressão numérica."

Por outro lado, em concordância com as ideias anteriores o João acrescentou que é um cálculo que não se faz com a máquina de calcular e usa-se em determinadas situações quando não faz falta saber o valor certo:

> "estimativa é uma conta ou outra coisa qualquer que em vez de ser feita por máquina faz-se mentalmente e vai dar mais ou

menos o mesmo (...) é uma coisa que se usa em determinadas situações, quando não faz falta saber o valor certo..., a minha mãe também faz."

Surgiu também a ideia de que uma estimativa é um cálculo rápido como a definiu o João Bento:

"uma estimativa é uma coisa em que nós temos que pensar rápido e saber dizer o que fez."

Outra ideia referida pela Inês é o facto de se poder utilizar maneiras fáceis, o que parece ser uma vantagem da estimação:

"é um raciocínio mental e é para dizer o valor de algo sem ser utilizando papel e lápis, algo com a nossa cabeça... utilizando o nosso raciocínio... utilizando maneiras fáceis."

E o Carlos realçou a questão lúdica da estimação ao referir:

"uma estimativa é uma coisa que é engraçado, porque temos de pensar e achar números que fiquem perto do resultado."

Outra questão que pareceu ter alguma importância para alguns alunos foi a verificação do resultado de uma estimativa, tal como se observa na justificação do Mário:

"uma estimativa é uma coisa que a gente olha pensa e diz, e o cálculo é para confirmar se isso é verdade."

Esta ideia foi também expressa pela Isabel:

"é fazer os cálculos, aproximar os cálculos e fazer, e depois ver se está certo para confirmar."

<u>Síntese.</u> Segundo a maioria dos alunos uma estimativa é um cálculo que se faz mentalmente, não se usa papel e lápis, nem

máquina, é um valor aproximado, "valor próximo", ou "mais ou menos o mesmo".

Mas é também referido por um aluno o facto de se usar em determinadas situações, por exemplo em casa pela mãe, quando não faz falta saber o valor certo.

É, ainda, feita referência ao facto de ter que se "pensar rápido" e "saber dizer o que se fez". Esta última referência deve-se, provavelmente, ao facto da professora normalmente sempre que eles faziam uma estimativa pedir-lhes para explicarem como o fizeram.

Surgiu também a ideia da questão lúdica da estimativa é "engraçado" e ainda o facto de se poder utilizar maneiras fáceis.

Por outro lado, foi, ainda, referido a importância de verificar os cálculos a seguir à estimação. Esta situação deve-se possivelmente ao facto de nas aulas quase sempre a seguir à estimação a professora pedir-lhes para fazerem a verificação do cálculo do resultado usando papel e lápis ou máquina de calcular, ou ainda, no caso das medidas, efectuando medições com os instrumentos adequados.

Podemos, então, retirar a ideia principal de que uma estimativa é um cálculo mental aproximado, alguns, mas muito poucos, são mais abrangentes nas suas declarações e referem o facto de o cálculo ter que ser rápido, saber explicar como se fez, poder utilizar maneiras fáceis e ser engraçado.

Estimativa e erro

Da ideia de resultado aproximado expresso nas definições de estimação evidenciou-se outra questão, que é a relação entre estimativa e erro.

De um modo geral os alunos admitiram que numa estimativa pode haver erro, e consideraram que este deve ser pequeno. Por exemplo, a Alexandra disse:

> "[o erro deve ser] pequeno, para dar mais ou menos parecido."

A Mariana quando se lhe perguntou: "como é esse erro, como deve ser, ou não importa?" respondeu:

"deve ser o mínimo possível, deve ser o mais aproximado possível ao número real."

Também a Isabel referiu:

"às vezes não faz mal, mas era bom que fosse pequeno."

Portanto, para estes alunos, uma estimativa deve dar um valor próximo. Por outro lado, o José disse que uma estimativa não é um valor exacto e que não se importava com o erro, embora este devesse estar dentro de um certo valor:

"J: Primeiro fazemos a estimativa e depois fazemos o cálculo para confirmar... para ver se estamos perto...
I: Então o que é uma estimativa?
J: É um valor que eu penso que nunca deve ser exacto, não é exacto, porque se fosse exacto, não era uma estimativa, estávamos a calcular o valor certo."
(...)
J: [com o erro] eu não me importo, desde que faça a estimativa e tenha o resultado dentro de um certo valor."

Por outro lado, existem quatro alunos que reconheceram de facto a existência de erro numa estimativa, embora dissessem que "não faz mal" esse erro, ser grande ou pequeno. Contudo, todos eles definiram estimativa como um "cálculo aproximado".

Síntese. Quase todos os alunos reconheceram e admitiram que numa estimativa pode haver erro, embora esse erro deva ser pequeno, pois a estimativa deve estar próximo do resultado correcto.

Parece até que o facto de se pode errar é uma das vantagens da estimação. De facto, alguns alunos para justificar que gostam de fazer estimativas um dos argumentos usados foi que não há problema de errar, o que dá jeito.

Estes alunos encararam o erro em estimação matemática de um modo bastante positivo. Esta situação pode dever-se ao facto da professora, no sentido de os incentivar a estimar lhes dizer que no cálculo de estimativas não há problema de errar. No entanto, segundo ela, uma estimativa será tanto mais razoável quanto mais próxima do resultado estiver e daí talvez a opinião dos alunos ao referirem que o erro deve ser pequeno, embora alguns, muito poucos, achem que o erro não faz mal ser grande ou pequeno.

Curiosa a opinião de um aluno que referiu que uma estimativa não é um valor exacto, segundo ele se der o valor exacto não é uma estimativa, é o cálculo do valor certo. Para este aluno, em estimação o certo é errado?

As estimativas e a Matemática

Para estudar este aspecto foi colocada, aos alunos, a seguinte questão: Fazer estimativas é fazer Matemática?

Todos consideraram que fazer estimativas é fazer Matemática. Das justificações de alguns retira-se a ideia de que fazer estimativas é Matemática, porque trabalham com números, fazem contas e isso é Matemática. Por exemplo:

> "nas estimativas se a gente tomar consciência a gente vê que exploramos muita coisa da Matemática,... fracções, etc." (Cláudia)

> "[Quando] nós estamos a pensar em estimativas estamos também a pensar nos cálculos da Matemática." (João Bento)

> "sempre que trabalhamos com números ou com medidas para mim é Matemática." (Alexandra)

Para a Rosalina a estimação matemática, para além de envolver números, cálculos e operações é um modo rápido de os executar:

> "na Matemática trabalhamos com os números e esta [a estimação] é uma forma rápida de o fazer."

Contudo, alguns alunos, quatro, vão mais longe ao considerarem que podem usar e aplicar a estimação noutras situações além da Matemática.

A Mariana e a Rosalina referiram a ideia de aplicabilidade quando disseram:

> "Acho que sim [é fazer Matemática], é utilizá-la. Acho que a Matemática
> tem um pouco a ver com as outras disciplinas." (Mariana)

> "por um lado [a estimação] é Matemática, porque normalmente usa-se números, mas por outro pode-se aplicar em qualquer coisa que não tenha a ver com a Matemática." (Rosalina)

Outra ideia, presente na justificação do Nuno e da Inês é o facto de estimativas fazerem parte da Matemática e de outras situações do dia-a -dia:

> "estimativas fazem parte da Matemática mas também fazem parte de tudo no dia-a-dia." (Nuno)

> "depende...[fazer estimativas] às vezes até não [é fazer Matemática]. Porque a Matemática, as pessoas tem a mania de dizer que tudo o que é números está relacionado com a Matemática, mas até não, porque tudo o que é números não está relacionado com a Matemática... pode aparecer noutro lado, é o caso das estimativas, está em muitas coisas." (Inês)

Síntese. Como vimos nas justificações de que fazer estimativas é fazer Matemática, estão presentes as seguintes ideias, explora-se coisas da Matemática... fracções, etc., pensa-se nos cálculos da Matemática, precisa-se saber as operações aritméticas, trabalha-se com números e medidas e a estimação é uma forma rápida de trabalhar com os números.

Além destes aspectos surge, ainda, em quatro alunos, a ideia de que embora estimar seja fazer Matemática também se pode usar e aplicar noutras situações do dia-a-dia.

Estimação nas outras disciplinas

Da ideia de uso e aplicabilidade da estimação referida por quatro alguns alunos surge a questão da estimação nas outras disciplinas.

Colocada a questão "Nas outras disciplinas fazes estimativas?" todos os alunos da turma responderam não, mas quando se lhes perguntou se existia alguma disciplina onde pudessem fazer, treze alunos disseram que sim e maioritariamente deram como exemplos as Ciências Naturais e Educação Visual e Tecnológica [E.V.T.]. Foram ainda referidas outras disciplinas tais como a Educação Física, a Geografia e o Português.

Por exemplo, a Mariana e a Cláudia disseram:

> "por exemplo, em E.V.T. para fazer as margens das folhas, às vezes até pode dar jeito. Em Ciências [Ciências da Natureza], por exemplo, a consultar um gráfico para saber o valor do Cálcio..." (Mariana)

> "Em Ciências [Ciências da Natureza)... fizemos um teste, era só mesmo fazer a conta dos quilos de calorias que a gente ingeria, estava num gráfico... também podíamos fazer em estimativa. Em E.V.T., quando nos apresentam uma figura geométrica podemos sempre fazer uma estimativa... por exemplo, nas medidas e no caso de darem por exemplo 5,2 cm eu acho que podíamos aproximar para 5 cm." (Cláudia)

O Nuno e a Inês referiram-se também à Área Escola:

> "Em E.V.T. às vezes faço... por livre iniciativa. Na aula de Português podíamos fazer quando estamos a fazer certos trabalhos da Área Escola, ou precisamos de saber medidas, por exemplo, escrever no meio da folha..." (Nuno)

> "Ciências [Ciências da Natureza]...por exemplo na Área Escola podíamos estimar o valor de proteínas que cada alimento contém, ou ainda, davam-nos dados e estimávamos os alimentos que as pessoas mais consumiam nos vários países. Em

Educação Física podíamos estimar os metros que cada um corria" (Inês)

Os quinze alunos que disseram não poder fazer estimativas nas outras disciplinas não conseguiram justificar a sua opinião ou então referiram que nas outras disciplinas não trabalham com números ou, ainda, que as outras disciplinas são diferentes. Por exemplo, o Rui e a Lúcia e o Mário disseram:

"não, nas outras disciplinas não trabalhamos com números (...) a Matemática é a única que mete números, cálculos e isso."

E também a Cátia e a Marta referiram:

"não, são disciplinas diferentes."

Síntese. Os alunos que disseram que podem fazer estimativas nas outras disciplinas indicaram maioritariamente, como exemplos E.V.T. e Ciências da Natureza e justificaram essa opinião pelo facto de ser útil e prático, por exemplo para marcar as margens das folhas em E.V.T. "pode dar jeito", "não precisamos de medir".

No entanto, um pouco mais de metade acharam que as estimativas é um assunto da Matemática, dado que nas outras disciplinas não trabalham com números, são disciplinas diferentes.

Preferências relativas à estimação

Esta secção refere-se às preferências dos alunos em relação à estimação, isto é, se gostam ou não, se preferem estimativas ou cálculos com papel e lápis, qual o tipo de estimativas que preferem ou consideram mais fáceis.

Gostar

De vinte e oito alunos, onze afirmaram gostar de fazer estimativas. Destes onze alunos três indicaram a Matemática como primeira preferência, quatro indicaram-na como segunda preferência, três indicaram-na como terceira preferência. Existe, ainda, um aluno que gosta de fazer estimativas embora ache difícil e prefira fazer os cálculos com papel e lápis e exclui a Matemática das quatro primeiras preferências.

Os cinco alunos que gostam de estimativas e preferem fazê-las a fazer cálculos com papel e lápis, um indicou a Matemática como primeira preferência, dois indicaram-na como a segunda preferência e os outros dois colocaram-na em terceira preferência.

Os alunos que disseram gostar de estimativas apresentaram motivos diferentes para essa sua preferência.

Alguns consideram a estimação um processo rápido e fácil. Por exemplo, a Cláudia referindo-se ao cálculo com papel e lápis, disse:

> "gosto mais de fazer estimativas, porque nas estimativas eu aproximo sempre para os valores que me convém... e porque é mais rápido e mais fácil."

Do mesmo modo, outra aluna, a Inês referiu-se à rapidez e também ao facto de não haver problema de errar, tal como o Filipe:

> "gosto de fazer estimativas, porque são cálculos que nós fazemos rapidamente e não há problema de errarmos." (Inês)

> "gosto, porque nós pomos o nosso cérebro a pensar e quase que dá o mesmo." (Filipe)

Nestes exemplos, o gosto pela estimativa foi justificado pelo facto de ser um cálculo rápido e fácil e porque não há problema de errar.

Por outro lado, o Nuno, a Andreia e o Carlos disseram gostar porque são problemas engraçados, divertidos e que se podem resolver de muitas formas, utilizando técnicas muito simples:

> "gosto de fazer estimativas, porque são problemas engraçados em que nós encontramos muitas formas de os resolver (...)posso encontrar o valor de certos problemas facilmente utilizando técnicas muito simples." (Nuno)

> "gosto de fazer estimativas, às vezes é divertido." (Andreia)

Por outro lado, ainda, a Mariana disse gostar de fazer estimativas, mas referiu, no entanto que "depende da paciência e da dificuldade da estimativa"

O Tomé, por seu lado, gosta porque lhe atribui alguma importância, "gosto, para desenvolver o meu cálculo mental."

Síntese. Os onze alunos que gostam de fazer estimativas justificaram maioritariamente essa atitude, indicando como principal razão, o facto de ser um processo mais rápido, mais fácil e, ainda, porque não há problema de errar.

Houve, ainda, alguns alunos que justificaram esta preferência dizendo que as estimativas são problemas engraçados e podem-se resolver utilizando maneiras fáceis.

Não gostar

Oito alunos disseram "não gostar muito" ou "gostar pouco" ou ainda, "gostar mais ou menos".

De entre as suas justificações, os termos usados mais frequentemente para justificar este facto foram os seguintes: "difícil" e "confuso".

Por exemplo, a Alexandra disse:

> "não gosto muito de dar assim o cálculo... Quando penso na cabeça confundo-me muito, já tenho uma expressão feita e vou fazer outra, misturo e depois confundo tudo."

Por outro lado, a Rosalina afirmou gostar mas nem sempre, é conforme a dificuldade dos números, e acrescentou:

"gosto..., às vezes quando os números não são muito difíceis (...) mas quando tenho que estimar fracções já não gosto muito."

Um aluno, o José disse ser indiferente à estimação e justificou:

"para mim fazer e não fazer estimativas na aula é o mesmo (...) Se for uma matéria que eu goste, prefiro não fazer estimativas, se for uma matéria que eu não goste prefiro fazer estimativas."

Este aluno disse que era indiferente à estimação, no entanto parece que ele não gosta ou não gosta muito de fazer estimativas, porque de facto ele entre uma matéria que não goste então até prefere fazer estimativas, mas se gostar da matéria então prefere não as fazer.

Oito alunos afirmaram não gostar de fazer estimativas. As razões mais frequentes indicadas por eles foram o facto de que fazer estimativas é "confuso", "difícil" e "baralham-se", além de que não gostam de "pensar mentalmente". Estas razões são semelhantes às apresentadas pelos alunos que não gostam muito de fazer estimativas. Por exemplo:

"Não gosto, porque gosto mais de ter a certeza das coisas... é um bocado confuso e difícil." (Isabel)

"Não gosto, porque a gente tem que se esforçar muito para fazer as coisas de cabeça... uma pessoa tem que fazer as divisões pela cabeça e ... é difícil." (David)

"não gosto. Não sei estimar... as técnicas sei... mas baralho tudo." (Ilda)

Contudo, além desta ideia de esforço e dificuldade, surgiram outras questões referidas pela Marta que é o facto de estarem habituados aos algoritmos escritos e à máquina de calcular, e à necessidade de saber ou dominar técnicas de estimação e, também, porque é "chato":

"é que assim calcular... estamos habituados a fazer... a calcular com papel e lápis ou com a máquina... e acho que por um lado é um bocadinho chato (...) custo a arranjar método de fazer."

Os alunos que não gostam de fazer estimativas ou não gostam muito, dois indicaram a Matemática como primeira preferência, seis indicaram-na como segunda preferida, seis indicaram-na como terceira preferência, dois colocaram-na em quarta preferência e apenas um excluiu a Matemática das quatro primeiras preferências.

Um destes alunos que indicou a Matemática como preferida disse: "gosto pouco de estimativas, porque mexer com números sem recorrer a algoritmos é difícil". O outro aluno justificou que não gostava de estimativas porque "é difícil, não sei fazer os raciocínios pela cabeça".

Os alunos que indicaram a Matemática como segunda preferência justificaram que não gostam de fazer estimativas ou gostam pouco porque é difícil, confuso, atrapalham-se e não gostam de fazer contas de cabeça. Quase todos os outros alunos usaram argumentos semelhantes para justificarem a sua atitude.

Síntese. Mais de metade dos alunos não gostam de fazer estimativas ou então não gostam muito. A principal razão apontada por eles foi o facto da estimação ser difícil e confuso.

Referido, também, por alguns o facto de que pensar mentalmente exige muito esforço e eles estão habituados a fazer os cálculos com papel e lápis ou máquina e, ainda, a necessidade de saber as técnicas de estimação.

No entanto, neste estudo não se observou uma relação entre a primeira preferência pela disciplina de Matemática e gostar ou não de estimativas. De facto, entre os alunos que disseram gostar de estimativas nem todos indicaram a Matemática como primeira ou segunda preferência e por outro lado, nem todos os que não gostam de estimativas ou gostam pouco excluem a Matemática das suas primeiras preferências. Contudo, o facto de os alunos não indicarem a Matemática como primeira ou segunda preferência não significa que eles não gostem de Matemática como referiram alguns.

Preferência entre estimação e fazer os cálculos com papel e lápis

Dos onze alunos que afirmaram gostar de fazer estimativas cinco preferem fazer estimativas, quatro preferem fazer os cálculos com papel e lápis e dois disseram ser consoante a situação.

Todos os alunos que disseram não gostar de fazer estimativas preferem fazer os cálculos com papel e lápis. Dos oito alunos que afirmaram pouco de fazer estimativas apenas a Rosalina disse preferir fazer estimativas, mas conforme a situação.

Assim apenas cinco alunos disseram preferir fazer estimativas. Três afirmaram ser consoante a situação e os restantes vinte alunos preferem fazer os cálculos com papel e lápis.

Os quatro alunos que gostam de fazer estimativas mas preferem fazer os cálculos com papel e lápis apresentaram justificações semelhantes para esta preferência e foram essencialmente o facto de ao usar o papel poderem apontar, apagar, e ser mais fácil.

De facto, as principais razões indicadas pelos alunos para preferirem fazer os cálculos com papel e lápis foram "não se baralhar", "não se confundir" e ser "mais fácil".

Por exemplo, a Lúcia referiu a facilidade dos cálculos e o facto de não se baralhar, quando disse:

> "prefiro fazer com papel e lápis... parece que a gente pensa melhor... parece que quando estamos a pensar de cabeça nos esquecemos dos números, parece mais fácil de fazer com o papel."

e, ainda, o Paulo:

> "vou apontando e não me baralho tanto."

e também o Alex referiu:

> "é mais fácil [fazer com papel e lápis], porque quando não se utiliza o papel tem de se lembrar de tudo, e às vezes confunde-se."

A Cátia referiu o facto de: "com o papel vê-se as contas melhor" e o Mário reforçou a mesma ideia ao dizer:

> "escrevo no papel e posso ver o que faço, enquanto que em estimativa, no cérebro, não vejo nada, só vejo pela mente."

Por outro lado, os cinco alunos que preferem fazer estimativas justificaram a sua preferência pelo facto de ser um processo mais fácil e mais rápido. Por exemplo, o Filipe disse:

> "é mais fácil [fazer estimativas], a gente não tem tanto trabalho e depois se tiver mal a gente mete bem."

O Filipe considera mais fácil fazer estimativas porque não tem tanto trabalho e como não há problema de errar logo faz o cálculo certo.

Por outro lado, a Cáudia referiu:

> "nas estimativas eu aproximo sempre para os valores que me convém... porque é mais rápido e mais fácil. (...) a estimativa é uma coisa para pensar rápido e eu gosto de pensar, mas com calma, senão atrapalho-me."

Embora a Cláudia aproxime os valores para o que lhe convém e ache que fazer estimativas é fácil e rápido no entanto, referiu que gosta de pensar com calma, porque senão atrapalha-se.

Outros alunos, como por exemplo a Andreia justificaram a sua preferência porque, "desenvolve a capacidade de fazer cálculos mentais".

Surgiram, ainda, três alunos cuja preferência entre estimativas ou cálculos com papel e lápis depende da situação que tiverem. Por exemplo, a Mariana disse que depende da necessidade imediata do cálculo e da situação problemática:

> "depende da situação em que tiver... se precisar daquilo naquele instante talvez prefira uma estimativa, mas depende do tempo e do problema que for."

E a Inês referiu-se à dificuldade do tipo de números que tiver, por exemplo:

> "Quando é 1/3 gosto mais de fazer em estimativa... com papel e lápis temos que estar a acrescentar zeros... é tudo ali ao pormenor e para a estimativa é aproximadamente um cálculo do que é 1/3."

Síntese. Verificou-se que a maioria dos alunos prefere fazer os cálculos com papel e lápis, porque assim vão apontando no papel e não há o risco de se confundirem, de se esquecerem e portanto, o processo torna-se mais fácil.

Por outro lado, os que preferem fazer estimativas, justificam a sua preferência precisamente por ser um processo mais "fácil" e mais "rápido"; também porque não há problema de "errar" e, alguns, poucos, ainda justificaram esta preferência porque valorizam o desenvolvimento de capacidades pessoais tais como o "cálculo mental".

Existem, ainda, alguns alunos, muito poucos, em que a sua preferência por fazer estimativas ou os cálculos com papel e lápis depende da situação; por exemplo, do tipo dos números e sua dificuldade em manejá-los, do problema e do tempo que dispuserem para resolver essa situação.

Facilidade ou dificuldade da estimação

Embora o grau de facilidade ou dificuldade da estimação não seja uma preferência está relacionado com a preferência por fazer os cálculos com papel e lápis e, ainda, nalguns casos com o gosto pela estimação. Onze alunos acharam a estimação fácil, nove acharam difícil e os restantes oito consideraram a estimação fácil ou difícil consoante a situação que tiverem.

Verificou-se que nem todos os alunos que consideraram a estimação fácil preferem fazer estimativas. De facto, dos onze alunos que consideraram a estimação fácil apenas cinco preferem fazer estimativas, porque segundo eles embora as estimativas sejam fáceis torna-se mais fácil fazer os cálculos com papel e lápis.

Os alunos usaram argumentos diferentes para justificar que a estimação é fácil. Uns disseram que a estimação é fácil, porque, nas expressões numéricas não se pode mudar nada e nas estimativas pode-se aproximar os números de modo a tornar os cálculos mais fáceis. Por exemplo, a Cláudia disse:

> "é fácil, porque nas expressões numéricas a gente mete assim muita coisa, as prioridades, as regras, apresentam-nos aquilo que temos que fazer e pronto... não podemos mudar nada."

e, o Alex referiu:

> "é fácil, porque podemos aproximar os números."

Por outro lado, a facilidade da estimação surgiu justificada pelo facto de só ser preciso "pensar um pouco", como a Andreia disse:

> "é fácil, porque só precisamos de pensar um bocadinho (...) é só dar um cálculo."

Nas justificações de outros alunos a ideia de facilidade surgiu associada ao facto de não ser obrigatório dar o número certo, basta dar um resultado o mais próximo que se puder, "um palpite", tal como se verifica nas afirmações do José, do Miguel e do Paulo:

> "é fácil, porque não é dar o número certo, é dar o número mais próximo que puder." (José)
>
> "é fácil, porque é só dar o resultado aproximado." (Miguel)
>
> "é fácil, porque é dar o nosso palpite." (Paulo)

Alguns dos alunos que consideraram a estimação difícil justificaram esta opinião referindo o facto de se atrapalharem ao fazer os cálculos mentalmente. Por exemplo, a Isabel referiu:

"é difícil [fazer estimativas], porque às vezes atrapalho-me a fazer as estimativas de cabeça."

Por outro lado, a Amélia, acrescentou o facto da estimação ser um processo trabalhoso ao dizer "tem que se pensar muito".

Outro aspecto justificativo da dificuldade das estimativas foi o facto de não saberem fazer os raciocínios mentalmente e não perceberem como fazer uma estimativa. Conforme referiram o David e o Helder:

"é difícil, porque não sei fazer os raciocínios pela cabeça." (David)

"é difícil, porque às vezes não percebo como se pode fazer." (Helder)

Existem, ainda, oito alunos que consideraram a estimação fácil ou difícil, consoante a situação que tiverem. Como referiram alguns:

"é fácil quando tenho que estimar números inteiros, mas quando estimo fracções já é mais difícil." (Rosalina)

"se for com números inteiros e números pequenos é fácil, se for com muitas operações é difícil." (Tomé)

"se forem com poucos números é fácil, se forem com muitos números e se esses números forem decimais é difícil." (Nuno)

Portanto para estes alunos a facilidade ou dificuldade de uma estimativa depende do tipo de números e do número de operações, sendo mais fáceis as estimativas com números inteiros e pequenos e mais difíceis com fracções ou decimais e muitas operações.

Estas opiniões referem-se à estimação em geral. No caso particular das estimativas de cálculo apenas nove alunos as consideraram mais fáceis do que as estimativas de medidas e surgiram argumentos diferentes para justificar esta opinião.

Uns indicaram como justificação o facto de já ter os números ser só aproximar e não terem que estar a ver a medida e reduzir, como disseram a Inês e o Miguel:

> "[são] mais fáceis [as estimativas] de cálculo, porque já nos dão os números e nas medidas por vezes tem que se estar reduzindo." (Inês)

> "é mais fácil [fazer] estimativas de cálculo, porque já temos lá os números é só aproximá-los a outros números e fazer o cálculo." (Miguel)

Outros alunos, como por exemplo o João Bento e a Amélia, disseram "não ter muito a ideia das medidas" e "não conseguir ver muito bem".

Em relação às estimativas de medidas, dezanove alunos afirmaram que estas estimativas são mais fáceis do que as de cálculo.

Alguns destes alunos justificaram esta atitude referindo-se ao facto de já possuírem conhecimentos sobre algumas unidades de medida que usaram mentalmente como referência, tal como 0,5m, 1m etc., ensinadas pela professora e, também, poderem usar os braços ou as mãos como ajuda visual para estimar a medida pedida. Por exemplo:

> "a professora ensinou como se fazia 1 m e 0,5 m e assim é mais fácil de utilizar." (Alex)

> "[as estimativas] de medidas, é mais fácil, porque a gente olha e vê mais ou menos quanto mede... sabemos mais ou menos quanto é 1 m [indicava com os braços]." (Luís)

Foi, também, referido por um aluno, o José, que são mais fáceis as estimativas de medidas, mas de um objecto real, e não de uma figura num livro:

"as [estimativas] de medidas, são mais fáceis, mais reais, mas vendo de olho, num armário ou numa porta, do que vendo a figura num livro... "

Por outro lado, a Cátia referiu o facto de não ter que fazer cálculos, quando disse:

"são mais fácil as estimativas de medidas, porque nós só temos que dar uma medida e não fazemos cálculos."

E, outra aluna, a Cláudia argumentou serem mais fáceis as de medidas porque não precisa de se preocupar com as regras e as prioridades:

"nas expressões numéricas a gente mete assim muita coisa, as prioridades as regras e naquelas [medidas] dão-nos por exemplo a altura, o comprimento..."

Síntese. Em relação à estimação em geral, onze alunos disseram que a estimação é fácil e referiram os factos de se puder alterar os números de modo a tornar os cálculos mais fáceis, de não ser tão trabalhoso, basta pensar um pouco, e ainda, por não ser necessário dar o valor exacto, basta dar um valor aproximado.

Por outro lado, as duas ideias principais emergentes das justificações dos nove alunos que acharam a estimação difícil, são o facto de quando fazem os cálculos mentais se baralharem e, não saberem ou não perceberem como se pode fazer este tipo de raciocínio. Referido, ainda, embora menos, o facto de ser trabalhoso, pois tem que pensar muito.

De referir, ainda, a existência de alguns alunos que consideraram a estimação fácil ou difícil conforme a situação pedida, isto é o tipo de números envolvidos, as operações, etc.

Verificou-se, também, que apenas cerca de metade dos alunos que acharam a estimação fácil preferem fazer estimativas, os outros preferem cálculos com papel e lápis porque são mais fáceis.

Em relação ao caso particular das estimativas de cálculo apenas um terço dos alunos acharam mais fácil fazer estas estimativas, porque já lhes dão os números, não precisam estar a ver a medida, e reduzir se for esse o caso e, ainda, porque não têm uma ideia clara do que representam determinadas unidades de medida.

Quanto ao caso particular das estimativas de medidas cerca de dois terços da turma consideraram-nas mais fáceis do que as estimativas de cálculo, porque, segundo eles, já tinham adquirido a noção de determinadas unidades de medida e usaram-nas mentalmente como referência. Ainda, referido por um ou outro o facto de não ser preciso efectuar cálculos e não ser necessário se preocupar com as regras.

Importância e utilidade da estimação

Nesta parte apresenta-se a opinião dos alunos sobre a importância e utilidade da estimação.

Para procurar saber qual a importância que os alunos atribuíam à estimação foi-lhes colocada, entre outras, a seguinte questão:

A professora no outro dia disse-me que para o ano vai dedicar mais tempo às estimativas, o que pensas sobre isso?

Todos os alunos, disseram que a professora faz bem e reconheceram que a estimação é importante, à excepção do Helder que embora considerasse que a professora faz bem, não gosta e não considerou importante saber fazer estimativas.

A maioria dos alunos justificaram esta opinião dizendo que a estimação desenvolve o raciocínio e o cálculo mental.

Por exemplo, a Inês disse:

> "acho que faz bem [a professora fazer estimativas], porque assim nós aprendemos e depois sabemos fazer o cálculo mental, o que nos vai dar para a nossa vida inteira, porque a estimativa vai dar-nos para sempre, porque é um raciocínio que cada um tem."

e partilhando a mesma opinião o João Bento referiu:

"faz bem... para trabalhar melhor o cérebro... fazer com que se faça os cálculos de cabeça e rapidamente."

Por outro lado, o João achou importante saber estimativas para poder ensinar outras pessoas e a Cátia achou importante para o futuro, para uma profissão como referiram:

"acho bom, assim não esquecemos e podemos ensinar outras pessoas como se há-de fazer." (João)

"é importante, porque quem quer ser professora de Matemática, eu por exemplo quero ser, depois tenho que aprender isso." (Cátia)

E a Mariana referiu o facto da estimação ser importante, dada a sua utilidade podemos precisar na hora, mas no entanto não é muito reconhecida pelas pessoas, quando disse:

"acho bem, porque as estimativas é uma coisa que em geral as pessoas não vêem muito e é importante que as pessoas vissem... porque é importante, mesmo para fazer um cálculo mais aproximado, que por exemplo precisamos na hora."

O Miguel, referiu a sua importância, não só por ser um processo fácil e rápido, mas também por permitir novas aprendizagens:

"é bom saber fazer estimativas, porque podemos calcular facilmente é muito fácil e rápido e... desenvolvemos a aprendizagem... ficamos a saber mais ou menos o tamanho do metro..."

De um modo geral todos os alunos reconheceram a importância das estimativas, porque desenvolve o cálculo mental, e desenvolve o raciocínio. Referido, ainda, por alguns o facto de poder ser necessário para o futuro, ser útil, ser um processo fácil e rápido e permitir novas aprendizagens.

A importância das estimativas versus a importância das regras e dos algoritmos

Os alunos reconheceram a importância da estimação no entanto, vinte e um alunos acharam mais importante saber as regras e os algoritmos, apenas dois acharam mais importante saber fazer estimativas e cinco consideraram ambas as coisas importantes.

Os alunos que consideraram mais importante saber as regras e os algoritmos justificaram a sua opinião de modo diferente.

Alguns alunos como a Mariana a Marta e a Ilda consideraram mais importante saber as regras dado que é necessário para saber fazer estimativas.

> "acho mais importante saber as regras e os cálculos, porque sabendo as regras e os cálculos vai-se ter às estimativas." (Mariana)

> "saber as regras, porque sem as técnicas e as regras não podemos fazer nada (...) é preciso saber as regras para fazer estimativas, por exemplo nas fracções." (Ilda)

O Miguel referiu o facto de as regras e os algoritmos serem mais necessários para saber o valor certo e para a vida adulta:

> "às vezes os algoritmos são mais precisos para saber o valor certo (...) vão me ser mais precisos quando for adulto."

Outros alunos como o David e a Inês realçaram o facto de na Matemática se usar mais as regras e os algoritmos e o João referiu-se à questão da avaliação, quando disseram:

> "saber as regras..., porque na Matemática usa-se mais as regras e os algoritmos." (David)

> "é preciso saber as regras, porque na Matemática não é só fazer estimativas, a maior parte fazemos com papel e lápis." (Inês)

> "nos testes tem que ser o resultado certo, não pode ser mais ou menos, tem que se saber as regras." (João)

Quanto aos alunos que consideraram ambas as coisas importantes a sua justificação foi semelhante à dos alunos que consideraram mais importante saber as regras. Por exemplo, o Rui, a Alexandra e a Cláudia partilham a mesma ideia e referiram:

> "as duas coisas, porque se não se souber as regras não se consegue fazer bem uma estimativa."

Por outro lado, a Rosalina acrescentou:

> "acho que as duas são importantes, mas às vezes as estimativas são nos mais úteis."

Surge aqui reforçada a ideia da necessidade de saber as regras para poder fazer estimativas.

Os dois alunos que consideraram as estimativas mais importantes justificaram do seguinte modo:

> "é mais importante saber fazer estimativas para o cérebro se desenvolver." (João Bento)

> "porque pode ser que alguma vez eu precise de fazer uma operação e não tenha papel e lápis à mão." (Andreia)

<u>Síntese</u>. Como vimos todos os alunos à excepção do Helder consideraram importante saber fazer estimativas, porque segundo a maioria deles desenvolve o cálculo mental e o raciocínio.

No entanto, vinte e um alunos consideraram mais importante saber as regras e os algoritmos do que saber fazer estimativas. A ideia mais frequente presente nas declarações deles é o facto de ser dada mais importância às regras, dado que são necessárias para fazer estimativas e por outro lado, também é notória a ideia de que na Matemática se usa mais as regras.

Referido, por alguns que as regras são necessárias por causa da avaliação, nos testes não pode ser mais ou menos tem que ser o valor certo e, ainda, porque são mais precisas no futuro, quando se é adulto.

Utilidade prática

À excepção de três alunos, todos os outros disseram que a estimação é útil. Enquanto treze justificaram a sua opinião usando como argumento o facto de ser útil em situações de compra, doze disseram ser útil, mas tiveram dificuldade em justificar.

Há, ainda, três alunos, como por exemplo a Ilda e o Helder, que não atribuíram utilidade à estimação, dado que não gostam ou, ainda, porque no dia-a-dia não precisam de fazer.

As justificações de utilidade com exemplos de situações de compra, foram em geral, do tipo "tenho que estimar para ver se o dinheiro chega". Este exemplo, talvez tivesse sido motivado pela professora, que o referiu várias vezes na aula.

Os alunos que disseram ser útil, mas que não justificaram com exemplos de situações de compra mostraram alguma dificuldade em o fazer e atribuíram utilidade à estimação, porque é um processo que podem fazer rápido e têm que saber no futuro. Por exemplo, a Inês disse:

> "sim [é útil fazer estimativas], porque na vida prática, devemos ser práticos, assim estimamos rapidamente o valor de algo."

O Luís e a Cátia referiram-se à necessidade para o futuro:

> "sim [é útil fazer estimativas], porque temos de aprender a estimar." (Luís)

> "[fazer estimativas é útil] porque na vida nós temos que saber isso para quando formos grandes." (Cátia)

Embora, vinte e cinco alunos atribuíssem utilidade prática à estimação, dez alunos nunca fizeram fora da aula de Matemática, dezoito fizeram fora da aula, dos quais onze fizeram em situações de compra, três fizeram quando estudavam para o teste e os outros quatro não conseguiram dar um exemplo onde tivessem feito. Por exemplo o Nuno fez em situações de compra:

> "às vezes faço algumas [estimativas] quando vou às compras... para ver se o dinheiro chega e sobra para comprar um bolinho e umas pastilhas elásticas, etc."

O Rui fez quando estudava para o teste:

> "já [fiz estimativas], quando estudei para o teste, pensava que saía estimativas e estudei. Pedi à minha mãe que me fizesse algumas questões mas ela não sabia o que isso era."

Os alunos que utilizaram a estimação fora da aula fizeram-na de forma natural, nomeadamente, em situações de compra.

Síntese. De um modo geral todos os alunos consideraram a estimação útil. No entanto, dez alunos nunca a fizeram fora da aula de Matemática. A maioria dos alunos que disseram tê-la feito fora da aula, deram como exemplos situações de compra no supermercado.

Cerca de metade da turma justificou a utilidade da estimação referindo situações de compra e os outros mostraram dificuldade em explicar a sua opinião, tendo alguns referido que é um processo rápido e necessário para o futuro.

Capítulo 9

Estudo de quatro alunos

O problema em estudo neste trabalho é a aprendizagem escolar da estimação matemática no 2º Ciclo do Ensino Básico. Mais especificamente, pretende-se compreender os processos utilizados pelos alunos quando produzem estimativas em contexto de aula e identificar as suas atitudes e concepções face à estimação.

No sentido de aprofundar a compreensão da problemática em estudo, neste capítulo, em particular, caracterizam-se quatro alunos que de algum modo se evidenciaram durante o tempo de observação das aulas e no processo de análise de dados.

Estes alunos apresentaram uma diversificação de processos, capacidades e atitudes que pareceram significativas tendo em conta os objectivos da investigação.

O Miguel e a Mariana, são alunos que se podem incluir no grupo dos bons estimadores e foram seleccionados porque foram os que cumulativamente, utilizaram um maior número de processos, utilizaram estratégias mais diversificadas e responderam correctamente ou razoavelmente à maior parte das actividades de estimação propostas, oralmente e por escrito, pela professora na sala de aula.

O Tomé, não se pode incluir no grupo do Miguel e da Mariana isto é, no grupo dos alunos considerados bons estimadores. Este aluno foi escolhido porque durante as aulas, juntamente com alguns outros, teve uma participação muito activa e mostrou-se interessado nas actividades de estimação. Nos conteúdos onde tinha competência revelou-se bom estimador e utilizou processos e estratégias de estimação semelhantes às da Mariana. Contudo, como tinha muitas dificuldades em Matemática, não respondeu correctamente ou razoavelmente à maior parte das actividades de estimação propostas, oralmente e por escrito, pela professora na sala de aula.

O Helder, foi seleccionado por ser aquele onde se identificaram atitudes mais negativas em relação à estimação. Este aluno nunca participou na resolução das questões pedidas oralmente nas aulas e a sua participação foi quase nula nos trabalhos pedidos por escrito.

A maior parte dos processos e capacidades identificados nestes quatro alunos são referentes às estimativas de cálculo, porque estas foram pedidas com muito mais frequência durante este estudo e no caso de alguns alunos não existem dados sobre estimativas de medidas.

Miguel

O Miguel tinha onze anos de idade e uma escolaridade sem repetências. Mostrou-se sempre muito interessado, muito organizado e participativo, mas quando solicitado, era um pouco tímido.

Revelou-se sempre muito bom aluno em todas as disciplinas. Nunca teve qualquer apoio suplementar. Como dizem os pais, "é tudo à custa do seu esforço".

Segundo a professora de Matemática, que era também a sua directora de turma, os pais, quer a mãe, que era doméstica, quer o pai, que era operário, apenas com a instrução primária, eram interessados pela escola, mostravam orgulho no filho e valorizavam o seu trabalho.

Por outro lado, o Miguel, era um aluno meigo, responsável e muito correcto no seu comportamento.

Processos e capacidades

Este aluno usou todos os processos identificados neste estudo, embora os processos de compensação e de translação fossem usados apenas em uma ou duas actividades.

O Miguel usou o processo de **reformulação** nos seus vários tipos, nomeadamente: arredondamento para o inteiro mais próximo, arredondamento para o múltiplo mais próximo de 5, 10, 100 etc., substituição, ou o uso de uma forma equivalente dos números, trabalhar com um ou mais dos dígitos da esquerda. Este processo foi usado nas estimativas com números decimais, com números inteiros, e também com números fraccionários.

O processo de **compensação** foi usado numa actividade sobre proporcionalidade directa.

O processo de **translação** foi identificado na estimação de uma expressão numérica com números inteiros.

Este alunos usou também o processo de **comparação**. O seu uso verificou-se mais frequentemente nas estimativas de somas e diferenças com números fraccionários, embora também tivesse sido usado na divisão de fracções e em adições de números inteiros e de números decimais.

O Miguel nas estimativas de produtos de números fraccionários não recorreu a processos de estimação, mas usou mentalmente procedimentos algorítmicos. Também recorreu a este método, com muita frequência, no caso das divisões com fracções e em algumas actividades com adições e subtracções desses mesmos números.

Nas actividades onde surgiram multiplicações e divisões de números fraccionários o Miguel usou maioritariamente procedimentos algorítmicos e foi melhor sucedido do que quando usou, em actividades semelhantes, o processo de comparação.

Em duas actividades sobre percentagens, o Miguel e o Tomé usaram estratégias onde surgiram os processos de comparação e reformulação em conjunto.

Nas estimativas de medidas o Miguel usou os processos de **comparação, iteração de unidades** e **subdivisão de sinais**.

Nalgumas situações verificou-se que este aluno se concentrou na estrutura dos números em vez do cálculo. Assim, por exemplo, na actividade seguinte:

> Estima, em cada linha, o valor de cada uma das expressões. Escreve uma afirmação verdadeira colocando entre as duas expressões um dos símbolos > ou <.
>
> 1/3 + 3/5 + 6/7   2/15 + 1/5 + 1/10

O Miguel respondeu que a primeira expressão é maior do que a segunda e justificou o seu raciocínio da seguinte forma:

> "pensei que 1/3 é uma parte de 3 e 2/15 é 2 partes de 15. Logo 2/15 é mais pequeno e pela mesma razão 1/5 é mais pequeno que 3/5. E 1/10 é também mais pequeno que 6/7, porque 1/10 é uma parte de uma unidade dividida em 10 e 6/7 são 6 partes da mesma unidade dividida em 7."

Analisando este exemplo, verifica-se que este aluno concentrou-se na estrutura dos números em vez do cálculo e usou o processo de comparação. Revelou, portanto, possuir um **conhecimento da estrutura dos números.**

Na resolução de determinadas actividades de estimação observou-se que este aluno possuía um conhecimento correcto do **valor posicional**. Neste exemplo:

> "Considera a soma: 4879 + 25728 + 90328
> Efectuando uma estimativa diz qual dos seguintes números poderá representar aquela soma:
>
> 12000   1100000   120000."

O Miguel estimou 120000 e justificou dizendo:

"Somei o primeiro algarismo de cada número, sem contar com o primeiro, dois mais nove e deu-me onze e com a soma dos outros deveria dar 120000."

Este conhecimento pode ajudar os alunos a serem mais flexíveis na escolha do processo de estimação.

Numa outra situação, o Miguel mostrou possuir alguma **flexibilidade mental** para trabalhar com números. Por exemplo, para estimar se a soma $\frac{7}{8}+1\frac{12}{13}$ é maior ou menor do que 1, o Miguel fez:

"7/8 é quase 1 e $1\frac{12}{13}$ é quase 2 logo maior que 1."

Este aluno manifestou ter um bom sentido do número e flexibilidade mental, ao reconhecer que estas fracções estão próximas de 1 e 2, respectivamente. Como vimos anteriormente, nesta situação concreta, apenas seis alunos em vinte e oito evidenciaram esta flexibilidade mental para trabalhar com números.

E, em várias situações, foi evidente a facilidade com que este aluno, efectuava **cálculos mentais**.

Foi, ainda, observada neste aluno a capacidade de ajustar uma estimativa inicial que resultou de um processo de translação ou de reformulação de um problema. Por exemplo:

Na loja B está afixada a seguinte tabela:

Nº de lápis	6	12	18	24
Preço	450	900	1350	?

Indica uma estimativa para o preço de uma caixa de 24 lápis, se o critério se mantiver. (Matematicando, 6º ano)

O Miguel estimou 1800, e justificou do seguinte modo:

"arredondei 450 para 500 e como de 6 para 24 quadruplicou logo 4 vezes 500 é 2000. ... alguns segundos (10-15) depois disse, arredondei 450 para 500 e 4 vezes 500 é 2000 e como havia um erro de 50 vezes 4 igual a 200, então fica 1800."

Esta característica apenas se verificou com este aluno e nesta situação colocada pela professora na aula. Nesta actividade, o cálculo exacto até era mais simples e foi esse o método usado pelos outros colegas.

De um modo geral, os alunos indicam uma estimativa, mas não reflectem sobre esse resultado. Nas entrevistas, verificaram-se apenas alguns casos, muito raros, de alunos que reconheciam o erro e justificavam por exemplo que "arredondaram 3,14 para 4, mas deviam ter arredondado para 3 porque está mais próximo".

Nalgumas situações, o Miguel tentou outros processos evidenciando um tipo de raciocínio mais flexível e conhecedor de propriedades aritméticas. Por exemplo, para estimar o produto 0,24x439, fez:

"0,24 x 439=24,00."

E, na entrevista, justificou o seu procedimento do seguinte modo:

"Primeiro fiz 4 vezes 400 igual a 1600, depois fiz 2 vezes 400 igual a 800 e por fim 1600 mais 800 igual a 2400 e colocando as virgulas fica 24."

O Miguel arredondou 439 para 400 e usou propriedades aritméticas (propriedade distributiva), mas errou porque em vez de 2x400 é 20x400.

O Miguel mostrou também possuir muita **segurança** em utilizar as regras conhecidas e mostrou também **confiança** ao indicar os seus resultados e ao justificar as estimativas produzidas. De facto, ele próprio se considerou bom estimador.

Atitudes e concepções

Em relação à Matemática, este aluno inclui-a como segunda preferência "porque é uma disciplina de que vou precisar muito."

E, segundo ele "a Matemática é uma disciplina que nos ajuda a calcular". E porque na Matemática "existem algumas coisas fáceis e outras difíceis".

Para este aluno, ter sucesso em Matemática é necessário "ser inteligente e estar atento", qualidades que disse possuir.

Em relação à estimação o Miguel considerou uma estimativa como:

> "um cálculo aproximado de qualquer coisa. Um cálculo sem contas, um cálculo mental, onde o valor desse cálculo mental é aproximadamente o verdadeiro."

Considerou que fazer estimativas é fazer Matemática, porque segundo ele, "tudo o que são números é Matemática" e porque, "ao fazer estimativas estamos a calcular e isso é Matemática, mas pode-se usar as estimativas noutras disciplinas."

No entanto, embora referisse que nas outras disciplinas não fazia estimativas porque os professores não pediam, ele achou que as podia fazer e indicou como exemplo a disciplina de Educação Visual e Tecnológica, quando necessita marcar as margens numa folha.

Este aluno, o Miguel, disse gostar de fazer estimativas, porque "é fácil e rápido e dá um resultado quase certo" e considerou que é fácil, na medida em que "é só dar o resultado aproximado".

Relacionado com estas razões está o facto de este aluno preferir fazer estimativas, em vez de fazer os cálculos com papel e lápis, porque "é fácil e rápido e pode-se fazer mentalmente."

Para o Miguel aprender a fazer estimativas é importante porque permite aprender a noção de alguns conceitos, como disse:

> "[fazer estimativas] desenvolve a aprendizagem. Por exemplo ficamos a saber mais ou menos o tamanho do metro..."

No entanto, achou importante saber principalmente as regras e os algoritmos do que saber fazer estimativas porque, "os algoritmos são mais precisos para saber o valor certo" e, ainda, porque, "[as regras e os algoritmos] vão ser mais precisos quando for adulto."

O Miguel pareceu atribuir muita importância às regras e aos algoritmos porque poderão ser necessários para a vida adulta e porque são precisos para determinar o valor certo dos cálculos.

Em relação à utilidade de fazer estimativas na vida prática, o Miguel achou útil na medida em que "permite fazer contas rápidas". E indicou, como exemplo, situações de compra, nomeadamente, "no supermercado para somar os preços."

Também referiu já ter feito estimativas fora da aula de Matemática.

Este aluno considerou-se bom estimador, porque "fez todas as estimativas que foram propostas".

E, referiu, também, que as estimativas são algo que se deve fazer, mas "de vez em quando, não é todos os dias."

Mariana

A Mariana tinha 11 onze anos de idade e uma escolaridade sem repetências. Mostrou-se sempre muito interessada, muito participativa e organizada nas actividades de sala de aula. Bastante simpática e expontânea, mostrou-se muito segura de si e com uma personalidade forte. Segundo a professora de Matemática, nunca deixava passar uma dúvida que tivesse, questionando sempre até ao último pormenor para a esclarecer.

Esta aluna tinha um nível de "Muito Bom" a todas as disciplinas, tendo bastante apoio dos pais.

Os pais, ambos com cursos médios, mostraram-se sempre interessados pelas actividades da filha na escola, indagando muitas vezes os professores acerca do desempenho escolar dela.

Processos e capacidades

Esta aluna foi uma das que mais participou nas actividades pedidas oralmente pela professora na aula, sendo geralmente muito bem sucedida. Nas actividades colocadas por escrito foi, mesmo, a aluna melhor sucedida. Em qualquer destas situações os erros detectados no raciocínio da Mariana foram muito poucos, e esses foram facilmente corrigidos por ela.

No cálculo de estimativas, a Mariana usou diferentes processos nomeadamente, os processos de reformulação, comparação e translação.

Esta aluna usou os seguintes tipos do processo de **reformulação**: Arredondamento de um ou de ambos os números, arredondamento para o próximo múltiplo de 5, 10,100, etc. e substituição.

Estes tipos de reformulação foram usados nas estimativas com números decimais e números inteiros, e também em actividades onde surgiam números decimais ou números fraccionários, por exemplo, transformando o número decimal num número fraccionário equivalente ou, substituindo um número fraccionário pelo número inteiro mais próximo.

O processo de **comparação** foi usado, pela Mariana, em actividades de estimação onde surgiram adições e subtracções de números fraccionários.

Por exemplo para estimar, se 7/5-1/7 é maior ou menor do que 1, a Mariana fez:

"7/5 é maior que 1 e como e como 1/7 é mais pequeno que 1/5 então a diferença continua, ainda, maior do que 1."

Numa outra situação, ao estimar o valor de 2/5-2/4, a Mariana justificou do seguinte modo:

"Não dá, porque 2/4 é maior do que 2/5 e não se pode tirar um número maior de um número mais pequeno."

O processo de comparação foi utilizado essencialmente nas estimativas com adições e subtracções de números fraccionários. Esta aluna revelou um bom conhecimento desses números, sendo quase sempre bem sucedida.

Uma vez tentou usar procedimentos algorítmicos para estimar uma soma e não conseguiu, dado que não conseguiu encontrar o mínimo múltiplo comum entre os denominadores.

Esta aluna, nunca usou o processo de comparação para estimar produtos e quocientes de números fraccionários. Nestas situações não usou processos de estimação, apelou mentalmente ao algoritmo de cálculo para encontrar a resposta exacta e foi sempre bem sucedida.

O processo de **translação** foi utilizado em duas actividades sobre percentagens conjuntamente com o processo de reformulação.

Esta aluna, o Miguel e o Tomé usaram estratégias de estimação, onde se observaram dois processos em conjunto. Na actividade, "O jantar da família Lança custou 3890$00 mais 17% de IVA. Estima o custo total do jantar", a Mariana utilizou reformulação e translação, como se verifica na justificação do seu raciocínio:

"arredondei 17% para 20% e 3890$00 para 4000$00. Como 20% é igual a 10% mais 10% e como 10% de 4000$00 é 400$00, assim são 800$00 o que dá 4800$00."

A Mariana apenas efectuou uma actividade sobre estimativas de medidas. Nessa actividade, onde se pedia para estimar a área do tampo da mesa, esta aluna apelou mentalmente ao uso da regra para o cálculo da área rectangular.

Neste estudo, a Mariana revelou, ainda, possuir características particulares, nomeadamente: um bom conhecimento da estrutura dos números, quer inteiros, decimais ou fraccionários; flexibilidade mental para trabalhar com números, e um cálculo mental muito desenvolvido; e grande segurança na utilização de regras de cálculo.

Nalgumas situações verificou-se que esta aluna se concentrou na estrutura dos números em vez do cálculo. Por exemplo, para estimar 2/5-2/4, a Mariana disse:

> "não dá, porque 2/4 é maior do que 2/5."

Também, ao trabalhar com números decimais se verificou que a Mariana possuía um bom conhecimento da estrutura destes números. Por exemplo, ela aproximava sempre um número decimal para o número inteiro mais próximo, ao contrário da maioria dos seus colegas. Estes, por exemplo, tanto indicavam, 1 ou 2 como valores inteiros aproximados de 1,39.

Por outro lado, foram bastantes as situações em que a Mariana mostrou possuir flexibilidade mental para trabalhar com números. Por exemplo, ela estimou 5 para o valor de 22/7+13/6 e justificou assim:

> "aproximei 22/7 de 3 e 13/6 de 2 e deu-me 5."

Este processo aparentemente simples foi usado por muito poucos alunos.

Num outro exemplo para estimar se 3/4-1/3 é menor do que 1, a Mariana fez:

> "imaginei um círculo com 3/4 e ao tirar daí 1/3 fica menor do que 1."

Esta aluna manifestou ter um bom sentido de número e **flexibilidade mental** ao reconhecer, no primeiro exemplo, que estas fracções estão próximas de 3 e de 2, respectivamente; e, no segundo exemplo, não se prendeu com os cálculos, usando os seus conhecimentos acerca daquelas fracções.

Foi, ainda, evidente ao longo deste estudo a **segurança** demonstrada pela Mariana ao utilizar regras e apelar mentalmente aos algoritmos escritos, como se verificou neste exemplo, que resolveu correctamente:

> "Sem calculares, ordena os quocientes por ordem crescente:
> 37:2,5 37:250 37:25 37:25,5."

Enquanto que apenas três alunos dos vinte e oito acertaram, ela não mostrou qualquer dificuldade e justificou da seguinte forma:

> "quando se divide por um número maior vai dar um número mais pequeno."

Além destas características, e dado que os alunos tinham que estimar rápido, aconteceu uma vez ou outra a Mariana indicar uma estimativa menos razoável, facto que ela reconhecia de imediato e indicava com facilidade a sua correcção.

Outro aspecto, observado nesta aluna, e que interessa registar foi a **confiança** que revelou ao estimar as actividades propostas.

Atitudes e concepções

A Mariana definiu a Matemática como "um enigma e uma curiosidade". Não a considera fácil ou difícil "porque há matérias mais fáceis de compreender do que outras."

Esta aluna indicou a disciplina de Matemática como primeira preferência, porque:

> "sempre compreendeu melhor a Matemática do que as outras disciplinas e gosta da maneira como se resolve."

Por outro lado, indicou como qualidades necessárias para ter sucesso em Matemática, "algum raciocínio e paciência", e considerou que as possui.

A Mariana considerou uma estimativa como: "um resultado aproximado de qualquer expressão numérica, que se faz mentalmente[...][o erro] existe e deve ser o mínimo possível, deve ser o mais aproximado possível ao número real".

Para esta aluna, fazer estimativas é fazer Matemática, "porque se tira, põe, multiplica-se, e divide-se" e "é utilizá-la [à Matemática]. Acho que a Matemática tem um pouco a ver com as outras disciplinas".

Segundo ela, podia fazer estimativas noutras disciplinas por exemplo em Ciências da Natureza e em Educação Visual e Tecnológica.

Esta aluna gosta de fazer estimativas, embora nem sempre, segundo nos afirmou. Sobre esta questão ela disse:

> "[gosta de fazer estimativas] às vezes, depende da paciência, da compreensão da estimativa, da dificuldade, etc."

Por outro lado, para esta aluna, a facilidade de fazer uma estimativa depende da situação concreta de estimação que tiver, e justificou do seguinte modo:

> "[a facilidade ou dificuldade] depende da estimativa que for. Por exemplo com fracções é mais difícil. As mais fáceis são aquelas com números inteiros... e mesmo com vírgulas. Não interessa... porque se tiver vírgulas aproximo sempre para o número inteiro mais próximo."

E para a Mariana também não é clara a sua preferência entre as estimativas de cálculo e de medida, porque referiu:

> "as estimativas de medidas talvez sejam mais fáceis. Por exemplo, estimar uma área é mais fácil do que se tiver uma porção de cálculos para resolver, é só o lado pela altura. Mas também depende, se for muito complicada, talvez prefira o cálculo. A estimativas assim a olho acho que prefiro os cálculos."

Sobre a sua preferência entre fazer estimativas ou fazer os cálculos com papel e lápis, ela justificou que:

> "às vezes gosto mais de fazer os cálculos com papel e lápis, por serem grandes e complicados. Outras vezes gosto mais de fazer estimativas por ser mais rápido."

e referiu, ainda, que:

> "[esta preferência] é conforme a situação em que estiver, se estiver numa situação apertada, se precisar daquilo naquele instante talvez prefira uma estimativa, mas depende do tempo e do problema que for."

Para esta aluna, fazer estimativas ou saber as regras e resolver os algoritmos são situações importantes porque, segundo ela, "há situações para fazer estimativas e outras para fazer os algoritmos".

De facto, sobre a importância da estimação ela referiu que "as estimativas é uma coisa que em geral as pessoas não *vêem* muito e era importante que as pessoas vissem..."

E acrescentou ainda que:

> "[fazer estimativas] é importante, mesmo para fazer um cálculo mais aproximado, que por exemplo precisamos fazer na hora..."

Referiu, também, o facto de saber fazer estimativas ser prático e útil. É prático porque permite fazer os cálculos no momento e não precisa de andar com a máquina de calcular sempre no bolso.

É útil para a vida prática, por exemplo "quando se vai às compras, ou numa situação assim do género, dá sempre jeito [fazer estimativas]".

São também situações de compra que indicou como exemplos de situações onde ela já fez estimativas fora da aula de Matemática.

E a Mariana considerou-se uma estimadora razoável, porque "não tem muita dificuldade em Matemática."

E gostava que no próximo ano o(a) professor(a) de Matemática também fizesse estimativas para assim: "desenvolver a maneira de pensar e a facilidade em pensar como se deve fazer ou não."

Para a Mariana fazer estimativas desenvolve o pensamento, e o facto de as fazer mais continuamente permite tornar mais fácil o processo de estimação.

Tomé

O Tomé tinha 13 anos e havia repetido dois anos no 5º ano de escolaridade. Este era o segundo ano que estava a frequentar o 6º ano de escolaridade. No entanto, foi um aluno que teve sempre sucesso no 1º ciclo.

Este aluno vivia com a mãe e mais cinco irmãos mais velhos. A mãe dedicava-se à exploração de um café-restaurante. Segundo a professora, o Tomé desde muito cedo viveu no meio dos adultos e dos seus "vícios", e foi na altura em que se integrou mais nesse meio que começaram as repetências.

Este aluno estava nesta turma pela primeira vez e integrou-se bem, segundo a professora de Matemática. Embora mais velho que os outros não se sentia mal e assumia-se mesmo, como líder da turma.

Nas aulas de Matemática era participativo e expontâneo. Não revelou problemas em falar das suas dúvidas e dos erros que cometia, aceitando sempre as críticas com uma atitude muito positiva.

Mas era conflituoso com os outros professores, que já o tratavam como aluno que dava problemas. No entanto, relacionava-se muito bem com a professora de Matemática. Segundo esta, este comportamento devia-se a um conhecimento mútuo anterior e, talvez, ao facto de ela ser a directora de turma.

Era um aluno muito participativo nas actividades de Educação Visual e Tecnológica e foi dos alunos da turma que mais participou em actividades extra-curriculares, nomeadamente na Área-Escola.

A mãe mostrava-se interessada pelo que o seu filho fazia na escola e tinha consciência dos problemas do filho, procurando sempre colaborar na resolução destes problemas.

Processos e capacidades

O Tomé mostrou-se interessado e foi um dos que mais participou nas actividades pedidas oralmente pela professora.

Nas actividades de estimação que o Tomé resolveu foram identificados os processos de reformulação, comparação e translação.

O Tomé usou os seguintes tipos de **reformulação,** arredondamento de um ou ambos os números, quando estimou valores com números inteiros e números decimais; e arredondamento para o próximo múltiplo de 5, 10, etc., ao estimar números inteiros, decimais, e números fraccionários.

Este processo de reformulação foi também usado em actividades sobre percentagens.

Os processos de **comparação** e de **translação** foram identificados na resolução de situações problemáticas sobre percentagens.

Nas actividades com números fraccionários o Tomé usou reformulação, ao arredondar para o próximo múltiplo de 5, 10, 100. No entanto, este aluno, para estimar somas, produtos e quocientes de números fraccionários apelou essencialmente a regras de cálculo.

Este aluno teria sido, bem sucedido na maioria das actividades propostas, se não tivesse que estimar valores onde surgissem números fraccionários. Pelo facto de usar procedimentos algorítmicos, e apelar a regras que não estavam devidamente aprendidas, o Tomé não conseguiu ser bem sucedido nas estimativas com este tipo de números. Por exemplo, em seis actividades de estimação onde surgiam somas e diferenças com números fraccionários apenas acertou duas e ao acaso, porque partiu de pressupostos errados.

Por outro lado, também usou nos números fraccionários o processo de arredondamento para o próximo múltiplo de 5, 10, etc. Contudo, este processo não resultou em determinadas situações, nomeadamente em actividades do tipo:

-"Estima se 5/16:5/17 é maior ou menor do que 1."

-"Estima se 1/3+1/5 é maior ou menor do que 1."

Por exemplo, para estimar se 5/16:5/17 é maior ou menor do que 1, o Tomé fez:

> "aproximou 5/16 de 5/15 e 5/17 de 5/15, dividiu e deu-lhe 1,[depois ficou sem saber se era maior ou menor do que 1]."

Este estudo permitiu, ainda, observar neste algumas características, tais como: dificuldade em trabalhar com fracções; dificuldade em trabalhar com números grandes; facilidade em resolver situações problemáticas com proporções e percentagens.

Este aluno mostrou **dificuldades em trabalhar com fracções**, mas reconhecia as suas dificuldades e erros, como se pode verificar nesta passagem:

> Investigadora: Tomé aqui fizeste 65/42 menor que 1. O que pensas sobre isso?
> Tomé: 65/42 é maior do que 1. Enganei-me... quando o de "cima" é maior do que o de "baixo" é maior que 1.
> I: E aqui "5/5+5/5=10/10"?
> T: Bem, aí devia ser 10/5... é um erro que eu faço frequentemente, a professora já me disse...

Por outro lado, o Tomé produziu estimativas razoáveis com números inteiros pequenos, utilizando o processo de reformulação. Contudo, revelou **dificuldades** quando fazia cálculos mentais com **números muito grandes**. Por exemplo, nesta actividade:

> "Sem efectuares cálculos, apenas por estimativa, faz corresponder a cada expressão da coluna A, uma da coluna B que lhe corresponda

A	B
32500:200	1994612
97322x5000	486610000
0,432x725	162,5
43270+593720	313,2
2144932-150320	636990"

o Tomé apenas acertou a correspondência de 32500:200 e de 0,432x725, porque na primeira situação eliminou os zeros em 32500 e 200 para tornar os cálculos mais simples. Em todas as outras situações não acertou.

Tanto nestas situações onde surgiram números muito grandes, como nas situações onde surgiram números fraccionários, o Tomé não trabalhou facilmente com este tipos de números e, também, não pareceu ser muito conhecedor da sua estrutura.

No entanto, este aluno estimou com facilidade as actividades onde apareceram proporções e percentagens, parecendo dominar bem este assunto.

Por exemplo, nesta actividade sobre percentagens, "estima se 63% de 275$00 é maior ou menor do que 150$00", o Tomé utilizou, uma estratégia onde surgiu os processos de comparação e reformulação em conjunto. De facto, ele disse que era "maior" e justificou o seu raciocínio do seguinte modo:

> "vi que 63% é maior do que 50%, depois aproximei 275$00 de 300$00 e fiz metade de 300S00, que é 150$00, mas como 63% tem alguma percentagem a mais do que 50%, então é maior do que 150$00."

Esta estratégia pode esquematizar-se da seguinte forma:

Problema —> Comparação —> Reformulação —> Cálculo —> Avaliação do resultado —> Resultado

Na actividade o "jantar da família Lança" este aluno usou também uma estratégia onde foram identificados dois processos de estimação, reformulação e translação, como se pode observar pela justificação da sua estimativa:

> "arredondei 3890$00 para 4000$00 e aproximei 18% de 25%. Se fosse 50% de 4000$00 era 2000$00, mas como era 25% ficou 1000$00. Assim 4000$00 mais 1000$00 é 5000$00."

E, foi, ainda, numa actividade sobre percentagens que o Tomé usou uma estratégia de **"tentativa e erro"**. Este método foi apenas usado por este aluno e nesta actividade:

> -Considera a seguinte tabela e completa, por estimativa, os espaços em brancos:

Preço Inicial	100	1000	2000	?2
Desconto %	5%	10%	?1	30%
Desconto $	5	100	400	1500
Preço com desc.	95	900	1600	?3

Ele justificou o seu raciocínio do seguinte modo:

> "Em ?1 é 20%. Primeiro pensei em 10% e vi que não era, e pelo resultado anterior vi que tinha que ser 20%. Em ?2 é 5000, ponho um número ao calha por tentativa até chegar lá. Em ?3 fiz mentalmente e deu 3500."

O Tomé revelou-se bom estimador nos problemas sobre proporções e percentagens, ao apresentar estimativas bastante razoáveis em quase todas as questões colocadas oralmente pela professora na aula.

Podemos acrescentar, ainda, que nalgumas situações, notou-se que o Tomé não analisava a razoabilidade dos resultados e, pelo menos, nas primeiras actividades de estimação, **não se importava com o erro cometido ao produzir uma estimativa**, como se pode verificar neste exemplo:

> Investigadora: Quando estimaste o valor de 0,24x439 justificaste deste modo "0,24 arredondei para 1 e fiz 1 vezes 439 e deu-me 439". O que achas de teres aproximado 0,24 de 1?
> Tomé: Não é muito próximo, mas quando é uma estimativa passo o número decimal para o número inteiro mais próximo, se fosse 3,2 passava a 3.
> I: E se fosse 0,9?
> T: Passava a 1.

I: Mas qual está mais próximo de 1, 0,24 ou 0,9?

T: É 0,9.

I: Na estimação não importa o erro?

T: Não, como é em estimativa não estamos a achar o valor exacto, é o valor aproximado...

I: Como estimavas 0,24x420?

T: 0,24 aproximava de 1 e fazia 1 vezes 420 que é 420.

I: E como fazias com lápis ou com máquina?

T: Com a máquina dá 100,8.

I: Bem parece que existe uma grande diferença entre 420 e 100,8...

T: Sim...

I: E se aproximássemos 0,24 de 0,2, por exemplo... uma estimativa de 0,2x420...é?

T: Mentalmente não sei... na máquina dá...84. Pois é, temos que ter algum cuidado...

De facto, o Tomé ao trabalhar com números decimais não se importava muito com os arredondamentos, e nem sempre arredondava o número decimal para o número inteiro mais próximo, por exemplo, arredondou 3,14 para 3 e 1,39 para 2 e 0,24 para 1.

Atitudes e concepções

O Tomé indicou a Matemática como a sua terceira preferência e justificou dizendo que "a Matemática é como se fosse um sonho que nunca mais acaba".

Questionado sobre esta sua opinião ele esclareceu assim:

> "a gente começa... quer tentar descobrir uma coisa, depois a partir dessa coisa que queremos tentar descobrir, vão sempre surgindo coisas, porque começamos a pensar como é que isso pode acontecer... e a partir disso temos que utilizar aquilo e depois vamos tentar descobrir o outro..."

No entanto, considerou este sonho um sonho bom. Segundo ele para compreender determinado assunto em Matemática é necessário relacioná-lo com outros que também têm que se saber e para a vida prática é necessário saber Matemática.

O Tomé definiu a Matemática como "um conjunto de números imensos". E segundo ele a dificuldade da disciplina de Matemática vai aumentando à medida que os anos de escolaridade vão avançando, e justifica:

> "[é fácil ou difícil] conforme o ano em que se está. É mais fácil na 1ª classe do que na faculdade."

E para ele, "ter bom cálculo e boa memória" são as qualidades precisas para ter sucesso em Matemática, e disse que talvez as possua.

Por outro lado, em relação à estimação, o Tomé considerou uma estimativa do seguinte modo:

> "uma estimativa é dizer um valor, não é preciso ser o valor exacto, é aproximadamente... é tentar saber números por meio de cálculo."

Para ele, na estimação pode haver erro, e este erro convém ser "o mais pequeno possível...o menor erro".

Para o Tomé, fazer estimativas é fazer Matemática "porque está dentro do trabalho da Matemática, pertence mais à Matemática do que a qualquer outra disciplina."

No entanto, achou que há disciplinas onde podia fazer estimativas, por exemplo Educação Visual e Tecnológica. E indicou como exemplo, a seguinte situação:

> "Numa folha A_4 para dividir mais ou menos em 2, 3, 5, 6 partes... como é assim mais ou menos, é só ver como é que é, tenho que fazer aquilo dentro daquele espaço, não é preciso muito certo..."

Para o Tomé o grau de dificuldade de fazer estimativas depende da situação concreta e, justificou:

> "se for [estimativas] com números pequenos é fácil, se for com muitas contas é difícil, porque tem um cálculo pouco apurado."

E, para ele, as mais fáceis são as que têm números pequenos e as de medidas, porque tem "bom olho".

De facto várias vezes ocorreram situações de erro quando nas actividades pedidas existiam números de ordem superior ao milhar.

Este aluno, referiu que gosta de estimativas, porque segundo ele "é importante, para desenvolver o cálculo mental".

No entanto, embora dissesse que não se importava de fazer estimativas acrescentou que:

> "prefiro fazer os cálculos com papel e lápis, porque ali [no papel] posso apagar e já não me baralho, e quando faço de cabeça não [posso apagar], e baralho-me."

Mas para ele, saber as regras e os algoritmos é mais importante do que saber fazer estimativas, porque "os algoritmos e as "contas" fazem parte da vida do Homem".

Embora, considerasse mais importante saber as regras e fazer os algoritmos ele considerou que saber fazer estimativas é útil para a vida prática, "porque podemos saber muita coisa a partir daí [fazer estimativas]".

No entanto, apesar de dizer que, "faz um bocado falta, nós a partir das estimativas podemos aprender muita coisa", não conseguiu dar um exemplo dessas "coisas" que se aprendem ao fazer estimativas.

E, referiu também, sem qualquer hesitação que já fez estimativas fora das aulas de Matemática, nomeadamente em situações de compra, possivelmente influenciado pela professora que deu este exemplo na aula. E disse, ainda, que gostava que o professor do ano seguinte também fizesse estimativas, porque é importante e útil saber fazer estimativas.

Helder

O Helder tinha na altura onze anos de idade e nunca tinha repetido um ano, embora transitasse sempre com o número máximo de negativas admissível.

Este aluno era meigo, simpático e falador. Quando se lhe dizia algo ele aceitava sempre com um sorriso e tentava cumprir.

Revelou possuir bastantes dificuldades, tanto na aprendizagem da Matemática como da Língua Portuguesa. Raramente colocava as suas dúvidas. Aparentemente, era muito distraído e um pouco preguiçoso no trabalho escolar.

Tinha apoio suplementar em todas as disciplinas, embora fosse um aluno fraco a nível geral em todas elas.

Os pais, ambos com o curso comercial, revelavam pouco interesse pela actividade escolar do seu filho. De facto, as suas idas à escola destinavam-se apenas para receber as informações relativas à avaliação.

Processos e capacidades

Este aluno, nunca participou verbalmente nas actividades colocadas oralmente pela professora nas aulas e, nas actividades pedidas por escrito raramente respondeu.

Ele usou o processo de **reformulação** apenas no tipo arredondamento de um ou de ambos os números.

Este tipo de reformulação foi apenas usado uma vez numa actividade onde-se pedia para estimar o valor de alguns produtos e quocientes com números decimais.

Este aluno, numa ou outra situação apelou mentalmente a regras de cálculo para indicar a sua resposta.

Na análise dos seus dados foram identificados alguns erros, no entanto não foi o aluno onde foram detectados mais erros, uma vez que ele resolveu muito poucas questões.

Nas poucas actividades que resolveu limitou-se, por exemplo, se era essa a situação pedida, a colocar um sinal de < ou >. Questionado sobre a sua resolução disse ter colocado o sinal ao acaso e não sabia explicar porquê.

De facto, este aluno tinha dificuldade em explicar o seu raciocínio, mesmo quando respondia correcto às questões colocadas, como se pode observar nesta situação:

> Investigadora: Repara neste teu exercício "27,7:10,2~27". O que pensas sobre isto?
> Helder: É 2,7.
> I: Porquê?
> H: Não sei explicar...
> I: E "490:100~49"?
> H: Não. É 4,9.
> I: Porquê?
> H: Não sei explicar...
> I: E aqui "0,99~10"?
> H: Enganei-me...0,99 aproximo para 1.
> I: E 9,9?
> H: Aproximo para 10.

Por outro lado, este aluno pareceu não ter adquirido, ainda, um bom conhecimento da estrutura dos números e das operações. Por exemplo, quando estimou 313,2 para o valor de 2144932-150320, questionei-o sobre isso e respondeu-me:

> Helder: Não sei, talvez fosse maior, os outros são muito grandes...
> Investigadora: Então, serias capaz de estimar agora?
> H: Depois de muito pensar disse 500 e de seguida disse menos, é menos...
> I: Porquê?
> H: [Não conseguiu explicar].

Numa outra situação, o Helder fez corresponder 0,432x725 a 636990, ao ser questionado sobre isso disse: "não sei como fiz, não sei explicar...". Quando foi questionado de novo sobre se achava possível este resultado voltou a referir que não sabia e, também não sabia explicar.

Atitudes e concepções

Em relação à Matemática, o Helder considerou-a fácil, porque gosta. Para ele a Matemática é: "aprender a fazer tudo com números". E referiu, ainda, que "gosta de trabalhar com números", por isso incluiu a Matemática como segunda preferência.

Para ter sucesso em Matemática, este aluno indicou como qualidades necessárias "estar com atenção e saber fazer os algoritmos e as regras" e considerou que possui essas qualidades.

No que respeita à estimação, ele considerou uma estimativa, como "pensar mentalmente o que dá" e, ainda, "é calcular um valor de uma conta, que pode ser um número certo, mas às vezes não é bem certo".

Achou que fazer estimativas é fazer Matemática, embora possivelmente pudesse fazer noutras disciplinas, mas não foi explícito.

O Helder referiu também que:

> "não gosta de fazer [estimativas], porque tem que pensar mentalmente."

E acrescentou, ainda, que não gosta de pensar. Mas, disse que gosta de trabalhar com a máquina de calcular.

Embora, o Helder não goste de fazer estimativas, ele preferiu fazer as estimativas de medidas, porque "são mais fáceis".

Para o Helder fazer estimativas é difícil e "às vezes não percebe como se podem fazer".

Sobre esta sua opinião, tentou-se saber na entrevista se ele gostaria de saber algumas técnicas para fazer estimativas ao que ele respondeu afirmativamente. Referiu, também que, por vezes quando os colegas explicavam os processos que usavam, ele até compreendia, mas depois esquecia-se.

Como já se referiu anteriormente, o Helder disse não gostar de fazer estimativas e portanto prefere fazer os cálculos com papel e lápis.

Por outro lado, não considerou importante saber fazer estimativas e também não lhes atribui utilidade para a vida prática, "porque lá fora não precisamos de fazer estimativas"

De facto, ele referiu, também, que fora das aulas de Matemática nunca fez estimativas.

Capítulo 10

Conclusões e recomendações

Neste capítulo apresentam-se as principais conclusões deste estudo cujo problema é a aprendizagem escolar da estimação matemática no 2º Ciclo do Ensino Básico, pretendendo-se, mais especificamente, compreender os processos utilizados pelos alunos quando produzem estimativas em contexto de aula e identificar as suas atitudes e concepções face à estimação.

Assim, começaremos por apresentar as conclusões decorrentes da análise dos dados referentes aos processos cognitivos identificados nas estimativas de cálculo e nas estimativas de medida. Seguidamente sintetizam-se as atitudes e concepções dos alunos em relação à estimação.

Finalmente, serão apresentadas ideias e recomendações que se reportam ao âmbito da prática pedagógica, à formação de professores e à investigação em Educação Matemática neste domínio.

Relativamente aos diversos processos utilizados pelos alunos em actividades de estimação na sala de aula, quer em situações de estimativas de cálculo quer de estimativas de medidas, passaremos a descrever as principais conclusões do estudo.

Estimativas de cálculo

Nas aulas observadas durante a recolha de dados verificou-se que foram propostas mais actividades sobre estimativas de cálculo do que sobre estimativas de medidas. E, de um modo geral, estas actividades foram colocadas a todos os alunos. Este facto facilitou a compreensão dos processos e estratégias usadas bem como a verificação dos processos que foram usados mais frequentemente, os que se revelaram mais facilitadores em determinadas situações e, também, a observação de alguns erros que ocorreram durante a estimação.

<u>O processo de reformulação foi usado mais frequentemente do que os outros</u>

Neste estudo observaram-se os processos de reformulação, comparação, translação e compensação, por ordem decrescente de frequência de utilização.

O processo de reformulação foi utilizado na resolução de actividades com números inteiros, decimais, fraccionários (embora menos vezes) e, ainda, em actividades com percentagens e estatística.

O processo de comparação foi usado nas estimativas de cálculo com fracções. Foi utilizado mais frequentemente para estimar somas e diferenças de números fraccionários, embora, também, tivesse sido utilizado no cálculo do quociente desses números e no cálculo de percentagens. De notar que os alunos mostraram muita dificuldade em usar este processo na estimação de quocientes de números fraccionários. Nestas actividades, o apelo mental aos algoritmos de cálculo foi suficiente para produzir uma estimativa.

O processo de translação foi apenas utilizado por três alunos na resolução de quatro actividades, sendo uma destas actividades o cálculo de uma expressão numérica e as outras actividades o cálculo de percentagens.

O processo de compensação foi usado somente uma vez, pelo Miguel, na resolução de uma actividade sobre proporcionalidade directa.

Contudo o processo de reformulação foi usado mais frequentemente do que os outros. Enquanto que este processo apenas exige a alteração dos valores numéricos, os processos de compensação e de translação exigem um nível mais elevado de conhecimento matemático, dado que é necessário fazer ajustamentos, no caso da compensação, e porque envolve mudanças de números e da estrutura matemática do problema, no caso da translação.

Observou-se a tendência dos alunos para apelar a procedimentos algorítmicos

Neste estudo, verificou-se que os alunos têm uma forte tendência em usar mentalmente os algoritmos escritos. Tal deve-se, possivelmente, segundo a professora da turma, ao facto de o nosso ensino lhes dar muita ênfase.

De facto, na resolução de algumas actividades, os alunos não recorreram a processos de estimação, possivelmente, devido ao facto do cálculo mental, usando o algoritmo, ser por vezes mais simples. Por exemplo, nas actividades onde surgiram produtos de números fraccionários os alunos não recorreram a processos de estimação, mas obtiveram mentalmente o valor exacto. Esta situação foi quase semelhante às actividades onde surgiram quocientes de números fraccionários, onde apenas se observou, em alguns casos, o uso do processo de comparação.

Também, em algumas actividades sobre adições e subtracções com números fraccionários, os alunos recorreram mais frequentemente a procedimentos algorítmicos, tentando obter o valor exacto sem usar processos de estimação. Por exemplo, ao estimar se uma soma, uma diferença, um produto ou um quociente são maiores ou menores do que 1, os alunos aplicaram, muito frequentemente, os algoritmos conhecidos (sem alterar os dados ou a operação).

Nas situações muito simples, isto é, quando facilmente se calcula mentalmente o valor de uma expressão, os alunos recorreram a procedimentos algorítmicos. Mas, em situações mais complexas, como por exemplo algumas actividades com percentagens ou com números fraccionários, os poucos alunos que estimaram recorreram aos processos de estimação descritos anteriormente.

Observou-se, ainda, nalgumas situações, nomeadamente nas actividades com percentagens, que o uso da máquina de calcular superou a necessidade de estimar.

No entanto, como já referimos, o processo de reformulação foi o mais usado, mas em várias situações observou-se a tendência dos alunos em apelar mentalmente a procedimentos algorítmicos. Estes resultados são consistentes com os resultados encontrados nos estudos de Levine (1982), Reys et. al. (1982), Sowder e Wheeler (1989), Reys et. al. (1991) num estudo realizado no Japão e Reys et. al. (1991) num estudo realizado no México que referimos no capítulo 3.

<u>O uso de um ou de outro processo pode ser mais facilitador em determinadas situações</u>

Neste estudo observou-se que na estimação de determinadas actividades o uso de um ou de outro processo pelos alunos pode-lhes facilitar a obtenção de uma estimativa. Como já referimos, o processo de reformulação foi o mais usado na maior parte das actividades propostas. Nas actividades com números inteiros e decimais, de um modo geral, resultou bem. No entanto, em algumas actividades com números fraccionários este processo foi usado raramente, mas não resultou. Os alunos que o usaram nestas actividades não conseguiram indicar uma estimativa e não tentaram outros processos.

E, em determinadas actividades com adições e subtracções de números fraccionários, os alunos que usaram o processo de comparação foram melhor sucedidos.

Observou-se o uso de estratégias pouco diversificadas

No presente estudo, verificou-se que muitos dos alunos usaram um ou mais dos processos descritos anteriormente, mas apenas um aluno os utilizou todos.

Normalmente, os alunos usaram estratégias onde apenas foi observado um dos processos de estimação. E numa mesma actividade foram observadas diferentes estratégias de resolução.

Nalgumas actividades, embora poucas, observaram-se estratégias onde se usaram dois processos de estimação em conjunto. Nomeadamente em actividades sobre percentagens onde dois alunos usaram o processo de comparação e de reformulação e outros dois alunos utilizaram em conjunto os processos de reformulação e de translação.

Verificou-se, também, nas estratégias usadas, que raramente ocorreu a etapa de compensação e valorização do resultado. Normalmente, os alunos quando lhes solicitaram uma actividade usaram determinado processo de estimação, efectuando mentalmente o cálculo e indicando o resultado sem a preocupação de reflectir sobre o valor obtido. As poucas ocasiões em que corrigiram as suas estimativas foi durante a justificação oral dos seus raciocínios quando descobriam um erro.

Este resultado também foi observado e descrito por Reys et. al. (1991) num estudo com estudantes mexicanos e em investigações paralelas feitas nos E.U.A. e no Japão, onde notaram que os estudantes raramente reflectiam sobre as suas estimativas por iniciativa própria e raramente reconheciam estratégias incorrectas.

Estimativas de medidas

Nas aulas observadas no decurso deste estudo, o número de actividades propostas sobre estimativas de medidas foi muito menor do que o proposto sobre estimativas de cálculo. E, na maioria das vezes, as actividades pedidas não foram as mesmas para todos os alunos. Contudo, foram identificados nas estimativas de medidas de comprimento os processos seguintes: iteração de unidades, comparação, uso de sinais de subdivisão e ajustamento.

Sobre medidas de área foi proposta apenas uma única actividade, onde os alunos apelaram mentalmente ao uso da regra para o cálculo da medida da área.

<u>O uso de um ou de outro processo parece estar relacionado com a medida do objecto que se pede para estimar.</u>

Em quase todas as actividades de estimação pedidas surgiram pelo menos dois processos diferentes. Mas, observando os exemplos recolhidos, parece que o uso de um ou de outro processo está relacionado com a medida do objecto que se pede para estimar. Verificou-se que foi mais fácil para os alunos usar o processo de comparação quando a medida que se lhes pedia para estimar era semelhante a qualquer medida conhecida deles. Neste caso como por exemplo um metro, meio metro e trinta centímetros usavam-na, com bastante facilidade, como referente.

Quando se lhes pediu para estimar uma medida relativamente grande os alunos revelaram mais facilidade em usar o processo de iteração de unidades. Nas actividades propostas notou-se nos alunos mais facilidade em estimar medidas pequenas do que medidas grandes.

Contudo, em quase todas as actividades propostas, o processo mais usado foi o de uso de sinais de subdivisão, onde os alunos subdividem o comprimento alvo, usam informação sua conhecida, os referentes, para estimarem cada uma das subdivisões e, finalmente efectuam a contagem das várias medidas obtidas.

O processo designado por ajustamento, foi usado apenas uma vez, por uma aluna para estimar a medida do comprimento da mesa da sala de aula.

Os alunos revelaram facilidade no uso de determinados referentes

Nas estimativas de medida, verificou-se que os alunos usaram com facilidade alguns referentes, unidades de medida já suas conhecidas tais como, um metro, meio metro, trinta centímetros e quinze centímetros, recorrendo frequentemente à utilização de gestos com os braços e com as mãos.

Segundo a professora e os alunos, este conhecimento sobre os referentes já tinha sido ensinado e experienciado no ano anterior. Estes alunos mostraram-se mais interessados e entusiasmados, possivelmente devido à sua experiência anterior, em estimar medidas do que em estimar cálculos e estimaram razoavelmente medidas pequenas.

Tipos de erros encontrados nas actividades de estimação

Neste estudo, nas estimativas de cálculo, durante a fase de compreensão dos processos de estimação foram detectados erros, nomeadamente, erros de cálculo numérico, erros devido à não compreensão das questões e erros de nível conceptual.

Os erros que foram observados em maior número resultaram da não compreensão dos conceitos.

Embora menos frequentes, foram, também, detectados outros tipos de erros. Por exemplo, os erros devidos à falta de atenção e interesse ou ao facto de não analisarem a razoabilidade das suas respostas. Por outro lado, os alunos sabem que em estimação pode haver erro e portanto não faz mal ele acontecer, ou, ainda, como se verificou numa situação, porque pensam que nas estimativas podem usar os processos que lhes convêm, para tornar os cálculos fáceis e porque em estimação é apenas necessário indicar um valor aproximado, processos esses que não usam fora da estimação.

Nalguns casos, ainda, verificou-se que os alunos têm muita dificuldade em fazer os cálculos mentalmente mas não quando se lhes pedem para os fazerem com papel e lápis. Esta situação deve-se, possivelmente, ao facto dos alunos estarem muito familiarizados com o cálculo dos algoritmos escritos e não possuírem grande flexibilidade mental para operarem com os números.

Também nas estimativas de medidas ocorreram alguns erros, nomeadamente, erros de cálculo aritmético ou de redução de unidades de medida, erros devido à não compreensão das questões e, mais frequentemente, erros devido à não compreensão dos conceitos como, por exemplo, as noções de perímetro e de área de figuras planas.

Observaram-se, ainda, algumas situações em que os erros detectados parecem acontecer devido ao facto dos alunos não possuírem a noção, ou uma representação mental, de determinadas unidades de medida, os chamados referentes. Contudo, esses erros podem também dever-se ao facto dos alunos não analisarem a razoabilidade das suas estimativas.

Finalmente, verificou-se que os alunos mostraram-se mais interessados, participativos e evidenciaram mais facilidade em estimar medidas do que cálculos.

Características e capacidades dos alunos melhor sucedidos em estimação

No presente estudo, foram identificadas determinadas características e capacidades nos alunos que utilizaram um maior número de processos e estratégias mais diversificadas que passamos a descrever: conhecimento da estrutura dos números, flexibilidade mental para trabalhar com números, facilidade de cálculo mental, compreensão de propriedades aritméticas, facilidade de efectuar ajustamentos e alterar a estrutura do problema, e também segurança e confiança própria.

Os alunos que revelaram possuir estas características e capacidades foram os melhor sucedidos em estimação.

Poucos alunos utilizaram estratégias onde surgiram em conjunto dois processos de estimação. Destes, apenas dois revelaram possuir um tipo de raciocínio mais flexível do que os outros. Estes resultados são semelhantes aos encontrados por Levine (1982) e Reys et. al. (1982), na medida em que estes autores verificaram que os melhores estimadores usaram um maior número de estratégias e pareciam ser mais flexíveis no seu pensamento do que os piores estimadores.

Os alunos que possuíam um bom conhecimento dos referentes utilizados para estimar e que compreendiam o significado dos atributos perímetro ou área estimaram razoavelmente medidas.

Estas capacidades aqui referidas foram, também, identificadas nos bons estimadores e descritas por Reys et. al. (1982) e por Reys et. al. (1991) nos estudos realizados no Japão e no México, como capacidades que contribuem para o sucesso em estimação.

Atitudes e concepções dos alunos em relação à estimação matemática

De seguida apresentam-se algumas declarações que de uma forma geral traduzem as atitudes e concepções dos alunos, envolvidos neste estudo, em relação à estimação matemática.

A estimativa é um cálculo mental aproximado

De um modo geral, os alunos envolvidos neste estudo, consideraram uma estimativa como um cálculo mental aproximado. Alguns, mas muito poucos, referiram o facto desse cálculo ter que se fazer rapidamente, saber explicar como se fez, poder usar maneiras fáceis e ser engraçado.

As referências à rapidez do pensamento e saber dizer como se fez deveu-se provavelmente às indicações dadas pela professora nas aulas. Assim como o facto de no final efectuar os cálculos ou fazer as medições para verificar a razoabilidade do resultado.

Houve apenas um aluno que disse que uma estimativa não pode ser um valor exacto, porque se o for não é uma estimativa.

Outro aluno referiu o facto de a estimação se usar em determinadas situações quando não faz falta saber o valor exacto, por exemplo em casa, em situações do quotidiano.

Numa estimativa admite-se a existência de erro

De um modo geral, todos admitiram a existência de erro e consideraram que quando este existe deve ser pequeno.

A possibilidade de errar foi encarada de um modo positivo e referida, muitas vezes, como uma das vantagens da estimação, já que, para eles, poder errar *dá jeito*. Para alguns alunos o facto de não existir o problema de errar foi um dos argumentos usados para justificar o seu gosto por fazer estimativas.

O cálculo de estimativas pode ser utilizado no dia-a-dia

Para estes alunos fazer estimativas é fazer Matemática, porque se exploram "coisas" da Matemática, pensa-se em cálculos que são da Matemática, e porque é preciso saber as operações e porque trabalha-se com números e medidas. Outros alunos foram mais abrangentes e referiram que, embora estimar seja fazer Matemática, também se pode usar e aplicar noutras situações do dia-a-dia.

Assim, Educação Visual e Tecnológica e Ciências da Natureza foram das indicadas maioritariamente como exemplos de disciplinas onde se podem fazer estimativas. No entanto, um pouco mais de metade da turma achou que as estimativas são um assunto exclusivo da Matemática, porque nas outras disciplinas não trabalham com números.

De um modo geral, todos os alunos consideraram a estimação útil. Cerca de metade da turma justificou esta utilidade indicando como exemplos situações de compra. Os outros tiveram dificuldade em justificar a sua opinião. Cerca de um terço nunca fez estimativas fora da aula de Matemática e quase todos os outros disseram tê-lo feito em situações de compra.

Para alguns alunos, o cálculo de estimativas é fácil e rápido; para outros é difícil e confuso

Neste estudo, um pouco menos de metade dos alunos afirmaram gostar de fazer estimativas. A maior parte destes alunos indicaram como principal razão desta preferência o facto da estimação ser um processo mais rápido, mais fácil e onde não há problema de errar. Outros, ainda, referiram o facto das actividades com estimativas incluírem problemas engraçados que se podem resolver utilizando maneiras fáceis.

Contudo, os outros alunos, mais de metade da turma disseram não gostar ou não gostar muito de fazer estimativas. Esta declaração foi justificada, mais frequentemente, por a estimação ser um processo difícil e confuso.

Referido, também, por alguns, o facto de estarem habituados a fazer os cálculos com papel e lápis ou máquina e porque pensar mentalmente exige muito esforço e, ainda, a necessidade de saber as técnicas de fazer estimativas.

Neste estudo não se verificou a existência de uma relação entre gostar ou não de fazer estimativas e a primeira preferência pela disciplina de Matemática. De facto, dos alunos que disseram gostar de estimativas, nem todos indicaram a Matemática como primeira ou segunda preferência.

Por outro lado, nem todos os que não gostam ou gostam pouco de fazer estimativas excluem a Matemática das suas primeiras preferências. Embora existam alunos que não indicaram a Matemática como primeira ou segunda preferência, mas referissem que gostam de Matemática.

A maioria dos alunos da turma disse preferir fazer os cálculos com papel e lápis porque é um processo mais fácil e porque podem apontar no papel e assim não se confundem tanto.

Os alunos que consideraram a estimação fácil, um pouco mais de um terço da turma, justificaram-se referindo como razões as de poderem alterar os números de modo a tornar os cálculos mais fáceis e não ser tão trabalhoso, bastar pensar um pouco, bastar dar um valor aproximado e não ser necessário dar o valor exacto.

Cerca de um terço da turma considerou a estimação difícil porque fazem os cálculos mentalmente, baralham-se e não sabem ou não percebem como se pode fazer este tipo de raciocínio.

Os restantes alunos consideraram a estimação fácil ou difícil conforme a situação que é pedida, ou seja, consoante o tipo de números envolvidos, as operações, ou as situações problemáticas.

Em relação aos alunos que acharam a estimação fácil verificou-se que cerca de metade destes preferem fazer os cálculos com papel e lápis, em vez das estimativas, por ser mais fácil.

As estimativas de medida são mais fáceis do que as de cálculo

Neste estudo, as estimativas de medida revelaram-se aos alunos mais fáceis do que as de cálculo. De facto, cerca de dois terços da turma considerou as estimativas de medida mais fáceis do que as estimativas de cálculo. Segundo estes alunos, esta situação deve-se ao facto de eles já terem adquirido a noção de determinadas unidades de medida que usaram como referentes. Foi, também, referido por alguns destes alunos o facto de não necessitarem de efectuar cálculos nem de se preocuparem com as regras de cálculo.

Os outros dos alunos, que consideraram mais fáceis fazer as estimativas de cálculo, apontaram como principal razão desta facilidade o facto de não possuírem uma ideia clara das dimensões físicas de algumas unidades de medida necessárias para estimar. Apresentaram, ainda, outras razões: já lhes serem apresentados os números e não necessitarem de reduzir as unidades de medida, se for o caso.

É importante saber fazer estimativas, mas é mais importante saber as regras e os algoritmos de cálculo

Todos os alunos, à excepção de um, consideraram importante saber fazer estimativas. Segundo a maioria deles a estimação desenvolve o cálculo mental e o raciocínio.

No entanto, mais de dois terços da turma achou mais importante saber as regras e os algoritmos do que saber fazer estimativas. Nas suas declarações observou-se mais frequentemente a ideia de que as regras são mais importantes porque são necessárias também para fazer estimativas e porque se usam mais na Matemática.

Foi, também, referido por alguns que as regras são necessárias para responder correctamente nos testes, onde a resposta tem que ser o valor certo e não mais ou menos. Por outro lado, alguns alunos referiram, ainda, o facto de as regras serem mais precisas no futuro, na vida adulta.

Verificou-se que os alunos desta turma evidenciaram atitudes favoráveis à estimação, nomeadamente, ao atribuir-lhe importância e utilidade. O estudo de alguns alunos permitiu fazer algumas considerações adicionais. Por exemplo, que os melhores estimadores eram confiantes relativamente às suas próprias capacidades de estimação, à sua capacidade matemática e tinham uma forte auto-confiança nas estratégias usadas quando estimavam. Estes, também, valorizavam o cálculo mental e a estimação. Estes resultados são consistentes com os encontrados por Reys et. al. (1982) e Sowder e Wheeler (1989).

Outros alunos consideraram a estimação útil. Segundo Sowder (1992), os alunos que sentem que a estimação é útil estão mais aptos para a usar frequentemente e serem mais eficientes no seu uso. No presente estudo, observou-se que o Tomé, entre outros, embora revelasse estas atitudes, não foi dos mais eficientes no seu uso.

Estas atitudes- sentir que a estimação é importante e útil, a confiança na capacidade de estimar e a tolerância para aceitar o erro- foram consideradas, por vários investigadores, como atitudes favoráveis à estimação. Também, neste estudo, estas atitudes foram encontradas nos alunos melhor sucedidos em estimação. Mas também foram encontradas atitudes favoráveis à estimação noutros alunos que, no entanto, não foram muito bem sucedidos na estimação.

Parece que determinadas atitudes são favoráveis à estimação mas não são suficientes para se ser bem sucedido.

Recomendações

Recomendações no âmbito da prática pedagógica

Os resultados deste estudo permitem sugerir algumas recomendações relacionadas com o ensino e a aprendizagem da estimação relativamente a:

<u>Necessidade de aprendizagens prévias</u>

Neste estudo verificou-se que o cálculo de estimativas não deve ser pedido sem que previamente os alunos tenham adquirido conhecimentos e capacidades necessárias para poderem ser bem sucedidos, quer em situações de estimação de cálculos, quer de medidas. Por exemplo, o Tomé estimou com facilidade as actividades relacionadas com proporções e percentagens, parecendo dominar bem estes assuntos. Revelou muitas dificuldades e não foi bem sucedido na estimação com números fraccionários onde várias vezes usou regras e procedimentos algorítmicos que não estavam devidamente aprendidos. Assim, parece que os alunos deviam desenvolver previamente, ou simultaneamente, as capacidades e características identificadas nos melhores estimadores.

Relativamente à estimação de medidas estes alunos mostraram facilidade em estimar usando referentes adquiridos e experienciados no ano anterior cuja aprendizagem se revelou útil e necessária.

Deve-se dotar os alunos de alguns referentes para cada unidade seleccionada. Por exemplo, os alunos devem dispor de alguns objectos de referência sobre os quais conheçam a sua medida, tais como: a altura do professor, o comprimento da sua mesa, medidas de algumas partes do seu corpo, etc.

A estimação deve ser introduzida ao longo do currículo

A estimação deve ser ensinada e introduzida ao longo do currículo em todos os tópicos que a permitam e não em unidades separadas. Existem tópicos onde é possível introduzir a estimação em actividades com aplicabilidade à vida real. Neste ciclo de escolaridade, embora matematicamente existam questões interessantes para estimar, parece não fazer sentido exagerar e apresentar actividades de estimação com que raramente nos depararíamos no dia-a-dia, onde existem inúmeras situações que exigem de nós uma estimativa.

Ensino de processos e estratégias de estimação

Como já foi referido anteriormente, os alunos usaram mais frequentemente processos que exigem poucos conhecimentos matemáticos como, por exemplo, o de reformulação. Estes alunos usaram pouco os processos de estimação mais complexos, tais como compensação e translação, que são muitas vezes mais adequados na estimação de determinadas situações problemáticas onde poucos alunos tentaram estimar. De um modo geral, usaram estratégias que podemos considerar pobres.

Embora não fosse objectivo deste estudo verificar se é importante ensinar técnicas de estimação, observou-se que alguns destes alunos inicialmente não estimavam mas, após ouvirem a descrição dos raciocínios usados pelos colegas, em situações posteriores já estimaram. Alguns deles referiram nas entrevistas que aprendiam a estimar quando ouviam a descrição dos procedimentos que os colegas usavam. Também, segundo a professora desta turma, os alunos aprendem a estimar.

Estudos anteriores, como por exemplo, o realizado por Schoen et. al. (1981) indicam que o ensino de estimativas revelou-se eficaz. As crianças sujeitas ao ensino de estimação tornaram-se melhores estimadores e adoptaram a estratégia de estimação mais válida que tinham aprendido. Assim, parece que ao ensinar estimação podemos ensinar aos alunos os processos e estratégias, identificados neste estudo e usados pelos melhores estimadores. Sem, no entanto, ter a preocupação de que os alunos saibam a denominação dos processos usados. O que parece importante é que os alunos perante cada situação consigam empregar o processo mais conveniente.

Tipo de actividades

Em relação às actividades de estimação verificou-se que estas devem ser:

1- Actividades onde estimar seja a solução mais sensata. Os alunos devem conhecer o que é e para que serve a estimação, através da apresentação de situações onde seja válido e se justifique o seu uso, isto é, deve-se enfantizar as situações onde apenas se requer uma estimativa. Assim, evita-se que, ao pedir uma estimativa, os alunos tentem obter a resposta exacta através do algoritmo de cálculo, sem usar processos de estimação.

2- Actividades, sempre que possível, que representem situações do mundo real. Estas são aquelas onde mais se justifica e é legitimo estimar e são, também, as mais utilizadas no dia-a-dia.

3- Actividades onde os alunos sintam necessidade de usar processos de estimação. Algumas actividades, por vezes, não são as mais adequadas e, por outro lado, quando são muito simples o cálculo mental é mais fácil. Algumas actividades propostas, como por exemplo, as relacionadas com multiplicação e divisão de fracções, não pareceram as mais adequadas. As actividades com multiplicações foram realizadas sem que os alunos sentissem necessidade ou usassem qualquer processo de estimação. Esta situação foi semelhante ao caso da divisão de fracções, onde os alunos usaram quase exclusivamente procedimentos algorítmicos, obtendo mentalmente o valor exacto e observando-se, apenas nalguns casos, mas muito poucos, o processo de comparação.

Metodologia de ensino

Para desenvolver a capacidade de estimação, neste estudo, sugere-se a partir da observação dos métodos usadas pela professora, que se deve usar uma metodologia em que:

1- Se permita aos alunos explicar os seus processos e estratégias que usam quando estimam. Como vimos, anteriormente, o documento "Normas para o currículo e a avaliação em Matemática escolar" (APM/IIE, 1991) refere que os alunos devem desenvolver os conceitos subjacentes ao cálculo e à estimação, em vários contextos, de forma a explicar processos de cálculo e técnicas de estimação, bem como avaliar e criticar um resultado.

De facto, permitir aos alunos que expliquem os seus raciocínios ajuda-os a aprender a comunicar matematicamente e ao fazê-lo estes apercebem-se mais facilmente dos seus erros ou, ainda, da pouca razoabilidade dos seus resultados. Por outro lado, têm a possibilidade de ouvir a descrição de processos e estratégias diferentes usadas pelos outros colegas.

2- Se dê oportunidade aos alunos de analisar a razoabilidade do resultado. Ter um bom sentido da relação entre uma estimativa e a resposta exacta é uma dimensão muito importante no processo de estimação. Os alunos pouco hábeis e que raramente reflectem sobre as suas respostas, deverão ser alertados pelos professores para esse facto. Após encontrar uma estimativa constitui um bom reforço realizar uma medição do objecto ou calcular o valor exacto de um determinado problema.

3- Se aceite uma variedade de respostas e discuta os vários processos e as estratégias usadas por alunos diferentes. Devemos aceitar e transmitir aos alunos que em estimação não há uma única solução válida, mas devemos encorajá-los a realizar estimativas o mais exactas possíveis. E, ainda, que existem muitos caminhos diferentes para estimar.

Por outro lado, devemos discutir os processos e as estratégias diferentes usadas para estimar uma mesma situação, dado que estas desenvolvem-se com o ensino, discussão e uso. E, ainda, porque esta discussão pode funcionar como processo de diagnose para o professor, na medida em que permite detectar erros.

4- Se ajude os alunos a adquirir flexibilidade no uso e escolha dos processos de estimação. Verificou-se que por vezes alguns processos não são os mais facilitadores para estimar determinadas actividades. Por exemplo, nalgumas situações observou-se que os alunos tentaram estimar apelando a regras e a algoritmos ou usaram processos de estimação, que não resultaram. No entanto, não tentaram outros processos.

Cada aluno perante uma actividade de estimação escolhe o processo que se adapta melhor aos seus conhecimentos. No entanto, a prática de análise de situações indica-nos que processos são mais aconselháveis em determinadas actividades.

Avaliação

Este estudo não permitiu tirar conclusões acerca do processo de avaliar os alunos em estimação matemática. Ao deparar-se com esta situação a professora da turma questionou-se acerca deste processo e referiu que possivelmente a "forma escrita pode viciar" os resultados. No entanto, e ainda segundo a professora, a avaliação das actividades de estimação não se deve fazer penalizando o erro cometido, mas sim valorizando os melhores processos e resultados.

Neste estudo, verificou-se que, por vezes, os alunos mostraram preocupação em relação à avaliação dos outros assuntos da Matemática, dado que nesses eles têm que indicar o valor exacto, contrariamente ao que se passa em estimação. Neste sentido, alguns alunos referiram que as regras e os algoritmos são mais importantes e necessários do que a estimação.

Deste modo, o professor deverá valorizar e avaliar o desempenho dos alunos em estimação e clarificar as várias situações, porque existem algumas onde é mais oportuno e suficiente estimar e outras onde se exige o valor exacto.

Recomendações para a formação de professores

De um modo geral, os resultados do estudo permitem-nos recomendar, que os professores tenham oportunidade de realizarem actividades no sentido de experimentarem e aprenderem eles próprios os processos e estratégias de estimação. Por outro lado, essas actividades devem permitir-lhes verificar que no cálculo de uma estimativa podem ser utilizados diversos processos, igualmente válidos. Deste modo tornar-se-ão receptivos a aceitarem os diversos processos que os alunos usam.

Para este efeito recomenda-se que a estimação matemática seja incluída:

1- Nos programas das disciplinas das didácticas específicas dos cursos de formação de professores do 1º, 2º e 3º Ciclo do Ensino Básico, uma vez que é um assunto recentemente introduzido nos programas escolares dos referidos Ciclos.

2- Em programas de formação contínua de professores.

Recomendações para futuras investigações

Dos dados recolhidos, das situações observadas e das conclusões deste estudo, emergem algumas questões que poderão ser objecto de futuras investigações nesta área. Assim, apresentando-se a estimação como uma componente do currículo, nomeadamente, como uma capacidade a desenvolver, poderemos formular as seguintes questões:

- Que metodologia usar para desenvolver esta capacidade?
- Como avaliar, neste domínio o desempenho dos alunos?
- Sabendo que quando se estima não se obtém um valor exacto e não há problema de errar, qual o critério para aceitar o erro?
- Por outro lado o recurso a estratégias do tipo: estimar primeiro para depois calcular o valor exacto ou medir poderá implicar uma visão da Matemática compartimentada?
- Relativamente às atitudes e concepções dos alunos face à Matemática, o cálculo de estimativas implica algumas mudanças? Se sim, quais?
- A aprendizagem de determinadas actividades de estimação relacionadas com os conteúdos do currículo do 2º Ciclo está adequada ao nível de desenvolvimento cognitivo dos alunos nesta faixa etária?

Agradecimentos

- À professora e aos alunos da turma envolvidos neste estudo, pela disponibilidade, colaboração e interesse que sempre demonstraram durante a sua participação e com os quais muito aprendi.

- Ao José Manuel Matos, pela forma como orientou este trabalho, quer através das suas sugestões e críticas esclarecidas, quer através do seu encorajamento, motivação e disponibilidade.

- Ao Filipe, pelo apoio, sugestões e críticas.

- À Fátima Gameiro, pelo estímulo, apoio e motivação, principalmente durante a fase de recolha de dados.

- Aos colegas da Unidade de Matemática da Escola Superior de Educação de Beja, pelas oportunidades que me proporcionaram para o desenvolvimento deste trabalho.

- À Escola C+S de Santa Maria de Beja, pela colaboração dada para a concretização deste trabalho.

- Também à Ana, e ao Pedro pela sua compreensão.

- E a todos aqueles que de um modo ou de outro permitiram que este trabalho se realizasse.

Bibliografia

Abrantes, P. (1986). *Porque se ensina Matemática: perspectivas e concepções de professores e futuros professores.* Trabalho apresentado no âmbito das provas de aptidão pedagógica e capacidade científica. Lisboa: DE-FCUL.

Abrantes, P. (1995).*O Trabalho de Projecto e a relação dos alunos com a Matemática.* Tese de douturamento. Lisboa: APM.

Alfonso, B. (1989). *Numeración y calculo.* Madrid: Editorial Sintesis.

Almeida, C. (1992). Atitudes em relação à Matemática. Comentário do Seminário da Investigação em Educação Matemática. Em M. Brown, D. Fernandes, J. F. Matos e J. P. Ponte (Eds.), *Educação Matemática. Temas de Investigação* (pp.173-176). Lisboa: Instituto de Inovação Educacional.

Armelin, M., Morla, M. e Varandas, M. (1992). *Aprender Matemática 2.* 6ª edição. Porto: Porto Editora.

Armelim, M. e Morla, M. (1993). *Espaço matemático 6.* Porto: Porto Editora.

Artigue, M. e Douady, R. (1993). A didáctica da Matemática em França. *Quadrante, 2*(2), 41-67.

Associação de Professores de Matemática (1988). *Renovação do currículo de Matemática.* Lisboa: APM.

Associação de Professores de Matemática (1990). *Parecer relativo aos projectos de programas de Matemática, para os 1º, 2º e 3º ciclos do ensino básico*, não publicado. Lisboa: APM.

Bardin, L. (1977). *Análise de conteúdo.* Lisboa: Edições 70.

Bestgen, B., Rybolt, J., Reys, R. e Wyatt, J. (1980). Effectiveness of systematic instruction on attitudes and computational estimation skills of preservice elementary teachers. *Journal for Research in Mathematics Education, 11*, 124-136.

Bisquerra, R. (1989). *Metodos de investigación educativa.* Barcelona: Ediciones CEAC.

Bogdan, R. e Biklen, S. (1991).*Investigação qualitativa em educação.* Porto: Porto Editora.

Case, G. (1985). *Intellectual development.* Orlando, Fla.: Academic Press.

Cockcroft, W. (1982). *Mathematics counts.* London: Her Majesty's Stationary Office.

Dantiz, T. (s.d.). *Número, a linguagem da Ciência.* Lisboa: Editorial Aster.

Gliner, G. (1991). Factors contributing to success in mathematical estimation in preservice teachers: Types of problems and previous mathematical experience. *Educational Studies in Mathematics, 22*, 595-606.

Guimarães, H. (1988). Ensinar Matemática: Concepções e práticas. Tese de mestrado. Lisboa: APM.

Grande Enciclopédia Portuguesa e Brasileira. (1940). Vol.X. Lisboa.

Hall, L. (1984). Estimation and approximation - not synonyms. *Mathematics Teacher, 77*(7), 516-517.

Hawkins, J. (1986). *The Oxford Reference Dictionary.* Oxford: Clarendon Press.

Hildreth, D. (1983). The use of strategies estimating measurements. *Arithmetic Teacher, 30*(5), 50-54.

Johnson, D. (1979). Teaching estimation and reasonableness of results. *Arithmetic Teacher*, *27*(1), 34-35.

Kantowski, M. G. (1977). Processes involved in mathematical problem solving. *Journal for Research in Mathematics Education*, *3*, 163-180.

Kulm, G. (1980). Research on mathematics attitude. Em Shumway, R. (Ed.), *Research in Mathematics Education* (pp. 356-387). Reston: NCTM.

Lakatos, I. (1978). *A lógica do descobrimento matemático.* Rio de Janeiro: Zahar Editores.

Levine, D. (1982). Strategy use and estimation ability of college students. *Journal for Research in Mathematics Education*, *5*, 350-359.

Loureiro, C., Delgado, M., Oliveira, M. e Serrazina, M. (1995). *Matematicando - 6º ano.* 3ª edição. Lisboa: Texto Editora.

Lüdke, M. e André, M. (1986). *Pesquisa em educação: Abordagens qualitativas.* São Paulo: Editora Pedagógica e Universitária LTDA.

Machado, J. (1981). *Grande dicionário da língua portuguesa* vol. IV. Lisboa: Sociedade de Língua Portuguesa.

Matos, J. (1990). As concepções e atitudes dos alunos em relação à matemática. Em *Profmat 90-actas vol.I* (pp.177-186). Lisboa: APM.

Matos, J. (1992). Atitudes e concepções dos alunos: Definições e problemas de investigação. Em M. Brown, D. Fernandes, J. F. Matos e J. P. Ponte (Eds.), *Educação Matemática: Temas de Investigação* (pp.123-171). Lisboa: Instituto de Inovação Educacional.

Matos, J. e Carreira, S. (1994). Estudos de caso em Educação Matemática - Problemas actuais. *Quadrante, 3*(1), 19-53.

McLeod, D. (1992). Research on affect in mathematics education: a reconceptualization. Em D. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 575-596). Nova Iorque: MacMillan.

Mialaret, G. (1975). *A aprendizagem da Matemática.* Coimbra: Livraria Almedina.

Ministério da Educação e Ciência. (1980). *Programa do Ensino Primário.* Lisboa: ME.

Ministério da Educação. (1990). *Programa do 1º ciclo do ensino básico.* Algueirão: M. E.

Ministério da Educação. (1990). *Programa do 2º ciclo do ensino básico.* Algueirão: M. E.

Morgado, L. (1993). *O ensino da aritmética. Perspectiva construtivista.* Coimbra: Livraria Almedina.

National Council of Teachers of Mathematics, (1991). *Normas para o currículo e a avaliação em matemática escolar.* Lisboa: Associação de Professores de Matemática e Instituto de Inovação Educacional.

National Council of Supervisors of Mathematics, (1989). Essencial mathematics for the twenty-first century: The position of the National Council of Supervisors of Mathematics. *Arithmetic Teacher, 37*, 27-29.

Patton, M. Q. (1980). *Qualitative evaluation.* Londres: SAGE.

Ponte, J. (1994). O estudo de caso na investigação em Educação Matemática. *Quadrante, 3*(1), 3-18.

Reys, R., Bestgen, B., Rybolt, J. e Wyatt, J. (1982). Processes used by good computational estimators. *Journal for Research in Mathematics Education*, *3*, 183-201.

Reys, R. (1985). Estimation. *Arithmetic Teacher*, *32*(6), 37-41.

Reys, R., e Reys, B. (1986). Mental computation and computational estimation - their time has come. *Arithmetic Teacher*, *33*(7), 4-5.

Reys, R., Reys, B., Nohda, N., Ishida, J., Yoshikawa, S. e Shimizu, K. (1991a). Computational estimation performance and strategies used by fifth-and eighth-grade Japanese students. *Journal for Research in Mathematics Education*, *22*, 39-58.

Reys, B., Reys, R. e Peñafiel, A. (1991b). Estimation performance and strategy use of Mexican 5th and 8th grade student sample. *Educational Studies in Mathematics* , *22*, 353-375.

Rodríguez, Á. (1991). *Area de conocimiento: Didáctica de la matemática*. Madrid: Editorial Sintesis.

Rubenstein, R. (1985). Computational estimation and related mathematical skills. *Journal for Research in Mathematics Education*, *2*, 106-119.

Schoen, H., Jarrett, J., Friesen, C. e Urbatsch, T. (1981). Instruction in estimating solutions of whole number computations. *Journal for Research in Mathematics Education*, *3*, 165-178.

Schoenfeld, A. (1989). Explorations of students'mathematical beliefs and behavior. *Journal for Research in Mathematics Education*, *4*, 338-355.

Segovia, I., Castro, E., Castro, E. e Rico, L. (1989). *Estimacion en cálculo y medida*. Madrid: Editorial Sintesis.

Siegel, A., Goldsmith, L. e Madson, C. (1982). Skill in estimation problems of extent and numerosity. *Journal for Research in Mathematics Education*, *3*, 211-232.

Sowder, J. e Wheeler, M. (1986). The development of concepts and skills related to computational estimation. Em *Proceedings of the Tenth International Conference for the Psychology of Mathematics Education, 2* (pp. 307-312). Londres: Institute of Education.

Sowder, J. (1989). Developing understanding of computational estimation. *Aritmetic Teacher, 36*(5), 25-27.

Sowder, J. e Wheeler, M. (1989). The development of concepts and strategies used in computational estimation. *Journal for Research in Mathematics Education*, *2*, 130-146.

Sowder, J. (1992). Estimation and number sense. Em D. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 371-389). Nova Iorque: MacMillan.

Stewart, I. (1988). The meaning of mathematics. *New Scientist*, Abril, 87-89.

Thompson, A. (1992). Teachers' beliefs and conceptions: a synthesis of the research. Em D.Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 101-114). Nova Iorque: MacMillan.

Anexo 1

Questionário (versão preliminar)

Nome____
Ano___ Turma____ Idade____

Instruções:

Procura responder às seguintes questões com sinceridade, pois as tuas opiniões são confidenciais, e tem apenas interesse para um trabalho de investigação sobre as atitudes relativamente à estimação matemática.

1. Indica, por ordem decrescente, as quatro disciplinas que gostas mais. Indica primeiro a que gostas mais e assim sucessivamente.

1. __________________
2. __________________
3. __________________
4. __________________

2. Indica as razões que te levaram a incluir ou não a Matemática no grupo anterior.

3. O que é, para ti, a Matemática?

4. Consideras a Matemática uma disciplina fácil ou dificil para aí obteres êxito? Justifica.

5. Que capacidades ou qualidades consideras necessárias para obteres êxito em Matemática?

Achas que possuis essas qualidades SIM ___
NÃO ___

6. Indica os factores que julgas serem suficientes para se obter êxito na Matemática.

7. O que é, para ti, uma estimativa?

8. Para ti, fazer estimativas é útil para a vida prática? Indica as razões da tua resposta.

9. Para ti, fazer estimativas é fazer Matemática, ou não? Justifica.

10. Para ti, fazer estimativas é fácil ou difícil? Justifica.

11. Gostas de fazer estimativas? Indica as razões da tua resposta.

12. Achas que és bom estimador? Justifica.

Anexo 2

Questionário

Nome________________________________

Ano___ Turma____ Idade____

Instruções:

Procura responder às seguintes questões com sinceridade, pois as tuas opiniões são confidenciais, e tem apenas interesse para um trabalho de investigação sobre o que tu pensas relativamente à estimação matemática.

1. Indica, por ordem decrescente, as quatro disciplinas que gostas mais. Indica primeiro a que gostas mais e assim sucessivamente.

   1. ________________
   2. ________________
   3. ________________
   4. ________________

2. Indica as razões porque incluíste ou não a Matemática no grupo anterior.

3. O que é, para ti, a Matemática?

4. Consideras a Matemática uma disciplina fácil ou difícil para aí seres bem sucedido? Justifica.

5. Que qualidades precisas de ter para teres sucesso em Matemática?

Achas que possuis essas qualidades SIM ___
NÃO ___
TALVEZ___

6. O que é, para ti, uma estimativa?

7. Para ti, fazer estimativas é útil para a vida prática? Indica as razões da tua resposta.

8. Para ti, fazer estimativas é fazer Matemática, ou não? Justifica.

9. Para ti, fazer estimativas é fácil ou difícil? Justifica.

10. Para ti, é mais fácil fazer estimativas de cálculo numérico ou fazer estimativas de medidas? Justifica a tua resposta.

11. Gostas de fazer estimativas? Indica as razões da tua resposta.

12. Preferes fazer estimativas ou fazer os cálculos com papel e lápis? Justifica.

13. O que é para ti, mais importante, fazer estimativas ou saber as regras e resolver os algoritmos? Justifica.

14. Achas que és bom estimador? Justifica.

Anexo 3

Questões base da entrevista

- A professora disse-me que no próximo ano vai dedicar mais tempo às estimativas. O que pensas sobre isso?

- Na outra turma da vossa professora, há lá uns meninos que ainda não fizeram estimativas. Se eles te perguntassem o que isso é, como lhes explicarias?

- Nas outras disciplinas também fazes estimativas? Em caso afirmativo, em quais? Se não, pensas que podias fazer, em quais?

Anexo 4

Actividades de estimação pedidas oralmente nas aulas

Data	Actividades	Conteúdo do programa onde foi integrada
25/1/95	Na minha casa quero construir um canteiro triangular com as seguintes medidas: 125,75 m ; 364,2 m ; 75,95 m Indiquem uma estimativa para a quantidade de metros de rede que serão necessários para vedar o canteiro. (Professora)	Construção de triângulos
27/1/95	Estimar o valor de 3/4+1/5 e de 2/5-2/4 (Professora)	Fim do estudo dos triângulos. (Aula de revisões)
10/2/95	- Qual a forma geométrica do chão, das paredes, do tecto? - Estima a medida do perímetro da sala de aula. (Professora)	Estudo dos quadriláteros
14/3/95	-Na loja B está afixada a seguinte tabela: Nº de lápis: 6 · 12 · 18 · 24 Preço: 450 · 900 · 1350 · ? Indica uma estimativa para o preço de uma caixa de 24 lápis se o critério se mantiver. (adaptado do manual Matematicando 6º ano, p. 134)	Proporcionalidade directa

27/4/95	-Considera a seguinte tabela e completa, por estimativa, os espaços em brancos: Preço Inicial 100 1000 2000 ?2 Desconto % 5% 10% ?1 30% Desconto $ 5 100 400 1500 Preço com desc. 95 900 1600 ?3 (Adaptado do manual Matematicando 6º ano)	Percentagens
6/6/95	Estima se 63% de 275$00 é maior ou menor do que 150$00. (Adaptado do manual Espaço Matemático 6)	Fim do estudo da Estatística (Exercícios sobre percentagens, estatística e cálculo de áreas)
6/6/95	O jantar da família Lança custou 3890$00 mais 17% de IVA. Estima o custo total do jantar.(Adaptado do manual Espaço Matemático 6)	
7/6/95	Na entrada de um restaurante está afixada a seguinte tabela de preços: Peixe Carapaus fritos 360$00 Bacalhau à brás 1260$00 Filetes de pescada 775$00 Pargo grelhado 1150$00 Pescada cozida 845$00 Estima, o preço médio, ou a média aritmética dos preços, que o restaurante pratica. (Adaptado do manual Espaço Matemático 6)	
7/6/95	Estima a área do tampo da tua mesa. (Professora)	

Anexo 5

Actividades de estimação pedidas por escrito nas aulas

Data	Actividade	Conteúdo do programa
17/2/95	A1-Estima as dimensões da tua mesa. Estima as dimensões do quadro. Estima o comprimento da tua esferográfica. Justifica o teu procedimento. (Pofessora) A2-Estima a altura do teu colega. Estima o perímetro do tampo da tua mesa. Estima o perímetro do quadro. Justifica o teu procedimento (Adaptado do manual Matematicando 6 º ano) A3-Sem efectuares cálculos, apenas por estimativa, faz corresponder a cada expressão da coluna A, uma da coluna B que lhe corresponda A — B 32500:200 — 1994612 97322x5000 — 486610000 0,432x725 — 162,5 43270+593720 — 313,2 2144932-150320 — 636990 (Professora) A4-Estima, em cada linha, o valor de cada uma das expressões. Escreve uma afirmação verdadeira colocando entre as duas expressões um dos símbolos < ou>. 249 + 612 + 987 ---- 285 + 690 + 998 2,8 + 3,9 + 5,7 ---- 2,75 + 3,4 + 5,2 1/3 + 3/5 + 6/7 ----2/15 + 1/5 + 4/10 . (Matematicando, 6 º ano, p. 39)	Final do estudo dos quadriláteros

17/2/95	A5-Considera a soma: 4879 + 25728 + 90328 Efectuando uma estimativa diz qual dos seguintes números poderá representar aquela soma: 12000 1100000 120000. (Professora) A6-Sem usares a máquina de calcular, prevê o valor correspondente aos quocientes seguintes: 1/9 2/9 3/9 4/9 5/9 Justifica o teu procedimento. (Espaço Matemático, 6º ano, p. 131) A7-Estima, em cada linha, o valor de cada uma das expressões. Escreve uma afirmação verdadeira colocando entre as duas expressões um dos símbolos < ou>. 1/2 x 3/4 1/2 + 3/4 1/3 x 2/5 1/3 + 2/5 2 x 10/11 2 + 10/11 2 x 5/3 2 + 5/3 (Matematicando, 6 º ano, p. 48) A8-Indica uma estimativa de: a) (348x6)/41 b) 0,24x439 (Professora)	Final do estudo dos quadriláteros
8/3/95	Ficha de trabalho 1-Estima primeiro se cada um dos quocientes é maior ou menor do que 1: a) 5/7:3/7 b) 5/13:4/13 c) 345/12:345/12 d) 17/3:16/3 e) 5/16:5/17 f) 7/22:7/20 (Matematicando, 6º ano, p. 117)	Final do capítulo números racionais

8/3/95	2-Faz uma estimativa para cada um dos seguintes produtos e quocientes: a) 27,7:10,2 b) 483,5:99,9 c) 16,99:0,99 d) 37,5x9,9 e) 6,8x10,2 f) 986x1002 (Matematicando, 6º ano, p. 116) 3- Sem calculares, ordena os quocientes por ordem crescente: 37:2,5 37:250 37:25 37:25,5 (Matematicando, 6º ano, p. 116) 4-Estima se as seguintes somas e diferenças são maiores ou menores que 1: a) 1/3 + 1/2 c) 3/4 - 1/3 e) 7/8 + 1 12/13 b) 1/3 + 1/5 d) 7/5 - 1/7 f) 2 1/5 - 1 6/5 (Matematicando, 6º ano, p. 36)	Final do capítulo números racionais
30/3/95	Ficha de avaliação formativa: 1- Estima, se cada um dos seguintes quocientes e produtos, é maior ou menor do que 1: a) 2/3 : 1/3 b) 4/5 : 6/5 c) 3/7 x 2/6 d) 3/4 x 9/7 2- Dos seguintes números, selecciona dois cuja diferença seja aproximadamente 1 e cuja soma seja cerca de 5: 13/6 8/9 22/7 3- O diâmetro de um círculo é de 2,78 m. Estima o valor do seu perímetro. 4- Estima o valor de 2 x 3,14 x 1,39. (Professora)	Fim do estudo das proporções e das escalas

O original deste trabalho foi executado em WORD 5. 1, utilizando para o corpo principal do texto os caracteres Bookman 12, e impresso em impressora laser, a partir do qual se fizeram catorze exemplares policopiados, encadernados em Setembro de 1996.