



Tesis Doctoral

Desarrollo de herramientas basadas en la transformada wavelet para su aplicación en la resolución numérica de ecuaciones diferenciales

Departamento de Matemática
Facultad de Ciencias Exactas
Universidad Nacional de La Plata

Victoria Vampa
Director: Dr. Eduardo Serrano
Co-Director: Dra. María Teresa Martín

Noviembre, 2011

Índice general

Índice general	3
1. Introducción General	7
1.1. Motivación y estado del arte	7
1.2. Desarrollo de la tesis	9
1.3. Objetivos de la Tesis	11
1.4. Organización de la Tesis	12
2. Wavelets: Teoría Básica	13
2.1. Sistemas de Riesz y sistemas ortonormales	14
2.2. Sistemas generados por operaciones de traslación y dilatación	15
2.3. Análisis de Multirresolución AMR	17
2.3.1. Definición	17
2.3.2. Propiedades básicas	19
2.3.3. Condiciones suficientes para la función de escala	21
2.3.4. Bases ortogonales de wavelets	21
2.3.5. Ejemplos de bases wavelets	23
2.3.6. Algoritmo de Mallat	24
2.3.7. Extensiones y generalidades	24
2.4. AMR Splines	24
2.4.1. Splines polinomiales	25
2.4.2. Propiedades básicas de las B-splines	26
2.4.3. Splines de soporte compacto	29
2.4.4. Wavelets spline	29
2.4.5. Funciones de escala y B-splines	30
2.5. AMR Daubechies	32
2.5.1. Wavelets de Daubechies	32
2.5.2. Función de escala	33
2.6. AMR en un intervalo	35
2.6.1. Restricción al intervalo	36
2.6.2. Definición de AMR en el intervalo	36
3. Problemas de valores de contorno. Método de Galerkin	39
3.1. Formulación variacional	39
3.2. Estimaciones del error	41
3.3. Coeficientes de conexión	43

4. Wavelets y Ecuaciones Diferenciales I. FEM-WAVELETS	49
4.1. Problemas de vigas	51
4.2. Problemas de placas	61
4.3. Problemas transitorios	69
4.4. Comentarios finales sobre FEM-Wavelets	70
5. Wavelets y Ecuaciones Diferenciales II. Diseño de un Método en el contexto de un AMR.	71
5.1. Planteo del Problema	71
5.2. Estructuras de AMR splines en $[0, 1]$	72
5.3. Método de Galerkin Modificado	75
5.4. Refinamiento de la solución aplicando wavelets	78
5.5. Algoritmo de refinamiento iterativo	82
5.6. Error de la aproximación en escala j	82
5.7. Ejemplos Numéricos	85
6. Conclusiones	95
A. Coeficientes de los filtros	99
A.1. B-splines	99
A.2. Funciones de escala de Daubechies	100
B. Funciones de escala de Daubechies	105
B.1. Cálculo de momentos	105
B.2. Cálculo de los coeficientes de conexión	106
Bibliografía	115

A mis padres

Muchas gracias:

A Eduardo y a Tere, por su amistad, por su confianza, por el aporte de sus conocimientos y experiencia, y por su constante y fundamental apoyo.

A mis hijos, Martín, Santiago y Daniela, por estar siempre.

A mis amigos y a mis compañeros de los Departamentos de Matemática de la Facultad de Ciencias Exactas y de Ciencias Básicas de la Facultad de Ingeniería, de quienes recibí permanente estímulo para llevar esto adelante.

A mis alumnos, en particular, por haberme alentado en la última etapa.

Capítulo 1

Introducción General

1.1. Motivación y estado del arte

Wavelets en la solución numérica de ecuaciones diferenciales

La Teoría de Wavelets es una poderosa herramienta matemática desarrollada a fines del siglo XX ([51],[52],[56],[65],[59]) que ha despertado gran atención en diversos campos de la ingeniería, la física y las ciencias aplicadas, tales como el procesamiento de señales e imágenes, el reconocimiento de patrones, la física cuántica, el diagnóstico médico por imágenes, etc.

Las *wavelets* u *onditas* son funciones elementales oscilantes, suaves y de soporte compacto o rápido decaimiento. Brindan bases ortogonales, bases de Riesz o marcos del espacio de señales de energía finita.

Posibilitan un eficiente esquema de análisis y de síntesis de una señal: el Análisis de Multirresolución de $L^2(\mathbb{R})$. Esta metodología puede implementarse mediante algoritmos rápidos de baja complejidad.

Sus propiedades las convierten en elementos atractivos para las soluciones de forma débil de ecuaciones diferenciales, ya que pueden ser usadas para representar con eficacia las soluciones con gradientes pronunciados o discontinuidades.

El análisis basado en la transformada wavelet representa una combinación perfecta del análisis funcional, la transformada de Fourier, el análisis armónico y el análisis numérico.

Numerosos artículos de los últimos años presentan aplicaciones de elementos finitos con wavelets para la resolución de diversos problemas de ingeniería, en particular, asociados con operadores diferenciales. Por ejemplo, existen propuestas de métodos de descomposición wavelet para la resolución de las ecuaciones de Navier-Stokes [5] y métodos tipo Wavelet-Galerkin para el problema de Dirichlet [6].

En mecánica estructural se desarrollan métodos numéricos y algoritmos basados en wavelets para la resolución de ecuaciones diferenciales correspondientes a problemas de vigas y placas en una y dos dimensiones.

En general, en la construcción del elemento finito basado en wavelets, la función de escala de un Análisis de Multirresolución se utiliza como función interpolante. En muchos trabajos se usan las funciones B-splines de orden arbitrario, que son funciones de escala de un Análisis de Multirresolución de $L^2(\mathbb{R})$, y muestran excelentes propiedades de convergencia.

En particular, en el año 2006, J.Han, W. Ren y Y. Huang utilizaron las funciones de escala splines ([1],[2]) como interpoladoras de los desplazamientos en la formulación de varios elementos para problemas de mecánica estructural en una, dos y tres dimensiones. Xiang et. al [8] proponen el uso de funciones wavelets spline sobre un intervalo para la construcción de elementos planos para problemas de elastomecánica. Entre ellos, el modelo de placa de Reissner-Mindlin.

Los problemas que presentan discontinuidades, singularidades o gradientes altos, requieren funciones interpolatorias que posean una mejor localización.

Las wavelets de Daubechies, por sus ventajosas propiedades de ortogonalidad, soporte compacto mínimo y varios momentos nulos, permiten obtener muy buenas aproximaciones en una amplia variedad de casos. Pueden citarse los trabajos [54] y [3] donde se aplican las wavelets de Daubechies para resolver problemas en vigas y en placas.

Wavelets en métodos adaptativos

Las singularidades que se presentan al modelar ecuaciones diferenciales en derivadas parciales o ecuaciones integrales, como es el caso de ecuaciones elípticas en dominios con esquinas re-entrantes, además de ser fuente de dificultades teóricas, traen dificultades en la convergencia de los métodos numéricos, en el sentido que se deteriora la velocidad de decrecimiento del error.

Como consecuencia, se deben hallar soluciones débiles a los problemas diferenciales correspondientes. Para alcanzar una tolerancia prescrita se requiere una solución muy refinada y, por lo tanto, un mayor costo computacional en comparación con soluciones suaves. Muchas veces estas singularidades tienen importancia física, como es el caso de concentraciones de tensiones en problemas de elasticidad, o problemas de capas límite en fluidos y es importante que sean bien aproximadas por el método numérico.

Por esta razón, el uso de métodos adaptativos es una solución natural para mejorar las aproximaciones con un costo computacional razonable.

El término *adaptatividad* tiene dos sentidos: en primer lugar permite el refinamiento de la discretización sólo localmente y, en particular, cerca de la singularidad de la solución. En segundo lugar, el algoritmo de resolución utiliza la información en un nivel para deducir una nueva discretización para el paso siguiente. El caso más típico es el refinamiento adaptativo basado en estimadores de error a-posteriori en el método de elementos finitos.

En los últimos años, las bases wavelets aparecen como un método alternativo para el refinamiento adaptativo, que se implementa eligiendo o *actualizando* las funciones básicas que describen la solución aproximada en cada paso del algoritmo. De esa forma, la selección de la base adecuada juega un rol similar a la elección de los puntos de la malla en los métodos de elementos finitos estándar.

Existen distintos enfoques para desarrollar esquemas adaptativos basados en wavelets. Entre ellos, los presentados por Cohen ([33]-[38]) y las técnicas de procesamiento adaptativo de Harten ([39], [40]).

Se han desarrollado numerosas familias de wavelets en las últimas dos décadas, basadas en la transformada de Fourier en cuyo dominio la traslación y dilatación son operaciones algebraicas.

Nos referimos a las wavelets introducidas en los trabajos de (en orden alfabético) Al-

droubi and Unser [41], Battle [45] and Lemarie [46], Chui and Wang ([47],[48]), Cohen and Daubechies ([49],[50]), Daubechies ([51],[53]), Mallat ([55],[57],[58]), Meyer [59] y otros.

Estas *wavelets de primera generación* proveen bases para funciones definidas en \mathbb{R}^n , mientras que aplicaciones orientadas a la solución de ecuaciones diferenciales e integrales sobre dominios generales requieren *wavelets* definidas sobre dominios arbitrarios de \mathbb{R}^n , eventualmente no suaves.

Es necesario entonces, una generalización de las *wavelets* de primera generación que mantenga sus ventajosas propiedades y son referidas como *wavelets de segunda generación*. Ejemplos de estas *wavelets* son las *wavelets* sobre un intervalo y las multiwavelets de Hermite [66].

En cuanto a la utilización de *wavelets* para la resolución de EDPs otros autores han desarrollado *métodos de colocación wavelet* proponiendo ecuaciones de colocación y diferentes bases *wavelets*. Bertoluzza [70], por ejemplo, usa funciones de autocorrelación con *wavelets* de soporte compacto (*wavelets* de Daubechies) mientras que en el trabajo [69] se utilizan *wavelets* spline.

Cabe señalar que Cai et al. [67] y Kumar et al. [68], incorporaron técnicas adaptativas con splines cúbicas optimizando la cantidad de funciones básicas usadas en la solución del problema. Destacamos que los métodos de colocación son eficientes, pero requieren ciertas condiciones de regularidad y por esa razón en muchos casos los métodos variacionales resultan una mejor alternativa.

Por último, desde hace un poco más de cinco años, existe una nueva metodología desarrollada por T. Hughes [83] para el refinamiento de soluciones numéricas correspondientes a problemas en dos y tres dimensiones, conocido como análisis isogeométrico. En este nuevo enfoque, se incorporan a los métodos estándar $h - p$, que consisten en refinar la malla o aumentar el grado del polinomio, el avance en la escala j de la resolución. La novedad es que, basados en los programas CAD, utilizan para aproximar la solución las mismas funciones que modelizan la geometría del problema, y son las splines las más usadas por sus conocidas propiedades de aproximación.

1.2. Desarrollo de la tesis

La presente investigación parte de una primera experiencia de la autora en el tema del método de los elementos finitos, en el cálculo de láminas de revolución y de láminas con comportamiento membranal dominante. En esta área, con un trabajo publicado [18], completa su tesis de maestría en el año 2004 [30], y luego publica otro trabajo en el tema [31].

Prosiguiendo esta línea de investigación, luego incursiona en la línea de FEM-Wavelets y sus aplicaciones. Se plantea aportar modificaciones originales y competitivas utilizando splines y *wavelets* de Daubechies y se procura demostrar la factibilidad y eficiencia de estos métodos en algunas aplicaciones.

En particular, se trabaja en la resolución de problemas de mecánica estructural que describen el comportamiento de vigas y placas sometidas al efecto de cargas transversales.

También se realizan aportes en la formulación de problemas transitorios, EDPs que dependen del tiempo, extendiendo los métodos desarrollados y utilizando el método de líneas que conduce a un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias.

Los resultados obtenidos dan lugar a seis nuevas publicaciones y constituyen la primera parte de esta tesis doctoral.

Los mencionados avances motivan el desarrollo de métodos para resolver problemas de contorno que aprovechen las ventajas del Análisis de Multirresolución y aprovechen las relevantes propiedades de las funciones splines en un contexto Galerkin variacional. Esto constituye la segunda parte de la tesis y su contribución central.

A partir de esta perspectiva, se desarrolla un esquema híbrido que combina ecuaciones variacionales y de colocación. De esta forma, se propone un tratamiento de las condiciones de borde que resulta adecuado y conduce a aproximaciones con buenas propiedades de convergencia. Al mantener la estructura de multirresolución, esta estrategia permite definir una aproximación jerárquica, refinada por escalas. El método es implementado con B-splines y los resultados numéricos obtenidos en distintas aplicaciones dan lugar a una nueva publicación internacional.

Prosiguiendo, se define un esquema que aprovecha las ventajas del análisis multirresolución, y permite pasar de la aproximación en una escala, a la siguiente más fina con el menor esfuerzo computacional.

Se desarrolla, entonces, empleando wavelets spline sobre intervalos, una técnica para resolver problemas de borde de segundo orden, que permite mejorar las aproximaciones con una significativa disminución del costo computacional.

Los resultados numéricos en distintas aplicaciones y las comparaciones con resultados obtenidos con métodos de colocación adaptativos se publican en un último trabajo, culminando el trabajo de la Tesis.

Trabajos publicados:

- L. Alvarez Díaz y V. Vampa, *Cálculo de Estructuras Laminares mediante el Método de Elementos Finitos*, Reporte de Investigación del ICIMAF (Instituto de Cibernética, Matemática y Física, La Habana, Cuba) N° 137 (2001). ISSN 0138-891.
- V. Vampa, *Mejoras en el comportamiento membranal del elemento de lámina MITC4*, Tesis de Maestría en Simulación Numérica y Control, Facultad de Ingeniería, Universidad de Buenos Aires, 2004.
- V. Vampa, *Analysis of in-layer strains in the low order MITC shell element*, Latin American Journal of Solids and Structures 4 (2007), 87-102. ISSN 1679-7817.
- L. Alvarez Díaz, M. T. Martín and V. Vampa, *Daubechies wavelet beam and plate finite elements*, Finite Elements in Analysis and Design., Elsevier, 45 (2008), 200-209.
- V. Vampa and M. T. Martín, *FEM WAVELETS para la placa de Mindlin-Reissner*, 1° Congreso Argentino de Ingeniería Aeronáutica (2008), 320-328. ISBN 978-950-34-0496-6.
- L. Alvarez Díaz, M. T. Martín and V. Vampa, *The construction of plate finite elements using wavelet basis functions*, Revista Investigación Operacional, Fac. de Matemática y Computación, Universidad de La Habana, 30 (2009), 193-204.

- M. T. Martín y V. Vampa, *Wavelet-Galerkin method for numerical solutions to differential equations*, III International Conference on Approximation Methods for Design and Control III ICAMDC, Universidad de Buenos Aires Buenos Aires, Argentina, 9-11 de Marzo de 2009. <http://www.icamdc.unsam.edu.ar/>
- V. Vampa and M. T. Martín, *The use of Daubechies bases in Wavelet-Galerkin method*, Mini-Symposium WWlet 2009- wavelets Applications in Numerical Methods for PDEs and Signal Processing. 8th Brazilian Congreso on Dynamics, Control and Applications, Sao Paulo State University, UNESP (2009). ISBN 978-85-86883-45-34
- M. T. Martín, E. Serrano y V. Vampa, *Wavelets de Daubechies en la resolución de Ecuaciones Diferenciales*, II Congreso de Matemática Aplicada, Computacional e Industrial (2009).
- V. Vampa, M. T. Martín, and E. Serrano, *A hybrid method using wavelets for the numerical solution of boundary value problems on the interval*, Appl. Math. Comput., Vol 217, 7 (2010), 3355-3367.
- V. Vampa, M. T. Martín y E. Serrano, *Application of wavelet analysis for the refinement of the numerical solutions of differential equations*, Argentinean Congress on Computational Mechanics and II South American Congress on Computational Methods in Engineering. XXXI CILAMCE-Iberian Latin American Congress on Computational Methods in Engineering, Asociación de Mecánica Computacional, 29 (2010), 2253-2264. ISSN 1666-6070.

1.3. Objetivos de la Tesis

El objetivo principal de esta tesis es el desarrollo de herramientas y estrategias basadas en la transformada wavelet para su aplicación en la resolución numérica de ecuaciones diferenciales.

Se plantean como objetivos parciales:

- Extensión de los desarrollos de FEM-Wavelets, utilizando las wavelets de Daubechies en problemas de mecánica estructural en dos dimensiones.
- Estudio de la estructura del Análisis de Multirresolución y sus capacidades, como esquema-contexto de las aplicaciones numéricas por desarrollar.
- Estudio de las propiedades generales de las funciones de escala y wavelets ortogonales de Daubechies, ortogonales y semiortogonales, comparando sus respectivas regularidades, ventajas y desventajas.
- Análisis de las capacidades de las wavelets B-splines y de las wavelets de Daubechies, en función de su aplicación en el método de Galerkin, para la resolución numérica de ecuaciones diferenciales.
- Desarrollo de una modificación novedosa del método.

- Diseño e implementación de una estrategia de refinamiento adaptativo localizado, explotando la autosimilaridad, regularidad y localización de las mencionadas funciones elementales.
- Análisis del error del método de Galerkin Modificado propuesto en esta tesis.

1.4. Organización de la Tesis

La organización de la tesis es la siguiente: en el Capítulo 2 se presentan los aspectos básicos del análisis wavelet y la estructura multirresolución. Se presentan las B-splines y las wavelets de Daubechies con sus propiedades básicas en la recta real. En la Sección 2.6 se describe en forma general la construcción de un Análisis de Multirresolución restringido a un intervalo, necesario para las aplicaciones que motivaron el trabajo y que luego utilizan los métodos propuestos en el Capítulo 5.

La formulación débil y el método de Galerkin para resolver un problema de valores de contorno se presentan en el Capítulo 3. Se describe, además, el cálculo de los coeficientes de conexión.

El Capítulo 4 está dedicado a la formulación de elementos finitos utilizando wavelets (FEM-Wavelets) en una y dos dimensiones, para resolver problemas de mecánica estructural.

Se desarrolla la construcción de elementos finitos para vigas con splines. Luego, se describe la formulación de nuevos elementos finitos en una dimensión y mediante producto tensorial para el problema de placas (2D), usando la familia de wavelets de Daubechies.

La resolución de un problema de valores de contorno de segundo orden en el espacio wavelet y en el marco de un Análisis de Multirresolución en un intervalo se presenta en el Capítulo 5. Se utiliza el método de Galerkin en forma conjunta con un esquema híbrido usando como funciones de forma las B-splines. El método diseñado permite calcular la aproximación en una escala j y constituye otro de los aportes originales de esta tesis.

Luego se completa el método propuesto con el desarrollo de un esquema que utiliza las wavelets para avanzar en la escala optimizando el costo computacional. Se analiza el error del nuevo esquema. Por último, se presenta la experimentación numérica.

En el Capítulo 6 se exponen las conclusiones generales y las líneas futuras por desarrollar. Se complementa con dos Apéndices: uno, sobre los coeficientes de los filtros en el uso de los B-splines y de las funciones de escala de Daubechies y el segundo, con los cálculos de los momentos y de los coeficientes de conexión. Estos temas resultan necesarios para las implementaciones numéricas y son parte importante del trabajo desarrollado en la tesis.

Capítulo 2

Wavelets: Teoría Básica

Nuestros desarrollos principales constituyen una aplicación numérica de la Teoría de Wavelets. En este capítulo damos una breve introducción de la teoría básica, en particular exponemos aquellos resultados que enmarcan nuestras ulteriores aplicaciones. Enfocamos principalmente la estructura de Análisis de Multirresolución y las bases ortonormales y biortonormales de funciones de escala y wavelets spline polinomiales y de Daubechies.

La teoría de wavelets comienza a desarrollarse a fines de los 80, aunque con anterioridad habían surgido construcciones similares en teoría de campos y en el tratamiento de señales sísmicas ([61],[62]). El objetivo era encontrar algoritmos simples que permitieran descomponer funciones arbitrarias en funciones especiales combinando las ventajas del sistema trigonométrico y del sistema de Haar. Las bases de Haar son el ejemplo más simple y antiguo de base ortonormal: están soportadas en pequeños subintervalos de $[0, 1)$ y son funciones escalonadas, por el contrario, las bases de Fourier no se anulan en $[0, 1)$ y son C^∞ en el intervalo. Respecto a la aproximación de funciones, las bases de Haar permiten representar en forma eficiente funciones con segmentos suaves y discontinuidades o picos, mientras que las bases de Fourier representan en forma eficiente funciones con comportamiento oscilatorio o suave. Estos dos sistemas ocupan posiciones extremas en el sentido que las funciones del sistema trigonométrico están perfectamente localizadas en la variable de frecuencia, pero no tienen ninguna localización en la variable espacial, mientras que, las funciones del sistema de Haar tienen localización espacial pero no frecuencial. Lo que se busca es, entonces, construir bases que permitan tener esa doble localización, tanto en espacio como en frecuencia.

Al comienzo de este capítulo, en las Secciones 2.1 y 2.2, se definen los sistemas de Riesz y sistemas ortonormales, como introducción a la construcción de bases ortonormales de \mathbb{R} y se analizan en particular los espacios generados por traslaciones y dilataciones de una función simple. El marco para la construcción de bases wavelets involucra el concepto de Análisis de Multirresolución, que es lo que permite reconciliar el análisis en variable de espacio con el análisis en variable de Fourier o frecuencia, de manera compatible con el principio de incertidumbre de Heisenberg [65].

Como se mencionó antes, se trata de aproximar una función por una sucesión de funciones simples. Esta simplicidad se traduce en que las funciones aproximantes sean suficientemente regulares como para estar completamente caracterizadas por sus valores sobre la red de puntos diádicos (con espaciado 2^{-j}) y sus transformadas de Fourier soportadas por las bolas de radio 2^j correspondientes. Justamente, la relación entre el paso y el radio de estas bolas

es la que resulta del principio de incertidumbre. En la Sección 2.3. se define un Análisis de Multirresolución (AMR), se dan las propiedades básicas y se presentan algunos ejemplos. Luego, se describen las bases ortogonales de wavelets construidas a partir de la función de escala de un AMR.

En la Sección 2.4 se realiza un análisis general de las wavelets spline y sus propiedades de regularidad y ortogonalidad. Se describen las splines polinomiales, las splines ortogonales, semi-ortogonales y biortogonales. Luego se analizan en particular las B-splines y sus ventajosas propiedades. Se describe el AMR y las wavelets correspondientes a las funciones de escala B-splines.

En la Sección 2.5 se presenta el AMR de las wavelets de Daubechies, que son ortogonales y de soporte compacto.

Por último, en la Sección 2.6 se muestra el desarrollo del Análisis de Multirresolución en el intervalo $[0, 1]$, necesario para el objetivo de esta tesis, que es la aplicación del análisis wavelet en la resolución numérica de ecuaciones diferenciales, en particular, de problemas de valores de contorno en una dimensión.

Los fundamentos teóricos presentados en este Capítulo se encuentran desarrollados en detalle en textos clásicos del Análisis Wavelet, como son los de C. Chui [65], S. Mallat [56], I. Daubechies [52], D. Walnut [75] y M. Pinsky [76].

2.1. Sistemas de Riesz y sistemas ortonormales

Dado un espacio de Hilbert separable V con producto interior $\langle \cdot, \cdot \rangle$ y norma asociada $\|\cdot\|$, se realizan las siguientes definiciones:

Definición 2.1:

Una familia (x_k) con $k \in K$ donde K es un conjunto numerable de índices, es un sistema de Riesz, si existen constantes $0 < A \leq B < \infty$ tales que para cualquier conjunto finito de números complejos (a_k) , se tiene

$$A \sum_k |a_k|^2 \leq \left\| \sum_k a_k x_k \right\|^2 \leq B \sum_k |a_k|^2 \quad (2.1)$$

Notar que si (x_k) es un sistema de Riesz, entonces los x_k son linealmente independientes. A y B se llaman cotas de Riesz de la familia (x_k) .

Definición 2.2:

Una familia (x_k) es un sistema ortonormal, si $\langle x_k, x_m \rangle = \delta_{k,m}$. Se demuestra que el conjunto (x_k) es ortonormal si y sólo si para todo conjunto finito de números complejos (a_k) , se tiene

$$\left\| \sum_k a_k x_k \right\|^2 = \sum_k |a_k|^2 \quad (2.2)$$

Definición 2.3:

La familia (x_k) es completa en el espacio V si y sólo si $\langle x, x_k \rangle = 0$ para todo $k \in K$ implica $\|x\| = 0$.

En particular, un sistema de Riesz es un sistema ortonormal si y sólo si $A = B = 1$ y es importante notar que estas condiciones no implican la completitud del sistema.

Definición 2.4:

La familia (x_k) es una base de Riesz (base ortonormal) si es un sistema de Riesz (ortonormal) completo. En este caso, la familia (x_k) es densa en el espacio V y dado x en el espacio V existen coeficientes únicos a_k en $l^2(\mathbb{Z})$ tales que $x = \sum_k a_k x_k$.

Ejemplo 2.5: El sistema trigonométrico dado por la colección de funciones

$$\left\{ \frac{e^{ikx}}{\sqrt{2\pi}} \right\}_{k \in \mathbb{Z}}$$

es un sistema ortonormal en $L^2[0, 2\pi]$.

2.2. Sistemas generados por operaciones de traslación y dilatación

Cuando el sistema está generado mediante una única función por acción de las operaciones de dilatación y traslación, es un caso especial y se pueden demostrar propiedades particulares.

Dada $f(x) \in L^2(\mathbb{R})$, denotaremos al operador de traslación en $L^2(\mathbb{R})$ como $\mathbb{T}f(x) = f(x - 1)$, y para $n \geq 1$, $\mathbb{T}^n = \mathbb{T}^{n-1} \circ \mathbb{T}$ y al operador de dilatación, $\mathbb{D}f(x) = 2^{1/2}f(2x)$ y análogamente \mathbb{D}^n .

Denotamos por $I_{j,k}$ a los intervalos diádicos,

$$I_{j,k} = [2^{-j}k, 2^{-j}(k + 1)) \tag{2.3}$$

y dada una función $\phi(x) \in L^2(\mathbb{R})$, para cada $j, k \in \mathbb{Z}$ denotamos por $\phi_{j,k}(x)$

$$\phi_{j,k}(x) = 2^{j/2}\phi(2^j x - k) = \mathbb{D}^j \mathbb{T}^k \phi(x) \tag{2.4}$$

y por $\{\phi_{j,k}\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$ a la familia de funciones generadas a partir de la composición de ϕ mediante dilataciones diádicas y traslaciones enteras.

Ejemplo 2.6: Sea $\phi(x) = \chi_{[0,1)}(x)$ que genera, mediante traslaciones funciones que son constantes sobre los intervalos $I_{0,k}$, $k \in \mathbb{Z}$. Para cada $j \in \mathbb{Z}$, $\{\phi_{j,k}\}_{k \in \mathbb{Z}}$ definida en (2.4), forman una base ortonormal del subespacio V_j de funciones constantes sobre los intervalos diádicos $I_{j,k}$.

Ejemplo 2.7: Sobre el esquema del ejemplo anterior, se define

$$h(x) = \chi_{[0,1/2)}(x) - \chi_{[1/2,1)}(x) = \sqrt{2}\phi_{1,0}(x) - \sqrt{2}\phi_{1,1}(x) \tag{2.5}$$

$$h(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq x < 1/2 \\ -1 & \text{si } 1/2 \leq x < 1 \end{cases}$$

Si denotamos $h_{j,k}(x)$, como en (2.4),

$$h_{j,k}(x) = 2^{j/2}h(2^jx - k) = \mathbb{D}^j\mathbb{T}^k h(x) \quad (2.6)$$

se tiene que $h_{j,k}$ está soportada en el intervalo diádico $I_{j,k}$. Además, para $j \geq 0$ y $0 \leq k \leq 2^j - 1$, $\{h_{j,k}\}$ son una base ortonormal de $L^2[0, 1]$.

Es importante destacar que vale la ortogonalidad de las funciones para una escala j dada,

$$\langle h_{j,k}, h_{j,k'} \rangle = 0, \quad k \neq k' \quad (2.7)$$

y también entre funciones de distintas escalas

$$\langle h_{j,k}, h_{j',k'} \rangle = 0, \quad k \neq k', j \neq j' \quad (2.8)$$

Observación 2.8: Notar que $h_{j,k}$ (2.6) se anula fuera del intervalo $I_{j,k}$, de longitud 2^{-j} y que para j grande la longitud de $I_{j,k}$ es pequeña. Se dice, entonces, que la función $h_{j,k}(x)$ está bien localizada en el espacio (o, dependiendo del contexto, en el tiempo). Esta propiedad contrasta con las bases del sistema trigonométrico del Ejemplo 2.5 pues para todo x en $[0, 2\pi]$ los elementos de la base tienen módulo 1 y no se anulan para ningún x . Se verá más adelante que las funciones (2.6) son las funciones de escala en el sistema de Haar.

Observación 2.9: Los Ejemplos 2.6 y 2.7 se pueden extender a toda la recta. La familia de funciones $\{h_{j,k}\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$, constituye la base de Haar de $L^2(\mathbb{R})$.

Ejemplo 2.10: Sea V_j el espacio de funciones continuas y lineales sobre cada intervalo diádico $I_{j,k}$. La familia $\{\phi_{j,k}\}_{k \in \mathbb{Z}}$ en V_j , definida en (2.4), donde

$$\phi(x) = \begin{cases} x & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 2 - x & \text{si } 1 \leq x < 2 \end{cases}$$

es una base de Riesz para cada j , pero no constituyen una base ortonormal.

La proposición siguiente caracteriza los sistemas de Riesz y los sistemas ortonormales en términos de la transformada de Fourier.

Proposición 2.11:

Sean $\phi \in L^2(\mathbb{R})$ y $0 < A \leq B < \infty$. Las dos condiciones siguientes son equivalentes

1. La transformada de Fourier $\widehat{\phi}$ de ϕ satisface

$$A \leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left| \widehat{\phi}(\omega + 2k\pi) \right|^2 \leq B \quad \text{c.t.p.} \quad (2.9)$$

2. Se cumple para $\phi(x - k), k \in \mathbb{Z}$ la condición de Riesz (2.1) con las mismas constantes (A, B) .

En el caso ortonormal ($A = B = 1$), se obtiene la útil caracterización que sigue:

Corolario 2.12:

Las traslaciones $\phi(x - k), k \in \mathbb{Z}$ de $\phi \in L^2(\mathbb{R})$ son ortonormales si y sólo si

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \left| \widehat{\phi}(\omega + 2k\pi) \right|^2 = 1 \quad \text{c.t.p.} \quad (2.10)$$

Si ϕ es continua, esto implica que $\widehat{\phi}(0) = 1$ y $\widehat{\phi}(2k\pi) = 0, \forall k \neq 0$.

Ejemplo 2.13: Para la función de escala de Haar del Ejemplo 2.6 ($\phi(x) = \chi_{[0,1]}(x)$), es evidente que las traslaciones $\phi(x - k)$ son ortonormales; de donde $A = B = 1$. La transformada de Fourier se calcula explícitamente como $\widehat{\phi}(\omega) = e^{-i\pi\omega} \frac{\text{sen}(\pi\omega)}{\pi\omega}$ de modo que para casi todo ω ,

$$\frac{\text{sen}^2(\pi\omega)}{\pi^2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(\omega + 2\pi k)^2} = 1$$

La serie de la izquierda converge uniformemente sobre cada intervalo finito, de donde la serie define una función continua y, por consiguiente, la igualdad se cumple para todo ω .

Ejemplo 2.14: Para la función de escala de Shannon

$$\phi(x) = \frac{\text{sen}(\pi x)}{\pi x}, \quad x \neq 0, \quad \phi(0) = 1$$

La transformada de Fourier es $\widehat{\phi}(\omega) = \chi_{[-1/2, 1/2]}(\omega)$. Se tiene que vale (2.10) en casi en todo punto ya que para ω no entero todos los términos de la serie son 0, excepto uno en el cual vale 1. De donde $\phi(x - k)$ es un sistema ortonormal en $L^2(\mathbb{R})$.

Observación 2.15: Este tipo de sistemas y bases particulares generadas por traslaciones y dilataciones de una sola función están asociados a una estructura muy particular del espacio de Hilbert, V , denominado Análisis de Multirresolución, concepto que se desarrollará en las secciones siguientes.

2.3. Análisis de Multirresolución AMR

2.3.1. Definición

Un Análisis de Multirresolución (AMR) consiste en una secuencia $\{V_j, j \in \mathbb{Z}\}$, de subespacios cerrados de $L^2(\mathbb{R})$

$$\cdots \subset V_{-2} \subset V_{-1} \subset V_0 \subset V_1 \subset V_2 \subset \cdots \quad (2.11)$$

que verifican:

$$(M1) \quad V_j \subset V_{j+1}, \quad j \in \mathbb{Z}$$

$$(M2) \quad f(x) \in V_j \Leftrightarrow f(2x) \in V_{j+1}, \quad j \in \mathbb{Z}$$

$$(M3) \quad \bigcap V_j = \{0\}$$

$$(M4) \quad \overline{\bigcup V_j} = L^2(\mathbb{R})$$

(M5) Existe una *función de escala* $\phi(x)$ en V_0 tal que la familia $\{\phi(x-k), k \in \mathbb{Z}\}$ constituye una base ortonormal de V_0 .

Observación 2.16:

- 1 La función de escala ϕ es única, salvo traslaciones enteras.
- 2 En (M5) la condición de ortogonalidad puede relajarse a una base de Riesz.
- 3 Las condiciones (M1), (M2) y (M5) implican (M3), y también implican que los subespacios son cerrados por traslaciones diádicas $f(x) \in V_j$ sí y sólo sí $f(x - 2^{-j}k) \in V_j$, $k, j \in \mathbb{Z}$.
- 4 Como consecuencia de las condiciones (M1)-(M5) se tiene que para cada $j \in \mathbb{Z}$, la familia $\{\phi_{j,k}(x)\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$ constituye una base ortonormal (de Riesz) de V_j .
- 5 Si la sucesión $\{V_j, j \in \mathbb{Z}\} \subset L^2(\mathbb{R})$ verifica las condiciones (M1), (M2) y (M5) y $|\widehat{\phi}|$ es continua en $\omega = 0$, entonces $\widehat{\phi}(0) \neq 0 \iff (M4)$.

Ejemplos 2.17:

En los casos que se presentan a continuación es posible definir los espacios V_0 y V_j de forma tal que se verifiquen las inclusiones (2.11) y se tiene una sucesión de subespacios encajados densa en $L^2(\mathbb{R})$. Además, como está demostrado en [75], se satisfacen las condiciones (M1)-(M5).

- (1) AMR de Meyer. Desarrollado por Y. Meyer [59], la base wavelet correspondiente es el primer ejemplo de una base ortonormal suave. La transformada de Fourier está soportada en el intervalo $[-1/2, 1/2]$ y es una función campana $\in C^k$, $k \in \mathbb{N}$ o $k = \infty$.
- (2) AMR de Haar. V_0 consiste en el subespacio de funciones escalonadas $f(x)$ tal que $f(x) \in L^2(\mathbb{R})$ es constante sobre los intervalos $I_{0,k}$, $k \in \mathbb{Z}$. V_j , $j \in \mathbb{Z}$ es el subespacio de funciones escalonadas de $L^2(\mathbb{R})$ en los intervalos diádicos $I_{j,k}$, $k \in \mathbb{Z}$.

- (3) AMR de funciones lineales a trozos. V_0 es el subespacio de funciones $f(x) \in L^2(\mathbb{R})$, lineales y continuas en los intervalos $I_{0,k}$, $k \in \mathbb{Z}$, mientras que V_j , $j \in \mathbb{Z}$, es el subespacio de las funciones lineales y continuas en los intervalos diádicos $I_{j,k}$, $k \in \mathbb{Z}$.
- (4) AMR de funciones splines polinomiales, (incluye como casos particulares los dos ejemplos anteriores).

Una spline polinomial de orden $m + 1$ es una función polinomial a trozos, de grado m y con $m - 1$ derivadas continuas. Es bien conocido que cualquier función de $L^2(\mathbb{R})$ puede aproximarse por una spline polinomial tanto como se quiera haciendo la escala j tender a infinito.

Los puntos de ensamble, llamados *nodos* están, en general, igualmente espaciados y ubicados en los enteros. Se definen los subespacios spline de grado m , $\{V_j^m\}_{j \in \mathbb{Z}}$, donde V_j^m es el subespacio de funciones de $L^2(\mathbb{R})$ que son polinomios de grado m en cada intervalo diádico $I_{j,k}$, $k \in \mathbb{Z}$ (2.4). Claramente una función $f(x) \in V_{j_0}^m$ que es polinomial a trozos en cada segmento $I_{j_0,k} = [2^{-j_0}k, 2^{-j_0}(k+1))$ estará también en los subespacios más finos V_j^m con $j \geq j_0$.

- (5) AMR de banda limitada. En este caso V_0 consiste en las funciones $f(x)$ con banda limitada 1, o sea funciones de $L^2(\mathbb{R})$ tales que su transformada de Fourier está soportada en el intervalo $[-1/2, 1/2]$. V_j es el subespacio de las funciones de banda limitada 2^j .
- (6) AMR de Daubechies. Son familias de funciones suaves, ortogonales y de soporte compacto que fueron diseñadas en 1988 por I. Daubechies en una verdadera obra de orfebrería [52]. V_0 es el espacio generado mediante traslaciones de la función de escala de Daubechies y V_j los subespacios del AMR, generados de acuerdo a la definición realizada al comienzo de la sección.

Observación 2.18: Es importante resaltar que dentro de las familias presentadas en el ejemplo anterior, las más utilizadas en las aplicaciones numéricas son las spline wavelets polinomiales y las wavelets de Daubechies, expuestas en los ejemplos 2.17(4) y 2.17(6). Con estas dos familias se desarrollarán los métodos y aplicaciones de los Capítulos 4 y 5.

2.3.2. Propiedades básicas

Sea un AMR con función de escala $\phi(x)$. Se dice que es *r-regular* ($r \in \mathbb{N}$) si la función de escala $\phi(x)$ es tal que

$$|\phi^{(\alpha)}(x)| \leq c_m(1 + |x|)^{-m} \quad (2.12)$$

con $0 \leq \alpha \leq r$ y $m \geq 1$ y donde $\phi^{(\alpha)}$ denota la derivada α -ésima de $\phi(x)$.

Esta regularidad se relaciona, como es sabido, con el orden de decaimiento en el infinito de la transformada de Fourier de ϕ . En cuanto a la regularidad de los ejemplos de AMR

tratados anteriormente se tiene $r = 0$ para el AMR de Haar, $r = 1$ en las afines o splines de orden 2 y $r = m$ en las splines polinomiales de grado m (casos 2.17(2), 2.17(3) y 2.17(4) respectivamente).

Observación 2.19: Los conceptos teóricos que se desarrollan en este capítulo corresponden al caso unidimensional y en \mathbb{R} . Es importante notar que es posible realizar formulaciones tanto del concepto de AMR, como de funciones de escala y wavelets en \mathbb{R}^d . En ese caso, se pueden construir vía matrices de dilatación y para casos particulares de la geometría mediante el producto tensorial de bases de $L^2(\mathbb{R})$. También se generaliza para un AMR en \mathbb{R}^d la definición anterior de regularidad.

■ Relación de dos escalas

La relación de dos escalas es una propiedad fundamental que para la función de escala se demuestra en el lema siguiente [75]:

Lema 2.20: Si ϕ es ortogonal existe una sucesión de coeficientes $h_k \in l^2(\mathbb{Z})$ tal que

$$\phi(x) = \sqrt{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_k \phi(2x - k) \quad (2.13)$$

está en $L^2(\mathbb{R})$. Es decir, que la función de escala es una suma de dilataciones y traslaciones enteras de sí misma (composiciones de los operadores \mathbb{T} y \mathbb{D} , definidos al comienzo de la Sección 2.2), con factor de escala 2. Además, en el dominio de frecuencias,

$$\widehat{\phi}(\omega) = H(\omega/2) \widehat{\phi}(\omega/2) \quad (2.14)$$

donde, $H(\omega)$ es el llamado *filtro de la escala*

$$H(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k e^{-2\pi i k \omega} \quad (2.15)$$

siendo $H(\omega)$ una función periódica de período 2π que verifica,

$$1 = |H(\omega)|^2 + |H(\omega + \pi)|^2 \quad (2.16)$$

Además, está demostrado que la sucesión h_k obedece las propiedades:

$$h_k = \sqrt{2} \int_{\mathbb{R}} \phi(x) \phi(2x - k) dx \quad k \in \mathbb{Z} \quad (2.17)$$

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |h_k| = \sqrt{2} \quad (2.18)$$

y las condiciones de ortogonalidad,

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} h_{k-m} h_{k-n} = \delta_{m,n} \quad (2.19)$$

2.3.3. Condiciones suficientes para la función de escala

Es importante notar que un AMR no sólo puede construirse a partir que se verifiquen las condiciones (M1) – (M5). Otra forma de obtener un Análisis de Multirresolución es a partir de una función de escala que verifique ciertas propiedades, como las siguientes:

Si $\phi \in L^2(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$ es tal que

- verifica las condiciones dadas por el Corolario 2.12 y
- existe una función $H(\omega)$ de período $2\pi \in L^2[0, 2\pi]$, que realiza la ecuación de doble escala (2.13),

entonces, ϕ es una función de escala ortogonal.

Por último, también puede generarse un AMR a partir de la existencia de los filtros y ciertas propiedades. Sea $\{h_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ una sucesión $\in l^1(\mathbb{Z})$ y la función $H(\omega)$ de período 2π definida como en (2.15). Si se verifican las condiciones:

- h_k verifica la relación (2.18)
- $H(\omega)$ satisface la igualdad (2.16) o, equivalentemente la relación de ortogonalidad (2.19)
- Es válida la cota inferior $\inf_{\omega \in [-\pi/2, \pi/2]} |H(\omega)| > 0$

Entonces, tomando $\widehat{\phi}(0) = 1$, se define una función de escala ortonormal en la forma

$$\widehat{\phi}(\omega) = \lim_{J \rightarrow +\infty} \prod_{j=1}^J H(\omega/2^j)$$

y obtenida la función de escala se genera un Análisis de Multirresolución, a partir de considerar

$$V_0 = \text{gen}\{\phi(x - k), k \in \mathbb{Z}\} \quad (2.20)$$

2.3.4. Bases ortogonales de wavelets

En el contexto del AMR regular de $L^2(\mathbb{R})$, se define W_j , como el complemento ortogonal de V_j en V_{j+1} ,

$$W_j \oplus V_j = V_{j+1} \quad (2.21)$$

Para funciones u en $L^2(\mathbb{R})$ y para cada $j \in \mathbb{Z}$, se definen el operador de aproximación P_j de la forma siguiente,

$$P_j u(x) = \sum_k \langle u, \phi_{j,k} \rangle \phi_{j,k}(x) \quad (2.22)$$

y el operador de detalle, Q_j ,

$$Q_j u(x) = P_{j+1} u(x) - P_j u(x) \quad (2.23)$$

El operador (2.22) da la proyección ortogonal sobre V_j .

Asociada a la función de escala ϕ existe una función ψ , llamada wavelet madre en V_1 tal que $\{\psi_{j,k}(x)\}_{k \in \mathbb{Z}}$, constituye una base ortonormal (de Riesz) de W_j y $\{\psi_{j,k}(x)\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$, donde

$$\psi_{j,k} = 2^{j/2} \psi(2^j x - k) \quad (2.24)$$

es una base ortonormal (de Riesz) de $L^2(\mathbb{R})$. Es importante señalar que esta función es única (módulo traslaciones enteras).

Con el fin de describir las ecuaciones de definición sobre la wavelet madre ψ , basta tomar $j = 0$. Dado que $\psi \in V_1$, y V_1 está generado por $\phi(2x - k), k \in \mathbb{Z}$, existe un desarrollo convergente en $L^2(\mathbb{R})$ tal que:

$$\psi(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} g_k \phi(2x - k) \quad (2.25)$$

y como ψ debe ser ortogonal a V_0 ,

$$\int_{\mathbb{R}} \phi(x - k) \psi(x) dx = 0, \quad k \in \mathbb{Z} \quad (2.26)$$

Estas últimas expresiones se trasladan al dominio de frecuencia:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \left| \widehat{\psi}(\omega + 2k\pi) \right|^2 = 1 \quad (2.27)$$

$$\widehat{\psi}(\omega) = G(\omega/2) \widehat{\phi}(\omega/2) \quad (2.28)$$

$$G(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} g_k e^{-2\pi i k \omega} \quad (2.29)$$

y resultan expresiones análogas a (2.14) y (2.15) de la función de escala y donde, la función periódica G de período 2π , es llamado *filtro de la wavelet*.

El teorema que sigue provee un algoritmo para construir una base wavelet ortonormal en el marco de un Análisis de Multirresolución [75].

Teorema 2.21:

Sea V_j un AMR con función de escala ϕ y filtro de escala $h_k \in l^1(\mathbb{Z})$. Se define el filtro de la wavelet g_k por

$$g_k = (-1)^k h_{1-k} \quad (2.30)$$

y la wavelet $\psi(x)$ tiene la expresión

$$\psi(x) = \sqrt{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} g_k \phi(2x - k) \quad (2.31)$$

Regularidad de las bases ortogonales de wavelets

La wavelet de Meyer proporciona un ejemplo de regularidad C^∞ , y decae más rápido que el inverso de cualquier polinomio (aunque no llega a decaer exponencialmente). Las wavelets de Battle-Lemarié también pueden diseñarse para estar en C^k , k finito, y tienen decaimiento exponencial (mayor decaimiento cuanto más grande es k). Del teorema que sigue de I. Daubechies [52] surge que las bases ortonormales de wavelets no pueden reunir las propiedades de ser C^∞ y tener decaimiento exponencial. Por otro lado, y como se demuestra en [65], los marcos no tienen esta restricción.

Teorema 2.22:

Supongamos dos funciones no constantes f y \tilde{f} tales que

$$\langle f_{j,k}, \tilde{f}_{j',k'} \rangle = \delta_{j,j'} \delta_{k,k'}$$

donde $f_{j,k} = 2^{j/2} f(2^j x - k)$, $\tilde{f}_{j,k} = 2^{j/2} \tilde{f}(2^j x - k)$. Si $|\tilde{f}(x)| \leq C(1 + |x|)^{-\alpha}$, $\alpha > m + 1$, $y f \in C^m$ con $f^{(l)}$ acotada para $l \leq m$, entonces, $\tilde{f}(x)$ tiene m momentos nulos, es decir se verifica,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(x) x^k dx = 0, \quad 0 \leq k \leq m \quad (2.32)$$

Observación 2.23: La propiedad de las wavelets de tener momentos nulos sale de un Corolario del Teorema 2.22 [52] considerando que el caso particular $f = \tilde{f} = \psi$ y que $\psi_{j,k}$ son un sistema ortonormal de $L^2(\mathbb{R})$. Es importante resaltar que la suavidad de la wavelet está limitada, entonces, por la cantidad de momentos nulos que tiene y de acuerdo a (2.32) es un parámetro que muestra cuán hábil es la wavelet para suprimir un polinomio de grado dado y está relacionado, además, con la multiplicidad de la raíz $\omega = 0$ de $\hat{\psi}(\omega)$. En un AMR, la condición que la wavelet ψ tiene m momentos nulos resulta equivalente a la posibilidad de la función de escala ϕ de reproducir polinomios de hasta grado m [75].

2.3.5. Ejemplos de bases wavelets

- En el sistema de Haar del Ejemplo 2.17(2) los coeficientes del filtro de la función de escala son:

$$h_k = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} & \text{si } k = 0, 1 \\ 0 & \text{si } k \neq 0, 1 \end{cases}$$

y por el Teorema 2.21 y por la expresión del filtro (2.30)

$$g_k = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} & \text{si } k = 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \text{si } k = 1 \\ 0 & \text{si } k \neq 0, 1 \end{cases}$$

Luego, usando (2.31), se obtiene la expresión de la wavelet

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\phi_{1,0} - \frac{1}{\sqrt{2}}\phi_{1,1}$$

Observación 2.24: Mientras la función de escala de Haar tiene una expresión en la variable x sencilla y su filtro tiene sólo dos coeficientes no nulos, la función de escala de Shannon del Ejemplo 2.17(1) es sencilla en la variable de frecuencias ω pero su filtro tiene infinitos coeficientes no nulos. Se consideran, en cierto sentido, que estas dos wavelets son duales.

- En el MRA de funciones lineales a trozos del Ejemplo 2.17(3), la función de escala es

$$\phi(x) = \frac{1}{2\sqrt{2}}\phi_{1,-1}(x) + \frac{1}{\sqrt{2}}\phi_{1,0}(x) + \frac{1}{2\sqrt{2}}\phi_{1,1}(x)$$

de donde,

$$\widehat{\phi}(\omega) = \cos^2\left(\pi\frac{\omega}{2}\right)\phi\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

y luego, a partir de una expresión similar para $\widehat{\psi}(\omega)$ [75], se obtiene la wavelet, $\psi(x)$.

2.3.6. Algoritmo de Mallat

Las operaciones de *Análisis* y de *Síntesis* de una función de $L^2(\mathbb{R})$ definida a partir de valores de muestreo se realiza en forma recursiva, utilizando los coeficientes de los filtros h_k y g_k mediante un esquema denominado Algoritmo de Mallat [56], cuya complejidad es equivalente a la de la transformada rápida de Fourier.

2.3.7. Extensiones y generalidades

La estructura del AMR es el marco apropiado para el análisis y síntesis de una función. Actualmente, las funciones de escala y las wavelets pueden emplearse para otro tipo de aplicaciones, como casos especiales de funciones de forma a utilizar en aproximaciones del tipo Galerkin de operadores diferenciales, interpolaciones y problemas inversos.

2.4. AMR Splines

Las funciones splines han tenido un impacto significativo en la teoría de la transformada wavelet ([65],[80]). El primer ejemplo de wavelets spline es la wavelet de Haar, mencionada anteriormente, que es una spline de grado 0, y cuya construcción fue extendida a splines de órdenes más altos por Strömberg [79]. Además de tener las mejores propiedades en cuanto a su capacidad de aproximar funciones suaves, las wavelets spline poseen una formulación explícita tanto en el dominio del tiempo o espacio como en el de frecuencia.

Uno de los ejemplos más conocidos de las wavelets spline son las wavelets ortogonales de Battle-Lemarié ([45],[46]), que pueden verse como las precursoras del AMR y de la transformada wavelet de Mallat. Por otro lado, también las splines se han utilizado para la construcción de bases no ortogonales, como las semi-ortogonales, las biortogonales y las shift-ortogonales. La razón de esto último es que, a pesar de relajar la ortogonalidad estas splines tienen características muy ventajosas, como por ejemplo, las wavelets B-splines, que tienen soporte compacto y se describirán en detalle más adelante. Por último, las wavelets de Cohen-Daubechies-Feauveau son wavelets biortogonales que también son splines.

La expresión explícita de las wavelets spline constituye una de sus ventajas principales con respecto a otras wavelets, ya que se facilita la implementación computacional. En otros casos, como las wavelets de Daubechies [51], están especificadas vía la relación de dos escalas. Deben implementarse, en esos casos, algoritmos que permiten el cálculo y la evaluación de la función y sus derivadas, con la desventaja que, con frecuencia, resulta necesario el análisis de convergencia de los mismos.

2.4.1. Splines polinomiales

Las splines polinomiales fueron introducidas en el Ejemplo 2.17(4). Schoenberg [77] demostró en 1946 que cualquier spline polinomial puede ser representada en términos de las B-splines, las que se definen recursivamente mediante convoluciones:

$$\begin{aligned}\varphi_1(x) &= \chi_{[0,1]}(x) \\ \varphi_{m+1}(x) &= \varphi_m * \varphi_1(x)\end{aligned}\tag{2.33}$$

La B-spline de orden $m + 1$ satisface la relación de 2-escalas (2.13)

$$\varphi_{m+1}(x) = \sqrt{2} \sum_k h_k \varphi_{m+1}(2x - k)\tag{2.34}$$

donde h_k es el filtro binomial de orden $m + 1$ cuya función de transferencia (2.15) es,

$$H_{m+1}(\omega) = \sqrt{2} \left(\frac{1 + e^{-i\omega}}{2} \right)^{m+1}\tag{2.35}$$

Para un m dado el espacio V_0 puede especificarse como $V_0 = \{ \sqrt{2} \sum_k c_k \varphi_{m+1}(x - k) \}$ donde los pesos $c_k \in l^2(\mathbb{Z})$ son los llamados coeficientes B-spline.

Además, puede demostrarse que las B-splines constituyen una base de Riesz de V_0 en el sentido de la desigualdad (2.1), i.e. existen constantes $0 < A_{m+1} \leq B_{m+1} < \infty$ tales que,

$$A_{m+1} \|c_k\|_{l^2}^2 \leq \left\| \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \varphi_{m+1}(x - k) \right\|_{L^2}^2 \leq B_{m+1} \|c_k\|_{l^2}^2\tag{2.36}$$

Las B-splines son funciones linealmente independientes que constituyen las funciones de escala de una estructura AMR. Es importante destacar que son las funciones de escala de soporte más pequeño y las más regulares para un grado de polinomio dado [77]. En las Figuras 2.1 y 2.2 se muestran las B-splines correspondientes a $m = 2$ y $m = 3$ respectivamente.

En ese Análisis de Multirresolución V_0 puede elegirse como el subespacio generado por traslaciones de la función de escala φ_{m+1} , como se dijo antes, y para cada $j \in \mathbb{Z}$, la familia $\{ \varphi_{m+1,j,k} \}_{k \in \mathbb{Z}}$, donde

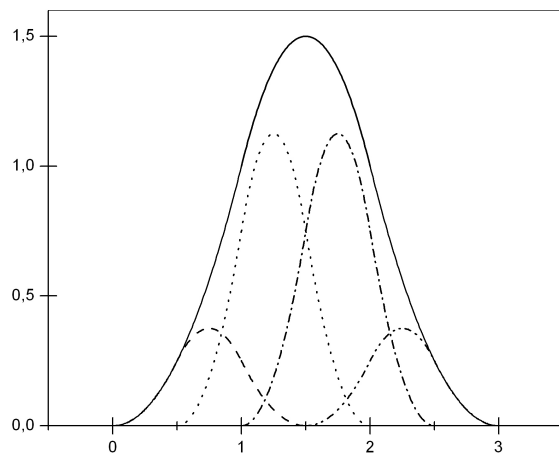


Figura 2.1: Relación de dos escalas B-spline, $m = 2$

$$\varphi_{m+1,j,k}(x) = 2^{j/2} \varphi_{m+1}(2^j x - k) \quad (2.37)$$

es una base de V_j . Estos subespacios V_j satisfacen las propiedades descritas en la Sección 2.3.1.

2.4.2. Propiedades básicas de las B-splines

Las wavelets semi-ortogonales son ortogonales entre escalas diferentes. Se relaja el requerimiento de las funciones base de ser ortogonales a sus trasladadas para una misma escala. Chui et. al [47] y Unser et. al [43] en forma independiente construyeron el primer ejemplo: las B-spline wavelets de soporte compacto que se muestran en Figura 2.3(b) que son las wavelets que se corresponden con las B-splines. Se demostró, además, que pueden generarse otras wavelets spline semi-ortogonales tomando combinaciones lineales adecuadas [41]. Estas wavelets son versátiles, porque es posible elegir la sucesión de coeficientes tal que las funciones tengan determinadas propiedades de interpolación, ortogonalidad o localización en tiempo-frecuencia óptima. Algunas de las funciones de escala y wavelets semi-ortogonales resultan de soporte compacto, sin embargo, esto no siempre ocurre y en esos caso hay que utilizar implementaciones recursivas particulares [41].

Entre las propiedades que tienen las B-splines, las más importantes son:

- Tienen una formulación explícita tanto en el dominio del tiempo como en el de frecuencia. Expresando la propiedad de convolución (2.33) como producto en el dominio

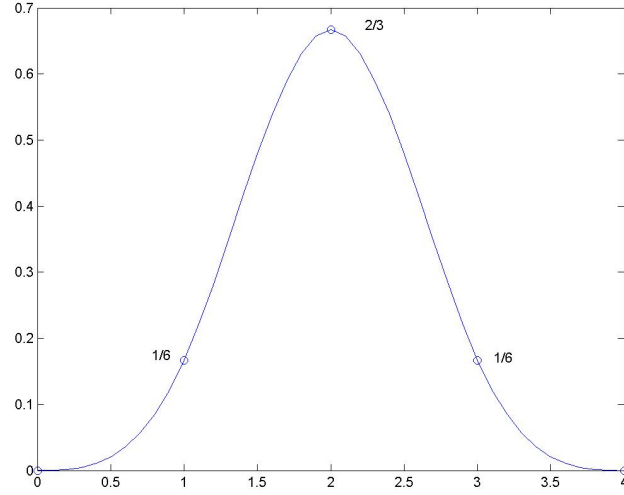


Figura 2.2: B-spline cúbica, $m = 3$

de Fourier,

$$\widehat{\varphi}_{m+1}(\omega) = (\widehat{\varphi}_1(\omega))^{m+1} = \left(\frac{1 - e^{-i\omega}}{i\omega}\right)^{m+1} \quad (2.38)$$

que puede reescribirse usando la expansión binomial,

$$\widehat{\varphi}_{m+1}(\omega) = \sum_{k=0}^{m+1} \binom{m+1}{k} (-1)^k \frac{e^{-i\omega k}}{(i\omega)^{m+1}} \quad (2.39)$$

de donde se obtiene,

$$\varphi_{m+1}(x) = \frac{1}{m!} \sum_{k=0}^{m+1} (-1)^k \binom{m+1}{k} (x-k)_+^m \quad (2.40)$$

donde $(x)_+^m = \max(0, x)^m$. $\varphi_{m+1}(x)$ es un polinomio a trozos de grado m , con $m - 1$ derivadas continuas.

- Soporte compacto: $\text{sop}(\varphi_{m+1}) = [0, m + 1]$.
- Simetría con respecto a $x_c = (m + 1)/2$ (para m impar):

$$\varphi_{m+1}(x) = \varphi_{m+1}(m + 1 - x) \quad (2.41)$$

- Relación de 2 escalas:

$$\varphi_{m+1}(x) = 2^{-m} \sum_{k=0}^{m+1} \binom{m+1}{k} \varphi_{m+1}(2x - k) \quad (2.42)$$

Esta expresión (cuya obtención se muestra en el Apéndice A) es conocida como *Relación de 2 escalas para las B-splines de orden $m + 1$* .

- La expresión (2.40) de $\varphi_{m+1}(x)$ puede interpretarse como la diferencia hacia adelante m -ésima de la función $(x)^m$, o sea,

$$\varphi_{m+1}(x) = \Delta_m(x)^m \quad (2.43)$$

donde Δ_m se obtiene de aplicar m veces el operador hacia adelante $\Delta f(x) = f(x) - f(x - 1)$

- Máxima regularidad para un orden dado: son las funciones de escala más suaves para una longitud de filtro dada.
- Derivadas de orden $1 \leq k \leq m - 1$ se obtienen directamente por diferencia:

$$\frac{d^k}{dx^k} \varphi_{m+1}(x) = \Delta^k \varphi_{m+1-k}(x) \quad (2.44)$$

donde Δ^k es el operador diferencia de orden k . Corresponde, entonces, a una reducción en k del orden de la spline. Similarmente, la integración produce un incremento en su orden. Estas relaciones resultan muy útiles al utilizar las wavelets spline en la resolución de ecuaciones diferenciales.

- Propiedades de interpolación: Para cualquier $f(x)$ cuya derivada m -ésima sea de cuadrado integrable, el interpolante de grado $2m - 1$ mediante splines es óptimo en el sentido que minimiza la norma de la energía, dando la mínima oscilación. Para $m = 3$ interpolantes con spline cúbicas garantizan la propiedad de mínima curvatura.
- Mejor aproximación: Para una spline polinomial de orden $m + 1$, el error de aproximación decrece con la potencia $m + 1$ de la escala 2^j [42]. Es más, se tiene la siguiente relación asintótica

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \|f - P_j f\|_{L^2} = C_\varphi 2^{-j(m+1)} \|f^{(m+1)}\|_{L^2} \quad (2.45)$$

donde $P_j f$ es la proyección de f sobre el espacio de multirresolución en la escala j (2.22). Esta fórmula del error es válida siempre que 2^{-j} sea suficientemente pequeño con respecto a la suavidad de f y la constante C_φ es la menor que puede obtenerse entre todas las transformadas wavelet del mismo orden [43]. Así, por ejemplo, las constantes con las wavelets de Daubechies son más grandes y, entonces, las splines verifican las mejores propiedades para aproximar funciones suaves.

- Óptima localización en tiempo-frecuencia
- Del producto de convoluciones:

$$\varphi_{m+1} * \varphi_{n+1}(x) = \varphi_{m+n+2}(x) \quad (2.46)$$

resulta:

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi_{m+1}(x - k) \varphi_{n+1}(x - l) dx = \varphi_{m+n+2}(n + 1 + l - k) \quad (2.47)$$

O sea que calcular productos internos de las funciones splines consiste en la simple evaluación en los enteros de splines de orden más alto.

2.4.3. Splines de soporte compacto

La construcción de wavelets biortogonales involucra dos Análisis de Multirresolución de $L^2(\mathbb{R})$: uno para el análisis y otro para la síntesis (mencionados en la Sección 2.3.6). Ellos se denotan $\{V_j(\bar{\phi})\}_{j \in \mathbb{Z}}$ y $\{V_j(\phi)\}_{j \in \mathbb{Z}}$ donde $\bar{\phi}(x)$ y $\phi(x)$ son las funciones de escala del análisis y de la síntesis, respectivamente (y son soluciones arbitrarias de relaciones de dos escalas, no necesariamente B-splines). Las wavelets correspondientes al análisis y a la síntesis, $\bar{\psi}(x)$ y $\psi(x)$ son construidas tomando combinaciones lineales con esas funciones de escala

$$\bar{\psi}(x) = \sqrt{2} \sum_k \bar{g}_k \bar{\phi}(2x - k) \quad (2.48)$$

$$\psi(x) = \sqrt{2} \sum_k g_k \phi(2x - k) \quad (2.49)$$

y forman un conjunto biortogonal en el sentido que se tiene,

$$\langle \psi_{i,k}, \bar{\psi}_{j,l} \rangle = \delta_{i-j, k-l} \quad (2.50)$$

teniendo en cuenta que -como se hizo con la función de escala-, las funciones wavelets se gene-

ran a partir de la composición de dilataciones y traslaciones enteras de la wavelet madre (ver (2.24)). Las bases subyacentes, en este caso, están especificadas indirectamente en términos de cuatro sucesiones h_k, \bar{h}_k, g_k y \bar{g}_k que son los filtros para el algoritmo de la transformada wavelet [56].

2.4.4. Wavelets spline

Se tiene una transformada wavelet spline si las funciones de síntesis $\psi(x)$ y $\varphi(x)$ son splines polinómicas. Esto significa, -a partir de la propiedad mencionada en la Sección 2.4.1- que la wavelet puede ser representada por su expansión en B-splines

$$\psi(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} w_k \varphi_{m+1}(2x - k) \quad (2.51)$$

Es importante observar que la función de escala no es necesariamente la B-spline de grado m , al menos que h_k sea precisamente el filtro binomial (2.35). Esta función es especificada, generalmente, como la solución de la relación de dos escalas de la (2.13). En el caso particular de las splines, se demuestra que siempre existe una sucesión p_k tal que

$$\phi(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} p_k \varphi_{m+1}(2x - k) \quad (2.52)$$

y entonces, la sucesión p_k define un operador de convolución invertible de $l^2(\mathbb{Z})$ en $l^2(\mathbb{Z})$ que hace el cambio de coordenadas de un sistema a otro (de φ a φ_{m+1}). Luego, combinando la (2.49) con la función de escala de la (2.52), se obtienen los coeficientes B-spline de la wavelet $\psi(x)$.

En el cuadro a continuación se describen los cuatro tipos principales de wavelets spline. Éstos se diferencian por sus propiedades de ortogonalidad, soporte compacto y regularidad

y se resumen en el mismo. En la Figura 2.3 se presentan ejemplos de wavelets spline cúbicas de cada tipo.

Tipo de wavelet	Propiedades importantes
Splines ortogonales (Battle-Lemarié, Mallat)	Simetría y regularidad Ortogonalidad No tienen soporte compacto
Splines semiortogonales B-splines (Unser-Aldroubi)	Simetría y regularidad Óptima localización en tiempo-frecuencia Ortogonalidad entre escalas distintas Pueden diseñarse para tener soporte compacto
Splines shift-ortogonales (Unser-Aldroubi)	Simetría y regularidad Cuasi-ortogonalidad Rápido decaimiento de la wavelet
Splines biortogonales (Cohen- Daubechies-Feauveau)	Simetría y regularidad Soporte compacto No son ortogonales

2.4.5. Funciones de escala y B-splines

A partir de la propiedad (2.45) referida a la propiedad de aproximación de una B-spline puede darse la definición general,

Definición 2.25:

Una función de escala φ tiene orden de aproximación γ si y sólo si

$$\forall f \in \mathcal{F}, \|f - P_j f\|_{L^2} \leq C 2^{-j\gamma} \|f^{(\gamma)}\|_{L^2} \quad (2.53)$$

donde C es una constante que depende de φ pero no de f . (\mathcal{F} es alguna clase de funciones adecuada [44] y P_j la proyección definida en (2.22)).

Una función de escala φ de orden γ será válida si y sólo si su transformada de Fourier $\widehat{\varphi}$ puede factorizarse $\widehat{\varphi}(\omega) = \widehat{\beta}^{\gamma-1}(\omega) \cdot \widehat{\varphi}_0(\omega)$, donde $\widehat{\beta}^{\gamma-1}(\omega)$ es la transformada de Fourier de una B-spline fraccional y $\widehat{\varphi}_0(\omega)$ es una función de ω acotada en cualquier intervalo cerrado. Esto equivale a una convolución bien definida en el dominio del tiempo, $\varphi(x) = (\beta^{\gamma-1} * \varphi_0)(x)$ donde φ_0 es una distribución con integral 1 [44]. Esto significa que siempre es posible expresar una función de escala como la convolución entre una B-spline y una distribución.

Se deduce de lo anterior que las propiedades buenas de las wavelets, como son orden de aproximación, reproducción de polinomios, momentos nulos y suavidad de las funciones base, se deben enteramente a la componente B-spline en la función de escala. Esto implica, más aún, como demostró Unser en [44], que no es posible construir bases multirresolución de $L^2(\mathbb{R})$ sin factores B-spline.

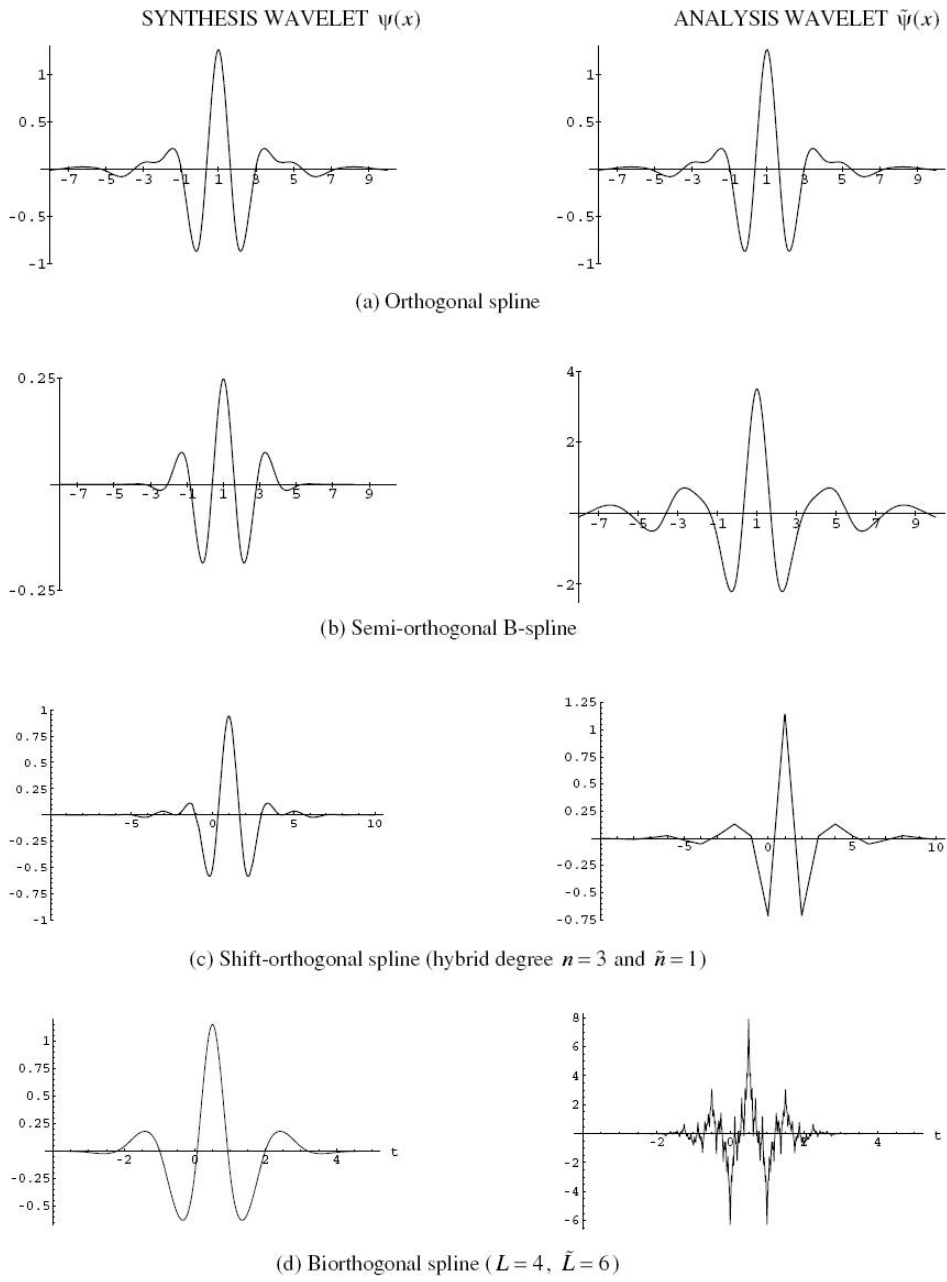


Figura 2.3: Funciones de escala y splines cúbicas: a) ortogonales b) semiortogonales, c) shift-ortogonales d) biortogonales

2.5. AMR Daubechies

2.5.1. Wavelets de Daubechies

Si la familia $\{\psi_{j,k}\}$ es una base de wavelets ortonormal, y la wavelet $\psi(x)$ es suave, entonces debe tener momentos nulos (ver (2.32)) y cuanto mayor suavidad, más cantidad de momentos nulos. Esto fue demostrado por Walnut en [75] y es consecuencia del Teorema 2.22 y la Observación 2.23.

En 1988 Ingrid Daubechies [52], con el interés de construir bases ortogonales de funciones suaves y con el requerimiento de varios momentos nulos, pudo construir una familia de bases ortonormales, suaves y de soporte compacto. Las wavelets de Daubechies son las que tienen mayor cantidad de momentos nulos para su soporte.

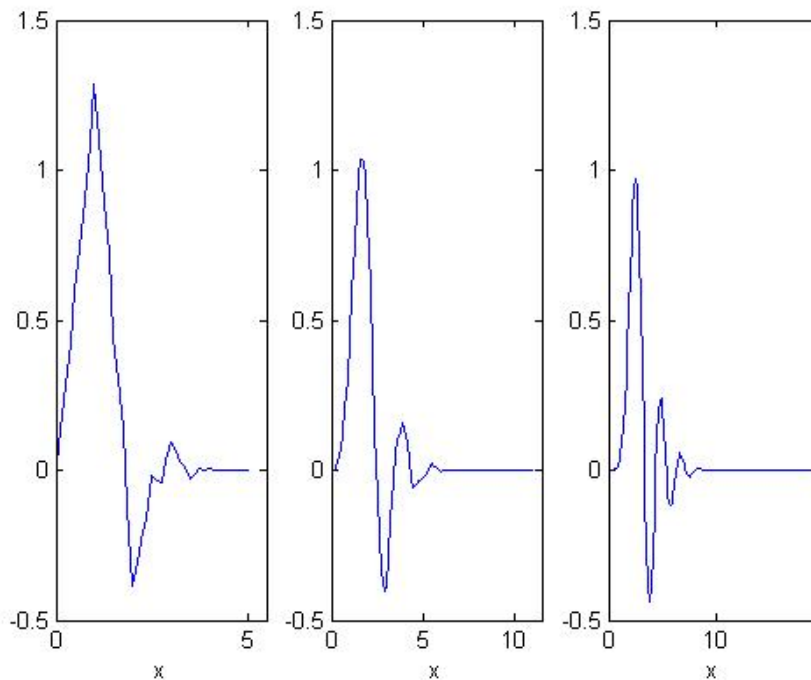


Figura 2.4: Funciones de escala de Daubechies. $N = 6$, $N = 12$ y $N = 20$

De lo anterior surge que, como en el caso de las B-splines, sólo finitos coeficientes del filtro de la escala h_k en (2.15) son no nulos, y en este caso, además, su longitud es $2N$. Está demostrado por Daubechies en [52] que para que la función de escala ϕ y la wavelet ψ sean regulares, el filtro de la función de escala deberá ser de la forma,

$$H_N(\omega) = \left(\frac{1 + e^{-2\pi i \omega}}{2} \right)^N \mathcal{L}(\omega) \quad (2.54)$$

con $N \geq 1$, y \mathcal{L} un polinomio trigonométrico.

Teniendo en cuenta que se debe cumplir la condición (2.16), y siguiendo la notación utilizada por Walnut [75] es posible hallar los coeficientes para cada N luego de realizar varias operaciones algebraicas. En el Apéndice A se muestra en detalle el desarrollo para $N = 1, 2$ y 3 , con $2, 4$ y 6 coeficientes respectivamente.

2.5.2. Función de escala

La familia de wavelets de Daubechies [53] está gobernada por un conjunto de N (entero par) coeficientes $p_k : k = 0, 1, \dots, N - 1$. Para cada $N \in \mathbb{N}$ se tendrán la wavelet y la función de escala que llamaremos de orden N , y denotamos ψ_N y ϕ_N .

La función de escala $\phi_N(x)$ satisface la relación de dos escalas (2.13)

$$\phi_N(x) = \sum_{k=0}^{N-1} p_k \phi_N(2x - k) \quad (2.55)$$

Su regularidad aumenta al aumentar N como se muestra en la Figura 2.4.

De la misma forma, como se describió en (2.30) y (2.31) la wavelet madre puede escribirse,

$$\psi_N(x) = \sum_{k=2-N}^1 q_k \phi_N(2x - k) \quad (2.56)$$

En las ecuaciones (2.55) y (2.56), p_k y q_k son los coeficientes del filtro de la función de escala y de la wavelet correspondiente, cuyos soportes son, respectivamente,

$$\text{sup}\phi_N(x) = [0, N - 1] \quad (2.57)$$

y

$$\text{sup}\psi_N(x) = \left[1 - \frac{N}{2}, \frac{N}{2} \right] \quad (2.58)$$

En la Figura 2.5 se muestran la función de escala y la wavelet correspondientes a $N = 6$.

En su trabajo, I. Daubechies [53] encontró la relación entre momentos nulos y regularidad de la wavelet $\psi_N(x)$ y de la función de escala $\phi_N(x)$. Una condición necesaria y suficiente para tener m momentos nulos es que las trasladadas enteras de la función de escala $\phi_N(x)$ interpolen polinomios de grado hasta m , es decir, que para cada k , $0 \leq k \leq m$ existan constantes tales que,

$$x^k = \sum_i c_i \phi_i(x) \quad (2.59)$$

Estos coeficientes c_i estarán dados por los momentos, es decir,

$$c_i = M_i^k = \int_{-\infty}^{\infty} x^k \phi(x - i) dx \quad (2.60)$$

Está demostrado que $m = N/2 - 1$ para la función de escala $\phi_N(x)$ y también que existe un $\lambda > 0$ tal que $\phi_N(x)$ tiene $\lambda(N/2 - 1)$ derivadas continuas y para N pequeño, $\lambda > 0.55$ [82]. Así, por ejemplo, se tiene que en el caso $N = 6$, $\lambda \cdot 2 \approx 1.1$, y para $N = 12$, $\lambda \cdot 5 \approx 2.5$.

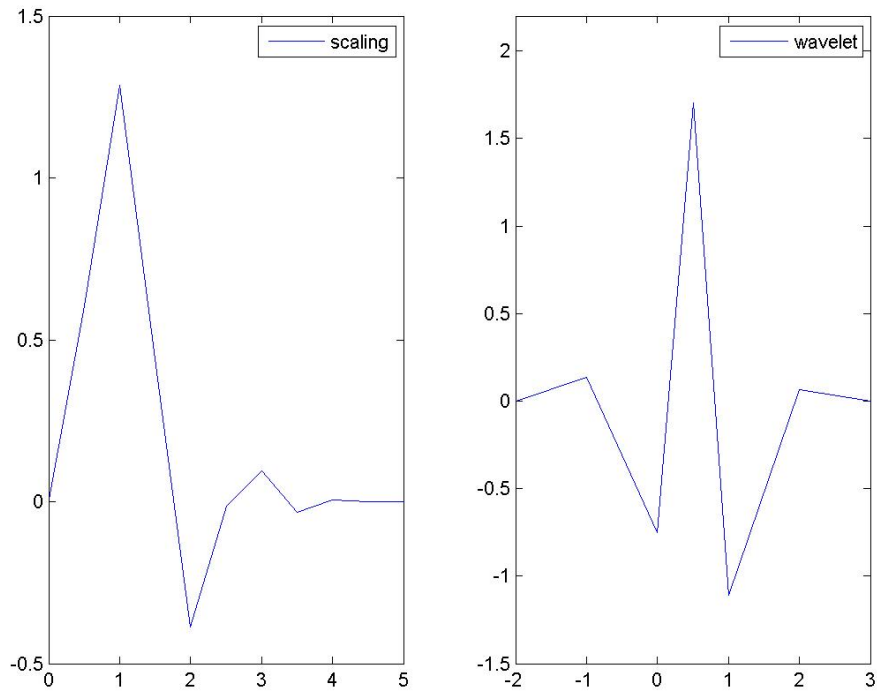


Figura 2.5: Función de escala y wavelet de Daubechies. $N = 6$

Evaluación de la función y de sus derivadas

Como la función de escala no tiene una expresión explícita, se deberán considerar puntos especiales para evaluar, tanto la función de escala como sus derivadas. Para esto, comenzamos por derivar la relación de dos escalas, (2.55), m veces, y denotamos $\phi_N^{(m)}(x)$ la m -ésima derivada de la función de escala

$$\phi_N^{(m)}(x) = 2^m \sum_{k=0}^{N-1} p_k \phi_N^{(m)}(2x - k) \quad (2.61)$$

A partir de la evaluación de (2.61) en todos los valores enteros del intervalo $[0, N - 1]$,

se tiene el siguiente sistema lineal de ecuaciones:

$$\begin{aligned}
\phi_N^{(m)}(0) &= 2^m p_0 \phi_N^{(m)}(0) \\
\phi_N^{(m)}(1) &= 2^m [p_0 \phi_N^{(m)}(2) + p_1 \phi_N^{(m)}(1) + p_2 \phi_N^{(m)}(0)] \\
&\dots \quad \dots \\
\phi_N^{(m)}(N-2) &= 2^m [p_{N-3} \phi_N^{(m)}(N-1) + p_{N-2} \phi_N^{(m)}(N-2) + p_{N-1} \phi_N^{(m)}(N-3)] \\
\phi_N^{(m)}(N-1) &= 2^m p_{N-1} \phi_N^{(m)}(N-1)
\end{aligned} \tag{2.62}$$

que también puede escribirse en forma matricial como

$$(2^m P - I) [\bar{\phi}_N^{(m)}] = 0 \tag{2.63}$$

donde, $[\bar{\phi}_N^{(m)}] = [\phi_N^{(m)}(0), \phi_N^{(m)}(1), \dots, \phi_N^{(m)}(N-1)]^t$, I es la matriz identidad y P la matriz compuesta de los coeficientes del filtro, que puede expresarse

$$P = p_{2i-k-1} \mathbb{1}_{1 \leq i, k \leq N} \tag{2.64}$$

En (2.64), si $2i - k - 1 < 0$ o $2i - k - 1 > N - 1$, $p_{2i-k-1} = 0$.

Es claro que la solución de (2.63) no es única. Se debe agregar, entonces, una condición de normalización para obtener un autovector, $[\bar{\phi}_N^{(m)}]$, que sea único.

A partir de las propiedades de las funciones de escala de Daubechies, se tiene que:

$$\sum_k k^m \phi_N(x-k) = x^m + \sum_{k=1}^m (-1)^k \frac{m!}{(m-k)!k!} x^{m-k} M_k^{\phi_N} \tag{2.65}$$

donde,

$$M_k^{\phi_N} = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_N(z) z^k dz \tag{2.66}$$

son los momentos de la función ϕ_N . En el Apéndice B se presenta un algoritmo recursivo para su cálculo.

Cabe señalar que la (2.65) es conocida cuando todos los momentos son nulos. El caso general se obtiene mediante transformada de Fourier o usando la regla de Leibniz [82]. Agregando esta condición de normalización a (2.62), el sistema no-homogéneo de ecuaciones puede resolverse y las derivadas pueden evaluarse en valores enteros de x y luego utilizarse para obtener los valores en los puntos diádicos. Usando la relación de dos escalas nuevamente pueden ser determinados los valores de $\phi_N^{(m)}(x)$ en $x = \frac{i}{2^n}$, con $n \in \mathbb{Z}$, para los enteros $i = 1, 3, 5, \dots, 2^n(N-1) - 1$. De esa forma, las funciones son evaluadas primero en los enteros $\{0, 1, \dots, N-1\}$, y luego en todos los diádicos, aumentando el valor de n desde 0 hasta la resolución deseada.

2.6. AMR en un intervalo

Hasta ahora se han discutido wavelets sobre la recta real. Para muchas aplicaciones es necesario restringirse a un conjunto acotado (en el caso unidimensional a un intervalo $I = [a, b]$)

sobre el que está definida la función e interesa localizar la estructura del Análisis de Multirresolución. El problema que se plantea es, entonces, la definición de wavelets sobre el intervalo, que sin pérdida de generalidad se asumirá el $[0,1]$. Dada una función f en el intervalo $[0,1]$, la solución más obvia es extenderla a la recta real definiendo la función f como $f(x)=0$ fuera del intervalo y utilizar la teoría anterior. Sin embargo en general, esta solución provoca discontinuidades fuera en los límites del intervalo. Otra aproximación está basada en considerar que la función es periódica con período 1, $f(x+1)=f(x)$. Esto permite reescribir las expansiones de funciones en la recta real en el intervalo $[0,1]$ mediante la periodización de las funciones básicas.

En este trabajo se desarrolla la construcción de bases wavelets sobre el intervalo de una forma análoga al caso en $L^2(\mathbb{R})$.

2.6.1. Restricción al intervalo

La simple restricción de las funciones de escala y las wavelets al intervalo no conllevan a una solución eficiente del problema, ya que los coeficientes correspondientes reflejan la información de la función fuera del intervalo o el efecto de los bordes que implica su eventual extensión nula fuera de I .

En efecto: si $f \in L^2_{loc}(\mathbb{R})$ y $\{\psi_{j,k}\}$ es una base ortonormal de wavelets en el AMR de $L^2(\mathbb{R})$, denotemos J_I, K_I al conjunto de índices tal que $sop(\psi_{j,k})_{j \in J_I, k \in K_I} \cap [a, b] \neq \emptyset$.

Entonces $f(x) = \sum_{j \in J_I} \sum_{k \in K_I} \langle f, \psi_{j,k} \rangle \psi_{j,k}(x)$ $x \in [a, b]$ siendo $\langle \cdot, \cdot \rangle$ el producto usual en $L^2(\mathbb{R})$. Pero tales productos reflejan la información de f fuera del intervalo si $sop(\psi_{j,k}) \not\subset I$. Si se restringe la función, definiéndola como nula fuera del intervalo

$$f^I(x) = f(x)\chi_{[a,b]}(x) \quad (2.67)$$

los coeficientes $\langle f^I, \psi_{j,k} \rangle$ reflejarán las discontinuidades de los bordes. Por otra parte, las wavelets ya no son ortogonales si se toma el producto usual en I ,

$$\langle f, g \rangle_I = \int_0^1 f(x)\bar{g}(x)dx \quad (2.68)$$

Pueden encontrarse en la literatura (Mallat, [56], Meyer, [60]) que las extensiones por periodicidad o por simetría de f fuera del intervalo permiten definir estructuras AMR locales, útiles para ciertas aplicaciones. Citamos especialmente las wavelets periódicas [59] para el análisis de funciones en el toro (periódicas en un intervalo $[a, b]$).

Sin embargo, estas estructuras y otras posibles, se basan siempre en extensiones apropiadas de f fuera del intervalo. Esto hace inevitable reflejar la información de borde, en particular, las discontinuidades en las derivadas. Resulta más eficiente definir una estructura especial, análoga a la AMR, modificando apropiadamente los espacios de escala y los espacios wavelets, de modo que las correspondientes proyecciones reflejen la información de la función f estrictamente soportada en el intervalo [64].

2.6.2. Definición de AMR en el intervalo

Un AMR en $L^2(I)$ consiste, bajo este enfoque, en una sucesión de subespacios

$$\widehat{V}_{Jmin}^I \subset \widehat{V}_{Jmin+1}^I \cdots \subset \widehat{V}_{-1}^I \subset \widehat{V}_0^I \subset \widehat{V}_1^I \subset \widehat{V}_2^I \subset \cdots \quad (2.69)$$

de dimensión finita que comienza en una escala $Jmin$ que dependerá del intervalo I y del diseño particular del AMR.

Los subespacios cerrados \widehat{V}_j^I verifican las propiedades siguientes:

$$(MI1) \dim \widehat{V}_{j+1}^I \sim 2 \dim \widehat{V}_j^I$$

$$(MI2) \pi_r \in \widehat{V}_{Jmin}^I \text{ para todo polinomio de grado } 0 \leq r \leq m$$

$$(MI3) \overline{\bigcup \widehat{V}_j^I} = L^2(I)$$

$$(MI4) \widehat{W}_j^I \subset \widehat{V}_{j+1}^I \text{ es el complemento ortogonal de } \widehat{V}_j^I \text{ en } \widehat{V}_{j+1}^I \text{ de dimensión } 2^j$$

Observación 2.26: La escala $Jmin$ no es única: cualquier $j \geq Jmin$ servirá, pero existe una cota inferior. En un AMR sobre un intervalo no se tiene la propiedad de los subespacios encajados para j , $\lim_{j \rightarrow -\infty}$ como en la recta real definido en la Sección 2.3.

Dado que los subespacios son de dimensión finita, es inmediato que tienen bases de Riesz que las generan. La cuestión reside en definir las funciones elementales en \widehat{V}_j^I y \widehat{W}_j^I , de escala y wavelets apropiadas y en lo posible preservar las propiedades de invariancia de escala y traslación. Obsérvese que la condición (MI2) implica que si $\psi_{j,k} \in \widehat{W}_j^I$ tiene $m+1$ momentos nulos (ver 2.32).

Sin pérdida de generalidad, sea $I = [0, 1]$ y consideremos un AMR en $L^2(\mathbb{R})$ donde la función de escala $\phi(x) \in V_0$ es de soporte compacto $sop(\phi) = [0, S]$ $S \in \mathbb{N}$. Por ejemplo, las funciones de escala de Daubechies o las B-splines. En tal caso, la relación de doble escala está dada por filtros finitos de longitud $S+1$. Por otra parte, existe una wavelet $\psi \in V_1$ tal que posee soporte compacto mínimo en $[-S+1, S]$, centrado en $x = 1/2$. Así, en el caso de las splines cúbicas, el soporte de la función de escala es $[0, 4]$ y el de la wavelet $[-3, 4]$.

En tales condiciones, y dado que $sop(\phi_{j,k})$ definida en (2.4) es $[k/2^j, (S+k)/2^j]$, se tiene que $sop(\phi_{j,k}) \cap [0, 1] \neq \emptyset$ si y sólo si $1-S \leq k \leq 2^j - 1$, y $sop(\phi_{j,k}) \subset [0, 1]$ si y sólo si $0 \leq k \leq 2^j - S$ y $2^j - S \geq 0$.

La clase que interseca a $[0, 1]$ consta de $2^j + S - 1$ funciones y la clase de funciones interiores $2^j - S + 1$. Hay, pues, $2S - 2$ funciones de borde: $(S - 1)$ funciones donde $0 \in \text{int } sop(\phi_j)$, y $(S - 1)$ funciones donde $1 \in \text{int } sop(\phi_j)$.

Tomando j_0 tal que $2^{j_0} \geq S$ se define $\phi_{j,k}^I(x) = \phi_{j,k}(x)\chi_{[0,1]}(x)$. Tales funciones son idénticamente nulas, a menos que intersequen a $[0, 1]$. Luego, se define

$$\widehat{V}_j^I = \text{gen}\{\phi_{j,k}^I, 1-S \leq k \leq 2^j - 1\} \quad (2.70)$$

de dimensión $2^j + S - 1$.

Es fácil verificar que estos espacios satisfacen las condiciones $\widehat{V}_j^I \subset \widehat{V}_{j+1}^I$ y las (MI2) y (MI3). En particular, notar que si $f_j \in V_j$, en $L^2(\mathbb{R})$ puede escribirse

$$f_j = \sum_{k \in \mathbb{Z}} b_{j,k} \phi_{j,k} \quad (2.71)$$

y, por tanto

$$f_j \chi_{[0,1]} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} b_{j,k} \phi_{j,k}^I = \sum_{k=1-S}^{2^j-1} b_{j,k} \phi_{j,k}^I \quad (2.72)$$

Luego, la convergencia de las f_j a f en $L^2(\mathbb{R})$ implica la de $f_j \chi_{[0,1]}$ a $f \chi_{[0,1]}$ en $L^2[0, 1]$. Sin embargo, observar que $f_j \chi_{[0,1]}$ es una proyección en \widehat{V}_j , pero no necesariamente la ortogonal de $L^2[0, 1]$ en \widehat{V}_j^I .

Las funciones $\phi_{j,k}^I$ pueden considerarse las de escala en \widehat{V}_j^I . Las interiores coinciden con las wavelets clásicas y siempre son las restricciones de las $\phi(2^j x - k)$ al intervalo. Más aún, verifican la misma relación de doble escala, tomando en cuenta los índices de las $\phi_{j,k}^I$ no nulas.

El caso de las wavelets es distinto. Vemos que la dimensión de \widehat{W}_j^I es 2^j . Si el $\text{sop} \psi_{j,k}^I = [(1+k-S)/2^j, (S+k)/2^j]$, vemos que intersecan al $[0,1]$ si $1-S \leq k \leq 2^j + S - 2$ y son interiores si $S-1 \leq k \leq 2^j - S$, lo cual, por un lado impone que $2^{j_0} \geq 2S - 1$ y hay $2^j - 2S + 2$ wavelets interiores que coinciden con las clásicas.

Por otro lado, hay $2^j + 2S - 2$ que intersecan al $[0, 1]$, lo cual indica que las restricciones $\psi_{j,k} \chi_{[0,1]}$ no forman una base de \widehat{W}_j^I , son sobre completas. El diseño, pues, de las wavelets del borde, que junto a las interiores generan una base de \widehat{W}_j^I debe realizarse en forma especial (ver [59]). En nuestro caso, lo detallaremos sólo para el caso de funciones splines en el Capítulo 5, Sección 5.2.

Capítulo 3

Problemas de valores de contorno. Método de Galerkin

En este capítulo damos una breve descripción de la formulación variacional de un problema general de valores contorno y establecemos resultados que fundamentan los ulteriores desarrollos. En particular, introducimos las aproximaciones a las soluciones variacionales por medio de funciones de escala B-spline y funciones de escala de Daubechies. También presentamos fórmulas generales de error y el cálculo de los coeficientes de conexión.

3.1. Formulación variacional

Supongamos dado el siguiente problema general de valores de contorno:

$$\begin{cases} Lu = f & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \Gamma = \partial\Omega \end{cases} \quad (3.1)$$

donde L es un operador diferencial lineal y acotado de orden $2m$, definido en un espacio de Hilbert H y Ω es un dominio acotado con frontera Γ . Bajo apropiadas hipótesis sobre Ω y su frontera Γ , existe una única solución u , que no siempre es posible hallar en forma analítica o exacta.

La alternativa es, entonces, buscar una solución aproximada, siendo el *Método de Galerkin* una técnica clásica comúnmente utilizada para obtenerla.

Consideremos la forma bilineal definida por $a(\cdot, \cdot) = \langle Lu, v \rangle$, de $V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ y la funcional $F(v) = \langle f, v \rangle$, donde V es un subespacio de H y $\langle \cdot, \cdot \rangle$ el producto interno del espacio de Hilbert H . La formulación variacional o débil correspondiente al problema diferencial (3.1) puede establecerse, entonces, de la siguiente forma:

$$\text{Dado } F \in V', \text{ encontrar } u \in V \text{ tal que } a(u, v) = F(v) \quad \forall v \in V \quad (3.2)$$

donde la forma bilineal $a(\cdot, \cdot)$ es continua (i.e. existe C tal que $|a(v, w)| \leq C\|v\|_V\|w\|_V$, $\forall v, w \in V$) y coerciva en V , (i.e. existe $\rho > 0$ tal que $a(v, v) \geq \rho\|v\|_V^2$) y F es un operador lineal y continuo en V .

El Método de Galerkin consiste en aproximar la solución del problema variacional (3.2)

resolviendo un problema algebraico de dimensión finita. El problema se plantea entonces de la siguiente forma:

Dado un subespacio finito-dimensional $V_h \subset V$ y $F \in V'$, encontrar $u_h \in V_h$ tal que:

$$a(u_h, v_h) = F(v_h) \quad \forall v_h \in V_h \quad (3.3)$$

Por el Teorema de Lax-Milgram [12] sabemos que tanto el problema (3.2) como el (3.3) tienen solución única. Además, por el Lema de Céa [12]:

$$\|u - u_h\|_V^2 \leq \frac{C}{\rho} \inf_{v \in V_h} \|u - v\|_V^2 \quad (3.4)$$

donde C y ρ son las constantes de continuidad y coercividad de la forma bilineal a . De (3.4) se infiere que la solución obtenida por Galerkin minimiza la norma del error, salvo un factor constante, y converge a la solución exacta cuando V_h se aproxima a V .

La cota anterior (3.4) es conocida como *estimación de Céa* y es el punto de partida para derivar las propiedades de convergencia en los métodos de elementos finitos. Para el caso de los métodos estándar, donde V_h es el subespacio de funciones restringidas a un elemento finito son polinomios de cierto grado, existe una teoría muy completa de estimaciones de error ([12],[14]) en términos de h , que es el valor asociado al mayor diámetro de los elementos en una malla.

Además, si F es continua, (i.e. existe $\Lambda > 0$ tal que $|F(v)| \leq \Lambda \|v\|_V$) se tiene, que la solución única $u \in V$ verifica la estimación de estabilidad [14]:

$$\|u\|_V \leq \frac{\Lambda}{\rho}. \quad (3.5)$$

Problema algebraico equivalente

Sea $\{\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_{N_h}\}$ una base de V_h . Entonces, la única solución del problema planteado en (3.3) puede escribirse como una combinación lineal de estas funciones $u_h = \sum_{j=1}^{N_h} \alpha_j \phi_j$, de modo que dicha ecuación puede reescribirse como

$$\sum_{j=1}^{N_h} a(\phi_i, \phi_j) \alpha_j = F(\phi_i) \quad 1 \leq i \leq N_h \quad (3.6)$$

o, en forma matricial,

$$K\alpha = R \quad (3.7)$$

donde K es la matriz de rigidez con elementos $K_{i,j} = a(\phi_i, \phi_j)$, R el vector de cargas, $R_i = F(\phi_i)$ y $\alpha = (\alpha_j)_j$ el vector de coeficientes. Puede notarse que, como la forma bilineal a es V -elíptica, K es una matriz definida positiva y entonces el problema algebraico (3.7) también tiene solución única.

El método admite muchas variantes. En particular, la elección del subespacio V_h y de la base $\{\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_{N_h}\}$ estará orientada fundamentalmente al diseño de algoritmos eficientes para resolver el sistema lineal cuando aumenta la dimensión del espacio de aproximación.

Interesa que:

- la matriz K sea rala y con un número de condición razonablemente pequeño.
- la aproximación u_h , obtenida con la solución del sistema (3.7), debe ser una buena aproximación de la solución exacta u y en lo posible mejorable.

Si, por ejemplo, $H = L^2(\mathbb{R})$ y L es un operador diferencial de orden $2m$, $m \geq 1$, con condiciones de borde clásicas en $I = [a, b]$, la base elegida debe estar formada por funciones soportadas en I , suficientemente derivables y que verifiquen condiciones de borde nulas. Por otra parte, y como ya mencionamos, los elementos de matriz $a(\phi_i, \phi_j)$ deben ser fáciles de calcular y $a(\phi_i, \phi_j) = 0$, si $|i - j| \gg 0$.

De lo anterior y por las propiedades y características vistas, surge que los espacios de funciones en el contexto de un AMR (Secciones 2.4 y 2.5), con su restricción al intervalo (Sección 2.6), resultan adecuados para aproximar la solución al problema general de valores de contorno presentado en (3.1).

De esa forma, se combinan soporte pequeño, suavidad, ciertas condiciones de ortogonalidad y la simplicidad del cálculo, al estar las funciones básicas ϕ_i generadas a partir de una o varias funciones. Más aún, al ser las bases combinaciones lineales de dilaciones, traslaciones o modulaciones de las funciones *madre* generadoras que satisfacen ecuaciones de autosimilaridad o de escala, será posible refinar y ajustar la precisión en forma eficiente.

3.2. Estimaciones del error

A partir del Lema de Céa (3.4), el problema de hallar cotas para el error $\|u - u_h\|_V^2$ se reduce al problema local de evaluar los errores de interpolación. Este tema está desarrollado, por ejemplo, en [14] y es consecuencia de la acotación

$$\|u - u_h\|_V^2 \leq \|u - \pi u\|_V^2 \quad (3.8)$$

donde $\pi u \in V_h$ es el elemento del espacio V_h que interpola a u en los nodos con un polinomio de grado $\leq r$. Las desigualdades que resultan son [14]:

$$\|u - \pi u\|_{L^2}^2 \leq Ch^{r+1} |u|_{H^{r+1}}^2 \quad (3.9)$$

y

$$\|u - \pi u\|_{H^1}^2 \leq Ch^r |u|_{H^{r+1}}^2 \quad (3.10)$$

Las cotas del error dependen de la regularidad de la solución exacta u . Si $u \in H^{r+1}$ se dice que el orden del método es r .

Observación 3.1: De lo anterior surge la eficacia de la formulación variacional de los problemas elípticos: si se demuestra que la forma bilineal es continua, V -elíptica y la forma

lineal continua, se concluye existencia y unicidad de solución del problema variacional, también llamada solución débil del problema. Finalmente, si además se demuestra regularidad suficiente en dicha solución débil, se recupera la solución en sentido clásico.

Observación 3.2: En todos los casos las cotas del error tendrán expresiones de la forma $O(h^p)$, donde el orden p dependerá, como se dijo antes, de la regularidad de la solución u . En el caso que u no sea suficientemente regular los órdenes anteriores r y $r + 1$ no se alcanzan. Entonces, si $u \in H^s$, con $1 \leq s \leq r + 1$, en las cotas (3.9) y (3.10) aparecerá s en lugar de $(r + 1)$ y la convergencia es más lenta.

Consideremos ahora los casos particulares de los espacios de dimensión finita que serán utilizados en los capítulos siguientes para obtener soluciones numéricas a diferentes problemas de valores de contorno, como el presentado en (3.1). En el contexto de un AMR, como fue presentado en el Capítulo 2, la escala j adquiere el rol de h , el espaciado en la malla es $h = 2^{-j}$ y V_j es el espacio de dimensión finita.

▪ Aproximación mediante funciones splines cúbicas

Se demuestra en [78], que la función spline cúbica S_h que interpola una función suave $u \in C^4$ en una red uniforme de nodos, de paso h es:

$$\|u - S_h\|_{H^1}^2 \leq \frac{35}{24} h^4 \|u\|_\infty \quad (3.11)$$

Para el error de la aproximación, es válida, entonces, la cota

$$\|u - u_j\|_{L^2}^2 \leq C \left(\frac{1}{2^j}\right)^4 \quad (3.12)$$

▪ Aproximación mediante funciones de escala de Daubechies

En el caso de los espacios de funciones de escala de Daubechies también se conocen cotas para el error [6].

Si $u \in C^2$ es solución del P.V.C. (3.1) y u_j es la aproximación con las funciones de escala de Daubechies de orden N , entonces se tienen las cotas:

$$\|u - u_j\|_{L^2}^2 \leq C \left(\frac{1}{2^j}\right)^{2m} \quad (3.13)$$

$$\|u - u_j\|_{H^1}^2 \leq \bar{C} \left(\frac{1}{2^j}\right)^m \quad (3.14)$$

donde las constantes C y \bar{C} dependen de N , de Ω y de las derivadas de u , y $2m$ es el orden del operador diferencial (3.1).

Observación 3.3: Estas estimaciones de error serán utilizadas en la Sección de Ejemplos Numéricos, del Capítulo 5.

3.3. Coeficientes de conexión

En las formulaciones variacionales de problemas de ecuaciones diferenciales (3.1), aparecen productos interiores entre las funciones base y sus derivadas. Son los llamados *coeficientes de conexión* y son productos interiores de dos términos para el caso de derivadas y de tres términos para el caso de coeficientes no-lineales [82].

Cuando se utilizan splines estos coeficientes se calculan fácilmente mediante evaluaciones en los enteros de splines de orden más alto [65]. En el caso de las wavelets de Daubechies, como fue demostrado por Beylkin y Latto, ([81],[82]), puede hacerse la evaluación exacta de estos coeficientes en varios casos particulares.

Esto resulta esencial, ya que con las wavelets de Daubechies, los integrandos son muy oscilatorios y las aproximaciones numéricas de esas integrales presentan dificultades. En las Figuras 3.1 y 3.2 se muestran la función de escala y su derivada segunda para los casos $N = 6$ y $N = 12$.

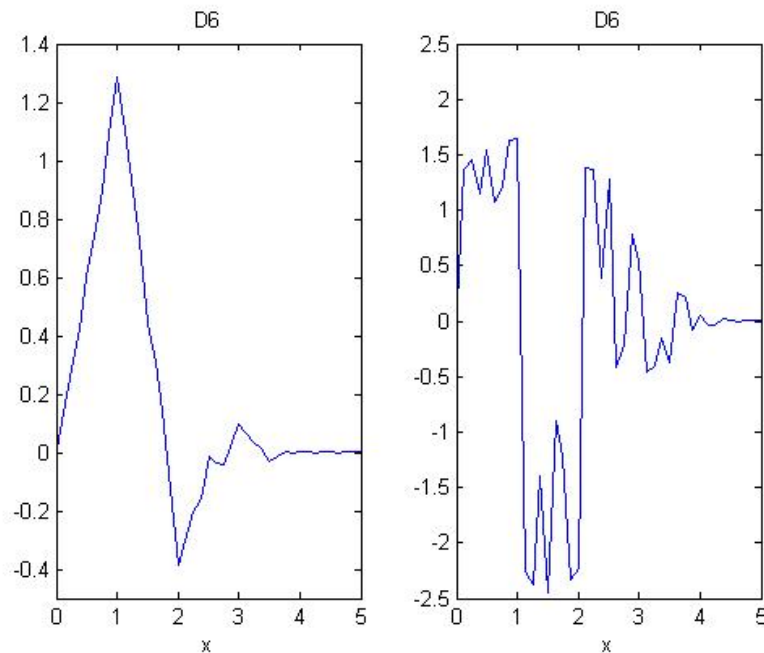


Figura 3.1: ϕ_N y $\phi_N^{(2)}$, $N = 6$

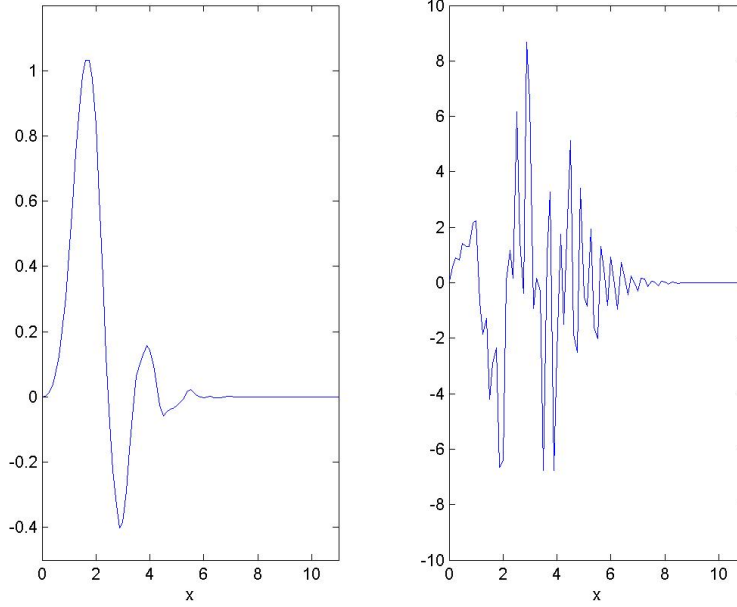


Figura 3.2: ϕ_N y $\phi_N^{(2)}$, $N = 12$

Considerando en particular, en un contexto Wavelet-Galerkin, problemas lineales de valores de contorno en una dimensión, con un operador diferencial de orden $2m$, los coeficientes de conexión que se deben calcular para la matriz de rigidez y el vector de cargas, son integrales de la forma siguiente

$$\Gamma_{k,l}^{j d_1 d_2} = \int_{-\infty}^{\infty} \chi_{[0,1]}(\xi) \phi^{(d_1)}(2^j \xi - k) \phi^{(d_2)}(2^j \xi - l) d\xi \quad (3.15)$$

$$R_k^{j d_1} = \int_{-\infty}^{\infty} \chi_{[0,1]}(\xi) \xi^{(d_1)} \phi(2^j \xi - k) d\xi \quad (3.16)$$

donde j es la escala, $k, l \in Z$, $\phi(x)$ denota las funciones básicas y los supraíndices d_1 y d_2 son los órdenes de las derivadas.

Coeficientes de conexión para las funciones de escala B-splines

Como demuestra Chui [65], los productos interiores de derivadas de las B-splines se calculan muy fácilmente. Para un operador de segundo orden, en particular, se tienen las relaciones siguientes:

$$\langle \varphi_{m+1,j,l}, \varphi_{m+1,j,k} \rangle = \varphi_{2m+2}(m+1+l-k) \quad (3.17)$$

$$\langle \varphi_{m+1,j,l}, \varphi'_{m+1,j,k} \rangle = 2^j \varphi'_{2m+2}(m+1+l-k) \quad (3.18)$$

$$\langle \varphi_{m+1,j,l}, \varphi''_{m+1,j,k} \rangle = -2^{2j} \varphi''_{2m+2}(m+1+l-k) \quad (3.19)$$

Para probar (3.17), se hace un cambio de variables y luego se aplica (2.47):

$$\begin{aligned} \langle \varphi_{m+1,j,l}, \varphi_{m+1,j,k} \rangle &= 2^j \int_{\mathbb{R}} \varphi_{m+1}(2^j x - l) \varphi_{m+1}(2^j x - k) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} \varphi_{m+1}(x - l) \varphi_{m+1}(x - k) dx \\ &= \varphi_{2m+2}(m+1+l-k) \end{aligned} \quad (3.20)$$

Por otro lado, aplicando (2.47) y las expresiones de la derivada en (2.44) se obtiene (3.19),

$$\begin{aligned} \langle \varphi_{m+1,j,l}, \varphi''_{m+1,j,k} \rangle &= - \int_{\mathbb{R}} \varphi'_{m+1}(2^j x - l) \varphi'_{m+1}(2^j x - k) dx \\ &= -2^j \int_{\mathbb{R}} \varphi'_{m+1}(x + l - k) \varphi'_{m+1}(x) dx \\ &= -2^j \int_{\mathbb{R}} [\varphi_m(x + l - k) - \varphi_m(x + l - k - 1)] [\varphi_m(x) - \varphi_m(x - 1)] dx \\ &= -2^j \varphi''_{2m+2}(m+1+l-k) \end{aligned} \quad (3.21)$$

El mismo principio permite calcular los coeficientes de conexión en casos de operadores y splines de mayor orden.

Coeficientes de conexión para las funciones de escala de Daubechies

Desarrollemos los coeficientes para el caso de las funciones de escala de Daubechies de orden N , ϕ_N . Partiendo de (3.15) y utilizando la relación de 2 escalas se tiene:

$$\Gamma_{k,l}^{jd_1 d_2} = 2^{d_1+d_2} \sum_{s,t} p_s \tilde{p}_t \int_0^1 \phi_N^{(d_1)}(2\xi - 2k - s) \phi_N^{(d_2)}(2\xi - 2l - t) d\xi \quad (3.22)$$

donde $d = d_1 + d_2$ que puede reescribirse de la forma [82] como

$$\begin{aligned} \Gamma_{k,l}^{jd_1 d_2} &= 2^{d-1} \sum_{s,t} \tilde{p}_s \tilde{p}_t [\Gamma_{2i+s, 2j+t}^{jd_1 d_2} + \Gamma_{2i+s-1, 2j+t-1}^{jd_1 d_2}] \\ &= 2^{d-1} \sum_{s,t} [\tilde{p}_{s-2i} \tilde{p}_{t-2j} + \tilde{p}_{s-2i+1} \tilde{p}_{t-2j+1}] \Gamma_{r,s}^{jd_1 d_2} \end{aligned} \quad (3.23)$$

o, en forma matricial

$$\vec{\Gamma}^{jd_1d_2} = 2^{d-1}P \vec{\Gamma}^{jd_1d_2} \quad (3.24)$$

donde $\vec{\Gamma}^{jd_1d_2}$ es ahora un vector columna y P es una matriz con combinaciones de los coeficientes wavelet. La ecuación (3.24) puede también escribirse,

$$(2^{d-1}P - I)\vec{\Gamma}^{jd_1d_2} = 0 \quad (3.25)$$

donde I es la matriz identidad y los elementos de $\vec{\Gamma}^{jd_1d_2}$ se corresponden con los de una matriz de dimensión $(2^j + 2N - 2) \times (2^j + 2N - 2)$. Estos cálculos se detallan en el Apéndice B.

Para determinar unívocamente los coeficientes de conexión $\Gamma_{k,l}^{jd_1d_2}$, deben agregarse ecuaciones adicionales para generar una cantidad suficiente de ecuaciones no homogéneas.

Como se mostró en la Sección 2.5, las funciones de escala de Daubechies de orden N pueden representar exactamente polinomios de orden m , con $0 \leq m \leq N/2 - 1$,

$$x^m = \sum_k c_k^m \phi(x - k) \quad (3.26)$$

Entonces, derivando d_1 veces la expansión (3.26), se obtiene,

$$m(m-1)\dots(m-(d_1-1))x^{m-d_1} = \sum_k c_k^m \phi^{(d_1)}(x-k) \quad (3.27)$$

Luego, utilizando (3.27) con n ($0 \leq n \leq N/2 - 1$) y d_2 en lugar de m y d_1 , respectivamente, multiplicando ambas ecuaciones e integrando el producto, se tiene

$$\int_0^1 m\dots(m-d_1+1)n\dots(n-d_2+1)\xi^{m+n-d}d\xi = \sum_{k,l} c_k^m c_l^n \int_0^1 \phi_k^{(d_1)} \phi_l^{(d_2)} d\xi \quad (3.28)$$

donde $d = d_1 + d_2$. O en forma equivalente,

$$\frac{mn\dots(m-(d_1-1))(n-(d_2-1))}{m+n-d+1} = \sum_{k,l} c_k^m c_l^n \Gamma_{k,l}^{jd_1d_2} \quad (3.29)$$

Una cantidad suficiente de ecuaciones no homogéneas pueden obtenerse usando diferentes valores de m y n . Agregándolas a (3.25) pueden finalmente determinarse unívocamente los coeficientes de conexión. Desafortunadamente, como fue estudiado en los trabajos ([81],[82]), para valores grandes de N y d existen dificultades numéricas y deben utilizarse algoritmos diseñados especialmente.

Para calcular los coeficientes de (3.16) se considera en primer lugar el caso $d_1 = 0$.

$$R_k^{j,0} = \int_{-\infty}^{\infty} \chi_{[0,1]}(\xi) \xi^0 \phi_N(2^j\xi - k) d\xi \quad (3.30)$$

y se llega a,

$$R_k^{j,0} = \frac{1}{2} \sum_i (\tilde{p}_{i-2k} + \tilde{p}_{i-2k+2j}) R_i^{j,0} \quad (3.31)$$

mediante cálculos que se muestran con detalle en el Apéndice B. Nuevamente es necesario agregar ecuaciones no homogéneas para que la solución sea única. Integrando la expresión (3.26)

$$\frac{1}{q+1} = \sum_k c_k R_k^{j,0} \quad (3.32)$$

Agregando esta ecuación a (3.31) pueden hallarse $R_k^{j,0}$.

Por último, para el caso $d_1 > 0$ se tiene

$$R_k^{j,d_1} = \int_0^1 \xi^{d_1} \phi_N(2^j \xi - k) d\xi \quad (3.33)$$

$$= \frac{1}{2^{d_1+1}} \sum_i \tilde{p}_i [R_{2k+i}^{j,d_1} + \sum_{s=0,d_1} \frac{m!}{(m-s)!s!} R_{2k+i-2j}^{j,d_1-s}] \quad (3.34)$$

$$(2^{d_1+1}I - \overline{B})R_k^{j,d_1} = \sum_i \tilde{p}_{i-2k+2j} \sum_{s=0,d_1} \frac{m!}{(m-s)!s!} R_i^{j,d_1-s} \quad (3.35)$$

donde

$$B = \sum_{i,k} (\tilde{p}_{i-2k} + \tilde{p}_{i-2k+2j}) \quad (3.36)$$

El vector de cargas R^{j,d_1} se obtiene resolviendo el sistema algebraico (3.35).

Capítulo 4

Wavelets y Ecuaciones Diferenciales I. FEM-WAVELETS

En este capítulo se formulan distintos elementos finitos que permiten resolver problemas de mecánica estructural, como es el caso de las ecuaciones diferenciales correspondientes a problemas de vigas y placas, suponiendo un modelo de elasticidad lineal. Se utiliza el método de Galerkin presentado en el Capítulo 3 y como funciones de forma se usan las funciones de escala de distintas familias de wavelets (B-splines y Daubechies), en lugar de los elementos lagrangianos clásicos de los métodos de elementos finitos.

Se formularon elementos finitos de vigas (1D) y placas (2D) bajo las hipótesis de dos modelos teóricos que se diferencian en cuanto al tratamiento de las deformaciones por corte. Las aproximaciones obtenidas se mejoran a partir de refinar las mallas en forma uniforme. Se utiliza en todos los casos la transformación matricial de los grados de libertad del espacio físico a los coeficientes en el espacio wavelet.

El Método de Elementos Finitos comenzó a desarrollarse en los años 60 y actualmente continúa siendo de gran utilidad para resolver problemas de ingeniería civil, mecánica y aeronáutica. En particular, es de gran aplicación en problemas de mecánica estructural, como por ejemplo, en el modelado de estructuras laminares.

Dentro del análisis de elasticidad lineal, la modelación de placas y láminas está basada en simplificaciones del modelo tridimensional clásico que considera el comportamiento de un material isotrópico y homogéneo bajo la acción de fuerzas externas. La característica más importante es la reducción del problema a dos dimensiones.

En términos generales, el estudio de estructuras laminares cubre una familia de problemas con comportamientos muy diferentes, dependientes tanto de la geometría de la superficie media, como de las condiciones de borde y de las cargas aplicadas. Los modelos de láminas pueden ser formulados en términos de desplazamientos, y conducen a una formulación bidimensional cuando se integran sobre el espesor. También pueden ser formulados a partir del equilibrio de las fuerzas resultantes.

Si bien existen diferentes métodos numéricos propuestos, la posibilidad de obtener un método general que aproxime los diversos comportamientos de una lámina es todavía lejana. En particular, los casos de comportamiento membranar y de curvatura pura corresponden a problemas de distintas características. En el caso de placas, uno de los modelos más utiliza-

dos, es el de Reissner-Mindlin [73] que describe el desplazamiento de una placa de pequeño espesor bajo el efecto de una carga transversal. Resulta en un modelo bidimensional cuyos grados de libertad son el desplazamiento vertical y los ángulos de rotación de fibras normales a la superficie media de la placa con respecto a los ejes x e y .

La formulación de Ahmad-Irons-Zienkiewicz en los '70, resultó muy exitosa, ya que produjo un elemento con interpolación independiente de los desplazamientos de la superficie media y de las rotaciones de los vectores normales a dicha superficie media. Como contrapartida, introdujo el problema numérico del bloqueo, tanto bloqueo por corte, como membranaral [73]. Más tarde, logran obtenerse buenos resultados a partir de la utilización de integración reducida y selectiva, aunque aparece el problema de los modos rígidos espúreos. La interpolación mixta de las componentes tensoriales, que introducen en el elemento MITC4 (Mixed Interpolation Tensorial Components) Bathe y Dvorkin ([73] y [28]), logra solucionar el problema tanto del bloqueo como de los modos rígidos espúreos. Si bien el MITC4 constituye uno de los elementos de lámina estándar utilizado en muchos programas de elementos finitos de cálculo estructural, se continúa trabajando para obtener mejoras en las aproximaciones cuando el comportamiento de la lámina es membranaral dominante.

Una alternativa para mejorar el comportamiento membranaral fue la desarrollada en los trabajos ([30],[31]), que consistió en utilizar las interpolaciones de un elemento plano [29] para la parte membranaral de la lámina. Si bien se obtuvo una leve mejora, los resultados motivaron el comienzo de la investigación del análisis wavelet como nueva alternativa para resolver problemas de mecánica estructural.

Como es conocido, los métodos de elementos finitos convencionales utilizan funciones polinomiales para la interpolación de los desplazamientos (o funciones incógnita que se desean aproximar). En la construcción del elemento basado en wavelets, la función de escala del análisis wavelet es utilizada como función interpolante.

En la literatura a esta combinación de elementos finitos con bases wavelets se le da el nombre de FEM-Wavelet o Wavelet-Galerkin. Existen numerosos artículos en la literatura de elementos finitos que presentan aplicaciones FEM-Wavelets para la resolución de diversos problemas de ingeniería. Por ejemplo, se han presentado métodos de descomposición wavelet para resolver las ecuaciones de Navier-Stokes [5], métodos Wavelet-Galerkin para trabajar con el problema de Dirichlet [6], como también en mecánica estructural se desarrollaron algoritmos numéricos utilizando wavelets de Daubechies de orden alto para solucionar ecuaciones diferenciales de vigas y placas [7]. En este sentido, el análisis wavelet ofrece algunas ventajas, como son sus propiedades multirresolución y diferentes funciones base para el análisis estructural. La escala adoptada puede cambiarse libremente, de acuerdo a los requerimientos para mejorar la precisión. En especial, las funciones wavelet con soporte compacto y ortogonalidad, tales como las wavelets de Daubechies, resultan ser poderosas herramientas en el análisis de problemas con alto gradiente local.

J.Han, W. Ren y Y. Huang, utilizaron las funciones de escala wavelets spline ([1],[2]) como funciones interpolatorias de los desplazamientos para desarrollar elementos wavelets spline tales como elementos de viga, triangular y rectangular en el plano y rectangular 3D. Por otra parte, J. Ma, J. Xue, S. Yang, Z. He, utilizaron las wavelets ortogonales de Daubechies

para resolver las ecuaciones de vigas y placas ([3],[54]).

El método FEM basado en wavelets ofrece además la ventaja de proporcionar soluciones jerárquicas adaptativas, las cuales son muy convenientes en muchos casos. Las soluciones adaptativas han sido estudiadas en la literatura de FEM usando técnicas diferentes, siendo éste un tema que aún permanece abierto. Por otro lado, una solución jerárquica adaptativa permite optimizar el tamaño del elemento en las regiones con errores de aproximación grande o pequeño, sin cálculos excesivos.

En este capítulo se describe la utilización de las funciones de escala como funciones de forma para resolver distintos problemas de vigas y placas, bajo las suposiciones de diferentes modelos.

4.1. Problemas de vigas

Modelo de viga de Euler-Bernoulli

Basados en la teoría de Euler-Bernoulli, se desarrolla la formulación de dos elementos finitos para vigas. Cabe señalar que la suposición más importante en este modelo es que una normal a la superficie de la viga permanece recta durante la deformación y su rotación es igual a la pendiente de la superficie media de la viga.

Elemento finito wavelets spline

Se formula, en primer lugar, un elemento finito para vigas planas que utiliza las funciones de escala wavelets apline lineales ($m = 1$) y cúbicas ($m = 3$) para aproximar los desplazamientos.

El problema de flexión de una viga plana de longitud \tilde{L} sometida a una carga puede plantearse como la minimización de la energía potencial total dada por [73],

$$\pi_{b2} = \frac{1}{2} \int_0^l ([\varepsilon]^t D [\varepsilon]) dx - [\hat{w}]^{(e)t} [\tilde{R}]^{(e)} \quad (4.1)$$

donde

$$D = \text{diag}(E\tilde{A}, EI), \quad (4.2)$$

$\hat{w}^{(e)} = [\tilde{u}, \tilde{w}]^t$ es el vector de desplazamientos nodales, ε el vector de deformaciones,

$$\varepsilon = [\varepsilon_x, \kappa]^t \quad (4.3)$$

donde, $\varepsilon_x = \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x}$, $\kappa = -\frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial x^2}$. l es la longitud del elemento y $[\tilde{R}]^{(e)}$ el vector de fuerzas nodales.

En (4.2), \tilde{A} e I son el área y el momento de inercia de la sección de la viga respectivamente, y E es el módulo de Young del material y en (4.3) κ representa la curvatura de la flexión de la viga .

Siguiendo el modelo de Bernoulli, en el que se desprecian las deformaciones debidas al corte, el campo de desplazamientos (\tilde{u}, \tilde{w}) de un elemento de viga puede representarse por funciones de escala de las wavelets spline,

$$\tilde{u} = a_1\varphi_{2,0,0}(\xi) + a_2\varphi_{2,0,1}(\xi) \quad (4.4)$$

$$\tilde{w} = b_1\varphi_{4,0,0}(\xi) + b_2\varphi_{4,0,1}(\xi) + b_3\varphi_{4,0,2}(\xi) + b_4\varphi_{4,0,3}(\xi) \quad (4.5)$$

donde ξ es la coordenada local en un elemento de longitud l

$$\xi = \frac{x - x_i}{x_j - x_i} = \frac{x - x_i}{l} \quad (4.6)$$

Las funciones de escala $\varphi_{2,0,k}(\xi)$, y $\varphi_{4,0,k}(\xi)$ son B-splines de orden 2 y 4 (con la notación introducida en la Sección 2.4.1) y los coeficientes a_i y b_i se determinan a partir de las condiciones de borde nodales del elemento:

$$\begin{aligned} \xi = 0, \quad \tilde{u} &= u_i, \quad \tilde{w} = w_i, \quad \tilde{w}' = -\theta_i \\ \xi = 1, \quad \tilde{u} &= u_j, \quad \tilde{w} = w_j, \quad \tilde{w}' = -\theta_j \end{aligned}$$

En este elemento finito, cada nodo tiene tres grados de libertad: \tilde{u} , \tilde{w} y θ que corresponden a desplazamientos en las direcciones x e y y a las rotaciones en el plano $x - y$ respectivamente como se muestra en la Figura (4.1).

Para satisfacer las condiciones de borde en la frontera y compatibilidad interelementos, la matriz de rigidez debe ser transformada al espacio físico y los grados de libertad elementales también deben ser transformados del espacio wavelet al físico.



Figura 4.1: Elemento de viga de 2 nodos

La relación entre los vectores de los grados de libertad (DOFs) en el espacio físico $\hat{w} = [u_i, w_i, \theta_i, u_j, w_j, \theta_j]$, y en el espacio wavelet $\hat{\alpha} = [a_1, a_2, b_1, b_2, b_3]$ puede expresarse matricialmente como,

$$\begin{bmatrix} u_i \\ w_i \\ \theta_i \\ u_j \\ w_j \\ \theta_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\varphi}_{2,1}(0) & \bar{\varphi}_{2,2}(0) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\varphi}_{4,1}(0) & \bar{\varphi}_{4,2}(0) & \bar{\varphi}_{4,3}(0) & \bar{\varphi}_{4,4}(0) \\ 0 & 0 & -\bar{\varphi}'_{4,1}(0) & -\bar{\varphi}'_{4,2}(0) & -\bar{\varphi}'_{4,3}(0) & -\bar{\varphi}'_{4,4}(0) \\ \bar{\varphi}_{2,1}(1) & \bar{\varphi}_{2,2}(1) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\varphi}_{4,1}(1) & \bar{\varphi}_{4,2}(1) & \bar{\varphi}_{4,3}(1) & \bar{\varphi}_{4,4}(1) \\ -\bar{\varphi}'_{4,1}(1) & -\bar{\varphi}'_{4,2}(1) & -\bar{\varphi}'_{4,3}(1) & -\bar{\varphi}'_{4,4}(1) & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

o bien,

$$[\hat{w}] = T [\alpha] \quad (4.8)$$

donde T es la matriz de la transformación que depende de los valores nodales de las funciones de escala y de sus derivadas. Cabe señalar que denotamos $\bar{\varphi}_{m+1,k}(\xi) = \varphi_{m+1,0,k}(\xi)$. Evaluando y luego resolviendo el sistema se tiene,

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -\frac{2}{3}l & 0 & -1 & -\frac{7}{3}l \\ 0 & -1 & \frac{1}{3}l & 0 & 2 & \frac{2}{3}l \\ 0 & 2 & -\frac{2}{3}l & 0 & -1 & -\frac{1}{3}l \\ 0 & -1 & \frac{7}{3}l & 0 & 2 & \frac{2}{3}l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ w_i \\ \theta_i \\ u_j \\ w_j \\ \theta_j \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

Sustituyendo (4.9) en las ecuaciones, (4.4) y (4.5) se pueden escribir \tilde{u} y \tilde{w} como combinación de los valores en los nodos, es decir

$$\begin{bmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{w} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & N_4 & 0 & 0 \\ 0 & N_2 & N_3 & 0 & N_5 & N_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ w_i \\ \theta_i \\ u_j \\ w_j \\ \theta_j \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

donde N_i son las funciones de forma wavelets spline en coordenadas locales. Y si llamamos \tilde{N} a la matriz de las funciones de forma, lo anterior puede escribirse, $U = \tilde{N}\hat{w}$, siendo U el vector de desplazamientos, $U = [\tilde{u}, \tilde{w}]^t$. Por otro lado, la relación deformación-desplazamiento para una viga, bajo la suposición de pequeñas deformaciones, puede expresarse en forma matricial,

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} \\ -\frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial x^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\partial^2 N_2}{\partial x^2} & -\frac{\partial^2 N_3}{\partial x^2} & 0 & -\frac{\partial^2 N_5}{\partial x^2} & -\frac{\partial^2 N_6}{\partial x^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ w_i \\ \theta_i \\ u_j \\ w_j \\ \theta_j \end{bmatrix}$$

o bien,

$$\varepsilon = \tilde{B}\hat{w} \quad (4.12)$$

donde \tilde{B} es la matriz de deformación anterior que contiene las derivadas de las funciones de forma.

Sustituyendo (4.12) en (4.1), el total de energía potencial se reescribe como

$$\pi_{b2} = \frac{1}{2} [\hat{w}]^{(e)t} \tilde{k}^{(e)} [\hat{w}]^{(e)} - [\hat{w}]^{(e)t} [\tilde{R}]^{(e)} \quad (4.13)$$

donde $\tilde{k}^{(e)}$ es la matriz de rigidez wavelets spline, definida en el espacio wavelet,

$$\tilde{k}^{(e)} = \int_0^l \tilde{B}^t D \tilde{B} dx \quad (4.14)$$

y $[\tilde{R}]^{(e)}$ es el vector de cargas nodales que, en el caso de una viga sometida a una carga uniforme q_y tiene la forma,

$$[\tilde{R}]^{(e)} = \int_0^l [\tilde{N}]^t \bar{q} dx \quad (4.15)$$

donde \bar{q} es el vector $[0, q_y]^t$ y \tilde{N} la matriz de las funciones de forma.

La minimización del funcional anterior (4.13), es equivalente a pedir $\delta\pi_{b2} = 0$ i.e. que se anule su variación, y el procedimiento es el de los métodos de elementos finitos estándar. Teniendo en cuenta (4.8), las relaciones entre las matrices de rigidez y vectores de carga en los espacios físico y wavelet son:

$$k^{(e)} = (T^{-1})^t \tilde{k}^{(e)} T^{-1} \quad (4.16)$$

$$[R]^{(e)} = (T^{-1})^t [\tilde{R}]^{(e)} \quad (4.17)$$

Ensamblando todas las matrices y vectores elementales $k^{(e)}$ y $[R]^{(e)}$, se obtiene la matriz de rigidez global y los valores nodales son hallados luego de imponer en el sistema las condiciones de borde. Si además de los desplazamientos, son requeridas las tensiones -que se calculan a partir de las derivadas de la solución- el procedimiento también es el estándar de FEM.

Finalmente, para obtener la aproximación, se resuelve un sistema de ecuaciones lineales. Teniendo en cuenta los desplazamientos exactos para este caso,

$$w_a = \frac{q_y}{2EI} \left(\frac{x^4}{12} - \frac{x^3}{6} + \frac{x}{12} \right) \quad 0 \leq x \leq \tilde{L}$$

se verificó que con 2 elementos el error relativo en los nodos es del orden de la unidad de redondeo.

Elemento finito Daubechies wavelet

Se utilizan en segundo lugar las funciones de escala de Daubechies para una simplificación del problema anterior en la que el desplazamiento transversal \tilde{w} es la única variable. La energía potencial total del sistema es [73],

$$\pi_{b1} = \frac{1}{2} \int_0^{\tilde{L}} \{ [E(x)I(x)\tilde{w}''(x)]^2 - 2\tilde{w}(x)q^*(x) \} dx \quad (4.18)$$

donde, como en (4.1), $q^*(x)$ es la carga externa, $\tilde{w}(x)$ es la deflexión, el producto $E(x)I(x)$ es la rigidez a la flexión definida por el módulo de Young $E(x)$ y el momento de inercia $I(x)$.

La minimización del funcional anterior (4.18) conduce a

$$\delta\pi_{b1} = 0 = \int_0^{\tilde{L}} \tilde{w}''(x)EI\delta\tilde{w}'' - \delta\tilde{w}q^*(x)dx \quad (4.19)$$

En este caso, la formulación diferencial es una ecuación ordinaria de cuarto orden,

$$E(x)I(x)\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = q^*(x) \quad (4.20)$$

y se busca aproximar la solución como combinación lineal de funciones de escala de Daubechies de orden N ,

$$\tilde{w}(\xi) = \sum_{k=-(N-2)}^0 \alpha_k \phi_N(\xi - k) \quad (4.21)$$

donde ξ es la coordenada local, $0 \leq \xi \leq 1$, y α_k son los coeficientes wavelet a ser determinados.

La formulación en (4.18) requiere para \tilde{w} continuidad C^1 por lo cual, debe elegirse adecuadamente el orden de las funciones de escala de Daubechies.

De acuerdo a la expresión para \tilde{w} en (4.21), el método de elementos finitos conduce -como en el caso con splines descritos antes- a un sistema lineal donde, en el caso que $E(x)I(x)$ sea constante, los elementos de la matriz de rigidez y del vector de cargas estarán formados por los coeficientes de conexión $\Gamma_{k,l}^{022}$ y R_k^{00} ((3.15) y (3.16)) y toman la forma,

$$\tilde{k}_{ij}^{(e)} = EI \int_0^1 \phi_N''(\xi - i)\phi_N''(\xi - j)d\xi \quad (4.22)$$

$$\tilde{R}_i^{(e)} = \int_0^1 \phi_N(\xi - i)q(\xi)d\xi \quad (4.23)$$

Estas expresiones están definidas en el espacio wavelet y los DOFs son los coeficientes wavelet α_k . Esta transformación puede expresarse matricialmente como en (4.8), donde T es la matriz de la transformación que depende de los valores nodales de la función de escala y de su derivada.

Es importante resaltar que al no tener expresión explícita, los valores de las funciones de escala de Daubechies en los puntos diádicos, deben obtenerse con los algoritmos descritos en la Sección 2.5.2.

Como ejemplo se presenta el elemento $D12$ en el cual el desplazamiento tiene la expresión (4.21) con $N = 12$. Se conoce que la cantidad de grados de libertad o coeficientes [56] son 11, así que deberá haber 11 también en el espacio físico, y para asegurar compatibilidad interelementos se incluyen las rotaciones de los 2 extremos. Quedarán, entonces, 9 grados de libertad correspondientes a los desplazamientos \tilde{w} , que se consideran distribuidos uniformemente y 2 que corresponden a las rotaciones o giros, entonces,

$$\hat{w} = [w_1, \theta_1, w_2, w_3, \dots, w_8, w_9, \theta_9] \quad (4.24)$$

En este caso considerado, la matriz T de (4.8) es la siguiente

$$T = \begin{bmatrix} \phi_N(10) & \phi_N(9) & \phi_N(8) & \dots & \dots & \dots & \phi_N(2) & \phi_N(1) & \phi_N(0) \\ \phi'_N(10) & \phi'_N(9) & \phi'_N(8) & \dots & \dots & \dots & \phi'_N(2) & \phi'_N(1) & \phi'_N(0) \\ \phi_N(10 + \frac{1}{8}) & \phi_N(9 + \frac{1}{8}) & \phi_N(8 + \frac{1}{8}) & \dots & \dots & \dots & \phi_N(2 + \frac{1}{8}) & \phi_N(1 + \frac{1}{8}) & \phi_N(\frac{1}{8}) \\ \phi_N(10 + \frac{2}{8}) & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \phi_N(\frac{2}{8}) \\ \phi_N(10 + \frac{3}{8}) & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \phi_N(\frac{3}{8}) \\ \phi_N(10 + \frac{4}{8}) & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \phi_N(\frac{4}{8}) \\ \phi_N(10 + \frac{5}{8}) & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \phi_N(\frac{5}{8}) \\ \phi_N(10 + \frac{6}{8}) & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \phi_N(\frac{6}{8}) \\ \phi_N(10 + \frac{7}{8}) & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \phi_N(\frac{7}{8}) \\ \phi_N(11) & \phi_N(10) & \phi_N(9) & \dots & \dots & \dots & \phi_N(3) & \phi_N(2) & \phi_N(1) \\ \phi'_N(11) & \phi'_N(10) & \phi'_N(9) & \dots & \dots & \dots & \phi'_N(3) & \phi'_N(2) & \phi'_N(1) \end{bmatrix}$$

Es importante señalar que la implementación computacional resulta más eficiente si los coeficientes de conexión se calculan al principio y se almacenan para luego ser utilizados en el cálculo de las matrices elementales.

Pueden diseñarse diferentes elementos para vigas utilizando distintos órdenes de las funciones de escala de Daubechies, tales como $D6$, $D8$, $D10$, etc. Como fue mencionado en la Sección 2.5, la función de escala ϕ_N puede representar exactamente polinomios de grado hasta $N/2 - 1$. Al aumentar N , las funciones de escala son más suaves, como se mostró en la Figura 2.4 y, entonces, la solución puede aproximarse con más precisión. Sin embargo, como al aumentar N , aumenta la cantidad de DOFs, los elementos resultan menos eficientes computacionalmente. Por otro lado, si se consideran como grados de libertad en la viga los desplazamientos nodales y las rotaciones, para asegurar compatibilidad entre elementos vecinos, las rotaciones de los extremos deben estar incluidas y, entonces, el orden de la función de escala debe ser de la forma $N = 2^k + 4$, para k natural. Las posibilidades son $N = 6, 8, 12, 20, \dots$, que fueron analizadas para el problema de la viga presentado. Algunas consideraciones que surgieron de este análisis son las siguientes (ver [21]):

- el número de condición de la matriz de rigidez global aumenta significativamente con el orden N de la función de escala
- para $N = 20$ los resultados no son buenos: hay inconvenientes en el cálculo de los coeficientes de conexión, ya que la matriz se vuelve singular

Para el problema general de la viga de la ecuación (4.18) aparecen derivadas segundas en los coeficientes de conexión y el menor orden que produce resultados precisos es $N = 12$, coincidiendo con lo presentado en el trabajo de Ma et al. [54]. Esa función de escala resulta adecuada para aproximar los desplazamientos de la viga.

Se consideran, a continuación, tres casos particulares :

Caso 1. Viga biempotrada sometida a una carga uniforme

Una viga biempotrada de sección constante, de longitud \tilde{L} y rigidez $E_0 I_0$ está sometida a una carga constante q^* (ver Figura (4.2)). Utilizando tanto splines de orden 4 ($m = 3$) como con las funciones de escala de Daubechies de orden $N = 12$ se obtienen valores nodales de desplazamientos que coinciden con la solución exacta.

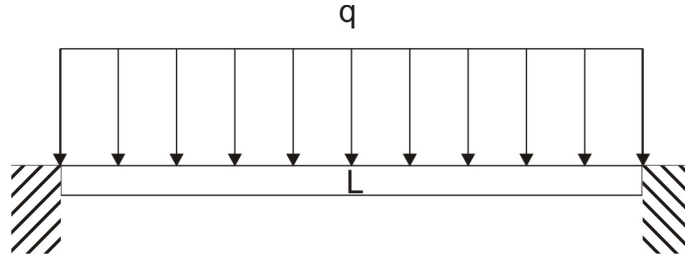


Figura 4.2: Viga biempotrada carga uniforme

Caso 2. Viga biempotrada sometida a una carga no uniforme

Como segundo problema se presenta una viga de longitud $2\tilde{L}$ con sección transversal constante y rigidez a flexión E_0I_0 está sometida a una carga no uniforme. Sólo la mitad derecha de la viga está sometida a una carga lineal que tiene expresión, $q^*(x) = k_0q_0(\frac{x}{\tilde{L}} - 1)$, $\tilde{L} < x < 2\tilde{L}$ como se muestra en la Figura (4.3).

La solución exacta puede obtenerse integrando la ecuación diferencial de cuarto orden, resultando la siguiente expresión para la deflexión:

$$\tilde{w} = \frac{q_0}{E_0I_0} \left[\tilde{c}_2 + \tilde{c}_1x + \frac{1}{2}(\tilde{c}_4 + \frac{k_0\tilde{L}^2}{6})x^2 + \frac{1}{6}(\tilde{c}_3 - \frac{k_0\tilde{L}}{2})x^3 \right] \quad 0 \leq x \leq \tilde{L} \quad (4.25)$$

$$\tilde{w} = \frac{q_0}{E_0I_0} \left[\frac{k_0x^5}{120\tilde{L}} - \frac{k_0x^4}{24} + \tilde{c}_3\frac{x^3}{6} + \tilde{c}_4\frac{x^2}{2} + \frac{k_0\tilde{L}^3}{24}x - \frac{k_0\tilde{L}^4}{120} \right] \quad \tilde{L} \leq x \leq 2\tilde{L} \quad (4.26)$$

donde las constantes de integración $\tilde{c}_i, i = 1, 2, 3, 4$ serán determinadas de acuerdo a las condiciones de borde que se impongan. Se aplica esta solución para el caso de una viga empotrada en ambos extremos y $k_0 = 480$ (ver Figura (4.3)). Las constantes de integración se determinan, entonces, con las condiciones de borde $\tilde{w}(0) = \tilde{w}'(0) = \tilde{w}(2\tilde{L}) = \tilde{w}'(2\tilde{L}) = 0$. Las funciones correspondientes a la solución y sus derivadas fueron analizadas y comparadas con el caso de la viga sometida a una carga uniforme equivalente $q^* = \frac{k_0}{4\tilde{L}}$, observándose una diferencia importante en el caso del corte que se corresponde con la derivada tercera debido a la discontinuidad de esa derivada en la solución. Esto fue analizado en detalle en el trabajo [21].

Aproximando el desplazamiento \tilde{w} en (4.21), por funciones de escala de Daubechies de orden $N = 12$ (D12), se obtuvieron soluciones numéricas para diferentes cantidades de elementos finitos y la convergencia se muestra en la Tabla 4.1. Puede verse que los errores

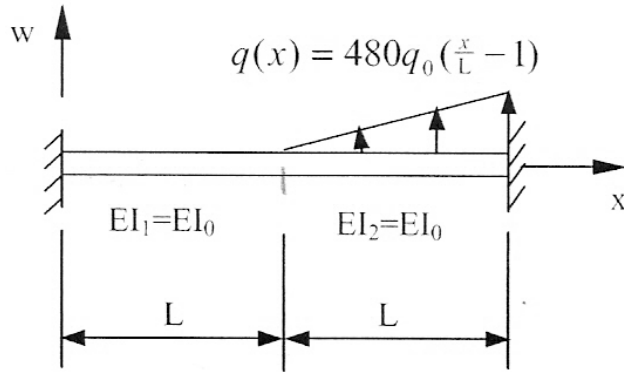


Figura 4.3: Viga biempotrada carga no uniforme

cant. elem.	$\ \cdot \ _{\infty}$	en $x = L$
2	$1.1 \cdot 10^{-2}$	$9.8 \cdot 10^{-3}$
4	$2.7 \cdot 10^{-3}$	$2.7 \cdot 10^{-3}$
8	$6.9 \cdot 10^{-4}$	$6.8 \cdot 10^{-4}$
16	$1.5 \cdot 10^{-4}$	$1.5 \cdot 10^{-4}$

Tabla 4.1: Error relativo en la deflexión, viga bi-empotrada. Carga no uniforme

relativos, ambos, en $\| \cdot \|_{\infty}$ y en el punto medio de la viga ($x = \tilde{L}$), decrecen rápidamente. Como en el trabajo [54], dos elementos finitos se consideraron para la malla más gruesa inicial, consistiendo en las mitades izquierda y derecha de la viga, cada una de longitud \tilde{L} .

Caso 3. Viga con rigidez a flexión discontinua

En este ejemplo se considera una viga simplemente apoyada, de longitud $2\tilde{L}$, con carga uniforme $q^*(x) = 1$. Presenta una discontinuidad en la rigidez a flexión en $x = L$, modelizada con un escalón. Esto fue analizado en el trabajo de Biondi et al. [9] y la rigidez a flexión tiene la expresión siguiente,

$$E(x)I(x) = E_0I_0[1 - \overline{H}(x - x_0)] \quad (4.27)$$

donde $0 \leq x_0 \leq 2L$, $\overline{H}(x - x_0)$ es la función de Heaviside.

La ecuación diferencial es en este caso

$$[E_0 I_0 [1 - \bar{\gamma} \overline{H}(x - x_0)] \tilde{w}''(x)]'' = q^*(x) \quad (4.28)$$

y modela una viga con una variación abrupta de la sección transversal o del módulo de Young, resultando en una discontinuidad tipo salto en la rigidez a flexión en el punto de abscisa x_0 , siendo en otro lugar, constante. $\bar{\gamma}$ es un parámetro que representa la intensidad de la discontinuidad. Para satisfacer la restricción de no negatividad de la rigidez a flexión se requiere la condición $0 \leq \bar{\gamma} \leq 1$. En este ejemplo, la viga está simplemente soportada ($\tilde{w}(0) = \tilde{w}(2\tilde{L}) = 0$) y presenta un cambio abrupto en la rigidez a flexión en $x = \tilde{L}$, del valor $E_0 I_0$ al valor $4E_0 I_0$ que corresponde al valor $\bar{\gamma} = 3/4$. Como se muestra en la Figura (4.4), la carga a la que está sometida la viga es $q^*(x) = 1$. Este salto se traduce en una disminución de la deflexión con respecto al caso que la carga fuera uniforme y rigidez a flexión $E_0 I_0$. En cuanto a la regularidad de la solución, la curvatura (que corresponde a la derivada segunda) resulta discontinua en $x = \tilde{L}$. En la Tabla 4.2 se muestra la convergencia de los resultados numéricos para este caso.

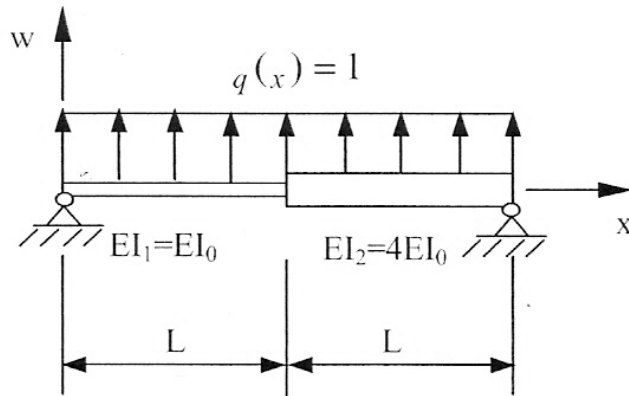


Figura 4.4: Viga con rigidez a flexión discontinua

Modelo de viga de Timoshenko

En el modelo de Timoshenko, a diferencia del anterior, se considera la deformación por corte. La energía potencial total correspondiente a la formulación general de una viga de longitud

cant. elem.	$\ \cdot \ _\infty$	en $x = \tilde{L}$
2	$3.8 \cdot 10^{-3}$	$3.1 \cdot 10^{-3}$
4	$9.9 \cdot 10^{-4}$	$7.8 \cdot 10^{-4}$
8	$2.6 \cdot 10^{-4}$	$1.9 \cdot 10^{-4}$
16	$9.2 \cdot 10^{-5}$	$7.9 \cdot 10^{-5}$

Tabla 4.2: Error relativo deflexión viga. Rigidez a flexión discontinua, $q^*(x) = 1$

\tilde{L} sometida a una carga uniforme, está dada por

$$\pi_{bT} = \frac{EI}{2} \int_0^{\tilde{L}} \left(\frac{d\theta}{dx}\right)^2 dx - \tilde{\alpha} \int_0^{\tilde{L}} \left(\frac{d\tilde{w}}{dx} - \theta\right)^2 dx - \int_0^{\tilde{L}} \tilde{w}q^* dx \quad (4.29)$$

donde

$$\theta = \frac{d\tilde{w}}{dx} - \gamma \quad (4.30)$$

y

$$\tilde{\alpha} = \frac{G\tilde{A}k}{2}. \quad (4.31)$$

Como antes, \tilde{w} es el desplazamiento perpendicular al eje de la viga, E es el módulo de Young del material, I es el momento de inercia de la sección, y q^* la carga en dirección perpendicular al eje de la viga a la que está sometida la viga. Además, γ indica la deformación por corte transversal, $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ es el módulo de corte del material, ν el coeficiente de Poisson, k es un factor de corrección debido a la distribución no uniforme de los esfuerzos de corte y considerada para una sección rectangular $\frac{5}{6}$ [73], y $\tilde{A} = hb$, es el área de la sección transversal de la viga. Es importante señalar que, en la expresión del funcional anterior (4.29), la primera integral corresponde a la energía de flexión, mientras que la segunda a la energía de corte. Considerando, como antes, la matriz de transformación T entre el espacio físico y el espacio wavelet y las funciones de escala ϕ_N , las expresiones de Galerkin para θ y w , que en este modelo tienen interpolaciones independientes, son:

$$\theta = \phi_N T^{-1} \hat{\theta}, \quad w = \phi_N T^{-1} \hat{w} \quad (4.32)$$

Luego, sustituyendo (4.32) en (4.29) e imponiendo como antes, la condición de estacionariedad del funcional π_{bT} i.e. $\delta\pi_{bT} = 0$, se obtienen la matriz y el sistema algebraico elemental correspondiente,

$$\begin{bmatrix} K_w^1 & K_w^2 \\ (K_w^2)^t & K_w^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\theta} \\ \hat{w} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ R \end{bmatrix} \quad (4.33)$$

Las matrices K_w^i y el vector carga R tienen la expresión siguiente,

$$\begin{aligned} R^{(e)} &= ((T)^{-1})^t \int_0^1 q(\xi) \phi_N^t d\xi \\ K_w^1 &= EIA^{11} + G\tilde{A}kA^{00} \\ K_w^2 &= -G\tilde{A}kA^{01} \\ K_w^3 &= G\tilde{A}kA^{11} \end{aligned} \quad (4.34)$$

donde,

$$A^{d_1 d_2} = l_e^{1-(d_1+d_2)} (T^{-1})^t \bar{\Gamma}^{0d_1 d_2} T^{-1}, \quad (4.35)$$

l_e es la longitud del elemento, $\bar{\Gamma}^{0d_1 d_2}$ son los coeficientes de conexión definidos antes en (3.15).

Cada elemento tiene 5 grados de libertad: dos en los extremos y 3 nodos interiores. Utilizando Daubechies de orden $N = 6$, $D6$, y diferentes cantidades de elementos se obtuvieron resultados numéricos para el caso de una viga empotrada con carga uniforme y $L/h = 10$. Con 32 elementos, el error obtenido resultó menor al 1% (la solución exacta es $U_{MAX} = 0.002604$ [1]).

4.2. Problemas de placas

Teniendo en cuenta las consideraciones realizadas en la Observación 2.19 de la Sección 2.3.2, en esta Sección se presenta una extensión del AMR a dos dimensiones para resolver problemas de placas.

Suponiendo que las funciones de escala en una dimensión, $\phi^1(\xi)$ y $\phi^2(\eta)$ generan un análisis de multirresolución $\{V_j^1\}$ y $\{V_j^2\}$ respectivamente, el producto tensorial de V_j^1 y V_j^2 ,

$$V_j = V_j^1 \otimes V_j^2 \quad (4.36)$$

con $j \in \mathbb{Z}$, es tal que $\{V_j\}$ genera un análisis de multirresolución de $L^2(\mathbb{R}^2)$. Así, por ejemplo, considerando las $N - 1$ funciones de escala de Daubechies en $\{V_j^1\}$ y $\{V_j^2\}$

$$\begin{aligned} \varphi^1 &= \{\phi^1(\xi), \phi^1(\xi + 1), \dots, \phi^1(\xi + (N - 2))\} \\ \varphi^2 &= \{\phi^2(\eta), \phi^2(\eta + 1), \dots, \phi^2(\eta + (N - 2))\} \end{aligned} \quad (4.37)$$

las funciones de escala $\{V_j\}$ pueden expresarse usando el producto tensorial de las expansiones en funciones de escala en cada coordenada, i.e.:

$$\varphi = \varphi^1 \otimes \varphi^2 \quad (4.38)$$

El desplazamiento $\widehat{w}(\xi, \eta)$ puede expresarse de la forma

$$\widehat{w}(\xi, \eta) = \varphi \alpha_w \quad (4.39)$$

donde α_w es el vector de coeficientes wavelet correspondientes a \widehat{w} . Ahora, la matriz de transformación elemental entre el espacio físico y el wavelet, T es

$$T = T^1 \otimes T^2 \quad (4.40)$$

donde T^1 y T^2 son las matrices de la transformación correspondientes al problema unidimensional.

Se describe a continuación la formulación de elementos finitos para dos modelos diferentes de placas:

Modelo de placas de Kirchhoff

La hipótesis más importante en la teoría de Kirchhoff es similar a la de Euler Bernoulli presentada para vigas: una fibra normal a la superficie media de la placa permanece normal

luego de la deformación. En otras palabras, puede decirse que se desprecia la deformación transversal por corte. Con esta suposición, el desplazamiento en el plano de un punto de coordenadas x , y y z puede expresarse como

$$\tilde{u} = -z \frac{\partial \tilde{w}}{\partial x} \quad \tilde{v} = -z \frac{\partial \tilde{w}}{\partial y} \quad (4.41)$$

donde x e y son los ejes del plano en la superficie media de la placa, y z está en la dirección del espesor de la misma. Además, \tilde{u} y \tilde{v} son los desplazamientos en los ejes x e y a respectivamente, mientras que \tilde{w} es el desplazamiento transversal, también denominado deflexión a lo largo del eje z .

De acuerdo a esta teoría, el funcional elemental de la energía potencial generalizada, bajo las hipótesis del análisis estático lineal para una placa delgada, es

$$\pi_K = \frac{1}{2} \int_{\Omega_e} \kappa^t C_b \tilde{\kappa} \, dx dy - \int_{\Omega_e} q^* \tilde{w} \, dx dy \quad (4.42)$$

donde Ω_e es el dominio elemental, q^* es la carga distribuida,

$$\tilde{\kappa} = \left\{ -\frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial x^2}, -\frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial y^2}, -2 \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial x \partial y} \right\}^t \quad (4.43)$$

$$C_b = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (4.44)$$

son las deformaciones generalizadas, y la matriz constitutiva, respectivamente, y t el espesor de la placa (que se supone constante). El desplazamiento transversal \hat{w} , (4.39), puede reemplazarse por la expresión,

$$\hat{w} = \varphi T^{-1} \tilde{w} \quad (4.45)$$

donde w tiene los grados de libertad correspondientes al espacio físico, que en este caso se corresponden con los desplazamientos nodales.

Entonces, sustituyendo, (4.43) y (4.44) en (4.42) y de acuerdo a la condición de estacionariedad del funcional π_K , $\delta\pi_K = 0$, obtenemos la matriz de rigidez elemental K^1 , y el sistema elemental a resolver es:

$$K^1 \hat{w} = R \quad (4.46)$$

En la ecuación anterior, la matriz de rigidez K^1 y el vector de cargas R están constituidas por los coeficientes de conexión y tienen la expresión siguiente:

$$R = (T^{-1})^t \int_0^1 \int_0^1 q(\xi, \eta) \varphi^t d\xi d\eta \quad (4.47)$$

$$K^1 = D_0 \{ A_1^{00} \otimes A_2^{22} + \mu (A_1^{20} \otimes A_2^{02} + A_1^{02} \otimes A_2^{20}) + 2(1-\mu) A_1^{11} \otimes A_2^{11} + A_1^{22} \otimes A_2^{00} \} \quad (4.48)$$

donde

Malla	$w_c/(qL^4/100D_0)$		
	Splines $m = 3$	DSCW10	MITC4
1×1	–	0.4019	
2×2	0.2866	–	0.3189
4×4	0.3699	–	0.3969
8×8	0.3967	–	0.4042
<i>Valor exacto</i>	0.40625		

Tabla 4.3: Desplazamientos centrales para una placa cuadrada simplemente apoyada y sometida a carga uniforme $t/\tilde{L} = 0.01$. Modelo de Kirchhoff-Love

$$D_0 = \frac{Et^3}{12(1 - \nu^2)} \quad (4.49)$$

y

$$A_s^{d_1 d_2} = l_{e,s}^{1-(d_1+d_2)} (T_s^{-1})^t \bar{\Gamma}_s^{0d_1 d_2} T_s^{-1}, \quad s = 1, 2 \quad (4.50)$$

$l_{e,s}$ es la longitud del lado del elemento, $\bar{\Gamma}_s^{0d_1 d_2}$ es la matriz de los coeficientes de conexión definidos en la Sección 3.3 (3.15) y (3.16), y s denota la función de escala φ^s considerada en (4.37).

Con las funciones de escala de Daubechies de N coeficientes adaptadas para dos dimensiones, pueden considerarse mallas uniformes en el dominio. Al elemento finito que resulta, con N coeficientes lo denominamos DSCWN y tiene $(N - 1)^2$ nodos en total.

La matriz elemental es de dimensión $m \times m$ si se utilizan B-splines de orden m , y $(N - 1) \times (N - 1)$, en el caso de las funciones de escala de Daubechies de orden N . Es importante resaltar que, para la correspondencia uno a uno con los grados de libertad del espacio físico, N debe ser de la forma $2^k + 2$.

Como se mencionó antes, una vez realizado el ensamble de matrices de rigidez y vectores de carga elementales, el procedimiento en la formulación Wavelet-Galerkin es el convencional que se utiliza en el método de elementos finitos.

En la Tabla 4.3 presentamos los desplazamientos centrales obtenidos para el modelo de placa de Kirchhoff-Love, considerando el espesor $t/\tilde{L} = 0.01$. Teniendo en cuenta los valores exactos, aproximaciones muy buenas fueron obtenidas con splines de grado $m = 3$ y con las funciones de escala de Daubechies de orden $N = 10$, y similares a las obtenidas con el elemento de placa MITC4 (MITC significa mixed interpolation tensorial components) diseñado por Dvorkin-Bathe [28]. Puede observarse que con un sólo elemento DSCW10, el error en la aproximación es menor al 1 %. Es importante notar también que en este caso se utilizó DSCW10 porque en este modelo aparecen derivadas segundas en la matriz de rigidez y para obtener buenas aproximaciones es necesario considerar $N \geq 2^k + 2$, con $k = 3$ para

asegurar estabilidad. Esto fue analizado con más detalle en el trabajo [22].

Modelo de placas de Reissner-Mindlin

Por último, la formulación que sigue está basada en la teoría de placas en la que las deformaciones transversales por corte están incluidas. En esta teoría, desarrollada por E. Reissner y R. D. Mindlin, sólo se requiere continuidad C^0 y utiliza la suposición que partículas de la placa que están originalmente sobre una recta normal a la superficie media antes de la deformación, permanecen en una recta, pero que no es necesariamente normal a la superficie media una vez deformada. Bajo éstas hipótesis (en la teoría de flexión con pequeños desplazamientos), las componentes del desplazamiento en un punto de coordenadas x , y y z son:

$$\tilde{u} = -z\theta_x(x, y) \qquad \tilde{v} = -z\theta_y(x, y) \qquad \tilde{w} = \tilde{w}(x, y) \qquad (4.51)$$

donde \tilde{u} y \tilde{v} son los desplazamientos en el plano, \tilde{w} es el desplazamiento transversal, θ_x y θ_y son las rotaciones de la normal a la superficie sin deformar en los planos xz e yz respectivamente (ver Figura (4.5)). Es importante destacar que en la teoría de placas de Kirchhoff que excluyen deformaciones por corte, se tiene $\theta_x = \frac{\partial \tilde{w}}{\partial x}$ y $\theta_y = \frac{\partial \tilde{w}}{\partial y}$, similar a las suposiciones cinemáticas de la teoría de vigas de Euler-Bernoulli, mientras que la teoría de placas que ese describe en esta sección, tiene similitud con el modelo de viga de Timoshenko.

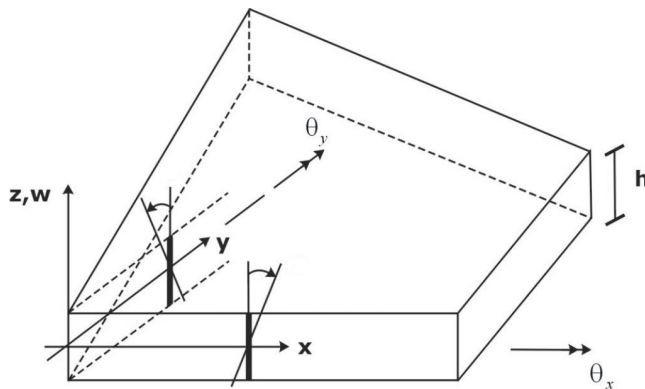


Figura 4.5: Elemento de placa de Reissner-Mindlin

De acuerdo a la teoría de Reissner-Mindlin, la energía potencial generalizada para el problema de flexión de la placa en análisis estático lineal es,

$$\pi_{RM} = \frac{1}{2} \int_{\Omega_e} \kappa^t C_b \kappa \, dx dy + \frac{1}{2} \int_{\Omega_e} \gamma^t C_s \gamma \, dx dy - \int_{\Omega_e} q^* \tilde{w} \, dx dy \quad (4.52)$$

donde

$$\kappa = \left\{ \frac{\partial \theta_x}{\partial x}, -\frac{\partial \theta_y}{\partial y}, \frac{\partial \theta_x}{\partial y} - \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \right\}^t \quad \gamma = \left\{ \frac{\partial \tilde{w}}{\partial x} + \theta_x, \frac{\partial \tilde{w}}{\partial y} - \theta_y \right\}^t \quad (4.53)$$

$$C_b = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad C_s = \frac{Etk}{2(1+\nu)} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.54)$$

Ω_e es el dominio del elemento, q^* es la carga distribuida, t es el espesor de la placa (que se supone constante), E es el módulo de Young, ν es el coeficiente de Poisson y k es el factor de corrección del corte (que se considera $\frac{5}{6}$), como en el modelo de viga de Timoshenko.

Para este problema de la placa, (4.52), se consideran interpolaciones independientes, y las mismas funciones de forma se utilizan para desplazamientos y rotaciones. De esta forma, las funciones elementales, (4.41), pueden reemplazarse por

$$\theta_x = \varphi T^{-1} \hat{\theta}_x, \quad \theta_y = \varphi T^{-1} \hat{\theta}_y, \quad \tilde{w} = \varphi T^{-1} \hat{w} \quad (4.55)$$

donde $\hat{\theta}_x$, $\hat{\theta}_y$ y \hat{w} , son los grados de libertad (correspondientes a los valores nodales) en el espacio físico (ver Figura 4.5).

Entonces, sustituyendo (4.55) en (4.52) y de acuerdo a la condición de estacionariedad de π_{RM} ($\delta\pi_{RM} = 0$), se obtiene la matriz de rigidez elemental y las ecuaciones elementales a resolver son:

$$\begin{bmatrix} K^1 & K^2 & K^3 \\ K^4 & K^5 & K^6 \\ K^7 & K^8 & K^9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\theta}_x \\ \hat{\theta}_y \\ \hat{w} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ R \end{bmatrix}, \quad (4.56)$$

donde

$$\begin{aligned} R &= ((T)^{-1})^t \int_0^1 \int_0^1 q^*(\xi, \eta) \varphi^t d\xi d\eta \\ K^1 &= D_0 \{ A_1^{11} \otimes A_2^{00} + (1-\mu)/2 A_1^{00} \otimes A_2^{11} \} + C_0 A_1^{00} \otimes A_2^{00} \\ K^2 &= D_0 \{ A_1^{10} \otimes A_2^{01} + (1-\mu)/2 A_1^{01} \otimes A_2^{10} \} \\ K^3 &= -C_0 A_1^{01} \otimes A_2^{00} \\ K^4 &= (K^2)^t \\ K^5 &= D_0 \{ A_1^{00} \otimes A_2^{11} + (1-\mu)/2 A_1^{11} \otimes A_2^{00} \} + C_0 A_1^{00} \otimes A_2^{00} \\ K^6 &= -C_0 A_1^{00} \otimes A_2^{01} \\ K^7 &= (K^3)^t \\ K^8 &= (K^6)^t \\ K^9 &= C_0 A_1^{11} \otimes A_2^{00} + A_1^{00} \otimes A_2^{11} \end{aligned} \quad (4.57)$$

t/\tilde{L}	$w_c/(qL^4/100D_0)$			
	(1×1)DSCW6	(2×2)DSCW6	BSWI23	Exacto
0.001	0.3121	0.3441	$1.8 \cdot 10^{-4}$	0.4063
0.01	0.3125	0.3452	0.0173	0.4063
0.05	0.3203	0.3647	0.2174	0.4107
0.1	0.3411	0.4006	0.3510	0.4273
0.15	0.3713	0.4397	0.4152	0.4536
0.2	0.4104	0.4842	0.4678	0.4906
0.3	0.5166	0.5979	0.5861	0.5956
0.35	0.5843	0.6691	0.6579	0.6641

Tabla 4.4: Desplazamientos centrales para una placa cuadrada simplemente apoyada y sometida a carga uniforme $w_c/(q^*\tilde{L}^4/100D_0)$

donde D_0 y $A_s^{d_1 d_2}$ fueron definidos en el modelo anterior (4.50) y $C_0 = \frac{Etk}{2(1+\nu)}$.

En este modelo cada nodo tiene tres grados de libertad, de donde resulta que un elemento DSCWN de Reissner-Mindlin tiene en total $3 \times (N - 1)^2$ DOFs.

Aplicamos la formulación del elemento 2-D para la placa de Reissner-Mindlin obtenida mediante el producto tensorial de las funciones de escala de Daubechies, a un ejemplo clásico: una placa isoparamétrica cuadrada simplemente soportada en los cuatro lados está sometida a una carga. Consideramos dos casos: carga uniforme y carga puntual. Se fijó el coeficiente de Poisson ν en 0.3, t denota el espesor de la placa y \tilde{L} la longitud del lado.

En los problemas de placas muy delgadas, es conocido el fenómeno del bloqueo debido al corte que presentan muchos elementos finitos y son conocidas diversas propuestas para minimizar este fenómeno. Como se mencionó al comienzo del capítulo y en el modelo de placas de Kirchhoff, una de esas propuestas es la que desarrollaron Bathe y Dvorkin con el diseño de los elementos mixtos MITC n (n se refiere a la cantidad de nodos del elemento [28]). Esta familia utiliza interpolación mixta para los desplazamientos, rotaciones y deformaciones de corte transversales. El elemento MITC4 es muy utilizado por resultar eficiente en una amplia variedad de casos.

Las Tablas 4.4 y 4.5 muestran la comparación de los desplazamientos centrales obtenidos con los elementos Reissner-Mindlin DSCW6 (con 6 coeficientes) con los presentados en el trabajo de Xiang [8], obtenidos con un sólo elemento BSWI23 (B-splines de orden m , con $m = 2$ y escala $j = 3$) para el rango de espesores desde 0.001 hasta 0.35. Se presentan, además, las soluciones exactas.

Como puede observarse en los resultados obtenidos con el método propuesto no hay bloqueo cuando el espesor es muy pequeño aún en la escala $j = 0$ y un sólo elemento (75 DOFs). Nuestros resultados son mejores que los obtenidos en el trabajo de Xiang con elementos BSWI23 (243 DOFs) para $t/\tilde{L} \leq 0.05$. Con una malla 2×2 se obtuvieron excelentes resultados para todos los espesores considerados.

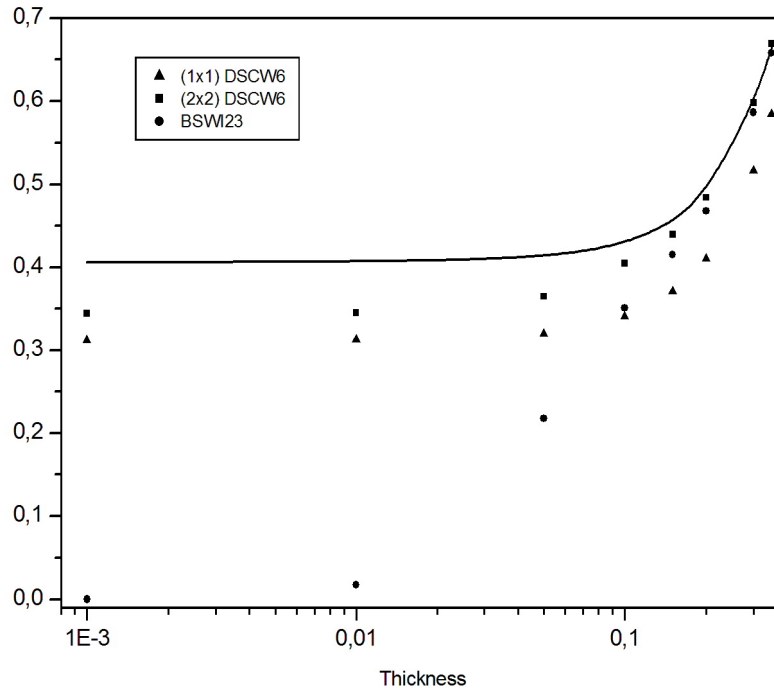


Figura 4.6: Desplazamiento central de una placa simplemente soportada y sometida a carga uniforme. Comparación de resultados del elemento propuesto *DSCW6* con *BSWI23* [8] y con la solución exacta. $0.001 \leq t/\tilde{L} \leq 0.35$.

Se realizó, además, una comparación con el elemento finito multivariable desarrollado por Han en [4] para resolver problemas de flexión de placas moderadamente gruesas. En la Tabla 4.6 se muestra, que con una malla de 6×6 elementos *DSCW6*, la aproximación obtenida es mejor.

En la Tabla 4.7 se presentan los desplazamientos obtenidos y, como en el caso del modelo de Kirchoff (Tabla 4.3), aproximaciones muy buenas fueron obtenidas tanto con las funciones de escala B-splines como con las de Daubechies. En particular, con la malla de 2×2 los resultados son excelentes y similares a los obtenidos con el elemento *MITC4*. En este caso se utilizó el elemento *DSCW6*, de orden más bajo que en el modelo clásico de Kirchoff, porque sólo aparecen las derivadas primeras en la matriz de rigidez [21].

Se investigó, por último, el esfuerzo computacional que requiere el uso de las funciones de

t/\tilde{L}	$w_c/(qL^4/100D_0)$			
	(1× 1)DSCW6	(2× 2)DSCW6	BSWI23	Exacto
0.001	0.7990	0.7991	$0.0504 \cdot 10^{-2}$	-
0.01	0.8009	0.8059	0.0485	1.127
0.05	0.8429	0.9296	0.6325	1.209
0.1	0.9589	1.157	1.0973	1.353
0.15	1.134	1.418	1.416	-
0.2	1.368	1.727	1.752	1.851
0.3	2.016	2.540	2.614	-
0.35	2.432	3.054	3.159	-

Tabla 4.5: Desplazamientos centrales para una placa cuadrada simplemente apoyada y sometida a carga puntual $w_c/(q^*\tilde{L}^4/100D_0)$

$w_c/(q^*\tilde{L}^4/100D_0)$			
Malla	[4]	DSCW6	Exacta
6x6	0.3218	0.3224	0.3227

Tabla 4.6: Desplazamientos centrales para una placa cuadrada empotrada sometida a carga uniforme $t/\tilde{L} = 0.3$

$w_c/(qL^4/100D_0)$			
Malla	Splines $m = 3$	DSCW6	MITC4
1×1		0.3125	
2×2	0.3636	0.345	0.3189
4×4	0.3941	0.3961	0.3969
8×8	0.4033	0.4042	0.4042
<i>Valor exacto</i>	0.40625		

Tabla 4.7: Desplazamientos centrales para una placa cuadrada simplemente apoyada y sometida a carga uniforme $t/\tilde{L} = 0.01$. Modelo de Reissner-Mindlin

Malla	$w_c/(qL^4/100D_0)$					
	MITC4	CPU(seg.)	DSCW6	CPU(seg.)	DSCW10	CPU(seg.)
1×1	–		0.3125	0.375	0.3570	1.65
2×2	0.3189	1.91	0.3454	0.453		
<i>Valor exacto</i>	0.40625					

Tabla 4.8: Desplazamientos centrales y tiempo computacional requerido para una placa cuadrada simplemente apoyada y con carga uniforme $t/\tilde{L} = 0.01$

escala del análisis wavelet. Con los elementos finitos estándar el tiempo requerido de CPU resultó aproximadamente unas tres veces mayor que con los elementos finitos basados en wavelets para obtener similar precisión.

La Tabla 4.8 muestra la comparación entre los resultados obtenidos con el elemento MITC4 y los obtenidos con elementos DSCW10, para $t/\tilde{L} = 0.01$. Se presenta, además, el tiempo computacional requerido, y resulta unas cuatro veces mayor cuando se utiliza el MITC4 que usando el elemento DSCW6 para obtener una precisión similar. Por otro lado, con un sólo elemento DSCW10 se obtiene una muy buena aproximación y el esfuerzo computacional es comparable con el del MITC4. Esto confirma que los elementos de Daubechies son una muy buena propuesta para aproximar la solución.

4.3. Problemas transitorios

Existen en la literatura desarrollos de métodos Wavelet-Galerkin o FEM-Wavelet para la resolución de ecuaciones en derivadas parciales, como por ejemplo los resultados presentados por Bindal et. al [17] para la ecuación unidimensional de difusión-convección transitoria. Ecuaciones en derivadas parciales aparecen con frecuencia ya que corresponden a modelos que evolucionan y describen la dinámica a lo largo del tiempo de una variable (también llamada *estado*). Dentro de los métodos numéricos para la resolución de problemas transitorios, está la posibilidad de mantener la variable temporal continua y discretizar la variable espacial, reduciéndose el problema a un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias. Estos métodos son también conocidos como *métodos de líneas*.

Como aplicación con las funciones de escala de Daubechies se consideró la ecuación del calor unidimensional:

$$u_t - u_{xx} = 0 \quad 0 < x < 1, \quad t > 0 \quad (4.58)$$

$$u_x(0, t) = u(1, t) = 0 \quad t > 0 \quad (4.59)$$

$$u(x, 0) = u_0(x) \quad x \in (0, 1) \quad (4.60)$$

la aproximación en la escala j , puede expresarse de la siguiente forma:

$$u_j(x, t) = \sum_{k=2^{-N}}^{2^j-1} \alpha_{j,k}(t) \phi_{N,j,k}(x) \quad (4.61)$$

La formulación variacional en el espacio discreto consiste en hallar para cada t , $u_j(x, t)$ en

el subespacio correspondiente a la escala j . Para la aproximación de la condición inicial se considera su proyección ortogonal de u_0 sobre el mismo subespacio.

Reemplazando (4.61) en la formulación variacional discreta se tiene un sistema de $(2^j + N - 2)$ ecuaciones diferenciales lineales acopladas en las incógnitas $\alpha_{j,k}(t)$, $t > 0$.

$$\sum_{k=2-N}^{2^j-1} \frac{d}{dt} \alpha_{j,k}(t) \int_0^1 \phi_{N,n}(x) \phi_{N,k}(x) dx = \sum_{k=2-N}^{2^j-1} \alpha_{j,k}(t) \left(\int_0^1 \phi'_{N,n}(x) \phi'_{N,k}(x) dx + \phi'_{N,k}(1) \phi_{N,n}(1) \right) \quad (4.62)$$

donde ahora denotamos $\phi_{N,k}(x) = \phi_{N,j,k}(x)$. La ecuación algebraica:

$$\sum_{k=2-N}^{2^j-1} \alpha_{j,k}(t) \phi_{N,k}(1) = 0 \quad (4.63)$$

que corresponde a la condición de borde en el extremo $x = 1$ es agregada a las ecuaciones (4.62). El sistema contiene matrices de los coeficientes de conexión $\Gamma_{k,l}^{j d_1 d_2}$ presentados en el Capítulo 3, (3.15): el lado izquierdo de (4.62) corresponde a la matriz $\vec{\Gamma}_s^{000}$ y el primer término del lado derecho a la matriz $\vec{\Gamma}_s^{011}$.

Los coeficientes $\alpha_{j,k}(t)$ correspondientes a la escala j , son fácilmente obtenidos mediante rutinas estándar como las de Matlab que realizan la integración en el tiempo de los sistemas de ecuaciones diferenciales algebraicas resultantes (en general, son sistemas de tipo rígido o *stiff* al tomar incrementos espaciales pequeños).

Al resolver la ecuación del calor unidimensional presentada, se obtuvieron muy buenos resultados con las funciones de escala de Daubechies de orden $N = 6$. Los mismos fueron presentados en el trabajo [26] y dan lugar una perspectiva interesante en la resolución de EDPs no lineales mediante la utilización de bases wavelets.

4.4. Comentarios finales sobre FEM-Wavelets

En los ejemplos resueltos se constata la factibilidad y capacidad que tiene el uso de las bases wavelets en el método de los elementos finitos. Los resultados numéricos obtenidos demuestran la buena exactitud y eficiencia al usar las funciones de escala splines y también las funciones de escala de la familia de wavelets de Daubechies. En el caso de los problemas de mecánica estructural, las excelentes propiedades de estas wavelets permiten obtener buenos resultados tanto para el caso de vigas con singularidades, como en el caso de placas finas, resaltando, además, que en estas últimas evitan el bloqueo.

Ésta es un área donde aún queda mucho por investigar. En el próximo capítulo se presenta una propuesta que se desarrolla en el espacio wavelet y consiste en el diseño de un método que incorpora, además del uso de las bases wavelets, las ventajas del Análisis de Multirresolución.

Capítulo 5

Wavelets y Ecuaciones Diferenciales II. Diseño de un Método en el contexto de un AMR.

En este capítulo se expone el segundo desarrollo original de esta tesis, que constituye el aporte más importante y que comprende:

- Un método de Galerkin Modificado, que consiste en la resolución del problema variacional -equivalente a un problema diferencial de segundo orden- mediante la utilización de subespacios spline, con nivel de resolución j y con especiales condiciones de borde.
- Un método de refinamiento de escala, mediante el uso de wavelets para pasar de la escala j a la escala $j + 1$.
- Diseño del algoritmo iterativo que incluye estimaciones de error local.
- Análisis del error.

Para esto, previamente planteamos el problema diferencial y la formulación variacional asociada. Luego, diseñamos las funciones de escala y wavelets spline, asociadas a esquemas del AMR sobre el intervalo $[0, 1]$.

5.1. Planteo del Problema

Como caso particular de lo planteado en (3.1), consideramos el siguiente problema lineal unidimensional de valores de contorno en el intervalo $I = [0, 1]$:

$$\begin{aligned} Lu = -u''(x) + p(x)u'(x) + q(x)u(x) &= f(x) \\ u(0) = u(1) &= 0 \end{aligned} \quad (5.1)$$

donde $p(x)$, $q(x)$ y $f(x)$ son funciones continuas en I .

Luego de integrar por partes el primer término de (5.1) el problema presentado puede asociarse con uno variacional $a(u, v) = F(v)$ como (3.2), en el que la forma bilineal es:

$$a(u, v) = \int_0^1 u'(x)v'(x) + p(x)u'(x)v(x) + q(x)u(x)v(x) dx \quad (5.2)$$

y la forma lineal,

$$F(v) = \int_0^1 v(x)f(x)dx \quad (5.3)$$

para u y $v \in H_0^1(I)$, y funciones $p(x)$ y $q(x)$ tales que la forma bilineal a resulte coerciva.

Como fue mencionado en la Sección 3.1 para aplicar el método de Galerkin se elige un subespacio adecuado $V^0 \subset H_0^1(I)$, de dimensión finita de funciones que satisfacen las condiciones de borde homogéneas y en el que se buscará \tilde{u} aproximación de u . Pretendemos utilizar subespacios generados por las funciones de escala splines en el contexto de un AMR. Como nuestro problema está planteado en el intervalo I deberá adaptarse el análisis de multirresolución spline definido en \mathbb{R} al intervalo $[0, 1]$. Este tema fue analizado para el caso general en la Sección 2.6.

5.2. Estructuras de AMR splines en $[0, 1]$

En esta sección diseñamos el AMR en el intervalo $[0, 1]$ para el caso especial de funciones splines cúbicas, por ser un espacio adecuado para aproximar la solución del problema de segundo orden planteado en (5.1).

Partimos de la función de escala B-spline cúbica $\varphi(x) = \varphi_4(x)$ ya definida en la Sección 2.4.1, soportada en $[0, 4]$. El paso en la discretización es 2^{-j} , lo que da lugar, para $j > 0$ a 2^j segmentos en su soporte. Entonces, para tener al menos una función de escala con su soporte contenido propiamente en $[0, 1]$, j deberá cumplir la condición $j \geq 2$.

Denotamos $\varphi_{j,k}^I(x) = \varphi_{j,k}\chi_{[0,1]}(x)$ las funciones de escala restringidas al $[0, 1]$. Estas funciones $\varphi_{j,k}^I(x)$, cumplen las siguientes propiedades:

- tienen soporte en $[2^{-j}k, 2^{-j}(k+4)]$ y son splines en $\mathbb{Z}/2^j$
- son *interiores* si $0 \leq k \leq 2^j - 4$,
- son de *borde* si $-3 \leq k \leq -1$ y $2^j - 3 \leq k \leq 2^j - 1$ (correspondientes a los bordes izquierdo y derecho, respectivamente)
- son idénticamente nulas si $k < -3$ o $k > 2^j - 1$

Hay, en suma, $2^j - 3$ funciones interiores y 6 de borde, que totalizan $2^j + 3$ funciones no nulas. Definimos

$$\widehat{V}_j^I = \text{gen}\{\varphi_{j,k}^I, -3 \leq k \leq 2^j - 1\}, \quad j \geq 2 \quad (5.4)$$

\widehat{V}_j^I son subespacios de dimensión $2^j + 3$, que definen un AMR en $[0, 1]$. Cada subespacio consiste en funciones spline polinomiales de grado $m = 3$ con nodos en $0 \leq k/2^j \leq 1$ y contiene polinomios de grado $r \leq 3$. Más aún se tiene [78], para $0 \leq x \leq 1$:

$$x^r = \sum_{k=-3}^{2^j-1} \left(\frac{k+2}{2^j}\right)^r \varphi_{j,k}^I(x)$$

Las funciones $\varphi_{j,k}^I(x)$ no nulas constituyen una base de Riesz de \widehat{V}_j^I [65]. La relación de doble escala simplemente es la misma que la relación entre las B-splines, afectando únicamente a las funciones no nulas. Denotamos

$$[\widehat{\varphi}_j^I] = (\varphi_{j,-3}^I, \varphi_{j,-2}^I, \dots, \varphi_{j,2^j-1}^I) \quad (5.5)$$

al arreglo de dimensión $1 \times (2^j + 3)$ y \widehat{H}_j a la matriz de doble escala, de dimensión $(2^{j+1} + 3) \times (2^j + 3)$, tal que se verifica,

$$[\widehat{\varphi}_j^I] = [\widehat{\varphi}_{j+1}^I] \cdot \widehat{H}_j \quad (5.6)$$

La matriz de doble escala, \widehat{H}_j , se obtiene a partir de la transformada de Fourier de la relación de dos escalas de la B-spline de orden $m = 3$ (ver Sección 2.4 y [65]). \widehat{H}_j tiene una estructura recursiva, contiene los coeficientes del filtro $[h] = [1/8, 1/2, 3/4, 1/2, 1/8]$ y es tal que se verifica la expresión (5.6). Puede verse que con j varía la dimensión de \widehat{H}_j pero no los elementos de la matriz. Esto se muestra en detalle en el Apéndice A.

La correspondiente matriz grammiana, $\widehat{P}_j^I \in R^{(2^j+3) \times (2^j+3)}$, es

$$\widehat{P}_j^I = [\widehat{\varphi}_j^I]^t \cdot [\widehat{\varphi}_j^I] = (\langle \varphi_{j,k}^I, \varphi_{j,n}^I \rangle)_{-3 \leq n, k \leq 2^j-1} \quad (5.7)$$

y es importante remarcar que esta matriz puede normalizarse de modo que los autovalores mínimo y máximo se corresponden con las cotas marco de la base de Riesz de $\widehat{\varphi}_j^I$ [65], lo cual mejora su número de condición.

Una vez definidas las funciones de escala, para obtener las wavelets, se define el espacio \widehat{W}_j^I , complemento ortonormal de \widehat{V}_j^I en \widehat{V}_{j+1}^I ,

$$\widehat{V}_{j+1}^I = \widehat{V}_j^I \oplus \widehat{W}_j^I \quad (5.8)$$

La dimensión de \widehat{W}_j^I es 2^j . En el Análisis de Multirresolución descrito en la Sección 2.3.4, existe una única función $\psi(x) \in V_1$, centrada en $x = 1/2$ y soportada en $[-3, 4]$ que genera por traslaciones y dilataciones en \mathbb{Z} una base de Riesz del espacio W_j (wavelet biortogonal spline). Sin embargo, la simple restricción de estas wavelets al intervalo $[0, 1]$, no genera una base de wavelets de \widehat{W}_j^I [56]. Es menester un diseño particular, para lo cual existen diversas variantes ([56], [59]). Una opción es la siguiente:

Proposición 5.1

Toda base $[\widehat{\psi}_j^I] = (\psi_{j,0}^I, \psi_{j,1}^I, \dots, \psi_{j,2^j-1}^I)$ del complemento ortogonal \widehat{W}_j^I , es de la forma,

$$[\widehat{\psi}_j^I] = [\widehat{\varphi}_{j+1}^I] \cdot \widehat{G}_j \quad (5.9)$$

donde la matriz \widehat{G}_j de dimensión $(2^{j+1} + 3) \times 2^j$, $j \geq 2$ es tal que sus columnas son vectores del espacio nulo de $\widehat{H}_j^t \cdot \widehat{P}_{j+1}^I$, de dimensión 2^j .

Demostración:

A partir de (5.6) y (5.9), y requiriendo la condición de ortogonalidad

$$[\widehat{\varphi}_j^I]^t \cdot [\widehat{\psi}_j^I] = 0 \quad (5.10)$$

es posible hallar esta matriz \widehat{G}_j cuyas columnas están en el núcleo de $\widehat{H}_j^t \cdot \widehat{P}_{j+1}^I$. Se tiene, entonces, que las componentes de $[\widehat{\psi}_j]$ están en \widehat{W}_j^I , y forman una base de ese espacio. \square

Diseñamos la matriz \widehat{G}_j con estructura banda a partir de la estructura simple y recursiva de las matrices \widehat{H}_j y \widehat{P}_{j+1}^I , de modo que las wavelets interiores, esto es $\{\psi_{j,k}, 0 \leq k \leq 2^j - 1\}$ coincidan con las wavelets biortogonales de igual soporte. En definitiva, las 6 funciones de escala y las 6 wavelets afectadas al borde se modifican convenientemente ([59], [32]).

A partir de las matrices \widehat{G}_j y \widehat{H}_j y sus duales, pueden diseñarse los proyectores ortogonales [65]:

$$\widehat{P}_j^I : \widehat{V}_{j+1}^I \rightarrow \widehat{V}_j^I \quad \widehat{Q}_j : \widehat{V}_{j+1}^I \rightarrow \widehat{W}_j^I \quad (5.11)$$

que posibilitan el análisis y la síntesis clásicos restringidos al intervalo $[0, 1]$. La acción de estos proyectores modifican en cada paso las condiciones de borde en \widehat{V}_j^I , por lo cual esta estructura AMR no es consistente con el problema diferencial definido por (5.1). Esto impone modificar este esquema AMR clásico para que sea capaz de preservar en cada paso las condiciones de borde.

Definimos ahora los espacios con las funciones de escala *interiores*

$$V_j^I = \text{gen}\{\varphi_{j,k}^I, 0 \leq k \leq 2^j - 4\}, \quad j \geq 2 \quad (5.12)$$

de dimensión $2^j - 3$ y denotamos W_j^I al complemento ortogonal de V_j^I en V_{j+1}^I que resulta de dimensión 2^j . Claramente $V_j^I \subset \widehat{V}_j^I$ y además $V_j^I \subset H_0^1$. Dado que $W_j^I \subset V_{j+1}^I$ sus elementos son combinaciones lineales de las funciones φ_{j+1}^I *interiores*. Además, se tiene que $W_j^I \subset H_0^1$ y su codimensión es 2^j .

En forma análoga denotamos las funciones de escala interiores:

$$[\varphi_j^I] = (\varphi_{j,0}^I, \varphi_{j,1}^I, \dots, \varphi_{j,2^j-4}^I) \quad (5.13)$$

de dimensión $1 \times (2^j - 3)$, $H_j \in \mathbb{R}^{(2^{j+1}-3) \times (2^j-3)}$ y

$$P_j^I = (\langle \varphi_j^I, \varphi_j^I \rangle) \in R^{(2^j-3) \times (2^j-3)} \quad (5.14)$$

las matrices de doble escala tales que $([\varphi_j^I] = [\varphi_{j+1}^I] \cdot H_j)$ y la matriz gramiana, respectivamente. La construcción de una base de wavelets de W_j^I es análoga a la realizada en el espacio \widehat{W}_j y es válida la siguiente proposición:

Proposición 5.2

Toda base $[\psi_j^I]$ del complemento ortogonal W_j^I , es de la forma,

$$[\psi_j^I] = [\varphi_{j+1}^I] \cdot G_j \quad (5.15)$$

donde la matriz G_j de dimensión $(2^{j+1} - 3) \times 2^j$, $j \geq 2$ es tal que sus columnas son vectores del espacio nulo de $H_j^t \cdot P_{j+1}^I$, de dimensión 2^j .

Es decir que se procede en forma análoga al caso anterior: G_j es obtenida a partir del espacio nulo, pero ahora su dimensión es $(2^{j+1} - 3) \times 2^j$.

Es importante observar que $\dim(W_j^I) = \dim(\widehat{W}_j^I) = 2^j$ y que las wavelets interiores coinciden, no así las de borde.

Los espacios de wavelets verifican, entonces, las relaciones siguientes:

$$W_j^I \not\subset \widehat{W}_j^I, W_j^I \not\subset \widehat{V}_j^I \text{ y } W_j^I \subset V_{j+1}^I.$$

Teniendo en cuenta que, para $\widehat{u}_j \in \widehat{V}_j^I$, es válida la siguiente representación

$$\begin{aligned} \widehat{u}_j &= \sum_{k=-3}^{2^j-1} b_{j,k}^I \varphi_{j,k}^I \\ &= + \sum_{k=-3}^{-1} b_{j,k}^I \varphi_{j,k}^I + \sum_{k=2^j-3}^{2^j-1} b_{j,k}^I \varphi_{j,k}^I \end{aligned} \quad (5.16)$$

Definimos la *proyección natural* de \widehat{V}_j^I en V_j^I como

$$u_j = \sum_{k=0}^{2^j-4} b_{j,k}^I \varphi_{j,k}^I \quad (5.17)$$

Ésta no es una proyección ortogonal, pero satisface condiciones de borde nulas para la función y sus derivadas, $u_j^{(i)}(0) = u_j^{(i)}(1) = 0$, $i = 0, 1, 2$. Más aún, vale $\bigcup V_j^I = L^2[0, 1]$ y la secuencia de subespacios V_j^I definen un AMR *interior* en $[0, 1]$.

Observemos que para ciertas aplicaciones también pueden definirse los subespacios spline intermedios V_j^{0I} que verifiquen las condiciones de borde $u_j(0) = u_j(1) = 0$, y claramente se tiene $V_j^I \subset V_j^{0I} \subset \widehat{V}_j^I$ y tales espacios son densos en $H_1^0[0, 1]$ [70].

En la Figura 5.1 se muestran las splines interiores y de borde correspondientes a la escala $j = 3$ (6 de borde y 5 interiores). En la Figura 5.2 se presentan para la misma escala las wavelets construidas a partir de la Proposición 5.2: las 3 wavelets de borde correspondientes a $x = 0$ y 2 wavelets interiores.

Estas estructuras AMR, sus funciones de escala y sus funciones wavelets serán utilizadas en el resto de este capítulo.

5.3. Método de Galerkin Modificado

Si consideramos el problema variacional en V_j^I , debe resolverse un sistema algebraico de dimensión $2^j - 3$:

$$A_{4,j} \alpha_j = b_{4,j} \quad (5.18)$$

donde, para $0 \leq n, k \leq 2^j - 4$,

$$A_{4,j}(n, k) = \int_0^1 \varphi_{j,n}^I \varphi_{j,k}^I dx + p_j(n, k) \int_0^1 \varphi_{j,n}^I \varphi_{j,k}^I dx + q_j(n, k) \int_0^1 \varphi_{j,n}^I \varphi_{j,k}^I dx \quad (5.19)$$

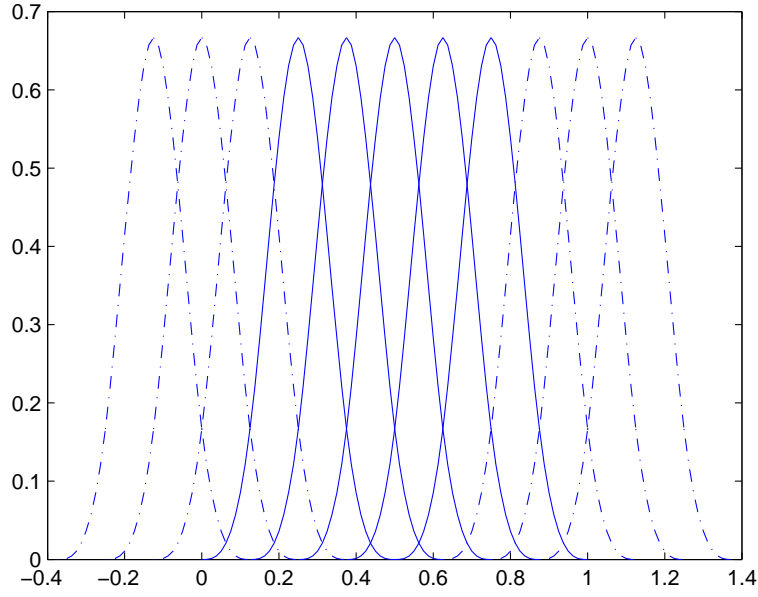


Figura 5.1: Wavelets de borde e interiores, correspondientes a las B-splines cúbicas

y

$$b_{4,j}(n) = l(\varphi_{j,n}^I) \quad (5.20)$$

Notar que en la ecuación (5.19), $q_j(n, k)$ y $p_j(n, k)$ son valores adecuados de las funciones $p(x)$ y $q(x)$ elegidos en la intersección no vacía de los soportes de $\varphi_{j,n}^I$ y $\varphi_{j,k}^I$.

Utilizando relaciones de las B-splines descritas en (3.17) -(3.19), la expresión anterior (5.19) puede simplificarse y reescribirse como:

$$A_{4,j}(n, k) = 2^{2j} \varphi_8''(4 + n - k) + 2^j p_j(n, k) \varphi_8'(4 + n - k) + q_j(n, k) \varphi_8(4 + n - k) \quad (5.21)$$

donde, de acuerdo a la notación introducida en la Sección 2.4.1, φ_8 es la B-spline de orden siete.

Al resolver el sistema (5.18), la solución aproximada que se obtiene, $u_j = \sum_{k=0}^{2^j-4} \alpha_{jk} \varphi_{j,k}^I$, satisface las condiciones de borde, $u_j'(0) = u_j''(0) = u_j'(1) = u_j''(1) = 0$. Como consecuencia de ello, los residuos pueden ser significativos cerca de los extremos del intervalo, ya que $f(0)$ y $f(1)$ pueden no ser nulos. Esto hace que la velocidad de convergencia sea baja y son necesarias escalas muy altas para obtener buenas aproximaciones. La razón de esta “falla” es que en el subespacio V_j^I las funciones y sus derivadas se anulan en ambos extremos del intervalo y entonces la aproximación es pobre.

Una mejora en la velocidad de convergencia puede obtenerse si la solución aproximada se busca en el espacio más amplio, \widehat{V}_j^I (5.4), de dimensión $(2^j + 3)$, que incluye las splines de borde. La primer alternativa para obtener \widehat{u}_j es considerar las ecuaciones variacionales en \widehat{V}_j^I utilizando las funciones $\widehat{\varphi}_{j,k}^I$ para $-3 \leq k \leq 2^j - 1$. El problema que se presenta en ese caso es que la matriz no resulta bien condicionada, y aumenta su condicionamiento con la escala j . Esto se debe a que al restringirnos al intervalo I , el soporte que corresponde a la intersección de las splines de borde con el resto de las funciones de escala es cada vez más

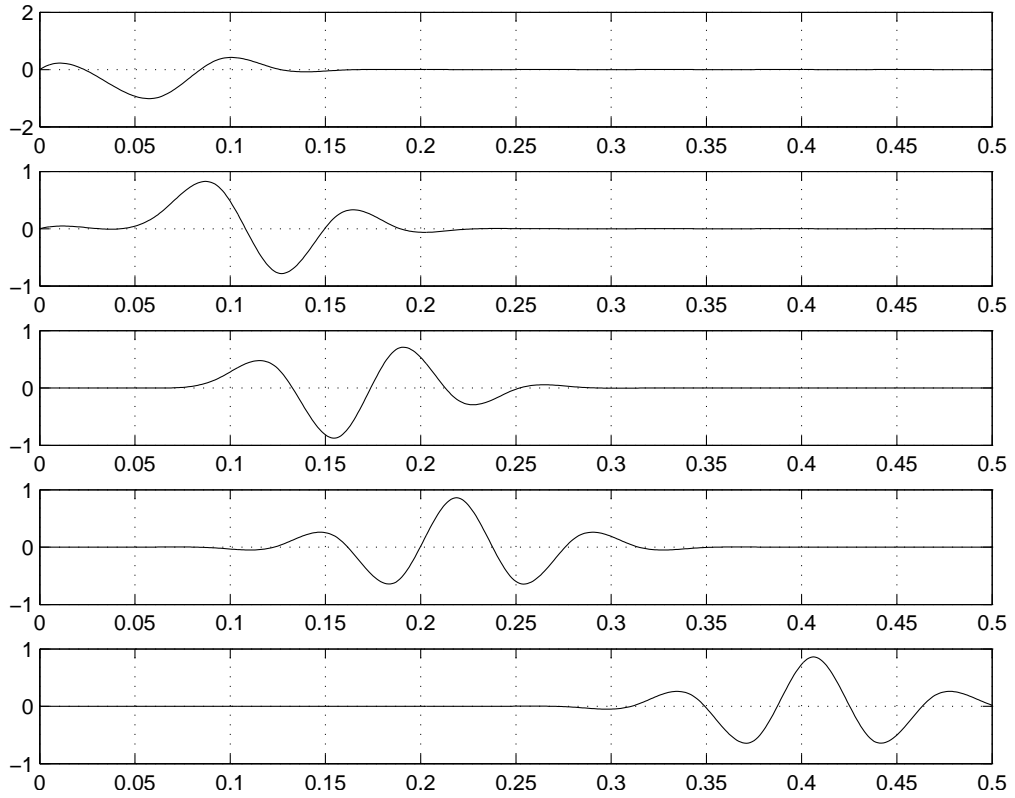


Figura 5.2: Wavelets de borde e interiores, correspondientes a las B-splines cúbicas

pequeño al aumentar la escala j , y las filas correspondientes a las ecuaciones que involucran a los bordes son casi nulas. De aquí surge la necesidad de diseñar una segunda alternativa, utilizando ambos espacios, V_j^I y \widehat{V}_j^I para construir un sistema algebraico, de cuya resolución se obtenga \widehat{u}_j .

Esta propuesta que denominamos *Método de Galerkin Modificado* se describe a continuación y permite obtener una mejor aproximación \widehat{u}_j en la escala j , de la forma $\widehat{u}_j = \sum_{k=-3}^{2^j-1} \widehat{\alpha}_{j,k} \varphi_{j,k}^I$:

■ **Sistema algebraico: aproximación en la escala j**

- **Ecuaciones variacionales:** son las obtenidas a partir de la formulación variacional, considerando que la incógnita u está en \widehat{V}_j^I mientras que la función de prueba v está en V_j^I . Esto conduce a un sistema rectangular de dimensión $(2^j - 3) \times (2^j + 3)$:

$$\widehat{A}_{4,j} \widehat{\alpha}_j = \widehat{b}_{4,j} \quad (5.22)$$

Los elementos de la matriz de rigidez y del vector de cargas son similares a los que se describen en (5.19) y (5.20), con $\varphi_{j,k}^I$ en \widehat{V}_j^I .

- **Ecuaciones de colocación:** obtenidas a partir del requerimiento que el residuo

sea cero en los extremos del intervalo y en los puntos de colocación, 2^{-j} y $1 - 2^{-j}$,

$$\begin{aligned} u''(0) + p(0)u'(0) + q(0)u(0) &= f(0) \\ u''(2^{-j}) + p(2^{-j})u'(2^{-j}) + q(2^{-j})u(2^{-j}) &= f(2^{-j}) \end{aligned} \quad (5.23)$$

$$\begin{aligned} u''(1 - 2^{-j}) + p(1 - 2^{-j})u'(1 - 2^{-j}) + q(1 - 2^{-j})u(1 - 2^{-j}) &= f(1 - 2^{-j}) \\ u''(1) + p(1)u'(1) + q(1)u(1) &= f(1) \end{aligned} \quad (5.24)$$

- **Condiciones de borde:** obtenidas del requerimiento de las condiciones que debe cumplir la solución en los extremos del intervalo,

$$\hat{\alpha}_{-3} \varphi_{j,-3}^I(0) + \hat{\alpha}_{-2} \varphi_{j,-2}^I(0) + \hat{\alpha}_1 \varphi_{j,-1}^I(0) = 0 \quad (5.25)$$

$$\hat{\alpha}_{2^j-3} \varphi_{j,2^j-3}^I(1) + \hat{\alpha}_{2^j-2} \varphi_{j,2^j-2}^I(1) + \hat{\alpha}_{2^j-1} \varphi_{j,2^j-1}^I(1) = 0 \quad (5.26)$$

- **Aproximación en \widehat{V}_j^I :** Resolviendo el sistema algebraico se hallan los 2^j+3 coeficientes $\hat{\alpha}_{jk}$ y se tiene \hat{u}_j .

En cuanto a las características del sistema algebraico a resolver se puede verificar lo siguiente:

Proposición 5.3

La matriz $\widehat{A}_{4,j}$ correspondiente a las ecuaciones variacionales del método Galerkin Modificado, (5.22) es una matriz banda Toeplitz. Al agregarle las seis filas correspondientes a las ecuaciones adicionales (de colocación y borde) la matriz conserva buenas propiedades en cuanto a su estructura, aún en el caso que los coeficientes p y q en el problema (5.1) no sean constantes.

Esto permite una resolución eficiente del sistema lineal, ya que existen métodos que aprovechan esa estructura particular. En la Figura 5.3 se muestra la estructura de la matriz para la escala $j = 3$.

5.4. Refinamiento de la solución aplicando wavelets

En esta sección describimos la utilización de wavelets para pasar de la escala j a la escala $j + 1$.

Una vez obtenida la aproximación en la escala j

$$\hat{u}_j = \sum_{k=-3}^{2^j-1} \hat{\alpha}_{j,k} \varphi_{j,k}^I \quad (5.27)$$

se quiere avanzar a la escala $j + 1$. Una posibilidad para obtener la aproximación en la escala $j + 1$ es repetir el proceso ya descrito. En ese caso se obtiene la siguiente expansión,

$$\hat{u}_{j+1} = \sum_{k=-3}^{2^{j+1}-1} \hat{\alpha}_{j+1,k} \varphi_{j+1,k}^I \quad (5.28)$$

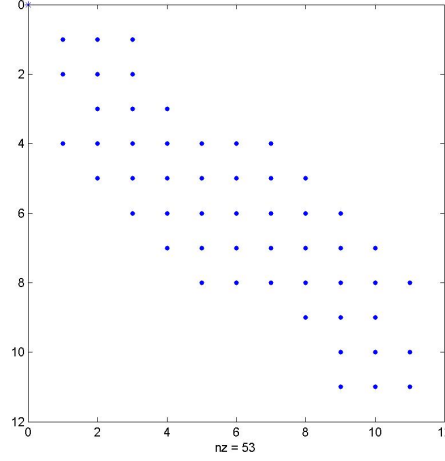


Figura 5.3: Matriz del sistema algebraico (5.22)

donde los coeficientes son solución del sistema algebraico de $2^{j+1} - 3$ ecuaciones variacionales -en la escala $j + 1$ -

$$\langle L\widehat{u}_{j+1}, \varphi_{j+1,n}^I \rangle = \langle f, \varphi_{j+1,n}^I \rangle \quad 0 \leq n \leq 2^{(j+1)} - 4 \quad (5.29)$$

y las 6 ecuaciones de colocación y de borde similares a las ecuaciones (5.23)-(5.24) y (5.25)-(5.26), pero en la escala $j + 1$. Remarquemos que éstas son únicamente las funciones de escala interiores en \widehat{V}_{j+1}^I , y que esta alternativa no explota apropiadamente la estructura de un AMR.

Una segunda opción consiste en mejorar la propuesta anterior. Para ello consideramos otra base de \widehat{V}_{j+1}^I de acuerdo a lo siguiente:

$$\begin{aligned} \widehat{u}_{j+1} = & \sum_{k=-3}^{-1} \widehat{\alpha}_{j+1,k} \varphi_{j+1,k}^I + \sum_{k=0}^{2^j-4} b_{j,k}^I \varphi_{j,k}^I \\ & + \sum_{k=2^{j+1}-3}^{2^{j+1}-1} \widehat{\alpha}_{j+1,k} \varphi_{j+1,k}^I + \sum_{k=1}^{2^j} c_{j,k} \psi_{j,k} \end{aligned} \quad (5.30)$$

en donde se ha utilizado la relación:

$$\widehat{V}_{j+1}^I = \widehat{V}_j^I \oplus \widehat{W}_j^I \quad (5.31)$$

En esta nueva base de \widehat{V}_{j+1}^I las $2^{j+1} - 3$ ecuaciones variacionales son reemplazadas por las siguientes:

$$\langle L\widehat{u}_{j+1}, \varphi_{j,n}^I \rangle = \langle f, \varphi_{j,n}^I \rangle \quad 0 \leq n \leq 2^j - 4 \quad (5.32)$$

$$\langle L\widehat{u}_{j+1}, \psi_{j,n}^I \rangle = \langle f, \psi_{j,n}^I \rangle \quad 1 \leq n \leq 2^j \quad (5.33)$$

y las ecuaciones de borde se transforman en otras similares.

Consecuentemente, incorporando las ecuaciones adicionales, se concluye el siguiente resultado:

Proposición 5.4

Si en el sistema algebraico de dimensión $2^{j+1} + 3$ obtenido con Galerkin Modificado correspondiente a la escala $j + 1$ se reemplazan las ecuaciones variacionales (5.29) por (5.32) y (5.33), se obtiene un sistema algebraico equivalente.

Teniendo en cuenta el importante resultado anterior, Proposición 5.4, en lo que sigue se utilizará la nueva estructura de las ecuaciones variacionales (5.32) y (5.33), lo que permitirá realizar el refinamiento de escala minimizando el número de incógnitas.

Para ello escribimos la aproximación en el espacio \widehat{V}_{j+1} , de la siguiente forma:

$$\widehat{u}_{j+1} = \widehat{u}_j + [\widehat{u}_{j+1} - \widehat{u}_j] = \widehat{u}_j + \widehat{v}_j \tag{5.34}$$

y consideramos para el incremento $\widehat{v}_j \in \widehat{V}_{j+1}$ la expansión:

$$\widehat{v}_j = \sum_{k=-3}^{2^{j+1}-1} \gamma_{j+1,k} \widehat{\varphi}_{j+1,k}^I = [\widehat{\varphi}_{j+1}^I] \cdot [\gamma_{j+1}] \tag{5.35}$$

en la base de funciones de escala de \widehat{V}_{j+1} .

Observación 5.5: Es importante remarcar que \widehat{v}_j y \widehat{u}_j no son ortogonales.

Primeramente exponemos el siguiente resultado:

Proposición 5.6

El incremento $\widehat{v}_j \in \widehat{V}_{j+1}$ (5.35) verifica la siguiente condición de ortogonalidad:

$$\langle L\widehat{v}_j, \widehat{\varphi}_{j,n}^I \rangle = 0 \quad 0 \leq n \leq 2^j - 4 \tag{5.36}$$

(asociada a un sistema lineal homogéneo de $(2^j - 3)$ ecuaciones y $(2^{j+1} + 3)$ incógnitas).

Demostración:

Se tiene reemplazando (5.34) en (5.32),

$$\langle L\widehat{u}_j, \widehat{\varphi}_{j,n}^I \rangle + \langle L\widehat{v}_j, \widehat{\varphi}_{j,n}^I \rangle = \langle f, \widehat{\varphi}_{j,n}^I \rangle \tag{5.37}$$

y de la ecuación variacional de la escala j , $\langle L\widehat{u}_j, \widehat{\varphi}_{j,n}^I \rangle = \langle f, \widehat{\varphi}_{j,n}^I \rangle$. □

Observación 5.7: Es interesante observar que $L\widehat{v}_j$ no pertenece a un espacio spline, en

particular $L\widehat{v}_j \notin \widehat{W}_j^I$.

Teorema 5.8

(Reducción del número de incógnitas)

Sea D_j la matriz correspondiente al producto $(\langle L\varphi_{j,k}^I, \varphi_{j,n}^I \rangle)_{-3 \leq n, k \leq 2^j - 1}$ y $\widehat{v}_j = [\widehat{\varphi}_{j+1}^I] \cdot [\gamma_{j+1}]$ el incremento (5.34). Si \widehat{v}_j satisface las ecuaciones (5.36), entonces existe una matriz N_j de dimensión $(2^{j+1} + 3) \times (2^j + 6)$, de estructura simple y recursiva tal que los coeficientes del incremento en la base de funciones de escala de \widehat{V}_{j+1} son

$$[\gamma_{j+1}] = N_j[\widehat{\alpha}_{j+1}] \quad (5.38)$$

Esto permite reducir la cantidad de incógnitas de $(2^{j+1} + 3)$ a $(2^j + 6)$.

Demostración:

Reemplazando (5.35) en (5.36) y teniendo en cuenta la matriz gramiana, \widehat{P}_j^I (5.7), y las similares que surgen del operador diferencial L , se obtiene un sistema lineal homogéneo. La reducción surge porque la dimensión del espacio nulo de la matriz es $(2^{j+1} + 3) - (2^j - 3) = (2^j + 6)$. \square

Observación 5.9: Es muy importante destacar que la cantidad de ecuaciones que se resuelven es la mínima y además que en el teorema anterior se supone rango máximo de la matriz N_j . Esto último tendrá relación con la matriz D_j que depende del operador L y si el rango de N_j no resulta máximo puede haber más incógnitas. Sin embargo, esto no altera la reducción significativa de incógnitas que se logra.

Finalmente, el sistema algebraico que hay que resolver para avanzar a la escala $j + 1$ se presenta en el teorema que sigue:

Teorema 5.10

Una vez hallada \widehat{u}_j con Galerkin Modificado, con las ecuaciones (5.22)-(5.26), el incremento $\widehat{v}_j = [\gamma_{j+1}] \cdot [\widehat{\varphi}_{j+1}^I]$ se obtiene en términos de los coeficientes $[\widehat{\alpha}_{j+1}]$ como solución del sistema algebraico proveniente de las 2^j ecuaciones variacionales:

$$\langle L\widehat{v}_j, \psi_{j,n} \rangle = \langle f - L\widehat{u}_j, \psi_{j,n} \rangle \quad (5.39)$$

agregando las seis condiciones de borde.

Demostración:

Reemplazando \widehat{u}_{j+1} por la descomposición (5.34) en las ecuaciones (5.33), quedan 2^j ecuaciones variacionales. El término que es conocido de la escala j , $\langle L\widehat{u}_j, \psi_{j,n} \rangle$ pasa al término independiente. Agregando las seis condiciones de borde, escritas en las incógnitas $[\gamma_{j+1}]$, se obtiene el sistema algebraico a resolver para obtener los coeficientes $[\alpha_{j+1}]$ de la aproximación en la escala $j + 1$. Luego, para hallar \widehat{v}_j , se utiliza la relación (5.38). \square

En resumen, la estructura del MRA permite obtener \hat{u}_{j+1} en una forma eficiente, resolviendo un sistema lineal de dimensión $2^j + 6$ en la escala $j + 1$ en el espacio \widehat{V}_{j+1}^I (5.39).

5.5. Algoritmo de refinamiento iterativo

- *Paso 1*

Se elige una escala inicial $j = j_0$ y se hallan los coeficientes correspondientes a las funciones de escala resolviendo el sistema algebraico (5.22), se tiene $\hat{u}_j = \sum_{k=-3}^{2^j-1} \hat{\alpha}_{j,k} \varphi_{j,k}^I$

- *Paso 2*

Se hallan los coeficientes $[\hat{\alpha}_{j+1}]$ de \hat{v}_j resolviendo el sistema (5.39)

- *Paso 3*

Dado un umbral adecuado ϵ se aplica el criterio de terminación siguiente: si $\|\hat{v}_j\|_2^2 < \epsilon$, PARAR se tiene una buena aproximación, SI NO ir al paso siguiente

- *Paso 4*

$\hat{u}_{j+1} = \hat{u}_j + \hat{v}_j$,
 $j = j + 1$ y volver a Paso 2

5.6. Error de la aproximación en escala j

En esta Sección se analiza el error de la aproximación obtenida en la escala j con el método de Galerkin Modificado propuesto en la Sección 5.3. Se debe tener en cuenta que la aproximación \hat{u}_j en el espacio \widehat{V}_j^I se obtiene del sistema algebraico correspondiente al método de Galerkin Modificado (5.22) y las 6 ecuaciones adicionales una vez calculados los $(2^j + 3)$ coeficientes $\hat{\alpha}_{jk}$.

Dado que el desarrollo realizado para aproximar la solución en la escala j no es un problema variacional puro en el espacio \widehat{V}_j^I realizaremos una estrategia para aplicar el Lema de Céa (3.4). En ese sentido, probaremos que \hat{u}_j es solución de un problema variacional puro en un subespacio \widehat{U}_j^I de \widehat{V}_j^I especialmente definido.

Recordando que en el método propuesto la diferencia está en las ecuaciones adicionales que corresponden a los extremos del intervalo, es natural suponer que el subespacio \widehat{U}_j^I requerido va a estar generado por

$$\{\tilde{\varphi}_{j,0}^I, \varphi_{j,1}^I, \varphi_{j,2}^I, \dots, \varphi_{j,N-1}^I, \tilde{\varphi}_{j,N}^I\} \quad (5.40)$$

donde $N = 2^j - 4$, $\varphi_{j,k}^I$, $1 \leq k \leq N - 1$ son las bases interiores, excluyendo $\varphi_{j,0}^I$ y $\varphi_{j,N}^I$ y agregando nuevas funciones $\tilde{\varphi}_{j,0}^I$ y $\tilde{\varphi}_{j,N}^I$ en los extremos izquierdo y derecho respectivamente.

Para definir $\tilde{\varphi}_{j,0}^I$ y $\tilde{\varphi}_{j,N}^I$ se consideran las funciones que se utilizan en el método Galerkin Modificado, es decir $\varphi_{j,-3}^I$, $\varphi_{j,-2}^I$, y $\varphi_{j,-1}^I$ correspondientes al extremo izquierdo y $\varphi_{j,N+1}^I$, $\varphi_{j,N+2}^I$ y $\varphi_{j,N+3}^I$ al extremo derecho del intervalo.

Por simplicidad se desarrolla el análisis del error sólo en el extremo izquierdo. Es decir, proponiendo que

$$\tilde{\varphi}_{j,0}^I = c_{-3}\varphi_{j,-3}^I + c_{-2}\varphi_{j,-2}^I + c_{-1}\varphi_{j,-1}^I + c_0\varphi_{j,0}^I$$

cumpla con las cuatro condiciones siguientes:

$$\begin{aligned}\tilde{\varphi}_{j,0}^I(0) &= 0 \\ L\tilde{\varphi}_{j,0}^I(0) &= f(0) \\ L\tilde{\varphi}_{j,0}^I(2^{-j}) &= f(2^{-j}) \\ \langle L\hat{u} - f, \tilde{\varphi}_{j,0}^I \rangle &= 0\end{aligned}\tag{5.41}$$

Es fácil ver que las tres primeras ecuaciones del sistema (5.41) son linealmente independientes respecto de los coeficientes c_i , y que el sistema resulta compatible. Existe entonces, una solución $\tilde{\varphi}_{j,0}^I \neq 0$. La definición anterior implica que $\tilde{\varphi}_{j,0}^I \in H_0^1[0, 1]$, $\text{sop}\tilde{\varphi}_{j,0}^I = \text{sop}\varphi_{j,0}^I = [0, 4h]$, donde $h = 2^{-j}$ y se tendrá además que, en general, $\varphi_{j,0}^I(0) \neq 0$ y $\varphi_{j,0}^{II}(0) \neq 0$. En forma análoga se define $\tilde{\varphi}_{j,N}^I$.

Luego, considerando el subespacio \hat{U}_j^I , generado por (5.40), resulta la inclusión $\hat{U}_j^I \subset \hat{V}_j^I$. Es necesario probar que \hat{u}_j , que es solución del sistema algebraico en el espacio \hat{V}_j^I , está también en \hat{U}_j^I , esto es:

$$\hat{u}_j = \tilde{\alpha}_0\tilde{\varphi}_{j,0}^I + \sum_{k=1}^{N-1} \tilde{\alpha}_{j,k} \varphi_{j,k}^I + \tilde{\alpha}_N\tilde{\varphi}_{j,N}^I\tag{5.42}$$

Teniendo en cuenta los soportes correspondientes, resulta:

$$\begin{aligned}L\hat{u}_j(0) &= \tilde{\alpha}_0L\tilde{\varphi}_{j,0}^I(0) \\ L\hat{u}_j(2^{-j}) &= \tilde{\alpha}_0L\tilde{\varphi}_{j,0}^I(2^{-j})\end{aligned}\tag{5.43}$$

Pero, de acuerdo a como fueron diseñadas las funciones en el borde (5.41), se tiene,

$$\begin{aligned}L\hat{u}_j(0) &= f(0) \\ L\hat{u}_j(2^{-j}) &= f(2^{-j})\end{aligned}\tag{5.44}$$

y como, $f(0)$ o $f(2^{-j}) \neq 0$ se tiene que $\tilde{\alpha}_0 = 1$, y análogamente, $\tilde{\alpha}_N = 1$. Por lo tanto (5.42) se reescribe

$$\hat{u}_j = \tilde{\varphi}_{j,0}^I + \sum_{k=1}^{N-1} \tilde{\alpha}_{j,k} \varphi_{j,k}^I + \tilde{\varphi}_{j,N}^I\tag{5.45}$$

y se concluye que \hat{u}_j satisface el problema variacional puro en \hat{U}_j^I :

$$\langle L\hat{u}, \varphi_{j,k}^I \rangle = \langle f, \varphi_{j,k}^I \rangle \quad 1 \leq k \leq N-1\tag{5.46}$$

recordando que para $k = 0$ y $k = N$ se cumplen por diseño (ver (5.41)).

El sistema algebraico se reduce entonces a

$$\sum_{k=1}^{N-1} \tilde{\alpha}_{j,k} \langle L, \varphi_{j,k}^I \varphi_{j,n}^I \rangle = \langle L\hat{u}, \varphi_{j,n}^I \rangle - \langle \tilde{\varphi}_{j,0}^I + \tilde{\varphi}_{j,N}^I, \varphi_{j,n}^I \rangle \quad 1 \leq n \leq N-1 \quad (5.47)$$

Se deduce de lo anterior que $\hat{u}_j \subset \hat{U}_j^I \subset H_0^1[0,1] \subset \hat{V}_j^I$ y queda demostrado el siguiente teorema fundamental:

Teorema 5.11

La aproximación \hat{u}_j en el espacio \hat{V}_j^I obtenida con el método de Galerkin Modificado es solución de un problema variacional puro en \hat{U}_j^I .

Como consecuencia del resultado anterior es posible utilizar el Lema de Céa, dando lugar a la estimación del error:

Corolario 5.12

Dada la aproximación $\hat{u}_j = \sum_{k=-3}^{2^j-1} \hat{\alpha}_{j,k} \varphi_{j,k}^I$ obtenida a partir del sistema algebraico (5.22), se tiene

$$\|u - \hat{u}_j\|_{\hat{V}_j^I}^2 \leq \frac{C}{\gamma} \inf_{v \in \hat{U}_j^I} \|u - v\|_{\hat{V}_j^I}^2 \quad (5.48)$$

donde C y γ son las constantes de continuidad y coercividad de la forma bilineal a .

De (5.48) se infiere que la solución obtenida por Galerkin Modificado minimiza la norma del error salvo un factor constante y converge a la solución exacta al aumentar la escala j .

Una segunda estimación del error puede realizarse teniendo en cuenta (5.34) y (5.35), y normalizando se tiene que

$$\|\hat{v}_j\|_2^2 \leq C_j \sum_{k=-3}^{2^{j+1}-1} |\gamma_{j+1,k}|^2 \quad (5.49)$$

Dado que las $\varphi_{j,k}^I$ son una base de Riesz de \hat{V}_{j+1}^I se tiene (5.49) para cierta constante C_j , con $C_j \leq C$, para todo j [65].

Tales coeficientes constituyen una expresión natural del error en el sentido de la norma en L^2 . Más aún, dado que las $\varphi_{j,k}^I$ están bien localizadas, se cuenta también con una estimación del error local, lo cual permite aplicar estrategias de mejoramiento local.

Observación 5.13: Es importante notar que se tendrán entonces estimaciones tanto para el incremento \hat{v}_j como también para el residuo $f - L\hat{u}_j$.

Los coeficientes wavelet de la solución aproximada pueden ser obtenidos mediante el

algoritmo de Mallat presentado en la Sección 2.3.6. y también ofrecen información acerca del error dado que resultan estimadores locales naturales del error y en escala, en particular, en las partes no suaves de la solución. Permitirán determinar, entonces, si la aproximación obtenida es suficientemente buena o no. Consecuentemente, un esquema adaptativo podría implementarse refinando la solución en las zonas de interés, evitando así un incremento significativo en la cantidad de wavelets.

5.7. Ejemplos Numéricos

En esta sección se describen los resultados numéricos obtenidos mediante la implementación del método propuesto y descrito en la Sección 5.5 para varios problemas de valores de contorno de segundo orden. Se consideraron en todos los casos (salvo el Ejemplo 6) problemas no homogéneos y con condiciones de Dirichlet nulas.

Se utilizaron las funciones de escala B-splines y las wavelets correspondientes como se describió en el método de Galerkin Modificado (Sección 5.3) y se implementó el refinamiento de la solución aplicando wavelets (Sección 5.4). En cada caso, se analizaron los errores de las aproximaciones de acuerdo a las cotas presentadas en la Sección 3.2.

Los tres primeros ejemplos corresponden a problemas con coeficientes constantes y soluciones regulares en $[0, 1]$. Se utilizaron especialmente para analizar y comparar las velocidades de convergencia al tomar los dos espacios de splines que fueron presentados en la Sección 5.2: el espacio con splines interiores y el espacio que agrega las splines de borde.

En el Ejemplo 3, que es un problema con solución regular y periódica, se comparan de los resultados obtenidos usando las B-splines con los presentados en la bibliografía que utilizan las funciones de escala de Daubechies.

Los Ejemplos 4 y 5 son ecuaciones diferenciales con coeficientes que son funciones de la variable independiente y en los que la regularidad de la solución exacta depende de ciertos parámetros.

Por último, en los Ejemplos 6 y 7 se consideraron problemas perturbados correspondientes a las ecuaciones de convección-difusión y reacción-difusión. Fueron tomados de la bibliografía para realizar la comparación de los resultados numéricos obtenidos.

Teniendo en cuenta las estimaciones del error presentadas en la Sección 3.2, se utilizó para medir los errores con respecto a la solución exacta la seminorma siguiente:

$$\|v\|_{j,\infty} = \max_{k=0,1,\dots,2^j-1} v\left(\frac{k}{2^j}\right), \quad (5.50)$$

Para verificar el orden de convergencia R se tiene en cuenta, entonces, que

$$E(j) = \|u - u_j\|_{j,\infty} = C2^{-jR} \quad (5.51)$$

de donde se tiene, $\frac{E(j)}{E(j+1)} = 2^R$ y entonces,

$$R = \log_2(E(j)) - \log_2(E(j+1)) \quad (5.52)$$

Ejemplo 1

En primer lugar se consideró el problema de valores de contorno,

j	$\ u - \widehat{u}_j\ _{j,\infty}$
4	5.5×10^{-6}
5	3.7×10^{-7}
6	2.4×10^{-8}
7	2.0×10^{-9}

Tabla 5.1: Errores relativos para distintas escalas. Ejemplo 1

$$Lu = -u''(x) + u'(x) + u(x) = x + 1$$

$$u(0)=0 \quad u(1)=0$$

cuya solución es:

$$u(x) = c_1 e^{(1-\sqrt{5})/2 x} + c_2 e^{(1+\sqrt{5})/2 x} + x$$

con

$$c_1 = -c_2 = (e^{(1-\sqrt{5})/2} - e^{(1+\sqrt{5})/2})^{-1}$$

Se obtuvieron soluciones numéricas en los dos espacios de B-splines, \widehat{V}_j^I y V_j^I definidos en (5.4) y (5.12) respectivamente. Se verificó que la convergencia es lenta en el espacio V_j^I y que resulta más ventajosa la aproximación en el espacio \widehat{V}_j^I , donde se agregan las splines de borde. Ese aspecto fue analizado en la Sección 5.3.

Los órdenes de convergencia en los dos casos resultaron

$$\|u - u_j\|_{j,\infty} = O(2^{-2j})$$

en V_j^I , y

$$\|u - \widehat{u}_j\|_{j,\infty} = O(2^{-4j})$$

en \widehat{V}_j^I . Esto significa, por ejemplo, que se necesita llegar a la escala $j = 10$ para que el error relativo sea inferior a 10^{-4} en V_j^I , mientras que en el espacio \widehat{V}_j^I se alcanza con la escala $j = 3$. En la Tabla 5.1 se presentan los errores obtenidos con las diferentes escalas j .

Es importante señalar que si se consideraran splines de orden uno (splines lineales), es necesario tomar la escala $j = 5$ para esa misma tolerancia en el error relativo. En ese caso es importante resaltar que los espacios de splines interiores e interiores y bordes, V_j^I y \widehat{V}_j^I coinciden.

Ejemplo 2

Para el problema de valores de contorno,

$$Lu = -u''(x) + \pi^2 u(x) = 2\pi^2 \sin(\pi x)$$

$$u(0)=0 \quad u(1)=1$$

j	$\ u - \hat{u}_j\ _{j,\infty}$
4	1.2×10^{-5}
5	3.1×10^{-7}
6	1.1×10^{-8}
7	3.7×10^{-10}
8	2.5×10^{-11}

Tabla 5.2: Errores relativos para distintas escalas. Ejemplo 2

cuya solución exacta es,

$$u(x) = \sin(\pi x)$$

se obtuvieron resultados numéricos para distintas escalas que se presentan en la Tabla 5.2. Se verificó, como en el ejemplo anterior, que el orden de convergencia es $O(2^{-4j})$.

Ejemplo 3

El problema

$$Lu = -u''(x) + u(x) = (4\pi^2 + 1) \sin(2\pi x)$$

$$u(0)=0 \quad u(1)=0$$

que tiene solución exacta,

$$u(x) = \sin(2\pi x)$$

se presenta con los fines de realizar una comparación con los publicados en el trabajo [71], en el que se utilizaron las funciones de escala de Daubechies.

j	$\ u - \hat{u}_j\ _{j,\infty}$ <i>B-splines</i>	$\ u - \tilde{u}_j\ _{j,\infty}$ <i>D4</i>	$\ u - \hat{u}_j\ _{j,\infty}$ <i>D6</i>
3	4.6×10^{-3}	1.4×10^{-3}	2.9×10^{-5}
4	9.4×10^{-6}	6.4×10^{-5}	5.3×10^{-7}
5	7.1×10^{-8}	1.2×10^{-6}	1.3×10^{-9}
6	5.0×10^{-10}	2.2×10^{-8}	3.4×10^{-12}
7	3.5×10^{-12}	4.0×10^{-10}	8.3×10^{-15}
8	2.5×10^{-14}	7.4×10^{-12}	1.7×10^{-17}
9	2.46×10^{-15}	1.4×10^{-13}	8.48×10^{-18}

Tabla 5.3: Errores relativos para distintas escalas. Ejemplo 3

Los valores de la primer columna de la Tabla 5.3 fueron obtenidos por el método propuesto y se hallan comprendidos entre los valores de las columnas segunda y tercera que corresponden a los errores obtenidos con las funciones de escala de Daubechies, de orden $N = 4$ y $N = 6$, respectivamente. Los errores de las aproximaciones utilizando las funciones de escala de Daubechies fueron presentados en el trabajo [71] y resultan ser de orden $O(2^{-Nj})$. Se verifican los órdenes de convergencia teóricos, relacionados con los $N/2$ momentos nulos de las funciones de escala de Daubechies de orden N , aspecto que fue analizado en la Sección 2.5.

Ejemplo 4

Se analiza la familia de problemas de valores de contorno con coeficientes variables,

$$Lu = -u''(x) + \frac{2}{x+\lambda}u'(x) + u(x) = f(x)$$

$$u(0)=0 \quad u(1)=0$$

siendo $f(x)$ la función correspondiente a la solución exacta,

$$u(x) = c_1 \frac{\sin(x + \lambda)}{(x + \lambda)} + c_2 \frac{\cos(x + \lambda)}{(x + \lambda)} + \frac{1}{(x + \lambda)}$$

donde,

$$c_1 = \frac{-\cos(1 + \lambda) + \cos(\lambda)}{\sin(\lambda) \cos(1 + \lambda) - \cos(\lambda) \sin(1 + \lambda)}$$

$$c_2 = \frac{-\sin(\lambda) + \sin(1 + \lambda)}{\sin(\lambda) \cos(1 + \lambda) - \cos(\lambda) \sin(1 + \lambda)}$$

Se observa de la expresión de la solución exacta que para valores grandes de λ la solución es regular, mientras que resulta casi singular para valores pequeños de ese parámetro (tiene alto gradiente en $x = 0$, pero luego es muy suave en el resto del dominio). Para el análisis se consideraron valores del parámetro $0.01 \leq \lambda \leq 5$. En la Figura 5.4 se muestra la convergencia al aumentar la escala para el valor del parámetro $\lambda = 0.01$ y en la Tabla 5.4 se presentan los errores obtenidos para diferentes valores de λ en la escala $j = 10$.

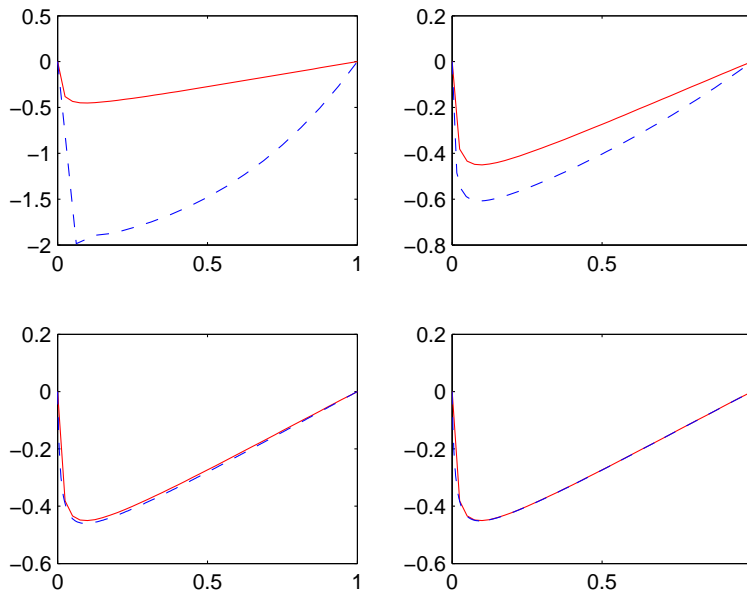


Figura 5.4: Aproximaciones correspondientes a escalas $j = 4, 6, 8, 10$, $\lambda = 0.01$. Ejemplo 4

λ	$\ u - \widehat{u}_j\ _{j,\infty}$
5	3.1×10^{-10}
1	4.5×10^{-8}
0.5	2.0×10^{-7}
0.01	6.7×10^{-4}

Tabla 5.4: Errores para distintos valores de λ , en escala $j = 10$. Ejemplo 4

Ejemplo 5

La función u definida por

$$u(x) = (1 - x) \cdot (\tan^{-1}(\lambda(x - x_0)) + \tan^{-1}(\lambda x_0))$$

es solución del problema diferencial [13],

$$Lu = -(k(x)u'(x))' = f(x)$$

$$u(0)=0 \quad u(1)=0$$

donde,

$$k(x) = \frac{1}{\lambda} + \lambda(x - x_0)^2$$

y

$$f(x) = 2(1 + \lambda(x - x_0))(\tan^{-1}(\lambda(x - x_0)) + \tan^{-1}(\lambda x_0))$$

En la Tabla 5.5 se muestran los errores para distintas escalas para valores del parámetro λ que corresponde a una solución con gradiente alto en x_0 . En las Figuras 5.5 y 5.6 se muestran para las escalas $j = 4$ y $j = 5$ las aproximaciones y los errores puntuales obtenidos, respectivamente.

j	$\ u - \widehat{u}_j\ _{j,\infty}$
5	3.8×10^{-2}
6	2.0×10^{-2}
7	4.9×10^{-3}
8	1.1×10^{-3}
9	2.9×10^{-4}

Tabla 5.5: Errores relativos para distintas escalas, $x_0 = 0.75$, $\lambda = 50$. Ejemplo 5

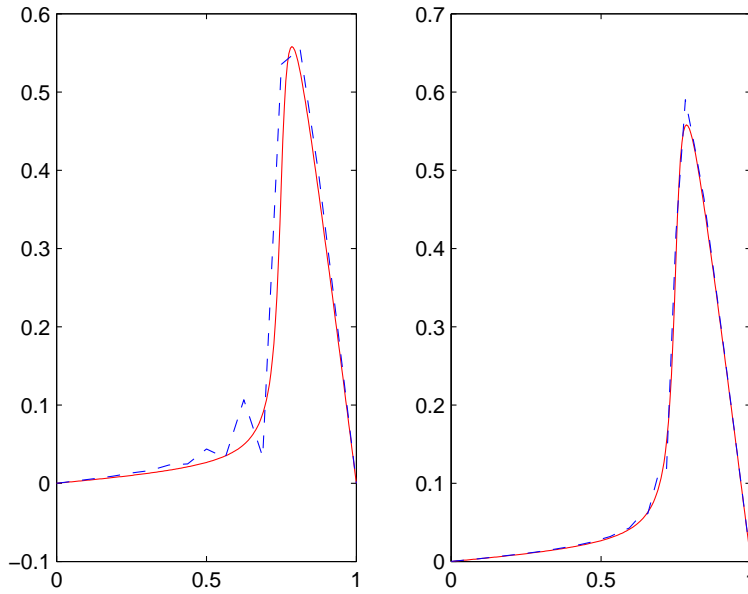


Figura 5.5: Aproximaciones escalas $j = 4$ y $j = 5$, $x_0 = 0.75$, $\lambda = 50$. Ejemplo 5

Ejemplo 6

El problema de convección-difusión,

$$Lu = -\varepsilon u''(x) - u'(x) = 0$$

$$u(0)=0 \quad u(1)=1$$

con solución exacta,

$$u(x) = \frac{1 - e^{-x/\varepsilon}}{1 - e^{-1/\varepsilon}}$$

presenta una capa límite en $x = 0$ para valores pequeños del parámetro de perturbación ε , $0 < \varepsilon \leq 1$.

En la Tabla 5.6 y la Figura 5.7 se muestra la convergencia de las aproximaciones aumentando la escala para el valor del parámetro $\varepsilon = 10^{-3}$. Se realizó la comparación con los resultados obtenidos por el método de colocación con wavelets spline de Radunovic presentado en el trabajo [69]. En la Figura 5.8 se muestran ambas velocidades de convergencia. La pendiente de la recta continua indica que es más ventajoso el método propuesto en este trabajo.

Ejemplo 7

Se considera, por último, un problema que corresponde a una perturbación de la ecuación de reacción-difusión

$$Lu = -\varepsilon u''(x) + u(x) = -\cos^2(\pi x) - 2\varepsilon\pi^2 \cos(2\pi x)$$

$$u(0)=0 \quad u(1)=0$$

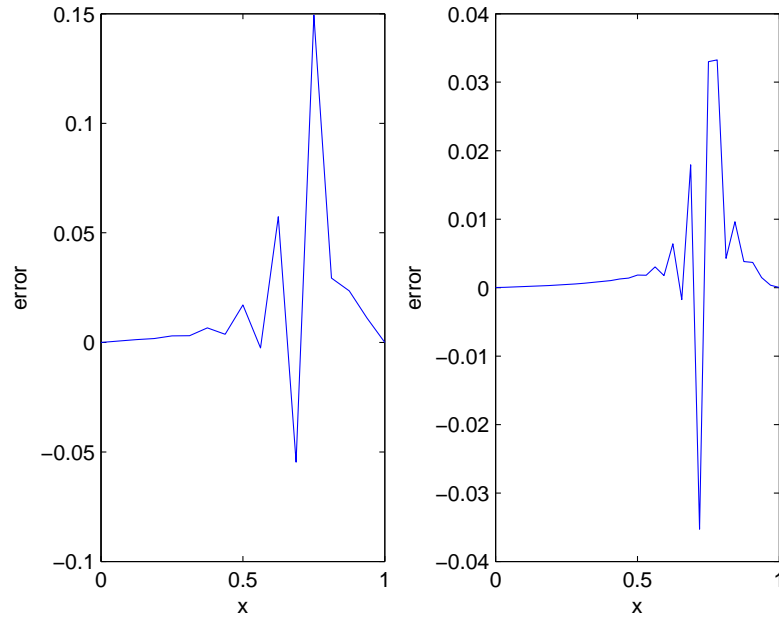


Figura 5.6: Error puntual. Escalas $j = 4$ y $j = 5$, $x_0 = 0.75$, $\lambda = 50$. Ejemplo 5

j	$\ u - \hat{u}_j\ _{j,\infty}$
6	6.0×10^{-1}
7	3.6×10^{-1}
8	2.6×10^{-1}
9	1.1×10^{-1}
10	1.5×10^{-2}

Tabla 5.6: Errores relativos para distintas escalas Ejemplo 6

que tiene solución exacta,

$$u(x) = \frac{e^{(x-1)/\sqrt{\varepsilon}} + e^{-x/\sqrt{\varepsilon}}}{1 + e^{-1/\varepsilon}} - \cos^2(\pi x)$$

Este problema tiene una capa límite en $x = 0$ y $x = 1$. En la Tabla 5.7 se muestra la convergencia para distintos valores del parámetro ε y los resultados superan los obtenidos con un método de colocación adaptativo presentados por Kumar en su trabajo [68].

En la Figura 5.9 se muestra la convergencia al aumentar la escala para $\varepsilon = 2^{-15}$. Para la escala $j = 10$ el error de la aproximación es del orden de 10^{-8} , alcanzando los valores máximos en ambos extremos del intervalo (ver Figura 5.10).

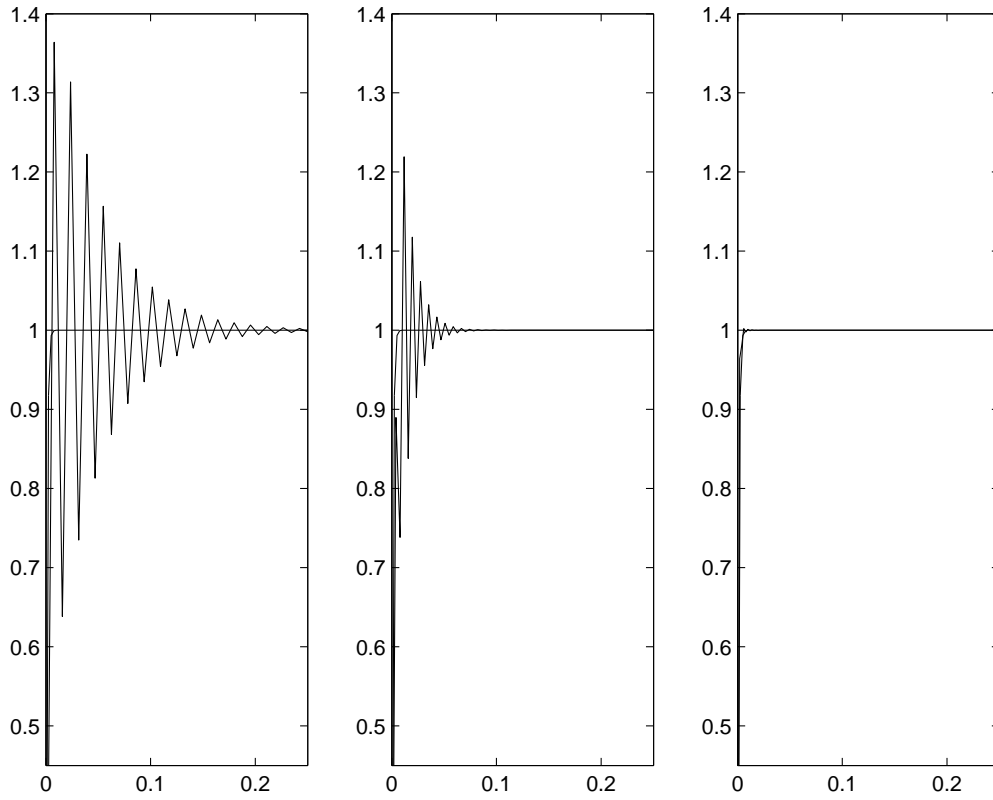


Figura 5.7: Aproximaciones correspondientes a escalas $j = 6, 7$ y 8 , $\varepsilon = 10^{-3}$. Ejemplo 6

j	$\ u - \hat{u}_j\ _{j,\infty}, \varepsilon = 2^{-5}$	$\ u - \hat{u}_j\ _{j,\infty}, \varepsilon = 2^{-10}$	$\ u - \hat{u}_j\ _{j,\infty}, \varepsilon = 2^{-15}$
6	3.3×10^{-5}	5.9×10^{-2}	3.6×10^{-1}
7	5.8×10^{-6}	1.2×10^{-2}	2.0×10^{-1}
8	5.5×10^{-7}	1.6×10^{-3}	1.1×10^{-1}
9	4.6×10^{-8}	1.4×10^{-4}	2.9×10^{-2}
10	2.9×10^{-9}	1.1×10^{-5}	4.6×10^{-3}

Tabla 5.7: Errores relativos para distintas escalas. Ejemplo 7

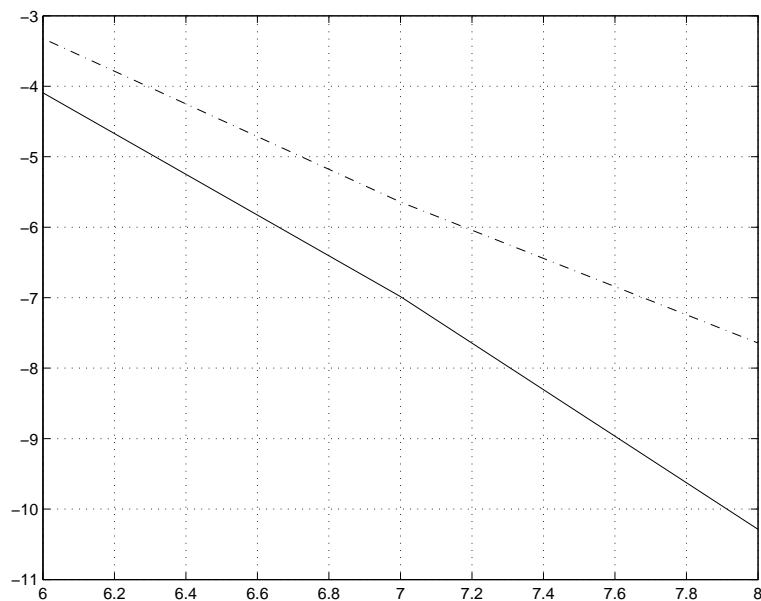


Figura 5.8: Comparación de órdenes de convergencia (Línea continua: método propuesto, punteada [69]). Ejemplo 6

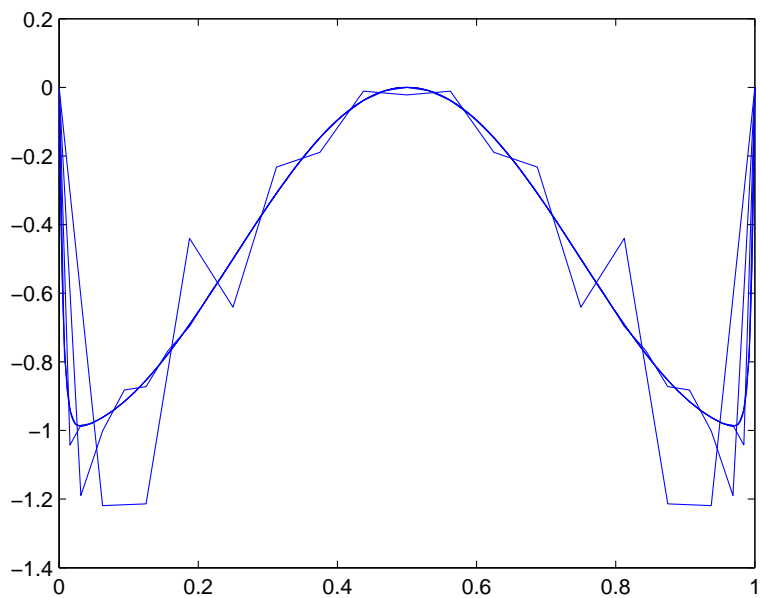


Figura 5.9: Aproximaciones correspondientes a escalas $j = 5, 6, 7$ y 8 , $\varepsilon = 2^{-15}$. Ejemplo 7

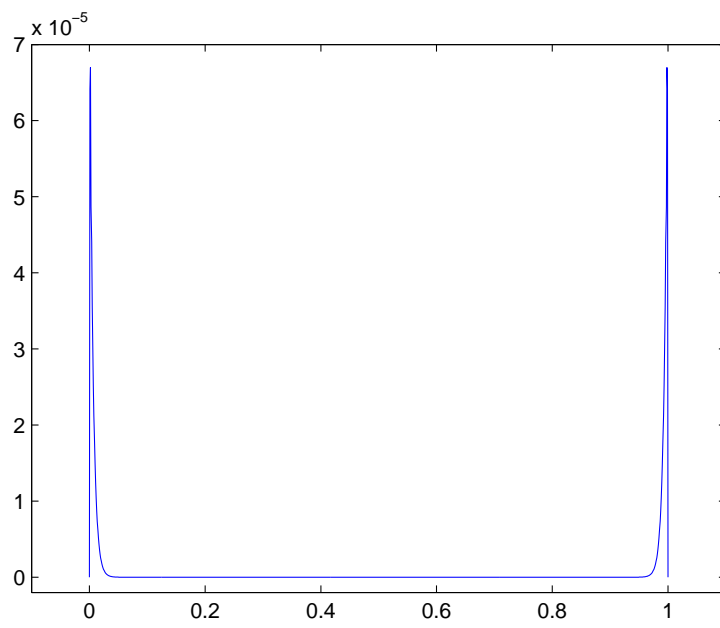


Figura 5.10: Error puntual, escala $j = 10$, $\varepsilon = 2^{-15}$. Ejemplo 7

Capítulo 6

Conclusiones

En esta tesis se han desarrollado novedosas herramientas y estrategias basadas en la transformada wavelet para su aplicación en la resolución numérica de ecuaciones diferenciales, concretándose así los objetivos planteados.

En el inicio, se han comprobado y explotado las ventajas algorítmicas que tienen las funciones B-splines, asociadas a técnicas de simulación muy eficientes, en particular, que conducen a aproximaciones con buena exactitud en subespacios de dimensión relativamente baja, siendo posible combinar la suavidad y el orden de la aproximación. También, se ha comprobado que su estructura jerárquica y autosimilar permite el refinamiento adaptativo y que el empleo de estas funciones, bien localizadas, conducen a sistemas algebraicos ralos al ser implementados en esquemas del tipo Galerkin o elementos finitos.

Se han analizado y comparado también las capacidades de las funciones de escala de Daubechies para la resolución de ecuaciones diferenciales, en el contexto del método de los elementos finitos. A diferencia de las funciones B-splines, se organizan en bases ortonormales, pero no poseen una regularidad bien definida y los cálculos algebraicos asociados son relativamente más complejos.

Se ha comprobado, en suma, que ambas clases de herramientas constituyen la base metodológica apropiada de la tesis.

Los resultados obtenidos sobre esta base, y en función de los objetivos planteados, se sintetizan a continuación.

- Se realizó un recorrido exploratorio y crítico sobre la teoría básica de las wavelets y la estructura de Análisis de Multirresolución, en el caso general y, en particular, de las funciones splines y las wavelets de Daubechies, enfocado hacia la implementación de los métodos propuestos.
- Se presentó el método de Galerkin describiendo el uso de las funciones wavelets spline y las wavelets de Daubechies en el Método de los Elementos Finitos. Se esclarece cómo es la técnica, sus ventajas y su posible competitividad respecto a los FEM clásicos.
- Se resolvieron varios ejemplos de ecuaciones diferenciales, en distintas aplicaciones, para ilustrar el empleo de las técnicas numéricas propuestas.

- En particular, se obtuvieron aproximaciones en problemas de mecánica estructural, como cálculo de vigas y de placas y en problemas de EDPs dependientes del tiempo.
- Utilizando B-splines se desarrolló un procedimiento para aproximar la solución en la escala j planteando un sistema algebraico con ecuaciones variacionales y de colocación que se ha denominado Método de Galerkin Modificado.
- Se diseñó un algoritmo adaptativo que permite el paso de la aproximación de la solución en una escala j a una escala $j + 1$. En el esquema propuesto se utilizan las wavelets y se logra reducir significativamente el costo computacional.
- Se realizó el análisis del error en la escala j . Considerando que el Método de Galerkin Modificado propuesto no es un problema variacional puro, se demuestra su convergencia, mediante un esquema variacional clásico, equivalente.
- Se verificó mediante la experimentación numérica, la competitividad del método desarrollado. Se obtuvieron aproximaciones en problemas de valores de contorno de segundo orden en ecuaciones diferenciales ordinarias y se realizaron comparaciones respecto a los resultados reportados por otros autores.

Como conclusión general, esta tesis propone una novedosa técnica para el refinamiento de las soluciones, que mejora notablemente la complejidad computacional y está abierta a futuras extensiones.

La propuesta principal, desarrollada en el Capítulo 5, combina las ventajas numéricas y computacionales que proporcionan las funciones B-splines con las capacidades de las wavelets, en el contexto de una estrategia Galerkin-variacional.

El análisis en el contexto de un Análisis de Multirresolución spline permite aprovechar la estructura de espacios sucesivamente refinables para interpolar las soluciones hasta alcanzar la precisión deseada.

El carácter localizado de las funciones B-spline y wavelets permite estimar los errores locales mediante los respectivos coeficientes. Esto posibilita implementar una estrategia de segmentación del dominio de la ecuación.

Algunas líneas futuras de investigación abiertas son:

- A partir de los desarrollos efectuados y de la estructura de refinamiento iterativo se plantea el diseño de funciones elementales, o pseudo-wavelets, ortogonales en el sentido de la forma bilineal. Esto puede simplificar aún más el esquema adaptativo y, eventualmente, conectarse con las técnicas de wavelets.
- La investigación desarrollada permite constatar que existe una atractiva perspectiva de aplicación en el amplio campo de la resolución numérica de ecuaciones diferenciales no-lineales. En particular, el uso de las wavelets es perfectamente aplicable para casos de soluciones no-regulares, con comportamientos tipo shocks, oscilaciones locales o capas límites.

Esto sugiere el análisis de distintos enfoques para el desarrollo de esquemas adaptativos basados en wavelets para resolver problemas de distintas áreas que correspondan a EDPs no-lineales con soluciones no regulares.

- El estudio e implementación en esquemas análogos, de otras familias de funciones elementales, como las splines de Hermite y, en general, multi-wavelets o wavelets de segunda generación para su aplicación en la resolución de EDPs.
- La generalización de las técnicas desarrolladas sobre la base de las funciones de escala y wavelets de Daubechies y splines, en varias dimensiones.
- El estudio y análisis de la posibilidad de utilización de splines sobre dominios irregulares.

En suma, este trabajo de tesis expone una novedosa aplicación numérica del Análisis Armónico en el campo de la resolución numérica de ecuaciones diferenciales, abierta a ulteriores y promisorios desarrollos.

Apéndice A

Coeficientes de los filtros

Se presenta en este Apéndice una síntesis del cálculo de los coeficientes del filtro para el caso de las B-splines y de las funciones de escala de Daubechies. El desarrollo en detalle puede encontrarse en los libros de C. Chui [65] y de D. Walnut [75].

A.1. B-splines

Para obtener los coeficientes de los filtros de las B-splines se comienza con la relación de dos escalas,

$$\varphi_{m+1}(2^j x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} p_k \varphi_{m+1}(2^{j+1} x - k) \quad (\text{A.1})$$

y se toma la Transformada de Fourier,

$$\widehat{\varphi}_{m+1}(\omega) = \frac{1}{2} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} p_k e^{-ik\omega/2} \right) \widehat{\varphi}_{m+1}(\omega/2) \quad (\text{A.2})$$

Como se tiene, para las B-splines, la expresión (2.38)

$$\widehat{\varphi}_{m+1}(\omega) = \left(\frac{1 - e^{-i\omega}}{i\omega} \right)^{m+1} \quad (\text{A.3})$$

se obtiene,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} p_k e^{-ik\omega/2} &= \left(\frac{1 - e^{-i\omega}}{i\omega} \right)^{m+1} \left(\frac{i\omega/2}{1 - e^{-i\omega/2}} \right)^{m+1} \\ &= \left(\frac{1 + e^{-i\omega/2}}{2} \right)^{m+1} \end{aligned}$$

Resulta, entonces, la expresión (2.42)

$$\varphi_{m+1}(x) = 2^{-m} \sum_{k=0}^{m+1} \binom{m+1}{k} \varphi_{m+1}(2x - k)$$

de donde los $m + 2$ coeficientes no nulos del filtro son:

$$p_k = \begin{cases} 2^{-m+1} \binom{m+1}{k} & \text{si } 0 \leq k \leq m+1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Para las splines cúbicas, es decir para $m = 3$, se tiene

$$[h] = [1/8, 1/2, 3/4, 1/2, 1/8]$$

y la relación entre la escala j y la escala $j+1$, considerando sólo las funciones de escala interiores, entre los espacios V_j^I y V_{j+1}^I es:

$$[\varphi_{j,0}, \varphi_{j,1}, \dots, \varphi_{j,2^j-4}] = [\varphi_{j+1,0}, \varphi_{j+1,1}, \dots, \varphi_{j+1,2^{j+1}-4}].$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{8} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{3}{8} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{8} & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{8} & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \frac{1}{8} & \frac{3}{8} & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \dots & \dots & \dots & \frac{1}{8} \\ 0 & \frac{3}{8} & \dots & \dots & \dots & \frac{3}{8} \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & \frac{1}{8} \end{bmatrix}$$

o equivalentemente con la notación introducida en la Sección 5.2, $[\varphi_j^I] = [\varphi_{j+1}^I] \cdot H_j$. H_j es la matriz cíclica anterior, de dimensión $(2^{j+1} - 3) \times (2^j - 3)$ que contiene el vector $[h]$ con los $m+2$ coeficientes del filtro de la función de escala.

A.2. Funciones de escala de Daubechies

El filtro para la función de escala de Daubechies de orden N tiene la expresión,

$$H_N(\omega) = \left(\frac{1 + e^{-2\pi i \omega}}{2} \right)^N \mathcal{L}(\omega) \quad (\text{A.4})$$

con $N \geq 1$, y $\mathcal{L}(\omega)$ un polinomio trigonométrico. Teniendo en cuenta que se debe cumplir la condición (2.16),

$$1 = |H_N(\omega)|^2 + |H_N(\omega + \pi)|^2 \quad (\text{A.5})$$

y llamando $M(\omega) = |H_N(\omega)|^2$, se tiene que

$$M(\omega) = \cos^{2N}(\pi\omega) \overline{\mathcal{L}}(\omega)$$

donde $\overline{\mathcal{L}}(\omega) = |\mathcal{L}(\omega)|^2$ es un polinomio en $\cos(2\pi\omega)$. Es conveniente reescribir $\overline{\mathcal{L}}(\omega)$ como un polinomio P en $\sin^2(\pi\omega) = (1 - \cos(2\pi\omega))/2$, entonces,

$$M(\omega) = \cos^{2N}(\pi\omega) P(\sin^2(\pi\omega))$$

y en términos de P la restricción (A.5) se convierte en

$$(1 - y)^N P(y) + y^N P(1 - y) = 1 \quad (\text{A.6})$$

donde $y = \sin^2(\pi\omega)$ y se debe cumplir para todo $y \in [0, 1]$. Luego de utilizar el teorema de Bezout [52], puede demostrarse que el problema es hallar un polinomio P que satisfaga (A.6) y además, $P(y) \geq 0 \forall y \in [0, 1]$ y eso puede realizarse de distintas formas [75].

Fijando $N \in \mathbb{N}$, luego de un cambio de índices y operaciones algebraicas se obtiene lo siguiente:

$$1 = (1 - y)^N P_{N-1}(y) + y^N P_{N-1}(1 - y) \quad (\text{A.7})$$

donde $P_{N-1}(y)$ es el polinomio de grado $N - 1$ definido por

$$P_{N-1}(y) = \sum_{k=0}^{N-1} \binom{2N-1}{k} y^k (1-y)^{N-1-k} \quad (\text{A.8})$$

Resultan, entonces, para $N = 1, 2, 3$ y 4:

$$\begin{aligned} P_0(y) &= 1, \\ P_1(y) &= 1 + 2y, \\ P_2(y) &= 1 + 3y + 6y^2 \\ P_3(y) &= 1 + 4y + 10y^2 + 20y^3 \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta (A.4), donde $\bar{\mathcal{L}}(\omega) = |\mathcal{L}(\omega)|^2 = P_{N-1}(\sin^2(\pi\omega))$, para calcular los coeficientes del filtro se debe factorizar $P_{N-1}(\sin^2(\pi\omega))$ y hallar $\mathcal{L}(\omega)$.

Para pequeños valores de N :

- Para $N = 1$, como $P_0(y) = 1$, $|\bar{\mathcal{L}}(\omega)|^2 = P_0(\sin^2(\pi\omega)) = 1$, la factorización es trivial

$$\mathcal{L}(\omega) = 1, \text{ and } H_N(\omega) = \left(\frac{1+e^{-2\pi i\omega}}{2} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_k h_k e^{-2\pi i k \omega}$$

Entonces

$$h_k = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} & \text{if } k = 0, 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

y se recupera el sistema de Haar.

- Para $N = 2$, como $P_1(y) = 1 + 2y$,

$$|\mathcal{L}(\omega)|^2 = P_1(\sin^2(\pi\omega)) = 1 + 2\sin^2(\pi\omega) = 2 - \cos 2\pi\omega$$

Tabla A.1: Coeficientes h_k para la función de escala de Daubechies D6, $N = 6$

h_k
0.235233603892
0.570558457915
0.325182500262
-0.095467207783
-0.060416104155
0.024908749865

Se debe hallar un polinomio trigonométrico $\mathcal{L}(\omega)$ de la forma $L(\omega) = a + be^{-i\omega}$, $a, b \in \mathbb{R}$

Se obtiene $|\mathcal{L}(\omega)|^2 = (a + be^{-i\omega})(a + be^{i\omega}) = a^2 + b^2 + 2ab \cos 2\pi\omega$,

luego, igualando coeficientes,

$a^2 + b^2 = 2$ y $2ab = -1$ tal que $(a + b)^2 = 1$, and $(a - b)^2 = 3$.

Como $H_N(0) = \mathcal{L}(0) = 1$, resolviendo resultan $a = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$ y $b = \frac{1-\sqrt{3}}{2}$

Entonces, los coeficientes del filtro para $N = 2$ son

$$h_k = \begin{cases} \frac{1-\sqrt{3}}{4\sqrt{2}} & \text{if } k = 0 \\ \frac{3-\sqrt{3}}{4\sqrt{2}} & \text{if } k = 1 \\ \frac{3+\sqrt{3}}{4\sqrt{2}} & \text{if } k = 2 \\ \frac{1+\sqrt{3}}{4\sqrt{2}} & \text{if } k = 3 \end{cases}$$

- De la misma forma se calculan los seis coeficientes para $N = 3$, y se presentan en la Tabla (A.1). El gráfico de la función de escala de Daubechies, de soporte $[0, 5]$ se presenta en la Figura (A.1).
- Para $N \geq 4$, resulta complicada la forma utilizada para la resolución de los coeficientes del filtro de las funciones de escala de Daubechies. Se obtienen a partir de la técnica de factorización espectral para hallar los filtros [75]. En su libro, Mallat [56] presenta los coeficientes en tablas para varios valores de N .

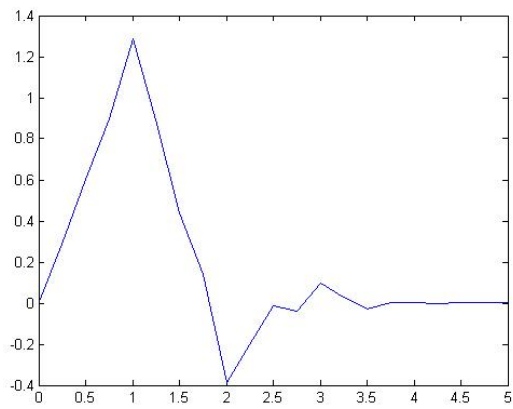


Figura A.1: Función de escala Daubechies $N = 6$

Apéndice B

Funciones de escala de Daubechies

B.1. Cálculo de momentos

Una condición necesaria y suficiente para tener K momentos nulos es que las trasladadas enteras de la función de escala $\phi_N(x)$ interpole perfectamente polinomios de grado hasta K , es decir, que para cada k , $0 \leq k \leq K$ existan constantes

$$x^k = \sum_i c_i \phi_i(x) \quad (\text{B.1})$$

Como fue mencionado en la Sección 2.5.2, estos coeficientes c_i estarán dados por los momentos,

$$M_i^k = \int_{-\infty}^{\infty} x^k \phi_N(x - i) dx \quad (\text{B.2})$$

La función de escala $\phi(x)$ está normalizada tal que $M_0^0 = 1$, y por un cambio de variables se muestra que $M_i^0 = 0$ para todo i . Se calculan los momentos M_i^k (B.2) por inducción sobre k : se asume se conocen M_i^l para $l < k$. La relación de 2 escalas da la fórmula,

$$M_0^l = \int_{-\infty}^{\infty} x^l \phi_N(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} x^l \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{p}_k \phi_N(2x - k) dx$$

haciendo $u = 2x$,

$$M_0^l = 2^{-l-1} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{p}_k \int_{-\infty}^{\infty} u^l \phi_N(u - k) du = 2^{-l-1} \left(\sum_{k=0}^{N-1} \tilde{p}_k M_k^l \right) \quad (\text{B.3})$$

Para reducir la cantidad de incógnitas en esta ecuación, se elimina M_i^l para $i \neq 0$, la sustitución $u = x - k$ implica

$$\begin{aligned} M_k^l &= \int_{-\infty}^{\infty} x^l \phi_N(x - k) dx = \int_{-\infty}^{\infty} (u + k)^l \phi(u) du \\ &= \sum_{s=0}^l \frac{l!}{(l-s)!k^s} \int_{-\infty}^{\infty} u^s \phi_N(u) du = \sum_{s=0}^l \frac{l!}{(l-s)!s!} k^{l-s} k^{l-s} M_0^s \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

Sustituyendo esto en la ecuación (B.3), se obtiene,

$$\begin{aligned}
M_0^l &= 2^{-l-1} \left(\sum_{s=0}^{N-1} \tilde{p}_s M_s^l \right) = 2^{-l-1} \left(\sum_{s=0}^{N-1} \tilde{p}_s \sum_{r=0}^l \frac{l!}{(l-r)!r!} s^{l-r} M_0^r \right) \\
M_0^l &= 2^{-l-1} \sum_{r=0}^{l-1} \frac{l!}{(l-r)!r!} M_0^r \left(\sum_{s=0}^{N-1} \tilde{p}_s s^{l-r} \right) + 2^{-l-1} M_0^l \left(\sum_{s=0}^{N-1} \tilde{p}_s \right) \\
M_0^l &= 2^{-l-1} \sum_{r=0}^{l-1} \frac{l!}{(l-r)!r!} M_0^r \left(\sum_{s=0}^{N-1} \tilde{p}_s s^{l-r} \right) + 2^{-l} M_0^l
\end{aligned} \tag{B.5}$$

Despejando M_0^l , se tiene la fórmula

$$M_0^l = \frac{1}{2(2^l - 1)} \sum_{r=0}^{l-1} \frac{l!}{(l-r)!r!} M_0^r \left(\sum_{s=0}^{N-1} \tilde{p}_s s^{l-r} \right) \tag{B.6}$$

Una vez determinado el l -ésimo momento M_0^l , los momentos M_i^l de las trasladadas de $\phi_N(x)$ puede obtenerse de la fórmula

$$M_i^l = \sum_{r=0}^l \frac{l!}{(l-r)!r!} i^{l-r} M_0^r \tag{B.7}$$

y de acá resulta la fórmula explícita

$$M_0^l = \frac{1}{2(2^l - 1)} \sum_{r=0}^l \frac{l!}{(l-r)!r!} i^{l-r} \sum_{t=0}^{r-1} \frac{r!}{(r-t)!t!} M_0^t \sum_{u=0}^{N-1} \tilde{p}_u u^{r-t} \tag{B.8}$$

donde quedan expresados los momentos de la función de escala en términos de los momentos 'discretos' de los coeficientes de escala.

B.2. Cálculo de los coeficientes de conexión

En esta Sección se desarrolla el cálculo de los coeficientes de conexión (3.15) para el caso de las funciones de escala de Daubechies de orden N , ϕ_N .

Se verifica fácilmente que la función característica

$$\chi_{[0,1]}(\xi) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq \xi \leq 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

satisface la relación de 2 escalas

$$\chi_{[0,1]}\left(\frac{\xi}{2}\right) = \chi_{[0,1]}(\xi) + \chi_{[1,2]}(\xi) = \chi_{[0,1]}(\xi) + \chi_{[0,1]}(\xi - 1) \tag{B.9}$$

así que, reemplazando en (3.15), se tiene:

$$\Gamma_{k,l}^{jd_1d_2} = \int_{-\infty}^{\infty} \chi_{[0,1]}(\xi) 2^{d_1} \sum_s \tilde{p}_s \phi_N^{(d_1)}(2^{j+1}\xi - 2k - s) 2^{d_2} \sum_t \tilde{p}_t \phi_N^{(d_2)}(2^{j+1}\xi - 2l - t) d\xi \quad (\text{B.10})$$

donde se hizo el cambio de variables $\gamma = 2\xi$. Luego,

$$\Gamma_{k,l}^{jd_1d_2} = 2^{d_1+d_2-1} \int_{-\infty}^{\infty} \chi_{[0,1]}(\gamma/2) \sum_s \tilde{p}_s \phi_N^{(d_1)}(2^j\gamma - 2k - s) \sum_t \tilde{p}_t \phi_N^{(d_2)}(2^j\gamma - 2l - t) d\gamma \quad (\text{B.11})$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{k,l}^{jd_1d_2} &= 2^{d_1+d_2-1} \\ &\int_{-\infty}^{\infty} \chi_{[0,1]}(\gamma) + \chi_{[0,1]}(\gamma - 1) \sum_s \tilde{p}_s \phi_N^{(d_1)}(2^j\gamma - 2k - s) \times \sum_t \tilde{p}_t \phi_N^{(d_2)}(2^j\gamma - 2l - t) d\gamma \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{k,l}^{jd_1d_2} &= 2^{d_1+d_2-1} \int_{-\infty}^{\infty} \chi_{[0,1]}(\gamma) \sum_{s,t} \tilde{p}_s \tilde{p}_t \phi_N^{(d_1)}(2^j\gamma - 2k - s) \\ &\phi_N^{(d_2)}(2^j\gamma - 2l - t) + \chi_{[0,1]}(\gamma - 1) \sum_{s,t} \tilde{p}_s \tilde{p}_t \phi_N^{(d_1)}(2^j\gamma - 2k - s) \phi_N^{(d_2)}(2^j\gamma - 2l - t) d\gamma \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

El segundo término en la ecuación (B.12) puede reemplazarse por

$$2^{d_1+d_2-1} \int_{-\infty}^{\infty} \chi_{[0,1]}(\xi) \sum_{s,t} \tilde{p}_s \tilde{p}_t \phi_N^{(d_1)}(2^j\xi + 2^j - 2k - s) \phi_N^{(d_2)}(2^j\xi + 2^j - 2l - t) d\xi$$

obteniendo, entonces,

$$\Gamma_{k,l}^{jd_1d_2} = 2^{d_1+d_2} \sum_{s,t} \tilde{p}_s \tilde{p}_t \int_0^1 \phi_N^{(d_1)}(2\xi - 2k - s) \phi_N^{(d_2)}(2\xi - 2l - t) d\xi \quad (\text{B.13})$$

donde $d = d_1 + d_2$. Teniendo en cuenta (3.15), (B.13) puede expresarse en términos de los coeficientes de conexión originales [82] como

$$\begin{aligned} \Gamma_{k,l}^{jd_1d_2} &= 2^{d-1} \sum_{s,t} \tilde{p}_s \tilde{p}_t [\Gamma_{2i+s,2j+t}^{jd_1d_2} + \Gamma_{2i+s-1,2j+t-1}^{jd_1d_2}] \\ &= 2^{d-1} \sum_{s,t} [\tilde{p}_{s-2i} \tilde{p}_{t-2j} + \tilde{p}_{s-2i+1} \tilde{p}_{t-2j+1}] \Gamma_{r,s}^{d_1d_2} \end{aligned} \quad (\text{B.14})$$

o en forma matricial

$$\vec{\Gamma}^{jd_1d_2} = 2^{d-1} P \vec{\Gamma}^{jd_1d_2} \quad (\text{B.15})$$

donde $\vec{\Gamma}^{jd_1d_2}$ es ahora un vector columna y P es una matriz con combinaciones de los coeficientes wavelet.

La ecuación (B.15) puede también escribirse,

$$(2^{d-1}P - I)\vec{\Gamma}^{jd_1d_2} = 0 \quad (\text{B.16})$$

donde I es la matriz identidad y $\vec{\Gamma}^{jd_1d_2}$ es una matriz de dimensión $(2^j - 1 + 2N - 2 + 1) = (2^j + 2N - 2) \times (2^j + 2N - 2)$.

Para determinar unívocamente los coeficientes de conexión $\Gamma_{i,j}^{jd_1d_2}$, deben agregarse ecuaciones adicionales para generar una cantidad suficiente de ecuaciones no homogéneas.

Como se mostró en la Sección 2.5, las funciones de escala de Daubechies de orden N pueden representar exactamente polinomios de orden m , con $0 \leq m \leq N/2 - 1$.

$$x^m = \sum_k c_k^m \phi(x - k) \quad (\text{B.17})$$

Entonces, derivando d_1 veces la expansión (B.17), se obtiene la expresión siguiente,

$$m(m-1)\dots(m-(d_1-1))x^{m-d_1} = \sum_k c_k^m \phi^{(d_1)}(x-k) \quad (\text{B.18})$$

Además, se utiliza (B.18) con n ($0 \leq n \leq N/2 - 1$) y d_2 en lugar de m y d_1 , respectivamente. Luego, multiplicando ambas ecuaciones e integrando el producto, se tiene

$$\int_0^1 m\dots(m-d_1+1)n\dots(n-d_2+1)\xi^{m+n-d}d\xi = \sum_{k,l} c_k^m c_l^n \int_0^1 \phi_k^{(d_1)} \phi_l^{(d_2)} d\xi \quad (\text{B.19})$$

donde $d = d_1 + d_2$. O, en forma equivalente,

$$\frac{mn\dots(m-(d_1-1))(n-(d_2-1))}{m+n-d+1} = \sum_{k,l} c_k^m c_l^n \Gamma_{k,l}^{d_1d_2} \quad (\text{B.20})$$

Una cantidad suficiente de ecuaciones no homogéneas pueden obtenerse usando diferentes valores de m y n . Agregándolas a (B.16) pueden, finalmente, determinarse unívocamente los coeficientes de conexión. Desafortunadamente, como fue estudiado en los trabajos ([82], [81]) para valores grandes de N y d existen dificultades numéricas y deben utilizarse algoritmos diseñados especialmente.

Ahora, los coeficientes de (3.16), primero para $d_1 = 0$

$$R_k^{j,0} = \int_{-\infty}^{\infty} \chi_{[0,1]}(\xi) \xi^0 \phi_N(2^j \xi - k) d\xi \quad (\text{B.21})$$

$$R_k^{j,0} = \sum_i \tilde{p}_i \int_{-\infty}^{\infty} \chi_{[0,1]} \phi_N(2^{j+1} \xi - 2k - i) d\xi \quad (\text{B.22})$$

$$R_k^{j,0} = \frac{1}{2} \sum_i \tilde{p}_i \int_{-\infty}^{\infty} (\chi_{[0,1]}(\gamma) + \chi_{[0,1]}(\gamma - 1)) \phi_N(2^j \gamma - 2k - i) d\gamma$$

$$R_k^{j,0} = \frac{1}{2} \sum_i \tilde{p}_i (R_{2k+i}^{j,0} + R_{2k+i-2j}^{j,0})$$

donde $-(2N-2) \leq k \leq 2^j - 1$. Se obtiene, entonces,

$$R_k^{j,0} = \frac{1}{2} \sum_i (\tilde{p}_{i-2k} + \tilde{p}_{i-2k+2j}) R_i^{j,0} \quad (\text{B.23})$$

Nuevamente es necesario agregar ecuaciones no homogéneas para que la solución sea única. Integrando (B.17)

$$\frac{1}{q+1} = \sum_k c_k R_k^{j,0} \quad (\text{B.24})$$

Agregando esta ecuación a (B.23) pueden hallarse $R_k^{j,0}$. Ahora para $d_1 > 0$

$$R_k^{j,d_1} = \int_0^1 \xi^{d_1} \phi_N(2^j \xi - k) d\xi \quad (\text{B.25})$$

$$R_k^{j,d_1} = \sum_i \tilde{p}_i \int_{-\infty}^{\infty} \chi_{[0,1]}(\xi) \xi^{d_1} \phi_N(2^{j+1} \xi - 2k - i) d\xi \quad (\text{B.26})$$

$$= \frac{1}{2^{d_1+1}} \sum_i \tilde{p}_i \int_{-\infty}^{\infty} \gamma^{d_1} (\chi_{[0,1]}(\gamma) + \chi_{[0,1]}(\gamma - 1)) \phi_N(2^j \gamma - 2k - i) d\gamma \quad (\text{B.27})$$

$$= \frac{1}{2^{d_1+1}} \sum_i \tilde{p}_i [R_{2k+i}^{j,d_1} + \int_{-\infty}^{\infty} \gamma^{d_1} \chi_{[0,1]}(\gamma - 1) \phi_N(2^j \gamma - 2k - i) d\gamma] \quad (\text{B.28})$$

$$= \frac{1}{2^{d_1+1}} \sum_i \tilde{p}_i [R_{2k+i}^{j,d_1} + \int_{-\infty}^{\infty} \chi_{[0,1]}(\gamma) (\gamma + 1)^{d_1} \phi_N(2^j \gamma + 2^j - 2k - i) d\gamma] \quad (\text{B.29})$$

$$= \frac{1}{2^{d_1+1}} \sum_i \tilde{p}_i [R_{2k+i}^{j,d_1} + \sum_{s=0, d_1} \frac{m!}{(m-s)! s!} R_{2k+i-2^j}^{j,d_1-s}] \quad (\text{B.30})$$

$$(2^{d_1+1} I - B) R_k^{j,d_1} = \sum_i \tilde{p}_{i-2k+2^j} \sum_{s=0, d_1} \frac{m!}{(m-s)! s!} R_i^{j,d_1-s} \quad (\text{B.31})$$

donde

$$\bar{B} = \sum_{i,k} (\tilde{p}_{i-2k} + \tilde{p}_{i-2k+2^j}) \quad (\text{B.32})$$

Resolviendo (B.31) se obtiene el vector de cargas R^{j,d_1} .

Notación

- $\langle \cdot, \cdot \rangle$ producto interior en H
- \otimes producto tensorial Sección 4.2
- $a(\cdot, \cdot)$ forma bilineal, Sección 3.1
- a_i coeficientes del desplazamiento \tilde{u} (4.4)
- \tilde{A} área de la sección transversal de la viga (4.2) y (4.31)
- $A_{4,j}$ matriz rectangular ecuaciones variacionales (5.19)
- $\widehat{A}_{4,j}$ matriz rectangular ecuaciones variacionales del Método Galerkin Modificado (5.23)
- A constante de Riesz en la desigualdad (2.9)
- A_{m+1} constante de Riesz para las B-splines en la desigualdad (2.36)
- $A^{d_1 d_2}$ matrices con los coeficientes de conexión que constituyen las matrices K_w^i en (4.35)
- $A_s^{d_1, d_2}$ matrices con los coeficientes de conexión y K^1 en (4.50)
- \tilde{A} área de la sección transversal de la viga Sección 4.1.
- b ancho de la viga, $\tilde{A} = bh$
- b_i coeficientes del desplazamiento \tilde{w} (4.5)
- $b_{j,k}$ coeficientes de f_j en V_j (2.71)
- $b_{j,k}^I$ coeficientes de \widehat{u}_j (5.31)
- $b_{4,j}$ término independiente sistema algebraico (5.19)
- $\widehat{b}_{4,j}$ término independiente sistema algebraico (5.23) de la forma bilineal a (3.2)
- B constante de Riesz en la desigualdad (2.9)
- \overline{B}_{m+1} constante de Riesz para las B-splines en la desigualdad (2.36)
- \overline{B} matriz del sistema algebraico que permite obtener el vector de cargas (3.36)
- \tilde{B} matriz de la relación deformación-desplazamiento (4.12)
- $c_{j,k}$ coeficientes wavelets de \widehat{u}_{j+1} (5.31)
- c_k coeficientes de las funciones de escala Sección 5.6
- $\tilde{c}_i, i = 1, 2, 3, 4$ coeficientes de la solución exacta Sección 4.1, caso 2, (4.25)
- D matriz de la relación constitutiva para el problema de la viga (4.2)
- D_0 constante en el Modelo de Kirchhoff Sección 4.2 (4.49)
- D_j matriz que depende del operador diferencial L , Teorema 5.4.6
- DN elementos finitos $1D$ con las funciones de escala ϕ_N , Sección 4.1
- $DSCWN$ ídem $2D$, Sección 4.2
- E módulo de Young, Capítulo 4
- $E_0 I_0$ rigidez a flexión en el problema de viga Sección 4.1 caso 3 (4.28)
- $E(j) = \|u - u_j\|_{j,\infty}$ Error de la aproximación en la escala j (5.51)
- f término independiente del problema diferencial (3.1)
- F funcional correspondiente a la formulación variacional (3.2)
- $g_k \in l^2$ coeficientes del filtro de la wavelet (2.25)
- G módulo de corte transversal (4.31)
- $G(\omega)$ filtro de escala asociado con la wavelet ψ
- G_j matriz de los coeficientes de las wavelets (5.15)
- \widehat{G}_j matriz de los coeficientes de las wavelets (5.9)
- h espesor de la viga Sección 4.1
- $h = 2^{-j}$ espaciado entre puntos diádicos de la escala j
- h_k coeficientes del filtro de la función de escala (2.13)
- $h_{j,k}$ funciones de escala sistema de Haar (2.6)

H espacio de Hilbert
 $H_0^1(I)$ subespacio de funciones de $H^1(I)$ que se anulan en los extremos del intervalo
 $H(\omega)$ filtro de escala asociado con la función de escala ϕ en un AMR (2.15)
 $H_{m+1}(\omega)$ filtro de escala asociado con la función de escala B-spline φ_{m+1}
 $H_N(\omega)$ filtro de escala asociado con la función de escala de Daubechies ϕ_N
 \overline{H} , $\overline{H}(x - x_0)$ es la función de Heaviside, (4.27)
 H_j matriz de doble escala para las funciones B-splines
 \widehat{H}_j ídem agregando las funciones de escala del borde ((5.6) y A.1)
 I momento de inercia Capítulo 4
 I_0 momento de inercia en (4.27)
 $I_{j,k}$ intervalos diádicos (2.4)
 j escala
 J_{min} escala en que comienza la sucesión de subespacios en un AMR en el intervalo (2.69)
 k factor de corrección por el corte, $\frac{5}{6}$ (4.31)
 k_0 constante en la expresión de la carga del problema de vigas caso 2, (4.25) y (4.26)
 $k^{(e)}$ matriz de rigidez en el espacio físico (4.16)
 $\tilde{k}^{(e)}$ matriz de rigidez spline-wavelet (4.14)
 $\tilde{k}_{ij}^{(e)}$ elementos de la matriz de rigidez en el espacio wavelet (4.22)
 K matriz de rigidez (3.7)
 K^1 matriz de rigidez modelo de placa (4.42)
 $K_w^i, i = 1, 2, 3$ componentes de la matriz de rigidez, viga de Timoshenko (4.29)
 l longitud del elemento de viga
 $l_{e,i}$ longitud del elemento ($i = 1, 2$ en $2D$) (4.50)
 L operador diferencial (3.1)
 $\mathcal{L}(\omega)$ polinomio trigonométrico (2.54)
 \tilde{L} longitud de la viga en Sección (4.1), lado de la placa cuadrada Sección 4.2
 $m + 1$ orden de B-spline, splines polinomiales de grado m (2.33) y (2.34)
 N orden de la función de escala de Daubechies ($N + 1$ coeficientes)
 N_j matriz que permite la reducción de incógnitas (5.39)
 N_h dimensión de V_h (3.6)
 \tilde{N} matriz con las funciones de forma N_i de las B-splines en Sección 4.1
 N_i funciones de forma de las B-splines (Sección 4.1)
 $P_j u$ es la proyección ortogonal de u sobre V_j (2.22)
 P_j^I matriz grammiana de las funciones de escala del espacio V_j^I , (5.14)
 \widehat{P}_j^I matriz grammiana \widehat{V}_j^I , (5.7)
 $p(x)$ coeficiente en el problema de valores de contorno (5.1)
 p_k coeficientes de la función de escala como combinación lineal de B-splines (2.52)
 \tilde{p}_k coeficientes de la función de escala de Daubechies, Sección 3.3
 $\bar{q} = [q_x, q_y]^t$ vector de cargas, Sección 4.1
 $q^*(x)$ carga (escalar), Sección 4.1
 q_0 constante en la expresión de la carga del caso 2 problemas de vigas (4.25)
 $Q_j u$ es la proyección ortogonal de u sobre W_j (2.23)
 R vector de cargas (3.7)
 $R_k^{jd_1}$ vector de cargas (3.16)
 $[R]^{(e)}$ vector de cargas nodales en el espacio físico (4.15)
 $[\tilde{R}]^{(e)}$ vector de cargas nodales en el espacio wavelet (4.15)

$\tilde{R}_i^{(e)}$ elementos del vector de cargas en el espacio wavelet del problema (4.16)
 \tilde{R} orden de convergencia para los experimentos numéricos, $E(j) = C(2^{-j\tilde{R}})$
 S soporte de la función de escala $\phi(x) \in V_0$ $\text{sop}(\phi)=[0, S]$ en Sección 2.6
 t espesor de la placa
 T matriz de la transformación entre el espacio físico y el espacio wavelet (4.8)
 T^1 y T^2 matrices de transformación para T en el caso bidimensional (4.36)
 u_h solución del problema variacional discreto (3.3)
 u_i desplazamiento del nodo i en la dirección x en el elemento de viga (4.7)
 \tilde{u} desplazamientos en la dirección x Secciones 4.1 y 4.2
 \hat{u}_j solución del sistema algebraico mixto en el espacio \hat{V}_j^I
 U vector de desplazamientos Sección 4.1
 U_{MAX} solución exacta del problema de viga (4.29)
 \hat{U}_j^I subespacio de \hat{V}_j^I
 \hat{v}_j incremento en el espacio \hat{V}_{j+1} (5.35)
 \tilde{v} desplazamientos en la dirección y Sección 4.2
 $\|v\|_{j,\infty} = \max_{k=0,1,\dots,2^j-1} v(\frac{k}{2^j})$, seminorma definida en (5.50)
 V subespacio de H donde se plantea el problema variacional (3.2)
 V_j subespacios cerrados de $L^2(R)$ que constituyen un AMR (2.11)
 V_h subespacio de dimensión finita (3.3)
 V_j^i $i = 1, 2$ subespacios del AMR en $2D$
 V_j^I subespacios de un AMR en el intervalo (2.69), (2.70) y (5.4)
 V_j^I subespacio de B-splines interiores
 \hat{V}_j^I subespacio de B-splines interiores y de borde
 w_a solución exacta problema de la viga 1D (4.1)
 \hat{w} grados de libertad en el espacio físico (4.8)
 w_i desplazamiento del nodo i en la dirección transversal
 w_k coeficientes de la wavelet como combinación lineal de B-splines (2.51)
 \tilde{w} desplazamientos en la dirección z Secciones 4.1 y 4.2
 \hat{w} desplazamientos transversales en el espacio físico
 $\hat{w}^{(e)}$ desplazamientos nodales en el espacio físico
 \hat{W}_j^I subespacios de wavelets de dimensión 2^j (5.8)
 W_j , complemento ortonormal de V_j en V_{j+1} , $W_j \oplus V_j = V_{j+1}$
 \hat{W}_j^I , complemento ortonormal de \hat{V}_j^I en \hat{V}_{j+1}^I
 x_0 punto de discontinuidad en el elemento de viga del problema del caso 3 (4.25)

α coeficientes wavelet
 $\hat{\alpha}$ grados de libertad en el espacio wavelet (4.7)
 α_k coeficientes wavelets del desplazamiento w (4.19)
 α_j coeficientes wavelets del sistema (5.19)
 α_w coeficientes wavelets en (4.39)
 $\alpha_{j,k}(t)$ coeficientes en (4.61)
 $\tilde{\alpha}$ coeficientes wavelet problema de la viga (4.27)
 $\tilde{\alpha}_{j,k}$ coeficientes de \hat{u}_j en (5.44)
 $\hat{\alpha}_j$ coeficientes de \hat{u}_j solución de Galerkin Modificado
 $\hat{\alpha}$ grados de libertad en el espacio wavelet (4.7)

$[\widehat{\alpha}_{j+1}]$ coeficientes de \widehat{u}_j en las funciones de escala de \widehat{V}_{j+1}
 $\widehat{\beta}^{\gamma-1}(\omega)$ transformada de Fourier de una B-spline fraccional, Sección 2.4
 δ variación de un operador, Capítulo 4
 $\delta_{m,n}$ delta de kroneker
 ε vector de deformaciones (4.3) de componentes ε_x y κ
 ϵ umbral del criterio de corte en el Algoritmo 5.5
 $\phi(x)$ función de escala en un análisis de multirresolución
 ϕ_N función de escala de Daubechies de orden N
 $\phi_{j,k}(x)$ funciones generadas componiendo traslaciones y dilataciones de $\phi(x)$
 $\widehat{\phi}(\omega)$ transformada de Fourier de ϕ , definida por $\int_{-\infty}^{\infty} \phi(t)e^{-2\pi it} dt$
 $\widehat{\phi}_{m+1}(\omega)$ transformada de Fourier de ϕ_{m+1} (2.38)
 $\varphi_{m+1}(x)$ B-spline definida en φ^1 y φ^2 vectores de funciones de escala (4.33)
 $\varphi_{m+1,j,k}$ función de escala B-spline de orden $m+1$, escala j
 $\overline{\varphi}_{m+1,k}(\xi) = \varphi_{m+1,0,k}(\xi)$ (4.7)
 $\varphi_{j,k}^I(x) = \varphi_{4,j,k}\chi_{[0,1]}(x)$
 $\varphi^k, k = 1, 2$ vectores de funciones de escala Sección 4.2
 $\tilde{\varphi}_{j,k}^I(x)$ redefinición de las funciones de escala (Sección 5.6)
 $\widehat{\varphi}_0(\omega)$ función de ω acotada (Sección 2.4.5)
 $[\varphi_j^I]$ vector fila de las funciones de escala de interiores de V_{j+1}
 $[\widehat{\varphi}_j^I]$ vector fila de las funciones de escala de \widehat{V}_{j+1}
 Λ constante de continuidad de F (3.5)
 γ deformación por corte transversal en el modelo de viga de Timoshenko (4.27)
 $[\gamma_{j+1}]$ coeficientes de \widehat{v}_j en la base de \widehat{V}_{j+1}
 $\overline{\gamma}$ parámetro en la ecuación del problema caso 3 (4.26)
 ρ constante de coercividad de la forma bilineal a (3.2)
 Γ frontera del dominio de definición del operador L (3.1)
 $\Gamma_{k,l}^{jd_1d_2}$, coeficientes conexión d_1 y d_2 son los órdenes de las derivadas (3.15)
 $\vec{\Gamma}_{k,l}^{jd_1d_2}$ matriz que contiene los coeficientes de conexión, Capítulo 4
 κ curvatura de la flexión de la viga, Sección 4.1
 Λ constante de continuidad de F (3.5)
 ν coeficiente de Poisson, Capítulo 4
 πu el elemento del espacio V_h que interpola a u en los nodos
 π_{b1}, π_{b2} Funcionales de energía potencial para la viga (1D) y (2D) respectivamente
 π_{bT} Funcional de energía potencial para la viga Timoshenko
 π_K Funcional de energía potencial para la placa de Kirchoff
 π_{MR} Funcional de energía potencial para la placa de Mindlin-Reissner
 π_r polinomios de grado r
 θ giro en el problema de la viga (4.27)
 θ_i grado de libertad correspondiente al giro elemento de viga (ver Sección 4.1)
 θ_x grado de libertad correspondiente al giro con respecto al eje x
 θ_y grado de libertad correspondiente al giro con respecto al eje y
 $\widehat{\theta}$ giro en el espacio wavelet en el problema de la viga (4.27)
 ρ constante de coercividad de la forma bilineal a de (3.2)
 ω variable de frecuencia
 ξ es la coordenada local, $0 \leq \xi \leq 1$, (4.4), (4.5) y (4.20)

$\psi(x)$ wavelet madre

$\psi_N(x)$ wavelet de orden N en el AMR Daubechies

$\psi_{j,k}(x)$ funciones generadas componiendo traslaciones y dilataciones de $\psi(x)$ (2.24)

$[\psi_j^I]$ vector de las funciones wavelets (5.10)

Ω dominio de definición del operador L (3.1)

Ω_e elemento finito para la placa, Sección 4.2

Bibliografía

- [1] J. Han, W. Ren, and Y. Huang, *A spline wavelet finite-element method in structural mechanics*, International Journal for Numerical Methods in Engineering 66 (2006), 166-190.
- [2] J. Han, W. Ren and Y. Huang. *A wavelet-based stochastic finite element method of thin plate bending*. Applied Mathematical Modelling, (2005), preprint.
- [3] X. Chen, S. Yang, J. Ma, Zhengjia He. *The construction of wavelet finite element and its application*, Finite Elements in Analysis and Design 40 (2004), 541-554.
- [4] J. Han, W. Ren, Y. Huang, *A multivariable wavelet based finite element method and its application to thick plates*, Finite Elements in Analysis and Design 41 (2005), 821-833.
- [5] G. W. Wei, D. S. Zhang, S. C. Althorpe, and D. J. Kouri. *Wavelet ditributed approximating functional method for solving the Navier-Stokes equation*. Computer Physics Comunication 115 (1998), 18-24.
- [6] R. O. Wells, X. Zhou, *Wavelet solutions for the Dirichlet problem*. Numerische Mathematik 70 (1995), 379-396.
- [7] Y. Zhou, J. Wang, and X. Zheng, *Aplication in beam and flat structure of wavelet Galerkin method*. Applied Mathematics and Mechanics 19, 8 (1998), 697-705.
- [8] J. Xiang, X. Chen, Y. He, Z. He, *The construction of plane elastomechanics and Mindlin plate elements of B-spline wavelet on the interval* . Finite Elements in Analysis and Design 42 (2006), 1269-1280.
- [9] B. Biondi and S. Caddemi, *Closed form solutions of euler-bernoulli beams with singularities* , Int.J. Solid and Structures 42 (2005), 3027-3044.
- [10] C. Johnson, *Numerical Solution of Partial Differential Equations by the Finite Element Method*, Cambridge University Press, New York, 1988.
- [11] J. N. Reddy, *On the numerical solution of differential equations by the finite element method* , Indian journal pure and applied math 16, 12 (1985), 1512-1528.
- [12] P. G. Ciarlet, *The finite element method for elliptic problems*, North Holland, 1978.
- [13] E. Becker, G. Carey and T. Oden, *Finite elements. An Introduction* , Vol. I, Prentice-Hall, 1981.

- [14] P. A. Raviart et J. M. Thomas, *Introduction l'analyse numérique de e.d.p.* , Masson, 1983.
- [15] G. Strang and G. J. Fix, *An analysis of the finite element methods*, Prentice-Hall, 1973.
- [16] O. C. Zienkiewicz, *The finite element method in engineering science*, McGraw-Hill, 1971.
- [17] A. Bindal, J. G. Khinast, and M. G. Ierapetritou, *Adaptive multiscale solution of dynamical systems in chemical processes using wavelets*, Computers and Chemical Engineering 27 (2003), 131-142.
- [18] L. Alvarez Díaz y V. Vampa, *Cálculo de Estructuras Laminares mediante el Método de Elementos Finitos*, Reporte de Investigación del ICIMAF (Instituto de Cibernética, Matemática y Física, La Habana, Cuba) N° 137, (2001). ISSN 0138-891.
- [19] V. Vampa, L. Alvarez Díaz and M. T. Martín, *Daubechies wavelet beam element*, Asociación de Mecánica Computacional 26 (2007), 654-666, ISSN 1666-6070.
- [20] M. T. Martín and V. Vampa, *A Daubechies wavelet Mindlin-Reissner plate element*, Asociación de Mecánica Computacional 27 (2008), 2253-2264, ISSN 1666-6070.
- [21] L. Alvarez Díaz, M. T. Martín and V. Vampa, *Daubechies wavelet beam and plate finite elements*, Finite Elements in Analysis and Design 45 (2008), 200-209.
- [22] L. Alvarez Díaz, M. T. Martín and V. Vampa, *The construction of plate finite elements using wavelet basis functions*, Revista Investigación Operacional, Fac. de Matemática y Computación, Universidad de La Habana 30 (2009), 193-204.
- [23] V. Vampa and M. T. Martín, *FEM WAVELETS para la placa de Mindlin-Reissner*, 1° Congreso Argentino de Ingeniería Aeronáutica (2008), 320-328, ISBN 978-950-34-0496-6.
- [24] V. Vampa and M. T. Martín, *The use of Daubechies bases in Wavelet-Galerkin method*, Mini-Symposium WWlet 2009- wavelets Applications in Numerical Methods for PDEs and Signal Processing. 8th Brazilian Congreso on Dynamics, Control and Applications, Sao Paulo State University, UNESP (2009), ISBN 978-85-86883-45-34.
- [25] M. T. Martín, E. Serrano y V. Vampa, *B-Splines and Second Order Boundary Value Problems*, XIII Reunión de Trabajo en Procesamiento de la Información y Control RPIC2009,(2009).
- [26] M. T. Martín, E. Serrano y V. Vampa, *Wavelets de Daubechies en la resolución de Ecuaciones Diferenciales*, II Congreso de Matemática Aplicada, Computacional e Industrial, (2009).
- [27] V. Vampa, M. T. Martín y E. Serrano, *Application of wavelet analysis for the refinement of the numerical solutions of differential equations*, Argentinean Congress on

Computational Mechanics and II South American Congress on Computational Methods in Engineering. XXXI CILAMCE-Iberian Latin American Congress on Computational Methods in Engineering Asociación de Mecánica Computacional 29 (2010), 2253-2264, ISSN 1666-6070.

- [28] K. J. Bathe and E. N. Dvorkin, *A four-node plate bending element based on Reissner-Mindlin plate theory a mixed interpolation*, International Journal for Numerical Methods in Engineering 21 (1985), 367-383.
- [29] E. N. Dvorkin and S. I. Vassolo, *A quadrilateral 2D finite element based on mixed interpolation of tensorial components*, Engng. Computations 6 (1989), 217-224.
- [30] V. Vampa, *Mejoras en el comportamiento membranar del elemento de lámina MITC₄*, Tesis de Maestría en Simulación Numérica y Control, Facultad de Ingeniería, Universidad de Buenos Aires, 2004.
- [31] V. Vampa, *Analysis of in-layer strains in the low order MITC shell element*, Latin American Journal of Solids and Structures 4 (2007), 87-102. ISSN 1679-7817.
- [32] A. Cammilleri and E. P. Serrano, *Spline multiresolution analysis on the interval*, Latin American Applied Research 31 (2001), 65-71.
- [33] A. Cohen, *Wavelets in numerical analysis*, Handbook of Numerical Analysis, Vol. VII, P.G. Ciarlet and J.L. Lions, eds., Elsevier, Amsterdam, (2001).
- [34] A. Cohen, W. Dahmen and R. De Vore, *Adaptive wavelet methods for elliptic operator equations-convergence rate*, Math. Comp. 70 (2000), 27-75.
- [35] A. Cohen, W. Dahmen and R. De Vore, *Adaptive wavelet methods for operator equations-beyond the elliptic case*, preprint IGPM-RWTH Aachen, to appear in J. of FoCM. (2002).
- [36] A. Cohen, W. Dahmen and R. De Vore, *Adaptive wavelet methods for nonlinear variational problems*, preprint IGPM-RWTH Aachen, submitted to Siam J.Num.Anal. 2002.
- [37] A. Cohen, S. M. Kaber, S. Mueller and M. Postel, *Fully adaptive multiresolution finite volume schemes for conservation laws*, preprint LAN, to appear in Math. Comp.
- [38] A. Cohen and R. Masson, *Wavelet adaptive methods for elliptic problems-preconditionning and adaptivity*, SIAM J. Sci. Comp. 21 (1999), 1006-1026.
- [39] A. Harten, *Adaptive multiresolution schemes for shock computations*, J. Comp. Phys. 115 (1994), 319-338.
- [40] A. Harten, *Multiresolution algorithms for the numerical solutions of hyperbolic conservation laws*. Comm. Pure and Appl. Math. 48 (1995), 1305-1342.
- [41] A. Aldroubi and M. Unser, *Families of multiresolution and wavelet spaces with optimal properties*, Numer. Funct. Anal. Optim., 14 (1993), 417-446.
- [42] G. Strang, *Wavelets and dilation equations: a brief introduction*, SIAM Review, 31 (1989), 614-627.

- [43] M. Unser, A. Aldroubi and M. Eden *A family of polynomial spline wavelet transforms*, Signal Processing, 30, 2(1993) 141-162.
- [44] M. Unser *Wavelet Theory Demystified*, IEEE Transactions on Signal Processing, 351, 2 (2003), 470-483.
- [45] G. Battle, *A block spin construction of ondelettes*, Comm. Math. Phys., 110 (1897) 601-615.
- [46] P. G. Lemarié, *Ondelettes a localisation exponentielle*, J. Math. Pures Appl., 67 (1988) 227-236.
- [47] C. K. Chui and J. Z. Wang, *A general framework of compactly supported splines and wavelets*, J. Approx. Theory, 71 (1992), 263-304.
- [48] C. K. Chui and J. Z. Wang, *On compactly supported spline wavelets and a duality principle*, Trans. Amer. Math. Soc., 330 (1992), 903-915.
- [49] A. Cohen and I. Daubechies, *Non-separable bidimensional wavelet bases*, Rev. Mat. Iberoamericana, 9 (1993), 51-137.
- [50] A. Cohen, I. Daubechies, and J. Feauveau, *Bi-orthogonal bases of compactly supported wavelets*, Comm. Pure Appl. Math., 45 (1992), 485-560.
- [51] I. Daubechies, *Orthonormal bases of compactly supported wavelets*, Comm. Pure Appl. Math., 41 (1988), 909-996.
- [52] I. Daubechies, *Ten Lectures on Wavelets*. CBMS-NSF Regional Conference. Series in Applied Mathematic. Departament of Mathematics. University of Lowell. MA SIAM: Philadelphia. PA, 1992.
- [53] I. Daubechies, *Orthonormal bases of compactly supported wavelets II: Variations on a theme*, SIAM J. Math. Anal., 24 (1993), 499-519.
- [54] J. Ma, J. Xue, S. Yang and Z. He, *A study of the construction and application of a Daubechies wavelet-based beam element*, Finite Elements in Analysis and Design 39 (2003), 965-975.
- [55] S. G. Mallat, *Multifrequency channel decompositions of images and wavelet models*, IEEE Trans. Acoust. Speech Signal Process., 37 (1989), 2091-2110.
- [56] S. G. Mallat, *A Wavelet Tour of Signal Processing - The Sparse Way*, Academic Press - Elsevier-MA EEUU, 2009.
- [57] S. G. Mallat, *Multiresolution approximations and wavelet orthonormal bases of $l_2(\mathbb{R})$* , Trans. Amer. Math. Soc., 315 (1989), 69-87.
- [58] S. G. Mallat, *A theory for multiresolution signal decomposition: The wavelet representation*, IEEE Trans. Patt. Anal. Mach. Intell., 11 (1989), 674-693.

- [59] Y. Meyer, *Ondelettes et Opérateurs, I: Ondelettes, II: Opérateurs de Calderón-Zygmund, III: (with R. Coifman), Opérateurs multilinéaires*, Hermann, Paris, 1990. English translation of Vol. 1, *Wavelets and Operators*, is published by Cambridge University Press, 1993.
- [60] Y. Meyer, *Ondelettes sur l'intervalle*, *Revista Matemática Iberoamericana* vol. 7, nro. 2, 1991.
- [61] Y. Meyer, *A tribute to Jean Morlet*, *Revista Matemática Iberoamericana* vol. 5, nro. 2, 1991.
- [62] E. Hernández, *Ondículas y tecnología*, *Bol. Soc. Esp. Mat Apl.* 25 (2003), 39-54.
- [63] C. E. Heil and D. F. Walnut, *Continuous and discrete wavelet transforms*, *SIAM Rev.* 31 (1989), 628-666.
- [64] D. Walnut, *An Introduction to Wavelet Analysis*, Applied and Numerical Harmonic Analysis Series, Birkhäuser Eds. , Boston, 2002.
- [65] C. Chui, *An introduction to wavelets*, Academic Press, New York, 1992.
- [66] C. Chui and E. Quak, *Wavelets on a bounded interval, in Numerical Methods of Approximation Theory*, D. Braess and L. L. Schumaker, eds., Birkhauser-Verlag, Basel, (1992), 1-24.
- [67] W. Cai, J. Wang, *Adaptive multiresolution collocation methods for initial boundary value problems of nonlinear pdes.*, *SIAM J. Numer. Anal.*, 33 (1996), 937-970.
- [68] V. Kumar, M. Mehra, *Cubic spline adaptive wavelet scheme to solve singularly perturbed reaction diffusion problems*, *International Journal of wavelets, multiresolution and information processing* 5 (2007), 317-331.
- [69] D. Radunovic, *Spline-Wavelet solution of singularly perturbed boundary problem*, *Matematnykn Bechnk*, 59 (2007), 31-46.
- [70] S. Bertoluzza, G. Naldi, *A Wavelet Collocation Method for the Numerical Solution of Partial Differential Equations*, *Applied and Computational Harmonic Analysis*, 3 (1996), 1-9.
- [71] O. Møller Nielsen, *Wavelets in Scientific Computing*, Ph. D. Thesis. Technical. University of Denmark, Department of Mathematical Modelling, (1998).
- [72] J. N. Reddy, *On the numerical solution of differential equations by the finite element method*, *Indian Journal pPure and Applied Math*, 16 12 (1985), 1512-1528.
- [73] K. J. Bathe, *Finite Element Procedures in Engineering Analysis* , Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1982.
- [74] V. Vampa, M. T. Martín, and E. Serrano, *A hybrid method using wavelets for the numerical solution of boundary value problems on the interval*, *Appl. Math. Comput.*, Vol 217, 7, (2010), 3355-3367.

- [75] D. Walnut, *An Introduction to Wavelet Analysis*, Birkhauser, 2001.
- [76] M. A. Pinsky, *Introducción al análisis de Fourier y las ondoletas*, Thomson, 2003.
- [77] I. J. Schoenberg, *Contribution to the problem of approximation of equidistant data by analytic functions*, Quart. Appl. Math, 4 (1946), 45-99,112-141.
- [78] I. J. Schoenberg, *Cardinal interpolation and spline functions*, Journal of Approximation Theory, 2 (1969), 167-206.
- [79] J. O. Stomberg, *A modified Franklin system and higher-order spline system of R^n as unconditional bases for Hardy spaces*, Proc. Conference in Harmonic Analysis in honor of Antony Zygmund, (1983), 475-493.
- [80] M. Unser, *Ten good reasons for using spline wavelets*, Proc. SPIE Wavelets Applications in Signal and Image Processing V, 3169 (1997), 422-431.
- [81] A. Latto, H. L. Resnikoff and E. Tenenbaum, *The evaluation of connection coefficients of compactly supported wavelets*, Proceedings of the USA-French Workshop on Wavelets and Turbulence. Princeton University, (1995).
- [82] G. Beylkin, *On the representation of operators in bases of compactly supported wavelets*, SIAM J. Numer. Anal., 6 (1992), 1716-1740.
- [83] T. Hughes, J. Cootrell and Y. Bazilevs, *Isogeometric analysis:CAD, finite elements, NURBS, exact geometry and mesh refinement*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg, SIAM J. Numer. Anal., 194 (2005), 4135-4195.