Universidad Nacional de La Plata

Facultad de Ciencias Exactas

Departamento de Matemática

Tesis Doctoral

# Geometría en espacios homogéneos de grupos unitarios

Eduardo H. Chiumiento

2009

Director: Dr. Esteban Andruchow

Codirector: Dr. Demetrio Stojanoff

*A mis padres, hermano y Vale*

# Agradecimientos

Este trabajo constituye mi tesis de doctorado. Los resultados aquí presentes seguramente no hubieran podido llevarse a cabo sin mi director: Esteban Andruchow. Le agradezco por haberme guiado y apoyado constantemente en mis comienzos en la investigación matemática.

Agradezco en general a los profesores e investigadores del Departamento de Matemática de la UNLP y del IAM que han contribuído a mi formación. En especial, a Demetrio Stojanoff por su generosa predisposición para enseñarme y ayudarme. También quiero agradecer a Gustavo Corach, actual director del IAM, quien siempre me ha brindado su apoyo en diversas actividades académicas. Además, me gustaría agradecer a Gabriel Larotonda, de quien he aprendido mucho trabajando en algunos de los resultados expuestos en esta tesis.

Muchos compañeros y amigos de trabajo han compartido y alegrado mis días como estudiante de doctorado. Entre ellos, agradezco a los integrantes de la Bibliotequita: Jorge Antezana, Francisco Martínez Pería, Pedro Massey y Mariano Ruiz. También agradezco a los compañeros del IAM: Laura Arias, Cristian Conde, Eugenia Di Iorio, Guillermina Fongi, Juan Giribet y Celeste González.

Los mayores agradecimentos son para cuatro personas: A mis padres por haberme apoyado siempre en esta carrera como en tantas otras cosas de mi vida, a mi hermano Nacho por su alegría y amistad, y a mi novia Vale por comprenderme y apoyarme siempre con amor.

# Índice

# Capítulo 1

# Introducción

En este trabajo estamos interesados en propiedades geométricas de espacios homogéneos de grupos unitarios. Estos espacios homogéneos, construídos a partir de elementos de la teoría de operadores, son variedades de dimensión infinita donde definimos una métrica de Finsler natural. Principalmente, estudiaremos aspectos concernientes a la geometría métrica de estos espacios homogéneos, como la existencia y unicidad de curvas minimales o propiedades de la distancia rectificable, y en menor medida, estudiaremos aspectos diferenciales, como la presencia de una estructura reductiva.

En variedades Riemannianas o de Finsler de dimensión finita, o más aún, en espacios métricos de longitud localmente compactos, el Teorema de Hopf-Rinow relaciona la existencia de curvas de longitud minimal con la completitud en la distancia rectificable. Dado que este teorema no es válido en variedades de dimensión infinita, resulta necesario desarrollar técnicas ad-hoc en cada ejemplo para hallar curvas minimales o analizar la completitud. En particular, en los espacios homogéneos tratados aquí, este tipo de cuestiones métricas generan diversos problemas, interesantes por sí mismos en la teoría de operadores y que permiten observar como funciona o falla la teoría finito dimensional de variedades.

Estudiaremos dos tipos de espacios homogéneos. El primero, dentro de un marco general, donde la métrica de Finsler está inducida por la traza finita de un álgebra, y el segundo es un ejemplo concreto acerca de isometrías parciales, donde la métrica proviene de la norma de ideales de Banach.

## 1.1. El Teorema de Hopf-Rinow

En la teoría métrica de variedades Riemannianas de dimensión finita el Teorema de Hopf-Rinow, establecido por primera vez en 1931 (ver [HR31]), afirma condiciones suficientes para la existencia de geodésicas minimales. Sea $\mathcal{X}$ una variedad Riemanniana con una métrica $\langle\, , \rangle$. Dada $\gamma : [0,1] \to \mathcal{X}$ una curva $C^1$ en $\mathcal{X}$, medimos su longitud como

$$L(\gamma) = \int_0^1 \langle \dot\gamma(t), \dot\gamma(t) \rangle_{\gamma(t)}^{1/2} \, dt.$$

Podemos definir una distancia intrínseca de la variedad, asociada a la longitud de curvas, como es usual: dados $x, y \in \mathcal{X}$,

$$d(x,y) = \text{ínf}\{\, L(\gamma) \,:\, \gamma \text{ es una curva } C^1 \text{ en } \mathcal{X} \text{ uniendo } x \text{ e } y \,\}$$

Esta distancia es conocida como distancia rectificable o Riemanniana. Por otro lado, se dice que $\mathcal{X}$ es geodésicamente completa si el intervalo máximo de definición de cualquier geodésica en $\mathcal{X}$ es todo $\mathbb{R}$. En general, la completitud de $\mathcal{X}$ como espacio métrico con la distancia rectificable implica que sea geodésicamente completo. En dimensión finita se puede probar la otra implicación (versión extraída de [La95]).

**Teorema (Hopf-Rinow).** *Sea $\mathcal{X}$ una variedad Riemanniana conexa de dimensión finita. Entonces son equivalentes:*

1. *$\mathcal{X}$ es geodésicamente completa.*

2. *$\mathcal{X}$ es un espacio métrico completo con la distancia $d$.*

*Más aún, si cualquiera de los enunciados anteriores se cumple, entonces todo par de puntos en $\mathcal{X}$ pueden ser unidos por una geodésica minimal.*

Este resultado puede extenderse a variedades de Finsler de dimensión finita (ver [Da69], [BCS00]). Brevemente, podemos decir que una variedad de Finsler es una variedad dotada de una métrica $F$ que eventualmente no proviene de un producto interno. En una variedad de Finsler, pueden darse definiciones análogas de longitudes de curvas y distancia rectificable. Aunque en general esta distancia rectificable no es realmente una distancia. Una métrica de Finsler no es una función absolutamente homogénea, si no homogénea para escalares positivos, entonces la distancia rectificable asociada $d_F$ puede no ser simétrica, o sea puede ocurrir $d_F(x,y) \neq d_F(y,x)$. Esto da lugar a la nociones de completitud de $\mathcal{X}$ como 'espacio métrico' hacia adelante y $\mathcal{X}$ como variedad geodésicamente completa hacia adelante. Nuevamente, si la dimensión de $\mathcal{X}$ es finita, ambas nociones son equivalentes e implican la existencia de geodésicas minimales uniendo cualquier par de puntos dados.

Por último, podemos abandonar completamente todo indicio de geometría diferencial, para enunciar una extensión del Teorema de Hopf-Rinow dada por Cohn-Vossen en [Co35] para espacios métricos. Sea $\mathcal{X}$ un espacio métrico con una distancia $d$. Dada una curva continua $\gamma : [0,1] \to \mathcal{X}$, definimos su longitud como

$$\ell(\gamma) = \sup \sum_{i=1}^{k} d(\gamma(t_{i-1}), \gamma(t_i)),$$

donde tomamos el supremo con respecto particiones finitas $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_k = 1$ de $[0,1]$. Definimos entonces la siguiente distancia: dados $x, y \in \mathcal{X}$,

$$d_\ell(x,y) = \text{ínf}\{\, \ell(\gamma) \,:\, \gamma \text{ es una curva continua en } \mathcal{X} \text{ uniendo } x \text{ e } y \,\}.$$

Decimos que $\mathcal{X}$ es un espacio de longitud si $d = d_\ell$. Por ejemplo, las variedades Riemannianas son espacios de longitud con la distancia rectificable. Referimos al lector al libro de M. Gromov [Gr81] para la siguiente versión del teorema.

**Teorema (Hopf-Rinow extendido).** *Si $(\mathcal{X}, d)$ es un espacio de longitud completo y localmente compacto, entonces*

1. *Las bolas cerradas son compactas, o equivalentemente, cada dominio acotado y cerrado es compacto.*

2. *Cada par de puntos puede ser unido por una geodésica minimal.*

Una observación importante es que todos los resultados poseen una hipótesis común, dada de manera explícita o implícita en la dimensión de la variedad, a saber: compacidad local de la bola.

En el caso que nos interesa en este trabajo, cuando las variedades son de dimensión infinita, la situación cambia. En variedades de Hilbert-Riemann de dimensión infinita, es decir, variedades modeladas sobre espacios de Hilbert, el Teorema de Hopf-Rinow deja de valer. Más precisamente, hay ejemplos de variedades de Hilbert-Riemann completas donde existen dos puntos que no pueden ser unidos por una geodésica minimal [Gro65], [Mc65], o más aún, por una geodésica [At75]. Sin embargo, es interesante mencionar que todo par de puntos dentro de un entorno normal en una variedad de Hilbert-Riemann puede ser unido por una geodésica minimal (ver [Mc65]).

## 1.2. Precedentes en geometría de operadores

Existen numerosos precedentes en el área geometría de operadores que abarca tanto aspectos diferenciales como métricos de variedades de dimensión infinita definidas a partir de nociones provenientes de álgebras de operadores. Estas variedades se presentan generalmente como espacios homogéneos. Es decir, básicamente son órbitas de grupos de Lie-Banach. Por ejemplo, como grupo de Lie-Banach pueden considerarse grupos inversibles o unitarios de álgebras, y estudiarse las correspondientes órbitas de operadores, representaciones, funcionales, etc. En esta sección mencionamos brevemente algunos autores y artículos, sin pretender dar una lista exhaustiva de las referencias en el área.

Entre los primeros precedentes se encuentran los trabajos [PR87a], [CPR90] y [CPR93a] de G. Corach, H. Porta y L. Recht acerca de la geometría diferencial de idempotentes en álgebras de Banach y $C^*$-álgebras. Entre otros autores, pertenecientes a la misma escuela, podemos citar a E. Andruchow, M. Argerami, A. Maestripieri, D. Stojanoff y A. Varela, que han estudiado la estructura de espacios homogéneos reductivos en órbitas de: operadores autoadjuntos [CPR93b], operadores positivos [CM04], medidas espectrales [ARS92], esperanzas condicionales [AS94], [ArS99] y estados [AV96], [AV02]. En especial, resulta interesante observar como la estructura geométrica permite clasificar distintos tipos de álgebras cuando en [ACS95] se trata con órbitas de representaciones y en [ArS01] con órbitas de esperanzas condicionales. Para un enfoque distinto, reflejado en autores como D. Beltiţă, J. Galé y T. Ratiu que trabajaron con estructuras simpléticas y Kählerianas en espacios homogéneos relacionados con la teoría de operadores, referimos al lector a los artículos [BR05], [Ga06], [BR07a] y [BG07]. Además, un estudio sistemático de la geometría de espacios homogéneos de Banach se encuentra en el reciente libro [Be06] y en el libro de H. Upmeier [Up85].

En nuestro trabajo estamos principalmente interesados en problemas métricos en espacios homogéneos de grupos unitarios. Los notables trabajos [DMR04] y [DMR05] de

C. Durán, L. Mata-Lorenzo y L. Recht son los primeros en esta dirección estudiando el problema de hallar curvas minimales en espacio homogéneos en la categoría de $C^*$-álgebras. Es interesante destacar las técnicas exclusivamente métricas utilizadas, dejando de lado tensores y ecuaciones diferenciales que a veces oscurecen la geometría.

Describamos brevemente el contexto de estos trabajos. Sea $\mathcal{A}$ una $C^*$-álgebra unital y $\mathcal{B}$ una $C^*$-subálgebra. Bajo ciertas condiciones, el cociente entre los grupos unitarios de cada álgebra $\mathcal{O} = \mathcal{U}_\mathcal{A}/\mathcal{U}_\mathcal{B}$ es un espacio homogéneo. Una métrica de Finsler natural proviene de identificar el espacio tangente en $x \in \mathcal{O}$ con el cociente entre las álgebras de Lie de cada grupo unitario. El álgebra de Lie de $\mathcal{U}_\mathcal{A}$ (resp. $\mathcal{U}_\mathcal{B}$) son los operadores antihermitianos $\mathcal{A}_{ah}$ (resp. $\mathcal{B}_{ah}$) de $\mathcal{A}$ (resp. $\mathcal{B}$), y en consecuencia, $(T\mathcal{O})_x = \mathcal{A}_{ah}/\mathcal{B}_{ah}$. Luego la métrica de Finsler está dada por $\|X\|_x := \text{ínf}\{\, \|z - y\| \, : \, y \in \mathcal{B}_{ah} \,\}$, siendo $X \in (T\mathcal{O})_x$ y $z \in \mathcal{A}_{ah}$ un representante cualquiera de la clase de $X$. Con respecto a curvas minimales, existen dos tipos de problemas:

- **Problema de valores iniciales:** Dado $X \in (T\mathcal{O})_x$, hallar una curva $\delta$ en $\mathcal{O}$ tal que $\delta(0) = x$, $\dot{\delta}(0) = X$ y sea minimal en un intervalo de tiempo suficientemente pequeño.

- **Problema de extremos fijos:** Dados dos puntos en $\mathcal{O}$ hallar una curva minimal uniendo tales puntos.

Estos problemas son equivalentes en variedades de dimensión finita. En [DMR04] se obtiene una destacable caracterización de los operadores que realizan la norma cociente en $\mathcal{A}_{ah}/\mathcal{B}_{ah}$. Cuando $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son álgebras de von Neumann, se prueba que la norma cociente se realiza, entonces utilizando la caracterización mencionada se resuelve el problema de valores iniciales. Esto pone de manifiesto la estrecha relación entre problemas de curvas minimales y problemas de mejor aproximación en espacios de Banach. Por otro lado, en [DMR05] se resuelve el problema de extremos fijos para álgebras de von Neumann con grupo unitario compacto en la topología fuerte de operadores.

Sin embargo, como los mismos autores mencionan, la hipótesis de compacidad en la topología fuerte resulta demasiado restrictiva. Esto trajo aparejado la búsqueda de nuevas técnicas y el estudio de diversos ejemplos para intentar entender el problema de extremos fijos. Una de las principales ideas se encuentra en [AR08]: Ante la ausencia de compacidad local de la bola buscar un argumento de convexidad local. Más precisamente, cuando $\mathcal{A}$ es una $C^*$-álgebra finita con una traza $\tau$, $\Gamma : [0,1] \longrightarrow \mathcal{U}_\mathcal{A}$ una curva suave, si medimos su longitud como

$$L_p(\Gamma) = \int_0^1 \|\dot{\Gamma}(t)\|_p \, dt,$$

siendo $\|x\|_p = \tau(|x|^p)^{1/p}$ la norma $p$ de $\mathcal{A}$ y $x \in \mathcal{A}$. Luego hay una distancia rectificable asociada $d_p$ definida de la manera habitual. Entonces, para $p$ par, probaron la convexidad local de la función

$$f_p(s) = d_p(u, \beta(s))^p, \quad s \in [0,1],$$

donde $\beta(t) = e^{tz}$, $z \in \mathcal{A}_{ah}$ y $u \in \mathcal{U}_\mathcal{A}$. El radio de convexidad está dado por la condición que $u$, $\beta(0)$ y $\beta(1)$ están a distancia en norma de operadores menor que $\sqrt{2-\sqrt{2}}/2$. Es necesario mencionar que las curvas $\beta(t) = e^{tz}$, $z \in \mathcal{A}_{ah}$, $\|z\| \leq \pi$ son minimales en $\mathcal{U}_\mathcal{A}$ cuando se mide con la norma de operadores ($C^*$-álgebra cualquiera) o con las normas $p \geq 2$

($C^*$-álgebra finita, ver [An05] y [AR06]). Es decir, son geodésicas en el sentido métrico de M. Gromov en [Gr81].

Este resultado permite en [An08] probar un resultado de minimalidad local de curvas de isometrías parciales con espacio inicial fijo en un álgebra de von Neumann finita cuando se mide con la norma 2. Más aún, la prueba de la convexidad local de la distancia rectificable puede extenderse a los llamados grupos unitarios clásicos. Si $\mathcal{U}(\mathcal{H})$ es el grupo unitario de un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ y $\mathcal{B}_p(\mathcal{H})$ la clase $p$ de Schatten, los grupos unitarios clásicos son:

$$\mathcal{U}_p(\mathcal{H}) = \{\, u \in \mathcal{U}(\mathcal{H}) \,:\, u - 1 \in \mathcal{B}_p(\mathcal{H}) \,\}, \quad p \geq 1.$$

Recientemente, E. Andruchow, G. Larotonda y L. Recht [ALR09] resolvieron el problema de valores iniciales en espacios homogéneos de la forma $\mathcal{O} = \mathcal{U}_p(\mathcal{H})/G$, siendo $G$ un subgrupo de Lie-Banach de $\mathcal{U}_p(\mathcal{H})$. Si $\mathfrak{g}$ es el álgebra de Lie de $G$, la métrica de Finsler en este caso está inducida por las normas $p$ dadas por la traza semifinita usual de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, es decir: $\|X\|_{p,x} := \text{ínf}\{\, \|z-y\|_p \,:\, y \in \mathfrak{g}\}$, siendo $X \in (T\mathcal{O})_x$ y $z \in \mathcal{B}_p(\mathcal{H})_{ah}$ un representante cualquiera de la clase de $X$. Las técnicas utilizadas, además de la convexidad mencionada, incluyen una innovadora manera de levantar curvas de $\mathcal{O}$ a $\mathcal{U}_p(\mathcal{H})$ isométricamente. Entre otros resultados, también se demuestra que $\mathcal{O}$ es completo con la distancia rectificable inducida.

Otro precedente importante para nuestro trabajo es el artículo [AL09] donde se estudian espacios homogéneos del grupo unitario Fredholm. Este grupo consiste en unitarios que son perturbaciones de la identidad por operadores compactos. En particular, se resuelve el problema de valores iniciales para la órbita unitaria (Fredholm) de: operadores autoadjuntos de rango finito, proyecciones de rango infinito y nilpotentes.

Un ejemplo donde el problema de extremos fijos puede ser resuelto es la órbita unitaria de una proyección (ortogonal) en una $C^*$-álgebra (ver [PR87b]). Si $\mathcal{A}$ es una $C^*$-álgebra, $p$ una proyección, entonces tal órbita consiste en $\{\, upu^* \,:\, u \in \mathcal{U}_{\mathcal{A}} \,\}$. En este caso, la norma de operadores y la norma cociente coinciden en los espacios tangentes. En [AR06] se demuestra que el problema de extremos fijos puede resolverse cuando $\mathcal{A}$ es un álgebra de von Neumann finita y se mide con las normas $p \geq 2$.

Otro espacio homogéneo interesante surge de considerar la órbita con unitarios en $\mathcal{U}_2(\mathcal{H})$ de una proyección de rango infinito:

$$Gr^0_{res}(p) = \{\, upu^* \,:\, u \in \mathcal{U}_2(\mathcal{H}) \,\}.$$

Esta órbita coincide con la componente conexa de la Grassmanniana de Sato (o Grassmanniana restringida) que contiene a $p$. En [PS86], [BR07b] y las referencias allí dadas pueden hallarse múltiples aplicaciones de la Grassmanniana de Sato en física, sistemas de ecuaciones, sistemas dinámicos, etc. En el trabajo [AL08] se muestra que todo par de proyecciones $p_0, p_1 \in Gr^0_{res}(p)$ pueden unirse por una curva minimal, y que tal curva es única si $\|p_0 - p_1\| < 1$. Además, $Gr^0_{res}(p)$ es un espacio métrico completo con la distancia rectificable inducida. Otro hecho curioso acerca de este ejemplo es que existen curvas minimales de longitud arbitrariamente grande.

La geometría métrica de isometrías parciales es uno de los ejemplos a entender después las proyecciones. En [ARV07] se estudia la siguiente órbita de una isometría $v$:

$$\{\, uv \,:\, u \in \mathcal{U}(\mathcal{H}) \,\}$$

Nuevamente, en este caso la métrica de Finsler cociente inducida por la norma de operadores y la misma norma de operadores coinciden. El problema de valores iniciales pudo resolverse para cualquier isometría $v$. Mientras que el problema de extremos fijos sólo pudo resolverse en algunos casos particulares, en especial cuando $v$ posee rango finito.

En general, si buscamos que las órbitas coincidan con las componentes conexas del conjunto $\mathcal{I}$ de isometrías parciales caracterizadas en [HM63] por las dimensiones del núcleo, rango y corango, debemos considerar mover también el espacio inicial de cada isometría, o sea la acción será $\mathcal{U}(\mathcal{H})\times\mathcal{U}(\mathcal{H})\times\mathcal{I} \longrightarrow \mathcal{I}$, $(u,w)\cdot v = uvw^*$, donde $u,w \in \mathcal{U}(\mathcal{H})$ y $v \in \mathcal{I}$. En cuanto a la geometría métrica de este conjunto, en el artículo [AC05] se estudia cuando las isometrías parciales son de rango finito midiendo con la norma de Hilbert-Schmidt. Por otro lado, existen diversos artículos acerca de la topología y geometría de isometrías parciales con la norma espectral, referimos al lector por ejemplo a [AC04], [ACM05] y [MS02].

## 1.3. Principales resultados obtenidos en este trabajo

Los resultados originales expuestos en este trabajo están basados en los artículos [ACL09], [Ch08], [Ch09a] y [Ch09b]. Los primeros dos artículos son acerca de geometría métrica en espacios homogéneos del grupo unitario de un álgebra de von Neumann finita. El desarrollo de estos artículos se encuentra en las Secciones 3 y 4. Los dos últimos artículos, tratados en las Secciones 5 y 6, se refieren a la geometría de órbitas de isometrías parciales con grupos unitarios clásicos asociados a ideales de Banach. A continuación damos una síntesis de los principales resultados obtenidos.

### Espacios homogéneos del grupo unitario de un álgebra finita

Sea $\mathcal{M}$ una álgebra de von Neumann finita con una traza $\tau$ fiel y normal. Estudiaremos geometría métrica de espacios homogéneos suaves $\mathcal{O}$ del grupo unitario $\mathcal{U}_{\mathcal{M}}$ de $\mathcal{M}$. Brevemente, esto significa que hay una acción transitiva suave de $\mathcal{U}_{\mathcal{M}}$ sobre $\mathcal{O}$, denotada por $u \cdot x$, donde $u \in \mathcal{U}_{\mathcal{M}}$, $x \in \mathcal{O}$, y que si fijamos cualquier $x \in \mathcal{O}$, entonces $\mathcal{O} \cong \mathcal{U}_{\mathcal{M}}/G_x$, siendo $G_x$ el grupo de isotropía en $x$. Algunos ejemplos concretos de estos espacios homogéneos, que discutiremos en detalle más adelante, son órbitas unitarias de: operadores normales, estados, medidas espectrales, isometrías parciales y esperanzas condicionales.

Las normas $p$ inducidas por la traza, $\|a\|_p = \tau(|a|^p)^{1/p}$, $p \geq 1$, $a \in \mathcal{M}$, pueden ser utilizadas para medir longitudes de curvas suaves en el grupo unitario $\mathcal{U}_{\mathcal{M}}$ de $\mathcal{M}$. En efecto, el espacio tangente en $u \in \mathcal{U}_{\mathcal{M}}$, se identifica con $u\mathcal{M}_{ah}$, siendo $\mathcal{M}_{ah}$ el conjunto de operadores antihermitianos de $\mathcal{M}$. Entonces, si $\Gamma : [0,1] \to \mathcal{U}_{\mathcal{M}}$ es una curva suave, podemos medir su longitud por

$$L_p(\Gamma) = \int_0^1 \|\dot{\Gamma}(t)\|_p \, dt.$$

En particular, nos interesa la distancia rectificable asociada dada por

$$d_p(u,v) = \text{ínf}\{\, L_p(\Gamma) \,:\, \gamma \text{ es una curva suave en } \mathcal{U}_{\mathcal{M}} \text{ uniendo } u \text{ y } v \,\},$$

con la cual $\mathcal{U}_{\mathcal{M}}$ es un espacio métrico. En $\mathcal{O}$ podemos definir una métrica de Finsler cociente del siguiente modo. Sean $\mathfrak{g}_x$ el álgebra de Lie del grupo de isotropía en $x$ y $X \in (T\mathcal{O})_x$ un vector tangente, entonces

$$\|X\|_{x,p} := \text{ínf}\{\|z - y\|_p : y \in \mathfrak{g}_x\},$$

donde $z \in \mathcal{M}_{ah}$ es un representante de la clase de $X$, ya que podemos identificar al espacio tangente en $x$ como $(T\mathcal{O})_x \cong \mathcal{M}_{ah}/\mathfrak{g}_x$. En particular, esto induce una forma de medir curvas suaves $\gamma$ en $\mathcal{O}$, dada por

$$L_{\mathcal{O},p}(\gamma) = \int_0^1 \|\dot{\gamma}\|_{\gamma,p}\, dt,$$

y una distancia rectificable asociada: Dados $x, y \in \mathcal{O}$,

$$d_{\mathcal{O},p}(x, y) = \text{ínf}\{\, L_{\mathcal{O},p}(\gamma) \,:\, \gamma \text{ es una curva suave en } \mathcal{O} \text{ uniendo } x \text{ e } y \,\}.$$

Por otro lado, si identificamos a $\mathcal{O}$ con un cociente de grupos, a partir del espacio métrico completo $(\mathcal{U}_{\mathcal{M}}, d_p)$ podemos definir una distancia cociente en $\mathcal{O}$ (pseudodistancia si $G_x$ no es $d_p$-cerrado). Nuestro primer resultado, dice que esta distancia y la distancia rectificable coinciden en $\mathcal{O}$. En particular, como consecuencia de un hecho general de grupos métricos, obtenemos que $(\mathcal{O}, d_{\mathcal{O},p})$ es un espacio métrico completo.

**Teorema I.** *Sean $x \in \mathcal{O}$, $u, v \in \mathcal{U}_{\mathcal{M}}$, y*

$$\dot{d}_p(u \cdot x, v \cdot x) = \text{ínf}\{\, d_p(uw_1, vw_2) \,:\, w_i \in G_x \,\}.$$

*Entonces, si $p > 1$, se cumple $\dot{d}_p = d_{\mathcal{O},p}$. En particular, si $G_x$ es un subgrupo cerrado de $\mathcal{U}_{\mathcal{M}}$ en la norma $p$, entonces $(\mathcal{O}, d_{\mathcal{O},p})$ es un espacio métrico completo, y la topología inducida coincide con la topología cociente $\mathcal{O} \cong (\mathcal{U}_{\mathcal{M}}, d_p)/G_x$.*

Cuando $1 < p < \infty$, para cada $z \in \mathcal{M}_{ah}$, la norma cociente se realiza. Aunque el operador óptimo puede no estar acotado, es decir, pertenecer a la clausura del álgebra de Lie en norma $p$. Más precisamente, tenemos que existe $y_0 \in \overline{\mathfrak{g}_x}^{\,p}$ tal que

$$\|z - y_0\|_p \le \|z - y\|_p\,,$$

para todo $y \in \mathfrak{g}_x$. Entonces, se puede probar que la correspondencia $z \mapsto Q_p(z) := z - y_0$ que envía a cada $z$ a un mejor aproximante en norma $p$ es monovaluada y continua. Nos referiremos a esta función, que depende de $p$, como la proyección métrica, debido a que posee varias propiedades de una proyección (aunque en general no es lineal si $p \neq 2$). Notemos que un operador $z$ tiene norma $p$ minimal si y sólo si $Q_p(z) = 0$.

El problema de hallar curvas minimales en $\mathcal{O}$ se encuentra estrechamente vinculado con propiedades de la proyección métrica. Intuitivamente, resulta natural mirar a nivel infinitesimal, cuál es la dirección de menor norma para obtener una curva minimal. En consecuencia, para hallar curvas minimales, fijamos hipótesis sobre $Q$. En especial, suponemos que el mejor aproximante es un operador acotado, y más aún, que la proyección $Q$ es uniformemente acotada en la norma usual de operadores. Si denotamos por $\|\,.\,\|$ a la norma de operadores en $\mathcal{M}$, esto significa que existe una constante $K_{\mathcal{O},p}$ cumpliendo $\|Q_p(z)\| \le K_{\mathcal{O},p}\|z\|$ para todo $z \in \mathcal{M}_{ah}$.

Por último, observemos que en la definición de la métrica cociente $p$, podemos cambiar la norma $p$ por la norma de operadores en $\mathcal{M}$, dando lugar a la norma cociente infinito. La notación para la longitud de una curva $\gamma$ medida con esta métrica será $L_{\mathcal{O},\infty}(\gamma)$. Utilizaremos esto para dar una condición local sobre las curvas con las que comparamos a nuestras candidatas a curvas minimales.

**Teorema II.** *Sea $p$ un número par positivo y $x \in \mathcal{O}$. Sea $K_{\mathcal{O},p}$ una constante tal que $\|Q_p(y)\| \leq K_{\mathcal{O},p}\|y\|$ para todo $y \in \mathcal{M}_{ah}$. Si $z \in \mathcal{M}_{ah}$, $\|z\| < \frac{\pi}{3}$ y $Q_p(z) = 0$, entonces la curva*

$$\delta(t) = e^{tz} \cdot x, \; t \in [0,1],$$

*posee longitud más corta que cualquier otra curva suave $\gamma \subset \mathcal{O}$ uniendo $x$ con $e^z \cdot x$ siempre que $L_{\mathcal{O},\infty}(\gamma) < \varepsilon$, donde*

$$\varepsilon = \varepsilon(\mathcal{O}, p) = \frac{\sqrt{2}-1}{C_{\mathcal{O}}(1 + K_{\mathcal{O},p})}$$

*y $C_{\mathcal{O}}$ es una constante dada por la estructura diferenciable.*

*Más aún, la curva $\delta$ es única en el sentido que si $\gamma \subset \mathcal{O}$ es otra curva uniendo $x$ con $e^z \cdot x$ de longitud $\|z\|_p$ tal que $L_{\mathcal{O},\infty}(\gamma) < \varepsilon$, entonces $\gamma(t) = e^{tz} \cdot x$.*

Es un hecho general de la teoría de espacios homogéneos que para cada $x \in \mathcal{O}$, existe un suplemento cerrado $\mathcal{F}_x \subset \mathcal{M}_{ah}$ tal que $\mathcal{M}_{ah} = \mathfrak{g}_x \oplus \mathcal{F}_x$. Además, la aplicación exponencial en $x \in \mathcal{O}$, dada por $\mathcal{F}_x \longrightarrow \mathcal{O}$, $z \mapsto e^z \cdot x$ resulta un difeomorfismo local en el origen. Como consecuencia, cuando $r$ es suficientemente pequeño y la proyección $Q_p$ es uniformemente acotada, si consideramos el conjunto

$$U_{\mathcal{O}}^r := \{\, e^{z - Q_p(z)} \cdot x \;:\; z \in \mathcal{F}_x \,,\; \|z\| \leq r \,\}$$

los exponentes $z - Q_p(z)$ tienen norma de operadores pequeña y son direcciones minimales con la norma $p$ ( i.e. $Q_p(z - Q_p(z)) = 0$). No obstante, observemos que $U_{\mathcal{O}}^r$ puede no ser un abierto en $\mathcal{O}$.

**Teorema III.** *Sean $p$ un número par positivo y $x \in \mathcal{O}$. Sea $K_{\mathcal{O},p}$ una constante tal que $\|Q_p(z)\| \leq K_{\mathcal{O},p}\|z\|$ para todo $z \in \mathcal{M}_{ah}$. Para cada $x_1 \in U_{\mathcal{O}}^r$ existe $z \in \mathcal{M}_{ah}$ tal que $e^z \cdot x = x_1$, $Q_p(z) = 0$ y la curva*

$$\delta(t) = e^{tz} \cdot x, \; t \in [0,1],$$

*es de longitud más corta en la métrica cociente $p$ que cualquier otra curva suave a trozos $\gamma$ uniendo $x$ con $x_1$ contenida en $U_{\mathcal{O}}^r$.*

*Más aún, la curva $\delta$ es única en el sentido que si $\gamma \subset U_{\mathcal{O}}^r$ es alguna otra curva suave uniendo $x$ a $x_1$ de longitud $\|z\|_p$ entonces $\gamma(t) = e^{tz} \cdot x$.*

La hipótesis clave para la prueba de los dos teoremas anteriores de minimalidad de curvas es que la proyección métrica sea uniformemente acotada. Más adelante, veremos varios ejemplos donde esto se cumple. En particular, cuando $\mathcal{O}$ es el espacio $\mathcal{U}_{\mathcal{M}}/\mathcal{U}_{\mathcal{N}}$, siendo $\mathcal{N}$ una subálgebra del centro de $\mathcal{M}$. El Teorema III merece un comentario más, notemos que la minimalidad de curvas se obtiene cuando se compara con curvas 'non-wandering' , como suelen denominarse en la literatura, es decir, curvas que no salen de $U_{\mathcal{O}}^r$.

En el caso $p = 2$ los resultados anteriores pueden mejorarse. La proyección métrica es lineal, en consecuencia alcanza con suponer solamente que el mejor aproximante es un operador acotado. Esta hipótesis es equivalente a la $\tau$-ortogonalidad de $\mathfrak{g}_x$ con $\mathcal{F}_x$ en la descomposición $\mathcal{M}_{ah} = \mathfrak{g}_x \oplus \mathcal{F}_x$. En tal caso $\mathcal{O}$ posee una estructura diferencial extra, y lo llamaremos espacio homogéneo reductivo ortogonal. Además, la conexión de Levi-Civita puede calcularse y las curvas minimales son ahora geodésicas. La definición de $U_{\mathcal{O}}^r$ es la misma, teniendo en cuenta que cuando $p = 2$, resulta ser un abierto de $\mathcal{O}$ porque $\mathcal{F}_x$ es el conjunto de los operadores minimales.

**Teorema IV.** *Sea $\mathcal{O}$ un espacio homogéneo reductivo ortogonal. Dado $x_1 \in U^r_{\mathcal{O}}$, existe una única geodésica en $U^r_{\mathcal{O}}$ dada por $\delta(t) = e^{tz} \cdot x$, $z \in \mathcal{F}_x$, que es de longitud minimal entre todas las curvas suaves dentro de $U^r_{\mathcal{O}}$, uniendo los puntos $x$ y $x_1$.*

Observemos que el resultado anterior acerca de la minimalidad local de geodésicas no puede deducirse de la teoría de variedades de Hilbert-Riemann porque $\mathcal{O}$ no posee espacios tangentes completos.

## Variedades de Stiefel

Sean $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert separable de dimensión infinita, $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ el espacio de operadores acotados actuando en $\mathcal{H}$, $\mathcal{U}(\mathcal{H})$ el grupo de operadores unitarios e $\mathfrak{I}$ un ideal de Banach separable en $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. Consideremos los grupos de Lie-Banach clásicos definidos por

$$\mathcal{U}_{\mathfrak{I}}(\mathcal{H}) = \{\, u \in \mathcal{U}(\mathcal{H}) \,:\, u - 1 \in \mathfrak{I} \,\}$$

Sea $\mathcal{I}$ el conjunto de isometrías parciales en $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. Podemos definir dos acciones sobre $\mathcal{I}$. La primera, sólo moviendo el espacio final de cada isometría, dada por $\mathcal{U}_{\mathfrak{I}}(\mathcal{H}) \times \mathcal{I} \longrightarrow \mathcal{I}$, $u \cdot v = uv$, donde $u \in \mathcal{U}_{\mathfrak{I}}(\mathcal{H})$ y $v \in \mathcal{I}$. Fijada $v \in \mathcal{I}$, denominamos a su órbita la $\mathfrak{I}$-variedad de Stiefel asociada a $v$, y utilizamos la siguiente notación:

$$\mathcal{S}_{\mathfrak{I}}(v) := \{\, uv \,:\, u \in \mathcal{U}_{\mathfrak{I}}(\mathcal{H}) \,\}.$$

La segunda acción, moviendo los espacios iniciales y finales de cada isometría, está dada por $\mathcal{U}_{\mathfrak{I}}(\mathcal{H}) \times \mathcal{U}_{\mathfrak{I}}(\mathcal{H}) \times \mathcal{I}$, $(u, w) \cdot v = uvw^*$, donde $u, w \in \mathcal{U}_{\mathfrak{I}}(\mathcal{H})$ y $v \in \mathcal{I}$. Las órbitas de esta acción determinan la variedad de Stiefel generalizada asociada a $v$ que indicaremos por

$$\mathcal{S}t_{\mathfrak{I}}(v) := \{\, uvw^* \,:\, u, w \in \mathcal{U}_{\mathfrak{I}}(\mathcal{H}) \,\}.$$

Mediante un simple cálculo puede mostrarse que ambas órbitas están contenidas en el espacio de Banach afín $v + \mathfrak{I}$. En consecuencia, hay una topología relativa en las órbitas inducida por la métrica $(v_0, v_1) \mapsto \|v_0 - v_1\|_{\mathfrak{I}}$. Además, las órbitas $\mathcal{S}t_{\mathfrak{I}}(v)$ son exactamente las componentes conexas de $(v + \mathfrak{I}) \cap \mathcal{I}$. Estudiaremos la geometría métrica y diferencial de estas variedades de Stiefel. En general, los resultados que enunciamos en este resumen serán para $\mathcal{S}t_{\mathfrak{I}}(v)$. Todos poseen una versión correspondiente para $\mathcal{S}_{\mathfrak{I}}(v)$, muchas veces deducible del caso más general o más sencilla de probar directamente, que mostraremos más adelante con detalle.

El primer resultado es una caracterización espacial de las órbitas. En el caso de la acción de un sólo lado, mostramos que una isometría parcial $v_0 \in \mathcal{S}_{\mathfrak{I}}(v)$ si y sólo si $v - v_0 \in \mathfrak{I}$ y $\ker(v) = \ker(v_0)$. Para una caracterización similar en $\mathcal{S}t_{\mathfrak{I}}(v)$, es necesario utilizar el concepto de índice de Fredholm de un par de proyecciones ortogonales. Dadas dos proyecciones ortogonales $p, q$ tales que el operador $qp : p(\mathcal{H}) \longrightarrow q(\mathcal{H})$ es de Fredholm, el índice del par de proyecciones $(p, q)$ es el índice de tal operador y se denota por $j(p, q)$.

**Teorema V.** *Sean $v, v_1$ isometrías parciales. Son equivalentes:*

1. *Existen $u, w \in \mathcal{U}_{\mathfrak{I}}(\mathcal{H})$ tales que $uvw^* = v_1$.*

2. *$v - v_1 \in \mathfrak{I}$ y $j(v^*v, v_1^*v_1) = 0$.*

*3.* $v - v_1 \in \mathfrak{I}$ *y* $j(vv^*, v_1v_1^*) = 0$.

Utilizaremos el Teorema V frecuentemente. Por ejemplo, permite caracterizar las componentes conexas de $(v + \mathfrak{I}) \cap \mathcal{I}$ y mostrar de manera breve que $\mathcal{S}t_{\mathfrak{I}}(v)$ es un espacio métrico completo con la distancia rectificable que daremos. El próximo resultado resume las propiedades diferenciales de la variedad de Stiefel generalizada.

**Teorema VI.** *Sea* $v \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ *una isometría parcial. Entonces* $\mathcal{S}t_{\mathfrak{I}}(v)$ *es una subvariedad analítica real de* $v + \mathfrak{I}$ *y la función*

$$\pi_v : \mathcal{U}_{\mathfrak{I}}(\mathcal{H}) \times \mathcal{U}_{\mathfrak{I}}(\mathcal{H}) \longrightarrow \mathcal{S}t_{\mathfrak{I}}(v), \qquad \pi_v((w,u)) = uvw^*,$$

*es una sumersión analítica real. Más aún,* $\mathcal{S}t_{\mathfrak{I}}(v)$ *es un espacio homogéneo reductivo del grupo* $\mathcal{U}_{\mathfrak{I}}(\mathcal{H}) \times \mathcal{U}_{\mathfrak{I}}(\mathcal{H})$.

En las variedades de Stiefel podemos dar una métrica cociente inducida por la norma $\| \, . \, \|_{\mathfrak{I}}$ del ideal $\mathfrak{I}$. Notemos que como $\pi_{v_0}$ es una sumersión para $v_0 \in \mathcal{S}t_{\mathfrak{I}}(v)$, luego el espacio tangente $(T\mathcal{S}t_{\mathfrak{I}}(v))_{v_0}$ en $v_0$ está dado por

$$(T\mathcal{S}t_{\mathfrak{I}}(v))_{v_0} = \{ xv_0 - v_0y \, : \, x, y \in \mathfrak{I}_{ah} \},$$

donde $\mathfrak{I}_{ah}$ es el álgebra de Lie de $\mathcal{U}_{\mathfrak{I}}(\mathcal{H})$ que consiste en los operadores antihermitianos de $\mathfrak{I}$. El grupo de isotropía en $v_0 \in \mathcal{S}t_{\mathfrak{I}}(v)$ de la acción dada es

$$G_{v_0} = \{ \, (u,w) \in \mathcal{U}_{\mathfrak{I}}(\mathcal{H}) \times \mathcal{U}_{\mathfrak{I}}(\mathcal{H}) \, : \, uv_0 = v_0w \, \}.$$

El álgebra de Lie de $G_{v_0}$ es

$$\mathfrak{g}_{v_0} = \{ \, (a,b) \in \mathfrak{I}_{ah} \times \mathfrak{I}_{ah} \, : \, av_0 = v_0b \, \}.$$

Utilizando la norma de Banach cociente de $(\mathfrak{I}_{ah} \times \mathfrak{I}_{ah})/\mathfrak{g}_v$ se puede definir una métrica de Finsler en $\mathcal{S}t_{\mathfrak{I}}(v)$: Dado $xv_0 - v_0y \in (T\mathcal{S}t_{\mathfrak{I}}(v))_{v_0}$,

$$\|xv_0 - v_0y\|_{v_0} := \text{ínf}\{ \, \|(x+a, y+b)\| \, : \, (a,b) \in \mathfrak{g}_{v_0} \, \}.$$

Aquí la norma del par es $\|(x+a, y+b)\| = \Phi( \, \|x+a\|_{\mathfrak{I}} \, , \, \|y+b\|_{\mathfrak{I}} \, )$, siendo $\Phi$ cualquier norma simétrica. Es sencillo ver que esta métrica es invariante para la acción. Entonces definimos la distancia rectificable asociada:

$$d(v_0, v_1) = \text{ínf}\{ \int_0^1 \|\dot\gamma(t)\|_{\gamma(t)} \, dt \, : \, \gamma \subset \mathcal{S}t_{\mathfrak{I}}(v) \text{ uniendo } \gamma(0) = v_0 \text{ y } \gamma(1) = v_1 \, \},$$

donde las curvas $\gamma$ consideradas son suaves a trozos.

Por otro lado, en el grupo unitario $\mathcal{U}_{\mathfrak{I}}(\mathcal{H}) \times \mathcal{U}_{\mathfrak{I}}(\mathcal{H})$ utilizamos la métrica de Finsler dada por $\|(x,y)\| = \Phi( \, \|x\|_{\mathfrak{I}}, \|y\|_{\mathfrak{I}} \, )$, donde $(x,y) \in u_1\mathfrak{I}_{ah} \times u_2\mathfrak{I}_{ah} = (T(\mathcal{U}_{\mathfrak{I}}(\mathcal{H}) \times \mathcal{U}_{\mathfrak{I}}(\mathcal{H})))_{(u_1,u_2)}$. Medimos la longitud de una curva suave a trozos $\Gamma(t) = (\Gamma_1(t), \Gamma_2(t))$, $t \in [0,1]$, como

$$L_{\mathfrak{I}}(\Gamma) = \int_0^1 \|(\dot\Gamma_1, \dot\Gamma_2)\| \, dt.$$

Entonces el grupo $\mathcal{U}_{\mathfrak{I}}(\mathcal{H}) \times \mathcal{U}_{\mathfrak{I}}(\mathcal{H})$ tiene una distancia rectificable definida por

$$d_{\mathfrak{I}}((u_0,w_0),(u_1,w_1)) = \text{ínf}\{ \, L_{\mathfrak{I}}(\Gamma) \, : \, \Gamma \subset \mathcal{U}_{\mathfrak{I}}(\mathcal{H}) \times \mathcal{U}_{\mathfrak{I}}(\mathcal{H}), \, \Gamma(0) = (u_0,w_0), \, \Gamma(1) = (u_1,w_1) \, \}.$$

El siguiente resultado muestra como la técnica utilizada en álgebras finitas también funciona en este espacio homogéneo. Además, da otra prueba del hecho que $(\mathcal{S}t_{\mathfrak{I}}(v), d)$ sea un espacio métrico completo.

**Teorema VII.** *Sean $v$ una isometría parcial, $u_0, w_0, u_1, w_1 \in \mathcal{U}_{\mathfrak{J}}(\mathcal{H})$, y*

$$\dot{d}_{\mathfrak{J}}(u_0 v w_0^*\,,\, u_1 v w_1^*) = \text{ínf}\{\, d_{\mathfrak{J}}(\,(u_0, w_0)\,,\,(u_1 u, w_1 w)\,)\,:\,(u,w) \in G_v \,\}.$$

*Entonces $\dot{d}_{\mathfrak{J}} = d$, donde $d$ es la distancia rectificable en $\mathcal{S}t_{\mathfrak{J}}(v)$. En particular, $(\mathcal{S}t_{\mathfrak{J}}(v), d)$ es un espacio métrico completo y $d$ metriza la topología cociente.*

Los siguientes son algunos resultados acerca de curvas minimales en la $\mathcal{K}(\mathcal{H})$-variedad de Stiefel generalizada asociada a $v$, siendo $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ el ideal de los operadores compactos. Denotaremos por $\mathcal{S}t_c(v)$ a tal variedad de Stiefel que es un espacio homogéneo del producto cartesiano del grupo unitario Fredholm

$$\mathcal{U}_{\mathfrak{J}}(\mathcal{H}) = \{\, u \in \mathcal{U}(\mathcal{H})\,:\, u - 1 \in \mathcal{K}(\mathcal{H})\,\}.$$

El primer resultado parcial se refiere al problema de valores iniciales. Nos restringimos al caso en que $v$ tiene rango finito para poder asegurar la existencia de operadores que realicen la norma cociente.

**Teorema VIII.** *Sea $v$ una isometría parcial con rango finito. Dados $v_0 \in \mathcal{S}t_c(v)$ y un vector tangente $xv_0 - v_0 y \in (T\mathcal{S}t_c(v))_{v_0}$ tales que $\|xv_0 - v_0 y\|_{v_0} \le \pi/2$, existen $z_1, z_2$ compactos antihermitianos tales que la curva $\delta(t) = e^{tz_1} v e^{-tz_2}$ que satisface $\delta(0) = v_0$ y $\dot{\delta}(0) = xv_0 - v_0 y$ tiene longitud minimal hasta $|t| \le 1$.*

Cabe destacar que el problema de valores iniciales puede ser resuelto en $\mathcal{S}_c(v)$, la correspondiente variedad de Stiefel con la acción a un sólo lado, sin condiciones sobre el rango de $v$.

Ahora denotemos por $\mathcal{U}_c(\mathcal{H})$ al grupo unitario Fredholm. Consideremos la órbita $\mathcal{O}_p$ de una proyección ortogonal $p \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, es decir

$$\mathcal{O}_p = \{\, upu^* \,:\, u \in \mathcal{U}_c(\mathcal{H})\,\}.$$

La función

$$\varphi : \mathcal{S}t_c(v) \longrightarrow \mathcal{O}_p \times \mathcal{O}_q\,, \quad \varphi(uvw^*) = (upu^*, wqw^*),$$

reduce longitudes si en el producto de órbitas de proyecciones se toma la métrica del ambiente. En consecuencia, dado que las curvas minimales en órbitas de proyecciones son conocidas, podemos hallar algunas curvas minimales en $\mathcal{S}t_c(v)$.

**Teorema IX.** *Sean $v_0 \in \mathcal{S}t_c(v)$ y $x, y \in \mathcal{K}(\mathcal{H})_{ah}$ tales que $\|(x,y)\| \le \pi/2$. Supongamos que $x$ es codiagonal con respecto a $p_0 = v_0 v_0^*$ e $y$ es codiagonal con respecto a $q_0 = v_0^* v_0$. Entonces la curva $\delta(t) = e^{tx} v_0 e^{-ty}$ tiene longitud minimal entre de todas las curvas suaves en $\mathcal{S}t_c(v)$ uniendo los mismos puntos.*

# Capítulo 2

# Preliminares

## 2.1. Operadores lineales sobre espacios de Hilbert

Comenzamos la sección de preliminares dando brevemente algunas definiciones, resultados y notaciones acerca de operadores sobre espacios de Hilbert. Si bien el contenido de esta sección es material estándar de cualquier libro de análisis funcional, hemos elegido como referencias los libros [Con90] y [RS80].

Los espacios de Hilbert serán anotados usualmente con las letras $\mathcal{H}$ y $\mathcal{K}$. En general, trataremos con espacios de Hilbert complejos, y en caso de ser reales lo aclararemos explícitamente. El producto interno en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ lo denotamos por $\langle\, , \rangle$, siendo lineal en la primera coordenada y lineal conjugado en la segunda. La norma inducida la anotamos como $\|\xi\| = \langle \xi, \xi\rangle^{1/2}$, $\xi \in \mathcal{H}$. En algunas ocasiones, cuando sea necesario que el espacio de Hilbert sea separable, lo diremos explícitamente.

Sean $\mathcal{H}$, $\mathcal{K}$ dos espacios de Hilbert, un operador lineal $x : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{K}$ se dice **acotado** si existe una constante $M \geq 0$ tal que

$$\|x\xi\| \leq M\|\xi\|, \quad \forall\, \xi \in \mathcal{H}. \tag{2.1}$$

Un operador lineal es acotado si y sólo si es continuo. El ínfimo del conjunto formado por las constantes que satisfacen (2.1) es la norma del operador lineal $x$, y se denota por $\|x\|$. Tal norma se conoce como **norma de operadores** o **norma espectral** de $x$. Es sencillo mostrar que la norma puede calcularse alternativamente como

$$\|x\| = \sup_{\|\xi\|=1} \|x\xi\| = \sup_{\|\xi\|=\|\eta\|=1} |\langle x\xi, \eta\rangle|.$$

Utilizaremos las letras griegas $\xi, \eta, \zeta,$ etc. para los vectores en $\mathcal{H}$, mientras que las letras $x, y, z, a, b, u, v, w, p$ estarán reservadas para operadores lineales (acotados o no). Continuado con la notación, escribiremos $R(x)$ para indicar el rango de un operador $x$ y $\ker(x)$ para referirnos al núcleo de $x$.

Los operadores lineales acotados de $\mathcal{H}$ en $\mathcal{K}$ son un espacio de Banach que denotaremos por $\mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$. Cuando $\mathcal{H} = \mathcal{K}$ simplemente escribiremos $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. Observemos que $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ resulta una álgebra normada completa con la composición de operadores como producto. Además, se cumple

$$\|xy\| \leq \|x\|\|y\|, \quad x, y \in \mathcal{B}(\mathcal{H}).$$

Para cada $x \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, existe un único $x^* \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ tal que

$$\langle x\xi, \eta\rangle = \langle \xi, x^*\eta\rangle\,, \quad \forall\, \xi, \eta \in \mathcal{H}.$$

El operador lineal $x^*$ se denomina **adjunto** de $x$. La operación de tomar el adjunto de un operador, conocida como adjuntar, satisface

$$(x+y)^* = x^* + y^*, \quad (\lambda\, x)^* = \overline{\lambda}\, x^*, \quad (xy)^* = y^* x^*, \quad (x^*)^* = x.$$

La norma de operadores cumple la siguiente relación fundamental (identidad $C^*$):

$$\|x^* x\| = \|x\|^2, \;\; x \in \mathcal{B}(\mathcal{H}).$$

En consecuencia, puede mostrarse que $\|x\| = \|x^*\|$ para todo $x \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Si denotamos por 1 al operador identidad en $\mathcal{H}$ y $\lambda$ al operador $\lambda\, 1$ , el **espectro** $\sigma(x)$ de $x \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, es el siguiente conjunto:

$$\sigma(x) = \{\, \lambda \in \mathbb{C} \,:\, x - \lambda \text{ es no inversible}\,\}.$$

El espectro de un operador acotado resulta un subconjunto no vacío y compacto de $\mathbb{C}$.

Dado un subespacio cerrado $\mathcal{S}$ de $\mathcal{H}$, hay una única **proyección ortogonal** $p_{\mathcal{S}}$ sobre $\mathcal{S}$ a lo largo de $\mathcal{S}^\perp$ (el ortogonal de $\mathcal{S}$) que cumple $p_{\mathcal{S}} = p_{\mathcal{S}}^* = p_{\mathcal{S}}^2$. Recíprocamente, un operador $p$ tal que $p = p^* = p^2$ es una proyección ortogonal sobre $\overline{R(p)}$. En general, emplearemos el término proyección para referirnos a una proyección ortogonal, puesto que no trataremos con otro tipo de proyecciones.

Un operador $x$ se dice **autoadjunto** si $x = x^*$ y **antihermitiano** si $x = -x^*$. Los conjuntos de los operadores autoadjuntos y antihermitianos en $\mathcal{H}$ los denotaremos respectivamente por $\mathcal{B}(\mathcal{H})_{sa}$ y $\mathcal{B}(\mathcal{H})_{ah}$. Ambos son espacios de Banach reales. A veces resulta útil el hecho que todo operador $x \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ pueda ser escrito como suma única de dos operadores,

$$x = Re(x) + iIm(x),$$

donde $Re(x) = (x + x^*)/2 \in \mathcal{B}(\mathcal{H})_{sa}$ es la parte real de $x$ e $Im(x) = (x - x^*)/2 \in \mathcal{B}(\mathcal{H})_{sa}$ es la parte imaginaria de $x$.

Los operadores autoadjuntos y antihermitianos forman parte de una clase de operadores más amplia conocida como operadores normales. Un operador $x$ es **normal** si $xx^* = x^*x$. Muchas cuestiones acerca de operadores normales pueden ser resueltas gracias al **teorema espectral** para operadores normales. Brevemente, este teorema afirma que dado $x \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ un operador normal con espectro $\sigma(x)$, existe una función $F \mapsto e(F)$ de la $\sigma$-álgebra de los conjuntos medibles Borel en el conjunto de proyecciones en $\mathcal{H}$ que cumplen: (a) $e(\sigma(x)) = 1$; (b) si $F = \cup_{n=1}^{\infty} F_n$ y $F_n \cap F_m = \emptyset$ si $n \neq m$, entonces $(e(F_n))_n$ es una sucesión de proyecciones ortogonales dos a dos disjuntas (i.e. $e(F_n)e(F_m) = 0$ si $n \neq m$) y $R(e(F)) = \oplus_{n=1}^{\infty} R(e(F_n))$; y (c) para todo $\xi, \eta \in \mathcal{H}$, si $e_{\xi,\eta}$ es la medida compleja finita en $\sigma(x)$ definida por $e_{\xi,\eta}(F) = \langle e(F)\xi, \eta\rangle$, entonces $\langle x\xi, \eta\rangle = \int \lambda\, de_{\xi,\eta}(\lambda)$. Estos hechos, suelen abreviarse diciendo que $e(\,.\,)$ es una **medida espectral** definida sobre $\sigma(x)$ tal que $x = \int \lambda\, de(\lambda)$.

El teorema espectral permite dar una definición del operador $f(x)$, siendo $f$ una función medible Borel en $\sigma(x)$ acotada esencialmente. Más precisamente, queda definido mediante la ecuación

$$\langle f(x)\xi, \eta\rangle = \int f(\lambda) de_{\xi,\eta}(\lambda), \quad \forall\, \xi, \eta \in \mathcal{H}.$$

Más aún, la función $L^\infty(\sigma(x)) \longrightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$, $f \mapsto f(x)$ es un morfismo isométrico de álgebras tal que $f(x)^* = \overline{f}(x)$ denominado **cálculo funcional Boreliano**. En particular, se cumple que $e(F) = \chi_F(x)$, siendo $\chi_F$ la función característica de $F$.

Otra clase de operadores normales, relevantes en este trabajo, son los operadores unitarios. Un operador $u$ es **unitario** si $u^*u = uu^* = 1$. El conjunto de los operadores unitarios $\mathcal{U}(\mathcal{H})$ es un grupo con el producto de operadores. Observemos que dado $x$ antihermitiano, el operador $u = e^x$ puede definirse por cálculo funcional, y resulta unitario. A su vez, con la ayuda del cálculo funcional Boreliano, dado cualquier unitario $u$ es posible hallar un logaritmo, es decir, un $x$ antihermitiano tal que $e^x = u$. Más aún, si elegimos la rama principal del logaritmo podemos tomar $x$ cumpliendo $\|x\| \leq \pi$.

Un operador $x$ se dice **positivo** si $\langle x\xi, \xi\rangle \geq 0$, para todo $\xi \in \mathcal{H}$. Esto equivale a que se cumpla $x = x^*$ y $\sigma(x) \subseteq [0, \infty)$. Los operadores positivos son un cono que induce un orden en $\mathcal{B}(\mathcal{H})_{sa}$ si definimos: $x \leq y$ si y sólo si $y - x$ es positivo. En particular, escribiremos $x \geq 0$ para indicar que $x$ es positivo. Cuando $x \geq 0$, existe un único $y \geq 0$, denominado la raíz cuadrada de $x$, tal que $x = y^2$. La raíz cuadrada consiste en el operador $y = f(x)$, donde $f(t) = t^{1/2}$, y lo denotaremos por $x^{1/2}$.

Una **isometría** entre dos espacios de Hilbert $\mathcal{H}$ y $\mathcal{K}$, es un operador lineal acotado $v : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{K}$ que satisface $\|v\xi\| = \|\xi\|$ para todo $\xi \in \mathcal{H}$. Dado $v \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ decimos que es una **isometría parcial** si la restricción de $v$ al subespacio $\ker(v)^\perp$ es una isometría. Puede mostrarse que los siguientes enunciados son equivalentes: $(a)$ $v$ es una isometría parcial, $(b)$ $vv^*v = v$, $(c)$ $v^*v$ es una proyección ortogonal, $(d)$ $vv^*$ es una proyección ortogonal, $(e)$ $v^*$ es una isometría parcial, $(f)$ $v^*vv^* = v^*$. En cualquier caso, $v^*v$ es la proyección ortogonal sobre $\ker(v)^\perp$ conocida como **proyección inicial** y $vv^*$ es la proyección ortogonal sobre $R(v)$ conocida como **proyección final**. Los espacios que resultan el rango de tales proyecciones se denominan **espacio inicial** y **espacio final** respectivamente.

Otro resultado básico es la **descomposición polar** de un operador: Dado $x \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, entonces hay una única descomposición $x = uy$ determinada por ser $u$ una isometría parcial, $y \geq 0$ y $\ker(x) = \ker(y) = \ker(u)$. El operador $y \geq 0$, dado por $y = (x^*x)^{1/2}$, es conocido como módulo de $x$ y denotado por $|x|$.

Dados $\mathcal{H}, \mathcal{K}$ dos espacios de Hilbert, un operador acotado $x : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{K}$ es de **Fredholm** si $\dim\ker(x) < \infty$, $\dim\ker(x^*) < \infty$ y $R(x)$ es cerrado. En tal caso, está definido el **índice** del operador como el siguiente número entero $i(x) = \dim\ker(x) - \dim\ker(x^*)$.

Mencionaremos ahora algunos hechos acerca de **operadores no acotados**. Un operador (posiblemente no acotado) es una función lineal $x : Dom(x) \longrightarrow \mathcal{H}$, donde $Dom(x)$ es un subespacio de $\mathcal{H}$ no necesariamente cerrado denominado **dominio** de $x$. Dados $x, y$ dos operadores, la suma $x+y$ es el operador con dominio $Dom(x) \cap Dom(y)$ y la múltiplicación $xy$ es un operador con dominio $y^{-1}(Dom(x))$. El operador $x$ se dice **cerrado** si su gráfico es cerrado, i.e. $Gr(x) = \{\, (\xi, x\xi) \,:\, \xi \in Dom(x)\,\}$ es un subespacio cerrado de $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$.

Para un operador $a$ densamente definido (i.e. $\overline{Dom(x)} = \mathcal{H}$), el **adjunto** $x^*$ está definido unívocamente como el operador con dominio

$$Dom(x^*) = \{\, \eta \in \mathcal{H} \,:\, \exists M > 0 \text{ cumpliendo } |\,\langle x\xi, \eta\rangle\,| \leq M\|\xi\|, \forall\, \xi \in Dom(a)\,\},$$

que satisface $\langle x\xi, \eta\rangle = \langle \xi, x^*\eta\rangle$, para $\xi \in Dom(x)$ y $\eta \in Dom(x^*)$.

Un operador $y$ es una **extensión** de un operador $x$ si $Gr(x) \subseteq Gr(y)$, o sea, si $Dom(x) \subseteq Dom(y)$ y $x\xi = y\xi$ para todo $\xi \in Dom(x)$. En tal caso, anotaremos $x \subset y$. La ecuación $x = y$ se interpreta como $x \subset y$ e $y \subset x$. Un operador $x$ se dice **clausurable** si existe un operador cerrado $y$ tal que $x \subseteq y$. Un operador clausurable $x$ siempre admite una extensión minimal $\overline{x}$ caracterizada por $Gr(\overline{x}) = \overline{Gr(x)}$.

Es un hecho conocido que si $x$ es un operador densamente definido, entonces $Gr(x^*) = \{ (-x\xi, \xi) \, : \, \xi \in Dom(x) \}^{\perp}$ en $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$. Una consecuencia de esto es que un operador $x$ densamente definido es clausurable si y sólo $x^*$ es densamente definido, y en tal caso $\overline{x} = x^{**}$.

La noción de **espectro** de un operador se extiende naturalmente a operadores no acotados. Un $\lambda \in \mathbb{C}$ está en el espectro $\sigma(x)$ de un operador $x$ si $x - \lambda$ no posee inversa acotada, es decir, no existe $y \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ tal que $y(x - \lambda) = 1$ en $Dom(x)$ y $(x - \lambda)y = 1$ en $\mathcal{H}$. Un operador $x$ se dice **autoadjunto** si $x$ es densamente definido y $x = x^*$. Un operador es **positivo** si $\langle x\xi, \xi \rangle \geq 0$ para todo $\xi \in Dom(x)$. En particular, se cumple que si $x$ es positivo y autoadjunto, entonces $\sigma(x) \subseteq [0, \infty)$. Los operadores autoadjuntos son operadores normales. Un operador $x$ es **normal** si es cerrado, densamente definido y $x^*x = xx^*$. El teorema espectral puede formularse para operadores normales: Existe una medida espectral $e(\,.\,)$ definida sobre $\sigma(x)$ tal que $\xi \in Dom(x)$ si y sólo si $\int |\lambda|^2 \, de_{\xi,\xi} < \infty$, en tal caso $\langle x\xi, \eta \rangle = \int \lambda \, de_{\xi,\eta}$, para todo $\eta \in \mathcal{H}$. Esto da lugar, como en el caso acotado, a un cálculo funcional $x \mapsto f(x)$, para funciones esencialmente acotadas sobre $\mathbb{C}$.

Por último, nos interesa agregar que el teorema espectral para operadores no acotados provee una forma de definir la exponencial de un operador **antihermitiano** $x$ no acotado (i.e. $x$ densamente definido y $x = -x^*$). En efecto, $e^x$ queda definido mediante el cálculo funcional resultando un operador acotado, y más aún, unitario.

## 2.2. Ideales de Banach

Dado $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert, consideremos primero ideales biláteros del anillo $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ en el sentido algebraico de la definición. Como consecuencia de la descomposición polar un ideal bilátero de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ es invariante por la adjunción. Los **operadores compactos** $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ sobre en $\mathcal{H}$, i.e. los operadores tales que la imagen de la bola unitaria de $\mathcal{H}$ es un conjunto compacto de $\mathcal{H}$, resultan un ideal bilátero en $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. Por otro lado, los operadores de rango finito, denotados por $\mathcal{K}_0(\mathcal{H})$, son otro ideal bilátero de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. Un resultado de J. Calkin [Cal41] afirma que todo ideal bilátero de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ contiene a $\mathcal{K}_0(\mathcal{H})$ y está contenido en $\mathcal{K}(\mathcal{H})$.

Los operadores compactos poseen diversas propiedades que utilizaremos. Mencionamos algunas de ellas:

1. Un operador $x$ es compacto si y sólo si existe $(x_n)_n$ sucesión en $\mathcal{K}_0(\mathcal{H})$ tal que $\|x - x_n\| \to 0$.

2. $x$ es compacto si y sólo si $x^*$ es compacto.

3. Dado $x \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$, el espectro $\sigma(x)$ es numerable con cero como el único punto límite posible. Si $\lambda \in \sigma(x)$, $\lambda \neq 0$, entonces $\lambda$ es un autovalor de $x$ con multiplicidad finita.

4. Si $x$ es compacto y normal con espectro $\sigma(x) = \{ 0, \lambda_1, \lambda_2, \ldots \}$, $\lambda_n \neq 0$, el teorema espectral toma la forma
$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n p_n,$$

siendo $p_n = \chi_{\{\lambda_n\}}(x)$, $n \geq 1$, y la convergencia de la serie en norma de operadores.

Dado $x \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$, los **valores singulares** de $x$ son los autovalores de $|x|$. Enumeraremos los valores singulares de $x$ de manera decreciente como $\mu_1(x), \mu_2(x)$, etc.. Puede probarse la siguiente caracterización geométrica de los valores singulares, donde se interpreta al valor singular $n+1$-ésimo como la distancia a los operadores de rango menor o igual a $n$, o sea

$$\mu_{n+1}(x) = \min\{\, \|x - y\| \,:\, y \in \mathcal{B}(\mathcal{H}),\, \dim(R(y)) \leq n \,\},$$

para $n \geq 0$. En particular, $\|x\| = \mu_1(x)$.

Un **ideal de Banach** es un ideal bilátero $\mathfrak{I}$ de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ dotado con una norma $\|\,.\,\|_{\mathfrak{I}}$ cumpliendo:

- $\mathfrak{I}$ es un espacio de Banach con la norma $\|\,.\,\|_{\mathfrak{I}}$.
- $\|x\| \leq \|x\|_{\mathfrak{I}} = \|x^*\|_{\mathfrak{I}}$, $x \in \mathfrak{I}$.
- $\|axb\|_{\mathfrak{I}} \leq \|a\|\|x\|_{\mathfrak{I}}\|b\|$, $a, b \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ y $x \in \mathfrak{I}$.

A continuación mostramos una manera de construir ideales de Banach. Sea $\hat{c}$ el espacio vectorial de todas las sucesiones reales $(\xi_n)_n$ tales que $\xi_n \neq 0$ sólo para una cantidad finita de valores de $n$. Una **función gauge simétrica** es una norma $\Phi : \hat{c} \longrightarrow \mathbb{R}$ que además satisface las siguientes condiciones:

- $\Phi(\,(1, 0, 0, \ldots)\,) = 1$.
- $\Phi(\,(\xi_n)_n\,) = \Phi(\,(|\xi_n|)_n\,)$, donde $(\xi_n)_n \in \hat{c}$.
- $\Phi(\,(\xi_n)_n\,) = \Phi(\,(\xi_{\pi(n)})_n\,)$, donde $(\xi_n)_n \in \hat{c}$ y $\pi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ es biyectiva.

Veremos que cada función gauge simétrica $\Phi$ induce dos ideales de Banach $\mathfrak{I}_\Phi$ y $\mathfrak{I}_\Phi^{(0)}$. En efecto, primero extendemos el dominio de $\Phi$ a sucesiones reales acotadas $(\xi_n)_n$ definiendo

$$\Phi(\,(\xi_n)_n\,) := \sup_{n\geq 1} \Phi(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, 0, 0, \ldots) \in [0, \infty].$$

Ahora, dado $x \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$, sea

$$\|x\|_\Phi := \Phi(\,(\mu_n(x))_n\,) \in [0, \infty].$$

Entonces, definimos

$$\mathfrak{I}_\Phi := \{\, x \in \mathcal{K}(\mathcal{H}) \,:\, \|x\|_\Phi < \infty \,\},$$

$$\mathfrak{I}_\Phi^{(0)} := \overline{\mathcal{K}_0(\mathcal{H})}^{\|\,\|_\Phi},$$

es decir, $\mathfrak{I}_\Phi^{(0)}$ es la clausura con respecto a $\|\,.\,\|_\Phi$ de los operadores de rango finito. Tenemos que $\|\,.\,\|_\Phi$ es una norma tal que $\mathfrak{I}_\Phi$ y $\mathfrak{I}_\Phi^{(0)}$ son ideales de Banach (ver [GK60]).

Un ideal de Banach $\mathfrak{I}$ es separable si y sólo si $\mathfrak{I} = \mathfrak{I}_\Phi^{(0)}$ para alguna función gauge simétrica $\Phi$ que satisface

$$\lim_{n\to\infty} \Phi(\xi_{n+1}, \xi_{n+2}, \ldots) = 0,$$

para toda sucesión $(\xi_n)_n$ tal que $\Phi(\,(\xi_n)_n\,) < \infty$. Además, en tal caso, se cumple que $\mathfrak{I}_\Phi$ y $\mathfrak{I}_\Phi^{(0)}$ coinciden. Como ejemplos clásicos de ideales de Banach separables podemos dar los siguientes:

*a*. El ideal $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ de los operadores compactos. La función gauge simétrica asociada está dada por

$$\Phi(\,(\xi_n)_n\,) = \max_{n\geq 1} |\xi_n|, \quad (\xi_n)_n \in \hat{c}.$$

Cuando $\mathcal{H}$ es separable, puede mostrarse que $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ es el único ideal bilátero cerrado de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$.

*b*. Para $p \geq 1$, la función gauge simétrica

$$\Phi_p(\,(\xi_n)_n\,) = \Big(\sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n|^p\Big)^{1/p}, \quad (\xi_n)_n \in \hat{c},$$

da lugar a las **clases $p$ de Schatten**, que denotaremos por $\mathcal{B}_p(\mathcal{H})$. Es decir, un operador $x \in \mathcal{B}_p(\mathcal{H})$ si su **norma** $p$ es finita, i.e.

$$\|x\|_p := \Big(\sum_{n=1}^{\infty} \mu_n(x)^p\Big)^{1/p} < \infty.$$

Cuando $p = 1$ los elementos de $\mathcal{B}_1(\mathcal{H})$ se conocen como **operadores traza**. En particular, si $x \in \mathcal{B}_1(\mathcal{H})$, está bien definida y es finita la **traza** $Tr(\,.\,)$, que extiende a la traza usual de matrices y está dada por

$$Tr(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x\xi_n, \xi_n\rangle\,,$$

donde $(\xi_n)_n$ es una base ortonormal de $\mathcal{H}$. El valor de $Tr(x)$ no depende de la base ortonormal elegida. Cuando $p = 2$, los elementos de $\mathcal{B}_2(\mathcal{H})$ se llaman **operadores de Hilbert-Schmidt**, y forman un espacio de Hilbert con la norma 2. El producto interno está dado por

$$\langle x, y\rangle = Tr(xy^*), \quad x, y \in \mathcal{B}_2(\mathcal{H}).$$

En general, la norma $p$ puede calcularse como $\|x\|_p = Tr(|x|^p)^{1/p}$, siendo $x \in \mathcal{B}_p(\mathcal{H})$.

*c*. Dados $p, q \in (0, \infty)$, el correspondiente **ideal de Lorentz** se define como los operadores $x \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$ tales que

$$\|x\|_{q,p} := \Big(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1-\frac{p}{q}}}\,\mu_n(x)^p\Big)^{1/p} < \infty.$$

En particular, cuando $p = q$, recuperamos la clase $p$ de Schatten.

## 2.3. Álgebras de von Neumann finitas

Un **álgebra de Banach** $\mathcal{A}$ es un espacio de Banach dotado de una multiplicación tal que $\|xy\| \leq \|x\|\|y\|$ para todo $x, y \in \mathcal{A}$. Una **involución** $* : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$ se define como una aplicación que satisface

$$(x + y)^* = x^* + y^*, \quad (\lambda\, x)^* = \overline{\lambda}\, x^*, \quad (xy)^* = y^* x^*, \quad (x^*)^* = x.$$

Una $C^*$**-álgebra** $\mathcal{A}$ es un álgebra de Banach con una involución que cumple

$$\|x^*x\| = \|x\|^2, \quad x \in \mathcal{A}.$$

Para evitar ciertos detalles técnicos prescindibles para nuestros objetivos supondremos que las $C^*$-álgebras son unitales (i.e. $1 \in \mathcal{A}$). El espacio de las funciones continuas $C(\Omega)$ sobre un espacio compacto $\Omega$ es una $C^*$-álgebra conmutativa con la suma, producto y conjugación compleja de funciones usuales. Por otro lado, puede probarse que toda $C^*$-álgebra conmutativa es de la forma $C(\Omega)$ para algún $\Omega$ compacto. Otro ejemplo de $C^*$-álgebra (no conmutativa) es el álgebra $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ de los operadores acotados sobre un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$.

En una $C^*$-álgebra $\mathcal{A}$ podemos definir elementos autoadjuntos, antihermitianos, normales, unitarios, proyecciones, etc. de la misma manera que en la Sección 2.1 para operadores acotados. Denotaremos por $\mathcal{A}_{sa}$ (resp. $\mathcal{A}_{ah}$) al espacio de los elementos autoadjuntos (resp. antihermitianos) de $\mathcal{A}$. Además, la noción de espectro también tiene sentido, y en consecuencia la definición de elementos positivos.

El conjunto de las funciones lineales continuas sobre un álgebra de Banach $\mathcal{A}$ lo denotaremos por $\mathcal{B}(\mathcal{A})$. Dadas dos $C^*$-álgebras $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, un $*$**-morfismo** $\psi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ es una función lineal y multiplicativa que cumple $\psi(x^*) = \psi(x)^*$ para todo $x \in \mathcal{A}$. En particular, los $*$-morfismos resultan continuos. Un $*$-morfismo se denomina $*$**-automorfismo** si es un isomorfismo de un álgebra en sí misma. Mientras que una **representación** de una $C^*$-álgebra $\mathcal{A}$ en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ es un $*$-morfismo de $\mathcal{A}$ en $\mathcal{B}(\mathcal{H})$.

Un funcional lineal $\varphi$ en una $C^*$-álgebra $\mathcal{A}$ se dice **positivo** si $\varphi(x) \geq 0$ para todo $x \geq 0$ y **fiel** si $\varphi(x) = 0$ y $x \geq 0$ implican $x = 0$. Los funcionales positivos resultan continuos, y además cumplen que $\varphi(1) = \|\varphi\|$. Dado un funcional positivo $\varphi$ la construcción de **Gelfand-Naimark-Segal (GNS)** afirma que existen un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$, un vector $\xi \in \mathcal{H}$ y una representación $\pi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$ tales que

1. $\overline{\pi(\mathcal{A})\xi} = \mathcal{H}$.

2. $\varphi(x) = \langle \pi(x)\xi, \xi \rangle, \quad x \in \mathcal{A}$.

Un **estado** es un funcional lineal de norma uno. Puede mostrarse que los estados resultan positivos, y que siempre hay abundantes estados en una $C^*$-álgebra. Esto permite, utilizando la construcción GNS, demostrar que toda $C^*$-álgebra se puede identificar con una $C^*$-álgebra concreta contenida en $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. La prueba de estos resultados y otros ejemplos más interesantes, pueden encontrarse en [Dav96].

Existen diversas topologías importantes en $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ más débiles que la dada por la norma de operadores. Este tipo de topologías resultan útiles para relacionar propiedades algebraicas y analíticas de $C^*$-álgebras concretas.

- La **topología fuerte de operadores (SOT)** consiste en intersecciones finitas de conjuntos de la forma
$$\{\, y \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) \,:\, \|(x-y)\xi\| < 1 \,\},$$
donde $x \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ y $\xi \in \mathcal{H}$. Entonces, una red $(x_i)_i$ converge SOT a un operador $x \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ si y sólo si $\lim \|(x_i - x)\xi\| = 0$ para todo $\xi \in \mathcal{H}$.

- La **topología débil de operadores (WOT)** consiste en intersecciones finitas de conjuntos de la forma

$$\{\, y \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) \,:\, |\,\langle (x-y)\eta, \xi\rangle\,| < 1\,\},$$

  donde $x \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ y $\xi, \eta \in \mathcal{H}$. Entonces, una red $(x_i)_i$ converge WOT a un operador $x \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ si y sólo si $\lim \langle (x_i - x)\xi, \eta\rangle = 0$ para todo $\xi, \eta \in \mathcal{H}$.

En general, tenemos que la topología de la norma es más fuerte que la topología SOT y la topología SOT es más fuerte que la topología WOT. Adaptando el teorema de Banach-Alaoglu, puede demostrarse que la bola unitaria de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ es compacta en la topología WOT.

Una subálgebra unital $\mathcal{M}$ de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ autoadjunta (i.e. $\mathcal{M}^* = \mathcal{M}$) y cerrada en la topología WOT se denomina un **álgebra de von Neumann**. En particular, un álgebra de von Neumann es una $C^*$-álgebra. En el caso de álgebras de von Neumann conmutativas, puede mostrarse que son de la forma $L^\infty(\Omega)$, o sea funciones esencialmente acotadas en algún espacio de medida $\Omega$.

Las álgebras de von Neumann admiten una caracterización abstracta dada en [Sa71] como aquellas $C^*$-álgebras que son el dual de un espacio de Banach. Dada $\mathcal{M}$ un álgebra de von Neumann, un funcional lineal $\varphi : \mathcal{M} \longrightarrow \mathbb{C}$ se dice **normal** si $\varphi$ es continuo con la topología WOT (o equivalentemente SOT) en la bola unitaria de $\mathcal{M}$. El espacio $\mathcal{M}_*$ de los funcionales normales está contenido en el dual $\mathcal{M}^*$ de $\mathcal{M}$, y se identifica con el predual de $\mathcal{M}$, o sea $(\mathcal{M}_*)^* \cong \mathcal{M}$.

Dada $\mathcal{A}$ una $C^*$-álgebra (resp. álgebra de von Neumann) cuando digamos que $\mathcal{B}$ es una **$C^*$-subálgebra** (resp. **subálgebra de von Neumann**) de $\mathcal{A}$ entenderemos que $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ es una $C^*$-álgebra (resp. álgebra de von Neumann). Dado $S$ un subconjunto no vacío de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, el **conmutante** de $S$ es el conjunto

$$S' = \{\, x \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) \,:\, xy = yx,\ \forall\, y \in S\,\}.$$

Tenemos que $S'$ es siempre un álgebra WOT cerrada, y si $S$ es autoadjunto entonces $S'$ es un álgebra de von Neumann. Notemos que podemos tomar dos veces el conmutante de un conjunto, es decir, considerar el conjunto $S'' = (S')'$. El siguiente resultado, conocido como **teorema del doble conmutante de von Neumann**, es verdaderamente profundo porque da una caracterización de las álgebras de von Neumann relacionando la estructura algebraica con las topologías débiles previamente definidas. Dicho teorema establece que dada $\mathcal{M}$ una subálgebra de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ autoadjunta tal que $1 \in \mathcal{M}$, entonces son equivalentes:

1. $\mathcal{M}$ es cerrada en la topología SOT.
2. $\mathcal{M}$ es cerrada en la topología WOT.
3. $\mathcal{M} = \mathcal{M}''$.

El **centro** de un álgebra de von Neumann $\mathcal{M}$ es el conjunto $\mathcal{Z}(\mathcal{M}) = \mathcal{M} \cap \mathcal{M}'$. Un álgebra $\mathcal{M}$ se dice un **factor** si $\mathcal{Z}(\mathcal{M}) = \mathbb{C}$. El interés de considerarar factores radica en que toda álgebra de von Neumann puede descomponerse en factores, y así reducir el problema de clasificación de álgebras al de clasificación de factores.

Un estado $\tau$ en un álgebra de von Neumann $\mathcal{M}$ tal que $\tau(xy) = \tau(yx)$ para todo $x, y \in \mathcal{M}$ se conoce como una **traza**. Más adelante, trabajaremos especialmente con el siguiente tipo de álgebras de von Neumann. Un álgebra de von Neumann $\mathcal{M}$ se dice **finita** si existe una traza fiel y normal en $\mathcal{M}$. Los factores finitos de dimensión infinita se denominan **factores de tipo II$_1$**.

Dos proyecciones $p, q \in \mathcal{M}$ se dicen **equivalentes** si existe una isometría parcial $v \in \mathcal{M}$ tal que $vv^* = p$ y $v^*v = q$. En [Di69] se prueba que un álgebra de von Neumann $\mathcal{M}$ es finita si y sólo si toda proyección equivalente a 1 resulta igual a 1, o en otras palabras, si $v \in \mathcal{M}$ y $v^*v = 1$, entonces $v = 1$. Otro hecho interesante, es que la traza es única en factores.

Veamos algunos ejemplos de álgebras de von Neumann finitas. Los detalles de estos ejemplos, y otros más, pueden hallarse en [Po88].

*a.* Sea $\mu$ una medida de probabilidad en el intervalo $[0, 1]$ y $L^2([0, 1])$ el espacio de Hilbert de todas las funciones medibles $g$ con respecto a alguna $\sigma$-álgebra tales que $\int_0^1 |g|^2\, d\mu < \infty$. Consideremos el operador de multiplicación $M_f : L^2([0, 1]) \longrightarrow L^2([0, 1])$, $M_f(g) = fg$, donde $f \in L^\infty([0, 1])$. Entonces $\mathcal{M} = \{ M_f : f \in L^\infty([0, 1])\}$ es un álgebra de von Neumann finita que se identifica con $L^\infty([0, 1])$. La traza está dada por $\tau(f) = \int_0^1 f\, d\mu$.

*b.* Denotemos por $M_n(\mathbb{C})$ al álgebra de matrices con entradas complejas. Dados los números naturales $n_1, n_2, \ldots, n_k$, entonces $\mathcal{M} = M_{n_1}(\mathbb{C}) \oplus M_{n_2}(\mathbb{C}) \oplus \ldots \oplus M_{n_k}(\mathbb{C})$ es un álgebra de von Neumann finita con la traza $\tau(x) = \frac{1}{n} Tr(x)$, donde $n = \sum n_i$ y $Tr$ es la traza usual en $M_n(\mathbb{C})$. Con la misma traza, $M_n(\mathbb{C})$ resulta un factor.

*c.* Consideremos las inclusiones:

$$M_{2^n}(\mathbb{C}) \hookrightarrow M_{2^{n+1}}(\mathbb{C}), \quad x \mapsto \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix}.$$

Sea $\mathcal{R}^0 = \cup_{n=1}^\infty M_{2^n}(\mathbb{C})$. Como las inclusiones son isometrías, hay una norma natural en $\mathcal{R}^0$: Dado $x \in \mathcal{R}^0$, existe $n_0$ tal que $x \in M_{2^{n_0}}(\mathbb{C})$, luego $\|x\| := \|x\|_{n_0}$. Claramente tenemos que $\|x^*x\| = \|x\|^2$. Ahora definimos $\mathcal{R}' = \overline{\mathcal{R}^0}$, donde la clausura es respecto a la norma $\| \,.\, \|$. Entonces $\mathcal{R}'$ es una $C^*$-álgebra conocida como **álgebra de Glimm** o **álgebra uniformemente hiperfinita**. Hay una traza natural en $\mathcal{R}^0$: Dado $x \in M_{2^{n_0}}(\mathbb{C})$, sea $\tau(x) := \frac{1}{n_0} Tr(x)$, donde $Tr$ es la traza usual en $M_{2^{n_0}}(\mathbb{C})$. Como $\tau(1) = 1$ y $\tau$ es positiva, entonces $\tau$ es continua en $\mathcal{R}^0$, y por lo tanto se extiende de manera única a una traza en $\mathcal{R}'$ que seguiremos llamando $\tau$.

Consideremos la construcción GNS para $\mathcal{R}'$ y $\tau$, es decir, tenemos un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$, un vector $\xi \in \mathcal{H}$ y una representación $\pi : \mathcal{R}' \longrightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$ cumpliendo $\tau(x) = \langle \pi(x)\xi, \xi\rangle$ para todo $x \in \mathcal{R}'$. Como $\mathcal{R}'$ es simple, la representación $\pi$ es una isometría, entonces podemos identificar $\mathcal{R}'$ y $\pi(\mathcal{R}')$. Sea $\mathcal{R} := \overline{\mathcal{R}'}^{WOT}$, o sea la clausura en la topología débil de $\mathcal{R}'$ en $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. Por definición resulta un álgebra de von Neumann. La traza de $\mathcal{R}'$ se extiende a $\mathcal{R}$, y puede escribirse como $\tau(x) = \langle x\xi, \xi\rangle$, para cada $x \in \mathcal{R}$. Se puede demostrar que $\mathcal{R}$ es un factor II$_1$ conocido como el **factor II$_1$ hiperfinito**.

*d.* Sea $G$ un grupo discreto, consideremos el espacio de Hilbert

$$\ell^2(G) = \{ \xi : G \longrightarrow \mathbb{C} : \sum_{g \in G} |\xi(g)|^2 < \infty \}$$

con el producto interno $\langle \xi, \eta \rangle = \sum_{g \in G} \xi(g)\overline{\eta(g)}$. Sea $(\xi_g)_g$ la base ortonormal de $\ell^2(G)$ definida por

$$\xi_g(h) = \begin{cases} 1 & \text{si } g = h, \\ 0 & \text{si } g \neq h. \end{cases}$$

Para cada $g \in G$, denotemos por $\lambda(g)$ a la representación regular a izquierda de $G$ sobre $\ell^2(G)$, definida por $\lambda(g)(\xi_h) = \xi_{gh}$. Notemos que $\lambda(g) \in \mathcal{B}(\ell^2(G))$, y es un operador unitario para cada $g \in G$. El álgebra de von Neumann $\mathcal{L}_G$ generada por $\lambda(G)$, es decir $\mathcal{L}_G = \lambda(G)''$, se conoce como el **álgebra de von Neumann del grupo G**. Existe una traza (fiel) natural en $\mathcal{L}_G$ dada por $\tau(x) = \langle x\xi_e, \xi_e \rangle$, donde $x \in \mathcal{L}_G$ y $e$ es el elemento neutro de $G$. Por último, mencionamos que $\mathcal{L}_G$ resulta un factor si es un grupo con clases de conjugación infinitas, i.e. si $\{\, g\, g_0\, g^{-1} \;:\; g \in G \,\}$ es un conjunto infinito para todo $g_0 \neq e$.

Para finalizar la sección, introducimos un concepto más. Sea $\mathcal{A}$ una $C^*$-álgebra y $\mathcal{B}$ una $C^*$-subálgebra de $\mathcal{A}$. Una **esperanza condicional** $E : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ es una función lineal tal que $E^2 = E$ (proyección), $E(yxz) = yE(x)z$, $x \in \mathcal{A}$, $y, z \in \mathcal{B}$ (morfismo de $\mathcal{B}$-módulos) y $E(x) \geq 0$ si $x \geq 0$ (positiva). Un resultado de J. Tomiyama (ver [St81]) afirma que $E$ es una esperanza condicional si y sólo si es una proyección de norma uno (i.e. $\|E(x)\| \leq \|x\|$, $x \in \mathcal{A}$). En el caso de un álgebra de von Neumann finita $\mathcal{M}$, dada $\mathcal{N}$ una subálgebra de von Neumann de $\mathcal{M}$, no es difícil mostrar que existe una única esperanza condicional $E : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{N}$ que preserva la traza $\tau$ de $\mathcal{M}$, es decir, satisface $\tau \circ E = \tau$.

## 2.4. Espacios $L^p$ no conmutativos

La teoría de integración no conmutativa, iniciada con el artículo [Se53] de I. Segal, ha tenido múltiples enfoques y extensiones como consecuencia del desarrollo de diversas teorías en álgebras de von Neumann. Una excelente referencia que desarrolla el tema es [PX03]. En esta sección, trataremos sólo con espacios $L^p$ no conmutativos asociados con álgebras de von Neumann finitas, siguiendo básicamente el artículo [Ne74] y realizando las simplificaciones pertinentes a nuestro caso.

Sea $\mathcal{M}$ un álgebra de von Neumann finita con una traza $\tau$ normal y fiel. Un operador $x$ se dice **afiliado** a $\mathcal{M}$ si $xu = ux$, para todo unitario $u \in \mathcal{M}'$. Por el teorema del doble conmutante, un operador acotado $x$ está afiliado a $\mathcal{M}$ si y sólo si $x \in \mathcal{M}$. En particular, si $x = \int \lambda \, de(\lambda)$ es autoadjunto y afiliado a $\mathcal{M}$, entonces las proyecciones espectrales $e(\,(-\infty, \lambda]\,) \in \mathcal{M}$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$.

Denotemos por $\tilde{\mathcal{M}}$ al conjunto de los operadores densamente definidos, cerrados y afiliados a $\mathcal{M}$. Dados $x, y \in \tilde{\mathcal{M}}$, entonces $x + y$, $xy$ y $x^*$ son operadores densamente definidos y clausurables. Más aún, se cumple que $x^*$, $\overline{x+y}$ (**suma fuerte**) y $\overline{xy}$ (**producto fuerte**) son operadores en $\tilde{\mathcal{M}}$. Así, $\tilde{\mathcal{M}}$ se vuelve un álgebra provista de una involución cuando consideramos las operaciones de adjuntar, suma fuerte y multiplicación fuerte. Es interesante observar que cuando $\mathcal{M} = L^\infty([0,1])$, el álgebra $\tilde{\mathcal{M}}$ consiste en las funciones medibles (finitas en casi todo punto) en $[0,1]$.

Para $1 \leq p < \infty$, la **norma** $p$ inducida por la traza $\tau$ de $\mathcal{M}$ está definida por

$$\|x\|_p := \tau(|x|^p)^{1/p}, \quad x \in \mathcal{M}.$$

Observemos que la norma $p$ satisface que $\|x\|_p \leq \|x\|$ para todo $x \in \mathcal{M}$. Dado un operador positivo $x = \int_0^\infty \lambda\, de(\lambda)$ afiliado a $\mathcal{M}$, podemos definir

$$\tau(x) := \sup_n \tau\Big( \int_0^n \lambda\, de(\lambda) \Big) \in [0, \infty].$$

En particular, esto nos permite extender la definición de $\|\,.\,\|_p$ a operadores en $\tilde{\mathcal{M}}$. Para $1 \le p < \infty$, el **espacio $L^p$ no conmutativo** asociado a $\mathcal{M}$, se define como

$$L^p(\mathcal{M}) := \{\, x \in \tilde{\mathcal{M}} \,:\, \|x\|_p = \tau(|x|^p)^{1/p} < \infty \,\}.$$

Cuando $p = \infty$, se define $L^\infty(\mathcal{M}) := \mathcal{M}$ y $\|\,.\,\|_\infty$ es la norma usual de operadores. Para $1 \le p \le \infty$, puede probarse que $L^p(\mathcal{M})$ es un espacio de Banach con la norma $p$ que satisface las propiedades esperadas tales como:

- Dado $x \in L^p(\mathcal{M})$, existe una sucesión $(x_n)_n$ en $\mathcal{M}$ tal que $\|x - x_n\|_p \to 0$. Es decir, $L^p(\mathcal{M})$ es la completación de $\mathcal{M}$ con la norma $\|\,.\,\|_p$ .
- Dualidad: $L^p(\mathcal{M})^* \cong L^q(\mathcal{M})$ para $p^{-1} + q^{-1} = 1$, $p > 1$, y $L^1(\mathcal{M})^* = \mathcal{M}$.
- Desigualdad de Hölder: $\|xy\|_1 \le \|x\|_p \|y\|_q$, $x \in L^p(\mathcal{M})$, $y \in L^q(\mathcal{M})$.
- Cuando $p = 2$, $L^2(\mathcal{M})$ es un espacio de Hilbert con el producto interno dado por $\langle x, y\rangle = \tau(xy^*)$, $x, y \in L^2(\mathcal{M})$.

Como $L^p(\mathcal{M})$ está contenido en $\tilde{\mathcal{M}}$, tienen sentido los operadores **autoadjuntos** (resp. **antihermitianos**) en $L^p(\mathcal{M})$ que denotaremos por $L^p(\mathcal{M})_{sa}$ (resp. $L^p(\mathcal{M})_{ah}$). Más aún, $L^p(\mathcal{M})_{sa}$ y $L^p(\mathcal{M})_{ah}$ son espacios de Banach reales. Además, la noción de operadores positivos $x \ge 0$, siendo $x \in L^p(\mathcal{M})$, tiene el significado usual de operadores positivos eventualmente no acotados.

Por último, damos una noción que generaliza a los valores singulares de operadores compactos. Para $t > 0$, el ***t*-ésimo valor singular generalizado** de un operador $x \in \tilde{\mathcal{M}}$ es

$$\mu_t(x) := \text{ínf}\{\, \|xe\| \,:\, e \text{ es una proyección en } \mathcal{M} \text{ tal que } \tau(1 - e) \le t \,\}.$$

Como $x \in \tilde{\mathcal{M}}$, puede mostrarse que $\text{lím}_{s\to\infty} \tau(e\,((s, \infty))\,) = 0$, siendo $e(\,.\,)$ la medida espectral de $|x|$, y así la definición de los valores singulares generalizados tiene sentido. Es sencillo verificar que la función $t \mapsto \mu_t(x)$ resulta no creciente y continua a derecha. Además, un $x \in \tilde{\mathcal{M}}$ cumple que $x \in L^p(\mathcal{M})$ si y sólo si $\mu_t(x) \in L^p([0, 1])$ para $1 \le p \le \infty$. En tal caso, la norma $p$ se calcula como

$$\|x\|_p^p = \int_0^1 \mu_t(x)^p\, dt, \quad x \in L^p(\mathcal{M}).$$

Para un análisis detallado de los valores singulares generalizados y diversos teoremas en espacios $L^p$ no conmutativos que generalizan a los análogos conmutativos referimos al lector a [FK86].

## 2.5. Mejor aproximación

Sea $E$ un espacio de Banach con la norma $\| \,.\, \|$. Dado $S \subseteq E$, consideremos la distancia de $S$ a un elemento $x \in E$, i.e.

$$d(x, S) = \operatorname{ínf}\{ \|x - y\| \, : \, y \in S \}.$$

En el caso especial de $S$ un subespacio cerrado de $E$, notemos que $d(x, S)$ es la norma cociente de la clase de $x$ en $E/S$. Cuando exista $y_0 \in S$ tal que $d(x, S) = \|x - y_0\|$, diremos que $y_0$ es un **mejor aproximante** en $S$ para $x \in E$. La **proyección métrica** sobre $S$ es la función multivaluada $Q_S : E \longrightarrow 2^S$ que asocia a cada $x \in E$ su conjunto de mejores aproximantes (posiblemente vacío), es decir,

$$Q_S(x) = \{ y \in S \, : \, d(x, S) = \|x - y\| \}.$$

Evidentemente cuestiones relacionadas con la proyección métrica, por ejemplo la existencia y unicidad de un mejor aproximante, dependen de la estructura específica del espacio de Banach subyacente. Sin embargo, referimos al lector a [Si70] para algunos resultados generales.

A continuación introducimos dos propiedades geométricas de la bola unitaria de un espacio de Banach que implican propiedades adicionales sobre la proyección métrica. Un espacio de Banach $E$ es **uniformemente convexo** si para cada $\epsilon > 0$, existe $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ tal que si $x, y \in E$, $\|x\| = \|y\| = 1$, $\|x - y\| \geq \epsilon$, entonces

$$\left\| \frac{x + y}{2} \right\| \leq 1 - \delta.$$

Por otro lado, la convexidad uniforme tiene una noción dual asociada. El **módulo de suavidad** se define como

$$\rho_E(t) := \sup \left\{ \frac{\|x + y\| - \|x - y\|}{2} - 1 \, : \, x, y \in E, \, \|x\| = 1, \, \|y\| \leq t \right\},$$

donde $t > 0$. Un espacio de Banach es **uniformemente suave** si

$$\lim_{t \to 0} \frac{\rho_E(t)}{t} = 0.$$

Puede probarse que $E$ es uniformemente convexo si y sólo si su dual $E^*$ es uniformemente suave (ver [Bea85]). Con respecto a la proyección métrica podemos afirmar:

1. Si $E$ es uniformemente convexo, $S \subseteq E$ convexo y cerrado, entonces para cada $x \in E$ hay un único mejor aproximante $Q_S(x) \in S$ (ver [Bea85]). Es decir, $Q_S : E \longrightarrow S$ es una función monovaluada y unívocamente determinada. En particular, cuando $S$ es un subespacio cerrado,

$$\|Q_S(x)\| \leq \|Q_S(x) - x\| + \|x\| \leq \|0 - x\| + \|x\| = 2\|x\|$$

y además,

$$\|x - Q_S(x) - y\| \geq \|x - Q_S(x)\|$$

para todo $y \in S$, por lo tanto $Q_S(x - Q_S(x)) = 0$, o sea $Q_S \circ (1 - Q_S) = 0$. También para cualquier $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$Q_S(\lambda x) = \lambda Q_S(x).$$

Si llamamos $\bar{Q}_S = 1 - Q_S$, tenemos

$$S = \bar{Q}_S^{-1}(0) = Im(Q_S), \qquad Q_S^{-1}(0) = Im(\bar{Q}_S),$$

y además

$$\bar{Q}_S^2 = \bar{Q}, \quad Q_S^2 = Q_S, \quad \bar{Q}_S \circ Q_S = Q_S \circ \bar{Q}_S = 0,$$

lo cual muestra que $Q_S$ tiene algunas propiedas de las proyecciones lineales. Aunque en general no es lineal, aún cuando $S$ sea un subespacio cerrado. No obstante, es sencillo verificar que se cumple

$$Q_S(x + y) = Q_S(x) + y, \quad x \in E,\, y \in S.$$

2. Si $E$ es uniformemente convexo y uniformemente suave, $S \subseteq E$ convexo cerrado, entonces $Q_S : E \longrightarrow C$ es continua (ver [Li99]).

Por ejemplo, dado $\Omega$ un espacio de medida, los espacios de funciones $L^p(\Omega)$ para $1 < p < \infty$ son uniformemente convexos y uniformemente suaves, mientras que $L^\infty(\Omega)$ y $L^1(\Omega)$ no lo son.

## 2.6. Variedades de Banach

En este trabajo trataremos con variedades de dimensión infinita modeladas sobre espacios de Banach reales. Gran parte de las definiciones y resultados que daremos en esta sección tienen como referencia los libros [La95], [Be06] y el trabajo [Ga06].

La noción de derivada de funciones entre espacios de Banach que utilizaremos es la derivada de Fréchet. Con respecto a esta noción, dada una función $f : E \longrightarrow F$ entre espacios de Banach reales diremos que $f$ es de clase $C^k$, $C^\infty$ o analítica real. Haremos uso del término **suave** para indicar cualquiera de estos tipos de diferenciabilidad cuando no sea necesario ser específico.

Sea $E$ un espacio de Banach real. Una **variedad de Banach suave** modelada sobre $E$ es un espacio topológico regular $\mathcal{X}$ dotado con una familia maximal de homeomorfismos $\{\, \phi_i : V_i \longrightarrow \phi(V_i)\,\}_{i \in I}$ que satisfacen:

- Para cada $i \in I$, $V_i$ es un subconjunto abierto de $\mathcal{X}$ y $\phi(V_i)$ es un subconjunto abierto de $E$.
- $\mathcal{X} = \bigcup_{i \in I} V_i$.
- Si $i, j \in I$ y $V_i \cap V_j \neq \emptyset$, entonces la función de cambio de coordenadas

  $$\phi_i \circ \phi_j^{-1} : \phi_j(V_i \cap V_j) \longrightarrow \phi_i(V_i \cap V_j)$$

  es suave. Notemos que tanto $\phi_j(V_i \cap V_j)$ como $\phi_i(V_i \cap V_j)$ son abiertos del espacio de Banach $E$.

Dados $V_i$, $\phi_i$ como en la definición anterior, un par $(V_i, \phi_i)$ se conoce como una **carta coordenada local**.

No daremos la descripción del espacio tangente $(T\mathcal{X})_x$ en $x \in \mathcal{X}$. Sólo mencionaremos que es un espacio de Banach isomorfo a $E$. En general denotaremos los vectores tangentes por letras mayúsculas $X, Y, Z$, etc. Observemos que si $E$ es un espacio de Banach, entonces es una variedad de Banach y el espacio tangente en cada $x \in E$ se identifica con $E$.

La definición de funciones suaves entre variedades se realiza utilizando cartas locales igual que en variedades de dimensión finita. Una función suave entre variedades con inversa suave se denomina un **difeomorfismo**. Si $f : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{Y}$ es una función entre variedades de Banach, escribiremos

$$f_{*x} : (T\mathcal{X})_x \longrightarrow (T\mathcal{Y})_{f(x)}$$

para indicar la diferencial en $x \in \mathcal{X}$. En particular, la diferencial de una curva $\gamma : I \longrightarrow \mathcal{X}$ ($I$ intervalo real) en $t \in I$ la denotaremos por $\dot{\gamma}(t)$.

Una clase importante para nosotros de funciones suaves es la siguiente. Una función suave $f : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{Y}$ es una **sumersión en** $x \in \mathcal{X}$ si satisface

- $\ker( f_{*x} )$ es un subespacio complementado de $(T\mathcal{X})_x$, i.e. existe $\mathcal{F}$ un subespacio cerrado de $(T\mathcal{X})_x$ tal que $\ker( f_{*x} ) \oplus \mathcal{F} = (T\mathcal{X})_x$.
- La diferencial $f_{*x} : (T\mathcal{X})_x \longrightarrow (T\mathcal{Y})_{f(x)}$ es suryectiva.

Diremos que $f$ es una **sumersión** si cumple estas condiciones para todo $x \in \mathcal{X}$.

Sea $\mathcal{Y}$ un subconjunto no vacío de una variedad $\mathcal{X}$. Diremos que $\mathcal{Y}$ es una **subvariedad suave** de $\mathcal{X}$ si para cada $y \in \mathcal{Y}$ existen una carta $(V, \phi)$ de $\mathcal{X}$ con $y \in V$ tal que $\phi$ es un difeomorfismo de $V$ con un producto $V_1 \times V_2$, donde $V_i$ es un abierto en un subespacio cerrado $E_i \subseteq E$ para $i = 1, 2$ tal que $E = E_1 \oplus E_2$, y se satisface

$$\phi(\mathcal{Y} \cap V) = V_1 \times \{ x_2 \}$$

siendo $x_2 \in E_2$. La función $\phi$ induce una biyección $\phi_1 : \mathcal{Y} \cap V \longrightarrow V_1$. Así, $\mathcal{Y}$ es una variedad en sí misma con cartas locales $(\mathcal{Y} \cap V, \phi_1)$ obtenidas según la construcción anterior.

Recordemos dos construcciones básicas en geometría diferencial. El **fibrado tangente** $T\mathcal{X}$ de una variedad $\mathcal{X}$ consiste en la unión disjunta de todos los espacios tangentes, i.e. $T\mathcal{X} = \bigsqcup_{x \in \mathcal{X}} (T\mathcal{X})_x$ y el **fibrado cotangente** $T^*\mathcal{X}$ es la unión disjunta de los duales de todos los espacios tangentes, i.e. $T^*\mathcal{X} = \bigsqcup_{x \in \mathcal{X}} (T\mathcal{X})_x^*$. Es sencillo verificar que ambos son variedades suaves, y además poseen estructura de fibrados vectoriales (ver [La95]).

### 2.6.1. Grupos de Lie-Banach

Un **grupo de Lie-Banach** (real) es un grupo topológico $G$ que además es una variedad de Banach tal que las funciones

$$G \times G \longrightarrow G,\ (u, v) \mapsto uv, \quad G \longrightarrow G,\ u \mapsto u^{-1},$$

son suaves. El espacio tangente $(TG)_e$ en la identidad $e \in G$ se denomina **álgebra de Lie** de $G$ y lo denotaremos por $\mathfrak{g}$. Una vez conocida el álgebra de Lie de un grupo de Lie-Banach es posible calcular el espacio tangente en cualquier $g_0 \in G$ trasladando a izquierda o derecha, es decir $(TG)_{g_0} = g_0\, \mathfrak{g} = \mathfrak{g}\, g_0$.

Un **subgrupo uniparamétrico** de $G$ consiste en una curva $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow G$ que satisface $\gamma(0) = e$ y $\gamma(s+t) = \gamma(s)\gamma(t)$, para todo $s, t \in \mathbb{R}$. Para cada $X \in \mathfrak{g}$, existe un único subgrupo uniparamétrico suave $\gamma_X$ de $G$ tal que $\dot{\gamma}_X(0) = X$. Esto permite la definición de la **aplicación exponencial** dada por

$$\exp_G : \mathfrak{g} \longrightarrow G, \qquad \exp_G(X) = \gamma_X(1).$$

Puede mostrarse que la exponencial siempre es una función suave. En particular, estaremos interesados en grupos de Lie-Banach que son grupos unitarios:

*a*. El grupo unitario $\mathcal{U}_{\mathcal{A}}$ de una $C^*$-álgebra, i. e.

$$\mathcal{U}_{\mathcal{A}} = \{\, u \in \mathcal{A} \, : \, u^*u = uu^* = 1 \,\}$$

es un grupo de Lie-Banach con la topología relativa inducida por norma. El álgebra de Lie de $\mathcal{U}_{\mathcal{A}}$ se identifica con $\mathcal{A}_{ah}$, el conjunto de operadores antihermitianos de $\mathcal{A}$. La aplicación exponencial está dada por $\exp_{\mathcal{U}_{\mathcal{A}}} : \mathcal{A}_{ah} \longrightarrow \mathcal{U}_{\mathcal{A}}$, $\exp_{\mathcal{U}_{\mathcal{A}}}(x) = e^x$, que es la exponencial usual de operadores.

*b*. Sea $\mathfrak{I}$ un ideal de Banach. El conjunto de operadores unitarios que son perturbaciones de la identidad por elementos en $\mathfrak{I}$, es decir

$$\mathcal{U}_{\mathfrak{I}}(\mathcal{H}) = \{\, u \in \mathcal{U}(\mathcal{H}) \, : \, u - 1 \in \mathfrak{I} \,\},$$

es un grupo de Lie-Banach con la topología inducida por $(u, v) \mapsto \|u - v\|_{\mathfrak{I}}$, $u, v \in \mathcal{U}_{\mathfrak{I}}(\mathcal{H})$. Podemos calcular el álgebra de Lie que consiste en $\mathfrak{I}_{ah} := \mathcal{B}(\mathcal{H})_{ah} \cap \mathfrak{I}$. La exponencial está dada por $\exp_{\mathcal{U}_{\mathfrak{I}}(\mathcal{H})} : \mathfrak{I}_{ah} \longrightarrow \mathcal{U}_{\mathfrak{I}}(\mathcal{H})$, $\exp_{\mathcal{U}_{\mathfrak{I}}(\mathcal{H})}(x) = e^x$. Este tipo de grupos se conocen como **grupos de Lie-Banach clásicos** en la literatura (ver [dlH72] para $\mathfrak{I} = \mathcal{B}_p(\mathcal{H})$).

Sea $G$ un grupo de Lie-Banach con álgebra de Lie $\mathfrak{g}$. Un subgrupo $H$ de $G$ es un **subgrupo de Lie-Banach** si satisface:

- $H$ es un grupo de Lie-Banach cuya topología es la heredada de $G$.
- La inclusión $i : H \longrightarrow G$ es suave y cumple que $i_{*\,e} : \mathfrak{h} \longrightarrow \mathfrak{g}$ es un operador inyectivo con rango cerrado.
- Existe $\mathcal{F}$ subespacio cerrado de $\mathfrak{g}$ tal que $i_{*\,e}(\mathfrak{h}) \oplus \mathcal{F} = \mathfrak{g}$.

Por la segunda condición identificaremos $\mathfrak{h}$ con $i_{*\,e}(\mathfrak{h})$. Así, podemos pensar a $\mathfrak{h}$ como una subálgebra cerrada de $\mathfrak{g}$ y a la diferencial $i_{*\,e}$ como la inclusión $\mathfrak{h} \hookrightarrow \mathfrak{g}$. Puede mostrarse que un subgrupo de Lie-Banach $H$ de un grupo de Lie-Banach $G$ es una subvariedad cerrada.

Algunas veces, para probar que un subgrupo $H$ es un subgrupo de Lie-Banach de un grupo unitario $\mathcal{U}_{\mathcal{A}}$ de una $C^*$-álgebra $\mathcal{A}$, nos será útil el siguiente concepto. Un **subgrupo algebraico de orden** $\leq n$ de $\mathcal{U}_{\mathcal{A}}$ es un subgrupo $H$ de $\mathcal{U}_{\mathcal{A}}$ tal que

$$H = \{\, u \in \mathcal{U}_{\mathcal{A}} \, : \, p(u, u^*) = 0, \, \forall\, p \in \mathcal{P} \,\},$$

donde $\mathcal{P}$ es un conjunto de funciones polinomiales continuas sobre $\mathcal{A} \times \mathcal{A}$ a valores vectoriales. Esto significa que para todo $p \in \mathcal{P}$ existe un espacio de Banach real $E_p$ y una función $k$-lineal

$$\psi_k : (\mathcal{A} \times \mathcal{A}) \times \ldots \times (\mathcal{A} \times \mathcal{A}) \longrightarrow E_p,$$

para $k = 0, 1, \ldots, n$ tal que $p(a) = \psi_n(a, \ldots, a) + \ldots + \psi_1(a) + \psi_0$, para todo $a \in \mathcal{A} \times \mathcal{A}$.

**Teorema 2.6.1** (Teorema 4.18 en [Be06]). *Sea $n$ un entero positivo, $H$ un subgrupo algebraico de $\mathcal{U}_{\mathcal{A}}$ de orden $\leq n$, y*

$$\mathfrak{h} := \{\, a \in \mathcal{A} \,:\, e^{ta} \in H, \, \forall\, t \in \mathbb{R} \,\},$$

*entonces $\mathfrak{h}$ es una subálgebra cerrada de $\mathcal{A}_{ah}$, $H$ es un grupo de Lie-Banach con la topología de la norma de $\mathcal{A}$ y $\mathfrak{h}$ es el álgebra de Lie de $H$.*

En el artículo [HK77] puede encontrarse un análisis detallado de subgrupos algebraicos.

### 2.6.2. Espacios homogéneos

Sean $G$ un grupo de Lie-Banach y $\mathcal{X}$ una variedad suave. Una **acción suave** de $G$ sobre $\mathcal{X}$ es una función suave $G \times \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{X}, \quad (g, x) \mapsto g \cdot x$, que satisface $(g_1 g_2) \cdot x = g_1 \cdot (g_2 \cdot x)$ para $g_1, g_2 \in G$ y $x \in \mathcal{X}$. Dada un acción, la **órbita** de $x \in \mathcal{X}$, es $\mathcal{O}(x) = \{\, g \cdot x \,:\, g \in G \,\}$. Anotaremos con $\pi_x$ a la función suave dada por

$$\pi_x : G \longrightarrow \mathcal{X}, \quad \pi_x(g) = g \cdot x.$$

El subgrupo de $G$ dado por $G_x = \{\, g \in G \,:\, \pi_x(g) = x \,\}$ es el **grupo de isotropía** en $x \in \mathcal{X}$. Es sencillo verificar que $\mathcal{O}(x)$ y $G/G_x$ son conjuntos biyectivos para todo $x \in \mathcal{X}$.

Una acción se dice **transitiva** si para todos $x_0, x_1 \in X$, existe $g \in G$ tal que $g \cdot x_0 = x_1$. Es decir, la acción es transitiva cuando $\mathcal{X}$ es una órbita.

Sea $G \times \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{X}$ una acción suave transitiva. Diremos que $\mathcal{X}$ es un **espacio homogéneo suave** si existe $x \in \mathcal{X}$ tal que $\pi_x$ sea una sumersión suave en $e \in G$. No es difícil demostrar que si $\pi_x$ es una sumersión en $e \in G$ para algún $x \in \mathcal{X}$, entonces es una sumersión en $e$ para todo $x \in \mathcal{X}$.

Equivalentemente, los espacios homogéneos pueden presentarse como espacios cocientes provistos con la topología cociente. Es decir, si la órbita $\mathcal{O}(x)$ es un espacio homogéneo, entonces el grupo de isotropía $G_x$ es un subgrupo de Lie-Banach de $G$ y el espacio cociente $G/G_x$ con su topología es un espacio homogéneo difeomorfo a $\mathcal{O}(x)$. Recíprocamente, todo cociente de un grupo de Lie-Banach por un subgrupo de Lie-Banach, es un espacio homogéneo con la topología cociente (ver [Be06]). Además, cuando $\mathcal{O}$ es un espacio homogéneo, para cada $x \in \mathcal{O}$ la función $\pi_x : G \longrightarrow \mathcal{O}$ resulta un fibrado principal (ver definición de [KN96]).

La siguiente consecuencia del teorema de la función implícita en espacios de Banach nos servirá para probar que ciertas órbitas son espacios homogéneos y subvariedades.

**Teorema 2.6.2** (Apéndice en [Ra77]). *Sea $G$ un grupo de Lie-Banach actuando suavemente en un espacio de Banach $E$. Para un $x_0 \in E$ fijo, se denota $\pi_{x_0} : G \longrightarrow E$ a la función suave $\pi_{x_0}(g) = g \cdot x_0$. Si se cumplen:*

1. *$\pi_{x_0}$ es una función abierta, si se considera como función de $G$ sobre la órbita $\mathcal{O}(x_0)$ de $x_0$ (con la topología relativa de $E$).*

2. *La diferencial $(\pi_{x_0})_{*e} : \mathfrak{g} \longrightarrow E$ satisface que su núcleo y su rango son subespacios cerrados complementados.*

*Entonces la órbita $\mathcal{O}(x_0)$ es una subvariedad suave de $E$ y un espacio homogéneo suave tal que $(T\mathcal{O}(x_0))_x \cong R(\,(\pi_{x_0})_{*e})$ para todo $x \in \mathcal{O}(x_0)$.*

En general, si $\pi : G \longrightarrow \mathcal{O}$ es una función de un grupo de Lie-Banach $G$ en una órbita $\mathcal{O}$, diremos que $\pi$ admite una **sección local** en $x \in \mathcal{O}$ si existe un abierto $U$ con $x \in U$ y una función $\sigma : U \longrightarrow G$ tal que $(\pi \circ \sigma)(z) = z$ para todo $z \in U$. Es sencillo mostrar que si $\pi$ admite secciones locales continuas en todo punto entonces es abierta. En particular, este hecho es útil para verificar la condición 1. del teorema anterior. Por otro lado, si $\mathcal{O}$ es un espacio homogéneo puede probarse que las funciones $\pi_x$ poseen secciones locales suaves en todo punto (ver [Be06]).

Frecuentemente, los espacios homogéneos tratados aquí estarán dotados de una estructura reductiva. Para definir este tipo de estructura, nos restringiremos a espacios homogéneos de grupos unitarios porque son los que estudiaremos más adelante, aunque es posible dar una definición para espacios homogéneos cualesquiera.

Sea $\mathcal{B}$ un álgebra de Banach provista de una involución. El grupo unitario $\mathcal{U}_{\mathcal{B}}$ se define igual que cuando $\mathcal{B}$ es una $C^*$-álgebra. Supongamos que $\mathcal{U}_{\mathcal{B}}$ es un grupo de Lie-Banach con la topología de la norma de $\mathcal{B}$. Es decir, estamos pensando en los dos ejemplos dados más arriba: el grupo unitario $\mathcal{U}_{\mathcal{A}}$ de una $C^*$-álgebra $\mathcal{A}$ y los grupos unitarios clásicos $\mathcal{U}_{\mathfrak{I}}(\mathcal{H})$ asociados a un ideal de Banach $\mathfrak{I}$. Denotemos por $\mathcal{B}_{ah}$ al álgebra de Lie de $\mathcal{U}_{\mathcal{B}}$, o sea los elementos $b \in \mathcal{B}$ tales que $b^* = -b$.

Sea $\mathcal{O}$ un espacio homogéneo de $\mathcal{U}_{\mathcal{B}}$. Diremos que $\mathcal{O}$ es un **espacio homogéneo reductivo** si para todo $u \in \mathcal{U}_{\mathcal{B}}$ existe un subespacio cerrado $\mathcal{F}_u$ de $\mathcal{B}_{ah}$ que satisface:

- Existe $\mathcal{V}_u$ subespacio cerrado de $\mathcal{B}_{ah}$ cumpliendo $\mathcal{F}_u \oplus \mathcal{V}_u = \mathcal{B}_{ah}$.
- $v\mathcal{F}_u v^* = \mathcal{F}_u$, para todo $v \in G_u$, siendo $G_u$ el grupo de isotropía en $u \in \mathcal{U}_{\mathcal{B}}$.
- La distribución $u \mapsto \mathcal{F}_u$ es suave. Esto significa: Si $p_u : \mathcal{B}_{ah} \longrightarrow \mathcal{F}_u$ es la proyección sobre $\mathcal{F}_u$, la función definida de $\mathcal{U}_{\mathcal{B}}$ en los operadores acotados sobre $\mathcal{B}$, dada por $u \mapsto p_u$ resulta suave.

La correspondencia $u \mapsto \mathcal{F}_u$ define una **conexión** en $\mathcal{O}$ (ver [KN96]). En consecuencia, es posible introducir las nociones de levantamiento y desplazamiento horizontal, torsión, curvatura, geodésicas, etc. Los espacios $\mathcal{F}_u$ consisten en los vectores horizontales de $\mathcal{B}_{ah}$ y los espacios $\mathcal{V}_u$ son los vectores verticales en $\mathcal{B}_{ah}$. Por lo tanto, $\mathcal{V}_u$ puede pensarse como el como el álgebra de Lie del grupo $G_{x_0}$ si $\pi_x(u) = x_0$. De esta manera, la idea de una conexión es levantar en $\pi_x : \mathcal{U}_{\mathcal{B}} \longrightarrow \mathcal{O}$ los espacios tangentes en $x_0 \in \mathcal{O}$ mediante un isomorfismo a espacios horizontales que varían suavemente.

Un análisis detallado acerca de espacios homogéneos reductivos de dimensión infinita puede encontrarse en [MR92]. En particular, en dicho artículo se muestra como también se puede definir una conexión a partir de una 1-forma equivariante $x \mapsto s_x : (T\mathcal{O})_x \longrightarrow \mathcal{B}_{ah}$ donde $s_x$ es el inverso a derecha de $(\pi_x)_{*e}$. De esta manera, los espacios horizontales se obtienen como $\mathcal{F}_u = s_{u\cdot x}((T\mathcal{O})_{u\cdot x})$, $u \in \mathcal{U}_{\mathcal{B}}$.

### 2.6.3. Variedades de Riemann y Finsler

Sea $\mathcal{X}$ una variedad de Banach. Una **métrica Riemanniana** consiste en una elección suave de productos internos sobre los espacios tangentes de $\mathcal{X}$ que denotaremos

$$\langle\, .\, ,\, .\, \rangle_x : (T\mathcal{X})_x \times (T\mathcal{X})_x \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \in \mathcal{X}.$$

Una **variedad Riemanniana** es una variedad provista de una métrica Riemanniana. En particular, cuando la variedad esté modelada sobre un espacio de Hilbert (real) hay una métrica Riemanniana natural obtenida por los isomorfismos de los tangentes con el espacio de Hilbert. En tal caso diremos que es una **variedad de Hilbert-Riemann**. A continuación distinguiremos entre dos tipos de variedades Riemannianas.

En variedades Riemannianas de dimensión finita el fibrado tangente se identifica con el fibrado cotangente, y gracias a esto pueden probarse muchos resultados básicos. En variedades Riemannianas de dimensión infinita esta propiedad deja de valer dando lugar al siguiente concepto desarrollado en [S07]. Una variedad Riemanniana $\mathcal{X}$ se dice:

- **Fuertemente Riemanniana** si $T\mathcal{X}$ es difeomorfo a $T^*\mathcal{X}$.
- **Débilmente Riemanniana** si $T\mathcal{X}$ no es difeomorfo a $T^*\mathcal{X}$.

El difeomorfismo debe estar dado por la función $T\mathcal{X} \longrightarrow T^*\mathcal{X}$, $(x, X) \mapsto \langle\, . \,, X\rangle_x$, donde $x \in \mathcal{X}$ y $X \in (T\mathcal{X})_x$.

Si para $n \geq 1$ denotamos por $\mathbb{CP}^n$ al espacio proyectivo complejo en $\mathbb{C}^{n+1}$, un ejemplo simple de variedad débilmente Riemanniana es

$$\mathbb{CP}^\infty = \bigcup_{n\geq 1} \mathbb{CP}^n,$$

conocido como el espacio proyectivo completo.

En general, en variedades fuertemente Riemannianas pueden reproducirse la mayoría de los resultados de variedades Riemannianas de dimensión finita. Por otro lado, sólo las variedades de Hilbert-Riemann pueden ser fuertemente Riemannianas, aunque no todas lo son. Nuestro interés en presentar la clasificación precedente se verá en la Sección 4.4, donde trataremos con variedades débilmentes Riemannianas que son espacios homogéneos del grupo unitario de un álgebra de von Neumann finita. Mientras que en la Sección 4.5 daremos varios ejemplos concretos.

Sin entrar en detalles, simplemente mencionemos que en una variedad Riemanniana es posible definir una conexión distinguida: La **conexión de Levi-Civita**. Esta conexión es la única conexión simétrica (torsión nula) y compatible con la métrica. Referimos al lector al libro [La95] para estos hechos.

Una **métrica de Finsler** en una variedad de Banach $\mathcal{X}$ consiste en una elección continua de normas en cada espacio tangente que denotaremos por

$$\|\,.\,\|_x : (T\mathcal{X})_x \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \|\,.\,\|_x\,.$$

Una **variedad de Finsler** es una variedad de Banach con una métrica de Finsler. Observemos que en variedades de dimensión finita es habitual requerir condiciones más restrictivas tales como homogeneidad positiva y convexidad de la métrica ([BCS00]). La definición dada aquí es más adecuada para los casos que trataremos donde no necesariamente haya convexidad.

# Capítulo 3

# Espacios homogéneos en álgebras finitas

Sea $\mathcal{M}$ un álgebra de von Neumann finita con una traza $\tau$ fiel y normal. Denotemos por $\mathcal{U}_{\mathcal{M}}$ al grupo de operadores unitarios de $\mathcal{M}$. A lo largo de este capítulo asumiremos $1 < p < \infty$, salvo aclaración explícita. Consideramos los espacios $L^p$ no conmutativos de $\mathcal{M}$ denotados por $L^p(\mathcal{M})$. Es decir, $L^p(\mathcal{M})$ es la completación de $\mathcal{M}$ con la norma $p$ dada por

$$\|x\|_p = \tau(|x|^p)^{1/p}, \quad x \in \mathcal{M}.$$

Sea $\mathcal{O}$ un conjunto donde $\mathcal{U}_{\mathcal{M}}$ actúa transitivamente. Además, supongamos que para cada $x \in \mathcal{O}$, el subgrupo de isotropía $G_x = \{u \in \mathcal{U}_{\mathcal{M}} : u \cdot x = x\}$ es un subgrupo de Lie-Banach de $\mathcal{U}_{\mathcal{M}}$ con la topología de la norma de operadores. En consecuencia, $\mathcal{O}$ puede ser dotado de una estructura de variedad de manera tal que las funciones

$$\pi_x : \mathcal{U}_{\mathcal{M}} \to \mathcal{O}, \quad \pi_x(u) = u \cdot x$$

sean una sumersión suave. Así, $\mathcal{O}$ es un espacio homogéneo del grupo $\mathcal{U}_{\mathcal{M}}$. Podemos citar como ejemplos a las órbitas unitarias de un operador normal, un estado fiel, una medida espectral, un $*$-morfismo, una esperanza condicional, una isometría parcial y ciertos sistemas dinámicos de $C^*$-álgebras. Estos ejemplos, y otros más, serán tratados con detalle en el Capítulo 4.

## 3.1. Métricas cocientes

Introducimos la métrica de Finsler que utilizaremos en el espacio homogéneo $\mathcal{O}$. La elección de esta métrica resulta bastante natural y posee numerosos precedentes en geometría de operadores como mencionamos en la Sección 1.2. Recordemos que los operadores antihermitianos de $\mathcal{M}$, indicados por $\mathcal{M}_{ah}$, son el álgebra de Lie de $\mathcal{U}_{\mathcal{M}}$. Por otro lado, para cada grupo de isotropía $G_x$ en $x \in \mathcal{O}$, denotamos por $\mathfrak{g}_x$ a su correspondiente álgebra de Lie.

**Definición 3.1.1.** *Dados $x \in \mathcal{O}$ y $X \in (T\mathcal{O})_x$, la **métrica cociente** $p$ está dada por*

$$\|X\|_{x,p} = \inf\{\|z - y\|_p : y \in \mathfrak{g}_x\},$$

*donde $z \in \mathcal{M}_{ah}$ cumple $(\pi_x)_{*1}(z) = X$.*

En primer lugar, observemos que como $\pi_x$ es suryectiva la existencia de un operador $z$ cumpliendo lo requerido está garantizada. Además, notemos que para cada $x \in \mathcal{O}$ es la norma cociente de $z$ en $L^p(\mathcal{M})_{ah}/\overline{\mathfrak{g}_x}^p$, siendo $L^p(\mathcal{M})_{ah}$ los operadores antihermitianos de $L^p(\mathcal{M})$ y $\overline{\mathfrak{g}_x}^p$ la clausura en norma $p$ de $\mathfrak{g}_x$. De hecho, dado que $\mathfrak{g}_x = \ker(\pi_x)_{*1}$, si $z \in \mathcal{M}_{ah}$ cumpliendo $(\pi_x)_{*1}(z) = X$, entonces

$$\|X\|_{x,p} = \text{ínf}\{\, \|z\|_p \,:\, z \in \mathcal{M}_{ah},\ (\pi_x)_{*1}(z) = X\,\}.$$

En adelante, cuando no sea necesario, omitiremos el subíndice $p$. Una de las principales propiedades de esta métrica es que resulta invariante por la acción del grupo. En otras palabras, si para cada $u \in \mathcal{U}_{\mathcal{M}}$ fijo consideramos los difeomorfismos

$$\ell_u : \mathcal{O} \longrightarrow \mathcal{O},\ \ \ell_u(x) = u \cdot x,\ \ x \in \mathcal{O},$$

entonces para $x \in \mathcal{O}$, $X \in (T\mathcal{O})_x$ y $u \in \mathcal{U}_{\mathcal{M}}$ se cumple

$$\|(\ell_u)_{*x}(X)\|_{u\cdot x} = \|X\|_x.$$

**Observación 3.1.2.** *En los espacios $L^p(\mathcal{M})$ valen las desigualdades de Clarkson (ver [Ko84]): Para $1 < p \leq 2$ y $1/p + 1/q = 1$, se escriben como*

$$\|a+b\|_p^q + \|a-b\|_p^q \leq 2(\,\|a\|_p^p + \|b\|_p^p\,)^{q-1},$$

*Si $2 \leq p < \infty$, entonces*

$$\|a+b\|_p^p + \|a-b\|_p^p \leq 2^{p-1}(\,\|a\|_p^p + \|b\|_p^p\,).$$

*para cualquier $a, b \in L^p(\mathcal{M})$. Como consecuencia, los espacios $L^p(\mathcal{M})$ y el espacio real de los operadores antihermitianos $L^p(\mathcal{M})_{ah}$ son uniformemente convexos y uniformemente suaves para $1 < p < \infty$. Luego, para cada conjunto convexo cerrado $S \subset L^p(\mathcal{M})_{ah}$, la proyección métrica $Q_{S,p}(x) : L^p(\mathcal{M})_{ah} \longrightarrow S$ resulta una función continua (ver Sección 2.5) que asigna a cada operador $z \in L^p(\mathcal{M})_{ah}$ su mejor aproximante, i.e.*

$$\|z - Q_{S,p}(z)\|_p \leq \|z - y\|_p\,,\quad \forall\, y \in S.$$

*En especial, nos interesa cuando consideramos como conjunto convexo cerrado a $\overline{\mathfrak{g}_x}^p$.*

**Notación 3.1.3.** *Fijado $x \in \mathcal{O}$, para simplificar la notación, cuando esté claro por el contexto, llamaremos $G$ al grupo de isotropía en $x$ y $\mathfrak{g}$ a su correspondiente álgebra de Lie. Además, denotaremos por $Q$ a la proyección métrica sobre $\overline{\mathfrak{g}}^p$, sin hacer referencia a su dependencia de $p$.*

**Observación 3.1.4.** *Si denotamos*

$$\mathfrak{g}^{\perp_p} = Q^{-1}(0) = \{z \in L^p(\mathcal{M})_{ah} : \|z\|_p \leq \|z-y\|_p \ \ \text{para todo}\ \ y \in \mathfrak{g}\},$$

*entonces todo elemento $z \in L^p(\mathcal{M})_{ah}$ se descompone de manera única como*

$$z = z - Q(z) + Q(z),$$

*donde $z - Q(z) = (1-Q)(z) \in \mathfrak{g}^{\perp_p}$ y $Q(z) \in \overline{\mathfrak{g}}^p$. En particular, para $1 < p < \infty$, la métrica cociente de $\mathcal{O}$ está dada por*

$$\|X\|_x := \|z - Q(z)\|_p,$$

*donde $z \in \mathcal{M}_{ah}$ es cualquier elemento tal que $(\pi_x)_{*1}(z) = X$.*

Denotaremos por $\overline{T_x\mathcal{O}}^p$ a la completación $T_x\mathcal{O}$ relativa a la métrica $p$ cociente. Entonces $(\pi_x)_{*1}$ se extiende naturalmente a $\pi_*^p : L^p(\mathcal{M})_{ah} \to \overline{T_x\mathcal{O}}^p$, porque

$$\|(\pi_x)_{*1}(y_n) - (\pi_x)_{*1}(z_n)\|_x = \|y_n - z_n - Q(y_n - z_n)\|_p \leq \|y_n - z_n\|_p$$

y así podemos definir $\pi_*^p(z_0) = \lim_n (\pi_x)_{*1}(z_n)$ sin importar la sucesión particular $(z_n)_n$ tal que $z_n \to z_0 \in L^p(\mathcal{M})_{ah}$.

**Definición 3.1.5.** *Dado $X \in \overline{T_x\mathcal{O}}^p$, un operador $z_0 \in L^p(\mathcal{M})_{ah}$ se dice un* ***levantado minimal*** *de $X$ si $\pi_*^p(z_0) = X$ y $\|X\|_x = \|z_0\|_p$ .*

En la siguiente proposición establecemos la existencia y unicidad de levantados minimales.

**Proposición 3.1.6.** *Sean $1 < p < \infty$, $x \in \mathcal{O}$ y $X \in \overline{T_x\mathcal{O}}^p$. Un elemento $z_0 \in L^p(\mathcal{M})_{ah}$ tal que $\pi_*^p(z_0) = X$ es un levantado minimal para $X$ si y sólo si $\tau(z_0^{p-1}y) = 0$ para todo $y \in \mathfrak{g}$. Para cualquier $X \in \overline{T_x\mathcal{O}}^p$ existe un único levantado minimal $z_0 \in \mathfrak{g}^{\perp_p}$ tal que $\|z_0\|_p = \|X\|_x$.*

*Demostración.* Supongamos que $z_0$ sea un levantado minimal, y que para cada $y \in \mathfrak{g}$ fijo, consideremos $f(t) = \|z_0 - ty\|_p^p$. Entonces $f$ es una función suave con un mínimo en $t = 0$, i.e. $f'(0) = 0$. Un cálculo sencillo nos muestra que $f'(t) = -p\,\tau((z_0 - ty)^{p-1}y)$, y así $\tau(z_0^{p-1}y) = 0$. Recíprocamente, supongamos que $\tau(z_0^{p-1}y) = 0$ para todo $y \in \mathfrak{g}$ y supongamos que $y_0 \in \mathfrak{g}$ tal que $\|z_0 - y_0\|_p < \|z_0\|_p$. Entonces la función $f(t) = \|z_0 - ty_0\|_p^p$ no tendría un mínimo en $t = 0$. Esto es una contradicción, porque $f$ es convexa y $f'(0) = 0$.

La existencia de levantados minimales fue mostrada en la Observación 3.1.4.

Para probar la unicidad, si $\pi_*^p(z_1) = \pi_*^p(z_2) = X$ para $z_1, z_2 \in L^p(\mathcal{M})_{ah}$, entonces $z_1 - z_2 \in \overline{\mathfrak{g}}^p$. Como $z_1$ y $z_2$ son levantados minimales, entonces $\|z_1\|_p \leq \|z_1 - (z_1 - z_2)\|_p = \|z_2\|_p$ y la desigualdad al revés también vale, por lo tanto $\|z_1\|_p = \|z_2\|_p = \|X\|_x$. Claramente podemos asumir $\|z_1\|_p = \|z_2\|_p = 1$. Consideremos la siguiente función suave y convexa dada por

$$g : \overline{\mathfrak{g}}^p \to \mathbb{R}_{>0}, \quad y \mapsto \|z_1 - y\|_p^p.$$

Ahora $g(0) = \|z_1\|_p^p = 1$ es un mínimo para $g$, y por otro lado estamos suponiendo que $g(z_1 - z_2) = \|z_2\|_p^p = 1$ es otro mínimo. Por lo tanto $g$ debe ser constante en el segmento $z_2 + s(z_1 - z_2) \in \overline{\mathfrak{g}}^p$, para todo $s \in [0, 1]$. En particular, para $s = 1/2$,

$$\|\frac{1}{2}(z_1 + z_2)\|_p^p = \|z_1\|_p^p = \|z_2\|_p^p = 1,$$

de donde deducimos $z_1 = z_2$, puesto que $L^p(\mathcal{M})$ es uniformemente convexo. $\square$

## 3.2. Distancia rectificable

En esta sección definimos de manera usual la distancia rectificable primero en el grupo unitario $\mathcal{U}_{\mathcal{M}}$, y luego en el espacio homogéneo $\mathcal{O}$. Anotaremos con $L_p$ al funcional de longitud dado por las normas $p$ definido sobre las curvas suaves a trozos en $\mathcal{U}_{\mathcal{M}}$, es decir

$$L_p(\Gamma) = \int_0^1 \|\dot{\Gamma}(t)\|_p \, dt,$$

donde $\Gamma(t) \subset \mathcal{U}_{\mathcal{M}}$, $t \in [0,1]$. Aquí suave significa $C^1$ relativo a la topología uniforme de $\mathcal{M}$. Entonces definimos la distancia rectificable $d_p$ en $\mathcal{U}_{\mathcal{M}}$ como

$$d_p(u,v) = \text{ínf}\{\, L_p(\Gamma) \,:\, \Gamma \subset \mathcal{U}_{\mathcal{M}},\, \Gamma(0) = u \text{ y } \Gamma(1) = v \,\},$$

donde las curvas $\Gamma$ consideradas son suaves a trozos.

**Proposición 3.2.1.** *Sea $1 \le p < \infty$. Sean $u, v \in \mathcal{U}_{\mathcal{M}}$, entonces*

$$\sqrt{1 - \frac{\pi^2}{12}}\, d_p(u,v) \le \|u - v\|_p \le d_p(u,v).$$

*En particular, el espacio métrico $(\mathcal{U}_{\mathcal{M}}, d_p)$ es completo.*

*Demostración.* Sean $u, v \in \mathcal{U}_{\mathcal{M}}$. Dado $\epsilon > 0$, existe $\Gamma \subset \mathcal{U}_{\mathcal{M}}$ tal que $\Gamma(0) = u$, $\Gamma(1) = v$ y $L_p(\Gamma) < d_p(u,v) + \epsilon$. Por otro lado, si miramos a $\Gamma$ como una curva dentro del espacio vectorial $\mathcal{M}$, como el segmento que une $u$ con $v$ tiene longitud minimal entre todas las curvas con los mismos puntos inicial y final, tenemos

$$\|u - v\|_p \le \int_0^1 \|\dot{\Gamma}(t)\|_p \, dt < d_p(u,v) + \epsilon$$

Dado que $\epsilon$ es arbitrario, tenemos la primera desigualdad. Para demostrar la otra desigualdad, utilizaremos la siguiente desigualdad elemental:

$$(1 - \frac{\pi^2}{12})^{p/2} |s|^p \le |e^{is} - 1|^p, \;\; s \in [-\pi, \pi].$$

Además, notemos que podemos suponer $u = 1$ porque ambas métricas son invariantes cuando se multiplica a izquierda o a derecha. Utilizando cálculo funcional Boreliano, es un hecho conocido que un unitario $v$ posee un logaritmo en el álgebra. Más precisamente, existe $x \in \mathcal{M}_{sa}$, $\|x\| \le \pi$ tal que $e^{ix} = u$. Utilizando la desigualdad elemental de arriba, como el cálculo funcional Boreliano es positivo,

$$(1 - \frac{\pi^2}{12})^{p/2} |x|^p \le |e^{ix} - 1|^p.$$

Como la traza es un funcional positivo, ahora es evidente la desigualdad

$$(1 - \frac{\pi^2}{12})^{1/2} \|x\|_p \le \|v - 1\|_p.$$

La curva $\Gamma(t) = e^{itx}$, $t \in [0,1]$, une 1 con $v$ y tiene longitud $\|x\|_p$. Entonces,

$$d_p(1,v) \le \|x\|_p \le (1 - \frac{\pi^2}{12})^{-1/2} \|v - 1\|_p \,,$$

y nuestra afirmación queda probada.

Es una consecuencia directa que $(\mathcal{U}_{\mathcal{M}}, d_p)$ es un espacio métrico completo: sea $(u_n)_n$ una sucesión de Cauchy para la distancia $d_p$, entonces es de Cauchy en $L^p(\mathcal{M})$. Por lo tanto, converge a un elemento $u_0 \in L^p(\mathcal{M})$. Como $(u_n)_n$ está uniformemente acotada en norma de operadores, se sigue que $u_0 \in \mathcal{M}$, y claramente $u_0 \in \mathcal{U}_{\mathcal{M}}$. $\square$

Dada una curva $\gamma$ en $\mathcal{O}$, diremos que una curva $\Gamma$ en $\mathcal{U}_{\mathcal{M}}$ es una **curva levantada** de $\gamma$, o simplemente una **levantada**, si $\Gamma \cdot x = \gamma$. Notemos que la teoría general de espacios homogéneos asegura la existencia de curvas levantadas suaves a trozos en $\mathcal{U}_{\mathcal{M}}$ de curvas suaves en $\mathcal{O}$ debido que para cada $x \in \mathcal{O}$ fijo, la sumersión

$$\pi_x : \mathcal{U}_{\mathcal{M}} \to \mathcal{O}, \qquad \pi_x(u) = u \cdot x,$$

posee secciones locales suaves.

A continuación mostraremos que la definición de la longitud de una curva en $\mathcal{O}$ con la métrica cociente puede darse en términos de levantadas en $\mathcal{U}_{\mathcal{M}}$ y no depende de la levantada elegida.

**Observación 3.2.2.** *Sean $x \in \mathcal{O}$, $G$ el grupo de isotropía en $x$ y $\mathfrak{g}$ el álgebra de Lie. Tomemos una curva $\gamma \subset \mathcal{O}$ tal que $\gamma(0) = x$. Sean $\Gamma, \Lambda$ dos levantadas de $\gamma \in \mathcal{O}$, es decir $\Gamma \cdot x = \Lambda \cdot x = \gamma$. Entonces $\alpha = \Gamma^* \Lambda \in G$ y $\dot{\alpha} \in \alpha\mathfrak{g}$, o sea*

$$\dot{\Gamma^*}\Lambda + \Gamma^* \dot{\Lambda} = \Gamma^* \Lambda z$$

*para algún $z \in \mathfrak{g}$. Como $\Gamma\Gamma^* = 1$, tenemos $\dot{\Gamma^*} = -\Gamma^* \dot{\Gamma} \Gamma^*$, y si multiplicamos por $\Lambda^*\Gamma$ a derecha obtenemos*

$$-\Gamma^*\dot{\Gamma} + \Gamma^* \dot{\Lambda} \Lambda^* \Gamma = Ad_{\Gamma^*\Lambda} z = \tilde{z} \in \mathfrak{g}, \tag{3.1}$$

*donde $Ad_u : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}$, $Ad_u(x) = uxu^*$, $u \in \mathcal{U}_{\mathcal{M}}$. Como se cumple que*

$$\|\Gamma^*\dot{\Gamma} - Q(\Gamma^*\dot{\Gamma})\|_p \leq \|\Gamma^*\dot{\Gamma} + s\|_p$$

*para todo $s = -\Gamma^*\dot{\Gamma} + \Gamma^*\dot{\Lambda}\Lambda^*\Gamma - Ad_{\Gamma^*\Lambda} Q(\Lambda^*\dot{\Lambda})$ podemos obtener*

$$\|\Gamma^*\dot{\Gamma} - Q(\Gamma^*\dot{\Gamma})\|_p \leq \|\dot{\Lambda}\Lambda^* - \Lambda Q(\Lambda^*\dot{\Lambda})\Lambda^*\|_p = \|\Lambda^*\dot{\Lambda} - Q(\Lambda^*\dot{\Lambda})\|_p.$$

*Además, como la desigualdad al revés también vale, tenemos una definición natural de longitudes de curvas $\gamma \in \mathcal{O}$.*

Si $\gamma$ es una curva suave en $\mathcal{O}$ su longitud con la métrica cociente $p$ $(1 < p < \infty)$ está dada por

$$L_{\mathcal{O},p}(\gamma) = \int_0^1 \|\dot{\gamma}\|_{\gamma,p}\, dt,$$

donde

$$\|\dot{\gamma}\|_{\gamma,p} = \|\Gamma^*\dot{\Gamma} - Q(\Gamma^*\dot{\Gamma})\|_p$$

para cualquier levantada $\Gamma \in \mathcal{U}_{\mathcal{M}}$. La distancia rectificable en $\mathcal{O}$ se define entonces como

$$d_{\mathcal{O},p}(u \cdot x, v \cdot x) = \inf\{L_{\mathcal{O},p}(\gamma) : \gamma \subset \mathcal{O},\ \gamma(0) = u \cdot x,\ \gamma(1) = v \cdot x\},$$

donde las curvas $\gamma$ consideradas son suaves a trozos.

**Observación 3.2.3.** *Todos los requisitos para que $d_{\mathcal{O},p}$ sea efectivamente una distancia se satisfacen trivialmente excepto uno. El punto clave es probar que $d_{\mathcal{O},p}(u \cdot x, v \cdot x) = 0$ implica $u \cdot x = v \cdot x$. Esto no puede ser resuelto como en geometría Riemanniana o Finsleriana en dimensión finita donde está garantizada la existencia de entornos normales. En el Corolario 3.3.7 daremos una prueba de este hecho bajo una hipótesis natural.*

## 3.3. Levantadas $\epsilon$-isométricas

Comenzamos esta sección con una observación elemental que nos ayudará a obtener levantadas de curvas en $\mathcal{O}$ de longitud tan cercana como se quiera a la curva original. Recordemos que estamos suponiendo $1 < p < \infty$.

**Lema 3.3.1.** *Sean $x \in \mathcal{O}$ y $Q$ la proyección métrica de $L^p(\mathcal{M})_{ah}$ sobre $\overline{\mathfrak{g}}^p$. Para cada $\Gamma : [0,1] \longrightarrow \mathcal{U}_{\mathcal{M}}$ curva suave a trozos y $\epsilon > 0$, existe una curva poligonal $w_\epsilon : [0,1] \to \mathfrak{g}$ tal que $\| w_\epsilon(t) + Q(\Gamma^*(t)\dot{\Gamma}(t)) \|_p < \epsilon$, para todo $t \in [0,1]$.*

*Demostración.* Sea $\alpha(t) = -Q(\Gamma^*(t)\dot{\Gamma}(t))$, $t \in [0,1]$. Entonces, como $\Gamma$ es $C^1$ para la topología uniforme en $\mathcal{M}$, luego $\Gamma$ y $\dot{\Gamma}$ son continuas para la norma $p$, por lo tanto la curva $\alpha : [0,1] \to L^p(\mathcal{M})$ es continua pues $Q$ es continua. Notemos que $\alpha$ tiene su imagen contenida en $\overline{\mathfrak{g}}^p$. Entonces podemos encontrar una curva poligonal $w_\epsilon \subset \mathfrak{g}$ como buscamos, ya que $\mathfrak{g}$ es denso en $\overline{\mathfrak{g}}^p$, con el siguiente argumento: dividimos el intervalo $[0,1]$ en $n$ partes $\{I_k\}_{k=1\ldots n}$ suficientemente pequeñas para obtener

$$\|\alpha(t) - \alpha(s)\|_p < \epsilon/5 = \delta$$

si $s, t \in I_k$. La partición está dada por $0 = t_1 < t_2 < \cdots < t_n = 1$, y llamemos $\alpha_k = \alpha(t_k)$. Sea $\{w_k\}_{k=1\ldots n} \subset \mathfrak{g}$ tal que $\|\alpha_k - w_k\|_p < \delta$, y denotemos $w_\epsilon(t)$ a la poligonal en $\mathfrak{g}$ uniendo los dos puntos $w_k$ en el orden dado. Ahora, si $t \in I_k$, tenemos

$$\begin{aligned} \|w_k - w_\epsilon(t)\|_p &\leq \|w_k - w_{k+1}\|_p \\ &\leq \|w_k - \alpha_k\|_p + \|\alpha_k - \alpha_{k+1}\|_p + \|\alpha_{k+1} - w_{k+1}\|_p \\ &< \delta + \delta + \delta = 3\delta, \end{aligned}$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned} \|\alpha(t) - w_\epsilon(t)\|_p &\leq \|\alpha(t) - \alpha_k\|_p + \|\alpha_k - w_k\|_p + \|w_k - w_\epsilon(t)\|_p \\ &< \delta + \delta + \delta = 5\delta = \epsilon, \end{aligned}$$

como queríamos demostrar. □

**Observación 3.3.2.** *Las pruebas de los siguientes enunciados son conocidas. Un argumento se puede encontrar en los preliminares del artículo [DMR05].*
1. *La aplicación exponencial* $\exp_{\mathcal{U}_{\mathcal{M}}} : \mathcal{M}_{ah} \longrightarrow \mathcal{U}_{\mathcal{M}}$ *resulta suryectiva.*
2. *La exponencial es un difeomorfismo entre los conjuntos*

$$\mathcal{M}_{ah} \supset \{z \in \mathcal{M}_{ah} : \|z\| < \pi\} \to \{u \in \mathcal{U}_{\mathcal{M}} : \|1 - u\| < 2\}.$$

3. *Más aún,*

$$exp_{\mathcal{U}_{\mathcal{M}}} : \{z \in \mathcal{M}_{ah} : \|z\| \leq \pi\} \to \mathcal{U}_{\mathcal{M}},$$

*es suryectiva.*

Dados $a, b \in \mathcal{M}$, denotaremos por $R_a, L_a : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ a los operadores de multiplicación a derecha y a izquierda respectivamente, mientras que $\operatorname{ad} a = R_a - L_a : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ denotará el operador adjunto.

**Lema 3.3.3.** *Sean $a, b \in \mathcal{M}$. Entonces*

$$(exp_{\mathcal{U}_\mathcal{M}})_{*a}(b) = \int_0^1 e^{(1-t)a} b e^{ta}\, dt = e^a\, F(ad\, a)(b) = F(ad\, a)(e^a\, b),$$

*donde $F(z) = \frac{e^z - 1}{z} = \sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{(n+1)!}$. Además, la diferencial es invertible en $a$ si y sólo si $\sigma(ad(a)) \cap \{2k\pi i\} = \emptyset$ $(k \neq 0)$, y entonces*

$$(exp_{\mathcal{U}_\mathcal{M}})^{-1}_{*a}(w) = e^{-a} F(ad\, a)^{-1}(w).$$

*En particular, si $\|a\| < \pi$ entonces $(exp_{\mathcal{U}_\mathcal{M}})_{*a}$ es invertible. Si $a \in \mathcal{M}_{ah}$, la diferencial es una contracción, para todo $p \in [1, \infty]$*

$$\|(exp_{\mathcal{U}_\mathcal{M}})_{*a}(b)\|_p \leq \|b\|_p.$$

*Demostración.* Ver Lema 3.3 en [ALR09]. □

En el próximo resultado recopilamos varios hechos útiles. Algunos son sencillos de probar, mientras que otros son adaptaciones o mejoras de resultados en [ALR09].

**Teorema 3.3.4.** *Se cumplen los siguientes hechos:*

1. *Sean $k \geq 1$ y $w \in \mathcal{M}$ cumpliendo $\|w\| < \frac{\pi}{2}$. Entonces $T : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}$ dado por $T = 1 + \frac{(ad\, w)^2}{4k^2\pi^2}$ es invertible y $\|T^{-1}\| \leq (1 - \frac{\|w\|^2}{k^2\pi^2})^{-1}$.*

2. *Sea $g(r) = r \sin(r)^{-1}$ tal que $g(0) = 1$. Entonces $g : [0, \pi) \to \mathbb{R}$ es positiva y creciente, y de la expansión de Weierstrass del $\sin(z)$ se obtiene*

$$g(z) = \prod_{k \geq 1} (1 - \frac{z^2}{k^2\pi^2})^{-1},$$

   *para todo $z$ tal que $|z| < \pi$. Sea $F(z) = (e^z - 1)z^{-1}$, $w \in \mathcal{M}$ con $\|w\| < \frac{\pi}{2}$. Entonces*

$$\|F(ad\, w)^{-1}\| \leq g(\|w\|).$$

3. *Sea $x \in \mathcal{O}$ y $w \subset \mathfrak{g}$ una curva suave a trozos parametrizada en $[0, 1]$. Dada la función $G(z) = z^{-1}(1 - e^{-z})$, entonces existe una curva suave a trozos $z : [0, 1] \to \mathfrak{g}$ con $z(0) = 0$ cumpliendo*

$$G(ad\, z)\dot{z} = w.$$

   *Si $u = e^z$, entonces $u : [0, 1] \to G \subset \mathcal{U}_\mathcal{M}$ satisface la ecuación diferencial*

$$\dot{u}u^* = w.$$

*Demostración.* 1. Como $\|\operatorname{ad} w\| \leq 2\|w\| < \pi$, el operador $T$ es invertible y su inversa puede calcularse utilizando la serie de Neumann (ver [RS80, p.191]).
2. La expansión de Weierstrass de $F$ está dada por

$$F(z) = \prod_{k \geq 1} \left(1 + \frac{z^2}{4k^2\pi^2}\right)$$

siendo la convergencia a $F$ uniforme sobre compactos. Entonces $F(\operatorname{ad} w)$ es invertible pues $\|ad(w)\| < \pi$, y su inversa es

$$F(\operatorname{ad} w)^{-1} = \prod_{k \geq 1} \left(1 + \frac{(\operatorname{ad}(w))^2}{4k^2\pi^2}\right)^{-1}.$$

Por lo tanto, tenemos

$$\|F(\operatorname{ad} w)^{-1}\| \leq \prod_{k \geq 1} \left(1 - \frac{\|w\|^2}{k^2\pi^2}\right)^{-1} = g(\|w\|)$$

debido al item anterior.
3. Asumamos primero que $w$ es suave en todo el intervalo $[0,1]$. Sea $R_0 = \max_{t \in \overline{J}} \|w(t)\|$, donde $J$ es un conjunto abierto que contiene al $[0,1]$ donde $w$ es diferenciable. Tomemos $0 < R < \frac{\pi}{2}$. Entonces si $x \in \mathfrak{g} \cap B(0,R)$, el operador $G(\operatorname{ad} x)$ es invertible, su inversa es analítica y puede ser escrita en series de potencia de $\operatorname{ad} x$. Por lo tanto,

$$G(\operatorname{ad} x)^{-1} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$$

porque $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie-Banach. Más aún, como $g$ es creciente, tenemos

$$\|G(\operatorname{ad} x)^{-1}\| \leq g(\|x\|) \leq g(R).$$

Sea $f : J \times (B(0,R) \cap \mathfrak{g}) \to \mathfrak{g}$ dada por

$$f(t,x) = G(\operatorname{ad} x)^{-1} w(t).$$

Entonces $f$ es continua porque $w$ y $G^{-1}$ son continuas, más aún notemos que

$$\|f(t,x)\| \leq \|G(\operatorname{ad} x)^{-1}\| \, \|w\| \leq g(R)R_0 = L,$$

como consecuencia del item anterior. Ahora como $H(\operatorname{ad} x) = G(\operatorname{ad} x)^{-1}$ es analítica en la bola $\|x\| < \frac{\pi}{2}$, obtenemos

$$\|H(\operatorname{ad} x) - H(\operatorname{ad} y)\| \leq C(R)\|\operatorname{ad} x - \operatorname{ad} y\| \leq 2C(R)\|x - y\|,$$

donde $C(R)$ es una cota para $H'$ en $|z| \leq R$. Entonces,

$$\|f(t,x) - f(t,y)\| \leq 4C(R)R_0\|x - y\| = K\|x - y\|.$$

Luego $f$ satisface una condición de Lipschitz uniformemente con respecto a $t \in J$, por lo tanto por un teorema conocido de ecuaciones diferenciales ordinarias [La95, Proposición 1.1 Capítulo IV], podemos afirmar que existe una solución continua

$$z_0 : (-b, b) \times B(0, R/4) \to \mathfrak{g} \cap B(0, R),$$

de la ecuación integral

$$z(t) = \int_0^t f(s, z(s))\, ds, \quad z_0(0) = 0.$$

Aquí $b$ es cualquier número real tal que

$$0 < b < \frac{R}{4LK} = \frac{\sin(R)}{32C(R)R_0^2}.$$

Notemos que $z_0$ es suave en realidad. Si derivamos ambos lados y multiplicamos por $F(\operatorname{ad} z(t))$ obtenemos la ecuación enunciada. Hasta ahora, hemos probado que la ecuación

$$G(\operatorname{ad} z)\dot{z} = w,$$

posee una solución local definida en un entorno del cero. Por medio de un argumento estándar, se sigue que podemos encontrar una solución suave a trozos definida en todo el intervalo $[0, 1]$: Sean $N \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{N} < b$ y $t_k = \frac{k}{N}$. Entonces $[t_k, t_{k+1}]$ para $k = 0, 1, \cdots N$ es una partición del $[0, 1]$ tal que la ecuación integral

$$z(t) = \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(s, z(s))\, ds, \ \ z_0(0) = 0, \ \ z_k(t_k) = z_{k-1}(t_k), \quad k \geq 1,$$

tiene una solución $z_k : [t_k, t_{k+1}] \to \mathfrak{g}$. Luego la curva $z_1 \# z_2 \# \cdots \# z_N$, es decir la concatenación de las curvas, es una curva suave a trozos solución de la ecuación definida en $[0, 1]$. Si $w$ es suave a trozos en lugar de suave, podemos realizar un argumento similar en cada uno de los intervalos donde $w$ es suave, y usar la continuidad de $w$ para establecer condiciones de borde sobre $z$.

Si $u(t) = e^{z(t)}$, entonces

$$\dot{u}(t) = (exp_{\mathcal{U}_\mathcal{M}})_{*z(t)}(\dot{z}(t)) = e^{z(t)} F(\operatorname{ad} z(t))\dot{z}(t)$$

por el Lema 3.3.3. Entonces,

$$\dot{u}u^* = e^z F(\operatorname{ad} z)\dot{z}e^{-z} = G(\operatorname{ad} z)\dot{z} = w.$$

□

**Teorema 3.3.5.** *Sea $\gamma \subset \mathcal{O}$ una curva suave definida en un intervalo que contiene $[0, 1]$ tal que $\gamma(0) = x$. Entonces, para cada $\epsilon > 0$, $\gamma$ admite una levantada suave $\beta_\epsilon \subset \mathcal{U}_\mathcal{M}$ tal que $L_p(\beta_\epsilon) < L_{\mathcal{O},p}(\gamma) + \epsilon$. Llamaremos a $\beta_\epsilon$ una **levantada $\epsilon$-isométrica** de $\gamma$.*

*Demostración.* Sea $\Gamma \in \mathcal{U}_\mathcal{M}$ cualquier levantada suave a trozos de $\gamma$, definida en un intervalo que contenga al $[0, 1]$, y sea $w_\epsilon : [0, 1] \to \mathfrak{g}$ una curva como en el Lema 3.3.1. Notemos que como $w_\epsilon$ es una poligonal, luego es continua para la topología uniforme de $\mathcal{M}$. Por el inciso 3 del Teorema 3.3.4, existe una curva suave a trozos $u : [0, 1] \to G$ con $u(0) = 1$ que

satisface $\dot{u}u^* = w_\epsilon$. Ahora consideremos $\beta_\epsilon = \Gamma u$. Entonces $\beta_\epsilon$ es claramente una levantada de $\gamma$ tal que
$$\dot{\beta}_\epsilon = \dot{\Gamma}u + \Gamma\dot{u} = \Gamma(\Gamma^*\dot{\Gamma} + w_\epsilon)u.$$
Por lo tanto,
$$\begin{aligned}\|\dot{\beta}_\epsilon\|_p &= \|\Gamma^*\dot{\Gamma} + w_\epsilon\|_p \leq \|\Gamma^*\dot{\Gamma} - Q(\Gamma^*\dot{\Gamma})\|_p + \|Q(\Gamma^*\dot{\Gamma}) + w_\epsilon\|_p \\ &< \|\dot{\gamma}\|_{\gamma,p} + \epsilon.\end{aligned}$$
De aquí podemos afirmar que $L_p(\beta_\epsilon) < L_{\mathcal{O},p}(\gamma) + \epsilon$. □

Con el último teorema demostrado ahora podemos probar un resultado clave acerca de la distancia rectificable en $\mathcal{O}$: Esta distancia puede ser calculada como el ínfimo de las longitudes de curvas en $\mathcal{U}_\mathcal{M}$ uniendo las correspondientes fibras.

**Corolario 3.3.6.** *Sean $u, v \in \mathcal{U}_\mathcal{M}$ y $x \in \mathcal{O}$. Entonces*
$$d_{\mathcal{O},p}(u \cdot x, v \cdot x) = \text{ínf}\{\, L_p(\Gamma) \ : \ \Gamma \subset \mathcal{U}_\mathcal{M},\ \Gamma(0)\cdot x = u \cdot x \ \ y \ \ \Gamma(1)\cdot x = v \cdot x \,\},$$
*donde las curvas $\Gamma$ consideradas son suaves a trozos.*

*Demostración.* Alcanza con demostrar el enunciado para $u = 1$. Sean $d = d_{\mathcal{O},p}(x, v\cdot x)$ y $D = \text{ínf}\{\, L_p(\Gamma) \ : \ \Gamma \subset \mathcal{U}_\mathcal{M},\ \Gamma(0)\cdot x = x$ y $\Gamma(1)\cdot x = v\cdot x\,\}$. Sea $\Gamma \subset \mathcal{U}_\mathcal{M}$ tal que $\Gamma(0)\cdot x = x$, $\Gamma(1)\cdot x = v\cdot x$. Entonces, si $\gamma = \Gamma\cdot x \subset \mathcal{O}$, tenemos $\gamma(0) = x$, $\gamma(1) = v\cdot x$ y además
$$\|\gamma\dot{;}p\|_\gamma = \|\Gamma^*\dot{\Gamma} - Q(\Gamma^*\dot{\Gamma})\|_p \leq \|\Gamma^*\dot{\Gamma}\|_p = \|\dot{\Gamma}\|_p,$$
luego $d \leq L_{\mathcal{O},p}(\gamma) \leq L_p(\Gamma)$. De esto se sigue que $d \leq D$. Por otro lado, sea $\gamma \subset \mathcal{O}$ una curva uniendo $x$ con $v\cdot x$ tal que $L_{\mathcal{O},p}(\gamma) < d + \epsilon$. Por el teorema anterior, existe una levantada $\epsilon$-isométrica $\beta_\epsilon$ de $\gamma$. Notemos que $\beta_\epsilon(0)\cdot x = 1\cdot x = x$ y $\beta_\epsilon(1)\cdot x = \gamma(1) = v\cdot x$. Así,
$$D \leq L_p(\beta_\epsilon) < L_{\mathcal{O},p}(\gamma) + \epsilon < d + 2\epsilon,$$
lo cual prueba la restante desigualdad. □

**Corolario 3.3.7.** *Sea $x \in \mathcal{O} \cong \mathcal{U}_\mathcal{M}/G$. Entonces $d_{\mathcal{O},p}$ define una distancia en $\mathcal{O}$ si $G$ es un subgrupo cerrado de $\mathcal{U}_\mathcal{M}$ en norma $p$.*

*Demostración.* Como mencionamos en la Observación 3.2.3, sólo nos queda mostrar que $d_{\mathcal{O},p}(x, y) = 0$ implica $x = y$. Supongamos $y = v\cdot x$ para algún $v \in \mathcal{U}_\mathcal{M}$ y $d_{\mathcal{O},p}(x, y) = 0$. Entonces por el Corolario 3.3.6 para cada $\epsilon > 0$ existe una $\Gamma \subset \mathcal{U}_\mathcal{M}$ tal que $\Gamma(0) = 1$, $\Gamma(1)\cdot x = v\cdot x$, y además, según nuestra suposición, $L_p(\Gamma) < \epsilon$. Como $\Gamma(1) \in vG$, entonces $d_p(1, vG) \leq L_p(\Gamma) < \epsilon$. Como $\epsilon$ es arbitrario, tenemos que $1 \in vG$, o equivalentemente $v^* \in G$. Por lo tanto, obtenemos que $v \in G$, y así $y = x$. □

**Observación 3.3.8.** *Notemos que $G$ (isotropía en $x \in \mathcal{O}$) es un subgrupo cerrado en norma $p$ si y sólo si $G_y$ (isotropía en $y \in \mathcal{O}$) lo es para cualquier $y \in \mathcal{O}$.*

**Observación 3.3.9.** *Es interesante observar que cuando $G$ es el grupo unitario de una subálgebra de von Neumann de $\mathcal{M}$, entonces $G$ es cerrado en norma $p$ en $\mathcal{U}_\mathcal{M}$.*

## 3.4. Caracterización de la distancia rectificable

Los espacios homogéneos de la forma $H/G$, donde $H$ es un grupo topológico metrizable y $G$ un subgrupo de $H$, poseen una métrica distinguida natural. Dicha métrica consiste en la métrica cociente inducida por la distancia entre clases de equivalencias $hG$, $h \in H$. En esta sección utilizaremos el siguiente resultado (ver por ejemplo [Ta79, p.109]):

**Lema 3.4.1.** *Sea $H$ un grupo topológico metrizable y $G$ un subgrupo cerrado. Si $d$ es una distancia en $H$ que induce la topología de $H$, $H$ es completo con esta distancia y $d$ es una métrica invariante por traslación a derecha en $G$, i.e. $d(xg, yg) = d(x, y)$ para todo $x, y \in H$ y $g \in G$, entonces el espacio cociente a izquierda $H/G = \{ xG : x \in H \}$ es un espacio métrico completo con la distancia $\dot{d}$ dada por*

$$\dot{d}(xG, yG) = \inf\{ d(xh, yk) : h, k \in G \}.$$

Más aún, la distancia $\dot{d}$ metriza la topología cociente de grupos. Observamos ahora como el Lema 3.4.1 se aplica a nuestra situación. Tomamos $H = \mathcal{U}_{\mathcal{M}}$, $G$ el grupo de isotropía en $x \in \mathcal{O}$ y $\mathcal{O} \cong \mathcal{U}_{\mathcal{M}}/G$.

**Teorema 3.4.2.** *Sea $u, v \in \mathcal{U}_{\mathcal{M}}$ y*

$$\dot{d}_p(u \cdot x, v \cdot x) = \inf\{ d_p(uw_1, vw_2) : w_i \in G \}.$$

*Entonces, si $p > 1$, se cumple $\dot{d}_p = d_{\mathcal{O},p}$. En particular, si $G$ es un subgrupo cerrado de $\mathcal{U}_{\mathcal{M}}$ en la norma $p$, entonces $(\mathcal{O}, d_{\mathcal{O},p})$ es un espacio métrico completo, y la topología inducida coincide con la topología cociente $\mathcal{O} \simeq (\mathcal{U}_{\mathcal{M}}, d_p)/G$.*

*Demostración.* Primero mostraremos que $\dot{d}_p \leq d_{\mathcal{O},p}$. Por el Corolario 3.3.6, para cada $\epsilon > 0$, existe una curva $\Gamma \subseteq \mathcal{U}_{\mathcal{M}}$ que satisface $\Gamma(0) = uw_1$, $\Gamma(1) = vw_2$, $w_i \in G$ y $L_p(\Gamma) < d_{\mathcal{O},p}(u \cdot x, v \cdot x) + \epsilon$. En consecuencia,

$$\dot{d}_p(u \cdot x, v \cdot x) \leq d_p(uw_1, vw_2) \leq L_p(\Gamma) < d_{\mathcal{O},p}(u \cdot x, v \cdot x) + \epsilon.$$

Como $\epsilon$ es arbitrario, hemos probado una desigualdad. Por otro lado, dado $\epsilon > 0$, existe $w_i \in G$, $i = 1, 2$ tal que $d_p(uw_1, vw_2) < \dot{d}_p(u \cdot x, v \cdot x) + \epsilon$, y además existe $\Gamma \subset \mathcal{U}_{\mathcal{M}}$ tal que $\Gamma(0) = uw_1$, $\Gamma(1) = uw_2$, y $L_p(\Gamma) < d_p(uw_1, uw_2) + \epsilon$. Entonces,

$$d_{\mathcal{O},p}(u \cdot x, v \cdot x) \leq L_{\mathcal{O},p}(\Gamma \cdot x) \leq L_p(\Gamma) < d_p(uw_1, vw_2) + \epsilon < \dot{d}_p(u \cdot x, v \cdot x) + 2\epsilon,$$

lo que muestra que la otra desigualdad también se cumple. Por último, según vimos en la Proposición 3.2.1 el espacio métrico $(\mathcal{U}_{\mathcal{M}}, d_p)$ es completo, luego la completitud de $(\mathcal{O}, d_{\mathcal{O},p})$ se deduce del Lema 3.4.1. □

El espacio $\mathcal{O}$ es un **espacio de longitud** para $p \geq 1$, o en la terminología introducida por M. Gromov en [Gr81], $\mathcal{O}$ es un *space de longeur*. Esto significa que la distancia $d_{\mathcal{O},p}$ ($= \dot{d}_p$ si $p > 1$) entre cualquier par de puntos en $\mathcal{O}$ coincide con el ínfimo de la longitud de las curvas rectificables uniendo los puntos. La longitud rectificable de curvas $\gamma : [0, 1] \to \mathcal{O}$ se define como

$$\ell_p(\gamma) = \sup \sum_{i=0}^{k} d_{\mathcal{O},p}(\gamma(t_i), \gamma(t_{i+1})),$$

donde tomamos el supremo con respecto particiones finitas $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_k = 1$ de $[0,1]$. La distancia rectificable $d_{\ell,p}$ entre $x, u \cdot x \in \mathcal{O}$ es el ínfimo de las curvas $\gamma$ que unen estos puntos, donde la longitud de una curva está medida como expresamos más arriba. Resulta sencillo mostrar

$$d_{\ell,p} \geq d_{\mathcal{O},p}.$$

De hecho, si $\gamma$ posee como puntos finales $x, y \in \mathcal{O}$, alcanza con considerar la partición trivial $t_0 = 0, t_1 = 1$. Así $\ell_p(\gamma) \geq d_{\mathcal{O},p}(x,y)$, y tomando el ínfimo sobre todas las curvas rectificables $\gamma$ obtenemos nuestra afirmación. Es un hecho conocido que en dimensión finita ambas métricas coinciden. Como no encontramos referencias adecuadas, damos una breve prueba independiente de la dimensión.

**Proposición 3.4.3.** *Si $\gamma$ es una curva $C^1$ en $\mathcal{O}$, entonces $L_{\mathcal{O},p}(\gamma) \geq \ell_p(\gamma)$. Si $x, u\cdot x \in \mathcal{O}$, entonces $d_{\ell,p}(x, u \cdot x) = d_{\mathcal{O},p}(x, u \cdot x)$.*

*Demostración.* Sea $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_k = 1$ una partición de $[0,1]$. Entonces

$$L_{\mathcal{O},p}(\gamma) = \sum_{i=0}^{k} L_{\mathcal{O},p}(\gamma|_{[t_i,t_{i+1}]}) \geq \sum_{i=0}^{k} d_{\mathcal{O},p}(\gamma(t_i), \gamma(t_{i+1})).$$

Si tomamos una partición tal que $\ell_p(\gamma) < \sum_{i=0}^{k} d_{\mathcal{O},p}(\gamma(t_i), \gamma(t_{i+1})) + \epsilon$, nuestra primera afirmación queda demostrada. Ahora sean $\epsilon > 0$ y $\Gamma : [0,1] \to \mathcal{U}_{\mathcal{M}}$ una curva suave a trozos uniendo $x, u \cdot x$ tal que $L_p(\Gamma) \leq d_{\mathcal{O},p}(x, u \cdot x) + \epsilon$. Entonces por la afirmación anterior,

$$d_{\ell,p}(x, u \cdot x) \leq \ell_p(\Gamma \cdot x) \leq L_{\mathcal{O},p}(\Gamma \cdot x) \leq L_p(\Gamma) \leq d_{\mathcal{O},p}(x, u \cdot x) + \epsilon.$$

Así $d_{\ell,p}(x, u \cdot x) \leq d_{\mathcal{O},p}(x, u \cdot x)$, y como la otra desigualdad vale siempre, tenemos nuestra segunda afirmación probada. □

# Capítulo 4

# Curvas minimales en álgebras finitas

En este capítulo estudiaremos curvas minimales en espacios homogéneos de grupos unitarios de álgebras de von Neumann finitas. Los principales resultados se basan en la convexidad de la distancia rectificable en $\mathcal{U}_{\mathcal{M}}$ con la norma $p$ y la existencia de levantadas $\epsilon$-isométricas. Para las normas $p$, $p$ par, obtenemos dos resultados generales: uno relacionado con el problema de valores iniciales y el otro con el problema de extremos fijos. Luego, presentamos ejemplos de espacios homogéneos donde se pueden aplicar. En el caso $p = 2$, estamos en el contexto de variedades débilmente Riemannianas. Entonces la proyección métrica es lineal, y en consecuencia se pueden mejorar los resultados anteriores y dar una mayor cantidad de ejemplos.

## 4.1. Geometría del grupo unitario

En esta sección utilizaremos y completaremos algunos resultados de [AR06] acerca de la minimalidad de curvas en $\mathcal{U}_{\mathcal{M}}$, y probaremos un resultado de convexidad local.
La siguiente proposición comprende distintos resultados acerca de curvas minimales en norma $p$ en el grupo unitario de $\mathcal{M}$.

**Proposición 4.1.1.** *Sea $2 \leq p < \infty$. Se cumplen los siguientes hechos:*

1. *Sea $u \in \mathcal{U}_{\mathcal{M}}$ y $x \in \mathcal{M}_{ah}$ con $\|x\| \leq \pi$. Entonces la curva $\mu(t) = ue^{tx}$, $t \in [0,1]$ es más corta que cualquier otra curva suave en $\mathcal{U}_{\mathcal{M}}$ uniendo los mismos puntos, cuando medimos la longitud con el funcional $L_p$. Más aún, si $\|x\| < \pi$, la curva $\mu$ es única con esta propiedad entre todas las curvas $C^2$ en $\mathcal{U}_{\mathcal{M}}$.*

2. *Sean $u_0, u_1 \in \mathcal{U}_{\mathcal{M}}$. Entonces existe una geodésica minimal uniendo tales puntos. Si $\|u_0 - u_1\| < 2$, esta geodésica es única entre todas las curvas $C^2$.*

3. *El diámetro de $\mathcal{U}_{\mathcal{M}}$ es $\pi$ para todas las normas $p$.*

*Demostración.* 1. La minimalidad fue probada en [AR06, Teorema 5.4]. Probaremos ahora que si $\|x\| < \pi$, entonces $\mu(t) = ue^{tx}$, $t \in [0,1]$, es la única curva minimal entre las curvas

$C^2$. Para la demostración utilizaremos un argumento habitual usando la fórmula de la primera variación del funcional $F_p$ dado por

$$F_p(\gamma) = \int_0^1 \|\dot{\gamma}(t)\|_p^p \, dt,$$

donde $\gamma(t) \in \mathcal{U}_{\mathcal{M}}$, $t \in [0,1]$.
Sea $\gamma_s(t)$, $t \in [0,1]$, $s \in (-r, r)$ una variación $C^2$ de la curva $\gamma$, es decir

1. $\gamma_s(t) \in \mathcal{U}_{\mathcal{M}}$, para todo $s, t$.

2. La función $(s,t) \mapsto \gamma_s(t)$ es $C^2$.

3. $\gamma_0(t) = \gamma(t)$.

Utilizaremos la fórmula para

$$\frac{d}{ds} F_p(\gamma_s)|_{s=0}$$

obtenida en [AR08] en el contexto de una $C^*$-álgebra con traza. Al igual que en geometría diferencial clásica, llamaremos fórmula de la primera variación a la expresión obtenida. Sean

$$V_s = \frac{d}{dt}\gamma_s \text{ y } W_s = \frac{d}{ds}\gamma_s.$$

Indicamos con minúsculas a las siguientes traslaciones a izquierda

$$v_s = \gamma_s^* V_s \text{ y } w_s = \gamma_s^* W_s.$$

Notemos que $V_s, W_s \in (T\mathcal{U}_{\mathcal{M}})_{\gamma_s}$ mientras que $v_s, w_s \in \mathcal{M}_{ah}$. Entonces

$$\frac{(-1)^{p/2}}{p} \frac{d}{ds} F_p(\gamma_s) = \tau(v_s^{p-1} w_s)|_{t=0}^{t=1} - \int_0^1 \tau(\frac{d}{dt}[v_s^{p-1}] w_s) dt.$$

Supongamos que $\gamma(t) \in \mathcal{U}_{\mathcal{M}}$ es una curva $C^2$ minimal, y sea $\gamma_s(t)$ una variación con extremos fijos $\gamma(0)$ y $\gamma(1)$, i.e. $\gamma_s(0) = \gamma(0)$ y $\gamma_s(1) = \gamma(1)$ para todo $s$. Entonces, $\frac{d}{ds} F_p(\gamma_s)|_{s=0} = 0$, y así

$$0 = \tau(v_0^{p-1} w_0)|_{t=0}^{t=1} - \int_0^1 \tau(w_0 \frac{d}{dt}(v_0^{p-1})) dt.$$

La hipótesis de los extremos fijos implica que el primer término se anula. Entonces,

$$\int_0^1 \tau(w_0 \frac{d}{dt}(v_0^{p-1})) dt = 0$$

para cualquier variación $\gamma_s$ con extremos fijos. Llamemos $Z(t) = \frac{d}{dt}(v_0^{p-1})$ y $A(t) = w_0(t)$. Luego, tanto $A$ como $Z$ son campos continuos en $\mathcal{M}_{ah}$. La fórmula para la primera variación implica

$$\int_0^1 \tau(A(t) Z(t)) dt = 0$$

para todo campo continuo $A$ en $\mathcal{M}_{ah}$ tal que $A(0) = A(1) = 0$. Afirmamos que esta condición implica que $Z(t) = 0$ para todo $t$.

Primero notemos que la hipótesis que el campo $A$ se anule en $t = 0$ y $t = 1$ puede quitarse: Sea $f_r(t)$ una función real constantemente igual a 1 en el intervalo $[r, 1-r]$ y tal que $f(0) = f(1) = 0$, con $0 \leq f_r(t) \leq 1$ para todo $t$. Sea $B(t)$ un campo continuo en $\mathcal{M}_{ah}$ y consideremos $A_r(t) = f_r(t)B(t)$. Entonces $\int_0^1 A_r(t)Z(t)dt = 0$, y en caso de $r \to 0$, $\int_0^1 B(t)Z(t)dt = 0$. También es claro que la integral se anulará si $A$ no es antihermitiano. De hecho, vale si $A$ es hermitiano, y para $A$ general, es inmediato si descomponemos $A$ como suma de su parte hermitiana y antihermitiana.

Consideremos $A(t) = -Z(t)$, entonces

$$0 = \int_0^1 \|Z(t)\|_2^2 \, dt,$$

lo cual implica $Z(t) \equiv 0$. Así tenemos que $v_0^{p-1}$ es constante, y como $v_0$ es antihermitiano, $v_0(t) = \gamma(t)^* \frac{d}{dt}\gamma(t)$ es constante, i.e. $\gamma(t) = e^{tx}$ para algún $x \in \mathcal{M}_{ah}$.

2. Es una consecuencia directa del primer inciso y la Observación 3.3.2.

3. Todo par de unitarios $u_0, u_1$ puede ser unido por un curva de unitarios de longitud menor o igual que $\pi$. De hecho, existe $x \in \mathcal{M}_{ah}$ tal que $\|x\| \leq \pi$ y $e^x = u_0^* u_1$. Luego $\mu(t) = u_0 e^{tx}$ tiene longitud minimal igual a $\|x\|_p \leq \|x\| \leq \pi$. Entonces el diámetro es exactamente $\pi$ porque los unitarios 1 y $-1$ pueden ser unidos por $\mu(t) = e^{it\pi 1}$, cuya longitud es $\pi$. $\square$

Hemos elegido la topología uniforme en $\mathcal{U}_{\mathcal{M}}$ para derivar curvas. Otra elección posible, sería derivar a una curva de unitarios con respecto a la topología SOT, o lo que es lo mismo, con respecto a la norma 2. Esto permitiría tener un conjunto de curvas más grandes para comparar, en particular las exponenciales de la forma $\delta(t) = e^{tz}$, $t \in [0, 1]$, donde $z \in L^p(\mathcal{M})_{ah}$ es un operador eventualmente no acotado. En efecto, para tales operadores la exponencial es un unitario de $\mathcal{M}$ porque son operadores afiliados a $\mathcal{M}$, y en consecuencia, el cálculo funcional se queda en el álgebra. Tales curvas son derivables en la topología SOT por el teorema de Stone. En la Proposición 4.1.1 mostramos que si el exponente de las curvas es de norma espectral menor o igual que $\pi$ las curvas son minimales, ahora veremos que dicha condición es necesaria.

**Proposición 4.1.2.** *Sea $z \in L^p(\mathcal{M})_{sa}$ tal que $\pi < \|z\| \leq \infty$. Entonces la curva uniparamétrica del grupo unitario $\delta(t) = e^{itz}$, $t \in [0, 1]$, no es de longitud minimal uniendo sus puntos si se mide con la norma $p$.*

*Demostración.* Consideremos la función medible Borel $f : \mathbb{R} \longrightarrow [-\pi, \pi]$ dada por

$$f(t) = \begin{cases} t + 2(k+1)\pi & -2(k+3)\pi \leq t < -(2k+1)\pi, \\ t & -\pi \leq t \leq \pi, \\ t - 2(k+1)\pi & (2k+1)\pi < t \leq (2k+3)\pi, \end{cases}$$

donde $k$ varía en el conjunto de los enteros. Entonces si utilizamos el calculo funcional Boreliano de $z = \int \lambda \, de(\lambda)$ para obtener

$$< e^{if(z)}\xi, \eta >= \int e^{if(\lambda)} \, de_{\xi,\eta}(\lambda) = \int e^{i\lambda} \, de_{\xi,\eta}(\lambda) =< e^{iz}\xi, \eta >$$

Luego, tenemos $e^{if(z)} = e^{iz}$. Más aún, notemos que $f(z) \in \mathcal{M}_{sa}$ con $\|f(z)\| \leq \pi$. Ahora afirmamos que la curva $\delta_1(t) = e^{itf(z)}$ es más corta que la curva $\delta$. En la Sección 2.4 dimos la definición de valores singulares generalizados de un operador $z \in \tilde{\mathcal{M}}$. Haremos uso de los siguientes hechos (ver [FK86]):

- Como la función $t \mapsto \mu_t(z)$ es no creciente, continua a la derecha y y satisface que $\lim_{t \downarrow 0} \mu_t(z) = \|z\|$, luego existe $\epsilon > 0$ tal que $\mu_t(z) > \pi$ para todo $t \in (0, \epsilon)$.
- Es inmediato que $\mu_t(f(z)) \leq \pi$, $t > 0$, pues $\|f(z)\| \leq \pi$.
- Notemos que $|f(t)| \leq |t|$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Entonces, tenemos $|f(z)| \leq |z|$, lo cual implica $\mu_t(f(z)) \leq \mu_t(z)$.

Luego,

$$\begin{aligned} L_p(\delta_1)^p = \|f(z)\|_p^p = \int_0^1 \mu_t(f(z))^p \, dt \leq \int_0^\epsilon \mu_t(f(z))^p \, dt + \int_\epsilon^1 \mu_t(z)^p \, dt \\ < \int_0^\epsilon \mu_t(z)^p \, dt + \int_\epsilon^1 \mu_t(z)^p \, dt = \|z\|_p^p = L_p(\delta)^p, \end{aligned}$$

que prueba nuestra afirmación. □

El próximo lema elemental se usará en la prueba de la Proposición 4.1.5. Una demostración puede hallarse en [ALR09, Lema 3.4].

**Lema 4.1.3.** *Sean $C, \varepsilon > 0$, y $f : (-\varepsilon, 1 + \varepsilon) \to \mathbb{R}$ una función no constante analítica real tal que $f'(s)^2 \leq Cf''(s)$ para todo $s \in [0, 1]$. Entonces $f$ es estrictamente convexa en $(0, 1)$.*

**Observación 4.1.4.** *Sean $a, b, c \in \mathcal{M}_{ah}$ y $p$ par. Denotemos por $H_a : \mathcal{M}_{ah} \times \mathcal{M}_{ah} \to \mathbb{R}$ a la forma simétrica bilineal dada por*

$$H_a(b, c) = (-1)^{\frac{p}{2}} p \sum_{k=0}^{p-2} \tau(a^{p-2-k} b a^k c).$$

*Si $Q_a$ es la forma cuadrática asociada a $H_a$, entonces por [AR08, Lema 4.1] y la ecuación (3.1) en [MR00]):*

1. *$Q_a([b, a]) \leq 4\|a\|^2 Q_a(b)$.*
2. *$Q_a(b) = p\|ba^{\frac{p}{2}-1}\|_2^2 + \frac{p}{2} \sum_{l+m=n-2} \|a^l(ab + ba)a^m\|_2^2$.*

*En particular, $H_a$ es definida positiva.*

El siguiente resultado de convexidad será fundamental para el estudio de curvas minimales en $\mathcal{O}$. Está basado en un resultado análogo probado en [AR08], sólo que la demostración es levemente distinta y permite obtener un radio de convexidad mayor.

**Proposición 4.1.5.** *Sean $p$ un entero par positivo y $u, v, w \in \mathcal{U}_{\mathcal{M}}$ tales que*

$$\|u - v\| < \sqrt{2}, \qquad \|w - v\| < \sqrt{2} - \|u - v\|.$$

*Sea $\beta$ una curva minimal uniendo $v$ con $w$ en $\mathcal{U}_{\mathcal{M}}$. Si $u$ no pertenece a ninguna prolongación de $\beta$, entonces la función $f_p(s) = d_p(u, \beta(s))^p$, $s \in [0, 1]$, es estrictamente convexa.*

*Demostración.* Primero notemos que podemos suponer $u = 1$ porque multiplicar por unitarios resulta isométrico. Observemos que $\|v^*w - 1\| = \|v - w\| < \sqrt{2} < 2$, así es posible calcular $z = \log(v^*w) \in \mathcal{M}_{ah}$, siendo log la rama principal del logaritmo (inversa de la exponencial) según la Observación 3.3.2. Sea $\beta(s) = ve^{sz}$, que es una curva corta uniendo $v$ con $w$ en $\mathcal{U}_{\mathcal{M}}$ ya que $\|z\| < \pi$. Entonces,

$$\|1 - ve^{sz}\| \leq \|1 - v\| + \|1 - e^{sz}\| \leq \|1 - v\| + \|1 - e^{z}\| = \|1 - v\| + \|v - w\| < \sqrt{2},$$

lo cual implica que $\beta$ posee un logaritmo analítico, $w_s = \log(\beta(s)) = \log(ve^{sz})$, con $\|w_s\| < \frac{\pi}{2}$. Sea $\gamma_s(t) = e^{tw_s}$, entonces $\gamma_s$ es una curva corta uniendo 1 y $\beta(s)$, de longitud $\|w_s\|_p = d_p(1, \beta(s))$. Entonces, $f_p(s) = \|w_s\|_p^p = \tau((-w_s^2)^{\frac{p}{2}}) = (-1)^{\frac{p}{2}}\tau(w_s^p)$, por lo tanto

$$f_p'(s) = (-1)^{\frac{p}{2}} p\, \tau(w_s^{p-1}\dot{w}_s) = \frac{1}{p-1} H_{w_s}(\dot{w}_s, w_s),$$

donde $H_{w_s}$ es la forma bilineal introducida en la Observación 4.1.4. Como $e^{w_s} = ve^{sz}$, entonces $e^{-w_s}\,(exp_{\mathcal{U}_{\mathcal{M}}})_{*w_s}(\dot{w}_s) = z$ por el Lema 3.3.3, es decir,

$$z = \int_0^1 e^{-tw_s}\dot{w}_s e^{tw_s}\, dt. \tag{4.1}$$

De este modo tenemos $\tau(w_s^{p-1}\dot{w}_s) = \int_0^1 \tau(w_s^{p-1}e^{-tw_s}\dot{w}_s e^{tw_s})\, dt = \tau(zw_s^{p-1})$. Por lo tanto,

$$f_p''(s) = (-1)^{\frac{p}{2}} p \sum_{k=0}^{p-2} \tau(w_s^{p-2-k}\dot{w}_s w_s^k z) = H_{w_s}(\dot{w}_s, z),$$

y nuevamente por la ecuación (4.1) de arriba, si escribimos $\delta_s(t) = e^{-tw_s}\dot{w}_s e^{tw_s}$, entonces

$$f_p''(s) = \int_0^1 H_{w_s}(\delta_s(0), \delta_s(t))\, dt.$$

Supongamos que para este valor de $s \in [0,1]$, $R_s^2 := Q_{w_s}(\dot{w}_s) \neq 0$, donde $Q_{w_s}$ es la forma cuadrática asociada a $H_{w_s}$. Si $K_s \subset \mathcal{M}_{ah}$ es el espacio nulo de $H_{w_s}$, consideremos el cociente $\mathcal{M}_{ah}/K_s$ dotado con el producto interno $H_{w_s}(\cdot,\cdot)$. Un cálculo elemental nos muestra que $\delta_s(t)$ está en la esfera de radio $R_s$ de este pre-espacio de Hilbert, por lo tanto

$$H_{w_s}(\delta_s(0), \delta_s(t)) = R_s^2 \cos(\alpha_s(t)),$$

donde $\alpha_s(t)$ es el ángulo entre $\delta_s(0)$ y $\delta_s(t)$. Luego, si lo pensamos en la esfera,

$$\begin{aligned} R_s\alpha_s(t) &\leq L_p(\delta_s|_{[0,t]}) = \int_0^t Q_{w_s}^{\frac{1}{2}}(e^{-tw_s}[\dot{w}_s, w_s]e^{tw_s})\, dt \\ &= \int_0^t Q_{w_s}^{\frac{1}{2}}([\dot{w}_s, w_s])\, dt = t\, Q_{w_s}^{\frac{1}{2}}([\dot{w}_s, w_s]). \end{aligned}$$

Por el inciso 1. de la Observación 4.1.4,

$$R_s\alpha_s(t) \leq t\, 2\|w_s\| R_s < R_s\pi.$$

Así,

$$\cos(\alpha_s(t)) \geq \cos(2t\|w_s\|),$$

y si integramos con respecto a la variable $t$,

$$f_p''(s) \geq R_s^2 \, \frac{sen(2\|w_s\|)}{2\|w_s\|} = R_s^2 \, C > 0, \tag{4.2}$$

siendo $C = \frac{sen(2\|w_s\|)}{2\|w_s\|}$. Por otro lado, se cumple que

$$Q_{w_s}(w_s) = p(p-1)\|w_s\|_p^p \leq p(p-1)\|w_s\|^p < p(p-1)\frac{\pi^p}{2^p},$$

y así obtenemos

$$(p-1)^2 f_p'(s)^2 = H_{w_s}^2(w_s, \dot{w_s}) \leq Q_{w_s}(\dot{w_s}) Q_{w_s}(w_s) \leq \frac{p(p-1)\pi^p}{2^p C} f_p''(s), \tag{4.3}$$

siempre que $R_s \neq 0$. Observemos que la ecuación (4.3) también se cumple si $R_s = 0$, simplemente porque las dos derivadas se anulan. En efecto, por la desigualdad de Cauchy-Schwarz para $H_{w_s}$, tenemos

$$(p-1)|f_p'(s)| = |H_{w_s}(w_s, \dot{w_s})| \leq R_s Q_{w_s}^{\frac{1}{2}}(w_s) = 0.$$

Para probar que $f_p$ es estrictamente convexa utilizando el Lema 4.1.3 nos falta asegurar que $f_p$ no es constante. Si $f_p$ es constante, afirmamos que $R_s = 0$ para todo $s \in [0,1]$. De otra manera, si existe $s_0 \in [0,1]$ tal que $R_{s_0} \neq 0$, entonces por la ecuación (4.2) obtenemos $f_p''(s) > 0$ en un entorno de $s_0$. Luego, $f_p'(s)$ es estrictamente creciente en dicho entorno, contradiciendo que $f_p$ sea constante.

Cuando $f_p$ es constante notemos que $f_p(s) = f_p(0) = \|\log(v)\|_p$ para todo $s \in [0,1]$. Más aún, por el inciso 2. de la observación de arriba, $R_s = 0$ implica $w_s^{\frac{p}{2}-1} z = 0$ y un cálculo elemental usando cálculo funcional de operadores antihermitianos muestra que $w_s z = 0$. Si llamamos $y = \log(v)$, en particular tenemos que $yz = 0$. Como $w_s = \log(e^y e^{sz})$, luego obtenemos $w_s = y + sz$ por la fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff (ver [Be06]). Ahora como la norma $p$ de $\mathcal{M}_{ah}$ es estrictamente convexa, $w_s = y + sz$ no puede tener norma constante excepto que $y$ sea un múltiplo de $z$, y en tal caso, $u$ y $\beta$ estarían alineados contradiciendo la hipótesis. □

## 4.2. Curvas minimales: Caso $p$ par

Recordemos que cada espacio tangente no resulta completo con la norma inducida. Estamos en presencia de variedades de Finsler de dimensión infinita donde no hay una herramienta general para caracterizar curvas minimales. En esta sección, probaremos algunos resultados acerca de minimalidad de curvas con la métrica cociente en $\mathcal{O}$ para $p$ par bajo ciertas hipótesis sobre la proyección métrica.

Primero observemos que en el espacio tangente $(T\mathcal{O})_x$ puede definirse también una norma cociente infinito, esto es

$$\|X\|_{x,\infty} = \text{ínf}\{\|z - y\| : y \in \mathfrak{g}_x\}, \tag{4.4}$$

donde $z \in \mathcal{M}_{ah}$ es cualquier levantado de $X \in (T\mathcal{O})_x$, es decir $(\pi_x)_{*1}(z) = X$.

**Observación 4.2.1.** *La definición del funcional longitud de curvas puede ser adaptada para la métrica cociente infinito. Sea $\gamma : [0,1] \to \mathcal{U}_{\mathcal{M}}$ una curva suave a trozos, y tomemos $\Gamma : [0,1] \to \mathcal{U}_{\mathcal{M}}$ una levantada suave a trozos $\gamma$, entonces definimos*

$$\|\dot\gamma(t)\|_{\gamma(t),\infty} = \inf_{z\in\mathfrak{g}} \|\Gamma^*(t)\dot\Gamma(t) + z\|.$$

*El cálculo en (3.1) muestra que si $\Lambda$ es cualquier otra levantada de $\gamma$, entonces*

$$\inf_{z\in\mathfrak{g}} \|\Gamma^*(t)\dot\Gamma(t) + z\| \leq \|\Lambda^*(t)\dot\Lambda(t) + s\|,$$

*para todo $s \in \mathfrak{g}$. Así tenemos también una forma de medir longitudes de curvas en esta métrica cociente, es decir, podemos calcular $L_{\mathcal{O},\infty}$.*

**Observación 4.2.2.** *Para cada $x \in \mathcal{O}$, consideremos $\mathfrak{g}_x$ el álgebra de Lie-Banach del grupo de isotropía $G_x$. Como $\mathcal{O}$ es un espacio homogéneo, $\pi_x$ resulta una sumersión, i.e. existe un suplemento cerrado $\mathcal{F}_x \subset \mathcal{M}_{ah}$ tal que*

$$\mathcal{M}_{ah} = \mathfrak{g}_x \oplus \mathcal{F}_x, \quad x \in \mathcal{O}.$$

*Por otro lado, nuevamente por la estructura de espacio homogéneo de $\mathcal{O}$ es posible construir una sección suave $s_x : (T\mathcal{O})_x \to \mathcal{F}_x$, $(\pi_x)_{*1} \circ s_x = id_{(T\mathcal{O})_x}$, $s_x \circ (\pi_x)_{*1} = P_{\mathcal{F}_x}$, donde la última expresión denota la única proyección acotada en $\mathcal{M}_{ah}$ con rango $\mathcal{F}_x$ y núcleo $\mathfrak{g}_x$. Entonces notemos que*

$$\|s_x(V)\| = \|s_x((\pi_x)_{*1}(z))\| = \|P_{\mathcal{F}_x}(z)\| = \|P_{\mathcal{F}_x}(z-y)\| \leq \|P_{\mathcal{F}_x}\|\,\|z-y\|$$

*para cualquier levantado $z \in \mathcal{M}_{ah}$ de $V \in (T\mathcal{O})_x$ y cualquier $y \in \mathfrak{g}_x$. Así,*

$$\|s_x(V)\| \leq \|P_{\mathcal{F}_x}\|\|V\|_x.$$

*La norma de $P_{\mathcal{F}_x}$ no depende del punto $x \in \mathcal{O}$ porque*

$$\|P_{\mathcal{F}_{u\cdot x}}\| = \|Ad_u \circ P_{\mathcal{F}_x} \circ Ad_{u^*}\| = \|P_{\mathcal{F}_x}\|,$$

*donde $Ad_u : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}$, $Ad_u(z) = uzu^*$. Luego, hay una constante $C_{\mathcal{O}}$ que depende sólo de la estructura diferenciable tal que*

$$\|s_x(V)\| \leq C_{\mathcal{O}}\|V\|_x\,,$$

*para cualquier $x \in \mathcal{O}$ y cualquier $V \in (T\mathcal{O})_x$.*

Nuestro argumento para hallar curvas minimales consistirá en comparar la longitud de levantadas de curvas en $\mathcal{O}$ en el grupo unitario utilizando el resultado de convexidad y las levantadas $\epsilon$-isométricas.

**Definición 4.2.3.** *Sean $x \in \mathcal{O}$ y $G$ el grupo de isotropía en $x$. Se dice que $G$ es **localmente exponencial** en $\mathcal{U}_{\mathcal{M}}$ si existen $\epsilon_{\mathcal{O}}, \delta_{\mathcal{O}} > 0$ tales que si $\|u-1\| < \epsilon_{\mathcal{O}}$ y $u \in G$ entonces existe $z \in \mathfrak{g}$ cumpliendo $\|z\| < \delta_{\mathcal{O}}$ y $e^z = u$.*

*Si para cada $u \in G$ existe un $z \in \mathfrak{g}$ tal que $e^z = u$, se dice que $G$ es un **subgrupo exponencial** de $\mathcal{U}_{\mathcal{M}}$.*

**Observación 4.2.4.** *La suposición que $G$ sea un subgrupo de Lie-Banach de $\mathcal{U}_{\mathcal{M}}$ en la topología de la norma es equivalente a que $G$ sea localmente exponencial.*

En esta sección supondremos que $G$ es un subgrupo exponencial de $\mathcal{U}_{\mathcal{M}}$. Es sencillo demostrar que si esto se cumple para $x \in \mathcal{O}$, entonces vale para cualquier $u \cdot x \in \mathcal{O}$, dado que los subgrupos de isotropía $G_{u\cdot x}$ y $G = G_x$ son conjugados por un automorfismo interior. La propiedad supuesta, en particular implica que $G$ es **geodésicamente convexo**: dados $v_1, v_2 \in G$, entonces existe una curva corta de $\mathcal{U}_{\mathcal{M}}$, contenida en $G$ que une $v_1$ y $v_2$. Los resultados en esta sección pueden ser probados en subgrupos localmente exponenciales utilizando un argumento local estándar, pero preferimos asumir que $G$ sea exponencial para una mayor claridad en la exposición.

Ahora supongamos que $x$ e $y$ se unen por una curva uniparamétrica $\gamma(t) = e^{tz} \cdot x$ en $\mathcal{O}$, siendo $z \in \mathcal{M}_{ah}$ un levantado minimal, o sea $Q(z) = 0$. A continuación establecemos un resultado parcial acerca de la minimalidad de $\gamma$ con la métrica cociente $p$ en $\mathcal{O}$.

Una de las hipótesis es que la proyección métrica $Q$ envíe operadores acotados en operadores acotados. Más aún, supondremos que $Q$ es uniformemente acotada. En la siguiente sección veremos ejemplos de espacios homogéneos $\mathcal{O}$ donde esto ocurra. Por último, mencionamos que en el Teorema 3.3.5 hemos demostrado que podemos hallar levantadas $\epsilon$-isométricas de curvas en $\mathcal{O}$ para $p > 1$. En el caso que $Q$ sea uniformemente acotada, el resultado se puede refinar para obtener levantadas isométricas.

**Teorema 4.2.5.** *Sean $p$ un número par positivo y $x \in \mathcal{O}$. Sea $K_{\mathcal{O},p}$ una constante tal que $\|Q(y)\| \leq K_{\mathcal{O},p}\|y\|$ para todo $y \in \mathcal{M}_{ah}$. Si $z \in \mathcal{M}_{ah}$, $\|z\| < \frac{\pi}{3}$ y $Q(z) = 0$, entonces la curva*

$$\delta(t) = e^{tz} \cdot x, \ t \in [0,1],$$

*posee longitud más corta que cualquier otra curva suave $\gamma \subset \mathcal{O}$ uniendo $x$ con $e^z \cdot x$ siempre que $L_{\mathcal{O},\infty}(\gamma) < \varepsilon$, donde*

$$\varepsilon = \varepsilon(\mathcal{O}, p) = \frac{\sqrt{2}-1}{C_{\mathcal{O}}(1 + K_{\mathcal{O},p})}$$

*y $C_{\mathcal{O}}$ es una constante dada por la estructura diferenciable.*

*Más aún, la curva $\delta$ es única en el sentido que si $\gamma \subset \mathcal{O}$ es otra curva uniendo $x$ con $e^z \cdot x$ de longitud $\|z\|_p$ tal que $L_{\mathcal{O},\infty}(\gamma) < \varepsilon$, entonces $\gamma(t) = e^{tz} \cdot x$.*

*Demostración.* Sea $\gamma$ una curva suave en $\mathcal{O}$ tal que $\gamma(0) = x$ y $\gamma(1) = e^z \cdot x$. Supongamos que $L_{\mathcal{O},\infty}(\gamma) < \varepsilon$. Entonces como $\|z\| < \frac{\pi}{3}$ tenemos

$$\|e^z - 1\| < 1 < \sqrt{2}.$$

Por otro lado, si $\Gamma$ es una levantada suave de $\gamma$ cumpliendo $\Gamma(0) = 1$, utilizando la hipótesis que $Q$ es uniformemente acotada podemos considerar la ecuación diferencial en $\mathcal{M}$ dada por

$$G(\operatorname{ad} x)\dot{x} = -Q(\Gamma^*\dot{\Gamma})$$

al igual que en el Teorema 3.3.4. La ecuación posee una única solución $x(t) \in \mathfrak{g}$ tal que $x(0) = 0$, y si $u = e^x$, entonces $u : [0,1] \to G \subset \mathcal{U}_{\mathcal{M}}$ satisface la ecuación diferencial $\dot{u}u^* = -Q(\Gamma^*\dot{\Gamma})$. Así, en este caso

$$\|\dot{u}\| \leq K_{\mathcal{O},p}\|\dot{\Gamma}\|.$$

Por lo tanto, si $\beta = \Gamma u$, luego $\beta$ es una levantada isométrica de $\gamma$ y además

$$\|\beta(1) - 1\| \leq \|\Gamma(1) - 1\| + \|u(1) - 1\| \leq \int_0^1 \|\Gamma^* \dot{\Gamma}\| + \int_0^1 \|\dot{u}\| \leq (1 + K_{\mathcal{O},p}) \int_0^1 \|\Gamma^* \dot{\Gamma}\|.$$

Así, si $C_{\mathcal{O}}$ es la constante tal que $\|s_y(V)\| \leq C_{\mathcal{O}} \|V\|_y$ para todo $y \in \mathcal{O}$ como en la Observación 4.2.2, entonces

$$\|\beta(1) - 1\| \leq C_{\mathcal{O}}(1 + K_{\mathcal{O},p}) \int_0^1 \|\dot{\gamma}\|_\gamma = C_{\mathcal{O}}(1 + K_{\mathcal{O},p}) L_{\mathcal{O},\infty}(\gamma) < \sqrt{2} - 1 < \sqrt{2} - \|e^z - 1\|.$$

Sea $w \in \mathcal{M}_{ah}$ cumpliendo $\|w\| \leq \pi$ y $e^w = \beta(1)$. Entonces podemos aplicar la Proposición 4.1.5. Notemos que la curva $\mu(t) = e^{tz}$ es una levantada isométrica de $\delta$. Sea $\nu(t) = e^z e^{ty}$ la curva geodésica $\mathcal{U}_{\mathcal{M}}$ contenida en $e^z G$ (i.e. $y \in \mathfrak{g}$) que conecta $e^z$ con $e^w$, la cual existe puesto que $G$ es un subgrupo exponencial. Entonces la función $f(s) = d_p^p(1, \nu(s))$ es estrictamente convexa. Notemos que $f'(0) = (-1)^{p/2} \tau(z^{p-1} y)$, y esta expresión se anula debido la Proposición 3.1.6, ya que $z$ es un levantamiento minimal. Entonces, la función $f$ tiene un mínimo en $s = 0$,

$$L_p(\mu)^p = d_p^p(1, \nu(0)) = f(0) \leq f(1) = d_p^p(1, \nu(1)) = \|w\|_p^p \leq L_p(\beta)^p.$$

Por lo tanto, obtenemos

$$L_{\mathcal{O},p}(\delta) = \|z\|_p \leq L_p(\beta) = L_{\mathcal{O},p}(\gamma).$$

Ahora si $L_{\mathcal{O},p}(\gamma) = \|z\|_p$, es decir si $\gamma$ también es corta, entonces

$$f(0) = \|z\|_p \leq f(1) = \|w\|_p \leq L_p(\beta) = L_{\mathcal{O},p}(\gamma) = \|z\|_p = f(0),$$

luego $f(1) = f(0)$ implica $z = w$ porque $f$ es estrictamente convexa. En particular, tenemos que $\beta(1) = e^z$ y $L_p(\beta) = L_p(\mu) = \|z\|_p$. Como $\|z\| < \pi/2 < \pi$, la curva $\mu$ es la única geodésica uniendo 1 con $e^z$ en $\mathcal{U}_{\mathcal{M}}$, y así debemos tener $\beta = \mu$ por la Proposición 4.1.1, o en otras palabras, $\gamma = \delta$. $\square$

**Observación 4.2.6.** *Mostremos un ejemplo de una proyección métrica que no es uniformemente acotada, o más aún, no preserva operadores acotados. Las funciones a continuación son todas a valores reales. Sea $f \in L^2([0,1])$ tal que $\|f\|_2 = 1$ y $f \notin L^\infty([0,1])$. Consideremos la siguiente álgebra de Lie conmutativa:*

$$\mathfrak{g} := \{\, h \in L^\infty([0,1]) \,:\, \langle h, f \rangle = 0 \,\} =< f >^\perp \cap L^\infty([0,1]).$$

*Entonces la proyección métrica en norma 2 está dada por*

$$Q : L^2([0,1]) \longrightarrow \overline{\mathfrak{g}}^2, \quad Q(h) = h - \langle h, f \rangle\, f.$$

*Claramente, por ser $f$ no acotada, todas las funciones acotadas $h$ son mapeadas a funciones $Q(h)$ no acotadas.*

**Observación 4.2.7.** *Fijemos $x \in \mathcal{O}$ y sea $\mathcal{F} = \mathcal{F}_x$ el suplemento de $\mathfrak{g}$ definido en la Observación 4.2.2. Si suponemos que $Q$ preserva elementos acotados de $\mathcal{M}$, i.e. $Q(z) \in \mathcal{M}$ si $z \in \mathcal{M}$, es interesante observar que la función*

$$\varphi = (1 - Q_{\mathfrak{g}})|_{\mathcal{F}} : \mathcal{F} \longrightarrow \mathfrak{g}^{\perp_p}$$

*resulta una biyección. De hecho, $Q(\varphi(f)) = Q \circ (1 - Q)(f) = 0$ para cualquier $f \in \mathcal{F}$, mostrando que $\varphi$ tiene imagen contenida en $\mathfrak{g}^{\perp_p}$. Por otro lado, $\varphi(f_1) = \varphi(f_2)$ implica $f_1 - f_2 = Q(f_1) - Q(f_2) \in \mathfrak{g}_x$, y así $f_1 = f_2$ si $f_i \in \mathcal{F}$, lo que nos muestra que $\varphi$ es inyectiva. Por otro lado, si $z \in \mathfrak{g}^{\perp_p}$, $z = z_g + z_f$ con $z_g \in \mathfrak{g}$ y $z_f \in \mathcal{F}$, tenemos $0 = Q(z) = z_g + Q(z_f)$. Si tomamos $f = z_f \in \mathcal{F}$, entonces obtenemos $\varphi(f) = z_f - Q(z_f) = z_f + z_g = z$, lo que prueba que $\varphi$ es suryectiva. La inversa está dada por la proyección lineal sobre $\mathcal{F}$, es decir*

$$\varphi^{-1} = P_{\mathcal{F}}|_{\mathfrak{g}^{\perp_p}} : \mathfrak{g}^{\perp_p} \longrightarrow \mathcal{F}.$$

*Notemos que mientras $\varphi$ es continua para la norma $p$, $\varphi^{-1}$ es continua para la norma uniforme, hecho que remarca la diferencia entre la estructura suave y la estructura métrica.*

*Es interesante mencionar que si $Q$ es continua para la topología uniforme de $\mathcal{M}$, entonces $\varphi$ resulta un homeomorfismo. Más aún, debe ser uniformemente acotada, porque si no existiría una sucesión $(x_n)_n$ de elementos de $\mathcal{M}$ tales que $\|x_n\| = 1$ y $\|Q(x_n)\| \geq n$. Esto contradice que $Q(0) = 0$, ya que*

$$\|Q(\frac{x_n}{n})\| \geq 1,$$

*y la suposición sobre la continuidad de $Q$ implica $Q(\frac{x_n}{n}) \to 0$ en $\mathcal{M}$.*

**Observación 4.2.8.** *Si calculamos la diferencial en $0 \in \mathcal{M}_{ah}$ de la aplicación exponencial en $x$, o sea*

$$\pi_x \circ \exp_{\mathcal{U}_\mathcal{M}} : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{O}, \quad (\pi_x \circ \exp)(z) = e^z \cdot x$$

*obtenemos*

$$(\pi_x \circ \exp_{\mathcal{U}_\mathcal{M}})_{*0} : \mathcal{F} \longrightarrow (T\mathcal{O})_x\,, \quad (\pi_x \circ \exp_{\mathcal{U}_\mathcal{M}})_{*0}(z) = (\pi_x)_{*1}(z),$$

*que es un isomorfismo. Luego por el teorema de la función inversa existe $R > 0$ tal que en la bola $B_R(0)$ vale que*

$$\pi_x \circ \exp_{\mathcal{U}_\mathcal{M}} : B_R(0) \longrightarrow (\pi_x \circ \exp)(B_R(0))$$

*es un difeomorfismo.*

*Supongamos que $Q$ sea uniformemente acotada, es decir tenemos $\|Q(z)\| \leq K_{\mathcal{O},p}\|z\|$ para todo $z \in \mathcal{M}_{ah}$.Consideremos el conjunto $V_\perp^R := \varphi(B_R(0))$, que es un abierto en $\mathfrak{g}^{\perp_p}$ con la topología relativa uniforme, puesto que $\varphi^{-1} = P_{\mathcal{F}}$ es continua. Entonces, si $z \in V_\perp^R$, tenemos $z = \varphi(y)$ para algún $y \in B_R(0)$, por lo tanto*

$$\|z\| = \|y - Q(y)\| \leq (1 + K_{\mathcal{O},p})\|y\| < (1 + K_{\mathcal{O},p})R.$$

*Llamemos*

$$U_\mathcal{O}^R := (\pi_x \circ \exp_{\mathcal{U}_\mathcal{M}})(V_\perp^R) = \{e^{w - Q(w)} \cdot x : w \in \mathcal{F},\ \|w\| < R\}.$$

*Notemos que no está claro si $U_\mathcal{O}^R$ es un entorno abierto de $x \in \mathcal{O}$, aún cuando supongamos $Q$ es continua en la topología uniforme.*

Ahora podemos enunciar nuestro resultado principal acerca de curvas minimales uniendo dos puntos en $\mathcal{O}$. Sean $p$ un número par positivo, $x \in \mathcal{O}$ y supongamos que existe una constante $K_{\mathcal{O},p}$ tal que $\|Q(z)\| \leq K_{\mathcal{O},p}\|z\|$ para cualquier $z \in \mathcal{M}_{ah}$. Sea

$$r = \min\{R, \frac{\varepsilon}{2(1+K_{\mathcal{O},p})}, \frac{\pi}{3}\}$$

donde $R$ está dado por la observación anterior, y $\varepsilon = \varepsilon(\mathcal{O}, p)$ como en el Teorema 4.2.5. Sean $V_\perp^r$, $U_\mathcal{O}^r \subset \mathcal{O}$ los conjuntos definidos en la observación anterior.

**Teorema 4.2.9.** *Sean $p$ un número par positivo y $x \in \mathcal{O}$. Sea $K_{\mathcal{O},p}$ una constante tal que $\|Q(z)\| \leq K_{\mathcal{O},p}\|z\|$ para todo $z \in \mathcal{M}_{ah}$. Para cada $x_1 \in U_\mathcal{O}^r$ existe $z \in \mathcal{M}_{ah}$ tal que $e^z \cdot x = x_1$, $Q(z) = 0$ y la curva*

$$\delta(t) = e^{tz} \cdot x, \; t \in [0, 1],$$

*es de longitud más corta en la métrica cociente $p$ que cualquier otra curva suave a trozos $\gamma$ uniendo $x$ con $x_1$ contenida en $U_\mathcal{O}^r$.*

*Más aún, la curva $\delta$ es única en el sentido que si $\gamma \subset U_\mathcal{O}^r$ es alguna otra curva suave uniendo $x$ a $x_1$ de longitud $\|z\|_p$ entonces $\gamma(t) = e^{tz} \cdot x$.*

*Demostración.* La existencia de tal operador $z$ está garantizada por la Observación 4.2.8. Sea $\gamma \subset U_\mathcal{O}^r$ una curva suave a trozos, podemos suponer que $\gamma$ está definida en el intervalo $[0, 1]$. Consideremos la partición $\{[t_i, t_{i+1}]\}$ de $[0, 1]$ en $N$ partes iguales tales que $L_{\mathcal{O},\infty}(\gamma|_{[t_i,t_{i+1}]}) < r$. Por el Teorema 4.2.5, $\gamma|_{[t_0,t_1]}$ es más larga que la curva

$$\delta_1(t) = e^{tz_1} \cdot x,$$

donde $z_1 \in V_\perp^r$ es tal que $e^{z_1} \cdot x = \gamma(t_1)$. Además, por la Observación 4.2.8 tenemos que $\|z_1\| < (1 + K_{\mathcal{O},p})r$. Ahora, si recordamos que $\alpha\#\beta$ denota la curva $\alpha$ seguida de $\beta$, entonces

$$L_{\mathcal{O},\infty}(\delta_1\#\gamma|_{[t_1,t_2]}) = L_{\mathcal{O},\infty}(\delta_1) + L_{\mathcal{O},\infty}(\gamma|_{[t_1,t_2]}) < \|z_1\| + r < (1 + K_{\mathcal{O},p})2r < \varepsilon.$$

Sea $z_2 \in V_\perp^r$ tal que $e^{z_2} \cdot x = \gamma(t_2)$. Entonces por el Teorema 4.2.5, la curva $\delta_2(t) = e^{tz_2} \cdot x$ es más corta que $\delta_1\#\gamma|_{[t_1,t_2]}$, así $\delta_1\#\gamma|_{[t_2,1]}$ es más corta que $\gamma$. Iterando podemos deducir $\delta_N(t) = e^{tz_N} \cdot x$ une $x$ con $y$ dentro de $U_\mathcal{O}^r$ y es más corta que $\gamma$. Como $\|z_N\| < r$, debe suceder que $z_N = z$.

La unicidad se obtiene observando que si en cada paso la longitud de $\gamma$ es igual a $\|z\|_p$, esta restricción tiene longitud $\|z_i\|_p$ , y por el teorema anterior debe coincidir con $\delta_i$. □

## 4.3. Ejemplos de proyecciones métricas uniformemente acotadas

En esta sección damos ejemplos de espacios homogéneos donde se aplican los Teoremas 4.2.5 y 4.2.9. El paso fundamental es demostrar que la proyección métrica $Q$ es uniformemente acotada. Hasta ahora no sabemos si esto es un hecho general, ni siquiera en el caso en que $Q$ proyecte sobre los elementos antihermitianos de una subálgebra de von Neumann. En consecuencia, presentamos pruebas ad-hoc para cada ejemplo.

### 4.3.1. Álgebras de Lie de dimensión finita

El ejemplo más inmediato resulta de considerar aquellos casos donde el álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ es un espacio de dimensión finita. Entonces la completación en norma $p$ de $\mathfrak{g}$ es igual a $\mathfrak{g}$. Así se vuelve trivial que la proyección $Q : L^p(\mathcal{M})_{ah} \longrightarrow \overline{\mathfrak{g}}^p = \mathfrak{g}$ preserva elementos acotados.

**Lema 4.3.1.** *Sea $1 < p < \infty$ y $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie de dimensión finita. Entonces la proyección $Q$ es continua. En particular, es uniformemente acotada.*

*Demostración.* Como $\mathfrak{g}$ es un espacio vectorial real de dimensión finita, todas las normas son equivalentes. Entonces existe una constante $c_p > 0$ tal que $c_p \|z\| \leq \|z\|_p \leq \|z\|$, para todo $z \in \mathfrak{g}$. Ahora, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta(x, \epsilon, p)$ tal que $\|x - y\|_p < \delta$ implica $\|Q(x) - Q(y)\|_p < \epsilon$ debido a la continuidad de $Q$ en norma $p$. Por lo tanto, si $\|x - y\| < \delta$, entonces $\|x - y\|_p < \delta$ y

$$\|Q(x) - Q(y)\| \leq c_p^{-1} \|Q(x) - Q(y)\|_p < c_p^{-1} \varepsilon.$$

Luego, el argumento dado en la Observación 4.2.7 muestra que $Q$ es uniformemente acotada. □

A continuación describimos un ejemplo donde esto sucede. Sea $v_0 \in \mathcal{M}$ una isometría parcial de corango finito. Consideremos el conjunto

$$\mathcal{I}_{v_0} = \{ v \in \mathcal{M} : v_0^* v_0 = v^* v \},$$

de isometrías parciales en $\mathcal{M}$ con proyección inicial $p = v_0^* v_0$. Hay una acción transitiva de $\mathcal{U}_{\mathcal{M}}$ sobre $\mathcal{I}_{v_0}$ dada por $u \cdot v = uv$, $u \in \mathcal{U}_{\mathcal{M}}$, $v \in \mathcal{I}_{v_0}$. El conjunto $\mathcal{I}_{v_0}$ es una subvariedad $C^\infty$ de $\mathcal{M}$ en la topología de la norma y un espacio homogéneo de $\mathcal{U}_{\mathcal{M}}$. El grupo de isotropía de $v \in \mathcal{I}_{v_0}$ con la acción dada es

$$\{ u \in \mathcal{U}_{\mathcal{M}} : uv = v \}.$$

Luego, el álgebra de Lie es

$$\mathfrak{g}_v = \{ x \in \mathcal{M}_{ah} : xv = 0 \}.$$

Notemos que $xv = 0$ equivale a $xvv^* = 0$. Entonces, si miramos los elementos de $\mathfrak{g}_v$ como matrices de $2 \times 2$ en términos de la proyección $vv^*$, tienen la forma

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix},$$

donde $x$ es un operador de rango finito, porque actúa en el complemento ortogonal del rango de $v$. Este ejemplo está estudiado en detalle en [An08] sin la hipótesis sobre el corango de $v$, y se prueba un resultado de minimalidad de curvas con la norma 2. Por último, como los unitarios en el grupo de isotropía pueden ser descriptos como

$$u = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix},$$

siendo $d$ unitario, el grupo resulta exponencial. Entonces los Teoremas 4.2.5 y 4.2.9 se pueden aplicar, y las curvas

$$\delta(t) = e^{tz} v$$

con exponente $z$ minimal son cortas minimales.

### 4.3.2. Subálgebras del centro

En este ejemplo consideraremos una subálgebra $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{Z}(\mathcal{M})$, donde $\mathcal{Z}(\mathcal{M})$ es el centro de $\mathcal{M}$. Para probar que $Q$ preserva elementos acotados necesitaremos el siguiente lema.

**Lema 4.3.2.** *Sea $p \geq 2$ un entero par. Sean $x, y \in L^p(\mathcal{M})$ cumpliendo $x \geq 0$, $y = y^*$ y $xy = yx$. Entonces*

$$\|x - y^+\|_p \leq \|x - y\|_p \,,$$

*donde $y = y^+ - y^-$ es la descomposición de Jordan.*

*Demostración.* Denotemos por $e$ a la proyección espectral de $y$ correspondiente al intervalo $[0, \infty]$. Primero notemos el siguiente hecho,

$$(x - y^+)^p(1-e) = \sum_{k=0}^{p} \begin{pmatrix} p \\ k \end{pmatrix} x^k(-y^+)^{p-k}(1-e) = x^p(1-e).$$

Análogamente podemos probar $(x-y)^p e = (x-y^+)^p e$ y $(x-y)^p(1-e) = (x+y^-)^p(1-e)$. Entonces tenemos

$$\begin{aligned} \|x - y^+\|_p^p &= \tau((x-y^+)^p e) + \tau((x-y^+)^p(1-e)) \\ &= \tau((x-y^+)^p e) + \tau(x^p(1-e)) \\ &\leq \tau((x-y^+)^p e) + \tau((x+y^-)^p(1-e)) \qquad (4.5) \\ &= \tau((x-y^+)^p e) + \tau((x-y)^p(1-e)) = \|x-y\|_p^p \,, \end{aligned}$$

donde en la desigualdad (4.5) utilizamos que la función $t \mapsto t^p$ es monótona de operadores cuando los operadores en cuestión conmutan. $\square$

**Observación 4.3.3.** *La desigualdad anterior no es cierta para $p > 2$ si quitamos la hipótesis que $x$ e $y$ conmuten. Por ejemplo, si $p = 4$, consideremos las siguientes matrices*

$$x = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} 100 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

*Los autovalores de $x - y^+$ son $\lambda_1 = 3{,}00990002$ y $\lambda_2 = -98{,}00990002$. Así, tenemos $\|x - y^+\|_4^4 = 92274175$. Por otro lado, $x - y$ posee como autovalores $\mu_1 = 4{,}009802979$ y $\mu_2 = -98{,}00980298$. Entonces, tenemos $\|x - y\|_4^4 = 92273986$.*

Hasta ahora hemos utilizado la proyección métrica $Q$ sobre la parte antihermitiana de $L^p(\mathcal{M})$. Si seguimos llamando $Q : L^p(\mathcal{M}) \longrightarrow L^p(\mathcal{N})$ a la proyección métrica sobre todo los espacios $L^p$ no conmutativos, resulta que extiende a nuestra anterior proyección métrica porque $Q(x^*) = Q(x)^*$. Aplicando el lema anterior a $x \in \mathcal{M}$ positivo y $Q(x) \in L^p(\mathcal{N})_{sa}$ obtenemos

$$\|x - Q(x)^+\|_p \leq \|x - Q(x)\|_p \,.$$

Por lo tanto, por la unicidad de $Q(x)$ se sigue que $Q(x) = Q(x)^+$. En particular, obtenemos que la proyección $Q$ envía operadores positivos de $L^p(\mathcal{M})$ en operadores positivos de $L^p(\mathcal{N})$.

**Corolario 4.3.4.** *Si $\mathcal{N} \subset \mathcal{Z}(\mathcal{M})$, entonces para $p$ par la proyección $Q$ envía operadores acotados en operadores acotados. Más aún, $Q$ resulta uniformemente acotada:*

$$\|Q(z)\| \leq 3\|z\| \quad \textit{para todo } z \in \mathcal{M}_{ah}.$$

*Demostración.* Sea $x \in \mathcal{M}$ un operador positivo. Notemos que $\|x\| - Q(x) = Q(\|x\| - x) \geq 0$, entonces $0 \leq Q(x) \leq \|x\|$, es decir, $Q(x)$ es acotado. Sea $x \in \mathcal{M}_{sa}$, entonces existe un número real $c > 0$ tal que $x + c$ es positivo. Como $Q(x) + c = Q(x + c)$ es acotado, tenemos que $Q(x)$ es acotado, y además si $x \in \mathcal{M}_{sa}$ entonces

$$\begin{aligned} \|Q(x)\| &= \|Q(x + \|x\| - \|x\|)\| = \|Q(x + \|x\|) - \|x\|\| \leq \|Q(x + \|x\|)\| + \|x\| \\ &\leq \|x + \|x\|\| + \|x\| \leq 3\|x\|. \end{aligned}$$

Reemplazando $x$ por $ix$ obtenemos el resultado para $z \in \mathcal{M}_{ah}$. □

Por lo tanto, los teoremas de minimalidad de curvas se aplican al espacio homogéneo $\mathcal{O} = \mathcal{U}_{\mathcal{M}}/\mathcal{U}_{\mathcal{N}}$, donde $\mathcal{N} \subset \mathcal{Z}(\mathcal{M})$. Terminamos este ejemplo con dos observaciones.

**Observación 4.3.5.** *En el caso que el álgebra de Lie consista en los operadores antihermitianos de una subálgebra de von Neumann de $\mathcal{M}$ tenemos la cota $C_{\mathcal{O}} \leq 2$. Esto se debe a que $P_{\mathcal{F}}$ coincide con $I - E$, siendo $E$ la única esperanza condicional normal sobre $\mathcal{N}$ que preserva la traza.*

**Observación 4.3.6.** *Sea $U_{\perp}^{r} \subset \mathcal{O}$ como en el Teorema 4.2.9. Si $\mathcal{O}$ es el espacio homogéneo obtenido como $\mathcal{U}_{\mathcal{M}}/\mathcal{U}_{\mathcal{N}}$, y $\mathcal{N} \subset \mathcal{Z}(\mathcal{M})$, entonces $U_{\mathcal{O}}^{r}$ es un entorno abierto de $x$ en $\mathcal{O}$. De hecho,*

$$U_{\mathcal{O}}^{r} = \{e^{w - Q(w)} \cdot x : w \in \mathcal{F},\ \|w\| < r\} = \{e^{w} \cdot x : w \in \mathcal{F},\ \|w\| < r\},$$

*y el último conjunto es claramente abierto en $\mathcal{O}$ por nuestra elección de $r$.*

### 4.3.3. Álgebra diagonal en $\mathcal{M} \otimes M_2$

Denotemos por $M_2$ al álgebra de matrices de $2 \times 2$. Definimos una traza finita $\hat{\tau}$ sobre $\mathcal{M} \otimes M_2$ por

$$\hat{\tau}(\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}) = \frac{1}{2}\tau(x_{11} + x_{22}), \qquad \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} \in \mathcal{M} \otimes M_2.$$

Es sencillo ver que $L^p(\mathcal{M} \otimes M_2, \hat{\tau}) = L^p(\mathcal{M}) \otimes M_2$.

Tomamos la subálgebra $\mathcal{N}$ de matrices de operadores diagonales, o sea

$$\mathcal{N} = \{ \begin{pmatrix} x_{11} & 0 \\ 0 & x_{22} \end{pmatrix} : x_{11},\, x_{22} \in \mathcal{M} \}.$$

En este ejemplo podemos calcular explícitamente la proyección métrica $Q$. Esto es una consecuencia de la siguiente desigualdad.

**Lema 4.3.7.** *Sea $p \geq 2$ un número entero par y $b \in \mathcal{M}$. Entonces,*

$$\left\| \begin{pmatrix} 0 & b \\ b^* & 0 \end{pmatrix} \right\|_p \leq \left\| \begin{pmatrix} a & b \\ b^* & d \end{pmatrix} \right\|_p,$$

*para todo $a, d \in \mathcal{M}_{ah}$.*

*Demostración.* Sea $p = 2k$, $k \geq 1$. Por la Proposición 3.1.6, la desigualdad enunciada es equivalente a la condición de ortogonalidad

$$\hat{\tau}(\begin{pmatrix} 0 & b \\ b^* & 0 \end{pmatrix}^{2k-1} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}) = 0,$$

para todo $a, d \in \mathcal{M}_{ah}$. Notemos que es fácil calcular las potencias de una matriz co-diagonal. Para $k \geq 1$, tenemos

$$\begin{pmatrix} 0 & b \\ b^* & 0 \end{pmatrix}^{2k} = \begin{pmatrix} (bb^*)^k & 0 \\ 0 & (b^*b)^k \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & b \\ b^* & 0 \end{pmatrix}^{2k+1} = \begin{pmatrix} 0 & (bb^*)^k b \\ (b^*b)^k b^* & 0 \end{pmatrix}.$$

Entonces, obtenemos

$$\hat{\tau}(\begin{pmatrix} 0 & b \\ b^* & 0 \end{pmatrix}^{2k-1} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}) = \tau(\begin{pmatrix} 0 & (bb^*)^{2(k-1)} b \\ (b^*b)^{2(k-1)} b^* & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}) = 0.$$

Por lo tanto, nuestro lema queda probado. □

Ahora es inmediato probar que $Q : (L^p(\mathcal{M}) \otimes M_2)_{ah} \longrightarrow L^p(\mathcal{N})_{ah}$ está dada por

$$Q(\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} x_{11} & 0 \\ 0 & x_{22} \end{pmatrix}.$$

En particular, $Q$ preserva elementos acotados y es uniformemente acotada. Más aún, es continua con la topología uniforme de $\mathcal{M}$.

Como un ejemplo concreto, podemos considerar la proyección en $\mathcal{M} \otimes M_2$ dada por $e = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Denotemos $\mathcal{O}_e$ a su órbita unitaria, es decir

$$\mathcal{O}_e = \{ ueu^* \ : u \in \mathcal{U}_{\mathcal{M} \otimes M_2} \}.$$

Este ejemplo fue estudiado en detalle en [AR06]. Allí se prueba que $\mathcal{O}_e$ es un espacio homogéneo de $\mathcal{U}_{\mathcal{M} \otimes M_2}$, el grupo unitario de $\mathcal{M} \otimes M_2$. Además, se muestra que el problema de valores iniciales puede ser resuelto y que todo par de puntos puede unirse con una curva minimal. A pesar que nuestros resultados de minimalidad de curvas sean más restrictivos en este ejemplo particular, mostraremos brevemente como pueden aplicarse los resultados obtenidos.

El grupo de isotropía en $e$ de la acción natural de $\mathcal{U}_{\mathcal{M} \otimes M_2}$ está dado por

$$G_e = \{u \in \mathcal{U}_{\mathcal{M} \otimes M_2} \ : \ ue = eu \}$$

Su álgebra de Lie es

$$\mathfrak{g}_e = \{x \in (\mathcal{M} \otimes M_2)_{ah} \ : \ xe = ex \} = \{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \ : \ a, d \in \mathcal{M}_{ah} \}.$$

Entonces los resultados anteriores acerca de la proyección métrica $Q$ son válidos aquí, y por lo tanto se pueden aplicar nuestros teoremas de minimalidad de curvas en $\mathcal{O}_e$ .

### 4.3.4. Subálgebra diagonal especial en $\mathcal{M} \otimes M_2$

Consideremos la siguiente subálgebra de $\mathcal{M} \otimes M_2$ dada por

$$\mathcal{N} = \{ \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} : x \in \mathcal{M} \}.$$

Denotemos por $E$ a la única esperanza condicional sobre $\mathcal{N}$ que preserva la traza (con respecto a la traza $\hat{\tau}$), es decir

$$E : \mathcal{M} \otimes M_2 \longrightarrow \mathcal{N}, \qquad E( \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} ) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x_{11} + x_{22} & 0 \\ 0 & x_{11} + x_{22} \end{pmatrix}.$$

Denotamos por $E_p$ a la extensión de esta esperanza a los correspondientes espacios $L^p$ no conmutativos.

**Lema 4.3.8.** *Sea*

$$\mathcal{X} = \{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} : a, b \in \mathcal{M} \}.$$

*Si $A, B \in \mathcal{X}$, entonces $AB^2 \in \mathcal{X}$.*

*Demostración.* Sean

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} d & e \\ e & -d \end{pmatrix}.$$

Entonces

$$B^2 = \begin{pmatrix} d & e \\ e & -d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & e \\ e & -d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d^2 + e^2 & de - ed \\ ed - de & d^2 + e^2 \end{pmatrix}$$

Como

$$\begin{aligned} AB^2 &= \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d^2 + e^2 & de - ed \\ ed - de & d^2 + e^2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} ad^2 + ae^2 + bed - bde & ade - aed + be^2 + bd^2 \\ bd^2 + be^2 - aed + ade & bde - bed - ad^2 - ae^2 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

por lo tanto $AB^2 \in \mathcal{X}$ como queríamos probar. $\square$

**Lema 4.3.9.** *Sea $p$ un entero par positivo. Entonces:*

$$\left\| \begin{pmatrix} (a-c)/2 & b \\ b & (c-a)/2 \end{pmatrix} \right\|_p \leq \left\| \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \right\|_p$$

*para todo $d \in \mathcal{M}$.*

*Demostración.* Notemos que

$$\begin{pmatrix} (a-c)/2 & b \\ b & (c-a)/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (-a-c)/2 & 0 \\ 0 & (-a-c)/2 \end{pmatrix}.$$

Entonces, la desigualdad del lema es equivalente a

$$\tilde{\tau}( \begin{pmatrix} (a-c)/2 & b \\ b & (c-a)/2 \end{pmatrix}^{p-1} \begin{pmatrix} d & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} ) = 0,$$

para todo $d \in \mathcal{M}$. Es suficiente que lo probemos para $d \geq 0$ puesto que luego se extiende claramente para todo $d$. Para $p = 2$ la desigualdad vale porque

$$\begin{aligned}
&\tilde{\tau}(\begin{pmatrix} (a-c)/2 & b \\ b & (c-a)/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}) \\
&= \tilde{\tau}(\begin{pmatrix} d^{1/2} & 0 \\ 0 & d^{1/2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (a-c)/2 & b \\ b & (c-a)/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d^{1/2} & 0 \\ 0 & d^{1/2} \end{pmatrix}) \\
&= \frac{1}{4}(\tau(d^{1/2}(a-c)d^{1/2}) + \tau(d^{1/2}(c-a)d^{1/2})) = 0.
\end{aligned}$$

Por otro lado,

$$X = \begin{pmatrix} (a-c)/2 & b \\ b & (c-a)/2 \end{pmatrix} \in \mathcal{X},$$

con $\mathcal{X}$ como en el lema anterior. Por lo tanto, por el Lema 4.3.8, $X^3 = XX^2 \in \mathcal{X}$, y la condición de ortogonalidad en norma $p$ vale para $p = 2$ ya que

$$\tilde{\tau}(\, X^3\begin{pmatrix} d & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}) = \frac{1}{2}(\, \tau(d^{1/2}(X^3)_{11}d^{1/2}) + \tau(d^{1/2}(X^3)_{22}d^{1/2})\,) = 0$$

y $X^3 \in \mathcal{X}$ implica $(X^3)_{11} = -(X^3)_{22}$. Las demás potencias pueden ser tratadas de manera similar, por ejemplo $X^5 = X^3X^2 \in \mathcal{X}$. $\square$

Si $\mathcal{L}$ indica el siguiente subespacio real de $\mathcal{M}_h \otimes M_2$ dado por

$$\mathcal{L} = \{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} : a, b, c \in \mathcal{M}_h \}$$

y $\mathcal{L}^p$ la respectiva completación en norma $p$. Entonces, utilizando el lema anterior, es sencillo ver que $E : \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{N}$ y $E_p : \mathcal{L}^p \longrightarrow L^p(\mathcal{N})$ para $p$ par, son contractivas.

Un argumento similar podemos aplicar en el subespacio

$$\mathcal{D} = \{ \begin{pmatrix} 0 & b \\ b^* & 0 \end{pmatrix} : b \in \mathcal{M} \},$$

usando el Lema 4.3.7. Si $p$ es par o $p = \infty$, entonces $Q_{\mathcal{N},p} = E_p$, así el mejor aproximante puede ser obtenido vía la esperanza condicional en $\mathcal{L}$. En particular, $Q$ es uniformemente acotada en $\mathcal{L}$. Un argumento análogo muestra que $Q$ es uniformemente acotada en $\mathcal{D}$.

Por el momento no está claro para nosotros si $Q$ es uniformemente acotada en todo $\mathcal{M} \otimes M_2$.

## 4.4. Espacios homogéneos reductivos ortogonales

En el caso que $p = 2$ se puede un saber un poco más acerca del espacio homogéneo $\mathcal{O}$. Estamos en el contexto de variedades débilmente Riemannianas porque en general los espacios tangentes no son completos. Las condiciones impuestas sobre la proyección métrica, que nos permitían probar resultados de minimalidad de curvas, pueden ser relajadas en este caso por resultar una proyección ortogonal en el espacio de Hilbert real $L^2(\mathcal{M})_{ah}$. En particular, si la proyección métrica preserva acotados el espacio homogéneo $\mathcal{O}$ posee una estructura diferencial más rica, conocida como espacio homogéneo reductivo. Daremos un resultado acerca de la minimalidad de geodésicas de la conexión de Levi-Civita que se deduce de los teoremas anteriores. Otra cuestión interesante del caso $p = 2$, es la cantidad de ejemplos que surgen de manera más natural que en el caso general.

Como en las secciones precedentes, $\mathcal{U}_{\mathcal{M}}$ actúa transitivamente sobre el espacio homogéneo $\mathcal{O}$ que posee la estructura diferencial del cociente $\mathcal{U}_{\mathcal{M}}/G_x$, para cualquier $x \in \mathcal{O}$. El espacio homogéneo es reductivo cuando los suplementos $\{\, \mathcal{F}_x \,:\, x \in \mathcal{O} \,\}$ de la Observación 4.2.2 son una distribución suave cumpliendo

$$\mathcal{F}_x \oplus \mathfrak{g}_x = \mathcal{M}_{ah},$$

y son invariantes por la acción interior del grupo de isotropía $G_x$, es decir

$$u\mathcal{F}_x u^* = \mathcal{F}_x\,, \quad x \in \mathcal{O},\, u \in G_x\,.$$

Trataremos con la siguiente clase especial de espacios homogéneos reductivos de $\mathcal{U}_{\mathcal{M}}$.

**Definición 4.4.1.** *Un espacio homogéneo reductivo $\mathcal{O}$ es **ortogonal** si para cada $x \in \mathcal{O}$ los suplementos $\mathcal{F}_x$ son $\tau$-ortogonales con $\mathfrak{g}_x$ .*

**Observación 4.4.2.** *Sean $x \in \mathcal{O}$ y $P_x : L^2(\mathcal{M})_{ah} \to \overline{\mathfrak{g}_x}^{\,2}$ la proyección ortogonal en el espacio de Hilbert real $L^2(\mathcal{M})_{ah}$ con rango $\overline{\mathfrak{g}_x}^{\,2}$. Dado $X \in (T\mathcal{O})_x$ y $z$ un levantado de $X$ resulta inmediato que la norma*

$$\|X\|_{x,2} = \text{ínf}\{\, \|z - y\|_2 \,:\, y \in \mathfrak{g}_x \,\}$$

*se realiza en el operador $z - P_x(z)$ que es $\tau$-ortogonal a $z$. Entonces la proyección métrica $Q_{\mathfrak{g}_x,2}$ coincide con $P_x$, siendo en particular lineal.*

**Notación 4.4.3.** *Utilizaremos la notación $P_x$ para la proyección métrica sobre $\overline{\mathfrak{g}_x}^{\,2}$, para remarcar las virtudes del caso $p = 2$. Cuando no sea necesario cambiar el punto $x \in \mathcal{O}$, simplemente escribiremos $P$.*

**Observación 4.4.4.** *Es sencillo verificar que si $\mathcal{O}$ es ortogonal, entonces para cada $x \in \mathcal{O}$ la proyección*

$$P_x : \mathcal{M}_{ah} \longrightarrow \overline{\mathfrak{g}_x}^{\,2}$$

*satisface $P_x(\mathcal{M}_{ah}) \subseteq \mathfrak{g}_x$.*

*Más aún, la recíproca es cierta en el siguiente sentido: si la proyección $P_x$ preserva operadores acotados para algún $x \in \mathcal{O}$ (luego para todos), entonces $\mathcal{F}_x := (I - P_x)(\mathfrak{g}_x)$, define una distribución suave de suplementos cerrados en norma uniforme de $\mathfrak{g}_x$ que son invariantes por la acción interior de $G_x$. De hecho, la distribución es suave porque*

$$P_{u\cdot x} = Ad(u) \circ P_x \circ Ad(u^*),$$

*donde $Ad(u) : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}$, $Ad(u)(x) = uxu^*$. Para mostrar que cada $\mathcal{F}_x$ es cerrado en norma, sea $(y_n)_n$ una sucesión en $\mathcal{F}_x$ tal que $\|y_n - y\| \to 0$, entonces*

$$\|(I - P_x)(y) - y_n\|_2 \leq \|y - y_n\|_2 \leq \|y - y_n\| \to 0.$$

*Entonces,* $(I - P_x)(y) = \lim y_n = y$*, así obtenemos* $y \in \mathcal{F}_x$*. Por otro lado, la invariancia de los suplementos se verifica automáticamente. Tenemos*

$$\mathcal{F}_x = \{\, y \in \mathcal{M}_{ah} \,:\, \tau(yx) = 0, \ \forall\, x \in \mathfrak{g}_x \,\}.$$

*Es fácil ver que* $u^*\mathfrak{g}u = \mathfrak{g}$*, para todo* $u \in G_x$*. Luego, obtenemos para* $y \in \mathcal{F}_x$*,* $x \in \mathfrak{g}$ *,*

$$\tau((uyu^*)x) = \tau(y(u^*xu)) = 0.$$

*Así, tenemos* $uyu^* \in \mathcal{F}_x$*, y nuestra afirmación queda probada.*

En la Observación 4.2.2 se definieron los isomorfismos $s_x : (T\mathcal{O})_x \to \mathcal{F}_x$ que satisfacen $(\pi_x)_{*1} \circ s_x = id_{(T\mathcal{O})_x}$ y $s_x \circ (\pi_x)_{*1} = P_{\mathcal{F}_x}$, donde $P_{\mathcal{F}_x}$ es la única proyección acotada en $\mathcal{M}_{ah}$ con rango $\mathcal{F}_x$ y núcleo $\mathfrak{g}_x$. En particular, cuando $\mathcal{O}$ es ortogonal, la proyección ortogonal $P_x$ resulta una extensión de $I - P_{\mathcal{F}_x}$ a todo $L^2(\mathcal{M})_{ah}$.

**Observación 4.4.5.** *Cuando* $\mathcal{O}$ *es un espacio homogéneo reductivo hay una métrica Riemanniana natural inducida por los isomorfismos* $s_x$*,* $x \in \mathcal{O}$*. Dados* $X, Y \in (T\mathcal{O})_x$*, el producto interno en cada tangente es*

$$\langle X, Y \rangle_x = \tau(s_x(Y)^* s_x(X)).$$

*En particular,*

$$\|X\|_x = \|s_x(X)\|_2 \,.$$

*Cuando* $\mathcal{O}$ *es ortogonal, si* $z$ *es un levantado de* $X$*, tenemos*

$$\|X\|_x = \|s_x(X)\|_2 = \|(s_x \circ (\pi_x)_{*1})(z)\|_2 = \|z - P_x(z)\|_2 = \|X\|_{x,2}\,,$$

*así la métrica dada por la estructura reductiva coincide con la métrica cociente de la norma* 2*. En particular, queda claro que la métrica cociente es Riemanniana cuando* $p = 2$*.*

Damos a continuación la definición de la **conexión reductiva** $\nabla^k$ introducida en [MR92]. Supongamos que $X, Y$ son campos tangentes en $\mathcal{O}$, entonces el campo $\nabla^k_X Y$ en $x \in \mathcal{O}$ está caracterizado por la siguiente ecuación:

$$s_x(\nabla^k_X Y) = X(Y) + [s_x(Y), s_x(X)],$$

donde $X(Y)$ indica la derivada de $Y$ a lo largo de $X$. Por otro lado, introducimos como en [MR92] la **conexión clasificante** como:

$$s_x(\nabla^c_X Y) = (s_x \circ (\pi_x)_{*1})(X(Y)) = (I - P_x)(X(Y)).$$

Cuando $\mathcal{O}$ es ortogonal podemos probar que la media entre $\nabla^k$ y $\nabla^c$ es la conexión de Levi-Civita de la métrica cociente en norma 2 y calcular sus geodésicas.

**Proposición 4.4.6.** *Sea* $\mathcal{O}$ *un espacio homogéneo reductivo ortogonal. Entonces la conexión de Levi-Civita de la métrica cociente está dada por*

$$\nabla = \frac{1}{2}(\nabla^k + \nabla^c).$$

*Más aún,* $\gamma(t) = e^{ts_x(X)} \cdot x$ *es la única geodésica con velocidad* $X \in (T\mathcal{O})_x$ *tal que* $\gamma(0) = x$*.*

*Demostración.* Es sencillo probar que la conexión reductiva $\nabla^k$ es compatible con la métrica porque como vimos en la Observación 4.4.5 la métrica cociente coincide con la métrica inducida por la estructura reductiva. Para probar que $\nabla^c$ es compatible, consideramos $X(t)$, $Y(t)$ dos campos tangentes a lo largo de una curva $\alpha(t)$ en $\mathcal{O}$. Como $\mathcal{O}$ es ortogonal, $I - P_x$ es una proyección ortogonal en $L^2(\mathcal{M})_{ah}$ que extiende a $s_x \circ (\pi_x)_{*1}$. Entonces,

$$\left\langle \frac{D^c X}{dt}, Y \right\rangle_\alpha = \tau(s_\alpha(Y)^*(I - P_\alpha)(\dot{s}_\alpha(X)) = \tau(s_\alpha(Y)^* \dot{s}_\alpha(X)).$$

Podemos tratar análogamente al término $\left\langle X, \frac{D^c Y}{dt} \right\rangle_\alpha$. Entonces,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(\langle X, Y\rangle_\alpha) &= \frac{d}{dt}(\tau(s_\alpha(Y)^* s_\alpha(X))) \\
&= \tau(s_\alpha(Y)^* \dot{s}_\alpha(X)) + \tau(\dot{s}_\alpha(Y)^* s_\alpha(X)) \\
&= \left\langle \frac{D^c X}{dt}, Y \right\rangle_\alpha + \left\langle X, \frac{D^c Y}{dt} \right\rangle_\alpha.
\end{aligned}$$

Luego $\nabla^c$ es compatible. En [MR92] se prueba que la conexión $\nabla^c$ tiene las mismas geodésicas que $\nabla^k$, pero torsión opuesta. Entonces $\nabla = \frac{1}{2}(\nabla^k + \nabla^c)$ es la conexión de Levi-Civita. Las geodésicas de la conexión reductiva, y por lo tanto las de nuestra conexión de Levi-Civita, se calculan en [MR92]. □

El siguiente paso es comparar longitudes de curvas con sus levantadas $\epsilon$-isométricas. Sin embargo, en el caso $p = 2$, dada una curva $\gamma$ en $\mathcal{O}$, existe una levantada isométrica. Más precisamente, si $\gamma(t)$, $t \in [0, 1]$, es una curva suave en $\mathcal{O}$ tal que $\gamma(0) = x$, entonces su **levantada horizontal** es una curva $\Gamma$ en $\mathcal{U}_\mathcal{M}$ caracterizada por ser la única solución de la ecuación diferencial:

$$\begin{cases} \dot{\Gamma} = s_\gamma(\dot{\gamma})\Gamma, \\ \Gamma(0) = 1. \end{cases} \tag{4.6}$$

Entonces es fácil mostrar que $L_2(\Gamma) = L_{\mathcal{O},2}(\gamma)$. De hecho, esto se deduce de las igualdades $\|\dot{\gamma}\|_\gamma = \|s_\gamma(\dot{\gamma})\|_2 = \|\Gamma^* \dot{\Gamma}\|_2 = \|\dot{\Gamma}\|_2$ e integrando ambos términos.

Por otro lado, necesitamos comparar longitudes en la norma cociente infinito (ecuación (4.4)), para poder estimar en norma uniforme la distancia de las levantadas en el grupo unitario $\mathcal{U}_\mathcal{M}$ y aplicar el resultado de convexidad de la distancia rectificable. Como ya hemos mencionado más arriba, cuando $\mathcal{O}$ es ortogonal, la proyección $P$ restringida a $\mathcal{M}_{ah}$ da un idempotente con rango $\mathfrak{g}$ que resulta continuo en norma uniforme porque $\mathfrak{g}$ es cerrado y complementado en la topología uniforme. Así, como es lineal, podemos afirmar que la proyección métrica $P$ resulta uniformemente acotada. Llamaremos $K_{\mathcal{O},2} = \|P\| = \|P_{u \cdot x}\|$, notando que este valor no depende de la elección de $u$.

**Lema 4.4.7.** *Sean $\gamma$ una curva suave a trozos en $\mathcal{O}$ y $\Gamma$ su levantada horizontal. Entonces,*

$$L_\infty(\Gamma) \leq (1 + K_{\mathcal{O},2}) L_{\mathcal{O},\infty}(\gamma).$$

*Demostración.* Fijemos $x \in \mathcal{O}$. Para $z \in \mathcal{F}$ tal que $(\pi_x)_{*1}(z) = X$ e $y \in \mathfrak{g}$ , tenemos

$$\|z\| = \|(I - P)(z)\| \leq (1 + K_{\mathcal{O},2}) \|z + y\|.$$

Entonces,

$$\|z\| \leq (1+K_{\mathcal{O},2})\|(\pi_x)_{*1}(z)\|_{x,\infty}\,.$$

Luego,

$$\|s_x(X)\| \leq (1+K_{\mathcal{O},2})\|(\pi_x)_{*1}(s_x(X))\|_{x,\infty} = M\|X\|_{x,\infty}\,.$$

Usando esta desigualdad, y el hecho que $K_{\mathcal{O},2}$ sea independiente del punto, finalmente obtenemos

$$\begin{aligned} L_\infty(\Gamma) &= \int_0^1 \|\,\dot\Gamma(t)\,\|\,dt = \int_0^1 \|\,s_{\gamma(t)}(\dot\gamma(t))\Gamma(t)\,\|\,dt \\ &= \int_0^1 \|\,s_{\gamma(t)}(\dot\gamma(t))\,\|\,dt \leq (1+K_{\mathcal{O},2})\int_0^1 \|\dot\gamma(t)\|_{\gamma(t)\,,\,\infty} = (1+K_{\mathcal{O},2})L_{\mathcal{O},\infty}(\gamma). \end{aligned}$$

□

**Observación 4.4.8.** *Como mostramos en la Observación 4.2.8 existe $R>0$ tal que*

$$\pi_x\circ\exp_{\mathcal{U}_\mathcal{M}} : B_R(0)\subset\mathcal{F}\longrightarrow(\pi_x\circ\exp)(B_R(0))\subset\mathcal{O}$$

*sea un difeomorfismo. Comparando con la Observación 4.2.7, la función $\varphi$ es la identidad por ser $p=2$, y así llamamos $U^R_\mathcal{O}=(\pi_x\circ\exp_{\mathcal{U}_\mathcal{M}})(B_R(0))$. Notemos que para cada $x_1\in U^R_\mathcal{O}$, existe una única geodésica dada por $(\pi_x\circ\exp_{\mathcal{U}_\mathcal{M}})(tz)=e^{tz}\cdot x$ uniendo $x$ con $x_1$ dentro de $U^R_\mathcal{O}$, donde $z$ satisface $e^z\cdot x=x_1$.*

**Observación 4.4.9.** *Ahora consideremos la siguiente función*

$$F:\mathcal{F}\oplus\mathfrak{g}\longrightarrow\mathcal{U}_\mathcal{M}\,,\quad F(\,(z,x)\,)=e^ze^x.$$

*Diferenciando obtenemos*

$$F_{*(0,0)}:\mathcal{M}_{ah}\longrightarrow\mathcal{M}_{ah},\quad F_{*(0,0)}(z,x)=z+x,$$

*que es un isomorfismo. Entonces existe un entorno $V$ de $(0,0)$ y un $\epsilon>0$ tal que*

$$F:V\longrightarrow B_\epsilon(1)\cap\mathcal{U}_\mathcal{M}\,,$$

*es un difeomorfismo. Más aún, podemos elegir $V\subseteq B_{\epsilon_1}(0)\times B_{\epsilon_2}(0)$ para $\epsilon_1$, $\epsilon_2$ tan pequeños como quisiéramos si ajustamos el $\epsilon$. En el resto de esta sección pediremos que $\epsilon$, $\epsilon_1$ cumplan:*

1. $\epsilon<\frac{\sqrt{2}-1}{1+K_{\mathcal{O},2}}$.
2. $\epsilon_1<\min\{\,R\,,\,\frac{\pi}{3}\,\}$.

**Lema 4.4.10.** *Sea $\gamma$ una curva suave en $\mathcal{O}$ tal que $\gamma(0)=x$ y $L_{\mathcal{O}\,,\,\infty}(\gamma)<\epsilon/(1+K_{\mathcal{O},2})$. Sea $\Gamma$ su levantada horizontal. Entonces existe $z\in\mathcal{F}$ cumpliendo:*

1. $\Gamma(1)=e^ze^y$, *donde* $y\in\mathfrak{g}$.
2. $z\in B_R(0)\subset\mathcal{F}$ *es único tal que* $e^z\cdot x=\gamma(1)$.
3. $\|e^z-1\|<\sqrt{2}$ *y* $\|\Gamma(1)-1\|<\sqrt{2}-\|e^z-1\|$.

*Demostración.* 1. Recordemos que $d_\infty$ es la distancia rectificable en $\mathcal{U}_\mathcal{M}$ con la métrica de Finsler dada por la norma uniforme, entonces utilizando el Lema 4.4.7 obtenemos

$$\|1 - \Gamma(1)\| \leq d_\infty(1, \Gamma(1)) \leq L_\infty(\Gamma) \leq (1 + K_{\mathcal{O},2}) L_{\mathcal{O},\infty}(\gamma) < \epsilon.$$

Por la Observación 4.4.9 existe un único $(z, y) \in \mathcal{F} \oplus \mathfrak{g}_x$ tal que $\|z\| < \epsilon_1$, $\|y\| < \epsilon_2$ y $e^z e^y = \Gamma(1)$.

2. Notemos que $e^z \cdot x = e^z e^y \cdot x = \Gamma(1) \cdot x = \gamma(1)$. Más aún, es único porque $\|z\| < \epsilon_1 < R$ y $\pi_x \circ \exp$ es inyectiva en la bola de radio $R$.

3. En el primer inciso probamos que $\|1 - \Gamma(1)\| < \epsilon < \sqrt{2}$. Un cálculo sencillo muestra

$$\|e^z - 1\| = \sqrt{2 - 2\cos(\|z\|)}$$

Por otro lado, nuestra elección de $\epsilon_1$ implica

$$\|\Gamma(1) - 1\| + \|e^z - 1\| < \epsilon + \sqrt{2 - 2\cos(\|z\|)} < \sqrt{2} - 1 + \sqrt{2 - \sqrt{3}} < \sqrt{2}.$$

□

El próximo lema es el análogo del Teorema 4.2.5. Notemos, que a diferencia del caso general donde el levantando minimal estaba dado, ahora la hipótesis sobre la longitud de la curva en norma cociente infinito asegura la existencia de un levantado.

**Lema 4.4.11.** *Sea $\mathcal{O}$ un espacio homogéneo reductivo ortogonal. Sea $\gamma$ una curva suave a trozos en $\mathcal{O}$ tal que $\gamma(0) = x$ y $L_{\mathcal{O},\infty}(\gamma) < \epsilon/(1 + K_{\mathcal{O},2})$. Entonces existe una única geodésica $\delta(t) = e^{tz} \cdot x$ cumpliendo $\delta(1) = \gamma(1)$ y $L_{\mathcal{O},2}(\delta) \leq L_{\mathcal{O},2}(\gamma)$.*

*Demostración.* Como sabemos que $L_{\mathcal{O},\infty}(\gamma) < \epsilon/(1 + K_{\mathcal{O},2})$, entonces por el Lema 4.4.10 existe $z \in \mathcal{F}_x$, $\|z\| < \frac{\pi}{3}$ tal que $e^z \cdot x = \gamma(1)$. Luego, la curva $\delta(t) = e^{tz} \cdot x$ es una geodésica en $\mathcal{O}$ por la Proposición 4.4.6.

Observemos que la constante $C_\mathcal{O}$ de la Observación 4.2.2 puede tomarse como $1 + K_{\mathcal{O},2}$ porque $C_\mathcal{O} = \|P_\mathcal{F}\| = \|I - P\| \leq 1 + K_{\mathcal{O},2}$. Luego, si volvemos al Teorema 4.2.5, se cumple la hipótesis

$$L_{\mathcal{O},\infty}(\gamma) < \epsilon/(1 + K_{\mathcal{O},2}) < \frac{\sqrt{2} - 1}{(1 + K_{\mathcal{O},2})^2} = \varepsilon(\mathcal{O}, 2),$$

y por lo tanto $\delta$ es minimal uniendo sus puntos. Por último, la unicidad es una consecuencia del inciso 2. en el Lema 4.4.10. □

Llamaremos una **poligonal geodésica** a una curva suave a trozos continua que consiste en tramos de geodésicas consecutivos. Una consecuencia inmediata del resultado anterior es la siguiente.

**Corolario.** *Sea $\mathcal{O}$ un espacio homogéneo reductivo ortogonal y $\gamma$ una curva suave a trozos en $\mathcal{O}$. Entonces existe una poligonal geodésica $\nu$ tal que $\nu(0) = \gamma(0)$, $\nu(1) = \gamma(1)$ y*

$$L_{\mathcal{O},2}(\nu) \leq L_{\mathcal{O},2}(\gamma).$$

*Demostración.* Claramente podemos suponer que $\gamma$ es suave. Consideremos la partición $0 = t_0 < t_1 < ... < t_n = 1$ tal que $L_{\mathcal{O},\infty}(\gamma|_{[\,t_i\,,\,t_{i+1}\,]}) < \epsilon/(1+K_{\mathcal{O},2})$. Usamos el Lema 4.4.11 para encontrar geodésicas $\delta_i$ con los mismos puntos finales que los tramos $\gamma|_{[\,t_i\,,\,t_{i+1}\,]}$ para $i = 0, \ldots, n-1$ cumpliendo

$$L_{\mathcal{O},2}(\delta_i) \leq L_{\mathcal{O},2}(\gamma|_{[\,t_i\,,\,t_{i+1}\,]}).$$

Por lo tanto la curva $\nu$ obtenida de pegar las distintas geodésicas $\delta_i$ es una poligonal geodésica más corta que $\gamma$. $\square$

El siguiente es el principal resultado de esta sección. Muestra como el Teorema 4.2.9 puede mejorarse en el caso $p = 2$ para obtener un abierto en $\mathcal{O}$ donde hay curvas minimales. Tomaremos $r = \min\{\,R\,, \epsilon/2(1+K_{\mathcal{O},2})^2\}$.

**Teorema 4.4.12.** *Sean $\mathcal{O}$ un espacio homogéneo reductivo ortogonal y $x \in \mathcal{O}$. Dado $x_1 \in U^r_{\mathcal{O}}$, existe una única geodésica contenida en $U^r_{\mathcal{O}}$ que tiene longitud minimal entre todas las curvas suaves a trozos contenidas en $U^r_{\mathcal{O}}$ uniendo $x$ con $x_1$.*

*Demostración.* Es una consecuencia inmediata del Lema 4.4.11 y el Teorema 4.2.9. Notemos que $\mathfrak{g}^{\perp_2} = \mathcal{F}$ y así $U^r_{\mathcal{O}} = \pi_x \circ \exp_{\mathcal{U}_\mathcal{M}}(B_r(0))$ es un abierto de $\mathcal{O}$ por la elección de $r \leq R$. $\square$

**Observación 4.4.13.** *Nuestra elección de $r > 0$ funciona para cualquier $x \in \mathcal{O}$. Para mostrar esto observemos que $r$ depende sólo de $R$, $K_{\mathcal{O},2}$ y $\epsilon$.*

1. *$R$ es independiente del punto porque la acción es isométrica.*

2. *La independencia de $K_{\mathcal{O},2}$ fue mostrada antes del Lema 4.4.7.*

3. *Si consideramos la función $F^u : \mathcal{F}_{u\cdot x} \oplus \mathfrak{g}_{u\cdot x} \longrightarrow \mathcal{U}_\mathcal{M}$, es fácil verificar que cumple $F^u = F \circ Ad(u)$. Entonces, usando que $Ad(u)$ es un isomorfismo isométrico obtenemos que $F^u$ es un difeomorfismo local si y sólo si $F$ lo es.*

## 4.5. Ejemplos de espacios homogéneos reductivos ortogonales

En esta sección damos varios ejemplos de espacios homogéneos reductivos ortogonales. En estos ejemplos, el paso fundamental para asegurar que el Teorema 4.4.12 se puede aplicar, consiste en probar la condición de ortogonalidad. Frecuentemente nos encontraremos con la siguiente situación: $G$ es un grupo de Lie-Banach con la topología de la norma de operadores, y buscamos probar que es un subgrupo de Lie-Banach de $\mathcal{U}_\mathcal{M}$ para darle estructura suave al cociente $\mathcal{O} = \mathcal{U}_\mathcal{M}/G$. Como hemos mencionado en la Sección 2.6.2 sólo tenemos que mostrar que el álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ es complementada en $\mathcal{M}_{ah}$. Por otro lado, para obtener la minimalidad de las geodésicas, debemos probar la condición de ortogonalidad. Entonces podemos obtener ambas propiedades si chequeamos que la proyección

$$P : L^2(\mathcal{M})_{ah} \longrightarrow \overline{\mathfrak{g}}^{\,2}$$

satisface $P(\mathcal{M}_{ah}) \subseteq \mathfrak{g}$. Más aún, como notamos en la Observación 4.4.4, esto nos provee de suplementos invariantes bajo la acción interior de $G$, y por lo tanto, de una estructura reductiva en $\mathcal{O}$.

### 4.5.1. Álgebras de Lie que son antihermitianos de una subálgebra

Aquí presentamos varios ejemplos que poseen en común la siguiente característica: el álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ del subgrupo $G$ consiste en los operadores antihermitianos de una subálgebra de von Neumann $\mathcal{N}$ de $\mathcal{M}$. En este caso resulta inmediato que $P$ preserva operadores acotados. En efecto, existe una única esperanza condicional $E : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ normal e invariante para la traza. Dicha esperanza cumple $E(\mathcal{M}_{ah}) = \mathcal{N}_{ah} = \mathfrak{g}$. Luego, tomamos $P$ como la extensión de $E|_{\mathcal{M}_{ah}}$ a todo $L^2(\mathcal{M})_{ah}$ , y por lo tanto, preserva operadores acotados. En consecuencia, si $\mathcal{U}_{\mathcal{N}}$ es el grupo unitario de $\mathcal{N}$, entonces resulta un subgrupo de Lie-Banach de $\mathcal{U}_{\mathcal{M}}$ con la topología inducida por la norma espectral.

**Órbita unitaria de un estado.** El primer ejemplo trata de la órbita unitaria de un estado. Sea $\mathcal{S}_{\mathcal{M}}$ el conjunto de estados normales fieles de $\mathcal{M}$. Consideremos la acción

$$\mathcal{U}_{\mathcal{M}} \times \mathcal{S}_{\mathcal{M}} \longrightarrow \mathcal{S}_{\mathcal{M}}, \quad u \cdot \varphi = \varphi \circ Ad(u^*), \quad u \in \mathcal{U}_{\mathcal{M}}, \, \varphi \in \mathcal{S}_{\mathcal{M}}.$$

Para $\varphi \in \mathcal{S}_{\mathcal{M}}$, denotemos por $\mathcal{U}_\varphi$ a la órbita unitaria de $\varphi$, esto es

$$\mathcal{U}_\varphi = \{ \varphi \circ Ad(u^*) \, : \, u \in \mathcal{U}_{\mathcal{M}} \}.$$

El álgebra de Lie

$$\mathfrak{g}_\varphi = \{ x \in \mathcal{M}_{ah} \, : \, \varphi(xy) = \varphi(yx), \ \ \forall \, y \in \mathcal{M} \},$$

consiste en los operadores antihermitianos del centralizador de $\varphi$, que es una subálgebra de von Neumann de $\mathcal{M}$. Entonces, como observamos más arriba, la proyección ortogonal sobre $\mathfrak{g}_\varphi$ preserva acotados, y así el cociente $\mathcal{U}_{\mathcal{M}}/G_\varphi$ posee estructura de variedad suave. Luego dotamos a $\mathcal{U}_\varphi$ con la estructura de variedad tal que la biyección $[u] \mapsto \varphi \circ Ad(u^*)$ sea un difeomorfismo para obtener un espacio homogéneo reductivo ortogonal. Podemos concluir que las curvas $\delta(t) = \varphi \circ Ad(e^{-tz}u^*)$ poseen longitud minimal entre todas las curvas en un entorno de $\varphi \circ Ad(u^*)$ que comienzan en este estado.

**Órbita unitaria de un operador normal.** Sea $a$ un operador normal de $\mathcal{M}$. Podemos estudiar la órbita unitaria de $a$, esto es el conjunto

$$\mathcal{U}(a) = \{ uau^* \, : \, u \in \mathcal{U}_{\mathcal{M}} \}.$$

El grupo de isotropía en $a$ de la acción natural de $\mathcal{U}_{\mathcal{M}}$ está dado por

$$G_a = \{ u \in \mathcal{U}_{\mathcal{M}} \, : \, ua = au \}.$$

Como en el ejemplo anterior, el álgebra de Lie del grupo de isotropía son los operadores antihermitianos de una subálgebra de von Neumann

$$\mathfrak{g}_a = \{ x \in M_{ah} \, : \, xa = ax, \} = \{ a \}' \cap \mathcal{M}_{ah} \, .$$

Así $\mathcal{U}(a) \cong \mathcal{U}_{\mathcal{M}}/G_a$ es un espacio homogéneo reductivo ortogonal, y las geodésicas dadas por $\delta(t) = e^{tz}ae^{-tz}$ son minimales localmente.

**Órbita unitaria de una medida espectral.** Sea $\Sigma$ una $\sigma$-algebra de algún conjunto. Sea $e : \Sigma \longrightarrow \mathcal{M}$ una medida espectral cuyos valores son proyecciones autoadjuntas en $\mathcal{M}$. La órbita unitaria de $e$ es

$$\mathcal{U}(e) = \{\, ue(\,.\,)u^* \,:\, u \in \mathcal{U}_{\mathcal{M}} \,\}.$$

El grupo de isotropía está dado por

$$G_e = \{\, u \in \mathcal{U}_{\mathcal{M}} \,:\, ue(F) = e(F)u, \;\; \forall\, F \in \Sigma \,\}.$$

El álgebra de Lie de este grupo es

$$\mathfrak{g}_e = \{\, x \in \mathcal{M}_{ah} \,:\, xe(F) = e(F)x, \;\; \forall\, F \in \Sigma \,\},$$

que consiste en operadores antihermitianos de una subálgebra de von Neumann. Entonces podemos aplicar el Teorema 4.4.12 para mostrar que en el espacio homogéneo reductivo ortogonal $\mathcal{U}(e) \cong \mathcal{U}_{\mathcal{M}}/G_e$ las geodésicas $\delta(t) = e^{tz}e(\,.\,)e^{-tz}$ son minimales localmente.

**Órbita unitaria de un $*$-morfismo** Consideremos $\psi : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}$ un $*$-morfismo, i.e. $\psi$ es lineal, multiplicativo y $\psi(x)^* = \psi(x^*)$ para todo $x \in \mathcal{M}$. Nuevamente estudiaremos la órbita unitaria de $\psi$, es decir

$$\mathcal{U}(\psi) = \{\, u\psi(\,.\,)u^* \,:\, u \in \mathcal{U}_{\mathcal{M}} \,\}.$$

La isotropía en $\psi$ bajo la acción natural de $\mathcal{U}_{\mathcal{M}}$ es

$$G_\psi = \{\, u \in U_M \,:\, u\psi(y) = \psi(y)u, \;\; \forall\, y \in \mathcal{M} \,\}.$$

El álgebra de Lie consiste en una subálgebra de von Neumann dada por el conmutante de $\psi(\mathcal{M})$. Luego, el cociente $\mathcal{U}(\psi) \cong \mathcal{U}_{\mathcal{M}}/G_\psi$ es un espacio homogéneo reductivo ortogonal donde el Teorema 4.4.12 se aplica.

### 4.5.2. Isometrías parciales

Este ejemplo es acerca de isometrías parciales en $\mathcal{M}$. El conjunto de isometrías parciales de $\mathcal{M}$ es

$$\mathcal{I} = \{\, v \in \mathcal{M} \,:\, v^*v \text{ es una proyección} \,\}.$$

Podemos dar una acción del grupo unitario $\mathcal{U}_{\mathcal{M}} \times \mathcal{U}_{\mathcal{M}}$ de $\mathcal{M} \times \mathcal{M}$ sobre $\mathcal{I}$ moviendo los espacios iniciales y finales de cada isometría. Esta acción está dada por

$$(\mathcal{U}_{\mathcal{M}} \times \mathcal{U}_{\mathcal{M}}) \times \mathcal{I} \longrightarrow \mathcal{I}, \qquad (u, w) \cdot v = uvw^*.$$

La acción es localmente transitiva, si dos isometrías están más cerca que $1/2$ en la norma de operadores, entonces son conjugadas por un par de unitarios. En [ACM05] se prueba que cada componente conexa, que por la transitividad local coinciden con las órbitas, es un espacio homogéneo de $\mathcal{U}_{\mathcal{M}} \times \mathcal{U}_{\mathcal{M}}$ y una subvariedad $C^\infty$ de $\mathcal{M}$. Por lo tanto, debido a la Observación 4.4.4, para tener una estructura reductiva sólo debemos probar la condición de ortogonalidad.

Fijemos $v \in \mathcal{I}$, estudiaremos su órbita $\mathcal{O}(v)$. El grupo de isotropía en $v$ es

$$G_v = \{\, (u, w) \in \mathcal{U}_{\mathcal{M}} \times \mathcal{U}_{\mathcal{M}} \,:\, uv = vw \,\}.$$

Notemos que si $(u, w) \in G_v$, entonces $u$ conmuta con la proyección final $vv^*$ y $w$ conmuta con la proyección inicial $v^*v$. Podemos calcular el álgebra de Lie de este grupo

$$\begin{aligned} \mathfrak{g}_v &= \{\, (x, y) \in \mathcal{M}_{ah} \times \mathcal{M}_{ah} \,:\, xv = vy \,\} \\ &= \{\, ( \begin{pmatrix} x_{11} & 0 \\ 0 & x_{22} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v^* x_{11} v & 0 \\ 0 & y_{22} \end{pmatrix} ) \,:\, x_{11}\,, x_{22}\,, y_{22}\, \text{antihermitianos} \,\}, \end{aligned}$$

donde la descomposición matricial es respecto a $vv^*$ en la primera coordenada y respecto a $v^*v$ en la segunda coordenada. Notemos que en este caso el álgebra de Lie no son operadores antihermitianos de una subálgebra de von Neumann. De hecho, el conjunto de los pares $(x, y)$ tales que $xv = vy$ no es cerrado cuando adjuntamos. En un álgebra finita, las órbitas tienen la siguiente propiedad particular.

*Afirmación:* Sea $\mathcal{M}$ un álgebra de von Neumann finita, entonces $\mathcal{O}(v) = \mathcal{O}(v^*v)$. En particular, hay una proyección en cada órbita.

Para probar nuestra afirmación, consideremos el conjunto de isometrías parciales con espacio inicial fijo. En otras palabras, si $p$ es una proyección, miramos el conjunto

$$\mathcal{I}_p = \{\, v \in \mathcal{M} \,:\, v^*v = p \,\}.$$

Primero demostremos que $\{\, up \,:\, u \in U_{\mathcal{M}} \,\} = \mathcal{I}_p$. Una inclusión es trivial, para la otra tomemos $v \in \mathcal{I}_p$, y sea $q = vv^*$, que es una proyección equivalente con $p$. Como $\mathcal{M}$ es finita, existe $u \in \mathcal{U}_{\mathcal{M}}$ tal que $uqu^* = p$. Notemos que $1 - p + uv$ es unitario, y luego, $w = u^*(1 - p) + v$ también es unitario. Así, obtenemos $wp = vp = v$.

Nuestra última afirmación se sigue fácilmente. Como $v \in \mathcal{I}_{v^*v} = \{\, uv^*v \,:\, u \in \mathcal{U}_{\mathcal{M}} \,\}$, luego existe $u \in \mathcal{U}_{\mathcal{M}}$ tal que $v = u(v^*v) = u(v^*v)1$. Por lo tanto, tenemos $\mathcal{O}(v) = \mathcal{O}(v^*v)$. Como corolario de la afirmación anterior, alcanza con estudiar el grupo de isotropía de la proyección $p$. En este caso, la expresión del álgbra de Lie se reduce a

$$\mathfrak{g}_p = \{\, ( \begin{pmatrix} x_{11} & 0 \\ 0 & x_{22} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_{11} & 0 \\ 0 & y_{22} \end{pmatrix} ) \,:\, x_{11}\,, x_{22}\,, y_{22}\ \text{antihermitianos} \,\},$$

donde las descomposiciones matriciales son ambas respecto a $p$. Entonces definimos la siguiente proyección real acotada sobre $\mathfrak{g}_p$ por

$$\begin{aligned} &P : \mathcal{M}_{ah} \times \mathcal{M}_{ah} \longrightarrow \mathfrak{g}_p\,, \\ &( \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ -x_{12}^* & x_{22} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} \\ -y_{12}^* & y_{22} \end{pmatrix} ) \mapsto ( \begin{pmatrix} \frac{x_{11}+y_{11}}{2} & 0 \\ 0 & x_{22} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{x_{11}+y_{11}}{2} & 0 \\ 0 & y_{22} \end{pmatrix} ) \end{aligned}$$

Observemos que el núcleo de esta proyección es

$$\ker(P) = \{\, ( \begin{pmatrix} w & c_{12} \\ -c_{12}^* & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -w & d_{12} \\ -d_{12}^* & 0 \end{pmatrix} ) \,:\, w,\, c_{12}\,,\, d_{12}\, \text{antihermitianos} \,\}.$$

Usando la traza $\tau$ de $\mathcal{M}$, podemos definir una traza finita en $\mathcal{M} \times \mathcal{M}$ mediante

$$\tilde{\tau}((x, y)) = \frac{\tau(x) + \tau(y)}{2}, \quad x, y \in \mathcal{M}.$$

Esto da un producto interno en $\mathcal{M} \times \mathcal{M}$ tal que $\ker(P)$ es ortogonal a $\mathfrak{g}_p$. De hecho, para $(x, y) \in \mathfrak{g}_p$ , $(c, d) \in \ker(P)$, tenemos

$$\begin{aligned}
2\tilde{\tau}((x,y)(c,d)) &= -\tau(xc) - \tau(yd) \\
&= -\tau(\begin{pmatrix} x_{11} & 0 \\ 0 & x_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} w & c_{12} \\ -c_{12}^* & 0 \end{pmatrix})- \\
&- \tau(\begin{pmatrix} x_{11} & 0 \\ 0 & y_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -w & d_{12} \\ -d_{12}^* & 0 \end{pmatrix}) \\
&= -\tau(\begin{pmatrix} x_{11}w & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}) + \tau(\begin{pmatrix} x_{11}w & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}) = 0.
\end{aligned}$$

Debido a la ortogonalidad de $\ker(P)$ con su rango, $P$ se extiende a la proyección real ortogonal sobre $\overline{\mathfrak{g}_p}^2$. Así, obtenemos que $\mathcal{O}(v) = \mathcal{O}(v^*v)$ es un espacio homogéneo reductivo ortogonal. Luego las geodésicas $\delta(t) = e^{tz_1}uvw^*e^{-tz_2}$ poseen longitud minimal entre todas las curvas contenidas en un entorno de $uvw^*$.

### 4.5.3. Esperanzas condicionales

Sea $\mathcal{N}$ un álgebra de von Neumann de $\mathcal{M}$ y $E : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{N}$ la única esperanza condicional que preserva la traza. Nuestro siguiente ejemplo es acerca de la órbita unitaria de $E$. Para un estudio detallado de la propiedes geométricas de este ejemplo en un contexto más general que álgebras finitas referimos al lector a los artículos [ArS99] y [ArS01].

Definimos una acción de $\mathcal{U}_\mathcal{M}$ sobre el álgebra $\mathcal{B}(\mathcal{M})$ de operadores acotados sobre $\mathcal{M}$ mediante

$$\mathcal{U}_\mathcal{M} \times \mathcal{B}(\mathcal{M}) \longrightarrow \mathcal{B}(\mathcal{M}), \quad u \cdot T = Ad(u) \circ T \circ Ad(u^*).$$

Consideremos la órbita unitaria de $E$ con esta acción

$$\mathcal{U}(E) = \{\, u \cdot E \,:\, u \in \mathcal{M}\}.$$

El grupo de isotropía en $E$ usualmente se denomina el **normalizador** de $E$,

$$\mathcal{N}_E = \{\, u \in \mathcal{U}_\mathcal{M} \,:\, E(uyu^*) = uE(y)u^*, \;\; y \in \mathcal{M}\,\}.$$

Mostraremos ahora que $\mathcal{N}_E$ es un subgrupo algebraico de $\mathcal{U}_\mathcal{M}$ de orden $\leq 2$ (en el sentido de [Be06], [HK77]) del grupo de Lie-Banach $\mathcal{U}_\mathcal{M}$. Para cada $y \in \mathcal{M}$ definimos las siguientes funciones bilineales

$$\psi_y : (\mathcal{M} \times \mathcal{M}) \times (\mathcal{M} \times \mathcal{M}) \longrightarrow \mathcal{M}, \quad \psi_y((a,b),(a',b')) = E(ayb') - aE(y)b'.$$

Entonces basta con tomar los polinomios

$$p_y((a,b)) = \psi_y((a,b),(a,b)) = E(ayb) - aE(y)b.$$

En [ArS01] se prueba que para cualquier esperanza condicional fiel y normal, su órbita unitaria es un espacio homogéneo reductivo de $\mathcal{U}_\mathcal{M}$. En nuestro caso, donde el álgebra es finita, probaremos la condición de ortogonalidad restringiéndonos a la única esperanza condiconal $E$ que preserva la traza. Los argumentos utilizados están adaptados a este caso más sencillo de la Proposición 4.5 en [ArS01].

El álgebra de Lie de $\mathcal{N}_E$ es el núcleo de la diferencial del fibrado

$$\pi_E : U_{\mathcal{M}} \longrightarrow \mathcal{U}(E), \quad \pi_E(u) = u \cdot E.$$

En [ArS01] se observa que

$$\mathfrak{g}_E = \ker((\pi_E)_{*1}) = (\mathcal{N} + \mathcal{M}_E) \cap \mathcal{M}_{ah}\,,$$

donde $\mathcal{M}_E$ es la subálgebra de von Neumann de $\mathcal{M}$ dada por

$$\mathcal{M}_E = \{\, x \in \mathcal{N}\,' \cap \mathcal{M} \,:\, E(xy) = E(yx), \ \ \forall\, y \in \mathcal{M} \,\}.$$

Llamemos $F : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}_E$ a la única esperanza condicional que cumple $\tau \circ F = \tau$. Si $Z(\mathcal{M})$ es el centro de $\mathcal{M}$, notemos que $E(\mathcal{M}_E) = Z(\mathcal{N})$. Entonces tenemos una esperanza condicional $E \circ F : \mathcal{M} \longrightarrow Z(\mathcal{N})$ cumpliendo $\tau \circ (E \circ F) = \tau \circ F = \tau$. Luego existen tres proyecciones ortogonales $e$, $f$, $g$ in $L^2(\mathcal{M}, \tau)$, respectivamente asociadas con $E$, $F$, $E \circ F$ tales que $ef = g$. Así, obtenemos $ef = fe$. Si ahora llamamos

$$\Delta = E + F - EF,$$

es una proyección sobre $\mathcal{M}_E + \mathcal{N}$ satisfaciendo $\Delta(\mathcal{M}_{ah}) \subseteq \mathcal{M}_{ah}$. Entonces $\Delta|_{\mathcal{M}_{ah}}$ proyecta sobre $(\mathcal{M}_E + \mathcal{N}) \cap \mathcal{M}_{ah} = \mathfrak{g}_E$ y se extiende a la proyección ortogonal

$$\Delta|_{\mathcal{M}_{ah}} : L^2(\mathcal{M})_{ah} \longrightarrow \overline{\mathfrak{g}_E}^{\,2},$$

porque $e$ conmuta con $f$. Por lo tanto, podemos aplicar el Teorema 4.4.12.

### 4.5.4. $C^*$-sistemas dinámicos

En la mayoría de los ejemplos anteriores utilizamos el hecho que $\mathcal{M}$ era un álgebra de von Neumann finita para garantizar la existencia de esperanzas condicionales, y luego probar la condición de ortogonalidad. Sin embargo, si volvemos sobre la prueba del Teorema 4.4.12 podemos observar que podría haberse demostrado en el contexto de $C^*$-álgebras con traza finita. En esta sección damos un posible ejemplo relacionado con $C^*$-sistemas dinámicos.

Sea $\mathcal{A}$ una $C^*$-álgebra con una traza fiel $\tau$ y $(\mathcal{A}, G, \alpha)$ un **$C^*$-sistema dinámico**. Esto significa que $G$ es un grupo localmente compacto y $\alpha$ es un morfismo continuo de $G$ en el grupo $\mathrm{Aut}(\mathcal{A})$ de $*$-automorfismos de $\mathcal{A}$ con la topología de la convergencia puntual. Supongamos que $G$ es compacto y $\alpha$ es invariante por la traza, es decir, se cumple

$$\tau(\alpha_t(x)) = \tau(x)$$

para todo $t \in G$ y $x \in \mathcal{A}$. Consideremos la $C^*$-subálgebra de $\mathcal{A}$ dada por

$$\mathcal{A}^G = \{\, x \in \mathcal{A} \,:\, \alpha_t(x) = x, \forall\, t \in G \,\}.$$

Denotemos por $\mu$ a la medida de Haar a izquierda normalizada sobre $G$, podemos definir

$$E : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}^G, \ \ E(x) = \int_G \alpha_t(x)\, d\mu(t).$$

Es evidente que $E$ es una proyección de norma uno, y por lo tanto una esperanza condicional. Además, $E$ preserva la traza

$$\tau(E(x)) = \int_G \tau(\alpha_t(x))\, d\mu(t) = \int_G \tau(x)\, d\mu(t) = \tau(x).$$

Entonces, el álgebra de Lie del grupo unitario $\mathcal{U}_{\mathcal{A}^G}$ que se identifica con $\mathcal{A}_{ah}^G$ es cerrada y complementada. Así, $\mathcal{U}_{\mathcal{A}^G}$ es un subgrupo de Lie-Banach de $\mathcal{U}_{\mathcal{A}}$, entonces podemos considerar el espacio homogéneo $\mathcal{U}_{\mathcal{A}}/\mathcal{U}_{\mathcal{A}^G}$. Más aún, este es un espacio homogéneo reductivo porque $E$ es invariante para la traza.

# Capítulo 5

# Variedades de Stiefel

Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert separable de dimensión infinita y $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ el espacio de operadores acotados sobre $\mathcal{H}$. Como en los capítulos anteriores denotaremos por $\|\,.\,\|$ a la norma de operadores, y además usaremos la misma notación para la norma de vectores en $\mathcal{H}$. En este capítulo, $\mathfrak{I}$ será un ideal de Banach separable dotado de una norma $\|\,.\,\|_{\mathfrak{I}}$.

Denotamos por $\mathcal{U}(\mathcal{H})$ al grupo unitario en $\mathcal{H}$, y $\mathcal{U}_{\mathfrak{I}}(\mathcal{H})$ al grupo de unitarios que son perturbaciones de la identidad por un operador $\mathfrak{I}$, es decir

$$\mathcal{U}_{\mathfrak{I}}(\mathcal{H}) = \{\, u \in \mathcal{U}(\mathcal{H}) \,:\, u - 1 \in \mathfrak{I} \,\}.$$

Es un grupo de Lie-Banach real con la topología dada por la métrica $(u_1, u_2) \mapsto \|u_1 - u_2\|_{\mathfrak{I}}$ (ver [Be06]). El álgebra de Lie de $\mathcal{U}_{\mathfrak{I}}(\mathcal{H})$ está dada por

$$\mathfrak{I}_{ah} = \{\, a \in \mathfrak{I} \,:\, a^* = -a \,\}.$$

Recordemos que la variedad de Stiefel (ortogonal) denotada por $\mathcal{S}t(n,k)$ en $\mathbb{C}^n$ $(k \leq n)$, consiste en

$$\mathcal{S}t(n,k) = \{\ k\text{-uplas ortonormales de vectores en } \mathbb{C}^n \,\}.$$

Un elemento $(v_1, \ldots, v_k) \in \mathcal{S}t(n,k)$ se identifica con la isometría parcial que envía los primeros $k$ elementos de la base canónica de $\mathbb{C}^n$ a los elementos de esta $k$-upla. A continuación buscamos extender esta noción a un espacio de Hilbert de dimensión infinita donde las isometrías parciales pueden tener rango y corango de dimensión infinita, aunque tomando sólo isometrías parciales compatibles con una isometría parcial fija $v$ y el ideal $\mathfrak{I}$. Entonces definimos la siguiente órbita:

$$\mathcal{S}_{\mathfrak{I}}(v) := \{\, uv \,:\, u \in \mathcal{U}_{\mathfrak{I}}(\mathcal{H}) \,\},$$

que denominaremos **$\mathfrak{I}$-variedad de Stiefel asociada a** $v$. Es evidente que es una órbita de la acción a izquierda de $\mathcal{U}_{\mathfrak{I}}(\mathcal{H})$ sobre el conjunto de isometrías parciales $\mathcal{I}$ dada por $\mathcal{U}_{\mathfrak{I}}(\mathcal{H}) \times \mathcal{I} \to \mathcal{I}$, $(u,v) \mapsto uv$. Más aún, podemos mover también el espacio inicial, entonces es natural considerar

$$\mathcal{S}t_{\mathfrak{I}}(v) := \{\, uvw^* \,:\, u, w \in \mathcal{U}_{\mathfrak{I}}(\mathcal{H}) \,\},$$

que llamaremos **$\mathfrak{I}$-variedad de Stiefel generalizada asociada a** $v$. La correspondiente acción a izquierda de $\mathcal{U}_{\mathfrak{I}}(\mathcal{H}) \times \mathcal{U}_{\mathfrak{I}}(\mathcal{H})$ sobre $\mathcal{I}$ está dada por $\mathcal{U}_{\mathfrak{I}}(\mathcal{H}) \times \mathcal{U}_{\mathfrak{I}}(\mathcal{H}) \times \mathcal{I} \to \mathcal{I}$,

$(u, w, v) \mapsto uvw^*$. Notemos que cada variedad de Stiefel está contenida en el espacio de Banach afín $v + \mathfrak{I}$, entonces hay definida una topología obvia inducida por la métrica $(v_1\,,\,v_2) \mapsto \|v_1 - v_2\|_{\mathfrak{I}}$. En este capítulo buscaremos entender algunos aspectos de la geometría de $\mathcal{S}_{\mathfrak{I}}(v)$ y $\mathcal{S}t_{\mathfrak{I}}(v)$ cuando $v$ es una isometría parcial de rango y corango eventualmente de dimensión infinita.

## 5.1. Caracterización espacial

En esta sección daremos una descripción alternativa de las variedades de Stiefel. Recordemos primero la noción de **índice de un par Fredholm de proyecciones ortogonales** (ver por ejemplo [SV78], [ASS94]). Sean $p, q$ dos proyecciones ortogonales en $\mathcal{H}$ con rangos $R(p), R(q)$ respectivamente. El par $(p, q)$ es Fredholm si $qp : R(p) \longrightarrow R(q)$ es Fredholm. El índice de este operador es el índice del par $(p, q)$ y lo indicaremos por $j(p, q)$.

Necesitaremos tres lemas para la caracterización de las variedades de Stiefel. El primero lema fue establecido por Ş. Strătilă y D. Voiculescu en [SV78] cuando $\mathfrak{I}$ es el ideal de los operadores de Hilbert-Schmidt. Más tarde, A. Carey lo generalizó en [Ca85] para cualquier ideal de Banach separable.

**Lema 5.1.1.** *(Carey) Sean $p, q$ proyecciones ortogonales. Entonces $p - q \in \mathfrak{I}$ y $j(p, q) = 0$ equivale a $upu^* = q$ para algún $u \in \mathcal{U}_{\mathfrak{I}}(\mathcal{H})$.*

El siguiente resultado fue probado en [ST07].

**Lema 5.1.2.** *(Serban-Turcu) Sean $\mathcal{H}$, $\mathcal{K}$ espacios de Hilbert separables de dimensión infinita. Sean $\mathcal{H}_0$, $\mathcal{H}_1$ subespacios de dimensión infinita de $\mathcal{H}$ y $p_i$ la proyección ortogonal sobre cada $\mathcal{H}_i$ ($i = 1, 2$). Los siguientes enunciados son equivalentes:*

- *Existen dos isometrías parciales $v_1$, $v_2$ en $\mathcal{B}(\mathcal{K}, \mathcal{H})$ con rangos $\mathcal{H}_1$ y $\mathcal{H}_2$ respectivamente tales que $v_1 - v_2$ es compacto.*
- *$p_1 - p_2$ es compacto y $j(p_1, p_2) = 0$.*

El siguiente resultado puede interpretarse como un resultado de factorización para las isometrías en la $\mathfrak{I}$-variedad de Stiefel asociada a $v$.

**Lema 5.1.3.** *Sean $\mathfrak{I}$ un ideal de Banach separable y $v, v_0$ isometrías parciales. Entonces son equivalentes:*

1. *Existe $u \in \mathcal{U}_{\mathfrak{I}}(\mathcal{H})$ tal que $uv = v_0$.*
2. *$v - v_0 \in \mathfrak{I}$ y $\ker(v) = \ker(v_0)$.*

*Demostración.* $1 \Rightarrow 2$. Sea $u \in \mathcal{U}_{\mathfrak{I}}(\mathcal{H})$ tal que $uv = v_0$. Entonces tenemos,

$$v - v_0 = v - uv = (1 - u)v \in \mathfrak{I}.$$

Por otro lado, es inmediato que $\ker(v_0) = \ker(uv) = \ker(v)$, y así hemos probado la implicación más directa.

$2 \Rightarrow 1$. Sea $v_0$ una isometría parcial cumpliendo $v - v_0 \in \mathfrak{I}$ y $\ker(v) = \ker(v_0)$. Supongamos primero que $dimR(v) = \infty$. Como tenemos $R(v^*) = \ker(v)^\perp = \ker(v_0)^\perp$ entonces

$$u_0 := v_0 v^* : R(v) \longrightarrow R(v_0)$$

define una isometría suryectiva. Entonces $\dim R(v_0) = \infty$, y $v, v_0 \in \mathcal{B}(\ker(v)^\perp, \mathcal{H})$ son isometrías tales que $v - v_0$ es compacto. Luego podemos aplicar el Lema 5.1.2 para obtener $j(vv^*, v_0v_0^*) = 0$. Como $(1-vv^*)-(1-v_0v_0^*) \in \mathfrak{I}$ y $0 = j(vv^*, v_0v_0^*) = -j(1-vv^*, 1-v_0v_0^*)$, por el Lema 5.1.1 existe $u_1 \in \mathcal{U}_\mathfrak{I}(\mathcal{H})$ cumpliendo $u_1(1 - vv^*)u_1^* = 1 - v_0v_0^*$. Notemos que $u_1$ envía $R(v)^\perp$ sobre $R(v_0)^\perp$, así la restricción

$$u_1 : R(v)^\perp \longrightarrow R(v_1)^\perp$$

es una isometría suryectiva. Entonces, si definimos $u := u_0 \oplus u_1$, resulta un unitario en $\mathcal{H}$ tal que $uv = v_0$. Además, $(u-1)vv^* = v_0v^* - vv^* \in \mathfrak{I}$ y $(u-1)(1-vv^*) = (u_1-1)(1-vv^*) \in \mathfrak{I}$, así podemos concluir que $u \in \mathcal{U}_\mathfrak{I}(\mathcal{H})$.

Supongamos ahora que $\dim R(v) < \infty$. Como antes definimos una isometría de $R(v)$ sobre $R(v_0)$, y obtenemos $\dim R(v_0) < \infty$. Así, $\dim R(v)^\perp \cap R(v_0)^\perp = \dim(R(v) + R(v_0))^\perp = \infty$. Sean $\{ \eta_j : j \in \mathbb{N} \}$ una base ortonormal de $R(v)^\perp \cap R(v_0)^\perp$ y $\{ \xi_j : j \in \mathbb{N} \}$ una base ortonormal de $\mathcal{H}$ donde los primeros $n$ vectores formen una base de $\ker(v)^\perp$. Sean

$$\tilde{v}\xi_j = \begin{cases} V\xi_j\,, & 1 \leq j \leq n, \\ \eta_{j-n}\,, & j > n, \end{cases} \qquad \tilde{v_0}\xi_j = \begin{cases} v_0\xi_j\,, & 1 \leq j \leq n, \\ \eta_{j-n}\,, & j > n. \end{cases}$$

Así $\tilde{v}, \tilde{v_0}$ son isometrías tal que $\tilde{v_0} - \tilde{v}$ es compacto, luego por la primera parte de la prueba obtenemos $\tilde{v_0} = u\tilde{v}$ para algún $u \in \mathcal{U}_\mathfrak{I}(\mathcal{H})$. Finalmente, es fácil verificar que $v_0 = uv$. □

El próximo resultado nos da una idea de cuánto pueden cambiar el espacio inicial y final de una isometría parcial en $\mathcal{S}t_\mathfrak{I}(v)$ para continuar estando en esta órbita.

**Teorema 5.1.4.** *Sean $\mathfrak{I}$ un ideal de Banach separable y $v, v_0$ isometrías parciales. Entonces son equivalentes:*

1. *Existen $u, w \in \mathcal{U}_\mathfrak{I}(\mathcal{H})$ tales que $uvw^* = v_0$.*
2. *$v - v_0 \in \mathfrak{I}$ y $j(v^*v, v_0^*v_0) = 0$.*
3. *$v - v_0 \in \mathfrak{I}$ y $j(vv^*, v_0v_0^*) = 0$.*

*Demostración.* $1 \Rightarrow 2$. Sean $u, w \in \mathcal{U}_\mathfrak{I}(\mathcal{H})$ tales que $uvw^* = v_0$. Entonces notemos,

$$v - v_0 = v - uvw^* = -(u-1)vw^* - v(w^* - 1) \in \mathfrak{I}.$$

Por otro lado, como $v_0^*v_0 = (uvw^*)^*(uvw^*) = wv^*vw^*$, entonces por el Lema 5.1.1 tenemos que $j(v^*v, v_0^*v_0) = 0$.

$2 \Rightarrow 1$. Como suponemos que $v - v_0 \in \mathfrak{I}$, entonces $v^* - v_0^* \in \mathfrak{I}$. Si multiplicamos la primera ecuación por $v^*$, obtenemos $v^*v - v^*v_0 \in \mathfrak{I}$, y si multiplicamos la segunda por $v_0$ nos queda $v^*v_0 - v_0^*v_0 \in \mathfrak{I}$. Entonces, si sumamos estas dos últimas, resulta que $v^*v - v_0^*v_0 \in \mathfrak{I}$. Además, también estamos suponiendo que $j(v^*v, v_0^*v_0) = 0$. Entonces, nuevamente por el Lema 5.1.1, tenemos

$$w(v^*v)w^* = v_0^*v_0,$$

para algún $w \in \mathcal{U}_{\mathfrak{I}}(\mathcal{H})$. En particular, notemos que $(v_0 w)^*(v_0 w) = v^*v$ y $v - v_0 w = v - v_0 + v_0(w-1) \in \mathfrak{I}$. Luego, $v_0 w$ y $v$ son dos isometrías parciales cumpliendo las hipótesis del Lema 5.1.3. Por lo tanto, exite $u \in \mathcal{U}_{\mathfrak{I}}(\mathcal{H})$ tal que $uv = v_0 w$, o de otra manera, $uvw^* = v_0$, como queríamos demostrar.

$1 \Leftrightarrow 3$. Se deduce inmediatamente de la equivalencia demostrada anteriormente si reemplazamos $v$ por $v^*$. □

**Observación 5.1.5.** *Notemos que dadas dos isometrías parciales tal que su diferencia está en un ideal $\mathfrak{I}$, si sus proyecciones iniciales poseen índice igual a cero, entonces también sus proyecciones finales poseen índice igual a cero. Una afirmación similar es válida cuando reemplazamos proyecciones finales por iniciales y viceversa.*

*Esto no es cierto para isometrías parciales arbitrarias. Por ejemplo, si $v = 1$ y $v_0$ es el shift unilateral, entonces $j(v^*v, v_0^*v_0) = 0$, pero $j(vv^*, v_0v_0^*) = 1$.*

**Corolario 5.1.6.** *Sean $\mathfrak{I}$ un ideal de Banach separable, $\mathcal{I}$ el conjunto de las isometrías parciales y $v \in \mathcal{I}$ fija. Entonces:*

$$(v + \mathfrak{I}) \cap \mathcal{I} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \{\, v_0 \in (v + \mathfrak{I}) \cap \mathcal{I} \,:\, j(v^*v, v_0^*v_0) = k \,\},$$

*donde los conjuntos de la derecha son sus componentes conexas. Además, siempre hay numerables componentes no vacías.*

*Demostración.* Llamemos $C_{v_0}$ a la componente conexa de $v_0 \in (v + \mathfrak{I}) \cap \mathcal{I}$. Sean $k \in \mathbb{Z}$ y $v_1 \in (v + \mathfrak{I}) \cap \mathcal{I}$ tales que $j(v^*v, v_1^*v_1) = k$. Entonces, como $(v_0^*v_0, v^*v)$ y $(v^*v, v_1^*v_1)$ son pares de Fredholm, por la fórmula del índice de proyecciones probada en [ASS94], podemos afirmar:

$$j(v_0^*v_0, v_1^*v_1) = j(v_0^*v_0, v^*v) + j(v^*v, v_1^*v_1) = -k + k = 0.$$

Por otro lado, como también $v - v_0 \in \mathfrak{I}$ y $v - v_1 \in \mathfrak{I}$, tenemos $v_0 - v_1 \in \mathfrak{I}$. Entonces por el Teorema 5.1.4 obtenemos que existen $u, w \in \mathcal{U}_{\mathfrak{I}}(\mathcal{H})$ cumpliendo $uv_0w^* = v_1$. Como los grupos $\mathcal{U}_{\mathfrak{I}}(\mathcal{H})$ son conexos por arcos podemos concluir que $v_1 \in C_{v_0}$.

Para probar la otra inclusión, consideremos $\mathcal{P}$ el conjunto de proyecciones ortogonales en $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. Dada un proyección $p \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, las componentes conexas de $(p + \mathfrak{I}) \cap \mathcal{P}$ están caracterizadas en [Ca85] como

$$\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \{\, p_0 \in \mathcal{P} \,:\, j(p, p_0) = k \,\}$$

Entonces si usamos que la función

$$\varphi : (v + \mathfrak{I}) \cap \mathcal{I} \longrightarrow (p + \mathfrak{I}) \cap \mathcal{P}, \quad \varphi(x) = x^*x,$$

es continua, resulta sencillo probar la inclusión buscada.

La afirmación respecto a la cantidad numerable de conjuntos no vacíos se desprende de la fórmula para un par de proyecciones $(p, q)$ Fredholm dada por

$$j(p, q) = \dim(R(p) \cap \ker(q)) - \dim(R(q) \cap \ker(p)).$$

En efecto, como $\ker(v^*v) \oplus R(v^*v) = \mathcal{H}$, entonces, alguno de los dos subespacios $\ker(v^*v)$ o $R(v^*v)$ posee dimensión infinita. Luego, se pueden construir isometrías aprovechando esto. □

**Observación 5.1.7.** *La prueba anterior también muestra que la componente conexa de* $v_0 \in (v + \mathfrak{I}) \cap \mathcal{I}$ *coincide con la órbita* $\mathcal{S}t_{\mathfrak{I}}(v_0)$.

## 5.2. Estructura de espacio homogéneo reductivo

En esta sección probamos que $\mathcal{S}t_{\mathfrak{I}}(v)$ es una subvariedad analítica real de $v + \mathfrak{I}$ y un espacio homogéneo reductivo de $\mathcal{U}_{\mathfrak{I}}(\mathcal{H}) \times \mathcal{U}_{\mathfrak{I}}(\mathcal{H})$. Resultados análogos son válidos para $\mathcal{S}_{\mathfrak{I}}(v)$ y el grupo $\mathcal{U}_{\mathfrak{I}}(\mathcal{H})$, siendo en este caso las pruebas más sencillas.

Primero probamos que la acción de $\mathcal{U}_{\mathfrak{I}}(\mathcal{H}) \times \mathcal{U}_{\mathfrak{I}}(\mathcal{H})$ sobre $\mathcal{S}t_{\mathfrak{I}}(v)$ admite secciones locales continuas.

**Lema 5.2.1.** *La función*

$$\pi_v : \mathcal{U}_{\mathfrak{I}}(\mathcal{H}) \times \mathcal{U}_{\mathfrak{I}}(\mathcal{H}) \longrightarrow \mathcal{S}t_{\mathfrak{I}}(v) \subset v + \mathfrak{I}, \qquad \pi_v((w, u)) = uvw^*,$$

*posee secciones locales continuas. En particular, es un fibrado localmente trivial.*

*Demostración.* Sea $v_0 \in \mathcal{S}t_{\mathfrak{I}}(v)$ tal que $\|v_0 - v\|_{\mathfrak{I}} < 1$. La idea para hallar unitarios que dependan continuamente de $v_0$ está adaptada de [ACM05]. Recordemos que $\| \, . \, \|$ denota la norma usual de operadores. Llamemos $p = vv^*$, $p_0 = v_0 v_0^*$, así tenemos:

$$\begin{aligned}
\|p - pp_0\| &= \|vv^* - vv^* v_0 v_0^*\| \le \|v^*(1 - v_0 v_0^*)\| \\
&= \|(v^* - v_0^*)(1 - v_0 v_0^*)\| \le \|v^* - v_0^*\| \le \|v_0 - v\|_{\mathfrak{I}} < 1.
\end{aligned}$$

Luego,

$$\|p - pp_0 p\| \le \|p - pp_0\| < 1.$$

Entonces obtenemos que $pp_0p$ es invertible en $R(p)$. Tomando las inversas en $R(p)$, si denominamos $s = p_0(pp_0p)^{-1/2} = p_0|p_0p|^{-1}$, notemos que

$$s^*s = (pp_0p)^{-1/2} p_0 (pp_0p)^{-1/2} = (pp_0p)^{-1/2}(pp_0p)(pp_0p)^{-1/2} = p.$$

El siguiente paso es probar que $ss^* = p_0$. Primero chequeamos que $p_0p = s|p_0p|$ es en realidad la descomposición polar, probando las siguientes condiciones:

i) $s|p_0p| = p_0|p_0p|^{-1}|p_0p| = p_0p$.

ii) Claramente $R(p) = R(pp_0p) \subseteq R(pp_0) \subseteq R(p)$, i.e. $R(p) = R(pp_0)$. Así,

$$\ker(s) = \ker(p) = R(p)^{\perp} = R(pp_0)^{\perp} = \ker(p_0p).$$

Como $s$ es la isometría parcial dada por la descomposición polar, su espacio final coincide con $R(p_0p) = R(p_0)$ (está igualdad se puede probar como en 2. cambiando los roles de $p_0$ y $p$). Luego, tenemos $ss^* = p_0$.
Por el mismo argumento de arriba,

$$\|(1 - p) - (1 - p)(1 - p_0)\| = \|p_0 - pp_0\| < 1.$$

Entonces existe una isometría parcial $s' : \ker(p) \longrightarrow \ker(p_0)$ que implementa la equivalencia entre $1 - p$ y $1 - p_0$. Si definimos $t = s + s'$, luego satisface $t \in \mathcal{U}(\mathcal{H})$ y $tvv^*t^* = v_0v_0^*$.

Análogamente, podemos construir $w \in \mathcal{U}(\mathcal{H})$ cumpliendo $wv^*vw^* = v_0^*v_0$.
Observemos que las isometrías $tvw^*$ y $v_0$ poseen los mismos espacios iniciales y finales. Entonces, tomando $r = v_0(tvw^*)^* + 1 - v_0v_0^*$, claramente tenemos $r \in \mathcal{U}(\mathcal{H})$. Más aún,

$$rtvw^* = v_0(tvw^*)^*(tvw^*) + (1 - v_0v_0^*)tvw^* = v_0v_0^*v_0 = v_0\,.$$

Finalmente, si tomamos $u = rt \in \mathcal{U}(\mathcal{H})$, y satisface $uvw^* = v_0$.
*Afirmación:* $u, w \in \mathcal{U}_{\mathfrak{I}}(\mathcal{H})$.
Para mostrar esto, recordemos que $v_0 - v \in \mathfrak{I}$. Entonces $p_0 - p \in \mathfrak{I}$. Luego,

$$|p_0p|^2 - p = pp_0p - p = p(p_0 - p)p \in \mathfrak{I}. \tag{5.1}$$

Como $|p_0p|$ y $p$ conmutan, podemos escribir

$$|p_0p|^2 - p = (|p_0p| + p)(|p_0p| - p).$$

Más aún, $|p_0p| + p$ es invertible en $R(p)$, entonces por la igualdad (5.1) obtenemos

$$|p_0p| - p = (|p_0p| + p)^{-1}(|p_0p|^2 - p) \in \mathfrak{I}.$$

En particular, esto implica

$$|p_0p|^{-1} - p = |p_0p|^{-1}(p - |p_0p|) \in \mathfrak{I}.$$

Luego,

$$s - p = p_0|p_0p|^{-1} - p = (p_0 - p)|p_0p|^{-1} + p(|p_0p|^{-1} - p) \in \mathfrak{I}.$$

Análogamente podemos mostrar que $s' - (1 - p) \in \mathfrak{I}$. Entonces,

$$t - 1 = (s - p) + (s' - (1 - p)) \in \mathfrak{I}.$$

Por un argumento similar tenemos que $w \in \mathcal{U}_{\mathfrak{I}}(\mathcal{H})$. Así, si tenemos en cuenta que llamamos $r = v_0(tvw^*)^* + 1 - v_0v_0^*$, obtenemos

$$\begin{aligned} r - 1 &= v_0(tvw^*)^* - v_0v_0^* \\ &= v_0(w - 1)v^*t^* + v_0v^*(t^* - 1) + v_0(v^* - v_0^*) \in \mathfrak{I}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $u = rt \in \mathcal{U}_{\mathfrak{I}}(\mathcal{H})$.
*Afirmación:* La función

$$\{\, v_0 \in \mathcal{S}t_{\mathfrak{I}}(v) \,:\, \|v_0 - v\|_{\mathfrak{I}} < 1 \,\} \subseteq v + \mathfrak{I} \longrightarrow \mathcal{U}_{\mathfrak{I}}(\mathcal{H}) \times \mathcal{U}_{\mathfrak{I}}(\mathcal{H}), \quad v_0 \mapsto (u(v_0), w(v_0))$$

es continua.
Para demostrar la afirmación escribiremos a la función anterior como composición de funciones continuas. Primero, consideremos la siguiente función:

$$\mathcal{S}t_{\mathfrak{I}}(v) \longrightarrow p + p\mathfrak{I}p, \quad v_0 \mapsto v_0v_0^*p.$$

Es claramente continua. Observemos que debido a ser $\mathbb{C}p + p\mathfrak{I}p$ un álgebra de Banach con una involución, multiplicar y tomar inversas son funciones continuas, entonces

$$p + p\mathfrak{I}p \longrightarrow p + p\mathfrak{I}p, \quad v_0v_0^*p \mapsto v_0v_0^*p\,|v_0v_0^*p\,|^{-1}$$

es continua. Luego, si llamamos

$$s : \mathcal{S}t_{\mathfrak{I}}(v) \longrightarrow p + p\mathfrak{I}p, \quad s(v_0) = v_0v_0^*p\,|v_0v_0^*p\,|^{-1},$$

resulta una función continua. Análogomente, podemos probar que

$$s' : \mathcal{S}t_{\mathfrak{I}}(v) \longrightarrow 1 - p + (1-p)\mathfrak{I}(1-p), \quad s'(v_0) = (1 - v_0v_0^*)(1-p)|(1 - v_0v_0^*)(1-p)\,|^{-1},$$

define una función continua. Sumando estas funciones, obtenemos que

$$t : \mathcal{S}t_{\mathfrak{I}}(v) \longrightarrow \mathcal{U}_{\mathfrak{I}}(\mathcal{H}), \quad t(v_0) = s(v_0) + s'(v_0)$$

es una función continua. Por otro lado, como $w$ está construído de forma análoga a $t$, tenemos que $v_0 \mapsto w(v_0)$ es continua. Entonces, la siguiente función, que básicamente consite en multiplicar y adjuntar,

$$r : \mathcal{S}t_{\mathfrak{I}}(v) \longrightarrow \mathcal{U}_{\mathfrak{I}}(\mathcal{H}), \quad r(v_0) = v_0(t(v_0)vw(v_0)^*)^* + 1 - vv^*,$$

es continua. Por lo tanto, podemos concluir que $v_0 \mapsto (r(v_0)t(v_0), wv_0))$ es continua. □

El mismo resultado puede ser probado para $\mathcal{S}_{\mathfrak{I}}(v)$.

**Corolario 5.2.2.** *La función*

$$\pi_v : \mathcal{U}_{\mathfrak{I}}(\mathcal{H}) \longrightarrow \mathcal{S}_{\mathfrak{I}}(v) \subset v + \mathfrak{I}, \qquad \pi_v(u) = uv,$$

*posee secciones locales continuas. En particular, es un fibrado localmente trivial.*

Notemos que el grupo de isotropía en $v_0 \in \mathcal{S}t_{\mathfrak{I}}(v)$ de la acción de $\mathcal{U}_{\mathfrak{I}}(\mathcal{H}) \times \mathcal{U}_{\mathfrak{I}}(\mathcal{H})$ sobre $\mathcal{S}t_{\mathfrak{I}}(v)$ está dado por

$$G_{v_0} = \{\, (u, w) \in \mathcal{U}_{\mathfrak{I}}(\mathcal{H}) \times \mathcal{U}_{\mathfrak{I}}(\mathcal{H}) \;:\; uv_0 = v_0w \,\}.$$

El álgebra de Lie es

$$\mathfrak{g}_{v_0} = \{\, (x, y) \in \mathfrak{I}_{ah} \times \mathfrak{I}_{ah} \;:\; xv_0 = v_0y \,\}.$$

Recordemos que una estructura reductiva para $\mathcal{S}t_{\mathfrak{I}}(v)$ es una distribución suave de espacios horizontales $\{\, \mathcal{F}_{v_0} \;:\; v_0 \in \mathcal{S}t_{\mathfrak{I}}(v) \,\}$ que son suplementos para las álgebras de Lie de las isotropías: $\mathcal{F}_{v_0} \oplus \mathfrak{g}_{v_0} = \mathfrak{I}_{ah} \times \mathfrak{I}_{ah}$. Cada $\mathcal{F}_{v_0}$ debe ser invariante bajo la acción interior de $G_{v_0}$. Ahora estamos en condiciones de enunciar el principal resultado de esta sección.

**Teorema 5.2.3.** *Sea $v \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ una isometría parcial. Entonces $\mathcal{S}t_{\mathfrak{I}}(v)$ es una subvariedad analítica real de $v + \mathfrak{I}$ y la función*

$$\pi_v : \mathcal{U}_{\mathfrak{I}}(\mathcal{H}) \times \mathcal{U}_{\mathfrak{I}}(\mathcal{H}) \longrightarrow \mathcal{S}t_{\mathfrak{I}}(v), \qquad \pi_v((w, u)) = uvw^*,$$

*es una sumersión analítica real. Más aún, $\mathcal{S}t_{\mathfrak{I}}(v)$ es un espacio homogéneo reductivo del grupo $\mathcal{U}_{\mathfrak{I}}(\mathcal{H}) \times \mathcal{U}_{\mathfrak{I}}(\mathcal{H})$.*

*Demostración.* Sólo debemos aplicar el Lema 2.6.2 con $G = \mathcal{U}_{\mathfrak{I}}(\mathcal{H}) \times \mathcal{U}_{\mathfrak{I}}(\mathcal{H})$, $X = v + \mathfrak{I}$ y $x_0 = v$. Notemos que $\pi_v$ es abierta por el Lema 5.2.1. La diferencial de $\pi_v$ en 1 está dada por

$$\delta_v := (\pi_v)_{*1} : \mathfrak{I}_{ah} \times \mathfrak{I}_{ah} \longrightarrow \mathfrak{I}, \quad \delta_v(x,y) = xv - vy.$$

El núcleo de esta función es el álgebra de Lie de la isotropía en $v$ que puede ser expresado como

$$\mathfrak{g}_v = \{ \, ( \begin{pmatrix} x_{11} & 0 \\ 0 & x_{22} \end{pmatrix}_{vv^*}, \begin{pmatrix} v^* x_{11} v & 0 \\ 0 & y_{22} \end{pmatrix}_{v^*v} ) \, : \, x_{11},\, x_{22},\, y_{11} \in \mathfrak{I}_{ah} \, \}. \tag{5.2}$$

Aquí los subíndices $vv^*$ y $v^*v$ indican que la descomposición matricial es con respecto a estas proyecciones. Un complemento cerrado para $\mathfrak{g}_v$ es

$$\mathcal{F}_v = \{ \, ( \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ -x_{12}^* & 0 \end{pmatrix}_{vv^*}, \begin{pmatrix} 0 & y_{12} \\ -y_{12}^* & 0 \end{pmatrix}_{v^*v} ) \, : \, x_{11} \in \mathfrak{I}_{ah},\, x_{12},\, y_{12} \in \mathfrak{I} \, \}. \tag{5.3}$$

El argumento dado en [AC05] para mostrar que el rango es cerrado no depende de la dimensión del rango de $v$. Lo repetimos brevemente a continuación. Consideremos la función lineal real:

$$\mathcal{K}_v : \mathfrak{I} \longrightarrow \mathfrak{I} \times \mathfrak{I}, \quad \mathcal{K}_v = (\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2),$$
$$\mathcal{K}_1(a) = \frac{1}{4} vv^*av^* - \frac{1}{4} va^*vv^* + (1 - vv^*)av^* - va^*(1 - vv^*),$$
$$\mathcal{K}_2(a) = -\frac{1}{4} v^*av^*v + \frac{1}{4} v^*va^*v - v^*a(1 - v^*v) + (I - v^*v)a^*v.$$

Entonces puede probarse que $\delta_v \circ \mathcal{K}_v \circ \delta_v = \delta_v$. Luego $\delta_v \circ \mathcal{K}_v$ es un idempotente en $\mathfrak{I}$, cuyo rango es cerrado e igual a $\delta_v$. Como la acción es real analítica tenemos que $\mathcal{S}t_{\mathfrak{I}}(v)$ es una subvariedad analítica real de $v + \mathfrak{I}$ y $\pi_v$ es una sumersión analítica real.

Por lo tanto, $\mathcal{S}t_{\mathfrak{I}}(v)$ es es un espacio homogéneo de $\mathcal{U}_{\mathfrak{I}}(\mathcal{H}) \times \mathcal{U}_{\mathfrak{I}}(\mathcal{H})$. La estructura reductiva está dada por $\{ \mathcal{F}_{v_1} \, : \, v_1 \in \mathcal{S}t_{\mathfrak{I}}(v) \}$ como en (5.3). Un cálculo directo utilizando las representaciones matriciales de arriba muestra que estos suplementos cumplen $Ad(u,w)(\mathcal{F}_v) = \mathcal{F}_v$, para todo $(u,w) \in G_v$. $\square$

Ahora consideramos el caso $\mathcal{S}_{\mathfrak{I}}(v)$. Observemos que el grupo de isotropía en $v_0$ de la acción de $\mathcal{U}_{\mathfrak{I}}(\mathcal{H})$ sobre $\mathcal{S}_{\mathfrak{I}}(v)$ está dado por

$$G_{v_0} = \{ \, u \in \mathcal{U}_{\mathfrak{I}}(\mathcal{H}) \, : \, uv_0 = v_0 \, \}.$$

El álgebra de Lie es

$$\mathfrak{g}_{v_0} = \{ \, x \in \mathfrak{I}_{ah} \, : \, xv_0 = 0 \, \}.$$

**Corolario 5.2.4.** *Sea $v \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ una isometría parcial. Entonces $\mathcal{S}_{\mathfrak{I}}(v)$ es una subvariedad analítica real de $v + \mathfrak{I}$ y la función*

$$\pi_v : \mathcal{U}_{\mathfrak{I}}(\mathcal{H}) \longrightarrow \mathcal{S}_{\mathfrak{I}}(v), \qquad \pi_v(u) = uv,$$

*es una sumersión analítica real. Más aún, $\mathcal{S}_{\mathfrak{I}}(v)$ es un espacio homogéneo reductivo de $\mathcal{U}_{\mathfrak{I}}(\mathcal{H})$.*

*Demostración.* Se prueba aplicando el Lema 2.6.2 con $G = \mathcal{U}_{\mathfrak{I}}(\mathcal{H})$, $X = v + \mathfrak{I}$ y $x_0 = v$. Es un corolario de la demostración del Teorema 5.2.3. $\square$

## 5.3. Completitud como espacios métricos

En esta sección probamos que $\mathcal{S}t_{\mathfrak{I}}(v)$ y $\mathcal{S}_{\mathfrak{I}}(v)$ son espacios métricos completos con la distancia rectificable dada por la métrica del ambiente y la métrica cociente. Primero consideraremos $\mathcal{S}t_{\mathfrak{I}}(v)$. Teniendo en cuenta que $\pi_{v_0}$ es una sumersión, el espacio tangente de $\mathcal{S}t_{\mathfrak{I}}(v)$ en $v_0$ es

$$(\, T\mathcal{S}t_{\mathfrak{I}}(v)\,)_{v_0} = \{\, xv_0 - v_0 y \,:\, x, y \in \mathfrak{I}_{ah}\,\}.$$

A continuación describiremos dos métricas que resultan invariantes para la acción de $\mathcal{U}_{\mathfrak{I}}(\mathcal{H}) \times \mathcal{U}_{\mathfrak{I}}(\mathcal{H})$ sobre $\mathcal{S}t_{\mathfrak{I}}(v)$. Dado $xv_0 - v_0 y \in (\, T\mathcal{S}t_{\mathfrak{I}}(v)\,)_{v_0}$ definimos la **métrica de Finsler del ambiente** por

$$F_a(xv_0 - v_0 y) := \|xv_0 - v_0 y\|_{\mathfrak{I}}.$$

Por otro lado, podemos construir una métrica de Finsler cociente natural. Fijada una función gauge simétrica $\Phi$ en $\mathbb{R}^2$, y dado $xv_0 - v_0 y \in (\, T\mathcal{S}t_{\mathfrak{I}}(v)\,)_{v_0}$ definimos la **métrica de Finsler cociente** por

$$F_q(xv_0 - v_0 y) := \inf\{\; \Phi(\, \|x+a\|_{\mathfrak{I}}\,,\, \|y+b\|_{\mathfrak{I}}\,) \,:\, av_0 = v_0 b,\, a, b \in \mathfrak{I}_{ah}\,\}.$$

De hecho, en cada espacio tangente, resulta ser la norma cociente de $(\mathfrak{I}_{ah} \times \mathfrak{I}_{ah})/\mathcal{G}_{v_0}$. Ahora mostraremos que ambas métricas son equivalentes con cotas que no dependen de $v$, del ideal $\mathfrak{I}$ y de la función simétrica $\Phi$.

**Proposición 5.3.1.** *Sea $xv_0 - v_0 y \in (T\mathcal{S}t_{\mathfrak{I}}(v))_{v_0}$. Entonces:*

$$\frac{1}{4}\, F_q(xv_0 - v_0 y) \leq F_a(xv_0 - v_0 y) \leq 2\, F_q(xv_0 - v_0 y).$$

*Demostración.* Notemos que como ambas métricas son invariantees para la acción podemos suponer $v = v_0$. Usaremos la siguiente desigualdad elemental (ver [GK60]): Para toda función gauge simétrica $\Phi$ y $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tenemos

$$\max\{\, |x|\,,\, |y|\,\} \leq \Phi(x, y) \leq |x| + |y|. \tag{5.4}$$

Para probar la primera desigualdad, observemos que para todo $(a, b) \in \mathfrak{g}_v$ obtenemos

$$F_q(xv_0 - v_0 y) \leq \Phi(\, \|x+a\|_{\mathfrak{I}}\,,\, \|y+b\|_{\mathfrak{I}}\,) \leq 2\, \max\{\, \|x+a\|_{\mathfrak{I}}\,,\, \|y+b\|_{\mathfrak{I}}\,\}. \tag{5.5}$$

En particular, podemos elegir

$$a = \begin{pmatrix} \frac{-x_{11} - vy_{11}v^*}{2} & 0 \\ 0 & -x_{22} \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} \frac{-v^* x_{11} v - y_{11}}{2} & 0 \\ 0 & -y_{22} \end{pmatrix},$$

donde las descomposiciones matriciales son respecto a las mismas proyecciones que en (5.2). Luego,

$$\begin{aligned}
\|x+a\|_{\mathfrak{I}} &= \left\| \begin{pmatrix} \frac{x_{11} - vy_{11}v^*}{2} & x_{12} \\ -x_{12}^* & 0 \end{pmatrix} \right\|_{\mathfrak{I}} \\
&\leq \left\| \begin{pmatrix} \frac{x_{11} - vy_{11}v^*}{2} & 0 \\ -x_{12}^* & 0 \end{pmatrix} \right\|_{\mathfrak{I}} + \left\| \begin{pmatrix} 0 & x_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\|_{\mathfrak{I}} \\
&= \left\| \begin{pmatrix} \frac{x_{11}v - vy_{11}}{2} & 0 \\ -x_{12}^* v & 0 \end{pmatrix} \right\|_{\mathfrak{I}} + \left\| \begin{pmatrix} 0 & x_{12}v \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\|_{\mathfrak{I}} \\
&\leq 2 \left\| \begin{pmatrix} x_{11}v - vy_{11} & 0 \\ -x_{12}^* v & 0 \end{pmatrix} \right\|_{\mathfrak{I}} \leq 2 \left\| \begin{pmatrix} x_{11}v - vy_{11} & vy_{12} \\ -x_{12}^* v & 0 \end{pmatrix} \right\|_{\mathfrak{I}} = 2\, \|xv - vy\|_{\mathfrak{I}}.
\end{aligned}$$

Un argumento similar muestra que $\|y+b\|_{\mathfrak{I}} \leq 2\,\|xv - vy\|_{\mathfrak{I}}$. Por lo tanto, por (5.5) obtenemos

$$\frac{1}{4}\,F_q(xv_0 - v_0y) \leq F_a(xv_0 - v_0y).$$

Para probar la otra desigualdad, fijemos $\epsilon > 0$ y tomemos $(a,b) \in \mathfrak{g}_v$ tal que

$$\Phi(\|x+a\|_{\mathfrak{I}}\,,\, \|y+b\|_{\mathfrak{I}}\,) < F_q(xv - vy) + \epsilon.$$

Entonces por (5.4) tenemos

$$\begin{aligned} F_a(xv - vy) &= \|xv - vy\|_{\mathfrak{I}} = \|(x+a)v - v(y+b)\|_{\mathfrak{I}} \\ &\leq \|x+a\|_{\mathfrak{I}} + \|y+b\|_{\mathfrak{I}} \leq 2\Phi(\,\|x+a\|_{\mathfrak{I}}\,,\, \|y+b\|_{\mathfrak{I}}\,) \\ &< 2\,F_q(xv - vy) + 2\epsilon. \end{aligned}$$

Por lo tanto, podemos concluir

$$F_a(xv - vy) \leq 2\,F_q(xv - vy),$$

y la proposición queda demostrada. □

**Observación 5.3.2.** *Cuando consideramos los operadores de Hilbert-Schimidt $\mathcal{B}_2(\mathcal{H})$ y la función simétrica es la norma euclídea en $\mathbb{R}^2$ tenemos que*

$$F_a(xv_0 - v_0y) = \sqrt{2}\,F_q(xv_0 - v_0y). \tag{5.6}$$

*En este caso, la norma cociente puede ser explícitamente calculada como mostramos a continuación. Definamos la proyección real acotada sobre $\mathfrak{g}_{v_0}$ por*

$$P_{v_0} : \mathcal{B}_2(\mathcal{H})_{ah} \times \mathcal{B}_2(\mathcal{H})_{ah} \longrightarrow \mathfrak{g}_{v_0}\,,$$

$$P_{v_0}\Big( \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ -x_{12}^* & x_{22} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} \\ -y_{12}^* & y_{22} \end{pmatrix} \Big) = \Big( \begin{pmatrix} \frac{x_{11}+vy_{11}v^*}{2} & 0 \\ 0 & x_{22} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{v^*x_{11}v+y_{11}}{2} & 0 \\ 0 & y_{22} \end{pmatrix} \Big).$$

*Es fácil ver que $P_{v_0}$ es la proyección ortogonal sobre $\mathfrak{g}_{v_0}$ si uno considera en $\mathcal{B}_2(\mathcal{H}) \times \mathcal{B}_2(\mathcal{H})$ el producto interno inducido*

$$\langle (a_1,b_1),(a_2,b_2) \rangle = Tr(a_1a_2^*) + Tr(b_1b_2^*),$$

*donde $Tr$ denota a la traza usual. Luego, la expresión de la norma cociente se reduce a*

$$F_q(xv_0 - v_0y) = \|\,(1 - P_{v_0})((x,y))\,\|_2,$$

*donde $\|\,.\,\|_2$ es la norma de Hilbert-Schmidt en $\mathcal{B}_2(\mathcal{H}) \times \mathcal{B}_2(\mathcal{H})$ dada por el producto interior de más arriba. Ahora la igualdad enunciada en (5.6) resulta de un cálculo directo.*

Medimos la longitud de una curva suave a trozos $\gamma(t)$ en $\mathcal{S}t_{\mathfrak{I}}(v)$ definida en $0 \leq t \leq 1$ por

$$L_a(\gamma) = \int_0^1 F_a(\dot\gamma(t))\,dt.$$

Luego, la distancia rectificable está dada por

$$d_a(v_1,v_2) = \text{ínf}\{\,L_a(\gamma)\ :\ \gamma \,\text{es una curva suave a trozos uniendo}\, \gamma(0) = v_1 \,\text{con}\, \gamma(1) = v_2\,\}.$$

**Observación 5.3.3.** *Como estamos en una variedad de Finsler de dimensión infinita, deberíamos probar que $d_a(\,.\,,\,.\,)$ es una métrica en $\mathcal{S}t_{\mathfrak{I}}(v)$. El único hecho no trivial es chequear que $d_a(v_1, v_2) = 0$ implica $v_1 = v_2$. Sea $\gamma$ una curva suave en $\mathcal{S}t_{\mathfrak{I}}(v)$ uniendo $v_1$ y $v_2$, entonces como la recta es la curva de menor longitud en todo espacio vectorial normado,*

$$\|v_1 - v_2\|_{\mathfrak{I}} \leq \int_0^1 F_a(\dot{\gamma}(t))\, dt.$$

*Luego, obtenemos*

$$\|v_1 - v_2\|_{\mathfrak{I}} \leq d_a(v_1, v_2), \tag{5.7}$$

*que claramente prueba nuestra afirmación.*

Sea $p \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ una proyección ortogonal y $\mathfrak{I}$ cualquier ideal de Banach, llamaremos la **$\mathfrak{I}$-Grassmanniana** $Gr(p)_{\mathfrak{I}}$ correspondiente a la polarización $\mathcal{H} = R(p) \oplus R(p)^{\perp}$ a la órbita dada por

$$Gr(p)_{\mathfrak{I}} = \{\, upu^* \,:\, u \in \mathcal{U}_{\mathfrak{I}}(\mathcal{H})\,\}.$$

Cuando $p$ posee rango y corango de dimensión infinita e $\mathfrak{I}$ es el ideal de los operadores de Hilbert-Schmidt esta órbita coincide con la componente conexa de la **Grassmanniana de Sato** que contiene a $p$ (ver [AL08], [BR07b], [PS86]).

Por el Lema 5.1.1 tenemos que $q \in Gr(p)_{\mathfrak{I}}$ si y sólo si $p - q \in \mathfrak{I}$ y $j(p, q) = 0$. Ahora necesitamos mostrar que $Gr(p)_{\mathfrak{I}}$ es cerrada con la norma del ideal.

**Lema 5.3.4.** *Sea $p \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ una proyección ortogonal. Sea $(p_n)_n$ una sucesión en $Gr(p)_{\mathfrak{I}}$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} \|p_n - p_0\|_{\mathfrak{I}} = 0$. Entonces $p_0 \in Gr(p)_{\mathfrak{I}}$.*

*Demostración.* Es inmediato que $p_0$ es una proyección ortogonal cumpliendo $p - p_0 \in \mathfrak{I}$. Sólo debemos probar que $j(p_0, p) = 0$. Fijemos $n \geq 1$ cumpliendo $\|p_0 - p_n\|_{\mathfrak{I}} < 1$. Como $j(p_n, p) = 0$, si utilizamos la fórmula para el índice probada en [ASS94], obtenemos

$$j(p_0, p) = j(p_0, p_n) + j(p_n, p) = j(p_0, p_n).$$

El hecho que $j(p_0, p_n) \neq 0$ es equivalente con $\dim(\ker(p_0) \cap R(p_n)) \neq \dim(\ker(p_n) \cap R(p_0))$. Supongamos que $\dim(\ker(p_0) \cap R(p_n)) > \dim(\ker(p_n) \cap R(p_0))$, en particular existe $\xi \in \ker(p_0) \cap R(p_n)$, $\|\xi\| = 1$. Luego, tenemos una contradicción porque

$$1 = \|\xi\| = \|(p_0 - p_n)\xi\| \leq \|p_0 - p_n\| \leq \|p_0 - p_n\|_{\mathfrak{I}} < 1.$$

El mismo argumento sirve para el caso $\dim(\ker(p_0) \cap R(p_n)) < \dim(\ker(p_n) \cap R(p_0))$. $\square$

Utilizando la caracterización espacial de $\mathcal{S}t_{\mathfrak{I}}(v)$ dada en la Sección 5.1 probaremos brevemente que es un espacio métrico completo con la distancia rectificable.

**Teorema 5.3.5.** *$\mathcal{S}t_{\mathfrak{I}}(v)$ es un espacio métrico completo con la distancia rectificable $d_a$.*

*Demostración.* Sea $(v_n)_n$ una sucesión de Cauchy en $\mathcal{S}t_{\mathfrak{I}}(v)$ para la métrica $d_a$. Por la desigualdad (5.7), $(v_n)_{n\geq 1}$ es también de Cauchy para la norma $\|\,.\,\|_{\mathfrak{I}}$. Como $\mathfrak{I}$ es un espacio de Banach, existe $v_0 \in v + \mathfrak{I}$ tal que $\|v_n - v_0\|_{\mathfrak{I}} \to 0$. Utilizando el Lema 5.3.4 obtenemos que $v_0 \in \mathcal{S}t_{\mathfrak{I}}(v)$.

En el Lema 5.2.1 probamos que $\pi_{v_0} : \mathcal{U}_\mathfrak{I}(\mathcal{H}) \times \mathcal{U}_\mathfrak{I}(\mathcal{H}) \longrightarrow \mathcal{S}t_\mathfrak{I}(v)$ posee seciones locales continuas. Por lo tanto, para $n \geq 1$ suficientemente grande existen $u_n, w_n \in \mathcal{U}_\mathfrak{I}(\mathcal{H})$ cumpliendo $v_n = u_n v_0 w_n^*$, $\|u_n - 1\|_\mathfrak{I} \to 0$ y $\|w_n - 1\|_\mathfrak{I} \to 0$. Como $\mathcal{U}_\mathfrak{I}(\mathcal{H})$ es un grupo de Lie-Banach, la función exponencial es un difeomorfismo local (prueba como en la Observación 4.2.8), entonces existen $x_n, y_n \in \mathfrak{I}_{ah}$ tales que $v_n = e^{x_n} v_0 e^{-y_n}$, $\|x_n\|_\mathfrak{I} \to 0$ y $\|y_n\|_\mathfrak{I} \to 0$. Tomando las curvas $\gamma_n(t) = e^{tx_n} v_0 e^{-ty_n}$, concluímos que

$$d_a(v_n, v_0) \leq L_a(\gamma_n) \leq \|x_n\|_\mathfrak{I} + \|y_n\|_\mathfrak{I} \to 0,$$

y el teorema queda demostrado. $\square$

En $\mathcal{S}_\mathfrak{I}(v)$ podemos probar el mismo resultado. Como la función $\pi_{v_0} : \mathcal{U}_\mathfrak{I}(\mathcal{H}) \longrightarrow \mathcal{S}_\mathfrak{I}(v)$ es una sumersión, el espacio tangente de $\mathcal{S}_\mathfrak{I}(v)$ en $v_0$ está dado por

$$(\, T\mathcal{S}_\mathfrak{I}(v)\,)_{v_0} = \{\, xv_0 \,:\, x \in \mathfrak{I}_{ah} \,\}.$$

La métrica de Finsler cociente en $\mathcal{S}_\mathfrak{I}(v)$ se reduce a la siguiente expresión:

$$\|xv_0\|_{v_0} = \text{ínf}\{\, \|x + a\|_\mathfrak{I} \,:\, av_0 = 0,\, a \in \mathfrak{I}_{ah} \,\}.$$

**Corolario 5.3.6.** *$\mathcal{S}_\mathfrak{I}(v)$ es un espacio métrico completo con la distancia $d_a$.*

*Demostración.* Es suficiente mostrar que $\mathcal{S}_\mathfrak{I}(v)$ es $d_a$-cerrado en $\mathcal{S}t_\mathfrak{I}(v)$. Más aún, probaremos que $\mathcal{S}_\mathfrak{I}(v)$ es $\|\,.\|_\mathfrak{I}$-cerado en $\mathcal{S}t_\mathfrak{I}(v)$. Sea $(v_n)_n$ una sucesión en $\mathcal{S}_\mathfrak{I}(v)$ tal que $\|v_n - v_0\|_\mathfrak{I} \to 0$, donde $v_0 \in \mathcal{S}t_\mathfrak{I}(v)$. Basta con probar que $\ker(v_0) = \ker(v)$. Sea $\xi \in \ker(v_0)$, $\|\xi\| = 1$. Para todo $n \geq 1$,

$$\|v_n\xi\| = \|(v_n - v_0)\xi\| \leq \|v_n - v_0\| \leq \|v_n - v_0\|_\mathfrak{I} \to 0.$$

Como $v_n \in \mathcal{S}_\mathfrak{I}(v)$, existe $u_n \in \mathcal{U}_\mathfrak{I}(\mathcal{H})$ cumpliendo $v_n = u_n v$. Entonces,

$$\|v\xi\| = \|u_n^* v_n \xi\| = \|v_n\xi\|,$$

lo que implica

$$\|v\xi\| = \lim_{n\to\infty} \|v_n\xi\| = 0.$$

Para probar la otra inclusión sea $\xi \in \ker(v) = \ker(v_n)$, $\|\xi\| = 1$. Observemos que

$$\|v_0\xi\| \leq \|(v_0 - v_n)\xi\| \leq \|v_0 - v_n\| \leq \|v_0 - v_n\|_\mathfrak{I} \to 0,$$

entonces tenemos $\xi \in \ker(v_0)$, y la prueba está completa. $\square$

Notemos que hay una distancia rectificable $d$ inducida por la métrica de Finsler cociente $F_q$ cuando medimos la longitud las curvas suaves a trozos $\gamma(t)$ en $\mathcal{S}t_\mathfrak{I}(v)$ por

$$L(\gamma) = \int_0^1 F_q(\dot\gamma(t))\, dt.$$

El siguiente resultado es inmediato de la Proposición 5.3.1.

**Corolario 5.3.7.** *$\mathcal{S}_\mathfrak{I}(v)$ y $\mathcal{S}t_\mathfrak{I}(v)$ son espacios métricos completos con la distancia rectificable $d$.*

## 5.4. Caracterización de la distancia rectificable

En esta sección damos una caracterización de la distancia rectificable en $\mathcal{S}t_{\mathfrak{I}}(v)$ como la distancia cociente de grupos. Dotamos a $\mathcal{U}_{\mathfrak{I}}(\mathcal{H})$ con la métrica de Finsler del ambiente, es decir, $\|(x,y)\| = \Phi(\,\|x\|_{\mathfrak{I}}, \|y\|_{\mathfrak{I}}\,)$ para $(x,y) \in u_1\mathfrak{I}_{ah} \times u_2\mathfrak{I}_{ah} = (T(\mathcal{U}_{\mathfrak{I}}(\mathcal{H}) \times \mathcal{U}_{\mathfrak{I}}(\mathcal{H})))_{(u_1,u_2)}$. Aquí nuevamente $\Phi$ es una norma simétrica en $\mathbb{R}^2$.

Medimos la longitud de una curva suave $\Gamma(t) = (\Gamma_1(t), \Gamma_2(t))$, $t \in [0,1]$, como

$$L_{\mathfrak{I}}(\Gamma) = \int_0^1 \|(\dot{\Gamma}_1, \dot{\Gamma}_2)\|\, dt.$$

Esto induce una distancia rectificable en $\mathcal{U}_{\mathfrak{I}}(\mathcal{H}) \times \mathcal{U}_{\mathfrak{I}}(\mathcal{H})$ dada por

$$d_{\mathfrak{I}}((u_0,w_0),(u_1,w_1)) = \operatorname{ínf}\{\, L_{\mathfrak{I}}(\Gamma) \,:\, \Gamma \subset \mathcal{U}_{\mathfrak{I}}(\mathcal{H}) \times \mathcal{U}_{\mathfrak{I}}(\mathcal{H}),\ \Gamma(0) = (u_0,w_0),\ \Gamma(1) = (u_1,w_1)\,\}.$$

El siguiente resultado prueba que la distancia rectificable en $\mathcal{S}t_{\mathfrak{I}}(v)$ puede ser aproximada levantando curvas al grupo $\mathcal{U}_{\mathfrak{I}}(\mathcal{H}) \times \mathcal{U}_{\mathfrak{I}}(\mathcal{H})$. Esta prueba está adaptada de [AL09] con la diferencia que utilizamos cualquier norma de Banach y no asumimos que la norma cociente se realice.

**Lema 5.4.1.** *Sean $v_0$, $v_1 \in \mathcal{S}t_{\mathfrak{I}}(v)$. Entonces*

$$d(v_0,v_1) = \operatorname{ínf}\{\, L_{\mathfrak{I}}(\Gamma) \,:\, \Gamma \subset \mathcal{U}_{\mathfrak{I}}(\mathcal{H}) \times \mathcal{U}_{\mathfrak{I}}(\mathcal{H}),\ \pi_{v_0}(\Gamma(0)) = v_0,\ \pi_{v_0}(\Gamma(1)) = v_1\,\},$$

*donde las curvas $\Gamma$ consideradas son continuas y $C^1$ a trozos.*

*Demostración.* Consideremos $\Gamma$ una curva $C^1$ en $\mathcal{U}_{\mathfrak{I}}(\mathcal{H}) \times \mathcal{U}_{\mathfrak{I}}(\mathcal{H})$ cumpliendo $\pi_{v_0}(\Gamma(0)) = v_0$ y $\pi_{v_0}(\Gamma(1)) = v_1$. Observemos que como la función

$$\pi_{v_0} : \mathcal{U}_{\mathfrak{I}}(\mathcal{H}) \times \mathcal{U}_{\mathfrak{I}}(\mathcal{H}) \longrightarrow \mathcal{S}t_{\mathfrak{I}}(v), \quad \pi_{v_0}((u,w)) = u v_0 w^*,$$

es una sumersión analítica real siempre hay de estas curvas. Ahora notemos que la función anterior reduce la longitud de curvas con las métricas previamente definidas en cada variedad. Como la acción es isométrica, basta con chequear que la diferencial en la identidad

$$\delta_{v_0} : \mathfrak{I}_{ah} \times \mathfrak{I}_{ah} \longrightarrow (T\mathcal{S}t_{\mathfrak{I}}(v))_{v_0}, \quad \delta_{v_0}((x,y)) = x v_0 - v_0 y.$$

es contractiva. Aunque esto resulta inmediato de la definición de la métrica cociente en $\mathcal{S}t_{\mathfrak{I}}(v)$. Por lo tanto, tenemos $d(v_0,v_1) \le L(\pi_{v_0}(\Gamma)) \le L_{\mathfrak{I}}(\Gamma)$.

Para terminar la prueba, debemos probar que dada $\gamma$ en $\mathcal{S}t_{\mathfrak{I}}(v)$ podemos aproximar $L(\gamma)$ con longitudes de curvas en $\mathcal{U}_{\mathfrak{I}}(\mathcal{H}) \times \mathcal{U}_{\mathfrak{I}}(\mathcal{H})$ uniendo las fibras de $v_0$ y $v_1$. Fijemos $\epsilon > 0$. Sea $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = 1$ una partición uniforme de $[0,1]$ ($\Delta t_i = t_i - t_{i-1} = 1/n$) tal que se cumpla:

1. $\|\dot{\gamma}(s) - \dot{\gamma}(s')\|_{\mathfrak{I}} < \epsilon/4$ si $s$, $s'$ están en el mismo intervalo que $[t_{i-1}, t_i]$.

2. $|\, L(\gamma) - \sum_{i=0}^{n-1} \|\dot{\gamma}(t_i)\|_{\gamma(t_i)} \Delta t_i \,| < \epsilon/2$.

Por otro lado, para cada $i = 0, \ldots, n-1$, existen $x_i$ , $y_i \in \mathfrak{I}_{ah}$ tales que $\delta_{\gamma(t_i)}((x_i, y_i)) = \dot\gamma(t_i)$ y $\|(x_i, y_i)\| \leq \|\dot\gamma(t_i)\|_{\gamma(t_i)} + \epsilon/2$.
Consideremos la siguiente curva $\Gamma$ en $\mathcal{U}_{\mathfrak{I}}(\mathcal{H}) \times \mathcal{U}_{\mathfrak{I}}(\mathcal{H})$:

$$\Gamma(t) = \begin{cases} (e^{tx_0}, e^{ty_0}) & t \in [0, t_1) \\ (e^{(t-t_1)x_1} e^{t_1 x_0}, e^{(t-t_1)y_1} e^{t_1 y_0}) & t \in [t_1, t_2) \\ \ldots & \ldots \\ (e^{(t-t_{n-1})x_{n-1}} \ldots e^{(t_2-t_1)x_1} e^{t_1 x_0}, e^{(t-t_{n-1})y_{n-1}} \ldots e^{(t_2-t_1)y_1} e^{t_1 y_0}) & t \in [t_{n-1}, 1] \end{cases}$$

Entonces $\Gamma$ es continua, suave a trozos, $\Gamma(0) = (1, 1)$ y

$$L_{\mathfrak{I}}(\Gamma) = \sum_{i=0}^{n-1} \|(x_i, y_i)\| \Delta t_i \leq \sum_{i=0}^{n-1} \|\dot\gamma(t_i)\|_{\gamma(t_i)} \Delta t_i + \epsilon/2 \leq L(\gamma) + \epsilon.$$

Afirmamos ahora que $\pi_{v_0}(\Gamma(1))$ está cerca de $v_0$. Para ser más claros en la prueba, denotemos $\alpha(t) = \pi_{v_0}(e^{tx_0}, e^{ty_0}) - \gamma(t)$, entonces $\alpha(0) = 0$, y usando el teorema del valor medio en espacios de Banach,

$$\|\pi_{v_0}(e^{t_1 x_0}, e^{t_1 y_0}) - \gamma(t_1)\|_{\mathfrak{I}} = \|\alpha(t_1) - \alpha(0)\|_{\mathfrak{I}} \leq \|\dot\alpha(s_1)\|_{\mathfrak{I}}\, \Delta t_1,$$

para algún $s_1 \in [0, t_1]$. Explícitamente,

$$\|\pi_{v_0}(e^{t_1 x_0}, e^{t_1 y_0}) - \gamma(t_1)\|_{\mathfrak{I}} \leq \|e^{s_1 x_0} \delta_{v_0}((x_0, y_0)) e^{-s_1 y_0} - \dot\gamma(s_1)\|_{\mathfrak{I}}\, \Delta t_1.$$

Notemos que $\delta_{v_0}((x_0, y_0)) = \dot\gamma(0)$, y además

$$\|e^{s_1 x_0} \dot\gamma(0) e^{-s_1 y_0} - \dot\gamma(s_1)\|_{\mathfrak{I}} \leq \|e^{s_1 x_0} \dot\gamma(0) e^{-s_1 y_0} - \dot\gamma(0)\|_{\mathfrak{I}} + \|\dot\gamma(0) - \dot\gamma(s_1)\|_{\mathfrak{I}}$$

El segundo sumando está acotado por $\epsilon/4$. El primer sumando puede ser acotado del siguiente modo:

$$\begin{aligned} \|e^{s_1 x_0} \dot\gamma(0) e^{-s_1 y_0} - \dot\gamma(0)\|_{\mathfrak{I}} &= \|(e^{s_1 x_0} - 1)\dot\gamma(0) - \dot\gamma(0)(e^{-s_1 y_0} - 1)\|_{\mathfrak{I}} \\ &\leq \|\dot\gamma(0)\|_{\mathfrak{I}}\, \|(e^{s_1 x_0} - 1, e^{-s_1 y_0} - 1)\| \leq M \Delta t_1 \end{aligned}$$

donde $M := \text{máx}_{t \in [0\,,\,1]} \|\dot\gamma(t)\|_{\mathfrak{I}}$. Así,

$$\|\pi_{v_0}(e^{t_1 x_0}, e^{t_1 y_0}) - \gamma(t_1)\|_{\mathfrak{I}} \leq (M \Delta t_1 + \epsilon/4) \Delta t_1$$

A continuación necesitamos estimar $\|\pi_{v_0}(\,(e^{(t_2-t_1)x_1} e^{t_1 x_0}, e^{(t_2-t_1)y_1} e^{t_1 y_0})\,) - \gamma(t_2)\|_{\mathfrak{I}}$ que es menor o igual que

$$\begin{gathered} \|e^{(t_2-t_1)x_1} e^{t_1 x_0} v_0 e^{-t_1 y_0} e^{-(t_2-t_1)y_1} - e^{(t_2-t_1)x_1} \gamma(t_1) e^{-(t_2-t_1)y_1}\|_{\mathfrak{I}} + \\ \|e^{(t_2-t_1)x_1} \gamma(t_1) e^{-(t_2-t_1)y_1} - \gamma(t_2)\|_{\mathfrak{I}}\,. \end{gathered}$$

El primer sumando puede ser acotado por

$$\begin{aligned} \|e^{(t_2-t_1)x_1} (e^{t_1 x_0} v_0 e^{-t_1 y_0} - \gamma(t_1)) e^{-(t_2-t_1)y_1}\|_{\mathfrak{I}} &= \|e^{t_1 x_0} v_0 e^{-t_1 y_0} - \gamma(t_1)\|_{\mathfrak{I}} \\ &\leq (M \Delta t_1 + \epsilon/4) \Delta t_1. \end{aligned}$$

La segunda diferencia puede ser tratada análogamente a la primera diferencia más arriba,

$$\|e^{(t_2-t_1)x_1}\gamma(t_1)e^{-(t_2-t_1)y_1} - \gamma(t_2)\|_{\mathfrak{I}} \leq (M\Delta t_2 + \epsilon/4)\Delta t_2 = (M/n + \epsilon/4)/n.$$

Por lo tanto obtenemos

$$\|\pi_{v_0}(\,\Gamma(t_2)\,) - \gamma(t_2)\|_{\mathfrak{I}} \leq 2(M/n + \epsilon/4)/n.$$

Entonces por inducción tenemos

$$\|\pi_{v_0}(\Gamma(t_{n-1})) - v_1\|_{\mathfrak{I}} \leq M/n + \epsilon/4 < \epsilon/2,$$

si elegimos $n$ lo suficientemente grande. La prueba puede completarse utilizando que $\pi_{v_0}$ tiene secciones locales continuas, entonces podemos unir $\Gamma(t_{n-1})$ con la fibra de $v_1$ con una curva de longitud arbitrariamente pequeña. $\square$

**Observación 5.4.2.** *La función exponencial exp* : $\mathfrak{I}_{ah} \longrightarrow \mathcal{U}_{\mathfrak{I}}(\mathcal{H})$, $exp_{\mathcal{U}_{\mathfrak{I}}(\mathcal{H})}(z) = e^z$ *es suryectiva. Más aún, tenemos que*

$$exp_{\mathcal{U}_{\mathfrak{I}}(\mathcal{H})}(\{\, z \in \mathfrak{I}_{ah} \,:\, \|z\| \leq \pi \,\}) = \mathcal{U}_{\mathfrak{I}}(\mathcal{H}).$$

*Incluímos brevemente un argumento para probar tal afirmación. Sea* $u \in \mathcal{U}_{\mathfrak{I}}(\mathcal{H})$, *entonces utilizando cálculo funcional Boreliano es posible hallar* $x = x^*$ *tal que* $\|x\| \leq \pi$ *y* $e^{ix} = u$. *Cualquier ideal bilátero está contenido en el ideal* $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ *de los operadores compactos, entonces* $e^{ix} = 1 + a$, $a \in \mathfrak{I} \subset \mathcal{K}(\mathcal{H})$. *Un argumento estandar muestra que* $x \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$. *Luego el espectro de* $x$ *consiste en una cantidad numerable de autovalores no nulos de multiplicidad finita y el cero.*

*Por otro lado, tenemos la acotación*

$$(1 - \frac{\pi^2}{12})^{1/2}|t| \leq |e^{it} - 1|, \tag{5.8}$$

*para* $t \in [-\pi, \pi]$. *Como el cálculo funcional es positivo*

$$(1 - \frac{\pi^2}{12})^{1/2}|x| \leq |e^{ix} - 1|.$$

*Entonces, si* $\mu_n(\,.\,)$ *denota los valores singulares de un operador, obtenemos la correspondiente desigualdad para los valores singulares* $(1 - \frac{\pi^2}{12})^{1/2}\mu_n(x) \leq \mu_n(e^{ix} - 1)$, *para* $n \in \mathbb{N}$. *Por la propiedad de dominación (ver [GK60, p.82]), y el hecho que* $e^{ix} - 1 \in \mathfrak{I}$, *podemos concluir que* $x \in \mathfrak{I}$.

**Lema 5.4.3.** *Sean* $u_0, u_1, w_0, w_1 \in \mathcal{U}_{\mathfrak{I}}(\mathcal{H})$, *entonces*

$$(1 - \frac{\pi^2}{12})^{1/2} d_{\mathfrak{I}}((u_0, u_1), (w_0, w_1)) \leq \Phi(\|u_0 - w_0\|_{\mathfrak{I}}, \|u_1 - w_1\|_{\mathfrak{I}}) \leq d_{\mathfrak{I}}((u_0, u_1), (w_0, w_1)).$$

*En particular,* $(\mathcal{U}_{\mathfrak{I}}(\mathcal{H}) \times \mathcal{U}_{\mathfrak{I}}(\mathcal{H}), d_{\mathfrak{I}})$ *es un espacio métrico completo y* $G_v$ *es un subgrupo* $d_{\mathfrak{I}}$*-cerrado.*

*Demostración.* Claramente podemos suponer que $u_0 = u_1 = 1$ ya que la multiplicación es isométrica. Dado $\epsilon > 0$, existe $\Gamma = (\Gamma_0, \Gamma_1) \subset \mathcal{U}_{\mathfrak{I}}(\mathcal{H}) \times \mathcal{U}_{\mathfrak{I}}(\mathcal{H})$ tal que $\Gamma(0) = (1,1)$, $\Gamma(1) = (w_0, w_1)$ y

$$L_{\mathfrak{I}}(\Gamma) < d_{\mathfrak{I}}((1,1),(w_0,w_1)) + \epsilon.$$

Entonces, como las rectas son curvas de longitud minimal en todo espacio vectorial, tenemos

$$\Phi(\|1-w_0\|_{\mathfrak{I}}, \|1-w_1\|_{\mathfrak{I}}) \leq \int_0^1 \Phi(\|\dot{\Gamma}_0\|_{\mathfrak{I}}, \|\dot{\Gamma}_0\|_{\mathfrak{I}})\,dt = L_{\mathfrak{I}}(\Gamma) < d_{\mathfrak{I}}((1,1),(w_0,w_1)) + \epsilon.$$

La desigualdad buscada es válida pues $\epsilon$ es arbitrario. Para probar la desigualdad al revés, consideremos $x_0, x_1 \in \mathfrak{I}_{ah}$ con $\|x_j\| \leq \pi$ cumpliendo $e^{x_0} = w_0$ y $e^{x_1} = w_1$. Notemos que es posible por la Observación 5.4.2. Entonces la curva $\Gamma(t) = (e^{tx_0}, e^{tx_1})$, $t \in [0,1]$, une $(1,1)$ y $(w_0, w_1)$. Luego,

$$d_{\mathfrak{I}}((1,1),(w_0,w_1)) \leq L_{\mathfrak{I}}(\Gamma) = \Phi(\|x_0\|_{\mathfrak{I}}, \|x_1\|_{\mathfrak{I}}).$$

Ahora, aplicando la cota de (5.8), y pasando a la correspondiente desigualdad entre valores singulares, tenemos

$$d_{\mathfrak{I}}((1,1),(w_0,w_1)) \leq \Phi(\|x_0\|_{\mathfrak{I}}, \|x_1\|_{\mathfrak{I}}) \leq (1 - \frac{\pi^2}{12})^{-1/2} \Phi(\|1-w_0\|_{\mathfrak{I}}, \|1-w_1\|_{\mathfrak{I}}),$$

lo que prueba la desigualdad que faltaba.

La completitud de $(\mathcal{U}_{\mathfrak{I}}(\mathcal{H}) \times \mathcal{U}_{\mathfrak{I}}(\mathcal{H}), d_{\mathfrak{I}})$ se sigue de las cotas halladas. En efecto, si $(u_n, w_n)_n$ es una sucesión de Cauchy con la distancia $d_{\mathfrak{I}}$, también es de Cauchy para $\Phi(\|\,.\,\|_{\mathfrak{I}}, \|\,.\,\|_{\mathfrak{I}})$. Como $\mathcal{U}_{\mathfrak{I}}(\mathcal{H})$ es completo con la norma $\|\,.\,\|_{\mathfrak{I}}$, entonces exiten $u_0, w_0 \in \mathcal{U}_{\mathfrak{I}}(\mathcal{H})$ tales que $\|u_n - u_0\|_{\mathfrak{I}} \to 0$ y $\|w_n - w_0\|_{\mathfrak{I}} \to 0$. Es inmediato de las cotas de arriba que $(u_0, w_0)$ es el límite de $(u_n, w_n)_n$ con la distancia $d_{\mathfrak{I}}$.

Por último, el subgrupo de isotropía $G_v$ es $d_{\mathfrak{I}}$-cerrado por las cotas probadas y el hecho, sencillo de verificar, de ser $G_v$ un subgrupo cerrado con la norma del ideal. □

El principal resultado de esta sección es una versión del Teorema 3.4.2 para variedades de Stiefel. La prueba muestra como se puede razonar de la misma forma y caracterizar la distancia rectificable como la distancia cociente de grupos dada en el Lema 3.4.1 vía la identificación $\mathcal{S}t_{\mathfrak{I}}(v) \cong (\mathcal{U}_{\mathfrak{I}}(\mathcal{H}) \times \mathcal{U}_{\mathfrak{I}}(\mathcal{H}))/G_v$. A su vez, esto da una nueva prueba de la completitud de $\mathcal{S}t_{\mathfrak{I}}(v)$ con la distancia rectificable.

**Teorema 5.4.4.** *Sean $v$ una isometría parcial, $u_0, w_0, u_1, w_1 \in \mathcal{U}_{\mathfrak{I}}(\mathcal{H})$, y*

$$\dot{d}_{\mathfrak{I}}(u_0 v w_0^*\,,\, u_1 v w_1^*) = \text{ínf}\{\, d_{\mathfrak{I}}(\,(u_0,w_0)\,,\,(u_1 u, w_1 w)\,) \,:\, (u,w) \in G_v \,\}.$$

*Entonces $\dot{d}_{\mathfrak{I}} = d$, donde $d$ es la distancia rectificable en $\mathcal{S}t_{\mathfrak{I}}(v)$. En particular, $(\mathcal{S}t_{\mathfrak{I}}(v), d)$ es un espacio métrico completo y $d$ metriza la topología cociente.*

*Demostración.* La distancia cociente $\dot{d}_{\mathfrak{I}}$ está bien definida porque $G_v$ es $d_{\mathfrak{I}}$-cerrado en $\mathcal{U}_{\mathfrak{I}}(\mathcal{H}) \times \mathcal{U}_{\mathfrak{I}}(\mathcal{H})$. Más aún, como multiplicar por unitarios es isométrico, puede ser calculada como

$$\dot{d}_{\mathfrak{I}}(u_0 v w_0^*\,,\, u_1 v w_1^*) = \text{ínf}\{\, d_{\mathfrak{I}}(\,(u_0,w_0)\,,\,(u_1 u, w_1 w)\,) \,:\, (u,w) \in G_v \,\}.$$

Para probar la desigualdad entre las distancias fijemos $\epsilon > 0$. Por el Lema 5.4.1 existe una curva $\Gamma$ en $\mathcal{U}_{\mathfrak{I}}(\mathcal{H}) \times \mathcal{U}_{\mathfrak{I}}(\mathcal{H})$ cumpliendo

1. $\Gamma(0) = (u_0, w_0)$, $\Gamma(1) = (u_1 u, w_1 w)$, con $(u, w) \in G_v$.
2. $L_{\mathfrak{I}}(\Gamma) < d(u_0 v w_0^*, u_1 v w_1^*) + \epsilon$.

Luego, tenemos

$$\dot{d}_{\mathfrak{I}}(u_0 v w_0^*\,,\,u_1 v w_1^*) \leq d_{\mathfrak{I}}(\,(u_0, w_0)\,,\,(u_1 u, w_1 w)\,) \leq L_{\mathfrak{I}}(\Gamma) < d(u_0 v w_0^*, u_1 v w_1^*) + \epsilon.$$

Como $\epsilon > 0$ es arbitrario, obtenemos la primera desigualdad.

Para probar la otra desigualdad notemos que dado $\epsilon > 0$, existe $(u, w) \in G_v$ cumpliendo $d_{\mathfrak{I}}(\,(u_0, w_0)\,,\,(u_1 u, w_1 w)\,) < \dot{d}_{\mathfrak{I}}(u_0 v w_0^*\,,\,u_1 v w_1^*) + \epsilon$. Entonces existe una curva $\Gamma$ contenida en $\mathcal{U}_{\mathfrak{I}}(\mathcal{H}) \times \mathcal{U}_{\mathfrak{I}}(\mathcal{H})$ tal que $\Gamma(0) = (u_0, w_0)$, $\Gamma(1) = (u_1 u, w_1 w)$ y

$$L_{\mathfrak{I}}(\Gamma) < d_{\mathfrak{I}}(\,(u_0, w_0)\,,\,(u_1 u, w_1 w)\,) + \epsilon.$$

En consecuencia, tenemos

$$d(u_0 v w_0^*, u_1 v w_1^*) \leq L_{\mathfrak{I}}(\Gamma) < d_{\mathfrak{I}}(\,(u_0, w_0)\,,\,(u_1 u, w_1 w)\,) + \epsilon < \dot{d}_{\mathfrak{I}}(u_0 v w_0^*\,,\,u_1 v w_1^*) + 2\epsilon.$$

Por lo tanto, hemos probado la igualdad $\dot{d}_{\mathfrak{I}} = d$. La completitud de $(\mathcal{S}t_{\mathfrak{I}}(v), d)$ y que $d$ metriza la topología cociente se infieren del Lema 3.4.1. $\square$

# Capítulo 6

# Curvas minimales en variedades de Stiefel

El problema de hallar curvas minimales en la $\mathfrak{I}$-variedad de Stiefel claramente depende de la norma del ideal $\mathfrak{I}$. El problema de valores iniciales fue resuelto en [ALR09] en el contexto general de espacios homogéneos de los grupos unitarios $p$-Schatten ($p$ entero par). Como la variedad de Stiefel asociada al grupo unitario $p$-Schatten están dentro de este contexto, el problema de valores iniciales ya está entendido. Entre los problemas acerca de curvas minimales con diferentes normas que aún no están resueltos, en esta sección nos interesamos en curvas minimales en las $\mathcal{K}(\mathcal{H})$-variedades de Stiefel, donde $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ es el ideal de los operadores compactos. Denotemos por $\mathcal{S}t_c(v)$ a la $\mathcal{K}(\mathcal{H})$**-variedad de Stiefel generalizada** asociada a una isometría parcial $v$. Es decir,

$$\mathcal{S}t_c(v) = \{v_0 \in \mathcal{I} \,:\, v - v_0 \in \mathcal{K}(\mathcal{H}),\, j(v_0^* v_0, v^* v) = 0\,\}.$$

El grupo de isotropía en $v_0 \in \mathcal{S}t_c(v)$ y su álgebra de Lie $\mathfrak{g}_{v_0}$ se calculan como ya hicimos en el caso general de cualquier ideal de Banach. La métrica de Finsler cociente de un vector tangente $xv_0 - v_0 y \in (T\mathcal{S}t_c(v))_{v_0}$ está dada por

$$\|xv_0 - v_0 y\|_{v_0} = \operatorname{ínf}\{\,\|(x+a, y+b)\| \,:\, av_0 = v_0 b,\, a, b \in \mathcal{K}(\mathcal{H})_{ah}\,\}.$$

Aquí tomamos como norma del producto $\|(x,y)\| = \operatorname{máx}\{\,\|x\|\,,\,\|y\|\,\}$, donde $\|\,.\,\|$ es la norma usual de operadores. Recordemos que $\mathcal{S}t_c(v)$ es una subvariedad analítica real de $v + \mathcal{K}(\mathcal{H})$ y un espacio homogéneo del grupo unitario Fredholm, el cual lo denotaremos por

$$\mathcal{U}_c(\mathcal{H}) = \{\,u \in \mathcal{U}(\mathcal{H}) \,:\, u - 1 \in \mathcal{K}(\mathcal{H})\,\}.$$

En el artículo [AL09] se demuestran las propiedades métricas de este grupo que damos a continuación. La longitud de una curva $\Gamma(t)$, $t \in [0,1]$, en $\mathcal{U}_c(\mathcal{H})$ está medida con la métrica de Finsler dada por la norma de operadores dada por

$$L_\infty(\Gamma) = \int_0^1 \|\dot{\Gamma}(t)\|\, dt.$$

Las curvas $\Gamma(t) = ue^{tz}$, donde $u \in \mathcal{U}_c(\mathcal{H})$ y $z \in \mathcal{K}(\mathcal{H})_{ah}$ tales que $\|z\| \leq \pi$ son curvas de longitud minimal a lo largo de su recorrido. Entonces dotamos a $\mathcal{U}_c(\mathcal{H}) \times \mathcal{U}_c(\mathcal{H})$ de la métrica producto inducida por la norma producto: $\|(x_0, x_1)\| = \max\{ \|x_0\|, \|x_1\| \}$, para $(x_0, x_1) \in u_0\mathcal{K}(\mathcal{H})_{ah} \times u_1\mathcal{K}(\mathcal{H})_{ah}$. El funcional longitud en $\mathcal{U}_c(\mathcal{H}) \times \mathcal{U}_c(\mathcal{H})$ de una curva $\Gamma = (\Gamma_1, \Gamma_2)$ lo denotaremos también por $L_\infty(\Gamma)$ ya que no se presentarán confusiones con el funcional longitud en $\mathcal{U}_c(\mathcal{H})$. Notemos que si $\Gamma_1$, $\Gamma_2$ son geodésicas minimales en $\mathcal{U}_c(\mathcal{H})$, es sencillo ver que $\Gamma = (\Gamma_1, \Gamma_2)$ es una geodésica minimal en $\mathcal{U}_c(\mathcal{H}) \times \mathcal{U}_c(\mathcal{H})$, si medimos las longitudes con la métrica producto. Con respecto a las correspondientes distancias rectificables en $\mathcal{U}_c(\mathcal{H})$ y $\mathcal{U}_c(\mathcal{H}) \times \mathcal{U}_c(\mathcal{H})$, ambas las denotaremos por $d_\infty$.

## 6.1. Compactos y el problema de valores iniciales

En [DMR04] el problema de valores iniciales para espacios homogéneos del grupo unitario se resuelve en la categoría de álgebras de von Neumann con unidad. En nuestro caso, no podemos utilizar las mismas técnicas porque $\mathfrak{g}_v$ no es la parte antihermitiana de ningún álgebra de von Neumann. En efecto, el conjunto de los pares $(a, b)$ tales que $av = vb$ no es autoadjunto ni cerrado en la topología débil de operadores. Sin embargo, podemos adaptar el argumento de convexidad dado en [AL09] para hallar curvas minimales cuando la isometría parcial $v$ tiene rango finito.

Sean $v$ una isometría parcial y $v_0 \in \mathcal{S}t_c(v)$. Un par $(x_1, y_1) \in \mathcal{K}(\mathcal{H})_{ah} \times \mathcal{K}(\mathcal{H})_{ah}$ tal que $x_1v_0 - v_0y_1 = xv_0 - v_0y$ y $\|(x_1, y_1)\| = \|xv_0 - v_0y\|_{v_0}$ será llamado **levantado minimal** para el vector tangente $xv_0 - v_0y$. Los levantados minimales son importantes para nosotros porque a partir de estos podemos hallar curvas minimales. El siguiente resultado establece la existencia de levantados minimales cuando $v$ tiene rango finito.

**Proposición 6.1.1.** *Sea $v_0 \in \mathcal{S}t_c(v)$, siendo $v$ una isometría parcial de rango finito. Sean $x, y \in \mathcal{K}(\mathcal{H})_{ah}$, entonces existe $(a, b) \in \mathfrak{g}_{v_0}$ cumpliendo $\|xv_0 - v_0y\|_{v_0} = \|(x + a, y + b)\|$.*

*Demostración.* Como la acción es isométrica podemos suponer $v = v_0$. Podemos argumentar como en el Teorema 6.1 en [DMR04] para encontrar una sucesión $((a_n, b_n))_n$ en $\mathfrak{g}_v$ tal que $(a_n, b_n) \to (a, b)$ en la topología débil de operadores y $\|(x + a, y + b)\| = \|xv - vy\|_v$. Notemos que $a, b \in \mathcal{B}(\mathcal{H})_{ah}$ y $av = vb$, pero $a, b$ pueden no ser compactos.

Denotamos la proyección final de $v$ por $p = vv^*$ y $q = v^*v$ la proyección inicial de $v$. Para obtener operadores compactos que realicen la norma cociente, notemos que $av = vb$ si y sólo si $ap = pa$, $bq = qb$ y $qbq = v^*av$. Luego el par $(a, b)$ puede ser escrito como:

$$a = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix}_p, \qquad b = \begin{pmatrix} v^*a_{11}v & 0 \\ 0 & b_{22} \end{pmatrix}_q.$$

Aquí los subíndices $p = vv^*$ y $q = v^*v$ indican que las matrices están siendo pensadas respecto a estas proyecciones.

Recordemos la solución de Krein al problema de extensión para un operador autoadjunto (ver [Kr47]): Dada una matriz $2 \times 2$ de operadores

$$\begin{pmatrix} X & Y \\ Y^* & ? \end{pmatrix}$$

encontrar un operador $Z$ de manera tal que la matriz de operadores resultante posea norma mínima. M. G. Krein probó en [Kr47] que siempre hay una solución y puede no ser única, aún en el contexto de operadores no acotados. Más recientemente, Davis, Kahan y Weinberger [DKW82] construyeron fórmulas explícitas para $Z$. En particular, mostraron que si la matriz incompleta tiene operadores compactos como entradas entonces existe una solución compacta $Z$.

Como $v$ posee rango finito, el operador $a_{11}$ también tiene rango finito. De acuerdo al problema de extensión, podemos agregar un operador compacto $a'_{22} : p(\mathcal{H})^{\perp} \longrightarrow p(\mathcal{H})^{\perp}$ tal que

$$\left\| \begin{pmatrix} x_{11} + a_{11} & x_{12} \\ -x_{12}^* & x_{22} + a'_{22} \end{pmatrix} \right\| \leq \left\| \begin{pmatrix} x_{11} + a_{11} & x_{12} \\ -x_{12}^* & x_{22} + a_{22} \end{pmatrix} \right\|.$$

Si repetimos este argumento para encontrar ahora un operador compacto antihermitiano $b'_{22} : q(\mathcal{H})^{\perp} \longrightarrow q(\mathcal{H})^{\perp}$ cumpliendo

$$\left\| \begin{pmatrix} y_{11} + v^* a_{11} v & y_{12} \\ -y_{12}^* & y_{22} + b'_{22} \end{pmatrix} \right\| \leq \left\| \begin{pmatrix} y_{11} + v^* a_{11} v & y_{12} \\ -y_{12}^* & y_{22} + b_{22} \end{pmatrix} \right\|.$$

Ahora si llamamos

$$a' = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a'_{22} \end{pmatrix}, \quad b' = \begin{pmatrix} v^* a_{11} v & 0 \\ 0 & b'_{22} \end{pmatrix}.$$

Entonces se verifica

$$\|(x + a', y + b')\| \leq \|(x + a, y + b)\| = \|xv - vy\|_v.$$

Por lo tanto, hemos obtenido $\|(x + a', y + b')\| = \|xv - vy\|_v$, con $(a', b') \in \mathfrak{g}_v$. $\square$

Nuestra solución del problema de valores iniciales depende del siguiente resultado de convexidad de la distancia rectificable en $\mathcal{U}_c(\mathcal{H})$.

**Lema 6.1.2.** *(Teorema 2.7 en [AL09]) Sean $u \in \mathcal{U}_c(\mathcal{H})$ y $\beta : [0,1] \longrightarrow \mathcal{U}_c(\mathcal{H})$ una curva minimal tal que $d_\infty(u, \beta) < \pi/2$. Entonces $g(s) = d_\infty(u, \beta(s))$, $s \in [0,1]$ es una función convexa.*

Lo utilizaremos con una pequeña modificación. En realidad, necesitamos una versión para $\mathcal{U}_c(\mathcal{H}) \times \mathcal{U}_c(\mathcal{H})$.

**Lema 6.1.3.** *Sean $u, w \in \mathcal{U}_c(\mathcal{H})$ y $\beta : [0,1] \longrightarrow \mathcal{U}_c(\mathcal{H}) \times \mathcal{U}_c(\mathcal{H})$ una curva minimal tal que $d_\infty((u,w), \beta) < \pi/2$. Entonces $g(s) = d_\infty((u,w), \beta(s))$, $s \in [0,1]$ es una función convexa.*

*Demostración.* Como conocemos las curvas minimales de $\mathcal{U}_c(\mathcal{H})$, entonces podemos construir $\beta = (\beta_1, \beta_2)$ una curva de longitud minimal en $\mathcal{U}_c(\mathcal{H}) \times \mathcal{U}_c(\mathcal{H})$. Esta también posee longitud minimal en $\mathcal{U}_c(\mathcal{H} \oplus \mathcal{H})$, que resulta ser el grupo unitario de Fredholm de $\mathcal{B}(\mathcal{H} \oplus \mathcal{H})$. Entonces dados $(u_i, w_i) \in \mathcal{U}_c(\mathcal{H}) \times \mathcal{U}_c(\mathcal{H})$, $i = 1, 2$, tenemos que la distancia rectificable $d_\infty((u_1, w_1), (u_2, w_2))$ en $\mathcal{U}_c(\mathcal{H}) \times \mathcal{U}_c(\mathcal{H})$ coincide con la distancia rectificable $d_\infty((u_1, w_1), (u_2, w_2))$ en $\mathcal{U}_c(\mathcal{H} \oplus \mathcal{H})$. Por lo tanto, el resultado enunciado se deduce del Lema 6.1.2 aplicado a $\mathcal{U}_c(\mathcal{H} \oplus \mathcal{H})$. $\square$

Ahora presentamos el teorema principal de esta sección.

**Teorema 6.1.4.** *Sean $v$ una isometría parcial de rango finito, $v_0 \in \mathcal{S}t_c(v)$ y $xv_0 - v_0y \in (T\mathcal{S}t_c(v))_{v_0}$ tales que $\|xv_0 - v_0y\|_{v_0} \leq \pi/2$. Si $(z_1, z_2)$ es un levantado minimal de $xv_0 - v_0y$, entonces la curva $\delta(t) = e^{tz_1}ve^{-tz_2}$ posee longitud minimal si $|t| \leq 1$.*

*Demostración.* Claramente podemos suponer $v_0 = v$. Debido al Lema 5.4.1 alcanza con comparar las longitudes de $\Delta(t) = (e^{tz_1}, e^{tz_2})$ y $\Gamma$, donde $\Gamma$ es una curva suave a trozos en $\mathcal{U}_c(\mathcal{H}) \times \mathcal{U}_c(\mathcal{H})$ uniendo $(1, 1)$ y un unitario en la fibra $\delta(1)$. Observemos que $\Delta$ levanta a $\delta$ y satisface

$$L_\infty(\Delta) = L(\delta) = \|(z_1, z_2)\| < \pi/2.$$

Si $L_\infty(\Gamma) \geq \pi/2$, entonces no hay nada que probar. De otro modo, tenemos $\Gamma(1) = (e^{a_1}, e^{a_2})$, donde $a_1$, $a_2 \in \mathcal{K}(\mathcal{H})_{ah}$ y $\|(a_1, a_2)\| < \pi/2$. Notemos que $\Gamma$ y $\Delta$ pueden tener puntos finales distintos, sin embargo satisfacen

$$e^{a_1}ve^{-a_2} = e^{z_1}ve^{-z_2}.$$

Luego, obtenemos $e^{a_i} = e^{z_i}e^{b_i}$, $i = 1, 2$, donde $(b_1, b_2) \in \mathfrak{g}_v$. Como estamos suponiendo $\|(a_1, a_2)\| < \pi/2$ y $\|(z_1, z_2)\| < \pi/2$, es inmediato que $\|(b_1, b_2)\| \leq \pi$. Por lo tanto, la curva $\beta(t) = (e^{z_1}e^{tb_1}, e^{z_2}e^{tb_2})$ es una geodésica de longitud minimal uniendo $(e^{z_1}, e^{z_2})$ y $(e^{a_1}, e^{a_2})$. Consideremos la siguiente función:

$$f(t) = d_\infty((1, 1), \beta(t)) = \|\, (\log(e^{z_1}e^{tb_1}), \log(e^{z_2}e^{tb_2})\,)\, \|, \quad t \in [0, 1].$$

Afirmación: $f$ tiene un mínimo en $t = 0$.

Como $f$ es convexa por el Lema 6.1.3, basta con analizar las derivadas laterales en este punto. Podemos suponer $\|(z_1, z_2)\| = \|z_1\|$. Por continuidad, tenemos $\|\log(e^{z_1}e^{tb_1})\| \geq \|\log(e^{z_2}e^{tb_2})\|$ para $t$ pequeño. Luego para calcular la derivada a derecha $\partial^+ f(0)$ de $f$ en $t = 0$ alcanza con considerar

$$\lim_{t\to 0+} \frac{1}{t}\{\, \|\log(e^{z_1}e^{tb_1})\| - \|z_1\|\, \}.$$

Por la fórmula de Baker-Campbell-Haussdorff tenemos la siguiente aproximación lineal

$$\log(e^{z_1}e^{tb_1}) = z_1 + tb_1 + R(z_1, tb_1),$$

siendo $\lim_{t\to 0} \frac{\|R(z_1,tb_1)\|}{t} = 0$. Entonces,

$$\|z_i + tb_i\| - \|R_i(z_i, tb_i)\| \leq \|\log(e^{z_i}e^{tb_i})\| \leq \|z_i + tb_i\| + \|R_i(z_i, tb_i)\|.$$

Para $t > 0$, tenemos

$$\begin{aligned}\frac{1}{t}\{\, \|z_1 + tb_1\| - \|z_1\|\, \} - \frac{1}{t}\|R(z_1, tb_1)\| &\leq \frac{1}{t}\{\, \|\log(e^{z_1}e^{tb_1})\| - \|z_1\|\, \} \\ &\leq \frac{1}{t}\{\, \|z_1 + tb_1\| - \|z_1\|\, \} + \frac{1}{t}\|R(z_1, tb_1)\|.\end{aligned}$$

Si tomamos el límite $t \to 0^+$, obtenemos

$$\partial^+ f(0) = \lim_{t\to 0^+} \frac{1}{t}\{\, \|z_1 + tb_1\| - \|z_1\|\, \}.$$

Notemos que las derivadas a derecha de arriba existen debido a la convexidad de la norma (ver [Ph89] por ejemplo). Como $(z_1, z_2)$ es un levantado minimal, se cumple $\|z_1 + tb_1\| \geq \|z_1\|$, para $t$ suficientemente pequeño, entonces $\partial^+ f(0) \geq 0$. Análogamente podemos probar un enunciado similar para para la derivada a izquierda, i.e. $\partial^- f(0) \leq 0$. Por lo tanto, hemos demostrado nuestra afirmación.

Así $f(0) \leq f(t)$, para todo $t \in [0, 1]$. En particular, obtenemos

$$L(\Delta) = \|(z_1, z_2)\| = f(0) \leq f(1) = \|(a_1, a_2)\| \leq L_\infty(\Gamma).$$

□

**Observación 6.1.5.** *En la prueba sólo utilizamos la hipótesis sobre el rango de $v$ para garantizar la existencia de levantados minimales. No sabemos si existen levantados minimales cuando la isometría parcial no posee restricciones sobre su rango. Una solución a este último problema de existencia nos llevaría a una solución general del problema de valores iniciales.*

Cuando $v$ es una isometría en [ARV07] se resolvió el problema de valores iniciales en la órbita $\{ uv : u \in \mathcal{U}(\mathcal{H}) \}$ sin restricciones sobre el rango utilizando técnicas diferentes. Si consideramos

$$\mathcal{S}_c(v) = \{ uv : u \in \mathcal{U}_c(\mathcal{H}) \},$$

como mencionamos en la prueba de la Proposición 6.1.1, Davis et al. en [DKW82] probaron que el operador $x : vv^*(\mathcal{H}) \longrightarrow \mathcal{H}$ posee una extensión compacta $z$ cumpliendo que $\|zv\| = \|z\|$. Así la existencia de levantados minimales está garantizada en este caso. Entonces el problema de valores iniciales puede ser resuelto en $\mathcal{S}_c(v)$ sin restricciones sobre el rango de $v$.

**Corolario 6.1.6.** *Sean $v$ una isometría parcial, $v_0 \in \mathcal{S}_c(v)$ y $xv_0 \in (T\mathcal{S}_{\mathfrak{I}}(v))_{v_0}$ tales que $\|xv_0\| \leq \pi/2$. Si $z$ es un levantado minimal de $xv_0$, entonces la curva $\delta(t) = e^{tz}v_0$ posee longitud minimal si $|t| \leq 1$.*

## 6.2. Algunas direcciones especiales

A lo largo de esta sección no impondremos ninguna hipótesis sobre el rango de $v$. Mostraremos algunas curvas particulares en $\mathcal{S}t_c(v)$ que son minimales a lo largo de su recorrido. Necesitamos primero mencionar algunas propiedades de la órbita $\mathcal{O}_p$ de una proyección $p$ por la acción natural de $\mathcal{U}_c(\mathcal{H})$ sobre el conjunto de proyecciones, i.e.

$$\mathcal{O}_p = \{ upu^* : u \in \mathcal{U}_c(\mathcal{H}) \}.$$

El espacio tangente en $p_0 \in \mathcal{O}_p$ está dado por

$$(T\mathcal{O}_p)_{p_0} = \{ xp_0 - p_0x : x \in \mathcal{K}(\mathcal{H})_{ah} \}.$$

Es una subvariedad analítica real de $p + \mathcal{K}(\mathcal{H})$ y un espacio homogéneo de $\mathcal{U}_c(\mathcal{H})$. El álgebra de Lie de la isotropía en $p_0 \in \mathcal{O}_p$ es

$$\mathfrak{g}_{p_0} = \{ x \in \mathcal{K}(\mathcal{H})_{ah} : xp_0 = p_0x \}.$$

Se puede definir una métrica cociente $\| \, . \, \|_{p_0}$ usando la norma de Banach de $\mathcal{K}(\mathcal{H})_{ah}/\mathfrak{g}_{p_0}$,

$$\|xp_0 - p_0x\|_{p_0} = \text{ínf}\{ \, \|x + a\| \, : \, a \in \mathfrak{g}_{p_0} \, \}.$$

En este espacio homogéneo la métrica puede ser explícitamente calculada. Dada una proyección $p$, una matriz de $2\times 2$ de operadores $x$ es codiagonal si $pxp = (1-p)x(1-p) = 0$. Es un hecho conocido que las matrices codiagonales poseen norma mínima entre todas las posibles matrices que se obtienen variando la diagonal. Así la norma cociente coincide con la norma de operadores en cada vector tangente, i.e. $\|xp_0 - p_0x\|_{p_0} = \|xp_0 - p_0x\|$.

Entonces si medimos la longitud de una curva suave a trozos $\gamma$ en $\mathcal{O}_p$ como

$$L(\gamma) = \int_0^1 \|\dot{\gamma}(t)\| \, dt.$$

En el artículo [PR87b] se probó que las curvas $\delta(t) = e^{tx}p_0e^{-tx}$, $\|x\| \leq \pi/2$ y $x$ codiagonal con respecto a $p_0$ son geodésicas de longitud minimal uniendo sus puntos finales en la órbita unitaria de una proyección en una $C^*$-álgebra arbitraria. Como $\mathcal{O}_{p_0}$ está contenida en la órbita unitaria de $p_0$ en $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, las curvas $\delta(t) = e^{tx}p_0e^{-tx}$, $\|x\| \leq \pi/2$, $x$ compacto y $x$ codiagonal con respecto a $p_0$ poseen longitud minimal en $\mathcal{O}_{p_0}$.

Dadas dos proyecciones fijas $p$, $q$, podemos considerar la variedad producto $\mathcal{O}_p \times \mathcal{O}_q$. Es un espacio homogéneo del grupo $\mathcal{U}_c(\mathcal{H}) \times \mathcal{U}_c(\mathcal{H})$ y una subvariedad analítica real de $(p,q) + \mathcal{K}(\mathcal{H}) \times \mathcal{K}(\mathcal{H})$. Damos la métrica producto (o cociente) dada por

$$\|(xp_0 - p_0x, q_0y - yq_0)\| = \text{máx}\{ \, \|xp_0 - p_0x\| \, , \, \|yq_0 - q_0y\| \, \},$$

donde $p_0 \in \mathcal{O}_p$, $q_0 \in \mathcal{O}_q$ y $x, y \in \mathcal{K}(\mathcal{H})_{ah}$. Como quedará claro por el contexto conservaremos la misma notación $L(\gamma)$ para la longitud de una curva $\gamma$ en $\mathcal{O}_p \times \mathcal{O}_q$. El siguiente resultado es evidente.

**Lema 6.2.1.** *Sean $x, y \in \mathcal{K}(\mathcal{H})_{ah}$ tales que $\|(x,y)\| \leq \pi/2$. Supongamos que $x$ es codiagonal con respecto a $p_0 \in \mathcal{O}_p$ e $y$ es codiagonal con respecto a $q_0 \in \mathcal{O}_q$. Entonces $\delta(t) = (e^{tx}p_0e^{-tx}, e^{ty}q_0e^{-ty})$ posee longitud minimal entre todas las curvas suaves $\mathcal{O}_p \times \mathcal{O}_q$ uniendo los mismos puntos.*

Como es habitual, utilizamos las notaciones $p = vv^*$ y $q = v^*v$. Consideremos la siguiente función:

$$\varphi : \mathcal{S}t_c(v) \longrightarrow \mathcal{O}_p \times \mathcal{O}_q \, , \quad \varphi(uvw^*) = (upu^*, wqw^*)$$

Es sencillo mostrar que $\varphi$ está bien definida y es suave. La diferencial de $\varphi$ en $v_0 \in \mathcal{S}t_c(v)$ está dada por

$$\varphi_{*v_0} : (T\mathcal{S}t_c(v))_{v_0} \longrightarrow (T\mathcal{O})_{p_0} \times (T\mathcal{O})_{q_0}, \quad \varphi_{*v_0}(xv_0 - v_0y) = (xp_0 - p_0x, yq_0 - q_0y).$$

En el siguiente lema probamos que esta función reduce longitudes cuando en $\mathcal{S}t_{\mathfrak{I}}(v)$ se mide con la norma cociente y en $\mathcal{O}_p \times \mathcal{O}_q$ con la norma de operadores producto.

**Lema 6.2.2.** *Sean $v_0 \in \mathcal{S}t_c(v)$ y $x, y \in \mathcal{K}(\mathcal{H})_{ah}$. Entonces*

$$\|\varphi_{*v_0}(xv_0 - v_0y)\| \leq \|xv_0 - v_0y\|_{v_0} \, .$$

*En particular, si $\gamma$ es una curva en $\mathcal{S}t_c(v)$, entonces $L(\varphi\gamma) \leq L(\gamma)$.*

*Demostración.* Notemos que $\varphi$ es equivariante para las acciones de $\mathcal{U}_c(\mathcal{H}) \times \mathcal{U}_c(\mathcal{H})$ sobre $\mathcal{S}t_{\mathfrak{I}}(v)$ y $\mathcal{O}_p \times \mathcal{O}_q$. Más aún, ambas acciones son isométricas. Entonces es suficiente probar nuestra afirmación para $v_0 = v$, $p_0 = p$ y $q_0 = q$.

Notemos que $av = vb$ si y sólo si $ap = pa$, $bq = qb$ y $qbq = v^*av$. Entonces, tenemos

$$\begin{aligned}\|\varphi_{*v_0}(xv_0 - v_0y)\| &= \|(xp - px, qy - yq)\| \\ &= \text{ínf}\{\, \|(x + a, y + b)\| \,:\, ap = pa,\ qb = bq \text{ and } a, b \in \mathcal{K}(\mathcal{H})_{ah} \,\} \\ &\leq \text{ínf}\{\, \|(x + a, y + b)\| \,:\, av = vb,\ a, b \in \mathcal{K}(\mathcal{H})_{ah} \,\} = \|xv - vy\|_v \,,\end{aligned}$$

y así nuestro resultado está probado. La afirmación acerca de las curvas se deduce ahora rápidamente. □

**Observación 6.2.3.** *La desigualdad anterior es óptima. Si $x, y \in \mathcal{K}(\mathcal{H})_{ah}$ tales que $x$ es codiagonal con respecto a $p$ e $y$ es codiagonal con respecto a $q$, entonces ambas métricas alcanzan su mínimo en $(a, b) = (0, 0)$. Entonces,*

$$\|(xp - px, qy - yq)\| = \|xv - vy\|_v \,.$$

*En particular, esto implica que la curva $\delta(t) = e^{tx}ve^{-ty}$, satisface $L(\delta) = L(\varphi\delta)$.*

**Teorema 6.2.4.** *Sean $v_0 \in \mathcal{S}t_c(v)$ y $x, y \in \mathcal{K}(\mathcal{H})_{ah}$ tales que $\|(x, y)\| \leq \pi/2$. Si $x$ es codiagonal con respecto a $p_0 = v_0v_0^*$ e $y$ es codiagonal con respecto a $q_0 = v_0^*v_0$, entonces la curva $\delta(t) = e^{tx}v_0e^{-ty}$ posee longitud minimal en $\mathcal{S}t_c(v)$ entre todas las curvas suaves uniendo los mismos puntos.*

*Demostración.* Sea $\gamma$ una curva en $\mathcal{S}t_c(v)$ uniendo $v_0$ y $e^xv_0e^{-y}$. Observemos que las curvas $\varphi\gamma$ y $\varphi\delta$ unen los mismos puntos en $\mathcal{O}_p \times \mathcal{O}_q$. Por lo tanto por el Lema 6.2.1 tenemos $L(\varphi\gamma) \leq L(\gamma)$. Entonces, por el Lema 6.2.2 y la Observación 6.2.3 obtenemos

$$L(\delta) = L(\varphi\delta) \leq L(\varphi\gamma) \leq L(\gamma),$$

lo que demuestra el resultado. □

# Bibliografía


[An05] E. Andruchow, Short geodesics of unitaries in the $L^2$ metric, Canad. Math. Bull. 48 (2005), no. 3, 340-354.

[An08] E. Andruchow, Metric geometry of partial isometries in a finite von Neumann algebra, J. Math. Anal. Appl. 337 (2008), no. 2, 1226-1237.

[ACL09] E. Andruchow, E. Chiumiento, G. Larotonda, Homogeneous manifolds from non commutative measure spaces, J. Math. Anal. Appl. (2009), en prensa.

[AC04] E. Andruchow, G. Corach, Differential geometry of partial isometries and partial unitaries, Illinois J. Math. 48 (2004), no. 1, 97-120.

[AC05] E. Andruchow, G. Corach, Metrics in the set of partial isometries with finite rank, Atti Accad. Naz. Lincei Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. Rend. Lincei (9) Mat. Appl. 16 (2005), no. 1, 31-44.

[ACM05] E. Andruchow, G. Corach, M. Mbekhta, On the geometry of generalized inverses, Math. Nachr. 278 (2005), no. 7-8, 756-770.

[ACS95] E. Andruchow, G. Corach, D. Stojanoff, A geometric characterization of nuclearity and inyectivity, J. Funct. Anal. 133 (1995), no. 2, 474-494.

[AL08] E. Andruchow, G. Larotonda, Hopf-Rinow Theorem in the Sato Grassmanian, J. Funct. Anal. 255 (2008), no. 7, 1692-1712.

[AL09] E. Andruchow, G. Larotonda, The rectificable distance in the unitary Fredholm group, Studia Math. (2009), en prensa.

[ALR09] E. Andruchow, G. Larotonda, L. Recht, Finsler geometry and actions of the p-Schatten unitary groups, Trans. Amer. Math. Soc. 362 (2010), 319-344.

[AR06] E. Andruchow, L. Recht, Grassmannians of a finite algebra in the strong operator topology, Internat. J. Math. 17 (2006), no. 4, 477-491.

[AR08] E. Andruchow, L. Recht, Geometry of unitaries in a finite algebra: variation formulas and convexity, Internat. J. Math. 19 (2008), no. 10, 1223-1246.

[ARS92] E. Andruchow, L. Recht, D. Stojanoff, The Space of spectral measures is a homogeneous reductive space, Integral Equations Operator Theory 16 (1993) no. 1, 1-14.

[ARV07] E. Andruchow, L. Recht, A. Varela, Metric geodesics of isometries in a Hilbert space and the extension problem, Proc. Amer. Math. Soc. 135 (2007), 2527-2537.

[AS94] E. Andruchow, D. Stojanoff, Geometry of conditional expectations and finite index, Internat. J. Math. 5 (1994), no. 2, 169-178.

[AV96] E. Andruchow, A. Varela, Geometry and the Jones projection of a state, Integral Equations Operator Theory 25 (1996), no. 2, 129-146.

[AV02] E. Andruchow, A. Varela, Homotopy of states orbits, J. Operator Theory 48 (2002), 419-430.

[ArS99] M. Argerami, D. Stojanoff, The Weyl group and the normalizer of a conditional expectation, Integral Equations Operator Theory 34 (1999), no. 2, 165-186.

[ArS01] M. Argerami, D. Stojanoff, Orbits of conditional expectations, Illinois J. Math. 45 (2001), no. 1, 243-263.

[At75] C.J. Atkin, The Hopf-Rinow theorem is false in infinite dimensions, Bull. London Math. Soc. 7 (1975), no. 3, 261–266

[ASS94] J. E. Avron, R. Seiler, B. Simon, The Index of a Pair of Projections, J. Funct. Anal. 120 (1994), no. 1, 220-237.

[BCS00] D. Bao, S.S. Chern, Z. Shen, An Introduction to Riemann-Finsler Geometry, Spring-Verlag, New York, 2000.

[Be06] D. Beltiţă, Smooth homogeneous structures in operator theory. Chapman and Hall/CRC, Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics 137, Boca Raton, 2006.

[BG07] D. Beltiţă, J. Galé, Holomorphic geometric models for representations of $C*$-algebras, J. Funct. Anal. 255 (2007), no. 10, 2888-2932.

[BR05] D. Beltiţă, T. Ratiu, Symplectic leaves in real Banach Lie–Poisson spaces, Geom. Funct. Anal. 15 (2005), no. 4, 753-779.

[BR07a] D. Beltiţă, T. Ratiu, Geometric representation theory for unitary groups of operator algebras , Adv. Math. 208 (2007), no. 1, 299-317.

[BR07b] D. Beltiţă, T. Ratiu, A. Tumpach,The restricted Grassmannian, Banach Lie-Poisson spaces and coadjoint orbits, J. Funct. Anal. 247 (2007), no. 1, 138-168.

[Bea85] B. Beauzamy, Introduction to Banach spaces and their geometry, Second revised edition, North-Holland, Amsterdam, 1985.

[Cal41] J. Calkin, Two-sided ideal and congruences in the ring of bounded operators in Hilbert space, Ann. of Math. 42 (1941), no. 2, 839-873.

[Ca85] A. L. Carey, Some homogeneous spaces and representations of the Hilbert Lie group $U(\mathcal{H})_2$, Rev. Roumaine Math. Pures Appl. 30 (1985), no. 7, 505-520.

[Ch08] E. Chiumiento, Local minimal curves in homogeneous reductive spaces of the unitary group of a finite von Neumann algebra, Integral Equations Operator Theory 62 (2008), no. 3, 365-382.

[Ch09a] E. Chiumiento, Geometry of $\mathfrak{I}$-Stiefel manifolds, Proc. Amer. Math. Soc. 138 (2010), 341-353.

[Ch09b] E. Chiumiento, Metric geometry in infinite dimensional Stiefel manifolds, Differential Geom. Appl. (2009), en prensa.

[Co35] S. Cohn-Vossen, Existenz kürzester Wege, Doklady SSSR 8 (1935), 339-342.

[Con90] J. B. Conway, A course in functional analysis. Second edition. Graduate Texts in Mathematics, 96. Springer-Verlag, New York, 1990.

[CM04] G. Corach, A. Maestripieri, D. Stojanoff, Orbits of positive operators from a differential viewpoint, Positivity 8 (2004), no. 1, 31-48.

[CPR90] G. Corach, H. Porta, L. Recht, Differential geometry of systems of projections in Banach algebras, Pacific J. Math. 143 (1990), 209-228.

[CPR93a] G. Corach, H. Porta, L. Recht, The geometry of spaces of projections in $C^*$-algebras, Adv. Math. 101 (1993), no. 1, 59-77.

[CPR93b] G. Corach G, H. Porta, L. Recht, The Geometry of the Space of Selfadjoint Invertible Elements in a $C^*$-algebra, Integral Equations Operator Theory 16 (1993), no. 3, 333-359.

[CPR94] G. Corach , H. Porta, L. Recht, Convexity of the geodesic distance on spaces of positive operators, Illinois J. Math. 38 (1994), no. 1, 87-94.

[Dav96] K. R. Davidson, $C^*$-algebras by example, Fields Institute Monographs, Providence, 1996.

[Da69] P. Dazord, Propriétés globales des géodésiques des Espaces de Finsler, Theses, Universé de Lyon (1969).

[Di69] J. Dixmier, Les algèbres d'operateurs dans l'espace Hilbertien, Gauthier-Villars, Paris, 1969.

[DKW82] C. Davis, W. M. Kahan, H. F. Weinberger, Norm preserving dilations and their applications to optimal error bounds, SIAM J. Numer. Anal. 19 (1982), no. 3, 445-469.

[DMR00] C. E. Durán, L. E. Mata-Lorenzo, L. Recht, Natural variational problems in the Grassmann manifold of a C*-algebra with trace, Adv. Math. 154 (2000), no. 1, 196-228.

[DMR04] C. Durán, L. Mata-Lorenzo, L. Recht, Metric geometry in homogeneous spaces of the unitary group of a $C^*$-algebra. Part I: Minimal curves, Adv. Math. 184 (2004), no. 2, 342-366.

[DMR05] C. Durán, L. Mata-Lorenzo, L. Recht, Metric geometry in homogeneous spaces of the unitary group of a $C^*$-algebra. Part II: geodesiscs joining fixed end points, Integral Equations Operator Theory 53 (2005), no. 1, 33-50.

[Ek78] I. Ekeland, The Hopf-Rinow theorem in infinite dimension, J. Differential Geom. 13 (1978), no. 2, 287-301.

[FK86] T. Fack, H. Kosaki, Generalized $s$-numbers of $\tau$-measurable operators, Pacific J. Math. 123 (1986), no. 2, 269-300.

[Ga06] J. E. Galé, Geometría de órbitas de representaciones de grupos y álgebras promediables, Rev. R. Acad. Cienc. Exactas Fís. Quím. Nat. Zaragoza (2) 61 (2006), 7–46.

[GK60] I. C. Gohberg, M. G. Krein, Introduction to the theory of linear non-self-adjoint operators, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1960.

[Gr81] M. Gromov, Structures métriques pour les variétés riemanniennes, Textes Mathématiques n°1 Paris, 1981.

[Gro65] N. Grossman, Hilbert manifolds without epiconjugates points, Proc. Amer. Math. Soc. 16 (1965), 1365-1371.

[HM63] P. R. Halmos, J. E. Mc Laughlin, Partial isometries, Pacific J. Math. 13 (1963), 585-596.

[dlH72] P. de la Harpe, Classical Banach-Lie algebras and Banach-Lie groups of operators in Hilbert space, Lectures Notes in Mathematics, Vol. 285, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1972.

[HK77] L.A. Harris, W. Kaup, Linear algebraic groups in infinite dimensions, Illinois J. Math. 21 (1977), no. 3, 666-674.

[HR31] H. Hopf, W. Rinow, Über den Begriff der vollständigen differential-geometrischen Fläche, Comment. Math. Helv. 3 (1931), 209-225.

[KN96] S. Kobayashi, K. Nomizu, Foundations of differential geometry. Vol. I. Reprint of the 1969 original, Wiley Classics Library, John Wiley & Sons, 1996.

[Ko84] H. Kosaki, Applications of uniform convexity of noncommutative $L^p$-spaces, Trans. Amer. Math. Soc. 283 (1984), no. 1, 265-282.

[Kr47] M. G. Krein, The theory of self-adjoint extensions of semibounded hermitian transformations and its applications. II., Mat. Sbornik N.S. 21 (63), (1947). 365-404 (en ruso).

[La95] S. Lang, Differential and Riemannian manifolds. Third edition. Graduate Texts in Mathematics, 160. Springer-Verlag, New York, 1995.

[Li99] C. Li, An Estimate for Lipschitz Constants of Metric Projections, J. Math. Anal. Appl. 231 (1999), no. 1, 133-141.

[Mc65] J. McAlpin, Infinite dimensional manifolds and morse theory, PhD Thesis, Columbia University, 1965.

[MR92] L. Mata-Lorenzo, L. Recht, Infinite-dimensional homogeneus reductive spaces. Acta Cient. Venezolana 43 (1992), 76-90.

[MR00] L. Mata-Lorenzo, L. Recht, Convexity properties of $Tr[(a^*a)^n]$, Linear Algebra Appl. 315 (2000), no 1-3, 25-38.

[MS02] M. Mbekhta, Ş. Strătilă, Homotopy classes of partial isometries in von Neumann algebras, Acta Sci. Math. (Szeged) 68 (2002), no. 1-2, 271-277.

[Ne74] E. Nelson, Notes on noncommutative integration, J. Funct. Anal. 15 (1974), 103-116.

[Ph89] R. R. Phelps, Convex functions, monotone operators and differentiability, Lectures Notes in Math. 1364, Springer-Verlag, Berlin, 1989.

[PX03] G. Pisier, Q. Xu, Non-commutative $L^p$-spaces. Handbook of the geometry of Banach spaces Vol. 2, Elseiver Science B. V. (2003).

[Po88] S. Popa, Lectures on von Neumann algebras of type $\mathrm{II}_1$, Notas de un curso dictado en UCLA escritas por D. Bisch, 1988.

[PR87a] H. Porta, L. Recht, Spaces of projections in a Banach algebra, Acta Cient. Venezolana 38 (1987), 408-426.

[PR87b] H. Porta, L. Recht, Minimality of geodesics in Grassmann manifolds, Proc. Amer. Math. Soc. 100 (1987), no. 3, 164-166.

[PS86] A. Pressley, G. Segal, Loop Groups, Oxford Mathematical Monographs. Oxford Science Publications. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1986.

[Ra77] I. Raeburn, The relationship between a commutative Banach algebra and its maximal ideal space, J. Funct. Anal. 25 (1977), no. 4, 366-390.

[RS80] M. Reed, B. Simon, Methods of modern mathematical physics I: Functional analysis, Academic Press Inc, San Diego, 1980.

[Sa71] S. Sakai, $C^*$-algebras and $W^*$-algebras, Springer, New York, 1971.

[Se53] I. Segal, A noncommutative extension of abstract integration, Ann. of Math. (2) 57 (1953), 401-457.

[ST07] I. Serban, F. Turcu, Compact perturbation of isometries, Proc. Amer. Math. Soc. 135 (2007), no. 4, 1175-1180.

[Si70] I. Singer, Best approximation in normal linear spaces by elements of linear subspaces, Springer, New York, 1970.

[S07] A. Stacey, Variations on a theme: Riemannian geometry in infinite dimensions. Algebraic topology special session, BMC 2007.

[St81] Ş. Strătilă, Modular theory in operators algebras, Abacus Press, Kent (1981).

[SV78] Ş. Strătilă, D. Voiculescu, On a Class of KMS States for the Group U($\infty$), Math. Ann. 235 (1978), no. 1, 87-110.

[Ta79] M. Takesaki, Theory of operator algebras III. Springer-Verlag, 1979.

[Up85] H. Upmeier, Symmetric Banach manifolds and Jordan C*-algebras. North-Holland Math. Stud. 104, Notas de Matemática 96, North-Holland, Amsterdam, 1985.

# Índice alfabético