UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PLATA

FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Tesis Doctoral

Clases de operadores en espacios semi-Hilbertianos

María Laura Arias

Director de Tesis: Dr. Gustavo Corach
Co-director de Tesis: Dr. Demetrio Stojanoff

La Plata, 2009.

A mis padres.

Agradecimientos

Quisiera expresar mi más sincero agradecimiento a las siguientes personas que, de una u otra manera, han colaborado en la realización de esta tesis:

En primer lugar, deseo agradecer a mi director Gustavo Corach no sólo por haberme guiado en el desarrollo de esta tesis, sino también por la generosidad de haber aceptado dirigirme sin tener ninguna referencia mía (más que un CV adjunto a un e-mail), dándome así la posibilidad de poder desarrollarme en el área de mi interés. Asimismo, deseo agradecerle por su buena disposición para ayudarme y orientarme en distintas etapas del doctorado.

También deseo agradecer a Miriam Pacheco con quien he trabajado durante estos años. Parte de los resultados presentados en esta tesis corresponden al trabajo realizado en conjunto.

Asimismo, quisiera agradecer a Cristian Conde, María Celeste Gonzalez y Guillermina Fongi por haber sabido suplir la familia y amigos que quedaron en Mar del Plata, ayudándome a disfrutar de mi estadía en Buenos Aires. En particular, deseo agradecer a Cristian Conde por su lectura detallada de la tesis y sus útiles comentarios. Además, deseo agradecer a mis compañeros de oficina del IAM: Eugenia Di iorio, Jorge Antezana, Pedro Massey, Mariano Ruiz, Francisco Martinez Peria y Eduardo Chiumiento.

Como siempre, agradezco a mi familia y a Andrés por brindarme la confianza, el apoyo y el amor necesarios a lo largo de las distintas etapas de la vida.

Finalmente, agradezco al Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET) por el apoyo otorgado para la realización de esta tesis doctoral.

Introducción

El objetivo de esta tesis es estudiar ciertas clases de operadores lineales y acotados definidos sobre un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$. En primer lugar, nos dedicaremos a clases de operadores definidas por medio de propiedades heredadas de la estructura del espacio de Hilbert. Por ejemplo, isometrías, operadores unitarios, isometrías parciales, como así también operadores compactos y de clase p-Schatten. En segundo lugar nos dedicaremos al estudio de clases de operadores definidas por medio de una estructura más débil que la del espacio de Hilbert, a saber, una estructura de espacio semi-Hilbertiano. Finalmente, veremos cómo se relacionan estas clases de operadores definidas bajo distintas estructuras.

Denotemos con $L(\mathcal{H})$ al álgebra de operadores lineales y acotados en el espacio de Hilbert $\mathcal{H}$. Observemos que dada una base ortonormal de $\mathcal{H}$, $\Xi = (\xi_k)_{k\in\mathbb{N}}$, todo operador $T \in L(\mathcal{H})$ queda unívocamente determinado por la sucesión $(T\xi_k)_{k\in\mathbb{N}}$. A saber, para todo $\eta = \sum_{k=1}^{\infty} c_k\xi_k \in \mathcal{H}$ se tiene que $T\eta = \sum_{k=1}^{\infty} c_k T\xi_k$. Luego, con el objetivo de estudiar clases de operadores en $L(\mathcal{H})$, surgen naturalmente las dos preguntas siguientes: Si $\Xi = (\xi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es una base ortonormal de $\mathcal{H}$ entonces

1. dada una sucesión $(\psi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ en $\mathcal{H}$, ¿bajo qué condiciones existe $T \in L(\mathcal{H})$ tal que $(T\xi_k)_{k\in\mathbb{N}} = (\psi_k)_{k\in\mathbb{N}}$?

2. Dado un operador $T \in L(\mathcal{H})$, ¿cómo se reflejan las distintas clases de operadores sobre la sucesión $(T\xi_k)_{k\in\mathbb{N}}$?

La respuesta a la primer pregunta la dan las sucesiones de Bessel. Dada una sucesión $\psi = (\psi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ en $\mathcal{H}$, se dice que ψ es una sucesión de Bessel si existe una constante positiva B_ψ tal que

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\langle \xi, \psi_k \rangle|^2 \leq B_\psi \|\xi\|^2,$$

para todo $\xi \in \mathcal{H}$. Si además existe $A_\psi > 0$ tal que

$$A_\psi \|\xi\|^2 \leq \sum_{k=1}^{\infty} |\langle \xi, \psi_k \rangle|^2,$$

para todo $\xi \in \mathcal{H}$, entonces se dice que ψ es un marco ("frame", en inglés). Denotaremos con $Bess(\mathcal{H})$ al conjunto de las sucesiones de Bessel de $\mathcal{H}$. En el capítulo 2 probamos que, independientemente de la base ortonormal Ξ, existe $T \in L(\mathcal{H})$ tal que $(\psi_k)_{k\in\mathbb{N}} = (T\xi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ si y sólo si $(\psi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Bessel. Dicho de otro modo, $T \in L(\mathcal{H})$ si y sólo si $(T\xi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Bessel. Más aún, la aplicación

$$\alpha_\Xi : L(\mathcal{H}) \to Bess(\mathcal{H}) \text{ tal que } \alpha_\Xi(T) = (T\xi_k)_{k\in\mathbb{N}},$$

es biyectiva. Es decir que, fijada una base ortonormal de $\mathcal{H}$, todo operador de $L(\mathcal{H})$ queda unívocamente determinado por una sucesión de Bessel. La segunda pregunta se traduce en la posibilidad de caracterizar distintas clases de operadores de acuerdo con la sucesión de Bessel asociada. Puesto que deseamos que dicha caracterización sea independiente de la base ortonormal con la que se haya definido la sucesión, la clase de operadores sobre la cual tiene sentido la pregunta queda bastante limitada. A saber, sólo aquellas clases que resulten invariantes a derecha por operadores unitarios podrán ser caracterizadas. Recordemos que los operadores unitarios se caracterizan por preservar bases ortonormales. A pesar de que esta condición sobre las clases de operadores que pueden ser caracterizadas es muy restrictiva, existen varias clases que la cumplen. Por ejemplo, los operadores suryectivos, unitarios, isometrías, isometrías parciales, entre otros, verifican esta condición. En particular, las isometrías parciales serán de especial interés en esta tesis puesto que presentan diversas aplicaciones dentro de la teoría de operadores. Por ejemplo, juegan un rol fundamental en la descomposición polar de operadores. Además, varias clases como isometrías, operadores unitarios y proyecciones ortogonales son, en particular, isometrías parciales. En la sección 2.2 presentamos la caracterización de las isometrías parciales de acuerdo a su sucesión de Bessel asociada. Asimismo, recopilamos algunas otras caracterizaciones conocidas. Por ejemplo, es bien sabido que $T \in L(\mathcal{H})$ es suryectivo si y sólo si $\alpha_\Xi(T) = (T\xi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es un marco. Dentro del conjunto de clases de operadores que resultan invariantes a derecha por unitarios se encuentran las clases de operadores compactos y de operadores de clase p-Schatten, desde ahora denotadas con $\mathfrak{S}_\infty(\mathcal{H})$ y $\mathfrak{S}_p(\mathcal{H})$ respectivamente. Nuestro objetivo en la última sección del capítulo 2 es caracterizar estas clases de operadores. Recordemos que todo operador compacto T es, en cierto sentido, "diagonalizable". Más precisamente, $T = \sum_n \lambda_n(T) \langle \phi_n, . \rangle \nu_n$, para algún par de conjuntos ortonormales $(\phi_n), (\nu_n)$ y una sucesión decreciente a 0 de números no negativos $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}} \in c_0 = \{(c_n)_{n\in\mathbb{N}} : \ c_n \to 0\}$. Se dice que T pertenece a la clase p-Schatten $(1 \leq p)$ si $(\lambda_n) \in l^p = \{(c_n)_{n\in\mathbb{N}} : \ \sum_{n=1}^\infty |c_n|^p < \infty\}$. En la Proposición 2.3.2 probamos que

$$\alpha_E(\mathfrak{S}_\infty(\mathcal{H})) = \{\psi \in Bess(\mathcal{H}) : \ (B_{\psi^N})_{N\in\mathbb{N}} \in c_0 \text{ donde } \psi^N = (\psi_k)_{k>N}\}.$$

Finalmente, en la Proposición 2.3.8 caracterizamos $\alpha_\Xi(\mathfrak{S}_p(\mathcal{H}))$, para $1 \leq p$.

En el capítulo 3, nos dedicamos al estudio de una clase de operadores más amplia que la de los operadores p-Schatten. A saber, los operadores de la forma

$$M_{m(\psi_k)(\phi_k)} = \sum_n m_n \langle \phi_n, . \rangle \psi_n,$$

donde $(\phi_n), (\psi_n)$ son sucesiones de Bessel y $m \in l^\infty = \{(c_n)_{n\in\mathbb{N}} : \ \text{existe } M > 0 \text{ tal que } |c_n| < M \text{ para todo } n \in \mathbb{N}\}$. Dicho operador se llama multiplicador de Bessel de las sucesiones de Bessel $(\phi_n), (\psi_n)$. La sucesión $m = (m_k)$ se llama el símbolo del multiplicador. Esta clase de operadores fue definida por P. Balasz en [7] y surge como una extensión de los multiplicadores de Gabor, para sucesiones de Bessel. Se recomienda consultar [26], para un estudio sobre multiplicadores de Gabor. Los mutiplicadores de Bessel presentan distintas aplicaciones. Por ejemplo, P. Balasz en [8] los usa para resolver un problema de aproximación de matrices. En la primer parte de este capítulo estudiamos el operador $M_{m(\psi_k)(\phi_k)}$ bajo distintas condiciones sobre el símbolo. Más precisamente, P. Balasz en [7] probó que si $m \in c_0$ entonces $M_{m(\psi_k)(\phi_k)}$ es compacto y si $m \in l^1$ (resp. l^2) entonces $M_{m(\psi_k)(\phi_k)}$ pertenece a la clase 1-Schatten (resp. 2-Schatten). Nosotros completamos este resultado probando que si $m \in l^p$ para $p \geq 1$ entonces $M_{m(\psi_k)(\phi_k)}$ pertenece a la clase p-Schatten (ver Proposición

3.1.3). También presentamos resultados referidos a la continuidad del multiplicador respecto de las sucesiones de Bessel y el símbolo. En la segunda parte del capítulo, extendemos el concepto de multiplicador de Bessel para sucesiones de Bessel de fusión. La noción de sucesión de Bessel de fusión introducida por P.G. Casazza y G. Kutyniok en [14] extiende la noción de sucesión de Bessel y es, actualmente, un área de gran interés puesto que presenta importantes aplicaciones (ver [11], [43]). Dada una familia $\{(\mathcal{W}_i, \omega_i)\}_{i\in I}$ donde I denota un conjunto finito o numerable, $\mathcal{W}_i,\ i \in I$, son subespacios cerrados de $\mathcal{H}$ y $\omega_i > 0$ para todo $i \in I$, se dice que $\{(\mathcal{W}_i, \omega_i)\}_{i\in I}$ es una sucesión de Bessel de fusión si existe una constante $B > 0$ tal que

$$\sum_{i\in I} \omega_i^2 \|P_{\mathcal{W}_i}\xi\|^2 \leq B\|\xi\|^2,$$

para todo $\xi \in \mathcal{H}$, donde $P_{\mathcal{W}_i}$ denota la proyección ortogonal sobre el subespacio $\mathcal{W}_i$. Si además existe una constante $A > 0$ tal que

$$A\|\xi\|^2 \leq \sum_{i\in I} \omega_i^2 \|P_{\mathcal{W}_i}\xi\|^2,$$

para todo $\xi \in \mathcal{H}$ entonces $\{(\mathcal{W}_i, \omega_i)\}_{i\in I}$ se llama marco de fusión. Se recomienda consultar [14],[15], [44] y sus referencias, por un estudio teórico de las sucesiones de Bessel de fusión. Dadas $\mathcal{W} = (\mathcal{W}_i, \omega_i)_{i\in I}$ y $\mathcal{V} = (\mathcal{V}_i, \upsilon_i)_{i\in I}$ dos sucesiones de Bessel de fusión definidas sobre el mismo espacio de Hilbert, $\mathcal{H}$, y $m \in l^\infty$ definimos como el multiplicador de Bessel de fusión de las sucesiones $\mathcal{W}$ y $\mathcal{V}$ al operador

$$S_{m\mathcal{V}\mathcal{W}} : \mathcal{H} \to \mathcal{H} \text{ definido por } S_{m\mathcal{V}\mathcal{W}}(\xi) = \textstyle\sum_{i\in I} m_i \upsilon_i \omega_i P_{\mathcal{V}_i} P_{\mathcal{W}_i}\xi.$$

Dicho operador resulta acotado y estudiamos sus propiedades de acuerdo con si el símbolo m pertenece a c_0 o l^p (ver Proposición 3.2.4). A diferencia de los resultados obtenidos para los multiplicadores de Bessel, son necesarias hipótesis extras, referidas a las dimensiones de los subespacios $\mathcal{W}_i$, con el fin de obtener conclusiones similares. Asimismo, presentamos ejemplos que ilustran la necesidad de estas hipótesis. Finalmente, estudiamos el caso $m = (1, 1, 1...)$, el cual fue analizado, pero en otro contexto, en [28]. Nosotros estudiamos bajo qué condiciones $S_{m\mathcal{V}\mathcal{W}}$ resulta compacto o pertenece a la clase p-Schatten (Proposición 3.2.8).

Hasta ahora nos hemos dedicado al estudio de distintas clases de operadores en $L(\mathcal{H})$ bajo la estructura de $\mathcal{H}$. En el capítulo 4, nuestro objetivo es estudiar clases de operadores en $L(\mathcal{H})$ que resulten isométricos, unitarios o parcialmente isométricos con respecto a un semi-producto interno adicional en el espacio de Hilbert. Más precisamente, consideramos el semi-producto interno inducido por $A \in L(\mathcal{H})^+ = \{T \in L(\mathcal{H}) : \langle T\xi, \xi\rangle \geq 0 \ \forall \xi \in \mathcal{H}\}$ dado por

$$\langle \xi, \eta\rangle_A = \langle A\xi, \eta\rangle \text{, para todo } \xi, \eta \in \mathcal{H}.$$

Llamamos espacio semi-Hilbertiano a $(\mathcal{H}, \langle\ ,\ \rangle_A)$. En principio, vale la pena notar que, salvo que A resulte inversible, no todo operador $T \in L(\mathcal{H})$ admite un operador adjunto respecto a $\langle\ ,\ \rangle_A$. En efecto, $W \in L(\mathcal{H})$ será un adjunto de T respecto a $\langle\ ,\ \rangle_A$ (lo llamaremos A-adjunto) si $\langle T\xi, \eta\rangle_A = \langle \xi, W\eta\rangle_A$ para todo $\xi, \eta \in \mathcal{H}$ o, equivalentemente, si $AW = T^*A$. En lo que sigue denotaremos

$$L_A(\mathcal{H}) = \{T \in L(\mathcal{H}) : \ T \text{ admite } A\text{-adjunto}\}.$$

Observemos que $T \in L_A(\mathcal{H})$ si y sólo si la ecuación $AX = T^*A$ tiene solución. Más aún, las soluciones de dicha ecuación son A-adjuntos de T. En el estudio de este tipo de ecuaciones de operadores juega un rol importante el teorema de inclusión de rangos de R. G. Douglas [25]. Brevemente, el teorema de Douglas dice que la ecuación $BX = C$ con B, C operadores lineales y acotados, tiene una solución lineal y acotada D si y sólo si $R(C) \subseteq R(B)$; además, entre sus soluciones existe sólo una que verifica $R(D) \subseteq \overline{R(B^*)}$ a la cual se llama solución reducida. Por lo tanto, dado $T \in L_A(\mathcal{H})$ distinguimos por $T^\sharp$ al A-adjunto de T que resulta ser la solución reducida de la ecuación $AX = T^*A$. Dicho operador $T^\sharp$ presenta propiedades similares, pero no idénticas, al adjunto T^*. En la primera sección del capítulo 4, estudiamos distintas propiedades de $T^\sharp$. Dentro de $L_A(\mathcal{H})$, los operadores T que son autoadjuntos respecto a $\langle\ ,\ \rangle_A$, es decir $AT = T^*A$, se llaman "simetrizables" (con respecto a A) o A-autoadjuntos. Vale la pena destacar que, en general, que T sea A-autoadjunto no es equivalente a $T = T^\sharp$. Los operadores simetrizables han sido estudiados desde mediados del siglo XX. Recomendamos consultar el trabajo de M. G. Krein [35], y además los artículos de A. C. Zaanen [55], W. T. Reid [42], J. Dieudonné [24], P. Lax [36], y los libros de Zaanen [56] y Istrătescu [33]. En particular, a lo largo de esta tesis, trabajaremos con proyecciones A-autoadjuntas. Notemos que dado un subespacio cerrado $\mathcal{S}$ de $\mathcal{H}$ y $Q \in L(\mathcal{H})$ una proyección con rango $\mathcal{S}$ entonces $A = Q^*Q + (I - Q^*)(I - Q) \in L(\mathcal{H})^+$ (más aún, A es inversible) y Q resulta

A-autoadjunto. Sin embargo, fijado el subespacio cerrado $\mathcal{S}$ y el operador positivo A, no siempre existe una proyección A-autoadjunta con rango $\mathcal{S}$. Corach et al. [19] denominan a un par $(A, \mathcal{S})$ compatible si existe una proyección con tales propiedades. Tanto en [19] como en los trabajos posteriores [20], [21] y [22], se estudian distintas condiciones para la compatibilidad de un par dado.

Así como no todo operador en $L(\mathcal{H})$ admite A-adjunto tampoco, en general, todo operador resulta acotado respecto a la semi-norma $\| \ \|_A = \sqrt{\langle \ , \ \rangle_A}$. Denotaremos con

$$L_{A^{1/2}}(\mathcal{H}) = \{T \in L(\mathcal{H}) : \exists\ c > 0,\ \|T\xi\|_A \leq c\|\xi\|_A\ \forall \xi \in \mathcal{H}\},$$

y llamaremos A-operadores a los operadores de $L_{A^{1/2}}(\mathcal{H})$. Un resultado reciente de S. Hassi, Z. Sebestyén y H. de Snoo [32] implica que $L_A(\mathcal{H}) \subseteq L_{A^{1/2}}(\mathcal{H})$. Es decir, todo operador que admite A-adjunto resulta acotado respecto de $\| \ \|_A$. En lo que resta del capítulo 4, nos dedicamos al estudio de distintas clases de operadores sobre el espacio semi-Hilbertiano $(\mathcal{H}, \langle \ , \ \rangle_A)$.

En primer lugar, estudiamos las contracciones respecto a $\langle \ , \ \rangle_A$. Dado $T \in L(\mathcal{H})$ se dice que T es una A-contracción si $\|T\xi\|_A \leq \|\xi\|_A$ para todo $\xi \in \mathcal{H}$. Si $\|T\xi\|_A = \|\xi\|_A$ para todo $\xi \in \mathcal{H}$ entonces se dice que T es una A-isometría. Equivalentemente se define que T es una A-contracción (resp. A-isometría) si $T^*AT \leq A$ (resp. $T^*AT = A$). Las A-contracciones han sido estudiadas en diversos trabajos. Cabe citar los siguientes trabajos de L. Suciu [51],[52] y [53] donde se estudian distintas propiedades ergódicas y de descomposición del espacio asociadas a A-contracciones. Por ejemplo, en [51] se prueba que si T es una A-contracción entonces $\mathcal{H}$ admite la descomposición ortogonal $\mathcal{H} = \overline{R(A - AT)} \oplus N(A - AT)$, donde $N(A - AT)$ denota el espacio nulo y $R(A - AT)$ el rango del operador $A - AT$. Nosotros nos concentramos en las A-isometrías. En primer lugar, en la Proposición 4.2.6 caracterizamos a las A-isometrías por medio de isometrías parciales. En segundo lugar, en la Proposición 4.2.9, caracterizamos a las A-isometrías que admiten A-adjunto por medio de proyecciones A-autoadjuntas. Asimismo, en la Proposición 4.2.13 estudiamos la representación matricial de las A-isometrías inducida por la descomposición $\mathcal{H} = \overline{R(A)} \oplus N(A)$ cuando $R(A)$ es cerrado.

Nuestro segundo objetivo es estudiar operadores unitarios respecto a $\langle \ , \ \rangle_A$. Puesto que $U \in L(\mathcal{H})$ es unitario si y sólo si U y U^* son isometrías entonces diremos que $U \in L_A(\mathcal{H})$ es un operador A-unitario si U y $U^\sharp$ son A-isometrías. Esta clase de operadores ya no resultan inversibles, pero preservan varias propiedades métricas de los operadores unitarios clásicos. Por ejemplo, en la Proposición 4.3.5 probamos que si $T \in L_{A^{1/2}}(\mathcal{H})$ y $U, V \in L_A(\mathcal{H})$ son A-unitarios entonces $\|T\|_A = \|UTV^\sharp\|_A$ donde $\|T\|_A := \sup\limits_{\xi \notin N(A)} \frac{\|T\xi\|_A}{\|\xi\|_A} < \infty$.

Finalmente nos dedicamos a extender el concepto de isometría parcial para $\langle\ ,\ \rangle_A$ y estudiar sus propiedades. Diremos que $T \in L(\mathcal{H})$ es una A-isometría parcial si

$$\|T\xi\|_A = \|\xi\|_A \text{ para todo } \xi \in N(AT)^{\perp_A},$$

donde $N(AT)^{\perp_A} = \{\eta \in \mathcal{H} : \langle \eta, \nu \rangle_A = 0 \ \forall \nu \in N(AT)\}$. Claramente, las I-isometrías parciales, donde I denota el operador identidad, coinciden con las isometrías parciales. Esta definición permite, en el caso que la A-isometría parcial admita A-adjunto, obtener propiedades similares a las que verifican las isometrías parciales clásicas. Por ejemplo, en la Proposición 4.4.6 probamos que dado $T \in L_A(\mathcal{H})$, T es una A-isometría parcial si y sólo si $T^\sharp T$ es una proyección A-autoadjunta. Además, en el Teorema 4.4.10 brindamos la representación matricial de las A-isometrías parciales inducida por la descomposición $\mathcal{H} = \overline{R(A)} \oplus N(A)$ cuando $R(A)$ es cerrado. Dicha representación queda dependiente de cierta proyección simetrizable. Por último, extendemos para A-isometrías parciales un resultado de M. Mbekhta [37] que permite caracterizar isometrías parciales dentro de las contracciones. Más precisamente, M. Mbekhta prueba que dentro de las contracciones, las isometrías parciales se caracterizan por ser las de módulo mínimo reducido mayor o igual a 1. Nosotros definimos el A-módulo mínimo reducido de un operador $T \in L(\mathcal{H})$, el cual resulta una extensión natural del concepto clásico, del siguiente modo

$$\gamma_A(T) = \inf \left\{ \|T\xi\|_A : \ \xi \in N(AT)^{\perp_A} \text{ y } \|\xi\|_A = 1 \right\}.$$

En la Proposición 4.5.6 establecemos cierta relación entre el A-módulo minimo reducido y el modulo mínimo reducido. Finalmente, en el Teorema 4.5.7 obtenemos un resultado similar al de Mbekhta para A-isometrías parciales.

Así como todo operador $A \in L(\mathcal{H})^+$ induce un semi-producto interno, también induce un espacio de Hilbert. A saber, el semi-producto interno $\langle\ ,\ \rangle_A$ define en el cociente $\mathcal{H}/N(A)$ un producto interno que no es completo, salvo que $R(A)$ sea cerrado. Una construcción canónica debida a de Branges y Rovnyak [12], [13] prueba que la completación de $\mathcal{H}/N(A)$ es isométricamente isomorfa al rango de la raíz cuadrada positiva de A, $R(A^{1/2})$, con el producto interno definido por

$$(A^{1/2}\xi, A^{1/2}\eta) := \langle P\xi, P\eta\rangle\,,$$

donde P denota la proyección ortogonal sobre la clausura de $R(A)$ en $\mathcal{H}$. Denotaremos con

$$\mathbf{R}(A^{1/2}) = (R(A^{1/2}), (\ ,\ )),$$

a dicho espacio de Hilbert. Cabe destacar que $\mathbf{R}(A^{1/2})$ resulta ser un espacio de Hilbert inducido por A bajo la definición de Cojuhari y Gheondea dada en [17]. Los libros de T. Ando [1] y D. Sarason [45] y una serie de publicaciones de Z. Sebestyén [46], [47], [48], y Z. Sebestyén y J. Stochel [49] son excelentes fuentes para esta construcción. El capítulo 5 está dedicado a explorar la relación entre las clases de operadores sobre $(\mathcal{H}, \langle\ ,\ \rangle_A)$ estudiadas en el capítulo anterior y clases similares en $L(\mathbf{R}(A^{1/2}))$. Con este fin comenzamos el capítulo estudiando en más detalle el álgebra $L(\mathbf{R}(A^{1/2}))$. En primer lugar, en la Proposición 5.1.2 brindamos condiciones necesarias y suficientes sobre un operador lineal $\tilde{T} : R(A^{1/2}) \to R(A^{1/2})$ para que resulte acotado bajo la norma $\|\ \|_{\mathbf{R}(A^{1/2})}$. En segundo lugar, en el Teorema 5.1.3 extendemos, en nuestro contexto, el siguiente resultado probado en 1937 por M. G. Krein [35] (y, más tarde e independientemente, por P. Lax [36]): Consideremos un espacio con producto interno $\mathcal{L}$ con una norma adicional $\|\ \|_B$ bajo la cual resulta un espacio de Banach, y sea $T : \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ un operador lineal tal que $\langle T\xi, \eta\rangle = \langle \xi, T\eta\rangle$ para todo $\xi, \eta \in L$. Krein y Lax probaron que si T es $\|\ \|_B$-acotado entonces T es $\|\ \|_{\mathcal{L}}$-acotado. Nuestra extensión es la siguiente: Si $\mathcal{L} = \mathbf{R}(A^{1/2})$ y $T : \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ es un operador lineal tal que admite un $\langle\ ,\ \rangle$-adjunto entonces T es $\|\ \|_{\mathcal{H}}$-acotado si T es $\|\ \|_{\mathbf{R}(A^{1/2})}$-acotado. En la segunda sección del capítulo, relacionamos $L(\mathcal{H})$ con $L(\mathbf{R}(A^{1/2}))$ de modo de preservar propiedades métricas inducidas por la estructura semi-Hilbertiana. Para esto, siguiendo la notación introducida por Z. Sebestyén y J. Stochel en [49], presentamos el operador $W_A : \mathcal{H} \to \mathbf{R}(A^{1/2})$ definido por $\xi \mapsto A\xi$. Este operador verifica que $\|W_A\xi\|_{\mathbf{R}(A^{1/2})} = \|\xi\|_A$ para todo $\xi \in \mathcal{H}$, que es una propiedad fundamental para el objetivo de preservar propiedades métricas al trasladar operadores de $L(\mathcal{H})$ a operadores de $L(\mathbf{R}(A^{1/2}))$. Asimismo, definimos, en un sentido más amplio, cierto operador adjunto de W_A, $W_A^\sharp$ el cual verifica que

$\|W_A^\sharp \xi\|_{\mathbf{R}(A^{1/2})} = \|\xi\|_A$ para todo $\xi \in \mathcal{D}(W_A^\sharp) \subseteq \mathbf{R}(A^{1/2})$. A partir de estos operadores, vemos que las siguientes aplicaciones quedan bien definidas:

$$\alpha : L_{A^{1/2}}(\mathcal{H}) \longrightarrow L(\mathbf{R}(A^{1/2})),\ T \longmapsto \overline{W_A T W_A^\sharp},$$

donde la línea superior denota la extensión continua y

$$\beta : \tilde{L}(\mathbf{R}(A^{1/2})) \longrightarrow L_{A^{1/2}}(\mathcal{H}),\ \tilde{T} \longmapsto W_A^\sharp \tilde{T} W_A,$$

donde $\tilde{L}(\mathbf{R}(A^{1/2})) := \{\tilde{T} \in L(\mathbf{R}(A^{1/2})) :\ \tilde{T}(R(A)) \subseteq R(A)\}$. Por medio de estas aplicaciones que relacionan A-operadores con operadores de $L(\mathbf{R}(A^{1/2}))$ demostramos que las clases de A-operadores estudiadas en el capítulo anterior se corresponden con clases similares en $L(\mathbf{R}(A^{1/2}))$ (ver Teorema 5.3.3). Es decir, por ejemplo, probamos que $\alpha(\mathcal{I}_A(\mathcal{H})) = \widetilde{\mathcal{I}}(\mathbf{R}(A^{1/2}))$, donde $\mathcal{I}_A(\mathcal{H})$ denota el conjunto de A-isometrías de $L(\mathcal{H})$ e $\widetilde{\mathcal{I}}(\mathbf{R}(A^{1/2}))$ el conjunto de isometrías de $L(\mathbf{R}(A^{1/2}))$ tal que dejan invariante $R(A)$.

Parte de los resultados presentados en esta tesis se encuentran publicados en [2], [3], [4] y [5].

Índice general

Capítulo 1

Preliminares

A lo largo de esta tesis $\mathcal{H}$ y $\mathcal{H}_i$, con $i \in \mathbb{N}$, denotarán espacios de Hilbert complejos y separables con producto interno denotado por $\langle\ ,\ \rangle$ y norma dada por $\|\xi\| = \sqrt{\langle \xi, \xi\rangle}$ para todo $\xi \in \mathcal{H}$. Dado un subespacio $\mathcal{S}$ de $\mathcal{H}$, denotaremos al complemento ortogonal de $\mathcal{S}$ con $\mathcal{S}^\perp$, i.e., $\mathcal{S}^\perp = \{\xi \in \mathcal{H} : \ \langle \xi, \eta\rangle = 0 \ \forall \eta \in \mathcal{S}\}$. Si $\mathcal{S}, \mathcal{T}$ son subespacios cerrados de $\mathcal{H}$ entonces $\mathcal{S} + \mathcal{T}$ denotará el subespacio suma de $\mathcal{S}$ con $\mathcal{T}$. Si además $\mathcal{S} \cap \mathcal{T} = \{0\}$ entonces denotaremos $\mathcal{S} \dot{+} \mathcal{T}$ y si $\mathcal{S} = \mathcal{T}^\perp$ denotaremos $\mathcal{S} \oplus \mathcal{T}$.

1.1. Operadores lineales y acotados sobre un espacio de Hilbert

1.1.1. Nociones básicas

Dada una aplicación lineal $T : \mathcal{H}_i \to \mathcal{H}_j$ se dice que T es un operador acotado si existe $c > 0$ tal que $\|T\xi\| \leq c\|\xi\|$ para todo $\xi \in \mathcal{H}_i$ y, en tal caso, se define la norma de T por $\|T\| = \sup\limits_{\xi \neq 0} \frac{\|T\xi\|}{\|\xi\|} < \infty$. Denotaremos con $L(\mathcal{H}_i, \mathcal{H}_j)$ al espacio de los operadores lineales y acotados definidos sobre $\mathcal{H}_i$ y con imagen en $\mathcal{H}_j$. El álgebra $L(\mathcal{H}, \mathcal{H})$ será abreviado por $L(\mathcal{H})$. El operador identidad sobre $\mathcal{H}$ lo denotaremos con $id_{\mathcal{H}}$ (o simplemente id), I ó 1 indistintamente. Además, dado $T \in L(\mathcal{H}_i, \mathcal{H}_j)$ denotaremos con T^* a su **operador adjunto**, i.e., $T^* \in L(\mathcal{H}_j, \mathcal{H}_i)$ verifica que $\langle T\xi, \eta\rangle = \langle \xi, T^*\eta\rangle$ para todo $\xi \in \mathcal{H}_i, \eta \in \mathcal{H}_j$. Dicho operador cumple que $\|T\| = \|T^*\|$.

Asimismo, dado $T \in L(\mathcal{H}_i, \mathcal{H}_j)$ distinguiremos los siguientes subespacios asociados a T:

- $N(T) = \{\xi \in \mathcal{H}_i : \ T\xi = 0\}$, espacio nulo o núcleo de T;
- $R(T) = \{T\xi : \ \xi \in \mathcal{H}_i\}$, rango o imagen de T.

Recordemos que dado $T \in L(\mathcal{H}_i, \mathcal{H}_j)$ se dice que:

- T es **inyectivo** si $N(T) = \{0\}$.
- T es de **rango cerrado** si $R(T)$ es cerrado. Si $R(T) = \mathcal{H}_j$ entonces T es **suryectivo**.
- T es **inversible** si T es inyectivo y suryectivo. En tal caso, existe $T^{-1} \in L(\mathcal{H}_j, \mathcal{H}_i)$ tal que $TT^{-1} = id_{\mathcal{H}_i}$ y $T^{-1}T = id_{\mathcal{H}_j}$.
- T es una **isometría** si $\|T\xi\| = \|\xi\|$ para todo $\xi \in \mathcal{H}$ o, equivalentemente, si $T^*T = id$.
- T es una **co-isometría** si T^* es una isometría.
- T es **unitario** si T es inversible y $T^{-1} = T^*$.
- T es una **isometría parcial** si $\|T\xi\| = \|\xi\|$ para todo $\xi \in N(T)^\perp$.

Notación 1.1.1. *Denotaremos* $I(\mathcal{H}_i, \mathcal{H}_j) = \{T \in L(\mathcal{H}_i, \mathcal{H}_j) : T \text{ es inyectivo}\}$, $CR(\mathcal{H}_i, \mathcal{H}_j) = \{T \in L(\mathcal{H}_i, \mathcal{H}_j) : T \text{ es de rango cerrado}\}$, $\mathcal{E}(\mathcal{H}_i, \mathcal{H}_j) = \{T \in L(\mathcal{H}_i, \mathcal{H}_j) : T \text{ es suryectivo}\}\}$, $Gl(\mathcal{H}_i, \mathcal{H}_j) = \{T \in L(\mathcal{H}_i, \mathcal{H}_j) : T \text{ es inversible}\}$, $\mathcal{I}(\mathcal{H}_i, \mathcal{H}_j) = \{T \in L(\mathcal{H}_i, \mathcal{H}_j) : T \text{ es isometría}\}$, $\mathcal{E}^0(\mathcal{H}_i, \mathcal{H}_j) = \{T \in L(\mathcal{H}_i, \mathcal{H}_j) : T \text{ es co-isometría}\}\}$, $\mathcal{U}(\mathcal{H}_i, \mathcal{H}_j) = \{T \in L(\mathcal{H}_i, \mathcal{H}_j) : T \text{ es unitario}\}$ *y* $\mathcal{J}(\mathcal{H}_i, \mathcal{H}_j) = \{T \in L(\mathcal{H}_i, \mathcal{H}_j) : T \text{ es una isometría parcial}\}$. *Cuando no quepa lugar a confusión omitiremos los espacios de Hilbert* $\mathcal{H}_i, \mathcal{H}_j$.

Además, si $T \in L(\mathcal{H})$ entonces se dice que

- T es **proyección** si $T^2 = T$.
- T es **autoadjunto** si $T^* = T$.

- T es **proyección ortogonal** si T es una proyección autoadjunta.
- T es **positivo** si $\langle T\xi, \xi\rangle \geq 0$ para todo $\xi \in \mathcal{H}$. Los operadores positivos son, en particular, autoadjuntos.

Notación 1.1.2. *Denotaremos $\mathcal{Q}(\mathcal{H}) = \{T \in L(\mathcal{H}) : T$ es proyección$\}$ y dado un subespacio cerrado $\mathcal{S}$ de $\mathcal{H}$ $\mathcal{Q}_{\mathcal{S}}(\mathcal{H}) = \{T \in \mathcal{Q}(\mathcal{H}) : R(T) = \mathcal{S}\}$. La proyección ortogonal con rango $\mathcal{S}$ será denotada con $P_{\mathcal{S}}$. Asimismo, denotaremos $L^s(\mathcal{H}) = \{T \in L(\mathcal{H}) : T$ es autoadjunto$\}$ y $L(\mathcal{H})^+ = \{T \in L(\mathcal{H}) : T$ es positivo$\}$.*

Si $\mathcal{S}$ es un subespacio cerrados de $\mathcal{H}$ entonces $\mathcal{S} \oplus \mathcal{S}^\perp = \mathcal{H}$. Luego, bajo esta descomposición del espacio, todo operador $T \in L(\mathcal{H})$ puede ser representado matricialmente como

$$T = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{pmatrix}, \tag{1.1.1}$$

donde $t_{11} = P_{\mathcal{S}} T P_{\mathcal{S}}$, $t_{12} = P_{\mathcal{S}} T P_{\mathcal{S}^\perp}$, $t_{21} = P_{\mathcal{S}^\perp} T P_{\mathcal{S}}$, y $t_{22} = P_{\mathcal{S}^\perp} T P_{\mathcal{S}^\perp}$. Observemos que dado $Q \in \mathcal{Q}_{\mathcal{S}}$, $Q = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ para algún $x \in L(\mathcal{S}^\perp, \mathcal{S})$. En particular, $P_{\mathcal{S}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1.1.2. Clase p-Schatten de operadores

En esta sección introducimos la clase p-Schatten de operadores y presentamos sus propiedades más fundamentales. Para un estudio más detallado de estas clases de operadores se recomienda leer [27] ó [50]. Dado que los operadores pertenecientes a una clase p-Schatten son, en particular, operadores compactos entonces empezamos recordando el concepto de operador compacto y algunas de sus propiedades.

Definición 1.1.3. *Dado $T \in L(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ se dice que T es* **compacto** *si para toda sucesión acotada $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{H}_1$, $(T\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tiene una subsucesión convergente. Denotaremos $\mathfrak{S}_\infty(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ al conjunto de los operadores compactos de $L(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$.*

Observación 1.1.4. *Si $T \in \mathfrak{S}_\infty(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ entonces $WTG \in \mathfrak{S}_\infty(\mathcal{H}_4, \mathcal{H}_3)$ para todo $W \in L(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_3)$, $G \in L(\mathcal{H}_4, \mathcal{H}_1)$.*

A continuación presentamos algunas condiciones equivalentes a la definición de operador compacto. Por su demostración se sugiere consultar [18] ó [41].

Proposición 1.1.5. *Sea $T \in L(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *T es compacto;*
2. *T^* es compacto;*
3. *existen operadores de rango finito, $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$, tal que $\|T_n - T\| \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} 0$;*
4. *$P_N T \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} T$ para toda base ortonormal de $\mathcal{H}_2$, $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$, y $P_N = P_{gen\{\xi_1 \ldots \xi_N\}}$;*
5. *$\| T\xi_n\| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ para toda sucesión ortonormal $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $\mathcal{H}_1$.*

Una de las propiedades más importantes de los operadores compactos es que, en cierto sentido, son "diagonalizables". Este resultado conocido como el "Teorema de la representación canónica de los operadores compactos" equivale en dimensión finita a la descomposición en valores singulares. Con el fin de presentar este resultado recordemos primero algunos conceptos.

Definición 1.1.6. *Sea $T \in L(\mathcal{H})$.*

1. *Se llama* **conjunto resolvente** *de T al conjunto de todos los valores $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $\lambda I - T$ admite inversa acotada, y lo denotaremos $\rho(T)$.*
2. *Si $\lambda \notin \rho(T)$ entonces se dice que λ está en el* **espectro** *de T que denotaremos $\sigma(T)$.*
3. *Dado $\lambda \in \sigma(T)$ se dice que λ es un* **autovalor** *de T si existe $0 \neq \xi \in \mathcal{H}$ tal que $T\xi = \lambda\xi$. En tal caso, ξ es un* **autovector** *de T asociado a λ.*

A continuación presentamos el " Teorema de la representación canónica de los operadores compactos", para su demostración se recomienda consultar [41] u otros.

Teorema 1.1.7. *Dado $T \in \mathfrak{S}_\infty(H_1, \mathcal{H}_2)$ existen conjuntos ortonormales $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ respectivamente y valores reales $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ordenados en forma decreciente con $\lambda_n(T) \to 0$ tal que*

$$T = \sum_n \lambda_n(T) \langle \phi_n, . \rangle \psi_n. \tag{1.1.2}$$

La serie converge en norma. Los valores $\lambda_n(T)$ se llaman **valores singulares** *de T.*

El siguiente lema nos resultará útil en los capítulos siguientes.

Lema 1.1.8. *Sea $T \in L(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ un operador compacto. Entonces,*

$$\lambda_n(T) = \inf \{\|T - B\| : B \in L(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2) \text{ y dim } R(B) \leq n - 1\}.$$

Previamente a introducir la noción de clase p-Schatten de operadores incorporemos algo de notación.

Notación 1.1.9. *Denotaremos:*

1. $c_0 = \{(c_n)_{n\in\mathbb{N}} : \ c_n \to 0\}$.
2. *Dado* $1 \leq p < \infty$, $l^p = \{(c_n)_{n\in\mathbb{N}} : \ \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^p < \infty\}$. *Dada* $c = (c_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^p$, $\|c\|_p = \left(\sum_{n=1}^{p} |c_n|^p\right)^{1/p}$ *define una norma sobre* l^p.
3. $l^\infty = \{(c_n)_{n\in\mathbb{N}} : \ \text{existe M} > 0 \text{ tal que } |\mathrm{c_n}| < \mathrm{M} \text{ para todo n} \in \mathbb{N}\}$.

Ahora sí estamos en condiciones de introducir las clases de operadores p-Schatten.

Definición 1.1.10. *Sea $T \in \mathfrak{S}_\infty(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ y $(\lambda_n(T))_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión de valores singulares de T. Dado $1 \leq p < \infty$, se dice que T pertenece a la* **clase de operadores p-Schatten**, *$T \in \mathfrak{S}_p(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$, si $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^p$.*

En la siguiente proposición presentamos algunas propiedades de $\mathfrak{S}_p(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$. Para más detalles en el tema se recomienda consultar [27], [38] ó [54].

Proposición 1.1.11. *Sea $1 \leq p < \infty$. Luego,*

1. *$\mathfrak{S}_p(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ es un espacio de Banach con la norma $\|T\|_p = \|(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_p$.*
2. *Si $T \in \mathfrak{S}_p(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$, $S \in L(\mathcal{H}_3, \mathcal{H}_1)$ y $V \in L(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_4)$ entonces $VTS \in \mathfrak{S}_p(\mathcal{H}_3, \mathcal{H}_4)$. Además, $\|VTS\|_p \leq \|V\|\|T\|_p\|S\|$.*
3. *$T \in \mathfrak{S}_p(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ si y sólo si $T^* \in \mathfrak{S}_p(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_1)$.*
4. *$T \in \mathfrak{S}_p(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ si y sólo si $(\langle T\xi_n, \eta_n\rangle)_{n\in\mathbb{N}} \in l^p$ para todo par de sucesiones ortonormales $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(\eta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{H}_1$ y $\mathcal{H}_2$ respectivamente.*

5. *Si* $1 \leq p < q < \infty$ *entonces valen las siguientes inclusiones:*

$$RF(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2) \subseteq \mathfrak{S}_p(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2) \subseteq \mathfrak{S}_q(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2) \subseteq \mathfrak{S}_\infty(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2),$$

   donde $RF(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ *denota el conjunto de operadores lineales y acotados con rango finito.*

6. *Dada* $(\xi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *una base ortonormal de* $\mathcal{H}_1$ *y* $T \in L(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$*se tiene que:*

   a) *Si* $1 \leq p \leq 2$ *y* $(\|T\xi_k\|)_{k\in\mathbb{N}} \in l^p$ *entonces* $T \in \mathfrak{S}_p(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$.

   b) *Si* $2 \leq p < \infty$ *y* $T \in \mathfrak{S}_p(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ *entonces* $(\|T\xi_k\|)_{k\in\mathbb{N}} \in l^p$.

1.1.3. Inversa generalizada de Moore-Penrose y factorización de Douglas

Dado dos operadores $A \in L(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ y $B \in L(\mathcal{H}_3, \mathcal{H}_2)$ nos interesará, en los capítulos siguientes, hallar $C \in L(\mathcal{H}_3, \mathcal{H}_1)$ tal que $AC = B$. Este tipo de ecuaciones ($AX = B$), llamadas ecuaciones de tipo Douglas, no tienen solución para todo par de operadores A, B. En principio, es claramente necesario que $R(B) \subseteq R(A)$ para que exista dicho operador C. En el siguiente teorema de R. G. Douglas [25], se observa que la condición $R(B) \subseteq R(A)$ no sólo es necesaria, sino también suficiente. Asimismo, el próximo resultado brinda una tercera condición equivalente para la existencia de solución que nos resultará también útil en lo que sigue.

Teorema 1.1.12. *Sean* $A \in L(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ *y* $B \in L(\mathcal{H}_3, \mathcal{H}_2)$. *Las siguientes condiciones son equiavalentes:*

1. $R(B) \subseteq R(A)$;

2. *existe* $C \in L(\mathcal{H}_3, \mathcal{H}_1)$ *tal que* $B = AC$;

3. $BB^* \leq \lambda AA^*$ *para algun* $\lambda \geq 0$.

Mas aún, si alguna de estas condiciones se verifica entonces existe un único $D \in L(\mathcal{H}_3, \mathcal{H}_1)$ *tal que* $B = AD$ *y* $R(D) \subseteq \overline{R(A^*)}$. *Además,* $N(D) = N(B)$. *Dicho operador* D *se llama la* **solución reducida** *de la ecuación* $AX = B$.

Demostración. $1 \Rightarrow 2$. Si $R(B) \subseteq R(A)$ entonces para todo $\xi \in \mathcal{H}_3$ existe un único $\eta \in N(A)^\perp = \overline{R(A^*)}$ tal que $B\xi = A\eta$. Sea $C : \mathcal{H}_3 \to \mathcal{H}_1$ definido por $C\xi = \eta$.

Es claro que C es lineal. Para ver que C es acotado, de acuerdo con el Teorema del gráfico cerrado, basta verificar que su gráfico es cerrado. Para esto, sea $(\xi_n, \eta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en el gráfico de C tal que $\xi_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \xi$ y $\eta_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \eta$. Luego $B\xi = \underset{n\to\infty}{lim} B\xi_n = \underset{n\to\infty}{lim} A\eta_n = A\eta$, es decir, (ξ, η) pertenece al gráfico de C y, por lo tanto, el gráfico de C es cerrado.

$2 \Rightarrow 3$. Sea $C \in L(\mathcal{H}_3, \mathcal{H}_1)$ tal que $B = AC$. Luego, $BB^* = ACC^*A^* \leq \|CC^*\|AA^*$; y tomando $\lambda = \|CC^*\|$ el ítem 3 queda probado.

$3\Rightarrow 1$. Si $BB^* \leq \lambda AA^*$ para algún $\lambda \geq 0$ entonces $\|B^*\xi\|^2 \leq \lambda\|A^*\xi\|^2$ para todo $\xi \in \mathcal{H}_2$. Luego, $N(A^*) \subseteq N(B^*)$ y entonces el operador $\tilde{C} : R(A^*) \to R(B^*)$ tal que $\tilde{C}(A^*\xi) = B^*\xi$ queda bien definido. Mas aún, $\tilde{C}$ es lineal y acotado. Luego, extendiendo por continuidad $\tilde{C}$ a $\overline{R(A^*)}$ y luego a $\mathcal{H}_1$ como cero sobre $\overline{R(A^*)}^{\perp}$, obtenemos un operador, denotémoslo C, en $L(\mathcal{H}_3, \mathcal{H}_1)$, tal que $B^* = C^*A^*$ o, equivalentemente, $B = AC$. Luego, $R(B) \subseteq R(A)$.

Finalmente, de la demostración de $1 \Rightarrow 2$ obtenemos que si alguna de las condiciones del teorema se verifica entonces existe $D \in L(\mathcal{H}_3, \mathcal{H}_1)$ tal que $B = AD$ y $R(D) \subseteq \overline{R(A^*)}$. En tal caso, la inclusión $N(D) \subseteq N(B)$ resulta trivial. Por otro lado, si $\xi \in N(B)$ entonces $AD\xi = 0$. Es decir, $D\xi \in N(A)\cap R(D) \subseteq N(A)\cap\overline{R(A^*)} = \{0\}$, luego $\xi \in N(D)$ y entonces $N(D) \subseteq N(B)$. O sea, $N(D) = N(B)$. Nos resta ver la unicidad del operador D. Supongamos entonces que existe otro operador $D' \in L(\mathcal{H}_3, \mathcal{H}_1)$ tal que $B = AD'$ y $R(D') \subseteq \overline{R(A^*)}$. Luego, $R(D - D') \subseteq \overline{R(A^*)} \cap N(A) = \{0\}$ y entonces $D = D'$. □

La solución reducida de una ecuación cumplirá un rol importante en este trabajo. La misma se puede obtener por medio de la inversa generalizada de Moore-Penrose. Observemos que dado $T \in L(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ la restricción $T|_{N(T)^\perp} : N(T)^\perp \to R(T)$ resulta biyectiva y por consiguiente existe $T|_{N(T)^\perp}^{-1} : R(T) \to N(T)^\perp$. Como consecuencia el operador $T^\dagger : R(T) + R(T)^\perp \to \mathcal{H}_1$ tal que $T^\dagger|_{R(T)} = T|_{N(T)^\perp}^{-1}$ y $T^\dagger(R(T)^\perp) = \{0\}$ queda bien definido y se llama **inversa generalizada de Moore-Penrose** de T. La inversa generalizada de Moore-Penrose de un operador T, desde ahora denotada por $T^\dagger$, también se caracteriza por ser el único operador que verifica las siguientes ecuaciones (ver [40]):

1. $TT^\dagger T = T$,
2. $T^\dagger TT^\dagger = T^\dagger$,
3. $T^\dagger T = P_{N(T)^\perp}$,
4. $TT^\dagger = P_{\overline{R(T)}}|_{\mathcal{D}(T^\dagger)}$.

Para una exposición completa sobre inversas generalizadas se recomienda consultar los libros [39] y [10]. Vale la pena notar que $T^\dagger$ no es, en general, un operador acotado. De hecho, como veremos a continuación, $T^\dagger$ es acotado si y sólo si T tiene rango cerrado.

Proposición 1.1.13. *Sea $T \in L(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$. Entonces, $T^\dagger$ es acotado si y sólo si $R(T)$ es cerrado.*

Demostración. Si $T^\dagger \in L(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_1)$ entonces $TT^\dagger = P_{\overline{R(T)}}$. Luego, $R(T) \subseteq \overline{R(T)} = R(TT^\dagger) \subseteq R(T)$. Entonces, $\overline{R(T)} = R(T)$. Recíprocamente, si $R(T)$ es cerrado entonces $P_{R(T)} \in L(\mathcal{H}_2)$ y, por el Teorema de Douglas, existe $C \in L(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_1)$ tal que $TC = P_{R(T)}$ y $R(C) \subseteq N(T)^\perp$. Dicho operador C verifica entonces que:

1. $TCT = P_{R(T)}T = T$,
2. $CTC = CP_{R(T)} = C$ donde la última igualdad se obtiene porque $N(C) = N(P_{R(T)}) = R(T)^\perp$,
3. $(TC)^* = P_{R(T)} = TC$
4. $(CT)^* = CT$.

Luego, $C = T^\dagger$ y entonces $T^\dagger$ es acotado. □

En la siguiente proposición demostramos, como ya lo habíamos adelantado, que la solución reducida se obtiene por medio de la inversa generalizada de Moore-Penrose.

Proposición 1.1.14. *Sea $A \in L(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ y $B \in L(\mathcal{H}_3, \mathcal{H}_2)$ tal que $R(B) \subseteq R(A)$. Entonces $A^\dagger B$ es la solución reducida de la ecuación $AX = B$.*

Demostración. Si $R(B) \subseteq R(A)$ entonces existe $D \in L(\mathcal{H}_3, \mathcal{H}_2)$ tal que $AD = B$ y $R(D) \subseteq N(A)^\perp$. Ahora, $D = P_{N(A)^\perp}D = A^\dagger AD = A^\dagger B$, i.e., $A^\dagger B$ es la solución reducida de la ecuación $AX = B$. □

1.2. Bases, sucesiones de Bessel y sucesiones de Bessel de fusión

1.2.1. Bases y sucesiones de Bessel

En esta sección presentamos las nociones de bases, sucesiones de Bessel y marcos y sus propiedades fundamentales.

Definición 1.2.1. *Una sucesión $(\xi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{H}$ se dice una* **base** *o* **base de Schauder** *para $\mathcal{H}$ si para cada $\xi \in \mathcal{H}$ existen únicos escalares $(c_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tales que $\xi = \sum_{k=1}^{\infty} c_k\xi_k$. Si esta propiedad se verifica para todo $\xi \in \mathcal{S} = \overline{gen}\,\{\xi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ entonces la sucesión $(\xi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ se llama* **sucesión de Schauder para $\mathcal{S}$**.

Una base $(\xi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ para $\mathcal{H}$ que además verifica que $\langle \xi_k, \xi_j\rangle = \delta_{kj}$ se llama una **base ortonormal** *para $\mathcal{H}$.*

Todo espacio de Hilbert admite una base ortonormal (ver [41]). Dentro del conjunto de las bases de Schauder se pueden distinguir las bases de Riesz.

Definición 1.2.2. *Una sucesión $(\xi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{H}$ es una* **base de Riesz** *si $(\xi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es completa en $\mathcal{H}$ y existen constantes $0 < c < C$ tal que para toda sucesión finita (a_k) se tiene*

$$c\sum |a_k|^2 \leq \left\|\sum a_k\xi_k\right\|^2 \leq C\sum |a_k|^2 . \tag{1.2.1}$$

Diremos que $(\xi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es una **sucesión de Riesz** *si es una base de Riesz para $\overline{gen}\,\{(\xi_k)_{k\in\mathbb{N}}\}$.*

Definición 1.2.3. *Sea $\psi = (\psi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\mathcal{H}$.*

1. *Se dice que ψ es una* **sucesión de Bessel** *si existe una constante $B > 0$ tal que*

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\langle \xi, \psi_k\rangle|^2 \leq B\|\xi\|^2, \tag{1.2.2}$$

para todo $\xi \in \mathcal{H}$. Denotaremos por $Bess(\mathcal{H})$ al espacio de todas las sucesiones de Bessel en $\mathcal{H}$.

2. *Se dice que ψ es un* **marco** *para $\mathcal{H}$ si existen constantes $A, B > 0$ tal que*

$$A\|\xi\|^2 \leq \sum_{k=1}^{\infty} |\langle \xi, \psi_k \rangle|^2 \leq B\|\xi\|^2,$$

para todo $\xi \in \mathcal{H}$. Si esta relación se verifica para todo $\xi \in \mathcal{S} = \overline{gen}\,\{\psi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ entonces llamaremos a ψ una **sucesión de marco** *para $\mathcal{S}$.*

3. *Denotaremos por A_ψ y B_ψ a las cotas óptimas del marco. Si $A_\psi = B_\psi$ entonces diremos que el marco es* **ajustado**. *Los marcos ajustados con cota igual a 1 se llaman* **marcos de Parserval**.

Para un estudio más detallado y completo de la teoría de bases, marcos y sus relaciones se recomienda consultar [16].

Observación 1.2.4. *Las bases de Schauder no son sucesiones de Bessel, en general. Por ejemplo, si se considera $\eta_k = \frac{1}{\sqrt{k}} \sum_{n=1}^{k} \xi_n$ donde $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una base ortonormal de $\mathcal{H}$, entonces (η_k) es una base de Schauder para $\mathcal{H}$ que no es sucesión de Bessel. En efecto, si $\eta = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1}\xi_n$ entonces $\langle \eta, \eta_k \rangle = \frac{1}{\sqrt{k}} \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n}$ y por lo tanto $\sum_{k=1}^{\infty} |\langle \eta, \eta_k \rangle|^2 > \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ lo que prueba que (η_k) no es una sucesión de Bessel. Asimismo, existen sucesiones de Bessel que no son bases de Schauder. Por ejemplo, la sucesión $\{\xi_1, \xi_1, \xi_2, \xi_2, ...\}$ es una sucesión de Bessel que no es base de Schauder.*

Asociado a toda sucesión de Bessel está el operador análisis y síntesis. Dada una sucesión de Bessel $\psi = (\psi_k)_{k\in\mathbb{N}}$, se llama **operador de análisis** de ψ al operador

$$C_\psi : \mathcal{H} \to l^2 \text{ definido por } C_\psi(\xi) = (\langle \xi, \psi_k \rangle)_{k\in\mathbb{N}},$$

y **operador de síntesis** de ψ al operador

$$D_\psi : l^2 \to \mathcal{H} \text{ definido por } D_\psi((c_k)_{k\in\mathbb{N}}) = \textstyle\sum_{k=1}^{\infty} c_k \psi_k.$$

Los operadores de síntesis y de análisis resultan operadores lineales y acotados, es decir, $C_\psi \in L(\mathcal{H}, l^2)$ y $D_\psi \in L(l^2, \mathcal{H})$. Más aún, $C_\psi = D_\psi^*$. Definamos $S_\psi = D_\psi C_\psi = C_\psi^* C_\psi = D_\psi D_\psi^*$ de modo que S_ψ es positivo, i.e., $S_\psi \xi = \sum_{k=1}^{\infty} \langle \xi, \psi_k \rangle \psi_k \in L(\mathcal{H})^+$. En el siguiente resultado presentamos la propiedad más importante de los marcos, a saber, que todo elemento del espacio se puede escribir como combinación lineal (posiblemente infinita) de los elementos del marco.

Proposición 1.2.5. *Si $\psi = (\psi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es un marco en $\mathcal{H}$ entonces S_ψ es inversible. Luego, para todo $\xi \in \mathcal{H}$*

$$\xi = \sum_{k=1}^{\infty} \left\langle \xi, S_\psi^{-1}\psi_k \right\rangle \psi_k.$$

Demostración. Es fácil verificar que $A_\psi\|\xi\|^2 \leq \langle S_\psi \xi, \xi\rangle \leq B_\psi\|\xi\|^2$ para todo $\xi \in \mathcal{H}$ o, equivalentemente, $A_\psi id \leq S_\psi \leq B_\psi id$. Luego, $0 \leq id - B_\psi^{-1} S_\psi \leq \frac{B_\psi - A_\psi}{B_\psi} id$ y, por lo tanto, $\|id - B_\psi^{-1}S_\psi\| \leq \frac{B_\psi - A_\psi}{B_\psi} \leq 1$. Es decir, S_ψ es inversible.

Luego, para todo $\xi \in \mathcal{H}$ se tiene que

$$\xi = S_\psi S_\psi^{-1}\xi = \sum_{k=1}^{\infty} \left\langle \xi, S_\psi^{-1}\psi_k \right\rangle \psi_k.$$

□

1.2.2. Sucesiones de Bessel de fusión

En lo que sigue, denotaremos con I a un conjunto finito o numerable y recordemos que $P_{\mathcal{W}}$ denota la proyección ortogonal sobre el subespacio cerrado $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{H}$.

Definición 1.2.6. *Sea $\{\mathcal{W}_i\}_{i\in I}$ una familia de subespacios cerrados de $\mathcal{H}$ y $(\omega_i)_{i\in I}$ una familia de pesos, i.e., $\omega_i > 0$ para todo $i \in I$. La familia $\{(\mathcal{W}_i, \omega_i)\}_{i\in I}$ es una* **sucesión de Bessel de fusión** *si existe una constante $B > 0$ tal que*

$$\sum_{i\in I} \omega_i^2 \|P_{\mathcal{W}_i}\xi\|^2 \leq B\|\xi\|^2,$$

para todo $\xi \in \mathcal{H}$.

Si además existe una constante $A > 0$ tal que

$$A\|\xi\|^2 \leq \sum_{i\in I} \omega_i^2 \|P_{\mathcal{W}_i}\xi\|^2,$$

para todo $\xi \in \mathcal{H}$ entonces $\{(\mathcal{W}_i, \omega_i)\}_{i\in I}$ se llama **marco de fusión**.

Observación 1.2.7. *La noción de sucesión de Bessel de fusión extiende al concepto de sucesión de Bessel. En efecto, si $(\psi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Bessel entonces $\{(gen\{\psi_k\}, \|\psi_k\|)\}_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Bessel de fusión.*

Las nociones de operadores de síntesis y de análisis también se pueden definir para sucesiones de Bessel de fusión. Para esto, dada una sucesión de Bessel de fusión $\{(\mathcal{W}_i, \omega_i)\}_{i\in I}$ se define el siguiente espacio

$$(\sum_{i\in I} \oplus \mathcal{W}_i)_{l^2} = \{(\xi_i)_{i\in I} : \xi_i \in \mathcal{W}_i \text{ y } (\|\xi_i\|)_{i\in I} \in l^2(I)\}.$$

Obsérvese que

$$\langle (\xi_i)_{i\in I}, (\eta_i)_{i\in I}\rangle = \sum_{i\in I} \langle \xi_i, \eta_i\rangle \tag{1.2.3}$$

define un producto interno en $(\sum_{i\in I} \oplus \mathcal{W}_i)_{l^2}$. En tal caso, $\|(\xi_i)_{i\in I}\|^2 = \sum_{i\in I} \|\xi_i\|^2$. $(\sum_{i\in I} \oplus \mathcal{W}_i)_{l^2}$ con el producto interno definido por (1.2.3) es un espacio de Hilbert. Luego, se define el operador de análisis asociado a la sucesión de Bessel de fusión $\mathcal{W} = \{(\mathcal{W}_i, \omega_i)\}_{i\in I}$ por

$$C_{\mathcal{W}} : \mathcal{H} \to (\textstyle\sum_{i\in I} \oplus \mathcal{W}_i)_{l^2}, \text{ definido por } C_{\mathcal{W}}(\xi) = (\omega_i P_{\mathcal{W}_i}\xi)_{i\in I}$$

y su operador de síntesis por

$$D_{\mathcal{W}} : (\textstyle\sum_{i\in I} \oplus \mathcal{W}_i)_{l^2} \to \mathcal{H}, \text{ definido por } D_{\mathcal{W}}((\xi_i)_{i\in I}) = \textstyle\sum_{i\in I} \omega_i \xi_i.$$

En [14], P. G. Casazza y G. Kutyniok probaron que $\{(\mathcal{W}_i, \omega_i)\}_{i\in I}$ es una sucesión de Bessel de fusión si y sólo si el operador de síntesis $D_{\mathcal{W}}$ está bien definido y es acotado. Más aún, probaron que $\{(\mathcal{W}_i, \omega_i)\}_{i\in I}$ es un marco de fusión si y sólo si $D_{\mathcal{W}}$ es suryectivo.

1.3. Espacios semi-Hilbertianos

1.3.1. Definición de espacio semi-Hilbertiano

Dado $A \in L(\mathcal{H})^+$, el funcional

$$\langle\ ,\ \rangle_A : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathbb{C},\ \langle \xi, \eta\rangle_A := \langle A\xi, \eta\rangle\,,$$

define un semi-producto interno. De hecho, $\langle\ ,\ \rangle_A$ define un producto interno si y sólo si A es inyectivo. Más aún, si $A \in Gl(\mathcal{H})^+$ entonces $\langle\ ,\ \rangle_A$ y $\langle\ ,\ \rangle$ resultan equivalentes. El espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ con el semi-producto interno inducido por A es lo que llamaremos un espacio semi-Hilbertiano. Con $\|\ \|_A$ denotaremos la semi-norma inducida por A, es decir, $\|\xi\|_A = \langle \xi, \xi \rangle_A^{1/2}$ para todo $\xi \in \mathcal{H}$. Dado un subespacio $\mathcal{S}$ de $\mathcal{H}$ denotaremos $\mathcal{S}^{\perp_A} = \{\xi \in \mathcal{H} : \langle \xi, \eta \rangle_A = 0 \; \forall \, \eta \in \mathcal{S}\}$.

Lema 1.3.1. *Dado $\mathcal{S}$ un subespacio de $\mathcal{H}$ valen las siguientes identidades:*

$$\mathcal{S}^{\perp_A} = (A\mathcal{S})^{\perp} = A^{-1}(\mathcal{S}^{\perp}).$$

Como consecuencia, $\mathcal{S}^{\perp_A \perp_A} = (\mathcal{S}^{\perp} \cap R(A))^{\perp}$.

Demostración. Las identidades son consecuencia de que $\langle \xi, \eta \rangle_A = \langle A\xi, \eta \rangle = \langle \xi, A\eta \rangle$, para todo $\xi, \eta \in \mathcal{H}$. Luego, en particular, $\mathcal{S}^{\perp_A \perp_A} = (A(A^{-1}(\mathcal{S}^{\perp})))^{\perp} = (\mathcal{S}^{\perp} \cap R(A))^{\perp}$. □

1.3.2. A-operadores y operador A-adjunto

Definición 1.3.2. *Sea $T \in L(\mathcal{H})$. Diremos que T es un* A-**operador** *si existe una constante $c > 0$ tal que $\|T\xi\|_A \leq c\|\xi\|_A$ para todo $\xi \in \mathcal{H}$. Denotaremos $L_{A^{1/2}}(\mathcal{H}) := \{T \in L(\mathcal{H}) : \; T$ es un A-operador$\}$.*

Si T es un A-operador entonces $\|T\|_A := \sup\limits_{\xi \notin N(A)} \frac{\|T\xi\|_A}{\|\xi\|_A} < \infty$ define una seminorma para T.

Lema 1.3.3. *Si $T \in L_{A^{1/2}}(\mathcal{H})$ entonces $\|T\|_A = \sup\limits_{0 \neq \xi \in \overline{R(A)}} \frac{\|T\xi\|_A}{\|\xi\|_A}$.*

Demostración. Si $T \in L_{A^{1/2}}(\mathcal{H})$ entonces existe $c > 0$ tal que $\|A^{1/2}T\xi\| \leq c\|A^{1/2}\xi\|$ para todo $\xi \in \mathcal{H}$. Luego, en particular, $\|A^{1/2}T\xi\| = 0$ para todo $\xi \in N(A)$. Es decir, $N(A) \subseteq N(A^{1/2}T)$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \|T\|_A &= \sup_{\xi \notin N(A)} \frac{\|T\xi\|_A}{\|\xi\|_A} = \sup_{\substack{\xi = \xi_1 + \xi_2 \\ 0 \neq \xi_1 \in \overline{R(A)}, \xi_2 \in N(A)}} \frac{\|T\xi\|_A}{\|\xi\|_A} \\ &= \sup_{\substack{\xi = \xi_1 + \xi_2 \\ 0 \neq \xi_1 \in \overline{R(A)}, \xi_2 \in N(A)}} \frac{\|T\xi_1\|_A}{\|\xi_1\|_A} = \sup_{0 \neq \xi_1 \in \overline{R(A)}} \frac{\|T\xi_1\|_A}{\|\xi_1\|_A}. \end{aligned}$$

□

Definición 1.3.4. *Sea $T \in L(\mathcal{H})$. Se dice que $W \in L(\mathcal{H})$ es un A-***adjunto** *de T si $\langle T\xi, \eta\rangle_A = \langle \xi, W\eta\rangle_A$ para todo $\xi, \eta \in \mathcal{H}$. Si T es un A-adjunto de T entonces se dice que T es A-***autoadjunto**. *Denotaremos $L_A(\mathcal{H}) := \{T \in L(\mathcal{H}) : T \text{ admite } A\text{-adjunto}\}$.*

Observación 1.3.5. *Si consideramos $A \in L(\mathcal{H}_1)^+$, $B \in L(\mathcal{H}_2)^+$ y los semi-productos internos inducidos por ellos, $\langle\ ,\ \rangle_A$ en $\mathcal{H}_1$ y $\langle\ ,\ \rangle_B$ en $\mathcal{H}_2$, entonces se dice que $T \in L(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ admite AB-***adjunto** *si existe $W \in L(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_1)$ tal que $\langle T\xi, \eta\rangle_B = \langle \xi, W\eta\rangle_A$ $\forall \xi \in \mathcal{H}_1$, $\eta \in \mathcal{H}_2$.*

En la siguiente proposición caracterizamos $L_{A^{1/2}}(\mathcal{H})$ y $L_A(\mathcal{H})$. Asimismo, probamos que todo operador que admite A-adjunto resulta ser un A-operador, i.e., $L_A(\mathcal{H}) \subseteq L_{A^{1/2}}(\mathcal{H})$. Este hecho, fue demostrado en un contexto más general por Hassi, Sebestyén y de Snoo en [32], Teorema 5.1. La demostración que incluimos a continuación se debe a J. Antezana.

Proposición 1.3.6. *Valen las siguientes propiedades:*

1. *$L_{A^{1/2}}(\mathcal{H}) = \{T \in L(\mathcal{H}) :\ R(T^*A^{1/2}) \subseteq R(A^{1/2})\}$ es un subálgebra de $L(\mathcal{H})$.*
2. *$L_A(\mathcal{H}) = \{T \in L(\mathcal{H}) :\ R(T^*A) \subseteq R(A)\}$ es un subálgebra de $L(\mathcal{H})$.*
3. *$L_A(\mathcal{H}) \subseteq L_{A^{1/2}}(\mathcal{H})$. La igualdad vale si y sólo si A tiene rango cerrado.*

Demostración. 1. Observemos que $T \in L_{A^{1/2}}(\mathcal{H})$ si y sólo si existe $c > 0$ tal que $\langle T^*AT\xi, \xi\rangle \leq c\,\langle A\xi, \xi\rangle$ para todo $\xi \in \mathcal{H}$ o, equivalentemente, tal que $T^*AT \leq cA$. Luego, por el teorema de Douglas, esta última desigualdad de operadores resulta equivalente a $R(T^*A^{1/2}) \subseteq R(A^{1/2})$, con lo que queda probado que $L_{A^{1/2}}(\mathcal{H}) = \{T \in L(\mathcal{H}) :\ R(T^*A^{1/2}) \subseteq R(A^{1/2})\}$. Simples cálculos permiten demostrar que $L_{A^{1/2}}(\mathcal{H})$ es un álgebra.

2. Notemos que $T \in L_A(\mathcal{H})$ si y sólo si existe $W \in L(\mathcal{H})$ tal que $\langle \xi, AT^*\eta\rangle = \langle \xi, AW\eta\rangle$ para todo $\xi, \eta \in \mathcal{H}$ o, equivalentemente, si $AW = T^*A$. Luego, por el teorema de Douglas, esto resulta equivalente a que $R(T^*A) \subseteq R(A)$, y por lo tanto $L_A(\mathcal{H}) = \{T \in L(\mathcal{H}) :\ R(T^*A) \subseteq R(A)\}$. Simples cálculos permiten demostrar que $L_A(\mathcal{H})$ es un álgebra.

3. Sea $T \in L_A(\mathcal{H})$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer $\|T\| \leq 1$. Luego, la aplicación $\phi : L(\mathcal{H}) \to L(\mathcal{H})$ definida por $\phi(E) = T^*ET$ es una función monótona

para operadores. Si $C \in L(\mathcal{H})$ satisface $AC = T^*A$ entonces

$$T^*A^2T = ACC^*A \leq \|C\|^2 A^2.$$

Luego, por la desigualdad de Jensen ([30], [31]), tenemos que $T^*AT \leq (T^*A^2T)^{1/2}$. Por otro lado, dado que $f(t) = t^{1/2}$ es una función monótona para operadores tenemos que $(T^*A^2T)^{1/2} \leq \|C\|A$. Esto prueba que

$$(T^*A^{1/2})(T^*A^{1/2})^* = T^*AT \leq \|C\|A.$$

Luego, por el teorema de Douglas, $T \in L_{A^{1/2}}(\mathcal{H})$.

Claramente, si $R(A)$ es cerrado entonces $R(A) = R(A^{1/2})$ y de los ítems 1 y 2 obtenemos que $L_A(\mathcal{H}) = L_{A^{1/2}}(\mathcal{H})$. Recíprocamente, si $R(A)$ no es cerrado entonces existe $\xi \in R(A^{1/2}) \setminus R(A)$. Luego, dado $\eta \in \mathcal{H}$ no nulo y fijo definimos $S : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ por $S(A\eta) = \xi$ y $S(\text{gen}\{\text{A}\eta\}^\perp) = \{0\}$. Dicho operador S resulta lineal y acotado. Ahora, si elegimos $T = S^*$ entonces $R(T^*A) = R(T^*A^{1/2}) = \text{gen}\{\xi\} \subseteq \text{R}(\text{A}^{1/2}) \setminus \text{R}(\text{A})$. Es decir, $T \in L_{A^{1/2}}(\mathcal{H})$, pero $T \notin L_A(\mathcal{H})$. □

Corolario 1.3.7. *Dado $T \in L_A(\mathcal{H})$, $W \in L(\mathcal{H})$ es un A-adjunto de T si y sólo si $AW = T^*A$. En particular, T es A-autoadjunto si y sólo si $AT = T^*A$.*

Demostración. Es consecuencia de la demostración de la Proposición 1.3.6, ítem 2. □

Observación 1.3.8. *Si $A \in L(\mathcal{H}_1)^+$, $B \in L(\mathcal{H}_2)^+$ y $T \in L(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ entonces T admite AB-adjunto si y sólo si la ecuación $AX = T^*B$ admite solución; por el teorema de Douglas, esto es equivalente a que $R(T^*B) \subseteq R(A)$. En tal caso, $W \in L(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_1)$ es un AB-adjunto de T si $AW = T^*B$. En el capítulo 5, extenderemos la noción de AB-adjunto para operadores que no verifiquen $R(T^*B) \subseteq R(A)$.*

1.3.3. Proyecciones A-autoadjuntas

Dado el espacio semi-Hilbertiano $(\mathcal{H}, \langle\ ,\ \rangle_A)$ nos interesará en esta sección el estudio de las proyecciones A-autoadjuntas. Recordemos que dado un subespacio cerrado de $\mathcal{H}$, $\mathcal{S}$, denotaremos $Q_{\mathcal{S}} = \{Q \in L(\mathcal{H}) :\ Q^2 = Q \text{ y } R(Q) = \mathcal{S}\}$. Asimismo, denotaremos con $\mathcal{P}(A,\mathcal{S})$ al conjunto de las proyecciones A-autoadjuntas con rango $\mathcal{S}$, es decir,

$$\mathcal{P}(A,\mathcal{S}) = \{Q \in \mathcal{Q}_{\mathcal{S}} : \ AQ = Q^*A\}.$$

En dimensión finita para todo par $(A,\mathcal{S})$ se tiene que $\mathcal{P}(A,\mathcal{S})$ es no vacío, pero en dimensión infinita esto ya no es cierto. Por lo tanto, se dice que el par $(A,\mathcal{S})$ es **compatible** si $\mathcal{P}(A,\mathcal{S})$ es no vacío.

El siguiente teorema, probado en [19], provee distintas condiciones equivalentes a la compatibilidad de un par $(A,\mathcal{S})$. En lo que sigue, dada la descomposición $\mathcal{H} = \mathcal{S} \oplus \mathcal{S}^\perp$, consideraremos $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b^* & c \end{pmatrix}$.

Teorema 1.3.9. *Sean $A \in L(\mathcal{H})^+$ y $\mathcal{S}$ un subespacio cerrado de $\mathcal{H}$. Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *el par $(A,\mathcal{S})$ es compatible;*
2. *$R(b) \subseteq R(a)$;*
3. *$\mathcal{S} + \mathcal{S}^{\perp_A} = \mathcal{H}$;*
4. *existe un subespacio cerrado $\mathcal{W}$ de $\mathcal{H}$ tal que $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{S}^{\perp_A}$ y $\mathcal{S} \dot{+} \mathcal{W} = \mathcal{H}$.*

Si $R(A)$ es cerrado entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

i. *el par $(A,\mathcal{S})$ es compatible;*

ii. *$\mathcal{S} + N(A)$ es cerrado;*

iii. *$R(P_{\mathcal{S}}AP_{\mathcal{S}})$ es cerrado.*

Demostración. 1 $\Rightarrow$ 2. Sea $Q = \begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{P}(A,\mathcal{S})$. Luego, $AQ = Q^*A$, i.e., $\begin{pmatrix} a & ad \\ b^* & b^*d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ d^*a & d^*b \end{pmatrix}$, de donde $ad = b$, y entonces $R(b) \subseteq R(a)$.

2 $\Rightarrow$ 3. Si $R(b) \subseteq R(a)$ entonces existe $d \in L(\mathcal{S}^\perp,\mathcal{S})$ tal que $ad = b$. Sea $Q = \begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{Q}_{\mathcal{S}}$. Luego, $\mathcal{S} \dot{+} N(Q) = \mathcal{H}$. Por lo tanto, si probamos que

$N(Q) \subseteq \mathcal{S}^{\perp_A}$ entonces será $\mathcal{S} + \mathcal{S}^{\perp_A} = \mathcal{H}$. Ahora, Q es A-autoadjunto ($AQ = Q^*A$) luego dado $\xi \in N(Q)$ tenemos que para todo $\eta \in \mathcal{S}$ se verifica $\langle \xi, \eta \rangle_A = \langle \xi, Q\eta \rangle_A = \langle Q\xi, \eta \rangle_A = 0$. Por lo tanto, $N(Q) \subseteq \mathcal{S}^{\perp_A}$.

3 $\Rightarrow$ 4. Sea $\mathcal{N} = \mathcal{S} \cap \mathcal{S}^{\perp_A}$ y $\mathcal{W} = \mathcal{S}^{\perp_A} \cap \mathcal{N}^{\perp}$. Luego, si $\mathcal{S} + \mathcal{S}^{\perp_A} = \mathcal{H}$ entonces es sencillo comprobar que $\mathcal{S} \dot{+} \mathcal{W} = \mathcal{H}$.

4 $\Rightarrow$ 1. Sea $Q \in \mathcal{Q}_{\mathcal{S}}$ tal que $N(Q) = \mathcal{W}$. Luego, dado $\xi = \xi_1 + \xi_2, \eta = \eta_1 + \eta_2 \in \mathcal{H}$ con $\xi_1, \eta_1 \in \mathcal{S}$ y $\xi_2, \eta_2 \in \mathcal{W}$ se verifica que $\langle Q\xi, \eta \rangle_A = \langle \xi_1, \eta_1 \rangle_A = \langle \xi, Q\eta \rangle_A$. Es decir, Q es A-autoadjunto y por lo tanto el par $(A, \mathcal{S})$ es compatible.

En lo que sigue consideramos $R(A)$ cerrado.

i $\Rightarrow$ ii. Supongamos que el par $(A, \mathcal{S})$ es compatible y sea $Q \in \mathcal{P}(A, \mathcal{S})$. Denotemos $\tilde{Q} = 1 - Q$. Luego,

$$N(A) \subseteq N(\tilde{Q}^*A) = N(A\tilde{Q}) = \mathcal{S} \dot{+} (N(A) \cap R(\tilde{Q})) \subseteq \mathcal{S} + N(A).$$

Luego, $N(A) + \mathcal{S} = N(A\tilde{Q})$ y, por lo tanto, $N(A) + \mathcal{S}$ es cerrado.

ii $\Rightarrow$ iii. Primero observemos que $\overline{R(P_{\mathcal{S}}AP_{\mathcal{S}})} = (N(P_{\mathcal{S}}AP_{\mathcal{S}})^{\perp}) = (N(AP_{\mathcal{S}})^{\perp}) = \mathcal{S} \cap (\mathcal{S} \cap N(A))^{\perp}$. Sea $\mathcal{M} = \mathcal{S} \cap (\mathcal{S} \cap N(A))^{\perp}$. Luego si $N(A) + \mathcal{S}$ es cerrado entonces $\mathcal{N} = N(A) + \mathcal{S} = N(A) \dot{+} \mathcal{M}$ es cerrado. Sea $Q : \mathcal{N} \to \mathcal{N}$ la proyección con rango $\mathcal{M}$ y núcleo $N(A)$. Si $Q = 0$ entonces $\mathcal{M} = \{0\}$ y como consecuencia $P_{\mathcal{S}}AP_{\mathcal{S}} = 0$. Si $\mathcal{M} \neq \{0\}$, dado $\xi \in \mathcal{M}$ sea $\eta \in R(A)$ tal que $A\xi = A\eta$ (A es inversible sobre $R(A)$). Luego, $\eta = \xi + \nu$ con $\nu \in N(A)$ y por lo tanto $\eta \in \mathcal{N}$, $Q\eta = \xi$ y $\|\xi\| \leq \|Q\|\|\eta\|$. Entonces,

$$\langle P_{\mathcal{S}}AP_{\mathcal{S}}\xi, \xi \rangle = \langle A\xi, \xi \rangle = \langle A\eta, \eta \rangle \geq \lambda \|\eta\|^2 \geq \lambda \|Q\|^{-2} \|\xi\|,$$

para algún $\lambda > 0$, puesto que $R(A)$ es cerrado y entonces $A|_{R(A)}$ es acotado inferiormente. Por lo tanto, $R(P_{\mathcal{S}}AP_{\mathcal{S}})$ es cerrado.

iii $\Rightarrow$ i. Supongamos que $R(P_{\mathcal{S}}AP_{\mathcal{S}})$ es cerrado. Luego, dado que $a = P_{\mathcal{S}}AP_{\mathcal{S}}$, $R(a)$ es cerrado. Por lo tanto, como $A \geq 0$, $R(b) \subseteq R(a^{1/2}) = R(a)$. Luego, $(A, \mathcal{S})$ es compatible. $\square$

A continuación presentamos un ejemplo de un par no compatible.

Ejemplo 1.3.10. *Sea* $B \in L(\mathcal{H})^+$ *de rango no cerrado y* $A = \begin{pmatrix} B & B^{1/2} \\ B^{1/2} & I \end{pmatrix} =$

$\begin{pmatrix} B^{1/2} & 0 \\ I & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B^{1/2} & I \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in L(\mathcal{H} \oplus \mathcal{H})^+$. *Luego, si consideramos* $\mathcal{S} = \mathcal{H} \oplus \{0\}$ *entonces, de acuerdo con el Teorema 1.3.9, el par* $(A, \mathcal{S})$ *resulta no compatible ya que* $R(B^{1/2}) \nsubseteq R(B)$.

Proposición 1.3.11. *Sean* $A \in L(\mathcal{H})^+$ *y* $\mathcal{S}$ *un subespacio cerrado de* $\mathcal{H}$ *tal que el par* $(A, \mathcal{S})$ *es compatible. Entonces, dado* $Q \in \mathcal{Q}_\mathcal{S}$ *las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. $Q \in \mathcal{P}(A, \mathcal{S})$;
2. *si* $Q = \begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ *bajo la descomposición* $\mathcal{S} \oplus \mathcal{S}^\perp$ *entonces* $ad = b$;
3. $N(Q) \subseteq \mathcal{S}^{\perp_A}$.

Demostración. $1 \Rightarrow 2$. Sea $Q = \begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{P}(A, \mathcal{S})$. Luego, $AQ = \begin{pmatrix} a & ad \\ b^* & b^*d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ d^*a & d^*b \end{pmatrix} = Q^*A$, de donde $ad = b$.

$2 \Rightarrow 3$. Si $Q = \begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ con $ad = b$ entonces es sencillo verificar que Q es A-autoadjunto ($AQ = Q^*A$). Luego, dado $\xi \in N(Q)$ para todo $\eta \in \mathcal{S}$ se verifica que $\langle \xi, \eta \rangle_A = \langle \xi, Q\eta \rangle_A = \langle Q\xi, \eta \rangle_A = 0$. Por lo tanto, $N(Q) \subseteq \mathcal{S}^{\perp_A}$.

$3 \Rightarrow 1$. Sea $Q \in \mathcal{Q}_\mathcal{S}$ con $N(Q) \subseteq \mathcal{S}^{\perp_A}$. Luego, para todo $\xi = \xi_1 + \xi_2, \eta = \eta_1 + \eta_2 \in \mathcal{H}$ con $\xi_1, \eta_1 \in N(Q)$ $\xi_2, \eta_2 \in \mathcal{S}$ se tiene que $\langle Q\xi, \eta \rangle_A = \langle \xi_2, \eta_2 \rangle_A = \langle \xi, Q\eta \rangle_A$, es decir, Q es A-autoadjunto. Por lo tanto, $Q \in \mathcal{P}(A, \mathcal{S})$. $\square$

Definición 1.3.12. *Si el par* $(A, \mathcal{S})$ *es compatible y* d *es la solución reducida de la ecuación* $ax = b$ *entonces se define por* $P_{A,\mathcal{S}}$ *a la proyección* A*-autoadjunta con rango* $\mathcal{S}$ *dada por* $P_{A,\mathcal{S}} = \begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Distintas propiedades del elemento $P_{A,\mathcal{S}}$ fueron estudiadas en [19]. A continuación presentamos algunas de estas propiedades que aplicaremos a lo largo de la tesis.

Proposición 1.3.13. *Sea $\mathcal{S}$ un subespacio cerrado de $\mathcal{H}$ tal que el par $(A, \mathcal{S})$ es compatible. Luego, si $\mathcal{N} = \mathcal{S} \cap \mathcal{S}^{\perp_A}$ las siguientes propiedades valen:*

1. $\mathcal{N} = N(A) \cap \mathcal{S} = N(a)$.

2. $N(P_{A,\mathcal{S}}) = \mathcal{S}^{\perp_A} \cap \mathcal{N}^{\perp}$.

3. $\mathcal{P}(A, \mathcal{S}) = P_{A,\mathcal{S}} + L(\mathcal{S}^{\perp}, \mathcal{N})$. *En particular, si* $\mathcal{N} = \{0\}$ *entonces* $\mathcal{P}(A, \mathcal{S}) = \{P_{A,\mathcal{S}}\}$.

Demostración. 1. Si $\xi \in \mathcal{N}$ entonces, en particular, $0 = \langle \xi, \xi \rangle_A = \|A^{1/2}\xi\|$ y, por lo tanto, $A^{1/2}\xi = 0$, i.e., $\xi \in N(A)$. Luego, $\mathcal{N} \subseteq N(A) \cap \mathcal{S}$. Recíprocamente, si $\xi \in N(A) \cap \mathcal{S}$ entonces, para todo $\eta \in \mathcal{S}$, $\langle \xi, \eta \rangle_A = \langle A\xi, \eta \rangle = 0$. Luego $N(A) \cap \mathcal{S} \subseteq \mathcal{N}$, y la igualdad queda probada. Por otro lado, es claro que $N(a) \subseteq N(A) \cap \mathcal{S}$. Además, si $\xi \in N(A) \cap \mathcal{S}$ entonces $a\xi + b^*\xi = 0$, pero como $a\xi \in \mathcal{S}$ y $b^*\xi \in \mathcal{S}^{\perp}$ entonces $a\xi = 0$ y la igualdad $N(A) \cap \mathcal{S} = N(a)$ queda probada.

2. Dado que $P_{A,\mathcal{S}} \in \mathcal{P}(A, \mathcal{S})$ entonces, por la Proposición 1.3.11, $N(P_{A,\mathcal{S}}) \subseteq \mathcal{S}^{\perp_A}$. Luego, como $\mathcal{S} \dot{+} (\mathcal{S}^{\perp_A} \cap \mathcal{N}^{\perp}) = \mathcal{H}$, alcanza con demostrar que $N(P_{A,\mathcal{S}}) \subseteq \mathcal{N}^{\perp}$. Sea $\xi = \xi_1 + \xi_2 \in N(P_{A,\mathcal{S}})$ donde $\xi_1 \in \mathcal{S}$ y $\xi_2 \in \mathcal{S}^{\perp}$. Luego, $0 = P_{A,\mathcal{S}}\xi = \xi_1 + d\xi_2$. Si $\eta \in \mathcal{N}$ entonces $\langle \xi, \eta \rangle = \langle \xi_1, \eta \rangle = -\langle d\xi_2, \eta \rangle = 0$, puesto que $R(d) \subseteq \overline{R(a)} = N(a)^{\perp} = \mathcal{N}^{\perp}$. Luego, $\xi \in \mathcal{N}^{\perp}$ y $N(P_{A,\mathcal{S}}) \subseteq \mathcal{N}^{\perp}$.

3. Sea $Q = \begin{pmatrix} 1 & y \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{P}(A, \mathcal{S})$. Luego, $ay = b$ y si d es la solución reducida de la ecuación $ax = b$ tenemos que $a(y - d) = 0$. Por lo tanto, si consideramos $z = y - d \in L(\mathcal{S}^{\perp}, \mathcal{S})$ entonces $Q \in Q = P_{A,\mathcal{S}} + z$ con $z \in L(\mathcal{S}^{\perp}, \mathcal{N})$.

□

1.4. Espacio de Hilbert inducido por $A \in L(\mathcal{H})^+$

En la sección anterior vimos que todo operador positivo $A \in L(\mathcal{H})^+$ define un semi-producto interno denotado por $\langle \ , \ \rangle_A$. En esta sección veremos que todo operador positivo define también un espacio de Hilbert. Más aún, dicho espacio de Hilbert es único en cierto sentido que explicaremos a continuación.

1.4.1. Definición y ejemplos

Comencemos definiendo lo que entendemos por espacio de Hilbert inducido por $A \in L(\mathcal{H})^+$.

Definición 1.4.1. *Sea $A \in L(\mathcal{H})^+$. Un par $(\mathcal{H}_1, \Pi)$ se llama un* **espacio de Hilbert inducido por** *A si:*

1. *$\mathcal{H}_1$ es un espacio de Hilbert,*
2. *$\Pi : \mathcal{H} \to \mathcal{H}_1$ es un operador lineal tal que $R(\Pi)$ es denso en $\mathcal{H}_1$,*
3. *$\langle \Pi\xi, \Pi\eta \rangle = \langle A\xi, \eta \rangle$ para todo $\xi, \eta \in \mathcal{H}$.*

Dados dos espacios de Hilbert inducidos por A, $(\mathcal{H}_1, \Pi_1)$ y $(\mathcal{H}_2, \Pi_2)$, se dicen que son **unitariamente equivalentes** *si existe $U \in \mathcal{U}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ tal que $U\Pi_1 = \Pi_2$.*

La definición 1.4.1 se puede extender para operadores A positivos densamente definidos. Para un estudio más detallado de esta situación se recomienda ver [17]. A continuación veremos que todo operador positivo $A \in L(\mathcal{H})^+$ admite un espacio de Hilbert inducido por A.

Proposición 1.4.2. *Para todo $A \in L(\mathcal{H})^+$ existe un espacio de Hilbert inducido por A. Además, si $(\mathcal{H}_1, \Pi_1), (\mathcal{H}_2, \Pi_2)$ son dos espacios de Hilbert inducidos por A entonces $(\mathcal{H}_1, \Pi_1), (\mathcal{H}_2, \Pi_2)$ son unitariamente equivalentes.*

Demostración. Consideremos el cociente $\mathcal{H}/N(A)$ y denotemos por $\overline{\xi}$ la clase al cociente de $\xi \in \mathcal{H}$, i.e., $\overline{\xi} = \xi + N(A)$. Luego, $[\overline{\xi}, \overline{\eta}] = \langle A\xi, \eta \rangle$, $\xi, \eta \in \mathcal{H}$ define un producto interno sobre $\mathcal{H}/N(A)$. Denotemos con $\mathcal{H}/N(A)^-$ a la completación de $(\mathcal{H}/N(A), [\ ,\ ])$. Sea $\pi : \mathcal{H} \to \mathcal{H}/N(A)^-$ la proyección al cociente, es decir, $\pi(\xi) = \overline{\xi}$ para todo $\xi \in \mathcal{H}$. Veamos que $(\mathcal{H}/N(A)^-, \pi)$ es un espacio de Hilbert inducido por A. Para esto, observemos que $R(\pi) = \mathcal{H}/N(A)$ es denso en $\mathcal{H}/N(A)^-$. Además, por definición, $[\pi(\xi), \pi(\eta)] = [\overline{\xi}, \overline{\eta}] = \langle A\xi, \eta \rangle$, para todo $\xi, \eta \in \mathcal{H}$. Luego, $(\mathcal{H}/N(A)^-, \pi)$ es un espacio de Hilbert inducido por A.

Por otro lado, supongamos que $(\mathcal{H}_1, \Pi_1), (\mathcal{H}_2, \Pi_2)$ son dos espacios de Hilbert inducidos por $A \in L(\mathcal{H})^+$. Luego, para todo $\xi, \eta \in \mathcal{H}$ se tiene que $\langle \Pi_1\xi, \Pi_1\eta \rangle = \langle A\xi, \eta \rangle = \langle \Pi_2\xi, \Pi_2\eta \rangle$. Luego, el operador U tal que $U\Pi_1\xi = \Pi_2\xi$ queda bien definido y resulta isométrico. Ahora, dado que $R(\Pi_1)$ es denso en $\mathcal{H}_1$, entonces U puede ser extendido a $U \in \mathcal{U}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$. $\square$

En lo que resta de esta sección presentaremos distintas realizaciones de espacios de Hilbert inducidos por $A \in L(\mathcal{H})^+$ las cuales, de acuerdo con la Proposición 1.4.2, son unitariamente equivalentes.

Proposición 1.4.3. *Sea $A \in L(\mathcal{H})^+$. Si consideramos sobre $R(A^{1/2})$ el producto interno dado por*

$$(A^{1/2}\xi, A^{1/2}\eta) := \left\langle P_{\overline{R(A)}}\xi, P_{\overline{R(A)}}\eta \right\rangle \tag{1.4.1}$$

para todo $\xi, \eta \in \mathcal{H}$, entonces $(R(A^{1/2}), A)$ resulta un espacio de Hilbert inducido por A. Denotaremos con $\mathbf{R}(A^{1/2})$ al espacio de Hilbert $(R(A^{1/2}), (\ ,\ ))$.

Demostración. Primero veamos que $R(A^{1/2})$ con el producto interno dado por (1.4.1) resulta un espacio de Hilbert. Para esto, sea $(A^{1/2}\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en $R(A^{1/2})$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $\overline{R(A)}$. Luego, dado que $\|A^{1/2}\xi_n - A^{1/2}\xi_m\|_{\mathbf{R}(A^{1/2})} = \|\xi_n - \xi_m\|$, entonces $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en $\overline{R(A)}$ y, por lo tanto, existe $\xi \in \overline{R(A)}$ tal que $\|\xi_n - \xi\| = \|A^{1/2}\xi_n - A^{1/2}\xi\|_{\mathbf{R}(A^{1/2})} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Es decir, $(A^{1/2}\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente sobre $R(A^{1/2})$ y entonces $R(A^{1/2})$ es un espacio de Hilbert.

A continuación, comprobemos que $(R(A^{1/2}), A)$ resulta un espacio de Hilbert inducido por A. Claramente, $(A\xi, A\eta) = \langle A\xi, \eta\rangle$ para todo $\xi, \eta \in \mathcal{H}$. Por lo tanto, sólo resta verificar que $R(A)$ es denso en $R(A^{1/2})$. Ahora, sea $A^{1/2}\xi \in R(A^{1/2})$ con $\xi \in \overline{R(A)}$. Luego, como $R(A^{1/2})$ es denso en $\overline{R(A)}$ como subespacio de $\mathcal{H}$, entonces existe $(A^{1/2}\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $\|A^{1/2}\xi_n - \xi\| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Entonces, si consideramos ahora la sucesión $(A\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tenemos que $\|A\xi_n - A^{1/2}\xi\|_{\mathbf{R}(A^{1/2})} = \|A^{1/2}\xi_n - \xi\| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Es decir, $R(A)$ es denso en $R(A^{1/2})$. □

El tercer espacio de Hilbert inducido por $A \in L(\mathcal{H})^+$ que presentamos es $\overline{R(A)}$ como subespacio de $\mathcal{H}$.

Proposición 1.4.4. $(\overline{R(A)}, A^{1/2})$ *es un espacio de Hilbert inducido por A.*

Demostración. Claramente, $R(A^{1/2})$ es denso en $\overline{R(A)}$. Además, para todo $\xi, \eta \in \mathcal{H}$ se tiene que $\left\langle A^{1/2}\xi, A^{1/2}\eta \right\rangle = \langle A\xi, \eta\rangle$. Luego,$(\overline{R(A)}, A^{1/2})$ es un espacio de Hilbert inducido por A. □

Capítulo 2

Clases de operadores en $L(\mathcal{H})$ mediante sucesiones de Bessel

A continuación veremos que $L(\mathcal{H})$ y $Bess(\mathcal{H})$ son espacios isomorfos. Luego, estudiaremos distintas clases de operadores de $L(\mathcal{H})$ vía este isomorfismo.

2.1. Isomorfismo entre $L(\mathcal{H})$ y $Bess(\mathcal{H})$

Consideremos una base ortonormal de $\mathcal{H}$, $E = (\xi_k)_{k\in\mathbb{N}}$, fija y definamos la siguiente aplicación:

$$\alpha_E : L(\mathcal{H}) \longrightarrow Bess(\mathcal{H}) \text{ tal que } \alpha_E(T) = (T\xi_k)_{k\in\mathbb{N}}.$$

Observemos que dado $T \in L(\mathcal{H})$, para todo $\eta \in \mathcal{H}$ se tiene que

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\langle \eta, T\xi_k\rangle|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\langle T^*\eta, \xi_k\rangle|^2 \leq \|T^*\|^2 \, \|\eta\|^2,$$

i.e, $(T\xi_k)_{k\in\mathbb{N}} \in Bess(\mathcal{H})$. Luego, la aplicación α_E está bien definida.

Proposición 2.1.1. *α_E es una aplicación lineal biyectiva. Más aún,*

$$\alpha_E^{-1} : Bess(\mathcal{H}) \to L(\mathcal{H}) \textit{ está definida por } \alpha_E^{-1}((\psi_k)_{k\in\mathbb{N}}) = T_\psi,$$

donde $T_\psi(\sum_{k=1}^{\infty} c_k\xi_k) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k\psi_k$.

Demostración. La linealidad de α_E es clara. Veamos entonces que es biyectiva. Para esto es suficiente probar que $\beta_E : Bess(\mathcal{H}) \to L(\mathcal{H})$ definida por $\beta_E((\psi_k)_{k\in\mathbb{N}}) = T_\psi$ es efectivamente la inversa de α_E. Luego, observemos primero que β_E está bien definido, Para esto, veamos que $\sum_{k=1}^{\infty} c_k\psi_k$ es convergente en $\mathcal{H}$ para cualquier sucesión $(c_k)_{k\in\mathbb{N}} \in l^2$. De hecho, si $n > m$ entonces

$$\begin{aligned}
\|\sum_{k=1}^{n} c_k\psi_k - \sum_{k=1}^{m} c_k\psi_k\| &= \|\sum_{k=m+1}^{n} c_k\psi_k\| = \sup_{\|\eta\|=1}\left|\left\langle \sum_{k=m+1}^{n} c_k\psi_k, \eta\right\rangle\right| \\
&\leq \sup_{\|\eta\|=1} \sum_{k=m+1}^{n} |c_k \langle \psi_k, \eta\rangle| \\
&\leq \left(\sum_{k=m+1}^{n} |c_k|^2\right)^{1/2} \sup_{\|\eta\|=1}\left(\sum_{k=m+1}^{n} |\langle \psi_k, \eta\rangle|^2\right)^{1/2} \\
&\leq \sqrt{B}\left(\sum_{k=m+1}^{n} |c_k|^2\right)^{1/2}.
\end{aligned}$$

Luego $(\sum_{k=1}^{n} c_k\psi_k)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathcal{H}$, y por consiguiente convergente en $\mathcal{H}$. La linealidad de T_ψ es clara. Nos resta ver que T_ψ es acotado. Ahora,

$$\begin{aligned}
\|T_\psi(\sum_{k=1}^{\infty} c_k\xi_k)\| &= \|\sum_{k=1}^{\infty} c_k\psi_k\| = \sup_{\|\eta\|=1}\left|\left\langle \sum_{k=1}^{\infty} c_k\psi_k, \eta\right\rangle\right| \leq \sup_{\|\eta\|=1} \sum_{k=1}^{\infty} |c_k \langle \psi_k, \eta\rangle| \\
&\leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2\right)^{1/2} \sup_{\|\eta\|=1}\left(\sum_{k=1}^{\infty} |\langle \psi_k, \eta\rangle|^2\right)^{1/2} \\
&\leq \sqrt{B}\left(\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2\right)^{1/2} = \sqrt{B}\|\sum_{k=1}^{\infty} c_k\xi_k\|.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $T_\psi \in L(\mathcal{H})$ y entonces β_E está bien definida. Vale la pena observar que $\|T_\psi\|^2 = B_\psi$. Es sencillo comprobar que β_E es efectivamente la inversa de α_E, y el resultado queda probado. □

Nótese que si B_ψ es la cota ótima de $(\psi_k)_{k\in\mathbb{N}} \in Bess(\mathcal{H})$ entonces la fórmula $\|(\psi_k)_{k\in\mathbb{N}}\|^2_{Bess} = B_\psi$ define una norma sobre $Bess(\mathcal{H})$. Luego, como consecuencia del resulta anterior tenemos el siguiente corolario.

Corolario 2.1.2. $(Bess(\mathcal{H}), \|\ \|_{Bess})$ *es isométricamente isomorfo a* $L(\mathcal{H})$.

Observación 2.1.3. *La noción de sucesión de Bessel provee condiciones necesarias y suficientes para que una matriz infinita sea la representación matricial (inducida por una base fija) de un operador lineal acotado en* $\mathcal{H}$. *En general, es difícil determinar cuando una matriz infinita proviene de un operador lineal y acotado en* $\mathcal{H}$ *(ver [29] p.23). Sin embargo, de acuerdo a lo visto anteriormente, una matriz infinita corresponde a un operador en* $L(\mathcal{H})$ *si y sólo si la sucesión formada por las columnas es una sucesión de Bessel en* l^2.

Dado que $(Bess(\mathcal{H}), \|\ \|_{Bess})$ es isomorfo a $L(\mathcal{H})$ nos interesa estudiar clases de operadores en $L(\mathcal{H})$ relacionadas vía este isomorfismo con distintas clases de sucesiones de Bessel en $\mathcal{H}$. Deseamos que dicha caracterización sea independiente de la base ortonormal fija E que se haya utilizado para la definición de la aplicación α_E. En la siguiente proposición mostramos que dicha independencia sólo se verifica sobre los subconjuntos de $L(\mathcal{H})$ que resultan invariantes a derecha por unitarios.

Proposición 2.1.4. *Sea* $\mathcal{A} \subset L(\mathcal{H})$. *Entonces,* $\alpha_E(\mathcal{A}) = \alpha_{\tilde{E}}(\mathcal{A})$ *para todo par de bases ortonormales de* $\mathcal{H}$, $E = (\xi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *y* $\tilde{E} = (\tilde{\xi}_k)_{k\in\mathbb{N}}$, *si y sólo si* $\mathcal{A} = \mathcal{A}\mathcal{U}(\mathcal{H})$.

Demostración. Sean $T \in \mathcal{A}$, $U \in \mathcal{U}(\mathcal{H})$ y $E = (\xi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una base ortonormal de $\mathcal{H}$. Entonces, $\tilde{E} = (U^*\xi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es también una base ortonormal de $\mathcal{H}$. Luego, por hipótesis, existe $\tilde{T} \in \mathcal{A}$ tal que $T\xi_k = \tilde{T}U^*\xi_k$ para todo $k \in \mathbb{N}$, i.e., $T = \tilde{T}U^*$. Por lo tanto, $TU = \tilde{T} \in \mathcal{A}$.

Recíprocamente, sea $(\psi_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \alpha_E(\mathcal{A})$. Luego, existe $T \in \mathcal{A}$ tal que $T\xi_k = \psi_k$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Sea $\tilde{E} = (\tilde{\xi}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una base ortonormal de $\mathcal{H}$ y sea $U \in L(\mathcal{H})$ definido por $U\tilde{\xi}_k = \xi_k$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Claramente, $U \in \mathcal{U}(\mathcal{H})$. Luego $\psi_k = T\xi_k = TU\tilde{\xi}_k$, y como $TU \in \mathcal{A}$ entonces $(\psi_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \alpha_{\tilde{E}}(\mathcal{A})$. $\square$

2.2. Algunas caracterizaciones conocidas

Aunque la condición dada en la Proposición 2.1.4 es muy restrictiva, existen varias clases de operadores que la verifican. Por ejemplo, los operadores suryectivos, unitarios, compactos y de rango cerrado entre otros. En la siguiente proposición recopilamos algunas caracterizaciones que se pueden hallar en la literatura clásica de sucesiones de Bessel y marcos.

Proposición 2.2.1. *Siguiendo la notación dada en 1.1.1 se tiene que:*

1. $\alpha_E(\mathcal{E}) = \{\psi \in Bess(\mathcal{H}) :\ \psi$ *es un marco para* $\mathcal{H}\}$.
2. $\alpha_E(\mathcal{RC}) = \{\psi \in Bess(\mathcal{H}) :\ \psi$ *es una sucesión de marco para* $\mathcal{H}\}$.
3. $\alpha_E(Gl) = \{\psi \in Bess(\mathcal{H}) :\ \psi$ *: es una base de Riesz para* $\mathcal{H}\}$.
4. $\alpha_E(\mathcal{RC} \cap I) = \{\psi \in Bess(\mathcal{H}) :\ \psi$ *es una sucesión de Riesz*$\}$.
5. $\alpha_E(\mathcal{U}) = \{\psi \in Bess(\mathcal{H}) :\ \psi$ *es una base ortonormal para* $\mathcal{H}\}$.
6. $\alpha_E(\mathcal{J}) = \{\psi \in Bess(\mathcal{H}) :\ \psi$ *es sucesión de marco de Parserval para* $\mathcal{H}\}$.
7. $\alpha_E(\mathcal{E}^0) = \{\psi \in Bess(\mathcal{H}) :\ \psi$ *es un marco de Parserval para* $\mathcal{H}\}$.

Demostración.

1. Sea $T \in \mathcal{E}$ y $\eta = T\nu \in R(T) = \mathcal{H}$. Luego, como $TT^\dagger = P_{R(T)} = id$, entonces

$$\begin{aligned}
\|\eta\|^2 &= \|(T^\dagger)^* T^* T\nu\|^2 \leq \|(T^\dagger)^*\|^2 \|T^*T\nu\|^2 \\
&= \|T^\dagger\|^2 \sum_{k=1}^{\infty} |\,\langle T^*T\nu, \xi_k\rangle\,|^2 \\
&= \|T^\dagger\|^2 \sum_{k=1}^{\infty} |\,\langle T\nu, T\xi_k\rangle\,|^2 \\
&= \|T^\dagger\|^2 \sum_{k=1}^{\infty} |\,\langle \eta, T\xi_k\rangle\,|^2,
\end{aligned}$$

es decir, $(T\xi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es un marco.

Recíprocamente, sea $(\psi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ un marco para $\mathcal{H}$. Entonces, para todo $\eta \in \mathcal{H}$ se cumple que

$$A\|\eta\|^2 \leq \sum_{k=1}^{\infty} |\,\langle \eta, T_\psi \xi_k\rangle\,|^2 = \|T_\psi^* \eta\|^2,$$

es decir, T_ψ^* es acotado inferiormente y entonces T_ψ^* es inyectivo y de rango cerrado. Luego, T_ψ es suryectivo.

2. Análogo a ítem 1.

3. Sea $T \in Gl(\mathcal{H})$. Claramente, $\overline{gen}(T\xi_k)_{k\in\mathbb{N}} = \mathcal{H}$. Sea (a_k) una sucesión finita de escalares entonces
$$\|\sum a_k T\xi_k\|^2 \;=\; \|T\sum a_k\xi_k\|^2 \leq \|T\|^2 \sum |a_k|^2.$$
Por otro lado,
$$\sum |a_k|^2 \;=\; \|T^{-1}T(\sum a_k\xi_k)\|^2 \leq \|T^{-1}\|^2 \|\sum a_k T\xi_k\|^2.$$
Luego, $(T\xi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es una base de Riesz para $\mathcal{H}$.

   Recíprocamente, sea $\psi = (\psi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una base de Riesz para $\mathcal{H}$. Claramente $\psi \in Bess(\mathcal{H})$. Definamos $T_\psi^{-1} : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ por $T_\psi^{-1}\psi_k = \xi_k$. Dada la cota inferior 1.2.1 tenemos que $T_\psi^{-1} \in L(\mathcal{H})$ y claramente $T_\psi T_\psi^{-1} = T_\psi^{-1}T_\psi = id$, i.e., $T_\psi \in Gl(\mathcal{H})$.

4. Es consecuencia del ítem anterior.

5. Sea $T \in \mathcal{U}(\mathcal{H})$. Por 4, $\alpha_E(T) = (T\xi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es una base. Además, $\langle T\xi_k, T\xi_j\rangle = \langle \xi_k, T^*T\xi_j\rangle = \langle \xi_k, \xi_j\rangle = \delta_{k,j}$, i.e., $\alpha_E(T)$ es una base ortonormal.

   Recíprocamente, si $\psi = (\psi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es una base ortonormal entonces, por el ítem 4, $T_\psi \in Gl(\mathcal{H})$. Veamos que $T_\psi^{-1} = T_\psi^*$. En efecto, $\left\langle T_\psi(\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k\xi_k), \psi_j \right\rangle = c_j = \left\langle \sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k\xi_k, \xi_j \right\rangle = \left\langle \sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k\xi_k, T_\psi^{-1}\psi_j \right\rangle$.

6. Si T una isometría parcial y $\eta = T\nu \in R(T)$ con $\nu \in N(T)^\perp$ entonces $\|\eta\|^2 = \|\ T\nu\|^2 = \|\nu\|^2 = \|\ T^*T\nu\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\langle\ T^*T\nu, \xi_k\rangle|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\langle \eta, T\xi_k\rangle|^2$. Por lo tanto, $\psi = (T\xi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de marco de Parserval.

   Recíprocamente, sea $\psi = (\psi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión de marco de Parserval. Entonces, dado $\eta \in \mathcal{H}$ se tiene que
$$\|T_\psi\eta\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\langle T_\psi\eta, T_\psi\xi_k\rangle|^2 = \left\|T_\psi^* T_\psi\eta\right\|^2.$$
Luego, T_ψ^* es una isometria parcial y entonces T_ψ es una isometría parcial.

7. $T \in \mathcal{E}^0$ si y sólo si $\|\eta\|^2 = \|T^*\eta\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\langle T^*\eta, \xi_k\rangle|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\langle \eta, T\xi_k\rangle|^2$ para todo $\xi \in \mathcal{H}$, i.e., si y sólo si $\alpha_E(T)$ es un marco de Parserval.

$\square$

Corolario 2.2.2. *Sea $T \in L(\mathcal{H})$. Entonces, $\alpha_E(T)$ es un marco para $\mathcal{H}$ si y sólo si $\alpha_E(T^*)$ es una sucesión de Riesz.*

Demostración. Es consecuencia inmediata de la Proposición 2.2.1, y del hecho de que un operador es inyectivo y de rango cerrado si y sólo si su adjunto es un operador suryectivo. $\square$

Observación 2.2.3. *Considerando la representación matricial (inducida por una base fija) de un operador lineal y acotado, el corolario anterior puede reescribirse del siguiente modo: La sucesión de columnas de una matriz forma una sucesión de Riesz si y sólo si la sucesión de filas forma un marco.*

Dado que $T \in L(\mathcal{H})$ es una isometría si y sólo si T es una isometría parcial inyectiva entonces, por la Proposición 2.2.1, tenemos la siguiente caracterización de $\mathcal{I}(\mathcal{H})$:

Proposición 2.2.4. $\alpha_E(\mathcal{I}) = \{\psi \in Bess(\mathcal{H}) :$ *ψ es una sucesión de Riesz con constantes óptimas $c = C = 1$*$\}$.

2.3. Caracterización de operadores compactos y de clase p-Schatten

Puesto que $\mathfrak{S}_p(\mathcal{H})$ es un ideal para todo $p \geq 1$, entonces, en particular, $\mathfrak{S}_p(\mathcal{H})$ es invariante a derecha por unitarios. Nuestro propósito en esta sección será caracterizar $\alpha_E(\mathfrak{S}_p(\mathcal{H}))$. Comencemos caracterizando $\alpha_E(\mathfrak{S}_\infty(\mathcal{H}))$. En principio, observemos que, por la Proposición 1.1.5 ítem 5 , se verifica que $\alpha_E(\mathfrak{S}_\infty(\mathcal{H})) \subseteq c_0$. Sin embargo, como muestra el siguiente ejemplo, no vale la igualdad.

Ejemplo 2.3.1. *Sea $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una base ortonormal de $\mathcal{H}$. Luego, la sucesión $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida por $\xi_1, \frac{\xi_2}{\sqrt{2}}, \frac{\xi_2}{\sqrt{2}}, \frac{\xi_3}{\sqrt{3}}, \frac{\xi_3}{\sqrt{3}}, \frac{\xi_3}{\sqrt{3}}, \ldots$ es un marco de Parserval. Por lo tanto, T_ψ es una co-isometría, i.e., $T_\psi T_\psi^* = id$ y, por consiguiente, T_ψ no es compacto; mientras que $\|\psi_n\| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.*

A continuación presentamos una nueva caracterización de los operadores compactos en términos de sucesiones de Bessel.

Proposición 2.3.2. *Vale la siguiente la igualdad*

$$\alpha_E(\mathfrak{S}_\infty(\mathcal{H})) = \{\psi \in Bess(\mathcal{H}) : \ (B_{\psi^N})_{N\in\mathbb{N}} \in c_0 \ \textit{donde}\ \psi^N = (\psi_k)_{k>N}\}.$$

Demostración. Sea $T \in \mathfrak{S}_\infty(\mathcal{H})$ y $P_N = P_{gen\{\xi_1,\dots,\xi_N\}}$, donde $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una base ortonormal de $\mathcal{H}$. Dado que $T^* \in \mathfrak{S}_\infty(\mathcal{H})$, entonces, por Proposición 1.1.5.4, $\|P_N T^* - T^*\| \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Sea $\eta \in \mathcal{H}$,

$$(P_N T^* - T^*)\,\eta = -\sum_{k=N+1}^{\infty} \langle T^*\eta, \xi_k\rangle\, \xi_k = -\sum_{k=N+1}^{\infty} \langle \eta, T\xi_k\rangle\, \xi_k.$$

Luego,

$$\sum_{k=N+1}^{\infty} |\langle \eta, T\xi_k\rangle|^2 = \|(P_N T^* - T^*)\,\eta\|^2 \le \|P_N T^* - T^*\|^2 \|\eta\|^2 .$$

Asi, $\psi^N = (T\xi_k)_{k>N} \in Bess(\mathcal{H})$ y $B_{\psi^N} \le \|P_N T^* - T^*\|^2 \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Recíprocamente, sea $\psi = (\psi_k)_{k\in\mathbb{N}} \in Bess(\mathcal{H})$ tal que $B_{\psi^N} \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Probemos que $T_\psi^* \in \mathfrak{S}_\infty(\mathcal{H})$. Siguiendo las misma idea que antes se tiene que

$$\left\|\left(P_N T_\psi^* - T_\psi^*\right)\eta\right\|^2 = \sum_{k=N+1}^{\infty} |\langle \eta, T_\psi \xi_k\rangle|^2 = \sum_{k=N+1}^{\infty} |\langle \eta, \psi_k\rangle|^2 \le B_{\psi^N}\,\|\eta\|^2 .$$

Luego, $\left\|P_N T_\psi^* - T_\psi^*\right\|^2 \le B_{\psi^N} \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} 0$ y entonces, por Proposición 1.1.5, T_ψ^* es compacto y luego $T_\psi \in \mathfrak{S}_\infty(\mathcal{H})$. □

Puesto que $\|\psi\|_{Bess} = B_\psi$ el resultado anterior puede reescribirse como sigue:

Corolario 2.3.3. $\alpha_E(\mathfrak{S}_\infty(\mathcal{H})) = \{\psi \in Bess(\mathcal{H}) : \ (\|\psi^N\|_{Bess})_{N\in\mathbb{N}} \in c_0,\ \psi^N = (\psi_k)_{k>N}\}$.

Finalmente, nos dedicaremos a las sucesiones de Bessel asociadas a operadores pertenecientes a la clase p-Schatten. Aplicando la Proposición 1.1.11.6 se obtienen las siguientes implicaciones:

Proposición 2.3.4. *Sea* $\psi = (\psi_n)_{n\in\mathbb{N}} \in Bess(\mathcal{H})$. *Entonces:*

1. Si $1 \leq p \leq 2$ *y* $(\|\psi_k\|)_{k\in\mathbb{N}} \in l^p$ *entonces* $T_\psi \in \mathfrak{S}_p(\mathcal{H})$.

2. Si $2 \leq p$ *y* $T_\psi \in \mathfrak{S}_p(\mathcal{H})$ *entonces* $(\|\psi_k\|)_{k\in\mathbb{N}} \in l^p$.

Como consecuencia inmediata de la proposición anterior obtenemos la siguiente caracterización de $\alpha_E(\mathfrak{S}_2(\mathcal{H}))$.

Corolario 2.3.5. $\alpha_E(\mathfrak{S}_2(\mathcal{H})) = \{\psi \in Bess(\mathcal{H}) : (\|\psi_k\|)_{k\in\mathbb{N}} \in l^2\}$.

De todas maneras, nuestro propósito es caracterizar $\alpha_E(\mathfrak{S}_p(\mathcal{H}))$ para todo $1 \leq p < \infty$. Con este objetivo, intentamos en principio adaptar la Proposición 2.3.2 para operadores en la clase p-Schatten. Pero, en tal caso, sólo se obtiene la siguiente implicación.

Proposición 2.3.6. *Si* $\psi = (\psi_k)_{k\in\mathbb{N}} \in Bess(\mathcal{H})$ *verifica que* $(\left\|\psi^N\right\|_{Bess})_{N\in\mathbb{N}} \in l^p$ *donde* $\psi^N = (\psi_k)_{k>N}$ *entonces* $T_\psi \in \mathfrak{S}_p(\mathcal{H})$.

Demostración. Dado que $\lambda_{n+1}(T) = inf\{\|T - B\| : B \in L(\mathcal{H},\mathcal{K})$ y $dimR(B) \leq n\}$ y siguiendo la misma idea que en la demostración de la Proposición 2.3.2, tenemos que $\lambda_{n+1}(T^*) \leq \|P_N T_\psi^* - T_\psi^*\| \leq \|\psi^N\|_{Bess}$, de donde se obtiene el resultado. □

Como muestra el siguiente ejemplo, la implicación recíproca de la última proposición es falsa, en general:

Ejemplo 2.3.7. Sea $\alpha \in \mathbb{R}$ y $e = (\frac{\alpha}{k})_{k\in\mathbb{N}} \in l^2$ tal que $\|e\| = 1$. Definamos $T \in L(l^2)$ por $T\eta = \langle \eta, e\rangle\, e$. Es decir, T es la proyección ortogonal sobre $gen\{e\}$, y $T \in \mathfrak{S}_p(\mathcal{H})$ para todo $p > 0$. En particular, $T \in \mathfrak{S}_1(\mathcal{H})$. Consideremos ahora la base ortonormal canónica de l^2 y denotémosla por $E = (e_n)_{n\in\mathbb{N}}$, y sea $P_N = P_{gen\{e_1,\ldots,e_N\}}$. Luego, si $\alpha_E(T) = (\psi_k)_{k\in\mathbb{N}} = \psi$ y $\psi^N = (\psi_k)_{k>N}$ entonces, $\left\|\psi^N\right\|_{Bess}^2 = \|TP_N\|^2 = \|P_N e\|^2 = \sum_{k=N}^{\infty}\left(\frac{1}{k}\right)^2 \approx \frac{1}{N}$ y por lo tanto $(\|\psi^N\|_{Bess}^2)_{N\in\mathbb{N}} \notin l^1$, entonces $(\|\psi^N\|_{Bess})_{N\in\mathbb{N}} \notin l^1$.

A continuación presentamos una caracterización de $\alpha_E(\mathfrak{S}_p(\mathcal{H}))$ válida para todo $1 \leq p < \infty$.

Proposición 2.3.8. *Sea* $\psi = (\psi_k)_{k\in\mathbb{N}} \in Bess(\mathcal{H})$. *Entonces* $T_\psi \in \mathfrak{S}_p(\mathcal{H})$ *si y sólo si existe una base ortonormal de* $\overline{gen}\{\psi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, $(\beta_k)_{k\in\mathbb{N}}$, *una sucesión ortonormal* $(\nu_k)_{k\in I}$ *de* $\mathcal{H}$ *y* $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}} \in l^p$ *con* $0 < \lambda_{k+1} \leq \lambda_k$ *tal que*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \langle \nu_j, \xi_k \rangle \langle \psi_k, \beta_n \rangle = \lambda_n \delta_{j,n} \tag{2.3.1}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \langle \nu, \xi_k \rangle \langle \psi_k, \beta_n \rangle = 0 \ si \ \nu \in gen\{\nu_n\}_{n\in I}^{\perp} \tag{2.3.2}$$

Demostración. Recordemos que $T_\psi \eta = \sum_{k=1}^{\infty} \langle \eta, \xi_k \rangle \psi_k$.

Sea $T_\psi \in \mathfrak{S}_p(\mathcal{H})$. Luego, $T_\psi \eta = \sum_{k\in I} \lambda_k \langle \eta, \nu_k \rangle \beta_k$, donde $(\nu_k)_{k\in I}$ es una base ortonormal de $N(T_\psi)^\perp$, $(\beta_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es una base ortonormal de $\overline{R(T_\psi)} = \overline{gen}\{\psi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ y $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}} \in l^p$, $0 < \lambda_{k+1} \leq \lambda_k$.

Luego,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \langle \nu_j, \xi_k \rangle \langle \psi_k, \beta_n \rangle = \langle T_\psi(\nu_j), \beta_n \rangle = \langle \sum_{k\in I} \lambda_k \langle \nu_j, \nu_k \rangle \beta_k, \beta_n \rangle = \lambda_n \delta_{j,n},$$

es decir, se verifica la ecuación (2.3.1). Por otro lado, si $\nu \in gen\{\nu_k\}^\perp = N(T_\psi)$ entonces,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \langle \nu, \xi_k \rangle \langle \psi_k, \beta_n \rangle = \langle T_\psi(\nu), \beta_n \rangle = 0,$$

i.e., se verifica la ecuación (2.3.2).

Recíprocamente, sea $\psi = (\psi_k)_{k\in\mathbb{N}} \in Bess(\mathcal{H})$ tal que se verifican las ecuaciones (2.3.1) y (2.3.2). Sea $(\tilde{\nu}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una completación de $(\nu_k)_{k\in I}$ a una base ortonormal de $\mathcal{H}$. Observemos que,

$$T_\psi \tilde{\nu}_j = \sum_{k=1}^{\infty} \langle T_\psi \tilde{\nu}_j, \beta_k \rangle \beta_k = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \langle \tilde{\nu}_j, \xi_n \rangle \langle \psi_n, \beta_k \rangle \beta_k.$$

Luego, por las ecuaciones (2.3.1) y (2.3.2), obtenemos que si $\tilde{\nu}_j = \nu_j$ entonces $T_\psi \tilde{\nu}_j = \lambda_j \beta_j$, y si $\tilde{\nu}_j \notin \{\nu_k : \ k \in I\}$ entonces $T_\psi \tilde{\nu}_j = 0$.

Consideremos $\eta = \sum_{k=1}^{\infty} \langle \eta, \tilde{\nu}_k \rangle \tilde{\nu}_k \in \mathcal{H}$. Entonces, $T_\psi \eta = \sum_{k=1}^{\infty} \langle \eta, \tilde{\nu}_k \rangle T_\psi \tilde{\nu}_k = \sum_{k\in I} \lambda_k \langle \eta, \nu_k \rangle \beta_k$ donde $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}} \in l^p$. Por lo tanto, $T_\psi \in \mathfrak{S}_p(\mathcal{H})$ y el resultado queda probado. $\square$

Capítulo 3

Multiplicador de Bessel y multiplicador de Bessel de fusión

3.1. Multiplicador de Bessel

Comencemos introduciendo la definición de multiplicador de Bessel.

Definición 3.1.1. *Sean $(\phi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ y $(\psi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ dos sucesiones de Bessel en $\mathcal{H}_1$ y $\mathcal{H}_2$ respectivamente y $m \in l^\infty$. Llamaremos* **multiplicador de Bessel** *para las sucesiones de Bessel $(\phi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ y $(\psi_k)_{k\in\mathbb{N}}$, al operador $M_{m(\psi_k)(\phi_k)} : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$, definido por*

$$M_{m(\psi_k)(\phi_k)}(\xi) = \sum_{k\in\mathbb{N}} m_k \langle \xi, \phi_k \rangle \psi_k.$$

La sucesión m se llama el **símbolo** de $M_{m(\psi_k)(\phi_k)}$. Dados $\phi \in \mathcal{H}_1$ y $\eta \in \mathcal{H}_2$ denotamos con $\phi \otimes_i \eta$ al operador de $\mathcal{H}_2$ en $\mathcal{H}_1$ definido por $(\phi \otimes_i \eta)(\xi) = \langle \xi, \eta \rangle \phi$. Entonces

$$M_{m(\psi_k)(\phi_k)}(\xi) = \sum_{k\in\mathbb{N}} m_k(\psi_k \otimes_i \phi_k)(\xi).$$

Es sencillo verificar que $\|\phi \otimes_i \eta\|_p = \|\phi\|\|\eta\|$ para $p \geq 1$. En lo que sigue consideraremos el operador $\mathcal{M}_m : l^2 \to l^2$ definido por $\mathcal{M}_m((c_k)_{k\in\mathbb{N}}) = (c_k m_k)_{k\in\mathbb{N}}$.

Proposición 3.1.2. *Valen las siguientes propiedades:*

1. *Si $m \in l^\infty$ entonces $\mathcal{M}_m \in L(l^2)$. Además, $\|\mathcal{M}_m\| = \|m\|_\infty$.*

2. $M_{m(\psi_k)(\phi_k)} \in L(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$. *Además,* $M_{m(\psi_k)(\phi_k)} = D_\psi \mathcal{M}_m C_\phi$ *y* $\|M_{m(\psi_k)(\phi_k)}\| \leq B_\psi^{1/2} B_\phi^{1/2} \|m\|_\infty$.

3. $M^*_{m(\psi_k)(\phi_k)} = M_{\overline{m}(\phi_k)(\psi_k)}$.

Demostración. 1. Sea $(c_k)_{k\in\mathbb{N}} \in l^2$. Luego, $\|\mathcal{M}_m(c_k)\| = \|(m_k c_k)\| \leq \|m\|_\infty \|(c_k)\|$. Por lo tanto, $\mathcal{M}_m \in L(l^2)$ y $\|\mathcal{M}_m\| \leq \|m\|_\infty$. Además, si $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ denota la base canónica de l^2 entonces, $|m_k| = \|\mathcal{M}_m(e_k)\| \leq \|\mathcal{M}_m\|$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Entonces $\|m\|_\infty \leq \|\mathcal{M}_m\|$ y, luego, $\|\mathcal{M}_m\| = \|m\|_\infty$.

2. Es sencillo comprobar que $M_{m(\psi_k)(\phi_k)} = D_\psi \mathcal{M}_m C_\phi$. Luego, como por el ítem anterior $\mathcal{M}_m \in L(l^2)$, entonces $M_{m(\psi_k)(\phi_k)} \in L(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ y $\|M_{m(\psi_k)(\phi_k)}\| \leq B_\psi^{1/2} B_\phi^{1/2} \|m\|_\infty$.

3. Puesto que $M_{m(\psi_k)(\phi_k)} = D_\psi \mathcal{M}_m C_\phi$, entonces $M^*_{m(\psi_k)(\phi_k)} = (D_\psi \mathcal{M}_m C_\phi)^* = D_\phi \mathcal{M}_{\overline{m}} C_\psi = M_{\overline{m}(\phi_k)(\psi_k)}$.

□

Proposición 3.1.3. *Sean* $m \in l^\infty$, $(\phi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *y* $(\psi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *sucesiones de Bessel en* $\mathcal{H}_1$ *y* $\mathcal{H}_2$ *respectivamente.*

1. *Si* $m \in c_0$ *entonces* $M_{m(\psi_k)(\phi_k)}$ *es compacto.*

2. *Si* $m \in l^p$ *entonces* $M_{m(\psi_k)(\phi_k)} \in \mathfrak{S}_p(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$.

Demostración. Dado que $M_{m(\psi_k)(\phi_k)} = D_\psi \mathcal{M}_m C_\phi$, es suficiente probar que $\mathcal{M}_m$ es compacto (resp. pertenece a la clase p-Schatten) si $m \in c_0$ (resp. si $m \in l^p$).

1. Sea $m \in c_0$ y $m_N = (m_1, m_2, ..., m_N, 0, ...) \in l^\infty$. Entonces, para todo $c \in l^2$ se tiene que $\|\mathcal{M}_m(c) - \mathcal{M}_{m_N}(c)\| = \|\mathcal{M}_{m-m_N}(c)\| \leq \|m - m_N\|_\infty \|c\| \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} 0$. De aquí, existe una sucesión, $(\mathcal{M}_{m_N})_{N\in\mathbb{N}}$, de operadores de rango finito tal que $\|\mathcal{M}_m - \mathcal{M}_{m_N}\| \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} 0$, i.e., $\mathcal{M}_m$ es compacto.

2. Sea $m \in l^p$ y $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ la base canónica de l^2. Consideremos $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ la permutación tal que $0 \leq \left|m_{\sigma(k+1)}\right| \leq \left|m_{\sigma(k)}\right|$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Entonces, para

todo $c \in l^2$,

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_m(c) &= \sum_{k\in\mathbb{N}} \left\langle mc, e_{\sigma(k)}\right\rangle e_{\sigma(k)} = \sum_{k\in\mathbb{N}} m_{\sigma(k)} \left\langle c, e_{\sigma(k)}\right\rangle e_{\sigma(k)} \\ &= \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{\overline{m}_{\sigma(k)}}{|m_{\sigma(k)}|} m_{\sigma(k)} \left\langle c, e_{\sigma(k)}\right\rangle \frac{m_{\sigma(k)}}{|m_{\sigma(k)}|} e_{\sigma(k)} \\ &= \sum_{k\in\mathbb{N}} \left|m_{\sigma(k)}\right| \left\langle c, e_{\sigma(k)}\right\rangle U(e_{\sigma(k)}),\end{aligned}$$

donde $U \in \mathcal{U}(l^2)$. Por lo tanto, como $(\left|m_{\sigma(k)}\right|)_{k\in\mathbb{N}} \in l^p$, se obtiene que $\mathcal{M}_m \in \mathfrak{S}_p(l^2)$. Además, $\|\mathcal{M}_m\|_p = \|m\|_p$ y luego $\|M_{m(\psi_k)(\phi_k)}\|_p \leq B_\phi^{1/2} B_\psi^{1/2} \|m\|_p$.

□

A continuación estudiamos la continuidad de $M_{m(\psi_k)(\phi_k)}$. Para esto, en lo que sigue, dado $1 \leq p < \infty$ denotaremos con q a su conjugado, i.e., $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Proposición 3.1.4. *Sean $(\phi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ y $(\psi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sucesiones de Bessel en $\mathcal{H}_1$ y $\mathcal{H}_2$ respectivamente.*

1. *Si $m^{(l)} \underset{l\to\infty}{\longrightarrow} m$ en l^p entonces $\|M_{m^{(l)}(\psi_k)(\phi_k)} - M_{m(\psi_k)(\phi_k)}\|_p \underset{l\to\infty}{\longrightarrow} 0$.*

2. *Si $m \in l^p$ y $(\phi_k^{(l)})_{k\in\mathbb{N}} \underset{l\to\infty}{\longrightarrow} (\phi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ en l^q entonces*

$\|M_{m(\psi_k^{(l)})(\phi_k)} - M_{m(\psi_k)(\phi_k)}\|_p \underset{l\to\infty}{\longrightarrow} 0$ *y* $\|M_{m(\phi_k)(\psi_k^{(l)})} - M_{m(\phi_k)(\psi_k)}\|_p \underset{l\to\infty}{\longrightarrow} 0$

Demostración.

1. Sea $m^{(l)} \underset{l\to\infty}{\longrightarrow} m$ en l^p. De la demostración de la Proposición 3.1.3 se tiene que $\mathcal{M}_{m^{(l)}-m} \in \mathfrak{S}_p(l^2)$ y $\|\mathcal{M}_{m^{(l)}-m}\|_p = \|m^{(l)} - m\|_p$ para todo $l \in \mathbb{N}$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\|M_{m^{(l)}(\psi_k)(\phi_k)} - M_{m(\psi_k)(\phi_k)}\|_p &= \|M_{m^{(l)}-m(\psi_k)(\phi_k)}\|_p = \|D_\psi \mathcal{M}_{m^{(l)}-m} C_\phi\|_p \\ &\leq B_\psi^{1/2} B_\phi^{1/2} \|\mathcal{M}_{m^{(l)}-m}\|_p \\ &= (B_\psi B_\phi)^{1/2} \|m^{(l)} - m\|_p \underset{l\to\infty}{\longrightarrow} 0.\end{aligned}$$

2. Si $m \in l^p$ entonces $M_{m(\psi_k^{(l)})(\phi_k)}, M_{m(\psi_k)(\phi_k)} \in \mathfrak{S}_p(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$. Luego,

$$\begin{aligned}
\|M_{m(\psi_k^{(l)})(\phi_k)} - M_{m(\psi_k)(\phi_k)}\|_p &= \|\sum_{k=1}^{\infty} m_k.(\psi_k^{(l)} - \psi_k) \otimes_i \phi_k\|_p \\
&\leq \sum_{k=1}^{\infty} |m_k| \, \|(\psi_k^{(l)} - \psi_k) \otimes_i \phi_k\|_p \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} |m_k| \, \|(\psi_k^{(l)} - \psi_k)\| \|\phi_k\| \\
&\leq B_\phi^{1/2} (\sum_{k=1}^{\infty} |m_k|^p)^{1/p} (\sum_{k=1}^{\infty} \|(\psi_k^{(l)} - \psi_k)\|^q)^{1/q} \\
&= B_\phi^{1/2} \|m\|_p \|(\psi_k^{(l)}) - (\psi_k)\|_q \underset{l\to\infty}{\longrightarrow} 0
\end{aligned}$$

donde la última desigualdad se obtiene por la desigualdad de Hölder.

El límite restante se puede probar de manera análoga.

$\square$

Corolario 3.1.5. *Sean* $m^{(l)} \underset{l\to\infty}{\longrightarrow} m$ *en* l^p, $(\psi_k^{(l)}), (\phi_k^{(l)})$ *sucesiones de Bessel y* $\mathbf{B_1}, \mathbf{B_2}$ *tal que* $B_{\psi^{(l)}} < \mathbf{B_1}$ *y* $B_{\phi^{(l)}} < \mathbf{B_2}$ *para todo* $l \in \mathbb{N}$. *Luego, si* $(\psi_k^{(l)})_{k\in\mathbb{N}}$ *y* $(\phi_k^{(l)})_{k\in\mathbb{N}}$ *convergen a* $(\psi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *y* $(\phi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *en* l^q *respectivamente entonces*

$$\|M_{m^{(l)}(\psi_k^{(l)})(\phi_{k^{(l)}})} - M_{m(\psi_k)(\phi_k)}\|_p \underset{l\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Demostración. Uniendo ítems 1 y 2 de la proposición anterior se obtiene que:

$$\begin{aligned}
\| \quad M_{m^{(l)}(\psi_k^{(l)})(\phi_k^{(l)})} &- M_{m(\psi_k)(\phi_k)}\|_p \leq \|M_{m^{(l)}(\psi_k^{(l)})(\phi_k^{(l)})} - M_{m(\psi_k^{(l)})(\phi_k^{(l)})}\|_p + \\
&\|M_{m(\psi_k^{(l)})(\phi_k^{(l)})} - M_{m(\psi_k)(\phi_k^{(l)})}\|_p + \|M_{m(\psi_k)(\phi_k^{(l)})} - M_{m(\psi_k)(\phi_k)}\|_p <
\end{aligned}$$

$$(\mathbf{B_1B_2})^{1/2}\|m^{(l)} - m\|_p + \mathbf{B_2}^{1/2}\|m\|_p\|(\psi_k^{(l)}) - (\psi_k)\|_q + \mathbf{B_1}^{1/2}\|m\|_p\|(\phi_k^{(l)}) - (\phi_k)\|_q \underset{l\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

$\square$

3.2. Multiplicador de Bessel de fusión

En esta sección introducimos el concepto de multiplicador de Bessel de fusión el cual resulta una extensión del multiplicador de Bessel para sucesiones de Bessel de fusión. Estudiaremos sus propiedades para $m \in c_0$ o $m \in l^p$.

Definición 3.2.1. *Sean $\mathcal{W} = (\mathcal{W}_i, \omega_i)_{i\in I}$ y $\mathcal{V} = (\mathcal{V}_i, \upsilon_i)_{i\in I}$ dos sucesiones de Bessel de fusión sobre el mismo espacio de Hilbert, $\mathcal{H}$, y $m \in l^\infty$. Llamaremos* **multiplicador de Bessel de fusión** *de las sucesiones de Bessel de fusión $\mathcal{W}$ y $\mathcal{V}$ al operador $S_{m\mathcal{V}\mathcal{W}} : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ definido por*

$$S_{m\mathcal{V}\mathcal{W}}(\xi) = \sum_{i\in I} m_i \upsilon_i \omega_i P_{\mathcal{V}_i} P_{\mathcal{W}_i} \xi.$$

Observación 3.2.2. *Sean $(\phi_k)_{k\in N}$ y $(\psi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ dos sucesiones de Bessel para $\mathcal{H}$ y consideremos las sucesiones de Bessel de fusión $\mathcal{W} = \{(gen\{\phi_k\}, \|\phi_k\|)\}_{k\in\mathbb{N}}$ y $\mathcal{V} = \{(gen\{\psi_k\}, \|\psi_k\|)\}_{k\in\mathbb{N}}$. Luego, los respectivos multiplicadores se relacionan del siguiente modo:*

$$S_{m'\mathcal{V}\mathcal{W}} = M_{m(\psi_k)(\phi_k)},$$

donde $m_k = m'_k \dfrac{\langle \psi_k, \phi_k \rangle}{\|\psi_k\|\|\phi_k\|}$.

En lo que sigue consideraremos las siguientes aplicaciones:

$$P : (\textstyle\sum_{i\in I} \oplus \mathcal{W}_i)_{l^2} \to (\sum_{i\in I} \oplus \mathcal{V}_i)_{l^2} \text{ definido por } P((\xi_i)_{i\in I}) = (P_{\mathcal{V}_i} \xi_i)_{i\in I}.$$

$$\mathcal{S}_m : (\textstyle\sum_{i\in I} \oplus \mathcal{V}_i)_{l^2} \to (\sum_{i\in I} \oplus \mathcal{V}_i)_{l^2} \text{ definida por } \mathcal{S}_m((\xi_i)_{i\in I}) = (m_i \xi_i)_{i\in I}.$$

Proposición 3.2.3. *Sean $\mathcal{W} = (\mathcal{W}_i, \omega_i)_{i\in I}$ y $\mathcal{V} = (\mathcal{V}_i, \upsilon_i)_{i\in I}$ dos sucesiones de Bessel de fusión sobre el mismo espacio de Hilbert, $\mathcal{H}$, y $m \in l^\infty$. Luego, las siguientes propiedades se verifican:*

1. *$P \in L((\sum_{i\in I} \oplus \mathcal{W}_i)_{l^2}, (\sum_{i\in I} \oplus \mathcal{V}_i)_{l^2})$.*
2. *$\mathcal{S}_m \in L((\sum_{i\in I} \oplus \mathcal{V}_i)_{l^2})$.*
3. *$S_{m\mathcal{V}\mathcal{W}} \in L(\mathcal{H})$. Además, $S_{m\mathcal{V}\mathcal{W}} = D_{\mathcal{V}} \mathcal{S}_m P C_{\mathcal{W}}$.*
4. *$S^*_{m\mathcal{V}\mathcal{W}} = S_{\overline{m}\mathcal{W}\mathcal{V}}$.*

Demostración. 1. La linealidad de P es clara. Si $(\xi_i)_{i\in I} \in (\sum_{i\in I} \oplus \mathcal{W}_i)_{l^2}$ entonces $\|(P_{\mathcal{V}_i}\xi_i)_{i\in I}\|^2 = \sum_{i\in I} \|P_{\mathcal{V}_i}\xi_i\|^2 \leq \sum_{i\in I} \|\xi_i\|^2 = \|(\xi_i)_{i\in I}\|^2$, i.e., P es acotado.

2. Si $m \in l^\infty$ entonces para todo $(\xi_i)_{i\in I} \in (\sum_{i\in I} \oplus \mathcal{V}_i)_{l^2}$ se verifica que

$$\|\mathcal{S}_m((\xi_i)_{i\in I})\|^2 = \|(m_i\xi_i)_{i\in I}\|^2 = \sum_{i\in I} \|m_i\xi_i\|^2 \leq \|m\|_\infty^2 \|(\xi_i)_{i\in I}\|^2.$$

Luego, $\mathcal{S}_m$ es acotado y $\|\mathcal{S}_m\| \leq \|m\|_\infty$.

3. Es simple verificar que $S_{m\mathcal{V}\mathcal{W}} = D_{\mathcal{V}}\mathcal{S}_m P C_{\mathcal{W}}$. Luego, por ítems 1 y 2, $S_{m\mathcal{V}\mathcal{W}} \in L(\mathcal{H})$.

4. Por ítem 2, tenemos que $S^*_{m\mathcal{V}\mathcal{W}} = (D_{\mathcal{V}}\mathcal{S}_m P C_{\mathcal{W}})^* = D_{\mathcal{W}} P^* \mathcal{S}_{\overline{m}} C_{\mathcal{V}}$. Ahora, es sencillo verificar que $P^* : (\sum_{i\in I} \oplus \mathcal{V}_i)_{l^2} \to (\sum_{i\in I} \oplus \mathcal{W}_i)_{l^2}$ queda definido por $P^*((\xi_i)_{i\in I}) = (P_{\mathcal{W}_i}\xi_i)_{i\in I}$. Luego, $S^*_{m\mathcal{V}\mathcal{W}} = S_{\overline{m}\mathcal{W}\mathcal{V}}$.

□

Proposición 3.2.4. *Sean $\mathcal{W} = (\mathcal{W}_i, \omega_i)_{i\in\mathbb{N}}$ y $\mathcal{V} = (\mathcal{V}_i, \upsilon_i)_{i\in\mathbb{N}}$ sucesiones de Bessel de fusión. Luego,*

1. *Si $m \in c_0$ y $dim\mathcal{V}_i$ es finito para todo $i \in \mathbb{N}$ entonces $\mathcal{S}_m$ es compacto y, en particular, $S_{m\mathcal{V}\mathcal{W}}$ es compacto.*

2. *Si $m \in l^p$ y $(dim\mathcal{V}_i)_{i\in\mathbb{N}} \in l^\infty$ entonces $\mathcal{S}_m \in \mathfrak{S}_p((\sum_{i\in I} \oplus \mathcal{V}_i)_{l^2})$ y, en particular, $S_{m\mathcal{V}\mathcal{W}} \in \mathfrak{S}_p(\mathcal{H})$.*

Demostración. 1. Sea $m \in c_0$ y $m_N = (m_0, m_1, ..., m_N, 0, 0, ...)$. Luego,

$$\|\mathcal{S}_{m_N}((\xi_i)_{i\in\mathbb{N}}) - \mathcal{S}_m((\xi_i)_{i\in\mathbb{N}})\| = \|\mathcal{S}_{m_N - m}((\xi_i)_{i\in\mathbb{N}})\| \leq \\ \|m_N - m\|_\infty \|(\xi_i)_{i\in\mathbb{N}}\| \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Por lo tanto, dado que $dim\mathcal{V}_i$ es finito para todo $i \in \mathbb{N}$ entonces, para todo N, $\mathcal{S}_{m_N}$ es un operador de rango finito. De aquí, $\mathcal{S}_m$ es compacto. En particular, como $S_{m\mathcal{V}\mathcal{W}} = D_{\mathcal{V}}\mathcal{S}_m P C_{\mathcal{W}}$, $S_{m\mathcal{V}\mathcal{W}}$ es compacto.

2. Sea $E_i = (e^i_k)_{k\in K_i}$ una base ortonormal de $\mathcal{V}_i$ y definamos

$$F_{i,k} = (0, ..., \underbrace{e^i_k}_{\textit{posición } i}, ..., 0, ...) \in (\sum_{i\in\mathbb{N}} \oplus \mathcal{V}_i)_{l^2}.$$

Luego, $F = ((F_{i,k})_{k\in K_i})_{i\in\mathbb{N}}$ es una base ortonormal de $(\sum_{i\in I}\oplus\mathcal{V}_i)_{l^2}$. Supongamos $0 \leq |m_{k+1}| \leq |m_k|$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Ahora consideremos $(\hat{F}_j)_{j\in\mathbb{N}}$ el reordenamiento de F dado por:

a) si $1 \leq j \leq K_1$ entonces $\hat{F}_j = F_{1,j}$,

b) si $j > K_1$ entonces $\hat{F}_j = F_{n+1,k}$ donde $n = máx\{m \in \mathbb{N} : \ j-(K_1+...+K_m) > 0\}$ y $k = j-(K_1+...+K_n)$.

Así, para todo $f = (f_i)_{i\in\mathbb{N}} \in (\sum_{i\in I}\oplus\mathcal{V}_i)_{l^2}$ se verifica:

$$\mathcal{S}_m(f) \quad = \quad \sum_{i\in I}\sum_{k\in K_i} m_i \langle f, F_{i,k}\rangle F_{i,k} = \sum_{j\in\mathbb{N}} \hat{m}_j \left\langle f, \hat{F}_j \right\rangle \hat{F}_j = \sum_{j\in\mathbb{N}} |\hat{m}_j| \left\langle f, \hat{F}_j \right\rangle U\hat{F}_j$$

donde $(\hat{m}_j)_{j\in\mathbb{N}} = (\underbrace{m_1,...,m_1}_{K_1}, \underbrace{m_2,...,m_2}_{K_2}, ... \underbrace{m_j,...m_j}_{K_j}, ...)$ y $U \in \mathcal{U}((\sum_{i\in I}\oplus\mathcal{V}_i)_{l^2})$.

Ahora,

$$\sum_{j\in\mathbb{N}} |\hat{m}_j|^p = \sum_{i\in I} K_i \, |m_i|^p \leq \|(dim\mathcal{V}_i)_{i\in I}\|_\infty \|m\|_p^p < \infty.$$

Por lo tanto, $\mathcal{S}_m \in \mathfrak{S}_p((\sum_{i\in I}\oplus\mathcal{V}_i)_{l^2})$. En particular, $S_{m\mathcal{V}\mathcal{W}} = D_{\mathcal{V}}\mathcal{S}_m P C_{\mathcal{W}} \in \mathfrak{S}_p(\mathcal{H})$.

□

En los siguientes ejemplos se muestra que, en la proposición anterior, las hipótesis referidas a las dimensiones de $\mathcal{V}_i$ son necesarias.

Ejemplos 3.2.5. *Sea $\mathcal{H} = l^2$ y $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una base ortonormal de l^2.*

1. Definamos $\mathcal{W}_0 = \overline{span}\{e_{2k+1}\}_{k\in\mathbb{N}}$, $\omega_0 = 1$ y para $i \geq 1$ definamos $\mathcal{W}_i = \overline{span}\{e_{2k}\}_{k\in\mathbb{N}-\{i\}}$, $\omega_i = \frac{1}{(\sqrt{2})^i}$. Es claro que $\mathcal{W}_i$ no es finito dimensional para ningún $i \in \mathbb{N}$. Comprobemos a continuación que $(\mathcal{W}_i,\omega_i)_{i\in\mathbb{N}_0}$ es una sucesión de Bessel de fusión. Es fácil verificar que para $i \geq 1$, $\omega_i^2\|P_{\mathcal{W}_i}(\xi)\|^2 = \frac{1}{2^i}\sum_{k=1,k\neq i}^{\infty} |\langle \xi, e_{2k}\rangle|^2$ para *todo $\xi \in \mathcal{H}$. Luego, para todo $\xi \in \mathcal{H}$ se tiene que*

$$\begin{aligned}\sum_{i\in\mathbb{N}_0} \omega_i^2 \|P_{\mathcal{W}_i}(\xi)\|^2 &= \sum_{k=0}^{\infty} |\langle \xi, e_{2k+1}\rangle|^2 + \left(\sum_{k=1,k\neq 1}^{\infty} \frac{1}{2^k}\right) |\langle \xi, e_2\rangle|^2 + ... \\ &+ \left(\sum_{k=1,k\neq n}^{\infty} \frac{1}{2^k}\right) |\langle \xi, e_{2n}\rangle|^2 + ... \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} |\langle \xi, e_{2k+1}\rangle|^2 + \left(1 - \frac{1}{2}\right) |\langle \xi, e_2\rangle|^2 + ... \\ &+ \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) |\langle \xi, e_{2n}\rangle|^2 + ...\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\textstyle\sum_{i\in\mathbb{N}_0} \omega_i^2 \|P_{\mathcal{W}_i}(\xi)\|^2 \leq \|\xi\|^2 \text{ para todo } \xi \in \mathcal{H}.$$

Ahora, consideremos $S_{\omega\mathcal{W}\mathcal{W}}$ con $\omega = (\omega_i)_{i\in\mathbb{N}_0} = (\frac{1}{\sqrt{2}^i}) \in c_0$ y veamos que $S_{\omega\mathcal{W}\mathcal{W}}$ no es compacto. En efecto, $S_{\omega\mathcal{W}\mathcal{W}}(e_{2k+1}) = \sum_{i\in\mathbb{N}_0} \omega_i^3 P_{\mathcal{W}_i} e_{2k+1} = e_{2k+1}$ y entonces la sucesión $(S_{\omega\mathcal{W}\mathcal{W}}(e_{2k+1}))_{k\in\mathbb{N}}$ no tiene una subsucesión convergente.

2. Sea $\mathcal{W}_i = \overline{gen}\{e_1, e_2, ..., e_{2^i}\}$, $\omega_i = \frac{1}{(\sqrt[3]{2})^i}$, $i \geq 1$. Es claro que no existe $A > 0$ tal que $dim\mathcal{W}_i < A$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Verifiquemos que $(\mathcal{W}_i, \omega_i)_{i\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Bessel de fusión. Para esto, notemos que $\omega_i^2 \|P_{\mathcal{W}_i}(\xi)\|^2 = \frac{1}{4^{i/3}} \sum_{j=1}^{2^i} |\langle \xi, e_j\rangle|^2$ para todo $\xi \in \mathcal{H}$. Luego,

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{\infty} \omega_i^2 \|P_{\mathcal{W}_i}(\xi)\|^2 &= \left(\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{4^{j/3}}\right) (|\langle \xi, e_1\rangle|^2 + |\langle \xi, e_2\rangle|^2) + \\ &+ \left(\sum_{j=2}^{\infty} \frac{1}{4^{j/3}}\right) (|\langle \xi, e_3\rangle|^2 + |\langle \xi, e_4\rangle|^2) + ...\end{aligned}$$

Ahora, como $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{4^{j/3}} < 2$, entonces $\sum_{i=1}^{\infty} \omega_i^2 \|P_{\mathcal{W}_i}(\xi)\|^2 \leq 2\|\xi\|^2$ para todo $\xi \in \mathcal{H}$.

Observemos que $\sum_{i=1}^{\infty} \omega_i = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(\sqrt[3]{2})^i} < \infty$, i.e., $\omega = (\omega_i)_{i\in\mathbb{N}} \in l^1$, pero, sin embargo, $S_{\omega\mathcal{W}\mathcal{W}} \notin \mathfrak{S}_1(\mathcal{H})$. Para corroborar esto último es suficiente probar que $(\langle S_{\omega\mathcal{W}\mathcal{W}}(e_n), e_n\rangle)_{n\in\mathbb{N}} \notin l^1$. Ahora, $\sum_{n=1}^{\infty} \langle S_{\omega\mathcal{W}\mathcal{W}}(e_n), e_n\rangle = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \frac{1}{2^{n-1}}$ donde $\alpha_1 = 2$ y $\alpha_n = 2^{n-1}$ para $n > 1$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} \langle S_{\omega\mathcal{W}\mathcal{W}}(e_n), e_n\rangle$ diverge.

Corolario 3.2.6. *Sean* $\mathcal{W} = (\mathcal{W}_i, \omega_i)_{i\in\mathbb{N}}$ *y* $\mathcal{V} = (\mathcal{V}_i, \upsilon_i)_{i\in\mathbb{N}}$ *dos sucesiones de Bessel de fusión tal que* $(dim\mathcal{V}_i)_{i\in\mathbb{N}} \in l^\infty$. *Luego, si* $m^{(l)} \underset{l\to\infty}{\longrightarrow} m$ *in* l^p *entonces* $\|S_{m^{(l)}\mathcal{V}\mathcal{W}} - S_{m\mathcal{V}\mathcal{W}}\|_p \underset{l\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Demostración. Sea $m^{(l)} \underset{l\to\infty}{\longrightarrow} m$ en l^p. Por la Proposición 3.2.4, tenemos que $\mathcal{S}_{m^{(l)}-m} \in \mathfrak{S}_p((\sum_{i\in I}\oplus\mathcal{V}_i)_{l^2})$ y $\|\mathcal{S}_{m^{(l)}-m}\|_p \leq \|m^{(l)} - m\|_p$ para todo $l \in \mathbb{N}$. Luego,

$$\begin{aligned}\|S_{m^{(l)}\mathcal{V}\mathcal{W}} - S_{m\mathcal{V}\mathcal{W}}\|_p &= \|S_{m^{(l)}-m\mathcal{V}\mathcal{W}}\|_p = \|D_\mathcal{V}\mathcal{S}_{m^{(l)}-m}PC_\mathcal{W}\|_p \\ &\leq \|D_\mathcal{V}\|\|m^{(l)} - m\|_p\|C_\mathcal{W}\| \underset{l\to\infty}{\longrightarrow} 0.\end{aligned}$$

□

Proposición 3.2.7. *Sean* $\mathcal{W} = (\mathcal{W}_i, \omega_i)_{i\in\mathbb{N}}$, $\mathcal{W}^k = (\mathcal{W}_i, (\omega_k)_i)_{i\in\mathbb{N}}$, *y* $\mathcal{V} = (\mathcal{V}_i, \upsilon_i)_{i\in\mathbb{N}}$ *sucesiones de Bessel de fusión tal que* $(dim\mathcal{W}_i)_{i\in\mathbb{N}} \in l^\infty$. *Luego, si* $m \in l^p$ *y* $((\omega_k)_i)_{i\in\mathbb{N}} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} (\omega_i)_{i\in\mathbb{N}}$ *en* l^q *entonces* $\|S_{m\mathcal{V}\mathcal{W}^k} - S_{m\mathcal{V}\mathcal{W}}\|_p \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$ *y* $\|S_{m\mathcal{W}^k\mathcal{V}} - S_{m\mathcal{W}\mathcal{V}}\|_p \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$

Demostración.

$$\begin{aligned}\|S_{m\mathcal{V}\mathcal{W}^k} - S_{m\mathcal{V}\mathcal{W}}\|_p &= \|\sum_{i\in\mathbb{N}} m_i\upsilon_i((\omega_k)_i - \omega_i)P_{\mathcal{V}_i}P_{\mathcal{W}_i}\|_p \\ &\leq \sum_{i\in\mathbb{N}} |m_i\upsilon_i|\,|(\omega_k)_i - \omega_i|\,\|P_{\mathcal{W}_i}\|_p \\ &= \sum_{i\in\mathbb{N}} |m_i\upsilon_i|\,|(\omega_k)_i - \omega_i|\,dim\mathcal{W}_i \\ &\leq \|(dim\mathcal{W}_i)_{i\in\mathbb{N}}\|_\infty\|(\upsilon_i)_{i\in\mathbb{N}}\|_\infty \sum_{i\in\mathbb{N}} |m_i|\,|(\omega_k)_i - \omega_i| \\ &\leq C\left(\sum_{i\in\mathbb{N}}|m_i|^p\right)^{1/p}\left(\sum_{i\in\mathbb{N}}|(\omega_k)_i - \omega_i|^q\right)^{1/q} \\ &= C\|m\|_p\|((\omega_k)_i)_{i\in\mathbb{N}} - (\omega_i)_{i\in\mathbb{N}}\|_q \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0.\end{aligned}$$

Análogomente se puede probar que $\|S_{m\mathcal{W}^k\mathcal{V}} - S_{m\mathcal{W}\mathcal{V}}\|_p \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$. □

3.2.1. El caso $m = (1, 1, ...)$

Dadas dos sucesiones de Bessel $\mathcal{W} = (\mathcal{W}_i, \omega_i)_{i\in I}$ y $\mathcal{V} = (\mathcal{V}_i, \upsilon_i)_{i\in I}$ en $\mathcal{H}$, el siguiente operador es definido en [28]:

$$S_{\mathcal{V}\mathcal{W}} : \mathcal{H} \to \mathcal{H},\ S_{\mathcal{V}\mathcal{W}}(\xi) = \textstyle\sum_{i\in I} \upsilon_i \omega_i P_{\mathcal{V}_i} P_{\mathcal{W}_i} \xi.$$

En dicho trabajo se prueba la convergencia incondicional de la serie y se estudian condiciones para la suryectividad e invertibilidad de $S_{\mathcal{V}\mathcal{W}}$. Claramente, en nuestro contexto, $S_{\mathcal{V}\mathcal{W}} = S_{m\mathcal{V}\mathcal{W}}$ donde $m = (1, 1, ...) \in l^\infty$. Puesto que $m \notin c_o$ ni l^p, nuestro propósito en esta sección será determinar condiciones para que $S_{\mathcal{V}\mathcal{W}}$ sea compacto o pertenezca a $\mathfrak{S}_p(\mathcal{H})$.

Proposición 3.2.8. *Sean $\mathcal{W} = (\mathcal{W}_i, \omega_i)_{i\in\mathbb{N}}$ y $\mathcal{V} = (\mathcal{V}_i, \upsilon_i)_{i\in\mathbb{N}}$ sucesiones de Bessel de fusión, $\upsilon_{k+1} \leq \upsilon_k$ para todo $k \in \mathbb{N}$.*

1. *Si $(\upsilon_i)_{i\in\mathbb{N}} \in c_0$, $(\omega_i)_{i\in\mathbb{N}} \in l^1$ y $dim\mathcal{V}_i$ es finito para todo $i \in \mathbb{N}$ entonces $S_{\mathcal{V}\mathcal{W}}$ es compacto.*

2. *Si $(\upsilon_i)_{i\in\mathbb{N}} \in l^p$, $(\omega_i)_{i\in\mathbb{N}} \in l^1$ y $(dim\mathcal{V}_i)_{i\in\mathbb{N}} \in l^\infty$ entonces $S_{\mathcal{V}\mathcal{W}} \in \mathfrak{S}_p(\mathcal{H})$.*

Demostración. 1. Definamos $\mathcal{S}^N_{\mathcal{V}\mathcal{W}} : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ por $\mathcal{S}^N_{\mathcal{V}\mathcal{W}}(\xi) = \sum_{i=1}^N \upsilon_i \omega_i P_{\mathcal{V}_i} P_{\mathcal{W}_i} \xi$. Luego,

$$\begin{aligned}
\|S_{\mathcal{V}\mathcal{W}}(\xi) - \mathcal{S}^N_{\mathcal{V}\mathcal{W}}(\xi)\| &= \|\sum_{i=N+1}^{\infty} \upsilon_i \omega_i P_{\mathcal{V}_i} P_{\mathcal{W}_i} \xi\| \\
&\leq \|\xi\| \sum_{i=N+1}^{\infty} \upsilon_i \omega_i \leq \|\xi\| \upsilon_{N+1} \sum_{i=N+1}^{\infty} \omega_i \\
&\leq \|\xi\| \upsilon_{N+1} \|\omega\|_1.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\|S_{\mathcal{V}\mathcal{W}} - \mathcal{S}^N_{\mathcal{V}\mathcal{W}}\| \leq \upsilon_{N+1}\|\omega\|_1 \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Luego, como $\mathcal{S}^N_{\mathcal{V}\mathcal{W}}$ son operadores de rango finito, obtenemos que $S_{\mathcal{V}\mathcal{W}}$ es compacto.

2. A lo largo de esta demostración utilizaremos el Lema 1.1.8. Observemos que

$$\lambda_1(S_{\mathcal{V}\mathcal{W}}) = \|S_{\mathcal{V}\mathcal{W}}\| \leq \upsilon_1 \|\omega\|_1.$$

Sea $N_k = dim\mathcal{V}_k$ y $\mathcal{S}^{N_1}_{\mathcal{V}\mathcal{W}} = \upsilon_1 \omega_1 P_{\mathcal{V}_1} P_{\mathcal{W}_1}$. Entonces, $dim\mathcal{S}^{N_1}_{\mathcal{V}\mathcal{W}}(\mathcal{H}) \leq N_1$ y $\|S_{\mathcal{V}\mathcal{W}} - \mathcal{S}^{N_1}_{\mathcal{V}\mathcal{W}}\| \leq \upsilon_2 \|\omega\|_1$. Luego,

$$\lambda_{N_1+1}(S_{\mathcal{V}\mathcal{W}}) \leq \upsilon_2 \|\omega\|_1.$$

Además,

$$\lambda_{N_1}(S_{\mathcal{VW}}) \leq \lambda_{N_1-1}(S_{\mathcal{VW}}) \leq ... \leq \lambda_1(S_{\mathcal{VW}}) \leq \upsilon_1\|\omega\|_1.$$

Ahora, sea $\mathcal{S}_{\mathcal{VW}}^{N_1+N_2} = \upsilon_1\omega_1 P_{\mathcal{V}_1}P_{\mathcal{W}_1} + \upsilon_2\omega_2 P_{\mathcal{V}_2}P_{\mathcal{W}_2}$. Entonces, $dim\mathcal{S}_{\mathcal{VW}}^{N_1+N_2}(\mathcal{H}) \leq N_1 + N_2$ y $\|S_{\mathcal{VW}} - \mathcal{S}_{\mathcal{VW}}^{N_1+N_2}\| \leq \upsilon_3\|\omega\|_1$. Luego,

$$\lambda_{N_1+N_2+1}(S_{\mathcal{VW}}) \leq \upsilon_3\|\omega\|_1$$

y

$$\lambda_{N_1+N_2}(S_{\mathcal{VW}}) \leq \lambda_{N_1+N_2-1}(S_{\mathcal{VW}}) \leq ... \leq \lambda_{N_1+1}(S_{\mathcal{VW}}) \leq \upsilon_2\|\omega\|_1.$$

Por lo tanto,

$$\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i^p(S_{\mathcal{VW}}) \leq \sum_{i=1}^{\infty} N_i \upsilon_i^p \|\omega\|_1^p \leq \|\omega\|_1^p \|(N_i)_{i\in\mathbb{N}}\|_\infty \|\upsilon\|_p^p < \infty.$$

Entonces, $S_{\mathcal{VW}} \in \mathfrak{S}_p(\mathcal{H})$.

$\square$

Capítulo 4

Clases de operadores sobre un espacio semi-Hilbertiano

En este capítulo estudiaremos distintas clases de operadores definidas sobre el espacio semi-Hilbertiano $(\mathcal{H}, \langle\ ,\ \rangle_A)$. Más precisamente, las contracciones, isometrías, operadores unitarios e isometrías parciales respecto a $\langle\ ,\ \rangle_A$.

4.1. El operador A-adjunto $T^\sharp$

En gran parte de este capítulo trabajaremos con operadores T que admiten A-adjunto, es decir, $T \in L_A(\mathcal{H})$. Recordemos que $T \in L_A(\mathcal{H})$ si y sólo si la ecuación $AX = T^*A$ tiene solución. Luego, dado $T \in L_A(\mathcal{H})$ denotaremos con $T^\sharp$ a la solución reducida de dicha ecuación. Es decir, $T^\sharp$ es el único A-adjunto de T que verifica

$$AT^\sharp = T^*A, \ \ R(T^\sharp) \subseteq \overline{R(A)} \ \text{ y } \ N(T^\sharp) = N(T^*A).$$

De acuerdo con la Proposición 1.1.14, $T^\sharp = A^\dagger T^* A$. Cabe observar que si T es A-autoadjunto esto no implica, en general, que $T = T^\sharp$. Por ejemplo, si $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C})^+$ y $T = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ entoces T es A-autoadjunto ($AT = T^*A$), pero $T^\sharp = A^\dagger T^* A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \neq T$. De hecho, $T = T^\sharp$ si y sólo si T es A-autoadjunto y $R(T) \subseteq \overline{R(A)}$.

A continuación, estudiamos distintas propiedades de $T^\sharp$.

Lema 4.1.1. *Dado $T \in L_A(\mathcal{H})$ las siguientes propiedades se verifican:*

1. $T^\sharp \in L_A(\mathcal{H})$, $(T^\sharp)^\sharp = P_{\overline{R(A)}} T P_{\overline{R(A)}}$ *y* $((T^\sharp)^\sharp)^\sharp = T^\sharp$.

2. $T^\sharp T$ *y* $TT^\sharp$ *son* A*-autoadjuntos.*

3. *Si* $W \in L_A(\mathcal{H})$ *entonces* $TW \in L_A(\mathcal{H})$ *y* $(TW)^\sharp = W^\sharp T^\sharp$.

4. *Si* $AT = TA$ *entonces* $T^\sharp = P_{\overline{R(A)}} T^*$.

Demostración.

1. Como $R((T^\sharp)^* A) = R(AT) \subseteq R(A)$, entonces $T^\sharp \in L_A(\mathcal{H})$. Además, $A(P_{\overline{R(A)}} T P_{\overline{R(A)}}) = ATP_{\overline{R(A)}} = (T^\sharp)^* A$ y $R(P_{\overline{R(A)}} T P_{\overline{R(A)}}) \subseteq \overline{R(A)}$. Luego, $P_{\overline{R(A)}} T P_{\overline{R(A)}}$ es la solución reducida de la ecuación $AX = (T^\sharp)^* A$ y, por lo tanto, $(T^\sharp)^\sharp = P_{\overline{R(A)}} T P_{\overline{R(A)}}$.

   En particular, $((T^\sharp)^\sharp)^\sharp = P_{\overline{R(A)}} T^\sharp P_{\overline{R(A)}} = T^\sharp P_{\overline{R(A)}} = T^\sharp$.

2. Como $AT^\sharp = T^* A$, entonces $AT^\sharp T = T^* AT = T^*(T^\sharp)^* A = (T^\sharp T)^* A$ y $ATT^\sharp = (T^\sharp)^* AT^\sharp = (T^\sharp)^* T^* A = (TT^\sharp)^* A$. Luego, $T^\sharp T$ y $TT^\sharp$ son A-autoadjuntos.

3. Observemos que $AW^\sharp T^\sharp = W^* AT^\sharp = W^* T^* A = (TW)^* A$, i.e., $W^\sharp T^\sharp$ es solución de la ecuación $AX = (TW)^* A$. Además, $R(W^\sharp T^\sharp) \subseteq \overline{R(A)}$. Luego, $W^\sharp T^\sharp$ es la solución reducida de la ecuación $AX = (TW)^* A$, y por lo tanto $W^\sharp T^\sharp = (TW)^\sharp$.

4. Puesto que $T^\sharp = A^\dagger T^* A$, entonces si $AT = TA$ se tiene que $T^\sharp = A^\dagger T^* A = A^\dagger AT^* = P_{\overline{R(A)}} T^*$.

□

Es bien sabido que todo operador $T \in L(\mathcal{H})$ puede ser escrito como suma de un operador autoadjunto y uno antiautoadjunto ($T = -T^*$). A saber, $T = \frac{T+T^*}{2} + \frac{T-T^*}{2}$. En el caso que A tenga rango cerrado veremos que esta propiedad se puede extender, en cierto sentido, para operadores A-autoadjuntos y A-antiautoadjuntos ($AT = -T^*A$). En lo que sigue denotaremos $L_A^s(\mathcal{H}) = \{T \in L(\mathcal{H}) : AT = T^*A\}$ y $L_A^{as}(\mathcal{H}) = \{T \in L(\mathcal{H}) : iT \in L_A^s(\mathcal{H})\} = \{T \in L(\mathcal{H}) : AT = -T^*A\}$. En la siguiente proposición trabajaremos con la representación matricial inducida por la descomposición $\mathcal{H} = \overline{R(A)} \oplus N(A)$. Bajo esta descomposición, representaremos

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{4.1.1}$$

donde $a \in Gl(\overline{R(A)})^+$ si y sólo si A tiene rango cerrado.

Proposición 4.1.2. *Las siguientes condiciones, donde la representación matricial es la inducida por la descomposición $\mathcal{H} = \overline{R(A)} \oplus N(A)$, se verifican:*

1. $L_A(\mathcal{H}) = L_A^s(\mathcal{H}) + L_A^{as}(\mathcal{H}) \subseteq \left\{ T \in L(\mathcal{H}) : T = \begin{pmatrix} t_{11} & 0 \\ t_{21} & t_{22} \end{pmatrix} \right\}.$

2. $L_A(\mathcal{H}) = \left\{ T \in L(\mathcal{H}) : T = \begin{pmatrix} t_{11} & 0 \\ t_{21} & t_{22} \end{pmatrix} \right\}$ *si y sólo si A tiene rango cerrado.*

Demostración. 1. Sea $T \in L_A(\mathcal{H})$. Entonces, $T = \frac{T+T^\sharp}{2} + \frac{T-T^\sharp}{2}$. Además, $A\frac{T+T^\sharp}{2} = \frac{AT+AT^\sharp}{2} = \frac{(T^\sharp)^*A + T^*A}{2} = \frac{(T^\sharp)^* + T^*}{2}A = (\frac{T+T^\sharp}{2})^*A$. Luego, $\frac{T+T^\sharp}{2} \in L_A^s(\mathcal{H})$. Análogamente, $\frac{T-T^\sharp}{2} \in L_A^{as}(\mathcal{H})$. Luego, $T \in L_A^s(\mathcal{H}) + L_A^{as}(\mathcal{H})$. Recíprocamente, si $T = T_1 + T_2$, con $T_1 \in L_A^s(\mathcal{H})$ y $T_2 \in L_A^{as}(\mathcal{H})$ entonces $T_1 - T_2$ es solución de $AX = T^*A$. En efecto, $A(T_1 - T_2) = T_1^*A + T_2^*A = T^*A$. Luego, $T \in L_A(\mathcal{H})$.

Por otro lado, sea $T = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{pmatrix} \in L_A(\mathcal{H})$. Luego, $T^*A = \begin{pmatrix} t_{11}^*a & 0 \\ t_{12}^*a & 0 \end{pmatrix}$. Ahora, como $R(T^*A) \subseteq R(A)$, obtenemos que $t_{12}^*a = 0$ y, por consiguiente, $\overline{R(a)} \subseteq N(t_{12}^*) = R(t_{12})^\perp$. Pero, como $R(t_{12}) \subseteq \overline{R(a)}$, entonces $t_{12} = 0$.

2. Sea $A \in L(\mathcal{H})^+$ con rango cerrado y $T = \begin{pmatrix} t_{11} & 0 \\ t_{21} & t_{22} \end{pmatrix}$. Entonces, $T^*A = \begin{pmatrix} t_{11}^*a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $R(T^*A) = R(t_{11}^*a) \subseteq \overline{R(A)} = R(A)$. Luego, $T \in L_A(\mathcal{H})$. La inclusión recíproca es consecuencia del ítem anterior. Luego, la igualdad queda probada. Recíprocamente, si $R(A)$ no es cerrado entonces existe $\eta \in \overline{R(A)} \setminus R(A)$. Luego, se puede definir un operador lineal y acotado $t_{11} : \overline{R(A)} \to \overline{R(A)}$ tal que $t_{11}^*a\xi = \eta$

para algún $\xi \in \overline{R(A)}$. Consideremos $T = \begin{pmatrix} t_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Luego, $\eta \in R(T^*A)$, pero $\eta \notin R(A)$. Es decir, $R(T^*A) \not\subseteq R(A)$ o, lo que es lo mismo, $T \notin L_A(\mathcal{H})$. $\square$

Corolario 4.1.3. *Las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. $A \in L(\mathcal{H})^+$ *tiene rango cerrado.*
2. $L(\mathcal{H}) = L_A^s(\mathcal{H}) + L_A^{as}(\mathcal{H}) + L(N(A), \overline{R(A)})$.

Demostración. Es consecuencia inmediata de la Proposición 4.1.2. $\square$

4.2. A-contracciones y A-isometrías

Comencemos introduciendo el concepto de A-contracción y, como caso particular, el de A-isometría.

Definición 4.2.1. *Sea* $T \in L(\mathcal{H})$. *Diremos que* T *es una* **A-contracción** *si*

$$\|T\xi\|_A \leq \|\xi\|_A \,,$$

para todo $\xi \in \mathcal{H}$. *Si* $\|T\xi\|_A = \|\xi\|_A$ *para todo* $\xi \in \mathcal{H}$ *entonces diremos que* T *es una* **A-isometría**.

Observación 4.2.2. *Si* $A \in L(\mathcal{H}_1)^+$, $B \in L(\mathcal{H}_2)^+$ *y* $T \in L(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ *entonces diremos que* T *es una* **AB-contracción** *(resp.* **AB-isometría***) si* $\|T\xi\|_B \leq \|\xi\|_A$ *(resp.* $\|T\xi\|_B = \|\xi\|_A$*) para todo* $\xi \in \mathcal{H}_1$.

Es claro que las I-contracciones (resp. I-isometrías) coinciden con las contracciones (resp. isometrías). Asimismo, tanto las A-contracciones como las A-isometrías son elementos de $L_{A^{1/2}}(\mathcal{H})$, es decir, son A-operadores.

Las A-contracciones y las A-isometrías son frecuentemente definidas de manera equivalente como muestra la siguiente proposición:

Proposición 4.2.3. *Dado* $T \in L(\mathcal{H})$ *las siguientes propiedades se verifican:*

1. T *es una* A*-contracción si y sólo si* $T^*AT \leq A$.
2. T *es una* A*-isometría si y sólo si* $T^*AT = A$.

Demostración. Sólo incluiremos la demostración del primer ítem, puesto que la demostración del ítem 2. es análoga.

1. T es una A-contracción si y sólo si $\|A^{1/2}T\xi\| \leq \|A^{1/2}\xi\|$ para todo $\xi \in \mathcal{H}$ o, lo que es lo mismo, si y sólo si $\langle T^*AT\xi, \xi\rangle \leq \langle A\xi, \xi\rangle$ para todo $\xi \in \mathcal{H}$, i.e., si y sólo si $T^*AT \leq A$. $\square$

A continuación presentamos ejemplos de A-contracciones y A-isometrías.

Ejemplos 4.2.4.

1. *Dado* $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_3^+(\mathbb{C})$, $T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ *es una* A*-contracción.*

2. *Dado* $A \in L(\mathcal{H})^+$, *el operador identidad y* $P_{\overline{R(A)}}$ *son* A*-isometrías. Más aún, si* T *es una* A*-isometría entonces* $T + L(\mathcal{H}, N(A))$ *es un conjunto de* A*-isometrías.*

3. *Dado* $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in M_2^+(\mathbb{C})$, $T = \begin{pmatrix} 1 & 1-n \\ 0 & n \end{pmatrix}$ *es una* A*-isometría para todo* $n \in \mathbb{N}$. *Obsérvese que para todo* $M > 0$ *existe una* A*-isometría* T *tal que* $\|T\| > M$.

En la siguiente proposición incluimos algunas propiedades de las A-isometrías.

Proposición 4.2.5. *Si* $T \in L(\mathcal{H})$ *es una* A*-isometría entonces*

1. $N(A) = N(A^{1/2}T)$.

2. $\|T\|_A = 1$.

3. *Si* $W \in L(\mathcal{H})$ *es también una* A*-isometría entonces* TW *es una* A*-isometría.*

Demostración. 1. Si T es una A-isometría entonces $\|A^{1/2}T\xi\| = \|A^{1/2}\xi\|$ para todo $\xi \in \mathcal{H}$. Luego, es claro que $\xi \in N(A) = N(A^{1/2})$ si y sólo si $\xi \in N(A^{1/2}T)$.

2. Trivial.

3. Si T y W son A-isometrías entonces

$$(TW)^*ATW = W^*T^*ATW = W^*AW = A,$$

es decir, TW es una A-isometría. $\square$

Obsérvese que el ítem 1. de la proposición anterior para I-isometrías se traduce en que las isometrías son operadores inyectivos.

Dado que las A-isometrías son A-operadores, entonces si T es una A-isometría la ecuación $A^{1/2}X = T^*A^{1/2}$ tiene solución. En el siguiente resultado relacionamos las A-isometrías con la solución reducida de dicha ecuación. Más aún, relacionamos las A-isometrías con isometrías parciales.

Proposición 4.2.6. *Dado $T \in L(\mathcal{H})$, T es una A-isometría si y sólo si existe una isometría parcial $V \in L(\mathcal{H})$ con $R(V) = \overline{R(A)}$ tal que $A^{1/2}V = T^*A^{1/2}$.*

Demostración. Sea T una A-isometría y $V \in L(\mathcal{H})$ la solución reducida de la ecuación $A^{1/2}X = T^*A^{1/2}$. Luego, V es una isometría parcial. De hecho, como $T^*AT = A^{1/2}VV^*A^{1/2} = A$ entonces $VV^*A^{1/2}$ es solución de la ecuación $A^{1/2}X = A$. Además $R(VV^*A^{1/2}) \subseteq \overline{R(A)}$, i.e., $VV^*A^{1/2}$ es la solución reducida de dicha ecuación y, por lo tanto, $VV^*A^{1/2} = A^{1/2}$ o, equivalentemente, $A^{1/2}VV^* = A^{1/2}$. De esto último, obtenemos que VV^* es la solución reducida de la ecuación $A^{1/2}X = A^{1/2}$ y, aplicando nuevamente el teorema de Douglas, tenemos que $VV^* = P_{\overline{R(A)}}$, i.e., V es una isometría parcial con $R(V) = \overline{R(A)}$.

Recíprocamente, sea $V \in L(\mathcal{H})$ una isometría parcial tal que $A^{1/2}V = T^*A^{1/2}$ y $R(V) = \overline{R(A)}$. Luego, $A = A^{1/2}P_{\overline{R(A)}}A^{1/2} = A^{1/2}VV^*A^{1/2} = A^{1/2}V(A^{1/2}V)^* = T^*A^{1/2}(T^*A^{1/2})^* = T^*AT$, y entonces T es una A-isometría. □

Corolario 4.2.7. *Si $A \in L(\mathcal{H})^+$ es un operador inyectivo entonces T es una A-isometría si y sólo si existe una co-isometría $V \in L(\mathcal{H})$ tal que $A^{1/2}V = T^*A^{1/2}$.*

Si T es una A-isometría entonces claramente $T \in L_{A^{1/2}}(\mathcal{H})$, pero en principio no necesariamente $T \in L_A(\mathcal{H})$. En la siguiente proposición caracterizamos las A-isometrías en $L_A(\mathcal{H})$ en términos de proyecciones A-autoadjuntas. Primero, hagamos la siguiente observación:

Observación 4.2.8. *Dos proyecciones Q_1, Q_2 sobre $\mathcal{H}$ tal que $N(Q_1) \subseteq N(Q_2)$ y $R(Q_1) \subseteq R(Q_2)$ son iguales. Pues, dado $\mathcal{H} \ni \xi = \rho + \nu$ con $\rho \in R(Q_1), \nu \in N(Q_1)$; se tiene que $Q_1\xi = \rho$ y $Q_2\xi = \rho + Q_2\nu = \rho$, porque $\nu \in N(Q_1) \subseteq N(Q_2)$.*

Proposición 4.2.9. *Sea $T \in L_A(\mathcal{H})$. Entonces,*

1. *T es una A-isometría si y sólo si $T^\sharp T = P_{\overline{R(A)}}$.*

2. *Si T es una A-isometría entonces el par $(A, \overline{R(TA)})$ es compatible y $TT^\sharp = P_{A,\overline{R(TA)}}$.*

Demostración. 1. Sea T una A-isometría. Entonces $A = T^*AT = AT^\sharp T$ y, por lo tanto $P_{\overline{R(A)}} = A^\dagger A = A^\dagger AT^\sharp T = P_{\overline{R(A)}}T^\sharp T = T^\sharp T$. Recíprocamente, si $T^\sharp T = P_{\overline{R(A)}}$ entonces $T^*AT = AT^\sharp T = AP_{\overline{R(A)}} = A$ y, por lo tanto, T es una A-isometría.

2. Si T es una A-isometría entonces, por el ítem anterior, $(TT^\sharp)^2 = TT^\sharp TT^\sharp = TP_{\overline{R(A)}}T^\sharp = TT^\sharp$. Además, $TT^\sharp$ es A-autoadjunto. Veamos entonces que $R(TT^\sharp) = \overline{R(TA)}$. Sea $\eta = TA\xi \in R(TA)$. Luego, $\eta = TA\xi = TP_{\overline{R(A)}}A\xi = TT^\sharp TA\xi = TT^\sharp\eta \in R(TT^\sharp)$, y entonces $R(TA) \subseteq R(TT^\sharp)$. Por otro lado, $R(TT^\sharp) = TR(T^\sharp) \subseteq T\overline{R(A)} \subseteq \overline{R(TA)}$. Entonces, $R(TT^\sharp) = \overline{R(TA)}$ y $TT^\sharp \in \mathcal{P}(A, \overline{R(TA)})$.

Sólo resta ver que $TT^\sharp = P_{A,\overline{R(TA)}}$. Por la observación 4.2.8, es suficiente probar que $N(P_{A,\overline{R(TA)}}) \subseteq N(TT^\sharp)$. Primero, notemos que $N(A^2T^\sharp) \subseteq N(T^\sharp)$. De hecho, si $\xi \in N(A^2T^\sharp)$ entonces $T^\sharp\xi \in N(A)$. Pero, $T^\sharp\xi \in \overline{R(A)}$ entonces $T^\sharp\xi \in \overline{R(A)} \cap N(A) = \{0\}$ y por consiguiente $\xi \in N(T^\sharp)$. Ahora, $N(P_{A,\overline{R(TA)}}) \subseteq (A\overline{R(TA)})^\perp \subseteq R(ATA)^\perp = N(AT^*A) = N(A^2T^\sharp) \subseteq N(T^\sharp) \subseteq N(TT^\sharp)$. Luego, $TT^\sharp = P_{A,\overline{R(TA)}}$. □

Observación 4.2.10. *L. Suciu define en sus trabajos las A-contracciones regulares como aquellas A-contracciones T que verifican además que $AT = A^{1/2}TA^{1/2}$. Estas clases de A-contracciones presentan propiedades interesantes (ver [51], [52], [53]). Observemos entonces que si T es una A-contracción regular entonces $T \in L_A(\mathcal{H})$. En efecto, $R(T^*A) = R(A^{1/2}T^*A^{1/2}) = A^{1/2}R(T^*A^{1/2}) \subseteq A^{1/2}R(A^{1/2}) = R(A)$. Más aún, en tal caso, $T^\sharp$ coincide con la solución reducida de la ecuación $A^{1/2}X = T^*A^{1/2}$. Pues, $AT^\sharp = T^*A = A^{1/2}T^*A^{1/2}$ y $R(T^*A^{1/2}) \subseteq R(A^{1/2})$, luego $A^{1/2}T^\sharp = T^*A^{1/2}$ y $R(T^\sharp) \subseteq \overline{R(A)}$. Como consecuencia, y aplicando la Proposición 4.2.6, si T es una A-isometría regular entonces $T^\sharp$ es una isometría parcial.*

Si A tiene rango cerrado entonces $L_A(\mathcal{H}) = L_{A^{1/2}}(\mathcal{H})$ y el resultado anterior puede ser reescrito como muestra el siguiente corolario.

Corolario 4.2.11. *Sean $A \in L(\mathcal{H})^+$ con rango cerrado y $T \in L(\mathcal{H})$. Entonces:*

1. *T es una A-isometría si y sólo si $T \in L_A(\mathcal{H})$ y $T^\sharp T = P_{R(A)}$.*

2. *Si T es una A-isometría entonces $TT^\sharp = P_{A,\overline{R(TA)}}$.*

En el caso que A tenga rango cerrado caracterizaremos, a continuación, a las A-isometrías de acuerdo a su representación matricial bajo la descomposición $\mathcal{H} = \overline{R(A)} \oplus N(A)$. Previamente, hagamos la siguiente observación:

Observación 4.2.12. *Sea $B \in Gl(\mathcal{H})^+$. Entonces, $X^*X = B$ si y sólo si $X = VB^{1/2}$, donde $V \in L(\mathcal{H})$ es una isometría. En efecto, si $X^*X = B$ entonces $B^{-1/2}X^*XB^{-1/2} = I$. Luego $V = XB^{-1/2}$ es una isometría y $X = VB^{1/2}$. La implicación recíproca es trivial.*

Proposición 4.2.13. *Sea $A \in L(\mathcal{H})^+$ con rango cerrado y $T \in L(\mathcal{H})$. Considerando la representación matricial (4.1.1), las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *T es una A-isometría.*
2. *$T = \begin{pmatrix} a^{-1/2}va^{1/2} & 0 \\ t_{21} & t_{22} \end{pmatrix}$, donde v es una isometría en $R(A)$.*

Demostración. $1 \Rightarrow 2$. Sea $T = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{pmatrix}$ una A-isometría. Entonces,

$$T^*AT = \begin{pmatrix} t_{11}^*at_{11} & t_{11}^*at_{12} \\ t_{12}^*at_{11} & t_{12}^*at_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = A.$$

Por lo tanto, $t_{11}^*at_{11} = a$ y $t_{12}^*at_{12} = 0$. Luego, por la observación 4.2.12, $a^{1/2}t_{11} = va^{1/2}$, con $v \in L(R(A))$ una isometría. Luego, $t_{11} = a^{-1/2}va^{1/2}$. Por otro lado, si $t_{12}^*at_{12} = 0$ entonces $N(A) = N(t_{12}^*at_{12}) = N(a^{1/2}t_{12}) = N(t_{12})$ y luego, $t_{12} = 0$.
$2 \Rightarrow 1$. Si $T = \begin{pmatrix} a^{-1/2}va^{1/2} & 0 \\ t_{21} & t_{22} \end{pmatrix}$ con v una isometría, entonces es sencillo verificar que $T^*AT = A$. □

4.3. Operadores A-unitarios

Puesto que $T \in L(\mathcal{H})$ es un operador unitario si y sólo si T y T^* son isometrías entonces, una vez definidas las A-isometrías, el concepto de operador A-unitario surge naturalmente.

Definición 4.3.1. *Dado $U \in L_A(\mathcal{H})$, se dirá que U es* A-**unitario** *si U y $U^\sharp$ son A-isometrías.*

Observación 4.3.2. *Si $A \in L(\mathcal{H}_1)^+$, $B \in L(\mathcal{H}_2)^+$ y $T \in L(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ admite AB-adjunto entonces diremos que T es un operador* AB-**unitario** *si T es una AB-isometría y $T^\sharp$ es una BA-isometría donde $T^\sharp$ es la solución reducida de la ecuación $AX = T^*B$.*

A continuación presentamos ejemplos de operadores A-unitarios.

Ejemplos 4.3.3.

1. Si consideramos $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in M_2^+(\mathbb{C})$ entonces, para todo $n \in \mathbb{N}$, $T = \begin{pmatrix} 1 & 1-n \\ 0 & n \end{pmatrix}$ es un operador A-unitario.

Más adelante veremos que en dimensión finita los conceptos A-isometría y A-unitario coinciden.

2. Sea $\mathcal{H} = \ell^2$ y $S : \ell^2 \to \ell^2$ definido por $S(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots) = (0, \xi_1, \xi_2, \ldots)$. El operador S, conocido en inglés como shift operator, es una isometría, i.e., $S^*S = I$. Ahora, sea $A = P_{R(S)}$ y $T = SA$. Primero notemos que $T^*AT = (AS^*)A(SA) = AS^*SA = A$, es decir, T es una A-isometría. Por otro lado, $T^\sharp = AS^*$ no es una A-isometría. En efecto, $(T^\sharp)^*AT^\sharp = SAS^*$. Luego, supongamos que $(T^\sharp)^*AT^\sharp = A$ o, equivalentemente, que $SAS^* = A$. Dado que $S^*S = I$, entonces $SA = AS$. Ahora, como $A = P_{R(S)}$, $SA = S$ y entonces $A = S^*S = I$ lo que es una contradicción. Por lo tanto, $T^\sharp$ no es una A-isometría y T no es un operador A-unitario. Este ejemplo muestra que en el caso de dimensión no finita los conceptos de A-isometría y A-unitario no coinciden.

En la siguiente proposición presentamos algunas propiedades elementales de los operadores A-unitarios.

Proposición 4.3.4. *Sean $U, V \in L(\mathcal{H})$ operadores A-unitarios. Entonces,*

1. $U^\sharp U = (U^\sharp)^\sharp U^\sharp = P_{\overline{R(A)}}$.

2. $\|U\|_A = 1$.

3. $U^\sharp$ es A-unitario.

4. UV es A-unitario.

Demostración. 1. Es consecuencia inmediata de la Proposición 4.2.9.

2. Trivial, pues U es una A-isometría.

3. Dado que U es A-unitario entonces $U^\sharp$ es una A-isometría. Luego, probemos que $(U^\sharp)^\sharp$ es también una A-isometría. Para esto, notemos que $((U^\sharp)^\sharp)^* A (U^\sharp)^\sharp = ((U^\sharp)^\sharp)^*(U^\sharp)^* A = (U^\sharp(U^\sharp)^\sharp)^* A = P_{\overline{R(A)}} A = A$. Luego, $(U^\sharp)^\sharp$ es una A-isometría.

4. Ya vimos que si U y V son A-isometrías entonces UV también es una A-isometría. Además, $(UV)^\sharp = V^\sharp U^\sharp$. Luego, aplicando el mismo resultado tenemos que $(UV)^\sharp$ es una A-isometría y entonces UV es un operador A-unitario.

□

A continuación presentamos una de las propiedades más importantes de los operadores A-unitarios, a saber, que preservan la seminorma de operadores inducida por A.

Proposición 4.3.5. *Si U, V son operadores A-unitarios entonces $\|UTV^\sharp\|_A = \|T\|_A$ para todo $T \in L_{A^{1/2}}(\mathcal{H})$.*

Demostración. Sea $T \in L_{A^{1/2}}(\mathcal{H})$. Entonces,

$$\begin{aligned}
\|UTV^\sharp\|_A^2 &= \sup_{\substack{\xi \in \overline{R(A)} \\ \xi \neq 0}} \frac{\|UTV^\sharp \xi\|_A^2}{\|\xi\|_A^2} = \sup_{\substack{\xi \in \overline{R(A)} \\ \xi \neq 0}} \frac{\langle UTV^\sharp \xi, UTV^\sharp \xi \rangle_A}{\|\xi\|_A^2} \\
&= \sup_{\substack{\xi \in \overline{R(A)} \\ \xi \neq 0}} \frac{\langle TV^\sharp \xi, U^\sharp UTV^\sharp \xi \rangle_A}{\|\xi\|_A^2} = \sup_{\substack{\xi \in \overline{R(A)} \\ \xi \neq 0}} \frac{\left\langle ATV^\sharp \xi, P_{\overline{R(A)}} TV^\sharp \xi \right\rangle}{\|\xi\|_A^2} \\
&= \sup_{\substack{\xi \in \overline{R(A)} \\ \xi \neq 0}} \frac{\langle TV^\sharp \xi, TV^\sharp \xi \rangle_A}{\|\xi\|_A^2} = \sup_{\substack{\xi \in \overline{R(A)} \\ \xi \neq 0}} \frac{\|TV^\sharp \xi\|_A^2}{\|\xi\|_A^2} \\
&= \|TV^\sharp\|_A^2.
\end{aligned}$$

Sea $\omega = V^\sharp\xi$. Entonces $\omega \in \overline{R(A)}$ y $(V^\sharp)^\sharp\omega = (V^\sharp)^\sharp V^\sharp\xi = P_{\overline{R(A)}}\xi = \xi$. Luego,

$$\begin{aligned}\|UTV^\sharp\|_A^2 &= \|TV^\sharp\|_A^2 = \sup_{\substack{\xi\in\overline{R(A)}\\ \xi\neq 0}} \frac{\|TV^\sharp\xi\|_A^2}{\|\xi\|_A^2} = \sup_{\substack{\omega\in\overline{R(A)}\\ \omega\neq 0}} \frac{\|T\omega\|_A^2}{\|(V^\sharp)^\sharp\omega\|_A^2}\\ &= \sup_{\substack{\omega\in\overline{R(A)}\\ \omega\neq 0}} \frac{\|T\omega\|_A^2}{\|\omega\|_A^2} = \|T\|_A^2.\end{aligned}$$

□

Proposición 4.3.6. *Sea $U \in L_A(\mathcal{H})$. Luego, U es un operador A-unitario si y sólo si existe una isometría parcial $V \in L(\mathcal{H})$ con $R(V) = R(V^*) = \overline{R(A)}$ tal que $A^{1/2}V = U^*A^{1/2}$ y $A^{1/2}V^* = (U^\sharp)^*A^{1/2}$.*

Demostración. Si U es un operador A-unitario entonces, por la Proposición 4.2.6, existen isometrías parciales $V, W \in L(\mathcal{H})$ tal que $R(V) = R(W) = \overline{R(A)}$, $A^{1/2}V = U^*A^{1/2}$ y $A^{1/2}W = (U^\sharp)^*A^{1/2}$. Veamos que $W = V^*$. En efecto, como $A^{1/2}(VA^{1/2}) = U^*A = AU^\sharp = A^{1/2}(A^{1/2}U^\sharp)$ entonces, por la unicidad de la solución reducida, $VA^{1/2} = A^{1/2}U^\sharp$ o, lo que es lo mismo, $A^{1/2}V^* = (U^\sharp)^*A^{1/2}$. Ahora, dado que $N(V) = N(U^*A^{1/2})$, obtenemos que $R(V^*) \subseteq \overline{R(A^{1/2})}$. Así, aplicando nuevamente la unicidad de la solución reducida, $W = V^*$. La implicación recíproca es consecuencia inmediata de la Proposición 4.2.6. □

Corolario 4.3.7. *Si $A \in L(\mathcal{H})^+$ es un operador inyectivo entonces, $U \in L_A(\mathcal{H})$ es un operador A-unitario si y sólo si existe un operador unitario $V \in L(\mathcal{H})$ tal que $A^{1/2}V = U^*A^{1/2}$ y $A^{1/2}V^* = (U^\sharp)^*A^{1/2}$.*

Proposición 4.3.8. *Sea $A \in L(\mathcal{H})^+$ con rango cerrado y $U \in L(\mathcal{H})$. Considerando al representación matricial (4.1.1), las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *U es un operador A-unitario;*
2. *$U = \begin{pmatrix} a^{-1/2}va^{1/2} & 0 \\ u_{21} & u_{22}\end{pmatrix}$, donde v es un operador unitario en $R(A)$.*

Demostración. 1 $\Rightarrow$ 2. Sea $U \in L(\mathcal{H})$ un operador A-unitario. Luego, como en particular U es una A-isometría, por la proposición 4.2.13, obtenemos que $U =$

$\begin{pmatrix} a^{-1/2}va^{1/2} & 0 \\ u_{21} & u_{22} \end{pmatrix}$ donde v es una isometría en $R(A)$. Veamos que, más aún, v es un operador unitario. Dado que $U^\sharp = \begin{pmatrix} a^{-1/2}v^*a^{1/2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ es también una A-isometría, se tiene que $(U^\sharp)^*AU^\sharp = \begin{pmatrix} a^{1/2}vv^*a^{1/2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = A$. Luego $vv^* = id_{R(A)}$ y, por consiguiente, v es un operador unitario.

$2 \Rightarrow 1$. Si $U = \begin{pmatrix} a^{-1/2}va^{1/2} & 0 \\ u_{21} & u_{22} \end{pmatrix}$, con v un operador unitario, entonces es fácil comprobar que U y $U^\sharp$ son A-isometrías. □

Corolario 4.3.9. *Si $A \in M_n^+(\mathbb{C})$ entonces toda A-isometría es un operador A-unitario.*

Demostración. Es inmediato por las Proposiciones 4.2.13, 4.3.8 y el hecho de que en dimensión finita toda isometría es un operador unitario. □

4.4. A-isometrías parciales

En esta sección definiremos las A-isometrías parciales y estudiaremos sus propiedades. Recordemos que $T \in L(\mathcal{H})$ es una isometría parcial si

$$\|T\xi\| = \|\xi\| \text{ para todo } \xi \in N(T)^\perp.$$

Bajo esta definición las siguientes condiciones resultan equivalentes:

1. T es una isometría parcial;
2. T^* es una isometría parcial;
3. $T^*T = P_{\overline{R(T^*T)}}$;
4. $TT^*T = T$.

De acuerdo con la definición de isometría parcial, a primera vista, parecería razonable definir $T \in L(\mathcal{H})$ como una A-isometría parcial si $\|T\xi\|_A = \|\xi\|_A$ para todo $\xi \in N(T)^{\perp_A}$. Sin embargo, con el objetivo de que las A-isometrías parciales preserven propiedades similares a las de las isometrías parciales clásicas, veremos que en realidad debemos pedir la igualdad entra las seminormas para todo $\xi \in N(A^{1/2}T)^{\perp_A}$. Obsérvese entonces que $N(A^{1/2}T) = \{\xi \in \mathcal{H} : \ \|T\xi\|_A = 0\}$.

Comencemos estudiando las propiedades que desearíamos que las A-isometrías parciales verificaran con el fin de extender las propiedades clásicas de las isometrías parciales. En primer lugar, desearíamos que si $T \in L_A(\mathcal{H})$, entonces T fuera una A-isometría parcial si y sólo si $T^\sharp T = P_{A,\overline{R(T^\sharp T)}}$. En la siguiente proposición brindamos condiciones equivalentes a esta última igualdad:

Proposición 4.4.1. *Sean $A \in L(\mathcal{H})^+$ y $T \in L_A(\mathcal{H})$. Si el par $(A, \overline{R(T^\sharp T)})$ es compatible entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. $T^\sharp T = P_{A,\overline{R(T^\sharp T)}}$;
2. $T^*AT = AP_{A,\overline{R(T^\sharp T)}}$;
3. $\|T\xi\|_A = \|\xi\|_A$ *para todo* $\xi \in \overline{R(T^\sharp T)}$*;*
4. $\|T\xi\|_A = \|\xi\|_A$ *para todo* $\xi \in \overline{R(T^\sharp T)} + N(A)$*.*

Demostración. Por simplicidad, abreviemos $\mathcal{T} = \overline{R(T^\sharp T)}$ y $Q = P_{A,\mathcal{T}}$.

$1 \Rightarrow 2$. Si $T^\sharp T = Q$ entonces $T^*AT = AT^\sharp T = AQ$.

$2 \Rightarrow 3$. Dado $\xi \in \mathcal{H}$, se tiene que

$$\begin{aligned} \|TQ\xi\|_A^2 &= \langle TQ\xi, TQ\xi\rangle_A = \left\langle T^\sharp TQ\xi, Q\xi\right\rangle_A \\ &= \left\langle AT^\sharp TQ\xi, Q\xi\right\rangle = \langle T^*ATQ\xi, Q\xi\rangle \\ &= \langle AQ\xi, Q\xi\rangle = \|Q\xi\|_A^2. \end{aligned}$$

Luego, $\|T\xi\|_A^2 = \|\xi\|_A^2$ para todo $\xi \in \mathcal{T}$.

$3 \Rightarrow 4$. Dado que $T \in L_A(\mathcal{H})$, entonces $R(T^*A) \subseteq R(A)$, y luego $N(A) \subseteq N(A^{1/2}T)$. Por lo tanto, $\|T\xi\|_A = \|\xi\|_A = 0$ para todo $\xi \in N(A)$. Así, $\|T\xi\|_A = \|\xi\|_A$ para todo $\xi \in \mathcal{T} + N(A)$.

$4 \Rightarrow 1$. Claramente, si $\|T\xi\|_A = \|\xi\|_A$ para todo $\xi \in \mathcal{T} + N(A)$ entonces, en particular, $\|T\xi\|_A = \|\xi\|_A$ para todo $\xi \in \mathcal{T}$ o, equivalentemente, $\left\langle T^\sharp T\xi, \xi\right\rangle_A = \langle \xi, \xi\rangle_A$ para todo $\xi \in \mathcal{T}$. Ahora, dado que el par $(A, \mathcal{T})$ es compatible tenemos que $\left\langle T^\sharp TQ\xi, Q\xi\right\rangle_A = \langle Q\xi, Q\xi\rangle_A$ para todo $\xi \in \mathcal{H}$. Luego, $\left\langle AT^\sharp TQ\xi, \xi\right\rangle = \langle AQ\xi, \xi\rangle$ para todo $\xi \in \mathcal{H}$. Por lo tanto, $AT^\sharp TQ = AQ$. Por otro lado, $(AT^\sharp TQ)^* = Q^*(T^\sharp T)^*A = Q^*AT^\sharp T = AQT^\sharp T = AT^\sharp T$. Entonces, $AT^\sharp T = AQ$ y luego, $T^\sharp T = Q$. $\square$

De acuerdo con la Proposición anterior, una posible definición de A-isometría parcial es que $\|T\xi\|_A = \|\xi\|_A$ para todo $\xi \in \overline{R(T^\sharp T)} + N(A)$. Pero esta definición sólo sería factible para operadores que admitan A-adjunto. Luego, con el fin de obtener una definición de A-isometría parcial para un conjunto más amplio de operadores presentamos el siguiente resultado.

Lema 4.4.2. *Si $T \in L_A(\mathcal{H})$ entonces $\overline{R(T^\sharp T)} + N(A) = N(A^{1/2}T)^{\perp_A}$.*

Demostración. Primero observemos que como $\overline{R(T^\sharp T)} \subseteq \overline{R(T^\sharp)} \subseteq \overline{R(A)}$, entonces $\overline{R(T^\sharp T)} + N(A)$ es un subespacio cerrado. Por otro lado, notemos que $R(T^\sharp T)^{\perp_A} = N(A^{1/2}T)$. En efecto, $R(T^\sharp T)^{\perp_A} = (AR(T^\sharp T))^\perp = R(T^*AT)^\perp = N(A^{1/2}T)$. Luego, $N(A^{1/2}T)^{\perp_A} = (R(T^\sharp T)^{\perp_A})^{\perp_A} = (R(T^\sharp T)^\perp \cap R(A))^\perp = \overline{R(T^\sharp T)} + N(A)$, donde la última igualdad se obtiene por [35], Theorem 4.8, p. 221. $\square$

Luego, definimos las A-isometrías parciales de la siguiente manera.

Definición 4.4.3. *Dado $A \in L(\mathcal{H})^+$, $T \in L(\mathcal{H})$ es una A-**isometría parcial** si $\|T\xi\|_A = \|\xi\|_A$ para todo $\xi \in N(A^{1/2}T)^{\perp_A}$.*

Observación 4.4.4. *Si $A \in L(\mathcal{H}_1)^+$, $B \in L(\mathcal{H}_2)^+$ y $T \in L(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ entonces diremos que T es una AB-**isometría parcial** si $\|T\xi\|_B = \|\xi\|_A$ para todo $\xi \in N(B^{1/2}T)^{\perp_A}$.*

Observaciones 4.4.5.

1. *Si $A = I$ entonces las A-isometrías parciales son isometrías parciales.*
2. *Toda A-isometría es una A-isometría parcial.*
3. *Si $T \in L(\mathcal{H})$ es una A-isometría parcial entonces $N(A) \subseteq N(A^{1/2}T)$.*
4. *Si A tiene rango cerrado y $T \in L(\mathcal{H})$ es una A-isometría parcial entonces $T \in L_A(\mathcal{H})$. En efecto, por el ítem anterior tenemos que $N(A) \subseteq N(A^{1/2}T) = N(AT)$. Luego, $\overline{R(T^*A)} = N(AT)^\perp \subseteq \overline{R(A)} = R(A)$ o sea que, en particular, $R(T^*A) \subseteq R(A)$, i.e., $T \in L_A(\mathcal{H})$.*

De acuerdo con el Lema 4.4.2 y la Proposición 4.4.1 tenemos el siguiente resultado:

Proposición 4.4.6. *Sean $A \in L(\mathcal{H})^+$ y $T \in L_A(\mathcal{H})$. Si el par $(A, \overline{R(T^\sharp T)})$ es compatible entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *T es una A-isometría parcial;*
2. *$T^\sharp T = P_{A,\overline{R(T^\sharp T)}}$;*
3. *$T^* AT = AP_{A,\overline{R(T^\sharp T)}}$;*
4. *$\|T\xi\|_A = \|\xi\|_A$ para todo $\xi \in \overline{R(T^\sharp T)}$;*
5. *$\|T\xi\|_A = \|\xi\|_A$ para todo $\xi \in \overline{R(T^\sharp T)} + N(A)$.*

Como $\overline{R(T^\sharp T)} + N(A) = N(A^{1/2}T)^{\perp_A}$ es un subespacio cerrado, si $R(A)$ es cerrado entonces, aplicando el Teorema 1.3.9, el par $(A, \overline{R(T^\sharp T)})$ es compatible. Además, como $\mathcal{N} = N(A) \cap \overline{R(T^\sharp T)} = \{0\}$, entonces, por el Teorema 1.3.13, $\mathcal{P}(A, \overline{R(T^\sharp T)}) = \{P_{A,\overline{R(T^\sharp T)}}\}$. Como consecuencia, si $R(A)$ es cerrado entonces la Proposición 4.4.6 puede ser reescrita del siguiente modo:

Proposición 4.4.7. *Sea $A \in L(\mathcal{H})^+$ con rango cerrado y $T \in L(\mathcal{H})$. Las siguiente condiciones son equivalentes:*

1. *T es una A-isometría parcial;*
2. *$T \in L_A(\mathcal{H})$ y $T^* AT = AP_{A,\overline{R(T^\sharp T)}}$;*
3. *$T \in L_A(\mathcal{H})$ y $T^\sharp T = P_{A,\overline{R(T^\sharp T)}}$.*

Corolario 4.4.8. *Si $\mathcal{S}$ es un subespacio cerrado de $\mathcal{H}$ tal que el par $(A, \mathcal{S})$ es compatible entonces los elementos de $\mathcal{P}(A, \mathcal{S})$ son A-isometrías parciales.*

Demostración. Sea $Q \in \mathcal{P}(A, \mathcal{S})$. Luego, $Q^\sharp Q$ es proyección. En efecto, $(Q^\sharp Q)^2 = A^\dagger Q^* A A^\dagger Q^* A = A^\dagger Q^* P_{\overline{R(A)}}|_{\mathcal{D}(A^\dagger)} Q^* A = A^\dagger Q^* Q^* A = A^\dagger Q^* AQ = Q^\sharp Q$. Además, $Q^\sharp Q$ es A-autoadjunto. Más aún, dado que $R(Q^\sharp Q) \subseteq \overline{R(A)}$, entonces, por el Teorema 1.3.13 ítem 3, se tiene que $Q^\sharp Q = P_{A,R(Q^\sharp Q)}$. Luego, por la Proposición 4.4.6, Q es una A-isometría parcial. □

A continuación presentamos algunos ejemplos de A-isometrías parciales.

Ejemplos 4.4.9.

1. *Si T es una A-isometría parcial entonces $T + L(\mathcal{H}, N(A))$ es un conjunto de A-isometrías parciales.*

2. *Si $A \in M_n^+(\mathbb{C})$ tiene rango 1 entonces toda A-isometría parcial T con $\|T\|_A \neq 0$ es una A-isometría. En efecto, si T es una A-isometría parcial entonces $T^\sharp T = P_{A,R(T^\sharp T)}$. Además, como $\|T\|_A \neq 0$ entonces $T^\sharp T \neq 0$. Luego, como $\{0\} \neq R(T^\sharp T) \subseteq R(A)$ y $dim R(A) = 1$, tenemos que $R(T^\sharp T) = R(A)$. Por lo tanto, $T^\sharp T = P_{A,R(A)} = P_{R(A)}$ o sea, T es una A-isometría.*

3. *Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in M_3^+(\mathbb{C})$. Luego, $T = \begin{pmatrix} n & 0 & 2-n \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ es una A-isometría parcial para todo $n \in \mathbb{N}$, pero no es una A-isometría. Obsérvese que para todo $M > 0$ existe una A-isometría parcial T tal que $\|T\| > M$.*

En el siguiente teorema caracterizamos la representación matricial de las A-isometrías parciales en el caso que A tenga rango cerrado.

Teorema 4.4.10. *Sea $A \in L(\mathcal{H})^+$ con rango cerrado y $T \in L(\mathcal{H})$. Luego, considerando la representación matricial de A (4.1.1), las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *T es una A-isometría parcial;*

2. *$T = \begin{pmatrix} a^{-1/2} v (a P_{a,\mathcal{S}})^{1/2} & 0 \\ t_{21} & t_{22} \end{pmatrix}$, donde $v \in L(R(A))$ es una isometría y $\mathcal{S}$ es un subespacio cerrado de $R(A)$.*

Demostración. Primero notemos que dado que A tiene rango cerrado entonces $a \in Gl(R(A))$ y, por consiguiente, el par $(a, \mathcal{T})$ es compatible para todo $\mathcal{T} \subseteq R(A)$. En particular, $(a, \mathcal{S})$ es compatible y, por lo tanto, existe $P_{a,\mathcal{S}}$. Por otro lado, $\langle a P_{a,\mathcal{S}} \xi, \xi \rangle = \langle P_{a,\mathcal{S}} \xi, P_{a,\mathcal{S}} \xi \rangle_a = \langle a P_{a,\mathcal{S}} \xi, P_{a,\mathcal{S}} \xi \rangle \geq 0$, para todo $\xi \in R(A)$. Luego, la representación matricial de T está bien definida.

$1 \Rightarrow 2$. Sea $T = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{pmatrix}$ una A-isometría parcial. Luego, como $N(A) \subseteq N(A^{1/2}T)$, obtenemos que $N(A) \subseteq N(a^{1/2}t_{12}) \subseteq N(A)$. Ahora, dado que $a \in Gl(R(A))^+$, se tiene que $N(t_{12}) = N(A)$ y entonces $t_{12} = 0$. Además, $T^\sharp T = A^\dagger T^* AT = \begin{pmatrix} a^{-1}t_{11}^* a t_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ es una proyección A-autoadjunta. Luego, $t_{11}^* a t_{11} = aP_{a,\overline{R(T^\sharp T)}}$. Por lo tanto, por la Observación 4.2.12, $t_{11} = a^{-1/2}v(aP_{a,\overline{R(T^\sharp T)}})^{1/2}$ donde $v \in L(R(A))$ es una isometría.
$2 \Rightarrow 1$. Si $T = \begin{pmatrix} a^{-1/2}v(aP_{a,\mathcal{S}})^{1/2} & 0 \\ t_{21} & t_{22} \end{pmatrix}$, para alguna isometría $v \in L(R(A))$ y algún subsepacio cerrado de $R(A)$, $\mathcal{S}$, entonces se verifica que $R(T^*A) \subseteq R(A)$, i.e., existe $T^\sharp$ y $T^\sharp T = P_{A,\overline{R(T^\sharp T)}}$. Luego, T es una A-isometría parcial. □

4.5. El A-módulo mínimo reducido

En [37], M. Mbekhta probó que en el conjunto de las contracciones las isometrías parciales se caracterizan por ser las de módulo mínimo reducido mayor o igual a 1. Recordemos que el *módulo mínimo reducido* de un operador $T \in L(\mathcal{H})$ se define como

$$\gamma(T) = \inf \left\{ \|T\xi\| : \ \xi \in N(T)^\perp \text{ and } \|\xi\| = 1 \right\}.$$

Si $T = 0$ entonces se define $\gamma(T) = \infty$. Se verifica que $\gamma(T) = \gamma(T^*)$. Además, $\gamma(T) > 0$ si y sólo si T tiene rango cerrado. Más aún, en tal caso $\gamma(T) = \frac{1}{\|T^\dagger\|}$. Por estas y otras propiedades del módulo mínimo reducido se recomienda al lector ver [34].

En esa sección nos interesará obtener una caracterización de las A-isometrías parciales similar a la obtenida por Mbekhta. Con este fin, comenzaremos definiendo A-módulo mínimo reducido de un operador y estudiando sus propiedades.

Definición 4.5.1. *Sea $A \in L(\mathcal{H})^+$ y $T \in L(\mathcal{H})$. Definimos el* **A-módulo mínimo reducido** *de T como*

$$\gamma_A(T) = \inf \left\{ \|T\xi\|_A : \ \xi \in N(A^{1/2}T)^{\perp_A} \text{ y } \|\xi\|_A = 1 \right\}.$$

Lema 4.5.2. *Si $T \in L_A(\mathcal{H})$ entonces*

$$\gamma_A(T) = \inf \left\{ \|T\xi\|_A : \ \xi \in \overline{R(T^\sharp T)} \text{ y } \|\xi\|_A = 1 \right\}.$$

Demostración. Por el Lema 4.4.2, tenemos que $N(A^{1/2}T)^{\perp_A} = \overline{R(T^\sharp T)} + N(A)$. Además, en tal caso, $N(A) \subseteq N(A^{1/2}T)$. Luego, dado $\xi = \xi_1 + \xi_2 \in N(A^{1/2}T)^{\perp_A}$ con $\xi_1 \in \overline{R(T^\sharp T)}$ y $\xi_2 \in N(A)$ se tiene que $\|\xi\|_A = \|\xi_1\|_A$ y $\|T\xi\|_A = \|T\xi_1\|_A$. De aquí se obtiene el resultado. □

A lo largo de esta sección, dado $T \in L_{A^{1/2}}(\mathcal{H})$ denotaremos con $T^\diamond$ a la solución reducida de la ecuación $A^{1/2}X = T^*A^{1/2}$, a saber, $T^\diamond = (A^{1/2})^\dagger T^* A^{1/2}$.

Proposición 4.5.3. *Sea $A \in L(\mathcal{H})^+$. Si $T \in L_{A^{1/2}}(\mathcal{H})$ entonces $\gamma_A(T) \leq \gamma(C)$ para toda solución C de la ecuación $A^{1/2}X = T^*A^{1/2}$. En particular, $\gamma_A(T) \leq \gamma(T^\diamond)$.*

Demostración. Sea $T \in L_{A^{1/2}}(\mathcal{H})$ y $C \in L(\mathcal{H})$ tal que $A^{1/2}C = T^*A^{1/2}$. Si $\xi \in N(A^{1/2}T)^{\perp_A}$ entonces $\eta = A^{1/2}\xi \in A^{-1/2}(\overline{R(T^*A^{1/2})})$. Luego, $\|\xi\|_A = \|\eta\|$ y $\|T\xi\|_A^2 = \|C^*\eta\|^2$. Por otro lado, como $R(C) \subseteq A^{-1/2}(R(T^*A^{1/2}))$, se tiene que $N(C^*)^\perp = \overline{R(C)} \subseteq \overline{A^{-1/2}(R(T^*A^{1/2}))} \subseteq A^{-1/2}(\overline{R(T^*A^{1/2})})$. Luego,

$$\begin{aligned}
\gamma_A(T) &= \inf\{\|T\xi\|_A : \ \xi \in N(A^{1/2}T)^{\perp_A} \text{ y } \|\xi\|_A = 1\} \\
&= \inf\{\|C^*\eta\| : \ \eta \in A^{-1/2}(\overline{R(T^*A^{1/2})}) \text{ y } \|\eta\| = 1\} \\
&\leq \inf\{\|C^*\eta\| : \ \eta \in N(C^*)^\perp \text{ y } \|\eta\| = 1\} \\
&= \gamma(C^*) = \gamma(C).
\end{aligned}$$

□

Proposición 4.5.4. *Sean $A \in L(\mathcal{H})^+$, $T \in L_A(\mathcal{H})$ y C una solución de la ecuación $A^{1/2}X = T^*A^{1/2}$. Si $A^{1/2}\overline{R(T^\sharp T)} \subseteq \overline{R(C)}$ entonces $\gamma_A(T) = \gamma(C)$.*

Demostración. Sea $C \in L(\mathcal{H})$ una solución de la ecuación $A^{1/2}X = T^*A^{1/2}$. Entonces, por la Proposición 4.5.3, se tiene que $\gamma_A(T) \leq \gamma(C)$. Ahora, como $T \in L_A(\mathcal{H})$, si $\xi \in \overline{R(T^\sharp T)}$ entonces $\eta = A^{1/2}\xi \in A^{1/2}\overline{R(T^\sharp T)}$. Luego,

$$\begin{aligned}
\gamma_A(T) &= \inf\{\|T\xi\|_A : \ \xi \in \overline{R(T^\sharp T)} \text{ y } \|\xi\|_A = 1\} \\
&= \inf\{\|C^*\eta\| : \ \eta \in A^{1/2}\overline{R(T^\sharp T)} \text{ y } \|\eta\| = 1\} \\
&\geq \inf\{\|C^*\eta\| : \ \eta \in N(C^*)^\perp \text{ y } \|\eta\| = 1\} \\
&= \gamma(C^*) = \gamma(C).
\end{aligned}$$

Luego, $\gamma_A(T) = \gamma(C)$. □

Lema 4.5.5. *Sean $A \in L(\mathcal{H})^+$ y $T \in L_A(\mathcal{H})$. Entonces $T^\diamond A^{1/2} = A^{1/2}T^\sharp$.*

Demostración. Como $L_A(\mathcal{H}) \subseteq L_{A^{1/2}}(\mathcal{H})$ entonces existe $T^\diamond$ y $A^{1/2}T^\diamond A^{1/2} = T^*A$. Por otro lado, $A^{1/2}A^{1/2}T^\sharp = AT^\sharp = T^*A$. Entonces, $T^\diamond A^{1/2}$ y $A^{1/2}T^\sharp$ son soluciones reducidas de la ecuación $A^{1/2}X = T^*A$. Por lo tanto, $T^\diamond A^{1/2} = A^{1/2}T^\sharp$. □

En el siguiente resultado mostramos que el A-módulo mínimo reducido de $T \in L_A(\mathcal{H})$ coincide con el módulo mínimo reducido de $T^\diamond$.

Proposición 4.5.6. *Sean $A \in L(\mathcal{H})^+$ y $T \in L_A(\mathcal{H})$. Entonces*
(1) $\gamma_A(T) = \gamma(T^\diamond)$.
(2) $\gamma_A(T) = \gamma_A(T^\sharp)$.

Demostración. 1. Por la Proposición 4.5.4, es suficiente probar que $A^{1/2}\overline{R(T^\sharp T)} \subseteq \overline{R(T^\diamond)}$. Por el Lema 4.5.5, tenemos que $A^{1/2}R(T^\sharp T) = R(T^\diamond A^{1/2}T) \subseteq R(T^\diamond)$. Luego, $\overline{A^{1/2}\overline{R(T^\sharp T)}} = \overline{A^{1/2}R(T^\sharp T)} \subseteq \overline{R(T^\diamond)}$ y entonces $A^{1/2}\overline{R(T^\sharp T)} \subseteq \overline{A^{1/2}\overline{R(T^\sharp T)}} \subseteq \overline{R(T^\diamond)}$.

2. Si $T \in L_A(\mathcal{H})$ entonces $T^\sharp \in L_A(\mathcal{H})$. Si probamos que $(T^\diamond)^*$ es la solución reducida de la ecuación $A^{1/2}X = (T^\sharp)^*A^{1/2}$ entonces, por el ítem 1, $\gamma_A(T^\sharp) = \gamma((T^\diamond)^*) = \gamma(T^\diamond) = \gamma_A(T)$. Ahora, por el Lema 4.5.5, se verifica que $A^{1/2}(T^\diamond)^* = (T^\sharp)^*A^{1/2}$. Por otro lado, $R((T^\diamond)^*) \subseteq \overline{R((T^\diamond)^*)} = N(T^\diamond)^\perp = N(T^*A^{1/2})^\perp = \overline{R(A^{1/2}T)} \subseteq \overline{R(A^{1/2})}$ y, por lo tanto, $(T^\diamond)^*$ es la solución reducida de la ecuación $A^{1/2}X = (T^\sharp)^*A^{1/2}$ y el resultado queda probado.

□

Con todo lo expuesto anteriormente estamos en condiciones de caracterizar las A-isometrías parciales de acuerdo con su A-módulo mínimo reducido. Utilizaremos en la demostración el resultado de Mbekhta, el cual presentamos formalmente a continuación incluyendo su demostración.

Teorema (Mbekhta) *Si $T \in L(\mathcal{H})$ es una contracción entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *T es una isometría parcial;*

2. $\gamma(T) \geq 1$.

Demostración. Sin pérdida de generalidad podemos asumir $T \neq 0$.

$1 \Rightarrow 2$. Por definición, si T es una isometría parcial entonces $\gamma(T) = 1$.

$2 \Rightarrow 1$. Como $\gamma(T) \geq 1 > 0$ entonces $1 \geq \|T^\dagger\|$. Luego, $\|T\| = \|T^\dagger\| = 1$. En efecto, $\|T\| = \|TT^\dagger T\| \leq \|T\|\|T^\dagger\|$ implica que $\|T^\dagger\| \geq 1$, y entonces $\|T^\dagger\| = 1$. El mismo argumento prueba que $\|T\| = 1$. Ahora, si $\xi \in \mathcal{H}$ entonces $\|T^\dagger\xi\| = \|T^\dagger TT^\dagger\xi\| \leq \|TT^\dagger\xi\| \leq \|T^\dagger\xi\|$, luego $\|TT^\dagger\xi\| = \|T^\dagger\xi\|$. Por lo tanto, para todo $\xi \in \mathcal{H}$ tenemos que $\big\langle (I - T^*T)T^\dagger\xi, T^\dagger\xi \big\rangle = \|T^\dagger\xi\|^2 - \|TT^\dagger\xi\|^2 = 0$, y dado que T es un contracción, el operador $I - T^*T$ es positivo. Luego, para todo $\xi \in \mathcal{H}$, $\|(I - T^*T)^{1/2}T^\dagger\xi\|^2 = \big\langle (I - T^*T)T^\dagger\xi, T^\dagger\xi \big\rangle = 0$. Como consecuencia, $(I - T^*T)^{1/2}T^\dagger = 0$ y entonces $(I - T^*T)T^\dagger = 0$, es decir, $T^\dagger = T^*TT^\dagger$. Finalmente, obtenemos que $T = TT^\dagger T = TT^*TT^\dagger T = TT^*T$, de donde deducimos que T es una isometría parcial. □

Teorema 4.5.7. *Sea $A \in L(\mathcal{H})^+$. Si $T \in L_A(\mathcal{H})$ es una A-contracción entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *T es una A-isometría parcial;*
2. *$\gamma_A(T) \geq 1$;*
3. *$\gamma(T^\diamond) \geq 1$.*

Demostración. $1 \Rightarrow 2$. Primero observemos que si $T^\sharp = 0$ entonces, por la Proposición 4.5.6, $\gamma_A(T) = \infty$. Sea T una A-isometría parcial tal que $T^\sharp$ es no nulo. Luego, $\|T\xi\|_A = \|\xi\|_A$ para todo $\xi \in \overline{R(T^\sharp T)} \neq \{0\}$ y entonces $\gamma_A(T) = 1$.

$2 \Rightarrow 1$. Dado que $T \in L_A(\mathcal{H})$ es una A-contracción y utilizando el lema 4.5.5 se tiene que $A^{1/2}T^\diamond(T^\diamond)^*A^{1/2} = T^*AT \leq A$. Luego, $T^\diamond(T^\diamond)^* = \overline{(A^{1/2})^\dagger T^*AT(A^{1/2})^\dagger} \leq \overline{(A^{1/2})^\dagger A(A^{1/2})^\dagger} = P_{\overline{R(A)}} \leq I$, donde la linea superior denota la extensión continua. Por lo tanto, $(T^\diamond)^*$ es una contracción. Por otro lado, por la Proposición 4.5.6, $1 \leq \gamma_A(T) = \gamma(T^\diamond) = \gamma((T^\diamond)^*)$. Entonces, por el resultado de Mbekhta, $(T^\diamond)^*$ es una isometría parcial. Ahora, usando el lema 4.5.5, se tiene que

$$\begin{aligned} A(T^\sharp T)^2 &= A^{1/2}A^{1/2}T^\sharp TT^\sharp T = A^{1/2}T^\diamond A^{1/2}TT^\sharp T = A^{1/2}T^\diamond(T^\diamond)^*A^{1/2}T^\sharp T \\ &= A^{1/2}T^\diamond(T^\diamond)^*T^\diamond A^{1/2}T = A^{1/2}T^\diamond A^{1/2}T \\ &= A^{1/2}A^{1/2}T^\sharp T = AT^\sharp T. \end{aligned}$$

Luego, como $R((T^\sharp T)^2)$ y $R(T^\sharp T) \subseteq \overline{R(A)}$, entonces, por el teorema de Douglas, $(T^\sharp T)^2 = T^\sharp T$. Luego, T es una A-isometría parcial.

2 $\Leftrightarrow$ 3. Es consecuencia del Corolario 4.5.3. $\square$

4.6. El caso $A \in Gl(\mathcal{H})^+$

En esta sección estudiaremos como se relacionan las clases de operadores estudiadas a lo largo de este capítulo con las clases de $L(\mathcal{H})$ cuando $A \in Gl(\mathcal{H})^+$. Primero introduzcamos algo de notación.

Notación 4.6.1. *Sea $A \in L(\mathcal{H})^+$. Denotaremos $L^r_A(\mathcal{H}) = \{T \in L^s_A(\mathcal{H}) : T^\sharp = T\}$, $\mathcal{I}_A(\mathcal{H}) = \{T \in L(\mathcal{H}) : T$ es A-isometría$\}$, $\mathcal{U}_A(\mathcal{H}) = \{U \in L(\mathcal{H}) : U$ es A-unitario$\}$ y $\mathcal{J}_A(\mathcal{H}) = \{T \in L(\mathcal{H}) : T$ es A-isometría parcial$\}$.*

Observemos que si $A \in Gl(\mathcal{H})^+$ entonces:

(i) $T \in L^r_A(\mathcal{H})$ si y sólo si $T = A^{-1/2}RA^{1/2}$ para algún $R \in L^s(\mathcal{H})$.

En efecto, si $T \in L^r_A(\mathcal{H})$ entonces $T = A^{-1}T^*A = A^{-1/2}(A^{-1/2}T^*A^{1/2})A^{1/2}$. Luego, sea $R = A^{-1/2}T^*A^{1/2}$. Ahora, como $T^*A = AT$ entonces operando se obtiene que $A^{-1/2}T^*A^{1/2} = A^{1/2}TA^{-1/2}$, i.e., $R = R^*$. Recíprocamente, si $T = A^{-1/2}RA^{1/2}$ para algún $R \in L^s(\mathcal{H})$ entonces es fácil deducir que $T^*A = AT$ o, lo que es lo mismo dado que $A \in Gl(\mathcal{H})^+$, que $T = A^{-1}T^*A = T^\sharp$.

Análogamente, se obtiene que:

(ii) $T \in \mathcal{I}_A(\mathcal{H})$ si y sólo si $T = A^{-1/2}VA^{1/2}$ para algún $V \in \mathcal{I}(\mathcal{H})$.

(iii) $T \in \mathcal{U}_A(\mathcal{H})$ si y sólo si $T = A^{-1/2}UA^{1/2}$ para algún $U \in \mathcal{U}(\mathcal{H})$.

(iv) $T \in \mathcal{J}_A(\mathcal{H})$ si y sólo si $T = A^{-1/2}VA^{1/2}$ para algún $V \in \mathcal{J}(\mathcal{H})$.

Proposición 4.6.2. . *Las siguientes identidades se verifican:*

1. $\displaystyle\bigcup_{A \in Gl(\mathcal{H})^+} L^r_A(\mathcal{H}) = \bigcup_{G \in Gl(\mathcal{H})} G^{-1}L^s(\mathcal{H})G.$

2. $\displaystyle\bigcup_{A \in Gl(\mathcal{H})^+} \mathcal{I}_A(\mathcal{H}) = \bigcup_{G \in Gl(\mathcal{H})} G^{-1}\mathcal{I}(\mathcal{H})G.$

3. $\bigcup\limits_{A\in Gl(\mathcal{H})^+} \mathcal{U}_A(\mathcal{H}) = \bigcup\limits_{G\in Gl(\mathcal{H})} G^{-1}\mathcal{U}(\mathcal{H})G.$

4. $\bigcup\limits_{A\in Gl(\mathcal{H})^+} \mathcal{J}_A(\mathcal{H}) = \bigcup\limits_{G\in Gl(\mathcal{H})} G^{-1}\mathcal{J}(\mathcal{H})G.$

Demostración. Incluimos sólo la demostración del ítem 1, puesto que los ítems restantes se pueden demostrar de manera análoga.

1. Por el item (i), es claro que $\bigcup\limits_{A\in Gl(\mathcal{H})^+} L^r_A(\mathcal{H}) \subseteq \bigcup\limits_{G\in Gl(\mathcal{H})} G^{-1}L^s(\mathcal{H})G$. Por otro lado, sea $T = G^{-1}RG$ con $G \in Gl(\mathcal{H})$ y $R \in L^s(\mathcal{H})$. Si $G = U|G|$ es la descomposición polar de G, con $|G| = (G^*G)^{1/2}$ y U una isometría parcial, entonces es fácil comprobar que $G^{-1} = |G|^{-1}U^*$. Por lo tanto, $T = |G|^{-1}(U^*RU)|G|$. Entonces, considerando $A = (G^*G)^{-1}$ obtenemos la otra inclusión. $\square$

Capítulo 5

Clases de operadores en un espacio de Hilbert inducido por $A \in L(\mathcal{H})^+$

En este capítulo relacionamos las clases de operadores estudiadas en el capítulo 4 con clases similares en $L(\mathbf{R}(A^{1/2}))$.

5.1. El álgebra $L(\mathbf{R}(A^{1/2}))$

En lo que sigue trabajaremos con el espacio de Hilbert inducido por A, $\mathbf{R}(A^{1/2})$, definido en la Proposición 1.4.3. Recordemos que $\mathbf{R}(A^{1/2})$ denota el espacio de Hilbert $R(A^{1/2})$ con el producto interno dado por

$$(A^{1/2}\xi, A^{1/2}\eta) := \langle P\xi, P\eta\rangle \text{ para todo } \xi, \eta \in \mathcal{H},$$

donde $P = P_{\overline{R(A)}}$.

En esta sección describimos $L(\mathbf{R}(A^{1/2}))$. Con este objetivo introducimos el siguiente operador que relaciona $\mathcal{H}$ con $\mathbf{R}(A^{1/2})$:

$$Z_A : \mathcal{H} \to \mathbf{R}(A^{1/2}) \text{ definido por } Z_A\xi = A^{1/2}\xi.$$

En la siguiente proposición presentamos algunas propiedades elementales de este operador.

Proposición 5.1.1. *Las siguientes propiedades se verifican:*

1. $Z_A \in L(\mathcal{H}, \mathbf{R}(A^{1/2}))$ *y* Z_A *es suryectivo.*

2. $Z_A^* \in L(\mathbf{R}(A^{1/2}), \mathcal{H})$ *está definido por* $Z_A^*(A^{1/2}\eta) = P\eta$.

3. $Z_A^* Z_A = P$ *y* $Z_A Z_A^* = id_{\mathbf{R}(A^{1/2})}$*, en particular* Z_A *es una co-isometría.*

4. $Z_A|_{\overline{R(A)}} \in L(\overline{R(A)}, \mathbf{R}(A^{1/2}))$ *es un operador unitario.*

Demostración. 1. La linealidad de Z_A es elemental. Además, para todo $\xi \in \mathcal{H}$ se tiene que $\|Z_A\xi\|_{\mathbf{R}(A^{1/2})} = \|A^{1/2}\xi\|_{\mathbf{R}(A^{1/2})} = \|P\xi\| \le \|\xi\|$, i.e., Z_A es acotado. Luego, $Z_A \in L(\mathcal{H}, \mathbf{R}(A^{1/2}))$. Además, por definición, $R(Z_A) = R(A^{1/2})$, es decir, Z_A es suryectivo.

2. Para todo $\xi, \eta \in \mathcal{H}$ se tiene que $(Z_A\xi, A^{1/2}\eta) = (A^{1/2}\xi, A^{1/2}\eta) = \langle P\xi, P\eta\rangle = \langle \xi, P\eta\rangle$. Luego, $Z_A^* \in L(\mathbf{R}(A^{1/2}), \mathcal{H})$ está definido por $Z_A^*(A^{1/2}\eta) = P\eta$.

3. Elemental.

4. Por simplicidad denotemos $U_A = Z_A|_{\overline{R(A)}}$. Observemos primero que si $\xi \in \overline{R(A)}$ entonces $\|U_A\xi\|_{\mathbf{R}(A^{1/2})} = \|A^{1/2}\xi\|_{\mathbf{R}(A^{1/2})} = \|P\xi\| = \|\xi\|$, es decir, U_A es una isometría. Por otro lado, $U_A^* : \mathbf{R}(A^{1/2}) \to \overline{R(A)}$ definido por $U_A^*(A^{1/2}\xi) = P\xi$ también resulta una isometría. En efecto, $\|U_A^*(A^{1/2}\xi)\| = \|P\xi\| = \|A^{1/2}\xi\|_{\mathbf{R}(A^{1/2})}$ para todo $\xi \in \mathcal{H}$. Luego, U_A^* es una isometría y entonces U_A es un operador unitario. □

El siguiente resultado brinda condiciones necesarias y suficientes sobre un operador lineal $\tilde{T} : R(A^{1/2}) \to R(A^{1/2})$ para que resulte acotado bajo la norma $\| \ \|_{\mathbf{R}(A^{1/2})}$.

Proposición 5.1.2. *Sea* $\tilde{T} : R(A^{1/2}) \to R(A^{1/2})$ *un operador lineal. Luego, existe un único operador lineal* $V : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ *tal que* $R(V) \subseteq \overline{R(A)}$ *y* $A^{1/2}V = \tilde{T}A^{1/2}$*. Además,* $\tilde{T}$ *es acotado en* $\mathbf{R}(A^{1/2})$ *si y sólo si* V *es acotado en* $\mathcal{H}$*. En tal caso,* $V = Z_A^*\tilde{T}Z_A$ *y coincide con la solución reducida de la ecuación* $Z_AX = \tilde{T}Z_A$*. Asimismo,* $\|\tilde{T}\|_{\mathbf{R}(A^{1/2})} = \|V\|$.

Demostración. Dado $\xi \in \mathcal{H}$ existe un único $\eta \in \overline{R(A)}$ tal que $\tilde{T}(A^{1/2}\xi) = A^{1/2}\eta$. Luego, la aplicación $V : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ tal que $V\xi = \eta$ queda bien definida. Además, V es lineal, $R(V) \subseteq \overline{R(A)}$ y se verifica que $A^{1/2}V = \tilde{T}A^{1/2}$. Veamos que dicho operador V es único. Para esto, supongamos que existe $\tilde{V} : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ lineal con $R(V) \subseteq \overline{R(A)}$ y tal que $A^{1/2}\tilde{V} = \tilde{T}A^{1/2}$. Luego, $A^{1/2}(V - \tilde{V}) = 0$. Pero entonces $R(V - \tilde{V}) \subseteq \overline{R(A)} \cap N(A) = \{0\}$. Por lo tanto $V = \tilde{V}$.

Supongamos ahora que $\tilde{T}$ es acotado en $\mathbf{R}(A^{1/2})$. Luego, como $\tilde{T}Z_A = Z_AV$ entonces, por el Teorema de Douglas, V es acotado. Más aún, como $R(V) \subseteq \overline{R(A)}$ entonces V es la solución reducida de la ecuación $\tilde{T}Z_A = Z_AX$ y $V = Z_A^*\tilde{T}Z_A$. Recíprocamente, si V es acotado en $\mathcal{H}$ entonces existe $c > 0$ tal que $\|V\xi\| \leq c\|\xi\|$ para todo $\xi \in \mathcal{H}$. En particular, $\|VP\xi\| \leq c\|P\xi\|$ para todo $\xi \in \mathcal{H}$. Ahora, puesto que $N(A^{1/2}) \subseteq N(\tilde{T}A^{1/2}) = N(V)$, entonces $VP = V$. Por lo tanto, $\|V\xi\| \leq c\|P\xi\|$ para todo $\xi \in \mathcal{H}$ o, equivalentemente, $\|A^{1/2}V\xi\|_{\mathbf{R}(A^{1/2})} = \|\tilde{T}(A^{1/2}\xi)\|_{\mathbf{R}(A^{1/2})} \leq c\|A^{1/2}\xi\|_{\mathbf{R}(A^{1/2})}$ para todo $\xi \in \mathcal{H}$. Luego, $\tilde{T}$ es acotado.

Por otra lado, si $\tilde{T}Z_A = Z_AV$, $R(V) \subseteq \overline{R(A)}$ y $N(A) \subseteq N(V)$ entonces

$$\begin{aligned}
\|\tilde{T}\|_{\mathbf{R}(A^{1/2})} &= \sup\{\ \|\tilde{T}A^{1/2}\xi\|_{\mathbf{R}(A^{1/2})} :\ \|A^{1/2}\xi\|_{\mathbf{R}(A^{1/2})} = 1, \xi \in \mathcal{H}\} \\
&= \sup\{\ \|A^{1/2}V\xi\|_{\mathbf{R}(A^{1/2})} :\ \|A^{1/2}\xi\|_{\mathbf{R}(A^{1/2})} = 1, \xi \in \mathcal{H}\} \\
&= \sup\{\ \|PV\xi\| :\ \|P\xi\| = 1, \xi \in \mathcal{H}\} \\
&= \sup\{\ \|V\xi\| :\ \|\xi\| = 1, \xi \in \mathcal{H}\} \\
&= \|V\|.
\end{aligned}$$

□

En [35], M. G. Krein probó el siguiente teorema: Sea $(\mathcal{L}, \langle\ ,\ \rangle)$ un espacio con producto interno y norma Euclidea denotada por $\|\ \|_{\mathcal{L}}$ tal que existe una norma $\|\ \|_B$ en $\mathcal{L}$ bajo la cual resulta un espacio de Banach. Sea $T : \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ un operador lineal tal que $\langle T\xi, \eta\rangle = \langle \xi, T\eta\rangle$ $\forall \xi, \eta \in \mathcal{L}$. Si T es $\|\ \|_{\mathcal{L}}$-acotado entonces también es $\|\ \|_B$-acotado. A continuación, probaremos que en el caso $\mathcal{L} = R(A^{1/2})$ con el producto interno de $\mathcal{H}$ y la norma $\|\ \|_{\mathbf{R}(A^{1/2})}$ (bajo la cual resulta completo) la misma conclusión se obtiene, pero para una clase más amplia de operadores, a saber, para todo $T : \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ para el cual exista $Z : \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ tal que $\langle T\xi, \eta\rangle = \langle \xi, Z\eta\rangle$ $\forall\ \xi, \eta \in \mathcal{L}$.

Teorema 5.1.3. *Sean $\tilde{T} : R(A^{1/2}) \to R(A^{1/2})$ y $Z : R(A^{1/2}) \to R(A^{1/2})$ operadores lineales tales que $\left\langle \tilde{T}A^{1/2}\xi, A^{1/2}\eta \right\rangle = \left\langle A^{1/2}\xi, ZA^{1/2}\eta \right\rangle$ para todo $\xi, \eta \in \mathcal{H}$. Si $\tilde{T}$ es acotado en $\mathbf{R}(A^{1/2})$ entonces $\tilde{T}$ es acotado en $\mathcal{H}$.*

Demostración. Por la Proposición 5.1.2, existen operadores lineales $V, V_1 : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ tal que $\tilde{T}A^{1/2} = A^{1/2}V$, $ZA^{1/2} = A^{1/2}V_1$ y $R(V), R(V_1) \subseteq \overline{R(A)}$. Si $\tilde{T}$ es acotado en $\mathbf{R}(A^{1/2})$ entonces V es acotado. Además, para todo $\xi, \eta \in \mathcal{H}$ se tiene que $\langle \xi, AV_1\eta\rangle = \left\langle A^{1/2}\xi, A^{1/2}V_1\eta \right\rangle = \left\langle A^{1/2}\xi, ZA^{1/2}\eta \right\rangle = \left\langle \tilde{T}A^{1/2}\xi, A^{1/2}\eta \right\rangle =$

$\left\langle A^{1/2}V\xi, A^{1/2}\eta \right\rangle = \langle \xi, V^*A\eta\rangle$. Luego, $AV_1 = V^*A$. Por lo tanto, $V \in L_A(\mathcal{H}) \subseteq L_{A^{1/2}}(\mathcal{H})$ y entonces existe $c > 0$ tal que $\|A^{1/2}V\xi\| \leq c\|A^{1/2}\xi\|$ para todo $\xi \in \mathcal{H}$. Así, $\|\tilde{T}A^{1/2}\xi\| = \|A^{1/2}V\xi\| \leq c\|A^{1/2}\xi\|$ para todo $\xi \in \mathcal{H}$. Luego, $\tilde{T}$ es acotado en $\mathcal{H}$. $\square$

5.2. Relación entre A-operadores y $L(\mathbf{R}(A^{1/2}))$

Con el fin de poder relacionar las clases de operadores estudiadas en el capítulo 4 (A-contracciones, A-isometrías, etc.) con clases similares de $L(\mathbf{R}(A^{1/2}))$ debemos poder hallar el modo de trasladar operadores de $L(\mathcal{H})$ a $L(\mathbf{R}(A^{1/2}))$ conservando las propiedades métricas de dichos operadores heredadas de la estructura semi-Hilbertiana. En el caso de espacios de Hilbert isomorfos, el modo estándar de trasladar operadores autoadjuntos, isometrías, operadores unitarios e isometrías parciales de $L(\mathcal{H}_1)$ a clases similares de $L(\mathcal{H}_2)$, es por medio de la aplicación $T \to UTU^*$ donde $U : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ es un operador unitario. Puesto que $(\mathcal{H}, \langle\ ,\ \rangle_A)$ no es un espacio de Hilbert, entonces no existe un operador unitario entre $(\mathcal{H}, \langle\ ,\ \rangle_A)$ y $\mathbf{R}(A^{1/2})$ que permita trasladar A-autoadjuntos, A-isometrías, etc., a clases similares de $L(\mathbf{R}(A^{1/2}))$. Sin embargo, existe un operador que se comporta como un operador AI-unitario entre $(\mathcal{H}, \langle\ ,\ \rangle_A)$ y $\mathbf{R}(A^{1/2})$, al cual denotaremos con W_A. Dicho operador jugará el rol de U y nos permitirá trasladar A-operadores a operadores de $L(\mathbf{R}(A^{1/2}))$ por medio de $W_ATW_A^\sharp$, conservando las propiedades métricas. Definamos entonces dicho operador W_A. Sea

$$W_A : \mathcal{H} \to \mathbf{R}(A^{1/2}) \text{ definido por } W_A\xi = A\xi.$$

Proposición 5.2.1. *Las siguientes propiedades se verifican:*

1. $W_A \in L(\mathcal{H}, \mathbf{R}(A^{1/2}))$ *y* $R(W_A) = R(A)$ *es denso en* $\mathbf{R}(A^{1/2})$.
2. $W_A^* : \mathbf{R}(A^{1/2}) \to \mathcal{H}$ *está definido por* $W_A^*(A^{1/2}\eta) = A^{1/2}\eta$.
3. $W_A^*W_A = A$ *y* $Z_A^*W_A = A^{1/2}$.

Demostración. 1. Primero comprobemos que W_A es acotado. Dado $\xi \in \mathcal{H}$, tenemos que $\|W_A\xi\|_{\mathbf{R}(A^{1/2})} = \|A\xi\|_{\mathbf{R}(A^{1/2})} = \|A^{1/2}\xi\| \leq \|A^{1/2}\|\|\xi\|$, i.e., W_A es acotado. Claramente, $R(W_A) = R(A)$ y, por Proposición 1.4.3, es denso en $\mathbf{R}(A^{1/2})$.

2. Para todo $\xi, \eta \in \mathcal{H}$ se tiene que $(W_A\xi, A^{1/2}\eta) = (A\xi, A^{1/2}\eta) = \left\langle A^{1/2}\xi, P\eta \right\rangle = \left\langle \xi, A^{1/2}\eta \right\rangle$. Luego, $W_A^* : \mathbf{R}(A^{1/2}) \to \mathcal{H}$ queda definido por $W_A^* A^{1/2}\eta = A^{1/2}\eta$, para todo $\eta \in \mathcal{H}$.
3. Elemental. □

De acuerdo con la Observación 1.3.8, W_A no admite AI-adjunto, puesto que, en general, $R(W_A^*) = R(A^{1/2}) \not\subseteq R(A)$. Sin embargo, de la misma manera que sucede con operadores no acotados, la definición de AB-adjunto se puede extender para operadores $T \in L(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ tales que $R(T^*B) \not\subseteq R(A)$ como sigue:

Definición 5.2.2. *Sean $A \in L(\mathcal{H}_1)^+$ y $B \in L(\mathcal{H}_2)^+$. Dado $T \in L(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ llamaremos AB-**adjunto** de T al operador $T^\sharp$ definido por*

$$\mathcal{D}(T^\sharp) = \{\xi \in \mathcal{H}_2 : \ \exists\, \eta \in \overline{R(A)} \text{ tal que } \langle T\nu, \xi\rangle_B = \langle \nu, \eta\rangle_A \ \ \forall \nu \in \mathcal{H}_1\};$$

y $T^\sharp\xi = \eta$ para $\xi \in \mathcal{D}(T^\sharp)$.

Proposición 5.2.3. *Sean $A \in L(\mathcal{H}_1)^+$, $B \in L(\mathcal{H}_2)^+$ y $T \in L(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$. Las siguientes propiedades se verifican:*

1. *$T^\sharp$ está bien definido y es lineal.*
2. *Si $R(T^*B) \subseteq R(A)$ entonces $T^\sharp$ es la solución reducida de la ecuación $AX = T^*B$, i.e. $T^\sharp = A^\dagger T^* B$.*
3. *Si $T \in L_A(\mathcal{H})$ entonces $T^\sharp$ es la solución reducida de la ecuación $AX = T^*A$. Luego, la notación utilizada en la sección 4.1 es compatible.*

Demostración. 1. Sea $\xi \in \mathcal{D}(T^\sharp)$ y supongamos que existen $\eta_1, \eta_2 \in \overline{R(A)}$ tal que $\langle \nu, \eta_1\rangle_A = \langle T\nu, \xi\rangle_B = \langle \nu, \eta_2\rangle_A$ para todo $\nu \in \mathcal{H}_1$. Entonces $\langle A\nu, \eta_1 - \eta_2\rangle = 0$ para todo $\nu \in \mathcal{H}_1$. Luego, $A(\eta_1 - \eta_2) = 0$ y entonces $\eta_1 = \eta_2$ dado que $\eta_1, \eta_2 \in \overline{R(A)}$. Luego, $T^\sharp$ está bien definido. La linealidad de $T^\sharp$ es elemental.
2. Es consecuencia inmediata del Teorema de Douglas.
3. Caso particular del ítem 2. □

Luego, calculemos el AI-adjunto de W_A de acuerdo con la definición 5.2.2.

Proposición 5.2.4. *El operador W_A verifica que*

$$W_A^\sharp = W_A^\dagger,$$

donde $W_A^\sharp$ denota al AI-adjunto de W_A.

Demostración. En primer lugar comprobemos que $\mathcal{D}(W_A^\sharp) = R(A)$. Sea $\xi = A^{1/2}\eta \in \mathcal{D}(W_A^\sharp)$. Entonces, existe $\phi \in \overline{R(A)}$ tal que $(W_A\psi, A^{1/2}\eta) = \langle \psi, \phi \rangle_A$, para todo $\psi \in \mathcal{H}$ o, equivalentemente, $\langle A^{1/2}\psi, P\eta \rangle = \langle A^{1/2}\psi, A^{1/2}\phi \rangle$ para todo $\psi \in \mathcal{H}$. Por lo tanto, $P\eta = A^{1/2}\phi$ y $\xi = A^{1/2}\eta = A\phi \in R(A)$. Por otro lado, sea $A\eta \in R(A)$. Entonces, para todo $\xi \in \mathcal{H}$ se tiene que $(W_A\xi, A\eta) = \langle \xi, P\eta \rangle_A$, i.e., $A\eta \in \mathcal{D}(W_A^\sharp)$ y $W_A^\sharp A\eta = P\eta$. Luego, $\mathcal{D}(W_A^\sharp) = R(A)$. Asimismo, como $W_A^\sharp A\eta = P\eta$, obtenemos que $W_A^\sharp = W_A^\dagger$. □

Observación 5.2.5. *Observemos que, por la Proposición 1.1.13, $W_A^\sharp = W_A^\dagger$ es acotado si y sólo si $R(W_A) = R(A)$ es cerrado en $\mathbf{R}(A^{1/2})$. Ahora, $R(A)$ es denso en $\mathbf{R}(A^{1/2})$, luego $R(A)$ es cerrado en $\mathbf{R}(A^{1/2})$ si y sólo si $R(A) = R(A^{1/2})$, es decir, si y solo A tiene rango cerrado.*

A continuación estudiamos las propiedades métricas de W_A y $W_A^\sharp$.

Proposición 5.2.6. *Se verifican las siguientes propiedades:*

1. *W_A es una AI-isometría.*

2. *$\|W_A^\sharp \xi\|_A = \|\xi\|_{\mathbf{R}(A^{1/2})}$ para todo $\xi \in \mathcal{D}(W_A^\sharp)$.*

Demostración. 1. Para todo $\xi \in \mathcal{H}$ se tiene que $\|W_A\xi\|_{\mathbf{R}(A^{1/2})} = \|A^{1/2}\xi\| = \|\xi\|_A$. Luego, W_A es una AI-isometría.
2. Dado $\xi = A\eta \in \mathcal{D}(W_A^\sharp) = R(A)$ se tiene que $\|W_A^\sharp(A\xi)\|_A = \|P\xi\|_A = \|A^{1/2}\xi\| = \|A\xi\|_{\mathbf{R}(A^{1/2})}$. □

Nótese que W_A se comporta como un operador AI-unitario salvo que, en general, $W_A^\sharp$ no es acotado. Como consecuencia dado $T \in L(\mathcal{H})$, $W_A T W_A^\sharp$ no es acotado, en general. Por otro lado, la conjugación $W_A^\sharp \tilde{T} W_A$ no está definido para todo $\tilde{T} \in L(\mathbf{R}(A^{1/2}))$. Luego, esta clase de conjugaciones por medio del operador W_A no es tan perfecta como en el caso de espacios de Hilbert isomorfos. El estudio de estas conjugaciones es equivalente a determinar condiciones para la conmutatividad del siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{H} \arrow[r, "T"] \arrow[d, "W_A"'] & \mathcal{H} \arrow[d, "W_A"] \\
\mathbf{R}(A^{1/2}) \arrow[r, "\tilde{T}"] & \mathbf{R}(A^{1/2})
\end{tikzcd}$$

Más precisamente, estudiamos dos problemas de levantamiento:

1. dado $T \in L(\mathcal{H})$ bajo qué condiciones existe $\tilde{T} \in L(\mathbf{R}(A^{1/2}))$ tal que $W_A T = \tilde{T} W_A$;
2. dado $\tilde{T} \in L(\mathbf{R}(A^{1/2}))$ bajo qué condiciones existe $T \in L(\mathcal{H})$ tal que $W_A T = \tilde{T} W_A$.

En la siguiente proposición respondemos el primer problema. El caso A inyectivo fue resuelto por Barnes en [9]. A continuación presentamos una prueba basada en el teorema de Douglas.

Proposición 5.2.7. *Sea $T \in L(\mathcal{H})$. Entonces, existe $\tilde{T} \in L(\mathbf{R}(A^{1/2}))$ tal que $\tilde{T} W_A = W_A T$ si y sólo si $T \in L_{A^{1/2}}(\mathcal{H})$ (i.e., T es un A-operador). En tal caso, $\tilde{T}$ es único.*

Demostración. Si $T \in L_{A^{1/2}}(\mathcal{H})$ entonces $T^* R(A^{1/2}) \subseteq R(A^{1/2})$. Por lo tanto, como $R(T^* W_A^*) = T^* R(A^{1/2}) \subseteq R(A^{1/2}) = R(W_A^*)$, existe $\tilde{S} \in L(\mathbf{R}(A^{1/2}))$ tal que $W_A^* \tilde{S} = T^* W_A^*$. Luego, tomando $\tilde{T} = \tilde{S}^*$ se obtiene el resultado. Recíprocamente, si $\tilde{T} \in L(\mathbf{R}(A^{1/2}))$ satisface $W_A T = \tilde{T} W_A$, entonces $T^* W_A^* = W_A^* \tilde{T}^*$ y, como antes, $T^* R(A^{1/2}) \subseteq R(A^{1/2})$, i.e., $T \in L_{A^{1/2}}(\mathcal{H})$.

Obsérvese que si existe $\tilde{T} \in L(\mathbf{R}(A^{1/2}))$ tal que $\tilde{T} W_A = W_A T$ entonces $R(\tilde{T}^*) \subseteq R(A^{1/2}) \subseteq \overline{R(A)}$. Esto significa que $\tilde{T}^*$ es la solución reducida de la ecuación $T^* W_A^* = W_A^* \tilde{T}^*$, y, por lo tanto es único. $\square$

Observación 5.2.8. Cojuhari y Gheondea [17] probaron un resultado similar al anterior. Básicamente, suponen que los operadores $T : \mathcal{H} \to \mathcal{K}$, $V : \mathcal{K} \to \mathcal{H}$ satisfacen $BT = V^* A$, donde $A \in L(\mathcal{H}_1)^+$ y $B \in L(\mathcal{H}_2)^+$, y prueban la existencia de únicos operadores $\tilde{T} : \mathbf{R}(A^{1/2}) \to \mathbf{R}(B^{1/2})$ y $\tilde{V} : \mathbf{R}(B^{1/2}) \to \mathbf{R}(A^{1/2})$ tal que $W_B T = \tilde{T} W_A$, $W_A V = \tilde{V} W_B$. Además, $\tilde{T}^* = \tilde{V}$. Se recomienda ver también el trabajo de Hassi et al. [32].

En la proposición anterior estudiamos bajo que condiciones un operador $T \in L(\mathcal{H})$ proviene de un operador $\tilde{T} \in L(\mathbf{R}(A^{1/2}))$ en el sentido que $W_A T = \tilde{T} W_A$. El siguiente lema va en la dirección contraria, es decir, dado $\tilde{T} \in L(\mathbf{R}(A^{1/2}))$ bajo que condiciones existe $T \in L(\mathcal{H})$ tal que $\tilde{T} W_A = W_A T$.

Proposición 5.2.9. *Dado $\tilde{T} \in L(\mathbf{R}(A^{1/2}))$ existe $T \in L(\mathcal{H})$ tal que $W_A T = \tilde{T} W_A$ si y sólo si $R(\tilde{T} W_A) \subseteq R(W_A) = R(A)$. En tal caso, existe un único $T \in L_{A^{1/2}}(\mathcal{H})$ tal que $R(T) \subseteq \overline{R(A)}$.*

Demostración. La equivalencia es consecuencia directa del teorema de Douglas. Ahora, si $R(\tilde{T} W_A) \subseteq R(W_A)$ y T es la solución reducida de la ecuación $W_A X = \tilde{T} W_A$ entonces $R(T) \subseteq \overline{R(W_A^*)} = \overline{R(A)}$. Por otro lado, $R(T^* A^{1/2}) = R(T^* W_A^*) = R(W_A^* \tilde{T}^*) \subseteq R(A^{1/2})$, y entonces $T \in L_{A^{1/2}}(\mathcal{H})$. $\square$

En lo que sigue denotaremos con

$$\tilde{L}(\mathbf{R}(A^{1/2})) := \{\tilde{T} \in L(\mathbf{R}(A^{1/2})) : \ R(\tilde{T} W_A) \subseteq R(A)\}.$$

$\tilde{L}(\mathbf{R}(A^{1/2}))$ es un subálgebra de $L(\mathbf{R}(A^{1/2}))$. Adémas, vale la pena observar que $\tilde{T} \in \tilde{L}(\mathbf{R}(A^{1/2}))$ no implica, en general, que $\tilde{T}^* \in \tilde{L}(\mathbf{R}(A^{1/2}))$.

Notación 5.2.10. *En lo que sigue denotaremos $\widetilde{L^s}(\mathbf{R}(A^{1/2})) = L^s(\mathbf{R}(A^{1/2})) \cap \tilde{L}(\mathbf{R}(A^{1/2}))$. Análogamente definimos $\widetilde{\mathcal{P}}(\mathbf{R}(A^{1/2}))$, $\widetilde{\mathcal{C}}(\mathbf{R}(A^{1/2}))$ e $\widetilde{\mathcal{I}}(\mathbf{R}(A^{1/2}))$. Además, denotaremos $\widetilde{\mathcal{U}}(\mathbf{R}(A^{1/2})) = \{\tilde{T} \in \tilde{L}(\mathbf{R}(A^{1/2})) \cap \mathcal{U}(\mathbf{R}(A^{1/2})) : \ R(A)$ reduce $\tilde{T}\}$. Similarmente definimos $\widetilde{\mathcal{J}}(\mathbf{R}(A^{1/2}))$.*

5.3. Relación entre clases de A-operadores y clases similares de $L(\mathbf{R}(A^{1/2}))$

De acuerdo con las Proposiciones 5.2.7 y 5.2.9, las siguientes aplicaciones están bien definidas:

$$\alpha : L_{A^{1/2}}(\mathcal{H}) \longrightarrow \tilde{L}(\mathbf{R}(A^{1/2})),\ T \longmapsto \tilde{T}$$

donde $\tilde{T} W_A \xi = W_A T \xi$ para todo $\xi \in \mathcal{H}$, y

$$\beta : \tilde{L}(\mathbf{R}(A^{1/2})) \longrightarrow L_{A^{1/2}}(\mathcal{H}),\ \tilde{T} \longmapsto T$$

donde $\tilde{T}W_A\xi = W_AT\xi$ para todo $\xi \in \mathcal{H}$ y $R(T) \subseteq \overline{R(A)}$.

En la siguiente proposición estudiamos algunas propiedades de estas aplicaciones:

Proposición 5.3.1. *Las aplicaciones α y β verifican las siguientes propiedades:*

1. *α es el homomorfismo $\alpha(T) = \overline{W_ATW_A^\sharp}$. Además, α es inyectivo si y sólo si A es inyectivo.*

2. *β es el homomorfismo $\beta(\tilde{T}) = W_A^\sharp\tilde{T}W_A$; β es inyectivo.*

3. *$\|\alpha(T)\|_{\mathbf{R}(A^{1/2})} = \|T\|_A$ y $\|\beta(\tilde{T})\|_A = \|\tilde{T}\|_{\mathbf{R}(A^{1/2})}$ para todo $T \in L_{A^{1/2}}(\mathcal{H}), \tilde{T} \in \tilde{L}(\mathbf{R}(A^{1/2}))$.*

4. *Las composiciones $\alpha\beta$ y $\beta\alpha$ están dadas por*

$$\alpha\beta : \tilde{L}(\mathbf{R}(A^{1/2})) \longrightarrow \tilde{L}(\mathbf{R}(A^{1/2})),\ \alpha\beta(\tilde{T}) = \tilde{T}$$

y

$$\beta\alpha : L_{A^{1/2}}(\mathcal{H}) \longrightarrow L_{A^{1/2}}(\mathcal{H}),\ \beta\alpha(T) = PTP.$$

Demostración. 1. Dado que $W_A^\sharp = W_A^\dagger$, $\alpha(T) = \overline{W_ATW_A^\sharp}$ y α es lineal. Además si $T, T_1 \in L_{A^{1/2}}(\mathcal{H})$ entonces $W_ATT_1 = \tilde{T}W_AT_1 = \tilde{T}\tilde{T}_1W_A$. Luego $\alpha(TT_1) = \alpha(T)\alpha(T_1)$ y α es un homomorfismo. Observemos ahora que si $T \in L_{A^{1/2}}(\mathcal{H})$ entonces $PTP \in L_{A^{1/2}}(\mathcal{H})$. Luego, si A no es inyectivo entonces existe $T \in L_{A^{1/2}}(\mathcal{H})$ tal que $T \neq PTP$ y $\alpha(T) = \alpha(PTP)$. Es decir, α no es inyectivo. Recíprocamente, sean $T, T_1 \in L_{A^{1/2}}(\mathcal{H})$ tal que $\overline{W_ATW_A^\sharp} = \overline{W_AT_1W_A^\sharp}$. Entonces $PTP = PT_1P$ y como A es inyectivo se verifica que $T = T_1$ y α es inyectivo.

2. Como $W_A^\sharp = W_A^\dagger$, es claro que $\beta(\tilde{T}) = W_A^\sharp\tilde{T}W_A$. La linealidad de β es inmediata. Además, si $\tilde{T}, \tilde{T}_1 \in \tilde{L}(\mathbf{R}(A^{1/2}))$ entonces $\tilde{T}\tilde{T}_1W_A = \tilde{T}W_AT_1 = W_ATT_1$ y, por otro lado, $R(TT_1) \subseteq \overline{R(A)}$. Luego, $\beta(\tilde{T}\tilde{T}_1) = \beta(\tilde{T})\beta(\tilde{T}_1)$, i.e., β es un homomorfismo. Además, si $\beta(\tilde{T}) = \beta(\tilde{T}_1)$ entonces $\tilde{T}W_A\xi = \tilde{T}_1W_A\xi$ para todo $\xi \in \mathcal{H}$. Ahora, como $R(W_A)$ es denso en $\mathbf{R}(A^{1/2})$, entonces $\tilde{T} = \tilde{T}_1$ y β es inyectivo.

3. Si $W_A T = \tilde{T} W_A$ entonces es suficiente probar que $\|T\|_A = \|\tilde{T}\|_{\mathbf{R}(A^{1/2})}$. Ahora,

$$\begin{aligned}
\|T\|_A &= \sup_{0 \neq \xi \in \overline{R(A)}} \frac{\|T\xi\|_A}{\|\xi\|_A} = \sup_{0 \neq \xi \in \overline{R(A)}} \frac{\|W_A T\xi\|_{\mathbf{R}(A^{1/2})}}{\|\xi\|_A} \\
&= \sup_{0 \neq \xi \in \overline{R(A)}} \frac{\|\tilde{T} W_A \xi\|_{\mathbf{R}(A^{1/2})}}{\|A\xi\|_{\mathbf{R}(A^{1/2})}} = \|\tilde{T}\|_{\mathbf{R}(A^{1/2})}
\end{aligned}$$

4. Trivial. □

El siguiente resultado y más tarde el ítem 1 de la Proposición 5.3.4, muestra la relación entre la operación de adjunción en $L(\mathbf{R}(A^{1/2}))$ y la operación $^\sharp$ en $L_A(\mathcal{H})$. Este resultado para operadores positivos parcialmente definidos se debe a Cojuhari y Gheondea ([17], Theorem 3.1). Aquí presentamos una demostración más corta para el caso $A \in L(\mathcal{H})^+$.

Proposición 5.3.2. *Sean $T, W \in L(\mathcal{H})$ tal que $AW = T^*A$. Entonces, $T, W \in L_A(\mathcal{H})$ y*

$$\tilde{W} = \tilde{T}^*$$

En otras palabras, $\alpha(W) = \alpha(T)^*$.

Demostración. Para todo $\xi, \eta \in \mathcal{H}$ se verifica que

$$\begin{aligned}
(\tilde{T} A\xi, A\eta) &= (W_A T\xi, A\eta) = \left\langle A^{1/2} T\xi, A^{1/2}\eta \right\rangle = \langle AT\xi, \eta \rangle \\
&= \langle W^* A\xi, \eta \rangle = \langle A\xi, W\eta \rangle = (A\xi, AW\eta) \\
&= (A\xi, \tilde{W} A\eta).
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\alpha(W) = \alpha(T)^*$. □

A continuación relacionamos, por medio de la aplicación α, las clases de A-operadores estudiadas en el capítulo anterior con clases similares en $L(\mathbf{R}(A^{1/2}))$. Para esto, utilizamos la notación introducida en 1.1.1, 1.1.2, 4.6.1 y 5.2.10.Consideramos $\mathcal{J}_A(\mathcal{H}) = \{T \in L_A(\mathcal{H}) : \; T \text{ es } A\text{-isometría parcial}\}$. Asimismo, denotaremos $\mathcal{P}(\mathcal{H}) := \{Q \in L^s(\mathcal{H}) : Q \text{ es proyección}\}$, $\mathcal{C}(\mathcal{H}) := \{T \in L(\mathcal{H}) : T \text{ es una contracción}\}$. Adaptando esta notación, definimos $L^s_A(\mathcal{H}) := \{T \in L(\mathcal{H}) : T \text{ es } A\text{-autoadjunto}\}$, $P_A(\mathcal{H}) := \{T \in L(\mathcal{H}) : T \text{ es una proyección } A\text{-autoadjunta}\}$ y $\mathcal{C}_A(\mathcal{H}) := \{T \in L(\mathcal{H}) : T \text{ is } A\text{-contracción}\}$.

Teorema 5.3.3. *Sea $A \in L(\mathcal{H})^+$. Las siguientes igualdades se cumplen:*

1. $\alpha(L_A^s(\mathcal{H})) = \widetilde{L}^s(\mathbf{R}(A^{1/2}))$,
2. $\alpha(\mathcal{P}_A(\mathcal{H})) = \widetilde{\mathcal{P}}(\mathbf{R}(A^{1/2}))$,
3. $\alpha(\mathcal{C}_A(\mathcal{H})) = \widetilde{\mathcal{C}}(\mathbf{R}(A^{1/2}))$,
4. $\alpha(\mathcal{I}_A(\mathcal{H})) = \widetilde{\mathcal{I}}(\mathbf{R}(A^{1/2}))$,
5. $\alpha(\mathcal{U}_A(\mathcal{H})) = \widetilde{\mathcal{U}}(\mathbf{R}(A^{1/2}))$,
6. $\alpha(\mathcal{J}_A(\mathcal{H})) = \widetilde{\mathcal{J}}(\mathbf{R}(A^{1/2}))$.

Antes de demostrar el Teorema 5.3.3, probemos el siguiente resultado en el cual determinamos las imágenes por β de ciertos subconjuntos de $\tilde{L}(\mathbf{R}(A^{1/2}))$.

Proposición 5.3.4. *Sea $A \in L(\mathcal{H})^+$. Las siguientes propiedades se verifican:*

1. *Si $\tilde{T}, \tilde{T}^* \in \tilde{L}(\mathbf{R}(A^{1/2}))$ entonces $\beta(\tilde{T}^*) = T^\sharp$.*
2. $\beta(\widetilde{L}^s(\mathbf{R}(A^{1/2}))) \subseteq L_A^s(\mathcal{H})$.
3. $\beta(\widetilde{\mathcal{P}}(\mathbf{R}(A^{1/2}))) \subseteq \mathcal{P}_A(\mathcal{H})$.
4. $\beta(\widetilde{\mathcal{C}}(\mathbf{R}(A^{1/2}))) \subseteq \mathcal{C}_A(\mathcal{H})$.
5. $\beta(\widetilde{\mathcal{I}}(\mathbf{R}(A^{1/2}))) \subseteq \mathcal{I}_A(\mathcal{H})$.
6. $\beta(\widetilde{\mathcal{U}}(\mathbf{R}(A^{1/2}))) \subseteq \mathcal{U}_A(\mathcal{H})$.
7. $\beta(\widetilde{\mathcal{J}}(\mathbf{R}(A^{1/2}))) \subseteq \mathcal{J}_A(\mathcal{H})$.

Demostración. 1. Para todo $\xi, \eta \in \mathcal{H}$, se tiene que

$$\begin{aligned}\left\langle A\beta(\tilde{T}^*)\xi, \eta \right\rangle &= (W_A\beta(\tilde{T}^*)\xi, W_A\eta) = (\tilde{T}^*W_A\xi, W_A\eta) \\ &= (W_A\xi, \tilde{T}W_A\eta) = (W_A\xi, W_A\beta(\tilde{T})\eta) = \left\langle \xi, A\beta(\tilde{T})\eta \right\rangle.\end{aligned}$$

Por lo tanto, $A\beta(\tilde{T}^*) = \beta(\tilde{T})^*A$. Además, $R(\beta(\tilde{T}^*)) \subseteq \overline{R(A)}$. Luego, $\beta(\tilde{T}^*) = \beta(\tilde{T})^\sharp = T^\sharp$.
2. Es consecuencia del ítem 1.

3. Sea $\tilde{P} \in \widetilde{\mathcal{P}}(\mathbf{R}(A^{1/2}))$. Dado que β es un homomorfismo, $\beta(\tilde{P})$ es idempotente. Además, por 2, $\beta(\tilde{P})$ es A-autoadjunto. Luego, $\beta(\tilde{P}) \in \mathcal{P}_A(\mathcal{H})$.
4. Sea $\tilde{T} \in \widetilde{\mathcal{C}}(\mathbf{R}(A^{1/2}))$ y $T = \beta(\tilde{T})$. Entonces, para todo $\xi \in \mathcal{H}$ se verifica que $\|T\xi\|_A = \|AT\xi\|_{\mathbf{R}(A^{1/2})} = \|\tilde{T}A\xi\|_{\mathbf{R}(A^{1/2})} \leq \|A\xi\|_{\mathbf{R}(A^{1/2})} = \|\xi\|_A$. Por lo tanto, T es una A-contracción.
Los ítems 5 y 6 se pueden probar de manera análoga al ítem 4.
7. Si $\tilde{T} \in \widetilde{\mathcal{J}}(\mathbf{R}(A^{1/2}))$ entonces $\tilde{T}^*\tilde{T} \in \widetilde{\mathcal{P}}(\mathbf{R}(A^{1/2}))$ y, por ítem 4, se obtiene que $\beta(\tilde{T}^*\tilde{T}) = T^\sharp T \in \mathcal{P}_A(\mathcal{H})$. Luego, $T = \beta(\tilde{T})$ es una A-isometría parcial.

□

Por la Proposición 5.3.4 y dado que $\alpha\beta = id$, tenemos las siguientes inclusiones: $\widetilde{L}^s(\mathbf{R}(A^{1/2})) \subseteq \alpha(L^s_A(\mathcal{H}))$, $\widetilde{\mathcal{P}}(\mathbf{R}(A^{1/2})) \subseteq \alpha(\mathcal{P}_A(\mathcal{H}))$, $\widetilde{\mathcal{C}}(\mathbf{R}(A^{1/2})) \subseteq \alpha(\mathcal{C}_A(\mathcal{H}))$, $\widetilde{\mathcal{I}}(\mathbf{R}(A^{1/2})) \subseteq \alpha(\mathcal{I}_A(\mathcal{H}))$, $\widetilde{\mathcal{U}}(\mathbf{R}(A^{1/2})) \subseteq \alpha(\mathcal{U}_A(\mathcal{H}))$, y $\widetilde{\mathcal{J}}(\mathbf{R}(A^{1/2})) \subseteq \alpha(\mathcal{J}_A(\mathcal{H}))$. Luego, sólo restan probar la inclusiones inversas para obtener el Teorema 5.3.3.

Demostración del Teorema 5.3.3

1. La igualdad es un caso particular de la Proposición 5.3.2.
3. Sea $Q \in \mathcal{P}_A(\mathcal{H})$. Por 1, $\alpha(Q) = \tilde{Q} \in \widetilde{L}^s(\mathbf{R}(A^{1/2}))$. Además, $\tilde{Q}$ es idempotente porque α es un homomorfismo. Luego, $\tilde{Q} \in \mathcal{P}(\mathbf{R}(A^{1/2}))$.
4. Sea $T \in \mathcal{C}_A(\mathcal{H})$ y $\tilde{T} = \alpha(T)$. Entonces, para todo $\xi \in \mathcal{H}$, $\|\tilde{T}(A\xi)\|_{\mathbf{R}(A^{1/2})} = \|AT\xi\|_{\mathbf{R}(A^{1/2})} = \|T\xi\|_A \leq \|\xi\|_A = \|A\xi\|_{\mathbf{R}(A^{1/2})}$. Luego, como $R(A)$ es denso en $\mathbf{R}(A^{1/2})$, obtenemos que $\tilde{T}$ es una contracción.
Los ítems 5 y 6 se prueban de manera análoga al ítem 4.
7. Sea $T \in \mathcal{J}_A(\mathcal{H})$. Entonces $T^\sharp T$ es una proyección. Luego, $\alpha(T^\sharp T) = \tilde{T}^*\tilde{T} \in \widetilde{\mathcal{P}}(\mathbf{R}(A^{1/2}))$. Por lo tanto, $\tilde{T} \in \widetilde{\mathcal{J}}(\mathbf{R}(A^{1/2}))$. □

Observación 5.3.5. *En [23], la compatibilidad de un par $(A, \mathcal{S})$ se relaciona con la existencia en $\mathbf{R}(A^{1/2})$ de cierta proyección ortogonal. Más precisamente, dado un subespacio cerrado $\mathcal{S}$ de $\mathcal{H}$ el par $(A, \mathcal{S})$ es compatible si y sólo si $P_{\overline{A(\mathcal{S})}'} \in \tilde{L}(\mathbf{R}(A^{1/2}))$ donde $\overline{A(\mathcal{S})}'$ denota la clausura de $A(\mathcal{S})$ en $\mathbf{R}(A^{1/2})$. Como consecuencia, en general, $\tilde{\mathcal{P}}(\mathbf{R}(A^{1/2})) \neq \mathcal{P}(\mathbf{R}(A^{1/2}))$. De hecho, consideremos $B \in L(\mathcal{H})^+$ con rango no cerrado y $A \in L(\mathcal{H}\oplus\mathcal{H})^+$ definido por $A = \begin{pmatrix} B & B^{1/2} \\ B^{1/2} & I \end{pmatrix}$. Luego, por Proposición*

1.3.9, el par $(A, \overline{R(B)} \oplus \{0\})$ *no es compatible. Por lo tanto, si* $\mathcal{W} = \overline{A(\overline{R(B)} \oplus \{0\})}$*, entonces* $P_{\mathcal{W}} \notin \tilde{\mathcal{P}}(\mathbf{R}(A^{1/2}))$.

Bibliografía

[1] T. Ando, *De Branges spaces and analytic operator functions*, Research Institute of Applied Electricity, Hokkaido University, Sapporo, Japan, 1990.

[2] M. L. Arias, G. Corach, M. C. Gonzalez, *Partial isometries in semi-Hilbertian spaces*, Linear Algebra and its Applications 428 (2008), 1460-–1475.

[3] M. L. Arias, G. Corach, M. C. Gonzalez, *Lifting properties in operator ranges*, Acta Sci. Math. (Szeged), en prensa.

[4] M. L. Arias, G. Corach, M. Pacheco, *Characterization of Bessel sequences*, Extracta Math. 22 (1) (2007), 55-66.

[5] M. L. Arias, M. Pacheco, *Bessel fusion multipliers*, J. Math. Anal. Appl. 348 (2008), 581-588.

[6] R. Balan, P.G. Casazza, C. Heil and Z. Landau, *Deficits and excesses of frames*, Advances in Computational Mathematics 18 (2003), 93-116.

[7] P. Balazs, *Basic definitions and properties of Bessel multipliers*, J. Math. Anal. Appl. 325 (1) (2007), 571-585.

[8] P. Balazs, *Hilbert-Schmidt Operators and Frames - Classification, Approximation by Multipliers and Algorithms, International Journal of Wavelets*, Multiresolution and Information Processing 6 (2) (2008), 315-330.

[9] B. A. Barnes, *The spectral properties of certain linear operators and their extensions*, Proc. Amer. Math. Soc. 128 (2000), 1371-1375.

[10] A. Ben-Israel and T. N. E. Greville, *Generalized inverses. Theory and applications.* Second edition, Springer-Verlag, New York, 2003.

[11] B. G. Bodmann, *Optimal linear transmission by loss-insensitive packet encoding*, Appl. Comput. Harmon. Anal. 22 (2007), 274-285.

[12] L. de Branges, J. Rovnyak, *Square Summable Power Series*, Holt, Rinehert and Winston, New York, 1966.

[13] L. de Branges, J. Rovnyak, *Appendix on square summable power series, in "Perturbation Theory and its Applications in Quantum Mechanics"*, Wiley, 1966, pp. 347-392.

[14] P.G. Casazza and G. Kutyniok, *Frames of subspaces*, "Wavelets, Frames and Operator Theory" (College Park, MD, 2003), Contemp. Math. 345, Amer. Math. Soc., Providence, RI, (2004), 87-113.

[15] P. G. Casazza, G. Kutyniok, S.Li, *Fusion Frames and Distributed Processing*, Appl. Comput. Harmon. Anal. 25 (2008), 114-132.

[16] O. Christensen, *An introduction to frames and Riesz bases*, Birkhäuser, Boston, 2003.

[17] P. Cojuhari, A. Gheondea, *On lifting of operators to Hilbert spaces induced by positive selfadjoint operators*, J. Math. Anal. Appl. 304 (2005), 584–598.

[18] J.B. Conway, *A course in functional analysis*, Springer-Verlag, New York, 1985.

[19] G. Corach, A. Maestripieri, D. Stojanoff, *Oblique projections and Schur complements*, Acta Sci. Math 67 (2001), 439–459.

[20] G. Corach, A. Maestripieri, D. Stojanoff, *Generalized Schur complements and oblique projections*, Linear Algebra and its Applications 341 (2002), 259–272.

[21] G. Corach, A. Maestripieri and D. Stojanoff, *Oblique projections and abstract splines*, Journal of Approximation Theory 117(2002), 189–206.

[22] G. Corach, A. Maestripieri, D. Stojanoff, *A classification of projectors*, Banach Center Publications 67 (2005), 145–160.

[23] G. Corach, A. L. Maestripieri, D. Stojanoff, *Projections in operator ranges*, Proc. Amer. Math. Soc. 134 (2006), 765-778.

[24] J. Dieudonné, *Quasi-hermitian operators*, Proc. Internat. Symp. Linear Spaces, Jerusalem (1961), 115-122.

[25] R. G. Douglas, *On majorization, factorization and range inclusion of operators in Hilbert spaces*, Proc. Am. Math. Soc. 17 (1966) 413-416.

[26] G. Feichtinger y K. Nowak, *A first survey of Gabor multipliers* capítulo 5, Birkhauser, Boston, 2003.

[27] I. C. Gohberg y M. G. Krein, *Introduction to the theory of linear non-self adjoint operators*, AMS Translation 18, Rhode Island, 1969.

[28] P. Gavruta, *On the duality of fusion frames*, J. Math. Anal. Appl. 333 (2007) 871-879.

[29] P. R. Halmos, *A Hilbert space problem book*, Second edition, Springer-Verlag, New York, 1982.

[30] F. Hansen, G. K. Pedersen, *Jensen's operator inequality*, Bull. London Math. Soc. 35 (2003), 553-564.

[31] F. Hansen, G. K. Pedersen, *Jensen's inequality for operators and Löwner's theorem*, Math.Ann. 258 (1981/82), 229-241.

[32] S. Hassi, Z. Sebestyén, H. S. V. De Snoo, *On the nonnegativity of operator products*, Acta Math. Hungar. 109 (2005), 1-14.

[33] V. I. Istrătescu, *Introduction to linear operator theory*, Marcel Dekker, Inc., New York, 1981.

[34] T. Kato, *Perturbation theory of linear operators.*, Springer, New York, (First edition), 1966.

[35] M.G. Krein, *Compact linear operators on functional spaces with two norms*, Integr. equ. oper. theory 30 (1998) 140-–162,(translation from the Ukranian of a paper published in 1937).

[36] P. D. Lax, *Symmetrizable linear transformations*, Comm. Pure Appl. Math. 7 (1954), 633-647.

[37] M. Mbekhta, *Partial isometries and generalized inverses*, Acta Sci. Math. (Szeged) 70 (2004), 767 -781.

[38] R. Meise, D. Vogt, *Introduction to Functional Analysis*, Clarendon Press. Oxford, 1997.

[39] M. Z. Nashed, *Generalized Inverses and Applications*, Academic Press, New York, 1976.

[40] M. Z. Nashed, *Inner, outer, and generalized inverses in Banach and Hilbert spaces*, Numer.Funct. Anal. Optim. 9 (1987), 261-325.

[41] M. Reed y B. Simon, *Methods of modern mathematical physics I*, Academic Press, New York, 1980.

[42] W. T. Reid, *Symmetrizable completely continuous linear transformations in Hilbert space*, Duke Math. J. 18 (1951), 41-56

[43] C. J. Rozell and D. H. Johnson, *Analyzing the robustness of redundant population codes in sonsory and feature extraction systems*, Neurocomputing 69 (2006), 1215-1218.

[44] M. A. Ruiz and D. Stojanoff, *Some properties of frames of subspaces obtained by operator theory methods*, J. Math. Anal. Appl. 343 (2008), 366-378.

[45] D. Sarason, *Sub-Hardy Hilbert spaces in the unit disk*, Wiley, New York, 1994.

[46] Z. Sebestyén, *On ranges of adjoint operators in Hilbert space*, Acta Sci. Math. 46 (1983), 295-298.

[47] Z. Sebestyén, *Operator extensions on Hilbert space.* Acta Sci. Math. (Szeged) 57 (1993), 233-248.

[48] Z. Sebestyén, *Positivity of operator products*, Acta Sci. Math. (Szeged) 66 (2000), 287-294.

[49] Z. Sebestyén, J. Stochel, *Reflection symmetry and symmetrizability of Hilbert space operators*. Proc. Amer. Math. Soc. 133 (2005), 1727–1731

[50] B. Simon, *Trace ideals and their applications*, Cambridge University Press, London, 1979.

[51] L. Suciu, *Orthogonal decompositions induced by generalized contractions*, Acta Sci. Math. (Szeged) 70 (2004), 751-765.

[52] L. Suciu, *Some invariant subspaces for A-contractions and applications*, Extracta Math. 21 (3) (2006), 221-247.

[53] L. Suciu, *Ergodic properties for regular A-contractions*, Integr. equ. oper. theory 56 (2) (2006), 285-299.

[54] J. Weidmann, *Linear operators in Hilbert spaces*, Springer, New York, 1980.

[55] A. C. Zaanen, *Normalisable transformations in Hilbert space and systems of linear integral equations*, Acta Math. 83 (1950), 197-248.

[56] A. C. Zaanen, *Linear analysis*, Interscience publishers inc., New York, 1953.