Universidad Nacional de La Plata

Facultad de Ciencias Exactas

Departamento de Matemática

TEOREMA CENTRAL DEL LIMITE PARA CAMPOS ALEATORIOS DEPENDIENTES

Tesis doctoral

Alberto L. Maltz

1999

Teorema central del límite para campos aleatorios dependientes

Alberto L. Maltz

Director: Jorge D. Samur

Departamento de Matemática

Facultad de Ciencias Exactas

Universidad Nacional de La Plata 1999

Para Analía, Pablo y Luis

CONTENIDO

Introducción

Los campos aleatorios, generalización multidimensional de las sucesiones de variables aleatorias, aparecen naturalmente en modelos donde las variables están subindicadas por los puntos de un reticulado. En muchas ocasiones no se tiene la situación tan deseable de independencia de estas variables sino una dependencia (o interacción, terminología habitual en las aplicaciones) que se va debilitando con la lejanía.

Nuestro trabajo se ocupa de la normalidad asintótica de los procesos de sumas parciales subindicados por conjuntos, de campos aleatorios estacionarios con condiciones de dependencia de tipo ϕ-mezcla no uniforme. Como se sabe, este tipo de dependencia se presenta en ciertos campos de Gibbs.

La primera parte consta del material básico de conceptos, notaciones, definiciones y resultados conocidos que permiten delinear los objetivos. Allí se dan precisiones sobre temas como condiciones de mezcla y procesos de sumas parciales subindicados por conjuntos.

En la segunda parte se presenta, en primer lugar, una condición de integrabilidad uniforme que modifica una de las hipótesis de un criterio general de Goldie y Greenwood ([18], 1986) para la convergencia de las distribuciones finito-dimensionales de procesos subindicados por conjuntos. Se demuestra una desigualdad de cuarto momento para campos acotados que permite verificar la nueva condición para campos con varianza finita y cierta velocidad de decrecimiento en la función de mezcla, y probar un teorema de convergencia al movimiento browniano subindicado por todos los conjuntos borelianos de $[0,1]^d$; esto mejora un resultado de Chen([9], 1991) que es para rectángulos con hipótesis de momento mayor que 2.

La demostración de una segunda desigualdad de cuarto momento para campos con sexto momento finito y velocidad ligeramente mayor en el decrecimiento de la función de mezcla, permite volver a aplicar el mismo criterio y obtener un teorema para el caso de varianza infinita.

A continuación se demuestra que, bajo una condición general que no involucra la dependencia, la convergencia de las distribuciones finito-dimensionales al movimiento browniano implica un teorema central del límite para sucesiones crecientes de rectángulos con la misma condición geométrica de B.Nahapetian ([23], 1980). Las consecuencias son una prueba alternativa del teorema central del límite con varianza finita del citado trabajo y la obtención de su extensión a varianza infinita.

La tercera parte se inicia con un teorema central del límite funcional (o uniforme) para campos acotados y sumas parciales subindicadas por rectángulos. Su demostración es una nueva aplicación de la primera desigualdad de cuarto momento, esta vez en combinación con una desigualdad maximal de Bickel y Wichura ([4], 1971), y muestra que hay casos interesantes (como el modelo de Ising, ejemplo en [9]) que pueden resolverse trabajando de manera discreta y con herramientas elementales. Seguidamente se extiende un teorema funcional de [9], donde los procesos están subindicados por rectángulos, a procesos subindicados por familias sustancialmente mayores de conjuntos y además se requiere menor velocidad de decrecimiento de la función de mezcla. Los principales resultados que hemos obtenido para varianza finita están contenidos en [22].

La cuarta parte presenta ejemplos obtenidos a partir de ciertos campos de Gibbs.

Mi gratitud a Jorge Samur, por su dirección científica y calidad humana, es infinita.

1 Conceptos básicos

1.1 Convergencia débil de medidas de probabilidad.

Consideremos, dado un espacio métrico (S, ϱ), el conjunto $Z(S)$ de medidas de probabilidad sobre la clase de los conjuntos borelianos.

Se dice que una sucesión (P_n) de estas medidas *converge débilmente a* P, y suele indicarse $P_n \Longrightarrow P$, si para toda función continua y acotada f a valores reales, se cumple $\int_S f dP_n \rightarrow \int_S f dP$. Esto es equivalente a que $P_n(A) \rightarrow P(A)$ para cada conjunto de Borel A que cumpla $P(\partial A) = 0$. Esta convergencia es la correspondiente a la topología débil de $Z(S)$ para la que los entornos básicos de una medida P tienen la forma

$$\{Q : | \int f_i dQ - \int f_i dP| < \varepsilon, i = 1, .., k\},$$

con $\varepsilon > 0$ y $f_1, .., f_k$ funciones reales continuas y acotadas.

Una conjunto $\Pi \subset Z(S)$ se dice *tenso* cuando para cada $\varepsilon > 0$ existe $K \subset S$ compacto tal que $P(K) > 1 - \varepsilon$ para toda $P \in \Pi$.

Un resultado básico es el Teorema de Prohorov ([5, p.37]), que establece que si S es separable y completo, un subconjunto Π de $Z(S)$ es relativamente compacto si y sólo si es tenso.

Consideremos ahora variables aleatorias (es decir aplicaciones medibles), $(X_n), X$ a valores en S y con dominio en espacios de probabilidad no necesariamente iguales. La *distribución de probabilidad* o *ley* de la variable aleatoria X es la medida de probabilidad sobre S definida por $\mathcal{L}(X)(A) = P[X \in A]$, A conjunto de Borel. Se dice que la sucesión (X_n) converge débilmente o *en distribución* a X *en* S y se suele indicar $X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X$, si $\mathcal{L}(X_n) \Longrightarrow \mathcal{L}(X)$.

Cuando $S = \mathbb{R}^d$ nos reencontramos con los conceptos usuales de convergencia en distribución o en ley y el uso de notaciones donde sin ambigüedad se pueden identificar las leyes con las variables distribuidas según las mismas, como por ejemplo $X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} N(0, 1)$.

1.2 Espacios de funciones continuas.

Un caso de interés en relación a los conceptos de la sección anterior es $S = C(E)$, el conjunto de las funciones reales continuas sobre un espacio métrico compacto E, que es un espacio de Banach separable, con la norma uniforme $||f||_E = \max_{x \in E} |f(x)|$. Haremos una breve revisión de propiedades básicas.

La σ-álgebra $\mathcal{C}$ de los conjuntos borelianos de $C(E)$ es la mínima que hace medibles a las funciones de evaluación e_x ($e_x(f) = f(x)$, $x \in E$, $f \in C(E)$).

Para cada $M = \{x_1, ..., x_p\}$, subconjunto finito de E, se define $\Pi_M : C(E) \rightarrow \mathbb{R}^p$, $\Pi_M(f) = (e_{x_1}(f), ..., e_{x_p}(f)) = (f(x_1), ..., f(x_p))$. Las Π_M (o proyecciones finito-dimensionales) son evidentemente continuas. Una medida de probabilidad P sobre

$(C(E), \mathcal{C})$ induce, para cada M, la medida $P\Pi_M^{-1}$ sobre $(\mathbb{R}^p, \mathcal{B}_p)$, donde $\mathcal{B}_p$ son los conjuntos borelianos de $\mathbb{R}^p$: son las llamadas *medidas de probabilidad finito-dimensionales* . Estas medidas determinan la medida P en el sentido de que si para otra medida Q es $P\Pi_M^{-1} = Q\Pi_M^{-1}$ para todo M, entonces $P = Q$.

Cuando se tiene una sucesión $P_n \Longrightarrow P$, necesariamente $P_n\Pi_M^{-1} \Longrightarrow P\Pi_M^{-1}$ para todo subconjunto finito M de E. Lo recíproco no es cierto: la convergencia de las medidas finito-dimensionales no es suficiente para la existencia de un límite en $Z(C(E))$. Una condición adicional, que aparece naturalmente, es la compacidad relativa de $\{P_n\}$. En este punto, como veremos en la siguiente sección, se vuelve importante el Teorema de Prohorov.

1.3 Procesos. Formas de convergencia en distribución.

Consideremos un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, un conjunto cualquiera E y el conjunto $F(E)$ de las funciones reales con dominio E.

Un *proceso* $Y = \{Y(x)\}_{x \in E}$ *sobre* E es una familia de variables aleatorias $Y(x)(= Y_x)$ sobre $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ con índice $x \in E$. Denotaremos $Y(x, w)$, $x \in E$, $\omega \in \Omega$, al valor que la variable aleatoria $Y(x)$ le asigna a ω. Dicho proceso también puede describirse como la aplicación $Y : \Omega \to F(E)$ que a cada $\omega \in \Omega$ le asigna la función $Y(., w)$; éstas son las *trayectorias* del proceso. Las *distribuciones finito-dimensionales* de Y son las distribuciones de los vectores aleatorios $(Y(x_1), ..., Y(x_p))$ asociados con los subconjuntos finitos $\{x_1, , ..., x_p\}$ de E.

Si se tiene una sucesión (Y_n) de procesos sobre E, decimos que *convergen al proceso* Y *en el sentido de las distribuciones finito-dimensionales* cuando para todo subconjunto finito $\{x_1, , ..., x_p\}$ de E,

$$(Y_n(x_1), ..., Y_n(x_p)) \xrightarrow{\mathcal{D}} (Y(x_1), ..., Y(x_p)).$$

La información que da la convergencia de las distribuciones finito-dimensionales puede no ser suficiente cuando se desea considerar variables aleatorias que dependen de los valores de $Y_n(x)$ para infinitos $x \in E$. Si las trayectorias de cada uno de los procesos Y_n pertenecen a $C(E)$, siendo E un espacio métrico compacto, es interesante tener la convergencia en distribución de (Y_n) en $C(E)$, entendiendo los procesos Y_n como variables aleatorias a valores en dicho espacio (cada Y_n es $(\mathcal{F}, \mathcal{C})$-medible pues $e_x \circ Y_n = Y_n(x)$ es $\mathcal{F}$-medible para todo $x \in E$). La convergencia de las distribuciones finito-dimensionales es la convergencia de las medidas finito-dimensionales asociadas a las leyes de las Y_n.

Teniendo en cuenta las secciones anteriores, se deduce que para la convergencia de (Y_n) en $C(E)$ es necesario y suficiente la convergencia de las distribuciones finito-dimensionales de los Y_n y la compacidad relativa de la sucesión de sus distribuciones de probabilidad. La segunda condición, por el teorema de Prohorov, equivale a la tensión de este conjunto de medidas: diremos, brevemente, que la sucesión (Y_n) debe ser tensa.

Un resultado importante, basado en el teorema de Arzela-Ascoli, que caracteriza esta propiedad en $C(E)$ (ver por ejemplo [19, p.837]) es:

Sea (E, d) un espacio métrico, $B \subset E$ un conjunto relativamente compacto y (Y_n) una sucesión de procesos sobre $\overline{B}$ con trayectorias continuas. Entonces (Y_n) es tensa en $C(\overline{B})$ si y sólo si

(1.3.1) Existe $D \subset B$ denso y numerable tal que para cada $x \in D$ la sucesión de variables aleatorias reales $(Y_n(x))$ es tensa ,

(1.3.2) $\forall \varepsilon > 0$ $$\lim_{\alpha \searrow 0} \limsup_{n \to \infty} P\Big(\sup_{\mathbf{t},\mathbf{s} \in B,\ \mathrm{d}(\mathbf{t},\mathbf{s}) \leq \alpha} |Y_n(\mathbf{t}) - Y_n(\mathbf{s})| \geq \varepsilon \Big) = 0.$$

Estas condiciones son versiones, respectivamente, de la acotación puntual y de la equicontinuidad uniforme. Una prueba en $C([0,1])$, que es esencialmente igual a la del caso general, puede verse en [5, Teor. 8.2, p.55]. Cuando se tiene la convergencia de las distribuciones finito-dimensionales se cumple (1.3.1), de modo que en ese caso solamente debe probarse (1.3.2).

1.4 Procesos subindicados por conjuntos. Movimiento browniano. Entropía métrica con inclusión.

Ingresamos ahora al tipo de procesos en que se enmarca nuestro trabajo. Sea $d > 1$ un entero fijo y $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$, donde $\mathcal{B}$ es la clase de los conjuntos borelianos de $[0,1]^d$. Diremos que un proceso Y sobre $\mathcal{A}$ es *aditivo* cuando, para cada par de conjuntos A, B tales que $A, B, A \cap B, A \cup B \in \mathcal{A}$, se cumple con probabilidad 1 $Y(A \cup B) = Y(A) + Y(B) - Y(A \cap B)$.

Para cada $\sigma > 0$ y $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ existe el llamado *proceso de Wiener* W sobre $\mathcal{A}$, que es aditivo, con distribuciones finito-dimensionales gaussianas y cumple que $EW(A) = 0$ y $\mathrm{Cov}(W(A), W(B)) = \sigma^2 |A \cap B|$ para todos $A, B \in \mathcal{A}$ ($|.|$ indica la medida de Lebesgue). En el caso $\sigma = 1$ se tiene el *proceso standard de Wiener* o *movimiento browniano.*

Si para cada $A, B \in \mathcal{B}$ se define $d_L(A,B) = |A \Delta B|$ y se identifican A y B cuando $d_L(A,B) = 0$, se obtiene un espacio métrico completo.

Si (E, d) es cualquier espacio métrico totalmente acotado y, para cada $\varepsilon > 0$, $n(E, \varepsilon)$ es el menor número de bolas de radio ε necesario para cubrir E, se llama *entropía métrica* de (E,d) a la función $H(E,\varepsilon) := \log(n(E,\varepsilon))$ y *exponente de entropía métrica* de ese espacio a

$$r(E) := \limsup_{\varepsilon \searrow 0} \frac{\log(H(E,\varepsilon))}{\log(\varepsilon^{-1})}.$$

Si $\mathcal{A}$ es un subconjunto totalmente acotado de $(\mathcal{B}, d_L)$, se sabe ([13]) que la condición $\int_0^1 (\frac{H(\mathcal{A},x)}{x})^{1/2} dx < \infty$ implica que existe una versión del proceso de Wiener W sobre $\overline{\mathcal{A}}$ con trayectorias continuas, que entonces será una variable aleatoria a valores en $C(\overline{\mathcal{A}})$; es un proceso de Wiener *continuo* sobre $\overline{\mathcal{A}}$ y también a valores en $CA(\overline{\mathcal{A}})$, el subespacio cerrado formado por las funciones continuas y aditivas sobre $\bar{\mathcal{A}}$ (f es aditiva sobre $\bar{\mathcal{A}}$ si $f(A \cup B) = f(A) + f(B) - f(A \cap B)$ cuando $A, B, A \cap B, A \cup B \in \bar{\mathcal{A}}$). Esto sucede por ejemplo cuando $r(\mathcal{A}) < 1$.

Para las subclases de $(\mathcal{B}, d_L)$ existe una noción más fuerte que la de acotación total. Se dice que $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ es *totalmente acotado con inclusión* si para todo $\varepsilon > 0$, existe un conjunto finito $\mathcal{N}(\mathcal{A}, \varepsilon) \subseteq \mathcal{A}$ de cardinal mínimo $n_I(\mathcal{A}, \varepsilon)$ tal que para todo $A \in \mathcal{A}$ existen $A^-, A^+ \in \mathcal{N}(\mathcal{A}, \varepsilon)$ con $A^- \subseteq A \subseteq A^+$, $|A^+ - A^-| \leq \varepsilon$. Siguiendo el mismo esquema anterior se llama *entropía métrica con inclusión* de $\mathcal{A}$ a la función $H_I(\mathcal{A}, \varepsilon) := \log(n_I(\mathcal{A}, \varepsilon))$ y el *exponente de entropía métrica con inclusión* de $\mathcal{A}$ es

$$r_I(\mathcal{A}) := \limsup_{\varepsilon \searrow 0} \frac{\log(H_I(\mathcal{A}, \varepsilon))}{\log(\varepsilon^{-1})}.$$

Es inmediato que $r(\mathcal{A}) \leq r_I(\mathcal{A})$.

1.5 Ejemplos de exponentes de entropía. La clase $\mathcal{G}$ de rectángulos.

Que una clase esté formada por conjuntos con propiedades como la convexidad y con bordes no demasiado irregulares, ayuda en la construcción de subclases aproximantes más reducidas. Se conocen exponentes de entropía métrica con inclusión de clases usuales de conjuntos ([1]): la clase de todos los conjuntos convexos de $\mathcal{B}$ tiene $r_I = (d-1)/2$. La clase de las regiones poligonales de $[0,1]^d$ con a lo sumo m vértices (m fijo) y la clase de las regiones elipsoidales de $[0,1]^d$ tienen $r_I = 0$. Sean $M > 0$, $\beta \geq 1$ y n_β el mayor entero estrictamente menor que β. Consideremos los subconjuntos de $[0,1]^d$ cuyos bordes son imagen de la esfera S^{d-1} por vía de una función con derivadas de orden hasta n_β uniformente acotadas por M y cuyas derivadas de orden n_β satisfacen una condición de Lipchitz de orden $\beta - n_\beta$ con constante M; la clase formada por estos conjuntos tiene $r_I = (d-1)/\beta$ ([14]).

A continuación introducimos la clase $\mathcal{G}$ que se utiliza en [9] y aparece en varios tramos de nuestro trabajo. Si $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_d)$ y $\mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_d)$ pertenecen a $\mathbb{R}^d$, diremos que $\mathbf{a} \leq \mathbf{b}$ cuando $a_i \leq b_i$ para todo i, y anotaremos $(\mathbf{a}, \mathbf{b}] = \prod_{i=1}^d (a_i, b_i]$.

Sea $\mathcal{G} = \{(\mathbf{a}, \mathbf{b}] : \mathbf{a}, \mathbf{b} \in [0,1]^d\}$; $\mathcal{G}$ es cerrado en $\mathcal{B}$. En lo que sigue, además de introducir notaciones que usaremos frecuentemente, aprovechamos para ilustrar el concepto de exponente de entropía métrica con inclusión efectuando una prueba del conocido hecho $r_I(\mathcal{G}) = 0$.

Para cada $n \in \mathbb{Z}_+$ (enteros positivos) y $\mathbf{k} = (k_1, \ldots, k_d) \in \mathbb{Z}^d$ tal que $\bar{1} \leq \mathbf{k} \leq \bar{n}$ (anotamos $\bar{x} = (x, \ldots, x)$) se definen las "n-celdas"

$$C_{n,\mathbf{k}} = \frac{1}{n}(\mathbf{k} - \bar{1}, \mathbf{k}] = \prod_{i=1}^{d} \left(\frac{k_i - 1}{n}, \frac{k_i}{n} \right]. \tag{1.5.1}$$

Para cada n designamos $\mathcal{G}_n$ a la subclase de $\mathcal{G}$ formada por los rectángulos que son unión de n-celdas. Es claro que si $A \in \mathcal{G}$ existen $A_1, A_2 \in \mathcal{G}_n$, con $A_1 \subseteq A \subseteq A_2$ y $|A_1 - A_2| \leq 2d/n$. Dado $\varepsilon > 0$, llamemos $n_\varepsilon = [2d/\varepsilon] + 1$. Entonces $n_I(\mathcal{G}, \varepsilon) \leq$

$\#(\mathcal{G}_{n_\varepsilon}) = (n_\varepsilon(n_\varepsilon+1)/2)^d = O(\varepsilon^{-2d})$ y por lo tanto $H_I(\mathcal{G},\varepsilon) = O(\log(\varepsilon^{-1}))$ lo cual conduce de inmediato a la conclusión $r_I(\mathcal{G}) = r(\mathcal{G}) = 0$.

1.6 Campos aleatorios. Condición de ϕ-mezcla no uniforme. Otros tipos de mezcla.

Dado un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, un campo aleatorio es una familia $(\xi_{\mathbf{k}})_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d}$ de variables aleatorias sobre el mismo. Se dice que el campo es estacionario cuando para todo subconjunto finito $\{\mathbf{k}_1, ..., \mathbf{k}_m\}$ de $\mathbb{Z}^d$ y $\mathbf{j} \in \mathbb{Z}^d$, las distribuciones conjuntas de $(\xi_{\mathbf{k}_1}, ..., \xi_{\mathbf{k}_m})$ y $(\xi_{\mathbf{k}_1+\mathbf{j}}, ..., \xi_{\mathbf{k}_m+\mathbf{j}})$ son iguales.

Para cada $E \in \mathbb{Z}^d$ sea $\mathcal{S}_E \subseteq \mathcal{F}$ la σ-algebra generada por las funciones $\xi_{\mathbf{k}}$ con $\mathbf{k} \in E$. Decimos que el campo $(\xi_{\mathbf{k}})_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d}$ satisface una condición de ϕ-mezcla no uniforme si existe $\phi : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ con $\lim_{t\to+\infty} \phi(t) = 0$ tal que para todo par A_1, A_2 de subconjuntos finitos de $\mathbb{Z}^d$

$$(1.6.1) \qquad \sup_{E_1\in\mathcal{S}_{A_1}, E_2\in\mathcal{S}_{A_2}, P(E_2)>0} |P(E_1|E_2) - P(E_1)| \leq \#(A_1)\phi(d(A_1, A_2)),$$

donde $d(A_1, A_2) = \min\{\|\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2\| : \mathbf{k}_i \in A_i\}$ y $\|.\|$ es la norma euclidiana. No se pierde generalidad si se supone que ϕ es decreciente y que $\phi(0) = 1$. Un camino equivalente es definir, dado el campo aleatorio, la función

$$(1.6.2) \qquad \phi(t) = \sup \frac{|P(E_1|E_2) - P(E_1)|}{\#(A_1)},$$

donde el supremo es tomado sobre todos los conjuntos finitos A_1, A_2 de $\mathbb{Z}^d$ con $d(A_1, A_2) \geq t$ y $E_i \in \mathcal{S}_{A_i}$ con $P(E_2) > 0$. En caso de que $\lim_{t\to+\infty} \phi(t) = 0$ tendremos satisfecha la condición de mezcla no uniforme.

Este tipo de mezcla, que es considerada en [23] y [9], se presenta en ciertos campos de Gibbs (veremos este caso en la cuarta parte). La ϕ-mezcla uniforme, en la que el factor $\#(A_1)$ no aparece, es considerada en trabajos como [15],[10] pero, como se señala en [23, p.533], no se ha presentado en casos de interés para las aplicaciones. Por otra parte ([7]), la ϕ-mezcla uniforme en campos estacionarios es equivalente a la m-dependencia (existencia de m tal que $\phi(t) = 0$ para $t > m$).

Sean, para $i = 1, 2$, conjuntos finitos $A_i \in \mathbb{Z}^d$ y γ_i variables aleatorias $\mathcal{S}_{A_i}$-medibles. Si p y q son números reales positivos con $1/p + 1/q = 1$, $E(|\gamma_1|^p) < \infty$, $E(|\gamma_2|^q) < \infty$, entonces se tiene la desigualdad

(1.6.3)
$$|E(\gamma_1\gamma_2) - E(\gamma_1)E(\gamma_2)| \leq 2(\#(A_1))^{1/p}\phi^{1/p}(d(A_1, A_2))E^{1/p}(|\gamma_1|^p)E^{1/q}(|\gamma_2|^q),$$

que puede ser demostrada adaptando el argumento de [5, Lema 1, p. 170], donde la mezcla es uniforme. De modo similar ([5, Lema 2, p. 171]), si se tiene adicionalmente $|\gamma_i| \leq C_i$ para $i = 1, 2$, entonces

$$(1.6.4) \qquad |E(\gamma_1\gamma_2) - E(\gamma_1)E(\gamma_2)| \leq 2C_1C_2\#(A_1)\phi(d(A_1, A_2)).$$

La ϕ-mezcla se caracteriza por utilizar como medida de dependencia

$$\widetilde{\phi}(A_1, A_2) := \sup |P(E_1|E_2) - P(E_1)|,$$

tomando el supremo sobre los conjuntos $E_i \in \mathcal{S}_{A_i}$. Son usuales también la α-mezcla, en la cual

$$\widetilde{\alpha}(A_1, A_2) = \sup |P(E_1 \cap E_2) - P(E_1)P(E_2)|,$$

la ρ-mezcla, donde

$$\widetilde{\rho}(A_1, A_2) = \sup \mathrm{Corr}(X_1, X_2)$$

(el supremo se toma bajo las condiciones $X_i \in \mathcal{L}^2(\mathcal{S}_{A_i})$) y la β-mezcla caracterizada por

$$\widetilde{\beta}(A_1, A_2) = \sup \|\mathcal{L}(X_1, X_2) - \mathcal{L}(X_1) \otimes \mathcal{L}(X_2)\|_{\mathrm{Var}} = \sup \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{I} \sum_{j=1}^{J} |P(U_i)P(V_j) - P(U_i \cap V_j)|$$

donde $\|.\|_{\mathrm{Var}}$ es la norma de la variación total, el primer supremo se toma con la condición de que X_i sea $\mathcal{S}_{A_i}$-medible y el segundo es tomado sobre las particiones (U_i), (V_j) del espacio total Ω tales que para todo i y j, $U_i \in \mathcal{S}_{A_1}$, $V_j \in \mathcal{S}_{A_2}$. Detalles sobre estas y otras alternativas así como relaciones entre las mismas y ejemplos, pueden consultarse en [12].

1.7 Velocidad de decrecimiento.

Daremos algunas definiciones y notaciones que permitirán ajustar las hipótesis de ϕ-mezcla en varios resultados. Para cada par de enteros positivos i y j sea

$$\phi_{ij}(t) = \sup \frac{|P(E_1|E_2) - P(E_1)|}{\#(A_1)}, \tag{1.7.1}$$

donde el supremo se toma como en (1.6.2) con el agregado de $\#(A_1) = i$, $\#(A_2) = j$. Definimos $\phi_4 = \max\{\phi_{ij},\ i + j \leq 4\}$ (nótese que $\phi_{ij}(t), \phi_4(t) \leq \phi(t)$). Las siguientes cantidades (eventualmente infinitas) serán usadas para medir la velocidad de decrecimiento de las diferentes funciones de mezcla:

$$S = \textstyle\sum_{\mathbf{v}\in\mathbb{Z}^d} \phi^{1/2}(\|\mathbf{v}\|), \qquad S_{ij} = \sum_{\mathbf{v}\in\mathbb{Z}^d} \phi_{ij}^{1/2}(\|\mathbf{v}\|),$$

$$S_4 = \textstyle\sum_{\mathbf{v}\in\mathbb{Z}^d} \phi_4^{1/2}(\|\mathbf{v}\|), \qquad T = \sum_{\mathbf{v}\in\mathbb{Z}^d} \|\mathbf{v}\|^{2d} \phi^{1/2}(\|\mathbf{v}\|),$$

$$T_{ij} = \textstyle\sum_{\mathbf{v}\in\mathbb{Z}^d} \|\mathbf{v}\|^{2d} \phi_{ij}^{1/2}(\|\mathbf{v}\|), \qquad T_4 = \sum_{\mathbf{v}\in\mathbb{Z}^d} \|\mathbf{v}\|^{2d} \phi_4^{1/2}(\|\mathbf{v}\|).$$

Todas estas cantidades dependen finalmente del campo que se considere pero no lo explicitamos para aliviar las notaciones y por la observación siguiente de uso permanente: si un campo aleatorio es de la forma $(g_{\mathbf{k}}(\xi_{\mathbf{k}}))$, con $g_{\mathbf{k}}$ medibles Borel, las funciones ϕ, ϕ_{ij}, ϕ_4 son menores o iguales que las correspondientes a $(\xi_{\mathbf{k}})$. Usaremos, por ejemplo, campos construidos truncando las variables, que son un caso especial de $g_{\mathbf{k}} = I_{B_{\mathbf{k}}}$ donde los $B_{\mathbf{k}}$ son borelianos de $\mathbb{R}$.

Respecto al tratamiento de las series de la forma $\sum_{\mathbf{v}\in\mathbb{Z}^d}\varphi(\|\mathbf{v}\|)$, comenzamos recordando que existen constantes positivas L_1, L_2, K_1, K_2 tales que si $r \geq 1$:

$$L_1 r^d \leq \#(\{\mathbf{v} \in \mathbb{Z}^d : \|\mathbf{v}\| \leq r\}) \leq K_1 r^d, \tag{1.7.2}$$

$$L_2 r^{d-1} \leq \#(\{\mathbf{v} \in \mathbb{Z}^d : r-1 \leq \|\mathbf{v}\| < r\}) \leq K_2 r^{d-1}. \tag{1.7.3}$$

El siguiente lema permite trabajar con series numéricas unidimensionales.

Lema 1.7.1. *Si* $\varphi : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ *es decreciente entonces*

$$\sum_{\mathbf{v}\in\mathbb{Z}^d}\varphi(\|\mathbf{v}\|) < +\infty \iff \sum_{n=1}^{\infty} n^{d-1}\varphi(n) < +\infty, \tag{1.7.4}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{d-1}\varphi(n) < +\infty \implies \lim_{t\to+\infty} t^d\varphi(t) = 0. \tag{1.7.5}$$

Demostración. Anotemos $J_n = \{\mathbf{v} \in \mathbb{Z}^d : n-1 \leq \|\mathbf{v}\| < n\}$

La parte ($\Longrightarrow$) de (1.7.4) resulta, aplicando (1.7.3) y el decrecimiento de φ, de la desigualdad

$$n^{d-1}\varphi(n) \leq L_2 \sum_{\mathbf{v}\in J_n}\varphi(\|\mathbf{v}\|).$$

Para ($\Longleftarrow$) usamos que, por razones similares

$$\sum_{\mathbf{v}\in J_{n+1}}\varphi(\|\mathbf{v}\|) \leq K_2(n+1)^{d-1}\varphi(n) = O(n^{d-1}\varphi(n)).$$

En cuanto a (1.7.5), se tiene

$$n^d\varphi(n) = O\Bigg(\sum_{k=[n/2]}^{n} k^{d-1}\Bigg)\varphi(n) \leq O\Bigg(\sum_{k=[n/2]}^{n} k^{d-1}\varphi(k)\Bigg) = o(1)$$

y la conclusión resulta observando que

$$t^d\varphi(t) \leq ([t]+1)^d\varphi([t]) = O([t]^d\varphi([t])). \ \square$$

1.8 Procesos de sumas parciales.

Sea $(\xi_{\mathbf{k}})_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d}$ un campo aleatorio estacionario con media finita. Para cada $n \in \mathbb{Z}_+$ y $A \in \mathcal{B}$ se define

$$\mathbb{S}_n(A) = \sum_{\bar{1}\leq\mathbf{k}\leq\bar{n}} \frac{|A \cap C_{n,\mathbf{k}}|}{|C_{n,\mathbf{k}}|}(\xi_{\mathbf{k}} - E\xi_{\mathbf{k}}) \tag{1.8.1}$$

(las celdas $C_{n,\mathbf{k}}$ fueron definidas en (1.5.1)). Sin pérdida de generalidad supondremos que el campo está centrado, es decir que para todo $\mathbf{k}$ es $E\xi_{\mathbf{k}} = 0$.

Para cada n, $\mathbb{S}_n$ es un proceso subindicado por $\mathcal{B}$ que suele ser llamado *suma parcial n-ésima*. Debido a la presencia de los factores $\frac{|A\cap C_{n,\mathbf{k}}|}{|C_{n,\mathbf{k}}|}$ se dice que la suma está *suavizada*. Este tipo de procesos fueron considerados por R.Pyke en [26, 1983], para campos independientes, lo mismo que en R.Bass y R.Pyke ([3, 1984]), R.Bass ([2, 1985]) y K.Alexander y R.Pyke ([1, 1986]). En el caso de mezcla uniforme los encontramos en C.Goldie y P.Greenwood ([18, 1986], [19, 1986]) y en el de mezcla no uniforme en D.Chen ([9, 1991]).

Describiremos algunos objetivos que, en la línea de algunas de las citas anteriores, son de interés en este tema.

El primer tipo de resultado al que se apunta es, para una sucesión apropiada (c_n) de constantes positivas, la convergencia de la sucesión de procesos $Z_n := \mathbb{S}_n/c_n$ en el sentido de las distribuciones finito-dimensionales al movimiento browniano sobre alguna clase $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ lo más amplia posible.

El segundo objetivo es la obtención de teoremas centrales del límite derivados de la convergencia anterior en los que, dada una sucesión (Λ_n) de conjuntos de $\mathbb{Z}^d$ que sean de un tipo adecuado con $\Lambda_n \nearrow \mathbb{Z}^d$, se pruebe la existencia de una sucesión (t_n) de constantes positivas tal que

$$\frac{1}{t_n}\sum_{\mathbf{k}\in\Lambda_n} \xi_{\mathbf{k}} \xrightarrow{\mathcal{D}} N(0,1). \tag{1.8.2}$$

Teoremas de este tipo, demostrados con otras técnicas, podemos encontrar en B.Nahapetian ([23, 1980]) y E.Bolthausen ([6, 1982]), donde se consideran campos con varianza finita y mezcla no uniforme. Un caso de varianza infinita y mezcla uniforme es tratado por R.Bradley ([8, 1991]).

Volviendo a los procesos $\mathbb{S}_n$, observamos que las trayectorias de los mismos y de Z_n son funciones continuas y aditivas (sobre $\mathcal{B}$ con la métrica d_L definida en §1.4). Más precisamente, para cada $n \in \mathbb{Z}_+$ y $\omega \in \Omega$, la aditividad de la trayectoria $\mathbb{S}_n(.,\omega)$ es inmediata por construcción; la continuidad (uniforme) es consecuencia de que para cada $A, B \in \mathcal{B}$

$$|\mathbb{S}_n(A,\omega) - \mathbb{S}_n(B,\omega)| \leq |A\Delta B| M_n(\omega) = d_L(A,B)M_n(\omega),$$

siendo

$$M_n(\omega) = \max_{\bar{1}\leq\mathbf{k}\leq\bar{n}} |\xi_{\mathbf{k}}(\omega)| < \infty.$$

En vista de la observación anterior, si ya se ha obtenido (c_n) para la convergencia de las distribuciones finito-dimensionales de los procesos Z_n sobre una clase $\mathcal{A}$ y existe el movimiento browniano continuo sobre cierto conjunto compacto $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{A}$, el tercer objetivo es la obtención de convergencia en distribución, en $CA(\mathcal{K})$, de las Z_n a ese proceso. Un resultado de este tipo se denomina teorema central del límite funcional o uniforme.

En todos los casos, se busca mejorar las hipótesis de resultados anteriores en alguna de las siguientes direcciones: validez bajo condiciones de mayor dependencia entre las variables (por ejemplo menor velocidad de decrecimiento de ϕ), menor exigencia en la condición de momento sobre las $\xi_{\mathbf{k}}$, ampliación de las clases de conjuntos que subindican los procesos. Finalmente, aplicaremos los resultados obtenidos a campos de Gibbs.

2 Convergencia de las distribuciones finito-dimensionales

La Proposición 2.1.1, al sustituir una condición que forma parte de un criterio general de convergencia en [18] por otra que involucra cierta integrabilidad uniforme, resultará ser una herramienta útil para nuestros objetivos.

En el Lema 2.2.1 se prueba una desigualdad de cuarto momento para campos acotados y con cierta velocidad de decrecimiento de la función de mezcla, que permite verificar la citada condición y probar en el Teorema 2.3.5, para campos con varianza finita, la convergencia en el sentido de las distribuciones finito-dimensionales de los procesos $\mathbb{S}_n/n^{d/2}$ (ver (1.8.1)) a un proceso de Wiener sobre $\mathcal{B}$.

El Lema 2.4.1 es otra desigualdad de cuarto momento, esta vez para campos con sexto momento finito y velocidad ligeramente mayor en el decrecimiento de la función de mezcla. Esta desigualdad se usa para llegar a la requerida condición de integrabilidad uniforme para ciertos campos con varianza infinita y hallar en el Teorema 2.6.5 una sucesión (a_n) tal que las distribuciones finito-dimensionales de $\mathbb{S}_n/a_n$ convergen a las de un proceso de Wiener sobre $\mathcal{B}$.

Finalmente, la Proposición 2.7.1 da una condición general, que no alude a la dependencia pero es satisfecha por nuestros procesos, para pasar de la convergencia de las distribuciones finito-dimensionales a un teorema central del límite para ciertas sucesiones crecientes de rectángulos. En ese marco se obtienen el Corolario 2.7.2 (donde la varianza es infinita y las condiciones de dependencia coinciden con las del Teorema 2.6.5) y el Corolario 2.7.3 (donde la varianza es finita y las condiciones de dependencia son las del Teorema 2.3.5), que ofrece una prueba alternativa de un resultado conocido.

2.1 Un criterio general.

Sea $\mathcal{R}$ la familia de conjuntos que son unión de una cantidad finita de elementos de $\mathcal{G}$. Recordaremos dos resultados de Goldie y Greenwood ([18]) a partir de los cuales se desarrollarán los nuestros. En primer lugar extraemos el Teorema 2.1, página 804:

Sea W un proceso aditivo sobre $\mathcal{R}$ que satisface:

(i) $EW(C) = 0. \quad \forall C \in \mathcal{G}$,

(ii) $EW^2(C) = |C| \quad \forall C \in \mathcal{G}$,

(iii) Si $C_1, \ldots, C_k \in \mathcal{G}$ son tales que $d(C_i, C_j) > 0$ para $i \neq j$ entonces $W(C_1), \ldots, W(C_k)$ son independientes,

(iv) $\forall \varepsilon > 0 \quad \lim_{m \to \infty} \sum_{\bar{1} \leq \mathbf{j} \leq \bar{m}} P(|W(C_{m,\mathbf{j}})| \geq \varepsilon) = 0$ ($C_{m,\mathbf{j}}$ son las celdas definidas en (1.5.1)).

Entonces W es el movimiento browniano sobre $\mathcal{R}$.

El resultado siguiente, que aparece como consecuencia del anterior y puede pensarse como la versión asintótica del mismo, es el Teorema 2.2 del mismo trabajo:

Si (Z_n) es una sucesión de procesos aditivos sobre $\mathcal{R}$ tales que:

(i) $\lim_{n\to\infty} EZ_n(C) = 0. \quad \forall C \in \mathcal{G}$,

(ii) $\lim_{n\to\infty} EZ_n^2(C) = |C| \quad \forall C \in \mathcal{G}$,

(iii) Si $C_1, \ldots, C_k \in \mathcal{G}$ son tales que $d(C_i, C_j) > 0$ para $i \neq j$ y $z_1, \ldots, z_k \in \mathbb{R}$, entonces

$$P(Z_n(C_1) \leq z_1, \ldots, Z_n(C_k) \leq z_k) - \prod_{i=1}^{k} P(Z_n(C_i) \leq z_i) \to 0$$

cuando $n \to \infty$,

(iv) $\forall \varepsilon > 0 \quad \lim_{m\to\infty} \limsup_{n\to\infty} \sum_{1\leq j\leq m} P(|Z_n(C_{m,j})| \geq \varepsilon) = 0$,

(v) $\left(Z_n^2(C)\right)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ es uniformemente integrable para cada $C \in \mathcal{G}$.

Entonces (Z_n) converge, en el sentido de las distribuciones finito-dimensionales al movimiento browniano sobre $\mathcal{R}$.

En el criterio que se prueba en la proposición que sigue se modifica el punto (iv) de este teorema, presentando una condición de integrabilidad uniforme más ajustada que la propuesta en [18, Corolario 3.3].

Llamaremos $\mathcal{Q}$ a la clase de los cuadrados, es decir los conjuntos $\prod_{i=1}^{d}(a_i, b_i]$ pertenecientes a $\mathcal{G}$, tales que para algún $\alpha > 0$ y para todo i se cumple $b_i - a_i = \alpha$

Proposición 2.1.1. *Sea (Z_n) una sucesión de procesos aditivos sobre $\mathcal{R}$. Supongamos que:*

(i) $\lim_{n\to\infty} EZ_n(C) = 0. \quad \forall C \in \mathcal{G}$,

(ii) $\lim_{n\to\infty} EZ_n^2(C) = |C| \quad \forall C \in \mathcal{G}$,

(iii) Si $C_1, \ldots, C_k \in \mathcal{G}$ son tales que $d(C_i, C_j) > 0$ para $i \neq j$ y si $z_1, \ldots, z_k \in \mathbb{R}$ entonces

$$P(Z_n(C_1) \leq z_1, \ldots, Z_n(C_k) \leq z_k) - \prod_{i=1}^{k} P(Z_n(C_i) \leq z_i) \to 0$$

cuando $n \to \infty$,

(iv) *Existe una función $\widehat{n} : (0,1] \to \mathbb{Z}_+$ tal que si $F = \{(n,A) : A \in \mathcal{Q}, n \geq \widehat{n}(|A|)\}$ entonces $(Z_n^2(A)/|A|)_{(n,A)\in F}$ es uniformemente integrable ,*

(v) $\left(Z_n^2(C)\right)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ *es uniformente integrable para cada $C \in \mathcal{G}$.*

Entonces (Z_n) converge, en el sentido de las distribuciones finito-dimensionales al movimiento browniano sobre $\mathcal{R}$.

Demostración. Las condiciones (i),(ii),(iii) y (v) son las del citado [18, Teorema 2.2]. Probaremos que nuestra hipótesis (iv) implica la condición (iv) de ese teorema.

Sean $\varepsilon, \gamma > 0$. Nuestra condición implica que existe $p \in \mathbb{Z}_+$ tal que para todo $(n,A) \in F$

$$E_{p^d\varepsilon^2}\left(\frac{Z_n^2(A)}{|A|}\right) \leq \varepsilon^2\gamma$$

(usamos la notación $E_x(X) = EXI_{\{|X|>x\}}$). Dado $m \geq p$, para todo $n \geq \widehat{n}(m^{-d})$ y todo $\mathbf{j}$ se tiene $(n, C_{m,\mathbf{j}}) \in F$. Entonces:

$$\sum_{\bar{1}\leq\mathbf{j}\leq\bar{m}} P(|Z_n(C_{m,\mathbf{j}})| \geq \varepsilon) \leq \sum_{\bar{1}\leq\mathbf{j}\leq\bar{m}} P\left(\frac{Z_n^2(C_{m,\mathbf{j}})}{|C_{m,\mathbf{j}}|} \geq \varepsilon^2 m^d\right) \leq$$

$$\leq \frac{1}{m^d\varepsilon^2}\sum_{\bar{1}\leq\mathbf{j}\leq\bar{m}} E_{p^d\varepsilon^2}\left(\frac{Z_n^2(C_{m,\mathbf{j}})}{|C_{m,\mathbf{j}}|}\right) \leq \frac{1}{m^d\varepsilon^2}\sum_{\bar{1}\leq\mathbf{j}\leq\bar{m}} \varepsilon^2\gamma = \gamma. \ \square$$

2.2 Una desigualdad de cuarto momento para campos acotados.

La desigualdad que probaremos en el Lema 2.2.1 nos permitirá trabajar a la manera de Billingsley en [5, Capítulo 4], donde se trata el caso unidimensional con mezcla uniforme. En [10, Teorema 1], se prueba una desigualdad similar pero en el caso de mezcla uniforme, campo estacionario y donde los subconjuntos de $\mathbb{Z}^d$ considerados son rectángulos. Nuestro resultado nace de la observación de que la prueba de la desigualdad similar unidimensional [5, Lema 4, Pag. 172] no utiliza el concepto de mezcla uniforme en toda su potencia. Las dificultades técnicas de la extensión a dimensiones mayores pasan en general por la carencia de orden entre las variables.

Lema 2.2.1. *Sea $(\eta_{\mathbf{k}})_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d}$ un campo aleatorio con $h = \sup_{t\geq 0} t^{2d}\phi_4(t) < +\infty$ (ver §1.7). Supongamos que existe $C > 0$ tal que $|\eta_{\mathbf{k}}(\omega)| \leq C$ para todo $\mathbf{k}$ y ω y que $E\eta_{\mathbf{k}} = 0$ para todo $\mathbf{k}$. Entonces, para todo conjunto finito $M \subset \mathbb{Z}^d$:*

$$E\left(\sum_{\mathbf{k}\in M}\eta_{\mathbf{k}}\right)^4 \leq K_{\phi_4}(\#(M))^2C^4$$

con $K_{\phi_4} = 4!\big(1 + 4\big(\sum_{\mathbf{w}\in\mathbb{Z}^d} \phi_4(\|\mathbf{w}\|)\big)^2 + 6K_1^2 9^d h\big)$ *donde* K_1 *es la constante de la desigualdad* (1.7.2).

Demostración. En primer lugar acotaremos el valor de $|E(\eta_{\mathbf{i}}\eta_{\mathbf{j}}\eta_{\mathbf{k}}\eta_{\mathbf{l}})|$ en las diferentes formas en las que el conjunto $V = \{\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k},\mathbf{l}\}$ se puede presentar. Cuando $\#(V) = 1$ se tiene $E\eta_{\mathbf{i}}^4 \leq C^4$. Si $\#(V) \geq 2$, sea $r = r(V)$ la mayor distancia entre dos conjuntos no vacíos A y B tales que $\{A, B\}$ es una partición de V. Supongamos,por ejemplo, que $\|\mathbf{i}-\mathbf{j}\| = r$ con $\mathbf{i} \in A$ y $\mathbf{j} \in B$. Afirmamos que $A \subseteq \{\mathbf{x} : \|\mathbf{x}-\mathbf{i}\| \leq 3r\}$ y $B \subseteq \{\mathbf{x} : \|\mathbf{x}-\mathbf{j}\| \leq 3r\}$. Si $\#(V) = 2$ no hay nada que probar. Supongamos que $\#(V) = 3$, $\mathbf{k} \in A$ y $\|\mathbf{k}-\mathbf{i}\| > 3r$; entonces $\|\mathbf{k}-\mathbf{j}\| > r$ y $\{\{\mathbf{k}\},\{\mathbf{i},\mathbf{j}\}\}$ sería mejor que $\{A, B\}$. Si $\#(V) = 4$, $\mathbf{k} \in A$ y $\|\mathbf{k}-\mathbf{i}\| > 3r$ entonces podemos tomar la partición $\{\{\mathbf{k}\},\{\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{l}\}\}$ si $\|\mathbf{l}-\mathbf{k}\| > r$ o $\{\{\mathbf{l},\mathbf{k}\},\{\mathbf{i},\mathbf{j}\}\}$ si $\|\mathbf{l}-\mathbf{k}\| \leq r$. De este modo quedan comprobadas las anunciadas inclusiones de A y B. Ahora aplicaremos la desigualdad (1.6.4) observando que, debido a que $\#(A) + \#(B) \leq 4$, ϕ puede ser sustituida por ϕ_4. Si $\#(V) \geq 2$ hay dos casos:
a) $\|\mathbf{i}-\mathbf{j}\| = r$, $\|\mathbf{k}-\mathbf{i}\| \leq 3r$, $\|\mathbf{l}-\mathbf{j}\| \leq 3r$.
$|E(\eta_{\mathbf{i}}\eta_{\mathbf{k}})(\eta_{\mathbf{j}}\eta_{\mathbf{l}})| \leq |E(\eta_{\mathbf{i}}\eta_{\mathbf{k}})E(\eta_{\mathbf{j}}\eta_{\mathbf{l}})| + 2.2.C^2.C^2\phi_4(r) \leq 4C^4\big(\phi_4(\|\mathbf{k}-\mathbf{i}\|)\phi_4(\|\mathbf{l}-\mathbf{j}\|) + \phi_4(r)\big)$.
b) $\|\mathbf{i}-\mathbf{j}\| = r$, $\|\mathbf{k}-\mathbf{i}\| \leq 3r$, $\|\mathbf{l}-\mathbf{i}\| \leq 3r$.
$|E(\eta_{\mathbf{i}}\eta_{\mathbf{k}}\eta_{\mathbf{l}})(\eta_{\mathbf{j}})| \leq 2C^3.C\phi_4(r) = 2C^4\phi_4(r)$.

Y ahora, teniendo en cuenta (con exceso) las permutaciones entre $\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k},\mathbf{l}$:

$$
\begin{aligned}
E\Big(\sum_{\mathbf{k}\in M}\eta_{\mathbf{k}}\Big)^4 &\leq \#(M)C^4 \; + \\
& 4!.4C^4\sum_{\mathbf{i}\in M}\sum_{\mathbf{j}\in M}\Big(\sum_{\|\mathbf{k}-\mathbf{i}\|,\|\mathbf{l}-\mathbf{j}\|\leq 3\|\mathbf{i}-\mathbf{j}\|}(\phi_4(\|\mathbf{k}-\mathbf{i}\|)\phi_4(\|\mathbf{l}-\mathbf{j})\|) + \phi_4(\|\mathbf{i}-\mathbf{j}\|)\,)\Big) \\
&\quad + 4!.2C^4\sum_{\mathbf{i}\in M}\sum_{\mathbf{j}\in M}\Big(\sum_{\|\mathbf{k}-\mathbf{i}\|,\|\mathbf{l}-\mathbf{i}\|\leq 3\|\mathbf{i}-\mathbf{j}\|}\phi_4(\|\mathbf{i}-\mathbf{j}\|\Big) \\
&\leq \#(M)C^4 + 4!.4C^4\sum_{\mathbf{i}\in M}\sum_{\mathbf{v}+\mathbf{i}\in M}\sum_{\|k'\|,\|l'\|\leq 3\|\mathbf{v}\|}\phi_4(\|k'\|)\phi_4(\|l'\|) \; + \\
&\quad 4!.6C^4\sum_{\mathbf{i}\in M}\sum_{\mathbf{v}+\mathbf{i}\in M}\sum_{\|k'\|,\|l'\|\leq 3\|\mathbf{v}\|}\phi_4(\|\mathbf{v}\|) \\
&\leq \#(M)C^4 + 4!.4C^4\Big(\#(M)\sum_{\mathbf{w}\in\mathbb{Z}^d}\phi_4(\|\mathbf{w}\|)\Big)^2 \\
&\quad + \; 4!6C^4\#(M)\sum_{\mathbf{i}\in M}\sup_{\mathbf{v}}\Big(9^d K_1^2\|\mathbf{v}\|^{2d}\phi_4(\|\mathbf{v}\|)\Big) \\
&\leq K_{\phi_4}(\#(M))^2C^4.
\end{aligned}
$$

Nótese que la convergencia de $\sum\phi_4(\|\mathbf{v}\|)$ es consecuencia de que $h < +\infty$ aplicando (1.7.4). □

Observación. El lema anterior vale bajo la condición de α-mezcla

(2.2.1) $$\sup_{t\geq 0} t^{2d}\alpha_4(t) < +\infty,$$

donde (ver §1.6)

$$\alpha_4(t) = \sup_{d(A_1,A_2)\geq t,\ \#(A_1)+\#(A_2)\leq 4} \frac{\widetilde{\alpha}(A_1,A_2)}{\#(A_1)}$$

(se supone siempre que A_1 y A_2 son no vacíos). Esto se debe esencialmente a que para variables acotadas con α-mezcla vale una desigualdad similar a (1.6.4). Hacemos esta observación por la semejanza con una condición en [6].

La primera consecuencia de la desigualdad de cuarto momento es un resultado de integrabilidad uniforme para campos con varianza finita.

Lema 2.2.2. *Sea $(\xi_{\mathbf{k}})_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d}$ un campo aleatorio cuyas variables $\xi_{\mathbf{k}}$ tienen todas la misma distribución, $E\xi_{\mathbf{k}}=0$, $E\xi_{\mathbf{k}}^2<+\infty$ y que satisface $S_4<+\infty$ (ver §1.7).*

Si para cada conjunto finito $M\subset\mathbb{Z}^d$ y cada familia $\lambda=(\lambda_{\mathbf{j}})_{\mathbf{j}\in M}$ de números reales tal que $0\leq\lambda_{\mathbf{j}}\leq 1$ $\forall\mathbf{j}$ se define $T_{M,\lambda}=\sum_{\mathbf{j}\in M}\lambda_{\mathbf{j}}\xi_{\mathbf{j}}$ entonces la familia $\left(\frac{T^2_{M,\lambda}}{\#(M)}\right)_{M,\lambda}$ es uniformemente integrable.

Demostración. Nuestro argumento adaptará el de [5, p.176] donde se trata el caso unidimensional. Fijemos M y λ. Sea $u>0$; para cada $\mathbf{k}\in M$ se define:

$$\eta^{(1)}_{\mathbf{k},u}=\begin{cases}\lambda_{\mathbf{k}}\xi_{\mathbf{k}} & \text{si } |\xi_{\mathbf{k}}|\leq u,\\ 0 & \text{si } |\xi_{\mathbf{k}}|>u,\end{cases}\qquad \eta^{(2)}_{\mathbf{k},u}=\begin{cases}0 & \text{si } |\xi_{\mathbf{k}}|\leq u,\\ \lambda_{\mathbf{k}}\xi_{\mathbf{k}} & \text{si } |\xi_{\mathbf{k}}|>u,\end{cases}$$

$$\eta'_{\mathbf{k},u}=\eta^{(1)}_{\mathbf{k},u}-E\eta^{(1)}_{\mathbf{k},u}\,,\qquad \eta''_{\mathbf{k},u}=\eta^{(2)}_{\mathbf{k},u}-E\eta^{(2)}_{\mathbf{k},u},$$

$$Y_{M,u}=\sum_{\mathbf{k}\in M}\eta'_{\mathbf{k},u}\,,\qquad D_{M,u}=\sum_{\mathbf{k}\in M}\eta''_{\mathbf{k},u}\,.$$

Tenemos $T_{M,\lambda}=Y_{M,u}+D_{M,u}$. Ahora aplicamos el lema 2.2.1 a $(\eta'_{\mathbf{k},u})_{\mathbf{k}\in M}$ (la condición $h<+\infty$ se cumple por (1.7.4) y (1.7.5)) y obtenemos, para cada $\gamma>0$,

$$E_\gamma\left(\frac{Y^2_{M,u}}{\#(M)}\right)\leq\frac{1}{\gamma}E\left(\frac{Y^4_{M,u}}{(\#(M))^2}\right)\leq\frac{K_{\phi_4}(2u)^4}{\gamma} \tag{2.2.2}$$

Aplicando (1.6.3) (nótese que los cardinales valen 1 y $\phi_{11}\leq\phi_4$) resulta

$$|E(\eta''_{\mathbf{j},u}\eta''_{\mathbf{k},u})|\leq 2\phi_4^{1/2}(\|\mathbf{k}-\mathbf{j}\|)E^{1/2}((\eta''_{\mathbf{j},u})^2)E^{1/2}((\eta''_{\mathbf{k},u})^2)\leq 8\phi_4^{1/2}(\|\mathbf{k}-\mathbf{j}\|)E_{u^2}(\xi_{\mathbf{0}}^2).$$

Entonces

$$E(D^2_{M,u})\leq\sum_{\mathbf{j}\in M}\left(\sum_{\mathbf{k}\in M}|E(\eta''_{\mathbf{j},u}\eta''_{\mathbf{k},u})|\right)\leq 8\#(M)E_{u^2}(\xi_{\mathbf{0}}^2)S_4. \tag{2.2.3}$$

Por (2.2.2), (2.2.3) y la desigualdad $T^2_{M,\lambda}\leq 2Y^2_{M,u}+2D^2_{M,u}$:

$$E_\gamma\left(\frac{T^2_{M,\lambda}}{\#(M)}\right)\leq 4E_{\gamma/4}\left(\frac{Y^2_{M,u}}{\#(M)}\right)+4E\left(\frac{D^2_{M,u}}{\#(M)}\right)\leq K'\left(\frac{u^4}{\gamma}+E_{u^2}(\xi_{\mathbf{0}}^2)\right)$$

donde K' depende solamente de ϕ_4 y d.

Dado $\varepsilon>0$, se toma u tal que $K'E_{u^2}(\xi_{\mathbf{0}}^2)<\varepsilon/2$; entonces si $\gamma>2K'u^4/\varepsilon$, obtenemos $E_\gamma\left(\frac{T^2_{M,\lambda}}{\#(M)}\right)<\varepsilon$ para cualquier M y λ. □

2.3 Teorema para campos con varianza finita.

En los lemas 2.3.1-2.3.3 $(\xi_{\mathbf{k}})_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d}$ será un campo aleatorio centrado, equidistribuido, con varianza finita y $S_4 < +\infty$. En esta sección, para cada $A \in \mathcal{B}$,

$$Z_n(A) = \frac{1}{n^{d/2}} \sum_{\bar{1}\leq \mathbf{k}\leq \bar{n}} \frac{|A\cap C_{n,\mathbf{k}}|}{|C_{n,\mathbf{k}}|}\xi_{\mathbf{k}}$$

y $V(n,A) = \bigcup_{C_{n,\mathbf{k}}\cap A\neq\emptyset} C_{n,\mathbf{k}}$ (el menor conjunto de $\mathcal{G}_n$ que contiene a A). Para cada $x \in \mathbb{R}_+$ se define $\widehat{n}(x) = [x^{-1/d}] + 1$ y $F = \{(n,A) : A \in \mathcal{Q}, n \geq \widehat{n}(|A|)\}$. Se tiene el siguiente lema geométrico:

Lema 2.3.1. *Si $(n,A) \in F$ entonces $|V(n,A)| \leq 3^d|A|$.*

Demostración. Observamos que $|A| \geq n^{-d}$ por lo que la medida L_A de cada "lado" de A satisface $L_A \geq 1/n$ Pero entonces cada lado de $V(n,A)$ tiene una medida $L_V \leq L_A + 2/n \leq 3L_A$. □

Lema 2.3.2. *La familia* $\left(\dfrac{Z_n^2(A)}{|V(n,A)|}\right)_{A\in\mathcal{B},n\in\mathbb{Z}_+}$ *es uniformemente integrable.*

Demostración. Tomemos $M = M_A = \{\mathbf{j} : C_{n,\mathbf{j}} \cap A \neq \emptyset\}$ y para cada $\mathbf{j} \in M$ sea $\lambda_{\mathbf{j}} = \lambda_{A,\mathbf{j}} = \dfrac{|A\cap C_{n,\mathbf{j}}|}{|C_{n,\mathbf{j}}|}$. En la notación del Lema 2.2.2 se tiene $Z_n^2(A) = n^{-d}T^2_{M,\lambda}$. Además $|V(n,A)| = n^{-d}\#(M)$ por lo que se finaliza aplicando ese lema. □

Lema 2.3.3. *La familia* $\left(\dfrac{Z_n^2(A)}{|A|}\right)_{(n,A)\in F}$ *es uniformemente integrable.*

Demostración. Por el Lema 2.3.1, si $(n,A) \in F$ se tiene

$$\frac{Z_n^2(A)}{|A|} \leq \frac{3^d Z_n^2(A)}{|V(n,A)|}.$$

Aplicando el Lema 2.3.2 se obtiene la conclusión deseada. □

El lema siguiente permitirá para pasar de la convergencia sobre $\mathcal{R}$ a la convergencia sobre $\mathcal{B}$ y tendrá utilidad en la Parte 3 (dedicada a teoremas funcionales).

Lema 2.3.4. *Sean $(\xi_{\mathbf{k}})_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d}$ un campo aleatorio equidistribuido, con varianza finita y $S_{11} < +\infty$. Supongamos que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función medible-Borel tal que $|f(x)| \leq |x|$ para todo x.*

Entonces, para todo $n \in \mathbb{Z}_+$ y todo $A \in \mathcal{B}$:

$$\mathrm{Var}\left(\frac{1}{n^{d/2}} \sum_{\bar{1}\leq \mathbf{k}\leq \bar{n}} \frac{|A\cap C_{n,\mathbf{k}}|}{|C_{n,\mathbf{k}}|} f(\xi_{\mathbf{k}})\right) \leq 2S_{11}E\xi_{\mathbf{0}}^2|A|.$$

Demostración. Para cada $\mathbf{k}$ sea $\eta_{\mathbf{k}} = f(\xi_{\mathbf{k}})$ y $\mu_{\mathbf{k}} = |A \cap C_{n,\mathbf{k}}|$. Recordando que $|C_{n,\mathbf{k}}| = n^{-d}$, $S_{11} \leq S_4 < +\infty$ y usando (1.6.3) se tiene:

$$\mathrm{Var}\Big(\frac{1}{n^{d/2}} \sum_{\bar{1} \leq \mathbf{k} \leq \bar{n}} \frac{|A \cap C_{n,\mathbf{k}}|}{|C_{n,\mathbf{k}}|}\eta_{\mathbf{k}}\Big) = \mathrm{Var}\big(n^{d/2} \sum_{\mathbf{k}} \mu_{\mathbf{k}}\eta_{\mathbf{k}}\big) =$$

$$n^d E\big(\sum_{\mathbf{k}} \mu_{\mathbf{k}}\eta_{\mathbf{k}}\big)^2 - n^d E^2\big(\sum_{\mathbf{k}} \mu_{\mathbf{k}}\eta_{\mathbf{k}}\big) = n^d \sum_{\mathbf{i}}\sum_{\mathbf{j}} \mu_{\mathbf{i}}\mu_{\mathbf{j}}\big(E(\eta_{\mathbf{i}}\eta_{\mathbf{j}}) - E\eta_{\mathbf{i}}E\eta_{\mathbf{j}}\big) \leq$$

$$n^d \max_{\mathbf{k}}\{\mu_{\mathbf{k}}\} \sum_{\mathbf{i}} \mu_{\mathbf{i}} \sum_{\mathbf{j}} 2\phi_{11}^{1/2}(\|\mathbf{i}-\mathbf{j}\|)E\xi_{\mathbf{0}}^2 \leq 2S_{11}E\xi_{\mathbf{0}}^2 \sum_{\mathbf{i}} \mu_{\mathbf{i}} = 2S_{11}E\xi_{\mathbf{0}}^2|A|. \ \square$$

Pasamos ahora al resultado principal de esta sección

Teorema 2.3.5. *Sea $(\xi_{\mathbf{k}})_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d}$ un campo aleatorio estacionario, centrado, con varianza finita y que cumple la condición de ϕ-mezcla no uniforme con $S < +\infty$. Entonces $\sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d} E(\xi_{\mathbf{0}}\xi_{\mathbf{k}})$ converge absolutamente a un valor $\sigma^2 \geq 0$. Si $\sigma^2 > 0$, la sucesión de procesos (Z_n) converge, en el sentido de las distribuciones finito-dimensionales al proceso de Wiener sobre $\mathcal{B}$ con parámetro σ.*

Demostración. La sumabilidad de $\sum E(\xi_{\mathbf{0}}\xi_{\mathbf{k}})$ resulta de que $S < +\infty$ junto con la desigualdad $|E(\xi_{\mathbf{0}}\xi_{\mathbf{k}})| \leq 2\phi^{1/2}(\|\mathbf{k}\|)E\xi_{\mathbf{0}}^2$. La suma no puede ser negativa; el argumento que daremos para probar el punto (ii) de la Proposición 2.1.1 muestra que

$$\sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d} E(\xi_{\mathbf{0}}\xi_{\mathbf{k}}) = \lim_{n\to\infty} n^{-d}E\Big(\sum_{\bar{1}\leq\mathbf{j}\leq\bar{n}} \xi_{\mathbf{j}}\Big)^2.$$

Si $\sigma^2 > 0$ puede suponerse, sin pérdida de generalidad, que $\sigma^2 = 1$. La prueba consta de dos pasos:

Paso 1. Convergencia sobre $\mathcal{R}$

Aplicaremos la Proposición 2.1.1. El punto (i) es de verificación inmediata. El punto (ii) resulta del siguiente argumento usado en [19]. Para cada $\mathbf{i}$, sea $\gamma(\mathbf{i}) = E(\xi_{\mathbf{0}}\xi_{\mathbf{i}})$ y para cada $\mathbf{x} \in C$, $\mathbf{k}_n(\mathbf{x})$ el único $\mathbf{k}$ tal que $\mathbf{x} \in C_{n,\mathbf{k}}$. Se define

$$h_n(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{j}} n^d|C \cap C_{n,\mathbf{j}}|\gamma(\mathbf{j} - \mathbf{k}_n(\mathbf{x})).$$

Usando la estacionariedad se tiene

$$EZ_n^2(C) = \int_C h_n(\mathbf{x})d\mathbf{x}.$$

Entonces, si probamos que las funciones h_n están uniformemente acotadas y que $h_n(\mathbf{x}) \to 1$ para cada $\mathbf{x}$, (ii) estará cumplido por el teorema de la convergencia dominada. Lo primero surge de que $|h_n(\mathbf{x})| \leq 2SE\xi_{\mathbf{0}}^2$. Definamos

$$D_n = \mathbb{Z}^d - \{\mathbf{j} : C_{n,\mathbf{j}} \subseteq C\}.$$

Si $\mathbf{x}$ is un punto interior del rectángulo C

$$h_n(\mathbf{x}) = 1 - R_n(\mathbf{x}) \qquad \text{, donde}$$

$$R_n(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{j}\in D_n} w_{n\mathbf{j}}\gamma(\mathbf{j} - \mathbf{k}_n(\mathbf{x})) \qquad \text{, con } 0 \leq w_{n\mathbf{j}} \leq 1$$

Cuando $n \to \infty$ $R_n(\mathbf{x}) \to 0$ porque siempre es posible hallar una sucesión de números positivos $L_n(\mathbf{x}) \to \infty$ tal que

$$|R_n(\mathbf{x})| \leq \sum_{\|\mathbf{i}\|>L_n(\mathbf{x})} \gamma(\mathbf{i}) \leq 2E(\xi_{\mathbf{0}}^2) \sum_{\|\mathbf{i}\|>L_n(\mathbf{x})} \phi^{1/2}(\|\mathbf{i}\|).$$

Con esto el punto (ii) queda resuelto.

Para (iii) probamos el caso $k = 2$ (el caso general es análogo). Sean $r = d(C_1, C_2)$, $A_n = \{Z_n(C_1) \leq z_1\}$ y $B_n = \{Z_n(C_2) \leq z_2\}$. Entonces usando (1.7.4) y (1.7.5) resulta

$$|P(A_n \cap B_n) - P(A_n)P(B_n)| \leq n^d \phi(nr - 2d^{1/2}) \to 0 \quad \text{cuando } n \to \infty.$$

La prueba de (iv) es el Lema 2.3.3. Para (v) observamos que si $A \in \mathcal{G}$ es un conjunto fijo, existe $n_0(A)$ tal que para todo $n \geq n_0$ es $|V(n, A)| \leq 2|A|$ y por lo tanto

$$\frac{Z_n^2(A)}{|A|} \leq \frac{2Z_n^2(A)}{|V(n, A)|}$$

y se aplica el Lema 2.3.2.

Antes de continuar observamos que en [9, §2] para probar lo demostrado en este primer paso se usa la condición más fuerte $E|\xi_{\mathbf{0}}|^{2+\delta} < +\infty$ con $\delta > 0$.

Paso 2. Convergencia sobre $\mathcal{B}$

Aquí aplicaremos [18, Teorema 3.1] por el cual es suficiente probar:

(i) $\{Z_n(A)\}_{A\in\mathcal{R}}$ converge en el sentido de las distribuciones finito-dimensionales al proceso de Wiener sobre $\mathcal{R}$ con parámetro σ;

(ii) Si $A \in \mathcal{B}$ y (C_l) es una sucesión decreciente de conjuntos de $\mathcal{R}$ que contienen a A y $|\bigcap C_l - A| = 0$ entonces, para todo $\varepsilon > 0$

$$\lim_{l\to\infty} \limsup_{n\to\infty} P(|Z_n(C_l) - Z_n(A)| \geq \varepsilon) = 0.$$

En el paso anterior se probó (i). La validez de (ii) resulta de la desigualdad

$$P(|Z_n(C_l) - Z_n(A)| \geq \varepsilon) \leq \frac{2SE\xi_{\mathbf{0}}^2|C_l - A|}{\varepsilon^2}$$

que surge de aplicar la desigualdad de Chebyschev, la aditividad de Z_n y el Lema 2.3.4. □

Observación. Los lemas previos al Teorema principal, que suceden al Lema 2.2.1, son válidos bajo (2.2.1) y la condición de ρ-mezcla

$$\sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d} \rho_2(\|\mathbf{k}\|) < +\infty, \tag{2.3.1}$$

donde (ver §1.6)

$$\rho_2(t) = \sup_{d(A_1,A_2)\geq t,\ \#(A_1)=\#(A_2)=1} \widetilde{\rho}(A_1, A_2).$$

El Teorema 2.3.5 vale bajo (2.3.1) y

$$\sup_{t\geq 0} t^{2d}\alpha(t) < +\infty, \tag{2.3.2}$$

donde

$$\alpha(t) = \sup_{d(A_1,A_2)\geq t,\ \#(A_1)+\#(A_2)<\infty} \frac{\widetilde{\alpha}(A_1, A_2)}{\#(A_1)}$$

(esta condición resulta natural si se mira (iii) en la prueba de este teorema). Otra posibilidad es considerar

$$\rho(t) = \sup_{d(A_1,A_2)\geq t,\ \#(A_1)+\#(A_2)<\infty} \frac{\widetilde{\rho}(A_1, A_2)}{\#(A_1)}$$

y observar que la condición

$$\sup_{t\geq 0} t^{2d}\rho(t) < +\infty \tag{2.3.3}$$

implica (2.3.1) y (2.3.2).

2.4 Otra desigualdad de cuarto momento.

En esta sección presentamos una desigualdad de cuarto momento para variables con sexto momento finito. El resultado no es más general que el Lema 2.2.1 ya que se pide una velocidad mayor en el decrecimiento de la función de mezcla ($T_4 < +\infty$).

Lema 2.4.1. *Sea $(\eta_{\mathbf{k}})_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d}$ un campo aleatorio centrado que satisface $T_4 < +\infty$. Supongamos que se tiene una variable aleatoria ζ tal que $E(\eta_{\mathbf{k}}^{2m}) \leq E(\zeta^{2m}) < +\infty$ para todo $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d$ y todo entero positivo $m \leq 3$.*

Entonces existe $L > 0$ (que depende solamente de ϕ_4 y d) y tal que para todo subconjunto finito M de $\mathbb{Z}^d$:

$$E\Big(\sum_{\mathbf{k}\in M} \eta_{\mathbf{k}}\Big)^4 \leq L\Big(\#(M)E(\zeta^4) + \#^2(M)E^2(\zeta^2) + \#(M)E^{1/2}(\zeta^6)E^{1/2}(\zeta^2)\Big).$$

Demostración. La condición $T_4 < +\infty$ nos permitirá ir más lejos que en el Lema 2.2.1. En principio acotaremos $|E(\eta_{\mathbf{i}}\eta_{\mathbf{j}}\eta_{\mathbf{k}}\eta_{\mathbf{l}})|$, para $\{\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k},\mathbf{l}\} \subset M$, usando la desigualdad de Hölder y (1.6.3).

Sean $V = \{\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k},\mathbf{l}\}$, $r(V)$ (si $\#(V) \geq 2$) y K_1 igual que en el Lema 2.2.1. Hay tres casos:

(i) $\mathbf{i} = \mathbf{j} = \mathbf{k} = \mathbf{l}$.

$$|E(\eta_{\mathbf{i}}\eta_{\mathbf{j}}\eta_{\mathbf{k}}\eta_{\mathbf{l}})| \leq E(\zeta^4)$$

(ii) $A = \{\mathbf{i},\mathbf{k}\}$, $B = \{\mathbf{j},\mathbf{l}\}$, $\|\mathbf{i}-\mathbf{j}\| = r$, $\|\mathbf{k}-\mathbf{i}\| \leq 3r$, $\|\mathbf{l}-\mathbf{j}\| \leq 3r$.

$$\begin{aligned}|E((\eta_{\mathbf{i}}\eta_{\mathbf{k}})(\eta_{\mathbf{j}}\eta_{\mathbf{l}}))| \leq &\\ &|E(\eta_{\mathbf{i}}\eta_{\mathbf{k}})||E(\eta_{\mathbf{j}}\eta_{\mathbf{l}})| + 2\phi_4^{1/2}(r)E^{1/2}(\eta_{\mathbf{i}}^2\eta_{\mathbf{k}}^2)E^{1/2}(\eta_{\mathbf{j}}^2\eta_{\mathbf{l}}^2) \leq \\ &E^2(\zeta^2)4\phi_4^{1/2}(\|\mathbf{i}-\mathbf{k}\|)\phi_4^{1/2}(\|\mathbf{j}-\mathbf{l}\|) + 2\phi_4^{1/2}(r)E(\zeta^4)\end{aligned}$$

(iii) $A = \{\mathbf{i},\mathbf{k},\mathbf{l}\}$, $B = \{\mathbf{j}\}$, $\|\mathbf{i}-\mathbf{j}\| = r$, $\|\mathbf{k}-\mathbf{i}\| \leq 3r$, $\|\mathbf{l}-\mathbf{i}\| \leq 3r$.

$$\begin{aligned}|E((\eta_{\mathbf{i}}\eta_{\mathbf{k}}\eta_{\mathbf{l}})(\eta_{\mathbf{j}}))| \leq &\\ &2\phi_4^{1/2}(r)E^{1/2}(\eta_{\mathbf{i}}^2\eta_{\mathbf{k}}^2\eta_{\mathbf{l}}^2)E^{1/2}(\eta_{\mathbf{j}}^2) \leq \\ &2\phi_4^{1/2}(r)E^{1/6}(\eta_{\mathbf{i}}^6)E^{1/6}(\eta_{\mathbf{k}}^6)E^{1/6}(\eta_{\mathbf{l}}^6)E^{1/2}(\eta_{\mathbf{j}}^2) = \\ &2\phi_4^{1/2}(r)E^{1/2}(\zeta^6)E^{1/2}(\zeta^2).\end{aligned}$$

Ahora, teniendo en cuenta (con exceso) las permutaciones entre $\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k},\mathbf{l}$:

$$\begin{aligned}E((\sum_{\mathbf{k}\in M}\eta_{\mathbf{k}})^4) \leq \#(M)E(\zeta^4)+ &\\ &4.4!E^2(\zeta^2)\sum_{\mathbf{i}\in M}\sum_{\mathbf{j}\in M}\sum_{\|\mathbf{k}-\mathbf{i}\|\leq 3\|\mathbf{i}-\mathbf{j}\|}\sum_{\|\mathbf{l}-\mathbf{j}\|\leq 3\|\mathbf{i}-\mathbf{j}\|}\phi_4^{1/2}(\|\mathbf{k}-\mathbf{i}\|)\phi_4^{1/2}(\|\mathbf{l}-\mathbf{j}\|)+ \\ &2.4!(E(\zeta^4)+E^{1/2}(\zeta^6)E^{1/2}(\zeta^2))\sum_{\mathbf{i}\in M}\sum_{\mathbf{j}\in M}\phi_4^{1/2}(\|\mathbf{i}-\mathbf{j}\|)(K_1 3\|\mathbf{i}-\mathbf{j}\|)^{2d} \leq \\ &\#(M)E(\zeta^4) + \#^2(M)4.4!E^2(\zeta^2)S_4^2+ \\ &\#(M)2.4!9^d K_1^2 T_4(E(\zeta^4)+E^{1/2}(\zeta^6)E^{1/2}(\zeta^2)). \ \square\end{aligned}$$

2.5 Campos con varianza infinita. Resultados preliminares.

Sea $(\xi_{\mathbf{k}})_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d}$ un campo aleatorio centrado y estacionario. Definamos, para cada $x \geq 0$ y $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d$, $\xi_{\mathbf{k}}^{(x)} = \xi_{\mathbf{k}} I\{|\xi_{\mathbf{k}}| \leq x\}$. Supongamos que $U(x) := E((\xi_{\mathbf{0}}^{(x)})^2)$ es una función de variación lenta (esto es $\lim_{x\to+\infty} U(tx)/U(x) = 1$ para todo $t > 0$). El caso que nos ocupa es el de varianza infinita que equivale a $\lim_{x\to+\infty} U(x) = +\infty$.

En toda la sección trabajaremos bajo las hipótesis anteriores. El lema siguiente es conocido del caso unidimensional independiente y caracteriza la propiedad de ser U de variación lenta.

Lema 2.5.1. *$U(x)$ es de variación lenta* $\iff \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2P(|\xi_0|>x)}{U(x)} = 0.$

Demostración.
$\Longrightarrow$)

Sea $\varepsilon > 0$. Elijamos x_0 tal que para $x \geq x_0$ se cumpla $\frac{U(2x)}{U(x)} - 1 < \min(1,\varepsilon)$. Entonces, para tales x:

$$P(|\xi_0|>x) = \sum_{k=1}^{\infty} P(2^{k-1}x < |\xi_0| \leq 2^k x) \leq \sum_{k=1}^{\infty} 4^{1-k}x^{-2}(U(2^kx) - U(2^{k-1}x)) =$$
$$x^{-2}\sum_{k=1}^{\infty} 4^{1-k}U(2^{k-1}x)\left(\frac{U(2^kx)}{U(2^{k-1}x)} - 1\right).$$

Ahora observamos que, para $k > 1$, $U(2^{k-1}x) = U(x)\prod_{j=1}^{k} \frac{U(2^jx)}{U(2^{j-1}x)}$ y por lo tanto el término k-ésimo de la última sumatoria es menor o igual que $4\varepsilon 2^{-k}$ resultando

$$P(|\xi_0|>x) < \frac{4\varepsilon U(x)}{x^2}$$

($\Longleftarrow$

Sea $t > 1$ y $D = \{x < |\xi_0| \leq tx\}$; se tiene

$$\frac{U(tx)}{U(x)} - 1 = \frac{U(tx)-U(x)}{U(x)} = \frac{1}{U(x)}\int_D \xi_0^2 dP \leq \frac{P(D)(tx)^2}{U(x)} \leq \frac{t^2x^2P(|\xi_0|>x)}{U(x)}. \square$$

Sea $M > 0$ tal que $\sup_{x>0} x^{-2}U(x) > 1/M$. Por una conocida propiedad de las funciones de variación lenta $\lim_{x\to+\infty} x^{-2}U(x) = 0$; esto permite definir, para cada $y \geq M$,

$$\mathcal{T}(y) = \sup\{x > 0 : x^{-2}U(x) > 1/y\} \tag{2.5.1}$$

y, para cada entero positivo $n \geq M^{1/d}$,

$$a_n = \mathcal{T}(n^d). \tag{2.5.2}$$

Son bien conocidas las siguientes propiedades (ver por ejemplo [20, Capítulo 2]):

$$a_n^2 = n^dU(a_n) \quad \forall n \geq N \quad y \tag{2.5.3}$$

$$a_n \nearrow \infty \quad \text{cuando} \quad n \to \infty \tag{2.5.4}$$

$$(2.5.5) \qquad E|\xi_{\mathbf{0}}|I_{\{|\xi_{\mathbf{0}}|>a_n\}} = o(a_n/n^d).$$

Las dos primeras son una consecuencia directa de las definiciones. La tercera se prueba con una técnica similar a la del Lema 2.5.1 teniendo en cuenta las dos anteriores y que

$$E|\xi_{\mathbf{0}}|I_{\{|\xi_{\mathbf{0}}|>a_n\}} = \int_{|\xi_{\mathbf{0}}|>a_n} |\xi_{\mathbf{0}}|dP = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{2^{k-1}a_n<|\xi_{\mathbf{0}}|<2^k a_n} |\xi_{\mathbf{0}}|dP \leq$$
$$\sum_{k=1}^{\infty} 2^{1-k} a_n^{-1} (U(2^k a_n) - U(2^{k-1}a_n)).$$

En particular se tiene $E|\xi_{\mathbf{0}}| < \infty$. Se define $\xi_{\mathbf{k},n} = \xi_{\mathbf{k}}^{(a_n)}$. Este truncamiento apunta a la simplificación del problema de convergencia de las distribuciones finito-dimensionales.

Lema 2.5.2. *Si* $\delta > 0$, *entonces*

$$E|\xi_{\mathbf{0},n}|^{2+\delta} = o(a_n^{2+\delta}n^{-d})$$

Demostración. Seguimos el mismo tipo de idea que [8, Lema 7]. Sea $\varepsilon > 0$. Tomemos $c > 0$ tal que $U(x) - U(x/2) \leq \varepsilon U(x)$ para todo $x \geq c$ y n cumpliendo $n > N$ y $a_n > c$. Sea J el menor entero positivo tal que $2^{-J}a_n < c$. Entonces:

$$E|\xi_{\mathbf{0},n}|^{2+\delta} \leq \sum_{j=0}^{J-1} (2^{-j}a_n)^{\delta}(U(2^{-j}a_n) - U(2^{-j-1}a_n)) \;+\; E|\xi_{\mathbf{0}}^{(2^{-J}a_n)}|^{2+\delta} \leq$$
$$\varepsilon a_n^{\delta} \sum_{j=0}^{J-1} (2^{\delta})^{-j} U(2^{-j}a_n) \;+\; E|\xi_{\mathbf{0}}^{(c)}|^{2+\delta} \leq \varepsilon(1-2^{-\delta})a_n^{\delta}U(a_n) \;+\; E|\xi_{\mathbf{0}}^{(c)}|^{2+\delta}$$

donde el último sumando depende solamente de ε. Finalmente se aplica (2.5.3). □

El lema que sigue asegura que no varían ciertos comportamientos asintóticos al centrar las variables truncadas.

Lema 2.5.3. *Sea* $\mu_x = \xi_{\mathbf{0}}^{(x)}$ *y* $\lambda_x = \mu_x - E\mu_x$. *Entonces, para todo entero* $m \geq 1$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{E\lambda_x^{2m}}{E\mu_x^{2m}} = 1.$$

Demostración. $E\mu_x$ es una función acotada de x y para $k < 2m$ $E\mu_x^k = o(E\mu_x^{2m})$ cuando $x \to +\infty$. Por lo tanto $E\lambda_x^{2m} = E\mu_x^{2m} + o(E\mu_x^{2m})$. □

2.6 Teorema de convergencia para campos con varianza infinita.

En el Lema siguiente y sus corolarios, $(\xi_{\mathbf{k}})_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d}$ es un campo aleatorio estacionario, centrado, con varianza infinita y cuya función U, definida en §2.5, es de variación lenta. Se define, para cada $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d$ y $n \in \mathbb{Z}_+$:

$$\widetilde{\xi}_{\mathbf{k},n} = \xi_{\mathbf{k},n} - E\xi_{\mathbf{k},n}$$

Si $A \in \mathcal{B}$ y $n \in \mathbb{Z}_+$ sean

$$\widetilde{\mathbb{S}}_n(A) = \sum_{\bar{1}\leq\mathbf{k}\leq\bar{n}} \frac{|A \cap C_{n,\mathbf{k}}|}{|C_{n,\mathbf{k}}|}\widetilde{\xi}_{\mathbf{k},n},$$

$$\widetilde{Z}_n(A) = \widetilde{\mathbb{S}}_n(A)/a_n,$$

donde la sucesión (a_n) es la definida en (2.5.2).

Lema 2.6.1. *Supongamos que $(\xi_{\mathbf{k}})_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d}$ cumple $T_4 < \infty$. Sea $A \in \mathcal{B}$ y, para cada n, $M_n := \{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d : C_{n,\mathbf{k}} \cap A \neq \emptyset\}$. Supongamos que existe $n_1 \in \mathbb{Z}_+$ y $D > 0$ tal que $\#(M_n) \leq D|A|n^d$ para todo $n \geq n_1$. Entonces existe un entero positivo n_0, que depende de n_1 y de $|A|$, tal que para todo $n \geq n_0$*

$$E\widetilde{\mathbb{S}}_n^4(A) \leq L(3D + 4D^2)|A|^2 a_n^4,$$

donde L es la constante del Lema 2.4.1.

Demostración. Aplicando los Lemas 2.5.2 y 2.5.3 junto con la igualdad (2.5.3) puede elegirse $n_0 \geq n_1$ tal que para todo $n \geq n_0$:

$$E(\widetilde{\xi}_{\mathbf{0},n}^4) \leq |A|a_n^4 n^{-d},$$

$$E(\widetilde{\xi}_{\mathbf{0},n}^6) \leq |A|^2 a_n^6 n^{-d},$$

$$E(\widetilde{\xi}_{\mathbf{0},n}^2) \leq 2a_n^2 n^{-d}.$$

Definimos $\eta_{\mathbf{k},n} = \frac{|A\cap C_{n,\mathbf{k}}|}{|C_{n,\mathbf{k}}|}\widetilde{\xi}_{\mathbf{k},n}$. Para cada n fijo, $(\eta_{\mathbf{k},n})_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d}$ es centrado, con T_4 menor o igual a la del campo inicial y $|\eta_{\mathbf{k},n}| \leq |\widetilde{\xi}_{\mathbf{k},n}|$. Aplicando el Lema 2.4.1 y las tres desigualdades precedentes obtenemos:

$$E\widetilde{\mathbb{S}}_n^4(A) \leq$$
$$L\Big(\#(M_n)E(\widetilde{\xi}_{\mathbf{0},n}^4) + \#^2(M_n)E^2(\widetilde{\xi}_{\mathbf{0},n}^2) + \#(M_n)E^{1/2}(\widetilde{\xi}_{\mathbf{0},n}^6)E^{1/2}(\widetilde{\xi}_{\mathbf{0},n}^2)\Big) \leq$$
$$L(3D + 4D^2)a_n^4|A|^2. \ \square$$

Corolario 2.6.2. *Si $A \in \mathcal{G}$ entonces* $\left(\dfrac{\widetilde{Z}_n^2(A)}{|A|}\right)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ *es uniformemente integrable.*

Demostración. Si n es suficientemente grande, $\#(M_n) \leq 2|A|n^d$. Si anotamos $Y_n = \widetilde{Z}_n^2(A)/|A|$, la aplicación del Lema 2.6.1 lleva a la conclusión de que la sucesión $(E(Y_n^2))$ está uniformemente acotada. □

Si $A \in \mathcal{Q}$ y $|A| \geq n^{-d}$, por el Lema 2.3.1, $\#(M_n) \leq 3^d|A|n^d$. Entonces, si se aplica el Lema 2.6.1 a los cuadrados, con el menor entero $n_1 \geq |A|^{1/d}$ y $D = 3^d$, el n_0 resultante depende solamente de $|A|$; llamándolo $\widehat{n}(|A|)$ se obtiene:

Corolario 2.6.3. *Supongamos $T_4 < +\infty$. Con la notación precedente, sea $F = \{(n, A) : A \in \mathcal{Q}, n \geq \widehat{n}(|A|)\}$. Entonces, la familia* $\left(\dfrac{\widetilde{Z}_n^2(A)}{|A|}\right)_{(n,A)\in F}$ *es uniformemente integrable.*

Es interesante observar que fracasa el intento de llegar a esta integrabilidad uniforme con un esquema similar que evite el Lema 2.6.1 y se base en la desigualdad de cuarto momento para campos acotados del Lema 2.2.1.

Sigue ahora la versión del Lema 2.3.4 para este caso.

Lema 2.6.4. *Sea $(\xi_{\mathbf{k}})_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d}$ un campo aleatorio equidistribuido y que cumple $S_{11} < +\infty$. Sea, para cada n, $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función medible-Borel tal que $|f_n(x)| \leq |x|$ para todo x.*

Entonces, para todo $A \in \mathcal{B}$:

$$\limsup_{n\to\infty} \operatorname{Var}\left(\frac{1}{a_n} \sum_{\bar{1}\leq\mathbf{k}\leq\bar{n}} \frac{|A\cap C_{n,\mathbf{k}}|}{|C_{n,\mathbf{k}}|} f_n(\widetilde{\xi}_{\mathbf{k},n})\right) \leq 2S_{11}|A|.$$

Demostración. Siguiendo el mismo esquema del Lema 2.3.4 obtenemos:

$$\operatorname{Var}\left(\frac{1}{a_n} \sum_{\bar{1}\leq\mathbf{k}\leq\bar{n}} \frac{|A\cap C_{n,\mathbf{k}}|}{|C_{n,\mathbf{k}}|} f_n(\widetilde{\xi}_{\mathbf{k},n})\right) \leq$$

$$a_n^{-2} n^{2d} \max_{\mathbf{k}} |A\cap C_{n,\mathbf{k}}| \sum_{\mathbf{i}} |A\cap C_{n,\mathbf{i}}| 2S_{11} E\widetilde{\xi}_{\mathbf{0},n}^2 \leq$$

$$2a_n^{-2} n^d E\widetilde{\xi}_{\mathbf{0},n}^2 S_{11}|A|$$

Tomando $\limsup\limits_{n\to\infty}$ en ambos miembros y usando el Lema 2.5.3 junto con (2.5.3) se llega a la desigualdad deseada. □

Pasamos al resultado principal. Las hipótesis a) y b) son las mismas que las de [27, Corolario 3.3] , donde se trata el caso unidimensional con ϕ-mezcla uniforme. Por el Lema 2.5.1, la hipótesis a) es equivalente a que U sea una función de variación lenta.

Teorema 2.6.5. *Sea $(\xi_{\mathbf{k}})_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d}$ un campo aleatorio estacionario, centrado y que cumple la condición de ϕ-mezcla no uniforme con $S < \infty$ y $T_4 < \infty$. Supongamos que* $\lim_{x\to+\infty} U(x) = +\infty$.

Entonces, para todo $x > 0$, $\sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d} E\big((\xi_{\mathbf{0}}^{(x)} - E\xi_{\mathbf{0}}^{(x)})(\xi_{\mathbf{k}}^{(x)} - E\xi_{\mathbf{k}}^{(x)})\big)$ converge absolutamente a un valor $V(x) \geq 0$ y si se cumplen:

a) $\lim_{x\to+\infty} x^2 P(|\xi_{\mathbf{0}}| > x)/U(x) = 0$,

b) existe $\lim_{x\to+\infty} V(x)/U(x) =: \sigma^2 > 0$,

entonces la sucesión de procesos

$$Z_n(A) = \frac{1}{a_n} \sum_{\bar{1}\leq\mathbf{k}\leq\bar{n}} \frac{|A\cap C_{n,\mathbf{k}}|}{|C_{n,\mathbf{k}}|}\xi_{\mathbf{k}} \ , \ A \in \mathcal{B},$$

con a_n definido en (2.5.2), converge en el sentido de las distribuciones finito-dimensionales al proceso de Wiener sobre $\mathcal{B}$ con parámetro σ.

Demostración. La primera afirmación se prueba del mismo modo que su similar del Teorema 2.3.5. Separaremos la prueba de convergencia en tres pasos.

Paso 1. Reducción a la convergencia de $(\widetilde{Z}_n)$

Una condición suficiente para la reducción a la convergencia de $(\widetilde{Z}_n)$ es

$$|Z_n(A) - \widetilde{Z}_n(A)| \xrightarrow{P} 0$$

para cada $A \in \mathcal{B}$. Se tiene

$$Z_n(A) - \widetilde{Z}_n(A) = X_n + x_n \qquad \text{, donde}$$

$$X_n = \frac{1}{a_n} \sum_{\bar{1}\leq\mathbf{k}\leq\bar{n}} \frac{|A\cap C_{n,\mathbf{k}}|}{|C_{n,\mathbf{k}}|}(\xi_{\mathbf{k}} - \xi_{\mathbf{k},n}),$$

$$x_n = \frac{1}{a_n} \sum_{\bar{1}\leq\mathbf{k}\leq\bar{n}} \frac{|A\cap C_{n,\mathbf{k}}|}{|C_{n,\mathbf{k}}|}E\xi_{\mathbf{k},n}.$$

Aplicando la equidistribución de las variables y el hecho de que hay n^d sumandos se tiene

$$P(|X_n| > 0) \leq n^d P(|\xi_{\mathbf{0}}| > a_n) \leq \frac{n^d}{a_n} E|\xi_{\mathbf{0}}| I_{\{|\xi_{\mathbf{0}}|>a_n\}}.$$

De donde, usando (2.5.5):

$$\lim_{n\to\infty} P(|X_n| > 0) = 0.$$

La segunda suma es numérica. Se observa que $x_n = E\xi_{\mathbf{0},n}|A|n^d/a_n$. Como $E\xi_{\mathbf{0}} = 0$, se tiene $E\xi_{\mathbf{0},n} = -E\xi_{\mathbf{0}} I_{\{|\xi_{\mathbf{0}}|>a_n\}}$ por lo cual $|E\xi_{\mathbf{0},n}| \leq E|\xi_{\mathbf{0}}| I_{\{|\xi_{\mathbf{0}}|>a_n\}}$ y aplicando nuevamente (2.5.5) se obtiene

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0.$$

Paso 2. Convergencia sobre $\mathcal{R}$

Suponemos sin pérdida de generalidad que $\sigma = 1$ y aplicamos la Proposición 2.1.1. La validez de (i) es inmediata. La prueba de (iii) es la misma que en la prueba del Teorema 2.3.5. La condición (iv) es la conclusión del Corolario 2.6.3 y la condición (v) es consecuencia directa del Corolario 2.6.2. La prueba de la condición (ii) requiere adaptar el argumento de la prueba del Teorema 2.3.5 a la nueva situación: Sea $\gamma_n(\mathbf{i}) = E(\widetilde{\xi}_{\mathbf{0},n}\widetilde{\xi}_{\mathbf{i},n})$. Para cada $\mathbf{x} \in C$ se define $\mathbf{k}_n(\mathbf{x})$ como en la prueba del citado teorema y

$$h_n(\mathbf{x}) = \frac{1}{U(a_n)} \sum_{\mathbf{j}} n^d |C \cap C_{n,\mathbf{j}}| \gamma_n(\mathbf{j} - \mathbf{k}_n(\mathbf{x})).$$

Como en la prueba citada, tenemos

$$E\widetilde{Z}_n^2(C) = \int_C h_n(\mathbf{x}) d\mathbf{x}.$$

Resta probar que las funciones h_n están uniformemente acotadas y que $h_n(\mathbf{x}) \to 1$ para cada $\mathbf{x}$. Por el Lema 2.5.3 $\lim_{n\to\infty} E(\widetilde{\xi}_{\mathbf{0},n}^2)/U(a_n) = 1$; entonces la primera condición es consecuencia de la desigualdad

$$|h_n(\mathbf{x})| \leq 2SE(\widetilde{\xi}_{\mathbf{0},n}^2)/U(a_n).$$

Si se toma D_n y $\mathbf{x}$ como en la prueba del Teorema 2.3.5

$$h_n(\mathbf{x}) = V(a_n)/U(a_n) - R_n(\mathbf{x}) \qquad \text{, donde ahora}$$

$$R_n(\mathbf{x}) = \frac{1}{U(a_n)} \sum_{\mathbf{j}\in D_n} w_{n\mathbf{j}} \gamma_n(\mathbf{j} - \mathbf{k}_n(\mathbf{x})) \qquad \text{, con } 0 \leq w_{n\mathbf{j}} \leq 1.$$

Cuando $n \to \infty$, $V(a_n)/U(a_n) \to 1$ por b) y $R_n(\mathbf{x}) \to 0$ porque se pueden tomar números positivos $L_n(\mathbf{x}) \to \infty$ tales que

$$|R_n(\mathbf{x})| \leq \frac{1}{U(a_n)} \sum_{\|\mathbf{i}\|>L_n(\mathbf{x})} \gamma_n(\mathbf{i}) \leq \frac{2E(\widetilde{\xi}_{\mathbf{0},n}^2)}{U(a_n)} \sum_{\|\mathbf{i}\|>L_n(\mathbf{x})} \phi^{1/2}(\|\mathbf{i}\|).$$

Paso 3. Convergencia sobre $\mathcal{B}$

Como en el paso análogo de la prueba del Teorema 2.3.5 basta probar el punto (ii) de [18, Teorema 3.1]. Dados $A \in \mathcal{B}$, una sucesión decreciente (C_l) de conjuntos de $\mathcal{R}$ que contienen a A con $|\bigcap C_l - A| = 0$ y $\varepsilon > 0$, se cumple

$$\limsup_{n\to\infty} P(|\widetilde{Z}_n(C_l) - \widetilde{Z}_n(A)| \geq \varepsilon) \leq \frac{2S|C_l - A|}{\varepsilon^2}$$

debido a la desigualdad de Chebyschev, la aditividad de $\widetilde{Z}_n$ y el Lema 2.6.4. □

A continuación damos una condición más manejable que b) y es la adaptación de [27, Corolario 3.4].

Corolario 2.6.6. *El Teorema 2.6.5 permanece válido si en lugar de la condición b) se pide que exista*

$$w_{\mathbf{k}} := \lim_{x \to +\infty} \frac{E(\xi_{\mathbf{0}}^{(x)} \xi_{\mathbf{k}}^{(x)})}{U(x)}$$

para cada $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d$ *y que la serie* $\sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d} w_{\mathbf{k}}$*, que converge absolutamente a un valor no negativo, lo haga a un número positivo* σ^2.

Demostración. En vista de que para cada $\mathbf{k}$ es $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{\left(E(\xi_{\mathbf{k}}^{(x)})\right)^2}{U(x)} = 0$, si

$$w_{\mathbf{k}}^{(x)} := \frac{E((\xi_{\mathbf{0}}^{(x)} - E\xi_{\mathbf{0}}^{(x)})(\xi_{\mathbf{k}}^{(x)} - E\xi_{\mathbf{k}}^{(x)}))}{U(x)}$$

entonces $w_{\mathbf{k}} = \lim_{x \to +\infty} w_{\mathbf{k}}^{(x)}$ y $|w_{\mathbf{k}}| \leq 2\phi_{11}^{1/2}(\|\mathbf{k}\|)$.

Sea $\varepsilon > 0$. En primer lugar tomamos $L > 0$ tal que $\sum_{\|\mathbf{k}\| > L} \phi_{11}^{1/2}(\|\mathbf{k}\|) < \varepsilon/8$.

Si $m = \#(\{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d : \|\mathbf{k}\| \leq L\})$ existe x_0 (con $U(x_0) > 0$) tal que para $x > x_0$ y $\|\mathbf{k}\| \leq L$ es $|w_{\mathbf{k}} - w_{\mathbf{k}}^{(x)}| < \varepsilon/2m$. Entonces, si $x > x_0$,

$$\left| \frac{V(x)}{U(x)} - \sigma^2 \right| = \left| \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d} (w_{\mathbf{k}}^{(x)} - w_{\mathbf{k}}) \right| \leq \sum_{\|\mathbf{k}\| \leq L} |w_{\mathbf{k}}^{(x)} - w_{\mathbf{k}}| + \sum_{\|\mathbf{k}\| > L} |w_{\mathbf{k}}^{(x)} - w_{\mathbf{k}}| < \varepsilon. \ \square$$

2.7 Teorema Central del Límite para sucesiones de rectángulos.

La siguiente proposición permite pasar de la convergencia de las distribuciones finito-dimensionales al movimiento browniano a un teorema central del límite para una sucesión creciente de rectángulos con la misma condición geométrica de [23, Teorema 1], donde el campo satisface las mismas hipótesis del Teorema 2.3.5.

Sustituiremos las condiciones de dependencia por (2.7.2) que, como veremos, se satisface en los casos que venimos estudiando.

El caso de mayor interés aquí es el de varianza infinita (Corolario 2.7.2) aunque hacemos notar la validez en el de varianza finita (Corolario 2.7.3) para presentar una prueba alternativa a la del citado teorema de Nahapetian (que es un caso particular del teorema de E.Bolthausen en [6], donde se admiten sucesiones más generales de conjuntos).

Proposición 2.7.1. *Sea* $(\xi_{\mathbf{k}})_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d}$ *un campo aleatorio centrado y estacionario. Supongamos que existe una sucesión* (c_n) *de constantes positivas tal que para cada* $A \in \mathcal{G}$

$$Z_n(A) := \frac{1}{c_n} \sum_{\bar{1} \leq \mathbf{k} \leq \bar{n}} \frac{|A \cap C_{n,\mathbf{k}}|}{|C_{n,\mathbf{k}}|} \xi_{\mathbf{k}} \xrightarrow{\mathcal{D}} N(0, |A|) \tag{2.7.1}$$

y que para todo $\varepsilon > 0$

$$\lim_{(|A|,n)\to(0,\infty)} P(|Z_n(A)| \geq \varepsilon) = 0. \tag{2.7.2}$$

Para cada $i = 1,..,d$ sea $(l_n^{(i)})$ una sucesión creciente de enteros positivos que tiende a ∞ tal que existe $C > 0$ que cumple $\frac{l_n^{(i)}}{l_n^{(j)}} < C$ para todo n, i, j y definimos $I_n = \mathbb{Z}^d \cap \prod_{i=1}^d [-l_n^{(i)}, l_n^{(i)}]$.

Entonces, si se toma cualquier número real $M > C+1$, $j_n = [M(\#(I_n))^{1/d}]$ y $t_n = c_{j_n} M^{-d/2}$:

$$\frac{1}{t_n} \sum_{\mathbf{k}\in I_n} \xi_{\mathbf{k}} \xrightarrow{\mathcal{D}} N(0,1).$$

Demostración. Si $j_n^{(i)} = 2l_n^{(i)} + 1$, podemos suponer por estacionariedad que $I_n = \mathbb{Z}^d \cap \prod_{i=1}^d [1, j_n^{(i)}]$. Como $t_n' := c_{j_n}(\#(I_n)/j_n^d)^{1/2} = t_n(1+o(1))$, es suficiente probar

$$Y_n := \frac{1}{t_n'} \sum_{\mathbf{k}\in I_n} \xi_{\mathbf{k}} \xrightarrow{\mathcal{D}} N(0,1). \tag{2.7.3}$$

La propiedad de acotación que caracteriza a C y la consecuente elección de M nos aseguran que $j_n^{(i)} \leq j_n$ para todo i; la definición de j_n implica

$$j_n = M(\#(I_n))^{1/d}(1+o(1)). \tag{2.7.4}$$

Luego, existe $0 < H < 1$ tal que $b_n^{(i)} := j_n^{(i)}/j_n \in [H,1]$ para todo i, n.

Ahora razonamos por el absurdo: si (2.7.3) no fuera cierto exixtirían $b \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$ y una sucesión creciente $(n_p)_{p\in\mathbb{Z}_+}$ de enteros positivos tal que para todo p

$$\left| P(Y_{n_p} \leq b) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{b} e^{-t^2/2} dt \right| > \alpha. \tag{2.7.5}$$

Podría tomarse entonces una subsucesión $(n_{p_q}) = (m_q)$ de (n_p) tal que, para $i = 1..,d$, $\lim_{q\to\infty} b_{m_q}^{(i)} = b^{(i)}$ con $b^{(i)} \in [H,1]$. Si $B_q = \prod_{i=1}^d (0, b_{m_q}^{(i)}]$ y $B = \prod_{i=1}^d (0, b^{(i)}]$, consideremos la desigualdad

$$\left| \frac{Z_{j_{m_q}}(B_q)}{|B_q|^{1/2}} - \frac{Z_{j_{m_q}}(B)}{|B|^{1/2}} \right| \leq$$
$$|B_q|^{-1/2} |Z_{j_{m_q}}(B_q) - Z_{j_{m_q}}(B)| + \big|\, |B_q|^{-1/2} - |B|^{-1/2} \big|\, |Z_{j_{m_q}}(B)|.$$

La hipótesis (2.7.1) implica $Z_{j_{m_q}}(B)/|B|^{1/2} \xrightarrow{\mathcal{D}} N(0,1)$. Por esta razón, usando que $|B_q \Delta B| \to 0$, el segundo sumando tiende a 0 en probabilidad y también el primero por la aditividad de $Z_{j_{m_q}}$ y (2.7.2). Por lo tanto $\left| \frac{Z_{j_{m_q}}(B_q)}{|B_q|^{1/2}} - \frac{Z_{j_{m_q}}(B)}{|B|^{1/2}} \right| \xrightarrow{P} 0$. Pero por construcción $Y_{m_q} = \frac{Z_{j_{m_q}}(B_q)}{|B_q|^{1/2}}$, de modo que $Y_{m_q} \xrightarrow{\mathcal{D}} N(0,1)$, lo cual contradice (2.7.5). □

Corolario 2.7.2. *Si un campo aleatorio $(\xi_{\mathbf{k}})_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d}$ satisface las hipótesis del Teorema 2.6.5 con $\sigma^2 = 1$ y (I_n) es una sucesión como la de la Proposición 2.7.1 entonces*

$$\frac{1}{\mathcal{T}(\#(I_n))}\sum_{\mathbf{k}\in I_n}\xi_{\mathbf{k}} \xrightarrow{\mathcal{D}} N(0,1),$$

donde $\mathcal{T}$ es la función definida en (2.5.1).

Demostración. El Teorema 2.6.5 da la convergencia requerida en (2.7.1). Usando el Lema 2.6.4 obtenemos (2.7.2) para $(\widetilde{Z}_n)$:

$$\lim_{(|A|,n)\to(0,\infty)} P(|\widetilde{Z}_n(A)| \geq \varepsilon) = 0.$$

La prueba del primer paso del Teorema 2.6.5 muestra que $|Z_n(A) - \widetilde{Z}_n(A)| \xrightarrow{P} 0$ uniformemente en A. Entonces, la desigualdad

$$|Z_n(A)| \leq |Z_n(A) - \widetilde{Z}_n(A)| + |\widetilde{Z}_n(A)|.$$

implica que (2.7.2) es también cumplido por (Z_n).

Aplicando la Proposición 2.7.1 obtenemos la sucesión t_n; concluiremos probando que $\mathcal{T}(\#(I_n)) = t_n(1 + o(1))$. En este caso $c_{j_n} = \mathcal{T}(j_n^d)$. Por (2.7.4) y el hecho conocido de que para cada $k > 0$ $\mathcal{T}(kx) = k^{1/2}\mathcal{T}(x)(1 + o(1))$, tenemos:

$$\mathcal{T}(j_n^d) = \mathcal{T}\left(M^d\#(I_n)(1 + o(1))\right) = \mathcal{T}\left(M^d\#(I_n)\right)\left(1 + o(1)\right) = M^{d/2}\mathcal{T}\left(\#(I_n)\right)\left(1 + o(1)\right). \square$$

En el siguiente corolario la restricción $\sigma^2 = 1$ es irrelevante.

Corolario 2.7.3. *Sea $(\xi_{\mathbf{k}})_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d}$ un campo aleatorio centrado, estacionario, con varianza finita y bajo las condiciones de mezcla del Teorema 2.3.5 con $\sigma^2 = 1$.*

Si (I_n) es una sucesión de rectángulos como la de la Proposición 2.7.1 entonces

$$\frac{1}{\sigma_n}\sum_{\mathbf{k}\in I_n}\xi_{\mathbf{k}} \xrightarrow{\mathcal{D}} N(0,1),$$

donde $\sigma_n = \mathrm{Var}^{1/2}\left(\sum_{\mathbf{k}\in I_n}\xi_{\mathbf{k}}\right)$.

Demostración. La condición (2.7.1) resulta del Teorema 2.3.5 con $c_n = n^{d/2}$ y (2.7.2) se obtiene usando el Lema 2.3.4. Aplicamos la Proposición 2.7.1 y, como la igualdad (2.7.4) implica $t_n = (\#(I_n))^{1/2}(1 + o(1))$, concluimos recordando que en este caso $(\#(I_n))^{1/2} = \sigma_n(1 + o(1))$. $\square$

3 Teoremas funcionales

En toda esta tercera parte $(\xi_{\mathbf{k}})_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d}$ es un campo aleatorio centrado, estacionario, con varianza finita y

$$Z_n(A) = \frac{1}{n^{d/2}} \sum_{\bar{1}\leq \mathbf{k}\leq \bar{n}} \frac{|A\cap C_{n,\mathbf{k}}|}{|C_{n,\mathbf{k}}|}\xi_{\mathbf{k}}.$$

La Proposición 3.2.2 da una condición suficiente de tensión en $CA(\mathcal{G})$ basada en una desigualdad maximal de Bickel y Wichura ([4]). En el Corolario 3.2.3, usando la desigualdad de cuarto momento del Lema 2.2.1, se aplica ese criterio para obtener un teorema funcional para (Z_n) cuando el campo es acotado y las hipótesis de mezcla son las mismas del Teorema 2.3.5. El Teorema 3.3.2 consigue ampliar las clases de conjuntos de un teorema funcional de Chen ([9]) para rectángulos y, aplicando el Lema 3.3.1, disminuir la velocidad de decrecimiento de la función de mezcla.

3.1 Condiciones de tensión. Primeras simplificaciones para rectángulos.

Supongamos que un conjunto $\mathcal{A}\subset\mathcal{B}$ es tal que existe el movimiento browniano sobre $\bar{\mathcal{A}}$ con trayectorias en $CA(\bar{\mathcal{A}})$ y (Z_n) converge al mismo en el sentido de las distribuciones finito-dimensionales. Nos interesa hallar condiciones sobre el campo para obtener convergencia en distribución en $CA(\bar{\mathcal{A}})$. Con este fin ponemos nuestra atención en la condición (1.3.2) que, teniendo en cuenta la aditividad de Z_n, en nuestro caso puede escribirse:

$$(3.1.1) \qquad \forall\varepsilon>0 \qquad \lim_{\alpha\searrow 0}\limsup_{n\to\infty} P(\|Z_n\|_{\mathcal{A}_\alpha}\geq\varepsilon)=0$$

donde $\mathcal{A}_\alpha=\{A_1-A_2 : A_1,A_2\in\mathcal{A},\ |A_1-A_2|\leq\alpha\}$ y $\|Z_n\|_{\mathcal{A}_\alpha}$ es la norma uniforme, en concordancia con las notaciones de §1.2. En el caso $\mathcal{A}=\mathcal{G}=\bar{\mathcal{G}}$ se tiene esta primera simplificación:

Lema 3.1.1. *Si $\mathcal{A}=\mathcal{G}$, (3.1.1) es equivalente a*

$$(3.1.2) \qquad \forall\varepsilon>0 \qquad \lim_{\alpha\searrow 0}\limsup_{n\to\infty} P\Big(\sup_{A\in\mathcal{G},|A|\leq\alpha}|Z_n(A)|\geq\varepsilon\Big)=0.$$

Demostración. Basta probar (3.1.2) $\Longrightarrow$ (3.1.1).

Cuando $A,B\in\mathcal{G}$, $A-B$ es unión de a lo sumo $2d$ conjuntos disjuntos de $\mathcal{G}$; esto se ve rápidamente por inducción ya que para $d=1$ es inmediato y para el caso general , si $A=\prod_{i=1}^d A_i$ y $B=\prod_{i=1}^d B_i$, usamos que

$$A-B=\Big(\big(\prod_{i=1}^{d-1}A_i\big)\times(A_d-B_d)\Big)\cup\Big(\big(\prod_{i=1}^{d-1}A_i-\prod_{i=1}^{d-1}B_i\big)\times(A_d\cap B_d)\Big).$$

Aplicando esta propiedad, se tiene

$$P(\|Z_n\|_{\mathcal{A}_\alpha} \geq \varepsilon) \leq P(\sup_{A\in\mathcal{G},|A|\leq\alpha} |Z_n(A)| \geq \varepsilon/2d),$$

lo cual, siendo $2d$ fijo, nos lleva a la conclusión deseada. $\square$

Los resultados que siguen van en la dirección de discretizar la condición (3.1.2).

Lema 3.1.2. *Sean $n \in \mathbb{Z}_+$, $A = \prod_{i=1}^d (u_i, v_i] \in \mathcal{G}$. Entonces existe $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbb{Z}^d$ con $|u_i - \frac{p_i}{n}| \leq \frac{1}{n}$ y $|v_i - \frac{q_i}{n}| \leq \frac{1}{n}$ para todo i, tal que $B = \prod_{i=1}^{d} (\frac{p_i}{n}, \frac{q_i}{n}]$ cumple $|Z_n(B)| \geq |Z_n(A)|$.*

Demostración. Tomemos, para cada i, números enteros r_i, s_i tales que $0 \leq \frac{r_i}{n} \leq u_i \leq \frac{(r_i+1)}{n} \leq 1$ y $0 \leq \frac{s_i}{n} \leq v_i \leq \frac{(s_i+1)}{n} \leq 1$. Afirmamos que existen $p_d \in \{r_d, r_d+1\}$ y $q_d \in \{s_d, s_d+1\}$ con $p_d < q_d$, tales que si se toma

$$B_1 = \left(\prod_{i=1}^{d-1} (u_i, v_i]\right) \times (\frac{p_d}{n}, \frac{q_d}{n}] \quad \text{entonces} \quad |Z_n(B_1)| \geq |Z_n(A)|.$$

Para probar esta afirmación se toma $f : [\frac{r_d}{n}, \frac{(s_d+1)}{n}] \to \mathbb{R}$,

$$f(\lambda) = Z_n\left(\left(\prod_{i=1}^{d-1}(u_i, v_i]\right) \times (\frac{r_d}{n}, \lambda]\right)$$

para $\lambda > \frac{r_d}{n}$ y $f(\frac{r_d}{n}) = 0$. Veamos que f es una función cuya gráfica es una poligonal con vértices $(\frac{m}{n}, f(\frac{m}{n}))$ con $m \in \mathbb{Z}$ y $r_d \leq m \leq s_d + 1$. Para esto es suficiente comprobar que $\forall m\ \exists c_m$ tal que $\forall \lambda \in \left(\frac{m}{n}, \frac{(m+1)}{n}\right]$, $\quad f(\lambda) - f(\frac{m}{n}) = c_m(\lambda - \frac{m}{n})$.

Si $E_{\lambda,m} = (\prod_{i=1}^{d-1}(u_i, v_i]) \times (\frac{m}{n}, \lambda]$ entonces $f(\lambda) - f(\frac{m}{n}) = Z_n(E_{\lambda,m})$ por la aditividad de Z_n.

Para los siguientes cálculos observamos que $L_m := \{\mathbf{k} : C_{n,\mathbf{k}} \cap E_{\lambda,m} \neq \emptyset\}$ no depende de λ. Se tiene $\forall \mathbf{k} = (k_1, \ldots, k_d) \in L_m$

$$|C_{n,\mathbf{k}} \cap E_{\lambda,m}| = (\lambda - \frac{m}{n}) w_k \quad \text{donde} \quad w_k = \prod_{i=1}^{d-1} \left| \left(\frac{(k_i-1)}{n}, \frac{k_i}{n}\right] \cap (u_i, v_i] \right|.$$

Entonces

$$Z_n(E_{\lambda,m}) = n^{-d/2} \sum_{\mathbf{k}\in L_m} \frac{|E_{\lambda,m} \cap C_{n,\mathbf{k}}|}{|C_{n,\mathbf{k}}|} \xi_{\mathbf{k}} = n^{d/2} \sum_{\mathbf{k}\in L_m} |E_{\lambda,m} \cap C_{n,\mathbf{k}}|\ \xi_{\mathbf{k}} =$$

$$(\lambda - \frac{m}{n}) n^{d/2} \sum_{\mathbf{k}\in L_m} w_k.$$

Obtenemos $c_m = n^{d/2}\sum_{\mathbf{k}\in L_m} w_{\mathbf{k}}$. Ahora, por ser la gráfica de f una poligonal, existe $p_d \in \{r_d, r_d+1\}$, $q_d \in \{s_d, s_d+1\}$ con $p_d < q_d$ tal que

$$Z_n(A) = |f(v_m) - f(u_m)| \leq \left|f\left(\frac{q_d}{n}\right) - f\left(\frac{p_d}{n}\right)\right| = Z_n(B_1).$$

Esto prueba la existencia de B_1.

Si aplicamos el mismo argumento en forma sucesiva para $k = 2, \ldots, d-1$, obtenemos conjuntos B_k y enteros p_{d-k+1}, q_{d-k+1} tales que:

$$B_k = \left(\prod_{i=1}^{d-k}(u_i, v_i]\right) \times \left(\prod_{i=d-k+1}^{d}\left(\frac{p_i}{n}, \frac{q_i}{n}\right]\right) \quad \text{y} \quad |Z_n(B_k)| \geq |Z_n(B_{k-1})|.$$

Finalmente

$$B = B_d = \prod_{i=1}^{d}\left(\frac{p_i}{n}, \frac{q_i}{n}\right] \text{ satisface } |Z_n(B)| \geq |Z_n(B_{d-1})| \geq |Z_n(A)|. \ \square$$

Lema 3.1.3. *Si $0 < \alpha_1 < \alpha_2 \leq 1$ existe n_0 tal que para todo $n \geq n_0$ y todo $A \in \mathcal{G}$ con $|A| \leq \alpha_1$ se cumple $|V(n, A)| \leq \alpha_2$ ($V(n, A)$ definidos en §2.3).*

Demostración. Para todo $A \in \mathcal{G}$ se tiene $|V(n, A)| \leq |A| + 2d/n$ por lo cual basta tomar $n_0 > 2d/(\alpha_2 - \alpha_1)$. $\square$

Lema 3.1.4. *La condición*

$$\text{(3.1.3)} \qquad \forall\varepsilon > 0 \qquad \lim_{\alpha\searrow 0}\limsup_{n\to\infty} P\Big(\max_{A\in\mathcal{G}_n, |A|\leq\alpha}|Z_n(A)| \geq \varepsilon\Big) = 0.$$

es equivalente a (3.1.2).

Demostración. De los dos lemas anteriores resulta, para todo n suficientemente grande,

$$P\Big(\sup_{A\in\mathcal{G}, |A|\leq\alpha}|Z_n(A)| \geq \varepsilon\Big) \leq P\Big(\max_{A\in\mathcal{G}_n, |A|\leq 2\alpha}|Z_n(A)| \geq \varepsilon\Big). \ \square$$

3.2 Teorema funcional en $CA(\mathcal{G})$ para variables acotadas.

Introducimos las notaciones

$$B_{\mathbf{kj}} = \{\mathbf{i} : \mathbf{k} \leq \mathbf{i} \leq \mathbf{j}\} \qquad , \qquad D_{\mathbf{kj}} = \sum_{\mathbf{i}\in B_{\mathbf{kj}}} \xi_{\mathbf{i}}.$$

Observamos que si $A \in \mathcal{G}_n$ entonces $A = \frac{1}{n}(\mathbf{k},\mathbf{j}]$ con $\bar{0} \leq \mathbf{k} \leq \mathbf{j} \leq \bar{n}$ y $Z_n(A) = \frac{1}{n^{d/2}} D_{\mathbf{k}+\bar{1}\,\mathbf{j}}$.

La siguiente desigualdad maximal es una consecuencia de ([4, Teorema 1]), y puede deducirse argumentando a partir de una observación en [5, demostración del Teorema 12.2].

Sean $\beta > 1, \gamma \geq 0$. Supongamos que existe C (que depende solamente de β, γ y d) tal que para todo $\mathbf{k},\mathbf{j} \in \mathbb{Z}^d$ con $\bar{1} \leq \mathbf{k} \leq \mathbf{j}$ y todo $\lambda > 0$ y todo $\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^d$ con $\mathbf{m} \geq \bar{1}$

(3.2.1) $$P(|D_{\mathbf{kj}}| \geq \lambda) \leq C\lambda^{-\gamma}(\#(B_{\mathbf{kj}}))^{\beta}.$$

Entonces existe K (que depende solamente de β, γ y d) tal que para todo $\lambda > 0$

(3.2.2) $$P(\max_{\bar{1}\leq\mathbf{i}\leq\mathbf{m}} |D_{\bar{1}\mathbf{i}}| \geq \lambda) \leq K\lambda^{-\gamma}(\#(B_{\bar{1}\mathbf{m}}))^{\beta}.$$

El lema que demostraremos a continuación permitirá oportunamente considerar sólo rectángulos "esquinados".

Lema 3.2.1. *Sea* $\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^d$ *tal que* $\mathbf{m} \geq \bar{1}$. *Entonces*

(3.2.3) $$\max_{\bar{1}\leq\mathbf{k}\leq\mathbf{j}\leq\mathbf{m}} |D_{\mathbf{kj}}| \leq 2^d \max_{\bar{1}\leq\mathbf{i}\leq\mathbf{m}} |D_{\bar{1}\mathbf{i}}|.$$

Demostración. Fijemos $\mathbf{j} = (j_1,...,j_d)$, $\mathbf{k} = (k_1,...,k_d)$. Probaremos por inducción sobre el número ν de coordenadas de $\mathbf{k}$ mayores que 1 que

$$|D_{\mathbf{kj}}| \leq 2^{\nu} \max_{\bar{1}\leq\mathbf{i}\leq\mathbf{m}} |D_{\bar{1}\mathbf{i}}|.$$

El caso $\nu = 0$ es trivial. Si $\nu \geq 1$ suponemos sin perder generalidad que $1 < k_d = \max_i\{k_i\}$ y definimos $\mathbf{k}_1 = (k_1,...,k_{d-1},1)$, $\mathbf{j}_1 = (j_1,...,j_{d-1},k_d-1)$. Se tiene

$$D_{\mathbf{kj}} = D_{\mathbf{k}_1\mathbf{j}} - D_{\mathbf{k}_1\mathbf{j}_1}.$$

La conclusión resulta de observar que los números del segundo miembro están en el caso $\nu - 1$. □

Ahora definiremos familias de rectángulos que permitirán simplificar el manejo de la condición de tensión.

Sea $0 < \alpha < 1$. Consideremos la familia $\mathcal{I}_\alpha$ de subintervalos de $(0,1]$ de la forma $(u_k, v_k]$ con $u_k = k\alpha^{1/d}, v_k = \min((k+2)\alpha^{1/d}, 1)$ y $k = 0,...,[\alpha^{-1/d}]+1$.

Observamos que $\#(\mathcal{I}_\alpha) \leq 2\alpha^{-1/d}$ y que si J es un subintervalo de $(0,1]$ con $|J| \leq \alpha^{1/d}$ siempre es posible hallar $I \in \mathcal{I}_\alpha$ tal que $J \subseteq I$.

Sea $\mathcal{F}_\alpha \subset \mathcal{G}$ la familia de conjuntos de la forma $\prod_{i=1}^d I_i$ con exactamente uno de los I_i en $\mathcal{I}_\alpha$ y los restantes iguales a $(0,1]$. Para cada entero positivo n se define $\mathcal{F}_{\alpha n} = \{V(n,A) : A \in \mathcal{F}_\alpha\}$ (los $V(n,A)$ fueron definidos en §2.3). Consecuencias directas de la construcción anterior son:

(3.2.4) $\forall\alpha\ \forall n \quad \#(\mathcal{F}_{\alpha n}) \leq d\#(\mathcal{I}_\alpha) \leq 2d\alpha^{-1/d}$,

(3.2.5) $\forall\alpha\ \forall n$ si $A \in \mathcal{G}$, $|A| \leq \alpha \quad \exists B \in \mathcal{F}_{\alpha n}$ tal que $A \subseteq B$,

(3.2.6) $\forall\alpha\ \exists n_0$ tal que si $n \geq n_0$ y $B \in \mathcal{F}_{\alpha n}$ entonces $|B| \leq 3\alpha^{1/d}$.

Hacemos notar que la existencia de n_0 en (3.2.6) se justifica con el lema 3.1.3.

Proposición 3.2.2. *Supongamos que existe $\delta > 0$ y una constante C que sólo depende de d y de δ tal que*

$$E(|D_{\mathbf{kj}}|^{2+\delta}) \leq C(\#(B_{\mathbf{kj}}))^{\frac{2+\delta}{2}}. \tag{3.2.7}$$

Entonces la sucesión de procesos (Z_n) satiface (3.1.3).

Demostración. Aplicando (3.2.4) y (3.2.5) se tiene, para cada n,

$$\max_{A\in\mathcal{G}_n, |A|\leq\alpha} |Z_n(A)| \leq \max_{B\in\mathcal{F}_{\alpha n}} \big(\max_{A\subset B, A\in\mathcal{G}_n} |Z_n(A)| \big). \tag{3.2.8}$$

Sean $\varepsilon > 0$, $0 < \alpha < 1$. Por la estacionariedad, el Lema 3.2.1. y (3.2.6), para todo n suficientemente grande y cada $B \in \mathcal{F}_{\alpha n}$ existe $\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^d$ con $\#(B_{\bar{1}\mathbf{m}}) \leq 3\alpha^{1/d}n^d$ tal que

$$P\big(\max_{A\subset B, A\in\mathcal{G}_n} |Z_n(A)| \geq \varepsilon \big) \leq P\big(\max_{\bar{1}\leq\mathbf{i}\leq\mathbf{m}} |D_{\bar{1}\mathbf{i}}| \geq 2^{-d}\varepsilon n^{d/2} \big). \tag{3.2.9}$$

La hipótesis (3.2.7) implica se cumple (3.2.1) con $\beta = \dfrac{2+\delta}{2}$ y $\gamma = 2+\delta$. Vale entonces la desigualdad (3.2.2) y teniéndola en cuenta para $\lambda = n^{d/2}\varepsilon/2^d$, se obtiene a partir de (3.2.8) y (3.2.9):

$$P\big(\max_{A\in\mathcal{G}_n, |A|\leq\alpha} |Z_n(A)| \geq \varepsilon \big) \leq$$
$$2d\alpha^{-1/d} K \left(\frac{2^d}{n^{d/2}\varepsilon} \right)^{2+\delta} (3\alpha^{1/d}n^d)^{(2+\delta)/2} = O(\alpha^{\delta/2d}). \ \square$$

Ahora sigue un teorema funcional para variables acotadas con las condiciones de dependencia del Teorema 2.3.5.

Corolario 3.2.3. *Sea* $(\xi_{\mathbf{k}})_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d}$ *un campo aleatorio bajo las condiciones del Teorema 2.3.5. Supongamos además que es acotado y que* $\sigma^2 := \sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d} E(\xi_{\mathbf{0}}\xi_{\mathbf{k}}) = 1$

Entonces, (Z_n) *converge en distribución en* $CA(\mathcal{G})$ *al movimiento browniano continuo.*

Demostración. El Teorema 2.3.5 asegura la convergencia de las distribuciones finito-dimensionales. La desigualdad de cuarto momento del Lema 2.2.1 da la condición (3.2.7) con $\delta = 2$. La tensión, entonces, es consecuencia de la Proposición 3.2.2. □

De acuerdo a la observación que sucede al Teorema 2.3.5, el Corolario anterior vale también cuando se cumplen simultáneamente las condiciones de mezcla (2.3.1) y (2.3.2) o bien si se supone (2.3.3).

3.3 Teorema funcional para clases más amplias de conjuntos.

En esta sección extenderemos [9, Teorema 1.1], que es un teorema funcional para la clase de los rectángulos con condiciones de ϕ-mezcla no uniforme y momento $2+\delta$, a clases mayores de conjuntos con cierta restricción sobre su exponente de entropía métrica con inclusión (§1.4). Esa extensión se obtiene usando el Teorema 2.3.5, de convergencia de las distribuciones finito-dimensionales sobre $\mathcal{B}$, y los resultados conexos, junto con el método de Bass([2]) para campos independientes, adaptado por Goldie y Greenwood([19]) para mezcla uniforme (en ambos casos trabajando con clases más amplias que la de los rectángulos) y algunas ideas de Chen([9]) para mezcla no uniforme.

El lema siguiente permitirá evaluar el grado de aproximación de ciertas variables dependientes con otras independientes de igual distribución. Se basa en el mismo tipo de ideas que [16, Lema 2].

Lema 3.3.1. *Sean* $Y_1, ..., Y_n$ *variables aleatorias con valores en espacios medibles* $(E_1, \mathcal{E}_1), ..., (E_n, \mathcal{E}_n)$, *respectivamente, tales que*

$$\|\mathcal{L}(Y_k, ..., Y_n) - \mathcal{L}(Y_k) \otimes \mathcal{L}(Y_{k+1}, ..., Y_n)\|_{\mathrm{Var}} \leq \varepsilon, \quad k = 1, ..., n-1.$$

Entonces

$$\|\mathcal{L}(Y_1, ..., Y_n) - \mathcal{L}(Y_1) \otimes ... \otimes \mathcal{L}(Y_n)\|_{\mathrm{Var}} \leq (n-1)\varepsilon.$$

Demostración. Primero observamos la siguiente propiedad: si se tienen, para $i = 1, 2, 3$ variables aleatorias X_i a valores en espacios $(F_i, \mathcal{F}i)$ se cumple

$$\|\mathcal{L}(X_1)\otimes\mathcal{L}(X_2, X_3) - \mathcal{L}(X_1)\otimes\mathcal{L}(X_2)\otimes\mathcal{L}(X_3)\|_{\mathrm{Var}} \leq \|\mathcal{L}(X_2, X_3) - \mathcal{L}(X_2)\otimes\mathcal{L}(X_3)\|_{\mathrm{Var}}$$

Esto se debe a que, llamando μ_i a las distribuciones respectivas, μ_{ij} a las conjuntas, tomando $A \in \mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2 \otimes \mathcal{F}_3$ y siendo A_{x_1} las secciones:

$$|\mu_1 \otimes \mu_{23}(A) - \mu_1 \otimes \mu_2 \otimes \mu_3(A)| = \left| \int_{F_1} (\mu_{23}(A_{x_1}) - \mu_2 \otimes \mu_3(A_{x_1}))\mu_1(dx_1) \right| \leq \sup_{B\in\mathcal{F}_2\otimes\mathcal{F}_3} |\mu_{23}(B) - \mu_2 \otimes \mu_3(B)|.$$

Introducimos ahora las siguientes notaciones:

$$L_k = \mathcal{L}(Y_k),$$

$$L_k^{(a)} = \mathcal{L}(Y_1, ..., Y_k),$$

$$L_k^{(b)} = \mathcal{L}(Y_k, ..., Y_n),$$

$$M_k^{(a)} = \mathcal{L}(Y_1) \otimes ... \otimes \mathcal{L}(Y_k),$$

$$M_k^{(b)} = \mathcal{L}(Y_k) \otimes ... \otimes \mathcal{L}(Y_n).$$

Y finalmente, aplicando la desigualdad observada:

$$\|L_n^{(a)} - M_n^{(a)}\|_{\text{Var}} \leq$$

$$\|L_n^{(a)} - M_1^{(a)} \otimes L_2^{(b)}\|_{\text{Var}} + \sum_{k=2}^{n-1} \|M_{k-1}^{(a)} L_k^{(b)} - M_k^{(a)} \otimes L_{k+1}^{(b)}\|_{\text{Var}} \leq$$

$$\sum_{k=1}^{n-1} \|L_k^{(b)} - L_k \otimes L_{k+1}^{(b)}\|_{\text{Var}} \leq (n-1)\varepsilon. \ \square$$

Teorema 3.3.2. *Sea $(\xi_{\mathbf{k}})_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d}$ un campo aleatorio centrado y estacionario y $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ totalmente acotado con inclusión con exponente de entropía métrica con inclusión r_I. Supongamos que existe $\delta > 0$ tal que $E|\xi_{\mathbf{0}}|^{2+\delta} < +\infty$, $r_I < \dfrac{1}{1+\delta}$ y que el campo satisface una condición de ϕ-mezcla no uniforme con $\lim\limits_{t\to+\infty} t^{2d(1+\delta^{-1})}\phi(t) = 0$.*

Entonces, si $\sum\limits_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d} E(\xi_{\mathbf{0}}\xi_{\mathbf{k}}) = \sigma^2 > 0$, la sucesión (Z_n) converge en distribución en $CA(\bar{\mathcal{A}})$ al proceso de Wiener continuo con parámetro σ.

Demostración. Nos proponemos probar (3.1.1). Como $\lim\limits_{t\to+\infty} t^{2d(1+\delta^{-1})}\phi(t) = 0$ se tiene $S < +\infty$, y la convergencia de las distribuciones finito-dimensionales resulta inmediatamente del Teorema 2.3.5.

Para la tensión es suficiente probar (3.1.1). Anotamos $s = 2+\delta$, $\xi_{n\mathbf{j}} = n^{-d/2}\xi_{\mathbf{j}}$ y seguimos el mismo esquema de [19].

Paso 1: Truncamiento . Sea, para cada $x \geq 0$, $h(x) = E_{x^s}|\xi_{\mathbf{0}}|^s$. Si $0 \leq u \leq v \leq \infty$, $n \in \mathbb{Z}_+$ y $\bar{1} \leq \mathbf{j} \leq \bar{n}$ definimos

$$\xi_{n\mathbf{j}}(u,v) = \xi_{n\mathbf{j}} I_{\{u \leq n^{d(s-2)/(2(s-1))}|\xi_{n,\mathbf{j}}| < v\}},$$

$$Z_n(A,u,v) = \sum_{\bar{1}\leq\mathbf{j}\leq\bar{n}} \frac{|A \cap C_{n\mathbf{j}}|}{|C_{n\mathbf{j}}|}\big(\xi_{n\mathbf{j}}(u,v) - E\xi_{n\mathbf{j}}(u,v)\big),$$

$$U_n(A,u,v) = \sum_{\bar{1}\leq \mathbf{j}\leq \bar{n}} \frac{|A\cap C_{n,\mathbf{j}}|}{|C_{n,\mathbf{j}}|}|\xi_{n,\mathbf{j}}(u,v)|.$$

Se tiene

$$(3.3.1)\quad EU_n(A,u,v) \leq \sum_{\bar{1}\leq \mathbf{j}\leq \bar{n}} \frac{|A\cap C_{n,\mathbf{j}}|}{|C_{n,\mathbf{j}}|} n^{-d}u^{-(s-1)}h(un^{d/2(s-1)})$$
$$= |A|u^{-(s-1)}h(un^{d/(2(s-1))}).$$

Para cada $a > 0$

$$\|Z_n\|_{\mathcal{A}_\alpha} \leq \|Z_n(.,0,a)\|_{\mathcal{A}_\alpha} + U_n([0,1]^d, a, \infty) + EU_n([0,1]^d, a, \infty).$$

Por (3.3.1) $U_n([0,1]^d, a, \infty)$ tiende a 0 en $\mathcal{L}^1$ cuando $n \to \infty$. Luego tanbién converge en probabilidad. Por lo tanto la siguiente condición implica (3.1.1): para cada $\varepsilon > 0$ existe una función $\alpha \to a(\alpha)$ a valores reales positivos tal que

$$(3.3.2)\qquad \lim_{\alpha\searrow 0}\ \limsup_{n\to\infty} P(\|Z_n(\cdot,0,a(\alpha))\|_{\mathcal{A}_\alpha} \geq \varepsilon) = 0.$$

Paso 2: Ablocamiento. Definamos $p_n = [n^{s/(2(s-1))}]$ y $m_n = n/(2p_n)$. Ahora dividimos cada celda $C_{p_n,\mathbf{k}}$ ($\mathbf{k} \leq \bar{p}_n$) en 2^d sub-celdas de la forma $C_{2p_n,\mathbf{j}}$. Las denotamos $I_{n,\mathbf{k},i}$, $i = 1,\ldots,2^d$, numerando de igual modo en cada $C_{p_n,\mathbf{k}}$ (el i dependerá de la posición geométrica relativa de la sub-celda respecto a la celda; por ejemplo en el caso $d = 2$ corresponde el mismo i a todas las sub-celdas superiores e izquierdas). Sea, para cada i,

$$I_{n,i} = \bigcup_{\mathbf{k}\leq \bar{p}_n} I_{n,\mathbf{k},i}.$$

Para todo A se tiene

$$Z_n(A,0,a) = \sum_{i=1}^{2^d} Z_n(A\cap I_{n,i},0,a).$$

Por lo tanto, en lugar de (3.3.2) es suficiente probar que para cada i:

$$\lim_{\alpha\searrow 0}\ \limsup_{n\to\infty} P(\|Z_n(.\cap I_{n,i},0,a(\alpha))\|_{\mathcal{A}_\alpha} \geq \varepsilon) = 0.$$

Tomemos un i fijo. Por la aditividad de Z_n tenemos,para cada A y cada a

$$Z_n(A\cap I_{n,i},0,a) = \sum_{\mathbf{k}\leq \bar{p}_n} V_{n,\mathbf{k}}(A,0,a)$$

donde

$$V_{n,\mathbf{k}}(A,u,v) = Z_n(A\cap I_{n,\mathbf{k},i},u,v) = \sum_{\mathbf{j}\in T(n,\mathbf{k},i)} \frac{|A\cap I_{n,\mathbf{k},i}\cap C_{n,\mathbf{j}}|}{|C_{n,\mathbf{j}}|}(\xi_{n,\mathbf{j}}(u,v) - E\xi_{n,\mathbf{j}}(u,v))$$

con $T(n,\mathbf{k},i) = \{\mathbf{j}\leq \bar{n} : C_{n,\mathbf{j}}\cap I_{n,\mathbf{k},i}\neq\emptyset\}$. Observamos que si $\mathbf{j}_1\in T(n,\mathbf{k}_1,i)$, $\mathbf{j}_2\in T(n,\mathbf{k}_2,i)$ y $\mathbf{k}_1\neq\mathbf{k}_2$ entonces $\|\mathbf{j}_2-\mathbf{j}_1\|\geq m_n-2$ (recordemos que hemos adoptado la norma euclidiana). Para $n\in\mathbb{Z}_+$, $\mathbf{j}\in\bigcup_{\bar{1}\leq\mathbf{k}\leq\bar{p}_n} T(n,\mathbf{k},i)$, consideremos variables aleatorias $\bar{\xi}_{n,\mathbf{j}}$ tales que para cada $\mathbf{k}$ los procesos $\{\xi_{n,\mathbf{j}}\}_{\mathbf{j}\in T(n,\mathbf{k},i)}$, $\{\bar{\xi}_{n,\mathbf{j}}\}_{\mathbf{j}\in T(n,\mathbf{k},i)}$ tienen la misma distribución y $\{\bar{\xi}_{n,\mathbf{j}}\}_{\mathbf{j}\in T(n,\mathbf{k},i)}$, $\bar{1}\leq\mathbf{k}\leq\bar{p}_n$ son independientes. Definimos ahora

$$\bar{\xi}_{n,\mathbf{j}}(u,v) = \bar{\xi}_{n,\mathbf{j}} I\{u\leq n^{d(s-2)/(2(s-1))}|\bar{\xi}_{n,\mathbf{j}}|<v\},$$

$$\bar{V}_{n,\mathbf{k}}(A,u,v) = \sum_{\mathbf{j}\in T(n,\mathbf{k},i)} \frac{|A\cap I_{n,\mathbf{k},i}\cap C_{n,\mathbf{j}}|}{|C_{n,\mathbf{j}}|}(\bar{\xi}_{n,\mathbf{j}}(u,v) - E\bar{\xi}_{n,\mathbf{j}}(u,v)),$$

$$\bar{Z}_n(A,u,v) = \sum_{\mathbf{k}\leq\bar{p}_n}\bar{V}_{n,\mathbf{k}}(A,u,v),$$

$$W_{n,\mathbf{k}}(A,u,v) = \sum_{\mathbf{j}\in T(n,\mathbf{k},i)} \frac{|A\cap I_{n,\mathbf{k},i}\cap C_{n,\mathbf{j}}|}{|C_{n,\mathbf{j}}|}|\bar{\xi}_{n,\mathbf{j}}(u,v)|,$$

$$\bar{U}_n(A,u,v) = \sum_{\mathbf{k}\leq\bar{p}_n} W_{n,\mathbf{k}}(A,u,v).$$

Veamos ahora que para cada a

$$\|L(Z_n(\cdot\cap I_{n,i},0,a)) - L(\bar{Z}_n(\cdot,0,a))\|_{\mathrm{Var}}\to 0 \text{ cuando } n\to\infty. \tag{3.3.3}$$

Es simple ver que $\#(T(n,\mathbf{k},i))\leq C' n^{d(s-2)/(2(s-1))}$, donde C' depende sólo de d. Anotemos, para cada $\mathbf{k}\leq\bar{p}_n$, $L_{n,\mathbf{k}}$ la ley de $V_{n,\mathbf{k}}(.,u,v)$ (u y v fijos), $L_n^{\mathbf{k}}$ la ley conjunta de todos los $V_{n,\mathbf{j}}(.,u,v)$ con $\mathbf{j}\neq\mathbf{k}$ y L_n la ley conjunta de todos los $V_{n,\mathbf{k}}(.,u,v)$. Si para cada $\mathbf{k}$, $\Lambda_{\mathbf{k}} = \sigma(V_{n,\mathbf{k}}(.,u,v))$ y $\Lambda^{(\mathbf{k})} = \sigma(\{V_{n,\mathbf{j}}(.,u,v),\mathbf{j}\neq\mathbf{k}\})$, usando [15, Lema 3.5], la condición de mezcla no uniforme y la acotación de los cardinales:

$$\|L_n - L_{n,\mathbf{k}}\otimes L_n^{\mathbf{k}}\|_{\mathrm{Var}}\leq$$
$$2\#(T(n,\mathbf{k},i))\phi(m_n-2)\leq 2C' n^{d(s-2)/(2(s-1))}\phi(\frac{1}{2}n^{(s-2)/(2(s-1))}-2).$$

Aplicando ahora el Lema 3.3.1

$$\|L_n - \bigotimes_{\mathbf{k}} L_{n,\mathbf{k}}\|_{\mathrm{Var}} \leq (p_n^d - 1)2C' n^{d(s-2)/(2(s-1))}\phi(\frac{1}{2}n^{(s-2)/(2(s-1))} - 2) \leq$$

$$2C'\left((2(K+2)\right)^{2d(s-1)/(s-2)}\phi(K) \leq C'' K^{2d(s-1)/(s-2)}\phi(K)$$

donde $K \to \infty$ cuando $n \to \infty$. Como $\lim_{t\to+\infty} t^{2d(1+\delta^{-1})}\phi(t) = 0$ se deduce (3.3.3).

Esto permite sustituir (3.3.2) por:

$$\lim_{\alpha\searrow 0}\limsup_{n\to\infty} P(\|\bar{Z}_n(\cdot, 0, a(\alpha))\|_{A_\alpha} \geq \varepsilon) = 0.$$

Ahora hallaremos cotas (en casi todo punto) que permitirán aplicar en diferentes casos la desigualdad de Bernstein en el paso final.

$|\bar{V}_{n,\mathbf{k}}(A,u,v)| \leq 2v$, $|W_{n,\mathbf{k}}(A,u,v)| \leq v$ y $E\bar{U}_n(A,u,v) \leq |A|u^{-(s-1)}h(0)$ se obtienen como en [19]. Observamos que

$$\mathrm{Var}(\bar{Z}_n(A,u,v)) = \sum_{\bar{1}\leq\mathbf{k}\leq\bar{p}_n} \mathrm{Var}(\bar{V}_{n,\mathbf{k}}(A,u,v)) = \sum_{\bar{1}\leq\mathbf{k}\leq\bar{p}_n} \mathrm{Var}(Z_n(A\cap I_{n,\mathbf{k},i},u,v)).$$

Tomando $f(x) = xI_{\{un^{d/2(s-1)}\leq|x|\leq vn^{d/2(s-1)}\}}$ y aplicando el Lema 2.3.4 a cada sumando, obtenemos $\mathrm{Var}\bar{Z}_n(A,u,v) \leq C|A|$ con $C = 2SE\xi_{\mathbf{0}}^2$. Con igual argumento y $f(x) = |x|$ resulta $\mathrm{Var}(\bar{U}_n(A,u,v)) \leq C|A|$ con el mismo C.

Paso 3: Elección de $a(\alpha)$. Estamos ahora en situación idéntica a [19, 5.6]. Por ese motivo remitimos a ese trabajo tomando $r_I < r' < \dfrac{1}{s-1}$, aclarando que nuestras variables α, s y ε corresponden a δ, s' y λ de aquél.

Observación. El Teorema 3.3.2 puede ser probado suponiendo, como única hipótesis de mezcla, la condición de β-mezcla no uniforme

$$\lim_{t\to+\infty} t^{2d(1+\delta^{-1})}\beta(t) = 0, \tag{3.3.4}$$

con (ver §1.6)

$$\beta(t) = \sup_{d(A_1,A_2)\geq t,\ \#(A_1)+\#(A_2)<\infty} \frac{\widetilde{\beta}(A_1,A_2)}{\#(A_1)}$$

Damos una justificación de esta afirmación: (3.3.4) permite probar el punto (3.3.3). Falta mostrar que tenemos hipótesis de mezcla suficientes para el Teorema 2.3.5 (ver la observación que sigue a la prueba del mismo). Como $2\alpha(t) \leq \beta(t)$, se cumple (2.3.2). Por (1.7.4), (2.3.2) y (3.3.4) se tiene $\sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d} \alpha^{\frac{\delta}{2+\delta}}(\|\mathbf{k}\|) < +\infty$. Este hecho y la desigualdad de Davydov (ver [6, Lema 1]), usando que $E|\xi_{\mathbf{0}}|^{2+\delta} < +\infty$, reemplazan el uso de la condición (2.3.1) en los argumentos que conducen al Teorema 2.3.5.

4 Campos de Gibbs

4.1 El modelo de Dobrushin.

Sea X un espacio métrico compacto provisto de la σ-álgebra de Borel $\mathcal{S}$. Para cada $\mathbf{j} \in \mathbb{Z}^d$ se considera el espacio $X_\mathbf{j} = X$. Sea $\Omega = X^{\mathbb{Z}^d}$. Para cada $M \subseteq \mathbb{Z}^d$, sea $\Pi_M : \Omega \to X^M$ la proyección canónica, $\mathcal{F}_M$ la σ-álgebra generada por las proyecciones $\Pi_\mathbf{j}, \mathbf{j} \in M$, de Ω sobre $X_\mathbf{j}$. Cuando $M = \mathbb{Z}^d$ anotamos simplemente $\mathcal{F}$ (la σ-álgebra producto en Ω).

Llamemos $\mathcal{M}$ a la clase de los subconjuntos finitos no vacíos de $\mathbb{Z}^d$. Si $M \in \mathcal{M}$, $t \in X^M$ y $s \in X^{\mathbb{Z}^d \setminus M}$, se anotará ts al elemento $u \in \Omega$ que cumple $\Pi_M(u) = t$, $\Pi_{\mathbb{Z}^d \setminus M}(u) = s$.

En muchas aplicaciones aparecen naturalmente, para cada $M \in \mathcal{M}$ y $s \in X^{\mathbb{Z}^d \setminus M}$ las probabilidades de los sucesos de $\mathcal{F}_M$ condicionadas a la situación externa a M. La pregunta es si existe alguna medida de probabilidad P y, en caso afirmativo, si es única, que dé origen a ese sistema de probabilidades condicionales.

R.Dobrushin([11]) planteó rigurosamente el problema y dio condiciones para la existencia y unicidad de P. Describiremos estos resultados remitiendo para los detalles y demostraciones al citado trabajo y a [24], [21], [25], [17].

Se dice que una familia $(q^M)_{M \in \mathcal{M}}$ es una *especificación* sobre Ω si, para cada M, $q^M : \mathcal{F}_M \times X^{\mathbb{Z}^d \setminus M} \to [0,1]$ es una función que satisface:

(4.1.1) $\forall s \in X^{\mathbb{Z}^d \setminus M}$, $q^M(.|s)$ es una medida de probabilidad sobre $(\Omega, \mathcal{F}_M)$,

(4.1.2) $\forall A \in \mathcal{F}_M$, $q^M(A|.)$ es $\mathcal{F}^0_{\mathbb{Z}^d \setminus M}$-medible
($\mathcal{F}^0_{\mathbb{Z}^d \setminus M}$ es la σ-álgebra producto en $X^{\mathbb{Z}^d \setminus M}$).

Dada una especificación, interesa la existencia de medidas de probabilidad P sobre $(\Omega, \mathcal{F})$ tales que, para cada $M \in \mathcal{M}$ y $A \in \mathcal{F}_M$, $q^M(A|\Pi_{\mathbb{Z}^d \setminus M}(.))$ sea una versión de la probabilidad condicional de A dado $\mathcal{F}_{\mathbb{Z}^d \setminus M}$, esto es, que para todo $B \in \mathcal{F}_{\mathbb{Z}^d \setminus M}$ se cumpla

$$P(A \cap B) = \int_B q^M(A|\Pi_{\mathbb{Z}^d \setminus M}(s))P(ds). \tag{4.1.3}$$

Una tal P se llama *medida de Gibbs* correspondiente a la especificación (q^M).

Es conveniente asociar a (q^M) la familia $(p^M)_{M \in \mathcal{M}}$, donde para cada $M \in \mathcal{M}$, $p^M : \mathcal{F} \times \Omega \to [0,1]$ se define como

$$p^M(A|s) := q^M(A_{M,s}|\Pi_{\mathbb{Z}^d \setminus M}(s)) \quad \text{, donde}$$

$$A_{M,s} = \{t \in \Omega : \Pi_M(t)\Pi_{\mathbb{Z}^d \setminus M}(s) \in A\}.$$

Las propiedades siguientes caracterizan a (p^M):

(4.1.4) $\forall A \in \mathcal{F}$, $p^M(A|.)$ es $\mathcal{F}_{\mathbb{Z}^d\setminus M}$-medible,

(4.1.5) $\forall s \in \Omega$, $p^M(.|s)$ es una probabilidad sobre $(\Omega, \mathcal{F})$ que coincide con δ_s sobre $\mathcal{F}_{\mathbb{Z}^d\setminus M}$ y con $q^M(.|\Pi_{\mathbb{Z}^d\setminus M}(s))$ sobre $\mathcal{F}_M$.

Las p^M extienden de manera natural a las q^M. Se tiene que una medida de probabilidad P sobre $(\Omega, \mathcal{F})$ es una medida de Gibbs para (q^M) si y sólo si para todos $M \in \mathcal{M}$ y $A \in \mathcal{F}_M$, $p^M(A, .)$ es una versión de la probabilidad condicional $P(A|\mathcal{F}_{\mathbb{Z}^d\setminus M})$; en ese caso, esta relación se extenderá a todo $A \in \mathcal{F}$ y además se tendrá

$$p^M(A|s) = \int p^N(A|t)p^M(dt|s)$$

para P-casi todo $s \in \Omega$ si $M, N \in \mathcal{M}$ con $N \subset M$.

Suponemos que esta última relación vale para todos $N, M \in \mathcal{M}$ con $N \subset M$, $A \in \mathcal{F}$ y $s \in \Omega$; se dice entonces que (q^M) es *consistente.*

Se supone además que dada $f \in C(\Omega)$ (Ω con la topología producto) y $M \in \mathcal{M}$, también es continua la función $p^M f$ definida como

$$p^M f(s) := \int f(t)p^M(dt|s);$$

se dice en este caso que la especificación es *continua.* En esta línea, la consistencia es equivalente a que si $N \subset M \in \mathcal{M}$ y $f \in C(\Omega)$ entonces

$$p^M(p^N f) = p^M f. \tag{4.1.6}$$

Por su parte, la propiedad que debe tener una solución P es equivalente a que para todo $M \in \mathcal{M}$

$$P(p^M f) = Pf. \tag{4.1.7}$$

Bajo estas suposiciones, existe alguna medida de Gibbs para la especificación $(q^M)_{M\in\mathcal{M}}$. El esquema para probarlo es el siguiente: se toma $s \in \Omega$, una sucesión de conjuntos $M_n \in \mathcal{M}$ tal que $M_n \nearrow \mathbb{Z}^d$ y se consideran las medidas de probabilidad $p^{M_n}(.|s)$. La metrizabilidad y compacidad de Ω implican las mismas propiedades para el espacio $Z(\Omega)$ de las medidas de probabilidad sobre Ω (cuya topología se definió en §1.1). Tomando una subsucesión $p^{M_{n_k}}(.|s) \Longrightarrow P$ y aplicando (4.1.6) se obtiene (4.1.7), lo cual termina la prueba.

Ahora daremos una serie de definiciones y notaciones necesarias para describir una condición de unicidad y las propiedades de dependencia de este modelo. Dadas especificaciones (q_i^M) con $i = 1, 2$ definimos $(a, b \in \mathbb{Z}^d)$:

$$\gamma_{ab} = \frac{1}{2}\sup\{\|q_i^b(.|s) - q_i^b(.|t)\|_{\mathrm{Var}},\ s = t \text{ excepto en } a,\ i = 1, 2\},$$

$$\gamma_{aa} = 0,$$

$$\beta_a = \frac{1}{2}\sup\{\|q_1^a(.|s) - q_2^a(.|s)\|_{\mathrm{Var}}, s \in X^{\mathbb{Z}^d\setminus a}\}.$$

Llamaremos Γ a la matriz infinita $(\gamma_{ab})_{(a,b)\in\mathbb{Z}^d\times\mathbb{Z}^d}$ y, para cada $M \in \mathcal{M}$, Γ_M será la matriz $(\gamma_{ab})_{(a,b)\in M\times M}$. Definimos

$$\chi_{ab} = \sum_{n=0}^{\infty} (\Gamma^n)_{ab} \qquad (a,b) \in \mathbb{Z}^d \times \mathbb{Z}^d,$$

$$\chi_{ab}^M = \sum_{n=0}^{\infty} (\Gamma_M^n)_{ab} \qquad (a,b) \in M \times M.$$

Si $f \in C(\Omega)$ y $a \in \mathbb{Z}^d$, definimos

$$\rho_a(f) = \sup\{|f(s) - f(t)|,\ s = t \text{ excepto en } a\}.$$

Si para $i = 1, 2$ se tiene una medida de Gibbs $P^{(i)}$ correspondiente a la especificación (q_i^M) y existe $\alpha < 1$ tal que $\sum_a \gamma_{ab} \leq \alpha < 1$ para todo $b \in \mathbb{Z}^d$ entonces se tiene la desigualdad ([21, Teorema 2.1], [24, Teorema 8.2.1])

$$|P^{(1)}f - P^{(2)}f| \leq \sum_{a,b} \beta_a \chi_{ab} \rho_b(f), \quad f \in C(\Omega). \tag{4.1.8}$$

Dada (q^M), tomando en las definiciones previas y en esta relación $q_1^M = q_2^M = q^M$, en cuyo caso $\beta_a = 0$ para todo a, se prueba que para la existencia de una única medida de Gibbs para q^M es suficiente que se verifique la condición de unicidad de Dobrushin: existe α tal que para todo $b \in \mathbb{Z}^d$

$$\sum_a \gamma_{ab} \leq \alpha < 1 \tag{4.1.9}$$

(en relación con ciertos ejemplos de la física, que daremos más adelante, la ausencia de unicidad de P se suele llamar *transición de fase*).

Supongamos que se satisface la condición de Dobrushin y veamos las propiedades de mezcla del campo aleatorio $(\Pi_{\mathbf{k}})_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d}$ bajo esta única medida P. Para cada par de conjuntos $N \subset M \in \mathcal{M}$ se tiene (§1.6)

$$\tilde{\phi}(N, \mathbb{Z}^d\backslash M) = \sup\{|P(A|B) - P(A)|,\ A \in \mathcal{F}_N,\ B \in \mathcal{F}_{\mathbb{Z}^d\backslash M},\ P(B) \neq 0\};$$

a partir de (4.1.8), Dobrushin probó la desigualdad ([21, Proposición 2.5])

$$\tilde{\phi}(N, \mathbb{Z}^d\backslash M) \leq \sum_{b\in N} \Big(\sum_{c\notin M, a\in M} \gamma_{ca} \chi_{ab} \Big)$$

de la que se desprende que $\tilde{\phi}(N, \mathbb{Z}^d\backslash M)$ tiende a 0 cuando N está fijo y $M \nearrow \mathbb{Z}^d$ (los γ_{ab} se definen para una especificación del mismo modo que se hizo cuando había dos).

En el camino de satisfacer una condición de ϕ-mezcla no uniforme es útil la condición ([24, Proposición 8.3.1]) de que exista α tal que para todo $b \in \mathbb{Z}^d$

$$\sum_a \gamma_{ab} e^{\mathrm{d}(a,b)} \leq \alpha < 1, \tag{4.1.10}$$

donde d es una semimétrica en $\mathbb{Z}^d$ (función no negativa y simétrica definida en $\mathbb{Z}^d \times \mathbb{Z}^d$ y tal que vale la desigualdad triangular). En ese caso se tiene

$$\widetilde{\phi}(N, \mathbb{Z}^d \backslash M) \leq \#(N) e^{-\mathrm{d}(N, \mathbb{Z}^d \backslash M)} \alpha (1-\alpha)^{-1}$$

con $\mathrm{d}(N, \mathbb{Z}^d \backslash M) = \inf\{\mathrm{d}(a,b),\ a \in N,\ b \in \mathbb{Z}^d \backslash M\}$.

Un caso sencillo que cubre muchos ejemplos es el llamado *k-markoviano*, en el cual existe k tal que, para cada b, $q^b(.|s)$ depende a lo sumo de los valores de la configuración s en los sitios a tales que $\|b-a\| \leq k$ (norma euclídea); para ser más precisos, $\gamma_{ab} = 0$ si $\|b-a\| \geq k$. En este caso la condición (4.1.9) implica que para ε suficientemente pequeño, la métrica dada por la norma $\varepsilon\|.\|$ permite satisfacer (4.1.10); nótese que ϕ tiene decaimiento exponencial ($\phi(t) = O(e^{-\varepsilon t})$) con lo cual el campo $(\Pi_{\mathbf{k}})_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d}$, respecto de P, cumple las hipótesis de velocidad de decrecimiento de todos nuestros resultados.

4.2 Campos definidos por un potencial.

Un caso que proviene de la física es el de las especificaciones definidas a partir de una medida de probabilidad ν sobre (X, S) (se llama a X el espacio del spin individual) y una función llamada *potencial* que refleja las interacciones entre las variables $\Pi_{\mathbf{k}}$ a valores en las "copias" $X_{\mathbf{k}}$ de X. Más precisamente, un potencial Ψ es una familia $(\Psi_M)_{M \in \mathcal{M}}$ de funciones continuas y $\mathcal{F}_M$-medibles $\Psi_M : \Omega \to \mathbb{R}$ tal que

$$\|\Psi\| := \sum_{0 \in M} \#(M) \sup\{|\Psi_M(s)|, s \in \Omega\} < \infty \tag{4.2.1}$$

y que además son invariantes por traslaciones ($\Psi_{M_{\mathbf{j}}}(s_{\mathbf{j}}) = \Psi_M(s)$ para todo $M \in \mathcal{M}$, $\mathbf{j} \in \mathbb{Z}^d$ y $s \in \Omega$, donde $M_{\mathbf{j}} = M + \mathbf{j}$ y $s_{\mathbf{j}}$ es el elemento de Ω que satisface $\Pi_{\mathbf{k}}(s_{\mathbf{j}}) = \Pi_{\mathbf{k}-\mathbf{j}}(s)$ para todo $\mathbf{k}$).

Para cada $M \in \mathcal{M}$, $A \in \mathcal{F}_M$ y $s \in X^{\mathbb{Z}^d \backslash M}$, sea

$$q^M(A|s) = \frac{1}{Z_M(s)} \int_{\Pi_M(A)} \exp\left(- \sum_{N \in \mathcal{M}, N \cap M \neq \emptyset} \Psi_N(ts) \right) \prod_{\mathbf{k} \in M} \nu(dt_{\mathbf{k}}) \tag{4.2.2}$$

donde $Z_M(s)$ es una constante de normalización. Una especificación de esta forma es siempre continua y consistente ([24, p.194]). Además ([24, demostración del Teorema 9.1.1]) se tiene, para cada b,

$$\sum_a \gamma_{ab} \leq \frac{1}{2} e^{4\|\Psi\|} (e^{(4\|\Psi\|} - 1),$$

lo que permite, junto con (4.1.9) dar la condición suficiente para la unicidad

$$\|\Psi\| < \log 2/4. \tag{4.2.3}$$

Si $P_{\mathbf{k}} := P\Pi_{\mathbf{k}}^{-1}$ es la medida de probabilidad inducida por P en cada $X_{\mathbf{k}}$, (4.1.3) y (4.2.2) implican

$$e^{-2\|\Psi\|}\nu \leq P_{\mathbf{k}} \leq e^{2\|\Psi\|}\nu. \tag{4.2.4}$$

Usando (4.1.3) y (4.2.4), obtenemos para $\mathbf{j} \neq \mathbf{k}$, $A \in \mathcal{F}_{\mathbf{j}}$, $B \in \mathcal{F}_{\mathbf{k}}$, la desigualdad

$$P(A \cap B) \leq e^{4\|\Psi\|}P(A)P(B). \tag{4.2.5}$$

Para conseguir que $(\Pi_{\mathbf{k}})$ (que es estacionario por la invariancia por traslaciones del potencial) satisfaga la condición de ϕ-mezcla no uniforme con una velocidad de decrecimiento compatible con la requerida por nuestros resultados, puede pedirse que se satisfaga la desigualdad (4.2.3) y que, como en la sección anterior, el campo sea k-markoviano para algún k; esto sucede (recordar la estacionariedad) cuando sólo hay una cantidad finita de conjuntos $M \in \mathcal{M}$ que cumplen simultáneamente $0 \in M$ y $\Psi_M \neq 0$.

Otra alternativa es usar [24, demostración del Teorema 9.4.1] donde se prueba que si

$$\sum_{0 \in M} (\operatorname{diam}(M))^{\gamma} \#(M) \sup\{|\Psi_M(s)|, s \in \Omega\} < \infty \tag{4.2.6}$$

con $\gamma > 2$, se tiene mezcla no uniforme con una velocidad de decrecimiento de $\phi(t)$ de orden menor o igual que $(\log(t)/t)^{\gamma}$. Para satisfacer los requerimientos de velocidad de decrecimiento de ϕ en el Teorema 2.3.5 y en el resultado funcional del Corolario 3.2.3, es suficiente $\gamma > 2d$; en el Teorema 2.6.5 alcanza $\gamma > 6d$ y en el Teorema 3.3.2, $\gamma > 2d(1 + \delta^{-1})$.

4.3 Ejemplos.

De acuerdo a la sección anterior, los campos k-markovianos que cumplen (4.2.3) y con X finito, que son necesariamente acotados, están en las condiciones de todos nuestros resultados con varianza finita, ya que cumplen la condición de ϕ-mezcla no uniforme con decaimiento exponencial de ϕ. En particular, la conclusión del Teorema 3.3.2 vale para cualquier clase $\mathcal{A}$ con exponente de entropía métrica con inclusión $r_I < 1$.

Un ejemplo clásico es el modelo de *Ising*, en el cual $X = \{-1, 1\}$ con $\nu(\{1\}) = \nu(\{-1\}) = 1/2$ y el campo se define a partir de un potencial de la forma

$$\Psi_M(s) = \begin{cases} \beta\Pi_{\mathbf{i}}(s)\Pi_{\mathbf{j}}(s) & \text{si } M = \{\mathbf{i}, \mathbf{j}\},\ \|\mathbf{i} - \mathbf{j}\| = 1 \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases} \tag{4.3.1}$$

donde β es una constante positiva. Recordando que d es la dimensión, tenemos en este caso $\|\Psi\| = 4d\beta$ y de acuerdo a (4.2.3) una condición suficiente de unicidad de P es $\beta < \log 2/16d$. El campo resultante es 1-markoviano. (Un problema de interés para la física es encontrar el valor exacto β_c (el β crítico) del supremo de los valores de β para los que P es única; siendo β inverso de la temperatura, el problema es equivalente a determinar cuál es la temperatura a partir de la cual hay transición de fase. En el caso $d = 1$ no hay transición de fase; el problema ha sido resuelto para $d = 2$ y está abierto para $d > 2$. Ver [25]).

Una clase de potenciales que aparecen en las aplicaciones a la física son los llamados *potenciales de spin*, donde X es el mismo del modelo de Ising (que está incluído en este esquema) y

$$\Psi_M(s) = -J(M)\sigma^M(s), \tag{4.3.2}$$

donde J es una función real definida en $\mathcal{M}$ (el signo se debe a una convención) y

$$\sigma^M(s) = \prod_{\mathbf{k}\in M} \Pi_{\mathbf{k}}(s).$$

Tomemos ahora $X = [-1, 1]$ y $d\nu = dx/2$. Los potenciales de spin tienen una versión continua natural que consiste en repetir (4.3.2) en este caso (ver [28, Ejemplo 5]). Una manera de obtener campos aleatorios no acotados que satisfagan las condiciones de nuestros resultados consiste en tomar una función medible G adecuada y considerar el campo aleatorio $(G(\Pi_{\mathbf{k}}))$; éste hereda la estacionariedad y la función de mezcla no uniforme de $(\Pi_{\mathbf{k}})$ mientras que la hipótesis de momento será consecuencia de la elección de G. Vamos a aplicar esta idea para dar ejemplos de campos con varianza infinita que satisfagan todas las hipótesis del Teorema 2.6.5.

Supongamos que P es la única medida de Gibbs para un potencial de spin Ψ de este tipo y que $(\Pi_{\mathbf{k}})$ satisface $S < +\infty$ y $T_4 < \infty$. Sean μ la medida sobre X que es igual a $P_{\mathbf{k}}$ para todo $\mathbf{k}$ y(teniendo en cuenta 4.2.4) $f = d\mu/dx$. Definimos $F(y) = \int_{-1}^{y} f(x)dx$. Tomemos, para $-1 < y \leq 1$, $G(y) = (F(y))^{-1/2}$ (por (4.2.4) $F(y) > 0$ para estos y) y $G(-1) = 1$. El campo aleatorio $(G(\Pi_{\mathbf{k}}))$ tiene media finita:

$$E(G(\Pi_{\mathbf{k}})) = \int_{\Omega} G(\Pi_{\mathbf{k}}(\omega))P(d\omega) = \int_{-1}^{1} f(t)(F(t))^{-1/2}dt = 2.$$

Además, para $x > 0$,

$$\int_{|G(\Pi_{\mathbf{k}})|\leq x} G^2(\Pi_{\mathbf{k}}(\omega))P(d\omega) = \int_{|F(t)|\geq x^{-2}} f(t)(F(t))^{-1}dt = 2\log(x).$$

Consideremos el campo centrado $(\xi_{\mathbf{k}}) = (G(\Pi_{\mathbf{k}}) - 2)$ y observemos que $U(x)$ (esto es $E((\xi_{\mathbf{0}}^{(x)})^2)$) satisface

$$\lim_{x\to+\infty} U(x)/2\log(x) = 1. \tag{4.3.3}$$

Para la aplicación del Teorema 2.6.5 debe verificarse su condición b); reemplazándola por la condición que da el Corolario 2.6.6 y usando (4.2.5) obtenemos, para $\mathbf{k} \neq 0$,

$$E(|\xi_{\mathbf{0}}^{(x)}\xi_{\mathbf{k}}^{(x)}|) \leq e^{4\|\Psi\|}E^2(|\xi_{\mathbf{0}}|)$$

y por lo tanto

$$\lim_{x\to+\infty} E(\xi_{\mathbf{0}}^{(x)}\xi_{\mathbf{k}}^{(x)})/U(x) = \delta_{\mathbf{0},\mathbf{k}}.$$

Teniendo en cuenta (4.3.3) y observando que los argumentos que llevan a la demostración del Teorema 2.6.5 permanecen válidos bajo la condición $n^dU(a_n)/a_n^2 \to 1$ (en lugar de $n^dU(a_n)/a_n^2 = 1$) concluimos que la convergencia que prueba ese resultado se cumple con $a_n = (dn^d\log(n))^{1/2}$.

Como potencial, en este ejemplo puede tomarse la versión continua del potencial (4.3.1) del modelo de Ising con $\beta < \log 2/16d$, en cuyo caso el decaimiento de ϕ es exponencial.

Otros posibles potenciales en los que el decaimiento de ϕ no es exponencial pero satisfacen las condiciones requeridas son los siguientes. Fijemos $\gamma > 6d$ y una sucesión $(C_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ de constantes positivas tales que

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\gamma+d-1}C_n < \infty$$

Si $\#(M) = 2$, $M = \{\mathbf{k},\mathbf{j}\} = \{(k_1,..,k_d),(j_1,..,j_d)\}$ y $I(M) = \max\{|k_i - j_i|,\ i = 1,..,d\}$ se define $J(M) = \beta C_{I(M)}$ ($\beta > 0$ a determinar); para el resto de los $M \in \mathcal{M}$, $J(M) = 0$.

Como para cada $n \in \mathbb{Z}_+$ la cantidad de conjuntos $M \subset \mathbb{Z}^d$ de la forma $M = \{\bar{0},\mathbf{j}\}$ con $I(M) = n$ no alcanza a $2d(2n+1)^{d-1}$ y el mayor diámetro de tales conjuntos es $nd^{1/2}$, la elección de los C_n asegura que se verifica (4.2.6). Observando que

$$\|\Psi\| \leq 4d\beta\sum_{n=1}^{\infty}(2n+1)^{d-1}C_n,$$

se tomará cualquier constante β con la que se cumpla (4.2.3). Finalmente, la condición impuesta a γ (ver comentarios posteriores a (4.2.6)) implica $T < +\infty$.

BIBLIOGRAFIA

1. K. S. Alexander y R. Pyke, *A uniform central limit theorem for set-indexed partial-sum processes with finite variance*, Ann. Probab. **14** (1986), 582–597.

2. R. F. Bass, *Law of the iterated logarithm for set-indexed partial-sum processes with finite variance*, Wahrsch. Verw. Gebiete **70** (1985), 591–608.

3. R. F. Bass y R. Pyke, *Functional law of the iterated logarithm and uniform central limit theorem for partial-sum processes indexed by sets*, Ann. Probab. **12** (1984), 13–34.

4. P. J. Bickel y M. J. Wichura, *Convergence criteria for multiparameter stochastic processes and some applications*, Ann. Math. Stat. **42** (1971), 1656–1670.

5. P. Billingsley, *Convergence of probability measures*, Wiley, New York, 1968.

6. E. Bolthausen, *On the central limit theorem for stationary mixing rendom fields*, Ann. Probab. **10** (1982), 1047–1050.

7. R. C. Bradley, *A caution on mixing conditions for random fields*, Statistics & Probability Letters **8** (1989), 489–491.

8. R. C. Bradley, *On the Spectral Density and Asymptotic Normality of Weakly Dependent Random Fields*, J. Theor. Probab. **5** (1992), 355–373.

9. D. Chen, *A uniform central limit theorem for nonuniform ϕ-mixing random fields*, Ann. Probab. **19** (1991), 635–649.

10. Ch. M. Deo, *A functional central limit theorem for stationary random fields.*, Ann. Probab. **3** (1975), 708–715.

11. R. L. Dobrushin, *The description of a random field by means of conditional probabilities and conditions of its regularity*, Theor. Probab. Appl. **13** (1968), 197–224..

12. P. Doukhan, *Mixing. Properties and Examples*, Springer-Verlag, New York, 1994.

13. R. M. Dudley, *Sample functions of the Gaussian process*, Ann. Probab. **1** (1973), 66–103.

14. R. M. Dudley, *Metric entropy of some classes of sets with differentiable boundaries*, J. Approx. Th. **10** (1974), 227–236.

15. E. Eberlein, *An invariance principle for lattices of dependent random variables*, Wahrsch. Verw. Gebiete **50** (1979), 119–133.

16. E. Eberlein, *Weak convergence of partial sums of absolutely regular sequences*, Statist. Probab. Lett. **2** (1984), 291–293.

17. H. Georgii, *Gibbs measures and Phase Transitions*, Walter de Gruyter, Berlin-New York, 1988.

18. C. M. Goldie y P. E. Greenwood, *Characterisation of set-indexed Brownian motion and associated conditions for finite-dimensional convergence*, Ann. Probab. **14** (1986), 802–816.

19. C. M. Goldie y P. E. Greenwood, *Variance of set-indexed sums of mixing random variables and weak convergence of set-indexed processes*, Ann. Probab. **14** (1986), 817–839.

20. I. A. Ibragimov y Yu. V. Linnik, *Independent and Stationary sequences of random variables*, Wolters-Noordhoff, Groningen, 1971.

21. H.Künsch, *Decay of Correlations under Dobrushin Uniqueness Condition and its Application*, Commun. Math. Phys **84** (1982), 207–222.

22. A. L. Maltz, *On the Central Limit Theorem for nonuniform ϕ-mixing random fields*, J. Theor. Probab., en prensa.

23. B. S. Nahapetian, *The central limit theorem for random fields with mixing conditions*, Multicomponent System. Advances in Probability (R.L. Dobrushin and Ya. G Sinai, eds.), Dekker, New York, 1980, pp. 531–548.

24. B. S. Nahapetian, *Limit Theorems and Some Applications in Statistical Physics*, B.G.Teubner Verlagsgesellschaft, Stuttgart-Leipzig, 1991.

25. B. Prum, *Processus sur un réseau et mesures de Gibbs. Applications*, Masson, Paris, 1986.

26. R. Pyke, *A uniform central limit theorem for partial-sum processes indexed by sets*, Probability, Statistics and Analysis (J.F.C Kingman and G.E.H Reuter, eds.), Cambridge Univ. Press, 1983, pp. 219–240.

27. J. D. Samur, *A note on the convergence to Gaussian laws of sums of stationary ϕ-mixing triangular arrays*, Probability in Banach spaces V, Proceedings , Medford (A. Beck, R. Dudley, M. Hahn, J. Kuelbs, M. Marcus, eds.), Lecture Notes in Mathematics **1153**, Springer, 1985, pp. 387–399.

28. B. Simon, *A remark on Dobrushin uniqueness theorem*, Commun. Math. Phys. **68** (1979), 183–185.