

Tesis Doctoral

Sobre la convergencia de métodos de  
elementos finitos para el modelo de Placas  
de Reissner-Mindlin

Elsa B. Liberman

Director: Dr. Ricardo G. Durán

Departamento de Matemática  
Facultad de Ciencias Exactas  
Universidad Nacional de La Plata

1995

*A Milo, Martín y Leandro*

## Agradecimientos

Quiero expresar mi profundo agradecimiento a quienes considero mis maestros.

En primer lugar al Dr. Ricardo Durán, Director de este trabajo, por el aporte de su experiencia y conocimientos que posibilitaron el desarrollo del mismo. También por haberme brindado su constante apoyo y transmitido su entusiasmo por la tarea de investigación y sobre todo, por el respeto con que respondió a cada una de mis preguntas y propuestas.

A la Dra. María Amelia Muschietti, quien como docente en materias de posgrado, me brindó una visión más amplia del campo de las matemáticas.

Al Dr. Rodolfo Rodríguez que me permitió aprender de su profesionalidad y de quien recibí siempre colaboración.

Al Ing. Pedro E. Zadunaisky con quien compartí mis primeros años de trabajo y de quien recibí siempre un voto de confianza.

También deseo expresar mi agradecimiento al Dr. Jorge Solomín por su permanente estímulo para llevar adelante esta tarea y a mis compañeros de trabajo, con quienes comparto dificultades y alegrías.

Finalmente, agradezco al personal de la Sección de Mecánica Computacional del Centro Atómico Bariloche por haber permitido la instalación del generador de mallas ENREDO en este Departamento, el cual fué utilizado en la implementación de los programas computacionales.

# Contents

<b>1</b>	<b>Introducción</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Definición del modelo.</b>	<b>5</b>
2.1	Definición matemática del modelo. . . . .	6
2.2	Ecuaciones de Euler . . . . .	8
<b>3</b>	<b>Métodos mixtos.</b>	<b>10</b>
3.1	Reformulación del problema para su análisis en el contexto de métodos mixtos. . . . .	12
3.2	Regularidad de la solución . . . . .	15
<b>4</b>	<b>Aproximación numérica</b>	<b>16</b>
4.1	Aproximación mediante elementos finitos mixtos y un nuevo enfoque para el análisis del error. . . . .	20
4.2	Espacios de elementos finitos y operadores. . . . .	23
<b>5</b>	<b>Ejemplos</b>	<b>25</b>
5.1	Un elemento triangular de bajo orden . . . . .	26
5.2	Elemento de Bathe - Brezzi de segundo orden. . . . .	28
5.3	Elemento de Bathe - Dvorkin . . . . .	30
5.4	El elemento no conforme de Arnold y Falk . . . . .	34
<b>6</b>	<b>Elemento de Zienkiewicz, Taylor, Papadopoulos y Oñate</b>	<b>38</b>
6.1	Definición del método . . . . .	39
6.2	Relación con el método 5.1 y análisis del error. . . . .	41
6.3	Resultados numéricos . . . . .	44

# 1 Introducción

Dentro del análisis de elasticidad lineal la modelación de placas constituye una simplificación del modelo tridimensional clásico que considera el comportamiento de un material isotrópico y homogéneo bajo la acción de fuerzas externas. Su característica más importante es la reducción del problema a dos dimensiones.

Uno de estos modelos es el de Reissner-Mindlin [24]. El mismo describe el desplazamiento de una placa de pequeño espesor bajo el efecto de una carga transversal. El modelo se basa en simplificar la dependencia de los desplazamientos con respecto a la variable  $z$ , (correspondiente a la dirección vertical). De ello resulta un modelo bidimensional cuyas incógnitas son el desplazamiento vertical y los ángulos de rotación de fibras normales a la superficie media de la placa con respecto a los ejes  $x$  e  $y$ .

La resolución numérica del modelo mediante métodos clásicos de elementos finitos no permite obtener buenas aproximaciones para valores pequeños del espesor, debido a la aparición de un fenómeno de bloqueo. Esta situación exige la utilización de grillas de cálculo de diámetro excesivamente pequeño. Por ese motivo se aproxima el problema mediante métodos mixtos. Estos se basan en la introducción de una nueva variable que está relacionada con el esfuerzo de corte.

La construcción de espacios de elementos finitos para la nueva formulación que satisfagan las hipótesis correspondientes a la teoría clásica de aproximación para métodos mixtos presenta nuevas dificultades. En particular, es difícil hallar espacios que verifiquen la condición denominada *inf-sup* [5], [10].

Diversos métodos han sido estudiados en forma experimental y, para varios de ellos, se obtuvieron también resultados de convergencia utilizando distintas técnicas para su demostración, dependientes de cada método particular, [2], [6], [7], [9], [11], [13], [14], [26].

En este trabajo efectuamos un análisis de convergencia de métodos mixtos para el modelo de placas de Reissner-Mindlin, dentro de una teoría general. Esta teoría, que abarca a la mayoría de los métodos conocidos, permitió, no solo dar un marco común para el análisis de los distintos métodos, sino también obtener resultados de convergencia en aquellos casos en que no se disponía de una teoría completa. Los métodos considerados corresponden a elecciones de espacios de elementos finitos que, a pesar de la introducción de la nueva variable, conservan la estructura de desplazamientos del problema.

En la Sección 2 se describe el modelo de Reissner-Mindlin, las ecuaciones que define el modelo y resultados que permiten garantizar que, si se escalan convenientemente dichas ecuaciones, las soluciones se mantienen acotadas independientemente del espesor de la placa.

En la Sección 3 se consideran resultados de existencia, unicidad y regularidad de soluciones, para problemas generales de tipo mixto. También se considera la ubicación del modelo de placas en dicho contexto, y resultados específicos referidos a la regularidad de las soluciones del modelo de Reissner-Mindlin y su relación con un sistema de ecuaciones más complejo, que incluye dos ecuaciones de Poisson y un sistema de Stokes perturbado.

Al comienzo de la Sección 4 se describen las dificultades numéricas que presenta este problema.

En el Inciso 4.1 se desarrollan los aspectos generales correspondientes a nuestra teoría.

El resultado más importante se presenta en el Teorema 4.4, en el que se dan condiciones suficientes para la convergencia de los métodos de elementos finitos aplicados al modelo de Reissner-Mindlin. Dichas condiciones pueden ser consideradas como una generalización de la propiedad de Fortin [20] entre los espacios de discretización de desplazamientos y esfuerzo de corte. Por otra parte esta propiedad se verifica en muchos ejemplos.

En el Inciso 4.2 se definen además condiciones suficientes para la construcción de métodos de elementos finitos convergentes, que generalizan las conocidas para el problema límite (espesor igual a 0) [11]. En particular, se analiza la relación que existe entre la definición de los espacios discretos para el modelo de Reissner-Mindlin y los correspondientes a métodos estables para el problema de Stokes.

La aplicación de la teoría a varios elementos se ejemplifica en la Sección 5.

Los resultados teóricos que definen condiciones generales para la construcción de métodos mixtos convergentes se aplican en los Ejemplos 5.1 y 5.2 [18]. Las condiciones mencionadas nos permitieron introducir un nuevo método para grillas triangulares, de orden bajo que es analizado en el Ejemplo 5.1. Para este método se estudia la convergencia y se obtienen estimaciones óptimas del error. En el Ejemplo 5.2 se aplican los resultados de convergencia a un elemento rectangular de orden 2, introducido por Bathe y Brezzi [7], obteniéndose para este método idénticas estimaciones que las obtenidas por los autores en el caso límite. Cabe mencionar que, con técnicas similares a la utilizadas en este ejemplo, es posible extender los resultados de convergencia a una familia de elementos triangulares de mayor orden [11], obteniéndose estimaciones óptimas del error. Independientemente, los métodos mencionados fueron objeto de estudio en [15]. Allí se propuso también el método analizado en 5.1.

El elemento de Bathe-Dvorkin [9] es analizado en el Ejemplo 5.3. Se trata de un elemento para grillas rectangulares de bajo orden. A diferencia de los ejemplos anteriores, en este caso no es posible verificar las hipótesis que garantizan la construcción de métodos convergentes. No obstante, se demuestra la convergencia del método para el caso de redes uniformes utilizando el Teorema 4.4 mencionado previamente. La demostración requiere la utilización de resultados conocidos para el problema de Stokes que se basan en la utilización de técnicas de macroelementos. Las estimaciones del error obtenidas se efectuaron bajo condiciones de regularidad más débiles que las conocidas anteriormente [6],[18] y, como consecuencia de ello, se obtuvieron estimaciones óptimas, con cotas de error independientes del espesor de la placa.

En el Ejemplo 5.4 se efectúa la aplicación de la teoría al estudio del método de Arnold-Falk [2]. En este método el desplazamiento transversal es aproximado por elementos no conformes. La demostración de convergencia dada en [2] se basa en la equivalencia de las ecuaciones del modelo de Reissner-Mindlin y el complejo sistema de ecuaciones descrito en la Sección 3, y requiere la demostración de una descomposición discreta de Helmholtz y de la equivalencia entre los correspondientes sistemas discretos. La aplicación de nuestros resultados teóricos proporciona una prueba directa y más simple de la convergencia del método y permite su inclusión dentro del marco general definido por el Teorema 4.4.

Finalmente, en la Sección 6, se estudia un método introducido por Zienkiewicz, Taylor, Papadopoulos y Oñate en [26]. Este método fue experimentado numéricamente en [22], pero no se conocían resultados de convergencia. Como consecuencia de nuestro análisis, se demuestra que el método converge con orden óptimo y cotas de error independientes

del espesor de la placa. Debido a que la estructura de este método no se corresponde con la de los métodos previamente analizados, la demostración de convergencia se efectúa a través de un análisis comparativo del mismo con el método analizado en el Ejemplo 5.1. Se demuestra que ambos métodos pueden ser identificados, ya que el orden de la diferencia entre sus soluciones es superior al de lo mismos, observándose que la formulación propuesta en el Ejemplo 5.1 es más simple desde el punto de vista de su implementación computacional. El trabajo de comparación se completa, mostrando resultados correspondientes a la experimentación numérica efectuada sobre ambos métodos. Los resultados obtenidos permitieron observar que el comportamiento asintótico de los errores y de la diferencia entre las soluciones de los métodos considerados, predicho por la teoría, se verifica para mallas de cálculo que se utilizan en la práctica.

## 2 Definición del modelo.

El modelo de placas de Reissner-Mindlin describe la deformación de una placa de pequeño espesor por acción de una carga transversal. El modelo es apto solo para pequeñas deformaciones y su característica más importante es que a diferencia del modelo clásico de Kirchoff, permite la presencia de deformaciones angulares no nulas.

Más precisamente, sea  $\Omega$  la superficie media de la placa correspondiente a una región del plano  $xy$ . El espesor de la placa se indica con  $t$ , de modo que la región ocupada por la misma es  $\Omega \times [-\frac{t}{2}, \frac{t}{2}]$ .

Utilizando la notación usual sea  $\mathbf{u}$  el vector de desplazamientos. Sean  $\boldsymbol{\varepsilon}$  y  $\boldsymbol{\sigma}$  los correspondientes tensores de deformaciones y tensiones.

Se supone que las componentes del desplazamiento en las direcciones  $x$  e  $y$  varían linealmente con respecto a  $z$ ,

$$(2.1) \quad u_1 = -\beta_1(x, y)z \quad u_2 = -\beta_2(x, y)z$$

mientras que el desplazamiento vertical es independiente de  $z$ ,

$$(2.2) \quad u_3 = w(x, y)$$

Si se considera una fibra normal a la superficie media de la placa, las funciones  $\beta_1(x, y)$  y  $\beta_2(x, y)$  representan el ángulo de giro de la fibra en la dirección de los ejes  $x$  e  $y$  respectivamente. En efecto, de acuerdo a la fig. 1

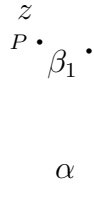


Figure 1: giro de la fibra en dirección del eje  $x$

$$tg \alpha \simeq \frac{z}{u_1} \quad tg \beta_1 = -\frac{1}{tg \alpha} \simeq -\frac{u_1}{z}$$

Por lo tanto  $u_1 \simeq -ztg \beta_1 \simeq -z\beta_1$ , donde las aproximaciones se justifican por ser el modelo válido para pequeñas deformaciones. Las relaciones deformación-desplazamiento correspondientes a la teoría clásica de elasticidad se reducen a las siguientes expresiones: Para las deformaciones principales, elementos diagonales del tensor  $\boldsymbol{\varepsilon}$ ,

$$(2.3) \quad \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u_1}{\partial x} = -\frac{\partial \beta_1}{\partial x} z \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial u_2}{\partial y} = -\frac{\partial \beta_2}{\partial y} z \end{aligned}$$



$$\varepsilon_z = \frac{\partial u_3}{\partial z} = 0$$

Para las deformaciones de corte, representadas en las entradas no diagonales del tensor simétrico  $\varepsilon$ ,

$$(2.4) \quad \begin{aligned} \gamma_{xy} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial u_2}{\partial x} \right) = -\frac{1}{2} \left( \frac{\partial \beta_1}{\partial y} + \frac{\partial \beta_2}{\partial x} \right) z \\ \gamma_{xz} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial z} + \frac{\partial u_3}{\partial x} \right) = \frac{1}{2} \left( -\beta_1 + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \gamma_{yz} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_2}{\partial z} + \frac{\partial u_3}{\partial y} \right) = \frac{1}{2} \left( -\beta_2 + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \end{aligned}$$

El modelo de Kirchoff asume que las fibras normales a la superficie media de la placa  $\Omega$  permanecen rectas y normales luego de la deformación. La primera condición se expresa a través de asumir una relación lineal para los desplazamientos de la forma (2.1), (2.2). La segunda equivale a considerar nula la deformación angular de las fibras, es decir  $\gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$ .

En cambio en el modelo de placas de Reissner-Mindlin se considera que las fibras normales a la superficie media permanecen rectas luego de la deformación, pero no necesariamente normales.

Con respecto a la relación tensión-deformación de la elasticidad lineal se asume que  $\sigma_z$  es despreciable con respecto a  $\sigma_x$  y  $\sigma_y$ . De acuerdo a lo expresado se tendrán las siguientes relaciones:

$$(2.5) \quad \sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_x + \nu \varepsilon_y) \quad \sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2} (\nu \varepsilon_x + \varepsilon_y) \quad \sigma_z = 0$$

$$\tau_{xy} = G \gamma_{xy} \quad \tau_{xz} = G \gamma_{xz} \quad \tau_{yz} = G \gamma_{yz}$$

donde  $G = \frac{E}{1+\nu}$  es el módulo de corte,  $E$  es el módulo de Young, y  $\nu$  la razón de Poisson.

## 2.1 Definición matemática del modelo.

A partir de considerar el estado de equilibrio de la placa se obtienen las ecuaciones del modelo. Para ello se aplican los principios del cálculo de variaciones a la minimización de la energía potencial.

El funcional a minimizar es en este caso:

$$(2.6) \quad \Lambda(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega \times (-\frac{t}{2}, \frac{t}{2})} (\boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon} - 2\mathbf{f}\mathbf{u}) dx dy dz$$

donde  $\mathbf{f}$  es la carga transversal por unidad de superficie y el símbolo  $:$  indica como es usual el producto tensorial.

Utilizando las relaciones (2.1), (2.2) podemos expresar el funcional  $\Lambda$  en términos de  $\beta_1$ ,  $\beta_2$  y  $w$ . Consideremos en primer lugar el producto entre los tensores de tensión y deformación.

$$\begin{aligned}
(2.7) \quad \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon} &= \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & 0 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} \varepsilon_x & \gamma_{xy} & \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} & \varepsilon_y & \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} & \gamma_{yz} & \varepsilon_z \end{pmatrix} = \\
&= \frac{E}{1+\nu} \begin{pmatrix} \frac{1}{1-\nu}(\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y) & \gamma_{xy} & \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} & \frac{1}{1-\nu}(\nu\varepsilon_x + \varepsilon_y) & \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} & \gamma_{yz} & 0 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} \varepsilon_x & \gamma_{xy} & \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} & \varepsilon_y & \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} & \gamma_{yz} & \varepsilon_z \end{pmatrix} = \\
&= \frac{E}{(1-\nu^2)} \left[ \left( \frac{\partial\beta_1}{\partial x} \right)^2 + 2\nu \left( \frac{\partial\beta_2}{\partial y} \right) \left( \frac{\partial\beta_1}{\partial x} \right) + \left( \frac{\partial\beta_2}{\partial y} \right)^2 \right] z^2 + \\
&+ \frac{E}{2(1+\nu)} \left[ \left( \frac{\partial\beta_1}{\partial y} + \frac{\partial\beta_2}{\partial x} \right)^2 z^2 + \left( -\beta_1 + \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left( -\beta_2 + \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right]
\end{aligned}$$

Integrando sobre la región  $\Omega \times (-\frac{t}{2}, \frac{t}{2})$

$$\begin{aligned}
(2.8) \quad \frac{1}{2} \int_{\Omega \times (-\frac{t}{2}, \frac{t}{2})} \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon} &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} dx dy \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon} dz = \\
&= \frac{t^3}{2} \left\{ \frac{E}{12(1-\nu^2)} \int_{\Omega} \left[ \left( \frac{\partial\beta_1}{\partial x} \right)^2 + 2\nu \left( \frac{\partial\beta_2}{\partial y} \right) \left( \frac{\partial\beta_1}{\partial x} \right) + \left( \frac{\partial\beta_2}{\partial y} \right)^2 + \frac{(1-\nu)}{2} \left( \frac{\partial\beta_1}{\partial y} + \frac{\partial\beta_2}{\partial x} \right)^2 \right] dx dy \right\} + \\
&+ \frac{E}{2(1+\nu)} \frac{t}{2} \int_{\Omega} \left[ \left( \frac{\partial w}{\partial x} - \beta_1 \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial y} - \beta_2 \right)^2 \right] dx dy
\end{aligned}$$

Sea  $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \beta_2)^T$ . La expresión entre llaves puede ser vista como una forma bilineal evaluada en  $(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\beta})$ . Llamando  $a(\cdot, \cdot)$  a dicha forma, expresando la carga vertical como  $\mathbf{f} = (0, 0, f)$ , y utilizando (2.8), el funcional (2.6) puede reescribirse como:

$$(2.9) \quad \Lambda(\boldsymbol{\beta}, w) = \frac{t^3}{2} a(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\beta}) + \frac{E}{2(1+\nu)} \frac{t}{2} \int_{\Omega} |\nabla w - \boldsymbol{\beta}|^2 dx dy - \int_{\Omega \times (-\frac{t}{2}, \frac{t}{2})} f w dx dy dz$$

El modelo de Reissner-Mindlin incorpora además un parámetro de ajuste,  $\kappa$ , como coeficiente en la segunda integral del funcional. Dicha integral representa la energía de deformación correspondiente a  $\tau_{xz}$  y  $\tau_{yz}$ . Este parámetro se introduce a partir de la

siguiente observación: las hipótesis  $\gamma_{xz} \neq 0, \gamma_{yz} \neq 0$ , contradicen la condición física de anulación de las tensiones de corte sobre las superficies  $z = \pm \frac{t}{2}$ , salvo que se impongan tracciones de corte (ver (2.4) y (2.5)). El objeto del parámetro es por lo tanto, corregir el efecto de dicha hipótesis sobre el funcional de energía.

Finalmente, el funcional a minimizar en el modelo de Reissner-Mindlin es:

$$(2.10) \quad \Lambda(\boldsymbol{\beta}, w) = \frac{t^3}{2} a(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\beta}) + \frac{\lambda t}{2} \|\nabla w - \boldsymbol{\beta}\|_{0,\Omega}^2 - \int_{\Omega \times (-\frac{t}{2}, \frac{t}{2})} f w dx dy dz$$

donde para simplificar la notación se introduce  $\lambda = \frac{E\kappa}{2(1+\nu)}$ .

Existen varios criterios para definir el valor de  $\kappa$ . Uno de ellos es la comparación de la energía correspondiente a  $\tau_{xz}$  y  $\tau_{yz}$  del modelo, con la que se obtendría si se agrega a ambas tensiones, una variación parabólica respecto de  $z$ , que produzcan la anulación de dichas tensiones para  $z = \pm \frac{t}{2}$ . De dicha comparación surge un valor para  $\kappa = \frac{5}{6}$  [25].

## 2.2 Ecuaciones de Euler

Se considerarán solamente por simplicidad condiciones de borde homogéneas de tipo Dirichlet (es decir el caso de una placa empotrada). Se utilizará notación clásica para los espacios de Sobolev  $H^k(\Omega)$ , y  $H_0^k(\Omega)$  con la norma

$$\|u\|_k^2 = \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{L^2(\Omega)}^2$$

Las magnitudes vectoriales se indicarán con letras tipo bold. En lo que sigue supondremos que  $\Omega$  es una región acotada del plano con borde  $\partial\Omega$  Lipschitz.

Considerando la minimización del funcional (2.10), y las ecuaciones variacionales correspondientes, el problema a resolver es:

Hallar  $w \in H_0^1(\Omega)$  y  $\boldsymbol{\beta} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$ , tal que

$$(2.11) \quad t^3 a(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\eta}) + \lambda t \int_{\Omega} (\nabla w - \boldsymbol{\beta}) \cdot -\boldsymbol{\eta} dx dy = 0 \quad \forall \boldsymbol{\eta} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$$

$$(2.12) \quad \lambda t \int_{\Omega} (\nabla w - \boldsymbol{\beta}) \cdot \nabla \zeta dx dy = \int_{\Omega \times (-\frac{t}{2}, \frac{t}{2})} f \zeta dx dy dz \quad \forall \zeta \in H_0^1(\Omega)$$

donde

$$H_0^1(\Omega) = \{f \in L^2(\Omega) : \frac{\partial f}{\partial x_i} \in L^2(\Omega), i = 1, 2 \text{ y } f|_{\partial\Omega} = 0\}$$

y  $f|_{\partial\Omega}$  indica la traza de  $f$  sobre  $\partial\Omega$ .

Denotando mediante  $(\cdot, \cdot)$  el producto escalar en  $L^2(\Omega)$  o  $\mathbf{L}^2(\Omega)$ , las ecuaciones (2.11), (2.12) se escriben:

$$(2.13) \quad t^3 a(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\eta}) + \lambda t (\nabla w - \boldsymbol{\beta}, \nabla \zeta - \boldsymbol{\eta}) = \int_{\Omega \times (-\frac{t}{2}, \frac{t}{2})} f \zeta dx dy dz$$

$$\forall(\boldsymbol{\eta}, \zeta) \in \mathbf{H}_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$$

La forma bilineal  $a(., .)$  es coerciva sobre  $\mathbf{H}_0^1(\Omega)$ , es decir

$\exists \alpha > 0$  tal que

$$a(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\eta}) \geq \alpha \|\boldsymbol{\eta}\|_1^2 \quad \forall \boldsymbol{\eta} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega).$$

que es consecuencia de la desigualdad de Korn [21] :

$$\sum_{i,j=1,2} \left\| \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \eta_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \eta_j}{\partial x_i} \right) \right\|_{0,\Omega}^2 + \|\boldsymbol{\eta}\|_{0,\Omega}^2 \geq \alpha_1 \|\boldsymbol{\eta}\|_{1,\Omega}^2 \quad \forall \boldsymbol{\eta} \in \mathbf{H}^1(\Omega), \quad \alpha_1 > 0$$

Llamando

$$(2.14) \quad \mathbf{V} = \mathbf{H}_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$$

$\mathbf{v} = (\boldsymbol{\eta}, \zeta)$  y  $\mathbf{s} = (\boldsymbol{\beta}, w)$  y  $\tilde{a}(\mathbf{s}, \mathbf{v})$  al primer miembro de (2.13), podemos simplificar todavía más la notación y el problema resulta:

Hallar  $\mathbf{s} \in \mathbf{V}$  tal que

$$(2.15) \quad \tilde{a}(\mathbf{s}, \mathbf{v}) = (\mathbf{f}, \mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}$$

Utilizando en  $\mathbf{V}$  la norma

$$\|(\boldsymbol{\eta}, \zeta)\|_{\mathbf{V}} = \|\boldsymbol{\eta}\|_1^2 + \|\zeta\|_1^2,$$

la forma bilineal  $\tilde{a}(., .)$  resulta continua respecto a la misma. Utilizando la desigualdad de Korn se demuestra que la forma  $\tilde{a}$  es también coerciva. La coercividad y continuidad de la forma  $\tilde{a}$  permite garantizar, a través del Lema de Lax-Milgram, la existencia y unicidad de la solución  $\mathbf{s} = (\boldsymbol{\beta}, w)$  en  $\mathbf{H}_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ .

No obstante la presencia de coeficientes que dependen de  $t$  en  $\tilde{a}$  (ver (2.13)) determina que la constante de coercividad dependa del espesor de la placa y se demuestra que cuando  $t \rightarrow 0$ , la constante de coercividad  $\rightarrow 0$ . Por ese motivo la teoría clásica no garantiza que la solución se mantenga acotada, ya que las acotaciones dependen en forma inversa de la constante de coercividad [16]. Esto induce al análisis del problema en un nuevo contexto, el de los métodos mixtos. Con ese objeto se construye en primer lugar una sucesión de problemas dependientes del espesor  $t$ , pero cuyas soluciones están acotadas independientemente de dicho parámetro.

Si se elige  $f(x, y, z) = t^2 g(x, y)$  [6], resulta

$$\int_{\Omega \times (-\frac{t}{2}, \frac{t}{2})} f \zeta dx dy dz = t^3 \int_{\Omega} g \zeta dx dy = t^3 (g, \zeta)$$

Reemplazando en (2.13) y dividiendo por  $t^3$  se obtiene

$$(2.16) \quad a(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\eta}) + \frac{\lambda}{t^2} (\nabla w - \boldsymbol{\beta}, \nabla \zeta - \boldsymbol{\eta}) = (g, \zeta) \quad \forall (\boldsymbol{\eta}, \zeta) \in \mathbf{V}$$

Para este problema es posible demostrar [6], el siguiente resultado:

**Teorema 2.1 :** Sean  $\beta, w$ , soluciones de (2.16). Entonces existen constantes  $c_1 > 0$  y  $c_2 > 0$  tales que para todo valor de  $t > 0$ , las soluciones satisfacen:

$$(2.17) \quad c_1 \leq \|\beta\|_1 + \|w\|_1 \leq c_2$$

□

### 3 Métodos mixtos.

Los métodos mixtos permiten transformar, a través de técnicas de dualización, un problema de minimización de un funcional sujeto a restricciones, en un problema tipo ensilladura.

En [14], [21] se desarrolla una teoría, para el análisis de métodos mixtos, y su resolución aproximada mediante elementos finitos. Describiremos brevemente algunos resultados, que se enuncian en las referencias mencionadas.

Introducimos la siguiente notación :

Sean  $V$  y  $Q$  espacios de Hilbert. Sean  $a(.,.)$  y  $b(.,.)$  formas bilineales continuas, definidas sobre  $V \times V$  y  $V \times Q$  respectivamente. Sean además  $f \in V', g \in Q'$ .

La estructura general del problema estudiado es :

Hallar  $u \in V, p \in Q$ , tal que se cumpla

$$(3.1) \quad a(u, v) + b(v, p) = \langle f, v \rangle_{V' \times V} \quad \forall v \in V$$

$$(3.2) \quad b(u, q) = \langle g, q \rangle_{Q' \times Q} \quad \forall q \in Q$$

Se introducen además el operador  $A : V \rightarrow V'$  definido por :

$$(3.3) \quad \langle Au, v \rangle_{V' \times V} = \langle u, Av \rangle_{V' \times V} = a(u, v) \quad \forall u, v \in V$$

y los operadores  $B : V \rightarrow Q'$  y  $B^t : Q \rightarrow V'$ , definidos por :

$$(3.4) \quad \langle Bv, q \rangle_{Q' \times Q} = \langle v, B^t q \rangle_{V' \times V} = b(v, q) \quad \forall v \in V, \forall q \in Q$$

Los resultados sobre existencia, unicidad y acotación de las soluciones de (3.1), (3.2) se dan en el siguiente teorema :

**Teorema 3.1 :** Sean  $a(.,.)$ ,  $b(.,.)$  formas bilineales continuas sobre  $V \times V$  y  $V \times Q$  respectivamente. Sea  $\text{Ker}(B)$  el núcleo del operador  $B$  definido en (3.4). Supongamos que se cumplen las siguientes condiciones:

(i)

$A$  inversible sobre  $\text{Ker}(B)$ , o en forma equivalente:

$\exists \alpha_0 > 0$  tal que

$$(3.5) \quad \inf_{u_0 \in \text{Ker}(B)} \sup_{v_0 \in \text{Ker}(B)} \frac{a(u_0, v_0)}{\|u_0\|_V \|v_0\|_V} \geq \alpha_0$$

$$(3.6) \quad \inf_{v_0 \in \text{Ker}(B)} \sup_{u_0 \in \text{Ker}(B)} \frac{a(u_0, v_0)}{\|u_0\|_V \|v_0\|_V} \geq \alpha_0$$

Las condiciones (3.5) y (3.6) equivalen respectivamente a la inyectividad y suryectividad de  $A|_{\text{Ker}(B)}$ .

(ii)

Condición Inf-Sup:

$\exists k_0 > 0$  tal que

$$(3.7) \quad \sup_{v \in V} \frac{b(v, q)}{\|v\|_V} \geq k_0 \|q\|_{Q/\text{Ker}B^t}$$

que es equivalente a que la imagen del operador  $B$  sea cerrada en  $Q'$ .

Entonces para cada  $f \in V'$  existe solución única  $(u, p) \in V \times Q/\text{Ker}(B^t)$  del problema (3.1), (3.2), y se cumple

$$(3.8) \quad \|v\|_V + \|p\|_{Q/\text{Ker}B^t} \leq C\{\|f\|_{V'} + \|g\|_{Q'}\}$$

□

Estos resultados se extienden a fin de considerar en lugar del problema (3.1), (3.2) el problema más general

Hallar  $u \in V, p \in Q$ , tal que se cumpla

$$(3.9) \quad a(u, v) + b(v, p) = \langle f, v \rangle_{V' \times V} \quad \forall v \in V$$

$$(3.10) \quad b(u, q) + c(p, q) = \langle g, q \rangle_{Q' \times Q} \quad \forall q \in Q$$

donde  $c(\cdot, \cdot)$  es también una forma bilineal continua sobre  $Q \times Q$ . Bajo las mismas hipótesis del teorema (3.1), asumiendo además que  $c(\cdot, \cdot)$  es simétrica y coerciva, se obtienen resultados de existencia de solución  $(u, p)$  en el espacio  $V \times Q/M$  donde  $M = \text{Ker}(B^t) \cap \text{Ker}(c)$ , con la misma acotación para las soluciones que en (3.8).

Finalmente una segunda extensión de los resultados, permite que la forma bilineal  $c(\cdot, \cdot)$  esté definida solo en un subespacio  $W \subset Q$ . En ese caso en lugar de las ecuaciones (3.9), (3.10) se considera el problema:

Hallar  $u \in V, p \in W$ , tal que se cumpla

$$(3.11) \quad a(u, v) + b(v, p) = \langle f, v \rangle_{V' \times V} \quad \forall v \in V$$

$$(3.12) \quad b(u, q) + c(p, q) = \langle g_1, q \rangle_{Q' \times Q} + \langle g_2, q \rangle_{W' \times W} \quad \forall q \in W$$

En particular si  $c(p, q) = c_\alpha(p, q)$  satisface

$$(3.13) \quad c_\alpha(p, q) \leq c_0 \alpha \|p\|_W \|q\|_W \quad \forall p, q \in W$$

$$(3.14) \quad c_\alpha(p, p) \geq \alpha c_1 \|p\|_W^2 \quad \forall p \in W$$

con  $\alpha \geq 0$ , vale el siguiente resultado:

**Teorema 3.2 :** *Sea  $a(., .)$  coerciva sobre  $V$ . Sea  $b(., .)$  continua sobre  $V \times Q$  tal que verifica (3.7). Sea  $c(p, q) = c_\alpha(p, q)$  con las propiedades (3.13), (3.14). Entonces existe solución  $(u, p)$  del problema (3.11), (3.12), y se tiene la estimación*

$$(3.15) \quad \|u\|_V^2 + \|p\|_{Q/KerB^t}^2 + \alpha \|p\|_W^2 \leq c(\|f\|_{V'}^2 + \|g_1\|_{Q'}^2 + \frac{1}{2\alpha} \|g_2\|_{W'}^2)$$

□

### 3.1 Reformulación del problema para su análisis en el contexto de métodos mixtos.

Es posible dar una nueva formulación para el modelo de Reissner-Mindlin, que permite estudiar el problema en el contexto de los métodos mixtos. Para ello se introduce como nueva variable  $\gamma = \frac{\lambda(\nabla w - \beta)}{t^2}$ , que está relacionada con el esfuerzo de corte.

La ecuación (2.16) se reemplaza entonces por:

$$(3.16) \quad a(\beta, \eta) + (\gamma, \nabla \zeta - \eta) = (g, \zeta) \quad \forall (\eta, \zeta) \in \mathbf{V}$$

$$(3.17) \quad \gamma = \frac{\lambda(\nabla w - \beta)}{t^2}$$

donde  $\mathbf{V}$  está definido en (2.14).

Siguiendo la descripción efectuada en [14] consideraremos el comportamiento de  $\gamma$  y las dificultades inherentes a esta nueva formulación.

La nueva variable  $\gamma$  pertenece al espacio

$$\mathbf{\Gamma} = \mathbf{H}_0(\text{rot}, \Omega) = \{\chi : \chi \in \mathbf{L}^2(\Omega), \text{rot}(\chi) \in L^2(\Omega), \langle \chi, \tau, 1 \rangle_{\partial\Omega} = 0\}$$

siendo

$$\text{rot}(\chi) = -\frac{\partial \chi_1}{\partial y} + \frac{\partial \chi_2}{\partial x}$$

y  $\tau$  el vector unitario tangente al borde.

En efecto, se puede demostrar que el operador  $\tilde{B} : \mathbf{V} \longrightarrow \mathbf{\Gamma}$  definido por

$$(3.18) \quad \tilde{B}(\eta, \zeta) = \nabla \zeta - \eta$$

es un operador suryectivo sobre  $\mathbf{\Gamma}$ . Más precisamente vale el siguiente resultado:

**Proposición 3.1 :** *La aplicación  $\tilde{B}$  definida en  $\mathbf{V}$  por (3.18) es suryectiva sobre el espacio  $\mathbf{\Gamma} = \mathbf{H}_0(rot, \Omega)$ , donde*

$$(3.19) \quad \|\boldsymbol{\chi}\|_{\mathbf{H}_0(rot, \Omega)}^2 = \|\boldsymbol{\chi}\|_0^2 + \|rot\boldsymbol{\chi}\|_0^2$$

y se cumple

$$(3.20) \quad \|\zeta\|_1 + \|\boldsymbol{\eta}\|_1 \leq C\|\boldsymbol{\chi}\|_{\mathbf{H}_0(rot, \Omega)}$$

□

El problema (3.16), (3.17) es equivalente al siguiente:

Hallar  $(\boldsymbol{\beta}, w) \in \mathbf{V}, \boldsymbol{\gamma} \in \mathbf{L}^2(\Omega)$ , tal que

$$(3.21) \quad a(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\eta}) + (\boldsymbol{\gamma}, \nabla\zeta - \boldsymbol{\eta}) = (g, \zeta) \quad \forall (\boldsymbol{\eta}, \zeta) \in \mathbf{V}$$

$$(3.22) \quad (\nabla w - \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\chi}) - \frac{t^2}{\lambda}(\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\chi}) = 0 \quad \forall \boldsymbol{\chi} \in \mathbf{L}^2(\Omega)$$

Si se intenta aplicar la teoría general al problema anterior con  $Q = \mathbf{L}^2(\Omega)$  y  $V = \mathbf{V}$  definido en (2.14), se puede ver que no se cumple la condición *inf-sup* entre los espacios.

En cambio, si se busca la solución  $\boldsymbol{\gamma}$  en  $Q = \mathbf{\Gamma}'$ , llamando  $W = \mathbf{L}^2(\Omega)$  e identificando  $\mathbf{L}^2(\Omega)$  con su dual, tendremos la inclusión

$$W = \mathbf{L}^2(\Omega) \subset \mathbf{\Gamma}' = Q$$

y el problema (3.21), (3.22) puede ser considerado con la estructura de (3.11), (3.12).

El operador  $B : \mathbf{V} \longrightarrow \mathbf{\Gamma}''$ , correspondiente al definido en (3.4), es:

$$\langle B(\boldsymbol{\eta}, \zeta), \boldsymbol{\chi} \rangle_{\mathbf{\Gamma}'' \times \mathbf{\Gamma}'} = \langle \boldsymbol{\chi}, \nabla\zeta - \boldsymbol{\eta} \rangle_{\mathbf{\Gamma}' \times \mathbf{\Gamma}}$$

Siendo  $\mathbf{\Gamma}$  un subespacio cerrado de  $\mathbf{L}^2(\Omega)$ , es reflexivo respecto al producto en  $\mathbf{L}^2(\Omega)$ . Por lo tanto, el operador  $B$  recién definido, puede ser identificado con el operador definido en (3.18), y en ese caso resulta

$$Ker(B) = \{(\boldsymbol{\eta}, \zeta) \in \mathbf{V} : \nabla\zeta = \boldsymbol{\eta}\}$$

Además,  $B^t : \mathbf{\Gamma}' \longrightarrow \mathbf{V}'$  está definido por

$$\langle B^t\boldsymbol{\chi}, (\boldsymbol{\eta}, \zeta) \rangle_{\mathbf{V}' \times \mathbf{V}} = \langle \boldsymbol{\chi}, \nabla\zeta - \boldsymbol{\eta} \rangle_{\mathbf{\Gamma}' \times \mathbf{\Gamma}}$$

y

$$Ker(B^t) = \{\boldsymbol{\chi} \in \mathbf{\Gamma}' : \langle \boldsymbol{\chi}, \nabla\zeta - \boldsymbol{\eta} \rangle = 0 \quad \forall (\boldsymbol{\eta}, \zeta) \in \mathbf{V}\} = 0.$$

Para esta definición de  $Q$  vale la condición *inf-sup*, ya que de acuerdo a la definición de la norma dual



$$(3.23) \|\chi\|_{\Gamma'} = \sup_{(\boldsymbol{\eta}, \zeta) \in \mathbf{V}} \frac{|\langle \chi, \nabla \zeta - \boldsymbol{\eta} \rangle|}{\|\nabla \zeta - \boldsymbol{\eta}\|_{\mathbf{H}_0(\text{rot}, \Omega)}} \leq \sup_{(\boldsymbol{\eta}, \zeta) \in \mathbf{V}} \frac{|\langle \chi, \nabla \zeta - \boldsymbol{\eta} \rangle|}{\|(\boldsymbol{\eta}, \zeta)\|_{\mathbf{V}}}$$

donde hemos utilizado los resultados de la Proposición 3.1 .

Teniendo en cuenta la desigualdad de Korn, la forma  $a(., .)$  resulta coerciva sobre el  $Ker(B)$  pero no lo es sobre todo el espacio  $\mathbf{V}$ . Por lo tanto de la teoría general no se obtienen resultados inmediatos que permitan acotar la  $\|\boldsymbol{\gamma}\|_{\Gamma'}$  (ver Teorema 3.2). No obstante en [6] se demuestra la siguiente proposición:

**Proposición 3.2 :** *Sea  $(\boldsymbol{\beta}, w, \boldsymbol{\gamma})$  la solución de (3.16), (3.17). Entonces existe una constante  $C > 0$  tal que para todo  $t > 0$ ,  $\|\boldsymbol{\gamma}\|_{\Gamma'} \leq C$ .* □

Por otro lado, las soluciones de (3.21), (3.22) están relacionadas con las del problema límite :

Hallar  $(\boldsymbol{\beta}_0, w_0) \in \mathbf{V}$ ,  $\boldsymbol{\gamma}_0 \in \Gamma'$  tal que

$$(3.24) \quad a(\boldsymbol{\beta}_0, \boldsymbol{\eta}) + \langle \boldsymbol{\gamma}_0, \nabla \zeta - \boldsymbol{\eta} \rangle = \langle g, \zeta \rangle \quad \forall (\boldsymbol{\eta}, \zeta) \in \mathbf{V}$$

$$(3.25) \quad \langle \nabla w_0 - \boldsymbol{\beta}_0, \boldsymbol{\chi} \rangle = 0 \quad \forall \boldsymbol{\chi} \in \Gamma'$$

a través de las siguientes propiedades de convergencia:

**Teorema 3.3 :** *Sea  $(\boldsymbol{\beta}, w, \boldsymbol{\gamma})$  la solución de (3.16), (3.17). Entonces para  $t \rightarrow 0$*

$$(3.26) \quad \begin{aligned} \boldsymbol{\beta} &\rightarrow \boldsymbol{\beta}_0 \text{ en } \mathbf{H}_0^1(\Omega) \\ w &\rightarrow w_0 \text{ en } H_0^1(\Omega) \\ \boldsymbol{\gamma} &\rightarrow \boldsymbol{\gamma}_0 \text{ en } \Gamma' \end{aligned}$$

donde  $\boldsymbol{\beta}_0, w_0, \boldsymbol{\gamma}_0$  satisfacen la ecuación (3.24), y las relaciones

$$(3.27) \quad \boldsymbol{\beta}_0 = \nabla w_0$$

$$(3.28) \quad E\Delta^2 w_0 = 12(1 - \nu^2)g$$

□

### 3.2 Regularidad de la solución

Es posible estudiar la regularidad de la solución del modelo de placas de Reissner-Mindlin a través de la utilización de una formulación equivalente introducida por Brezzi y Fortin [13]. Para ello se utiliza el teorema de Helmholtz [21] que permite descomponer una función  $\boldsymbol{\chi} \in \mathbf{L}^2(\Omega)$ , donde  $\Omega$  es un dominio simplemente conexo, en la forma

$$(3.29) \quad \boldsymbol{\chi} = \nabla s + \mathbf{curl} \, q$$

donde

$$s \in H_0^1(\Omega)$$

$$q \in \hat{H}^1(\Omega) = \{f \in H^1(\Omega) , \int_{\Omega} f dx dy = 0\}$$

y

$$\mathbf{curl} \, q = \begin{pmatrix} -\partial q / \partial y \\ \partial q / \partial x \end{pmatrix}$$

Reemplazando

$$\boldsymbol{\gamma} = \nabla r + \mathbf{curl} \, p$$

y  $\boldsymbol{\chi}$  según (3.29) en las ecuaciones (3.21), (3.22), se demuestra fácilmente, que la solución  $(\boldsymbol{\beta}, w)$  del modelo de placas, y el par  $(r, p)$  satisfacen el siguiente problema:

Hallar  $(r, \boldsymbol{\beta}, p, w) \in H_0^1(\Omega) \times \mathbf{H}_0^1(\Omega) \times \hat{H}^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$  que verifiquen

$$(3.30) \quad a(r, \zeta) = (g, \zeta) \quad \forall \zeta \in H_0^1(\Omega)$$

$$(3.31) \quad a(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\eta}) - (\mathbf{curl} \, p, \boldsymbol{\eta}) = (\nabla r, \boldsymbol{\eta}) \quad \forall \boldsymbol{\eta} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$$

$$(3.32) \quad -(\boldsymbol{\beta}, \mathbf{curl} \, q) - \frac{t^2}{\lambda} (\mathbf{curl} \, p, \mathbf{curl} \, q) = 0 \quad \forall q \in \hat{H}^1(\Omega)$$

$$(3.33) \quad (\nabla w, \nabla s) = (\boldsymbol{\beta} + \frac{t^2}{\lambda} \nabla r, \nabla s) \quad \forall s \in H_0^1(\Omega)$$

Recíprocamente, las soluciones  $(\boldsymbol{\beta}, w)$  de este problema satisfacen las ecuaciones (3.21), (3.22), de manera que los dos problemas son equivalentes.

Se observa que la primera y última ecuación constituyen dos problemas de tipo Poisson. Las ecuaciones intermedias forman un sistema, que para  $t = 0$ , efectuando el cambio de variable  $(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2) = (\boldsymbol{\beta}_2, -\boldsymbol{\beta}_1)$ , corresponde a la forma débil de las ecuaciones de Stokes. Para  $t > 0$  se trata de una perturbación del mismo problema. En efecto, las ecuaciones que describen el movimiento de un fluido viscoso, incompresible, o ecuaciones de Stokes, están dadas en forma débil por el siguiente sistema:

$$(3.34) \quad 2\mu \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) dx dy - \int_{\Omega} \mathbf{f} \mathbf{v} dx dy - \int_{\Omega} p \mathbf{div} \mathbf{v} dx dy = 0 \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$$

$$(3.35) \quad \int_{\Omega} q \operatorname{div} \mathbf{u} dx dy = 0 \quad \forall q \in L^2(\Omega)$$

donde  $\mathbf{u}$  es el campo de velocidades,  $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})$  es el tensor de deformación linealizado y  $p$  es la presión.

Los resultados de regularidad que se dan a continuación, provienen de resultados conocidos previamente sobre regularidad de soluciones para los problemas de Poisson y Stokes [2], [13].

**Teorema 3.4 :** *Sea  $\Omega$  un polígono convexo o un dominio acotado suave en el plano. Para  $t \in (0, 1]$ ,  $g \in H^{-1}(\Omega)$ , sea  $(r, \boldsymbol{\beta}, p, w) \in H_0^1(\Omega) \times \mathbf{H}_0^1(\Omega) \times \hat{H}^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$  la solución del sistema (3.30) - (3.33). Entonces  $\boldsymbol{\beta} \in \mathbf{H}^2(\Omega)$  y existe una constante  $C$  independiente de  $t$  y  $g$ , tal que*

$$(3.36) \quad \|r\|_1 + \|\boldsymbol{\beta}\|_2 + \|p\|_1 + t\|p\|_2 + \|w\|_1 \leq C\|g\|_{-1}$$

Si  $g \in L^2(\Omega)$ , entonces  $r, w \in H^2(\Omega)$  y

$$(3.37) \quad \|r\|_2 + \|w\|_2 \leq C\|g\|_0$$

En ese caso

$$(3.38) \quad \|r\|_1 + \|\boldsymbol{\beta}\|_2 + \|p\|_1 + t\|p\|_2 + \|w\|_1 \leq C\|g\|_0$$

□

## 4 Aproximación numérica

En [14], Brezzi y Fortin analizan los problemas que se presentan al intentar aproximar numéricamente mediante el método de elementos finitos, la solución de las ecuaciones (3.21), (3.22). Las dificultades mencionadas serán descritas al comienzo de esta sección. En el Inciso 1, se dará un nuevo enfoque para el análisis del error, que como se verá más adelante, permitirá estudiar la convergencia de varios métodos.

Para la aproximación numérica mediante el método de elementos finitos de la solución de las ecuaciones (3.21), (3.22), se define en primer lugar sobre la región  $\Omega$  una familia regular de elementos triangulares o rectangulares  $\Upsilon_h$ . Asociada a dicha familia se definen los espacios de elementos finitos  $\mathbf{H}_h$ ,  $W_h$  y  $\boldsymbol{\Gamma}_h$ , tales que

$$\mathbf{H}_h \subset \mathbf{H}_0^1(\Omega), \quad W_h \subset H_0^1(\Omega), \quad \boldsymbol{\Gamma}_h \subset \mathbf{L}^2(\Omega)$$

Llamando

$$\mathbf{V}_h = \mathbf{H}_h \times W_h,$$

el problema a resolver es:

Hallar  $(\boldsymbol{\beta}_h, w_h) \in \mathbf{V}_h$ ,  $\boldsymbol{\gamma}_h \in \boldsymbol{\Gamma}_h$ , tal que

$$(4.1) \quad a(\boldsymbol{\beta}_h, \boldsymbol{\eta}_h) + (\boldsymbol{\gamma}_h, \nabla \zeta_h - \boldsymbol{\eta}_h) = (g, \zeta_h) \quad \forall (\boldsymbol{\eta}_h, \zeta_h) \in \mathbf{V}_h$$

$$(4.2) \quad (\nabla w_h - \beta_h, \chi_h) - \frac{t^2}{\lambda}(\gamma_h, \chi_h) = 0 \quad \forall \chi_h \in \Gamma_h$$

mientras que el correspondiente problema límite resulta,

Hallar  $(\beta_{0,h}, w_{0,h}) \in \mathbf{V}_h$ ,  $\gamma_{0,h} \in \Gamma_h$ , que verifiquen

$$(4.3) \quad a(\beta_{0,h}, \eta_h) + (\gamma_{0,h}, \nabla \zeta_h - \eta_h) = (g, \zeta_h) \quad \forall (\eta_h, \zeta_h) \in \mathbf{V}_h$$

$$(4.4) \quad (\nabla w_{0,h} - \beta_{0,h}, \chi_h) = 0 \quad \forall \chi_h \in \Gamma_h$$

A diferencia del problema continuo, en el problema discreto se cumple

$$\gamma_h = t^{-2}(\nabla w_h - \beta_h)$$

solo si  $\Gamma_h = \nabla W_h - \mathbf{H}_h$ .

Dificultades similares a las mencionadas en el Inciso 3.1, no permiten la aplicación de la teoría abstracta a fin de obtener acotaciones del error para las soluciones discretas de (4.1), (4.2).

En el caso del problema límite, dentro de la teoría abstracta para métodos mixtos, se conocen los siguientes resultados de aproximación:

**Teorema 4.1 :** Sean  $V_h \subset V$ ,  $Q_h \subset Q$ , subespacios de dimensión finita de  $V$  y  $Q$ . Sean  $u, p$  las soluciones de (3.1), (3.2). Sean  $u_h, p_h$  pertenecientes a  $V_h \times Q_h$  soluciones del sistema

$$(4.5) \quad a(u_h, v_h) + b(v_h, p_h) = \langle f, v_h \rangle_{V' \times V} \quad \forall v_h \in V_h$$

$$(4.6) \quad b(u_h, q_h) = \langle g, q_h \rangle_{Q' \times Q} \quad \forall q_h \in Q_h$$

Se introducen los operadores  $B_h : V_h \longrightarrow Q'$  y  $B_h^t : Q \longrightarrow V_h'$ , definidos por :

$$(4.7) \quad \langle B_h v_h, q_h \rangle_{Q' \times Q} = \langle v_h, B_h^t q_h \rangle_{V' \times V} = b(v_h, q_h) \quad \forall v_h \in V_h, \forall q_h \in Q_h$$

Supongamos que se cumplen las siguientes condiciones:

(i)

$\exists \alpha_0 > 0$  tal que

$$(4.8) \quad \inf_{u_h \in Ker(B_h)} \sup_{v_h \in Ker(B_h)} \frac{a(u_h, v_h)}{\|u_h\|_V \|v_h\|_V} \geq \alpha_0$$

$$(4.9) \quad \inf_{v_h \in Ker(B_h)} \sup_{u_h \in Ker(B_h)} \frac{a(u_h, v_h)}{\|u_h\|_V \|v_h\|_V} \geq \alpha_0$$

(ii)

Condición Inf-Sup:

$\exists k_0 > 0$  tal que

$$(4.10) \quad \sup_{v_h \in V_h} \frac{b(v_h, q_h)}{\|v_h\|_V} \geq k_0 \|q_h\|_{Q/KerB_h^t}$$

Entonces

$$(4.11) \quad \begin{aligned} & \|u - u_h\|_V + \|p - p_h\|_{Q/KerB_h^t} \leq \\ & \leq C \left\{ \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_V + \inf_{q_h \in Q_h} \|p - q_h\|_Q \right\} \end{aligned}$$

□

La condición *inf-sup* (4.10), o condición de Brezzi, suele ser difícil de verificar. No obstante existe una condición equivalente debida a Fortin [20], de más fácil verificación, que permite garantizar su cumplimiento:

**Teorema 4.2 :** *Supongamos que se cumple la condición inf-sup (3.7). Entonces se verifica (4.10) con  $k_0$  independiente de  $t$ , sii existe una familia de operadores uniformemente continuos  $\Pi_h : V \longrightarrow V_h$  tales que:*

$$(4.12) \quad b(\Pi_h v - v, q_h) = 0 \quad \forall q_h \in Q_h$$

y

$$(4.13) \quad \|\Pi_h v\|_V \leq C \|v\|_V$$

con  $C$  independiente de  $h$ .

□

Para aplicar estos resultados al problema límite (3.24), (3.25) y a su discretización (4.3), (4.4), se introduce el operador  $B_h : \mathbf{V}_h \longrightarrow \mathbf{\Gamma}'_h$  definido por:

$$(4.14) \quad \langle B_h(\boldsymbol{\eta}_h, \zeta_h), \boldsymbol{\chi}_h \rangle_{\mathbf{\Gamma}'_h \times \mathbf{\Gamma}_h} = (\nabla \zeta_h - \boldsymbol{\eta}_h, \boldsymbol{\chi}_h).$$

Entonces

$$Ker(B_h) = \{(\boldsymbol{\eta}_h, \zeta_h) \in \mathbf{V}_h : (\boldsymbol{\chi}_h, \nabla \zeta_h - \boldsymbol{\eta}_h) = 0, \forall \boldsymbol{\chi}_h \in \mathbf{\Gamma}_h\}$$

Reemplacemos por simplicidad la condición (i) del Teorema 4.1, por la de coercividad de  $a(\cdot, \cdot)$  sobre  $Ker(B_h)$ . Las hipótesis del teorema son entonces,

$\exists \alpha_0 > 0$  tal que

$$(4.15) \quad a(\boldsymbol{\eta}_h, \boldsymbol{\eta}_h) \geq \alpha_0 (\|\boldsymbol{\eta}_h\|_1^2 + \|\zeta_h\|_1^2) \quad \forall (\boldsymbol{\eta}_h, \zeta_h) \in Ker(B_h)$$

y la condición *inf-sup*:

$\exists k_0 > 0$  tal que

$$(4.16) \quad \inf_{\boldsymbol{\chi}_h \in \mathbf{\Gamma}_h} \sup_{(\boldsymbol{\eta}_h, \zeta_h) \in \mathbf{V}_h} \frac{(\boldsymbol{\chi}_h, \nabla \zeta_h - \boldsymbol{\eta}_h)}{\|\boldsymbol{\chi}_h\|_{\mathbf{\Gamma}'} \|(\boldsymbol{\eta}_h, \zeta_h)\|_{\mathbf{V}}} \geq k_0 > 0.$$

La primer dificultad de la discretización es hallar espacios que verifiquen simultáneamente ambas condiciones: si se aumenta  $\mathbf{V}_h$  para que se cumpla (4.16), crece también  $Ker(B_h)$  y no se verifica (4.15).

No obstante para las aproximaciones de  $\beta_0$  y  $w_0$ , soluciones de (3.24), (3.25), se dispone del siguiente resultado:

**Teorema 4.3 :** *Dado el problema (4.3), (4.4), sea  $B_h$  el operador definido en (4.14). Supongamos que  $a(., .)$  es una forma bilineal coerciva sobre  $Ker(B_h)$ . Entonces existe una única solución  $(\beta_{0,h}, w_{0,h}, \gamma_{0,h})$ , y dicha solución verifica*

$$(4.17) \quad \|\beta_0 - \beta_{0,h}\|_1 + \|w_0 - w_{0,h}\|_1 \leq C \inf_{(\boldsymbol{\eta}_h, \zeta_h) \in Ker(B_h)} (\|\beta_0 - \boldsymbol{\eta}_h\|_1 + \|w_0 - \zeta_h\|_1) + \inf_{\boldsymbol{\chi}_h \in \boldsymbol{\Gamma}_h} \|\gamma_0 - \boldsymbol{\chi}_h\|_{\boldsymbol{\Gamma}'}$$

□

En particular si se elige  $\boldsymbol{\Gamma}_h = \nabla W_h - \mathbf{H}_h$  se tiene

$$Ker(B_h) = \{(\boldsymbol{\eta}_h, \zeta_h) : \boldsymbol{\eta}_h = \nabla \zeta_h\}$$

Llamando

$$\boldsymbol{\eta}_h = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\eta}_h^\perp = \begin{pmatrix} -\eta_2 \\ \eta_1 \end{pmatrix}$$

resulta  $rot(\boldsymbol{\eta}_h) = div(\boldsymbol{\eta}_h^\perp) = 0$ , para todo  $\boldsymbol{\eta}_h \in Ker(B_h)$  donde

$$div(\boldsymbol{\eta}) = \frac{\partial \eta_1}{\partial x} + \frac{\partial \eta_2}{\partial y}.$$

La utilización de espacios discretos que satisfagan exactamente la condición  $div(\boldsymbol{\eta}_h^\perp) = 0$  suele provocar dificultades numéricas. El problema de minimización se reduce en este caso a hallar

$$\min_{\{(\boldsymbol{\eta}_h, \zeta_h) : div \boldsymbol{\eta}_h^\perp = 0\}} \frac{1}{2} a(\boldsymbol{\eta}_h, \boldsymbol{\eta}_h) - g(\zeta_h)$$

La estructura de este problema es similar a la que se presenta en el problema de Stokes. Para dicho problema, existen dificultades en la utilización de espacios discretos que sean exactamente incompresibles. En general la condición  $div(\boldsymbol{\eta}_h^\perp) = 0$  resulta altamente dependiente de la red, y suelen existir pocas funciones independientes que satisfagan dicha condición. Esto implica una cota pobre en la expresión (4.17) para el error. En particular puede dar lugar a un fenómeno de bloqueo, en el cual la única función que cumple la condición mencionada es la función nula.

La formulación (4.3), (4.4) es suficientemente general, con respecto a la elección de la discretización para  $\boldsymbol{\Gamma}_h$  y no requiere que sea exactamente igual a  $\nabla W_h - \mathbf{H}_h$ . No obstante

esta elección es de especial interés, ya que el modelo resulta en ese caso un modelo de desplazamientos.

Por lo tanto, para evitar los problemas descritos, se trata de debilitar la condición  $\text{div}(\boldsymbol{\eta}_h^\perp) = 0$ , conservando la estructura de desplazamientos. Esto es posible apelando a técnicas de integración aproximada, o bien proyectando o interpolando  $(\nabla\zeta_h - \boldsymbol{\eta}_h)$  en espacios apropiados.

#### 4.1 Aproximación mediante elementos finitos mixtos y un nuevo enfoque para el análisis del error.

De acuerdo a lo expresado anteriormente, se plantea la definición de un nuevo problema que reemplazará a las ecuaciones (4.1), (4.2), en el cual se introducirá un operador de interpolación o proyección. Para dicho problema se estudiarán condiciones suficientes que garanticen convergencia para diversos métodos de elementos finitos. Consideraremos de aquí en adelante, por simplicidad,  $\lambda = 1$ .

Dados los espacios de elementos finitos  $\mathbf{H}_h$ ,  $W_h$  y  $\boldsymbol{\Gamma}_h$ , se define un operador  $\Pi : \mathbf{X} \longrightarrow \boldsymbol{\Gamma}_h$ , con  $\mathbf{H}_0^1(\Omega) \subset \mathbf{X} \subset \mathbf{L}^2(\Omega)$  que efectúa la interpolación o proyección y que cumple

$$(4.18) \quad \|\boldsymbol{\eta} - \Pi\boldsymbol{\eta}\|_{-(k-1)} \leq Ch^k \|\boldsymbol{\eta}\|_1 \quad \forall \boldsymbol{\eta} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega) \cap \mathbf{X}$$

*Observación 4.1 :* Si  $k = 1$  ésta es la propiedad clásica de aproximación en  $L^2$ .

Suponemos además que

$$(4.19) \quad \nabla W_h \subset \boldsymbol{\Gamma}_h$$

En lugar del problema (4.1), (4.2) se resolverá el siguiente problema:

Hallar  $(\boldsymbol{\beta}_h, w_h, \boldsymbol{\gamma}_h) \in \mathbf{H}_h \times W_h \times \boldsymbol{\Gamma}_h$  tal que

$$(4.20) \quad a(\boldsymbol{\beta}_h, \boldsymbol{\eta}_h) + (\boldsymbol{\gamma}_h, \nabla\zeta_h - \Pi\boldsymbol{\eta}_h) = (f, \zeta_h) \quad \forall (\boldsymbol{\eta}_h, \zeta_h) \in \mathbf{H}_h \times W_h$$

$$(4.21) \quad \boldsymbol{\gamma}_h = t^{-2}(\nabla w_h - \Pi\boldsymbol{\beta}_h)$$

Sea  $\mathbf{V}_h = \mathbf{H}_h \times W_h$ . Se puede demostrar que la forma bilineal definida por el primer miembro de (4.20), es  $\mathbf{V}_h$  elíptica con constante de coercividad dependiente de  $t$ . Esto garantiza existencia y unicidad de la solución del sistema dado, para  $t$  fijo.

*Observación 4.2 :* La condición (4.19) no es necesaria para la existencia de solución, ya que se puede reemplazar  $\nabla\zeta_h$  por  $\Pi(\nabla\zeta_h)$  en (4.20) sin afectar la coercividad. No obstante todos los métodos que se analizarán cumplen dicha condición.

Con el objeto de analizar el comportamiento del error, observamos qué ecuación satisface. A partir de (3.16) se obtiene

$$(4.22) \quad a(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\eta}_h) + (\boldsymbol{\gamma}, \nabla \zeta_h - \Pi(\boldsymbol{\eta}_h)) = (f, \zeta_h) - (\boldsymbol{\gamma}, \Pi(\boldsymbol{\eta}_h) - \boldsymbol{\eta}_h) \quad \forall (\boldsymbol{\eta}_h, \zeta_h) \in \mathbf{V}_h$$

Restando de (4.22), la ecuación (4.20) resulta

$$(4.23) \quad a(\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\beta}_h, \boldsymbol{\eta}_h) + (\boldsymbol{\gamma} - \boldsymbol{\gamma}_h, \nabla \zeta_h - \Pi(\boldsymbol{\eta}_h)) = (\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\eta}_h - \Pi(\boldsymbol{\eta}_h)) \quad \forall (\boldsymbol{\eta}_h, \zeta_h) \in \mathbf{V}_h$$

Llamamos a esta ecuación, ecuación del error.

En particular tomando  $\boldsymbol{\eta}_h = 0$ ,

$$(4.24) \quad (\boldsymbol{\gamma} - \boldsymbol{\gamma}_h, \nabla \zeta_h) = 0. \quad \forall \zeta_h \in W_h$$

**Lema 4.1 :** Sean  $\hat{\boldsymbol{\beta}} \in \mathbf{H}_h$ ,  $\hat{w} \in W_h$  y  $\hat{\boldsymbol{\gamma}} = t^{-2}(\nabla \hat{w} - \Pi \hat{\boldsymbol{\beta}}) \in \boldsymbol{\Gamma}_h$ . Se cumple

$$(4.25) \quad \|\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta}_h\|_1 + t\|\hat{\boldsymbol{\gamma}} - \boldsymbol{\gamma}_h\|_0 \leq C[\|\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta}\|_1 + t\|\hat{\boldsymbol{\gamma}} - \boldsymbol{\gamma}\|_0 + h^k\|\boldsymbol{\gamma}\|_{k-1}]$$

*Dem.*: A partir de (4.23) se obtiene

$$(4.26) \quad \begin{aligned} & a(\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta}_h, \boldsymbol{\eta}_h) + (\hat{\boldsymbol{\gamma}} - \boldsymbol{\gamma}_h, \nabla \zeta_h - \Pi(\boldsymbol{\eta}_h)) = \\ & = a(\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\eta}_h) + (\hat{\boldsymbol{\gamma}} - \boldsymbol{\gamma}, \nabla \zeta_h - \Pi(\boldsymbol{\eta}_h)) + (\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\eta}_h - \Pi(\boldsymbol{\eta}_h)) \quad \forall (\boldsymbol{\eta}_h, \zeta_h) \in \mathbf{V}_h \end{aligned}$$

Eligiendo como funciones de prueba

$$\boldsymbol{\eta}_h = \hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta}_h, \quad \zeta_h = \hat{w} - w_h$$

resulta

$$\hat{\boldsymbol{\gamma}} - \boldsymbol{\gamma}_h = t^{-2}(\nabla(\hat{w} - w_h) - \Pi(\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta}_h))$$

Reemplazando estas expresiones en (4.26)

$$(4.27) \quad \begin{aligned} & a(\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta}_h, \hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta}_h) + t^2(\hat{\boldsymbol{\gamma}} - \boldsymbol{\gamma}_h, \hat{\boldsymbol{\gamma}} - \boldsymbol{\gamma}_h) = \\ & = a(\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta}, \hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta}_h) + t^2(\hat{\boldsymbol{\gamma}} - \boldsymbol{\gamma}, \hat{\boldsymbol{\gamma}} - \boldsymbol{\gamma}_h) + (\boldsymbol{\gamma}, \hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta}_h - \Pi(\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta}_h)) \end{aligned}$$

Utilizando la coercividad y continuidad de  $a(\cdot, \cdot)$  y la desigualdad de Schwarz

$$(4.28) \quad \begin{aligned} \alpha\|\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta}_h\|_1^2 + t^2\|\hat{\boldsymbol{\gamma}} - \boldsymbol{\gamma}_h\|_0^2 & \leq C[\|\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta}\|_1\|\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta}_h\|_1 + \\ & + t^2\|\hat{\boldsymbol{\gamma}} - \boldsymbol{\gamma}\|_0\|\hat{\boldsymbol{\gamma}} - \boldsymbol{\gamma}_h\|_0 + h^k\|\boldsymbol{\gamma}\|_{k-1}\|\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta}_h\|_1] \end{aligned}$$

donde se ha utilizado (4.18). De aquí obviamente resulta (4.25). □



De (4.25) se observa que eligiendo convenientemente los elementos  $\hat{\beta}$  y  $\hat{\gamma}$  de manera que resulten buenas aproximaciones de  $\beta$  y  $\gamma$  respectivamente, se obtendrán resultados de aproximación para el error en la norma  $\|\beta - \beta_h\|_1 + t\|\gamma - \gamma_h\|_0$ .

La forma en que se definan las aproximaciones dependerá del método considerado.

El teorema que sigue es el resultado central de nuestro análisis, ya que proporciona condiciones generales en cuyo marco es posible analizar la convergencia de los diversos métodos mixtos.

**Teorema 4.4 :** *Sea  $\mathbf{H}_h \subset \mathbf{H}_0^1(\Omega)$ ,  $W_h \subset H_0^1(\Omega)$ ,  $\Gamma_h \subset \mathbf{L}^2(\Omega)$ . Supongamos que se cumple la inclusión (4.19). Sea  $\Pi : \mathbf{X} \rightarrow \Gamma_h$  un operador que satisface (4.18). Si existe  $\hat{\beta} \in \mathbf{H}_h$ ,  $\hat{w} \in W_h$  y un operador  $\tilde{\Pi} : \mathbf{H}_0(\text{rot}, \Omega) \rightarrow \Gamma_h$  tal que*

$$(4.29) \quad \|\hat{\beta} - \beta\|_1 \leq Ch^k \|\beta\|_{k+1} \quad \beta \in \mathbf{H}_0^1(\Omega) \cap \mathbf{H}^{k+1}(\Omega)$$

$$(4.30) \quad \hat{\gamma} = t^{-2}(\nabla \hat{w} - \Pi \hat{\beta}) = \tilde{\Pi}(\gamma)$$

y

$$(4.31) \quad \|\eta - \tilde{\Pi} \eta\|_0 \leq Ch^k \|\eta\|_k \quad \forall \eta \in \mathbf{H}^k(\Omega) \cap \mathbf{H}_0(\text{rot}, \Omega)$$

entonces

$$(4.32) \quad \|\beta - \beta_h\|_1 + t\|\gamma - \gamma_h\|_0 \leq Ch^k [\|\beta\|_{k+1} + t\|\gamma\|_k + \|\gamma\|_{k-1}]$$

*Dem. :* Resulta en forma inmediata a partir de (4.25) y de la elección indicada para  $\hat{\beta}$  y  $\hat{\gamma}$ . □

**Corolario 4.1** *Bajo las hipótesis del teorema anterior y considerando  $k = 1$ , resulta*

$$(4.33) \quad \|w - w_h\|_1 \leq Ch [\|\beta\|_2 + t\|\gamma\|_1 + \|\gamma\|_0]$$

*Dem. :*

$$\nabla w - \nabla w_h = t^2(\gamma - \gamma_h) + (\beta - \Pi \beta_h)$$

Por lo tanto

$$\|\nabla w - \nabla w_h\|_0 \leq t^2\|\gamma - \gamma_h\|_0 + \|\beta - \Pi \beta\|_0 + \|\Pi \beta - \Pi \beta_h\|_0$$

A partir de (4.18)

$$\|\Pi \beta - \Pi \beta_h\|_0 \leq C\|\beta - \beta_h\|_1$$

Utilizando nuevamente (4.18) para acotar el segundo término y aplicando (4.32) se obtiene (4.33). □

Si  $\Omega$  es un polígono convexo se dispone de los resultados de regularidad mencionados en el Inciso 3.2 . En particular si  $g \in L^2(\Omega)$

$$(4.34) \quad \|\boldsymbol{\beta}\|_2 + t\|\boldsymbol{\gamma}\|_1 + \|\boldsymbol{\gamma}\|_0 \leq C\|g\|_0$$

En este caso, suponiendo que se verifiquen las hipótesis del Teorema 4.4 con  $k = 1$ , resulta

$$(4.35) \quad \|\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\beta}_h\|_1 + t\|\boldsymbol{\gamma} - \boldsymbol{\gamma}_h\|_0 + \|w - w_h\|_1 \leq Ch\|g\|_0$$

La condición (4.30) del Teorema 4.4 puede ser descripta más claramente mediante un diagrama.

Sea  $B$  el operador definido en (3.18) y  $\hat{B} : \mathbf{H}_h \times W_h \longrightarrow \boldsymbol{\Gamma}_h$  el operador correspondiente al problema discreto definido por

$$(4.36) \quad \hat{B}(\boldsymbol{\eta}_h, \zeta_h) = (\nabla\zeta_h - \Pi\boldsymbol{\eta}_h)$$

La condición (4.30) se expresa a través de la existencia de un operador

$$\Phi : \mathbf{H}_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \longrightarrow \mathbf{H}_h \times W_h$$

para el cual denotamos  $(\hat{\boldsymbol{\eta}}_h, \hat{\zeta}_h) = \Phi(\boldsymbol{\eta}, \zeta)$ , tal que el siguiente diagrama conmute :

$$(4.37) \quad \begin{array}{ccc} & B & \\ \mathbf{H}_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) & \longrightarrow & \mathbf{H}_0(\text{rot}, \Omega) \\ \Phi \downarrow & & \downarrow \tilde{\Pi} \\ \mathbf{H}_h \times W_h & \xrightarrow{\hat{B}} & \boldsymbol{\Gamma}_h \end{array}$$

En el caso particular en que  $\Pi = \tilde{\Pi} = P$  donde  $P$  es el operador proyección  $\mathbf{L}^2$ , se cumple

$$((\nabla\zeta - \boldsymbol{\eta}) - (\nabla\hat{\zeta}_h - \hat{\boldsymbol{\eta}}_h), \boldsymbol{\chi}_h) = 0 \quad \forall \boldsymbol{\chi}_h \in \boldsymbol{\Gamma}_h$$

Esta es precisamente la propiedad de Fortin (4.12), que es equivalente a la condición *inf-sup*, de manera que la condición (4.30) puede ser considerada como una generalización de la misma.

## 4.2 Espacios de elementos finitos y operadores.

Las condiciones del Teorema 4.4 indican que la elección de los espacios  $\mathbf{H}_h$ ,  $W_h$  y  $\boldsymbol{\Gamma}_h$  de elementos finitos, a utilizar en el problema discreto (4.20), (4.21), no puede ser realizada en forma independiente. En particular se deben verificar las relaciones (4.19) y (4.30).

El lema que sigue proporciona condiciones suficientes para garantizar (4.30) a través de una elección apropiada de espacios y operadores. En particular, bajo esas condiciones resulta  $\tilde{\Pi} = \Pi$ .

**Lema 4.2 :** Sean  $\mathbf{H}_h$ ,  $W_h$ ,  $\mathbf{\Gamma}_h$  y  $\Pi$  definidos como en el Teorema 4.4. Sea  $\mathbf{R} : \mathbf{H}_0^1(\Omega) \longrightarrow \mathbf{H}_h$  un operador de interpolación en  $\mathbf{H}_h$ . Si se eligen los espacios y operadores de modo que se cumplan las siguientes propiedades:

$$(4.38) \quad \mathbf{\Gamma}_h \subset \mathbf{H}_0(\text{rot}, \Omega)$$

$$\Pi : \mathbf{H}^1(\Omega) \cap \mathbf{H}_0(\text{rot}, \Omega) \longrightarrow \mathbf{\Gamma}_h \quad \text{verifica}$$

$$(4.39) \quad \int_{\Omega} \text{rot}(\boldsymbol{\eta} - \Pi\boldsymbol{\eta})q_h dx dy = 0 \quad \forall q_h \in Q_h, \forall \boldsymbol{\eta} \in \mathbf{H}_0(\text{rot}, \Omega) \cap \mathbf{H}^1(\Omega)$$

donde

$$Q_h = \text{rot}(\mathbf{\Gamma}_h) = \{\eta_h : \eta_h = \text{rot}(\boldsymbol{\chi}_h), \boldsymbol{\chi}_h \in \mathbf{\Gamma}_h\}$$

$$(4.40) \quad \text{Si } \boldsymbol{\chi}_h \in \mathbf{\Gamma}_h \text{ y } \text{rot}(\boldsymbol{\chi}_h) = 0 \implies \exists \zeta_h \in W_h : \boldsymbol{\chi}_h = \nabla \zeta_h$$

$$(4.41) \quad \int_{\Omega} \text{rot}(\boldsymbol{\eta} - \mathbf{R}\boldsymbol{\eta})q_h dx dy = 0 \quad \forall q_h \in Q_h$$

y

$$(4.42) \quad \|\boldsymbol{\eta} - \mathbf{R}\boldsymbol{\eta}\|_1 \leq Ch^k \|\boldsymbol{\eta}\|_{k+1} \quad \forall \boldsymbol{\eta} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega) \cap \mathbf{H}^{k+1}(\Omega)$$

Entonces  $\exists \hat{w} \in W_h$  y  $\hat{\boldsymbol{\beta}} \in \mathbf{H}_h$  tal que se cumple

$$(4.43) \quad \hat{\boldsymbol{\gamma}} = t^{-2}(\nabla \hat{w} - \Pi \hat{\boldsymbol{\beta}}) = \Pi(\boldsymbol{\gamma})$$

donde  $\hat{\boldsymbol{\beta}}$  verifica (4.29).

*Observación 4.3 :* Estas condiciones son las utilizadas por Bathe, Brezzi y Fortin en [11], para obtener estimaciones del error en el caso límite  $t = 0$ . Utilizando los mismos argumentos se demuestra (4.43).

*Dem. :* Eligiendo  $\hat{\boldsymbol{\beta}} = \mathbf{R}\boldsymbol{\beta}$  y tomando  $\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\beta} - \hat{\boldsymbol{\beta}}$  en (4.39) se tiene

$$(4.44) \quad \int_{\Omega} \text{rot}[(\boldsymbol{\beta} - \hat{\boldsymbol{\beta}}) - \Pi(\boldsymbol{\beta} - \hat{\boldsymbol{\beta}})]q_h dx dy = 0 \quad \forall q_h \in Q_h$$

Utilizando (4.41) resulta

$$\int_{\Omega} \text{rot}(\boldsymbol{\beta} - \hat{\boldsymbol{\beta}})q_h dx dy = 0$$

y por lo tanto

$$\int_{\Omega} \text{rot}\Pi(\boldsymbol{\beta} - \hat{\boldsymbol{\beta}})q_h dx dy = 0$$

De aquí, eligiendo  $q_h = \text{rot}\Pi(\boldsymbol{\beta} - \hat{\boldsymbol{\beta}})$  se tiene  $\text{rot}\Pi(\boldsymbol{\beta} - \hat{\boldsymbol{\beta}}) = 0$  y de acuerdo con (4.40) existe  $v_1 \in W_h$  tal que  $\Pi(\boldsymbol{\beta} - \hat{\boldsymbol{\beta}}) = \nabla v_1$ . En forma similar existe  $v_2 \in W_h$  que verifica  $\Pi(\nabla w) = \nabla v_2$ , y eligiendo  $\hat{w} = v_1 + v_2$ , resulta  $\Pi(\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta}) + \Pi(\nabla w) = \nabla \hat{w}$  que es equivalente a (4.43).

Finalmente (4.29) es consecuencia inmediata de (4.42).

□

El Lema 4.2 proporciona una forma sistemática de construcción de elementos convergentes.

Como se mencionó en el Inciso 3.2, las ecuaciones del modelo de Reissner- Mindlin, están relacionadas con el problema de Stokes. También los espacios a utilizar están íntimamente ligados a los empleados en la resolución mediante elementos finitos de dicho problema.

En relación al problema de Stokes, se han estudiado [14], [21], varias aproximaciones al espacio  $\mathbf{H}(div, \Omega)$ . La consideración fundamental en la definición de los espacios de aproximación conforme de  $\mathbf{H}(div, \Omega)$  es garantizar la continuidad de la componente normal en los bordes interelemento.

Los mismos argumentos que los utilizados para obtener una aproximación conforme para  $\mathbf{H}(div, \Omega)$  determinan que para obtener  $\mathbf{\Gamma}_h \subset \mathbf{H}_0(rot, \Omega)$ , es necesario que los elementos de  $\mathbf{\Gamma}_h$  posean componente tangencial continua [14]. Es decir que salvo rotaciones, las mismas aproximaciones son válidas para ambos espacios.

Es importante observar que las condiciones del Lema 4.2, comprometen también en la definición de espacios, la estructura del espacio  $Q_h = rot(\mathbf{\Gamma}_h)$ .

Analicemos con más detalle las condiciones (4.39) a (4.42) de dicho lema. La condición (4.39) está ligada a la definición de los grados de libertad para la interpolación en  $\mathbf{\Gamma}_h$ .

En relación a la condición (4.40), se conoce un resultado general [21]:

**Teorema 4.5 :** *Una función  $\mathbf{v} \in \mathbf{L}^2(\Omega)$  satisfice  $rot\mathbf{v} = 0$  y  $\langle \mathbf{v}\boldsymbol{\tau}, \mathbf{1} \rangle_{\partial\Omega} = 0$  sii existe una función  $\phi \in \mathbf{H}^1(\Omega)$  tal que  $\mathbf{v} = \nabla\phi$ .*

□

Como se verá en el análisis de los ejemplos, mediante la utilización de el teorema anterior, la correspondencia entre  $\mathbf{\Gamma}_h$  y  $W_h$  para (4.40), se basa solo en una elección apropiada de los polinomios en cada espacio.

También están asociadas a la resolución del problema de Stokes, las condiciones (4.41) y (4.42). De la aplicación del Teorema 4.1 a la discretización de las ecuaciones de Stokes (3.34), (3.35) se deduce que los espacios discretos para la aproximación de velocidades y presión deben satisfacer una condición *inf-sup*. Se conocen varios ejemplos de pares de espacios que la satisfacen y para los cuales se ha efectuado la construcción de un operador que cumple la condición (4.12). Precisamente esa es la condición (4.41) requerida en la definición del operador  $\mathbf{R}$ . Por otro lado la condición (4.42) surge de las técnicas de construcción de los operadores  $\mathbf{R}$  en las aplicaciones, ya que éstos son operadores de interpolación. De modo que los pares de espacios estables para el problema de Stokes son utilizables en el modelo de placas.

## 5 Ejemplos

En esta sección se aplican los resultados del análisis de error a varios elementos.

Se utilizará la notación  $\mathcal{P}_k$  para el espacio de polinomios de grado menor o igual que  $k$ , y  $Q_{i,j}$  para el espacio de polinomios de grado menor o igual que  $i$  en la primer variable y que  $j$  en la segunda. Se utilizará también  $Q_k = Q_{k,k}$ .

En los dos primeros ejemplos los espacios y operadores satisfacen las hipótesis del Lema 4.2.

## 5.1 Un elemento triangular de bajo orden

Sea  $\Upsilon_h$  una partición de  $\Omega$  en triángulos.

Se define  $\mathbf{\Gamma}_h$  como la rotación del espacio de Raviart-Thomas de más bajo orden,

$$(5.1) \quad \mathbf{\Gamma}_h = \{\boldsymbol{\eta}_h \in \mathbf{H}_0(\text{rot}, \Omega) : \boldsymbol{\eta}_h|_T \in \mathcal{P}_0 \oplus \mathcal{P}_0 \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} \quad \forall T \in \Upsilon_h\}$$

En general los espacios de Raviart-Thomas de orden  $k$  se pueden definir a partir de su expresión sobre cada elemento  $T$  de la triangulación:

$$RT_k^r(T) = \mathcal{P}_k(T) + \mathbf{x}^r \mathcal{P}_k(T)$$

donde

$$(5.2) \quad \mathbf{x}^r = \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$$

y el superíndice  $r$  indica rotación. Para cada triángulo  $T \in \Upsilon_h$ , sean  $\{\partial T_i\}_{i=1,2,3}$  los lados de  $T$  y  $\boldsymbol{\tau}_i$  el vector unitario tangente al lado  $\partial T_i$ .

**Proposición 5.1** : *Para cada elemento  $T$  y para  $\boldsymbol{\eta}_h \in RT_k^r(T)$  se cumplen las siguientes propiedades :*

$$\text{rot}(\boldsymbol{\eta}_h) \in \mathcal{P}_k(T)$$

$$\boldsymbol{\eta}_h \boldsymbol{\tau}|_{\partial T} \in R_k(\partial T)$$

donde las funciones de  $R_k(\partial T)$  son polinomios de grado  $\leq k$  en cada lado de  $T$ . Además el operador  $\text{rot}$  es suryectivo de  $RT_k^r(T)$  sobre  $\mathcal{P}_k(T)$ . □

Los grados de libertad que definen la interpolada  $\boldsymbol{\eta}_h \in RT_k^r(T)$ ,  $k \geq 0$ , son los siguientes:

$$(5.3) \quad \int_{\partial T_i} \boldsymbol{\eta}_h \boldsymbol{\tau}_i p_k ds = \int_{\partial T_i} \boldsymbol{\eta} \boldsymbol{\tau}_i p_k ds \quad \forall p_k \in R_k(\partial T) \quad i = 1, 2, 3$$

$$(5.4) \quad \int_T \boldsymbol{\eta}_h \mathbf{p}_{k-1} dx dy = \int_T \boldsymbol{\eta} \mathbf{p}_{k-1} dx dy \quad \forall \mathbf{p}_{k-1} \in \mathcal{P}_{k-1}(T)$$

En las relaciones precedentes será necesario que  $\boldsymbol{\eta}$  posea mayor regularidad que pertenecer solo a  $\mathbf{H}(\text{rot}, \Omega)$ , para que tengan sentido las integrales en el segundo miembro de (5.3).

Teniendo en cuenta que el operador  $\Pi$  se aplica a funciones de  $\mathbf{H}^1(\Omega)$ , la traza tangencial pertenecerá a  $\mathbf{H}^{\frac{1}{2}}(\partial T)$ . Por lo tanto el operador  $\Pi$  correspondiente a (4.39), con  $\mathbf{\Gamma}_h$  dado en (5.1), queda definido a partir de la relación (5.3) con  $k = 0$  y satisface (4.18) para  $k = 1$ , por ser un operador de interpolación.

Para definir  $\mathbf{H}_h$  utilizamos la rotación de un espacio utilizado para el problema de Stokes [21], [14].

Sean  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  las coordenadas baricéntricas correspondientes a un elemento  $T \in \Upsilon_h$ . Sea  $\boldsymbol{\tau}_i$  el vector unitario tangente al borde  $\partial T_i$ , en el cual  $\lambda_i = 0$ . Se definen

$$(5.5) \quad \phi_1 = \lambda_2 \lambda_3 \boldsymbol{\tau}_1, \quad \phi_2 = \lambda_3 \lambda_1 \boldsymbol{\tau}_2, \quad \phi_3 = \lambda_1 \lambda_2 \boldsymbol{\tau}_3$$

El espacio para las rotaciones es

$$\mathbf{H}_h = \{ \boldsymbol{\eta}_h \in \mathbf{H}_0^1(\Omega) : \boldsymbol{\eta}_h|_T \in \mathcal{P}_1 \oplus \langle \phi_1, \phi_2, \phi_3 \rangle \quad \forall T \in \Upsilon_h \}$$

donde  $\langle \phi_1, \phi_2, \phi_3 \rangle$  indica el espacio generado por las funciones  $\phi_i$ .

La definición de un elemento de éste espacio se efectúa a través del operador  $\mathbf{R}$  [14] que verifica, para cada  $T \in \Upsilon_h$  y para cada  $\boldsymbol{\eta} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$ , las propiedades:

$$(5.6) \quad \mathbf{R}(\boldsymbol{\eta})|_T \in \mathcal{P}_2(T)$$

$$(5.7) \quad \mathbf{R}(\boldsymbol{\eta})|_T(P_i) = \mathbf{C}_h(\boldsymbol{\eta}(P_i)) \quad \forall P_i \text{ vértice de } T. \quad i = 1, 2, 3$$

$$(5.8) \quad \int_{\partial T_i} \mathbf{R}\boldsymbol{\eta}\boldsymbol{\tau}_i ds = \int_{\partial T_i} \boldsymbol{\eta}\boldsymbol{\tau}_i ds \quad i = 1, 2, 3$$

Debido a que las funciones de  $\mathbf{H}_0^1(\Omega)$  no son necesariamente continuas, en (5.7) se introduce el operador de regularización local de Clement  $\mathbf{C}_h$  [21]. Su definición se efectúa a través de la utilización de macroelementos que contengan a  $T$  y posee propiedades similares a las de un operador de interpolación para funciones continuas.

El operador  $\mathbf{R}$  definido previamente verifica la condición (4.41), que se deduce en forma inmediata de (5.8) ya que

$$\int_T \text{rot}(\mathbf{R}\boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\eta}) dx dy = \int_{\partial T} (\mathbf{R}\boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\eta})\boldsymbol{\tau} ds = 0$$

y se demuestra con las técnicas usuales [21] que  $\mathbf{R}$  satisface (4.42) para  $k = 1$ .

Finalmente el espacio para los desplazamientos transversales es

$$W_h = \{ v_h \in H_0^1(\Omega) : v_h|_T \in \mathcal{P}_1 \quad \forall T \in \Upsilon_h \}.$$

y verifica las propiedades (4.19) y (4.40). La primera es inmediata, mientras que para la segunda basta observar que si  $\boldsymbol{\chi}_h \in \boldsymbol{\Gamma}_h$  y  $\text{rot}(\boldsymbol{\chi}_h) = 0$ , entonces  $\boldsymbol{\chi}_h|_T \in \mathcal{P}_0$  y, de acuerdo al Teorema 4.5, existe un elemento  $\phi \in H^1(\Omega)$  tal que  $\phi|_T \in \mathcal{P}_1$  y  $\boldsymbol{\chi}_h = \nabla\phi$ . Teniendo en cuenta que la derivada tangencial de  $\phi$  es nula sobre  $\partial\Omega$ ,  $\phi$  resulta constante sobre el borde y por lo tanto se puede elegir  $\phi = \zeta_h \in W_h$  que verifique (4.40).

Aplicando el Lema 4.2, eligiendo  $\hat{\boldsymbol{\beta}} = \mathbf{R}\boldsymbol{\beta}$  y considerando  $\hat{\Pi} = \Pi$ , se verifican todas las hipótesis del Teorema 4.4, obteniéndose la correspondiente acotación del error (4.32) con  $k = 1$ , mientras que si la región  $\Omega$  es un polígono convexo tendremos una estimación óptima del error de la forma (4.35).

## 5.2 Elemento de Bathe - Brezzi de segundo orden.

En [5] Bathe y Brezzi introdujeron un elemento rectangular de  $O(h^2)$ , demostrando la convergencia del mismo para el caso límite  $t = 0$ , bajo hipótesis similares a las del Lema 4.2 .

Llamamos ahora  $\Upsilon_h$  a una partición de  $\Omega$  en rectángulos.

Se define

$$\Gamma_h = \{\boldsymbol{\eta} \in \mathbf{H}_0(\text{rot}, \Omega) : \boldsymbol{\eta}_h|_K \in \tilde{\mathbf{Q}}, \quad \forall K \in \Upsilon_h\}$$

donde  $\tilde{\mathbf{Q}}$  es el espacio rotado del definido por Brezzi, Douglas, Fortin y Marini de orden 2.

$$\tilde{\mathbf{Q}} = \langle 1, x_1, x_2, x_1x_2, x_2^2 \rangle \times \langle 1, x_1, x_2, x_1x_2, x_1^2 \rangle$$

Su definición general para orden  $k$ , sobre cada elemento rectangular  $K$  es:

$$BDFM_k^r = \mathcal{P}_{k-1} \langle 0, x_2^k \rangle - \langle x_1^k, 0 \rangle$$

Dado un elemento rectangular  $K \in \Upsilon_h$ , sea  $\partial K = \bigcup_{1 \leq i \leq 4} \partial K_i$ , el borde del elemento. El rotor y las componentes tangenciales cumplen las siguientes propiedades:

**Proposición 5.2 :** Para cada elemento  $K$  y para  $\boldsymbol{\eta}_h \in BDFM_k^r(K)$

$$\text{rot}(\boldsymbol{\eta}_h) \in \mathcal{P}_{k-1}(K)$$

$$\boldsymbol{\eta}_h \boldsymbol{\tau}|_{\partial K} \in R_{k-1}(\partial K)$$

□

Los grados de libertad correspondientes a  $BDFM_k^r(K)$  están dados por las relaciones:

$$(5.9) \quad \int_{\partial K_i} \boldsymbol{\eta}_h \boldsymbol{\tau}_i p_{k-1} ds = \int_{\partial K_i} \boldsymbol{\eta} \boldsymbol{\tau}_i p_{k-1} ds \quad \forall p_{k-1} \in R_{k-1}(\partial K) \quad i = 1, 2, 3, 4$$

$$(5.10) \quad \int_K \boldsymbol{\eta}_h \mathbf{p}_{k-2} dx dy = \int_K \boldsymbol{\eta} \mathbf{p}_{k-2} dx dy \quad \forall \mathbf{p}_{k-2} \in \mathcal{P}_{k-2}(K) \quad (k \geq 2)$$

El operador  $\Pi$  definido a partir de (5.9), (5.10) con  $k = 2$  satisface (4.39) [12], [21], y, suponiendo las condiciones de regularidad necesarias para  $\boldsymbol{\eta}$ , resulta un operador de interpolación. En ese caso se tendrá

$$(5.11) \quad \|\boldsymbol{\eta} - \Pi \boldsymbol{\eta}\|_0 \leq Ch^2 \|\boldsymbol{\eta}\|_2 \quad \forall \boldsymbol{\eta} \in \mathbf{H}^2 \cap \mathbf{H}_0(\text{rot}, \Omega)$$

Veremos que se cumple (4.18). Para ello utilizamos los mismos argumentos que en [6]. Observemos que  $\Pi$  verifica

$$(5.12) \quad \|\boldsymbol{\eta} - \Pi \boldsymbol{\eta}\|_0 \leq Ch \|\boldsymbol{\eta}\|_1 \quad \forall \boldsymbol{\eta} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega) \cap \mathbf{H}_0(\text{rot}, \Omega)$$

y según (5.10)

$$(5.13) \quad \int_K (\boldsymbol{\eta} - \Pi(\boldsymbol{\eta})) dx dy = 0$$

Dada  $\boldsymbol{\xi} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$ , sea  $\boldsymbol{\xi}_0$  la proyección  $\mathbf{L}^2$  de  $\boldsymbol{\xi}$  sobre las constantes a trozos. Entonces

$$\frac{(\boldsymbol{\eta} - \Pi\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi})}{\|\boldsymbol{\xi}\|_1} = \frac{(\boldsymbol{\eta} - \Pi\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}_0)}{\|\boldsymbol{\xi}\|_1} \leq \frac{\|\boldsymbol{\eta} - \Pi\boldsymbol{\eta}\|_0 \|\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}_0\|_0}{\|\boldsymbol{\xi}\|_1} \leq Ch^2 \|\boldsymbol{\eta}\|_1$$

de donde se sigue (4.18) con  $k = 2$  :

$$(5.14) \quad \|\boldsymbol{\eta} - \Pi\boldsymbol{\eta}\|_{-1} \leq h^2 \|\boldsymbol{\eta}\|_1$$

El espacio  $\mathbf{H}_h$  utilizado es :

$$\mathbf{H}_h = \{\boldsymbol{\eta}_h \in \mathbf{H}_0^1(\Omega) : \boldsymbol{\eta}_h|_K \in \mathbf{Q}_2, \forall K \in \Upsilon_h\}.$$

En este ejemplo el operador  $\mathbf{R}$  se corresponde (salvo rotaciones) con el construido para satisfacer la condición (4.12) entre los espacios  $\mathbf{Q}_2 - \mathcal{P}_1$  en el problema de Stokes.  $\mathbf{R}$  queda definido a partir de las siguientes condiciones:

$$(5.15) \quad \mathbf{R}(\boldsymbol{\eta})|_K \in \mathbf{Q}_2(K)$$

$$(5.16) \quad \mathbf{R}(\boldsymbol{\eta})|_K(P_i) = \mathbf{C}_h(\boldsymbol{\eta}(P_i)) \quad \forall P_i \text{ vértice de } K.$$

$$(5.17) \quad \int_{\partial K_i} \mathbf{R}\boldsymbol{\eta} ds = \int_{\partial K_i} \boldsymbol{\eta} ds \quad i = 1, 2, 3, 4$$

$$(5.18) \quad \int_K \mathbf{R}\boldsymbol{\eta} dx dy = \int_K \boldsymbol{\eta} dx dy$$

donde en (5.16) se utiliza nuevamente el operador de regularización mencionado en el ejemplo anterior. El operador  $\mathbf{R}$  satisface (4.41) [12], [21]. La acotación (4.42) se cumple para  $k = 2$  :

$$(5.19) \quad \|\boldsymbol{\eta} - \mathbf{R}\boldsymbol{\eta}\|_1 \leq Ch^2 \|\boldsymbol{\eta}\|_3$$

Finalmente

$$W_h = \{v_h \in \mathbf{H}_0^1(\Omega) : v_h|_K \in Q_2^r, \forall K \in \Upsilon_h\}$$

donde

$$Q_2^r = \langle 1, x_1, x_2, x_1x_2, x_1^2, x_2^2, x_1^2x_2, x_1x_2^2 \rangle .$$

De acuerdo a lo expresado en el ejemplo anterior, la construcción de  $W_h$  permite verificar las relaciones (4.19) y (4.40).

Aplicando el Lema 4.2, considerando  $\tilde{\Pi} = \Pi$  y, teniendo en cuenta (5.19), (5.11) y (5.14), se obtiene mediante el Teorema 4.4 una acotación de la forma

$$\|\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\beta}_h\|_1 + t\|\boldsymbol{\gamma} - \boldsymbol{\gamma}_h\|_0 \leq Ch^2[\|\boldsymbol{\beta}\|_3 + t\|\boldsymbol{\gamma}\|_2 + \|\boldsymbol{\gamma}\|_1]$$



### 5.3 Elemento de Bathe - Dvorkin

Este elemento rectangular, ha sido definido en [9]. En [6] se demostró también convergencia de  $O(h)$  para redes uniformes, pero a diferencia de los ejemplos anteriores, las estimaciones obtenidas suponen mayor regularidad para las soluciones :  $\boldsymbol{\gamma} \in \mathbf{H}^2(\Omega)$ , y  $\boldsymbol{\beta} \in \mathbf{H}^3(\Omega)$ .

En la demostración utilizando el Teorema 4.4 hemos obtenido nuevos resultados, también considerando redes uniformes. Las estimaciones obtenidas mejoran a las presentadas en [6] y [18], ya que los requerimientos de regularidad sobre  $\boldsymbol{\beta}$  y  $\boldsymbol{\gamma}$  permiten obtener cotas de error óptimas independientes del espesor de la placa, pues se requiere que  $\boldsymbol{\beta} \in \mathbf{H}^2(\Omega)$  y  $\boldsymbol{\gamma} \in \mathbf{H}^1(\Omega)$ .

A diferencia de los ejemplos anteriores, en este caso no es posible construir un operador  $\mathbf{R}$  que satisfaga las hipótesis (4.41) y (4.42) del Lema 4.2 [21], por lo cual se aplicará directamente el Teorema 4.4.

La definición de los espacios es la que sigue:

$\Gamma_h$  es el espacio de Raviart-Thomas de más bajo orden rotado,

$$(5.20) \quad \Gamma_h = \{\boldsymbol{\eta}_h \in \mathbf{H}_0(\text{rot}, \Omega) : \boldsymbol{\eta}_h|_K \in Q_{0,1} \times Q_{1,0}, \quad \forall K \in \Upsilon_h\}$$

donde como antes  $K$  es un rectángulo perteneciente a una partición  $\Upsilon_h$  de  $\Omega$ .

En general el espacio de Raviart-Thomas de orden  $k$  rotado está definido por

$$(5.21) \quad RT_k^r = \mathcal{P}_{k,k+1}(K) \times \mathcal{P}_{k+1,k}(K)$$

La definición de los grados de libertad para los elemento del espacio de Raviart-Thomas rotado de orden  $k$  se efectúa sobre un elemento  $K$ , de acuerdo a las relaciones:

$$(5.22) \quad \int_{\partial K_i} \boldsymbol{\eta}_h \boldsymbol{\tau}_i p_k ds = \int_{\partial K_i} \boldsymbol{\eta} \boldsymbol{\tau}_i p_k ds \quad \forall p_k \in R_k(\partial K), \quad i = 1, 2, 3, 4$$

$$(5.23) \quad \int_K \boldsymbol{\eta}_h \phi_k dx dy = \int_K \boldsymbol{\eta} \phi_k dx dy \quad \forall \phi_k \in \Psi_k(K)$$

donde

$$\Psi_k(K) = \{\mathcal{P}_{k-1,k}(K) \times \mathcal{P}_{k,k-1}(K)\}$$

Vale el siguiente resultado:

**Proposición 5.3 :** Para  $K \in \Upsilon_h$  y  $\boldsymbol{\eta}_h \in RT_k^r(K)$ ,

$$\text{rot}(\boldsymbol{\eta}_h) \in Q_k$$

$$\boldsymbol{\eta}_h \boldsymbol{\tau}|_{\partial K} \in \mathcal{P}_k(\partial K)$$

donde las funciones de  $\mathcal{P}_k(\partial K)$  son polinomios de grado  $\leq k$  en cada lado de  $T$ , que se pegan con continuidad en los vértices. □

El operador de interpolación  $\Pi$  definido a partir de estas relaciones satisface (4.39) y (4.18) con  $k = 1$  [6], [23].

La definición del espacio  $W_h$  es :

$$W_h = \{v_h \in H_0^1(\Omega) : v_h|_K \in Q_1, \quad \forall K \in \Upsilon_h\}$$

y por su construcción satisface (4.19) y (4.40).

El espacio para las rotaciones se define como:

$$\mathbf{H}_h = \{\boldsymbol{\eta}_h \in \mathbf{H}_0^1(\Omega) : \boldsymbol{\eta}_h|_K \in \mathbf{Q}_1, \quad \forall K \in \Upsilon_h\}$$

El espacio  $Q_h = \text{rot}(\mathbf{\Gamma}_h)$  está definido por

$$Q_h = \{q_h \in L^2(\Omega) : q_h|_K \in \mathcal{P}_0, \quad \forall K \in \Upsilon_h \text{ y } \int_{\Omega} q_h dx dy = 0\}$$

Para el par de espacios  $\mathbf{H}_h - Q_h$  se conoce, en el contexto del análisis del problema de Stokes, que no existe un operador  $\mathbf{R}$  que satisfaga las relaciones (4.41) y (4.42) [21], como se mencionó anteriormente. No obstante las técnicas denominadas de macroelementos [14], [21] permiten garantizar la condición *inf-sup* sobre subespacios  $\tilde{\mathbf{H}}_h \subset \mathbf{H}_h$  y  $\tilde{Q}_h \subset Q_h$ , definidos a partir de redes más gruesas, donde cada elemento está formado por la unión de un número fijo de elementos de la red original. Con el objeto de definir dichos espacios, se introduce la siguiente notación: Sea  $q_0 \in Q_h$ , la función que toma los valores 1 y -1 alternadamente sobre los elementos de  $\Upsilon_h$ . Sea  $\hat{Q}_h$  el espacio ortogonal a  $q_0$ , es decir

$$\hat{Q}_h = \{q_h \in Q_h : (q_h, q_0) = 0\}$$

Dada una red perteneciente a una familia de redes  $\Upsilon_h$  formada por elementos rectangulares, definiremos una nueva red de macroelementos. Por simplicidad se suponen solo elementos cuadrangulares. Sea por lo tanto una red de  $N \times N$  elementos cuyos nodos se numeran con índices  $I, J$ ,  $1 \leq I, J \leq N$ . Siguiendo la notación de [21] llamamos  $\Omega_{I,J}$  al macroelemento formado por los cuatro cuadrados con vértice común I,J. Sobre cada macroelemento se definen cuatro funciones  $(\nu_k)_{I,J}$ ,  $1 \leq k \leq 4$ , que toman los valores 1 y -1 sobre cada subcuadrado de  $\Omega_{I,J}$ , de acuerdo al diagrama de la Figura 2.

1	1	-1	1	1	1	-1	1
.	.	.	.	.	.	.	.
1	1	-1	1	-1	-1	1	-1
$(\nu_1)_{I,J}$		$(\nu_2)_{I,J}$		$(\nu_3)_{I,J}$		$(\nu_4)_{I,J}$	

Figure 2: bases definidas sobre los macroelementos

Finalmente se descompone  $\hat{Q}_h = A_h + \tilde{Q}_h$ , donde

$$(5.24) \quad A_h = \{q_h \in \hat{Q}_h; q_h|_{\Omega_{I,J}} = (\alpha_4 \nu_4)_{I,J}\}$$

$$(5.25) \quad \tilde{Q}_h = A_h^\perp = \{q_h \in \hat{Q}_h; q_h|_{\Omega_{I,J}} = (\alpha_1\nu_1 + \alpha_2\nu_2 + \alpha_3\nu_3)_{I,J}\}$$

A estos espacios se asocia el subespacio de  $\mathbf{H}_h$  definido por

$$(5.26) \quad \tilde{\mathbf{H}}_h = \{\boldsymbol{\eta}_h \in \mathbf{H}_h : \int_{\Omega} \text{rot} \boldsymbol{\eta}_h q_h dx dy = 0 \quad \forall q_h \in A_h\}$$

Para los espacios  $\tilde{\mathbf{H}}_h, \tilde{Q}_h$  se demuestra [21] que satisfacen la condición *inf-sup* sobre una nueva red, denominada de super-macro elementos. El super-macro elemento se define como la unión de cuatro elementos  $\Omega_{I,J}$ , de manera tal que formen una nueva partición de  $\Omega$ .

Con el objeto de definir  $\tilde{\Pi}$  se introduce la siguiente notación: Llamamos  $P : L^2 \rightarrow \tilde{Q}_h$  a la proyección ortogonal. El operador proyección satisface

$$(5.27) \quad \|q - Pq\|_0 \leq Ch \|q\|_1 \quad \forall q \in H^1(\Omega)$$

ya que  $\tilde{Q}_h$  contiene a las funciones constantes a trozos, sobre una malla más gruesa de diámetro  $2h$ .

Sea  $\|\cdot\|_{-1}$  la norma en el espacio dual de  $H^1(\Omega)$ . Teniendo en cuenta que  $(q - Pq, q_h) = 0 \quad \forall q_h \in \tilde{Q}_h$  y, llamando  $v$  al elemento en  $H_0^1(\Omega)$  tal que  $\|v\| = 1$  y  $\|q - Pq\|_{-1} = (q - Pq, v)$ , se tiene

$$(5.28) \quad \|q - Pq\|_{-1} = (q - Pq, v - Pv) \leq Ch \|q - Pq\|_0 \leq Ch \|q\|_0 \quad \forall q \in L^2(\Omega)$$

Utilizando argumentos similares a los de [6], es posible probar el siguiente lema:

**Lema 5.1 :** *Para los espacios  $\tilde{\mathbf{H}}_h$  y  $\tilde{Q}_h$  definidos anteriormente, dado  $\boldsymbol{\beta} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$ , existe  $\hat{\boldsymbol{\beta}} \in \tilde{\mathbf{H}}_h$  que cumple*

$$(5.29) \quad \int_{\Omega} \text{rot}(\boldsymbol{\beta} - \hat{\boldsymbol{\beta}}) q_h dx dy = 0 \quad \forall q_h \in \tilde{Q}_h$$

y

$$(5.30) \quad \|\boldsymbol{\beta} - \hat{\boldsymbol{\beta}}\|_1 \leq Ch \|\boldsymbol{\beta}\|_2$$

*Dem. :* Sea  $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \theta_2)$ , donde  $\theta_1 = \beta_2$  y  $\theta_2 = -\beta_1$ , de modo que  $\text{rot}(\boldsymbol{\beta}) = \text{div}(\boldsymbol{\theta})$ . Se considera el problema auxiliar

$$(5.31) \quad -\Delta \tilde{\boldsymbol{\theta}} + \nabla p = -\Delta \boldsymbol{\theta}$$

$$(5.32) \quad \text{div}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}) = \text{div}(\boldsymbol{\theta})$$

cuya única solución es  $\tilde{\boldsymbol{\theta}} = \boldsymbol{\theta}$ ,  $p = 0$ .

Consideramos la forma débil de dicho problema :

$$(5.33) \quad (\nabla \tilde{\boldsymbol{\theta}}, \nabla \boldsymbol{\eta}) + (p, \text{div} \boldsymbol{\eta}) = (\nabla \boldsymbol{\theta}, \nabla \boldsymbol{\eta}) \quad \forall \boldsymbol{\eta} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$$

$$(5.34) \quad (\operatorname{div} \tilde{\boldsymbol{\theta}}, q) = (\operatorname{div} \boldsymbol{\theta}, q) \quad \forall q \in \mathbf{L}^2(\Omega)$$

Si se aproxima numéricamente la solución de este problema, utilizando los espacios  $\tilde{\mathbf{H}}_h$ ,  $\tilde{Q}_h$  y la red de super-macro elementos, se obtienen soluciones  $\boldsymbol{\theta}_h$  y  $p_h$  que, de acuerdo a resultados conocidos para el problema de Stokes [21] verifican

$$(5.35) \quad \|\tilde{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta}_h\|_1 + \|p_h\|_0 \leq Ch \|\tilde{\boldsymbol{\theta}}\|_2 = Ch \|\boldsymbol{\beta}\|_2$$

Llamando

$$(5.36) \quad \hat{\boldsymbol{\beta}} = \begin{pmatrix} -\theta_{h,2} \\ \theta_{h,1} \end{pmatrix}$$

se verifican las relaciones (5.29) y (5.30). □

Las relaciones (5.29) y (5.30) son similares a (4.41) y (4.42) del Lema 4.2, pero solo se cumplen para los espacios  $\tilde{\mathbf{H}}_h$ ,  $\tilde{Q}_h$ . Utilizando (4.39) y (5.29) concluimos que

$$(5.37) \quad \int_{\Omega} \operatorname{rot} \Pi(\boldsymbol{\beta} - \hat{\boldsymbol{\beta}}) q_h dx dy = 0 \quad \forall q_h \in \tilde{Q}_h$$

Teniendo en cuenta que  $\hat{\boldsymbol{\beta}} \in \tilde{\mathbf{H}}_h$  y utilizando nuevamente (4.39)

$$\int_{\Omega} \operatorname{rot} \Pi \hat{\boldsymbol{\beta}} q_h dx dy = \int_{\Omega} \operatorname{rot} \hat{\boldsymbol{\beta}} q_h dx dy = 0 \quad \forall q_h \in A_h$$

es decir que  $\operatorname{rot} \Pi \hat{\boldsymbol{\beta}} \in \tilde{Q}_h$ , y por (5.37)  $\operatorname{rot} \Pi \hat{\boldsymbol{\beta}} = \operatorname{Prot} \Pi \boldsymbol{\beta}$ , o en forma equivalente

$$(5.38) \quad \operatorname{rot} \Pi \hat{\boldsymbol{\beta}} = -t^2 \operatorname{Prot} \Pi \boldsymbol{\gamma}$$

Sea  $\boldsymbol{\chi} \in \mathbf{H}_0(\operatorname{rot}, \Omega)$  tal que

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{\chi} = \operatorname{rot} \Pi \boldsymbol{\gamma} - \operatorname{Prot} \Pi \boldsymbol{\gamma}$$

Si tal  $\boldsymbol{\chi}$  existe entonces  $\operatorname{rot} \boldsymbol{\chi} \in Q_h$  y por lo tanto, según (4.39),  $\operatorname{rot} \boldsymbol{\chi} = \operatorname{rot} \Pi \boldsymbol{\chi}$ . De aquí y teniendo en cuenta (5.38), existe  $\hat{w} \in W_h$  tal que

$$(5.39) \quad \nabla \hat{w} = t^2 (\Pi \boldsymbol{\gamma} - \Pi \boldsymbol{\chi}) + \Pi \hat{\boldsymbol{\beta}}$$

Esto sugiere la forma de construcción del operador  $\tilde{\Pi}$ . Definiremos en primer lugar  $\boldsymbol{\chi}$ . Dado  $\boldsymbol{\eta} \in \mathbf{H}_0(\operatorname{rot}, \Omega)$  se define

$$\boldsymbol{\chi}(\boldsymbol{\eta}) = \operatorname{curl} \phi = (-\partial \phi / \partial x_2, \partial \phi / \partial x_1)$$

donde  $\phi$  es la solución del problema

$$-\Delta \phi = \operatorname{rot} \Pi \boldsymbol{\eta} - \operatorname{Prot} \Pi \boldsymbol{\eta} \quad \text{en } \Omega$$

con condiciones de Neumann homogéneas.

$\boldsymbol{\chi}(\boldsymbol{\eta})$  satisface

$$(5.40) \quad \text{rot}\boldsymbol{\chi}(\boldsymbol{\eta}) = \text{rot}\Pi\boldsymbol{\eta} - \text{Prot}\Pi\boldsymbol{\eta}$$

y

$$(5.41) \quad \|\boldsymbol{\chi}(\boldsymbol{\eta})\|_s \leq C\|\text{rot}\Pi\boldsymbol{\eta} - \text{Prot}\Pi\boldsymbol{\eta}\|_{s-1} \quad s = 0, 1$$

Entonces se define

$$(5.42) \quad \tilde{\Pi}\boldsymbol{\eta} = \Pi(\boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\chi}(\boldsymbol{\eta}))$$

Tomando  $\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\gamma}$  se verifica la condición (4.30) del Teorema 4.4. Resta verificar (4.31). Por la definición de  $\tilde{\Pi}$

$$(5.43) \quad \|\boldsymbol{\eta} - \tilde{\Pi}\boldsymbol{\eta}\|_0 \leq \|\boldsymbol{\eta} - \Pi\boldsymbol{\eta}\|_0 + \|\Pi\boldsymbol{\chi}(\boldsymbol{\eta})\|_0$$

El primer término se acota de acuerdo a (4.18), mientras que para el segundo se tiene

$$\|\Pi\boldsymbol{\chi}(\boldsymbol{\eta})\|_0 \leq Ch\|\boldsymbol{\chi}(\boldsymbol{\eta})\|_1 + \|\boldsymbol{\chi}(\boldsymbol{\eta})\|_0 \leq Ch\|\text{rot}\Pi\boldsymbol{\eta}\|_0 + C\|\text{rot}\Pi\boldsymbol{\eta} - \text{Prot}\Pi\boldsymbol{\eta}\|_{-1}$$

donde se ha utilizado (5.41). Finalmente la última expresión se puede acotar utilizando (5.28) y se tiene

$$\|\Pi\boldsymbol{\chi}(\boldsymbol{\eta})\|_0 \leq Ch\|\text{rot}\Pi\boldsymbol{\eta}\|_0 \leq Ch\|\text{rot}\boldsymbol{\eta}\|_0 \leq Ch\|\boldsymbol{\eta}\|_1$$

Aplicando el Teorema 4.4, se obtiene la siguiente estimación del error :

$$(5.44) \quad \|\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\beta}_h\|_1 + t\|\boldsymbol{\gamma} - \boldsymbol{\gamma}_h\|_0 + \|w - w_h\|_1 \leq Ch[\|\boldsymbol{\beta}\|_2 + t\|\boldsymbol{\gamma}\|_1 + \|\boldsymbol{\gamma}\|_0]$$

que como se mencionó anteriormente, resulta una estimación óptima ya que se considera una región rectangular.

## 5.4 El elemento no conforme de Arnold y Falk

En esta sección se extiende el análisis del Inciso 4.1 al método de Arnold-Falk introducido en [2]. En este método el desplazamiento  $w$  se aproxima mediante elementos no conformes, es decir que el espacio discreto  $W_h \not\subset H_0^1(\Omega)$ .

Sea  $\Upsilon_h$  una partición de  $\Omega$  en triángulos. Se define

$$(5.45) \quad \boldsymbol{\Gamma}_h = \{\boldsymbol{\eta}_h \in \mathbf{L}^2(\Omega) : \boldsymbol{\eta}_h|_T \in \mathcal{P}_0, \forall T \in \Upsilon_h\}$$

$$(5.46) \quad W_h = \{v_h \in L_2(\Omega) : v_h|_T \in \mathcal{P}_1, \forall T \in \Upsilon_h, v_h \text{ es continua en los puntos medios de los bordes interelemento y se anula en los puntos medios de los bordes de la región}\}$$

y

$$(5.47) \quad \mathbf{H}_h = \{\boldsymbol{\eta}_h \in \mathbf{H}_0^1(\Omega) : \boldsymbol{\eta}_h|_T \in \mathcal{P}_1 \oplus \mathcal{P}_0 b_T, \forall T \in \Upsilon_h\},$$

donde  $b_T$  es una función burbuja de grado 3, es decir  $b_T \in \mathcal{P}_3$  y  $b_T = 0$  sobre  $\partial T$ .

Dada  $v_h \in W_h$ , sea  $\nabla_h v_h \in \mathbf{L}^2(\Omega)$  la función vectorial constante a trozos cuya restricción a cada triángulo está dada por  $\nabla_h v_h|_T$ .

Sea  $P : \mathbf{L}^2(\Omega) \longrightarrow \mathbf{\Gamma}_h$  la proyección  $\mathbf{L}^2$ . El problema discreto para el método es:

Hallar  $(\boldsymbol{\beta}_h, w_h, \boldsymbol{\gamma}_h) \in \mathbf{H}_h \times W_h \times \mathbf{\Gamma}_h$  tal que

$$(5.48) \quad a(\boldsymbol{\beta}_h, \boldsymbol{\eta}_h) + (\boldsymbol{\gamma}_h, \nabla_h \zeta_h - P\boldsymbol{\eta}_h) = (f, \zeta_h) \quad \forall \boldsymbol{\eta}_h \in \mathbf{H}_h, \quad \zeta_h \in W_h$$

y

$$(5.49) \quad \boldsymbol{\gamma}_h = t^{-2}(\nabla_h w_h - P\boldsymbol{\beta}_h)$$

Debido a que  $W_h \not\subset H_0^1(\Omega)$ , la ecuación de error debe incluir términos de consistencia que surgen de reemplazar  $\nabla_h \zeta_h$  en la ecuación (3.16).

En este caso la ecuación de error (4.23) se reemplaza por

$$(5.50) \quad \begin{aligned} & a(\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\beta}_h, \boldsymbol{\eta}_h) + (\boldsymbol{\gamma} - \boldsymbol{\gamma}_h, \nabla \zeta_h - P(\boldsymbol{\eta}_h)) = \\ & = (\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\eta}_h - P(\boldsymbol{\eta}_h)) + \sum_{T \in \Upsilon_h} \int_{\partial T} \zeta_h \boldsymbol{\gamma} \mathbf{n} ds \quad \forall \boldsymbol{\eta}_h \in \mathbf{H}_h, \quad \zeta_h \in W_h \end{aligned}$$

donde  $\mathbf{n}$  es el vector unitario normal al borde de  $T$ .

Procediendo como en el Lema 4.1, se obtiene

$$(5.51) \quad \begin{aligned} & \alpha \|\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta}_h\|_1^2 + t^2 \|\hat{\boldsymbol{\gamma}} - \boldsymbol{\gamma}_h\|_0^2 \leq C \{ \|\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta}\|_1 \|\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta}_h\|_1 + \\ & + t \|\hat{\boldsymbol{\gamma}} - \boldsymbol{\gamma}\|_0 \|\hat{\boldsymbol{\gamma}} - \boldsymbol{\gamma}_h\|_0 + \|\boldsymbol{\gamma}\|_0 h \|\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta}_h\|_1 \} + \left| \sum_{T \in \Upsilon_h} \int_{\partial T} v_h \boldsymbol{\gamma} \mathbf{n} ds \right| \end{aligned}$$

para  $\hat{\boldsymbol{\beta}} \in \mathbf{H}_h$ ,  $\hat{w} \in W_h$ ,  $\hat{\boldsymbol{\gamma}} = t^{-2}(\nabla_h \hat{w} - P\hat{\boldsymbol{\beta}}) \in \mathbf{\Gamma}_h$ , y  $v_h = \hat{w} - w_h \in W_h$ . De aquí

$$(5.52) \quad \begin{aligned} & \|\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta}_h\|_1^2 + t^2 \|\hat{\boldsymbol{\gamma}} - \boldsymbol{\gamma}_h\|_0^2 \leq C \{ \|\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta}\|_1^2 + t^2 \|\hat{\boldsymbol{\gamma}} - \boldsymbol{\gamma}\|_0^2 \\ & + \|\boldsymbol{\gamma}\|_0^2 h^2 + \left| \sum_{T \in \Upsilon_h} \int_{\partial T} v_h \boldsymbol{\gamma} \mathbf{n} ds \right| \} \end{aligned}$$

donde se ha utilizado la relación  $ab \leq \frac{1}{2s}a^2 + \frac{s}{2}b^2$ ,  $\forall s > 0$ . Para estimar el último término en (5.52) se utilizará el siguiente lema debido a Crouzeix y Raviart [17], que es central en el análisis de métodos no conformes.

**Lema 5.2 :** *Sea  $\boldsymbol{\phi} \in \mathbf{H}^1(\Omega)$  y  $\zeta_h \in W_h$ , entonces*

$$(5.53) \quad \left| \sum_{T \in \Upsilon_h} \int_{\partial T} \zeta_h \boldsymbol{\phi} \cdot \mathbf{n} ds \right| \leq Ch \|\boldsymbol{\phi}\|_1 \|\nabla_h \zeta_h\|_0$$

□

Si se aplica directamente este lema, las estimaciones dependerán de  $\|\boldsymbol{\gamma}\|_1$ , que no está acotada uniformemente en  $t$ . Por ese motivo será necesario efectuar una acotación más precisa de los términos de consistencia. Para ello recurrimos a la descomposición de Helmholtz mencionada en el Inciso 3.2 y expresamos

$$\boldsymbol{\gamma} = \nabla r + \mathbf{curl} p$$

donde  $r \in H_0^1(\Omega)$  y  $p \in H^1(\Omega)$  con  $\int_{\Omega} p dx dy = 0$ .

**Lema 5.3 :** Sea  $\hat{\boldsymbol{\beta}} \in \mathbf{H}_h$ ,  $\hat{w} \in W_h$  y  $\hat{\boldsymbol{\gamma}} = t^{-2}(\nabla_h \hat{w} - P\hat{\boldsymbol{\beta}}) \in \boldsymbol{\Gamma}_h$ , entonces

$$(5.54) \quad \begin{aligned} & \|\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta}_h\|_1 + t\|\hat{\boldsymbol{\gamma}} - \boldsymbol{\gamma}_h\|_0 \leq \\ & \leq C[\|\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta}\|_1 + t\|\hat{\boldsymbol{\gamma}} - \boldsymbol{\gamma}\|_0 + h\|\boldsymbol{\gamma}\|_0 + h(\|r\|_2 + \|p\|_1 + t\|p\|_2)] \end{aligned}$$

*Dem.* : Aplicando el Lema 5.2

$$(5.55) \quad \left| \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_{\partial T} v_h \nabla r \cdot \mathbf{n} ds \right| \leq Ch \|r\|_2 \|\nabla_h v_h\|_0$$

Tomando  $v_h = \hat{w} - w_h$  y teniendo en cuenta que

$$(5.56) \quad \nabla_h(\hat{w} - w_h) = t^2(\hat{\boldsymbol{\gamma}} - \boldsymbol{\gamma}_h) + P(\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta}_h),$$

se obtiene

$$(5.57) \quad \left| \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_{\partial T} v_h \nabla r \cdot \mathbf{n} ds \right| \leq Ch \|r\|_2 (t^2 \|\hat{\boldsymbol{\gamma}} - \boldsymbol{\gamma}_h\|_0 + \|\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta}_h\|_0).$$

Por otro lado,

$$(5.58) \quad \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_{\partial T} v_h \mathbf{curl} p \cdot \mathbf{n} ds = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \mathbf{curl} p \cdot \nabla_h v_h dx dy$$

Sea  $\hat{p} \in H^1(\Omega)$  la función lineal a trozos y continua, definida a partir de  $p$  mediante el proceso de interpolación y regularización de Clement. En ese caso  $\hat{p}$  aproxima a  $p$  cumpliendo las siguientes propiedades:

$$(5.59) \quad \|p - \hat{p}\|_1 \leq Ch \|p\|_2$$

$$(5.60) \quad \|p - \hat{p}\|_0 \leq Ch \|p\|_1$$

y

$$(5.61) \quad \|\hat{p}\|_1 \leq \|p - \hat{p}\|_1 + \|p\|_1 \leq C \|p\|_1$$

Se cumple además

$$(5.62) \quad \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \mathbf{curl} \hat{p} \cdot \nabla_h v_h dx dy = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_{\partial T} v_h \mathbf{curl} \hat{p} \cdot \mathbf{n} ds = 0$$

ya que  $\mathbf{curl}\hat{p}$  es una función vectorial constante y la última integral queda definida por el valor del integrando en el punto medio, que es continuo en dicho punto y cero en los puntos medios de los bordes de la región de integración. Teniendo en cuenta (5.62) y (5.58) se obtiene

$$(5.63) \quad \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_{\partial T} v_h \mathbf{curl} p \cdot \mathbf{n} ds = (\mathbf{curl}(p - \hat{p}), t^2(\hat{\gamma} - \gamma_h) + P(\hat{\beta} - \beta_h))$$

Utilizando (5.59),

$$|(\mathbf{curl}(p - \hat{p}), t^2(\hat{\gamma} - \gamma_h))| \leq Ch \|p\|_2 t^2 \|\hat{\gamma} - \gamma_h\|_0,$$

mientras que para la estimación del otro término en (5.63) sumamos y restamos  $(\mathbf{curl}(p - \hat{p}), (\hat{\beta} - \beta_h))$ . Por (5.61) y las propiedades de aproximación de la proyección  $\mathbf{L}^2$ ,

$$|(\mathbf{curl}(p - \hat{p}), P(\hat{\beta} - \beta_h) - (\hat{\beta} - \beta_h))| \leq C \|p\|_1 h \|\hat{\beta} - \beta_h\|_1,$$

y utilizando (5.60) obtenemos

$$|(\mathbf{curl}(p - \hat{p}), \hat{\beta} - \beta_h)| = |(p - \hat{p}, \text{rot}(\hat{\beta} - \beta_h))| \leq Ch \|p\|_1 \|\hat{\beta} - \beta_h\|_1.$$

De acuerdo a las estimaciones anteriores se obtiene

$$(5.64) \quad \left| \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_{\partial T} v_h \mathbf{curl} p \cdot \mathbf{n} ds \right| \leq Ch \{ \|p\|_2 t^2 \|\hat{\gamma} - \gamma_h\|_0 + \|p\|_1 \|\hat{\beta} - \beta_h\|_1 \}.$$

De (5.57) y (5.64) se obtiene

$$\left| \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_{\partial T} v_h \gamma \cdot \mathbf{n} ds \right| \leq Ch (\|r\|_2 + t \|p\|_2 + \|p\|_1) (t \|\hat{\gamma} - \gamma_h\|_0 + \|\hat{\beta} - \beta_h\|_1),$$

que junto con (5.52) permite obtener el resultado (5.54) del lema. □

El resto del análisis se efectúa como en el caso conforme. Es decir que es suficiente hallar  $\hat{\beta} \in \mathbf{H}_h$  que satisfaga

$$(5.65) \quad \|\beta - \hat{\beta}\|_1 \leq Ch \|\beta\|_2$$

y  $\hat{w} \in W_h$  tal que  $\hat{\gamma} = P\gamma$ , es decir

$$(5.66) \quad P(\nabla w) + P(\hat{\beta} - \beta) = \nabla_h \hat{w}$$

Sea  $\mathbf{R} : \mathbf{H}_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbf{H}_h$  el operador de interpolación definido en [1] mediante las siguientes condiciones :

$$(5.67) \quad \mathbf{R}(\boldsymbol{\eta})|_T(P_i) = \mathbf{C}_h(\boldsymbol{\eta}(P_i)) \quad \forall P_i \text{ vértice de } T. \quad i = 1, 2, 3$$



$$(5.68) \quad \int_T \mathbf{R}\boldsymbol{\eta} dx dy = \int_T \boldsymbol{\eta} dx dy$$

donde como antes  $\mathbf{C}_h$ , es el operador de regularización de Clement.

Sea  $\hat{\boldsymbol{\beta}} = \mathbf{R}(\boldsymbol{\beta})$ . Entonces se cumple (5.65) y teniendo en cuenta (5.68)  $P(\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta}) = \mathbf{0}$ . En este caso se verifica (5.66), si existe  $\hat{w} \in W_h$  tal que  $P(\nabla w) = \nabla_h \hat{w}$ , es decir si

$$(5.69) \quad \int_T (\nabla w - \nabla_h \hat{w}) \cdot \mathbf{q}_h dx dy = 0 \quad \forall \mathbf{q}_h \in \mathcal{P}_0, T \in \Upsilon_h$$

La expresión anterior es equivalente a

$$(5.70) \quad \int_{\partial T} (w - \hat{w}) \mathbf{q}_h \cdot \mathbf{n} ds = 0.$$

Sea  $l$  un lado de  $T$  y sea  $M_l$  el punto medio de  $l$ . Tomamos  $\hat{w} \in W_h$  tal que

$$\hat{w}(M_l) = \frac{1}{|l|} \int_l w ds$$

donde  $|l|$  es la longitud de  $l$ . Entonces se cumple (5.70) y en consecuencia (5.66). Aplicando el Lema 5.3, se obtiene la siguiente estimación del error

$$(5.71) \quad \|\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\beta}_h\|_1 + t\|\boldsymbol{\gamma} - \boldsymbol{\gamma}_h\|_0 \leq Ch\{\|\boldsymbol{\beta}\|_2 + \|r\|_2 + \|p\|_1 + t\|p\|_2\}$$

y en consecuencia

$$(5.72) \quad \|\nabla w - \nabla_h w_h\|_0 \leq Ch\{\|\boldsymbol{\beta}\|_2 + \|r\|_2 + \|p\|_1 + t\|p\|_2\}$$

Como se menciona en el Inciso 3.2, si  $\Omega$  es un polígono convexo,

$$\|\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\beta}_h\|_1 + t\|\boldsymbol{\gamma} - \boldsymbol{\gamma}_h\|_0 + \|\nabla w - \nabla_h w_h\|_0 \leq Ch\|g\|_0.$$

## 6 Elemento de Zienkiewicz, Taylor, Papadopoulos y Oñate

Este método, que utiliza elementos triangulares, fue introducido en [26]. También fue testeado numéricamente en [22], pero no se conocían resultados teóricos referidos a la convergencia del mismo.

La estructura de este método, no se corresponde con la de los métodos analizados previamente, por lo cual la demostración de convergencia no se efectúa en forma directa mediante la aplicación del Teorema 4.4, sino a través de la comparación con el método definido en la Sección 5.1, ya que ambos están fuertemente relacionados. Se mostrará que la diferencia entre las soluciones de ambos métodos es de orden  $h^2$  para las rotaciones, mientras que para el desplazamiento transversal es de orden  $h$ . Dado que el método introducido en la Sección 5.1 converge con orden  $h$  uniformemente con respecto al espesor  $t$  de la placa, el mismo resultado se obtendrá para el elemento de Zienkiewicz, Taylor, Papadopoulos y Oñate.

Para facilitar el análisis llamaremos método I al definido en 5.1 y II al que vamos a analizar.

## 6.1 Definición del método

El método II utiliza los mismos espacios que el método I, para las rotaciones y la deformación de corte, es decir

$$\mathbf{H}_h = \{\boldsymbol{\eta}_h \in \mathbf{H}_0^1(\Omega) : \boldsymbol{\eta}_h|_T \in \mathcal{P}_1 \oplus \langle \phi_1, \phi_2, \phi_3 \rangle, \forall T \in \mathcal{T}_h\}$$

con  $\phi_1, \phi_2, \phi_3$  definidas en (5.5), y

$$(6.1) \quad \boldsymbol{\Gamma}_h = \{\boldsymbol{\eta}_h \in \mathbf{H}_0(\text{rot}, \Omega) : \boldsymbol{\eta}_h|_T \in \mathcal{P}_0 \oplus \mathcal{P}_0 \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} \quad \forall T \in \mathcal{T}_h\}$$

El desplazamiento transversal en cambio, se aproxima en el método II, utilizando un espacio de elementos finitos que denotamos con  $\overline{W}_h$  y que verifica  $\overline{W}_h \subset H_0^1(\Omega)$ . Con el objeto de definir este espacio, introducimos las siguientes funciones.

Para cada lado  $\partial T_i$  de un elemento  $T$ , sean  $j$  y  $k$  los otros lados de  $T$ .

Definimos

$$\psi_1^i = \lambda_j^2 \lambda_k \quad \text{y}, \quad \psi_2^i = \lambda_j \lambda_k^2$$

$$(6.2) \quad \overline{W}_h = \{\zeta_h \in H_0^1(\Omega) : \zeta_h|_T \in \mathcal{P}_1 \oplus \langle \psi_1^i, \psi_2^i \rangle_{1 \leq i \leq 3} \quad \forall T \in \mathcal{T}_h\}$$

En este caso no se cumple la inclusión (4.19), una de las hipótesis del Teorema 4.4 .

La idea principal del método II es restringir las funciones  $(\boldsymbol{\eta}_h, \overline{\zeta}_h) \in \mathbf{H}_h \times \overline{W}_h$  al subespacio en el que  $(\nabla \overline{\zeta}_h - \boldsymbol{\eta}_h)$  posee componente tangencial constante sobre los lados de la triangulación. De ésta condición se deduce que si

$$(6.3) \quad \overline{\zeta}_h|_T = p_1 + \sum_{i=1}^3 (\alpha_i \psi_1^i + \beta_i \psi_2^i)$$

donde  $p_1 \in \mathcal{P}_1$  entonces,  $\alpha_i$  y  $\beta_i$  deben estar relacionados con  $\boldsymbol{\eta}_h$ . Más precisamente, como  $\nabla p_1$  es constante sobre cada  $T$ ,  $(\nabla \overline{\zeta}_h - \boldsymbol{\eta}_h)$  tendrá componente tangencial constante sobre el lado  $\partial T_k$ , si y solo si

$$(6.4) \quad \alpha_k \frac{\partial \psi_1^k}{\partial \boldsymbol{\tau}_k} + \beta_k \frac{\partial \psi_2^k}{\partial \boldsymbol{\tau}_k} - \boldsymbol{\eta}_h \cdot \boldsymbol{\tau}_k = c_k$$

donde  $c_k$  es una constante. Teniendo en cuenta que  $\psi_1^k$  y  $\psi_2^k$  se anulan en los vértices de  $\partial T_k$  resulta

$$\int_{\partial T_k} \frac{\partial \psi_1^k}{\partial \boldsymbol{\tau}_k} ds = \int_{\partial T_k} \frac{\partial \psi_2^k}{\partial \boldsymbol{\tau}_k} ds = 0$$

Integrando la ecuación (6.4) sobre  $\partial T_k$  se obtiene,

$$c_k = -\frac{1}{|\partial T_k|} \int_{\partial T_k} \boldsymbol{\eta}_h \cdot \boldsymbol{\tau}_k ds$$

Por lo tanto, con la notación

$$\overline{\boldsymbol{\eta}_h \cdot \boldsymbol{\tau}_k} = \frac{1}{|\partial T_k|} \int_{\partial T_k} \boldsymbol{\eta}_h \cdot \boldsymbol{\tau}_k ds$$

la condición de componente tangencial constante es equivalente a

$$(6.5) \quad \alpha_k \frac{\partial \psi_1^k}{\partial \boldsymbol{\tau}_k} + \beta_k \frac{\partial \psi_2^k}{\partial \boldsymbol{\tau}_k} = \boldsymbol{\eta}_h \cdot \boldsymbol{\tau}_k - \overline{\boldsymbol{\eta}_h \cdot \boldsymbol{\tau}_k}$$

En particular, dado  $(\boldsymbol{\eta}_h, \zeta_h) \in \mathbf{H}_h \times W_h$ , donde

$$W_h = \{v_h \in H_0^1(\Omega) : v_h|_T \in \mathcal{P}_1 \quad \forall T \in \mathcal{T}_h\}.$$

es el espacio utilizado en el Ejemplo 5.1, definimos  $\bar{\zeta}_h|_T$  como en (6.3) con  $p_1 = \zeta_h|_T$  y  $\alpha_k, \beta_k$  según (6.5). Entonces  $(\nabla \bar{\zeta}_h - \boldsymbol{\eta}_h)$  posee componente tangencial constante sobre cada lado de la triangulación. Notemos que existen  $\alpha_k$  y  $\beta_k$  que cumplen (6.5). En efecto,  $\frac{\partial \psi_1^k}{\partial \boldsymbol{\tau}_k}$  y  $\frac{\partial \psi_2^k}{\partial \boldsymbol{\tau}_k}$  son funciones cuadráticas cuyo valor medio se anula sobre  $\partial T_k$ , y dado que son linealmente independientes, cualquier función con esas propiedades (tal como  $\boldsymbol{\eta}_h \cdot \boldsymbol{\tau}_k - \overline{\boldsymbol{\eta}_h \cdot \boldsymbol{\tau}_k}$ ) puede ser unívocamente expresada como combinación lineal de ellas.

Es posible obtener expresiones explícitas para  $\alpha_k$  y  $\beta_k$  a partir de (6.5) de la siguiente manera : Sean  $P$  y  $Q$  los puntos pertenecientes a  $\partial T_k$  que lo dividen en tres partes iguales. Entonces un cálculo elemental muestra que  $\frac{\partial \psi_1^k}{\partial \boldsymbol{\tau}_k}$  se anula en uno de ellos (p.ej.  $P$ ) mientras que  $\frac{\partial \psi_2^k}{\partial \boldsymbol{\tau}_k}$  se anula en el otro,  $\frac{\partial \psi_1^k}{\partial \boldsymbol{\tau}_k}(Q) = -\frac{1}{3|\partial T_k|}$  y,  $\frac{\partial \psi_2^k}{\partial \boldsymbol{\tau}_k}(P) = \frac{1}{3|\partial T_k|}$ , donde se ha elegido una dirección fija para  $\boldsymbol{\tau}_k$ . Por ello, evaluando la ecuación (6.5) en  $P$  y  $Q$  se obtiene,

$$(6.6) \quad \alpha_k = -3|\partial T_k| \{(\boldsymbol{\eta}_h \cdot \boldsymbol{\tau}_k)(Q) - \overline{\boldsymbol{\eta}_h \cdot \boldsymbol{\tau}_k}\}$$

y,

$$(6.7) \quad \beta_k = 3|\partial T_k| \{(\boldsymbol{\eta}_h \cdot \boldsymbol{\tau}_k)(P) - \overline{\boldsymbol{\eta}_h \cdot \boldsymbol{\tau}_k}\}$$

Para definir una función  $\mathbf{q}$  que posea componente tangencial constante, y que interpole a la deformación de corte, se define en [22], el operador  $\Pi_2 \mathbf{q}|_T = \mathbf{q}_T$  donde  $\mathbf{q}_T$  es lineal sobre  $T$  y, llamando  $\{V_i\}_{1 \leq i \leq 3}$  a los vértices of  $T$ ,  $\mathbf{q}_T$  satisface,

$$(6.8) \quad \frac{1}{2}(\mathbf{q}_T(V_i) + \mathbf{q}_T(V_j)) \cdot \boldsymbol{\tau}_k = \mathbf{q} \cdot \boldsymbol{\tau}_k$$

$$(6.9) \quad \frac{1}{2}(\mathbf{q}_T(V_i) - \mathbf{q}_T(V_j)) \cdot \boldsymbol{\tau}_k = 0$$

para  $k = 1, 2, 3$  donde,  $i \neq j$  y,  $\partial T_k$  es el lado con vértices  $V_i$  y  $V_j$ .

En particular, se deduce de (6.9) que las componentes tangenciales de  $\mathbf{q}_T$  son constantes y, es fácil ver que  $\Pi_2 \mathbf{q} \in \boldsymbol{\Gamma}_h$ . En efecto, el espacio  $\boldsymbol{\Gamma}_h$  puede ser caracterizado, como el espacio de funciones vectoriales que poseen componente tangencial constante sobre cada lado, y continua en los bordes interelemento.

A fin de dar una definición más precisa del método II, introducimos la siguiente notación, que será también utilizada para el análisis del error en la próxima sección. Dada una función  $\boldsymbol{\eta}_h \in \mathbf{H}_h$  definimos,

$$S_T(\boldsymbol{\eta}_h) = \sum_{k=1}^3 (\alpha_k \psi_1^k + \beta_k \psi_2^k)$$

donde  $\alpha_k$  y  $\beta_k$  están definidas en (6.6) y (6.7) y,

$$S(\boldsymbol{\eta}_h)|_T = S_T(\boldsymbol{\eta}_h)$$

De acuerdo a ello, para  $(\boldsymbol{\eta}_h, \zeta_h) \in \mathbf{H}_h \times W_h$ ,  $(\nabla \zeta_h + \nabla S(\boldsymbol{\eta}_h) - \boldsymbol{\eta}_h)$  posee componente tangencial constante sobre cada lado.

La solución aproximada

$$(\tilde{\boldsymbol{\beta}}_h, \bar{w}_h, \tilde{\boldsymbol{\gamma}}_h) \in \mathbf{H}_h \times \bar{W}_h \times \Gamma_h$$

se define mediante,

$$(6.10) \quad \bar{w}_h = \tilde{w}_h + S(\tilde{\boldsymbol{\beta}}_h), \quad \tilde{w}_h \in W_h$$

$$(6.11) \quad a(\tilde{\boldsymbol{\beta}}_h, \boldsymbol{\eta}_h) + (\tilde{\boldsymbol{\gamma}}_h, \Pi_2(\nabla \zeta_h + \nabla S(\boldsymbol{\eta}_h) - \boldsymbol{\eta}_h)) = (f, \zeta_h + S(\boldsymbol{\eta}_h)) \\ \forall \boldsymbol{\eta}_h \in \mathbf{H}_h, \forall \zeta_h \in W_h$$

$$(6.12) \quad \tilde{\boldsymbol{\gamma}}_h = t^{-2} \Pi_2(\nabla \tilde{w}_h + \nabla S(\tilde{\boldsymbol{\beta}}_h) - \tilde{\boldsymbol{\beta}}_h)$$

## 6.2 Relación con el método 5.1 y análisis del error.

En esta sección, analizamos la relación entre los dos métodos y obtenemos estimaciones para la diferencia entre las dos soluciones aproximadas. Como consecuencia de ello, obtenemos estimaciones del error óptimas para el método II, con constantes independientes del espesor de la placa.

Comencemos por señalar que los espacios de elementos finitos para las rotaciones y las deformaciones de corte, son los mismos para ambos métodos. Por lo tanto los métodos difieren en la aproximación del desplazamiento transversal, y en principio, en la interpolación usada para la deformación de corte. No obstante mostraremos que ambas interpolaciones son esencialmente las mismas.

Llamaremos  $\Pi_1$  al operador de interpolación en  $\Gamma_h$  para el método I, es decir

$$\Pi_1 : \mathbf{H}_0(\text{rot}, \Omega) \longrightarrow \Gamma_h$$

es tal que

$$\mathbf{\Pi}_1 \mathbf{q}|_T = \mathbf{q}_I$$

donde

$$(6.13) \quad \int_{\partial T_i} \mathbf{q}_I \boldsymbol{\tau}_i ds = \int_{\partial T_i} \mathbf{q} \boldsymbol{\tau}_i ds \quad i = 1, 2, 3$$

La relación entre los operadores  $\Pi_1$  y  $\Pi_2$  se establece en el siguiente lema.

**Lema 6.1 :** *Para cada  $\boldsymbol{\eta}_h \in \mathbf{H}_h$  y  $\zeta_h \in W_h$  se cumplen las siguientes ecuaciones,*

$$\Pi_1(\nabla\zeta_h - \boldsymbol{\eta}_h) = \Pi_1(\nabla\zeta_h + \nabla S(\boldsymbol{\eta}_h) - \boldsymbol{\eta}_h) = \Pi_2(\nabla\zeta_h + \nabla S(\boldsymbol{\eta}_h) - \boldsymbol{\eta}_h)$$

*Dem. :* La primer ecuación es equivalente a la condición

$$(6.14) \quad \Pi_1(\nabla S(\boldsymbol{\eta}_h)) = 0$$

y esto se deduce de la definición de  $\Pi_1$  y el hecho de que,

$$(6.15) \quad \int_{\partial T_k} \nabla S_T \cdot \boldsymbol{\tau}_k ds = \int_{\partial T_k} \frac{\partial S_T}{\partial \boldsymbol{\tau}_k} ds = 0$$

debido a que  $S_T(\boldsymbol{\eta}_h)$  se anula en los vértices de  $T$ .

La segunda ecuación se obtiene en forma inmediata, ya que para  $\mathbf{q} \cdot \boldsymbol{\tau}_k$  constante, (6.13) y (6.8) coinciden. □

Recordemos que, de acuerdo a la inclusión  $\nabla W_h \subset \Gamma_h$ , las ecuaciones que definen  $(\boldsymbol{\beta}_h, w_h, \boldsymbol{\gamma}_h) \in \mathbf{H}_h \times W_h \times \Gamma_h$ , para el método I, se escriben como

$$(6.16) \quad a(\boldsymbol{\beta}_h, \boldsymbol{\eta}_h) + (\boldsymbol{\gamma}_h, \nabla\zeta_h - \Pi_1(\boldsymbol{\eta}_h)) = (g, \zeta_h) \quad \forall \boldsymbol{\eta}_h \in \mathbf{H}_h, \forall \zeta_h \in W_h$$

$$(6.17) \quad \boldsymbol{\gamma}_h = t^{-2}(\nabla w_h - \Pi_1(\boldsymbol{\beta}_h))$$

mientras que de acuerdo al Lema 6.1, las ecuaciones (6.11) y (6.12), correspondientes al método II para determinar  $(\tilde{\boldsymbol{\beta}}_h, \tilde{w}_h, \tilde{\boldsymbol{\gamma}}_h) \in \mathbf{H}_h \times W_h \times \Gamma_h$  pueden ser reescritas en la siguiente forma

$$(6.18) \quad a(\tilde{\boldsymbol{\beta}}_h, \boldsymbol{\eta}_h) + (\tilde{\boldsymbol{\gamma}}_h, \nabla\zeta_h - \Pi_1(\boldsymbol{\eta}_h)) = (g, \zeta_h + S(\boldsymbol{\eta}_h)) \quad \forall \boldsymbol{\eta}_h \in \mathbf{H}_h, \forall \zeta_h \in W_h$$

$$(6.19) \quad \tilde{\boldsymbol{\gamma}}_h = t^{-2}(\nabla \tilde{w}_h - \Pi_1(\tilde{\boldsymbol{\beta}}_h))$$

En particular, restando (6.16) de (6.18) obtenemos las siguientes ecuaciones para la diferencia de las soluciones,

$$(6.20) \quad a(\tilde{\boldsymbol{\beta}}_h - \boldsymbol{\beta}_h, \boldsymbol{\eta}_h) + (\tilde{\boldsymbol{\gamma}}_h - \boldsymbol{\gamma}_h, \nabla\zeta_h - \Pi_1(\boldsymbol{\eta}_h)) = (f, S(\boldsymbol{\eta}_h)) \\ \forall \boldsymbol{\eta}_h \in \mathbf{H}_h, \forall \zeta_h \in W_h$$

que nos permitirán estimar las mencionadas diferencias. Dicha estimación se efectúa en el siguiente teorema.

**Teorema 6.1 :** *Sean  $(\boldsymbol{\beta}_h, w_h, \boldsymbol{\gamma}_h)$  y  $(\tilde{\boldsymbol{\beta}}_h, \tilde{w}_h, \tilde{\boldsymbol{\gamma}}_h)$  las soluciones definidas por (6.16), (6.17) y (6.18), (6.19) respectivamente. Entonces,*

$$(6.21) \quad \|\tilde{\boldsymbol{\beta}}_h - \boldsymbol{\beta}_h\|_1 + t\|\tilde{\boldsymbol{\gamma}}_h - \boldsymbol{\gamma}_h\|_0 \leq Ch^2\|g\|_0$$

y

$$(6.22) \quad \|\tilde{w}_h - w_h\|_1 \leq Ch^2\|g\|_0$$

*Dem.* : Tomando  $\boldsymbol{\eta}_h = \tilde{\boldsymbol{\beta}}_h - \boldsymbol{\beta}_h$  y  $\zeta_h = \tilde{w}_h - w_h$  en (6.20) y usando coercividad de  $a(\cdot, \cdot)$ , (6.17) y, (6.19) se obtiene

$$(6.23) \quad \|\tilde{\boldsymbol{\beta}}_h - \boldsymbol{\beta}_h\|_1^2 + t^2\|\tilde{\boldsymbol{\gamma}}_h - \boldsymbol{\gamma}_h\|_0^2 \leq C(g, S(\tilde{\boldsymbol{\beta}}_h - \boldsymbol{\beta}_h))$$

Un argumento standard de escala muestra que

$$\|\psi_1^k\|_{0,T} \leq Ch \quad \text{y} \quad \|\psi_2^k\|_{0,T} \leq Ch.$$

Por ello, de la definición de  $S(\boldsymbol{\eta}_h)$  tenemos,

$$(6.24) \quad \|S(\boldsymbol{\eta}_h)\|_{0,T} \leq Ch \sum_{k=1}^3 (|\alpha_k| + |\beta_k|)$$

Con el objeto de acotar  $|\alpha_k| + |\beta_k|$  utilizamos las definiciones (6.6) y (6.7) y obtenemos,

$$(6.25) \quad |\alpha_k| + |\beta_k| \leq Ch_T \|\boldsymbol{\eta}_h \cdot \boldsymbol{\tau}_k - \overline{\boldsymbol{\eta}_h \cdot \boldsymbol{\tau}_k}\|_{L^\infty(\partial T_k)} \leq \\ \leq Ch_T^2 \|\nabla \boldsymbol{\eta}_h\|_{L^\infty(T)} \leq Ch_T \|\nabla \boldsymbol{\eta}_h\|_{0,T}$$

con  $h_T$  el diámetro de  $T$ , donde hemos utilizado una desigualdad inversa en el último paso.

Combinando (6.24) y (6.25) se obtiene,

$$(6.26) \quad \|S(\boldsymbol{\eta}_h)\|_0 \leq Ch^2 \|\nabla \boldsymbol{\eta}_h\|_0$$

que junto con (6.23) y la desigualdad de Schwartz, prueban (6.21).

A partir de (6.17) y (6.19) se tiene,

$$\|\nabla \tilde{w}_h - \nabla w_h\|_0 \leq t^2 \|\tilde{\boldsymbol{\gamma}}_h - \boldsymbol{\gamma}_h\|_0 + \|\Pi_1(\tilde{\boldsymbol{\beta}}_h) - \Pi_1(\boldsymbol{\beta}_h)\|_0 \\ \leq t^2 \|\tilde{\boldsymbol{\gamma}}_h - \boldsymbol{\gamma}_h\|_0 + \|\tilde{\boldsymbol{\beta}}_h - \boldsymbol{\beta}_h\|_1$$

donde se ha utilizado la propiedad de interpolación de  $\Pi_1$ .

Esta estimación junto con (6.21) prueba (6.22) con lo que se concluye el teorema.  $\square$

*Observación 6.1* : Es importante notar que la estimación obtenida para el desplazamiento transversal, es válida solo para la parte lineal de la solución  $\bar{w}$ .

Podemos ahora establecer el resultado concerniente a la convergencia del método II.

**Teorema 6.2 :** Sean  $(\tilde{\beta}_h, \bar{w}_h, \tilde{\gamma}_h)$  y  $\tilde{w}_h$  las soluciones definidas por (6.10), (6.11) y (6.12). Entonces,

$$(6.27) \quad \|\beta - \tilde{\beta}_h\|_1 + t\|\gamma - \tilde{\gamma}_h\|_0 + \|w - \bar{w}_h\|_1 \leq Ch\{\|\beta\|_2 + t\|\gamma\|_1 + \|\gamma\|_0\}$$

y cuando  $\Omega$  es un polígono convexo,

$$(6.28) \quad \|\beta - \tilde{\beta}_h\|_1 + t\|\gamma - \tilde{\gamma}_h\|_0 + \|w - \bar{w}_h\|_1 \leq Ch\|g\|_0$$

También,

$$(6.29) \quad \|w - \tilde{w}_h\|_1 \leq Ch\{\|\beta\|_2 + t\|\gamma\|_1 + \|\gamma\|_0\}$$

y, cuando  $\Omega$  es un polígono convexo,

$$(6.30) \quad \|w - \tilde{w}_h\|_1 \leq Ch\|g\|_0$$

*Dem.* : A partir de (6.10) se tiene,

$$(6.31) \quad \|w - \bar{w}_h\|_1 \leq \|w - \tilde{w}_h\|_1 + \|S(\tilde{\beta}_h)\|_1$$

Para acotar  $\|S(\tilde{\beta}_h)\|_1$  procedemos como en el Teorema 6.1 para la estimación (6.26) obteniendo

$$\|S_T(\tilde{\beta}_h)\|_{1,T} \leq Ch\|\nabla\tilde{\beta}_h\|_{0,T}$$

Combinado esta desigualdad con el Teorema 6.1 y las acotaciones (4.32), (4.34) válidas para el método I, se obtiene el resultado del teorema. □

### 6.3 Resultados numéricos

En esta sección presentamos algunos experimentos numéricos, con el objeto de ilustrar los resultados teóricos y comparar ambos métodos. Consideraremos dos ejemplos, para los cuales las soluciones exactas se obtuvieron en [4], utilizando desarrollos asintóticos.

El primer ejemplo es una placa circular empotrada de radio unitario, sujeta a una carga transversal dada por  $g = \cos(\phi)$  donde  $\phi$  es el ángulo en coordenadas polares. Debido a la simetría del problema, resulta suficiente discretizar un cuadrante. Lo hemos efectuado utilizando cuatro redes uniformes, obtenidas a partir de una red inicial, subdividiendo sucesivamente cada triángulo en cuatro. En cada paso de refinamiento se movieron los vértices del borde con el objeto de que pertenecieran al borde del círculo, aplicando además un proceso de suavización para que los elementos resulten lo más regular posible. La primeras dos redes se muestran en la Figura 3.

Hemos elegido los parámetros de elasticidad,  $E = 10.92$ ,  $\nu = 0.3$  y el factor de corrección para el esfuerzo de corte,  $\kappa = \frac{5}{6}$  ( la elección efectuada para  $\kappa$  corresponde a la mencionada en el Inciso 2.1). Hemos tomado además, tres espesores diferentes,  $t = .1$ ,  $.01$ , y  $.001$ .

•  
 $P$

Figure 3: redes de elementos finitos para la placa circular

En las tablas 1 y 2 se listan los resultados obtenidos con ambos métodos para el desplazamiento vertical y las rotaciones en el punto  $P = (.4214, .4219)$  (Ver Fig. 3), para el espesor de placa  $t = .01$ .

Tabla 1 - Desplazamiento vertical en  $P$  - Placa Circular -  $t = .01$

elementos	$w_h$	$\bar{w}_h$
10	0.1909D-02	0.1903D-02
40	0.1755D-02	0.1761D-02
160	0.1701D-02	0.1702D-02
640	0.1683D-02	0.1683D-02
Sol. exacta	.1675D-02	

Tabla 2 - Rotaciones en  $P$  - Placa circular -  $t = .01$

elementos	$\beta_{h,1}$	$\tilde{\beta}_{h,1}$	$beta_{h,2}$	$\tilde{\beta}_{h,2}$
10	-.6430D-03	-.6932D-03	-.5541D-02	-.5495D-02
40	-.7072D-03	-.6326D-03	-.5016D-02	-.5050D-02
160	-.7677D-03	-.7537D-03	-.4844D-02	-.4850D-02
640	-.7978D-03	-.7953D-03	-.4809D-02	-.4810D-02
Sol. exacta	-.8062D-03		-.4785D-02	

En las tablas 3 y 4 se listan las magnitudes de los errores para ambos métodos, y también las diferencias entre ambas soluciones para el mismo valor de  $t$  y para la red de 640 elementos.

Tabla 3 - Normas de los errores - Placa circular -  $t = .01$

	Metodo I		Metodo II
$\ \tilde{\beta}_h - \beta\ _1$	0.21156232D-02	$\ \beta_h - \beta\ _1$	0.21138810D-02
$\ \bar{w}_h - w\ _1$	0.90184961D-03	$\ w_h - w\ _1$	0.39281820D-03
$\ t(\tilde{\gamma}_h - \gamma)\ _0$	0.25190834D-03	$\ t(\gamma_h - \gamma)\ _0$	0.25174152D-03
$\ \tilde{\beta}_h - \beta\ _0$	0.45593840D-04	$\ \beta_h - \beta\ _0$	0.44938236D-04



Tabla 4 - Normas de las diferencias.

	Diferencias
$\ \tilde{\beta}_h - \beta_h\ _1$	0.22497593D-04
$\ \bar{w}_h - w_h\ _1$	0.81487389D-03
$\ t(\tilde{\gamma} - \gamma_h)\ _0$	0.12482545D-05
$\ \tilde{\beta}_h - \beta_h\ _0$	0.14521602D-05

Finalmente, en la tabla 5, se muestra el orden de convergencia para las rotaciones y los desplazamientos verticales, y en la tabla 6, los órdenes de las diferencias entre las soluciones de ambos métodos. Los órdenes se obtuvieron utilizando los resultados correspondientes a las cuatro redes. No obstante, descartando la primer red, que es la más gruesa, se obtuvo el segundo orden predicho por la teoría.

Tabla 5 - órdenes de convergencia. Placa circular

	$t = .1$	$t = .01$	$t = .001$
$\ \beta_h - \beta\ _1$	0.85	1.03	1.04
$\ w_h - w\ _1$	1.02	1.01	1.01
$\ \bar{w}_h - w\ _1$	0.98	0.98	0.98
$\ \beta_h - \beta\ _0$	1.45	1.77	1.81

Tabla 6 - órdenes de las diferencias. Placa circular

nro. de redes: 4	$t = .1$	$t = .01$	$t = .001$
$\ \tilde{\beta}_h - \beta_h\ _1$	1.49	1.60	1.60
$\ \bar{w}_h - w_h\ _1$	1.00	0.99	0.99
nro. de redes: 3	$t = .1$	$t = .01$	$t = .001$
$\ \tilde{\beta}_h - \beta_h\ _1$	1.99	2.15	2.15

Para el segundo ejemplo hemos utilizado la solución exacta obtenida en [4] para una carga dada por  $g = \cos(\phi)$  en un semiplano. Hemos restringido la solución a la región cuadrada  $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$  dando los valores exactos de la solución como condiciones de borde.

El experimento fue realizado utilizando los mismos valores para los parámetros, que en el caso de la placa circular, y dos valores para el espesor,  $t = .01$  y  $.001$ . Las primeras dos redes se muestran en la Figura 4.

En las tablas 7 y 8 listamos los valores de las rotaciones y de los desplazamientos verticales en el centro de la placa, para un espesor  $t = .001$ .

$Q$

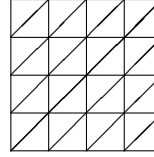


Figure 4: redes de elementos finitos para la placa cuadrada

Tabla 7 - Desplazamiento vertical en  $Q$  - Placa cuadrada -  $t = .001$

elementos	$w_h$	$\bar{w}_h$
8	0.212147D+00	0.212147D+00
32	0.212195D+00	0.212195D+00
128	0.212222D+00	0.212222D+00
512	0.212229D+00	0.212229D+00
Sol. exacta	0.212232D+00	

Tabla 8 - Rotaciones en  $Q$  - Placa cuadrada -  $t = .001$

elementos	$\beta_{h,1}$	$\tilde{\beta}_{h,1}$	$\beta_{h,2}$	$\tilde{\beta}_{h,2}$
8	-.104439D+00	-.104415D+00	0.394060D+00	0.394067D+00
32	-.113323D+00	-.113322D+00	0.397787D+00	0.397788D+00
128	-.115267D+00	-.115267D+00	0.398827D+00	0.398827D+00
512	-.115773D+00	-.115773D+00	0.399113D+00	0.399113D+00
Sol. exacta	-.115943D+00		0.399210D+00	

Las tablas 9 y 10 muestran los errores y las diferencias entre las soluciones, dadas por los dos métodos, para la misma placa y para la red de 512 elementos.

Tabla 9 - Normas de los errores - Placa cuadrada -  $t = .001$

	Método I		Método II
$\ \tilde{\beta}_h - \beta\ _1$	0.10047758D-01	$\ \beta_h - \beta\ _1$	0.10047677D-01
$\ \bar{w}_h - w\ _1$	0.20709430D-01	$\ w_h - w\ _1$	0.11411123D-01
$\ t(\tilde{\gamma}_h - \gamma)\ _0$	0.13916887D-01	$\ t(\gamma_h - \gamma)\ _0$	0.13916887D-01
$\ \tilde{\beta}_h - \beta\ _0$	0.13910829D-03	$\ \beta_h - \beta\ _0$	0.13909762D-03

Tabla 10 - Normas de las diferencias.

	Diferencias
$\ \tilde{\beta}_h - \beta_h\ _1$	0.60134752D-06
$\ \bar{w}_h - w_h\ _1$	0.9298307D-02
$\ t(\tilde{\gamma} - \gamma_h)\ _0$	0.46370533D-08
$\ \tilde{\beta}_h - \beta_h\ _0$	0.73170330D-07

Finalmente, las tablas 11 y 12 muestran el orden de convergencia en distintas normas, y los órdenes de las diferencias entre las soluciones obtenidas mediante ambos métodos. Los órdenes fueron obtenidos utilizando cuatro redes, obtenidas por refinamiento uniforme de una red inicial.

Como en el caso de la placa circular, los órdenes obtenidos coinciden con los predichos por los resultados teóricos.

Vale la pena notar que los errores para las rotaciones, en norma  $\mathbf{L}^2$ , son de orden mayor que uno. Generalmente, el error en la aproximación por elementos finitos, es de mayor orden en la norma  $\mathbf{L}^2$  que en la norma  $\mathbf{H}^1$  pero, por lo que conocemos hasta ahora, ésto no ha sido probado para los métodos considerados.

Tabla 11 - órdenes de convergencia - Placa cuadrada.

	t = .01	t = .001
$\ \beta_h - \beta\ _1$	1.16	1.16
$\ w_h - w\ _1$	1.19	1.19
$\ \bar{w}_h - w\ _1$	1.21	1.21
$\ \beta_h - \beta\ _0$	2.33	2.27

Tabla 12 - órdenes de las diferencias - Placa cuadrada.

nro. de redes: 4	t = .01	t = .001
$\ \tilde{\beta}_h - \beta_h\ _1$	2.72	2.72
$\ \bar{w}_h - w_h\ _1$	1.2	1.2

## References

- [1] D. N. Arnold, F. Brezzi, and M. Fortin, *A stable finite element for the Stokes equations*, *Calcolo* **21**(1984), 337-344.
- [2] D. N. Arnold and R. S. Falk, *A uniformly accurate finite element method for the Reissner-Mindlin plate*, *SIAM J. Numer. Anal.* **26**(1989), 1276-1290.
- [3] — — —, *The boundary layer for the Reissner-Mindlin plate model*, *SIAM J. Math. Anal.* **21**(1990), 281-312.
- [4] D. N. Arnold, and R. S. Falk, *Edge effects in the Reissner- Mindlin plate theory*, Paper for the Symposium on Analytical and Computational Models for Shells. California(1989).
- [5] I. Babuška *The finite element method with Lagrangian multipliers*, *Numer. Math.* **20**(1973), 179-192.
- [6] K. J. Bathe and F. Brezzi, *On the convergence of a four-node plate bending element based on Mindlin-Reissner plate theory and a mixed interpolation*, *MAFELAP V* (J. R. Witheman,ed.), London(1985), 491-503.
- [7] — — —, *A simplified analysis of two plate bending elements - the MITC4 and MITC9 elements*, *NUMETA 87*(G. N. Pande and J.Middleton, eds.), *Numerical Techniques for Engineering Analysis and Design*, vol. 1, Martinus Nijhoff, Dordrecht(1987).
- [8] K.J. Bathe, F. Brezzi and M. Fortin, *Mixed-interpolated elements for Reissner-Mindlin plates*, *Int. J. Num. Meths. Eng.* **28**(1989), 1787-1801.
- [9] K. J. Bathe and E. N. Dvorkin, *A four-node plate bending element based on Mindlin Reissner plate theory and a mixed interpolation*, *J. Numer. Methods Engrg.* **21**(1985), 367-383.
- [10] F. Brezzi *On the existence, uniqueness and approximation of saddle-point problems arising from Lagrange multipliers*, *RAIRO., Anal. Numer.* **R2**(1974), 129-151.
- [11] F. Brezzi, K. J. Bathe, and M. Fortin, *Mixed interpolated elements for Reissner-Mindlin plates*, *Internat. J. Numer. Methods Engrg.* **28**(1989), 1787-1801.
- [12] F. Brezzi, J. Douglas Jr., M. Fortin and L. D. Marini, *Efficient rectangular mixed finite elements in two and three space variables*, *Model. Math. Anal. Numer.* **21**(1987), 581-604.
- [13] F. Brezzi and M. Fortin, *Numerical approximation of Mindlin-Reissner plates*, *Math. Comp.* **47** (1986), 151-158.
- [14] — — — , *Hybrid and mixed finite element methods*, Springer-Verlag New York (1991).

- [15] F. Brezzi, M. Fortin and R. Stenberg, *Error analysis of mixed-interpolated elements for Reissner-Mindlin plates*, Math. Model. Meth. Appl. Sc. **1** (1991), 125-151.
- [16] P. G. Ciarlet, *The finite element method for elliptic problems*, North-Holland Pub. Comp. (1979).
- [17] M. Crouzeix and P. A. Raviart, *Conforming and nonconforming finite element methods for solving the stationary Stokes equations*, RAIRO Anal. Numer. **R-3**(1973), 33-76.
- [18] R. Durán and E. Liberman, *On mixed finite element methods for the Reissner-Mindlin plate model*, Math. of Comp. **58**, Num. 198(1992), 561-573.
- [19] — — — *On the Convergence of a Triangular Mixed Finite Element Method for Reissner-Mindlin Plate*, Impresiones Previas, Dto. de Matemática, Fac. de Cs. Exactas y Naturales U.B.A. **84**(1995). (Aceptado para su publicación en Math. Model. Meth. Appl. Sc.)
- [20] M. Fortin, *An analysis of the convergence of mixed finite element methods*, RAIRO Anal. Numer., **11**(1977), 341-354.
- [21] V. Girault and P. A. Raviart, *Finite Element Methods for Navier-Stokes Equations*, Springer-Verlag(1986).
- [22] P. Papadopoulos and R. Taylor, *A triangular element based on Reissner-Mindlin plate theory*, Internat. J. Numer. Methods Engrg. **30**(1990), 1029-1049.
- [23] P. A. Raviart and J. M. Thomas, *A mixed finite element method for second order elliptic problems*, Mathematical Aspects of the Finite Element Method, Lecture Notes in Math., vol. 606, Springer(1977), 292-315.
- [24] E. Reissner, *On Bending of Elastic Plates*, Quarterly of Applied Mathematics, **5**(1947), 55-69.
- [25] B. Szabo and I. Babuška, *Finite Element Analysis*, John Wiley & Sons, Inc. (1991).
- [26] O. C. Zienkiewicz, R. L. Taylor, P. Papadopoulos and E. Oñate, *Plate bending elements with discrete constraints: New triangular elements*, UCB/SEMM Report **89/09**, Department of Civil Engineering, University of California, Berkeley, CA(1989).