

Tesis Doctoral

**GRAFOS DE INTERVALOS
PROPIOS Y GRAFOS ARBÓREOS**

Marisa Gutierrez

Directora: Lía G. Oubiña

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS
UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PLATA

1994

A mis padres

AGRADECIMIENTOS

Quiero expresar mi enorme agradecimiento a la Doctora Lía Oubiña, quien supo despertar mi interés por la investigación. Con ella descubrí el placer de la creación matemática. Festejó mis pequeños éxitos, los guió e iluminó con su asombrosa inteligencia. Y en los fracasos, me enseñó que también es muy hermoso el desafío de haberlo intentado.

Haber trabajado a su lado fué para mi una enriquecedora experiencia que me ha permitido palpar las virtudes de un verdadero científico: generosidad en lo que sabe, sinceridad en lo que no sabe, humildad en lo que puede descubrir y rigor científico en lo que ha descubierto.

Si he adquirido alguna de estas virtudes, sin duda, a ella se lo debo.

Deseo manifestar mi gratitud al Doctor André Batbedat (Universidad de Montpellier) quien, durante sus visitas a la Argentina, me introdujo en los aspectos matemáticos de la Taxonomía Numérica, con la cual están relacionados los grafos motivo de esta tesis. Sus resultados publicados en los Cahiers de D.E.A. (Université des Sciences, Montpellier) y en su libro "Les approches pyramidales dans la classification arborée" han sido fundamentales para el desarrollo de mi trabajo.

Agradezco también al Doctor Jorge Crisci quien, con sus conocimientos, despertó mi interés por la Taxonomía Numérica.

A mis colegas y amigos, mi gratitud por haberme tendido una mano en los momentos difíciles.

Un especial agradecimiento a mi familia: Fernando, Mariana y Manuel. A Fernando por su apoyo cotidiano y sus sabios consejos y a mis hijos por haber hecho silencio la mayoría de las veces que se los he pedido.

Por último, no puedo dejar de mencionar, la ayuda incondicional de mi gran familia en el cuidado de mis hijos.

Contenido

Introducción	v
1 Grafos de intervalos propios	1
1.1 Generalidades	1
1.2 Caracterizaciones	2
1.3 Radio y centro	21
1.4 Planaridad	23
1.5 Un problema de aplicación	24
2 Grafos de intervalos propios mínimos	29
2.1 Generalidades	29
2.2 Resultado Principal	31
2.3 Una clase clique-cerrada	34
2.4 Número de grafos de intervalos propios mínimos conexos . . .	36
3 Grafos Arbóreos	39
3.1 Generalidades	39
3.2 Caracterizaciones	42
3.3 Relación con otras clases de grafos	53
4 Grafos de intersección	61
4.1 Generalidades	62
4.2 Una caracterización de los grafos de intersección	63
4.3 La aplicación clique entre $\Omega\Sigma_P$ y $C\Sigma_P$	69

Introducción

Todos los grafos considerados aquí son finitos, no dirigidos, sin lazos ni aristas múltiples. Para un grafo G , se denotará con $V(G)$ al conjunto de sus vértices y con $E(G)$ al de sus aristas. Si dos vértices u y v de G son adyacentes se escribirá $uv \in E(G)$. Un *árbol* es un grafo conexo y sin ciclos. Dado un grafo conexo G , se dice que un árbol T es *generador* de G si T es un subgrafo de G con $V(T) = V(G)$. Un grafo G es *completo* si todo par de vértices distintos de G es adyacente. Dado $V' \subseteq V(G)$ se llama subgrafo de G *inducido* por V' , $G[V']$, al grafo que tiene a V' como conjunto de vértices y dos vértices de V' son adyacentes si y sólo si son adyacentes en el grafo G . Un *clique* C de G es un conjunto de vértices de G , tal que $G[C]$ es un subgrafo completo de G y maximal con respecto a la inclusión. Se denotará $\mathcal{C}(G)$ al conjunto de cliques de G y $c(G)$ al cardinal de este conjunto. Se llamará $\mathcal{C}^*(G)$ a la familia $(C(v))_{v \in V(G)}$, donde $C(v) = \{C \in \mathcal{C}(G); v \in C\}$. Dada una familia de conjuntos $(F_i)_{i \in I}$ (I finito no vacío) se llama *grafo de intersección* de la familia $(F_i)_{i \in I}$ al grafo que tiene a I como conjunto de vértices y dos vértices $i, j \in I$ son adyacentes si y sólo si $F_i \cap F_j \neq \emptyset$. Se dice que G es un *grafo de intervalos propios* (Roberts 1969) si G es isomorfo al grafo de intersección de una familia $(F_i)_{i \in I}$ de intervalos cerrados de la recta real con la propiedad que $F_i \subseteq F_j$ implica $i = j$. Los grafos de intervalos propios han sido estudiados extensamente, entre otros, por Roberts [26, 27, 28, 29], por Maehara [24], por Batbedat [1, 2] y Hedman [17]. En el Capítulo 1 se hace una recopilación de las caracterizaciones existentes en la literatura y se agragan una caracterización por propiedades de \mathcal{C}^* y tres por propiedades métricas [14]. Además se estudia el radio, el diámetro y la planaridad de los grafos de intervalos propios.

Dado un conjunto de individuos X y una disimilaridad $D : X \times X \rightarrow \mathbb{R}^+$ [6], se quiere obtener una clasificación de X en grupos que reflejen, lo más

fielmente posible, la información proporcionada por D . Con este propósito en [6] se definen las jerarquías indexadas y en [7] las pirámides que están en biyección con las ultramétricas y con las disimilaridades piramidales respectivamente. El problema de aproximación superior (resp. inferior) por disimilaridades piramidales es encontrar una disimilaridad piramidal p que minimice $\Delta(D, p) = \frac{1}{2} \sum_{(x,y) \in X \times X} |D(x, y) - p(x, y)|$ entre aquellas que son mayores (con el orden usual de funciones) (resp. menores) que D . Este tema ha sido extensamente desarrollado por Batbedat [1, 2]. Aquí se prueba que los problemas *SUPRIMIR* y *AGREGAR* aristas para grafos de intervalos propios se transforman en la versión de decisión de los problemas de aproximación superior y de aproximación inferior respectivamente. Se demuestra que el primer problema es NP-Completo.

Los resultados del Capítulo 2 aparecen en [13]. Se prueba que si G es un grafo de intervalos propios entonces $|V(G)| \leq 2c(G) - c(K(G))$ siendo K (o aplicación clique) la aplicación que a cada grafo G asigna el grafo de intersección de los cliques de G . Cuando la igualdad se verifica se dice que G es un *grafo de intervalos propios mínimo*. El resultado principal es que la aplicación K restringida a la clase de los grafos de intervalos propios mínimos es una biyección (salvo isomorfismos) sobre la clase de los grafos de intervalos propios. Se encuentra la mayor clase clique-cerrada Σ ($K(\Sigma) = \Sigma$) contenida en la unión de la clase de los grafos conexos de intervalos propios mínimos y la clase de los grafos completos. Se determina el número de grafos de intervalos propios mínimos con n vértices.

En el Capítulo 1 se prueba que un grafo G es de intervalos propios si existe un orden sobre $V(G)$ tal que todo clique de G es un intervalo con respecto a ese orden. En este sentido los grafos de intervalos propios son extendidos a los grafos arbóreos (Batbedat 1990). Un grafo conexo G es *arbóreo* si existe un árbol T , generador de G , tal que todo clique de G induce un subarbol de T (la definición se extiende a grafos no conexos). En el Capítulo 3 se dan tres caracterizaciones de los grafos arbóreos: por propiedades de \mathcal{C}^* , por propiedades de sus cliques y por la aplicación clique y tres caracterizaciones métricas [14]. Se estudia la relación de la clase de los grafos arbóreos con otras clases de grafos: se prueba la inclusión de la clase de los grafos de intervalos en la de los arbóreos y se dan condiciones necesarias y suficientes para que un grafo arbóreo sea cordal (resp. de intervalos, resp. de intervalos propios).

En el Capítulo 4 se estudian los grafos de intersección con el objeto de

generalizar algunos resultados obtenidos en capítulos anteriores. Se denota Σ_P a la colección de familias de conjuntos cumpliendo una cierta propiedad P y $\Omega\Sigma_P$ a la clase de los grafos de intersección de familias de Σ_P (salvo isomorfismos). Se dice que una familia de conjuntos $(F_i)_{i \in I}$ (I finito y no vacío) se *sumerge* en otra $(H_i)_{i \in I}$, si ambas tienen el mismo grafo de intersección y existe una inyección w de $\bigcup_{i \in I} F_i$ en $\bigcup_{i \in I} H_i$ tal que, para todo $i \in I$, $x \in F_i$ si y sólo si $w(x) \in H_i$. Se prueba que si P implica la propiedad de Helly entonces un grafo G es de intersección de una familia de Σ_P si y sólo si $C^*(G)$ se sumerge en una familia de Σ_P . Este resultado generaliza los ya obtenidos para grafos de intervalos (Fulkerson-Gross), grafos de intervalos propios (Capítulo 1), grafos de intersección de caminos de un árbol (Monma-Wei) y grafos cordales (Gavril). Se demuestra que la clase de los grafos arbóreos es una clase de grafos de intersección. Se denota con $C\Sigma_P$ a la clase de los grafos cuya familia de cliques se sumerge en una familia de Σ_P . Se dan condiciones suficientes para que $K(C\Sigma_P) = \Omega\Sigma_P$ y para que $K(\Omega\Sigma_P) = C\Sigma_P$, resultados que generalizan los ya obtenidos para grafos de intervalos propios y grafos arbóreos.

Capítulo 1

Grafos de intervalos propios

Los grafos de intervalos propios fueron usados por Roberts [26], en psicología matemática, para modelizar relaciones de indiferencia no transitiva; con el nombre de *grafos de tiempo* por Maehara [24] y Hedman [17], en modelos de epidemias, y, con el nombre de *grafos pira*, por Batbedat [2], en relación con las disimilaridades piramidales introducidas por Diday [7] en taxonomía.

Existen muchas caracterizaciones de los grafos de intervalos propios, en la sección 1.2 se hace una recopilación de ellas con demostraciones más simples (en la mayoría de los casos). Se prueban cuatro nuevas caracterizaciones: una por propiedades de \mathcal{C}^* y tres por propiedades métricas [14].

El radio y el centro de los grafos de intervalos propios son estudiados en la sección 1.3.

En la sección 1.4 se caracterizan los grafos de intervalos propios planares.

Por último, en la sección 1.5 se prueba que los problemas de *SUPRIMIR* y *AGREGAR* aristas para grafos de intervalos propios, se transforman en la versión de decisión de los problemas de optimización (en taxonomía) de aproximar una disimilaridad D por disimilaridades piramidales [7], mayores y menores que D respectivamente. Se prueba que el primer problema es NP-Completo.

1.1 Generalidades

Definición 1.1.1 G es un grafo de intervalos si existe una función r , de $V(G)$ en la clase de los intervalos cerrados de la recta real, con la propiedad

que para distintos vértices v y w se tiene $r(v) \cap r(w) \neq \emptyset$ si y sólo si v y w son adyacentes (ver Fig. 1).

La función r se llama *representación de G* .

Si además r cumple que $r(v) \subseteq r(w) \Rightarrow v = w$ (los intervalos $r(v)$ y $r(w)$ tienen intersección propia) se dice que G es un grafo de intervalos propios y que r es una *representación propia de G* .

Si todos los intervalos de la imagen de r tienen igual longitud, se dice que G es un grafo de intervalos constantes. En el caso en que todos los intervalos tienen longitud 1, se dice que G es un grafo de intervalos unitarios.

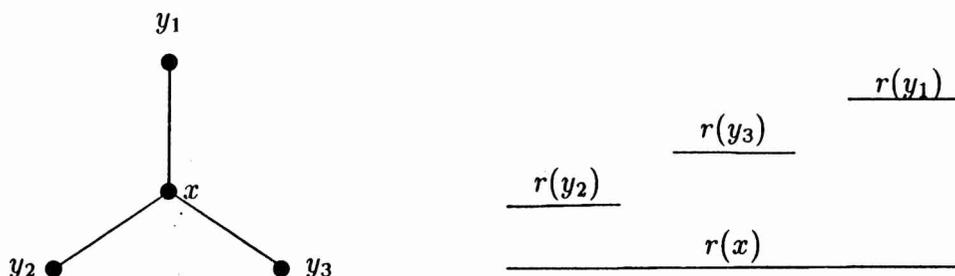


Fig. 1: El grafo de intervalos K_{13} y una de sus representaciones.

1.2 Caracterizaciones

Como grafos de intersección

Definición 1.2.1 Sea $\mathcal{F} = (F_i)_{i \in I}$ (I finito y no vacío) una familia de conjuntos. Se llama *grafo de intersección de \mathcal{F}* al grafo cuyo conjunto de vértices es I y dos vértices $i, j \in I$ son adyacentes si y sólo si $F_i \cap F_j \neq \emptyset$.

Por su definición todo grafo de intervalos propios es isomorfo al grafo de intersección de una familia de intervalos de la recta real, con la particularidad de que ningún intervalo está contenido en otro.

Siendo r una representación propia de un grafo de intervalos propios G y $V(G) = \{v_1, \dots, v_n\}$ se llamará a_i (resp. b_i) al extremo izquierdo (resp. derecho) del intervalo $r(v_i)$ y $Ext(r)$ al conjunto $\bigcup_{i=1}^n \{a_i, b_i\}$.

Para Roberts [26] a vértices distintos de G pueden corresponder intervalos iguales. A pesar de la diferencia en las definiciones, la clase de grafos obtenida



es la misma. En efecto sea $[a, b]$ un intervalo de la imagen de r . Si $[a, b] = r(v_1) = r(v_2) = \dots = r(v_t)$ con v_1, v_2, \dots, v_t vértices distintos de G , sea $s = \max\{l \in \text{Ext}(r), l < a\}$ (si este conjunto es vacío se toma como s a cualquier real menor que a) y sea $i = \min\{l \in \text{Ext}(r), l > b\}$ (si este conjunto es vacío se toma como i a cualquier real mayor que b). Es obvio que $s < a$ y que $i > b$. Luego eligiendo $2t$ reales cualesquiera $a_1, \dots, a_t, b_1, \dots, b_t$ tales que $s < a_1 < \dots < a_t \leq a$ y $b \leq b_1 < \dots < b_t < i$, es posible definir una representación r' así: si $i = 1, \dots, t$ $r'(v_i) = [a_i, b_i]$, si no $r'(v_i) = r(v_i)$. La representación r' , al igual que r , tiene la propiedad que ninguno los intervalos de su imagen está contenido en otro. Además r' asigna a los vértices v_1, \dots, v_t intervalos distintos. Luego queda probado que es posible construir una representación propia de G .

El siguiente teorema aparece en [26].

Teorema 1.2.2 *Las siguientes proposiciones son equivalentes:*

- a) G es un grafo de intervalos propios.
- b) G es un grafo de intervalos constantes.
- c) G es un grafo de intervalos unitarios.

Demostración: a) \rightarrow b) Sea r una representación propia de G y sea v_1, v_2, \dots, v_n un ordenamiento de los vértices de G tal que $i \leq j$ si y sólo si $a_i \leq a_j$ (es un orden por la propiedad inyectiva de r). Se llamará l a la longitud del intervalo más chico de r .

El siguiente algoritmo construye una representación propia de G cuyos intervalos tienen longitud constante igual l .

$i := 1$

$b_0 := a_1$

Mientras($i \leq n$) hacer

$b_i := a_i + l$

$h := b_i - b_{i-1}$

{modificación de los a_j tales que $v_i v_j \in E(G)$ }

para todo ($j > i, v_i v_j \in E(G), a_j > b_{i-1}$) hacer $a_j := b_{i-1} + \frac{j-i}{n} h$

$i := i + 1$

b) \rightarrow c) Inmediato.

c) \rightarrow a) Inmediato.

Como grafo compatible con un orden

Definición 1.2.3 *Un grafo G y un orden total α sobre $V(G)$ son compatibles si para toda terna v_i, v_j, v_k de vértices de G*

$$(v_i \alpha v_j \alpha v_k) \wedge v_i v_k \in E(G) \Rightarrow v_i v_j, v_j v_k \in E(G).$$

El siguiente teorema se deduce del Teorema 1 demostrado por Roberts en [27], también aparece en [24]. Aquí se da una demostración más directa.

Teorema 1.2.4 *Un grafo G es de intervalos propios si y sólo si es compatible con algún orden total.*

Demostración: Por definición existe una representación propia r de G . Sea α el orden total sobre $V(G)$ definido por: $v_i \alpha v_j \Leftrightarrow a_i \leq a_j$.

Se verá que el grafo G y el orden α son compatibles. Sean v_i, v_j y v_k tres vértices de G . Si $v_i \alpha v_j \alpha v_k$ y $v_i v_k \in E(G)$ entonces $a_i < a_j < a_k$ y $a_k \leq b_i$, luego $a_j < b_i$ con lo cual $v_i v_j \in E(G)$. Además como r es una representación propia $b_i < b_j$ entonces $a_k < b_j$ luego $v_j v_k \in E(G)$.

Recíprocamente, sea α un orden total sobre $V(G)$ compatible con G y $v_1 \alpha \dots \alpha v_n$ los vértices de G ordenados por α . Sin pérdida de generalidad puede suponerse que G es conexo, ya que es evidente que un grafo es de intervalos propios si y sólo si cada una de sus componentes conexas lo es.

Para todo $i = 1, \dots, n$ sea $a_i = i$; $b_n = n$ y $b_i = \max\{h; i < h \leq n, v_i v_h \in E(G)\} + \frac{i}{n}$ si $i < n$ (dado que G es conexo, este conjunto es vacío únicamente cuando $i = n$). Se probará que la aplicación r que a cada v_i asigna $[a_i, b_i]$ es una representación propia de G . En primer lugar se verá que ninguno de estos intervalos está contenido en otro.

Si para algún par i, j , $1 \leq i, j \leq n$, $[a_j, b_j] \subset [a_i, b_i]$ entonces $i < j$ y $b_j \leq b_i$. Dado que b_i y b_j son un entero mas $\frac{i}{n}$ y $\frac{j}{n}$ respectivamente con $i \neq j$ se tiene que $b_i \neq b_j$. Como $i \neq n$ existe un $h > i$ tal que $v_i v_h \in E(G)$ y $v_j v_h \notin E(G)$ lo cual es absurdo ya que $v_i \alpha v_j \alpha v_h$ y α es un orden compatible con G .

Por último se verá que r es una representación de G . Sea $v_i v_j \in E(G)$ con $i < j$ entonces $a_i < a_j$, como $j \in \{h; i \leq h \leq n, v_i v_h \in E(G)\}$ luego se tiene $b_i \geq j$ y $[a_i, b_i] \cap [a_j, b_j] \neq \emptyset$. Recíprocamente si $[a_i, b_i] \cap [a_j, b_j] \neq \emptyset$ con $i < j$ entonces $j = a_j \leq b_i$ luego, por definición de b_i (es obvio que $i \neq n$), existe h , $j \leq h < b_i$ tal que $v_i v_h \in E(G)$. Como $v_i \alpha v_j \alpha v_h$ y α es un orden compatible entonces $v_i v_j \in E(G)$. \square

Por Propiedades de sus cliques

El teorema que sigue se deduce del probado por Maehara [24] para grafos de tiempo.

Teorema 1.2.5 *Un grafo G es un grafo de intervalos propios si y sólo si los cliques de G son intervalos con respecto a un orden total sobre $V(G)$.*

Demostración: Si G es un grafo de intervalos propios por el Teorema 1.2.4 existe un orden α compatible con G . Sean $v_1\alpha\dots\alpha v_n$ los vértices de G ordenados por α y sea C un clique de G . Si v_i y v_k son respectivamente el primero y el último elemento de C , dado que $v_iv_k \in E(G)$ y α es un orden compatible con G entonces, para todo v_j, v_l con $v_i\alpha v_j\alpha v_l\alpha v_k$ se tiene $v_jv_l \in E(G)$. Luego el intervalo $[v_i, v_k]$, con respecto al orden α , induce un completo de G y por la elección de v_i y de v_k , $C = [v_i, v_k]$.

Recíprocamente, sea α un orden total sobre $V(G)$ tal que todos los cliques de G son intervalos con respecto a α . Sean v_i, v_j y v_k tres vértices de G tales que $v_i\alpha v_j\alpha v_k$ y $v_iv_k \in E(G)$. Luego existe un clique C de G tal que $v_i, v_k \in C$ pero como C es un intervalo con respecto a α entonces $v_j \in C$ y $v_iv_j, v_jv_k \in E(G)$. Por lo tanto α es compatible con G y por el Teorema 1.2.4, G es un grafo de intervalos propios. \square

Corolario 1.2.6 *(Corolario de la demostración) Un orden α es compatible con G si y sólo si todos los cliques de G son intervalos con respecto a α .*

Como subclase de la clase de Grafos de Intervalos

Se denotará $CV(G)$ a la matriz cliques vs vértices de G , es decir, la matriz de ceros y unos que tiene una fila por cada clique y una columna por cada vértice, con entrada uno si y sólo si el vértice es un elemento del clique.

Una matriz tiene la propiedad de *unos consecutivos por columnas* si en cada columna todos los unos son consecutivos. Similarmente se define la propiedad de *unos consecutivos por filas*.

Existen varias caracterizaciones de los grafos de intervalos, la que sigue es la dada en [9] por Fulkerson y Gross.

Teorema 1.2.7 *Un grafo G es un grafo de intervalos si y sólo si existe un ordenamiento de los cliques de G tal que $CV(G)$ tiene la propiedad de unos consecutivos por columnas.*

Sea G un grafo de intervalos y $C_1 \leq C_2 \leq \dots \leq C_m$ un ordenamiento de los cliques de G que verifica la propiedad del teorema de Fulkerson-Gross (ver Fig. 2.b). Para cada $v_i \in V(G)$ sea a_i (resp. b_i) el menor (resp. el mayor) k tal que $v_i \in C_k$.

La representación que a cada $v_i \in V(G)$ le asigna $[a_i, b_i]$ se llamará *representación F-G* de G (ver Fig.2.c).

Diremos que un orden total α sobre $V(G)$ es un *orden F-G* correspondiente a \leq si para todo v_i y v_j tal que $[a_i, b_i] \neq [a_j, b_j]$, $v_i \alpha v_j$ si y sólo si $a_i < a_j$ ó $a_i = a_j$ y $b_i < b_j$.

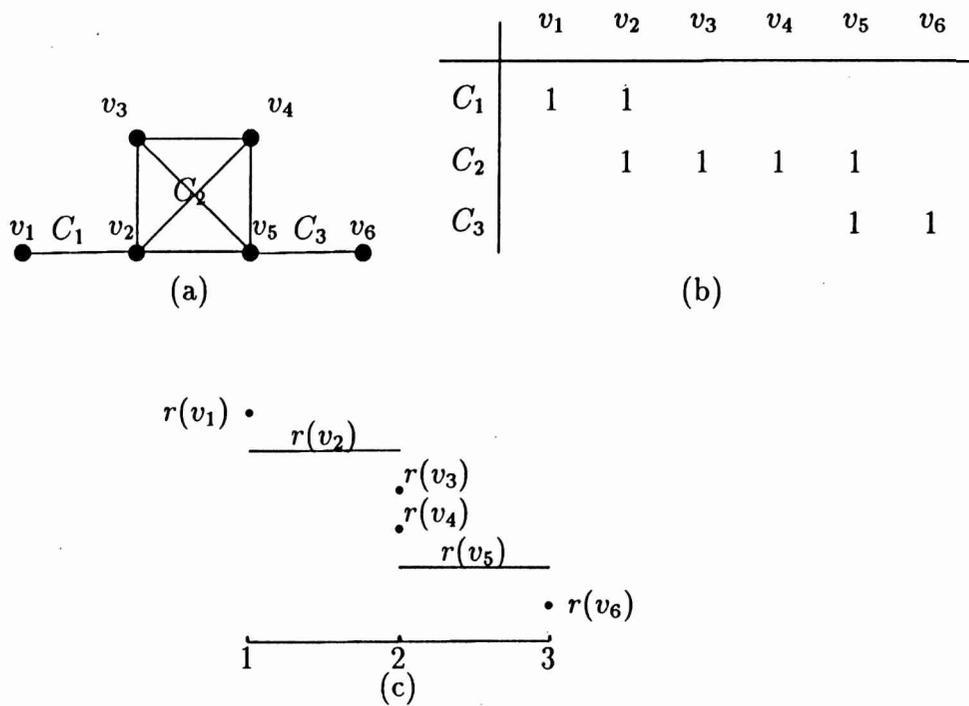


Fig. 2

a) G grafo de intervalos. b) La matriz $CV(G)$ con la propiedad de unos consecutivos por columnas. c) Representación F-G de G .

La equivalencia entre a) y c) del siguiente teorema aparece en [26].

Teorema 1.2.8 *Si G es un grafo de intervalos son equivalentes:*

- a) *G es un grafo de intervalos propios.*
- b) *Dados tres cliques de G con intersección no vacía, uno de ellos está contenido en la unión de los otros dos.*
- c) *G no contiene a K_{13} como subgrafo inducido.*

Demostración: a) \rightarrow b) Sea G un grafo de intervalos propios, α un orden compatible con G y C_1, C_2, C_3 tres cliques de G con intersección no vacía. Por el Corolario 1.2.6 cada C_i $i = 1, 2, 3$ es un intervalo $[u_i, v_i]$ de $V(G)$ con respecto a α . Dado que ningún clique puede estar contenido en otro se puede suponer que $u_1\alpha u_2\alpha u_3$ y $v_1\alpha v_2\alpha v_3$. Como $C_1 \cap C_3 \neq \emptyset$ se tiene $u_3\alpha v_1$ luego $C_2 \subset C_1 \cup C_3$.

b) \rightarrow c) Si K_{13} es un subgrafo inducido de G , sean x su vértice central e y_1, y_2, y_3 sus vértices pendientes (ver Fig. 1). Es evidente que $C_i = \{x, y_i\}$, $i = 1, 2, 3$, son tres cliques de G que no satisfacen b).

c) \rightarrow a) Como G es un grafo de intervalos por el Teorema de Fulkerson Gross existe un ordenamiento $C_1 \leq C_2 \leq \dots \leq C_m$ de los cliques de G tal que la matriz $CV(G)$ tiene la propiedad de unos consecutivos por columnas. Sea α el orden F-G sobre $V(G)$ correspondiente a \leq y sean p_i (resp. u_i) el primero (resp. el último) vértice de C_i .

Si existe algún clique de G que no es un intervalo con respecto a α . Sea C_f el primero en estas condiciones. Luego existe un vértice h_j distinto de p_f y de u_f , tal que $h_j \notin C_f$ y $p_f\alpha h_j\alpha u_f$ (ver Fig. 3).

	p_r		p_f		u_r		h_j		u_j		u_f
C_r	1	1...1	1	1...1	1	0...0	0				
			1		1		0				
C_j			1	1...1	1	1...1	1	1...1	1	0...0	0
C			1	1...1	1	1...1	1	1...1	1	1...1	1
C_f	0	0...0	1				0				1

Fig. 3

Sea C_j el primer clique tal que $h_j \in C_j$, luego $C_j \neq C_f$. Se deduce de la definición de orden F-G que $C_j \leq C_f$ y que $p_f \in C_j$. Entonces C_j es un intervalo y $p_j \alpha p_f$. Dado que C_j no contiene a C_f , $u_j \alpha u_f$.

Sea C_r el primer clique tal que $p_f \in C_r$, como $p_f \in C_j$ $C_r \leq C_j$. Por ser $p_f \alpha h_j$ y $p_f \neq h_j$, $C_r \neq C_j$. Dado que C_r es un intervalo $u_r \alpha h_j$ y como C_r no está contenido en C_j , $p_r \alpha p_j$ y $p_r \notin C_j$.

Se verá que el grafo inducido por $\{p_f, p_r, h_j, u_f\}$ es K_{13} .

Como $p_f \in C_r \cap C_j \cap C_f$, p_f es adyacente a p_r, h_j y u_f .

Los vértices p_r y h_j no son adyacentes porque todo clique que contiene a p_r precede estrictamente a C_j (pues $p_r \notin C_j$), mientras que todo clique que contiene a h_j sigue a C_j .

El mismo razonamiento muestra que p_r y u_f no son adyacentes.

Si h_j es adyacente a u_f existe un clique C que contiene a $\{h_j, u_f\}$. Como $u_f \notin C_j$ y $h_j \notin C_f$ entonces C es distinto de C_j y de C_f y por la propiedad de unos consecutivos por columnas se tiene que $C_j \leq C \leq C_f$ y $p_f \in C$. Además C es un intervalo por preceder a C_f , con lo cual $C_f \subset C$ que es un absurdo. \square

Por propiedades de \mathcal{C}^*

Sea G un grafo y $\mathcal{C}(G)$ el conjunto los de cliques de G . Para todo $v \in V(G)$ sea $\mathcal{C}(v) = \{C \in \mathcal{C}(G), v \in C\}$. Se llamará $\mathcal{C}^*(G)$ a la familia $(\mathcal{C}(v))_{v \in V(G)}$.

Con esta notación el Teorema de Fulkerson-Groos (1.2.7) puede enunciarse como sigue:

Teorema 1.2.9 G es un grafo de intervalos si y sólo si existe un orden sobre $\mathcal{C}(G)$ tal que $\mathcal{C}^*(G)$ es una familia de intervalos con respecto a ese orden.

A continuación se verá un algoritmo que elimina las inclusiones entre pares de intervalos de la representación F-G de un grafo de intervalos propios G .

Por comodidad se numerarán los vértices de un grafo de intervalos propios G de 1 a n , de modo que el orden natural resulte un orden F-G.

Algoritmo: Representación propia

INPUT: G grafo de intervalos propios. Los vértices de G están numerados de 1 a n y la representación F-G asigna a cada i , $1 \leq i \leq n$ el intervalo $[a_i, b_i]$.

OUTPUT: $i \rightarrow J_i$ es una representación propia de G .

BEGIN

$a_0 = b_0 := 0$ $a_{n+1} = b_{n+1} := n$

$J_1 := [a_1, b_1]$

$i := 2$

Mientras ($i \leq n - 1$) hacer

BEGIN

Si $a_i = a_{i-1}$ entonces **INSERTAR 1**

Si $b_i = b_{i-1}$ entonces $i := i - 1$

si no $J_i := [a_i, b_i]$

si no, si $b_i \leq b_{i-1}$ entonces **INSERTAR 2**

si no $J_i := [a_i, b_i]$

END

END

Procedimiento Insertar 1

BEGIN

$M := \max\{x; x = a_k \text{ o } x = b_k, 0 \leq k < i - 1, x < a_{i-1}\}$

$a_{i-1} := \frac{1}{2}(a_{i-1} + M)$

$J_{i-1} := [a_{i-1}, b_{i-1}]$

END

Procedimiento Insertar 2

BEGIN

$M := \min\{x; x = a_k \text{ o } x = b_k, i < k \leq n + 1, x > b_{i-1}\}$

Para todo $k, k = i, \dots, n$; tal que $a_i = a_k$ y $b_i = b_k$ hacer $b_k := \frac{1}{2}(b_{i-1} + M)$

$J_i = [a_i, b_i]$

END

Teorema 1.2.10 *Si G es un grafo de intervalos propios el algoritmo construye una representación propia de G en $O(n^2)$ pasos.*

Demostración: En el Apéndice.

Definición 1.2.11 *Sea G es un grafo cualquiera, se dice que $C^*(G) = (C(v))_{v \in V(G)}$ se sumerge en una familia de intervalos $(J_v)_{v \in V(G)}$ si (1) $v \rightarrow J_v$ es una representación de G y (2) existe una función inyectiva $w : C(G) \rightarrow \bigcup_{v \in V(G)} J_v$ tal que $x \in C(v) \leftrightarrow w(x) \in J_v$.*

Del algoritmo se deduce inmediatamente el siguiente teorema.

Teorema 1.2.12 *G es un grafo de intervalos propios si y sólo si $C^*(G)$ se sumerge en una familia de intervalos cerrados de la recta real con intersección propia dos a dos.*

Por propiedades métricas

Un camino P en un grafo G es una secuencia v_0, v_1, \dots, v_k de vértices distintos de G tal que para todo $i = 0, \dots, k - 1$ $v_i v_{i+1} \in E(G)$. Las aristas $v_i v_{i+1}$ de G se llamarán también aristas de P . El grafo inducido por $\{v_0, v_1, \dots, v_k\}$ se denotará $G[P]$.

La sección $P[v_i, v_j]$ de P es la subsecuencia v_i, v_{i+1}, \dots, v_j de elementos consecutivos de P .

En un grafo conexo G se define la *distancia* entre vértices $v, w \in V(G)$, $d(v, w)$, como la longitud (número de aristas) de un camino mínimo de v a w en G .

Una *disimilaridad* D sobre un conjunto X es una aplicación de $X \times X$ en \mathbb{R}^+ tal que para todo $x, y \in X$:

a) $D(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.

b) $D(x, y) = D(y, x)$.

Definición 1.2.13 [7] Una disimilaridad D sobre X es *piramidal* si existe un orden total α sobre X tal que $x \alpha y \alpha z$ implica

$$D(x, z) \geq \max\{D(x, y), D(y, z)\}$$

Teorema 1.2.14 [14] Si G es un grafo conexo, las siguientes proposiciones son equivalentes :

a) G es un grafo de intervalos propios.

b) Existe una numeración de los vértices de G tal que todo camino mínimo de un vértice s a un vértice t es una secuencia creciente o decreciente.

c) Existe un camino hamiltoniano P de G tal que para todo par de vértices s y t de G , $d(s, t)$ es el mínimo número de cliques de G que cubren las aristas de la sección $P[s, t]$.

d) d es piramidal.

Demostración: a) \rightarrow b) Sea G un grafo de intervalos propios, luego por el Teorema 1.2.4 existe un orden compatible con G . Se numeran los vértices de G de 1 a $n = |V(G)|$ de modo que el orden natural resulte compatible con G .

Sean s y t vértices de G y $L : s = i_0, i_1, \dots, i_k = t$ un camino mínimo entre ellos. Supongamos que $i_0 < i_1$.

* Si $i_2 < i_0$ entonces i_0 está en el intervalo $[i_2, i_1] = \{i; i_2 \leq i \leq i_1\}$, como $i_2 i_1 \in E(G)$, $[i_2, i_1]$ está contenido en un clique de G .

* Si $i_0 < i_2 < i_1$ entonces $i_2 \in [i_0, i_1]$ y este intervalo está también contenido en un clique.

En ambos casos i_0 e i_2 son adyacentes lo que contradice la suposición de que L es un camino mínimo. Luego $i_0 < i_1 < i_2$.

El mismo razonamiento prueba que $i_j < i_{j+1}$ para todo $j, j = 2, \dots, k-1$.

Si $i_1 < i_0$ L resulta una secuencia decreciente.

$b) \rightarrow c)$ Se numeran los vértices de 1 a n de modo que $b)$ se verifique. Si i e $i+1$ no fueran adyacentes, como G es conexo, debería existir un camino de i a $i+1$ que obviamente no podría ser ni creciente ni decreciente, contradiciendo $b)$. Luego $P : 1, 2, \dots, n$ es un camino hamiltoniano de G .

Sean s, t vértices de G y $L : s = i_0, i_1, \dots, i_k = t$ un camino mínimo de s a t en G .

Sin pérdida de generalidad se puede suponer que i_0, i_1, \dots, i_k es una secuencia creciente.

* Si i_r no es adyacente a algún vértice del intervalo $[i_r, i_{r+1}]$, sea z el último de ellos. Luego $i_r(z+1)z$ es un camino mínimo no creciente, lo que contradice $b)$.

* Si $y < z$ son vértices no adyacentes de $[i_r, i_{r+1}]$ entonces yiz es un camino mínimo no creciente, lo que también contradice $b)$.

Luego, para todo $r = 0, \dots, k-1$, el subgrafo de G inducido por $[i_r, i_{r+1}]$ es completo y existe algún clique de G que lo contiene. Dado que L es un camino mínimo, estos cliques son todos distintos. Entonces se han obtenido $k = d(s, t)$ cliques de G que cubren las aristas de la sección $P[s, t]$.

Si se cubren las aristas de $P[s, t]$ con m cliques se puede construir un camino de s a t como sigue: sea C_1 un clique de G que contenga a la arista $s(s+1)$ y sea j_1 el último vértice de C_1 , sea C_2 un clique de G que contenga a la arista $j_1(j_1+1)$ y así siguiendo. Esto demuestra que $d(s, t) \leq m$. Luego $c)$ vale.

$c) \rightarrow d)$ Sea P un camino hamiltoniano de G que satisface $c)$ y sea \leq el orden de los vértices de P .

Si $i \leq j \leq k$ son vértices de G , la sección $P[i, j]$ está contenida en la sección $P[i, k]$, luego por $c)$, $d(i, j) \leq d(i, k)$. Análogamente $d(j, k) \leq d(i, k)$.

$d) \rightarrow a)$ Sean $v_1 \leq \dots \leq v_n$ los vértices de G ordenados de modo que d es piramidal. Si $v_i < v_j < v_k$ son tres vértices de G con $v_i v_k \in E(G)$ entonces $d(v_i, v_k) = 1 = d(v_i, v_j) = d(v_j, v_k)$. Luego $v_i v_j$ y $v_j v_k$ son aristas de G y \leq es un orden compatible con G . \square

De la demostración del Teorema anterior se obtiene el siguiente Teorema.

Teorema 1.2.15 Si G es un grafo conexo y $v_1 \leq v_2 \leq \dots \leq v_n$ es un orden total sobre $V(G)$ entonces las siguientes proposiciones son equivalentes:

- a) $v_1 \leq v_2 \leq \dots \leq v_n$ es un orden compatible con G .
- b) Todo camino mínimo de G es una secuencia creciente o decreciente.
- c) v_1, v_2, \dots, v_n es un camino hamiltoniano tal que para todo par de vértices s y t de G , $d(s, t)$ es el mínimo número de cliques de G que cubren las aristas de la sección $P[s, t]$.
- d) Para todo i, j, k . Si $v_i \leq v_j \leq v_k$ entonces $d(v_i, v_k) \geq \max\{d(v_i, v_j), d(v_j, v_k)\}$.

Corolario 1.2.16 Sea G un grafo de intervalos propios conexo, \leq un orden compatible con G y v, w dos vértices de G con $v \leq w$. El siguiente algoritmo construye un camino mínimo $v = v_1, v_2, \dots, v_k = w$ de v a w en G :

$v_0 := v$

$i := 0$

Mientras($v_i \neq w$) hacer

$v_{i+1} := \max\{h; v_i h \in E(G), v_i \leq h \leq w\}$

$i := i + 1$

Demostración: Si v_i se obtiene del algoritmo y $v_i \neq w$. Por el Teorema anterior todo camino mínimo entre v_i y w es creciente, luego existe un vértice h adyacente a v_i tal que $v_i < h \leq w$. Entonces en un número finito de pasos el algoritmo da un camino $v = v_0, v_1, \dots, v_k = w$. Se verá que es mínimo.

Sea $v = z_0, z_1, \dots, z_r = w$ un camino de v a w . Por la elección de $v_1, z_1 \leq v_1$.

Si para algún $i, i < k$ es $z_i \leq v_i$ pero $v_{i+1} < z_{i+1}$ como \leq es un orden compatible con G y $z_i z_{i+1}$ entonces v_i y z_{i+1} son adyacentes lo cual contradice la elección de v_{i+1} . Luego, para todo $i, 1 \leq i \leq k$ $z_i \leq v_i$. De aquí $k \leq r$ y v_0, \dots, v_k es un camino mínimo. \square

Por la aplicación clique

Definición 1.2.17 Dado un grafo G se llama grafo de cliques de G al grafo cuyos vértices son los cliques de G y tal que dos cliques son adyacentes si y sólo si tienen intersección no vacía. Se denotará K a la aplicación que a cada grafo G le asigna su grafo de cliques $K(G)$.

Sea GI la clase de los grafos de intervalos y GIP la clase de los grafos de intervalos propios.

Hedman [17] prueba que $K(GIP) \subseteq GIP$. Usando el Teorema de Fulkerson-Gross es posible obtener un resultado más general.

Teorema 1.2.18 [17] $K(GI) = GIP$.

Demostración: Sea $G \in GI$ y $C_1 \leq C_2 \leq \dots \leq C_m$ un ordenamiento de sus cliques tal que $CV(G)$ tiene la propiedad de los unos consecutivos por columnas (ver Teorema 1.2.7).

Sea H un clique de $K(G)$ y sean C_p y C_u el primer y último elemento, respectivamente, de H según el orden \leq .

Por la elección del orden \leq , si $v \in C_p \cap C_u$ entonces para todo clique C tal que $C_p \leq C \leq C_u$ se tiene que $v \in C$ con lo cual C es adyacente a C_p y a C_u en $K(G)$. Luego $[C_p, C_u]$ induce un subgrafo completo de $K(G)$ que contiene a H , por lo tanto $H = [C_p, C_u]$. Con esto queda demostrado que los cliques de $K(G)$ son intervalos del orden \leq , luego por el Teorema 1.2.5 $K(G) \in GIP$.

Recíprocamente si $G \in GIP$, sea r una representación propia de G y como antes $Ext(r) = \{a_i, b_i; v_i \in V(G)\}$ el conjunto de extremos de r . Se define el grafo $H(r)$ del siguiente modo: $V(H(r)) = Ext(r)$ y $xy \in E(H(r))$ si y sólo si x e y pertenecen al mismo intervalo de la representación r .

La familia de los cliques de $H(r)$ es $(r(v_i) \cap Ext(r))_{v_i \in V(G)}$ y dos cliques $r(v_i) \cap Ext(r)$ y $r(v_j) \cap Ext(r)$ son adyacentes en $K(H(r))$ si y sólo si $r(v_i) \cap r(v_j) \neq \emptyset$. Luego $K(H(r))$ y G son isomorfos. Además los cliques de $H(r)$ son intervalos de $Ext(r)$ dotado del orden natural de los números reales con lo cual $H(r) \in GIP$ (Teorema 1.2.5) y luego $H(r) \in GI$. \square

Corolario 1.2.19 (de la demostración) $K(GIP) = GIP$.

Por semiórdenes

Sea V un conjunto finito, para todo par de elementos de V un individuo decide si prefiere uno a otro o si le son indiferentes. Esto da lugar a la construcción del grafo orientado $H = (V, P)$ y del grafo no orientado $G = (V, E)$ como sigue: para distintos $x, y \in V$

$$xy \in P \Leftrightarrow x \text{ es preferido a } y.$$

$xy \in E \Leftrightarrow x$ es indiferente a y .

Es evidente que $(V, P \cup P^{-1} \cup E)$ es un grafo completo.

Para cuantificar la preferencia Luce [23] introduce la noción de semiorden. Se asigna a cada $x \in V$ un número real $u(x)$ de modo que si $x, y \in V$, entonces x es preferido a y si y sólo si $u(x)$ es suficientemente más grande que $u(y)$. Formalmente, si se tienen una relación binaria P sobre un conjunto V y $\delta > 0$; se llama *función de utilidad* de (V, P) a toda función real $u : V \rightarrow \mathbb{R}$ que satisface:

$$\forall x, y \in V, xy \in P \Leftrightarrow u(x) \geq u(y) + \delta$$

Scott y Suppes [31] prueban el siguiente teorema:

Teorema 1.2.20 *Existe una función de utilidad para una relación binaria P sobre un conjunto V si y sólo si para todo $x, y, z, w \in V$ se cumple:*

(S₁) P es irreflexiva.

(S₂) $xy \in P \wedge zw \in P \Rightarrow xw \in P \vee zy \in P$.

(S₃) $xy \in P \wedge yz \in P \Rightarrow xw \in P \vee wz \in P$.

En este caso la relación P se llama *semiorden*.

Por otro lado, si se piensa en caracterizar la relación de indiferencia de un semiorden dado, se encuentra que la función de utilidad del semiorden da una condición necesaria, es decir, la existencia de una función $u : V \rightarrow \mathbb{R}$ satisfaciendo:

$$\forall x, y \in V, x \neq y; xy \in E \Leftrightarrow |u(x) - u(y)| < \delta, \delta > 0$$

El siguiente Teorema, que fue probado por Roberts en [28], muestra que esta condición es también suficiente y establece su relación con los grafos de intervalos propios.

Teorema 1.2.21 *Sea $G = (V, E)$ un grafo no dirigido. Las siguientes proposiciones son equivalentes:*

a) G es un grafo de intervalos propios.

b) \bar{G} es un grafo de comparabilidad y toda orientación transitiva es un semiorden.

c) Existe un semiorden P sobre V tal que $\bar{E} = P \cup P^{-1}$.

d) Existe una función $u : V \rightarrow \mathbb{R}$ tal que para todo par de vértices x, y de V ; $xy \in E \Leftrightarrow |u(x) - u(y)| < 1$.



Demostración: $a) \rightarrow b)$ Si G es un grafo de intervalos propios entonces es un grafo de intervalos y no contiene a K_{13} como subgrafo inducido (Teorema 1.2.8).

Por la caracterización de Gilmore y Hoffman [12] para grafos de intervalos, G no tiene a Z_4 (ciclo de longitud 4) como subgrafo inducido y su complemento \bar{G} es un grafo de comparabilidad (es decir existe una orientación transitiva F sobre el conjunto V del grafo \bar{G} : $F \cap F^{-1} = \emptyset, F \cup F^{-1} = \bar{E}, F^2 \subseteq F$.

Se verá que F es un semiorden.

(S_1) Como $F \cap F^{-1} = \emptyset$, F es irreflexiva.

(S_2) Si $xy \in F \wedge zw \in F$ entonces $xy \in \bar{E} \wedge zw \in \bar{E}$. Dado que G no tiene a Z_4 como subgrafo inducido se tiene $xw \in \bar{E} \vee yz \in \bar{E} \vee yw \in \bar{E} \vee xz \in \bar{E}$.

Si $xw \in \bar{E} = F \cup F^{-1} \wedge xw \notin F$ luego $xw \in F^{-1}$ entonces $wx \in F$ pero como $xy, zw \in F$ y F es transitiva se tiene $zy \in F$.

En los casos en que $yz \in \bar{E}, yw \in \bar{E}$ o $xz \in \bar{E}$ la demostración es análoga.

(S_3) Si $xy \in F \wedge yz \in F$, por la transitividad de F , $xz \in F$ luego $xy, yz, xz \in \bar{E}$. Como K_{13} no puede ser un subgrafo inducido de G , entonces se tiene $xw \in \bar{E} \vee wz \in \bar{E} \vee wy \in \bar{E}$.

Si $xw \in \bar{E} \wedge xw \notin F$ entonces $xw \in F^{-1}$ luego $wx \in F$. Como $xz \in F$ y F es transitiva, $wz \in F$.

En los casos en que $wz \in \bar{E}$ o $wy \in \bar{E}$ la demostración es análoga.

$b) \rightarrow c)$ Inmediato.

$c) \rightarrow d)$ Si P es un semiorden sobre V , sea $u : V \rightarrow \mathbb{R}$ su función de utilidad. Dado que $\bar{E} = P \cup P^{-1}$, $xy \in E$ si y sólo si $xy \notin P \wedge xy \notin P^{-1}$, luego por ser u la función de utilidad de (V, P) se tiene:

$$u(x) < u(y) + \delta \text{ y } u(y) < u(x) + \delta \Leftrightarrow u(y) - \delta < u(x) < u(y) + \delta \Leftrightarrow -\delta < u(x) - u(y) < \delta \Leftrightarrow |u(x) - u(y)| < \delta.$$

Luego $u' = u/\delta$ satisface $d)$.

$d) \rightarrow a)$ Sea u la función que satisface $d)$. Como V es un conjunto finito es posible encontrar un δ $0 < \delta < 1$ tal que para todo par x, y de vértices de V : $xy \in E$ si y sólo si $|u(x) - u(y)| \leq \delta$

Si se asigna a cada x el intervalo $r(x) = [u(x) - \delta/2, u(x) + \delta/2]$ se tiene:

$$r(x) \cap r(y) \neq \emptyset \Leftrightarrow |u(x) - u(y)| \leq \delta \Leftrightarrow xy \in E.$$

Luego r es una representación de G y G es un grafo de intervalos constantes y por el Teorema 1.2.2 es un grafo de intervalos propios. \square

Por subgrafos prohibidos

Roberts en [28] encuentra una caracterización de los grafos de intervalos propios por subgrafos inducidos excluidos. Una prueba más simple se obtiene usando el Teorema 1.2.8 y la caracterización de grafos de intervalos dada por Lekkerkerker y Boland [22]: Un grafo G es un grafo de intervalos si y sólo si no contiene ningún miembro de \mathcal{F} (ver Fig. 4) como subgrafo inducido.

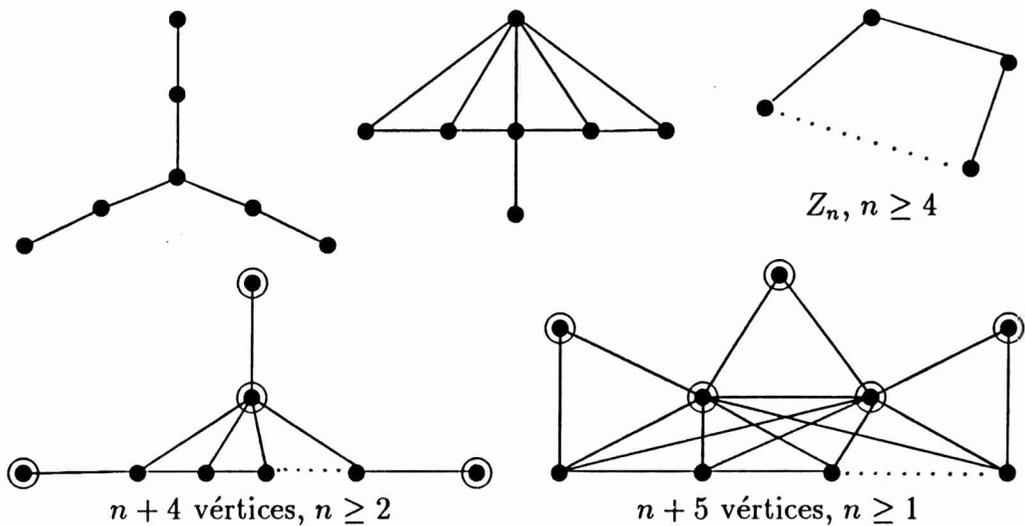


Fig. 4: Colección de grafos prohibidos \mathcal{F} .

Luego excluyendo los miembros de \mathcal{F} que tienen a K_{13} como subgrafo inducido se tiene el mencionado Teorema de Roberts.

Teorema 1.2.22 G es un grafo de intervalos propios si y sólo si no contiene a ningún grafo de la Fig. 5 como subgrafo inducido.

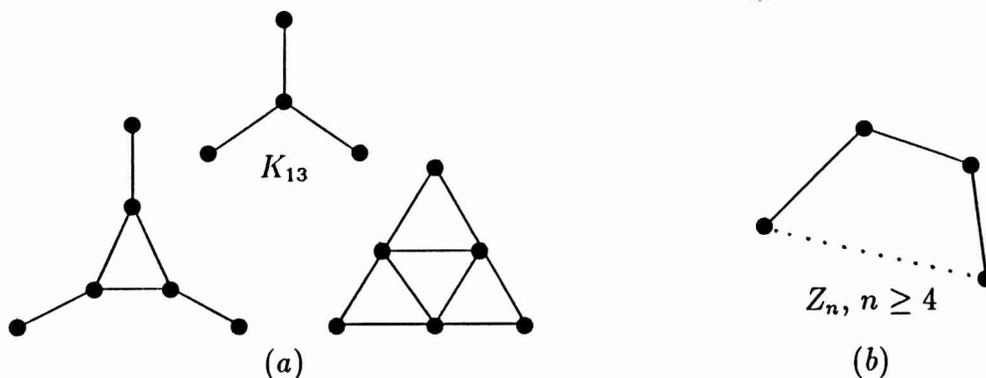


Fig. 5: Colección de subgrafos prohibidos para grafos de intervalos propios.

Un grafo G es *cordal* si todo ciclo de G , de longitud mayor o igual a 4, tiene alguna cuerda (esto es una arista de vértices no consecutivos del ciclo).

El siguiente Corolario se deduce inmediatamente de este Teorema y de la definición de grafo cordal.

Corolario 1.2.23 *Si G es un grafo cordal entonces G es un grafo de intervalos propios si y sólo si no contiene a ningún grafo de la Fig. 5.a. como subgrafo inducido.*

Por propiedades de sus matrices

A) CLIQUES VS. VÉRTICES

Como antes se denota $CV(G)$ a la matriz cliques vs. vértices de G .

Teorema 1.2.24 *Sea G es un grafo, las siguientes proposiciones son equivalentes:*

- G es un grafo de intervalos propios.
- Existe un ordenamiento de los cliques de G y uno de los vértices de G tal que $CV(G)$ tiene la propiedad de unos consecutivos por filas y por columnas.
- Existe un ordenamiento de los vértices de G tal que $CV(G)$ tiene la propiedad de unos consecutivos por filas.

Demostración: $a) \rightarrow b)$ Sea G un grafo de intervalos propios y α un orden compatible con G . Por el Teorema 1.2.5, los cliques de G son intervalos de $V(G)$ con respecto al orden α . Sean $C_i = [u_i, v_i]$, $i = 1, \dots, m$, los cliques de G . Dado que $C_i \neq C_j \Leftrightarrow u_i \neq u_j$, es posible definir un orden sobre los cliques de G así: $C_i \leq C_j \Leftrightarrow u_i \alpha u_j$.

Ordenando las filas y las columnas de la matriz $CV(G)$ con \leq y α respectivamente, resulta que $CV(G)$ tiene la propiedad de unos consecutivos por filas y por columnas.

$b) \rightarrow c)$ Obvio.

$c) \rightarrow a)$ Sea α un orden sobre $V(G)$ tal que $CV(G)$ tiene la propiedad de unos consecutivos por filas. Luego los cliques de G son intervalos con respecto a α y por el Teorema 1.2.5, G es un grafo de intervalos propios. \square

B) ADYACENCIA

La matriz de *adyacencia* de un grafo G es la matriz de $n \times n$ $A(G) = (a_{ij})$ con

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } v_i v_j \in E(G) \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

En general una matriz simétrica cuadrada $(a_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ tiene la *forma Robinson* si sus valores decrecen desde la diagonal principal, es decir si i y j son dos enteros tales que $1 \leq i < j \leq n$, se cumple:

$$a_{ij} \geq a_{i(j+1)} \text{ y } a_{ij} \geq a_{(i-1)j}.$$

Teorema 1.2.25 *Un grafo G es de intervalos propios si y sólo si existe un orden total α , sobre $V(G)$, tal que $A(G)$ con sus filas y columnas ordenadas por α , tiene la forma Robinson.*

Demostración: Sea G un grafo de intervalos propios y $v_1 \alpha v_2 \alpha \dots \alpha v_n$ los vértices de G ordenados por α , un orden compatible con G (Teorema 1.2.4).

Sean i y j enteros tales que $1 \leq i < j \leq n$. Si $a_{i(j+1)} = 1$ entonces $v_i v_{j+1} \in E(G)$, dado que α es un orden compatible con G y $v_i \alpha v_j \alpha v_{j+1}$, se tiene que $v_i v_j \in E(G)$ con lo cual $a_{ij} = 1$. Análogamente se prueba la otra desigualdad.

Recíprocamente si existe un orden α en las condiciones del Teorema, sean v_i, v_j y v_k tres vértices de G tales que $v_i \alpha v_j \alpha v_k$. Si $v_i v_k \in E(G)$ luego $a_{ik} = 1$

con lo cual $a_{ij} = 1$ y $a_{jk} = 1$. Por lo tanto α es un orden compatible con G y G es un grafo de intervalos propios. \square

C) VECINOS

La *matríz de vecinos* $N(G)$ de un grafo G es la matríz de adyacencia de G con unos en la diagonal principal.

El siguiente resultado se deduce inmediatamente del anterior.

Teorema 1.2.26 *Un grafo G es de intervalos propios si y sólo si existe un orden total sobre $V(G)$ tal que $N(G)$ tiene la propiedad de unos consecutivos por columnas.*

Por triple astral y triple asteroidal

Tres vértices de un grafo G forman un *triple asteroidal* si, entre cualesquiera dos de ellos, existe un camino P en G tal que ningún vértice de P es adyacente al tercer vértice del triple.

Tres vértices de un grafo G forman un *triple astral* si, entre cualesquiera dos de ellos, existe un camino P en G tal que el tercer vértice del triple no está en P y nunca vértices consecutivos de P son adyacentes a él.

Teorema 1.2.27 (Lekkerkerker-Boland)[22] *Un grafo G es de intervalos si y sólo si G es cordal y no contiene triples asteroidales.*

Como se definió anteriormente, sea $N(G)$ la matríz de vecinos del grafo G . Se asocia a $N(G)$ el grafo bipartido no orientado $B_{N(G)}$ cuyo conjunto de vértices es $V_1 \cup V_2$, donde $V_1 = \{v_1^1, v_2^1, \dots, v_n^1\}$ y $V_2 = \{v_1^2, v_2^2, \dots, v_n^2\}$, y $v_i^1 v_j^2 \in E(B_{N(G)})$ si y sólo si $n_{ij} = 1$.

Tucker [34] muestra que una matríz de ceros y unos tiene la propiedad de unos consecutivos por columnas si y sólo si su grafo bipartido asociado no contiene ningún triple asteroidal.

Por la caracterización dada en 1.2.26 es evidente que:

Teorema 1.2.28 *Un grafo G es de intervalos propios si y sólo si $B_{N(G)}$ no tiene triples asteroidales.*

Jackowski [18] prueba que todo triple astral de G puede ser transformado en un triple asteroidal de $B_{N(G)}$.

Por otro lado si G no es cordal entonces G contiene algún ciclo sin cuerdas de longitud al menos 4, luego 3 vértices diferentes cualquiera del ciclo forman un triple astral.

Teorema 1.2.29 (Jackowski [18]) *Un grafo G es de intervalos propios si y sólo si G no contiene triples astrales.*

Demostración: Si G contiene un triple astral entonces $B_{N(G)}$ contiene un triple asteroidal. Luego, por el Teorema anterior, G no es un grafo de intervalos propios.

Recíprocamente si G no contiene triples astrales entonces es cordal. Por otro lado ninguno de los grafos de la Fig. 5.a puede ser subgrafo inducido de G , ya que cada uno de ellos contiene un triple astral. Luego por el Corolario 1.2.23 G es un grafo de intervalos propios. \square

1.3 Radio y centro

Sea G un grafo conexo y d la distancia en G .

La *excentricidad* $e(v)$ de un vértice v de G es $\max\{d(u, v), u \in V(G)\}$.

El *radio* $r(G)$ y el *diámetro* $d(G)$ son, respectivamente, la mínima y la máxima excentricidad.

El *centro* de G es el conjunto de todos los vértices v tales que $e(v) = r(G)$.

En el siguiente teorema G es un grafo de intervalos propios y α un orden compatible con G . Sean $[u_i, v_i]$, $i = 1, \dots, m$, los cliques de G (intervalos de $(V(G), \alpha)$) tales que $i < j$ implica $u_i \alpha u_j$.

Teorema 1.3.1 *Si G es un grafo de intervalos propios conexo entonces:*

1) $r(G) = \min\{e(u_i); i = 1, \dots, m\} = \min\{e(v_i); i = 1, \dots, m\}$.

2) *El centro de G es el intervalo $[a, b]$ donde*

$$a = \min\{u_i; e(u_i) = r(G), i = 1, \dots, m\} \text{ y}$$

$$b = \max\{v_i; e(v_i) = r(G), i = 1, \dots, m\}$$

(min y max respecto del orden α).

3) $d(G) = d(u_1, v_m)$.

Primero se probarán los siguientes lemas.

Lema 1.3.2 Para todo $v \in V(G)$, $e(v) = \max\{d(v, u_1), d(v, v_m)\}$.

Demostración: Si $x \in V(G)$ y $u_1 \alpha x \alpha v$ entonces, por d) del Teorema 1.2.14, $d(x, v) \leq d(u_1, v)$. Análogamente si $v \alpha x \alpha v_m$, $d(x, v) \leq d(v, v_m)$. Luego el resultado sigue de la definición de excentricidad. \square

Lema 1.3.3 El centro de G es un intervalo de $(V(G), \alpha)$.

Demostración: Sean x, y, z vértices de G tales que $x \alpha y \alpha z$ y x, z están en el centro de G . Luego, dado que d es una disimilaridad piramidal, $d(y, u_1) \leq d(u_1, z) \leq e(z)$ y $d(y, v_m) \leq d(x, v_m) \leq e(x)$. Con lo cual $e(y) \leq \max\{e(x), e(z)\}$, entonces y es un vértice del centro de G . Esto prueba que el centro de G es un intervalo respecto del orden α . \square

Lema 1.3.4 Si z es un elemento del centro de G luego existen u_i y v_j en el centro de G tales que $u_i \alpha z \alpha v_j$.

Demostración: Sea x el vértice adyacente a z en un camino mínimo de u_1 a z y sea $C_j = [u_j, v_j]$ un clique que contiene a x y z .

Dado que x es adyacente a v_j , existe un camino de u_1 a v_j de longitud $d(u_1, z)$. Entonces $d(u_1, v_j) \leq d(u_1, z)$. Como d es una disimilaridad piramidal, $d(v_j, v_m) \leq d(z, v_m)$. Por el Lema 1.3.2, $e(v_j) \leq e(z)$, luego v_j está en el centro de G .

El mismo razonamiento muestra que existe un clique $C_i = [u_i, v_i]$ tal que $z \in C_i$ y u_i es un elemento del centro de G . \square

Demostración del Teorema: Por el Lema 1.3.4, $r(G) = \min\{e(u_i), i = 1, \dots, m\} = \min\{e(v_i), i = 1, \dots, m\}$. El intervalo $[a, b]$ está contenido en el centro de G por el Lema 1.3.3.

Recíprocamente, sea z un elemento del centro de G , luego existen u_i y v_j en el centro de G tales que $u_i \alpha z \alpha v_j$ (Lema 1.3.4). Como $a \alpha u_i$ y $v_j \alpha b$ se tiene la parte 2) del Teorema.

La parte 3) del Teorema se deduce del Lema 1.3.2 y del hecho que d es piramidal. \square

En [20] se prueba que si G es un grafo conexo cordal entonces

$$(*) \quad \frac{1}{2}d(G) \leq r(G) \leq (\frac{1}{2}d(G)) + 1.$$

En el caso de grafos de intervalos propios se tiene el siguiente resultado.

Teorema 1.3.5 *Sea G un grafo de intervalos propios conexo luego $r(G) = \frac{1}{2}d(G)$ si $d(G)$ es par y $r(G) = \frac{d(G)+1}{2}$ si $d(G)$ es impar.*

Demostración: Si $d(G)$ es impar el resultado sigue directamente de (*).

En el otro caso, sea v el punto medio de un camino mínimo de u_1 a v_m . Por el Teorema anterior $e(v) = \frac{1}{2}d(G)$ entonces la desigualdad (*) implica que $r(v) = \frac{1}{2}d(G)$. \square

1.4 Planaridad

Teorema 1.4.1 *Un grafo de intervalos propios G es planar si y sólo si todo clique de G tiene a lo sumo 4 vértices.*

Demostración: Por el Teorema de Kuratowski la condición es necesaria. Sea G es un grafo de intervalos propios cuyos cliques tienen a lo sumo 4 vértices. Los cliques de G son intervalos de un orden total sobre $V(G)$ (Teorema 1.2.5) y se notarán C_1, C_2, \dots, C_m suponiendo que están ordenados de acuerdo con sus extremos izquierdos. Sin pérdida de generalidad se puede suponer que G es biconexo, luego $|C_i \cap C_{i+1}| \geq 2$ para todo $i = 1, \dots, m - 1$.

Sea G_i , $i = 1, \dots, m - 1$, el subgrafo de G inducido por $C_1 \cup \dots \cup C_i$. Se probará, por inducción sobre m , que para todo i , $1 \leq i \leq m$, G_i es un grafo planar y que existe una inmersión plana \hat{G}_i de G_i tal que $C_i \cap C_{i+1}$ está contenido en la cara exterior de \hat{G}_i .

Obviamente vale para $i = 1$. Se supone verdadero para i , $1 \leq i < m - 1$, entonces C_{i+1} puede sumergirse en una cara de \hat{G}_i , obteniendo una inmersión plana \hat{G}_{i+1} de G_{i+1} .

Si $C_{i+1} \cap C_{i+2}$ no está contenido en ninguna cara de \hat{G}_{i+1} entonces $|C_{i+1} \cap C_{i+2}| = 3$. Con lo cual $C_{i+1} = C_{i+2} = K_4$. La única posibilidad es que $C_{i+1} \cap C_{i+2} \subset C_i$, pero esto es imposible dado que $C_i \cap C_{i+1} \cap C_{i+2}$ está contenido propiamente en $C_{i+1} \cap C_{i+2}$.

De la validéz de la afirmación para $m - 1$ se puede construir una inmersión plana de $G_m = G$ como se hizo para G_{i+1} .

1.5 Un problema de aplicación

Dado un conjunto de individuos X y una disimilaridad $D : X \times X \rightarrow \mathbb{R}^+$, se quiere obtener una clasificación de X en grupos. Esta clasificación debe tener la propiedad de reflejar, lo más fielmente posible, la información proporcionada por D , pero además debe ser factible su visualización.

En [6] aparecen las jerarquías indexadas (fenogramas para la Taxonomía numérica [5]) como un modo de clasificación en el cual dos clases son disjuntas entre sí o una contiene a la otra. El Teorema de Benzecrí (1965) (ver [6]) define una biyección entre las jerarquías indexadas y las ultramétricas, proporcionando una herramienta para evaluar la distorsión de la representación jerárquica. Más precisamente, siendo (H, δ) una jerarquía indexada y u la ultramétrica que le corresponde por la biyección, el error cometido al representar D por (H, δ) se evalúa como la "distancia" entre D y u . Dicha distancia entre funciones puede ser definida de distintas maneras, aquí se usará $\Delta(D, u) = \frac{1}{2} \sum_{(x,y) \in X \times X} |D(x, y) - u(x, y)|$.

El problema de optimización jerárquica puede ahora transformarse en determinar una ultramétrica que minimice Δ . La complejidad de este problema fue estudiada por Krivanek y Moravek [19] quienes han encontrado que es NP-Hard.

Por otro lado el mismo problema restringido a las ultramétricas u tales que $u \leq D$ (esto es $u(x, y) \leq D(x, y)$ para todo $(x, y) \in X \times X$) es polinomial [6].

Extendiendo la idea de las jerarquías indexadas, Diday [7] introduce las *pirámides* en las cuales dos clases pueden cortarse bien. El Teorema de Benzecrí también es extendido por Diday que encuentra una biyección entre pirámides débilmente indexadas y disimilaridades piramidales (1.2.13). Ahora el problema de clasificación piramidal es encontrar una disimilaridad piramidal con mínima distancia a D . Este tema ha sido extensamente desarrollado por A. Batbedat [1].

Por otro lado, dada una disimilaridad D sobre X y un número real k , se define el grafo $G_D(k)$ con vértices en el conjunto X y $xy \in E(G_D(k))$ si y sólo si $D(x, y) \leq k$. El siguiente teorema es inmediato.

Teorema 1.5.1 *Si D y F son dos disimilaridades sobre X tales que $D \leq F$ (orden usual de funciones) entonces para todo número real k , $G_F(k)$ es un subgrafo inducido de $G_D(k)$.*

El siguiente teorema muestra la relación entre disimilaridades piramidales y grafos de intervalos propios. Su demostración es esencialmente la de la Proposición 8 de [7]. También Roberts demuestra este teorema en el contexto de matrices permutables a la forma Robinson [29].

Teorema 1.5.2 *Sea D una disimilaridad sobre X . Entonces D es piramidal si y sólo si existe un orden total α sobre X tal que, para todo número real k , $G_D(k)$ es un grafo de intervalos propios compatible con α .*

Demostración: Sea D una disimilaridad piramidal, luego existe un orden α tal que si $x\alpha y\alpha z$ entonces $D(x, z) \geq \max\{D(x, y), D(y, z)\}$. Sea k un número real, se verá que $G_D(k)$ es compatible con α . Si $xz \in E(G_D(k))$ entonces $D(x, z) \leq k$ luego $D(x, y) \leq k$ y $D(y, z) \leq k$ con lo cual $xy, yz \in E(G_D(k))$.

Recíprocamente se supone que para todo $k \in \mathbb{R}^+$, $G_D(k)$ es un grafo de intervalos propios compatible con α . Sean x, y, z tres elementos de X tales que $x\alpha y\alpha z$, luego si $k = D(x, z)$ entonces $xz \in E(G_D(k))$ con lo cual $xy, yz \in E(G_D(k))$. De aquí $D(x, y) \leq k$ y $D(y, z) \leq k$ entonces $D(x, z) \geq \max\{D(x, y), D(y, z)\}$ y D es piramidal. \square

Por analogía con los grafos de intervalos propios, si D es una disimilaridad piramidal y α es un orden tal que $x\alpha y\alpha z$ implica $D(x, y) \geq \max\{D(x, y), D(y, z)\}$, se dirá que D es compatible con α .

Por otro lado el conjunto de las disimilaridades sobre X , dotado del orden \leq de funciones, es un reticulado y el conjunto de disimilaridades piramidales compatibles con un orden fijo α es un subreticulado.

Si D es una disimilaridad cualquiera, se notará con I_D (resp. S_D) al conjunto de disimilaridades piramidales p tales que $p \leq D$ (resp. $p \geq D$) y con I_D^α (resp. S_D^α) al subconjunto de aquellas que son compatibles con α .

Sean p_α y P_α las siguientes disimilaridades sobre X , para todo $x, y \in X \times X$ tales que $x\alpha y$,

$$p_\alpha(x, y) = \min\{D(x', y'); x'\alpha x \wedge y\alpha y'; x', y' \in X\} \text{ y}$$

$$P_\alpha(x, y) = \max\{D(x', y'); x\alpha x' \wedge y'\alpha y; x', y' \in X\}$$

El siguiente resultado aparece en el cuaderno P de [1] en donde además se da un algoritmo para calcular p_α y P_α .

Teorema 1.5.3 p_α es el máximo de I_D^α y P_α es el mínimo de S_D^α .

Demostración: Por las definiciones es obvio que $p_\alpha \leq D$, $D \leq P_\alpha$ y que p_α y P_α son disimilaridades piramidales compatibles con α . Se mostrará que para todo $p \in I_D^\alpha$ se tiene $p \leq p_\alpha$. Sean $x, y \in X$ tales que $x\alpha y$, luego para todo $x', y' \in X$ con $x'\alpha x$ e $y\alpha y'$ se tiene, dado que p es piramidal compatible con α , $p(x, y) \leq p(x, y') \leq p(x', y')$ con lo cual $p(x, y) \leq p_\alpha(x, y)$.

Análogamente se prueba que para todo $p \in S_D^\alpha$, $P_\alpha \leq p$. \square

Corolario 1.5.4 Si p_α (resp. P_α) es compatible con algún β , orden total sobre X , entonces $p_\alpha \leq p_\beta$ (resp. $P_\beta \leq P_\alpha$).

Demostración: Por sus definiciones, $p_\alpha \in I_D^\beta$ y $P_\alpha \in S_D^\beta$. Entonces, por el teorema anterior, $p_\alpha \leq p_\beta$ y $P_\beta \leq P_\alpha$. \square

Dada una disimilaridad D sobre X , el problema de aproximación inferior (resp. superior) por disimilaridades piramidales es encontrar una disimilaridad piramidal p que minimice $\Delta(p, D)$, entre aquellos que pertenecen a I_D (resp. S_D).

Por el teorema anterior, las disimilaridades piramidales óptimas serán de la forma p_α y P_β para α y β órdenes totales sobre X .

Se llamará *API* y *APS* a las versiones de decisión de los problemas anteriores, esto es, siguiendo la formulación de [10]:

API (resp. *APS*):

Instancia: D una disimilaridad sobre X y k un entero no negativo.

Pregunta: ¿Existe una disimilaridad piramidal p sobre X , $p \leq D$ (resp. $p \geq D$) tal que $\Delta(p, D) \leq k$?

Se probará que los problemas *AGREGAR* y *SUPRIMIR* [35] en grafos de intervalos propios, que se describirán a continuación, se transforman en *API* y *APS* respectivamente.

AGREGAR (resp. *SUPRIMIR*) en grafos de intervalos propios:

Instancia: $G = (X, E)$ un grafo y k un entero no negativo.

Pregunta: ¿Existe E' , $E \subseteq E'$ (resp. $E' \subseteq E$) tal que $|E' - E| \leq k$ (resp. $|E - E'| \leq k$) y el grafo $G' = (X, E')$ es un grafo de intervalos propios?

Sea f la función cuyo dominio son las instancias de *AGREGAR* y cuyo

codominio son las instancias de *API*. La función f asigna a un grafo $G = (X, E)$ la disimilaridad g sobre X definida así:

$$g(x, y) = \begin{cases} 2 & \text{si } x \neq y \wedge xy \notin E \\ 1 & \text{si } xy \in E \\ 0 & \text{si } x = y \end{cases}$$

y a k lo deja invariante.

Es fácil ver que f puede ser computada en tiempo polinomial.

Sea $G = (X, E)$ y k una instancia *SI* de *AGREGAR*. Luego existe E' tal que $E \subseteq E'$, $|E' - E| \leq k$ y $G' = (X, E')$ es un grafo de intervalos propios. A partir de G' puede definirse, análogamente a lo hecho a partir de G , una disimilaridad p sobre X . Esta disimilaridad es piramidal debido al resultado obtenido en el Teorema 1.5.2, además es obvio que $p \leq g$ y que $\Delta(p, g) = |E' - E| \leq k$. Luego g, k es una instancia *SI* de *API*.

Recíprocamente, se supone que p es una disimilaridad piramidal tal que $p \leq g$ y $\Delta(p, g) \leq k$, donde $g = f(G)$ con $G = (X, E)$. Sea α un orden total sobre X compatible con p . Por el Teorema 1.5.3, $p \leq p_\alpha \leq g$ y por el Teorema 1.5.2 el grafo $G' = G_{p_\alpha}(1)$ es un grafo de intervalos propios. A su vez el grafo $G = G_g(1)$ es un subgrafo inducido de G' (Teorema 1.5.1). Dado que p_α sólo toma valores en $\{0, 1, 2\}$ se tiene que $|E(G') - E| = \Delta(p_\alpha, g) \leq \Delta(p, g) \leq k$.

El mismo razonamiento muestra que el problema *SUPRIMIR* en grafos de intervalos propios se transforma en *APS*.

Para evaluar la complejidad de *SUPRIMIR* se usará el problema de existencia de camino hamiltoniano restringido a grafos sin triángulos. Este problema se notará *CH_{ST}* y su especificación es:

Instancia: $G = (X, E)$ un grafo sin triángulos.

Pregunta: ¿Contiene G un camino hamiltoniano?

El problema *CH_{ST}* es NP-Completo ya que es más general que el de existencia de camino hamiltoniano restringido a grafos bipartidos que es NP-Completo [10].

Se probará que *CH_{ST}* se transforma en *SUPRIMIR*.

Sea f la función de las instancias de *CH_{ST}* en las instancias de *SUPRIMIR*, la cual asigna a cada grafo $G = (X, E)$ el mismo grafo acompañado del entero $k = m - n + 1$, donde $m = |E|$ y $n = |X|$.

Sea $G = (X, E)$ una instancia *SI* de CH_{ST} , luego existe un camino hamiltoniano L de G . El camino L es un grafo de intervalos propios (ya que todo camino lo es) y si $E' = E(L)$ entonces $|E - E'| = m - (n - 1) = k$. Con lo cual G, k es una instancia *SI* de *SUPRIMIR*.

Recíprocamente sea $G = (X, E)$, $k = m - n + 1$ un par de la imagen de f que es una instancia *SI* de *SUPRIMIR*. Luego G no tiene triángulos y existe $G' = (X, E')$ subgrafo de G tal que G' es un grafo de intervalos propios y $|E - E'| \leq m - n + 1$. Por el Teorema 1.2.22, G' no tiene ciclos ni K_{13} como subgrafos inducidos. Luego G' es un conjunto de caminos disjuntos. Dado que $|E'| \geq n - 1$, se tiene que $|E'| = n - 1$, con lo cual G' es un camino hamiltoniano de G . Esto prueba que G es una instancia *SI* de CH_{ST} .

Usando las transformaciones de CH_{ST} en *SUPRIMIR* y de *SUPRIMIR* en *APS* se tiene que *APS* es NP-Completo, con lo cual queda probado el siguiente resultado.

Teorema 1.5.5 *El problema de aproximación superior por índices piramidales es NP-Hard.*

Capítulo 2

Grafos de intervalos propios mínimos

Los resultados de este capítulo aparecen en [13]. Se prueba que si G es un grafo de intervalos propios entonces $|V(G)| \geq 2c(G) - c(K(G))$ siendo $c(G)$ el número de cliques de G y K la aplicación que a cada grafo asigna su grafo de cliques (es decir, el grafo cuyos vértices son los cliques de G y dos cliques son adyacentes si y sólo si tienen intersección no vacía). Si la igualdad vale se dice que G es un *grafo de intervalos propios mínimo*.

En la sección 2.2 se prueba que la aplicación K de la clase de los grafos de intervalos propios mínimos en la clase de los grafos de intervalos propios es biyectiva (salvo isomorfismos).

En la sección 2.3 se encuentra la mayor clase clique-cerrada Σ ($K(\Sigma) = \Sigma$) contenida en la unión de la clase de los grafos de intervalos propios mínimos conexos y la de los grafos completos.

Por último, en la sección 2.4 se determina el número de grafos de intervalos propios mínimos conexos con n vértices.

2.1 Generalidades

Sea G un grafo de intervalos propios y r una representación propia de G . Como en el capítulo anterior, se llamará $Ext(r)$ al conjunto de extremos de los intervalos de la imagen de r .

Teorema 2.1.1 Si G es un grafo de intervalos propios entonces $\min\{|Ext(r)|; r \text{ representación propia de } G\} = 2|V(G)| - c(G)$.

Demostración: Sea r una representación propia de G . Se supone que v_1, \dots, v_n es un orden sobre $V(G)$ tal que, para todo $i, i = 1, \dots, n$, $r(v_i) = [a_i, b_i]$, con $a_i < a_k$ si $i < k$.

La única igualdad posible entre dos puntos extremos de los intervalos $[a_i, b_i], i = 1, \dots, n$, es de la forma $b_i = a_j$ con $i \leq j$ (la igualdad vale sólo para vértices aislados). En este caso el conjunto $\{v_i, v_{i+1}, \dots, v_j\}$ es un clique de G . Luego, $|Ext(r)| \geq 2|V(G)| - c(G)$.

Es evidente que es posible modificar r de modo que a cada clique de G corresponda una igualdad de puntos extremos, luego el Teorema queda demostrado. \square

Teniendo en cuenta este Teorema, una representación propia, de un grafo de intervalos propios G , se llamará *mínima* si el número de puntos extremos de sus intervalos es $2|V(G)| - c(G)$. El algoritmo del Teorema 1.2.10 construye una representación mínima de G a partir de la representación F-G de G .

Sea G un grafo de intervalos propios y $v_1 \leq \dots \leq v_n$ un orden compatible con G . Por el Teorema 1.2.5 cada clique de G es un intervalo $[v_i, v_j]$. Luego $K(G)$ (1.2.17) es también un grafo de intervalos propios, asignando a cada $[v_i, v_j]$ el intervalo real $[i, j]$. Se dirá que $[v_i, v_j] \rightarrow [i, j]$ es la representación propia de $K(G)$ inducida por el orden $v_1 \leq \dots \leq v_n$.

Teorema 2.1.2 Si G es un grafo de intervalos propios y R es una representación propia de $K(G)$ inducida por un orden compatible sobre $V(G)$ entonces $|V(G)| \geq |Ext(R)| \geq 2c(G) - c(K(G))$.

Demostración: Dado que R es una representación inducida de $K(G)$ se tiene que $|V(G)| \geq |Ext(R)|$ y $|Ext(R)| \geq 2c(G) - c(K(G))$ por el Teorema anterior. \square

Definición 2.1.3 Un grafo de intervalos propios es *mínimo* si

$$|V(G)| = 2c(G) - c(K(G)).$$

Roberts en [27] define la siguiente relación de equivalencia E , sobre los vertices de un grafo G : xEy si y sólo si $xy \in E(G)$ y $(\forall z)(xz \in E(G) \Leftrightarrow yz \in E(G))$. El grafo cociente es denotado por G^* y G es *reducido* si $G \simeq G^*$. El siguiente Teorema fue probado por Roberts en [27].

Teorema 2.1.4 *Un grafo de intervalos propios conexo reducido y no trivial tiene exactamente dos ordenes compatibles, uno el inverso del otro.*

Teorema 2.1.5 *Un grafo de intervalos propios G es mínimo si y sólo si G es reducido y, para algún orden compatible sobre $V(G)$, todo vértice de G es el primero o el último elemento de un clique de G .*

Demostración: Es facil ver que para todo grafo S , $K(S) = K(S^*)$.

Sea G un grafo de intervalos propios mínimo. Dado que G^* es isomorfo a un subgrafo inducido de G , G^* es también un grafo de intervalos propios. Luego $|V(G^*)| \geq 2c(G^*) - c(K(G^*)) = 2c(G) - c(K(G)) = |V(G)|$. Entonces, $|V(G^*)| = |V(G)|$, con lo cual G es reducido.

Sea R una representación propia de $K(G)$ inducida por un orden compatible sobre $V(G)$. Por el Teorema 2.1.2 , $|V(G)| = |Ext(R)|$ que es lo que se faltaba demostrar.

Recíprocamente, sea G un grafo cumpliendo las hipótesis del Teorema. Sea $\{C_1, \dots, C_m\}$ un clique de $K(G)$. Como G es reducido por hipótesis, $|C_1 \cap \dots \cap C_m| \leq 1$. Dado que los cliques de G son intervalos (con respecto a un orden compatible) y que para todo i, j $C_i \cap C_j \neq \emptyset$, la intersección total es no vacía. Entonces $|C_1 \cap \dots \cap C_m| = 1$. Luego, toda representación R de $K(G)$ inducida por un orden compatible sobre $V(G)$ es mínima (ver la demostración del Teorema 2.1.1), es decir $|Ext(R)| = 2c(G) - c(K(G))$. Pero $V(G) = Ext(R)$, luego G es mínimo. \square

La Figura 6.a) muestra un grafo de intervalos propios reducido pero no mínimo.

2.2 Resultado Principal

En el Corolario 1.2.19 se ha probado que la aplicación clique K restringida a los grafos de intervalos propios es una suryección sobre la clase de los

grafos de intervalos propios (más aún, por el Teorema 1.2.18, los grafos de intervalos propios son los grafos de cliques de los grafos de intervalos) pero no es inyectiva, como se muestra en la Figura 6.

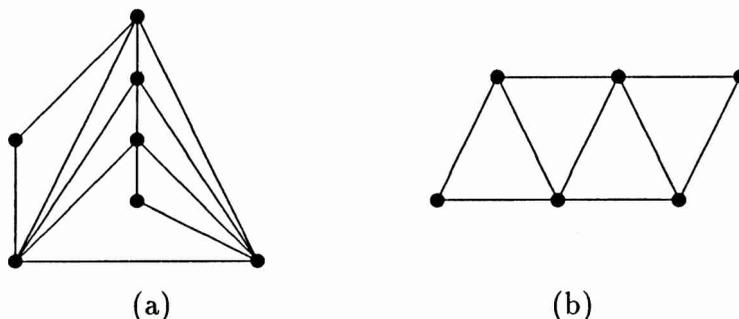


Fig.6. Dos grafos de intervalos propios reducidos con el mismo grafo de cliques.

Teorema 2.2.1 *La aplicación K restringida a la clase de los grafos de intervalos propios mínimos es una biyección (salvo isomorfismos) sobre la clase de los grafos de intervalos propios.*

Se verán algunos resultados preliminares.

Sea r una representación propia de un grafo de intervalos propios G . Como en la demostración del Teorema 1.2.18 se define el grafo $H(r)$ así $V(H(r)) = Ext(r)$ y para distintos vértices $x, y, xy \in E(H(r))$ si y sólo si existe $v \in V(G)$ tal que $x, y \in r(v)$.

El siguiente Lema muestra algunas propiedades del grafo $H(r)$.

Lema 2.2.2 1) *Sea G un grafo de intervalos propios. Si r es una representación propia de G entonces $H(r)$ es un grafo de intervalos propios tal que $K(H(r)) \simeq G$. Más aún, r es una representación propia mínima de G si y sólo si $H(r)$ es un grafo de intervalos propios mínimo.*

2) *Si S es un grafo de intervalos propios mínimo, entonces existe una representación propia mínima s de $K(S)$ tal que $H(s) \simeq S$.*

3) *Si s y t son representaciones propias mínimas de un grafo de intervalos propios G , entonces $H(s) \simeq H(t)$.*

Demostración: 1) Dado que r una representación propia, la familia de los cliques de $H(r)$ es $(r(v) \cap Ext(r))_{v \in V(G)}$ y dos cliques $(r(u) \cap Ext(r))$ y $(r(v) \cap Ext(r))$ son adyacentes en $K(H(r))$ si y sólo si $r(u) \cap r(v) \neq \emptyset$. Luego $K(H(r))$ y G son isomorfos.

Más aún, por el Teorema 1.2.5, $H(r)$ es un grafo de intervalos propios, ya que sus cliques son intervalos considerando a $Ext(r)$ ordenado por el orden usual de los números reales.

Además r es una representación propia mínima de G si y sólo si $|Ext(r)| = 2|V(G)| - c(G)$ y dado que $K(H(r))$ y G son isomorfos, $|Ext(r)| = 2|V(K(H(r)))| - c(K(H(r)))$, luego $V(H(r)) = 2c(H(r)) - c(K(H(r)))$ con lo cual $H(r)$ es mínimo y 1) queda probado.

2) Sea s una representación propia de $K(S)$ inducida por un orden compatible sobre $V(S)$. Luego $H(s)$ es un subgrafo inducido de S . Por el Teorema 2.1.2, $|V(S)| = |Ext(s)| = |V(H(s))|$, lo cual implica que $H(s) \simeq S$. Además del punto 1) se tiene que s es una representación mínima.

3) Se supone que G es conexo (en el caso general estudia cada componente).

Sea $v_1 \leq v_2 \leq \dots \leq v_n$ un orden sobre $V(G)$ tal que, para todo $i, i = 1, \dots, n$, $s(v_i) = [a_i, b_i]$ con $a_i < a_k$ si $i < k$. Luego, $v_1 \leq v_2 \leq \dots \leq v_n$ es un orden compatible con G (ver la demostración del Teorema 1.2.5).

Sean $[c_1, d_1], \dots, [c_n, d_n]$ los intervalos de la imagen de t ordenados también por sus extremos izquierdos y sea $v_{k_1} \dots v_{k_n}$ orden compatible sobre $V(G)$ tal que $t(v_{k_i}) = [c_i, d_i], i = 1, \dots, n$.

Las clases de equivalencia de la relación E , definida anteriormente, son intervalos de cualquier orden compatible sobre $V(G)$.

Por el Teorema 2.1.4, se puede suponer, sin perder generalidad, que el orden de las clases de equivalencia es el mismo tanto cuando es inducido por sus representantes en la secuencia v_1, \dots, v_n como en v_{k_1}, \dots, v_{k_n} (si no es así, cambiar t por la representación $v \rightarrow [-y, -x]$, donde $t(v) = [x, y]$).

La biyección h sobre $V(G)$ dada por $h(v_i) = v_{k_i}$ es entonces una permutación sobre cada clase de equivalencia. Luego, $t' = t \circ h$ es una representación propia mínima de G tal que $H(t) = H(t')$ y, para todo $v_i \in V(G)$, $t'(v_i) = [c_i, d_i]$.

Se define la función $f : Ext(s) \rightarrow Ext(t')$ by

$$f(a_i) = c_i \text{ y } f(b_i) = d_i .$$

La función f está bien definida ya que si $b_i = a_j$, con $i < j$, los intervalos $s(v_i), s(v_{i+1}), \dots, s(v_j)$ representan los vértices de un clique C de G . Entonces

$t'(v_i), \dots, t'(v_j)$ también representan los vértices of C . Luego, por ser t' una representación propia mínima (ver la demostración del Teorema 2.1.1), $d_i = c_j$. Del mismo modo, intercambiando s y t' , puede probarse que $d_i = c_j$ implica $b_i = a_j$. Luego f es inyectiva y dado que $|Ext(s)| = |Ext(t')|$ se tiene que f es biyectiva.

Para ver que f preserva las adyacencias se probará que si $x \in Ext(s)$ entonces $x \in [a_i, b_i]$ si y sólo si $f(x) \in [c_i, d_i]$, para todo $i = 1, \dots, n$. Sea $j \geq i$ entonces $x = a_j \leftrightarrow v_i v_j \in E(G) \leftrightarrow c_j \in [c_i, d_i]$ y análogamente si $x = b_j$.

Luego si $x, y \in Ext(s)$; $xy \in E(H(s))$ si y sólo si $f(x)f(y) \in E(H(t'))$, con lo cual $H(s) \simeq H(t')$. Pero $H(t) = H(t')$ entonces $H(s) \simeq H(t)$. \square

Demostración del Teorema 2.2.1. Sea G un grafo de intervalos propios y r a una representación propia mínima de G . Por 1) del Lema 2.2.2 $M = H(r)$, es un grafo de intervalos propios mínimo tal que $K(M) \simeq G$.

Sean S y T grafos de intervalos propios mínimos y h un isomorfismo de $K(S)$ en $K(T)$. Por 2) del Lema 2.2.2 existen representaciones propias mínimas s y t , de $K(S)$ y $K(T)$ respectivamente, tales que $H(s) \simeq S$ y $H(t) \simeq T$. Es claro que $t \circ h$ es una representación propia mínima de $K(S)$. Luego, por 3) del Lema 2.2.2, $H(s) \simeq H(t \circ h) = H(t)$. \square

2.3 Una clase clique-cerrada

Una clase Π de grafos es clique-cerrada [17] si $K(\Pi) = \{K(G); G \in \Pi\} = \Pi$.

Como se ha probado en el Corolario 1.2.19 la clase de los grafos de intervalos propios es clique-cerrada.

Para un grafo G cualquiera, Hedman [17] denota $K(K(G))$ por $K^2(G)$, y en general, $K(K^{n-1}(G)) = K^n(G)$. Además prueba que para cualquier grafo de intervalos propios conexo y no trivial G , vale que $|V(G)| > |V(K(G))|$. Esto le permite definir el *índice* de G como el menor entero positivo n tal que $K^n(G)$ es un grafo trivial. Luego, toda clase clique-cerrada que contenga grafos de intervalos propios debe intersectar a la clase de los grafos completos.

Sea Ω la clase de los grafos de intervalos propios mínimos y conexos unión la clase de los grafos completos. El grafo de la Fig. 6 b) es mínimo pero su grafo de cliques es $K_4 - \{\text{una arista}\}$, lo cual muestra que Ω no es clique cerrada. Hedman [17] asegura que son muy pocas las clases de grafos clique-

cerradas conocidas. En lo que sigue se presentará una de ellas contenida propiamente en Ω y que además es la más grande respecto de la inclusión.

Primero se construye la secuencia de grafos $(G_h^m)_{m \geq 1}$ aplicando sucesivamente la inversa de la aplicación clique K de la clase de los grafos de intervalos propios en la clase de los grafos de intervalos propios mínimos (ver Teorema 2.2.1), comenzando con el grafo completo K_h . Se define $G_h^1 = K_h$. Usando el algoritmo del Teorema 1.2.10 se obtiene una representación propia mínima de K_h y se define $G_h^2 = H(r)$. Por el Lema 2.2.2 G_h^2 es un grafo de intervalos propios mínimo y $K(G_h^2)$ es isomorfo a G_h^1 . Del mismo modo se obtiene G_h^3 y así sucesivamente. Es fácil ver que, para todo entero $h \geq 1$, la secuencia puede construirse inductivamente usando la matriz $CV(G)$ (definida en el capítulo anterior) de la siguiente manera: $G_h^1 = K_h$; la matriz $CV(G_h^{m+1})$ tiene los unos de la i -ésima fila en las columnas $i, \dots, i+h-1$ y se obtiene de $CV(G_h^m)$ agregándole $h-1$ filas y $h-1$ columnas.

Luego, para todo $m \geq 1$, los cliques de G_h^m son isomorfos a K_h . La Fig. 7 muestra los tres primeros grafos de la secuencia (G_3^m) .

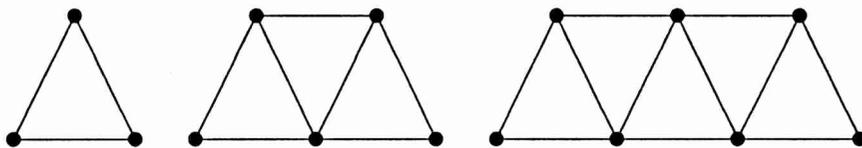


Fig. 7: Los tres primeros grafos de la secuencia (G_3^m)

Teorema 2.3.1 $\Sigma = \{G_h^m; m \geq 1, h \geq 1\}$ es una clase clique-cerrada contenida en Ω . Además si Π es una clase clique-cerrada y $\Pi \subseteq \Omega$ entonces $\Pi \subseteq \Sigma$.

Demostración: Por construcción, Σ es una clase clique-cerrada contenida en Ω . Sea $G \in \Pi$, si G es completo entonces $G \in \Sigma$. Si el índice i de G es 2, entonces $K(G) = K_h$ para algún $h \geq 2$. Luego, por el Teorema 2.2.1, G es isomorfo a G_h^2 con lo cual $G \in \Sigma$. Si en cambio $i > 2$ entonces $K^{i-2}(G)$ tiene índice 2 y $K^{i-2}(G) \in \Sigma$. Como K es una biyección de la clase de los grafos de intervalos propios en los mínimos entonces, dado que $K^{i-2}(G)$ es un grafo de intervalos propios mínimo y $K(K^{i-3}(G)) = K^{i-2}$, se

tiene que $K^{i-3}(G) \in \Sigma$. Con el mismo razonamiento se prueba que los grafos $K^{i-4}(G), \dots, G$ están en Σ . \square

La fórmula $|V(G_h^m)| = m(h-1) + 1$ muestra que el número de grafos de Σ con n vértices es el número de divisores $n-1$.

2.4 Número de grafos de intervalos propios mínimos conexos

En [24] Maehara enumera los grafos de intervalos propios conexos con n vértices usando $(0, 1, -1, \sqrt{-1})$ -secuencias apropiadas. Haciendo pequeñas modificaciones es posible enumerar los grafos de intervalos propios conexos mínimos con n vértices.

La herramienta principal está dada por el Teorema 2.1.5.

Sea B_n el conjunto de secuencias de n elementos, $n > 2$, b_1, \dots, b_n tal que:

- (1) $b_i = 0$ o $b_i = 1$ o $b_i = -1$, $i = 1, \dots, n$.
- (2) $b_1 = 1$ y $b_n = -1$.
- (3) $b_1 + \dots + b_j > 0$ para $j = 1, \dots, n-1$ y $b_1 + \dots + b_n = 0$.
- (4) Si $b_i = 1$ entonces $b_{i+1} \neq -1$, $i = 1, \dots, n-1$.

Se denota con B_n^s al conjunto de secuencias b_1, \dots, b_n de B_n tal que $b_i = -b_{n-i+1}$.

Por el Teorema 2.1.4 un grafo de intervalos propios reducido y conexo G tiene exactamente dos órdenes compatibles, \leq y \geq , uno el inverso del otro. El grafo G se llama simétrico si la biyección monótona creciente de $(V(G), \leq)$ en $(V(G), \geq)$ es un automorfismo de G .

El siguiente lema es análogo al Lema 6 de [24] pero su demostración está adaptada a las definiciones y los resultados actuales. Se denota M_n al número de grafos de intervalos propios conexos mínimos y M_n^s al número de aquellos que son simétricos.

Lema 2.4.1 Para $n > 2$ se tiene $M_n^s = |B_n^s|$ y $M_n = \frac{1}{2}(|B_n| + |B_n^s|)$.

Demostración: Sea A_n el conjunto de pares (G, \leq) (salvo isomorfismos) siendo G un grafo de intervalos propios conexo mínimo con n vértices y \leq un orden compatible con G y sea A_n^s el conjunto de pares $(G, \leq) \in A_n$ con G

simétrico. Dado $(G, \leq) \in A_n$, por el resultado 2.1.5, es posible etiquetar los vértices de G del siguiente modo: 1 (resp. -1) si es primero (resp. último) y 0 si cumple con ambas condiciones.

La secuencia obtenida pertenece a B_n ya que (2) y (3) se verifican por ser G un grafo de intervalos propios conexo y (4) por ser reducido.

Luego queda definida una aplicación de A_n en B_n que es una biyección de $A_n - A_n^s$ en $B_n - B_n^s$ y una suryección de A_n^s en B_n^s la cual asigna la misma secuencia sólo a los pares (G, \leq) y (G, \geq) .

Entonces, $M_n^s = |A_n^s| = |B_n^s|$ y $M_n = \frac{1}{2}|A_n| = \frac{1}{2}(|B_n| - |B_n^s|) + |B_n^s|$ y el Lema queda demostrado. \square

Es claro que $M_1 = M_1^s = 1$ y $M_2 = 0$. Para los otros casos se tiene el siguiente resultado.

Teorema 2.4.2 Para $n > 2$,

$$M_n^s = \begin{cases} q_{n/2,1} + \sum_{k=2}^{(n/2)-1} (q_{n/2,k} - q_{(n/2)-1,k-1}) & \text{si } n \text{ es par} \\ \sum_{k=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} q_{\lfloor n/2 \rfloor, k} & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

$$M_n = 1/2(q_{n-1,1} + M_n^s)$$

donde $q_{m,k}$ esta definido por $q_{m,k} = 0$ para $k \leq 0$ o $k > m$,

$$q_{1,1} = q_{2,1} = q_{2,2} = 1,$$

$$q_{m,k} = q_{m-1,k} + q_{m-1,k-1} + q_{m-1,k+1} - q_{m-2,k} \quad \text{para } m > 2 \text{ y } k > 0.$$

Demostación: Para calcular $|B_n|$ y $|B_n^s|$ en forma inductiva, se introduce el número $q_{m,k}$, $0 < m < n$, de subsecuencias de B_n b_1, \dots, b_m de m elementos consecutivos con $b_1 + \dots + b_m = k$.

Dado que el último elemento de toda secuencia de B_n es -1 , se tiene que $|B_n| = q_{n-1,1}$.

Obviamente $q_{m,k} = 0$ para $k \leq 0$ o $k > m$ y $q_{1,1} = q_{2,1} = q_{2,2} = 1$. Como $b_m \in \{0, 1, -1\}$ y $b_m = 1$ implica $b_{m-1} \neq -1$, se tiene que $q_{m,k} = q_{m-1,k} + q_{m-1,k-1} + q_{m-1,k+1} - q_{m-2,k}$ si $m > 2$ y $k > 0$.

Las secuencias de B_n^s están totalmente determinadas por los primeros $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ elementos y, si n es par, por la condición (4) $b_{\frac{n}{2}} \neq 1$. Luego el resto del Teorema queda probado usando el Lema anterior. \square

La siguiente tabla contiene el número ct_n de grafos de intervalos propios conexos con n vértices, calculado por Maehara [24], y los valores de M_n y M_n^s para $n = 1, \dots, 10$.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
ct_n	1	1	2	4	10	26	76	232	750	2494
M_n	1	0	1	1	2	3	6	11	23	47
M_n^s	1	0	1	1	2	2	4	5	9	12

Capítulo 3

Grafos Arbóreos

Cuando se quiere generalizar la idea de grafos de intervalos propios se presentan distintas alternativas surgidas de cada una de las caracterizaciones que se han estudiado. La generalización que aquí se desarrollará se basa en la caracterización 1.2.5. Un grafo conexo G es arbóreo [2] si existe un árbol T , generador de G , tal que todo clique de G induce un subárbol de T (la definición se extiende a grafos no conexos).

En la sección 3.2 se obtienen caracterizaciones de los grafos arbóreos: por propiedades de \mathcal{C}^* , como grafo compatible con un bosque, por propiedades de sus cliques, por grafos de intervalos propios y tres caracterizaciones métricas, que generalizan las obtenidas en el capítulo 1 para grafos de intervalos propios [14] y por la aplicación clique.

En la sección 3.3 se estudia la relación de la clase de los grafos arbóreos con otras clases de grafos: se prueba la inclusión de la clase de los grafos de intervalos en la de los arbóreos y se dan condiciones necesarias y suficientes para que un grafo arbóreo sea cordal (resp. de intervalos, resp. de intervalos propios).

3.1 Generalidades

Definición 3.1.1 *Un grafo simple y conexo G es arbóreo si existe un árbol T , generador de G , tal que todo clique de G induce un subárbol de T (ver Fig. 8). Un grafo simple es arbóreo si cada una de sus componentes conexas lo es.*



Fig. 8 : a) Grafo arbóreo R_4 . b) T árbol generador de R_4 .

Un hipergrafo $H = (X, E_1, E_2, \dots, E_m)$ se llama *arbóreo* [3] si existe un árbol A , con X como conjunto de vértices y tal que, para toda hiperarista $E_i, i = 1, \dots, m, A[E_i]$ es un subgrafo conexo (o un subárbol) de A .

En [3] aparecen varias caracterizaciones de hipergrafos arbóreos. Algunas de ellas se darán aquí así como las definiciones necesarias:

Dado el hipergrafo $H = (X, E_1, E_2, \dots, E_m)$, su grafo de líneas (también llamado representativo o adjunto) $L(H)$ es el grafo de intersección de la familia de hiperaristas de H .

Definición 3.1.2 Una familia $(E_i)_{i \in I}$ tiene la propiedad de Helly si para todo $J \subseteq I$ se cumple la implicación:

$$(\forall (i, j) \in J \times J) (E_i \cap E_j \neq \emptyset) \rightarrow \bigcap_{i \in J} E_i \neq \emptyset$$

Teorema 3.1.3 (ver [3]) Un hipergrafo H es arbóreo si y sólo si la familia de sus hiperaristas tiene la propiedad de Helly y $L(H)$ es cordal.

Luego se tiene inmediatamente el resultado siguiente:

Teorema 3.1.4 Un grafo G es arbóreo si y sólo si sus cliques verifican la propiedad de Helly y $K(G)$ es cordal.

Cada arista de $L(H)$ puede ser valuada con el entero $w(E_i, E_j) = |E_i \cap E_j|$. Si F es un subgrafo parcial (no inducido) de $L(H)$ sin ciclos (un bosque de $L(H)$), el peso de F es por definición: $w(F) = \sum_{u \in E(F)} w(u)$.

Se llama *número ciclomático* del hipergrafo H al entero:

$$\mu(H) = \sum_{j=1}^m |E_j| - |X| - w_H$$

donde w_H es el peso de un bosque w -maximal de $L(H)$.

Por otro lado se define el *hipergrafo dual* de H así:

$H^* = (\{E_1, \dots, E_m\}, (E(x))_{x \in X})$ con $E(x) = \{E_i; 1 \leq i \leq m, x \in E_i\}$.

Si H^* es arbóreo se dice que H es coarbóreo. Haciendo uso del número ciclomático de un hipergrafo se tienen los siguientes resultados:

Teorema 3.1.5 (*Acharya, Las Vergnas*): Sea H un hipergrafo; $\mu(H) = 0$ si y sólo si H es coarbóreo.

Corolario 3.1.6 *Un hipergrafo H es arbóreo si y sólo si $\mu(H^*) = 0$.*

Luego reconocer un hipergrafo arbóreo es simple ya que se reduce al problema de encontrar un árbol de peso máximo. Lamentablemente generar los cliques de un grafo G cualquiera no es sencillo. En [33] los autores dan un algoritmo que resuelve este problema en tiempo $O(|V(G)||E(G)||c(G)|)$. Pero $|c(G)|$ no es polinomial.

Por otro lado los resultados mencionados anteriormente proporcionan una forma práctica de decidir si un hipergrafo es arbóreo y a su vez construir un árbol adecuado [21].

En el caso particular en que está dado un grafo G y $\mathcal{C} = (V(G), \mathcal{C}(G))$ es el hipergrafo de sus cliques, es claro que G es un grafo arbóreo si y sólo si \mathcal{C} es un hipergrafo arbóreo que equivale a que $\mu(\mathcal{C}^*) = 0$. Dado que $\mathcal{C}^* = (V(G), \mathcal{C}(v))_{v \in V(G)}$ donde $\mathcal{C}(v) = \{C; C \in \mathcal{C}(G), v \in C\}$ es evidente que $L(\mathcal{C}^*) = G$. Luego se valúan las aristas de G así: $p(vw) = |\mathcal{C}(v) \cap \mathcal{C}(w)| = |\{C \in \mathcal{C}(G); v, w \in C\}|$.

Si C es un clique de G sea

$$p_C(vw) = \begin{cases} 1 & \text{si } v, w \in C \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

Es obvio que $p(v, w) = \sum_{C \in \mathcal{C}(G)} p_C(vw)$.

Si T es un árbol generador de G entonces

$$\sum_{vw \in E(T)} p_C(vw) \leq |C| - 1.$$

Luego

$$p(T) = \sum_{vw \in E(T)} p(vw) = \sum_{vw \in E(T)} \sum_{C \in \mathcal{C}(G)} p_C(vw) = \sum_{C \in \mathcal{C}(G)} \sum_{vw \in E(T)} p_C(vw) \leq$$

$$\sum_{C \in \mathcal{C}(G)} (|C| - 1) = \sum_{C \in \mathcal{C}(G)} |C| - c(G).$$

Por lo tanto si T es p -maximal

$$p(T) = \sum_{C \in \mathcal{C}(G)} |C| - c(G)$$

y todo clique de G genera un subárbol de T . Con lo cual se tiene el siguiente teorema.

Teorema 3.1.7 *Sea G un grafo conexo con sus aristas valuadas por $p(vw) = |\{C \in \mathcal{C}(G); v, w \in C\}|$. G es arbóreo si y sólo si existe un árbol generador T p -maximal con*

$$p(T) = \sum_{C \in \mathcal{C}(G)} |C| - c(G).$$

3.2 Caracterizaciones

Por propiedades de \mathcal{C}^*

Definición 3.2.1 *Sea G un grafo conexo, se dirá que la familia $\mathcal{C}^*(G) = (C(v))_{v \in V(G)}$ es árbol-Helly si existe un árbol T generador de G tal que si v, z, w son tres vértices de G y z pertenece al único camino de v a w en T entonces $C(v) \cap C(w) \subseteq C(z)$.*

Teorema 3.2.2 *Un grafo conexo G es arbóreo si y sólo si $\mathcal{C}^*(G)$ es una familia árbol-Helly.*

Demostración: Si G es arbóreo existe un árbol T , generador de G , tal que todo clique de G induce un subárbol de T .

Sean v, z, w tres vértices de G . Si $C \in C(v) \cap C(w)$ entonces $vw \in C$. Dado que C es un clique de G , C induce un subárbol de T , luego si z es un vértice del único camino de v a w en T , $z \in C$ con lo cual $C \in C(z)$.

Recíprocamente si $\mathcal{C}^*(G) = (C(v))_{v \in V(G)}$ es una familia árbol-Helly y T es el árbol correspondiente, se probará que todo clique de G induce un subárbol de T .

Sea C un clique de G y sean v, w dos elementos de C , si z es un vértice del único camino de v a w en T , entonces $C(v) \cap C(w) \subseteq C(z)$, $C \in C(z)$, luego $z \in C$. \square

Como grafo compatible con un bosque

Sea G un grafo simple conexo y T un árbol generador de G ; para todo par de vértices v y w de G se notará T_{vw} al conjunto de vértices del único camino de v a w en T .

Definición 3.2.3 Con la notación anterior. Se dice que G es compatible con un árbol T , generador de G , si $vw \in E(G)$ implica que para todo z distinto de v y w , $z \in T_{vw}$ se tiene que $vz \in E(G)$ y $zw \in E(G)$.

Si G no es conexo, se dirá que G es compatible con un bosque si cada una de sus componentes conexas es compatible con un árbol.

Teorema 3.2.4 G es arbóreo si y sólo si es compatible con un bosque.

Demostración: Sin pérdida de generalidad se puede suponer que G es conexo.

Si G es arbóreo entonces existe un árbol T , generador de G , tal que todo clique de G induce un subárbol de T . Sean v y w dos vértices de G adyacentes y sea $z \in T_{vw}$. Existe un clique C de G tal que $v, w \in C$, pero C induce un subarbol de T , luego $z \in C$. Con lo cual $vz, zw \in E(G)$.

Recíprocamente si G es compatible con un árbol T . Sea C un clique de G se mostrará que C induce un subárbol de T . Sean $v, w \in C$ y $z \in T_{vw}$. Si $r \in C$ entonces $vr \in E(G)$ y $wr \in E(G)$. Dado que T es un árbol, $z \in T_{vr}$ o $z \in T_{wr}$, en cualquier caso $zr \in E(G)$. Luego z es adyacente a todo vértice de C con lo cual $z \in C$. \square

Por propiedades de sus cliques

Sea G un grafo conexo y T un árbol generador de G se notará GT al coarbol de G relativo a T . Es decir, $V(GT) = V(G)$ y $E(GT) = E(G) - E(T)$.

Lema 3.2.5 Sea T un árbol, $C \subseteq V(T)$ y $K = \bigcup_{(v,w) \in C \times C} T_{vw}$ luego para todo $k, l \in K$ existen $v, w \in C$ tales que $k, l \in T_{vw}$.

Demostración: Sean $k, l \in K$, se supone que $k \in T_{vw}$, $l \in T_{tz}$, con $v, w, t, z \in C$. Dado que T es un árbol existe un único camino de w a z en T .

*Si k y l pertenecen a T_{wz} el Lema queda demostrado.

*Si $k \notin T_{wz}$ y $l \in T_{wz}$ entonces $k, l \in T_{vz}$.

*Si $k \in T_{wz}$ y $l \notin T_{wz}$ entonces $k, l \in T_{wt}$.

*Si $k \notin T_{wz}$ y $l \notin T_{wz}$ se tienen 2 casos:

Caso 1 $T_{vw} \cap T_{tz} \neq \emptyset$. Dado que T es un árbol generador de G , los vértices de esta intersección generan un camino de T . Luego $T_{vw} \cap T_{tz} = T_{xy}$ con $x, y \in V(T)$ (pueden coincidir). Sin pérdida de generalidad se puede suponer que x es el vértice más cercano a v y a t (ver Fig.9 a.).

*Si $k \in T_{vx} \wedge l \in T_{tx}$ entonces $k, l \in T_{vt}$.

*Si $k \in T_{vx} \wedge l \in T_{xy}$ entonces $k, l \in T_{vw}$.

Considerando $k \in T_{xy}$ se obtienen resultados análogos.

Caso 2 $T_{vw} \cap T_{tz} = \emptyset$ entonces $k, l \in T_{vt}$ (ver Fig 9.b). \square

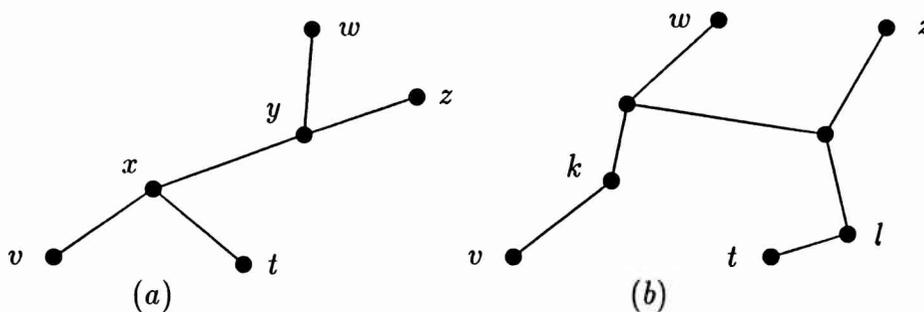


Fig. 9

Teorema 3.2.6 Sea G arbóreo conexo, T un árbol compatible con G y GT el coárbol respectivo. Entonces si C es un completo de GT se tiene que $\bigcup_{vw \in C} T_{vw}$ es un completo de G .

Demostración: Sea $K = \bigcup_{(v,w) \in C \times C} T_{vw}$ y sean k, l dos elementos de K .

Luego por el Lema anterior $k, l \in T_{vw}$ con $v, w \in C$, como $vw \in E(GT)$ entonces $vw \in E(G)$ luego existe R , un clique de G , tal que $vw \in E(G)$. Como G es arbóreo y T es compatible con G , R induce un subárbol de T y luego $k, l \in R$ con lo cual $kl \in E(G)$. \square

Del estudio de la relación entre los cliques de G y los de GT surgieron los siguientes resultados:

Teorema 3.2.7 Sea G arbóreo conexo, T un árbol compatible con G y GT el coárbol respectivo. Si K es un clique de G , $K \neq K_1$ y $K \neq K_2$ entonces existe un clique C de GT tal que $K = \bigcup_{(v,w) \in C \times C} T_{vw}$.

Demostración: Como T es un árbol compatible con G entonces $T[K]$ es un subárbol de T . Sea P el conjunto de vértices pendientes de $T[K]$ luego P es un completo de G . Dado que $K \neq K_1$ y $K \neq K_2$ entonces el subgrafo de T inducido por P no tiene aristas y P es un completo de GT . Sea C un clique de GT que contiene a P . Es inmediato que $K = \bigcup_{(v,w) \in P \times P} T_{vw}$ con lo cual $K \subseteq \bigcup_{(v,w) \in C \times C} T_{vw}$. Por otro lado por el Teorema anterior $\bigcup_{(v,w) \in C \times C} T_{vw}$ es un completo de G . Luego $K = \bigcup_{(v,w) \in C \times C} T_{vw}$ que es lo que se quería demostrar. \square

No todos los cliques de GT dan lugar a cliques de G , como se muestra en la Fig. 10, donde la arista v_2v_4 es un clique de GT pero $\{v_2, v_1, v_4\}$ no lo es de G .

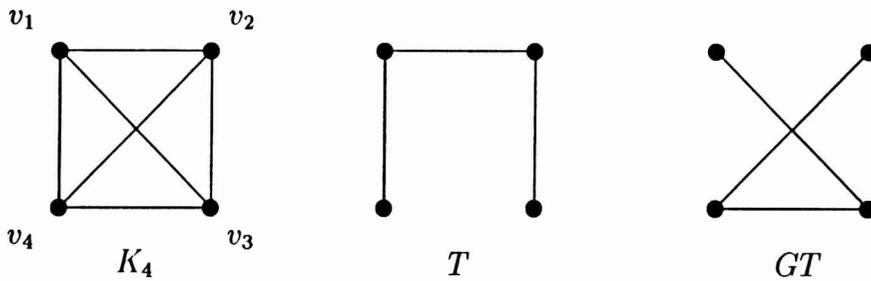


Fig. 10: Grafo arbóreo K_4 , T árbol compatible con K_4 y GT coárbol respectivo.

Sin embargo se tiene:

Teorema 3.2.8 *Sea G arbóreo conexo, T un árbol compatible con G , GT el coárbol respectivo y P el conjunto de los vértices pendientes de T . Si C es un clique no trivial de GT tal que $C \subseteq P$ entonces $K = \bigcup_{(v,w) \in C \times C} T_{vw}$ es un clique de G .*

Demostración: Por el Teorema 3.2.6 K es un completo de G . Se supone que K no es un clique con lo cual existe $z \in V(G) - K$ adyacente a todo vértice de K . Sea $x \in C$, como $C \subseteq K$, $xz \in E(G)$. Dado que C no es trivial, $C \subseteq P$ y $z \notin K$ entonces $xz \notin E(T)$. Luego todo vértice de C es adyacente a z en GT y $C \cup \{z\}$ es un completo de GT que contiene al clique C con lo cual $z \in C$. De aquí $z \in K$. Absurdo. Luego K es un clique de G . \square

Como muestra la Fig 11 la recíproca no es verdadera ya que K_4 es un clique de G pero no puede ser obtenido de un clique de GT de vértices pendientes de T .

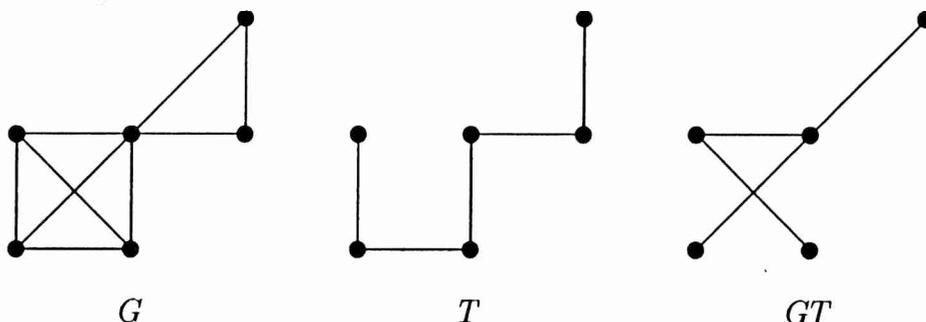


Fig. 11

Por otro lado el Teorema 3.2.7 puede extenderse a una caracterización de los grafos arbóreos como sigue:

Teorema 3.2.9 *Un grafo conexo G es arbóreo si y sólo si G es un árbol o existe un árbol generador T de G tal que para todo clique K de G , $|K| \geq 3$, existe C , clique de GT , tal que $K = \bigcup_{(v,w) \in C \times C} T_{vw}$.*

Demostración: Si G es un árbol entonces es arbóreo.

Si G no es un árbol entonces existe algún L , clique de G , con $|L| \geq 3$. Luego, por hipótesis, existe un árbol T cumpliendo el enunciado del Teorema. Se mostrará que T es compatible con G .

Sea K un clique de G , como G es conexo no trivial entonces $|K| > 1$. Si $|K| = 2$ y K no genera una arista de T , entonces K es un completo de GT . Luego por el Teorema 3.2.6 $\bigcup_{(v,w) \in K \times K} T_{vw}$ es un completo de G que contiene a K . Absurdo ya que K es un clique. De aquí se tiene que si $|K| = 2$ entonces K genera un subárbol de T .

Si $|K| \geq 3$ luego, por hipótesis, existe C , clique de GT , tal que $K = \bigcup_{(v,w) \in C \times C} T_{vw}$. Se probará que K genera un subárbol de G . Sean $k, l \in K$, luego por el Lema 3.2.5, existen $v, w \in C$ tales que $k, l \in T_{vw}$ y obviamente hay un camino de k a l en $T[K]$, que es lo que se quería demostrar. \square

Por grafos de intervalos propios

El siguiente Teorema puede deducirse inmediatamente del resultado probado por A. Batbedat en [2] (p.171), en el contexto de las disimilaridades. Aquí se da una demostración directa.

Teorema 3.2.10 *Un grafo conexo G es arbóreo si y sólo si existe un árbol T , generador de G , tal que para todo camino P de T el subgrafo de G , inducido por los vértices de P , es un grafo de intervalos propios y la secuencia de vértices de P es un orden compatible.*

Demostración: Sea G un grafo conexo arbóreo y T un árbol compatible con G . Sea $P : x_0x_1x_2\dots x_s$, un camino de T . Si $x_i, x_j, x_k \in V(P)$ con $i < j < k$ y $x_ix_k \in E(G)$ entonces, por el Teorema 3.2.6, $x_ix_j, x_jx_k \in E(G)$. Luego el subgrafo inducido por los vértices de P es un grafo de intervalos propios y $x_0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_s$, es un orden compatible.

Recíprocamente sea T un árbol generador de G cumpliendo las condiciones del Teorema y sea C un clique de G . Se notará T' al subárbol de T con mínimo número de vértices tal que $C \subseteq V(T')$. Si existe algún vértice $t \in V(T') - C$ entonces es posible encontrar un vértice $x \in C$ no adyacente a t . Por la elección de T' , C intersecta a toda componente conexa de $V(T') - \{t\}$ y además t no es un vértice pendiente de T' . Luego existe $y \in C$ tal que $t \in T_{xy}$. Dado que $xy \in E(G)$ y por hipótesis $G[T_{xy}]$ es un grafo de

intervalos propios se tiene que $xt \in E(G)$ en contra de lo supuesto. Por lo tanto $V(T') = C$, luego queda probado que T es un árbol compatible con G y que G es arbóreo. \square

Por sus propiedades métricas

Una disimilaridad α sobre un conjunto X es un **arba** [2] si existe un árbol T cuyo conjunto de vértices es X y tal que para todo $x, y, z \in X$ si $y \in T_{xz}$ entonces $\alpha(x, y) \leq \alpha(x, z)$.

En el Capítulo 1 se ha notado d a la distancia en un grafo conexo G . En lo que sigue es necesario utilizar la notación d_G .

Primero se verá el siguiente resultado que se obtiene como corolario del Teorema 3.2.10.

Teorema 3.2.11 *Sea G un grafo conexo arbóreo y T un árbol compatible con G . Si P y Q son caminos de T entonces $d_{G[P]}(x, y) = d_{G[Q]}(x, y)$ para todo par de vértices x, y en la intersección de los caminos P y Q .*

Demostración: Por el Teorema 3.2.10, $G[P]$ y $G[Q]$ son grafos de intervalos propios. Además dado que ambos grafos contienen al camino de x a y en T , los caminos mínimos obtenidos usando en Corolario 1.2.16 coinciden. Luego $d_{G[P]}(x, y) = d_{G[Q]}(x, y)$. \square

Teorema 3.2.12 *Si G es un grafo conexo arbóreo y T es un árbol compatible con G entonces para todo par x, y de vértices de G , $d_G(x, y) = d_{G[P]}(x, y)$ para todo camino P de T que contiene a x e y .*

Demostración: Por inducción sobre $d_G(x, y)$.

Obviamente vale si $d_G(x, y) = 1$.

H.I. Se supone que $d_G(x, y) = d_{G[P]}(x, y)$ para todo par de vértices x, y tal que la $d_G(x, y) < k$, $k \geq 2$ y para todo camino P de T que contiene a x e y .

Sean x e y dos vértices de G tales que $d_G(x, y) = k$ y Q un camino mínimo en G de x a y . Por el Teorema anterior es suficiente probar el resultado siendo $P = T_{xy}$. Se pueden presentar dos casos.

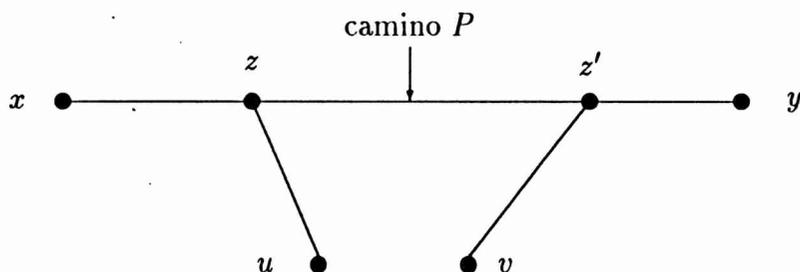
Caso 1 Los caminos Q y P tienen un vértice interno en común z . Dado que z está en el camino mínimo Q , se tiene:

$$d_G(x, y) = d_G(x, z) + d_G(z, y) = (\text{por H.I.})$$

$= d_{G[P]}(x, z) + d_{G[P]}(z, y) \geq d_{G[P]}(x, y)$. Luego el Teorema vale ya que la otra desigualdad se deduce de la definición de distancia.

Caso 2 Si P y Q son internamente disjuntos entonces forman un ciclo Z en G . El ciclo Z es la diferencia simétrica de ciclos fundamentales Z_e^T asociados a cada arista e de Q que no está en T . Luego existe una arista uv tal que Z_{uv}^T intersecta a P en un camino de z a z' con $z \neq z'$ (ver figura siguiente). Si $z = x$ y $z' = y$ entonces, por el Teorema 3.2.6, x es adyacente a y y $d_G(x, y) = 1$ en contra de lo supuesto.

Luego, sin pérdida de generalidad, se puede suponer que $z' \neq y$ lo cual implica que $y \neq v$.



Sea $P' = T_{vy}$, por Teorema 3.2.10, $G[P']$ es un grafo de intervalos propios.

Como v es un vértice interior del camino mínimo Q entonces $d_G(v, y) < k$, luego por hipótesis inductiva $d_G(v, y) = d_{G[P']}(v, y)$.

Por otro lado $d_{G[P']}(v, y) \geq d_{G[P']}(z', y)$ (Teorema 1.2.14 d.) y por el Teorema anterior $d_{G[P']}(z', y) = d_{G[P]}(z', y)$. Usando el mismo razonamiento se obtiene que $d_G(x, v) \geq d_{G[P]}(x, z')$.

Dado que v está en el camino mínimo Q , el Teorema se deduce como en el Caso 1. \square

Teorema 3.2.13 Sea G un grafo conexo, las siguientes proposiciones son equivalentes:

a) G es arbóreo.

b) Existe un árbol, generador de G , tal que si x e y son vértices de un camino P de T entonces $d_G(x, y) = d_{G[P]}(x, y)$ y todo camino de x a y en $G[P]$ es una secuencia creciente o decreciente con respecto al orden de los vértices de P .

c) Existe un árbol T , generador de G , tal que para todo par x, y de vértices de G , $d_G(x, y)$ es el mínimo número de cliques de G que cubren las aristas de T_{xy} .

d) La distancia en G es arba.

Demostración: $a) \rightarrow b)$ Sea T un árbol compatible con G . Del Teorema anterior si x e y son vértices de un camino P de T , entonces $d_G(x, y) = d_{G[P]}(x, y)$.

Por el Teorema 3.2.10, $G[P]$ es un grafo de intervalos propios y la secuencia de vértices en P es un orden compatible. Luego por el Teorema 1.2.14 se puede afirmar que todo camino mínimo de x a y en $G[P]$ es una secuencia creciente o decreciente con respecto al orden compatible.

$b) \rightarrow c)$ Sea T el árbol generador de G en las condiciones de la parte b) y sea $P = T_{xy}$. Por b) del Teorema 1.2.14, $G[P]$ es un grafo de intervalos propios y luego por c) del mismo Teorema $d_{G[P]}(x, y)$ es el mínimo número m de cliques de $G[P]$, C_1, \dots, C_m , que cubren las aristas de P .

Dado que cada C_i está contenido en un clique de G , el mínimo número M de cliques de G que cubren las aristas de P verifica que $M \leq m = d_{G[P]}(x, y) = d_G(x, y)$.

Por otro lado, si M cliques de G cubren las aristas de P , es posible construir un camino de x a y en G de longitud no mayor que M . De aquí se tiene que $d_G(x, y) \leq M$.

$c) \rightarrow d)$ Sea T el árbol generador de G en las condiciones de c). Si x, y, z son vértices de G tales que $y \in T_{xz}$ entonces todo conjunto de cliques de G que cubren las aristas de T_{xz} , cubren las aristas de T_{xy} . Luego por c) $d_G(x, y) \leq d_G(x, z)$, con lo cual d es un arba.

$d) \rightarrow a)$ Sea T un árbol generador de G tal que para todo $x, y, z \in V(G)$, si $y \in T_{xy}$ entonces $d_G(x, y) \leq d_G(x, z)$.

Sea P un camino en T y sean x, y, z tres vértices de P en el orden en que aparecen en P . Si $xz \in E(G)$ entonces $d_G(x, z) = 1$ y por ser d un arba, $d_G(x, y) = d_G(y, z) = 1$. Luego $xy, yz \in E(G)$ con lo cual queda demostrado que $G[P]$ es un grafo de intervalos propios y la secuencia de vértices de P es un orden compatible. Entonces por el Teorema 3.2.10 G es un grafo arbóreo.

□

Por la aplicación clique

Un grafo G es *Helly* si sus cliques verifican la propiedad de Helly. Se llamará *HELLY* a la clase de los grafos Helly.

Como en el Capítulo 1, se notará con K a la aplicación que a cada grafo asigna su grafo de cliques.

La clase *HELLY* es *clique-cerrada*, es decir $K(HELLY) = HELLY$ ([16][8]).

Se llamará *CORDALES* (resp. *ARBOREOS*) a la clase de los grafos cordales (resp. arbóreos).

Teorema 3.2.14 $K(HELLY \cap CORDALES) = ARBOREOS$.

Demostración: Previamente se verá el siguiente Lema.

Lema 3.2.15 Si G es un grafo Helly entonces $K^2(G) = K(K(G))$ es isomorfo a un subgrafo inducido de G .

Demostración: Sea L un clique de $K(G)$, $L = \{C_1, \dots, C_l\}$ con $C_i \in \mathcal{C}(G)$, $i = 1, \dots, l$. Luego para todo par i, j , $1 \leq i, j \leq l$, $C_i \cap C_j \neq \emptyset$ y dado que G es Helly, existe $x \in \bigcap_{i=1}^l C_i$.

Sea $C(x) = \{C \in \mathcal{C}(G); x \in C\}$ entonces $L \subseteq C(x)$, como $C(x)$ es un completo de $K(G)$ y L es un clique $L = C(x)$.

Luego existe una función que a cada clique de $K(G)$ le asigna un vértice de G . Se verá que dicha función es inyectiva. Sean L y L' cliques de $K(G)$ y sean $x, x' \in V(G)$ tales que $L = C(x)$ y $L' = C(x')$. Si $x = x'$ entonces $L \cup L'$ es un completo de $K(G)$ que contiene tanto a L como a L' , luego $L \cup L' = L = L'$.

Se verá que la función conserva la adyacencia. Sean L y L' como antes. Si $L \cap L' \neq \emptyset$ entonces existe $C \in L \cap L'$ y luego $x \in C$ y $x' \in C$, con lo cual $xx' \in E(G)$. Recíprocamente, si $xx' \in E(G)$ entonces existe $C \in \mathcal{C}(G)$ tal que $x \in C$ y $x' \in C$, con lo cual $C \in C(x) \cap C(x')$ y de aquí $L \cap L' \neq \emptyset$. \square

Ahora se verá la primer inclusión del Teorema. Sea G un grafo Helly y cordal luego, por el Lema, $K^2(G)$ es isomorfo a un subgrafo inducido de G . Dado que todo subgrafo inducido de un cordal es también cordal, se tiene

que $K^2(G)$ es cordal. Además $K(G)$ es Helly por ser *HELLY* una clase clique-cerrada. Entonces, por el Teorema 3.1.4, $K(G)$ es arbóreo.

Recíprocamente, si G es un grafo arbóreo entonces $\mathcal{C}(G)$ tiene la propiedad de Helly (Teorema 3.1.4) y por el resultado mostrado por Hamelink [16], existe un grafo H tal que $K(H) = G$. En [30] Roberts y Spencer construyen H del siguiente modo:

$$V(H) = \mathcal{C}(G) \cup V(G).$$

Si $C_i, C_j \in \mathcal{C}(G)$, $C_i C_j \in E(H)$ si y sólo si $C_i \cap C_j \neq \emptyset$.

Si $x \in V(G)$ entonces $x C_i \in E(H)$ si y sólo si $x \in C_i$.

Si $x, y \in V(G)$ entonces $xy \notin E(H)$.

Se probará que H es cordal. Sea $h_1 h_2 \dots h_r$ un ciclo de H con $r \geq 4$, pueden presentarse dos casos:

Caso 1 Si todos los h_i , $i = 1, \dots, r$ son cliques de G . Dado que G es arbóreo, $K(G)$ es cordal. Luego el ciclo tiene cuerdas.

Caso 2 Si algún h_i es un vértice de G , sin pérdida de generalidad puede suponerse que $i > 1$. Dado que los vértices de G no son adyacentes en H , h_{i-1} y h_{i+1} deben ser cliques de G . Luego $h_i \in h_{i-1} \cap h_{i+1}$ con lo cual $h_{i-1} h_{i+1} \in E(H)$ y el ciclo tiene cuerdas.

Resta probar que H es Helly. Sean H_1, \dots, H_r cliques de H no disjuntos de a pares. Por la construcción de H cada uno de sus cliques es de la forma $\{x\} \cup C(x)$ ($C(x) = \{C \in \mathcal{C}(G); x \in C\}$) con $x \in V(G)$. Sean x_1, \dots, x_r los vértices de G correspondientes a los cliques H_1, \dots, H_r respectivamente.

Si $H_i \cap H_j \neq \emptyset$ entonces existe un clique de G que contiene a x_i y a x_j , luego $x_i x_j \in E(G)$ para todo i, j , $1 \leq i, j \leq r$. Por lo tanto $\{x_1, \dots, x_r\}$ induce un subgrafo completo de G , sea C un clique de G que lo contiene. Luego para todo $i = 1, \dots, r$; $C \in H_i$, con lo cual $\bigcap_{i=1}^r H_i \neq \emptyset$ que es lo que se quería probar. \square

Teorema 3.2.16 $K(\text{ARBOREOS}) = \text{HELLY} \cap \text{CORDALES}$.

Demostración: Si G es un grafo arbóreo entonces G es Helly y $K(G)$ es cordal (Teorema 3.1.4). Luego por ser *HELLY* una clase clique-cerrada, $K(G)$ es Helly.

Recíprocamente, si G es un grafo Helly y cordal, otra vez por ser *HELLY* una clase clique-cerrada, existe un grafo Helly H tal que $K(H) = G$. Pero entonces $K(H)$ es cordal luego H es arbóreo (Teorema 3.1.4). \square

Corolario 3.2.17 $HELLY \cap (CORDALES \cup K^{-1}(CORDALES))$ es una clase clique-cerrada.

Demostración: Dado que la clase $ARBOREOS = HELLY \cap K^{-1}(CORDALES)$ el resultado se deduce de los Teoremas anteriores.

3.3 Relación con otras clases de grafos

A) GRAFOS CORDALES

No todos los grafos arbóreos son cordales, por ejemplo en la Fig. 8 se muestra al grafo R_4 (4-rueda) y a un árbol compatible, pero es obvio que R_4 no es cordal.

Sea R_n la n -rueda, esto es, el grafo que tiene 1 vértice central adyacente a cada uno de los vértices de un ciclo de longitud n .

Se verá que las n -ruedas son "esencialmente" los únicos grafos arbóreos no cordales.

Por el Teorema 3.1.4 si G es arbóreo entonces $K(G)$ es cordal pero esto no implica, en general, que G sea cordal. El siguiente Teorema caracteriza, por subgrafos prohibidos, a los grafos para los cuales esta implicación es válida.

Teorema 3.3.1 *Sea G un grafo si $K(G)$ es cordal entonces G es cordal si y sólo si G no tiene a ningún R_n , $n \geq 4$, como subgrafo inducido.*

Demostración: Si G es cordal dado que todo R_n $n \geq 4$ tiene ciclos sin cuerdas, G no puede tener como subgrafo inducido a ningún R_n con $n \geq 4$.

Recíprocamente se supone que G no es cordal, luego tiene como subgrafo inducido un ciclo C sin cuerdas. Se probará que G tiene, como subgrafo inducido, a R_n para algún $n \geq 4$, por inducción sobre $|C|$.

Si $|C| = 4$, sea $C : x_1e_1x_2...x_4e_4x_1$. Dado que e_i es una arista de G para todo $i = 1, \dots, 4$ y dado que C no tiene cuerdas, es posible elegir cuatro cliques de G distintos, C_1, C_2, C_3 y C_4 , tales que $e_i \in E(C_i)$ $i = 1, \dots, 4$.

Como $K(G)$ es cordal y C_1, C_2, C_3, C_4 son vértices de un ciclo de $K(G)$, luego $C_1 \cap C_3 \neq \emptyset$ o $C_2 \cap C_4 \neq \emptyset$.

Si $C_2 \cap C_4 \neq \emptyset$, sea $z \in C_2 \cap C_4$. Dado que $x_2, x_3 \in C_2$ se tiene que $zx_2, zx_3 \in E(G)$, análogamente $zx_1, zx_4 \in E(G)$. Luego R_4 es un subgrafo inducido de G .

H.I. Se supone que G no tiene ningún ciclo inducido sin cuerdas C con $|C| < n$.

Si G tiene un ciclo inducido sin cuerdas C con $|C| = n$. Sea $C : x_1e_1...x_n e_n x_1$ y $C_i, i = 1, \dots, n$ cliques distintos de G conteniendo respectivamente a las aristas e_1, \dots, e_n .

Dado que $K(G)$ es cordal, como antes, existe $z \in C_i \cap C_j$ con C_i y C_j no consecutivos. Pueden presentarse dos casos:

Caso 1 Si para todo $h, h = 1, \dots, n; zx_h \in E(G)$ luego G tiene a R_n como subgrafo inducido.

Caso 2 Si existe $h, 1 \leq h \leq n; zx_h \notin E(G)$ (ver Fig. 12). Dado que $z \in C_i \cap C_j$ hay por lo menos cuatro vértices de C adyacentes a z . Si se eligen x_l y x_k los más cercanos a x_h , a cada uno de sus lados, se tiene que $\{z, x_l, x_{l+1}, \dots, x_h, x_{h+1}, \dots, x_k\}$ induce en G un ciclo sin cuerdas C' con $|C'| < n$ en contra de la H.I..

Luego G tiene como subgrafo inducido a R_n . \square

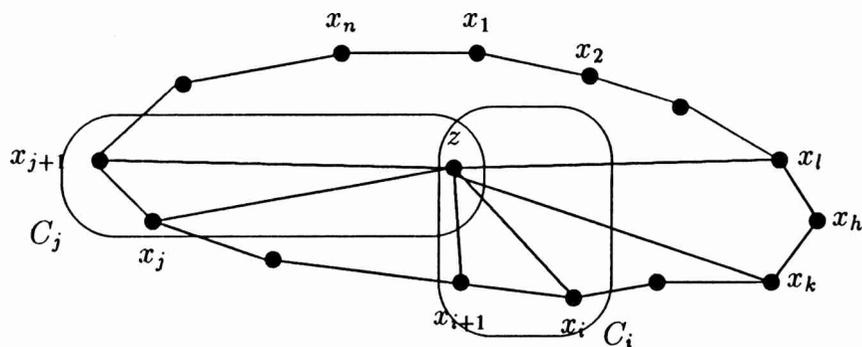


Fig. 12

El siguiente Corolario es inmediato.

Corolario 3.3.2 Si G es arbóreo entonces G es cordal si y sólo si G no tiene a R_n $n \geq 4$ como subgrafo inducido.

Por otro lado el grafo de la Fig. 13.a) es cordal y no arbóreo ya que sus cliques no tienen la propiedad de Helly.

Sea E_n , $n \geq 3$, la estrella con n vértices centrales (que inducen K_n) y n perisféricos (de grado 2) (ver Fig. 13).

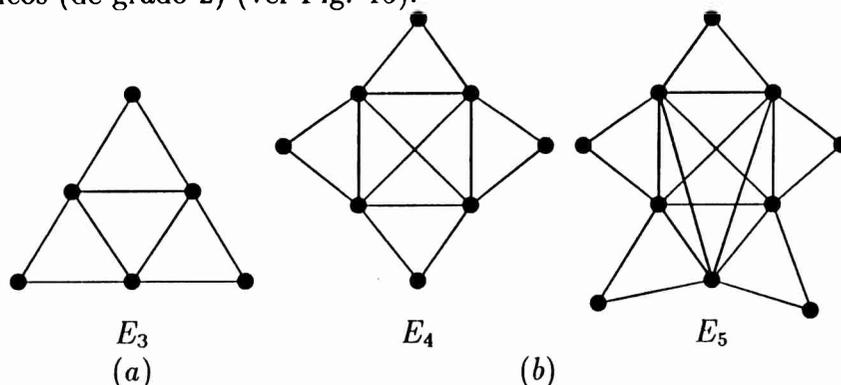


Fig. 13

Teorema 3.3.3 Si G es cordal y no tiene a ningún E_n , $n \geq 3$, como subgrafo inducido entonces G es arbóreo.

Se verán tres lemas de los cuales se deduce el teorema.

Lema 3.3.4 Si G es cordal y no tiene a E_3 como subgrafo inducido entonces $\mathcal{C}(G)$ (hipergrafo de los cliques de G) tiene la propiedad de Helly.

Demostración: Sea C_1, C_2, \dots, C_n una familia de cliques de G tales que para todo i, j , $1 \leq i, j \leq n$, $C_i \cap C_j \neq \emptyset$. Se verá que $\bigcap_{i=1}^n C_i \neq \emptyset$ por inducción sobre n .

Si $n = 2$ no hay nada que probar.

H.I. Se supone verdadero para una familia de $n - 1$ cliques.

Ahora se verá para n . Si $\bigcap_{i=1}^n C_i = \emptyset$, por hipótesis inductiva existen tres vértices distintos de G , x_1, x_2, x_3 tales que $x_1 \in C_2 \cap C_3 \cap \dots \cap C_n$, $x_2 \in C_1 \cap C_3 \cap \dots \cap C_n$ y $x_3 \in C_1 \cap C_2 \cap C_4 \cap \dots \cap C_n$.

Dado que $x_1, x_2 \in C_3$, $x_2, x_3 \in C_1$, $x_1, x_3 \in C_2$ se tiene que $\{x_1, x_2, x_3\}$ es un completo de G . Por otro lado, para todo $i = 1, 2, 3$, $x_i \notin C_i$ luego existe $z_i \in C_i$ tal que $z_i x_i \notin E(G)$.

Se observa que para todo i, j , $1 \leq i, j \leq 3$, $z_i z_j \notin E(G)$ pues en caso contrario $\{z_i, z_j, x_i, x_j\}$ induce un ciclo sin cuerdas en G , luego G no es cordal en contra de la hipótesis.

Por todo lo afirmado anteriormante $\{z_1, z_2, z_3, x_1, x_2, x_3\}$ induce en G el grafo E_3 . Absurdo. Luego $\bigcap_{i=1}^n C_i \neq \emptyset$. \square

Lema 3.3.5 Si G es cordal; C y K son dos cliques distintos de G entonces existe $z \in C$ tal que, para todo $k \in K - C$, $kz \notin E(G)$.

Demostración: Sea $K - C = \{k_1, k_2, \dots, k_n\}$. Se probará por inducción sobre n .

Si $n = 1$, como $K \not\subseteq C$, existe $z \in C$ tal que $zk_1 \notin E(G)$.

H.I. Supongamos verdadero para $n - 1$.

Se verá para n . Por H.I. existe $z \in C$ tal que $zk_i \notin E(G)$, para todo $i, 1 \leq i \leq n - 1$ (ver Fig. 14).

Si $zk_n \in E(G)$ dado que $k_n \notin C$, existe $z' \in C$ tal que $z'k_n \notin E(G)$. Si ahora z' es adyacente a algún k_i con $i < n$ entonces $\{z', z, k_n, k_i\}$ induce en G un ciclo sin cuerdas. Luego G no es cordal en contra de la hipótesis. De donde se tienen dos posibilidades: $zk_n \notin E(G)$ y z es el elemento buscado o bien, para todo $i = 1, \dots, n$, $z'k_i \notin E(G)$ y z' es el elemento buscado. \square

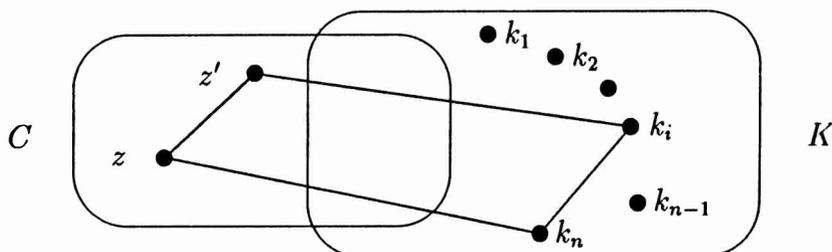


Fig. 14

La recíproca no es verdadera ya que un ciclo de 4 vértices cumple con esta propiedad y obviamente no es cordal.

Lema 3.3.6 Si G es cordal y no tiene ningún E_n , $n \geq 3$ como subgrafo inducido entonces $K(G)$ es cordal.

Demostración: Sea $\{C_1, C_2, \dots, C_n\}$ un conjunto de cliques de G que induce un ciclo L en $K(G)$. Luego existen x_1, x_2, \dots, x_n vértices de G tales que $x_1 \in C_1 \cap C_2, x_2 \in C_2 \cap C_3, \dots, x_n \in C_n \cap C_1$.

(*) Si se supone que L no tiene cuerdas entonces para todo $i = 1, \dots, n-1$ x_i pertenece solamente a los cliques C_i y C_{i+1} , y x_n pertenece solamente a C_1 y a C_n . Por lo tanto todos los x_i son distintos e inducen un ciclo en G . Pero como G es cordal por hipótesis se puede considerar, sin pérdida de generalidad, que $x_1 x_3 \in E(G)$. Sea C un clique de G que contiene a x_1 y a x_3 . Por lo supuesto en (*), C no es ninguno de los cliques C_i pero C es adyacente a C_1, C_2, C_3 y C_4 en $K(G)$.

La demostración continúa por inducción sobre n .

Si $n = 4$, $K(G)$ tiene al grafo de la Fig. 15.a) como subgrafo inducido. Por el Lema 3.3.4, $\mathcal{C}(G)$ tiene la propiedad de Helly, luego existen $h_1, h_2, h_3, h_4 \in V(G)$ tales que $h_1 \in C_1 \cap C_2 \cap C$, $h_2 \in C_2 \cap C_3 \cap C$, $h_3 \in C_3 \cap C_4 \cap C$ y $h_4 \in C_4 \cap C_1 \cap C$ (ver Fig. 15.b)). Es obvio que $\{h_1, h_2, h_3, h_4\}$ induce un completo de C .

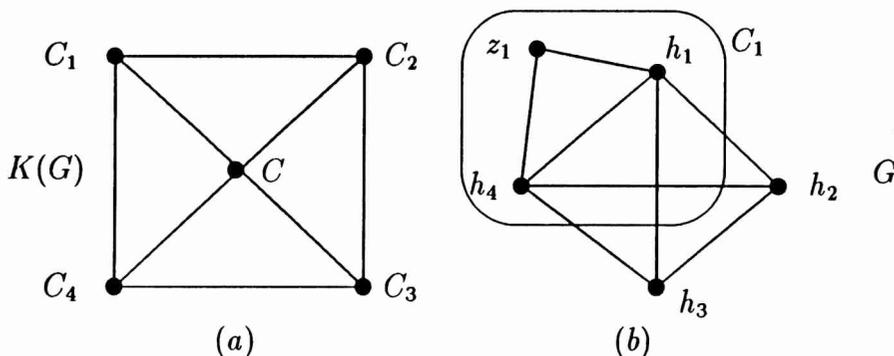


Fig.15

Por lo supuesto en (*) $h_2, h_3 \in C - C_1$ luego, por el Lema anterior, existe $z_1 \in C_1$ tal que $z_1 h_2 \notin E(G)$ y $z_1 h_3 \notin E(G)$. Análogamente es posible encontrar z_2, z_3 y z_4 . Si $z_i z_j \in E(G)$ con $1 \leq i, j \leq 4$ entonces $\{z_i, z_j, h_i, h_j\}$ induce un ciclo sin cuerdas en G . Absurdo ya que G es cordal. Por lo tanto $\{h_1, h_2, h_3, h_4, z_1, z_2, z_3, z_4\}$ induce el grafo E_4 en G , en contra de la hipótesis.

Luego todo ciclo de $K(G)$ de longitud 4 tiene cuerdas.

H.I. Se supone que todo ciclo de $K(G)$ de longitud menor que n tiene cuerdas.

Por lo visto anteriormente si L es un ciclo sin cuerdas de $K(G)$, inducido por $\{C_1, C_2, \dots, C_n\}$, existe C , clique de G , adyacente a C_1, C_2, C_3 y C_4 en $K(G)$. Luego $\{C, C_4, C_5, \dots, C_{n-1}, C_n, C_1\}$ induce un ciclo en $K(G)$ de longitud menor que n y por hipótesis inductiva este ciclo tiene cuerdas. Como se

ha supuesto que L no tiene cuerdas luego para todo $i = 1, \dots, n$, $C \cap C_i \neq \emptyset$. Dado que $\mathcal{C}(G)$ tiene la propiedad de Helly existen h_1, h_2, \dots, h_n , n vértices de G , tales que para todo $i = 1, \dots, n$, $h_i \in C_i \cap C_{i+1} \cap C$ y $h_n \in C_1 \cap C_n \cap C$.

Observar que el conjunto $\{h_1, h_2, \dots, h_n\}$ induce un completo por ser un subconjunto de C .

Sea $i, 1 \leq i \leq n-1$, dado que $C \neq C_i$ y que $\{h_j; j \neq i, j \neq i-1\} \subseteq C - C_i$, por el Lema anterior es posible encontrar $z_i \in C_i$ tal que $z_i h_j \notin E(G)$ para todo $j \neq i$ y $j \neq i-1$. Análogamente se puede encontrar $z_n \in C_n$.

Por otro lado $z_i z_j \notin E(G)$ por ser G cordal (como en el caso $n = 4$).

Luego $\{h_1, \dots, h_n, z_1, \dots, z_n\}$ induce en G al grafo E_n , en contra de la hipótesis.

Con lo cual L tiene cuerdas y de aquí $K(G)$ es cordal. \square

La recíproca no vale. La Fig. 16 muestra un grafo que tiene a E_3 como subgrafo inducido y es cordal, sin embargo $K(G)$ también lo es.

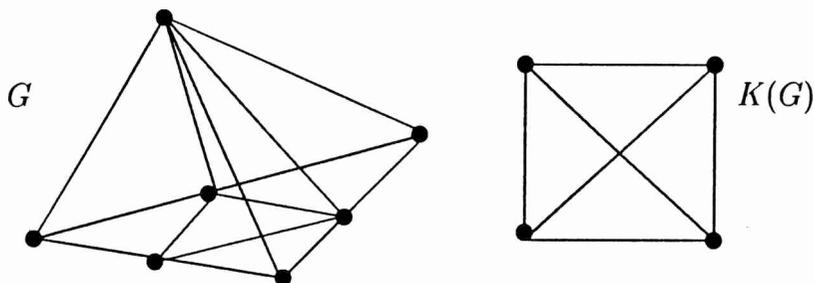


Fig. 16

Corolario 3.3.7 Si G no tiene como subgrafo inducido a ningún grafo de las familias $(C_n)_{n \geq 4}$ y $(E_n)_{n \geq 3}$ entonces G es arbóreo y cordal.

B) GRAFOS DE INTERVALOS

Teorema 3.3.8 Todo grafo de intervalos es arbóreo.

Demostración: Si G es un grafo de intervalos, por el Teorema de Fulkerson-Groos (1.2.7), existe un ordenamiento de sus cliques $C_1 \leq C_2 \leq \dots \leq C_m$ tal que la matriz $CV(G)$ tiene la propiedad de unos consecutivos por columnas. Se mostrará que $\mathcal{C}(G)$ tiene la propiedad de Helly.

Sean $C_{i_1}, C_{i_2}, \dots, C_{i_r}$ una subfamilia ordenada de cliques de G no disjuntos dos a dos. Luego existe $v \in C_{i_1} \cap C_{i_r}$ y por la propiedad de unos consecutivos $v \in C_{i_1} \cap C_{i_2} \cap \dots \cap C_{i_r}$.

Por otro lado en el Teorema 1.2.18 se ha probado que el grafo de cliques de un grafo de intervalos es un grafo de intervalos propios. Luego $K(G)$ es cordal y por el Teorema 3.1.4 G es arbóreo. \square

Del Corolario 3.3.2 y de la caracterización de grafos de intervalos por subgrafos prohibidos (Fig. 4) se deduce el resultado siguiente.

Teorema 3.3.9 *Si G es arbóreo es de intervalos si y sólo si no tiene como subgrafo inducido a ninguno de los grafos de la Fig. 4 ni a ningún R_n con $n \geq 4$.*

C) GRAFOS DE INTERVALOS PROPIOS

Por el Teorema 1.2.8, si G es un grafo de intervalos entonces G es de intervalos propios si y sólo si no tiene a K_{13} como subgrafo inducido. Luego se tiene el siguiente resultado.

Teorema 3.3.10 *Un grafo arbóreo es un grafo de intervalos propios si y sólo si no tiene a ningún grafo de la Fig. 17 como subgrafo inducido.*

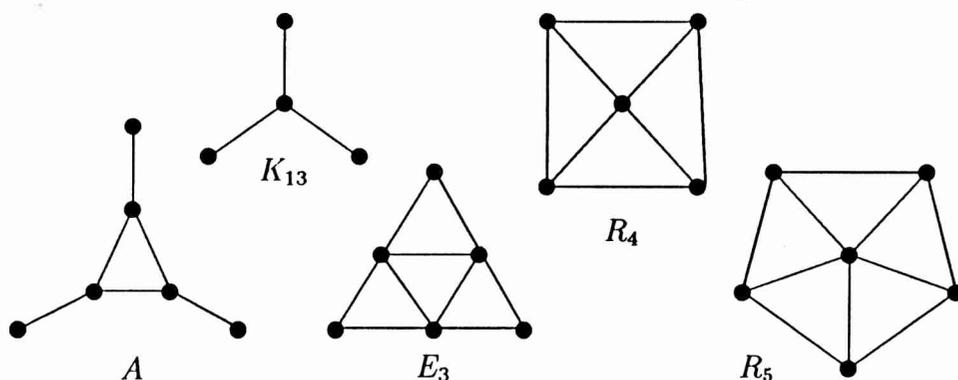


Fig. 17

Demostración: Si G es arbóreo y de intervalos propios luego por el Teorema 1.2.22 G no tiene a ninguno de los grafos K_{13} , A , E_3 como subgrafo inducido. Por otro lado G es cordal entonces no puede tener a R_4 ni a R_5 como subgrafos inducidos.

Recíprocamente si G no tiene como subgrafo inducido a ninguno de los grafos: K_{13} , R_4 , R_5 entonces G no tiene como subgrafo inducido a ningún R_n con $n \geq 4$. Luego por el Corolario 3.3.2 G es cordal. Dado que por hipótesis G no tiene como subgrafo inducido a ninguno de los grafos: K_{13} , E_3 , A entonces G es un grafo de intervalos propios (Corolario 1.2.23). \square

Capítulo 4

Grafos de intersección

E. Sheinerman [32] estudia las condiciones necesarias y suficientes para que una clase de grafos \mathcal{G} sea la clase de grafos de intersección de una colección de conjuntos Γ .

Una de las condiciones necesarias es que \mathcal{G} sea hereditaria es decir todo subgrafo inducido de un grafo de la clase \mathcal{G} debe estar también en \mathcal{G} . Como muestra la Fig. 8, R_4 es un grafo arbóreo sin embargo el ciclo de 4 vértices no lo es. Luego la clase de los grafos arbóreos no es hereditaria, con lo cual no es posible caracterizarla como una clase de grafos de intersección de una colección de conjuntos Γ . Sin embargo si Γ es una colección de familias de conjuntos $(F_i)_{i \in I}$ con ciertas propiedades (en general no hereditarias) si es posible.

Sea Σ_P una colección de familias de conjuntos con cierta propiedad P se denota $\Omega\Sigma_P$ a la clase de los grafos de intersección de familias de Σ_P (salvo isomorfismos).

En la sección 4.2 se dice que una familia $(H_i)_{i \in I}$ se *sumerge* en una familia $(F_i)_{i \in I}$ si ambas tienen el mismo grafo de intersección y existe una función $w : \bigcup_{i \in I} H_i \rightarrow \bigcup_{i \in I} F_i$ inyectiva tal que $x \in H_i$ si y sólo si $w(x) \in F_i$. Se prueba que si P implica la propiedad de Helly entonces $G \in \Omega\Sigma_P$ si y sólo si \mathcal{C}^* se sumerge en una familia de Σ_P . Este resultado generaliza los ya obtenidos para grafos de intervalos [9], grafos de intervalos propios (Teorema 1.2.12), grafos cordales [11] y grafos de intersección de caminos de un árbol [25].

En la sección 4.3 se denota $C\Sigma_P$ a la clase de grafos cuya familia de cliques se sumerge en una familia de Σ_P . Se dan condiciones suficientes para

que $K(C\Sigma_P) = \Omega\Sigma_P$ y para que $K(\Omega\Sigma_P) = C\Sigma_P$, resultados que generalizan los obtenidos para grafos de intervalos propios, en el Capítulo 1 y para grafos arbóreos, en el Capítulo 3.

4.1 Generalidades

Sea Σ una colección de familias de conjuntos. En 1.2.1 se definió el grafo de intersección de una familia de conjuntos. En lo que sigue se denotará $\Omega\Sigma$ a la clase de los grafos G , tales que para alguna familia $\mathcal{F} \in \Sigma$, G es isomorfo al grafo de intersección de \mathcal{F} .

Si G es un grafo simple, como en capítulos anteriores, se llamará $\mathcal{C}(G)$ al conjunto de cliques de G y $\mathcal{C}^*(G)$ a la familia $(C(v))_{v \in V(G)}$ con $C(v) = \{C \in \mathcal{C}(G), v \in C\}$. El siguiente teorema es inmediato.

Teorema 4.1.1 *G es el grafo de intersección de la familia $\mathcal{C}^*(G)$.*

En lo que sigue se denotará Σ_P a la colección de familias $(F_i)_{i \in I}$ (I finito y no vacío) cumpliendo una cierta propiedad P . Se adoptarán las siguientes notaciones para algunas propiedades relativas a familias de conjuntos.

P_1 : Para todo $i \in I$, F_i es un intervalo cerrado de la recta real.

P_2 : Para todo $i \in I$, F_i es un rectángulo del plano.

P_3 : Para todo $i \in I$, F_i es un intervalo cerrado de longitud 1 de la recta real.

H : Para todo $J \subseteq I$ se cumple la implicación:

$$(\forall (i, j) \in J \times J) (E_i \cap E_j \neq \emptyset) \rightarrow \bigcap_{i \in J} E_i \neq \emptyset. \text{ (Propiedad de Helly).}$$

L_1 : Para todo $i, j \in I$; $F_i \subseteq F_j \rightarrow i = j$.

L_2 : Existe un orden total \leq sobre $\bigcup_{i \in I} F_i$ tal que para todo $i \in I$, F_i es un intervalo con respecto al orden \leq .

L_3 : L_1 y L_2 .

L_4 : Existe un árbol T con vértices en I tal que:

(1) Si $i, j \in I$; $ij \in E(T) \rightarrow F_i \cap F_j \neq \emptyset$ y (2) Para todo $i \neq j$ se cumple que si k es un vértice del único camino de i a j en T , entonces $F_i \cap F_j \subseteq F_k$. (Propiedad árbol-Helly).

L_5 : Para todo $i \in I$, F_i es finito y existe un árbol T con vértices en $\bigcup_{i \in I} F_i$ tal que todo F_i induce un subárbol de T .

L_6 : Para todo $i \in I$, F_i es finito y existe un árbol T con vértices en $\bigcup_{i \in I} F_i$ tal que todo F_i induce un camino de T .

L_7 : Para todo $i \in I$, F_i es finito y existe un árbol dirigido T con vértices en $\bigcup_{i \in I} F_i$ tal que todo F_i induce un camino dirigido de T .

Con esta notación se tiene que:

$\Omega\Sigma_{P_1} = \Omega\Sigma_{L_2} = GI$ (Clase de los grafos de intervalos).

$\Omega\Sigma_{P_3} = \Omega\Sigma_{L_3} = GIP$ (Clase de los grafos de intervalos propios).

$\Omega\Sigma_{L_4} = ARBOREOS$ (Clase de los grafos arbóreos). (Teorema 4.2.8).

$\Omega\Sigma_{L_5} = CORDALES$ (Clase de los grafos cordales) [11].

$\Omega\Sigma_{L_6} =$ Clase de los grafos UV [25].

$\Omega\Sigma_{L_7} =$ Clase de los grafos DV [25].

4.2 Una caracterización de los grafos de intersección

Definición 4.2.1 (Generalización de 1.2.11) *Una familia de conjuntos $(H_i)_{i \in I}$ (I finito y no vacío) se sumerge en una familia $(F_i)_{i \in I}$ si (1) ambas tienen el mismo grafo de intersección y (2) existe una función $w : \bigcup_{i \in I} H_i \rightarrow \bigcup_{i \in I} F_i$ inyectiva tal que $x \in H_i$ si y sólo si $w(x) \in F_i$.*

El siguiente teorema es una generalización del Teorema 1.2.12, que caracteriza a los grafos de intervalos propios.

Teorema 4.2.2 *Sea G un grafo simple, $\mathcal{C}(G)$ el conjunto de los cliques de G y $\mathcal{C}^*(G)$ la familia $(C(v_i))_{i=1,\dots,n}$ con $C(v_i) = \{C \in \mathcal{C}(G), v_i \in C\}$.*

(a) *Si $\mathcal{C}^*(G)$ se sumerge en una familia de Σ_P entonces $G \in \Omega\Sigma_P$.*

(b) *Si $\Sigma_P \subseteq \Sigma_H$ y $G \in \Omega\Sigma_P$ entonces $\mathcal{C}^*(G)$ se sumerge en una familia de Σ_P .*

Demostración: (a) Se deduce inmediatamente de la Definición 4.2.1 y del Teorema 4.1.1.

(b) Sea $(F_i)_{i=1,\dots,n}$ una familia de Σ_P tal que G es isomorfo a su grafo de intersección. Dado que G es también el grafo de intersección de $\mathcal{C}^*(G)$ (Teorema 4.1.1) se deduce la parte (1) de la Definición 4.2.1.

Se probará la parte (2). Sea $C \in \mathcal{C}(G)$, si v_i y v_j son vértices distintos de C se tiene que $v_i v_j \in E(G)$. Luego $F_i \cap F_j \neq \emptyset$ y como por hipótesis $\Sigma_P \subseteq \Sigma_H$, la familia $(F_i)_{i=1,\dots,n}$ tiene la propiedad de Helly, con lo cual $\bigcap_{v_i \in C} F_i \neq \emptyset$. Luego es posible asignar a C un elemento cualquiera, $w(C)$, de $\bigcap_{v_i \in C} F_i$. Así se define la función $w : \mathcal{C}(G) = \bigcup_{i=1}^n C(v_i) \rightarrow \bigcup_{i=1}^n F_i$. Como los cliques son completos maximales de G , w resulta inyectiva.

Sea $v_i \in V(G)$, si $C \in C(v_i)$ entonces $v_i \in C$ y luego $w(C) \in F_i$.

Recíprocamente si $w(C) \in F_i$ se verá que $C \in C(v_i)$. Para eso se toma $v_j \in C$ y, por la definición de w , $w(C) \in F_j$. Luego $F_i \cap F_j \neq \emptyset$ con lo cual $v_i v_j \in C$. Esto prueba que todo elemento de C es adyacente a v_i y dado que C es un clique, $v_i \in C$. \square

A continuación se estudiará, para algunas de las colecciones Σ_P , la relación entre:

* $(H_i)_{i \in I} \in \Sigma_P$ y

* $(H_i)_{i \in I}$ se sumerge en una familia de Σ_P .

Primero se verá el siguiente lema.

Lema 4.2.3 *Si $(H_i)_{i \in I}$ se sumerge en $(F_i)_{i \in I}$, w es la función correspondiente e y no está en la imagen de w , entonces $(H_i)_{i \in I}$ también se sumerge en $(F_i - \{y\})_{i \in I}$.*

Demostración: (1) Si $H_i \cap H_j \neq \emptyset$, sea $x \in H_i \cap H_j$ entonces $w(x) \in F_i \cap F_j$. Luego como $y \neq w(x)$, $w(x) \in F_i - \{y\} \cap F_j - \{y\}$. La recíproca es trivial.

(2) Sea $w' : \bigcup_{i \in I} H_i \rightarrow \bigcup_{i \in I} F_i - \{y\}$ con $w'(x) = w(x)$ para todo x . Es evidente que w' es inyectiva y dado que $y \neq w(x)$ $x \in H_i$ si y sólo si $w(x) \in F_i - \{y\}$. \square

Teorema 4.2.4 Si $(H_i)_{i \in I}$ se sumerge en una familia de Σ_{L_2} entonces $(H_i)_{i \in I} \in \Sigma_{L_2}$.

Demostración: Por hipótesis $(H_i)_{i \in I}$ se sumerge en familias de Σ_{L_2} , sea $(F_i)_{i \in I}$ alguna tal que $|\bigcup_{i \in I} F_i|$ es lo menor posible.

Por (2) de 4.2.1, existe una función $w : X = \bigcup_{i \in I} H_i \rightarrow Y = \bigcup_{i \in I} F_i$ inyectiva tal que $x \in H_i$ si y sólo si $w(x) \in F_i$.

Si w no es suryectiva, sea $y \in Y - w(X)$. Luego por el Lema 4.2.3, $(H_i)_{i \in I}$ se sumerge en $(F_i - \{y\})_{i \in I}$. Pero considerando el orden de Y restringido a $Y - \{y\}$ se tiene que $(F_i - \{y\})_{i \in I} \in \Sigma_{L_2}$.

Esto contradice la elección de $(F_i)_{i \in I}$ con lo cual w es biyectiva y obviamente $(H_i)_{i \in I} \in \Sigma_{L_2}$. \square

La demostración anterior no se puede hacer en el caso de L_5 , L_6 y L_7 , pues al eliminar un vértice de un árbol, no siempre se obtiene un árbol.

Los siguientes ejemplos muestran que el Teorema anterior no vale en el caso de L_5 , L_6 , H y L_3 .

Ejemplo 1: Sea $H_1 = \{a, b\}$, $H_2 = \{b, c\}$ y $H_3 = \{a, c\}$. Es evidente que $(H_i)_{i=1,2,3} \notin \Sigma_{L_5}$, sin embargo se sumerge en la familia $(F_i)_{i=1,2,3}$, con $F_i = H_i \cup \{x\}$, $i = 1, 2, 3$, que si está en Σ_{L_5} . Este mismo ejemplo sirve para Σ_{L_6}

Ejemplo 2: La Fig. 18 a) muestra un grafo G cuya familia de cliques no tiene la propiedad de Helly, sin embargo la Fig. 18 b) muestra como esta familia puede sumergirse en una de rectángulos del plano.

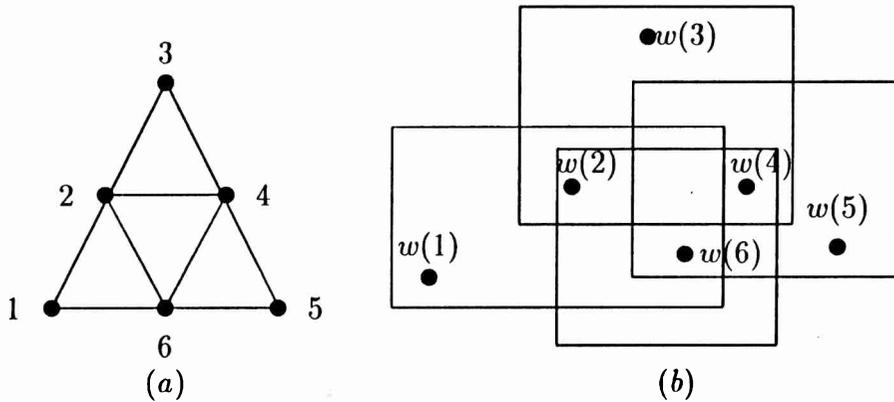


Fig. 18

Ejemplo 3: Sea $H_1 = \{a\}$ y $H_2 = \{a, b\}$, obviamente $(H_i)_{i=1,2} \notin \Sigma_{L_3}$ pero se sumerge en la familia $(F_i)_{i=1,2}$ con $F_1 = \{c, a\}$ y $F_2 = H_2$.

En el caso particular de la familia $\mathcal{C}^*(G)$ se obtuvieron los siguientes resultados.

Teorema 4.2.5 Siendo G un grafo simple y $P = L_2, L_4, L_5, L_6$ o L_7 , si $\mathcal{C}^*(G)$ se sumerge en una familia de Σ_P entonces $\mathcal{C}^*(G) \in \Sigma_P$.

Demostración: El caso $P = L_2$ está probado en el Teorema 4.2.3. Sea $V(G) = \{v_1, \dots, v_n\}$, por hipótesis $(C(v_i))_{i=1, \dots, n}$ se sumerge en familias de Σ_P , sea $(F_i)_{i=1, \dots, n}$ alguna tal que $|\bigcup_{i=1}^n F_i|$ es lo menor posible.

Por (2) de 4.2.1, existe una función $w : \mathcal{C}(G) = \bigcup_{i=1}^n C(v_i) \rightarrow Y = \bigcup_{i=1}^n F_i$ inyectiva tal que $C \in C(v_i)$ si y sólo si $w(C) \in F_i$.

Si w no es suryectiva, sea $y \in Y - w(\mathcal{C}(G))$. Luego por el Lema 4.2.3, $(C(v_i))_{i=1, \dots, n}$ se sumerge en $(F_i - \{y\})_{i=1, \dots, n}$. Se probará que esta familia está en Σ_P .

Caso $P = L_5, L_6$ o L_7 : se supone que $y \in \bigcap_{v_i \in R} F_i$, luego R induce un completo de G . Sea C un clique de G que contiene a R . Por la elección de y , $y \neq w(C)$.

Dado que $(F_i)_{i=1, \dots, n} \in \Sigma_P$ existe un árbol T cuyo conjunto de vértices es Y . Sea h el vértice de T más cercano a y , sobre el único camino de y a $w(C)$

en T (h y $w(C)$ pueden coincidir). Como $R \subseteq C$, si $v_i \in R$ entonces $v_i \in C$, con lo cual $C \in C(v_i)$ y luego $w(C) \in F_i$. Esto prueba que para todo $v_i \in R$, $\{y, w(C)\} \subseteq F_i$ y dado que en los casos tratados F_i induce un conexo de T , se tiene que $h \in F_i$.

Si se identifica h con y en T , se obtiene un árbol T' cuyo conjunto de vértices es $Y - \{y\}$. Por lo demostrado anteriormente se tiene que si F_i induce un subárbol (resp. un camino) (resp. un camino dirigido) de T entonces $F_i - \{y\}$ induce un subárbol (resp. un camino) (resp. un camino dirigido) de T' .

Caso $P = L_4$: sea T el árbol con vértices en $\{1, \dots, n\}$, que existe pues $(F_i)_{i=1, \dots, n} \in \Sigma_{L_4}$, se verá que el árbol T también se adecúa a la definición, para la familia $(F_i - \{y\})_{i=1, \dots, n}$. (1) $ij \in E(T)$ implica que $F_i \cap F_j \neq \emptyset$, pero como por hipótesis $C^*(G)$ se sumerge en $(F_i)_{i=1, \dots, n}$, existe $C \in C(v_i) \cap C(v_j)$. Por la elección de y , $y \neq w(C)$ con lo cual $w(C) \in (F_i - \{y\}) \cap (F_j - \{y\}) \neq \emptyset$. (2) es trivial.

En ambos casos se contradice la elección de $(F_i)_{i=1, \dots, n}$ con lo cuál w es biyectiva y $(C(v_i))_{i=1, \dots, n} \in \Sigma_P$. \square

El siguiente corolario muestra que el Teorema 4.2.2 generaliza el Teorema de Fulkerson-Gross (1.2.9), que caracteriza a los grafos de intervalos, el Teorema de Gavril [11], que caracteriza a los grafos cordales, y las partes b) y c) del Teorema Arbol-Clique [25], que caracterizan a los grafos UV y DV respectivamente.

Corolario 4.2.6 *Si $P = L_2, L_5, L_6$ o L_7 y G es un grafo simple entonces $G \in \Omega\Sigma_P$ si y sólo si $C^*(G) \in \Sigma_P$.*

Demostración: En [3] se prueba que $\Sigma_P \subset \Sigma_H$. Luego por el Teorema 4.2.2, se tiene que si $G \in \Omega\Sigma_P$ entonces $C^*(G)$ se sumerge en alguna familia de Σ_P . Pero eso implica que $C^*(G) \in \Sigma_P$ (Teorema 4.2.5). La recíproca es inmediata. \square

En el Teorema 3.2.2 se ha probado que un grafo G es arbóreo si y sólo si $C^*(G) \in \Sigma_{L_4}$. Luego es natural intentar usar el Teorema 4.2.2 para caracterizar a los grafos arbóreos como grafos de intersección de familias de Σ_{L_4} .

Lamentablemente, como se muestra en el ejemplo siguiente, $\Sigma_{L_4} \not\subseteq \Sigma_H$.

Ejemplo: Sea $F_1 = \{1, 3\}$, $F_2 = \{1, 2, 3\}$, $F_3 = \{1, 2\}$ y $F_4 = \{2, 3\}$. La familia $(F_i)_{i=1,2,3,4} \in \Sigma_{L_4}$, en efecto el árbol K_{13} , con 2 como vértice central, cumple con la definición. Pero $(F_i)_{i=1,2,3,4} \notin \Sigma_H$ ya que $\bigcap_{i=1}^4 F_i = \emptyset$.

Sin embargo el siguiente lema permite la utilización del Teorema 4.2.2.

Lema 4.2.7 Si $G \in \Omega\Sigma_{L_4}$ entonces $G \in \Omega(\Sigma_{L_4} \cap \Sigma_H)$.

Demostración: Sea $G \in \Omega\Sigma_{L_4}$ y $(F_i)_{i=1,\dots,n} \in \Sigma_{L_4}$ tal que G es isomorfo a su grafo de intersección. Se puede suponer, sin pérdida de generalidad, que (*) $(\bigcup_{i=1}^n F_i) \cap C(G) = \emptyset$.

Para todo $i = 1, \dots, n$ sea $F'_i = F_i \cup C(v_i)$. Es obvio que G es isomorfo al grafo de intersección de $(F'_i)_{i=1,\dots,n}$. Se verá que $(F'_i)_{i=1,\dots,n} \in \Sigma_{L_4}$.

Sea T el árbol con vértices en $\{1, \dots, n\}$ que existe por ser $(F_i)_{i=1,\dots,n}$ una familia de Σ_{L_4} . (1) $ij \in E(T)$ implica que $F_i \cap F_j \neq \emptyset$, luego $F'_i \cap F'_j \neq \emptyset$. (2) Sean $i, j \in I$ distintos y k un vértice del único camino de i a j en T , $F'_i \cap F'_j = (F_i \cup C(v_i)) \cap (F_j \cup C(v_j)) = (F_i \cap F_j) \cup (F_i \cap C(v_j)) \cup (F_j \cap C(v_i)) \cup (C(v_i) \cap C(v_j)) = (\text{por } *) = (F_i \cap F_j) \cup (C(v_i) \cap C(v_j))$, pero por hipótesis $F_i \cap F_j \subseteq F_k$ y si $C \in C(v_i) \cap C(v_j)$, se verá que $C \in C(v_k)$, es decir que $v_k \in C$. Para eso se toma v_r un elemento cualquiera de C , luego $v_i v_r, v_j v_r \in E(G)$ y dado que G es isomorfo al grafo de intersección de $(F'_i)_{i=1,\dots,n}$, $F_i \cap F_r \neq \emptyset$ y $F_j \cap F_r \neq \emptyset$. Por la elección de T hay dos posibilidades k está en el único camino de i a r o en el único camino de r a j . Luego $F_i \cap F_r \subseteq F_k$ o $F_j \cap F_r \subseteq F_k$ con lo cual $F_k \cap F_r \neq \emptyset$ luego $v_k v_r \in E(G)$. Esto prueba que cualquier elemento de C es adyacente a v_k y dado que C es un clique de G , $v_k \in C$, es decir $C \in C(v_k)$.

Por último se verá que $(F'_i)_{i=1,\dots,n} \in \Sigma_H$. Sea $J = \{i_1, \dots, i_r\} \subseteq I$ tal que $(F'_{i_h})_{h=1,\dots,r}$ es una subfamilia con intersección no vacía de a pares, luego $\{v_{i_1}, \dots, v_{i_r}\}$ induce un completo de G . Sea C un clique que lo contiene, luego $C \in F'_{i_h}$ para todo $h = 1, \dots, r$. Con lo cual $\bigcap_{h=1}^r F'_{i_h} \neq \emptyset$. \square

Teorema 4.2.8 Un grafo conexo G es arbóreo si y sólo si $G \in \Omega\Sigma_{L_4}$.

Demostración: Si G es arbóreo, por el Teorema 3.2.2, $C^*(G) \in \Sigma_{L_4}$ luego $G \in \Omega\Sigma_{L_4}$ (Teorema 4.1.1).

Recíprocamente si $G \in \Omega\Sigma_{L_4}$ por el Lema anterior, $G \in \Omega(\Sigma_{L_4} \cap \Sigma_H)$ y por el Teorema 4.2.2 b), $\mathcal{C}^*(G)$ se sumerge en una familia de $\Sigma_{L_4} \cap \Sigma_H$ con lo cual $\mathcal{C}^*(G) \in \Sigma_{L_4}$ (Teorema 4.2.5). Luego por el Teorema 3.2.2 G es arbóreo.

4.3 La aplicación clique entre $\Omega\Sigma_P$ y $\mathcal{C}\Sigma_P$

Sea $\mathcal{C}\Sigma_P$ la clase de los grafos G tales que $\mathcal{C}(G)$ se sumerge en alguna familia de Σ_P .

El siguiente resultado se deduce de las definiciones.

Teorema 4.3.1 $K(\mathcal{C}\Sigma_P) \subseteq \Omega\Sigma_P$.

La recíproca no vale en general. En efecto, E_3 (Fig. 13) es un grafo cordal, es decir, $E_3 \in \Omega\Sigma_{L_5}$ pero no es el grafo de cliques de ningún grafo [16].

Definición 4.3.2 [3] Sea $\mathcal{F} = (F_i)_{i \in I}$ una familia de conjuntos. La 2-sección de \mathcal{F} , notada \mathcal{F}_2 , es el grafo cuyo conjunto de vértices es $\bigcup_{i \in I} F_i$ y dos vértices x e y son adyacentes si y sólo si $x, y \in F_i$ para algún $i \in I$.

Definición 4.3.3 [3] Una familia $\mathcal{F} = (F_i)_{i \in I}$ es conforme si todo clique de \mathcal{F}_2 es un elemento de \mathcal{F} .

Se notará Σ_C a la clase de las familias conformes.

Teorema 4.3.4 Si $\Sigma_P \subseteq \Sigma_{L_1} \cap \Sigma_C$ entonces $\Omega\Sigma_P \subseteq K(\mathcal{C}\Sigma_P)$.

Demostración: Sea $G \in \Omega\Sigma_P$, luego existe una familia $\mathcal{F} \in \Sigma_P$ tal que G es isomorfo al grafo de intersección de \mathcal{F} . Como $\mathcal{F} \in \Sigma_{L_1} \cap \Sigma_C$ entonces $\mathcal{C}(\mathcal{F}_2) = \mathcal{F}$ [3]. Luego el grafo de intersección de la familia $\mathcal{C}(\mathcal{F}_2)$ es el mismo que el de la familia \mathcal{F} . Es decir, $K(\mathcal{F}_2) \cong G$.

Además $\mathcal{C}(\mathcal{F}_2) = \mathcal{F} \in \Sigma_P$, luego $\mathcal{F}_2 \in \mathcal{C}\Sigma_P$. \square

Dado que $\Sigma_{L_3} \subseteq \Sigma_{L_1}$ y que obviamente $\Sigma_{L_3} \subseteq \Sigma_C$, se tiene que $\Omega\Sigma_{L_3} \subseteq K(\mathcal{C}\Sigma_{L_3})$. De aquí el Corolario 1.2.19 puede deducirse de los teoremas anteriores.

Definición 4.3.5 Se dice que Σ_P es hereditaria si $(F_i)_{i \in I} \in \Sigma_P$ entonces para todo $J \subseteq I$ la subfamilia $(F_i)_{i \in J} \in \Sigma_P$.

Teorema 4.3.6 Si $G \in \text{HELLY}$, $G \in \Omega\Sigma_P$ con $\Sigma_P \subseteq \Sigma_H$ y Σ_P hereditaria entonces $K(G) \in \mathcal{C}\Sigma_P$.

Demostración: Como $\Sigma_P \subseteq \Sigma_H$ y $G \in \Omega\Sigma_P$, entonces por el Teorema 4.2.2 se tiene que $\mathcal{C}^*(G)$ se sumerge en una familia de Σ_P . Dado que $G \in \text{HELLY}$, la familia de cliques de $K(G)$ son los elementos maximales de $\mathcal{C}^*(G)$ (ver la demostración del Lema 3.2.15). Luego $\mathcal{C}(K(G))$ se sumerge sobre una subfamilia de Σ_P y dado que Σ_P es hereditaria se tiene que $K(G) \in \mathcal{C}\Sigma_P$. \square

Dado que $\Sigma_{L_5} \subseteq \Sigma_H$ [3] y obviamente Σ_{L_5} es hereditaria, de este Teorema se deduce la siguiente inclusión del Teorema 3.2.14

$$K(\text{CORDALES} \cap \text{HELLY}) \subseteq \text{ARBOREOS}$$

Definición 4.3.7 Se dice que Σ_P es una clase Helly si $\Sigma_P \subseteq \Sigma_H$ y para toda familia $(F_i)_{i \in I} \in \Sigma_P$, si $X = \bigcup_{i \in I} F_i$ y $X' \subseteq X$ entonces la familia "extendida" $(G_j)_{j \in I \cup X'}$ con $G_j = F_j$ si $j \in I$ y $G_j = \{j\}$ si $j \in X'$, también pertenece a Σ_P .

Teorema 4.3.8 Si $G \in \text{HELLY}$, Σ_P es una clase Helly y $G \in \mathcal{C}\Sigma_P$ entonces $G \in K(\Omega\Sigma_P)$.

Demostración: Sea $V(G) = \{v_1, \dots, v_n\}$. Como $\mathcal{C}(G)$ tiene la propiedad de Helly por el resultado mostrado por Hamelink [16], existe un grafo H tal que $K(H) \simeq G$. En [30] Roberts y Spencer construyen H del siguiente modo:

$$V(H) = \mathcal{C}(G) \cup V(G).$$

y sus aristas son:

si $C, C' \in \mathcal{C}(G)$, $CC' \in E(H)$ si y sólo si $C \cap C' \neq \emptyset$.

si $v \in V(G)$ entonces $vC \in E(H)$ si y sólo si $v \in C$.

Se verá que $H \in \Omega\Sigma_P$. Dado que $G \in \mathcal{C}\Sigma_P$ $\mathcal{C}(G) = \{C_1, \dots, C_m\}$ se sumerge en una familia $(F_j)_{j=1, \dots, m}$ de Σ_P . Luego se tiene:

- (1) $\mathcal{C}(G)$ y $(F_j)_{j=1,\dots,m}$ tienen el mismo grafo de intersección
 (2) existe una función $w : V(G) \rightarrow \bigcup_{j=1}^m F_j$ inyectiva tal que $v_i \in C_j$ si y sólo si $w(v_i) \in F_j$.

Por ser Σ_P una clase Helly, la familia extendida

$$(F_j)_{j=1,\dots,m} \cup (\{w(v_i)\})_{i=1,\dots,n}$$

pertenece a Σ_P .

Es obvio que H es isomorfo al grafo de intersección de la familia extendida

$$(C_j)_{j=1,\dots,m} \cup (\{v_i\})_{i=1,\dots,n},$$

además esta familia se sumerge en $(F_j)_{j=1,\dots,m} \cup (\{w(v_i)\})_{i=1,\dots,n}$. Luego $H \in \Omega\Sigma_P$. \square

Dado que $\Sigma_{L_5} \subset \Sigma_H$ [3] y todo vértice de un árbol induce un subárbol, Σ_{L_5} es una clase Helly.

Por otro lado el grafo H del Teorema anterior es un grafo Helly. En efecto, la familia de los cliques de H es $(C(v_i) \cup \{v_i\})_{i=1,\dots,n}$. Luego si $(C(v_{i_r}) \cup \{v_{i_r}\})_{r=1,\dots,s}$ es una subfamilia con intersección no vacía de a pares, entonces $\{v_{i_1}, \dots, v_{i_s}\}$ induce un completo, C' , de G . Sea C un clique de G que contiene a C' . Luego $C \in C(v_{i_r})$ para todo $r = 1, \dots, s$ con lo cual $C \in \bigcap_{r=1}^s (C(v_{i_r}) \cup \{v_{i_r}\})$. Es decir $\mathcal{C}(H)$ tiene la propiedad de Helly.

Luego del Teorema precedente se deduce la siguiente inclusión del Teorema 3.2.14

$$ARBOREOS \subseteq K(CORDALES \cap HELLY)$$

Apéndice

Demostración del Teorema 1.2.10: Se probará que si G es un grafo de intervalos propios entonces para todo k , $k = 1, \dots, n$, (1) J_1, \dots, J_k es una familia de intervalos con intersección propia de a pares tal que $i \rightarrow J_i$ es una representación propia del grafo inducido $G[\{1, \dots, k\}]$ y

(2) $J_1, \dots, J_k, [a_{k+1}, b_{k+1}], \dots, [a_n, b_n]$ cumple que si $[a_i, b_i] \neq [a_j, b_j]$ entonces $i < j$ si y sólo si $a_i < a_j$ o $a_i = a_j$ y $b_i < b_j$.

Si $k = 1$ vale obviamente.

Se supone verdadero para $k - 1$ con $k > 1$.

Caso 1: Si $a_k = a_{k-1}$ entonces $J_{k-1} \subseteq [a_k, b_k]$. El procedimiento **INSERTAR 1** reemplaza el extremo izquierdo a_{k-1} del intervalo J_{k-1} por $\frac{1}{2}(a_{k-1} + M)$ (M está bien definido por el valor de a_0). Por la elección de M , es claro que el intervalo modificado no agrega nuevas intersecciones.

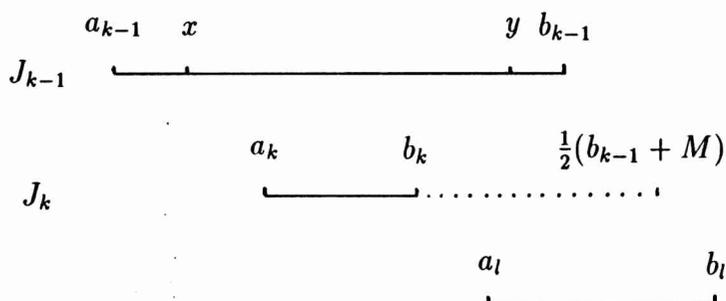
Si $b_k \neq b_{k-1}$ entonces $J_k = [a_k, b_k]$ con lo cual se completa la inducción.

Si $b_k = b_{k-1}$ entonces el nuevo intervalo J_{k-1} contiene a $[a_k, b_k]$. Esto lleva a la aplicación del procedimiento **INSERTAR 2** con el mismo k . Este procedimiento reemplaza el extremo b_k por $\frac{1}{2}(b_{k-1} + M)$ en todos los intervalos iguales a $[a_k, b_k]$. Esto asegura que la nueva familia de intervalos cumple (2). Como en el caso previo es obvio que no se agregan nuevas intersecciones.

Caso 2: Si $a_k \neq a_{k-1}$ entonces pueden presentarse dos posibilidades, si $b_k \geq b_{k-1}$ se completa la inducción, en caso contrario, se aplica el procedimiento **INSERTAR 2**. Se probará que el nuevo intervalo $[a_k, \frac{1}{2}(b_{k-1} + M)]$ no agrega intersecciones. Si, por el contrario, existe $l > k$ tal que $b_k < a_l \leq b_{k-1}$ (ver Fig.), entonces $(k-1)k, (k-1)l \in E(G)$ y $kl \notin E(G)$. Sea $[x, y]$ el intervalo inicial, que ha sido reemplazado por el intervalo $J_{k-1} = [a_{k-1}, b_{k-1}]$, es decir C_x es el primer clique que contiene al vértice $k-1$. Dado que los vértices $k-1$ y l son adyacentes, $a_l \leq y$, luego $b_k < y$. Como los intervalos de la representación F-G cumplen con (2), se tiene que $x < a_k$. Luego $k-1 \in C_x$,

$k \notin C_x$ y $l \notin C_x$. De aquí existe un vértice $j \in C_x$ no adyacente a k ni a l . Con lo cual el subgrafo inducido $G[\{j, k-1, k, l\}]$ es K_{13} , que contradice que G es un grafo de intervalos propios (Teorema 1.2.8).

Por último se analizará la complejidad del algoritmo. Haciendo pequeñas modificaciones al algoritmo de Booth y Luker [4] para reconocer grafos de intervalos, puede obtenerse un ordenamiento de los vértices de G de modo que todos sus cliques resulten intervalos. Por otro lado, obtener un orden de los cliques de G de acuerdo con sus extremos izquierdos, es del orden $O(c(G) \log c(G))$. Es evidente que el algoritmo utiliza a lo sumo $2(n-2)$ iteraciones y encontrar cada extremo es del orden $O(n)$. Luego queda probado que la complejidad del algoritmo es $O(n^2)$.



Referencias

- [1] A. Batbedat, Cahiers de D.E.A., Université des Sciences, Montpellier, 1985.
- [2] A. Batbedat, Les approches pyramidales dans la classification arborée, Masson, Paris, 1990.
- [3] C. Berge, Hypergraphes, Gauthier-Villars, Paris, 1987.
- [4] K. S. Booth and Luker, Testing for the consecutive ones property, interval graphs and graphs planarity using PQ-Tree algorithms, J. of Comp. and Sys. Sciences 13 (1976), 335-379.
- [5] J. Crisci y M. López Armengol, Introducción a la teoría práctica de la Taxonomía Numérica, Monografía 26, Secretaría General de la OEA, Washington, 1983.
- [6] E. Diday, J. Lemaire, J. Pouget et F. Testu, Eléments d'analyse de données, Dunod, Paris, 1982.
- [7] E. Diday, Une représentation visuelle des classes empiétantes: les pyramides, Rapports de recherche 291, INRIA, Rocquencourt, 1984.
- [8] F. Escalante, Über iterierte Clique-Graphen, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 39 (1973) 59-68.
- [9] D. R. Fulkerson and O. A. Gross, Incidence matrices and interval graphs, Pacific J. of Mathematics 15 (1965) 835-855.
- [10] M. Garey and D. Johnson, Computers and Intractability, Freeman and Company, New York, 1979.

- [11] F. Gavril, The intersection graphs of subtrees in trees are exactly the chordal graphs, *J. Combin. B* 16 (1974) 47-56.
- [12] P. Gilmore and A. Hoffman, A characterization of comparability graphs and of interval graphs, *Canad. J. Math.* 16 (1964) 539-548.
- [13] M. Gutierrez and L. Oubiña, Minimum proper interval graphs, *Notas de Matemática* 52, Fac. de Ciencias Exactas, UNLP (1993) (a ser publicado en *Discrete Mathematics*).
- [14] M. Gutierrez and L. Oubiña, Metric characterizations of proper interval graphs and tree-clique graphs, enviado a *J. of Graph Theory*.
- [15] F. Harary, *Graph Theory*, Addison-Wesley Reading, MA, 1969.
- [16] R. Hamelink, A partial characterization of clique graphs, *J. Combin. Theory* 5 (1968) 192-197.
- [17] B. Hedman, Clique graphs of time graphs, *J. of Combin. Theory* 3 (1984) 270-278.
- [18] Z. Jackowski, A new characterization of proper interval graphs, *Discrete Mathematics* 105 (1992) 103-109.
- [19] M. Krivánek and J. Morávec, NP-Hard Problems in Hierarchical-Tree Clustering, *Acta Informatica* 23 (1983) 311-323.
- [20] R. Laskar and D. Shier, On powers and centers of chordal graphs, *Discrete Applied Math.* 6 (1983) 139-147.
- [21] B. Leclerc, Comment reconnaître un hypergraphe arboré, *Centre d'Analyse et de Mathématique Sociales*, P. 009 Paris (1984).
- [22] C. G. Lekkerkerker and J. Ch. Boland, Representation of a finite graph by a set of intervals on the real line, *Fundamenta Mathematicae* 51 (1962) 45-64.
- [23] R. Luce, Semiorders and a theory utility discrimination, *Econometrica* 24 (1956) 178-191.
- [24] H. Machara, On time graphs, *Discrete Math.* 32 (1980) 281-289.

- [25] C. Monma and V. Wei, Intersection graphs of paths in a tree, *J. Combin. Theory B* 41 (1985) 141-181.
- [26] F. S. Roberts, On nontransitive indifference, *J. of Math. Psychology* 7 (1970) 243-258.
- [27] F. S. Roberts, On the comparability between a graph and a simple order, *J. of Combin. Theory* 11 (1971) 28-38.
- [28] F. S. Roberts, Indifference graphs, *Proof Techniques in Graphs Theory: Proceedings of the Second Ann Arbor Graph Theory Conference*. New York, Academic Press (1969) 301-310.
- [29] F. S. Roberts, *Graph Theory and its applications to problems of society*, CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics, SIAM, 1978.
- [30] F. S. Roberts and J. H. Spencer, A characterization of clique graphs, *J. Combin. Theory B* 10 (1971) 102-108.
- [31] D. Scott and P. Suppes, Foundational aspects of theories of measurement, *J. of Symbolic Logic* 23 (1958) 113-128.
- [32] E. R. Sheinerman, Characterizing intersection classes of graphs, *Discrete Math.* 55 (1985) 185-193.
- [33] S. Tsukiyama, M. Ide, M. Ariyoshi and I. Shirawaka, A new algorithm for generating all the maximal independent sets, *SIAM J. Comput.* 6 (1977) 505-517.
- [34] A. Tucker, A structure theorem for the consecutive ones property, *J. of Combin. Theory Ser. B* 12 (1972) 153-162.
- [35] M. Yannakakis, Node-and edge-deletion NP-complete problems, *Proc. 10 th Annual ACM Symp. on Theory of Computing* (1978) 253-264.