



FACULTAD DE
CIENCIAS EXACTAS
BIBLIOTECA DEL DEPARTAMENTO
DE FÍSICA

Universidad Nacional de La Plata
Facultad de Ciencias Exactas
Departamento de Física

TESIS DOCTORAL

RADIACIÓN COHERENTE Y TEORÍA DE LA INFORMACIÓN

Mariela A. Portesi
Noviembre de 1995



Director: Prof. Dr. Ángel Luis Plastino

Departamento de Física
Facultad de Ciencias Exactas
Universidad Nacional de La Plata

Dedicada a mis padres.

A ellos y al Tum, mi agradecimiento.

Índice

Sumario	1
I	4
1 Descripción aproximada de la evolución de un sistema cuántico con Teoría de la Información	5
1.1 Introducción	5
1.2 Modelo de Dicke con RWA	7
1.3 Descripción de un sistema cuántico mediante la Teoría de la Información	9
1.4 Descripción aproximada de la evolución temporal del modelo de Dicke	13
1.5 Conclusiones	18
Lista de figuras	20
2 Descripción entrópica de la dinámica de un sistema	29
2.1 Introducción	29
2.2 Modelo de Dicke sin RWA	31
2.3 Oscilaciones de Rabi en el modelo de Jaynes-Cummings	34
2.4 Reducción del espacio de Fock	38
2.5 Descripción entrópica de las oscilaciones de Rabi en el modelo de Dicke. Resultados y conclusiones	43
Lista de figuras	48

II	57
3 Principio de Incerteza: formulación entrópica generalizada	58
3.1 Introducción	58
3.2 Formulación entrópica del Principio de Incerteza de la Mecánica Cuántica	60
3.3 Entropía generalizada de Tsallis	63
3.4 Medidas entrópicas generalizadas de incerteza	65
Ejemplo 1: Operadores de proyección de spin	66
Ejemplo 2: Operadores número y de fase	69
3.5 El caso de operadores con espectro continuo	72
3.6 Conclusiones	78
Lista de figuras	79
4 Efecto de tamaño de un sistema físico en una estadística no extensiva	89
4.1 Introducción	89
4.2 Termoestadística no extensiva	90
4.3 Magnetismo aparente	96
4.4 Conclusiones	101
Lista de figuras	103

Sumario

El cuerpo de esta Tesis consta principalmente de dos partes y está organizado en cuatro capítulos, cuyo contenido detallamos en este sumario. La primera parte está dedicada al modelo de Dicke —que describe un conjunto de átomos interactuando con radiación electromagnética en una cavidad— y a la forma de caracterizar su dinámica por medio de la Teoría de la Información (TI). En este contexto informacional hacemos uso del concepto de entropía, que mediante maximización sujeta a ligaduras permite determinar el operador densidad que caracteriza al sistema cuántico en todo momento de su evolución. En la segunda parte de la Tesis, presentamos dos aplicaciones de una reciente generalización de la forma entrópica convencional de Boltzmann–Shannon. Una de ellas es el análisis de una formulación cuantitativa del Principio de Incerteza de la Mecánica Cuántica, en el espíritu de la TI. La otra aplicación se refiere a un estudio del tamaño aparente de un sistema físico en el contexto de la Mecánica Estadística no extensiva surgida de la entropía generalizada.

En el Capítulo 1 proponemos una descripción aproximada de la evolución temporal de un sistema cuántico haciendo uso de técnicas inspiradas en la TI. Abordamos específicamente el estudio de la dinámica de un sistema materia–radiación que interactúa bajo la acción del Hamiltoniano de Dicke de un fotón en la aproximación de onda rotante. El estudio teórico de este tipo de interacción ha cobrado renovado interés a partir de experimentos realizados recientemente con átomos de Rydberg que atraviesan una cavidad electromagnética de un modo. Nuestro objetivo es determinar el operador densidad que caracteriza al sistema cuántico a partir de la prescripción informacional, lo que se logra aplicando a la entropía de von Neumann–Shannon el

Principio de Máxima Entropía sujeta a ligaduras. Estos vínculos están dados por el conocimiento sobre el sistema disponible *a priori*, que en general no es completo. Presentamos un tratamiento aproximado autoconsistente basado en la reducción del conjunto de operadores relevantes del problema. De este modo se simplifica su resolución, y se obtiene resultados satisfactorios cuando se confrontan con la solución exacta aun para el caso de considerar un solo observable relevante.

El Capítulo 2 está también dedicado al estudio del modelo de Dicke —y de su versión para una sola partícula, el modelo de Jaynes–Cummings— pero con un enfoque diferente. La idea es describir los fenómenos que se producen cuando la situación inicial del sistema consiste en un campo coherente y el subsistema atómico completamente excitado. Para ello apelamos al concepto de entropía de Shannon, que calculamos después de resolver numéricamente las ecuaciones de movimiento para distintos valores del número de partículas, número medio inicial de fotones y constante de acoplamiento entre átomos y campo. La descripción (en términos entrópicos) de la dinámica del modelo presenta el inconveniente de que la función de onda correspondiente se “mueve” en un espacio de Hilbert de dimensión infinita. Recurriendo al formalismo introducido por Pegg y Barnett (PB) para el tratamiento de estados ópticos, proponemos una reducción del espacio de Fock para los fotones a un espacio finito. Esto nos enfrenta con un número finito (aunque tan grande como se desee) de ecuaciones de movimiento que podemos entonces resolver para condiciones iniciales dadas. Finalmente, computamos distintas funcionales entrópicas, que contienen información relevante sobre el estado del sistema y resultan útiles para describir el grado de “pureza” del mismo durante su evolución.

Una de las contribuciones salientes de la TI es la de brindar una “receta” para definir en términos precisos la cantidad de información que un observador puede poseer de un dado fenómeno físico cuando sólo se conoce una distribución de probabilidad. La teoría puede extenderse, dando lugar a toda una familia de medidas de información que generaliza la expresión logarítmica convencional. En el Capítulo 3, proponemos una generalización de la formulación entrópica del Principio de Incerteza

de la Mecánica Cuántica, apelando a la entropía generalizada de Tsallis. Ésta es utilizada como medida de la incertidumbre (en el sentido de “información faltante”) relacionada con una medición simultánea de pares de observables incompatibles. Nuestra propuesta es ilustrada con algunos ejemplos de operadores con espectro discreto; particularmente, analizamos medidas de incerteza para los operadores número y de fase del formalismo PB. Discutimos también el caso de operadores con espectro continuo, donde resulta conveniente definir una funcional de correlación generalizada que da cuenta de la interrelación entre las variables dadas. Como ejemplo, consideramos específicamente sistemas descritos por estados coherentes o autofunciones del oscilador armónico unidimensional en el espacio de posición y momento. En algunas de las situaciones analizadas, las medidas entrópicas generalizadas pueden ser consideradas superiores a las medidas de Shannon correspondientes.

En los últimos años, la estadística ortodoxa de Boltzmann–Gibbs ha presentado inconvenientes en la descripción de sistemas con interacciones de largo alcance o memoria de largo tiempo, o cuando la estructura del espacio–tiempo es fractal. La estadística no extensiva surgida de la entropía generalizada de Tsallis ha probado, en cambio, ser capaz de tratar exitosamente estos problemas. En el Capítulo 4 presentamos un efecto que está originado en la Mecánica Estadística no extensiva y que tiene que ver con el tamaño de un sistema físico. El fenómeno es tan general que puede ser ilustrado en un sistema muy simple. Así, mostramos que una colección de spines independientes en presencia de un campo magnético externo puede exhibir lo que denominamos “magnetismo aparente”. Esto es, para cada valor del parámetro que caracteriza la estadística no extensiva, el número efectivo de partículas que aparenta tener el sistema es mayor o menor que el verdadero número de spines que lo componen. Para finalizar, señalamos una posible conexión entre el resultado aquí obtenido y un fenómeno de similares características que se presenta en la teoría de grupos cuánticos.

PARTE I

Capítulo 1

Descripción aproximada de la evolución de un sistema cuántico con Teoría de la Información

1.1 Introducción

La descripción de sistemas físicos haciendo uso de la Teoría de la Información [1–3] ha sido investigada ampliamente a partir de las ideas pioneras de Jaynes [4], quien en 1957 propuso una reformulación de la Mecánica Estadística [5, 6]. En los años siguientes, se presentaron extensiones del formalismo para tratar con sistemas cuánticos. En las distintas aplicaciones consideradas (refs. [7–23], entre otras) se ha obtenido una caracterización muy precisa del estado del sistema físico tratado, mostrando la versatilidad y poder del formalismo. En este capítulo abordamos el estudio de la evolución temporal de un sistema materia–radiación, utilizando para ello técnicas informacionales en una forma adecuada al problema [22]. El concomitante desarrollo constituye uno de los aportes originales de esta Tesis. En el capítulo que sigue apelamos al concepto de entropía de información para describir otros aspectos de la dinámica del modelo tratado aquí [23].

El Hamiltoniano analizado —que describimos en la Sección 1.2— es de la forma $\hat{H} = \hat{H}_A + \hat{H}_R + \hat{H}_{AR}$, donde \hat{H}_A corresponde a un conjunto de átomos de dos niveles,

\hat{H}_R a un modo del campo electromagnético, y \hat{H}_{AR} a la interacción dipolar de Dicke de un fotón [24, 25]. Se ha dedicado mucha atención al estudio teórico de este tipo de interacción ([26, 27] y refs. allí citadas), que es característica de átomos de Rydberg que atraviesan una cavidad resonante de un modo.

Los átomos de Rydberg son sistemas excitados en los que un electrón ha sido promovido a un nivel con un número cuántico principal muy grande ($n_P \sim 30$), y presentan propiedades radiativas muy interesantes por varios motivos. Primero, el tamaño de estos átomos y por ende los elementos de matriz del momento dipolar eléctrico entre niveles vecinos (proporcionales a n_P^2) son típicamente tres órdenes de magnitud mayores que los correspondientes a estados poco excitados. El acoplamiento intrínseco de estos átomos con el campo de radiación será entonces muy fuerte. Segundo, las longitudes de onda de las transiciones entre niveles de Rydberg caen en el rango de los milímetros, y se observan efectos cuánticos a esas frecuencias. Tercero, estos átomos tienen tiempos de vida de emisión espontánea relativamente grandes, lo que significa que a pesar del fuerte acoplamiento que tienen con las microondas, pueden permanecer por un largo tiempo en estados excitados. El hecho de que recientemente se haya logrado realizar experimentos con átomos de Rydberg y radiación en una cavidad resonante [28, 29] ha motivado un renovado interés en estos sistemas y especialmente en los modelos teóricos de Dicke [24] (para muchas partículas) y de Jaynes-Cummings [25] (para una partícula). Estos modelos son el objeto de nuestro estudio en la primera parte de la Tesis.

En la Sección 1.3 presentamos la forma de caracterizar un sistema cuántico haciendo uso del Principio de Máxima Entropía de la Teoría de la Información, cuando se supone conocido un conjunto (reducido) de valores medios de operadores relevantes del problema. Tomados por sí solos, éstos no son suficientes para determinar unívocamente el estado del sistema, pero el Principio de Máxima Entropía permite definirlo como “aquel estado de máxima entropía de Shannon entre todos los estados consistentes con el conjunto de ligaduras dado”. En la Sección 1.4 presentamos la aplicación de este principio y del Teorema de Ehrenfest al conjunto de observables relevantes, con la idea de estudiar la evolución temporal de magnitudes físicas (valores medios de ciertos operadores) involucradas en el modelo de Dicke. En esta sección

se exhibe el planteo matemático del problema, así como resultados numéricos aproximados que se comparan con la solución exacta. La aproximación, que consiste en la reducción del conjunto relevante, arroja resultados satisfactorios aun si se toma un solo observable de interés. Ésta y otras conclusiones de nuestro estudio son expuestas en la Sección 1.5.

1.2 Modelo de Dicke con RWA

El Hamiltoniano de Dicke —que describe la interacción entre N átomos idénticos inicialmente independientes y un único modo cuantizado del campo de radiación— está dado, en la aproximación de onda rotante (*rotating wave approximation*, RWA), por [24]

$$\hat{H} = \omega_R \hat{R}_z + \hbar\omega \hat{a}^\dagger \hat{a} + \hbar g^* \hat{R}_+ \hat{a} + \hbar g \hat{R}_- \hat{a}^\dagger, \quad (1.1)$$

donde los operadores \hat{R}_i se refieren a los átomos, y \hat{a} y \hat{a}^\dagger al campo. Los dos primeros términos constituyen la parte libre del Hamiltoniano mientras que los restantes dan cuenta de la interacción entre ambos subsistemas.

Para las N partículas ópticamente activas —que están confinadas dentro de una cavidad— consideramos la *aproximación de dos niveles*, indicando con $\hbar\omega_R$ la separación en energía entre los dos niveles con los que modelamos a un átomo. El conjunto de partículas está representado por el operador colectivo de inversión de población $\hat{R}_z = \hbar \sum_{p=1}^N \sigma_z^{(p)}/2$, el cual genera un álgebra de $SU(2)$ junto con los operadores “escalera” $\hat{R}_\pm = \hbar \sum_{p=1}^N (\sigma_x^{(p)} \pm i \sigma_y^{(p)})/2$, donde σ_a , $a = x, y, z$, son las matrices de spin de Pauli. Los operadores colectivos satisfacen las relaciones de conmutación de momentos angulares

$$[\hat{R}_z, \hat{R}_\pm] = \pm \hbar \hat{R}_\pm, \quad [\hat{R}_+, \hat{R}_-] = 2\hbar \hat{R}_z, \quad (1.2)$$

y actúan según

$$\hat{R}_z |r, m\rangle_A = m\hbar |r, m\rangle_A, \quad \hat{R}_\pm |r, m\rangle_A = \sqrt{r(r+1) - m(m \pm 1)} \hbar |r, m \pm 1\rangle_A,$$

donde $m = -r, -r+1, \dots, r$ (recordando que $\hat{R}_+ |r, r\rangle_A = 0$ y $\hat{R}_- |r, -r\rangle_A = 0$). El

operador de momento angular total viene dado por

$$\hat{R}^2 = \hat{R}_+ \hat{R}_- + \hat{R}_z^2 - \hbar \hat{R}_z \quad (1.3)$$

y sus autovalores por $r(r+1)\hbar^2$, siendo r el “número de cooperación” [24], que puede tomar los valores $r = N/2, N/2 - 1, \dots, 0(1/2)$, para N par (impar). Dicke señaló la importancia de tratar al gas de átomos radiantes como un *único* sistema cuántico, dado que las partículas están interactuando con un campo de radiación común y no deben ser tratadas como independientes. El fenómeno es esencialmente colectivo.

Por otro lado, los operadores de aniquilación, \hat{a} , y creación, \hat{a}^\dagger , de un fotón en el modo ω satisfacen la relación de conmutación usual

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = \hat{1}, \quad (1.4)$$

y verifican

$$\hat{a}|n\rangle_R = \sqrt{n}|n-1\rangle_R, \quad \hat{a}^\dagger|n\rangle_R = \sqrt{n+1}|n+1\rangle_R,$$

donde $n = 0, 1, \dots$ (recordando que $\hat{a}|0\rangle_R = 0$). Hacemos notar que en el Hamiltoniano (1.1) se ha removido por simplicidad la energía de punto cero del campo, igual a $\hbar\omega/2$.

Consideramos una cavidad sin pérdidas y sintonizada con la transición atómica ($\omega \equiv \omega_R$), de dimensiones lineales pequeñas comparadas con la longitud de onda de la radiación. En otras palabras, suponemos que la cavidad tiene un solo modo resonante cerca de la frecuencia natural atómica y que el campo es uniforme a lo largo del camino de los átomos; despreciamos además la interacción de la radiación con las paredes de la cavidad. El acoplamiento entre átomos y campo en (1.1) está dado por $g = \kappa/\sqrt{N}$, donde κ es una constante compleja apropiada que da cuenta de acoplamientos de tipo dipolar eléctrico y magnético. Por el momento despreciamos los términos dipolares antirresonantes en el Hamiltoniano de interacción, proporcionales a $\hat{R}_+ \hat{a}^\dagger$ y $\hat{R}_- \hat{a}$, que no conservan la energía en el primer orden de teoría de perturbaciones y cuya contribución es pequeña [25][†].

[†]Varios trabajos recientes ([30, 31], entre otros) muestran que el efecto de los términos antirresonantes es apreciable para acoplamiento fuerte (grandes valores de g/ω) y gran número de átomos. La RWA queda justificada, por supuesto, en el caso de acoplamiento débil. En el Cap. 2, tendremos en cuenta todos los términos de la interacción dipolar.

Dadas las condiciones que hemos supuesto, hay dos constantes de movimiento: la energía no perturbada, que en unidades de $\hbar\omega$ es

$$c \equiv \langle \hbar^{-1} \hat{R}_z + \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle \quad (1.5)$$

[ver las ecs. (1.17.a) y (1.17.b) más abajo], y el momento angular de spin total

$$\langle \hat{R}^2 \rangle = r(r+1)\hbar^2. \quad (1.6)$$

El Hamiltoniano \hat{H} opera en el espacio de Hilbert producto directo $\mathcal{H} = (\mathcal{C}^2)^{\otimes N} \otimes \mathcal{F}$, donde \mathcal{C}^2 denota el espacio de un único spin y \mathcal{F} el espacio de representación para fotones. Nos restringimos a trabajar en el subespacio correspondiente a $r = N/2$, el cual es generado por los vectores de estado (no degenerados)

$$|\varphi_m^{(N/2,c)}\rangle \equiv |N/2, m\rangle_A \otimes |c-m\rangle_R, \quad m = -N/2, -N/2+1, \dots, M,$$

donde $M \equiv \min\{N/2, c\}$ de modo tal que se verifica que el número de fotones es positivo.

La ecuación de Schrödinger para la función de onda $|\psi(t)\rangle$ que caracteriza al sistema,

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = \hat{H} |\psi(t)\rangle, \quad (1.7)$$

describe su evolución temporal. La solución exacta del problema puede obtenerse desarrollando $|\psi\rangle$ en una base adecuada, resultando así un conjunto de ecuaciones diferenciales de primer orden para los coeficientes del desarrollo. En nuestro caso, puede tomarse una expansión en los $N/2+M+1$ estados $|\varphi_m^{(N/2,c)}\rangle$. Como consecuencia de ello, cuando la cantidad de partículas puestas en juego es muy grande, es necesaria la resolución (por métodos numéricos) de un gran número de ecuaciones diferenciales. Atacaremos el problema en una forma alternativa mucho más simple, que incorpora el uso de herramientas de la Teoría de la Información.

1.3 Descripción de un sistema cuántico mediante la Teoría de la Información

Como es sabido, el estado físico de un sistema cuántico está representado por un vector normalizado $|\psi\rangle$ de un espacio de Hilbert. Dicho vector contiene *todo el conocimiento*

que un observador puede poseer sobre el sistema. En otras palabras, una especificación completa del estado del sistema consiste en dar el vector $|\psi\rangle$ que lo caracteriza. Sin embargo, en muchos casos no es posible describir el sistema por medio de un estado puro; simplemente se pueden asignar probabilidades a los distintos vectores de un subespacio del espacio de Hilbert. Von Neumann mostró que la entidad matemática que contiene todo el conocimiento que puede conseguirse sobre el sistema en estas circunstancias es el operador estadístico u *operador densidad* $\hat{\rho}$, el cual es definido positivo y está normalizado [32].

El problema central de la Mecánica Estadística cuántica es el de determinar $\hat{\rho}$ para un sistema de interés. Hacia fines de los años 50 Jaynes propuso [4] un tratamiento en base a la Teoría de la Información (TI) [1–3], metodología que ha sido extensamente aplicada y que usaremos a lo largo de la Tesis para encarar el estudio de diversos problemas físicos.

En algoritmos basados en la TI, el conocimiento que se tiene *a priori* de un sistema está reducido al Hamiltoniano \hat{H} y a los valores de expectación de, digamos, L operadores relevantes linealmente independientes \hat{O}_j ,

$$\langle \hat{O}_j \rangle \equiv \text{Tr}(\hat{\rho} \hat{O}_j) = o_j, \quad j = 1, \dots, L \quad (1.8)$$

(por simplicidad, suponemos que los observables son mutuamente conmutantes). Se desea entonces *inferir* $\hat{\rho}$ sobre la base de la información suministrada, con el requerimiento adicional de normalización,

$$\text{Tr}(\hat{\rho}) = 1. \quad (1.9)$$

Para esto, Jaynes sugirió utilizar el Principio de Máxima Entropía (PME) sujeta a ligaduras, donde la entropía se define a través de la expresión de von Neumann–Shannon[†]:

$$S[\hat{\rho}] = - \text{Tr}(\hat{\rho} \ln \hat{\rho}). \quad (1.10)$$

Esta magnitud provee una medida cuantitativa de la *información faltante* o *ignorancia* sobre el sistema, debida a la descripción parcial que brinda el operador densidad $\hat{\rho}$.

[†]Tomamos la constante de Boltzmann igual a la unidad.

Para un estado puro (en este caso se dispone de información completa), la traza en (1.10) consta de sólo un término y entonces S se anula. Pero, generalmente, no se dispone de una cantidad suficiente de información debido a limitaciones tanto en observaciones como en el modelo teórico del sistema (en muchos casos se debe reducir el conjunto de variables para hacer “matemáticamente tratable” al problema).

Al disponer de datos sobre un conjunto reducido de variables (descripción estadística incompleta), habrá una gran cantidad de operadores densidad compatibles con las restricciones de los valores medios conocidos. Varias expresiones para $\hat{\rho}$ brindarán la misma predicción para los valores de expectación de los observables mencionados, pero arrojarán diferentes resultados para las demás cantidades relacionadas con el sistema. Para obtener el “mejor” operador densidad, la prescripción de Jaynes indica extremizar (maximizar) S respecto de $\hat{\rho}$, tomando como vínculos las L ligaduras (1.8) y la condición de normalización (1.9). Este procedimiento, el PME, determina unívocamente la matriz densidad. La expresión explícita del operador densidad resultante vendrá dada por

$$\hat{\rho} = \frac{\exp(-\sum_{j=1}^L \lambda_j \hat{O}_j)}{\text{Tr}[\exp(-\sum_{j=1}^L \lambda_j \hat{O}_j)]} \quad (1.11)$$

siendo λ_j , $j = 1, \dots, L$, multiplicadores de Lagrange apropiados para garantizar el cumplimiento de las L ligaduras mencionadas. La entropía máxima toma el valor [4, 5]

$$S_{\max} = \lambda_0 + \sum_{j=1}^L \lambda_j o_j, \quad (1.12)$$

siendo $\lambda_0 \equiv \ln\{\text{Tr}[\exp(-\sum_{j=1}^L \lambda_j \hat{O}_j)]\}$ el parámetro de Lagrange correspondiente a la condición de normalización. Notar, finalmente, que en la expresión (1.11) puede reescribirse el denominador como $\exp(\lambda_0)$.

Consideramos a continuación la dinámica del sistema a través de la dependencia con el tiempo de las magnitudes físicas relevantes. Con la idea de estudiar la evolución temporal del sistema, apelamos entonces al Teorema de Ehrenfest, aplicándolo a los observables del conjunto $\mathcal{S}_L \equiv \{\hat{O}_j; j = 1, \dots, L\}$, cuyos valores de expectación suponemos conocidos en el instante inicial t_0 . El Teorema de Ehrenfest para un

operador arbitrario \hat{O}_j se escribe como

$$i\hbar \frac{d}{dt} \langle \hat{O}_j \rangle(t) = \langle [\hat{O}_j, \hat{H}] \rangle(t), \quad (1.13)$$

donde se ha considerado que los observables no dependen explícitamente del tiempo.

Como mencionamos, el conjunto \mathcal{S}_L incluye aquellos operadores cuyos valores medios se conocen en cierto instante inicial y se quieren determinar en instantes subsiguientes. Ahora bien, en principio son posibles dos situaciones. Si un número finito de operadores forma una semiálgebra de Lie con el Hamiltoniano \hat{H} , el estado de máxima entropía es la solución exacta de la ecuación de movimiento (ecuación de von Neumann). Es decir que, bajo esta condición de clausura, los valores de expectación de los L observables son necesarios y suficientes para caracterizar completamente la dinámica [7]. La situación más general que puede darse, sin embargo, al llevar a cabo las operaciones de conmutación con el Hamiltoniano es la siguiente:

$$[\hat{O}_j, \hat{H}] = i\hbar \sum_{l=1}^L f_{jl} \hat{O}_l + \sum_k \alpha_{jk} \hat{A}_k, \quad (1.14)$$

donde las “constantes de estructura” f_{jl} y los α_{jk} son coeficientes que pueden depender del tiempo si $\hat{H} = \hat{H}(t)$. Es decir, en general es posible que aparezcan operadores adicionales, que no estaban incluidos en \mathcal{S}_L .

El procedimiento usual [8–17], propuesto por Alhassid y Levine [7], para tratar el problema indica formar todos los operadores del tipo $\hat{P}_j \equiv [\hat{O}_j, \hat{H}]$, $j = 1, \dots, L$. Si los L operadores \hat{P}_j son combinaciones lineales de los originales (más el operador identidad eventualmente), el conjunto \mathcal{S}_L resulta *cerrado* bajo conmutación con \hat{H} . En caso contrario, el conjunto original debe *aumentarse* incorporando los \hat{P}_j y se debe considerar $[\hat{P}_j, \hat{H}]$; y así siguiendo hasta que el conjunto final de $L' > L$ operadores sea cerrado. Este proceder puede arrojar $L' \gg 1$ o puede llevar, para operadores definidos en un espacio de Hilbert de dimensión infinita, a tener que tratar con un número infinito de operadores. Para atacar estos inconvenientes, la idea esencial a ser empleada aquí es la de *aproximar* los valores de expectación de los operadores “extra” —los \hat{A}_k de la ec. (1.14)— de un modo *autoconsistente*. Para los nuevos observables

proponemos entonces[†]

$$\langle \hat{A}_k \rangle(t) \equiv \text{Tr}[\hat{\rho}(t) \hat{A}_k], \quad (1.15)$$

con el operador densidad de la forma dada en (1.11), o sea, definido en base a los L observables cuyos valores medios son considerados como información disponible sobre el sistema. Para la matriz densidad evaluada en el instante t , la dependencia con el tiempo se ve reflejada en los multiplicadores de Lagrange, $\lambda_j = \lambda_j(t)$, pues trabajamos en el esquema de Schrödinger.

A modo de conclusión, en el contexto de la TI la ecuación de movimiento para el operador densidad se convierte en un conjunto de ecuaciones diferenciales acopladas de primer orden para L valores medios, con condiciones iniciales dadas por el conocimiento disponible *a priori* del sistema físico. Bajo la condición de clausura de los operadores con \hat{H} , aquel conjunto es cerrado. En el otro caso, el procedimiento que hemos indicado involucra un *cierre no lineal autoconsistente* de las ecuaciones satisfechas por los valores de expectación de los operadores en \mathcal{S}_L .

1.4 Descripción aproximada de la evolución temporal del modelo de Dicke

Nos proponemos describir algunos aspectos de la dinámica del modelo de Dicke, en particular la dependencia temporal de la intensidad de la radiación emitida que está dada por

$$I(t) = \frac{d}{dt} \hbar\omega \langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle = -\omega \frac{d}{dt} \langle \hat{R}_z \rangle, \quad (1.16)$$

donde hemos hecho uso de la ec. (1.5). Suponemos que el sistema está preparado inicialmente en un estado del tipo $|\varphi_{m_0}^{(N/2, m_0 + n_0)}\rangle = |N/2, m_0\rangle_A \otimes |n_0\rangle_R$, configuración que da cuenta de $N/2 + m_0$ átomos excitados entrando en la cavidad y n_0 fotones presentes en el campo de radiación.

Comenzamos por considerar la evolución dinámica de los valores de expectación de los operadores involucrados en el Hamiltoniano, a saber:

[†]Suponemos que los \hat{A}_k conmutan con los \hat{O}_j .

$$\begin{aligned} \langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle(t), & \quad \langle \hat{R}_z \rangle(t), \\ \langle \hat{R}_+ \hat{a} \rangle(t), & \quad \langle \hat{R}_- \hat{a}^\dagger \rangle(t). \end{aligned}$$

Aplicando el Teorema de Ehrenfest (1.13), con el Hamiltoniano de Dicke (1.1), las ecuaciones de movimiento para esos valores medios resultan

$$i\hbar \frac{d}{dt} \langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle = \hbar (-g^* \langle \hat{R}_+ \hat{a} \rangle + g \langle \hat{R}_- \hat{a}^\dagger \rangle) \quad (1.17.a)$$

$$i\hbar \frac{d}{dt} \langle \hat{R}_z \rangle = \hbar^2 (g^* \langle \hat{R}_+ \hat{a} \rangle - g \langle \hat{R}_- \hat{a}^\dagger \rangle) \quad (1.17.b)$$

$$i\hbar \frac{d}{dt} \langle \hat{R}_+ \hat{a} \rangle = \hbar g (\langle \hat{R}_+ \hat{R}_- \rangle + 2\hbar \langle \hat{R}_z \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle) \quad (1.17.c)$$

$$i\hbar \frac{d}{dt} \langle \hat{R}_- \hat{a}^\dagger \rangle = \hbar g^* (-\langle \hat{R}_+ \hat{R}_- \rangle - 2\hbar \langle \hat{R}_z \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle). \quad (1.17.d)$$

Este conjunto abierto de ecuaciones diferenciales acopladas de primer orden *no puede atacarse con las técnicas usuales de la TI* [7–15]. Efectivamente, si continuáramos incorporando ecuaciones de movimiento para los operadores que aparecen en el lado derecho de las últimas ecuaciones, surgirían más observables que no hemos tenido en cuenta hasta ahora[†], y finalmente se obtendría un conjunto *infinito* de ecuaciones de movimiento. Esta situación (u otra donde el número de operadores a incluir sea muy grande) se presenta en muchos casos de interés físico, y debe ser atacada en una forma alternativa a la propuesta por Alhassid y Levine [7] que mencionamos en la sección anterior. Para lograr *cerrar* la cadena de conmutadores de un modo práctico, se debe seguir necesariamente un camino diferente [16, 17, 22]. El punto que deseamos enfatizar es que en el problema que nos interesa *pueden alcanzarse resultados satisfactorios, como ejemplificaremos más adelante, concentrando la atención sólo en la evolución temporal de la inversión de población atómica.*

Ahora bien, ya que estamos interesados en la descripción de $\langle \hat{R}_z \rangle(t)$, es útil proceder de la siguiente manera: tomar la derivada de (1.17.b) con respecto al tiempo y usar (1.17.c) y (1.17.d) para llegar finalmente a una ecuación que contenga valores

[†] Por ejemplo, en los conmutadores de $\hat{R}_+ \hat{R}_-$ y $\hat{R}_z \hat{a}^\dagger \hat{a}$ con \hat{H} se añaden $\hat{R}_+ \hat{R}_z \hat{a}$, $\hat{R}_z \hat{R}_- \hat{a}^\dagger$, $\hat{R}_+ \hat{a} \hat{a}^\dagger \hat{a}$ y $\hat{R}_- \hat{a}^\dagger \hat{a}^\dagger \hat{a}$.

medios de observables que involucren a \hat{R}_z (y que conmuten con él). Despejando \hat{R}_+ \hat{R}_- de la ec. (1.3) y haciendo uso de la constante de movimiento (1.6), se llega a una ecuación de segundo orden:

$$\frac{d^2}{dt^2} \langle \hat{R}_z \rangle(t) = -2\hbar^2 |g|^2 [\langle \hat{R}_z \rangle(t) + \hbar^{-1} B(t)]. \quad (1.18)$$

La inhomogeneidad aquí presente,

$$B(t) \equiv 2\hbar \langle \hat{R}_z \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle(t) - \langle \hat{R}_z^2 \rangle(t) + r(r+1)\hbar^2, \quad (1.19)$$

que contiene *toda la no linealidad del problema*, será aproximada de una forma adecuada con el fin de resolver la ec. (1.18) cuando se proveen las condiciones iniciales $\langle \hat{R}_z \rangle(0) = m_0 \hbar$ y $(d\langle \hat{R}_z \rangle/dt)(0) = 0$, y los valores $c = m_0 + n_0$ y $r = N/2$. Notar que la ec. (1.18) posee la ventaja adicional de que todos sus términos son reales, a diferencia del sistema de ecs. (1.17).

Para inferir los valores medios que aparecen en la inhomogeneidad (1.19), tomamos una prescripción de TI para el operador densidad del sistema, que en el esquema de Schrödinger adquiere la forma

$$\hat{\rho}(t) = \frac{\exp[-\lambda(t) \hat{R}_z]}{\text{Tr}\{\exp[-\lambda(t) \hat{R}_z]\}}. \quad (1.20)$$

Podemos ahora computar aproximadamente los dos primeros términos de $B(t)$, por medio de la definición (1.15). Recordamos que $\lambda(t)$ es un multiplicador de Lagrange definido por el valor instantáneo $\langle \hat{R}_z \rangle(t)$, solución de la ec. (1.18) evaluada a tiempo t . Los pasos a seguir para obtener la solución pertinente consisten en partir del valor medio relevante para un momento dado, encontrar $\hat{\rho}$ (esto es, λ) en ese instante, calcular la función B y propagar $\langle \hat{R}_z \rangle$ en el tiempo mediante la ecuación diferencial que éste satisface. El “nuevo” valor de $\langle \hat{R}_z \rangle$ permite determinar la matriz densidad y la inhomogeneidad (1.19) en un instante posterior, luego el siguiente $\langle \hat{R}_z \rangle$, y así sucesivamente. Finalmente señalemos que el problema a ser resuelto puede ponerse como:

$$\ddot{X} + 2X + 2B_1[X(T)] = 0 \quad (1.21)$$

$$X(0) = m_0, \quad \dot{X}(0) = 0, \quad (1.22)$$

donde el punto indica derivada con respecto a la variable independiente escaleada $T \equiv \hbar|g|t$, X representa la variable dependiente, $X \equiv \hbar^{-1}\langle \hat{R}_z \rangle(T)$, y se define $B_1 \equiv \hbar^{-2}B$.

El problema de resolver una ecuación diferencial ordinaria puede siempre reducirse al estudio de un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden. En este caso, reescribimos (1.21) en la forma

$$\frac{dX}{dT} = Y \quad (1.23.a)$$

$$\frac{dY}{dT} = -2X - 2B_1(T), \quad (1.23.b)$$

donde Y es una nueva variable, y las condiciones iniciales (1.22) se introducen simplemente como $X(0) = m_0$, $Y(0) = 0$. El método numérico que utilizamos para integrar el sistema es el de Runge-Kutta de cuarto orden [33, Cap. 15].

Como hemos señalado, en cada instante T es necesario además hallar el multiplicador de Lagrange λ , que surge de la "información disponible":

$$\left(\sum_{m'=-N/2}^M e^{-\lambda(T)m'} \right)^{-1} \left(\sum_{m=-N/2}^M e^{-\lambda(T)m} m \hbar \right) - \langle \hat{R}_z \rangle(T) = 0. \quad (1.24)$$

Para encontrar la raíz de esta ecuación no lineal se utilizó el método de Newton-Raphson [33, Cap. 9].

Varios autores han investigado distintos aspectos del modelo de Dicke. En la ref. [34], por ejemplo, puede encontrarse un tratamiento del modelo con métodos cuánticos exactos, que comparamos con nuestros cálculos; también se da un estudio analítico en la ref. [35]. Con el tratamiento simple que hemos descrito [22] se ha obtenido el comportamiento correcto para la evolución del sistema, que consiste en un intercambio periódico de energía entre los átomos y el campo (recordemos que no se consideró interacción con las paredes del contenedor). Presentamos algunos resultados inferidos, obtenidos para diversos valores de N , m_0 y c (o sea, n_0). A modo de ejemplo, en la figura 1.1 se compara la solución exacta para la inversión atómica $\langle \hat{R}_z \rangle(T)$ (en unidades de \hbar) con el resultado aproximado, tomando $N = 100$ partículas con la condición inicial $m_0 = 49$ y $n_0 = 10$. Como puede verse en este

y otros ejemplos, el método de inferencia que utilizamos predice adecuadamente el comportamiento de las variables dinámicas.

La figura 1.2 exhibe el rate de radiación I (en unidades de $\hbar\omega$) en función del tiempo escaleado T , para el caso de $N = 100$ partículas, con el sistema atómico casi completamente invertido ($m_0 = r - 1$) y con $n_0 = 5$. Los períodos de emisión ($I > 0$) y absorción ($I < 0$) de fotones se corresponden con la desexcitación y excitación, respectivamente, del subsistema de átomos. La periodicidad de la evolución temporal puede mostrarse también a través de “órbitas” en un diagrama de fase, dadas por $X = \hbar^{-1}\langle\hat{R}_z\rangle$ versus $Y = dX/dT$. En la fig. 1.3 graficamos las curvas correspondientes a los casos $n_0 = 1, 5$ y 10 , con $N - 1$ átomos inicialmente excitados, fijando N en 100.

La fig. 1.4 presenta nuestras estimaciones para el primer máximo de radiación, considerando $m_0 = r - 1$ y distintos valores de n_0 . Se muestran resultados para diversos valores de N y del número de fotones inicial. En la fig. 1.4(a), T_M representa la posición del primer máximo del número de fotones, y en la fig. 1.4(b) $\nu_M = N^{-1}\langle\hat{a}^\dagger\hat{a}\rangle(T_M)$ indica su magnitud intensiva. El instante en que la energía del campo toma su primer máximo disminuye al incrementar el tamaño del sistema (esto es, N), evidenciando el comportamiento *cooperativo* característico del modelo. También la presencia de un mayor número inicial de fotones acelera la desexcitación de los átomos, como puede verse en los ejemplos de la figura. El comportamiento de T_M y ν_M está en buen acuerdo con aquellos obtenidos por Scharf [34] bajo condiciones similares.

Finalmente, las transformaciones

$$\hat{a}^\dagger \longrightarrow \frac{\hat{a}^\dagger}{\sqrt{N}}, \quad \hat{a} \longrightarrow \frac{\hat{a}}{\sqrt{N}}, \quad \hat{R}_z \longrightarrow \frac{\hat{R}_z}{N}$$

llevan a la siguiente ecuación de movimiento para la variable intensiva:

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} = -2 \left(\frac{1}{N}x + b_1 \right), \quad (1.25)$$

donde $\tau \equiv \hbar|\kappa|t = \sqrt{N}T$, $x \equiv X/N$ y $b_1 \equiv B_1/N^2$. La figura 1.5 es un gráfico de $N^{-1}\langle\hat{a}^\dagger\hat{a}\rangle$ frente a T , correspondiente a la condición inicial $n_0 = N/10$; la constante

c fue elegida igual al número de cooperación, $c = r = N/2$. En esta figura, las curvas para $N = 50, 100$ y 200 se superponen perfectamente para todo T .

1.5 Conclusiones

En este capítulo nos hemos valido de un método de inferencia estadística, obtenido como una extensión del formalismo de Teoría de la Información, para tratar un problema de muchos cuerpos en Mecánica Cuántica. El esquema se basa en una generalización del Principio de Máxima Entropía que, aplicado a distribuciones cuánticas, permite inferir en cualquier instante el operador densidad del sistema y otras magnitudes de interés (como valores de expectación de un conjunto de observables).

Hemos mostrado una descripción aproximada, muy simple, de la evolución temporal del modelo de Dicke en la aproximación de onda rotante. En este problema, el tratamiento autoconsistente en términos de la Teoría de la Información resulta fácilmente aplicable. El esquema “teorético” empleado saca ventaja del hecho de que la dinámica del sistema parece ser llevada por el comportamiento de *sólo una* de las cantidades relevantes, en este caso el valor de expectación de la inversión de población atómica. La simplicidad de nuestros cálculos radica en que *independientemente de la cantidad de átomos y del número inicial de fotones*, nos enfrentamos solamente con dos ecuaciones diferenciales de primer orden (además de la ecuación que fija el vínculo del valor medio conocido de la inversión atómica, que se toma como información *a priori*). Dichas ecuaciones, a pesar de ser no lineales, permiten una resolución del problema en forma más sencilla y “menos costosa” (en tiempo de cálculo), sobre todo para sistemas muy grandes. Nuestro método brinda resultados inferidos razonablemente buenos para las magnitudes relevantes en comparación con la solución numérica exacta del problema. Como mencionamos, ésta se obtiene resolviendo la ecuación de Schrödinger, que se transforma en un conjunto de ecuaciones diferenciales de primer orden para los coeficientes de la función de onda expandida en una base adecuada. El número de tales ecuaciones es del orden del número de partículas intervinientes.

El tratamiento teórico empleado puede considerarse como una *extensión* del procedimiento usual, el cual ha sido satisfactoriamente utilizado, por ejemplo, en las

refs. [7–15]. Si bien en nuestro caso no se puede recurrir a la clausura de una semiálgebra entre los operadores relevantes y el Hamiltoniano, hemos logrado atacar el problema de una forma alternativa sencilla y que ha mostrado su eficiencia en la bondad de los resultados obtenidos.

Lista de figuras

Figura 1.1 Resultados exacto e inferido para la inversión atómica $X = \hbar^{-1} \langle \hat{R}_z \rangle$ en función del tiempo escaleado T .

Figura 1.2 Intensidad de radiación emitida $I/\hbar\omega$ en función de T , cuando el campo y las N partículas están inicialmente en el estado $|r, r-1\rangle_A \otimes |5\rangle_R$, con $r = N/2 = 100$.

Figura 1.3 Órbitas que exhiben el comportamiento de $X = \hbar^{-1} \langle \hat{R}_z \rangle$ versus $Y = dX/dT$, con distintas condiciones iniciales para el campo de radiación.

Figura 1.4 Posición T_M y magnitud intensiva $\nu_M = N^{-1} \langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle(T_M)$ del primer máximo del número de fotones, para sistemas de distintos tamaños con varias condiciones iniciales.

Figura 1.5 Solución inferida para el valor de expectación intensivo del número de fotones versus $\tau = N^{1/2} T$, para $N = 50, 100$ y 200 .

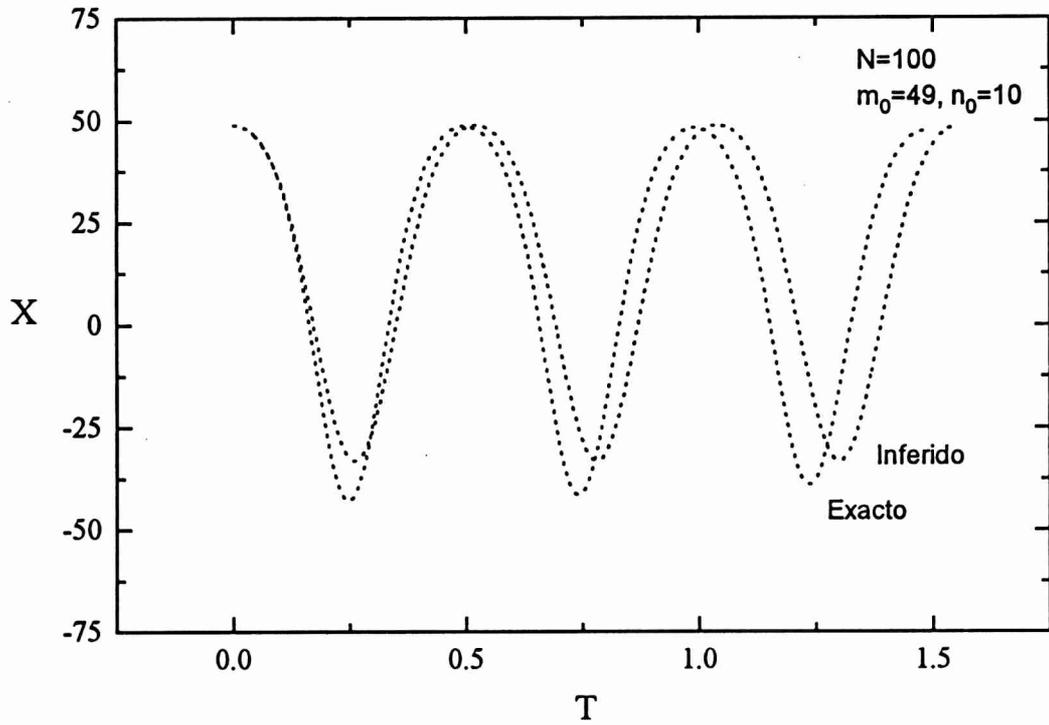


Figura 1.1: Resultados exacto e inferido para la inversión atómica $X = \hbar^{-1} \langle \hat{R}_z \rangle$ en función del tiempo escaleado T .

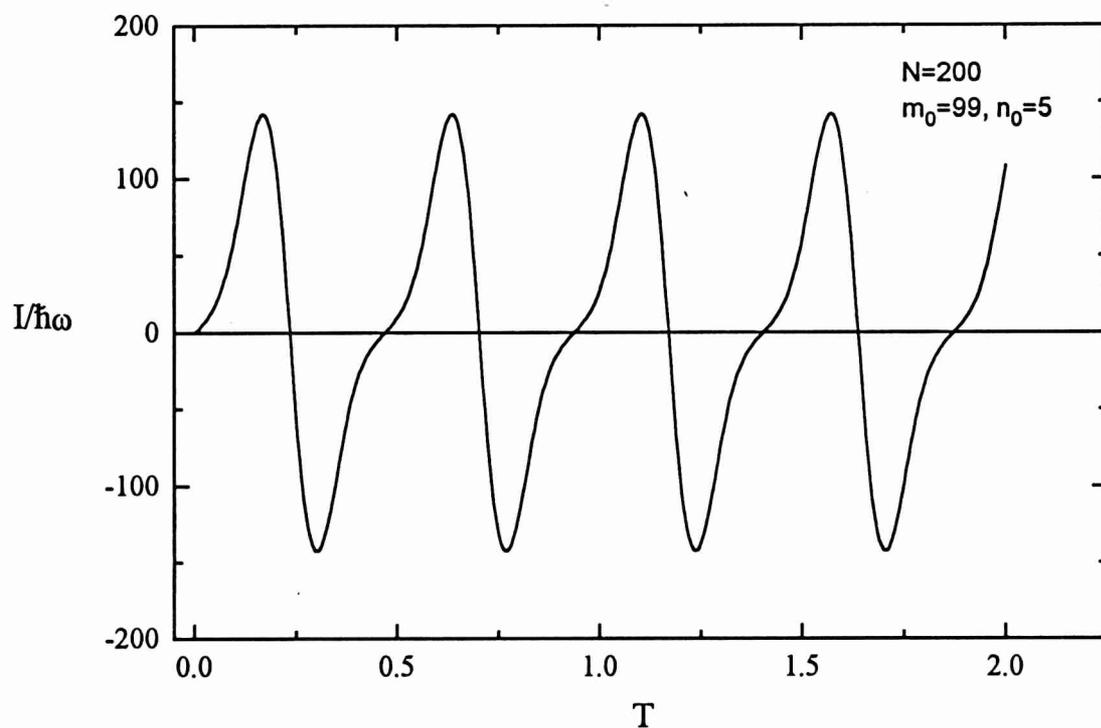


Figura 1.2: Intensidad de radiación emitida $I/\hbar\omega$ en función de T , cuando el campo y las N partículas están inicialmente en el estado $|r, r-1\rangle_A \otimes |5\rangle_R$, con $r = N/2 = 100$.

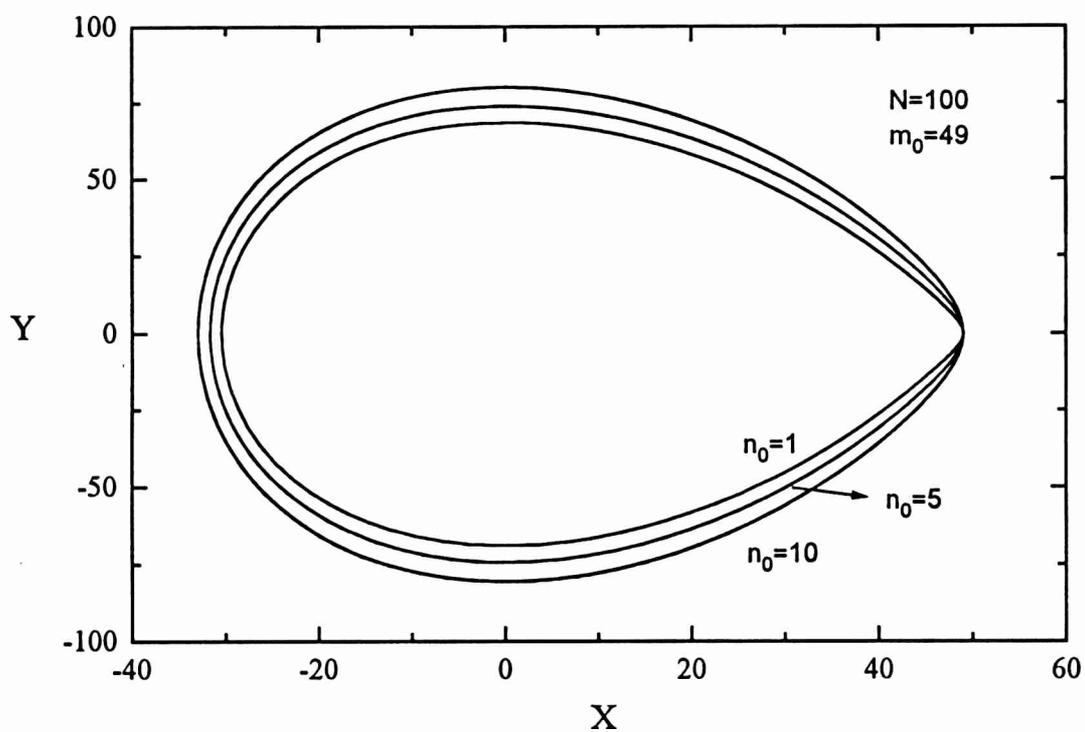


Figura 1.3: Órbitas que exhiben el comportamiento de $X = \hbar^{-1} \langle \hat{R}_z \rangle$ versus $Y = dX/dT$, con distintas condiciones iniciales para el campo de radiación.

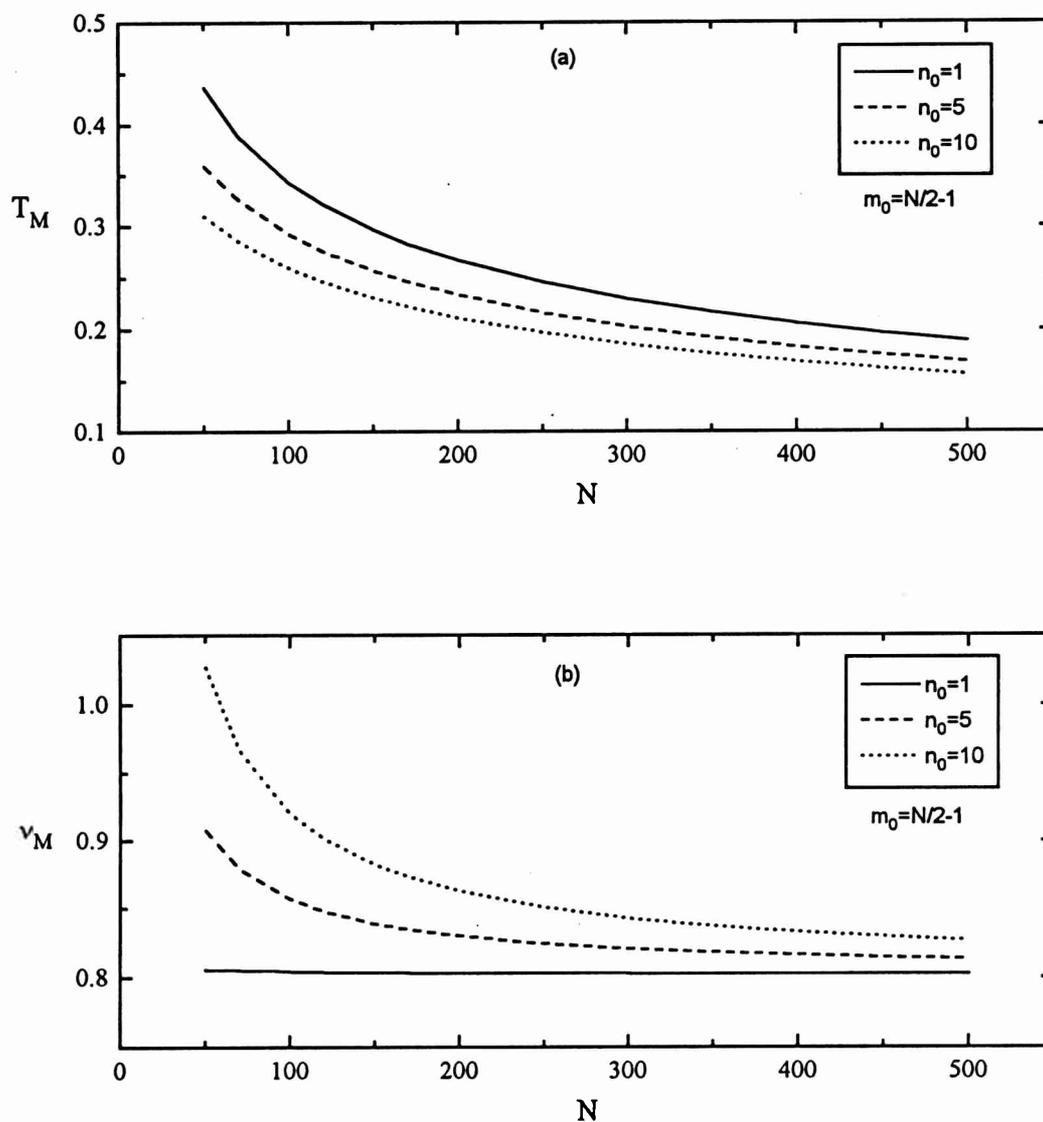


Figura 1.4: Posición T_M y magnitud intensiva $\nu_M = N^{-1}\langle\hat{a}^\dagger\hat{a}\rangle(T_M)$ del primer máximo del número de fotones, para sistemas de distintos tamaños con varias condiciones iniciales.

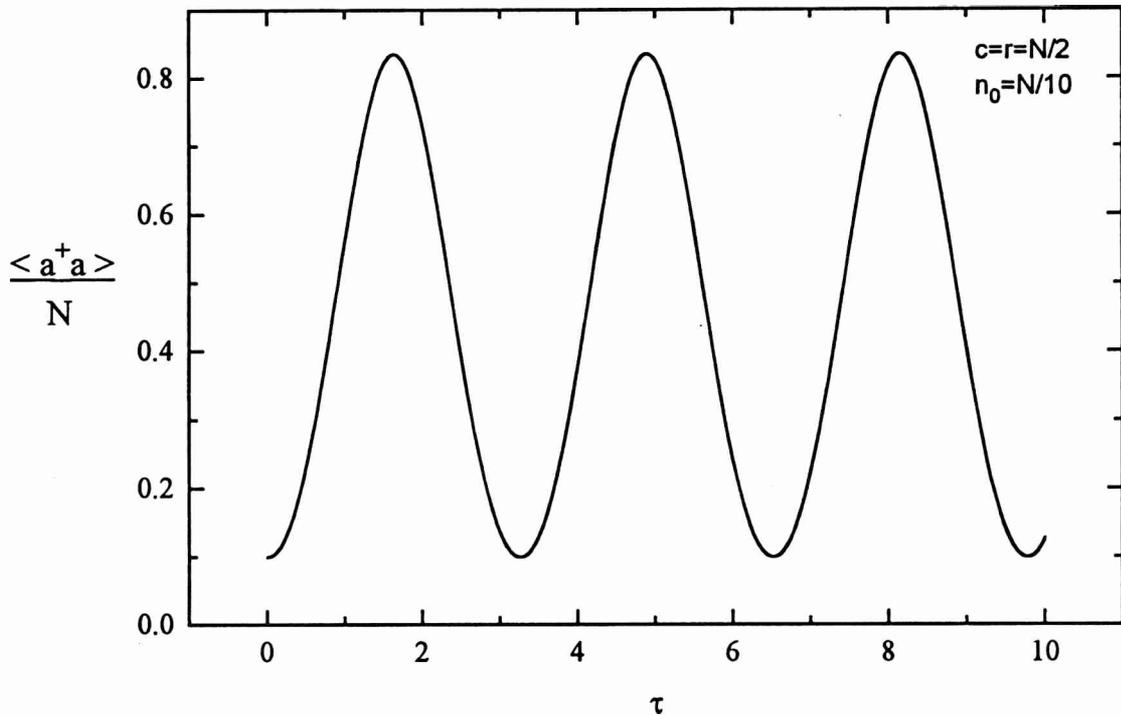


Figura 1.5: Solución inferida para el valor de expectación intensivo del número de fotones versus $\tau = N^{1/2} T$, para $N = 50, 100$ y 200 .

Bibliografía

- [1] C.E. Shannon, *Bell Syst. Tech. J.* **27** (1948) 379; **27** (1948) 623.
- [2] C.E. Shannon y W. Weaver, *The Mathematical Theory of Communication* (University of Illinois Press, Urbana, 1949).
- [3] L. Brillouin, *Science and Information Theory* (Academic Press, New York, 1956; 1962, 2da. edición).
- [4] E.T. Jaynes, *Phys. Rev.* **106** (1957) 620; **108** (1957) 171.
- [5] A. Katz, *Principles of Statistical Mechanics, The Information Theory Approach* (Freeman and Co., San Francisco, 1967).
- [6] A. Hobson, *Concepts in Statistical Mechanics* (Gordon and Breach, London, 1971).
- [7] Y. Alhassid y R.D. Levine, *J. Chem. Phys.* **67** (1977) 4321; *Phys. Rev. A* **18** (1978) 89.
- [8] D. Otero, A. Plastino, A.N. Proto y G. Zannoli, *Phys. Rev. A* **26** (1982) 1209; *Z. Phys. A* **316** (1984) 323.
- [9] H. Reinhardt, *Nucl. Phys. A* **413** (1984) 475.
- [10] R. Balian, Y. Alhassid y H. Reinhardt, *Phys. Rep.* **131** (1986).
- [11] E. Duering, D. Otero, A. Plastino y A. Proto, *Phys. Rev. A* **32** (1985) 2455; **32** (1985) 3681; **35** (1987) 2314.

- [12] D. Otero, A. Plastino, A. Proto y S. Mizrahi, *Phys. Rev. A* **33** (1986) 3446.
- [13] J. Aliaga, D. Otero, A. Plastino y A.N. Proto, *Phys. Rev. A* **35** (1987) 2304.
- [14] J. Aliaga y A.N. Proto, *Phys. Lett. A* **142** (1989) 63.
- [15] J. Aliaga, G. Crespo y A.N. Proto, *Phys. Rev. A* **42** (1990) 618.
- [16] J. Aliaga, M. Negri, D. Otero, A. Plastino y A.N. Proto, *Phys. Rev. A* **36** (1987) 3427.
- [17] N. Canosa, A. López, D. Otero, A. Plastino y A.N. Proto, *Z. Phys. A* **326** (1987) 195.
- [18] M. Portesi, *Teoría de la Información e inferencia de estados excitados*, Trabajo de diploma de la Licenciatura en Física (Facultad de Ciencias Exactas, Universidad Nacional de La Plata, 1990).
- [19] A. Arrachea, M. Portesi, N. Canosa, R. Rossignoli y A. Plastino, en *Anales de la 75a. Reunión Nacional de la Asociación Física Argentina*, 1990, pág. 39.
- [20] A. Arrachea, N. Canosa, A. Plastino, M. Portesi y R. Rossignoli, en *Proceedings of the XV International Workshop on Condensed Matter Theories, Mar del Plata, Argentina*. Editado por A.N. Proto y J.L. Aliaga (Plenum Press, New York, 1992), Vol. 7, pág. 63.
- [21] A. Arrachea, N. Canosa, A. Plastino, M. Portesi y R. Rossignoli, *Phys. Rev. A* **45** (1992) 7104.
- [22] M. Portesi y A. Plastino, *Phys. Lett. A* **184** (1994) 168.
- [23] M. Portesi y A. Plastino, *Information-entropic description of Rabi oscillations in the Dicke model*, (en preparación).
- [24] R.H. Dicke, *Phys. Rev.* **93** (1954) 99.
- [25] E.T. Jaynes y F.W. Cummings, *Proc. IEEE* **51** (1963) 89.

- [26] S. Haroche y J.M. Raimond, en *Advances in Atomic and Molecular Physics*. Editado por D.R. Bates y B. Bederson (Academic Press, London, 1985), Vol. 20, pág. 347.
- [27] P. Meystre y M. Sargent III, *Elements of Quantum Optics* (Springer-Verlag, Berlin, 1991, 2da. edición).
- [28] D. Meschede, H. Walther y G. Müller, *Phys. Rev. Lett.* **54** (1985) 551.
- [29] G. Rempe, H. Walther y N. Klein, *Phys. Rev. Lett.* **58** (1987) 353.
- [30] J. Seke, *Quantum Opt.* **3** (1991) 127.
- [31] J. Seke, *Physica A* **193** (1993) 587.
- [32] J. von Neumann, *Mathematical Foundations of Quantum Mechanics* (Princeton Univ. Press, Princeton, 1955).
- [33] W.H. Press, B.P. Flannery, S.A. Teukolsky y W.T. Vetterling, *Numerical Recipes, The Art of Scientific Computing* (Cambridge University Press, Cambridge, 1987).
- [34] G. Scharf, *Helv. Phys. Acta* **43** (1970) 806.
- [35] G. Scharf, *Ann. Phys.* **83** (1974) 71.

Capítulo 2

Descripción entrópica de la dinámica de un sistema

2.1 Introducción

Como mencionamos en el Capítulo 1, recientemente se ha llevado a cabo [1, 2] una serie de experimentos con átomos de Rydberg y radiación electromagnética, lo que ha demostrado que es posible estudiar una partícula interactuando con un único modo resonante del campo electromagnético dentro de una cavidad [3]. La formulación teórica de este tipo de interacción, introducida por Dicke (en el caso de muchos átomos) [4] y por Jaynes y Cummings (en el caso de un solo átomo) [5] ha sido estudiada por diversos autores. Citamos a modo de ejemplo las refs. [3, 6–17], donde se presenta el tratamiento de la dinámica del sistema atómico y del campo de radiación bajo diferentes circunstancias: en algunos casos se consideró la aproximación de onda rotante (RWA), que simplifica el tratamiento, y en otros casos los términos antirrotantes fueron incluidos en el Hamiltoniano; se supusieron cavidades con y sin pérdidas; se tomaron uno o más átomos dentro del contenedor; etc. También se ha estudiado [9, 12, 16] la relación entre la evolución de la inversión atómica y la compresión de las amplitudes del campo electromagnético.

En el primer capítulo de esta Tesis describimos la evolución temporal del modelo

de Dicke teniendo en cuenta la RWA. Técnicas inspiradas en la Teoría de la Información nos permitieron hallar [15] el operador densidad y la dinámica de la inversión de población atómica y del número de fotones, en forma aproximada, considerando un único observable relevante. La condición inicial impuesta fue un autoestado del operador de inversión para los átomos y un estado número para el campo.

La evolución del modelo presenta características notables si se prepara inicialmente al campo electromagnético en un estado coherente, en cuyo caso los átomos y el campo se van acoplando en una forma más compleja. Se produce, después de un cierto tiempo, un colapso [6] de las oscilaciones de Rabi que presenta la inversión atómica y, más tarde, una reaparición [7] (a la que nos referimos de aquí en adelante como *revival*) del movimiento periódico. El presente capítulo está dedicado a describir este comportamiento.

Es bien conocido que la entropía de Shannon de la Teoría de la Información [18–23] resulta una cantidad muy útil para estudiar un sistema físico, ya que contiene información relevante sobre el estado del mismo en cada instante de su evolución. En las refs. [24–27] aplicamos el Principio de Máxima Entropía al estado fundamental de un sistema finito, y utilizamos la entropía cuántica inferida como herramienta para detectar signos de transiciones de fase. En base a un conocimiento limitado de valores de expectación del problema, se obtiene [26, 27] una predicción precisa de las regiones críticas de ciertos parámetros de control en sistemas con un número finito de partículas. Otro ejemplo que podemos citar es el estudio [28] del fenómeno de *squeezing* y su relación con la entropía de Shannon en el problema del amplificador paramétrico degenerado. La matriz densidad del sistema puede obtenerse por medio del Principio de Máxima Entropía, lo que permite describir la compresión de los operadores de cuadratura del campo electromagnético en términos de los multiplicadores de Lagrange asociados con el problema variacional.

Es nuestro propósito realizar un análisis detallado de la entropía informacional del modelo de Dicke, con la idea de describir los procesos que se llevan a cabo en el sistema bajo distintas condiciones iniciales. En particular, los fenómenos de colapso y *revival* de las oscilaciones de Rabi son descritos [17] en términos entrópicos, y algunos resultados numéricos son presentados para varios casos de interés.

En la Sección 2.2 se muestra la forma que toma el Hamiltoniano de Dicke incluyendo los términos antirrotantes, así como la ecuación de movimiento para la función de onda que caracteriza al sistema. Los importantes fenómenos de origen puramente cuántico que presenta la dinámica cuando el campo inicial es coherente son descritos para el caso de una sola partícula en la Sección 2.3. A continuación, en la Sección 2.4, proponemos una forma de reducir el conjunto infinito de ecuaciones dinámicas (originado en el espacio de Fock) a un sistema finito, “matemáticamente tratable”. Para llevar a cabo tal reducción apelamos al formalismo introducido hace unos pocos años por Pegg y Barnett para el tratamiento de estados ópticos. La Sección 2.5 está dedicada a considerar la detección de las oscilaciones de Rabi y los fenómenos cuánticos citados por medio de la entropía de información de Shannon. Presentamos algunos resultados y conclusiones en esta última sección del capítulo.

2.2 Modelo de Dicke sin RWA

El Hamiltoniano general —esto es, sin considerar la RWA— para la interacción dipolar de N átomos idénticos de dos niveles con un modo cuantizado del campo electromagnético está dado por [4]

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{V} = (\omega_R \hat{R}_z + \hbar\omega \hat{a}^\dagger \hat{a}) + \hbar g (\hat{R}_+ + \hat{R}_-) \otimes (\hat{a} + \hat{a}^\dagger), \quad (2.1)$$

donde, por simplicidad, hemos supuesto que la constante de acoplamiento g es real. Los operadores que representan a los dos subsistemas, \hat{R}_z , \hat{R}_+ y \hat{R}_- para los átomos, y \hat{a} y \hat{a}^\dagger para los fotones, son los introducidos en el capítulo anterior. Nuevamente consideramos el caso de una cavidad sintonizada con la transición atómica ($\omega = \omega_R$), sin pérdidas y de dimensiones menores que la longitud de onda de la radiación. No se toma en cuenta el efecto de colisiones atómicas ni superposición de las funciones de onda de los distintos átomos.

Notemos que en el Hamiltoniano de interacción se ha incluido los *términos antirrotantes*, proporcionales a $\hat{R}_+ \hat{a}^\dagger$ y $\hat{R}_- \hat{a}$. Se tiene entonces

$$[\hat{H}_0, \hat{V}] = 2\hbar^2 \omega g (\hat{R}_+ \hat{a}^\dagger - \hat{R}_- \hat{a}), \quad (2.2)$$

y como consecuencia la parte libre del Hamiltoniano (2.1) no es una constante de movimiento.

Como señalamos en la Sección 1.2, el Hamiltoniano de Dicke opera en el espacio de Hilbert $(\mathcal{C}^2)^{\otimes N} \otimes \mathcal{F}$, donde $(\mathcal{C}^2)^{\otimes N}$ corresponde a los N átomos de dos niveles y \mathcal{F} a los fotones. El momento angular de spin total \hat{R}^2 es una constante de movimiento, lo que implica que dada una condición inicial el sistema permanece en un subespacio particular con “número de cooperación” fijo dado por alguno de los valores $r = N/2, N/2 - 1, \dots, 0(1/2)$, para N par (impar). De aquí en más nos restringimos al subespacio simétrico, $r = N/2$, que es generado por los vectores de estado (no degenerados)

$$|m; n\rangle \equiv |r, m\rangle_A \otimes |n\rangle_R, \quad r = N/2, \quad m = -r, -r + 1, \dots, r, \quad n = 0, 1, \dots$$

Es conveniente trabajar en la representación de interacción. Haciendo uso de la condición de sintonía perfecta del campo en la cavidad con la transición atómica, puede verse fácilmente que los operadores no diagonales en la nueva representación resultan

$$\hat{a}(t) = e^{-i\omega t} \hat{a}, \quad \hat{a}^\dagger(t) = e^{i\omega t} \hat{a}^\dagger, \quad (2.3.a)$$

$$\hat{R}_\pm(t) = e^{\pm i\omega t} \hat{R}_\pm, \quad (2.3.b)$$

mientras que

$$\hat{R}_z(t) = \hat{R}_z. \quad (2.3.c)$$

El acoplamiento entre átomos y campo queda entonces descrito por

$$\hat{V}(t) = \hbar g (\hat{R}_+ \hat{a} + \hat{R}_- \hat{a}^\dagger + e^{i2\omega t} \hat{R}_+ \hat{a}^\dagger + e^{-i2\omega t} \hat{R}_- \hat{a}), \quad (2.4)$$

y el sistema está caracterizado por una función de onda del tipo

$$|\psi_{\text{int}}(t)\rangle = \sum_{m=-r}^r \sum_{n=0}^{\infty} b_{m,n}(t) |m; n\rangle. \quad (2.5)$$

Ésta evoluciona en el tiempo bajo la acción de $\hat{V}(t)$, de acuerdo con la ecuación

$$i \hbar \frac{d}{dt} |\psi_{\text{int}}(t)\rangle = \hat{V}(t) |\psi_{\text{int}}(t)\rangle. \quad (2.6)$$

Introduciendo (2.4) y (2.5) en (2.6), se obtiene un conjunto infinito de ecuaciones diferenciales acopladas de primer orden para los coeficientes complejos b en función de la nueva variable dependiente $T \equiv \hbar g t$. Para los coeficientes correspondientes a los $2r + 1$ estados del tipo $|r, m\rangle_A \otimes |0\rangle_R$, resulta

$$i \frac{db_{-r,0}}{dT} = e^{-i2WT} \sqrt{2r} b_{-r+1,1}(T), \quad (2.7.a)$$

$$i \frac{db_{r,0}}{dT} = \sqrt{2r} b_{r-1,1}(T), \quad (2.7.b)$$

y si $m = -r + 1, \dots, r - 1$:

$$i \frac{db_{m,0}}{dT} = \sqrt{(r-m+1)(r+m)} b_{m-1,1}(T) + e^{-i2WT} \sqrt{(r-m)(r+m-1)} b_{m+1,1}(T). \quad (2.7.c)$$

Para los demás coeficientes, con número de fotones $n = 1, 2, \dots$, se tiene

$$i \frac{db_{-r,n}}{dT} = \sqrt{2rn} b_{-r+1,n-1}(T) + e^{-i2WT} \sqrt{2r(n+1)} b_{-r+1,n+1}(T), \quad (2.7.d)$$

$$i \frac{db_{r,n}}{dT} = \sqrt{2r(n+1)} b_{r-1,n+1}(T) + e^{i2WT} \sqrt{2rn} b_{r-1,n-1}(T), \quad (2.7.e)$$

y si $m = -r + 1, \dots, r - 1$:

$$i \frac{db_{m,n}}{dT} = \sqrt{(r-m+1)(r+m)(n+1)} b_{m-1,n+1}(T) + \sqrt{(r-m)(r+m+1)n} b_{m+1,n-1}(T) + e^{i2WT} \sqrt{(r-m+1)(r+m)n} b_{m-1,n-1}(T) + e^{-i2WT} \sqrt{(r-m)(r+m+1)(n+1)} b_{m+1,n+1}(T). \quad (2.7.f)$$

En estas expresiones, el parámetro $W \equiv \omega/(\hbar g)$ representa una medida de la magnitud de la interacción. El valor límite $W = \infty$ corresponde a la RWA que analizamos en el capítulo anterior; en esta aproximación, como mencionamos, la interacción dipolar antirresonante no se tiene en cuenta, lo que equivale a que en las ecuaciones (2.7) los términos que contienen los factores rápidamente oscilantes $e^{\pm iWT}$ no están presentes.

Para referencia posterior, notamos que se puede pensar a (2.7.f) como la ecuación de movimiento general para cualquier $b_{m,n}(T)$ ($\forall m = -r, \dots, r, n = 0, 1, \dots$), siempre que se tome el recaudo de eliminar del lado derecho de la ecuación los términos que posean coeficientes $b_{m',n'}(T)$ tales que $|m'| > r$ ó $n' < 0$.

El valor de expectación del operador de inversión atómica en el tiempo T está dado por la suma

$$\langle \hat{R}_z \rangle(T) = \sum_{m=-r}^r \sum_{n=0}^{\infty} m \hbar |b_{m,n}(T)|^2, \quad (2.8)$$

mientras que el número medio de fotones se expresa como

$$\langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle(T) = \sum_{m=-r}^r \sum_{n=0}^{\infty} n |b_{m,n}(T)|^2. \quad (2.9)$$

Éstas y otras cantidades de interés (como la entropía de infomación que calculamos más adelante) se obtienen después de resolver, en forma numérica, el sistema dinámico (2.7) a partir de condiciones iniciales dadas.

2.3 Oscilaciones de Rabi en el modelo de Jaynes–Cummings

En el capítulo anterior estudiamos en detalle el Hamiltoniano de Dicke con RWA cuando se prepara el sistema a $t_0 = 0$ en autoestados de \hat{R}_z y $\hat{a}^\dagger \hat{a}$. En ese caso, recordamos, la solución exacta del problema puede obtenerse resolviendo un conjunto finito de ecuaciones diferenciales. Ello se debe a que el sistema se “mueve” en un subespacio de dimensión $N/2 + M + 1$, donde $M = \min\{N/2, c\}$ siendo c la energía no perturbada, que es una constante de movimiento. Ahora nos interesa tomar como condición inicial los dos subsistemas no correlacionados con la totalidad de los átomos excitados y el campo en un *estado coherente*, de tal manera que inicialmente la situación está descripta por

$$\begin{aligned} |\psi_{\text{int}}(0)\rangle &= |\psi_A(0)\rangle \otimes |\psi_R(0)\rangle \\ &= |r, r\rangle_A \otimes e^{-|\alpha|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle_R, \end{aligned} \quad (2.10)$$

donde α es un número complejo cuyo módulo cuadrado representa el número medio de fotones presentes en t_0 . La dinámica que sigue el sistema presenta importantes fenómenos de origen puramente cuántico, que describimos a continuación para el caso $N = 1$. Más adelante mostramos una forma de detectar esos procesos para N arbitrario, haciendo uso de la entropía de Shannon de la Teoría de la Información.

Consideremos por un momento el Hamiltoniano del modelo de Jaynes–Cummings con RWA [5]:

$$\hat{H}_{JC} = \left(\frac{\hbar\omega_R}{2} \hat{\sigma}_z + \hbar\omega \hat{a}^\dagger \hat{a} \right) + \hbar g_1 (\hat{\sigma}_+ \hat{a} + \hat{\sigma}_- \hat{a}^\dagger) \quad (2.11)$$

donde $g_1 \equiv \hbar g/2$, y $\hat{\sigma}_i$ son las matrices de Pauli, que representan a la partícula. Supongamos que el estado estadístico cuántico del campo en $t_0 = 0$ es un estado coherente $|\alpha\rangle$ correspondiente a un promedio de fotones $\bar{n} = |\alpha|^2$. Varios autores han mostrado que, a pesar del carácter hermítico de \hat{H}_{JC} —que garantiza evolución libre de pérdidas para todas las variables dinámicas—, bajo esa condición inicial el modelo exhibe decaimiento y signos de aleatoriedad. Cummings consideró [6] las propiedades de coherencia del modelo para tiempos cortos ($g_1 t \lesssim 10$), mientras que Eberly *et al.* presentaron [7] los primeros resultados analíticos y numéricos confiables para tiempos casi arbitrarios ($0 \leq g_1 t \leq 10^6$). Meystre y Zubairy mostraron [8] a su vez que el modelo de Jaynes–Cummings describe una situación puramente cuántica —la más simple posible en óptica cuántica— con la cual se podrían generar “estados comprimidos” del campo electromagnético. A continuación presentamos los resultados más importantes obtenidos en relación con estos fenómenos.

El modelo de Jaynes–Cummings tiene solución analítica en la RWA. En estas circunstancias se puede diagonalizar exactamente el Hamiltoniano y obtener, por ejemplo, la probabilidad de transición para emisión o absorción de un fotón en un tiempo t . Ésta viene dada por $4g_1^2(k+1)R_k^{-2} \sin^2(R_k t/2)$, donde con $k = 0, 1, \dots$ se indica el correspondiente autoestado de \hat{H} , y $R_k = \sqrt{\Delta^2 + 4g_1^2(k+1)}$ se denomina frecuencia de oscilación de Rabi cuántica ($\Delta \equiv \omega_R - \omega$ tiene en cuenta algún posible desfase o *detuning* entre átomo y campo). En presencia del campo, entonces, las probabilidades de ocupación de los niveles superior e inferior del átomo oscilan periódicamente.

Si el campo está en un estado coherente $|\alpha\rangle$, el grado de excitación del sistema de dos niveles está representado, en una escala entre -1 y 1 , por la suma infinita

$$\langle \hat{\sigma}_z \rangle(t) = -e^{-|\alpha|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} \cos(2g_1 \sqrt{\bar{n}} t), \quad (2.12)$$

que no es una función periódica y por otro lado no tiene expresión analítica finita conocida (se supone que el átomo está inicialmente en el estado fundamental, y que $\omega = \omega_R$). Para tiempos muy cortos y \bar{n} grande, la suma se comporta como $\cos(2g_1 \sqrt{\bar{n}} t)$, que es el resultado de la aproximación semiclásica (donde se considera al campo electromagnético como una función del tiempo, en lugar de introducir los operadores de fotones). Cummings mostró [6] que, para tiempos intermedios y en resonancia, las oscilaciones de tipo coseno *colapsan* y están limitadas por la envolvente gaussiana $\exp(-g_1^2 t^2)$, que es independiente de la intensidad del campo. Para tiempos intermedios, valores de \bar{n} intermedios o muy grandes, y desfase Δ arbitrario —aunque pequeño comparado con las frecuencias ω y ω_R —, una mejora de la función de colapso de Cummings está dada por [7]

$$e^{-g_1^2 t^2/2} \rightarrow e^{-g_1^2 t^2 2g_1^2 \bar{n}/(\Delta^2 + 4g_1^2 \bar{n})}, \quad (2.13)$$

que depende de $g_1^2 \bar{n}$ en forma no lineal y predice un colapso mucho más lento fuera de la resonancia. Cuando $2g_1 \sqrt{\bar{n}} t \sim 10^2 - 10^3$, el coseno oscila muy rápidamente y el colapso de coherencia se completa. A pesar de esto se encuentra que en el régimen de largo tiempo, $2g_1 \sqrt{\bar{n}} t \sim 10^6 - 10^8$, el colapso gaussiano es cuasirreversible y existe un “tiempo de revival” $t_r = \pi g_1^{-2} \sqrt{\Delta^2 + 4g_1^2 \bar{n}}$, de tal forma que para múltiplos enteros de t_r la inversión atómica “revive” espontáneamente desde un valor casi nulo hasta casi su máximo, para decaer nuevamente. La función envolvente a largo tiempo, que da una cota para la altura del pico en cada *revival*, tiene la forma [7]

$$E_L(t) = \left(1 + \frac{16 g_1^8 \bar{n}^2 t^2}{(\Delta^2 + 4g_1^2 \bar{n})^3} \right)^{-1/4}. \quad (2.14)$$

Una interpretación gráfica muy ilustrativa de los dos fenómenos descriptos puede encontrarse en la ref. [9]. Para una distribución inicial arbitraria $P(n)$ del campo en la base de estados número, la inversión atómica presenta una oscilación rápida

de la forma $\cos(2g_1\sqrt{\bar{n}}t)$, cuya amplitud está limitada por una función envolvente lentamente variable. Es conveniente escribir

$$\langle \hat{\sigma}_z \rangle(t) = -\text{Re}[e^{2ig_1\sqrt{\bar{n}}t} E(t)], \quad (2.15)$$

donde cada término de la envolvente $E(t) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} P(n)e^{2ig_1(\sqrt{n}-\sqrt{\bar{n}})t}$ puede representarse como un vector en el plano complejo, de longitud $P(n)$ y que rota en un sentido u otro para $t > 0$ dependiendo de que n sea mayor o menor que \bar{n} . Debido a “interferencias” entre los distintos términos, $E(t)$ se acercará lentamente a 0, para luego aumentar nuevamente a medida que los vectores giratorios tiendan a reconstruir la configuración inicial. Según esta imagen, la reconstrucción está determinada por la velocidad de rotación de los vectores más lentos, que son los correspondientes a $n = \bar{n} \pm 1$. El tiempo de *revival* estará dado por la relación

$$2ig_1 |\sqrt{\bar{n} \pm 1} - \sqrt{\bar{n}}| t_r = 2\pi i,$$

que para $\bar{n} \gg 1$ arroja $t_r \simeq 2\pi\sqrt{\bar{n}}/g_1$. Puede verse que t_r depende solamente de la intensidad media del campo inicial y no de la distribución en n . El valor pico que alcanza $\langle \hat{\sigma}_z \rangle$ en cada *revival*, en cambio, dependerá del ancho de $P(n)$.

Para determinar el tiempo en el que la envolvente $E(t)$ colapsa a 0, se considera que la distribución toma valores significativos hasta $n = \bar{n} \pm \Delta n$, siendo Δn el ancho de $P(n)$. Con la suposición $\bar{n} \gg \Delta n$, los términos extremos más significativos de la envolvente son $\simeq P(\bar{n} \pm \Delta n) \exp(\pm ig_1 t \Delta n / \sqrt{\bar{n}})$, y es de esperar que el colapso ocurra cuando estos dos “vectores” hayan girado un ángulo $\pm\pi$. Se tiene en consecuencia

$$ig_1 t_c \frac{\Delta n}{\sqrt{\bar{n}}} \simeq \pi i,$$

de donde $t_c \simeq \pi g_1^{-1} \sqrt{\bar{n}} / \Delta n$ resulta dependiente de \bar{n} y además de la forma de la distribución. Si en particular el campo inicial es coherente, como en (2.12), se tiene $t_c \simeq \pi/g_1$.

Como mencionamos más arriba, el Hamiltoniano de Jaynes–Cummings (2.11) sigue una dinámica que lleva a estados comprimidos (*squeezed states*) del campo

electromagnético. Un estado del campo se dice comprimido cuando uno de los operadores de amplitud o cuadratura,

$$\hat{X}_1 = \frac{1}{2}(\hat{a} + \hat{a}^\dagger), \quad \hat{X}_2 = \frac{1}{2i}(\hat{a} - \hat{a}^\dagger), \quad (2.16)$$

satisface

$$(\Delta \hat{X}_j)^2 < \frac{1}{4}, \quad (2.17)$$

donde $\Delta \hat{X}_j \equiv \langle (\hat{X}_j - \langle \hat{X}_j \rangle)^2 \rangle^{1/2}$. Es obvio que la relación de incerteza de Heisenberg, $\Delta \hat{X}_1 \Delta \hat{X}_2 \geq 1/4$, implica que la dispersión de la amplitud que no está comprimida excede de $1/4$. En la ref. [8] se estableció que en este modelo ocurre *squeezing*, teniendo lugar tanto en el régimen de corto tiempo como durante los *revivals*. Para pequeños valores de \bar{n} ($\bar{n} \lesssim 10$) el fenómeno es algo débil ya que $(\Delta \hat{X}_1)^2 \gtrsim 0.2$ [8], pero resulta considerablemente más significativo cuando se aumenta la intensidad [10, 11]. Esto último no concuerda con el criterio convencional de que los efectos cuánticos se hacen más apreciables cuando el número de fotones es pequeño, y demuestra que no se debe concentrar la atención solamente en estados de baja coherencia cuando se buscan propiedades no clásicas del campo de radiación [11].

Es importante destacar que los fenómenos descritos en el modelo de Jaynes-Cummings son una consecuencia directa de la naturaleza cuántica del campo electromagnético, esto es, están determinados por (i) el carácter discreto y (ii) la distribución estadística del campo de fotones. Vale la pena mencionar, por otro lado, que la primera observación experimental de los efectos de colapso y *revival* fue descrita por Rempe *et al.* [2] en 1987.

2.4 Reducción del espacio de Fock

Volvamos ahora a considerar el Hamiltoniano de Dicke (2.1) y la condición inicial de luz coherente (2.10). Con la idea de obtener numéricamente la solución de la ecuación de Schrödinger en instantes subsiguientes, se debe irremediablemente reducir el conjunto infinito de ecuaciones diferenciales (que, como hemos señalado, surgen de la dinámica del campo de radiación) a un conjunto *finito*. En esta sección proponemos

un método para llevar a cabo una reducción apropiada del espacio de Fock correspondiente.

Como es sabido, el tratamiento de los estados ópticos puede realizarse recurriendo al formalismo de Pegg–Barnett (PB) [29], que supera varias dificultades asociadas con la propuesta de Susskind y Glogower [30] para el estudio de las propiedades de fase del campo electromagnético. La teoría prescribe definir todas las cantidades en un espacio de Hilbert *finito pero arbitrariamente grande*, que se suele denotar por \mathcal{H}^{s+1} , y es generado por los estados número $|0\rangle_s, |1\rangle_s, \dots, |s\rangle_s$. Después de realizados todos los cálculos en ese espacio de dimensión $s + 1$, se debe tomar el límite $s \rightarrow \infty$ para obtener los resultados deseados.

Comentamos brevemente el tratamiento de la fase en óptica cuántica según PB. En este contexto puede definirse un operador de fase *hermítico*, dado por la suma de proyectores

$$\hat{\Phi} = \sum_{l=0}^s \theta_l |\theta_l\rangle_s \langle \theta_l|. \quad (2.18)$$

Los autoestados de este operador vienen dados por

$$|\theta_l\rangle_s = \frac{1}{\sqrt{s+1}} \sum_{n=0}^s e^{in\theta_l} |n\rangle_s, \quad (2.19)$$

con los correspondientes autovalores

$$\theta_l \equiv \theta_0 + \frac{2\pi l}{s+1}, \quad (2.20)$$

para $l = 0, 1, \dots, s$, siendo θ_0 una fase de referencia arbitraria. El conjunto ortonormal y completo $\{|\theta_0\rangle_s, |\theta_1\rangle_s, \dots, |\theta_s\rangle_s\}$ también constituye una base de \mathcal{H}^{s+1} . Recientemente se ha encontrado [31] los estados coherentes correspondientes al operador de fase de PB, que denominamos ECFPB, y que están dados por la superposición[†]

$$|z\rangle_s = \frac{1}{\sqrt{e_s(|\tilde{z}|^2)}} \sum_{l=0}^s \frac{\tilde{z}^l}{\sqrt{l!}} |\theta_l\rangle_s, \quad (2.21)$$

donde $\tilde{z} \equiv \sqrt{2\pi/(s+1)} z$ es un número complejo y en el denominador se introduce

[†] Aquí θ_0 debe tomarse igual a 0.

la función de normalización definida como

$$e_s(x) = \sum_{n=0}^s \frac{x^n}{n!}. \quad (2.22)$$

En forma análoga, introducimos ahora el tratamiento según PB de estados coherentes relacionados con el operador número. El estado coherente $|\alpha\rangle$ —que aparece en el estado inicial (2.10) y que da origen a un conjunto infinito de ecuaciones de movimiento en el modelo de Dicke, aún considerando la RWA— se define, como se sabe, introduciendo el operador unitario de desplazamiento coherente de Glauber [32]:

$$\hat{D}(\alpha) = e^{\alpha \hat{a}^\dagger - \alpha^* \hat{a}} = e^{-|\alpha|^2/2} e^{\alpha \hat{a}^\dagger} e^{-\alpha^* \hat{a}}, \quad (2.23)$$

que se hace actuar sobre el estado de vacío $|0\rangle$ del espacio de Fock. En este espacio, el operador de creación en (2.23) está dado por $\hat{a}^\dagger = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} |n\rangle \langle n-1|$, y la descomposición del estado coherente $|\alpha\rangle$ en estados $|n\rangle$ da la función de distribución de Poisson, $e^{-|\alpha|^2} |\alpha|^{2n}/n!$, para todo $n = 0, 1, \dots$. Dentro de la teoría PB y debido a la finitud del espacio de estados, se debe introducir algunos cambios [31], que pasamos a discutir. El operador número en este formalismo se define como

$$\hat{a}^\dagger \hat{a} = \sum_{n=0}^s n |n\rangle_s \langle n|, \quad (2.24)$$

donde se tiene[†]

$$\hat{a} = \sum_{n=1}^s \sqrt{n} |n-1\rangle_s \langle n|, \quad \hat{a}^\dagger = \sum_{n=1}^s \sqrt{n} |n\rangle_s \langle n-1|, \quad (2.25)$$

que satisfacen la nueva relación de conmutación

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = \hat{1} - (s+1) |s\rangle_s \langle s|. \quad (2.26)$$

Para ser rigurosos, *definimos* [33, 34] un estado coherente relacionado con el operador número en el formalismo PB (que denominamos ECNPB) como el resultado de la acción del operador $\exp(\alpha \hat{a}^\dagger)$ sobre el estado de vacío $|0\rangle_s \in \mathcal{H}^{s+1}$, convenientemente

[†]Utilizamos, por comodidad, los mismos símbolos (\hat{a}, \hat{a}^\dagger) para los operadores de fotones en los espacios de Hilbert de dimensión finita e infinita.

normalizado. La analogía de esta definición con la del espacio de Fock se hace evidente si se nota que el último operador exponencial en (2.23) actúa simplemente como $\exp(-\alpha^* \hat{a})|0\rangle = |0\rangle$, y además que el primer factor de dicha expresión, $\exp(-|\alpha|^2/2)$, está relacionado con la normalización del estado. En el espacio de Hilbert finito, haciendo uso de la nueva propiedad $(\hat{a}^\dagger)^n |0\rangle_s = 0$ para todo $n > s$, se llega a

$$|\alpha\rangle_s \equiv \frac{1}{\mathcal{N}} e^{\alpha \hat{a}^\dagger} |0\rangle_s = \frac{1}{\sqrt{e_s(|\alpha|^2)}} \sum_{n=0}^s \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle_s, \quad (2.27)$$

siendo $\alpha = |\alpha| \exp(i\gamma) \in \mathbb{C}$. Las proyecciones de este ECNPB sobre autoestados número y de fase resultan

$$p_n \equiv |{}_s\langle n|\alpha\rangle_s|^2 = \frac{1}{e_s(|\alpha|^2)} \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} \quad (2.28.a)$$

y

$$p'_l \equiv |{}_s\langle \theta_l|\alpha\rangle_s|^2 = \frac{1}{(s+1)e_s(|\alpha|^2)} \left| \sum_{n=0}^s \frac{\alpha^n e^{-in\theta_l}}{\sqrt{n!}} \right|^2, \quad (2.28.b)$$

respectivamente, con $n, l = 0, 1, \dots, s$. El número medio de fotones de un sistema en el estado $|\alpha\rangle_s$ es

$${}_s\langle \alpha|\hat{a}^\dagger \hat{a}|\alpha\rangle_s = |\alpha|^2 \left(1 - \frac{1}{e_s(|\alpha|^2)} \frac{|\alpha|^{2s}}{s!} \right) \quad (2.29)$$

y resulta igual a $|\alpha|^2$ cuando se toma el límite $s \rightarrow \infty$.

Presentamos ahora el tratamiento de la dinámica del modelo de Dicke, para un campo inicial coherente, en el contexto de la teoría PB. A tal fin elegimos primero un valor (grande) para el parámetro s , que fija el espacio de trabajo, y repitiendo los pasos desarrollados en la Sección 2.2 expresamos las funciones de onda y los operadores en la representación de interacción. Para el estado del sistema a tiempo t tenemos ahora la expansión

$$|\psi_{\text{int}}(t)\rangle = \sum_{m=-r}^r \sum_{n=0}^s b_{m,n}(t) |m; n\rangle_s, \quad (2.30)$$

que consta de un número de términos grande pero finito, igual a $(2r+1)(s+1)$; los valores que toman los coeficientes b dependen, por supuesto, del tamaño del espacio de Hilbert $(\mathcal{C}^2)^{\otimes N} \otimes \mathcal{H}^{s+1}$ donde ahora se “mueve” el estado del sistema. Para los

operadores que intervienen en el Hamiltoniano, en tanto, obtenemos el mismo resultado que en las expresiones (2.3). Esto último se debe a que los operadores \hat{R}_i no se ven afectados por la reducción del espacio de Fock, como es obvio, y en el caso de los operadores de fotones, al hecho de que para cualquier valor de s los conmutadores de \hat{a} y \hat{a}^\dagger con $\hat{a}^\dagger\hat{a}$ se mantienen iguales que para $s = \infty$ (recordamos que dichos conmutadores son usados en el cambio de representación, al aplicar el Lema de Baker-Hausdorff al producto de operadores $e^{i\hat{H}_0 t/\hbar} \dots e^{-i\hat{H}_0 t/\hbar}$).

Al escribir las ecuaciones de movimiento de nuestro problema hay que tener en cuenta ahora el hecho crucial de que $\hat{a}^\dagger|s\rangle_s = 0$. En relación con el sistema dinámico (2.7), notemos que se obtiene las mismas ecuaciones (2.7.a)–(2.7.c) para el estado de vacío del campo ($n = 0$), y que las ecs. (2.7.d)–(2.7.f) resultan válidas para $n = 1, \dots, s-1$. Por último, para $n = s$ se tiene las expresiones que siguen a continuación

$$i \frac{db_{-r,s}}{dT} = \sqrt{2rs} b_{-r+1,s-1}(T), \quad (2.31.a)$$

$$i \frac{db_{r,s}}{dT} = e^{i2WT} \sqrt{2rs} b_{r-1,s-1}(T), \quad (2.31.b)$$

y si $m = -r+1, \dots, r-1$:

$$i \frac{db_{m,s}}{dT} = \sqrt{(r-m)(r+m+1)s} b_{m+1,s-1}(T) + e^{i2WT} \sqrt{(r-m+1)(r+m)s} b_{m-1,s-1}(T). \quad (2.31.c)$$

En definitiva, resultan $(2r+1)(s+1)$ ecuaciones diferenciales acopladas de primer orden, que tienen todas la forma general (2.7.f) eliminando del lado derecho los términos $b_{m',n'}$ con subíndices $m' \notin [-r, r]$ y $n' \notin [0, s]$ †.

Indicamos, para finalizar, el criterio que utilizamos para fijar el valor de s cuando consideramos un estado de coherencia α . Resulta conveniente comparar los valores medios del operador número calculados en los espacios de Hilbert \mathcal{H}^{s+1} y \mathcal{F} , y elegir el menor número entero que satisfaga la relación

$$\left| \frac{\langle \alpha | \hat{a}^\dagger \hat{a} | \alpha \rangle - {}_s \langle \alpha | \hat{a}^\dagger \hat{a} | \alpha \rangle_s}{\langle \alpha | \hat{a}^\dagger \hat{a} | \alpha \rangle} \right| = \frac{1}{e_s(|\alpha|^2)} \frac{|\alpha|^{2s}}{s!} < \epsilon, \quad (2.32)$$

† Al igual que en el Cap. 1, para resolver numéricamente el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias del problema utilizamos el método de Runge-Kutta de cuarto orden [35, Cap. 15].

siendo ϵ un número arbitrariamente pequeño predeterminado.

Remarcamos que mediante la restricción a un espacio de Hilbert finito es posible definir un operador de fase hermítico y, por ejemplo, computar la dinámica de modelos ópticos mediante la resolución de un sistema finito de ecuaciones de movimiento. Es interesante notar que esa reducción no afecta en la práctica los resultados numéricos cuando se toma $s \gg |\alpha|^2$. En el próximo capítulo y en las refs. [33, 34], mostramos una conclusión similar en conexión con una formulación entrópica generalizada del Principio de Incerteza cuántica para los operadores número y de fase de PB.

2.5 Descripción entrópica de las oscilaciones de Rabi en el modelo de Dicke. Resultados y conclusiones

Los átomos y el campo de radiación en el modelo de Dicke pueden analizarse por separado con los operadores estadísticos reducidos, que se obtienen tomando la traza de la matriz densidad total $\hat{\rho}$ sobre estados del subsistema complementario. Se tiene entonces $\hat{\rho}_A = \text{Tr}_R(\hat{\rho})$ y $\hat{\rho}_R = \text{Tr}_A(\hat{\rho})$. Como señalamos en el Cap. 1, el operador densidad contiene la cantidad de información máxima que se puede llegar a tener sobre un sistema cuántico. Sin embargo, muchas veces es conveniente calcular representaciones particulares del mismo. Por ejemplo, en el caso del operador $\hat{\rho}_R$ se puede usar la llamada función Q (obtenida proyectando sobre un estado coherente) o la distribución en estados número, que resultan cantidades importantes para caracterizar el campo.

Si se desea analizar información de los elementos no diagonales de $\hat{\rho}$, una cantidad que juega un papel central es la entropía de von Neumann o total, $-\text{Tr}(\hat{\rho} \ln \hat{\rho})$ [36]. Ésta provee la información más completa sobre la “pureza” del sistema, ya que se anula para estados puros $\hat{\rho} = |\psi\rangle\langle\psi|$. El cálculo de esta entropía en el modelo de Dicke presenta el inconveniente de que la matriz densidad no es diagonal cuando se expresa en la base (infinita) de estados $\{|m; n\rangle\}$, y en consecuencia no podemos hallar $\ln \hat{\rho}$ en forma más o menos simple. En la ref. [13], se define un parámetro de “pureza”

en términos del operador densidad reducido (para el campo o para los átomos) que tiene la forma $S_{A(R)}^{\text{pur.}}(T) = 1 - \text{Tr}_{R(A)}[\hat{\rho}_{A(R)}^2(T)]$, y que resulta más fácil de evaluar que la correspondiente entropía de von Neumann marginal. Los autores estudian el acoplamiento de un modo del campo electromagnético en la cavidad con un conjunto de átomos de dos niveles, considerando la RWA, cuando el campo inicial es muy intenso.

Otra definición importante que permite describir los procesos que se presentan en el modelo es la entropía de Shannon [18–23], que involucra solamente elementos *diagonales* de la matriz densidad en la forma

$$S_{\text{Sha.}} = - \sum_k \langle \varphi_k | \hat{\rho} | \varphi_k \rangle \ln \langle \varphi_k | \hat{\rho} | \varphi_k \rangle, \quad (2.33)$$

siendo $\{|\varphi_k\rangle\}$ una base de estados arbitraria. Esta cantidad es una medida del “alejamiento” del sistema respecto de los vectores de la base elegida. En nuestro problema resulta interesante calcular la entropía de Shannon total, dada por

$$S_T(T) = - \sum_{m=-r}^r \sum_{n=0}^{\infty} |b_{m,n}(T)|^2 \ln |b_{m,n}(T)|^2 \quad (2.34)$$

en términos de los coeficientes de la expansión (2.5) del estado $|\psi_{\text{int}}\rangle$ sobre la base $\{|m;n\rangle, m = -r, \dots, r, n = 0, 1, \dots\}$. Las entropías de Shannon parciales o marginales, relacionadas con los átomos o con el campo de radiación por separado, se obtienen a partir de los operadores estadísticos reducidos. Así, definimos para cada instante T las funcionales

$$S_A(T) = - \sum_{m=-r}^r p_m(T) \ln p_m(T), \quad p_m \equiv \sum_{n=0}^{\infty} |b_{m,n}(T)|^2 \quad (2.35.a)$$

y

$$S_R(T) = - \sum_{n=0}^{\infty} q_n(T) \ln q_n(T), \quad q_n \equiv \sum_{m=-r}^r |b_{m,n}(T)|^2, \quad (2.35.b)$$

que representan una medida del apartamiento del sistema de un autoestado de \hat{R}_z ó $\hat{a}^\dagger \hat{a}$, respectivamente.

En el contexto de la teoría PB, las tres últimas expresiones se ven modificadas por el hecho de trabajar en un espacio de estados para los fotones que tiene dimensión $s+1$ finita. Las sumatorias sobre n deben entonces cortarse en $n = s$, y los coeficientes $b_{m,n}(T)$ deben ser obtenidos a través de las expresiones (2.7) y (2.31), en la forma indicada en la sección anterior. Usando el formalismo PB, es posible además investigar las propiedades de fase del campo de radiación. Para llevar a cabo este estudio, primero expresamos una dada función de onda en el espacio $(\mathcal{C}^2)^{\otimes N} \otimes \mathcal{H}^{s+1}$ como

$$|\psi\rangle = \sum_{m=-r}^r \sum_{l=0}^s c_{m,l} |r, m\rangle \otimes |\theta_l\rangle_s. \quad (2.36)$$

Una comparación con la ec. (2.30) arroja la siguiente relación entre los coeficientes b y c de ambos desarrollos:

$$c_{m,l} = \frac{1}{\sqrt{s+1}} \sum_{n=0}^s b_{m,n} e^{-in\theta_l}. \quad (2.37)$$

Definimos ahora las *entropías de fase total*, dada por

$$S'(T) = - \sum_{m=-r}^r \sum_{l=0}^s |c_{m,l}(T)|^2 \ln |c_{m,l}(T)|^2, \quad (2.38)$$

y parcial, definida como

$$S_F(T) = - \sum_{l=0}^s q'_l(T) \ln q'_l(T), \quad q'_l \equiv \sum_{m=-r}^r |c_{m,l}(T)|^2. \quad (2.39)$$

En las figuras 2.1–2.5 graficamos frente al tiempo escaleado T las funcionales entrópicas S_T, S_A, S_R y S_F para el modelo de Dicke, con la idea de dar una descripción alternativa del mismo. Como condición inicial suponemos que los N átomos se encuentran completamente excitados y que el campo está en un ECNPB (para un valor de s dado[†]); o sea, consideramos el estado inicial $|r, r\rangle \otimes |\alpha\rangle_s$, donde $r = N/2$. En cada caso comparamos el comportamiento de las distintas formas entrópicas con el de los valores de expectación del número de fotones $\langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle$ y de la inversión de

[†]Fijamos el valor de s de acuerdo con el criterio (2.32), tomando $\epsilon = 10^{-10}$ en la mayoría de los casos.

población atómica $N^{-1}\langle\hat{R}_z\rangle$ (en unidades de \hbar). Las entropías son más sensibles, esto es, contienen más información que los dos valores medios graficados, como puede observarse. Es interesante notar, por ejemplo, que cuando $\langle\hat{R}_z\rangle$ toma un valor extremo (tanto máximo como mínimo), S_A tiene un mínimo local lo que predice para ese instante un estado atómico “más puro”. Algo equivalente ocurre con $\langle\hat{a}^\dagger\hat{a}\rangle$ y la entropía S_R . Concluimos que en estas circunstancias la expansión (2.30) del estado del sistema presentará algunos de los coeficientes $b_{m,n}$ con mucho más peso que los restantes.

Si observamos las figs. 2.1–2.4, que corresponden a $N = 10$ y valores crecientes de $|\alpha|^2$, notamos los fenómenos de colapso y *revival* de las oscilaciones de Rabi, tanto en los valores medios como en las entropías. Comentamos un hecho interesante: durante el período de colapso (cuando el valor medio de la inversión atómica se estabiliza), la entropía presenta variaciones rápidas indicando que el sistema no está “congelado”. Por otro lado, las entropías predicen más fuertemente el fenómeno de *revival*. En el caso de la figs. 2.2 y 2.3, por ejemplo, se refleja claramente el poder predictivo de las funcionales entrópicas, ya que S_T , S_A y S_R muestran fuertes variaciones donde los valores medios tienen apenas esbozos de oscilaciones, en lo que podemos denominar zona de “pre-*revival*” (cuando el sistema comienza nuevamente a recomponerse después del período de interferencia destructiva entre los distintos autoestados). Más aun, en la fig. 2.4 este “batido” de las entropías es observado, a pesar de que en ese intervalo de tiempo los valores de expectación de \hat{R}_z y $\hat{a}^\dagger\hat{a}$ han colapsado totalmente y todavía no se detecta la reaparición de las oscilaciones de Rabi. La función lentamente variable S_F también es un indicador del acoplamiento de la radiación con los átomos; sus cambios más importantes se observan durante los batidos de S_R .

Los efectos exhibidos dependen de la intensidad del campo en la cavidad. A medida que se incrementa el valor de la coherencia inicial, el tiempo de colapso disminuye y el de *revival* aumenta. Un valor de $|\alpha|^2$ grande estimula la aparición de un estado del subsistema atómico casi puro en el corto tiempo (ver S_A en la fig. 2.4); en el largo plazo, las entropías se van “suavizando”.

En los gráficos presentados, se considera que el parámetro W es suficientemente

grande como para despreciar la contribución antirrotante en el Hamiltoniano. Si se toma valores menores de ese parámetro las oscilaciones de Rabi no colapsan totalmente (sobre todo, en el caso de un solo átomo). Esto se refleja también en las entropías.

A modo de conclusión, el modelo de Dicke todavía presenta características nuevas e interesantes, particularmente en relación con las propiedades del campo en la cavidad. Los distintos efectos que se producen cuando el sistema evoluciona a partir de una condición inicial de campo coherente fueron descritos en este capítulo a través de una representación particular del operador densidad, esto es haciendo uso del concepto de entropía de Shannon. Definimos varias funcionales entrópicas, vinculadas con el sistema completo y con las proyecciones del estado sobre autovectores atómicos o autoestados número y de fase para el campo. En todos los casos estas formas entrópicas han mostrado su poder de predicción de la dinámica del sistema.

Lista de figuras

Figura 2.1 Entropías de información total (T) y parciales sobre autoestados de fase (F), número (R) y atómicos (A). Valores medios del número de fotones y de la inversión de población atómica intensiva (en unidades de \hbar). Se tiene $N = 10$ y $|\alpha|^2 = 1$.

Figura 2.2 Ídem fig. 2.1, para $N = 10$ y $|\alpha|^2 = 4$.

Figura 2.3 Ídem fig. 2.1, para $N = 10$ y $|\alpha|^2 = 10$.

Figura 2.4 Ídem fig. 2.1, para $N = 10$ y $|\alpha|^2 = 100$.

Figura 2.5 Ídem fig. 2.1, para $N = 5$ y $|\alpha|^2 = 10$.

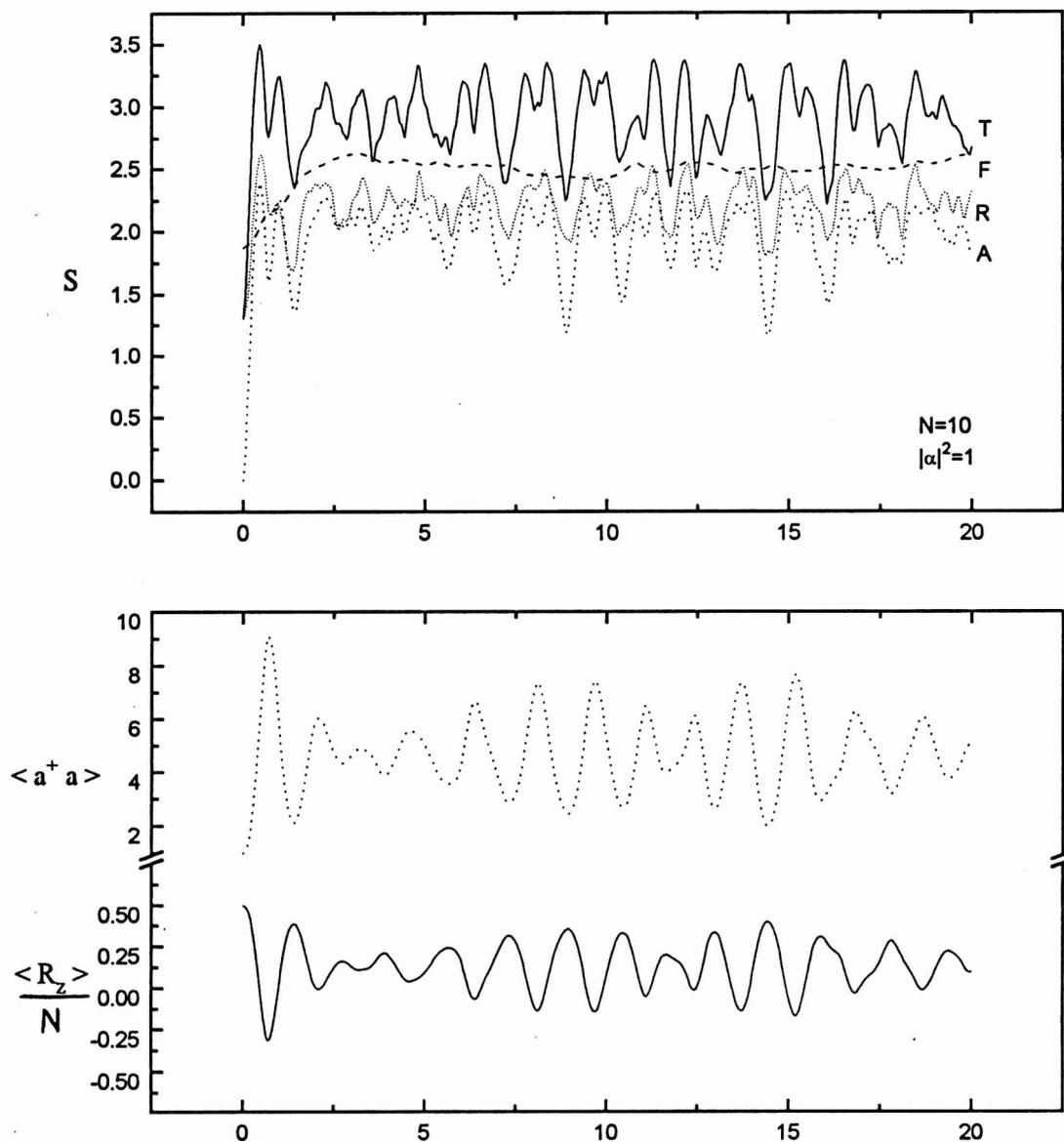


Figura 2.1: Entropías de información total (T) y parciales sobre autoestados de fase (F), número (R) y atómicos (A). Valores medios del número de fotones y de la inversión de población atómica intensiva (en unidades de \hbar). Se tiene $N = 10$ y $|\alpha|^2 = 1$.

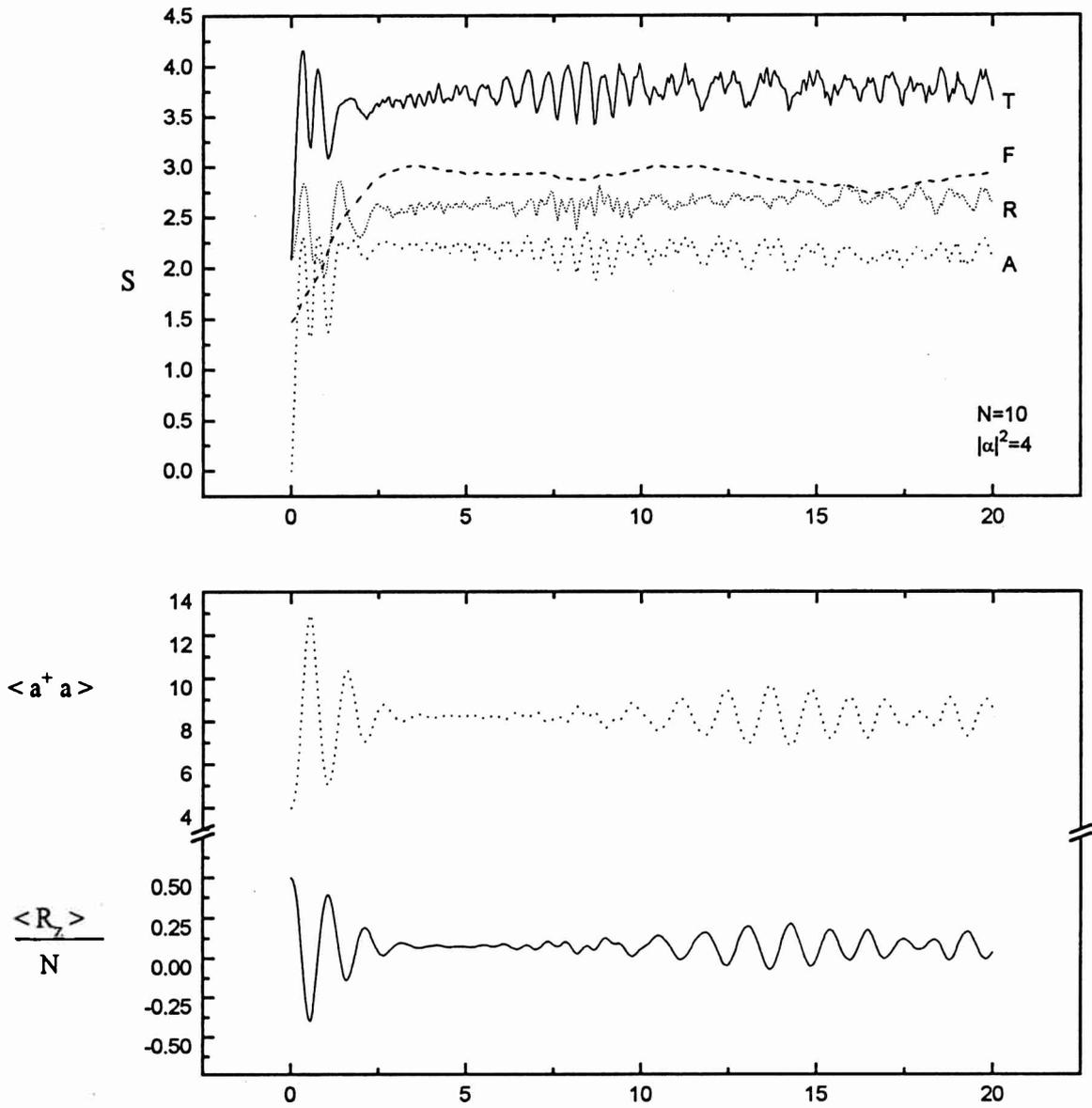


Figura 2.2: Ídem fig. 2.1, para $N = 10$ y $|\alpha|^2 = 4$.

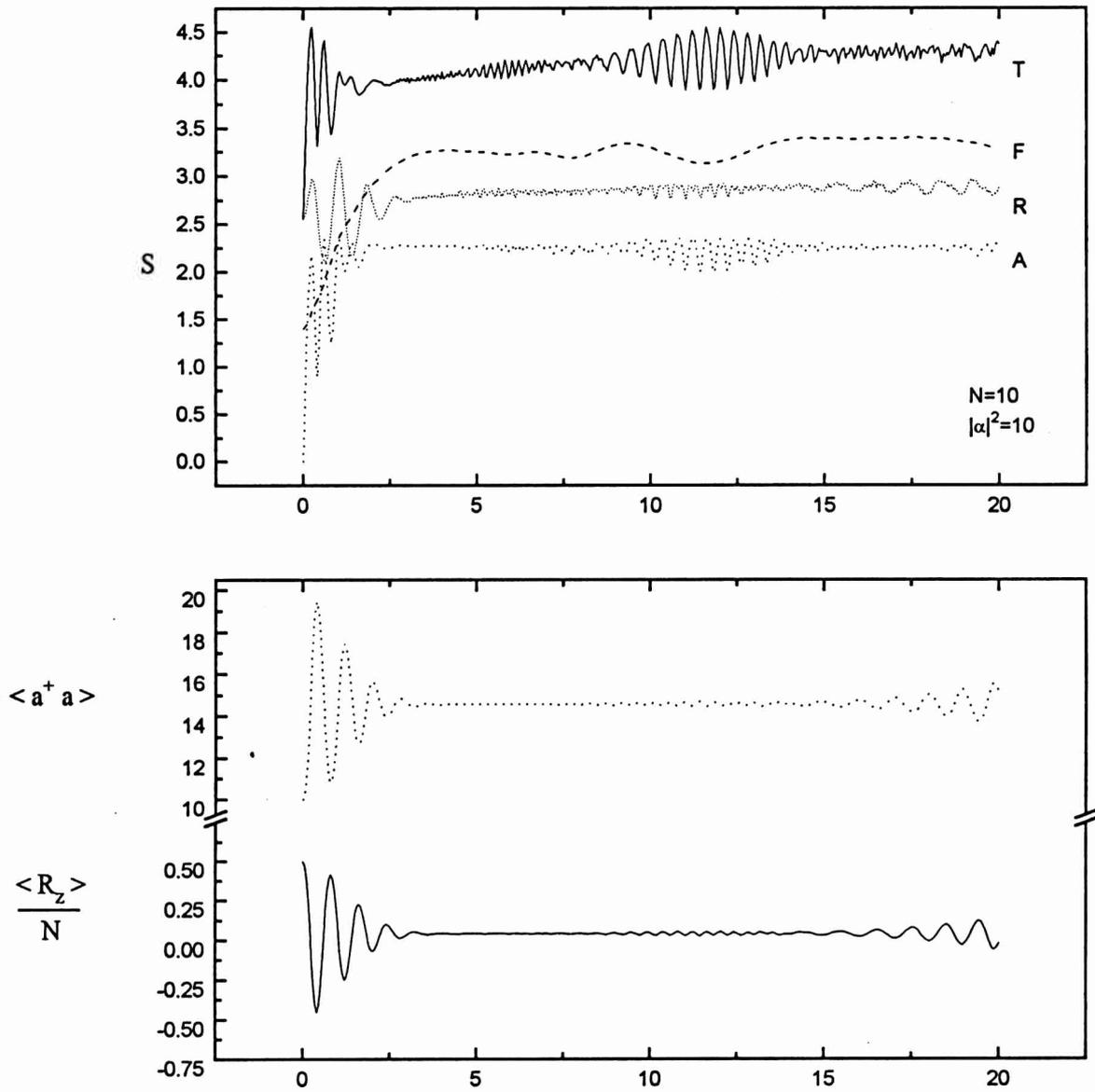


Figura 2.3: Ídem fig. 2.1, para $N = 10$ y $|\alpha|^2 = 10$.

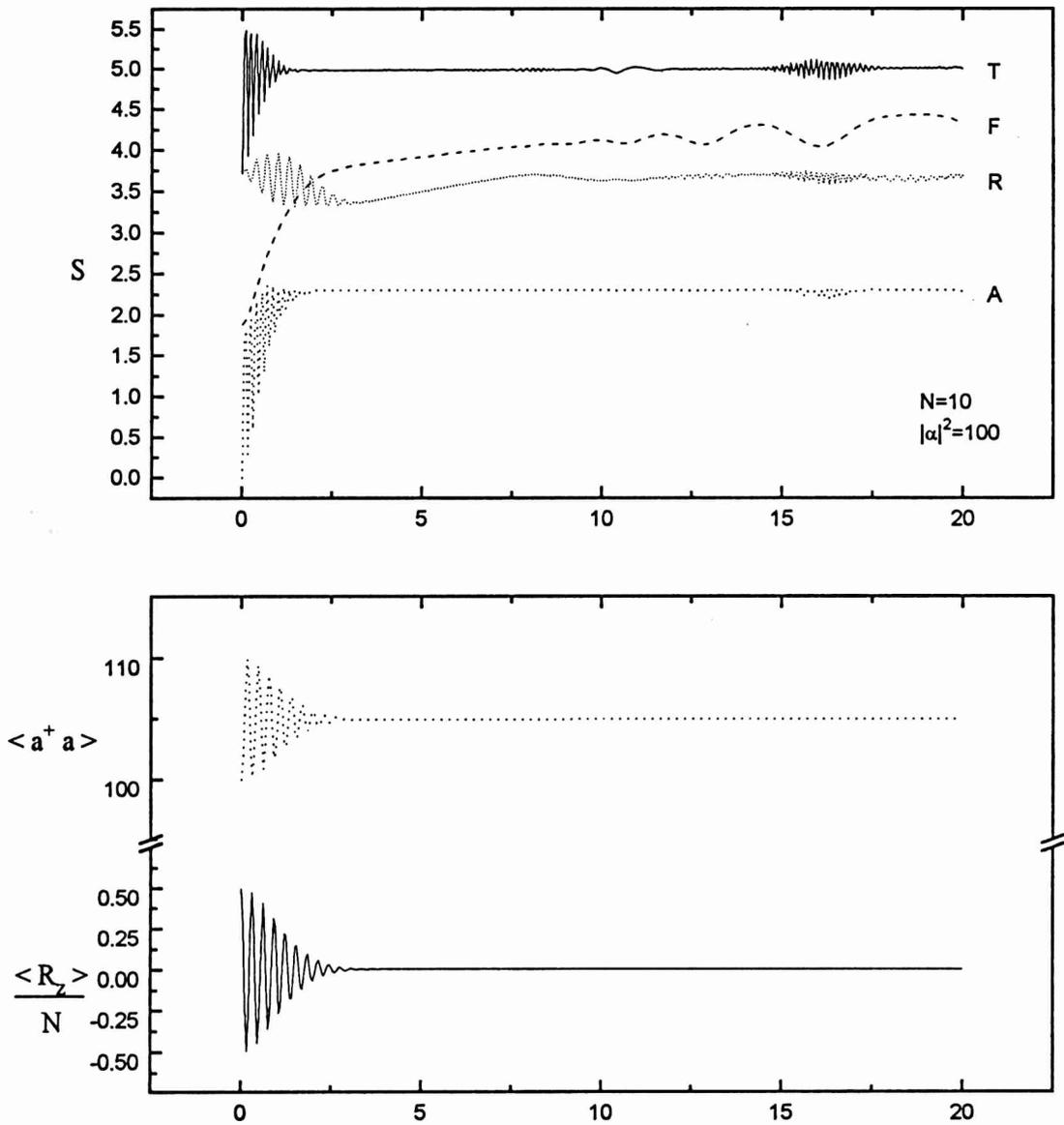


Figura 2.4: Ídem fig. 2.1, para $N = 10$ y $|\alpha|^2 = 100$.

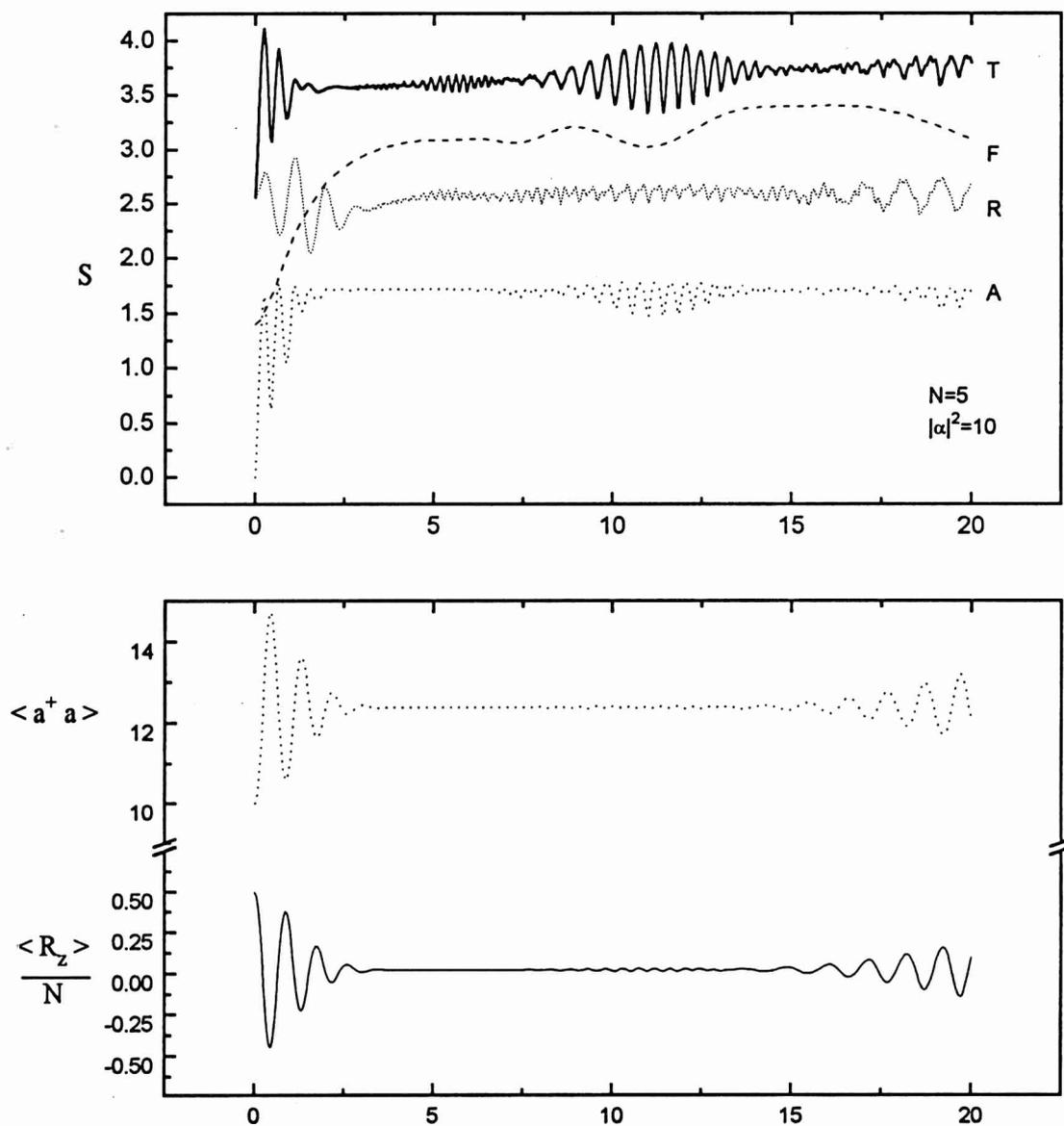


Figura 2.5: Ídem fig. 2.1, para $N = 5$ y $|\alpha|^2 = 10$.

Bibliografía

- [1] D. Meschede, H. Walther y G. Müller, *Phys. Rev. Lett.* **54** (1985) 551.
- [2] G. Rempe, H. Walther y N. Klein, *Phys. Rev. Lett.* **58** (1987) 353.
- [3] S. Haroche y J.M. Raimond, en *Advances in Atomic and Molecular Physics*, editado por D.R. Bates y B. Bederson (Academic Press, London, 1985), Vol. 20, pág. 347.
- [4] R.H. Dicke, *Phys. Rev.* **93** (1954) 99.
- [5] E.T. Jaynes y F.W. Cummings, *Proc. IEEE* **51** (1963) 89.
- [6] F.W. Cummings, *Phys. Rev.* **140** (1965) A1051.
- [7] J.H. Eberly, N.B. Narozhny y J.J. Sanchez-Mondragon, *Phys. Rev. Lett.* **44** (1980) 1323.
- [8] P. Meystre y M.S. Zubairy, *Phys. Lett.* **89 A** (1982) 390.
- [9] G.J. Milburn, *Optica Acta* **31** (1984) 671.
- [10] J.R. Kukliński y J.L. Madajczyk, *Phys. Rev. A* **37** (1988) 3175.
- [11] M. Hillery, *Phys. Rev. A* **39** (1989) 1556.
- [12] H. Moya-Cessa y A. Vidiella-Barranco, *J. Mod. Opt.* **39** (1992) 2481.
- [13] G. Drobny e I. Jex, *Optics Comm.* **102** (1993) 141.
- [14] J. Seke, *Physica A* **193** (1993) 587.

- [15] M. Portesi y A. Plastino, *Phys. Lett. A* **184** (1994) 168.
- [16] J. Seke, *Physica A* **213** (1995) 587.
- [17] M. Portesi y A. Plastino, *Information-entropic description of Rabi oscillations in the Dicke model*, (en preparación).
- [18] C.E. Shannon, *Bell Syst. Tech. J.* **27** (1948) 379; **27** (1948) 623.
- [19] C.E. Shannon y W. Weaver, *The Mathematical Theory of Communication* (University of Illinois Press, Urbana, 1949).
- [20] L. Brillouin, *Science and Information Theory* (Academic Press, New York, 1956; 1962, 2da. edición).
- [21] E.T. Jaynes, *Phys. Rev.* **106** (1957) 620; **108** (1957) 171.
- [22] A. Katz, *Principles of Statistical Mechanics, The Information Theory Approach* (Freeman and Co., San Francisco, 1967).
- [23] A. Hobson, *Concepts in Statistical Mechanics* (Gordon and Breach, London, 1971).
- [24] M. Portesi, *Teoría de la Información e inferencia de estados excitados*, Trabajo de diploma de la Licenciatura en Física (Facultad de Ciencias Exactas, Universidad Nacional de La Plata, 1990).
- [25] A. Arrachea, M. Portesi, N. Canosa, R. Rossignoli y A. Plastino, en *Anales de la 75a. Reunión Nacional de la Asociación Física Argentina*, 1990, pág. 39.
- [26] A. Arrachea, N. Canosa, A. Plastino, M. Portesi y R. Rossignoli, en *Proceedings of the XV International Workshop on Condensed Matter Theories, Mar del Plata, Argentina*, editado por A.N. Proto y J.L. Aliaga (Plenum Press, New York, 1992), Vol. 7, pág. 63.
- [27] A. Arrachea, N. Canosa, A. Plastino, M. Portesi y R. Rossignoli, *Phys. Rev. A* **45** (1992) 7104.

- [28] J. Aliaga, G. Crespo y A.N. Proto, *Phys. Rev. A* **49** (1994) 5146.
- [29] D.T. Pegg y S.M. Barnett, *Europhys. Lett.* **6** (1988) 483; *Phys. Rev. A* **39** (1989) 1665.
S.M. Barnett y D.T. Pegg, *J. Mod. Opt.* **36** (1989) 7.
- [30] L. Susskind y J. Glogower, *Physics* **1** (1964) 49.
- [31] L.-M. Kuan y X. Chen, *Phys. Lett. A* **186** (1994) 8.
- [32] R.J. Glauber, *Phys. Rev.* **130** (1963) 2529; **131** (1963) 2766.
- [33] M. Portesi y A. Plastino, en *Proceedings of the IV International Conference on Squeezed States and Uncertainty Relations (FICSSUR95), Taiyuan, China* (NASA Conference Publication Series, 1995).
- [34] M. Portesi y A. Plastino, *Generalized entropy as measure of quantum uncertainty*, (en revisión); preprint: La Plata-Th 95/18.
- [35] W.H. Press, B.P. Flannery, S.A. Teukolsky y W.T. Vetterling, *Numerical Recipes, The Art of Scientific Computing* (Cambridge University Press, Cambridge, 1987).
- [36] J. von Neumann, *Mathematical Foundations of Quantum Mechanics* (Princeton University Press, Princeton, 1955).

PARTE II

Capítulo 3

Principio de Incerteza: formulación entrópica generalizada

3.1 Introducción

En esta segunda parte de la Tesis hacemos uso de la forma entrópica propuesta por Tsallis [1] que generaliza la expresión logarítmica de la Teoría de la Información convencional, $-\sum p_i \ln p_i$, utilizada en la Parte I. Presentamos en este capítulo una forma diferente de expresar el Principio de Incerteza de la Mecánica Cuántica, involucrando a la entropía generalizada. En el próximo capítulo analizamos un efecto relacionado con el tamaño de los sistemas físicos cuando se trabaja en el contexto de la Mecánica Estadística no extensiva basada en la entropía de Tsallis.

El Principio de Incerteza (PI) de la Mecánica Cuántica es un concepto fundamental de la teoría que establece la existencia de una cota inferior irreducible para la incerteza en el resultado de una medición simultánea de observables no conmutantes. Alternativamente, el PI expresa que la precisión con que pueden prepararse simultáneamente observables físicos incompatibles está limitada por una cota superior. Estos enunciados pueden establecerse cuantitativamente mediante una relación

del tipo [2]

$$\mathcal{U}(\hat{A}, \hat{B}; \psi) \geq \mathcal{B}(\hat{A}, \hat{B}), \quad (3.1)$$

donde \mathcal{U} mide la incertidumbre en la preparación o medición simultánea del par de operadores (autoadjuntos) \hat{A} y \hat{B} , cuando el sistema cuántico se encuentra en el estado $|\psi\rangle$, y \mathcal{B} es una cota inferior irreducible, independiente del estado del sistema. Una propiedad elemental que debe poseer \mathcal{U} es la de tomar un valor mínimo fijo (que se puede suponer igual a cero) si y sólo si $|\psi\rangle$ es un autoestado común de \hat{A} y \hat{B} . En consecuencia, la cota \mathcal{B} debe anularse cuando los observables comparten al menos un autovector o tienen autoestados arbitrariamente “ceranos” entre sí. En otro caso, se tendrá $\mathcal{U} \geq \mathcal{B} > 0$.

La formulación *cuantitativa* del Principio de Incerteza (FCPI) en su forma estándar —esto es, la generalización de la desigualdad de Heisenberg— ha sido criticada [2] sobre la base de que el producto de las varianzas de dos operadores está limitado por el valor de expectación del conmutador entre ellos, que depende del estado del sistema y consecuentemente *no es una cota inferior fija*. El lado derecho de esa desigualdad puede aún anularse para una elección apropiada del estado pertinente, en cuyo caso no se obtiene ninguna información acerca de las dispersiones de la medición. Varias FCPI alternativas han sido presentadas en una serie de estudios recientes (se puede consultar, por ejemplo, las refs. [2–12]). La idea central que subyace en estos trabajos es que la medida más natural de incertidumbre es precisamente la “información faltante” [13–15] que se tiene una vez que se ha realizado una medición. Se espera entonces encontrar una mejor descripción del PI expresado *en términos entrópicos*. En los últimos tiempos una *generalización* de la entropía de Shannon propuesta por Tsallis [1] ha recibido gran atención y ha sido aplicada a muy diversos sistemas físicos [16–29]. Nuestro objetivo en este capítulo es la proposición y posterior análisis de una FCPI en el espíritu y utilizando las herramientas de la Teoría de la Información [13–15], con la ayuda de la mencionada entropía generalizada tomada como medida de información [17].

En la Sección 3.2 resumimos desarrollos previos relacionados con diferentes formulaciones del PI, y en la Sección 3.3 revisamos la generalización de la entropía convencional hecha por Tsallis. Presentamos en la Sección 3.4 nuestra propia FCPI

por medio de la entropía generalizada, e ilustramos con algunos ejemplos. En particular discutimos medidas generalizadas de incertezas para los operadores número y de fase, en el caso de los estados coherentes de la teoría de Pegg–Barnett introducidos en el cap. anterior. La Sección 3.5 está dedicada a investigar la situación de operadores con espectro continuo, donde puede usarse entropías conjuntas y marginales generalizadas como medida de correlaciones cuánticas. Consideramos específicamente sistemas descritos por funciones de onda del oscilador armónico unidimensional en el espacio de posición y momento. Las conclusiones son presentadas en la Sección 3.6.

3.2 Formulación entrópica del Principio de Incertezas de la Mecánica Cuántica

La desigualdad de Heisenberg para posición y momento en su versión extendida a un par arbitrario de observables mecano-cuánticos \hat{A} y \hat{B} se lee

$$\Delta\hat{A}\Delta\hat{B} \geq \frac{1}{2} |([\hat{A}, \hat{B}])|, \quad (3.2)$$

siendo $\Delta\hat{A}(\psi) = \sqrt{\langle(\hat{A} - \langle\hat{A}\rangle)^2\rangle}$ la varianza de \hat{A} cuando el sistema está en el estado normalizado $|\psi\rangle$. Para operadores como \hat{X} y \hat{P} esta desigualdad efectivamente expresa el PI según se establece en (3.1); pero para otro par arbitrario de observables, el conmutador $[\hat{A}, \hat{B}]$ no será en general un *c-number* y en consecuencia el lado derecho de (3.2) *dependerá del estado* $|\psi\rangle$, como mencionamos en la introducción.

Para salvar este inconveniente, en un importante trabajo Deutsch propuso [2] utilizar como medida de incertezas la entropía de Shannon de la Teoría de la Información [13–15], mediante la expresión[†]

$$\mathcal{U}_1(\hat{A}, \hat{B}; \psi) \equiv S(\hat{A}; \psi) + S(\hat{B}; \psi) = - \sum_{i=1}^N p_{\hat{A},i} \ln p_{\hat{A},i} - \sum_{j=1}^N p_{\hat{B},j} \ln p_{\hat{B},j} \quad (3.3)$$

donde las probabilidades

$$p_{\hat{A},i}(\psi) = |\langle a_i | \psi \rangle|^2, \quad p_{\hat{B},j}(\psi) = |\langle b_j | \psi \rangle|^2, \quad (3.4)$$

[†] La elección de la base del logaritmo fija las unidades de la medida de información de Shannon S . Si la base es 2, S se mide en *bits*. Aquí usamos, como en el resto de la Tesis, el logaritmo natural.

con $i, j = 1, \dots, N$, están relacionadas con los coeficientes de la proyección de $|\psi\rangle$ sobre las bases N -dimensionales de autovectores de \hat{A} y \hat{B} , respectivamente. Es fácil notar, respecto de una medida de \hat{A} , que si el sistema está en un estado con una distribución de probabilidad $\{p_{\hat{A},i} = \delta_{i,i_0}\}$ entonces hay “falta de información mínima” (o “conocimiento máximo”) y $S(\hat{A}; \psi) = S_{\min} = 0$. Por otro lado, una distribución uniforme $\{p_{\hat{A},i} = 1/N\}$ caracteriza una situación de “ignorancia máxima” sobre el estado del sistema, y la entropía informacional asociada es $S(\hat{A}; \psi) = S_{\max} = \ln N$. Un valor intermedio para la entropía corresponderá a cualquier otra distribución y medirá el apartamiento de $|\psi\rangle$ respecto de un autoestado de \hat{A} .

Una ventaja interesante de la formulación entrópica comparada con el producto de incertezas de Heisenberg es que la entropía de Shannon S , y por lo tanto \mathcal{U}_1 , no dependen de los *autovalores* del observable dado. Consideremos, por ejemplo, que se desea medir la componente del momento angular \hat{J}_z sobre un sistema en el estado $|\psi\rangle = (|-m\rangle + |m\rangle)/\sqrt{2}$, con $m \in [-j, j]$, m entero. La varianza $\Delta\hat{J}_z(\psi) = |m|$ depende entonces del valor de m , mientras que $S(\hat{J}_z; \psi) = \ln 2$. Otro hecho notable es el siguiente: las relaciones de incerteza entrópicas derivadas para estados puros pueden automáticamente extenderse a estados mixtos. Consideremos un estado mezcla representado por $\hat{\rho} = \sum_{\nu} c_{\nu} |\psi_{\nu}\rangle\langle\psi_{\nu}|$, con $c_{\nu} \geq 0$ y $\sum_{\nu} c_{\nu} = 1$; se tiene entonces $p_{\hat{A},i}(\rho) \equiv \langle a_i | \hat{\rho} | a_i \rangle = \sum_{\nu} c_{\nu} p_{\hat{A},i}(\psi_{\nu})$ y, debido a que $-x \ln x$ es una función cóncava, se puede demostrar que $S(\hat{A}; \rho) \geq \sum_{\nu} c_{\nu} S(\hat{A}; \psi_{\nu})$. Haciendo uso de una restricción como la de la ec. (3.1) para cada estado puro $|\psi_{\nu}\rangle$, resulta que \mathcal{B} también actúa como una cota inferior para $\mathcal{U}_1(\rho)$.

Presentamos a continuación algunas limitaciones a la incerteza expresada en términos de la entropía. Deutsch encontró [2] que la medida de incerteza definida en (3.3) satisface la desigualdad

$$\mathcal{U}_1(\hat{A}, \hat{B}; \psi) \geq 2 \ln \frac{2}{1+c}, \quad (3.5)$$

donde

$$c = \sup_{ij} |\langle a_i | b_j \rangle|. \quad (3.6)$$

Una mejora a esta cota fue conjeturada primero por Kraus [4] y demostrada luego

por Maassen y Uffink (MU) [5]:

$$\mathcal{U}_1(\hat{A}, \hat{B}; \psi) \geq 2 \ln \frac{1}{c}. \quad (3.7)$$

En su trabajo Kraus encontró la limitación $\mathcal{U}_1 \geq \ln N$ al tratar específicamente pares de observables *complementarios* entre sí, para los que $c = 1/\sqrt{N}$. Dos operadores \hat{A} y \hat{B} se llaman complementarios cuando sus autovalores son no degenerados y sus bases de autoestados tienen un producto interno uniforme, siendo $|\langle a_i | b_j \rangle| = 1/\sqrt{N}$ para todo $i, j = 1, \dots, N$. El conocimiento exacto del valor medido de uno de los observables implica incerteza máxima en la otra medida. Por su parte, Maassen y Uffink utilizaron [5] una cantidad que mide el grado de *certeza* asociada con una distribución de probabilidad normalizada $\{p_i\}$, dada por

$$M_r(\{p_i\}) = \left(\sum_{i=1}^N p_i^{1+r} \right)^{1/r} \quad r > -1 \quad (r \neq 0), \quad (3.8)$$

y emplearon el producto $\mathcal{M}_{rr'}(\hat{A}, \hat{B}; \psi) \equiv M_r(\{p_{\hat{A},i}\}) M_{r'}(\{p_{\hat{B},j}\})$, con índices r y r' en principio diferentes para las medidas de \hat{A} y \hat{B} , con la idea de expresar el PI. Las siguientes relaciones pueden ser demostradas [5]:

$$\mathcal{M}_{rr'}(\hat{A}, \hat{B}; \psi) \leq \left(\frac{1+c}{2} \right)^2 \quad \forall r > -1, r' > -1 \quad (3.9)$$

y, bajo la condición $1/(1+r) + 1/(1+r') = 2$ con $-1/2 \leq r < 0$,

$$\mathcal{M}_{rr'}(\hat{A}, \hat{B}; \psi) \leq c^2, \quad (3.10)$$

las que en el caso límite $r = r' \rightarrow 0$ corresponden a las desigualdades (3.5) y (3.7), respectivamente.

La demostración de la desigualdad (3.10) involucra la aplicación del siguiente Teorema de Riesz [30, 31]: Sea $x = (x_1, \dots, x_N)$ una secuencia de números complejos y T una matriz de transformación lineal que satisface $\sum_j |y_j|^2 = \sum_i |x_i|^2$ para todo x , siendo $y_j = (Tx)_j = \sum_i T_{ji} x_i$. Si se denota $c = \max_j |T_{ji}|$, entonces se tiene

$$c^{1/d'} \left(\sum_j |y_j|^{d'} \right)^{1/d'} \leq c^{1/d} \left(\sum_i |x_i|^d \right)^{1/d} \quad (3.11)$$

para $1/d + 1/d' = 1$, con $1 \leq d \leq 2$.

Las condiciones supuestas en este teorema son claramente satisfechas por las secuencias de componentes $x_i = \langle a_i | \psi \rangle$, $y_j = \langle b_j | \psi \rangle$, con la transformación $T_{ji} = \langle b_j | a_i \rangle$. Si se define $d = 2(1 + r)$ y $d' = 2(1 + r')$, se llega finalmente al resultado (3.10).

3.3 Entropía generalizada de Tsallis

En esta sección presentamos una generalización muy interesante de la forma logarítmica convencional de la entropía recientemente introducida por Tsallis [1], inspirado en multifractales, y que está dada por

$$S_q(\{p_i\}) = \frac{1 - \sum_{i=1}^N p_i^q}{q - 1}, \quad (3.12)$$

donde q es cualquier número real (que caracteriza una estadística particular), $\{p_i\}$ es una distribución de probabilidad normalizada, y se exige que la suma sea llevada a cabo sobre las $N' \leq N$ probabilidades no nulas. El límite $q \rightarrow 1$ de (3.12) da la expresión logarítmica de Boltzmann–Shannon para la entropía. Efectivamente, reescribiendo la entropía de Tsallis como $\sum p_i(1 - p_i^{q-1})/(q - 1)$ y desarrollando $p_i^{q-1} = \exp[(q - 1) \ln p_i]$ alrededor de $q = 1$, se obtiene

$$\lim_{q \rightarrow 1} S_q = - \sum_{i=1}^N p_i \ln p_i. \quad (3.13)$$

La nueva entropía posee las propiedades usuales de positividad, equiprobabilidad, concavidad e irreversibilidad, y generaliza la aditividad estándar así como la aditividad de Shannon [16]. La física es extensiva sólo para $q = 1$.

La entropía de Tsallis está relacionada con la entropía más familiar de Rényi, dada por[†]

$$S_q^R(\{p_i\}) = - \frac{1}{q - 1} \ln \left(\sum_{i=1}^N p_i^q \right), \quad (3.14)$$

de tal manera que $S_q^R = (1 - q)^{-1} \ln[1 + (1 - q)S_q]$. Sin embargo un hecho crucial distingue a estas dos entropías *alternativas*, y es que la entropía de Tsallis —a diferencia

[†]La medida de certeza mencionada en la ec. (3.8) no es nada más que $\exp(-S_{r+1}^R)$.

de la de Rényi, que entonces no puede considerarse como una entropía física— posee siempre concavidad definida, siendo una función cóncava (convexa) de las probabilidades para $q > 0$ ($q < 0$). Es la primera de ellas entonces la entropía generalizada empleada recientemente en diferentes contextos físicos. La estadística generalizada asociada con (3.12), que estudiaremos en el próximo capítulo, ha mostrado satisfacer formas apropiadas del Teorema de Ehrenfest [17], relaciones de dualidad de la Teoría de la Información de Jaynes [17], ecuación de von Neumann [18], y Teorema de fluctuación–disipación [19–21], entre otros. Irreversibilidad y el Teorema H también han sido discutidos dentro de este formalismo [22, 23]. La estadística no extensiva ha permitido, en un contexto astrofísico, superar la inhabilidad de la estadística convencional extensiva para tratar adecuadamente (sin infinitos) sistemas estelares autogravitantes, en lo que constituyó la primer aplicación física de la teoría con $q \neq 1$ [24, 25]. Una segunda aplicación está referida a vuelos de Lévy, relevantes para una variedad de sistemas [26, 27]. Aquí el parámetro q está directamente relacionado a la dimensión fractal del movimiento aleatorio. En el Cap. 4, analizamos un interesante efecto [28] que presenta la Mecánica Estadística derivada de la entropía de Tsallis, y que tiene que ver con el tamaño efectivo de los sistemas físicos.

A continuación damos un breve sumario de algunas propiedades útiles de la entropía general de parámetro q :

1. $\lim_{q \rightarrow 1} S_q = S$
2. $S_q(\{p_i\}) \geq 0$ para todo q y cualquier conjunto de probabilidades $\{p_i\}$ normalizado.
3. $S_q = 0$ cuando hay certeza, esto es, para la distribución $\{p_i = \delta_{ii_0}\}$.
4. S_q alcanza el valor extremo $(1 - N^{1-q})/(q - 1)$ para cada q cuando hay equiprobabilidad, esto es, cuando se tiene $\{p_i = 1/N\}$.
5. $S_q(\{p_i\})$ es cóncava si $q > 0$ y convexa si $q < 0$.
6. $S_q(\{p_i\})$ es una función no creciente de $q > 0$ para cada $\{p_i\}$.

7. Sean $\{p_i\}$ y $\{p'_j\}$ dos distribuciones *independientes*, de tal forma que la probabilidad conjunta está dada por $p_{ij} = p_i p'_j$. Entonces, se puede verificar fácilmente que

$$S_q(\{p_{ij}\}) = S_q(\{p_i\}) + S_q(\{p'_j\}) + (1 - q) S_q(\{p_i\}) S_q(\{p'_j\}). \quad (3.15)$$

Es interesante notar que tanto la medida de información de Shannon (3.13) como la de Rényi (3.14) surgen ambas de los axiomas de Kinchin [29, 32] de la Teoría de la Información, si se supone que la medida de información de un sistema compuesto es simplemente *aditiva*. Para que sólo la entropía de Shannon satisfaga esos postulados es necesario suponer condiciones más estrictas sobre la suma de medidas de información. Ahora bien, si se modifica el cuarto (y último) axioma de Kinchin sobre la composición de informaciones parciales por (3.15), surge espontáneamente la entropía de Tsallis como la única que satisface esta axiomática modificada [29].

3.4 Medidas entrópicas generalizadas de incerteza

La medida de incerteza que aparece en la ec. (3.3) tiene en cuenta la entropía informacional total asociada con dos distribuciones de probabilidad independientes, para las cuales la probabilidad total es justamente su producto. La entropía de Shannon es aditiva y \mathcal{U}_1 resulta simplemente $S(\hat{A}) + S(\hat{B})$. Aquí es importante remarcar que la relación de incertidumbre de Heisenberg (3.2), así como las relaciones entrópicas dadas más arriba, se refieren a dos mediciones *independientes* de los observables \hat{A} y \hat{B} sobre *diferentes* microsistemas en el mismo estado cuántico $|\psi\rangle$. Lo que el PI establece es justamente que las distribuciones de probabilidad obtenidas al proyectar $|\psi\rangle$ sobre los correspondientes subespacios propios no pueden estar ambas arbitrariamente concentradas, dados operadores \hat{A} y \hat{B} “suficientemente no conmutantes” [4].

En el mismo sentido, consideramos [11, 12] la introducción de la entropía de Tsallis para medir el grado de incertidumbre apelando a la propiedad 7 de (no)aditividad

dada en la sección anterior. La expresión (3.3) ahora se generaliza a

$$\mathcal{U}_q(\hat{A}, \hat{B}; \psi) \equiv S_q(\hat{A}; \psi) + S_q(\hat{B}; \psi) + (1 - q) S_q(\hat{A}; \psi) S_q(\hat{B}; \psi) \quad (3.16)$$

donde q es un parámetro positivo arbitrario y las entropías están dadas por (3.12) para las distribuciones de probabilidad $\{p_{\hat{A},i}\}$ y $\{p_{\hat{B},j}\}$. La ec. (3.3) es recuperada, obviamente, en el límite $q \rightarrow 1$. Es inmediato ver que $\mathcal{U}_q \geq 0$, con $\mathcal{U}_q = 0$ si y sólo si $|\psi\rangle$ es un autoestado común de \hat{A} y \hat{B} . Además de esto, \mathcal{U}_q nunca excede $(1 - N^{2(1-q)})/(q - 1)$. La *concauidad* de S_q permite restringirnos a la consideración de estados puros solamente.

Estudiaremos en detalle el uso de (3.16) como medida de incerteza. Primeramente, siguiendo los razonamientos de Deutsch [2] notamos que puede imponerse una cota —débil— sobre la expresión (3.16), en la forma

$$\mathcal{U}_q(\hat{A}, \hat{B}; \psi) \geq \frac{1}{q-1} \left[1 - \left(\frac{2}{1+c} \right)^{2(1-q)} \right], \quad (3.17)$$

que se verifica para todo $q > 0$. Más aún, si recurrimos al Teorema de Riesz (como fue usado en la ref. [5]; ver Sección 3.2) y a la propiedad 6, puede demostrarse que existe una limitación más ajustada para las medidas de incerteza \mathcal{U}_q , *al menos* en la región $1/2 \leq q \leq 1$, donde se tiene

$$\mathcal{U}_q(\hat{A}, \hat{B}; \psi) \geq \frac{1}{q-1} \left[1 - \left(\frac{1}{c} \right)^{2(1-q)} \right]. \quad (3.18)$$

Presentamos algunos ejemplos simples que ilustran nuestras proposiciones, junto con una comparación con desarrollos previos. Como hemos hecho hasta ahora, consideramos operadores con espectro discreto. El caso de observables con espectro continuo es discutido en forma separada en la Sección 3.5.

Ejemplo 1: Operadores de proyección de spin

Consideremos la situación simple de un espacio de estados bidimensional real. Los autoestados de un observable que actúa sobre dicho espacio pueden ser interpretados

como vectores unitarios en el plano real \mathbf{R}^2 , apuntando en la dirección de los ejes. Se supone que los autovectores de dos operadores \hat{A} y \hat{B} satisfacen

$$(\langle a_i | b_j \rangle) = \begin{pmatrix} \cos \xi & -\sin \xi \\ \sin \xi & \cos \xi \end{pmatrix}, \quad (3.19)$$

lo que corresponde a una rotación de ángulo ξ entre los sistemas de ejes coordenados. Un estado general de \mathbf{R}^2 puede ser escrito entonces como

$$\begin{aligned} |\psi\rangle &= \cos \psi |a_1\rangle + \sin \psi |a_2\rangle \\ &= \cos(\psi - \xi) |b_1\rangle + \sin(\psi - \xi) |b_2\rangle \end{aligned} \quad (3.20)$$

siendo ψ cualquier "ángulo" entre 0 y 2π .

Para este sencillo ejemplo se ha mostrado que existe una mejora a la cota MU. Efectivamente, Garrett y Gull calcularon [6] numéricamente el ínfimo sobre ψ de la suma $S(\hat{A}; \psi) + S(\hat{B}; \psi) = \mathcal{U}_1(\hat{A}, \hat{B}; \psi)$, resultando que para cada ξ fijo (excepto para múltiplos de $\pi/4$) el valor obtenido es mucho mayor que la cota analítica dada por $\mathcal{B}_1^{\text{MU}}(\xi) = 2 \ln(1/c_\xi)$, con $c_\xi = \max\{|\cos \xi|, |\sin \xi|\}$. A fin de comparar con nuestra formulación computamos la medida entrópica generalizada de incerteza, dada por

$$\mathcal{U}_q(\hat{A}, \hat{B}; \psi) = \frac{1 - [\cos^{2q} \psi + \sin^{2q} \psi] [\cos^{2q}(\psi - \xi) + \sin^{2q}(\psi - \xi)]}{q - 1}, \quad (3.21)$$

para diferentes valores del parámetro q cercanos a 1, y buscamos en cada caso el ínfimo como función de ψ . En la figura 3.1 se grafica la cantidad resultante, $\mathcal{U}_q^{\text{inf}}(\xi)$, para $q = 1.2$ y se la compara con la cota tipo MU, que está dada por $\mathcal{B}_q^{\text{MU}}(\xi) = [1 - (1/c_\xi)^{2(1-q)}]/(q - 1)$. La distinción entre ambas curvas se hace más evidente en la fig. 3.2 donde mostramos la diferencia relativa, definida como

$$\eta_q(\xi) \equiv \frac{\mathcal{U}_q^{\text{inf}}(\xi) - \mathcal{B}_q^{\text{MU}}(\xi)}{\mathcal{U}_q^{\text{inf}}(\xi)}, \quad (3.22)$$

versus $\xi \in [0, \pi/4]$. Para todo ξ y cada $q \in [1/2, 1)$, la diferencia relativa es positiva —como se desprende de la expresión (3.18)— pero es mayor que el correspondiente valor para $q = 1$. Incrementando q por encima de la unidad, encontramos que el parámetro η_q se hace cada vez menor, de tal manera que el ínfimo de la medida de

incerteza (3.21) está “más cerca” de su cota MU que lo que lo está en el caso estándar de Shannon. Enfatizamos para terminar que la relación (3.18), $\mathcal{U}_q \geq \mathcal{B}_q^{\text{MU}}$, puede demostrarse analíticamente para $q \in [1/2, 1]$ y un par arbitrario de operadores. En este ejemplo mostramos en forma numérica para algunos valores de q mayores que 1, que η_q es positiva, lo que permite extender el rango de validez de la desigualdad (3.18) en estos casos.

A fin de remover la idealización supuesta al tratar con una matriz de transformación real entre autoestados, podemos ahora considerar la siguiente situación bidimensional: una partícula de spin 1/2 en un estado $|\psi\rangle$ y la medición de dos proyecciones ortogonales del spin, digamos \hat{S}_x y \hat{S}_y , que arroja como resultado las respectivas distribuciones de probabilidad $\{p_x \equiv |{}_x\langle +|\psi\rangle|^2, 1 - p_x\}$ y $\{p_y \equiv |{}_y\langle +|\psi\rangle|^2, 1 - p_y\}$. Hacemos notar que los operadores considerados son complementarios, con un solape $c = 1/\sqrt{2}$.

Para analizar y comparar las relaciones de incerteza presentadas en este capítulo, es ilustrativo proceder como en la ref. [5]: suponemos p_x conocida y buscamos limitaciones en p_y (dentro del intervalo $[0, 1]$) en conexión con las diferentes FCPI. Para fijar ideas, tomemos $p_x = 0.75$. Es importante notar que para un estado general, escrito como $|\psi\rangle = \sqrt{p_y} |+\rangle_y + \sqrt{1 - p_y} e^{i\phi_y} |-\rangle_y$, la relación de Heisenberg (3.2) no impone ningún límite sobre el valor de p_y , y que tampoco lo hace la cota de Deutsch de la expresión (3.5). La conjetura de Kraus (3.7) da sin embargo $S(\hat{S}_y; \psi) \geq 0.13$, de modo tal que se tiene $0.03 \leq p_y \leq 0.97$. Finalmente, la relación (3.10) restringe la proyección de $|\psi\rangle$ sobre el autoestado $|+\rangle_y$ al rango $0.07 \leq p_y \leq 0.93$ cuando $r = -1/2$ y $r' = \infty$.

Estudiemos ahora las medidas de incertidumbre generalizadas, dadas en términos de la entropía de Tsallis. En la figura 3.3 graficamos, como función de $q > 0$, el “intervalo permitido” δp_y correspondiente a los valores de p_y restringidos por la relación $\mathcal{U}_q > \mathcal{B}_q^{\text{MU}} = (1 - 2^{1-q})/(q - 1)$. Recordamos que para $q \in [1/2, 1]$ esta desigualdad puede ser probada. Si se supone su validez más allá de $q = 1$, entonces se observará un “achicamiento” de la región de probabilidades de \hat{S}_y permitidas a medida que q aumenta. Señalemos que esto es así para cualquier $p_x \in [0, 1]$: un valor del

parámetro de Tsallis mayor que 1 dará un intervalo más reducido, caracterizando de esta forma una situación de “mayor certeza”. Es interesante notar que a medida que p_x se aproxima a los valores extremos 0 ó 1 (certeza en la medición de \hat{S}_x) el PI, como se expresa en (3.18), da una falta de certeza en la medición simultánea de \hat{S}_y ; el hecho de que p_y esté concentrada alrededor de 0.5 tiene en cuenta, por supuesto, la mencionada complementariedad de los dos observables. Este comportamiento parece estar mejor ilustrado cuanto mayor es el valor de q . Para valores altos del parámetro de Tsallis, si se supone $\mathcal{U}_q > \mathcal{B}_q^{\text{MU}}$ se tiene que δp_y disminuye como $\sim 2^{1/q}/m_x - 1$, donde $m_x = \max\{p_x, 1 - p_x\}$.

Ejemplo 2: Operadores número y de fase

Como hemos visto en la Sección 2.4, el tratamiento de estados ópticos puede llevarse a cabo recurriendo al formalismo de Pegg–Barnett (PB) [33], que implica trabajar en un espacio de Hilbert finito \mathcal{H}^{s+1} , generado por los estados número $|0\rangle_s, |1\rangle_s, \dots, |s\rangle_s$, y al final de los cálculos tomar el límite $s \rightarrow \infty$. En esta sección nos interesa estudiar el PI para los operadores número y de fase en el contexto de la teoría PB. Recordamos que éstos se definen como los proyectores

$$\hat{N} = \sum_{n=0}^s n |n\rangle_s \langle n|, \quad \hat{\Phi} = \sum_{l=0}^s \theta_l |l\rangle_s \langle l|, \quad (3.23)$$

con $\theta_l \equiv \theta_0 + 2\pi l/(s+1)$, y notamos que son mutuamente complementarios, ya que a partir de (2.19) se tiene ${}_s\langle n|\theta_l\rangle_s = e^{in\theta_l}/\sqrt{s+1}$, con lo que resulta $c = 1/\sqrt{s+1}$.

Para un sistema en un estado arbitrario $|\psi\rangle \in \mathcal{H}^{s+1}$ se verifica que

$$\mathcal{U}_1(\hat{N}, \hat{\Phi}; \psi, s) \geq \ln(s+1), \quad (3.24)$$

que diverge en el límite $s \rightarrow \infty$. A fin de extraer alguna información de esta relación, Abe examinó [7] *diferencias* de las entropías de Shannon para \hat{N} y $\hat{\Phi}$ a partir de cierto estado de referencia, antes de tomar $s \rightarrow \infty$. Abe exigió que dicho estado fuera de entropía mínima, y resultó que saturaba la desigualdad (3.24). Una elección posible como estado de referencia es un autoestado número, $|n\rangle_s$, o uno de fase, $|\theta_l\rangle_s$, para cualquier $n, l = 0, 1, \dots, s$, que efectivamente minimiza $\mathcal{U}_1(\hat{N}, \hat{\Phi}; \psi, s)$, con $\mathcal{U}_1^{\min} = \ln(s+1)$.

Consideremos la generalización de las relaciones descriptas, en el marco de la entropía de información de Tsallis. Para un $q > 0$ particular y un estado $|n\rangle_s$, las entropías generalizadas valen $S_q(\hat{N}; n, s) = 0$ y $S_q(\hat{\Phi}; n, s) = [1 - (s + 1)^{1-q}]/(q - 1)$, independientemente de n ; para un estado $|\theta_l\rangle_s$ se obtienen resultados análogos, si se intercambian los roles de los operadores \hat{N} y $\hat{\Phi}$. Ambos sistemas, $|\psi\rangle = |n\rangle_s$ ó $|\theta_l\rangle_s$, arrojan como resultado final:

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \mathcal{U}_q(\hat{N}, \hat{\Phi}; \psi, s) = \begin{cases} \infty, & \text{si } 0 < q \leq 1 \\ 1/(q - 1), & \text{si } q > 1. \end{cases} \quad (3.25)$$

Vemos entonces que la divergencia en la medida de incerteza para estados número y de fase puede ser removida, *utilizando entropías de información generalizadas con q mayor que 1*.

Mostramos ahora el cómputo de medidas entrópicas generalizadas de incerteza cuando el sistema óptico es preparado en un estado coherente vinculado con el operador número (ECNPB) o con el operador de fase (ECFPB) del formalismo PB. Hemos definido [11, 12] un ECNPB en la ec. (2.27), que aquí transcribimos:

$$|\alpha\rangle_s \equiv \frac{1}{\sqrt{e_s(|\alpha|^2)}} \sum_{n=0}^s \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle_s, \quad (3.26)$$

con $\alpha = |\alpha| \exp(i\gamma) \in \mathbb{C}$. Dentro de un dado marco estadístico de índice q , las entropías de Tsallis $S_q(\hat{N}; \alpha, s)$ y $S_q(\hat{\Phi}; \alpha, s)$ calculadas con las probabilidades dadas en (2.28.a) y (2.28.b) dependerán de $|\alpha|$ y de la dimensión s . La segunda de ellas es función además del ángulo relativo $\gamma - \theta_0^\dagger$. La entropía generalizada para el operador número —que graficamos en la fig. 3.4 para $q = 2$ y diversos valores de s — se anula cuando $|\alpha| = 0$ (como corresponde) y cuando $|\alpha|$ es suficientemente grande, y exhibe un valor máximo a una coherencia aproximadamente del orden de \sqrt{s} . Cerca de este valor, digamos en $\alpha = \alpha_F$ para fijar ideas, la entropía generalizada para el operador de fase se aproxima a cero, lo que permite interpretar al ECNPB $|\alpha_F\rangle_s$ como un estado “tipo fase”. A modo de ejemplo, para el caso bidimensional $s = 1$ se tiene simplemente $|\alpha_F| = 1$ y, con la elección $\theta_0 = \gamma$, encontramos que $|\alpha_F\rangle_1 = |\theta_0\rangle_1$, resultado que se obtiene para cualquier índice q .

[†]Es conveniente elegir aquí la fase de referencia arbitraria de PB, θ_0 , igual a γ .

El límite de s infinito para las entropías generalizadas debe ser considerado. Para un campo muy intenso, con $|\alpha| \gg 1$, si el límite $s \rightarrow \infty$ se toma desde el principio y las sumas discretas son reemplazadas por integrales [7], obtenemos

$$\lim_{s \rightarrow \infty} S_q(\hat{N}; \alpha, s) \sim \frac{1 - (\sqrt{2\pi} |\alpha|)^{1-q} / \sqrt{q}}{q - 1} \quad (3.27.a)$$

y

$$\lim_{s \rightarrow \infty} S_q(\hat{\Phi}; \alpha, s) \sim \frac{1 - (\sqrt{\pi/2} / |\alpha|)^{1-q} / \sqrt{q}}{q - 1}. \quad (3.27.b)$$

Consecuentemente, en el régimen clásico encontramos el límite

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \mathcal{U}_q(\hat{N}, \hat{\Phi}; \alpha, s) \sim \frac{1}{q} \left(1 + \frac{1 - \pi^{1-q}}{q - 1} \right), \quad (3.28)$$

que discutimos más abajo. En la fig. 3.4 mostramos la entropía para el operador número en función de $|\alpha|$ para un dado q y valores crecientes de s , y comparamos con el resultado de la ec. (3.27.a). Puede verse que la restricción a un espacio de Hilbert finito (donde un operador de fase hermítico puede ser definido) prácticamente no afecta el resultado numérico de $S_q(\hat{N}; \alpha, s)$ mientras $|\alpha| < \sqrt{s}$. Para $|\alpha|$ suficientemente pequeño, un reducido espacio de estados arroja resultados razonablemente buenos.

Por último consideramos un ECFPB, dado por[†] [34]

$$|z\rangle_s = \frac{1}{\sqrt{e_s(|\tilde{z}|^2)}} \sum_{l=0}^s \frac{\tilde{z}^l}{\sqrt{l!}} |\theta_l\rangle_s, \quad (3.29)$$

donde $\tilde{z} \equiv \sqrt{2\pi/(s+1)} z$ es un número complejo[‡]. La desigualdad de Heisenberg correspondiente para \hat{N} y $\hat{\Phi}$ ha sido discutida para el sistema de dos estados ($s = 1$) en la ref. [34]. Analizando la forma de las entropías generalizadas para los operadores número y de fase para diferentes valores de s , notamos [11] que se obtienen resultados similares a aquellos encontrados para un ECNPB, con la transformación apropiada $\alpha \leftrightarrow \tilde{z}$. La fig. 3.5 exhibe las entropías generalizadas y la medida de incerteza $\mathcal{U}_q(\hat{N}, \hat{\Phi}; \alpha(z), s)$ en función de $|\alpha|$ ($|\tilde{z}|$), suponiendo valores fijos de q y de s . También se muestra la correspondiente expresión MU, $[1 - (s+1)^{1-q}]/(q-1)$, que actúa como una cota inferior para \mathcal{U}_q .

[†]Ver ecuación (2.21).

[‡]Aquí θ_0 debe ser tomado igual a cero.

3.5 El caso de operadores con espectro continuo

En esta sección consideramos una extensión de las ideas desarrolladas anteriormente, para tratar pares de observables con espectro continuo, en particular los operadores de posición y momento. En esta situación, apelamos [12] a una generalización de la entropía de información de Wehrl [35] que puede ser usada como medida de correlaciones cuánticas entre las variables del espacio de fases. La importancia de dicha cantidad radica en el alto contenido informacional que posee, frente al conocimiento obtenido a partir del producto de incertezas de Heisenberg que sólo tiene en cuenta los momentos de segundo orden de \hat{X} y \hat{P} . Para cualquier estado $|\psi\rangle$ que caracteriza a una partícula en d dimensiones se ha demostrado que [8]

$$\mathcal{U}_1(\hat{X}, \hat{P}; \psi) \geq d(1 + \ln \pi) \quad (3.30)$$

y que efectivamente esta desigualdad entrópica es más fuerte que la de Heisenberg.

Las entropías que aparecen en $\mathcal{U}_1(\hat{X}, \hat{P}; \psi)$ son calculadas a partir de las densidades de probabilidad $|\psi(\vec{r})|^2$ y $|\tilde{\psi}(\vec{p})|^2$, siendo $\tilde{\psi}$ la transformada de Fourier de ψ . Mencionamos que se debe tener cierto cuidado con la definición de entropía de información (generalizada) para distribuciones no discretas $\{p(x)\}$. La extensión directa de (3.12), en la forma $[1 - \int dx p(x)^q]/(q - 1)$, es en principio inaceptable ya que no es una expresión covariante con respecto a transformaciones no lineales arbitrarias de la variable [23, 36]. En cambio, la definición apropiada introduce la distribución de probabilidad por unidad de "volumen", dada por $\sigma(x) = p(x)/\lambda(x)$ donde $\lambda(x)$ es una función positiva suave tal que el elemento de volumen resulta $dV = \lambda(x) dx$. La distribución σ tiene entonces el mismo valor en un dado punto para cualquier elección de variables[†]. En esta sección adoptamos la llamada "elección natural" tomando $\lambda = 1$ pero teniendo en mente

$$S_q(p(x)) \equiv \int dV \sigma(x) \frac{1 - \sigma(x)^q}{q - 1} = \frac{1}{q - 1} \left[1 - \int dx \lambda(x) \left(\frac{p(x)}{\lambda(x)} \right)^q \right] \quad (3.31)$$

como la expresión a ser usada como medida de la información faltante en los casos continuos.

[†]En la variable transformada $y = f(x)$, se tiene $p(y) = |J|^{-1}p(x)$, con $J = dy/dx$. La función $\lambda(y)$ se define de tal forma que $dV = \lambda(y)dy$, de donde se sigue que $\lambda(y) = |J|^{-1}\lambda(x)$. Se satisface entonces que $\sigma(x) = \sigma(y)$.

Discutimos a continuación la incerteza en la medición de los operadores de posición y momento en una dimensión *cuando el sistema está en un estado coherente o en una autofunción del oscilador armónico (OA)*. Para representar un dado estado mecano-cuántico en las variables de coordenada y momento se han introducido [37] varias distribuciones de cuasi-probabilidad en el espacio de fases. Debemos elegir una de ellas. Para el estado coherente $|\alpha_0\rangle$ consideramos la distribución de Wigner, que es bien definida (es una función positiva suave) y, más aún, es simplemente el producto de las densidades de probabilidad $|\psi(x)|^2$ y $|\tilde{\psi}(p)|^2$. Al estudiar las funciones de onda del OA, en cambio, es conveniente adoptar la llamada representación Q, que es definida positiva y bien comportada, en contraposición con el comportamiento de otras representaciones alternativas, denotadas como W ó P. Para el estado coherente, entonces, podemos hacer uso de la medida de incertidumbre generalizada (3.16), pero en el caso de los autoestados del OA definimos —como consecuencia de la no bilinealidad de la distribución de probabilidad conjunta— una medida de correlación en términos de las entropías generalizadas conjuntas y marginales.

Consideremos primeramente funciones de onda gaussianas unidimensionales del tipo

$$\langle x|\alpha_0\rangle = \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}\delta}\right)^{1/2} \exp\left[-\frac{1}{2\delta^2}(x-x_0)^2 + i\frac{p_0}{\hbar}\left(x-\frac{x_0}{2}\right)\right], \quad (3.32.a)$$

$$\langle p|\alpha_0\rangle = \left(\frac{\delta}{\sqrt{\pi\hbar}}\right)^{1/2} \exp\left[-\frac{\delta^2}{2\hbar^2}(p-p_0)^2 - i\frac{x_0}{\hbar}\left(p-\frac{p_0}{2}\right)\right], \quad (3.32.b)$$

donde $\delta = \sqrt{\hbar/(m\omega)}$ caracteriza el ancho del paquete y α_0 es un número complejo tal que $x_0 = \sqrt{2}\delta \operatorname{Re}\alpha_0$ y $p_0 = (\sqrt{2}\hbar/\delta) \operatorname{Im}\alpha_0$.

Como es sabido, el conjunto de estados coherentes $|\alpha\rangle \equiv |x,p\rangle = \hat{D}(x,p)|0\rangle$, donde $\hat{D}(x,p) = \exp[i(p\hat{X} - x\hat{P})/\hbar]$, forma una base sobrecompleta con la relación de completitud dada por

$$\frac{1}{\pi} \int \int d^2\alpha |\alpha\rangle\langle\alpha| = \hat{1}. \quad (3.33)$$

La representación P de un estado mecano-cuántico se define a partir de la expansión

de la matriz densidad $\hat{\rho}$ en términos de los estados coherentes en la forma

$$\hat{\rho} = \int \int dx dp P_\rho(x, p) |x, p\rangle \langle x, p|, \quad (3.34)$$

y la distribución de Wigner se obtiene de la distribución P como [37]

$$W_\rho(x, p) \equiv \frac{1}{\pi\hbar} \int \int du dv P_\rho(u, v) \times \exp \left[-2 \left| \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{u}{\delta} + i \frac{\delta}{\hbar} v \right) - \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{x}{\delta} + i \frac{\delta}{\hbar} p \right) \right|^2 \right]. \quad (3.35)$$

Para el paquete de ondas gaussiano $|\alpha_0\rangle$, se tiene $P_{\alpha_0}(x, p) = \delta(x - x_0)\delta(p - p_0)$ y entonces resulta

$$W_{\alpha_0}(x, p) = \frac{1}{\pi\hbar} \exp \left(-\frac{1}{\delta^2}(x - x_0)^2 - \frac{\delta^2}{\hbar^2}(p - p_0)^2 \right), \quad (3.36)$$

que es precisamente el producto de las dos distribuciones de probabilidad $|\langle x|\alpha_0\rangle|^2$ y $|\langle p|\alpha_0\rangle|^2$. En consecuencia, en este caso podemos hacer uso de la regla de adición (3.15) de entropías de Tsallis para distribuciones *independientes*, y medir la incerteza a través de la expresión (3.16).

El estado coherente (3.32) minimiza el producto de Heisenberg para cualquier $\delta > 0$, con las dispersiones dadas por $\Delta\hat{X}(\alpha_0) = \delta/\sqrt{2}$ y $\Delta\hat{P}(\alpha_0) = \hbar/(\sqrt{2}\delta)$, y también satura la relación entrópica (3.30). En efecto, $S(\hat{X}; \alpha_0) = [1 + \ln(\pi\delta^2)]/2$ y $S(\hat{P}; \alpha_0) = [1 + \ln(\pi/\delta^2)]/2$ —que son divergentes cuando δ se aproxima a 0 ó ∞ — se suman para dar justamente el lado derecho de la desigualdad (3.30).

Con el objeto de calcular la medida de incerteza de parámetro q dada en (3.16) para el estado $|\alpha_0\rangle$, computamos primero las entropías generalizadas de posición y momento que resultan

$$S_q(\hat{X}; \alpha_0) = \frac{1}{q-1} \left(1 - \int_{-\infty}^{\infty} dx |\langle x|\alpha_0\rangle|^{2q} \right) = \frac{1 - (\sqrt{\pi}\delta)^{1-q}/\sqrt{q}}{q-1} \quad (3.37.a)$$

y

$$S_q(\hat{P}; \alpha_0) = \frac{1}{q-1} \left(1 - \int_{-\infty}^{\infty} dp |\langle p|\alpha_0\rangle|^{2q} \right) = \frac{1 - (\sqrt{\pi}/\delta)^{1-q}/\sqrt{q}}{q-1}, \quad (3.37.b)$$

respectivamente. Estas cantidades exhiben un comportamiento interesante como medidas de información, expresando en todos los casos el carácter complementario de los operadores en juego. Tomadas como funciones de q (con δ fijo), ambas entropías (3.37) divergen a $+\infty$ cuando $q \rightarrow 0$, y dan las correspondientes entropías de Shannon cuando $q \rightarrow 1$. Para $q = \infty$, dependiendo del ancho del paquete de ondas, se tiene lo siguiente: si $\delta \in (0, 1/\sqrt{\pi})$, resulta $S_\infty(\hat{P}) = 0$ y podemos asegurar que hay máxima certeza en \hat{X} ya que $S_\infty(\hat{X}) = -\infty$; si $\delta \in [1/\sqrt{\pi}, \sqrt{\pi}]$, ocurre una situación de “conocimiento intermedio” siendo $S_\infty(\hat{X}) = S_\infty(\hat{P}) = 0$; y para $\delta \in [\sqrt{\pi}, \infty)$, se tiene $S_\infty(\hat{X}) = 0$ y no hay información faltante en relación a \hat{P} debido a que $S_\infty(\hat{P}) = -\infty$.

Consideremos, por otro lado, dos casos límite para índice de Tsallis finito: (i) $\delta = 0$, que corresponde a una amplitud de probabilidad del tipo de la función delta de Dirac en el espacio de coordenadas, y (ii) $\delta = \infty$, correspondiente a un paquete de ondas altamente concentrado en el espacio de momentos. Caso (i): si $q < 1$, entonces $S_q(\hat{X}) = -1/(1 - q)$ y nada se sabe acerca de \hat{P} , como se deduce de que $S_q(\hat{P}) = \infty$; cuando $q > 1$, el conocimiento de la coordenada y la ignorancia acerca del momento están también correctamente cuantificados por las entropías generalizadas, pero ahora $S_q(\hat{X}) = -\infty$ y $S_q(\hat{P}) = 1/(q - 1)$. Si tomamos el límite $q \rightarrow 1$ en cualquiera de estas dos circunstancias se obtiene un mínimo (igual a $-\infty$) para la entropía de posición, y un máximo ($+\infty$) para la medida de información del momento. En el caso (ii), los roles de \hat{X} y \hat{P} se intercambian.

Si combinamos las entropías de parámetro q para posición y momento (3.37) como se prescribe al principio de la Sección 3.4 —o, lo que es lo mismo, si calculamos la entropía generalizada total para la distribución $W_{\alpha_0}(x, p)$ —, arribamos al valor de la incerteza generalizada para un estado coherente caracterizado por un ancho determinado:

$$\mathcal{U}_q(\hat{X}, \hat{P}; \alpha_0) = \frac{1}{q} \left(1 + \frac{1 - \pi^{1-q}}{q - 1} \right). \quad (3.38)$$

Esta expresión, como era de esperar, es independiente de δ , y en el límite $q \rightarrow 1$ coincide con el ínfimo en la desigualdad (3.30). Vale la pena mencionar que una comparación con la ec. (3.28) muestra que los operadores número y de fase, \hat{N} y $\hat{\Phi}$, se comportan en el régimen clásico (estado coherente intenso) como el par conjugado canónico de posición y momento.

Pasamos ahora a la consideración de las funciones de onda del OA $|\psi_n\rangle$, con $n = 0, 1, \dots$, que en la representación de coordenadas se escriben como

$$\psi_n(x) = \left(\frac{1}{\sqrt{\pi} \delta n! 2^n} \right)^{1/2} e^{-x^2/(2\delta^2)} H_n \left(\frac{x}{\delta} \right). \quad (3.39)$$

Dado un estado cuántico $|\psi\rangle$, la función de distribución de probabilidad conjunta en las variables de coordenada-momento se obtiene proyectando el estado sobre $|x, p\rangle$, en la forma

$$\mathcal{P}_\psi(x, p) = |\langle x, p | \psi \rangle|^2. \quad (3.40)$$

Ésta es precisamente la representación Q de $|\psi\rangle$, que recordamos está dada por [37] el elemento de matriz diagonal del operador densidad en la base de estados coherentes, o sea

$$Q_\rho(\alpha) \equiv \langle \alpha | \hat{\rho} | \alpha \rangle, \quad (3.41)$$

donde $\hat{\rho} = |\psi\rangle\langle\psi|$ y $\alpha = (x/\delta + ip\delta/\hbar)/\sqrt{2}$. Para los autoestados del OA, (3.39), las funciones de distribución de probabilidad conjunta están dadas por la distribución Poissoniana

$$\mathcal{P}_n(x, p) = \frac{1}{n! 2^n} (x^2 + p^2)^n e^{-(x^2 + p^2)/2}, \quad (3.42)$$

donde se ha realizado un cambio conveniente a variables adimensionales: $x/\delta \rightarrow x$ y $p\delta/\hbar \rightarrow p$, el que es usado de aquí en adelante. Las funciones $\mathcal{P}_n(x, p)$, para todo $n \geq 1$, claramente contienen un factor mixto que impide la utilización de (3.16), y entonces en lugar de la medida generalizada $\mathcal{U}_q(\hat{A}, \hat{B}; \psi)$ introducida para el caso discreto, apelamos ahora a otros importantes conceptos: los de entropías de información conjunta y marginal [10, 35], generalizadas en el sentido de Tsallis. En consecuencia, introducimos las siguientes funcionales:

$$S_q(\mathcal{P}_\psi(x, p)) \equiv \frac{1}{q-1} \left(1 - \int \int \frac{dx dp}{2\pi} [\mathcal{P}_\psi(x, p)]^q \right), \quad (3.43)$$

que representa la entropía generalizada conjunta, y además las entropías generalizadas marginales

$$S_q(\mathcal{Q}_\psi(x)) \equiv \frac{1}{q-1} \left(1 - \int \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} [\mathcal{Q}_\psi(x)]^q \right) \quad (3.44.a)$$

y

$$S_q(\mathcal{R}_\psi(p)) \equiv \frac{1}{q-1} \left(1 - \int \frac{dp}{\sqrt{2\pi}} [\mathcal{R}_\psi(p)]^q \right), \quad (3.44.b)$$

que dependen de las distribuciones de probabilidad marginales \mathcal{Q} y \mathcal{R} , obtenidas integrando \mathcal{P} sobre una variable a la vez. En nuestro caso tenemos[†]

$$\mathcal{Q}_n(x) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{\sqrt{2\pi}} \mathcal{P}_n(x, p) = \frac{e^{-x^2/2}}{2^n} \sum_{k=0}^n \frac{(2k-1)!!}{k!(n-k)!} x^{2(n-k)} \quad (3.45)$$

y una expresión similar para $\mathcal{R}_n(p)$, reemplazando la variable adimensional x por p en esta ecuación. A partir de (3.42), un cálculo directo da la entropía conjunta en términos de la función gama en la forma

$$S_q(\mathcal{P}_n(x, p)) = \frac{1}{q-1} \left(1 - \frac{n}{(n!)^q} \frac{\Gamma(nq)}{q^{nq}} \right) \quad (3.46)$$

para $n \geq 1$, y $S_q(\mathcal{P}_0(x, p)) = 1/q$. En el límite en que el parámetro q tiende a 1 obtenemos el resultado ya conocido [38], que $S(\mathcal{P}_n) = 1 + \ln(n!) + n(1 + \gamma - \sum_{k=1}^n k^{-1})$ para todo $n \geq 1$, siendo $\gamma = 0.577216$ la constante de Euler.

Para cuantificar la relación entre coordenada y momento es útil considerar la siguiente *funcional de correlación relativa*:

$$C_q(\mathcal{P}_\psi(x, p)) \equiv [S_q(\mathcal{Q}_\psi(x)) + S_q(\mathcal{R}_\psi(p)) + (1-q) S_q(\mathcal{Q}_\psi(x)) S_q(\mathcal{R}_\psi(p)) - S_q(\mathcal{P}_\psi(x, p))] / S_q(\mathcal{P}_\psi(x, p)), \quad (3.47)$$

que puede ser reescrita introduciendo explícitamente el factor de mezcla en la distribución de probabilidad conjunta $\mathcal{P}(x, p) \equiv \mathcal{Q}(x)\mathcal{R}(p)\mathcal{T}(x, p)$, como

$$C_q(\mathcal{P}_\psi(x, p)) = \left(\frac{1}{q-1} \int \int \frac{dx dp}{2\pi} [\mathcal{Q}_\psi(x)]^q [\mathcal{R}_\psi(p)]^q \{ [\mathcal{T}_\psi(x, p)]^q - 1 \} \right) \times 1/S_q(\mathcal{P}_\psi(x, p)). \quad (3.48)$$

En la fig. 3.6 mostramos la dependencia con q de esta funcional en el caso de los cuatro autoestados más bajos del OA. Las variables x y p para una partícula en el estado $|\psi_0\rangle$ no están correlacionadas ($\mathcal{P}_0 = \mathcal{Q}_0\mathcal{R}_0$) y entonces el estado fundamental del OA

[†]En la expresión (3.45) debe considerarse $(-1)!! \equiv 1$.

tiene correlación nula para cualquier valor de q . Para los estados excitados se observa un apartamiento de C_q del cero, lo que señala la correlación entre las variables del espacio de fases. Como puede verse en la figura, la función C_q (así como también la cantidad absoluta $C_q S_q$) es casi nula para valores suficientemente altos del parámetro de Tsallis. En dicho contexto estadístico pareciese que las variables se “desacoplan”, y entonces se podría permitir el uso de la medida (3.16) para estimar la incerteza.

3.6 Conclusiones

En este capítulo hemos discutido la utilización de la entropía generalizada introducida recientemente por Tsallis como medida de incerteza en conexión con la medición de dos observables mecano-cuánticos. La diferencia principal en nuestra definición de medida de incertidumbre respecto de otras propuestas entrópicas radica en la regla de adición de entropías de Tsallis para dos distribuciones de probabilidad independientes. Mientras que las entropías de Shannon que miden la falta de información respecto de mediciones simultáneas de dos operadores incompatibles simplemente se suman —como en la ec. (3.3)—, la expresión adecuada para el caso generalizado es la dada en la ec. (3.16). A partir de esta definición, estudiamos el Principio de Incerteza para el caso de operadores con espectro discreto, considerando (i) una situación en la que la base del espacio de estados es de dimensión 2 (operadores de proyección de spin), y (ii) el problema de los operadores número y de fase dentro del formalismo de Pegg–Barnett. En algunos casos las medidas entrópicas generalizadas pueden ser consideradas superiores a las de Boltzmann–Shannon correspondientes.

Por otro lado, hemos investigado en detalle los operadores de posición y momento, como un ejemplo particular donde el espectro de los observables medidos es continuo. La correlación entre las variables de coordenada y momento fue estudiada para estados particulares del sistema que son de interés físico, a saber, un estado coherente y las autofunciones del oscilador armónico unidimensional. Vale la pena mencionar el hecho de que una funcional de correlación generalizada apropiadamente definida provee interesantes visiones en estos casos, para cualquier valor que se elija del índice de Tsallis.

Lista de figuras

- Figura 3.1** Ínfimo de la medida generalizada de incerteza, $\mathcal{U}_q^{\text{inf}}(\xi)$, (línea llena) y cota MU, $\mathcal{B}_q^{\text{MU}}(\xi)$, (línea a trazos) para todo $\xi \in [0, 2\pi]$. (Ejemplo 1)
- Figura 3.2** Diferencias relativas $\eta_q(\xi)$ en función de $\xi \in [0, \pi/4]$, para distintos valores de q . (Ejemplo 1)
- Figura 3.3** “Intervalo permitido” $\delta p_y(q)$ para la proyección de un estado sobre los autovectores de \hat{S}_y , en función de q . La proyección complementaria sobre \hat{S}_x tiene el valor $p_x = 0.75$. (Ejemplo 1)
- Figura 3.4** Entropía para el operador número, $S_q(\hat{N}; \alpha, s)$, en función de la coherencia, $|\alpha|$, para valores crecientes de la dimensión s (líneas llenas). Comparación con la predicción de la ec. (3.27.a) (línea a trazos). (Ejemplo 2)
- Figura 3.5** Entropías para los operadores número (línea a trazos largos) y de fase (línea a trazos cortos), cota MU (línea de puntos) e incerteza $\mathcal{U}_q(\hat{N}, \hat{\Phi}; \alpha, s)$ (línea llena) en función de la coherencia, $|\alpha|$. (Ejemplo 2)
- Figura 3.6** Funcional de correlación relativa generalizada para las primeras cuatro autofunciones del oscilador armónico en función de $q > 0$. (Caso continuo)

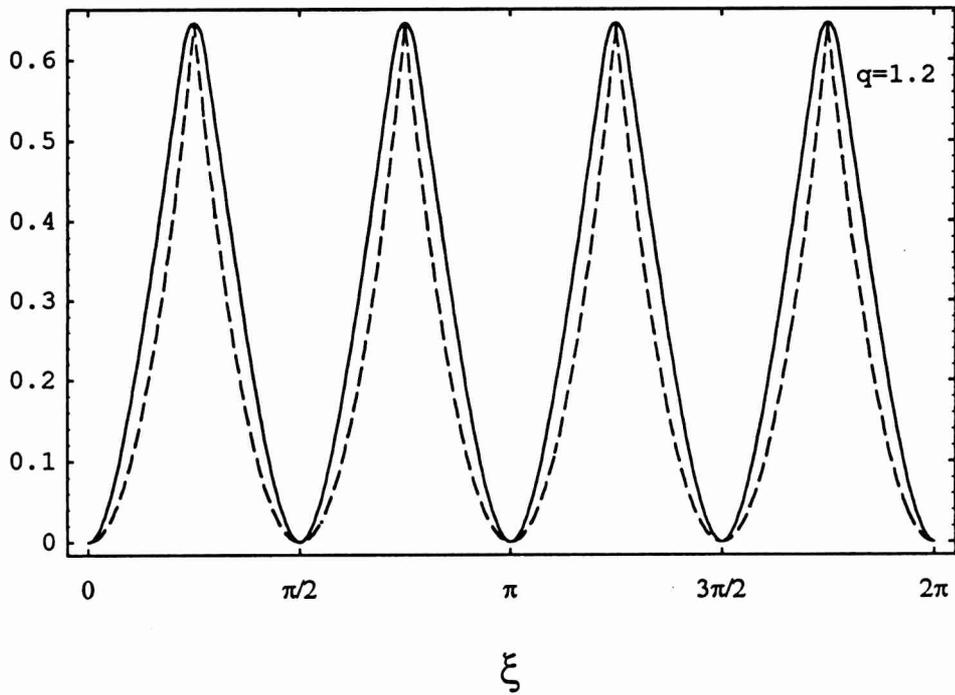


Figura 3.1: Ínfimo de la medida generalizada de incerteza, $\mathcal{U}_q^{\text{inf}}(\xi)$, (línea llena) y cota MU, $\mathcal{B}_q^{\text{MU}}(\xi)$, (línea a trazos) para todo $\xi \in [0, 2\pi]$. (Ejemplo 1)

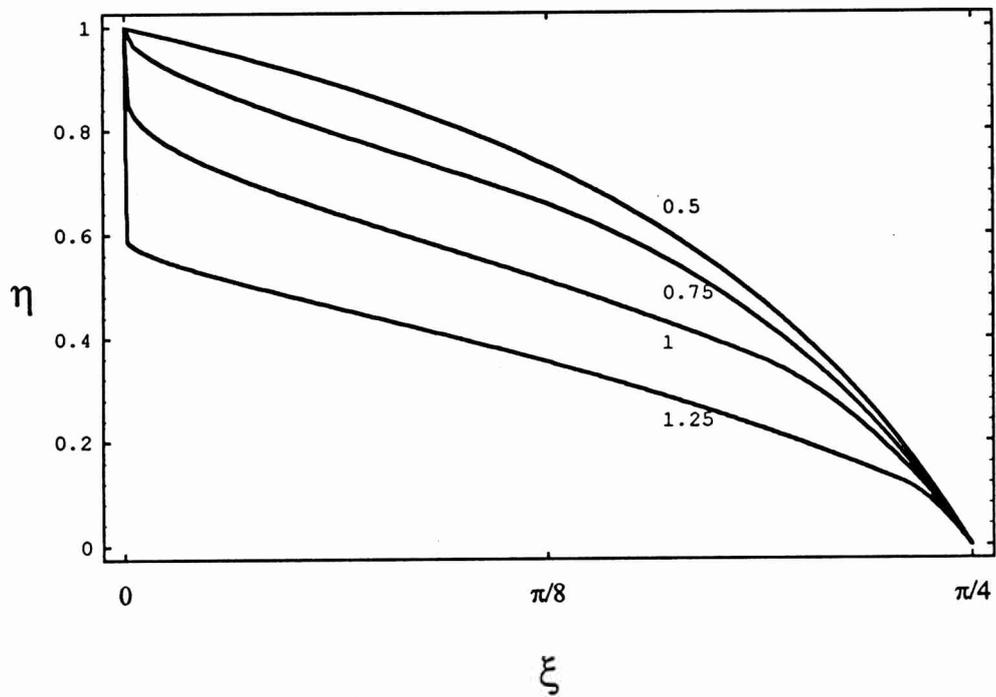


Figura 3.2: Diferencias relativas $\eta_q(\xi)$ en función de $\xi \in [0, \pi/4]$, para distintos valores de q . (Ejemplo 1)

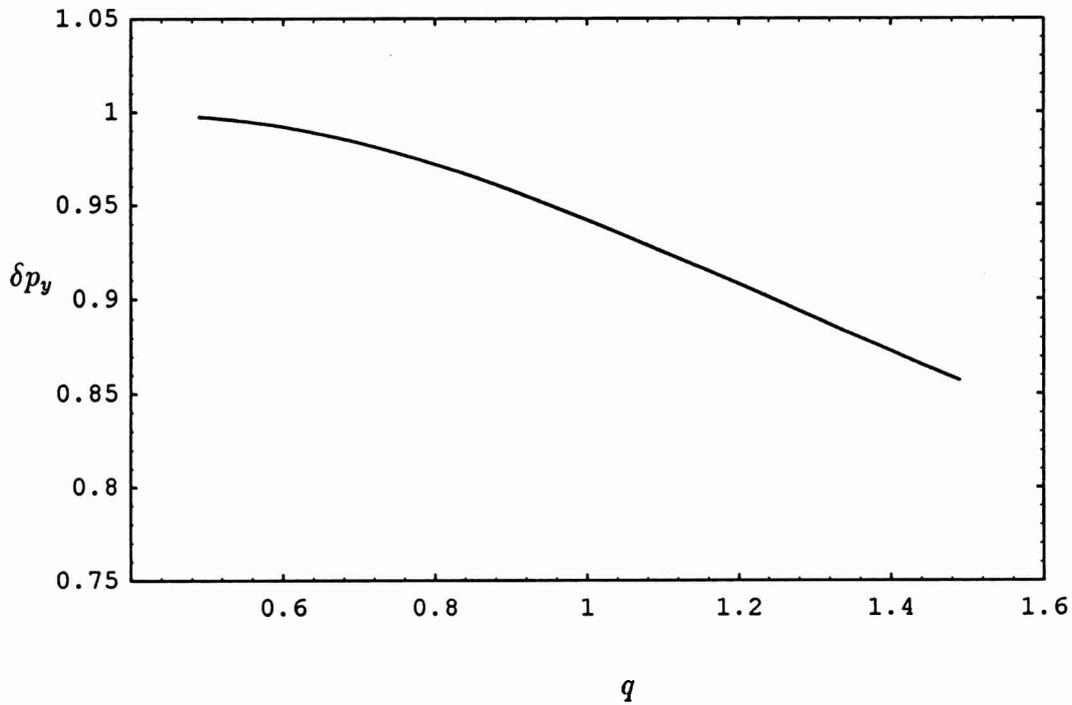


Figura 3.3: “Intervalo permitido” $\delta p_y(q)$ para la proyección de un estado sobre los autovectores de \hat{S}_y , en función de q . La proyección complementaria sobre \hat{S}_x tiene el valor $p_x = 0.75$. (Ejemplo 1)

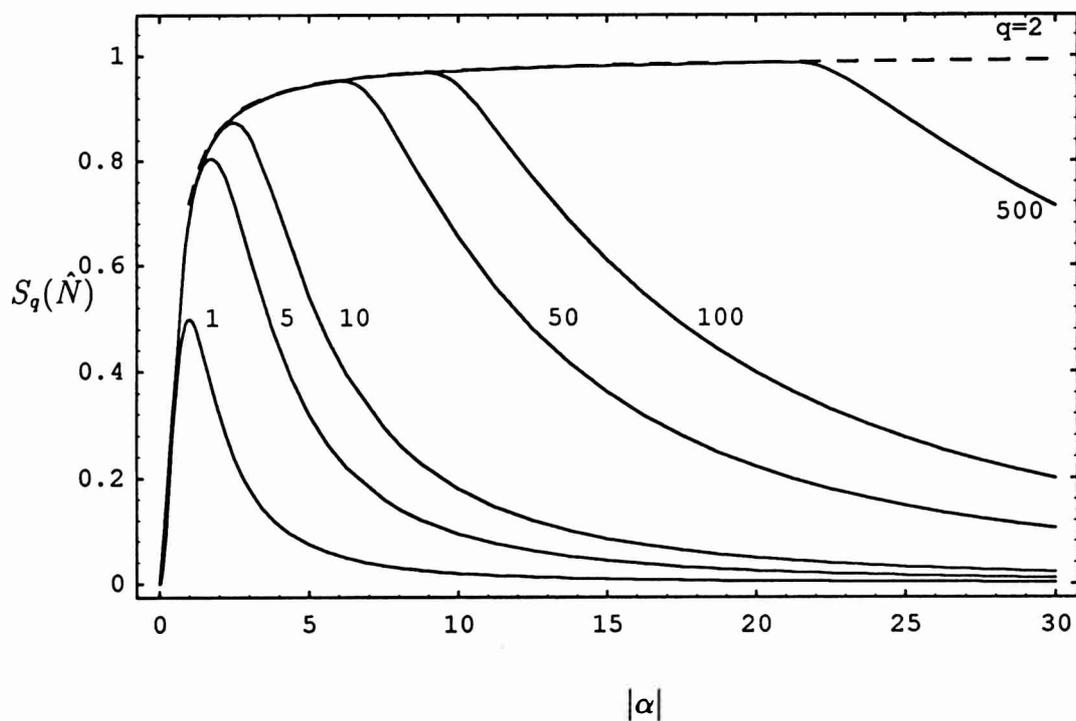


Figura 3.4: Entropía para el operador número, $S_q(\hat{N}; \alpha, s)$, en función de la coherencia, $|\alpha|$, para valores crecientes de la dimensión s (líneas llenas). Comparación con la predicción de la ec. (3.27.a) (línea a trazos). (Ejemplo 2)

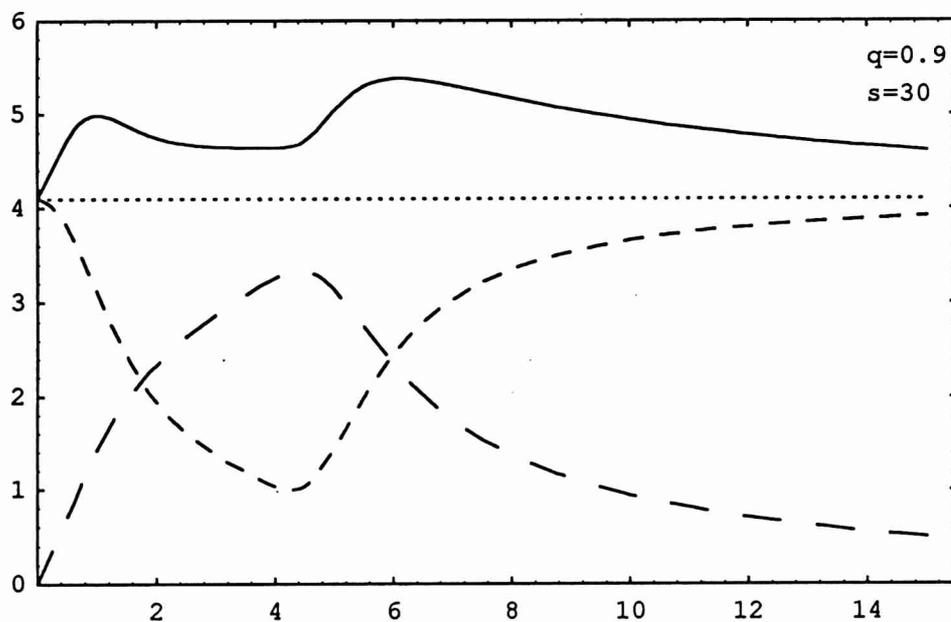


Figura 3.5: Entropías para los operadores número (línea a trazos largos) y de fase (línea a trazos cortos), cota MU (línea de puntos) e incerteza $\mathcal{U}_q(\hat{N}, \hat{\Phi}; \alpha, s)$ (línea llena) en función de la coherencia, $|\alpha|$. (Ejemplo 2)

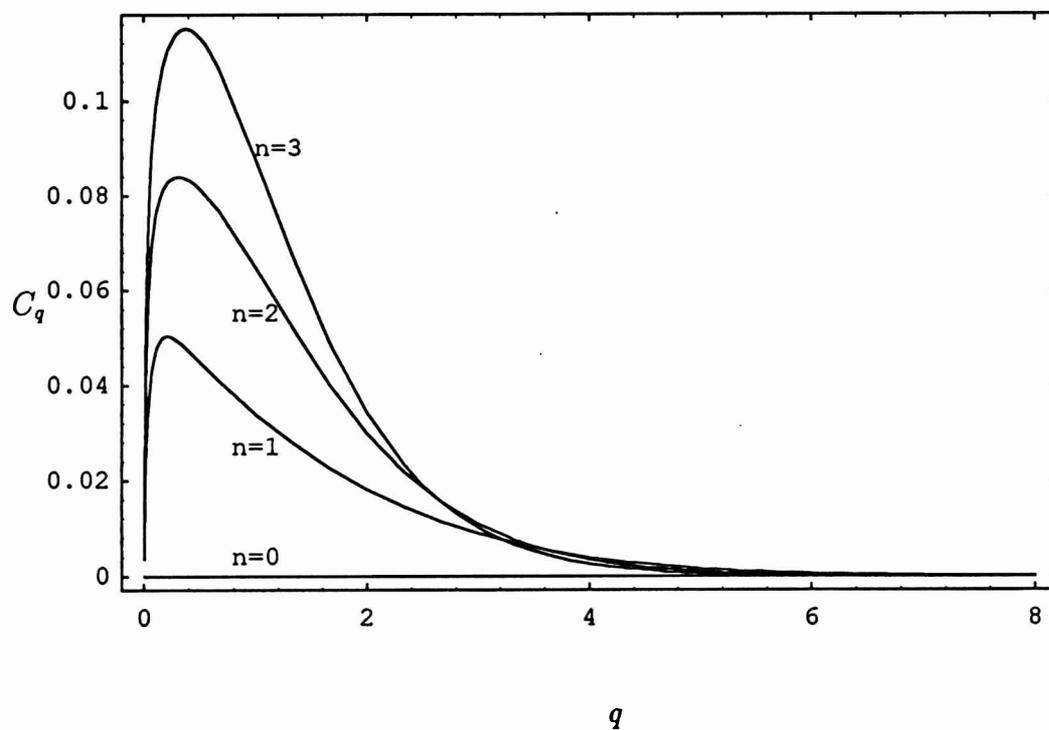


Figura 3.6: Funcional de correlación relativa generalizada para las primeras cuatro autofunciones del oscilador armónico en función de $q > 0$. (Caso continuo)

Bibliografía

- [1] C. Tsallis, *J. Stat. Phys.* **52** (1988) 479.
- [2] D. Deutsch, *Phys. Rev. Lett.* **50** (1983) 631.
- [3] M. Hossein Partovi, *Phys. Rev. Lett.* **50** (1983) 1883.
- [4] K. Kraus, *Phys. Rev. D* **35** (1987) 3070.
- [5] H. Maassen y J.B.M. Uffink, *Phys. Rev. Lett.* **60** (1988) 1103.
- [6] A.J.M. Garrett y S.F. Gull, *Phys. Lett. A* **151** (1990) 453.
- [7] S. Abe, *Phys. Lett. A* **166** (1992) 163.
- [8] I. Białynicki-Birula y J. Mycielski, *Commun. math. Phys.* **44** (1975) 129.
- [9] Jorge Sánchez-Ruiz, *Phys. Lett. A* **181** (1993) 193.
- [10] S.S. Mizrahi y M.A. Marchioli, *Physica A* **199** (1993) 96.
- [11] M. Portesi y A. Plastino, en *Proceedings of the IV International Conference on Squeezed States and Uncertainty Relations (FICSSUR95), Taiyuan, China* (NASA Conference Publication Series, 1995).
- [12] M. Portesi y A. Plastino, *Generalized entropy as measure of quantum uncertainty*, (en revisión); *preprint: La Plata-Th 95/18*.
- [13] C.E. Shannon, *Bell Syst. Tech. J.* **27** (1948) 379; **27** (1948) 623.

- [14] A. Katz, *Principles of Statistical Mechanics, The Information Theory Approach* (Freeman and Co., San Francisco, 1967).
- [15] E.T. Jaynes, *Phys. Rev.* **106** (1957) 620; **108** (1957) 171.
- [16] E.M.F. Curado y C. Tsallis, *J. Phys. A* **24** (1991) L69; *Corrigenda:* **24** (1991) 3187 y **25** (1992) 1019.
- [17] A.R. Plastino y A. Plastino, *Phys. Lett. A* **177** (1993) 177.
- [18] A.R. Plastino y A. Plastino, *Physica A* **202** (1994) 438.
- [19] C. Tsallis, en *New Trends in Magnetism, Magnetic Materials, and Their Applications*, editado por J.L. Morán-López y J.M. Sanchez (Plenum Press, New York, 1994), pág. 451.
- [20] A. Chame y E.V.L. de Mello, *J. Phys. A* **27** (1994) 3663.
- [21] M.O. Caceres, *Physica A* **218** (1995) 471.
- [22] Ananias M. Mariz, *Phys. Lett. A* **165** (1992) 409.
- [23] John D. Ramshaw, *Phys. Lett. A* **175** (1993) 169; **175** (1993) 171.
- [24] A.R. Plastino y A. Plastino, *Phys. Lett. A* **174** (1993) 384; **193** (1994) 251.
- [25] J.J. Aly, en *N-body problems and gravitational dynamics (Proceedings del encuentro de Aussois, Francia, 1993)*, editado por F. Combes y E. Athanassoula (Publications de l'Observatoire de Paris, Paris, 1993), pág. 19.
- [26] D.H. Zanette y P.A. Alemany, *Phys. Rev. Lett.* **75** (1995) 366.
- [27] C. Tsallis, S.V.F. Levy, A.M.C. de Souza y R. Maynard, *Phys. Rev. Lett.* **75** (1995), en prensa.
- [28] M. Portesi, A. Plastino y C. Tsallis, *Phys. Rev. E* **52** (1995) R3317.
- [29] A. Plastino y A.R. Plastino, en *Condensed Matter Theories*, editado por E. Ludeña (Nova Science, Commack, NY, 1995), Vol. 11.

- [30] M. Riesz, *Acta Math.* **49** (1926) 465.
- [31] M. Reed y B. Simon, en *Fourier Analysis, Self-Adjointness, Methods of Modern Mathematical Physics Vol. 2* (Academic, New York, 1975), pág. 27.
- [32] A.I. Kinchin, *Mathematical Foundations of Information Theory* (Dover Publ., New York, 1957).
- [33] D.T. Pegg y S.M. Barnett, *Europhys. Lett.* **6** (1988) 483; *Phys. Rev. A* **39** (1989) 1665.
S.M. Barnett y D.T. Pegg, *J. Mod. Opt.* **36** (1989) 7.
- [34] L.-M. Kuan y X. Chen, *Phys. Lett. A* **186** (1994) 8.
- [35] A. Wehrl, *Rev. Mod. Phys.* **50** (1978) 221.
- [36] John D. Ramshaw, *Phys. Lett. A* **116** (1986) 110.
- [37] P. Meystre y M. Sargent III, *Elements of Quantum Optics*, (Springer-Verlag, Berlin, 1991, segunda edición), Cap. 12.
- [38] S.S. Mizrahi y J. Daboul, *Physica A* **189** (1992) 635.

Capítulo 4

Efecto de tamaño de un sistema físico en una estadística no extensiva

4.1 Introducción

Por una variedad de razones físicas (posiblemente interconectadas), una cantidad importante de trabajos en Física está dedicada actualmente a formalismos no lineales. Dos vías muy activas en este sentido son los grupos cuánticos ([1–3] y referencias que allí se citan) y la termoestadística no extensiva [4, 5], a la que hemos dedicado nuestra atención en esta segunda parte de la Tesis [6–8].

En relación al primero de aquellos desarrollos, mencionemos que varias dificultades relacionadas con la relatividad especial en la física de partículas impusieron la necesidad de “deformar” mínimamente el grupo de Poincaré. En una serie de publicaciones, Bacry señaló [1, 2] las ventajas de introducir una deformación particular [3] del grupo de Poincaré, que conduce a la *relatividad especial cuántica*. Ese nuevo grupo cuántico preserva los principales éxitos del grupo de Poincaré ordinario, ya que las leyes de conservación para todos los momentos y las leyes de transformación entre energía y momento, así como la aditividad de momentos angulares, permanecen

válidas. También se indicó que la relatividad especial cuántica puede arrojar un interesante efecto cinético: la energía es no aditiva (no extensiva) en el sentido de que la energía total no es proporcional al número total de partículas. Esta propiedad podría tener relación con el problema de la llamada “materia oscura” del Universo.

En este capítulo mostramos [8] que se presenta un efecto similar al que indica Bacry [1] sobre una base teórica muy diferente, esto es, en el contexto de la termoestadística del equilibrio mencionada más arriba. El fenómeno es tan general que puede ser ilustrado en un sistema muy simple, dado por una colección de átomos de spin $1/2$ no interactuantes en presencia de un campo magnético externo. Este sistema ha sido abordado por otros autores [9] con la idea de discutir la existencia del límite termodinámico dentro del formalismo de la termoestadística no extensiva. Aquí centramos la atención en un aspecto diferente, la posible existencia teórica de lo que denominamos “magnetismo aparente”, donde el número efectivo de spines que aparenta tener el sistema es menor o mayor que el verdadero número de partículas que lo componen.

Antes de encarar el tratamiento del sistema magnético, en la Sección 4.2 presentamos un repaso de la Mecánica Estadística no extensiva, que está basada en la forma entrópica generalizada propuesta por Tsallis (introducida en el Cap. 3) y en una expresión generalizada para los valores medios de los observables. La Sección 4.3 se dedica entonces a analizar el comportamiento de un sistema de spines en equilibrio térmico en presencia de un campo magnético, dentro del marco de la termoestadística generalizada. En la Sección 4.4 discutimos las conclusiones de ese estudio y señalamos una posible conexión entre nuestros resultados y los que se desprenden de la teoría de grupos cuánticos.

4.2 Termoestadística no extensiva

Pocos años atrás, Curado y Tsallis propusieron [4] una generalización de la termodinámica que se basa en dos suposiciones fundamentales:

(i) la entropía de un sistema con distribución de probabilidades $\{p_n, n = 1, \dots, W\}$,

donde p_n es la probabilidad asociada con el n -ésimo microestado, está dada por

$$S_q(\{p_n\}) \equiv k \frac{1 - \sum_{n=1}^W p_n^q}{q - 1} \quad (4.1)$$

siendo k una constante positiva con las dimensiones adecuadas, y q cualquier número real que caracteriza la estadística;

(ii) una medida experimental de un observable O , cuyo valor para el n -ésimo estado del sistema es o_n , da como resultado

$$O_q = \sum_{n=1}^W p_n^q o_n. \quad (4.2)$$

Estos enunciados se toman como axiomas para la formulación de una Mecánica Estadística no extensiva [4]. En tanto que postulados, esas dos aseveraciones sólo pueden ser juzgadas —de acuerdo al método científico [10, 11]— por las conclusiones que de ellas se deducen y, en última instancia, por confrontación con el experimento. El gran éxito de la Mecánica Estadística depende crucialmente de ciertas relaciones que involucran a la energía y a la entropía. Se ha podido mostrar en el más general marco teórico (Mecánica Cuántica y Teoría de la Información [12–14]) que tales relaciones valen para todo q [15].

Como mencionamos al introducir la entropía de Tsallis en el capítulo anterior, las probabilidades satisfacen la condición de normalización usual,

$$\sum_{n=1}^W p_n = 1, \quad (4.3)$$

y además son definidas positivas, lo que implica que las sumatorias en (4.1) y (4.2) deben ser tomadas sobre estados con probabilidades no nulas. Recordamos que para $q = 1$ se recupera, como caso especial de (4.1), la entropía de Shannon $S_1 = -k_B \sum p_n \ln p_n$ (donde se ha identificado a k con la constante de Boltzmann, k_B), y hacemos notar que la expresión familiar $O_1 = \sum p_n o_n$ también es recuperada en ese límite.

Consideremos las funciones termodinámicas en el contexto del formalismo planteado por Tsallis. La energía interna generalizada de un sistema en el conjunto canónico

está definida por [4]

$$U_q = \sum_{n=1}^W p_n^q \varepsilon_n, \quad (4.4)$$

donde ε_n denota la energía del n -ésimo microestado. En este *ensemble* corresponde extremizar la entropía generalizada bajo las condiciones de que la probabilidad sea conservada y que la energía se mantenga fija. Se exige entonces, introduciendo los multiplicadores de Lagrange α y β , que

$$\frac{\partial}{\partial p_n} \left\{ \frac{S_q(\{p_{n'}\})}{k} - \alpha \sum_{n'=1}^W p_{n'} - \beta \sum_{n'=1}^W p_{n'}^q \varepsilon_{n'} \right\} = 0, \quad (4.5)$$

de donde se obtiene la distribución de probabilidad del conjunto canónico:

$$p_n = \frac{1}{Z_q} [1 - (1 - q)\beta\varepsilon_n]^{1/(1-q)}, \quad (4.6)$$

habiéndose definido aquí la función de partición generalizada Z_q como

$$Z_q \equiv \sum_{n=1}^W [1 - (1 - q)\beta\varepsilon_n]^{1/(1-q)}. \quad (4.7)$$

El parámetro de Lagrange $\beta = 1/(kT)$ asegura el cumplimiento de la ligadura impuesta, (4.4), y juega el papel de la temperatura inversa. Es importante aclarar el siguiente punto: para un valor real genérico de q , la expresión (4.6) deja de tener sentido si $1 - (1 - q)\beta\varepsilon_n < 0$. En tal situación, el estado n se dice *térmicamente prohibido* y se le asigna una probabilidad $p_n \equiv 0$. A modo de ejemplo, consideremos un espectro de energías positivas que no esté acotado por arriba y supongamos temperaturas mayores que cero; cuando $q < 1$ la distribución de Tsallis tiene un corte o *cut-off* natural para energías suficientemente grandes o, pensado en términos de la temperatura, para $T < (1 - q)\varepsilon_n/k$. Cuando q se acerca a 1, se obtiene para p_n la ley exponencial usual $\exp(-\beta\varepsilon_n)/Z$, y el *cut-off* se produce en $T = 0$ (Tercer principio de la termodinámica). En la ref. [16] se discute el origen físico de la condición de corte o *cut-off*.

Es significativo notar que la estructura de transformadas de Legendre de la termodinámica es invariante para todo q . Para mostrar esto, veamos primero que a

partir de las ecs. (4.6) y (4.7) se obtiene la relación

$$-\frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{Z_q^{1-q} - 1}{1-q} \right) = U_q, \quad (4.8)$$

donde se hace evidente que la cantidad entre paréntesis juega el papel usualmente reservado al *logaritmo* de la función de partición. Si identificamos ahora

$$F_q = -\frac{1}{\beta} \frac{Z_q^{1-q} - 1}{1-q} \quad (4.9)$$

como la energía libre generalizada, es posible verificar que $F_q = U_q - kT S_q$, y se sigue que

$$\frac{\partial S_q}{\partial U_q} = \frac{1}{kT}. \quad (4.10)$$

Consideramos ahora un sistema cuántico que suponemos caracterizado por el operador densidad $\hat{\rho}$. En forma análoga al caso clásico, se define la entropía generalizada para dicho sistema como [15]

$$S_q(\hat{\rho}) \equiv k \frac{1 - \text{Tr}(\hat{\rho}^q)}{q-1}, \quad (4.11)$$

mientras que el valor de expectación de parámetro q de un operador mecano-cuántico \hat{O} para ese sistema está dado por

$$\langle \hat{O} \rangle_q = \text{Tr}(\hat{\rho}^q \hat{O}). \quad (4.12)$$

Como mencionamos al principio de esta sección, en la teoría generalizada debe asociarse esta expresión para los valores medios con los observables físicos [4].

Por completitud, mostramos a continuación que el razonamiento seguido más arriba al presentar el conjunto canónico puede extenderse [15] en el espíritu de la Teoría de la Información [12-14], cuando se conoce los valores medios (generalizados) de L observables linealmente independientes. El operador densidad que reproduce toda la información que se posee es determinado a partir de la *extremización* de la entropía (4.11) sujeta a la condición de normalización

$$\text{Tr}(\hat{\rho}) = 1 \quad (4.13)$$

y L ligaduras del tipo (4.12) para los operadores $\hat{O}_1, \dots, \hat{O}_L$. Introduciendo $L + 1$ multiplicadores de Lagrange, la función a extremizar se escribe como[†]

$$\Phi_q(\hat{\rho}) = \frac{S_q(\hat{\rho})}{k} - (q\lambda_0 - 1) - \sum_{j=1}^L \lambda_j \langle \hat{O}_j \rangle_q, \quad (4.14)$$

que en la representación diagonal de $\hat{\rho}$ (con $\rho_{nn'} = \langle v_n | \hat{\rho} | v_{n'} \rangle \equiv \rho_n \delta_{nn'}$) toma la forma

$$\Phi_q(\{\rho_n\}) = \sum_{n=1}^W \frac{\rho_n - \rho_n^q}{q-1} - (q\lambda_0 - 1) \sum_{n=1}^W \rho_n - \sum_{j=1}^L \lambda_j \sum_{n=1}^W \rho_n^q \langle v_n | \hat{O}_j | v_n \rangle. \quad (4.15)$$

Para obtener la distribución de entropía extrema se debe anular la derivada primera de Φ_q respecto de ρ_n . Se llega entonces a la siguiente expresión para el operador densidad:

$$\hat{\rho} = \frac{1}{[1 + (1-q)\lambda_0]^{1/(1-q)}} \left(\hat{1} - (1-q) \sum_{j=1}^L \lambda_j \hat{O}_j \right)^{1/(1-q)}, \quad (4.16)$$

donde los parámetros λ deben ser determinados por las ligaduras impuestas a partir del conocimiento disponible sobre el sistema. Nuevamente identificamos al denominador de (4.16), cuyo valor es igual a la traza del numerador, con la función de partición generalizada. La matriz densidad es un operador definido positivo, pero esto no está garantizado por la ec. (4.16). Consecuentemente, se debe requerir que el operador

$$\hat{A} = \hat{1} - (1-q) \sum_{j=1}^L \lambda_j \hat{O}_j \quad (4.17)$$

sea definido positivo, esto es, que sus autovalores sean cantidades no negativas. Formalmente este requerimiento *ad hoc* se puede expresar en la forma

$$\hat{\rho} = \frac{[\hat{A} \Theta(\hat{A})]^{1/(1-q)}}{\text{Tr}[\hat{A} \Theta(\hat{A})]} \quad (4.18)$$

donde Θ denota la función de Heaviside

$$\Theta(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 & \text{si } x > 0, \end{cases} \quad (4.19)$$

[†]El parámetro de Lagrange correspondiente a la condición de normalización [α en la ec. (4.5)] es elegido aquí, por conveniencia, como $q\lambda_0 - 1$.

y la expresión (4.18) debe entenderse en términos de autovalores.

Los valores medios generalizados y los multiplicadores de Lagrange obedecen ciertas relaciones que constituyen el núcleo de una descripción termodinámica. El valor extremo de la entropía generalizada resulta $\lambda_0 + \sum \lambda_j \langle \hat{O}_j \rangle_q$, y se demuestra que [15]

$$\frac{\partial \lambda_0}{\partial \lambda_j} = -\langle \hat{O}_j \rangle_q \quad (4.20)$$

y

$$\frac{\partial S_q}{\partial \langle \hat{O}_j \rangle_q} = \lambda_j, \quad (4.21)$$

para todo $j = 1, \dots, L$. Es interesante notar que ambas expresiones *preservan la forma* de la Teoría de la Información convencional. Al derivarlas se llega al importante resultado de que la Mecánica Estadística cuántica (construida à la Jaynes) es invariante frente a un cambio del parámetro q de 1 a cualquier otro valor real.

Las diferencias más significativas entre la termodinámica generalizada y la formulación estándar tienen que ver con la extensividad de las variables de estado. La física que surge de la entropía definida por Tsallis es extensiva sólo para el caso $q = 1$, mientras que en cualquier otro caso se presenta la no extensividad [4, 5, 17]. Para fijar ideas, consideremos dos distribuciones, $\{p_n\}$ y $\{p'_m\}$, asociadas respectivamente con dos subsistemas que se suponen *independientes* en el sentido de que la probabilidad conjunta está dada por el producto $p_{nm} = p_n p'_m$. Como mostramos en la Sección 3.3, después de un poco de álgebra se encuentra que la entropía generalizada total no es simplemente la suma de las entropías individuales (salvo para $q = 1$), sino que sigue la regla de aditividad:

$$\frac{S_q(\{p_{nm}\})}{k} = \frac{S_q(\{p_n\})}{k} + \frac{S_q(\{p'_m\})}{k} + (1 - q) \frac{S_q(\{p_n\})}{k} \frac{S_q(\{p'_m\})}{k}. \quad (4.22)$$

La entropía conjunta resulta, como se ve, subaditiva o superaditiva de acuerdo a que q sea mayor o menor que 1, respectivamente.

El formalismo expuesto en esta sección resulta una importante generalización de la mayoría de los principales resultados de la termodinámica y la física estadística. Varios autores han estudiado en los últimos años diversas propiedades y aplicaciones

de esta propuesta (por ejemplo, podemos citar las refs. [6–9, 15–42]). Como mencionamos en el Cap. 3 existen, para todo q , versiones generalizadas del Teorema de Ehrenfest [15], Teorema H de Boltzmann [18, 19], ecuación de von Neumann [20], Teorema de fluctuación–disipación [21–23], Teorema de reciprocidad de Onsager [24], y formulación entrópica del Principio de Incerteza de la Mecánica Cuántica [6, 7]. En la ref. [25] se presenta un test cuantitativo sobre la validez de la Mecánica Estadística de Boltzmann–Gibbs. El formalismo cuenta con aplicaciones en diversas áreas, entre las que pueden citarse sistemas autogravitatorios [16, 26, 27], difusión anómala correlacionada [28], autoorganización [29], superdifusión anómala tipo Lévy [30, 31], técnicas de optimización (recocido simulado) [32], calor específico del átomo de hidrógeno [33], sistemas de tipo ferrofluido [34], radiación cósmica de fondo [35], y turbulencia de Euler en dos dimensiones [36]. Para algunos de estos sistemas se han probado desigualdades estrictas, demostrando que q debe ser diferente de la unidad para obtener una descripción termodinámica consistente.

4.3 Magnetismo aparente

Una manifestación interesante que hemos encontrado [8] de la no extensividad de la termoestadística generalizada tiene que ver con el tamaño de los sistemas físicos. Para ilustrar el fenómeno, estudiamos en esta sección las propiedades magnéticas de un conjunto de spines en un campo magnético externo, y mostramos que se presenta un efecto de “magnetismo aparente” para valores de q diferentes de la unidad.

Consideremos un sistema de N dipolos magnéticos idénticos de masa m , carga e y momento magnético

$$\hat{\mu}^{(i)} = g_J \frac{e}{2mc} \hat{J}^{(i)}, \quad (4.23)$$

para $i = 1, \dots, N$. Si suponemos que el momento angular $\hat{J}^{(i)}$ de un dado dipolo se debe solamente al spin electrónico, entonces $\hat{J}^{(i)} = \hat{S}^{(i)} = (\hbar/2) \hat{\sigma}^{(i)}$, donde $\hat{\sigma}$ denota las matrices de spin de Pauli, y el factor giromagnético es simplemente $g = 2$.

La energía potencial debida a la interacción de los N spines localizados con un

campo magnético externo uniforme \vec{H} , dirigido a lo largo del eje z , se escribe como

$$\hat{\mathcal{H}} = - \sum_{i=1}^N \hat{\mu}^{(i)} \cdot \vec{H} = - \frac{g\mu_0}{\hbar} H \hat{S}_z, \quad (4.24)$$

donde hemos introducido el magnetón elemental $\mu_0 = e\hbar/(2mc)$ y el operador colectivo $\hat{S} = \sum_{i=1}^N \hat{S}^{(i)}$ para el spin total. Los autovectores comunes de \hat{S}^2 y \hat{S}_z , que constituyen una base del correspondiente espacio de Hilbert de dimensión 2^N , son indicados por los kets $|S, M\rangle$ con $S = \delta, \delta + 1, \dots, N/2$ y $M = -S, -S + 1, \dots, S$. El mínimo valor que toma S es $\delta \equiv N/2 - [N/2] = 0 (1/2)$ si N es par (impar)[†]. El estado $|S, M\rangle$ tiene multiplicidad $Y(S, M) = Y(S) = N! (2S+1) / [(N/2-S)! (N/2+S+1)!]$, y los autovalores correspondientes a \hat{S}^2 y \hat{S}_z son $\hbar^2 S(S+1)$ y $\hbar M$, respectivamente.

Dentro del contexto de una estadística generalizada de índice q , el momento magnético medio del sistema atómico a temperatura T está dado por una expresión del tipo (4.12), y se lee

$$\mathcal{M}_q \equiv \frac{g\mu_0}{\hbar} \langle \hat{S}_z \rangle_q = \frac{g\mu_0}{\hbar} \text{Tr}(\hat{\rho}^q \hat{S}_z). \quad (4.25)$$

El operador estadístico $\hat{\rho}$ se obtiene extremizando la entropía $S_q(\hat{\rho})$ sujeta a la condición de normalización y al conocimiento supuesto de $\langle \hat{\mathcal{H}} \rangle_q$ (conjunto canónico). Si en la expresión general (4.16) tomamos $L = 1$ y $\hat{O}_1 = \hat{\mathcal{H}}$, e identificamos a λ_1 con β , se llega a[‡]

$$\hat{\rho} = \frac{1}{Z_q} \left(\hat{1} + (1-q)\beta \frac{g\mu_0}{\hbar} H \hat{S}_z \right)^{1/(1-q)} \quad (4.26)$$

con la función de partición dada por

$$Z_q = \text{Tr} \left[\left(\hat{1} + (1-q)\beta \frac{g\mu_0}{\hbar} H \hat{S}_z \right)^{1/(1-q)} \right], \quad (4.27)$$

donde la traza indica la doble suma $\sum_{S=\delta}^{N/2} Y(S) \sum_{M=-S}^S \langle S, M | \dots | S, M \rangle$. La magnetización generalizada de la muestra se puede derivar matemáticamente de la función de partición (4.27) en la forma

$$\mathcal{M}_q = \frac{1}{\beta} \frac{\partial}{\partial H} \left(\frac{Z_q^{1-q} - 1}{1-q} \right), \quad (4.28)$$

[†]En la definición de δ , los corchetes indican parte entera.

[‡]Ver también las ecuaciones (4.6) y (4.7).

que resulta una generalización de la expresión estándar $\mathcal{M}_1 = \beta^{-1} \partial(\ln Z_1) / \partial \beta$. Es fácil verificar además que en la expresión generalizada del operador densidad (4.26), el límite $q \rightarrow 1$ da la forma exponencial convencional de Boltzmann–Gibbs.

Remarcamos que, al computar la entropía o valores de expectación generalizados, aquellos estados $|S, M\rangle$ que *no* satisfacen la condición

$$1 + (1 - q)\beta g\mu_0 H M > 0 \quad (4.29)$$

deben ser excluidos de la sumatoria implicada en la traza. En otras palabras, a estos estados se les asigna una probabilidad $p_{S,M} = \langle S, M | \hat{\rho} | S, M \rangle \equiv 0$, de tal forma que $\hat{\rho}$ sea definido positivo.

Consideramos ahora el comportamiento magnético del sistema en función de (i) el número de partículas N , (ii) el índice q (para $q > 0$), y (iii) el parámetro adimensional $x \equiv g\mu_0\beta H$. Las figuras 4.1 y 4.2 muestran la forma de la magnetización generalizada (en unidades de $g\mu_0/\hbar$) como función de x , cuando N y q toman diferentes valores. En la fig. 4.1 se advierte la variación de $\langle \hat{S}_z \rangle_q$ al cambiar el parámetro de Tsallis en un sistema de 20 partículas. El estudio detallado de los casos asintóticos $H \ll kT$ y $H \gg kT$ permite un tratamiento simple de los efectos que deseamos describir aquí. La fig. 4.2 exhibe el momento magnético generalizado para $q = 0.9$ y $N = 20$, comparado con sus “análogos estándar” ($q = 1$) en ambos límites del parámetro x . Se puede ver claramente en esta figura que el sistema tratado dentro de un contexto generalizado con $q \neq 1$, se comporta (según la estadística convencional) como si estuviera formado por un número de spines mucho mayor. Deseamos analizar esta cuestión en profundidad.

Consideremos un campo magnético muy débil o temperaturas muy altas, situación que corresponde a tomar el límite $x \rightarrow 0$. En este caso, podemos expandir los coeficientes $(p_{S,M})^q$ hasta el primer orden en x y tomar la traza sobre el espacio de estados completo, ya que si x es suficientemente pequeño la condición (4.29) se verifica para

todo M^\dagger . Se encuentra entonces que

$$\langle \hat{S}_z \rangle_q \simeq \frac{1}{2^{Nq}} q x \sum_{M=-N/2}^{N/2} C_{N/2-M}^N M^2, \quad (4.30)$$

donde $C_n^N = N!/[(N-n)!n!]$ denota el coeficiente binomial usual. A partir de esta aproximación calculamos la susceptibilidad isotérmica generalizada como

$$\chi_q(N; T) \equiv \lim_{H \rightarrow 0} \left(\frac{\partial \mathcal{M}_q}{\partial H} \right)_T = \frac{(g\mu_0)^2}{4\hbar kT} Nq 2^{N(1-q)}, \quad (4.31)$$

que para $q = 1$ (estadística de Boltzmann-Gibbs) es simplemente proporcional al número de partículas N :

$$\chi_1(N; T) = \frac{(g\mu_0)^2}{4\hbar kT} N. \quad (4.32)$$

Cuando $q \neq 1$ definimos [8] el *número efectivo de partículas (de bajo H/kT)*, que denominamos N_{ef}^0 , por medio de la identificación

$$\chi_q(N; T) \equiv \chi_1(N_{\text{ef}}^0; T),$$

de tal forma que resulta

$$N_{\text{ef}}^0(q, N) = Nq 2^{N(1-q)}. \quad (4.33)$$

A partir de la fig. 4.2 se ve que, cuando el valor de q es 0.9, la susceptibilidad de un sistema de $N = 20$ partículas se comporta como si el mismo tuviera $N_{\text{ef}}^0 = 72$ spines cuando se “piensa” en términos convencionales. Las figuras 4.3(a) y 4.3(b) presentan gráficos de $\ln(N_{\text{ef}}^0/N)$ en función de q y de N , respectivamente, para varios números de partículas y parámetros de Tsallis. La condición física $N_{\text{ef}}^0 \geq 1$ fue impuesta al trazar las curvas en ambos casos. Si $N > 1$ y $q \in (0, 1)$ son tales que $N \ln 2 \gtrsim -(1-q)^{-1} \ln q$, entonces el tamaño efectivo del sistema será $N_{\text{ef}}^0 \gtrsim N$. Para $q < 1$ (no demasiado pequeño), el número aparente de spines es entonces *mayor* que el número real. Como puede verse en la fig. 4.3(a), la función $\ln(N_{\text{ef}}^0/N)$ exhibe un máximo (positivo) en $q = 1/(N \ln 2)$, donde $N_{\text{ef}}^0 \approx 2^N$ si $N \gg 1$. Mientras tanto la teoría no extensiva, subaditiva, que se tiene cuando q excede 1 da siempre la “ilusión” de un número de spines *menor* que N .

[†]A modo de ejemplo, cuando $q < 1$ la condición (4.29) implica que M debe ser mayor que $-1/[x(1-q)]$, cantidad que diverge a $-\infty$ para $x \rightarrow 0$.

La otra situación extrema, aquella con un fuerte campo magnético o temperaturas bajas, corresponde a $x \rightarrow \infty$. En este caso y suponiendo $q \in (0, 1)$, en el cómputo de las trazas implicadas en (4.25) los únicos estados que contribuyen son aquellos con $M > 0$, para cada $S = \delta, \dots, N/2$. Para campos suficientemente intensos (comparados con la energía térmica kT), la magnetización satura debido a que los momentos individuales tienden a alinearse con el campo externo. Comparamos el valor de saturación de la magnetización (en unidades de $g\mu_0/\hbar$), dado por

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \langle \hat{S}_z \rangle_q = \left(\sum_{M=\delta}^{N/2} C_{N/2-M}^N M^{1/(1-q)} \right)^{1-q}, \quad (4.34)$$

con el correspondiente resultado para $q = 1^\dagger$. Éste se obtiene simplemente de “sumar” (en forma extensiva) los momentos magnéticos de cada componente del sistema y resulta

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \langle \hat{S}_z \rangle_1 = \frac{N}{2}. \quad (4.35)$$

Introducimos [8] en consecuencia el *número efectivo de partículas (de alto H/kT)*, N_{ef}^∞ , de acuerdo con:

$$N_{\text{ef}}^\infty(q, N) \equiv 2 \left(\sum_{M=\delta}^{N/2} C_{N/2-M}^N M^{1/(1-q)} \right)^{1-q}. \quad (4.36)$$

Para cada q fijo, con $0 < q < 1$, se encuentra que $N_{\text{ef}}^\infty(q, N) = N$, si y sólo si $N = 1$ ó 2 ; más aún, el sistema parece ser *mayor* de lo que es si $N \geq 3$. Esto puede verse en las figs. 4.3(c) y 4.3(d) donde representamos versus q y N , respectivamente, la función $\ln(N_{\text{ef}}^\infty/N)$, que resulta monótona y siempre ≥ 0 .

Cabe mencionar que existen pares de valores (q, N) para los que el sistema, descrito por una estadística generalizada, tiene el mismo “análogo estándar” en ambos límites, con un número efectivo de partículas $N_{\text{ef}}^0(q, N) = N_{\text{ef}}^\infty(q, N)$. En la región intermedia $H/kT \sim 1$, sin embargo, la magnetización de parámetro q puede diferir de \mathcal{M}_1 .

[†]El caso $q > 1$ en este límite carece de interés. La suma en la ec. (4.34), que ahora debe correr entre $M = -N/2$ y $M = -\delta$, converge cuando $q \rightarrow 1^+$ a un valor fijo, igual a -1 ($-1/2$) para N par (impar). Luego, no es posible definir un número efectivo de partículas en esta situación.

4.4 Conclusiones

Hemos mostrado en este capítulo que el tamaño efectivo de un sistema *no es independiente del procedimiento de promediado estadístico*. Aquí hemos visto que diferentes estadísticas arrojan distintos valores para la magnetización de un sistema simple formado por spines en un campo magnético externo. Un observador que mida la magnetización de la muestra podría hacer una estimación errónea del número de partículas involucradas, si supone un valor para el índice q que no sea el apropiado a las circunstancias que gobiernan el proceso físico asociado. Por supuesto, si $q = 1$ no surge ningún problema. Pero q puede ser diferente de 1, tal como se ha mostrado, por ejemplo, en sistemas donde están presentes interacciones de largo alcance (como en el caso de las fuerzas gravitacionales) o que tienen memoria de largo tiempo, o cuando la estructura del espacio-tiempo es fractal [35, 36]. Uno de los primeros problemas a los que se aplicó el formalismo de Curado-Tsallis fue el de polítropas estelares en astrofísica, y se mostró [16, 26, 36] que no se logra una descripción termodinámica físicamente correcta a menos que se usen valores de q menores que $7/9$. Otra contribución reciente muy interesante, obtenida por Boghosian [36], resuelve un problema inexplicable teóricamente hasta el presente: un fluido de Euler bidimensional (láminas) tiende a minimizar una cantidad hidrodinámica importante, la *entropía*, en vez de maximizar la entropía de Boltzmann. Esta extremalización se da en procesos de relajación de un estado de turbulencia a uno de metaequilibrio. Los perfiles de densidad característicos del fenómeno se reproducen correctamente *si se maximiza la entropía de Tsallis con $q = 1/2$* [36].

Por otro lado, vale la pena mencionar que quizás sea concebible que existan factores estadísticos involucrados en el problema de la materia oscura del Universo. Aquí mostramos que, en un contexto estadístico generalizado, se puede de hecho pensar en una especie de “magnetismo oscuro”. Como consideración final señalamos que todo el esquema que ha surgido en nuestro tratamiento es tan similar al exhibido por Bacry [1] que la posible conexión que se ha sugerido recientemente [17] entre grupos cuánticos y la Mecánica Estadística no extensiva se ve reforzada. En particular, es

valioso resaltar que en ambos formalismos la energía interna es genéricamente no extensiva. En el mismo espíritu, hacemos notar otros dos hechos importantes, esto es, que las leyes de aditividad de spines considerada aquí y para partículas en reposo en el grupo de Poincaré deformado coinciden, y que en ambos tratamientos aparecen en forma natural cortes en las energías accesibles. En relatividad especial cuántica, el parámetro κ que caracteriza la deformación del grupo de Poincaré puede pensarse como el límite superior de la energía de una partícula [2], mientras que en el presente contexto la condición de *cut-off* está impuesta, recordamos, por la desigualdad $1 - (1 - q)\beta\varepsilon_n > 0$. Ésta última relación expresa la positividad de la distribución de probabilidades, que debe imponerse a la ley de distribuciones que extremiza la entropía generalizada con $q \neq 1$.

Lista de figuras

Figura 4.1 $\langle \hat{S}_z \rangle_q$ en función del parámetro adimensional $x = g\mu_0\beta H$.

Figura 4.2 $\langle \hat{S}_z \rangle_q$ versus x para $q = 0.9$ y $N = 20$, comparado con sus “análogos estándar”. La pendiente de $\langle \hat{S}_z \rangle_1$ en $x = 0$ es proporcional a N , y el valor de saturación en $x = \infty$ es $N/2$. Cuando $q \neq 1$, definimos la pendiente en el origen y el valor de saturación proporcionales a N_{ef}^0 y N_{ef}^∞ , respectivamente.

Figura 4.3 $\ln(N_{\text{ef}}^0/N)$ en función de q (a) y de N (b) (la condición $N_{\text{ef}}^0 \geq 1$ ha sido impuesta); $\ln(N_{\text{ef}}^\infty/N)$ versus q (c) y N (d).

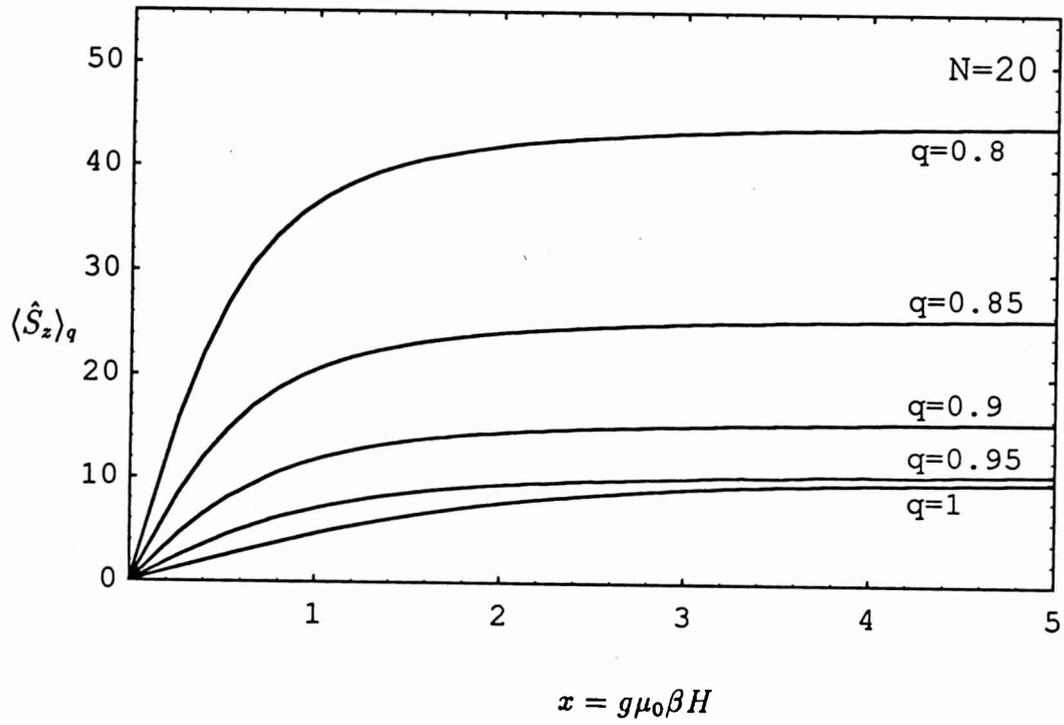


Figura 4.1: $\langle \hat{S}_z \rangle_q$ en función del parámetro adimensional $x = g\mu_0\beta H$.

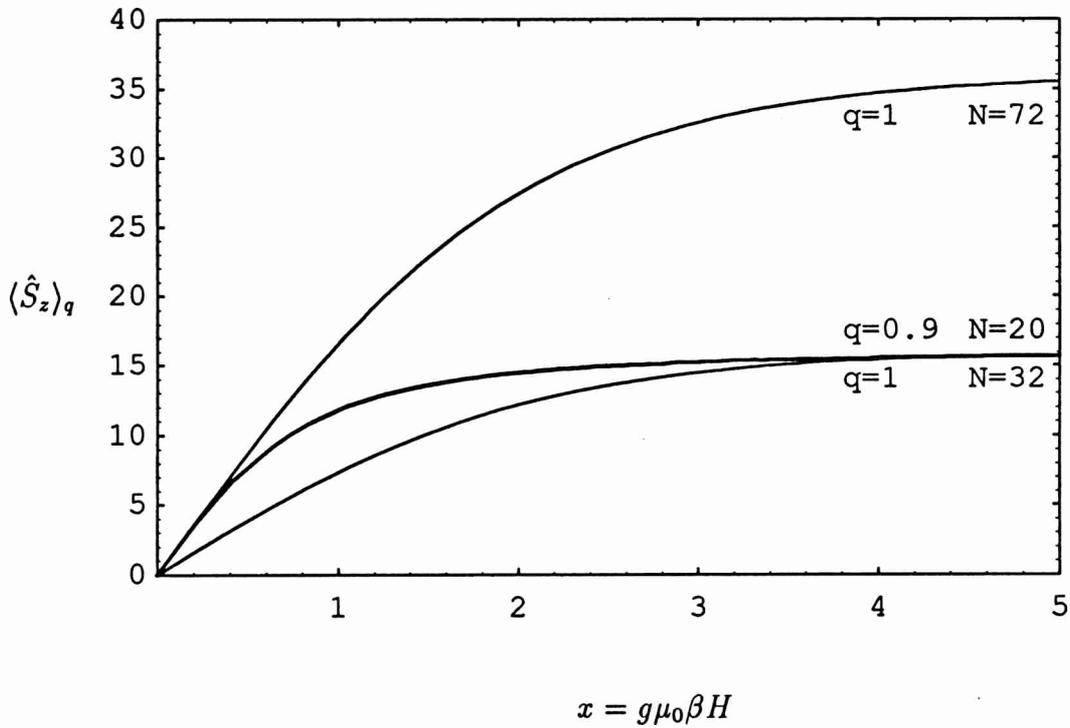


Figura 4.2: $\langle \hat{S}_z \rangle_q$ versus x para $q = 0.9$ y $N = 20$, comparado con sus “análogos estándar”. La pendiente de $\langle \hat{S}_z \rangle_1$ en $x = 0$ es proporcional a N , y el valor de saturación en $x = \infty$ es $N/2$. Cuando $q \neq 1$, definimos la pendiente en el origen y el valor de saturación proporcionales a N_{ef}^0 y N_{ef}^∞ , respectivamente.

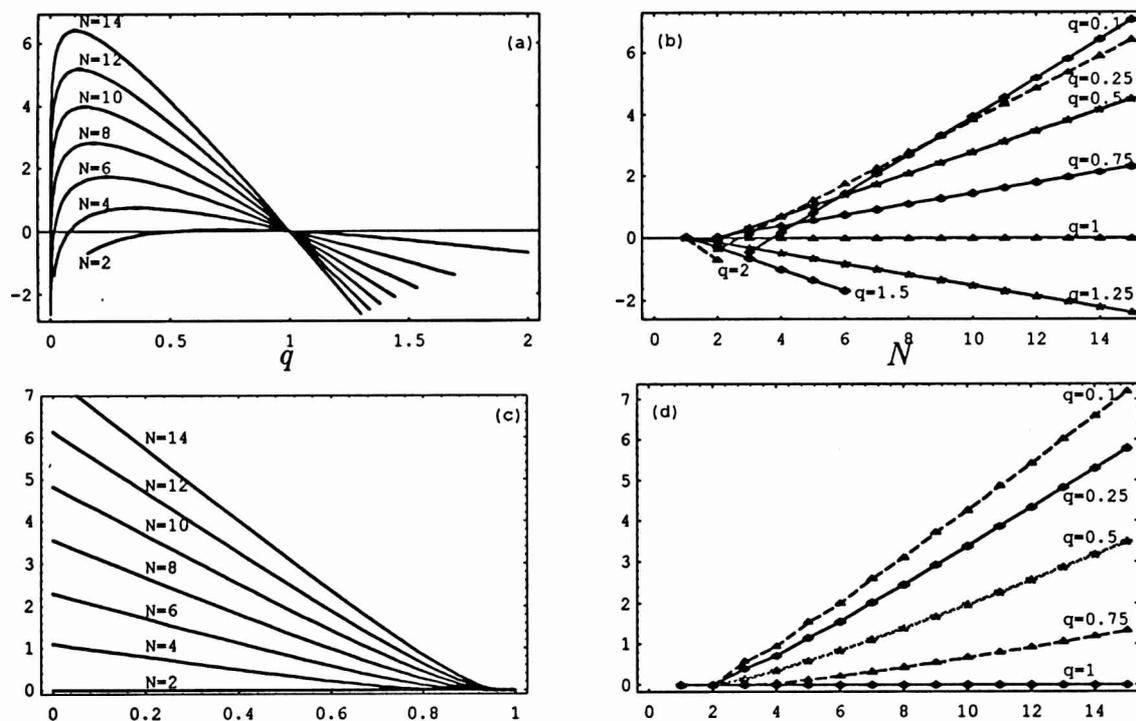


Figura 4.3: $\ln(N_{\text{ef}}^0/N)$ en función de q (a) y de N (b) (la condición $N_{\text{ef}}^0 \geq 1$ ha sido impuesta); $\ln(N_{\text{ef}}^\infty/N)$ versus q (c) y N (d).

Bibliografía

- [1] H. Bacry, Phys. Lett. B **317** (1993) 523.
- [2] H. Bacry, Phys. Lett. B **306** (1993) 41; **306** (1993) 44; Helv. Phys. Acta **67** (1994) 632.
- [3] J. Lukierski, A. Nowicki y H. Ruegg, Phys. Lett. B **293** (1992) 344.
- [4] E.M.F. Curado y C. Tsallis, J. Phys. A **24** (1991) L69; Corrigenda: **24** (1991) 3187 y **25** (1992) 1019.
- [5] C. Tsallis, J. Stat. Phys. **52** (1988) 479.
- [6] M. Portesi y A. Plastino, en *Proceedings of the IV International Conference on Squeezed States and Uncertainty Relations (FICSSUR95), Taiyuan, China* (NASA Conference Publication Series, 1995).
- [7] M. Portesi y A. Plastino, *Generalized entropy as measure of quantum uncertainty*, (en revisión); preprint: La Plata-Th 95/18.
- [8] M. Portesi, A. Plastino y C. Tsallis, Phys. Rev. E **52** (1995) R3317.
- [9] F.D. Nobre y C. Tsallis, *Localized spins ideal paramagnet within nonextensive thermostatics*, preprint (1995).
- [10] R. Descartes, *Discurso del método* (Aguilar, Buenos Aires, 1974, 9a. edición).
- [11] J. Ferrater Mora, *Diccionario de Filosofía* (Editorial Sudamericana, Buenos Aires, 1958, 4a. edición).

- [12] C.E. Shannon, *Bell Syst. Tech. J.* **27** (1948) 379; **27** (1948) 623.
- [13] A. Katz, *Principles of Statistical Mechanics, The Information Theory Approach* (Freeman and Co., San Francisco, 1967).
- [14] E.T. Jaynes, *Phys. Rev.* **106** (1957) 620; **108** (1957) 171.
- [15] A.R. Plastino y A. Plastino, *Phys. Lett. A* **177** (1993) 177.
- [16] A.R. Plastino y A. Plastino, *Phys. Lett. A* **193** (1994) 251.
- [17] C. Tsallis, *Phys. Lett. A* **195** (1994) 329.
- [18] A.M. Mariz, *Phys. Lett. A* **165** (1992) 409.
- [19] J.D. Ramshaw, *Phys. Lett. A* **175** (1993) 169; **175** (1993) 171.
- [20] A.R. Plastino y A. Plastino, *Physica A* **202** (1994) 438.
- [21] C. Tsallis, en *New Trends in Magnetism, Magnetic Materials and Their Applications*, editado por J.L. Morán-López y J.M. Sanchez (Plenum Press, New York, 1994), pág. 451.
- [22] A. Chame y E.V.L. de Mello, *J. Phys. A* **27** (1994) 3663.
- [23] M.O. Caceres, *Physica A* **218** (1995) 471.
- [24] A. Chame y E.V.L. de Mello, *The Onsager reciprocity relations within Tsallis statistics, preprint* (1995).
- [25] A.R. Plastino, A. Plastino y H. Vucetich, *Phys. Lett. A* **206** (1995) 42.
- [26] A.R. Plastino y A. Plastino, *Phys. Lett. A* **174** (1993) 384.
- [27] J.J. Aly, en *N-body problems and gravitational dynamics (Proceedings del encuentro de Aussois, Francia, 1993)*, editado por F. Combes y E. Athanassoula (Publications de l'Observatoire de Paris, Paris, 1993), pág. 19.
- [28] H. Spohn, *J. Phys. (France) I* **3** (1993) 69.

- [29] P.T. Landsberg, en *On self-organization*, editado por R.K. Mishra, D. Maass y E. Zwierlein, Springer Series in Synergetics **61** (Springer-Verlag, Berlin, 1994), pág. 157.
- [30] D.H. Zanette y P.A. Alemany, Phys. Rev. Lett. **75** (1995) 366.
- [31] C. Tsallis, S.V.F. Levy, A.M.C. de Souza y R. Maynard, Phys. Rev. Lett. **75** (1995), en prensa.
- [32] T.J.P. Penna, Phys. Rev. E **51** (1995) R1; Computers in Physics **9** (1995) 1.
- [33] L.S. Lucena, L.R. da Silva y C. Tsallis, Phys. Rev. E **51** (1995) 6247.
- [34] P. Jund, S.G. Kim y C. Tsallis, Phys. Rev. B **52** (1995) 50.
- [35] C. Tsallis, F.C. Sá Barreto y E.D. Loh, Phys. Rev. E **52** (1995) 1447.
- [36] B.M. Boghosian, *Thermodynamic description of the relaxation of two-dimensional Euler turbulence using Tsallis statistics*, preprint (1995); E-mail: chaodyn@xyz.lanl.gov, con Subject: get 9505012.
- [37] R.F.S. Andrade, Physica A **175** (1991) 285; **203** (1994) 486.
- [38] A.R. Plastino, A. Plastino y C. Tsallis, J. Phys. A **27** (1994) 5707.
- [39] C. Tsallis, Quimica Nova **17** (1994) 468.
- [40] F.D. Nobre y C. Tsallis, Physica A **213** (1995) 337; Erratum: **216** (1995) 369.
- [41] G.A. Raggio, J. Math. Phys. **36** (1995) 4785.
- [42] F. Pennini, A. Plastino y A.R. Plastino, Phys. Lett. A **208** (1995) 309.