

Tesis Doctoral

**Propiedades Conformes en Modelos
Fermiónicos Bidimensionales**

Daniel Carlos Cabra

Director: Fidel Arturo Schaposnik

Universidad Nacional de La Plata

-1992-

Indice

Propiedades Conformes en Modelos Fermiónicos Bidimensionales

CAPITULO I	Introducción	-1-
CAPITULO II	Introducción a los modelos conformes bidimensionales	-8-
CAPITULO III	Realización Fermiónica de la Construcción del Coset	-35-
CAPITULO IV	Extensiones de la Construcción Fermiónica del Coset	-48-
CAPITULO V	Teorías no-críticas: función C de Zamolodchikov en el modelo de Gross-Neveu Quiral	-71-
CAPITULO VI	Conclusiones	-99-

Capítulo 1

Introducción

En los últimos 20 años, la simetría conforme ha pasado a desempeñar un papel fundamental en la Física Teórica.

Tanto en el contexto de Teorías de Cuerdas como en el estudio de sistemas críticos en Mecánica Estadística se han desarrollado técnicas para explotar la invarianza conforme en distintos sistemas.

Estas técnicas han permitido notables avances en la solución exacta de diversos modelos de interés en el estudio de fenómenos críticos, en la comprensión del papel del Grupo de Renormalización y la invarianza de reparametrización en la formulación de modelos duales, etc.

En lo que se refiere a sistemas estadísticos la importancia de la invarianza conforme se descubre a partir de la observación de Polyakov [1], acerca de que un sistema estadístico con una transición de fase de segundo orden deviene invariante conforme en el punto crítico.

Es sabido que tales sistemas se agrupan en clases de universalidad caracterizadas por un conjunto de exponentes críticos, mientras que los detalles de la estructura microscópica son irrelevantes [2], [3].

Estos sistemas pueden ser descritos por una Teoría Cuántica de Campos invariante conforme cuyos campos están caracterizados por dimensiones de escala anómalas que se corresponden con los exponentes críticos.

Cabe destacar aquí que el estudio de teorías de campos con invarianza conforme (Teorías de Campos Conformes) en dos dimensiones ha permitido, entre otras cosas, calcular exactamente los exponentes críticos en un gran número de modelos estadísticos, como el modelo de Ising, el modelo de Potts [4], los modelos RSOS de Andrews, Baxter y Forrester [5], [6], etc.

Una de las principales motivaciones de esta tesis es justamente esta conexión entre los fenómenos críticos y la Teoría Cuántica de Campos en dos dimensiones.

La razón básica por la cual la invarianza conforme es particularmente interesante en el caso de modelos bidimensionales, es que el álgebra de los generadores (conocida como álgebra de Virasoro¹) es infinito-dimensional. En virtud de ello, las funciones de correlación de la teoría satisfacen un número infinito de igualdades (identidades de Ward conformes). Si la carga central de Virasoro (c) toma ciertos valores (que corresponden a los llamados "modelos minimales"), estas identidades determinan todas las funciones

¹El álgebra de Virasoro es el álgebra del grupo conforme con una extensión central caracterizada por la llamada "carga central de Virasoro" c .

de correlación y la teoría resulta "exactamente resoluble" [7].

Friedan, Qiu y Shenker (FQS) [4] probaron que la condición de unitariedad restringe los posibles valores de c de los modelos minimales a una serie discreta conocida como serie FQS.

El estudio realizado por FQS es básicamente algebraico. La posibilidad de dar una realización explícita mediante una teoría de campos de los modelos minimales unitarios descritos por la serie FQS fue abierta por los trabajos de Goddard, Kent y Olive (GKO) [8] que dieron lugar a la llamada construcción del coset.

Uno de los propósitos de esta tesis es justamente estudiar en el contexto de la teoría de campos realizaciones explícitas de modelos minimales unitarios siendo uno de sus aportes originales la construcción de modelos fermiónicos constreñidos que dan una realización explícita de los modelos coset de GKO [9]. Tales realizaciones fermiónicas permiten identificar los operadores primarios de la correspondiente teoría estadística (a partir de la identificación de los exponentes críticos con las dimensiones de escala anómalas) y calcular utilizando métodos de teoría de campos cantidades relevantes como el calor específico, la conductividad, etc.

La generalización de la construcción algebraica del coset de GKO, propuesta por Witten [10], dio lugar a los llamados "cosets anidados" o "cosets generalizados" (al igual que en la construcción de GKO, se trata de una construcción puramente algebraica). Más tarde estos modelos reaparecieron como soluciones particulares de la llamada "Ecuación Maestra de Virasoro" [11] cuyo espacio de soluciones es extremadamente complejo. Además, la construcción generalizada del coset podría dar lugar a nuevas series de modelos unitarios y con ello permitiría la resolución de nuevas familias de modelos estadísticos.

Otro de los aportes originales de esta tesis consiste en dar una construcción explícita de estos cosets generalizados en términos de modelos fermiónicos constreñidos [12]. Esta construcción nos permitió, en particular, calcular explícitamente la carga central de Virasoro. Por otra parte, la formulación fermiónica permite, al igual que la de los modelos minimales unitarios, identificar los operadores primarios y calcular así cantidades de interés en los modelos correspondientes.

Otro aspecto de importancia en el estudio de modelos conformes se refiere a la modificación de las propiedades conformes cuando se tienen en cuenta sectores topológicos no-triviales.

Este problema fue estudiado por Bardacki y Crescimano [13] en el caso de un modelo fermiónico abeliano del coset. Allí se mostró que el conjunto de funciones de correlación de la teoría se modifica en presencia de campos con topología.

Una de las contribuciones originales de esta tesis es la generalización de este estudio al caso no-abeliano [14]. Como se verá, el conjunto de funciones de correlación se modifica drásticamente al incluir sectores topológicos no-triviales.

La conexión existente entre los fenómenos críticos y la teoría de campos puede ser explotada también en el estudio de sistemas estadísticos fuera del punto crítico, que como es sabido pueden ser descriptos por una teoría de campos masiva (no invariante conforme).

En el estudio de tales teorías existe una generalización de la carga central de Virasoro (que caracteriza al modelo en el punto de invarianza conforme) fuera del punto crítico. Se trata de una función de las constantes de acoplamiento de la teoría que en los puntos fijos toma el valor de la carga central de Virasoro. Esta función se conoce como función C de Zamolodchikov [15].

El interés en el estudio de esta función reside en el hecho de que permite relacionar datos de teorías conformes con funciones de correlación fuera de la criticalidad.

En este contexto presentamos en esta tesis la construcción de la función C para el modelo de Gross-Neveu quiral [16], que tiene la particularidad de poseer dos puntos críticos no-triviales.

Nuestro cálculo perturbativo hasta dos loops, que constituye otro de los aportes originales de esta tesis, muestra que la función C cumple con las propiedades básicas e interpola entre los puntos críticos del modelo.

Esta tesis está organizada en seis capítulos.

En el capítulo II se da una breve introducción a la Teoría de Campos Conforme y al estudio de teorías fuera del punto crítico. En el capítulo III se presenta la construcción de teorías del coset en términos de modelos fermiónicos constreñidos. En el capítulo IV se describe la generalización de la construcción fermiónica del coset que describe los modelos cosets

anidados y se estudia la modificación de una teoría coset al incluir sectores topológicos. En el capítulo V, luego de un repaso de las propiedades conocidas del modelo de Gross-Neveu Quiral, se calcula la contribución a dos loops a la función C de Zamolodchikov. Finalmente, en el capítulo VI, se presentan las conclusiones.

Bibliografía

- [1] A.M.Polyakov, *ZhETF Lett.***12**, 538, (1970).
- [2] L.P.Kadanoff, *Proc.Int. School Phys."Enrico Fermi" Course L.I. Acad. Press, New York-London*, 1971.
- [3] K.G.Wilson y J.Kogut, *Phys. Rep.***12C**, 75, (1974).
- [4] D.Friedan, Z.Qiu y S.Shenker, *Phys.Rev.Lett.***52**, 1575, (1984), *Vertex Operators Mathematics and Physics*, MSRI publication #3(Springer, Heidelberg, 1984)p.491.
- [5] G.E.Andrews, R.J.Baxter y P.J.Forrester, *Jour.Stat.Phys.* **35**, 193, (1984).
- [6] D.A.Huse, *Phys. Rev. B* **30**, 3908 (1984).
- [7] A.A.Belavin, A.M.Polyakov y A.B.Zamolodchikov, *Nucl. Phys.* **B241**, 333 (1984).
- [8] P. Goddard, A. Kent y D.Olive, *Phys. Lett.* **152B**, 88 (1985); *Comm. Math. Phys.* **103**, 105 (1986).
- [9] D.Cabra, E.Moreno y C.von Reichenbach, *Int.J.Mod.Phys.* **A5**, 2313, (1990).
- [10] E. Witten in:*Physics and Mathematics of Strings*, L.Brink et al eds. *World Sci.*, 1990.
- [11] M.B.Halpern y E.Kiritsis, *Mod.Phys.Lett.***A4**, 1373, 1797(E), (1989); N.Sakai y P.Suranyi, *Nucl.Phys.***B318**, 655, (1989).

- [12] D.Cabra, E.Moreno y F.A.Schaposnik, *Mod.Phys.Lett.* **A7**, 1129, (1992).
- [13] K.Bardakci y L.Crescimanno, *Nucl. Phys.* **B313**, 269 (1989).
- [14] D.Cabra, M.V.Manías, F.A.Schaposnik y M.Trobo, *Phys. Rev. D* **43**, 3508 (1991).
- [15] A.B.Zamolodchikov, *Pis'ma Zh.Eksp.Teor.Fiz.* **565**, 43, (1986); [*JETP Lett.* **43**,730, (1986)].
- [16] D.Cabra, *La Plata Preprint*, 1992.

Capítulo 2

Introducción a los modelos conformes bidimensionales

2.1 Introducción

Uno de los aspectos interesantes en el estudio de Teorías de Campos Conformes (TCC's) bidimensionales es su aplicación en el estudio de sistemas termodinámicos que tienen transiciones de fase de segundo orden.

Cuando uno de tales sistemas se acerca al punto crítico en el que sufre una transición de fase de segundo orden, el tamaño característico de las fluctuaciones del parámetro de orden (longitud de correlación) deviene infinito. En esas condiciones, el sistema es invariante frente a transformaciones de escala:

$$x^\mu \rightarrow \lambda x^\mu, \quad (2.1.1)$$

donde x^μ , ($\mu = 1, \dots, D$), son las coordenadas del espacio tiempo y λ es un parámetro real.

El comportamiento de las funciones termodinámicas en este régimen está descrito por los exponentes críticos, que permiten clasificar sistemas muy diversos en clases de universalidad [1].

Un tal sistema puede ser descrito en términos de una teoría de campos efectiva que en el punto crítico es no masiva [1], [2]

Los campos ϕ_l , asociados con las fluctuaciones de los parámetros de orden, se transforman de manera característica frente a (2.1.1):

$$\phi_l \rightarrow \lambda^{d_l} \phi_l. \quad (2.1.2)$$

Los exponentes d_l son conocidos como dimensiones de escala anómalas y se corresponden con los exponentes críticos del sistema termodinámico.

El cálculo de las dimensiones anómalas es muy importante ya que determinan las singularidades de las funciones termodinámicas en el punto crítico.

En 1970, Polyakov [3] propuso la hipótesis de que en el punto crítico, además de la invarianza frente a (2.1.1), la teoría de campos deviene invariante frente a transformaciones conformes (i.e. transformaciones de coordenadas que no cambian los ángulos entre vectores).

La invarianza conforme impone vínculos adicionales sobre las funciones de Green de la teoría efectiva que permitirían, en principio, determinar las dimensiones de escala anómalas. Desafortunadamente, en dimensión arbitraria $d > 2$, el cálculo de estas dimensiones anómalas no ha podido ser resuelto en forma cerrada.

En dos dimensiones la situación es drásticamente diferente: en este caso el grupo conforme es infinito-dimensional y esto implica en una teoría de campos la existencia de infinitas cargas conservadas. Como fue mostrado en la Ref.[4], las identidades de Ward que resultan de esta simetría permiten calcular exactamente todas las funciones de correlación de la teoría y por lo tanto las dimensiones anómalas de los campos [5], [6].

El análisis de las clases de universalidad de los modelos estadísticos debe incluir, además del estudio de las teorías en los puntos fijos, la descripción de la región de escaleo alrededor de éstos. Esto corresponde, en el contexto de teoría de campos, al estudio de las teorías en el entorno de los puntos críticos (en los que devienen invariantes conforme).

En el estudio de teorías fuera del punto crítico, en dos dimensiones, existe una cierta función [7] $C(g)$ (que llamaremos "función C de Zamolodchikov") de las constantes de acoplamiento de la teoría, que en los puntos críticos $g = g^*$ toma el valor de la carga central de Virasoro de la correspondiente teoría, $C(g^*) = c$. En teorías unitarias, esta función es monótona decreciente y es estacionaria en los puntos críticos.

Estos resultados, que constituyen lo que se conoce como Teorema C de Zamolodchikov, permiten relacionar datos de TCC's con funciones de correlación de la teoría fuera del punto crítico [8]. El Teorema C ha sido utilizado en el análisis de un gran número de sistemas físicos [10]-[13], dando lugar a importantes resultados.

La gran cantidad de trabajos realizados en este campo, así como la de aplicaciones en mecánica estadística hace imposible una exposición detallada de los mismos, por lo que en este capítulo describiremos brevemente sólo aquellos resultados relevantes para el desarrollo de esta tesis, de manera de dar un panorama de las posibles aplicaciones de los resultados obtenidos.

En la sección 2.2 describiremos las propiedades generales de las TCC's en dos dimensiones. Calcularemos allí la carga central de Virasoro para las teorías de fermiones libres y Wess-Zumino-Witten (WZW) [14], que serán útiles mas adelante.

En las secciones 2.3 y 2.4 presentaremos otros resultados que permiten interpretar algunos de los resultados originales de esta tesis. En particular discutiremos el cálculo de funciones de correlación en TCC's en dos dimensiones, (en especial en los modelos minimales [4]), y la construcción del coset de Goddard, Kent y Olive (GKO) [5].

En la sección 2.5 presentaremos el Teorema C de Zamolodchikov con su

demostración siguiendo la referencia original [7] y finalmente, en la sección **2.6**, calcularemos, a modo de ejemplo ilustrativo, la función C en el modelo de Schwinger [13].

2.2 Algebra de Virasoro y construcción de Sugawara

Como mencionamos en la introducción a este capítulo, las transformaciones conformes son aquellas que dejan invariantes los ángulos entre vectores, o lo que es lo mismo, aquellas que cambian el elemento de longitud de arco en un factor arbitrario multiplicativo. Tienen la forma:

$$x_\mu \rightarrow x'_\mu = x_\mu + f_\mu(x), \quad (2.2.3)$$

de manera que:

$$ds^2 \rightarrow ds'^2 = \Omega(x)ds^2. \quad (2.2.4)$$

Para satisfacer la relación (2.2.4), debe cumplirse que:

$$\partial_\mu f_\nu + \partial_\nu f_\mu = \frac{2}{D} (\partial \cdot f) \eta_{\mu\nu}. \quad (2.2.5)$$

Aquí D es la dimensión del espacio-tiempo. De ahora en más consideraremos el caso $D = 2$.

Es conveniente trabajar en coordenadas holomórficas $(z, \bar{z}) = (x_0 + ix_1, x_0 - ix_1)$, (que en espacio de Minkowski corresponden a las coordenadas del cono de luz x_\pm), en cuyo caso las ecuaciones (2.2.5) para una transformación infinitesimal toman la forma:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \epsilon(z, \bar{z}) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} \bar{\epsilon}(z, \bar{z}) &= 0 \end{aligned} \quad (2.2.6)$$

donde $\epsilon = \epsilon_0 + i\epsilon_1$ y $\bar{\epsilon} = \epsilon_0 - i\epsilon_1$. Vemos así que cualquier función analítica genera una transformación conforme y por lo tanto estamos frente a un grupo de simetría infinito dimensional.

El tensor de energía-impulso de una teoría invariante conforme satisface:

$$\begin{aligned} \partial_\mu T_{\mu\nu} &= 0, \\ T_{\mu\nu} &= T_{\nu\mu}, \\ T_\mu^\mu &= 0, \end{aligned} \quad (2.2.7)$$

de modo que $T_{\mu\nu}$ tiene sólo dos componentes independientes, que en coordenadas holomórficas son:

$$\begin{aligned} T \equiv T_{zz} &= T_{00} - T_{11} + 2iT_{01}, \\ \bar{T} \equiv T_{\bar{z}\bar{z}} &= T_{00} - T_{11} - 2iT_{01}, \end{aligned} \quad (2.2.8)$$

Usando las ecuaciones (2.2.7) es fácil ver que $T = T(z)$ y $\bar{T} = \bar{T}(\bar{z})$.

Si definimos los momentos del tensor de energía-impulso, que llamaremos L_n ,

$$T(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} L_n z^{(-n-2)}, \quad (2.2.9)$$

es fácil probar que son los generadores del grupo conforme y satisfacen:

$$[L_n, L_m] = (n - m)L_{n+m} + \frac{c}{12}n(n^2 - 1)\delta_{n+m,0} \quad (2.2.10)$$

El segundo término en el lado derecho de esta ecuación se denomina extensión central y su origen es puramente cuántico. La constante c es la carga central que caracteriza a la teoría y en términos de las componentes holomórficas del tensor de energía-impulso está dada por:

$$\langle T(z)T(w) \rangle = \frac{c/2}{(z - w)^4}. \quad (2.2.11)$$

(una construcción análoga puede realizarse con $\bar{T}(\bar{z})$, cuyos momentos, \bar{L}_n definen una extensión central \bar{c} .)

Un ejemplo interesante de teoría conforme en dos dimensiones es el de una teoría de fermiones libres sin masa en la representación fundamental de $U(1)$, cuya acción está dada por:

$$S = \int d^2x \bar{\Psi} i \not{\partial} \Psi. \quad (2.2.12)$$

Gracias a las propiedades de las matrices de Dirac en dos dimensiones la acción puede reescribirse como:

$$S = \int dzd\bar{z} (\Psi_+^\dagger \partial_{\bar{z}} \Psi_+ + \Psi_-^\dagger \partial_z \Psi_-). \quad (2.2.13)$$

donde Ψ_+ y Ψ_- son las componentes del fermión de Dirac Ψ :

$$\Psi = \begin{pmatrix} \Psi_+ \\ \Psi_- \end{pmatrix} \quad (2.2.14)$$

Las funciones de Green de estos campos están dadas por:

$$\begin{aligned} \langle \Psi_+^\dagger(z) \Psi_+(w) \rangle &= -\frac{1}{2\pi} \frac{1}{z-w}, \\ \langle \Psi_-^\dagger(\bar{z}) \Psi_-(\bar{w}) \rangle &= -\frac{1}{2\pi} \frac{1}{\bar{z}-\bar{w}}. \end{aligned} \quad (2.2.15)$$

El tensor de energía-impulso es de traza nula y sus componentes analíticas y antianalíticas se escriben:

$$\begin{aligned} T(z) &= \frac{\pi}{2} \left(: \Psi_+^\dagger(z) \partial_z \Psi_+(z) : - : (\partial_z \Psi_+^\dagger(z)) \Psi_+(z) : \right), \\ \bar{T}(\bar{z}) &= \frac{\pi}{2} \left(: \Psi_-^\dagger(\bar{z}) \partial_{\bar{z}} \Psi_-(\bar{z}) : - : (\partial_{\bar{z}} \Psi_-^\dagger(\bar{z})) \Psi_-(\bar{z}) : \right), \end{aligned} \quad (2.2.16)$$

de modo que utilizando (2.2.11) y (2.2.15) se obtiene:

$$c = \bar{c} = 1. \quad (2.2.17)$$

En (2.2.16), los puntos $::$ indican que el producto debe entenderse ordenado normalmente.

El valor de $c = 1$ caracteriza entonces al álgebra de Virasoro de fermiones libres sin masa. El mismo resultado puede obtenerse para bosones libres en dos dimensiones.

Existen teorías (que se denominan teorías racionales), que además de ser invariantes frente a transformaciones conformes, poseen una simetría generada por corrientes que satisfacen un álgebra quiral.

Un caso particular está dado por el modelo bosónico de Wess-Zumino-Witten (WZW) [14], cuya acción viene dada por:

$$S[g] = \frac{k}{8\pi} \int d^2x \text{tr}(\partial_\mu g \partial_\mu g^{-1}) + \frac{k}{24\pi} \int d^3y \epsilon_{ijk} \text{tr}(g^{-1} \partial_i g g^{-1} \partial_j g g^{-1} \partial_k g), \quad (2.2.18)$$

donde g es un elemento de un grupo de Lie G simple. $S[g]$ es invariante conforme y, además, es invariante frente a las transformaciones:

$$g \rightarrow \Omega(z) g \bar{\Omega}(\bar{z}), \quad (2.2.19)$$

donde $\Omega(z)$ y $\bar{\Omega}(\bar{z})$ son elementos de G .

Las corrientes asociadas a esta simetría están dadas por:

$$\begin{aligned} J^a t^a &= \frac{k}{2\pi} \partial_z g g^{-1}, \\ \bar{J}^a t^a &= \frac{k}{2\pi} g^{-1} \partial_{\bar{z}} g \end{aligned} \quad (2.2.20)$$

Para las componentes holomórficas de estas corrientes el álgebra está determinada por:

$$J^a(z) J^b(\omega) = \frac{k \delta^{ab}}{(z - \omega)^2} + \frac{i f^{abc}}{z - \omega} J^c(\omega) + \text{terminos regulares}, \quad (2.2.21)$$

donde f^{abc} son las constantes de estructura de G y k es una constante. (Existe una construcción análoga para las componentes antiholomórficas.)

Si definimos los momentos J_n^a de estas corrientes como:

$$J^a(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} J_n^a z^{-n+1}, \quad (2.2.22)$$

éstos satisfacen un álgebra de Kac-Moody con nivel k :

$$[J_n^a, J_m^b] = f^{abc} J_{n+m}^c + n \frac{k}{2} \delta^{ab} \delta_{n+m,0}, \quad (2.2.23)$$

mientras que las reglas de conmutación con los generadores de Virasoro están dadas por:

$$[L_n, J_m^a] = -m J_{n+m}^a, \quad (2.2.24)$$

de modo que el álgebra de los generadores de simetría de estas teorías es el producto semidirecto del álgebra de Virasoro y del álgebra de Kac-Moody.

Estas teorías tienen la característica de que el tensor de energía-impulso $T(z)$ es cuadrático en las corrientes (2.2.21), (análogamente para $\bar{T}(\bar{z})$ con las corrientes $\bar{J}(\bar{z})$), i.e.

$$T(z) = -\frac{1}{2\beta} : J^a(z) J^a(z) : . \quad (2.2.25)$$

(Esta construcción se denomina construcción de Sugawara.)

Imponiendo a $T(z)$ definido en (2.2.25) el satisfacer las reglas de conmutación que dan lugar a (2.2.10), resulta:

$$\beta = -2(k + C_G), \quad (2.2.26)$$

donde C_G es el Casimir cuadrático en la representación adjunta ($C_G \delta^{ab} = f^{acd} f^{bcd}$), y la extensión central de Virasoro que aparece en (2.2.10) resulta:

$$c = \frac{k \dim G}{k + C_G}. \quad (2.2.27)$$

Los modos del tensor de energía-impulso (2.2.9) en términos de las corrientes (2.2.22) resultan:

$$L_n = \frac{1}{\beta} \sum_{m=-\infty}^{\infty} : J_m^a J_{m-n}^a :. \quad (2.2.28)$$

En particular, para $G = U(1)$ y $k = 1$, la ec.(2.2.27) nos da:

$$c = 1, \quad (2.2.29)$$

que corresponde a una teoría de un bosón libre sin masa.

2.3 Cálculo de funciones de correlación

Un objetivo básico en teoría de campos es calcular las funciones de correlación de campos locales arbitrarios $A_i(x_i)$ (que pueden ser campos compuestos), definidas por:

$$G(x_1, \dots, x_N) = \langle A_1(x_1) \dots A_N(x_N) \rangle \equiv \frac{1}{\mathcal{Z}} \int D\phi e^{-S[\phi]} A_1(x_1) \dots A_N(x_N), \quad (2.3.1)$$

donde los campos ϕ son los campos fundamentales de la teoría y $S[\phi]$ es la acción euclídea:

$$S[\phi] = \int d^d x \mathcal{L}[\phi, \partial_\mu \phi]. \quad (2.3.2)$$

A partir del valor de expectación de vacío de productos de campos como en (2.3.1) podemos calcular los elementos de la matriz \mathcal{S} para cualquier proceso de scattering, utilizando las reglas de reducción de Lemhann-Symanzik-Zimmermann.

Desde el punto de vista de la mecánica estadística, el cálculo de las funciones de correlación de la teoría de campos efectiva que describe un sistema crítico es importante, ya que éstas contienen información sobre los exponentes críticos de dicho sistema.

En esta sección vamos a describir brevemente el formalismo desarrollado en [4], (ver también [15] y [16]), para el cálculo de funciones de correlación arbitrarias como la (2.3.1) en teorías invariantes conforme en dos dimensiones.

La idea es clasificar el conjunto de campos de la teoría de acuerdo a su comportamiento frente a transformaciones conformes.

Los campos cuya ley de transformación está dada por:

$$\delta_\epsilon \phi_n(z) = \epsilon(z) \frac{\partial}{\partial z} \phi_n(z) + \Delta_n \epsilon'(z) \phi_n(z), \quad (2.3.3)$$

donde Δ_n es la dimensión conforme, se denominan campos primarios. El estudio de estos campos es de fundamental importancia, ya que en términos de estos campos pueden calcularse todas las funciones de Green de la teoría.

En particular, las identidades de Ward conformes para funciones de correlación que involucran campos primarios, toman la forma de ecuaciones diferenciales lineales:

$$\begin{aligned} \langle T(z)\phi_1(z_1)\dots\phi_N(z_N) \rangle = \\ \sum_{i=1}^N \left(\frac{\Delta_i}{(z-z_i)^2} + \frac{1}{z-z_i} \frac{\partial}{\partial z_i} \right) \langle \phi_1(z_1)\dots\phi_N(z_N) \rangle, \end{aligned} \quad (2.3.4)$$

donde $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_N$, son las dimensiones de los campos primarios $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_N$ respectivamente.

Existen infinitos campos no primarios (que llamaremos secundarios), cuyas leyes de transformación frente a transformaciones conformes son más complicadas que las de los campos primarios (2.3.3). Los campos secundarios asociados a un dado campo primario, aparecen en el desarrollo del producto de operadores de $T(z)$ con el campo primario (primeros descendientes), en el producto de operadores de $T(z)$ con los campos secundarios (segundos descendientes), etc. Estos campos pueden definirse de manera explícita como:

$$\phi_n^{(-k_1, -k_2, \dots, -k_N)} = L_{-k_1}(z)L_{-k_2}(z)\dots L_{-k_N}(z)\phi_n(z), \quad (2.3.5)$$

donde el múltiple supraíndice indica que es un descendiente de orden N de $\phi_n(z)$, cuya dimensión está dada por:

$$\Delta_n^{k_1, \dots, k_N} = \Delta_n + k_1 + \dots + k_N. \quad (2.3.6)$$

En (2.3.5), $L_{-k}(z)$ está definido por:

$$L_{-k}(z) = \oint dw \frac{T(w)}{(w-z)^{k+1}} \quad (2.3.7)$$

que satisfacen el álgebra de Virasoro (2.2.10).

El conjunto infinito formado por un campo primario y los campos descendientes asociados se denomina familia conforme y se anota como $[\phi_n]$.

Una característica importante de la clasificación de los campos en familias conformes, es que la variación frente a transformaciones conformes de un campo en la familia $[\phi_n]$ se puede escribir en términos de campos pertenecientes a la misma familia, por lo tanto, cada familia conforme corresponde a una representación del álgebra de Virasoro.

Se puede probar, utilizando el álgebra (2.2.10) junto con la condición de que $T(z)$ sea no singular en $z = 0$, que la familia conforme $[\phi_n]$ es isomorfa

al espacio de estados llamado módulo de Verma \mathcal{V}_n . (Análogamente para las componentes antiholomorfas.)

Este espacio se construye por aplicación sucesiva de operadores de Virasoro L_n con $n < 0$ a un estado primario $|n\rangle$ definido por:

$$|n\rangle \equiv \phi_n(0)|0\rangle, \quad (2.3.8)$$

donde $|0\rangle$ es el vacío de la teoría que satisface:

$$L_n|0\rangle = 0 \quad \text{si } n \geq -1. \quad (2.3.9)$$

Debido a las relaciones de conmutación (2.2.10), los vectores de \mathcal{V}_n no son todos linealmente independientes. Salvo para algunos valores especiales de Δ_n que discutiremos más adelante, podemos construir una base de \mathcal{V}_n con los siguientes estados:

$$L_{-k_1}L_{-k_2}\dots L_{-k_N}|n\rangle, \quad (2.3.10)$$

con $k_1 \leq k_2 \leq \dots \leq k_N$.

Debemos considerar también la parte antiholomorfa de la teoría y en ese caso la representación $[\phi_n]$ es el producto directo de las representaciones del álgebra de Virasoro (2.2.10) (\mathcal{V}_n) y el álgebra de Virasoro correspondiente a la componente antiholomórfica del tensor de energía-impulso $\bar{T}(\bar{z})$ ($\bar{\mathcal{V}}_n$), i.e.

$$[\phi_n] = \mathcal{V}_n \otimes \bar{\mathcal{V}}_n. \quad (2.3.11)$$

Los vectores en este espacio tienen la forma:

$$L_{-k_1}\dots L_{-k_N}\bar{L}_{-k_1}\dots\bar{L}_{-k_M}|n\rangle, \quad (2.3.12)$$

y el estado primario $|n\rangle$ satisface:

$$\begin{aligned} L_0|n\rangle &= \Delta_n|n\rangle, \\ \bar{L}_0|n\rangle &= \bar{\Delta}_n|n\rangle, \\ L_m|n\rangle &= \bar{L}_m|n\rangle = 0. \end{aligned} \quad (2.3.13)$$

Así, la representación $[\phi_n]$ está caracterizada por dos parámetros Δ_n y $\bar{\Delta}_n$.

Lo más destacable de esta construcción es que cualquier función de correlación que involucre campos secundarios arbitrarios, puede calcularse

utilizando las identidades de Ward (2.3.4), a partir de las funciones de correlación de campos primarios mediante la aplicación de operadores diferenciales lineales (para más detalles ver Ref.[4]).

Por lo tanto, toda la información sobre la teoría de campos conforme está contenida en estas funciones de correlación.

Utilizando la simetría conforme, las funciones de correlación de dos y tres puntos de campos primarios quedan determinadas en función de las dimensiones Δ_n y $\bar{\Delta}_n$ y de los coeficientes del desarrollo del producto de operadores de los campos primarios.

La función de cuatro puntos puede expresarse en términos de funciones que dependen de seis parámetros: las dimensiones de cinco campos y la carga central de Virasoro. Estas funciones se denominan "bloques conformes".

Concluimos señalando que si se conocen los bloques conformes de una teoría, pueden determinarse las constantes del desarrollo en producto de operadores y las dimensiones Δ_n y $\bar{\Delta}_n$ a partir de las ecuaciones que resultan de utilizar la simetría de cruzamiento de las funciones de cuatro puntos. Por lo tanto, el problema de calcular funciones de correlación de campos primarios en una teoría conforme en dos dimensiones se reduce al cálculo de estos bloques conformes.

En la próxima sección vamos a estudiar teorías en las que los bloques conformes pueden calcularse exactamente.

2.4 Modelos minimales y sistemas estadísticos

En esta sección vamos a estudiar los modelos llamados minimales $\mathcal{M}(p/q)$, que están caracterizados por una carga central dada por:

$$c(p/q) = 1 - \frac{6(p-q)^2}{pq}, \quad (2.4.1)$$

con p y q enteros coprimos, $p > 1$ y $q > 1$.

Estos modelos son resolubles exactamente en el sentido de que todas las funciones de correlación y todas las dimensiones anómalas de los campos primarios pueden calcularse.

Antes de atacar el estudio de estos modelos, vamos a señalar una característica importante de las representaciones del álgebra de Virasoro (Módulos de Verma) (2.3.11). Recordemos que el espacio de representación \mathcal{V}_n (que es isomorfo a la familia conforme $[\phi_n]$), está caracterizado por la dimensión anómala Δ_n . Los valores de Δ_n para los cuales la representación \mathcal{V}_n es reducible, fueron hallados por Kac [17] y están dados por:

$$\Delta_{(a,b)} = \Delta_0 + \left(\frac{1}{2}a\alpha_+ + \frac{1}{2}b\alpha_- \right)^2, \quad (2.4.2)$$

con a y b enteros positivos y:

$$\Delta_0 = \frac{c-1}{24}, \quad (2.4.3)$$

$$\alpha_{\pm} = \frac{\sqrt{1-c} \pm \sqrt{25-c}}{\sqrt{24}}. \quad (2.4.4)$$

(Para cualquier otro valor de Δ_n la representación \mathcal{V}_n es irreducible.)

La importancia de las representaciones reducibles proviene del hecho de que poseen vectores $|\chi\rangle$ (que llamaremos vectores nulos), que satisfacen:

$$L_n|\chi\rangle = 0, \quad (2.4.5)$$

$$L_0|\chi\rangle = (\Delta + K)|\chi\rangle, \quad (2.4.6)$$

(con K entero positivo), análogas a las ecuaciones (2.3.13) para los vectores primarios.

Estos vectores tienen norma cero y son ortogonales a todos los estados de \mathcal{V}_n :

$$\begin{aligned} \langle \chi | \chi \rangle &= 0, \\ \langle \psi | \chi \rangle &= 0 \quad |\psi\rangle \in \mathcal{V}_n, \end{aligned} \quad (2.4.7)$$

por lo tanto pueden ser puestos formalmente a cero sin perder información, ya que cualquier función de correlación que involucra a uno de estos vectores se anula idénticamente:

$$\langle \chi_{\Delta+K}(z) \phi_1(z_1) \dots \phi_N(z_N) \rangle \equiv 0. \quad (2.4.8)$$

Entonces, si bien la representación es reducible, podemos construir una representación irreducible simplemente poniendo a cero al vector nulo (ya que esto anula a todos sus descendientes). La familia conforme que resulta de este proceso, se denomina familia conforme degenerada.

La relación (2.4.8) junto con el hecho de que cualquier función de correlación de campos descendientes se puede calcular a partir de la función de correlación de los campos primarios correspondientes, dan lugar a ecuaciones diferenciales adicionales que permiten calcular los coeficientes en el desarrollo en producto de operadores de los campos primarios y las dimensiones conformes de los mismos.

En el caso particular en el que la carga central de Virasoro está dada por (2.4.1), i.e. si

$$-\frac{\alpha_-}{\alpha_+} = \frac{p}{q}, \quad (2.4.9)$$

con p y q enteros positivos, cada representación degenerada tiene infinitos vectores nulos de distintas dimensiones. En ese caso, la representación irreducible que se obtiene de poner a cero los vectores nulos, contiene un número de campos considerablemente menor que las familias conformes usuales. (De ahí el nombre de teorías minimales.)

En este caso las funciones de correlación satisfacen infinitas ecuaciones diferenciales correspondientes a los infinitos campos nulos.

Esto impone fuertes condiciones sobre el álgebra de operadores, de tal manera de que las familias conformes $[\Psi_{m,n}]$, con $0 < n < p$, $0 < m < q$, determinan por completo el álgebra de operadores de la teoría cuántica. (Por ende, estas teorías tienen un número finito de campos primarios.)

La condición de unitariedad de la teoría (i.e. positividad de la norma de los estados físicos) restringe los valores de c dados en (2.4.1) a la serie [6]:

$$c_p = 1 - \frac{6}{p(p+1)}, \quad (2.4.10)$$

que corresponde a elegir en (2.4.1) $q = p + 1$, $p = 3, 4, 5, \dots$ (Esta serie de valores es conocida como serie de Friedan, Qiu y Shenker (FQS).)

Las dimensiones de escala de los campos en las teorías correspondientes a estos valores de c están dados por la fórmula de Kac [17]:

$$\Delta_p(m, n) = \frac{[(p+1)m - pn]^2 - 1}{4p(p+1)}, \quad (2.4.11)$$

$m = 1, \dots, p - 1$, $n = 1, \dots, m$.

Estos modelos fueron estudiados por Dotsenko y Fateev [18], quienes utilizaron el formalismo desarrollado por Feigin y Fuchs [19] (que consiste en la construcción de una representación integral para los bloques conformes en una teoría conforme general), para calcular las funciones de correlación de varios puntos.

El interés en los modelos minimales (unitarios y no unitarios) reside en el hecho de que (al menos para algunos valores de c), describen los puntos críticos de segundo orden de ciertos modelos estadísticos en la red.

Comparando los valores de las dimensiones de escala dados por (2.4.11) con los valores conocidos para los exponentes críticos de teorías estadísticas, Friedan, Qiu y Shenker [6], encontraron que $c = \frac{1}{2}$ corresponde al modelo de Ising, $c = \frac{7}{10}$ al modelo de Ising tricrítico, $c = \frac{4}{5}$ al modelo de tres estados de Potts y $c = \frac{6}{7}$ al modelo de Potts tricrítico.

Huse [20], mostró que las dimensiones anómalas de los campos primarios de los modelos minimales coinciden con los exponentes característicos de los puntos críticos ferromagnéticos de los modelos RSOS descubiertos por Andrews, Baxter y Forrester en Ref.[21].

Goddard, Kent y Olive [5] dieron una construcción explícita de las representaciones unitarias del álgebra de Virasoro utilizando la construcción de Sugawara descrita en la sección 2.2. (Esta construcción recibe el nombre de construcción del coset) La idea es la siguiente: dada un álgebra de Kac-Moody $\hat{\mathcal{G}}$ con una subálgebra $\hat{\mathcal{H}}$, y dados T_G y T_H , los correspondientes generadores del álgebra de Virasoro construidos a la Sugawara (ec.(2.2.25)),

la diferencia $T_g - T_h$ satisface un álgebra de Virasoro cuya carga central es:

$$c = c_{G/H} = c(G, k) - c(H, k'), \quad (2.4.12)$$

donde k y k' son las cargas de Kac-Moody de las álgebras $\hat{\mathcal{G}}$ y $\hat{\mathcal{H}}$ respectivamente, y conmuta con los generadores de $\hat{\mathcal{H}}$.

Eligiendo $\hat{\mathcal{G}} = SU(2)_k \otimes SU(2)_1$ y $\hat{\mathcal{H}} = SU(2)_{k+1}$, encontraron que los valores de la carga central del modelo coset corresponden a la serie FQS (ec.(2.4.10)).

Esta construcción dio lugar a otras series de modelos conformes con mayores simetrías como la serie superconforme, etc. Volveremos sobre este punto en el capítulo 3.

2.5 Teorías no-críticas: Teorema c de Zamolodchikov

En esta sección vamos a enunciar y demostrar el Teorema C de Zamolodchikov siguiendo la referencia original [7], para luego mostrar en la sección 2.6, con fines pedagógicos, cómo se construye la función C en el modelo de Schwinger.

El teorema C de Zamolodchikov [7] muestra que en toda teoría de campos renormalizable en dos dimensiones existe una función ("función C") dependiente de las constantes de acoplamiento g de la teoría, con las siguientes propiedades:

- es monótona decreciente a lo largo de una trayectoria del grupo de renormalización, i.e.

$$\frac{dC}{dt} \equiv \beta^i(g) \frac{\partial C(g)}{\partial g^i} \leq 0, \quad (2.5.1)$$

($\beta^i(g)$ es la función beta asociada a la constante de acoplamiento g^i , $\beta^i(g) = dg^i/dt$),

- es estacionaria en los puntos críticos, es decir, dado un punto crítico correspondiente a g^* ,

$$\beta^i(g)|_{g=g^*} = 0 \rightarrow \frac{\partial C}{\partial g^i}|_{g=g^*} = 0 \quad (2.5.2)$$

- en los puntos críticos toma el valor de la carga central de Virasoro correspondiente a la simetría conforme de la teoría en ese punto.

La prueba de este teorema, que daremos a continuación, se basa en condiciones generales, como renormalizabilidad, unitariedad e invarianza frente a transformaciones de Poincaré.

Consideremos una teoría cuya acción renormalizada viene dada por:

$$S = \int \mathcal{L}(g, \mu, x) d^2x, \quad (2.5.3)$$

donde μ es un parámetro de escala y g denota un conjunto de parámetros (constantes de acoplamiento) adimensionales $g = (g_1, g_2, \dots)$.

Utilizando la invarianza de la teoría frente a transformaciones de Poincaré (invarianza frente a $SO(2)$ más traslaciones en espacio euclídeo), podemos ver que el tensor de energía-impulso de la teoría es conservado y simétrico:

$$\partial_\mu T_{\mu\nu} = 0, \quad (2.5.4)$$

$$T_{\mu\nu} = T_{\nu\mu}. \quad (2.5.5)$$

En una teoría no-crítica en $d = 2$, el tensor de energía-impulso tiene tres componentes independientes que en coordenadas holomórficas toman la forma:

$$\begin{aligned} T \equiv T_{zz} &= T_{00} - T_{11} + 2iT_{01}, \\ \bar{T} \equiv T_{\bar{z}\bar{z}} &= T_{00} - T_{11} - 2iT_{01}, \\ \Theta \equiv 4T_{z\bar{z}} &= 4(T_{00} + T_{11}), \end{aligned} \quad (2.5.6)$$

que son las componentes de spin 2, -2 y 0 respectivamente.

Definamos las siguientes funciones:

$$\begin{aligned} F &= z^4 \langle T(z, \bar{z})T(0, 0) \rangle, \\ G &= z^3 \bar{z} \langle T(z, \bar{z})\Theta(0, 0) \rangle, \\ H &= z^2 \bar{z}^2 \langle \Theta(z, \bar{z})\Theta(0, 0) \rangle. \end{aligned} \quad (2.5.7)$$

Usando la invarianza frente a rotaciones, traslaciones y análisis dimensional, es fácil probar que F , G y H sólo dependen de $|z|^2 = z\bar{z}$ y de las constantes de acoplamiento adimensionales g^i . Además, dado que F , G y H son adimensionales, sólo pueden depender de $|z|$ a través de las constantes de acoplamiento "running" $g^i(1/|z|)$.

La ley de conservación del tensor de energía-impulso en coordenadas holomórficas toma la forma:

$$\begin{aligned} \partial_{\bar{z}}T + \frac{1}{4}\partial_z\Theta &= 0, \\ \partial_z\bar{T} + \frac{1}{4}\partial_{\bar{z}}\Theta &= 0. \end{aligned} \quad (2.5.8)$$

Utilizando estas ecuaciones se obtienen las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} \dot{F} + \frac{1}{4}(\dot{G} - 3G) &= 0, \\ \dot{G} - G + \frac{1}{4}(\dot{H} - 2H) &= 0, \end{aligned} \quad (2.5.9)$$

donde hemos definido:

$$\dot{F} = \frac{dF}{d \log |z|}. \quad (2.5.10)$$

Siguiendo [7], definimos:

$$C \equiv 2F - G - \frac{3}{8}H, \quad (2.5.11)$$

que satisface, utilizando (2.5.9),

$$\dot{C} = -\frac{3}{4}H. \quad (2.5.12)$$

Dado que la teoría es unitaria, H es definida positiva y por lo tanto C es monótona decreciente.

En los puntos de invarianza conforme, la traza del tensor de energía-impulso Θ se anula, de donde se obtiene:

$$C|_{\text{puntos fijos}} = 2F = 2z^4 \langle T(z, \bar{z})T(0, 0) \rangle, \quad (2.5.13)$$

que es la expresión de la carga central de Virasoro de la correspondiente teoría de campos conforme, ec.(2.2.11).

En una teoría renormalizable, la traza del tensor de energía-impulso está relacionada con la función β a través de:

$$\Theta(x) = \sum_{i=1}^n \beta^i(g) \Phi_i(x), \quad (2.5.14)$$

donde:

$$\Phi_i(x) = \frac{\partial}{\partial g^i} \mathcal{L}(x). \quad (2.5.15)$$

Utilizando (2.5.14) podemos reescribir (2.5.12):

$$\dot{C} = |z| \frac{dC}{d|z|} - 12|z|^4 \sum_{i,j} \beta^i(g) \beta^j(g) \langle \Phi_i(x) \Phi_j(0) \rangle. \quad (2.5.16)$$

Utilizando la ecuación de Callan-Zymanzik:

$$\left(\sum_{a=1}^N \left(\frac{1}{2} x_a^\mu \frac{\partial}{\partial x_a^\mu} + \hat{\Gamma}_a(g) \right) - \sum_{i=1}^n \beta^i(g) \frac{\partial}{\partial g^i} \right) \times \\ \langle A_1(x_1) \dots A_N(x_N) \rangle = 0, \quad (2.5.17)$$

donde:

$$\hat{\Gamma} = \hat{D} + \beta^i(g) \frac{\partial}{\partial g^i}, \quad (2.5.18)$$

podemos reescribir la ec.(2.5.16) de la siguiente forma:

$$\beta^i(g) \frac{\partial}{\partial g^i} C(g^i) = -12G_{ij}(g)\beta^i(g)\beta^j(g), \quad (2.5.19)$$

donde hemos definido:

$$\begin{aligned} G_{ij}(g) &\equiv G_{ij}(|z| = 1, g), \\ G_{ij}(|z|, g) &= |z|^4 \langle \Phi_i(z, \bar{z}) \Phi_j(0, 0) \rangle, \end{aligned} \quad (2.5.20)$$

(Hemos utilizado el hecho de que las componentes del tensor de energía-impulso no adquieren dimensiones anómalas.)

A partir de (2.5.19) vemos que en los puntos en los que $C(g)$ es estacionaria, la función β se anula, por lo tanto corresponden a puntos críticos.

La proposición inversa (i.e. el que los ceros de la β corresponden a puntos estacionarios de $C(g)$) sólo puede probarse de manera perturbativa. Verificaremos este punto en el modelo de Schwinger al final de la próxima sección

2.6 Un modelo simple: QED₂

Como mencionamos en la sección 2.5, vamos a construir ahora, con fines pedagógicos, la función C en un modelo en el que es posible calcularla exactamente [13]: el modelo de Schwinger. Este fue uno de los primeros y pocos modelos en los cuales, recientemente, se ha logrado calcular la función C .

La función de partición viene dada por:

$$\mathcal{Z} = \mathcal{N} \int DAD\psi D\bar{\psi} \exp\left(-\int d^2x \left(\bar{\psi}(i\rlap{\not{D}} + e\mathbf{A})\psi + \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\right)\right), \quad (2.6.1)$$

Dado que la teoría es invariante de gauge, la integral funcional (2.6.1) no está bien definida si no se fija el gauge de manera adecuada. Para hacerlo utilizaremos el procedimiento de Fadeev y Popov [22].

Sea la resolución de la identidad:

$$1 = \int Dg \Delta_{FP} \delta[F[A^g]], \quad (2.6.2)$$

con $F[A] = \partial_\mu A_\mu$, (gauge de Lorentz), en cuyo caso Δ_{FP} está dado por:

$$\Delta_{FP} = \det(-\Delta). \quad (2.6.3)$$

$$\mathcal{Z} = \mathcal{N} \det(-\Delta) \int \mathcal{D}g \int D\bar{\psi} D\psi DA \delta[F[A^{(g)}]] \exp\left(i \int d^2x \left(\bar{\psi}(i\rlap{\not{D}} + e\mathbf{A})\psi + \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\right)\right) \quad (2.6.4)$$

Ahora podemos ver que haciendo un cambio $A_\mu \rightarrow A_\mu^{(g^{-1})}$, el integrando completo sobre $\mathcal{D}g$ deviene independiente de g . Esto se debe a que la medida de integración DA , la acción y el jacobiano de de Fadeev-Popov Δ_{FP} , son invariantes frente al cambio realizado.

De este modo la integral sobre el grupo $\mathcal{D}g$ origina un factor que es volumen del grupo de gauge (en este caso $U(1)$). La función de partición está definida a menos de un factor multiplicativo (\mathcal{N} en (2.6.1)), de modo que podemos absorber el factor que surge del procedimiento de fijado de

gauge redefiniendo \mathcal{N} . En lo que sigue elegiremos por conveniencia $\mathcal{N} = 1/Vol U(1)$, ($\mathcal{N} = 1/Vol G$ para un grupo de gauge G arbitrario), de modo de evitar la aparición de factores divergentes irrelevantes.

$$\mathcal{Z} = \det(-\Delta) \int DAD\psi D\bar{\psi} \delta(\partial_\mu A_\mu) \exp\left(-\int d^2x \left(\bar{\psi}(i\partial + A)\psi + \frac{1}{4e^2} F_{\mu\nu}^2\right)\right). \quad (2.6.5)$$

Podemos ahora desacoplar a los fermiones del campo de gauge A_μ , realizando el siguiente cambio de variables [23]:

$$\begin{aligned} \psi &= e^{\gamma_5 \phi} \chi \\ \bar{\psi} &= \bar{\chi} e^{\gamma_5 \phi} \\ A_\mu &= \frac{1}{e} \epsilon_{\mu\nu} \partial_\nu \phi, \end{aligned} \quad (2.6.6)$$

con lo cual la acción pasa a ser:

$$S = \int d^2x \left(\bar{\chi} i\partial \chi + \frac{1}{2e^2} \phi \Delta \Delta \phi \right). \quad (2.6.7)$$

El cambio de variables (2.6.6) tiene asociados los siguientes jacobianos [23]:

$$\begin{aligned} J_F &= e^{\frac{1}{2\pi} \int d^2x \phi \Delta \phi}, \\ J_B &= \det(-\Delta), \end{aligned} \quad (2.6.8)$$

con lo cual la función de partición toma la forma:

$$\mathcal{Z} = \det i\partial \det(-\Delta) \int D\phi e^{-\int d^2x \phi (\Delta + \frac{e^2}{\pi} \Delta \Delta) \phi}. \quad (2.6.9)$$

Los determinantes que aparecen como prefactores en (2.6.9), corresponden a fermiones libres y ghosts, desacoplados del campo ϕ . La contribución proveniente de los fermiones libres a la función C es precisamente el valor calculado en (2.2.17):

$$c_{fermiones} = 1. \quad (2.6.10)$$

La contribución de los ghosts puede evaluarse siguiendo los mismos pasos que en el caso de fermiones libres (ecs.(2.2.14)-(2.2.16)). El resultado es:

$$c_{ghosts} = -2 \quad (2.6.11)$$

Para el cálculo de la contribución a la función C proveniente del tercer factor en (2.6.9), necesitamos el propagador del campo ϕ . Este viene dado por:

$$\langle \phi(x)\phi(y) \rangle = \frac{1}{2}K_0\left(\frac{e}{\sqrt{\pi}}|x-y|\right) + \frac{1}{2}\ln\frac{e}{\sqrt{\pi}}|x-y|. \quad (2.6.12)$$

El tensor de energía-impulso viene dado por:

$$T_{\mu\nu}^{(\phi)} = -\delta_{\mu\nu}\frac{1}{2e^2}\phi\left[\Delta\left(\Delta - \frac{e^2}{\pi}\right)\right]\phi + \frac{2}{e^2}\phi\partial_\mu\partial_\nu\Delta\phi - \frac{1}{\pi^2}\phi\partial_\mu\partial_\nu\phi, \quad (2.6.13)$$

que en coordenadas holomórficas tiene tres componentes independientes (ec(2.5.6)):

$$\begin{aligned} T &= \frac{2}{e^2}\phi\partial_z\partial_z\left(\Delta - \frac{e^2}{2\pi^2}\right)\phi \\ \bar{T} &= \frac{2}{e^2}\phi\partial_{\bar{z}}\partial_{\bar{z}}\left(\Delta - \frac{e^2}{2\pi^2}\right)\phi \\ \Theta &= \frac{4}{e^2}\phi\Delta\Delta\phi. \end{aligned} \quad (2.6.14)$$

Utilizando (2.5.12), junto con (2.6.12) y (2.6.14) y teniendo en cuenta las contribuciones constantes dadas por (2.6.10) y (2.6.11), la función C resulta:

$$C(\bar{e}) = \frac{\bar{e}^2}{2} \left[(2 + \bar{e}^2)K_1(\bar{e})^2 + 2\bar{e}K_0(\bar{e})K_1(\bar{e}) - \bar{e}^2K_0(\bar{e})^2 \right], \quad (2.6.15)$$

donde hemos definido la constante adimensional:

$$\bar{e} = \frac{e^2}{\pi}|z|. \quad (2.6.16)$$

Esta función es estacionaria en los extremos $\bar{e} \rightarrow 0$, ($|z| \rightarrow 0$, UV) y $\bar{e} \rightarrow \infty$, ($|z| \rightarrow \infty$, IR), y toma respectivamente los valores $c = 1$ (que

corresponde a un fermión de Dirac libre y sin masa) y $c = 0$ (que corresponde al límite en el que no hay excitaciones sin masa).

$C(\bar{e})$ dada por la ecuación (2.6.15) es monótona decreciente y satisface (2.3.19):

$$\beta(\bar{e}) \frac{dC}{d\bar{e}} = -12|z|^4 \langle \Theta(x)\Theta(0) \rangle |_{x=R}. \quad (2.6.17)$$

Si desarrollamos (2.6.15) alrededor de $\bar{e} = 0$:

$$c(\bar{e}) = 1 + \frac{3}{4}\bar{e}^2 + O(\bar{e}^4 \ln^2 \bar{e}), \quad (2.6.18)$$

obtenemos:

$$\beta(\bar{e}) = \frac{2}{3} \frac{\partial c(\bar{e})}{\partial \bar{e}}, \quad (2.6.19)$$

de donde se sigue que los ceros de la función β corresponden a puntos estacionarios de la función C .

Este cálculo fue realizado en la Ref.[13], y constituye el único caso en el que la función C de Zamolodchikov pudo ser evaluada exactamente.

Bibliografía

- [1] L.P.Kadanoff, *Proc.Int. School Phys."Enrico Fermi" Course L.I. Acad. Press, New York-London, 1971.*
- [2] K.G.Wilson y J.Kogut, *Phys. Rep.***12C**, 75, (1974).
- [3] A.M.Polyakov, *ZhETF Lett.* **12**, 538, (1970).
- [4] A.A.Belavin, A.M.Polyakov y A.B.Zamolodchikov, *Nucl. Phys.* **B241**, 333 (1984).
- [5] P. Goddard, A. Kent y D.Olive, *Phys. Lett.* **152B**, 88 (1985); *Comm. Math. Phys.* **103**, 105 (1986).
- [6] D.Friedan, Z.Qiu y S.Shenker, *Phys.Rev.Lett.***52**, 1575, (1984) *Vertex Operators Mathematics and Physics*, MSRI publication #3(Springer, Heidelberg, 1984)p.491.
- [7] A.B.Zamolodchikov, *Pis'ma Zh.Eksp.Teor.Fiz.***565**, 43, (1986); [*JETP Lett.***43**, 730, (1986)].
- [8] J.L.Cardy, *Phys. Rev. Lett.* **60**, 2709 (1988).
- [9] A.Capelli, D.Friedan y J.I.Latorre, *Nucl. Phys.* **B352**, 616 (1991).
- [10] J.L.Cardy, *J. Phys.A: Math. Gen.***21**, L797, (1988); D.Freedman, J.I.Latorre y X.Vilasis, *Mod. Phys. Lett.***A6**, 531, (1991); M.T.Grisaru, A.Lerda, S.Penati y D.Zanon, *Nucl. Phys.* **B342**, 564 (1990).
- [11] A.B.Zamolodchikov, "Resonance Factorized Scattering and Roaming Trajectories", ENS-LPS-335 (1991).

- [12] G.Mussardo, "Off-Critical Statistical Models: Factorized...", SISSA preprint.
- [13] S.C.Lee, W-C. Su y Y.C.Kao, *Phys. Rev. D* **41**, 1241 (1990).
- [14] E. Witten, *Comm. Math. Phys.* **92**, 455 (1984).
- [15] A.M.Polyakov, *ZhETF***57**, 271, (1969).
- [16] A.M.Polyakov, *ZhETF***66**, 23, (1974).
- [17] V.G.Kac, *Lecture notes in Physics* **94**, 441, (1979).
- [18] Vl.S.Dotsenko y V.A.Fateev, *Nucl. Phys.* **B240[FS12]**, 312 (1984).
- [19] B.L.Feigin y D.B.Fuchs, *Moscow Preprint* 1983.
- [20] D.A.Huse, *Phys. Rev. B* **30**, 3908 (1984).
- [21] G.E.Andrews, R.J.Baxter y P.J.Forrester, *Jour.Stat.Phys.* **35**, 193, (1984) .
- [22] L.D.Fadeev y V.N.Popov, *Phys. Lett.* **25B**, 29 (1967)..
- [23] F.A.Schaposnik en "Particles and Fields", eds. A.da Silva et al. (World Scientific, Singapore, 1988) y referencias allí citadas.

Capítulo 3

Realización fermiónica de la construcción del Coset

3.1 Introducción

La llamada construcción de Goddard-Kent-Olive (GKO) [1], descrita en la sección 2.4 de esta tesis, ha resultado una herramienta muy útil en el estudio de teorías conformes. De hecho, la búsqueda de realizaciones teóricas de estos modelos coset es un problema de interés que ha dado lugar a numerosas investigaciones [2]-[3].

En términos de modelos de WZW "gaugeados" [4], (es decir, acoplados a un campo de gauge), este problema fue resuelto en la Ref.[2].

Con respecto a realizaciones en términos de fermiones, ya en su trabajo original GKO [1] sugirieron que la construcción del "Coset" podría estar relacionada a teorías fermiónicas constreñidas.

Este tipo de teorías ha sido estudiado en la Ref.[3], pero la expresión explícita de la función de partición de modelos cuyos valores de la carga central de Virasoro están en las series discretas (modelos minimales, superconformes con $c < 3/2$, etc.), no había sido presentada.

En un trabajo realizado en colaboración con Enrique Moreno y Cecilia von Reichenbach [5] presentamos la construcción explícita de estos modelos en términos de fermiones constreñidos. Esta construcción forma parte de los aportes originales de esta tesis y será descrita en detalle en este capítulo. Uno de los aspectos relevantes de nuestros resultados reside en la posibilidad de calcular cantidades físicas de interés en una dada teoría estadística crítica utilizando métodos de Teoría de Campos en el modelo fermiónico constreñido correspondiente.

3.2 Construcción del Coset en términos de fermiones

Describiremos aquí la construcción de modelos Coset a partir de modelos fermiónicos constreñidos [5] en un caso simple, para luego generalizarla al caso de modelos en las series discretas.

Para ello, partimos de un Lagrangiano de fermiones libres en espacio de Minkowski bidimensional:

$$\mathcal{L}_0 = \bar{\Psi}^k i \not{\partial} \Psi^k \quad (3.2.1)$$

donde Ψ^k , $k = 1, \dots, N$, son fermiones de Dirac en la representación fundamental de $G = U(N)$. Este Lagrangiano tiene una simetría global $U(N)$, es decir es invariante frente a transformaciones de la forma:

$$\begin{aligned} \Psi &\rightarrow g\Psi, \\ \bar{\Psi} &\rightarrow \bar{\Psi}g^{-1}. \end{aligned} \quad (3.2.2)$$

Las corrientes de Noether asociadas a la simetría G de la acción están dadas por:

$$J_\mu^A = \bar{\Psi}^i \gamma_\mu T_{ij}^A \Psi^j \quad (3.2.3)$$

donde T^A , $A = 1, \dots, N^2 - 1$, son los generadores de $U(N)$ en la representación fundamental.

Ahora consideremos un subgrupo H de $U(N)$. En ese caso podemos ordenar a los generadores de $U(N)$ de modo que los primeros $n = \dim H$ correspondan a los generadores de H .

Para construir la teoría Coset G/H vamos a constreñir las corrientes de Noether asociadas a la simetría H ,

$$j_\mu^a = \bar{\Psi}^i \gamma_\mu T_{ij}^a \Psi^j, \quad a = 1, \dots, \dim H, \quad (3.2.4)$$

imponiendo las siguientes condiciones:

$$j_\mu^a |fis \rangle = 0 \quad (3.2.5)$$

donde $\{|fis \rangle\}$ representa el conjunto de estados físicos. Esto asegura la invarianza de los estados físicos ante el subgrupo H pues de (3.2.5):

$$e^{iQ_\epsilon^a} |fis \rangle = |fis \rangle, \quad (3.2.6)$$

con $Q_\epsilon^\alpha = \int dx \epsilon j_0^\alpha$. (ϵ parámetro infinitesimal.)

La condición (3.2.5) puede implementarse en la formulación de la integral funcional introduciendo funcionales δ apropiadas en la función de partición \mathcal{Z} :

$$\mathcal{Z}_{const} = \int D\bar{\Psi} D\Psi \exp \left(i \int d^2 x \bar{\Psi} i \not{\partial} \Psi \right) \prod_{a=1}^{dim H} \delta[j^a(x)]. \quad (3.2.7)$$

Si usamos ahora una representación funcional para las deltas:

$$\delta[j^a(x)] = \frac{1}{Vol H} \int DA \exp \left(i \int d^2 x j_\mu^a A^{\mu a} \right), \quad (3.2.8)$$

la función de partición puede escribirse como:

$$\mathcal{Z}_{const} = \frac{1}{Vol H} \int D\bar{\Psi} D\Psi DA \exp \left(i \int d^2 x \bar{\Psi} (i \not{\partial} + A) \Psi \right), \quad (3.2.9)$$

con $A_\mu = A_\mu^a T^a$. Aquí el denominador, $Vol H$, sustrae la contribución de las clases de equivalencia constituídas por cada órbita de la conexión A_μ^a con $a = 1, \dots, dim H$.

Debemos ahora fijar el gauge en la integral funcional que define \mathcal{Z} . Para ello utilizamos el método de Fadeev y Popov [6], descrito en la sección 2.6 de esta tesis.

Así llegamos a la siguiente expresión para la funcional generatriz:

$$\mathcal{Z}_{const} = \Delta_{FP} \int D\bar{\Psi} D\Psi DA \prod_{\alpha=1}^{dim H} \delta[F^\alpha[A_\mu]] \exp \left(i \int d^2 x \bar{\Psi} (i \not{\partial} + A) \Psi \right). \quad (3.2.10)$$

Vamos a trabajar en el gauge del cono de luz:

$$A_- = A_0 - A_1 = 0, \quad (3.2.11)$$

El jacobiano de Fadeev Popov está dado en este caso por:

$$\Delta_{FP} = \det \partial_- |_{Adj} \quad (3.2.12)$$

(el subíndice "Adj" significa que el determinante corresponde al operador actuando sobre la representación adjunta del grupo) y puede ser exponentado usando ghosts anticonmutantes η_+^a y ϵ^a en la representación adjunta de H :

$$\mathcal{Z}_{ghosts(-)}^H = \det \partial_- |_{Adj} = \int D\eta_+ D\epsilon e^{i \int d^2x \eta_+^a \partial_- \epsilon^a}. \quad (3.2.13)$$

Vamos ahora a desacoplar a los fermiones del campo de gauge A_μ haciendo el siguiente cambio de variables:

$$\begin{aligned} A_+ &= ih^{-1} \partial_+ h \\ \Psi_+ &= h \Psi_+^{(0)} \quad \Psi_+^\dagger = \Psi_+^{(0)\dagger} h^{-1}. \end{aligned} \quad (3.2.14)$$

Esto nos lleva a:

$$\mathcal{Z}_{const} = \mathcal{Z}_{ghosts(-)}^H \mathcal{Z}_{fl} \int \mathcal{D}h J_B[h] J_F[h], \quad (3.2.15)$$

donde:

$$\mathcal{Z}_{fl} = \int D\bar{\Psi}^{(0)} D\Psi^{(0)} \exp\left(i \int d^2x \bar{\Psi}^{(0)} i \not{\partial} \Psi^{(0)}\right) \quad (3.2.16)$$

y $J_B[h]$ y $J_F[h]$ son los jacobianos asociados a los cambios de variables (3.2.14). Estos jacobianos fueron calculados en Ref.[7] y están dados por:

$$J_B[h] = \det D_+[h] |_{Adj} = \det \partial_+ |_{Adj} e^{-2iC_H S[h]} \quad (3.2.17)$$

$$J_F[h] = e^{-iK_m S[h]} \quad (3.2.18)$$

$S[h]$ es la acción de WZW (ec.(2.2.17)):

$$S[h] = -\frac{1}{8\pi} \int d^2x \text{tr}(\partial_\mu h \partial^\mu h^{-1}) - \frac{i}{12\pi} \int d^3y \epsilon^{ijk} \text{tr}(h^{-1} \partial_i h h^{-1} \partial_j h h^{-1} \partial_k h). \quad (3.2.19)$$

En (3.2.18) K_m corresponde al nivel del álgebra de Kac-Moody que satisfacen las corrientes dadas en la ec.(3.2.4) y C_H es el Casimir cuadrático de H :

$$C_H \delta^{aa'} = f^{abc} f^{a'bc} \quad (3.2.20)$$

Finalmente obtenemos:

$$\mathcal{Z}_{const} = \mathcal{Z}_{ghosts(-)}^H \times \mathcal{Z}_{fl} \times \mathcal{Z}_{WZW}^{H, -(K_m + 2C_H)} \times \mathcal{Z}_{ghosts(+)}^H, \quad (3.2.21)$$

donde hemos definido:

$$\mathcal{Z}_{WZW}^{H, -(K_m + 2C_H)} = \int \mathcal{D}h e^{-i(K_m + 2C_H)S[h]} \quad (3.2.22)$$

(el primer supraíndice indica el grupo de simetría y el segundo el nivel del álgebra de Kac-Moody de las corrientes.)

$\mathcal{Z}_{ghosts(+)}^H$ surge de exponenciar el $\det \partial_+|_{Adj}$ en (3.2.17) usando ghosts anticonmutantes como en (3.2.13):

$$\det \partial_+|_{Adj} = \mathcal{Z}_{ghosts(+)}^H = \int D\eta_- D\tilde{\epsilon} e^{i \int d^2x \eta_-^a \partial_+ \tilde{\epsilon}^a}. \quad (3.2.23)$$

A partir de la ec.(3.2.21) podemos calcular la carga central de Virasoro asociada a \mathcal{Z}_{const} . Dado que los distintos factores correspondientes a ghosts, fermiones libres y campos de WZW están desacoplados, el tensor de energía-impulso de la teoría recibe contribuciones independientes de cada sector y lo mismo ocurre con la carga central de Virasoro. La contribución a la carga central proveniente de los ghosts puede calcularse fácilmente, ya que (3.2.23) representa una teoría de $dim H$ campos de ghosts desacoplados, cada uno de los cuales contribuye independientemente con $c = -2$ (ec.(2.6.11)), dando lugar a una contribución:

$$c_{ghosts} = -2dim H, \quad (3.2.24)$$

La contribución de los fermiones libres está dada por (2.2.17):

$$c_{fl} = N, \quad (3.2.25)$$

y por último, la contribución de los campos de WZW está dada por (2.2.27):

$$c_{WZW} = \frac{-(K_m + 2C_H)dim H}{-(K_m + 2C_H) + C_H}, \quad (3.2.26)$$

con lo que la carga central total viene dada por:

$$c_{total} = N - \frac{K_m dim H}{K_m + C_H}. \quad (3.2.27)$$

Este resultado corresponde al valor de la carga central de una teoría Coset G/H donde $G = U(N)$ (el grupo de simetría del lagrangiano de partida ec.(3.2.1)) con nivel de Kac-Moody $k = 1$ y donde el subgrupo H tiene un nivel de Kac-Moody $k = K_m$.

Un ejemplo simple que permite comprender cómo funciona esta construcción es el siguiente: consideremos el caso en que constreñimos una sola corriente:

$$j_\mu = \bar{\Psi}^i \gamma_\mu \Psi^i, \quad (3.2.28)$$

que corresponde a elegir en la ec.(3.2.4) $T = \delta_{ij}$ i.e. el generador de $U(1)$.

En este caso es fácil ver que el nivel del álgebra de Kac-Moody asociada a ésta corriente está dado por:

$$K_m = N. \quad (3.2.29)$$

Esto se debe a que los fermiones no interactúan y por lo tanto la corriente (3.2.28) es una suma de N términos cada una de los cuales satisface un álgebra de Kac-Moody con nivel $k = 1$.

La carga central de este modelo Coset es entonces:

$$c_{total} = N - \frac{N \cdot 1}{N + 0} = N - 1, \quad (3.2.30)$$

Por otra parte la construcción de GKO muestra que la carga central del modelo Coset $U(N)_1/U(1)_N$ es:

$$c_{U(N)_1/U(1)_N} = c_{U(N)_1} - c_{U(1)_N} = N - 1, \quad (3.2.31)$$

confirmándose que nuestra construcción da el valor correcto para la carga central.

3.3 Series Discretas

Vamos a usar los resultados presentados en la sección anterior para obtener la forma explícita de la función de partición de modelos fermiónicos restringidos con un valor de la carga central de Virasoro dada en general por:

$$c = \frac{(N^2 - 1)kl(k + l + 2N)}{(k + l + N)(k + N)(l + N)} \quad (3.3.1)$$

En la construcción algebraica de GKO [1] estos valores de la carga central corresponden a teorías G/H donde $G = SU(N)_k \times SU(N)_l$ y $H = SU(N)_{k+l}$. Esta serie de valores incluye, como veremos, a las series discretas más conocidas, como son la denominada serie FQS [8] de teorías minimales (ec.(2.2.10)), la serie superconforme, etc.

Partimos de un Lagrangiano de fermiones libres dado por:

$$\mathcal{L} = \bar{\Psi}^{i\alpha} i\partial \Psi^{i\alpha} + \bar{\chi}^{\rho m} i\partial \chi^{\rho m} \quad (3.3.2)$$

con fermiones $\Psi^{i\alpha}$, ($i = 1, \dots, N$ y $\alpha = 1, \dots, k$) y $\chi^{\rho m}$, ($\rho = 1, \dots, N$ y $m = 1, \dots, l$) en la representación fundamental de $U(N.k)$ y $U(N.l)$ respectivamente.

Las corrientes de Noether asociadas a las simetrías $U(N.k)$ y $U(N.l)$ del Lagrangiano están dadas por:

$$J_\mu^A = \bar{\Psi}^{i\alpha} \gamma_\mu T_{ij,\alpha\beta}^A \Psi^{j\beta} \quad (3.3.3)$$

$$\tilde{J}_\mu^B = \bar{\chi}^{\rho m} \gamma_\mu \tilde{T}_{\rho\sigma,mn}^B \chi^{\sigma n}, \quad (3.3.4)$$

donde T^A , ($A = 1, \dots, (Nk)^2$) y \tilde{T}^B , ($B = 1, \dots, (Nl)^2$) son los generadores de $U(N.k)$ y $U(N.l)$ respectivamente.

Consideremos primero a los fermiones cuya simetría es $U(N.k)$ para mostrar como se aplica el procedimiento descrito en la sección anterior para obtener la función de partición de una teoría Coset G/H con $G = U(N.k)$ y $H = SU(k)_N \times U(1)$.

Para ello, debemos imponer vínculos sobre las corrientes dadas por:

$$j_\mu = \bar{\Psi} \gamma_\mu \Psi \quad (3.3.5)$$

$$\mathcal{J}_\mu^A = \bar{\Psi}^{i\alpha} \gamma_\mu t_{\alpha\beta}^A \Psi^{i\beta} \quad (3.3.6)$$

que corresponden a corrientes $U(1)$ con nivel de Kac-Moody $K_m = Nk$ y $SU(k)$ con nivel $K_m = N$ respectivamente. (En (3.3.6) t^A ($A = 1, \dots, k^2 - 1$), son los generadores de $SU(k)$).

La teoría que resulta de poner a cero dichas corrientes tiene una simetría remanente $SU(N)$ y las corrientes de Noether asociadas a dicha simetría tienen un nivel de Kac-Moody k .

La función de partición de dicha teoría viene dada por (ver ec(3.2.9)):

$$\mathcal{Z}_{const}^{SU(N)_k} = \frac{1}{Vol U(k)} \int D\bar{\Psi} D\Psi DAda \exp\left(i \int d^2x \bar{\Psi}(i\partial + A + \phi)\Psi\right), \quad (3.3.7)$$

donde a y A^A , son los multiplicadores de Lagrange que surgen de imponer los vínculos sobre las corrientes (3.3.5) y (3.3.6) respectivamente.

Hacemos lo mismo con los fermiones con simetría $SU(N)_l$ para obtener una teoría $SU(N)_l$ y finalmente la función de partición de la teoría $SU(N)_k \times SU(N)_l$ viene dada por el producto:

$$\mathcal{Z}_{const}^{SU(N)_k \times SU(N)_l} = \mathcal{Z}_{const}^{SU(N)_k} \times \mathcal{Z}_{const}^{SU(N)_l} = \frac{1}{Vol U(k) Vol U(l)} \int D\bar{\Psi} D\Psi D\bar{\chi} D\chi DADBDaDb \exp\left(i \int d^2x \left[\bar{\Psi}(i\partial + A + \phi)\Psi + \bar{\chi}(i\partial + B + \psi)\chi\right]\right), \quad (3.3.8)$$

donde b y B^B son los multiplicadores asociados a las corrientes $U(1)$ y $SU(l)_N$ de fermiones χ .

El paso siguiente consiste en identificar las corrientes asociadas al subgrupo diagonal $SU(N)_{k+l}$. Es fácil ver que estas corrientes están dadas por:

$$j_{\mu}^{(D),A} = \bar{\Psi}^{i\alpha} \gamma_{\mu} T_{ij}^A \Psi^{j\alpha} + \bar{\chi}^{\rho n} \gamma_{\mu} T_{mn}^A \chi^{\rho n} \quad (3.3.9)$$

donde T^A , ($A = 1, \dots, N^2 - 1$), son los generadores de $SU(N)$.

Luego, imponiendo los vínculos adecuados para poner a cero estas corrientes la función de partición del modelo está dada por:

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}_{const}^{[SU(N)_k \times SU(N)_l / SU(N)_{k+l}]} &= \frac{1}{\text{Vol } U(k) \text{Vol } U(l) \text{Vol } SU(N)} \times \\
&\int D\bar{\Psi} D\Psi D\bar{\chi} D\chi D A D B D a D b D C \\
&\exp\left(i \int d^2 x [\bar{\Psi}(i\partial + A + \phi + \mathcal{C})\Psi + \right. \\
&\quad \left. \bar{\chi}(i\partial + B + \psi + \mathcal{C})\chi]\right) \tag{3.3.10}
\end{aligned}$$

Si siguiendo los mismos pasos que en la sección anterior, (esto es, fijado de gauge con la condición del cono de luz para todos los campos de gauge y los cambios de variables como en (3.2.14)), obtenemos la forma factorizada de la función de partición del modelo, lo que nos permite calcular la carga central de Virasoro.

La forma explícita factorizada es:

$$\mathcal{Z}_{const}^{[SU(N)_k \times SU(N)_l / SU(N)_{k+l}]} = \mathcal{Z}_{ghosts} \times \mathcal{Z}_{fl} \times \mathcal{Z}_{bos} \times \mathcal{Z}_{WZW} \tag{3.3.11}$$

donde:

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}_{ghosts} &= \mathcal{Z}_{ghosts}^{U(1)} \times \mathcal{Z}_{ghosts}^{SU(N)} \times \mathcal{Z}_{ghosts}^{SU(l)} \times \mathcal{Z}_{ghosts}^{SU(k)} , \\
\mathcal{Z}_{fl} &= \int D\bar{\Psi}^{(0)} D\Psi^{(0)} D\bar{\chi}^{(0)} D\chi^{(0)} \\
&\quad \exp\left(i \int d^2 x (\bar{\Psi}^{(0)} \not{\partial} \Psi^{(0)} + \bar{\chi}^{(0)} \not{\partial} \chi^{(0)})\right) , \\
\mathcal{Z}_{bos} &= \int D\phi D\eta e^{i \int d^2 x (\phi \nabla \phi + \eta \nabla \eta)} , \\
\mathcal{Z}_{WZW} &= \mathcal{Z}_{WZW}^{SU(l), -(N+2l)} \times \mathcal{Z}_{WZW}^{SU(k), -(N+2k)} \times \\
&\quad \mathcal{Z}_{WZW}^{SU(N), -(N+2(l+k))} . \tag{3.3.12}
\end{aligned}$$

A partir de la expresión factorizada para la función de partición, (3.3.11), podemos calcular la carga central de Virasoro de la teoría utilizando las ecs.(3.2.25)-(3.2.27). El valor que obtenemos para la carga central está

dado por la ec.(3.3.1) que, como mencionamos en la introducción, corresponde, en la construcción de GKO, al valor de la carga central de una teoría Coset G/H con $G = SU(N)_k \times SU(N)_l$ y $H = SU(N)_{k+l}$.

Vemos así que la función de partición (3.3.10) (o su expresión factorizada (3.3.11)), corresponde a la teoría Coset que nos proponíamos construir cuyo valor de la carga central está dado por la ec.(3.3.1).

Veamos algunos casos importantes descritos por esta función de partición. Si tomamos en (3.3.1) $N = 2$ y $l = 1$, obtenemos teorías cuyos valores de c están dados por:

$$c = 1 - \frac{6}{(k+2)(k+3)} \quad (3.3.13)$$

Esta serie de valores es la de Friedan, Qiu y Shenker [8] que como mencionamos corresponde a los únicos valores permitidos (entre cero y uno) para la extensión central, de manera que la teoría sea unitaria.

Como vimos, estos modelos son importantes desde el punto de vista de la teoría de campos ya que corresponden a modelos exactamente resolubles como fue mostrado en la Ref.[9]. También resultan de interés desde el punto de vista de la Mecánica Estadística ya que (al menos los primeros valores de la serie) fueron identificados con modelos estadísticos en el punto crítico (en los que ocurre una transición de fase de segunda especie).

Por ejemplo, para el valor de $c = 1/2$ se encontró que la función de partición describe al modelo de Ising, para $c = 7/10$ al modelo de Ising tricrítico, para $c = 4/5$ al modelo de Potts de tres estados, etc. [8].

La función de partición que obtuvimos (ec.(3.3.10)) para $N = 2$ y $l = 1$ es la expresión en términos de fermiones acoplados a campos de gauge que representa al conjunto de teorías cuya carga central está dada por la serie FQS (ec.(3.3.13)).

Si consideramos teorías que además de invarianza conforme, poseen un generador adicional anticonmutante, (supersimetría $N = 1$), la condición de unitariedad restringe los posibles valores de la extensión central (para $c < \frac{3}{2}$) a la serie superconforme:

$$c = \frac{3}{2} - \frac{12}{(k+2)(k+4)} \quad (3.3.14)$$

En nuestro desarrollo, estas teorías corresponden a la elección $N = 2$

y $l = 2$ que corresponde al Coset G/H donde $G = SU(2)_k \times SU(2)_2$ y $H = SU(2)_{k+2}$.

Existen otras series de teorías interesantes, que corresponden a teorías de campos conformes con simetrías adicionales como Z_3 , etc., que también están contenidas en la expresión general (3.3.1) y que obviamente pueden obtenerse eligiendo adecuadamente los valores de N , k y l .

La equivalencia a nivel de funciones de Green de N -puntos puede ser probada a partir del cálculo de las dimensiones de escala de los campos de la teoría, cuyos valores deben estar contenidos en la ec.(2.2.11).

Más aún, esta identificación permitirá mediante el uso de técnicas en la integral funcional, calcular ciertas cantidades relevantes en los modelos estadísticos antes mencionados, tales como la susceptibilidad magnética, conductividad, calor específico, etc. Estos resultados pueden ser comparados con los valores experimentales de dichas cantidades, medidas en los sistemas correspondientes, lo que constituiría un buen test para los métodos de cálculo utilizados en la teoría de campos.

Bibliografía

- [1] P. Goddard, A. Kent y D.Olive, *Phys. Lett.* **152B**, 88 (1985); *Comm. Math. Phys.* **103**, 105 (1986).
- [2] K. Gawedzki y A. Kupiainen, *Phys. Lett.* **215B**, 119 (1988); *Nucl. Phys.* **B320**, 625 (1989); D. Karabali, Q'Han Park, H. J. Schnitzer y Z.Yang, *Phys. Lett.* **216B**, 307 (1989); D. Karabali y H. Schnitzer, *Nucl. Phys.* **B329**, 649 (1990).
- [3] K. Bardakci y M. B. Halpern, *Phys. Rev. D* **3**, 2943 (1971); M. B. Halpern, *Phys. Rev. D* **4**, 2398 (1971); E.Bardakci, E.Rabinovichi y B.Saring, *Nucl. Phys.* **B229**, 151 (1988).
- [4] E.Witten, *Comm. Math. Phys.* **92**, 455 (1984).
- [5] D. Cabra, E. Moreno y C. von Reichenbach, *Int. J. Mod. Phys.A***5**, 2313, (1990).
- [6] L.D.Fadeev y V.N.Popov, *Phys. Lett.* **25B**, 29 (1967)..
- [7] A.Polyakov y P.B.Wiegmann, *Phys. Lett.* **131B**, 121 (1983); R.E.Gamboa Saraví, F.A.Schaposnik y J.E.Solomin, *Nucl. Phys.* **B185**, 239 (1981).
- [8] D.Friedan, Z.Qiu y S.Shenker, *Phys. Rev. Lett.* **52**, 1575 (1984); *Phys. Lett.* **151B**, 37, (1985). J. L. Cardy, *Nucl. Phys.* **B270** [FS16], 186, (1986).
- [9] A.A.Belavin, A.M.Polyakov y A.B.Zamolodchikov, *Nucl. Phys.* **B241**, 333 (1984).

Capítulo 4

Extensiones de la Construcción Fermiónica del Coset

4.1 Introducción

El estudio de modelos invariantes conforme en dos dimensiones se ha diversificado en los últimos años.

Una de las líneas de investigación que se ha desarrollado corresponde a la generalización de la construcción de Sugawara, propuesta en la Ref.[1]. A partir de ella se han construido gran cantidad de modelos invariantes conforme con nuevas estructuras muy interesantes [1], [2].

Una generalización de la construcción de Sugawara consiste básicamente de los siguientes pasos. Se toma un álgebra de corrientes con nivel k ,

$$J^a(z)J^b(w) = \frac{k}{2} \frac{\eta^{ab}}{(z-w)^2} + i f^{abc} \frac{J^c(w)}{z-w}, \quad (4.1.1)$$

donde J^a ($a = 1, \dots, \dim G$), son las corrientes de un álgebra afín \mathcal{G} , y f^{abc} y η^{ab} son, respectivamente, sus constantes de estructura y métrica de Killing. Se escribe el tensor de energía impulso como una suma cuadrática sobre las corrientes,

$$T(z) = R_{ab} : J^a J^b : (z), \quad (4.1.2)$$

con R_{ab} una matriz simétrica arbitraria. De la imposición de que los modos del tensor de energía impulso (definidos en la ec.(2.2.9)) satisfagan un álgebra de Virasoro:

$$[L_n, L_m] = (n-m)L_{n+m} + \frac{c}{12}n(n^2-1)\delta_{n+m,0} \quad (4.1.3)$$

resulta la llamada "Ecuación Maestra" de Virasoro:

$$R_{mn} = k R_{mc} \eta^{cd} R_{dn} - f_m^{ab} f_n^{cd} R_{ac} R_{bd} - f_m^{ac} f_c^{bd} R_{ab} R_{dn} - f_n^{ac} f_c^{bd} R_{ab} R_{dm}, \quad (4.1.4)$$

y la carga central está dada por:

$$c = k \eta^{ab} R_{ab}. \quad (4.1.5)$$

Esta generalización incluye por supuesto la construcción original de Sugawara (ec.(2.2.25)) cuando $R_{ab} = 1/(k + C_G) \cdot \delta_{ab}$.

El estudio de las soluciones de la "Ecuación Maestra" de Virasoro, permitiría clasificar el espacio de las teorías invariantes conforme, que parece poseer una estructura matemática muy rica. Desarrollos recientes incluyen,

entre otras aplicaciones, una conexión entre dicha ecuación y la teoría de grafos [2], técnicas perturbativas para resolverla, etc.

Entre las soluciones de la "Ecuación Maestra" que dieron lugar a nuevas construcciones, se encuentran los modelos llamados "Cosets Anidados" o "Cosets Generalizados" [3], [4], como también modelos con carga central irracional [1].

Las soluciones de esta "Ecuación Maestra" están lejos de poder ser clasificadas de manera exhaustiva, por lo que la construcción de los modelos de Teoría de Campos explícitos correspondientes, es un problema relevante en este contexto. Uno de los objetivos de este capítulo es el de presentar modelos fermiónicos que describen Cosets Generalizados.

Esta construcción fue presentada en un trabajo realizado en colaboración con E. Moreno y F. Schaposnik [4] y constituye uno de los aportes originales de esta tesis. Se la presenta en la primera parte de este capítulo (sección 4.2).

Otra extensión de interés en el estudio de modelos conformes es aquella que apunta a la construcción del espacio de estados de la teoría y que está relacionada con la inclusión de sectores topológicos.

Este problema aún no ha sido resuelto, pues si bien existen construcciones de los campos primarios (con los cuales uno puede construir el espacio de Fock utilizando las técnicas de BPZ [5]), estas construcciones no han sido determinadas de manera unívoca.

En la Ref.[6], fue estudiado este problema utilizando la construcción del "Gas de Coulomb", en donde fueron calculadas las funciones de correlación de campos primarios para teorías racionales. En este trabajo juega un rol crucial la imposición de condiciones de contorno no triviales en los campos de la teoría, para la construcción explícita de los campos primarios en términos de operadores de vértice.

En lo que respecta a modelos fermiónicos del coset, la inclusión de sectores con topología no trivial en la integración sobre el campo que actúa como multiplicador de Lagrange fue estudiada para el caso abeliano en la Ref.[7]. En este trabajo, utilizando técnicas de bosonización, los autores logran calcular en forma exacta funciones de correlación de campos fermiónicos en sectores con topología no trivial, encontrando que ciertas funciones de correlación que se anulaban en el sector de topología cero,

recibían una contribución no trivial al incluir sectores con topología distinta de cero. A la luz de estos resultados vemos que la inclusión de sectores topológicos modifica el conjunto de funciones de Green de la teoría.

Si bien el caso estudiado en la Ref.[7] corresponde a un modelo coset G/H trivial donde $G = H = U(1)$ (cuya extensión central de Virasoro es $c = 0$), el estudio de este fenómeno en teorías no abelianas (en particular modelos como los descritos en las secciones **3.2** y **3.3** de esta tesis [8]), puede dar lugar a cambios drásticos en el comportamiento de los campos frente a transformaciones conformes (caracterizado por los pesos conformes) y por lo tanto modificaría el conjunto de campos primarios de la teoría.

La extensión de la construcción presentada en [7] al caso no abeliano fue realizada en un trabajo en colaboración con M.V.Manías, F.A.Schaposnik y M.Trobo [9], trabajo que constituye otro de los aportes originales de esta tesis. En este trabajo se estudió el caso más general en el que el campo A_μ tiene dinámica (dada por $\frac{1}{e^2} \int d^2x F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$). Presentaremos en la segunda parte de este capítulo, (sección **4.3**), el estudio de tal modelo en el límite $e^2 \rightarrow \infty$ en el que deviene un modelo coset. Utilizando técnicas funcionales mostramos que, así como sucede en el caso abeliano, ciertas funciones de correlación que se anulan en el caso sin topología, devienen no triviales al incluir sectores con topología no-trivial.

4.2 Generalización de la construcción fermiónica del coset a una cadena descendiente de grupos

En un trabajo reciente, Witten [3] generalizó la construcción algebraica del coset de Goddard, Kent y Olive [10] a una cadena descendiente arbitraria de grupos compactos $H_n \supset H_{n-1} \supset \dots \supset H_1$.

Esta generalización no tiene una interpretación natural desde el punto de vista matemático, de modo que la construcción de modelos explícitos de Teoría de Campos que realicen dicha estructura, puede ser útil en el estudio de las representaciones irreducibles de este "Coset Generalizado" (CG). La construcción de Witten se basa en los mismos principios que permitieran la construcción original del coset de GKO [10] (basicamente, en la existencia de un álgebra de Kac-Moody y de la representación de Sugawara del tensor de energía impulso de la teoría). Dado que se trata de una construcción puramente formal, basada en las simetrías de la teoría, surge la necesidad de construir los modelos teóricos correspondientes.

La construcción que presentaremos aquí [4], además de proveer una idea intuitiva sobre el significado de los modelos CG, puede ser útil en el estudio de las soluciones de la "Ecuación Maestra" de Virasoro mencionada en la introducción, como así también en el estudio de sistemas estadísticos críticos.

Para llevar a cabo nuestra construcción, vamos a seguir básicamente el esquema descrito en la sección 3.2 de esta tesis. La idea es agregar campos de gauge de modo de implementar los vínculos adecuados en una teoría de fermiones originalmente libre.

Como resultado de nuestra construcción, encontramos que la carga central de Virasoro de los modelos CG está dada por una expresión que es la generalización natural de la ecuación que expresa la carga central de un modelo coset [10] (ec.(2.2.12))

Por ejemplo, si comenzamos con un modelo de fermiones libres en la representación fundamental de $G = U(N \times k)$, tomamos un subgrupo $H = SU(k)$ y un subgrupo L ($L \subset H$), el modelo CG resultante tiene una carga central dada por:

$$c_{G/H/L} = c_{G,1} - c_{H,k} + c_{L,k+2(C[H]-C[L])} \quad (4.2.1)$$

En el lado derecho de la ecuación indicamos con $c_{A,p}$ la carga central de Virasoro asociada a la teoría con simetría A y nivel de Kac-Moody p . $C[A]$ es el Casimir cuadrático en la representación adjunta de A .

Vemos que los niveles de Kac-Moody asociados a los distintos elementos de la cadena dependen de manera no trivial de los diferentes Casimires. Este hecho surge naturalmente en nuestra construcción, mientras que en la construcción algebraica dichos niveles no habían sido determinados.

Consideremos n fermiones de quiralidad definida (digamos izquierda) en la representación fundamental de $G = U(N)$, cuyo Lagrangiano en espacio euclídeo bidimensional está dado por:

$$\mathcal{L}_0 = \psi_L^\dagger i \partial_- \psi_L \quad (4.2.2)$$

Vamos a distinguir un índice de "color" ($a = 1, \dots, N$) y uno de "sabor" ($\alpha = 1, \dots, k$) escribiendo $n = N \times k$.

En la construcción de un modelo coset (digamos G/H) vimos que se debían introducir campos de gauge en el álgebra de Lie de H como multiplicadores de Lagrange, de manera de poner a cero las corrientes en H . (Tomamos por simplicidad $H = SU(k)$).

Como ya vimos esto equivale en el formalismo canónico a imponer los siguientes vínculos:

$$J^a |fis \rangle = 0, \quad (4.2.3)$$

de modo de que los estados físicos $|fis \rangle$ sean singletes bajo las corrientes de "sabor" J^a :

$$J^a = \psi_L^\dagger T^a \psi_L \quad (4.2.4)$$

donde T^a , $a = 1, \dots, k^2 - 1$, son los generadores de $SU(k)$.

De este modo, se obtiene una función de partición que corresponde a un modelo coset G/H con $G = U(N \times k)$ y $H = SU(k)$, cuya extensión central de Virasoro está dada por:

$$c_{U(n)/SU(k)} = c_{U(n),1} - c_{SU(k),N}. \quad (4.2.5)$$

Supongamos ahora que no nos detenemos en este punto, sino que avanzamos un paso más. En otras palabras, además de imponer los vínculos

dados en (4.2.3), vamos a imponer nuevos vínculos, ahora sobre los multiplicadores de Lagrange utilizados para implementar (4.2.3) en la integral funcional. Estos nuevos vínculos corresponden a poner a cero los multiplicadores de Lagrange asociados a la subálgebra correspondiente a un subgrupo L ($L \subset H$).

Lo anterior equivale evidentemente a constreñir sólo aquellas corrientes asociadas al grupo cociente H/L .

Si ordenamos a los generadores de H de modo de que los primeros $\dim L$ correspondan a los generadores de L , podemos escribir la función de partición asociada al modelo CG ($G = U(N \times k)$, $H = SU(k)$ y algún subgrupo L de H), de la siguiente forma:

$$Z_{G/H/L} = \int D\psi_L^\dagger D\psi_L DA_-^a \exp(-S) \prod_{i=1}^{\dim L} \delta[A_-^i], \quad (4.2.6)$$

donde la acción S viene dada por:

$$S = \int d^2x \left[\psi_L^\dagger (i\partial_- + A_-) \psi_L \right]. \quad (4.2.7)$$

El acoplamiento entre los fermiones y el campo de gauge proviene de haber usado la identidad:

$$\prod_{i=1}^{\dim H} \delta[J_+^a] = \int DA_-^a \exp\left(-\int d^2x J_+^a A_-^a\right), \quad (4.2.8)$$

que, como se estableció en la sección 3.2 de esta tesis, corresponde a constreñir las corrientes del subgrupo H .

El nuevo elemento en la expresión (4.2.6) está dado por el producto de las funcionales $\delta[A_-^i]$ que ponen a cero los campos A_-^i en el álgebra de Lie de L . Esto asegura que sólo las corrientes de H/L son de hecho constreñidas.

Vamos ahora a reescribir la función de partición en (4.2.6) de una manera apropiada para calcular la extensión central de Virasoro.

Para ello vamos a expresar en primer lugar la integral fermiónica, (que corresponde formalmente al determinante del operador $D_- = i\partial_- + A_-$), en términos del determinante del operador de Dirac $\mathcal{D} = i\cancel{\partial} + \cancel{A}$ en el gauge del cono de luz ($A_+ = 0$) [11].

Notemos que $\det(i\partial_- + A_-)$ no está bien definido, ya que el operador mapea autofunciones de quiralidad positiva en autofunciones de quiralidad

negativa y viceversa y el problema de autovalores no se puede plantear por lo que no tiene sentido definir un determinante. Para eliminar este problema, agregamos fermiones libres de la quiralidad opuesta, lo que nos permiten definir un problema de autovalores. El que los fermiones de la quiralidad opuesta sean libres garantiza que a menos de una normalización, no se ha modificado la teoría si se tiene cuidado en sustraer su contribución al final del cálculo.

Explícitamente, esto equivale a definir:

$$\det D_- = \int D\psi_L^\dagger D\psi_L \exp(\psi_L^\dagger (i\partial_- + A_-)\psi_L) \equiv \frac{1}{\det i\partial_+} \int DA_+ \det(i\partial_+ + A)\delta[A_+]\Delta_{FP}. \quad (4.2.9)$$

Vamos a explicitar esta definición que adoptamos. En primer lugar, el factor $1/\det \partial_+$ fue incluido para eliminar la contribución de los fermiones de quiralidad positiva que agregamos ad-hoc para definir un problema de autovalores. Luego, para expresar nuestra integral en términos del determinante del operador de Dirac, debimos agregar un campo de gauge adicional A_+ , el cual es eliminado en forma correcta utilizando el procedimiento de Fadeev-Popov [12]. (El determinante de Fadeev-Popov Δ_{FP} asegura la correcta normalización de la identidad).

El determinante del operador de Dirac en la ecuación (4.2.9) puede ser expresado en términos de la acción de WZW [13], $S[h]$, dada en la ec.(2.2.17), para un campo h en el grupo H [11] definido por:

$$A_- = \frac{1}{i}h^{-1}\partial_- h, \quad (4.2.10)$$

de modo que la integral fermiónica original toma la forma:

$$\int D\psi_L^\dagger D\psi_L \exp(\psi_L^\dagger (i\partial_- + A_-)\psi_L) = \det i\partial_- \exp(-kS[h])\Delta_{FP}, \quad (4.2.11)$$

El determinante de Fadeev-Popov puede ser exponenciado como en (3.2.15) utilizando ghosts η^{a-} y ϵ^a en la representación adjunta de H :

$$\Delta_{FP} = \int D\eta^{a-} D\epsilon^a \exp \int d^2x \eta^{a-} \partial_+ \epsilon^a. \quad (4.2.12)$$

Dado que hemos parametrizado al campo de gauge A_- en términos de elementos h en el grupo H , debemos escribir la medida DA_- en forma adecuada. Es fácil ver que [11]:

$$DA_- = \exp(2C[H]W[h]) \det i \partial_- |_{Adj} Dh, \quad (4.2.13)$$

donde $C[H]$ es el Casimir en la representación adjunta de H .

Finalmente obtenemos:

$$Z_{G/H/L} = \det i \partial_- \Delta_{FP} \int Dh \exp((k + 2C[H])W[h]) \times \prod_{i=1}^{dimL} \delta[h^{-1} \partial_- h|_i], \quad (4.2.14)$$

donde $h^{-1} \partial_- h|_i$ indica la proyección del elemento $h^{-1} \partial_- h$ (que está en el álgebra de Lie de H), en el álgebra de Lie de L .

La expresión (4.2.14), a menos de factores que corresponden a fermiones libres y ghosts, corresponde a un modelo de WZW con vínculos.

Para llevarlo a una forma más familiar, introducimos campos B_+^i como multiplicadores de Lagrange de manera de implementar los vínculos dados por las funcionales $\delta[h^{-1} \partial_- h|_i]$:

$$Z_{G/H/L} = \det i \partial_- \Delta_{FP} \int Dh DB_+^i \exp((k + 2C[H])W[h] - \text{tr} \frac{1}{4\pi} \int d^2x B_+ h^{-1} \partial_- h), \quad (4.2.15)$$

donde $B_+ = B_+^i t^i$ ($i = 1, 2, \dots, dimL$).

Si parametrizamos al multiplicador de Lagrange B_+ en términos de campos b en el grupo L :

$$B_+ = (k + 2C[H]) \frac{1}{i} b^{-1} \partial_+ b, \quad (4.2.16)$$

la acción en (4.2.15) deviene:

$$\mathcal{S} = -(k + 2C[H]) \left(W[h] - \frac{i}{4\pi} \int d^2x \text{tr}(b^{-1} \partial_+ b h^{-1} \partial_- h) \right), \quad (4.2.17)$$

Usando la identidad de Polyakov-Wiegmann [11], escribimos esta expresión en la forma:

$$\mathcal{S} = -(k + 2C[H])W[h] + (k + 2(C[H] - C[L]))W[b]. \quad (4.2.18)$$

De este modo, la función de partición deviene un producto de factores correspondientes a campos no interactuantes unos con otros:

$$Z_{G/H/L} = \text{det}i\partial_- \Delta_{FP} \int D h \exp((k + 2C[H])W[h]) \\ \times \int D b \exp(-(k + 2(C[H] - C[L])W[b]), \quad (4.2.19)$$

y la carga central puede ser fácilmente calculada.

Como vimos en la sección 2.2 la contribución de los fermiones libres está dada por (2.2.16):

$$c_{fl} = k \times N, \quad (4.2.20)$$

la de los ghosts por (3.2.26):

$$c_{ghosts} = -2\text{dim}H, \quad (4.2.21)$$

y la de los campos de WZW por (2.2.26) [14], que para los campos h y b en (4.2.21) resultan:

$$c_{H,(k+2C[H])} = -\frac{(k + 2C[H])\text{dim}H}{-(k + 2C[H]) + C[H]}, \quad (4.2.22)$$

$$c_{L,(k+2(C[H]-C[L]))} = \frac{(k + 2(C[H] - C[L]))\text{dim}L}{k + 2(C[H] - C[L]) + C[L]}. \quad (4.2.23)$$

Sumando las distintas contribuciones obtenemos:

$$c_{G/H/L} = k \times N - \frac{k\text{dim}H}{k + C[H]} + \frac{(k + 2(C[H] - C[L]))\text{dim}L}{k + 2(C[H] - C[L]) + C[L]}, \quad (4.2.24)$$

que puede ser escrita en la forma anunciada (4.2.1):

$$c_{G/H/L} = c_{G,1} - c_{H,k} + c_{L,k+2(C[H]-C[L])} \quad (4.2.25)$$

Vemos que la carga central del modelo CG viene dada por una suma de términos en la que los signos se van alternando de la manera esperada. Los niveles de las álgebras de Kac-Moody asociadas a cada subgrupo resultan

combinaciones no-triviales de los Casimires de los distintos subgrupos de la cadena.

Esta construcción puede ser trivialmente extendida al caso de una cadena de n grupos, $G/H_{n-1}/H_{n-2}/\dots/H_1$, cuya extensión central estará dada por:

$$c_{G/H_{n-1}/H_{n-2}/\dots/H_1} = c_{G,1} - c_{H_{n-1},k_{n-1}} + \dots \pm c_{H_1,k_1}. \quad (4.2.26)$$

Los niveles de Kac-Moody k_i ($i = 1, 2, \dots, n - 1$) pueden ser fácilmente calculados y dependen en general de los Casimires de los distintos subgrupos.

Podemos aplicar esta construcción en un caso simple en el que H está dado por el producto directo $H = H_1 \otimes H_2$ y L coincide con uno de los factores (digamos H_2).

La carga central del correspondiente CG está dada por:

$$c_{G/H_1 \otimes H_2/H_2} = c_{G,k} - c_{H_1,k}, \quad (4.2.27)$$

que coincide con el resultado que podría obtenerse utilizando la construcción de GKO [10].

4.3 Inclusión de sectores de topología no trivial en la imposición de vínculos

En esta sección vamos a describir cómo se modifica la formulación fermiónica de un modelo coset en el caso en que el campo de gauge tiene topología no-trivial.

Como mencionamos en la introducción, la inclusión de sectores de topología no-trivial en el caso abeliano fue tratada en la Ref.[7]. (Casos más generales fueron estudiados en Ref.[15].)

La generalización de este tratamiento al caso no-abeliano fue presentada en un trabajo realizado en colaboración con M.V.Manías, M. Trobo y F.A.Schaposnik [9]. En este trabajo consideramos el caso más general en el que la acción contiene un término que da dinámica al campo A_μ , esto es:

$$S = \int d^2x \left(\bar{\Psi}(i\cancel{D} + A)\Psi + \frac{1}{4e^2} F_{\mu\nu}^2 \right). \quad (4.3.1)$$

Es fácil ver que el modelo se reduce, en el límite $e^2 \rightarrow \infty$, a la realización fermiónica del coset presentada en la sección 3.2 de esta tesis, para el caso en que $G = U(N)$ (i.e. el grupo de simetría de N fermiones libres), y H es el subgrupo de G en el que está el campo A_μ . (i.e. en (4.3.1), $A_\mu = A_\mu^a T^a$, ($a=1, \dots, \dim H$), donde los T^a son los generadores de H ($H \subset G$).)

Ahora bien, en el caso en que el campo de gauge tiene topología no-trivial, las técnicas de bosonización utilizadas en la sección 3.2 deben ser modificadas. En efecto, al realizar el cambio de variables (3.2.16) para desacoplar los fermiones del campo A_μ , estamos pasando de un operador de Dirac $\cancel{D}[A]$ definido en algún sector topológico n (con n indicamos la carga topológica de A_μ) a \cancel{D} , esto es, al operador de Dirac correspondiente al sector con $n = 0$. El cambio de sector topológico hace inaplicables las técnicas de regularización usuales en el cálculo de los jacobianos J_B y J_F asociados a dicho cambio. Esto se debe a que las técnicas usuales (V.gr. ζ -function, Heat-Kernel, etc.) están bien definidas sólo en variedades compactas [16] y al realizar transformaciones que cambian la topología, el espacio tiempo no puede ser, en principio, compactificado.

Es importante notar que las expresiones obtenidas para la función de partición \mathcal{Z} en diferentes modelos [17], sin tener en cuenta este problema, coinciden con los resultados obtenidos con otros métodos. Esto estaría

señalando que sólo el sector de topología cero contribuye a \mathcal{Z} y que los sectores con $n \neq 0$ no son relevantes. Veremos sin embargo, que si bien la expresión para \mathcal{Z} no cambia al incluir sectores topológicos, ciertas funciones de correlación devienen no-triviales sólo cuando sectores con $n \neq 0$ son tenidos en cuenta.

Vamos a describir brevemente cómo puede ser tratado el caso en el que incluimos los sectores con topología no-trivial en una teoría abeliana, siguiendo básicamente el desarrollo propuesto en la Ref.[7]. Luego extenderemos este desarrollo al caso no-abeliano.

Caso Abeliano.

Consideremos la siguiente función de partición:

$$\mathcal{Z} = \int DAD\bar{\Psi}D\Psi e^{-S}, \quad (4.3.2)$$

donde S está definida por:

$$S = \int d^2x \bar{\Psi}(i\cancel{\partial} + A)\Psi, \quad (4.3.3)$$

con A_μ un campo de gauge abeliano.

Para hacer explícitas las contribuciones a \mathcal{Z} provenientes de distintos sectores topológicos, escribimos:

$$\mathcal{Z} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int DA_\mu^{(n)} D\bar{\Psi}D\Psi e^{-S[A^{(n)}]}, \quad (4.3.4)$$

donde la suma incluye los sectores topológicos.

Consideremos el siguiente cambio de variables para A_μ :

$$A = A_{Cl}^{(n)} - \phi, \quad (4.3.5)$$

donde $A_{Cl}^{(n)}$ es una configuración fija en el sector de topología n :

$$\oint dx^\mu A_{\mu Cl}^{(n)} = -2\pi n. \quad (4.3.6)$$

En el gauge de Lorentz, $(\partial_\mu A_\mu = 0)$, si $\partial_\mu A_{\mu Cl} = 0$, podemos escribir:

$$d = -e^{\gamma_5 \phi(x)} i \not{d} e^{\gamma_5 \phi(x)}, \quad (4.3.7)$$

que en el caso abeliano se reduce a:

$$a_\mu = -\epsilon_{\mu\nu} \partial_\nu \phi. \quad (4.3.8)$$

De esta forma, la carga topológica está contenida en la configuración clásica $A_{\mu Cl}^{(n)}$ mientras que a_μ , que contiene la información cuántica, está en el sector $n = 0$.

Podemos ahora desacoplar a los fermiones del campo a_μ , utilizando el cambio:

$$\begin{aligned} \Psi &\rightarrow \chi = e^{\gamma_5 \phi(x)} \Psi, \\ \bar{\Psi} &\rightarrow \bar{\chi} = \bar{\Psi} e^{\gamma_5 \phi(x)}, \end{aligned} \quad (4.3.9)$$

de modo que la acción pasa a ser:

$$S = \int d^2 x \bar{\Psi} \not{D}[A] \Psi = \int d^2 x \bar{\chi} \not{D}[A_{Cl}^{(n)}] \chi. \quad (4.3.10)$$

Dado que el campo a_μ está en el sector con topología $n = 0$, el cálculo de los jacobianos asociados a las transformaciones (4.3.5)-(4.3.7), (4.3.8), es estandar [18]:

$$\begin{aligned} J_B &= \det(-\nabla), \\ J_F [A_{Cl}^{(n)}, a[\phi]] &= e^{\left[\frac{1}{\pi} \int d^2 x \epsilon_{\mu\nu} \partial_\mu A_{Cl\nu}^{(n)} \phi - \frac{1}{\pi} \int d^2 x (\partial_\mu \phi)^2 \right]}, \end{aligned} \quad (4.3.11)$$

y la función de partición deviene:

$$\mathcal{Z} = \det(-\nabla) \times \sum_n \int D\bar{\chi} D\chi D\phi e^{-\int d^2 x L_{eff}^{(n)}}, \quad (4.3.12)$$

donde:

$$L_{eff}^{(n)} = \bar{\chi} \not{D}[A_{Cl}^{(n)}] \chi + \frac{1}{2\pi} \partial_\mu \phi \partial_\mu \phi - \frac{1}{\pi} \phi \epsilon^{\mu\nu} \partial_\mu A_{Cl\nu}^{(n)}. \quad (4.3.13)$$

Integrando los fermiones, obtenemos:

$$\mathcal{Z} = \det(-\nabla) \times \sum_n \det(D[A_{Cl}^{(n)}]) \times \mathcal{Z}_\phi^{(n)}, \quad (4.3.14)$$

$$\mathcal{Z}_\phi^{(n)} = \int D\phi e^{\int d^2x [\frac{1}{2\pi} \phi \nabla \phi + 2\pi \phi \epsilon^{\mu\nu} \partial_\mu A_{Cl\nu}^{(n)}]}. \quad (4.3.15)$$

Ahora bien, sabemos que el teorema del índice nos asegura la existencia de $|n|-1$ modos cero asociados con el operador $i\hat{\phi} + A_{Cl}^{(n)}$. Para $n > 0$ ($n < 0$) corresponden a soluciones η_R (η_L) con quiralidad positiva (negativa), que en coordenadas holomórficas $z = x_0 + ix_1$ y $\bar{z} = x_0 - ix_1$, están dadas por:

$$\eta_R^m = \begin{pmatrix} z^m h(z, \bar{z}) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.3.16)$$

$$\eta_L^m = \begin{pmatrix} 0 \\ \bar{z}^m h^{-1}(z, \bar{z}) \end{pmatrix} \quad (4.3.17)$$

donde $m = 1, \dots, |n| - 1$,

$$h(z, \bar{z}) = e^{f(z, \bar{z})}, \quad (4.3.18)$$

y f está definida en términos de la configuración fija:

$$A_{\mu Cl}^{(n)} = -\epsilon_{\mu\nu} \partial_\nu f. \quad (4.3.19)$$

El comportamiento asintótico de f está dado por:

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} f(x) \rightarrow -n \ln|x|. \quad (4.3.20)$$

(Ver Refs.[19], [20], [21].)

Aún cuando el determinante fermiónico en la ecuación (4.3.14) debe ser regularizado, cualquier regularización razonable dará un resultado nulo para $n \neq 0$, debido a la presencia de los modos cero. Vemos así que sólo el sector con $n = 0$ contribuye a la función de partición (4.3.14).

Veremos sin embargo que ciertas funciones de correlación, nulas en el sector $n = 0$, devienen no-triviales al tener en cuenta efectos topológicos.

Para ello, consideremos la expansión de Bessel-Fourier de los fermiones:

$$\chi_{R,L} = \sum_i e^i \chi_{R,L}^i + \sum_m^{|n|-1} c_{R,L}^m \eta_{R,L}^m, \quad (4.3.21)$$

donde $\chi_{R,L}^i$ son autofunciones de $\mathcal{D}[A_{CI}^{(n)}]$ con autovalores no nulos, $e_{R,L}^i$ y $c_{R,L}^m$ son coeficientes de Grassmann. (Una expansión análoga es utilizada para $\bar{\chi}_{R,L}$.)

Desde el punto de vista de la integración sobre variables de Grassmann, podemos ver que el hecho de que el determinante fermiónico se anule se debe básicamente a la desaparición de las variables de Grassmann que acompañan a los modos cero, de modo que las integrales sobre dichos coeficientes son nulas. (Lo mismo sucede con las variables que acompañan a los modos cero en el desarrollo de los campos $\bar{\chi}$.)

Luego, una función de correlación recibirá una contribución no nula de un sector de topología dado si contiene el número apropiado de campos fermiónicos, de modo que estos provean las variables de Grassmann faltantes.

Es fácil ver que funciones de correlación de la forma:

$$\langle \prod_{i=0}^{k-1} s_{\pm}(x_i) \rangle = F_{\pm}(x_0, x_1, \dots, x_{k-1}), \quad (4.3.22)$$

con:

$$\begin{aligned} s_+(x) &= \bar{\psi}_R(x)\psi_R(x), \\ s_-(x) &= \bar{\psi}_L(x)\psi_L(x), \end{aligned} \quad (4.3.23)$$

son no nulas en el sector de topología $n = k$.

Por ejemplo, para F_+ obtenemos:

$$F_+(x_0, x_1, \dots, x_{k-1}) = \exp\left(-2 \sum_{i,j} \left[\frac{1}{2}K_0(z_{ij}) + \ln(z_{ij})\right] + \sum_{i \neq j} 2\ln z_{ij}\right). \quad (4.3.24)$$

donde $K_0(z)$ es la función de Bessel modificada de orden cero, y:

$$z_{ij} = \frac{e}{\sqrt{\pi}} |z_i - z_j|. \quad (4.3.25)$$

Caso No-abeliano

Vamos a extender la construcción descrita al caso no-abeliano, en el que la acción está dada por:

$$S = \int d^2x \bar{\Psi}^{i\alpha} \left(i\cancel{\partial}\delta_{\alpha\beta} + A^a T_{\alpha\beta}^a \right) \Psi^{i\beta}, \quad (4.3.26)$$

donde los fermiones $\Psi^{i\alpha}$ ($i = 1, \dots, N$; $\alpha = 1, \dots, k$) transforman en la representación fundamental de $U(N.k)$, y T^a ($a = 1, \dots, k^2 - 1$) son los generadores de $SU(k)$. Esta construcción puede ser fácilmente extendida a los modelos estudiados en la sección 3.3.

Como vimos en la sección 3.2, esta acción corresponde a una teoría coset en la que $G = U(N.k)$ y $H = SU(k)$.

Al igual que en el caso abeliano, pueden encontrarse configuraciones $A_{\mu Cl}^{(m)}$ con carga topológica $m \in Z_k$ para el caso $SU(k)$. (El grupo de homotopía en este caso es Z_k y no Z como en el caso $U(1)$ [22].)

Si llamamos φ al ángulo que caracteriza la dirección en el infinito, un mapeo de R^2 en $SU(k)$, $g_m(\varphi)$, en la clase topológica m ($m = 0, 1, \dots, k-1$) satisface, al dar una vuelta alrededor del origen:

$$g_m(2\pi) = \exp\left(\frac{2\pi i m}{N}\right) g_m(0). \quad (4.3.27)$$

Esto puede conseguirse tomando a g_m en el subgrupo de Cartan del grupo de gauge. Por ejemplo en el caso de $SU(2)$ podemos tomar:

$$g_m = \exp\left(it^3 \Omega_m(\varphi)\right), \quad (4.3.28)$$

con:

$$\Omega_m(2\pi) - \Omega_m(0) = (2k + m)2\pi, \quad (4.3.29)$$

donde $m = 0, 1$ indica la carga topológica y $k \in Z$. Configuraciones más generales en un dado sector topológico pueden ser obtenidas por transformaciones de gauge.

Podemos escribir ahora las configuraciones del campo de gauge que pertenecen al sector de topología m :

$$A_{\mu Cl}^{(m)} = -iA(\rho)g_m^{-1}\partial_\mu g_m, \quad (4.3.30)$$

con g_m dado por (4.3.28) (o la extensión al caso $SU(k)$) y:

$$A(0) = 0, \quad A(\infty) = 1. \quad (4.3.31)$$

(Estas configuraciones y otras más generales, fueron estudiadas en las referencias [22] y [23].)

Vamos a considerar una configuración como la de la ec.(4.3.30) como una configuración fija y escribimos:

$$A^{(n)} = A_{Cl}^{(n)} - \phi, \quad (4.3.32)$$

con $A_{\mu Cl}^{(n)}$ tal que:

$$A_{+Cl}^{(n)} = 0. \quad (4.3.33)$$

Vamos a trabajar en el gauge del cono de luz:

$$A_-^{(n)} = A_{-CL}^{(n)}, \quad (4.3.34)$$

y parametrizamos a A_+ en términos de un elemento h de $SU(k)$:

$$A_+ = -ih^{-1}\partial_+h \equiv a_+[h]. \quad (4.3.35)$$

Implementando estos cambios en la función de partición obtenemos:

$$\begin{aligned} \mathcal{Z} &= \frac{1}{Vol SU(k)} \sum_m \int DA^{(m)} D\bar{\Psi} D\Psi e^{-S} = \\ & \sum_m \int DA_+^{(m)} D\bar{\Psi} D\Psi \Delta_{FP} \exp\left(-\int d^2x \bar{\Psi}(i\partial\!\!\!/ + A_{Cl}^{(m)})\Psi\right), \end{aligned} \quad (4.3.36)$$

donde Δ_{FP} es el jacobiano de Fadeev-Popov asociado al fijado de gauge:

$$\Delta_{FP} = \det D_-[A]|_{Adj(SU(k))} \quad (4.3.37)$$

La medida de integración DA_+ puede escribirse en términos de la integración sobre los campos h valuados en $SU(k)$:

$$DA_+ = \det D_+[A]|_{Adj(SU(k))} Dh, \quad (4.3.38)$$

de modo que la función de partición puede escribirse como:

$$\begin{aligned} \mathcal{Z} &= \sum_m \int Dh D\bar{\Psi} D\Psi \det D[A_{Cl} - a_+[h]]|_{Adj(SU(k))} \times \\ & \exp\left(-\int d^2x \bar{\Psi}(i\partial\!\!\!/ + A_{Cl}^{(m)} - \phi[h])\Psi\right), \end{aligned} \quad (4.3.39)$$

o integrando los fermiones:

$$\mathcal{Z} = \sum_m \int Dh \det \mathcal{D}[A_{Cl}^{(m)} - a_+[h]]|_{Adj(SU(k))} \det \mathcal{D}[A_{Cl}^{(m)} - a_+[h]]|_{Fund(U(N.k))}. \quad (4.3.40)$$

Podemos relacionar el determinante en la ecuación (4.3.39) con el correspondiente determinante del operador de Dirac en la representación fundamental de la siguiente manera:

$$\det \mathcal{D}[A]|_{Adj(SU(k))} = \left(\frac{\det \mathcal{D}[A]}{\det i\phi} \right)^{2k} \times \det i\phi|_{Adj(SU(k))}, \quad (4.3.41)$$

y la función de partición pasa a ser:

$$\begin{aligned} \mathcal{Z} = \det i\phi|_{Adj(SU(k))} \times \sum_m \int Dh \left(\frac{\det \mathcal{D}[A_{Cl}^{(m)} - a_+[h]]}{\det i\phi} \Big|_{Fund(SU(k))} \right)^{2k} \\ \times \det \mathcal{D}[A_{Cl}^{(m)} - a_+[h]]|_{Fund(U(N.k))}, \end{aligned} \quad (4.3.42)$$

de modo que sólo nos queda por evaluar el determinante del operador de Dirac $\mathcal{D}[A_{Cl}^{(m)} - a_+[h]]$. Para calcularlo, desacoplamos a los fermiones del campo de gauge $a_+[h]$, realizando el siguiente cambio de variables:

$$\begin{aligned} \Psi_R^{i\alpha} &= h_{\alpha\beta} \chi_R^{i\beta}, \\ \bar{\Psi}_R^{i\alpha} &= \bar{\chi}^{i\beta} h_{\beta\alpha}^{-1}. \end{aligned} \quad (4.3.43)$$

Con esto obtenemos:

$$\det \mathcal{D}[A_{Cl}^{(m)} - a_+[h]]|_{Fund(SU(k))} = J_F[h, A_{Cl}^{(m)}] \times \det \mathcal{D}[A_{Cl}^{(m)}]|_{Fund(SU(k))}, \quad (4.3.44)$$

donde el jacobiano fermiónico viene dado por:

$$J_F[h, A_{Cl}^{(m)}] = \exp(-S_{WZ}[A_{Cl}^{(m)}, h]), \quad (4.3.45)$$

donde $S_{WZ}[A_{Cl}^{(m)}, h]$ es la acción de Wess-Zumino-Witten gaugeada:

$$S_{WZ}[A_{Cl}^{(m)}, h] = S[h] - S_C[A_{CL}^{(m)}, h]. \quad (4.3.46)$$

En (4.3.46), $S[h]$ es la acción de Wess-Zumino-Witten, definida en la ec.(2.2.17) y $S_C[A_{CL}^{(m)}, h]$ está dada por:

$$S_C[A, h] = \frac{e^2}{4\pi} \text{tr} \int d^2x \left(A_+ h A_- h^{-1} + A_+ A_- - \frac{i}{e} h^{-1} \partial_+ h A_- + \frac{i}{e} h^{-1} \partial_- h A_+ \right). \quad (4.3.47)$$

Finalmente, la función de partición está dada por:

$$\begin{aligned} \mathcal{Z} = & \text{det} i\hat{\phi} |_{\text{Adj}(SU(k))} (\text{det} i\hat{\phi})^{N \cdot k} \\ & \times \sum_m \int Dh \left(\frac{\text{det } \mathcal{D}[A_{Cl}^{(m)}]}{\text{det } i\hat{\phi}} \Big|_{\text{Fund}(SU(k))} \right)^{2k+N} \\ & \times e^{(2k+N)S_{WZ}[A_{Cl}^{(m)}, h]}, \end{aligned} \quad (4.3.48)$$

Esta es la extensión no-abeliana de las ecuaciones (4.3.14), (4.3.15), y corresponde a la función de partición efectiva para un modelo coset G/H , ($G = U(N \cdot k)$ y $H = SU(k)_N$), cuando los sectores de topología no-trivial son tenidos en cuenta.

Como en el caso abeliano, el operador de Dirac en presencia de un campo con topología tiene modos cero (ver Refs.[24], [25], [26]). En el sector de topología n hay $N \cdot n$ modos cero izquierdos de cuadrado integrable y $N(k-1)$ modos cero derechos, análogos a los encontrados en el caso abeliano. (Ver Ref.[26].)

Vemos entonces que, al igual que en el caso abeliano, la función de partición sólo recibe una contribución no nula del sector $n = 0$, ya que el determinante fermiónico se anula para $n \neq 0$.

Sin embargo, ciertas funciones de correlación, que se anulan si se considera sólo el sector con $n = 0$, devienen no nulas cuando incorporamos sectores con $n \neq 0$. Necesitamos el número adecuado de campos fermiónicos de modo de que aporten los coeficientes de Grassmann ausentes debido a la presencia de modos cero. Una función de correlación que satisface este criterio para el sector de topología m es (tomamos por simplicidad $m > 0$):

$$\left\langle \prod_{i=1}^N \prod_{\alpha=1}^m \prod_{\beta=1}^{k-1} s_-(x_i^\alpha) s_+(x_i'^\beta) \right\rangle = F_{+-}(x_1^1, \dots, x_N^m, x_1^1, \dots, x_N^{k-1}), \quad (4.3.49)$$

con:

$$s_+(x) = \bar{\psi}_R^i(x)\psi_R^i(x), \quad (4.3.50)$$

$$s_-(x) = \bar{\psi}_L^i(x)\psi_L^i(x). \quad (4.3.51)$$

Al igual que en el caso abeliano, la parte fermiónica se desacopla de la parte bosónica:

$$F_{+-}(x_1^1, \dots, x_N^m, x_1'^1, \dots, x_N'^{k-1}) = F_{+-fer}(x_1^1, \dots, x_N^m, x_1'^1, \dots, x_N'^{k-1}) \times F_{+-bos}(x_1^1, \dots, x_N^m, x_1'^1, \dots, x_N'^{k-1}). \quad (4.3.52)$$

El factor fermiónico $F_{+-fer}(x_1^1, \dots, x_N^m, x_1'^1, \dots, x_N'^{k-1})$ puede calcularse exactamente utilizando la forma explícita de los modos cero y el factor bosónico se puede calcular utilizando las técnicas descritas por Knizhnik y Zamolodchikov en la Ref.[14].

El hecho de que ciertas funciones de correlación sean no nulas al incluir sectores topológicos, resulta en la modificación de las propiedades de los campos frente a transformaciones conformes, y podría modificar la expresión de los campos primarios en términos de los campos de la teoría. Por ello la función de partición hallada, (ec.(4.3.48)), constituye el punto de partida para la identificación de los campos primarios y el cálculo de las dimensiones de escala anómalas en un modelo coset con topología.

El cálculo presentado aquí, que corresponde al modelo coset con topología G/H con $G = U(n.k)$ y $H = SU(k)_N$, puede ser fácilmente extendido al estudio de modelos coset como los que presentamos en la sección 3.3 de esta tesis.

Bibliografía

- [1] M.B.Halpern y E.Kiritsis, *Mod.Phys.Lett.* **A4**, 1373, 1797(E), (1989); N.Sakai y P.Suranyi, *Nucl.Phys.* **B318**, 655, (1989).
- [2] M.B.Halpern y N.A.Obers, "Graph Theory, $SO(n)$ current algebra and the Virasoro master equation", preprintUCB-PTH-90/31 (1990).
- [3] E. Witten en: *Physics and Mathematics of Strings*, L.Brink et al eds. *World Sci.*, 1990.
- [4] D.Cabra, E.Moreno y F.A.Schaposnik, *Mod.Phys.Lett.* **A7**, 1129, (1992).
- [5] A.A.Belavin, A.M.Polyakov y A.B.Zamolodchikov, *Nucl. Phys.* **B241**, 333 (1984).
- [6] V.I.S.Dotsenko y V.A.Fateev, *Nucl. Phys.* **B251**[FS 13], 691 (1985).
- [7] K.Bardakci y L.Crescimanno, *Nucl. Phys.* **B313**, 269 (1989).
- [8] D. Cabra, E. Moreno y C. von Reichenbach, *Int. J. Mod. Phys.* **A5**, 2313, (1990).
- [9] D.Cabra, M.V.Manías, F.A.Schaposnik y M.Trobo, *Phys. Rev. D* **43**, 3508 (1991).
- [10] P.Goddard, A.Kent y D.Olive, *Phys. Lett.* **152B**, 88 (1985); *Comm. Math. Phys.* **103**, 105 (1986).
- [11] A. M. Polyakov y P. B. Wiegmann, *Phys. Lett.* **131B**, 121, (1983); **141B** 223, (1984).

- [12] L.D.Fadeev y V.N.Popov, *Phys. Lett.* **25B**, 29 (1967).
- [13] E.Witten, *Commun.Math.Phys.* **92**, 455, (1984).
- [14] V. G. Knizhnik y A. B. Zamolodchikov, *Nucl. Phys.* **B247**, 83, (1984).
- [15] M.V.Manias, C.M.Naon y M.Trobo, *Int.J.Mod.Phys.* **A5**, 2853, (1990), *Phys. Rev. D* **41**, 3174 (1990).
- [16] R.Gamboa Saravi, F.A.Schaposnik, M.A.Muschietti y J.Solomin, *Ann.Phys.(N.Y.)* **15**, 360, (1984).
- [17] R.Gamboa Saravi, F.A.Schaposnik y J.Solomin, *Nucl. Phys.* **B181**, 239 (1981), *Phys. Rev. D* **30**, 1353 (1984); K.Furuya, R.E.Gamboa Saravi y F.A.Schaposnik, *Nucl. Phys.* **B208**, 159 (1982); E.Moreno y F.A.Schaposnik, *Int.J.Mod.Phys.A4*, 2827, (1989).
- [18] F.A.Schaposnik en " *Particles and Fields*", Proceedings of the IV Swieca School, eds. A.da Silva et al, World. Sci. 1987. y referencias allí citadas.
- [19] H.B.Nielsen y P.Olesen, *Nucl. Phys.* **B61**, 45 (1973).
- [20] R.Jackiw y P.Rossi, *Nucl. Phys.* **B190**, 681 (1981).
- [21] H.J.de Vega y F.A.Schaposnik, *Phys. Rev. D* **14**, 1100 (1976).
- [22] H.J.de Vega y F.A.Schaposnik, *Phys. Rev. D* **34**, 3206 (1986).
- [23] G.Lozano, M.V.Manias y F.A.Schaposnik, *Phys. Rev. D* **38**, 601 (1988).
- [24] H.J.de Vega, *Phys. Rev. D* **18**, 2932 (1978).
- [25] L.F.Cugliandolo y G.Lozano, *Phys. Rev. D* **39**, 3093 (1989).
- [26] E.Moreno, " *Coset Models in Topological Backgrounds*", Urbana Preprint, 1992.

Capítulo 5

Teorías No-Críticas: Función C de Zamolodchikov en el Modelo de Gross-Neveu Quiral

5.1 Introducción

En la sección 2.5 de ésta tesis hemos descrito el llamado teorema C de Zamolodchikov [1]. En este capítulo vamos a estudiar el comportamiento frente al Grupo de Renormalización del modelo de Gross-Neveu quiral utilizando este teorema. El interés del modelo se debe a que posee dos puntos críticos no-triviales en los cuales es invariante conforme. Estos puntos fueron hallados en las referencias [2]-[3], y en particular, en la Ref.[4], fue calculada la carga central de Virasoro en dichos puntos utilizando técnicas funcionales.

Nuestro propósito es testear el teorema C (que fuera demostrado utilizando argumentos generales) en un ejemplo explícito no-trivial, mostrando que las propiedades predichas por dicho teorema se cumplen. Mostraremos además la no existencia de nuevos puntos críticos en la región estudiada, confirmando así que el modelo deviene invariante conforme sólo en los puntos hallados en las Refs.[2]-[3].

Estos resultados constituyen otro de los aportes originales de esta tesis que fueron enviados para su publicación [5].

5.2 Bosonización del modelo de Gross Neveu Quiral

En esta sección daremos una breve descripción del modelo de Gross-Neveu Quiral (GNQ). En particular, usando técnicas funcionales, vamos a llevar la función de partición del modelo a una forma factorizada que facilitará el cálculo de la función C de Zamolodchikov. Esta construcción fue realizada en la Ref.[4] en donde fue corroborada la existencia de dos puntos críticos (en los que la teoría es invariante conforme) y fue calculada la carga central de Virasoro en dichos puntos.

El lagrangiano del modelo de GNQ está dado por:

$$\mathcal{L} = \bar{\Psi}^i i \not{\partial} \Psi^i - \frac{1}{2} g_s^2 j^\mu j_\mu - \frac{1}{2} g_N^2 j^{\mu a} j_\mu^a, \quad (5.2.1)$$

donde Ψ^i ($i = 1, \dots, N$) son fermiones de Dirac y j^μ y $j^{\mu a}$ son las corrientes correspondientes a las simetrías $U(1)$ y $SU(N)$ respectivamente:

$$\begin{aligned} j^\mu &= \bar{\Psi}^i \gamma^\mu \Psi^i \\ j^{\mu a} &= \bar{\Psi}^i \gamma^\mu t_{ij}^a \Psi^j \end{aligned} \quad (5.2.2)$$

(t^a ($a = 1, \dots, N^2 - 1$) son los generadores de $SU(N)$), y g_s y g_N son constantes de acoplamiento. Utilizamos las siguientes convenciones:

$$\begin{aligned} [t^a, t^b] &= 2i f^{abc} t^c, \\ \text{tr}(t^a t^b) &= 2\delta^{ab}, \\ t^a t^a &= c_d I, \\ f^{abc} f^{a'bc} &= c_A \delta^{aa'}. \end{aligned} \quad (5.2.3)$$

En primer lugar vamos a eliminar los términos cuárticos en fermiones introduciendo campos vectoriales auxiliares. Para el término del lagrangiano correspondiente a las corrientes de $SU(N)$ utilizamos la siguiente identidad:

$$e^{\frac{1}{2} g_N^2 \int d^2 x j^{\mu a} j_\mu^a} = \int \mathcal{D}A_\mu^a e^{\int d^2 x (\frac{1}{2} A_\mu^a A^{\mu a} - g_N A_\mu^a j^{\mu a})}, \quad (5.2.4)$$

donde A_μ^a es un campo vectorial en el álgebra de $SU(N)$.

Utilizando (5.2.4) y una identidad análoga para la corriente abeliana obtenemos:

$$\mathcal{Z} = \int D\bar{\Psi}D\Psi DA_\mu^a DB_\mu \exp\left(-\int d^2x \mathcal{L}'[\bar{\Psi}, \Psi, A_\mu^a, B_\mu]\right) \quad (5.2.5)$$

donde \mathcal{L}' está dado por:

$$\mathcal{L}' = \bar{\Psi}^i(i\delta_{ij}\not{\partial} - g_s \not{B}\delta_{ij} - g_N A^a t_{ij}^a)\Psi + \frac{1}{2}B_\mu B^\mu + \frac{1}{2}A_\mu^a A^{\mu a} \quad (5.2.6)$$

Vamos ahora a desacoplar los fermiones de los campos auxiliares. Para el sector $U(1)$, realizamos el siguiente cambio de variables:

$$\begin{aligned} \Psi &= e^{(i\eta+i\gamma_s\phi)}\chi \\ \bar{\Psi} &= \bar{\chi}e^{(-i\eta+i\gamma_s\phi)} \\ B_\mu &= \frac{1}{g_s}(\epsilon_{\mu\nu}\partial^\nu\phi - \partial_\mu\eta), \end{aligned} \quad (5.2.7)$$

con lo que la función de partición puede escribirse como:

$$\begin{aligned} \mathcal{Z} &= \int D\bar{\chi}D\chi DA_\mu^a D\phi D\eta J_B^{U(1)} J_F^{U(1)} \\ &\exp\left(-\int d^2x(\bar{\chi}^i(i\delta_{ij}\not{\partial} - g_N A^a t_{ij}^a)\chi + \frac{1}{2}A_\mu^a A^{\mu a})\right) \\ &\exp\left(-\int d^2x \frac{1}{2g_s^2}(\partial_\mu\eta\partial^\mu\eta + \partial_\mu\phi\partial^\mu\phi)\right). \end{aligned} \quad (5.2.8)$$

Los jacobianos $J_B^{U(1)}$ y $J_F^{U(1)}$ asociados con el cambio de variables (5.2.7) están dados por [7]:

$$\begin{aligned} J_B^{U(1)} &= \det(-\nabla) \\ J_F^{U(1)} &= \exp\left(-\frac{N}{2\pi}\int d^2x\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi\right) \\ &\exp\left(-\frac{b}{2\pi}\int d^2x B_\mu B^\mu\right). \end{aligned} \quad (5.2.9)$$

(b es un parámetro indeterminado, relacionado con ambigüedades de regularización [8]).

El cambio de variables que desacopla a los fermiones del campo A_μ^a en $SU(N)$ está dado por:

$$\begin{aligned}\chi_L &= g^{-1}\chi_L^{(0)} & \chi_R &= h^{-1}\chi_R^{(0)} \\ \bar{\chi}_L &= \bar{\chi}_L^{(0)}g & \bar{\chi}_R &= \bar{\chi}_R^{(0)}h,\end{aligned}\quad (5.2.10)$$

donde $\chi_L(\chi_R)$ son las componentes izquierdas (derechas) de los fermiones y g, h son campos en $SU(N)$, relacionados con A_μ^a a través de las ecuaciones:

$$\begin{aligned}A_+ &= -\left(\frac{i}{g_N}\right)g^{-1}\partial_+g, \\ A_- &= -\left(\frac{i}{g_N}\right)h^{-1}\partial_-h,\end{aligned}\quad (5.2.11)$$

La función de partición puede escribirse ahora como:

$$\mathcal{Z} = \det(-\nabla)(\det(i\phi))^{N} \mathcal{Z}_I \mathcal{Z}_{II}, \quad (5.2.12)$$

donde \mathcal{Z}_I es la función de partición de bosones libres:

$$\mathcal{Z}_I = \int D\phi D\eta \exp\left(\frac{([b + \pi] - N)}{g_s^2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{(b + \pi)}{g_s^2} \partial_\mu \eta \partial^\mu \eta\right), \quad (5.2.13)$$

y \mathcal{Z}_{II} viene dada por:

$$\mathcal{Z}_{II} = \int Dg Dh J(g) J(h) J_F^{SU(N)} \exp\left(\frac{1}{4g_N^2} \int d^2x \text{tr}(g^{-1} \partial_+ g h^{-1} \partial_- h)\right). \quad (5.2.14)$$

Los jacobianos asociados a las transformaciones (5.2.10)-(5.2.11) que aparecen en la expresión de \mathcal{Z}_{II} son bien conocidos y están dados por [9], [10]:

$$\begin{aligned}J_F^{SU(N)} &= \frac{\det(i\phi - g_N A)}{\det(i\phi)} = \exp\left(W[gh^{-1}] + \right. \\ &\quad \left. \alpha \int d^2x \text{tr}(g^{-1} \partial_+ g h^{-1} \partial_- h)\right),\end{aligned}\quad (5.2.15)$$

y

$$\begin{aligned} J(g) &= \det D[A_+]_{Adj} = [J_F^{SU(N)}(A_+)]^{2c_A} (\det(i\partial_+))_{Adj}, \\ J(h) &= \det D[A_-]_{Adj} = [J_F^{SU(N)}(A_-)]^{2c_A} (\det(i\partial_-))_{Adj}, \end{aligned} \quad (5.2.16)$$

En (5.2.15), $W[g]$ es la acción de WZW (ver ec.(2.2.18)).

Nuevamente las ambigüedades de regularización están tenidas en cuenta con la inclusión del término proporcional a α en (5.2.15) [9]-[12].

La expresión (5.2.12) (obtenida previamente en Ref.[4]) da una forma factorizada de la función de partición del modelo que permite estudiar el modelo de manera más simple. De hecho gracias a esta expresión factorizada en la Ref.[4] los autores calcularon fácilmente el valor de la carga central de Virasoro en los puntos críticos. Nosotros vamos a usar ésta expresión para extender el estudio de la teoría fuera de los puntos críticos por medio del cálculo de la función C de Zamolodchikov.

En primer lugar, vamos a analizar los factores en (5.2.12) que corresponden a teorías críticas (invariantes conforme) para cualquier valor de la constante de acoplamiento de la teoría. (Estos factores contribuyen con un factor constante a la función C).

Los dos determinantes en (5.2.15) que corresponden a campos de ghosts y fermiones libres, contribuyen con los correspondientes valores de la carga central de Virasoro:

$$\begin{aligned} c_{ghosts} &= -2, \\ c_{fermiones} &= N. \end{aligned} \quad (5.2.17)$$

Por otra parte, \mathcal{Z}_I corresponde a una teoría de dos bosones libres ϕ y η y por lo tanto su contribución a la función C está dada por:

$$c_{bosones} = 2. \quad (5.2.18)$$

Para completar el estudio de la función C del modelo, debemos calcular la contribución proveniente de \mathcal{Z}_{II} , que puede escribirse como el producto de un factor overall dado por el $\det i\hat{\phi}|_{Adj}$ veces una teoría de dos campos de WZW con una simetría $SU(N)_k$ interactuantes:

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_{II} &= \int Dg Dh \exp(-kW[g] - kW[h^{-1}] + \frac{k}{4\pi} \tilde{g} \int d^2x \text{tr}(g^{-1} \partial_+ g h^{-1} \partial_- h)) \\ &\quad \times \det i\hat{\phi}|_{Adj} = \mathcal{Z}_{II}' \times \det i\hat{\phi}|_{Adj} \end{aligned} \quad (5.2.19)$$

donde $k = -(2N + 1)$ y \tilde{g} es la constante efectiva del modelo:

$$\tilde{g} \equiv \frac{\pi}{kg_N^2} - (4\pi\alpha + 1). \quad (5.2.20)$$

Antes de embarcarnos en el cálculo de la función C proveniente de \mathcal{Z}_{II} vamos a detenernos a estudiar las características de la teoría en los puntos críticos [4]. Es fácil ver, a partir de la expresión (5.2.19), que existen al menos dos puntos críticos para los cuales la teoría deviene invariante conforme. Si tomamos $g_N^2 = g_N^{2*}$ tal que:

$$g_N^{2*} = \frac{1}{4k\alpha} \quad (5.2.21)$$

la constante de acoplamiento efectiva \tilde{g} toma el valor $\tilde{g}^* = -1$, y en este punto la función de partición puede escribirse como:

$$\mathcal{Z}_{II} = \left[\int Dg \right] \int DU \exp(-kW[U^{-1}]), \quad (5.2.22)$$

donde $U = g.h^{-1}$, que corresponde a una teoría de WZW en el punto fijo estable en el infrarrojo cuya carga central de Virasoro está dada por:

$$c^* = \frac{k \dim G}{k + c_A}. \quad (5.2.23)$$

Por lo tanto en este punto, la teoría completa deviene invariante conforme y el valor de la carga central se obtiene sumando las contribuciones de los distintos sectores:

$$c_{GNQ}^* = N - 2(N^2 - 1) + \frac{k \dim G}{k + c_A}. \quad (5.2.24)$$

El segundo punto crítico corresponde a la elección de g_N^2 que hace cero la constante de acoplamiento efectiva \tilde{g} :

$$g_N^{2**} = \frac{1}{4k[\alpha + 1/4\pi]}, \quad (5.2.25)$$

de modo que en \mathcal{Z}_{II} tenemos dos campos de WZW por lo que la contribución de este factor a la carga central se duplica. La carga central del modelo en este punto viene dada entonces por:

$$c_{GNQ}^{**} = N - 2(N^2 - 1) + 2 \frac{k \dim G}{k + c_A}. \quad (5.2.26)$$

Obviamente este análisis no descarta la existencia de otros puntos críticos de la teoría pero veremos , al evaluar la función C de Zamolodchikov en la próxima sección, que no existe ningún otro valor de g_N^2 en el intervalo considerado para el que la teoría sea invariante conforme.

5.3 Función β para el Modelo de Gross-Neveu Quiral

Una vez factorizada la funcional generatriz del modelo (ec.(5.2.12)), vamos a calcular la función β usando el método del campo de background. En la próxima sección utilizaremos este resultado para testear la relación (2.5.19) (demostrada por Zamolodchikov utilizando argumentos generales (ver sección 2.5)). El único factor en la ec.(5.2.12) relevante para el cálculo de la función β es el correspondiente al sector de WZW:

$$\mathcal{Z}_{II}' = \int Dg Dh \exp(-kW[g] - kW[h^{-1}] + \frac{k}{4\pi} \tilde{g} \int d^2x \text{tr}(g^{-1} \partial_+ g h^{-1} \partial_- h)), \quad (5.3.1)$$

que como vimos, posee al menos dos puntos críticos.

Siguiendo las referencias [13], [14], comenzamos escribiendo a los campos g y h como el producto de campos de background por las fluctuaciones cuánticas:

$$g(x) = g_0(x) e^{i\pi(x)}, \quad h(x) = h_0(x) e^{i\hat{\pi}(x)}, \quad (5.3.2)$$

donde $\pi(x) = \pi^a(x) t^a$ y $\hat{\pi}(x) = \hat{\pi}^a(x) t^a$.

El método de background sirve para calcular los contratérminos necesarios para hacer finita la teoría y consiste en calcular las divergencias contenidas en la funcional definida por:

$$\Psi[g_0, h_0] = \int D\pi D\hat{\pi} e^{-(S[g,h] - S[g_0, h_0] - \text{terminos lineales en } \pi \text{ y } \hat{\pi})}, \quad (5.3.3)$$

que agota las divergencias de la teoría (ver Ref.[15]).

Las partes divergentes de los diagramas contenidos en (5.3.3) son funcionales de los campos de background g_0 y h_0 , lo que permite obtener directamente la forma de los contratérminos.

La funcional Ψ definida arriba debe ser regularizada tanto en el infrarrojo como en el ultravioleta.

Para eliminar las divergencias infrarrojas agregamos a la acción un término de masa para g de la forma:

$$S_m[g] = \frac{km^2}{8\pi} \int d^2x \text{tr}(g + g^{-1}) \quad (5.3.4)$$

y uno análogo para el campo h . (Estos términos no afectan las propiedades del modelo frente al grupo de renormalización).

Las divergencias ultravioletas serán eliminadas usando el método de regularización dimensional.

Así la forma regularizada del exponente en (5.3.3) toma la forma:

$$\begin{aligned}
S[g_0 e^{i\pi}, h_0 e^{i\hat{\pi}}] - S[g_0, h_0]_{Reg} = & \\
& -\frac{ik}{4\pi} \int_0^1 dt \int d^d x P^{\mu\nu} tr \left(\partial_\mu \pi \left[e^{-i\pi t} g_0^{-1} \partial_\nu g_0 e^{i\pi t} + e^{-i\pi t} \partial_\nu e^{i\pi t} \right] \right) \\
& -\frac{ik}{4\pi} \int_0^1 dt \int d^d x P^{\mu\nu} tr \left(\partial_\mu \hat{\pi} \left[e^{-i\hat{\pi} t} h_0^{-1} \partial_\nu h_0 e^{i\hat{\pi} t} + e^{-i\hat{\pi} t} \partial_\nu e^{i\hat{\pi} t} \right] \right) \\
& +\frac{k}{4\pi} \tilde{g} \int_0^1 dt \int d^d x tr \left(\pi \nabla_+^{g(t)} [h^{-1}(t) \partial_- h(t)] + \hat{\pi} \nabla_-^{h(t)} [g^{-1}(t) \partial_+ g(t)] \right) \\
& +\frac{km^2}{8\pi} \int d^d x tr \left(g_0 e^{i\pi} - g_0 + e^{-i\pi} g_0^{-1} - g_0^{-1} \right) \\
& +\frac{km^2}{8\pi} \int d^d x tr \left(h_0 e^{i\hat{\pi}} - h_0 + e^{-i\hat{\pi}} h_0^{-1} - h_0^{-1} \right), \tag{5.3.5}
\end{aligned}$$

donde hemos definido:

$$\begin{aligned}
P^{\mu\nu} &= \gamma^{\mu\nu} - \epsilon^{\mu\nu} \\
\nabla_+^{g(t)} f &= \partial_+ f + [g^{-1}(t) \partial_+ g(t), f] \\
\nabla_-^{h(t)} f &= \partial_- f + [h^{-1}(t) \partial_- h(t), f] \tag{5.3.6}
\end{aligned}$$

Para llegar a (5.3.5), hemos utilizado la identidad:

$$\begin{aligned}
W[g_0 e^{i\pi}] - W[g_0] &= \int_0^1 dt \frac{d}{dt} S[g_0 e^{i\pi t}] = \\
& \frac{1}{2\lambda} \int dx \int_0^1 dt P^{\mu\nu} tr \{ \partial_\mu \pi (e^{-it\lambda\pi} \partial_\nu e^{it\lambda\pi} + e^{-it\lambda\pi} g_0^{-1} \partial_\nu g_0 e^{it\lambda\pi}) \} \tag{5.3.7}
\end{aligned}$$

Para realizar la renormalización a un loop retendremos los términos de (5.3.5) cuadráticos en las fluctuaciones π y $\hat{\pi}$. De esta forma resulta:

$$\begin{aligned}
S_{(cuadr)} &= \frac{k}{4\pi} \int d^d x \left(\partial_\mu \pi^a \partial^\mu \pi^a - m^2 \pi^a \pi^a \right) \\
& +\frac{k}{4\pi} \int d^d x \left(\partial_\mu \hat{\pi}^a \partial^\mu \hat{\pi}^a - m^2 \hat{\pi}^a \hat{\pi}^a \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{ik}{2\pi} \int d^d x \left(P^{\mu\nu} f^{abc} \pi^a A_\nu^c \partial_\mu \pi^b + P^{\nu\mu} f^{abc} \hat{\pi}^a B_\nu^c \partial_\mu \hat{\pi}^b \right) \\
& - \frac{k}{2\pi} \tilde{g} \int d^d x \left(2i f^{abc} B_-^a \pi^b \partial_+ \pi^c + 2i f^{abc} A_+^a \hat{\pi}^b \partial_- \hat{\pi}^c \right. \\
& \quad \left. - 4 f^{abc} f^{dec} A_+^d B_-^e (\pi^b \pi^e + \hat{\pi}^b \hat{\pi}^e) \right) \\
& - \frac{k}{4\pi} \tilde{g} \int d^d x \left(-2 \partial_+ \pi^a \partial_- \hat{\pi}^a + 4i f^{abc} A_+^a \partial_- \hat{\pi}^b \pi^c \right. \\
& \quad \left. + 4i f^{abc} B_-^a \partial_+ \pi^b \hat{\pi}^c + 8 f^{abc} f^{dec} A_+^a B_-^d \pi^b \hat{\pi}^e \right) \tag{5.3.8}
\end{aligned}$$

en donde hemos definido $A_\mu \equiv g^{-1} \partial_\mu g$ y $B_\mu \equiv h^{-1} \partial_\mu h$. (En esta última expresión hemos omitido aquellos términos que renormalizan la masa, ya que no cambian la función β).

Vamos a etiquetar los términos de $S_{(cuadr)}$ en (5.3.8) de la siguiente forma:

$$S_{(cuadr)} = S^{(0)} + S^{(int)}, \tag{5.3.9}$$

donde:

$$\begin{aligned}
S^{(0)} &= \frac{k}{4\pi} \int d^d x \left(\partial_\mu \pi^a \partial^\mu \pi^a - m^2 \pi^a \pi^a \right) \\
&+ \frac{k}{4\pi} \int d^d x \left(\partial_\mu \hat{\pi}^a \partial^\mu \hat{\pi}^a - m^2 \hat{\pi}^a \hat{\pi}^a \right), \tag{5.3.10}
\end{aligned}$$

y

$$S^{(int)} = S_1 + S_2 + \dots + S_{10}. \tag{5.3.11}$$

Aquí el subíndice indica el orden en que aparece cada término en (5.3.8). Por ejemplo:

$$\begin{aligned}
S_1 &= \frac{ik}{2\pi} \int d^d x P^{\mu\nu} f^{abc} \pi^a A_\nu^c \partial_\mu \pi^b, \\
S_2 &= \frac{ik}{2\pi} \int d^d x P^{\nu\mu} f^{abc} \hat{\pi}^a B_\nu^c \partial_\mu \hat{\pi}^b, \tag{5.3.12}
\end{aligned}$$

etc.

Los propagadores para los campos π y $\hat{\pi}$ están dados por:

$$\begin{aligned}
\langle \pi^a(x) \pi^b(y) \rangle &= \langle \hat{\pi}^a(x) \hat{\pi}^b(y) \rangle = -\lambda^2 \delta^{ab} G(x, y) \\
\langle \pi^a(x) \hat{\pi}^b(y) \rangle &= 0, \tag{5.3.13}
\end{aligned}$$

donde $G(x, y)$ satisface:

$$(\nabla + m^2)G(x, y) = \delta(x, y) \quad (5.3.14)$$

Veamos ahora cuáles son los diagramas divergentes contenidos en la funcional Ψ . Para ello, la reescribimos de la siguiente forma:

$$\Psi|_{div} = \int D\pi D\hat{\pi} e^{-S^{(0)}} \left(1 - S^{(int)} + \frac{1}{2!} S^{(int)} S^{(int)} \right) \quad (5.3.15)$$

(Es fácil ver que los términos omitidos en el desarrollo (i.e. $[S^{(int)}]^3$, etc.) corresponden a diagramas finitos.) El cálculo de las partes divergentes es standard, de modo que sólo presentaremos aquí los resultados.

En primer lugar tenemos los diagramas divergentes que provienen de los términos de WZW (i.e. los valores de expectación de vacío de S_1 y S_2). La parte divergente de $\langle S_1 \rangle$, viene dada por:

$$\langle S_1 \rangle|_{div} = -\frac{iC_a}{8\pi(d-2)} \gamma_{\mu\rho} P^{\mu\nu} P^{\rho\sigma} \int d^d x \text{tr}(A_\nu A_\sigma) \quad (5.3.16)$$

Ahora bien, para calcular el producto de tensores $\gamma_{\mu\nu} P^{\mu\nu} P^{\rho\sigma}$ debemos aclarar que los productos de tensores antisimétricos $\epsilon^{\mu\nu}$ que aparecen en este producto deben ser eliminados vía la relación [16]:

$$\epsilon^{\mu\nu} \epsilon^{\rho\sigma} = \tilde{\gamma}^{\mu\sigma} \tilde{\gamma}^{\nu\rho} - \tilde{\gamma}^{\mu\rho} \tilde{\gamma}^{\nu\sigma} \quad (5.3.17)$$

donde $\tilde{\gamma}$ es una "métrica bidimensional" que satisface las siguientes relaciones:

$$\tilde{\gamma}^{\mu\nu} \tilde{\gamma}_{\nu\rho} = \tilde{\gamma}^{\mu\nu} \gamma_{\nu\rho} = \gamma^{\mu\nu} \tilde{\gamma}_{\nu\rho} = \tilde{\gamma}_\rho^\mu \quad (5.3.18)$$

y

$$\gamma_\mu^\mu = d, \quad \tilde{\gamma}_\mu^\mu = 2, \quad \hat{\gamma}_\mu^\mu = d - 2, \quad (5.3.19)$$

donde $\hat{\gamma}^{\mu\nu} = \gamma^{\mu\nu} - \tilde{\gamma}^{\mu\nu}$, de modo que:

$$\gamma_{\mu\rho} P^{\mu\nu} P^{\rho\sigma} = \hat{\gamma}^{\mu\nu} \quad (5.3.20)$$

que desaparece en el límite $d \rightarrow 2$, de manera que este diagrama no contribuye a la renormalización de la constante de acoplamiento. Lo mismo ocurre con la contribución proveniente de $\langle S_2 \rangle$. (En realidad estos términos "evanescentes", podrían en principio dejar una contribución no

nula en el límite $d \rightarrow 2$, debido al factor divergente $1/\epsilon$. Para tratar este problema debemos introducir contratérminos de la forma $\int d^2x \sqrt{\tilde{\gamma}} \tilde{\gamma}^{\mu\nu} \partial_\mu g \partial_\nu g^{-1}$, que no estaban en la acción de partida. Puede probarse que esto no altera la función β a un loop y, en general, éste tipo de términos pueden ser absorbidos a todo orden en una redefinición de la función β [13].)

Tenemos otros dos diagramas divergentes que provienen de calcular $\langle S_5 \rangle$ y $\langle S_6 \rangle$. Ambos tienen una inserción del producto de campos $A_+ B_-$.

La suma de sus partes divergentes es:

$$(\langle S_5 \rangle + \langle S_6 \rangle)_{div} = \frac{4\tilde{g}C_a}{k(d-2)} \int d^2x \text{tr}(A_+ B_-) \quad (5.3.21)$$

Con esto terminamos con los diagramas divergentes que provienen del término lineal en $S^{(int)}$ en la ec.(5.3.15).

Del término cuadrático en $S^{(int)}$ surgen cuatro diagramas divergentes que llevan a una renormalización de la constante de acoplamiento \tilde{g} . Estos corresponden a los siguientes valores de expectación de vacío:

$$\begin{aligned} \Delta_{(1)} &= -\langle S_1 S_3 \rangle \\ \Delta_{(2)} &= -\langle S_2 S_4 \rangle \\ \Delta_{(3)} &= -\langle S_7 S_{10} \rangle \\ \Delta_{(4)} &= -\langle S_8 S_9 \rangle \end{aligned} \quad (5.3.22)$$

Nuevamente daremos aquí sólo los resultados:

$$\begin{aligned} \Delta_{(1)} &= \Delta_{(2)} = \frac{2aC_a}{k\epsilon} \int d^2x \text{tr}(A_+ B_-) \\ \Delta_{(3)} &= -\Delta_{(4)} = \frac{16^2 \pi C_A}{k^2 \epsilon} \int d^2x \text{tr}(A_+ B_-) \end{aligned} \quad (5.3.23)$$

Es fácil ver que la suma de las partes divergentes provenientes de $\Delta_{(1)}$ y $\Delta_{(2)}$ se cancela con la contribución dada en la ec.(5.3.21).

Por otra parte, las contribuciones provenientes de $\Delta_{(3)}$ y $\Delta_{(4)}$ se cancelan entre sí.

Podemos concluir entonces que no hay renormalización de la constante de acoplamiento a un loop, y por lo tanto la contribución a un loop a la función β es cero.

5.4 Cálculo de la Función C de Zamolodchikov

En esta sección vamos a construir la función C de Zamolodchikov [1] para el modelo de GNQ usando teoría de perturbaciones. Vimos en la sección anterior que el comportamiento no-crítico de la teoría está controlado por el factor correspondiente a los campos de WZW en interacción (i.e. $\mathcal{Z}_{II'}$), de modo que estudiaremos la teoría descrita por este factor.

Recordemos que, en general, la función C de Zamolodchikov viene dada por (2.5.11):

$$C(g) = [2z^4 \langle T(z)T(0) \rangle + 4z^2x^2 \langle T(z)\Theta(0) \rangle - 6x^4 \langle \Theta(z)\Theta(0) \rangle]_{|x^2=R^2}, \quad (5.4.1)$$

donde $z = x_0 + ix_1$, $\bar{z} = x_0 - ix_1$, $T = T_{zz}$, $\Theta = 4T_{z\bar{z}}$ y g representa a las constantes de acoplamiento de la teoría.

En nuestro caso tenemos una única constante de acoplamiento, definida por:

$$\tilde{g} = \frac{\pi}{4g_N^2} - (4\pi\alpha + 1), \quad (5.4.2)$$

En primer lugar vamos a calcular la acción efectiva de la teoría en una métrica de background. Una vez hallada ésta y su dependencia en la métrica vamos a calcular las funciones de correlación que aparecen en la definición de la función C (ec.(5.4.1)) por derivación funcional respecto de la métrica.

La acción efectiva está definida por:

$$\exp(-S_{eff}[\gamma]) = \int Dg Dh \exp(-S[\gamma]), \quad (5.4.3)$$

donde $S[\gamma]$ es la acción que aparece en la ec.(5.2.19) en una métrica euclídea arbitraria:

$$S[\gamma] = kW[g] + kW[h^{-1}] + \frac{k}{4\pi} \tilde{g} \int d^2x \sqrt{\gamma} (\gamma^{\mu\nu} + i\epsilon^{\mu\nu}) \text{tr}(g^{-1} \partial_\mu g h^{-1} \partial_\nu h), \quad (5.4.4)$$

y $\gamma^{\mu\nu}$ es la métrica de background.

Para calcular la acción efectiva vamos a desarrollar los campos g y h en potencias de fluctuaciones π y $\hat{\pi}$, escribiendo:

$$\begin{aligned} g(x) &= g_0 e^{i\pi(x)}, \\ h(x) &= h_0 e^{i\hat{\pi}(x)}, \end{aligned} \quad (5.4.5)$$

donde g_0, h_0 son campos constantes.

En términos de los campos π y $\hat{\pi}$ (que llamaremos piones) la acción toma la forma:

$$S[\gamma] = S^{(2)}[\gamma] + S^{(3)}[\gamma] + S^{(4)}[\gamma] + \text{etc.}, \quad (5.4.6)$$

donde el superíndice indica el número de piones que aparecen en cada término. Explícitamente:

$$S^{(2)} = \frac{k}{8\pi} \int d^2x \sqrt{\gamma} \gamma^{\mu\nu} \text{tr}(\partial_\mu \pi \partial_\nu \pi + \partial_\mu \hat{\pi} \partial_\nu \hat{\pi} + 2\tilde{g} \partial_\mu \pi \partial_\nu \hat{\pi}), \quad (5.4.7)$$

$$\begin{aligned} S^{(3)} &= -\frac{k}{12\pi} \int d^2x \epsilon^{\mu\nu} \text{tr}(\partial_\mu \pi \partial_\nu \pi \pi - \partial_\mu \hat{\pi} \partial_\nu \hat{\pi} \hat{\pi}) \\ &+ \frac{i k \tilde{g}}{8\pi} \int d^2x \sqrt{g} P^{\mu\nu} \text{tr}([\partial_\mu \hat{\pi}, \partial_\nu \pi] \hat{\pi} + [\partial_\mu \pi, \partial_\nu \hat{\pi}] \pi), \end{aligned} \quad (5.4.8)$$

$$\begin{aligned} S^{(4)} &= -\frac{k}{96\pi} \int d^2x \sqrt{g} g^{\mu\nu} \text{tr}([\partial_\mu \pi, \pi][\partial_\nu \pi, \pi] + [\partial_\mu \hat{\pi}, \hat{\pi}][\partial_\nu \hat{\pi}, \hat{\pi}]) \\ &+ \frac{k \tilde{g}}{8\pi} \int d^2x \sqrt{g} P^{\mu\nu} \text{tr} \left(-\frac{1}{3} [\partial_\nu \pi, \hat{\pi}][\partial_\mu \hat{\pi}, \hat{\pi}] - \right. \\ &\left. \frac{1}{3} [\partial_\nu \pi, \pi][\partial_\mu \hat{\pi}, \pi] + \frac{1}{2} [\partial_\nu \pi, \pi][\partial_\mu \hat{\pi}, \hat{\pi}] \right), \end{aligned} \quad (5.4.9)$$

etc. donde $P^{\mu\nu}$ está definido en (5.3.6) y los propagadores para los campos π y $\hat{\pi}$ están dados por:

$$\begin{aligned} \langle \pi^a(x) \pi^b(y) \rangle &= -\frac{2\pi}{k} \delta^{ab} G(x, y), \\ \langle \hat{\pi}^a(x) \hat{\pi}^b(y) \rangle &= -\frac{2\pi}{k} \delta^{ab} G(x, y), \\ \langle \pi^a(x) \hat{\pi}^b(y) \rangle &= -\frac{2\pi}{k \tilde{g}} \delta^{ab} G(x, y), \end{aligned} \quad (5.4.10)$$

donde $G(x, y)$ es la función de Green del Laplaciano en la métrica $\gamma_{\mu\nu}(x)$:

$$\partial_\mu(\sqrt{\gamma}\gamma^{\mu\nu}\partial_\nu)G(x, y) = \delta(x - y). \quad (5.4.11)$$

La contribución a la acción efectiva proveniente de los diagramas de un loop de piones viene dada por:

$$\begin{aligned} \exp(-S_{eff}^{(1)}[\gamma]) = \int D\pi D\hat{\pi} \exp - \left(\frac{k}{8\pi} \int d^2x \sqrt{\gamma} \gamma^{\mu\nu} \text{tr}(\partial_\mu \pi \partial_\nu \pi + \right. \\ \left. \partial_\mu \hat{\pi} \partial_\nu \hat{\pi} + 2\tilde{g} \partial_\mu \pi \partial_\nu \hat{\pi}) \right), \end{aligned} \quad (5.4.12)$$

La medida de integración $D\pi D\hat{\pi}$, es el producto de las medidas usuales invariantes traslacionales (i.e. el jacobiano de la transformación que pasa de las variables en el grupo g y h a las variables π y $\hat{\pi}$ en el álgebra es trivial)

La integral funcional en (5.4.12) puede ser resuelta en forma exacta (al menos formalmente) haciendo el siguiente cambio de variables:

$$\begin{aligned} \pi' &= \frac{(\pi + \hat{\pi})}{\sqrt{2}}, \\ \hat{\pi}' &= \frac{(-\pi + \hat{\pi})}{\sqrt{2}}, \end{aligned} \quad (5.4.13)$$

que diagonaliza $S^{(2)}$.

Los nuevos propagadores están dados por:

$$\begin{aligned} \langle \pi'^a(x) \pi'^b(y) \rangle &= -\frac{2\pi}{k} \frac{1}{1 + \tilde{g}} \delta^{ab} G(x, y) \\ \langle \hat{\pi}'^a(x) \hat{\pi}'^b(y) \rangle &= -\frac{2\pi}{k} \frac{1}{1 - \tilde{g}} \delta^{ab} G(x, y) \\ \langle \pi'^a(x) \hat{\pi}'^b(y) \rangle &= 0 \end{aligned} \quad (5.4.14)$$

y en términos de las nuevas variables tenemos:

$$\begin{aligned} \exp(-S_{eff}^{(1)}[\gamma]) = \\ \int D\pi' D\hat{\pi}' \exp\left(-\frac{k}{4\pi} \int d^2x \sqrt{\gamma} \text{tr}((1 + \tilde{g})\pi' \nabla \pi' + (1 - \tilde{g})\hat{\pi}' \nabla \hat{\pi}')\right) = \\ [\det(1 + \tilde{g}) \nabla \det(1 - \tilde{g}) \nabla]^{-\frac{(N^2-1)}{2}}, \end{aligned} \quad (5.4.15)$$

de donde se obtiene:

$$S_{eff}^{(1)} = \frac{N^2 - 1}{2} \ln \det(1 + \tilde{g})\nabla + \frac{N^2 - 1}{2} \ln \det(1 - \tilde{g})\nabla. \quad (5.4.16)$$

Cabe señalar que las singularidades en el propagador del campo π' y en el primer término de la acción efectiva (ec.(5.4.16)) para el valor de la constante de acoplamiento $g_N^2 = g_N^{2*}$ (i.e para $\tilde{g} = \tilde{g}^* = -1$), estaban ya presentes en la funcional generatriz del modelo (5.2.12). De hecho, vimos en (5.2.22) que en la expresión para el factor \mathcal{Z}_{II} en el punto $\tilde{g} = \tilde{g}^*$ aparece un factor divergente (que corresponde a la integral sobre el grupo) que debe ser regularizado. Excluiremos este punto por el momento y lo discutiremos al final de esta sección.

En ese caso, podemos escribir la acción efectiva a un loop como:

$$S_{eff}^{(1)} = 2(N^2 - 1)D\{\gamma\}, \quad \text{si } -1 < \tilde{g} \leq 0$$

$$D\{\gamma\} \equiv \frac{1}{2} \ln \det \nabla, \quad (5.4.17)$$

ya que las constantes $1 + \tilde{g}$ y $1 - \tilde{g}$ no afectan la dependencia en la métrica de los determinantes.

Esta expresión para la acción efectiva es formal, ya que el determinante requiere ser regularizado. Fue Polyakov [17] quien dio por primera vez una expresión finita para $D\{\gamma\}$ en una métrica arbitraria:

$$D\{\gamma\} = -\frac{1}{48\pi} \int d^2x d^2y \sqrt{\gamma(x)} \sqrt{\gamma(y)} R(x) R(y) G(x, y) + c \int d^2x \sqrt{\gamma(x)}. \quad (5.4.18)$$

Por motivos que quedarán claros más adelante vamos a reescribir esta expresión para $D\{\gamma\}$ en términos de la parte finita del propagador. Si definimos:

$$\overline{G}(x, y) \equiv G(x, y) + \frac{1}{2\pi} \ln s(x, y) \quad (5.4.19)$$

donde

$$s(x, y) = \int_x^y ds, \quad (5.4.20)$$

es la distancia geodésica entre x e y , resulta que $\bar{G}(x, y)$ es finita para $x \rightarrow y$ [18].

Es fácil ver (por ejemplo, usando coordenadas conformes) que en función de la parte finita del propagador, $\bar{G}(x, y)$ en $x = y$, (que llamaremos $\bar{G}(x)$), $D\{\gamma\}$ toma la forma:

$$D\{\gamma\} = \frac{1}{2} \ln \det \nabla = \frac{\pi}{6} \int d^2x \sqrt{\gamma} (\gamma^{\mu\nu} \partial_\mu \bar{G} \partial_\nu \bar{G} - \frac{R}{2\pi} \bar{G}), \quad (5.4.21)$$

Vamos a calcular ahora las funciones de correlación que definen a la función C .

En general, la función de correlación de dos puntos de tensores de energía-impulso está dada por:

$$\begin{aligned} \langle T_{\mu\nu}(x) T_{\rho\sigma}(y) \rangle &= \langle T_{\mu\nu}(x) \rangle \langle T_{\rho\sigma}(y) \rangle \\ &- \frac{2}{\sqrt{\gamma(y)}} \frac{\delta \langle T_{\mu\nu}(x) \rangle}{\delta \gamma^{\rho\sigma}(y)} \Big|_{\gamma^{\mu\nu} = \delta^{\mu\nu}}, \end{aligned} \quad (5.4.22)$$

donde:

$$\langle T_{\mu\nu}(x) \rangle = \frac{2}{\sqrt{\gamma(x)}} \frac{\delta S_{eff}[\gamma]}{\delta \gamma^{\mu\nu}(x)} \Big|_{\gamma^{\mu\nu} = \delta^{\mu\nu}}. \quad (5.4.23)$$

A partir de la acción efectiva a un loop (5.4.17)-(5.4.18) obtenemos:

$$\langle T_{\mu\nu}(x) \rangle = 0 \quad (5.4.24)$$

y

$$\begin{aligned} \langle T_{\mu\nu}(x) T_{\rho\sigma}(y) \rangle &= 2(N^2 - 1) \left(\frac{1}{24\pi} \delta_{\mu\nu} (\partial_\rho \partial_\sigma \delta(x - y) - \delta_{\rho\sigma} \nabla_y \delta(x - y)) - \right. \\ &\left. \frac{1}{24\pi} (\partial_\rho \partial_\sigma \partial_\mu \partial_\nu \left(\frac{\ln|x - y|}{2\pi} \right) - \delta_{\rho\sigma} \partial_\mu \partial_\nu \delta(x - y)) \right), \end{aligned} \quad (5.4.25)$$

para $-1 < \tilde{g} \leq 0$, de donde se obtiene (a menos de términos de contacto):

$$\begin{aligned} \langle T(z) T(0) \rangle &= \frac{1/2}{z^4} 2(N^2 - 1), \quad \text{si } -1 < \tilde{g} \leq 0. \\ \langle T(z) \Theta(0) \rangle &= 0, \\ \langle \Theta(z) \Theta(0) \rangle &= 0. \end{aligned} \quad (5.4.26)$$

Utilizando la ec.(5.4.1) obtenemos para la contribución a la función C proveniente de la acción efectiva a un loop:

$$C(\tilde{g})^{(1)} = 2(N^2 - 1), \quad \text{if } -1 < \tilde{g} \leq 0. \quad (5.4.27)$$

(Este resultado podría haber sido inferido de las ecuaciones para la acción efectiva $S_{eff}^{(1)}$ (5.4.17)-(5.4.18) ya que corresponde a la acción efectiva de una teoría de $2(N^2 - 1)$ bosones libres sin masa, cuya extensión central de Virasoro está dada por el número de bosones.)

Tenemos entonces una contribución constante (independiente de la escala) en todo el intervalo $(\tilde{g}^*, \tilde{g}^{**}]$. Esto significa, a través del teorema C , que la función β de la teoría es cero en dicho intervalo. De hecho esto coincide con el resultado obtenido en la sección anterior.

Por lo tanto, a este orden, la teoría se comporta de manera invariante conforme, cosa que veremos no ocurre a dos loops.

Para obtener las contribuciones a la acción efectiva provenientes de los diagramas de dos loops de piones, debemos retener en el lado derecho de la ecuación (5.4.3) los términos cúbicos y cuárticos en estos campos (i.e. $S^{(3)}$ y $S^{(4)}$, ecs.(5.4.8)-(5.4.9)) que en función de las nuevas variables π' , $\hat{\pi}'$ (ec.(5.4.13)) están dadas por:

$$S^{(3)} = -\frac{ik}{12\sqrt{2}\pi} \int d^2x \epsilon^{\mu\nu} f^{abc} \{ (6\tilde{g} - 2) \partial_\mu \hat{\pi}'^a \partial_\nu \hat{\pi}'^b \hat{\pi}'^c - 6(\tilde{g} + 1) \partial_\mu \pi'^a \partial_\nu \pi'^b \hat{\pi}'^c \} \quad (5.4.28)$$

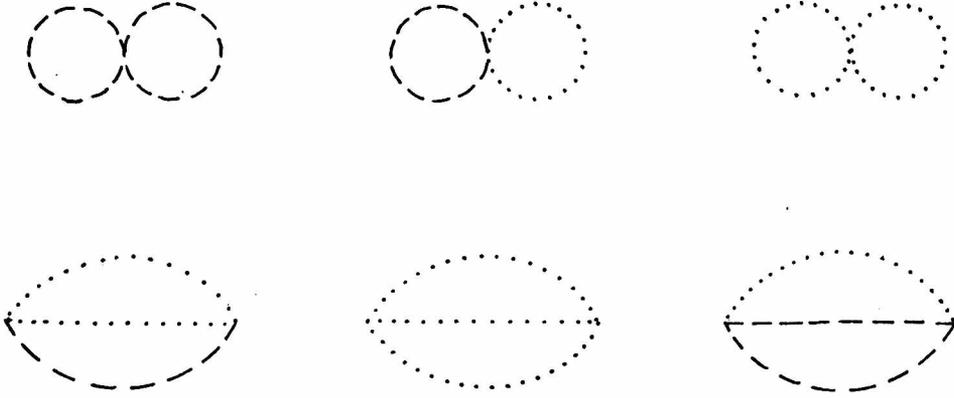
y

$$S^{(4)} = \frac{k}{24\pi} \int d^2x \sqrt{\gamma} \gamma^{\mu\nu} f^{abg} f^{cdg} \{ (1 + \tilde{g}) \partial_\mu \pi'^a \pi'^b \partial_\nu \pi'^c \pi'^d + (1 - 7\tilde{g}) \partial_\mu \hat{\pi}'^a \hat{\pi}'^b \partial_\nu \hat{\pi}'^c \hat{\pi}'^d + 2(1 - 3\tilde{g}) \partial_\mu \pi'^a \pi'^b \partial_\nu \hat{\pi}'^c \hat{\pi}'^d + 2(1 + 3\tilde{g}) \partial_\mu \hat{\pi}'^a \pi'^b \partial_\nu \pi'^c \hat{\pi}'^d + (1 + 7\tilde{g}) \partial_\mu \pi'^a \hat{\pi}'^b \partial_\nu \pi'^c \hat{\pi}'^d + (1 - \tilde{g}) \partial_\mu \hat{\pi}'^a \pi'^b \partial_\nu \hat{\pi}'^c \pi'^d \} \quad (5.4.29)$$

La contribución a dos loops a S_{eff} está dada por:

$$S_{eff}^{(2)} = \langle S^{(4)} \rangle - \frac{1}{2} \langle S^{(3)} S^{(3)} \rangle \quad (5.4.30)$$

que involucra el cálculo de los siguientes diagramas:



donde las líneas rayadas y punteadas, representan a los propagadores de los campos π' y $\hat{\pi}'$ respectivamente.

Dado que ambos propagadores tienen la misma dependencia en las coordenadas (difieren sólo en factores que dependen de \tilde{g}), podemos agrupar los diagramas en sólo dos clases cuyas expresiones formales son:

$$\begin{aligned}
 S_{eff}^{(2)} &= \mathcal{I}_1 + \mathcal{I}_2 = \\
 & \frac{\pi}{6k} N(N^2 - 1) \left(\left[\frac{2}{1 + \tilde{g}} + \frac{(1 - 7\tilde{g})}{(1 - \tilde{g})^2} + \frac{(1 + 7\tilde{g})}{(1 - \tilde{g}^2)} \right] \times \right. \\
 & \int d^2x \sqrt{\gamma} \gamma^{\mu\nu} (\partial_\mu^x \partial_\nu^y G(x, y) G(x, y) - \partial_\mu^x G(x, y) \partial_\nu^y G(x, y))|_{x=y} - \\
 & \left. \left[\frac{(6\tilde{g} - 2)^2}{2(1 - \tilde{g})^3} + \frac{6}{(1 - \tilde{g})} \right] \times \right. \\
 & \left. \int d^2x d^2y \epsilon^{\mu\nu} \epsilon^{\rho\sigma} \partial_\mu^x \partial_\rho^y G(x, y) \partial_\nu^x \partial_\sigma^y G(x, y) G(x, y) \right) \quad (5.4.31)
 \end{aligned}$$

Esta expresión es formal en el sentido de que las integrales que aparecen arriba deben ser regularizadas tanto en el infrarrojo (IR) como en el ultravioleta (UV).

Para eliminar las divergencias IR se puede agregar un término de masa [13] en forma análoga a lo que hemos hecho en la sección anterior, sin embargo esto no afecta las propiedades del modelo frente al Grupo de Renormalización (en particular no afecta a la función β y a la función C). En la Ref.[23] los autores probaron que observables invariantes bajo la acción del grupo tienen desarrollos perturbativos finitos en el infrarrojo. Este punto ha sido verificado explícitamente en nuestro cálculo.

Con respecto a las divergencias UV, utilizaremos el método de regularización dimensional en presencia de una métrica de background [19], ya que necesitamos la dependencia explícita de la acción efectiva en la métrica para el cálculo de la función C .

Dejamos los detalles de cálculo para el apéndice y sólo damos la forma final de la acción efectiva regularizada:

$$S_{eff}^{(2)}|_{REG} = f(\tilde{g}) \frac{1}{k} N(N^2 - 1) \left[\frac{\pi}{6} \int d^2 x \sqrt{\gamma} (\gamma^{\mu\nu} \partial_\mu \bar{G} \partial_\nu \bar{G} - \frac{R}{2\pi} \bar{G}) \right] \quad (5.4.32)$$

donde $f(\tilde{g})$ está dada por:

$$f(\tilde{g}) = \frac{6\tilde{g}^3 - 6\tilde{g}^2 - 4\tilde{g} + 2}{(1 - \tilde{g})^3(1 + \tilde{g})}, \quad (5.4.33)$$

y $\bar{G}(x)$ es la parte finita de $G(x, y)$ en $x = y$ (5.4.19):

La expresión entre corchetes en la ec.(5.4.32) no es otra cosa que el determinante regularizado del laplaciano (ec.(5.4.18)), de modo que la contribución de dos loops a la acción efectiva solamente cambia el factor multiplicativo delante de $D\{\gamma\}$ en (5.4.17).

Usando las ecs.(5.4.1), (5.4.22) y (5.4.32) tenemos para la contribución hasta dos loops a la función C la siguiente expresión:

$$C(\tilde{g}) = (N^2 - 1) \left(2 - \frac{N}{k} f(\tilde{g}) \right) \quad \text{if } -1 < \tilde{g} \leq 0. \quad (5.4.34)$$

En el punto fijo correspondiente a $\tilde{g} = 0$ tenemos:

$$C(0) = 2(N^2 - 1) \left(1 - \frac{N}{k} \right) \quad (5.4.35)$$

En este punto hay que notar que la expresión para la carga central correspondiente a una teoría de dos campos de WZW (ec.(5.2.23)), tiene

una expansión en $1/k$ que coincide con (5.4.35). (Este resultado era de esperar ya que una expansión en $1/k$ para un modelo de WZW en el punto crítico coincide con la expansión en loops).

Este resultado está de acuerdo con el obtenido en la Ref.[18], donde fue realizado el cálculo perturbativo de la carga central de Virasoro para un modelo de WZW con simetría $SU(N)_k$ en el punto crítico.

Además la función C obtenida satisface la condición de estacionaridad en el punto crítico:

$$\frac{\partial C(\tilde{g})}{\partial \tilde{g}} \Big|_{\tilde{g}=0} = 0. \quad (5.4.36)$$

Vamos a analizar ahora el punto crítico correspondiente a $\tilde{g} = -1$. En este punto la función de partición del modelo puede escribirse como en la ecuación (5.2.22), y se ve en esta expresión la presencia de un factor infinito que debe ser tratado cuidadosamente en el cálculo perturbativo de la acción efectiva.

En nuestro tratamiento, esta divergencia de la teoría se manifiesta por primera vez como un polo simple en el propagador para el campo π' (5.4.14). También se manifiesta en la acción efectiva a un loop, (ec.(5.4.16)), dado que ésta es singular para $\tilde{g} = -1$.

A dos loops la singularidad aparece nuevamente en la expresión (5.4.32)-(5.4.33) para la acción efectiva. De hecho ésta tiene un polo simple para el valor de la constante de acoplamiento efectiva $\tilde{g} = -1$.

Vamos a definir entonces la acción efectiva eligiendo una regularización que ajuste los valores de la función C en los puntos críticos a los valores esperados ecs.(5.2.24)-(5.2.26).

Esto equivale a definir:

$$S_{eff} = (N^2 - 1)D\{\gamma\} \begin{cases} 1 - \frac{N}{k} & \text{if } \tilde{g} = -1 \\ 2 - \frac{N}{k} f(\tilde{g})|_{Reg} & \text{if } -1 < \tilde{g} \leq 0, \end{cases} \quad (5.4.37)$$

donde:

$$f(\tilde{g})|_{Reg} = \frac{-\tilde{g}^3 + 21\tilde{g}^2 - 12\tilde{g} + 4}{2(1 - \tilde{g})^3} \quad (5.4.38)$$

Finalmente la función C de Zamolodchikov a dos loops toma la forma:

$$C(\tilde{g}) = (N^2 - 1) \begin{cases} 1 - \frac{N}{k} & \text{if } \tilde{g} = -1 \\ 2 - \frac{N}{k} f(\tilde{g})|_{Reg} & \text{if } -1 < \tilde{g} \leq 0. \end{cases} \quad (5.4.39)$$

Esta función es monótona decreciente con la constante de acoplamiento g_N^2 a través de (5.2.20), y no posee puntos críticos adicionales en la región comprendida en $(\tilde{g}^*, \tilde{g}^{**}]$, confirmando así que el modelo deviene invariante conforme sólo para aquellos valores de la constante de acoplamiento hallados en la Ref.[4] (ver ecs. (5.2.21), (5.2.25)).

Por supuesto estos resultados son válidos en el esquema de regularización utilizado. De hecho la dependencia de la función C de Zamolodchikov con el esquema de regularización fue discutida en la Ref.[20], en el contexto de una teoría crítica perturbada por un operador relevante en donde los autores mostraron que ciertas propiedades de la función C (por ejemplo, la relación con la función β), eran ciertas en determinados esquemas de regularización. Es de notar que las propiedades básicas de $C(g)$ listadas en la sección 2.5 son independientes del esquema de regularización adoptado.

Como ya mencionamos, existen en la literatura cálculos previos de la función C de Zamolodchikov como es el caso del modelo de Schwinger [21] (que es exactamente resoluble). El teorema C de Zamolodchikov también fue estudiado intensivamente en el contexto de teorías conformes usando técnicas como la teoría de perturbaciones conformes (ver Ref.[22] y las referencias allí citadas).

Nuestro cálculo provee el primer estudio perturbativo de la función C en un modelo de Teoría de Campos con el interés adicional que proviene del hecho de que el modelo posee dos puntos críticos no-triviales. De hecho hemos calculado la función C de Zamolodchikov asociada al modelo de GNQ y mostrado que dicha función interpola entre dos puntos críticos conectados por una trayectoria del Grupo de Renormalización.

El cálculo de la función C de Zamolodchikov podría ser útil también para calibrar el esquema de aproximación utilizado, ya que relaciona una función que en principio es calculable sólo perturbativamente, con resultados exactos, como son los valores de las cargas centrales de Virasoro.

Apéndice A: Regularización dimensional en espacios curvos

En este apéndice vamos a calcular en forma detallada la parte finita de la contribución a dos loops de la acción efectiva en una métrica de background [19]. Esta viene dada por la ecuación (5.4.31):

$$\begin{aligned}
 S_{eff}^{(2)} = \mathcal{I}_1 + \mathcal{I}_2 = & \\
 & \frac{\pi}{6k} N(N^2 - 1) \left(\left[\frac{2}{1 + \tilde{g}} + \frac{(1 - 7\tilde{g})}{(1 - \tilde{g})^2} + \frac{(1 + 7\tilde{g})}{(1 - \tilde{g}^2)} \right] \times \right. \\
 & \int d^2x \sqrt{\tilde{\gamma}} \gamma^{\mu\nu} (\partial_\mu^x \partial_\nu^y G(x, y) G(x, y) - \partial_\mu^x G(x, y) \partial_\nu^y G(x, y))|_{x=y} - \\
 & \left. \left[\frac{(6\tilde{g} - 2)^2}{2(1 - \tilde{g})^3} + \frac{6}{(1 - \tilde{g})} \right] \times \right. \\
 & \left. \int d^2x d^2y \epsilon^{\mu\nu} \epsilon^{\rho\sigma} \partial_\mu^x \partial_\rho^y G(x, y) \partial_\nu^x \partial_\sigma^y G(x, y) G(x, y) \right). \quad (..A)
 \end{aligned}$$

Antes de calcular las partes finitas de \mathcal{I}_1 e \mathcal{I}_2 vamos a explicar brevemente en qué consiste la generalización del método de regularización dimensional para el caso de una variedad con métrica arbitraria [19].

El método consiste básicamente en definir las integrales divergentes en un espacio d -dimensional en donde las dimensiones extra están en un espacio plano (esta restricción puede relajarse pero por razones de simplicidad usaremos esta elección particular de la extensión).

Esto quiere decir que si partimos de una teoría definida en una variedad \mathcal{M} de dimensión d , el espacio extendido $(d + p)$ -dimensional será $\mathcal{M} \times R^p$.

El paso siguiente consiste en reemplazar los propagadores que aparecen en el diagrama por los correspondientes núcleos de la ecuación del calor mediante la expresión:

$$G(x, y) = \int_0^\infty K_t(x, y) dt, \quad (..B)$$

donde x e y son las variables en el espacio extendido, luego introducir la forma explícita de $K_t(x, y)$, realizar las integrales sobre las p variables adicionales y finalmente extender el resultado (que es una función de p) a p complejo arbitrario.

Es fácil ver que la expresión resultante es finita para $Re(p)$ suficientemente grande, de modo que corresponde a la expresión regularizada deseada.

Para obtener la forma de los contratérminos se procede de la manera usual, i.e. se calcula el residuo en $p = 0$.

En nuestro caso esto se puede llevar a cabo fácilmente, reemplazando el propagador en argumentos coincidentes por la siguiente expresión:

$$G(x, x) = \bar{G}(x) + \frac{1}{2\pi\epsilon}, \quad (..C)$$

donde $\epsilon = d - 2$ y $\bar{G}(x)$ es la parte finita del propagador definida como:

$$\begin{aligned} \bar{G}(x, y) &= G(x, y) + \frac{1}{2\pi} \ln s(x, y) \\ \bar{G}(x) &= \bar{G}(x, y)|_{x=y}, \end{aligned} \quad (..D)$$

($\ln s(x, y)$ es la distancia geodésica entre x e y y controla la singularidad a cortas distancias de $G(x, y)$). (Esto se puede probar utilizando el procedimiento descrito arriba y utilizando el desarrollo asintótico del núcleo de la ecuación del calor para t pequeño, que corresponde al desarrollo del propagador a cortas distancias.)

Para la primera derivada, usando $G(x, y) = G(y, x)$, se puede mostrar que:

$$\partial_\mu^x G(x, y)|_{x=y} = \partial_\mu^y G(x, y)|_{x=y} = \frac{1}{2} \partial_\mu \bar{G}(x). \quad (..E)$$

Para la segunda derivada se obtiene:

$$\partial_\mu^x \partial^{y\mu} G(x, y)|_{x=y} = -\frac{R}{8\pi}, \quad (..F)$$

donde $R(x)$ es la curvatura escalar.

La primera de las integrales, \mathcal{I}_1 , está dada por:

$$\mathcal{I}_1 = \int d^2 x \sqrt{\gamma} \gamma^{\mu\nu} (\partial_\mu^x \partial_\nu^y G(x, y) G(x, y) - \partial_\mu^x G(x, y) \partial_\nu^y G(x, y))|_{x=y}, \quad (..G)$$

y la parte finita es:

$$\mathcal{I}_1|_{Reg} = - \int d^2x \sqrt{\gamma(x)} \left(\frac{1}{4} \partial_\mu \bar{G}(x) \partial^\mu \bar{G}(x) + \frac{1}{8\pi} R(x) \bar{G}(x) \right). \quad (..H)$$

Esta expresión puede ser escrita en términos del determinante regularizado del operador laplaciano (ec.(5.4.18)):

$$\mathcal{I}_1|_{Reg} = \frac{9}{2\pi} D\{\gamma\}. \quad (..I)$$

La obtención de la parte finita de la segunda integral divergente, \mathcal{I}_{II} , requiere algunas manipulaciones previas:

En primer lugar, usando coordenadas conformes ($\gamma_{\mu\nu}(x) = e^{w(x)} \delta_{\mu\nu}$) podemos llevar a \mathcal{I}_2 a la forma:

$$\mathcal{I}_2 = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^2x d^2y \epsilon^{\mu\nu} \epsilon^{\rho\sigma} \partial_\mu^x \partial_\rho^y \ln|x-y| \partial_\nu^x \partial_\sigma^y \ln|x-y| \ln|x-y|. \quad (..J)$$

Eliminamos el producto de tensores antisimétricos via:

$$\epsilon^{\mu\nu} \epsilon^{\rho\sigma} = \gamma^{\mu\sigma} \gamma^{\nu\rho} - \gamma^{\mu\rho} \gamma^{\nu\sigma}, \quad (..K)$$

con lo que la integral (luego de una integración por partes) deviene:

$$\mathcal{I}_2 = -\frac{1}{2} \int d^2x \sqrt{\gamma(x)} \left(\partial_\mu^x G(x,y) \partial^{y\mu} G(x,y) \right) |_{x=y}. \quad (..L)$$

Finalmente usando la ec.(..E) obtenemos:

$$\mathcal{I}_2|_{Reg} = \frac{3}{4\pi} D\{\gamma\}. \quad (..M)$$

Por lo que la parte finita de la acción efectiva $S_{eff}^{(2)}$ está dada por:

$$S_{eff}^{(2)}|_{REG} = f(\tilde{g}) \frac{1}{k} N(N^2 - 1) D\{\gamma\}, \quad (..N)$$

con:

$$f(\tilde{g}) = \frac{6\tilde{g}^3 - 6\tilde{g}^2 - 4\tilde{g} + 2}{(1 - \tilde{g})^3(1 + \tilde{g})}. \quad (..O)$$

Bibliografía

- [1] A.B.Zamolodchikov, *Pis'ma Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **43**, 565 (1986); [JETP Lett. 43, 730(1986)].
- [2] R.Dashen y Y.Frishman, *Phys. Lett.* **46B**, 439 (1973).
- [3] C.Destri y H.J.De Vega, *Phys. Lett.* **201B**, 245 (1988).
- [4] E.Moreno y F.A.Schaposnik, *Int. Jour. of Mod. Phys. A* **4**, 2827 (1989).
- [5] D.Cabra, "Zamolodchikov's C Function in The Chiral Gross-Neveu Model", La Plata Preprint, 1992.
- [6] A.Bondi, G.Curci, G.Paffuti, y P.Rossi, *Nucl. Phys.* **B346**, 268 (1990).
- [7] K.Furuya, R.Gamboa Saravi y F.A.Schaposnik, *Nucl. Phys.* **B208**, 159 (1982).
- [8] R.Jackiw y R.Rajaraman, *Phys. Rev. Lett.* **54**, 1219 (1985).
- [9] A.M.Polyakov y P.B.Wiegmann, *Phys. Lett.* **131B**, 121 (1983) and *Phys. Lett.* **141B**, 223 (1984).
- [10] R.E.Gamboa Saraví, F.A.Schaposnik y J.E.Solomin, *Nucl. Phys.* **B185**, 239, (1981).
- [11] F.A.Schaposnik, en *Proceedings of the Jorge Andre Swieca School on Particles and Fields*, eds. A. da Silva and R. Shellard, 1987, y referencias allí citadas.
- [12] D.Gonzalez y A.N.Redlich, *Phys. Lett.* **147B**, 150 (1984).

- [13] M.Bos, *Phys. Lett.* **189B**, 435 (1987); *Ann.Phys.***181**, 177, (1988).
- [14] E.Fradkin, C.von Reichenbach y F.A.Schaposnik, *Nucl.Phys.* **B316**, 710, (1989).
- [15] L.F.Abbott, *Nucl. Phys.* **B185**, 189 (1981).
- [16] t'Hooft y Veltman, *Nucl.Phys.***B44**, 189, (1972).
- [17] A.M.Polyakov, *Phys. Lett.* **103B**, 207 (1981).
- [18] H.Leutwyler y M.Shifman, *Nucl. Phys.* **B352**, 616 (1991).
- [19] M. Lüscher, *Ann. Phys. (N.Y.)* **142**, 359 (1982).
- [20] D.Boyanovsky y R.Holman, *Phys. Rev. D* **40**, 1964 (1989).
- [21] S.C.Lee, W.C.Su y Y.C.Kao, *Phys. Rev. D* **41**, 1241 (1990).
- [22] A.Capelli, D.Friedan y J.I.Latorre, *Nucl. Phys.* **B352**, 616 (1991).
- [23] F.David, *Phys. Lett.* **96B**, 371 (1980); *Comm. Math. Phys.* **81**, 149 (1981); S.Elitzur, *Nucl. Phys.* **B212**, 501 (1983).

Capítulo 6

Conclusiones

Como señalamos en la introducción, uno de los propósitos de esta tesis fue estudiar modelos invariantes conforme bidimensionales utilizando las herramientas de la Teoría Cuántica de Campos.

Gracias a la conexión existente entre los sistemas críticos bidimensionales (con transiciones de fase de segundo orden) y la Teoría Cuántica de Campos, nuestro estudio se abre a numerosas posibles aplicaciones en Mecánica Estadística.

En primer lugar estudiamos la implementación de vínculos en modelos fermiónicos con el objeto de obtener una realización explícita en términos de Teoría de Campos de los modelos del coset para teorías minimales unitarias.

En el marco de la integral funcional, logramos construir la función de partición de dichos modelos así como la de modelos con simetrías adicionales como supersimetría, simetría Z_3 , etc. (capítulo 3). La bosonización completa del modelo nos permitió calcular la carga central de Virasoro para estos modelos de manera simple. Esta versión bosonizada constituye el punto de partida del estudio de las propiedades conformes de la teoría y de la identificación de los operadores primarios (que, como dijimos, son los que describen las fluctuaciones de los parámetros de orden de la correspondiente teoría estadística) en términos de los campos de la teoría desacoplada.

La expresión obtenida para la carga central de la teoría de fermiones constreñidos correspondiente al modelo coset G/H con $G = SU(N)_k \times SU(N)_l$ y $H = SU(N)_{k+l}$ está dada por:

$$c = \frac{(N^2 - 1)kl(k + l + 2N)}{(k + l + N)(k + N)(l + N)}. \quad (6.1)$$

En particular si tomamos $G = SU(2)_k \times SU(2)_l$ y $H = SU(2)_{k+l}$ (que corresponde a tomar $N = 2$ y $l = 1$ en (6.1)) obtenemos la serie FQS:

$$c = 1 - \frac{6}{(k + 2)(k + 3)}. \quad (6.2)$$

De la expresión factorizada para la función de partición presentada en la sección 3.3 (ec.(3.3.11)), vemos que los campos de la teoría corresponden a fermiones, ghosts y bosones libres y a campos de WZW, de modo que los campos primarios de la teoría serán combinaciones adecuadas de dichos campos. La cuantificación BRST de la teoría seleccionará de entre las infinitas combinaciones posibles, las únicas físicamente aceptables, permitiendo así encontrar de manera unívoca los campos primarios.

Luego, en la segunda sección del capítulo 4, presentamos la formulación explícita de los modelos del coset anidados [1] en términos de teorías de fermiones constreñidos. Nuevamente, la bosonización de la teoría nos permitió calcular explícitamente la carga central, que aparece como la generalización natural de la expresión para la carga central de los modelos del coset de GKO. En este caso, encontramos una dependencia no esperada en los niveles de las distintas álgebras de Kac-Moody y en los distintos Casimires de los grupos de la cadena.

En el caso particular estudiado en la sección 4.2, que corresponde a un coset generalizado $G/H/L$ con $G = U(N \times k)$, $H = SU(k)$ y L un subgrupo de $SU(k)$, encontramos que la expresión para la carga central del modelo está dada por:

$$c_{G/H/L} = c_{G,1} - c_{H,k} + c_{L,k+2(C[H]-C[L])} \quad (6.3)$$

donde $c_{A,p}$ es la carga central de Virasoro asociada a la teoría con simetría A y nivel de Kac-Moody p y $C[A]$ es el Casimir cuadrático en la representación adjunta de A . Esta construcción se generaliza trivialmente a una cadena descendiente arbitraria de grupos.

Los modelos anidados resultan ser soluciones particulares de la Ecuación Maestra de Virasoro, y por ello la obtención de realizaciones explícitas de los mismos puede ser de interés en el estudio del espacio de soluciones.

En tercer lugar, estudiamos cómo se modifica una teoría de fermiones constreñida, como las que realizan la serie FQS, cuando se incluyen sectores topológicos. Mostramos que, debido a la existencia de modos cero del operador de Dirac en presencia de un background con topología, ciertas funciones de correlación devienen no-triviales en este caso. Esto modifica el conjunto de funciones de correlación de la teoría y por lo tanto modifica el conjunto de campos primarios.

En particular mostramos que funciones de correlación que incluyen un número adecuado de campos de la forma:

$$s_+(x) = \bar{\psi}_R^i(x)\psi_R^i(x), s_-(x) = \bar{\psi}_L^i(x)\psi_L^i(x), \quad (6.4)$$

que se anulan en el sector de topología cero, son no nulas en el sector con topología m .

Mostramos además que dicha función de correlación se factoriza de la siguiente manera:

$$F_{+-}(x_1^1, \dots, x_N^m, x_1'^1, \dots, x_N^{k-1}) = F_{+-fer}(x_1^1, \dots, x_N^m, x_1'^1, \dots, x_N^{k-1}) F_{+-bos}(x_1^1, \dots, x_N^m, x_1'^1, \dots, x_N^{k-1}) \quad (6.5)$$

El factor fermiónico $F_{+-fer}(x_1^1, \dots, x_N^m, x_1'^1, \dots, x_N^{k-1})$, puede ser calculado exactamente, mientras que el factor bosónico puede ser calculado en este caso utilizando las técnicas desarrolladas por Knizhnik y Zamolodchikov [2] para el cálculo de funciones de correlación en un modelo de WZW y en el caso en el que el campo de gauge tiene dinámica, utilizando teoría de perturbaciones.

Otro de los propósitos de esta tesis fue el de estudiar teorías de campos bidimensionales fuera del punto crítico. Para ello consideramos el modelo de Gross-Neveu Quiral, que tiene la particularidad de poseer dos puntos críticos no-triviales.

Realizamos el cálculo perturbativo a dos loops de la función C de Zamolodchikov utilizando teoría de perturbaciones en el marco de la Integral Funcional y mostramos que cumple con las propiedades básicas y en particular interpola entre los valores de la carga central correspondientes a los puntos críticos no-triviales del modelo.

Además mostramos que la función β a un loop se anula, lo cual está de acuerdo con el resultado obtenido para la función C a un loop que resulta ser constante a lo largo de una trayectoria del grupo de renormalización.

Cabe señalar que el cálculo realizado en este modelo particular puede ser aplicado al estudio de teorías minimales perturbadas con un operador relevante, partiendo de la formulación en términos de fermiones constreñidos presentada en el capítulo 3 de esta tesis. Este tema es de gran interés en la actualidad.

Bibliografía

- [1] E. Witten en: *Physics and Mathematics of Strings*, L. Brink et al eds. World Sci., 1990.
- [2] V. G. Knizhnik and A. B. Zamolodchikov, *Nucl. Phys.* **B247**, 83 (1984).