

UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PLATA

FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS

•

**FORMALISMOS DUALES ESPACIO-FASE
EN OPTICA**

T E S I S

para optar al título de Doctor en Física

Walter Daniel Furlan

1988

Esta Tesis ha sido desarrollada en el Centro de Investigaciones Opticas (CIOp), centro dependiente de la Comisión de Investigaciones Científicas de la Provincia de Buenos Aires.

Durante la ejecución de la misma el autor se ha desempeñado como becario de Estudio y Perfeccionamiento de la Comisión de Investigaciones Científicas de la Provincia de Buenos Aires.

Existen cosas en la vida de un hombre que este debe hacer por si solo. Esta no es una de ellas. Por lo tanto debo agradecer a todas aquellas personas, que de una u otra manera, han colaborado para que esta Tesis fuese posible

A mis padres, por haber respetado y avalado mi elección de una carrera universitaria.

A mi esposa por haberme apoyado en todos los momentos difíciles.

A los Dres. Mario Garavaglia y Enrique Sicre, directores de esta Tesis, por su confianza y por haberme aceptado como tesista, ayudadome a resolver el primer gran dilema con el que me encontré en mi vida profesional.

Al Dr. Héctor Rabal por todas las "manos" que me dió a lo largo de estos años.

A la Lic. Susana Grosz con quien compartimos muchas de las tareas, cuyos resultados se presentan en esta Tesis.

A la Lic. Cecilia Colautti por su paciencia, en la lectura y corrección del manuscrito original.

A todos los integrantes del Grupo de Optica y miembros del CIOp en general, que supieron crear el clima de compañerismo, sin el cual todo hubiese sido mucho más difícil.

INDICE

	Pag.
INTRODUCCION GENERAL.....	vii
CAPITULO I: INTRODUCCION A LOS FORMALISMOS ESPACIO-FASE	
I-1 INTRODUCCION.....	2
I-2 LA FUNCION DE DISTRIBUCION DE WIGNER (WDF).....	2
I-2-1 EJEMPLOS DE LA WDF.....	4
a) Fuente puntual.....	4
b) Onda plana.....	5
c) Señal de fase cuadrática.....	6
d) Señal de fase de variación suave.....	6
I-2-2 PROPIEDADES DE LA WDF.....	7
a) Fórmulas inversas.....	7
b) La WDF función real.....	8
c) Limitación en espacio y frecuencia.....	8
d) Corrimientos en espacio y frecuencia.....	9
e) Algunas igualdades y desigualdades.....	9
f) Magnitudes radiométricas.....	12
I-2-3 PROPAGACION DE LA WDF EN SISTEMAS LINEALES.....	13
a) Lente delgada.....	15
b) Espacio libre en la aproximación de Fresnel.....	16
c) Sistema transformador de Fourier.....	17

I-3 LA FUNCION AMBIGÜEDAD (AF).....	18
I-3-1 PROPIEDADES DE LA AF.....	20
a) Fórmulas inversas.....	20
b) Normalización.....	21
c) Propiedad auto-recíproca.....	22
d) La AF en la visualización de la Función de Transferencia Optica (OTF).....	22
e) Relación con la WDF.....	24
I-2-3 PROPAGACION DE LA AF EN SISTEMAS LINEALES.....	25
I-4 EL ESPECTROGRAMA LOCAL (LS).....	26
I-5 EL ESPECTROGRAMA COMPLEJO (CS).....	30
I-5-1 RELACION DEL CS CON LA AF Y LA WDF.....	32
I-6 CONCLUSION.....	33
REFERENCIAS DEL CAPITULO I	34

CAPITULO II: GENERACION OPTICA DE LAS FUNCIONES ESPACIO FASE

II-1 INTRODUCCION.....	38
II-2 VISUALIZACION DE LAS FUNCIONES ESPACIO-FASE DE SEÑALES UNIDIMENSIONALES.....	39
II-3 PSEUDOCOLOREADO DEL LS.....	49
II-4 PROCESADOR OPTICO SIN LENTES PARA LA VISUALIZACION DE SEÑALES 1-D.....	53
II-5 GENERACION DE LAS FUNCIONES E-F PARA FUNCIONES 2-D..	64
REFERENCIAS DEL CAPITULO II.....	66

CAPITULO III: MODELOS CUASI GEOMETRICOS PARA EL ESTUDIO
DE LA DIFRACCION POR OBJETOS 3-D

III-1 INTRODUCCION.....	69
III-2 DIFRACCION DE FRAUNHOFER POR OBJETOS 3-D: APROXIMACION CUASI-GEOMETRICA (QG).....	71
III-3 METODO CUASI-GEOMETRICO MODIFICADO (QGM).....	75
III-4 RELACION ENTRE LAS REPRESENTACIONES ESPACIO-FASE Y EL METODO QGM.....	80
REFERENCIAS DEL CAPITULO III.....	87

CAPITULO IV: APLICACION DE LOS FORMALISMOS ESPACIO-FASE
AL PROCESAMIENTO OPTICO DE IMAGENES

IV-1 INTRODUCCION.....	89
IV-2 REPRESENTACION DE LA RAZON DE STREHL EN EL E-F.....	93
IV-2-1 CONTENIDO DE FRECUENCIAS DE LA RAZON DE STREHL.....	93
IV-3 FORMULACION DE LA RAZON DE STREHL BASADA EN LA WDF..	99
IV-3-1 RAZON DE STREHL PARA EL DESENFQUE.....	100
IV-3-2 CASO BIDIMENSIONAL: ABERRACION ESFERICA.....	104
IV-3-3 AMPLITUD DE LOS RAYOS A PARTIR DE LA OTF....	106
REFERENCIAS DEL CAPITULO IV.....	108

CAPITULO V: CONCLUSIONES.....	110
-------------------------------	-----

INTRODUCCION GENERAL

En las últimas décadas, los puntos en común entre la óptica, la teoría de la información y la teoría de las comunicaciones se han ido acrecentando. Esta afinidad es comprensible, entre otras razones, pues tanto los sistemas de comunicaciones como los sistemas ópticos están diseñados para detectar y procesar información. En el primer caso, en general la información es de naturaleza temporal, mientras que en el segundo caso es de naturaleza espacial. Esta es una diferencia puramente formal, ya que ambos sistemas pueden ser descriptos por el mismo formalismo matemático, esto es a través del Análisis de Fourier.

La razón fundamental de la matemática similar, entre ambas disciplinas, no es solamente el interés común por la información, sino que además, en general, tanto los sistemas ópticos como los de comunicaciones, poseen en común un conjunto de propiedades básicas tales como linealidad e invariancia. Estas dos propiedades permiten que un sistema sea tratado sencillamente usando técnicas del análisis de frecuencias. Para el caso de un sistema óptico, el análisis del mismo se hace en términos de su respuesta en frecuencias espaciales.

Dentro de este marco de semejanzas, no es de extrañar que

algunas de las funciones usadas a lo largo de este trabajo, hayan sido definidas originariamente en la teoría de sistemas de comunicaciones.

El formalismo de la transformada de Fourier permite describir a una función n-dimensional $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ por su espectro n-dimensional $F(u_1, u_2, \dots, u_n)$:

$$F(\vec{u}) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f(\vec{x}) \exp\{-2\pi i \vec{x} \cdot \vec{u}\} d\vec{x}$$

Este espectro da una distribución global de la energía de la señal como función de la frecuencia, es decir, tiene en cuenta a las frecuencias espaciales que se encuentran en toda la señal.

En ciertos casos es deseable tener una distribución local de la energía de la señal como función de la frecuencia, vale decir, considerar las frecuencias espaciales localizadas en una pequeña región del espacio. En esta consideración está implícita una representación $2n$ -dimensional de la señal en un espacio (\vec{x}, \vec{u}) , ya que implica una manifestación dual espacio-fase de la función original. Un ejemplo de aplicabilidad de esta representación puede hallarse en óptica geométrica, donde la señal está descripta por las direcciones (es decir frecuencias espaciales) de los rayos, que están presentes en un punto dado (coordenadas correspondientes).

Las ventajas que ofrecen las representaciones espectrales locales sobre las globales, pueden entenderse mejor pensando en la

música y en su particular forma de escritura. Como cualquier evento físico una pieza musical puede ser descripta matemáticamente de varias formas; por ejemplo, puede graficarse a la presión de aire $U(t)$ como función del tiempo. Desde luego, un compositor no piensa en su música como un evento físico, sino que, lo que él quiere es prescribir la frecuencia exacta en el intervalo exacto de una nota (aunque el principio de incerteza le imponga lo contrario). Por una cuestión puramente pragmática el compositor no escribe una $U(t)$, solo la compañía discográfica, es la que produce y vende una $U(t)$. Por otra parte es claro que si no se preocupa por escribir una $U(t)$, menos aún lo hará por su transformada de Fourier; él sabe que ésta es muy útil para resolver ciertos problemas matemáticos y físicos, pero desgraciadamente da una representación ilegible de una pieza musical.

Lo que un compositor efectivamente hace (o piensa que hace) es algo completamente diferente de especificar una función o su transformada de Fourier. El describe a su música como un conjunto de símbolos en un pentagrama, construyendo una función de dos variables (tiempo (t) y frecuencia temporal (u)) que describe las frecuencias presentes en cada instante de tiempo. Su forma de especificar al tiempo es un poco diferente de como lo haría un matemático, pero ciertamente que líneas verticales en un pentagrama denotan t constante y líneas horizontales denotan u constante. La astucia del compositor se manifiesta en dar una

representación fácilmente entendible de su música utilizando dos variables duales, tiempo y frecuencia temporal.

Como en el caso de la música, las representaciones espectrales locales, también conocidas como representaciones espacio-fase por analogía con la mecánica (donde la posición y la cantidad de movimiento de una partícula se dan simultáneamente en ese espacio), son a veces la forma más sencilla y práctica de describir ciertos fenómenos. En el caso de la óptica, los formalismos espacio-fase, han concentrado en los últimos años la atención de los investigadores en este campo, debido a que dan una representación de la información, que es intermedia, entre una puramente en función de las coordenadas espaciales y una representación puramente en función de las coordenadas frecuencias espaciales. Este tipo de descripción conduce a múltiples aplicaciones potenciales, tanto teóricas, como prácticas, en la óptica.

Las representaciones espacio-fase más usadas en la óptica moderna son: la Función de Distribución de Wigner, la Función Ambigüedad de Woodward, el Espectrograma Complejo, y su módulo al cuadrado, el Espectrograma Local. Algunas de ellas fueron adoptadas por la óptica de otras disciplinas, como la Función de Distribución de Wigner de la mecánica cuántica, y la Función Ambigüedad de la teoría de radar.

El objetivo de esta Tesis es el estudio de nuevas aplicaciones de los formalismos espacio-fase en la óptica. En el capítulo I se presenta una descripción de los formalismos a emplear, detallándose sus propiedades y las relaciones matemáticas entre los mismos. En el capítulo II, se describen métodos ópticos para la generación de las funciones espacio-fase. Se discuten distintos procesadores ópticos para la visualización de estas funciones y se detallan además, los aspectos originales derivados de este estudio. En el capítulo III, se analizan los modelos ópticos cuasi-geométricos y su aplicación al estudio de la difracción por objetos tridimensionales (3-D), se establece una relación entre la amplitud de campo de la difracción producida por dichos objetos, y las distintas representaciones espacio-fase. De este modo, las propiedades de estas últimas pueden ser aplicadas al estudio del comportamiento del campo difractado por objetos tridimensionales. En el capítulo IV, se propone una relación entre las funciones características de sistemas ópticos como ser el desenfoque y la razón de Strehl (normalmente tratadas en términos de la óptica de Fourier) y las funciones Espacio-Fase, algunas de las cuales proveen un nexo entre la óptica de Fourier y la óptica geométrica. Finalmente, en el capítulo V, se enuncian las conclusiones generales del trabajo de Tesis.

CAPITULO I

INTRODUCCION A LOS FORMALISMOS ESPACIO-FASE

I-1 INTRODUCCION:

Las representaciones Espacio-Fase (E-F) como la Función de Distribución de Wigner (WDF), la Función Ambigüedad (AF), el Espectrograma Complejo (CS) y el Espectrograma Local (LS), han encontrado en los últimos años diversas aplicaciones en la óptica. Entre otras cabe mencionar: análisis del fenómeno de la difracción y teoría de sistemas ópticos/1,2/, análisis de señales 1-D/3/, teoría de coherencia/4,5/, formación de imágenes/6,7/ y teoría de aberraciones/8,9/.

En este capítulo se dan las definiciones de las funciones E-F antes mencionadas y se enuncian sus propiedades más importantes, estableciéndose además las relaciones matemáticas que existen entre ellas.

I-2 LA FUNCION DE DISTRIBUCION DE WIGNER

El concepto de WDF fue introducido en 1932 por Wigner/10/ en el contexto de la mecánica cuántica. De Bruijn/11/ hizo una revisión histórica de la WDF y dió también una base matemática para este nuevo tipo de transformaciones. En 1978 fue usado por Bastiaans/2/ para el análisis de señales y sistemas ópticos, y desde entonces se ha usado extensivamente en el tratamiento de diversos tópicos de la óptica moderna.

Se define a la WDF de una función $f(x)$ como:

$$W(x,u) = \int f(x+x'/2) f^*(x-x'/2) \exp(-2\pi i u x') dx', \quad (I-1)$$

donde (*) indica complejo conjugado.

(Nota: todas las integrales poseen límites de integración entre $-\infty$ y $+\infty$, a menos que explícitamente se especifique lo contrario).

Existe una definición equivalente empleando la transformada de Fourier de la función $f(x)$:

$$W(x,u) = \int F(u+u'/2) F^*(u-u'/2) \exp(2\pi i x u') du'. \quad (I-2)$$

De la comparación entre (I-1) y (I-2) surge que: la WDF del espectro de una dada función $f(x)$ puede determinarse simplemente de la misma función intercambiando las variables frecuencia espacial (u) y coordenada (x), teniendo en cuenta el cambio de signo en el exponente. Esto ilustra la simetría entre ambas definiciones (I-1) y (I-2).

La WDF representa a la función en espacio y frecuencia simultáneamente, siendo entonces una representación intermedia entre una puramente espacial $f(x)$ y una puramente espectral $F(u)$. Para una señal 1-D, la WDF definida en el espacio-fase, representa a la variable espacial en un eje y a la energía o al poder espectral (distribución de intensidad del contenido de frecuencias) en el otro eje. Esto es, la WDF de una señal 1-D

puede interpretarse como la distribución de la energía de la señal en el espacio y en la frecuencia espacial al mismo tiempo. En consecuencia, un "display" 2-D de la WDF, daría la distribución de energía de la señal localizada en el plano (x,u) . Sin embargo esta interpretación no es siempre cierta ya que como se verá mas adelante la WDF no siempre es no negativa.

La descripción de la señal en espacio-frecuencia se asemeja mucho al concepto de rayo de la óptica geométrica donde la posición y dirección de un rayo, también están dados simultaneamente. De alguna forma se puede considerar a $W(x,u)$ como la "amplitud" de un rayo que pasa por un punto x (posición), y con una dada frecuencia espacial u (dirección).

En la siguiente sección se darán algunos ejemplos que ilustran el concepto de la WDF.

I-2-1 EJEMPLOS DE LA WDF

(a) Fuente puntual

La WDF de una fuente puntual localizada en $x=x_0$:

$$f(x) = \delta(x-x_0), \quad (I-3)$$

calculada a partir de la definición (I-1), resulta:

$$W(x, u) = \delta(x-x_0), \quad (I-4)$$

es decir en un único punto $x=x_0$ todas las frecuencias están presentes, mientras no existan contribuciones de otros puntos. En efecto esto es lo que debería esperarse del espectro local de frecuencias de un único punto fuente.

(b) Onda plana

Considérese una onda plana definida en el dominio espacial por:

$$f(x) = \exp(iu_0x), \quad (I-5)$$

o equivalentemente en el dominio de las frecuencias espaciales por:

$$F(u) = \delta(u-u_0)2\pi \quad (I-6)$$

Una onda plana y un punto fuente son funciones duales entre si; es decir la transformada de Fourier de una función tiene la misma forma que la otra función. Debido a esta dualidad, la WDF de una onda plana es la misma que la de una fuente puntual pero rotada un ángulo de 90° en el espacio fase (x, u) . Esto es :

$$W(x, u) = \delta(u - u_0) 2\pi \quad (\text{I-7})$$

(c) Señal de fase cuadrática

Una señal de fase cuadrática tal como:

$$f(x) = \exp(i\alpha x^2/2), \quad (\text{I-8})$$

representa, al menos para valores pequeños de x , una onda esférica con curvatura igual a α . La WDF para esa señal es:

$$W(x, u) = 2\pi \delta(u - \alpha x). \quad (\text{I-9})$$

De esta última se concluye que en cada punto x se encuentra presente solo una frecuencia $u = \alpha x$. Esto corresponde exactamente a una representación de la onda esférica en términos de rayos de la óptica geométrica.

(d) Señal de fase de variación suave

La WDF de una señal de fase de variación suave:

$$f(x) = \exp(i\phi(x)), \quad (\text{I-10})$$

donde $\phi(x)$ es una función suficientemente suave de x , toma la

siguiente forma

$$W(x,u) = 2\pi \delta(u-d\phi/dx). \quad (I-11)$$

Nótese, que en cada punto x solo una frecuencia $u=d\phi/dx$ está presente. Además, la ecuación (I-11) es totalmente exacta cuando $\phi(x)$ varía lineal o cuadráticamente con x (ejemplos I-2-2 y I-2-3). Esta aproximación es útil en la teoría geométrica de aberraciones/9,12/ y en el tratamiento de las transformaciones geométricas de Bryngdahl/13,14/.

I-2-2 PROPIEDADES DE LA WDF.

En esta sección se enunciarán las propiedades mas importantes de la WDF. Otras propiedades pueden hallarse en las referencias /15/ y /16/

(a) Fórmulas inversas

Las fórmulas inversas de las (I-1) y (I-2) son respectivamente:

$$f(x_1) f^*(x_2) = \int W[1/2(x_1+x_2), u] \exp\{iu(x_1-x_2)\} du, \quad (I-12)$$

y

$$F(u_1) F^*(u_2) = \int W[x, 1/2(u_1+u_2)] \exp\{ix(u_1-u_2)\} dx. \quad (I-13)$$

Estas relaciones, imponen las condiciones que una función de dos variables debe cumplir para ser una WDF. Una función de x y u es una WDF sí y solo sí, las integrales en las expresiones (I-12) y (I-13) son separables. De las expresiones anteriores se concluye que tanto la señal $f(x)$ como su transformada de Fourier $F(u)$ pueden reconstruirse a partir de su WDF, a menos de un factor de fase constante.

(b) La WDF función real

De las definiciones (I-1) y (I-2) se deduce inmediatamente que la WDF es real (por ser la transformada de Fourier de la función hermitica $(f(x+x'/2).f^*(x-x'/2))$). Este hecho resulta conveniente, en la producción óptica de la WDF, para los dispositivos de detección (dentro del procesamiento de señales); ya que no se necesitan sistemas sofisticados para detectar la WDF de cualquier señal. Desafortunadamente la WDF no es necesariamente no-negativa, lo cual prohíbe su interpretación directa como función de densidad de energía.

(c) Limitación en espacio y frecuencia

De las definiciones dadas se deduce que si una función $f(x)$ está limitada dentro de un cierto intervalo espacial,

entonces, su WDF estará limitada en el mismo intervalo. Similarmente, si el espectro de frecuencias $F(u)$ se limita a un dado intervalo de frecuencias, la WDF se limitará dentro del mismo intervalo. Esta es una propiedad importante de la WDF ya que otras representaciones E-F como la AF y el LS no la satisfacen.

(d) Corrimientos en espacio y frecuencia

De la definición se infiere que un corrimiento espacial de la función $f(x)$ conduce directamente al mismo corrimiento de la WDF.

$$f(x-x_0) \rightarrow W(x-x_0, u)$$

Lo mismo sucede para corrimientos en el espectro de frecuencias de la función.

$$F(u-u_0) \rightarrow W(x, u-u_0)$$

Esta propiedad provee un método para estimar corrimientos, tanto en espacio como en frecuencias, de la señal por medio de la observación directa de su WDF.

(e) Algunas igualdades y desigualdades

De la relación:

$$\iint W(x,u) dx du = \int |f(x)|^2 dx = \int |F(u)|^2 du, \quad (I-14)$$

que se deduce inmediatamente de la definición (I-1) se concluye que la integral de la WDF en el plano (x,u) representa la energía total de la señal. El teorema de Parseval está implícito en la relación (I-14)

Una relación importante entre la WDF de dos señales y las señales en sí mismas, ha sido formulada por Moyal/15/; ésta es:

$$\begin{aligned} \iint W_1(x,u) W_2(x,u) dx du &= \left| \int f_1(x) f_2^*(x) dx \right|^2 \\ &= \left| \int F_1(u) F_2^*(u) du \right|^2. \end{aligned} \quad (I-15)$$

Como una aplicación de esta propiedad se verá mas adelante, que la convolución de dos WDF arbitrarias da como resultado el LS.

Las ecuaciones (I-14) y (I-15), junto con la desigualdad de Schwartz conducen a la relación

$$\iint W_1(x,u) W_2(x,u) dx du \leq \left[\iint W_1(x,u) dx du \right] \left[\iint W_2(x,u) dx du \right] \quad (I-16)$$

que puede ser considerada el equivalente a la desigualdad de Schwartz para la WDF. Otra desigualdad importante formulada por De Bruijn/16/ es la siguiente

$$\iint (2\pi x^2/\sigma + \sigma u^2/2\pi)^n W(x, u) dxdu \geq n! \iint W(x, u) dxdu \quad (I-17)$$

donde σ es una constante positiva y n es un entero no-negativo. Para el caso especial $n=1$ esta desigualdad se reduce a:

$$(2\pi/\sigma) \langle x^2 \rangle + (\sigma/2\pi) \langle u^2 \rangle \geq 1 \quad (I-18)$$

donde,

$$\langle x^2 \rangle = \frac{\iint x^2 W(x, u) dxdu}{\iint W(x, u) dxdu} \quad (I-19)$$

y

$$\langle u^2 \rangle = \frac{\iint u^2 W(x, u) dxdu}{\iint W(x, u) dxdu} \quad (I-20)$$

De la relación (I-17) puede deducirse la desigualdad de Heisemberg/17/:

$$\langle x^2 \rangle \langle u^2 \rangle \geq 1/4 \quad (I-21)$$

Se puede pensar, que la relación (I-21) expresa el hecho que la WDF no puede ser concentrada en un punto.

(f) Magnitudes radiométricas

Diversas integrales de la WDF pueden ser consideradas como magnitudes radiométricas. La integral en la variable u es proporcional a la intensidad de la señal

$$\int W(x,u) du = |f(x)|^2, \quad (I-22)$$

mientras que la integral sobre la variable espacial x , es proporcional a la intensidad radiante/18/. Donde la constante de proporcionalidad es: $\cos^2\alpha$ y α es el ángulo de observación.

$$\int W(x,u) dx = |F(u)|^2. \quad (I-23)$$

La integral

$$J_z = 1/2\pi \int \sqrt{k^2 - u^2} W(x,u) du, \quad (I-24)$$

(donde $k=2\pi/\lambda$) es proporcional a la emitancia radiante/18/. La magnitud (I-24) combinada con:

$$J_x = 1/2\pi \int u W(x,u) du, \quad (I-25)$$

puede usarse para definir un vector 2-D $\vec{J}=(J_x, J_z)$, que es

proporcional al vector geométrico de flujo/19/.

I-2-3 PROPAGACION DE LA WDF EN SISTEMAS LINEALES/20/

En esta sección se considerará la propagación de la WDF a través de un sistema óptico invariante temporalmente. Este tipo de sistemas, que transforman una señal en el plano de entrada (x_1), en otra señal en el plano de salida (x_2), puede representarse de cuatro formas diferentes, dependiendo de si la señal es descripta en el dominio espacial o en el dominio de las frecuencias espaciales. Las relaciones entrada-salida equivalentes son:

$$f(x_2) = \int g(x_2, x_1) f_1(x_1) dx_1 \quad (a)$$

$$F(u_2) = \int h(u_2, u_1) F_1(u_1) du_1 \quad (b)$$

$$F(u_2) = \int t(u_2, x_1) f_1(x_1) dx_1 \quad (c)$$

$$f(x_2) = \int \hat{t}(x_2, u_1) F_1(u_1) du_1 \quad (d)$$

(I-26)

La relación (I-26.a), es la representación usual de la transformación en el dominio espacial por medio de la función de punto extendido o función respuesta impulsiva (PSF) $g(x_2, x_1)$. La PSF es la respuesta del sistema en el dominio espacial a una señal de entrada $f_1(x) = \delta(x - x_1)$. La fórmula (I-26.b) es una

representación similar en el dominio de las frecuencias espaciales donde la función $h(u, u_1)$ es la respuesta del sistema a una señal de entrada $F_1(u) = \delta(u - u_1)$. Ya que esta última representa a una onda plana, se llama función de onda extendida ("wave spread function"). Las relaciones (I-23.c) y (I-23.d) son representaciones híbridas E-F del sistema ya que la señal de entrada y la de salida están descriptas en dominios diferentes. Estas reciben el nombre de funciones extendidas híbridas ("hybrid spread functions").

Existe una similitud entre las funciones del sistema: g, h, t y \hat{t} , y las cuatro funciones características de Hamilton, que describen sistemas ópticos geométricos. Para la WDF, en cambio, hay un solo sistema de representación donde la señal puede ser descripta a la entrada y a la salida de un sistema óptico lineal.

Combinando las ecuaciones (I-26) con la definición de la WDF resulta:

$$W_0(x_0, u_0) = \iint K(x_0, u_0; x_1, u_1) W_1(x_1, u_1) dx_1 du_1, \quad (I-27)$$

en la cual las WDF de las señales de entrada y salida están relacionadas mediante una integral de superposición. La función $K(x_0, u_0; x_1, u_1)$ está completamente determinada por el sistema y puede expresarse por las funciones (I-26). Por ejemplo:

$$K(x_0, u_0; x_1, u_1) = \iint g(x_0 + x_0'/2, x_1 + x_1'/2) g^*(x_0 - x_0'/2, x_1 - x_1'/2) \\ \times \exp\{-2\pi i(x_0' u_0 - x_1' u_1)\} dx_0' dx_1' \quad (I-28)$$

Existen además expresiones similares para las otras funciones del sistema/20/.

La ecuación (I-28) puede considerarse como la definición de una doble WDF; por lo tanto la función $K(x_0, u_0, x_1, u_1)$ es la respuesta del sistema en el dominio E-F a una señal de entrada $F_i(x, u) = \delta(x-x_1) \delta(u-u_1)$, ésto estrictamente en un sentido formal, ya que no existe una señal que origine una distribución $\delta(x-x_1) \delta(u-u_1)$. A este respecto, esta es una WDF algo artificial, que podría considerarse como una representación simbólica de una señal que está más o menos concentrada alrededor del punto (x, u) , sujeta a las restricciones del principio de incerteza de Heisemberg. No obstante, esta señal de entrada podría considerarse como un único rayo de entrada al sistema en el punto x_1 con una frecuencia u_1 y por lo tanto podría llamarse función de rayo extendido ("ray spread function" (RSF))/20/.

En las siguientes subsecciones se aplicará el concepto de RSF a algunos sistemas ópticos elementales.

(a) Lente delgada

Una lente delgada de distancia focal f puede ser descripta por la PSF:

$$g(x_0, x_1) = \exp(-ikx_0^2/2f) \delta(x_0 - x_1), \quad (I-29)$$

mientras que la RSF toma la siguiente forma:

$$K(x_0, u_0, x_1, u_1) = \delta(x_1 - x_0) \delta(u_1 - u_0 - kx_0/f). \quad (I-30)$$

Y la relación entre la WDF de entrada y la de salida para una lente delgada es:

$$W_0(x, u) = W_1(x, u + kx/f). \quad (I-31)$$

La ecuación (I-30) representa exactamente el comportamiento óptico geométrico de una lente delgada. Si un rayo incide sobre una lente delgada éste saldrá de la lente desde la misma posición pero su dirección cambiará de acuerdo a la posición donde se encuentre.

(b) Espacio libre en la aproximación de Fresnel

La PSF de una sección del espacio libre de longitud z en la aproximación de Fresnel es:

$$g(x_0, x_1) = (k/2\pi iz)^{1/2} \exp\{-ik/2z(x_0 - x_1)^2\}, \quad (I-32)$$

y la RSF:

$$K(x_0, u_0, x_1, u_1) = \delta(x_1 - x_0 + zu_0/k) \delta(u_1 - u_0). \quad (I-33)$$

De la comparación de (I-33) con (I-30), se concluye que el comportamiento espacial de un sistema es similar al comportamiento en frecuencias espaciales del otro. Es decir podría argumentarse que ambos sistemas son duales entre si. La relación entrada-salida de la WDF para el espacio libre se reduce a:

$$W_0(x, u) = W_1(x - zu/k, u). \quad (I-34)$$

La relación (I-33) representa nuevamente el comportamiento óptico geométrico de una sección del espacio libre. Si un rayo se propaga en el espacio libre su dirección permanece constante pero su posición cambia de acuerdo a la dirección que este tenga.

(c) Sistema transformador de Fourier

Para un sistema transformador de Fourier la PSF es:

$$g(x_0, x_1) = (\beta/2\pi i)^{1/2} \exp\{-i\beta(x_0 \cdot x_1)\}, \quad (I-35)$$

(donde β es una constante) la RSF toma la forma :

$$K(x_0, u_0, x_1, u_1) = \delta(x_1 + u_0/\beta) \delta(u_1 - \beta u_0), \quad (I-36)$$

y la relación entrada-salida de la WDF es:

$$W_0(x, u) = W_0(-u/\beta, \beta x). \quad (I-37)$$

De la cual se infiere que los dominios espacio-frecuencia espacial, estan intercambiados, tal como debe esperarse de un transformador de Fourier.

Nota: Los resultados obtenidos para luz coherente pueden aplicarse también a luz parcialmente coherente/4/. Esto es reemplazando, en la definición de la WDF al producto $f(x+x'/2) \cdot f^*(x-x'/2)$ por el "Mutual power spectrum" (MPS)/17/.

I-3 LA FUNCION AMBIGÜEDAD

La AF definida para aplicaciones en radar por Woodward/21/, fue introducida en la óptica por Papoulis/1/ para el tratamiento de la teoría de la difracción de Fresnel y de la óptica de Fourier, en condiciones de iluminación coherente. Posteriormente Guigay/6/ hizo extensivo el tratamiento para luz parcialmente coherente, mostrando que, para este tipo de iluminación, la intensidad mutua y la AF son representaciones equivalentes.

La definición original de la AF en el dominio temporal para una función compleja general $f(t)$ es:

$$A(\zeta, \nu) = \int f_1(t) f_2^*(t-\zeta) \exp(-2\pi i \nu t) dt. \quad (I-38)$$

Esta se utiliza en teoría de radar para determinar la velocidad de un blanco móvil y la distancia al mismo. Típicamente, una de las dos funciones (f_1), es la función que modula la onda portadora generada en la estación emisora, mientras que la otra (f_2), es la señal recibida; la cual, además de tener un ruido aditivo, posee un atraso temporal y un corrimiento Doppler. El factor de fase en la ecuación (I-38), puede interpretarse como una herramienta para detectar la velocidad del móvil, ya que el valor correcto de la frecuencia, llámese ν_1 , anulará el mismo factor presente en f_2 causado por el corrimiento Doppler. La integral evaluada en $\nu = \nu_1$, es entonces una operación de correlación entre dos funciones similares. Esta, es útil para determinar la distancia al blanco por medio del atraso temporal ζ_1 , y da un pico de amplitud en el punto (ζ_1, ν_1) de la función Ambigüedad.

La AF de una dada señal $f(x)$ puede ser definida de una forma equivalente, mas simétrica que la (I-38), de la siguiente forma:

$$A(x, u) = \int f(x+x'/2) f^*(x-x'/2) \exp(-2\pi i u x) dx. \quad (I-39)$$

Analogamente a lo que ocurría con la WDF existe una definición equivalente empleando la transformada de Fourier de la función $f(x)$:

$$A(x, u) = \int F(u+u'/2) F^*(u-u'/2) \exp(2\pi i u x) du. \quad (I-40)$$

La AF es también una representación intermedia de la señal, entre una puramente espacial $f(x)$, y una puramente espectral $F(u)$. Para una señal 1-D, la AF definida en el E-F, representa a la auto-correlación en un eje, mientras que en el otro eje representa a la energía o poder espectral de la señal.

En óptica la AF ha tenido múltiples aplicaciones, entre otras en: formación de imágenes/6,7,22/, teoría de OTF/18/ y teoría de sistemas ópticos bilineales/23/

I-3-1 PROPIEDADES DE LA AF

En esta sección se enuncian las propiedades más importantes de la AF, otras propiedades podrán hallarse en la referencia /24/.

(a) Fórmulas inversas

De las ecuaciones (I-39) y (I-40) se deducen las siguientes igualdades:

$$f(x_1) f^*(x_2) = \int A(x_1 - x_2, u) \exp\{iu(x_1 + x_2)/2\} du, \quad (I-41)$$

$$F(u_1) F^*(x_2) = \int A(x, u_1 - u_2) \exp\{-ix(u_1 - u_2)/2\} dx. \quad (I-42)$$

De estas últimas se concluye que tanto $f(x)$ como su transformada de Fourier pueden determinarse unívocamente a partir de la AF, a menos de una constante. Nótese que una función arbitraria $A(x, u)$, no es necesariamente la AF de alguna función $f(x)$. Esta última debe cumplir la condición de ser separable como en los términos de la derecha, de las igualdades (I-41) y (I-42).

(b) Normalización

La AF es en general una función compleja. Para evitar llegar a conclusiones controvertidas respecto de las consideraciones energéticas, es conveniente, en ciertos casos, definirla de la siguiente forma:

$$A'(x, u) = (1/I) \int f(x+x'/2) f^*(x-x'/2) \exp(-2\pi i u x) dx \quad (I-43)$$

donde

$$I = \int |f(x')|^2 dx', \quad (I-44)$$

es la energía de $f(x)$. Por lo tanto, de (I-43) se obtiene:

$$A'(0,0) = (1/I) \int f(x) f^*(x) dx = 1, \quad (I-45)$$

y con la fórmula de Parseval puede demostrarse que:

$$\iint |A'(x,u)|^2 dx du = 1. \quad (I-46)$$

De las ecuaciones (I-45) y (I-46) se deduce:

$$\iint |A'(x,u)|^2 dx du = |A'(0,0)|^2 = 1, \quad (I-47)$$

que establece que el volumen debajo de la superficie de la AF es independiente de la señal.

(c) Propiedad auto-recíproca

$$\iint |A(v,y)|^2 \exp\{2\pi i(vx-uy)\} dv dy = |A(x,u)|^2. \quad (I-48)$$

Esta propiedad establece que la superficie de la AF, $|A|^2$, es su propia transformada de Fourier.

(d) La AF en la visualización de la Función de Transferencia
Optica OTF/8/

La OTF de un sistema óptico, cuya función pupila generalizada es $Q(v)$, se define como:

$$H(u) = \frac{\int Q(v+u/2) Q^*(v-u/2) dv}{\int |Q(v)|^2 dv} , \quad (I-49)$$

donde u y v son frecuencias espaciales normalizadas. Para un sistema que sólo tenga errores de enfoque la función pupila generalizada es:

$$Q(u) = P(u) \exp(-ikw_{20} u^2), \quad (I-50)$$

k es el número de onda, w_{20} el coeficiente de desenfoque y P es la función pupila definida como:

$$P(u) = \begin{cases} 1 & \text{si } u < 1 \\ 0 & \text{si } u > 1 \end{cases} \quad (I-51)$$

La ec.(I-49) puede escribirse como:

$$H(u, w_{20}) = 0.5 \int P(v+u/2) P^*(v-u/2) \exp\{2\pi i (2w_{20}/\lambda) uv\} dv, \quad (I-52)$$

o bien de la definición de la AF,

$$H(u, w_{20}) = A(u, 2uw_{20}/\lambda) . \quad (I-53)$$

Es decir que el gráfico 2-D de la AF $A(u,y)$, asociado a la función pupila $P(u)$ contiene (a lo largo de las rectas $y=2uw_2/\lambda$), la OTF del sistema para cada valor del desenfoque w_2

(e) Relación con la WDF

La AF y la WDF para una misma señal están relacionadas por una doble transformada de Fourier de la siguiente forma:

$$A(v,y) = \iint W(x,u) \exp \{ -2\pi i(vx-uy) \} dx du. \quad (I-54)$$

Esta propiedad será útil en el capítulo II, donde se describen distintos procesadores ópticos para generar las funciones E-F. En virtud de (I-54), todos los procesadores que se utilizan para generar la AF, también pueden ser adaptados para generar la WDF y reciprocamente.

Utilizando a la ecuación (I-54), la relación (I-47) puede extenderse para mostrar que/24/:

$$\iint |W(x,u)|^2 dx du = \iint |A(v,y)|^2 dv dy, \quad (I-55)$$

es decir que el volumen debajo de la superficie de la WDF, también es independiente de la forma de la función generatriz.

I-3-2 PROPAGACION DE LA AF EN SISTEMAS LINEALES

Análogamente a lo que ocurría con la WDF. La AF de una señal a la salida de un sistema óptico puede relacionarse con la AF a la entrada del mismo, si se conoce la PSF del sistema. Algunos ejemplos son los siguientes:

Para una lente delgada cuya PSF está representada por la ecuación (I-29), se verifica la siguiente relación entre la AF a la entrada (A_i) y la AF a la salida del mismo (A_o).

$$A_o(x, u) = A_i(x, u+kx/f). \quad (I-56)$$

Para el espacio libre en la aproximación de Fresnel, a una distancia z del plano de entrada (PSF ec. (I-32)) se verifica:

$$A_o(x, u) = A_i(x-uz/k, u). \quad (I-57)$$

y finalmente para un transformador de Fourier (PSFec. (I-35))

$$A_o(x, u) = A_i(-u/\beta, \beta x). \quad (I-58)$$

Nótese que la AF permanece inalterada, solo las variables independientes son transformadas. Además las transformaciones coinciden exactamente con las halladas para la WDF. Este es otro aspecto donde se demuestra la equivalencia entre los dos tipos de

representaciones.

I-4 EL ESPECTROGRAMA LOCAL

Los ejemplos vistos en la sección I-2-1 sugieren a la interpretación de la WDF como una función que permite obtener información de un area infinitamente pequeña del E-F. Por supuesto que esta interpretación no es del todo legal, pues está en conflicto con el principio de incerteza. Es imposible determinar la frecuencia de una señal dentro de un intervalo espacial infinitamente pequeño. Se obtiene una interpretación mas acertada de la WDF, si se la compara con una función densidad de probabilidad, de la siguiente manera.

Dada una función densidad de probabilidad $p(z)$, es claro que el valor de p en sí mismo no tiene un sentido significante, en cambio la integral:

$$P(z) = \int_{z-\Delta z}^{z+\Delta z} p(z') dz', \quad (I-53)$$

es la probabilidad de que la variable estocástica z' se encuentre entre $z-\Delta z$ y $z+\Delta z$.

De la misma forma el Espectrograma Local (LS), función que describe el contenido de frecuencias de una señal dependiendo de su posición, puede ser derivada de la WDF, integrándola en un

área $\delta x \delta u$.

Siguiendo el procedimiento original de Bartelt et al./3/, se usará como función de peso al producto de dos gaussianas $G(x, \delta x)G(u, \delta u)$ donde:

$$G(x, \delta x) = 1/\sqrt{\delta x} \exp \{-2\pi(x/\delta x)^2\} \quad (\text{I-60a})$$

y

$$G(u, \delta u) = 1/\sqrt{\delta u} \exp \{-2\pi(u/\delta u)^2\} \quad (\text{I-60b})$$

El principio de incerteza se satisface si se eligen δx y δu , de modo que cumplan $\delta x \delta u \gg 1$. Si la desigualdad anterior toma su mínimo valor ($\delta x \delta u = 1$), se define al LS como:

$$L(x, u, \delta x) = \iint W(x', u') G(x-x'; \delta x) G(u-u'; 1/\delta x) dx' du'. \quad (\text{I-61})$$

Reemplazando en la ecuación anterior la definición de la WDF (ecs. (I-1) y (I-2)) se obtienen respectivamente:

$$L(x, u, x) = \left| \int f(x') G(x-x'; \sqrt{2} \delta x) \exp \{-2 i u x'\} dx' \right|^2 \quad (\text{I-62})$$

$$L(x, u, x) = \left| \int F(u') G(u-u'; \sqrt{2} / \delta x) \exp \{-2 i u' x\} du' \right|^2 \quad (\text{I-63})$$

La figura (I-1) muestra cualitativamente el efecto de diferentes anchos de δx en el espacio fase (arriba),

correspondientes a las ecuaciones (I-62) y (I-63); y en el dominio espacial (abajo), correspondiente a las ecuación (I-60a). Dos casos extremos son: buena resolución espacial y mala resolución en frecuencias espaciales (figuras de la izquierda) y viceversa (figuras de la derecha).

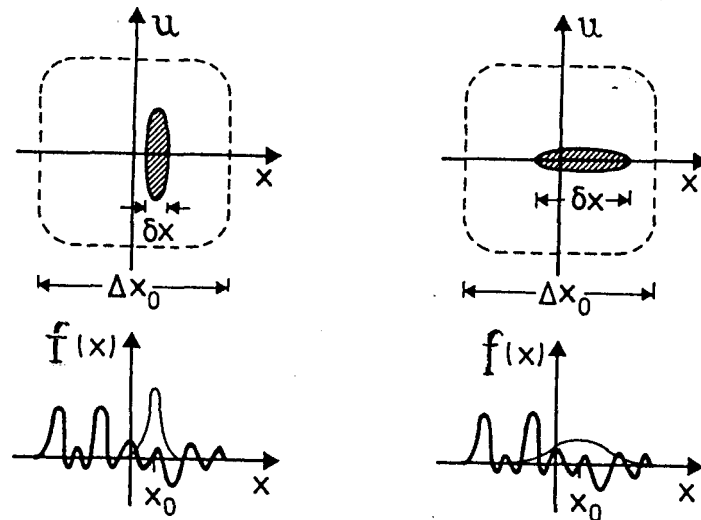


Figura I-1

Se asume que $f(x)$ es nula fuera del intervalo $-\Delta x_0/2 < x < \Delta x_0/2$. La resolución δx_0 es la inversa del ancho de banda $\Delta u_0 = 1/\delta x_0$. Si se requiere una agudeza muy buena en la resolución espacial, se impone $\delta x_0 \gg \delta x$. La gaussiana en la ecuación (I-62) será casi una delta y se obtiene:

$$L(x, u, \delta x) = |f(x)|^2. \quad (I-64)$$

Si en cambio $\delta x > \Delta x_0$ se obtiene:

$$L(x, u, \delta x) = |F(u)|^2. \quad (I-65)$$

Los estados intermedios $\delta x_0 < \delta x < \Delta x_0$ pueden ser considerados como espectro de frecuencias locales.

La función gaussiana en las ecuaciones (I-62) y (I-63) puede ser considerada como una "ventana", en el sentido que muestrea pequeñas porciones de la función $f(x)$ (o $F(u)$).

Aunque el uso de una función ventana gaussiana tiene varias ventajas (entre otras su transformada de Fourier es también gaussiana), puede definirse al LS de una manera mas general de la siguiente forma:

$$Lfg(x, u) = \left| \int f(x') g^*(x' - x) \exp(-2\pi i u x') dx' \right|^2, \quad (I-66)$$

donde la nueva función ventana, $g(x)$, es una función mas o menos concentrada alrededor del origen y normalizada, esto es:

$$\int |g(x)|^2 dx = 1. \quad (I-67)$$

(Nota: Lfg debe leerse espectro local de la función f tomando a la función g como ventana.)

Una propiedad interesante del Lfg es que está relacionado con la WDF de las funciones f y g por la siguiente igualdad/25/:

$$Wf(x, u') ** Wg(x, u') = Lfg(x, u'), \quad (I-68)$$

donde ** implica una convolucion 2-D con respecto a x y a u'.

I-5 EL ESPECTROGRAMA COMPLEJO

A pesar de ser útil en muchas aplicaciones (por ejemplo en el análisis de texturas/26/ y en reconocimiento de sonogramas/3/), el LS no es una descripción completa de una señal, es decir que no existe una transformación lineal de $L(g(x,u))$ que pueda sintetizar una función compleja arbitraria $f(x)$. Sin embargo considerando a la función que está dentro del modulo de la ecuación (I-66) se obtiene una nueva representación que sí es completa; esta es, el Espectrograma Complejo (CS) de la función $f(x)$, y se define como:

$$C(g(x,u)) = \int f(x') g^*(x'-x) \exp(-2\pi i u'x) dx'. \quad (I-69)$$

Es decir se obtiene una nueva representación espectral local de la señal, que se consigue muestreando a la función $f(x)$ con una función ventana adecuada $g(x)$, y transformando Fourier el producto para varias posiciones de $g(x)$. Tal como ocurría con la WDF y la AF, el CS puede también obtenerse a partir de las transformadas de Fourier de $f(x)$ y $g(x)$ de la siguiente manera:

$$C_{fg}(x, u) = \int F(u') G^*(u'-u) \exp(2\pi i u' x) du'. \quad (I-70)$$

Al decir que el C_{fg} es una representación completa de la señal, se infiere que la señal puede ser recuperada a partir de su CS. Esto se efectúa mediante la siguiente fórmula de inversión:

$$f(x') = \iint C_{fg}(x, u) g(x'-x) \exp(-2\pi i u x') dx du. \quad (I-71)$$

El uso de CS en el análisis o procesamiento de señales introduce el artificio de una función ventana. Para ilustrar el efecto de $g(x)$ en el CS, las funciones $f(x)$ y $g(x)$ en la ecuación (I-69) pueden ser intercambiadas para producir $C_{gf}(x, u)$. Puede verse que C_{gf} es básicamente la misma C_{fg} , o más exactamente:

$$C_{gf}(x, u) = C_{fg}^*(-x, -u), \quad (I-72)$$

Es decir que la función ventana tiene la misma influencia sobre el resultado que la función a ser analizada, con el agravante que diferentes funciones ventanas dan como resultado diferentes representaciones de la señal. Para salvar estos problemas, puede tomarse como función ventana a la misma función $f(x)$.

Se verá en el siguiente punto como esta alternativa conduce a las ya conocidas WDF y AF.

I-5-1 Relación del CS con la AF y la WDF

Si en el CS $f(x)$ es considerada como ventana de sí misma, es decir $g(x)=f(x)$ el CS resulta:

$$Cf(x, u') = \exp(-i x' u') \int f(x+x'/2) f^*(x-x'/2) \exp(2\pi i x' u') dx' \quad (I-73)$$

donde se ha hecho un cambio de variables para obtener una representación mas simétrica del Cf.

Comparando (I-73) con la definición de la AF (ec. I-39) se obtiene

$$A(u, x') = \exp(-i\pi u x') Cf(x', u). \quad (I-74)$$

Eligiendo $g(x)=f(-x)$ el CS resulta:

$$Cf^-(x, u') = \exp(-i\pi x' u') \int f(x/2+x') f^*(x/2-x') \exp(2\pi i x' u') dx' \quad (I-75)$$

de la comparación de esta última, con la definición de la WDF (ec. I-1) resulta la siguiente igualdad

$$W(x, u') = 2 Cf^-(2x, 2u') \exp(-i\pi x u'). \quad (I-76)$$

Es decir que, despreciando un factor de escala, el CS con $f(x)$ como función ventana da la AF de la función $f(x)$. Además, si la función es simétrica, $f(x)=f(-x)$, esta AF coincide con la WDF de la misma función.

I-6 CONCLUSION:

A lo largo de este capítulo se han presentado los formalismos E-F. Las propiedades que se han discutido sugieren un gran número de aplicaciones de estos formalismos al procesamiento de señales ópticas, algunas de las cuales serán desarrolladas en los capítulos III y IV.

Se ha visto además que existe una relación matemática formal entre las distintas funciones E-F. Esto sugiere que todas ellas podrían ser consideradas como casos particulares de una única función mas general. A tal efecto G. Eichmann & B. Dong /27/ introdujeron el concepto de Función Espacio Fase Generalizada, que, para señales 1-D, permite, mediante el filtrado espacial, o de frecuencias espaciales, representar a la WDF, la AF, a CS y al LS, eligiendo adecuadamente la función filtro.

A lo largo de los siguientes capítulos, se mantendrá la identidad de cada una de las representaciones vistas; respetando los distintos orígenes de las mismas y considerando que esto permite interpretar mas claramente los resultados obtenidos.

REFERENCIAS:

- /I-1/ A. Papoulis, "Ambiguity Fuction in Fourier Optics", J. Opt. Soc. Am. 64, (1974), 779.
- /I-2/ M.J. Bastiaans, " The Wigner Distribution Function applied to optical signals and systems", Optics Comm. , 25, (1978), 26.
- /I-3/ H. O. Bartelt, K. -H. Brenner and A. W. Lohmann, "The Wigner Distribution Function and its Optical Production", Optics Comm. 32, (1980), 32.
- /I-4/ M. J. Bastiaans, "The Wigner Distribution Function of partially coherent lighth" Opt. Acta, 28, (1981), 1215.
- /I-5/ A. Walther, "Radiometry and coherence", J. Opt. Soc. Am., 58, (1968), 1256.
- /I-6/ J.P. Guigay, "The Ambiguity Fuction in diffraction and isoplanatic imaging by partially coherent beams", Optics Comm., 26, (1978), 136.
- /I-7/ K.H. Brenner and J.O. Castañeda, "Ambiguity Fuction and Wigner Distribution Function applied to partially coherent imaginery" Opt. Acta, 31, (1984), 213.
- /I-8/ K.H. Brenner, A.W. Lohmann and J.O. Castañeda, "The Ambiguity Fuction as a polar display of the OTF", Optics Comm., 44, (1983), 323.
- /I-9/ J.O. Castañeda, W. D. Furlan y E. E. Sicre, "Formulación de la razón de Strehl basada en la Función de Distribución de Wigner", 71a. Reunión de la A.F.A., La Cumbre, Octubre de 1986.
- /I-10/ E. Wigner, "On the quantum correction for the thermodynamic equilibrium", Phys. Rev., 40, (1932), 749.
- /I-11/ N.G. de Bruijn, "A theory of generalized funtions, with applications to Wigner Distributions and Weyl Correspondence", Nieuw Archief voor Wiskunde (3), 21, (1973), 205.
- /I-12/ Born & Wolf, "Principles of Optics", N.Y. Pergamon, 1978.
- /I-13/ O. Bryngdahl, "Geometrical transformations in optics", J. Opt. Soc. Am., 64, (1974), 1092.

- /I-14/ J-Z Jiao, B. Wang and H. Liu, "Wigner Distribution Function and optical geometrical transformation" Appl. Opt. 23, (1984), 1249.
- /I-15/ J.E. Moyal, "Quantum mechanics as a statistical theory". Proc. Cambridge Philos. Soc., 45, (1949), 99.
- /I-16/ N.G. de Bruijn "Uncertainty principles in Fourier Analysis" in Inequalities, O. Shisha Editor (Academic Press, New York, 1967).
- /I-17/ A. Papoulis, "Systems and transformations with applications in Optics", Mc. Graw-Hill, New York, 1968.
- /I-18/ E. Wolf, "Coherence and Radiometry", J. Opt. Soc. Am., 68, (1978), 6.
- /I-19/ R. Winston & W.T. Weston, "Geometrical vector flux and some new nonimaging concentrators", J. Opt. Soc. Am., 69, (1979), 532.
- /I-20/ M.J. Bastiaans, "The Wigner Distribution Function and Hamilton Characteristics of a geometric-optical system.", Optics Comm., 30, (1979), 321.
- /I-21/ P.M. Woodward, "Probability and Information Theory whit Applications to Radar", Pergamon, New York, 1953.
- /I-22/ H. Bartlett, J.O. Castañeda and E.E. Sicre, "Misfocus tolerance seen by simple inspection of the Ambiguity Fuction", Appl. Opt. 23, (1984), 2693.
- /I-23/ J.O. Castañeda and E.E. Sicre, "Bilinear optical systems Ambiguity Fuction and Wigner Distribution Function representations" Opt. Acta, 31, (1984), 255.
- /I-24/ H.H. Szu and A. Blodgett, "Wigner Distribution Function and Ambiguity Fuction", Optics in Four Dimmensions, (1980), ed. por M. Machado y L. Narducci, AIP Conf. Proc. No.65, N.Y. Am. Inst. Phys., p.355
- /I-25/ R. Bamler and H. Glunder, "The Wigner Distribution Function of 2-D signals coherent -optical generation and display", Opt. Acta, 30, (1983), 1789.
- /I-26/ S.I. Grosz, W.D. Furlan, E.E. Sicre and M. Garavaglia, "Display of the Local Spectrum: A pseudocoloring approach.", Appl. Opt., 26, (1987), 971.

/I-27/ G. Eichmann and B.Z. Dong, "Two dimensional optical filtering of 1-D signals", Appl. Opt., 21, (1982), 3152.

CAPITULO II

GENERACION OPTICA DE LAS FUNCIONES ESPACIO-FASE

II-1 INTRODUCCION:

En el capítulo anterior se puso de manifiesto la potencialidad de las funciones E-F para el procesamiento de señales ópticas. Sin embargo, no han resultado ser muy atractivas para el procesamiento digital de las mismas, por ser de un tratamiento computacional tedioso, debido a que las funciones E-F duplican el dominio de la función originaria y requieren una transformada de Fourier sobre todos los pixels de la misma. Este problema puede ser salvado con el uso de procesadores ópticos, ya que estos poseen una alta velocidad de procesamiento, debido a que el mismo, se realiza en paralelo y a tiempo real. Por tal motivo, resulta de suma importancia analizar distintos procesadores para generar ópticamente las funciones E-F.

En este capítulo se proponen y analizan distintos procesadores ópticos para la generación de la AF, la WDF y el LS. En primer término se describen algunos procesadores de señales 1-D, que utilizan luz coherente. Posteriormente, se describe un método original para obtener el pseudocoloreado del espectrograma local, que puede adaptarse fácilmente para el pseudocoloreado de frecuencias espaciales. Luego, se estudia cómo bajo condiciones adecuadas el campo de difracción producido por determinados objetos bidimensionales (2-D) puede aproximarse a un transformador de Fourier 1-D; y cómo este hecho permite proponer un procesador coherente, sin lentes, para la visualización de funciones E-F de

señales 1-D. Hasta aquí, el análisis se hace para este último tipo de señales, debido a que, como se mencionó anteriormente, las funciones E-F duplican el dominio de la función original, y esto dificulta la realización de operaciones sobre señales 2-D. Sin embargo se han desarrollado algunos métodos para exhibir las funciones E-F, asociadas a señales 2-D. Estos se discuten brevemente al final del capítulo.

II-2 VISUALIZACION DE LAS FUNCIONES E-F DE SENALES 1-D:

El primer procesador óptico para la representación de la AF fue propuesto por Marks II et al./1/. Dada una función real, 1-D, $f(x)$, es posible obtener la AF de esta función con el siguiente procedimiento: en primer lugar, la función $f(x)$, representada en el plano (x,y) (Fig.II-1.a), es rotada un ángulo α alrededor del origen (Fig.II-1.b) generando la función:

$$f(a x \cos \alpha + a y \operatorname{sen} \alpha), \quad (\text{II-1})$$

la que para rotaciones de 45° y -45° , se transforma respectivamente en:

$$f\left[\frac{(x+y)}{\sqrt{2}}\right], \quad , \quad f\left[\frac{(x-y)}{\sqrt{2}}\right]. \quad (\text{II-2})$$

Considérese al producto de estas dos últimas funciones (Fig. II-1-c). La transformada de Fourier con respecto a x resulta:

$$\int f \left[\frac{x+y}{\sqrt{2}} \right] f \left[\frac{x-y}{\sqrt{2}} \right] \exp(-2\pi i u x) dx. \quad (\text{II-3})$$

La ecuación (II-3) es la AF de la función $f(x)$, a diferencia de un término multiplicativo.

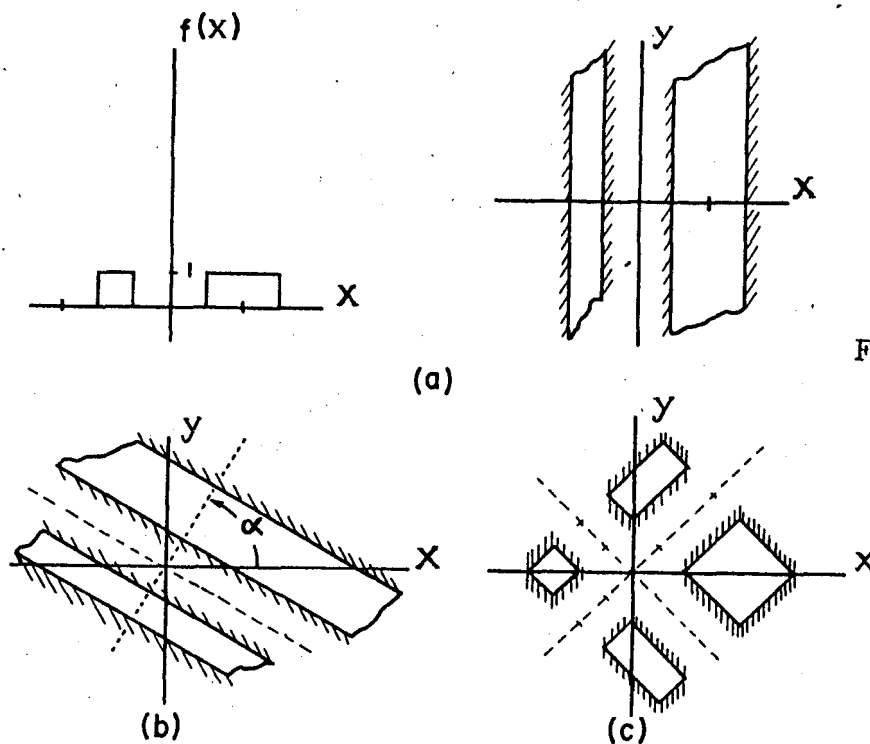


Figura II-1

En la Figura II-2 se muestra un procesador óptico para obtener la transformada de Fourier 1-D. La amplitud de campo en el plano P2, debido a la propagación de la luz coherente que pasa a través de la transmitancia

$$S(x,y) = f \left[\frac{(x+y)}{\sqrt{2}} \right] f \left[\frac{(x-y)}{\sqrt{2}} \right] \quad (\text{II-4})$$

resulta ser:

$$U(x,y) = \exp(2\pi i \lambda u^2 f) \int S(x,y) \exp(-2\pi i u x) dx, \quad (\text{II-5})$$

donde λ es la longitud de onda de la luz, f es la distancia focal de las lentes L1 y L2 y u es la frecuencia espacial asociada a la variable x . Por lo tanto, la amplitud del campo puede escribirse, de acuerdo a la definición de la AF, como:

$$U(x,y) = \sqrt{2} \exp(2\pi i \lambda u^2 f) A(\sqrt{2}u, \sqrt{2}y). \quad (\text{II-6})$$

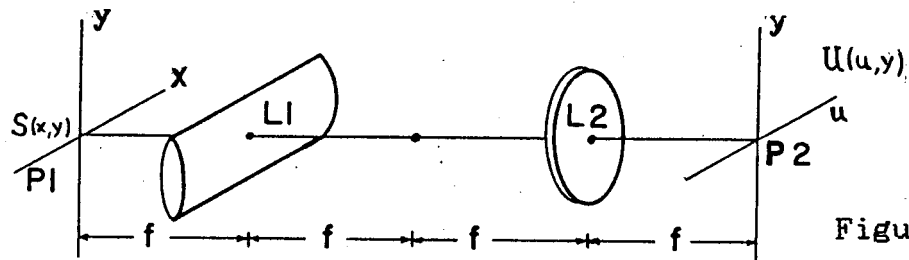


Figura II-2

En la mayoría de los casos resulta de interés el módulo de la AF. Este corresponde a la intensidad en el plano P2. Por lo tanto, el término de fase en la ecuación (II-6), no es importante. La intensidad en el plano P2 es entonces una versión en escala de la AF:

$$I(u, y) = 2 \left| A(\sqrt{2}u, \sqrt{2}y) \right|^2. \quad (\text{II-7})$$

A pesar de ser este un procesador sencillo y fácil de implementar, tiene como principal desventaja el hecho de necesitar dos copias de la la función de entrada. Esta desventaja fue salvada con posterioridad por Marks II et.al./2/ empleando un procesador astigmático, que sólo necesita una copia de la función de entrada.

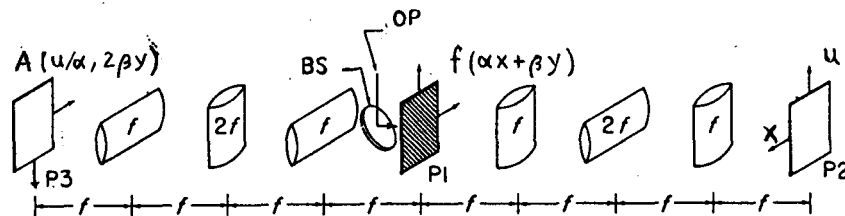


Figura II-3

Esta última es iluminada con una onda plana OP como se muestra en la Figura II-3. El campo que representa a la función $f(x)$ ingresa al procesador a través de un divisor de haz (BS). La señal es rotada un ángulo θ en el plano (x, y) para obtener una transmitancia $f(\alpha x + \beta y)$, donde $\alpha = \cos \theta$ y $\beta = \sin \theta$. El campo en el plano P2 resulta a menos de una constante multiplicativa:

$$U(x, u) = \int f(\alpha x + \beta y) \exp(-2\pi i u y) dy, \quad (\text{II-8})$$

donde la frecuencia espacial u es medida dividiendo el

desplazamiento vertical en el plano P2 por $2\lambda f$. En el plano P2 un espejo refleja la amplitud dada por la ecuación (II-8). Como puede verse de una segunda aplicación de la ecuación (II-8), el resultado neto del doble pasaje a través del brazo derecho del procesador, es producir una inversión en la coordenada y . Es decir, sobre el plano P1 incide desde la derecha el campo $f(\alpha x - \beta y)$, y desde la izquierda $f(\alpha x + \beta y)$. Por lo tanto, en el plano P1 la amplitud de campo resultante es: $f(\alpha x + \beta y) \cdot f(\alpha x - \beta y)$. Esta señal, es tomada como señal de entrada en la parte izquierda del procesador a través del semiespejo BS, siendo la amplitud de campo en el plano P3:

$$\begin{aligned}
 U(u, y) &= \int f(\alpha x + \beta y) \cdot f(\alpha x - \beta y) \exp(-2\pi i u x) dx \\
 &= (1/\alpha) \exp(-2\pi i \beta y / \alpha) A(u/\alpha, 2\beta y).
 \end{aligned}
 \tag{II-9}$$

A diferencia de un término de fase, la ecuación (II-9) es una versión en escala de la AF. Los cambios en la escala de salida pueden obtenerse simplemente rotando al objeto. Las desventajas de este procesador son: a) menor eficiencia en el uso de la luz incidente, debida a los semiespejos; b) necesidad de un mayor número de lentes para su implementación.

Debido a que la WDF y la AF son representaciones duales E-F de una señal; este mismo procesador, puede usarse para obtener la WDF de una señal real $1-D/3/$ rotando el brazo derecho del

mismo (Fig. II-3), un ángulo de 90° alrededor del eje óptico; dejando de este modo ambos brazos idénticos. En el plano de salida se obtiene entonces:

$$\begin{aligned}
 U(x,u) &= \int f(ax+\beta y) \cdot f(ax-\beta y) \exp(-2\pi i u y) dy \\
 &= (1/2\beta) W(ax, u/2\beta).
 \end{aligned}
 \tag{II-10}$$

que es una versión en escala de la WDF.

Brenner y Lohmann/4/ propusieron un método para obtener la representación de la WDF y la AF, tanto para señales reales como para señales complejas. A partir de la definición (ec.(I-1)), es claro que la WDF de la función $f(x)$ puede obtenerse hallando la transformada de Fourier del producto $f(x+y/2) \cdot f^*(x-y/2)$, respecto de la coordenada y . Por otra parte, si la transformada de Fourier del mismo producto, se realiza respecto de la coordenada x , se obtiene la AF de la señal. En el caso de señales reales, el producto antes mencionado puede producirse de dos formas distintas. Una es procediendo como se muestra en la Figura II-1. El ángulo α se determina por las siguientes consideraciones: a $\cos\alpha=1$ y a $\sin\alpha=1/2$, resultando entonces $\alpha=26.6^\circ$. La otra forma requiere solo una transparencia de entrada (ver Fig.II-4). La luz pasa dos veces a través de la transparencia (OBJ), al iluminarla desde la derecha, el prisma R refleja la onda incidente, formándose sobre la transparencia una imagen de sí misma con una

inversión en la coordenada y . Un sistema de lentes esfero-cilíndrico hace la transformada de Fourier 1-D, obteniéndose en el plano de salida la WDF del objeto.

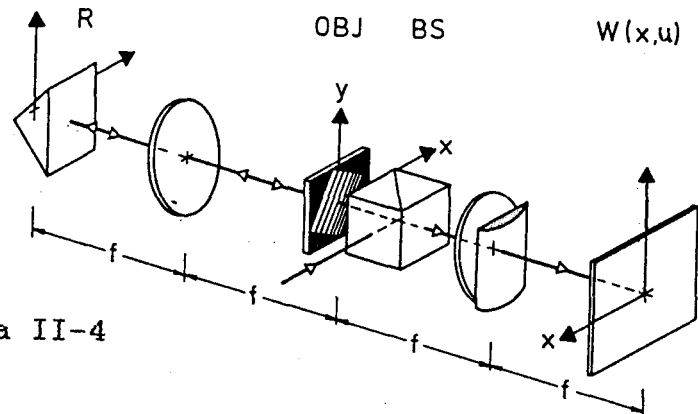


Figura II-4

Para señales complejas la producción de la WDF no es tan sencilla, pues es necesario obtener el complejo conjugado de la función $f(x)$. Para lograr la conjugación de fase pueden utilizarse dos aproximaciones distintas:

a) Si un holograma es usado como objeto complejo, este almacena, una imagen real (información del objeto); y además, una imagen virtual (información del complejo conjugado del objeto). Por lo tanto el holograma contiene ambos factores $f(x+y/2)$ y $f^*(x-y/2)$. El dispositivo experimental (Fig. II-5) se arregla de modo que la luz pase primero por $f(x)$ y luego por $f^*(x)$. En el plano (x,y) se posicionan máscaras que seleccionan el término deseado. El holograma, que puede ser de Fourier, o bien un holograma generado por computadora, se rota 26.6° . La transformada de Fourier se hace a la derecha del divisor de haz.

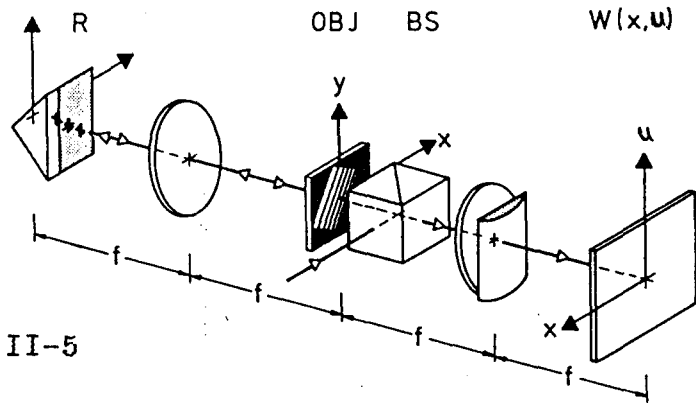


Figura II-5

b) Para objetos 1-D complejos arbitrarios, puede obviarse el doble pasaje de luz a través del objeto. El primer paso consiste en producir:

$$f(x+y/2) \exp(2\pi i a y), \quad (\text{II-11})$$

que se puede obtener rotando el objeto $f(x)$ y eligiendo un ángulo de iluminación α tal que $\sin \alpha = \lambda a$ (Fig. II-6). Por medio de un semiespejo (BS), la señal es dividida en dos partes, una es invertida con respecto a la coordenada y , por el prisma R, en tanto que la otra es reflejada por el espejo M. Ambas señales son recombinadas nuevamente y registradas en un holograma como:

$$T(x,y) = \left| f(x+y/2) \exp(2\pi i a y) + f(x-y/2) \exp(-2\pi i a y) \right|^2, \quad (\text{II-12})$$

que contiene entre otros términos:

$$T_1(x,y) = f(x+y/2) f^*(x-y/2) \exp(4\pi i a y) \quad (\text{II-13})$$

Tomando la transformada de Fourier con respecto a y , se obtienen: $W(x, u-2a)$ y $W(x, -u-2a)$, en los ordenes 1 y -1 respectivamente. El espaciado entre los ordenes es controlado por el ángulo de iluminación α .

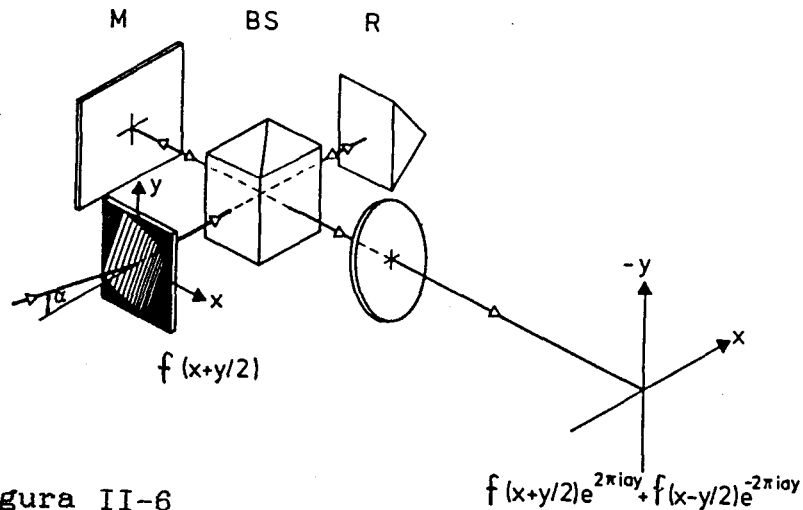
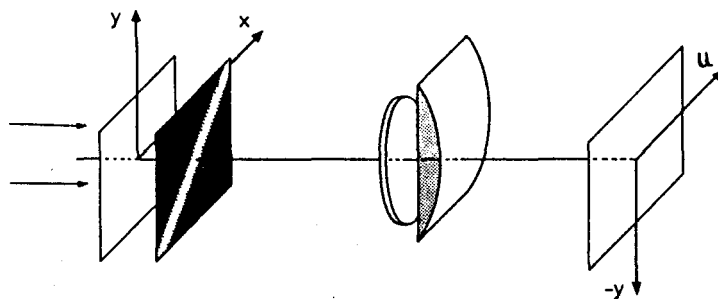
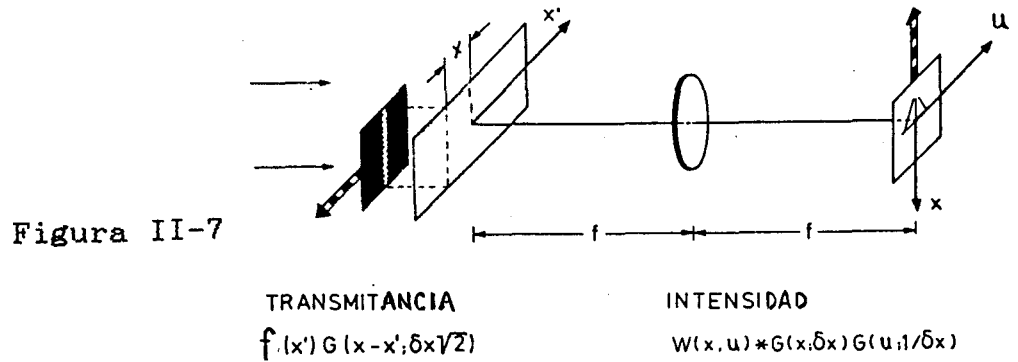


Figura II-6

La definición del LS (ec. I-61), conduce directamente al método para generar $L(x, u, \delta x)/5/$. Como se muestra en la Figura II-7, la señal $f(x')$ es multiplicada por una ventana gaussiana $G(x-x'; \delta x \sqrt{2})$. La transformada de Fourier de este producto se obtiene mediante un sistema $2f$ en el plano (u, x) , y la intensidad en este plano es registrada en una película fotográfica. Moviendo sincronizadamente la transparencia que contiene la señal 1-D y la película de registro, se obtiene la variación de la coordenada posición (x) . Este movimiento sincronizado puede efectuarse, por ejemplo, con dos motores paso a paso acoplados. El LS se registra

en la película una vez que la ventana ha pasado por delante de toda la transparencia de entrada. Este método es particularmente útil cuando la señal viaja, por su propia naturaleza como $f(x-vt)$.



TRANSMITANCIA
 $f(x) G(x-y; \delta x \sqrt{2})$

INTENSIDAD
 $W(y,u) * G(y, \delta x) G(u, 1/\delta x)$

Para operaciones a tiempo real, en cambio, la ventana gaussiana es rotada un ángulo de 45° (Fig. II-8) y la transformada de Fourier en la dirección x se realiza mediante un sistema óptico astigmático. En este caso, la intensidad registrada en el plano (u,y) da nuevamente el LS:

$$L(y,u; \delta x) = \left| \int f(x) G(x-y, \sqrt{2} x) \exp(-2\pi i u x) dx \right|^2 \quad (\text{II-14})$$

La variación del ancho efectivo δx puede obtenerse simplemente, cambiando la orientación angular de la ventana gaussiana.

II-3 PSEUDOCOLOREADO DEL LS/6/:

En el procesamiento de imágenes, resulta útil a menudo, codificar por falsos colores, la información relevante contenida en ellas. Esto se debe a que el ojo humano, discrimina mejor diferencia de colores, que de niveles de gris. En los últimos años, se han propuesto distintos métodos ópticos para pseudocolorear transparencias, tanto en el dominio espacial como en el de las frecuencias espaciales/7-10/. En este último caso, la imagen procesada, exhibe un diagrama de colores acorde al contenido de frecuencias espaciales de la misma.

Dado que el LS de una imagen representa la distribución de frecuencias espaciales de la misma, en función de la coordenada espacial en una imagen; pareciera viable que los métodos de pseudocoloreado de frecuencias espaciales se pudiesen adaptar para obtener el LS de una señal misma.

El método que se propone para este fin hace uso del dispositivo experimental que se muestra en la Figura II-9. Una fuente de luz policromática (S), ubicada en el plano focal de la lente L1, ilumina al objeto 1-D $f(y_0)$. La transformada de Fourier

del mismo, repetida para cada longitud de onda, se forma sobre la rendija de entrada de un espectroscopio (π), obteniéndose en el plano conjugado (π') distintas réplicas del espectro del objeto para diferentes longitudes de onda (λ). Un filtro de amplitud (G) colocado en este plano selecciona para cada λ una porción del espectro objeto $F(u)$. La transformada de Fourier 1-D, se hace nuevamente por medio de un sistema óptico astigmático.

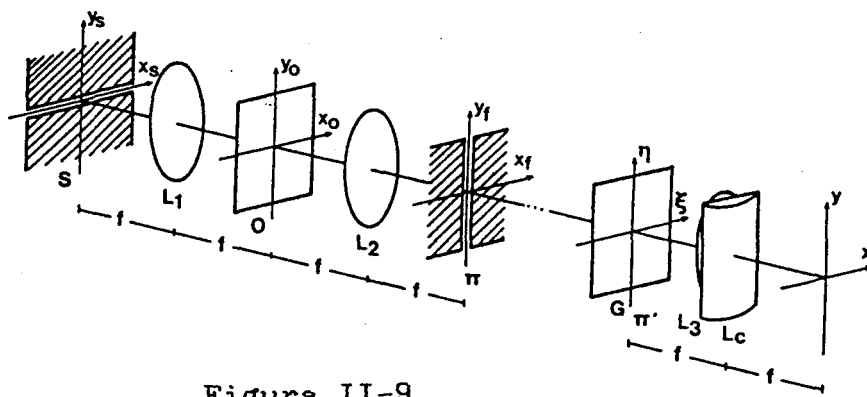


Figura II-9

La intensidad registrada en el plano de salida, resulta:

$$I(x,y) = \left| \int F(\eta) G(\eta - \alpha\lambda) \exp(2\pi i \eta y) d\eta \right|^2, \quad (\text{II-15})$$

donde $G(\eta)$ es la transmitancia en amplitud del filtro, y $x = \alpha\lambda$, siendo α proporcional a la dispersión del prisma, o red, del espectroscopio. La distribución de intensidad (II-15) es el LS $L(y; u = \alpha\lambda)$, de la señal de entrada $f(y_o)$. El eje longitud de onda,

almacena el contenido de frecuencias espaciales de cada parte de la imagen (eje y).

En la Figura II-10, se observa la representación del LS correspondiente a una red cuya frecuencia espacial varía sinusoidalmente. Es claro que el LS muestra la variación de frecuencias espaciales, como cambios de color, dependiendo de la posición. En este caso se empleó como función ventana, una rendija rotada en el plano (ξ, η) un ángulo β , de modo de pseudocolorear todo el contenido espectral del objeto.

Este último dispositivo experimental, puede modificarse fácilmente para obtener el pseudocoloreado de frecuencias espaciales de objetos 2-D. Para este último propósito, Bartelt sugirió un dispositivo similar/11/, que puede obtenerse a partir del de la Figura II-9, simplemente quitando la lente cilíndrica L_c .

Por lo tanto, prácticamente el mismo montaje puede usarse tanto para el pseudocoloreado de frecuencias espaciales como para obtener el LS pseudocoloreado de la transparencia de entrada al sistema. Esta última operación resulta mas apropiada para el testeo de objetos que presentan un contenido de frecuencias espaciales de variación lenta en las frecuencias espaciales, mientras que la primera operación detecta mejor pequeños defectos localizados (como suelen aparecer en el análisis de texturas).

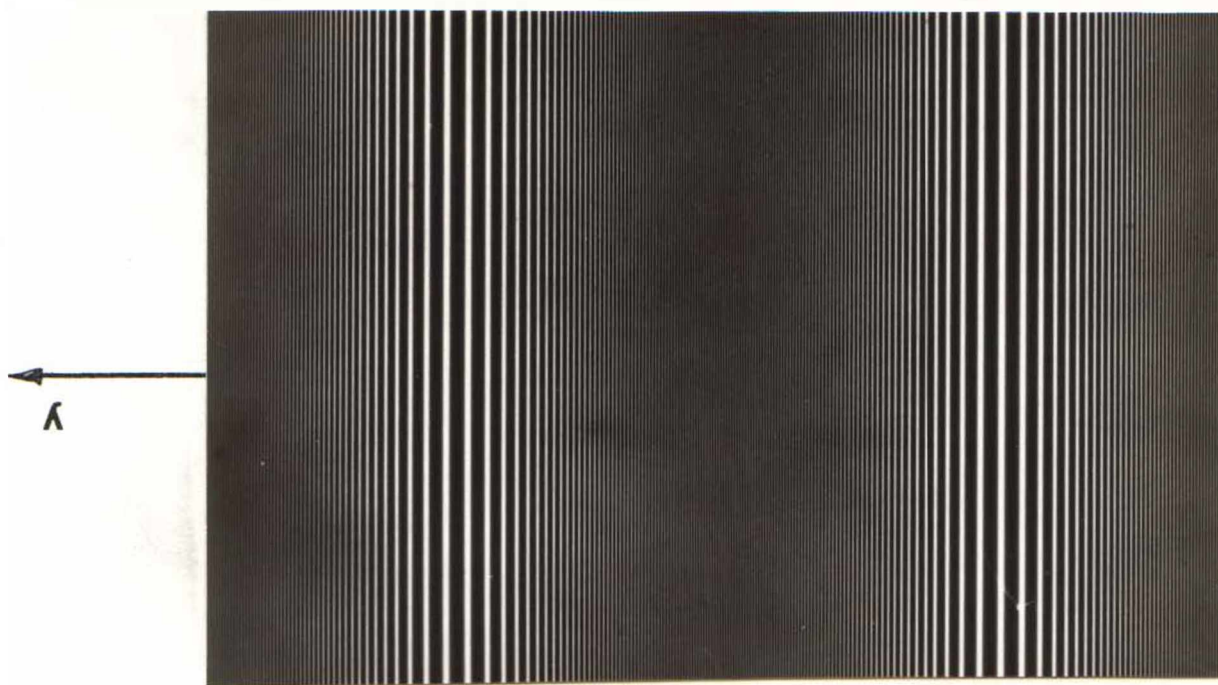
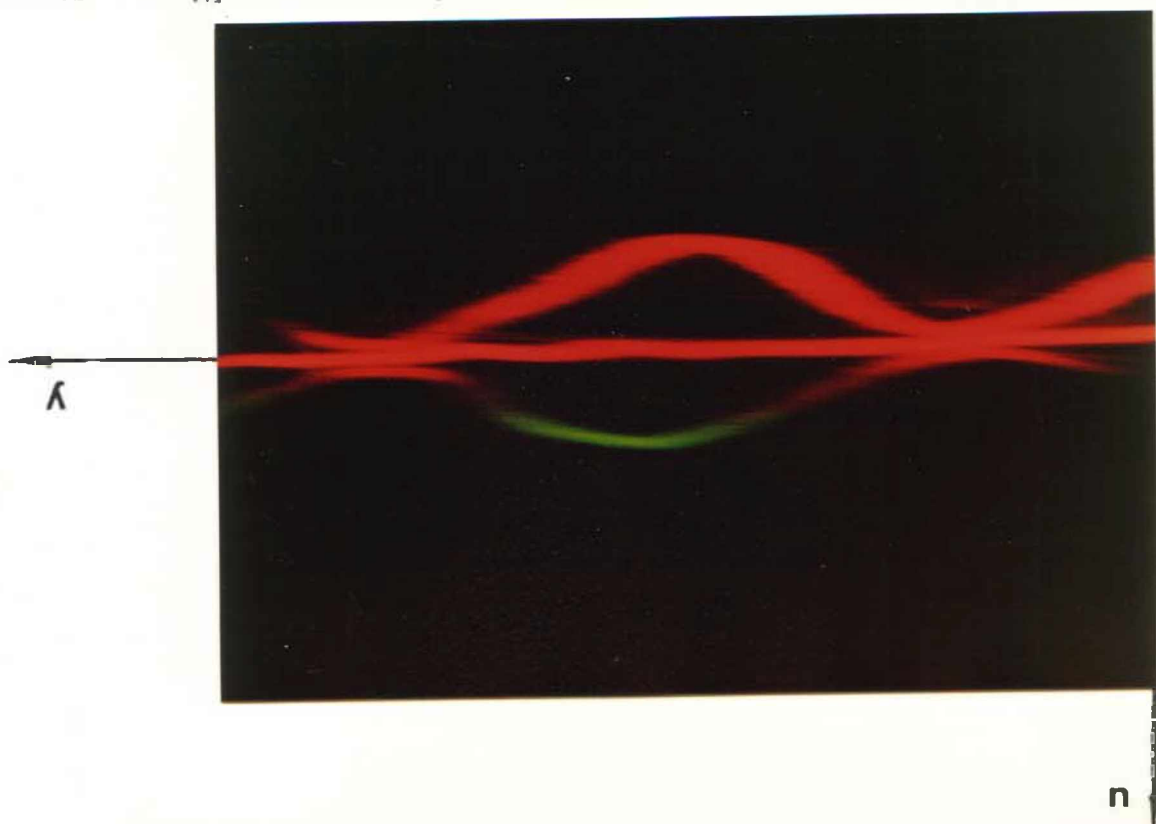


Figura II-10



II-4 PROCESADOR OPTICO SIN LENTES PARA LA VISUALIZACION DE FUNCIONES ESPACIO-FASE DE SEÑALES 1-D/12/:

Todos los procesadores ópticos para la representación de las funciones E-F discutidas en este capítulo incluyen un sistema óptico astigmático para obtener la transformada de Fourier 1-D. En esta sección, se analizan las condiciones en las cuales, el campo de difracción por propagación libre, debido a ciertos objetos 2-D, puede considerarse como proporcional a la transformada de Fourier 1-D, de la función transmitancia del objeto. Usando este hecho es posible obtener la representación de la AF, la WDF y el LS de señales 1-D, con un procesador óptico sin lentes.

En primer lugar, se discutirán ciertas consideraciones teóricas acerca de la propagación libre del campo de difracción debido a objetos 2-D.

Considerese la difracción de una onda plana monocromática por una transparencia ubicada en el plano P1 de la Figura II-11, cuya función de transmitancia es descripta por la función 2-D $g(\xi, \eta)$. La amplitud de campo, en la aproximación de Fresnel, en el plano de observación P2, ubicado a una distancia z de P1, puede expresarse como:

$$U(x, y; z) = \iint g(\xi, \eta) \exp\{-i\pi/\lambda z [(\xi-x)^2 + (\eta-y)^2]\} d\xi d\eta \quad (\text{II-16})$$

La ecuación (II-16) puede reescribirse como:

$$U(x,y;z) = \int I_1(x,\eta) \exp(-i\pi/\lambda z)(\eta - y)^2 d\eta, \quad (\text{II-17})$$

donde,

$$I_1(x,\eta) = \int g(\xi,\eta) \exp(-i\pi/\lambda z)(\xi - x)^2 d\xi. \quad (\text{II-18})$$

Cada integral en (II-17) o (II-18) puede considerarse como la expresión del campo de difracción de Fresnel 1-D.

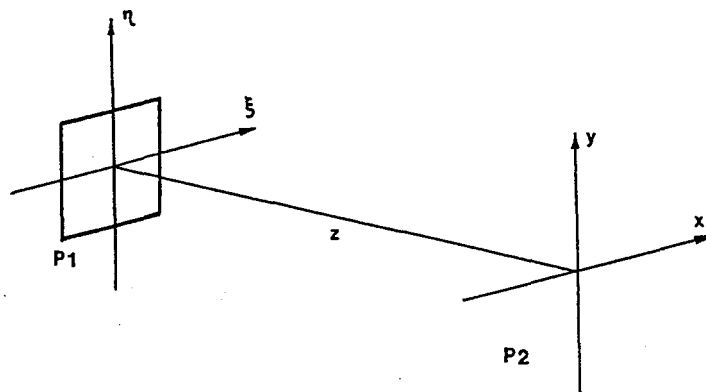


Figura II-11

Las condiciones que debe cumplir la función $g(\xi,\eta)$ tal que la ecuación (II-16), pueda aproximarse a la transformada de Fourier 1-D de la función $g(\xi,\eta)$, en la coordenada η , son las siguientes:

- i) El campo difractado, descrito por (II-18), debe poder ser considerado como la sombra geométrica de una transmitancia 1-D para un valor fijo de la coordenada η .
- ii) El campo difractado, descrito por (II-17) debe poder ser

considerado en la aproximación de Fraunhofer/13/ (campo lejano), para un valor fijo de ξ .

Para una apertura 1-D, de ancho a , iluminada por una onda plana monocromática de longitud de onda λ , la condición de sombra geométrica se satisface cuando la apertura contiene un número mayor que N zonas de Fresnel/14/, aquí se adoptará el criterio $N > 40$. Considerando el plano de observación a una distancia z de la apertura, la condición para a resulta:

$$a > 2\sqrt{N\lambda z} . \quad (\text{II-19})$$

Esta condición para un objeto 1-D puede ser escrita en función de sus frecuencias espaciales (u) como:

$$u < (4\sqrt{N\lambda z})^{-1} . \quad (\text{II-20})$$

Por otra parte, la condición de Fraunhofer, para la misma apertura, se satisface si:

$$a < \sqrt{\lambda z / \pi} , \quad (\text{II-21})$$

o nuevamente, en término de las frecuencias espaciales:

$$u > \sqrt{\pi} / (2\sqrt{\lambda z}) . \quad (\text{II-22})$$

Por lo tanto las frecuencias espaciales de la función $g(\xi, \eta)$ deben satisfacer la condición (II-20) para el eje ξ , y la condición (II-22) para el eje η , simultaneamente.

Definiendo u_η a las frecuencias espaciales en la dirección η , para un valor constante de ξ y adoptando una definición equivalente para u_ξ ; las frecuencias espaciales del objeto deben satisfacer:

$$u_\eta > 2\sqrt{\pi N} u_\xi, \quad (\text{II-23})$$

y la distancia z debe permanecer acotada por los valores:

$$\frac{1}{16 N \lambda u_\xi^2} < z < \frac{11}{4 \lambda u_\eta^2} \quad (\text{II-24})$$

Por lo tanto, bajo las condiciones (II-23) y (II-24) la ecuación (II-16) puede reescribirse aproximadamente como:

$$U(x, y; z) = \int g(x, \eta) \exp (2\pi i \eta y / \lambda z) d\eta. \quad (\text{II-25})$$

Habiendo analizado la que de aquí en adelante se denominará: aproximación geométrica-Fraunhofer del campo de salida $U(x, y; z)$; es de interés aplicar esta aproximación a las funciones $g(x, \eta)$ que son núcleo de las funciones E-F.

Para la AF:

$$g(x, \eta) = f(\eta + x/2) f^*(\eta - x/2). \quad (\text{II-26})$$

Si la señal es real, la función $g(x, \eta)$ puede obtenerse como producto de dos funciones 1-D, una rotada un ángulo α y la otra un ángulo $-\alpha$ (Fig. II-12) resultando:

$$g(x, \eta) = f(\eta \cos \alpha + x \operatorname{sen} \alpha) f^*(\eta \cos \alpha - x \operatorname{sen} \alpha). \quad (\text{II-27})$$

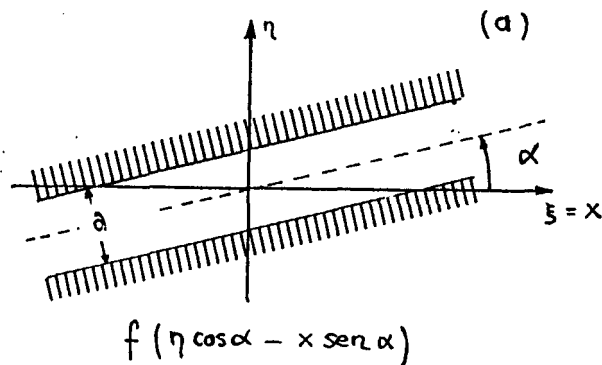
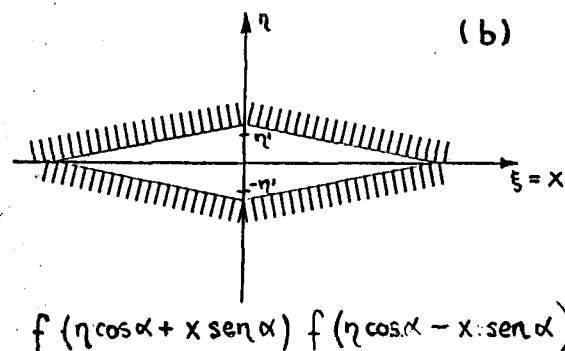


Figura II-12



Si esta función satisface la condición (II-23), el campo difractado a una distancia z , bajo la condición (II-24), resulta ser una versión de la AF con un cambio de escala:

$$U(x,y;z) = (1/\cos \alpha) A(y/\lambda z \cos \alpha, 2x \operatorname{sen} \alpha). \quad (\text{II-28})$$

Para mostrar la performance del procesador propuesto se obtuvieron representaciones de la AF para una y dos rendijas.

Para el caso de una rendija, $f(x) = \operatorname{rect}(x/2a)$. A pesar que la función $g(x,\eta)$, generada por $f(x)$ no verifica completamente la condición (II-23), el campo difractado puede considerarse proporcional a la AF de $f(x)$ si los parámetros a y α se elijen adecuadamente (ver Fig. II-12.a). La condición (II-24) se satisfase completamente si:

$$|\eta| < \eta' \quad \text{donde} \quad \eta' = \eta_0 / \{ (1 + \sqrt{4\pi N}) \operatorname{tg} \alpha \},$$

η_0 es el máximo valor absoluto que toma la función producto en la coordenada η . El hecho de despreciar la parte superior e inferior de η y $-\eta'$ respectivamente (Figura II-12.b) no altera demasiado el campo difractado pero introduce un pequeño defecto conocido como "ringing" (ondulaciones rápidas de la intensidad).

Las Figuras (II-13) y (II-14) muestran el módulo al cuadrado de la AF para una rendija y para dos rendijas, obtenidas con el método propuesto.

Nótese que si la función es simétrica $f(x)=f(-x)$ resulta:

$$U(x,y;z) = (1/2 \cos \alpha) W(x \operatorname{sen} \alpha, -y/(2 \lambda z \cos \alpha)). \quad (\text{II-29})$$

donde $W(x,y)$ es al WDF de la función $f(x)$.

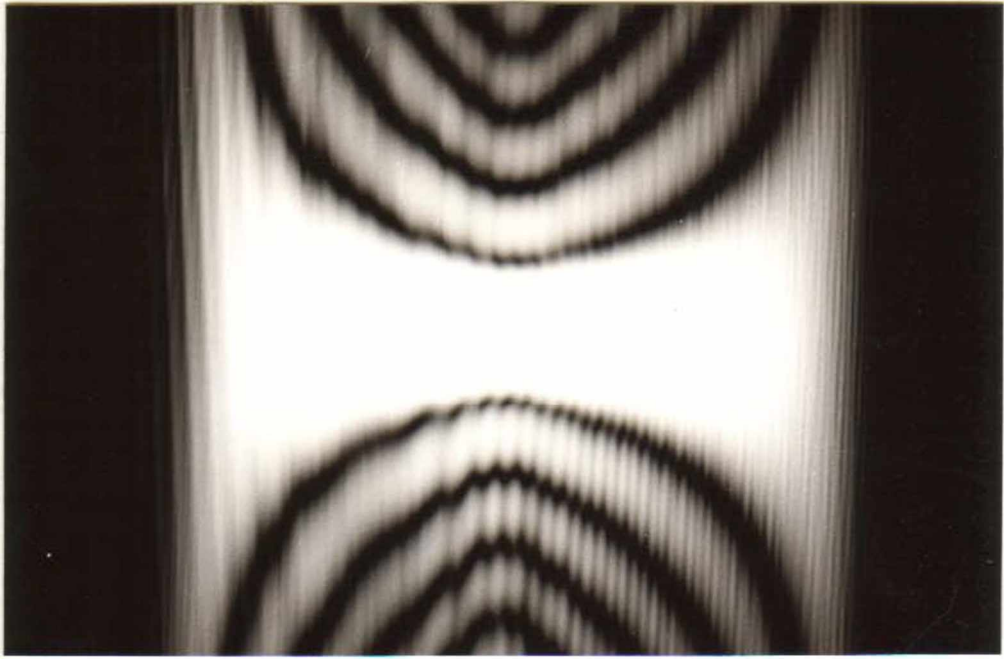


Figura II-13

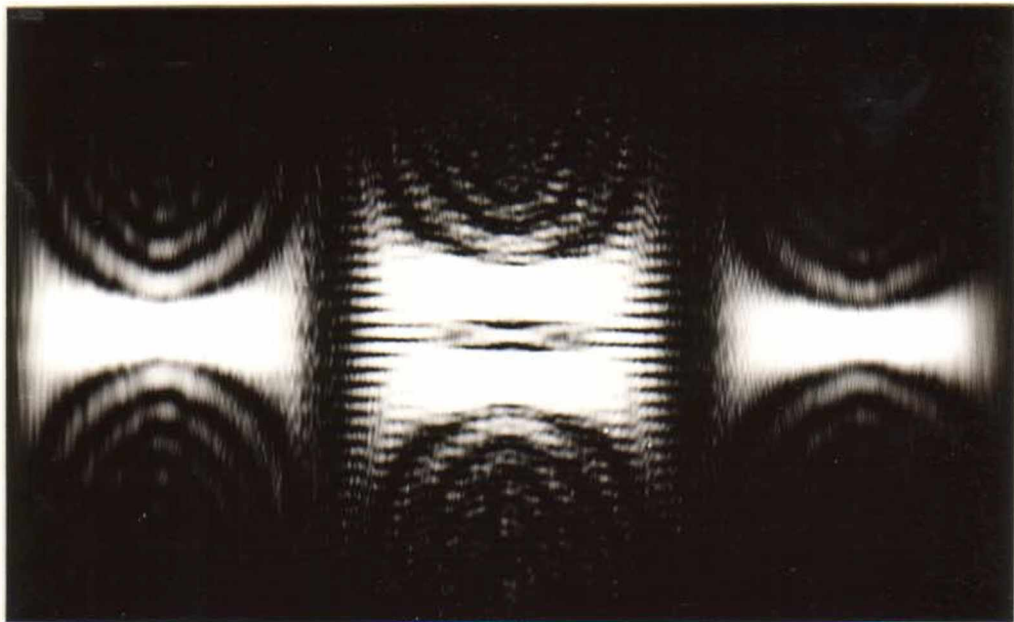


Figura II-14

Para obtener la representación del LS con el método propuesto considerese a:

$$g(x,\eta) = f(\eta) G(x - \eta) , \quad (\text{II-30})$$

como la función a ser transformada. $G(x)$ es la función ventana del LS. Procediendo como en el caso de la AF, o sea, rotando a la función $G(x)$ un ángulo α pequeño respecto al eje x en el plano (x,η) el producto dado por (II-30) es:

$$g(x,\eta) = f(\eta) G'(x \operatorname{tg} \alpha - \eta') , \quad (\text{II-31})$$

donde

$$G'(\eta) = G(\eta \operatorname{cosec} \alpha) \quad (\text{II-32})$$

Para aproximar la propagación libre de la ecuación (II-32) como su transformada de Fourier 1-D, la función $g(x,\eta)$ debe satisfacer la condición (II-23), y el módulo al cuadrado del campo difractado a una distancia z , bajo la condición (II-24), resulta:

$$|U(x,y;z)|^2 = L(x \operatorname{tg} \alpha, -y/\lambda z) \quad (\text{II-33})$$

En la Figura (II-15.a) se muestra el LS así obtenido para una red cuya frecuencia espacial varía sinusoidalmente (Fig. II-15.b), y en la Figura (II-16.a) para un objeto compuesto de dos redes de frecuencia espacial constante (Fig. II-16.b). En ambos casos se empleó como función ventana una rendija y por ser el ángulo α pequeño se dividió a la función ventana en dos partes como se muestra en las Figuras (II-15.b) y (II-16.b), en línea de puntos. Las flechas en la Figura (II-16) señalan un pequeño defecto en la zona de frecuencias mas altas (Figura II-16-a) y la variación correspondiente en el LS (Figura II-16-b).

Nuevamente al no ser satisfecha completamente la condición (II-24), el LS está afectado por un pequeño efecto de "ringing".

Los resultados experimentales, concuerdan con los obtenidos por los otros métodos, que se describieron al principio de este capítulo. Frente a estos últimos el método geométrico-Fraunhofer ofrece obvias ventajas por su sencillez; y su uso, se justifica al menos en una primera aproximación para la visualización de funciones E-F de señales 1-D.

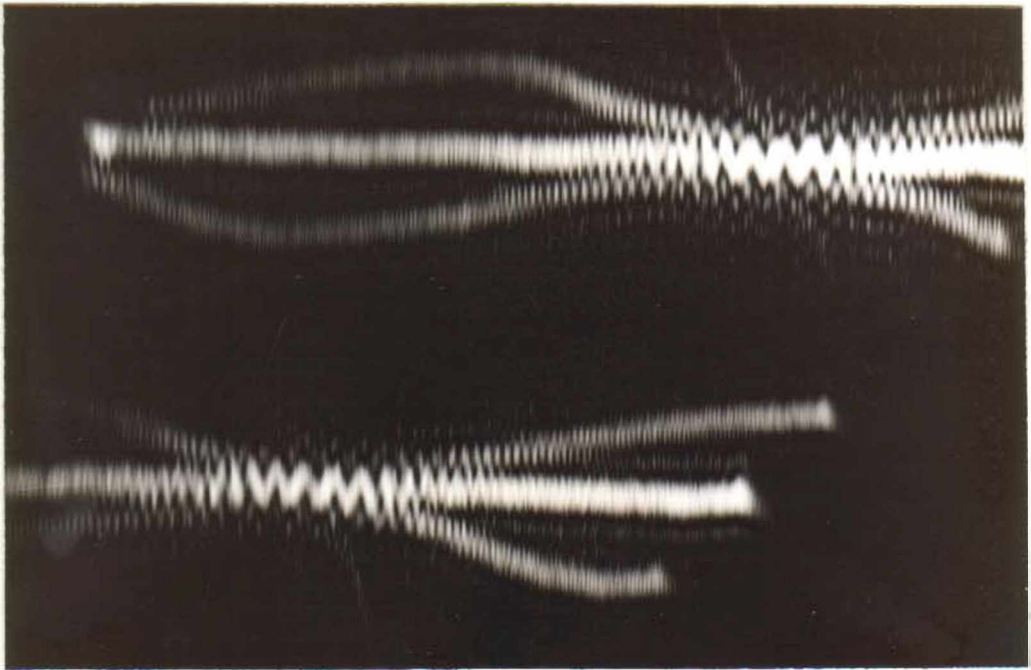


Figura II-15.a

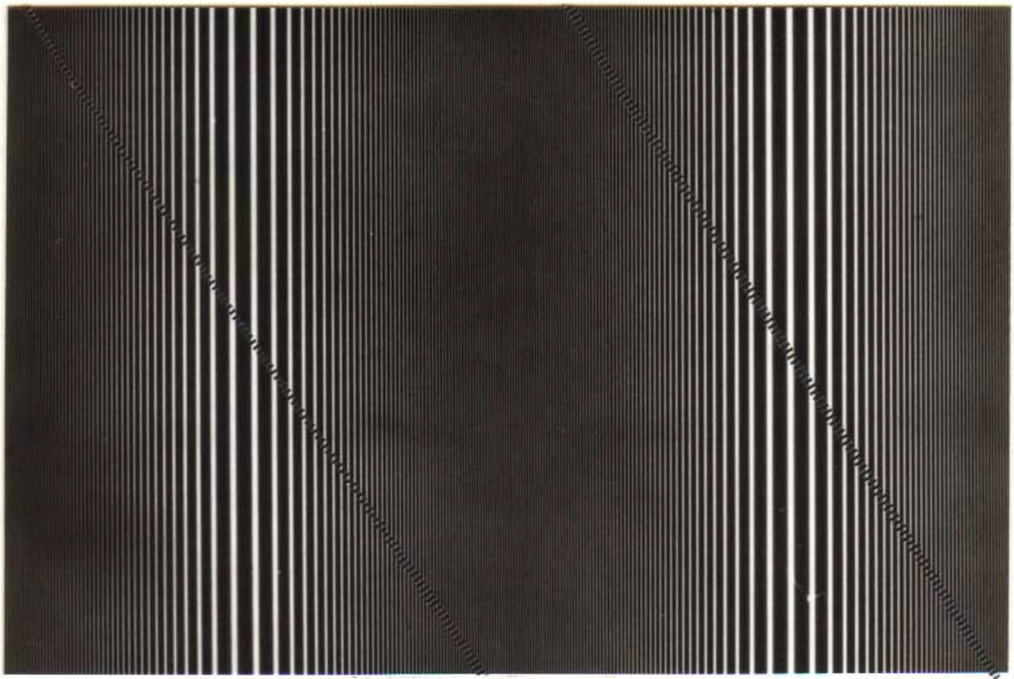


Figura II-15.b

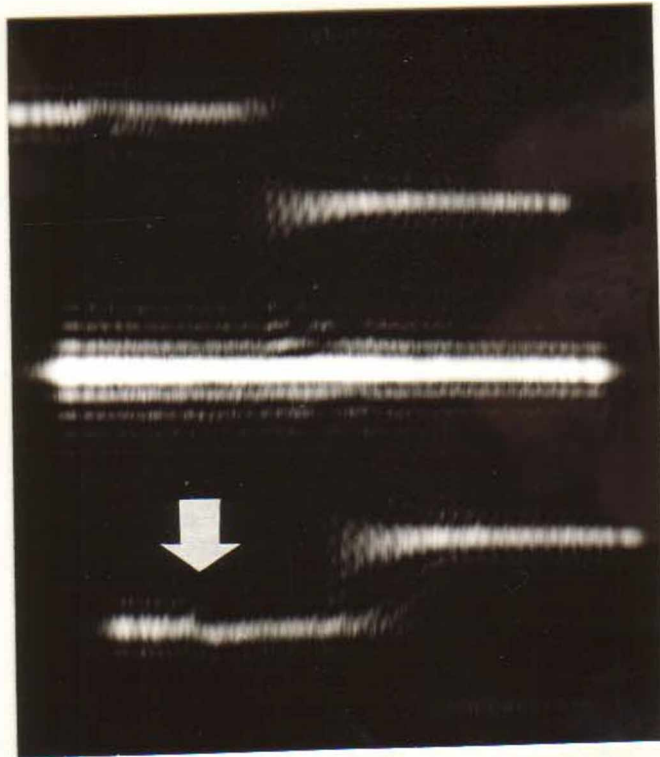


Figura II-16.a

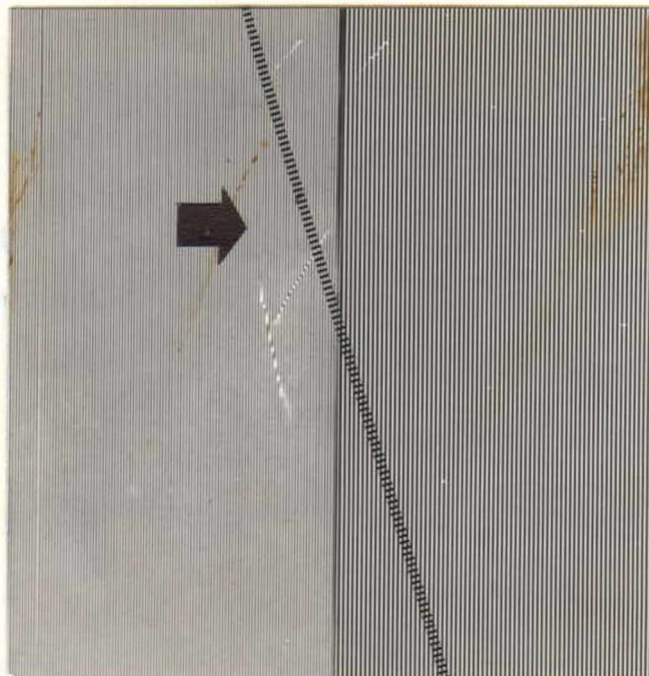


Figura II-16.b

II-5 GENERACION DE LAS FUNCIONES ESPACIO-FASE PARA FUNCIONES 2-D:

A lo largo de este capítulo se han discutido distintos procesadores para generar la WDF, AF y LS de señales 1-D. Algunos de ellos pueden generalizarse para obtener las funciones E-F de funciones 2-D separables o con simetría rotacional/15/. Como se mencionó en la Introducción, las funciones E-F correspondientes a una función 2-D son tetradimensionales (4-D), y este hecho implica la dificultad adicional de encontrar un sistema de coordenadas adecuado para representarlas. A pesar de esto, se han desarrollado algunos métodos para la producción óptica de la WDF de objetos 2-D. Todos ellos obtienen secciones bidimensionales de la función 4-D.

Bamler y Glunder/16/ mostraron que la WDF de un objeto 2-D puede ser obtenida como un conjunto de WDF's muestreadas para un número N , de posiciones x_w del objeto, tomadas secuencialmente o en paralelo. La principal desventaja de este método, es que el sistema requiere de dos copias del objeto superpuestas; y además de una parte movable para muestrear la posición x_w en el plano del objeto.

Subotic y Saleh/17/ propusieron un sistema óptico empleando una red bidimensional para producir N réplicas del objeto de entrada de modo que la producción de la WDF se hace en paralelo, con una sola transparencia de entrada y sin mover al objeto. Sin embargo, este sistema impone restricciones a las

dimensiones lineales del objeto y a la separación de las posiciones de muestreo.

Recientemente, Iway et al./18/ sugirieron un método óptico que sortea estas dificultades, donde las múltiples copias del objeto de entrada, corridas y con un cambio de escala, se obtienen con una red de fibras ópticas.

REFERENCIAS:

- /2-1/ R. J. Marks II, J. F. Walkup, and T. F. Krile, "AF Display: An Improved Coherent Processor", Appl. Optics 16, (1977), 746.
- /2-2/ R. J. Marks II and M. W. Hall, "AF Display Using a Single 1-D Input", Appl. Optics, 18, (1979), 2539.
- /2-3/ M. J. Bastiaans, "WDF display: A Supplement to AF Display Using a Single 1-D Input", Appl. Optics 19, (1980), 192.
- /2-4/ K. H. Brenner and A.W. Lohmann, "WDF Display of complex 1-D Signals", Optics Comm. 42, (1982), 310.
- /2-5/ H. O. Bartelt, K. -H. Brenner and A. W. Lohmann, "The WDF and its Optical Production", Optics Comm. 32, (1980), 32.
- /2-6/ S.I. Gosz, W.D. Furlan, E.E. Sicre and M. Garavaglia, "Display of the Local Spectrum: A Pseudocoloring Approach", Appl. Opt. 26, (1987), 979.
- /2-7/ R Arizaga, N. Bolognini, H.J. Rabal, E.E. Sicre and M. Garavaglia, "Realtime With Light Pseudocolor Density Encoder", Optics Comm. 43, (1982), 12.
- /2-8/ J Bescós and T.C. Strand, "Optical Pseudocolor Encoding of Spatial Frequency Information", Appl. Opt., 17, (1978), 2524.
- /2-9/ G. Indebetouw and L. Bernardo, "Color Coding of a Texture: An Analog Optical Technique", J. Opt., 12, (1981), 173.
- /2-10/ J. Santamaria, M. Gea and J.Bescós, "Optical Pseudocoloring Through Contrast Reversal Filtering", J. Opt. 10, (1979), 151.
- /2-11/ H. Bartelt, "Spatial Frequency Coloring and Feature Coloring", J. Opt., 12, (1981), 169.
- /2-12/ W.D. Furlan, S.I. Gosz and L.M. Zerbino, "Lensless Display of Phase Space Functions for 1-D Signals", Optics Comm., 65, (1988), 110.
- /2-13/ A. K. Chatak and K. Thyagarajan. "Contemporary Optics". (Plenum Press, New York, 1978).
- /2-14/ J. P. Mathieu, "Optique. Tome 1. Optique Electromagnetique", (S.E.D.E.D.S., Paris, 1965).

- /2-15/ H. Bartelt and K. -H Brenner, "Optics in Four Dimensions" M. Machado and L. Narducci, AIP Conf. Proc. No. 65 (N.Y.: Am. Ins. of Phys.) p.332.
- /2-16/ R. Bamler and H. Glunder, "The WDF of Two Dimensional Signals Coherent Optical Generation and Display", Optica Acta, 30, (1983), 1789.
- /2-17/ N. Subotic and B. Saleh, "Generation of The WDF of 2-D Signals by Parallel Optical Processor", Optics Lett., 9, (1984), 471.
- /2-18/ T. Iwai, A. Gupta and T. Asakura, "Simultaneous Optical Production of The Sectional WDF for a 2-D Object", Optics Comm., 58, (1986), 15.

CAPITULO III

MODELOS CUASI-GEOMETRICOS PARA EL ESTUDIO
DE LA DIFRACCION POR OBJETOS 3-D

III-1 INTRODUCCION:

Las soluciones de la ecuación de onda escalar, con condiciones de contorno conocidas en un plano, se obtienen a partir de la teoría de Fresnel-Kirchoff/1/. Sin embargo, en muchos casos prácticos, las condiciones de contorno están dadas sobre la superficie de un objeto tridimensional (3-D). Para estos casos, no existe una teoría de difracción que permita resolver la ecuación de onda de Helmholtz. Se han obtenido soluciones exactas sólo para la difracción por algunos objetos 3-D ideales, como una esfera conductora y un cilindro infinito/1/. Pero aún en estos casos las soluciones se presentan como series infinitas de funciones especiales. Esto prácticamente excluye la posibilidad de una interpretación física y visual de los efectos de difracción. Por esta razón se han desarrollado métodos aproximados para el tratamiento de la difracción por cuerpos volumétricos, que combinan el modelo conocido para la difracción bidimensional con consideraciones geométricas.

La teoría geométrica de la difracción propuesta por Keller es particularmente interesante/2/. Puede ser considerada como una extensión de la óptica geométrica, que tiene en cuenta los efectos de difracción. En ella se introduce el concepto de campo de rayo difractado, como complemento de los rayos usuales de la óptica geométrica. Estos rayos se generan por los rayos incidentes que rozan bordes o vértices de la superficie de los

objetos. En la teoría se enuncian leyes de difracción para los rayos difractados que son análogas a las leyes de reflexión y refracción. Además un campo es asociado a cada rayo y el campo total en un punto dado del espacio es la suma de los campos de todos los rayos que pasan por de ese punto. La fase del campo en un rayo es proporcional al camino óptico del rayo desde algún punto de referencia. La amplitud varía de acuerdo con el principio de conservación de la energía en un haz de rayos. El valor inicial del campo en un rayo difractado está determinado por el campo asociado al rayo incidente con el auxilio de un coeficiente de difracción apropiado. Estos coeficientes se determinan a partir de las soluciones de ciertos problemas canónicos, y además, se anulan cuando la longitud de onda tiende a cero. La justificación matemática del modelo de Keller se describe en el marco de la teoría electromagnética. Por presentar a la onda difractada en forma analítica, la teoría resulta ser particularmente conveniente para cálculos numéricos. Sin embargo, las expresiones así obtenidas son engorrosas y este hecho dificulta una interpretación simple de las mismas.

Chugui et al./3/ propusieron un método para calcular la difracción por objetos 3-D que combina ideas de la óptica geométrica y de la óptica ondulatoria. Este método permite una estimación simple de la influencia de la tridimensionalidad del objeto en su figura de difracción de campo lejano. Consiste básicamente en considerar al objeto 3-D como una caja negra,

caracterizada por sus pupilas de entrada y salida. La propagación de la luz entre las pupilas es tratada, o bien en términos de la óptica geométrica, o en los de la difracción de Fresnel, originándose en cada caso métodos aproximados diferentes, a saber: método cuasi-geométrico (QG) y método cuasi-geométrico modificado (QGM). En el trabajo se muestra que el método QGM da lugar a una mejor aproximación a la solución del problema.

Como se discutió en el capítulo I, las representaciones espacio fase, como la WDF, proveen una conexión entre la óptica geométrica y la óptica ondulatoria. Por esta razón, es de esperar que sean también adecuadas para el tratamiento del problema de la difracción de Fraunhofer por objetos 3-D, en el marco de los modelos cuasi-geométricos.

En este capítulo se hace una descripción de los métodos cuasi-geométricos y se establece una relación entre la amplitud difractada por objetos 3-D, y las distintas representaciones E-F, de modo que las propiedades de dichas representaciones puedan ser aplicadas al estudio del comportamiento del campo difractado por estos objetos.

III-2 DIFRACCION DE FRAUNHOFER POR OBJETOS 3-D: APROXIMACION CUASI-GEOMETRICA

Considérese un objeto de espesor Z_0 iluminado por una

onda plana monocromática de longitud de onda λ (Fig. III-1). Por simplicidad, se hará el análisis para objetos cuya transmitancia en amplitud en el plano (ξ, η) varíe solamente en la dirección ξ . Las caras anterior y posterior del objeto están ubicadas en los planos $Z=0$ y $Z=Z_0$ respectivamente, y sus transmitancias están descritas por las funciones $f(\xi)$ y $g(\xi')$.

El problema consiste en encontrar la distribución de amplitud de luz en cualquier punto del plano de Fraunhofer, es decir en el plano focal de la lente L.

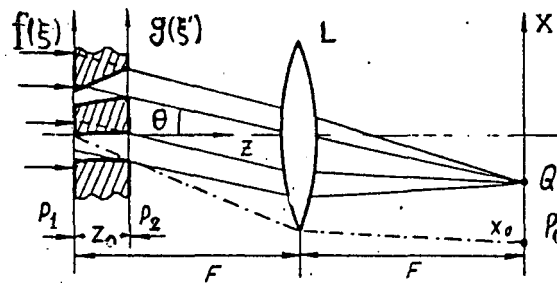


Figura III-1

Para determinar la amplitud de campo en un punto particular Q del plano focal, se examina la traza inversa de los rayos desde el plano focal hacia el plano de entrada. Para ello, se reemplaza la onda que converge hacia ese punto por una onda divergente propagándose de derecha a izquierda. Esta onda es transformada por el objetivo L en una onda plana con un ángulo de incidencia $\theta = \xi/f$ y luego es modulada por la cara posterior $g(\xi')$ en el plano P_2 . En la propagación hacia el plano P_1 la onda interactúa con las caras laterales del objeto. Para un objeto

absorbente con caras laterales planas; esta interacción, en una aproximación geométrica, es equivalente a la modulación de la distribución de entrada $f(\xi)$ por la distribución $g(\xi+\theta Z_0)$. Obviamente, esta aproximación cuasi-geométrica será correcta cuando una imagen verdadera de la cara posterior, producida en el plano de entrada, difiera levemente de $g(\xi')$. Para esto es necesario que el tamaño de la zona de Fresnel $\xi = \sqrt{\lambda Z_0}$, sea mucho menor que el tamaño característico (D) de la función binaria $g(\xi')$ (D representa al menor intervalo donde la función $g(\xi')$ no se anula), es decir $D \gg \xi = \sqrt{\lambda Z_0}$.

Por lo tanto, la amplitud de campo $U_{QG}(x)$ en el punto Q está definida por la función producto $f(\xi) \cdot g(\xi + \theta Z_0)$. Considerando al objeto iluminado por una onda plana, la amplitud del campo en el plano de Fraunhofer es:

$$U_{QG}(x) = \int f(\xi) g(\xi + Z_0 x/F) \exp(-2\pi i x \xi / \lambda F) d\xi. \quad (\text{III-1})$$

Tal como se establece en la referencia /3/, la aproximación QG (ec. (III-1)) describe la difracción de Fraunhofer para un cuerpo volumétrico de espesor Z_0 , sólo cualitativamente. La principal desventaja del método QG reside en que existe una discrepancia entre los resultados que se obtienen a partir de éste, y los que predice la óptica geométrica.

De acuerdo a las leyes de la óptica geométrica, las imágenes de las caras anterior y posterior del objeto son

producidas respectivamente en los planos P_1' y P_2' de la Figura III-2. Sin embargo como se desprende del análisis que sigue dichas imágenes no se corresponden con las que se obtienen a partir de la ecuación (III-1).

Suponiendo $g(\xi') = \text{cte}$, de la ecuación (III-1) se sigue que:

$$U_{06}(x) = K \int f(\xi) \exp(-2\pi i x \xi / \lambda F) d\xi. \equiv \mathcal{F}\{f(\xi)\} \quad (\text{III-2})$$

Esto concuerda con el hecho de que las distribuciones de amplitud en los planos P_1 y P_0 (Fig. III-1) están conectadas por una transformada de Fourier.

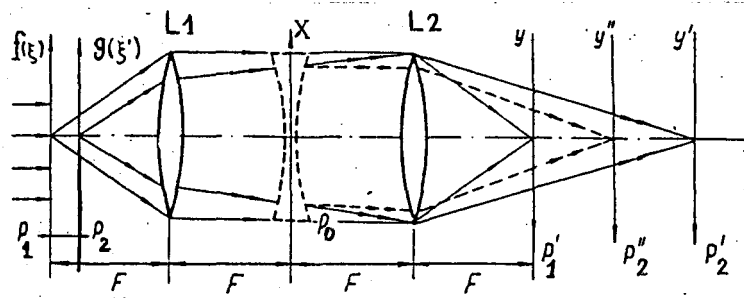


Figura III-2

Haciendo la transformada de Fourier inversa con la lente L2, en el plano P_1' se obtiene, como es de esperar, la imagen de la cara anterior. Ahora si $f(\xi) = \text{cte}$., de la ecuación (III-1) se obtiene:

$$U_{06}(x) = \int g(\xi + Z_0 x / F) \exp(-2\pi i x \xi / \lambda F) d\xi. \quad (\text{III-3-a})$$

$$= \exp(2\pi i x^2 Z_0 / \lambda F^2) \mathcal{F}\{g(x)\} \quad (\text{III-3-b})$$

El factor de fase en la ecuación (III-3) es equivalente a la acción de una lente cilíndrica de distancia focal $F' = -F^2/2Z_0$ (mostrada en la Fig. III-2 con línea de puntos en el plano P_0). Si dicha lente es ubicada en el sistema, la imagen de la cara posterior se ubicará, luego de una transformada de Fourier inversa, en el plano P_2'' . Esto contradice las ideas de la óptica geométrica de acuerdo a las cuales la cara posterior debería tener su imagen en el plano P_2' . En cambio si el factor de fase en la ecuación (III-3) fuese tal, que la distancia focal efectiva fuese el doble, o sea $F' = -F^2/Z_0$, los planos P_2' y P_2'' coincidirían.

Este análisis, muestra que una aplicación directa de la aproximación QG (ec. (III-1)) para el análisis espectral 3-D puede dar resultados que no concuerden con los conceptos de la óptica geométrica. Sin embargo esta discrepancia es solo cuantitativa. En el siguiente punto se analizan las razones para la misma y se propone un método alternativo.

III-3 METODO CUASI-GEOMETRICO MODIFICADO (QGM)

Al desarrollar la ecuación (III-1) se examinó el trazado de rayos en la Figura III-1 y se estableció que la onda con incidencia $\theta = \xi/f$ era modulada por la cara posterior del objeto en el plano P_2 y luego era proyectada con un desplazamiento $\Delta = \theta Z_0$ en el plano P_1 . Una vez multiplicadas las correspondientes

transmitancias, se calculaba la transformada de Fourier del producto $f(\xi).g(\xi+\theta Z_0)$.

En realidad, cuando la luz se propaga de P_2 a P_1 ocurre una convolución de la distribución inicial de luz con la respuesta impulso del espacio libre; en consecuencia, $f(\xi)$ es multiplicada no por $g(\xi+\theta Z_0)$ sino por su figura de difracción de Fresnel $\tilde{g}(\xi+\theta Z_0)$. La inclusión de la difracción de Fresnel conduce a reemplazar el parámetro Z_0 en la ecuación (III-1) por $Z_0/2$, dejando la frecuencia límite (x_0 en la Fig. III-1) igual que en el caso QG. Esta conclusión se deriva del siguiente análisis, donde se calcula el espectro 3-D en la aproximación de Fresnel.

Considerando las relaciones entre las distribuciones de amplitud para varios planos del sistema óptico/4/, puede determinarse fácilmente que el espectro en el modelo considerado es igual a:

$$F_{FR}(x) = \exp(2\pi i x^2 Z_0 / 2F^2) \mathcal{F} \left\{ \left[f(\xi') * \exp(2\pi i \xi'^2 / 2\lambda Z_0) \right] g(\xi') \right\} \quad (III-4)$$

donde $\exp(ik\xi^2/2Z_0)$ es la respuesta impulso del espacio libre y $*$ indica la operación de convolución. Haciendo algunas transformaciones la ecuación (III-4) puede escribirse como:

$$F_{FR}(x) = \int f(\xi) \tilde{g}(\xi+Z_0x/F) \exp(-2\pi i x \xi / \lambda F) d\xi. \quad (III-5)$$

donde

$$\tilde{g}(\xi) = \int g(\xi') \exp \left\{ (2\pi i/\lambda)(\xi - \xi')^2/2Z_0 \right\} d\xi' , \quad (\text{III-6})$$

es la figura de difracción de Fresnel de la función $g(\xi')$.

En lo que sigue, se usará el hecho de que cualquier función binaria $f(\xi)$ puede representarse como suma de funciones escalón $H(\xi)$. Para evitar cálculos complejos, y sin perder generalidad, se supondrá que las funciones $f(\xi)$ y $g(\xi')$ son de la forma:

$$f(\xi) = H(\xi) \quad \text{y} \quad g(\xi) = H(\xi' - A). \quad (\text{III-7})$$

Reemplazando (III-7) en (III-6) se obtiene:

$$F_{FR}(x) = \int H(\xi) \tilde{H}(\xi - A + Z_0 x/F) \exp(-2\pi i x \xi/\lambda F) d\xi. \quad (\text{III-8})$$

donde

$$\tilde{H}(\xi) = \int H(\xi') \exp \left\{ (2\pi i/\lambda)(\xi - \xi')^2/2Z_0 \right\} d\xi' , \quad (\text{III-9})$$

es la figura de difracción de $H(\xi')$, y está relacionada con la función de Fresnel:

$$Y(x) = \int_0^x \exp(i\pi t^2) dt, \quad (\text{III-10})$$

mediante la siguiente ecuación:

$$\tilde{H}(\xi) = \sqrt{\lambda Z_0} \{ Y(\infty) + Y(\xi/\sqrt{\lambda Z_0}) \} . \quad (\text{III-11})$$

Para $\xi > 0$, tanto el módulo como la fase de $\tilde{H}(\xi)$ tienen oscilaciones amortiguadas (ver Figura III-3). Para $\xi < 0$ el módulo de $\tilde{H}(\xi)$ cae rápidamente (línea llena), mientras que la fase crece (línea de puntos).

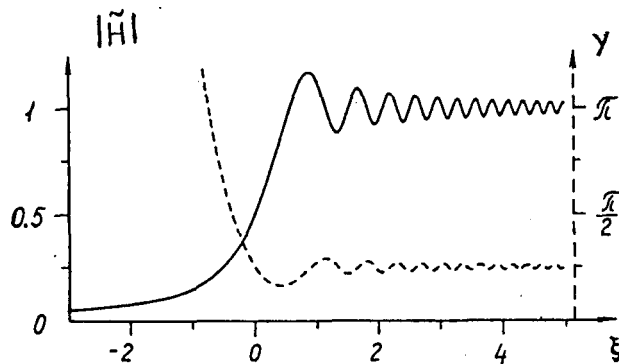


Figura III-3

Considérese al producto $H(\xi) \cdot \tilde{H}(\xi+a)$ de la ecuación (III-8), donde $a=(xZ_0/F)-A$. En la Figura III-4 se representa este producto para los posibles casos $a > 0$ y $a < 0$. De esta figura puede verse que

$$H(\xi) \tilde{H}(\xi+a) = \begin{cases} H(\xi) & \text{si } a > \xi, \\ H(\xi+a) & \text{si } a < -\xi. \end{cases} \quad (\text{III-12})$$

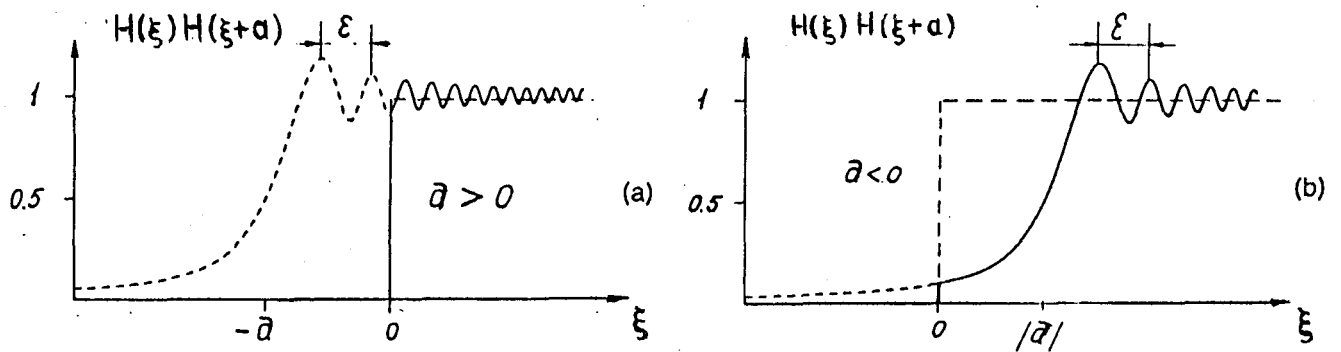


Figura III-4.

y el espectro, usando la aproximación de Fresnel es:

$$F_{FR}(x) = \begin{cases} \mathcal{F}\{H(\xi)\} & x > x_0 \\ \exp(-2\pi i x \xi / \lambda F) \exp(2\pi i x^2 Z_0 / 2\lambda F^2) \mathcal{F}\{H(\xi)\} & x < x_0 \end{cases} \quad \text{(III-13)}$$

donde $x_0 = AF/Z_0$.

Mientras que el espectro del objeto calculado por la expresión (III-1) usando la aproximación QG resulta:

$$U_{QG}(x) = \begin{cases} \mathcal{F}\{H(\xi)\} & x > x_0 \\ \exp(-2\pi i x \xi / \lambda F) \exp(2\pi i x^2 Z_0 / \lambda F^2) \mathcal{F}\{H(\xi)\} & x < x_0 \end{cases} \quad \text{(III-14)}$$

Las ecuaciones (III-13) y (III-14) difieren sólo en los factores de fase cuadráticos, que reflejan la influencia del volumen del objeto. $U_{QG}(x)$ puede transformarse en $F_{FR}(x)$ simplemente sustituyendo $Z_0/2$ por Z_0 en la ecuación (III-14); la frecuencia

límite $x_0=AF/Z_0$ permanece igual.

Puede demostrarse que el resultado obtenido de este análisis es válido para objetos más complejos que el estudiado. En síntesis el principal resultado derivado de este método consiste en substituir $Z_0/2$ por Z_0 en la ecuación (III-1), es decir:

$$U_{QGM}(x) = \int f(\xi) g(\xi+Z_0x/2F) \exp(-2\pi i x \xi / \lambda F) d\xi. \quad (III-15)$$

La expresión (III-15), da una mejor aproximación cuantitativa al espectro de difracción de Fraunhofer producido por objetos 3-D, como lo muestran los ejemplos calculados en la referencia/3/.

III-4 RELACION ENTRE LAS REPRESENTACIONES E-F Y EL METODO QGM:

Considérense nuevamente a las dos funciones binarias $f(\xi)$ y $g(\xi')$ que representen, respectivamente, las transmitancias en amplitud, de las caras anterior y posterior del objeto 3-D de la Figura III-1. De acuerdo con la definición del LS (ec. (I-66)), la ecuación (III-15) puede reescribirse de las siguientes dos formas alternativas:

$$U(x) = \begin{cases} Cfg(-Z_0x/2F, x/\lambda F) \\ \exp(i\pi Z_0x^2/\lambda F^2) Cgf(Z_0x/2F, x/\lambda F) \end{cases} \quad (\text{III-16})$$

Como se deduce de (III-16), la distribución de intensidad en el plano de Fourier puede considerarse como el espectro local de $f(\xi)$ con $g(\xi')$ como función ventana, o bien como el espectro local de $g(\xi')$ con $f(\xi)$ como función ventana. Sin embargo, considerando las restricciones asociadas normalmente a la función ventana (por ejemplo su ancho debe ser menor que el de la función señal) sólo una de las ecuaciones anteriores interpreta verdaderamente el fenómeno físico como espectrograma local, dependiendo esto de cada caso particular.

Suponiendo, por ejemplo, a $f(\xi)$ como función ventana, la intensidad en el plano de Fourier puede escribirse:

$$I(x) = \begin{cases} |Cf_g(Z_0x/2F, x/\lambda F)|^2, \\ L_g(Z_0x/2F, x/\lambda F) \end{cases} \quad (\text{II-17})$$

De la ecuación (III-17), surge la siguiente interpretación: las variaciones de intensidad a lo largo de la coordenada x corresponden a las mismas variaciones del espectro local 2-D de la función pupila de salida $g(\xi')$, a lo largo de la línea $x=(\lambda Z_0/2)u$, en el espacio fase (x,u) .

Si se considera un objeto binario unidimensional de espesor Z_0 , con aperturas de entrada y salida idénticas, es decir $f(\xi)=g(\xi')$, el campo resultante es:

$$U(x) = \exp(i\pi Z_0 x^2 / 2\lambda F^2) A(x/\lambda F, Z_0 x/2F). \quad (\text{III-18})$$

Esto es, la intensidad del campo difractado en la aproximación de Fraunhofer puede ser expresado en función del módulo al cuadrado de la AF asociada a la apertura del objeto (A).

Si además la función apertura es simétrica (por ejemplo una doble rendija de ancho Z_0) el campo resultante es:

$$U(x) = \exp(i\pi Z_0 x^2 / 2\lambda F^2) W(Z_0 x/4F, x/2\lambda F). \quad (\text{III-19})$$

En este caso la amplitud difractada es proporcional a la WDF de la apertura del objeto 3-D (W).

Por lo tanto las ecuaciones (III-17), (III-18) y (III-19) relacionan en forma compacta la expresión del campo difractado por el objeto 3-D con sus parámetros geométricos; esto es las funciones apertura $f(\xi)$ y $g(\xi')$, y el espesor Z_0 . A partir de estas relaciones, el análisis de los procesos de difracción puede hacerse fácilmente por medio de las funciones E-F.

Para el caso $f(\xi) \neq g(\xi')$ la intensidad del campo difractado puede encontrarse, por ejemplo, de las variaciones de amplitud del LS asociado con $g(\xi')$, usando $f(\xi)$ como función

ventana, a lo largo de la línea (en el espacio-fase) definida por $\text{tg } \phi = x/u = \lambda Z_0/2$. Si el espesor del objeto cambia, la nueva distribución de intensidad difractada se encuentra a través de los valores del mismo LS pero a lo largo de una línea que forme un ángulo ϕ diferente en el espacio (x,u) . Por otra parte, si la apertura de entrada se altera, la intensidad resultante, será el LS de la función $g(\xi')$ con una función ventana diferente.

Si se considera el caso $f(\xi) = g(\xi')$, las distribuciones de intensidad difractada, para los distintos posibles valores de Z_0 , están contenidas en la representación de la AF de la función $f(\xi)$. Para objetos que cumplan esta condición, y además sean simétricos las correspondientes distribuciones de intensidad pueden obtenerse también de la representación de la WDF de la función pupila ó apertura.

III-5 VISUALIZACION DE LA FIGURA DE DIFRACCION DE OBJETOS 3-D: EJEMPLOS

Para ilustrar como una representación apropiada de los formalismos E-F puede aplicarse al estudio de la figura de difracción de objetos 3-D, se considerarán dos casos: la difracción producida por una rendija volumétrica, y por una doble rendija volumétrica.

Para el primer caso, $f(\xi) = g(\xi') = \text{rect}(\xi)$, y por lo tanto

la distribución de amplitud de campo está dada por (III-18), resultando:

$$U_F(x) = \begin{cases} \exp\{i\pi z_0 x^2 / 2\lambda f^2\} [1 - |y|/a] \text{sinc} [(\pi a x / \lambda f) (1 - |y|/a)] ; & |y| \leq a \\ 0 & ; |y| > a \end{cases} \quad (\text{III-20})$$

donde a es el ancho de la rendija, y la variable espacial y , está relacionada con el espesor Z_0 por $y = Z_0 x / 2F$. Por lo tanto, si se considera la expresión dada por (III-20) como una función $A(x, y)$ de variables: frecuencia espacial $u = x / \lambda F$, y coordenada espacial y ; la distribución de intensidad en el plano de Fourier puede hallarse a partir de $|A(u, y)|^2$ (representada en la Figura III-5) a lo largo de las líneas definidas por $\text{tg } \phi = \lambda Z_0 / 2$.

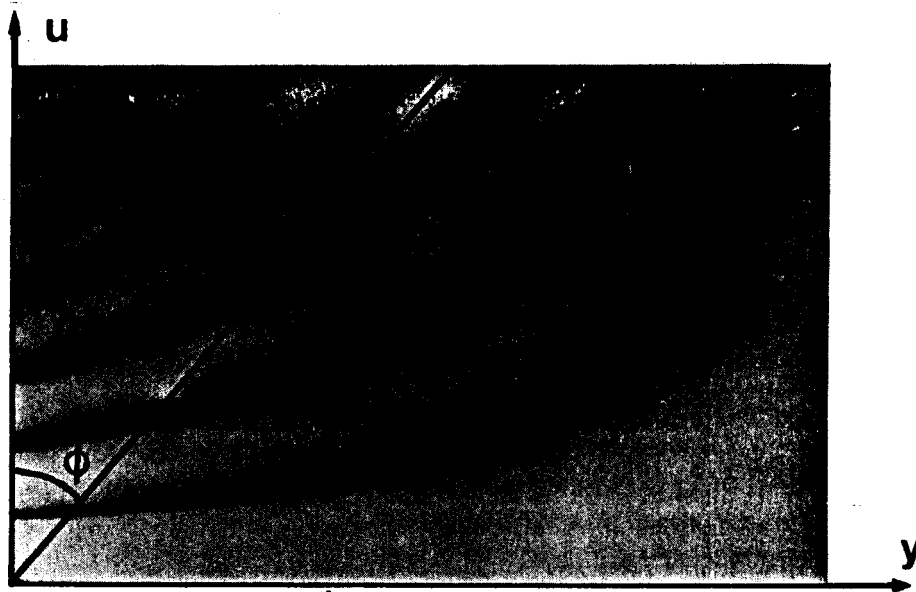


Figura III-5

Si $Z_0=0$ entonces resulta $y=0$, y el corte de la AF a lo largo del eje u , se reduce a una función seno cardinal, que, como es sabido representa la difracción de Fraunhofer de una rendija plana.

Como segundo ejemplo, considerense dos rendijas volumétricas idénticas de ancho a , espesor Z_0 y separación d . En este caso $f(\xi)=g(\xi')=\text{rect}[(\xi-d/2)/a] + \text{rect}[(\xi+d/2)/a]$ y la distribución de amplitud de campo en el plano de Fourier es:

$$\begin{aligned}
 U_F(x) = \left\{ \begin{array}{l}
 \left[1 - \frac{(a+d)|y|}{a^2} \right] \cos \frac{\pi a d x}{\lambda f(a+d)} \text{sinc} \left[\frac{\pi a^2 x}{\lambda f(a+d)} \left(1 - \frac{(a+d)|y|}{a^2} \right) \right]; \\
 \hspace{20em} |y| \leq a^2/(a+d). \\
 \left[\left[|y| - \frac{a(d-a)}{(d+a)} \right] / \left[\frac{2a^2}{(a+d)} \right] \right] \text{sinc} \left[\frac{\pi x}{\lambda f} \left(|y| - \frac{a(d-a)}{(d+a)} \right) \right]; \\
 \hspace{20em} a(d-a)/(a+d) \leq |y| \leq ad/(a+d). \\
 \left[\frac{a-|y|}{2a^2/(a+d)} \right] \text{sinc} \left[\left(\frac{\pi x}{\lambda f} \right) (a-|y|) \right]; \\
 \hspace{20em} ad/(a+d) \leq |y| \leq a. \\
 0 \hspace{20em} \text{en otro lugar}
 \end{array} \right. \quad \text{(III-21)}
 \end{aligned}$$

De igual modo que en el caso de una única rendija, se considera a la expresión dada por (III-21) como un corte del módulo de la AF: $|A(u,y)|^2$ a lo largo de una línea en el E-F definida por

$y=(\lambda Z_0/2)u$. La AF correspondiente a dos rendijas se muestra en la Figura III-6. Nuevamente si $Z_0=0$, el corte de la AF coincide con el eje u , y se obtiene un conjunto de franjas de Young, modulando a una función seno cardinal, igual que en el caso de una doble rendija plana.

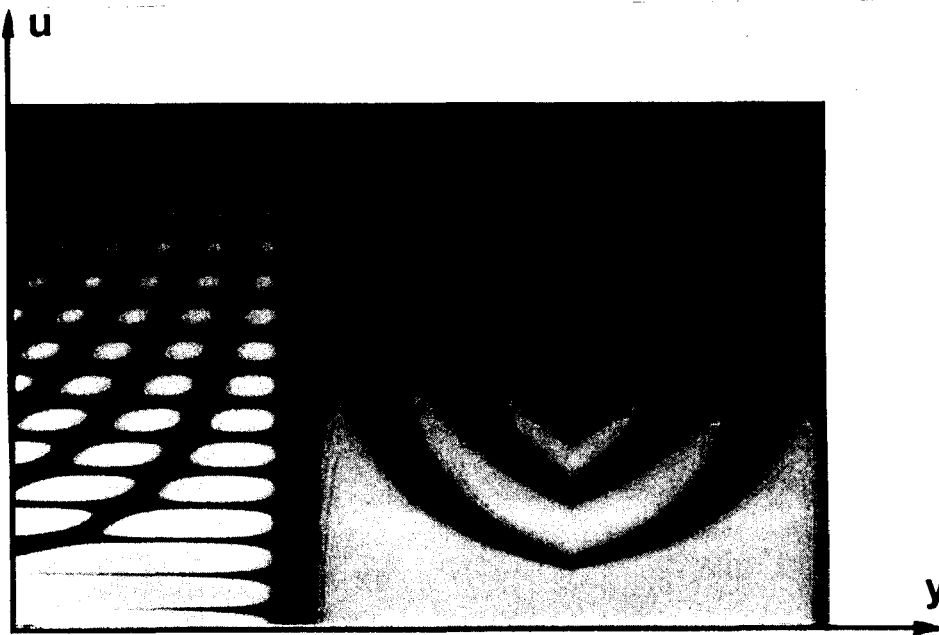


Figura III-6

REFERENCIAS:

- /III-1/ Born & Wolf, "Principles of Optics", N.Y. Pergamon, 1978.
- /III-2/ J.B.Keller, "Geometrical theory of diffraction", J. Opt. Soc. Am. , 52, (1961), 116.
- /III-3/ Y. Chughi, V.P. Koronkevitch, B.E. Krivenkov and S. Mikhlyaev, "Quasi geometrical method for Fraunhofer diffraction calculations for three-dimensional bodies", J. Opt. Soc. Am., 71, (1981), 483.
- /III-4/ A. Vander Lugt, "Operational notation for the analysis and synthesis of optical data processing systems", Proc. IEEE 54, (1966), 1055.
- /III-5/ W.D. Furlan, E.E. Sicre and M. Garavaglia, "Quasi-Geometrical paraxial approach to Fraunhofer diffraction by thick planar objects using phase-space signal representations", J. Modern Optics, 35, (1988), 735.

CAPITULO IV

APLICACION DE LOS FORMALISMOS E-F AL PROCESAMIENTO
OPTICO DE IMAGENES.

IV-1 INTRODUCCION

Las aberraciones constituyen un problema inherente a los sistemas ópticos formadores de imágenes. En el marco de la teoría de Huygens-Fresnel, estas se describen matemáticamente por medio de la función aberración $\Omega(x,y)$ que representa la desviación del frente de onda respecto de una esfera perfecta (diferencia de camino óptico), donde (x,y) son las coordenadas adimensionales en el plano de la pupila de salida.

De acuerdo al tipo de tratamiento, la función aberración se expande generalmente en series de potencia (tratamiento óptico geométrico), o bien en términos de polinomios que formen un conjunto completo en el interior de un círculo unidad (tratamiento según la teoría de difracción)/1/.

Existen varios criterios para especificar la tolerancia de un sistema óptico a las aberraciones y/o a errores de enfoque. Históricamente, el primer criterio fue enunciado por Lord Rayleigh/2/. Según el mismo para que la calidad de una imagen sea aceptable, el máximo apartamiento del frente de onda respecto de un frente de onda esférico debe ser menor que un cuarto de la longitud de onda de la luz incidente. Es decir:

$$\max |\Omega(x,y)| \leq \lambda/4. \quad (\text{IV-1})$$

Nótese que esta condición no impone ninguna restricción individual sobre los coeficientes de aberración en los cuales se expande al frente de onda.

En base al criterio del cuarto de onda, Rayleigh estableció que, para que la calidad de la imagen no sufra un deterioro apreciable, la máxima iluminancia en la imagen dada por un sistema óptico con aberración esférica debe ser por lo menos el 80% de la iluminancia de un objetivo libre de aberraciones. Esta condición sobre las intensidades puede asociarse a la razón de Strehl/1/, que se define comunmente como el cociente entre las intensidades en el foco de la imagen aberrada (I_r) y de la imagen libre de aberraciones I , de la siguiente manera:

$$S = I_r/I \geq 0.8 \quad (IV-2)$$

Trabajos de Barakat/3/ y Mahajan/4/ mostraron que el criterio del cuarto de onda no conduce necesariamente a una razón de Strehl de 0.8. Este criterio es sólo una primera aproximación al estado ideal de un sistema óptico, ya que la distribución de luz en una imagen depende no sólo de la máxima deformación del frente de onda, sino también de la forma del mismo (tipo de aberración).

Cuando la condición (IV-1) se aplica a aberraciones de diferente tipo se obtienen distintos valores para la intensidad en el foco de difracción. Resulta más apropiado entonces, formular un criterio de tolerancia que tenga en cuenta, en cada punto, al

apartamiento respecto del frente de onda ideal. Un criterio de este tipo fue formulado por Marechal/5/, quien usó la relación que existe entre la intensidad en el centro de la esfera de referencia y la varianza del frente de onda respecto de la misma (σ^2). Para aberraciones pequeñas puede expresarse como:

$$S = (1 - 1/2 \sigma^2). \quad (IV-3)$$

De acuerdo con Marechal puede decirse que un sistema óptico está corregido cuando el valor de la razón de Strehl es mayor o igual que 0.8. Según los cálculos realizados por Mahajan/4/ la ecuación (IV-3) proporciona resultados con un error menor que un 10% si la razón de Strehl es mayor que 0.6. La fórmula de Marechal muestra que la razón de Strehl es máxima cuando la varianza de la aberración es mínima.

Otro de los criterios de calidad de un sistema formador de imágenes puede obtenerse a partir de la teoría de la Función de Transferencia Óptica (OTF). En virtud de que, las propiedades de formación de imágenes de un sistema óptico pueden ser evaluadas por medio de la OTF, esta resulta útil para clarificar resultados que serían difíciles de juzgar a partir de distribuciones de intensidad. Este criterio fue usado por Hopkins/6/ para evaluar el grado de desenfoque de pupilas binarias, y por Mino y Okano/7/ para pupilas sombreadas ("shaded apertures").

Mino y Okano destacan dos condiciones que debe cumplir la OTF de un sistema desenfocado para que la imagen sea confiable: 1) Que la OTF no sea negativa (lo cual conduciría a una inversión de contraste), y 2) Que la OTF sea una función monótona decreciente. Concluyen además, que para aberraciones pequeñas, las pupilas sombreadas, son menos sensibles que las binarias, a la aberración esférica y al desenfoque.

En los formalismos E-F, la función Ambigüedad ha sido usada para el tratamiento de sistemas ópticos con errores de enfoque. Como se vió en la sección (I-3.d), la AF puede usarse para la visualización de la "performance" de un sistema óptico desenfocado. H. Bartelt et al./8/ utilizaron esta propiedad como criterio de tolerancia para errores de enfoque, comparando la performance de distintos tipos de pupilas.

A lo largo de este capítulo, se utilizan los formalismos E-F para analizar la razón de Strehl de sistemas ópticos con desenfoque y aberración esférica. En primer término, se muestra que la AF describe el contenido de frecuencias de la Razón de Strehl. Luego, se obtiene para el mismo criterio una representación en función de la óptica geométrica, usando a la WDF para asociar "amplitudes" a los rayos paraxiales que cortan al eje óptico. Se establece además, que para pupilas simétricas, el valor de la OTF puede ser asociado con la amplitud de un rayo que corte al eje óptico. Se discuten finalmente algunas aplicaciones de estos resultados.

IV-2 REPRESENTACION DE LA RAZON DE STREHL EN EL E-F

La Razón de Strehl (RS) además de ser una figura de mérito intuitivamente simple, de un sistema óptico, posee un significado físico que está relacionado directamente con el proceso de formación de imágenes/9/. En primer lugar la RS es, para pequeñas aberraciones, una medida aproximada de la fracción de flujo radiante que está contenida en la parte central brillante de la imagen de un punto fuente. Segundo, debido a que un sistema óptico con iluminación incoherente puede ser considerado como un filtro pasa bajos lineal, puede pensarse a la RS como el área bajo la función de transferencia. Además, la RS puede ser tratada como la correlación estadística de Linfoot/9/, es decir maximizar a la RS, asegura que las regiones de distinta densidad de brillo en la imagen se correspondan con aquellas en el objeto.

Por las razones expuestas, los métodos para la evaluación de la RS son de un gran interés práctico.

IV-2-1 CONTENIDO DE FRECUENCIAS DE LA RAZON DE STREHL

Las aberraciones en un sistema óptico con simetría rotacional son representadas por la función aberración esférica:

$$\Omega(r) = f \sum_{p=1}^m \omega_{2p,0} r^{2p}, \quad (\text{IV-4})$$

donde $\omega_{z_0,0}$, es el coeficiente de aberración y f es un factor de escala en unidades de longitud de onda. Considerando sólo la aberración esférica primaria o de Seidel resulta:

$$\Omega(r) = f(\omega_{z_0} r^2 + \omega_{4_0} r^4), \quad (\text{IV-5})$$

donde ω_{z_0} y ω_{4_0} son los coeficientes de desenfoque y aberración esférica primaria, respectivamente.

La PSF de un sistema óptico con estas características es la siguiente:

$$P(r, \omega_{z_0}, \omega_{4_0}) = 2\pi \int_0^\infty P(\rho) J_0(2\pi r \rho) \exp\left\{2\pi i \left[\omega_{z_0} (\rho/\rho_0)^2 + \omega_{4_0} (\rho/\rho_0)^4 \right]\right\} \rho d\rho. \quad (\text{IV-6})$$

En la ecuación (IV-6), $P(\rho)$ representa a la amplitud compleja de la pupila apertura, J_0 es la función de Bessel de primer grado y orden cero, y $\omega_{z_0} = z(\lambda \rho_0^2/2)$ (ρ_0 es la frecuencia de corte). De acuerdo a la Figura IV-1, el plano focal se encuentra en $z=0$.

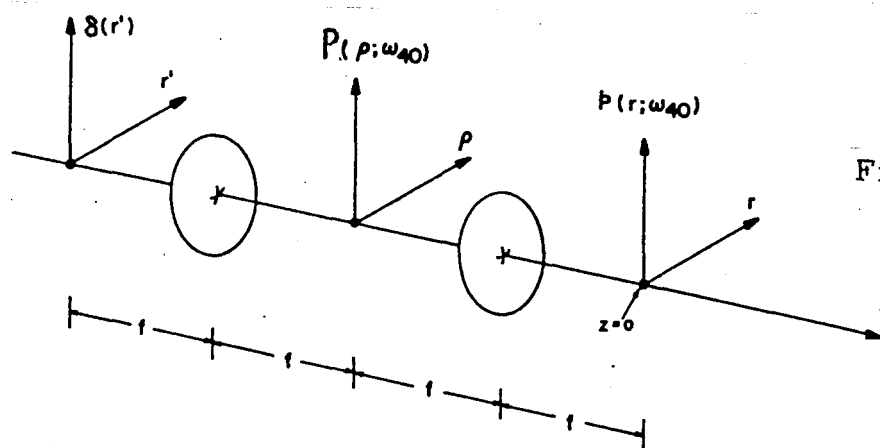


Figura IV-1

Según la óptica geométrica, la PSF sería una versión (reducida pero similar) de la intensidad de la transmitancia en la pupila. Por lo tanto la RS puede escribirse:

$$S(\omega_{20}, \omega_{40}) = \frac{|p(r=0, \omega_{20}, \omega_{40})|^2}{|p(r=0, \omega_{20}=\omega_{40}=0)|^2} \quad (\text{IV-7})$$

Haciendo el siguiente cambio de variables:

$$\xi = (\rho/\rho_0)^2 - 0.5, \quad (\text{IV-8})$$

siendo un parámetro adimensional asociado a una frecuencia espacial (el cambio de variables de la ecuación (IV-8) transforma cualquier pupila de simetría circular en una pupila rectangular unidimensional que es distinta de cero sólo en el intervalo $(-1/2, 1/2)$). Definiendo la siguiente función pupila generalizada:

$$\tilde{Q}(\xi) = P(\rho) / 2\pi \int_0^{\infty} P(\rho) \rho d\rho, \quad (\text{IV-9})$$

y sustituyendo a la ec. (IV-9) en la ec.(IV-6), la RS puede escribirse:

$$S(\omega_{20}, \omega_{40}) = |Q(\omega_{20}, \omega_{40})|^2 \quad (\text{IV-10})$$

donde

$$Q(\omega_{20}, \omega_{40}) = \int \tilde{Q}(\xi) \exp \left\{ 2\pi i \left[\omega_{40} \xi^2 + (\omega_{20} + \omega_{40}) \xi \right] \right\} d\xi . \quad (\text{IV-11})$$

En la ecuación (IV-11) se ha omitido un factor de fase multiplicativo, irrelevante para la presente discusión.

Por lo tanto, la RS para un sistema óptico con errores de enfoque y aberración esférica puede ser expresada como una PSF unidimensional. Ahora bien, un sistema óptico como el de la Figura IV-1, puede (en virtud de que el sistema es lineal y espacialmente invariante) ser también representado por su respuesta en frecuencias. Es decir, se puede definir una función de transferencia para dicho sistema, ya que la irradiancia a lo largo del eje óptico es isoplanática y aún más, la irradiancia a la salida es la superposición lineal de las irradiancias a la entrada.

De esta forma, se define a la función de transferencia como:

$$\tilde{S}(\xi, \omega_{40}) = \int S(\omega_{20}, \omega_{40}) \exp(-2\pi i \xi \omega_{20}) d\omega_{20} , \quad (\text{IV-12})$$

donde el coeficiente de desenfoque ω_{20} , es usado como variable espacial adimensional y ξ como frecuencia espacial también adimensional.

La transformada de Fourier en la ecuación (IV-12) puede pensarse como el contenido de frecuencias espaciales de la RS para aberración esférica variable. J.Ojeda-Castañeda et al./10/ aplican la función de transferencia dada por la ec. (IV-12) al cálculo de la distribución de intensidad a lo largo del eje óptico para un sistema telescópico como el de la Figura IV-1. Ellos demuestran que la variable frecuencia en la ec.(IV-12) puede pensarse como una frecuencia espacial adimensional para una variación de irradiancia sinusoidal positiva a lo largo del eje óptico, a la entrada del sistema. La influencia de la aberración esférica en la irradiancia sobre el eje óptico puede ser interpretada en término de las modificaciones de la función de transferencia de la ecuación (IV-12) con ω_{40} como parámetro. Estas modificaciones de la función de transferencia pueden visualizarse a través de la AF de la función $Q(\omega_{20}, \omega_{40})$ de la siguiente forma: la expresión (IV-12),

$$\tilde{S}(\eta, \omega_{40}) = \int |Q(\omega_{20}, \omega_{40})|^2 \exp(-2\pi i \eta \omega_{20}) d\omega_{20} \quad (IV-13)$$

puede expresarse como:

$$\tilde{S}(\eta, \omega_{40}) = \exp(2\pi i \omega_{40} \eta) \int \tilde{Q}(\xi + \eta/2, \omega_{40}) \tilde{Q}^*(\xi - \eta/2, \omega_{40}) \\ \times \exp\{2\pi i (2\omega_{40} \eta) \xi\} d\xi. \quad (IV-14)$$

Comparando la ecuación (IV-14) con la definición de la AF (ec.(I-39)), se obtiene:

$$|\tilde{S}(\eta, \omega_{40})| = |A(\eta, x=2\omega_{40}\eta)|. \quad (\text{IV-15})$$

Consecuentemente, una gráfica de la AF muestra los módulos de la función de transferencia (que se asocia a la RS vs. errores de enfoque) como un conjunto de líneas $x=2\eta\omega_{40}$ para distintos valores de aberración esférica (Fig. IV-2). Si se considera una función de transferencia hipotética que no sea afectada por aberración esférica se obtiene una AF invariante a lo largo de la línea $x=2\omega_{40}\xi$.

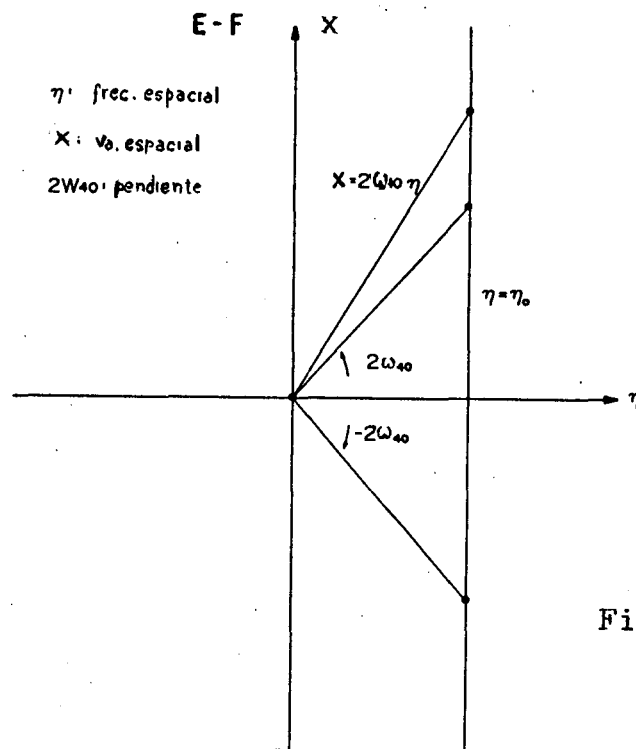


Figura IV-2

Si se desea reducir la influencia de la aberración esférica en la función de transferencia, la AF (para una dada frecuencia) debe decrecer suavemente a medida que x crezca en valor absoluto, de forma tal que la función de transferencia varíe lentamente con ω_{10} .

IV-3 FORMULACION DE LA RAZON DE STREHL BASADA EN LA WDF/11/

A partir del análisis de Fourier y del concepto de funciones de transferencia se han desarrollado métodos que constituyen una poderosa herramienta en el análisis de la performance de sistemas ópticos/6,10/.

Sin embargo, cuando los diseñadores de sistemas ópticos tratan de llevar estos resultados a la práctica, se encuentran en principio, con un gran obstáculo. Esto se debe a que los métodos antes mencionados se basan en la óptica ondulatoria; mientras que tradicionalmente, el diseño práctico hace uso de la óptica geométrica. Existen dos buenas razones para esto último: la cantidad de cálculo es mucho menor en la óptica geométrica que en la ondulatoria, y la calidad de las lentes puede predecirse con bastante exactitud a partir del conocimiento de las aberraciones geométricas en la etapa de diseño.

A pesar de que algunos conceptos como la OTF pueden extenderse a la óptica geométrica/12-14/, la relación entre ambas

técnicas es aún insatisfactoria. El propósito de esta sección es presentar a la RS (criterio de calidad basado en la óptica ondulatoria) en términos de rayos de la óptica geométrica.

IV-3-1 RAZON DE STREHL PARA EL DESENFQUE

Como se discutió en el capítulo I, dos de las propiedades más importantes de la WDF son:

i) La irradiancia en cualquier punto x se obtiene como la proyección de la WDF a lo largo del eje u , es decir:

$$I(x) = \int W(x,u) du. \quad (IV-16)$$

ii) La WDF de la figura de difracción de Fresnel de una pupila cuya transmitancia está representada por la función $t(x)$, es decir:

$$U(x;z) = \int t(y) \exp\{-i\pi(x-y)^2/\lambda z\} dy \quad (IV-17)$$

permanece invariante a lo largo de la línea $x=\lambda zu$ esto es:

$$\begin{aligned} W(x,y;z) &= \int U(x+x'/2;z) U^*(x-x'/2;z) \exp(-2\pi i u x') dx' \\ &= W_t(x-\lambda zu, u), \end{aligned} \quad (IV-18)$$

donde W_t es la WDF de la pupila. Esto significa que, en la aproximación paraxial, es posible asociar una "amplitud" con la trayectoria de un rayo de la siguiente manera.

Un rayo paraxial que forma un ángulo θ con el eje óptico z , es asociado con la frecuencia espacial $u = \theta/\lambda$. La trayectoria del rayo está dada en cada punto x por la relación $x = z\theta = \lambda zu$.

Por lo tanto, la WDF es invariante a lo largo de la trayectoria de un rayo (ec.(IV-18)) y, ya que la irradiancia es la suma de todos los posibles rayos (ec.(IV-16)) resulta válido considerar a la WDF como la "amplitud" del rayo que pasa por el punto de coordenada x formando con el eje óptico un ángulo $\theta = x/z$. Esta interpretación que fue sugerida por Bastiaans/15/, es aplicada aquí para dar una representación, de la SR para errores de enfoque y aberración esférica en términos de rayos.

Considérese una apertura rectangular unidimensional de ancho $2X$; esto es:

$$t(x) = \text{rect}(x/2X) \quad (\text{IV-19})$$

La WDF de la ecuación (IV-19) es:

$$W_t(x, u) = [X - |x|] \text{rect}(x/2X) \text{sinc} \{4u(x - |x|)\}. \quad (\text{IV-20})$$

Si se considera una lente delgada ubicada en la apertura, la amplitud compleja para planos desenfocados $z \neq 0$ en la Figura IV-3,

resulta:

$$U(x; z) = \int t(y) \exp(-i\pi y^2 / \lambda f) \exp\{-i\pi(x-y)^2 / \lambda(f+z)\} dy. \quad (\text{IV-21})$$

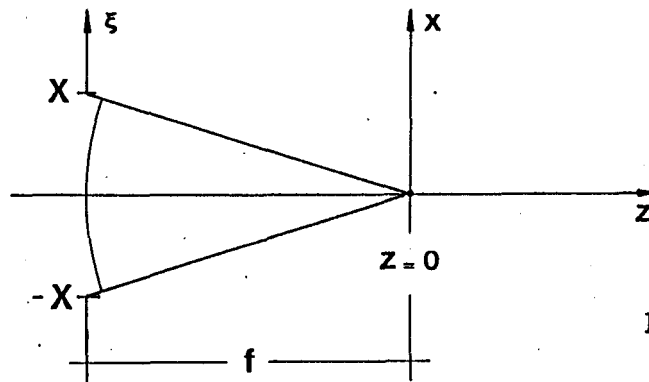


Figura IV-3

Es inmediato demostrar que la WDF de la ecuación anterior es:

$$W(x, u; z) = W_t(x - \lambda(f+z)u, x/\lambda f - zu/f). \quad (\text{IV-22})$$

Consecuentemente, la amplitud de los rayos que cortan al eje óptico para z variable es:

$$W(x=0, u; z) = W_t(-\lambda(f+z)u, -zu/f). \quad (\text{IV-23})$$

Esto es, la amplitud puede visualizarse como los valores de la WDF de la pupila apertura en coordenadas (y, μ) , a lo largo de líneas $y = [f(f+z)/z]\mu$ (véase la Fig. IV-4). La ecuación (IV-23) implica una rotación mas un cambio de escala de la pupila apertura.

La amplitud para $z=0$ (plano focal) se encuentra a partir

de los valores de la WDF a lo largo del eje $y = -fu$ que pasa por el origen de coordenadas, es decir:

$$W(x=0, u; 0) = [x - \lambda f |u|] \text{ rect } u / (2x / \lambda f) . \quad (\text{IV-24})$$

En la apertura ($z = -f$), las amplitudes son los valores de la WDF a lo largo del eje $\mu = u$:

$$W(x=0, u; -f) = X \text{ sinc}(4xu) \quad (\text{IV-25})$$

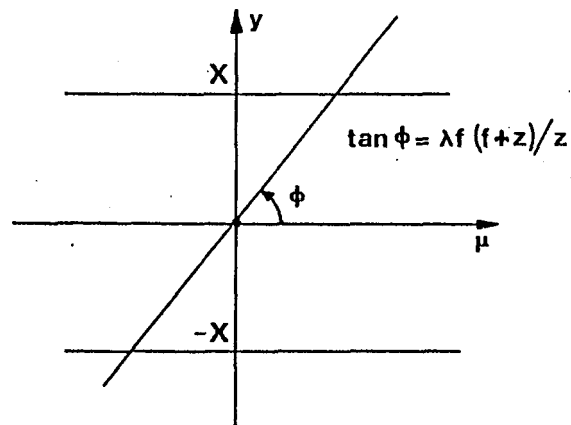


Figura IV-4

En conclusión, para analizar los errores de enfoque debe considerarse lo siguiente: cualquier rayo que intersecta al eje óptico en planos desenfocados $z \neq 0$, cruza el plano focal en $x \neq 0$; en otras palabras, para un dado ángulo θ (o frecuencia espacial $u = \theta / \lambda$) la contribución en amplitud en un plano cualquiera z proviene de un rayo que cruza el plano focal en $x = \lambda zu$ (ver Fig. IV-5).

Por lo tanto, mediante argumentos geométricos sencillos

es posible relacionar los valores de la WDF en el plano focal con aquellos en planos desenfocados y, por medio de la ecuación (IV-16) hallar la RS de la siguiente manera:

$$S = \frac{\int W(x=\lambda zu, u, z=0) du}{\int W(x=0, u, z=0) du} \quad (\text{IV-26})$$

o sea:

$$S = \frac{\int W_t(-\lambda(f+z)u, -zu/f) du}{\int W_t(-\lambda zu, 0) du} \quad (\text{IV-27})$$

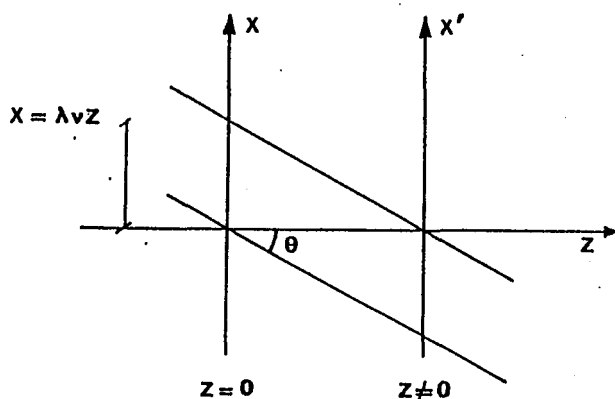


Figura IV-5

IV-3-2 CASO BIDIMENSIONAL: ABERRACION ESFERICA DE SEIDEL

Considérese el caso de un sistema con simetría rotacional alrededor del eje óptico, que tenga errores de enfoque $\omega_{20} \neq 0$ y

aberración esférica $\omega_{40} \neq 0$. Como se discutió en la sección IV-2-1, la RS como función de mérito de este sistema óptico puede escribirse (combinando (IV-10) y (IV-11))

$$S(\omega_{20}, \omega_{40}) = \left| \int \tilde{Q}(\xi) \exp \left\{ 2\pi i \left[\omega_{40} \xi^2 + (\omega_{20} + \omega_{40}) \xi \right] \right\} d\xi \right|^2 \quad (\text{IV-28})$$

donde nuevamente Q representa a la pupila generalizada de la ecuación (IV-9) y se ha hecho el cambio de variables de la expresión (IV-8). La ecuación anterior puede escribirse como

$$S(\omega_{20}, \omega_{40}) = \iint \tilde{Q}(\xi + \xi'/2) \tilde{Q}^*(\xi - \xi'/2) \exp \left\{ 2\pi i (\omega_{40} (2\xi\xi' + (\omega_{20} + \omega_{40}) \xi')) \right\} d\xi' d\xi, \quad (\text{IV-29})$$

o bien usando la definición de la WDF

$$S(\omega_{20}, \omega_{40}) = \int W(2\omega_{40}\xi + (\omega_{20} + \omega_{40}), \xi) d\xi. \quad (\text{IV-30})$$

Consecuentemente la performance de un sistema óptico como el de la Figura IV-1, puede analizarse estudiando el comportamiento de la WDF $W(y, \xi)$ asociada a la pupila generalizada (IV-8) y (IV-9) a lo largo de líneas: $y = 2\omega_{40}\xi + (\omega_{20} + \omega_{40})$. Esta es una generalización del tratamiento hecho en la sección IV-3-1, que se extiende a pupilas 2-D, de simetría rotacional con errores de enfoque y aberración esférica primaria.

IV-3-3 AMPLITUD DE LOS RAYOS A PARTIR DE LA OTF

Para pupilas simétricas, es decir $T(u)=T(-u)$ la OTF asociada (o sea, la autocorrelación de la función pupila), es:

$$H(\mu) = \int T(u+\mu/2) T^*(u-\mu/2) du. \quad (\text{IV-31})$$

A partir de (IV-31) y de la definición de la WDF (ec.I-1), es claro que la OTF está relacionada con la WDF de la pupila de la siguiente manera:

$$H(\mu) = W_k(x=0, u=\mu/2) \quad (\text{IV-32})$$

Por lo tanto, en virtud de lo discutido en la sección IV-3-1, para pupilas simétricas, el valor de la OTF puede ser asociado con la amplitud de un rayo paraxial que corte al eje óptico. Además la relación

$$S = \int H(\mu) d\mu. \quad (\text{IV-33})$$

puede interpretarse como suma de amplitudes de rayos que cortan al eje óptico formando ángulos: $\theta = \mu/2$.

Esta simple interpretación puede aplicarse para expresar un criterio de calidad como el de Hopkins/8/ en términos de rayos

paraxiales. Este criterio establece que el cociente entre la OTF en presencia de aberraciones y/o desenfoque, y la OTF limitada por difracción debe ser mayor o igual que 0.8 para cualquier frecuencia.

En conclusión, se ha establecido un nexo entre un criterio de calidad expresado en el formalismo de la óptica ondulatoria, como el de la OTF, y los elementos usados comunmente por los diseñadores de sistemas ópticos, como son los rayos de la óptica geométrica.

REFERENCIAS:

- /IV-1/ Born & Wolf, "Principles of Optics", N.Y. Pergamon, 1978.
- /IV-2/ Lord Rayleigh "Wave theory of light" en Collected papers, (Cambridge University Press, Cambridge, 1902). Vol.3
- /IV-3/ R. Baracat, "Rayleigh wavefront criterion", J.Opt.Soc.Am. 55, (1965), 572.
- /IV-4/ V. Mahajan, "Strehl Ratio for primary aberrations: some analytical results for circular and annular pupils" J.Opt.Soc.Am. 72, (1982), 1258.
- /IV-5/ A. Marechal, "Etude des effets combines de la diffraction et des aberrations geometriques sur l'image du point lumineux", Rev. d'Optique, 26, (1947), 257.
- /IV-6/ H. Hopkins, "The frequency response of a defocused optical system", Proc.Roy.Soc. (Londres) A41, (1955), 91.
- /IV-7/ M. Mino y Y. Okano, "Improvement in the OTF of a defocused optical system through the use of shaded apertures.", Appl. Optics 10, (1971), 2219.
- /IV-8/ H. Bartelt, J.O. Castañeda and E.E. Sicre, "Misfocus tolerance seen by simple inspection of the AF", Appl. Opt. 23, (1984), 2693.
- /IV-9/ E. Linfoot, "Fourier methods in optical image evaluation", (Focal, London, 1966), Caps. I-IV.
- /IV-10/ J.O. Castañeda, P. Andrés, E. Montes, "Phase-space representation of the Strehl Ratio: Ambiguity Function" J.Opt.Soc.Am. A 4, (1987), 313.
- /IV-11/ J.O. Castañeda, W. D. Furlan y E. E. Sicre, "Formulación de la razón de Strehl basada en la Función de Distribución de Wigner", 71a. Reunión da la A.F.A., La Cumbre, Octubre de 1986.
- /IV-12/ K. Miyamoto, "On a comparison between wave optics and geometrical optics by using Fourier analysis. I. General Theory" J.Opt.Soc.Am. 48, (1958), 57.
- /IV-13/ K. Miyamoto, "On a comparison between wave optics and geometrical optics by using Fourier analysis. II. Astigmatism,

Coma, Spherical Aberration." J.Opt.Soc.Am. 48, (1958), 567.

/IV-14/ K. Miyamoto, "On a comparison between wave optics and geometrical optics by using Fourier analysis. III. Image evaluation by spot diagram" J.Opt.Soc.Am. 49, (1959), 35.

/IV-15/ M.J.Bastiaans, "The WDF and Hamilton Characteristics of a geometric-optical system.", Optics Comm., 30, (1979), 321.

CAPITULO V

CONCLUSIONES

V-1 CONCLUSIONES

En los últimos años se han desarrollado un gran número de aplicaciones en óptica que utilizan a los formalismos espacio-fase. Estos formalismos involucran funciones de dominio espacio-frecuencia espacial, que están caracterizadas por ser transformaciones bilineales de una función dada. Este hecho permite registrar y sintetizar la información de una señal en espacio y frecuencia simultáneamente, obteniéndose de este modo una representación espectral local de la señal.

La potencialidad de estos formalismos, se deriva de las propiedades discutidas en el capítulo I, y se manifiesta especialmente en la optimización de los sistemas de procesamiento de imágenes, tanto en el diseño de los sistemas ópticos como para las aplicaciones de los mismos (análisis de texturas, reconocimiento de diagramas, etc.).

Uno de los problemas mas importantes que presenta este tipo de tratamiento, es la gran cantidad de datos que deben ser procesados y almacenados. En consecuencia, un tratamiento digital puro no resulta conveniente en la mayoría de los casos, y es mas apropiado, el empleo de procesadores ópticos, o híbridos óptico-digitales. Por este motivo, en el capítulo II se presentaron algunos procesadores ópticos para la visualización de las funciones espacio-fase. En el caso de señales

unidimensionales, generar ópticamente estas funciones, implica en general, el uso de un sistema óptico astigmático, que permita obtener en un mismo plano la imagen de la señal de entrada, en una dirección, y la transformada de Fourier en la otra.

Se presentó un procesador de luz blanca, que permite obtener una representación del espectrograma local, de una señal unidimensional. El contenido de frecuencias espaciales de la imagen original, puede verse a la salida del procesador como su espectrograma local, con una asignación de falsos colores a cada frecuencia espacial. Este procesador puede modificarse fácilmente, para obtener el pseudocoloreado de las frecuencias espaciales de la imagen. Ambas operaciones parecen complementarse muy bien en el análisis óptico de texturas. Actualmente se está desarrollando un estudio comparativo entre el espectrograma local y el pseudocoloreado de frecuencias espaciales, ya que la identificación de texturas es un aspecto importante para el procesamiento visual o automático de imágenes.

Con el objetivo de investigar nuevos procesadores ópticos para la visualización de las funciones espacio-fase, se desarrolló un procesador óptico-coherente, que bajo ciertas condiciones actúa como un transformador de Fourier unidimensional. Este es sin dudas el procesador más sencillo desarrollado hasta el momento, dado que no utiliza ningún elemento óptico. La transformada de Fourier, en una dimensión es realizada solamente por la propagación libre del campo difractado por ciertos objetos bidimensionales, que son

generados a partir de las funciones unidimensionales, involucradas en las representaciones espacio-fase.

Otro de los elementos ópticos que podrían utilizarse para representar a las funciones espacio-fase, son las placas zonales, ya que estas combinan la acción de una lente, con el de una red de difracción. Teniendo en cuenta el hecho de que, placas zonales de diferentes geometrías se pueden obtener por superposición de dos frentes de onda (cilíndricos, esféricos o planos), es factible realizarlas empleando un interferómetro de Mach-Zehnder. Placas zonales de geometría elíptica reemplazarían al sistema óptico astigmático de los procesadores presentados en el capítulo II, con la ventaja de ser menos frágiles, fácilmente manipulables, y más económicos por poder ser registradas en película fotográfica común.

Una de las nuevas aplicaciones de las funciones espacio-fase se ha desarrollado en la teoría de la difracción por objetos tridimensionales. En el capítulo III se puso de manifiesto que existe una relación entre los métodos aproximados cuasi-geométricos, para obtener la figura de difracción por objetos volumétricos, y las representaciones espacio-fase de las pupilas de entrada y salida, asociadas a dichos objetos. De este modo, las distribuciones de amplitud difractada pueden hallarse a partir de las funciones espacio-fase de las pupilas del sistema, variando los parámetros geométricos involucrados (por ejemplo, el espesor del objeto). Estas distribuciones de amplitud se obtienen

en forma polar; esto es, el ángulo polar en el espacio-fase está directamente relacionado con el espesor del objeto, mientras que la coordenada radial está relacionada con la variable espacial en el plano de Fraunhofer. En consecuencia, es posible analizar fenómenos típicamente ondulatorios, como la difracción, con simples argumentos geométricos.

Uno de los criterios de calidad de sistemas ópticos, mas usados, es la razón de Strehl, que se calcula como el cociente entre la intensidad de una imagen con aberraciones y la intensidad de la misma libre de ellas. En el capítulo IV se discutió, como la razón de Strehl para un sistema óptico, con errores de enfoque y aberración esférica, puede expresarse como una PSF unidimensional. Se vió además que la AF provee una representación simple de la función de transferencia asociada a la PSF antes mencionada. Por otra parte, se aplicó el concepto de WDF para asociar amplitudes a los rayos paraxiales que cortan al eje óptico. Esta asociación permite dar una interpretación de la razón de Strehl en terminos de la óptica geométrica. Este criterio de calidad puede ser usado, además, para sistemas ópticos con simetría rotacional, calculando la WDF asociada a una pupila generalizada unidimensional. Mientras que para pupilas simétricas este criterio coincide con el que se formula a partir de la función de transferencia óptica. De este modo se puede considerar tambien a la OTF como amplitud de un rayo. Este es otro de los puntos donde se pone de manifiesto el nexo, que proveen los formalismos espacio-fase, entre la óptica

ondulatoria y la óptica geométrica. Es factible que este tipo de tratamiento pueda generalizarse para sistemas con otro tipo de aberraciones tales como astigmatismo o coma. Esto sería posible, ya que la deformación del frente de onda podría aproximarse en estos casos a un término de fase de variación suave tal como el que se trató en el capítulo I en los ejemplos calculados para la WDF.

Como conclusión final, puede establecerse que los dos métodos desarrollados en esta Tesis, para representar a las funciones espacio-fase, se caracterizan fundamentalmente por su simplicidad y versatilidad. Los mismos permiten que los formalismos espacio-fase sean una forma alternativa, mas sencilla, para el procesamiento de imágenes. Lo que queda manifiesto, en el caso del estudio de la influencia del volumen, en la difracción producida por objetos tridimensionales, y en la formulación de la razón de Strehl en función de rayos geométricos.

W. Furler

Gonnet, La Plata, Febrero '86 - Agosto '88