

Tesis de la Licenciatura en Astronomía

Octavio Miguel Guilera

# Formación simultánea de planetas gigantes por inestabilidad nucleada

**Director:** Omar G. Benvenuto

**Codirector:** Adrián Brunini

La Plata, Marzo de 2009



Facultad de Ciencias Astronómicas y Geofísicas  
Universidad Nacional de La Plata

*“Dedicada a mi vieja, quien me introdujo  
en el mundo de la física - matemática,  
y quien durante todos estos años,  
trabajó de sol a sol para que  
yo pueda estudiar en la Universidad.”*

# Índice

<b>1</b>	<b>Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Formación In Situ de un planeta gigante</b>	<b>5</b>
2.1	Hipótesis y definiciones . . . . .	5
2.2	Ecuaciones básicas de transporte y estructura . . . . .	6
2.3	Ecuaciones en diferencia . . . . .	7
2.3.1	Cambios de variables . . . . .	8
2.3.2	Ecuaciones en diferencia para las ecuaciones diferenciales . . . . .	8
2.3.3	Condiciones de borde . . . . .	10
2.4	Resolución de las ecuaciones en diferencias . . . . .	12
2.4.1	Método de Newton . . . . .	12
2.4.2	El sistema de ecuaciones lineales . . . . .	13
2.5	Solución del sistema de ecuaciones lineales . . . . .	15
<b>3</b>	<b>Un modelo semi-analítico para el crecimiento de los núcleos</b>	<b>19</b>
3.1	Introducción . . . . .	19
3.2	Acreción sobre los núcleos . . . . .	19
3.3	Flujo de planetesimales debido a la fricción gaseosa . . . . .	23
3.4	Sublimación de hielos . . . . .	24
3.5	Distribución de tamaños de los planetesimales . . . . .	26
<b>4</b>	<b>Formación simultánea de planetas gigantes</b>	<b>27</b>
4.1	Generalización al código de la formación In Situ de un planeta gigante . . . . .	27
4.2	Acople de los códigos . . . . .	28
<b>5</b>	<b>Resultados</b>	<b>31</b>
5.1	Formación aislada de 1 planeta gigante . . . . .	32
5.1.1	Júpiter . . . . .	32
5.1.2	Saturno . . . . .	40
5.2	Formación simultánea de Júpiter y Saturno . . . . .	45
5.3	Nuevo modelo para la evolución de la componente gaseosa del disco . . . . .	56
<b>6</b>	<b>Conclusiones</b>	<b>69</b>
	<b>Bibliografía</b>	<b>71</b>

# 1 Introducción

**“¡Que vivan los estudiantes,  
jardín de las alegrías!  
Son aves que no se asustan  
de animal ni policía,  
y no le asustan las balas  
ni el ladrar de la jauría.  
Caramba y zamba la cosa,  
¡que viva la astronomía! ...”**  
Violeta Parra

El objetivo central de esta tesis es intentar contribuir a la comprensión de los procesos que dan lugar a la formación de sistemas planetarios como un todo. Para esto, trabajamos en la construcción de modelos de crecimiento planetario en el contexto de un disco protoplanetario realista, que evoluciona por viscosidad del disco gaseoso como así también por migración de planetesimales. Específicamente calcularemos la interacción que surge entre dos (o más) planetas gaseosos gigantes que crecen simultáneamente en un mismo disco protoplanetario.

Aunque al presente se dispone de una descripción plausible de la formación planetaria, dicha descripción se basa en modelos construidos bajo la hipótesis del crecimiento de un planeta aislado. Esta configuración es poco realista e insuficiente para comprender globalmente tanto la formación del Sistema Solar como la de los sistemas planetarios extrasolares recientemente descubiertos. De los más de 300 exoplanetas descubiertos hasta el momento (The Extrasolar Planets Encyclopaedia, <http://exoplanet.eu/catalog.php>) muchos de ellos se encuentran en sistemas múltiples (alrededor de 30 sistemas planetarios descubiertos a la fecha); aún más, recientemente Marois et al. 2008 presentaron las primeras imágenes directas (en infrarrojo) de exoplanetas. Estas imágenes muestran tres planetas gigantes orbitando la estrella de tipo espectral A HR 8799, perteneciente a la constelación de Pegasus. Estos datos son determinantes para incluir a la formación simultánea de planetas gigantes en los modelos de formación de sistemas planetarios.

El estudio de los sistemas planetarios es uno de los temas fundamentales de las ciencias astronómicas. El interés en nuestro Sistema Solar surgió en tiempos remotos. Mas recientemente, desde hace algo mas de una década, se conoce la existencia de planetas gigantes extrasolares en órbita alrededor de estrellas brillantes (de tipo solar) cercanas. Este notable descubrimiento ha hecho surgir un enorme interés por el estudio de sistemas planetarios en general. En relación con la formación planetaria, actualmente se consideran

dos modelos que se han propuesto para explicar la existencia de estos objetos. Estos son el de inestabilidad gravitatoria y el de inestabilidad nucleada.

El modelo de inestabilidad gravitatoria propone la formación planetaria como consecuencia de inestabilidades hidrodinámicas en el disco protoplanetario. Estas perturbaciones deberían crecer y dar lugar a la formación de objetos con masas del orden de las de los planetas gigantes (la masa de Júpiter es un milésimo de la Solar) en una escala de tiempo muy corta, de algunos miles de años. La escala de tiempo en la que se produce la formación planetaria es considerada como una de las principales virtudes de la teoría de inestabilidad gravitatoria. Sin embargo, esta teoría tiene muchas dificultades para explicar la existencia de núcleos sólidos en los planetas gigantes.

El modelo de inestabilidad nucleada es actualmente el más aceptado por la comunidad científica. Según el mecanismo de la inestabilidad nucleada (Mizuno 1980; Bodenheimer y Pollack 1986; Pollack, et al. 1996; Hubickyj, Bodenheimer, Lissauer 2005; Benvenuto y Brunini 2005; Fortier, Benvenuto y Brunini 2007) el planeta comienza a formarse a través de la acumulación de planetesimales, los cuales colisionan en forma inelástica con un núcleo de una masa mucho menor a la terrestre. Este núcleo, que tiene una densidad de alrededor de tres veces la del agua, al estar inmerso en un disco con componente gaseosa, poco a poco comienza a ligar una capa de gas, la cual inicialmente tiene una masa varios órdenes de magnitud menor que la del núcleo. Al momento en el que el núcleo llega a tener una masa del orden de diez veces la terrestre, se produce la inestabilidad nucleada, según la cual en una escala de tiempo muy corta (de unos miles de años) el planeta acreta la mayor parte del gas que lo compone y alcanza su masa final. La duración total del proceso es de algunos millones de años, la cual se suele citar como más larga que la escala de tiempo en que se ha observado que subsisten las nebulosas protoplanetarias (ver, por ejemplo, Bally, et al. 1998; Briceño, et al. 2001). Esto constituye una evidente paradoja que tradicionalmente se ha planteado como la principal dificultad del modelo de inestabilidad nucleada. Sin embargo, Benvenuto, Fortier y Brunini 2008, trabajando sobre la hipótesis de la inestabilidad nucleada y asumiendo que los planetesimales tienen una distribución de tamaños, han conseguido explicar la formación de los cuatro planetas gigantes de nuestro Sistema Solar (Júpiter, Saturno, Urano y Neptuno) en una escala de tiempo compatible con la vida de los discos protoplanetarios.

Cabe también destacar que los modelos desarrollados por Fortier, Benvenuto y Brunini 2007; Benvenuto, Fortier y Brunini 2008 son los únicos en los que se considera el régimen de acreción de planetesimales conocido como de “Crecimiento Oligárquico” (Ida y Makino 1993; Chambers 2006). Las simulaciones numéricas más detalladas disponibles en la literatura muestran que el régimen de acreción según el cual los planetas sufren la mayor parte de su crecimiento es el crecimiento oligárquico. Según este régimen, el planeta, luego de alcanzar una masa algo menor de la lunar, es capaz de perturbar

su entorno de forma tal que su crecimiento se autolimita. De esta forma el proceso de formación planetaria se vuelve mas lento que el predicho por el crecimiento rápido conocido como “Runaway Growth” (en este régimen la mutua interacción entre los planetesimales domina la evolución dinámica del disco) tal como es considerado por Pollack, et al. (1996).

Una de las principales razones por las que se prefiere al modelo de inestabilidad nucleada frente al de inestabilidad gravitatoria está relacionada con la masa de los núcleos que predice. A través del estudio del pasaje de satélites artificiales en las proximidades de los planetas de nuestro Sistema Solar, se ha deducido que Júpiter, Saturno, Urano y Neptuno tienen núcleos con masas del orden de una decena de veces la terrestre (Podolak, Podolak y Marley 2000; Saumon y Guillot 2004; Guillot 2005), tal como predice la teoría de inestabilidad nucleada (Pollack, et al. 1996). Sin embargo esta teoría no predice cómo se termina el proceso de acreción gaseosa y los planetas adquieren sus masa definitivas.

El cálculo de la formación de un planeta gigante (como el de cualquier objeto astrofísico) es algo bastante complejo. En este caso se necesitan tener en cuenta numerosos fenómenos físicos tales como efectos magnetohidrodinámicos, transporte de energía radiativo y convectivo, ecuaciones de estado y transiciones de fases complejas, formación de un núcleo sólido, acreción gaseosa, viscosidad, efectos de rotación y mareas, entre otros.

Además, deberían conocerse las condiciones iniciales del problema. Todo esto hace que se tengan que tomar serias simplificaciones para modelar la formación de un planeta gigante. No obstante, al igual que en otras ramas de la astrofísica, las estimaciones logradas con estas simplificaciones representan adecuadamente los objetos en estudio, haciéndonos creer que el Universo es tan bueno que se deja modelar con nuestros simples modelos.

Trabajando con el modelo de inestabilidad nucleada se pueden realizar simulaciones numéricas para el cálculo de la formación de un planeta gigante, en donde tres aspectos son fundamentales:

- a. **La tasa de acreción de planetesimales para formar el núcleo:** esta juega un papel fundamental en la formación del planeta ya que es la que determina el tiempo de formación del mismo; además la tasa de acreción de planetesimales es la que aporta la energía necesaria para evitar el colapso de la envoltura gaseosa.
- b. **La tasa de acreción de gas y el modelo de evolución de la envoltura:** el cálculo de la estructura gaseosa se realiza mediante las ecuaciones estándar de transporte y estructura estelar.
- c. **La interacción de los planetesimales con la envoltura gaseosa.**

En referencia a la evolución del disco protoplanetario, este sufre una evolución de gran complejidad, la cual es necesario modelar en forma detallada, ya que esta evolución afecta la capacidad de crecimiento de los planetas inmersos en el mismo. Además, el mismo disco será el sistema físico a través del cual se producirá la “interacción planeta – planeta”. Aquí no nos referimos simplemente a la interacción gravitatoria sino a la modificación de las poblaciones de planetesimales como consecuencia de la presencia de varias masas planetarias. Dichas masas fuerzan la migración de planetesimales modificando su densidad superficial. Esta, a su vez, es la que alimenta a los planetas restantes. Por lo tanto un planeta afectará la disponibilidad de materia de la que podrán alimentarse los planetas restantes de un sistema en formación.

Además, un planeta puede acretar tanto material sólido como gas dentro de su zona de alimentación. Esta zona se extiende unos 4 *radios de Hill* a ambos lados del planeta; el *radio de Hill* es el radio de una esfera con el mismo volumen que el *Lóbulo de Roche* del planeta, es la zona en donde la influencia gravitatoria del planeta domina sobre la de la estrella central. Cualquier perturbación a esta zona tiene impacto directo sobre la formación del planeta.

Cabe destacar que estudios de este tipo se han realizado solamente para el caso en el que se desprecia la envoltura gaseosa de los planetas (Brunini y Benvenuto 2008).

## 2 Formación In Situ de un planeta gigante

Esta sección esta basada en el código desarrollado por los Drs. Benvenuto y Brunini (Benvenuto, O. y Brunini, A. 2005, MNRAS, 356, 1383). Dicho código calcula la formación y evolución de un planeta gigante por el modelo de inestabilidad nucleada.

En esta tesis nos enfocaremos solo en la etapa de formación y en realizar una generalización del código que permita la formación simultánea de  $N$  planetas gigantes (con  $N$  un número natural arbitrario). Además se han tomado algunas simplificaciones físicas respecto del trabajo original.

### 2.1 Hipótesis y definiciones

Asumimos que el planeta tiene simetría esférica, excluyendo campos magnéticos, fuerzas de mareas y rotación. El mismo estará dividido en dos regiones, un núcleo sólido y una envoltura gaseosa. Ambas partes incrementan su masa con el tiempo. Supondremos que el núcleo sólido es inerte y el detalle de su estructura no se tiene en cuenta; diremos, solamente, que tiene una densidad constante de 3 veces la del agua y que su masa se incrementará a una tasa,  $\dot{M}_c$ , por acreción de planetesimales. La envoltura gaseosa tiene una composición química homogénea similar a la solar. La opacidad, por simplicidad, será considerada constante e igual a  $\kappa = 0,5 \text{ cm}^2 \text{ g}^{-1}$ . La envoltura gaseosa obedece la ecuación de estado del gas ideal, hipótesis que se utiliza por simplicidad. Las regiones de transporte radiativo y convectivo de la envoltura están separadas por el criterio de estabilidad de Schwarzschild. La distribución de temperaturas en la región convectiva está determinada por el gradiente adiabático. La energía interna proviene casi exclusivamente de los planetesimales que penetran en la envoltura, liberando toda la energía potencial al final de la misma. El planeta se traslada en órbita circular entorno a una estrella central y consideramos que está en formación hasta que alcanza una masa prefijada. La presión y la densidad de la envoltura gaseosa solo dependen de la distancia al centro del planeta.

Es mas conveniente elegir como variable independiente a la masa en vez del radio, dado que la masa es una variable lagrangiana. Si  $m_r$  es la masa contenida en una esfera concéntrica de radio  $r$ , luego todas las funciones desconocidas que describen la envoltura serán funciones solo de  $m_r$  y el tiempo  $t$ .

Denotaremos con  $P$  a la presión total,  $T$  a la temperatura,  $r$  a la coordenada radial y  $L_r$  a la energía que atraviesa por unidad de tiempo la esfera de radio  $r$ . El problema consiste en la determinación de las funciones

$$P(m_r, t), \quad T(m_r, t), \quad L_r(m_r, t), \quad r(m_r, t)$$

para la envoltura, junto con la función que describe el crecimiento del núcleo.



Se dice que se tiene un modelo cuando estas funciones son dadas para un instante de tiempo arbitrario. Una simulación de la formación de un planeta gigante puede ser descrita por una secuencia suficientemente densa de dichos modelos.

## 2.2 Ecuaciones básicas de transporte y estructura

Las ecuaciones que gobiernan la evolución de la envoltura gaseosa son las ecuaciones básicas utilizadas en la teoría de evolución estelar:

$$\frac{\partial r}{\partial m_r} = \frac{1}{4\pi r^2 \rho} \quad \text{Ecuación de definición de la masa} \quad (1)$$

$$\frac{\partial P}{\partial m_r} = -\frac{Gm_r}{4\pi r^4} \quad \text{Ecuación de Equilibrio Hidrostático} \quad (2)$$

$$\frac{\partial L_r}{\partial m_r} = \epsilon_{pl} - T \frac{\partial S}{\partial t} \quad \text{Ecuación de balance energético} \quad (3)$$

$$\frac{\partial T}{\partial m_r} = -\frac{Gm_r T}{4\pi r^4 P} \nabla \quad \text{Ecuación de transporte} \quad (4)$$

donde  $\rho$  es la densidad,  $G$  es la constante de gravitación universal,  $\epsilon_{pl}$  es la tasa de liberación de energía debida a la acreción de planetesimales,  $S$  es la entropía por unidad de masa y  $\nabla$  es el gradiente de temperatura adimensional,  $\nabla \equiv \frac{d \ln T}{d \ln P}$  que depende del tipo de transporte de energía. Si el transporte es radiativo,  $\nabla$  está dado por

$$\nabla_{rad} = \frac{3}{16\pi acG} \frac{\kappa LP}{M_r T^4} \quad (5)$$

con  $a$  la constante de densidad de radiación,  $c$  la velocidad de la luz en el vacío,  $\kappa$  la opacidad media de Rosseland; mientras que si el transporte es convectivo,  $\nabla = \nabla_{ad}$  ( $\nabla_{ad}$  corresponde al gradiente adiabático; como estamos considerando el caso de un gas ideal monoatómico,  $\nabla_{ad} = 0,4$ ).

Como mencionamos anteriormente, la ecuación de estado que supondremos para la envoltura gaseosa es la del gas ideal:

$$P = \frac{k}{\mu m_H} \rho T \quad (6)$$

donde  $\mu$  es el peso medio molecular,  $k$  es la constante de Boltzmann y  $m_H$  es la masa del átomo de hidrógeno.

Remarcamos que la tasa de acreción de planetesimales  $\dot{M}_c$  no está especificada por estas ecuaciones, no solo para su valor inicial sino también para su evolución en el tiempo.

La energía gravitacional total liberada debida a la acreción de planetesimales  $L_{pl}$  está dada por

$$L_{pl} = \frac{GM_c \dot{M}_c}{Rc} \quad (7)$$

donde  $R_c$  es el radio del núcleo.

Introducimos la tasa de liberación de energía debida a la acreción de planetesimales,  $\epsilon_{pl}$ , imponiendo la condición que

$$L_{pl} = \int_{M_c}^M \epsilon_{pl} dm_r \quad (8)$$

Se encuentra conveniente adoptar una expresión para  $\epsilon_{pl}$  de manera que toda la energía liberada debida a los planetesimales es producida cerca del fondo de la envoltura gaseosa, de esta forma

$$\epsilon_{pl} = A \left( \alpha - \frac{m_r - M_c}{M_c} \right)^2 \quad (9)$$

con esto  $\epsilon_{pl}$  se anula para  $M_g = \alpha M_c$  (donde  $M_g = m_r - M_c$ ) y es cero hacia afuera.  $A$  es una constante que se calcula comparando las ecuaciones (7) y (8)

$$A = \frac{2G\dot{M}_c}{\alpha(2 + \alpha)R_c} \quad (10)$$

y dado que las soluciones son poco sensibles al valor de  $\alpha$ , se toma  $\alpha = 2$ .

Además, el segundo término de la ecuación (3) es  $-T\partial S/\partial t$  que, según la primera ley de la termodinámica, resulta

$$T \frac{\partial S}{\partial t} = \frac{dq}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + P \frac{\partial V}{\partial t} \quad (11)$$

donde  $q$  es el calor,  $u$  es la energía interna y  $V$  es el volumen, todos por unidad de masa. De esta expresión se puede ver que hay otros dos mecanismos que controlan la energía, la contracción gravitatoria (reflejada en el término  $P\partial V/\partial t$ ) y la variación de la energía interna.

### 2.3 Ecuaciones en diferencia

La resolución de las ecuaciones (1) - (4) nos permite determinar los valores de  $r, P, L_r$  y  $T$  en cualquier instante de la formación del planeta y para cualquier punto de la envoltura gaseosa.

Sin embargo, estas ecuaciones no tienen solución analítica, por cuanto hay que recurrir a métodos numéricos para resolverlas. La idea es generar una secuencia de modelos, en cada uno de ellos pensamos a la envoltura gaseosa dividida en cáscaras esféricas concéntricas, donde se calcula para un determinado instante de tiempo  $t$  y para cada una de estas cáscaras,  $r, P, L_r$  y  $T$ . Finalizado este cálculo nos valemos de sus resultados para estimar el próximo modelo en un  $\Delta t$  subsiguiente.

Para implementar lo planteado en el párrafo anterior nos basamos en el método ideado por Henyey et al. (1959, 1964) y en el trabajo de Kippenhahn, Weiger y Hofmeister (1967).

### 2.3.1 Cambios de variables

Hasta el momento trabajamos con la variable  $m_r$ ; por razones numéricas es útil reemplazar esta variable por una nueva, monótonamente creciente

$$\xi = \xi(m_r) \quad (12)$$

Se reemplaza a la variable independiente  $m_r$  por:

$$\xi = \ln\left(\frac{m_r}{M_c} - 1\right) = \ln\left(\frac{M_g}{M_c}\right) \quad (13)$$

con  $M_g$  la masa del gas. Aunque esta transformación parezca algo trivial, resulta vital para lograr la convergencia del programa en todo momento dado que elimina la necesidad de hacer interpolaciones para considerar la migración de la envoltura gaseosa hacia el exterior.

Por su definición,  $\xi$  no es independiente del tiempo, con lo cual, hay que tener en cuenta que

$$\frac{\partial}{\partial t}\Big|_{M_g} = \frac{\partial}{\partial t}\Big|_{\xi} + \frac{\partial \xi}{\partial t}\Big|_{M_g} \frac{\partial}{\partial \xi}\Big|_t \quad (14)$$

en donde

$$\frac{\partial \xi}{\partial t}\Big|_{M_g} = -\frac{d}{dt} \ln(M_c) \quad (15)$$

Al hacer este cambio de variables introducimos una singularidad en  $m_r = M_c$ ; sin embargo, ésta puede ser salvada integrando hasta un valor inferior para  $\xi$  que nos permita acercarnos hasta  $M_c$  tanto como querramos y pudiendo despreciar el error cometido en esa aproximación.

A las variables desconocidas también conviene hacerles cambios de variables adecuados; los cambios están dados por

$$x = \ln r \quad (16)$$

$$p = \ln P \quad (17)$$

$$l = L_r \quad (18)$$

$$\theta = \ln T \quad (19)$$

### 2.3.2 Ecuaciones en diferencia para las ecuaciones diferenciales

Se reemplazarán las ecuaciones diferenciales por ecuaciones en diferencias. Para ello se divide la envoltura gaseosa en  $N$  cáscaras concéntricas, que van desde  $M_c$  hasta  $M$  (o desde  $\xi_N$  hasta  $\xi_0$ ).

Consideraremos que tenemos  $N - 2$  capas interiores que corresponden a la grilla

$$\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_{N-1} \quad (20)$$

y dos capas que lindan con los bordes interior y exterior (la capa que va desde  $\xi_N$  hasta  $\xi_{N-1}$  y la que va desde  $\xi_1$  hasta  $\xi_0$ , respectivamente).

Luego, podemos expresar las ecuaciones en diferencias para estas capas; como ejemplo trabajaremos con la ecuación de definición de la masa, que en las nuevas variables adopta la forma

$$\frac{\partial x}{\partial \xi} = \frac{M_c}{4\pi\rho} e^{\xi-3x} \quad (21)$$

escribiendo la ecuación (21) en diferencias tenemos que

$$\frac{x_{j+1} - x_j}{\xi_{j+1} - \xi_j} = \frac{1}{4\pi} \frac{M_c}{\rho_{j+\frac{1}{2}}} e^{-3x_{j+\frac{1}{2}}} e^{-\xi_{j+\frac{1}{2}}} \quad 1 \leq j \leq N-2 \quad (22)$$

donde las magnitudes con subíndice  $j + 1/2$  son calculadas de la siguiente manera:

$$\eta_{j+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(\eta_{j+1} + \eta_j)$$

con  $\eta_{j+1}$  y  $\eta_j$  correspondientes al modelo que esta siendo iterado (vemos que los  $\eta_{j+1/2}$  resultan en un promedio).

Ahora bien, como  $\rho$  es una función de  $P$  y  $T$  o bien de  $p$  y  $\theta$ , la expresión para  $\rho_{j+1/2}$  puede ser

$$\frac{1}{2}[\rho(p_{j+1}, \theta_{j+1}) + \rho(p_j, \theta_j)]$$

o

$$\rho(p_{j+1/2}, \theta_{j+1/2})$$

Este mismo tratamiento se aplica a las cantidades  $\epsilon_{pl}$  y  $S$ . Análogamente se obtienen las ecuaciones en diferencia para las otras ecuaciones diferenciales.

Por otra parte, la ecuación (3) involucra derivadas respecto de  $t$ . La tendencia natural sería reemplazar ese término por:

$$\frac{\partial Y}{\partial t} = \frac{Y^{j+\frac{1}{2}} - Y_{prev}^{j+\frac{1}{2}}}{\Delta t}$$

donde  $Y$  representa alguna de las magnitudes termodinámicas.

Sin embargo, de hacer ésto introduciríamos muchas inestabilidades numéricas, porque cuando  $\Delta t \rightarrow 0$ ,  $Y^{j+\frac{1}{2}}$  e  $Y_{prev}^{j+\frac{1}{2}}$  resultan magnitudes muy parecidas que, al estar restadas, pueden provocar serios errores de redondeo. Para solucionar este problema, se propone lo siguiente:

- para magnitudes logarítmicas (como  $x = \ln(r)$ ),

$$x = \ln(r) = \ln(r_{prev} + \delta r) = \ln(r_{prev}) + \ln\left(1 + \frac{\delta r}{r_{prev}}\right) = x_{prev} + \ln(1 + \delta x)$$

- para magnitudes lineales (como  $l$ )

$$l = l_{prev} + \delta l$$

donde el subíndice *prev* se refiere al valor de la variable en el paso temporal previo. De este modo, las cantidades iteradas serán  $\delta x$ ,  $\delta \theta$ ,  $\delta p$  y  $\delta l$  y no  $x$ ,  $\theta$ ,  $p$  y  $l$ .

Si repetimos este procedimiento para las cuatro ecuaciones tendremos, para cada una de las  $N - 2$  capas, cuatro ecuaciones en diferencias que involucran los valores de las variables en las dos interfaces  $\xi_{j+1}$  y  $\xi_j$ . Podemos escribirlas entonces, de manera esquemática, como:

$$\begin{aligned} G_i^j(l_j, p_j, \theta_j, x_j, l_{j+1}, p_{j+1}, \theta_{j+1}, x_{j+1}) = 0 & \quad i = 1, 2, 3, 4 \\ j & = 1, 2, \dots, N - 2 \end{aligned} \quad (23)$$

Este sistema se completa con las expresiones en diferencias finitas de las 4 condiciones de borde internas que relacionarán las incógnitas de las capas  $N$  y  $N-1$  y por las 2 condiciones de borde externo que introducen dos relaciones entre las incógnitas de la capa 1 (ver más adelante). Estas expresiones pueden representarse como:

$$\begin{aligned} C_i(p_{N-1}, \theta_{N-1}, x_{N-1}, l_{N-1}, p_N, \theta_N) = 0 & \quad i = 1, 2, 3, 4 \\ (x_N \text{ y } l_N \text{ son condiciones de borde}) \end{aligned} \quad (24)$$

$$B_i(l_1, p_1, \theta_1, x_1) = 0 \quad i = 1, 2 \quad (25)$$

Una vez definidas todas las ecuaciones de nuestro sistema, el cual consiste en  $4N - 2$  ecuaciones con  $4N - 2$  incógnitas, podemos proceder a encontrar los valores de  $p$ ,  $l$ ,  $\theta$ ,  $r$  en cada capa de la estrella.

### 2.3.3 Condiciones de borde

Para resolver las ecuaciones en diferencia que describen al problema se deben aplicar condiciones de contorno adecuadas; éstas deben estar dadas tanto en el límite interior de la envoltura gaseosa como en el exterior.

#### A. Condiciones de borde internas

Asumimos anteriormente que el núcleo tiene una densidad constante,  $\rho_c = 3 \text{ gr/cm}^3$ . Además, no se permite ningún tipo de liberación de energía salvo la debida a la acreción de planetesimales. Así, en este marco, las condiciones de borde internas, a ser aplicadas en el fondo de la envoltura (donde  $m_r = M_c$ ), están dadas por

$$R_c = \left( \frac{3 M_c}{4 \pi \rho_c} \right)^{1/3} \quad (26)$$

y

$$L_R(m_r = M_c) = 0 \quad (27)$$

## B. Condiciones de borde externas

En la etapa de formación es usual considerar el radio externo del planeta,  $R$ , como el mínimo entre el radio de acreción,  $R_{ac}$ , y el radio de Hill,  $R_H$ , definidos por

$$R_{ac} = \frac{GM}{c^2} \quad (28)$$

con  $c$  la velocidad local del sonido, y

$$R_H = a \left( \frac{M}{3M_\star} \right)^{1/3} \quad (29)$$

Físicamente, el radio de acreción es el lugar en donde la velocidad molecular de un elemento de gas se iguala a la velocidad de escape, mientras que el radio de Hill corresponde al radio de una esfera con igual volumen que el lóbulo de Roche del planeta, es la zona en donde la influencia gravitatoria del planeta domina sobre la de la estrella central.

Usualmente, se considera que en  $R$  la temperatura y la densidad del planeta corresponden a la de la nebulosa protoplanetaria denotadas por  $T_{neb}$  y  $\rho_{neb}$  respectivamente. Sin embargo, desde el punto de vista numérico es conveniente imponer las condiciones de borde externas desde otro punto de vista.

La idea es extender el grillado más allá del borde del planeta; si introducimos algún tipo de ablandamiento al potencial gravitatorio, y este ablandamiento hace que el gradiente del potencial gravitatorio caiga a cero cerca del radio del planeta, tendríamos allí una presión constante. Pero como el gradiente de temperatura es proporcional al gradiente de presión, también tendríamos una temperatura constante. Consecuentemente, la densidad también tendría en tal región un perfil chato. En estas condiciones podemos imponer las condiciones físicas de contorno correspondientes a la superficie planetaria en el punto mas externo del grillado, es decir podemos poner que  $T = T_{neb}$  y  $P = P_{neb}$  para un valor de  $\xi = \xi_{borde}$  más allá que el correspondiente al radio del planeta. Para un ablandamiento adecuado al potencial gravitatorio debemos tener que  $T = T_{neb}$  y  $P = P_{neb}$  para valores de  $\xi$  desde  $\xi = \xi_{borde}$  hasta  $\xi = \xi_R$ , con  $\xi_R = \ln(M/M_c - 1)$ .

Para lograr esto, se introduce un promedio sobre el potencial gravitatorio del problema restringido de los tres cuerpos, obteniendo el potencial gravitatorio del problema de dos cuerpos multiplicado por el factor

$$1 - \left( \frac{r}{R} \right)^3 \quad (30)$$

Por razones númericas, aplicamos este factor al potencial de dos cuerpos para valores de  $r \leq \zeta R$ . Para valores mayores de  $r$  es conveniente introducir una funci3n del tipo Fermi

$$\alpha \left[ 1 + \exp \left( \frac{r - \zeta R}{\beta R} \right) \right]^{-1} \quad (31)$$

Pidiendo continuidad a la funci3n y su derivada se obtienen los valores de  $\alpha$  y  $\beta$ . El valor de  $\zeta$  se fija en 0.9.

Realizando este procedimiento se puede calcular el estado de la envoltura gaseosa más alla del radio del planeta, con lo cual, cuando el planeta acrete nuevas cantidades de gas, el estado termodinámico de este ya está calculado, evitando tener que hacer interpolaciones para las nuevas capas.

## 2.4 Resoluci3n de las ecuaciones en diferencias

### 2.4.1 Método de Newton

Una vez planteadas las ecuaciones, hay que buscar un método para resolverlas. El elegido sera el método de Newton.

A continuaci3n, daremos una explicaci3n esquemática del mismo; sean  $y_1, y_2, \dots, y_n$   $n$  inc3gnitas que satisfacen un sistema de  $n$  ecuaciones no lineales

$$\begin{aligned} E_1(y_1, \dots, y_n) &= 0 \\ &\vdots \\ E_n(y_1, \dots, y_n) &= 0 \end{aligned} \quad (32)$$

Supongamos que conocemos una soluci3n aproximada  $y_1^0, y_2^0, \dots, y_n^0$ . Dado que, justamente, los  $y_i^0$  son aproximaciones, tendremos, en general, que  $E_k(y_1^0, \dots, y_n^0) \neq 0$ , con  $k = 1, \dots, n$ .

Nuestra intenci3n es mejorar la aproximaci3n inicial, obteniendo una correcci3n para ella  $\delta y_i^0$ . De este modo, a primer orden

$$E_k(y_1^0 + \delta y_1^0, \dots, y_n^0 + \delta y_n^0) = E_k(y_1, \dots, y_n) + \delta E_k^0 \quad (33)$$

con

$$\delta E_k^0 = \sum_i \left( \frac{\partial E_k}{\partial y_i} \right)^0 \delta y_i^0 \quad (34)$$

y como estamos buscando perfeccionar la soluci3n, pedimos

$$E_k^0 + \delta E_k^0 = 0 \quad (35)$$

con lo cual

$$\delta E_k^0 = -E_k^0 \quad (36)$$

y usando la expresión para  $\delta E_k^0$

$$\sum_i \left( \frac{\partial E_k}{\partial y_i} \right)^0 \delta y_i^0 = -E_k^0 \quad k = 1, \dots, n \quad (37)$$

De este modo, como  $E_k^0$  y  $\left( \frac{\partial E_k}{\partial y_i} \right)^0$  son cantidades conocidas, se puede despejar  $\delta y_i^0$  ( $i = 1, \dots, n$ ). Luego, la solución mejorada es

$$y_i^1 = y_i^0 + \delta y_i^0 \quad i = 1, \dots, n \quad (38)$$

Este procedimiento se repite con  $y_i^1$  (que pasa a tomar el lugar de  $y_i^0$ ) y así sucesivamente, hasta que  $\delta E_k^s$  (para todo  $k$ ) sea menor que una tolerancia dada. De este modo, nos aseguramos que estamos buscando la solución en la dirección correcta.

#### 2.4.2 El sistema de ecuaciones lineales

El sistema que tenemos que despejar es:

$$B_1(p_1, \theta_1, x_1, l_1) = 0 \quad (39)$$

$$B_2(p_1, \theta_1, x_1, l_1) = 0 \quad (40)$$

$$\begin{aligned} G_i^j(p_j, \theta_j, x_j, l_j; p_{j+1}, \theta_{j+1}, x_{j+1}, l_{j+1}) &= 0 & (41) \\ i &= 1, \dots, 4 \\ j &= 1, \dots, N-2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_i(p_{N-1}, \theta_{N-1}, x_{N-1}, l_{N-1}; p_N, \theta_N) &= 0 & (42) \\ i &= 1, \dots, 4 \end{aligned}$$

Como hemos visto, para poder resolverlo, hay que dar una aproximación inicial a la solución  $p_j^0, \theta_j^0, x_j^0$  y  $l_j^0$ , a partir de la cual se buscarán las correcciones  $\delta p_j^0, \delta \theta_j^0, \delta x_j^0, \delta l_j^0$ . El sistema lineal de ecuaciones que nos permite hallarlas es:

$$\frac{\partial B_i}{\partial l_1} \delta l_1 + \frac{\partial B_i}{\partial p_1} \delta p_1 + \frac{\partial B_i}{\partial x_1} \delta x_1 + \frac{\partial B_i}{\partial \theta_1} \delta \theta_1 = -B_i \quad i = 1, 2 \quad (43)$$



$$\begin{aligned}
\frac{\partial G_i^j}{\partial l_j} \delta l_j + \frac{\partial G_i^j}{\partial p_j} \delta p_j + \frac{\partial G_i^j}{\partial x_j} \delta x_j + \\
\frac{\partial G_i^j}{\partial \theta_j} \delta \theta_j + \frac{\partial G_i^j}{\partial l_{j+1}} \delta l_{j+1} + \frac{\partial G_i^j}{\partial p_{j+1}} \delta p_{j+1} + \\
\frac{\partial G_i^j}{\partial x_{j+1}} \delta x_{j+1} + \frac{\partial G_i^j}{\partial \theta_{j+1}} \delta \theta_{j+1} = -G_i^j \\
i = 1, 2, 3, 4 \quad ; \quad j = 1, 2, \dots, N - 2
\end{aligned} \tag{44}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial C_i}{\partial l_j} \delta l_j + \frac{\partial C_i}{\partial p_j} \delta p_j + \frac{\partial C_i}{\partial x_j} \delta x_j + \frac{\partial C_i}{\partial \theta_j} \delta \theta_j \\
+ \frac{\partial C_i}{\partial p_{j+1}} \delta p_{j+1} + \frac{\partial C_i}{\partial \theta_{j+1}} \delta \theta_{j+1} = -C_i \\
i = 1, 2, 3, 4 \quad ; \quad j = N - 1
\end{aligned} \tag{45}$$

que es el sistema de ecuaciones lineales que debemos resolver para encontrar las correcciones a las cantidades  $p$ ,  $l$ ,  $\theta$ ,  $r$  en cada capa de la envoltura gaseosa. Este sistema puede escribirse matricialmente como

$$H \bullet \begin{bmatrix} \delta l_1 \\ \delta p_1 \\ \delta x_1 \\ \delta \theta_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \delta p_N \\ \delta \theta_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ G_i^j \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{bmatrix} \tag{46}$$

donde, dado que las ecuaciones para cada capa ( $j$ ) involucran cantidades en esa capa ( $j$ ) y en la vecina ( $j + 1$ ), la matriz  $H$  posee la siguiente forma por bloques:



en términos lineales de  $\delta p_2$  y  $\delta\theta_2$ :

$$\begin{aligned}
\delta x_1 &= U_1 \delta p_2 + V_1 \delta\theta_2 + W_1 \\
\delta l_1 &= U_2 \delta p_2 + V_2 \delta\theta_2 + W_2 \\
&\vdots \\
\delta x_2 &= U_5 \delta p_2 + V_5 \delta\theta_2 + W_5 \\
\delta l_2 &= U_6 \delta p_2 + V_6 \delta\theta_2 + W_6
\end{aligned} \tag{48}$$

Las constantes  $U_i, V_i$  y  $W_i$  con  $(i = 1, \dots, 6)$  se calculan como la solución del sistema lineal  $6 \times 6$  en donde  $\delta p_2$  y  $\delta\theta_2$  son tratadas como parámetros que calcularemos mas tarde:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial B_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial B_1}{\partial \theta_1} & 0 & 0 \\ \frac{\partial B_2}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial B_2}{\partial \theta_1} & 0 & 0 \\ \frac{\partial G_1}{\partial x_j} & \dots & \dots & \dots & \frac{\partial G_1}{\partial l_{j+1}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial G_4}{\partial x_j} & \dots & \dots & \dots & \frac{\partial G_4}{\partial l_{j+1}} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} U_1 & V_1 & W_1 \\ U_2 & V_2 & W_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ U_6 & V_6 & W_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -B_1 \\ 0 & 0 & -B_2 \\ -\frac{\partial G_1}{\partial p_{j+1}} & -\frac{\partial G_1}{\partial \theta_{j+1}} & -G_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ -\frac{\partial G_4}{\partial p_{j+1}} & -\frac{\partial G_4}{\partial \theta_{j+1}} & -G_4 \end{pmatrix} \tag{49}$$

con  $j = 1$ .

El siguiente bloque consiste de cuatro ecuaciones y 8 variables, que corresponden a las filas  $7, \dots, 10$  de la matriz  $H$ . Este es el prototipo para los restantes bloques salvo el último. Podemos eliminar  $\delta x_2$  y  $\delta l_2$  usando las ecuaciones (48) y considerar ahora a  $\delta p_3$  y  $\delta\theta_3$  como parámetros; el sistema

de ecuaciones lineales correspondientes es:

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \frac{\partial G_1}{\partial x_{j+1}} & \frac{\partial G_1}{\partial l_{j+1}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_4 & \beta_4 & \frac{\partial G_4}{\partial x_{j+1}} & \frac{\partial G_4}{\partial l_{j+1}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta p_k \\ \delta \theta_k \\ \delta x_{k+1} \\ \delta l_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \gamma_4 \end{pmatrix} \quad (50)$$

con  $j = k$  y  $k = 2, \dots, N - 2$ .  $\alpha_i, \beta_i$  y  $\gamma_i$  estan dadas por

$$\begin{aligned} \alpha_i &= \frac{\partial G_i}{\partial p_j} + \frac{\partial G_i}{\partial x_j} U_{4k-3} + \frac{\partial G_i}{\partial l_j} U_{4k-2} \\ \beta_i &= \frac{\partial G_i}{\partial \theta_j} + \frac{\partial G_i}{\partial x_j} V_{4k-3} + \frac{\partial G_i}{\partial l_j} V_{4k-2} \\ \gamma_i &= -G_i - \frac{\partial G_i}{\partial x_j} W_{4k-3} + \frac{\partial G_i}{\partial l_j} W_{4k-2} - \frac{\partial G_i}{\partial p_{j+1}} \delta p_{k+1} - \frac{\partial G_i}{\partial \theta_{j+1}} \delta \theta_{k+1} \end{aligned} \quad (51)$$

El sistema (50) se puede resolver y da

$$\begin{aligned} \delta p_k &= U_{4k-1} \delta p_{k+1} + V_{4k-1} \delta \theta_{k+1} + W_{4k-1} \\ \delta \theta_k &= U_{4k} \delta p_{k+1} + V_{4k} \delta \theta_{k+1} + W_{4k} \\ \delta x_{k+1} &= U_{4k+1} \delta p_{k+1} + V_{4k+1} \delta \theta_{k+1} + W_{4k+1} \\ \delta l_{k+1} &= U_{4k+2} \delta p_{k+1} + V_{4k+2} \delta \theta_{k+1} + W_{4k+2} \end{aligned} \quad (52)$$

Explicitamente las constantes  $U_{4N-1}, \dots, W_{4N+3}$  pueden ser calculadas resolviendo el sistema

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \frac{\partial G_1}{\partial x_{j+1}} & \frac{\partial G_1}{\partial l_{j+1}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_4 & \beta_4 & \frac{\partial G_4}{\partial x_{j+1}} & \frac{\partial G_4}{\partial l_{j+1}} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} U_{4N-1} & V_{4N-1} & W_{4N-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ U_{4N+2} & V_{4N+2} & W_{4N+2} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} -\frac{\partial G_1}{\partial p_{j+1}} & -\frac{\partial G_1}{\partial \theta_{j+1}} & -\frac{\partial G_1}{\partial x_j} W_{4k-3} & -\frac{\partial G_1}{\partial l_j} W_{4k-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -\frac{\partial G_4}{\partial p_{j+1}} & -\frac{\partial G_4}{\partial \theta_{j+1}} & -\frac{\partial G_4}{\partial x_j} W_{4k-3} & -\frac{\partial G_4}{\partial l_j} W_{4k-2} \end{pmatrix} \quad (53)$$

Se repite el procedimiento que involucra las ecuaciones (50) - (53) con  $k$  incrementado en 1, hasta que  $k = N - 2$ .

El último bloque es diferente, tiene 4 ecuaciones y 6 incógnitas. Las últimas dos ecuaciones del sistema (52) se utilizan aquí, eliminando  $\delta x_{N-1}$  y  $\delta l_{N-1}$  y formando el sistema

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \frac{\partial C_1}{\partial p_N} & \frac{\partial C_1}{\partial \theta_N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_4 & \beta_4 & \frac{\partial C_4}{\partial p_N} & \frac{\partial C_4}{\partial \theta_N} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta p_{N-1} \\ \delta \theta_{N-1} \\ \delta p_N \\ \delta \theta_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \gamma_4 \end{pmatrix} \quad (54)$$

con

$$\begin{aligned} \alpha_i &= \frac{\partial C_i}{\partial p_{N-1}} + \frac{\partial C_i}{\partial x_{N-1}} U_{4N-7} + \frac{\partial C_i}{\partial l_{N-1}} U_{4N-6} \\ \beta_i &= \frac{\partial C_i}{\partial \theta_{N-1}} + \frac{\partial C_i}{\partial x_{N-1}} V_{4N-7} + \frac{\partial C_i}{\partial l_{N-1}} V_{4N-6} \\ \gamma_i &= -C_i - \frac{\partial C_i}{\partial x_{N-1}} W_{4N-7} - \frac{\partial C_i}{\partial l_{N-1}} W_{4N-6} \quad (i = 1, \dots, 4) \end{aligned} \quad (55)$$

Resolviendo el sistema (54) obtenemos los valores de  $\delta p_{N-1}$ ,  $\delta \theta_{N-1}$ ,  $\delta p_N$  y  $\delta \theta_N$ . Los valores de  $\delta p_{N-1}$ ,  $\delta \theta_{N-1}$  se introducen en el sistema (52) con  $k = N - 2$  para dar los valores de la siguiente corrección. Las primeras dos de estas correcciones se vuelven a introducir en el sistema (52) con  $k = N - 3$  y así siguiendo; finalmente el sistema (48) contiene las últimas variables desconocidas,  $\delta x_1, \dots, \delta l_2$ . De esta forma podemos resolver las ecuaciones en diferencia.

### 3 Un modelo semi-analítico para el crecimiento de los núcleos

Esta nueva sección está también basada en un trabajo desarrollado por los Drs. Benvenuto y Brunini (Brunini, A. y Benvenuto, O. G. 2008; Icarus, 194). Dicho trabajo presenta un modelo semi-analítico de crecimiento oligárquico de embriones planetarios considerando una distribución de tamaños para los planetesimales, fragmentación de los planetesimales debido a colisiones mutuas, sublimación de sólidos a través de la “línea del hielo”, velocidades al azar fuera del equilibrio y fusión de embriones planetarios.

Este modelo será utilizado en esta tesis para describir la evolución del disco protoplanetario, en donde estarán inmersos los planetas gigantes en formación.

#### 3.1 Introducción

En un disco protoplanetario, el primer modo de acreción de sólidos es el llamado crecimiento “runaway” (Greenberg, 1980), en donde los cuerpos más grande crecen más rápidamente que los pequeños. En este régimen, la interacción entre los mismos planetesimales es la que domina la evolución dinámica del disco. Las velocidades relativas de los planetesimales son lo suficientemente bajas para que las secciones eficaces (debida al enfoque gravitatorio) de los cuerpos mayores sean las más grandes.

Sin embargo, luego de un tiempo, los cuerpos mayores se vuelven tan masivos que sus influencias gravitatorias dominan la evolución dinámica de los planetesimales que los rodean, incrementando las velocidades relativas. Luego, el proceso de acreción de estos embriones cambia a un régimen más lento, conocido como “crecimiento oligárquico” (Kokubo e Ida, 1998, 2000, 2002). La transición del crecimiento “runaway” al crecimiento oligárquico se produce en etapas muy tempranas, cuando la masa del embrión planetario es aún varios órdenes de magnitud menor que la masa de la Tierra (Ida y Makino, 1993; Thommes et al., 2003). Por lo tanto, desde tiempos muy tempranos, el régimen relevante para modelar la acreción de sólidos de los núcleos de los planetas gigantes es el crecimiento oligárquico.

#### 3.2 Acreción sobre los núcleos

El proceso de acreción de los núcleos está bien descrito por la aproximación de “partícula en una caja” (Inaba et al., 2001), en la cual

$$\frac{dM_P}{dt} = \frac{2\pi\Sigma(R_p)R_H^2}{P} P_{col} \quad (56)$$

donde  $M_P$  es la masa del planeta,  $\Sigma(R_p)$  es la densidad superficial de sólidos a la distancia del planeta,  $R_H = R_P(M_P/3M_\star)^{1/3}$  es el radio de Hill,  $R_P$

es el radio de la órbita del planeta,  $M_\star$  es la masa de la estrella central del sistema,  $P$  es el período orbital y la probabilidad de colisión  $P_{col}$  toma diferentes valores dependiendo de las velocidades al azar (Chambers, 2006). En los regímenes de altas, medias y bajas velocidades,  $P_{col}$  está dada por

$$P_{col\_altas} = \frac{(R+r)^2}{2\pi R_H^2} \left[ I_F(\beta) + \frac{6R_H I_G(\beta)}{(R+r)^2 \hat{e}^2} \right] \quad (\hat{e}, \hat{i} > 2) \quad (57)$$

$$P_{col\_med} = \frac{(R+r)^2}{4\pi R_H^2 \hat{i}} \left[ 17,3 + \frac{232R_H}{(R+r)} \right] \quad (0,2 < \hat{e}, \hat{i} < 2) \quad (58)$$

$$P_{col\_bajas} = 11,3 \left[ \frac{R+r}{R_H^2} \right]^{1/2} \quad (\hat{e}, \hat{i} < 0,2) \quad (59)$$

donde  $R$  y  $r$  son los radios del planeta y de los planetesimales respectivamente;  $\hat{e}$  y  $\hat{i}$  son las excentricidades e inclinaciones reducidas, definidas por  $\hat{e} = eR_P/R_H$  e  $\hat{i} = iR_P/R_H$ , con  $\beta = \hat{i}/\hat{e}$ ;  $e$  e  $i$  son los valores medios cuadráticos de la excentricidad e inclinación de los planetesimales en la zona de alimentación del planeta.  $I_F(\beta)$  y  $I_G(\beta)$  son funciones que pueden expresarse en términos de integrales elípticas completas, pero en el intervalo  $0 < \beta \leq 1$  están bien representadas (Chambers, 2006) por

$$I_F(\beta) = \frac{1 + 0,95925\beta + 0,77251\beta^2}{\beta(0,13142 + 0,12295\beta)} \quad (60)$$

$$I_G(\beta) = \frac{1 + 0,39960\beta}{\beta(0,0369 + 0,048333\beta + 0,006874\beta^2)} \quad (61)$$

A diferencia de los trabajos de Brunini y Benvenuto 2008, y de Chambers 2006, asumiremos que  $P_{col}$  toma la forma según el trabajo original de Inaba et al. 2001, en el cual claramente se muestra que la probabilidad de colisión está dada en todo el rango de  $(\hat{e}, \hat{i})$  por

$$P_{col} = \min[P_{col\_med}, (P_{col\_bajas}^{-2} + P_{col\_altas}^{-2})^{-1/2}]$$

Definimos la zona de alimentación como el anillo alrededor del protoplaneta en donde los planetesimales pueden ser acretados. El ancho de esta zona es usualmente tomado como  $b$  veces el radio de Hill del planeta, con  $b = 10$  (Thommes et al., 2003). Para considerar adecuadamente el ancho de la zona de alimentación, generalizamos la ecuación (56)

$$\frac{dM_P}{dt} = \int_{Z_A} 2\pi\psi(a, R_H, R_P) \frac{2\pi\Sigma(a)R_H^2}{P} P_{col} da \quad (62)$$

donde  $a$  es la distancia a la estrella central. Escogimos una forma funcional para  $\psi$  imponiendo una condición de normalización

$$\int_{Z_A} 2\pi\psi(a, R_H, R_P) da = 1 \quad (63)$$

$ZA$  indica que la integral se extiende sobre toda la zona de alimentación. En esta tesis adoptamos para  $\psi$  la siguiente forma (Brunini y Benvenuto 2008)

$$\psi(a, R_H, R_P) = \frac{1}{2\pi^{3/2}b} \exp \left[ - \left( \frac{a - R_P}{bR_H} \right)^2 \right] \quad (64)$$

La velocidad relativa entre un planetesimal y el núcleo,  $v_{rel}$ , puede ser descrita por

$$v_{rel} = \sqrt{\frac{5}{8}e^2 + \frac{1}{2}i^2v_k} \quad (65)$$

donde  $v_k$  es la velocidad kepleriana a la distancia  $R_P$ . La velocidad relativa está gobernada por el “disturbio” gravitatorio debido a los protoplanetas y el amortiguamiento debido al gas; lo anterior puede ser modelado (Ohtsuki et al., 2002) como

$$\left( \frac{d\langle e^2 \rangle}{dt} \right)_{dist} = \left( \frac{M}{3bM_\star P} \right) P_{VS} \quad (66)$$

$$\left( \frac{d\langle i^2 \rangle}{dt} \right)_{dist} = \left( \frac{M}{3bM_\star P} \right) Q_{VS} \quad (67)$$

donde

$$\begin{aligned} P_{VS} &= \left[ \frac{73\hat{e}^2}{10\Lambda^2} \right] \ln \left( 1 + \frac{10\Lambda^2}{\hat{e}^2} \right) \\ &+ \left[ \frac{72I_{PVS}(\beta)}{\pi\hat{e}\hat{i}} \right] \ln(1 + \Lambda^2) \\ Q_{VS} &= \left[ \frac{4\hat{i}^2 + 0,2\hat{e}^3}{10\Lambda^2\hat{e}} \right] \ln(1 + 10\Lambda^2) \\ &+ \left[ \frac{72I_{QVS}(\beta)}{\pi\hat{e}\hat{i}} \right] \ln(1 + \Lambda^2) \end{aligned}$$

$\Lambda^2 = \hat{i}(\hat{i}^2 + \hat{e}^2)/12$ ;  $I_{PVS}(\beta)$  y  $I_{QVS}(\beta)$  están dadas por integrales elípticas, las cuales pueden aproximarse (Chamber, 2006) por

$$\begin{aligned} I_{PVS}(\beta) &= \frac{\beta - 0,36251}{0,061547 + 0,16112\beta + 0,054473\beta^2} \\ I_{QVS}(\beta) &= \frac{0,71946 - \beta}{0,21239 + 0,49764\beta + 0,14369\beta^2} \end{aligned}$$

Sin embargo, estas velocidades caen sustancialmente a medida que nos alejamos del protoplaneta. Hasegawa y Nakazawa (1990) mostraron que cuando la distancia al protoplaneta es mayor que  $3,5 - 4$  radios de Hill, el planeta no es capaz de excitar significativamente las velocidades relativas de los



planetesimales. Por lo tanto, se considerará que

$$\left(\frac{d\langle e^2 \rangle}{dt}\right)_{dist}^{effect} = f(\Delta) \left(\frac{d\langle e^2 \rangle}{dt}\right)_{dist} \quad (68)$$

$$\left(\frac{d\langle i^2 \rangle}{dt}\right)_{dist}^{effect} = f(\Delta) \left(\frac{d\langle i^2 \rangle}{dt}\right)_{dist} \quad (69)$$

donde

$$f(\Delta) = \left(1 + \left\| \frac{\Delta}{10R_H} \right\|^5\right)^{-1}$$

en donde  $\Delta$  representa la distancia al protoplaneta.  $f(\Delta)$  garantiza que el perfil de velocidades a lo largo del disco de planetesimales es lo suficientemente suave; esta es una cuestión importante para resolver adecuadamente la redistribución de sólidos a través del disco de planetesimales debido a la fricción gaseosa (ver más adelante). La quinta potencia en el factor  $f(\Delta)$  es arbitraria, se adopta para lograr que los efectos debidos a la presencia de un protoplaneta estén restringidos a su zona de alimentación.

La fricción causada por la componente gaseosa del disco protoplanetario disminuye las excentricidades e inclinaciones orbitales de los planetesimales a una tasa dada por (Adachi et al., 1976)

$$\left(\frac{de}{dt}\right)_{gas} = \frac{\pi e r^2 C_D \rho_{gas} v_k}{2m} \left(\eta^2 + v_{rel}^2\right) \quad (70)$$

$$\left(\frac{di}{dt}\right)_{gas} = \frac{\pi i r^2 C_D \rho_{gas} v_k}{4m} \left(\eta^2 + v_{rel}^2\right) \quad (71)$$

donde  $r$  es el radio de los planetesimales,  $C_D$  es un coeficiente adimensional que representa a la fricción gaseosa (del orden de 1 para cuerpos esféricos),  $m$  es la masa de los planetesimales y  $\rho_{gas}$  es la densidad del gas nebular a la distancia  $a$  de la estrella central.  $\eta$  es la fracción diferencia entre la velocidad del gas y la velocidad local kepleriana, dada por

$$\eta = \frac{v_k - v_{gas}}{v_k} = \frac{\pi}{16} (\alpha + \beta) \left(\frac{c_s}{v_k}\right)^2 \quad (72)$$

donde  $\beta$  es la potencia en el perfil de temperatura de la nebulosa ( $T(a) \propto a^{-\beta}$ ) y  $c_s$  es la velocidad local del sonido; asumimos aquí que la escala de altura del disco es  $z = 0,05a^{5/4}$  (Brunini y Benvenuto 2008), con lo cual,  $c_s/v_k = 0,05a^{1/4}$ . La fricción gaseosa depende fuertemente del tamaño de los planetesimales.

Algunos modelos de crecimiento oligárquico asumen que los planetesimales alcanzan velocidades relativas en equilibrio. Thommes et al. (2003)

proponen que esta hipótesis es válida siempre y cuando los embriones alcancen masas mayores a  $10^{-2} - 10^{-1}M_{\oplus}$ . Previo a esta condición, el equilibrio no puede ser alcanzado, debido a que el tiempo característico del proceso de acreción es menor a la escala de tiempo para alcanzar el equilibrio. Sin embargo, no es claro si la condición de equilibrio es siempre alcanzada, especialmente para planetesimales pequeños (Chambers, 2006). Por lo tanto, para cada población de planetesimales, a cada distancia de la estrella central, integraremos las ecuaciones (68)-(71) con un método de Euler semi-implícito (Gear, 1971). El uso de un método semi-implícito provee estabilidad numérica tanto cerca de la condición de equilibrio como fuera de la misma.

En esta tesis usaremos una densidad superficial de sólidos basada en el modelo de masa mínima de la nebulosa solar (MMNS) de Hayashi et al. (1985); dicho modelo establece que

$$\begin{aligned}\Sigma(a) &= 7,1 \left( \frac{a}{1UA} \right)^{-3/2} g/cm^2, a < 2,7UA \\ \Sigma(a) &= 30 \left( \frac{a}{1UA} \right)^{-3/2} g/cm^2, a > 2,7UA\end{aligned}\quad (73)$$

La discontinuidad en 2,7 UA es debida a la condensación de los elementos volátiles; esta discontinuidad es comunmente llamada la “línea del hielo”, que actualmente en el Sistema Solar se encuentra a dicha distancia del Sol.

Por conveniencia numérica seguiremos el tratamiento adoptado por Thommes et al. (2003), extendiendo la “línea del hielo” a una región de aproximadamente 1 UA con una función suave:

$$\Sigma(a) = \left\{ 7,1 + \left( 30 - 7,1 \right) \left[ \frac{1}{2} \tanh \left( \frac{a - 2,7}{0,5} \right) + \frac{1}{2} \right] \right\} \times \left( \frac{a}{1UA} \right)^{-3/2} g/cm^2 \quad (74)$$

Para el perfil de la densidad del gas adoptaremos el valor del plano medio del modelo de MMNS, el cual está dado por

$$\rho_{gas} = 1,4 \times 10^{-9} \left( \frac{a}{1UA} \right)^{-\alpha} g/cm^3, \text{ con } \alpha = 11/4 \quad (75)$$

Supondremos por simplicidad, que la componente gaseosa del disco protoplanetario decae uniformemente a lo largo de todo el disco con una tasa de decaimiento exponencial y un tiempo característico de 10 millones de años.

### 3.3 Flujo de planetesimales debido a la fricción gaseosa

Los planetesimales están sujetos a la fricción gaseosa, la cual causa que tengan un decaimiento radial y afecta la distribución de sólidos en el disco.

Como muestran Thommes et al. (2003) y Chambers (2006), este efecto tiene una fuerte influencia en las escalas de tiempo de acreción y en las masas finales que alcanzan los planetesimales a las diferentes posiciones en el disco protoplanetario. El flujo de planetesimales es descripto por (Adachi et al., 1976)

$$\frac{da}{dt} = -\frac{2a}{T_{fric}} \left( \eta^2 + \frac{5}{8}e^2 + \frac{1}{2}i^2 \right)^{1/2} \times \left[ \eta + \left( \frac{5}{16} + \frac{\alpha}{4} \right) e^2 + \frac{1}{4}i^2 \right] \quad (76)$$

donde

$$T_{fric} = \frac{8\rho r}{3C_D\rho_{gas}v_k} \quad (77)$$

con  $\rho$  la densidad de los planetesimales.

La evolución del disco de planetesimales obedece la ecuación de continuidad. Si integramos en la dirección  $z$  y asumimos simetría axial, esta puede ser escrita como

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial t} - \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial a} \left( a \frac{da}{dt} \Sigma \right) = F(a) \quad (78)$$

donde  $F(a)$  representa a los sumideros que sustraen material del disco.

Uno de dichos términos es debido a la acreción sobre el planeta, y está dado por

$$F_{acre} = -\frac{dM_P}{2\pi a da dt} = -\psi(a, R_H, R_P) \frac{2\pi \Sigma R_H^2}{P} P_{col} \quad (79)$$

En el caso en que más de un planeta esté presente, debemos sumar las contribuciones a  $F_{acre}$ .

### 3.4 Sublimación de hielos

El 75 % del material detrás de la “línea del hielo” está compuesto por hielos. Cuando los planetesimales ricos en hielo, ingresando desde la parte externa del disco, alcanzan la “línea del hielo” se subliman, como un núcleo cometario. El proceso de sublimación es bastante complejo; trataremos este efecto en una forma simplificada, pero incluyendo un sumidero  $F_{hielo}$  con valores apreciables en una zona finita, similar a lo realizado para el perfil de densidad inicial, ecuación (74). La expresión adoptada es de la forma (Brunini y Benvenuto 2008)

$$F_{hielo}(a) = -\frac{0,75\Sigma(a)}{\Delta_{hielo}\pi^{1/2}} v_p \exp \left[ -\left( \frac{a - R_{hielo}}{\Delta_{hielo}} \right)^2 \right] \quad (80)$$

donde  $v_p$  es la velocidad radial del planetesimal considerado de un dado radio. La ecuación (80) garantiza la evaporación del 75% del material del planetesimal en un anillo de  $\approx \Delta_{hielo}/2$ , y si bien se aplica a lo largo de todo el disco, solo tiene efectos apreciables cerca de  $R_{hielo}$ , con  $R_{hielo} = 2,7$  UA.

Para el término  $\Delta_{hielo}$  haremos una pequeña discusión. El tiempo de vida de la sublimación de un planetesimal depende de su radio. Para planetesimales de 1 km, compuestos de hielo de agua, Fernández (2005) estimó un tiempo de vida de  $\sim 1500$  revoluciones orbitales a 2 UA, siendo el tiempo de vida proporcional a el radio del planetesimal. Este tiempo de vida es mucho menor que la escala de tiempo característica del flujo de planetesimales en el disco debido a la fricción gaseosa. A la distancia de 2 UA los planetesimales tardan

$$T_{fric} \sim 2,7 \times 10^7 \left[ \frac{r}{1km} \right] \text{ años} \quad (81)$$

para viajar 1 UA. Sin embargo, la velocidad máxima del flujo de planetesimales, la cual se alcanza alrededor de la “línea del hielo”, varía entre  $\sim 300$  cm/seg para los planetesimales más pequeños, hasta  $\sim 30$  cm/seg para los mayores. Por lo tanto, la escala de tiempo característica del flujo de planetesimales puede ser bastante menor que la calculada por la ecuación (81).

Asumiendo que la tasa de sublimación de la masa es proporcional al área superficial de los planetesimales, la escala de tiempo característica de la sublimación de los planetesimales de radio  $r$  puede modelarse por

$$T_{sub} = T_0 \left( \frac{r}{1km} \right) \quad (82)$$

donde  $T_0$  es la escala de tiempo de sublimación de un objeto de  $r = 1$  km y adopta el valor  $T_0 = 5000$  años. La distancia que estos planetesimales recorren durante el tiempo  $T_{sub}$  es

$$D = T_{sub} v_p$$

Adoptaremos esta distancia como  $\Delta_{hielo}$  en la ecuación (80). El valor de  $v_p$  no solo depende del radio del planetesimal sino también de la distancia a la estrella central. Sin embargo, en esta tesis adoptaremos un valor fijo para  $v_p$  igual a su valor a la distancia de la “línea del hielo”.

Para  $r = 0,1$  km,  $\Delta_{hielo}$  puede alcanzar como mucho valores de  $\sim 0,3$  UA, con lo cual, la sublimación de los objetos más pequeños ocurre en una pequeña región alrededor de la “línea del hielo”. Por otro lado, para planetesimales de 100 km,  $\Delta_{hielo}$  puede ser muy grande (algunas UA), lo que implica que estos planetesimales sufren poco este efecto. Pero dado que la mitad del total de la masa en nuestra distribución corresponde a planetesimales con  $r \leq 0,2$  km la “línea del hielo” siempre estará presente en nuestro modelo.

### 3.5 Distribución de tamaños de los planetesimales

Los planetesimales pequeños producen que el proceso de acreción sea más rápido, especialmente en las regiones externas detrás de la “línea del hielo”. Este es un punto crucial en el modelo de inestabilidad nucleada, dado que la acreción de gas es solo posible antes que la nebulosa se disipe totalmente. Para tener en cuenta el efecto de la distribución de tamaños de los planetesimales, se ha dividido la población de los mismos en 31 especies de tamaños diferentes, desde 1 m hasta 100 km (cada especie tiene objetos con el doble de masa que la especie anterior). Se ha adoptado una ley de potencia para la distribución de los planetesimales de la forma  $dN/dm \propto m^\alpha$  con  $\alpha = -2,5$ , consistente con los resultados obtenidos por Kokubo e Ida (1998, 2000) para el espectro de masa de una población de planetesimales. Cada especie posee su propia evolución de velocidades. Como la masa total es  $\int n m d m \propto m^{\alpha+2}$ , la mayor cantidad de masa del disco está contenida en los planetesimales pequeños.

Adoptamos una versión generalizada de la ecuación (62) que nos permita la presencia de una distribución de tamaños de los planetesimales

$$\frac{dM_P}{dt} = \int_{dist} dm \int_{ZA} 2\pi\psi(a, R_H, R_P) \frac{2\pi\Sigma(a, m)R_H^2}{P} P_{col}(a, m) da \quad (83)$$

donde  $\int_{dist}$  se entiende como la integral sobre toda la distribución de tamaño de los planetesimales. Aquí hemos incluido explícitamente la dependencia con la masa para las cantidades correspondientes.

Cuando una distribución de planetesimales está presente, la ecuación de continuidad (78) se debe resolver para cada especie de dicha distribución simultáneamente. Es importante remarcar que, afortunadamente, el sumidero debido al proceso de acreción, ecuación (79), es diagonal, en el sentido en que podemos calcular la migración de cada especie en forma independiente. Además el sumidero debido a la sublimación de hielos, ecuación (80), es también diagonal.

## 4 Formación simultánea de planetas gigantes

El objetivo central de esta tesis fue desde un principio la construcción de un modelo autoconsistente para la formación simultánea de planetas gigantes y analizar cómo la formación simultánea afecta el crecimiento individual de cada planeta.

Para lograr este objetivo, separamos el trabajo en diferentes etapas. La primer etapa consistió en una generalización del código comentado en la sección 2; nuestra intención no es describir los detalles numéricos de dicha generalización, si no mostrar las características principales de cómo se llevó a cabo.

### 4.1 Generalización al código de la formación In Situ de un planeta gigante

Empezaremos enumerando ciertos parámetros libres de importancia para el modelo:

- a. El número de planetas a ser formados.
- b. La masa de la estrella central.
- c. La densidad del núcleo de cada planeta.
- d. La distancia de cada planeta a la estrella central.
- e. La masa final que alcanzará cada planeta.
- f. La densidad y la temperatura en el borde de cada planeta.
- g. La masa inicial del núcleo para cada planeta.

A estos parámetros libres se suman otros de carácter estrictamente numérico (número máximo de iteraciones, tolerancias, etc.).

Establecidos estos parámetros podemos comenzar con una simulación; lo que primero realiza el código es el cálculo de los modelos iniciales para cada planeta. En esta tesis los modelos iniciales para cada planeta serán los mismos y se leen desde un archivo externo (es nuestra intención en un futuro generar modelos iniciales independientes para cada planeta).

Una vez que tenemos los modelos iniciales de todos los planetas, se procede de la siguiente forma: tomamos el primer planeta (con primer nos referimos al más cercano a la estrella central, dado que así han sido ordenados en el código) y calculamos las condiciones de borde para el mismo; una vez hecho esto se calculan las ecuaciones en diferencias finitas correspondientes al interior de la envoltura gaseosa, obteniendo las correcciones para el próximo modelo. Una vez que las correcciones alcanzan la precisión deseada se da por concluido ese modelo.

Luego el código calcula la masa a incrementar del núcleo, el radio del planeta, la asignación de las variables físicas correspondientes al modelo actual y prepara los parámetros necesarios para el cálculo del siguiente modelo, entre el que se destaca el paso temporal; es importante destacar que para cada planeta, modelo a modelo, se calculará un tiempo propio para cada uno.

Finalizado el cálculo del primer modelo del primer planeta, se toma el segundo planeta y se procede en forma análoga al cálculo del primer modelo del segundo planeta y de las variables involucradas para el mismo, y así siguiendo hasta calcular el primer modelo para todos los planetas.

Cuando tenemos calculado el primer modelo de todos los planetas, se escoge el mínimo entre todos los pasos temporales, y se reemplazan estos pasos temporales por dicho mínimo, de manera de asegurarnos que los modelos se calculen siempre al mismo tiempo para todos los planetas. Es evidente, que tomando el mínimo de los pasos temporales se garantiza la convergencia del próximo modelo para todos los planetas. Sin embargo, esta metodología demanda un mayor tiempo de cómputo, dado que para algún planeta (o varios) se calcularán modelos con pasos de tiempo menores a los necesarios. Pero dada la simplicidad de esta forma de asegurar la convergencia de los modelos para todos los planetas y el no excesivo tiempo de cómputo de las simulaciones, consideramos eficiente la metodología aquí adoptada, aunque esta se puede optimizar si los tiempos de cálculos excedieran un límite razonable.

Elegido el paso mínimo para los siguientes modelos, el programa verifica si algún planeta ya alcanzó su masa límite (cuando esto sucede consideramos que el planeta en cuestión terminó de formarse); aquellos planetas que terminaron su formación ya no son tenidos en cuenta. Una vez hecha esta verificación se vuelve al cálculo de los modelos para los planetas que todavía siguen formándose.

Este procedimiento se repite hasta que todos los planetas alcancen la masa límite prefijada o el tiempo de formación del sistema exceda un límite preestablecido.

Una vez desarrollada esta generalización, entramos en la segunda etapa de esta tesis. Esta consistió en lograr un acople entre el código que describe la evolución del disco protoplanetario (sección 3), y la generalización para la formación simultánea de planetas gigantes.

## 4.2 Acople de los códigos

Como mencionamos en la sección 3, contábamos con un código desarrollado por los Drs. Benvenuto y Brunini, el cual resuelve el crecimiento de planetas (solo núcleos sólidos) embebidos en una nebulosa protoplanetaria en simetría cilíndrica.

Nuestra intención era usar este código como el programa principal, el

cual entre las diferentes cantidades que debía calcular se encontraba la tasa de acreción de sólidos para cada embrión planetario. Una vez calculadas las tasas de acreción, estas debían ser llevadas al código que calcula la formación simultánea de los planetas gigantes. Este último, finalizados los cálculos de los nuevos modelos para cada planeta, debía regresarle al primero las nuevas masas totales (masa del núcleo + masa de la envoltura) de cada planeta, para que continuara con el cálculo de la evolución del disco. Este proceso debía repetirse hasta lograr la formación del sistema planetario.

Luego de un arduo trabajo, y para nuestra satisfacción, logramos acoplar dichos códigos en un solo programa de manera autoconsistente. Nuevamente no entraremos en los detalles numéricos del programa, solo haremos un pequeño análisis global del método.

El código que modela la evolución del disco será el programa principal, mientras que el código que modela la formación simultánea de los planetas gigantes será un subrutina.

A los parámetros libres vistos anteriormente se suman otros, entre los que se destacan

- El número de veces que considero la Nebulosa Solar Mínima.
- La distribución de tamaños para los planetesimales.
- La escala de tiempo de disipación del gas.
- El tiempo final del cálculo (edad límite del sistema).

Todos los parámetros libres se definen en una subrutina.

Una vez definidos los parámetros libres se calcula el modelo inicial para el disco. A partir del modelo inicial se calculan los radios de Hill de cada planeta. Luego se calculan las velocidades de migración de los planetesimales tomando en cuenta los diferentes tamaños de los mismo. Estas son las velocidades que se utilizan para resolver la evolución del perfil de densidad superficial del disco. Posteriormente se calcula la evolución de la densidad del gas del disco protoplanetario.

Finalizado estos pasos, se llama a la rutina en la que se calcula el proceso de crecimiento de cada uno de los planetas. Para realizar el cálculo tengo que considerar las contribuciones de los diferentes tamaños de los planetesimales como así también las diferentes contribuciones que vienen de la capacidad del planeta de crecer acretaando planetesimales desde diferentes zonas del disco protoplanetario. En esta rutina se calculan las zonas de alimentación y las probabilidades de colisión para cada planeta, para luego calcular la tasa de acreción de cada planeta. Calculadas todas estas tasas, se llama a la rutina que calcula la formación simultánea de los planetas gigantes. Esta rutina toma las tasas de acreción para calcular el crecimiento del núcleo sólido de cada planeta. Luego de calculado los nuevos modelos para cada uno de los planetas gigantes (sección 4.1) la rutina calcula los pasos de tiempo y las



masas totales correspondientes (masa del núcleo + masa de la envoltura gaseosa) de cada planeta, y se vuelve al programa principal.

Adoptando estas nuevas masas para los planetas en el programa principal, se calculan los sumideros correspondientes a la ecuación de continuidad, y luego se resuelve dicha ecuación considerando que las masas de los planetas permanecen constantes durante el paso de tiempo.

Concluidos todos estos pasos, se repite el proceso a partir del cálculo del radio de Hill de cada planeta. Para asegurarnos la convergencia de todos los nuevos modelos de los planetas gigantes y del próximo modelo del disco, se escoge nuevamente el mínimo de todos los pasos temporales calculados, es decir, entre el paso temporal de cada planeta y el paso temporal de la evolución del disco.

Finalmente, el programa concluye cuando todos los planetas alcanzan su masa prefijada o cuando se alcanza la edad límite del sistema. Cabe destacar que si algún planeta terminó su formación pero existen aún otros planetas en formación, dicho planeta no es tenido en cuenta en el cálculo de la formación, pero si se lo sigue teniendo en cuenta en el cálculo de la evolución del disco, es decir, tal planeta no crece más pero sigue perturbando la población de planetesimales del disco.

## 5 Resultados

Para poner a prueba el modelo antes mencionado, realizamos una serie de simulaciones.

Para la presentación de esta tesis, trabajamos con los planetas gigantes del Sistema Solar. Adoptaremos que las posiciones iniciales de los planetas son las correspondientes al “Nice Model” (Tsiganis et al. 2005; Morbidelli et al. 2005; Gomes et al. 2005; Levison et al. 2007). Este modelo postula que los planetas gigantes se formaron en órbitas circulares ( $e \sim 10^{-3}$ ) y coplanares ( $i < 0,1^\circ$ ), con Júpiter orbitando a  $\sim 5,45$  UA, Saturno dentro de la resonancia 2:1 con Júpiter, entre 8 – 9 UA, y Urano y Neptuno entre 11 – 13 y 13,5 – 17 UA respectivamente. Además este modelo plantea la existencia de un disco de planetesimales detrás de los planetas, a aproximadamente 30 UA, con una masa total de  $35M_\oplus$ . Estos planetesimales interactuaron con los planetas y causaron la migración interna de Júpiter y la migración externa del resto. Lo importante del “Nice Model” es que después de 100 millones de años, Júpiter y Saturno cruzan su mutua resonancia 2:1 causando un corportamiento caótico en la región externa del sistema solar por varias decenas de millones de años. Lo más notable es que Urano y Neptuno migran rápidamente en forma caótica hacia afuera, dispersándose mutuamente. En el 50 % de sus simulaciones Tsiganis et al. 2005 observaron que los dos planetas cambiaban de lugar. Esto podría explicar porqué Neptuno es más masivo que Urano, asumiendo que la configuración inicial del Sistema Solar fue Júpiter, Saturno, Neptuno y Urano.

Para poder explicar las condiciones actuales del Sistema Solar, Júpiter debió formarse a  $\sim 5,45$  UA y Saturno en algún lugar entre 8 – 8,5 UA. Este es el mejor acuerdo para estas cantidades, como así también para el semieje mayor de Urano, si uno de los gigante helados tuvo un encuentro con uno de los gigantes gaseosos; esto implica que Saturno y Neptuno se formaron a una distancia  $< 3,5$  UA. Finalmente la separación entre Neptuno y Urano debió ser de al menos 2 UA.

Nuestra intención no es entrar en detalle en el “Nice Model” pero si aclarar que este modelo explica varios aspectos de la arquitectura actual del sistema solar, como por ejemplo, la presencia del Cinturón de Kuiper, la existencia de los Troyanos y los semiejes, excentricidades e inclinaciones de los planetas gigantes.

Mostraremos una serie de comparaciones entre la formación aislada y simultánea de Júpiter y Saturno, y entre los diferentes parámetros físicos que intervienen en el modelo.

En esta tesis adoptaremos que la configuración inicial de los planetas gigantes gaseosos del sistema solar fue la siguiente: Júpiter a 5,5 UA y Saturno a 8,3 UA. Además los planetas estarán en formación hasta que alcancen una masa final de  $318M_\oplus$  y  $95M_\oplus$  para Júpiter y Saturno respectivamente.

## 5.1 Formación aislada de 1 planeta gigante

### 5.1.1 Júpiter

Empezaremos calculando la formación aislada de Júpiter dentro del disco protoplanetario.

Tanto para estos modelos como para todos los demás, se tomará una distribución de tamaños para los planetesimales dividida en 31 especies, donde los planetesimales más pequeños tienen un radio de 100 m y el resto de los tamaños se calcula multiplicando al anterior por el factor  $2^{1/3}$ , de esta forma los planetesimales mayores tienen un radio de  $\sim 100$  km. La masa inicial del núcleo será siempre de  $5 \times 10^{-3} M_{\oplus}$  (bastante menor a la masa de la Luna) de manera de comenzar con un núcleo sólido lo suficientemente pequeño.

Con estas condiciones adoptadas, se calculó la formación de Júpiter para un valor de 3, 5, 8 y 10 veces el valor de la nebulosa solar mínima.

Vemos claramente (figura 1) que a medida que aumentamos el valor de la nebulosa mínima la formación de Júpiter ocurre en escalas de tiempo considerablemente menores. Esto es de esperar, dado que si el valor de la nebulosa mínima aumenta disponemos de mayor cantidad de gas y sólidos para que el planeta acrete. Considerando 3 y 5 veces el valor de la nebulosa mínima, los tiempos de formación de Júpiter exceden el tiempo de vida de un disco protoplanetario (comunmente entre 3 – 6 millones de años, a lo sumo 10. Haisch et al. 2001).

	3 neb. min.	5 neb. min.	8 neb. min.	10 neb. min.
Masa del núcleo [ $M_{\oplus}$ ]	4,79	22,01	76,63	114,30
Tiempo de formación [ $10^6$ años]	108,98	14,27	4,13	2,67

Tabla 1: Comparación de la masa del núcleo y el tiempo de formación con el valor adoptado de la nebulosa mínima.

Pero considerando los casos en que la nebulosa protoplanetaria adopta los valores de 8 y 10 veces la nebulosa solar mínima el tiempo de formación de Júpiter está en total acuerdo con los tiempos de vida de los discos protoplanetarios. Este es un hecho más que destacable dada la simplicidad de nuestro modelo (recordar que estamos trabajando con la hipótesis de gas ideal para la envoltura, opacidades constantes, etc.). Sin embargo, para estos últimos casos que estamos describiendo la masa del núcleo es bastante mayor a la que se esperaría para Júpiter (del orden de  $10 M_{\oplus}$ ). A medida que aumentamos el valor de la nebulosa mínima los núcleos se vuelven más masivos. La tabla 1 especifica los resultados antes mencionados.

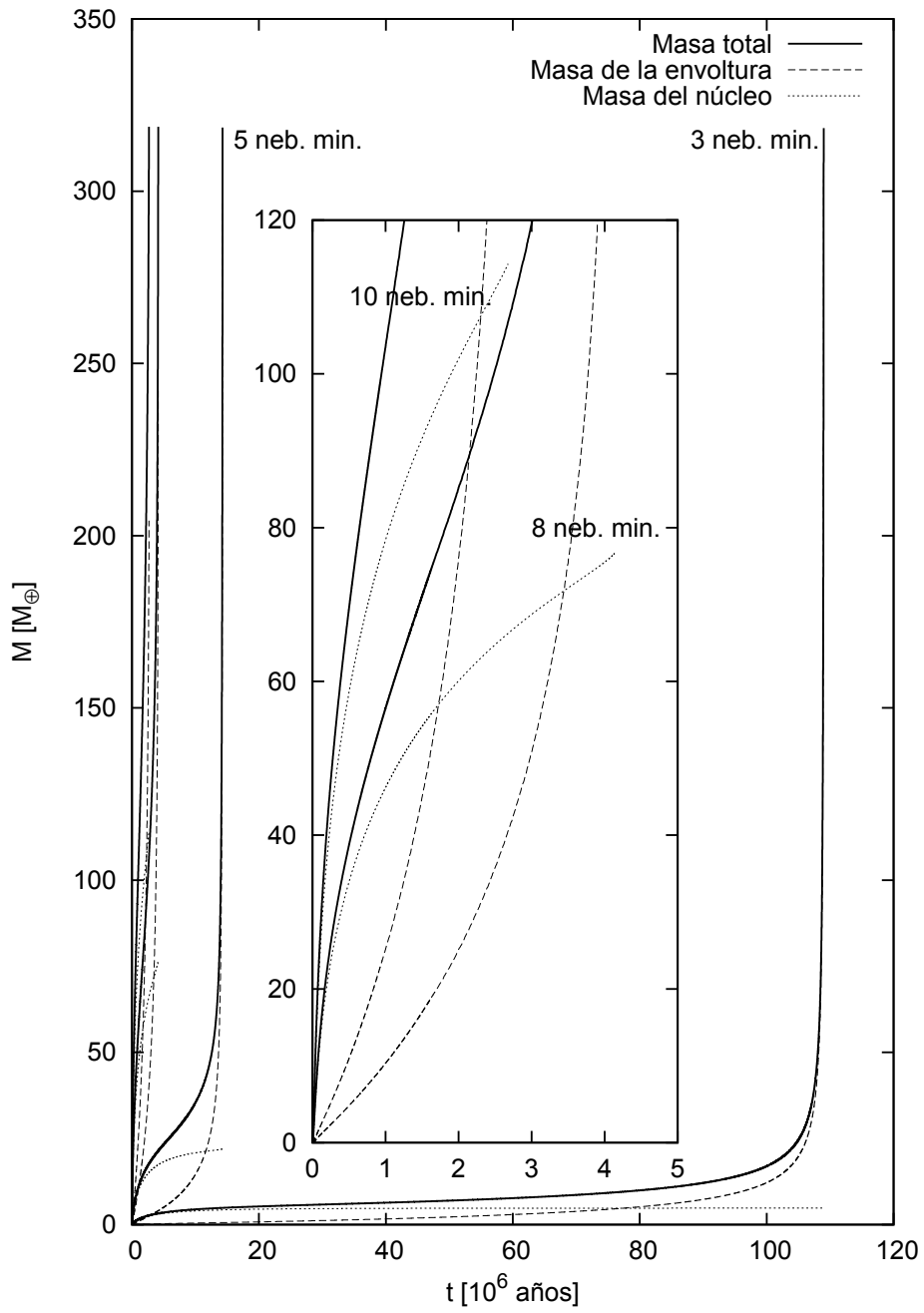


Figura 1: La masa total (línea llena), de la envoltura (línea a trazos) y del núcleo (línea punteada) de Júpiter como función del tiempo para los diferentes valores de la nebulosa mínima adoptados.

Decimos que cuando  $M_c = M_{env}$  se alcanza la masa crítica del planeta, ya que lo que era un proceso tranquilo se transforma en lo que se conoce como

un proceso “runaway” y el crecimiento de la envoltura gaseosa se dispara. Vemos que la masa crítica crece con el valor de la nebulosa mínima.

La figura 2 muestra las tasas de acreción como función del tiempo para los diferentes valores adoptados de la nebulosa mínima. Las curvas muestran, cualitativamente, un comportamiento similar. Pero dado que al aumentar el valor de la nebulosa mínima contamos con una mayor cantidad de sólidos, las tasas de acreción se vuelven más altas.

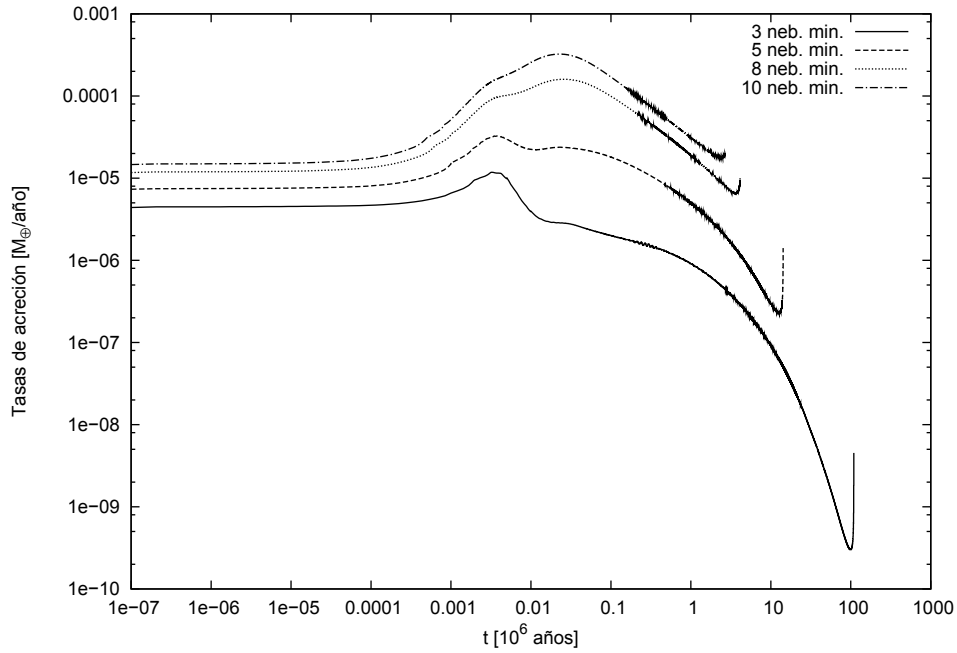


Figura 2: La tasa de acreción de planetesimales como función del tiempo para 3, 5, 8 y 10 veces el valor de la nebulosa solar mínima.

A medida que el planeta comienza su formación, las tasas de acreción alcanzan rápidamente sus máximos. Luego decaen lentamente (al ir Júpiter vaciando su zona de alimentación) hasta que se produce el “runaway” de la envoltura, en donde las tasas vuelven a crecer. Esto último se debe a que en el proceso “runaway” el planeta aumenta su masa considerablemente en una escala de tiempo muy corta, lo que le permite ampliar su zona de alimentación y contar con nuevo material para acretar.

A pesar de la diferente estructura de Júpiter (masa del núcleo y envoltura) dependiendo del valor de la nebulosa mínima considerado, el radio que alcanza al finalizar la formación no es dependiente del valor de la nebulosa mínima (ver figura 3). Esto tiene una sencilla explicación, en las primeras etapas de formación el radio de acreción es menor al radio de Hill, pero a medida que el núcleo se vuelve más masivo, el radio de acreción aumenta considerablemente hasta llegar a ser mayor que el radio de Hill. Por lo tanto

en las últimas etapas de formación el radio del planeta es el radio de Hill, el cual depende solo de la masa total del planeta y no de como es su estructura.

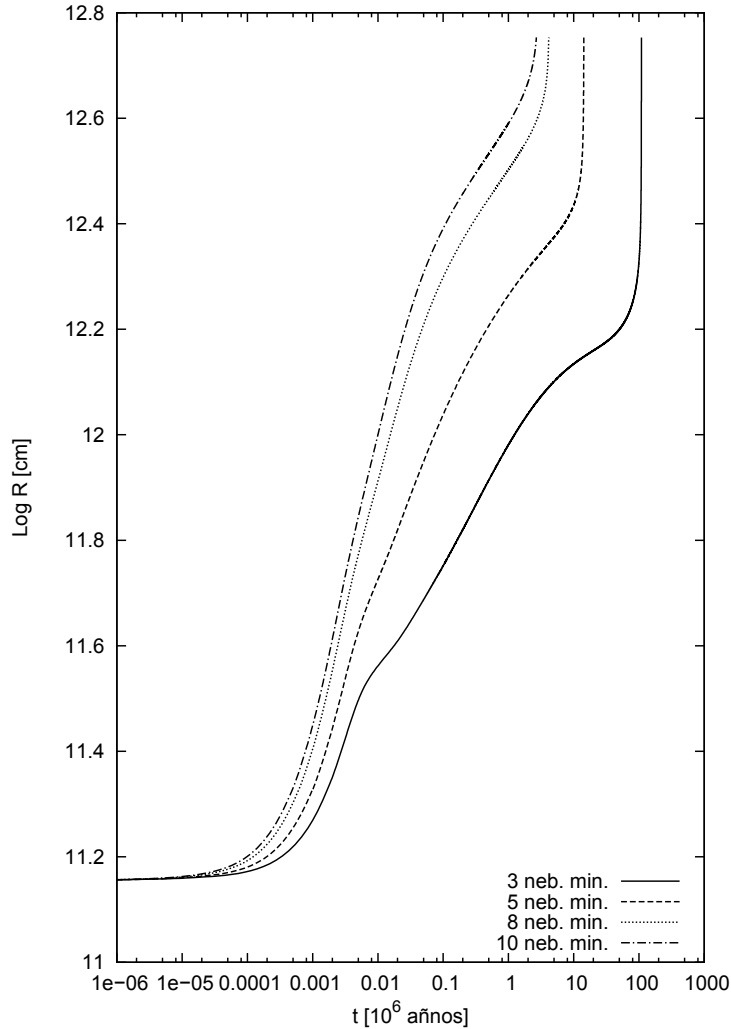


Figura 3: El logaritmo del radio como función del tiempo para 3, 5, 8 y 10 veces el valor de la nebulosa solar mínima. El radio final alcanzado es el mismo en todos los casos.

En la figura 4 se muestran la evolución en el tiempo de las cantidades centrales de la envoltura gaseosa. Tanto la temperatura ( $T_c$ ) como la densidad central ( $\rho_c$ ) resultan funciones crecientes que alcanzan sus máximos finalizada la formación del planeta. Vemos que hay una pequeña dependencia del valor final de  $\rho_c$  con el valor adoptado para la nebulosa mínima. Lo mismo ocurre para  $T_c$ , pero la dependencia se invierte.

La figura 5 nos muestra la evolución en el tiempo de la densidad superficial promedio de sólidos en la zona de alimentación. Dicha densidad es mayor, en los primeros años de formación, a medida que aumentamos el

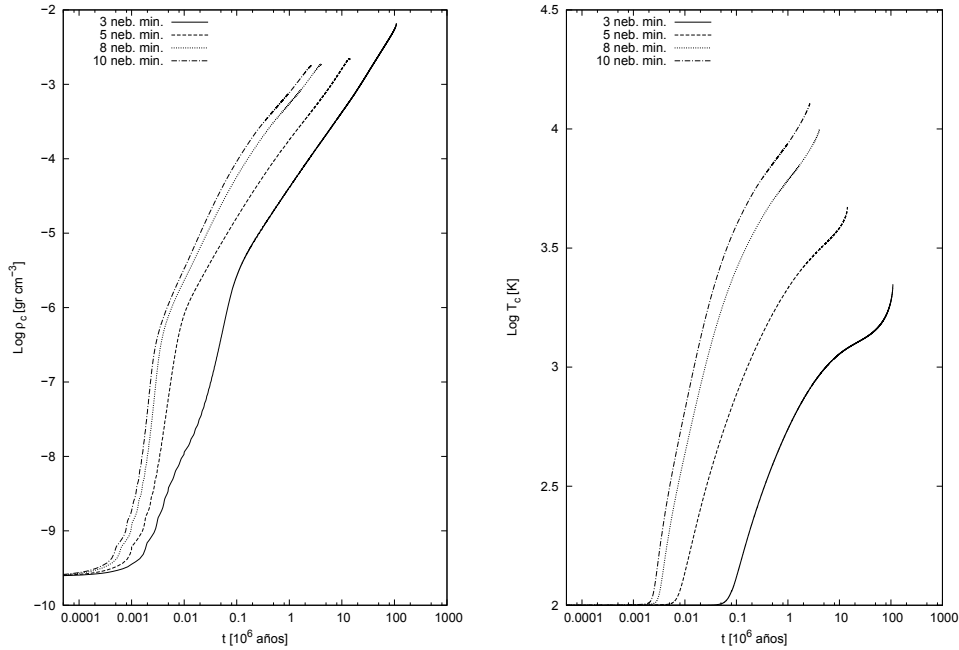


Figura 4: Evolución en el tiempo de las cantidades centrales de Júpiter en su etapa de formación. Vemos que el valor final de la densidad central  $\rho_c$  disminuye al aumentar el valor de la nebulosa mínima, mientras que el valor final de la temperatura central  $T_c$  aumenta al aumentar el valor de la nebulosa mínima.

valor de la nebulosa mínima, pero decae bruscamente a medida que el planeta se forma. Esta gráfica sugiere que al aumentar en valor de la nebulosa mínima, no solo aumenta la densidad media de sólidos, si no que el proceso de acreción de los mismos se hace más eficiente.

Como nuestro principal objetivo es analizar cómo la formación simultánea de los planetas gigantes afecta al crecimiento individual de los mismos, en adelante trabajaremos con un valor fijo para la nebulosa mínima. Adoptaremos que la nebulosa protoplanetaria será de 10 veces la nebulosa solar mínima. Esta elección se debe a que con este valor los tiempos para la formación aislada de los demás planetas a analizar se minimizan (respecto a los casos de 3, 5 y 8 veces la nebulosa solar mínima) estando en mayor concordancia con los tiempos reales de vida de los discos protoplanetarios.

En la figura 6 mostramos el perfil de la densidad de planetesimales del disco correspondiente al caso de 10 nebulosas mínimas para diferentes tiempos durante la formación. Este caso contiene la misma fenomenología física que el resto de los casos en estudio. Vemos cómo en la posición de Júpiter (5,5 UA) la densidad de planetesimales decae significativamente a medida que transcurre el proceso de formación, para toda la distribución de tamaños. El vaciamiento en la parte interna del disco se debe principalmente al

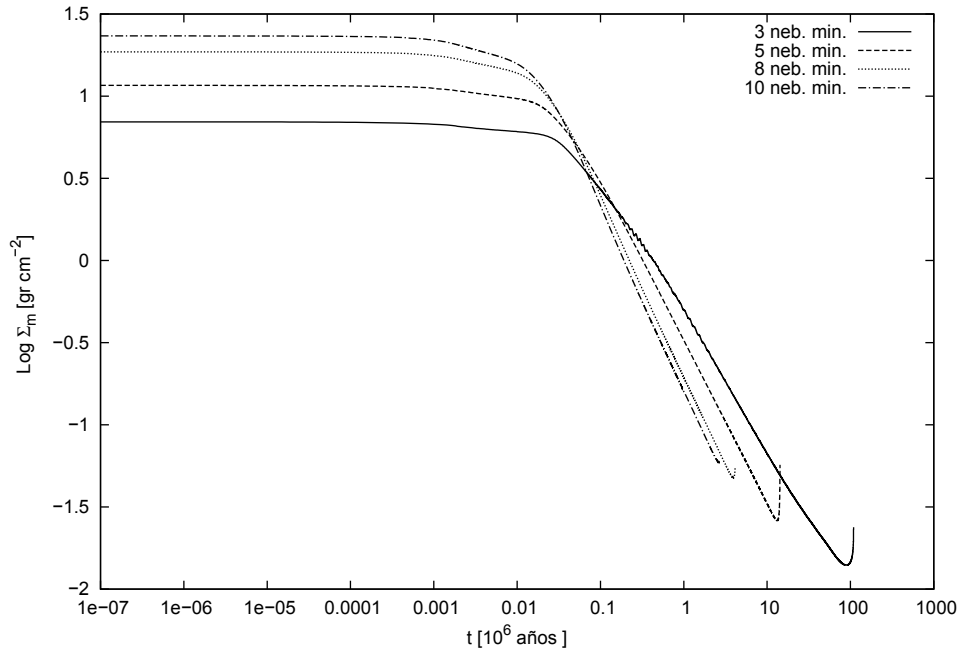


Figura 5: Evolución en el tiempo de la densidad superficial promedio de sólidos en la zona de alimentación para diferentes valores de la nebulosa mínima.

flujo de planetesimales debido a la fricción gaseosa del gas. Si bien los mayores decaimientos en el perfil se producen alrededor de la posición de Júpiter, vemos como su presencia modifica considerablemente dicho perfil, sobre todo hacia afuera del disco. Nuevamente esto ocurre, en diferentes grados, para toda la distribución de tamaños de los planetesimales. Un hecho importante, es la presencia de un incremento en la densidad hacia el interior del disco, en diferentes tiempos para los diferentes tamaños.

La velocidad del flujo de planetesimales como función de la distancia a la estrella central a diferentes edades para el caso de 10 nebulosas mínimas se muestra en la figura 7. Aquí mostramos los casos extremos de planetesimales de 0,1 km y 100 km de radio. El máximo de la velocidad ocurre en la vecindad de Júpiter. Estos planetesimales se transfieren a las regiones internas del disco, donde la velocidad es menor y se produce una acumulación de los mismos. Este proceso es menos eficiente para los planetesimales más grandes, dado que sus velocidades son menores.



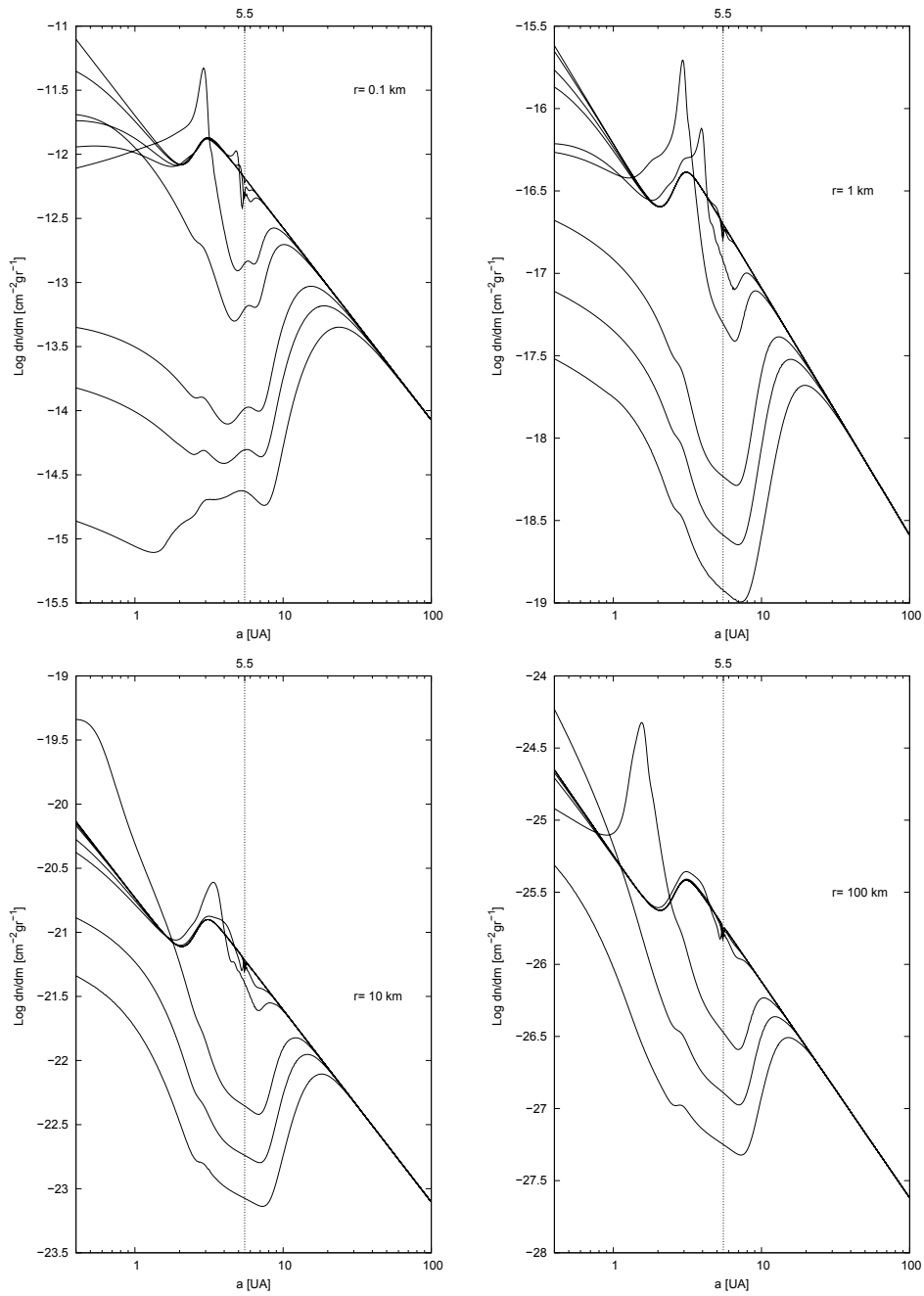


Figura 6: El perfil de la densidad de planetesimales del disco correspondiente al caso de 10 nebulosas mínimas para diferentes tiempos durante la formación. Las curvas corresponden a 0.001, 0.005, 0.01, 0.05, 0.1, 0.5, 1 y 2 millones de años.

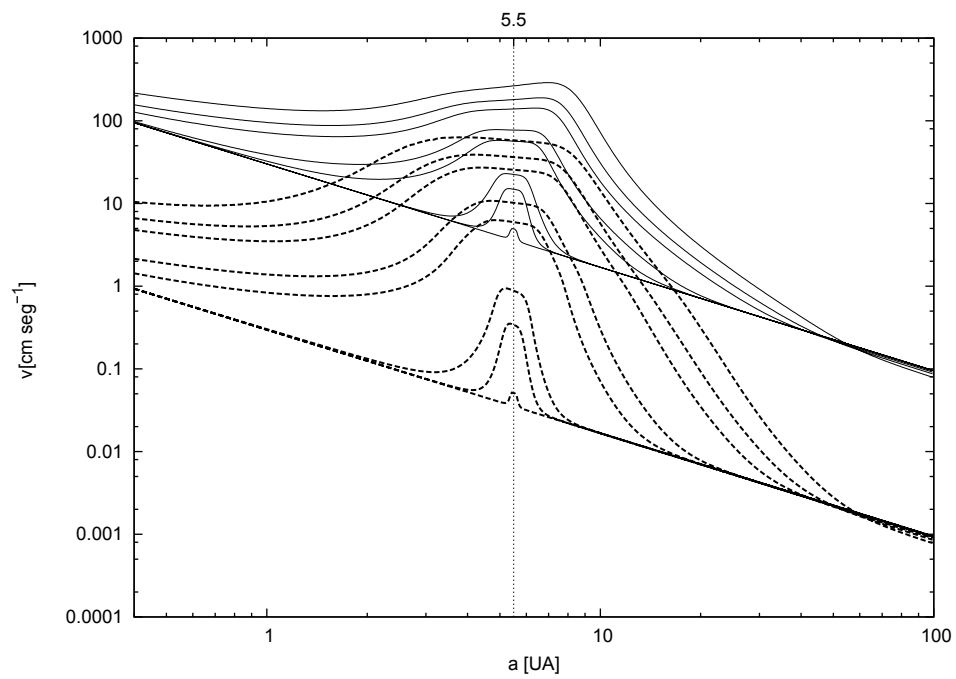


Figura 7: La velocidad del flujo de planetesimales como función de la distancia a la estrella central a diferentes edades para el caso de 10 nebulosas mínimas. Mostramos los casos de planetesimales de 0,1 km (lineas llenas delgadas) y 100 km de radio (lineas a trazos gruesas). Las curvas corresponden a 0.001, 0.005, 0.01, 0.05, 0.1, 0.5, 1 y 2 millones de años.

### 5.1.2 Saturno

Mostraremos ahora las principales características de la formación aislada de Saturno. Como mencionamos anteriormente, los resultados que se muestran son para el caso de 10 veces la nebulosa mínima. Siempre trabajamos con un núcleo sólido inicial  $0.005 M_{\oplus}$  y una distribución de tamaños dividida en 31 especies, con planetesimales de 0,1 km a 100 km.

La figura 8 nos muestra la masa total, de la envoltura y del núcleo como función del tiempo, para la formación aislada de Saturno. Vemos que el tiempo de formación está en concordancia con el tiempo de vida de los discos protoplanetarios, esto resulta más que interesante dada la simplicidad de nuestro modelo.

	Saturno
Masa del núcleo [ $M_{\oplus}$ ]	31,089
Tiempo de formación [ $10^6$ años]	7,81

Tabla 2: La masa del núcleo y el tiempo de formación para la formación aislada de Saturno.

La tabla 2 nos muestra que el valor hallado para el núcleo de Saturno excede las estimaciones actuales (Guillot 1999, 2005).

La figura 9 muestra la tasa de acreción de planetesimales como función del tiempo. Vemos que la curva alcanza un máximo rápidamente y decae, tiene un leve incremento para luego decaer hasta que la formación termina.

Finalizamos mostrando el perfil de la densidad superficial de los planetesimales a lo largo del disco para distintas edades. También mostramos la evolución de las velocidades del flujo de planetesimales.

Vemos en la figura 10 que para los distintos tamaños de los planetesimales y en distintas edades, se producen aumentos significativos en el perfil de la densidad de planetesimales hacia el interior de la zona de alimentación del planeta en cuestión. Es claro que la formación aislada de un planeta perturba el disco de planetesimales, aún más allá de su zona de alimentación.

La figura 11 nos muestra que los máximos de las velocidades de migración de los planetesimales, para las distintas edades durante el proceso de formación, ocurren siempre alrededor de la posición del planeta.

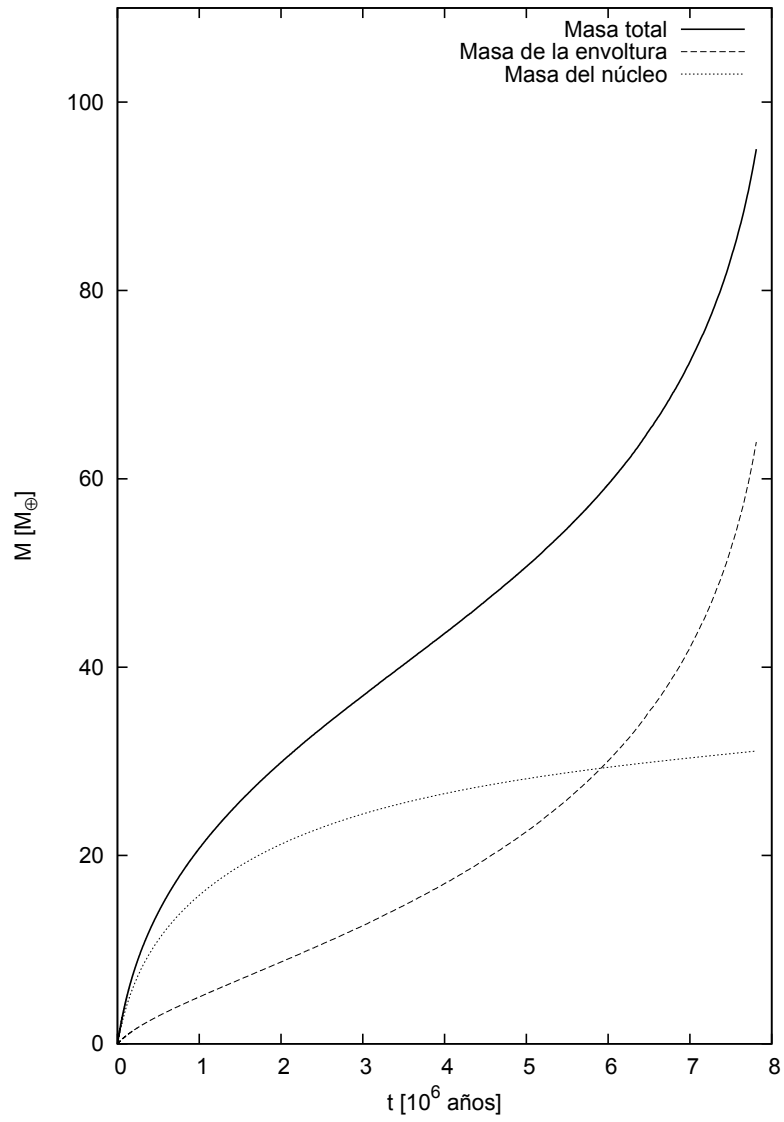


Figura 8: Evolución en el tiempo de la masa total, de la envoltura y del núcleo en el proceso de la formación aislada dentro del disco protoplanetario de Saturno. Vemos que la masa crítica ( $M_g = M_c$ ) se alcanza en menos de 6 millones de años. Sin embargo, al planeta le toma casi 2 millones de años más alcanzar su masa prefijada.

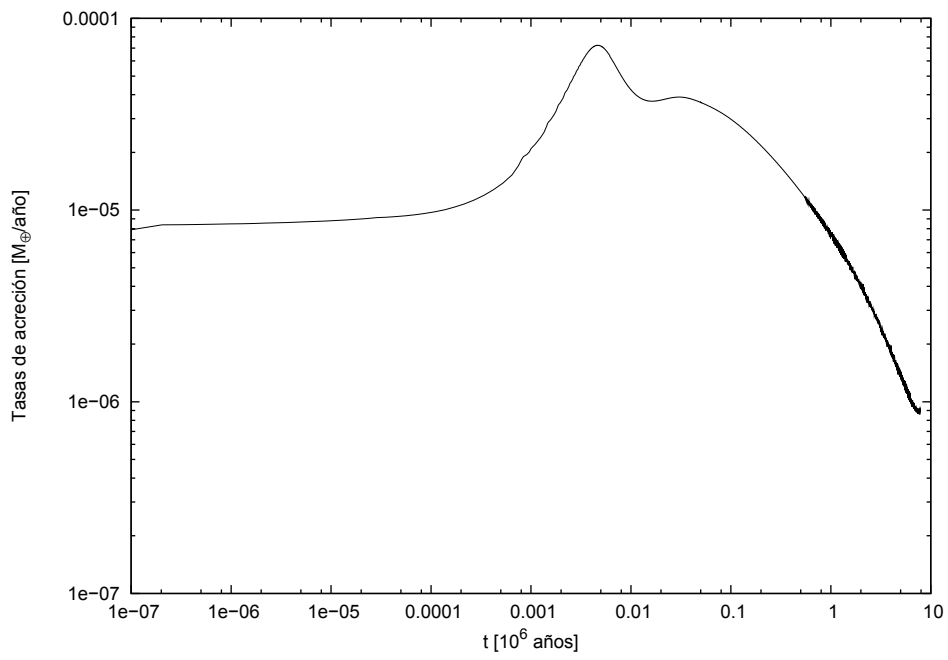


Figura 9: Evolución en el tiempo de la tasa de acreción de planetesimales para la formación aisladas de Saturno.

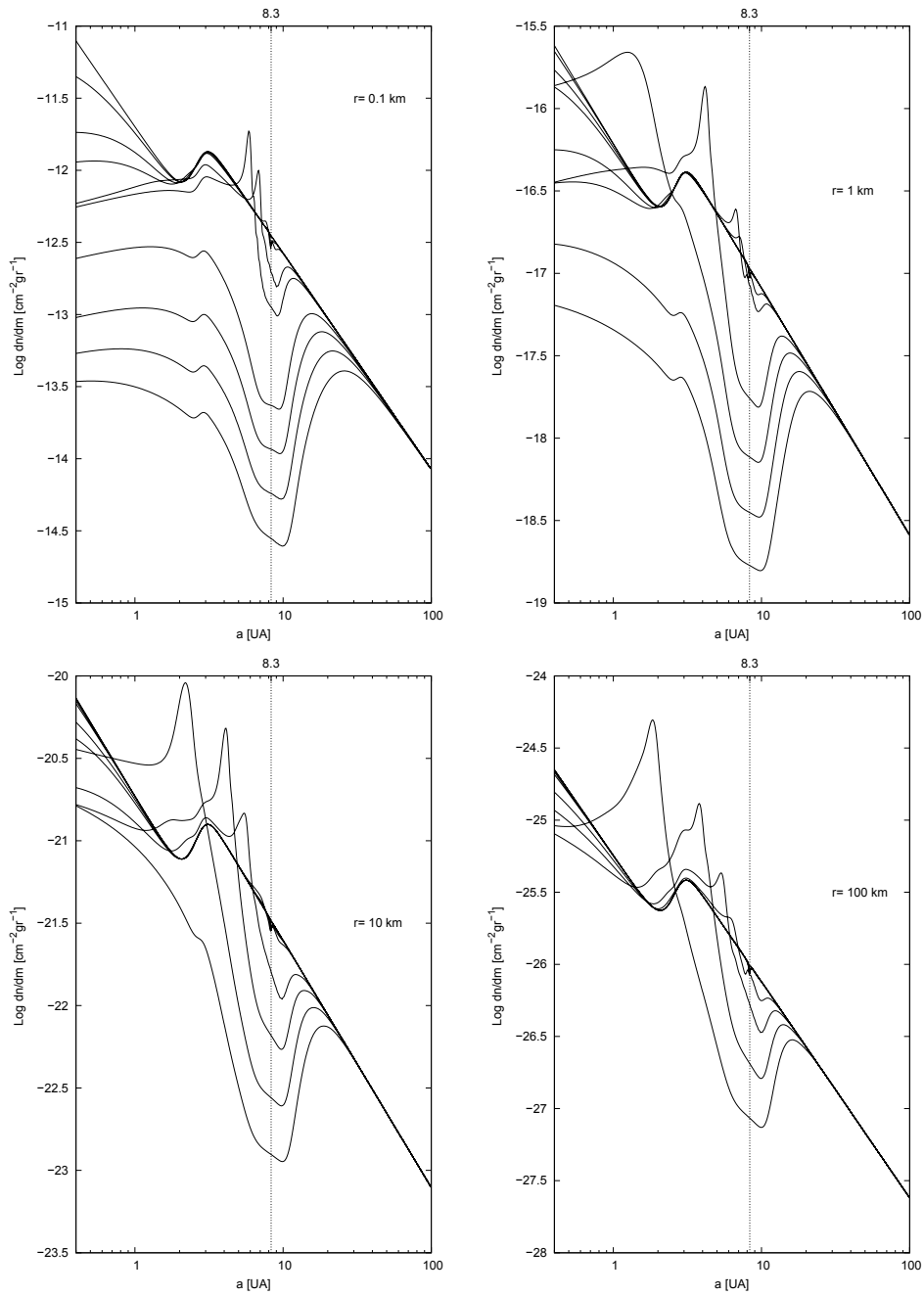


Figura 10: El perfil de la densidad de planetesimales del disco correspondiente a la formación aislada de Saturno para el caso de 10 nebulosas mínimas para diferentes edades durante su formación. Las curvas corresponden a 0.001, 0.005, 0.01, 0.05, 0.1, 0.5, 1, 2 y 4 millones de años.

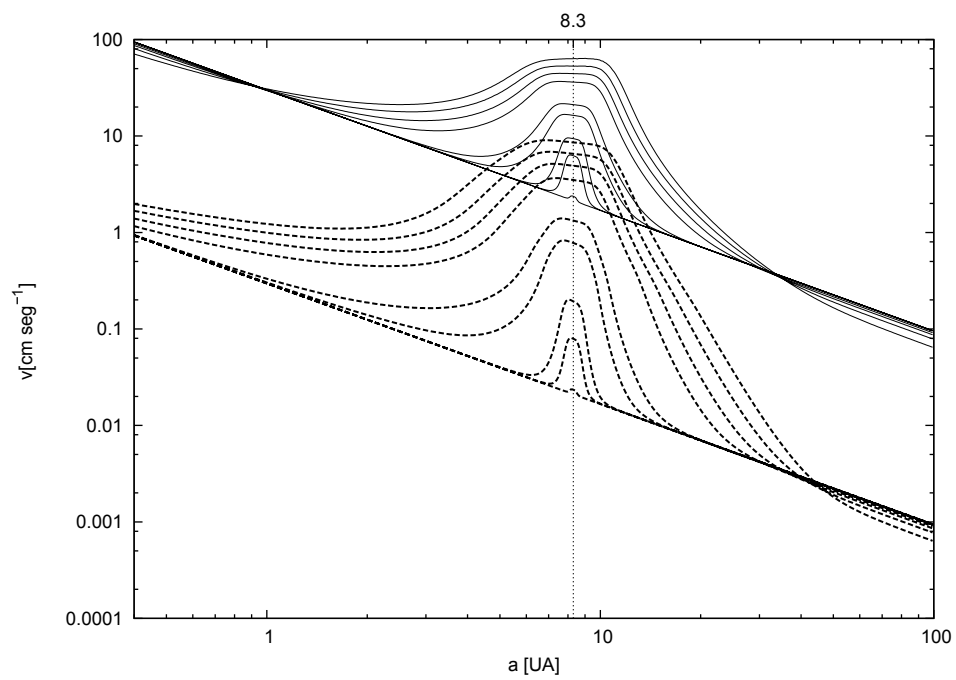


Figura 11: La velocidad del flujo de planetesimales como función de la distancia a la estrella central a diferentes edades para la formación aislada de Saturno. Mostramos los casos de planetesimales de 0,1 km (líneas llenas delgadas) y 100 km de radio (líneas a trazos gruesas). Al igual que en el caso de Júpiter, los máximos se encuentran en la vecindad del planeta en cuestión. Las curvas corresponden a 0.001, 0.005, 0.01, 0.05, 0.1, 0.5, 1, 2 y 4 millones de años.

## 5.2 Formación simultánea de Júpiter y Saturno

Ahora mostraremos y analizaremos los resultados más importantes de la formación simultánea de Júpiter y Saturno.

Las condiciones iniciales son las mismas a las que discutimos en las secciones anteriores, contamos con una distribución de tamaños para los planetesimales dividida en 31 especies y los núcleos iniciales son lo suficientemente pequeños ( $0,005M_{\oplus}$ ) como para obtener modelos iniciales confiables en las primeras etapas de la formación. Adoptaremos un valor de 10 veces la nebulosa solar mínima, para comparar luego con los resultados obtenidos para la formación aislada. Cabe destacar, que los resultados obtenidos con este valor adoptado para la nebulosa mínima, son cualitativamente similares para un rango entre 1 – 10 veces la nebulosa solar mínima.

Recordamos que los planetas estarán en formación hasta que alcancen sus masas prefijadas. Si un planeta termina su formación pero existen otros que aún están en esta etapa, el que terminó su formación no acreta más material (ni sólidos, ni gas) pero continua en el disco perturbándolo. El proceso finaliza cuando todos los planetas en cuestión terminan su formación.

La figura 12 muestra la evolución en el tiempo de las masas totales, de las envolturas y de los núcleos de Júpiter y Saturno, cuando la formación de los mismos se produce simultáneamente embebidos en un disco protoplanetario. Vemos que existen notables diferencias (ver tabla 3), tanto en los tiempos de formación como en las estructuras internas, con el proceso de formación aislada.

	Júpiter	Saturno
Masa del núcleo [ $M_{\oplus}$ ]	112,33	4,10
Tiempo de formación [ $10^6$ años]	2,82	91,43

Tabla 3: La masa del núcleo y el tiempo de formación para la formación simultánea de Júpiter y Saturno.

Júpiter es el que menos cambios presenta. Si bien, su tiempo de formación se aumenta en  $\sim 150,000$  años (un 5,5 % aprox.) y su núcleo se reduce en  $\sim 2M_{\oplus}$ , podríamos decir que estos cambios son despreciables en comparación con los que presenta Saturno.

El tiempo para la formación de Saturno es ahora de  $91,43 \times 10^6$  años (se incrementa en más del 1000 % respecto a su formación aislada) y finaliza con un núcleo de  $4,10M_{\oplus}$  (se reduce en  $\sim 85$  % respecto a su formación aislada).

Vemos que la formación simultánea cambió drásticamente el escenario, incrementando notablemente el tiempo de formación para Saturno.

La figura 13 muestra las tasas de acreción de planetesimales como función del tiempo. Vemos cómo la tasa de acreción de Júpiter sufre una perturbación, y para el caso de Saturno decae bruscamente. Es evidente que la



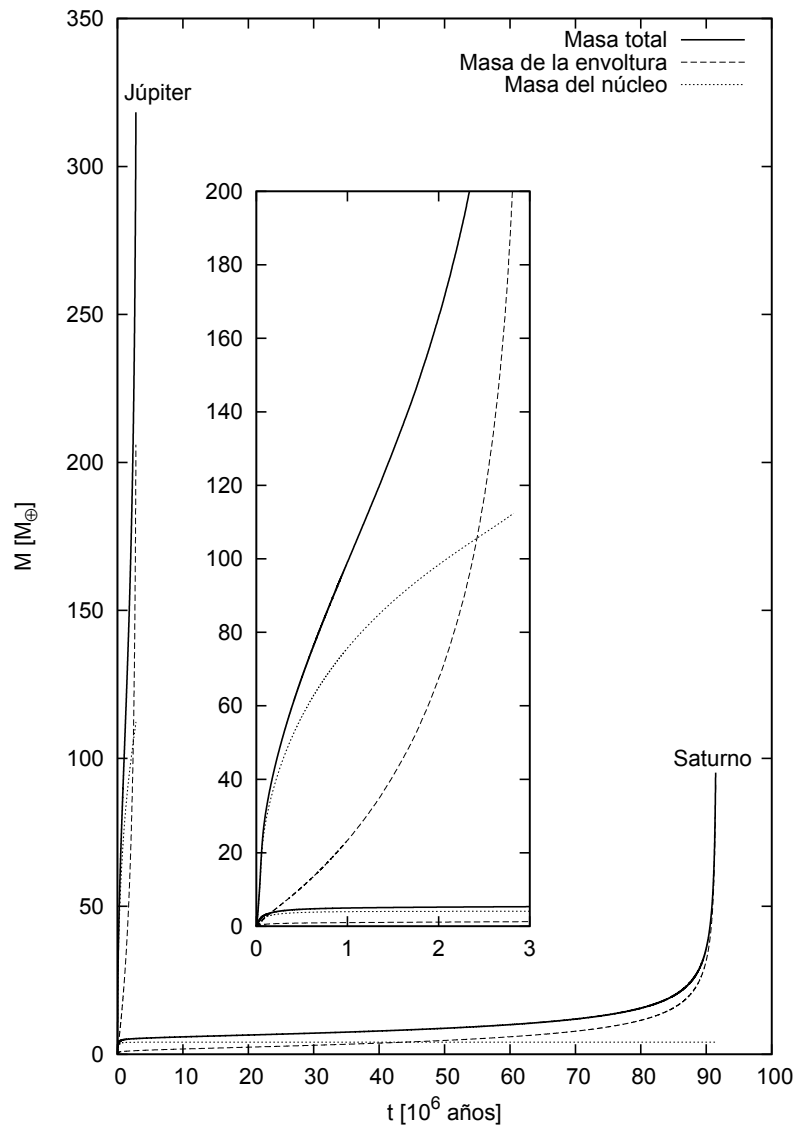


Figura 12: La masa total (línea llena), de la envoltura (línea a trazos) y del núcleo (línea punteada) como función del tiempo para la formación simultánea de Júpiter y Saturno.

presencia de Júpiter afecta notoriamente el proceso de formación de Saturno.

Finalmente mostraremos el perfil de la densidad de planetesimales del disco y las velocidades del flujo de planetesimales.

Vemos que a medida que transcurre el tiempo, se produce un mínimo en la densidad de planetesimales (figura 14) en la vecindad de Saturno. Esto se repite para todos los tamaños de planetesimales.

En las primeras etapas de formación vemos que los máximos de las velocidades del flujo de planetesimales se encuentran justo en la vecindad de

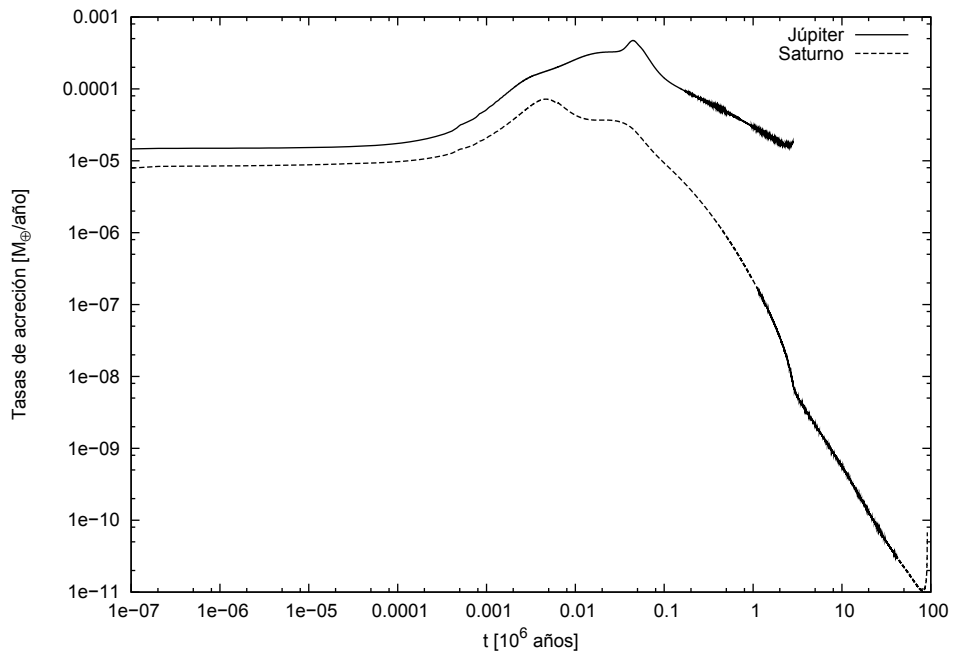


Figura 13: La tasa de acreción de planetesimales como función del tiempo para la formación simultánea de Júpiter (línea llena), Saturno (línea a rayas). Si bien, alcanzan su máximo rápidamente y luego decrecen, se observa una perturbación a la tasa de acreción de Júpiter. Además para el caso de Saturno la tasa de acreción sufre una caída significativa.

Júpiter y Saturno (figura 15). A medida que el tiempo transcurre, solo queda un máximo en el perfil, el cual inicialmente está en la vecindad de Júpiter, pero pronto se mueve hacia la vecindad de Saturno. Esto es más notorio en los planetesimales más pequeños.

Finalizamos mostrando (figuras 16 - 21) una serie de gráficos en los cuales se muestran las principales diferencias entre la formación aislada y simultánea.

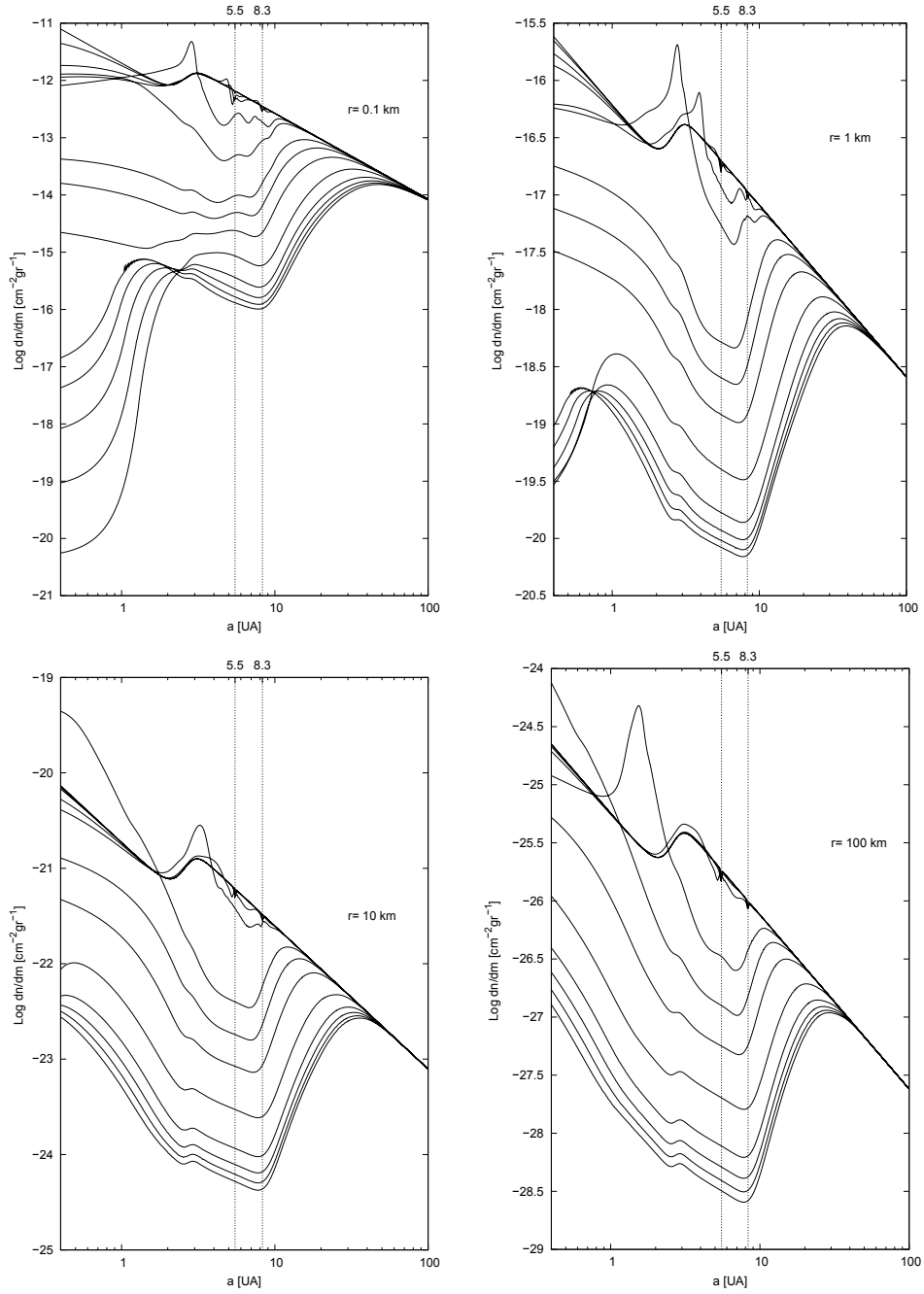


Figura 14: El perfil de la densidad de planetesimales del disco correspondiente a la formación simultánea de Júpiter y Saturno. Las curvas corresponden a 0.001, 0.005, 0.01, 0.05, 0.1, 0.5, 1, 2, 4, 8, 12, 16 y 20 millones de años.

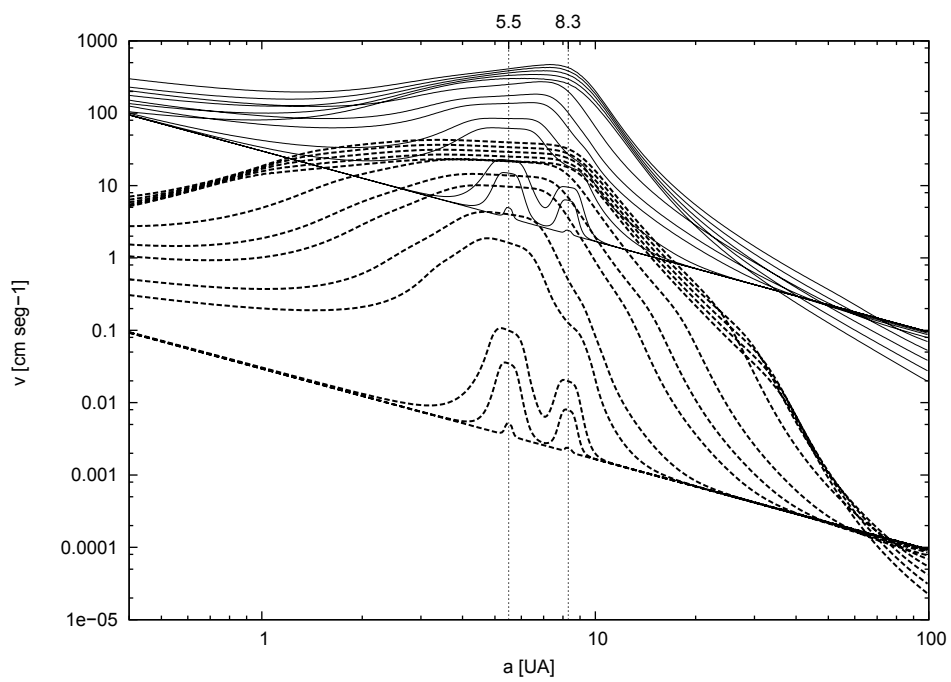


Figura 15: La velocidad del flujo de planetesimales como función de la distancia a la estrella central a diferentes edades para la formación simultánea de Júpiter y Saturno. Las curvas corresponden a 0.001, 0.005, 0.01, 0.05, 0.1, 0.5, 1, 2, 4, 8, 12, 16 y 20 millones de años. Mostramos los casos de planetesimales de 0,1 km (líneas llenas delgadas) y 100 km de radio (líneas a trazos gruesas).

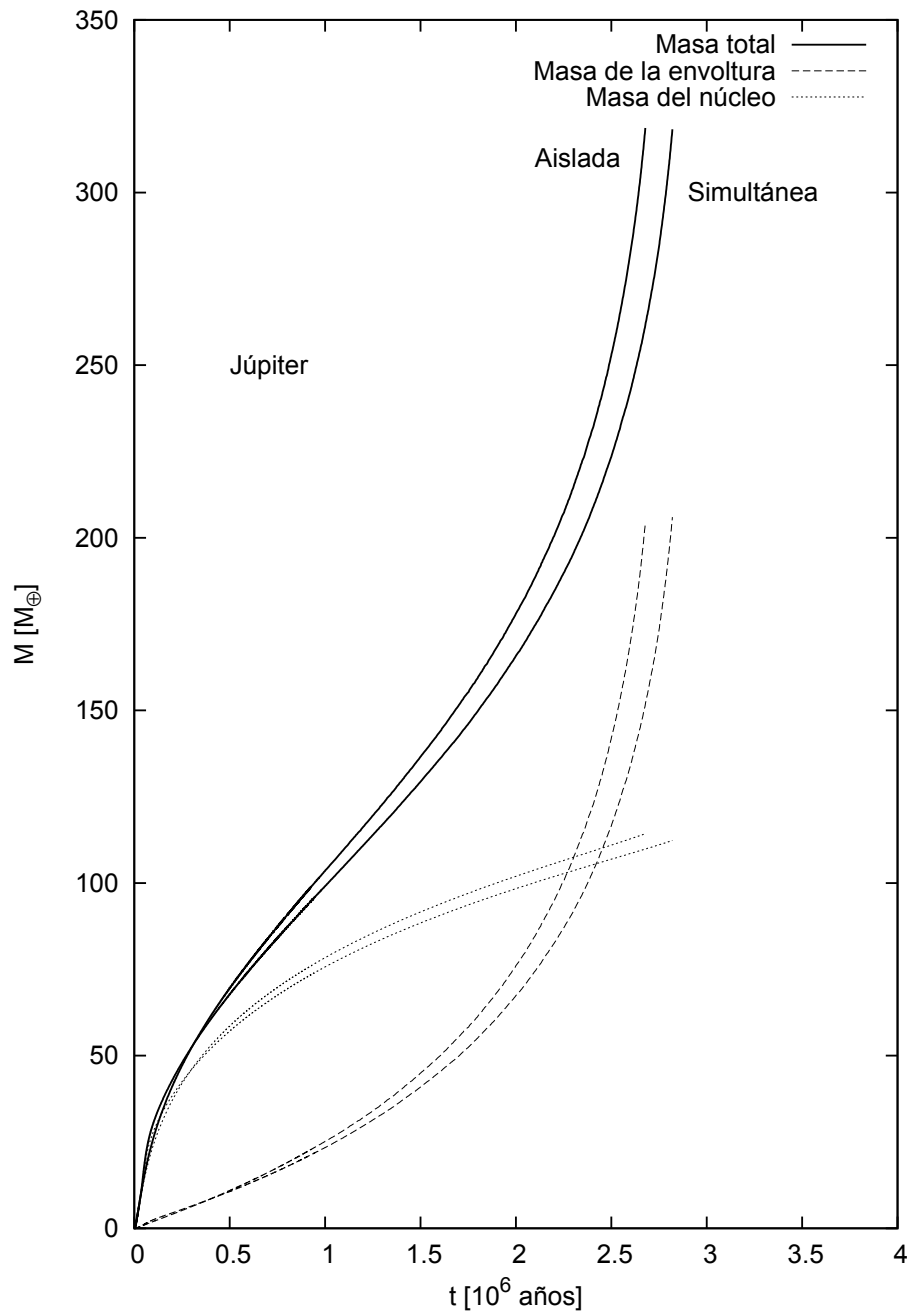


Figura 16: Comparación de las masas entre el proceso de formación simultánea y la formación aislada de Júpiter. Vemos que la presencia de Saturno prácticamente no afecta la formación de Júpiter. Remarcamos que si bien los tiempos de formación están en total acuerdo con los tiempos de vida de los discos, las masas de los núcleos están muy por encima de las estimaciones observacionales.

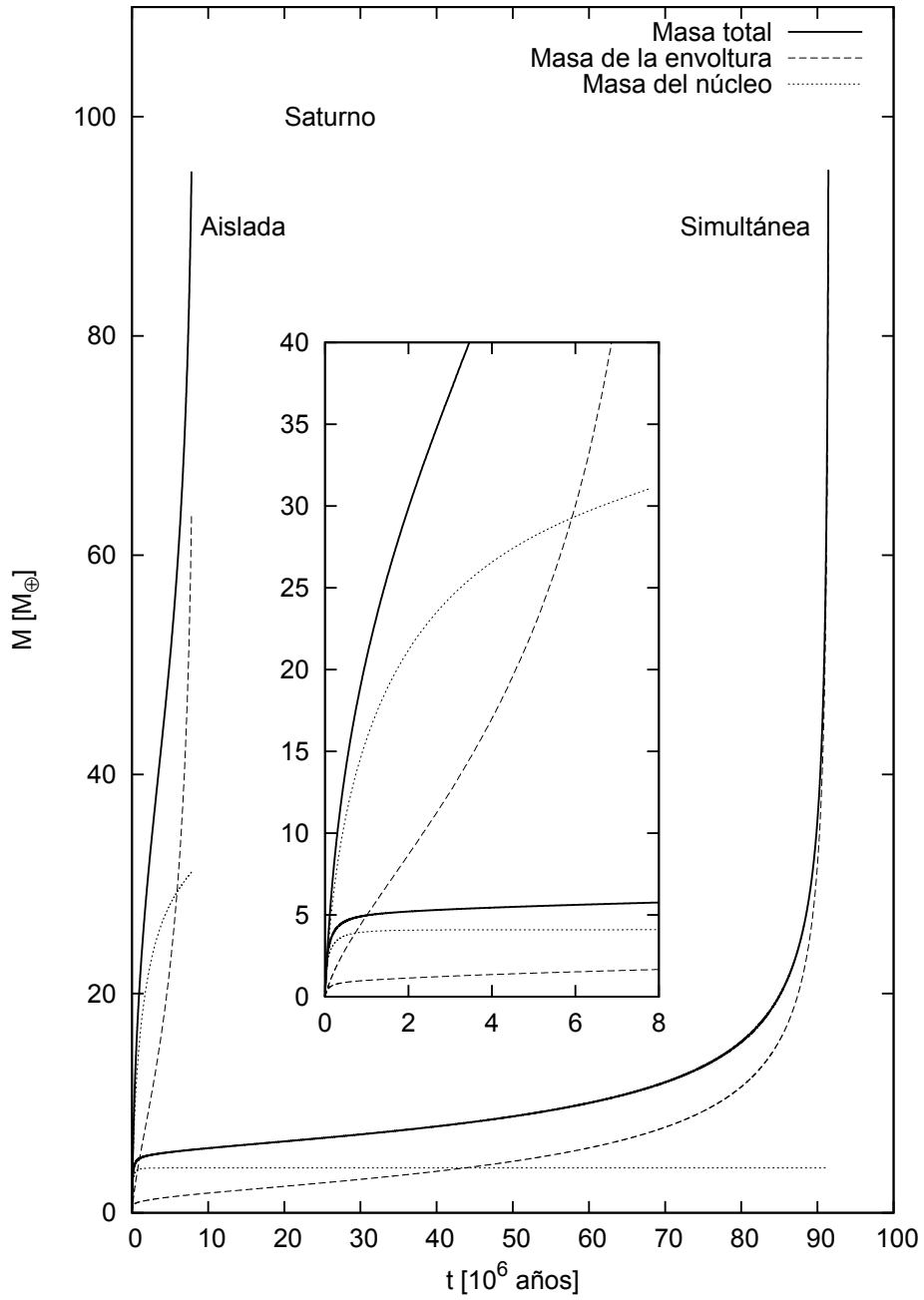


Figura 17: Comparación de las masas entre el proceso de formación simultánea y la formación aislada de Saturno. Vemos ahora que la presencia de Júpiter modifica notablemente el proceso de formación de Saturno. Para la formación aislada, Saturno rápidamente alcanza un núcleo de unas  $10 M_{\oplus}$  lo que le permite seguir creciendo y alcanzar en menos de 6 millones de años el “run away” gaseoso. La presencia de Júpiter limita el crecimiento del núcleo de Saturno, llevándolo a alcanzar el “run away” gaseoso después de 40 millones de años.

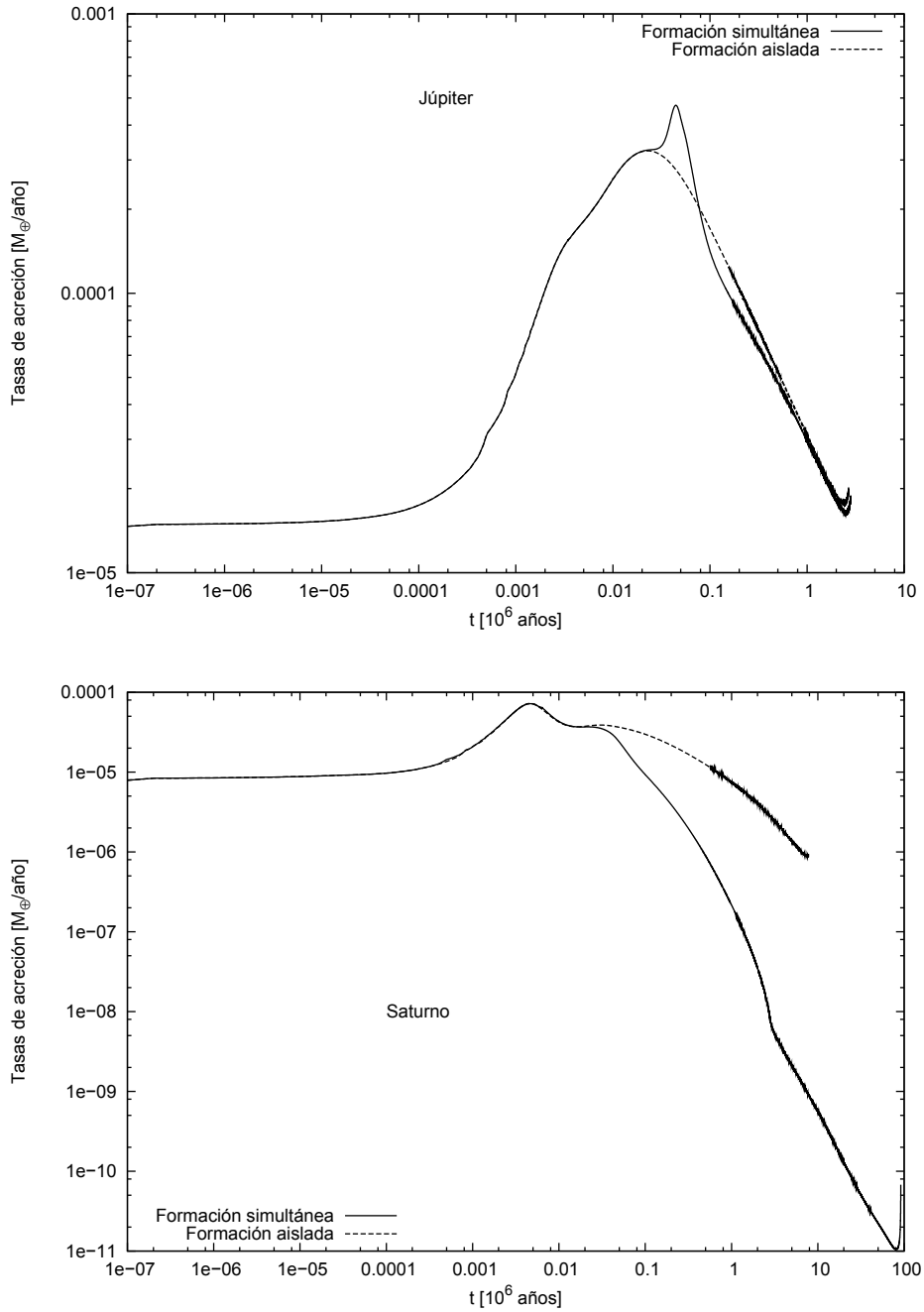


Figura 18: Comparación de las tasas de acreción de planetesimales entre el proceso de formación simultánea y la formación aislada para Júpiter y Saturno. Vemos para el caso de Júpiter como Saturno induce un aumento en la tasa de acreción, aunque luego hay una disminución. Esto nos hace pensar en que los planetas externos inducen una onda de densidad en el disco de planetesimales que viaja hacia el interior. No ocurre lo mismo con Saturno, la presencia de Júpiter hace que su tasa de acreción de sólidos decaiga significativamente.

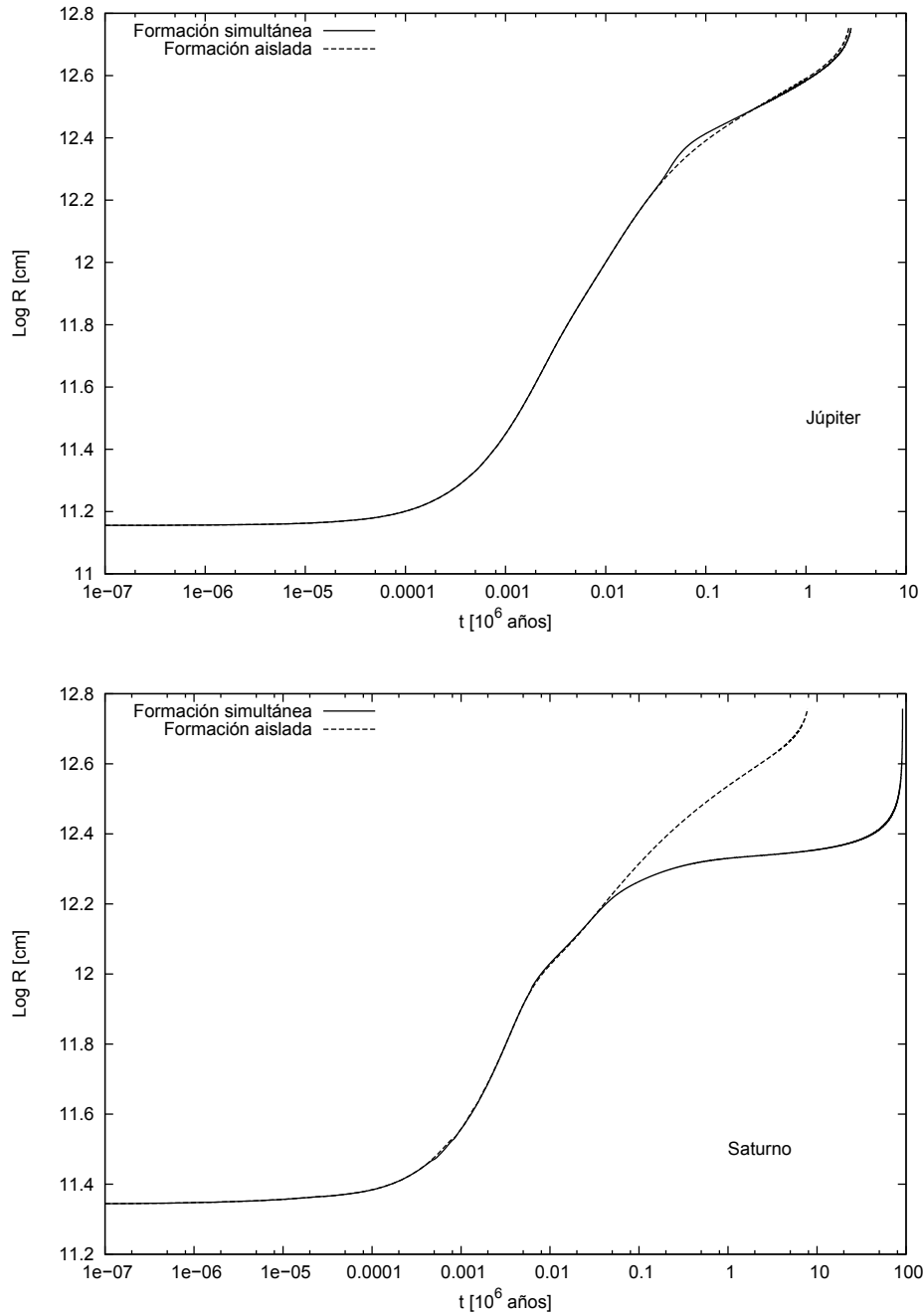


Figura 19: Comparación en la evolución del radio entre el proceso de formación simultánea y la formación aislada. Vemos que para el caso de Júpiter prácticamente no hay variación. Para Saturno, si bien el radio es el mismo finalizada la formación, su evolución en el tiempo presenta cambios. El hecho de que se alcance el mismo radio se debe a que en poco tiempo el radio de acreción se hace mayor al radio de Hill, con lo cual es este último el radio del planeta en la mayor parte del proceso de formación, y el radio de Hill depende solamente de la masa total del planeta y no de su estructura interna.



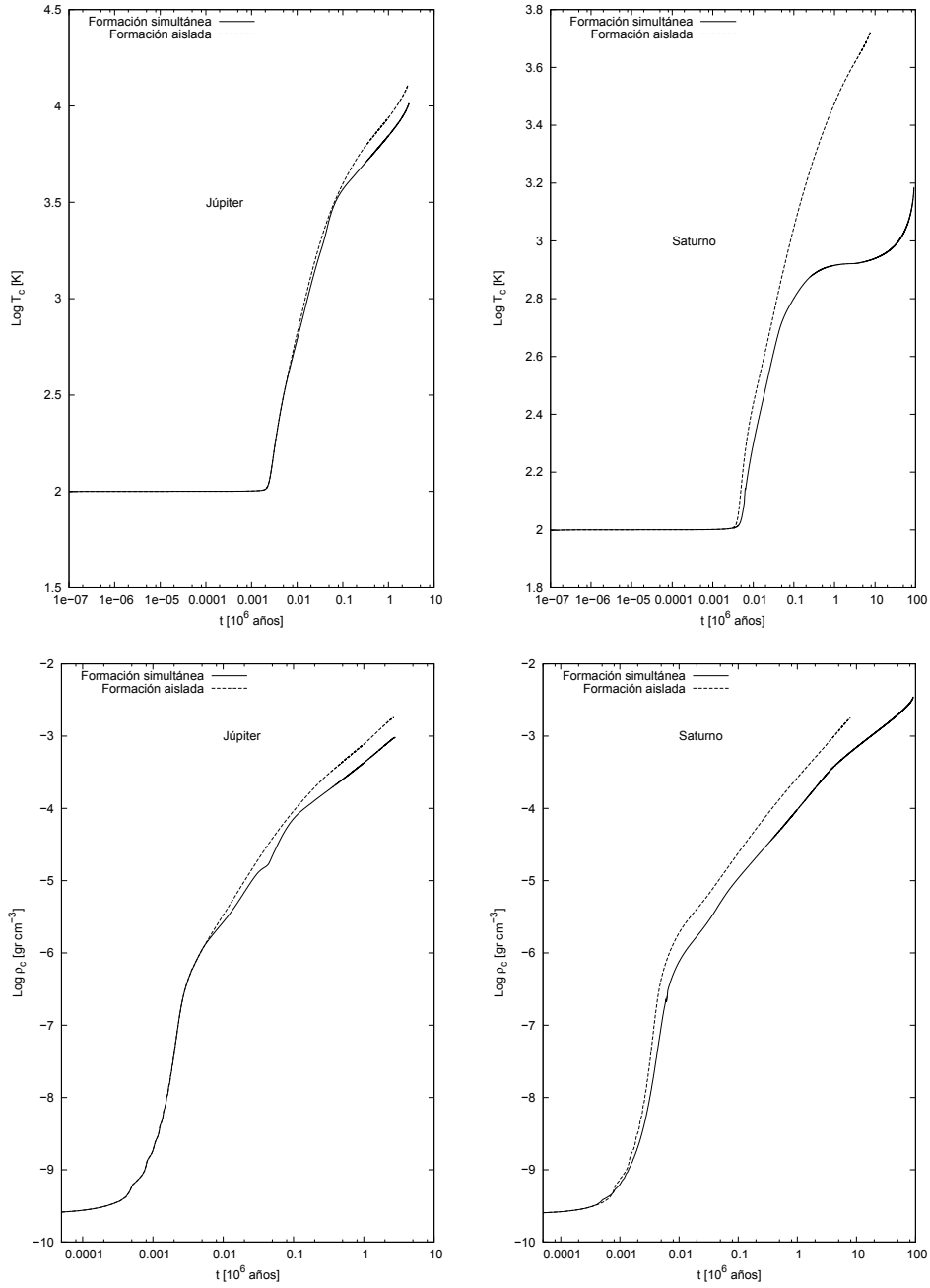


Figura 20: Comparación de las cantidades centrales entre el proceso de formación simultánea y la formación aislada. Nuevamente vemos que los cambios que presenta Júpiter son pequeños. Sin embargo, Saturno presenta grandes cambios tanto en la evolución de  $T_c$  como en la evolución de  $\rho_c$ .

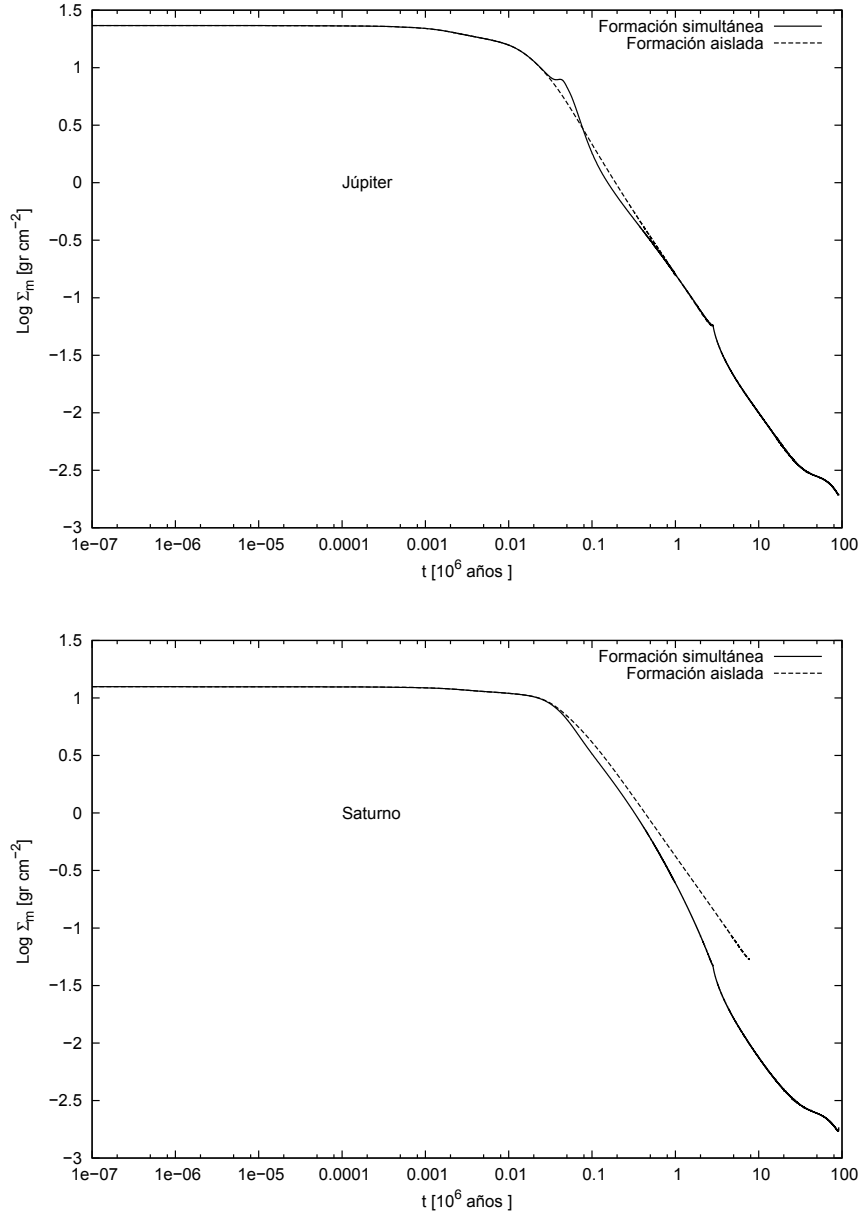


Figura 21: Comparación de la densidad promedio de sólidos en la zona de alimentación entre el proceso de formación simultánea y la formación aislada para Júpiter y Saturno. Vemos como Saturno induce un incremento de la densidad media de sólidos en la zona de alimentación de Júpiter, seguido luego de una disminución de la misma. Esto muestra nuevamente que el planeta externo produce una onda de densidad en el disco de planetesimales, la cual viaja hacia el interior del mismo. Por otro lado, la presencia de Júpiter provoca una disminución significativa en la densidad media de sólidos en la zona de alimentación de Saturno.

### 5.3 Nuevo modelo para la evolución de la componente gaseosa del disco

Mostraremos ahora una nueva serie de resultados de la formación simultánea de Júpiter y Saturno. En estas nuevas simulaciones mantenemos las mismas condiciones hasta ahora descritas, pero modificando la forma en que la componente gaseosa del disco evoluciona. Adoptaremos una manera más realista para describir este fenómeno, resolviendo las ecuaciones de conservación del momento angular del disco (Pringle 1981).

Consideraremos el movimiento de un disco de gas con simetría cilíndrica en el campo gravitatorio generado por una estrella central. Asumiendo que el disco de gas está formado por anillos de espesor  $\Delta r$ , tomamos dos anillos consecutivos, A y B. Dado que estos anillos se mueven a velocidades diferentes ( $A > B$ ) se producirá una fricción (debido a la viscosidad del disco) entre ambos, la cual tiende frenar el anillo A y acelerar el anillo B. Esto significa que hay una transferencia de momento angular de A a B.

Ahora bien, si el anillo A pierde momento angular pero es forzado a mantenerse en una órbita kepleriana, este debe migrar hacia el interior del disco. El anillo B se moverá hacia afuera, a menos que este sufra también de una fricción (con un anillo C, el cual tiene fricción con un anillo D, etc.). Este proceso hace que el material caiga hacia la estrella central y que haya una transferencia de momento angular hacia la parte externa del disco.

Considerando las ecuaciones de continuidad y de conservación del momento angular, se muestra que la ecuación que gobierna la evolución de la densidad superficial del gas está dada por

$$\frac{\partial \Sigma_g}{\partial t} = \frac{3}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[ r^{1/2} \frac{\partial}{\partial r} \left( \nu \Sigma_g r^{1/2} \right) \right]$$

donde  $\Sigma_g$  es la densidad superficial del gas,  $r$  es la distancia radial y  $\nu$  es la viscosidad cinemática del gas.

Esta ecuación es una ecuación de difusión, la cual se resuelve empleando un método numérico tridiagonal. En cuanto a las condiciones de borde, se pide que el torque en la parte interna del disco sea nulo y que la densidad superficial en el punto más externo del disco no varíe.

Adoptaremos para esta tesis que la viscosidad está dada por  $\nu = \alpha c_s H$  (Shakura & Sunyaev 1973), con  $\alpha \leq 1$ ,  $c_s$  la velocidad local del sonido y  $H$  la escala de altura del disco. Además, consideramos que  $\alpha = 0,001$  (Papaloizou & Terquem 1999). Finalmente, teniendo en cuenta que el disco es isotermo en la dirección normal al plano del mismo, la densidad volumétrica está dada por  $\rho = \Sigma_g / H$ .

Tratando de no ser repetitivos mostraremos solo las principales diferencias entre los casos de formación aislada y simultánea, y las diferencias para la formación simultánea entre los dos modelos de evolución de la componente gaseosa del disco.

La figura 22 muestra la formación simultánea de Júpiter y Saturno, considerando ahora que la componente gaseosa del disco evoluciona por conservación del momento angular. Podemos ver (tabla 4) que el tiempo de formación para Júpiter es totalmente compatible con los tiempos de vida de los discos protoplanetarios, mientras que si bien Saturno excede dichos tiempos, para el modelo de formación aislada se forma en menos de 20 millones de años, el cual sigue siendo un buen resultado dada la simplicidad de nuestro modelo .

Hay un punto a destacar en estos resultados, la masa de los núcleos se reduce considerablemente en comparación con el modelo de decaimiento exponencial para la componente gaseosa del disco. Además, vemos nuevamente que la formación de Júpiter prácticamente no presenta diferencias entre la formación aislada y simultánea, mientras que Saturno si presenta grandes cambios.

	Júpiter		Saturno	
	Aisl.	Sim.	Aisl.	Sim.
Masa del núcleo [ $M_{\oplus}$ ]	62,49	61,60	19,56	4,46
Tiempo de formación [ $10^6$ años]	2,35	2,38	16,91	76,89

Tabla 4: Comparación entre la masa del núcleo y el tiempo de formación para la formación simultánea y aislada de Júpiter, Saturno en el caso en que la componente gaseosa del disco evoluciona por conservación del momento angular.

En las figuras 23 - 25 se muestran las principales diferencias entre el proceso de formación aislada y simultánea, considerando que la componente gaseosa del disco evoluciona por conservación del momento angular.

Finalizaremos esta sección haciendo una comparación del proceso de formación simultánea considerando los dos modelos de evolución de la componente gaseosa del disco antes mencionados.

Mostraremos la evolución de las masas, de las tasas de acreción de planetesimales, de los perfiles de planetesimales del disco, de las velocidades de migración de los planetesimales y la evolución de la densidad gaseosa del disco.

Para el caso de Júpiter (figura 26), con ambos modelos, el proceso de formación termina en tiempos compatibles con la vida de los discos. Vemos que cuando la componente gaseosa del disco evoluciona por conservación del momento angular la masa final del núcleo es considerablemente menor (aún superior a las estimaciones observacionales). Por otro lado, vemos como el proceso de formación simultánea (figura 27) afecta en ambos casos a la formación de Saturno incrementando enormemente los tiempos de formación.

Respecto de las tasas de acreción de planetesimales (figura 28) vemos que para ambos casos que en las primeras etapas de la formación las tasas son las mismas, pero pronto las curvas que representa al modelo 2 sufren una

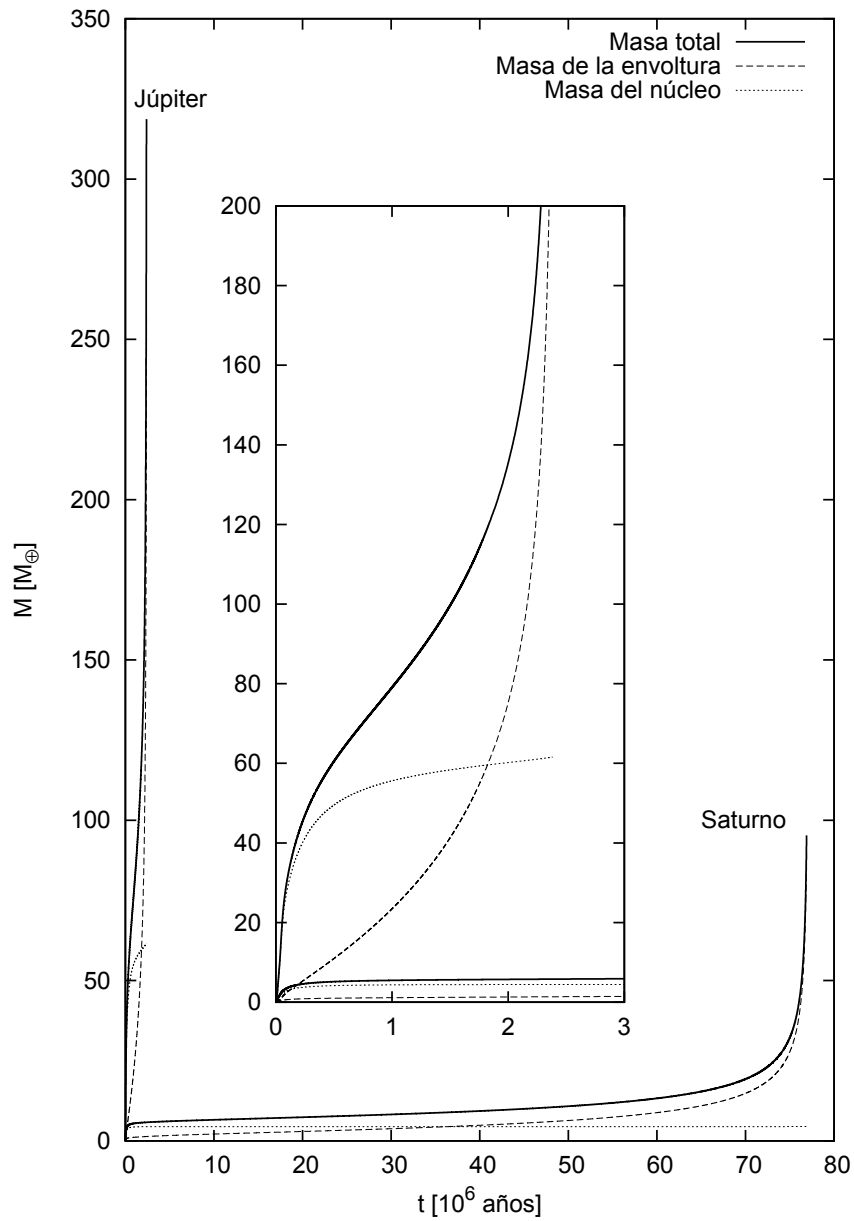


Figura 22: La masa total (línea llena), de la envoltura (línea a trazos) y del núcleo (línea punteada) como función del tiempo para la formación simultánea de Júpiter y Saturno. La componente gaseosa del disco evoluciona ahora por conservación del momento angular.

caída significativa. Esto nos indica que el proceso de acreción de sólidos a las distancias consideradas es menos eficiente si el disco evoluciona de una forma más realista. Sin embargo, para ambos planetas la formación se produce en tiempos menores.

En la figura 29 vemos la evolución en el tiempo de los perfiles de los

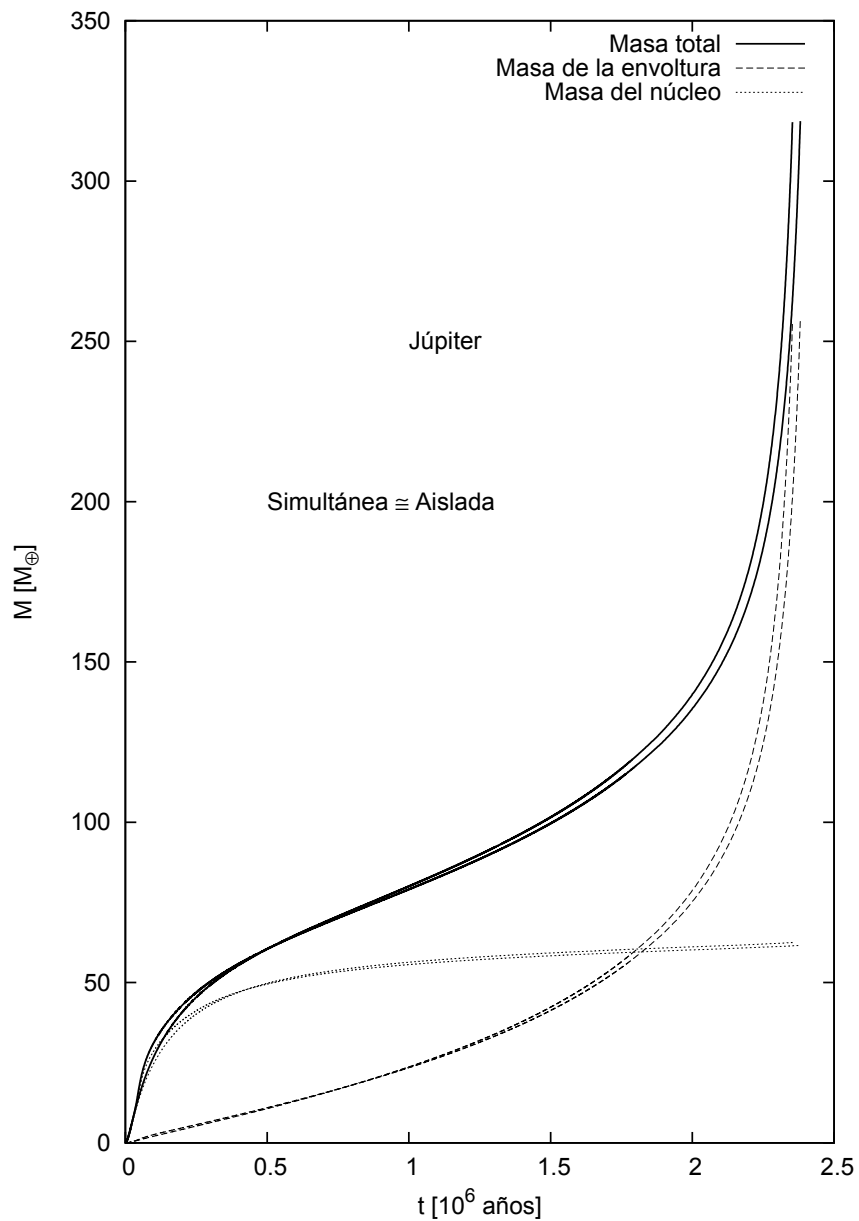


Figura 23: Comparación de las masas entre el proceso de formación simultánea y la formación aislada. La componente gaseosa del disco evoluciona ahora por conservación del momento angular. La presencia de Saturno no afecta el proceso de formación de Júpiter.

planetesimales del disco para diferentes tamaños de los mismos. Vemos que para toda la distribución de tamaños y a medida que transcurre el tiempo los perfiles para el modelo 1 se hacen menores. En este fenómeno intervienen dos factores importantes, uno es la acreción de los planetas y el otro es la

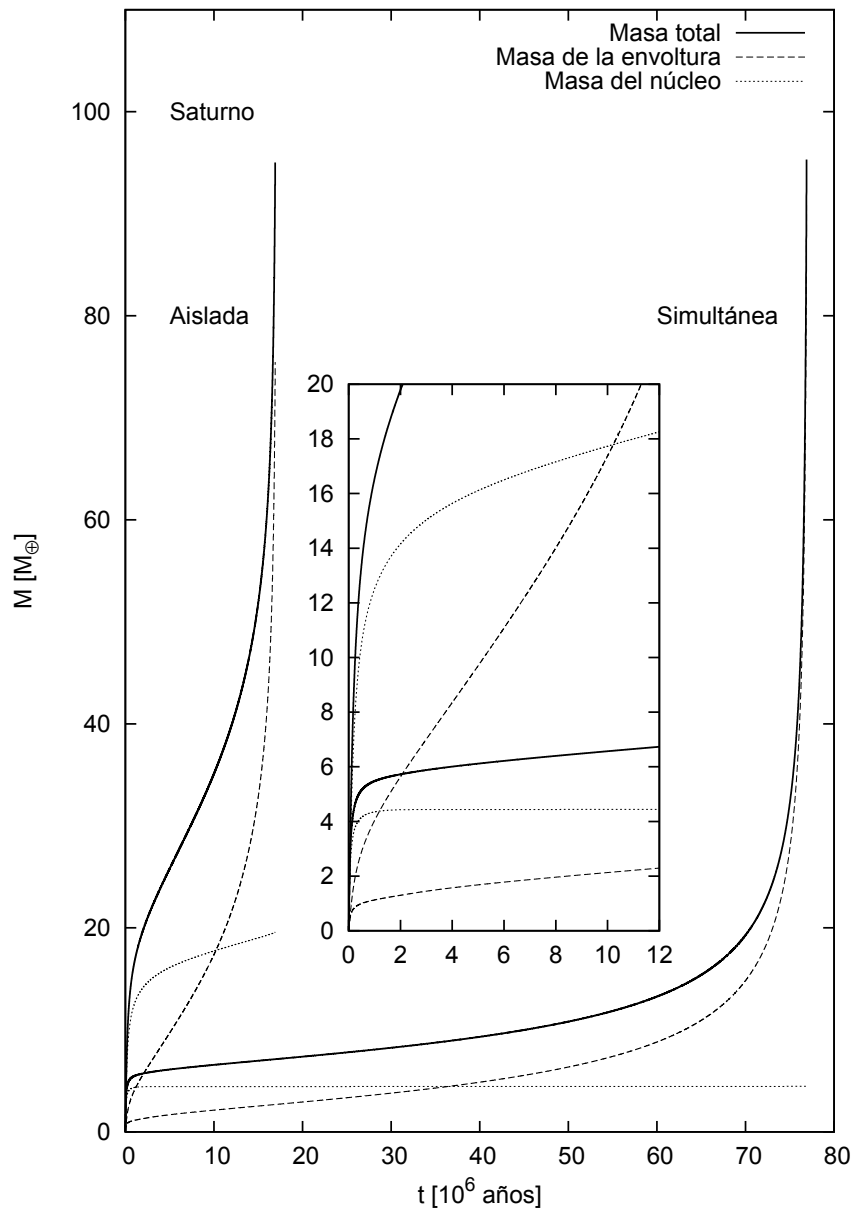


Figura 24: Comparación de las masas entre el proceso de formación simultánea y la formación aislada. La componente gaseosa del disco evoluciona ahora por conservación del momento angular. La presencia de Júpiter modifica notoriamente el proceso de formación de Saturno.

migración de los planetesimales. Como vemos en la figura 30 las velocidades de migración de los mismos son bastante mayores (para toda la distribución de tamaños) cuando el gas del disco decae exponencialmente. Esto podría explicar el mayor vaciamiento en los perfiles de densidades.

Finalmente mostramos la evolución en el tiempo de la densidad de la componente gaseosa del disco. Vemos como la densidad gaseosa del disco decae significativamente en el interior del mismo para el modelo 2. Esto se debe a que el gas está cayendo sobre la estrella. A medida que nos alejamos de la estrella central los perfiles de densidad del gas para el modelo 2 empiezan a estar por arriba a los correspondientes al modelo de decaimiento exponencial.

Podemos afirmar en base a los resultados mostrados que el proceso de disipación de la nebulosa del disco juega un rol importante en el proceso de formación de los planetas. Variaciones en la densidad del gas producen variaciones en las velocidades de migración de los planetesimales (y por ende en la distribución de los mismos a la largo del disco) y en las velocidades relativas de los planetesimales respecto a los embriones (y por lo tanto en el proceso de acreción sobre los núcleos).



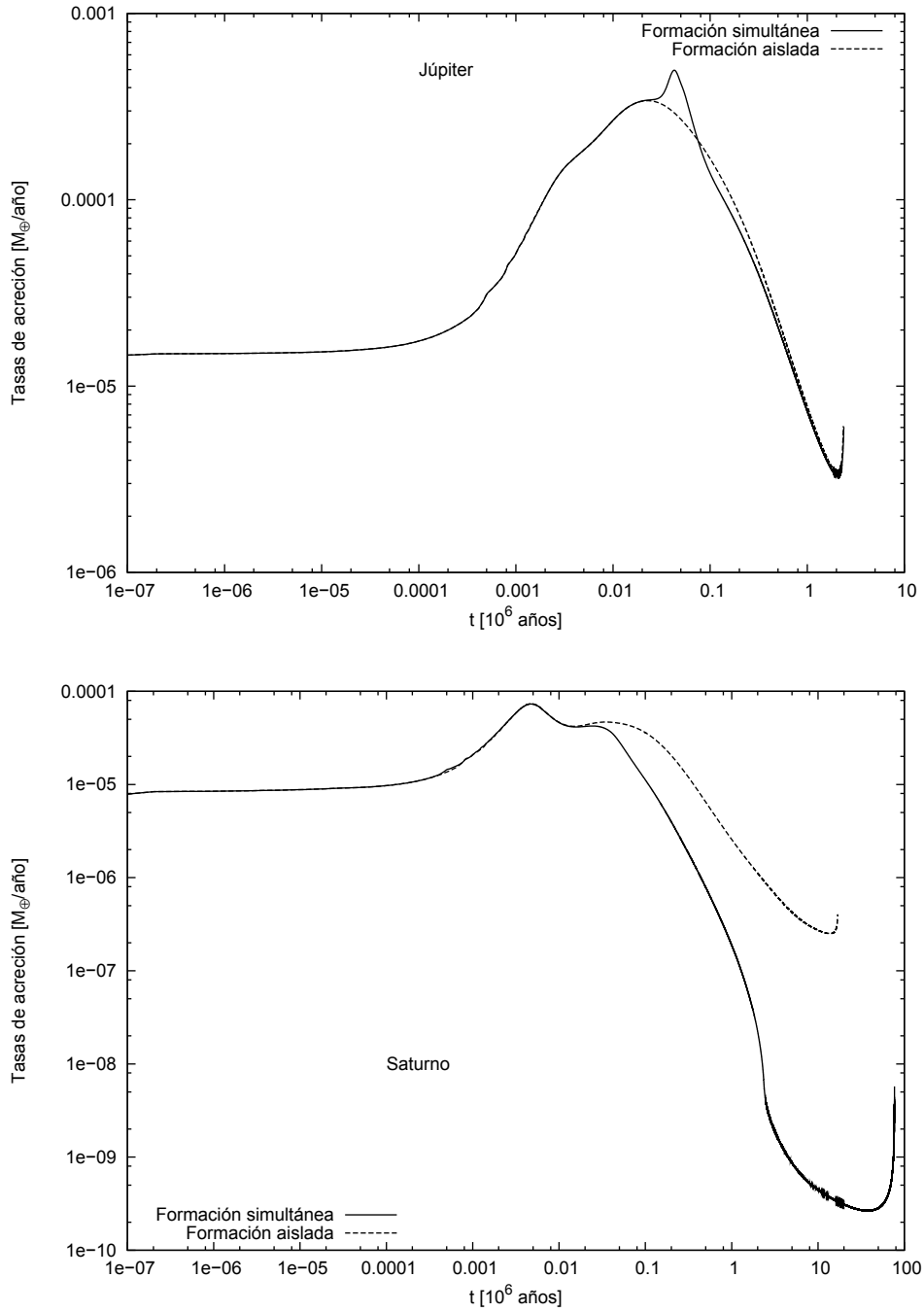


Figura 25: Comparación de las tasas de acreción de planetesimales entre el proceso de formación simultánea y la formación aislada para Júpiter y Saturno. La componente gaseosa del disco evoluciona ahora por conservación del momento angular. Vemos nuevamente que la presencia de Júpiter induce una disminución significativa en la tasa de acreción de Saturno, provocando un gran incremento en su tiempo de formación.

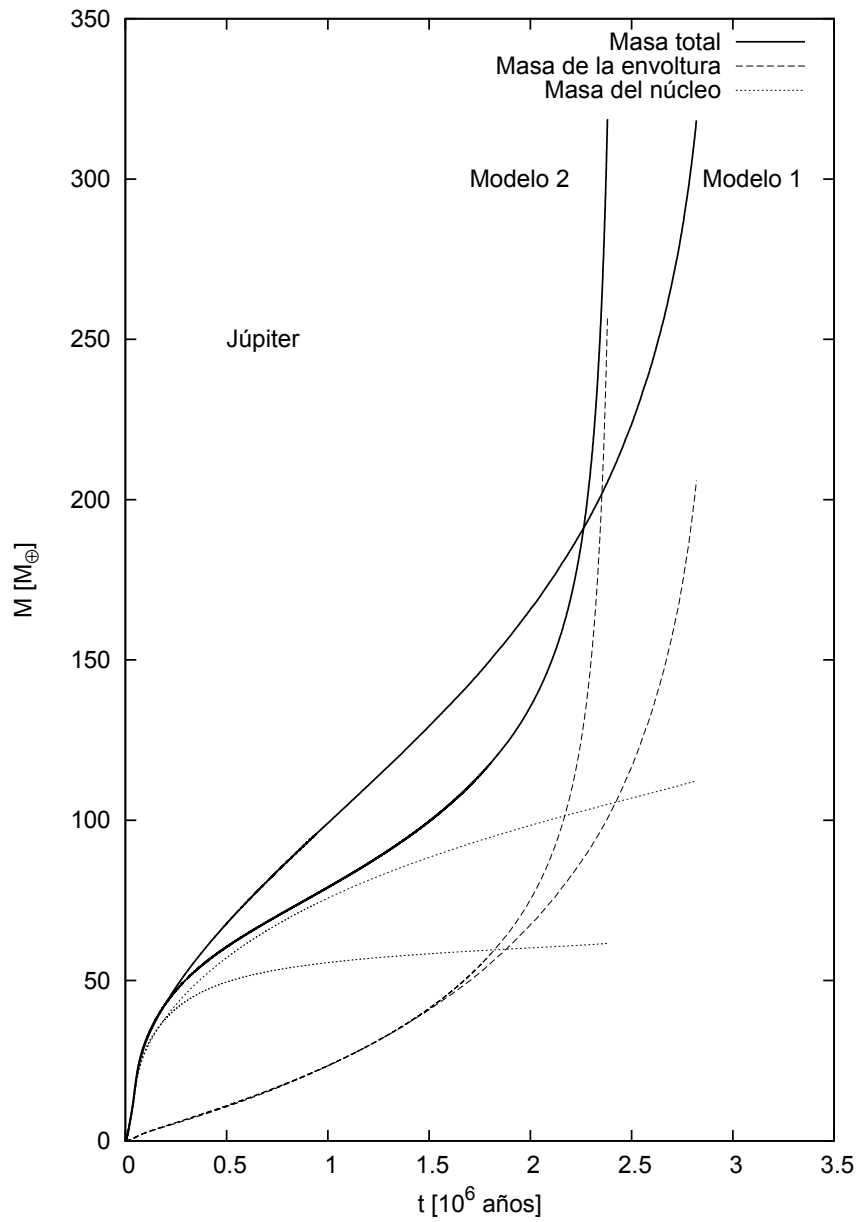


Figura 26: Evolución de las masas en el proceso de formación simultánea. El modelo 1 representa el decaimiento exponencial del gas, mientras que el modelo 2 representa que la componente gaseosa del disco evoluciona por conservación del momento angular. Vemos como para el modelo 2 la masa del núcleo se reduce considerablemente. La masa crítica y el tiempo al cual se alcanza también depende del modelo en cuestión.

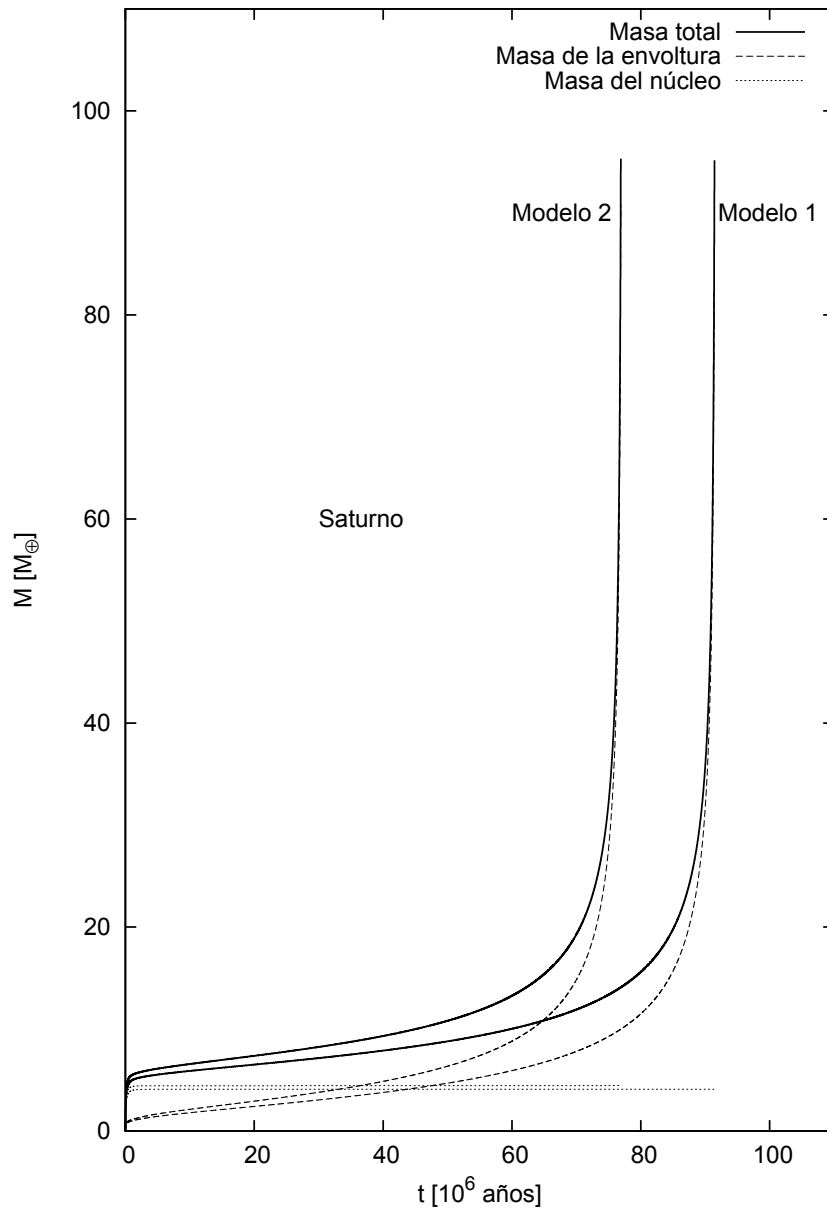


Figura 27: Evolución de las masas en el proceso de formación simultánea. El modelo 1 representa el decaimiento exponencial del gas, mientras que el modelo 2 representa que la componente gaseosa del disco evoluciona por conservación del momento angular. Vemos como para ambos modelos los tiempos de formación exceden la vida de los discos. Si bien para el modelo 2 el tiempo es menor, podemos decir (en base a nuestro simple modelo) que el proceso de formación simultánea no permite la formación de Saturno en escalas de tiempo razonables.

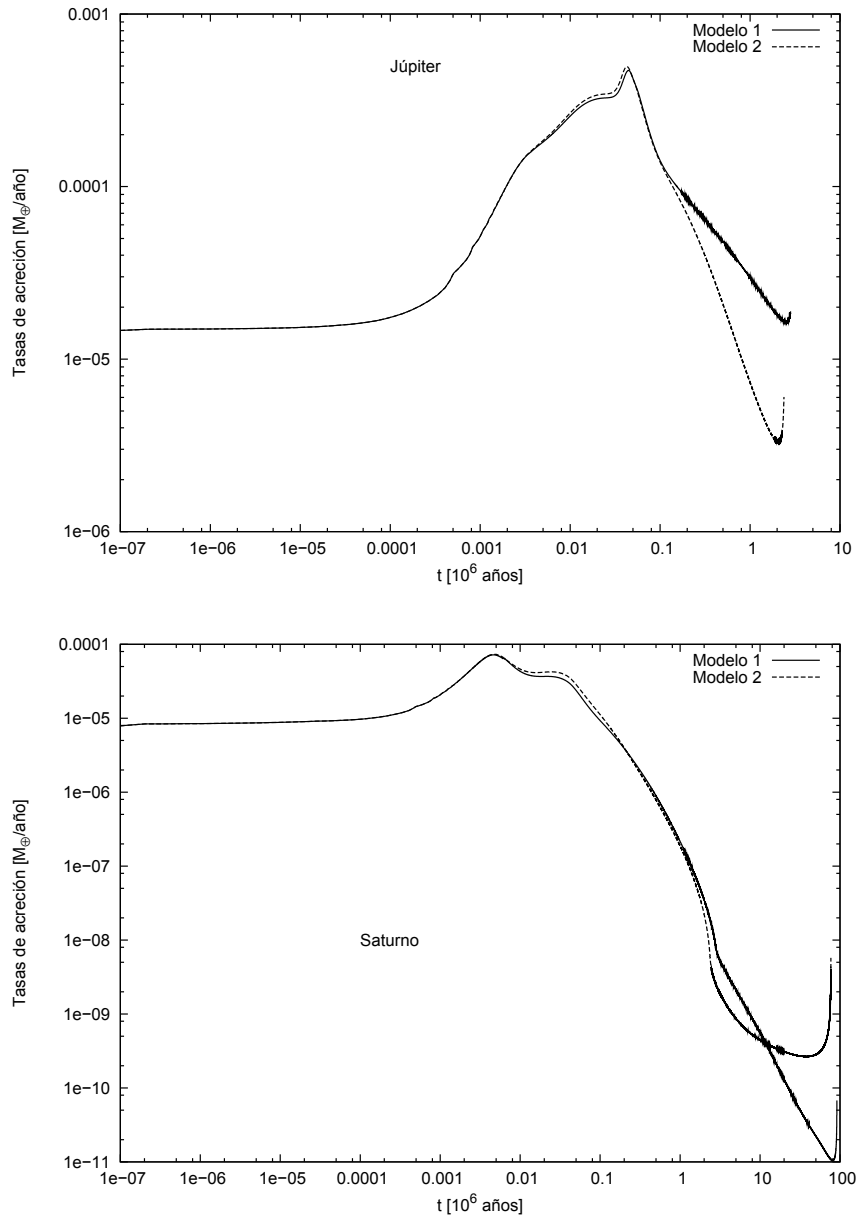


Figura 28: Comparación de las tasas de acreción de planetesimales para la formación simultánea. El modelo 1 representa el decaimiento exponencial del gas del disco, mientras que el modelo 2 nos indica que la componente gaseosa del disco evoluciona ahora por conservación del momento angular.

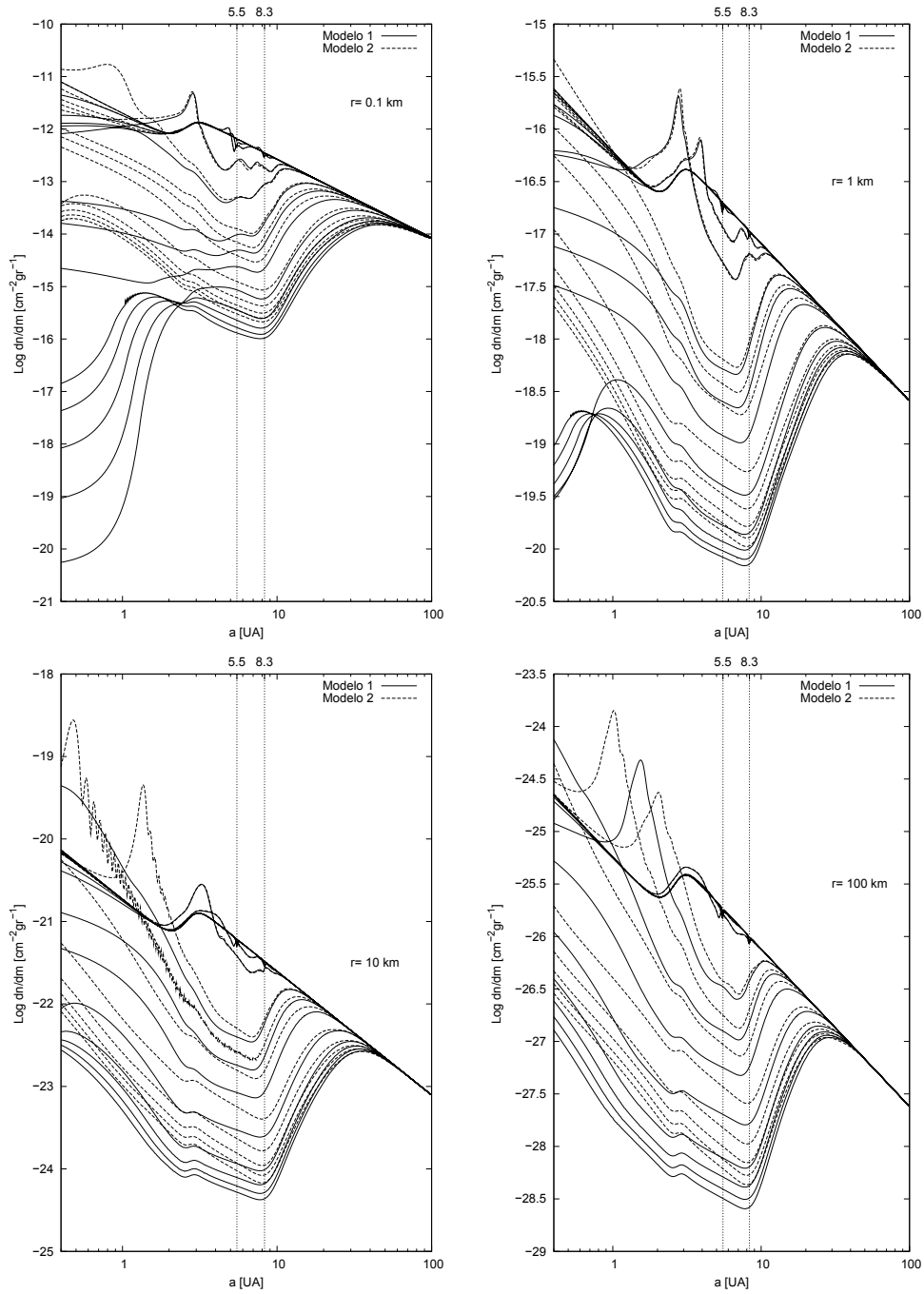


Figura 29: Evolución en el tiempo del perfil de la densidad de planetesimales del disco correspondiente a la formación simultánea de Júpiter y Saturno. El modelo 1 representa el decaimiento exponencial del gas, mientras que el modelo 2 representa que la componente gaseosa del disco evoluciona por conservación del momento angular del disco. Las curvas son para 0.001, 0.005, 0.01, 0.05, 0.1, 0.5, 1, 2, 4, 8, 12, 16 y 20 millones de años. Vemos como para toda la distribución de tamaños se produce un mínimo marcado en los perfiles en la vecindad de Saturno a medida que avanza el tiempo.

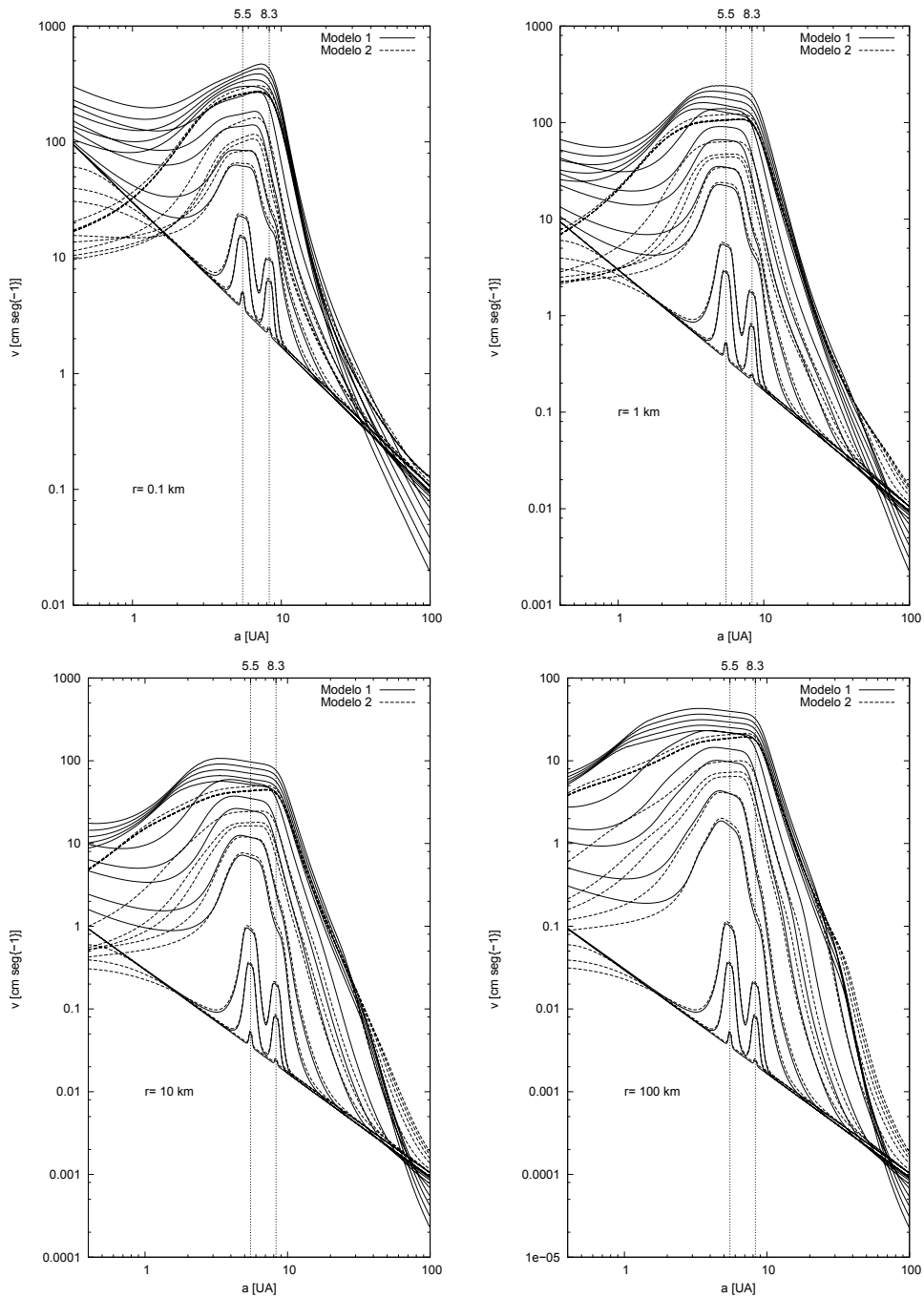


Figura 30: Evolución en el tiempo de las velocidades de migración de los planetesimales correspondiente a la formación simultánea de Júpiter y Saturno. El modelo 1 representa el decaimiento exponencial del gas, mientras que el modelo 2 representa que la componente gaseosa del disco evoluciona por conservación del momento angular del disco. Las curvas son para 0.001, 0.005, 0.01, 0.05, 0.1, 0.5, 1, 2, 4, 8, 12, 16 y 20 millones de años. A tiempos fijos, los perfiles de velocidades siempre son menores para el modelo 2, para todos las distribuciones de tamaño. Vemos como para el modelo 1 el máximo de las velocidades ocurre en la vecindad de Júpiter, mientras que para el modelo 2 ocurre en la vecindad de Saturno.

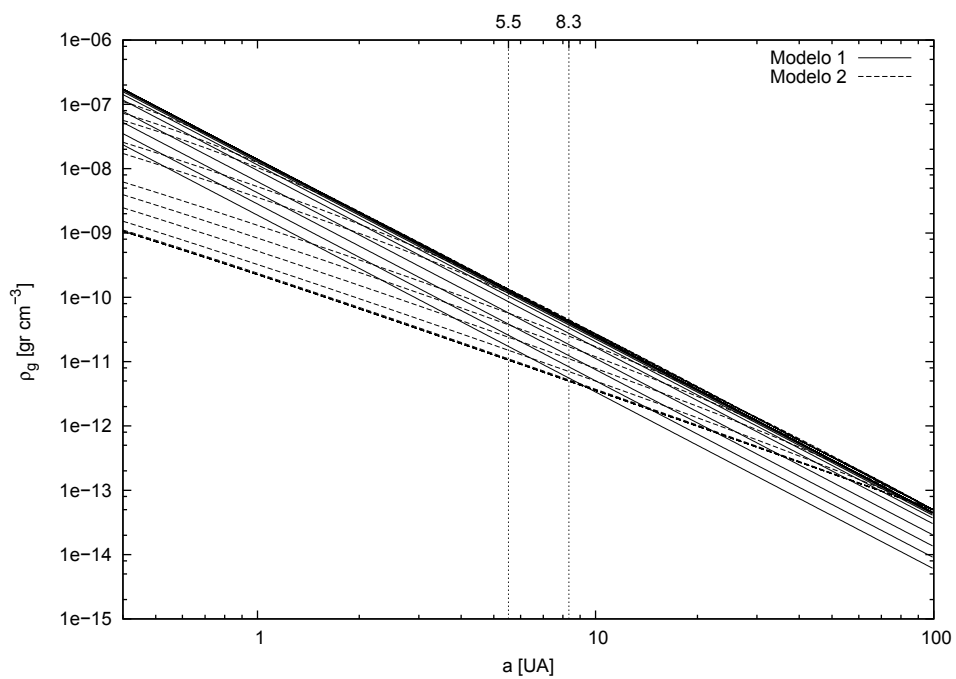


Figura 31: Evolución de la densidad gaseosa del disco. El modelo 1 representa el decaimiento exponencial del gas, mientras que el modelo 2 representa que la componente gaseosa del disco evoluciona por conservación del momento angular. Las curvas son para 0.001, 0.005, 0.01, 0.05, 0.1, 0.5, 1, 2, 4, 8, 12, 16 y 20 millones de años. Vemos como en la parte interna del disco la densidad cae significativamente para el modelo 2. A medida que avanza el tiempo la densidad es menor en las vecindades de ambos planetas considerando el modelo 2.

## 6 Conclusiones

El resultado importante de esta tesis es haber logrado un modelo para la formación simultánea de planetas gigantes embebidos en un disco protoplanetario que evoluciona en el tiempo.

En la actualidad existen varios trabajos que modelan la formación de un planeta gigante con una fenomenología física altamente compleja. Sin embargo, todos estos trabajos modelan la formación aislada del planeta.

A partir de los resultados mostrados en la sección anterior, concluimos que el proceso de formación de un planeta gigante puede sufrir drásticos cambios cuando el mismo se produce en presencia de otros planetas. Hemos podido calcular cuantitativamente como se modifican muchas de las propiedades físicas de los planetas cuando el modelo de formación simultánea reemplaza al de formación aislada. Los tiempos de formación de los planetas pueden ser severamente afectados. También se modifican notoriamente las estructuras internas y la evolución en el tiempo de los perfiles de la densidad de planetesimales en las vecindades de los planetas.

Además mostramos que el modo en el cual se disipa la componente gaseosa del disco juega un rol importante. Cuando consideramos un modelo realista para la evolución de la nebulosa, la masa final de los núcleos se reduce notoriamente, al igual que las velocidades de migración de los planetesimales.

Un hecho de importancia en el cual no entramos en detalle en esta tesis, es la distribución de tamaños de planetesimales. En la mayoría de los modelos de formación de planetas gigantes no se considera una distribución de tamaños para los planetesimales. Sin embargo, son los planetesimales más pequeños los que le permiten a los planetas incrementar su masa rápidamente. Este fenómeno es de suma importancia para que la formación de un planeta gigante ocurra en una escala de tiempo compatible con la vida de los discos protoplanetarios.

Aunque mucha de la física involucrada para la formación de los planetas gigantes está extremadamente simplificada (ecuación de estado del gas ideal y opacidades constantes para la envoltura) hemos obtenido resultados interesantes para la formación de los planetas gigantes gaseosos del sistema solar. Particularmente, mostramos que el tiempo para la formación de Júpiter es compatible con la con las escalas de tiempo de vida de los discos protoplanetarios, solo si consideramos nebulosas con varias veces la masa de la nebulosa solar mínima. Además, mostramos que la presencia de Saturno prácticamente no afecta su formación. No ocurre lo mismo para Saturno, en donde solo se forma en tiempos aceptables si se considera una nebulosa con 10 veces la masa de la nebulosa solar mínima y en donde el proceso de formación simultánea con Júpiter produce que se forme en tiempos muy por encima de los razonables.



## Trabajo a futuro

Como ya mencionamos antes existen varios fenómenos físicos extremadamente simplificados en nuestro modelo. Es nuestra intención profundizar en estos aspectos para lograr implementar una física más realista y compleja en nuestro código. Algunos puntos destacados a incorporar son:

- Ecuaciones de estados realista para la envoltura de un planeta gigante.
- Tablas de opacidades apropiadas para la envoltura de un planeta gigante.
- Condiciones iniciales independientes para cada planeta.
- Que las condiciones de borde para la envoltura de cada planeta evolucionen en el tiempo junto con la nebulosa.
- Interacción de los planetesimales con la envoltura gaseosa del planeta. Este punto es fundamental ya que la fricción gaseosa que la envoltura produce sobre los planetesimales incrementa significativamente el radio efectivo de captura del planeta, reduciendo considerablemente los tiempos de formación (ver Fortier, Benvenuto y Brunini 2007).
- Modelo de fusión de planetas gigantes.

Respecto al último punto, aclaramos que en un disco protoplanetario pueden existir un centenar de embriones que alcancen el proceso de crecimiento oligárquico. Estos embriones pueden fusionarse para dar lugar a objetos mayores. Este proceso puede ayudar a disminuir los tiempos de formación de los planetas. Cuando solo se trabaja con núcleos sólidos, es común considerar que dos embriones colisionan inelásticamente. Para implementar este punto en nuestro código deberemos desarrollar algún criterio para determinar qué puede ocurrir con las envolturas de los embriones en cuestión.

La teoría de inestabilidad nucleada predice como comienza la formación de un planeta gigante, pero no como termina este proceso y porqué existen planetas gigantes tan dispares con masas en un rango que van desde la de Urano - Neptuno a 10 veces la de Júpiter. Este hecho sin dudas tiene que estar relacionado con la evolución del disco y la capacidad del planeta de seguir acretaando gas una vez alcanzada su masa crítica. Trataremos de profundizar en este punto también en el futuro.

Por último, otro punto importante logrado en el desarrollo de esta tesis es una independencia numérica en los procesos que calculan la evolución del disco y el cálculo de la formación del planeta gigante. Esto nos permitirá ir mejorando el código y ver cuales son los impactos de dichas mejoras en forma independiente.

## Bibliografía

- [Adachi *et al.* , 1976] Adachi, I., Hayashi, C., & Nakazawa, K. 1976. The gas drag effect on the elliptic motion of a solid body in the primordial solar nebula. *Progress of Theoretical Physics*, **56**, 1756.
- [Bally *et al.* , 1998] Bally, J., Testi, L., Sargent, A., & Carlstrom, J. 1998. Disk mass limits and lifetimes of externally irradiated young stellar objects embedded in the Orion Nebula. *The Astronomical Journal*, **116**, 854.
- [Benvenuto & Brunini, 2005] Benvenuto, O. G., & Brunini, A. 2005. Methods for computing giant planet formation and evolution. *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, **356**, 1383.
- [Bodenheimer & Pollack, 1986] Bodenheimer, P., & Pollack, J. B. 1986. Calculations of the accretion and evolution of giant planets: The effect of solid cores. *Icarus*, **67**, 391.
- [Briceño *et al.* , 2001] Briceño, C., Vivas, A., Calvet, N., Hartmann, L., Pacheco, R., Herrera, D., Romero, L., Berlind, P., Sánchez, G., Snyder, J., & Andrews, P. 2001. The CIDA-QUEST Large-Scale Survey of Orion OB1: Evidence for Rapid Disk Dissipation in a Dispersed Stellar Population. *Science*, **291**, 93.
- [Brunini & Benvenuto, 2008] Brunini, A., & Benvenuto, O. G. 2008. On oligarchic growth of planets in protoplanetary disks. *Icarus*, **194**, 800.
- [Chambers, 2006] Chambers, J. 2006. A semi-analytic model for oligarchic growth. *Icarus*, **180**, 496.
- [Fernández, 2005] Fernández, J. A. 2005. *Comets: Nature, Dynamics, Origin and Their Cosmogonical Relevance*. Springer, Berlin.
- [Fortier *et al.* , 2007] Fortier, A., Benvenuto, O. G., & Brunini, A. 2007. Oligarchic planetesimal accretion and giant planet formation. *Astron. Astrophys.*, **473**, 311.
- [Gear, 1971] Gear, C. W. 1971. *Numerical Initial Value Problems in Ordinary Differential Equations*. Prentice Hall, New York. p. 37.
- [Grennberg, 1980] Grennberg, R. 1980. Numerical simulation of planet growth: Early runaway growth. *Lunar Planet. Sci.*, **11**, 365.
- [Guillot, 1999] Guillot, T. 1999. A comparison of the interiors of Jupiter and Saturn. *Planetary and Space Science*, **47**, 1183.
- [Guillot, 2005] Guillot, T. 2005. The interiors of giants planets: models and outstanding questions. *Annual Review of Earth and Planetary Sciences*, **33**, 493.

- [Haisch *et al.* , 2001] Haisch, K. E. Jr., Lada, E. A., & Lada, C. J. 2001. Disk frequencies and lifetimes in young clusters. *The Astrophysical Journal*, **553**, 153.
- [Hasegawa & Nakazawa, 1990] Hasegawa, M., & Nakazawa, K. 1990. Distant encounters between Keplerian particles. *Astron. Astrophys.*, **227**, 619.
- [Hubickyj *et al.* , 2005] Hubickyj, O., Bodenheimer, P., & Lissauer, J. J. 2005. Accretion of the gaseous envelope of Jupiter around a 5-10 Earth-mass core. *Icarus*, **179**, 415.
- [Ida & Makino, 1993] Ida, S., & Makino, J. 1993. Scattering of planetesimals by a protoplanet. Slowing down of runaway growth. *Icarus*, **106**, 210.
- [Inaba *et al.* , 2001] Inaba, S., Tanaka, H., Nakazawa, K., Wetherill, G. W., & Kokubo, E. 2001. High-accuracy statistical simulation of planetary accretion: II. Comparison with N-body simulation. *Icarus*, **149**, 235.
- [Kippenhahn & Weigert, 1990] Kippenhahn, R., & Weigert, A. 1990. *Stellar Structure and Evolution*. Springer-Verlag.
- [Kippenhahn *et al.* , 1967] Kippenhahn, R., Weigert, A., & Hofmeister, E. 1967. Methods for calculating stellar evolution. *Methods in Computational Physics*, **7**, 129.
- [Kokubo & Ida, 1998] Kokubo, E., & Ida, S. 1998. Oligarchic growth of protoplanets. *Icarus*.
- [Kokubo & Ida, 2000] Kokubo, E., & Ida, S. 2000. Formation of protoplanets from planetesimals in the solar nebula. *Icarus*.
- [Kokubo & Ida, 2002] Kokubo, E., & Ida, S. 2002. Formation of protoplanet systems and diversity of planetary systems. *Astrophys. J.*
- [Marois *et al.* , 2008] Marois, C., Macintosh, B., Barman, T., Zuckerman, B., Song, I., Patience, J., Lafreniere, D., & Doyon, R. 2008. Direct Imaging of Multiple Planets Orbiting the Star HR 8799. *Published online in Science Express Nov 13th*.
- [Mizuno, 1980] Mizuno, H. 1980. Formation of the giant planets. *Progress of Theoretical Physics*, **64**, 544.
- [Ohtsuki *et al.* , 2002] Ohtsuki, K., Stewart, G. R., & Ida, S. 2002. Evolution of planetesimal velocities based on three-body orbital integrations and growth of protoplanets. *Icarus*, **155**, 436.

- [Papaloizou & Terquem, 1999] Papaloizou, J. C. B., & Terquem, C. 1999. Critical Protoplanetary Core Masses in Protoplanetary Disks and the Formation of Short-Period Giant Planets. *The Astrophysical Journal*, **521**, 823.
- [Podolak *et al.* , 2000] Podolak, M., Podolak, J. I., & Marley, M. S. 2000. Further investigations of random models of Uranus and Neptune. *Planetary and Space Science*, **48**, 143.
- [Pollack *et al.* , 1996] Pollack, J. B., Hubickyj, O., Bodenheimer, P., Lissauer, J. J., Podolak, M., & Greenzweig, Y. 1996. Formation of the giant planets by concurrent accretion of solids and gas. *Icarus*, **124**, 62.
- [Pringle, 1981] Pringle, J. E. 1981. Accretion discs in astrophysics. *Ann. Rev. Astron. Astrophys.*, **19**, 137.
- [Saumon & Guillot, 2004] Saumon, D., & Guillot, T. 2004. Shock compression of deuterium and the interiors of Jupiter and Saturn. *The Astrophysical Journal*, **609**, 1170.
- [Shakura & Syunyaev, 1973] Shakura, N. I., & Syunyaev, R. A. 1973. Black holes in binary systems. Observational appearance. *Astron. Astrophys.*, **24**, 337.
- [Thommes *et al.* , 2003] Thommes, E. W., Duncan, M. J., & Levison, H. F. 2003. Oligarchic growth of giant planets. *Icarus*, **161**, 431.
- [Tsiganis *et al.* , 2005] Tsiganis, K., Gomes, R., Morbidelli, A., & Levison, H. F. 2005. Origin of the orbital architecture of the giant planets of the Solar System. *Nature*, **435**, 459.