

# A GEOMETRIA (DESCRITIVA) DA ANAMORFOSE E DAS PERSPECTIVAS CURVILÍNEAS

*António Araújo*

Universidade Aberta e CIAC-UAb  
R. da Escola Politécnica, 141-147  
Lisbon, Portugal 1269-001  
e-mail: antonio.araujo@uab.pt

**Resumo:** A anamorfose, enquanto artifício mimético, é o conceito fundamental que sustenta a perspectiva clássica e as perspectivas curvilíneas centrais. Enquanto conceito transversal merece uma plataforma, que presentemente não ocupa, no ensino das perspectivas, da geometria descritiva, e da realidade mista em computação gráfica e arte digital. Nesta palestra damos um panorama de vários trabalhos recentes do presente autor que pretendem contribuir para a criação de tal plataforma.

**Abstract:** Anamorphosis, as an instrument of mimesis, is the foundation both for linear perspective and for all central curvilinear perspectives. It is a transversal concept that merits a central role in the teaching of perspective(s), of descriptive geometry, and of mixed reality in computer graphics and digital art. In this talk we survey some recent efforts by the present author to establish such a role for anamorphosis.

**palavras-chave:** anamorfose; geometria descritiva; perspectiva.

**keywords:** anamorphosis; descriptive geometry; perspective.

## 1 Introdução

Proponho aqui um panorama de vários trabalhos meus recentes, que começaram com a tentativa de generalizar a perspectiva esférica aos 360 graus de visão, e seguiram um curso sinuoso cujo tema só à posteriori se tornou claro. Esse tema é a anamorfose enquanto conceito transversal a várias disciplinas: instrumento mimético, base da perspectiva clássica e das perspectivas curvilíneas, da realidade mista/aumentada/virtual, aplicação e instrumento didático da Geometria Descritiva.

## 2 Perspectivas e Anamorfozes

### 2.1 Uma definição de Perspectiva(s)

O estatuto especial da perspectiva linear como forma de representação plana de uma cena espacial é ainda surpreendentemente polémico. Os convencionalistas argumentam que este é mero fruto da educação e do acidente histórico [10]. O confronto destes com a posição Realista, que atribui esse mesmo estatuto a uma característica inerente à visão humana (e.g. Gombrich 1960 [11]), foi perseguido até à actualidade, e, por vezes, à esterilidade. Num artigo recente [5] argumentei que a perpetuação desta polémica deve-se em parte à falta de definições adequadas, e propus uma solução baseada na definição de perspectiva (originalmente estabelecida em [1]) enquanto composição de duas aplicações: uma anamorfose seguida de uma planificação (*flattening*).

A anamorfose, enquanto aplicação, é a projecção cónica  $\Lambda : \mathbb{R}^3 \setminus \{O\} \rightarrow S$  dada por  $P \mapsto \overline{OP} \cap S$ , onde  $O$  é o ponto de observação e  $S$  é a superfície de projecção, que se assume compacta. A imagem anamórfica de um fechado  $X$  (representante de uma cena espacial) é definida como o fecho topológico da sua imagem estrita por  $\Lambda$ . O conjunto dos pontos de fuga de  $X$  é definido por  $F(X) = cl(\Lambda(X)) \setminus \Lambda(X)$ . Podemos portanto ver os pontos de fuga de  $X$  como aqueles que adicionamos à imagem estrita  $\Lambda(X)$  para obter uma imagem compacta de uma cena espacial. A planificação, por sua vez, não é mais do que uma aplicação de carácter cartográfico, a que exigimos que seja um homeomorfismo em quase toda a parte. A composição das duas obtém uma imagem compacta *plana* de um objecto espacial: uma sua *perspectiva*.

Das duas aplicações, a mais importante é a anamorfose. Esta fica intrinsecamente definida pela superfície de projecção, e é causa do efeito mimético da ilusão de óptica com o mesmo nome (Figura 1). Este efeito, ao contrário do que é afirmado frequentemente pelos convencionalistas (e.g. Goodman, 1969 [10]), não está intrinsecamente limitado a um estreito cone de visão. Isto fica bem demonstrado pelos tectos ilusórios de igrejas dos sécs. XVII–XVIII, em particular pelas obras de Andrea Pozzo [12], cujo tratado de perspectiva [6] demonstra a compreensão plena deste facto. Também os autores dos *panoramas* [9] inscritos nas largas *rotundas* do séc. XIX perceberam claramente que não há limitação intrínseca de ângulo de visão desde que a escala seja adequada. Que isto seja curiosamente ignorado pelos convencionalistas demonstra uma estranha desconexão da teorização com a prática artística. De facto o campo de visão natural de uma anamorfose não tem qualquer limitação. O princípio que lhe está subjacente é o da oclusão

radial: para um observador monocular num ponto  $O$ , dois pontos são opticamente equivalentes se estão sobre o mesmo raio com origem em  $O$ . Isto é o mesmo que dizer que a variedade natural que codifica os dados visuais de um tal observador é a esfera unitária  $S^2_O$  (note-se: não o espaço projectivo).

Se a anamorfose é rica de significado – sendo a expressão geométrica de um princípio da psicofísica – a planificação é uma simples conveniência. Como o cartógrafo que abandona o globo pela carta e paga-o com a perda de isometria, também o artista perde o efeito anamórfico ao planificar o seu desenho. Uma perspectiva curvilínea apresenta “deformações” num sentido muito concreto: os objectos representados já não causam a sensação de mimese – não existe ponto de observação de onde um observador veja os pontos da perspectiva sobrepostos aos do objecto real. E é isto que determina a posição intrínseca da perspectiva linear: é que sendo a superfície anamórfica desde logo o plano, a planificação é trivial. A perspectiva linear é a única perspectiva que é simultâneamente uma anamorfose.



Figura 1: Anamorfose de um cubo sobre três planos (elaborada por António Araújo e Maria Bianchi de Aguiar (estudante do IST)).

## 2.2 Planificações e as suas construções

Se a definição de *planificação* não pede mais do que uma condição de continuidade, há no entanto dois requisitos informais que lhe são essenciais na prática: podemos chamá-los *legibilidade* e *constructibilidade*.

Legibilidade: De entre todas as planificações possíveis, a maioria perderia qualquer relação visual interessante com o objecto original. Pede-se que a experiência visual original seja – se não reproduzida, pois esse era o papel da anamorfose – ao menos *evocada* pela perspectiva. Bouligand *et al.*

([8]) descrevem o requisito da seguinte forma: “(...) formant une image qui procure au spectateur des sensations de volumes e d’espace”.

Constructibilidade: Uma perspectiva serve de pouco se o desenhador não a consegue construir. Claro que o que é construtível depende dos meios disponíveis. Com a utilização do computador todas as perspectivas se tornaram construtíveis. Mas o resultado é que o desenhador sabe cada vez menos perspectiva; saber em que botão carregar não é saber fazer. E se hoje até mesmo os arquitectos se abandonam em demasia ao CAD, muitos artistas visuais não chegam sequer a aprender os rudimentos da perspectiva. Em particular, muitos artistas digitais dependem inteiramente de programas cujo funcionamento interno desconhecem. Pior, de certa forma, a maioria desses algoritmos também não “sabem” perspectiva, no sentido em que não a codificam internamente. Funcionam por amostragem finita, por computação bruta de milhões de pontos, que formam uma imagem final onde de facto linhas paralelas convergem, mas apenas de forma “emergente”, sem codificação explícita dos pontos de fuga. A computação é finita e local; por oposição, o matemático compreende a perspectiva atendendo a pequenos números de estruturas globais, e com atenção explícita ao que se passa no infinito. E é também essa a compreensão do desenhador, que não pode calcular milhões de pontos. No máximo calculará dezenas, e fá-lo-á graficamente. Para calcular as imagens de rectas dependerá do conhecimento das propriedades globais da perspectiva em causa: da classificação das imagens das rectas e dos seus pontos de fuga. Uma vez compreendida esta estrutura saberá desenhá-los por meios elementares: régua, compasso, pouco mais (Figura 2). Finalmente isto permitir-lhe-á dar o passo final: desenhar à vista, com medidas tiradas “a olho”, com exactidão apenas qualitativa e mesmo, ocasionalmente, dando-se ao luxo de quebrar regras cujo âmbito compreende (Figura 3). Por este motivo a existência do computador em nada reduz a importância de aprender os métodos de perspectiva elementares. Pelo contrário, torna-o mais urgente, para evitar que da eficiência não saia um facilitismo que por sua vez gera ignorância, e assegurar que o computação gráfica ajude à compreensão da perspectiva em vez de servir para evitá-la. Em [4] defendi o método didáctico de “cardboarding” (rudimentarização) como forma de ensinar os métodos da realidade mista a alunos de arte digital, com base em construções geométricas “analógicas”. Este método está a ser implementado correntemente no Doutoramento em Média-Arte Digital (DMAD) da Universidade Aberta.

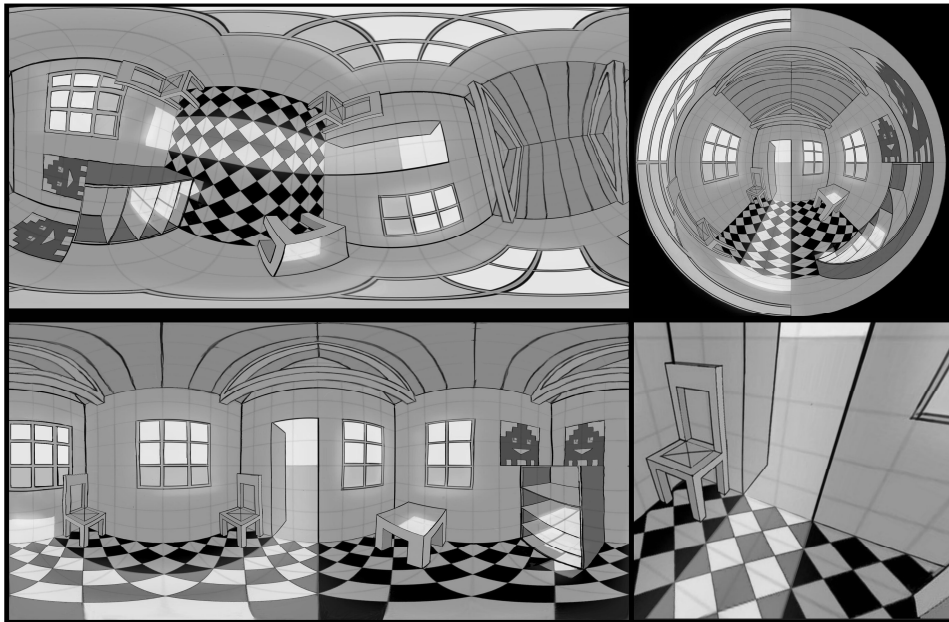


Figura 2: Há uma infinidade de perspectivas esféricas, todas elas construtíveis *pixel-a-pixel*, por força bruta computacional (topo-esquerda). No entanto, poucas de entre elas são realizáveis por régua e compasso, em boa aproximação e num número razoável de passos. A perspectiva azimutal equidistante [1] (topo-direita) e a equirectangular [2] (fundo-esquerda) estão entre essas poucas. A equirectangular é facilmente visualizável como panorama imersivo (fundo-direita) por *upload* para serviços como o *flickr*, *facebook*, ou *google cardboard* (este exemplo está visualizável em <http://www.univ-ab.pt/~aaraujo/equirectangular.html>).

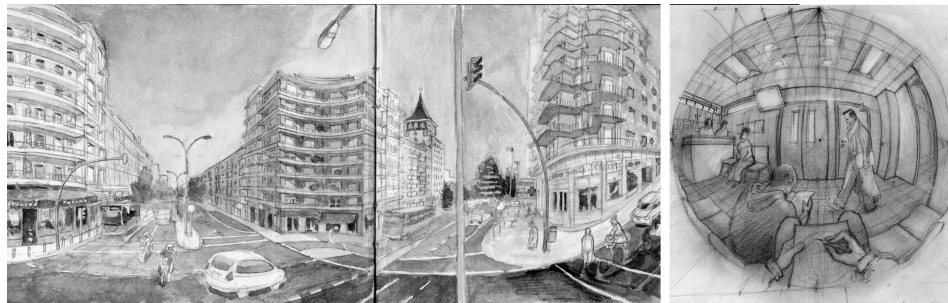


Figura 3: Perspectivas curvilíneas desenhadas pelo autor, à mão livre e por observação directa. Esquerda: Perspectiva cilíndrica de um cruzamento (secção de uma aguarela). Direita: Perspectiva esférica de uma sala de espera (grafite). Em ambos os casos quebra-se em detalhe algumas regras das perspectivas respectivas, de acordo com a conveniência do desenho, mas o conhecimento das regras guia e ordena a construção.

### 2.3 Geometria Descritiva das Anamorfozes e Perspectivas

O que é então construtível por meios elementares? Em [3] explorei os métodos da Geometria Descritiva (GD) enquanto implementação gráfica da máquina de Dürer, que permite a construção de anamorfozes sobre planos e várias classes de superfícies. Isto tem considerável interesse didáctico: uma dificuldade no ensino da GD é que, sendo orientado no sentido do desenho industrial, os alunos sofrem alguma desmotivação porque as peças desenhadas geralmente não serão construídas; o aluno fica-se por um exercício abstracto que depende inteiramente do professor enquanto oráculo que verifica a correcção de cada construção. Por oposição, a construção de anamorfozes tem um resultado final que é verificável a olho nu: ou se atinge a ilusão de óptica ou não. É além disso motivador para o estudante obter um resultado que pode ser fotografado por um telemóvel e apresentado (partilhado) enquanto simulacro “tridimensional” de um objecto reconhecível. Estas construções prestam-se a um percurso didáctico que usa natural e gradualmente grande parte da matéria de GD. Começamos pela projecção sobre os planos horizontal (Figura 4, esquerda), frontal e vertical, depois pela união destes (Figura 1), de seguida os planos de rampa e finalmente os oblíquos. A anamorfose sobre estes últimos já requer passos intermédios complexos, como a intersecção do plano oblíquo com um plano de rampa e rebatimento sobre o plano horizontal (Figura 4, direita). Pode-se ir mais longe, com projecções anamórficas sobre cilindros, cones, e esferas (e não só) de tal forma que

praticamente toda a matéria de GD do ensino secundário cabe no âmbito desta abordagem.

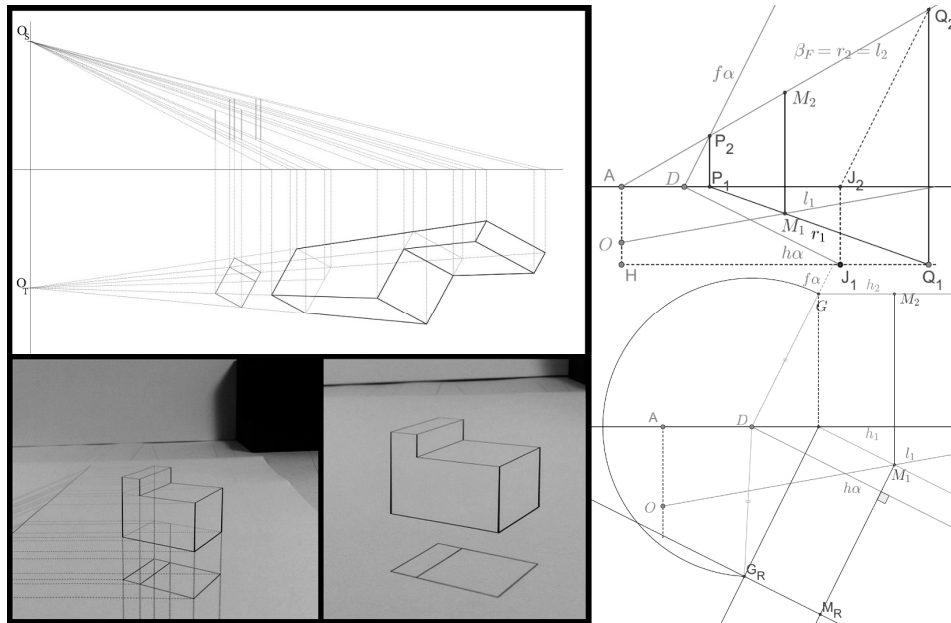


Figura 4: Construções de anamorfoses em geometria descritiva. Esquerda: anamorfose de uma peça em L sobre plano horizontal (exercício do estudante Manuel Flores, DMAD-UAb). Direita: construção da imagem anamórfica de um raio  $l$  com origem em  $O$  sobre um plano oblíquo  $\alpha$ .

Para além das anamorfoses, um grupo substancial de perspectivas pode ser construído por métodos de GD. Em [1] mostrei como construir por esses métodos, e com régua e compasso, a extensão da perspectiva (hemi)esférica de Barre e Flocon [7] aos 360 graus de visão, e em [2] mostrei como fazer o mesmo para a perspectiva equirectangular. Esta última permite ao artista fazer “à mão” desenhos que por *upload* para serviços *online* (*facebook*, *flickr*) se transformam em panoramas de realidade virtual (ver exemplos em <http://www.univ-ab.pt/~aaraujo/equirectangular.html>). Isto providencia uma interacção entre construções analógicas e digitais plena de possibilidades tanto artísticas como didácticas.

## Referências

- [1] A. Araújo, “A Construction of the Total Spherical Perspective in Ruler”, Compass and Nail, 2015; arXiv:1511.02969.
- [2] A. Araújo, “Guidelines for drawing immersive panoramas in equirectangular perspective”, *Artech 2017, 8th International Conference on Digital Arts*, ACM Proceedings, Macau, 2017, Ed. C. Cairés, pp. 93–99.
- [3] A. Araújo, “Anamorphosis: Optical Games with Perspective’s Playful Parent”, *Recreational Mathematics Colloquium V – G4G Europe*, Proceedings, 2017, Ed. J. N. Silva, Ludus, pp. 71–86.
- [4] A. Araújo, “Cardboarding Mixed Reality with Durer Machines”, *5th Conference on Computation, Communication, Aesthetics and X*, Univ. do Porto Proceedings, Lisbon, 2017, Eds. Miguel Carvalhais *et al.*, pp. 102–113.
- [5] A. Araújo, “Topologia, anamorfoses, e o bestiário das perspectivas curvilíneas”, *Convocarte*, No. 2 (2016), pp. 51–69; ISSN 2183–6973.
- [6] A. Pozzo, *Perspectiva Pictorum et architectorum*, Rome, 1693/1700.
- [7] A. Barre e A. Flocon, *La perspective curviligne*, Flammarion, Paris, 1968.
- [8] A. Barre, G. Bouligand e A. Flocon, “Etude comparée de différentes méthodes de perspective, une perspective curviligne”, *Bulletin de la Classe des Sciences de La Académie Royale de Belgique*, 5, L (1964).
- [9] E. Huhtamo, *Illusions in motion – media archaeology of the moving panorama and related spectacles*, MIT Press, 2013.
- [10] N. Goodman, *Languages of Art: An Approach to a Theory of Symbols*, Bobbs-Merrill, Indianapolis, 1969.
- [11] E. H. Gombrich, *Art and Illusion: A Study in the Psychology of Pictorial Representation*, Pantheon, New York, 1960.
- [12] M. Kemp, *The Science of Art.*, New Haven and London, 1990.