



**ELIANA CATARINA  
VIEIRA MARQUES**

**SISTEMAS COMPARTIMENTAIS**



**ELIANA CATARINA  
VIEIRA MARQUES**

**SISTEMAS COMPARTIMENTAIS**

dissertação apresentada à Universidade de Aveiro para cumprimento dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre em Matemática e Aplicações, realizada sob a orientação científica da Doutora Maria Paula Macedo Rocha Malonek, Professora Catedrática do Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro

Para os meus pais

## **o júri**

presidente

**Prof. Dr. Vasile Staicu**

professor catedrático do Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro

**Prof. Dra. Maria Paula Macedo Malonek**

professora catedrática do Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro

**Prof. Dra. Teresa Maria Gouveia Torres Feio Mendonça**

professora auxiliar da Faculdade de Ciências da Universidade do Porto

## **agradecimentos**

À minha orientadora, Doutora Maria Paula Macedo Rocha Malonek, pelo exemplo que é como professora e como pessoa, porque sempre me apoiou e incentivou, sempre se mostrou disponível e porque me presenteou com os seus conhecimentos e experiências.

Aos meus pais e às minhas irmãs por me proporcionarem o ambiente familiar perfeito, por todo o carinho e por todo o apoio que sempre me deram e continuam a dar, por serem a minha fortaleza.

Ao Carlos por ter estado sempre presente, por ser compreensivo e capaz de me transmitir a confiança necessária para ultrapassar as diferentes etapas desta fase da minha vida.

**palavras-chave**

sistemas compartimentais, discretização, controlo da massa.

**resumo**

Nesta tese estuda-se sistemas dinâmicos compartimentais contínuos e discretos.

Partindo do modelo utilizado para os sistemas compartimentais contínuos, aplica-se dois processos distintos de discretização (exacta e aproximada) de forma a obter os sistemas compartimentais discretos correspondentes, comparando-se o comportamento destes sistemas em relação ao do sistema contínuo inicial.

Estuda-se ainda o problema do controlo da massa tanto no caso contínuo como no discreto, assim como no contexto da discretização de sistemas contínuos.

**keywords**

Compartmental systems, discretization, mass control.

**abstract**

In this work we study continuous- and discrete-time compartmental systems. Starting from a continuous-time compartmental model, we apply two different discretization methods, namely exact and approximate discretization, and compare the behaviour of the two discretized models when compared to the original continuous-time model. A study of the mass control problem both in the continuous- and the discrete-time case, as well as in the context of discretization of continuous-time systems, is also performed.

# CONTEÚDOS

Introdução .....	ii
1. Sistemas Compartimentais.....	01
1.1 - Introdução .....	01
1.2. - Sistemas Compartimentais Contínuos .....	02
1.3 – Sistemas Compartimentais Discretos.....	07
2. Discretização.....	15
2.1 - Introdução .....	15
2.2 - Discretização Exacta.....	16
2.3 - Discretização Aproximada.....	27
3. Controlo da Massa .....	37
3.1 - Introdução .....	37
3.2 - O Caso Contínuo.....	38
3.3 - O Caso Discreto .....	45
3.4 - Controlo Amostrado .....	53
Conclusões .....	57
Bibliografia .....	59

# INTRODUÇÃO

A utilização de modelos torna-se essencial sempre que há necessidade de estudar e investigar fenómenos reais que envolvem a interacção de elementos quantitativos.

O estudo levado a cabo neste trabalho tem como base os modelos de sistemas compartimentais, que descrevem fenómenos onde há trocas de matéria entre diferentes compartimentos. Estes modelos são utilizados em diversas áreas científicas, tais como, em Biologia, Química, Medicina, Engenharias e até nas Ciências Sociais.

No Capítulo 1 faz-se a apresentação dos sistemas em estudo, analisando as propriedades das matrizes envolvidas na sua descrição matemática, cujas entradas são as taxas de fluxo de matéria que é trocada entre os diferentes compartimentos e também entre estes e o meio ambiente.

O Capítulo 2 é dedicado ao processo de discretização de sistemas compartimentais contínuos. Considera-se duas formas diferentes de discretização: a discretização exacta e a discretização aproximada, fazendo-se um estudo gráfico comparativo da evolução dos sistemas contínuos e dos correspondentes sistemas discretizados exacta e aproximadamente.

No Capítulo 3 estuda-se o controlo da massa de sistemas implementando uma lei de realimentação do estado do tipo  $u(t) = Kx + L$ , que assume formas diferentes no caso contínuo e no caso discreto, com o objectivo de seguimento de um valor de referência constante. Apresenta-se simulações sobre a aplicação da lei de controlo em sistemas contínuos, em sistemas discretos e ainda no contexto de controlo de sistemas contínuos amostrados.

# CAPÍTULO 1

## SISTEMAS COMPARTIMENTAIS

### 1.1. Introdução

Um *sistema* é um conjunto de elementos interligados e dependentes entre si que, em conjunto, formam uma unidade que possui determinadas características e tem funções específicas.

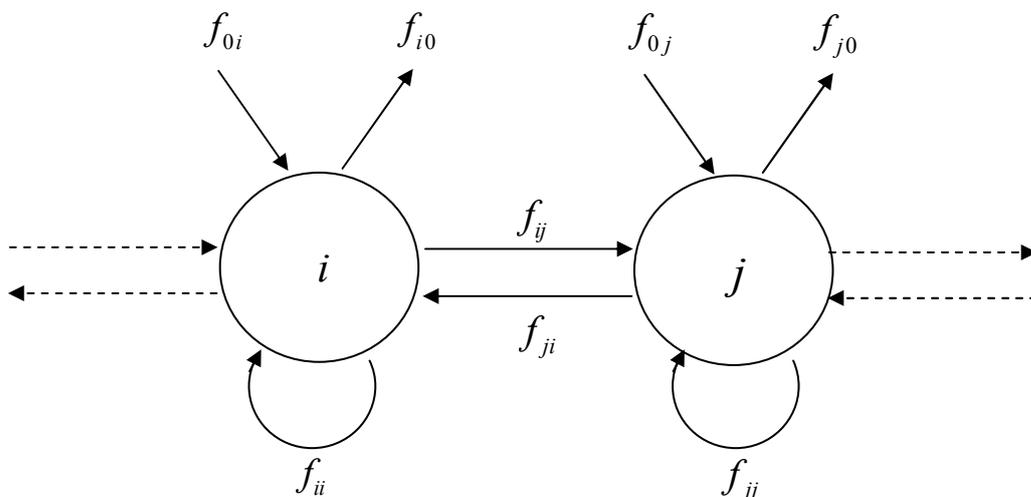
Cada sistema admite estados, definidos como um conjunto de variáveis capazes de descrever o sistema em determinado instante temporal. Nesta perspectiva, os sistemas podem ser classificados como *sistemas contínuos* ou *sistemas discretos*, de acordo com a natureza contínua ou discreta da variável temporal.

Relativamente à interacção com o ambiente que os envolve, os sistemas podem ser classificados como *sistemas abertos* ou *sistemas fechados* (isolados). Nos sistemas fechados não há interacção com o meio ao nível de trocas de matéria e energia, ao contrário do que acontece com os sistemas abertos, nos quais se processam trocas significativas com o ambiente em que estão inseridos. Os sistemas fechados são raríssimos, podendo a sua existência ser considerada meramente conceitual.

Um *sistema compartimental* é um sistema que possui um número finito de compartimentos que trocam matéria entre si, de tal modo que cada compartimento funciona como um subsistema. A evolução da quantidade de matéria em cada compartimento pode ser descrita através de uma equação diferencial de primeira ordem, no caso contínuo, ou através de uma equação diferencial linear às diferenças de primeira ordem, no caso discreto. Estes sistemas possuem estados, entradas e saídas que representam quantidades de matéria e são, por isso, todos positivos. Assim, dentro da teoria dos sistemas, os sistemas compartimentais enquadram-se na classe dos sistemas lineares positivos.

## 1.2. Sistemas Compartimentais Contínuos

Um sistema compartimental contínuo pode ser esquematizado através da seguinte figura, que permite visualizar as trocas existentes entre dois compartimentos,  $i$  e  $j$ , e, ainda, as trocas destes com o ambiente.



**Figura 1.1** - Taxas de fluxo entre dois compartimentos de um sistema contínuo

Considera-se que as taxas de fluxo do sistema são directamente proporcionais à quantidade de matéria no compartimento de origem, com constantes de proporcionalidade não negativas. Assim,  $f_{ij}(x) = k_{ij}x_i$ ,  $i \neq j = 1, \dots, n$  representa a taxa de fluxo do compartimento  $i$  para o compartimento  $j$ , analogamente,  $f_{ji}(x) = k_{ji}x_j$ ,  $i \neq j = 1, \dots, n$  representa a taxa de fluxo do compartimento  $j$  para o compartimento  $i$ , e  $f_{0i}(x) = b_i u$  e  $f_{i0}(x) = q_i x_i$  representam, respectivamente, a taxa de fluxo do ambiente para o compartimento  $i$  e a taxa de fluxo do compartimento  $i$  para o ambiente, onde  $b_i$ ,  $b_j$ ,  $q_i$ ,  $q_j$ ,  $k_{ij}$  e  $k_{ji}$  são coeficientes constantes não negativos e, por convenção, o ambiente corresponde ao compartimento 0 do sistema.

A taxa de variação da quantidade de matéria presente no compartimento  $i$ ,  $\dot{x}_i$ , é a diferença entre a taxa de fluxo de matéria que entra no compartimento e a que sai do mesmo, sendo que a primeira tem proveniência dos outros compartimentos que constituem o sistema e do ambiente, enquanto a segunda corresponde à matéria que sai deste compartimento para os restantes e para o ambiente.

Deste modo, matematicamente, pode escrever-se:

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_i &= \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n f_{ji}(x) - \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n f_{ij}(x) \\
 &= f_{0i}(x) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n f_{ji}(x) - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n f_{ij}(x) - f_{i0}(x) \\
 &= k_{0i}x_0 + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n k_{ji}x_j - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n k_{ij}x_i - k_{i0}x_i \\
 &= b_i u + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n k_{ji}x_j - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n k_{ij}x_i - q_i x_i
 \end{aligned} \tag{1.1}$$

Considerando todos os compartimentos do sistema, a igualdade anterior pode escrever-se matricialmente do seguinte modo:

$$\dot{x} = Ax + Bu \tag{1.2}$$

onde  $B = (b_i)$ ,  $i = 1, \dots, n$  é uma matriz coluna tal que:

$$B = \begin{bmatrix} k_{01} \\ \vdots \\ k_{0n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \tag{1.3}$$

e  $A = (a_{ij})$  é uma matriz quadrada de dimensão  $n$ , cujos elementos fora da diagonal principal são da forma  $a_{ij} = k_{ji}$ , com  $i \neq j$  e  $i, j = 1, \dots, n$ , os elementos da diagonal principal se apresentam da forma  $a_{ii} = -q_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n k_{ij} a_{ij}$ , com  $i = 1, \dots, n$ , de tal modo que esta

matriz é da forma:

$$A = \begin{bmatrix} -\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq 1}}^n k_{1j} - q_1 & \dots & k_{(n-1)1} & k_{n1} \\ k_{12} & \dots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \dots & -\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq n-1}}^n k_{(n-1)j} - q_{(n-1)} & k_{n(n-1)} \\ k_{1n} & \dots & k_{(n-1)n} & -\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq n}}^n k_{nj} - q_n \end{bmatrix} \tag{1.4}$$

Para simplificação da escrita, por vezes, haverá a necessidade de designar o sistema (1.2) simplesmente por  $(A^c, B^c)$ , evidenciando, deste modo, as matrizes que o constituem e a sua natureza contínua (através do índice  $^c$ ).

A matriz  $A = (a_{ij})$ , presente na equação do sistema anterior, é dotada de várias propriedades referidas na definição que se segue. Todas as matrizes com estas propriedades são classificadas como *matrizes compartimentais contínuas* uma vez que podem ser encaradas como matrizes de sistemas compartimentais em tempo contínuo.

### **Definição 1.1:**

Uma matriz quadrada,  $G = (g_{ij})$ ,  $i, j = 1, \dots, n$ , de dimensão  $n$ , é uma *matriz compartimental contínua* se satisfaz as seguintes condições:

1.  $G = (g_{ij})$  é uma matriz de Metzler, isto é, uma matriz não nula com elementos não negativos fora da diagonal principal).

$$g_{ij} \geq 0, \quad i \neq j \text{ e } i, j = 1, \dots, n \quad (1.5)$$

2. Todos os elementos da diagonal principal da matriz  $G = (g_{ij})$  são não positivos.

$$g_{ii} \leq 0, \quad i = 1, \dots, n \quad (1.6)$$

3.  $G = (g_{ij})$  é uma matriz diagonalmente dominante por colunas, isto é, o valor absoluto da entrada da diagonal principal em cada coluna é maior que a soma dos valores absolutos de todas as outras entradas (não diagonais) nessa coluna.

$$|g_{ii}| \geq \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq i}}^n g_{li} \Leftrightarrow |g_{ii}| - \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq i}}^n g_{li} \geq 0, \quad i = 1, \dots, n$$

(1.7)

A equação (1.1) anteriormente apresentada para um sistema com  $n$  compartimentos, se particularizada para um sistema em que o número de compartimentos é três, toma um aspecto mais concreto.

**Exemplo 1.2:**

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = b_1 u + \cancel{k_{11} x_1} + k_{21} x_2 + k_{31} x_3 - \cancel{k_{11} x_1} - k_{12} x_1 - k_{13} x_1 - q_1 x_1 \\ \dot{x}_2 = b_2 u + k_{12} x_1 + \cancel{k_{22} x_2} + k_{32} x_3 - k_{21} x_2 - \cancel{k_{22} x_2} - k_{23} x_2 - q_2 x_2 \\ \dot{x}_3 = b_3 u + k_{13} x_1 + k_{23} x_2 + \cancel{k_{33} x_3} - k_{31} x_3 - k_{32} x_3 - \cancel{k_{33} x_3} - q_3 x_3 \end{cases}$$

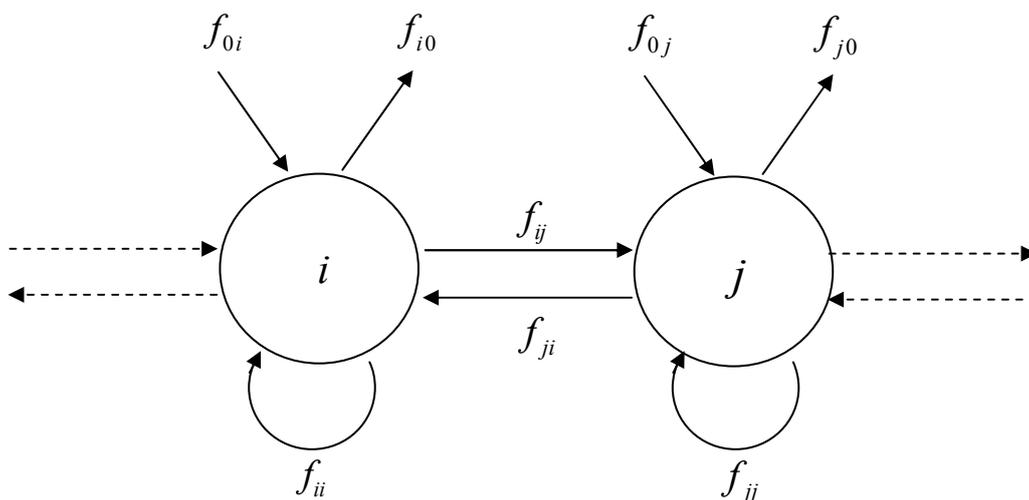
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = (-k_{12} - k_{13} - q_1) x_1 + k_{21} x_2 + k_{31} x_3 + b_1 u \\ \dot{x}_2 = k_{12} x_1 + (-k_{21} - k_{23} - q_2) x_2 + k_{32} x_3 + b_2 u \\ \dot{x}_3 = k_{13} x_1 + k_{23} x_2 + (-k_{31} - k_{32} - q_3) x_3 + b_3 u \end{cases}$$

Ou, ainda, matricialmente:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -k_{12} - k_{13} - q_1 & k_{21} & k_{31} \\ k_{12} & -k_{21} - k_{23} - q_2 & k_{32} \\ k_{13} & k_{23} & -k_{31} - k_{32} - q_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} u$$

### 1.3. Sistemas Comportamentais Discretos

Um sistema compartimental discreto pode ser, analogamente, esquematizado através da seguinte figura, que representa as trocas de matéria existentes entre dois compartimentos consecutivos,  $i$  e  $j$ , e, ainda, as trocas destes com o ambiente, entre dois instantes de tempo consecutivos.



**Figura 1.2** – Trocas de matéria entre dois compartimentos de um sistema discreto

## SISTEMAS COMPARTIMENTAIS

Assim,  $f_{ji}(x)$  representa a quantidade de matéria que entra no compartimento  $i$  vinda do compartimento  $j$ , num determinado instante, convencionando-se, uma vez mais, que o ambiente se encontra representado pelo compartimento 0 do sistema.

Considera-se que esta quantidade de matéria é directamente proporcional à quantidade de matéria existente no compartimento  $j$ , no instante anterior, com constante de proporcionalidade não negativa.

Portanto, a quantidade de matéria que se encontra no compartimento  $i$  no instante  $k+1$  pode ser obtida do seguinte modo:

$$x_i(k+1) = x_i(k) + in_i(k) - out_i(k) \quad (1.8)$$

onde  $in_i(t)$  e  $out_i(t)$  representam, respectivamente, a quantidade de matéria que entra e a quantidade de matéria que sai do compartimento  $i$ , entre os instantes  $k$  e  $k+1$ .

Deste modo:

$$\begin{aligned} x_i(k+1) &= x_i(k) + \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n f_{ji}(k) - \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n f_{ij}(k) \\ &= x_i(k) + f_{0i}(k) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n f_{ji}(k) - f_{i0}(k) - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n f_{ij}(k) \\ &= x_i(k) + k_{0i}x_0(k) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n k_{ji}x_j(k) - k_{i0}x_i(k) - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n k_{ij}x_i(k) \\ &= \left( 1 - q_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n k_{ij} \right) x_i(k) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n k_{ji}x_j(k) + b_i x_0(k) \end{aligned} \quad (1.9)$$

onde  $q_i = k_{i0}$ ,  $b_i = k_{0i}$ ,  $k_{ij}$  e  $k_{ji}$  são constantes de proporcionalidade não negativas.

As equações relativas a todos os compartimentos podem escrever-se na forma matricial como:

$$x(k+1) = A^d x(k) + B^d u(k) \quad (1.10)$$

com,

$$B^d = \begin{bmatrix} k_{01} \\ k_{02} \\ \vdots \\ k_{0n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \quad (1.11)$$

e,

$$A^d = \begin{bmatrix} 1 - q_1 - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq 1}}^n k_{1j} & \dots & k_{(n-1)1} & k_{n1} \\ k_{12} & \dots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \dots & 1 - q_{n-1} - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq n-1}}^n k_{(n-1)j} & k_{n(n-1)} \\ k_{1n} & \dots & k_{(n-1)n} & 1 - q_n - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq n}}^n k_{nj} \end{bmatrix} \quad (1.12)$$

Analogamente ao caso contínuo, o sistema (1.10) será, por vezes, referido como  $(A^d, B^d)$ , evidenciando o índice  $^d$  a sua natureza discreta.

A matriz  $A^d = (a_{ij}^d)$ , assim definida, é uma *matriz compartmental discreta* de acordo com a definição que se segue.

**Definição 1.3:**

Uma matriz  $H = (h_{ij})$ ,  $i, j = 1, \dots, n$ , de dimensão  $n$ , diz-se uma *matriz compartmental (discreta)* se satisfaz as seguintes condições:

1. Todos os elementos da matriz  $H = (h_{ij})$  são não negativos.

$$h_{ij} \geq 0, \quad \forall i, j = 1, \dots, n \quad (1.13)$$

2. A soma de todas as entradas de cada uma das colunas da matriz  $H = (h_{ij})$  é não superior à unidade.

$$\sum_{i=1}^n h_{ij} \leq 1, \quad \forall j = 1, \dots, n \quad (1.14)$$

Tal como no caso contínuo, toda a matriz compartmental discreta pode ser encarada como a matriz de um sistema compartmental em tempo discreto.

Analogamente ao apresentado para os sistemas compartmentais contínuos, considere-se, a título de exemplo, um sistema compartmental discreto com três compartimentos.

**Exemplo 1.4:**

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = (1 - q_1 - k_{12} - k_{13})x_1 + k_{21}x_2 + k_{31}x_3 + b_1u \\ \dot{x}_2 = k_{12}x_1 + (1 - q_2 - k_{21} - k_{23})x_2 + k_{32}x_3 + b_2u \\ \dot{x}_3 = k_{13}x_1 + k_{23}x_2 + (1 - q_3 - k_{31} - k_{32})x_3 + b_3u \end{cases}$$

Matricialmente:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - q_1 - k_{12} - k_{13} & k_{21} & k_{31} \\ k_{12} & 1 - q_2 - k_{21} - k_{23} & k_{32} \\ k_{13} & k_{23} & 1 - q_3 - k_{31} - k_{32} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} u$$

A matriz compartmental discreta  $A^d = (a_{ij}^d)$  pode ainda ser escrita como a soma de duas matrizes, sendo uma delas a matriz identidade de dimensão igual à da matriz  $A^d$ ,  $I$ , e a outra uma matriz compartmental contínua,  $A^c = (a_{ij}^c)$ .

### Lema 1.5:

Seja  $A^d = (a_{ij}^d)$  uma matriz compartmental discreta, então  $A^d = I + A^c$ , onde  $A^c$  é uma matriz compartmental contínua.

### Demonstração:

Sejam  $A^d = (a_{ij}^d)$  e  $A^c = A^d - I = (a_{ij}^c)$ . Note-se que todos os elementos, de  $A^c$ , fora da diagonal principal são não negativos já que, por (1.13), coincidem com os correspondentes elementos de  $A^d$ .

Isto é,

$$a_{ji}^c \geq 0, \text{ com } i \neq j \text{ e } i, j = 1, \dots, n \quad (1.15)$$

Por outro lado, todos os elementos da diagonal principal de  $A^c$  são não positivos pois, por (1.14),

$$a_{ii}^c = a_{ii}^d - 1 \leq \sum_{j=1}^n a_{ij}^d - 1 \leq 0, \text{ com } i = 1, \dots, n$$

(1.16)

Mais ainda, verifica-se que a soma de todos os elementos de cada coluna é uma quantidade não positiva, de facto, por (1.14):

$$\sum_{l=1}^n a_{li}^c = a_{ii}^c + \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq i}}^n a_{li}^c = a_{ii}^d - 1 + \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq i}}^n a_{li}^d = \sum_{l=1}^n a_{li}^d - 1 \leq 0, \text{ com } i = 1, \dots, n$$
(1.17)

Isto implica que,

$$a_{ii}^c + \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq i}}^n a_{li}^c \leq 0, \text{ com } i = 1, \dots, n$$
(1.18)

ou seja,

$$\sum_{\substack{l=1 \\ l \neq i}}^n a_{li}^c \leq -a_{ii}^c, \text{ com } i = 1, \dots, n$$

e, portanto,

$$\sum_{\substack{l=1 \\ l \neq i}}^n a_{li}^c \leq |a_{ii}^c|, \text{ com } i = 1, \dots, n.$$
(1.19)

Das considerações anteriores resulta que a matriz  $A^c$  é, de facto, compartimental contínua.

■

O exemplo que se segue mostra que o recíproco do lema anterior não se verifica.

**Exemplo 1.6:**

Considere-se a matriz  $A^c = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ .

Facilmente se verifica que a matriz  $A^c$  é compartimental contínua, uma vez que os elementos da sua diagonal são não positivos, os restantes são não negativos e, ainda, cada elemento da diagonal principal é, em módulo, não inferior ao outro elemento da coluna a que pertence.

No entanto,  $A^d = I + A^c = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$  não é uma matriz compartimental discreta pois tem entradas negativas.

É, porém, possível verificar que dada uma matriz compartimental contínua  $A^c$ , a matriz  $A^d = I + hA^c$  é compartimental discreta se  $h$  for suficientemente pequeno.

**Lema 1.7:**

Seja  $A^c$  uma matriz compartimental contínua.

Então existe  $\varepsilon > 0$  tal que,  $\forall h \in [0, \varepsilon]$ ,  $A^d = I + hA^c$  é uma matriz compartimental discreta.

**Demonstração:**

Uma vez que  $(a_{ij}^d) = h(a_{ij}^c)$ ,  $i \neq j$  com  $h > 0$  e  $a_{ij}^c \geq 0$  (pois  $A^c$  é compartimental contínua), verifica-se que  $a_{ij}^d \geq 0$ ,  $i \neq j$  e, por outro lado,  $(a_{ii}^d) = 1 + h(a_{ii}^c)$ .

Portanto, se  $1 + h(a_{ii}^c) \geq 0$ ,  $i = 1, \dots, n$ , os elementos da diagonal de  $A^d$  serão também não negativos. Para tal basta que:

$$0 < h \leq -\frac{1}{a_{ii}^c} \quad \text{se } a_{ii}^c \neq 0 \tag{1.21}$$

## SISTEMAS COMPARTIMENTAIS

Se todos os  $a_{ii}^c$  forem nulos, os elementos da diagonal de  $A^d$  serão iguais a um e portanto não negativos, independentemente dos valores de  $h$ .

Fica, assim, demonstrada a primeira condição da definição de matriz compartimental (discreta) apresentada em 1. da definição 1.3.

Além disso,

$$\sum_{i=1}^n a_{ij}^d = 1 + h \sum_{i=1}^n a_{ij}^c = 1 + h \left( a_{jj}^c + \sum_{\substack{i \neq j \\ i=1}}^n a_{ij}^c \right). \quad (1.22)$$

Como  $A^c$  é diagonalmente dominante e  $a_{jj}^c < 0$ , tem-se que:

$$\sum_{i=1}^n a_{ij}^c \leq |a_{jj}^c| = -a_{jj}^c \quad (1.23)$$

Pelo que,

$$a_{jj}^c + \sum_{\substack{i \neq j \\ i=1}}^n a_{ij}^c \leq 0 \quad (1.24)$$

e, sendo  $h > 0$ , fica

$$\sum_{i=1}^n a_{ij}^d \leq 1 \quad (1.25)$$

Assim, conclui-se que o Lema se verifica para  $\varepsilon = \min \left\{ -\frac{1}{a_{ii}^c}, a_{ii}^c \neq 0, i \in \{1, \dots, n\} \right\}$ , e  $\varepsilon$  qualquer se todos os  $a_{ii}^c$  forem nulos (caso em que a matriz  $A^c$  será a matriz nula). ■

# CAPÍTULO 2

## DISCRETIZAÇÃO

### 2.1. Introdução

Nesta secção será feita a análise do processo de discretização de um sistema compartimental contínuo, como definido em (1.2), através de dois processos diferentes que serão respectivamente designados por *discretização exacta* e *discretização aproximada*.

Em ambos os casos, designar-se-á por  $x^c$  o estado do sistema compartimental contínuo, para o melhor distinguir do estado da sua discretização. Considerar-se-á, ainda, que  $h$  é o intervalo de discretização e  $kh$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$  são os correspondentes instantes de discretização.

## 2.2. Discretização Exacta

Suponha-se que a entrada  $u$  do sistema compartimental contínuo (1.2) se mantém constante, e portanto igual a  $u(kh)$ , no intervalo  $[kh, (k+1)h)$ , então:

$$x^c((k+1)h) = e^{A((k+1)h-kh)} x^c(kh) + \int_{kh}^{(k+1)h} e^{A((k+1)h-\theta)} B d\theta u(kh),$$

(2.1)

onde a exponencial matricial  $e^{At}$  é definida por  $e^{At} := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} t^k$ .

Definindo  $x^d(k) = x^c(kh)$  e  $u^d(k) = u(kh)$ ,

$$\begin{aligned} x^d(k+1) &= e^{Ah} x^d(k) + \int_{kh}^{kh+h} e^{A(kh+h-\theta)} d\theta B u^d(k) \\ &= e^{Ah} x^d(k) - \int_h^0 e^{A\tau} d\tau B u^d(k) \\ &= e^{Ah} x^d(k) + \int_0^h e^{A\tau} d\tau B u^d(k) \end{aligned}$$

(2.2)

Fazendo, finalmente,  $A^d = e^{Ah}$  e  $B^d = \int_0^h e^{A\tau} d\tau B$  obtém-se o sistema compartimental discretizado:

$$x^d(k+1) = A^d x^d(k) + B^d u^d(k)$$

(2.3)

Note-se que, atendendo à construção efectuada, para entradas constantes entre cada instante de discretização, o estado do sistema contínuo coincide com o do sistema discretizado, nos instantes de discretização. Por isso, o processo de discretização apresentado será referido como *discretização exacta*.

A matriz  $A^d = e^{Ah}$  presente no sistema compartimental discretizado (2.3) é uma matriz compartimental discreta. Verifique-se esta afirmação.

Para tal, mostre-se, primeiro, que todos os elementos de  $A^d$  são não negativos, i.e.,  $a_{ij}^d \geq 0$ , com  $i, j = 1, \dots, n$ .

Seja  $e_i$  o  $i$ -ésimo vector da base canónica de  $\mathbb{R}^n$  e represente-se a  $i$ -ésima coluna da matriz compartimental discreta,  $A^d$ , por  $c_i$ . Então esta coluna será dada por:

$$c_i = A^d e_i \tag{2.4}$$

Deste modo, tomando  $x^c(0) = x^d(0) = e_i$  e  $u(t) = 0$  em  $[0, h)$ , tem-se que  $x^c(h) = x^d(1) = A^d e_i = c_i$ .

Uma vez que o sistema compartimental contínuo é positivo, é possível concluir que  $x^c(1)$  tem componentes não negativas. Logo a coluna  $c_i$  de  $A^d$  é exclusivamente constituída por elementos não negativos e, portanto, todos os elementos de  $A^d$  são não negativos.

Mostre-se, agora, que a soma dos elementos de cada coluna é não superior a um, ou seja,

$$\sum_{i=1}^n a_{ij}^d \leq 1, \text{ com } j = 1, \dots, n.$$

Atendendo à interpretação de  $c_i$ , atrás apresentada, tem-se  $x^d(1) = x^c(h) = c_i$  quando  $u^c(t) = 0$  em  $[0, h)$  e  $x^c(0) = x^d(0) = e_i$ .

Assim,

$$x^c(h) = A^d x^c(0) \tag{2.5}$$

Defina-se a massa (quantidade total de matéria) do estado  $x$  como:

$$M(x) := \sum_{i=1}^n x_i \tag{2.6}$$

Então, o somatório dos elementos da coluna  $c_i$ , ou seja,  $M(c_i)$  é dado por:

$$M(c_i) = M(x^c(h)) \tag{2.7}$$

Porém, uma vez que se considerou  $u=0$ , não entrou matéria no sistema, pelo que a quantidade de matéria, no instante  $h$ , terá que ser necessariamente não superior à quantidade no instante inicial, ou seja,

$$M(x^c(h)) \leq M(x^c(0)) \tag{2.8}$$

Mais ainda, na medida em que se tem  $M(x^c(0)) = M(e_i) = 1$ , conclui-se, finalmente, que:

$$M(c_i) \leq 1 \tag{2.9}$$

Assim, resulta que a soma de todos os elementos da coluna  $c_i$  é não superior a um, isto é,

$$\sum_{i=1}^n a_{ij}^d \leq 1, \text{ com } j = 1, \dots, n \quad (2.10)$$

Visto ter-se considerado uma coluna genérica  $i$  da matriz  $A^d$ , conclui-se que esta propriedade se verifica para todas as colunas desta matriz.

Do anteriormente exposto, resulta que a matriz  $A^d = e^{Ah}$  do sistema compartimental discretizado (2.3) é uma matriz compartimental discreta, independentemente da amplitude dos intervalos de tempo considerados.

Por outro lado,  $B^d = \int_0^h e^{A\tau} d\tau B$  é obviamente uma matriz com entradas não negativas já que as entradas de  $B$ , de  $e^{A\tau}$  e, conseqüentemente, de  $\int_0^h e^{A\tau} d\tau$  são não negativas.

Isto permite estabelecer que a discretização de um sistema compartimental contínuo é um sistema compartimental discreto.

### **Proposição 2.1:**

Sejam  $(A^c, B^c)$  um sistema compartimental contínuo e  $(A^d, B^d)$  a sua discretização exacta com intervalo de discretização  $h$ . Então  $(A^d, B^d)$  é um sistema compartimental discreto.

Apresentam-se, a seguir, dois exemplos ilustrativos simples aos quais foi aplicado o processo de discretização exacta de sistemas compartimentais contínuos. O primeiro exemplo possui dois estados e o segundo três.

**Exemplo 2.2:**

Considere-se o seguinte sistema compartimental contínuo, com dois compartimentos, onde

$x = [x_1 \ x_2]^T$  representa o vector das variáveis de estado.

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \tag{2.11}$$

Faça-se o intervalo de discretização  $h = 0.05$  seg .

Determine-se, através do processo de discretização exacta,  $A^d$  :

$$\begin{aligned} A^d = e^{0.05A} &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ (sI - A)^{-1} \right\}_{|t=0.05} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \begin{bmatrix} s & -1 \\ 0 & s \end{bmatrix}^{-1} \right\}_{|t=0.05} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & \frac{1}{s^2} \\ 0 & \frac{1}{s} \end{bmatrix} \right\}_{|t=0.05} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_{|t=0.05} = \begin{bmatrix} 1 & 0.05 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{2.12}$$

Determine-se, também pelo mesmo processo,  $B^d$  :

$$\begin{aligned} B^d = \int_0^{0.05} e^{A\tau} d\tau B &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ (sI - A)^{-1} \frac{1}{s} B \right\}_{|t=0.05} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \begin{bmatrix} s & -1 \\ 0 & s \end{bmatrix}^{-1} \frac{1}{s} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}_{|t=0.05} \\ &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ \begin{bmatrix} \frac{1}{s^3} \\ \frac{1}{s^2} \end{bmatrix} \right\}_{|t=0.05} = \begin{bmatrix} \frac{t^2}{2} \\ t \end{bmatrix}_{|t=0.05} = \begin{bmatrix} 0.00125 \\ 0.05 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{2.13}$$

Então o sistema compartimental discretizado, resultante do processo de discretização exacta, será dado por:

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 1 & 0.05 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 0.00125 \\ 0.05 \end{bmatrix} u(k) \quad (2.14)$$

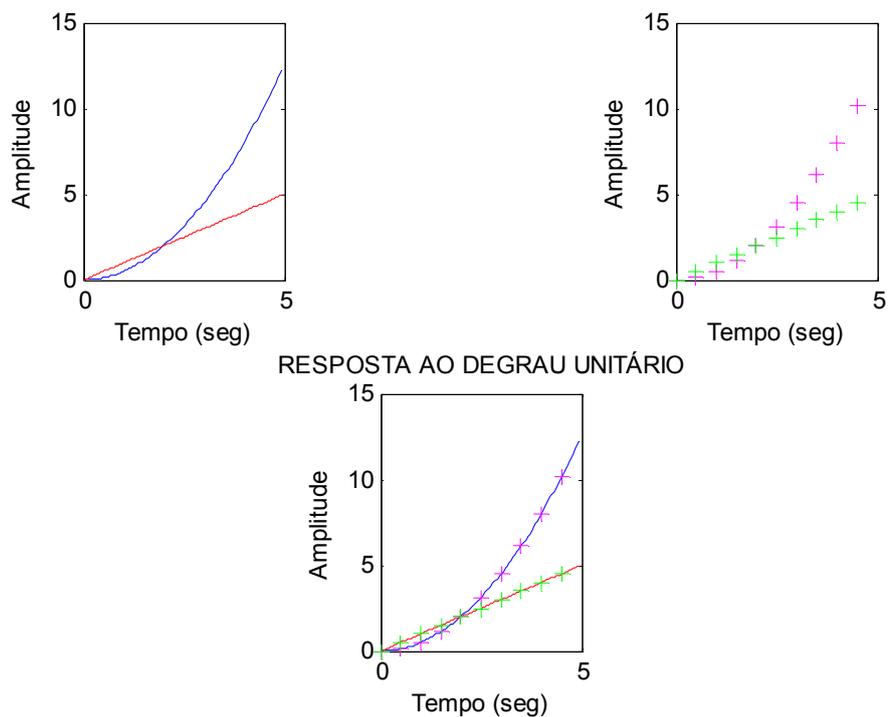
O degrau unitário é definido como:

$$u(t-t_1) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < t_1 \\ 1 & \text{se } t > t_1 \end{cases} \quad (2.15)$$

e a resposta ao degrau é dada como a resposta de um sistema ao degrau unitário aplicado no instante  $t_1 = 0$ , com condições iniciais nulas.

Relativamente aos sistemas apresentados em (2.11) e (2.14) analise-se a representação gráfica da resposta ao degrau unitário,  $u(t) = 1$ , com  $t \geq 0$ , de modo a compará-los no que respeita à evolução de ambos ao longo do tempo.

Na seguinte figura apresenta-se três gráficos com a evolução da resposta ao degrau unitário ao longo do tempo. O primeiro gráfico é relativo ao sistema contínuo, o segundo relativamente ao sistema discretizado e o terceiro onde é possível visualizar, sobre o mesmo referencial, o esboço gráfico dos dois primeiros, de modo a facilitar a sua comparação.



**Figura 2.1** – Respostas ao degrau do sistema (2.11) e da sua discretização exacta (2.14)

A análise gráfica da resposta ao degrau dos sistemas compartimentais apresentados permite concluir que a resposta do sistema discretizado se sobrepõe à do sistema contínuo, o que resulta do modo como a discretização foi feita.

**Exemplo 2.3:**

Considere-se agora o seguinte sistema compartimental contínuo, com três compartimentos, onde  $x = [x_1 \ x_2 \ x_3]^T$  representa o vector das variáveis de estado.

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

(2.16)

Use-se o mesmo intervalo de discretização entre dois instantes consecutivos,  $h = 0.05 \text{ seg}$ .

Determine-se, por discretização exacta,  $A^d$ .

$$\begin{aligned}
 A^d &= e^{0.05A} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ (sI - A)^{-1} \right\}_{|t=0.05} \\
 &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ \left[ \begin{array}{ccc} s+1 & 0 & -1 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & -1 & s+1 \end{array} \right]^{-1} \right\}_{|t=0.05} \\
 &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ \left[ \begin{array}{ccc} \frac{1}{s+1} & \frac{1}{s(s+1)^2} & \frac{1}{(s+1)^2} \\ 0 & \frac{1}{s} & 0 \\ 0 & \frac{1}{s(s+1)} & \frac{1}{s+1} \end{array} \right] \right\}_{|t=0.05} \\
 &= \left[ \begin{array}{ccc} e^{-t} & 1 - te^{-t} - e^{-t} & te^{-t} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 - e^{-t} & e^{-t} \end{array} \right]_{|t=0.05} \\
 &= \left[ \begin{array}{ccc} e^{-0.05} & 1 - 1.05e^{-0.05} & 0.05e^{-0.05} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 - e^{-0.05} & e^{-0.05} \end{array} \right]
 \end{aligned}
 \tag{2.17}$$

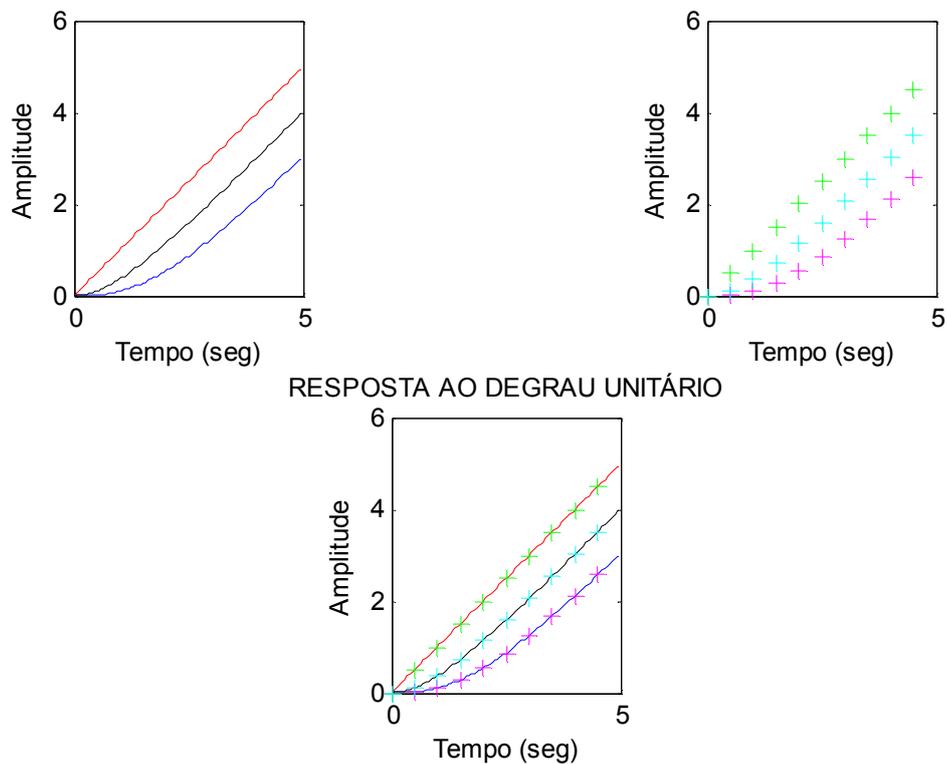
Determine-se, ainda, pelo mesmo processo,  $B^d$ .

$$\begin{aligned}
 B^d &= \int_0^{0.05} e^{A\tau} d\tau B = \mathcal{L}^{-1} \left\{ (sI - A)^{-1} \frac{1}{s} B \right\} \Big|_{t=0.05} \\
 &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ \begin{bmatrix} s+1 & 0 & -1 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & -1 & s+1 \end{bmatrix}^{-1} \frac{1}{s} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \Big|_{t=0.05} \\
 &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ \begin{bmatrix} \frac{1}{s^2(s+1)^2} \\ \frac{1}{s^2} \\ \frac{1}{s^2(s+1)} \end{bmatrix} \right\} \Big|_{t=0.05} \\
 &= \begin{bmatrix} t-2+(t+2)e^{-t} \\ t \\ t-1+e^{-t} \end{bmatrix} \Big|_{t=0.05} \\
 &= \begin{bmatrix} -1.95+2.05e^{-0.05} \\ 0.05 \\ -0.95+e^{-0.05} \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{2.18}$$

Donde resulta o seguinte sistema compartimental discretizado:

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} e^{-0.05} & 1-1.05e^{-0.05} & 0.05e^{-0.05} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1-e^{-0.05} & e^{-0.05} \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} -1.95+2.05e^{-0.05} \\ 0.05 \\ -0.95+e^{-0.05} \end{bmatrix} u(k) \tag{2.19}$$

Tal como para o exemplo anterior, analise-se, graficamente, a resposta ao degrau unitário,  $u(t)=1$ , com  $t \geq 0$ , para o sistema apresentado e para a sua discretização exacta.



**Figura 2.2** - Respostas ao degrau do sistema (2.16) e da sua discretização exacta (2.19)

A análise da figura apresentada permite confirmar que, como seria de esperar, também neste caso, o gráfico da resposta ao degrau está sobre a curva que representa a resposta ao degrau para o sistema contínuo inicial.

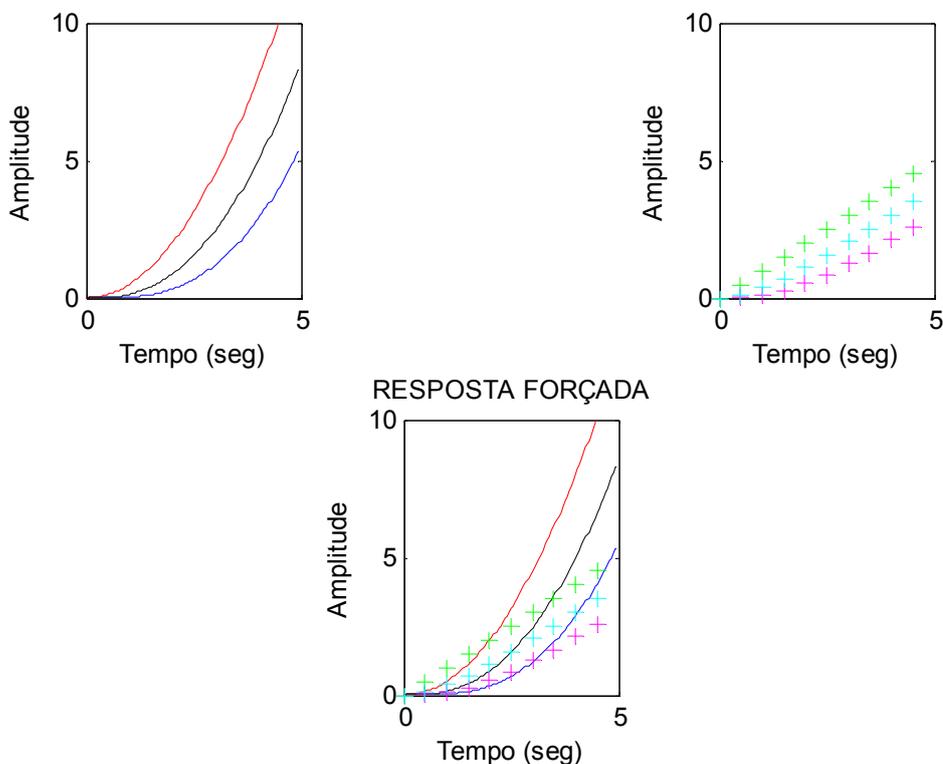
Note-se que a coincidência entre as respostas, do sistema exactamente discretizado e do sistema contínuo que lhe deu origem, embora se verifique para qualquer intervalo de discretização, apenas se pode garantir para entradas que são constantes entre dois instantes de discretização.

O exemplo que se segue ilustra o caso em que tal não acontece.

**Exemplo 2.4:**

Considere-se o sistema compartimental contínuo com três compartimentos (2.16) e a sua discretização exacta (2.19).

Compare-se, agora, graficamente, a resposta forçada do sistema contínuo com entrada  $u(t) = t, t \geq 0$ , relativamente à resposta forçada da correspondente discretização exacta deste sistema.



**Figura 2.3** - Respostas forçadas do sistema (2.16) e da sua discretização exacta (2.19)

Tal como seria de esperar, as respostas forçadas do sistema contínuo e da sua discretização exacta diferem quando se considera uma entrada que varia entre instantes de discretização consecutivos.

### 2.3. Discretização Aproximada

Considere-se, uma vez mais, o sistema compartimental contínuo dado em (1.2),  $\dot{x} = Ax + Bu$ .

Como visto anteriormente,  $A^d = e^{Ah}$  e  $B^d = \int_0^h e^{A\tau} d\tau B$ . Assim,

$$\begin{aligned}
 A^d &= e^{Ah} \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} A^k \frac{h^k}{k!} \\
 &= I + Ah + \frac{A^2 h^2}{2!} + \frac{A^3 h^3}{3!} + \dots + \frac{A^n h^n}{n!} + \dots \\
 &= I + A \left( \underbrace{Ih + \frac{Ah^2}{2!} + \frac{A^2 h^3}{3!} + \dots + \frac{A^{n-1} h^n}{n!} + \dots}_N \right) \\
 &\simeq I + Ah, \text{ com a aproximação } N \simeq hI
 \end{aligned} \tag{2.22}$$

e,

$$\begin{aligned}
 B^d &= \int_0^h e^{A\tau} d\tau B = \frac{1}{A} \int_0^h e^{A\tau} A d\tau B = \frac{1}{A} (e^{Ah} - e^{A \times 0}) B = \frac{1}{A} (e^{Ah} - I) B \\
 &= \frac{1}{A} \left( \sum_{k=0}^{\infty} A^k \frac{h^k}{k!} - I \right) B \\
 &= \frac{1}{A} \left( I + Ah + \frac{A^2 h^2}{2!} + \frac{A^3 h^3}{3!} + \dots + \frac{A^n h^n}{n!} + \dots - I \right) B \\
 &= \left( \underbrace{Ih + \frac{Ah^2}{2!} + \frac{A^2 h^3}{3!} + \dots + \frac{A^{n-1} h^n}{n!} + \dots}_N \right) B \\
 &\simeq hB, \text{ com a aproximação } N \simeq Ih,
 \end{aligned} \tag{2.23}$$

onde  $I$  é a matriz identidade com a mesma dimensão que  $A$ .

Fazendo então  $\hat{A}^d = I + Ah$  e  $\hat{B}^d = hB$  obtém-se o sistema compartimental discretizado aproximadamente que se segue.

$$\hat{x}^d(k+1) = \hat{A}^d \hat{x}^d(k) + \hat{B}^d u^d(k) \quad (2.24)$$

Note-se que, ao contrário do concluído na discretização exacta, para entradas constantes, o estado do sistema discretizado, em cada instante de discretização, é, na maioria dos casos, apenas uma aproximação do estado do sistema contínuo. Deste modo, e por oposição ao processo de discretização anterior, este processo será denominado de *discretização aproximada*.

De acordo com o Lema 1.7, se o intervalo de discretização  $h$  for suficientemente pequeno, o sistema discreto  $(\hat{A}^d, \hat{B}^d)$  é ainda um sistema compartimental (discreto). De facto, sendo  $A$  uma matriz compartimental contínua, para  $h > 0$  pequeno,  $\hat{A}^d = I + Ah$  é uma matriz compartimental discreta. Além disso, sendo as entradas de  $B$  não negativas, o mesmo acontece com as entradas de  $\hat{B}^d = Bh$ .

### Proposição 2.5:

Sejam  $(A, B)$  um sistema compartimental contínuo e  $(\hat{A}^d, \hat{B}^d)$  a sua discretização aproximada com intervalo de discretização  $h$ . Então, se  $h$  for suficientemente pequeno,  $(\hat{A}^d, \hat{B}^d)$  é um sistema compartimental discreto.

Analise-se de seguida dois exemplos ilustrativos da discretização aproximada de sistemas compartimentais contínuos.

**Exemplo 2.6:**

Considere-se o sistema compartimental contínuo, com dois compartimentos, apresentado no exemplo 2.2,  $\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$ , e admita-se o mesmo intervalo de discretização,  $h = 0.05 \text{ seg}$ .

Relativamente às matrizes  $A$  e  $B$ , deste sistema, execute-se o processo de discretização aproximada de modo a obter o sistema correspondente aproximadamente discretizado.

Posto isto, analise-se a resposta ao degrau do sistema discretizado comparando-a à resposta do sistema contínuo que lhe deu origem.

A discretização aproximada da matriz  $A$ ,  $\hat{A}_1^d$ , é dada por:

$$\hat{A}_1^d = I + 0.05A \approx \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + 0.05 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1 & 0.05 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.25)$$

Analogamente, a discretização aproximada da matriz  $B$ ,  $\hat{B}_1^d$ , é dada por:

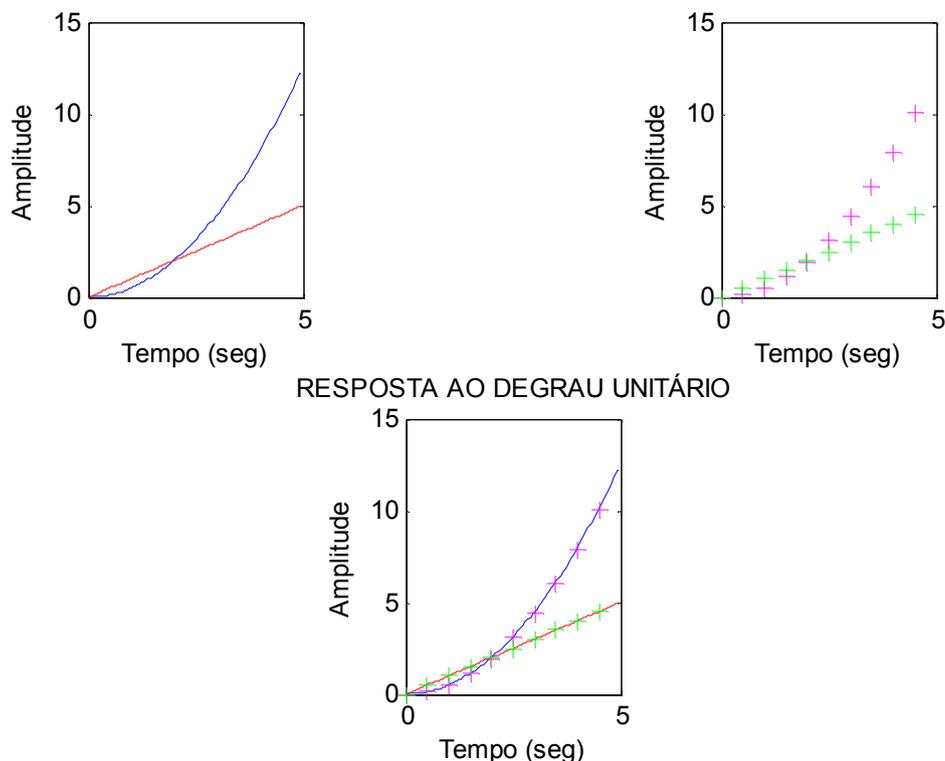
$$\hat{B}_1^d = 0.05B \approx 0.05 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0 \\ 0.05 \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

De acordo com a discretização apresentada para as duas matrizes obtém-se o seguinte sistema compartimental discretizado:

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 1 & 0.05 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0.05 \end{bmatrix} u(k) \quad (2.27)$$

Da observação deste sistema conclui-se que a matriz  $\hat{A}_1^d$  tem as mesmas entradas que a matriz  $A^d$ , obtida por discretização exacta, pelo que os sistemas (2.14) e (2.25) apenas diferem quanto às matrizes  $B^d$  e  $\hat{B}_1^d$ , sendo esta diferença apenas ao nível de uma das entradas destas matrizes.

Graficamente, pode observar-se a relação existente entre a evolução dos dois sistemas quando sobrepostos os gráficos das suas respostas ao degrau.



**Figura 2.4** – Respostas ao degrau do sistema (2.11) e da sua discretização aproximada (2.27)

Nota: Apenas se marcou 10 pontos do gráfico, para não sobrecarregar a figura.

A observação da resposta ao degrau unitário para estes sistemas permite concluir que realmente a diferença entre as curvas correspondentes ao sistema contínuo e ao sistema aproximadamente discretizado é desprezável. Isto prende-se com o facto de as matrizes dos dois sistemas, obtidos por discretização exacta e por discretização aproximada, serem semelhantes.

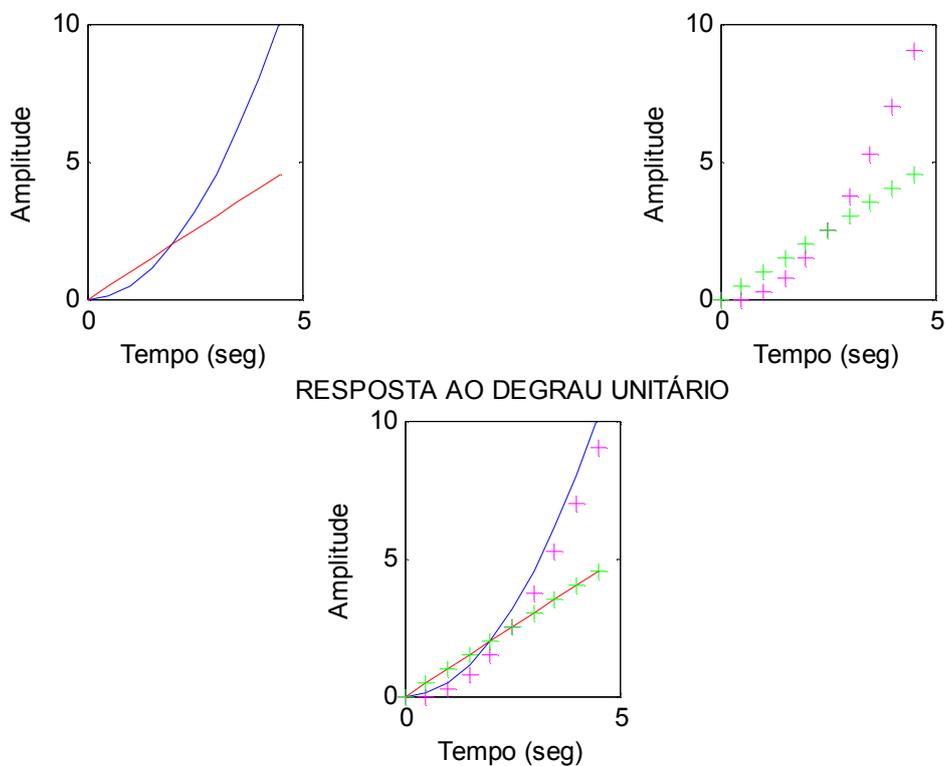
Considerando agora um intervalo de discretização maior,  $h = 0.5$ , obtém-se para a discretização aproximada:

$$\hat{A}_2^d = I + 0.5A \quad \text{e} \quad \hat{B}_2^d = 0.5B . \quad (2.28)$$

O novo sistema compartimental discretizado é o seguinte:

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 1 & 0.5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0.5 \end{bmatrix} u(k) \quad (2.29)$$

Na figura que se segue estão representadas as respostas ao degrau do sistema contínuo e do sistema aproximadamente discretizado, verificando-se que a discrepância entre estas respostas é mais acentuada que no caso anterior.



**Figura 2.5** – Respostas ao degrau do sistema (2.11) e da sua discretização aproximada (2.29)

**Exemplo 2.7:**

Considere-se agora o sistema compartimental contínuo, com três compartimentos, apresentado em (2.16), no exemplo 2.3.

Sejam, mais uma vez, os intervalos de discretização  $h_1 = 0.05 \text{ seg}$  e  $h_2 = 0.5 \text{ seg}$ .

Determine-se as matrizes  $\hat{A}_1^d$  e  $\hat{B}_1^d$ , obtidas pelo processo de discretização aproximada aplicado às matrizes  $A$  e  $B$  respectivamente, para  $h_1 = 0.05 \text{ seg}$ .

$$\hat{A}_1^d = I + 0.05A \approx \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + 0.05 \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0.95 & 0 & 0.05 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0.05 & 0.95 \end{bmatrix} \quad (2.30)$$

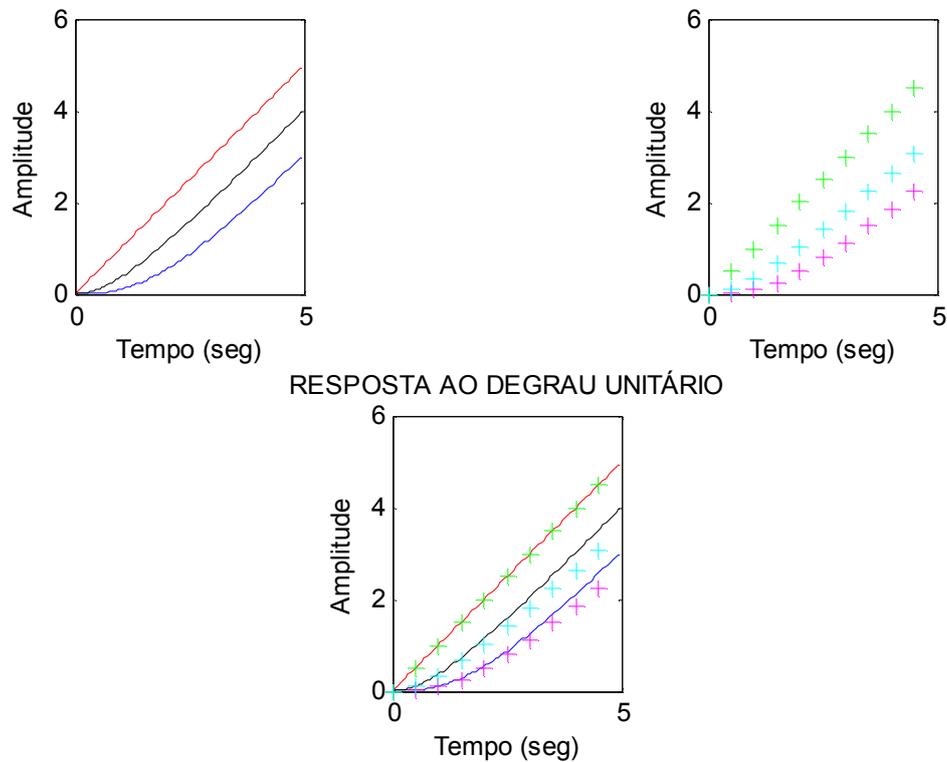
e

$$\hat{B}_1^d = 0.05B \approx 0.05 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0 \\ 0.05 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.31)$$

O sistema compartimental discretizado obtido é da forma:

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 0.95 & 0 & 0.05 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0.05 & 0.95 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0.05 \\ 0 \end{bmatrix} u(k) \quad (2.32)$$

Analogamente ao estudo feito para os sistemas anteriores, é, agora, graficamente apresentada a resposta ao degrau unitário para os dois sistemas (contínuo e aproximadamente discretizado).



**Figura 2.6** - Respostas ao degrau do sistema (2.16) e da sua discretização aproximada (2.32)

Procedendo da mesma forma para o intervalo de discretização  $h_2 = 0.5 \text{ seg}$  obtém-se:

$$\hat{A}_2^d = I + 0.5A \quad \text{e} \quad \hat{B}_2^d = 0.5B .$$

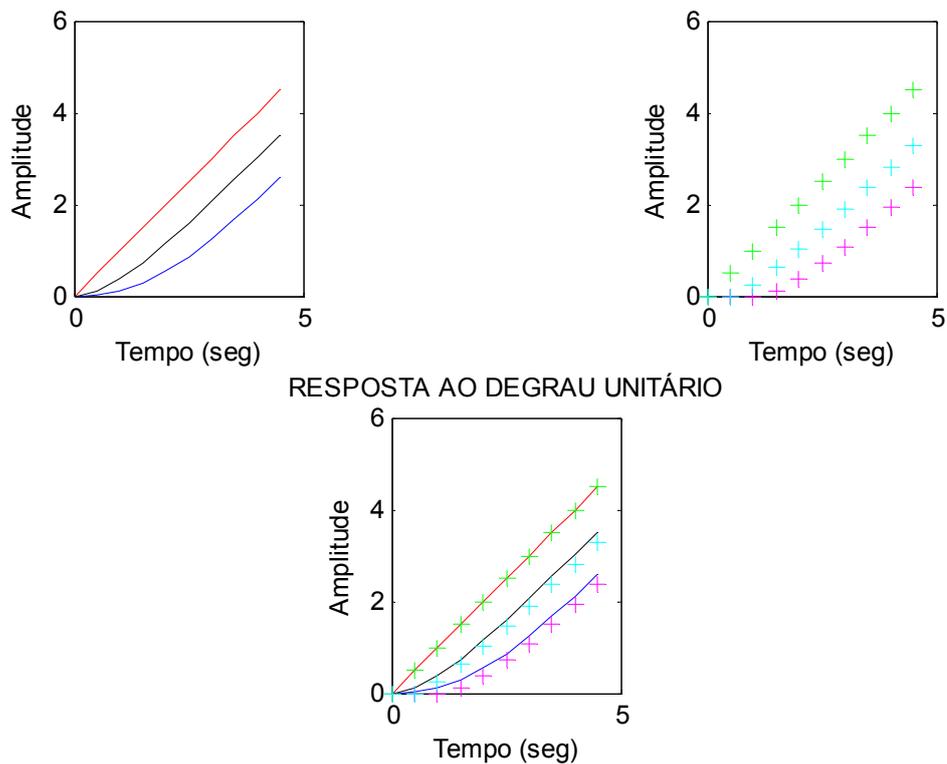
(2.33)

E o sistema compartmental discretizado obtido é o que a seguir se apresenta:

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0.5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0.5 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0.5 \\ 0 \end{bmatrix} u(k)$$

(2.34)

A resposta do degrau do correspondente sistema aproximadamente discretizado é apresentada na figura que se segue, juntamente com a resposta ao degrau do sistema contínuo.



**Figura 2.7** - Respostas ao degrau do sistema (2.16) e da sua discretização aproximada (2.34)

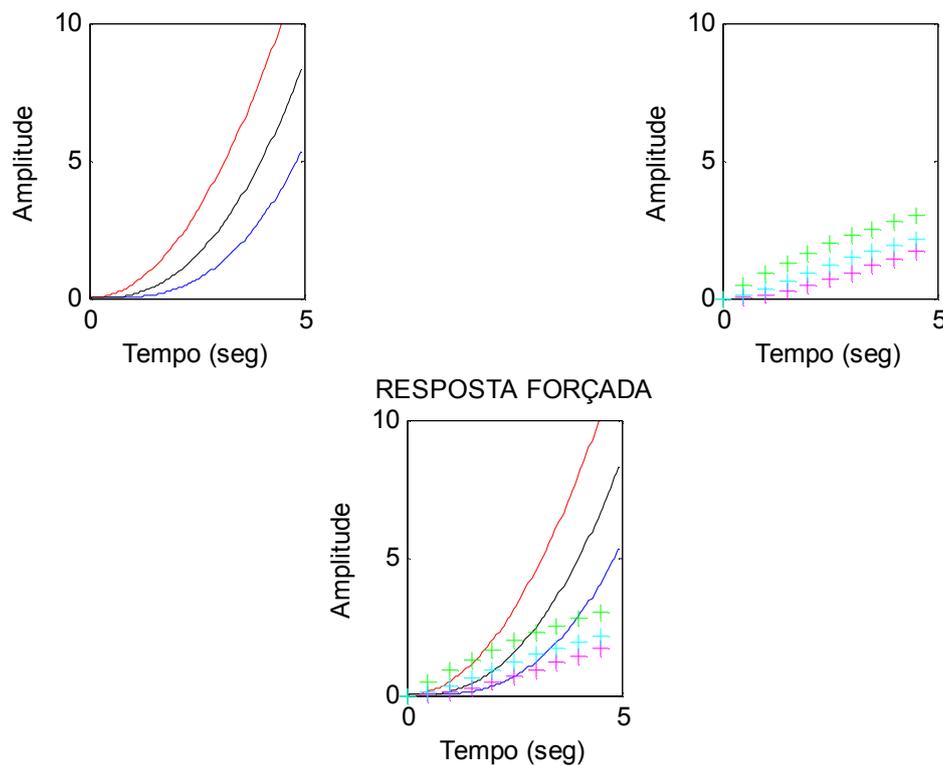
Em relação à figura anterior, verifica-se que existe uma maior diferença entre a evolução do degrau unitário dos dois sistemas.

Como seria de esperar, um sistema aproximadamente discretizado tem, ao longo do tempo, um comportamento que se assemelha ao do sistema contínuo que lhe deu origem, mas, contrariamente ao que acontece no caso da discretização exacta, não coincide com este. Além disso, verifica-se que a diferença entre o sistema aproximadamente discretizado e o sistema contínuo aumenta com o intervalo de discretização.

**Exemplo 2.8:**

Compare-se, agora, o sistema compartimental contínuo, apresentado em (2.16), com  $u(t) = t$ ,  $t \geq 0$ , e a sua discretização aproximada (2.27).

A resposta forçada destes sistemas é apresentada a seguir:



**Figura 2.8** - Respostas forçadas do sistema (2.16) e da sua discretização aproximada (2.27)

Tal como concluído em relação ao sistema compartimental contínuo e ao correspondente sistema obtido por discretização exacta, também a análise dos últimos gráficos apresentados permite verificar que as respostas forçadas do sistema contínuo e da sua discretização aproximada diferem uma da outra quando se introduz uma entrada  $u$  que varia dentro de cada intervalo de discretização. Como seria de esperar, essa diferença é ainda mais acentuada do que no caso da discretização exacta.

## SISTEMAS COMPARTIMENTAIS

A interpretação dos resultados dos exemplos apresentados neste capítulo permite concluir que, uma vez considerado  $u$  constante, a discretização exacta dos sistemas mantém a resposta inalterada relativamente à resposta do sistema contínuo original.

Caso a discretização aplicada seja aproximada, esta coincidência das respostas já não se verifica, podendo ser a diferença entre ambas mais ou menos evidente, questão que se prende com a estrutura das matrizes  $A$  e  $B$ .

No caso dos gráficos referentes à entrada  $u$  variável, a evolução dos sistemas é diferente quer se processe a discretização exacta ou a discretização aproximada.

# CAPÍTULO 3

## CONTROLO DA MASSA

### 3.1. Introdução

O objectivo deste capítulo é a apresentação de uma lei de controlo para um sistema compartimental de forma a garantir que a massa total do sistema em malha fechada convirja para um valor da massa desejado, que será denotado  $M^*$ .

Relembre-se que tal como foi definida no capítulo anterior, em (2.6), a soma da massa  $x_i$  existente em cada um dos  $n$  compartimentos,

$$M(x(t)) = \sum_{i=1}^n x_i(t).$$

Na prática, uma vez que as entradas de um sistema compartimental têm de ser positivas, a lei de controlo a determinar deverá fornecer apenas valores positivos.

Uma maneira simples de garantir isto será tomar

$$u(t) = \max(0, \tilde{u}(t)) \tag{3.1}$$

onde  $\tilde{u}(t)$  resulta da aplicação, ao sistema em estudo, de uma certa lei de controlo.

No entanto, uma vez que a consideração do máximo em (3.1) torna o sistema controlado não-linear, exigindo ferramentas que saem fora do âmbito deste trabalho, abandona-se aqui, no estudo teórico, o requisito de positividade.

Como se verá a lei de controlo a implementar consiste numa realimentação do estado do tipo

$$u(t) = u(x(t)) = Kx(t) + L. \quad (3.2)$$

### 3.2. O Caso Contínuo

Seja  $\dot{x} = Ax + Bu$  um sistema compartimental contínuo. Tendo em conta que a massa deste sistema, no estado  $x$ , se pode escrever como  $M(x) = [1 \dots 1]x$ , obtém-se a seguinte equação para a evolução da massa do sistema:

$$[1 \dots 1]\dot{x} = [1 \dots 1]Ax + [1 \dots 1]Bu \quad (3.3)$$

ou seja,

$$\overline{\dot{M(x(t))}} = [1 \dots 1]Ax(t) + (\sum b_i)u(t) \quad (3.4)$$

Suponha-se que se pretende que o valor da massa do sistema siga um valor de referência  $M^*$ .

Se for possível determinar  $u(t)$  de modo que (3.3) tome a forma

$$\overline{\dot{M}(x(t))} = -\lambda(M(x(t)) - M^*), \quad (3.5)$$

onde  $\lambda$  é um número positivo, ter-se-á que:

$$\overline{\dot{M}(x(t)) - M^*} = \overline{\dot{M}(x(t))} = -\lambda(M(x(t)) - M^*), \quad (3.6)$$

na medida em que, por  $M^*$  ser um valor constante, se tem  $\dot{M}^* = 0$ .

Deste modo, definindo  $\Delta M = M(x) - M^*$ , obtém-se  $\dot{\Delta M} = -\lambda \Delta M$ , que pelo facto da constante  $\lambda$  ser negativa, é um sistema assintoticamente estável.

Assim, pode-se concluir que  $\Delta M(x(t)) = M(x(t)) - M^* \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0$ , ou seja  $M(x(t)) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} M^*$ , como se pretende.

Igualando os dois membros de (3.4) e de (3.5) e resolvendo em ordem a  $u(t)$  obtém-se:

$$\begin{aligned} [1 \quad \dots \quad 1]Ax(t) + (\Sigma b_i)u(t) &= -\lambda(M(x(t)) - M^*) \\ \Leftrightarrow u(t) &= (\Sigma b_i)^{-1} \left[ -\lambda(M(x(t)) - M^*) - [1 \quad \dots \quad 1]Ax(t) \right] \\ \Leftrightarrow u(t) &= (\Sigma b_i)^{-1} \left[ -\lambda M(x(t)) + \lambda M^* - [1 \quad \dots \quad 1]Ax(t) \right] \\ \Leftrightarrow u(t) &= (\Sigma b_i)^{-1} \left[ -\lambda [1 \quad \dots \quad 1]x(t) + \lambda M^* - [1 \quad \dots \quad 1]Ax(t) \right] \\ \Leftrightarrow u(t) &= (\Sigma b_i)^{-1} \left[ [1 \quad \dots \quad 1](-\lambda I - A)x(t) + \lambda M^* \right] \end{aligned} \quad (3.7)$$

## SISTEMAS COMPARTIMENTAIS

Conclui-se, então, que a lei de controlo

$$u(t) = u(x(t)) = (\Sigma b_i)^{-1} \left[ [1 \quad \dots \quad 1] (-\lambda I - A) x^c(t) + \lambda M^* \right]. \quad (3.8)$$

permite estabilizar a massa do sistema compartimental contínuo considerado.

Equivalentemente,

$$u(x(t)) = -(\Sigma b_i)^{-1} \left[ [1 \quad \dots \quad 1] (\lambda I + A) x^c(t) + (\Sigma b_i)^{-1} \lambda M^* \right], \quad (3.9)$$

pelo que,  $u(x(t))$  toma a forma já referida,  $u(x(t)) = Kx(t) + L$ , com

$$K = -(\Sigma b_i)^{-1} \left[ [1 \quad \dots \quad 1] (\lambda I + A) \right] \quad \text{e} \quad L = (\Sigma b_i)^{-1} \lambda M^* \quad (3.10)$$

A aplicação desta lei de controlo conduz o sistema em malha fechada,

$$\dot{x} = (A + BK)x + BL, \quad (3.11)$$

com  $K$  e  $L$  como definidos em (3.10) e (3.11), respectivamente, ou seja,

$$\dot{x} = \left( A - (\Sigma b_i)^{-1} B \left[ [1 \quad \dots \quad 1] (\lambda I + A) \right] \right) x + (\Sigma b_i)^{-1} B \lambda M^* \quad (3.12)$$

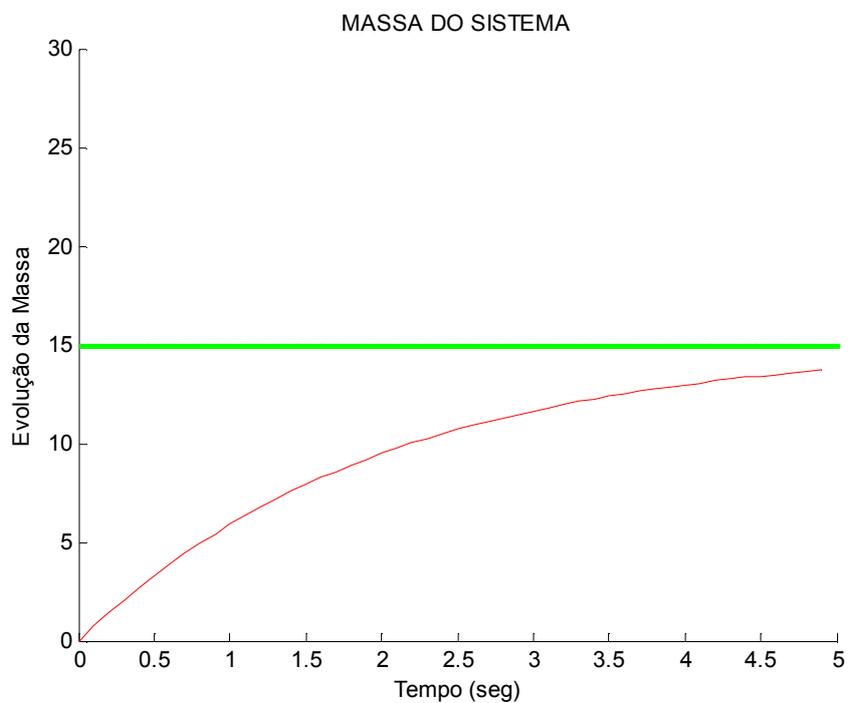
Com o objectivo de analisar o comportamento da lei de controlo proposta, apresentam-se, de seguida, exemplos em que se consideram diferentes valores iniciais e de referência para a massa.

**Exemplo 3.1:**

Considere-se, mais uma vez, o sistema contínuo (2.16) e o sistema em malha fechada (3.12), obtido a partir dele e a seguir apresentado, correspondente ao valor do parâmetro  $\lambda = 0.5$  e ao valor de referência para a massa  $M^* = 15$ .

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0.5 & -1.5 & -0.5 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 7.5 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{3.13}$$

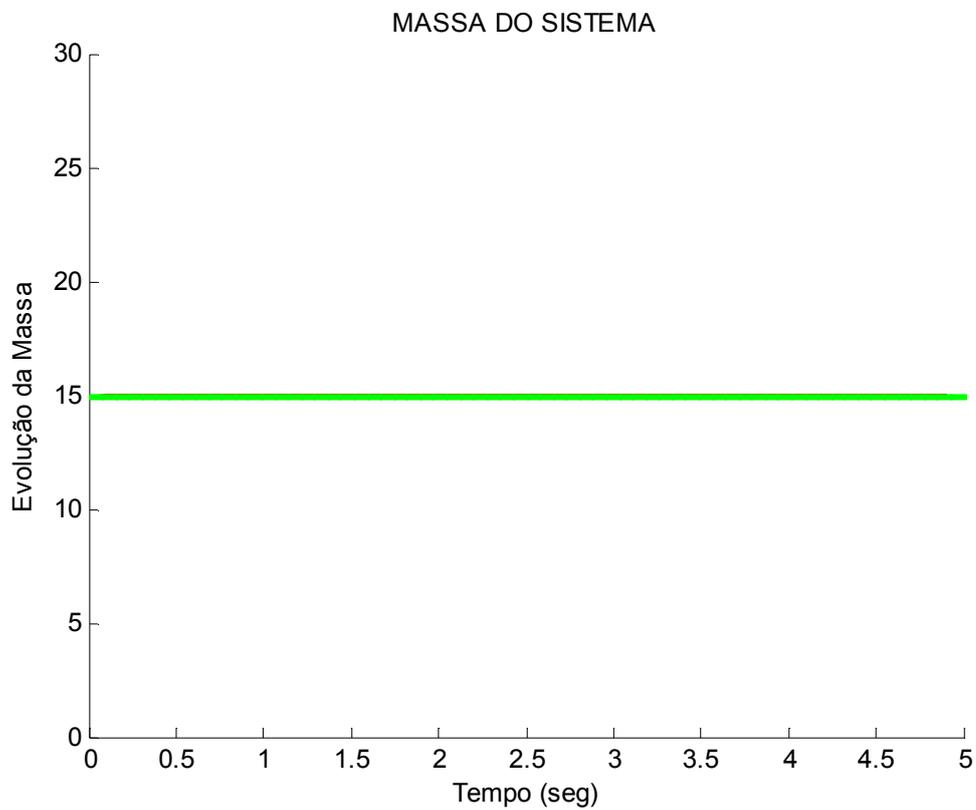
Suponha-se que a condição inicial para o estado é  $x_0 = [0 \ 0 \ 0]^T$ , o que corresponde a um valor nulo para a massa inicial. Tomando para saída  $y$  do sistema o valor da massa, isto é, fazendo  $y = [1 \ \dots \ 1]x$ , obtém-se a resposta representada na figura que se segue.



**Figura 3.1** – Evolução da massa do sistema em malha fechada para  $M^* = 15$  e  $x_0 = [0 \ 0 \ 0]^T$ .

**Exemplo 3.2:**

Considerando o mesmo sistema do exemplo anterior e ainda o valor de referência para a massa  $M^* = 15$ , mas fazendo o estado inicial  $x_0 = [5 \ 5 \ 5]^T$ , correspondente a uma massa inicial de 15, obtém-se:

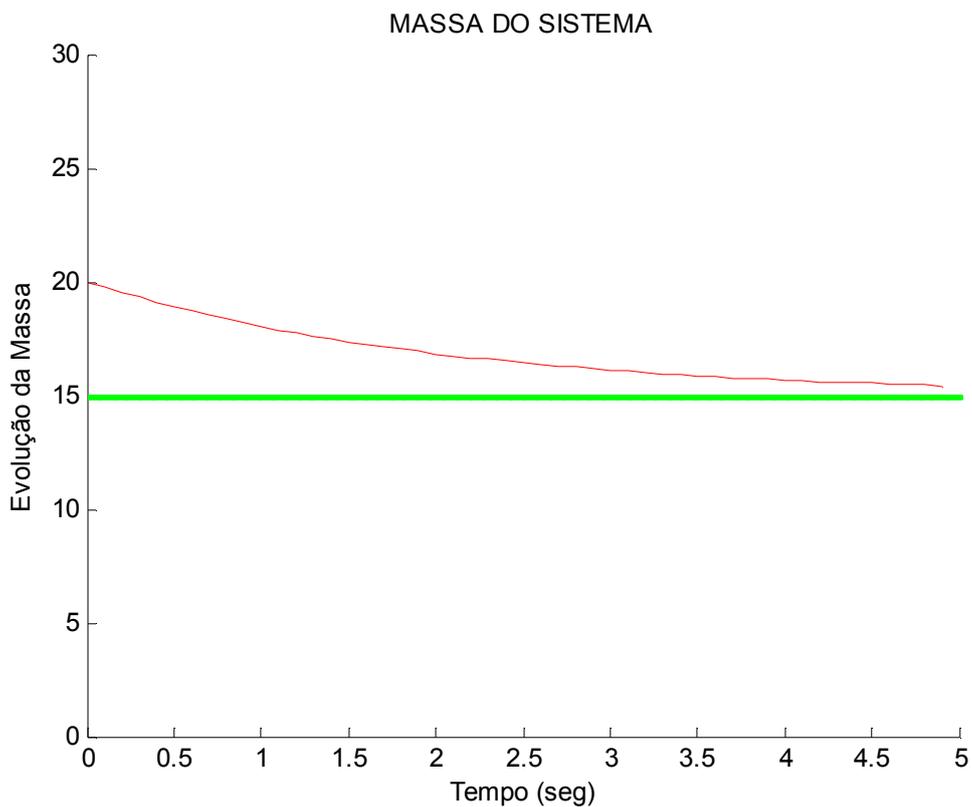


**Figura 3.2** – Evolução da massa do sistema em malha fechada para  $M^* = 15$  e  $x_0 = [5 \ 5 \ 5]^T$ .

**Exemplo 3.3:**

Considere-se, uma vez mais, o sistema do exemplo 3.1, fazendo  $M^* = 15$  e  $x_0 = [5 \ 10 \ 5]^T$ , o que corresponde a um valor inicial de 20 para a massa inicial.

A representação gráfica da situação com as novas condições apresentadas é a seguinte:



**Figura 3.3** – Evolução da massa com  $M^* = 15$  e  $x_0 = [5 \ 10 \ 5]$ .

## SISTEMAS COMPARTIMENTAIS

Os exemplos apresentados mostram que a massa do sistema em malha fechada tem uma variação monótona crescente ou decrescente conforme o seu valor inicial é menor ou maior que o valor de referência  $M^*$ , mantendo-se constante quando o valor inicial já coincide com  $M^*$ .

De facto, atendendo a que a evolução da massa no sistema em malha fechada é dada por

$$\frac{d}{dt}(M(t) - M^*) = -\lambda(M(t) - M^*) \quad (3.14)$$

verifica-se que

$$M(t) - M^* = e^{-\lambda t}(M(0) - M^*) \quad (3.15)$$

ou ainda

$$M(t) = M^* + e^{-\lambda t}(M(0) - M^*). \quad (3.16)$$

Assim, e uma vez que  $e^{-\lambda t}$  é decrescente,  $M(t)$  cresce para  $M^*$  se  $M(0) - M^* < 0$ , isto é, se  $M(0) < M^*$ ,  $M(t)$  decresce para  $M^*$  se  $M(0) - M^* > 0$ , isto é, se  $M(0) > M^*$ , e  $M(t)$  mantém-se constantemente igual a  $M^*$  se  $M(0) - M^* = 0$ , isto é,  $M(0) = M^*$ .

### 3.3. O Caso Discreto

Analogamente ao caso contínuo considere-se o sistema compartimental discreto,  $x(k+1) = A^d x(k) + B^d u(k)$ .

Mais uma vez, fixando um valor de referência  $M^*$  para a massa, pretende-se definir uma lei de controlo,  $u(k)$ , tal que  $M(k) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} M^*$ , com  $M(k) = M(x(k))$ .

Como  $M(k) = [1 \ \dots \ 1]x(k)$ , tem-se que:

$$M(k+1) = M(x(k+1)) = [1 \ \dots \ 1]x(k+1) = [1 \ \dots \ 1](A^d x(k) + B^d u(k)), \quad (3.17)$$

isto é,

$$M(k+1) = [1 \ \dots \ 1]A^d x(k) + (\sum b_i)u^d(k). \quad (3.18)$$

Agora, caso seja possível encontrar um controlo  $u(k)$  que transforme (3.18) em

$$M(k+1) - M^* = \alpha(M(k) - M^*), \quad (3.19)$$

com  $|\alpha| < 1$ , resultará que

$$\Delta M(k) = \alpha^k \Delta M(0), \quad (3.20)$$

onde  $\Delta M(k) = M(k) - M^*$ .

Consequentemente,  $\lim_{k \rightarrow \infty} \Delta M(k) = 0$ , ou seja,  $\lim_{k \rightarrow \infty} M(k) = M^*$ , como pretendido.

(3.21)

Tendo em vista obter  $u(k)$ , escreva-se (3.19) como:

$$M(k+1) = \alpha M(k) + (1-\alpha)M^* .$$

(3.22)

Igualando os segundos membros de (3.18) e (3.22), e resolvendo em ordem a  $u(k)$ , obtém-se:

$$\begin{aligned} [1 \quad \dots \quad 1] A^d x^d(k) + (\Sigma b_i)^{-1} u^d(k) &= \alpha M(x^d(k)) + (1-\alpha)M^* \\ \Leftrightarrow (\Sigma b_i)^{-1} u^d(k) &= -[1 \quad \dots \quad 1] A^d x^d(k) + \alpha M(x^d(k)) + (1-\alpha)M^* \\ \Leftrightarrow u^d(k) &= (\Sigma b_i)^{-1} [-[1 \quad \dots \quad 1] A^d x^d(k) + \alpha M(x^d(k)) + (1-\alpha)M^*] \end{aligned}$$

(3.23)

Donde, uma vez que  $M(x^d(k)) = [1 \quad \dots \quad 1] x^d(k)$ , resulta

$$u^d(k) = (\Sigma b_i)^{-1} [ [1 \quad \dots \quad 1] (\alpha I - A^d) x^d(k) + (1-\alpha)M^* ] .$$

(3.24)

Note-se que  $u^d(k) = u^d(x(k))$ , sendo (analogamente ao caso contínuo, mas com as devidas adaptações)

$$u(x) = Kx + L$$

(3.25)

$$\text{com } K = (\sum b_i)^{-1} [1 \quad \dots \quad 1] (\alpha I - A^d)$$
(3.26)

$$\text{e } L = (\sum b_i)^{-1} (1 - \alpha) M^*$$
(3.27)

O sistema em malha fechada correspondente a esta lei de controlo é dado por

$$x^d(k+1) = (A^d + B^d K) x^d(k) + B^d L$$
(3.28)

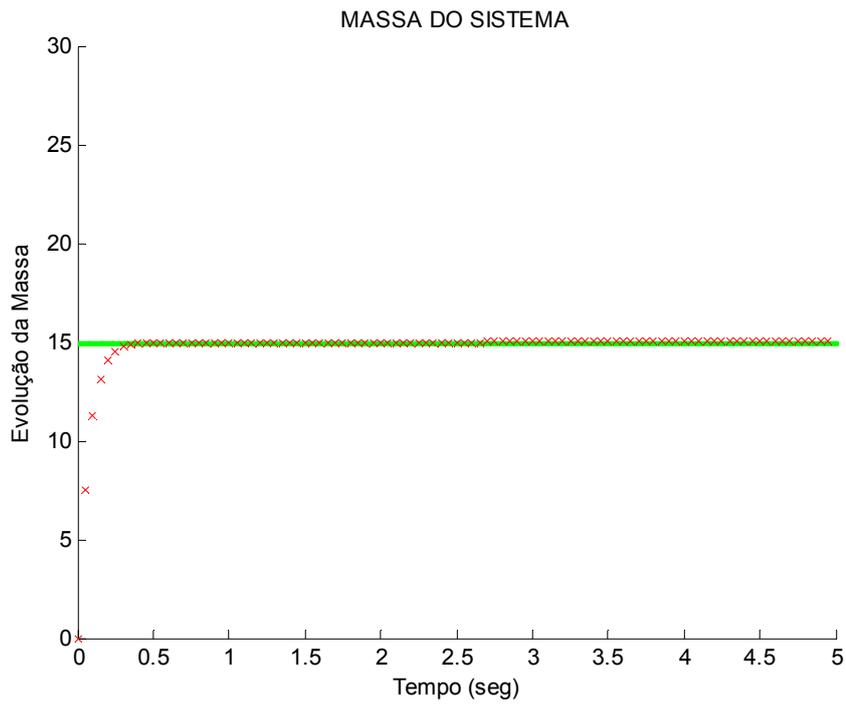
### Exemplo 3.4:

Considere-se o sistema compartimental discreto com 3 compartimentos apresentado em (2.19) e suponha-se que se pretende controlar este sistema de modo a que a sua massa total siga o valor de referência  $M^* = 15$ . Para tal aplique-se a lei de controlo (3.24) com diferentes valores do parâmetro  $\alpha$  e para diferentes valores da massa total inicial.

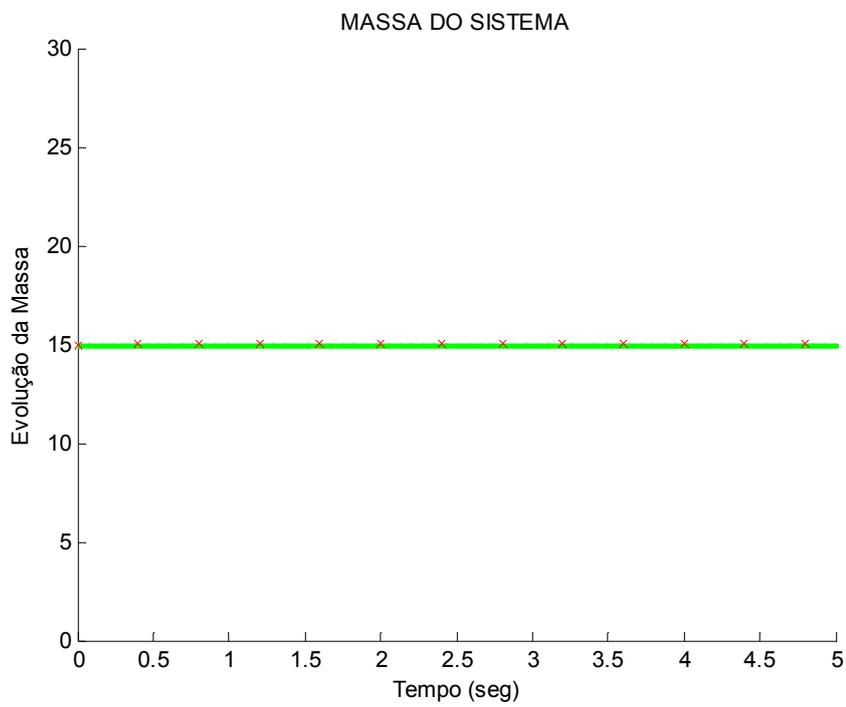
Mais concretamente, tome-se três diferentes valores para o parâmetro  $\alpha$ ,  $\alpha = 0.5 \in (0, 1)$ ,  $\alpha = -0.5 \in (-1, 0)$  e  $\alpha = 0$ , e três condições iniciais diferentes para o estado  $x_0$  do sistema,  $x_0 = [0 \quad 0 \quad 0]^T$ ,  $x_0 = [5 \quad 5 \quad 5]^T$  e  $x_0 = [5 \quad 10 \quad 5]^T$ , correspondendo cada uma destas condições iniciais a valores iniciais para a massa total do sistema, respectivamente, menores, iguais e maiores que o valor de referência.

Os gráficos das figuras representam a resposta do sistema em malha fechada para as diferentes condições iniciais apresentadas e para os diferentes valores do parâmetro  $\alpha$ .

# SISTEMAS COMPARTIMENTAIS



**Figura 3.4** – Evolução da massa com  $\alpha = 0.5$  e  $x_0 = [0 \ 0 \ 0]^T$ .



**Figura 3.5** – Evolução da massa com  $\alpha = 0.5$  e  $x_0 = [5 \ 5 \ 5]^T$ .

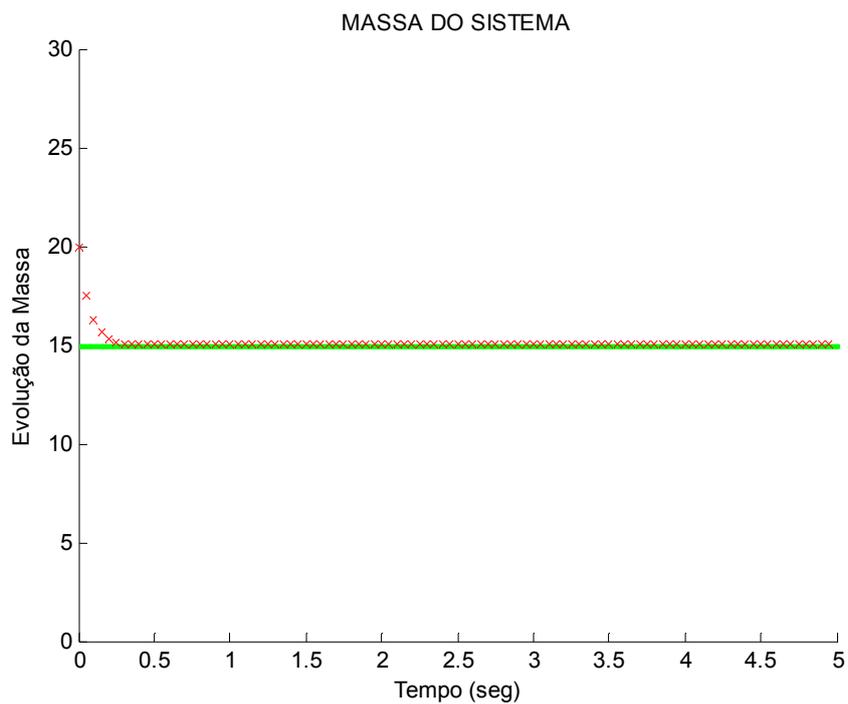


Figura 3.6 – Evolução da massa com  $\alpha = 0.5$  e  $x_0 = [5 \ 10 \ 5]^T$ .

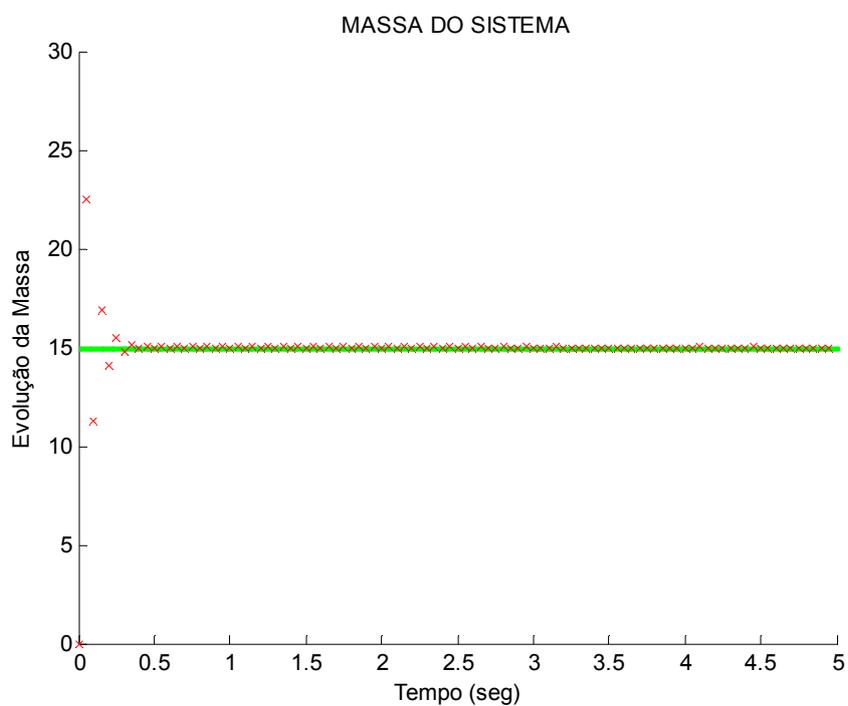
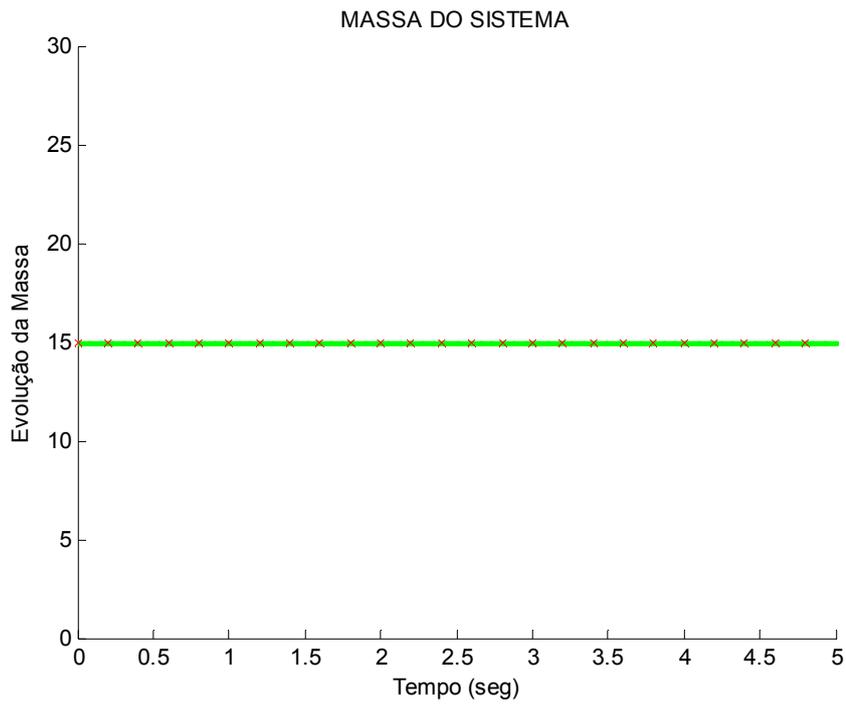
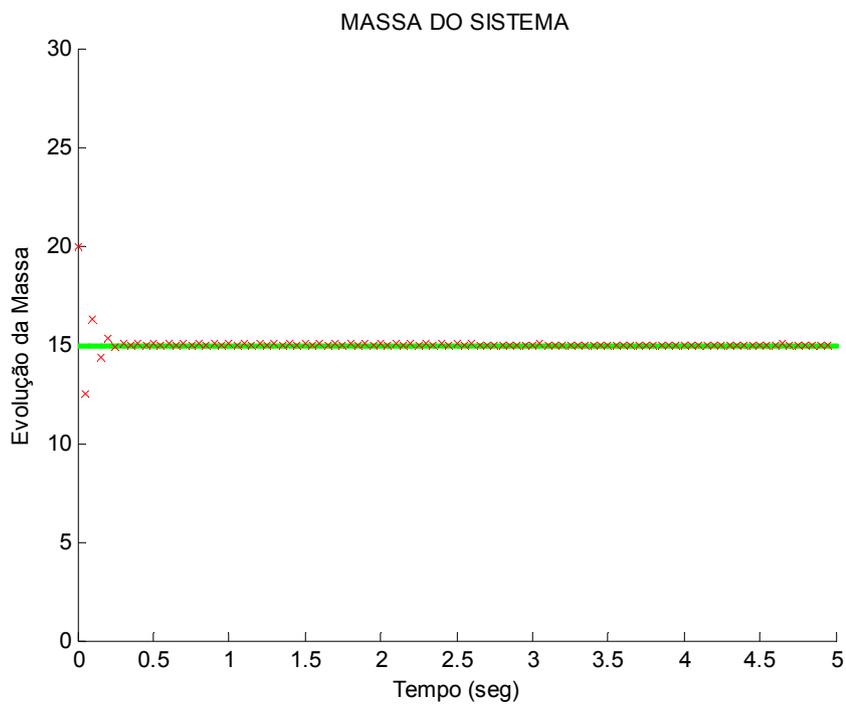


Figura 3.7 – Evolução da massa com  $\alpha = -0.5$  e  $x_0 = [0 \ 0 \ 0]^T$ .

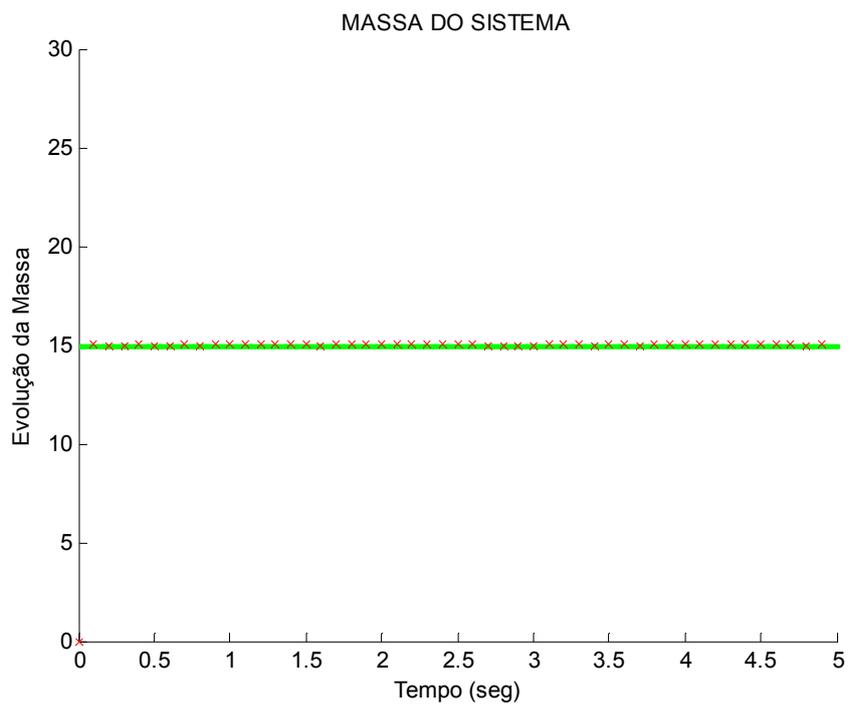
# SISTEMAS COMPARTIMENTAIS



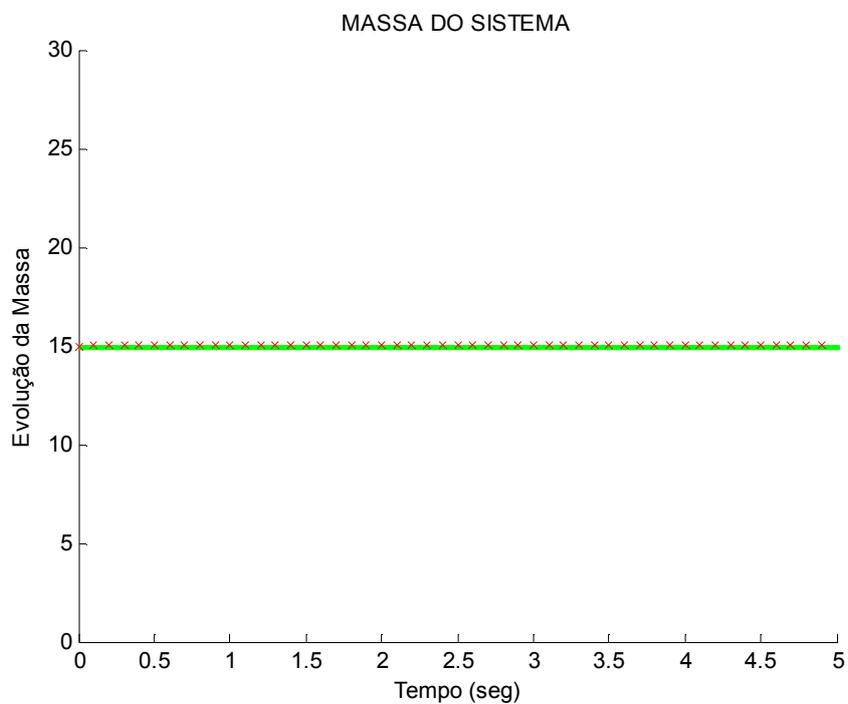
**Figura 3.8** – Evolução da massa com  $\alpha = -0.5$  e  $x_0 = [5 \ 5 \ 5]^T$ .



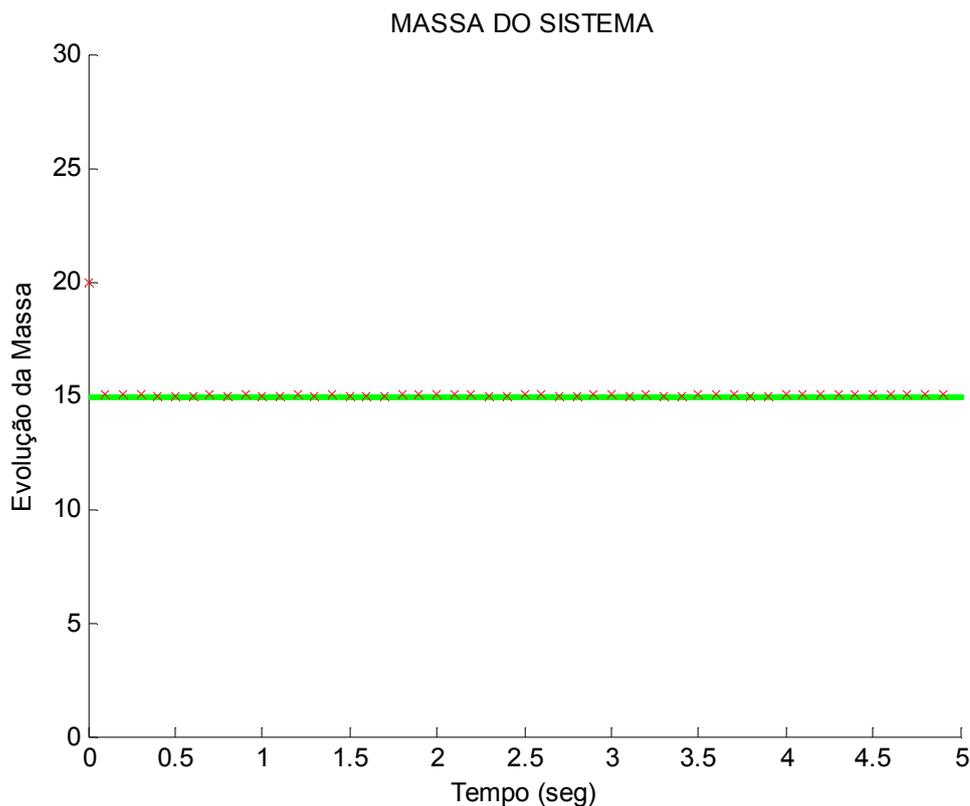
**Figura 3.9** – Evolução da massa com  $\alpha = -0.5$  e  $x_0 = [5 \ 10 \ 5]^T$ .



**Figura 3.10** – Evolução da massa com  $\alpha = 0$  e  $x_0 = [0 \ 0 \ 0]^T$ .



**Figura 3.11** – Evolução da massa com  $\alpha = 0$  e  $x_0 = [5 \ 5 \ 5]^T$ .



**Figura 3.12** – Evolução da massa com  $\alpha = 0$  e  $x_0 = [5 \ 10 \ 5]^T$ .

Note-se que para  $\alpha > 0$  a massa varia monotonamente desde o valor inicial até ao valor de referência, enquanto para  $\alpha < 0$  a massa aproxima-se do valor de referência, oscilando em torno deste.

Para  $\alpha = 0$  a convergência para o valor de referência dá-se num só passo, ou seja, a partir de  $k = 1$  a massa do sistema em malha fechada toma o valor de referência.

Estas conclusões podem facilmente ser verificadas através da análise da equação de evolução da massa em malha fechada  $M(k) = M^* + \alpha^k (M(0) - M^*)$ .

### 3.4. Controlo Amostrado

Uma vez que em muitas situações práticas não é possível aplicar a lei de controlo contínua anteriormente obtida em (3.9) para o controlo da massa (por exemplo por não se ter continuamente informação sobre o estado do sistema), torna-se necessário obter uma aproximação desta lei de controlo.

Neste sentido, supondo que estão disponíveis medições do sistema em instantes de amostragem espaçados de  $h$  unidades de tempo, aplica-se ao sistema contínuo um controlo  $u^c$  definido como

$$u^c(kh + \tau) = u^c(kh) =: u^d(k) \text{ para } k = 0, 1, \dots \text{ e } \tau \in [0, h). \quad (3.29)$$

Isto significa que o controlo do sistema contínuo é mantido constante entre dois instantes de amostragem consecutivos.

Dado um sistema contínuo

$$\dot{x}^c = A^c x^c + B^c u^c \quad (3.30)$$

com lei de controlo

$$u^c = -(\Sigma b_i^c)^{-1} \left[ [1 \quad \dots \quad 1] (\lambda I + A^c) x^c + \lambda M^* \right] \quad (3.31)$$

verifica-se que, no  $k$ -ésimo instante de amostragem, a lei de controlo do sistema é dada por

$$u^d(k) = (\Sigma b_i^c)^{-1} \left[ -[1 \quad \dots \quad 1] (\lambda I + A^c) x^d(k) + \lambda M^* \right], \quad (3.32)$$

com  $x^d(k) = x^c(kh)$ .

## SISTEMAS COMPARTIMENTAIS

Não é difícil verificar que, sob certas condições, (3.24) é uma lei de controlo da massa para o sistema discreto

$$x^d(k+1) = \hat{A}^d x^d(k) + \hat{B}^d u^d(k) \quad (3.33)$$

com  $\hat{A}^d = I + hA^c$  e  $\hat{B}^d = B^c h$ , que corresponde à discretização aproximada do sistema contínuo dado.

De facto,

$$\begin{aligned} u^d &= (\Sigma b_i^c)^{-1} \left[ -[1 \ \dots \ 1] (\lambda I + A^c) x^d + \lambda M^* \right] \\ &= (\Sigma b_i^c)^{-1} h^{-1} \left[ -[1 \ \dots \ 1] (\lambda I h + h A^c) x^d + \lambda h M^* \right] \\ &= (\Sigma \hat{b}_i^c)^{-1} h^{-1} \left[ -[1 \ \dots \ 1] (-\alpha I + \hat{A}^d) x^d + (1 - \alpha) M^* \right] \\ &= (\Sigma \hat{b}_i^d)^{-1} \left[ [1 \ \dots \ 1] (\alpha I - \hat{A}^d) x^d + (1 - \alpha) M^* \right] \end{aligned} \quad (3.34)$$

com  $\alpha = 1 - h\lambda$ .

Assim, para  $h\lambda$  tal que  $|\alpha| = |1 - h\lambda| < 1$ , (3.24) é uma lei de controlo que conduz a massa do sistema discreto ao valor  $M^*$ , uma vez que

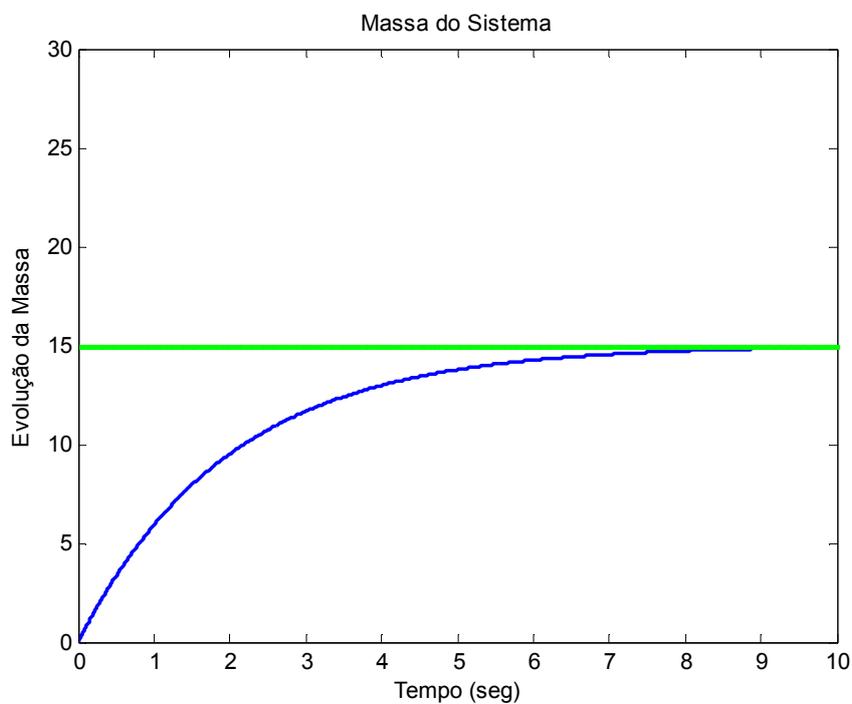
$$\begin{aligned} |1 - h\lambda| < 1 &\Leftrightarrow -1 < 1 - h\lambda < 1 \\ &\Leftrightarrow -2 < -h\lambda < 0 \\ &\Leftrightarrow 0 < h\lambda < 2 \end{aligned} \quad (3.35)$$

**Exemplo 3.5:**

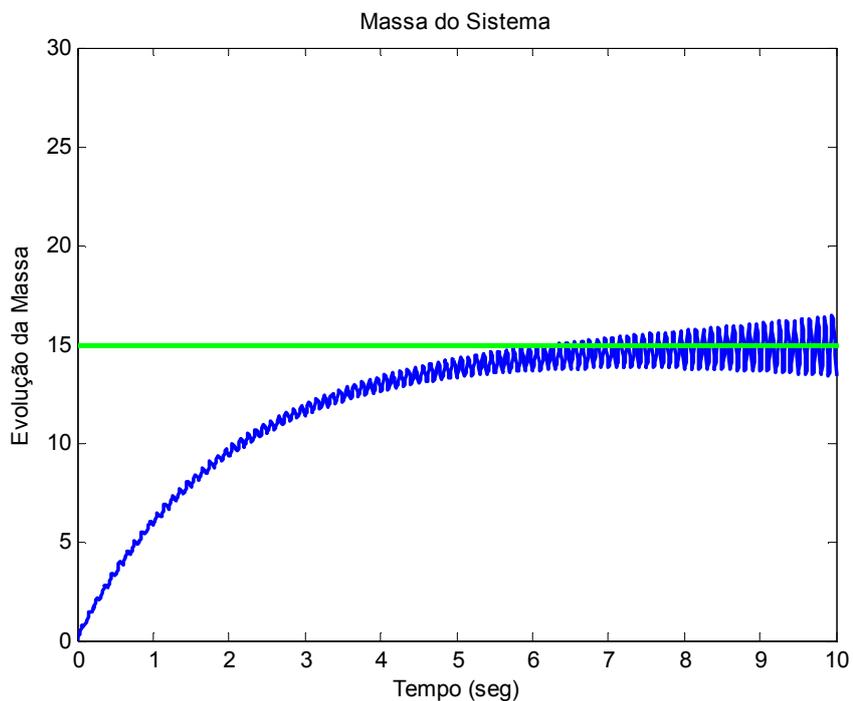
Considere-se o seguinte sistema contínuo  $\dot{x} = Ax + Bu$ ,

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -36 & 0 & 36 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 36 & -36 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u .$$

Apresenta-se a seguir duas simulações do método de controlo amostrado, onde se toma como valor de referência da massa do sistema  $M^* = 15$  e para valor inicial da mesma  $M(0) = 0$ , o que corresponde a ter a condição inicial nula para o estado do sistema, isto é,  $x_0 = [0 \ 0 \ 0]^T$ . Toma-se, ainda, o valor  $\lambda = 0.05$  na lei de controlo.



**Figura 3.13** – Evolução da massa do sistema com  $h = 0.01$ .



**Figura 3.14** – Evolução da massa do sistema com  $h = 0.05$  .

A análise dos gráficos apresentados permite concluir que, como seria de esperar, a performance da lei de controlo amostrado piora com o aumento do intervalo de amostragem.

# CONCLUSÕES

Ao longo desta tese foi feito um estudo dos sistemas compartimentais tanto em tempo contínuo como em tempo discreto.

No primeiro capítulo apresentou-se a estrutura das matrizes  $(A^c, B^c)$  de um sistema compartimental contínuo  $\dot{x} = A^c x + B^c u$ , bem como das matrizes  $(A^d, B^d)$  de um sistema compartimental discreto  $x(k+1) = A^d x(k) + B^d u(k)$ . Verificou-se que se  $A^d = I + A^c$  for uma matriz compartimental discreta, então  $A^c$  é uma matriz compartimental contínua. Se  $A^c$  for uma matriz compartimental contínua,  $A^d = I + A^c$  não é necessariamente uma matriz compartimental discreta. No entanto para valores positivos de  $h$  suficientemente pequenos, a matriz  $A^d = I + hA^c$  já é compartimental discreta.

Este resultado é essencial para o funcionamento do processo de discretização aproximada considerado no segundo capítulo, pois garante que o sistema discreto aproximado obtido a partir de um sistema compartimental contínuo é ainda um sistema compartimental desde que o intervalo de discretização  $h$  seja suficientemente pequeno. É de salientar que o processo de discretização exacta não implica qualquer limitação à amplitude do intervalo de discretização, originando sempre um sistema discreto com estrutura compartimental.

Relativamente à comparação dos dois processos de discretização, as simulações efectuadas mostram que, como seria de esperar, a discretização exacta produz melhores resultados que a aproximada, uma vez que, para entradas constantes entre dois instantes de discretização, tem uma resposta que se sobrepõe à do sistema contínuo original.

O terceiro e último capítulo consiste num estudo, simplificado, do controlo da massa dos vários tipos de sistemas apresentados, derivando-se a lei de controlo que é adequada para o seguimento de um valor de referência da massa. A análise dos sistemas em malha fechada permitiu verificar que, relativamente aos sistemas contínuos, a massa evolui monotonamente, sendo crescente ou decrescente consoante o valor de referência seja respectivamente superior ou inferior ao valor inicial da massa do sistema, já no caso dos sistemas discretos a massa evolui no sentido de tomar o valor de referência mas esta evolução nem sempre é uma evolução monótona.

A finalizar este capítulo, foi apresentado um estudo do controlo amostrado em que a lei de controlo foi construída com base na informação nos vários instantes de amostragem, sendo mantida constante entre duas amostragens consecutivas. Relativamente aos exemplos apresentados verificou-se que a qualidade da lei de controlo piorou quando se procedeu ao aumento do intervalo de amostragem.

As simulações apresentadas nos exemplos foram executadas em MATLAB.

# BIBLIOGRAFIA

- [1] Bastin, C., Provost, A., “Feedback stabilisation with positive control of dissipative compartmental systems”, *Proceeding of 15th International Symposium on Mathematical Theory of Networks and Systems, MTNS 2002*, Notre-Dame, USA, 2002.
  
- [2] Benvenuti, L., Farina, L., “Eigenvalue regions for positive systems”, *Systems & Control Letters*, 51, 2003, pp. 325-330.
  
- [3] Chellaboina, V., Haddad, W., Bailey, J., Ramakrishnan, J., “On monotonicity of solutions of discrete-time nonnegative and compartmental dynamical systems”, *Advances in Difference Equations*, 3, 2004, pp. 261-271.
  
- [4] Godfrey, K., *Compartmental Models and their Application*, Academic Press,
- [5] UK, 1983.
  
- [6] Haddad, W., Chellaboina, V., August, E., “Stability and dissipativity theory for discrete-time nonnegative and compartmental dynamical systems”, *Proceeding of 40th IEEE Conference on Decision and Control, Orlando, Florida, USA*, 2001, pp. 4236-4241.
  
- [7] Hof, J., *System theory and system identification of compartmental systems*, PhD Thesis, University Library, RUG, Groningen, Netherlands, 1996.
  
- [8] Magalhães, H., Mendonça, T., Rocha, P., “Identification and control of positive and compartmental systems applied to neuromuscular blockade”, *Proceeding of 16th IFAC World Congress*, Prague, Check Republic, 2005.
  
- [9] Sousa, C., Mendonça, T., Rocha, P., “Control of uncertain compartmental systems”, *Proceeding of the 15th Mediterranean Conference on Control and Automation*, Athens, Greece, 2007, pp. 248-252.