

Contributos históricos para a compreensão de conceitos relativos a medição

Fátima Regina Jorge¹, Isabel Cabrita², Fátima Paixão³

^{1,3}Escola Superior de Educação, Instituto Politécnico de Castelo Branco,

²Departamento de Didáctica e Tecnologia Educativa, Universidade de Aveiro

¹frjorge@mail.ese.ipcb.pt, ² icabrita@dte.ua.pt, ³ fatimapaixao@mail.ese.ipcb.pt

INTRODUÇÃO

Henri Lebesgue afirmava em 1954 na sua obra intitulada *Sur la Mesure des Grandeurs*:

Il n'y a pas de sujet plus fondamental: la mesure des grandeurs est le point de départ de toutes les applications des mathématiques et comme les mathématiques appliquées ont évidemment précédé les mathématiques pures, la logique mathématique, on imagine d'ordinaire que la mesure des aires et des volumes est à l'origine de la Géométrie; d'autre part, cette mesure fournit le nombre, c'est-à-dire l'objet même de l'Analyse. (Lebesgue, 1954, p. 2)

Este estatuto privilegiado do tema Grandezas e Medidas é reconhecido em documentos curriculares oficiais portugueses. Os desenvolvimentos tecnológicos que lhe estão associados, as conexões que permite estabelecer com outros ramos da matemática e com outras disciplinas, bem como as potencialidades deste tema no desenvolvimento de ideias matemáticas, na capacidade de formulação e resolução de problemas são algumas das razões apontadas para a importância que assume no currículo do ensino básico o desenvolvimento de competências associadas à Medida. A par destes aspectos é reconhecida a riqueza histórica do tema, o estímulo positivo que pode despertar no aluno o conhecimento do contexto histórico em que determinadas questões matemáticas surgiram, nomeadamente o estudo e a compreensão de questões relacionadas com a história das unidades de medida standard tais como as do sistema métrico ou de sistemas de medida usadas noutras culturas (Abrantes, Serrazina, Oliveira, 1999).

Porém e apesar de todas as vantagens que se atribuem ao conhecimento e à compreensão de questões relacionadas com a história das unidades de medida (ME, 2001; Abrantes et al, 1999; ME, 1991), esta orientação curricular é ignorada, de uma forma geral, na prática pedagógica (APM, 1998). De entre as principais razões, refere-se

a escassez de materiais didácticos adequados, destaca-se a falta de conhecimentos históricos dos professores e, conseqüentemente, aponta-se a necessidade de formação dos professores neste domínio. Essa formação deve perseguir três grandes objectivos complementares: (1) conhecer e apreciar o passado da matemática (função informativa); (2) aprofundar a própria compreensão da forma como se constrói o conhecimento matemático (função epistemológica); (3) incorporar, reflectida e adequadamente, material histórico no seu ensino (função didáctica) (Schubring et al., 2000).

O trabalho que aqui se apresenta integra-se numa investigação, ainda a decorrer, no âmbito da formação de professores de matemática para os seis primeiros anos de escolaridade (1º e 2º ciclos do ensino básico). Em linhas muito gerais, com essa investigação pretende-se desenvolver e avaliar o impacte de um programa de formação de futuros professores de matemática ancorado nas implicações didácticas das perspectivas da filosofia actual da Matemática e da Ciência, no desenvolvimento de competências para se abordar a matemática de forma inovadora. Privilegia-se a implementação de estratégias didácticas centradas na história da matemática que valorizem a face social e humana da construção do conhecimento matemático, a resolução de problemas e o estabelecimento de conexões dentro e fora da própria matemática.

Após um breve enquadramento teórico e apresentação da metodologia utilizada, caracteriza-se, em linhas gerais, esta fase do estudo. De seguida apresentam-se os resultados, bem como algumas conclusões.

ENQUADRAMENTO TEÓRICO DO ESTUDO

As profundas alterações ocorridas na filosofia da ciência a partir da década de 70 do século XX provocaram a emergência de novas correntes ao nível da filosofia da ciência e uma aproximação da filosofia da matemática à filosofia da ciência pós-kuhniana, nomeadamente no que concerne à relevância epistemológica da história e da construção do conhecimento matemático (Hersh, 1994; Tymockzo, 1994; Ernest, 1994; Schubring, 1997).

A concepção do saber matemático como fruto de um processo histórico e cultural e que abrange a compreensão da existência de diferenças epistemológicas e conceptuais do desenvolvimento do conhecimento matemático, em culturas e sociedades diferentes, tem importantes implicações didácticas. De facto, se se

considerar que os *saberes matemáticos são saberes rectificad*os, *históricos, construídos para resolver problemas postos à humanidade (...)* o ensino das matemáticas consiste em pôr o aluno face a problemas (...) A aula de matemática é uma aula onde se fabrica matemática, que já não é reduzida a palavras e frases, mas sim o resultado de uma actividade intelectual (Barbin, 1994, p. 36).

A primeira questão que importa discutir prende-se com as razões justificativas da importância de incluir história da matemática nos programas de formação de futuros professores de matemática.

Vários autores salientam que a introdução de uma perspectiva histórica na formação de professores de matemática pode conduzir a uma mudança efectiva das práticas de ensino ou, pelo menos, a uma modificação da forma como estes concebem o ensino da matemática (Barbin, 1994, 2000). Uma análise qualitativa de nove estudos de casos relativos à integração (explícita ou implícita) da história da matemática em aulas do ensino secundário francês aponta, claramente, para mudanças efectivas nas atitudes dos professores e dos alunos. Nomeadamente, alguns dos professores descrevem mudanças na sua atitude em relação ao ensino e uma nova compreensão da natureza da matemática e outros reconhecem que o enriquecimento cultural teve importantes consequências na forma como ensinam e também na forma como encaram o papel do aluno (Barbin, 2000). Na base dessas mudanças também podem ser incluídos o conhecimento das motivações que levaram à emergência de um novo conceito ou teoria, à consciencialização da evolução gradual que está por trás de um resultado aparentemente simples, ou mesmo o manancial de recursos didácticos proporcionado pelo conhecimento histórico (Tzanakis et al., 2000). Destaca-se também como particularmente importante, no conjunto de argumentos aduzidos por matemáticos e educadores matemáticos, a aproximação cultural à matemática propiciada pela história da matemática. A constatação de que a matemática é um produto da actividade humana e que, por isso, se encontra ligada a muitas outras áreas do saber está na base da defesa de que a aproximação cultural à matemática favorece o contexto para a interdisciplinaridade (Barbin, 1994; Grugnetti, 2000; Swetz, 2000).

Por outro lado, ainda, a história proporciona o contacto com diferentes abordagens de um mesmo tópico e com diferentes estratégias de resolução de um problema que permitem um outro olhar sobre as dificuldades de aprendizagem e sobre os erros cometidos pelos alunos (os quais, em muitos casos, são semelhantes aos encontrados na história do tópico) (Avital, 1995; Bruckheimer e Arcavi, 2000; Barbin,

1994; Friedelmeyer, 1991, citado em Barbin, 2000; Katz et al., 2000). A este propósito Katz et al. (2000) alertam para o facto de não existir uma transferência directa da história para o ensino e de ser necessário a confrontação cuidadosa entre as situações didáctica e histórica, entrando em linha de conta com as condições e constrangimentos próprios dos ambientes histórico e da sala de aula.

Schubring, na linha do pensamento de Otto Toeplitz, defende que a compreensão de um conceito pode ser atingida fazendo reviver na sala de aula a génese desse conceito, não através da apresentação detalhada do desenvolvimento histórico do conceito, mas apresentando o verdadeiro sentido e cerne de cada conceito, com base numa análise histórica que sublinhe os problemas e factos geradores do conceito (Toeplitz, citado em Schubring, 1997, p. 158). Deste modo, a história da matemática na formação de professores tem como função contribuir para desenvolver o meta-saber dos futuros professores, permitindo-lhes uma melhor organização dos conteúdos para as suas futuras aulas e a integração e a interpretação das contribuições dos alunos. Porém, o desenvolvimento, nos futuros professores, de um meta-saber conceptual e histórico deve articular-se com a história e filosofia contemporânea da matemática (Schubring, 1997, p. 158).

Bruckheimer e Arcavi (2000), investigadores com uma larga experiência na integração da história da matemática na formação de professores, em particular de professores da escolaridade básica, defendem que essa integração deve ser motivadora e relevante para os participantes e, como tal, deve incidir em tópicos curriculares centrais e ter potenciais aplicações na sala de aula dos níveis de ensino onde é suposto os docentes exercerem a docência. Deste modo, não só se aprofunda a compreensão dos participantes e se detectam possíveis concepções alternativas relativamente a esses tópicos como, ao nível da didáctica, se podem discutir diferentes abordagens do tópico e consciencializar os futuros professores para erros e dificuldades dos alunos.

Entre os frequentes argumentos práticos contra a integração da história da matemática no ensino desta disciplina, encontra-se a falta de tempo para cumprir os programas e a não avaliação dessa componente (Buhler, 1990, citado em Tzanakis et al., 2000, p. 203). Ora, a história da matemática e livros antigos de matemática proporcionam um conjunto muito amplo de problemas matemáticos que podem ser muito estimulantes e muito produtivos quer para professores, quer para alunos (Tzanakis et al., 2000; Swetz, 2000), ultrapassando-se, assim, as duas objecções referidas. Esses problemas, que passaremos a designar por *problemas históricos*, podem

desempenhar um papel fundamental na formação de professores, pois, como afirma Swetz, permitem-nos tocar o passado mas também esclarecer o presente (1995, 2000). Constituindo-se como fontes primárias do conhecimento matemático, que reflectem frequentemente as necessidades imediatas das sociedades e o papel da matemática na vida quotidiana, imprimem à disciplina um sentido de continuidade temporal e proporcionam novas visões sobre tópicos curriculares actuais. Além disso, através deles, é possível desenvolver competências de resolução de problemas e aperfeiçoar aptidões matemáticas (Swetz 2000, Tzanakis et al., 2000).

METODOLOGIA

O estudo aqui relatado resulta de um trabalho empírico realizado entre Janeiro e Junho de 2005. A metodologia adoptada é de natureza qualitativa do tipo interpretativo. Participaram no estudo sete futuras professoras de matemática dos 1º e 2º ciclos da escolaridade básica. No ano lectivo 2004/2005 estavam inscritas na disciplina de Geometria I do 3º ano do Curso de Professores do Ensino Básico, variante de Matemática e Ciências da Natureza, 15 alunas, 11 das quais frequentavam a disciplina pela primeira vez. Destas últimas, apenas 7 frequentavam com regularidade as aulas da disciplina. A frequência regular das aulas, a frequência da disciplina pela primeira vez e a frequência das disciplinas de Geometria II e Prática Pedagógica (no 1º ciclo do ensino básico) no 2º semestre desse ano lectivo foram os critérios adoptados para seleccionar as participantes no estudo. A investigadora teve um papel de investigadora-participante, dinamizando, em particular, dez seminários no âmbito das disciplinas curriculares semestrais de Geometria I e Geometria II.

A recolha de dados baseou-se em notas de campo dos seminários desenvolvidos com as futuras professoras no âmbito das duas disciplinas referidas, em registos escritos das actividades desenvolvidas nos seminários, essencialmente das resoluções dos problemas históricos propostos e em entrevistas individuais realizadas a cada uma das sete futuras professoras no final do ano lectivo (Junho de 2005). As entrevistas, de carácter semi-estruturado, foram audiogravadas e transcritas. Entre outros aspectos, foram formuladas questões com a finalidade de recolher a opinião das futuras professoras relativamente aos problemas históricos propostos e resolvidos em Geometria (I e II). Em particular, tinha-se como objectivo recolher opinião sobre a

pertinência da resolução de problemas históricos na formação científica e didática das participantes.

A avaliação da resolução dos problemas baseia-se no registo escrito, na folha distribuída para esse fim em cada uma das tarefas propostas, da estratégia usada pela futura professora para determinar a solução que a satisfaça e simultaneamente satisfaça o leitor, tal como defendido por Kilpatrick (1992, citado em Graça, 2003).

A análise dos primeiros dados resultantes das resoluções dos problemas pelas futuras professoras proporcionou a definição de categorias de análise, definidas recursivamente e modeladas pelo quadro teórico de referência.

Descrição do estudo

O estudo foca-se num tema programático, "Grandezas e Medidas", central e relevante, transversal a todos os ciclos de escolaridade e de reconhecido valor social, histórico, cultural e epistemológico que pode contribuir para a construção de conhecimentos mais consistentes sobre a matemática, bem como para o desenvolvimento de competências de resolução de problemas e de estabelecimento de conexões dentro da própria matemática e fora dela.

A reflexão sobre a abordagem de conteúdos matemáticos ligados à medida, num programa de formação de professores de matemática para qualquer nível de ensino, mas em particular para a escolaridade básica, torna-se particularmente relevante. Além dos aspectos referidos, a investigação e a literatura têm identificado inúmeros problemas ao nível do conhecimento matemático dos professores, nomeadamente a incompreensão de noções e procedimentos fundamentais relacionados com a medição, nomeadamente ao nível do conceito de área e do uso apropriado de unidades de medida (Wu 1999, 2004; CBMS, 2001). Na base dessas e de muitas outras dificuldades evidenciadas pela investigação parece estar a ausência de compreensão de conceitos e processos mas também não se deve deixar de ter em conta a crença, tão arraigada entre a população em geral, de que os tópicos curriculares da matemática escolar e, em particular, os relativos a grandezas e medidas são tão básicos que deve ser fácil ensiná-los. Aliás, o relatório *The Mathematical Education of Teachers* publicado em 2001 pelo *Conference Board of Mathematical Sciences*, que engloba dezasseis associações de matemática ou educação matemática norte americanas e que, na opinião de Veloso (2004), é um documento incontornável em qualquer estudo que envolva a formação inicial de professores, refere

também esta crença como uma realidade norte-americana e lembra, ainda, que está também muito viva a crença de que os professores desses níveis aprendem a matemática que vão ensinar durante o seu próprio percurso escolar. Nesse sentido, o relatório desafia os matemáticos, formadores de futuros professores de matemática, a estabelecerem conexões apropriadas entre os conteúdos das suas disciplinas e os conteúdos da matemática escolar (CBMS, 2001).

Referindo-se em concreto à formação em Geometria e Medida, entre muitas outras considerações e recomendações, pode-se ler:

The different ways in which we measure attributes of geometric shapes is only one aspect of the study of measurement. The fact that we have found ways to quantify and measure so many aspects of our lives of work and of play is to little appreciated (...) Although teachers do not need to know the specifics of each of these ways of measuring, they should reflect on the role of measurement in advancing our knowledge. (...) prospective teachers can benefit from developing their own units for measuring quantities (...) to gain an appreciation of difficulties involved in developing measures” (CBMS, chapter 8, 2001).

Em função do exposto, o estudo articula-se com o Plano Curricular da Licenciatura de Professores do Ensino Básico, Variante de Matemática e Ciências da Natureza de uma Escola Superior de Educação. No âmbito das disciplinas de Geometria e dos conteúdos relacionados com a medição de comprimentos, áreas e volumes, foi proposto um conjunto de tarefas que incluía um conjunto de problemas históricos envolvendo antigas unidades e sistemas de unidades. Através das tarefas pretendia-se, em particular, desenvolver a compreensão, de futuras professores de matemática do 1º e 2º ciclos do ensino básico, de conceitos e processos centrais da medição e a apreciação do papel da matemática na sociedade e na cultura.

Relativamente aos problemas que constituíram a parte central do trabalho desenvolvido, houve a preocupação de fazer recair a escolha sobre problemas envolvendo tópicos dos níveis de ensino onde as participantes exercerão futuramente a docência e que permitissem explorar algumas ideias relacionadas com a medição. Assim, optou-se por problemas que pudessem ser integrados pelas participantes nas suas práticas de ensino no 1º ou 2º ciclos do ensino básico.

Tratando-se de problemas envolvendo conhecimentos elementares não se considerou relevante a confrontação com o processo de resolução do autor (aliás, nalguns casos não houve diferenças significativas entre os processos seguidos nas obras originais e as estratégias seguidas pelas futuras professoras).

Um exemplo de problema histórico utilizado

Considerando que os livros de Aritmética publicados em Portugal entre 1519 e 1679¹, mais concretamente as obras *Tratado da Prática d'Arismética* de Gaspar Nicolas (alvo de 11 edições entre 1519 e 1679), *Arte de Arismética* de Bento Fernandes (editada em 1555) e *Flor da Arismética Necessária* de Afonso Guiral e Pacheco (editada em 1624), são muito ricos em problemas envolvendo antigas unidades de medida, optou-se por seleccionar e/ou adaptar alguns problemas constantes dessas três obras².

Procurando ser fiéis aos enunciados originais, no caso das duas últimas obras referidas, baseámo-nos nas transcrições de Marques de Almeida (1998b). Relativamente à obra de Gaspar Nicolas, os problemas propostos foram adaptados a partir dos enunciados originais da edição fac-similada da Livraria Civilização (1963, fol 80 a 94v). Em todas as adaptações efectuadas teve-se a preocupação de manter, tanto quanto possível o sentido do enunciado original, isto é, manter a proximidade com a fonte primária. Como afirmam Bruckheimer e Arcavi (2000) *os símbolos, a linguagem e a abordagem das fontes primárias não só proporcionam um sabor genuíno do passado, como também constituem uma oportunidade para alguns encontros não mediados com a verdadeira substância do passado* (p. 136).

Em 1624, Afonso de Villafanhe Guiral e Pacheco, homem de negócios, comerciante na cidade do Porto, natural da vila beirã de Almeida e, segundo afirma Marques de Almeida (1994a, p.89 e 90), um dos maiores peritos em aritmética do seu tempo, escrevia num livro de Aritmética intitulado *Flor da Arismética Necessária*:

O côvado tem três palmos. Excepto alguns panos baixos que chamam de varas, que se medem por varas de cinco palmos. O pano da Índia de linho e outras coisas de tecer se vendem por vara dos ditos cinco palmos, que chamam portugueses que é a vara e quarta castelhana. De maneira que nas sedas e panos que vêm de Castela se ganha na medida

¹ Todas estas obras, a exemplo de outros textos de aritmética da época, reflectem a realidade social, económica e mental do seu tempo e, muito particularmente, a experiência da vida dos negócios e as necessidades dos mercadores. Crê-se, aliás, que os destinatários principais destes textos eram aprendizes ou mesmo homens de negócios (Marques de Almeida, 1994b).

² Estas obras não fazem qualquer referência a questões teóricas da matemática, limitando-se a apresentar problemas que discutem e reflectem necessidades da época a que se reportam esses problemas e, por isso, proporcionam excelentes enquadramentos da realidade social e económica da época.

33% e nas mercadorias que deste Reino vão para Castela se ganha 25%. (Guiral e Pacheco, transcrito em Marques de Almeida, Vol I, p. 230)

Importa começar por salientar que a transacção comercial descrita no texto se referia à compra e venda de tecidos e, portanto, envolvia a medição de comprimentos. Portugal vendia a Castela panos conhecidos por panos baixos ou portugueses (linho da Índia e panos de tear) e comprava a esse Reino seda e panos finos.

Várias são as unidades de medida de comprimento referidas no texto: vara, côvado, quarta e palmo. Rapidamente se percebe que a vara portuguesa é diferente da vara castelhana, pois o autor informa-nos que *a vara é ... a vara e quarta castelhana* e que, portanto, os dois reinos usavam unidades com o mesmo nome mas com comprimentos diferentes. Estabeleça-se, pois, a relação entre as várias unidades de comprimento referidas no texto. As afirmações *o côvado tem três palmos* e *varas de cinco palmos* permitem, desde logo, identificar a vara, o côvado e o palmo como unidades de comprimento e esta última como um divisor das duas primeiras.

Centre-se agora a atenção na informação: *a vara dos ditos cinco palmos ... é a vara e quarta castelhana*. Como a própria designação indica, o termo quarta refere-se a um divisor/submúltiplo da vara, mais concretamente à quarta parte da vara. Ora, sendo a vara portuguesa igual a uma vara e quarta castelhana, é imediato concluir que a vara castelhana é menor que a vara portuguesa ou, mais concretamente, a vara portuguesa é igual a $\frac{5}{4}$ da vara castelhana, isto é, a vara castelhana é igual a $\frac{4}{5}$ da correspondente unidade portuguesa, ou seja, exprimindo-a em palmos, igual a 4 palmos (figura 1).

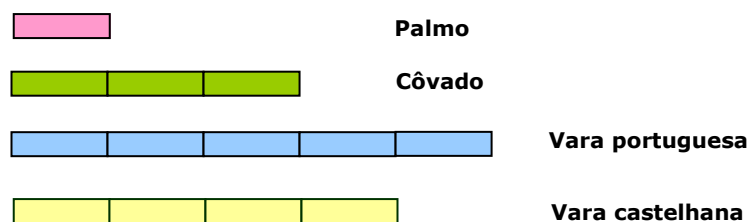


Figura 1 – Unidades de medida de comprimento referidas no texto

Mas outras informações do texto merecem atenção, nomeadamente a interpretação das palavras de Guiral e Pacheco quando este afirma: *de maneira que nas sedas e panos que vêm de Castela se ganha na medida 33% e nas mercadorias que deste Reino vão para Castela se ganha 25%*.

Procure-se pois descobrir porque motivo o mercador português tem sempre lucro na transacção. Note-se que, não havendo no texto qualquer referência a unidades monetárias, numa primeira abordagem do problema deve-se procurar outras explicações que não as relacionadas com o aumento do preço da mercadoria na revenda.

Diz-nos Guiral e Pacheco que: *nas sedas e panos que vêm de Castela se ganha na medida 33%*. A expressão *ganha na medida* sugere-nos a hipótese de os panos de seda comprados em Castela numa unidade, serem revendidos em Portugal usando uma unidade diferente.

Partindo também da hipótese de que a unidade de medida usada em Castela para medir esses panos é vara castelhana, para que o mercador tenha lucro na transacção não é possível que, na revenda do pano em Portugal, o faça em varas portuguesas, pois esta unidade é maior que a correspondente de Castela.

Porém, se esses tecidos forem vendidos em côvados, e sabendo que o côvado é $\frac{3}{4}$ da vara de Castela, é imediato concluir que uma vara castelhana corresponde a um côvado e um terço de côvado. Isto é, por cada vara castelhana de pano, faz um côvado e sobra-lhe $\frac{1}{3}$ de côvado, isto é, 33% do tecido. O lucro a que Guiral e Pacheco se refere é pois um lucro em pano (Figura 2).

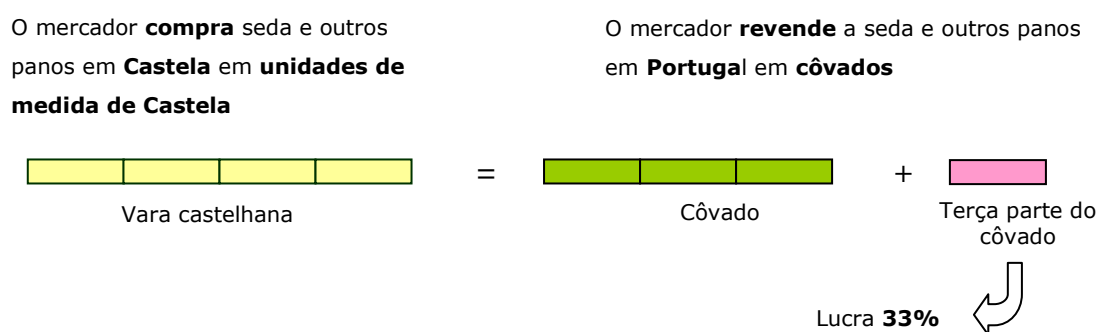


Figura 2 – Lucro na transacção Castela – Portugal

Veja-se, agora, como explicar o lucro do mercador português quando vende panos de linho e de tear a Castela. Trata-se de um problema um pouco mais difícil de perceber pois, numa transacção comercial em que a vara portuguesa é maior que a correspondente de Castela, seria de esperar que, raciocinando de forma análoga ao que se fez acima, o lucro fosse, agora, do mercador de Castela. Porém, Guiral e Pacheco é taxativo quando afirma *nas mercadorias que deste Reino vão para Castela se ganha 25%*.

Ora, só é possível o lucro de 25% se o mercador, que compra em Portugal panos de linho e de tear medidos em varas portuguesas, quando os transacciona com Castela, o fizer numa unidade menor que a portuguesa. Teste-se a hipótese de o fazer em varas de Castela.

De acordo com a nossa conjectura, 4 varas portuguesas de pano medem 5 varas de Castela, isto é, por cada 4 varas de pano o mercador faz mais uma 1 vara de pano em unidades de Castela. Visto de outro modo, como $1 \text{ vara portuguesa} = \frac{5}{4} \text{ vara castelhana}$ e $\frac{5}{4} = 1 + \frac{1}{4}$, cada unidade linear de Portugal é equivalente a uma unidade de Castela mais $\frac{1}{4}$ dessa unidade. Isto é, por cada vara portuguesa de pano o mercador faz uma vara castelhana e sobra-lhe $\frac{1}{4}$ ou 25% do tecido. Assim se pode explicar a afirmação *nas mercadorias que deste Reino vão para Castela se ganha 25%* (Figura 3).

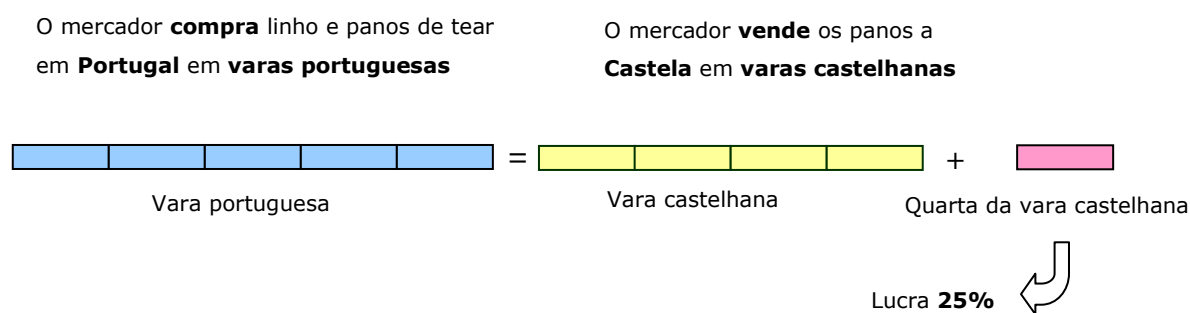


Figura 3 – Lucro na transacção Castela – Portugal

Considerando que a exploração desta situação pode permitir desenvolver a compreensão de vários aspectos relacionados com a medição de comprimentos, o estabelecimento de relações entre a expressão da medição e o conceito de número, a competência de resolução de problemas e a consciencialização do papel da matemática na sociedade, propôs-se às futuras professoras, após a leitura do mesmo, a sua exploração orientada pelas seguintes questões.

1. Identifique no texto as unidades de medidas referidas por Guiral e Pacheco. A que grandeza respeitam essas unidades?
2. Estabeleça a equivalência entre as unidades identificadas.
3. Interprete, do ponto de vista comercial, a afirmação: *De maneira que nas sedas e panos que vêm de Castela se ganha na medida 33% e nas mercadorias que deste Reino vão para Castela se ganha 25%*.

ANÁLISE DE ALGUNS DADOS

Embora o problema que se apresentou atrás não tenha sido o primeiro proposto às futuras professoras, foi o primeiro que se propôs envolvendo unidades de comprimento.

Importa começar por salientar que, apesar da turma ser pouco numerosa, era muito clara e evidente, na aula, a existência de três pequenos grupos (dois deles formados por duas e o outro por três alunas), nos quais se integravam os outros elementos que não frequentavam com regularidade as aulas. Deste modo, durante a realização das tarefas propostas, as futuras professoras tinham por hábito dialogar apenas com a colega do lado, com a qual formavam um grupo de trabalho, solicitando o professor sempre que tinham dificuldades. Nesse sentido, durante o período em que decorreu este estudo, a investigadora/professora, em vez de responder às questões individuais que lhe eram colocadas, procurou estimular as participantes a comunicarem e a discutirem com a turma as suas dúvidas e os seus raciocínios. De um modo geral, pode afirmar-se que, gradualmente, a comunicação oral se impôs como uma norma de trabalho na sala de aula e que a aceitação colectiva da correcção de um raciocínio passou a funcionar como critério de validação do mesmo. Contudo, é de ressaltar que duas das futuras professoras (DB e AA) se salientaram globalmente ao nível dos raciocínios apresentados e das estratégias seguidas na resolução dos problemas.

A primeira dificuldade identificada relacionou-se com a interpretação do texto que, como referimos, se manteve fiel à transcrição do original feita por Marques de Almeida. Dúvidas relacionadas com o tipo de panos referidos no texto, nomeadamente com a identificação dos designados *panos baixos* e os *panos portugueses* permitiram promover alguma comunicação oral entre as alunas. Após a aceitação dos dois termos como sinónimos e de uma nova leitura do texto, cada grupo debruçou-se sobre as questões que acompanhavam o texto.

Não se detectando quaisquer dificuldades na identificação das unidades referidas no texto, constatou-se, posteriormente, na análise das fichas de resolução, que os três elementos de um dos grupos não as identificaram como explicitamente associadas à grandeza comprimento, apesar de na aula não terem manifestado quaisquer dúvidas a esse respeito.

Relativamente ao estabelecimento das equivalências entre as unidades, a estratégia adoptada passou por começar por representar, num esquema, a vara

portuguesa em função do palmo e, a partir deste, estabelecer-se a relação entre a vara portuguesa e a castelhana e desta última com o palmo e o côvado (veja-se, a título de ilustração do que acabámos de dizer, na figura 3 a resolução de uma das futuras professoras).

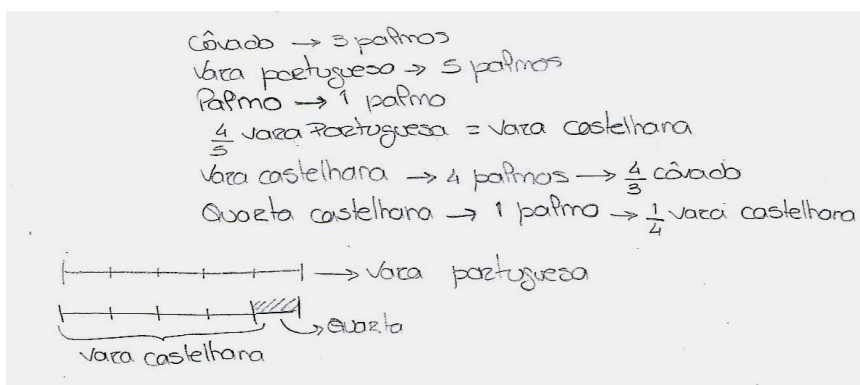


Figura 3 – Estabelecimento de relações entre unidades de comprimento (CS)

A questão em que se pedia para interpretar, do ponto de vista comercial, os lucros referidos levantou muitas dúvidas, pois apesar das alunas terem identificado, sem particular dificuldade, a natureza da transacção, não era de todo claro como é que esse lucro ocorria. Uma das futuras professoras adoptou como estratégia inicial o desenho de um diagrama, reproduzido na figura 4. Da sua análise parece poder concluir-se que a futura professora compreendeu o problema e desenvolveu um plano para a sua resolução, que, de acordo com o esquema, parece ser o de averiguar o que se passa nas situações indicadas entre parêntesis na parte superior direita do esquema.

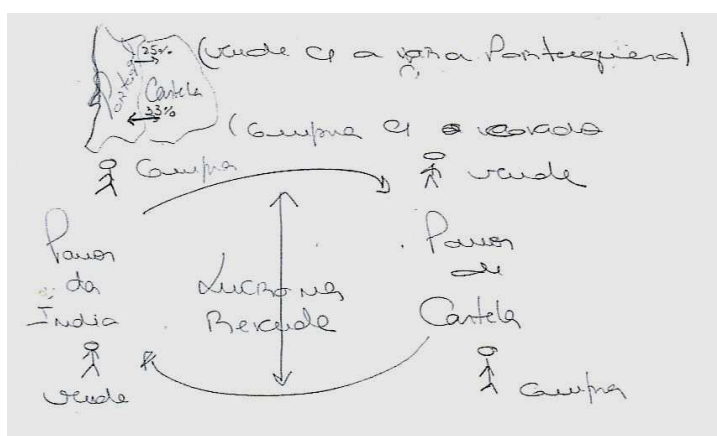


Figura 4 – Esquema representativo do comércio de panos entre Portugal e Castela (AP)

É de notar que, na análise posterior das fichas de resolução, embora se detectem pontos comuns na apresentação e justificação da solução, reflexo do trabalho em grupo,

as justificações são distintas e, nalgumas, não é explicitado que a percentagem de lucro referida representa uma fracção da unidade usada na revenda. Observem-se, por exemplo, as justificações reproduzidas nas figuras 5, 6, 7 e 8. Nas três primeiras é clara a percepção de que o lucro é um lucro em pano. Contudo, nas duas primeiras, esse lucro surge directamente como a terça parte do côvado, enquanto que, na terceira, o raciocínio é feito sobre o palmo. Qualquer uma delas evidencia a resolução do problema e consequente determinação da solução, mas também evidencia a análise dessa mesma solução. Na explicação apresentada na figura 8, a futura professora não consegue dar uma resposta que evidencie que a solução foi analisada.

Quando o mercador compra os panos baixos pá-lo com a vara portuguesa (5 palmos) mas ao vendê-los em Castela, vai pagá-los pela vara castelhana (4 palmos), ganhando $\frac{1}{4}$ desta, ou seja 25%.

Figura 5 – Justificação para o lucro do mercador português (DB).

O comerciante compra sedas e panos em Castela, com a vara castelhana, e o comerciante vinha para Portugal e vendia através do côvado sendo assim, ganha 33%. Ou seja, como 1 vara castelhana $\frac{4}{3}$ côvado, logo ganha-se $\frac{1}{3}$ ($0,33$) = 33%.

Figura 6 – Justificação para o lucro do mercador português (AR).

Não, a vara era medida em côvados (3 palmos). Em Castela os tecidos eram medidos com a vara castelhana (4 palmos) e em Portugal os tecidos eram medidos em côvados (3 palmos) logo ganhava-se 1 palmo de tecido, ou seja, 33% ($\frac{1}{3}$ do côvado).

Figura 7 – Justificação para o lucro do mercador português (AA).

compra em Portugal pelo valor português e vende em
espanha pelo valor castelhano, se é + barato se
o valor português, tem menos um palmo se o
valor português, o se significa a temos um lucro
(EB)

Figura 8 – Justificação para o lucro do mercador português (EB).

Aliás, a dificuldade evidenciada por algumas das futuras professoras em comunicar e explicitar oralmente os raciocínios reflectiu-se nas explicações apresentadas noutros problemas, bem como, mais tarde, noutra etapa do estudo, na Prática Pedagógica.

De um modo geral, pode afirmar-se que as futuras professoras manifestaram sempre interesse em realizar as tarefas propostas evidenciando, através da troca de impressões entre elas e com a investigadora, envolvimento na procura da solução dos problemas. Tal constatação foi confirmada na entrevista realizada a cada uma das sete participantes no estudo no final do ano lectivo 2004/2005. Como já se referiu, no âmbito dessa entrevista, entre outros aspectos, foram formuladas questões com a finalidade de recolher a opinião das futuras professoras, relativamente aos problemas históricos propostos e resolvidos em Geometria (I e II).

Da análise de conteúdo das respostas obtidas, destaca-se *o interesse despertado pelos problemas*, interesse esse que, para três das participantes, se relaciona com a oportunidade proporcionada de conhecer outras unidades de medida:

Acho interessante nós conhecermos outras medidas que já foram utilizadas (AA);

Achei interessante porque dava uma ideia que era uma coisa e no final era outra (PA);

Gostei e achei muito interessante. Para já, porque comecei a utilizar medidas que nunca tinha ouvido falar antes (DB);

Interessante, é giro, é diferente, porque estamos a lidar com medidas que não são habituais para nós (CS).

Mas as futuras professoras também manifestaram o *gosto e a satisfação sentidos na resolução dos problemas*. De entre as várias razões apontadas destaca-se a natureza fora do habitual e problemática das tarefas propostas, o prazer da descoberta, o desenvolvimento do raciocínio.

Gostei (...) gostei de resolver todos, (...) porque é uma coisa diferente (...) são actividades diferentes daquilo que estamos habituadas a fazer no dia-a-dia. (DB).

Nunca tinha resolvido [situações desta natureza] mas gostei bastante (...) Eu acho que teve uma coisa importante para mim, que foi não nos centrarmos só naquelas unidades, geralmente quando falamos centramo-nos sempre no metro, no metro quadrado, e assim temos de pensar de uma forma mais abstracta, pois são unidades que nós não conhecemos (AA).

Há ali um pouco de descoberta, de tentar como é que se faz, de ... enigmas (...) são mesmo problemas, para puxar por nós, para a gente pensar um bocadinho (CS).

Nós não conhecíamos [as antigas unidades] e acho que nos fez bem conhecer...deu-nos mais flexibilidade de pensamento, ao pensarmos com aquelas, embora não sejam as nossas, podemos pensar com as nossas também assim (AR).

Acho que é bem mais interessante [trabalhar com unidades desconhecidas do que com unidades do SI] apesar de nos causar uma certa confusão, porque nós nunca ouvimos falar nessas unidades (...) conseguir fazer a relação entre elas (unidades) é um pouco complicado, mas eu acho que nos ajuda a pensar e a conseguir relacionar as coisas (AP).

A vertente cultural proporcionada pela resolução de problemas foi também acentuada por três futuras professoras:

Acho que servem como uma cultura geral, (...) como cultura, porque nós no dia-a-dia, penso eu, nunca mais vamos utilizar aquelas medidas (...) para dizer um dia às crianças, como é que se utilizava (EB).

O facto de saber mais algumas medidas antigas, no fundo, como é que eu hei-de dizer, fiquei mais “cultu” nesse assunto (...) é daquele tipo de coisas que nós nem sequer procuramos saber e quem tem de ensinar também não ensina porque, para já não vem nos programas (DB).

Até nos pode dar uma ideia de história... é quase cultura (AR).

A este propósito, e porque o aproveitamento que era feito da desigualdade das unidades conduzia, efectivamente, a lucros cuja identificação pressupunha o uso efectivo da matemática, é de ressaltar que foi unânime o reconhecimento da “esperteza” do negociante, embora, curiosamente, as futuras professoras aceitassem com aparente naturalidade a existência de alguma desonestidade por parte do mercador português.

Apesar de todas as participantes no estudo já terem realizado Prática Pedagógica no 1º CEB na altura em que foram realizadas as entrevistas e de reconhecerem que as orientações curriculares actuais para o ensino básico incluem recomendações explícitas relativamente à introdução de aspectos históricos das unidades de medida, uma das

participantes afirmou peremptoriamente sobre a *importância da história da matemática para a Prática Pedagógica*:

Não se dá muita importância ao facto histórico, mas sim ao que utilizamos hoje em dia. Aquilo que nós damos é para eles depois aplicarem no dia-a-dia (DB).

Talvez por esse motivo afirme também que não propôs na PP nenhum problema do género dos resolvidos em Geometria, embora alegue como justificação *falta de lembrança*. Aliás, todas as restantes inquiridas responderam negativamente quando questionadas sobre o aproveitamento didáctico de algum ou alguns dos problemas históricos no âmbito da Prática Pedagógica, na sua maioria também por falta de lembrança ou por considerarem que o nível geral da turma onde realizaram a PP inviabilizasse a sua utilização, o que é uma “desculpa” recorrente:

Havia lá 3 ou 4 crianças que se calhar eram capazes de resolver situações como essas, mas o resto não, porque há ali crianças com muitas dificuldades (AP).

Embora não seja objecto de análise deste trabalho, é de referir que a componente histórica foi introduzida na prática de ensino que algumas destas futuras professoras desenvolveram no 1º ciclo do ensino básico, embora sob a forma de textos ou dramatizações com finalidades essencialmente informativas.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Durante o período em que decorreram os seminários, as futuras professoras foram confrontadas com uma outra face da matemática, isto é, com uma face que mostra que a matemática é uma parte integrante da cultura humana. Esse aspecto cultural foi, aliás, explicitamente valorizado pelas futuras professoras participantes no estudo. Mesmo aquelas que não o admitiram de forma explícita nas entrevistas, durante a realização das actividades envolveram-se na discussão de muitas das situações do quotidiano da época traduzidas pelos enunciados. Recorde-se, a propósito do problema explorado, a aceitação, por todas as participantes, da “esperteza” do mercador português, isto é, do uso matemático que ele fez, para seu próprio benefício, da diferença existente entre as unidades. Consciencializar o futuro professor do valor e papel da matemática na sociedade pode ter influência na forma como ensinam matemática e, como tal, nas experiências de aprendizagem que proporcionarão aos seus alunos.

As opiniões manifestadas nas entrevistas reforçam a convicção de que os problemas históricos, pelo simples facto de envolverem sistemas de unidades desconhecidos e com uma imensa diversidade de relações, podem ser encarados como problemas verdadeiramente novos que permitem ao futuro professor visitar conceitos e reflectir sobre conceitos e processos, considerados rotineiros quando se trabalha no Sistema Internacional de Unidades.

Do ponto de vista didáctico, a resolução de problemas históricos permitiu desenvolver competências de resolução de problemas, nomeadamente ao nível da aplicação de estratégias adequadas. Simultaneamente, o contexto de resolução de problemas encoraja os futuros professores a pensar, a discutir e a comunicar matemática.

Aspectos como estes são também sustentados por algumas das opiniões manifestadas pelas participantes. De facto, quatro das participantes reconhecem como vantajoso, para o desenvolvimento do raciocínio, o trabalho com unidades diferentes das do sistema SI.

A discussão de um percurso de resolução do problema apresentado permitiu visitar conteúdos de matemática elementar numa perspectiva de interdependência entre Grandezas e Medidas e Números e Operações. Salienta-se, em particular no âmbito do problema apresentado, a interdependência entre a expressão da medição e o conceito de número (inteiro ou fraccionário) ligada à subdivisão da unidade³ e a expressão de parte de uma unidade em termos percentuais. Este problema evidencia também a importância da escolha da unidade e da comparação da grandeza a medir com a unidade, bem como os problemas decorrentes da utilização de diferentes unidades de medida para a mesma grandeza e as dificuldades criadas pela utilização de unidades não standardizadas e pelo uso de diferentes divisores.

Ou seja, os problemas propostos permitem salientar as motivações por trás da emergência do Sistema Métrico Decimal no século XVIII (mais tarde Sistema Internacional, SI), bem como salientar as vantagens do SI e reflectir sobre conceitos e processos centrais da medição de grandezas como o comprimento, a área, o volume, a massa e a capacidade (no conjunto dos problemas propostos foram abordadas cinco grandezas).

³ O estabelecimento da relação, por exemplo, entre a vara portuguesa e o côvado propicia também de forma natural a representação da medida sob a forma de numeral misto.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Abrantes, P.; Serrazina, L.; Oliveira, I. (1999). *A Matemática na educação básica*. Ministério da Educação, Departamento da Educação Básica.
- APM (1998). *Matemática 2001. Diagnóstico e Recomendações para o Ensino e Aprendizagem da Matemática. Relatório preliminar*. Lisboa: APM.
- Avital, S. (1995). History of Mathematics Can Improve Instruction and Learning. Em F. Swetz, J. Fauvel, O. Bekken, B. Johansson, V. Katz (Eds), *Learn from the Masters* (3-12). Washington DC: The Mathematical Association of America.
- Barbin, E. (1994). Les Mathématiques comme Processus Historique et comme Objet Culturel. *Actas do ProfMat 94* (27- 36). Lisboa: APM.
- Barbin, E. (2000). The historical dimension: from teacher to learner. Em Victor Katz (Ed), *Using History to Teach Mathematics. An International Perspective* (66-70). Washington DC: The Mathematical Association of America.
- Bruckheimer, M.; Arcavi, A. (2000). Mathematics and its history: An Educational Partnership. Em Victor Katz (Ed), *Using History to Teach Mathematics. An International Perspective* (135-148). Washington DC: The Mathematical Association of America.
- CBMS (2001). *The Mathematical Education of Teachers Book* (Disponível em 18/06/2004 em http://www.cbmsweb.018/MET_Document).
- Ernest, P. (1994). The Dialogical Nature of Mathematics. Em Paul Ernest (Ed), *Mathematics, Education and Philosophy: an International Perspective* (33-48). The Falmer Press.
- Graça, M. (2003). Avaliação da resolução de problemas: que relação entre as concepções e as práticas lectivas dos professores? *Quadrante*, volume XII, nº 1, 53-73.
- Grugnetti, L. (2000). Ancient problems for the development of strategic thinking. Em Victor Katz (Ed), *Using History to Teach Mathematics. An International Perspective* (78-81). Washington DC: The Mathematical Association of América.
- Hersh, R. (1994). Fresh Breezes in the Philosophy of Mathematics. Em Paul Ernest (Ed), *Mathematics, Education and Philosophy: an International Perspective* (11-20). The Falmer Press.
- Lebesgue, H. (1956). *Sur la Mesure des Grandeurs*. Paris: Guthier-Villars.
- Katz, V. et al. (2000). The role of historical analysis in predicting and interpreting students' difficulties in mathematics. Em John Fauvel and Jan van Maanen (Eds), *History in Mathematics Education. The ICMI Study* (149-154). The Netherlands: Kluwer Academic Press.
- Marques de Almeida, A. A. (1994a). *Aritmética como Descrição do Real (1519-1679)*. Lisboa: Imprensa Nacional, Casa da Moeda, vol. I.
- Marques de Almeida, A. A. (1994b). *Aritmética como Descrição do Real (1519-1679)*. Lisboa: Imprensa Nacional, Casa da Moeda, vol. II.
- Ministério da Educação (2004). *Organização Curricular e Programas. Ensino Básico – 1º Ciclo*. Lisboa: ME – DES, 4ª Edição.
- Ministério da Educação (2001). *Currículo Nacional do Ensino Básico. Competências Essenciais*. Lisboa: Ministério da Educação, Departamento da Educação Básica.
- Nicolas, G. (1519). *Tratado da pratica D' Aritmetyca*. Edição fac-similada. Porto: Livraria Civilização – Editora., 1963.

- Schubring, G. (1997). Relações entre a história e o ensino da matemática. Em Sérgio Nobre et al. (Org), *Actas do II Encontro Luso-Brasileiro de História da Matemática & II Seminário Nacional de História da Matemática* (157–163). São Paulo: Brasil.
- Schubring, G. et al. (2000). History of Mathematics for Trainee Teachers. Em John Fauvel and Jan van Maanen (Eds), *History in Mathematics Education. The ICMI Study* (91-142). The Netherlands: Kluwer Academic Press.
- Swetz, F. (1995). Using Problems from the History of Mathematics in Classroom Instruction. Em F. Swetz, J. Fauvel, O. Bekken, B. Johansson, V. Katz (Eds), *Learn from the Masters* (25 a 38). Washington DC: The Mathematical Association of America.
- Swetz, F. (2000). Problem Solving from the History of Mathematics. Em Victor Katz (Ed), *Using History to Teach Mathematics. An International Perspective* (59-68). Washington DC: The Mathematical Association of America.
- Tzanakis, C. et al (2000). Integrating history of mathematics in the classroom: an analytic survey. Em John Fauvel and Jan van Maanen (Eds), *History in Mathematics Education. The ICMI Study* (201- 248). Kluwer Academic Press.
- Tymoczko, T. (1994). Structuralism and Post-modernism in the Philosophy of Mathematics. Em Paul Ernest (Ed), *Mathematics, Education and Philosophy: an International Perspective* (49- 55). The Falmer Press.
- Veloso (2004). A Matemática na Formação do professor. Em A. Borralho, C. Monteiro, R. Espadeiro (org.), *Educação Matemática dos futuros professores* (31-67). Lisboa: SPCE.
- Wu, H.(1999). Preservice professional development of mathematics teachers (disponível em Junho de 2004 em <http://math.berkeley.edu/~wu/>).
- Wu, H. (2004). Geometry: our cultural heritage. *Notices American Society*, 51, pp. 529-537 (disponível em Junho de 2004 em <http://math.berkeley.edu/~wu/>).
- <http://math.berkeley.edu/~wu/>