

O Quarto e Vintena e outros problemas históricos no ensino dos números racionais

Fátima Regina Jorge¹, Isabel Cabrita², Fátima Paixão³

^{1,3}Escola Superior de Educação, Instituto Politécnico de Castelo Branco,

²Departamento de Didáctica e Tecnologia Educativa, Universidade de Aveiro

¹frjorge@mail.es.e.ipcb.pt, ²icabrita@dte.ua.pt, ³fatimapaixao@mail.es.e.ipcb.pt

1. Introdução e Fundamentação

Dos muitos argumentos avançados para sustentar a relevância educativa da história da matemática, destaca-se a ideia de que a sua integração no processo de ensino e aprendizagem da matemática deve incidir sobre aspectos que possam ajudar realmente o aluno a desenvolver a sua competência e cultura matemática. De acordo com vários autores, essa integração a par de facilitar e/ou apoiar o ensino/aprendizagem de certas questões específicas, possibilita o desenvolvimento de perspectivas sobre a natureza da matemática e da actividade matemática e a apreciação da matemática como produto do esforço intelectual da humanidade, em desenvolvimento contínuo e estreitamente relacionado com outras ciências, culturas e sociedades (e.g. Tzanakis & Arcavi, 2000; Fauvel, 1991). Assim, não deve ser negligenciada a oportunidade que livros antigos de matemática ou de história da matemática podem desempenhar como fontes de problemas históricos¹ passíveis de serem propostos em sala de aula. Como é salientado por Swetz (2000), o professor procura, frequentemente, problemas relacionados com o currículo do aluno, que requeiram a aplicação de certos conceitos e procedimentos, que exijam uma certa dose de interpretação e que, em simultâneo, possam despertar o interesse e a motivação para a sua resolução. Nesse sentido, argumenta que a história é uma fonte inesgotável de problemas relevantes em termos de conteúdo matemático e em que as conexões entre diferentes temas matemáticos, com outras áreas do saber ou com o quotidiano social passado estão naturalmente presentes. Tais problemas, ao proporcionarem a oportunidade de efectuar “historical excursions”, podem tornar mais motivadoras e significativas as abordagens de ensino. Como nos lembra Winicki (1993), o uso de problemas que remetem para contextos históricos permite dar um significado cultural à matemática, tantas vezes ausente das aulas desta disciplina. Além disso, Tzanakis & Arcavi (2000, p.205)

¹ Entendidos como problemas que, de algum modo desempenharam um papel significativo no desenvolvimento da matemática. Como tal, podem ser de vários tipos: problemas sem solução; problemas famosos ainda por resolver ou resolvidos com muito esforço; problemas que motivaram e/ou anteciparam o desenvolvimento de novos domínios matemáticos; problemas com contexto puramente matemático; problemas de aplicação da matemática ao quotidiano; problemas de aplicação da matemática a outras áreas; problemas apresentados com propósitos recreativos (Tzanakis & Arcavi, 2000; Swetz, 2000).

realçam que o recurso a tais problemas permite que certos aspectos do desenvolvimento histórico de um assunto “become a working knowledge for the student” e, dessa forma, a história não surge em sala de aula como algo estranho à matemática propriamente dita, mas como algo natural e que lhe é inerente. De facto, os resultados da investigação conduzida em diferentes níveis de ensino (e.g. Jorge, 2008; Furinghetti, 1996; Winicki, 1993; Kool, 1993), têm vindo a corroborar estas considerações e a evidenciar o interesse despertado por problemas históricos tanto nos professores como nos alunos, nomeadamente pela perspectiva contextual que lhes está associada.

Pelo exposto, o recurso a problemas históricos afigura-se como uma via com muitas potencialidades no ensino/aprendizagem da matemática, desde logo porque a resolução de problemas é uma componente muito relevante dos currículos de matemática. Enquanto resolve problemas históricos, o aluno está envolvido de forma activa numa experiência de aprendizagem matemática, aprofundando a compreensão de conceitos e processos matemáticos, desenvolvendo capacidades matemáticas de resolução de problemas, de pensamento e raciocínio matemático, de comunicação em matemática, etc. Acresce que, muitos deles, ao reflectirem as necessidades imediatas das sociedades e o papel da matemática na vida quotidiana passada, podem proporcionar o desenvolvimento de uma perspectiva dinâmica sobre a Matemática, sobre o seu papel na sociedade e o seu contributo para o progresso dessa mesma sociedade e clarificando as ligações entre a matemática e outras áreas (Barbin, 2000; Grugnetti, 2000; Tzanakis & Arcavi, 2000; Swetz, 2000).

No que respeita à acessibilidade a problemas históricos adequados ao currículo dos alunos, em particular do 2º ciclo do ensino básico, destacam-se os inúmeros problemas de carácter prático ou recreativo incluídos em livros de aritmética publicados um pouco por toda a Europa sobretudo a partir do século XV. Em Portugal, o primeiro tratado de aritmética escrito por Gaspar Nicolás surge em 1519, num tempo em que Lisboa e o seu porto constituem um importante centro de transacções comerciais. Na opinião de Almeida (1994a, p. 49), a sua escrita, bem como a de outras aritméticas que se lhe seguiram, procura responder às necessidades geradas pelo desenvolvimento da economia mercantil e, como tal, “prosseguem com persistência objectivos de domínio de situações concretas”, ajudando a iluminar e a compreender a vida económica da época. Registe-se que estes textos reportam a uma época de divulgação generalizada do sistema de indo-árabe para a representação e

cálculo com números inteiros², pelo que a apresentação detalhada dos algoritmos das operações básicas tanto com números inteiros como com fracções (comuns) é uma componente muito significativa do seu conteúdo. Para além disso, como já referido atrás, inclui inúmeras situações de carácter prático e aplicado e alguns problemas de carácter recreativo. Este últimos, cuja origem remonta aos gregos e aos árabes, “vinham servindo há mais de 200 anos de suporte ao raciocínio aritmético”, constituindo “um meio através do qual se aplicam os conhecimentos sobre a armação das contas” (Almeida, 1994a, p.66).

Fruto da investigação desenvolvida por Jorge (2008) foram seleccionados e adaptados alguns problemas históricos incluídos em textos de aritmética publicados em Portugal nos séculos XVI e XVII, cujo conteúdo matemático requerido para a sua resolução se enquadra no programa de matemática do ensino básico. Dado que alguns desses problemas são carácter aplicado e remetem para contextos sociais, económicos e políticos, teve-se a preocupação de escolher problemas que permitam fazer a ponte com aspectos abordados na disciplina de História e Geografia de Portugal.

Escolhidos os problemas, foram desenvolvidas propostas de exploração didáctica dos mesmos que foram depois concretizadas por um grupo de três futuras professoras em período de estágio em duas turmas do 6º ano de escolaridade. Aqui, apresentam-se três problemas, que pelo seu conteúdo matemático se enquadram no âmbito do tópico «números racionais não negativos». Para cada um deles, faz-se um breve enquadramento e algumas observações relacionadas com questões de carácter didáctico. Finalmente, tecem-se algumas considerações resultantes da análise de experiências concretas da sua integração na aula de aula matemática.

Integração de problemas históricos no ensino da matemática

O quarto e vintena

No século XVI, quando as naus atracavam no porto de Lisboa toda a carga era controlada na Casa da Índia e sujeita ao pagamento de um imposto designado por Quarto e Vintena. Embora inicialmente incidisse apenas sobre as especiarias e drogarias provenientes do Oriente, com o passar do tempo passou a ser um imposto alfandegário de largo espectro (Almeida, 1994a).

² Na Europa, só com a criação e divulgação do sistema métrico decimal a partir da sua imposição em França a partir de 1799, se dá a aceitação plena da extensão do SND à representação de números fraccionários (Katz, 2000)

O Quarto e Vintena, tratado minuciosamente em todos os Tratados de Aritmética, é explicado de forma muito clara na obra *Prática d'Arismética* de Ruy Mendes (1555 in Almeida, 1994a, p. 255) do seguinte modo:

*Tirar o quarto e vintena segundo se tira na Casa da Índia não é outra coisa salvo saber de uma certa quantia o quarto e dos três quartos dela mesma a vintena, quantos serão e tirados dela, quantos ficarão*³.

Na figura 1 apresenta-se uma situação relativa ao pagamento do quarto e vintena de um carregamento de pimenta proveniente da Índia.

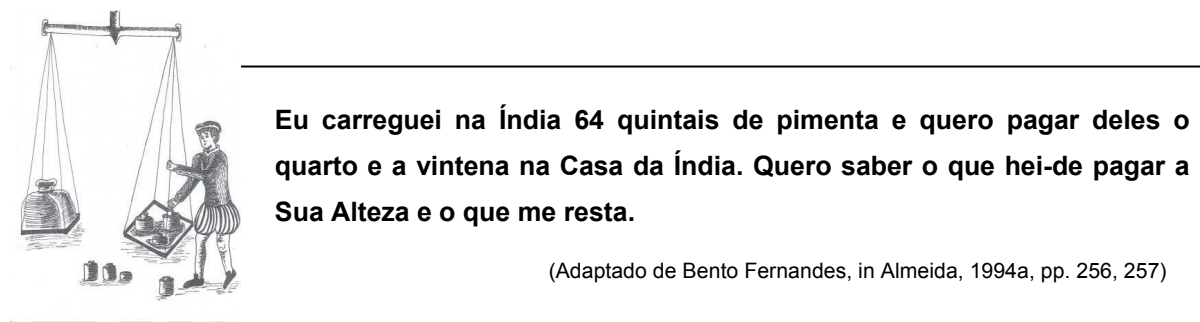


Figura 1. O problema *O quarto e vintena*

A sua proposta a alunos de 6º ano de escolaridade, integrada no tópico “Operações com números racionais absolutos”, parte do pressuposto de que a resolução de problemas que traduzem situações reais de aplicação da matemática em contextos sociais e económicos concretos pode permitir despertar o interesse do aluno e dar sentido à actividade matemática na sala de aula, tanto ao nível do desenvolvimento de perspectivas sobre o papel da Matemática na sociedade, como da compreensão de ideias matemáticas.

O facto de se tratar de uma situação historicamente datada, que envolve alguns aspectos estudados pelos alunos na disciplina de História e Geografia no 5º ano de escolaridade⁴, permite relevar aspectos interdisciplinares e salientar que as ideias matemáticas sempre foram úteis. Releva-se, em particular, a importância de explorar possíveis conexões entre aspectos abordados na disciplina de História e conceitos matemáticos, como sejam, por exemplo, aspectos relacionados com o pagamento de tributos e impostos. Os alunos podem ser questionados sobre o significado de pagar impostos (o porquê, a razão de pagar impostos)

³ Refira-se a título de curiosidade que todas as aritméticas analisadas apresentam uma regra expedita para o seu cálculo e que em 1624 Guiral e Pacheco, autor de *Flor da Arismética Necessária* (1624), propõe o seu cálculo através de noção de percentagem.


⁴ Na disciplina de História e Geografia de Portugal, os alunos abordam, no 5º ano de escolaridade, vários aspectos relacionados com o comércio marítimo português e, em particular, o papel da Casa da Índia nesse processo, sendo por isso expectável alguns conhecimentos que liguem o problema aos conteúdos abordados nessa disciplina.

de modo a levá-los a perceber a ligação entre o imposto e o conceito de fracção, isto é, que um imposto representa uma determinada parte de um todo. Neste caso, o *quarto e vintena* correspondem, respectivamente, a um quarto da massa inicial de pimenta e a um vinte avos da massa de pimenta restante, depois de retirado o quarto.

A venda do trigo

Estudos, confirmados por muitos testemunhos, revelam que em finais do século XX ainda persistia em Portugal uma grande disparidade entre as capacidades dos recipientes usados para medir o volume de produtos agrícolas, como o milho, o trigo, a azeitona, o vinho, o azeite, etc⁵. Isso acontecia, por exemplo, com alqueire, antiga unidade de volume de origem árabe e cujos padrões físicos usados para a sua medição nunca conseguiram ser uniformizados apesar das muitas deliberações tomadas nesse sentido.

Neste contexto, o problema *A venda do trigo*, apresentado na figura 2, pode ser encarado como um problema que revela aspectos da história da metrologia portuguesa e permite levantar questões relacionadas com os problemas sociais decorrentes da falta de uniformização das unidades de medida. Para a compreensão da situação exposta importa saber que o alqueire era uma antiga unidade usada para medir o volume de diversos produtos agrícolas e que a quarta era um seu submúltiplo, correspondente, como a sua designação sugere, à quarta parte do alqueire. Entendidos o alqueire e a quarta como unidade de volumes e estabelecida a relação entre ambos (1 alqueire = 4 quartas), há que compreender que a informação de que num mercado o alqueire é de cinco quartas e no outro é de três quartas se refere às capacidades dos padrões em uso para a medição do alqueire. Ou seja, que as capacidades dos padrões do alqueire eram diferentes de mercado para mercado⁶.



Um mercador empregou 30 coroas em 30 alqueires de trigo.

Este mercador quer vender o trigo e, para isso, tomou 15 alqueires dele, que é a metade de 30 alqueires, e levou-os a vender a um mercado, onde o alqueire era $\frac{3}{4}$ (três quartos) do dele e vendeu cada alqueire pequeno por uma coroa. E, depois, levou os outros 15 alqueires a outro mercado onde o alqueire era $\frac{5}{4}$ (cinco quartos) do dele e vendeu cada alqueire grande por uma coroa. Pergunto se este mercador ganhou ou perdeu na venda deste trigo.

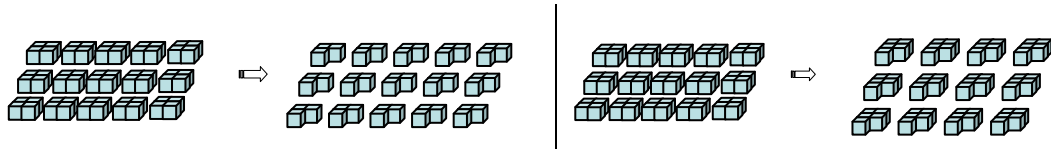
(Adaptado de Bento Fernandes, in Almeida, 1994b, p. 172)

Figura 2. O problema *A venda do Trigo*

⁵ Mais de um século depois da adopção do sistema métrico decimal (hoje Sistema Internacional).

⁶ O que seria, por exemplo, resultado da construção pouco rigorosa dos padrões ou da vontade dos povos em manter a tradição secular de ter medidas grandes/pequenas.

Trata-se de um problema que respeita a uma situação de divisão como medida ou por agrupamento. Para cada um dos mercados há que determinar quantos grupos de três quartas ou de cinco quartas é possível formar com 15 alqueires. A ilustração seguinte traduz a essência do problema.

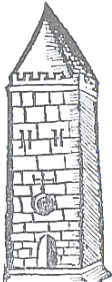


A divisão surge como a operação que dá resposta ao número de alqueires que o mercador pode fazer em cada mercado. Dado que o problema refere três alqueires distintos, a comparação dos volumes desses alqueires e o uso das designações alqueire, alqueire grande e alqueire pequeno pode facilitar a tradução do problema por outras palavras, e, conseqüentemente, a compreensão e a percepção das operações que permitem modelar o problema. Poderá também ter interesse desdobrar a questão do problema em questões mais simples que orientem o pensamento do aluno para o que se passa em cada um dos dois mercados em que o mercador vende o trigo. Por exemplo: a) Com os 15 alqueires de trigo que levou para o primeiro mercado, quantos alqueires pequenos conseguiu obter o mercador? b) No segundo mercado, quantos alqueires grandes vendeu o mercador? c) O mercador ganhou ou perdeu dinheiro na venda do trigo?

O gato e o rato

As abordagens de ensino tradicionais da divisão de números racionais dão uma grande ênfase ao procedimento algorítmico que requer a transformação da divisão em multiplicação, a escrita do inverso do divisor e a utilização do algoritmo da multiplicação. Mais concretamente, sobressai a regra: para dividir dois números racionais multiplica-se o dividendo pelo inverso do divisor. Investigadores como Siebert (2002) e Flores (2002) salientam que, em geral, o aluno não compreende por que é que desaparece o símbolo de divisão nem a razão de trocar o divisor pelo seu inverso multiplicativo. De facto, se descontextualizada, a regra da multiplicação pelo inverso do divisor parece nada ter a ver com a divisão e acaba por se reduzir, na mente do aluno, a algo nem sempre claro. Assim, considera-se particularmente sugestivo para a introdução compreensiva do algoritmo da divisão no universo dos números racionais iniciar a abordagem da divisão com uma situação de divisão como medida, em que a unidade é dividida por um número fraccionário (representando parte dessa unidade ou todo), passando de seguida, para outras situações de dividendo diferente de um (op. cit.).

É neste contexto, que surge o problema de carácter recreativo *O gato e o rato*, adaptado de um problema de carácter recreativo proposto por Gaspar Nicolás em 1519, com a formulação apresentada na figura 3. Este problema refere-se também a uma situação de divisão por medida ou agrupamento, pois o objectivo final é saber quantos dias um rato demora a percorrer 4 braças, sabendo que percorre por dia $\frac{2}{3}$ de braça. Ou seja, a sua solução traduz quantas vezes o comprimento de $\frac{2}{3}$ de braça cabe em 4 braças. Há por isso que determinar o quociente $4 \div \frac{2}{3}$.



Um rato está em cima da torre que tem quatro braças de altura e, em baixo, à espera dele está um gato. Ora, o rato desce por dia dois terços de braça. Quanto ao gato, este não anda coisa nenhuma.

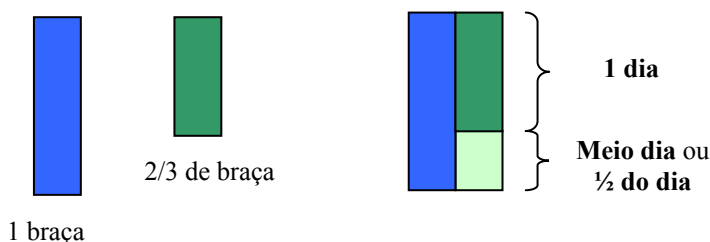
(a) Quantos dias o rato demora a percorrer uma braça? Porquê?

(b) Ao fim de quantos dias o rato chega finalmente ao pé do gato?

(Adaptado de Gaspar Nicolás, in Almeida, 1994b, p.273)

Figura 3. O problema *O gato e o rato*

Uma adequada exploração do problema pode permitir inferir um algoritmo para a divisão de números racionais. Para tal, há que explorar o significado da expressão “o rato desce por dia dois terços de braça”, de modo a tornar claro que a unidade de comprimento – a braça – é dividida em três partes iguais e que o rato percorre, por dia, uma distância igual a duas dessas partes. A representação com material Cuisenaire dos comprimentos de uma braça e de dois terços de braça, bem como da altura da torre, o que pressupõe a escolha adequada das barras que representam os dois comprimentos, pode ajudar a concluir que o rato necessita de um dia e meio para percorrer uma braça. Na ilustração seguinte, representa-se uma estratégia possível de resolução da alínea a) usando barras Cuisenaire:



Tal estratégia deve implicar a tradução em linguagem matemática das ideias matemáticas exploradas com o material: $1 \div \frac{2}{3} = \frac{3}{2}$ e a compreensão de que o quociente $\frac{3}{2}$ representa quantas vezes o divisor $\frac{2}{3}$ cabe em 1. Note-se que o quociente representa o inverso

do divisor e traduz quantas vezes o divisor cabe na unidade, significado que é crucial para a compreensão do algoritmo da divisão de números racionais.

Nesta fase, através de um raciocínio multiplicativo (ou mesmo aditivo), o aluno poderá concluir que, se o rato demora um dia e meio a percorrer uma braça, então demorará o quádruplo do tempo a percorrer as 4 braças, isto é, demora 6 dias. Ou seja,

$$4 \div \frac{2}{3} = 4 \times \frac{3}{2} = \frac{12}{2} = 6.$$

Exploração didáctica de problemas históricos na aula de matemática – dificuldades e potencialidades

Três futuras professoras, Inês, Joana e Beatriz, integraram e exploraram problemas históricos na aula de matemática do 6º ano de escolaridade, constituindo três exemplos diferentes relativamente à forma como o fizeram. Importa começar por referir que a especificidade da linguagem⁷, a terminologia usada e os contextos reais que invocam, contribuíram para que, numa primeira leitura, as futuras professoras os considerassem difíceis para alunos do 2º ciclo. Aliás, também Fernanda, a professora cooperante sob cuja orientação trabalham Beatriz e Joana, também assume ter sentido inicialmente uma certa relutância relativamente à sua adequação à turma, argumentando que a linguagem dos problemas seria pouco motivadora para os alunos.

Partindo do pressuposto que a linguagem inabitual dos enunciados dos problemas poderia desencadear uma primeira reacção negativa por parte dos alunos do ensino básico, todas as futuras professoras reconheceram a importância de uma cuidada contextualização dos problemas que contribua realmente para a compreensão e familiarização com as situações expostas. Assim, aquando da planificação de problemas históricos, as futuras professoras optaram, em geral, por construir ou um pequeno texto e/ou uma apresentação em Power Point através da qual desencadaram o diálogo sobre as situações históricas presentes nos problemas. Por exemplo, no problema *O Quarto e Vintena* são projectadas imagens alusivas à época dos descobrimentos que permitem, em particular, o estabelecimento de ligações com aspectos abordados na disciplina de História e Geografia de Portugal. Os alunos, quer pelas respostas que dão às perguntas postas pelas professoras, como pelas perguntas que fazem, parecem revelar interesse e curiosidade relativamente à contextualização histórica, como sobressai desta reflexão sobre as aulas de uma das futuras professoras: “*Todas as tarefas propostas despertaram nos alunos muito interesse, surpreendendo-me muitas vezes, quase*

⁷ A formulação dos enunciados manteve-se intencionalmente muito próxima dos originais.

sempre, pela positiva”. Essa mudança de atitude ocorre também com a professora cooperante, Fernanda, que admite que, ao receio inicial com que encarou os problemas, sobreveio o reconhecimento do seu potencial motivacional e para a aprendizagem da matemática.

Dos obstáculos identificados pelas futuras professoras em termos de planificação dos problemas em sala de aula, ressaltam-se as exigências em termos de conhecimentos de história de Portugal e também de história da matemática. Inês acrescenta a dificuldade em delinear uma estratégia de integração dos problemas em sala de aula. Porém, todas essas dificuldades são contornadas com sucesso, como é comprovado pela forma apelativa e participativa como os problemas são propostos aos alunos do ensino básico. Por exemplo, Inês a propósito do problema *Venda do Trigo*, introduz em sala de aula aspectos relativos à variabilidade das unidades de medida no passado ligando-as à realidade regional dos alunos. Outra das futuras professoras, Beatriz, recorre sempre a um texto em que faz uma breve contextualização no tempo da situação social envolvida no problema. Não procura de modo explícito estabelecer conexões com outras disciplinas, nem realçar o papel da matemática num determinado contexto sócio-cultural, para a resolução de problemas do quotidiano. Não obstante, pode-se afirmar que a dimensão social e cultural da matemática está implicitamente presente, na medida em que o texto introdutório aos problemas faz a ligação entre situações/problemas da vida em sociedade e a matemática. Neste âmbito, é de ressaltar a atenção particular que as futuras professoras dão à compreensão e familiarização dos alunos com a situação exposta no problema, bem como à identificação dos dados e da questão do problema, etapa crucial para a resolução de qualquer problema.

A exemplo do que já foi identificado noutras investigações relacionadas com a exploração didáctica de problemas por professores em início de carreira, a orientação da actividade dos alunos foi um dos aspectos críticos identificados. De facto, as futuras professoras revelaram alguma dificuldade em dar tempo aos alunos para delinearem um plano de resolução e/ou perceberem os cálculos a realizar, tendendo, com alguma frequência, a sugerir a os passos a seguir. Por outro lado, ainda que formulem os conceitos de forma precisa, utilizando uma linguagem acessível aos alunos, manifestam algumas dificuldades em orientar os alunos para a percepção das ideias, conceitos e relações que pretendem explorar com os problemas. Este aspecto, mais evidente nas práticas de Inês e Beatriz, parece estar relacionado com a forma como é gerido o discurso em sala de aula, nomeadamente pela tendência para a formulação de perguntas de forma fechada e em focar mais a atenção dos alunos nas operações a efectuar do que no seu significado. Joana é a única que recorre a materiais manipuláveis (no problema do *Gato e o rato*), mostrando ser capaz de orientar os

alunos para o estabelecimento de ligações entre a actividade desenvolvida com materiais e as ideias matemáticas modeladas

Considerações finais

Da reflexão que as futuras professoras fazem sobre a sua prática de ensino, bem como da análise dessa mesma prática feita pelas próprias e pelos seus professores cooperantes, sobressai a ideia de que a integração de problemas históricos no ensino básico resulta bem em termos do interesse e motivação despertado nos alunos e como uma forma de estabelecer ligações com outras áreas. A este propósito, uma das professoras cooperantes destaca o contributo dos problemas históricos para contrariar a imagem que os alunos do ensino básico possuem sobre a matemática, muita centrada na execução de cálculos. Como a própria refere a propósito de um dos seus alunos: “Notava-se que ele estava a ...alargar os horizontes dele, que não estava à espera de aprender ali coisas que não tinham a ver com ...directamente com a matemática.”. Outro professor cooperante aponta também no mesmo sentido, reconhecendo que, por vezes, a excessiva centralização do professor nos conteúdos curriculares leva os professores a descurar outras vertentes, como a história da matemática, que podem contribuir para aprendizagens “mais vivas e eficientes”. Este professor, que salienta como particularmente positiva a forma como Inês integra os problemas históricos em sala de aula, destaca precisamente a abertura de ligações a outras disciplinas do currículo: um problema histórico (...) é sempre interdisciplinar, quer com a história, quer com a linguagem que se utiliza... leva-os a outro ambiente, sobretudo quando se introduz o problema como foi feito, se faz uma resenha ... digamos (...) procurar enquadrar socialmente e culturalmente o problema no espaço, tempo, actividade, em que ele é, digamos a realidade, é importante porque cria sempre focos de interdisciplinaridade”. Assim, poderá afirmar-se que o uso de problemas históricos no 2º CEB introduz no ensino da matemática a face social e humana da matemática, ou seja, dá uma perspectiva humanista ao conteúdo matemático.

Em sùmula,

“Using history of mathematics in the classroom does not necessarily make students obtain higher scores in the subject overnight, but it can make learning mathematics a meaningful and lively experience, so that (hopefully) learning will come easier and will go deeper” (Man-Keung, 2000, p.8).

Referências Bibliográficas

- Almeida, A. A. M. (1994a). *Aritmética como Descrição do Real (1519-1679)*, Volume I. Lisboa: Imprensa Nacional, Casa da Moeda.
- Almeida, A. A. M. (1994b). *Aritmética como Descrição do Real (1519-1679)*, volume II. Lisboa: Imprensa Nacional, Casa da Moeda.

- Barbin, E. (2000a). The historical dimension: from teacher to learner. In J. Fauvel & J. van Mannen (Eds.), *History in mathematics education: the ICMI study* (pp.66-70). Dordrecht: Kluwer.
- Fauvel, J. (1991). Using History in Mathematics Education. *For the learning of Mathematics*, 11, 3-6.
- Flores, A. (2002). Profound Understanding of Division of Fractions. In Bonnie Litwiller e George Bright (Eds), *Making Sense of Fractions, Ratios and Proportions*. 2002 Yearbook (pp.237-246). Reston: NCTM.
- Furinghetti, F. (1996). History, research and teaching mathematics: case studies for linking different domains. In M. J. Lagarto, A. Vieira & E. Veloso (Org.), *História e Educação Matemática – Proceedings*, Vol I (pp.275-276). Lisboa: Associação de Professores de Matemática, Departamento de Matemática da Universidade do Minho.
- Grugetti, L. (2000a). Ancient problems for the development of strategic thinking. In J. Fauvel & J. van Mannen(Eds.), *History in mathematics education: the ICMI study* (pp.78-81). Dordrecht: Kluwer.
- Kool, M. (1993). Using historical arithmetic books in teaching mathematics to low-attainers. *Proceedings of the First European Summer University on History and Epistemology in Mathematics Education* (pp.215-226) Montpellier: IREM de Montpellier.
- Jorge, F.R. (2008). *Formação Inicial de professores do ensino básico: um percurso centrado na história da matemática*. Aveiro. Universidade de Aveiro. Tese de Doutoramento (não publicada).
- Katz, V. (1998). *A History of Mathematics* (Second Edition). USA: Addison Wesley Longman.
- Man-Keung, S. (2000). The ABCD of Using History of Mathematics in the (Undergraduate) Classroom. In Victor Katz (Ed.), *Using History to Teach Mathematics. An International Perspective* (pp.3-10). Washington DC: The Mathematical Association of America.
- Siebert, D. (2002). Connecting Informal Thinking and Algorithms: The Case os Division of Fractions. In Bonnie Litwiller & George Bright (Eds.), *Making Sense of Fractions, Ratios and Proportions*. 2002 Yearbook (pp. 247-256). Reston: NCTM.
- Swetz, J. F. (2000b). Problem Solving from the History of Mathematics. In Victor Katz (Ed.), *Using History to Teach Mathematics. An International Perspective* (pp.59-68). Washington DC: The Mathematical Association of America.
- Tzanakis, C. & Arcavi, A. (2000). Integrating history of mathematics in the classroom: an analytic survey. In John Fauvel and Jan van Maanen (Eds.), *History in Mathematics Education. The ICMI Study* (pp.201- 248). Kluwer Academic Press.
- Winicki, G. (1993). The impact of using mathematics problems with historical backgrounds in the teaching of mathematics on students attitudes to the subject. *Proceedings of the First European Summer University on History and Epistemology in Mathematics Education* (pp.283-285) Montpellier: IREM de Montpellier.