Cadernos de Matemática, Universidade de Aveiro, Portugal – Série de Divulgação – 10 de Fevereiro de 2012

# Exercícios

# de

# Equações Diferenciais Ordinárias

*Tatiana Tchemisova Cordeiro*
*Vera Kharlamova*
*Adelaide Valente Freitas*

Departamento de Matemática
UNIVERSIDADE DE AVEIRO

# Prefácio

A presente publicação tem origem no trabalho desenvolvido nos anos lectivos 2001/02 e 2002/03, na disciplina de Cálculo II, e é continuação da iniciativa lançada com a publicação de "Exercícios de Séries Numéricas e Funcionais"[1].

Existem vários manuais dedicados ao estudo das Equações Diferenciais, em geral, e das Equações Diferenciais Ordinárias, em particular. Sem a pretensão óbvia de minimizar a pesquisa e a consulta de tais manuais, o presente texto tem como objectivo proporcionar um instrumento de trabalho complementar ao estudo inicial das Equações Diferenciais Ordinárias e destina-se a estudantes dos cursos de Cálculo ou de Análise, do ensino universitário e politécnico.

Trata-se de uma sebenta de exercícios sobre Equações Diferencias Ordinárias, com exemplos e exercícios propostos com soluções, precedidos de uma apresentação sucinta de conceitos e resultados essenciais.

Os exercícios aqui propostos não esgotam toda a diversidade de tipos possíveis; apenas representam uma proposta de trabalho suficientemente variada para uma primeira abordagem aos temas considerados.

No primeiro capítulo introduzimos algumas noções básicas e apresentamos exemplos de modelação de problemas usando equações diferenciais. O segundo capítulo é dedicado às equações diferenciais de primeira ordem. Não tendo como objectivo abordar todos os tipos de equações diferenciais de primeira ordem, consideramos um leque variado que permite fornecer um conjunto diverso de técnicas de resolução. No terceiro capítulo consideramos as equações diferenciais lineares de ordem $n$ e alguns outros tipos de equações diferenciais de ordem superior a um. No quarto capítulo trabalham-se as técnicas mais simples de resolução de sistemas de equações lineares. Limitamo-nos só ao estudo de sistemas de equações diferenciais lineares de primeira ordem. No último capítulo reunimos um conjunto de questões de escolha múltipla e de resposta aberta extraídas de provas de avaliação realizadas em vários anos lectivos. Por último, no Anexo, abordamos a resolução do problema de Cauchy com o uso de Transformadas de Laplace e, nos Apêndices, fazemos uma breve introdução às funções reais de várias variáveis e ao conceito de diferencial, dado estes temas não fazerem, por vezes, parte do programa da disciplina de Análise e/ou Cálculo de um primeiro ano.

Finalmente, queremos endossar agradecimentos ao Departamento de Matemática, em particular a todos os colegas das aulas teórico-práticas que connosco trabalharam e que, com as suas críticas e sugestões, contribuíram para a selecção de alguns dos exercícios aqui propostos.

Aveiro, Maio de 2006

*Tatiana Tchemisova Cordeiro, Vera Kharlamova, Adelaide Valente Freitas*

[1] A. Freitas, T. Tchemisova, V. Kharlamova, *Exercícios de Séries Numéricas e Funcionais*, Cadernos de Matemática, CM03/D-05, Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro.

Cadernos de Matemática, Universidade de Aveiro, Portugal – Série de Divulgação – 10 de Fevereiro de 2012

# Conteúdo


**Prefácio** **i**

**1 Introdução** **1**

1.1 Noções básicas . . . . . 1
1.2 Modelação de problemas usando equações diferenciais . . . . . 3
1.3 Equação diferencial correspondente a uma família de curvas . . . . . 4
1.4 Exercícios . . . . . 6
1.5 Soluções . . . . . 7

**2 Equações diferenciais de primeira ordem** **9**

2.1 Noções básicas . . . . . 9
2.2 Equação diferencial de variáveis separadas . . . . . 10
2.3 Equação diferencial de variáveis separáveis . . . . . 11
2.4 Equação diferencial redutível a equação de variáveis separáveis . . . . . 12
2.5 Equação diferencial homogénea . . . . . 13
2.6 Equação diferencial redutível à homogénea ou à de variáveis separáveis . . . . . 15
2.7 Equação diferencial linear de 1ª ordem . . . . . 18
2.8 Equação de Bernoulli . . . . . 21
2.9 Equação diferencial exacta . . . . . 22
2.10 Equação diferencial com factor integrante . . . . . 24
2.11 Exercícios. . . . . . 26
2.12 Soluções . . . . . 30

**3 Equações diferenciais de ordem superior à primeira** **33**

3.1 Noções básicas . . . . . 33
3.2 Redução da ordem em equações diferenciais de ordem superior à primeira . . . . . 34
3.2.1 Equação diferencial contendo somente a variável independente e a derivada de maior ordem da função desconhecida . . . . . 35
3.2.2 Equação diferencial não contendo a função desconhecida . . . . . 36
3.2.3 Equação diferencial não contendo a função desconhecida, nem as suas derivadas até à ordem $k-1$ inclusivamente . . . . . 37
3.2.4 Equação diferencial não contendo a variável independente . . . . . 38
3.3 Equação diferencial linear de ordem $n$ . . . . . 40
3.3.1 Equação diferencial linear homogénea com coeficientes constantes . . . . . 41
3.3.2 Equação diferencial linear não homogénea com coeficientes constantes . . . . . 43
3.3.3 Equação de Euler . . . . . 45

3.4 Exercícios . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 46
3.5 Soluções . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 48

**4 Sistemas de equações diferenciais lineares de primeira ordem com coeficientes constantes** **51**
4.1 Noções básicas . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 51
4.2 Alguns métodos de resolução de sistemas de equações diferenciais . . . . . . . . . 52
4.2.1 Resolução directa . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 52
4.2.2 Método por eliminação: sistemas $2 \times 2$ . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 53
4.2.3 Método por eliminação: caso geral . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 54
4.3 Problema de Cauchy para sistemas de equações diferenciais lineares de 1ª ordem 56
4.4 Exercícios . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 59
4.5 Soluções . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 60

**5 Exercícios de auto-avaliação** **63**

**Anexo** **75**
Transformadas de Laplace na resolução de problemas de Cauchy . . . . . . . . . . . . 77

**Apêndices** **81**
Apêndice 1: Diferencial de uma função real de variável real . . . . . . . . . . . . . . . 83
Apêndice 2: Funções reais de duas variáveis reais . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 87

**Bibliografia** **89**

# Capítulo 1

# Introdução

## 1.1 Noções básicas

Chama-se **equação diferencial ordinária**[1] a uma equação

$$F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0 \tag{1.1}$$

que relaciona uma variável independente $x$, uma função desconhecida $y = y(x)$, com $y : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, e as derivadas de $y$ de diferentes ordens.

Chama-se **ordem** de uma equação diferencial ordinária à maior ordem da derivada que entra nessa equação. Assim, a equação diferencial (1.1) é de ordem $n$.

Ao processo de resolução de uma equação diferencial chama-se **integração**.

Diz-se que a função $y = y(x)$ é uma **solução** da equação diferencial de ordem $n$ (1.1) se substituindo na equação (1.1) a função $y$, juntamente com as suas derivadas até a ordem $n$, se obtém uma identidade.

Chama-se **integral geral** da equação diferencial (1.1) de ordem $n$ à família de funções $y$, dependentes da variável $x$ e de $n$ *constantes arbitrárias*[2] $C_1, C_2, ..., C_n$, dadas explicitamente por

$$y = \phi(x, C_1, C_2, ..., C_n) \tag{1.2}$$

ou, na forma implícita, por

$$\Phi(x, y, C_1, C_2, ..., C_n) = 0, \tag{1.3}$$

as quais são soluções da equação (1.1) para valores de $C_1, C_2, ..., C_n$ fixos, sendo $\phi$ e $\Phi$ funções[3] $n$ vezes diferenciáveis em ordem a $x$.

[1] A palavra *ordinária* na designação da equação diferencial (1.1) indica que a função desconhecida $y$ é uma função de uma só variável. Existem, ainda, as chamadas *equações diferenciais às derivadas parciais* as quais envolvem funções desconhecidas de várias variáveis e as suas derivadas parciais.

[2] Considera-se aqui $C_i \in \mathbb{R},\ i \in 1, 2, \ldots, n$, embora, em geral, as constantes possam pertencer ao conjunto dos números complexos.

[3] As funções $\phi$ e $\Phi$ são funções reais de várias variáveis reais (consulte o Anexo II ou, com mais detalhe, por exemplo, [5]).

**Exemplo 1.1.1 (integral geral)** *O conjunto das funções*

$$y = C_1x^2 + C_2x + C_3 \ , \quad C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}, \tag{1.4}$$

*é o integral geral (na forma explicita) da equação diferencial de terceira ordem*

$$y''' = 0 \ . \tag{1.5}$$

*De facto, substituindo* $y$ *por* $C_1x^2 + C_2x + C_3$ *na equação (1.5) obtém-se a identidade* $0 = 0$*, pelo que a função (1.4) é solução da equação (1.5). Por outro lado, na expressão (1.4) entram três constantes arbitrárias, tantas quanto a ordem da equação diferencial (1.5). Assim sendo, (1.4) representa o integral geral da equação diferencial (1.5).*

**Exemplo 1.1.2 (integral geral)** *O conjunto das funções* $y = y(x)$ *definidas implicitamente por*

$$x^2 + y^2 = C, \tag{1.6}$$

*com* $C \in \mathbb{R}_0^+$*, representa o integral geral da equação diferencial de 1ª ordem*

$$yy' + x = 0. \tag{1.7}$$

*Na realidade, derivando em ordem a* $x$*, ambos os membros da equação (1.6), obtém-se*

$$2x + 2yy' = 0,$$

*donde*

$$yy' = -x. \tag{1.8}$$

*Substituindo o primeiro termo do primeiro membro de (1.7) pela expressão encontrada em (1.8), obtém-se a identidade* $0 = 0$*. Além disso, a equação (1.6) depende de uma constante arbitrária e a equação diferencial (1.7) é de ordem 1.*

Se em (1.2) ou (1.3) se atribuir valores reais fixos às constantes arbitrárias $C_1, C_2, ..., C_n$, obtêm-se uma **solução particular** da equação diferencial (1.1).
O integral geral de uma equação diferencial é o conjunto de todas as soluções particulares dessa equação.

**Exemplo 1.1.3 (solução particular)** *Tendo em conta o Exemplo 1.1.1, observa-se que a função* $y = x^2 - 2$ *é uma solução particular da equação diferencial* $y''' = 0$*. Aquela solução particular resulta da solução geral* $y = C_1x^2 + C_2x + C_3$ *para valores das constantes constantes* $C_1 = 1$*,* $C_2 = 0$*,* $C_3 = -2$*.*

O gráfico de cada solução da equação diferencial designa-se por **curva integral**.

Os gráficos das funções (1.2) ou (1.3), para os diferentes valores possíveis das constantes arbitrárias $C_1, C_2, ..., C_n$, constituem a **família das curvas integrais** da equação diferencial (1.1).

Para algumas equações diferenciais pode acontecer que outras soluções existam, as quais não podem ser obtidas atribuindo um valor específico às constantes arbitrárias em (1.2) ou (1.3). Tais soluções são chamadas **soluções singulares**.

Ao conjunto de todas as soluções particulares e soluções singulares de uma equação diferencial chama-se **solução geral** dessa equação.

**Exemplo 1.1.4** *A família de funções*

$$y = \frac{1}{x+C} - 2, \quad C \in \mathbb{R}, \tag{1.9}$$

*é o integral geral da equação diferencial*

$$y' + (y+2)^2 = 0. \tag{1.10}$$

*Porém, a função $y = -2$ também satisfaz esta equação diferencial, mas não pode ser representada na forma (1.9), para algum $C \in \mathbb{R}$. Donde, a função $y = -2$ é uma solução singular da equação diferencial (1.10). A solução geral da equação (1.10) é*

$$y = \frac{1}{x+C} - 2, \quad C \in \mathbb{R}, \quad e \quad y = -2.$$

*A família de todas as curvas integrais da equação (1.10) é representada pelos gráficos das funções de (1.9) e pela recta $y = -2$.*

**Nota.** É evidente que, na ausência de soluções singulares de uma equação diferencial, o integral geral e a solução geral dessa equação coincidem. Por exemplo, no caso da equação diferencial (1.5), a família de funções dada por (1.4) representa, simultaneamente, o integral geral e a solução geral dessa equação diferencial.

## 1.2 Modelação de problemas usando equações diferenciais

Variados processos dinâmicos observados na natureza e diferentes problemas das Ciências Naturais, Geometria, Economia, etc., podem ser representados à custa de equações diferenciais. Consideram-se aqui alguns exemplos mais simples de modelação usando equações diferenciais ordinárias.

**A lei do movimento.** Suponha-se que é conhecida, em cada instante de tempo $t$, a velocidade com que um ponto material se desloca ao longo do eixo $Ox$. Suponha-se também que essa velocidade pode ser descrita por uma função $v(t)$ que é contínua para $t \geq 0$. Pretende-se encontrar a lei do movimento deste ponto, i.e., a lei que determina o valor $x$ da abcissa do ponto em função do tempo.
O problema formulado reduz-se ao problema de determinação da solução geral $x = x(t)$ da equação diferencial da primeira ordem

$$x'(t) = v(t),$$

ou, na forma mais curta, $x' = v$.

**A equação do movimento de uma partícula sujeita a duas forças.** Assuma-se que uma partícula de massa $m$ se move ao longo do eixo $Ox$ sujeita a duas forças: uma, proporcional ao seu deslocamento a partir de um ponto fixo da sua trajectória e dirigida para a origem $O$, e a outra, uma força da resistência proporcional à sua velocidade. Pretende-se exprimir a lei do movimento da partícula por meio de uma equação diferencial.
A primeira força pode ser expressa por $-k_1 x(t)$ e a segunda por $-k_2 x'(t)$, onde $k_1$ e $k_2$ são

coeficientes de proporcionalidade ($k_1, k_2 \geq 0$). A função $x = x(t)$ determina a lei do movimento da partícula. Por outro lado, pela lei de Newton, a força total aplicada à partícula é igual a massa vezes a aceleração e pode ser escrita na forma $mx''(t)$. Igualando as duas expressões que definem a força resultante, deduz-se a equação diferencial da segunda ordem

$$mx''(t) = -k_1 x(t) - k_2 x'(t),$$

ou, simplesmente, $mx'' = -k_1 x - k_2 x'$.

**A equação de uma curva definida pelo declive da sua recta tangente.** A equação das curvas cujas rectas tangentes, em cada ponto $(x, y)$, tem por declive a soma das coordenadas desse ponto é a equação diferencial de primeira ordem

$$y'(x) = x + y(x),$$

ou, na sua forma mais curta, $y' = x + y$. Note-se que a solução geral desta equação diferencial determina a família de todas as curvas com aquela propriedade.

**A taxa relativa de variação.** Em várias situações fala-se em taxa relativa de variação. Por exemplo, quando se diz que uma dada população cresce a uma taxa de 2% por ano, tal significa que a função $P = P(t)$, que determina o tamanho da população em função de tempo, satisfaz a equação diferencial de primeira ordem

$$\frac{P'(t)}{P(t)} = 0.02,$$

ou, de modo equivalente, $P'(t) = 0.02P(t)$.

**O peso de uma substância ao desintegrar-se.** É sabido que a velocidade com que uma substância radioactiva se desintegra é directamente proporcional à sua massa inicial sendo o coeficiente de desintegração $k \geq 0$. Sabendo que no instante de tempo $t_0$ o peso da substância era $R_0$, qual será o peso $R$ da substância no instante de tempo $t \geq t_0$?
Este problema reduz-se à determinação da solução da equação diferencial de primeira ordem

$$R'(t) = -kR(t), \tag{1.11}$$

tal que, no instante de tempo inicial $t = t_0$, o peso toma o valor $R_0$. Este tipo de problema é chamado *problema de Cauchy*, e corresponde à resolução de uma equação diferencial sujeita a condições iniciais.[4]

## 1.3 Equação diferencial correspondente a uma família de curvas

Dada uma equação diferencial o objectivo é resolve-la, ou seja, encontrar a sua solução geral. Outras vezes o que é solicitado é resolver o problema inverso: encontrar uma equação diferencial de ordem $n$ cujo integral geral é uma dada família de curvas, definida por (1.2) ou (1.3). Nesse caso procede-se do seguinte modo. Deriva-se $n$ vezes a equação[5] que define as curvas, supondo

[4] Sobre a resolução do problema de Cauchy veja-se o capítulo seguinte.

[5] Por abuso de linguagem, derivar uma equação significa derivar ambos os membros da equação.

que $y$ é função de $x$. Resolve-se o sistema das $n$ equações assim obtidas em ordem às constantes arbitrárias $C_1, C_2, ..., C_n$. Substituem-se, na equação que define as curvas, as expressões obtidas para as constantes $C_1, C_2, ..., C_n$. Deste modo, obtém-se uma equação da forma (1.1), i.e., obtém-se uma equação diferencial, como se pretendia.

**Exemplo 1.3.1** *Considere-se a família de curvas*

$$C_1 x + (y - C_2)^2 = 0, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}. \tag{1.12}$$

*Uma vez que a equação (1.12) contem duas constantes arbitrárias, $C_1$ e $C_2$, para construir a equação diferencial cujo integral geral é dado por (1.12), é preciso resolver duas equações em ordem a essas constantes. Derive-se, então, (1.12) duas vezes em ordem a $x$, supondo $y = y(x)$. Obtém-se o sistema*

$$\left\{ \begin{array}{rcrcl} C_1 & + & 2(y - C_2)y' & = & 0 \\ 2(y')^2 & + & 2(y - C_2)y'' & = & 0, \end{array} \right.$$

*cuja solução é*

$$\left\{ \begin{array}{rcl} C_2 & = & y + \frac{(y')^2}{y''} \\ C_1 & = & 2\frac{(y')^3}{y''}. \end{array} \right. \tag{1.13}$$

*Substituíndo, na equação inicial (1.12), as constantes $C_1$ e $C_2$ pelas expressões (1.13) e simplificando, resulta a equação diferencial pretendida*

$$2y''x + y' = 0.$$

**Observação.** Por vezes é conveniente escrever a equação diferencial usando *diferenciais*[6]. Para uma função $y = y(x)$ diferenciável, tem-se

$$dy = y'dx,$$

onde $dx$ representa o diferencial da variável independente $x$ e $dy$ o diferencial da variável dependente $y = y(x)$.

**Exemplo 1.3.2** *Existe alguma equação diferencial que determina as rectas que passam pela origem do referencial?*
*As equações das rectas que passam pela origem são da forma*

$$y = mx, \ m \in \mathbb{R} \quad (*) \quad (\textit{rectas não verticais})$$

*ou*

$$x = 0 \quad (**) \quad (\textit{recta vertical}).$$

*Ora, de (*) tem-se*

$$\left\{ \begin{array}{l} y = mx \\ y' = m \end{array} \right. \qquad \Rightarrow \qquad y = y'x,$$

*donde a equação diferencial cujas curvas integrais são representadas pela equação $(*)$ é*

$$y'x - y = 0. \tag{1.14}$$

[6] Para mais detalhes consultar Anexo I.

*Note-se que a recta vertical, cuja equação é dada por* $(**)$*, não é solução da equação diferencial (1.14) já que se se substituísse* $x$ *por 0 em (1.14) se teria* $y = 0$*, o que não é verdade para todo o* $y$*.*

*A equação diferencial (1.14) pode ser reescrita usando diferenciais. Multiplicando ambos os membros de (1.14) por* $dx$ *e tomando em conta que* $y'dx = dy$*, obtém-se*

$$x\ dy - y\ dx = 0. \tag{1.15}$$

*A equação assim escrita têm como solução a função* $y = mx$*, para todo o* $m \in \mathbb{R}$*, e também a recta* $x = 0$*, como se verifica por substituição em (1.15) (no caso de* $x = 0$*, é evidente que dx=0). Assim, (1.15) é a equação diferencial procurada.*

## 1.4 Exercícios

1. Classifique, quanto à sua ordem, as seguintes equações diferenciais.

   (a) $dy + (xy - cos\ x)dx = 0$

   (b) $L\frac{d^2\theta}{dt^2} + R\frac{d\theta}{dt} + \frac{\theta}{C} = 0$

   (c) $y''' + xy'' + 2y(y')^2 + xy = 0$

   (d) $\frac{d^2v}{dx^2}\frac{dv}{dx} + x(\frac{dv}{dx})^2 + v = 0$

   (e) $e^{y'''} - xy'' + y = 0$

   (f) $y' + x = (y - xy')^{-3}$

2. Mostre que a função $y = \phi(x)$ dada é solução da equação diferencial indicada.

   (a) $\phi(x) = \frac{sinx}{x}$; $\quad xy' + y = cosx.$

   (b) $\phi(x) = Cx^3$, $C \in \mathbb{R}$; $\quad xy' - 3y = 0$

   (c) $\phi(x) = x(C - ln \mid x \mid)$, $C \in \mathbb{R}$; $\quad (x - y)dx + xdy = 0$

   (d) $\phi(x) = x(\int_1^x \frac{1}{t}e^t dt + C)$, $C \in \mathbb{R}$; $\quad xy' - y = xe^x$

   (e) $\phi(x) = x(lnx^2 + C)$, $C \in \mathbb{R}$; $\quad xy' - y = 2x$

   (f) $\phi(x) = \frac{(x+1)^4}{2} + (x + 1)^2$; $\quad y' - \frac{2}{x+1}y = (x + 1)^3$

   (g) $\phi(x) = Ce^x sinx$, $C \in \mathbb{R}$; $\quad y'' - 2y' + 2y = 0$

   (h) $\phi(x) = C_1 sin(7x) + C_2 cos(7x)$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$; $\quad y'' + 49y = 0$

3. Formalize matematicamente as seguintes condições utilizando equações diferenciais ordinárias.

   (a) Para uma certa substância, a razão de variação da pressão do vapor ($P$) em relação à temperatura ($T$) é proporcional à pressão do vapor e inversamente proporcional ao quadrado da temperatura.

   (b) A população $H$ de uma cidade aumenta (em função do tempo $t$) numa taxa proporcional à população e à diferença entre 200000 e a população.

(c) A velocidade de arrefecimento de um certo corpo exposto ao ar é proporcional à diferença entre a temperatura $T$ inicial do corpo e a temperatura $T_0$ do ar.

(d) *Massa* $\times$ *acelaração* $=$ *força.*

4. Determine a equação diferencial da família das circunferências centradas na origem.

5. Determine a equação diferencial de todas circunferências situadas no I e III quadrantes do plano $\mathbb{R}^2$ e tangentes simultaneamente às rectas $x = 0$ e $y = 0$.

6. Determine a equação diferencial correspondente a uma curva plana definida pela condição que a sua recta tangente, em cada ponto $(x, y)$, tenha declive $y'$ igual ao dobro da soma das coordenadas desse ponto.

7. Determine a equação diferencial correspondente à família de curvas que têm a seguinte propriedade: o produto da abcissa de qualquer ponto pelo comprimento do segmento do eixo $Oy$, delimitado pela recta normal a esse ponto, é igual ao dobro do quadrado da distância desse ponto à origem das coordenadas.

8. Exprima, sob a forma de equação diferencial, a distância $S$ percorrida por um corpo durante o tempo $t$, sabendo que a sua velocidade é proporcional a esta distância.

9. Determine uma equação diferencial da família das curvas planas dada.

   (a) $y = Cx^2$ , com $C \in \mathbb{R}$

   (b) $y^2 = -1 + Cx^2$, com $C \in \mathbb{R}$

   (c) $y = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x}$, com $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

   (d) $y = C_1 x + C_2$, com $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

   (e) $y = e^{cx}$, com $C \in \mathbb{R}$

   (f) $y = ax^2 + be^x$, com $a, b \in \mathbb{R}$

   (g) $y = \sin(x + C)$, com $C \in \mathbb{R}$

## 1.5 Soluções

1. (a) primeira ordem

   (b) segunda ordem

   (c) terceira ordem

   (d) segunda ordem

   (e) terceira ordem

   (f) primeira ordem

2.

3. (a) $P'(T) = k\frac{P}{T^2}$, onde $k$ é o coeficiente de proporcionalidade

   (b) $H'(t) = kH(200000 - H)$

   (c) $\frac{dT}{dt} = k(T - T_0)$

(d) $m\frac{dv}{dt} = F$, onde $v = v(t)$ é a velocidade em função do tempo, ou $m\frac{d^2s}{dt^2} = F$, onde $s = s(t)$ é o deslocamento em função do tempo

4. $x + yy' = 0$

5. $(y - xy')^2 = 2xy((y')^2 + 1)$

6. $\frac{dy}{dx} = 2(x + y)$

7. $y' = \frac{x^2}{2(x^2+y^2)-xy}$

8. $\frac{dS}{dt} = kS$, onde $k$ é o coeficiente de proporcionalidade

9. (a) $y' = 2\frac{y}{x}$
   (b) $y^2 + 1 = xyy'$
   (c) $y'' + 2y' + y = 0$
   (d) $y'' = 0$
   (e) $xy' - y\ln y = 0$
   (f) $y'(x^2 - 2) - xy''(x - 2) = 2y(x - 1)$
   (g) $y' = \sqrt{1 - y^2}$

Cadernos de Matemática, Universidade de Aveiro, Portugal – Série de Divulgação – 10 de Fevereiro de 2012

# Capítulo 2

# Equações diferenciais de primeira ordem

## 2.1 Noções básicas

Considere uma **equação diferencial de 1ª ordem** na sua forma geral

$$F(x, y, y') = 0$$

ou, na sua forma normal

$$y' = f(x, y)$$

ou, ainda, usando diferenciais

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0 \ ,$$

com uma função desconhecida $y = y(x)$[1].

O **integral geral** da equação diferencial de 1ª ordem é a família uni-paramétrica de funções $y = \phi(x, C)$ (ou, na forma implícita $\Phi(x, y, C) = 0$) que transforma essa equação diferencial numa identidade, sendo $C \in \mathbb{R}$ uma constante arbitrária.

Quando se atribui um valor particular à constante $C$, $C = C_0$, obtém-se uma **solução particular**, $y = \phi(x, C_0)$ (ou, na forma implícita $\Phi(x, y, C_0) = 0$), da equação diferencial de 1ª ordem.

Designa-se por **problema de Cauchy**, de uma equação diferencial de 1ª ordem, ao problema que consiste em encontrar a solução particular $y = \phi(x, C_0)$, dessa equação diferencial, que satisfaz uma **condição inicial** da forma $y(x_0) = y_0$. A condição $y(x_0) = y_0$ também pode ser representada por $y|_{x=x_0} = y_0$.
Geometricamente, o problema de Cauchy, para equações diferenciais de 1ª ordem, corresponde ao problema de determinação, em $\mathbb{R}^2$, da curva integral, dessa equação diferencial, que passa pelo ponto de coordenadas $(x_0, y_0)$.

**Teorema 2.1 (Existência e unicidade de solução do problema de Cauchy)** *Seja a equação diferencial na forma normal*

$$y' = f(x, y). \tag{2.1}$$

[1] Note que aqui as funções $F$, $f$, $P$ e $Q$ são funções reais de mais do que uma variável real.

*Se a função $f$, de duas variáveis, e a sua derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial y}$ são funções contínuas num domínio $D \subset \mathbb{R}^2$, então, para cada ponto $(x_0, y_0) \in D$, existe e é única a solução $y = y(x)$ da equação diferencial (2.1) que satisfaz a condição inicial $y(x_0) = y_0$.*[2]

**Exemplo 2.1.1** *No Exemplo 1.1.2, verificou-se que a família de funções $x^2 + y^2 = C$, $C \in \mathbb{R}_0^+$, é o integral geral da equação diferencial $yy' + x = 0$. Geometricamente, essa solução representa a família das circunferências centradas na origem.*
*A solução do problema de Cauchy*

$$yy' + x = 0, \quad y(1) = 1,$$

*é $x^2 + y^2 = 2$ e corresponde a uma circunferência centrada na origem e que passa pelo ponto $(1, 1)$.*
*Esta circunferência é única, o que está de acordo com o Teorema 2.1. Realmente, reescrevendo a equação diferencial dada na sua forma normal $y' = -\frac{x}{y}$, observa-se que a função de duas variáveis $f(x, y) = -\frac{x}{y}$ e a sua derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{x}{y^2}$ são contínuas em $D := \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) : y = 0\}$ e $(1, 1) \in D$, pelo que as condições do Teorema 2.1 estão satisfeitas.*

## 2.2 Equação diferencial de variáveis separadas

Uma equação diferencial na forma

$$P(x)dx = Q(y)dy \tag{2.2}$$

é chamada **equação diferencial de variáveis separadas**.

Integrando ambos os membros da equação (2.2) obtém-se o integral geral dessa equação na forma[3]

$$\int P(x)dx = \int Q(y)dy + C, \quad C \in \mathbb{R}. \tag{2.3}$$

**Exemplo 2.2.1** *Para resolver a equação diferencial de variáveis separadas*

$$y^2 dy = e^{-x} dx,$$

*começa-se por integrar ambos os membros da equação dada. Tem-se*

$$\int y^2 dy = \int e^{-x} dx + C \Leftrightarrow \frac{y^3}{3} = -e^{-x} + C,$$

*donde*

$$y = \sqrt[3]{3C - 3e^{-x}}.$$

[2]Note-se que o Teorema 2.1 representa uma condição suficiente de existência e unicidade de solução do problema de Cauchy.Outras condições, eventualmente menos restritivas, que também garantem a existência e unicidade de solução, podem ser formuladas.

[3]Efectivamente, por integração em (2.2), obtém-se $\int P(x)dx + C_1 = \int Q(y)dy + C_2$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$, onde $\int P(x)dx$ representa uma primitiva da função $P$. Supondo $C := C_2 - C_1$, obtém-se (2.3).



Cadernos de Matemática, Universidade de Aveiro, Portugal – Série de Divulgação – 10 de Fevereiro de 2012

*Sendo $C$ uma constante arbitrária, o valor $C^* := 3C$ continua a ser uma constante real arbitrária, pelo que a solução geral da equação diferencial pode ser simplesmente escrita na forma*[4]

$$y = \sqrt[3]{C^* - 3e^{-x}}\,, \quad C^* \in \mathbb{R}.$$

## 2.3 Equação diferencial de variáveis separáveis

Uma equação diferencial na forma

$$y' = f(x)g(y) \tag{2.4}$$

ou, genericamente, na forma

$$M_1(x)N_1(y)dx = M_2(x)N_2(y)dy, \tag{2.5}$$

é chamada **equação diferencial de variáveis separáveis**.[5]

Para resolver uma equação diferencial de variáveis separáveis na forma (2.5) dividem-se ambos os membros dessa equação por $N_1(y)M_2(x)$, no pressuposto de que $N_1(y)M_2(x) \neq 0$, resultando a equação de variáveis separadas

$$\frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx = \frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy,$$

cujo integral geral é

$$\int \frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx = \int \frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy + C, \quad C \in \mathbb{R}. \tag{2.6}$$

**Nota.** Após a obtenção do integral geral (2.6) deverá verificar-se se existem outras soluções da equação diferencial de variáveis separáveis (2.5), entre os zeros das funções assumidas como não nulas no processo de resolução acima indicado. Concretamente, deverá verificar-se se as condições $N_1(y) = 0$ e $M_2(x) = 0$ conduzem a outras soluções da equação diferencial, podendo elas ser ou não da forma (2.6).

**Exemplo 2.3.1** *Considere a equação diferencial*

$$xydx - (1 + x^2)\ln y \; dy = 0. \tag{2.7}$$

*Esta pode ser transformada na forma (2.5) tomando $M_1(x) = x$, $N_1(y) = y$, $M_2(x) = 1 + x^2$, $N_2(y) = \ln y$. Dado que a equação (2.7) contem a expressão numérica $\ln y$, a equação (2.7) só tem sentido para funções $y = y(x)$ positivas ($y > 0$).*
*Sendo $y \neq 0$ e $1 + x^2 \neq 0$, pode-se dividir ambos os membros de (2.7) por $y(1 + x^2)$, resultando uma nova equação*

$$\frac{x}{1 + x^2}dx = \frac{\ln y}{y}dy\,.$$

[4] Na prática, é usual indicar o domínio das constantes arbitrárias apenas no fim do processo de resolução da equação diferencial.

[5] Note que (2.4) pode ser escrita na forma (2.5).

*Por integração desta, e simplificando, vem*

$$\int \frac{x}{1+x^2}dx = \int \frac{\ln y}{y}dy + C \Leftrightarrow \frac{1}{2}\ln(1+x^2) = \frac{\ln^2 y}{2} + C$$

$$\Leftrightarrow \ln(1+x^2) = \ln^2 y + C^*, \quad com\ C^* := 2C.$$

*Donde, o integral geral da equação diferencial de variáveis separáveis dada é*

$$\ln(1+x^2) = \ln^2 y + C^*, \quad C^* \in \mathbb{R}\ .$$

**Exemplo 2.3.2** *A equação diferencial*

$$y' = x\cos^2 y \tag{2.8}$$

*é uma equação de variáveis separáveis na forma (2.4). Em termos de diferenciais, (2.8) pode ser escrita na forma*

$$dy = x\cos^2 y dx.$$

*Se* $\cos^2 y \neq 0$ *então esta última equação é equivalente a* $\frac{dy}{\cos^2 y} = xdx$. *Integrando vem* $\int \frac{1}{\cos^2 y}dy = \int xdx + C$, *donde o integral geral de (2.8) é*

$$\tan y = \frac{x^2}{2} + C, \quad C \in \mathbb{R}. \tag{2.9}$$

*Se* $\cos^2 y = 0$ *então* $y = \frac{\pi}{2} + k\pi$, *com* $k \in \mathbb{Z}$. *Substituindo, na equação (2.8),* $y$ *por* $\frac{\pi}{2} + k\pi$, *obtém-se uma identidade. Logo,* $y = \frac{\pi}{2} + k\pi$, *para qualquer* $k \in \mathbb{Z}$, *é também solução da equação (2.8). Note-se que estas soluções não fazem parte da solução anteriormente encontrada (2.9). Basta atender que a função* $\tan y$, *em (2.9), não está definida para* $y = \frac{\pi}{2} + k\pi$, *qualquer que seja* $k \in \mathbb{Z}$. *Assim, a solução geral da equação diferencial dada (2.8) é constituída pelas funções*

$$\tan y = \frac{x^2}{2} + C,\ C \in \mathbb{R}, \quad e \quad y = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

## 2.4 Equação diferencial redutível a equação de variáveis separáveis

Uma equação diferencial na forma

$$y' = f(ax + by + c), \quad \text{com } a, b, c \in \mathbb{R}, \quad \text{tais que } a, b \neq 0\ , \tag{2.10}$$

pode ser reduzida a uma equação diferencial de variáveis separáveis através de uma mudança de variável conveniente. De facto, considerando $z = ax + by + c$, sendo $z$ função de $x$, i.e., $z = z(x)$, tem-se $z' = a + by' = a + bf(z)$. Assim, (2.10) pode ser reduzida à equação de variáveis separáveis

$$dz = (a + bf(z))dx. \tag{2.11}$$

Tendo determinado o integral geral desta última, e substituindo nesse integral $z$ por $ax + by + c$ obtém-se o integral geral de (2.10).

**Exemplo 2.4.1** *Considere a equação diferencial*

$$y' = \tan^2(x + y - 6)\,, \tag{2.12}$$

*a qual está escrita sob a forma (2.10) com* $f(z) = \tan^2(z)$, $a = b = 1$ *e* $c = -6$. *Para resolvê-la efectua-se a substituição*

$$z = x + y - 6, \tag{2.13}$$

*tomando* $z$ *como uma função de* $x$, $z = z(x)$. *Nesse caso,* $z' = 1 + y'$ *e, por (2.12) e (2.13),*

$$z' = 1 + \tan^2(z)\,,$$

*que é uma equação de variáveis separáveis com variável independente* $x$ *e variável dependente* $z$. *Para a resolução desta equação, usa-se o procedimento descrito em 2.3.*

$$dz = (1 + \tan^2(z))dx \Leftrightarrow \frac{dz}{1 + \tan^2(z)} = dx \text{ ( \textit{note-se que} } 1 + \tan^2(z) \neq 0, \forall z)$$

$$\Leftrightarrow \frac{dz}{\sec^2(z)} = dx \Leftrightarrow \cos^2(z)dz = dx$$

$$\Leftrightarrow \int \cos^2(z)dz = \int dx + C \Leftrightarrow \int \frac{1 + \cos(2z)}{2}dz = \int dx + C$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(z + \frac{\sin(2z)}{2}\right) = x + C, \quad C \in \mathbb{R}\,.$$

*Lembrando que, de (2.13),* $z = x + y - 6$, *da última igualdade obtém-se o integral geral da equação diferencial (2.12),*

$$\frac{1}{2}\left(x + y - 6 + \frac{\sin(2(x + y - 6))}{2}\right) = x + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

*Simplificando tem-se*

$$2(x - y) - \sin(2(x + y - 6)) = C_1, \quad C_1 \in \mathbb{R},$$

*com* $C_1 := -4C - 12$ *(verifique).*

## 2.5 Equação diferencial homogénea

Uma equação diferencial na forma

$$y' = \varphi\left(\frac{y}{x}\right), \tag{2.14}$$

onde $\varphi$ é uma função real de variável real, ou na forma

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0\ , \tag{2.15}$$

onde $M$ e $N$ são funções homogéneas com o mesmo grau de homogeneidade[6], é chamada **equação diferencial homogénea**.

[6]Diz que uma função $f : \mathcal{R} \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ é homogénea, com grau de homogeneidade igual a $\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$, se, para todo $(x, y) \in \mathcal{R}$ e todo $t \neq 0$, tal que $(tx, ty) \in \mathcal{R}$, se tem $f(tx, ty) = t^\alpha f(x, y)$.

Observe-se que a equação (2.14) pode ser sempre reescrita na forma (2.15).

Para resolver uma equação diferencial homogénea efectua-se a mudança de variável $y = ux$, onde $u = u(x)$ é uma função desconhecida. Nesse caso, $y' = u'x + u$ e, portanto, $dy = (u'x + u)dx$. A mudança de variável proposta transforma a equação diferencial homogénea inicial, com função desconhecida $y$, numa equação diferencial de variáveis separáveis, com função desconhecida $u$. Resolvendo esta última e substituindo $u$ por $y/x$ na solução obtida, vem o integral geral da equação diferencial homogénea.

**Exemplo 2.5.1** *Considere a equação diferencial*

$$(y^2 - 2xy)dx - xydy = 0\,. \tag{2.16}$$

*Comparando com (2.15), tome-se* $M(x, y) = y^2 - 2xy$ *e* $N(x, y) = -xy$. *Para todo o* $t > 0$, *observa-se que*

$$M(tx, ty) = (ty)^2 - 2txty = t^2y^2 - 2t^2xy = t^2M(x, y)$$

*e*

$$N(tx, ty) = -txty = t^2(-xy) = t^2N(x, y)\,.$$

*Logo,* $M$ *e* $N$ *são duas funções homogéneas, com grau de homogeneidade* $\alpha = 2$. *A equação (2.16) é então uma equação diferencial homogénea. Para resolvê-la considera-se a substituição* $y = ux$, *com* $u = u(x)$. *Assim,* $y' = u'x + u$ *e* $dy = (u'x + u)dx$. *Substituindo, em (2.16),* $y$ *e* $dy$ *por estas últimas expressões vem*

$$((ux)^2 - 2xux)dx - ux^2(u'x + u)dx = 0,$$

*ou, de modo equivalente,*

$$-(2 + u'x)ux^2dx = 0. \tag{2.17}$$

*Seja* $y = ux \neq 0$, *o que é possível somente se* $u \neq 0$ *e* $x \neq 0$. *Nesse caso, (2.17) é equivalente à equação diferencial*

$$2 + u'x = 0.$$

*Resolvendo esta última obtém-se*

$$2 + u'x = 0 \Leftrightarrow xdu = -2dx \Leftrightarrow du = -2\frac{1}{x}dx \Leftrightarrow \int du = -2\int \frac{1}{x}dx + C$$

$$\Leftrightarrow u = -2\ln|x| + C\,, \quad C \in \mathbb{R}.$$

*Logo,*

$$y = ux = -2x\ln|x| + Cx\,, \quad C \in \mathbb{R}. \tag{2.18}$$

*Se* $y = ux = 0$ *ou* $x = 0$ *a equação diferencial (2.16) transforma-se numa identidade, pelo que* $y = 0$ *e* $x = 0$ *são também soluções desta equação. Estas soluções,* $y = 0$ *e* $x = 0$, *não pertencem ao conjunto das soluções definidas por (2.18). Assim, a solução geral de (2.16) é*

$$y = -2x\ln|x| + Cx,\; C \in \mathbb{R}, \quad e \quad y = 0, \quad e \quad x = 0.$$

## 2.6 Equação diferencial redutível à homogénea ou à de variáveis separáveis

Considere-se a equação diferencial na forma

$$y' = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right) \ , \tag{2.19}$$

com $a_i, b_i, c_i \in \mathbb{R}, \ i = 1, 2$ , e com $c_1 \neq 0$ ou $c_2 \neq 0$.

Se $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$, a equação (2.19) pode ser reduzida a uma equação diferencial homogénea através da mudança de variáveis $x = u + h, \ y = v + k$. Aqui, $u$ e $v$ são novas variáveis e as constantes $h$ e $k$ resultam como solução do sistema de duas equações

$$\begin{cases} a_1h & + & b_1k & + & c_1 & = & 0 \\ a_2h & + & b_2k & + & c_2 & = & 0. \end{cases} \tag{2.20}$$

Caso $\Delta = 0$, a mudança de variável

$$z = a_1x + b_1y, \tag{2.21}$$

com $z = z(x)$, reduz a equação (2.19) a uma equação de variáveis separáveis.

**Exemplo 2.6.1** *A equação diferencial*

$$(y + 2)dx - (2x + y - 4)dy = 0 \tag{2.22}$$

*pode ser escrita na forma*

$$y' = \frac{y + 2}{2x + y - 4}\,, \tag{2.23}$$

*se se supor que* $2x + y - 4 \neq 0$.

*Para se obter a solução geral de (2.22) comece-se, então, por considerar, em primeiro lugar, o caso* $2x+y-4 \neq 0$. *A equação (2.23) é da forma (2.19) com* $\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$. *Consequentemente, para resolver a equação (2.23) efectua-se a mudança de variáveis* $x = u + h, \ y = v + k$, *com* $h$ *e* $k$ *soluções do sistema (2.20). Para a equação (2.23), o sistema (2.20) é dado por*

$$\begin{cases} k + 2 & = & 0 \\ 2h + k - 4 & = & 0. \end{cases}$$

*Deste sistema vem* $h = 3$ *e* $k = -2$. *Deste modo, para resolver a equação diferencial (2.23) deve ser efectuada a mudança de variáveis*

$$x = u + 3, \quad y = v - 2. \tag{2.24}$$

*Nesse caso,* $x' = u'$ *e* $y' = v'$, *pelo que (2.23) pode ser reescrita na forma*

$$v' = \frac{v - 2 + 2}{2(u + 3) + v - 2 - 4},$$

*i.e.,*

$$v' = \frac{v}{2u+v}\,. \tag{2.25}$$

*Suponha-se que $v \neq 0$. Dividindo por $v$, o numerador e o denominador do segundo membro de (2.25), fica*

$$v' = \frac{1}{2u/v+1}. \tag{2.26}$$

*Esta última equação é uma equação diferencial homogénea já que é da forma $v' = \varphi(\frac{v}{u})$. As variáveis em (2.26) são $u$ (variável independente) e $v = v(u)$ (variável dependente). De acordo com o exposto em* ***2.5****, para resolver a equação (2.26) considera-se uma nova mudança de variável,*

$$v = tu, \tag{2.27}$$

*com $t = t(u)$ (aqui $v \neq 0$, logo $t \neq 0$ e $u \neq 0$). Assim, $v' = t'u + t$ e, substituindo em (2.26), tem-se*

$$t'u + t = \frac{1}{2/t+1} \tag{2.28}$$

$$\Leftrightarrow t'u = \frac{t}{2+t} - t \Leftrightarrow ut' = \frac{-t-t^2}{2+t}$$

$$\Leftrightarrow udt = -\frac{t(1+t)}{2+t}du \quad \Big(\textit{eq. dif. de variáveis separáveis}\Big). \tag{2.29}$$

*Anteriormente concluiu-se que $t \neq 0$. Se, ainda, se supor que $t \neq -1$, a última equação é equivalente à equação de variáveis separadas*

$$-\frac{2+t}{t(1+t)}dt = \frac{du}{u}.$$

*Utilizando técnicas de primitivação de funções racionais tem-se $\int \frac{2+t}{t(1+t)}dt = \ln\frac{|t+1|}{t^2} + C$, com $C \in \mathbb{R}$, (verifique). Consequentemente,*

$$-\int \frac{2+t}{t(1+t)}dt = \int \frac{du}{u} + C \Leftrightarrow \ln|\frac{t+1}{t^2}| = \ln|u| + \ln|C_1| \Leftrightarrow \ln|\frac{t+1}{t^2}| = \ln|uC_1|$$

$$\Leftrightarrow \frac{t+1}{t^2} = uC_1\,, \quad \textit{com } C_1 \in \mathbb{R}\setminus\{0\}.$$

*Se $C_1 = 0$, ter-se-ia $t = -1$. Por substituição directa em (2.29), verifica-se que $t = -1$ é também uma solução da equação (2.29) e, portanto, de (2.28). Logo, o integral geral da equação (2.28) pode ser escrita na forma*

$$\frac{t+1}{t^2} = uC_1\,, \quad \textit{com } C_1 \in \mathbb{R}.$$

*De (2.27) tem-se $t = v/u$, com $u \neq 0$, e, consequentemente, da última fórmula vem*

$$\frac{t+1}{t^2} = uC_1 \Leftrightarrow \frac{v/u+1}{(v/u)^2} = uC_1 \Leftrightarrow \frac{v+u}{v^2} = C_1\,, \quad C_1 \in \mathbb{R}\,.$$

*Tomando em conta (2.24) obtém-se*

$$\frac{(y+2)+(x-3)}{(y+2)^2} = C_1, \quad C_1 \in \mathbb{R},$$

*ou seja,*

$$x + y - 1 = C_1(y+2)^2, \quad C_1 \in \mathbb{R}, \tag{2.30}$$

*que é solução da equação diferencial (2.23) e, portanto, da equação inicial (2.22).*

*Lembra-se que a solução (2.30) foi obtida de (2.25) no pressuposto de que* $v \neq 0$.
*Suponha-se agora que* $v = 0$. *Tomando em conta que* $v = y + 2$ *(da segunda fórmula de (2.24)), obtém-se* $y = -2$. *Por substituição directa, na equação diferencial (2.22), verifica-se que* $y = -2$ *é uma sua solução. Esta solução é singular, uma vez que não pode ser representada na forma (2.30).*

*Finalmente, seja* $2x + y - 4 = 0$ *em (2.22).*
*Nesse caso,* $y = 4 - 2x$ *e, por substituição desta função em (2.22), obtém-se* $(2-2x)dx = 0$, *que não é uma identidade; logo,* $y = 4 - 2x$ *não é solução de (2.22).*

*Concluindo, a solução geral da equação (2.22) é*

$$x = C_1(y+2)^2 - y + 1, \ C_1 \in \mathbb{R}, \quad e \quad y = -2.$$

**Exemplo 2.6.2** *Considere a equação diferencial*

$$(x - 2y + 3)dx + (x - 2y + 1)dy = 0\,. \tag{2.31}$$

*Admitindo que* $x - 2y + 1 \neq 0$, *a equação (2.31) pode reescrita na forma*

$$y' = \frac{-x + 2y - 3}{x - 2y + 1}. \tag{2.32}$$

*Uma vez que* $\Delta = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 0$, *a equação (2.32) resolve-se efectuando a mudança de variável dada por (2.21) , i.e.,*

$$z = -x + 2y, \tag{2.33}$$

*com* $z = z(x)$. *Assim sendo,* $z' = -1 + 2y'$, *pelo que, de (2.32),*

$$z' = -1 + \frac{2(z-3)}{-z+1}. \tag{2.34}$$

*Ora,*

$$z' = -1 + \frac{2(z-3)}{-z+1} \Leftrightarrow z' = \frac{z - 1 + 2z - 6}{-z+1} \Leftrightarrow z' = \frac{3z-7}{1-z}. \quad \left( \begin{array}{c} \textit{equação de variáveis} \\ \textit{separáveis} \end{array} \right)$$

*Se se supor que* $3z - 7 \neq 0$, *da última equação ainda se obtém*

$$\frac{1-z}{3z-7}dz = dx \Leftrightarrow \int \frac{1-z}{3z-7}dz = \int dx \Leftrightarrow -\frac{1}{3}\int \frac{3z-3}{3z-7}dz = \int dx$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{3}\int (1 + \frac{4}{3z-7})dz = \int dx$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{3}(z + \frac{4}{3}\ln|3z-7|) = x + C\,, \quad C \in \mathbb{R}\,. \tag{2.35}$$

*Tendo em conta (2.34), o integral geral de (2.32) é*

$$-\frac{1}{3}(-x + 2y + \frac{4}{3}\ln|-3x+6y-7|) = x + C\,, \quad C \in \mathbb{R},$$

*ou, simplificando,*

$$2\ln|-3x+6y-7|) = C - 3(x+y)\,, \quad C \in \mathbb{R}. \tag{2.36}$$

*Verifica-se, agora, o caso quando* $3z - 7 = 0$*. Tomando em conta (2.33), obtém-se*

$$-3x + 6y - 7 = 0,$$

*donde*

$$y = \frac{3x+7}{6}, \tag{2.37}$$

$$dy = \frac{1}{2}dx. \tag{2.38}$$

*Substituindo (2.37) e (2.38) em (2.32), obtém-se uma identidade, logo (2.37) é uma solução de (2.32). Esta solução é singular, uma vez que o logaritmo em (2.36) não é definido quando y satisfaz (2.37).*

*Lembra-se que as soluções (2.36) e (2.37) foram obtidas na condição* $x - 2y + 1 \neq 0$*. Considera-se, agora, a situação* $x - 2y + 1 = 0$*. Nesse caso,* $y = \frac{x+1}{2}$ *e, por substituição directa, verifica-se que esta função y não é uma solução de (2.31).*

*Do exposto conclui-se que a solução geral da equação diferencial (2.31) é a família de funções*

$$2\ln|-3x+6y-7| = C - 3(x+y),\ C \in \mathbb{R}, \quad e \quad y = \frac{3x+7}{6}.$$

## 2.7 Equação diferencial linear de 1ª ordem

Uma equação diferencial na forma

$$y' + p(x)y = q(x) \tag{2.39}$$

é chamada **equação diferencial linear de 1ª ordem**.

A solução geral da equação diferencial linear (2.39) pode ser procurada[7] na forma

$$y = u(x)v(x), \tag{2.40}$$

onde $u = u(x)$ e $v = v(x)$ são funções desconhecidas a determinar do seguinte modo.
Derivando (2.40) tem-se

$$y' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x). \tag{2.41}$$

[7] O método descrito nesse capítulo é, por vezes, chamado *método de Bernoulli*. Um outro método de resolução das equações diferenciais lineares, *método de Lagrange*, é apresentado no Capítulo 3.1.2 o qual engloba uma metodologia geral de resolução de equações diferenciais lineares de ordem $n$, $n \in \mathbb{N}$.

Substituindo (2.40) e (2.41) na equação diferencial (2.39) obtem-se

$$v(x)\ u'(x)\ +\ [v'(x)\ + p(x)\ v(x)]\ u(x) = q(x). \tag{2.42}$$

É evidente que se se admitir que

$$v'(x)\ +\ p(x)\ v(x)\ =\ 0, \tag{2.43}$$

e se se encontrar, de (2.43), uma função $v$ correspondente, então a equação diferencial (2.42) transforma-se na equação diferencial de variáveis separáveis, em termos de uma única função desconhecida $u = u(x)$,

$$v(x)u'(x) = q(x), \tag{2.44}$$

a qual é fácil de resolver. Por sua vez, (2.43) é também uma equação diferencial de variáveis separáveis. Uma solução (solução particular) de (2.43) é dada por

$$v(x) = e^{-\int p(x)dx}. \tag{2.45}$$

Determinada a função $v$, a função $u$ encontra-se da equação diferencial de variáveis separáveis (2.44), cujo integral geral é

$$u(x) = \int \frac{q(x)}{v(x)}dx + C, \quad C \in \mathbb{R}. \tag{2.46}$$

Tendo em conta (2.45) e (2.46), encontra-se a função $u$,

$$u(x) = \int [q(x)e^{\int p(x)dx}]dx + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Determinadas as funções $u$ e $v$, de (2.40) resulta a solução geral da equação diferencial inicial (2.39) dada por

$$y = u(x)v(x) = e^{-\int p(x)dx}\Big(\int [q(x)e^{\int p(x)dx}]dx + C\Big), \quad C \in \mathbb{R}.$$

**Exemplo 2.7.1 (Equação diferencial linear em $y$)** *A equação diferencial*

$$y' + y\cos x = \cos x \tag{2.47}$$

*é linear de primeira ordem. A sua solução geral a ser procurada é da forma $y = uv$. Se $y = uv$ então $y' = u'v + uv'$. Por substituição em (2.47) resulta*

$$u'v + uv' + uv\cos x = \cos x$$

$$\Leftrightarrow u'v + u(v' + v\cos x) = \cos x. \tag{2.48}$$

*Tome-se uma solução particular não nula $v$ de modo que*

$$v' + v\cos x = 0. \tag{2.49}$$

*Tem-se,*

$$v' + v\cos x = 0 \Leftrightarrow v' = -v\cos x \Leftrightarrow dv = -v\cos x\,dx \Leftrightarrow \frac{dv}{v} = -\cos x\,dx\,, \quad \textit{pois } v \neq 0$$

$$\Leftrightarrow \int \frac{dv}{v} = -\int \cos x\, dx + C_1 \Leftrightarrow \ln|v| = -\sin x + C_1$$

$$\Leftrightarrow v = C_2 e^{-\sin x}\,, \quad C_2 \in \mathbb{R}\ .$$

*Uma vez que se procura uma solução particular de (2.49), suponha-se, por exemplo,* $C_2 = 1$*. Portanto,* $v = e^{-\sin x}$*. Substituindo, em (2.48), a função* $v$ *pela solução particular encontrada vem* $u'e^{-\sin x} = \cos x$*. Resolva-se esta nova equação diferencial.*

$$u'e^{-\sin x} = \cos x \Leftrightarrow e^{-\sin x} du = \cos x\, dx \Leftrightarrow du = e^{\sin x} \cos x\, dx$$

$$\Leftrightarrow \int du = \int e^{\sin x} \cos x\, dx \Leftrightarrow u = e^{\sin x} + C\,, \quad C \in \mathbb{R}\,.$$

*Uma vez que a solução geral, que se está à procura, é da forma* $y = uv$*, tem-se*

$$y = e^{-\sin x}(e^{\sin x} + C), \quad C \in \mathbb{R}.$$

*Simplificando a última expressão conclui-se que a função*

$$y = 1 + Ce^{-\sin x}\,, \quad C \in \mathbb{R},$$

*é a solução geral da equação diferencial (2.47).*

**Observação.** *Algumas equações diferenciais não lineares em ordem à função* $y = y(x)$ *passam a ser lineares se forem consideradas como equações diferenciais em ordem à função inversa* $x = x(y)$*, onde* $y$ *passa a ser considerada como a variável independente e* $x$ *uma função de* $y$*.*

**Exemplo 2.7.2 (Equação diferencial linear em $x$)** *A equação diferencial* $y = (2x + y^3)y'$*, em ordem à função* $y = y(x)$*, não é linear em* $y$*. Reescrevendo essa equação utilizando diferenciais, tem-se*

$$ydx - (2x + y^3)dy = 0\ . \tag{2.50}$$

*Tomando* $x = x(y)$*, obtém-se* $dx = x'dy$*, pelo que (2.50) se pode escrever na forma*

$$yx' - (2x + y^3) = 0.$$

*Dividindo por* $y$*, na condição de* $y \neq 0$*, obtém-se uma equação diferencial linear em ordem à função* $x = x(y)$*,*

$$x' - \frac{2}{y}\, x = y^2\ . \tag{2.51}$$

*Efectuando, nesta última equação, a substituição* $x = uv,\ x' = u'v + uv'$*, obtém-se*

$$u'v + u(v' - \frac{2}{y}v) = y^2, \tag{2.52}$$

*onde* $y$ *é a variável independente,* $u = u(y)$ *e* $v = v(y)$*.*

*Seja* $v \neq 0$*. Da condição* $v' - \frac{2}{y}v = 0$ *tem-se* $\frac{dv}{v} = \frac{2}{y}dy$*, donde* $\ln|v| = 2\ln|y| + C$*. Seja* $C = 0$*. Nesse caso, é evidente que* $v = y^2$*. Substituindo este resultado em (2.52), obtém-se* $u'y^2 = y^2$*, donde* $u' = 1$ *e, portanto,* $u = y + K,\ K \in \mathbb{R}$*.*

*Por substituição directa em (2.52), verifica-se que* $v = 0$ *não é solução dessa equação.*

*Finalmente, a solução geral da equação diferencial (2.52) é* $u = y + K,\ K \in \mathbb{R}$*. Lembrando que* $x = uv$*, obtém-se que a solução da equação diferencial linear (2.51) é*

$$x = (y + K)y^2,\ K \in \mathbb{R}.$$

*A solução geral de (2.51) e, logo, de (2.50), foi obtida na condição de* $y \neq 0$*. É fácil de verificar que* $y = 0$ *é também uma solução de (2.50), sendo esta uma solução singular.*

*Concluindo, a solução geral da equação diferencial (2.50) é*

$$x = (y + K)y^2,\ K \in \mathbb{R}, \quad e \quad y = 0.$$

## 2.8 Equação de Bernoulli

Uma equação diferencial na forma

$$y' + p(x)y = q(x)y^m, \quad m \in \mathbb{R}, \tag{2.53}$$

é chamada **equação diferencial de Bernoulli**.

Nos casos $m = 0$ e $m = 1$ a equação (2.53) é uma equação diferencial linear, cuja solução geral pode ser obtida, segundo 2.7, através da mudança de variável $y(x) = u(x)v(x)$.

Em geral, qualquer que seja $m \in \mathbb{R}$, a equação (2.53) pode ser resolvida efectuando o mesmo tipo de substituição: $y(x) = u(x)v(x)$, onde $v$ é uma solução particular da equação $v'(x)+p(x)v(x) = 0$ e $u$ é a solução geral da equação de variáveis separáveis $u'(x) = q(x)(v(x))^{m-1}(u(x))^m$.

**Exemplo 2.8.1** *Considere a equação diferencial*

$$y' - x^2y = x^2y^2\,. \tag{2.54}$$

*Trata-se de uma equação de Bernoulli na forma (2.53) com* $m = 2$*.*
*Faça-se* $y = uv$*, com* $u = u(x)$ *e* $v = v(x)$*. Assim,* $y' = u'v + uv'$*. Substituindo, em (2.54),* $y$ *e* $y'$ *pelas expressões encontradas tem-se* $u'v + uv' - x^2uv = x^2u^2v^2$*, i.e.,*

$$u'v + u(v' - x^2v) = x^2u^2v^2\,. \tag{2.55}$$

*Determine-se agora uma solução particular não nula* $v$ *da equação* $v' - x^2v = 0$*.*

$$v' - x^2v = 0 \Leftrightarrow dv = x^2vdx \Leftrightarrow \frac{dv}{v} = x^2dx \Leftrightarrow \int \frac{dv}{v} = \int x^2dx + C.$$

*Tomando* $C = 0$*, obtém-se uma solução particular* $v \neq 0$ *dada por* $\ln|v| = \frac{x^3}{3}$*, i.e.,*

$$v = e^{x^3/3}. \tag{2.56}$$

*Substituindo, em (2.55), $v$ pela expressão (2.56) encontrada, resulta uma nova equação diferencial em termos de $u$ e $x$,*

$$u'e^{x^3/3} = x^2u^2e^{2x^3/3}\,,$$

*a qual é equivalente a*

$$u' = x^2u^2e^{x^3/3}. \tag{2.57}$$

*Se $u \neq 0$ então esta última equação pode ser reescrita na forma*

$$\frac{1}{u^2}du = x^2e^{x^3/3}dx,$$

*donde*

$$\int \frac{1}{u^2}du = \int x^2e^{x^3/3}dx + C \Leftrightarrow -\frac{1}{u} = e^{x^3/3} + C$$

$$\Leftrightarrow u = \frac{-1}{e^{x^3/3} + C}\,, \quad C \in \mathbb{R}\,. \tag{2.58}$$

*Uma vez que $y = uv$, de (2.56) e (2.58), resulta*

$$y = \frac{-e^{x^3/3}}{e^{x^3/3} + C}\,, \quad C \in \mathbb{R}\,. \tag{2.59}$$

*Seja $u = 0$. Nesse caso, $y = 0$. É evidente que esta função não pertence ao conjunto de soluções (2.59), mas é uma solução de (2.54).*

*Consequentemente, a solução geral de (2.54) é*

$$y = \frac{-e^{x^3/3}}{e^{x^3/3} + C},\ C \in \mathbb{R}, \quad e \quad y = 0.$$

## 2.9 Equação diferencial exacta

Uma equação diferencial na forma

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0, \tag{2.60}$$

cujo primeiro membro é o diferencial total de uma função desconhecida de duas variáveis, $U = U(x,y)$, i.e., tal que $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = dU(x,y)$, é chamada **equação diferencial exacta**.

Se a equação (2.60) é uma equação diferencial exacta, então a resolução desta equação reduz-se a procurar uma função $U = U(x,y)$, tal que (2.60) pode ser escrita na forma

$$dU(x,y) = 0.$$

Assim, o integral geral da equação diferencial exacta (2.60) é dado por

$$U(x,y) = C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

A função $U(x,y)$ pode ser encontrada a partir do sistema de equações

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial x}(x,y) = P(x,y) \\ \\ \frac{\partial U}{\partial y}(x,y) = Q(x,y). \end{cases}$$

Para verificar que uma equação diferencial na forma (2.60) é exacta pode recorrer-se ao seguinte resultado teórico [8].

**Propriedade 2.1** *A igualdade de funções*

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)$$

*é uma condição necessária e suficiente para que a equação (2.60) seja uma equação diferencial exacta.*

**Exemplo 2.9.1** *A equação diferencial*

$$\frac{x}{y}dx + (3y^2 + \ln x)dy = 0 \tag{2.61}$$

*é exacta já que satisfaz a Propriedade 2.1. Na realidade, comparando (2.61) e (2.60) observa-se que, designando $P(x,y) = \frac{y}{x}$ e $Q(x,y) = 3y^2 + \ln x$, para estas funções*

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{x} \ = \ \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)\,.$$

*Estabelecido que a equação (2.61) é a equação diferencial exacta, procura-se o seu integral geral na forma $U(x,y) = C,\ C \in \mathbb{R}$, sendo*

$$dU(x,y) = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy = \frac{x}{y}dx + (3y^2 + \ln x)dy,$$

*donde, evidentemente,*

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{y}{x} \\ \\ \frac{\partial U}{\partial y} = 3y^2 + \ln x. \end{cases} \tag{2.62}$$

*Ora, a primeira equação do sistema (2.62) é equivalente a*

$$U(x,y) = \int \frac{y}{x}dx + C(y)$$

*i.e.,*

$$U(x,y) = y \ln x + C(y)\,, \tag{2.63}$$

*onde $C(y)$ é uma constante arbitrária, para cada valor possível de $y$, ou seja, $C$ é uma função real na variável $y$.*
*De (2.63), por derivação em ordem a $y$, obtém-se*

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(y \ln x + C(y)),$$

*ou, de modo equivalente,*

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \ln x + C'(y), \tag{2.64}$$

*onde* $C'(y)$ *é o valor da derivada de* $C$ *no ponto* $y$*. Porém, a partir da segunda equação do sistema (2.62), tem-se*

$$\frac{\partial U}{\partial y} = Q(x,y) = 3y^2 + \ln x. \tag{2.65}$$

*Comparando (2.64) e (2.65) conclui-se que* $\ln x + C'(y) = 3y^2 + \ln x$ *, ou seja,*

$$C'(y) = 3y^2.$$

*Primitivando em ordem a y, vem*

$$C(y) = y^3 + K, \;\; K \in \mathbb{R}.$$

*Substituindo, em (2.63), a expressão obtida para* $C(y)$*, obtém-se*

$$U(x,y) = y\ln x + y^3 + K, \;\; K \in \mathbb{R},$$

*pelo que o integral geral da equação (2.61) é*

$$y\ln x + y^3 + K = C, \quad C, K \in \mathbb{R}.$$

*Supondo* $\tilde{C} := C - K$*, escreve-se a expressão do integral geral da equação (2.61) na forma*

$$y\ln x + y^3 = \tilde{C}, \quad \tilde{C} \in \mathbb{R}.$$

## 2.10 Equação diferencial com factor integrante

Uma equação diferencial na forma (2.60) diz-se uma **equação diferencial com factor integrante** se o primeiro membro da equação (2.60) não é o diferencial total de uma função de duas variáveis, mas existe uma função $\mu = \mu(x,y)$ para a qual

$$\mu(x,y)P(x,y)dx + \mu(x,y)Q(x,y)dy \;\; = \;\; 0 \tag{2.66}$$

é uma equação diferencial exacta.

Nestas circunstâncias, diz-se que a função $\mu = \mu(x,y)$ é um **factor integrante** da equação diferencial (2.60). Assim, pela Propriedade 2.1, deve ser satisfeita a condição

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu(x,y)P(x,y)\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\mu(x,y)Q(x,y)\right).$$

Note-se que resolver uma equação diferencial da forma (2.60), que admite um factor integrante $\mu = \mu(x,y)$, equivale a resolver à equação diferencial exacta (2.66).

Em geral, não é fácil de encontrar, caso exista, o factor integrante de uma equação diferencial, mas existem situações onde o processo de determinação de $\mu$ é bastante simples.



Cadernos de Matemática, Universidade de Aveiro, Portugal – Série de Divulgação – 10 de Fevereiro de 2012

**Propriedade 2.2** *Se*

$$\frac{1}{Q(x,y)}\left(\frac{\partial P}{\partial y}(x,y)-\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)\right)=f(x),$$

*onde $f$ é uma função apenas de $x$, então o factor integrante da equação (2.60) existe e depende somente de $x$, $\mu=\mu(x)$, sendo dado por*

$$\mu(x)=e^{\int f(x)dx}.$$

*Se*

$$\frac{1}{P(x,y)}\left(\frac{\partial P}{\partial y}(x,y)-\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)\right)=g(y),$$

*onde $g$ é uma função apenas de $y$, então o factor integrante $\mu$ da equação (2.60) existe e depende somente de $y$, $\mu=\mu(y)$, sendo dado por*

$$\mu(y)=e^{-\int g(y)dy}.$$

**Exemplo 2.10.1** *Considere a equação diferencial*

$$(e^y+\sin x)dx+\cos x dy=0\,. \tag{2.67}$$

*De acordo com a notação utilizada, $P(x,y)=e^y+\sin x$ e $Q(x,y)=\cos x$. Uma vez que $\frac{\partial P}{\partial y}=e^y$ e $\frac{\partial Q}{\partial x}=-\sin x$, a equação (2.67) não é uma equação diferencial exacta. Porém, para as funções $P$ e $Q$, verifica-se o seguinte:*

*a)* $\displaystyle\frac{1}{Q(x,y)}\left(\frac{\partial P}{\partial y}(x,y)-\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)\right)=\frac{e^y+\sin x}{\cos x}$ *não é função só de $x$ ;*

*b)* $\displaystyle\frac{1}{P(x,y)}\left(\frac{\partial P}{\partial y}(x,y)-\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)\right)=\frac{1}{e^y+\sin x}(-\sin x-e^y)=1$ *pode ser considerada como função de $y$ .*

*Assim, a segunda parte da Propriedade 2.2 está satisfeita. Consequentemente, a equação (2.67) admite factor integrante e este factor pode ser dado por*

$$\mu(y)=e^{-\int dy}=e^{-y}.$$

*Tal significa que a equação diferencial que se obtém multiplicando ambos os membros da equação (2.67) por $\mu(y)=e^{-y}$ é exacta e é equivalente à equação (2.67), pelo que ambas as equações possuem a mesma solução geral.*

*Multiplicando por $e^{-y}$ em (2.67), obtém-se a equação diferencial*

$$e^{-y}(e^y+\sin x)dx+e^{-y}\cos x dy=0, \tag{2.68}$$

*que é uma equação diferencial exacta, com a solução geral da forma $U(x,y)=C$, $C\in\mathbb{R}$. A função $U$ determina-se de modo a que $dU(x,y)=0$, ou seja,*

$$dU(x,y)=e^{-y}(e^y+\sin x)dx+e^{-y}\cos x dy.$$

*Por conseguinte,*

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial x} = e^{-y}(e^{y} + \sin x) = 1 + e^{-y}\sin x \\ \\ \frac{\partial U}{\partial y} = e^{-y}\cos x. \end{cases} \tag{2.69}$$

*Partindo da primeira equação deste último sistema, obtém-se*

$$U(x, y) = \int (1 + e^{-y}\sin x)dx + C(y) = x - e^{-y}\cos x + C(y) \quad \textit{(verifique).}$$

*Por derivação em ordem a y desta última equação, tem-se*

$$\frac{\partial U}{\partial y} = e^{-y}\cos x + C'(y).$$

*Igualando os segundos membros de última equação e da segunda equação do sistema (2.69), vem*

$$e^{-y}\cos x = e^{-y}\cos x + C'(y)\,,$$

*donde* $C'(y) = 0$ *e, portanto,* $C(y) = K$*, com* $K$ *constante real arbitrária.*

*Do exposto conclui-se que a solução geral da equação diferencial (2.67) é*

$$x - e^{-y}\cos x + K = 0\,, \quad K \in \mathbb{R}.$$

## 2.11 Exercícios.

1. Resolva as seguintes equações diferenciais de variáveis separáveis.

   (a) $y' = \frac{x}{y}$

   (b) $y^2y' + x^2 - 1 = 0$

   (c) $y' = y\tan x$

   (d) $y'\sqrt{1 - x^2} = 1 + y^2$

   (e) $y' = e^{x+y}$

   (f) $y' + \frac{x\sin x}{y\cos y} = 0$

   (g) $(1 + y^2)xdx + (1 + x^2)dy = 0$

   (h) $(1 + y)(e^{x}dx - e^{2y}dy) - (1 + y^2)dy = 0$

   (i) $(x + 3)dy - (y + 3)dx = 0$

   (j) $y' = \frac{4}{x^2 - 4}$

   (k) $(xy^2 + x)dx + (y + x^2y)dy = 0$

   (l) $y' = y^2\cos x$

2. Determine a solução particular que satisfaz a condição inicial indicada e esboce a curva integral correspondente.

   (a) $y' = 4x^3, \qquad y(0) = 0$

(b) $xy' = \frac{y}{\ln x}$, $\qquad y(e) = 1$

(c) $y' \tan x - y = 1$, $\qquad y(\frac{\pi}{2}) = -1$

(d) $\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$, $\;x \neq 0$, $\qquad y(2) = 3$

(e) $y' = y^2$, $\qquad y(-1) = 1$

(f) $(x^2+4)y' - 2xy = 0$, $\qquad y(1) = 5$

(g) $y' = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, $\qquad y(0) = 1$

(h) $(1+y^2)dx - xydy = 0$, $\qquad y(1) = 0$

3. Resolva as seguintes equações diferenciais redutíveis a equações diferenciais de variáveis separáveis.

(a) $y' = (4x+y+1)^2$

(b) $y' = \sin(y-x-1)$

(c) $y' + 2y = 3x + 5$

(d) $y' = \sqrt[3]{(4x-y+1)^2}$

4. Mostre que a equação $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$ tem uma infinidade de soluções da forma $y = Cx$, $C \in \mathbb{R}$, que satisfazem a condição inicial $y|_{x=0} = 0$. Mostre, também, que se a condição inicial for $y|_{x=0} = y_0$, com $y_0 \neq 0$, a mesma equação não tem nenhuma solução. Construa as curvas integrais da equação diferencial dada.

5. Mostre que o problema de Cauchy $\frac{dy}{dx} = y^\alpha$, $\;y|_{x=0} = 0$, tem, pelo menos, duas soluções se $0 < \alpha < 1$ e apenas uma no caso de $\alpha = 1$. Construa as curvas integrais nos casos de $\alpha = \frac{1}{2}$ e $\alpha = 1$.

6. Resolva as seguintes equações diferenciais após verificar que se tratam de equações diferenciais homogéneas.

(a) $y' = \frac{y}{x} + \frac{x}{y}$

(b) $y' = \frac{y}{x} + \sin\left(\frac{y}{x}\right)$

(c) $(x-y)dx + xdy = 0$

(d) $y' = \frac{x-y}{x+y}$

(e) $x\left(y' + e^{\frac{y}{x}}\right) = y$

(f) $xy' = y + x\tan\left(\frac{y}{x}\right)$

(g) $y^2 - 4xy + 4x^2y' = 0$

(h) $(x^2+y^2)dx - 2x^2dy = 0$

(i) $3x^4y^2dy = (4x^6 - y^6)dx$

7. Resolva as seguintes equações diferenciais redutíveis a homogéneas.

(a) $(2x-y+1)dx + (2y-x-1)dy = 0$

(b) $(x+y+1)dx + (2x+2y-1)dy = 0$

(c) $y' \ln\left(\frac{y+x}{x+3}\right) = \frac{y+x}{x+3} - \ln\left(\frac{y+x}{x+3}\right)$

(d) $(2x+8)dx + (3y-5x-11)dy = 0$

(e) $3y - 7x + 7 = (3x - 7y - 3)y'$

8. Determine a equação que define as curvas que satisfazem a seguinte propriedade: a ordenada na origem da recta normal a cada curva, em cada ponto pelo qual ela passa, é igual à distância desse ponto à origem das coordenadas.

9. Verifique que as seguintes equações são equações diferenciais exactas e, a seguir, resolva-as.

   (a) $2xy^3 + 3x^2y^2y' = 0$

   (b) $(3x^2 - 2xy)dx + (2y - x^2)dy = 0$

   (c) $(x - y + 1)dy - (x - y - 1)dx = 0$

10. Determine uma função $M = M(x,y)$ tal que $M(x,y)dx + (xe^x + 2xy + 1)dy = 0$ seja uma equação diferencial exacta.

11. Prove que $ydx + (y-x)dy = 0$ não é uma equação diferencial exacta, mas que admite o factor integrante $\mu(y) = \frac{1}{y^2}$. Resolva a equação $\mu(y)\,(ydx + (y-x)dy) = 0$.

12. Verifique que a equação $y(y-4)dx = x(2-y)dy$ não é uma equação diferencial exacta. Prove que admite um factor integrante $\mu(x,y) = \mu(x)$ a determinar. Resolva a equação diferencial exacta resultante.

13. Resolva as seguintes equações diferenciais lineares de 1ª ordem.

    (a) $y' = y \cot x + \sin x$

    (b) $y' + 2xy = xe^{-x^2}$

    (c) $y' = \frac{3y}{x} + x$

    (d) $(1+x^2)y' = 2xy + (1+x^2)^2$

    (e) $y' + \frac{y}{x} = 2\ln x + 1$

14. Verifique que as seguintes equações diferenciais são lineares de 1ª ordem na variável $y$ ou na variável $x$ e, a seguir, resolva-as.

    (a) $y' = \dfrac{y}{x + y^3}$

    (b) $xy' = e^x + xy$

    (c) $y - y' = y^2 + xy'$

    (d) $y' - \dfrac{xy}{x^2+1} = x$

    (e) $y' \cos x + y \sin x = 1$

    (f) $xy' + x^2 + xy = y$

15. Resolva o problema de Cauchy $x(x-1)y' + y = x^2(2x-1), \quad y|_{x=2} = 4$.

16. Se $R$ é a resistência de um circuito eléctrico e $L$ a auto-indução, a relação entre a intensidade $I$ e a força electromotriz $E$ é dada pela equação $E = RI + L\frac{dI}{dt}$, onde $R$ e $L$ são constantes. Se considerar $E$ como uma função do tempo $t$, tem-se uma equação linear não homogénea, cuja incógnita é $I$: $\frac{dI(t)}{dt} + \frac{R}{L}I(t) = \frac{E(t)}{L}$. Determine a intensidade de corrente $I(t)$ no caso de

(a) $E(t) = E_0$ e $I(0) = I_0$.

(b) $E(t) = E_0 sin(2\pi nt),\ I(0) = I_0$,

onde $E_0$ e $I_0$ são constantes.

17. Mostre que toda a equação linear conserva a propriedade de linearidade após a substituição da variável independente $x = \varphi(t)$, onde $\varphi$ é uma função diferenciável.

18. Mostre que toda a equação linear conserva a propriedade de linearidade após qualquer transformação linear da função incógnita $y = \alpha(x)z + \beta(x)z$, onde $\alpha$ e $\beta$ são funções diferenciáveis arbitrárias, sabendo que $\alpha(x) \neq 0$ no intervalo considerado.

19. Verifique que as seguintes equações diferenciais são equações de Bernoulli, com variável dependente $y = y(x)$ ou com variável dependente $x = x(y)$, e, a seguir, resolva-as.

(a) $y' + 4xy = 2xe^{-x^2}\sqrt{y}$

(b) $dy = (y^2e^x - y)dx$

(c) $x' + yx = y\sqrt{x}$

20. Identifique o tipo de cada uma das seguintes equações diferenciais. A seguir, resolva-as.

(a) $y' + xy = x^3$

(b) $(x - y)dy - ydx = 0$

(c) $y' = y\ \tan x - y^2 \cos x$

(d) $y' = \dfrac{1 - 2x}{y^2}$

(e) $\left(xye^{\frac{x}{y}} + y^2\right) dx = x^2e^{\frac{x}{y}}dy$

(f) $xy' + y = y^2 \ln x$

(g) $3x + y - 2 + y'(x - 1) = 0$

(h) $y' = \frac{x+y}{x-y}$

(i) $y' \cos x - y \sin x = \sin 2x$

(j) $y' = \dfrac{1}{xy + x^2y^3}$

(k) $\left(x - y \sin \frac{y}{x}\right) dx + x \sin \frac{y}{x} dy = 0$

(l) $(2xe^y + y^4)y' = ye^y$

(m) $y' + \frac{2y}{x} = \frac{2\sqrt{y}}{\sin^2 x}$

21. Resolva os seguintes problemas de Cauchy.

(a) $xy' = y \ln \frac{y}{x}\,, \qquad y(1) = 1$

(b) $(y + 2x)dx + (x - 2y)dy = 0\,, \qquad y(2) = 1$

(c) $3y' = -(1 + 3y^3)y \sin x\,, \qquad y(\frac{\pi}{2}) = 1$

(d) $ydx + (x - \frac{1}{2}x^3y)dy = 0\,, \qquad y(\frac{1}{2}) = 1$

(e) $x' = \frac{x+y}{y}\,, \qquad x(1) = 1$

(f) $xy' - 4y = x^2\sqrt{y}\,, \qquad y(1) = 1$

## 2.12 Soluções

1. (a) $y^2 - x^2 = C,\ C \in \mathbb{R}$
   (b) $y^3 + x^3 - 3x = C,\ C \in \mathbb{R}$
   (c) $y = C\ \sec x,\ C \in \mathbb{R}$
   (d) $\arctan y - \arcsin x = C,\ C \in \mathbb{R}$
   (e) $e^x + e^{-y} = C,\ C \in \mathbb{R}$
   (f) $y\ \sin y + \cos y - x\ \cos x + \sin x = C,\ C \in \mathbb{R}$
   (g) $\arctan y + \frac{1}{2}\ln(1 + x^2) = C,\ C \in \mathbb{R}$
   (h) $e^x - \frac{1}{2}e^{2y} - 2\ln|1 + y| - \frac{(y-1)^2}{2} = C,\ C \in \mathbb{R},\quad$ e $\quad y = -1$
   (i) $y = (x + 3)C - 3,\ C \in \mathbb{R}$
   (j) $y = \ln \mid \frac{x-2}{x+2} \mid +C,\ C \in \mathbb{R}$
   (k) $y^2 + 1 = \frac{C}{1+x^2},\ C \in \mathbb{R}$
   (l) $y = -\frac{1}{\sin\ x+C},\ C \in \mathbb{R}$

2. (a) $y = x^4$
   (b) $y = \ln\ x$
   (c) $y = -1$
   (d) $y = \frac{6}{x}$
   (e) $y = -\frac{1}{x}$
   (f) $y = x^2 + 4$
   (g) $y = 2 - \sqrt{1 - x^2}$
   (h) $x^2 - y^2 = 1$

3. (a) $y = 2\tan(2x + C) - 4x - 1,\ C \in \mathbb{R}$
   (b) $(2x + C)(\tan(\frac{1}{2}(y - x - 1) - 1)) = 1,\ C \in \mathbb{R},\quad$ e $\quad y = \frac{\pi}{2} + x + 1 + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$
   (c) $4y - 6x - 7 = Ce^{-2x},\ C \in \mathbb{R}$
   (d) $3\ln \mid \frac{\sqrt[3]{4x-y+1}+2}{\sqrt[3]{4x-y+1}-2} \mid = 3\sqrt[3]{4x - y + 1} + x + C,\ C \in \mathbb{R},\quad$ e $\quad y = 4x + 9\quad$ e $\quad y = 4x - 7$

4.

5.

6. (a) $y^2 = x^2(2\ln|x| + C),\ C \in \mathbb{R}$
   (b) $\cos\frac{y}{x} - 1 = x^2C(\cos\frac{y}{x} + 1),\ C \in \mathbb{R},\quad$ e $\quad y = (2k + 1)\pi x,\ k \in \mathbb{Z}$
   (c) $y = x(-\ln|x| + C),\ C \in \mathbb{R},\quad$ e $\quad x = 0$
   (d) $y^2 + 2xy - x^2 = C,\ C \in \mathbb{R}$
   (e) $e^{-\frac{y}{x}} = \ln|x| + C,\ C \in \mathbb{R}$
   (f) $y = x\arcsin(Cx),\ C \in \mathbb{R},\quad$ e $\quad y = k\pi x,\ k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$
   (g) $4x = y(\ln|x| + C),\ C \in \mathbb{R}$
   (h) $2x = (x - y)(\ln|x| + C),\ C \in \mathbb{R}\quad$ e $\quad y = x$

(i) $y^3 + 4x^3 = Cx^5(x^3 - y^3),\ C \in \mathbb{R}, \quad \text{e} \quad y = x$

7. (a) $x^2 + y^2 + x - y - xy + C = 0,\ C \in \mathbb{R}$
   (b) $x + 2y + 3\ln|2 - x - y| = C,\ C \in \mathbb{R}$
   (c) $(x + y)(1 - \ln\left|\frac{x+y}{x+3}\right|) = C,\ C \in \mathbb{R}$
   (d) $(y - x - 1)^2 = C(3y - 2x + 1)^3,\ C \in \mathbb{R}$
   (e) $(y - x + 1)^2(y + x - 1)^5 = C,\ C \in \mathbb{R}$

8. $y = \frac{1}{2}(Cx^2 - \frac{1}{C}),\ C \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

9. (a) Sim. $x^2y^3 + C = 0,\ C \in \mathbb{R}$
   (b) Sim. $x^3 - x^2y + y^2 + C = 0,\ C \in \mathbb{R}$
   (c) Sim. $xy - \frac{y^2}{2} + y + x - \frac{x^2}{2} + C = 0,\ C \in \mathbb{R}$

10. Por exemplo, $M(x, y) = (e^x + xe^x)y + y^2 + e^x$

11. $\frac{x}{y} + \ln|y| + C = 0,\ C \in \mathbb{R}$

12. $\mu(x) = x;\ \ x^2y(y - 4) = C,\ C \in \mathbb{R}$

13. (a) $y = (x + C)\sin\ x,\ C \in \mathbb{R}$
    (b) $y = e^{-x^2}(C + \frac{x^2}{2}),\ C \in \mathbb{R}$
    (c) $y = Cx^3 - x^2,\ C \in \mathbb{R}$
    (d) $y = (x + C)(1 + x^2),\ C \in \mathbb{R}$
    (e) $y = x\ln x + \frac{C}{x},\ C \in \mathbb{R}$

14. (a) $x = Cy + \frac{1}{2}y^3,\ C \in \mathbb{R}, \quad \text{e} \quad y = 0$
    (b) $y = e^x(C + \ln|x|),\ C \in \mathbb{R}$
    (c) $y = \frac{x+1}{x+C},\ C \in \mathbb{R}, \quad \text{e} \quad y = 0$
    (d) $y = x^2 + 1 + C\sqrt{x^2 + 1},\ C \in \mathbb{R}$
    (e) $y = \sin\ x + C\cos\ x,\ C \in \mathbb{R}$
    (f) $y = x(Ce^{-x} - 1),\ C \in \mathbb{R}$

15. $y = x^2$

16. (a) $I(t) = \frac{E_0}{R} + (I_0 - \frac{E_0}{R})e^{-\frac{R}{L}t}$
    (b) $I(t) = \frac{E_0}{R^2+(2n\pi L)^2}[R\sin(2n\pi t) + 2n\pi L(e^{-\frac{Rt}{L}} - \cos(2n\pi t)))] + I_0e^{-\frac{Rt}{L}}$

17.

18.

19. (a) $y = e^{-2x^2}(C + \frac{1}{2}x^2)^2,\ C \in \mathbb{R}, \quad \text{e} \quad y = 0$
    (b) $y = \frac{e^{-x}}{C-x},\ C \in \mathbb{R}, \quad \text{e} \quad y = 0$
    (c) $x = (1 + Ce^{-y^2/4})^2,\ C \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad x = 0$

20. (a) Equação diferencial linear de 1ª ordem; $y = x^2 - 2 + Ce^{-\frac{x^2}{2}},\ C \in \mathbb{R}$
(b) Equação diferencial homogénea de 1ª ordem; $\ln|y| + \frac{x}{y} = C,\ C \in \mathbb{R},$ e $y = 0$
(c) Equação diferencial de Bernoulli ; $y = \frac{1}{(x+C)\ \cos x},\ C \in \mathbb{R},$ e $y = 0$
(d) Equação diferencial de variáveis separáveis; $y^3 = C + 3x - 3x^2,\ C \in \mathbb{R}$
(e) Equação diferencial homogénea de 1ª ordem; $\ln|x| + e^{\frac{x}{y}} = C,\ C \in \mathbb{R},$ e $x = 0$
(f) Equação diferencial de Bernoulli; $y = \frac{1}{1+\ln x + Cx},\ C \in \mathbb{R},$ e $y = 0$
(g) Equação diferencial exacta; $(3x + 2y - 1)(x - 1) = C,\ C \in \mathbb{R}$
(h) Equação diferencial exacta ou homogénea de 1ª ordem; $\arctan\frac{y}{x} = \ln\sqrt{x^2 + y^2} + C,\ C \in \mathbb{R}$
(i) Equação diferencial linear de 1ª ordem; $2y\ \cos x + \cos(2x) = C,\ C \in \mathbb{R}$
(j) Equação diferencial de Bernoulli; $x = \frac{1}{Ce^{-\frac{y^2}{2}} + 2 - y^2},\ C \in \mathbb{R}$
(k) Equação diferencial homogénea de 1ª ordem; $\ln|x| - \cos\frac{y}{x} = C,\ C \in \mathbb{R}$
(l) Equação diferencial linear de 1ª ordem; $x = Cy^2 - y^2(y+1)e^{-y},\ C \in \mathbb{R},$ e $y = 0$
(m) Equação diferencial de Bernoulli; $y = \left(\frac{C + \ln|\sin x|}{x} - \cot x\right)^2,\ C \in \mathbb{R},$ e $y = 0$

21. (a) $y = xe^{1-x}$
(b) $x^2 + xy - y^2 = 5$
(c) $y^3 = \frac{1}{(3 - 2e^{\cos\ x})}$
(d) $x^2 = \frac{1}{(y + 3y^2)}$
(e) $\ln|y| + 1 = \frac{x}{y}$
(f) $\sqrt{y} = \frac{x^2}{2}(\ln|x| + 2)$

# Capítulo 3

# Equações diferenciais de ordem superior à primeira

## 3.1 Noções básicas

Uma **equação diferencial de ordem** $n$, com $n \geq 1$, pode ser apresentada na sua forma *normal* (i.e., resolvida em relação à derivada de maior ordem $y^{(n)}$)

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}), \tag{3.1}$$

onde
$$f: \begin{array}{ccc} D_f \subset \mathbb{R}^{n+1} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y, y', ..., y^{(n-1)}) & \longmapsto & f(x, y, y', ..., y^{(n-1)}), \end{array}$$

ou, na sua forma *geral*

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0. \tag{3.2}$$

No caso de $n > 1$, a equação na forma (3.1), ou (3.2), é genericamente conhecida por **equação diferencial de ordem superior à primeira**.

O **problema de Cauchy para uma equação diferencial de ordem** $n$, na forma (3.1) ou (3.2), consiste em encontrar a solução particular dessa equação que satisfaz $n$ *condições iniciais* na forma

$$\begin{aligned} y|_{x=x_0} &= y_0, \\ y'|_{x=x_0} &= y_0', \\ &\vdots \\ y^{(n-1)}|_{x=x_0} &= y_0^{(n-1)}, \end{aligned} \tag{3.3}$$

onde $x_0,\ y_0,\ y_0',\ \ldots,\ y_0^{(n-1)}$ são números reais.

**Teorema 3.1 (Existência e unicidade de solução do problema de Cauchy)** [1] *Uma equação diferencial de ordem $n$ escrita na forma normal (3.1) admite, numa vizinhança de $x_0 \in \mathbb{R}$*

[1] Note-se que o Teorema 3.1 representa só uma condição suficiente de existência e unicidade de solução do problema de Cauchy. Outras condições (eventualmente, menos restritivas) podem ser formuladas.

*(i.e., para $x_0 - h < x < x_0 + h$, para algum $h > 0$), uma única solução $y = y(x)$ do problema de Cauchy*

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}), \qquad \begin{array}{l} y|_{x=x_0} = y_0, \\ y'|_{x=x_0} = y'_0, \\ \quad\vdots \\ y^{(n-1)}|_{x=x_0} = y_0^{(n-1)}, \end{array}$$

*se a função $f$ satisfaz as seguintes condições:*[2]

*1º) $f$ é contínua numa certa vizinhança $D \subset D_f$ tal que $(x_0, y_0, y'_0, \ldots, y_0^{(n-1)}) \in D$;*

*2º) as derivadas parciais $\frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial y'}, \frac{\partial f}{\partial y''}, \cdots, \frac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}}$ existem*[3] *e são contínuas em $D$.*

**Exemplo 3.1.1** *Considere o problema de Cauchy*

$$y'' - xy' + 1 = 0, \quad y(0) = 1, \; y'(0) = 0.$$

*A equação diferencial $y'' - xy' + 1 = 0$ pode ser escrita na forma normal (3.1),*

$$y'' = xy' - 1,$$

*i.e., $y'' = f(x, y, y')$, com*

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^3 & \rightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (x, y, y') & \rightarrow & f(x, y, y') = xy' - 1. \end{array}$$

*A função $f$ e as suas derivadas parciais, $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ e $\frac{\partial f}{\partial y'} = x$, são funções contínuas em $\mathbb{R}^3$ e, portanto, são contínuas em qualquer vizinhança $D$ do ponto $(x_0, y_0, y'_0) = (0, 1, 0) \in \mathbb{R}^3$. Do Teorema 3.1 conclui-se que o problema de Cauchy dado admite uma única solução $y = y(x)$ no intervalo $]-h, h[$, para algum $h > 0$.*

## 3.2 Redução da ordem em equações diferenciais de ordem superior à primeira

Os seguintes quatro tipos de equações diferenciais de ordem superior a um resolvem-se efectuando uma mudança de variável conveniente que induz uma redução na sua ordem.

[2] Definições de continuidade e derivadas parciais para funções reais de várias variáveis reais introduzem-se de modo análogo como para funções reais de duas variáveis reais [1].

[3] Aqui as derivadas parciais de $f = f(x_0, y_0, y'_0, \ldots, y_0^{(n-1)})$) calculam-se como sendo $x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}$ variáveis independentes entre si.

### 3.2.1 Equação diferencial contendo somente a variável independente e a derivada de maior ordem da função desconhecida

Considere-se a equação diferencial de ordem $n$ na forma

$$y^{(n)} = f(x). \tag{3.4}$$

A equação diferencial na forma (3.4) resolve-se integrando-a $n$ vezes. O seu integral geral é

$$y = \underbrace{\int\Big(\ldots(\int(\int}_{n \text{ vezes}} f(x)dx)dx)\ldots\Big)dx + C_1\frac{x^{(n-1)}}{(n-1)!} + C_2\frac{x^{(n-2)}}{(n-2)!} + \cdots + C_{n-1}x + C_n\ ,$$

com $C_1, C_2, \ldots, C_n$ constantes arbitrárias reais.

**Nota.** Este tipo de resolução equivale ao seguinte processo iterativo de mudança de variável. Primeiro considera-se $z_1 = y^{(n-1)}$ e resolve-se a equação resultante $z_1' = f(x)$. Seja $z_1 = \phi_1(x)$ essa solução. Tem-se então $y^{(n-1)} = \phi_1(x)$, que é da forma (3.4). Procede-se a nova mudança de variável $z_2 = y^{(n-2)}$ e resolve-se a equação resultante $z_2' = \phi_1(x)$. Seja $z_2 = \phi_2(x)$ essa solução. Tem-se então $y^{(n-2)} = \phi_2(x)$, que é da forma (3.4). Procede-se assim sucessivamente $n$ vezes até obter a solução da equação resultante $z_n' = \phi_{n-1}(x)$.

**Exemplo 3.2.1** *Considere a equação diferencial*

$$x^2y''' = 3x + \ln x\ . \tag{3.5}$$

*Dividindo ambos os membros por $x^2$ obtém-se equação*

$$y''' = \frac{3}{x} + \frac{\ln x}{x^2}\ . \tag{3.6}$$

*Repare-se que a equação (3.5) só tem sentido para valores positivos de $x$ (domínio de $\ln x$), logo a divisão por $x^2$ é permitida.*
*Integrando ambos os membros de (3.6), obtém-se*

$$\begin{aligned} y'' &= \int(\frac{3}{x} + \frac{\ln x}{x^2})dx + C_1 = \int\frac{3}{x}dx + \int\frac{\ln x}{x^2}dx + C_1 \\ &= 3\ln x - \frac{\ln x}{x} + \int\frac{1}{x^2}dx + C_1 \quad \textit{(aplicando primitivação por partes)}, \end{aligned}$$

*donde*

$$y'' = 3\ln x - \frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} + C_1. \tag{3.7}$$

*Integrando agora ambos os membros de (3.7), vem*

$$\begin{aligned} y' &= 3\int\ln x dx - \int\frac{\ln x}{x}dx - \int\frac{1}{x}dx + \int C_1 dx + C_2 \\ &= 3\Big(x\ln x - \int\frac{1}{x}dx\Big) - \frac{\ln^2 x}{2} - \ln x + C_1x + C_2 \\ &= 3x\ln x - 3\ln x - \frac{\ln^2 x}{2} - \ln x + C_1x + C_2\ , \end{aligned}$$

*ou seja,*

$$y' = 3x\ln x - 4\ln x - \frac{\ln^2 x}{2} + C_1x + C_2\,. \tag{3.8}$$

*Integrando ambos os membros de (3.8), resulta*

$$\begin{aligned} y &= 3\int x\ln x dx - 4\int \ln x dx - \frac{1}{2}\int \ln^2 x dx + C_1\int x dx + \int C_2 dx \\ &= \frac{3}{2}(x^2\ln x - \frac{x^2}{2}) - 4(x\ln x - x) - \frac{1}{2}(x\ln^2 x - 2\int \ln x dx) + C_1\frac{x^2}{2} + C_2x + C_3 \\ &= \frac{3}{2}(x^2\ln x - \frac{x^2}{2}) - 4(x\ln x - x) - \frac{1}{2}x\ln^2 x + x\ln x - x + C_1\frac{x^2}{2} + C_2x + C_3, \end{aligned}$$

*donde, simplificando, obtém-se o integral geral (ou solução geral) da equação diferencial (3.5)*

$$y = \frac{3}{2}x^2\ln x - 3x\ln x - \frac{1}{2}x\ln^2 x + \tilde{C}_1x^2 + \tilde{C}_2x + C_3\,, \quad \tilde{C}_1, \tilde{C}_2, C_3 \in \mathbb{R}\,. \tag{3.9}$$

### 3.2.2 Equação diferencial não contendo a função desconhecida

Seja a equação diferencial de ordem $n$ na forma

$$F(x, y', y'', \cdots, y^{(n)}) = 0. \tag{3.10}$$

Esta equação pode ser resolvida efectuando a substituição $y' = p$, com $p = p(x)$. Dada essa mudança de variável, as restantes derivadas de $y$, em (3.10), podem ser substituídas por $y'' = p'$, $y''' = p''$, ..., $y^{(n)} = p^{(n-1)}$, e a equação (3.10) transforma-se na equação diferencial de ordem $n-1$, em ordem à nova variável dependente $p$,

$$F(x, p, p', \cdots, p^{(n-1)}) = 0.$$

Seja $p = \phi(x, C_1, C_2, \cdots, C_{n-1})$ o integral geral desta última equação. Integrando ambos os membros, obtém-se o integral geral da equação (3.10)

$$y = \int \phi(x, C_1, C_2, \cdots, C_{n-1})dx + C_n\ , \quad C_1, C_2, \ldots, C_n \in \mathbb{R}.$$

**Exemplo 3.2.2** *A equação diferencial de segunda ordem*

$$(x+1)y'' = y' - 1 \tag{3.11}$$

*é da forma (3.10) com $n = 2$. Para resolvê-la considera-se a mudança de variável dada por $y' = p$, com $p = p(x)$. Assim, $y'' = p'$, ficando (3.11) reduzida à equação diferencial*

$$(x+1)p' = p - 1\,, \tag{3.12}$$

*a qual é de $1^a$ ordem nas variáveis $x$ (independente) e $p = p(x)$ (dependente).*
*Se $p \neq 1$, resolve-se a equação diferencial de variáveis separáveis (3.12 ) obtendo-se*

$$\frac{dp}{p-1} = \frac{dx}{x+1} \Leftrightarrow |p-1| = \ln|x+1| + \ln|C_1| \Leftrightarrow p - 1 = C_1(x+1),\ C_1 \in \mathbb{R}\backslash\{0\},$$

*ou seja,*

$$p = C_1(x+1) + 1, \quad C_1 \in \mathbb{R}\backslash\{0\}.$$

*Se se supor $C_1 = 0$ na última fórmula ter-se-ia $p = 1$, a qual também é uma solução (solução particular) de (3.12) (verifique).*
*Assim, o integral geral da equação (3.12) é*

$$p = C_1(x+1) + 1, \quad C_1 \in \mathbb{R}. \tag{3.13}$$

*Regressando à variável $y$, observa-se que como $y' = p$ então $y' = C_1(x+1) + 1\,, C_1 \in \mathbb{R}$. Integrando, vem*

$$\begin{aligned} y &= C_1 \int (x+1)dx + \int dx + C_2 \\ &= C_1 \frac{(x+1)^2}{2} + x + C_2\,, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

*donde a solução geral de (3.11) é*

$$y = \tilde{C}_1(x+1)^2 + x + C_2\,, \quad \tilde{C}_1, C_2 \in \mathbb{R},$$

*com $\tilde{C}_1 := \frac{C_1}{2}$.*

### 3.2.3 Equação diferencial não contendo a função desconhecida, nem as suas derivadas até à ordem $k-1$ inclusivamente

Agora considere-se a equação diferencial de ordem $n$ na forma

$$F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \cdots, y^{(n)}) = 0. \tag{3.14}$$

Esta equação resolve-se efectuando a substituição

$$y^{(k)} = p, \tag{3.15}$$

da qual resulta $y^{(k+1)} = p', \cdots, \ y^{(n)} = p^{(n-k)}$, pelo que a equação (3.14) pode ser reduzida à seguinte equação diferencial de ordem $n-k$:

$$F(x, p, p', \cdots, p^{(n-k)}) = 0. \tag{3.16}$$

Assuma-se que o integral geral de (3.16) é $p = \phi(x, C_1, C_2, \cdots, C_{n-k})$. Assim, por (3.15), tem-se

$$y^{(k)} = \phi(x, C_1, C_2, \cdots, C_{n-k}).$$

Esta última é uma equação diferencial na forma (3.4), a qual se resolve integrando $k$ vezes e assim resultando o integral geral da equação (3.14).

**Nota.** A equação (3.10) é um caso particular da equação (3.14) para $k = 1$.

**Exemplo 3.2.3** *A equação diferencial de 3ª ordem*

$$xy''' \ln x = y'' \tag{3.17}$$

*é da forma (3.14), com* $k = 2$ *e* $n = 3$*. Para resolvê-la considera-se a mudança de variável*

$$y'' = p, \tag{3.18}$$

*com* $p = p(x)$*. Assim,* $y''' = p'$ *e, por substituição em (3.17), vem*

$$xp' \ln x = p\,. \tag{3.19}$$

*Procede-se agora à resolução da equação diferencial (3.19). Se* $p \neq 0$ *tem-se*

$$xp' \ln x = p \Leftrightarrow \frac{dp}{p} = \frac{dx}{x \ln x} \Leftrightarrow \ln|p| = \ln|\ln x| + \ln|C_1|$$

*e, finalmente,*

$$p = C_1 \ln x, \quad C_1 \in \mathbb{R}\backslash\{0\}.$$

*Se* $C_1 = 0$*, ter-se-ia* $p = 0$*, transformando a equação (3.19) numa identidade, o que significa que* $p = 0$ *é também uma solução (particular) de (3.19). Logo,*

$$p = C_1 \ln x, \quad C_1 \in \mathbb{R},$$

*é o integral geral de (3.19).*
*Regressando à variável* $y$*, tomando em conta a substituição (3.18) efectuada, deduz-se o integral geral de (3.17). Tem-se,*

$$y'' = p \Leftrightarrow y'' = C_1 \ln x \Leftrightarrow y' = C_1 \int \ln x dx + C_2 \Leftrightarrow y' = C_1(x \ln x - x) + C_2$$

$$\Leftrightarrow y = C_1\Big(\int x \ln x dx - \int x dx\Big) + C_2 \int dx + C_3$$

$$\Leftrightarrow y = C_1\Big(\frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} - \frac{x^2}{2}\Big) + C_2 x + C_3\,.$$

*Simplificando, vem*

$$y = C_1\Big(\frac{x^2}{2} \ln x - \frac{3x^2}{4}\Big) + C_2 x + C_3\,, \quad C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}\,.$$

### 3.2.4 Equação diferencial não contendo a variável independente

Seja a equação diferencial na forma

$$F(y, y', y'', \cdots, y^{(n)}) = 0. \tag{3.20}$$

Para resolver esta equação efectua-se a substituição $y' = p$, com $p = p(y)$. Todas as derivadas $y', y'', \cdots, y^{(n)}$ se podem exprimir à custa de derivadas em ordem a $y$, da nova função $p$, tendo em conta que esta é uma função composta, $p(x) = p(y(x))$. Na realidade,

$$\begin{aligned} y'' &= \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy}p = p'p, \\ y''' &= \frac{d}{dx}(y'') = \frac{d}{dx}(p\frac{dp}{dy}) = \frac{dp}{dx}\frac{dp}{dy} + p\frac{d}{dx}(\frac{dp}{dy}) = \frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx}\frac{dp}{dy} + p\frac{d}{dy}(\frac{dp}{dy})\frac{dy}{dx} \\ &= \frac{dy}{dx}(\frac{dp}{dy})^2 + p\frac{d^2p}{dy^2}\frac{dy}{dx} = p(\frac{dp}{dy})^2 + p^2\frac{d^2p}{dy^2} = p(p')^2 + p^2p'', \\ &\vdots \end{aligned}$$

Substituindo as expressões assim obtidas na equação (3.20), obtém-se uma equação diferencial de ordem $n-1$,

$$F(y, p, p', \ldots, p^{(n-1)}) = 0,$$

a qual é da forma (3.2), se se considerar aqui que $y$ é a variável independente e $p = p(y)$.

**Exemplo 3.2.4** *Considere a equação diferencial*

$$(y')^2 + yy'' = 0. \tag{3.21}$$

*Nesta equação a variável independente não está presente explicitamente, logo esta equação diferencial tem a forma (3.20). De acordo com o método de resolução descrito em 3.2.4, efectua-se a substituição $y' = p(y)$. Assim, a equação diferencial inicial transforma-se na equação $p^2 + ypp' = 0$, ou, equivalentemente,*

$$p(p + yp') = 0.$$

*Duas situações distintas podem ocorrer: $p = 0$ ou $p + yp' = 0$ .*
*Se $p = 0$, então $y' = 0$ e, portanto, $y = K,\ K \in \mathbb{R}$, é solução da equação diferencial (3.21).*
*Se $p + yp' = 0$, resolva-se essa equação (equação diferencial de variáveis separáveis),*

$$p + yp' = 0 \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow p = \frac{C_1}{y}, \quad C_1 \in \mathbb{R}.$$

*Lembrando que $p = y'$, obtém-se*

$$y' = \frac{C_1}{y} \Leftrightarrow ydy = C_1dx \Leftrightarrow \frac{y^2}{2} = C_1x + C_2,$$

*donde a solução geral da equação diferencial inicial de $2^a$ ordem é*

$$y^2 = \tilde{C}_1x + \tilde{C}_2, \quad \tilde{C}_1, \tilde{C}_2 \in \mathbb{R}. \tag{3.22}$$

*É evidente que a solução geral obtida (3.22) contem a solução particular $y = K,\ K \in \mathbb{R}$, se se supor $\tilde{C}_1 = 0,\ \tilde{C}_2 = K^2$.*

## 3.3 Equação diferencial linear de ordem $n$

A uma equação diferencial na forma

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x) \tag{3.23}$$

chama-se equação diferencial **linear** de ordem $n$, sendo $a_1(x), \cdots, a_{n-1}(x), a_n(x)$ os seus **coeficientes**.

Se $f(x) \equiv 0$, a equação (3.23) diz-se uma equação diferencial **linear homogénea**; caso contrário, diz-se uma equação diferencial **linear não homogénea** (ou completa).

**Propriedade 3.1 (Princípio da sobreposição)** *Se $y = y_{p_1}$ e $y = y_{p_2}$ são duas soluções particulares de uma equação diferencial linear homogénea, então $y = y_{p_1} \pm y_{p_2}$ é também uma solução particular dessa equação.*

**Exemplo 3.3.1** *Considere a equação diferencial linear homogénea*

$$y'' - y' - 2y = 0. \tag{3.24}$$

*A função $y_1 = e^{-x}$ é uma solução particular de (3.24) já que, substituindo em (3.24) $y$ por $e^{-x}$, vem*

$$(e^{-x})'' - (e^{-x})' - 2e^{-x} = 0 \Leftrightarrow e^{-x} + e^{-x} - 2e^{-x} = 0 \Leftrightarrow 0 = 0,$$

*ou seja, obtém-se uma identidade.*
*É fácil, também, verificar que $y_2 = e^{2x}$ é uma outra solução particular de (3.24). Assim, sendo $y_1$ e $y_2$ duas soluções particulares de (3.24), pelo Princípio da sobreposição, a função, por exemplo, $y_3 = 5e^{-x} - e^{2x}$ é, também, uma solução particular de (3.24).*

**Propriedade 3.2** *A solução geral de uma equação diferencial linear não homogénea da forma (3.23) é dada por*

$$y = y_p + y_H \ ,$$

*onde $y_p$ é uma solução particular da equação linear não homogénea (3.23) e $y_H$ é a solução geral da equação linear homogénea associada $y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = 0$ .*

**Exemplo 3.3.2** *Considere a equação diferencial linear não homogénea*

$$y'' + 3y' = 10\cos x\,. \tag{3.25}$$

*Sabendo que $y = C_1 + C_2e^{-3x}$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$, é a solução geral da equação diferencial homogénea $y'' + 3y' = 0$ e que a função $y_p = 3\sin x - \cos x$ é uma solução particular de (3.25), pela Propriedade 3.2, conclui-se que a solução geral de (3.25) é*

$$y = C_1 + C_2e^{-3x} + 3\sin x - \cos x\,, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

### 3.3.1 Equação diferencial linear homogénea com coeficientes constantes

Seja a equação diferencial na forma

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}y' + a_n y = 0, \quad a_i \in \mathbb{R}. \tag{3.26}$$

A esta equação chama-se **equação diferencial linear homogénea com coeficientes constantes**.

Para resolver uma equação diferencial na forma (3.26) começa-se por construir a sua **equação característica**[4],

$$\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0 \ , \tag{3.27}$$

e por encontrar todas as raízes (reais e/ou complexas) dessa equação característica construída.

Sejam $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ as raízes de (3.27). Pode ser demonstrado que a solução geral da equação (3.26) é dada pela soma de termos correspondentes às raízes distintas $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k$, $k \leq n$, do seguinte modo.

- A cada *raiz real simples* $\lambda_i$ corresponde um termo na forma
$$C_i e^{\lambda_i x}.$$
- A cada *raiz real* $\lambda_l$ *de multiplicidade* $m$, $m > 1$, corresponde uma soma de $m$ termos na forma
$$(C_{l_1} + C_{l_2}x + C_{l_3}x^2 + \cdots + C_{l_m}x^{m-1})\ e^{\lambda_l x}.$$
- A cada par de *raízes complexas conjugadas simples*, $\lambda_s^+ = \alpha_s + i\beta_s$ e $\lambda_s^- = \alpha_s - i\beta_s$, corresponde uma soma de dois termos na forma
$$C_{s_1}e^{\alpha_s x}\cos(\beta_s x) + C_{s_2}e^{\alpha_s x}\sin(\beta_s x).$$
- A cada par de *raízes complexas conjugadas de multiplicidade* $m$, $m > 1$, $\lambda_t^+ = \alpha_t + i\beta_t$ e $\lambda_t^- = \alpha_t - i\beta_t$, corresponde uma soma de $2m$ termos na forma
$$(A_{t_1} + A_{t_2}x + \cdots + A_{t_m}x^{m-1})e^{\alpha_t x}\cos(\beta_t x) + (B_{t_1} + B_{t_2}x + \cdots + B_{t_m}x^{m-1})e^{\alpha_t x}\sin(\beta_t x)\ .$$

As constantes $C_i, C_{l_j}, C_{s_1}, C_{s_2}, A_{t_j}, B_{t_j} \in \mathbb{R}$, com $i = 1, ..., k$ e $j = 1, 2, ..., m$, são as possíveis constantes arbitrárias que devem estar presentes, em número total de $n$, na solução geral da equação diferencial linear homogénea de ordem $n$.

**Exemplo 3.3.3** *A equação diferencial*

$$3y'' + y' - 2y = 0 \tag{3.28}$$

*é uma equação diferencial linear homogénea de segunda ordem com coeficientes constantes. A sua equação característica é*

$$3\lambda^2 + \lambda - 2 = 0.$$

[4] A equação característica da equação diferencial (3.26) é uma equação na incógnita $\lambda$ que resulta de (3.26) quando se substitui a derivada $y^{(i)}$ por $\lambda^i$, para $i = 0, 1, 2, \ldots, n$. (Note que $y^{(0)} := y$, pelo que a $y$ em (3.26) corresponde $\lambda^0 = 1$ na equação característica.)

*Resolvendo-a tem-se*

$$3\lambda^2 + \lambda - 2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{-1 \pm \sqrt{1+24}}{6} \Leftrightarrow \lambda = \frac{-1 \pm 5}{6},$$

*donde as raízes da equação característica (reais simples) são*

$$\lambda_1 = -1 \quad e \quad \lambda_2 = \frac{2}{3}\,.$$

*Consequentemente, a solução geral da equação diferencial (3.28) é*

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2/3x}\,, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

**Exemplo 3.3.4** *A equação diferencial*

$$y''' - 4y'' + 4y' = 0$$

*é uma equação diferencial linear homogénea com coeficientes constantes e tem como equação característica*

$$\lambda^3 - 4\lambda^2 + 4\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda(\lambda^2 - 4\lambda + 4) = 0 \Leftrightarrow \lambda(\lambda - 2)^2 = 0.$$

*As raízes dessa equação característica são*

$$\lambda_1 = 0 \quad e \quad \lambda_2 = 2 \text{ (raiz dupla).}$$

*Assim, a solução geral da equação diferencial é*

$$y = C_1 + C_2 e^{2x} + C_3 x e^{2x}\,, \quad C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}.$$

**Exemplo 3.3.5** *Considere a equação diferencial linear homogénea*

$$y'' + 4y' + 29y = 0. \tag{3.29}$$

*A sua equação característica, $\lambda^2 + 4\lambda + 29 = 0$, tem duas raízes complexas conjugadas $\lambda_1^+ = -2 + 5i$ e $\lambda_1^- = -2 - 5i$. Logo, a solução geral de (3.29) é*

$$y = C_1 e^{-2x}\cos(5x) + C_2 e^{-2x}\sin(5x)\,, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

**Exemplo 3.3.6** *A equação diferencial linear homogénea*

$$y^{(4)} + y'' = 0 \tag{3.30}$$

*tem como equação característica associada $\lambda^4 + \lambda^2 = 0$ e as suas raízes são*

$$\lambda_1 = 0 \text{ (raiz dupla)}\,, \quad \lambda_2^{\pm} = \pm i \text{ (duas raízes complexas conjugadas).}$$

*Consequentemente, a solução geral da equação diferencial dada (3.30) é*

$$y = C_1 + C_2 x + C_3 \cos x + C_4 \sin x\,, \quad C_1, C_2, C_3, C_4 \in \mathbb{R}.$$

### 3.3.2 Equação diferencial linear não homogénea com coeficientes constantes

Seja uma equação diferencial na forma

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}y' + a_n y = f(x), \tag{3.31}$$

com $f$ função não nula. É, portanto, uma equação diferencial linear não homogénea com coeficientes constantes. Para resolver (3.31) pode ser aplicado o chamado **método de Lagrange**, também conhecido por *método de variação das constantes arbitrárias*.

**Método de Lagrange**
Primeiro, resolve-se a equação diferencial linear homogénea associada à equação (3.31) e dada por

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}y' + a_n y = 0\ .$$

Seja $y_H = C_1y_1 + C_2y_2 + \cdots + C_ny_n$ a sua solução geral.
A seguir, admite-se que as $n$ constantes arbitrárias, $C_1, C_2, \ldots, C_n$, são funções de $x$, i.e., $C_1 = C_1(x)$, $C_2 = C_2(x)$, $\ldots, C_n = C_n(x)$. Procure-se, agora, a solução geral da equação diferencial não homogénea (3.31) na forma

$$y = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2 + \cdots + C_n(x)y_n\ , \tag{3.32}$$

com $C_i(x), i = 1, 2, ..., n$, a determinar de modo que as suas derivadas satisfaçam o seguinte sistema de $n$ equações lineares nas $n$ incógnitas $C_1'(x), C_2'(x), \ldots, C_n'(x)$:

$$\left\{\begin{array}{ccccccc}
C_1'(x)y_1 & + & ... & + & C_n'(x)y_n & = & 0\\
C_1'(x)y_1' & + & ... & + & C_n'(x)y_n' & = & 0\\
\vdots & & & & \vdots & & \vdots\\
C_1'(x)y_1^{(n-2)} & + & ... & + & C_n'(x)y_n^{(n-2)} & = & 0\\
C_1'(x)y_1^{(n-1)} & + & ... & + & C_n'(x)y_n^{(n-1)} & = & f(x).
\end{array}\right.$$

Resolvendo este sistema[5] e integrando as soluções encontradas $C_i'(x), i = 1, 2, ..., n$, obtêm-se as expressões

$$C_i(x) = \int C_i'(x)dx + \tilde{C}_i\ , \quad \tilde{C}_i \in \mathbb{R}\ ,\ i = 1, 2, \ldots, n.$$

Por substituição, em (3.32), das expressões obtidas, resulta a solução geral da equação linear não homogénea (3.31)

$$y = \left(\int C_1'(x)dx + \tilde{C}_1\right)y_1 + \left(\int C_2'(x)dx + \tilde{C}_2\right)y_2 + \ldots + \left(\int C_n'(x)dx + \tilde{C}_n\right)y_n. \tag{3.33}$$

**Nota.** A solução geral (3.33) pode ser escrita na forma

$$y \quad = \quad \underbrace{\tilde{C}_1(x)y_1 + \tilde{C}_2(x)y_2 + \ldots + \tilde{C}_n(x)y_n}_{y_p} + \underbrace{\tilde{C}_1y_1 + \tilde{C}_2y_2 + \ldots + \tilde{C}_ny_n}_{y_H}\ , \tag{3.34}$$

onde $\tilde{C}_i(x)$ designa uma primitiva de $C_i'(x)$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Observe-se, também, que em (3.34) $y_p$ é uma solução particular da equação linear não homogénea (3.31) da forma (3.32) e $y_H$ é a

[5] Para resolver o sistema de equações lineares utiliza-se qualquer um dos métodos conhecidos da Álgebra Linear como, por exemplo, o método de eliminação de Gauss, o método de Crámer, etc. [ver bibliogr. específica].

solução geral da equação linear homogénea associada à equação (3.31). Assim, a solução geral na forma (3.34) está de acordo com a Propriedade 3.2.

**Exemplo 3.3.7** *A equação diferencial*

$$y'' - 6y' + 9y = \frac{e^{3x}}{x} \tag{3.35}$$

*é linear não homogénea com coeficientes constantes. Para resolvê-la determine-se, em primeiro lugar, a solução geral da equação diferencial linear homogénea associada*

$$y'' - 6y' + 9y = 0\,. \tag{3.36}$$

*A equação característica correspondente a esta última equação,* $\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$*, tem uma raiz dupla,* $\lambda_1 = 3$*, donde, a solução geral de (3.36) é*

$$y = e^{3x}(C_1 + xC_2), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

*Determina-se agora a solução geral de (3.35) pelo método de Lagrange ou método de variação das constantes. Tome-se, então,*

$$y = C_1(x)e^{3x} + xC_2(x)e^{3x}\,,$$

*com* $C_1 = C_1(x)$ *e* $C_2 = C_2(x)$ *funções a determinar de modo que*

$$\begin{cases} C_1'(x)e^{3x} + xC_2'(x)e^{3x} = 0 \\ C_1'(x)3e^{3x} + C_2'(x)(e^{3x} + 3xe^{3x}) = \frac{e^{3x}}{x}. \end{cases} \tag{3.37}$$

*Resolvendo o sistema (3.37) resulta*

$$\begin{cases} C_1'(x) + xC_2'(x) = 0 \\ 3C_1'(x) + C_2'(x) + 3xC_2'(x) = \frac{1}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1'(x) = -xC_2'(x) \\ C_2'(x) = \frac{1}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1'(x) = -1 \\ C_2'(x) = \frac{1}{x}. \end{cases}$$

*Por conseguinte,*

$$\begin{cases} C_1(x) = -x + K_1 \\ C_2(x) = \ln|x| + K_2\,, \quad K_1, K_2 \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

*Do exposto conclui-se que a solução geral da equação diferencial não homogénea (3.35) é*

$$y = e^{3x}(-x + K_1 + x(\ln|x| + K_2))\,, \quad K_1, K_2 \in \mathbb{R},$$

*ou, expressa doutro modo,*

$$y = \underbrace{e^{3x}K_1 + xe^{3x}K_2}_{\substack{\textit{sol. geral da} \\ \textit{eq. homog. } (3.36)}} \underbrace{-xe^{3x} + xe^{3x}\ln|x|}_{\substack{\textit{uma sol.} \\ \textit{part. de } (3.35)}}, \quad K_1, K_2 \in \mathbb{R}\,.$$

### 3.3.3 Equação de Euler

Uma equação diferencial na forma

$$a_0x^ny^{(n)} + a_1x^{n-1}y^{(n-1)} + ... + a_{n-1}xy' + a_ny = 0 \ , \tag{3.38}$$

onde todos os coeficientes $a_i, i = 1, 2, ..., n$, são constantes, chama-se **equação de Euler**.

Para resolver este tipo de equações diferenciais efectua-se a substituição $t = \ln|x|$. Daqui tem-se $x = e^t$, se $x > 0$ ou $x = -e^t$, se $x < 0$. Seja $x > 0$. Nesse caso, $\frac{dx}{dt} = e^t$ e

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = e^{-t}\frac{dy}{dt}, \tag{3.39}$$

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{\frac{dy'}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{d}{dt}(e^{-t}\frac{dy}{dt})}{\frac{dx}{dt}} = \frac{e^{-t}(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt})}{e^t} = e^{-2t}(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}), \tag{3.40}$$

$$\cdots ,$$

donde a equação (3.38) pode ser reduzida a uma equação linear homogénea com coeficientes constantes, em ordem à função desconhecida $y_t = y(t)$ e às suas derivadas $y_t' = \frac{dy}{dt}$, na forma

$$b_0y_t^{(n)} + b_1y_t^{(n-1)} + \cdots + b_{n-1}y_t' + b_ny = 0. \tag{3.41}$$

Se $x < 0$, o resultado da substituição vai dar novamente a equação (3.41).
Resolvendo esta equação e voltando à variável inicial através da substituição $t = \ln|x|$, obtém-se a solução geral da equação (3.38).
É evidente que $x = 0$ satisfaz a equação (3.38) se e só se $a_n = 0$.

**Exemplo 3.3.8** *A equação*

$$x^2y'' + xy' = 0 \tag{3.42}$$

*é da forma (3.38) com $n = 2$ e $a_2 = 0$. Logo, $x = 0$ é uma solução de (3.42).*
*Tomando em conta (3.39) e (3.40), a mudança de variável $x = e^t$ em (3.42) resulta*

$$e^{2t}(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt})e^{-2t} + e^t\frac{dy}{dt}e^{-t} = 0\,.$$

*Simplificando obtém-se a equação diferencial*

$$\frac{d^2y}{dt^2} = 0.$$

*Resolvendo esta equação vem*

$$y_t'' = 0 \Leftrightarrow y_t' = C_1 \Leftrightarrow y_t = C_1t + C_2,\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

*Regressando à variável $x$ ($t = \ln|x|$), obtém-se a solução geral de (3.42),*

$$y = C_1\ln|x| + C_2\,, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R} \quad e \quad x = 0.$$

## 3.4 Exercícios

1. Integre as seguintes equações diferenciais.
   (a) $y'' = \frac{1}{1+x^2}$
   (b) $y'' = x + \sin x$
   (c) $xy^{(4)} = 1$
   (d) $x^2y'' = (y')^2$
   (e) $y'' + y' \tan x = \sin 2x$
   (f) $xy'' - y' = e^x x^2$
   (g) $xy'' - y' - x \sin\left(\frac{y'}{x}\right) = 0$
   (h) $(1 + e^x)y'' + y' = 0$
   (i) $x^2y''' = (y'')^2$
   (j) $xy''' + y'' - x - 1 = 0$

2. Resolva os seguintes problemas de Cauchy.
   (a) $y'' = xe^x, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$
   (b) $y''' = \dfrac{\ln x}{x^2}, \quad y(1) = 0, \quad y'(1) = 1, \quad y''(1) = 2$

3. Encontre a equação diferencial linear de 2ª ordem de coeficientes constantes que tem como soluções particulares as seguintes funções:
   (a) $y_1 = e^x$ e $y_2 = e^{-x}$
   (b) $y_1 = e^{-x/2} \cos x$ e $y_2 = e^{-x/2} \sin x$

4. Construa uma equação diferencial linear homogénea de coeficientes constantes e escreva a sua solução geral, sabendo que as raízes $\lambda_i$, da equação característica associada à equação diferencial, são:
   (a) $\lambda_1 = 3, \quad \lambda_2 = -2$
   (b) $\lambda_1 = 1$ raiz dupla
   (c) $\lambda_1 = 3 + 2i, \quad \lambda_2 = 3 - 2i$
   (d) $\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 4$ raiz dupla
   (e) $\lambda_1 = 2$ raiz tripla

5. Escreva a equação diferencial linear homogénea cuja solução geral é a família de curvas dada.
   (a) $y = Ce^{3x}$
   (b) $y = C_1 + C_2e^x + C_3 \cos(5x) + C_4 \sin(5x)$
   (c) $y = C_1e^{2x} + C_2xe^{2x}$
   (d) $y = e^{2x} (C_1 \cos(3x) + C_2 \sin(3x))$

6. Encontre o integral geral da equação diferencial dada.

(a) $y'' - 2y' - 2y = 0$
(b) $y'' + 6y' + 13y = 0$
(c) $3y'' - 2y' - 8y = 0$
(d) $4y'' + 4y' + y = 0$
(e) $y^{(4)} + 4y'' + 3y = 0$
(f) $y^{(4)} - y'' = 0$
(g) $y^{(5)} - 6y^{(4)} + 9y''' = 0$
(h) $y^{(6)} + 2y^{(5)} + y^{(4)} = 0$

7. Determine a solução particular da equação linear homogénea que satisfaz as condições iniciais dadas.

(a) $y'' - 5y' + 4y = 0$ ; $y(0) = y'(0) = 1$
(b) $y'' - 2y' + y = 0$ ; $y(2) = 1,\ y'(2) = -2$
(c) $y''' - y' = 0$ ; $y(0) = 3,\ y'(0) = -1,\ y''(0) = 1$

8. Calcule, pelo método de variação das constantes, a solução geral das seguintes equações diferenciais lineares não homogéneas.

(a) $y'' - 5y' + 6y = 13\sin(3x)$
(b) $y'' - 3y' + 2y = (x^2 + x)e^{3x}$
(c) $y'' + 4y = \frac{1}{\sin^2 x}$
(d) $y'' - 4y' = 2\cos^2 4x$
(e) $y'' - y = e^{-x}$
(f) $y'' - 7y' = x - 1$

9. Resolva o problema de Cauchy dado.

(a) $y'' - 2y' = 2e^x$ ; $y(1) = -1$ ; $y'(1) = 0$
(b) $y'' + 4y = x$ ; $y(0) = 1$ ; $y'(0) = \frac{\pi}{2}$
(c) $y'' - 2y' + 2y = 4e^x \cos x$ ; $y(\pi) = \pi e^{\pi}$ ; $y'(\pi) = e^{\pi}$

10. Resolva as seguintes equações de Euler.

(a) $x^2y'' - 3xy' + 5y = 3x^2$
(b) $x^2y'' + xy' + y = 0$
(c) $x^2y'' + xy' + 4y = 10x$
(d) $x^2y'' - 6y = 12\ln x$
(e) $x^2y''' - 3xy'' + 3y' = 0$
(f) $x^2y''' - 2y' = 0$

## 3.5 Soluções

1. (a) $y = C_1x + x\arctan x - \ln\sqrt{1+x^2} + C_2\,, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$
   (b) $y = \frac{x^3}{6} - \sin x + C_1x + C_2\,, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$
   (c) $y = \frac{x^3}{6}\ln|x| + C_1x^3 + C_2x^2 + C_3x + C_4\,, \quad C_1, C_2, C_3, C_4 \in \mathbb{R}$
   (d) $C_1^2y = C_1x - \ln|C_1x+1| + C_2\,, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$, e $y = C\,, \quad C \in \mathbb{R}$
   (e) $y = C_1\sin x + C_2 + x + \frac{1}{2}\sin(2x)\,, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$
   (f) $y = C_1x^2 + C_2 + e^x(x-1)\,, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$
   (g) $C_1^2y = (C_1^2x^2+1)\arctan(C_1x) - C_1x + C_2\,, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ e $y = \frac{k\pi x^2}{2} + C,\,, \quad k \in \mathbb{Z}\,, C \in \mathbb{R}$
   (h) $y = C_1(x - e^{-x}) + C_2\,, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$
   (i) $y = \frac{C_1}{2}x^2 - C_1^2(x+C_1)\ln|x+C_1| + C_2x + C_3\,, \quad C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$
   (j) $y = \frac{1}{12}(x^3+6x^2) + C_1\ x\ \ln|x| + C_2x + C_3\,, \quad C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$

2. (a) $y = (x-2)e^x + x + 3$
   (b) $y = -\frac{x}{2}\ln^2 x + \frac{3}{2}x^2 - 2x + \frac{1}{2}$

3. (a) $y'' - y = 0$
   (b) $4y'' + 4y' + 5y = 0$

4. (a) $y'' - y' - 6y = 0,\ y = C_1e^{3x} + C_2e^{-2x}\,, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$
   (b) $y'' - 2y' + y = 0,\ y = C_1e^x + xC_2e^x\,, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$
   (c) $y'' - 6y' + 13y = 0,\ y = e^{3x}(C_1\cos(2x) + C_2\sin(2x))\,, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$
   (d) $y''' - 8y'' + 16y' = 0,\ y = C_1 + C_2e^{4x} + xC_3e^{4x}\,, \quad C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$
   (e) $y''' - 6y'' + 12y' - 8y = 0,\ y = e^{2x}(C_1 + xC_2 + x^2C_3)\,, \quad C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$

5. (a) $y' - 3y = 0$
   (b) $y^{(4)} - y''' + 25y'' - 25y' = 0$
   (c) $y'' - 4y' + 4y = 0$
   (d) $y'' - 4y' + 13y = 0$

6. (a) $y = e^x(C_1\cos(\sqrt{3}x) + C_2\sin(\sqrt{3}x))\,, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$
   (b) $y = e^{-3x}(C_1\cos(2x) + C_2\sin(2x))\,, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$
   (c) $y = C_1e^{-\frac{4}{3}x} + C_2e^{2x}\,, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$
   (d) $y = e^{-x/2}(C_1 + C_2x)\,, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$
   (e) $y = C_1\cos x + C_2\sin x + C_3\cos(\sqrt{3}x) + C_4\sin(\sqrt{3}x)\,, \quad C_1, C_2, C_3, C_4 \in \mathbb{R}$
   (f) $y = C_1 + C_2x + C_3e^x + C_4e^{-x}\,, \quad C_1, C_2, C_3, C_4 \in \mathbb{R}$
   (g) $y = C_1 + C_2x + C_3x^2 + (C_4 + C_5x)e^{3x}\,, \quad C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 \in \mathbb{R}.$
   (h) $y = C_1 + C_2x + C_3x^2 + C_4x^3 + e^{-x}(C_5 + C_6x)\,, \quad C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6 \in \mathbb{R}$

7. (a) $y = e^x$
   (b) $y = (4-3x)e^{x-2}$

(c) $y = 2 + e^{-x}$

8. (a) $y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{2x} - \frac{1}{6}\sin(3x) + \frac{5}{6}\cos(3x)\,, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$
   (b) $y = C_1 e^{x} + C_2 e^{2x} + \frac{1}{2}(x^2 - 2x + 2)e^{3x}\,, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$
   (c) $y = -\cos(2x)\ln|\sin x| + \cos^2 x - x\sin(2x) + C_1\cos(2x) + C_2\sin(2x)\,, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$
   (d) $y = C_1 + C_2 e^{4x} - \frac{1}{160}\sin(8x) - \frac{1}{80}\cos(8x) - \frac{1}{4}x - \frac{1}{16}\,, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$
   (e) $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{x} - \frac{1}{2}xe^{-x}\,, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$
   (f) $y = C_1 + C_2 e^{7x} - \frac{1}{14}x^2 + \frac{6}{49}x\,, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

9. (a) $y = e^{2x-1} - 2e^{x} + e - 1$
   (b) $y = \frac{x}{4} + \cos(2x) + \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{8}\right)\ \sin(2x)$
   (c) $y = e^{x}((2x - \pi - 1)\sin x - \pi\ \cos x)$

10. (a) $y = x^2(C_1\cos(\ln|x|) + C_2\sin(\ln|x|) + 3), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$
    (b) $y = C_1\cos(\ln|x|) + C_2\sin(\ln|x|), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$
    (c) $y = C_1\cos(2\ln|x|) + C_2\sin(2\ln|x|) + 2x, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$
    (d) $y = C_1 x^3 + \frac{C_2}{x^2} - 2\ln x + \frac{1}{3}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$
    (e) $y = C_1 + C_2 x^2 + C_3 x^4, \quad C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$
    (f) $y = C_1 + C_2\ln|x| + C_3 x^3, \quad C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$

# Capítulo 4

# Sistemas de equações diferenciais lineares de primeira ordem com coeficientes constantes

## 4.1 Noções básicas

Um **sistema de $n$ equações diferenciais lineares de 1ª ordem com coeficientes constantes** é um sistema constituído por $n$ equações diferenciais na forma[1]

$$\left\{\begin{array}{lllllllllll} y_1' & = & a_{11}\,y_1 & + & a_{12}\,y_2 & + & \cdots & + & a_{1n}\,y_n & + & f_1(x) \\ y_2' & = & a_{21}\,y_1 & + & a_{22}\,y_2 & + & \cdots & + & a_{2n}\,y_n & + & f_2(x) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ y_n' & = & a_{n1}\,y_1 & + & a_{n2}\,y_2 & + & \cdots & + & a_{nn}\,y_n & + & f_n(x)\ , \end{array}\right. \tag{4.1}$$

onde $a_{ij} \in \mathbb{R}$, $i, j = 1, \ldots, n$, são os coeficientes do sistema, $f_i$, $i = 1, \ldots, n$, são funções reais de variável real, $y_1 = y_1(x)$, $y_2 = y_2(x)$, $\ldots$, $y_n = y_n(x)$ são funções desconhecidas, com derivadas $y_1' = \frac{dy_1}{dx}$, $y_2' = \frac{dy_2}{dx}$, $\ldots$, $y_n' = \frac{dy_n}{dx}$, e $x$ é a variável independente.

Se $f_k \equiv 0$, para todo o $k = 1, 2, \ldots, n$, o sistema (4.1) diz-se **homogéneo**; caso contrário, diz-se **não homogéneo** (ou completo).

Uma **solução** do sistema (4.1) é formada por $n$ funções,

$$\left\{\begin{array}{lll} y_1 & = & y_1(x) \\ y_2 & = & y_2(x) \\ & \vdots & \\ y_n & = & y_n(x)\ , \end{array}\right.$$

que, quando substituídas juntamente com as suas derivadas em (4.1), transformam todas as $n$ equações do sistema em identidades.

[1] Aqui apenas são considerados os sistemas de $n$ equações diferenciais com $n$ de funções desconhecidas.

O **integral geral** do sistema (4.1) é a família das soluções deste sistema na forma

$$\left\{\begin{array}{lcl} y_1 & = & \varphi_1(x, C_1, C_2, \ldots, C_n) \\ y_2 & = & \varphi_2(x, C_1, C_2, \ldots, C_n) \\ \vdots & & \\ y_n & = & \varphi_n(x, C_1, C_2, \ldots, C_n)\ , \end{array}\right.$$

sendo $C_1, C_2, \ldots, C_n$ constantes reais arbitrárias.

O **problema de Cauchy** para o sistema de $n$ equações diferenciais lineares de 1ª ordem consiste em encontrar a solução do sistema (4.1) que satisfaz $n$ *condições iniciais* da forma

$$y_1(x_0) = y_1^0, \quad y_2(x_0) = y_2^0, \quad \cdots, \quad y_n(x_0) = y_n^0, \tag{4.2}$$

onde $y_1^0, y_2^0, \ldots, y_n^0$ são números reais.

## 4.2 Alguns métodos de resolução de sistemas de equações diferenciais

Existem vários métodos de resolução de sistemas de equações diferenciais homogéneos e não homogéneos. Neste texto estão descritos apenas os métodos mais simples: *resolução directa* e *método por eliminação.* [2]

### 4.2.1 Resolução directa

Quando as equações do sistema (4.1) são independentes entre si, i.e., cada uma delas é uma equação diferencial em termos de uma só função desconhecida, distinta de equação para equação, a solução geral do sistema encontra-se integrando separadamente cada uma das equações do sistema.

**Exemplo 4.2.1** *Seja o sistema*

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{dy_1}{dx} = \cos x \\ \frac{dy_2}{dx} = y_2\ . \end{array}\right.$$

*As duas equações que constituem o sistema são independentes entre si, sendo a primeira equação na variável dependente $y_1 = y_1(x)$ e a segunda na variável dependente $y_2 = y_2(x)$; $x$ é a variável independente. Resolvendo separadamente cada uma dessas duas equações diferenciais, obtém-se a solução geral do sistema*

$$\left\{\begin{array}{lcl} y_1 & = & \sin x + C_1 \\ y_2 & = & C_2 e^x \end{array}\right. , \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

[2] Para estudo de outros métodos de resolução de sistemas de equações diferenciais, consulte, por exemplo, [7].

### 4.2.2 Método por eliminação: sistemas $2 \times 2$

O *método por eliminação* para a resolução de sistemas $2 \times 2$ consiste em reduzir o sistema a uma única equação diferencial linear de segunda ordem dependente apenas de uma função desconhecida.
Seja o sistema na forma

$$\left\{ \begin{array}{lllllll} y' & = & a_{11}\, y & + & a_{12}\, z & + & f_1(x) \\ z' & = & a_{21}\, y & + & a_{22}\, z & + & f_2(x)\ , \end{array} \right. \tag{4.3}$$

com $y = y(x)$ e $z = z(x)$.
Para resolver este sistema, pelo método por eliminação, comece-se por referenciar, por exemplo, a primeira[3] equação do sistema (4.3),

$$y' = a_{11}\, y + a_{12}\, z + f_1(x). \qquad (eq1)$$

Derivando a equação (eq1) em ordem a $x$, obtém-se $y'' = a_{11}\, y' + a_{12}\, z' + f_1'(x)$. Substituindo nesta a derivada $z'$ pela sua expressão dada na segunda equação do sistema (4.3), vem

$$y'' = a_{11}y' + a_{12}a_{21}y + a_{12}a_{22}z + a_{12}f_2(x) + f_1'(x). \qquad (eq2)$$

Da equação (eq1) resulta $z = \frac{1}{a_{12}}(y' - a_{11}y - f_1(x))$, pelo que substituíndo na equação (eq2) se obtém

$$y'' \;=\; (a_{11} + a_{22})y' + (a_{12}a_{21} - a_{11}a_{22})y - a_{22}f_1(x) + a_{12}f_2(x) + f_1'(x),$$

que é uma equação diferencial linear de segunda ordem, em termos da função desconhecida $y$. Resolvendo esta equação resulta a expressão geral da função $y$, $y = \varphi_1(x, C_1, C_2)$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$. Substituindo $y$ e a sua derivada na equação (eq1), vem a expressão geral da função $z$ na forma $z = \varphi_2(x, C_1, C_2)$.

A solução geral do sistema (4.3) é

$$\left\{ \begin{array}{lll} y & = & \varphi_1(x, C_1, C_2) \\ z & = & \varphi_2(x, C_1, C_2)\ , \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}. \end{array} \right.$$

**Exemplo 4.2.2** *Considere o sistema de equações diferenciais lineares homogéneas*

$$\left\{ \begin{array}{l} y' = z \\ z' = -y\ . \end{array} \right.$$

*Trata-se de um sistema de duas equações diferenciais lineares com coeficientes constantes e em termos de duas funções desconhecidas $y = y(x)$ e $z = z(x)$.*
*A primeira equação do sistema é*

$$y' = z. \qquad (eq1)$$

[3] É evidente que qualquer equação do sistema pode ser considerada como a primeira.

*Derivando (eq1), em ordem a $x$, vem*

$$y'' = z'.$$

*Tendo em conta a segunda equação do sistema inicial, vem*

$$y'' = -y,$$

*a qual já é uma equação diferencial linear homogénea de $2^a$ ordem em $y$. A sua solução geral é $y = C_1\ \cos x + C_2\ \sin x,\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ (verifique), donde $y' = -C_1\ \sin x + C_2\ \cos x$. Substituindo a expressão obtida para $y'$ na equação (eq1) obtém-se $z = -C_1\ \sin x + C_2\ \cos x$.*
*Assim, a solução geral do sistema inicial é*

$$\begin{cases} y &= C_1\ \cos x + C_2\ \sin x \\ z &= -C_1\ \sin x + C_2\ \cos x, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

**Exemplo 4.2.3** *Considere o sistema de duas equações diferenciais lineares não homogéneas*

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -9x + 6y + t. \end{cases}$$

*Aqui as funções desconhecidas são $y = y(t)$ e $x = x(t)$ e a variável independente é $t$.*
*A primeira equação do sistema é*

$$x' = y. \qquad (eq1)$$

*Derivando (eq1) em ordem a $t$, obtém-se $x'' = y'$. Substituindo, nesta equação, a expressão de $y'$ dada pela segunda equação do sistema inicial, vem uma equação diferencial linear não homogénea de $2^a$ ordem*

$$x'' - 6x' + 9x = t.$$

*A sua solução geral é $x = e^{3t}(C_1 + tC_2) + \frac{1}{9}t + \frac{2}{27},\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ (verifique), donde $x' = e^{3t}(3C_1 + C_2(3t+1)) + \frac{1}{9}$ e, tomando em conta a equação (eq1), obtém-se $y$.*

*Assim, a solução geral do sistema inicial é*

$$\begin{cases} x &= e^{3t}(C_1 + tC_2) + \frac{1}{9}t + \frac{2}{27} \\ y &= e^{3t}(3C_1 + C_2(3t+1)) + \frac{1}{9}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

### 4.2.3 Método por eliminação: caso geral

A ideia base do método por eliminação, para resolver um sistema de equações diferenciais lineares do tipo (4.1), com $n \geq 2$, consiste em reduzir o sistema a uma única equação diferencial linear de ordem $n$, em relação a uma das funções desconhecidas. Tal equação constrói-se derivando $n-1$ vezes uma das equações do sistema (4.1) e eliminando sucessivamente as restantes $n-1$ funções desconhecidas e as suas derivadas na equação diferencial em construção.[4]

Por exemplo, para reduzir o sistema (4.1) a uma equação diferencial linear de ordem $n$, em relação à função desconhecida $y_1$, executam-se os seguintes passos. Escolha-se uma das equações

[4] Este método é aplicável sempre que for possível construir tal equação diferencial linear de ordem $n$.

do sistema (4.1), por exemplo, a primeira. Esta será referenciada por (eq1),

$$y_1' = a_{11}\ y_1 + a_{12}\ y_2 + \cdots + a_{1n}\ y_n + f_1(x). \qquad (eq1)$$

Deriva-se (eq1) obtendo-se a equação $y_1'' = a_{11}\ y_1' + a_{12}\ y_2' + \cdots + a_{in}\ y_n' + f_1'(x)$. Substituindo nesta as derivadas $y_2', \cdots, y_n'$ pelas suas expressões dadas nas $n-1$ últimas equações do sistema (4.1), obtém-se uma nova equação

$$y_1'' = h_2(x, y_1, y_1', y_2, y_3, \ldots, y_n). \qquad (eq2)$$

A seguir deriva-se a equação (eq2). Eliminam-se $y_2', \cdots, y_n'$, utilizando as $n-1$ últimas equações do sistema inicial, donde resulta

$$y_1''' = h_3(x, y_1, y_1', y_1'', y_2, y_3, \ldots, y_n). \qquad (eq3)$$

Repetindo este procedimento até $n$ vezes obtêm-se $n$ equações diferenciais: (eq1), (eq2),..., (eq$n$). À custa das $n-1$ primeiras equações, (eq1), (eq2),...,(eq($n-1$)), determinam-se as expressões para $y_2, \cdots, y_n$ em termos de $y_1, y_1', y_1'', \ldots, y_1^{(n-1)}$. Substituindo estas expressões na equação (eq$n$), eliminam-se $y_2, \cdots, y_n$ obtendo-se uma equação diferencial linear de ordem $n$ em termos apenas da função desconhecida $y_1$. Resolvendo essa equação encontra-se a expressão geral para a função $y_1$. Conhecida a expressão para $y_1$ e, consequentemente, as expressões para as suas derivadas $y_1', y_1'', \cdots, y_1^{(n)}$, consegue-se obter as restantes funções desconhecidas $y_2, \cdots, y_n$, concluindo a resolução do sistema (4.1).

**Exemplo 4.2.4** *Considere o sistema de três equações diferenciais lineares homogéneas*

$$\begin{cases} x' = x - y + z \\ y' = x + y - z \\ z' = 2x - y. \end{cases} \qquad (4.4)$$

*Neste sistema a variável independente é $t$ e as funções desconhecidas são $x = x(t)$, $y = y(t)$ e $z = z(t)$.*
*Escolha-se a primeira equação do sistema,*

$$x' = x - y + z. \qquad (eq1)$$

*Por derivação, em ordem à variável $t$, desta equação e tendo em conta as duas últimas equações em (4.4), resulta*

$$\begin{aligned} x'' = x' - y' + z' \quad &\Leftrightarrow \quad x'' = x' - (x + y - z) + (2x - y) \\ &\Leftrightarrow \quad x'' = x' + x - 2y + z. \qquad (eq2) \end{aligned}$$

*A seguir, derivando a equação (eq2) e tendo em conta, novamente, as duas últimas equações do sistema (4.4), obtém-se*

$$\begin{aligned} x''' = x'' + x' - 2y' + z' \quad &\Leftrightarrow \quad x''' = x'' + x' - 2(x + y - z) + (2x - y) \\ &\Leftrightarrow \quad x''' = x'' + x' - 3y + 2z. \qquad (4.5) \end{aligned}$$

*Com base nas (eq1) e (eq2) determinam-se $y$ e $z$ em termos de $x$, $x'$ e $x''$ do seguinte modo:*

$$\begin{cases} (eq1) \\ (eq2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = x - y + z \\ x'' = x' + x - 2y + z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = x' - x + y \\ x'' = x' + x - 2y + x' - x + y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} z = x' - x + y \\ x'' = 2x' - y \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} z = x' - x + 2x' - x'' \\ y = 2x' - x'' \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} z = 3x' - x - x'' \\ y = 2x' - x''. \end{cases} \tag{4.6}$$

*Substituindo, em (4.5), y e z pelas expressões encontradas em (4.6), obtém-se uma equação diferencial linear homogénea de 3ª ordem com coeficientes constantes,*

$$x''' = x'' + x' - 3(2x' - x'') + 2(3x' - x - x'').$$

*Simplificando, tem-se*

$$x''' - 2x'' - x' + 2x = 0.$$

*A solução geral da última equação diferencial é*

$$x = C_1 e^t + C_2 e^{-t} + C_3 e^{2t} \ , \quad C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R} \quad \textit{(verifique)}.$$

*Calculando a primeira e a segunda derivadas da função x encontrada, e tendo em conta (4.6), pode, finalmente, escrever-se a solução geral do sistema inicial (4.4)*

$$\begin{cases} x &= C_1 e^t + C_2 e^{-t} + C_3 e^{2t} \\ y &= C_1 e^t - 3C_2 e^{-t} \\ z &= C_1 e^t - 5C_2 e^{-t} + C_3 e^{2t} \ , \quad C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

## 4.3 Problema de Cauchy para sistemas de equações diferenciais lineares de 1ª ordem

Pode formular-se a seguinte condição suficiente de existência e unicidade de solução do problema de Cauchy para sistemas de equações diferenciais lineares de primeira ordem com coeficientes constantes [8].

**Teorema 4.1 (Existência e unicidade de solução do problema de Cauchy)** *Seja o sistema de equações diferenciais lineares (4.1), sujeito às condições iniciais (4.2), e com as funções $f_i$, $i = 1, \dots, n$, definidas num certo domínio $D \subset \mathbb{R}$ que contem o ponto $x_0$. Se existe $h > 0$ tal que, para todo $x \in ]x_0 - h, x_0 + h[ \subset D$, as funções $f_i$ e as suas derivadas $f_i'$ são contínuas então, em $]x_0 - h, x_0 + h[$, existe uma única solução do problema de Cauchy (4.1), (4.2).*

Para resolver um sistema de equações diferenciais lineares de 1ª ordem com condições iniciais, resolve-se, primeiro, o sistema e, a seguir, substituem-se as condições iniciais na solução geral, calculando os valores particulares das constantes arbitrárias. A solução do problema de Cauchy obtém-se, substituindo, na solução geral do sistema, as constantes arbitrárias pelos seus valores então encontrados.

**Exemplo 4.3.1** *Considere o seguinte problema de Cauchy*

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = 5y + 4z \\ \frac{dz}{dx} = 4y + 5z \ , \qquad y(0) = 2 \ , \ z(0) = 0. \end{cases} \tag{4.7}$$

*O sistema dado consiste em duas equações diferenciais lineares homogéneas, com funções desconhecidas* $y = y(x)$ *e* $z = z(x)$*, sujeitas às condições iniciais* $y = 2$ *e* $z = 0$*, quando* $x = 0$*. De acordo com a notação considerada no Teorema 4.1, neste exemplo as funções são* $f_1(x) = f_2(x) = 0$*. As condições do Teorema 4.1 estão satisfeitas em qualquer vizinhança do ponto* $x = 0$ *e, portanto, numa vizinhança desse ponto, existirá uma única solução do problema de Cauchy.*

*Para resolver o problema de Cauchy (4.7), comece-se por derivar a primeira equação do sistema em ordem a* $x$*, resultando* $\frac{d^2y}{dx} = 5\frac{dy}{dx} + 4\frac{dz}{dx}$*. Substituindo, nesta última equação, as expressões para* $\frac{dy}{dx}$ *e* $\frac{dz}{dx}$ *do sistema (4.7), obtém-se*

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 5\frac{dy}{dx} + 4\frac{dz}{dx} = 5(5y + 4z) + 4(4y + 5z),$$

*donde*

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 41y + 40z. \tag{4.8}$$

*Da primeira equação do sistema (4.7) resulta a seguinte expressão para* $z$*:*

$$z = \frac{1}{4}\left(\frac{dy}{dx} - 5y\right). \tag{4.9}$$

*Substituindo (4.9) na equação (4.8) vem*

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 41y + 10\left(\frac{dy}{dx} - 5y\right),$$

*ou, de modo equivalente,*

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 10\frac{dy}{dx} + 9y = 0.$$

*Esta última é uma equação diferencial linear homogénea de* $2^a$ *ordem com coeficientes constantes. A sua solução é*

$$y = C_1e^x + 9C_2e^{9x}\ , \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R} \qquad \textit{(verifique).}$$

*Substituindo a função* $y$ *obtida e a sua derivada* $\frac{dy}{dx} = C_1e^x + 9C_2e^{9x}$ *na fórmula (4.9), obtém-se a expressão para a função desconhecida* $z$*,*

$$z = \frac{1}{4}[C_1e^x + 9C_2e^{9x} - 5(C_1e^x + C_2e^{9x})] = -C_1e^x + C_2e^{9x}.$$

*Assim, a solução geral do sistema é*

$$\begin{cases} y = C_1e^x + C_2e^{9x} \\ z = -C_1e^x + C_2e^{9x}\ , \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{4.10}$$

*Para encontrar a solução do problema de Cauchy (4.7), procura-se a solução particular que satisfaz as condições iniciais desse problema. Tomando* $x = 0,\ y = 2,\ z = 0$ *na solução geral (4.10) obtida, resulta*

$$\begin{cases} 2 = C_1 + C_2 \\ 0 = -C_1 + C_2, \end{cases}$$

*donde* $C_1 = 1$ *e* $C_2 = 1$.

*Assim, a solução particular do problema de Cauchy dado é*

$$\begin{cases} y = e^x + e^{9x} \\ z = -e^x + e^{9x} \ . \end{cases}$$

**Exemplo 4.3.2** *Considere o seguinte problema de Cauchy para sistema de equações diferenciais lineares não homogéneas:*

$$\begin{cases} x' = x - y \\ y' = x + y + e^t \ , \qquad x(0) = 0, \ y(0) = 1. \end{cases} \tag{4.11}$$

*Aqui as condições iniciais são* $x = 0$, $y = 1$, *quando* $t = 0$, *e, de acordo com a notação do Teorema 4.1, as funções são* $f_1(x) = 0$, $f_2(x) = e^t$. *É evidente que as condições do Teorema 4.1 estão satisfeitas em qualquer vizinhança de* $t = 0$, *pelo que a solução do problema de Cauchy (4.11) existe e é única.*

*Para resolver o sistema dado, encontre-se a função* $y$ *da* $1^a$ *equação do sistema, tendo*

$$y = x - x', \qquad (eq1)$$

*e derive-se a expressão obtida, resultando* $y' = x' - x''$. *Tendo substituído na segunda equação do sistema* $y$ *e* $y'$ *pelas expressões obtidas, obtém-se a seguinte equação diferencial de segunda ordem em ordem à variável* $x = x(t)$:

$$x'' - 2x' + 2x = -e^t.$$

*A solução desta equação diferencial é*

$$x = e^t(C_1 \cos t + C_2 \sin t - 1) \qquad (verifique). \tag{4.12}$$

*Por substituição da função* $x$ *encontrada e da sua derivada* $x' = e^t(C_1(\cos t - \sin t) + C_2(\sin t + \cos t) - 1)$ *na equação (eq1) resulta*

$$y = e^t(C_1 \sin t - C_2 \cos t). \tag{4.13}$$

*O sistema de equações (4.12) e (4.13) determina a solução geral do sistema inicial.*

*Substituindo as condições iniciais nesta solução geral, obtém-se*

$$\begin{cases} 1 = -C_2 \\ 0 = C_1 - 1 \ , \end{cases}$$

*donde* $C_1 = 1$ *e* $C_2 = -1$.

*Assim, a solução do problema de Cauchy (4.11) é*

$$\begin{cases} x = e^t(\cos t - \sin t - 1) \\ y = e^t(\sin t + \cos t) \ . \end{cases}$$

## 4.4 Exercícios

1. (a) Mostre que o sistema de funções

$$\begin{cases} x_1(t) = C_1e^{-t} + C_2e^{3t} \\ x_2(t) = 2C_1e^{-t} - 2C_2e^{3t}, \ C_1, C_2 \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

constitui a solução geral do sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_1 - x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} = x_2 - 4x_1 \ . \end{cases}$$

(b) Partindo do sistema de equações diferenciais e da sua solução geral, dados na alínea anterior, determine a solução particular desse sistema que satisfaz as condições iniciais $x_1(0) = 0, \ x_2(0) = -4$.

2. Determine a solução geral do sistema de equações diferenciais dado.

(a) $\begin{cases} \frac{dy}{dt} = y \\ \frac{dx}{dt} = -2x \end{cases}$

(b) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = 2y \end{cases}$

(c) $\begin{cases} y'(t) = -x \\ x'(t) = y \end{cases}$

(d) $\begin{cases} x'(t) = 8y - x \\ y'(t) = x + y \end{cases}$

(e) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = x + e^t + e^{-t} \end{cases}$

(f) $\begin{cases} x'(t) = 3x + y + e^t \\ y'(t) = x + 3y - e^t \end{cases}$

(g) $\begin{cases} x'(t) = 2x + 4y - 8 \\ y'(t) = 3x + 6y \end{cases}$

(h) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = z - y \\ \frac{dy}{dt} = z \\ \frac{dz}{dt} = z - x \end{cases}$

(i) $\begin{cases} 2\frac{dx}{dt} = y + 1 \\ \frac{dy}{dt} = x \\ \frac{dz}{dt} = x \end{cases}$

(j) $\begin{cases} x' = x + y \\ y' = 9x + y \end{cases}$

(k) $\begin{cases} x' = -y + t^2 \\ y' = x + e^t \end{cases}$

(l) $\begin{cases} x' = 3x - 2y + t \\ y' = 3x - 4y \end{cases}$

(m) $\begin{cases} x'' = 2x - 3y \\ y'' = x - 2y \end{cases}$

(n) $\begin{cases} x'' = 3x + 4y \\ y'' = -x - y \end{cases}$

(o) $\begin{cases} x' = 4x + y \\ y' = 3x + 2y \\ z' = 2x + 3y + 4z \end{cases}$

(p) $\begin{cases} x' = x - 2y - z \\ y' = -x + y + z \\ z' = x - z \end{cases}$

3. Resolva os seguintes problemas de Cauchy.

(a) $\begin{cases} \frac{dy}{dx} - y = 0 \\ \frac{dz}{dx} + z = 0 \end{cases}$ , $y(1) = z(1) = 0$

(b) $\begin{cases} \frac{dy}{dx} + 3y + z = 0 \\ \frac{dz}{dx} - y + z = 0 \end{cases}$ , $y(0) = z(0) = 1$

(c) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} + 7x - y = 0 \\ \frac{dy}{dt} + 2x + 5y = 0 \end{cases}$ , $x(0) = y(0) = 1$

(d) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = z \\ \frac{dz}{dt} = 1 \end{cases}$ , $x(0) = y(0) = z(0) = 0$

(e) $\begin{cases} x' = y \\ y' = -x + 3 \end{cases}$ , $x(\pi) = 1,\ y(\pi) = 2$

4. Uma substância decompõe-se em duas substâncias X e Y, sendo a velocidade de formação de cada uma deles proporcional à quantidade de substância não decomposta. Deduza a lei de variação das quantidades $x$ e $y$ das substâncias X e Y em função do tempo $t$, sabendo que no início do processo se tem a quantidade $a$ da substância inicial, que quando $t = 0$ se tem $x = y = 0$ e que no fim de uma hora se tem $x = \frac{a}{8},\ y = \frac{3a}{8}$.

5. Considere-se dois vasos de capacidades $V_1$ e $V_2$, respectivamente, cheios de gás. No instante inicial, a pressão do gás é igual a $P_1$, no primeiro vaso, e a $P_2$, no segundo. Os vasos estão unidos por um tubo, através do qual o gás pode passar de um vaso para o outro. Considerando que a quantidade de gás que passa de um vaso para o outro, durante um segundo, é proporcional à diferença entre os quadrados das pressões, sendo o coeficiente de proporcionalidade $a$, determine as pressões $p_1$ e $p_2$, nos vasos, no instante $t$.

## 4.5 Soluções

1. (a)

(b) $\begin{cases} x_1(t) &= -e^{-t} + e^{3t} \\ x_2(t) &= -2e^{-t} - 2e^{3t} \end{cases}$

2. (a) $\begin{cases} x(t) &= C_2 e^{-2t} \\ y(t) &= C_1 e^{t}\ , \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R} \end{cases}$

(b) $\begin{cases} x(t) &= C_1 + C_2 e^{2t} \\ y(t) &= 2C_2 e^{2t}\ , \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R} \end{cases}$

(c) $\begin{cases} x(t) &= C_1 \cos t + C_2 \sin t \\ y(t) &= -C_1 \sin t + C_2 \cos t\ , \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R} \end{cases}$

(d) $\begin{cases} x(t) &= -4C_1 e^{-3t} + 2C_2 e^{3t} \\ y(t) &= C_1 e^{-3t} + C_2 e^{3t}\ , \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R} \end{cases}$

(e) $\begin{cases} x(t) &= e^{-t}(C_1 - \frac{1}{2}t - \frac{1}{4}) + e^{t}(C_2 + \frac{1}{2}t - \frac{1}{4}) \\ y(t) &= e^{-t}(-C_1 + \frac{1}{2}t - \frac{1}{4}) + e^{t}(C_2 + \frac{1}{2}t + \frac{1}{4})\ , \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R} \end{cases}$

(f) $\begin{cases} x(t) &= C_1 e^{2t} + C_2 e^{4t} - e^{t} \\ y(t) &= -C_1 e^{2t} + C_2 e^{4t} + e^{t}\ , \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R} \end{cases}$

(g) $\begin{cases} x(t) &= \frac{2}{3} C_1 e^{8t} - 2C_2 + \frac{1}{4} - 6t \\ y(t) &= C_1 e^{8t} + C_2 + \frac{3}{8} + 3t\ , \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R} \end{cases}$

(h) $\begin{cases} x(t) &= C_2(\sin t + \cos t) + C_3(-\cos t - \sin t) \\ y(t) &= C_1 e^{t} + C_2 \sin t - C_3 \cos t \\ z(t) &= C_1 e^{t} + C_2 \cos t + C_3 \sin t\ , \quad C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R} \end{cases}$

(i) $\begin{cases} x(t) &= C_1 e^{\frac{\sqrt{2}}{2}t} + C_2 e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}t} \\ y(t) &= \sqrt{2} C_1 e^{\frac{\sqrt{2}}{2}t} - \sqrt{2} C_2 e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}t} - 1 \\ z(t) &= \sqrt{2} C_1 e^{\frac{\sqrt{2}}{2}t} - \sqrt{2} C_2 e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}t} + C_3\ , \quad C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R} \end{cases}$

(j) $\begin{cases} x(t) &= C_1 e^{-2t} + C_2 e^{4t} \\ y(t) &= -3C_1 e^{-2t} + 3C_2 e^{4t}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R} \end{cases}$

(k) $\begin{cases} x(t) &= C_1 \cos t + C_2 \sin t + 2t - \frac{1}{2} e^{t} \\ y(t) &= t^2 + C_1 \sin t - C_2 \cos t - 2 + \frac{1}{2} e^{t}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R} \end{cases}$

(l) $\begin{cases} x(t) &= \frac{1}{3}(C_1 e^{-3t} + 6C_2 e^{2t} - 2t - \frac{5}{6}) \\ y(t) &= C_1 e^{-3t} + C_2 e^{2t} - \frac{1}{2}t - \frac{1}{12}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R} \end{cases}$

(m) $\begin{cases} x(t) &= 3C_1 e^{-t} + 3C_2 e^{t} + C_3 \cos t + C_4 \sin t \\ y(t) &= C_1 e^{-t} + C_2 e^{t} + C_2 \cos t + C_4 \sin t, \quad C_1, C_2, C_3, C_4 \in \mathbb{R} \end{cases}$

(n) $\begin{cases} x(t) &= 2(e^{-t}(C_2 - C_1 - tC_2) - e^{t}(C_3 + C_4 + tC_4)) \\ y(t) &= e^{-t}(C_1 + tC_2) + e^{t}(C_3 + tC_4), \quad C_1, C_2, C_3, C_4 \in \mathbb{R} \end{cases}$

(o) $\begin{cases} x(t) &= 3C_1e^{t} + C_3e^{5t} \\ y(t) &= -9C_1e^{t} + C_3e^{5t} \\ z(t) &= 7C_1e^{t} + C_2e^{4t} + 5C_3e^{5t}, \quad C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R} \end{cases}$

(p) $\begin{cases} x(t) &= C_1 + 3C_2e^{2t} \\ y(t) &= -2C_2e^{2t} + C_3e^{-t} \\ z(t) &= C_1 + C_2e^{2t} - 2C_3e^{-t}, \quad C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R} \end{cases}$

3. (a) $\begin{cases} y(x) &= 0 \\ z(x) &= 0 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} y(x) &= e^{-2x}(1 - 2x) \\ z(x) &= e^{-2x}(1 + 2x) \end{cases}$

(c) $\begin{cases} x(t) &= e^{-6t}\cos t \\ z(t) &= e^{-6t}(\cos t - \sin t) \end{cases}$

(d) $\begin{cases} x(t) &= \frac{t^3}{6} \\ y(t) &= \frac{t^2}{2} \\ z(t) &= t \end{cases}$

(e) $\begin{cases} x &= 2\cos t - 2\sin t + 3 \\ y &= -2\sin t - 2\cos t \end{cases}$

4. $x = \frac{a}{4}(1 - 2^{t}), \ y = \frac{3a}{4}(1 - 2^{t})$

5. $V_1p_1 + V_2p_2 = P_1V_1 + P_2V_2, \ \frac{p_1+p_2}{p_1-p_2} = \frac{P_1+P_2}{P_1-P_2}e^{2kt}$, onde $k = \frac{a(V_1p_1+V_2p_2)}{V_1V_2}$

# Capítulo 5

# Exercícios de auto-avaliação

**Grupo I:** Assinale com uma cruz (X) a resposta correcta sabendo que apenas uma das respostas propostas é verdadeira.

1. Se $y_1$ e $y_2$ são duas soluções particulares da equação diferencial $y'' + e^x y' = 0$ então:

   (a) $y_1$ e $y_2$ são necessariamente duas funções linearmente independentes ☐
   (b) $y_1$ e $y_2$ são soluções da equação algébrica $\lambda^2 + e^x\lambda = 0$ ☐
   (c) $y_1 - y_2$ é uma solução da equação diferencial $y'' + e^x y' = 0$ ☐
   (d) $y = C_1 y_1 + C_2 y_2,\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ é a solução geral da equação $y'' + e^x y' = 0$ ☐

2. A equação diferencial $(y^2 - xy)dx + x^2 dy = 0$

   (a) tem como solução particular a função $y = \frac{x}{lnx}$ ☐
   (b) é uma equação diferencial de 2ª ordem ☐
   (c) tem como solução particular a função $y = 1$ ☐
   (d) tem como solução particular a função $y = x$ ☐

3. A solução do problema de Cauchy $y' = (x + y + 2)^2,\ y(0) = -1,$ é

   (a) $y = -1$ ☐
   (b) $x + y + 2 = \sqrt{y + 2}$ ☐
   (c) $\ln(x + y + 2) = x$ ☐
   (d) $\arctan(x + y + 2) = x + \frac{\pi}{4}$ ☐

4. A equação diferencial $(x^2 + \frac{\ln y}{x})dx + \frac{1}{y}dy = 0$

   (a) admite factor integrante da forma $\mu(y) = y$ ☐
   (b) é uma equação diferencial exacta ☐
   (c) tem integral geral igual a $C_1 y \ln x + \frac{y^4}{4} + C_2 = 0,\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ ☐
   (d) admite factor integrante da forma $\mu(x) = x$. ☐

5. A equação $(x + y^2)dx - 2xydy = 0$

   (a) admite factor integrante da forma $\mu(x, y) = \frac{1}{xy}$ ☐

(b) admite factor integrante da forma $\mu(y) = \frac{1}{y^2}$ ☐

(c) admite factor integrante da forma $\mu(x) = \frac{1}{x^2}$ ☐

(d) é uma equação diferencial exacta ☐

6. Se $\lambda = 1$ é uma raiz dupla da equação característica associada a uma equação diferencial linear homogénea de 2ª ordem, então a solução geral dessa equação diferencial é

   (a) $y = C_1 e^x + C_2 x e^x\,, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ ☐

   (b) $y = C_1 \sin x + C_2 \cos x\,, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ ☐

   (c) $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}\,, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ ☐

   (d) $y = C_1 x \sin x + C_2 x \cos x\,, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ ☐

7. A equação diferencial associada à família de curvas planas dadas por $y = C_1 e^x + C_2 x$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$, é

   (a) $y''(1-x) = y - y'$ ☐

   (b) $y = y'x$ ☐

   (c) $y' = y'' + C_2$ ☐

   (d) $y''(1-x) + y'x = y$ ☐

8. Se $\lambda = 1$ e $\lambda = -1$ são raízes da equação característica associada a uma equação diferencial linear homogénea de 2ª ordem, então a solução geral dessa equação diferencial é:

   (a) $y = C_1 e^x + C_2 x e^x\,, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ ☐

   (b) $y = C_1 \sin x - C_2 \cos x\,, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ ☐

   (c) $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}\,, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ ☐

   (d) $y = C_1 e^x + C_2 x e^{-x}\,, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ ☐

9. A solução geral da equação $y''' = x$

   (a) é constituída pela família de todas as funções reias polinomiais do 4º grau ☐

   (b) é constituída pela família de todas as funções reias polinomiais do 3º grau. ☐

   (c) coincide com a solução geral da equação diferencial $y^{(4)} = 1$ ☐

   (d) é a família de todas as soluções particulares da equação diferencial $y^{(4)} = 1$ com $y'''(0) = 0$ ☐

10. Se $e^x$ e $e^{-x}$ são soluções linearmente independentes de uma equação diferencial linear homogénea de 2ª ordem, então a solução particular $y_p$, da equação diferencial, que satisfaz as condições iniciais $y(0) = y'(0) = 1$ é

    (a) $y_p = e^x$ ☐

    (b) $y_p = e^{-x}$ ☐

    (c) $y_p = e^x - e^{-x}$ ☐

    (d) $y_p = e^x + e^{-x}$ ☐



Cadernos de Matemática, Universidade de Aveiro, Portugal – Série de Divulgação – 10 de Fevereiro de 2012

11. A função $y = e^{kx}$ é solução da equação diferencial

    (a) $y'' + 2y' + y = 0$, desde que $k$ seja solução da equação $k^2 + 2k + 1 = 0$ ☐
    (b) $y'' + 2y' + 1 = 0$, qualquer que seja o valor de $k \in \mathbb{R}$ ☐
    (c) $y'' + 2y' + 1 = 0$, se $k = -1$ ☐
    (d) $y'' + 2y' + y = 0$, se $k = 0$ ☐

12. A equação $(xy - 1)dx + x^2dy = 0$

    (a) é uma equação diferencial de segunda ordem ☐
    (b) admite factor integrante da forma $\mu(x) = \frac{1}{x}$ ☐
    (c) admite factor integrante da forma $\mu(y) = y$ ☐
    (d) admite como solução particular a função $y = \frac{1}{x}$ ☐

13. A equação diferencial $y^2dx - x^2dy = 0$

    (a) é uma equação diferencial exacta ☐
    (b) é uma equação diferencial de 2ª ordem ☐
    (c) é uma equação diferencial linear ☐
    (d) admite a função $y = x$ como solução particular ☐

14. Se $e^x$ e $e^{-x}$ são soluções linearmente independentes de uma equação diferencial linear homogénea de 2ª ordem, então a solução particular $y_p$ , da equação diferencial, que satisfaz as condições iniciais $y(0) = 2$, $y'(0) = 1$ é

    (a) $y_p = \frac{3}{2}e^x + \frac{1}{2}e^{-x}$ ☐
    (b) $y_p = 2e^x + e^{-x}$ ☐
    (c) $y_p = \frac{1}{2}e^x - \frac{1}{2}e^{-x}$ ☐
    (d) $y_p = e^x + e^{-x}$ ☐

15. A equação $y(x - y)dx - x^2dy = 0$ é uma equação diferencial

    (a) homogénea de 1ª ordem ☐
    (b) linear de 1ª ordem ☐
    (c) exacta ☐
    (d) de variáveis separáveis ☐

16. A solução geral da equação $y'' = x + 1$

    (a) é constituída pela família de todas as funções reais polinomiais do 2º grau ☐
    (b) é constituída pela família de todas as funções reais polinomiais do 3º grau. ☐
    (c) coincide com a solução geral da equação diferencial $y''' = 1$ ☐
    (d) é a família de todas as soluções particulares da equação diferencial $y''' = 1$ com $y''(0) = 1$ ☐

17. A equação diferencial $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ tem solução geral $y = \phi(x,C)$, $C \in \mathbb{R}$, sendo $M$ e $N$ duas funções reais não nulas tais que

$$x\left(\frac{\partial M}{\partial y}(x,y) - \frac{\partial N}{\partial x}(x,y)\right) = N(x,y).$$

Nessas condições, a equação diferencial $xM(x,y)dx + xN(x,y)dy = 0$

(a) é uma equação diferencial exacta ☐
(b) tem solução geral $y = x\phi(x,C)$, $C \in \mathbb{R}$ ☐
(c) tem integral geral $xy = \phi(x,C)$, $C \in \mathbb{R}$ ☐
(d) admite um factor integrante da forma $\mu(x) = x$ ☐

18. A equação $(x-y)dx - x^2dy = 0$ é uma equação diferencial

(a) homogénea de 1ª ordem ☐
(b) linear de 1ª ordem ☐
(c) exacta ☐
(d) de variáveis separáveis ☐

19. Considere as seguintes afirmações:

(A) "A equação $y'' + xy = 0$ é uma equação diferencial linear de 2ª ordem. "

(B) "Se $y_1$ e $y_2$ são duas soluções linearmente independentes da equação $y'' + xy = 0$, então $y_1 - y_2$ é também uma solução dessa equação diferencial."

Relativamente às afirmações dadas tem-se

(a) ambas são verdadeiras ☐
(b) (A) é verdadeira e (B) é falsa ☐
(c) (A) é falsa e (B) é verdadeira ☐
(d) ambas são falsas ☐

20. A equação diferencial $y' = 2(y-x)^2$

(a) só admite como soluções funções $y = y(x)$ estritamente monótonas crescentes ☐
(b) é uma equação diferencial de 2ª ordem ☐
(c) é uma equação diferencial linear ☐
(d) só admite como soluções funções $y = y(x)$ positivas ☐

21. A função $y = e^{kt}$ é solução da equação diferencial $y'' + y' - 3y = 0$,

(a) se $k = -\frac{1+\sqrt{2}i}{2}$ ☐
(b) para todo o $k \in \mathbb{R}$ ☐
(c) se $k$ satisfaz a equação $k^2 + k - 3 = 0$ ☐
(d) se $k = -\frac{1}{2}$ ☐

22. Seja $y_1 = y_1(x)$ uma solução da equação diferencial $y''' - xy = 0$. Então, a função $y_2 = y_1(x) + x$ é solução da equação diferencial

   (a) $y''' - xy = x^2$ ☐
   (b) $y''' + x - xy = 0$ ☐
   (c) $y''' - xy = -x^2$ ☐
   (d) $y''' - xy = 0$ ☐

23. A equação diferencial associada à família de curvas planas dadas por $y = C_1x^2 + C_2$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$, é:

   (a) $y'' = 2x$ ☐
   (b) $dy = 2xdx$ ☐
   (c) $y''x - y' = 0$ ☐
   (d) $y'' = 2C_1 + C_2$ ☐

24. A função $y = x^2 + 1$ é a solução do problema de Cauchy

   (a) $y''x - y' = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$ ☐
   (b) $y''x - y' = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$ ☐
   (c) $y''x - y' = 1$, $y(1) = 2$, $y'(1) = 2$ ☐
   (d) $y''x - y' = 0$, $y(1) = 0$, $y'(0) = 0$ ☐

25. A equação diferencial $x \sin y \; dx + (x^2 + 1) \cos y \; dy = 0$

   (a) admite factor integrante da forma $\mu(x) = \frac{1}{x}$ ☐
   (b) é uma equação diferencial exacta ☐
   (c) admite factor integrante da forma $\mu(x, y) = \frac{1}{(x^2+1)\cos y}$ ☐
   (d) admite factor integrante da forma $\mu(y) = \sin y$ ☐

26. Se $\lambda = i$ é uma raiz dupla da equação característica associada a uma equação diferencial linear homogénea de 4ª ordem, então a solução geral dessa equação diferencial é:

   (a) $y = C_1e^x + C_2e^{-x} + C_3xe^x + C_4xe^{-x}\,, \quad C_1, C_2, C_3, C_4 \in \mathbb{R}$ ☐
   (b) $y = C_1 \sin x + C_2 \cos x + C_3e^x \sin x + C_4e^x \cos x\,, \quad C_1, C_2, C_3, C_4 \in \mathbb{R}$ ☐
   (c) $y = C_1 \sin x + C_2 \cos x + C_3x \sin x + C_4x \cos x\,, \quad C_1, C_2, C_3, C_4 \in \mathbb{R}$ ☐
   (d) $y = C_1 \sin x + C_2 \cos x\,, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ ☐

27. A equação diferencial $y^2dx + x^2dy = 0$

   (a) é uma equação diferencial exacta ☐
   (b) é uma equação diferencial de 2ª ordem ☐
   (c) é uma equação diferencial linear ☐
   (d) admite a função $y = -x$ como sendo uma sua solução particular ☐

28. Considere as seguintes afirmações:

    (A) "A equação $y^2 + xy' = 1$ é uma equação diferencial linear de 2ª ordem. "

    (B) "Se $y_1$ e $y_2$ são duas soluções linearmente independentes da equação $y'' + xy = 1$, então $y_1 - y_2$ é também uma solução dessa equação diferencial."

    Relativamente às afirmações dadas tem-se

    (a) ambas são verdadeiras ☐
    (b) (A) é verdadeira e (B) é falsa ☐
    (c) (A) é falsa e (B) é verdadeira ☐
    (d) ambas são falsas ☐

29. A solução geral da equação $y' = x + 1$

    (a) é a família de todas as funções reais polinomiais de 1º grau ☐
    (b) é a família de todas as funções reais polinomiais de 2º grau. ☐
    (c) coincide com a solução geral da equação diferencial $y'' = 1$ ☐
    (d) é a família de todas as soluções particulares da equação diferencial $y'' = 1$ com $y'(0) = 1$ ☐

**Grupo II:** Identifique a ordem e o tipo das seguintes equações diferenciais assinalando a letra correspondente:

**A)** Equação diferencial de variáveis separáveis

**B)** Equação diferencial da forma $y' = f(ax + by + c)$

**C)** Equação diferencial homogénea de 1ª ordem

**D)** Equação diferencial exacta

**E)** Equação diferencial linear de 1ª ordem

**F)** Equação diferencial de Bernoulli

**G)** Equação diferencial de ordem superior à primeira da forma $y^{(n)} = f(x)$

**H)** Equação diferencial de ordem superior à primeira da forma $F(x, y^{(k)}, \ldots, y^{(k)}) = 0$ .

1. $(ye^{y/x} + x)dx - xe^{y/x}dy = 0$
2. $y' - \frac{\cos x}{\sin x} y = \sin x$
3. $dy = (x + y + 2)^2 dx$
4. $y''' - 8y = 0$
5. $dy = (x + y)^2 dx$

6. $y'' + (y')^2 = 0$
7. $y^2 dx + (2xy + \cos y)dy = 0$
8. $y''' = x$
9. $y^2 dx + (2xy + 3)dy = 0$
10. $y' - \frac{y}{x} = x$
11. $y''' - 4y'' = 0$
12. $y - xy' = 1 + y'$
13. $y'' + x(y')^2 = 0$
14. $y' \cos x + y \sin x = \sin x$
15. $xy'' - y' = x$
16. $dy = (x + y)^2 dx$
17. $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$
18. $(1 + x)y'' - y' = 0$
19. $y' - \frac{1}{x}y = y^2$
20. $(y' - \frac{y}{x})\ \ln(\frac{y}{x}) = 1$
21. $y''' = 2(y'' - 1)$
22. $y' - \frac{4y}{x} = \sqrt{y}$
23. $xdy - y^2 dx = 0$
24. $y''' - 4y' = 0$
25. $xy' = y - xe^{y/x}$
26. $(x + 3y)dx + (3x - 2y)dy = 0$
27. $y''' - y'' + 4y' - 4y = 0$
28. $(x + \sin y)dx + (x \cos y - 2y)dy = 0$
29. $x^2 y'' = (y')^2$

Cadernos de Matemática, Universidade de Aveiro, Portugal – Série de Divulgação – 10 de Fevereiro de 2012

**Grupo III:** Resolve as seguintes questões justificando convenientemente os passos fundamentais.

1. Resolva as equações diferenciais apresentadas no Grupo II.

2. Determine a solução geral das seguintes equações diferenciais.

   (a) $y''' - y' = 0$

   (b) $y^{(3)} - 4y'' = 0$

3. Considere a equação diferencial $y' - xy = xy^2$.

   (a) Mostre que a mudança de variável $z = \frac{1}{y}$, com $z = z(x)$, reduz a equação diferencial dada à equação $z' + xz = -x$.

   (b) Identifique o tipo da equação diferencial indicada na alínea anterior e resolva-a.

   (c) Indique a solução geral da equação diferencial $y' - xy = xy^2$.

4. Determine o integral geral da equação diferencial $y'' = 1 + (y')^2$.

5. Resolva os sistemas de equações diferenciais dados.

   (a) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + y \\ \frac{dy}{dt} = e^t + x + y \end{cases}$

   (b) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = y \end{cases}$

6. Resolva os seguintes problemas de Cauchy:

   (a) $y'' + y = \frac{1}{\sin x}\,, \quad y(\frac{\pi}{2}) = y'(\frac{\pi}{2}) = 0$

   (b) $y' = y^2 + 1\,, \quad y(0) = 2$

   (c) $xyy' = \ln x\,, \quad y(1) = 2$

   (d) $y'' - y' = e^x\,, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = -1$

   (e) $(1 + y^2)xdx + (1 + x^2)dy = 0, \qquad y(0) = 1$

   (f) $y'' + y = \sin x, \quad y(0) = \frac{\pi}{2}, \quad y'(0) = 0$

7. Seja $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ uma equação diferencial tal que $\frac{\partial}{\partial y}P(x,y) \neq \frac{\partial}{\partial x}Q(x,y)$.

   Mostre que se $\frac{1}{Q(x,y)}\left(\frac{\partial}{\partial y}P(x,y) - \frac{\partial}{\partial x}Q(x,y)\right) = f(x)$ então a equação diferencial dada admite factor integrante da forma $\mu(x) = e^{\int f(x)dx}$.

8. Mostre que $\mu(x,y) = y$ é um factor integrante da equação diferencial

$$(2x + \frac{\sin x}{y})dx + (\frac{x^2}{y} + \frac{\cos y}{y})dy = 0.$$

9. Determine a solução geral da equação diferencial $y'' - 6y' + 9y = x^2e^{3x}$.

10. Mostre que $\mu(x,y) = xy$ é um factor integrante da equação diferencial

$$(\frac{\cos x}{xy} + 2)dx + \frac{x}{y}dy = 0$$

e, a seguir, resolva a equação diferencial.

11. Resolva os seguintes problemas de Cauchy:

(a) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = y + e^t \end{cases}, \quad x(0) = 1,\ y(0) = 2$

(b) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = 2y - x \end{cases}, \quad x(0) = 4,\ y(0) = 1$

(c) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 4y \\ \frac{dy}{dt} = x \end{cases}, \quad x(0) = 1,\ y(0) = 2$

## Soluções

**Grupo I:**

1. (c)
2. (a)
3. (d)
4. (d)
5. (c)
6. (a)
7. (c)
8. (c)
9. (d)
10. (a)
11. (a)
12. (b)
13. (d)
14. (a)
15. (a)
16. (d)
17. (a)

18. (b)
19. (a)
20. (a)
21. (c)
22. (a)
23. (c)
24. (a)
25. (d)
26. (c)
27. (d)
28. (c)
29. (d)

**Grupo II:**

1. (C) e (D)
2. (E)
3. (B)
4. (H)
5. (B)
6. (H)
7. (D)
8. (G)
9. (D)
10. (E)
11. (H)
12. (A)
13. (H)
14. (E)
15. (H)
16. (B)

17. (H)
18. (H)
19. (F)
20. (C)
21. (H)
22. (F)
23. (A)
24. (H)
25. (C)
26. (D)
27. (H)
28. (D)
29. (H)

**Grupo III:**

1. **1.** $e^{y/x} = \ln|x| + C, \quad C \in \mathbb{R}$
   **2.** $y = (x + C)\sin x, \quad C \in \mathbb{R}$
   **3.** $x + y + 2 = \tan(x + C), \quad C \in \mathbb{R}$
   **4.** $y = C_1 e^{2x} + e^{-x}(C_2 \cos(\sqrt{3}x) + C_3 \sin(\sqrt{3}x)), \quad C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$
   **5.** $x + y = \tan(x + C), \quad C \in \mathbb{R}$
   **6.** $y = \ln|x + C_1| + C_2, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$, e $y = C, \quad C \in \mathbb{R}$
   **7.** $y^2 x + \sin y + C = 0, \quad C \in \mathbb{R}$
   **8.** $y = \frac{1}{24}x^4 + C_1 x^2 + C_2 x + C_3, \quad C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$
   **9.** $y^2 x + 3y + C = 0, \quad C \in \mathbb{R}$
   **10.** $y = x^2 + Cx, \quad C \in \mathbb{R}$
   **11.** $y = C_1 + xC_2 + C_3 e^{4x}, \quad C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$
   **12.** $y = C(x + 1) + 1, \quad C \in \mathbb{R}$
   **13.** $y = C_2 - \frac{2}{x}\,, \quad y = \frac{1}{2C_1} \ln\left|\frac{x - C_1}{x + C_1}\right| + C_2\,, \quad y = \frac{2}{C_1} \arctan\frac{x}{C_1} + C_2\,, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$
   **14.** $y = 1 + C\cos x, \quad C \in \mathbb{R}$
   **15.** $y = \frac{1}{4}x^2(2\ln|x| + C_1 + C_2, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$
   **16.** $y = -x + \tan(x + C), \quad C \in \mathbb{R}$
   **17.** $y = (C_1 + C_2 x + C_3 x^2)e^x, \quad C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$
   **18.** $y = (1 + x^2)C_1 + C_2, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$
   **19.** $y = \frac{2x}{C - x^2}, \quad C \in \mathbb{R}$



Cadernos de Matemática, Universidade de Aveiro, Portugal – Série de Divulgação – 10 de Fevereiro de 2012

**20.** $\frac{y}{x}\ln\left(\frac{y}{x}\right)-\frac{y}{x}=\ln x+C, \quad C\in\mathbb{R}$

**21.** $y=C_1+C_2x+C_3e^{2x}+\frac{1}{2}x^2, \quad C_1,C_2,C_3\in\mathbb{R}$

**22.** $y=\frac{x^4}{4}\left(C+\frac{1}{x}\right)^2, \quad C\in\mathbb{R},$ e $y=0$

**23.** $y=\frac{1}{C-ln|x|}, \quad C\in\mathbb{R},$ e $y=0$ e $x=0$

**24.** $y=C_1+C_2e^{2x}+C_3e^{-2x}, \quad C_1,C_2,C_3\in\mathbb{R}$

**25.** $e^{-y/x}=\ln|x|+C, \quad C\in\mathbb{R}$

**26.** $\frac{x^2}{2}-3xy-y^2+C=0, \quad C\in\mathbb{R}$

**27.** $y=C_1e^x+C_2\cos(2x)+C_3\sin(2x), \quad C_1,C_2,C_3\in\mathbb{R}$

**28.** $\frac{x^2}{2}+x\sin y-y^2+C=0, \quad C\in\mathbb{R}$

**29.** $y=\frac{x}{C_1}-\frac{1}{C_1^2}\ln|1+C_1x|+C_2, \quad C_1\in\mathbb{R}\backslash\{0\},C_2\in\mathbb{R}$ e $y=K, \quad K\in\mathbb{R}$

2. (a) $y=C_1+C_2e^{-x}+C_3e^{x}, \quad C_1,C_2,C_3\in\mathbb{R}$
   (b) $y=C_1+C_2x+C_3e^{4x}, \quad C_1,C_2,C_3\in\mathbb{R}$

3. (a)
   (b) Equação diferencial linear de 1ª ordem; $z=-1+Ce^{-x^2/2}, \quad C\in\mathbb{R}$
   (c) $y=\frac{1}{Ce^{-\frac{x^2}{2}}-1}, \quad C\in\mathbb{R},$ e $y=0$

4. $y=-\ln|\cos(x+C_1)|+C_2, \quad C_1,C_2\in\mathbb{R}$

5. (a) $\begin{cases} x=C_1+C_2e^{2t}-e^t \\ y=-C_1+C_2e^{2t}, \quad C_1,C_2\in\mathbb{R} \end{cases}$
   (b) $\begin{cases} x=C_1e^t+C_2 \\ y=C_1e^t, \quad C_1,C_2\in\mathbb{R} \end{cases}$

6. (a) $y=\cos x-\frac{\pi}{2}\sin x+\cos x\ln|\sin x|+x\sin x$
   (b) $\arctan y=x+\arctan 2$
   (c) $y^2=\ln^2 x+4$
   (d) $y=2-2e^x+xe^x$
   (e) $\arctan y=-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+\frac{\pi}{4}$
   (f) $y=\frac{\pi}{2}\cos x+\frac{1}{2}\sin x-\frac{1}{2}x\cos x$

7.

8.

9. $y=e^{3x}(C_1+xC_2+\frac{1}{12}x^4), \quad C_1,C_2\in\mathbb{R}$

10. $x^2y+\sin x+C=0, \quad C\in\mathbb{R}$

11. (a) $\begin{cases} x=e^t(1+t) \\ y=e^t(2+t) \end{cases}$
    (b) $\begin{cases} x=e^t(4-3t) \\ y=e^t(1-3t) \end{cases}$
    (c) $\begin{cases} x=-\frac{3}{2}e^{-2t}+\frac{5}{2}e^{2t} \\ y=\frac{3}{4}e^{-2t}+\frac{5}{4}e^{2t} \end{cases}$



Cadernos de Matemática, Universidade de Aveiro, Portugal – Série de Divulgação – 10 de Fevereiro de 2012

Cadernos de Matemática, Universidade de Aveiro, Portugal – Série de Divulgação – 10 de Fevereiro de 2012

# Anexo

## Transformadas de Laplace na resolução de problemas de Cauchy

Cadernos de Matemática, Universidade de Aveiro, Portugal – Série de Divulgação – 10 de Fevereiro de 2012

# Anexo

## Transformadas de Laplace na resolução de problemas de Cauchy

### Noções básicas

Seja $f : D_f \longrightarrow \mathbb{R}$, com $[0, +\infty[\subseteq D_f$.
A **transformada de Laplace** da função $f$ é uma função complexa $F$ de variável complexa[1] dada por

$$F(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)dt \tag{1}$$

e definida para todos os valores $s \in \mathbb{C}$ para os quais o integral impróprio em (1), chamado *integral de Laplace*, converge.[2]

Caso o integral em (1) convirja, a aplicação que transforma a função $f$ na função $F$ é chamada **transformação de Laplace** e denota-se por

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s).$$

Se em *(1)* o valor de $s$ é real então $F(s)$ será real[3].

**Teorema 1 (Condição suficiente de existência de Transformada de Laplace)** *Se a função $f$ satisfaz as seguintes condições*

- *existem constantes reais $M$, $t_0 > 0$ e $s_0$ tais que $|f(t)| \leq Me^{s_0 t}$, para todo $t \geq t_0$;*
- *em cada intervalo finito $[0, T]$, com $T > 0$, a função $f$ é seccionalmente contínua[4];*

*então existe $\mathcal{L}\{f(t)\}$, para $s > s_0$.*

---

[1] Função complexa de variável complexa é uma função $F : D_F \subseteq \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, onde $\mathbb{C}$ é um espaço de números complexos [1].

[2] Se não existem valores de $s \in \mathbb{C}$ para os quais o integral em (1) convirja, não fará então sentido falar em transformada de Laplace da função $f$.

[3] Neste texto considera-se apenas este caso.

[4] Diz-se que uma função $f : D_f \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é *seccionalmente contínua* no intervalo $[a, b] \subset D_f$, se esse intervalo pode ser dividido por um número finito de pontos $a = x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$, de modo que, em cada um dos sub-intervalos $]x_i, x_{i+1}[$, $i = 1, 2, \cdots, n-1$ a função $f$ é contínua e possui limites laterais finitos nos extremos desses sub-intervalos. Por outras palavras, no intervalo $[a, b]$ a função $f$ é seccionalmente contínua se tem, no máximo, um número finito de pontos de descontinuidade de 1ª espécie.

**Exemplo 1** *Uma das funções mais simples que verifica o Teorema 1 é a* **função de Heaviside**[5] *definida por*

$$u_a(t) = \begin{cases} 1, & se \quad t \geq a \\ 0, & se \quad t < a. \end{cases}$$

Cadernos de Matemática, Universidade de Aveiro, Portugal – Série de Divulgação – 10 de Fevereiro de 2012

## Transformadas de Laplace de algumas funções elementares

| $f(t)$ | $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ |
|---|---|
| $1$ | $\frac{1}{s}, \ s > 0$ |
| $t^n$ | $\frac{n!}{s^{n+1}}, \ n \in \mathbb{N}, \ s > 0$ |
| $e^{at}$ | $\frac{1}{s-a}, \quad s > a$ |
| $\sin(kt)$ | $\frac{k}{s^2+k^2}, \quad s > 0$ |
| $\cos(kt)$ | $\frac{s}{s^2+k^2}, \quad s > 0$ |
| $\sinh(kt) = \frac{e^{kt}-e^{-kt}}{2}$ | $\frac{k}{s^2-k^2}, \quad s > \|k\|$ |
| $\cosh(kt) = \frac{e^{kt}+e^{-kt}}{2}$ | $\frac{s}{s^2-k^2}, \quad s > \|k\|$ |

## Propriedades da transformação de Laplace

Sejam $f$ e $g$ duas funções reais para as quais existem as suas transformadas de Laplace,

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}, \quad s > s_1 \qquad \text{e} \qquad G(s) = \mathcal{L}\{g(t)\}, \quad s > s_2.$$

Então verificam-se as seguintes propriedades:

- **Propriedade da linearidade.** Para quaisquer constantes $a, b \in \mathbb{R}$,

$$\mathcal{L}\{af(t) + bg(t)\} = a\mathcal{L}\{f(t)\} + b\mathcal{L}\{g(t)\} = aF(s) + bG(s), \qquad s > max\{s_1, s_2\}.$$

- **Propriedade do deslocamento.** Para todo $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\mathcal{L}\{e^{\lambda t} f(t)\} = F(s - \lambda), \qquad s - \lambda > s_1.$$

- **Propriedade do retardamento.** Para todo $a > 0$,

$$\mathcal{L}\{u_a(t) f(t - a)\} = e^{-as} F(s), \qquad s > s_1,$$

  onde $u_a$ é a função de Heaviside.

- **Derivação da transformada de Laplace.** Para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathcal{L}\{t^n f(t)\} = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} F(s), \qquad s > s_1.$$

[5]Neste texto consideram-se funções nas condições do Teorema 1.

- **Transformada de Laplace da derivada de ordem $n$ de uma função**.
  Se

  - $f$ é $n$ vezes diferenciável em $[0, +\infty[$, com $n \in \mathbb{N}$,
  - $f, f', f'', \ldots, f^{(n-1)}$ são contínuas em $[0, +\infty[$,
  - $f^{(n)}$ é seccionalmente contínua em qualquer intervalo da forma $[0, b]$, com $b > 0$,
  - existem constantes reais $M$, $t_0 > 0$ e $s_0$ tais que $|f(t)| \leq Me^{s_0 t}$, $|f'(t)| \leq Me^{s_0 t}$,..., $|f^{(n-1)}(t)| \leq Me^{s_0 t}$, para todo $t \geq t_0$,

  então

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} = s^n \mathcal{L}\{f(t)\} - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f''(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0), \qquad s > s_0. \tag{2}$$

## Transformada inversa de Laplace

Se, para uma função $f : D_f \supseteq [0, +\infty[ \longrightarrow \mathbb{R}$, existe a sua transformada de Laplace, $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$, então

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$$

e diz-se que a função $f$ é a **transformada inversa de Laplace** da função $F$.

## Propriedades da transformada inversa de Laplace

Sejam $F$ e $G$ duas funções reais para as quais existem as suas transformadas inversas de Laplace

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}, \quad s > s_0 \qquad \text{e} \qquad G(s) = \mathcal{L}\{g(t)\}, \quad s > s_0.$$

Então verificam-se as seguintes propriedades:

- **Propriedade da linearidade.** Para quaisquer constantes $a, b \in \mathbb{R}$,

$$\mathcal{L}^{-1}\{aF(s) + bG(s)\} = a\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} + b\mathcal{L}^{-1}\{G(s)\}.$$

- **Propriedade do deslocamento.** Para todo $a > 0$,

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s-a)\} = e^{at}\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}.$$

- **Propriedade do retardamento.** Para todo $a \in \mathbb{R}$,

$$\mathcal{L}^{-1}\{e^{-as}F(s)\} = u_a(t)f(t-a).$$

Cadernos de Matemática, Universidade de Aveiro, Portugal – Série de Divulgação – 10 de Fevereiro de 2012

## Aplicação de Transformadas de Laplace à resolução do problema de Cauchy para equações e sistemas de equações diferenciais lineares com coeficientes constantes

Considere-se uma equação diferencial linear com coeficientes constantes na forma

$$y^{(n)}(t) + a_1 y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_{n-1} y'(t) + a_n y(t) = f(t)\,, \tag{3}$$

sujeita às condições iniciais

$$y|_{t=0} = y_0, \quad y'|_{t=0} = y_1, \quad \cdots, \quad y^{(n-1)}|_{t=0} = y_{n-1}. \tag{4}$$

Assuma-se que as funções $f$, $y$ e as suas derivadas até à ordem $n$, inclusive, admitem as transformadas de Laplace.
Calculando a transformada de Laplace de ambos os membros da equação diferencial (3), e atendendo à propriedade de linearidade da transformação de Laplace, obtém-se

$$\mathcal{L}\{y^{(n)}(t)\} + a_1\mathcal{L}\{y^{(n-1)}(t)\} + \cdots + a_{n-1}\mathcal{L}\{y'(t)\} + a_n\mathcal{L}\{y(t)\} = \mathcal{L}\{f(t)\}. \tag{5}$$

De (5) e (2), tomando em conta as condições iniciais (4), resulta

$$(s^n + a_1 s^{(n-1)} + a_2 s^{(n-2)} + \cdots + a_n)\mathcal{L}\{y(t)\} =$$
$$= s^{(n-1)}y_0(t) + s^{(n-2)}y_1(t) + \cdots + y_{n-1}(t) + a_1(s^{(n-2)}y_0(t) + s^{(n-3)}y_1(t) + \cdots + y_{n-2}(t)) + \mathcal{L}\{f(t)\},$$

que é uma equação algébrica em ordem a $\mathcal{L}\{y(t)\}$. Resolvendo esta equação, encontra-se $\mathcal{L}\{y(t)\}$.

A solução $y(t)$ do problema de Cauchy (3), (4) procura-se de

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\mathcal{L}\{y(t)\}\},$$

utilizando propriedades de transformada inversa de Laplace.[6]

A transformação de Laplace pode também ser utilizada para determinar a solução de um *sistema de equações diferenciais lineares de ordem $n$, $n \in \mathbb{N}$, com coeficientes constantes sujeito a condições iniciais.* Aplicando a transformação de Laplace a cada uma das equações que constituem o sistema, obtém-se um sistema de equações algébricas cujas variáveis são as transformadas de Laplace das funções que entram nas equações diferenciais do sistema inicial. Tendo resolvido o sistema de equações algébricas, aplica-se transformação inversa de Laplace às soluções do sistema e assim obtém-se a solução do problema de Cauchy para sistema de equações diferenciais.

[6] Exemplos podem ser consultados em [6]

# Apêndices

Cadernos de Matemática, Universidade de Aveiro, Portugal – Série de Divulgação – 10 de Fevereiro de 2012

# Apêndice 1

# Diferencial de uma função real de variável real

## Noções básicas

Seja $f : D_f \to \mathbb{R}$ uma função real de variável real diferenciável em $D_f$ e seja $x_0$ um ponto de acumulação de $D_f$.

Considere-se uma variação no valor de $x_0$ dada por $\Delta x$ e tal que $x_0 + \Delta x \in D_f$. Com a variação no argumento, a função também sofrerá uma variação igual à diferença entre $f(x_0)$ e $f(x_0+\Delta x)$.

Ao valor de $\Delta x$ chama-se *acréscimo* na variável $x$ e ao valor $\Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0)$ chama-se *acréscimo* ou *incremento* da função $y = f(x)$.

A fórmula

$$dy = f'(x)dx$$

determina o chamado *diferencial* da função $y = f(x)$.

O diferencial de $f$ é também denotado por $df(x)$ ou, simplesmente, $df$.

**Exemplo.** *O diferencial de* $f(x) = \sqrt{x^2+1}$ *é* $dy = f'(x)dx = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}dx = \frac{xdx}{\sqrt{x^2+1}}$ .

A variação $\Delta x$ pode ser denotada por $dx$ e considerada como diferencial de $x$ (ou seja, da função $y = x$).[7]

## Relação entre diferencial e derivada de uma função diferenciável

Observe-se que se $f$ é diferenciavél em $x_0$ então

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0)\,.$$

Por outro lado, pela continuidade de $f$ em $x_0$,

$$\lim_{\Delta x \to 0} f(x_0+\Delta x) - f(x_0) = 0.$$

[7] Consulte, por exemplo, [5].

Assim,

$$\begin{aligned}
\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y - dy}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} - \frac{f'(x_0)dx}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} - f'(x_0) \\
&= f'(x_0) - f'(x_0) = 0.
\end{aligned}$$

Intuitivamente, tal significa que, para pequenos valores absolutos de $\Delta x$, o diferencial $dy$ e o acréscimo $\Delta y$ tomam valores muito próximos.

Na prática, o diferencial $dy$ da função $y = y(x)$ pode ser considerado como uma aproximação do acréscimo $\Delta y$. Geometricamente, tal aproximação corresponde a substituir a curva $y = f(x)$ pela sua recta tangente no ponto de abcissa $x_0$, para valores de $x$ próximos de $x_0$, e assim, em vez de considerar o acréscimo da função $y$, tomar o acréscimo da função linear que define a recta tangente.

**Exemplo. (Cálculo de valores aproximados)** *Considere a função $y = x^2$. Determine-se um valor aproximado para o acréscimo dessa função quando o valor de $x$ muda de 1 para 1.1. De acordo com a notação utilizada,*

$$x_0 = 1 \quad e \quad dx = \Delta x = 1.1 - 1 = 0.1 \ .$$

*A função $f(x) = x^2$ é diferenciável em $\mathbb{R}$ com $f'(x) = 2x$ e, portanto, $dy = 2xdx$, para todo o $x \in \mathbb{R}$. Sendo assim, o acréscimo na variável $y$ quando $x$ varia de 1 para 1.1 pode ser aproximado por*

$$dy = f'(1)dx = 2 \times 0.1 = 0.2 \ .$$

*Note-se que o valor exacto do acréscimo $\Delta y$ é igual a*

$$\Delta y = f(1,1) - f(1) = (1.1)^2 - 1 = 0.21.$$

*Neste exemplo, a diferença absoluta entre $\Delta y$ e $dy$ ( que é o erro cometido ao substituir $\Delta y$ por $dy$) é igual a 0.01.*

## O diferencial no símbolo de derivada e de integral de uma função

O símbolo de diferencial pode surgir na notação de derivada e na notação de integral (definido ou indefinido) de uma função real.
O símbolo $\frac{dy}{dx}$ representa a derivada de $f$. Esta notação destaca a derivação da variável dependente $y = f(x)$ em ordem à variável independente $x$.

**Nota.**[8] O símbolo $\frac{dy}{dx}$, pode ser interpretado como o quociente dos diferenciais $dy$ e $dx$, ou como o valor limite de um quociente,

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

[8] Veja-se [5], pág. 460.

Utilizando a notação diferencial, pode definir-se o integral indefinido da função $f$ como o conjunto de todas as funções $F$ tais que $dF(x) = f(x)dx$.

## Regras de cálculo do diferencial

Sejam $f = f(x)$ e $g = g(x)$ duas funções diferenciáveis num ponto $x$ comum ao domínio de $f$ e de $g$.

*Diferencial da função soma ou da função diferença* calcula-se do seguinte modo:

$$d(f \pm g) = (f + g)'(x)dx = f'(x)dx + g'(x)dx = df + dg.$$

*Diferencial da função produto* é igual a

$$d(fg) = (fg)'(x)dx = (f'(x)g(x) + g'(x)f(x))dx = g(x)f'(x)dx + f(x)g'(x)dx = gdf + fdg.$$

As restantes regras estabelecem-se de modo análogo usando as regras de derivação.

Cadernos de Matemática, Universidade de Aveiro, Portugal – Série de Divulgação – 10 de Fevereiro de 2012

# Apêndice 2

# Função real de duas variáveis reais

## Definição

Uma função definida em $D \subset \mathbb{R}^2$ diz-se *função real de duas variáveis reais*, $x$ e $y$ (variáveis independentes), se a cada par $(x, y) \in D$ faz corresponder um e um só valor real $z \in \mathbb{R}$. Nesse caso escreve-se $z := f(x, y)$, onde

$$\begin{array}{rll} f: & D \subset \mathbb{R}^2 & \longrightarrow \mathbb{R} \\ & (x, y) & \longmapsto z = f(x, y)\ . \end{array}$$

## Continuidade

Seja, por simplicidade, $D = [a, b] \times [c, d]$, com $a, b, c, d \in \mathbb{R},\ a < b,\ c < d$.

Fixa-se $x_0 \in [a, b]$. Nesse caso, $f_{x_0} = f_{x_0}(y) = f(x_0, y)$ é uma função de uma só variável $y$,

$$f_{x_0}: \quad [c, d] \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Seja, agora, $y_0 \in [c, d]$. Nesse caso, $f_{y_0} = f_{y_0}(x) = f(x, y_0)$ é uma função de $x$,

$$f_{y_0}: \quad [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Uma função $f$, de duas variáveis reais e definida em $D = [a, b] \times [c, d]$, diz-se ser uma *função contínua* em ordem de $x$ se, para cada $y_0 \in [c, d]$, a função $f_{y_0}$ é uma função contínua em $[a, b]$.

De modo análogo, a função $f$ diz-se ser uma função contínua em ordem de $y$ se, para cada $x_0 \in [a, b]$, a função $f_{x_0}$ é uma função contínua em $[c, d]$.

## Derivadas parciais

Chamam-se *derivadas parciais de 1ª ordem* da função $z = f(x, y)$, em relação a $x$ e em relação a $y$, às seguintes funções $\frac{\partial z}{\partial x}$ e $\frac{\partial z}{\partial y}$, respectivamente, caso os limites que as definem existam e sejam finitos nalgum domínio de $\mathbb{R}^2$.

- Derivada parcial de $z = f(x, y)$ em relação a $x$:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = f'_x(x, y) := \lim_{\triangle x \to 0} \frac{f(x + \triangle x, y) - f(x, y)}{\triangle x} \tag{1}$$

- Derivada parcial de $z = f(x, y)$ em relação a $y$:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) = f'_y(x, y) := \lim_{\triangle y \to 0} \frac{f(x, y + \triangle y) - f(x, y)}{\triangle y} \tag{2}$$

**Regra de cálculo para a determinação das derivadas parciais de uma função de duas variáveis** $z = f(x, y)$, caso os limites (1) e (2) sejam finitos.

- $f'_x$ – aplicam-se as regras de derivação à função $f(x, y)$ assumindo $y$ como constante.
- $f'_y$ – aplicam-se as regras de derivação à função $f(x, y)$ assumindo $x$ como constante.

## Diferencial total

Sob certas condições (de continuidade das derivadas parciais) a fórmula

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$$

determina uma nova função real de duas variáveis reais $dz$ (ou $df(x, y)$) chamada *diferencial total* da função $z = f(x, y)$.

**Exemplo.** *Dada função* $f(x, y) = (x^2 + y)e^y$, *verifica-se que* $\frac{\partial f}{\partial x} = 2xe^y$ *e* $\frac{\partial f}{\partial y} = e^y(x^2 + y + 1)$. *Logo,* $df(x, y) = 2xe^y dx + e^y(1 + x^2 + y)dy$.

# Bibliografia


[1] T. Apostol (1994) *Cálculo*, Reverté. Barcelona.

[2] F. Ayres Jr. (1959) *Equações Diferenciais*, Colecções Schaum, McGraw-Hill. Brasil.

[3] G. Baranenkov, B. Demidovitch, V. Efimenko, S. Frolov, S. Kogan, G. Luntz, E. Porshneva, R. Shostak, E. Sitcheva, A. Yanpolski (1977) *Problemas e Exercícios de Análise Matemática*, Editora Mir. Moscovo.

[4] R. Bronson (1977) *Moderna Introdução às Equações Diferenciais*, Colecções Schaum, McGraw-Hill. Brasil.

[5] J. Campos Ferreira (1985) *Introdução à Análise Matemática*, Fundação Calouste Gulbenkian. Lisboa.

[6] M. F. Ferreira (1995) *Equações diferencias Ordinárias, Um primeiro curso com aplicações*, McGraw-Hill. Portugal.

[7] H. L. Guidorizzi (1988) *Um curso de Cálculo*, Vol. 4, Livros Técnicos e científicos Editora. Rio de Janeiro.

[8] M. Krasnov, A. Kiselev, G. Makarenko (1994) *Equações Diferenciais Ordinárias*, McGraw-Hill.

[9] E. W. Swokowski (1983) *Cálculo com Geometria Analítica*, Vol 1. McGraw-Hill. Brasil.