Universidade de Aveiro Departamento de Matemática
2006

Helena Margarida dos Santos Vasconcelos Gomes

Matrizes Não Negativas e Decomposições Matriciais

Universidade de Aveiro Departamento de Matemática
2006

Helena Margarida dos Santos Vasconcelos Gomes

Matrizes Não Negativas e Decomposições Matriciais

dissertação apresentada à Universidade de Aveiro para cumprimento dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre em Matemática, realizada sob a orientação científica da Prof.ª Doutora Enide Cascais Silva Andrade Martins, Professora Auxiliar do Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro e do Prof. Doutor João Manuel da Silva Santos, Professor Auxiliar do Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro.

Aos meus Professores, Dra. Enide Martins e Dr. João Santos,

pela atenção,
pela dedicação,
pela disponibilidade,
pela amizade,

e por tudo o que não é possível escrever...

Aos meus pais,

por tudo o que sou

Ao Ricardo,

por todos os momentos que viveu este trabalho

À Professora Beatriz,

pela amizade,
por muito do que cresci

O júri

Presidente	Doutora Maria Paula Macedo Rocha Malonek, Professora Catedrática da Universidade de Aveiro
Vogais	Doutora Susana Margarida Borges Furtado, Professora Auxiliar da Faculdade de Economia da Universidade do Porto Doutora Enide Cascais Silva Andrade Martins, Professora Auxiliar da Universidade de Aveiro (orientadora) Doutor João Manuel da Silva Santos, Professor Auxiliar da Universidade de Aveiro (orientador)

agradecimentos

Aos meus Amigos Tânia e Gonçalo por todos os incentivos,

A todos os meus alunos por todo o apoio,

A todos os Professores que encontrei pela minha vida

o meu Obrigada

palavras-chave

Matrizes não negativas, métodos iterativos, decomposições matriciais, matrizes monótonas, estimativa de erro de discretização.

resumo

Este trabalho apresenta o estudo de algumas propriedades de matrizes não negativas, nomeadamente propriedades espectrais e estruturais dessa classe de matrizes, e alguns dos resultados mais importantes para esse estudo como o Teorema de Geršgorin e o Teorema de Perron-Frobenius.

São ainda estudadas algumas decomposições matriciais bem como a sua importância no desenvolvimento de eficientes métodos iterativos. Nesse estudo destacam-se alguns conceitos como a monotonia de matrizes, Z-matrizes e M-matrizes.

Por fim, e com o intuito de estimar o erro de discretização de equações diferenciais ordinárias, são apresentadas duas aplicações recorrendo ao estudo da monotonia de matrizes e aos limites para normas de inversas de matrizes monótonas.

keywords

Nonnegative matrices, iterative methods, matrix splitting, monotone matrices, discretization error estimates.

abstract

This work presents the study of some properties of nonnegative matrices, spectral and structural properties of this class of matrices, and some of the most important results for this study as the Geršgorin Theorem and the Perron--Frobenius Theorem.
There is also the study of some matricial splittings as well as their importance in the development of efficient iterative methods. In this study some concepts are distinguished such as the matrix monotonicity, Z-matrices and M-matrices. Finally, and with the purpose of estimating the discretization error of ordinary differencial equations, two applications are presented appealing to the study of the matrix monotonicity and limits for norms of inverse of monotone matrices.

Índice

Capítulo 1

Introdução

1.1 Considerações Gerais

Esta dissertação é constituída por quatro capítulos, que são o reflexo do estudo de propriedades de matrizes não negativas, decomposições matriciais e tópicos relativos.

O Capítulo 1 apresenta, além destas considerações gerais, algumas convenções, definições e resultados gerais relacionados com o estudo que se segue nos restantes capítulos.

O Capítulo 2, sobre o estudo de propriedades de matrizes não negativas, representa um dos pontos mais importantes deste trabalho. Pretende-se, nesse capítulo, apresentar um estudo aos níveis essencialmente espectrais e estruturais desta classe de matrizes. Nesse estudo destacam-se a análise conjunta de matrizes não negativas e matrizes irredutíveis, o importante Teorema de Perron-Frobenius, apresentado inicialmente para matrizes não negativas e irredutíveis e posteriormente para matrizes não negativas quaisquer, a localização dos valores próprios de uma matriz complexa no plano complexo através do Teorema de Geršgorin, permitindo a conclusão de resultados para os intervalos de localização do raio espectral de matrizes não negativas. Caracterizam-se, ainda, outras classes de matrizes relacionadas com matrizes não negativas como a classe das M-matrizes não singulares e matrizes monótonas, mostrando-se a equivalência destes dois conceitos, para matrizes de Z_n.

O Capítulo 3, sobre métodos iterativos e decomposições matriciais, apresenta dois exemplos de métodos iterativos, discutindo algumas condições de convergência desses métodos e de outros quaisquer métodos iterativos para a resolução de sistemas de equações lineares, relacionadas com a norma das matrizes iteração e com o raio espectral dessas matrizes. São também estudadas decomposições matriciais de matrizes monótonas, nomeadamente decomposições regulares e regulares fracas e teoremas de comparação entre duas decomposições matriciais de uma dada matriz com entradas em $\mathbb{R}$.

No Capítulo 4, são apresentadas duas aplicações cujo estudo recorre à monotonia de matrizes e determinação de majorantes para normas de inversas de matrizes monótonas, como forma de estimar o erro de discretização de métodos numéricos na resolução de equações diferenciais.

1.2 Algumas Convenções Iniciais

Esta secção é dedicada à apresentação de notação, definições e resultados que são necessários para o desenvolvimento do trabalho, nomeadamente as noções de norma vectorial, norma matricial, raio espectral e convergência matricial.

Sejam $\mathbb{C}$ o conjunto dos números complexos e x uma indeterminada. O conjunto $\mathbb{C}[x]$ representa o anel dos polinómios em x com coeficientes em $\mathbb{C}$.

Denota-se por $\mathbb{C}^{m\times n}$, com $m, n \in \mathbb{N}$, o conjunto das matrizes do tipo $m \times n$, com entradas em $\mathbb{C}$.

Seja $x = [x_1\ x_2 \cdots x_n]^T \in \mathbb{C}^{n\times 1}$. Então para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, x_i representa a i-ésima entrada de x (relativamente à base canónica).

Se $n \in \mathbb{N}$, $I_n \in \mathbb{C}^{n\times n}$ representa a matriz identidade de ordem n e O representa a matriz nula de dimensões adequadas.

Para $A = [a_{i,j}] \in \mathbb{C}^{m\times n}$, $[a_{i,j}]_i$, ou simplesmente $(A)_i$, representa todas as entradas da linha i da matriz A. Se $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $a_{i,j}^k$ representa a entrada (i, j) de $A^k \in \mathbb{C}^{n\times n}$, onde A^k denota a k-ésima potência da matriz A, com $k \in \mathbb{N}$.

Seja $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Representa-se por $\det(A)$ e A^T, o seu determinante e a sua transposta, respectivamente. Se A for invertível, representa-se a sua inversa por A^{-1}.

Seja $A = [a_{i,j}] \in \mathbb{C}^{m\times n}$. O módulo da matriz A, representado por $|A|$, é a matriz $B \in \mathbb{R}^{m\times n}$, tal que $B = [|a_{i,j}|]$, para quaisquer $i \in \{1, \ldots, m\}$ e $j \in \{1, \ldots, n\}$.

Para $A = [a_{i,j}] \in \mathbb{C}^{m\times n}$, $A^* = \overline{A}^T \in \mathbb{C}^{n\times m}$, onde $\overline{A} = [\overline{a_{i,j}}] \in \mathbb{C}^{m\times n}$ e onde cada $\overline{a_{i,j}}$ representa o complexo conjugado de $a_{i,j}$, para quaisquer $i \in \{1, \ldots, m\}$ e $j \in \{1, \ldots, n\}$.

A matriz $diag(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{C}^{n\times n}$ representa uma matriz diagonal com $a_1, \ldots, a_n$ na diagonal principal.

Seja $A = [a_{i,j}] \in \mathbb{C}^{n\times n}$. A matriz A é uma matriz $(0, 1)$ se $a_{i,j} = 0$ ou $a_{i,j} = 1$, para quaisquer $i, j \in \{1, \ldots, n\}$.

Seja S um conjunto. Assim, se existirem, $\max S$ representa o máximo do conjunto S, $\min S$ o mínimo desse conjunto e $\sup S$ o supremo de S.

1.3 Generalidades

Apresentam-se, de seguida, algumas noções gerais e importantes para o desenvolvimento deste trabalho.

Definição 1.1 *Sejam* $A = [a_{i,j}]$, $B = [b_{i,j}] \in \mathbb{R}^{m\times n}$. *Então* $B \leq A$ *se* $b_{i,j} \leq a_{i,j}$ *para quaisquer* $i \in \{1,\ldots,m\}$ *e* $j \in \{1,\ldots,n\}$.

Em particular, sendo B *a matriz nula,* A *é designada positiva, e escreve-se* $A > O$, *se todas as suas entradas são positivas e é designada não negativa, e escreve-se* $A \geq O$, *se todas as suas entradas são não negativas.*

De forma semelhante, $x = [x_1 \cdots x_n]^T \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ *é designado positivo, e escreve-se* $x > 0$, *se* $x_i > 0$, *para qualquer* $i \in \{1,\ldots,n\}$ *e é designado não negativo, escrevendo-se* $x \geq 0$, *se* $x_i \geq 0$, *para qualquer* $i \in \{1,\ldots,n\}$.

Definição 1.2 *Define-se por* $F(a,\ b,\ c,\ d,\ e) \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *a matriz pentadiagonal a seguir indicada*

$$F(a,\ b,\ c,\ d,\ e) = \begin{bmatrix} c & d & e & 0 & \cdots & 0 \\ b & c & d & e & \ddots & \vdots \\ a & b & c & d & \ddots & 0 \\ 0 & a & \ddots & \ddots & \ddots & e \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & d \\ 0 & \cdots & 0 & a & b & c \end{bmatrix}.$$

Se $a = e = 0$ *então obtém-se a matriz tridiagonal* $F(0,\ b,\ c,\ d, 0)$ *representando-se, simplificadamente, por* $T(b,\ c,\ d)$.

Definição 1.3 *Sejam* $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $x \in \mathbb{R}^{n\times 1}$. *A matriz* A *designa-se monótona se* $Ax \geq 0$ *implicar* $x \geq 0$.

Definição 1.4 *Seja* $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. *Designa-se por espectro de* A, *representando-se por* $\sigma(A)$, *o conjunto de valores próprios de* A.

Definição 1.5 *Seja $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Designa-se por raio espectral de A, representando-se por $\rho(A)$, a*

$$\rho(A) = \max_{\lambda\in\sigma(A)} \{|\lambda|\}.$$

Definição 1.6 *Seja $\pi : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$ uma permutação. Uma matriz $P = [p_{i,j}] \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ é designada matriz de permutação se existe uma permutação π tal que*

$$p_{i,j} = \begin{cases} 1, & j = \pi(i) \\ 0, & j \neq \pi(i) \end{cases}.$$

Definição 1.7 *Uma matriz $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ é permutacionalmente semelhante a uma matriz $B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ se existe uma matriz de permutação $P \in \mathbb{C}^{n\times n}$ tal que $A = P^T BP$.*

Definição 1.8 *Designa-se $A = [a_{i,j}] \in \mathbb{C}^{n\times n}$ por matriz de diagonal dominante por linhas se*

$$|a_{i,i}| \geq \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{i,j}|, \text{ para qualquer } i \in \{1, \ldots, n\};$$

e por matriz de diagonal estritamente dominante por linhas se

$$|a_{i,i}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{i,j}|, \text{ para qualquer } i \in \{1, \ldots, n\}.$$

Se A^T é uma matriz de diagonal dominante por linhas ou de diagonal estritamente dominante por linhas, então A designa-se, respectivamente, matriz de diagonal dominante por colunas ou de diagonal estritamente dominante por colunas.

Definição 1.9 *Um bloco de Jordan é uma matriz triangular superior da forma*

$$J_s(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{s\times s}.$$

Definição 1.10 *Uma matriz de Jordan, $J \in \mathbb{C}^{n\times n}$ é uma soma directa de blocos de Jordan*

$$J = J_{n_1}(\lambda_1) \oplus J_{n_2}(\lambda_2) \oplus \ldots \oplus J_{n_s}(\lambda_s)$$

onde $\lambda_i \in \mathbb{C}$ para $i \in \{1, \ldots, s\}$ e $n_1 + \ldots + n_s = n$.

Prova-se que para toda a matriz $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, existe uma matriz não singular $W \in \mathbb{C}^{n\times n}$ e uma matriz de Jordan J, designada forma normal de Jordan, tal que

$$A = WJW^{-1}. \tag{1.1}$$

A matriz J está univocamente determinada a menos de uma ordenação dos blocos de Jordan.

1.4 Continuidade de Valores Próprios de uma Matriz

O próximo resultado garante que pequenas alterações nos coeficientes de um polinómio implicam pequenas alterações ao nível das raízes desse polinómio.

Teorema 1.11 *[5] Seja $n \geq 1$ e considere-se*

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{C}[x], \ (a_n \neq 0).$$

Então, para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para todo o polinómio

$$q(x) = b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \ldots + b_1 x + b_0 \in \mathbb{C}[x]$$

satisfazendo $b_n \neq 0$ e $\max_{i\in\{1,\ldots,n\}} |a_i - b_i| < \delta$, tem-se que

$$\min_{\tau} \max_{j\in\{1,\ldots,n\}} \left|\lambda_j - \mu_{\tau(i)}\right| < \epsilon,$$

onde $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ são os zeros de $p(x)$, $\mu_1, \ldots, \mu_n$ são os zeros de $q(x)$, contando com as multiplicidades, e o mínimo é tomado sobre todas as permutações τ de $\{1, 2, \ldots, n\}$.

Ora pequenas alterações nas entradas de uma matriz $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ conduzem a pequenas alterações nos coeficientes do polinómio característico de A e, como consequência, a pequenas alterações nas suas raízes e portanto nos valores próprios de A. Assim, diz-se que os valores próprios de $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ dependem continuamente das suas entradas.

1.5 Normas Vectoriais, Normas Matriciais e Raio Espectral

Os conceitos de norma vectorial e norma matricial assumem um papel muito importante na análise dos métodos iterativos. É com recurso a estes conceitos que é possível comparar vectores ou matrizes, em termos de convergência e rapidez de convergência de determinados métodos iterativos.

Definição 1.12 *Seja V um espaço vectorial sobre $\mathbb{C}$. Uma função $\|.\| : V \to \mathbb{R}$ é uma norma vectorial se, para quaisquer $x, y \in V$, são satisfeitos os seguintes axiomas*

i) Axioma da não negatividade

$$\|x\| \geq 0;$$

ii) Axioma da positividade

$$\|x\| = 0 \textit{ se e só se } x = 0;$$

iii) Axioma da homogeneidade

$$\|\alpha x\| = |\alpha| \, \|x\| \,, \textit{ para qualquer } \alpha \in \mathbb{C};$$

iv) Axioma da desigualdade triangular

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \,.$$

Apresentam-se, de seguida, alguns exemplos de normas vectoriais mais utilizadas na aplicação da Álgebra Linear à Análise Numérica. Estas traduzem-se, genericamente, pelas chamadas normas de Hölder ou normas vectoriais l_p.

Exemplo 1.13 *A norma de Hölder ou norma vectorial l_p de $x = [x_1 \cdots x_n]^T \in \mathbb{C}^{n\times 1}$, denotada por $\|x\|_p$, é dada pela expressão*

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} ,$$

com $1 \leq p < \infty$.

Para $p = \infty$, tem-se

$$\|x\|_\infty = \max_{i \in \{1,\ldots,n\}} |x_i| \,. \tag{1.2}$$

Definição 1.14 *Se para alguma norma vectorial* $||.||$ *e* $x \in \mathbb{C}^{n\times 1}$, $\|x\| = 1$ *então* x *designa-se vector unitário.*

A próxima definição é válida para matrizes de quaisquer dimensões. No entanto, e dado o âmbito deste trabalho, apenas serão consideradas as matrizes quadradas.

Definição 1.15 *Uma função* $|||.||| : \mathbb{C}^{n\times n} \to \mathbb{R}$ *é uma norma matricial se, para quaisquer matrizes* $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *são satisfeitos os seguintes axiomas*

i) Axioma da não negatividade

$$|||A||| \geq 0;$$

ii) Axioma da positividade

$$|||A||| = 0 \text{ se e só se } A = O;$$

iii) Axioma da homogeneidade

$$|||cA||| = |c| \; |||A||| \,, \text{ para qualquer } c \in \mathbb{C};$$

iv) Axioma da desigualdade triangular

$$|||A + B||| \leq |||A||| + |||B||| \,;$$

v) Axioma da submultiplicidade

$$|||AB||| \leq |||A||| \; |||B||| \,. \tag{1.3}$$

Apresenta-se, de seguida, um exemplo de norma matricial.

Exemplo 1.16 *A norma de Frobenius de* $A = [a_{i,j}] \in \mathbb{C}^{n\times n}$*, denotada por* $|||A|||_F$ *é dada pela expressão*

$$|||A|||_F = \left(\sum_{i,j=1}^{n} |a_{i,j}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} .$$

Outros importantes exemplos de normas matriciais são aquelas que podem ser definidas a partir de normas vectoriais.

Definição 1.17 *Sejam $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $x \in \mathbb{C}^{n\times 1}$, $x \neq 0$ e $\|.\|$ uma qualquer norma vectorial. Então*

$$|||A||| = \max_{\|x\|=1} \|Ax\| = \max_{x\neq 0} \frac{||Ax||}{||x||}, \tag{1.4}$$

designa-se norma matricial induzida.

Na definição anterior é possível garantir a existência do máximo referido através de um importante resultado da Análise que, apesar de ser válido num espaço topológico qualquer, se enuncia de seguida para qualquer subconjunto S compacto de um espaço vectorial complexo de dimensão finita.

Teorema 1.18 *[5] Seja S um subconjunto compacto de um espaço vectorial complexo de dimensão finita. Se $f : S \to \mathbb{R}$ é uma função contínua, então f atinge o seu máximo e o seu mínimo em S.*

A partir das considerações anteriores, tomando $S = \left\{x \in \mathbb{C}^{n\times 1} : ||x|| = 1\right\}$, pode-se verificar que o máximo de (1.4) é atingido.

Observe-se que a função $f : S \mapsto \mathbb{R}$, tal que a cada $x \in S$ faz corresponder $||Ax||$, é uma função contínua naquele conjunto.

Além disso, o conjunto anterior é um compacto. De facto, por um lado S é limitado, pois existe $r \in \mathbb{R}^+$ tal que $S \subseteq B_r(0) = \left\{y \in \mathbb{C}^{n\times 1} : ||y|| \leq r\right\}$. Por outro lado, $S = f^{-1}(\{1\})$. Como $\{1\}$ é um conjunto fechado em $\mathbb{R}$ e f é contínua, $f^{-1}(\{1\})$ é um conjunto fechado. Assim, fica garantida a existência do máximo na Definição 1.17.

Proposição 1.19 *[5] Sejam $||.||$ uma norma vectorial e $|||.|||$ uma norma matricial. Então*

$$||Ax|| \leq |||A||| \;\; ||x||, \text{ para quaisquer } A \in \mathbb{C}^{n\times n} \text{ e } x \in \mathbb{C}^{n\times 1}, \tag{1.5}$$

e existe um vector $y \in \mathbb{C}^{n\times 1}$, $y \neq 0$ para o qual

$$||Ay|| = |||A||| \;\; ||y||. \tag{1.6}$$

Demonstração. Repare-se que, para $x \neq 0$, pela Definição 1.17,

$$|||A||| \geq \frac{||Ax||}{||x||}.$$

Assim,

$$||Ax|| \leq |||A||| \;\; ||x||, \quad \text{para qualquer matriz } A \in \mathbb{C}^{n\times n},$$

que também é verificada se $x = 0$.

Assim, (1.5) é verificada para qualquer $x \in \mathbb{C}^{n\times 1}$.

Pelo Teorema 1.18, existe um vector $y \in S$ tal que

$$|||A||| = \max_{||x||=1} ||Ax|| = ||Ay|| \, ,$$

ficando completa a prova.

■

Teorema 1.20 *[5] Seja $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Então,*

$$\left|\left|\left|A^k\right|\right|\right| \leq |||A|||^k \, ,$$

para qualquer $k \in \mathbb{N}$ e qualquer norma matricial, $|||.|||$.

Demonstração. A demonstração é feita por indução em k e resulta dos axiomas da Definição 1.15 de norma matricial.

■

Teorema 1.21 *[5] São verdadeiras as seguintes afirmações*

i) A função definida em (1.4) *é uma norma matricial em* $\mathbb{C}^{n\times n}$;

ii) $|||I_n||| = 1$.

Demonstração. Prove-se, em primeiro lugar, que (1.4) é norma matricial em $\mathbb{C}^{n\times n}$. Para tal, verifiquem-se os axiomas da Definição 1.15.

Sejam $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ e $x \in \mathbb{C}^{n\times 1}$.

Axioma da não negatividade

Uma vez que $|||A|||$ é o máximo de uma função não negativa, então $|||A||| \geq 0$.

Axioma da positividade

Claramente se $A = O$ então $|||A||| = 0$.

Se $|||A||| = \max\limits_{||x||=1} ||Ax|| = 0$ então, para $||x|| = 1$ tem-se $||Ax|| = 0$. Como $||.||$ é uma norma vectorial o anterior é equivalente a $Ax = 0$ o que implica que $A = O$. De facto, se $A \neq O$, então, $\max\limits_{||x||=1} ||Ax|| > 0$, o que seria absurdo.

Axioma da homogeneidade

$|||cA||| = \max\limits_{||x||=1} \|(cA)\,x\| = \max\limits_{||x||=1} |c|\,\|Ax\| = |c| \max\limits_{||x||=1} \|Ax\| = |c| \; |||A|||$, para qualquer $c \in \mathbb{C}$, pelo axioma da homogeneidade da Definição 1.12.

Axioma da desigualdade triangular

$$\begin{aligned} |||A+B||| &= \max_{||x||=1} \|(A+B)\,x\| \\ &= \max_{||x||=1} \|Ax+Bx\| \\ &\leq \max_{||x||=1} (\|Ax\|+\|Bx\|)\,, \text{ pelo axioma } iv) \text{ da Definição 1.12} \\ &\leq \max_{||x||=1} \|Ax\| + \max_{||x||=1} \|Bx\| \\ &= |||A||| + |||B|||\,. \end{aligned}$$

Axioma da submultiplicidade

$$\begin{aligned} |||AB||| &= \max_{||x||=1} \|ABx\| \\ &= \max_{||x||=1} \frac{\|ABx\|\,\|Bx\|}{\|Bx\|} \\ &\leq \max_{y\neq 0} \frac{\|Ay\|}{\|y\|} \max_{||x||=1} \|Bx\| \\ &= |||A|||\ \ |||B|||\,, \end{aligned} \tag{1.7}$$

onde se supõe, sem perda de generalidade, que o máximo referido em (1.7) é atingido apenas para $x \notin \left\{x \in \mathbb{C}^{n\times 1} : Bx = 0\right\}$.

Claramente se $B = O$ a propriedade também é verificada.

Por fim,

$$|||I_n||| = \max_{\|x\|=1} \|I_n x\| = \max_{\|x\|=1} \|x\| = 1.$$

■

Os casos mais importantes de normas matriciais induzidas, são os exemplos de normas que são induzidas por normas vectoriais l_p quando $p = 1, 2, \infty$ e apresentam-se de seguida.

Exemplo 1.22 *Seja* $A = [a_{i,j}] \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *e* $x \in \mathbb{C}^{n\times 1}$. *Assim,*

i) norma 1 é a norma induzida pela norma vectorial l_1, *denotando-se por* $|||.|||_1$, *onde*

$$|||A|||_1 = \max_{\|x\|_1=1} \|Ax\|_1 = \max_{j\in\{1,\ldots,n\}} \sum_{i=1}^{n} |a_{i,j}|\,, \tag{1.8}$$

entendendo-se $|||A|||_1$ *como o máximo da soma dos valores absolutos das entradas por colunas da matriz* A.

ii) norma 2 ou norma espectral é a norma induzida pela norma vectorial l_2, denotando-se por $|||A|||_2$, onde

$$|||A|||_2 = \max_{\|x\|_2=1} \|Ax\|_2 = \max_{\lambda\in\sigma(A^*A)} \left\{\sqrt{\lambda}\right\}.$$

iii) norma ∞ ou norma de máximo é a norma induzida pela norma vectorial l_∞, denotando-se por $|||A|||_\infty$,onde

$$|||A|||_\infty = \max_{\|x\|_\infty=1} \|Ax\|_\infty = \max_{i\in\{1,\dots,n\}} \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}|\,, \tag{1.9}$$

entendendo-se $|||A|||_\infty$ como o máximo da soma dos valores absolutos das entradas por linhas da matriz A.

Exemplo 1.23 *Para ilustrar o anterior considere-se $A \in \mathbb{C}^{3\times3}$ da seguinte forma,*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Para a matriz A tem-se

$$\begin{aligned} |||A|||_1 &= \max_{j\in\{1,\dots,n\}} \sum_{i=1}^{n} |a_{i,j}| = 1, \\ |||A|||_2 &= \max_{\lambda\in\sigma(A^*A)} \left\{\sqrt{\lambda}\right\} = 1 \quad e \\ |||A|||_\infty &= \max_{i\in\{1,\dots,n\}} \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}| = 1. \end{aligned}$$

O próximo resultado mostra que qualquer norma de uma dada matriz não é inferior ao seu raio espectral.

Proposição 1.24 *[5] Seja $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Então,*

$$|||A||| \geq \rho(A)\,, \text{ para qualquer norma matricial } |||.|||\,. \tag{1.10}$$

Demonstração. Sejam $\lambda \in \sigma(A)$ e $x \neq 0$ o vector próprio associado a λ. Assim, por definição, vem

$$Ax = \lambda x.$$

Pelo axioma da homogeneidade, tem-se

$$\|Ax\| = \|\lambda x\| = |\lambda| \;\; \|x\|\,. \tag{1.11}$$

Assim, de (1.5) e (1.11) vem

$$\begin{aligned} |\lambda| \;\; \|x\| &\leq |||A||| \;\; \|x\|\,, \text{ que é equivalente a} \\ (|\lambda| - |||A|||)\,.\, \|x\| &\leq 0. \end{aligned}$$

Como $\|x\| > 0$ pois $x \neq 0$, tem-se $|\lambda| - |||A||| \leq 0$ ou seja $|\lambda| \leq |||A|||$, para qualquer $\lambda \in \sigma(A)$ e $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$.

Dada a arbitrariedade de λ, conclui-se

$$|||A||| \geq \rho(A)\,.$$

■

1.6 Convergência Vectorial e Matricial

Ir-se-à agora definir convergência de uma sucessão infinita de vectores e de uma sucessão e série infinita de matrizes, noções de grande importância para o desenvolvimento deste trabalho.

Definição 1.25 *Dada uma sucessão infinita de vectores de* $\mathbb{C}^{n \times 1}$,

$$x^{(0)}, x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots$$

diz-se que esta sucessão converge para um vector $x \in \mathbb{C}^{n \times 1}$ *se*

$$\lim_{m \to \infty} x_j^{(m)} = x_j, \;\; \textit{para qualquer } j \in \{1, \ldots, n\}\,,$$

onde $x_j^{(m)}$ *e* x_j *são respectivamente as j-ésimas entradas dos vectores* $x^{(m)}$ *e* x.

Definição 1.26 *Se* $A^{(0)} = [a_{i,j}^{(0)}]$, $A^{(1)} = [a_{i,j}^{(1)}], \ldots$ *é uma sucessão infinita de matrizes de* $\mathbb{C}^{n \times n}$ *, diz-se que esta sucessão converge para uma matriz,* $A = [a_{i,j}] \in \mathbb{C}^{n \times n}$ *se*

$$\lim_{m \to \infty} a_{i,j}^{(m)} = a_{i,j}, \;\; \textit{para quaisquer } i, j \in \{1, \ldots, n\}\,,$$

ou, de outra forma, se

$$\lim_{m \to \infty} A^{(m)} = A.$$

Observe-se que o anterior é equivalente a dizer que a sucessão de matrizes $A^{(0)},\ A^{(1)},\ldots$ converge para a matriz A se e só se

$$\lim_{m\to\infty}\left|\left|\left|A^{(m)}-A\right|\right|\right|=0,\ \text{para qualquer norma matricial}\ |||.|||\,.$$

Definição 1.27 *Dada uma série infinita de matrizes de* $\mathbb{C}^{n\times n}$

$$\sum_{m=0}^{\infty}B^{(m)},\quad B^{(m)}=[b_{i,j}^{(m)}],$$

diz-se que esta série converge para uma matriz $B=[b_{i,j}]\in\mathbb{C}^{n\times n}$ *se*

$$\lim_{N\to\infty}\sum_{m=0}^{N}b_{i,j}^{(m)}=b_{i,j},\quad \textit{para quaisquer } i,j\in\{1,\ldots,n\}\,,$$

ou, de outra forma, se

$$\lim_{N\to\infty}\sum_{m=0}^{N}B^{(m)}=B.$$

Observe-se também que o anterior é equivalente a dizer que a série $\sum_{m=0}^{\infty}B^{(m)}$ converge para a matriz B se e só se

$$\lim_{N\to\infty}\left|\left|\left|\sum_{m=0}^{N}B^{(m)}-B\right|\right|\right|=0,\ \text{para qualquer norma matricial}\ |||.|||\,.$$

A classe de matrizes convergentes, que se definem de seguida, constitui um conceito de elevada importância na análise de algoritmos em Álgebra Linear Numérica.

Definição 1.28 *Seja* $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$*. Designa-se matriz convergente para a matriz nula, ou simplesmente matriz convergente, a toda a matriz tal que a sucessão* $A,\ A^2,\ A^3,\ldots$ *converge para a matriz nula ou seja com a propriedade de que todas as entradas de* A^m *tendem para zero quando* $m\to\infty$ *e escreve-se*

$$\lim_{m\to\infty}A^m=O.$$

Caso contrário, designa-se matriz divergente.

Apresenta-se, de seguida, uma caracterização desta importante classe de matrizes.

Teorema 1.29 *[16] Seja* $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$*. Então* A *é convergente se e só se* $\rho\,(A)<1$*.*

Demonstração. Seja $W \in \mathbb{C}^{n\times n}$ uma matriz não singular tal que

$$J = W^{-1}AW = J_{n_1}(\lambda_1) \oplus \ldots \oplus J_{n_s}(\lambda_s),$$

onde cada $J_{n_i} \in \mathbb{C}^{n_i \times n_i}$, $i \in \{1,\ldots,s\}$ tem a forma apresentada na Definição 1.9.

Por cálculo directo, para $m \geq 1$, tem-se

$$J^m = \begin{bmatrix} J_{n_1}^m & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_{n_2}^m & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & J_{n_s}^m \end{bmatrix}.$$

Observe-se que, tendo em atenção a forma das matrizes J_{n_k}, $k \in \{1,\ldots,s\}$, facilmente se poderá determinar as entradas das potências dessas matrizes.

De facto, se

$$J_{n_k}^m(\lambda_k) = \left[d_{i,j}^m(k)\right],\ i,j \in \{1,\ldots,n_k\},\ k \in \{1,\ldots,s\}$$

então

$$d_{i,j}^m(k) = \begin{cases} 0 & ,\ j < i \\ C_{j-i}^m \lambda_k^{m-j+i} & ,\ i \leq j \leq \min\{n_k, m+i\} \\ 0 & ,\ m+i < j \leq n_k \end{cases}, \tag{1.12}$$

onde

$$C_p^r = \frac{r!}{p!\,(r-p)!},\ \text{com } p,r \in \mathbb{N}_0 \text{ e } r \geq p. \tag{1.13}$$

De (1.1), vem

$$A^m = WJ^mW^{-1}.$$

Desta forma,

$$\lim_{m\to\infty} A^m = O \Leftrightarrow \lim_{m\to\infty} J^m = O \Leftrightarrow \lim_{m\to\infty} J_{n_k}^m = O,\ \text{para qualquer } k \in \{1,\ldots,s\}.$$

Mas, tendo em conta (1.12),

$$\lim_{m\to\infty} J_{n_k}^m = O \text{ se e só se } |\lambda_k| < 1, \text{ para qualquer } k \in \{1,\ldots,s\}.$$

Assim, A é convergente se e só se $\rho(A) < 1$.

■

Capítulo 2

Matrizes Não Negativas

As matrizes quadradas não negativas surgem em diversos problemas de diversificadas áreas. A propriedade da *não negatividade* está associada a determinados resultados referentes à estrutura dessas matrizes e que assumem, igualmente, enorme importância. De facto, a forma como se define e se caracteriza esta classe de matrizes, permite concluir importantíssimos resultados para a Álgebra Linear Numérica, bem como para outras áreas. Para o desenvolvimento desta teoria foram importantes os contributos de, entre outros, Berman, Plemmons, Neumann, Stern, Minc e Seneta.

A classe das matrizes cujas inversas são não negativas ou mesmo positivas apresenta-se também com elevada importância, no presente estudo.

Introduzem-se também os conceitos de redutibilidade e irredutibilidade matricial relacionados com matrizes não negativas, bem como a relação destas propriedades com a teoria dos grafos para matrizes.

O raio espectral de uma dada matriz alcança um papel fundamental na investigação da convergência de métodos iterativos para a resolução de sistemas de equações lineares que serão estudados no Capítulo 3 deste trabalho. Para o estudo desse valor contribuem os resultados apresentados para estimar a sua localização, em particular o Teorema de Geršgorin, aqui enumerado como Teorema 2.20 e o Teorema de Perron-Frobenius, que constitui o resultado central para o estudo de matrizes não negativas. Em primeiro lugar esse teorema é apresentado para matrizes não negativas e irredutíveis, enumerado como Teorema 2.18, apresentando-se, posteriormente, uma versão mais fraca para matrizes não negativas que não são necessariamente irredutíveis, no Teorema 2.19.

2.1 Algumas Desigualdades

Apresentam-se, em primeiro lugar, algumas propriedades de matrizes não negativas relacionadas com a relação binária "$\leq$ " definida em $\mathbb{R}^{n\times n}$ e com algumas normas matriciais.

Proposição 2.1 *[11] Sejam $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$.*

(i) A relação binária "$\leq$" definida em $\mathbb{R}^{n\times n}$, é uma relação de ordem parcial nesse conjunto dado que é

· reflexiva ($A \leq A$);

· antisimétrica (se $A \leq B$ e $B \leq A$ então $A = B$);

· transitiva (se $A \leq B$ e $B \leq C$ então $A \leq C$);

(ii) Se A e B são matrizes não negativas, então AB e $A + B$ são também matrizes não negativas;

(iii) Se A é matriz não negativa, então A^k é matriz não negativa, para $k \in \mathbb{N}$;

(iv) Se $O \leq A \leq B$ então

$$|||A|||_1 \leq |||B|||_1 \ \ e \ \ |||A|||_\infty \leq |||B|||_\infty \, .$$

Demonstração. As demonstrações de *(i)*, *(ii)* e *(iii)* são óbvias a partir da Definição 1.1.

A demonstração da propriedade *(iv)* resulta analogamente da Definição 1.1, de (1.8) e (1.9).

■

Proposição 2.2 *[11] Sejam $A, B, C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ matrizes não negativas com $A \leq B$. Então,*

$$AC \leq BC \ e \ CA \leq CB.$$

Demonstração. Considerem-se $A, B, C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ onde

$$A = [a_{i,j}], \ B = [b_{i,j}], \ C = [c_{i,j}], \text{ com } i, \ j \in \{1, \ldots, n\} \, .$$

Então, para $k \in \{1, \ldots, n\}$,

$$AC = \sum_{k\,=\,1}^{n} a_{i,k}c_{k,j} \quad \text{e} \quad BC = \sum_{k\,=\,1}^{n} b_{i,k}c_{k,j}.$$

Uma vez que, por hipótese, $A \leq B$ tem-se

$$a_{i,j} \leq b_{i,j}, \text{ para quaisquer } i, j \in \{1, \ldots, n\} \, .$$

Desta forma, e porque a matriz C é não negativa tem-se,

$$\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}c_{k,j} \leq \sum_{k\,=\,1}^{n} b_{i,k}c_{k,j}$$

ou seja

$$AC \leq BC.$$

Por procedimento análogo mostra-se a desigualdade $CA \leq CB$.

■

Observe-se que, a partir da proposição anterior, pode-se concluir que se $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$, com $O \leq A \leq B$, então

$$A^k \leq B^k,\ \ k \in \mathbb{N}. \tag{2.1}$$

2.2 O Raio Espectral de uma Matriz Não Negativa

Apresentam-se agora alguns resultados que envolvem o raio espectral de matrizes não negativas.

Teorema 2.3 *[5] Seja $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ uma matriz não negativa.*

Se a soma das entradas por linhas de A é constante então

$$\rho\left(A\right) = |||A|||_{\infty}\,.$$

Se a soma das entradas por colunas de A é constante então

$$\rho\left(A\right) = |||A|||_{1}\,.$$

Demonstração. Se $A = O$, o resultado é trivial. Suponha-se que $A \neq O$.

Mostre-se que $\rho\left(A\right) = |||A|||_{\infty}\,.$

Por hipótese,

$$\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = k, \quad \text{para qualquer } i \in \{1,\ldots,n\} \text{ e algum } k \in \mathbb{N}.$$

Assim, e uma vez que $A \geq O$,

$$\begin{aligned} |||A|||_{\infty} &= \max_{i\in\{1,\ldots,n\}} \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}| \\ &= \max_{i\in\{1,\ldots,n\}} \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = k \end{aligned}$$

e portanto,

$$Ax = |||A|||_\infty x, \text{ com } x = [1 \cdots 1]^T \in \mathbb{R}^{n\times 1},$$

concluindo-se que

$$\rho(A) = |||A|||_\infty .$$

Para mostrar que $\rho(A) = |||A|||_1$ utilizam-se os mesmos argumentos aplicados à matriz A^T.

■

O próximo resultado permite relacionar o raio espectral de uma matriz $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e da matriz $|A| \in \mathbb{R}^{n\times n}$, sabendo que $|A| \leq B$.

Proposição 2.4 *[7] Sejam $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ e $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Se $|A| \leq B$ então $\rho(A) \leq \rho(B)$.*

Demonstração. Considere-se $\epsilon \in \mathbb{R}^+$ e A_ϵ, B_ϵ definidas do seguinte modo,

$$A_\epsilon = [\rho(B) + \epsilon]^{-1} A$$

$$B_\epsilon = [\rho(B) + \epsilon]^{-1} B.$$

Assim, e uma vez que $|A| \leq B$,

$$|A_\epsilon| = \left|[\rho(B) + \epsilon]^{-1} A\right| \leq B_\epsilon$$

e portanto,

$$|A_\epsilon|^k \leq B_\epsilon^k \text{ , para qualquer } k \in \mathbb{N}. \tag{2.2}$$

Por outro lado,

$$\rho(B_\epsilon) = \frac{\rho(B)}{\rho(B) + \epsilon} < 1$$

o que implica, pela Definição 1.28 e pelo Teorema 1.29,

$$\lim_{k\to\infty} B_\epsilon^k = O.$$

Além disso, de (2.2)

$$O \leq \left|A_\epsilon^k\right| \leq |A_\epsilon|^k \leq B_\epsilon^k.$$

Das desigualdades anteriores tem-se

$$\lim_{k\to\infty} A_\epsilon^k = O$$

e portanto,

$$\rho(A_\epsilon) < 1.$$

Conclui-se então que

$$\rho(A) < \rho(B) + \epsilon.$$

Assim,

$$\rho(A) \leq \rho(B).$$

■

Os próximos corolários são consequência da proposição anterior.

Corolário 2.5 *[7] Sejam $A,\ B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ matrizes não negativas com $A \leq B$. Então*

$$\rho(A) \leq \rho(B).$$

O corolário apresentado a seguir estabelece uma relação entre os raios espectrais de uma matriz não negativa e de uma sua submatriz principal.

Corolário 2.6 *[7] Sejam $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ uma matriz não negativa e A' uma submatriz principal de A. Então,*

$$\rho\left(A'\right) \leq \rho(A).$$

Demonstração. Considere-se $X \in \mathbb{R}^{n\times n}$ uma matriz cujas entradas são iguais às da submatriz A' da matriz A e as restantes entradas nulas. Pela forma como X é construída,

$$O \leq X \leq A$$

logo, pelo Corolário 2.5, vem

$$\rho(X) \leq \rho(A).$$

Por outro lado, tendo em conta a construção da matriz X,

$$\rho(X) = \rho\left(A'\right).$$

Assim, conclui-se que

$$\rho\left(A'\right) \leq \rho(A).$$

■

2.3 Matrizes Não Negativas e Irredutíveis

Esta secção apresenta alguns resultados de matrizes não negativas e irredutíveis entre os quais se verá o importante Teorema de Perron-Frobenius.

Define-se, de seguida, redutibilidade e irredutibilidade de uma matriz.

Definição 2.7 *Uma matriz $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ é redutível se*

i) $n = 1$ e $A = O$;

ou

ii) $n \geq 2$ e existe uma matriz de permutação $P \in \mathbb{C}^{n \times n}$ e um inteiro r com $r \in \{1, \ldots, n-1\}$ tal que:

$$P^T A P = \begin{bmatrix} B & C \\ O & D \end{bmatrix}$$

onde $B \in \mathbb{C}^{r \times r}$, $C \in \mathbb{C}^{r \times (n-r)}$, $D \in \mathbb{C}^{(n-r) \times (n-r)}$ e O é uma matriz nula de dimensões adequadas.

Repare-se que, relativamente aos blocos de matrizes B, C e D, não se impõe que tenham apenas entradas não nulas. A definição apenas se refere à possibilidade de se obter uma matriz nula de dimensões $(n-r) \times r$, na posição indicada, para alguns $n \geq 2$ e $r \in \{1, \ldots, n-1\}$.

Para ilustrar o significado da Definição 2.7, considere-se o seguinte exemplo.

Exemplo 2.8 *Seja $A \in \mathbb{R}^{5 \times 5}$ da seguinte forma:*

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & -4 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & 4 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Assim, existe uma matriz de permutação $P \in \mathbb{R}^{5 \times 5}$, com

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

e tal que

$$P^T AP = \begin{bmatrix} B & C \\ O & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 1 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & -3 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

onde

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & 2 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 0 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \text{ e } D = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

Portanto, A é redutível.

Resulta também da Definição 2.7, que se uma matriz tiver uma linha ou coluna de zeros então é redutível.

Definição 2.9 *Uma matriz $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ será irredutível se não for redutível.*

Teorema 2.10 *[12] Seja $A = [a_{i,j}] \in \mathbb{R}^{n\times n}$, uma matriz não negativa e irredutível e $y \in \mathbb{R}^{n\times 1}$, um vector não negativo, com exactamente k entradas positivas, $k \in \{1, \ldots, n-1\}$.*

Então o número de entradas positivas de $(I_n + A)\, y$ é superior a k.

Demonstração. Seja $y = [y_1\ y_2 \cdots y_n]^T \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ com k entradas positivas e portanto $n - k$ entradas nulas.

Com o objectivo de reorganização das entradas do vector y, considere-se $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ uma matriz de permutação tal que

$$x = Py = \begin{bmatrix} u \\ 0 \end{bmatrix},$$

onde $u \in \mathbb{R}^{k\times 1}$ é um vector positivo, para algum $k \in \{1, \ldots, n-1\}$.

Assim, para $x = [x_1 \cdots x_n]^T \in \mathbb{R}^{n\times 1}$,

$$\begin{aligned} x_i &> 0, \quad \text{para } i \in \{1, \ldots, k\} \text{ e} \\ x_i &= 0, \quad \text{para } i \in \{k+1, \ldots, n\}. \end{aligned}$$

Repare-se que o número de entradas positivas no vector

$$y + Ay = (I_n + A)\, y$$

é maior ou igual a k uma vez que $A \geq O$.

Suponha-se que $(I_n + A)\, y$ tem, exactamente, k entradas positivas.

Assim, e porque A é irredutível, Ay terá o mesmo número de entradas positivas que y, ou seja k.

Uma vez que Ay tem k entradas positivas é equivalente dizer-se que

$$PAP^T Py = \left(PAP^T\right) x = Zx$$

tem k entradas positivas, ou seja

$$(Zx)_i > 0, \text{ para } i \in \{1, \dots, k\},$$

e

$$(Zx)_i = 0, \text{ para } i \in \{k+1, \dots, n\}.$$

Assim, para $Z = [z_{i,j}] \in \mathbb{R}^{n \times n}$,

$$\begin{aligned} (Zx)_i &= \sum_{j=1}^{n} z_{i,j} x_j \\ &= \sum_{j=1}^{k} z_{i,j} x_j, \end{aligned}$$

uma vez que para $j \in \{k+1, \dots, n\}$, $x_j = 0$.

Assim, se $i \in \{k+1, \dots, n\}$ e $j \in \{1, \dots, k\}$ deverá ter-se $z_{i,j} = 0$ pois $(Zx)_i = 0$ e $x_j > 0$, para $j \in \{1, \dots, k\}$.

Mas assim, a matriz $PAP^T = Z$ será redutível, o que é absurdo.

Logo, $(I_n + A)\ y$ tem mais do que k entradas positivas.

∎

O próximo resultado, consequência do teorema anterior, permite converter as propriedades matriciais da não negatividade e irredutibilidade em positividade.

Corolário 2.11 *[5] Seja $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ não negativa e irredutível. Então*

$$(I_n + A)^{n-1} > O.$$

Demonstração. Considere-se um vector não negativo $y \in \mathbb{R}^{n\times 1}$, $y \neq 0$, e suponha-se que y tem k entradas positivas, $k \in \{1, \ldots, n-1\}$.

Então pelo Teorema 2.10, o número de entradas positivas do vector $z = (I_n + A)\, y$ é γ, com $\gamma > k$.

Se z não é positivo, então o número de entradas positivas do vector

$$w = (I_n + A)\, z = (I_n + A)^2\, y$$

é superior a γ.

Se w ainda não é positivo, procede-se de igual forma, concluindo-se que w tem pelo menos mais duas entradas positivas que y.

Efectuando este processo continuamente, facilmente se concluiria que

$$(I_n + A)^{n-1}\, y > 0, \text{ para qualquer } y \geq 0, \quad y \neq 0. \tag{2.3}$$

Em particular, substituindo y pelas colunas da matriz identidade, conclui-se o pretendido.

■

Corolário 2.12 *[12] Seja x um vector próprio não negativo de uma matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ não negativa e irredutível. Então $x > 0$.*

Demonstração. Seja $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ não negativa e irredutível.

Seja λ um valor próprio de $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e $x \in \mathbb{R}^{n\times 1}$, $x \geq 0$ e $x \neq 0$ o vector próprio associado.

Assim,

$$Ax = \lambda x.$$

Dado que $A \geq O$ e $x \geq 0$, $\lambda \geq 0$.

Por outro lado, pode-se escrever,

$$(I_n + A)\, x = (1 + \lambda)\, x. \tag{2.4}$$

Suponha-se que x tem k entradas positivas com $k \in \{1, \ldots, n-1\}$.

Desta forma, o vector $(1 + \lambda)\, x$ referido em (2.4), terá o mesmo número de entradas positivas, ou seja k.

Pelo Teorema 2.10, o número de entradas positivas do vector

$$(I_n + A)\, x$$

é superior a k e portanto verifica-se uma contradição pois a igualdade (2.4) é verdadeira.

Logo, $x > 0$.

■

Teorema 2.13 *[12] Uma matriz não negativa $A = [a_{i,j}] \in \mathbb{R}^{n\times n}$ é irredutível se e só se para cada par (i,j) existe um inteiro $k \in \{1,\ldots,n\}$ tal que $a^k_{i,j} > 0$.*

Demonstração. Seja $A = [a_{i,j}] \in \mathbb{R}^{n\times n}$ uma matriz não negativa.

Condição necessária

Considere-se, em primeiro lugar, que $A \geq O$ é irredutível.

Assim, poder-se-á garantir, pelo Corolário 2.11 que

$$(I_n + A)^{n-1} > O.$$

Seja $X \in \mathbb{R}^{n\times n}$ com $X = [x_{i,j}] = (I_n + A)^{n-1} A$. Assim, $X > O$ dado que, por hipótese, $A \geq O$ é irredutível.

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
X &= (I_n + A)^{n-1} A && (2.5)\\
&= \underbrace{(I_n + A)(I_n + A)\ldots(I_n + A)}_{n-1} A \\
&= \underbrace{(I_n + A)(I_n + A)\ldots(I_n + A)}_{n-2} \left(A + A^2\right) \\
&= \underbrace{(I_n + A)(I_n + A)\ldots(I_n + A)}_{n-3} \left(A^3 + 2A^2 + A\right) \\
&= \ldots \\
&= \sum_{r=1}^{n} A^r C^{n-1}_{n-r}, && (2.6)
\end{aligned}$$

onde C^n_p é definido como em (1.13) , para $p \in \mathbb{N}_0$.

De outra forma,

$$x_{i,j} = \sum_{r=1}^{n} a^r_{i,j} C^{n-1}_{n-r}, \text{ para quaisquer } i,j \in \{1,\ldots,n\}.$$

Logo, para se verificar $x_{i,j} > 0$, para quaisquer $i,j \in \{1,\ldots,n\}$, terá que existir pelo menos uma parcela da adição anterior diferente de zero ou, dito de outra forma, para cada par (i,j) deverá existir $k \in \{1,\ldots,n\}$, tal que $a^k_{i,j} > 0$.

Assim sendo, $a^k_{i,j} > 0$ para algum $k \in \{1,\ldots,n\}$ e para cada par (i,j).

Condição suficiente

Suponha-se, por redução ao absurdo, que a matriz $A = [a_{i,j}]$ é redutível.

Seja $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ uma matriz de permutação tal que,

$$P^T AP = \begin{bmatrix} B & C \\ O & D \end{bmatrix},$$

onde $B \in \mathbb{R}^{s\times s}$, $C \in \mathbb{R}^{s\times(n-s)}$, $D \in \mathbb{R}^{(n-s)\times(n-s)}$ e O é a matriz nula de dimensões adequadas, com $s \in \{1, \ldots, n-1\}$.

Mas

$$P^T A^k P = \left(P^T AP\right)^k, \text{ para qualquer } k \in \{1, \ldots, n\}.$$

Portanto, para $i \in \{s+1, \ldots, n\}$, $j \in \{1, \ldots, s\}$, a entrada (i,j) de $P^T AP$ é nula, o que significa que a entrada (i,j) de $P^T A^k P$ é nula para qualquer $k \in \{1, \ldots, n\}$, não existindo, portanto, $k \in \{1, \ldots, n\}$ para cada par (i,j) tal que $a_{i,j}^k > 0$.

■

2.3.1 Função de Collatz-Wielandt

Considere-se S um subconjunto do conjunto dos números complexos. Um dos problemas considerados na literatura mas que ainda se encontra em aberto ou sem solução clara é, até que ponto as propriedades espectrais de uma matriz são afectadas restringindo as entradas da matriz a S.

Em [8], Perron descobriu, no ano de 1907, algumas propriedades espectrais para matrizes positivas. Posteriormente, Frobenius em [3, 4] estendeu alguns resultados de Perron generalizando-os a matrizes não negativas e irredutíveis.

Várias provas dessa teoria de Perron-Frobenius podem ser encontradas na literatura. O Teorema de Perron-Frobenius para matrizes não negativas e irredutíveis, Teorema 2.18, será demonstrado fazendo recurso a um método de prova desenvolvido por Wielandt em [10]. Ir-se-à então definir a função de Collatz-Wielandt, apresentada em 1942 pelo matemático germânico Lothar Collatz (1910-1990) e usada posteriormente por Helmut Wielandt, em 1950, no desenvolvimento da teoria de Perron-Frobenius.

Seja $\wp$ o conjunto dos números não negativos e $E^n \subseteq \wp^{n\times 1}$ tal que

$$E^n = \left\{ x = [x_1 \cdots x_n]^T \in \wp^{n\times 1} : \sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \right\}.$$

Repare-se que assim definido, o conjunto E^n é fechado e limitado.

Definição 2.14 *Seja $A = [a_{i,j}] \in \mathbb{R}^{n\times n}$ uma matriz não negativa e irredutível. A função f_A de $\wp^{n\times 1}$ em $\wp$ tal que*

$$f_A(x) = \min_{i\in\{1,\ldots,n\}} \left\{ \frac{(Ax)_i}{x_i},\ x_i \neq 0 \right\} \tag{2.7}$$

para qualquer vector $x = [x_1 x_2 \cdots x_n]^T \in \wp^{n\times 1},\ x \neq 0$ é designada função de Collatz-Wielandt associada a A.

Os próximos teoremas apresentam algumas conclusões sobre a função de Collatz-Wielandt.

Teorema 2.15 *[12] Seja $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ uma matriz não negativa e irredutível e seja f_A a função de Collatz-Wielandt associada a A. Então*

i) A função f_A é homogénea de grau 0.

ii) Se $x \in \wp^{n\times 1}$, $x \neq 0$, e μ é o maior número real para o qual

$$Ax - \mu x \geq 0 \tag{2.8}$$

então

$$\mu = f_A(x).$$

iii) Se $x \in \wp^{n\times 1}, x \neq 0$ e $y = (I_n + A)^{n-1} x$ então

$$f_A(y) \geq f_A(x).$$

Demonstração. Sejam $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ uma matriz não negativa e irredutível, f_A a função de Collatz-Wielandt associada a A e $x \in \wp^{n\times 1}, x \neq 0$.

i) Considere-se $t > 0$, $x \in \wp^{n\times 1}$ e $x \neq 0$.

Assim,

$$\begin{aligned} f_A(tx) &= \min_{i\in\{1,\ldots,n\}} \left\{ \frac{(Atx)_i}{(tx)_i},\ (tx)_i \neq 0 \right\} \\ &= \min_{i\in\{1,\ldots,n\}} \left\{ \frac{t(Ax)_i}{tx_i},\ x_i \neq 0 \right\} \\ &= t^0 \min_{i\in\{1,\ldots,n\}} \left\{ \frac{(Ax)_i}{x_i},\ x_i \neq 0 \right\} \\ &= t^0 f_A(x) = f_A(x). \end{aligned}$$

ii) Por definição de f_A, para $x_i \neq 0$, tem-se

$$f_A(x) \leq \frac{(Ax)_i}{x_i},\ \text{para qualquer } i \in \{1, \ldots, n\}$$

concluindo-se que

$$Ax - f_A(x)\,x \geq 0. \tag{2.9}$$

Resta provar que $f_A(x)$ é o maior número real para o qual se verifica (2.8).

De (2.9), conclui-se que existe $k \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $x_k \neq 0$ e $(Ax - f_A(x)\,x)_k = 0$ ou seja

$$(Ax)_k - f_A(x)\,x_k = 0.$$

Assim, para qualquer $c \in \mathbb{R}$ tal que $c > f_A(x)$, ver-se-à que a k-ésima entrada de $Ax - cx$ é negativa.

De facto,

$$(Ax)_k - cx_k < (Ax)_k - f_A(x)\,x_k = 0.$$

Logo $(Ax)_k - cx_k < 0$, para $c > f_A(x)$.

iii) De (2.9),

$$Ax - f_A(x)\,x \geq 0$$

e, pelo Corolário 2.11,

$$(I_n + A)^{n-1} > O$$

concluindo-se que

$$\begin{aligned} (I_n + A)^{n-1}(Ax - f_A(x)\,x) &\geq 0 \qquad (2.10)\\ (I_n + A)^{n-1} Ax - f_A(x)(I_n + A)^{n-1} x &\geq 0. \qquad (2.11) \end{aligned}$$

Por outro lado, de (2.6),

$$\begin{aligned} (I_n + A)^{n-1} A &= \sum_{r=1}^{n} A^r C_{n-r}^{n-1} \\ &= A(I_n + A)^{n-1}, \end{aligned}$$

onde C_{n-r}^{n-1} é definido como em (1.13), para $(n-r) \in \mathbb{N}_0$.

Assim, as matrizes A e $(I_n + A)^{n-1}$ comutam e (2.11) é equivalente a

$$A(I_n + A)^{n-1} x - f_A(x)(I_n + A)^{n-1} x \geq 0.$$

Seja $y = (I_n + A)^{n-1} x \in \mathbb{R}^{n\times 1}$.

Tem-se do anterior,

$$Ay - f_A(x)\,y \geq 0. \tag{2.12}$$

Uma vez que

$$y = (I_n + A)^{n-1} x \geq 0, \text{ com } y \neq 0$$

por *ii)* $f_A(y)$ é o maior número real para o qual se tem

$$Ay - f_A(y)\, y \geq 0. \tag{2.13}$$

Conclui-se, das desigualdades (2.12) e (2.13), que

$$f_A(y) \geq f_A(x),$$

e portanto é verificada a condição *iii)*.

■

Teorema 2.16 *[12] Seja $A = [a_{i,j}] \in \mathbb{R}^{n\times n}$ uma matriz não negativa e irredutível. A função f_A é limitada inferiormente e superiormente.*

Demonstração. De facto, é fácil verificar que f_A é limitada inferiormente por zero.

Relativamente ao limite superior, seja

$$c_j = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j}, \text{ para qualquer } j \in \{1, \ldots, n\}$$

a soma das entradas de cada coluna da matriz A.

Tendo em conta *i)* do Teorema 2.15, para verificar se f_A é limitada superiormente em $\wp^{n\times 1}$, bastará verificar que f_A é limitada superiormente em E^n.

Seja $x \in E^n$ e verifique-se que

$$f_A(x) \leq \max_{j\in\{1,\ldots,n\}} c_j.$$

Por definição de f_A,

$$(Ax)_i \geq f_A(x)\, x_i, \text{ para qualquer } i \in \{1, \ldots, n\} \text{ com } x_i \neq 0$$

ou seja,

$$\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j \geq f_A(x)\, x_i,$$

e, considerando todas as somas relativas a $i \in \{1, \ldots, n\}$, tem-se,

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j \geq \sum_{i=1}^{n} f_A(x)\, x_i = f_A(x), \tag{2.14}$$

uma vez que $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = 1$.

Mas

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}x_j &= \sum_{j=1}^{n} x_j \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} \\ &= \sum_{j=1}^{n} x_j c_j \\ &\leq \max_{j\in\{1,\dots,n\}} c_j. \end{aligned}$$

De (2.14) conclui-se finalmente que

$$f_A(x) \leq \max_{j\in\{1,\dots,n\}} c_j,$$

para qualquer $x \in E^n$.

$\blacksquare$

Teorema 2.17 *[12] Seja $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ não negativa e irredutível. Então a função f_A atinge o seu máximo em E^n.*

Demonstração. Considere-se

$$\begin{aligned} B &= (I_n + A)^{n-1} E^n \\ &= \left\{ b \in \mathbb{R}^{n\times 1} : b = (I_n + A)^{n-1} x,\ x \in E^n \right\}. \end{aligned}$$

Como B é a imagem do compacto E^n por uma função contínua, nomeadamente a função definida de E^n para B tal que a cada $x \in E^n$ faz corresponder o elemento $b = (I_n + A)^{n-1} x$, B é também um compacto.

A função f_A definida em B é uma função contínua e assim, pelo Teorema 1.18, pode-se garantir que f_A atinge um valor máximo para algum

$$b^0 = \left[b_1^0\ b_2^0 \cdots b_n^0\right]^T \in B. \tag{2.15}$$

Seja então $z^0 = [z_1^0 \cdots z_n^0]^T \in \wp^{n\times 1}$ com $z^0 = \theta b^0$, onde $\theta = \frac{1}{\sum\limits_{i=1}^{n} b_i^0}$.

Assim,

$$\sum_{i=1}^{n} z_i^0 = 1,$$

concluindo-se que $z^0 \in E^n$.

Seja então x um vector arbitrário de E^n.

Desta forma, pelo Teorema 2.15, *i)* e *iii),*

$$\begin{aligned} f_A(x) &\leq f_A(b), \text{ com } b \in B \\ &\leq f_A\left(b^0\right), \text{ dado que } f_A \text{ atinge um valor máximo para algum } b^0 \in B \\ &= f_A\left(z^0\right), \text{ para qualquer } x \in E^n. \end{aligned}$$

Dada a arbitrariedade de x em E^n conclui-se que de facto f_A atinge um valor máximo, z^0, em E^n.

■

2.3.2 Teorema de Perron-Frobenius

Os próximos resultados constam da importante teoria de Perron-Frobenius cujo desenvolvimento se deve aos matemáticos germânicos Oskar Perron (1880-1975) e Ferdinand Georg Frobenius (1849-1917), aluno de doutoramento de Karl Weierstrass. Inicialmente, em 1907, Perron publicou o seu estudo sobre matrizes não negativas e irredutíveis e, em 1912, Frobenius contribuiu para a extensão desse estudo à classe das matrizes não negativas.

Apresenta-se, de seguida, o Teorema de Perron-Frobenius para matrizes não negativas e irredutíveis.

Teorema 2.18 *[12, 16] (Perron-Frobenius) Seja $A = [a_{i,j}] \in \mathbb{R}^{n\times n}$ não negativa e irredutível. Então*

1. *A matriz A tem um valor próprio real positivo r tal que*

$$r \geq |\lambda_i|$$

para qualquer λ_i valor próprio de A.

2. *O vector próprio correspondente a r é um vector próprio positivo.*
3. *O valor de r aumenta quando qualquer entrada de A aumenta.*

Demonstração. *1* e *2*.

Prove-se, em primeiro lugar, que existe, nas condições referidas, um valor próprio real positivo.

Considere-se, então,

$$\begin{aligned} r &= \max_{x\in E^n} \{f_A(x)\} && (2.16) \\ &= f_A\left(z^0\right), \text{ pelo Teorema 2.17 para algum } z^0 \in E^n, && (2.17) \end{aligned}$$

e

$$u = [u_1 \cdots u_n]^T \in \wp^{n\times 1}$$

tal que

$$u = \left[\frac{1}{n} \cdots \frac{1}{n}\right]^T, \; n \in \wp, \; n \neq 0.$$

Assim definido, $u \in E^n$, dado que

$$\sum_{i=1}^{n} u_i = 1.$$

Por (2.16) e pela Definição 2.14,

$$\begin{array}{rcl} r & \geq & f_A(u) \\ & = & \min\limits_{i\in\{1,\ldots,n\}} \left\{ \dfrac{(Au)_i}{u_i}, \; u_i \neq 0 \right\} \\ & = & \min\limits_{i\in\{1,\ldots,n\}} \left\{ \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} \right\} \\ & > & 0, \end{array}$$

uma vez que, por hipótese, a matriz A é não negativa e irredutível.

Por outro lado, de (2.17) e de (2.9) ,

$$Az^0 - rz^0 \geq 0, \text{ com } r > 0. \tag{2.18}$$

Suponha-se que $Az^0 - rz^0 \neq 0$.

Por (2.3) ,

$$(I_n + A)^{n-1}\left(Az^0 - rz^0\right) > 0$$

e uma vez que A comuta com $(I_n + A)^{n-1}$,

$$At^0 - rt^0 > 0, \quad \text{para } t^0 = (I_n + A)^{n-1} z^0.$$

Desta forma,

$$At^0 > rt^0,$$

donde

$$f_A\left(t^0\right) > r,$$

o que contradiz a maximalidade de r.

Conclui-se então que

$$Az^0 - rz^0 = 0, \tag{2.19}$$

onde z^0 é o vector próprio de A correspondente ao valor próprio r de A.

Pelo Corolário 2.12, $z^0 > 0$.

Mostre-se agora que

$$r \geq |\lambda_i|\,,$$

para qualquer λ_i valor próprio de A, $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Para tal, considere-se

$$Az = \lambda_i \ z,$$

para $\lambda_i \in \sigma(A)$ e $z = [z_1 \cdots z_n]^T \in \mathbb{R}^{n \times 1}, \ z \neq 0$.

Desta forma, para $s, i \in \{1, \ldots, n\}$,

$$\begin{aligned} |\lambda_i \ z_s| &= |\lambda_i|\,|z_s| \\ &\leq \sum_{j=1}^{n} |a_{s,j}|\,|z_j| \\ &= \sum_{j=1}^{n} a_{s,j}\,|z_j|\,. \end{aligned}$$

Assim, poder-se-à escrever

$$|\lambda_i|\,|z| \leq A\,|z|\,,$$

concluindo-se, pelo Teorema 2.15, *ii)*, e pela definição de r,

$$|\lambda_i| \leq f_A(|z|) \leq r.$$

3. Seja $A' = \left[a'_{i,j}\right] \in \mathbb{R}^{n \times n}$, uma matriz obtida a partir da matriz A com

$$a'_{k,r} > a_{k,r}, \text{ para alguns } k, r \in \{1, \ldots, n\}\,,$$

isto é,

$$A' \geq A, \text{ com } A' \neq A.$$

Seja λ um valor próprio de A.

Assim,

$$Ay = \lambda y, \text{ para algum } y = [y_1 \cdots y_n]^T \in \mathbb{R}^{n \times 1}, \ y \neq 0$$

o que significa que para qualquer $i \in \{1, \ldots, n\}$,

$$\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} y_j = \lambda y_i.$$

Desta forma,

$$|\lambda|\,|y| \leq A\,|y| \leq A'\,|y|\,,\ \ |y| \neq 0, \tag{2.20}$$

e portanto, pelo Teorema 2.17,

$$|\lambda| \leq f_{A'}\left(|y|\right) \leq \max_{x\in E^n}\left\{f_{A'}\left(x\right)\right\} = r',$$

onde r' é um valor próprio de A' nas condições de *1.* e *2.*

Desta forma,

$$|\lambda| \leq r',$$

e, em particular, para r definido em *1.*, $|r| = r \leq r'$.

De facto, neste caso,

$$r < r'.$$

Suponha-se que $r = r'$.

Assim, de (2.20),

$$A'\,|y| \geq r'\,|y|\,,$$

e $|y|$ seria um vector próprio positivo de A' associado ao valor próprio r', obtendo-se

$$A'\,|y| = r'\,|y|\,.$$

Desta forma,

$$A\,|y| = r\,|y| = r'\,|y| = A'\,|y|\,,$$

o que permite concluir que

$$\left(A' - A\right)|y| = 0.$$

Como por *2.*, $|y| > 0$, tem-se

$$A' = A,$$

o que é absurdo.

Logo $r \neq r'$.

■

Observe-se que r assim definido não é mais do que o designado raio espectral, $\rho\left(A\right)$ definido no Capítulo 1.

Para matrizes não negativas não necessariamente irredutíveis, pode obter-se, usando um argumento de continuidade, uma versão mais fraca do teorema anterior.

Teorema 2.19 *[12] Seja $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ uma matriz não negativa. Então*

1. A tem um valor próprio real r tal que

$$r \geq |\lambda_i|\,, \quad i \in \{1, \ldots, n\}$$

para qualquer $\lambda_i \in \sigma(A)$.

2. O vector próprio correspondente a r é um vector próprio não negativo e não nulo.

3. O valor de r não diminui quando qualquer entrada de A aumenta.

Demonstração. *1.* Defina-se, para um número real arbitrário $\epsilon > 0$,

$$A_\epsilon = A + \epsilon B,$$

com $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ uma matriz positiva.

Seja r_ϵ o raio espectral de A_ϵ com

$$r_\epsilon \geq \left|\lambda_i'\right|, \text{ para qualquer } \lambda_i' \in \sigma(A_\epsilon) \text{ e } i \in \{1, \ldots, n\}. \tag{2.21}$$

Pelo Teorema 1.11 e para ϵ suficientemente pequeno, todos os valores próprios de A_ϵ dependem continuamente das entradas da matriz A_ϵ e portanto de ϵ, e

$$\lim_{\epsilon \to 0^+} r_\epsilon = r,$$

onde r é o raio espectral de A e também

$$\lim_{\epsilon \to 0^+} \lambda_i' = \lambda_i, \text{ com } \lambda_i \in \sigma(A), \ i \in \{1, \ldots, n\}.$$

Assim, de (2.21),

$$r \geq |\lambda_i| \geq 0, \ i \in \{1, \ldots, n\}.$$

2. Por outro lado, por *2.* do teorema anterior, existe $x_\epsilon > 0$ de E^n tal que

$$A_\epsilon x_\epsilon = r_\epsilon x_\epsilon.$$

Usando o mesmo argumento de continuidade,

$$Ax = rx,$$

onde $x \in E^n$, com $x \neq 0$ é o vector próprio correspondente a r.

3. A demonstração deste ponto é consequência directa do Corolário 2.5.

■

2.4 Localização dos Valores Próprios de uma Matriz

2.4.1 Teorema de Geršgorin

A localização dos valores próprios de uma matriz assume extrema importância no estudo de determinados comportamentos matriciais, como se verá mais à frente.

Procura-se, portanto, a localização de valores próprios em conjuntos limitados de fácil caracterização.

Ficou já apresentada, com a Proposição 1.24, uma primeira estimativa para a localização dos valores próprios de uma dada matriz $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. No entanto, pretende-se, nas secções seguintes, uma localização mais precisa.

Note-se que os valores próprios de uma matriz diagonal são de fácil localização.

Assim, dada $A = [a_{i,j}] \in \mathbb{C}^{n\times n}$, é possível escrever

$$A = D + B, \tag{2.22}$$

onde $D = diag(a_{1,1}, \ldots, a_{n,n}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$ e $B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ é a matriz resultante, satisfazendo a equação (2.22).

Ao causar determinadas perturbações ε nas entradas de A, e porque os valores próprios dependem continuamente das entradas da matriz A,

$$A_\varepsilon = D + \varepsilon B, \quad \text{para qualquer } \varepsilon > 0,$$

existem razões para suspeitar que os valores próprios da matriz resultante A_ε, para ϵ suficientemente pequeno, poderão ser localizados em pequenas vizinhanças das entradas da diagonal principal de A.

Repare-se que para $\varepsilon = 0$

$$A_\varepsilon = D,$$

e para $\varepsilon = 1$

$$A_\varepsilon = D + B = A,$$

e assim sucessivamente.

De facto, para $A = [a_{i,j}] \in \mathbb{C}^{n\times n},\ i,j \in \{1,\ldots,n\}$, existem discos centrados nos pontos $a_{i,i}$ onde se poderá garantir a localização dos valores próprios da matriz A. Essa garantia é dada pelo Teorema de Geršgorin, estabelecido em 1931 por Geršgorin, tendo como motivação os trabalhos de Lévy em 1881, Minkowski em 1900 e Hadamard em 1903 sobre a localização de valores próprios de uma matriz.

Teorema 2.20 *(Teorema de Geršgorin) [5] Seja* $A = [a_{i,j}] \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *e considere-se, para cada* $i \in \{1,\ldots,n\}$, $R_i'(A)$ *como a soma dos módulos das entradas não principais da linha* i *de* A, *isto é,*

$$R_i'(A) = \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} |a_{i,j}| \quad , \quad i \in \{1,\ldots,n\}.$$

Então os valores próprios de A *pertencem à reunião dos* n *discos*

$$G(A) = \bigcup_{i=1}^{n} \left\{ z \in \mathbb{C} : |z - a_{i,i}| \leq R_i'(A) \right\}. \tag{2.23}$$

Demonstração. Considere-se $\lambda \in \mathbb{C}$ um valor próprio de A e $v = [v_1 \cdots v_n]^T \in \mathbb{C}^{n\times 1}$, $v \neq 0$ um vector próprio de A associado ao valor próprio λ.

Seja $t \in \{1,\ldots,n\}$ tal que

$$|v_t| = \max_{i\in\{1,\ldots,n\}} |v_i|, \text{ com } |v_t| \neq 0. \tag{2.24}$$

Uma vez que, por hipótese, $Av = \lambda v$ vem

$$\sum_{j=1}^{n} a_{t,j} v_j = \lambda v_t.$$

Assim,

$$\sum_{\substack{j=1\\ j\neq t}}^{n} a_{t,j} v_j = (\lambda - a_{t,t}) v_t$$

e portanto,

$$\begin{aligned} |\lambda - a_{t,t}| \, |v_t| &= \left| \sum_{\substack{j=1\\ j\neq t}}^{n} a_{t,j} v_j \right| \qquad (2.25)\\ &\leq \sum_{\substack{j=1\\ j\neq t}}^{n} |a_{t,j}| \, |v_j| \\ &\leq \sum_{\substack{j=1\\ j\neq t}}^{n} |a_{t,j}| \, |v_t| \ , \text{ por } (2.24) \\ &= |v_t| \, R_t'(A). \end{aligned}$$

Desta forma conclui-se que

$$|\lambda - a_{t,t}| \leq R_t'(A),$$

ou seja, λ pertence ao disco fechado em torno de $a_{t,t}$ e raio igual a $R'_t(A)$, donde $\lambda \in G(A)$.

■

Exemplo 2.21 *Seja* $A \in \mathbb{C}^{3\times 3}$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -5 \end{bmatrix}$$

Uma primeira estimativa para a localização de valores próprios desta matriz pode ser obtida utilizando a Proposição 1.24, ou seja

$$|\lambda| \leq |||A|||\,, \text{ para qualquer } \lambda \in \sigma(A) \quad \text{e} \quad \text{para qualquer norma matricial } |||.|||\,.$$

Em particular,

$$\begin{aligned} |\lambda| &\leq |||A|||_\infty \\ &= \max_{i\in\{1,\ldots,n\}} \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}| \\ &= 8. \end{aligned}$$

Assim, os valores próprios de A localizam-se no disco do plano complexo centrado na origem e raio igual a 8.

Graficamente, no plano complexo obtém-se a região onde se poderá garantir a localização de qualquer $\lambda \in \sigma(A)$:

Pelo Teorema de Geršgorin, todos os valores próprios de A *estão localizados na união* $G(A)$ *dos 3 discos centrados nos pontos* $(3,0)$, $(1,0)$ *e* $(-5,0)$ *com raios iguais a* 5, 2 *e* 1 *respectivamente, o que permite obter, graficamente, uma localização mais precisa.*

$$G(A) = \bigcup_{i=1}^{3} \left\{ z \in \mathbb{C} : |z - a_{i,i}| \leq R_i'(A) \right\}$$
$$= \bigcup_{i=1}^{3} \left\{ z \in \mathbb{C} : |z - a_{i,i}| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{i,j}| \right\}, \quad i \in \{1,2,3\}.$$

Graficamente,

A região referida no Teorema 2.20, $G(A)$, é designada região de Geršgorin, para linhas de A. Os discos individuais em $G(A)$ são designados discos de Geršgorin e as curvas que os limitam são designadas circunferências de Geršgorin.

Uma vez que uma dada matriz $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ tem os mesmos valores próprios que a sua transposta, podem escrever-se os próximos corolários.

Corolário 2.22 *[5] Seja* $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ *e*

$$C_j'(A) = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} |a_{i,j}| \quad , \quad j \in \{1, \ldots, n\}.$$

Então, todos os valores próprios de A estão localizados na união dos n discos

$$G\left(A^T\right) = \bigcup_{j=1}^{n} \left\{z \in \mathbb{C} : |z - a_{j,j}| \leq C'_j(A)\right\}.$$

Corolário 2.23 *[5] Seja $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ e λ um qualquer valor próprio de A. Assim,*

$$\lambda \in G(A) \cap G\left(A^T\right).$$

O próximo exemplo ilustra o Corolário 2.23.

Exemplo 2.24 *Seja $A \in \mathbb{C}^{3\times 3}$ da seguinte forma*

$$A = [a_{i,j}] = \left[\frac{i}{j}\right] = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 2 & 1 & \frac{2}{3} \\ 3 & \frac{3}{2} & 1 \end{bmatrix}.$$

Para este caso,

$$\sigma(A) = \{0, 3\}.$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} G(A) &= \left\{z \in \mathbb{C} : |z-1| \leq \frac{5}{6} \vee |z-1| \leq \frac{8}{3} \vee |z-1| \leq \frac{9}{2}\right\} \quad e \\ G\left(A^T\right) &= \{z \in \mathbb{C} : |z-1| \leq 5 \vee |z-1| \leq 2 \vee |z-1| \leq 1\}. \end{aligned}$$

Graficamente,

.

De facto, $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = 3$ pertencem a $G(A) \cap G\left(A^T\right) = G(A)$.

Corolário 2.25 *[16] Seja $A = [a_{i,j}] \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Se*

$$v = \max_{i\in\{1,\ldots,n\}} \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}|$$

então $\rho(A) \leq v$.

Demonstração. Dado que o disco $|z - a_{i,i}| \leq R_i'(A)$ está contido no disco $|z| \leq |a_{i,i}| + R_i'(A)$, obtém-se o resultado.

$\blacksquare$

O corolário anterior permite obter um limite superior para o raio espectral $\rho(A)$ de uma matriz. No entanto, como as matrizes A e A^T têm os mesmos valores próprios, a aplicação desse resultado a A^T permite escrever o próximo corolário.

Corolário 2.26 *[16] Seja $A = [a_{i,j}] \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Se*

$$v' = \max_{j\in\{1,\ldots,n\}} \sum_{i=1}^{n} |a_{i,j}|$$

então $\rho(A) \leq v'$.

Resulta dos corolários anteriores que se $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, uma melhor estimativa para o limite superior de $\rho(A)$ será β, com $\beta = \min\{v, v'\}$.

Observe-se que esses mesmos corolários também resultam de (1.8), (1.9) e da Proposição 1.24.

O próximo teorema permite estabelecer uma condição suficiente para a invertibilidade de matrizes de diagonal estritamente dominante.

Teorema 2.27 *[5] Seja $A = [a_{i,j}] \in \mathbb{C}^{n\times n}$ uma matriz de diagonal estritamente dominante por linhas ou colunas. Então A é invertível.*

Demonstração. Suponha-se que $A = [a_{i,j}] \in \mathbb{C}^{n\times n}$ é de diagonal estritamente dominante por linhas e não é invertível.

Então $\lambda = 0$ é um valor próprio de A e a equação $Ax = 0$ tem uma solução $x = [x_1 \cdots x_n]^T \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $x \neq 0$.

Considere-se x_p a entrada de x, com $p \in \{1, \ldots, n\}$ tal que

$$|x_p| \geq |x_i|, \text{ para qualquer } i \in \{1, \ldots, n\}.$$

Uma vez que $Ax = 0$, é possível escrever,

$$a_{p,1}x_1 + a_{p,2}x_2 + \ldots + a_{p,p}x_p + \ldots + a_{p,n}x_n = 0,$$

ou seja,

$$\begin{aligned} |a_{p,p}|\,|x_p| &= \left| -\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq p}}^{n} a_{p,j}x_j \right| \\ &\leq \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq p}}^{n} |a_{p,j}|\,|x_j| \\ &\leq |x_p| \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq p}}^{n} |a_{p,j}|\,, \end{aligned}$$

o que significa que

$$|a_{p,p}| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq p}}^{n} |a_{p,j}|\,,$$

contrariando o facto de A ser uma matriz de diagonal estritamente dominante por linhas.

Conclui-se então que A é invertível.

■

Analogamente se mostra que as matrizes de diagonal estritamente dominante por colunas são invertíveis.

Observe-se que o teorema anterior pode ser obtido a partir do Teorema de Geršgorin pois se A é uma matriz de diagonal estritamente dominante por linhas, os discos de Geršgorin estão localizados ou no semiplano direito (aberto) ou no semiplano esquerdo (aberto), ou seja, nenhum desses discos intersecta o eixo imaginário e portanto o zero não é valor próprio de A.

Teorema 2.28 *[5] Seja $A = [a_{i,j}] \in \mathbb{C}^{n\times n}$ uma matriz de diagonal estritamente dominante por linhas. Se todas as entradas da diagonal principal de A são positivas então todos os valores próprios de A têm parte real positiva.*

Demonstração. Se a matriz A é de diagonal estritamente dominante por linhas e tem todas as entradas da diagonal principal positivas então,

$$a_{i,i} > \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{i,j}|\,,\ i \in \{1,\ldots,n\}\,.$$

Assim, todos os discos de Geršgorin estão localizados no semiplano (aberto) direito o que significa, pelo Teorema de Geršgorin, Teorema 2.20, que todos os valores próprios de A têm parte real positiva.

■

2.4.2 Localização do Raio Espectral de uma Matriz Não Negativa e Irredutível

Pretende-se, com o teorema seguinte, obter novas estimativas para a localização do raio espectral de uma matriz não negativa e irredutível, recorrendo aos Teoremas de Geršgorin e de Perron-Frobenius para matrizes não negativas e irredutíveis.

Teorema 2.29 *[16] Seja $A = [a_{i,j}] \in \mathbb{R}^{n\times n}$ uma matriz não negativa e irredutível. Então ou*

$$\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = \rho(A)\,, \text{ para qualquer } i \in \{1,\ldots,n\} \tag{2.26}$$

ou

$$\min_{i\in\{1,\ldots,n\}} \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} < \rho(A) < \max_{i\in\{1,\ldots,n\}} \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}. \tag{2.27}$$

Demonstração. Suponha-se que

$$\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = \theta, \text{ para qualquer } i \in \{1,\ldots,n\}\,. \tag{2.28}$$

Se $\xi = [1\cdots 1]^T \in \mathbb{R}^{n\times 1}$, então obviamente $A\xi = \theta\xi$ e portanto θ é um valor próprio de A.

Por outro lado, pelo Corolário 2.25,

$$\rho(A) \leq \max_{i\in\{1,\ldots,n\}} \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}| = \theta$$

concluindo-se que

$$\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = \rho(A)\,, \text{ para qualquer } i \in \{1,\ldots,n\}\,.$$

Caso não se verifique (2.28) e, portanto, a soma das entradas por linhas da matriz A não seja constante, o objectivo será obter uma nova matriz, a partir da matriz A, tal que essa soma das entradas por linhas seja constante, por forma a mostrar (2.27).

Assim, é sempre possível obter uma matriz $B = [b_{i,j}] \in \mathbb{R}^{n\times n}$ não negativa e irredutível diminuindo determinadas entradas positivas da matriz A, de modo a que a soma das entradas por linhas seja constante e igual ao mínimo da soma das entradas por linhas da matriz A ou seja, para qualquer $s \in \{1, \ldots, n\}$,

$$\min_{i \in \{1,\ldots,n\}} \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = \sum_{j=1}^{n} b_{s,j} = \eta$$

com $O \leq B \leq A$ e $B \neq A$.

Assim sendo, por (2.26),

$$\eta = \rho(B)$$

e pelo Teorema de Perron-Frobenius para matrizes não negativas e irredutíveis, Teorema 2.18,

$$\min_{i \in \{1,\ldots,n\}} \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} < \rho(A). \tag{2.29}$$

Da mesma forma, é possível aumentar algumas entradas positivas da matriz A, obtendo-se uma matriz não negativa e irredutível $C = [c_{i,j}] \in \mathbb{R}^{n \times n}$ com $C \geq A$ e $C \neq A$ tal que

$$\max_{i \in \{1,\ldots,n\}} \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = \sum_{j=1}^{n} c_{s,j} = \gamma, \text{ para qualquer } s \in \{1, \ldots, n\}.$$

Assim, por procedimento análogo aos anteriores,

$$\gamma = \rho(C),$$

e pelo Teorema de Perron-Frobenius para matrizes não negativas e irredutíveis,

$$\rho(A) < \max_{i \in \{1,\ldots,n\}} \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}. \tag{2.30}$$

De (2.29) e (2.30) conclui-se o pretendido.

■

2.5 Propriedades Estruturais de Matrizes Não Negativas

2.5.1 Generalidades. Matrizes Redutíveis e Irredutíveis e Grafos Orientados

Nesta secção são estudadas propriedades estruturais de matrizes não negativas, recorrendo a algumas noções de teoria dos grafos.

Em termos gerais, esta teoria permite representar, esquematicamente, a estrutura de uma dada matriz possibilitando uma abordagem mais intuitiva de propriedades estruturais dessa matriz.

Apresentam-se assim algumas noções dessa teoria.

Definição 2.30 *Seja $V \neq \emptyset$ um conjunto finito e χ um subconjunto de $V \times V$. Designa-se por grafo orientado a estrutura $G(V,\chi)$ onde cada elemento de V designa-se por vértice de G(também designado nó de G) enquanto cada elemento de χ designa-se aresta de G.*

Também se podem considerar grafos orientados infinitos com um conjunto numerável de vértices. Neste trabalho, apenas se estudará o caso dos grafos orientados com um número finito de vértices.

Apresenta-se, de seguida, a definição de passeio orientado da estrutura $G(V,\chi)$ assim como as condições em que se associa um grafo orientado a uma dada matriz $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$.

Seja $G(V,\chi)$ um grafo orientado.

Definição 2.31 *Designa-se passeio orientado de $u \in V$ para $v \in V$ a uma sequência finita de arestas*

$$(v_i, v_{i+1}),\ i \in \{0,\ldots,t-1\}$$

com $u = v_0$ e $v_t = v$, $t \in \mathbb{N}$.

Conforme a definição sugere, cada aresta (v_i, v_{i+1}), $i \in \{0,\ldots,t-1\}$ será representada, graficamente, com uma linha orientada de v_i para v_{i+1}.

Observe-se também que, num passeio orientado, o último vértice de uma aresta coincide com o primeiro vértice da aresta seguinte.

Definição 2.32 *O comprimento do passeio orientado é igual ao número de arestas, caso este número seja finito.*

Designa-se por ciclo a um passeio orientado que começa e acaba no mesmo vértice.

Um ciclo de comprimento 1 é designado loop ou ciclo trivial.

Definição 2.33 *Seja $G(V,\chi)$ um grafo orientado. Diz-se que este grafo é fortemente conexo se, quaisquer que sejam $u,\ v \in V$ distintos, existe um passeio orientado de u para v.*

Apresenta-se, de seguida, um exemplo de um grafo fortemente conexo.

Exemplo 2.34 *Considere-se o seguinte grafo orientado onde* $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$,

Pode-se verificar que não existe qualquer passeio orientado dos vértices v_2, v_3, v_4 *ou* v_5 *para* v_1 *e, portanto, o grafo orientado não é fortemente conexo.*

Ao estabelecer um passeio orientado de qualquer um dos vértices v_2, v_3, v_4 *ou* v_5 *para* v_1, *obtém-se um grafo fortemente conexo, como se apresenta no seguinte esquema,*

Definição 2.35 *Seja* $A = [a_{i,j}] \in \mathbb{C}^{n \times n}$. *Designa-se por grafo de* A *a um grafo orientado* $G(V, \chi)$ *onde* V *é um conjunto finito com* n *vértices*

$$V = \{v_1, \ldots, v_n\}$$

e, quaisquer que sejam $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, $(v_i, v_j) \in \chi$ *se e só se* $a_{i,j} \neq 0$.

Exemplo 2.36 *Considere-se* $A \in \mathbb{C}^{3 \times 3}$ *da seguinte forma:*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Para a matriz A, poder-se-à associar o seguinte grafo orientado $G(V,\chi)$:

Repare-se que, através da Definição 2.35, para a construção de um grafo orientado associado a uma matriz não negativa basta verificar se cada entrada da matriz é, ou não, igual a zero. Neste contexto e para simplificar, é usual associar essas matrizes a matrizes $(0,1)$ que, tendo em conta a sua estrutura poderão, portanto, representar as primeiras na elaboração dos grafos orientados e no estudo de propriedades estruturais. Desta forma, cada entrada positiva da matriz original será substituída por 1 na matriz $(0,1)$ enquanto cada entrada nula da mesma matriz manter-se-à igual a 0.

O teorema e corolário seguintes são resultados auxiliares para estabelecer uma condição necessária e suficiente para que uma matriz não negativa seja irredutível, dada pelo Teorema 2.39.

Teorema 2.37 *[12] Sejam $A=[a_{i,j}]\in\mathbb{R}^{n\times n}$ uma matriz $(0,1)$, $k\in\mathbb{N}$ e $G(V,\chi)$ o grafo de A onde $V=\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$. Então, o número de passeios orientados distintos de comprimento k do vértice v_i para o vértice v_j é igual a $a_{i,j}^k$, com $i,j\in\{1,\ldots,n\}$.*

Demonstração. Sejam $A=[a_{i,j}]\in\mathbb{R}^{n\times n}$, v_i, $v_j\in V$ onde $i,j\in\{1,\ldots,n\}$ e $r_1,r_2,\ldots,r_{k-1}\in\{1,\ldots,n\}$, $k\in\mathbb{N}$.

A sequência finita de arestas

$$(v_i,v_{r_1}),(v_{r_1},v_{r_2}),(v_{r_2},v_{r_3}),\ldots,(v_{r_{k-2}},v_{r_{k-1}}),(v_{r_{k-1}},v_j)$$

do vértice v_i para o vértice v_j é um passeio orientado de v_i para v_j se e só se

$$a_{i,r_1},a_{r_1,r_2},\ldots,a_{r_{k-2},r_{k-1}},a_{r_{k-1},j}$$

são entradas de A distintas de zero.

Por outro lado, repare-se que

$$a_{i,j}^{k} = \sum_{r_1,\ r_2,\dots,r_{k-1}} a_{i,r_1} a_{r_1,r_2} a_{r_2,r_3} \dots a_{r_{k-2},r_{k-1}} a_{r_{k-1},j},$$

obtendo-se assim o resultado.

■

Corolário 2.38 *[12] Seja $A = [a_{i,j}] \in \mathbb{R}^{n\times n}$ uma matriz não negativa. Então o seu grafo tem um passeio orientado de comprimento k do vértice v_i para o vértice v_j se e só se $a_{i,j}^{k} > 0$, $i, j \in \{1, \dots, n\}$.*

Demonstração. A demonstração deste resultado é consequência directa do teorema anterior.

■

As noções e resultados atrás descritos vão permitir estudar de uma forma mais intuitiva a propriedade estrutural da irredutibilidade de matrizes não negativas.

Estabelece-se, de seguida, a relação existente entre matrizes não negativas e irredutíveis e os respectivos grafos.

Teorema 2.39 *[12] Seja $A = [a_{i,j}] \in \mathbb{R}^{n\times n}$ uma matriz não negativa. Então A é irredutível se e só se o seu grafo é fortemente conexo.*

Demonstração. Seja $A = [a_{i,j}] \in \mathbb{R}^{n\times n}$ uma matriz não negativa e $G(V, \chi)$ o seu grafo.

Condição necessária

Pelo Teorema 2.13 garante-se, para cada par (i, j) com $i,\ j \in \{1, \dots, n\}$ a existência de $k \in \{1, \dots, n\}$ verificando $a_{i,j}^{k} > 0$ o que pelo Corolário 2.38 significa que o grafo da matriz A tem um passeio orientado de comprimento k ligando o vértice v_i ao vértice v_j, concluindo-se portanto que $G(V, \chi)$ é fortemente conexo.

Condição suficiente

Considere-se que $G(V, \chi)$ é fortemente conexo.

Assim, para cada par (i, j) com $i,\ j \in \{1, \dots, n\}$ existe um passeio orientado do vértice v_i para o vértice v_j.

Suponha-se que o comprimento do passeio orientado é k, para algum $k \in \mathbb{N}$.

Desta forma, pelo Corolário 2.38, $a_{i,j}^{k} > 0$ ou seja A é irredutível pelo Teorema 2.13.

■

O seguinte exemplo servirá para elucidar o teorema anterior.

Exemplo 2.40 *Seja a matriz* $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ *tal que:*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

O grafo orientado, $G(V, \chi)$ *, apresenta-se da seguinte forma:*

Como o grafo orientado é fortemente conexo então A *é irredutível, pelo Teorema 2.39.*

Por outro lado, para a matriz redutível $B = |A| \in \mathbb{R}^{5\times 5}$ *definida a partir da matriz* $A \in \mathbb{R}^{5\times 5}$ *do Exemplo 2.8, obtém-se o seguinte grafo orientado:*

De facto, este grafo orientado não é fortemente conexo. Basta, por exemplo, verificar que não existe um passeio orientado de v_2 *para* v_4*.*

2.6 Matrizes Inversas Não Negativas

Nesta secção são estudadas algumas propriedades de matrizes que garantem que a inversa de uma matriz seja não negativa.

Historicamente, Stieltjes (1887) provou que se $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ é simétrica e definida positiva, com todas as entradas fora da diagonal principal negativas então $A^{-1} > O$.

Mais tarde, Frobenius (1912) provou o resultado de que se $B > O$ e α é um número real com $\alpha > \rho(B)$ então a matriz $\alpha I_n - B$ é não singular com

$$(\alpha I_n - B)^{-1} > O.$$

Os próximos resultados são generalizações dos resultados anteriores de Ostrowski (1937) e Fan (1958) e lidam com propriedades de matrizes que garantem que a inversa de uma matriz é uma matriz não negativa.

Teorema 2.41 *[16] Seja $M \in \mathbb{C}^{n\times n}$ com $\rho(M) < 1$. Então, a matriz $I_n - M$ é não singular e*

$$(I_n - M)^{-1} = I_n + M + M^2 + \dots \tag{2.31}$$

onde a série $\sum_{m=0}^{\infty} M^m$ converge para $(I_n - M)^{-1}$. Reciprocamente, se a série converge então $\rho(M) < 1$.

Demonstração. *Condição necessária*

Suponha-se que $\rho(M) < 1$ e seja θ um qualquer valor próprio de M. Assim, $1 - \theta$ é um valor próprio da matriz $I_n - M$.

Considere-se, para $t \in \mathbb{N}_0$, a seguinte identidade

$$\begin{aligned} M^{t+1} &= I_n - \left(I_n - M^{t+1}\right) && (2.32)\\ &= I_n - \left[\left(I_n + M + M^2 + \dots + M^t\right) - \left(M + M^2 + \dots + M^{t+1}\right)\right] && (2.33)\\ &= I_n - (I_n - M)\ \left(I_n + M + M^2 + \dots + M^t\right). && (2.34)\end{aligned}$$

Multiplicando, à esquerda, ambos os membros da equação (2.34) por $(I_n - M)^{-1}$ vem,

$$(I_n - M)^{-1} - \left(I_n + M + M^2 + \dots + M^t\right) = (I_n - M)^{-1} M^{t+1}. \tag{2.35}$$

Assim, pelo axioma da submultiplicidade para normas matriciais,

$$\left|\left|\left|(I_n - M)^{-1} - \left(I_n + M + M^2 + \dots + M^t\right)\right|\right|\right| \leq \left|\left|\left|(I - M)^{-1}\right|\right|\right| \left|\left|\left|M^{t+1}\right|\right|\right|,$$

para qualquer norma matricial $|||.|||$ e qualquer $t \in \mathbb{N}_0$.

Como M é convergente,

$$\lim_{t\to\infty} \left|\left|\left|M^{t+1}\right|\right|\right| = 0.$$

Assim, a série $\sum_{m=0}^{\infty} M^m$ converge para $(I_n - M)^{-1}$ e obtém-se (2.31).

Condição suficiente

Suponha-se agora que a série $\sum_{m=0}^{\infty} M^m$ converge.

Seja $\theta \in \mathbb{C}$ um qualquer valor próprio de M correspondente ao vector próprio $x \in \mathbb{C}^{n\times 1}$, $x \neq 0$.

Assim,

$$\left(I_n + M + M^2 + \ldots\right) x = \left(1 + \theta + \theta^2 + \ldots\right) x.$$

Desta forma, a convergência da série de matrizes $\sum_{m=0}^{\infty} M^m$ implica a convergência da série $\sum_{m=0}^{\infty} \theta^m$. Ora a série anterior é convergente se e só se $|\theta| < 1,\ \theta \in \sigma(M)$.

Dada a arbitrariedade de θ, conclui-se que $\rho(M) < 1$.

■

Teorema 2.42 *[16] Seja $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ uma matriz não negativa e $\alpha \in \mathbb{R}$. Então a matriz $\alpha I_n - A$ é não singular e $(\alpha I_n - A)^{-1} \geq O$ se e só se $\alpha > \rho(A)$.*

Demonstração. *Condição necessária*

Suponha-se que $\alpha I_n - A$ é não singular e $(\alpha I_n - A)^{-1} \geq O$.

Pelo Teorema 2.19, seja $x \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ com $x \geq 0$, $x \neq 0$ o vector próprio de A tal que

$$Ax = \rho(A)\, x.$$

Assim,

$$(\alpha I_n - A)\, x = (\alpha - \rho(A))\, x.$$

Como a matriz $\alpha I_n - A$ é não singular, $\alpha - \rho(A) \neq 0$.

Desta forma,

$$(\alpha I_n - A)^{-1} x = \frac{1}{\alpha - \rho(A)} x.$$

Como $x \geq 0$, com $x \neq 0$ e $(\alpha I_n - A)^{-1} \geq O$, então $\alpha > \rho(A)$.

Condição suficiente

Seja $M = \alpha I_n - A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e suponha-se que $\alpha > \rho(A),\ \alpha \in \mathbb{R}$.

Assim, α não é valor próprio de A de onde se conclui que M é não singular.

Por outro lado,

$$M = \alpha\left(I_n - \alpha^{-1} A\right),\ \alpha \neq 0.$$

Então,

$$M^{-1} = \alpha^{-1}\left(I_n - \alpha^{-1}A\right)^{-1}.$$

Para λ valor próprio de A, $\alpha^{-1}\lambda$ é valor próprio de $\alpha^{-1}A$ e portanto,

$$\begin{aligned} \rho\left(\alpha^{-1}A\right) &= \max_{\lambda\in\sigma(A)}\left\{\left|\alpha^{-1}\lambda\right|\right\} \\ &= \left|\alpha^{-1}\rho(A)\right| \\ &< \left|\alpha^{-1}\alpha\right| = 1. \end{aligned}$$

Pelo Teorema 2.41,

$$\left(I_n - \alpha^{-1}A\right)^{-1} = I_n + \alpha^{-1}A + \alpha^{-2}A^2 + \ldots$$

e portanto,

$$M^{-1} = \alpha^{-1}\left(I_n + \alpha^{-1}A + \alpha^{-2}A^2 + \ldots\right).$$

Pela Proposição 2.1, todas as potências de A são não negativas e portanto $M^{-1} \geq O$.

■

Apresenta-se, de seguida, uma condição necessária e suficiente para a monotonia de uma dada matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

Teorema 2.43 *[1] A matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ é monótona se e só se é não singular e $A^{-1} \geq O$.*

Demonstração. *Condição necessária*

Considere-se que $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ é singular. Então,

$$Ax = 0, \text{ para algum } x \in \mathbb{R}^{n\times 1},\ x \neq 0. \tag{2.36}$$

Como A é monótona,

$$x \geq 0. \tag{2.37}$$

Por outro lado, novamente da igualdade (2.36),

$$A(-x) = 0,$$

e como A é monótona, $-x \geq 0$, o que é equivalente a

$$x \leq 0. \tag{2.38}$$

De (2.37) e (2.38), obtém-se que $x = 0$ o que é absurdo.

Logo A é não singular.

Por outro lado, se $\psi_i \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ for o vector com entradas todas nulas com excepção da $i - \acute{e}sima$ entrada que é igual a 1,

$$AA^{-1}\psi_i = \psi_i \geq 0. \tag{2.39}$$

Como A é monótona, de (2.39),

$$A^{-1}\psi_i \geq 0, \text{ para qualquer } i \in \{1, \ldots, n\}.$$

Mas $A^{-1}\psi_i$ corresponde à i-ésima coluna de A^{-1} e portanto

$$A^{-1} \geq O.$$

Condição suficiente

Suponha-se agora que A é não singular e $A^{-1} \geq O$.

Assim, para $x \in \mathbb{R}^{n\times 1}$

$$Ax \geq 0 \quad \text{implica} \quad A^{-1}Ax \geq 0$$

e portanto,

$$x \geq 0.$$

■

2.7 M-matrizes não Singulares e Matrizes Monótonas

Nesta secção, o objectivo é a apresentação de uma classe de matrizes e resultados relacionados que assumem um papel preponderante no desenvolvimento de eficientes métodos, estabelecendo e regulando o processo de convergência dos métodos iterativos. De realçar o estudo de alguns resultados sobre *matrizes monótonas* e *M-matrizes não singulares* que, mais directamente, permitirão o estudo de aplicações no Capítulo 4 do presente trabalho.

Algumas classes de matrizes a caracterizar nesta secção, pertencem a um conjunto específico, designado por Z_n, e que se define de seguida.

Definição 2.44 *Designa-se $Z_n \subseteq \mathbb{R}^{n\times n}$ como um conjunto definido da seguinte forma*

$$Z_n = \left\{A = [a_{i,j}] \in \mathbb{R}^{n\times n} : a_{i,j} \leq 0, \ se\ i \neq j, \ i, j \in \{1, \ldots, n\}\right\}.$$

Repare-se que qualquer matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ pertencente ao conjunto Z_n poderá ser escrita da seguinte forma

$$A = \alpha I_n - B, \tag{2.40}$$

para $\alpha \in \mathbb{R}$ e $B \geq O$, com $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e portanto o conjunto Z_n está relacionado com a classe das Z-matrizes que se define de seguida.

Definição 2.45 *Seja $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. A matriz A designa-se Z-matriz se puder ser escrita da forma* (2.40)*.*

As Z-matrizes podem ser relacionadas com a teoria de Perron-Frobenius para matrizes não negativas, como se poderá verificar no seguinte teorema.

Teorema 2.46 *[6] Seja A uma Z-matriz. Então $\alpha - \rho(B)$ é um valor próprio de A.*

Demonstração. Uma vez que $B \geq O$, pelo Teorema de Perron Frobenius para matrizes não negativas, Teorema 2.19, $\rho(B)$ é um valor próprio de B e

$$Bx = \rho(B)\, x \tag{2.41}$$

para $x \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ e $x \geq 0$, com $x \neq 0$.

Por outro lado, de (2.40) e (2.41),

$$\begin{aligned} Ax &= (\alpha I_n - B)\, x \\ &= (\alpha - \rho(B))\, x, \end{aligned}$$

mostrando-se que $\alpha - \rho(B)$ é um valor próprio de A.

∎

Definição 2.47 *Seja A uma Z-matriz. Então A designa-se M-matriz se para a representação* (2.40)*, $\alpha \geq \rho(B)$ e M-matriz não singular, se para a mesma representação* (2.40)*, $\alpha > \rho(B)$.*

Dado o âmbito do trabalho em causa, apenas serão consideradas as M-matrizes que são não singulares.

A sua terminologia foi introduzida, em 1937, por Alexander Markowic Ostrowski.

Para esta classe de matrizes existem inúmeras caracterizações relacionadas com propriedades espectrais e estruturais. De destacar as que se relacionam com o conceito de monotonia dada a importância que este conceito assume na Análise Numérica e no desenvolvimento do presente trabalho.

Poderão ser encontradas cerca de 50 caracterizações para M-matrizes não singulares, em [15].

Apresenta-se, de seguida, um resultado relacionado com propriedades estruturais de M-matrizes não singulares, que será útil para a análise de algumas caracterizações da classe das M-matrizes não singulares, no Teorema 2.49.

Teorema 2.48 *[5] Seja $A \in Z_n$ uma M-matriz não singular. Então qualquer submatriz principal de A ainda é uma M-matriz não singular.*

Demonstração. Seja $A = [a_{i,j}] \in \mathbb{R}^{n \times n}$ com

$$A = \alpha I_n - B,$$

nas condições de (2.40) e onde $\alpha = \max\limits_{i \in \{1,\ldots,n\}} \{a_{i,i}\}$.

Seja $B' \in \mathbb{R}^{k \times k}$ uma submatriz principal de B, para algum $k \in \{1, \ldots, n-1\}$.

Claramente $B' \geq O$ uma vez que, por hipótese, $B \geq O$.

Assim, pelo Corolário 2.6,

$$\rho\left(B'\right) \leq \rho\left(B\right) < \alpha.$$

Desta forma, conclui-se que $A' \in \mathbb{R}^{k \times k}$ é uma submatriz principal de A onde

$$A' = \alpha I_k - B',$$

com $\alpha > \rho\left(B'\right)$.

Assim, A' é uma M-matriz não singular.

■

O próximo resultado apresenta algumas caracterizações para a classe das M-matrizes não singulares.

Teorema 2.49 *[6, 5, 15] Seja $A \in Z_n$. Então são equivalentes:*

(i) A é M-matriz não singular.

(ii) Todo o valor próprio real de A é positivo.

(iii) $A + tI_n$ é uma matriz não singular, para qualquer $t \geq 0$.

(iv) Para qualquer matriz D diagonal não negativa, $A + D$ é uma matriz não singular.

(v) Existe um vector positivo $x \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ tal que $Ax > 0$.

(vi) A é uma matriz monótona.

Demonstração. Seja $A = [a_{i,j}] \in Z_n$.

As implicações $(iv) \Rightarrow (iii)$ e $(iii) \Rightarrow (ii)$ são triviais.

$(ii) \Rightarrow (i)$

Seja $\lambda \in \sigma(A)$. Assim, por hipótese, $\lambda > 0$.

Como $A \in Z_n$, A pode ser decomposta da seguinte forma:

$$A = \alpha I_n - B,$$

para algum $\alpha \in \mathbb{R}$ e $B \geq O$ com $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

Pelo Teorema 2.46, $\alpha - \rho(B)$ é um valor próprio de A. Assim, por hipótese,

$$\alpha - \rho(B) > 0$$

ou seja

$$\alpha > \rho(B).$$

Desta forma, A é M-matriz não singular.

$(i) \Rightarrow (vi)$

A matriz A é uma M-matriz não singular e portanto $\alpha > 0$.

Assim,

$$\alpha^{-1} A = I_n - \alpha^{-1} B$$

com $\alpha^{-1} B \geq O$ e $\rho\left(\alpha^{-1} B\right) < 1$.

Pelo Teorema 2.42,

$$\left(I_n - \alpha^{-1} B\right)^{-1} \geq O.$$

Desta forma,

$$A^{-1} = (\alpha I_n - B)^{-1} = \alpha^{-1}\left(I_n - \alpha^{-1} B\right)^{-1} \geq O,$$

ou seja, pelo Teorema 2.43, A é uma matriz monótona.

$(vi) \Rightarrow (v)$

Pelo Teorema 2.43, A é não singular e $A^{-1} = \left[a'_{i,j}\right] \geq O,\ i, j \in \{1, \ldots, n\}$.

Seja $v = [v_1\ v_2 \cdots v_n]^T \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ e $\xi = [1 \cdots 1]^T \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ com $v = A^{-1}\xi \geq 0$ e suponha-se que existe alguma entrada v_t do vector v tal que

$$v_t = 0, \quad \text{para algum } t \in \{1, \ldots, n\}.$$

Assim,

$$a'_{t,j} = 0, \quad \text{para qualquer } j \in \{1, \ldots, n\},$$

o que não poderá acontecer uma vez que A é uma matriz não singular.

$(v) \Rightarrow (iv)$

Sejam $x = [x_1 \cdots x_n]^T \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ com $x > 0$, $D \in \mathbb{R}^{n\times n}$ uma matriz diagonal não negativa e $X = diag\,(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

Claramente $(A + D)\,x > 0$ e portanto $(A + D)\,X$ é uma matriz de diagonal estritamente dominante por linhas.

Consequentemente $X^{-1}\,(A + D)\,X$ é uma matriz de diagonal estritamente dominante por linhas o que implica, pelo Teorema 2.27 que a matriz $X^{-1}\,(A + D)\,X$ é uma matriz não singular e portanto $A+D$ é uma matriz não singular para qualquer matriz diagonal $D \in \mathbb{R}^{n\times n}$ não negativa.

■

Observação 2.50 *Repare-se que apesar da equivalência das seis condições do Teorema 2.49 ser estabelecida para uma matriz $A \in Z_n$, é possível garantir que, por exemplo, para uma qualquer matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, (vi) implica (v).*

De realçar também o facto de uma M-matriz não singular $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ser uma matriz monótona.

Apresentam-se, agora, dois resultados que permitem estabelecer majorantes para as normas de inversas de matrizes monótonas.

Notação 2.51 *Considere-se, para uma matriz monótona $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e $v \in V_A$,*

$$\alpha\,(v, A) = \min_{i\in\{1,\ldots,n\}} (Av)_i > 0 \tag{2.42}$$

e

$$V_A = \left\{v \in \mathbb{R}^{n\times 1} : ||v||_\infty = 1,\ Av > 0\right\}.$$

Repare-se que assim definido, $V_A \neq \emptyset$ pois contém vectores, w, da forma

$$w = A^{-1}v, \text{ com } v > 0 \text{ e } ||w||_\infty = 1.$$

O próximo Lema é habitualmente designado como Lema de Barreira e permite estabelecer $\frac{1}{\alpha(v,A)}$ como limite superior para $|||A^{-1}|||_\infty$, onde $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ representa uma matriz monótona.

Lema 2.52 *[2] (Lema de Barreira) Seja $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ uma matriz monótona e considere-se um vector v com $||v||_\infty = 1$, tais que*

$$\min_{i\in\{1,\dots,n\}} (Av)_i \geq \alpha, \text{ para algum } \alpha \in \mathbb{R}^+.$$

Então,

$$|||A^{-1}|||_\infty \leq \frac{1}{\alpha}.$$

Demonstração. Seja $A^{-1} = [a'_{i,j}] \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

Por (1.2) para $\xi = [1 \cdots 1]^T \in \mathbb{R}^{n\times 1}$,

$$\begin{aligned} 1 &= ||v||_\infty \geq \left(A^{-1}Av\right)_i = \sum_{j=1}^{n} a'_{i,j}\,(Av)_j \\ &\geq \sum_{j=1}^{n} a'_{i,j}\alpha = \alpha\left(A^{-1}\xi\right)_i \ , \text{ para qualquer } i \in \{1,\dots,n\} \text{ e algum } \alpha \in \mathbb{R}^+. \end{aligned}$$

Assim,

$$|||A^{-1}|||_\infty = \max_{i\in\{1,\dots,n\}} \left(A^{-1}\xi\right)_i \leq \frac{1}{\alpha}$$

uma vez que

$$|||A^{-1}|||_\infty = \left|\left|A^{-1}\xi\right|\right|_\infty . \tag{2.43}$$

■

Teorema 2.53 *[2] Seja $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ uma matriz monótona. Então*

$$|||A^{-1}|||_\infty = \frac{1}{\max\limits_{v\in V_A}\left\{\min\limits_{i\in\{1,\dots,n\}} (Av)_i\right\}} \tag{2.44}$$

onde, para uma solução $x \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ de $Ax = \xi$, com $\xi = [1 \cdots 1]^T \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ se tem

$$|||A^{-1}|||_\infty = ||x||_\infty . \tag{2.45}$$

Demonstração. Pelo Lema 2.52,

$$|||A^{-1}|||_\infty \leq \frac{1}{\max\limits_{v\in V_A}\left\{\min\limits_{i\in\{1,\dots,n\}} (Av)_i\right\}}.$$

Desta forma, restará mostrar que existe um vector $v \in V_A$ para o qual se verifica a igualdade (2.44) .

Seja então

$$v^{\bullet} = \left|\left|A^{-1}\xi\right|\right|_{\infty}^{-1} A^{-1}\xi, \text{ com } \xi = [1 \cdots 1]^T \in \mathbb{R}^{n\times 1}.$$

Tem-se claramente que $\left|\left|v^{\bullet}\right|\right|_{\infty} = 1$.

Por outro lado, e tendo em conta a igualdade (2.43), vem

$$\begin{aligned} Av^{\bullet} &= \left|\left|A^{-1}\xi\right|\right|_{\infty}^{-1} \xi \\ &= \left|\left|\left|A^{-1}\right|\right|\right|_{\infty}^{-1} \xi > 0, \end{aligned}$$

e portanto, $v^{\bullet} \in V_A$.

Por outro lado,

$$\min_{i\in\{1,\ldots,n\}} (Av^{\bullet})_i = \left|\left|\left|A^{-1}\right|\right|\right|_{\infty}^{-1},$$

o que prova a igualdade (2.44) .

A igualdade (2.45) resulta do facto de que $\left|\left|\left|A^{-1}\right|\right|\right|_{\infty}$ pode ser obtida resolvendo o sistema linear $Ax = \xi$ e determinar $\left|\left|x\right|\right|_{\infty}$, para $x = [x_1 \cdots x_n]^T \in \mathbb{R}^{n\times 1}$.

■

Capítulo 3

Métodos Iterativos e Decomposições Matriciais

Neste capítulo, far-se-à um estudo de condições de convergência de métodos iterativos para a resolução de sistemas de equações lineares relacionadas com a norma e o raio espectral das matrizes iteração. São também apresentadas propriedades de decomposições de uma matriz, destacando-se as que permitem estudar a convergência dessas mesmas decomposições e, consequentemente, dos métodos iterativos associados.

Caracterizam-se, ainda, dois tipos de decomposições de uma dada matriz que permitem, através do estudo da convergência dessas decomposições, analisar a monotonia dessa matriz.

Por fim, são comparados os raios espectrais de matrizes que resultam de duas decomposições regulares de uma matriz monótona, através dos teoremas de comparação.

3.1 Considerações Iniciais

Considere-se um sistema de equações lineares

$$Ax = b, \text{ com } A \in \mathbb{C}^{n\times n} \text{ e } x, b \in \mathbb{C}^{n\times 1}. \tag{3.1}$$

O vector solução x do sistema (3.1) existe em $\mathbb{C}^{n\times 1}$ sendo único sempre que a matriz A é não singular e dado explicitamente por

$$x = A^{-1}b.$$

Para determinar x, recorrendo a determinados métodos iterativos, é fornecida uma sucessão de vectores aproximando-se do vector solução x.

De uma forma geral, esses métodos iterativos partem de uma estimativa inicial, $x^{(0)}$, do vector solução gerando, posteriormente, uma sucessão de vectores $x^{(1)},\ x^{(2)},\ldots,x^{(k)},\ldots$ que se pretende venha a convergir para a solução exacta x ou seja

$$\lim_{k\to\infty} x^{(k)} = x,\ \ k \in \mathbb{N}_0,$$

onde $x^{(k)}$ representa a aproximação k da solução exacta x, como se define mais à frente.

Apresenta-se de seguida a definição de decomposição de uma matriz.

Definição 3.1 *Seja $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. A*

$$A = M - N, \tag{3.2}$$

com M, $N \in \mathbb{C}^{n\times n}$ e M não singular designa-se decomposição da matriz A.

Repare-se que decompondo, adequadamente, a matriz $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, na forma

$$A = M - N \tag{3.3}$$

onde M é uma matriz não singular, o sistema (3.1) pode ser reescrito da seguinte forma:

$$\begin{aligned} Mx &= Nx + b \\ x &= M^{-1}Nx + M^{-1}b \end{aligned}$$

obtendo-se, para $P = M^{-1}N$ e $c = M^{-1}b$,

$$x = Px + c. \tag{3.4}$$

Assim, constrói-se um processo iterativo que permite determinar $x^{(k+1)}$ a partir de $x^{(k)}$, da seguinte forma:

$$x^{(k+1)} = M^{-1}Nx^{(k)} + M^{-1}b,\ \ k \in \mathbb{N}_0. \tag{3.5}$$

Tendo em conta a forma como se obteve o método iterativo (3.5), também se diz que a decomposição (3.2) da matriz $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ está associada ao método iterativo (3.5).

Definição 3.2 *Designa-se método iterativo estacionário quando P e c de* (3.4) *não dependem de k. Caso contrário, o método iterativo designa-se por não estacionário.*

Para o estudo em questão, consideram-se apenas os métodos iterativos estacionários que, simplificadamente, se denominarão apenas por métodos iterativos.

Definição 3.3 *Designa-se por matriz iteração a matriz* $M^{-1}N$ *definida em* (3.5) .

Definição 3.4 *Designa-se por iteração k+1 ou aproximação k+1 de* x *a* $x^{(k+1)}$ *em* (3.5), $k \in \mathbb{N}_0$.

Definição 3.5 *Designa-se por erro da iteração k+1 a* $e^{(k+1)} = x - x^{(k+1)}$*,* $k \in \mathbb{N}_0$.

3.2 Convergência de Métodos Iterativos

Definição 3.6 *O método iterativo* (3.5) *designa-se por método iterativo convergente se para qualquer estimativa inicial* $x^{(0)}$ *e qualquer* $b \in \mathbb{C}^{n\times 1}$*, a sucessão* $x^{(1)},\ x^{(2)}, \ldots,$ *obtida em* (3.5) *convergir para um limite independente de* $x^{(0)}$*. Caso contrário, o método iterativo designa-se divergente.*

O método iterativo será então convergente se

$$\lim_{k\to\infty} e^{(k)} = 0.$$

Definição 3.7 *O método iterativo*

$$x^{(k+1)} = Px^{(k)} + c$$

designa-se consistente com $Ax = b$ *se este sistema e* $x = Px + c$ *possuirem a mesma solução.*

Para a análise feita neste trabalho, considera-se que todos os métodos iterativos referidos são consistentes com os respectivos sistemas do tipo $Ax = b$.

Apresentam-se de seguida alguns resultados que estabelecem determinadas condições para garantir a convergência de um método iterativo da forma (3.5).

Teorema 3.8 *[14] O método iterativo*

$$x^{(k+1)} = M^{-1}Nx^{(k)} + M^{-1}b, \quad k \in \mathbb{N}_0 \tag{3.6}$$

converge, qualquer que seja a aproximação inicial $x^{(0)}$ *se e só se* $\rho\left(M^{-1}N\right) < 1$.

Demonstração. Observe-se que da Definição 3.5, de (3.4) e de (3.5) ,

$$\begin{aligned} e^{(k+1)} &= x - x^{(k+1)} \\ &= M^{-1}N\left(x - x^{(k)}\right) \\ &= M^{-1}Ne^{(k)},\ k \in \mathbb{N}_0. \end{aligned}$$

Assim,

$$M^{-1}Ne^{(k)} = \left(M^{-1}N\right)^2 e^{(k-1)} = \dots$$

e portanto,

$$M^{-1}Ne^{(k)} = \left(M^{-1}N\right)^{k+1} e^{(0)}$$

ou seja

$$e^{(k+1)} = \left(M^{-1}N\right)^{k+1} e^{(0)}, \ \ k \in \mathbb{N}_0. \tag{3.7}$$

Condição necessária

Suponha-se que o método iterativo converge.

Assim

$$\lim_{k\to\infty} e^{(k+1)} = 0$$

e de (3.7),

$$\lim_{k\to\infty} \left(M^{-1}N\right)^{k+1} = O$$

logo, pela Definição 1.28, $M^{-1}N$ é convergente o que significa, pelo Teorema 1.29, que $\rho\left(M^{-1}N\right) < 1$.

Condição suficiente

Pelo Teorema 1.29, $M^{-1}N$ é matriz convergente o que, pela Definição 1.28, significa

$$\lim_{k\to\infty} \left(M^{-1}N\right)^k = O.$$

Assim, por (3.7)

$$\lim_{k\to\infty} e^{(k+1)} = 0 \quad \text{ou seja}$$

$$\lim_{k\to\infty} \left(x - x^{(k+1)}\right) = 0$$

o que significa que

$$\lim_{k\to\infty} x^{(k+1)} = x$$

ou seja, o método iterativo é convergente.

■

O próximo resultado apresenta uma condição suficiente para a convergência do método iterativo.

Teorema 3.9 *[14] Se para alguma norma matricial, $|||.|||$ se tem*

$$|||M^{-1}N||| < 1$$

então o método iterativo é convergente.

Demonstração. Do Teorema 1.20,

$$\left|\left|\left|\left(M^{-1}N\right)^k\right|\right|\right| \leq \left|\left|\left|M^{-1}N\right|\right|\right|^k, \text{ para qualquer norma matricial } |||.||| \text{ e qualquer } k \in \mathbb{N}.$$

Como $|||M^{-1}N||| < 1$ por hipótese,

$$\begin{aligned} \lim_{k\to\infty} \left|\left|\left|M^{-1}N\right|\right|\right|^k &= 0 \quad \text{e portanto} \\ \lim_{k\to\infty} \left|\left|\left|\left(M^{-1}N\right)^k\right|\right|\right| &= 0. \end{aligned}$$

o que permite concluir que o método iterativo (3.5) é convergente.

■

3.3 Exemplos

Uma vez que a matriz $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ pode ser associada a diferentes decomposições do tipo $M-N$, poderão ser considerados diferentes métodos iterativos na resolução do sistema (3.1).

3.3.1 Método Iterativo de Jacobi

Dado o sistema inicial,

$$Ax = b, \tag{3.8}$$

com $A = [a_{i,j}] \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $x = [x_1\ x_2 \cdots x_n]^T \in \mathbb{C}^{n\times 1}$ e $b \in \mathbb{C}^{n\times 1}$, considere-se a matriz A da seguinte forma:

$$A = D - E - F$$

onde

$$D = [d_{i,j}] = \begin{cases} 0 & , \text{ se } \ i \neq j \\ a_{i,j} & , \text{ se } \ i = j \end{cases},$$

$$E = [e_{i,j}] = \begin{cases} -a_{i,j} & , \text{ se } \ i > j \\ 0 & , \text{ se } \ i \leq j \end{cases} \quad \text{e}$$

$$F = [f_{i,j}] = \begin{cases} -a_{i,j} & , \text{ se } \ i < j \\ 0 & , \text{ se } \ i \geq j \end{cases},$$

com $i, j \in \{1, \ldots, n\}$.

A matriz D deverá ser não singular e portanto caso não o seja, procurar-se-á encontrar uma matriz semelhante, por transformação de semelhança.

Desta forma, o sistema inicial (3.1) é reescrito como

$$(D - E - F)\, x = b$$

ou seja,

$$x = D^{-1}(E + F)\, x + D^{-1} b$$

obtendo-se o seguinte esquema iterativo

$$x^{(k+1)} = D^{-1}(E + F)\, x^{(k)} + D^{-1} b, \;\; k \in \mathbb{N}_0$$

a partir do qual se poderá fazer a seguinte identificação

$$D^{-1}(E + F) = M^{-1} N \qquad \text{e} \qquad D^{-1} b = c.$$

Uma condição suficiente para a convergência do método de Jacobi relaciona-se com o conceito de diagonal estritamente dominante da matriz A.

Teorema 3.10 *[14] Se $A = [a_{i,j}] \in \mathbb{C}^{n\times n}$ for uma matriz de diagonal estritamente dominante por linhas (ou por colunas), então o método iterativo de Jacobi é convergente.*

Demonstração. Seja $M^{-1}N$ a matriz iteração do método de Jacobi.

Pelo Teorema de Geršgorin, Teorema 2.20, os valores próprios estão na reunião dos discos centrados na origem e de raio

$$R_i'\left(M^{-1}N\right) = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \left| -\frac{a_{i,j}}{a_{i,i}} \right| = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \left| \frac{a_{i,j}}{a_{i,i}} \right| = \frac{1}{|a_{i,i}|} \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{i,j}|\,, \;\; \text{para qualquer } i \in \{1, \ldots, n\}\,.$$

Por outro lado, como A é de diagonal estritamente dominante por linhas, por hipótese,

$$|a_{i,i}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{i,j}|\,, \;\; \text{para qualquer } i \in \{1, \ldots, n\}$$

e portanto

$$R_i'\left(M^{-1}N\right) < 1, \;\; \text{para qualquer } i \in \{1, \ldots, n\}\,.$$

Assim, $\rho\left(M^{-1}N\right) < 1$ concluindo-se, pelo Teorema 3.8, que o método iterativo de Jacobi é convergente nas condições apresentadas.

Dado que as matrizes A e A^T são semelhantes, fica provado o resultado para o caso de A ser uma matriz de diagonal estritamente dominante por colunas.

■

3.3.2 Método Iterativo de Gauss-Seidel

Em termos matriciais, considera-se para este método, a decomposição

$$A = D - E - F$$

onde as matrizes D, E e F são definidas como anteriormente.

De acordo com esta decomposição, o sistema inicial (3.1) é equivalente a

$$\begin{aligned} (D - E - F)\, x &= b \\ (D - E)\, x &= Fx + b \\ x &= (D - E)^{-1} Fx + (D - E)^{-1} b, \end{aligned}$$

sugerindo o esquema iterativo

$$x^{(k+1)} = (D - E)^{-1} Fx^{(k)} + (D - E)^{-1} b$$

através do qual se poderá fazer a seguinte identificação:

$$M^{-1}N = (D - E)^{-1} F \quad \text{e} \quad c = (D - E)^{-1} b.$$

Tal como sucede com o método de Jacobi, é possível estabelecer a mesma condição suficiente para garantir a convergência do método.

Teorema 3.11 *[14] Se $A = [a_{i,j}] \in \mathbb{C}^{n\times n}$ for uma matriz de diagonal estritamente dominante por linhas (ou por colunas), então o método iterativo de Gauss-Seidel é convergente.*

Demonstração. Seja $M^{-1}N = (D - E)^{-1} F \in \mathbb{C}^{n\times n}$ a matriz iteração do método iterativo de Gauss-Seidel, onde $D,\ E$ e $F \in \mathbb{C}^{n\times n}$ estão definidas como anteriormente.

Assim,

$$|||M^{-1}N||| = \max_{y\neq 0} \frac{||M^{-1}Ny||}{||y||},$$

para $y = [y_1 y_2 \cdots y_n]^T \in \mathbb{C}^{n\times 1}$, $y \neq 0$.

Para $z = M^{-1}Ny = [z_1 z_2 \cdots z_n]^T \in \mathbb{C}^{n\times 1}$ tem-se

$$Mz = Ny$$

ou seja

$$z_i = -\frac{\displaystyle\sum_{j=i+1}^{n} a_{i,j} y_j + \sum_{j=1}^{i-1} a_{i,j} z_j}{a_{i,i}},$$

com $a_{i,i} \neq 0$ e qualquer $i \in \{1, \ldots, n\}$ e portanto

$$\begin{aligned} |z_i| &\leq \sum_{j=i+1}^{n} \frac{|a_{i,j}|}{|a_{i,i}|} |y_j| + \sum_{j=1}^{i-1} \frac{|a_{i,j}|}{|a_{i,i}|} |z_j| \\ &\leq \sum_{j=i+1}^{n} \frac{|a_{i,j}|}{|a_{i,i}|} ||y||_\infty + \sum_{j=1}^{i-1} \frac{|a_{i,j}|}{|a_{i,i}|} ||z||_\infty , \end{aligned} \tag{3.9}$$

para qualquer $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Sejam $k \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $|z_k| = ||z||_\infty$, $\gamma_i = \sum_{j=i+1}^{n} \frac{|a_{i,j}|}{|a_{i,i}|} \in \mathbb{R}$ e $\alpha_i = \sum_{j=1}^{i-1} \frac{|a_{i,j}|}{|a_{i,i}|} \in \mathbb{R}$, com $a_{i,i} \neq 0$ e $i \in \{1, \ldots, n\}$.

De (3.9) vem

$$|z_i| \leq \gamma_i ||y||_\infty + \alpha_i ||z||_\infty , \; i \in \{1, \ldots, n\}$$

e portanto

$$|z_k| = ||z||_\infty \leq \gamma_k ||y||_\infty + \alpha_k ||z||_\infty$$

ou seja

$$||z||_\infty \leq \frac{\gamma_k}{1-\alpha_k} ||y||_\infty \leq \max_{i \in \{1,\ldots,n\}} \left(\frac{\gamma_i}{1-\alpha_i} \right) ||y||_\infty .$$

Como por hipótese, a matriz é de diagonal estritamente dominante por linhas,

$$||z||_\infty < ||y||_\infty$$

pois $1 - \alpha_i > \gamma_i, \; i \in \{1, \ldots, n\}$ e $y \in \mathbb{C}^{n \times 1}, \; y \neq 0$.

Conclui-se então que

$$|||M^{-1}N|||_\infty < 1,$$

ou seja, pelo Teorema 3.9 o método iterativo de Gauss-Seidel é convergente, nas condições apresentadas.

Analogamente se mostra que se $A = [a_{i,j}] \in \mathbb{C}^{n \times n}$ for uma matriz de diagonal estritamente dominante por colunas, então o método iterativo de Gauss-Seidel é convergente.

■

3.4 Decomposições Matriciais

Neste ponto são estudadas decomposições de uma matriz $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, por forma a estabelecer condições necessárias e suficientes para a convergência de matrizes iteração e, consequentemente, para a convergência dos respectivos métodos iterativos.

O estudo de decomposições de matrizes teve a sua origem através da teoria das decomposições regulares, introduzidas por Varga [16], em 1960, tendo sido estendido a outros tipos de decomposições pelo mesmo autor, em 1973. Alguns teoremas de comparação para decomposições regulares de matrizes monótonas, apresentados na parte final desta secção, têm contribuído para a análise da convergência de alguns métodos iterativos para a resolução de sistemas de equações lineares.

Definição 3.12 *Seja $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Uma decomposição da matriz A designa-se convergente se o respectivo método iterativo o for.*

Algumas propriedades gerais de uma decomposição $A = M - N$ (não necessariamente convergente), são dadas no próximo teorema.

Teorema 3.13 *[17] Seja $A = M - N$ uma decomposição de $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Se A é não singular então*

$$M^{-1}NA^{-1} = A^{-1}NM^{-1}, \tag{3.10}$$

as matrizes $M^{-1}N$ e $A^{-1}N$ comutam e as matrizes NM^{-1} e NA^{-1} comutam também.

Demonstração. Da Definição 3.1, tem-se

$$\begin{aligned} M^{-1} &= A^{-1}\left(I_n + NA^{-1}\right)^{-1} && (3.11)\\ & \quad e && (3.12)\\ M^{-1} &= \left(I_n + A^{-1}N\right)^{-1}A^{-1}. && (3.13)\end{aligned}$$

Multiplicando, à direita, ambos os termos da igualdade (3.11) por $I_n + NA^{-1}$ tem-se

$$\begin{aligned} A^{-1} &= M^{-1}\left(I_n + NA^{-1}\right)\\ &= M^{-1} + M^{-1}NA^{-1}, && (3.14)\end{aligned}$$

e multiplicando, à esquerda, ambos os termos da igualdade (3.13) por $I_n + A^{-1}N$ obtém-se

$$\begin{aligned} A^{-1} &= \left(I_n + A^{-1}N\right)M^{-1}\\ &= M^{-1} + A^{-1}NM^{-1}, && (3.15)\end{aligned}$$

e portanto (3.10) fica verificada.

Assim, usando a igualdade (3.10) e multiplicando por N à direita tem-se,

$$M^{-1}NA^{-1}N = A^{-1}NM^{-1}N. \tag{3.16}$$

Analogamente, multiplicando a igualdade (3.10) por N à esquerda obtém-se

$$NM^{-1}NA^{-1} = NA^{-1}NM^{-1},$$

concluindo-se o pretendido.

■

Do teorema anterior pode deduzir-se o seguinte resultado.

Corolário 3.14 *[17] Seja $A = M - N$ uma decomposição de $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Se A é matriz não singular então as matrizes $M^{-1}N$ e $A^{-1}N$ (ou NM^{-1} e NA^{-1}) têm os mesmos vectores próprios.*

Demonstração. Mostre-se que $M^{-1}N$ e $A^{-1}N$ têm os mesmos vectores próprios.

A prova de que NM^{-1} e NA^{-1} têm os mesmos vectores próprios é feita com argumentos análogos.

Como $A = M - N$,

$$M^{-1}N = (A+N)^{-1}N.$$

De (3.13),

$$M^{-1}N = \left(I_n + A^{-1}N\right)^{-1}\left(A^{-1}N\right). \tag{3.17}$$

Seja $x \neq 0$ um vector próprio de $A^{-1}N$ correspondente a um valor próprio $\lambda \in \sigma\left(A^{-1}N\right)$.

Assim,

$$\left(A^{-1}N\right)x = \lambda x$$

e portanto, de (3.17)

$$\left(M^{-1}N\right)x = \frac{\lambda}{1+\lambda}x \text{ , com } 1+\lambda \neq 0 \text{ e } x \neq 0. \tag{3.18}$$

Repare-se que $1+\lambda \neq 0$ é verificado uma vez que $1+\lambda$ é valor próprio de $I_n + A^{-1}N$, que é uma matriz não singular.

Assim, de (3.18) conclui-se que $x \neq 0$ é também vector próprio de $M^{-1}N$ correspondente ao valor próprio $\gamma \in \sigma\left(M^{-1}N\right)$ da forma:

$$\gamma = \frac{\lambda}{1+\lambda}\ ,\ \ \lambda \in \sigma\left(A^{-1}N\right). \tag{3.19}$$

■

A partir da relação (3.19) estabelecida entre os valores próprios das matrizes $M^{-1}N$ e $A^{-1}N$, enuncia-se o seguinte corolário.

Corolário 3.15 *[17] Seja $A = M - N$ uma decomposição de $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Se A é matriz não singular e γ_r e λ_r são valores próprios das matrizes $M^{-1}N$ e $A^{-1}N$, respectivamente, então*

$$\gamma_r = \frac{\lambda_r}{1+\lambda_r},\ r \in \{1,\ldots,n\}. \tag{3.20}$$

Nas condições do Corolário 3.15 e pela relação determinada em (3.20), pode concluir-se o seguinte resultado.

Corolário 3.16 *[17] Seja $A = M - N$ uma decomposição de $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Se A é matriz não singular e γ_r e λ_r são valores próprios das matrizes $M^{-1}N$ e $A^{-1}N$, respectivamente, com*

$$\gamma_r = \frac{\lambda_r}{1+\lambda_r},\ r \in \{1,\ldots,n\}, \tag{3.21}$$

então se $\lambda_r \in \mathbb{R}$, $\gamma_r \in \mathbb{R}$ (e vice-versa) e se $\lambda_r \in \mathbb{C}$ então $\gamma_r \in \mathbb{C}$ (e vice-versa).

Os próximos resultados permitem estudar a convergência de decomposições matriciais e, consequentemente, dos métodos iterativos associados.

Teorema 3.17 *[17] Sejam $A = M - N$ uma decomposição de $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, onde A é matriz não singular, γ_r e λ_r são valores próprios das matrizes $M^{-1}N$ e $A^{-1}N$ respectivamente, e suponha-se que o espectro da matriz $A^{-1}N$ é complexo, onde*

$$\lambda_r = a_r + b_r i \in \sigma\left(A^{-1}N\right) \tag{3.22}$$

e

$$\lambda_{r+1} = a_r - b_r i \in \sigma\left(A^{-1}N\right).$$

Então a decomposição anterior é convergente se e só se

$$\left[\frac{a_r(1+a_r)+b_r^2}{(1+a_r)^2+b_r^2}\right]^2 + \left[\frac{b_r}{(1+a_r)^2+b_r^2}\right]^2 < 1, \tag{3.23}$$

$a_r, b_r \in \mathbb{R}$, para qualquer $r \in \{1,3,5,\ldots,n-1\}$.

Demonstração. Pela relação (3.20),

$$\gamma_r = \frac{\lambda_r}{1+\lambda_r},\ r \in \{1,\ldots,n\}$$

onde $\gamma_r \in \sigma\left(M^{-1}N\right)$ e $\lambda_r \in \sigma\left(A^{-1}N\right)$.

Assim, por (3.22), reescreve-se

$$\begin{aligned}\gamma_r &= \frac{a_r + b_r i}{1 + a_r + b_r i} \\ &= \frac{a_r(1+a_r) + b_r^2}{(1+a_r)^2 + b_r^2} + \frac{b_r}{(1+a_r)^2 + b_r^2} i\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\gamma_{r+1} &= \frac{a_r - b_r i}{1 + a_r - b_r i} \\ &= \frac{a_r(1+a_r) + b_r^2}{(1+a_r)^2 + b_r^2} - \frac{b_r}{(1+a_r)^2 + b_r^2} i.\end{aligned}$$

Ora a decomposição é convergente se e só se

$$\rho\left(M^{-1}N\right) < 1, \tag{3.24}$$

ou seja

$$\begin{aligned}&\max_{\gamma_r \in \sigma(M^{-1}N)} \left\{ \sqrt{\left[\frac{a_r(1+a_r) + b_r^2}{(1+a_r)^2 + b_r^2}\right]^2 + \left[\frac{b_r}{(1+a_r)^2 + b_r^2}\right]^2} \right\} \\ &< 1, \text{ para qualquer } r \in \{1, 3, 5, \ldots, n-1\}\end{aligned} \tag{3.25}$$

e portanto,

$$\left[\frac{a_r(1+a_r) + b_r^2}{(1+a_r)^2 + b_r^2}\right]^2 + \left[\frac{b_r}{(1+a_r)^2 + b_r^2}\right]^2 < 1, \tag{3.26}$$

para qualquer $r \in \{1, 3, 5, \ldots, n-1\}$, ficando garantida a equivalência das condições de convergência da decomposição e da desigualdade (3.26).

■

De seguida apresentam-se dois casos particulares do teorema anterior.

Corolário 3.18 *[17] Seja $A = M - N$ uma decomposição de $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ onde A é matriz não singular e γ_r e λ_r são valores próprios das matrizes $M^{-1}N$ e $A^{-1}N$ respectivamente. Se o espectro de $A^{-1}N$ é real, então a decomposição é convergente se e só se*

$$\lambda_r > -\frac{1}{2}, \text{ para qualquer } r \in \{1, \ldots, n\}.$$

Demonstração. *Condição necessária*

A decomposição é convergente se $\rho\left(M^{-1}N\right) < 1$ ou seja

$$|\gamma_r| < 1, \text{ para qualquer } \gamma_r \in \sigma\left(M^{-1}N\right), \text{ e portanto, para } \lambda_r \in \sigma\left(A^{-1}N\right),$$

$$-1 < \frac{\lambda_r}{1+\lambda_r} < 1$$

concluindo-se que

$$\lambda_r > -\frac{1}{2}, \quad \text{para qualquer } r \in \{1, ..., n\}.$$

Condição suficiente

Trivial.

■

Corolário 3.19 *[17] Sejam $A = M - N$ uma decomposição de $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, onde A é matriz não singular e γ_r e λ_r valores próprios das matrizes $M^{-1}N$ e $A^{-1}N$ respectivamente. Se o espectro de $A^{-1}N$ é complexo e contém os imaginários puros*

$$\begin{aligned} \lambda_r &= b_r i \\ \lambda_{r+1} &= -b_r i \end{aligned}$$

então a decomposição é convergente.

Demonstração. Para este caso, de (3.23) tem-se,

$$\frac{b_r^2}{1+b_r^2} < 1, \text{ para qualquer } b_r \in \mathbb{R}$$

o que pelo Teorema 3.17, implica a convergência da decomposição da matriz $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$.

■

Na análise de convergência de métodos iterativos, a teoria de Perron-Frobenius para matrizes não negativas representa um papel muito importante. Esta teoria fornece, como já se viu no Capítulo 2, resultados que dizem respeito aos valores próprios e vectores próprios de matrizes não negativas. Assim, considerando uma decomposição de $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $A = M - N \in \mathbb{R}^{n\times n}$ onde A e M são não singulares e se $M^{-1}N$ e $A^{-1}N$ forem não negativas temos a garantia que essa decomposição é convergente. Apresenta-se então o seguinte teorema.

Teorema 3.20 *[17] Seja $A = M - N$ uma decomposição da matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ onde A é matriz não singular. Se ambas as matrizes $M^{-1}N$ e $A^{-1}N$ são não negativas, então a decomposição é convergente e*

$$\rho\left(M^{-1}N\right) = \frac{\rho\left(A^{-1}N\right)}{1+\rho\left(A^{-1}N\right)}.$$

Mais, todos os valores próprios $\lambda_r = a_r + b_r i \in \mathbb{C}$ da matriz $A^{-1}N$ se existirem, satisfazem a desigualdade

$$\left[\frac{a_r(1+a_r)+b_r^2}{(1+a_r)^2+b_r^2}\right]^2 + \left[\frac{b_r}{(1+a_r)^2+b_r^2}\right]^2 \leq \rho^2\left(M^{-1}N\right) < 1 \tag{3.27}$$

e todos os valores próprios $\lambda_t \in \mathbb{R}$ da matriz $A^{-1}N$, se existirem, satisfazem a desigualdade

$$-\frac{\rho\left(M^{-1}N\right)}{1+\rho\left(M^{-1}N\right)} \leq \lambda_t \leq \frac{\rho\left(M^{-1}N\right)}{1-\rho\left(M^{-1}N\right)}.$$

Demonstração. Como $M^{-1}N$ e $A^{-1}N$ são matrizes não negativas, pelo Teorema 2.19, Teorema de Perron-Frobenius para matrizes não negativas, conclui-se que

$$\rho\left(M^{-1}N\right) = \gamma_1 \in \sigma\left(M^{-1}N\right)$$

e

$$\rho\left(A^{-1}N\right) = \lambda_1 \in \sigma\left(A^{-1}N\right)$$

onde γ_1 e λ_1 são valores próprios não negativos das respectivas matrizes.

Por outro lado, as condições do Corolário 3.15 são verificadas e, portanto a igualdade (3.20) é válida para qualquer valor próprio e tem-se

$$\rho\left(M^{-1}N\right) = \frac{\rho\left(A^{-1}N\right)}{1+\rho\left(A^{-1}N\right)} < 1.$$

Assim, a decomposição da matriz A é convergente.

Como $|\gamma_r| \leq \gamma_1 = \rho\left(M^{-1}N\right)$, para qualquer $r \in \{2, \ldots, n\}$ então os valores próprios complexos de $A^{-1}N$ satisfazem a desigualdade (3.27).

No caso dos valores próprios reais λ_t de $A^{-1}N$, pelo Corolário 3.18 tem-se que $\lambda_t > -\frac{1}{2}$ ou seja $1 + \lambda_t > 0$. Mais, da desigualdade

$$|\gamma_t| \leq \gamma_1, \text{ para qualquer } t \in \{1, \ldots, n\},$$

e, ainda, da igualdade (3.20) pode-se escrever

$$-\rho\left(M^{-1}N\right) \leq \gamma_t = \frac{\lambda_t}{1+\lambda_t} \leq \rho\left(M^{-1}N\right) \tag{3.28}$$

que é equivalente a

$$-\frac{\rho\left(M^{-1}N\right)}{1+\rho\left(M^{-1}N\right)} \leq \lambda_t \leq \frac{\rho\left(M^{-1}N\right)}{1-\rho\left(M^{-1}N\right)}, \ t \in \{1, \ldots, n\}.$$

$\blacksquare$

3.4.1 Decomposições Regulares, Decomposições Regulares Fracas e Monotonia

Nesta secção apresentam-se caracterizações de dois tipos de decomposições de uma matriz relacionadas com propriedades espectrais das matrizes iteração e com a monotonia da matriz. Algumas dessas caracterizações vão permitir estudar a convergência dos respectivos métodos iterativos, o que é equivalente a estudar a convergência das decomposições.

Até agora, algumas das decomposições matriciais estudadas referiam-se a matrizes com entradas em $\mathbb{C}$. Nesta secção, serão estudadas decomposições regulares e decomposições regulares fracas de matrizes reais.

Define-se, então, decomposição regular e decomposição regular fraca de uma dada matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

Definição 3.21 *Sejam* A, M, $N \in \mathbb{R}^{n\times n}$. *Então a decomposição* $A = M - N$ *é designada*

a) decomposição regular de A *se* M *é não singular com* $M^{-1} \geq O$, *isto é se* M *é matriz monótona e* $N \geq O$;

b) decomposição regular fraca de A *se* M *é não singular com* $M^{-1} \geq O$, *isto é se* M *é matriz monótona e* $M^{-1}N \geq O$.

Observe-se, através do seguinte exemplo, que apesar de uma decomposição regular de $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ser uma decomposição regular fraca de A, o recíproco não é verdadeiro em geral.

Exemplo 3.22 *Seja* $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ *da seguinte forma:*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} = M - N = \begin{bmatrix} 1 & -(1+\epsilon) \\ -\frac{1}{2} & 1+\epsilon \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -\epsilon \\ 0 & \epsilon \end{bmatrix}, \quad \epsilon \in \left]0, \frac{1}{3}\right[. \tag{3.29}$$

Desta forma, M *é não singular e* M^{-1} *é dada por:*

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ \frac{1}{1+\epsilon} & \frac{2}{1+\epsilon} \end{bmatrix} \geq O.$$

Por outro lado,

$$M^{-1}N = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{\epsilon}{1+\epsilon} \end{bmatrix} \geq O,$$

concluindo-se que a decomposição (3.29) *é decomposição regular fraca de* A.

Repare-se também que (3.29) *não é decomposição regular de* A *pois não se verifica* $N \geq O$.

Estudar-se-ão resultados sobre decomposições regulares que, posteriormente, serão estendidos a decomposições regulares fracas.

O próximo teorema garante que uma decomposição regular de uma matriz monótona é convergente.

Teorema 3.23 *[16] Seja $A = M - N \in \mathbb{R}^{n \times n}$ uma decomposição regular da matriz A. Então, A é monótona se e só se $\rho\left(M^{-1}N\right) < 1$ onde*

$$\rho\left(M^{-1}N\right) = \frac{\rho\left(A^{-1}N\right)}{1 + \rho\left(A^{-1}N\right)}. \tag{3.30}$$

Demonstração. *Condição necessária*

Por hipótese, como $A = M - N \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é uma decomposição regular da matriz A, $M^{-1} \geq O$ e $N \geq O$ logo $M^{-1}N \geq O$. Por outro lado, dado que A é monótona verifica-se também $A^{-1}N \geq O$. Assim, pelo Teorema 3.20 obtém-se o pretendido.

Condição suficiente

Como $A = M - N$ é decomposição regular de A, M é não singular com $M^{-1} \geq O$ e $N \geq O$.

Assim,

$$M^{-1}A = I_n - M^{-1}N\ ,$$

onde $M^{-1}N \geq O$, pela Proposição 2.1.

Suponha-se que $\rho\left(M^{-1}N\right) < 1$.

Tendo em conta que

$$A = M\left(I_n - M^{-1}N\right), \tag{3.31}$$

conclui-se que A é matriz não singular uma vez que M e $I_n - M^{-1}N$ são matrizes não singulares.

Prove-se agora que $A^{-1} \geq O$.

Pelo Teorema 2.42, uma vez que $M^{-1}N \geq O$ e $\rho\left(M^{-1}N\right) < 1$, $I_n - M^{-1}N$ é não singular e

$$\left(I_n - M^{-1}N\right)^{-1} \geq O.$$

Por outro lado, de (3.31),

$$A^{-1} = \left(I_n - M^{-1}N\right)^{-1} M^{-1} \geq O, \tag{3.32}$$

pela Proposição 2.1.

■

O Teorema 3.27 permitirá estabelecer uma condição necessária e suficiente para a monotonia de $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, quando a decomposição de uma matriz PA, com $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ não singular e não negativa é regular fraca, relacionada com a convergência do respectivo método iterativo.

O próximo lema, útil na demonstração de teoremas que se irão apresentar, refere que o produto de matrizes monótonas é também uma matriz monótona.

Lema 3.24 *O produto de duas matrizes monótonas é, ainda, uma matriz monótona.*

Demonstração. Sejam A, $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ duas matrizes monótonas.

Assim, A e B são não singulares, $A^{-1} \geq O$ e $B^{-1} \geq O$, pelo Teorema 2.43.

Desta forma, $AB \in \mathbb{R}^{n\times n}$ é não singular e

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} \geq O$$

pela Proposição 2.1, o que garante que AB é monótona.

■

Lema 3.25 *[2] Uma matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ é monótona se e só se existem matrizes não negativas P, Q tais que PAQ é monótona.*

Demonstração. *Condição necessária*

Suponha-se que A é matriz monótona.

Escolhendo $P = Q = I_n$, tem-se que $P \geq O$, $Q \geq O$ e

$$PAQ = A,$$

concluindo-se que PAQ é monótona.

Condição suficiente

Suponha-se agora que a matriz PAQ é monótona com $P \geq O$ e $Q \geq O$.

Assim, $(PAQ)^{-1} \geq O$ e

$$A^{-1} = Q\,(PAQ)^{-1}\,P \geq O, \quad \text{pela Proposição 2.1.}$$

■

Observação 3.26 *Repare-se que, da mesma forma, e para a mesma escolha, PQA e APQ são também matrizes monótonas.*

Teorema 3.27 *[2] Sejam $A,\ P \in \mathbb{R}^{n\times n}$. A seguinte decomposição regular fraca*

$$PA = M - N, \tag{3.33}$$

onde P é não singular e não negativa, é convergente se e só se A é matriz monótona.

Demonstração. *Condição necessária*

Suponha-se que a decomposição (3.33) é convergente.

Desta forma, pela Definição 3.12 e pelo Teorema 3.8,

$$\rho\left(M^{-1}N\right) < 1.$$

Assim, e dado que $M^{-1}N \geq O$, o Teorema 2.42 implica a monotonia de

$$I_n - M^{-1}N = M^{-1}PA. \tag{3.34}$$

Pelo Lema 3.25 e, em particular, pela Observação 3.26, A é monótona dado que $M^{-1} \geq O$ e $P \geq O$.

Condição suficiente

Considere-se que $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ é matriz monótona.

Pela Observação 2.50, garante-se a existência de um vector positivo $v = [v_1 \cdots v_n]^T \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ tal que

$$Av > 0.$$

De (3.34), dado que $P \geq O$ e $M^{-1} \geq O$,

$$\left(I_n - M^{-1}N\right) v = M^{-1}PAv > 0, \text{ com } v > 0. \tag{3.35}$$

Considerando

$$V = diag\left(v_1, \ldots, v_n\right), \tag{3.36}$$

tem-se, obviamente,

$$V\xi = v,$$

para $\xi = [1 \cdots 1]^T \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ e, portanto, de (3.35),

$$\begin{aligned} \left(I_n - M^{-1}N\right) V\xi &= M^{-1}PAv \\ V^{-1}\left(I_n - M^{-1}N\right) V\xi &= V^{-1}M^{-1}PAv \end{aligned} \tag{3.37}$$

concluindo-se que,

$$\left(I_n - V^{-1}M^{-1}NV\right)\xi = V^{-1}M^{-1}PAv > 0. \tag{3.38}$$

Assim, tem-se

$$\left|\left|\left|V^{-1}M^{-1}NV\right|\right|\right|_{\infty} < 1.$$

Por outro lado, pela semelhança das matrizes $M^{-1}N$ e $V^{-1}M^{-1}NV$ e pela Proposição 1.24,

$$\begin{aligned}\rho\left(M^{-1}N\right) &= \rho\left(V^{-1}M^{-1}NV\right) \\ &\leq \left|\left|\left|V^{-1}M^{-1}NV\right|\right|\right|_{\infty} \\ &< 1\ ,\end{aligned}$$

concluindo-se, finalmente, pela Definição 3.12, que a decomposição regular fraca (3.33) será convergente.

■

Apesar da indiscutível utilidade do Teorema 3.27 no estudo da monotonia de matrizes, será mais conveniente, na prática, a utilização dos seguintes resultados que apenas se referem a determinadas condições suficientes.

Teorema 3.28 *[2] Sejam $A,\ P,\ Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e*

$$PAQ = M - N \tag{3.39}$$

uma decomposição regular fraca com P e Q matrizes não negativas e não singulares. Então A é matriz monótona se existe um vector positivo $v = [v_1 \cdots v_n]^T \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ tal que ou

$$M^{-1}PAQv > 0$$

ou

$$v^T M^{-1}PAQ > 0.$$

Demonstração. Pelo Lema 3.25, a monotonia de A é equivalente à monotonia de PAQ com $P \geq O$ e $Q \geq O$ e pelo Teorema 3.27, para $Q = I_n$, a matriz A é monótona se $\rho\left(M^{-1}N\right) < 1$.

Suponha-se então que existe $v > 0$ tal que

$$M^{-1}PAQv > 0.$$

Assim, de (3.39), e porque $M^{-1}N \geq O$,

$$0 \leq M^{-1}Nv = \left(I_n - M^{-1}PAQ\right)v < v,$$

e, para $V = diag\,(v_1, \ldots, v_n)$ com $V\xi = v$ e $\xi = [1 \cdots 1]^T \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ tem-se,

$$0 \leq M^{-1}NV\xi < V\xi$$

ou seja

$$0 \leq V^{-1}M^{-1}NV\xi < \xi$$

o que significa que

$$\left|\left|\left|V^{-1}M^{-1}NV\right|\right|\right|_\infty < 1.$$

Tendo em conta a semelhança das matrizes $V^{-1}M^{-1}NV$ e $M^{-1}N$ e pela Proposição 1.24,

$$1 > \left|\left|\left|V^{-1}M^{-1}NV\right|\right|\right|_\infty \geq \rho\left(V^{-1}M^{-1}NV\right) = \rho\left(M^{-1}N\right)$$

e portanto, pelo Teorema 3.27, A é matriz monótona.

Analogamente, considerando a existência de $v > 0$ tal que

$$v^T M^{-1}PAQ > 0,$$

vem

$$0 \leq v^T M^{-1}N = v^T\left(I_n - M^{-1}PAQ\right) < v^T$$

donde

$$\xi^T V M^{-1}NV^{-1} < \xi^T$$

ou seja,

$$\left|\left|\left|VM^{-1}NV^{-1}\right|\right|\right|_1 < 1$$

e portanto, tendo em conta a Proposição 1.24,

$$1 > \left|\left|\left|VM^{-1}NV^{-1}\right|\right|\right|_1 \geq \rho\left(VM^{-1}NV^{-1}\right) = \rho\left(M^{-1}N\right),$$

concluindo-se, pelo Teorema 3.27, que $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ é matriz monótona.

■

Do Teorema 3.28, pode deduzir-se um critério de comparação de monotonia.

Corolário 3.29 *[2] Sejam $A,\ B_1,\ B_2 \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tais que*

$$B_1 \leq A \leq B_2 \tag{3.40}$$

onde B_1 e B_2 são matrizes monótonas.

Então A é monótona e

$$B_2^{-1} \leq A^{-1} \leq B_1^{-1}. \tag{3.41}$$

Em particular,

$$|||B_2^{-1}|||_\infty \leq |||A^{-1}|||_\infty \leq |||B_1^{-1}|||_\infty .$$

Demonstração. Prove-se, em primeiro lugar, que A é matriz monótona.

A partir de (3.40), pode construir-se a seguinte decomposição regular de A,

$$A = B_2 - R_2 \tag{3.42}$$

com $R_2 \geq O$ e B_2 monótona por hipótese.

Assim, pelo Teorema 3.28, bastará encontrar um vector positivo $v = [v_1 \cdots v_n]^T \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ tal que,

$$B_2^{-1}Av > 0$$

ou seja dada a monotonia de B_2, $B_2^{-1} \geq O$ pelo Teorema 2.43, e portanto procura-se $v > 0$ tal que

$$Av > 0.$$

Em particular, pela Observação 2.50, existe $v > 0$ tal que

$$B_1 v > 0$$

e, dado que $B_1 \leq A$ conclui-se

$$0 < B_1 v \leq Av,$$

ou seja A monótona.

Mostre-se agora que

$$B_2^{-1} \leq A^{-1}.$$

De (3.42) tem-se

$$A^{-1} = \left(I_n - B_2^{-1}R_2\right)^{-1} B_2^{-1},$$

onde $B_2^{-1}R_2 \geq O$ e, pelo Teorema 3.27, para $P = I_n$,

$$\rho\left(B_2^{-1}R_2\right) < 1$$

o que implica que, pelo Teorema 2.41,

$$\left(I_n - B_2^{-1}R_2\right)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(B_2^{-1}R_2\right)^k \geq I_n.$$

Assim, $A^{-1} \geq B_2^{-1}$.

Para mostrar que $A^{-1} \leq B_1^{-1}$ procede-se de forma semelhante.

Por fim, a partir de (3.41), tendo em conta a monotonia das matrizes $A,\ B_1,\ B_2 \in \mathbb{R}^{n\times n}$ conclui-se facilmente que

$$|||B_2^{-1}|||_\infty \leq |||A^{-1}|||_\infty \leq |||B_1^{-1}|||_\infty .$$

■

De seguida, estudam-se resultados que apresentam condições suficientes para a monotonia de determinadas classes de matrizes muito específicas relacionadas com as aplicações que serão estudadas no Capítulo 4 deste trabalho.

O próximo lema será necessário para a demonstração do Teorema 3.31.

Lema 3.30 *[2] Seja $U = [u_{i,j}] \in \mathbb{R}^{n\times n}$ uma matriz triangular superior da forma*

$$\begin{aligned} u_{i,i} &= x, \quad i \in \{1,\ldots,n\} \\ u_{i,i+1} &= -y, \quad i \in \{1,\ldots,n-1\} \\ u_{i,i+2} &= z, \quad i \in \{1,\ldots,n-2\} \\ u_{i,j} &= 0, \quad j < i \text{ ou } j \geq i+3, \end{aligned}$$

onde $x,\ y,\ z > 0$ e $y^2 \geq 4xz$. Então U é monótona.

Demonstração. Seja $U \in \mathbb{R}^{n\times n}$ uma matriz triangular superior nas condições apresentadas.

Para mostrar a monotonia de U considerem-se $V,\ W \in \mathbb{R}^{n\times n}$ matrizes triangulares superiores onde

$$\begin{aligned} W &= T(0, r, -1), \ r > 0 \\ V &= T(0, \delta, -\gamma), \ \delta, \gamma > 0. \end{aligned}$$

Obtém-se então

$$VW = F(0, 0, \delta r, -\delta - \gamma r, \gamma), \ r, \delta, \gamma > 0.$$

Escolham-se os parâmetros r, δ, γ de tal forma que $VW = U$.

Obtém-se, então, o sistema de equações

$$\delta r = x \wedge \ \delta + \gamma r = y \ \wedge \gamma = z,$$

a partir do qual se obtém $\delta = \frac{x}{r}$ onde r é a raiz da equação quadrática

$$zr^2 - yr + x = 0$$

que apenas terá soluções reais positivas se $y^2 \geq 4xz$.

Sejam λ_W e λ_V valores próprios das matrizes W e V, respectivamente.

Assim,

$$\lambda_W = r > 0 \ \text{ e } \ \lambda_V = \delta > 0.$$

Logo, pelo Teorema 2.49, W e V são matrizes monótonas.

Desta forma, pelo Lema 3.24, VW é matriz monótona, ou seja U é matriz monótona.

■

Teorema 3.31 *[2] Seja $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ uma matriz pentadiagonal simétrica da forma*

$$A = F(\gamma, -\beta, \alpha, -\beta, \gamma),$$

com $\alpha,\ \beta,\ \gamma > 0$ e

$$\frac{\alpha + 2\gamma}{2} \geq \beta \geq 2\,(\alpha+\gamma)\sqrt{\frac{\gamma}{\alpha}}. \tag{3.43}$$

Então A é monótona.

Demonstração. Para mostrar a monotonia da matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, mostre-se que são verificadas as condições de hipótese do Teorema 3.28.

Assim, mostre-se, em primeiro lugar, que existe uma decomposição regular fraca de A.

Para tal, considere-se a matriz monótona $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tal que $A \leq M$ e

$$M = U^T \left[diag\,(\alpha, \ldots, \alpha)\right]^{-1} U \in \mathbb{R}^{n\times n},$$

onde

$$U = F\,(0, 0, \alpha, -y, \gamma) \in \mathbb{R}^{n\times n},\ \ \alpha,\ y, \gamma > 0$$

e

$$U^T = F\,(\gamma, -y, \alpha, 0, 0) \in \mathbb{R}^{n\times n},\ \ \alpha,\ y, \gamma > 0\ .$$

Repare-se que ao garantir $A \leq M$ nas condições apresentadas, garante-se também que

$$A = M - N$$

para alguma matriz $N \in \mathbb{R}^{n\times n},\ N \geq O$ com M não singular, $M^{-1} \geq O$ e $M^{-1}N \geq O$.

Pelo Lema 3.30, a matriz U é monótona se se verificar

$$y^2 \geq 4\alpha\gamma. \tag{3.44}$$

Assim,

$$M = \begin{bmatrix} \alpha & -y & \gamma & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ -y & \frac{y^2+\alpha^2}{\alpha} & -\frac{y\gamma+y\alpha}{\alpha} & \gamma & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \gamma & -\frac{y\gamma+y\alpha}{\alpha} & \frac{\gamma^2+y^2+\alpha^2}{\alpha} & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \gamma & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \frac{\gamma^2+y^2+\alpha^2}{\alpha} & -\frac{y\gamma+y\alpha}{\alpha} & \gamma \\ \vdots & \vdots & \cdots & \cdots & \ddots & -\frac{y\gamma+y\alpha}{\alpha} & \frac{y^2+\alpha^2}{\alpha} & -y \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \gamma & -y & \alpha \end{bmatrix},$$

concluindo-se que

$$M \geq F\left(\gamma, -y\left(1+\frac{\gamma}{\alpha}\right), \alpha, -y\left(1+\frac{\gamma}{\alpha}\right), \gamma\right) \geq F(\gamma, -\beta, \alpha, -\beta, \gamma) = A$$

desde que se verifique (3.44) e

$$\beta \geq y\left(1+\frac{\gamma}{\alpha}\right) \geq 2\sqrt{\frac{\gamma}{\alpha}}\,(\alpha+\gamma).$$

Por outro lado, as matrizes U^T, $[diag\,(\alpha, \ldots, \alpha)]^{-1}$ e U são monótonas o que, pelo Lema 3.24, implica que a matriz M seja monótona.

Seja $g = [g_1 \cdots g_n]^T \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ com $g_i = i\,(n-i+1)\,,\ i \in \{1, \ldots, n\}$. Assim,

$$g_i > 0, \text{ para qualquer } i \in \{1, \ldots, n\}.$$

Para mostrar que $Ag > 0$, considere-se a matriz A escrita da seguinte forma

$$A = T\,(-\beta, 2\beta, -\beta) + diag\,(\alpha - 2\beta, \ldots, \alpha - 2\beta) + F\,(\gamma, 0, 0, 0, \gamma)\,, \text{ com } \alpha,\ \beta,\ \gamma > 0$$

e

$$Ag = \beta T\,(-1, 2, -1)\,g + diag\,(\alpha - 2\beta, \ldots, \alpha - 2\beta)\,g + F\,(\gamma, 0, 0, 0, \gamma)\,g. \tag{3.45}$$

De (3.43), tem-se

$$\frac{\alpha}{2} + \gamma \geq (2\alpha + 2\gamma)\sqrt{\frac{\gamma}{\alpha}}$$

o que permite concluir que $\alpha > \gamma$.

Além disso, dado que

$$\frac{\alpha}{2} + \gamma \geq \left(2 + 2\frac{\gamma}{\alpha}\right) \sqrt{\alpha\gamma},$$

obtém-se

$$\alpha + \gamma > 2\sqrt{\alpha\gamma}.$$

Assim, novamente de (3.43) , tem-se

$$\beta > 4\gamma. \tag{3.46}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} g_{i-2} &= (i-2)(n-i+3) \quad \text{e} \\ g_{i+2} &= (i+2)(n-i-1), \ i \in \{3, \ldots, n-2\}. \end{aligned}$$

Assim,

$$g_{i-2} + g_{i+2} = 2i(n-i+1) - 8 = 2g_i - 8, \ i \in \{3, \ldots, n-2\}.$$

Tem-se também, a partir da definição do vector $g \in \mathbb{R}^{n\times 1}$, que

$$T(-1, 2, -1)\, g = 2\xi,$$

para $\xi = [1 \cdots 1]^T \in \mathbb{R}^{n\times 1}$.

De (3.45) e (3.46) vem, para $\xi = [1 \cdots 1]^T \in \mathbb{R}^{n\times 1}$,

$$Ag \geq 2(\beta - 4\gamma)\,\xi + (\alpha + 2\gamma - 2\beta)\, g > 0.$$

Como $Ag > 0$, também $M^{-1}Ag > 0$, logo pelo Teorema 3.28, A é monótona.

■

3.4.2 Teoremas de Comparação

Considerem-se agora duas decomposições regulares de uma matriz monótona $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$,

$$A = M_1 - N_1 = M_2 - N_2,$$

com $M_1,\ M_2,\ N_1,\ N_2 \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

Comparam-se os raios espectrais das matrizes $M_1^{-1}N_1$ e $M_2^{-1}N_2$ através dos designados teoremas de comparação.

Lema 3.32 *[16] Seja $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e*

$$A = M_1 - N_1 = M_2 - N_2 \tag{3.47}$$

duas decomposições regulares da matriz A onde A é monótona. Assim, se $N_2 \geq N_1$ então $M_1^{-1} \geq M_2^{-1}$.

Demonstração. Uma vez que $N_2 \geq N_1$ então $N_2 - N_1 \geq O$.

Por outro lado, por (3.47),

$$N_2 - N_1 = M_2 - M_1 \geq O.$$

Como por hipótese, (3.47) são decomposições regulares da matriz A, M_1 e M_2 são matrizes não singulares com

$$M_1^{-1} \geq O \text{ e } M_2^{-1} \geq O \tag{3.48}$$

e portanto

$$M_2 - M_1 = M_1 \left(M_1^{-1} - M_2^{-1}\right) M_2 \geq O.$$

Assim, por (3.48),

$$M_1^{-1} M_1 \left(M_1^{-1} - M_2^{-1}\right) M_2 M_2^{-1} \geq O.$$

Logo

$$\begin{aligned} M_1^{-1} - M_2^{-1} &\geq O \text{ ou seja} \\ M_1^{-1} &\geq M_2^{-1}. \end{aligned}$$

■

O próximo teorema representa um primeiro tipo de teorema de comparação, desenvolvido por *Woznicki, [17],* em 1994.

Teorema 3.33 *[17] Seja $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e*

$$A = M_1 - N_1 = M_2 - N_2$$

duas decomposições regulares de A, onde A é uma matriz monótona. Se $M_1^{-1} \geq M_2^{-1}$ então,

$$0 \leq \rho\left(M_1^{-1}N_1\right) \leq \rho\left(M_2^{-1}N_2\right) < 1$$

Em particular, se $M_1^{-1} > M_2^{-1}$ e $A^{-1} > O$, então

$$0 < \rho\left(M_1^{-1}N_1\right) < \rho\left(M_2^{-1}N_2\right) < 1.$$

Demonstração. Uma vez que $M_1^{-1} \geq M_2^{-1} \geq O$,

$$(A + N_1)^{-1} \geq (A + N_2)^{-1} \geq O,$$

o que permite concluir que

$$A^{-1}N_2A^{-1} \geq A^{-1}N_1A^{-1} \geq O. \tag{3.49}$$

Além disso, uma vez que por hipótese, $N_1 \geq O$ e $N_2 \geq O$, tem-se de (3.49),

$$A^{-1}N_2A^{-1}N_1 \geq \left(A^{-1}N_1\right)^2 \geq O \tag{3.50}$$

e

$$\left(A^{-1}N_2\right)^2 \geq A^{-1}N_1A^{-1}N_2 \geq O. \tag{3.51}$$

Das desigualdades (3.50), (3.51) e do Corolário 2.5,

$$\rho^2\left(A^{-1}N_2\right) \geq \rho\left(A^{-1}N_1A^{-1}N_2\right) = \rho\left(A^{-1}N_2A^{-1}N_1\right) \geq \rho^2\left(A^{-1}N_1\right),$$

concluindo-se que

$$\rho\left(A^{-1}N_2\right) \geq \rho\left(A^{-1}N_1\right).$$

Assim, pelo Teorema 3.23, vem

$$0 \leq \rho\left(M_1^{-1}N_1\right) \leq \rho\left(M_2^{-1}N_2\right) < 1.$$

No caso de $M_1^{-1} > M_2^{-1}$ e $A^{-1} > O$ obtém-se, por argumentos análogos,

$$0 < \rho\left(M_1^{-1}N_1\right) < \rho\left(M_2^{-1}N_2\right) < 1.$$

■

Com o próximo teorema, apresenta-se um novo tipo de teorema de comparação cuja demonstração é consequência dos dois resultados anteriores.

Teorema 3.34 *[16] Seja $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e*

$$A = M_1 - N_1 = M_2 - N_2$$

duas decomposições regulares de A onde A é monótona. Se $N_2 \geq N_1 \geq O$, então

$$0 \leq \rho\left(M_1^{-1}N_1\right) \leq \rho\left(M_2^{-1}N_2\right) < 1. \tag{3.52}$$

Mais, se $A^{-1} > O$ e se $N_2 \geq N_1 \geq O$, com igualdade excluida ou seja nem N_1 nem $N_2 - N_1$ são a matriz nula, então

$$0 < \rho\left(M_1^{-1}N_1\right) < \rho\left(M_2^{-1}N_2\right) < 1. \tag{3.53}$$

Capítulo 4

Aplicações

Neste capítulo, alguns resultados apresentados anteriormente são aplicados para mostrar a monotonia de algumas matrizes que resultam da discretização, através de diferenças finitas, de problemas de valor de fronteira para equações diferenciais ordinárias, permitindo determinar majorantes na norma de máximo das suas inversas, possibilitando a estimativa do erro de discretização.

A abordagem efectuada baseia-se na exposta por Axelsson e Kolotilina em [2].

4.1 Generalidades

Uma equação diferencial ilustra a relação de determinadas alterações em funções. Essas alterações são apresentadas em ordem a variáveis como o tempo, posição, temperatura, etc.

Apresenta-se então, de seguida, a definição de equação diferencial.

Definição 4.1 *Uma equação diferencial é uma equação que relaciona uma função com uma ou mais das suas derivadas.*

Definição 4.2 *Uma equação diferencial ordinária (ODE) é uma equação que envolve derivadas em ordem a uma única variável (variável independente).*

Definição 4.3 *A ordem de uma equação diferencial é a maior ordem da(s) derivada(s) na equação.*

Dada uma equação diferencial ordinária, definem-se condições de fronteira da seguinte forma.

Definição 4.4 *Seja uma equação diferencial ordinária definida num intervalo* $\Omega = [c, d]$ *(onde ambos os limites* c *e* d *podem ser infinitos). Designam-se condições de fronteira, definidas em* $\partial_\Omega = \{c, d\}$ *, como condições que garantem a unicidade da solução.*

Observação 4.5 *Em geral, existem* n *condições de fronteira para uma dada equação diferencial ordinária de ordem* n*.*

Designam-se por problemas de valor de fronteira as equações diferenciais ordinárias de ordem n definidas num domínio fechado $x \in [c, d]$ com condições de fronteira da forma

$$u^{(j)}(c) \text{ e } u^{(j)}(d), \text{ para qualquer } j \in \{0, \ldots, n-1\},$$

onde $u^{(j)}$ representa a derivada de ordem j da função u.

A obtenção da solução de uma equação diferencial pode passar por um processo de discretização da equação diferencial, dando origem a um sistema de equações algébricas, cuja resolução permite a obtenção de uma solução aproximada. Os processos mais comuns são os métodos de diferenças finitas, de elementos finitos, de volume finito e métodos espectrais. Torna-se compreensível que qualquer processo de discretização da equação diferencial produz um determinado erro. Também, o processo para obtenção da solução do sistema de equações algébricas pode, igualmente, produzir um certo erro, que é desprezável em comparação com o erro cometido no processo de discretização.

Considerando

$$Lu = f$$

uma equação diferencial, onde L representa um operador diferencial, f uma função dada e u a solução da equação diferencial, então

$$L_h u_h = f_h \tag{4.1}$$

é designada por equação diferencial discretizada, onde L_h é um operador linear (de diferenças) discreto, aproximação discreta de L, f_h uma aproximação discreta de f e u_h a solução da equação (4.1).

Para o que se segue é necessário o conceito de malha de um intervalo $\Omega = [c, d]$, com $c, d \in \mathbb{R}$ como sendo um conjunto de pontos $\Omega_h = \{x_0, x_1, \ldots, x_{n+1}\}$, designados nós da malha, se

$$c = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n+1} = d.$$

As distâncias

$$h_{i+\frac{1}{2}} = x_{i+1} - x_i, \ i \in \{0, 1, \ldots, n\}$$

designam-se por espaçamentos nodais.

Neste sentido,

$$h_{i-\frac{1}{2}} = x_i - x_{i-1}, \ i \in \{1, \ldots, n+1\},$$

representará o espaçamento nodal imediatamente anterior.

Se estas distâncias forem iguais, diz-se que a malha é uniforme. Caso contrário, a malha designa-se não uniforme.

O valor da solução aproximada u_h no nó x_i representar-se-á por u_i, ou seja, $u_i = u_h(x_i)$. O valor da solução exacta u nesse nó, x_i, será representado por $u(x_i)$.

Os operadores de diferenças introduzidos no presente trabalho são operadores monótonos ou seja, se $L_h v \geq 0$ então $v \geq 0$ onde v é uma função definida em Ω_h. Note-se que um operador monótono é não singular e em termos matriciais corresponde a matrizes monótonas.

Apresenta-se, de seguida, a definição de erro de discretização e erro de truncatura.

Definição 4.6 *Designa-se por erro de discretização, e_h, a diferença entre a solução exacta da equação diferencial e a solução aproximada obtida após discretização, isto é,*

$$e_h = u - u_h.$$

Designa-se, ainda, por erro de truncatura, denotando-se por E_T, ao valor

$$E_T = L_h u - f_h.$$

O erro de truncatura é originado, portanto, pela substituição da solução exacta na equação diferencial discretizada.

Repare-se como se pode obter uma estimativa para esse erro de discretização (observe-se que se a solução da equação diferencial, u, coincidir com a solução da equação diferencial discretizada u_h, o erro de discretização é nulo). De facto, pode-se escrever,

$$e_h = L_h^{-1}(L_h u - f_h),$$

de onde, pelo axioma da submultiplicidade, (1.3), pelo Lema de Barreira, Lema 2.52, e tendo em conta a monotonia de L_h,

$$\begin{aligned} ||e_h||_\infty &\leq \left|\left|\left|L_h^{-1}\right|\right|\right|_\infty ||L_h u - f_h||_\infty \\ &\leq \frac{1}{\alpha} ||L_h u - f_h||_\infty , \end{aligned}$$

onde α é definido como no Lema 2.52.

Desta forma, o Lema de Barreira, Lema 2.52, permite obter uma estimativa do erro de discretização cometido uma vez que a matriz de discretização, a matriz correspondente ao operador linear de diferenças, é monótona.

4.2 Problemas de Valor de Fronteira de Dois Pontos

4.2.1 Exemplo Um

Considere-se o seguinte problema de valor de fronteira

$$\begin{cases} -\left[a\left(x\right)u'\right]' = g\left(x\right), \ x \in]0,1[\\ u\left(0\right) = u\left(1\right) = 0 \end{cases}, \tag{4.2}$$

onde $a > 0, \ a \in C^1\left[0,1\right]$. Para discretizar este problema vai utilizar-se uma malha não uniforme, com nós $x_i, \ i \in \{0,\ldots,n+1\}$, onde

$$x_0 = 0 \ \text{ e } x_{n+1} = 1$$

e espaçamentos nodais

$$\begin{aligned} h_{i+\frac{1}{2}} &= x_{i+1} - x_i, \ i \in \{0,\ldots,n\} \ \text{ ou} \\ h_{i-\frac{1}{2}} &= x_i - x_{i-1}, \ i \in \{1,\ldots,n+1\}. \end{aligned}$$

Estabelece-se ainda que

$$a_i \equiv a\left(x_i\right), \ a_{i\pm\frac{1}{2}} \equiv a\left(x_{i\pm\frac{1}{2}}\right), \ \text{onde } x_{i\pm\frac{1}{2}} = \frac{x_i + x_{i\pm1}}{2}.$$

Considere-se, para cada nó, a seguinte aproximação de diferenças finitas,

$$\begin{aligned} -\left[a\left(x\right)u'\right]' &\simeq -\frac{a_{i+\frac{1}{2}}\frac{u_{i+1}-u_i}{h_{i+\frac{1}{2}}} - a_{i-\frac{1}{2}}\frac{u_i-u_{i-1}}{h_{i-\frac{1}{2}}}}{\frac{h_{i+\frac{1}{2}}+h_{i-\frac{1}{2}}}{2}} \\ &= -2\frac{a_{i-\frac{1}{2}}}{h_{i-\frac{1}{2}}\left(h_{i+\frac{1}{2}}+h_{i-\frac{1}{2}}\right)}u_{i-1} + \qquad (4.3) \\ &\quad +2\left(\frac{a_{i+\frac{1}{2}}}{h_{i+\frac{1}{2}}\left(h_{i+\frac{1}{2}}+h_{i-\frac{1}{2}}\right)} + \frac{a_{i-\frac{1}{2}}}{h_{i-\frac{1}{2}}\left(h_{i+\frac{1}{2}}+h_{i-\frac{1}{2}}\right)}\right)u_i \qquad (4.4) \\ &\quad -2\frac{a_{i+\frac{1}{2}}}{h_{i+\frac{1}{2}}\left(h_{i+\frac{1}{2}}+h_{i-\frac{1}{2}}\right)}u_{i+1}, \qquad (4.5) \end{aligned}$$

onde $u_i \simeq u(x_i)$, $i \in \{1, \ldots, n\}$, ou seja, onde u_i representa um valor aproximado de $u(x_i)$, $i \in \{1, \ldots, n\}$. Naturalmente $u_0 = u(0)$ e $u_{n+1} = u(1)$.

O problema discreto pode escrever-se

$$L_h u_h = g_h$$

ou de forma equivalente

$$diag(a_1, \ldots, a_n) L_h u_h = diag(a_1, \ldots, a_n) g_h,$$

onde, considerando $A = diag(a_1, \ldots, a_n) L_h \in \mathbb{R}^{n \times n}$, tem-se que

$$A = 2T \left(-\frac{a_{i-\frac{1}{2}} a_i}{h_{i-\frac{1}{2}} \left(h_{i-\frac{1}{2}} + h_{i+\frac{1}{2}} \right)}, \frac{\left(\frac{a_{i-\frac{1}{2}}}{h_{i-\frac{1}{2}}} \right) + \left(\frac{a_{i+\frac{1}{2}}}{h_{i+\frac{1}{2}}} \right)}{h_{i-\frac{1}{2}} + h_{i+\frac{1}{2}}} a_i, -\frac{a_{i+\frac{1}{2}} a_i}{h_{i+\frac{1}{2}} \left(h_{i-\frac{1}{2}} + h_{i+\frac{1}{2}} \right)} \right),$$

para $u_h = [u_1 \cdots u_n]^T \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ e $g_h = [g(x_1) \cdots g(x_n)]^T \in \mathbb{R}^{n \times 1}$.

Assim definida, a matriz $A = [a_{i,j}] \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é uma Z-matriz, pois $a_{i,j} \leq 0$ para quaisquer $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ com $i \neq j$. Desta forma, para verificar a sua monotonia, mostre-se pelo Teorema 2.49 que existe um vector $v = [v_1 \cdots v_n]^T \in \mathbb{R}^{n \times 1}$, $v > 0$ tal que $Av > 0$.

Considere-se, para tal,

$$v_i = \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{i-1} \frac{h_{j+\frac{1}{2}}}{a_{j+\frac{1}{2}}} \sum_{k=i}^{n} \frac{h_{k+\frac{1}{2}}}{a_{k+\frac{1}{2}}} > 0, \text{ para qualquer } i \in \{1, \ldots, n\},$$

dado que $a > 0$ e $h_t > 0$, $t \in \mathbb{Q}$.

Assim,

$$\begin{aligned} (Av)_i &= \frac{a_i}{h_{i-\frac{1}{2}} + h_{i+\frac{1}{2}}} \left(\frac{h_{i-\frac{1}{2}}}{a_{i-\frac{1}{2}}} + \frac{h_{i+\frac{1}{2}}}{a_{i+\frac{1}{2}}} \right) \\ &> 0, \end{aligned}$$

para qualquer $i \in \{1, \ldots, n\}$, dado que $a > 0$.

Nestas condições, pelo Teorema 2.49, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é uma matriz monótona.

Pelo Lema de Barreira, Lema 2.52,

$$|||A^{-1}|||_\infty \leq \frac{||v||_\infty}{\alpha}, \text{ onde } \alpha \leq \min_{i \in \{1, \ldots, n\}} (Av)_i.$$

No caso especial $a(x) = 1$, verifica-se $Av = \xi$, com $\xi = [1 \cdots 1]^T \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ e

$$\begin{aligned} v_i &= \frac{1}{2} \left(h_{\frac{1}{2}} + h_{\frac{3}{2}} + \ldots + h_{i-\frac{1}{2}} \right) \left(h_{i+\frac{1}{2}} + h_{i+\frac{3}{2}} + \ldots + h_{n+\frac{1}{2}} \right) \\ &= \frac{1}{2} x_i (1 - x_i), \text{ para quaisquer } x_i \in [0, 1], i \in \{1, \ldots, n\}. \end{aligned}$$

Assim sendo,

$$|||A^{-1}|||_{\infty} = \left|\left|A^{-1}\xi\right|\right|_{\infty} = ||v||_{\infty} = \max_{x_i \in [0,1]} \frac{1}{2} x_i \left(1 - x_i\right) \leq \frac{1}{8}, \text{ para qualquer } i \in \{1, \ldots, n\}$$

ou seja,

$$|||A^{-1}|||_{\infty} \leq \frac{1}{8}.$$

Observe-se que esta majoração é independente da distribuição dos nós na malha.

Relativamente ao erro de discretização neste caso tem-se

$$\begin{aligned} ||e_h||_{\infty} &= ||u - u_h||_{\infty} \\ &\leq \frac{1}{\alpha} ||diag\left(a_1, \ldots, a_n\right) L_h u - diag\left(a_1, \ldots, a_n\right) g_h||_{\infty} . \end{aligned}$$

Tomando $\alpha = 8$ e a partir do cálculo de um majorante para

$$||diag\left(a_1, \ldots, a_n\right) L_h u - diag\left(a_1, \ldots, a_n\right) g_h||_{\infty} ,$$

é possível obter uma estimativa para o erro de discretização.

4.2.2 Exemplo Dois

Considere-se, novamente, o problema de valor de fronteira (4.2) do exemplo anterior, com $a\left(x_i\right) = 1$, para qualquer $x_i \in [0,1]\,,\ i \in \{1, \ldots, n\}$ discretizado através de uma malha uniforme com espaçamento nodal constante e igual a $h = \frac{1}{(n+1)}$.

Nestas condições, utilizando a seguinte aproximação de diferenças finitas

$$u''\left(x_i\right) \simeq \frac{-u_{i-2} + 16u_{i-1} - 30u_i + 16u_{i+1} - u_{i+2}}{12h^2},$$

com $u_i \simeq u\left(x_i\right),\ i \in \{1, \ldots, n\}$, obtém-se, a partir de (4.2),

$$-\frac{-u_{i-2} + 16u_{i-1} - 30u_i + 16u_{i+1} - u_{i+2}}{12h^2} = g\left(x_i\right),$$

ou seja

$$\frac{1}{12h^2}u_{i-2} - \frac{16}{12h^2}u_{i-1} + \frac{30}{12h^2}u_i - \frac{16}{12h^2}u_{i+1} + \frac{1}{12h^2}u_{i+2} = g\left(x_i\right),$$

que corresponde ao seguinte problema discreto

$$Au_h = g_h,$$

com

$$A = \frac{1}{12h^2} F\left(1, -16, 30, -16, 1\right),$$

$u_h = [u_1 \cdots u_n]^T \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ e $g_h = [g(x_1) \cdots g(x_n)]^T \in \mathbb{R}^{n\times 1}$.

Pretende-se mostrar que A é monótona.

Neste caso o Teorema 3.31 é aplicável, considerando

$$\gamma = 1, \ \beta = 16 \text{ e } \alpha = 30,$$

garantindo, assim, que a matriz A é monótona.

O próximo objectivo é estabelecer um majorante para $|||A^{-1}|||_\infty$.

Considere-se

$$v = 12h^2 w \tag{4.6}$$

onde $w = [w_1\ w_2 \cdots w_n]^T \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ com $w_i = i(n-i+1)\,,\ i \in \{1,\ldots,n\}$.

Determinem-se $||v||_\infty$ e $\alpha_1 > 0$, tal que $\min\limits_{i\in\{1,\ldots,n\}} (Av)_i \geq \alpha_1$.

De (4.6), tem-se que

$$||v||_\infty = ||12h^2 w||_\infty = 12h^2\,||w||_\infty\,.$$

No caso de n ser ímpar

$$||w||_\infty = \frac{(n+1)^2}{4},$$

uma vez que $|w_i|$ toma o valor máximo para $i = \frac{n+1}{2}$.

Então

$$||v||_\infty = \frac{12h^2(n+1)^2}{4}.$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} Av &= 12h^2 Aw \\ &= \begin{bmatrix} n+26 \\ 24 \\ \vdots \\ 24 \\ n+26 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

donde,

$$Av \geq 24\xi,$$

para $\xi = [1 \cdots 1]^T \in \mathbb{R}^{n\times 1}$.

Assim, pelo Lema de Barreira, Lema 2.52,

$$\begin{aligned}|||A^{-1}|||_\infty &\leq \frac{12h^2\,(n+1)^2}{96}\\ &= \frac{1}{8},\end{aligned}$$

com $\alpha = 8$.

Observe-se que no caso de n ser par, $|w_i|$ tomará o valor máximo para $i = \frac{n}{2}$, obtendo-se, por argumentos análogos, o mesmo majorante para $|||A^{-1}|||_\infty$ ou seja

$$|||A^{-1}|||_\infty \leq \frac{1}{8}.$$

Desta forma, obtém-se a seguinte estimativa para o erro de discretização

$$||e_h||_\infty = ||u - u_h||_\infty \leq \frac{1}{8}\,||L_h u - g_h||_\infty\,.$$

Bibliografia

[1] Axelsson, O. (1996). *Iterative Solution Methods.* New York: Cambridge University Press.

[2] Axelsson, O. & Kolotilina, L. (1990). *Monotonicity and Discretization Error Estimates.* SIAM J. Numer. Anal. 27, 1591-1611.

[3] Dmitriev, N. & Dynkin, E. (1946). *On characteristic roots of stochastic matrices.* Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Mat. 10, 167-184.

[4] Fiedler, M. (1974). *Eigenvalues of nonnegative symmetric matrices.* Linear Algebra and Applications 9, 119-142.

[5] Horn, R. A. & Johnson, C. R. (1985). *Matrix Analysis.* New York: Cambridge University Press.

[6] Horn, R. A. & Johnson, C. R. (1991). *Topics in Matrix Analysis.* New York: Cambridge University Press.

[7] Lancaster, P. & Tismenetsky, M. (1985). *The Theory of Matrices Second Edition with Applications.* London: Academic Press.

[8] Loewy, R. & London, D. (1978). *A note on an inverse problem for nonnegative matrices.* Linear and Multilinear Algebra 6, 83-90.

[9] McDonald, J. J. (1994). *A Product Index Theorem with Applications to Splittings of M-matrices.* Linear Algebra and Applications 197 e 198, 511-530.

[10] Marcus, M. & Minc, H. (1964). *A Survey of Matrix Theory and Matrix Inequalities.* Boston: Allyn and Bacon.

[11] Meurant, G. (1999). *Computer Solution of Large Linear Systems.* Amesterdão: Elsevier Science B. V..

[12] Minc, H. (1988). *Nonnegative Matrices.* California: John Wiley and Sons.

[13] Ortega, J. M. (1990). *Numerical Analysis. A Second Course.* New York: SIAM.

[14] Pina, H. (1995). *Métodos Numéricos.* Lisboa: McGraw-Hill.

[15] Plemmons, R. & Berman, A. (1979). *Nonnegative Matrices in the Mathematical Sciences.* New York: Academic Press.

[16] Varga, R. S. (2000). *Matrix Iterative Analysis.* New York: Springer-Verlag Berlin Heidelberg.

[17] Woznicki, Z. (2001). *Matrix Splitting Principles.* International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences 28, 251-284.

Índice Terminológico