



**Dina dos Santos  
Tavares**

**As Espirais na Obra de Francisco Gomes Teixeira**



**Dina dos Santos  
Tavares**

**As Espirais na Obra de Francisco Gomes Teixeira**

Dissertação apresentada à Universidade de Aveiro para cumprimento dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre em Matemática, realizada sob a orientação científica do Professor Doutor Helmuth Robert Malonek, Professor Catedrático do Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro

## **o júri**

Presidente

Professor Doutor Domingos Moreira Cardoso  
Professor Catedrático da Universidade de Aveiro

Vogais

Professora Doutora Maria Cecília Rosas Pereira Peixoto da Costa  
Professora Auxiliar da Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro

Professor Doutor Helmuth Robert Malonek  
Professor Catedrático da Universidade de Aveiro

## **agradecimentos**

Ao longo da realização deste trabalho foram várias as pessoas que, de diversas formas, me incentivaram e apoiaram de modo a poder concretizá-lo. A todos lhe dirijo os meus mais sinceros e reconhecidos agradecimentos. Contudo, deixo aqui um especial agradecimento:

- Ao professor Doutor Helmut Malonek, pela sugestão do tema, pelos incentivos e principalmente pela orientação agradável e sempre disponível;
- Aos meus Pais, pelo carinho e incentivo que sempre me transmitiram;
- À Lília, ao Nuno e à Raquel, que me encorajaram e sempre me acompanharam ao longo deste percurso;
- A todos os meus colegas de mestrado e em especial ao Nelson;
- A todos os meus amigos e familiares que, de uma forma ou de outra, me impulsionaram a prosseguir este trabalho.

**palavras-chave**

Espirais, curvas notáveis, Gomes Teixeira, geometria diferencial, história da matemática.

**resumo**

O objectivo desta dissertação é estudar um tipo de curvas notáveis, as espirais, na obra *Tratado das Curvas Especiais Notáveis* do ilustre matemático Francisco Gomes Teixeira.

De uma forma introdutória, apresentamos uma breve descrição da origem da obra acima mencionada, bem como uma análise comparativa entre as suas duas edições *Traité des Courbes* e *Tratado de las Curvas*. No estudo das espirais, apresentamos uma descrição detalhada da abordagem feita por Gomes Teixeira, analisando algumas das suas características, principalmente sob o ponto de vista da geometria diferencial, e incluindo algumas correcções e complementos ao trabalho de Gomes Teixeira. Algumas das figuras inseridas no trabalho para ilustrar a forma das espirais, foram construídas recorrendo ao software MathGV.

**keywords**

Spirals, Gomes Teixeira, Differential Geometry, History of the Mathematics, Notable Curves

**abstract**

The aim of this thesis is the study of spirals as a special type as curves in the work *Tratado das Curvas Especiais Notáveis* of the famous Portuguese mathematician Francisco Gomes Teixeira. The origin of Teixeira's work is described and a comparative study of the two different editions *Traité des Courbes* e *Tratado de las Curvas* completes the introductory part. Besides a detailed description of the treatment by Gomes Teixeira the thesis includes the discussion of almost usual characterizations of spirals as objects of elementary differential geometry, including a number of corrections and complements to the work of Gomes Teixeira. Some figures in the descriptive part of the thesis have been constructed with the software package MathGV.

---



---

## Índice

---



---

<b>Introdução</b> .....	iii
<b>Capítulo 1 - O Tratado das Curvas Especiais Notáveis</b> .....	1
1.1. A origem da Obra .....	3
1.2. O Traité des Courbes inserido nas Obras sobre Mathematica.....	11
1.3. Análise comparativa do Tratado de las Curvas e do Traité des Courbes .....	17
<b>Capítulo 2 - As Espirais</b> .....	31
2.1. Espirais – definição e suas características .....	33
2.2. Uma primeira abordagem das espirais mais conhecidas .....	44
2.2.1. A espiral de Arquimedes .....	44
2.2.2. A espiral de Galileu .....	51
2.2.3. A espiral de Fermat .....	53
2.2.4. A espiral parabólica .....	56
2.2.5. A espiral hiperbólica.....	58
2.2.6. A lítuo .....	61
2.2.7. A espiral logarítmica .....	63
2.2.8. A espiral de Poinot.....	66
2.2.9. A cochleioide .....	68
2.1.10. A espiral arquimediana.....	70
<b>Capítulo 3 - As Espirais na Obra de Gomes Teixeira</b> .....	71
3.1. Análise geral da abordagem realizada por Gomes Teixeira .....	74
3.1.1. A espiral de Arquimedes .....	74
3.1.2. A espiral de Galileu .....	79
3.1.3. A espiral de Fermat .....	82
3.1.4. A espiral parabólica .....	84
3.1.5. A espiral hiperbólica.....	86
3.1.6. A lítuo .....	88

3.1.7. A espiral logarítmica .....	90
3.1.8. A espiral de Poinot.....	93
3.1.9. A espiral tractriz .....	95
3.1.10. A tractriz circular.....	98
3.1.11. A cochleioide .....	100
3.1.12. A clothoide .....	102
3.1.13. A pseudo-catenária .....	104
3.1.14. A pseudo-tractriz .....	105
<b>3.2. Complemento ao Estudo de Gomes Teixeira .....</b>	<b>107</b>
3.2.1. A espiral de Arquimedes .....	108
3.2.2. A espiral de Galileu .....	115
3.2.3. A espiral de Fermat .....	123
3.2.4. A espiral parabólica .....	128
3.2.5. A espiral hiperbólica.....	132
3.2.6. A lítuo .....	137
3.2.7. A espiral logarítmica .....	141
3.2.8. A espiral de Poinot.....	146
3.2.9. A cochleioide .....	154
<b>Capítulo 4 - Anotações Biográficas de Francisco Gomes Teixeira .....</b>	<b>161</b>
4.1. A Biografia de Gomes Teixeira.....	163
4.2. A actividade científica de Gomes Teixeira.....	171
<b>Bibliografia.....</b>	<b>183</b>
<b>Notação .....</b>	<b>189</b>
<b>Apêndices.....</b>	<b>191</b>
Apêndice I .....	192
Apêndice II .....	195
Apêndice III.....	196
Apêndice IV.....	201



## Introdução

---

---

A obra do eminente matemático Francisco Gomes Teixeira mais importante, e que ao longo dos tempos tem sido reconhecida tanto a nível nacional como internacional, é o *Tratado das Curvas Especiais Notáveis*. O ponto de partida para a elaboração deste trabalho foi um dos capítulos que a constituem, *Les spirales*. A escolha deste capítulo, as espirais, prendeu-se com o facto de que este tipo de curvas, apesar de abordadas frequentemente por matemáticos e/ou entusiastas, devido à sua beleza bem como às suas propriedades, não têm uma teoria consistente, nem mesmo uma definição clara.

Esta obra, originariamente intitulada por *Tratado de las Curvas Especiales Notables*, que, a partir de agora será designado simplesmente por *Tratado de las Curvas*, foi uma memória elaborada por Gomes Teixeira, com o objectivo de responder a um concurso aberto pela *Real Academia de Ciencias Exactas Fisicas y Naturales de Madrid*. Esta Academia pretendia que fosse elaborado um catálogo onde se incluísse todas as curvas conhecidas, bem como o estudo da sua forma, das suas equações e propriedades e uma breve nota histórica. A este concurso responderam também outros dois matemáticos: o italiano Gino Loria e o espanhol Joaquín de Vargas y Aguirre. Depois de avaliadas as três memórias, foram atribuídos, excepcionalmente, dois prémios: um à memória de Gomes Teixeira e outro à de Gino Loria. A terceira memória recebeu apenas uma *acessit*.

No entanto, depois de publicada a memória em 1905, Gomes Teixeira continua a sua pesquisa e publica uma segunda edição, agora escrita em francês e intitulada *Traité des Courbes Spéciales Remarquables Planes et Gauches* que, a partir de agora, será apenas designada por *Traité des Courbes*. Esta obra, dividida em três tomos e publicada nas *Obras sobre Mathematica* de Gomes Teixeira, consiste na revisão da memória apresentada anteriormente, onde o autor insere também o estudo de novas curvas.

Nesta memória, Gomes Teixeira estuda um número considerável de curvas onde trata os conceitos geométricos sob o ponto de vista da geometria diferencial e insere o percurso histórico de cada curva. As espirais não foram excepção, pelo que Gomes Teixeira as analisa tanto sob um ponto de vista histórico como geométrico.

Esta dissertação tem assim como objectivo sintetizar o estudo das espirais, evidenciando a abordagem apresentada no *Traité des Courbes*, tendo em conta que esta edição francesa é a mais completa.

Numa primeira fase, abordaremos a origem desta extraordinária obra de Gomes Teixeira; de seguida analisaremos, de uma forma breve, a organização e o conteúdo da colecção *Obras sobre Mathematica*, onde destacamos os três tomos do *Traité des courbes* que constituem os volumes IV, V e VII; e finalizaremos com uma breve análise comparativa entre o *Tratado de las Curvas* e o *Traité des Courbes*.

Numa segunda fase, passaremos ao assunto que desencadeou toda esta nossa investigação, as espirais. Neste capítulo, começaremos por abordar o conceito de espiral e a multiplicidade de definições que encontrámos ao longo da nossa pesquisa, bem como as várias características possíveis de estudarmos para uma dada espiral. Imediatamente a seguir e depois de familiarizados com alguns conceitos, pretendemos estudar algumas das espirais mais conhecidas, para as quais destacaremos as suas formas e equações, bem como algumas referências históricas. É com este objectivo que, nesta fase, recorreremos a softwares de geometria dinâmica e de análise gráfica de funções, respectivamente, *The Geometer's Sketchpad* e *MathGV*, para apresentarmos o estudo de cada espiral. O primeiro programa permitiu-nos, em algumas situações, construir figuras que nos possibilitam exemplificar as situações descritas de forma a facilitar a compreensão do raciocínio. O segundo programa, bastante importante nesta fase, permitiu-nos construir exemplos das diferentes espirais, facilitando o estudo da forma e das características de cada uma delas.

Seguidamente, apresentamos e comentamos o estudo das catorze espirais inseridas no *Traité des Courbes* de Gomes Teixeira. Para tal, tentaremos descrever as propriedades mais importantes de cada espiral, apresentar as figuras construídas por Gomes Teixeira que achamos de uma precisão monumental para a época em que foram construídas e, por último, comparar este estudo com o do *Tratado de las Curvas*, salientando as diferenças essenciais. Ainda nesta fase, e porque ao longo do estudo da obra de Gomes Teixeira deparámo-nos com algumas incorrecções nas expressões apresentadas, achámos por bem inserir as demonstrações de algumas das propriedades apresentadas anteriormente. Mas não ficamos por aqui. Atendendo a que Gomes Teixeira nem sempre apresenta as mesmas características para todas as espirais, tentaremos, ainda, deduzir um conjunto de características para todas as espirais, de forma a completar o estudo de Gomes Teixeira.

Focaremos os seguintes elementos: a subnormal, a subtangente, os comprimentos da normal e da tangente, a amplitude do ângulo formado entre a tangente e o vector associado ao ponto de tangência, o raio de curvatura, a área definida por um vector associado a um ponto da espiral e o comprimento de um arco da curva.

Reservámos para o fim deste trabalho, a análise do percurso do matemático ilustre Francisco Gomes Teixeira, essencialmente nos aspectos ligados à sua formação e acção desenvolvida como docente e investigador, privilegiando os que se relacionam com a matemática.

## Capítulo 1 - O Tratado das Curvas Especiais Notáveis

---

---

A obra, originariamente, intitulada *Tratado de las Curvas Especiales Notables*<sup>1</sup>, escrita em castelhano por Francisco Gomes Teixeira, foi um dos seus trabalhos mais importantes, tendo sido bastante reconhecida tanto em Portugal como no estrangeiro. Esta obra, elaborada com o intuito de responder a um concurso aberto pela *Real Academia de Ciencias Exactas Fisicas y Naturales de Madrid*, foi premiada em 1897 e publicada em 1905. Mais tarde, Gomes Teixeira reescreveu uma nova, agora em francês, intitulada *Traité des Courbes Remarquables Planes et Gauches*<sup>2</sup>, onde fez uma revisão da anterior, ampliando e enriquecendo-a com novas curvas.

Na secção 1.1, iremos descrever a origem da obra *Tratado de las Curvas*, abordando o concurso aberto pela *Real Academia de Ciencias de Madrid*<sup>3</sup>, as memórias que deram entrada nesta Academia e o resultado deste concurso. Prosseguindo este estudo, iremos ainda especificar a origem do *Traité des Courbes*, não como uma nova obra mas como uma segunda edição do *Tratado de las Curvas*.

Atendendo a que esta nova edição é composta por três tomos e foi publicada nas *Obras sobre Mathematica* de Gomes Teixeira, das quais constituem os capítulos IV, V e VII, na secção 1.2 iremos falar um pouco desta colecção de obras, quer ao nível da sua origem quer ao nível do seu conteúdo. Apesar do nosso objectivo ser estudar as espirais inseridas na obra premiada de Gomes Teixeira, consideramos importante incluir este estudo devido ao facto de, nos restantes volumes desta colecção, estarem incluídos inúmeros artigos publicados, tanto em revistas portuguesas como estrangeiras, relativos a temas de geometria, nomeadamente estudo de curvas. Desta forma, pretendemos realçar o grande interesse e dedicação demonstrados por Gomes Teixeira no estudo de curvas que,

---

<sup>1</sup> Como já referimos na introdução, ao longo deste trabalho iremos designar esta obra apenas por *Tratado de las Curvas*.

<sup>2</sup> Também iremos abreviar o título desta obra designando-a apenas por *Traité des Courbes*

<sup>3</sup> A partir deste momento, passaremos a escrever *Real Academia de Ciencias de Madrid* em vez de *Real Academia de Ciencias Exactas Fisicas y Naturales de Madrid*.

tanto antes como depois da publicação destas obras, continua a ocupar o seu pouco tempo ao estudo de curvas.

Atendendo ao que foi dito anteriormente, torna-se imprescindível fazer uma análise comparativa entre as duas edições do *Tratado das Curvas Especiais Notáveis* de modo a obtermos uma ideia geral sobre as diferenças existentes entre as duas e identificarmos a profundidade da revisão feita por Gomes Teixeira. Outro dos nossos grandes interesses nesta comparação é descobrir quais e quantas curvas foram inseridas no *Traité des Courbes*. Este estudo corresponde à secção 1.3.

Antes de passarmos ao estudo propriamente dito, queríamos salientar que, apesar de ao longo do nosso trabalho e especificamente neste capítulo nos referirmos ao *Tratado de las Curvas* e ao *Traité des Courbes* como duas obras distintas escritas por Gomes Teixeira, não queríamos deixar de reforçar a ideia de que as duas correspondem ao mesmo estudo, pelo que a segunda é uma revisão e complemento da primeira.

## 1.1. A origem da Obra

Em 1895, a *Real Academia de Ciencias Exactas Fisicas y Naturales de Madrid* abriu um concurso que, de acordo com o que escreveu Gomes Teixeira, pretendia a elaboração de um:

*Catálogo ordenado de todas las curvas de cualquier clase que han recibido nombre especial, acompañado de una ideia sucinta de la forma, ecuaciones y propiedades generales de cada una, con noticia de los libros ó autores que primeramente las han dado á conocer.* (1905, p.v)

Todos os anos, era aberto pela *Real Academia de Ciencias de Madrid* um concurso com um programa diferente. No entanto, o programa acima referido foi apresentado duas vezes. A primeira vez foi em 1892, embora neste ano, não tivesse havido nenhuma memória entregue que demonstrasse um grau satisfatório. A segunda vez foi então em 1895, pelo facto de se considerar que o tema apresentado era de grande importância e interesse para o desenvolvimento da matemática. Relativamente aos anos indicados para a abertura dos concursos, existe uma grande discrepância na bibliografia que consultámos. Maria da Graça Alves, por exemplo, indica os anos de 1893 e 1896, como os anos da abertura destes concursos. Neste trabalho, considerámos as datas indicadas por Gomes Teixeira na introdução do *Tratado de las Curvas*.

Foi ao concurso aberto em 1895 que Gomes Teixeira respondeu com uma memória intitulada *Tratado de las Curvas Especiales Notables*. Mas, não foi o único a participar neste concurso. Também concorreram a este certame os matemáticos Gino Loria, da Universidade de Génova, com a memória intitulada *Las curvas planas particulares, algébricas y transcendentales. Teoria e historia. Ensayo de geometria comparado del plano* e D. Joaquín de Vargas y Aguirre, com a memória intitulada *Catalogo general de curvas*.

Foi nos dois anos seguintes à abertura do certame, 1896 e 1897, que se fizeram chegar as três memórias à Academia, sendo a primeira a ser entregue a do italiano Gino Loria, seguindo-se a de Gomes Teixeira e, por último, a do espanhol D. Joaquín de Vargas y Aguirre.

Este tipo de concurso era organizado desde 1853 pela *Real Academia de Ciencias de Madrid* onde havia três pontos: um de matemática, outro de física e outro de *ciencias*

*naturais* que, segundo o historiador e matemático Rodolfo Guimarães, as distinções consistiam em *prémio, accessit e menção honrosa*.<sup>4</sup>

Depois de recebidas as três memórias, estas foram analisadas pela Academia em anonimato, ou seja, o responsável pela sua análise não teve qualquer conhecimento do autor de cada uma, tendo sido previamente atribuído um número (de 1 a 3) como forma de as identificar. Assim sendo, a memória n.º 1 correspondia à de Gino Loria, a n.º 2 à de Gomes Teixeira e, por último, a n.º 3 correspondia à memória de D. Joaquín de Vargas y Aguirre, de acordo com a ordem de chegada das respectivas memórias à Academia.

O resultado do concurso, conhecido em 1900, declarou, pela primeira vez num certame deste tipo, dois vencedores: Francisco Gomes Teixeira e Gino Loria. A decisão de conceder o prémio do concurso aos dois géometras teve de ser autorizado pelo Ministro do Fomento, dado que nunca antes tinha acontecido. Desta forma, esta conclusão apenas foi tornada pública em 1900<sup>5</sup>, através de um relatório elaborado pela comissão responsável pela análise e apreciação das três memórias.

Esta comissão considerou que as duas memórias premiadas eram muito semelhantes, ao nível da sua estrutura, ao contrário da memória de D. Joaquín de Vargas y Aguirre, da qual teceram um parecer desfavorável pelo facto de se encontrar organizada por ordem alfabética das curvas estudadas. De facto, na memória de Gomes Teixeira,

*El orden en que haremos el estudio de las curvas comprendidas en este trabajo es el determinado por las ecuaciones de aquéllas.*

(Teixeira, 1905, pp.vi-vii)

Embora tenha sido atribuído o prémio às duas memórias, o responsável pelo relatório afirmou sobre o trabalho de Gomes Teixeira:

*(...) cosa de ciento cuarenta curvas, verdaderamente notables; estudiadas à conciencia en el texto, bajo de muy distintos aspectos; la maior parte gráficamente representadas en un atlas de 15 laminas; y, como la memoria N.º1, con la cual ésta N.º2, tantas analogías, de forma y por el fondo de su doctrina, presenta, catalogadas, por separado, en orden*

---

<sup>4</sup> In Silva, 2000, p.338.

<sup>5</sup> Apesar do relatório apenas ter sido tornado público em 1900, o resultado do concurso foi dado a conhecer a Gomes Teixeira através de um ofício de D. Miguel Merino, Secretário da *Real Academia de Ciencias de Madrid*, em Junho de 1899.

*alfabético, para gobierno y mayor comodidad del lector.*  
(Alves, 2004, p.247)

Apesar das críticas proferidas à memória de D. Joaquín de Vargas y Aguirre, esta foi considerada também de grande qualidade pelo que este matemático foi recompensado com um *accessit*.<sup>6</sup>

Estes três trabalhos foram publicados pela *Real Academia de Ciencias de Madrid* em castelhano, nas *Memorias de la Real Academia de Ciencias Exactas Fisicas y Naturales de Madrid* e, segundo Rodolfo Guimarães, a publicação da memória de Gomes Teixeira ocorreu primeiro que a de Gino Loria. A obra de Gomes Teixeira, *Tratado de las Curvas Especiales Notables*, foi publicada em 1905 no tomo XXII, enquanto a de D. Joaquín de Vargas y Aguirre apenas foi publicada em 1908 no tomo XXVI com o nome *Catálogo general de curvas*. Quanto à memória de Gino Loria, não tivemos conhecimento da data da sua publicação, no entanto, a confirmação de que foi publicada é dada por Rodolfo Guimarães.<sup>7</sup>

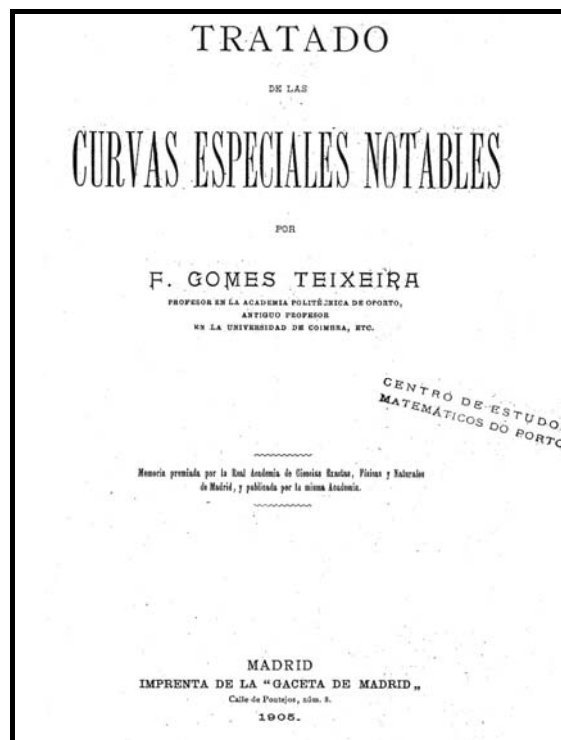


Figura 1.1 - Capa do *Tratado de las Curvas Especiales Notables*

<sup>6</sup> Alves, 2004, p.248.

<sup>7</sup> In Silva, 2000, p.341.



Após ser conhecido o relatório da comissão, fizeram-se chegar a Gomes Teixeira vários votos de congratulação, de entidades tanto portuguesas como estrangeiras. Um exemplo disso, foi o ofício enviado a Gomes Teixeira pelo Doutor Avelino Calisto, Reitor da Universidade de Coimbra, a felicitá-lo, em nome da Universidade. Neste ofício pode ler-se:

*Tenho a honra e intima satisfação de, em nome da Faculdade de Mathematica e do Conselho de Decanos, como representante da Universidade, felicitar a V. Ex.<sup>a</sup> por lhe ter sido conferido pela Academia Real das Sciencias de Madrid o premio offerecido em concurso para uma memória sobre Geometria.*

*Esta Universidade muito se ufana por ver tam justamente galardoado o talento e applicação de um de seus filhos mais dilectos.*

Este ofício faz parte da correspondência recebida por Gomes Teixeira e doada, por este, à Universidade de Coimbra. Actualmente, esta correspondência encontra-se no Arquivo da Universidade, a qual tivemos oportunidade de consultar. Aí existe uma listagem dessa correspondência, numerada até 2230, elaborada por Gomes Teixeira e intitulada *Índice*. Tal como este ofício, que corresponde ao número 1428 desta listagem, são inúmeras as cartas que felicitam Gomes Teixeira pelo prémio que lhe foi atribuído. Da leitura de algumas destas cartas, podemos notar a grande admiração que a comunidade científica revelava por Gomes Teixeira, bem como o reconhecido prestígio adquirido internacionalmente.

Apesar dos elogios proferidos à obra de Gomes Teixeira, este considerava o seu trabalho incompleto, como se pode ler na introdução da sua memória:

*La colección de curvas con nombre especial que vamos á estudiar no es completa. Por falta de tiempo dejamos de considerar algunas de que tenemos noticia, y ciertamente existen, además, otras de que no tenemos, actualmente, conocimiento. Creemos, sin embargo, no haber dejado de considerar curva alguna de las que tienen importancia por su teoría, por sus aplicaciones ó por su historia. (1905, p.VI)*

Sendo assim, Gomes Teixeira não baixou os braços e, mais tarde, completa a obra apresentada à Academia, inserindo o estudo de novas curvas e introduzindo também algumas alterações às que já haviam sido estudadas anteriormente, reescrevendo a obra na língua francesa. Esta nova versão da obra, intitulada *Traité des Courbes Spéciales Remarquables Planes et Gauches*, organizada em três tomos, constitui três dos sete volumes das *Obras sobre Mathematica*, mais especificamente, os volumes IV, V e VII publicados em 1908, 1909 e 1915, respectivamente.

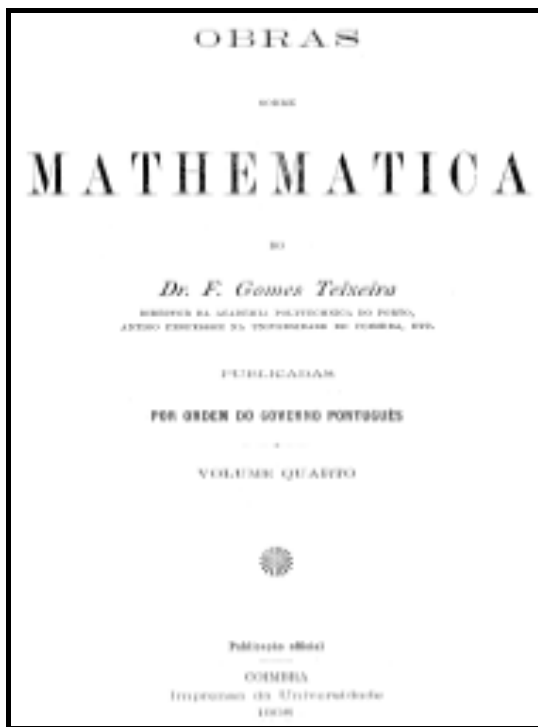


Figura 1.2 - Capa do Volume IV de *Obras sobre Mathematica*

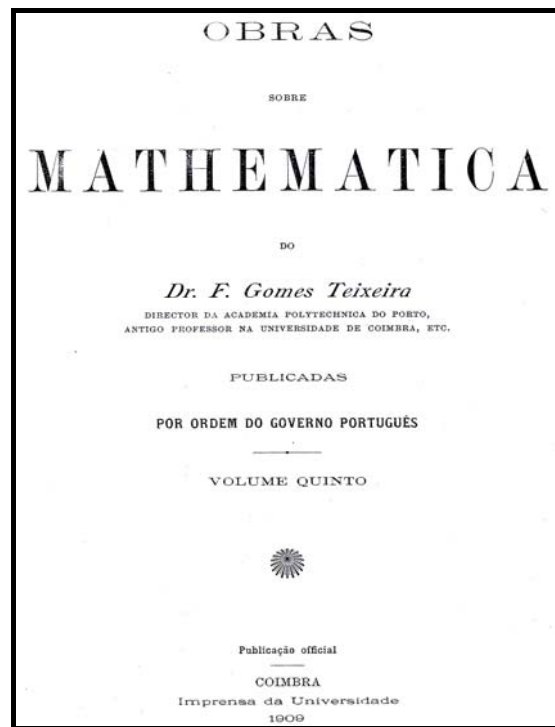


Figura 1.3 – Capa do Volume V de *Obras sobre Mathematica*

No entanto, salientamos que o conteúdo do volume VII (tomo III) é totalmente novo relativamente ao *Tratado de las Curvas*, sendo mesmo identificado por Gomes Teixeira como um suplemento, como podemos ler no frontispício desse mesmo volume, figura 1.4.

Neste tomo, Gomes Teixeira inseriu um fascículo intitulado *Sur les problèmes célèbres da la Géométrie élémentaire non résolubles avec la règle et le compas*, publicado, pela Imprensa da Universidade, em 1915, antes da publicação do volume VII de *Obras sobre Mathematica*.<sup>8</sup>

<sup>8</sup> Alves, 2004, p.252.



**Figura 1.4** - Frontispício do Volume VII de *Obras sobre Mathematica*

Como veremos posteriormente, o objectivo de Gomes Teixeira na escrita da segunda edição era rever e aumentar o estudo das curvas, no entanto, apesar de o autor fazer bastantes correcções e alterações à primeira edição continuaram a existir algumas incorrecções.

A obra *Traité des Courbes Spéciales Remarquables Planes et Gauches* foi novamente publicada, em 1971, pela editora americana *Chelsea Publishing Company, Bronx, New York* e, mais recentemente, em 1995, pela editora francesa *Éditions Jacques Gabay, Paris*, mostrando assim, o interesse e o valor desta grandiosa obra ainda nos dias de hoje. Estas duas publicações, também divididas em três tomos, correspondem a uma revisão da obra publicada pela Imprensa da Universidade tal como se pode ler na edição publicada em 1971:

*The present work is a revised (corrected) reprint of the three volumes, published at New York in 1971 (...)* (Teixeira, 1971, p.IV)

No entanto, depois de consultada esta edição podemos constatar que nela permanece a existência de algumas gralhas no tratamento de várias curvas.

Mas, não só a obra de Gomes Teixeira mereceu novas publicações. Também o trabalho de Gino Loria foi novamente publicado em 1911, com o título *Spezielle algebraische und transzendente ebene Kurven, Theorie und Geschichte*, em dois volumes, pela editora *B. G. Teubner, Leipzig e Berlim* e traduzido de italiano para alemão por F.

Schütte. Em 1930, foi novamente publicado, agora em italiano, intitulado *Curve piane speciali algebriche e trascendenti, teoria e storia*, em dois volumes, pela editora, Hoepli, Milan.

Ainda relativamente ao *Tratado de las Curvas*, Gomes Teixeira, em 1917, volta a ser galardoado, desta vez, pela *Académie des Sciences de Paris* com o prémio *Binoux – Prémio de Filosofia e História das Ciências*. A atribuição deste prémio, comunicado a Gomes Teixeira por ofício<sup>9</sup> escrito por Picard, deveu-se ao reconhecimento da qualidade científica da obra e à introdução da componente histórica relativa de cada curva.<sup>10</sup>

Também, relativamente a este prémio, se fizeram chegar algumas cartas a felicitar Gomes Teixeira por lhe ter sido concedido este prémio. Destas, realçamos sobretudo a carta enviada em Novembro de 1917 por Haton de La Goupilliére, matemático que Gomes Teixeira cita várias vezes ao longo do *Tratado de las Curvas*, e que já outrora lhe enviara outras cartas, tanto a apreciar esta obra como a trocar informações relativamente a algumas curvas notáveis.

Para terminar, salientamos o facto de não ter sido a primeira vez que Gomes Teixeira respondeu a um concurso da *Real Academia de Ciencias de Madrid*. Em 1893, a Academia lançou a concurso o seguinte programa:

*Exposición razonada y metódica de los desarrollos en serie de las funciones matematicas. Teoria general de los mismos. Significación de las llamadas series divergentes. Investigación de una série tipica de la qual, à ser possible, se deriven como casos particulares las series de mayor importancia y uso en analisis, como las de Taylor, Lagrange y qualquiera ótra analoga.* (Teixeira, 1904, p.3)

Em resposta a este programa, Gomes Teixeira elaborou uma memória intitulada *Sobre o desenvolvimento das funções em série*. Esta memória não recebeu o prémio ordinário por estar escrita em português e não em castelhano ou em latim como ditava o regulamento do concurso. No entanto, o valor desta memória foi reconhecido pela Academia, atribuindo-lhe um prémio exterior ao concurso e, mais tarde, em 1897, publicando-a, em língua espanhola, no tomo XVIII, parte I das *Memorias de la Real*

---

<sup>9</sup> Este ofício constitui o nº 225 da correspondência de Gomes Teixeira datado de 29 de Outubro de 1917.

<sup>10</sup> Alves, 2004, p.256.

*Academia de Ciencias Exactas, Fisicas y Naturales de Madrid*, com o título *Sobre o desenvolvimiento das funções em série*.<sup>11</sup>

Foi talvez este facto que incentivou Gomes Teixeira a participar novamente neste concurso, mesmo que numa área diferente da anterior, a geometria, marcando uma nova fase da vida de Gomes Teixeira dedicada predominantemente ao estudo de curvas notáveis.

Para terminar, realçamos, de acordo com Rodolfo Guimarães, que a *Real Academia de Ciencias de Madrid* desde 1853 apenas concedeu prémio na área de matemática quatro vezes, sendo dois deles alcançados por Gomes Teixeira.

---

<sup>11</sup> Teixeira, 1904, p.1.

## 1.2. O *Traité des Courbes* inserido nas *Obras sobre Mathematica*

Tal como veremos posteriormente, a actividade científica de Gomes Teixeira foi bastante abrangente, tendo este escrito inúmeros trabalhos em diferentes áreas: análise, geometria e história da matemática.

Este extenso trabalho foi reconhecido, tanto em Portugal como no estrangeiro, comprovando-o as inúmeras cartas, votos de congratulação e homenagens que recebeu, tanto em vida como depois da sua morte, de matemáticos e outras entidades, a enaltecer o seu trabalho.

Também o governo português reconheceu o seu trabalho e, a 8 de Fevereiro de 1902, determinou a compilação dos trabalhos científicos de Gomes Teixeira por uma portaria que dizia:

*Sua magestade El-Rei, a quem foi presente a proposta do Director Geral de Instrucção Publica para serem reunidos em volumes os trabalhos sobre Mathematica do Dr. Francisco Gomes Teixeira, lente cathedratico e director da academia Polytechnica do Porto, que se acham dispersos em revistas nacionaes e estrangeiras: há por bem determinar que se proceda a essa publicação. (Teixeira, 1904, p.VII)*

De acordo com esta portaria, Gomes Teixeira procedeu à selecção dos seus trabalhos científicos elaborados até então, compilando-os numa colecção dividida em sete volumes, cujo o título é *Obras sobre Mathematica*, onde houve a preocupação em corrigir eventuais incorrecções das publicações anteriores, como salienta Gomes Teixeira:

*Tendo pois de se proceder á publicação dos nossos trabalhos scientificos, (...), julgámos conveniente fazer-lhes uma revisão, para corrigir erros que encontrássemos, esclarecer alguma passagem obscura e anotar outras. (1904, p.VII)*

No entanto, depois de consultados os vários volumes podemos constatar que nestas obras continuam a existir algumas incorrecções, pelo que o desejo de Gomes Teixeira não foi totalmente realizado.

O primeiro volume de *Obras sobre Mathematica* foi publicado em 1904, pela Imprensa da Universidade de Coimbra.

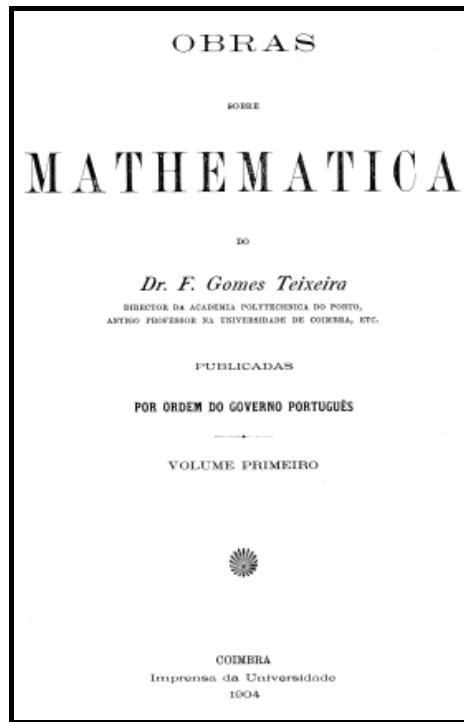


Figura 1.5 - Capa do Volume I de *Obras sobre Mathematica*

Este volume compreende artigos publicados em várias revistas, tanto nacionais como estrangeiras. No entanto, destacamos um artigo, que corresponde ao primeiro capítulo da obra, sendo este a memória premiada em 1897 pela *Real Academia de Ciencias Exactas Fisicas y Naturales de Madrid*, já referenciado anteriormente, com o nome *Sobre o desenvolvimento das funções em série*.

No quadro seguinte, podemos observar os vários artigos que compõem este volume, de acordo com a revista onde estes foram publicados bem como o ano de publicação.

Revista	Título do Artigo	Ano de Publicação	Cap.
Memorias de la Real Academia de Ciencias Exactas, Fisicas y Naturales de <b>Madrid</b>	Sobre o desenvolvimento das funções em série	1897	I
Journal für die reine und	Sur le développement des fonctions en série ordonnée suivant les puissances du sinus et du cosinus de la variable	1896	II

angewandte Mathematik, gegründet von Crelle - <b>Berlin</b>	Sur les séries ordonnées suivant les puissances d'une fonction donnée	1900	III
	Sur le développement des fonctions doublement périodiques de seconde espèce en série trigonométrique	1903	IX
	Sur la convergente des fomules de d'interpolation de Lagrange, Gauss, etc	1903	XIII
Bulletin des Sciences mathématiques - <b>Paris</b>	Extrait d'une lettre adressée à M. Hermite	1890	IV
Mémoires couronnés et autres Mémoires publiés par l'Academie Royale de Belgique - <b>Bruxelles</b>	Sur les courbes paralleles à l'ellipse	1898	V
Giornale di Matematiche - <b>Napoli</b>	Sur les dérivées d'ordre quelconque	1880	VI
Journal de Mathématiques purés et appliqués, fondé par Liouville - <b>Paris</b>	Sur le développement des fonctions implicites en série	1881	VII
	Sur le développement des fonctions implicites	1889	VIII
Boletim da Direcção Geral de Instrucção Publica - <b>Lisboa</b>	Apontamentos biographicos sobre Daniel Augusto da silva	1902	X
Bulletin de la Société Mathématique de France - <b>Paris</b>	Note sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre	1902	XI
Archiv der Mathematik und Physik - <b>Leipzig</b>	Sur la courbe équipotentielle	1902	XII - I
El Progreso matemático - <b>Zaragoza</b>	Sobre una curva notable	1889	XII - II
	Sobre los focos de las espíricas de Perseo	1900	XII - III
Revista trimestral de matemáticas - <b>Zaragoza</b>	Sobre una propiedad de los focos de los óvalos de Cassini	1901	XII -IV
Mathesis - <b>Gand</b>	Sur la tétrascupidale de Bellavitis	1901	XII -V
	Sur une propriété des ovales de Descartes	1902	XII -VI
Intermédiaire des Mathématiciens - <b>Paris</b>	Sur l'enveloppe d'une droite de longueur donnée s'appuyant sur deux droites	1898	XII -VII
	Evaluation directe de l'aire de la développée de l'ellipse	1900	XII -VIII



	Sur la rectification des courbes parallèles à une courbe donnée	1900	XII – IX
	Sur les foyers du limaçon de Pascal	1900	XII – X
Monatshefte für Mathematik und Physik - <b>Wien</b>	Extension d'un théorème de Jacobi	1890	XIV – I
Rediconti della Reale Accademia dei Lincei - <b>Roma</b>	Sur la détermination de la partie algébrique de l'intégrale des fonctions rationnelles	1885	XIV - II
	Sur l'intégrale $\int e^{\varpi x} f(x) dx$	1885	XIV - III
Nouvelles Annales de Mathématiques - <b>Paris</b>	Sur le développement de $x^k$ en série ordonnée suivant les puissances du sinus de la variable	1896	XIV – IV
	Démonstration d'une formule de Waring	1888	XIV – V
	Sur l'intégrale $\int_0^{\pi} \cot(x - \alpha) dx$	1889	XIV - VI

**Quadro I** – Artigos que compõem o volume I de *Obras sobre Mathematica* de acordo com a revista onde foram publicados.

Pelo quadro anterior, podemos concluir que Gomes Teixeira, neste volume, seleccionou trabalhos tanto da área de análise como de geometria. Outro dado relevante refere-se à publicação dos mesmos que, na maioria, foi feita no estrangeiro (em diferentes países), havendo apenas um publicado em Portugal, *Apontamentos biographicos sobre Daniel Augusto da Silva*, o que comprova a sua notoriedade no estrangeiro.

À semelhança do volume I, também o volume II, publicado em 1906, é uma compilação de artigos publicados por Gomes Teixeira. Da mesma forma, organizamos um quadro, que se encontra em apêndice (apêndice I), com os artigos e respectivas revistas de publicação, que compõem este volume. Nele, predominam também as revistas estrangeiras. No entanto, é de salientar que os únicos dois artigos publicados em Portugal, *Integração das equações às derivadas parciais de segunda ordem* e *Sobre o emprego dos eixos coordenados oblíquos na Mecânica Analytica*, são as dissertações apresentadas à *Faculdade de Mathematica* da Universidade de Coimbra, como veremos no capítulo 4, para obter o grau de doutor e para concurso a um lugar de lente nesta mesma Faculdade, respectivamente. Através destes dois quadros, vemos que Gomes Teixeira publicava,

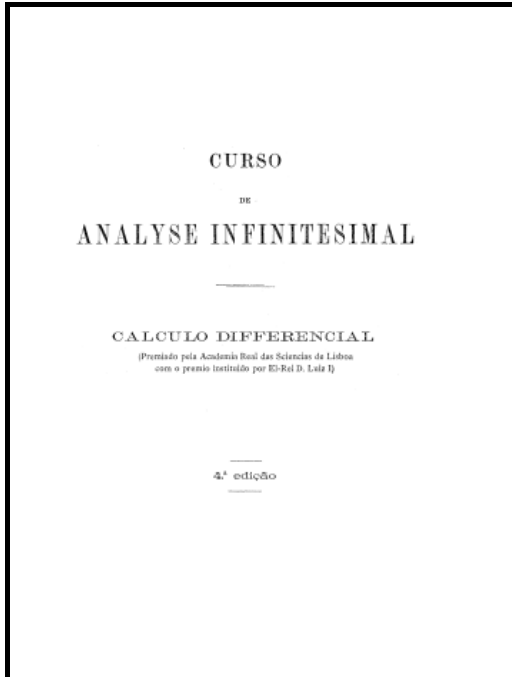
prioritariamente, os seus trabalhos em revistas e jornais estrangeiros, dando a conhecer as investigações científicas nacionais e projectando Portugal no estrangeiro. Para além disso, é notável o elevado número de artigos publicados por este matemático, até à data do volume II de *Obras sobre Mathematica*, traduzindo assim a sua profunda, rigorosa e longa investigação.

Dos mais prestigiados jornais e revistas estrangeiras de matemática da época citemos, de acordo com os dois quadros, aqueles em que Gomes Teixeira publicou um maior número de trabalhos:

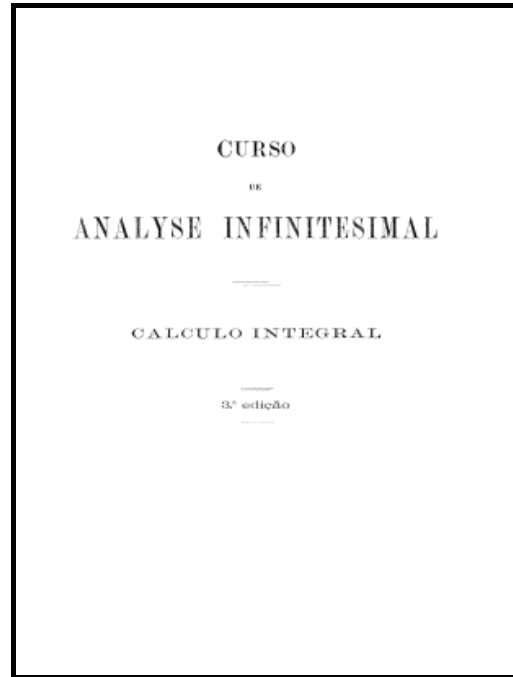
- Nouvelles Annales de Mathématiques – Paris (1885, 1886, 1888, 1889, 1891, 1896, 1905, 1906);
- Bulletin des Sciences Mathématiques – Paris (1887, 1888, 1890, 1892, 1893);
- L'Enseignement Mathématique – Genève (1904, 1905, 1905);
- Journal Für die reine und angewandte Mathematik, gegründet von Crelle – Berlin (1896, 1900, 1903, 1903);
- Intermédiaire des Mathématiciens – Paris (1898, 1900, 1900, 1900).

Sendo também, de notar que Gomes Teixeira publicou principalmente artigos em revistas ou jornais franceses num total de 24 artigos.

O terceiro volume de *Obras sobre Mathematica*, publicado em 1906, contém o *Curso de Analyse Infinitesimal: Calculo Diferencial* – 4ª edição. O sexto volume, publicado em 1912, contém o *Curso de Analyse Infinitesimal: Calculo Integral* – 3ª edição, constituído por 13 capítulos. Estes dois trabalhos tinham como objectivo servir de manual para as cadeiras leccionadas por Gomes Teixeira. Da correspondência dirigida a Gomes Teixeira, podemos constatar que estes manuais de análise foram escritos de uma forma clara e rigorosa, estando bem adaptados aos alunos. No capítulo 4 abordaremos um pouco mais estes dois importantes trabalhos de Gomes Teixeira.



**Figura 1.6** - Frontispício do Volume III de *Obras sobre Mathematica*



**Figura 1.7** - Frontispício do volume VI de *Obras sobre Mathematica*

E por último, como já foi referido em 1.1, os volumes IV, V e VII, publicados em 1908, 1909 e 1915 respectivamente, são constituídos pelos três tomos do *Traité des Courbes Spéciales Remarquables Planes et Gauches*.

### 1.3. Análise comparativa do *Tratado de las Curvas* e do *Traité des Courbes*

Como já tivemos oportunidade de referir neste capítulo, Gomes Teixeira reescreveu a obra *Tratado de las Curvas*, na língua francesa, na qual inseriu o estudo de novas curvas e ampliou o estudo das curvas já abordadas. Com isto, torna-se de alguma forma importante descobrir quais as mudanças que Gomes Teixeira efectuou no *Traité des Courbes*, publicado em três volumes da colecção *Obras sobre Mathematica*, nos anos de 1908, 1909 e 1915.

Depois de uma breve análise às duas obras, podemos concluir que Gomes Teixeira se preocupou bastante, não só em relatar novas curvas, como também e principalmente em ampliar o estudo das curvas já abordadas na primeira obra.

De seguida, apresentamos um estudo comparativo das duas obras onde aparecem a par os capítulos e as secções comuns, a itálico as alterações mais relevantes e com o símbolo “--” quando numa obra não existir uma secção equivalente à da outra obra. Atendendo a que Gomes Teixeira, apresenta para cada curva várias características e outras informações relativas à curva, de uma forma sequencial, separando as diferentes informações através de uma linha em branco e enumerando cada *parte*, neste estudo inserimos uma coluna, designada “*número*”, que apresenta o número das partes relativas a cada secção.

<i>Tratado de las Curvas</i>				<i>Traité des Courbes</i>			
Sec ção	Nome	Pág.	Número	Sec ção	Nome	Pág.	Número
<b>Capítulo I</b>				<b>Livro IV</b>			
<b>Cúbicas notables</b>				<b>Capítulo I</b>			
				<b>Cubiques remarquables</b>			
I	La cisoide	1	1-17	I	Les Cissoïdes	1	1-30
II	La conçoide de Sluse	13	18-20	II	La conçoïde de Sluse	26	31-36
III	La estrofoide	16	21-33	III	La strophöide	30	37-51

--		--	--		IV	Les focales de Van-Rees	45	52-67
IV	La trisectriz de Maclaurin	31	34-41		V	La trisectrice de Maclaurin	58	68-75
V	Las cúbicas circulares	62	76-98		VI	Les cubiques circulaires	62	76-98
<b>Capítulo II</b>					<b>Capítulo II</b>			
<b>Cúbicas notables (Continuación)</b>					<b>Cubiques remarquables (Continuation)</b>			
I	El folium de Descartes	53	57-63		I	Le folium de Descartes	85	99-106
--	--	--	--		II	Les courbes quarrables algébriquement. Le trèfle.	91	107-110
II	La angúnea de Newton	59	64-69		III	L'anguinea. Les hyperbolismes des coniques	97	111-118
III	<i>El tridente de Newton</i>	63	70-71					119-121
IV	<i>La concoide parabólica de Descartes</i>	66	72-74		IV	<i>Le trident. La parabole de Descartes</i>	103	122
V	La cúbica de Agnesi	68	75-84		V	La versiera	108	123-133
VI	La curva de Rolle	74	85-88		VI	Courbe de rolle	115	134-137
VII	La cúbica mixta	77	89-91		VII	La cubique mixte	118	138-141
VIII	El folium parabólico	80	92-95		VIII	Le folium parabolique. Les paraboles divergentes unicursales	121	142-146
IX	Las parábolas divergentes	82	96-101		IX	Les paraboles divergentes droites	125	147-156
X	Las cúbicas de Chasles	94	102-103		X	Les cubiques des Chasles	143	157-159

--		--	--			146	160-163
					XI	Généralisation de la théorie des cubiques circulaires	
XI	Conclusión. Sucinta noticia bibliográfica sobre las cúbicas en general	98	104		XII	Notice succinte sur la bibliographie de la théorie générale des cubiques	
	<b>Capítulo III</b> <b>Cuárticas notables</b>					<b>Capítulo III</b> <b>Quartiques remarquables</b>	
I	Las espíricas de Perseo	100	105-111		I	Les spiriques de Perseus	
II	Las cassínicas	109	112-120		II	Les cassiniennes	
III	Las lemniscatas	118	121-138		III	Les lemniscates	
IV	La lemniscata de Bernoulli	131	139-149		IV	La lemniscate de Bernoulli	
	<b>Capítulo IV</b> <b>Cuárticas notables (Continuación)</b>					<b>Capítulo IV</b> <b>Quartiques remarquables (Continuation)</b>	
I	El caracol de Pascal	142	150-162		I	La limaçon de Pascal	
II	La cardioide	154	163-166		II	La cardioide	
III	Los óvalos de Descartes	218	167-179		III	Les ovales de Descartes	
IV	Las cuárticas bicirculares	234	180-191		IV	Les quartiques bicirculaires	

Capítulo V				Capítulo V			
Cuárticas notables (Continuación)				Quartiques remarquables (Continuation)			
I	La concoide de Nicomedes	180	192-199	I	La conchoïde de Nicomède	259	273-281
II	La parábola virtualis	193	200-206	II	Les paraboles virtuelles. Le besace.	269	282-289
III	<i>La cruciforme (Kreuzcurve)</i>	200	207-216				295-304
IV	<i>La puntiforme (Kohlenspitzencurve)</i>	212	217-222	IV	<i>La cruciforme. La puntiforme</i>	277	305-307
V	La cuártica piriforme	215	223-227	V	La quartique piriforme. Les quartiques de Wallis.	289	308-313
VI	La curva del diablo	218	228-230	VI	La courbe du diable	296	314-315
VII	El folium simplex ú ovoide	220	231-236	VII	Le folium simple ou ovoide	297	316-318
			237-240	VIII	<i>Le folium double ou bifolium</i>	300	319-322
VIII	<i>El folium duplex ó bifolium</i>	223	241-243	X	<i>Les quartiques de M. Ruiz-Castizo</i>	306	328-329
IX	Le trifolium	232	244-246	IX	Le trifolium	302	323-327
X	Bicornio	236	247-249	XI	Le bicorne	310	330-332
XI	<i>La curva K</i>	240	250-254	III	<i>La courbe de Gutschoven ou cappa</i>	274	290-294

XII	Concoïdes focales de las cónicas	242	255-260	XII	Conchoïdes focales des coniques	312	333-339
XIII	Breve noticia del origen y descubrimiento de la teoría de las cuárticas	253	261	XIII	Notice succincte sur l'origine et le développement de la théorie des quartiques	321	340
<b>Capítulo VI</b> <b>Séxticas y bicuárticas más notables</b>				<b>Capítulo VI</b> <b>Sur quelques courbes du sixième et du huitième degré</b>			
I	La curva de Watt	256	256-266	I	La courbe de Watt	323	341-344
II	La astróide	261	267-275	II	L'astroïde	328	345-351
III	Las curvas paralelas á la astróide	267	276-283	III	Les curbes parallèles à l'astroïde	333	352-357
IV	Las evolutas de la elipse y de la hipérbola	273	284-293	IV	La développée de l'ellipse et de l'hyperbole	339	358-364
V	El escarabajo	279	294-299	V	Le scarabée	344	365-368
VI	La atrifitaloide	285	300-306	VI	L'atriphthaloïde	248	369-373
VII	La curva de Talbot	293	307-313	VII	La courbe de Talbot	354	374-377
VIII	<i>Las toroides</i> <i>A) Definición y propiedades más notables de estas curvas</i>	297	314-324	VIII	<i>Les toroïdes</i>	358	378-386
	<i>Las toroides</i> <i>B) Podaires centrales de las toroides</i>		325-329	IX	<i>Les podaires centrales des toroïdes</i>	368	387-392



IX	La curva equipotencial	313	330-334	X	La courbe équipotentielle de Cayley	372	393-398
X	Nota final complementaria, referente á la historia de las curvas algébricas	319	335	XI	Notice succincte sur l'origine et le développement de la théorie des courbes algébriques	379	399

*Livro V*

**Capítulo VII**  
**Curvas transcendentales notables**

**Capítulo VII**  
**Courbes transcendentes remarquables**

I	La logarítmica	324	345-352	I	La logarítmique	1	400-408
II	La catenária	329	353-360	II	La chaînette	11	409-418
III	La tractriz de Leibnitz	334	361-368	III	La tractrice	19	419-427
IV	La sintractriz de Sylvester	338	369-373	IV	La syntractrice	24	428-431
V	Catenária de igual resistência	340	374-379	V	Chaînette d'égale résistance	27	432-435
VI	<i>La curva de los senos</i>	343	380-386	VI	<i>Les courbes des sinus, des tangentes et des sécantes</i>	29	436-441
VII	Cuadratriz de Dinóstrato	350	388-392	VII	<i>Sur la courbe</i> $ \sin(x + iy)  = c$	36	442
VIII	Curva elástica, ó lintearia	354	388-392	VIII	La quadratrice de Dinostrate	39	443-448
IX	Curva elástica, ó lintearia	354	388-392	IX	La courbe élastique ou lintéaire	44	449-452

IX	Curva isócrona paracéntrica	360	399-398		X	Courbe isochrone paracentrique	50	453-456
--	--	--	--		XI	Courbes de Wallis. Courbe gamma	55	457-458
<b>Capítulo VIII</b>					<b>Capítulo VIII</b>			
<b>Las espirales</b>					<b>Les spirales</b>			
I	Espiral de Arquimedes	363	403-407		I	La spirale d'Archimède	59	459-462
II	Espiral de Galileo	367	408-414		II	Spirale de Galilée	64	463-465
III	Espiral de Fermat	371	415-419		III	La spirale de Fermat	67	466-468
IV	Espiral parabólica	374	420-425		IV	La spirale parabolique	69	469-471
V	Espiral hiperbólica	377	420-425		V	La spirale hyperbolique	72	472-473
VI	Lituus	380	432-438		VI	Le lituus	74	474-475
VII	Espiral logarítmica	383	439-445		VII	La spirale logarithmique	76	476-480
VIII	Espiral de Poincot	386	446-451		VIII	La spirale de Poincot	86	481-483
IX	Espiral tractriz	390	452-459		IX	La spirale tractrice	90	484-488
--	--	--	--		X	Tractrice circulaire	93	489-491
X	La cocleoide	394	459-466		XI	La cochléoide	96	492-496
XI	La clotoide	397	467-472		XII	La clothoide	102	497-501
XII	La pseudocatenaria	403	473-475		XIII	La pseudo-chaînette	108	502-503
XIII	La psedottractriz	406	476-478		XIV	La pseudo-tractrice	111	504-505

<b>Capítulo IX</b>				<b>Capítulo IX</b>			
<b>Parábolas é hipérbolas</b>				<b>Les paraboles et les hyperboles générales. Les spirales correspondantes</b>			
I	De las parábolas en general	410	479-486	I	Les paraboles	115	506-514
II	La parábola semicúbica	413	487-491	II	La parabole cubique. La parabole semi-cubique	121	516-520 515
III	La parábola cúbica	415	492-493	III	Las hyperboles	127	521-524
IV	De las hipérbolas en general	416	494-497	IV	Les spirales paraboliques et hyperboliques	130	525-528
--	--	--	--				
<b>Capítulo X</b>				<b>Capítulo X</b>			
<b>Curvas cicloïdales</b>				<b>Les courbes cycloïdales</b>			
I	La cicloïde ordinaria	420	498-509	I	La cycloïde ordinaire	133	529-543
II	Cicloïdes contraídas y dilatadas	428	510-515	II	Les cycloïdes raccourcies et allongées	150	544-550
III	Epicycloïdes é hipocicloïdes	433	516-526	III	Les épicycloïdes et les hypocycloïdes	155	551-565
--	--	--	--	IV	L'épicycloïde de Huygens ou nephroïde	170	566-568
IV	Hipocicloïde de tres retrocesos	442	527-544	V	Sur l'hypocycloïde à trois rebroussements	174	569-584
V	Evolvente del círculo	458	545-551	VI	Les développantes du cercle	195	585-593

	Epicicloides é hipocicloides contraídas y dilatadas	462	552-560		Les épicycloïdes et les hypocycloïdes allongées et raccourcies	202	594-603
VII	Ruleta de Delaunay	466	561-567	X	La roulette de Delaunay	223	616-624
VIII	Pseudocicloides	471	568-574	IX	Les pseudo-cycloïdes	218	611-615
-	<i>Ver Cap. XI</i>	-	-	VIII	<i>Les rosaces</i>	211	604-610
<b>Capítulo XI</b>					<b>Capítulo XI</b>		
<b>Varias clases de curvas</b>					<b>Sur diverses classes de courbes</b>		
I	Perlas de Sluse	476	575-584	I	Les perles de Sluse	231	625-629
II	<i>Rosáceas de G. Grandi</i>	481	585-594	-	<i>Ver Cap. X</i>	-	-
--	--	--	--	II	La courbe de Jean Bernoulli	235	630
III	Espigas	488	595-600	III	Les épis	237	631-634
IV	Nudos	492	601-606	IV	Les noeuds. Les courbes de Descartes	240	635-638
V	Curvas de Lamé	494	607-617	V	Les courbes de Lamé	244	639-647
VI	Curvas de perseguiamiento	502	618- 622	VI	Lignes de poursuite	254	648-651
VII	Espirales sinusoides	507	623-634	VII	Les spirales sinusoides	259	652-668
--	--	--	--	VIII	Cassiniennes à n pôles	275	669-674
VIII	Curvas de Ribaucour	516	635-640	IX	Les courbes de Ribaucour	282	675-679
--	--	--	--	X	Les courbes de Serret	286	680-689
--	--	--	--	XI	Cycliques planes. Courbes de direction	300	690-700

Capítulo XII					Capítulo XII			
Curvas de doble curvatura					Sur les cycliques sphériques			
II	Curva de Viviani	524	641-644	I	La courbe de Viviani	311	701-709	
--	--	--	--	II	Les courbes cyclo- cylindriques. Les cassiniennes sphériques	320	710-713	
III	Hipopeda de Eudasio ó lemniscata esférica	529	651-652	III	L'hippopède d'Eudoxe	324	714-716	
VII	<i>Elipse esférica</i>	542	666-673	IV	<i>L'ellipse sphérique. Les courbes de W. Roberts</i>	326	717-724	
--	--	--	--	V	Les cycliques sphériques	334	725-730	
					<b>Capítulo XIII</b>			
					<b>Sur les courbes sphériques</b>			
I	Espiral de Pappo	521	641-644	I	La spirale de Pappus	343	731-734	
IV	Clelias	531	653-657	II	Les clélias	346	735-738	
V	Loxodromia	533	658-660	IV	La loxodromie	353	745-749	
VI	Epicicloides esféricas	536	661-665	III	Les épicycloïdes sphériques	348	739-744	
VIII	Ciclicas	550	674-679	--	--	--	--	
--	--	--	--	V	La chaînette sphérique	359	750-755	
--	--	--	--	VI	La courbe du pendule sphérique	367	756-759	

<b>Capítulo XIII</b>				<b>Capítulo XIV</b>			
<b>Curvas de doble curvatura</b>				<b>Sur les hélices. Sur quelques courbes de</b>			
(Continuación)				<b>l'hélicoïde gauche.</b>			
I	Hélice cilíndrica	555	680-687	I	Les hélices cylindriques. Les lignes de courbure, d'ombre, de perspective etc. de l'hélicoïde gauche	373	760-774
II	Hélice cónica	564	688-700	II	Sur les hélices coniques. Sur quelques spirales coniques	389	775-782
III	Hélice cilindro-cónica	566	694-700	III	Les hélices cylindro- coniques	396	783-788
--	--	--	--	IV	Les hélices sphériques. Les hélices biconiques	401	789-791
<b>Capítulo XV</b>				<b>Sur quelques courbes algébriques</b>			
				<b>gauches</b>			
V	Elipse logarítmica	572	703-704		L'ellipse logarithmique,		795-796
VI	Hipérbola logarítmica	576	705-707	II	l'hyperbole logarithmique et la parabola logarithmique	408	797-798
VII	Parábola logarítmica	579	708-709				799
VIII	Curva de Arquitas	582	710-712	V	Courbe d'Architas	435	819-820
IX	Horóptera	585	713-717	I	Sur l'horoptère	405	792-794
--	--	--	--	III	Sur l'intersection de deux cônes de révolution à axes parallèles	415	800-801

--	--	--	--		IV	Sur les cubiques gauches et les quartiques gauches	418	802-818
--	--	--	--		VI	Sur les courbes tétraédrales symétriques	437	821-826
					<b>Capítulo XVI</b>			
					<b>Sur diverses classes de courbes gauches</b>			
IV	Círculo alabeado	569	701-702		I	Les courbes à courbure constante	441	827-829
--	--	--	--		II	Les courbes à torsion constante	445	830
X	Curvas de Bertrand	588	718-721		III	Courbes de Bertrand	447	831-836
--	--	--	--		IV	Sur les lignes géodésiques et les lignes de courbure de l'ellipsoïde	452	837-847
					<b>Capítulo XIV</b>		<b>Capítulo XVII</b>	
					<b>Pollodia y herpollodia</b>		<b>La polhoide et l'herpolhodie</b>	
-	-	593	722-730		-	-	467	848-857

Quadro II – Análise comparativa entre o *Traité des Courbes* e o *Tratado de las Curvas*

Através do esquema anterior, podemos constatar que nos primeiros nove capítulos não houve grandes alterações. No entanto, é de salientar a introdução de seis secções: a primeira inserida logo no primeiro capítulo intitulado *Les focales de Van-Rees*, outras duas no segundo capítulo intitulados *Les courbes quarrables algébriquement. Le trèfle* e *Généralisation de la théorie des cubiques circulaires*, a quarta inserida no capítulo VII com o nome de *Courbes de Wallis. Courbe gama*, a quinta no capítulo VIII com o título *Tractrice Circulaire* e a sexta no nono capítulo com o nome *Les spirales paraboliques et hyperboliques*.

Salienta-se ainda a junção de algumas secções da primeira obra dando origem apenas a uma. Um exemplo disso ocorreu no segundo capítulo, onde houve a junção, na segunda obra, das secções III e IV numa só, intitulada *Le trident. La parabole de Descartes*. Também se verificou o contrário, como por exemplo a divisão da secção VIII, dando origem às secções VIII e X.

A partir do capítulo X, as alterações já são mais profundas. Para além do surgimento de novas secções com estudo de novas curvas, há também troca de curvas entre capítulos, como é o caso de *les rosaces* que inicialmente estava incluído no capítulo XI e passou para o capítulo X. Outras alterações surgem da criação de novos capítulos, deixando assim de pertencerem ao capítulo XIII para pertencerem a outros capítulos.

Com o intuito de evidenciar a preocupação de Gomes Teixeira em ampliar o estudo das curvas, apresentamos de seguida um estudo comparativo, mais exaustivo, de uma curva: a cissóide. Esta é abordada na secção 1 do primeiro capítulo das duas obras. Atendendo à numeração, podemos observar que, na primeira obra, a curva é apresentada em 17 partes e, na segunda, em 30, ou seja, a segunda obra contém mais informação.

Começando pela primeira *parte*, esta é igual nas duas obras, sendo aqui apresentada a equação polar da cissóide, bem como uma figura que ilustra a construção da curva.

Na segunda *parte*, em ambas as obras, é apresentada um pouco da história da cissóide, como por exemplo o nome de alguns matemáticos que, de alguma forma, contribuíram para o estudo da curva ou a utilizaram para outros estudos, bem como a referência a alguns problemas célebres relacionados com a curva. Apesar de, nesta parte, o assunto ser o mesmo nas duas obras, na segunda a informação histórica é mais completa, retratando de uma forma mais exaustiva a maneira como cada matemático se relaciona com a curva, bem como os nomes das obras, artigos ou cartas onde esta aparece. É de salientar ainda a inserção do nome do matemático Roberval como mais um geómetra que utilizou a cissóide nos seus estudos.

Como esta, existem outras partes que foram reescritas, modificando alguns parágrafos e inserindo outros, completando assim o estudo da curva. As fórmulas apresentadas na segunda obra aparecem, por vezes, simplificadas, reescritas de outra forma ou com outra notação. Um exemplo disso é a primeira fórmula apresentada aquando o estudo da rectificação da cissóide:



- *Tratado de las Curvas* - p. 5

$$ds = \frac{2\sqrt{3}a \sec \theta}{\cos^2 \theta} \sqrt{\cos^2 \theta + \frac{1}{3}} d\theta$$

- *Traité des Courbes* - p. 7

$$ds = \frac{2a \sin \theta}{\cos^2 \theta} \sqrt{1 + 3 \cos^2 \theta} d\theta$$

Existem ainda *partes* na segunda obra totalmente inovadoras, retratando outras propriedades não abordadas na primeira obra. Exemplo disso são os números 6 e 10, que abordam uma maneira de determinar as tangentes à cissóide num dado ponto e uma propriedade relacionada com o comprimento de um arco da cissóide, respectivamente.

Por último, podemos observar que, a partir do número 22, inicia-se o estudo da curva denominada cissóide de Zahradnik, caso particular da cissóide, curva esta que não é abordada na primeira obra.

Com este estudo mais exaustivo, pretendemos mostrar que o estudo de novas curvas não só inclui a inserção de novos capítulos e novas secções como também, em capítulos já existentes, Gomes Teixeira inclui a abordagem a novas curvas. Assim sendo, torna-se difícil aqui enunciar todas as curvas que Gomes Teixeira inseriu no *Traité des Courbes*.

## Capítulo 2 - As Espirais

---

---

A geometria é uma área da matemática que se tem revelado, ao longo dos tempos, de grande interesse para muitos matemáticos. O seu extenso desenvolvimento, desde o tempo de Euclides, passando pela Idade Média e chegando até aos tempos modernos, vai ser, ao longo deste capítulo, bastante “visível”.

Neste capítulo, vamos abordar um tipo de curvas planas: as espirais. Este tipo de curvas foi também um assunto bastante abordado desde a Antiga Grécia. Mas, apesar da palavra espiral, no sentido matemático, aparecer facilmente nos nossos dias em numerosos livros e sites da Internet, na maioria dos casos o seu estudo é feito de uma forma muito superficial ou simplesmente são abordados, um ou dois, tipos de espirais, mostrando algumas características de cada uma. Com isto, torna-se difícil encontrar um estudo que se inicie com a apresentação da definição de espiral.

Na primeira secção, iremos apresentar um conjunto de definições do conceito *espiral*, comentando cada uma dessas definições. Vamos também ter a oportunidade de verificar que não existe uma definição clara e consistente para o conceito espiral. Ainda nesta fase, iremos também apresentar um conjunto de características que se podem estudar numa espiral, bem como a forma de as desenvolver. Esta secção surge na tentativa de ajudar o leitor a perceber, ao longo deste capítulo bem como do capítulo seguinte, as propriedades abordadas para cada espiral.

Na secção 2.2, iremos abordar as espirais mais conhecidas e para cada uma delas apresentaremos uma breve referência histórica, seguida da equação polar, de algumas características geométricas e, por último, abordaremos a forma da espiral. Neste sentido, recorreremos ao software *MathGV*, de modo a construir alguns gráficos de cada espiral e assim nos ajudar no seu estudo. Para cada gráfico será indicado no canto inferior direito de cada figura ou ao lado desta, na forma de legenda (quando na mesma figura constam mais do que uma espiral), a respectiva equação polar introduzida no referido programa. Os gráficos elaborados referem-se sempre a um valor particular do parâmetro ou dos

parâmetros que entram na equação polar da curva. Estas concretizações, que serão sempre indicadas junto da figura, foram escolhidas aleatoriamente, havendo apenas o cuidado de que com o valor considerado fosse possível visualizar de forma adequada os gráficos das espirais.

Como já referimos, não iremos estudar todas as espirais abordadas por Gomes Teixeira. Apenas nos cingimos às mais conhecidas e para as quais era conhecida a equação polar, podendo assim serem construídas através do programa *MathGV*.

Ainda na secção 2.2, sempre que se pretender salientar a simetria bem como as assíntotas de uma dada curva, torna-se mais fácil referirmo-nos aos eixos coordenadas do sistema rectangular, pelo que consideremos um sistema de eixos imaginário onde a origem coincide com o pólo e a parte positiva do eixo das abcissas coincide com a semi-recta polar.

A última subsecção que irá ser apresentada, as espirais arquimedianas, não foi referida por Gomes Teixeira. No entanto, consideramos o seu estudo pertinente pelo facto de envolver espirais estudadas ao longo este trabalho.

## 2.1. Espirais – definições e suas características

A palavra espiral surge do grego *speîra* que significa enrolamento. Ao longo da nossa investigação, contactamos com diversas definições de espiral que se revelaram bastante semelhantes à que aparece no dicionário de Língua Portuguesa da editora Porto Editora:

*Espiral é uma linha curva, ilimitada, descrita por um ponto que dá voltas sucessivas em torno de outro (pólo), e do qual se afasta progressivamente.* (1993, p.680)

Também Eduardo Veloso define espiral desta forma, utilizando apenas um vocabulário mais cuidado e específico:

*De uma maneira geral, e de forma intuitiva, uma espiral em torno de um ponto  $O$  é uma curva descrita por um ponto que, simultaneamente, roda em torno de  $O$  e se afasta de  $O$ .* (1998, p.168)

Veremos posteriormente que, para algumas espirais, tais como a espiral de Arquimedes e a espiral de Fermat, estas duas definições são correctas e definem-nas claramente. E, se pensarmos que estas espirais são talvez as mais conhecidas, este facto justifica o aparecimento frequente de definições semelhantes.

Mas, observando estas definições, verificamos que nem todas as espirais as satisfazem, como por exemplo a espiral hiperbólica que em vez de se afastar ao rodar em torno do ponto  $O$ , se aproxima dele. Também a espiral de Poincot não verifica esta definição, pois tem origem num ponto diferente do ponto  $O$  e apesar de rodar indefinidamente em torno de  $O$ , não se afasta deste, pelo contrário, aproxima-se indefinidamente do ponto  $O$ .

Para os matemáticos gregos, as curvas eram normalmente definidas através de uma propriedade ou através da descrição da trajectória de um ponto, que se move ao longo do plano. As definições de espiral apresentadas anteriormente assemelham-se às definições dadas pelos matemáticos gregos, transmitindo uma ideia geral da forma da curva.

Para além destas duas definições, a definição que mais vezes surgiu no contexto ao longo da nossa pesquisa, tanto em livros como na Internet, é ainda mais simples. São exemplos dessa definição as duas transcrições seguintes (sendo uma delas retirada de um livro e outra da Internet):

*Uma espiral é uma curva que se envolve em torno de um ponto central.* (Anton, 2000, p.130)

*A spiral is an even or spatial curve, which runs around a center.*<sup>1</sup>

Apesar de mais simples, estas definições são mais abrangentes pois apenas salientam o movimento de um ponto à volta de outro fixo, pólo, deixando a liberdade de se considerar dois casos: ou o ponto se afasta do centro ou se aproxima dele.

Uma definição, um pouco mais completa que as anteriores, é a de Joaquín de Vargas y Aguirre, inserida na obra entregue a concurso em 1897:

*Se nombra espiral á una curva, engendada por el movimiento de un punto, girando alrededor de otro fijo, del cual se separa ó aproxima, según una ley determinada.* (1908, p.424)

Esta definição já considera claramente duas formas de espirais: as que se aproximam ou as que se afastam constantemente de um ponto fixo, à medida que rodam em torno deste. Para além disso, insere uma nova ideia que é a de um movimento segundo uma *ley determinada*, donde resulta que duas curvas, que se afastam constantemente de um ponto (ou se aproximam) podem ter crescimentos diferentes, produzindo curvas diferentes.

Uma outra definição importante de espiral surge através da definição clássica de uma curva como sendo o gráfico de uma função, ou seja, atendendo a que uma curva fica definida através de uma equação do tipo  $y = f(x)$ , em coordenadas cartesianas, ou do tipo  $\rho = f(\theta)$ , em coordenadas polares. Deste modo, uma nova definição de espiral, pode ser escrita, recorrendo à sua equação polar:

---

<sup>1</sup> <http://www.mathematische-basteleien.de/spiral.htm>

*Many plane curves that are called spirals can be expressed by*  
 $\rho = f(\theta)$  (*f monotonic*) *in polar coordinates*  $(\rho, \theta)$ .  
 (Mathematical Society of Japan, 1980, p.325)

Uma nova definição, encontrada na Internet, baseia-se em definir uma espiral através da sua curvatura:

*(...) son curvas planas que comienzan en un punto y cuya curvatura va disminuyendo progresivamente a medida que aumenta su radio de curvatura.*<sup>2</sup>

Para terminar, apresentamos uma definição literária de espiral, apresentada pelo escritor e poeta Vladimir Nabokov, dando uma nova visão deste tipo de curvas:

*La espiral es un círculo espiritualizado. En la forma espiral, el círculo, desenrollado, devanado, ha dejado de ser vicioso...La vuelta sigue a la vuelta y toda síntesis es la tesis de una nueva serie (...).*<sup>3</sup>

Apesar das várias definições aqui apresentadas, quando se inicia uma pesquisa sobre espirais, não é difícil encontrar bibliografia que refira o termo “espiral”, tanto numa modesta biblioteca como na Internet, mas poucas vezes se encontra uma definição. E, para reforçar esta ideia, vemos que já Philips J. Davis<sup>4</sup>, na sua obra *Spirals from Theodorus to Chaos*, aborda esta questão numa *lecture* incluída no início da primeira parte deste livro e intitulada *What is a Spiral? Spirals Old and New*. Nesta parte, o autor inclui algumas ideias gerais sobre espiral, referindo-se a algumas espirais conhecidas. No entanto, também não apresenta uma definição concreta de espiral, como podemos ver na transcrição seguinte:

*But what is a spiral, generally speaking? (...) The dictionaries mathematical or otherwise, aren't much help. They give definitions for which counterexamples are easily provided.* (1993, p.21)

<sup>2</sup> [http://www.formacion.pntic.mec.es/web\\_espiral/matematicas\\_1/espiralymatema.htm](http://www.formacion.pntic.mec.es/web_espiral/matematicas_1/espiralymatema.htm) - *Espirales en la Historia de las Matemáticas*.

<sup>3</sup> <http://www.divulgamat.net/weborriak/Exposiciones/Expode/AntonioPerez/Espiras.asp>

<sup>4</sup> Historiador e filósofo, conhecido pelo facto de ser o co-autor do livro *A experiência Matemática* publicada pela editora Gradiva em 1996.

E transcreve, também, algumas definições:

*Encyclopaedia Britannica, 11th ed.: A spiral is a curve that winds around a fixed point.*

*American Heritage Dictionary: Locus of a point moving around a fixed center at a monotonically increasing or decreasing distance.*

*An old scientific dictionary in my library, whose cover was ripped off: Spiral – a term used generally to describe any geometric entity that winds about a central point while also receding from it. (1993, p.21)*

No entanto, termina sem encontrar uma forma de definir concretamente o termo espiral.

Também Gino Loria, na sua memória entregue à Academia, aborda a questão da dificuldade de definir o conceito de espiral. Este afirma que o conceito espiral ainda não está completamente definido em termos matemáticos, mas, refere que a origem da palavra espiral é muito antiga, provindo de movimentos astronómicos descritos por Platão. No entanto, Gino Loria, baseado num trabalho de G. Fouret publicado em 1880, apresenta a equação polar geral de uma espiral, sendo esta da forma:

$$\rho = \frac{f(\omega)}{\omega + \varphi(\omega)},$$

onde  $f$  e  $\varphi$  designam funções racionais e  $\omega$  o ângulo polar. No entanto, Gino Loria afirma também que, a definição não abrange todas as espirais, apenas define um conjunto limitado deste tipo de curvas.<sup>5</sup>

Com esta exposição, concluímos que, nenhuma definição, até agora apresentada, consegue ser tão abrangente de forma a satisfazer todas as espirais que vão ser apresentadas. Este facto justifica a dificuldade de encontrarmos uma definição de espiral. O próprio Gomes Teixeira não definiu espiral, apenas afirma que toma *esta palavra em su sentido geométrico*<sup>6</sup>, o que é curioso quando desenvolveu, com tanta profundidade, um estudo sobre este tipo de curvas, como iremos ver no capítulo seguinte.

Atendendo às diferentes definições, podemos concluir que, em geral, uma espiral é uma linha definida por um ponto, que se desloca em torno de um ponto fixo, o pólo da

<sup>5</sup> Loria, 1911b, p.53.

<sup>6</sup> Teixeira, 1905, p.VII.

espiral, à medida que se afasta ou se aproxima desse ponto fixo. Considerando um ponto qualquer da curva, podemos considerar um vector com origem no pólo da espiral e extremidade no ponto considerado. Ao comprimento desse vector, designamos por raio vector desse ponto. E, para cada ponto da espiral, pode ainda ser considerado um ângulo de rotação, designado por ângulo polar, medido a partir de uma semi-recta fixa, designada por eixo polar. Este ângulo pode ter dois sentidos: sentido positivo ou anti-horário quando varia de 0 para  $+\infty$ , e sentido negativo ou horário, quando varia de 0 para  $-\infty$ . Assim, cada ponto da espiral fica definido quando se conhece o valor do ângulo polar e o correspondente raio vector desse ponto.

De acordo com o que foi referido, uma espiral fica definida quando se conhece a relação entre o raio vector e o ângulo polar, definindo tal relação a equação polar da espiral:

$$\rho = f(\theta),$$

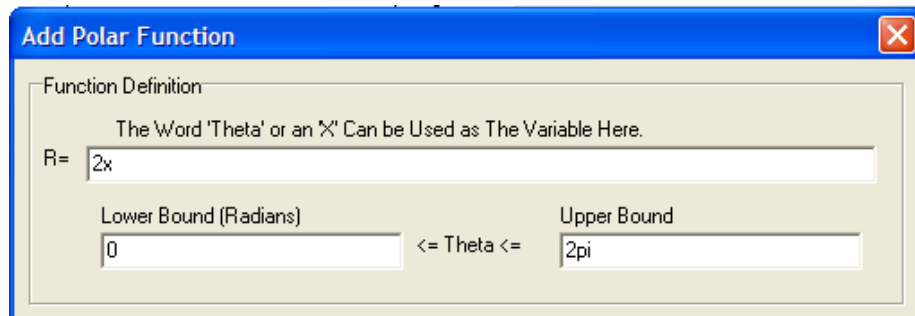
sendo  $\rho$  o raio vector e  $\theta$  o ângulo polar. Ao par ordenado  $(\rho, \theta)$  designamos por coordenadas polares de um ponto da espiral.

Atendendo à equação polar de uma espiral do tipo  $\rho = f(\theta)$ , podemos ver que, dependendo das restrições do ângulo polar, a espiral pode-se desenvolver em torno do pólo em dois sentidos: no sentido anti-horário, quando o ângulo polar toma valores positivos,  $\theta \geq 0$ , e no sentido horário, quando o ângulo polar toma valores negativos,  $\theta \leq 0$ . No entanto, o ângulo polar pode tomar valores positivos e negativos e, neste caso, a espiral desenvolver-se-á nos dois sentidos designando-se, atendendo a alguns autores, por espiral dupla<sup>7</sup>. De forma a ilustrar aquilo que acabámos de referir, desenhámos, através de um software computacional – *MathGV*<sup>8</sup>, uma espiral para restrições diferentes de  $\theta$ . Para este exemplo vamos considerar a espiral de Arquimedes de equação  $\rho = 2\theta$  e três restrições diferentes do ângulo polar: uma positiva, outra negativa e uma terceira que contenha valores positivos e negativos. Para tal, basta escolher no menu *Function*, da barra de ferramentas, a opção *New Polar Function*. Desta forma, o programa abre uma nova janela, figura 2.1, que permite inserir a equação da espiral, bem como a restrição do ângulo polar pretendida.

<sup>7</sup> Anton, 2000, p.127.

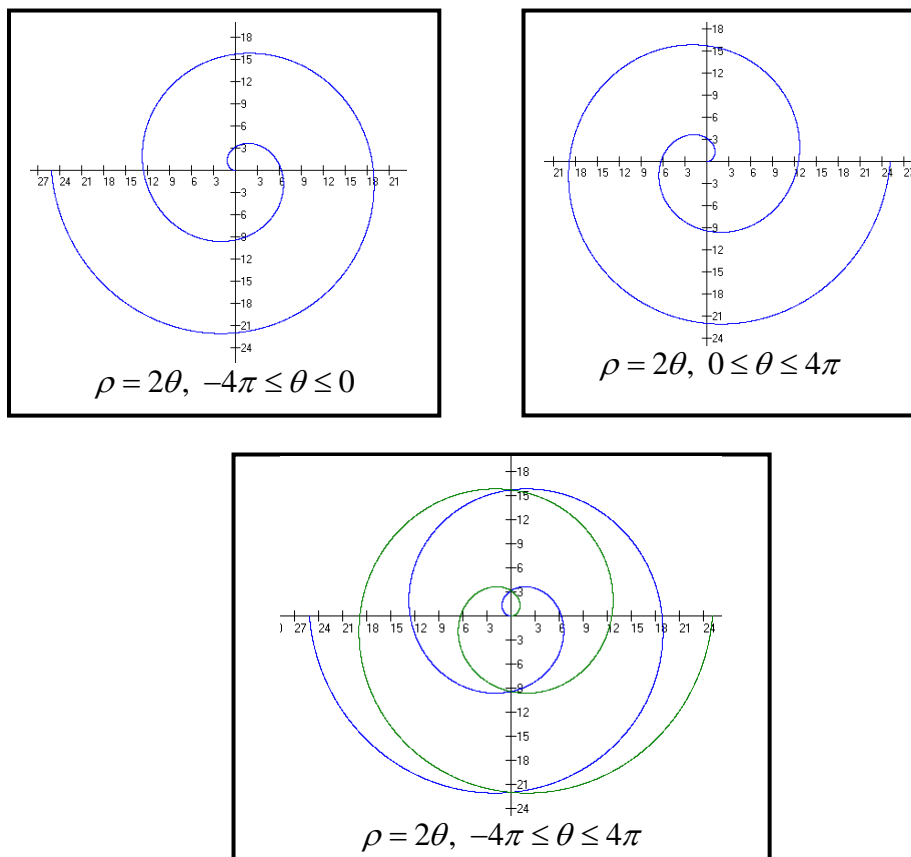
<sup>8</sup> O *MathGV* é um programa que permite traçar gráficos de funções, podendo estas serem dadas tanto em coordenadas polares como em coordenadas cartesianas.





**Figura 2.1** - Parte de uma janela do software *MathGV*.

Obtém-se assim os seguintes gráficos:



**Figura 2.2** - Exemplos da espiral de Arquimedes, considerando intervalos de  $\theta$  diferentes.

Como podemos ver na figura anterior, as espirais apresentam-se com a forma de ansas enroladas, com inúmeras voltas em torno do pólo. E, a cada volta da curva compreendida entre duas passagens consecutivas pelo eixo polar, chamamos espira.

### Como estudar algumas propriedades das espirais

Depois de discutidas várias definições de espiral, vamos agora, abordar algumas das características que se podem estudar numa espiral e que mais tarde, apresentaremos, sempre que possível, para cada uma delas.

Para começar, salientemos que, uma espiral é uma curva transcendente, pois não possui uma equação cartesiana polinomial com coeficientes reais, ou seja, a sua equação em coordenadas rectangulares só é possível se envolver funções transcendentais de  $x$  e  $y$ .<sup>9</sup>

Desta forma, para localizar um ponto de uma curva transcendente, em particular de uma espiral, torna-se mais simples usar o sistema de coordenadas polares. Para tal, como já foi referido, é necessário fixar um ponto  $O$ , chamado pólo, e uma semi-recta com origem em  $O$ , chamada eixo polar. Na maioria dos casos, e como veremos mais à frente, fixa-se, por conveniência, o pólo na origem do sistema de eixos rectangulares e, para eixo polar, toma-se a parte positiva do eixo  $Ox$ .

De uma maneira muito simples, um esboço do gráfico de uma espiral, de equação  $\rho = f(\theta)$ , pode ser construído calculando uma tabela com vários valores de  $(\rho, \theta)$  que serão marcados no plano polar. Com isto, queremos salientar que o gráfico de uma espiral é o conjunto de pontos  $P$ , de coordenadas  $(\rho, \theta)$ , que satisfazem a equação da espiral. Chamemos aqui a atenção para o facto de que um ponto  $P$  poder ter mais do que uma representação, em coordenadas polares. Por exemplo,  $(\rho, \theta) = (\rho, \theta + 2n\pi)$  e  $(\rho, \theta) = (-\rho, \theta + (2n+1)\pi)$  representam o mesmo ponto.

De seguida, vamos estudar algumas características importantes de curvas planas, tais como a área de uma região plana delimitada pela curva, o comprimento de um arco da curva, a subtangente, a subnormal, o comprimento da normal, o comprimento da tangente e o raio de curvatura.

#### Área de uma região plana limitada por uma espiral:

A área delimitada por uma espiral, definida em coordenadas polares pela equação  $\rho = f(\theta)$ , e pelos raios vectores associados aos pontos onde o ângulo polar toma os valores  $\theta = \alpha$  e  $\theta = \beta$ , considerando  $\alpha < \beta$ , é dada por:

<sup>9</sup> Siceloff, 1922, p. 117.

$$A = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} [f(\theta)]^2 d\theta, \text{ ou seja, } A = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \rho^2 d\theta.$$

Comprimento de um arco da espiral (rectificação da espiral):

O comprimento de um arco  $\overline{AB}$  de uma espiral, compreendido entre dois pontos, aos quais correspondem os ângulos polares  $\alpha$  e  $\beta$ ,  $\alpha < \beta$ , é dado por:

$$s = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2 + \rho^2} d\theta.$$

O comprimento de um arco pode também ser determinado pela seguinte expressão:

$$s = \int_{\rho_1}^{\rho_2} \sqrt{\rho^2 \left(\frac{d\theta}{d\rho}\right)^2 + 1} d\rho,$$

sendo  $\rho_1$  e  $\rho_2$  os raios vectores dos dois pontos considerados.

Raio de Curvatura:

Comecemos, em primeiro lugar, por apresentar algumas noções envolventes ao raio de curvatura. A noção de curvatura deduz-se da comparação de um arco de uma curva com um arco da circunferência que substitui o primeiro.

Se numa curva tomarmos dois arcos infinitesimais  $\overline{AB}$  e  $\overline{BC}$  e os substituirmos pelas cordas correspondentes, figura 2.3, as rectas perpendiculares a estas intersectam-se num ponto que designamos por  $M$ .

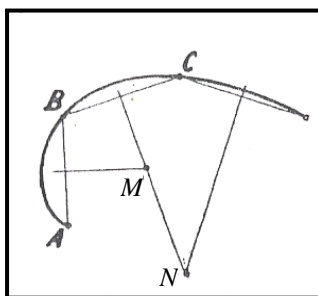


Figura 2.3 – Curvatura de uma curva

Pela construção, sabemos que  $M$  é o centro da circunferência que passa por  $A$ ,  $B$  e  $C$ . A esta circunferência, que tem em comum com a curva os três pontos infinitamente próximos  $A$ ,  $B$  e  $C$ , designa-se por circunferência oscultriz ou círculo osculador da curva no ponto  $B$ ; ao ponto  $M$ , centro do círculo, designa-se por centro de curvatura da

curva no ponto  $B$  e ao raio  $R$  do círculo osculador, designa-se raio de curvatura da curva no mesmo ponto.<sup>10</sup>

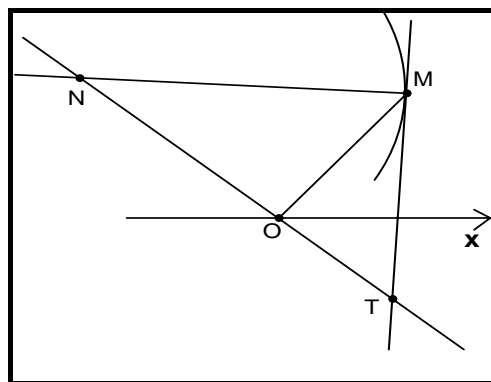
Concluimos assim, que o raio de curvatura de uma curva num dado ponto  $P$  é a distância deste ponto ao respectivo centro de curvatura. Mas, como raramente é conhecido o centro de curvatura, a expressão do raio de curvatura  $R$ , num ponto  $P$  de uma curva, definida em coordenadas polares, é:

$$R = \frac{\left[ \rho^2 + \left( \frac{d\rho}{d\theta} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}}{\left| \rho^2 + 2 \left( \frac{d\rho}{d\theta} \right)^2 - \rho \frac{d^2\rho}{d\theta^2} \right|} \cdot \quad ^{11}$$

Através do raio de curvatura podemos definir curvatura  $c$  de uma curva num dado ponto como sendo o inverso do raio de curvatura no mesmo ponto, ou seja,  $c = \frac{1}{R}$ .

#### Subtangente e subnormal de uma curva polar

Para curvas definidas em coordenadas rectangulares, as definições de subtangente<sup>12</sup> e de subnormal<sup>13</sup> são familiares. No entanto, as definições de subtangente e de subnormal em coordenadas polares apresentam diferenças significativas.



**Figura 2.4** - Subtangente e subnormal

<sup>10</sup> Crusat, 1950, p.398.

<sup>11</sup> Olney, 1871, p. 147.

<sup>12</sup> Em coordenadas rectangulares, a subtangente de uma curva é a porção do eixo das abcissas compreendido entre o ponto, cuja abcissa é igual à do ponto de tangência, e o ponto de intersecção da recta tangente com o eixo das abcissas.

<sup>13</sup> Em coordenadas rectangulares, a subnormal é a porção do eixo das abcissas compreendido entre o ponto, cuja a abcissa é igual à do ponto de tangência, e o ponto de intersecção da recta normal com o eixo das abcissas.

A subtangente de uma curva polar num dado ponto é a distância entre o pólo e o ponto de intersecção da recta tangente à curva no ponto dado e a recta perpendicular ao raio vector desse ponto. De acordo com a figura 2.4, considerando-se  $O$  o pólo,  $M$  um ponto qualquer sobre a curva,  $MT$  a recta tangente à curva nesse ponto e  $NT$  a recta perpendicular ao raio vector do mesmo ponto  $M$  que passa em  $O$ , a subtangente  $S_t$  da curva, no ponto  $M$ , é o comprimento do segmento de recta  $OT$ , ou seja,  $S_t = \overline{OT}$ .

A subnormal de uma curva polar num dado ponto é a distância entre o pólo e o ponto de intersecção da recta normal<sup>14</sup> à curva no ponto dado, com a recta perpendicular ao raio vector desse ponto. De acordo com a figura 2.4, a subnormal  $S_n$  da curva no ponto  $M$  é o comprimento do segmento de recta  $ON$ , ou seja,  $S_n = \overline{ON}$ .

Salientamos a importância da recta  $TN$  normal ao raio vector e que passa pelo pólo  $O$ , dado que é sobre esta recta, e não sobre o eixo  $Ox$ , que se toma a subnormal e a subtangente, numa curva definida em coordenadas polares.

Para terminar este estudo, vamos apresentar as equações gerais que nos permitem determinar o valor da subtangente e da subnormal de uma curva polar:<sup>15</sup>

$$S_t = \rho^2 \frac{d\theta}{d\rho} \quad \text{e} \quad S_n = \frac{d\rho}{d\theta}.$$

Comprimento da tangente<sup>16</sup> e comprimento da normal<sup>17</sup>:

Dada uma curva, definida em coordenadas polares, e um ponto qualquer sobre esta, o comprimento da tangente é a porção da recta tangente à curva no ponto dado, compreendida entre este ponto e o ponto de intersecção da recta tangente com a recta perpendicular ao raio vector e que passa em  $O$ . Pela figura 2.4, o comprimento  $T$  da tangente é a distância entre o ponto  $M$  e o ponto  $T$ , ou seja,  $T = \overline{MT}$ .

O comprimento da normal é a porção da recta normal à curva num dado ponto, compreendida entre este e o ponto de intersecção da recta normal com a recta perpendicular ao raio vector e que passa em  $O$ . Pela figura 2.4, podemos concluir que o comprimento  $N$  da normal é a distância entre o ponto  $M$  e o ponto  $N$ , ou seja,  $N = \overline{MN}$ .

<sup>14</sup> A recta normal a uma curva plana é a recta perpendicular à recta tangente no ponto de tangência.

<sup>15</sup> A dedução destas expressões pode ser consultada no livro de Olney, pp. 108 e 113.

<sup>16</sup> O comprimento da tangente de uma curva definida em coordenadas cartesianas é o comprimento da porção da tangente compreendida entre a curva e o eixo das abcissas.

<sup>17</sup> O comprimento da normal de uma curva definida em coordenadas cartesianas é o comprimento da porção da normal compreendida entre a curva e o eixo das abcissas.

Também aqui, vamos apresentar as expressões que nos permitem determinar o comprimento da normal e o comprimento da tangente de uma curva polar:

$$T = \sqrt{\rho^2 + \left(\rho^2 \frac{d\theta}{d\rho}\right)^2} \quad \text{e} \quad N = \sqrt{\rho^2 + \left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2}.$$

Estas expressões são fáceis de deduzir, se considerarmos os triângulos  $[MOT]$  e  $[MON]$ , ambos rectângulos em  $O$ , onde  $\overline{OM} = \rho$ ,  $\overline{OT} = S_t$  e  $\overline{ON} = S_n$ .

### Pontos Singulares<sup>18</sup>

Designa-se por pontos singulares de uma curva os pontos que possuam alguma propriedade não comum aos restantes pontos da mesma curva, sempre que essa propriedade seja independente da posição da curva e dos eixos de referência. Numa espiral, são vários os pontos singulares que podemos estudar dos quais salientamos:

- Ponto Múltiplo: um ponto  $P$  é designado por ponto múltiplo (duplo, triplo, ...) se uma curva passa por este mais do que uma vez (duas, três, ...).

- Ponto de Inflexão: é um ponto onde a concavidade da curva muda de sentido, ou seja, a curvatura da curva é nula. Assim, o raio de curvatura de uma curva num ponto de inflexão é infinito.

- Ponto de Retrocesso: é um ponto duplo, onde existe apenas uma tangente única comum aos dois ramos da curva e para o qual estes dois terminam.

### Assíntota:

Uma recta diz-se assíntota de uma curva plana  $C$  se a distância de um dos seus pontos à curva tende para zero, quando o ponto se afasta indefinidamente sobre a recta.

### Inversa:

Seja  $O$  o pólo e  $C$  uma curva, definida em coordenadas polares, de equação polar  $\rho = f(\theta)$ , então a curva inversa de  $C$  tem de equação polar:

$$\rho = \frac{k}{f(\theta)},$$

sendo  $k$  uma constante.

---

<sup>18</sup> Prats, 1950, pp.400-401.

## 2.2. Uma primeira abordagem das espirais mais conhecidas

### 2.2.1. A espiral de Arquimedes

A espiral de Arquimedes é definida como o lugar geométrico no plano descrito por um ponto que se desloca com uma velocidade uniforme ao longo de uma semi-recta, a partir da origem. Por sua vez, esta semi-recta roda, com uma velocidade angular uniforme, em torno da sua origem. A origem da semi-recta vai corresponder ao pólo da espiral.

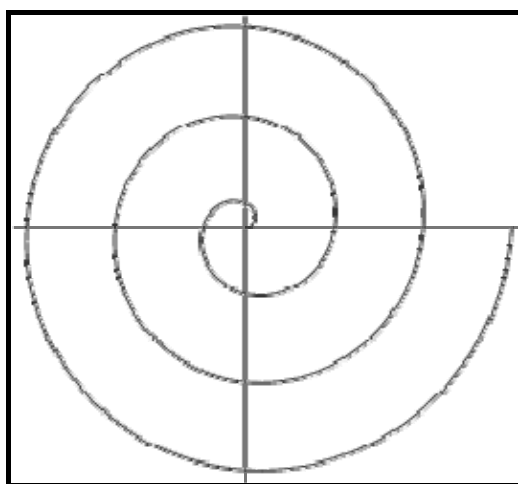


Figura 2.5 - Espiral de Arquimedes

Esta espiral foi estudada pelo, físico e matemático, Arquimedes, em 225 a.C. que, fascinado pela sua beleza, realizou um estudo profundo das suas propriedades num trabalho intitulado *Sobre espirais*. Nesta obra, Arquimedes centra-se na espiral, que mais tarde ficou conhecida pelo seu nome, e no cálculo de áreas associadas a esta, onde reúne algumas técnicas de cálculo bastantes profundas e apresenta um grande rigor nas demonstrações, sendo talvez por isso que Carl Boyer, no seu livro, observa que:

*A obra Sobre espirais foi muito admirada mas pouco lida, pois era geralmente considerada a mais difícil obra de Arquimedes. (1999, p.88)*

No entanto, esta espiral foi também designada pelo nome de *espiral de Conon*, por se considerar que este matemático também se debruçou sobre a espiral e que foi mesmo Conon de Samos quem inventou esta curva. Mas, toda esta informação foi mais tarde

desmentida, aceitando-se a ideia de que foi Arquimedes quem inventou a espiral e que a ele se deve o estudo das suas propriedades mais importantes.

Uma outra designação atribuída a esta espiral é a de espiral uniforme, à qual nos referimos posteriormente.

Facilmente encontramos um exemplo do dia-a-dia que pode ser modelado por esta curva, basta para isso considerar uma corda que se enrola sobre si mesma.

### Equação Polar

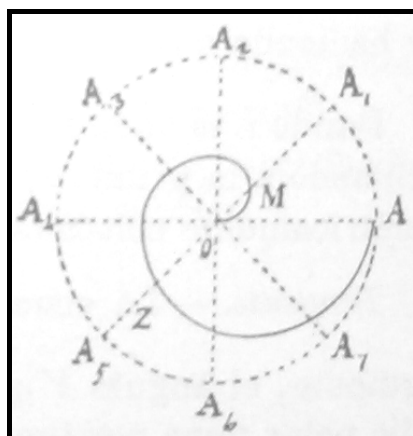
Atendendo a que as espirais se distinguem segundo a relação que relaciona o raio vector com o ângulo polar, no caso da espiral de Arquimedes, esta relação é expressa pela equação polar:

$$\rho = a\theta$$

onde  $\rho$  é o raio vector,  $a$  uma constante arbitrária e  $\theta$  o ângulo polar. Através desta equação, concluímos que, para esta espiral, o raio vector varia proporcionalmente ao ângulo polar.

Esta equação polar surge da definição geométrica da espiral, dada inicialmente. De acordo com a figura 2.6, tem-se que a relação entre qualquer raio  $OZ$  e o raio  $OA$  da circunferência é igual à relação existente entre o arco  $AA_3A_5$  e a circunferência inteira. Assim, designando por  $\rho$  o raio vector  $OZ$ , por  $r$  o raio da circunferência  $OA$  e por  $\theta$  o comprimento do arco  $AA_3A_5$ , e considerando  $2\pi$  o comprimento da circunferência, obtém-se que  $\frac{\rho}{r} = \frac{\theta}{2\pi}$ , donde resulta que  $\rho = \frac{r}{2\pi}\theta$ . Fazendo  $a = \frac{r}{2\pi}$  surge então a equação polar da espiral apresentada anteriormente,  $\rho = a\theta$ .

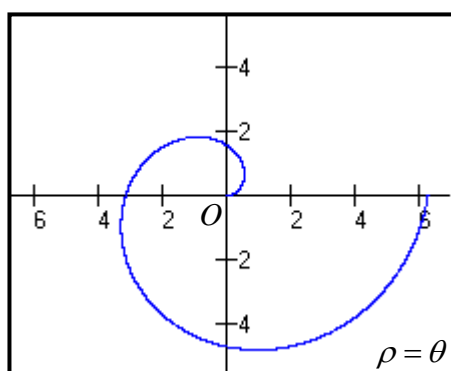




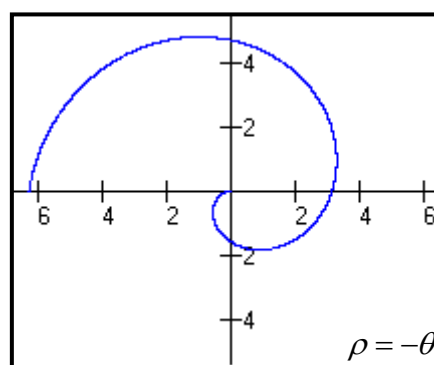
**Figura 2.6** - Definição da espiral de Arquimedes

Através do programa *MathGV*, vamos desenhar alguns gráficos da espiral de Arquimedes de modo a estudar o seu comportamento.

Vejamos as curvas que se obtêm atribuindo valores simétricos ao parâmetro  $a$ ,  $a = 1$  e  $a = -1$ , variando o ângulo polar no intervalo  $[0, 2\pi]$ .



**Figura 2.7** - Espiral de Arquimedes  
 $a = 1$

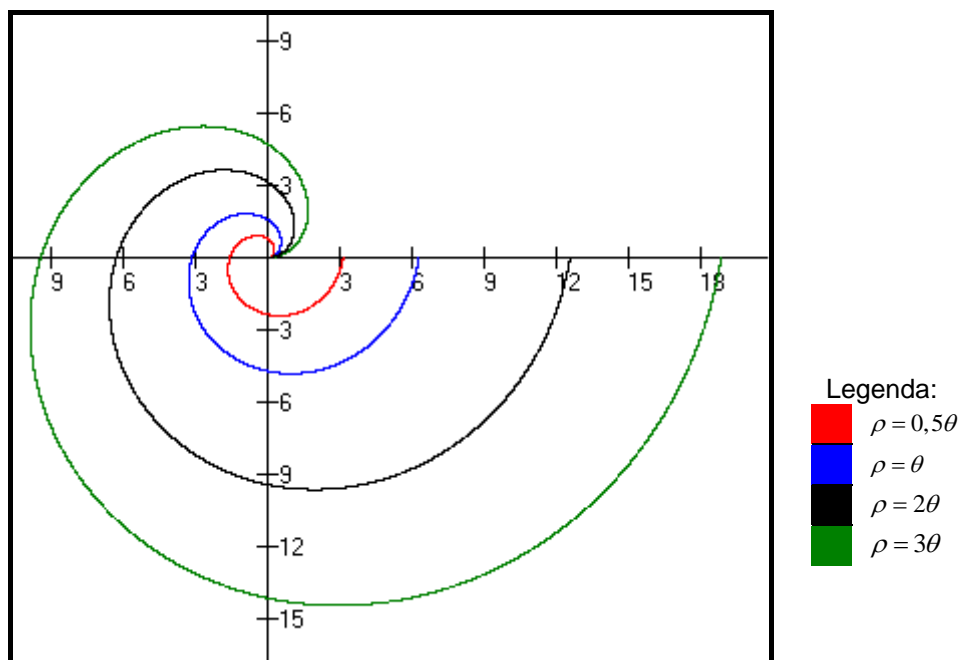


**Figura 2.8** - Espiral de Arquimedes  
 $a = -1$

Em ambas as figuras, podemos observar que a espiral de Arquimedes, tal como a equação polar sugere, é o conjunto de pontos que, à medida que o valor de  $\theta$  aumenta no intervalo  $[0, +\infty[$ , o raio vetor também aumenta. Desta forma, concluímos que a curva se desenvolve em torno do pólo  $O$ , fazendo um número infinito de circunvoluções ao mesmo tempo que se afasta deste ponto. Se o ângulo polar variar no intervalo  $]-\infty, 0]$ , a curva desenvolve-se da mesma forma. No entanto, é simétrica à anterior em relação ao eixo das ordenadas. Outra das conclusões que podemos obter pela comparação das duas figuras

anteriores é que, para valores simétricos do parâmetro  $a$ , as curvas obtidas são simétricas em relação ao pólo  $O$ .

Podemos ainda observar a influência do parâmetro  $a$ , quando este toma valores distintos, mas, consideremos valores positivos, sem perda de generalidade:



**Figura 2.9** - Espirais de Arquimedes

$$a = \frac{1}{2}, 1, 2, 3$$

Pela figura, podemos concluir que quanto maior é o valor do parâmetro  $a$  mais rapidamente a curva se afasta do pólo.

### Algumas propriedades da espiral

Arquimedes debruçou-se sobre diversas características da espiral apresentando, na sua obra, bastantes propriedades. Para além do seu estudo, Arquimedes utilizou também a espiral para chegar à trissecção do ângulo e à quadratura do círculo, como veremos posteriormente.

De seguida, vamos apresentar algumas das propriedades da espiral descobertas por Arquimedes.

Uma das características principais desta espiral é que, entre duas espiras, a distância mantém-se constante, ou seja, a expansão e a rotação dão-se à mesma velocidade, figura

2.10. Desta propriedade surge uma nova designação da espiral, espiral uniforme, como tínhamos referido anteriormente.

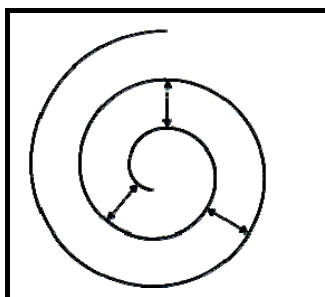


Figura 2.10 - Espiral de Arquimedes

Podemos ainda determinar o valor da distância entre duas espiras, em função do valor de  $a$ . Basta considerar um ponto arbitrário de coordenadas  $(\rho_1, \theta_1)$ . Atendendo a este ponto, as coordenadas do ponto correspondente a este na espira seguinte são  $(\rho_2, \theta_1 + 2\pi)$ . Daí, a distância entre estes dois pontos ser:

$$\rho_2 - \rho_1 = a(\theta_1 + 2\pi) - a\theta_1 = 2\pi a.$$

Outra propriedade observada por Arquimedes é a igualdade da área da primeira volta da espiral à terça parte da área do círculo que a envolve.

Tal como esta propriedade, na sua obra *Sobre Espirais*, Arquimedes demonstra várias propriedades das áreas das diferentes espiras. No entanto, aqui apenas fazemos referência a estas duas, pois não é nosso objectivo estudar as propriedades da espiral apresentadas por Arquimedes.

### Aplicação da espiral

#### Trissecção de um ângulo

Como já foi referido anteriormente, Arquimedes encontrou uma forma de resolver um dos problemas clássicos da geometria grega, a trissecção do ângulo, que consistia em dividir um ângulo arbitrário, apenas com régua não graduada e compasso, em três partes iguais. Mas, apesar de Arquimedes encontrar uma solução, ele continuou com um problema, que residiu no facto da espiral não se poder construir apenas recorrendo a régua e compasso.

*Arquimedes, como os seus predecessores, foi atraído pelos três famosos problemas de geometria, e a bem conhecida espiral de Arquimedes*

forneceu soluções para dois deles (não, é claro, só com régua não graduada e compasso). (Sousa, 2001, p.25)

Como se pode ver na figura 2.11, construída no programa *The Geometer's Sketchpad*, segundo Arquimedes, para se obter a trisseccão do ângulo, começa-se por fazer coincidir o vértice do ângulo,  $AOB$ , com a origem da espiral, bem como o primeiro lado do ângulo,  $\dot{OA}$ , com o eixo polar. De seguida, divide-se o segmento de recta que vai desde a origem,  $O$ , ao ponto  $P$  (ponto de intersecção da espiral com o segundo lado do ângulo,  $\dot{OB}$ ) em três partes iguais, pelos pontos  $R$  e  $S$  da figura. Por último, por estes dois pontos traçam-se arcos de circunferência, centrados no ponto  $O$ , de modo a intersectarem a espiral, designando-se os pontos de intersecção por  $U$  e  $V$ .

Deste modo e unindo a origem com estes pontos de intersecção, obtêm-se as rectas  $OU$  e  $OV$  que trissectam o ângulo  $AOB$ , ou seja, que definem, juntamente com as semi-rectas  $\dot{OA}$  e  $\dot{OB}$ , os três ângulos que dividem o ângulo original,  $AOB$ , em três partes iguais.

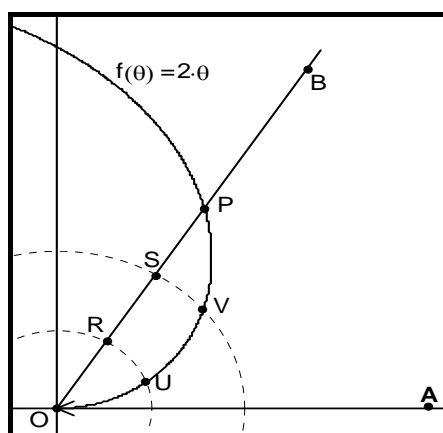


Figura 2.11 - Trisseccão do ângulo

### Quadratura do círculo

Tal como a trisseccão do ângulo, a quadratura do círculo é outro dos problemas clássicos da geometria grega, a que Arquimedes deu solução, mas, também neste caso não satisfazendo as condições iniciais, ou seja, utilizando apenas régua e compasso. Este problema consiste em construir um quadrado de área igual à área de um círculo dado.

De acordo com a figura 2.12, construída no mesmo programa que a anterior, tome-se como sistema polar de referência, a semi-recta  $\dot{O}A$  como eixo polar, e o ponto  $O$  como pólo, e desenhemos a espiral de Arquimedes de equação polar  $\rho = a\theta$ , onde na figura considerámos  $a = 1$ .

Tracemos agora, o círculo de centro  $O$  e raio igual a  $a$ . Então o segmento de recta  $OP$  e o arco do círculo definido entre as semi-rectas  $\dot{O}A$  e  $\dot{O}P$  têm igual comprimento, pois ambos são dados por  $a\theta$ . Desta forma, se considerarmos  $OP$  perpendicular a  $OA$ , então o seu comprimento será igual a um quarto do perímetro da circunferência. Como a área  $A$  do círculo é metade do produto do seu raio pelo seu perímetro, obtemos que neste caso:

$$A = \frac{1}{2} a \times 4\overline{OP} = 2a \times \overline{OP}.$$

Assim, o lado do quadrado pretendido é o meio proporcional<sup>19</sup> entre o diâmetro do círculo,  $2a$ , e o raio vector da espiral que é perpendicular a  $OA$ ,  $\overline{OP}$ .

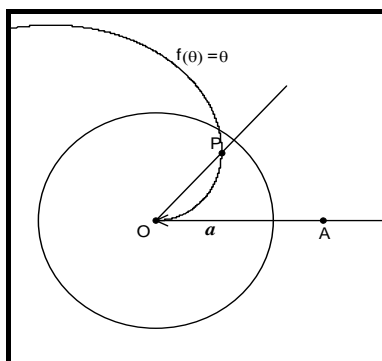


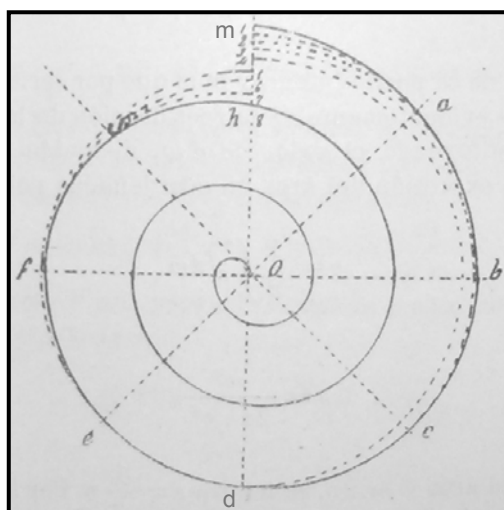
Figura 2.12 - Quadratura do círculo

### Construção

Seja  $O$  o centro e  $Om$  o raio de uma circunferência, figura 2.13. Começemos por dividir esta circunferência em partes iguais (na figura, oito partes:  $a, b, c, \dots$ ), dividir também a porção  $mh$  do raio  $Om$ , (terceira parte deste raio) num número igual de partes (na figura oito partes:  $1, 2, 3, \dots$ ) e tomar sucessivamente as distâncias  $Oa = O1$ ,  $Ob = O2$ ,  $Oc = O3$ , ... .Se unirmos todos estes pontos, assim obtidos, através de uma linha, obtemos

<sup>19</sup> O meio proporcional entre dois segmentos de recta dados, de comprimentos  $s$  e  $t$ , é um segmento de recta de comprimento  $y$  que satisfaz a proporção  $\frac{s}{y} = \frac{y}{t}$ .

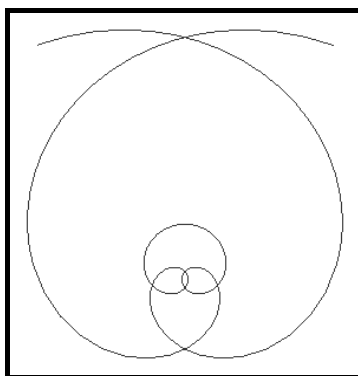
a primeira espira da espiral de Arquimedes. Procedendo de maneira análoga a partir do ponto  $h$  obtemos a segunda espira e assim sucessivamente.<sup>20</sup>



**Figura 2.13** - Construção da espiral de Arquimedes

### 2.2.2. A espiral de Galileu

A espiral de Galileu é descrita pela trajetória de um ponto que se move, segundo um movimento uniformemente acelerado, sobre uma recta do plano, ao mesmo tempo que esta roda uniformemente em torno de um dos seus pontos.



**Figura 2.14** - Espiral de Galileu

Esta curva foi, entre outros matemáticos, estudada por Pierre de Fermat (1601-1665), matemático francês. Para além de se ter debruçado sobre a espiral de Galileu, Fermat

<sup>20</sup> Vargas y Aguirre, 1908, pp.428-429.

também estudou outras curvas e, num trabalho sobre tangentes e quadraturas apresenta mesmo algumas curvas novas, onde as define analiticamente. Esta espiral é por vezes designada por *espiral Baliani*.<sup>21</sup>

### Equação Polar

A espiral de Galileu admite a seguinte equação polar:

$$\rho = a - b\theta^2,$$

sendo  $a$  e  $b$  duas constantes positivas. Salientamos que nem toda a bibliografia seguida restringe os valores de  $a$  e  $b$  a valores positivos. Mas, neste trabalho, vamos considerar essa restrição pelo facto de Gomes Teixeira também a ter considerado na sua obra, como veremos mais à frente.

Começemos por estudar o parâmetro  $a$ , fixando  $b=1$ . Através do programa *MathGV*, e considerando três valores distintos para o parâmetro  $a$ , obtemos os gráficos seguintes:

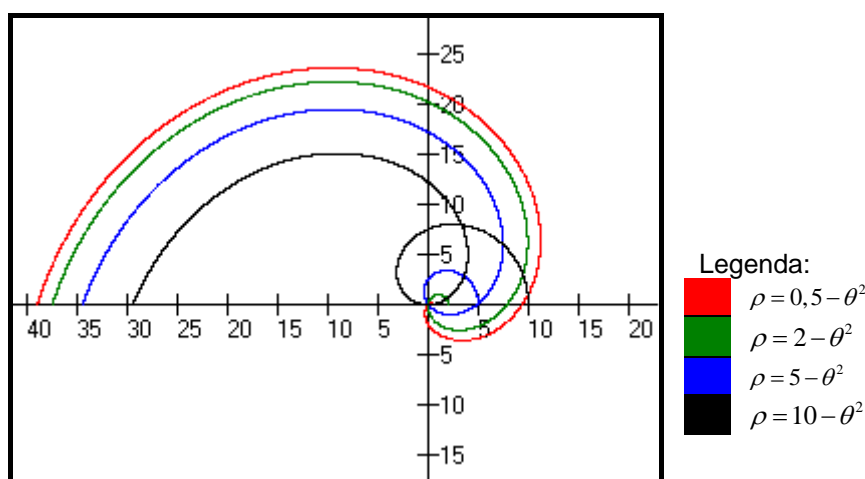


Figura 2.15 - Espirais de Galileu

$$a = \frac{1}{2}, 2, 5, 10$$

Pela equação polar da espiral, observamos que, quando  $\theta = 0$ , o raio vector é igual a  $a$ , e, a partir deste momento e à medida que o ângulo polar aumenta, o raio vector decresce até tomar o valor zero, o que acontece quando  $\theta = \sqrt{\frac{a}{b}}$ .<sup>22</sup> A partir deste ponto,  $\rho$

<sup>21</sup> Ibidem, p.441.

<sup>22</sup> Solução que se obtém igualando a equação polar da espiral a zero,  $a - b\theta^2 = 0$ .

toma valores negativos mas que crescem, em termos absolutos, até ao infinito, fazendo a curva um número infinito de circunvoluções em torno de  $O$ . Quando o ângulo polar toma valores negativos, ou seja, varia entre  $0$  e  $-\infty$ , o raio vector toma os mesmos valores que anteriormente. No entanto, a curva obtida é simétrica à anterior em relação ao eixo das abcissas. Para terminar, ainda podemos observar pela figura 2.15 que, quanto maior for o parâmetro  $a$ , mais lento será o crescimento da espiral.

Fixando agora o valor de  $a$ ,  $a = 1$ , figura 2.16, concluimos que, quanto maior for o parâmetro  $b$ , mais rápido será o crescimento da espiral obtida.

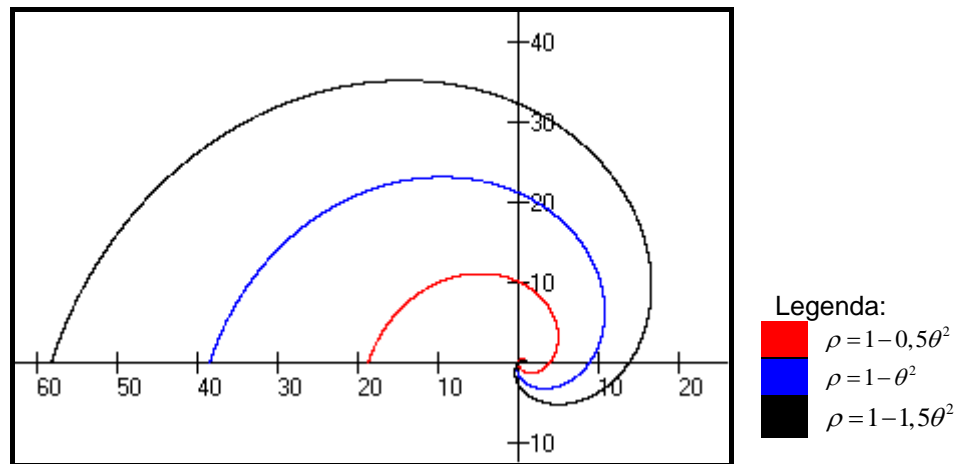


Figura 2.16 - Espiral de Galileu

$$b = \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}$$

### 2.2.3. A espiral de Fermat

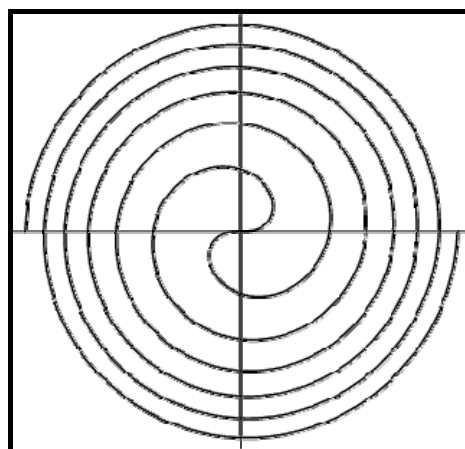


Figura 2.17 - Espiral de Fermat



De acordo com os autores de uma página da Internet<sup>23</sup>, a espiral de Fermat foi estudada, pela primeira vez, por Menelau (cerca de 100 D.C.), no fim do primeiro século, e, só mais tarde, em 1636, foi estudada por Pierre de Fermat (1601-1665). Mas relativamente a Menelau, não encontramos mais nenhuma informação que confirmasse o seu envolvimento com esta curva. No que diz respeito a Fermat, tal como já referimos anteriormente, este definiu novas curvas, sendo uma delas a espiral à qual lhe foi atribuída o seu nome. Mas não se ficou por aqui, Fermat também introduziu as espirais de grau superior, definidas pela equação polar  $\rho^n = a\theta$ .<sup>24</sup>

### Equação Polar

A espiral de Fermat admite a seguinte equação polar:

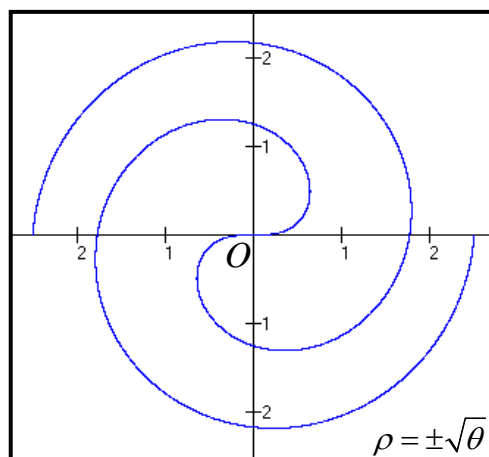
$$\rho^2 = a^2\theta,$$

sendo  $a$  uma constante arbitrária. Para esta espiral, o quadrado do raio vector é proporcional ao ângulo polar.

Através da equação polar, vemos que, para qualquer valor positivo de  $\theta$ , há dois valores correspondentes de  $\rho$ ,  $\rho = a\theta^{\frac{1}{2}}$  e  $\rho = -a\theta^{\frac{1}{2}}$ , sendo um simétrico do outro, e, à medida que o ângulo polar aumenta os valores correspondentes de  $\rho$ , crescem ambos, em termos absolutos, pelo que os dois ramos obtidos fazem um número infinito de circunvoluções à volta do pólo  $O$ . A espiral que resulta será assim simétrica relativamente ao pólo, sendo este, um ponto de inflexão, como se pode observar no esboço apresentado na figura seguinte, para o qual considerámos  $a = 1$  e  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ .

<sup>23</sup> <http://www.mathcurve.com/courbes2d/fermat/fermatspirale.shtml>

<sup>24</sup> Eves, 1994, p. 389.

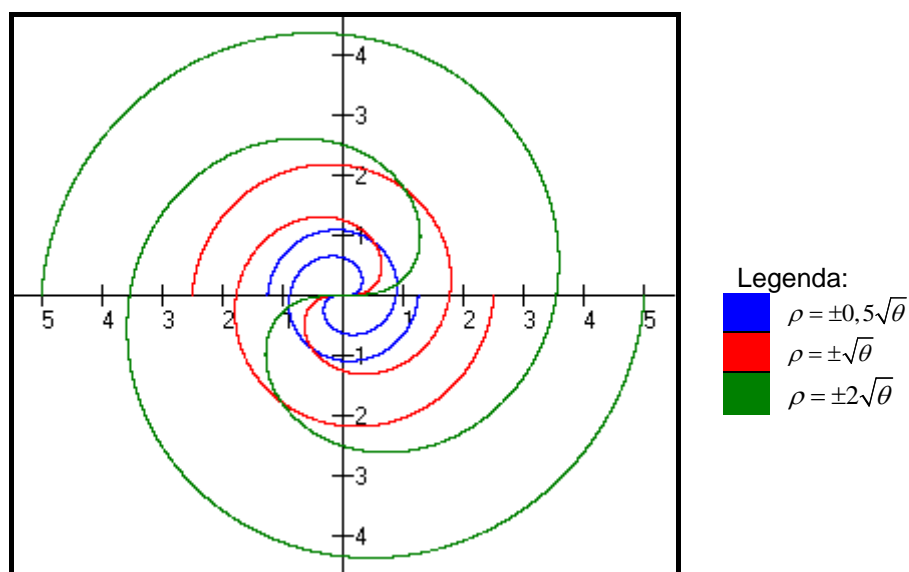


**Figura 2.18** - Espiral de Fermat

$$a = 1$$

Através da figura anterior, podemos ainda observar que os dois ramos se aproximam de forma constante à medida que aumenta infinitamente o ângulo polar, mas nunca se intersectam, donde concluímos que a curva não possui pontos duplos.

Para valores distintos do parâmetro  $a$ , figura 2.19, podemos concluir que quanto maior for o seu valor, mais rápido será o crescimento da curva afastando-se do pólo.



**Figura 2.19** - Espirais de Fermat

$$a = \frac{1}{2}, 1, 2$$

### 2.2.4. A espiral parabólica

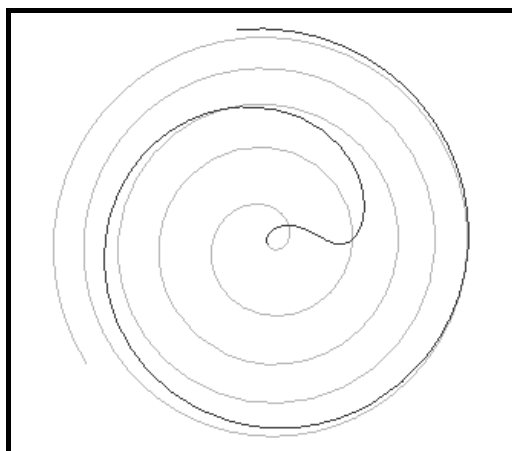


Figura 2.20 - Espiral parabólica

Esta curva foi estudada, em 1691 por Jacob Bernoulli (1654–1705), matemático e físico que se debruçou, entre outras coisas, no estudo de várias outras curvas planas.

#### Equação Polar

A espiral parabólica admite a seguinte equação polar:

$$(\rho - a)^2 = b^2 \theta,$$

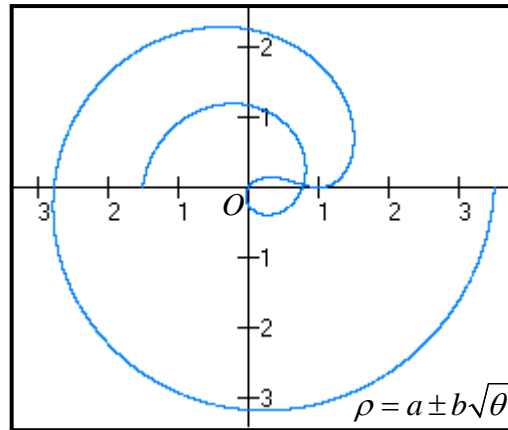
sendo  $a$  e  $b$  constantes arbitrárias.

Podemos observar que, colocando  $a = 0$  na equação anterior, obtemos a equação polar da espiral de Fermat,  $\rho^2 = b^2 \theta$ , tal como referimos aquando do seu estudo.

E, tal como acontecia na espiral anterior, para qualquer valor positivo de  $\theta$  há dois valores correspondentes de  $\rho$ ,  $\rho = a + b\sqrt{\theta}$  e  $\rho = a - b\sqrt{\theta}$ , não sendo, neste caso, simétricos um em relação ao outro.

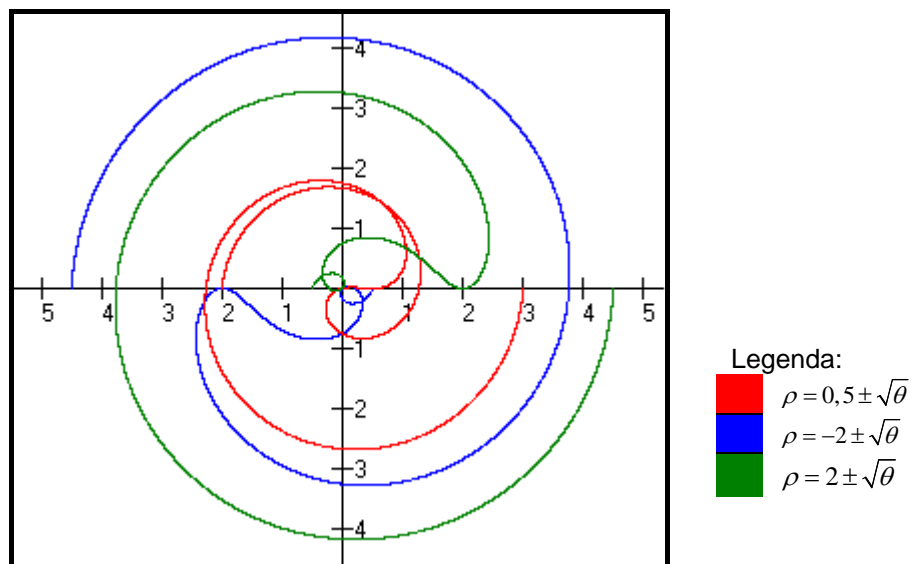
A partir da equação polar, verifica-se que, quando  $\theta = 0$  o raio vector é igual a  $a$ , figura 2.21, e à medida que o ângulo polar aumenta, se formam dois ramos da espiral correspondentes aos valores de  $\rho$  referidos anteriormente. O primeiro, correspondente à equação  $\rho = a + b\sqrt{\theta}$ , faz um número infinito de circunvoluções à volta do pólo  $O$ , à medida que se afasta dele. O outro ramo corresponde à linha que passa pelo pólo da

espiral, quando  $\theta = \left(\frac{a}{b}\right)^2$  e, a partir deste, afasta-se também, tal como o ramo anterior, ficando-lhe sempre interior.



**Figura 2.21** - Espiral parabólica  
 $a = 1$  e  $b = 1$

Podemos ainda observar o que acontece à espiral quando se atribuem valores distintos ao parâmetro  $a$ , fixando o valor de  $b$ , neste caso  $b = 1$ . Assim, para valores simétricos de  $a$ , figura 2.22, as curvas obtidas são simétricas em relação à origem e, à medida que aumenta o seu valor, em termos absolutos, as espirais definidas afastam-se mais rapidamente do pólo.



**Figura 2.22** - Espirais parabólicas  
 $a = -2, \frac{1}{2}, 2$

Atribuindo valores distintos ao parâmetro  $b$ , as espirais que se obtêm são semelhantes e partem do mesmo ponto,  $(0, a)$ , contudo, quanto maior for o valor absoluto de  $b$ , mais rápido se dá o afastamento da linha do seu pólo.

### 2.2.5. A espiral hiperbólica

A espiral hiperbólica é o lugar geométrico, definido por um ponto  $M$  de uma circunferência variável centrada em  $O$  e que corta o eixo polar  $Ox$  em  $A$ , tal que a medida do arco  $\widehat{AM}$  é constante e igual a  $a$ .

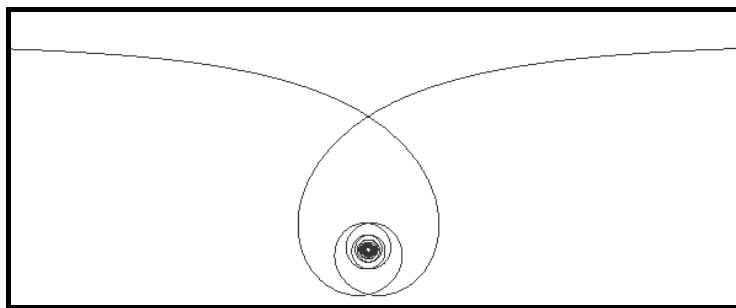


Figura 2.23 - Espiral hiperbólica

Esta espiral foi descoberta em 1704, por Pierre Varignon (1654-1722), o qual lhe atribuiu o nome de espiral hiperbólica ou espiral inversa da espiral de Arquimedes. No entanto, também Jean Bernoulli (1667-1748), entre 1710 e 1713, e Roger Cotes (1682-1716) efectuaram o estudo da mesma espiral.

#### Equação Polar

A espiral hiperbólica é definida pela seguinte equação polar:

$$\rho = \frac{a}{\theta},$$

onde  $a$  é uma constante. Através desta equação, podemos concluir que todos os seus pontos se encontram a uma distância do pólo inversamente proporcional ao ângulo de rotação, sendo desta forma,  $a$  a constante de proporcionalidade.

Assim, à medida que  $\theta$  aumenta, o raio vector decresce e tende para zero, fazendo a curva um número infinito de circunvoluções à volta do pólo, pelo que o ponto  $O$  é um

ponto assintótico da espiral. Para valores de  $\theta$  simétricos, figura 2.24, os ramos obtidos são simétricos em relação ao eixo das ordenadas.

Se considerarmos na equação polar  $\theta = 2\pi, \theta = 4\pi, \theta = 6\pi, \dots$  obtemos para  $\rho$ , respectivamente os valores  $\frac{a}{2\pi}, \frac{a}{4\pi}, \frac{a}{6\pi}, \dots$  donde concluímos que, ao fim de duas voltas o raio vector reduz-se a metade do valor obtido no final da primeira volta, ao fim da terceira volta reduz-se a um terço do valor obtido também no final da primeira volta e assim sucessivamente.

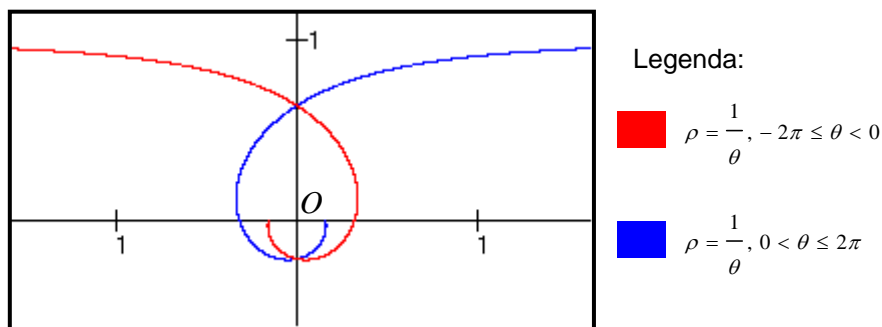


Figura 2.24 - Espiral hiperbólica

$$a = 1$$

A curva possui uma assíntota paralela ao eixo  $Ox$ , situada a uma distância igual a  $|a|$ , figura 2.25, e, para valores simétricos do parâmetro  $a$  as espirais obtidas são também simétricas em relação ao eixo das abcissas.

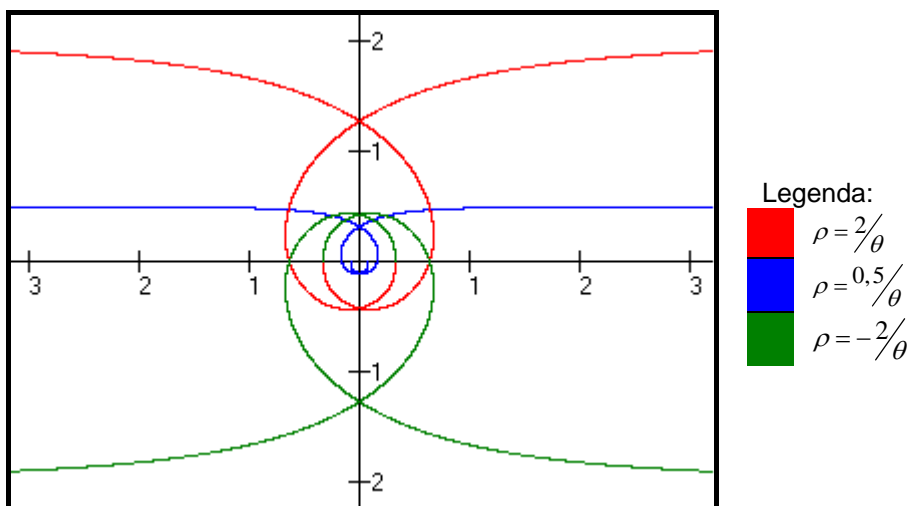


Figura 2.25 - Espirais hiperbólicas

$$a = -2, \frac{1}{2}, 2$$

## Construção

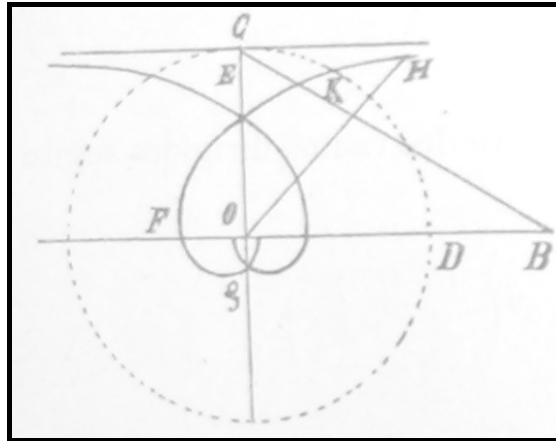


Figura 2.26 - Construção da espiral hiperbólica

Atendendo à figura 2.26, construída por Vargas y Aguirre, tomemos na equação polar da espiral  $a$  igual à unidade. Com este valor desenhemos uma circunferência de centro  $O$  e consideremos o primeiro ponto da espiral sobre a recta  $OC$ , sendo  $\theta = \frac{\pi}{2}$ . O raio vector correspondente toma, desta forma, o valor  $\rho = \frac{a}{\frac{\pi}{2}}$  que, atendendo à proporção

$\frac{\frac{\pi}{2}}{a} = \frac{1}{\rho}$ , será construído tomando  $\overline{OB} = \frac{\pi}{2}$  e traçando  $DE$  paralela a  $BC$ .

O raio vector  $OF$ , que forma com  $OB$  um ângulo de amplitude igual ao dobro de  $B\hat{O}E$ , terá um comprimento igual a metade do vector  $OE$ ; o vector  $OG$ , de inclinação igual ao triplo da inclinação do vector  $OE$ , terá comprimento igual a um terço deste, e assim sucessivamente.

Desta forma, encontraremos tantos pontos quantos se queiram, sendo todos estes, pontos de intersecção da curva com os eixos coordenados.

Da mesma maneira se podem obter os pontos situados sobre as bissectrizes dos ângulos rectos referidos anteriormente. Considerando a bissectriz do ângulo  $BOC$  tomemos um vector  $OH$ , de comprimento igual ao dobro de  $\overline{OE}$ , e, sobre as seguintes

tomemos vectores de comprimentos iguais a  $\frac{1}{3}\overline{OH}$ ,  $\frac{1}{5}\overline{OH}$ ,  $\frac{1}{7}\overline{OH}$ , e voltando à bissetriz  $OH$  tomaremos um novo vector de comprimento  $\frac{1}{9}\overline{OH}$  e assim sucessivamente.

Desta forma obtemos inúmeros pontos do ramo da espiral, para valores de  $\theta$  positivos, sendo o outro ramo (para valores de  $\theta$  negativos) simétrico em relação ao eixo das ordenadas.<sup>25</sup>

### 2.2.6. A lítuo

A lítuo é definida como o lugar geométrico descrito por um ponto de uma circunferência variável de centro  $O$  e que intersecta o eixo das abcissas em  $A$ , tal que a área do sector circular  $AOM$  é constante e igual a  $\frac{a^2}{2}$ .

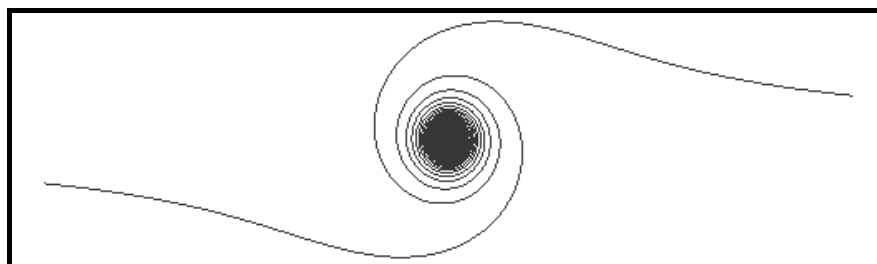


Figura 2.27 - Lítuo

Esta espiral foi estudada, em 1722, pelo matemático Roger Cotes (1682-1716). A palavra lítuo surge do latim, da palavra croça, que significa bastão episcopal. Na verdade, a lítuo era a designação atribuída ao bastão da religião romana usada pelos áugures<sup>26</sup>.



Figura 2.28 - Bastão usado pelos áugures



Figura 2.29 – Capitel de uma coluna grega

<sup>25</sup> Vargas y Aguirre, 1908, pp. 431-432.

<sup>26</sup> Sacerdotes romanos que pressagiavam pelo voo e canto das aves.



Esta espiral aparece por vezes na arquitectura de alguns templos, onde os capitéis de várias colunas apresentam a sua forma, figura 2.29.

### Equação Polar

A lítuo é definida pela equação polar:

$$\rho^2\theta = a^2,$$

sendo  $a$  uma constante arbitrária.

Através da equação polar vemos que, para qualquer valor positivo de  $\theta$  há dois valores correspondentes de  $\rho$ ,  $\rho = \frac{a}{\sqrt{\theta}}$  e  $\rho = -\frac{a}{\sqrt{\theta}}$ , sendo um simétrico do outro, e à medida que o ângulo polar aumenta, os valores correspondentes de  $\rho$  decrescem ambos, em termos absolutos, pelo que os dois ramos obtidos tendem para o pólo  $O$ , à medida que fazem um número infinito de circunvoluções à volta deste. Assim,  $O$  é um ponto assintótico da curva. A espiral que resulta será assim simétrica relativamente ao pólo, como se pode observar no esboço apresentado na figura 2.30, para o qual considerámos  $a = 1$  e  $0 \leq \theta \leq 4\pi$ .

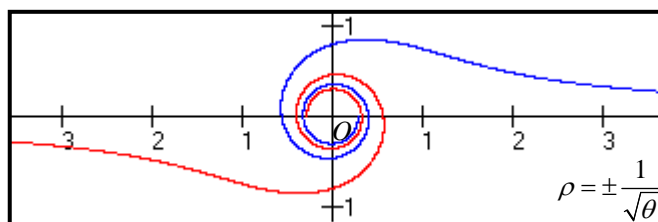


Figura 2.30 - Lítuo

$$a = 1$$

Relativamente ao parâmetro  $a$ , figura 2.31, quanto maior for o seu valor, mais lento será o decrescimento da curva aproximando-se do pólo. No entanto, para qualquer valor de  $a$ , a curva admite uma assíntota que coincide com o eixo das abcissas.

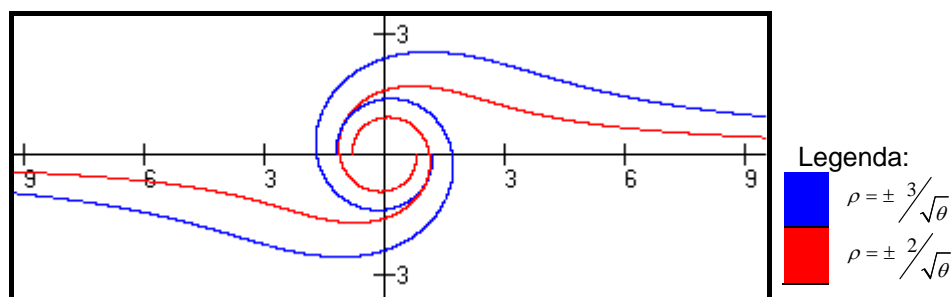


Figura 2.31 - Lítuo

$$a = 2, 3$$

### 2.2.7. A espiral logarítmica

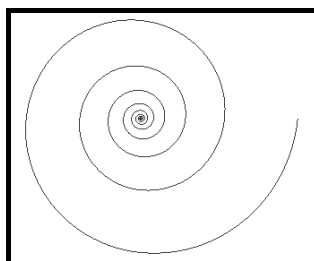


Figura 2.32 - Espiral logarítmica

A espiral logarítmica foi estudada por vários matemáticos, ente eles René Descartes (1596-1650), que em 1638 rectificou a espiral, considerando-se que esta foi a primeira curva a ser rectificada depois da circunferência. Dois anos depois, em 1640, também Evangelista Torricelli (1608–1647) se dedicou ao estudo desta espiral e determinou o comprimento de um arco desta espiral<sup>27</sup>. Mais tarde, em 1698, Jacob Bernoulli, fascinado por esta curva, estudou algumas propriedades notáveis da espiral, tais como a rectificação e a quadratura e, tal era o seu fascínio, pediu para que esta espiral fosse gravada na sua pedra tumular, juntamente com a inscrição *Eadem mutata resurgo*.

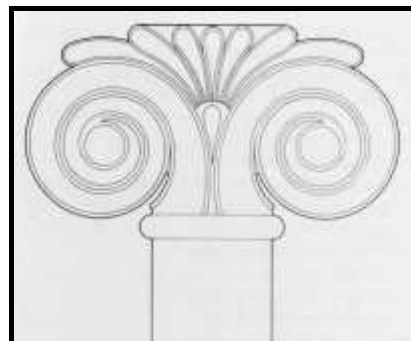
Esta espiral é também designada por espiral equiangular, espiral geométrica ou por *spira mirabilis*. Esta última designação foi atribuída por Jacob Bernoulli, tal era o seu fascínio pela espiral.

<sup>27</sup> Eves, 1994, p.384.

A espiral logarítmica é a espiral que mais predomina na Natureza. Um dos exemplos é a concha de um Nautilus que tem a sua forma, figura 2.33. Outros exemplos encontram-se em plantas, tais como as margaridas e os girassóis.



**Figura 2.33** - Corte de uma concha de um Nautilus



**Figura 2.34** - A espiral logarítmica na Arquitectura

Esta espiral aparece também na Arquitectura, sendo exemplo disso o capitel apresentado na figura 2.34.

### Equação polar

Uma característica importante da espiral logarítmica é que, o ângulo formado entre o raio vector de um ponto qualquer da espiral e a tangente à curva nesse ponto é sempre constante. É por esta razão que a espiral é também designada por espiral equiangular (propriedade semelhante à da circunferência).

A partir desta característica resulta a equação polar da espiral, que pode tomar duas formas. A primeira, a forma logarítmica, à qual se deve o seu nome, espiral logarítmica, consiste na equação:

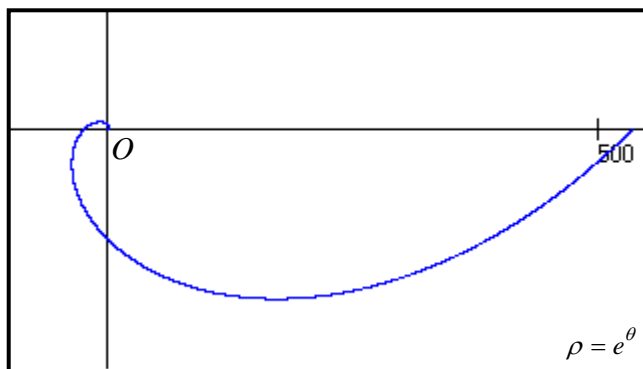
$$\theta = \frac{1}{k} \ln\left(\frac{\rho}{C}\right),$$

onde  $C$  e  $k$  são constantes arbitrárias. A segunda, a forma exponencial que consiste na equação:

$$\rho = Ce^{k\theta}.$$

Através desta última equação, podemos observar que o raio vector cresce exponencialmente em relação ao ângulo polar, ou seja, cresce em progressão geométrica, razão pela qual a espiral também pode ser designada por espiral geométrica. Desta forma, quando  $\theta = 0$ ,  $\rho$  é igual a  $C$ , figura 2.35, e à medida que  $\theta$  aumenta, a linha afasta-se

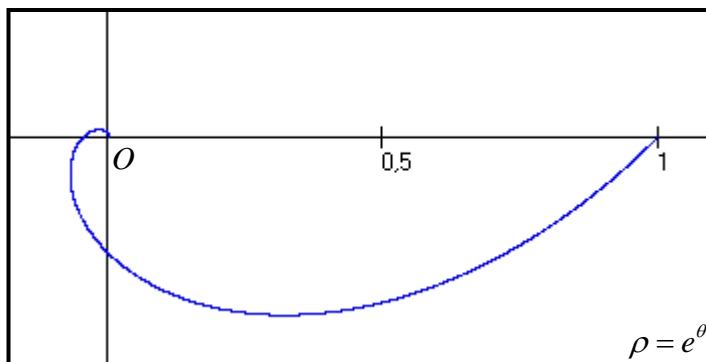
“exponencialmente” deste ponto, ou seja, cresce indefinidamente, fazendo um número infinito de circunvoluções, pelo que a distância entre as espiras também aumenta.



**Figura 2.35** - Espiral logarítmica

$$C = 1, k = 1, \theta \in [0, 2\pi]$$

Quando o ângulo polar toma valores negativos e, à medida que cresce em termos de valor absoluto, figura 2.36, a curva tende para o ponto  $O$ , fazendo também um número infinito de circunvoluções, pelo que o ponto  $O$  é um ponto assintótico da espiral.



**Figura 2.36** - Espiral logarítmica

$$C = 1, k = 1, \theta \in [-2\pi, 0]$$

Quando se aumenta o parâmetro  $k$ , fixando  $C = 1$ , a parte da curva correspondente a valores de  $\theta$  positivos, distancia-se mais rapidamente do pólo enquanto que, a outra aproxima-se mais rapidamente deste.

**Construção**

A) Para construir a espiral logarítmica comecemos por dividir uma circunferência num número conveniente de partes iguais, figura 2.37. Tracemos semi-rectas de origem  $O$

e que passem pelos pontos de divisão da circunferência e tomemos sobre estas as partes  $Am$ ,  $Am'$ ,  $Am''$ , ... tais que estejam em progressão geométrica. Os pontos  $m$ ,  $m'$ ,  $m''$ , ... assim construídos pertencem a uma espiral logarítmica.<sup>28</sup>

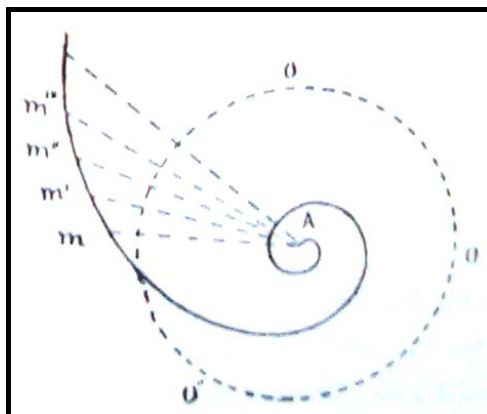


Figura 2.37 - Construção da espiral logarítmica

**B)** Começemos por construir um triângulo rectângulo. A partir deste constroem-se sucessivos triângulos rectângulos semelhantes ao anterior, e tais que, a hipotenusa de cada um seja um dos catetos do triângulo seguinte. Por último, unimos os vértices consecutivos dos triângulos e obtemos assim, a espiral logarítmica.

### 2.2.8. A espiral de Poincot

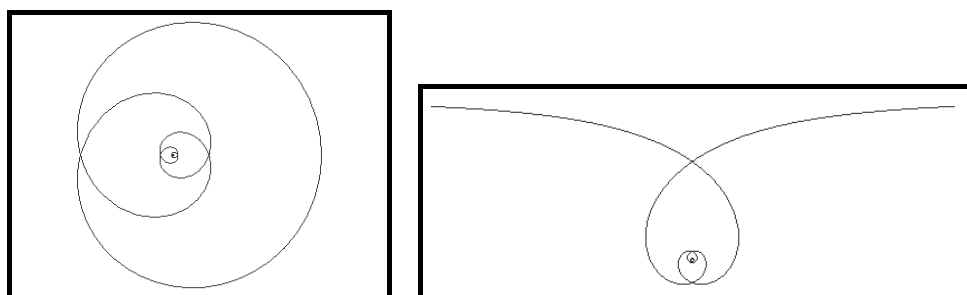


Figura 2.38 - Espirais de Poincot

Existem duas espirais designadas por espirais de Poincot, uma definida a partir do co-seno hiperbólico e outra definida a partir do seno hiperbólico, como veremos de seguida.<sup>29</sup>

<sup>28</sup> Vargas y Aguirre, 1908, p. 436.

<sup>29</sup> Lawrence, 1972, p.192.

Estas espirais foram estudadas pelo matemático francês Louis Poinot (1777 - 1859), ao qual devem o nome.

### Equação polar

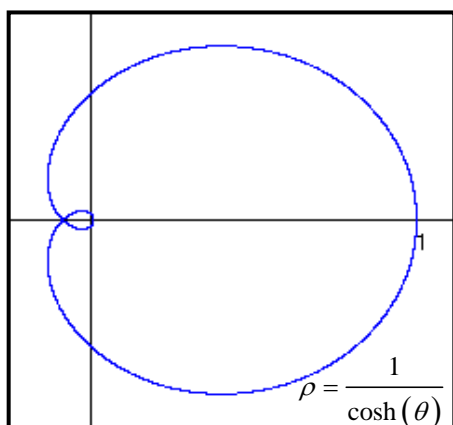
As duas espirais de Poinot são definidas em coordenadas polares pelas equações:

$$(1) \rho \cosh(m\theta) = a \qquad (2) \rho \sinh(m\theta) = a$$

Mas, de acordo com as expressões do seno hiperbólico e do co-seno hiperbólico,  $\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$  e  $\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ , as equações anteriores podem ser expressas da seguinte forma:

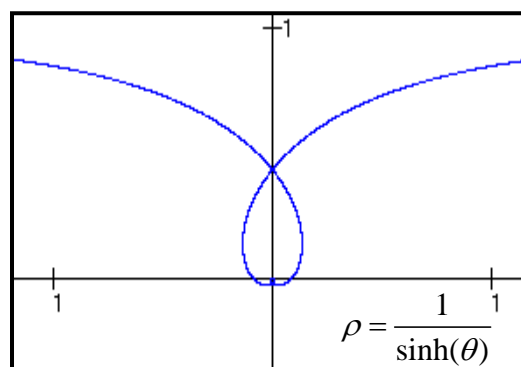
$$(1) \rho = \frac{2a}{e^{m\theta} + e^{-m\theta}} \qquad (2) \rho = \frac{2a}{e^{m\theta} - e^{-m\theta}}$$

Atribuindo valores aos parâmetros  $a$  e  $m$  observamos, respectivamente, as espirais:



**Figura 2.39** - Espiral Poinot

$$a = 1, m = 1, \theta \in [-2\pi, 2\pi]$$



**Figura 2.40** - Espiral Poinot

$$a = 1, m = 1, \theta \in [-2\pi, 2\pi]$$

A primeira espiral, figura 2.39, de equação polar  $\rho = \frac{2a}{e^{m\theta} + e^{-m\theta}}$ , parte do ponto de coordenadas  $(0, a)$  e faz um número infinito de circunvoluções à volta de  $O$ , do qual se aproxima constantemente, sendo  $O$  um ponto assintótico da curva. A valores simétricos de  $\theta$  correspondem duas partes da curva, simétricas uma da outra em relação ao eixo  $Ox$ .

A segunda espiral, figura 2.40, de equação polar  $\rho = \frac{2a}{e^{m\theta} - e^{-m\theta}}$ , caracteriza-se pelo facto de, quando  $\theta$  toma valores muito próximos de zero, o raio vector tende para infinito,

possuindo uma assíntota paralela ao eixo  $Ox$  e de distância igual a  $a$ . E, quando o ângulo polar começa a aumentar, em termos absolutos, a curva tende a aproximar-se do pólo, fazendo um número infinito de circunvoluções à volta deste, pelo que, o pólo  $O$  é, também para esta curva, um ponto assimptótico. A valores simétricos de  $\theta$ , correspondem também duas partes da curva, simétricas uma da outra, mas neste caso em relação ao eixo  $Oy$ .

### 2.2.9. A cochleioide

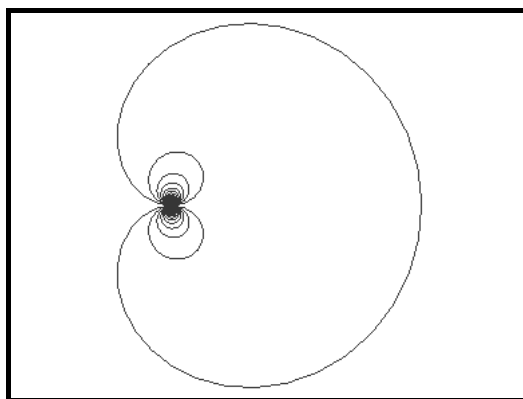


Figura 2.41 – Cochleioide

Esta espiral foi estudada por vários matemáticos dos quais salientamos, em 1700, o matemático Perks, em 1878, o matemático Ernesto Césaro (1859–1906) e, em 1884, Falkenburg e Benthén, aos quais se deve o nome da espiral cochleioide.

O seu nome deriva da palavra latina *cochlea*, em português cóclea, que corresponde a uma parte do ouvido interno, também conhecida por caracol.

Segundo os autores de uma página da Internet,<sup>30</sup> esta curva também já foi designada por *cochlea*, nome este atribuído, em 1685, por John Wallis (1616–1703).

#### Equação polar

A equação polar que define esta espiral é:

$$\rho = a \frac{\sin \theta}{\theta},$$

sendo  $a$  uma constante arbitrária.

<sup>30</sup> <http://www.mathcurve.com/courbes2d/cochleoid/cochleoid.shtml>

Através da equação polar, podemos deduzir a forma da espiral. Quando  $\theta$  toma valores muito próximos de zero, o raio vector  $\rho$  tende para  $a$ <sup>31</sup>, figura 2.42, enquanto que quando  $\theta$  aumenta até  $\pi$ , o raio vector diminui até se anular. De seguida, quando o ângulo polar variar entre  $\pi$  e  $2\pi$ , a curva descreve um arco com origem e extremidade em  $O$ ; quando variar entre  $2\pi$  e  $3\pi$ , a curva descreve outro arco com a mesma origem e extremidade, mas inferior ao anterior e assim sucessivamente. Desta forma, a espiral passa infinitas vezes pelo ponto  $O$ , pelo que este é um ponto múltiplo da curva. Tal facto deve-se a que, para valores de  $\theta$  da forma  $\pi + k\pi, k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ <sup>32</sup>, o seno é nulo, donde  $\rho = 0$ . Se considerarmos valores negativos de  $\theta$  obtemos uma curva simétrica a esta relativamente ao eixo das abcissas.

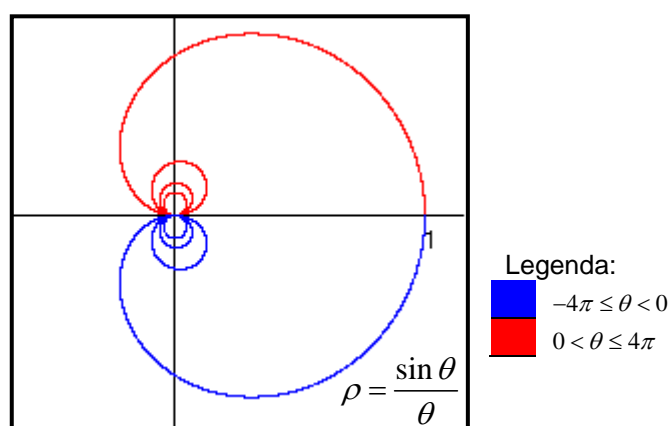


Figura 2.42 - Cochleide

$$a = 1$$

Para valores simétricos do parâmetro  $a$ , as espirais obtidas são simétricas em relação ao eixo das ordenadas, figura 2.43. O parâmetro  $a$  também influencia a “abertura” da espiral sendo as coordenadas do ponto origem da curva  $(a, 0)$ .

<sup>31</sup> Pelo limite notável  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ .

<sup>32</sup> Excluimos o número zero dado que, pela equação polar, o ângulo polar não pode tomar esse valor.



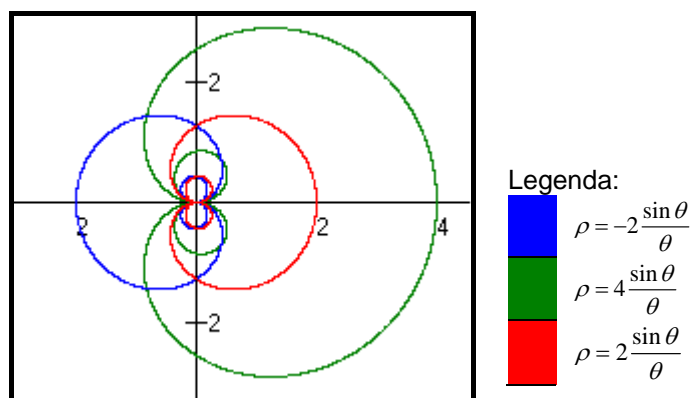


Figura 2.43 - Cochleoide

$$a = -2, 2, 4 \text{ e } \theta \in [-2\pi, 2\pi]$$

### 2.2.10. As espirais arquimedianas

As espirais arquimedianas correspondem a uma família de espirais que foram pela primeira vez distinguidas pelo matemático Fue Sacchi, em 1854.

#### Equação Polar:

As espirais arquimedianas são uma família de espirais definidas pela equação polar:

$$\rho^m = a^m \theta,$$

sendo  $a$  e  $m$  constantes arbitrárias.

Alguns casos especiais desta família de espirais, já aqui estudados são:

Nome	$m$	Equação Polar
Espiral de Arquimedes	1	$\rho = a\theta$
Espiral de Fermat	2	$\rho^2 = a^2\theta$
Espiral hiperbólica	-1	$\rho^{-1} = a^{-1}\theta \Leftrightarrow \rho\theta = a$
Lítuo	-2	$\rho^{-2} = a^{-2}\theta \Leftrightarrow \rho^2\theta = a^2$

#### Inversa:

Observando a equação polar deste tipo de espirais, podemos obter facilmente que a espiral inversa é definida pela equação do tipo  $\rho^{-m} = a^{-m}\theta$ .

Desta forma, vemos que a espiral de Fermat e a lítuo são inversas, bem como a espiral de Arquimedes e a espiral hiperbólica.

## Capítulo 3 - As Espirais na Obra de Gomes Teixeira

---

---

Chegado aqui, muito já se falou sobre o *Tratado de las Curvas* e o *Traité des Courbes*. No entanto, pouco se abordou do seu conteúdo.

O presente capítulo tem como objectivo o estudo das espirais planas às quais Gomes Teixeira dedicou o capítulo VIII, em ambas as obras. Este estudo irá basear-se, prioritariamente na abordagem apresentada por Gomes Teixeira na edição francesa, *Traité des Courbes Spéciales Remarquables Planes et Gauches*, publicada ao longo dos anos de 1908, 1909 e 1915 nas *Obras sobre Mathematica*. No entanto, teremos sempre presente a edição castelhana, entregue a concurso em 1897 e publicada em 1905, *Tratado de las Curvas Especiales Notables*, a qual iremos seguir de forma a identificar eventuais diferenças, fazendo assim uma análise comparativa entre as duas obras.

A teoria das espirais, no *Traité des Courbes*, constitui um capítulo do tomo II, o capítulo VIII, intitulado *Les spirales* e inserido na parte relativa ao estudo das curvas transcendentais, como se pode ler na introdução da primeira publicação da obra:

*Terminado lo relativo á las curvas algébricas, pasamos á considerar las transcendentales en los capítulos VII y VIII; éste último dedicado especialmente á las espirales, (...).* (Teixeira, 1905, p.VII)

O capítulo VIII baseia-se assim no estudo de vários tipos de espirais, não fazendo Gomes Teixeira qualquer comentário relativo ao conceito de espiral nem da sua definição. Apenas na introdução da primeira obra considera que toma *esta palavra en su sentido geométrico*.<sup>1</sup> E, tal como acontece para o conceito de espiral, Gomes Teixeira também não define curvas transcendentais. Parece-nos que esta sua atitude não se deveu à ausência de desejo de o fazer mas antes ao facto de estar ciente do público a que se poderia destinar esta obra e das suas necessidades reais.

---

<sup>1</sup> Teixeira, 1905, p.VII.

Ao contrário de Gomes Teixeira, Gino Loria, na sua memória entregue a concurso, introduz o estudo das curvas transcendentais com a sua definição<sup>2</sup> bem como algumas noções envolventes. E, como já referimos anteriormente no capítulo destinado ao estudo das espirais Loria também inclui uma abordagem sobre o conceito de espiral tornando o seu estudo mais agradável ao leitor. Não queremos com isto dizer que o estudo de Gino Loria é mais agradável. Apesar de não ser nosso objectivo comparar as duas memórias, pela breve análise que fizemos da obra de Gino Loria consideramos que o seu estudo é um pouco mais difícil de leitura e compreensão, pois as características apresentadas para cada curva não estão tão bem organizadas como na obra de Gomes Teixeira. No entanto, um dos aspectos favoráveis é a abordagem inicial que faz relativamente aos conceitos que utiliza ao longo da obra.

Ao longo do capítulo VIII, Gomes Teixeira apresenta catorze espirais. São elas: a espiral de Arquimedes, a espiral de Galileu, a espiral de Fermat, a espiral parabólica, a espiral hiperbólica, a lítuo, a espiral logarítmica, a espiral de Poincot, a espiral tractriz, a tractriz circular, a cochleóide, a clothoide, a pseudo-catenária e a pseudo-tractriz.

No entanto, na edição castelhana de 1905, apenas são abordadas treze espirais, sendo a tractriz circular a curva inserida aquando da revisão da obra. Apesar de esta ser a única curva a ser estudada pela primeira vez no *Traité des Courbes*, a abordagem feita às outras espirais também sofreu algumas alterações. Assim sendo e como já mencionamos, sempre que achemos pertinente salientar as diferenças em relação à obra *Tratado de las Curvas* nós indicar-lo-emos.

O método de exposição seguido por Gomes Teixeira, neste capítulo, segue a linha de toda a obra. Para cada uma das espirais apresenta um pouco da sua história, seguindo-se um estudo pormenorizado das suas características e propriedades, tais como: a equação polar, a subnormal, a subtangente, o comprimento da espiral, o raio de curvatura, a área definida por um vector, o comprimento do arco, a rectificação, entre outros. Tal como já foi referido, para cada característica estudada, Gomes Teixeira atribui-lhe um número de forma a organizar melhor a sua exposição. Assim, sempre que se revele importante salientar uma parte da obra de Gomes Teixeira, iremos também identificar o número que lhe corresponde.

---

<sup>2</sup> Chamamos a todas as curvas, que não conseguimos representar os seus pontos  $x$ ,  $y$  por uma equação algébrica (inteira, racional) entre as coordenadas cartesianas, por curvas transcendentais. (Loria, 1911b, p.1)

Para ilustrar cada espiral iremos incluir as figuras construídas por Gomes Teixeira e inseridas tanto no *Tratado de las Curvas* como no *Traité des Courbes*, que consideramos de grande precisão. Apesar da revisão da obra, as figuras das espirais não foram alteradas.

Numa segunda fase, apresentaremos as demonstrações de várias propriedades estudadas por Gomes Teixeira, devido ao facto de, ao longo do nosso estudo, termo-nos deparado com algumas incorrecções em determinadas expressões. E, atendendo a que Gomes Teixeira apresenta umas características para umas espirais e outras características para outras, tentaremos ainda deduzir um conjunto de características para todas as espirais, nomeadamente, a subnormal, a subtangente, os comprimentos da normal e da tangente, a amplitude do ângulo formado entre a tangente e o vector associado ao ponto de tangência, o raio de curvatura, a área definida por um vector associado a um ponto da espiral e o comprimento de um arco da curva.

Para evidenciar as incorrecções incluídas na obra de Gomes Teixeira e as propriedades estudadas complementarmente, construímos duas tabelas que inserimos em apêndice ao trabalho. A primeira tabela corresponde ao apêndice III e contém as principais características mencionadas anteriormente e apresentadas por Gomes Teixeira. A segunda tabela corresponde ao apêndice IV e inclui as mesmas características, mas agora apresentamos as expressões corrigidas de acordo com o que obtivemos na secção 3.2 e as propriedades deduzidas também nesta mesma secção.

Para terminar esta pequena introdução ao capítulo, salientemos que, ao longo deste, usaremos a notação utilizada por Gomes Teixeira, pelo que, em apêndice, *Apêndice II*, apresentamos uma tabela com a comparação das duas notações: a notação actual e a notação usada por Gomes Teixeira.

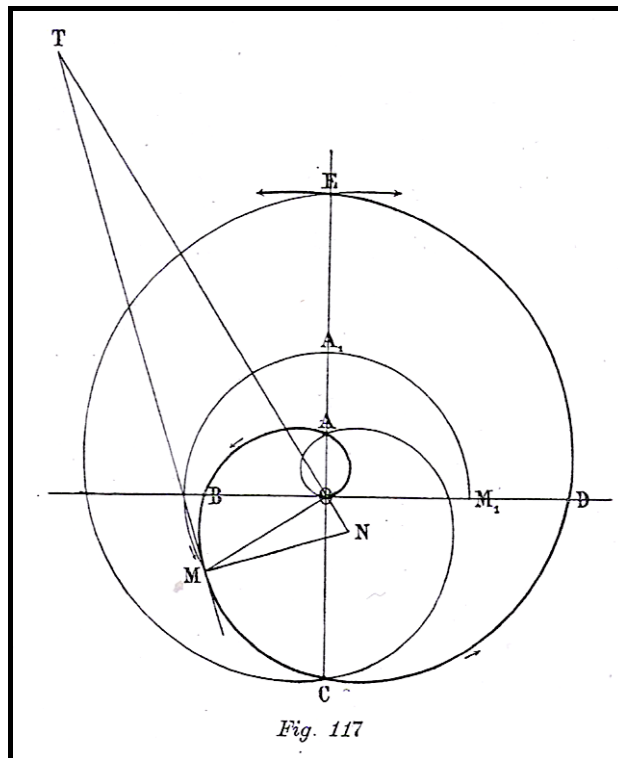
### 3.1. Análise geral da abordagem realizada por Gomes Teixeira

#### 3.1.1. A espiral de Arquimedes

Gomes Teixeira começa o estudo da espiral de Arquimedes por, no número 459, dar a sua definição geométrica:

*Considérons une droite  $OM$  (fig.117) qui tourne autour d'un point fixe  $O$ , et sur  $OM$  un point  $M$  qui en même temps se déplace sur cette droite, et supposons que les vitesses de ces deux mouvements sont constantes et que le point mobile part du point  $O$ ; le lieu décrit par  $M$  est la courbe nommée spirale d'Archimède (...). (1909, p. 59)*

De forma a ilustrar a definição anterior, Gomes Teixeira construiu a espiral como mostra a figura seguinte:



**Figura 3.1** - Espiral de Arquimedes – fig.117 da obra de Gomes Teixeira

Esta figura não só ilustra a definição da espiral, como serve também de ilustração para propriedades que Gomes Teixeira refere noutros números, justificando-se assim o facto de a figura conter vários pontos e rectas que serão mais tarde citados.

Ainda no mesmo ponto, Gomes Teixeira faz uma síntese dos matemáticos que, ao longo dos tempos, desde a antiga Grécia, se dedicaram ao estudo desta espiral e/ou aplicação desta noutros estudos, descrevendo sempre o contributo que cada um deu relativamente à espiral em estudo.

De entre os nomes citados por Gomes Teixeira, há dois que se destacam: Arquimedes e Conon. Gomes Teixeira explica que a espiral é também, por vezes, conhecida pelo nome de espiral de Conon, referindo que:

*Quelques auteurs ont attribué à Conon l'invention de cette ligne et de ses principales propriétés, et à Archimède la démonstration de ces propriétés, et par ce motif la spirale mentionnée a été désignée souvent sous le nom de spirale de Conon (...).(1909, p. 59)*

No entanto, salienta posteriormente que esta informação acerca de Conon pode não ser verdadeira tal como Nizze, autor de uma das traduções das obras de Arquimedes, afirmou. Um dos matemáticos citados por Gomes Teixeira, Gino Loria, também refere na sua obra, *Spezielle algebraische und transzendente ebene Kurven Theorie und Geschichte*, este facto.<sup>3</sup>

Depois desta exposição histórica, Gomes Teixeira passa para a análise da espiral, onde descreve algumas das suas características. É de salientar que, à medida que Gomes Teixeira enuncia uma propriedade da espiral, refere o número da proposição correspondente à obra *Sobre espirais* de Arquimedes, caso esta tenha sido descoberta pelo matemático da Antiguidade. Como podemos exemplificar com a seguinte propriedade:

*(...) si  $(\rho_0, \theta_0)$ ,  $(\rho_1, \theta_1)$  et  $(\rho_2, \theta_2)$  sont trois points de la spirale et si  $\theta_2 - \theta_1 = \theta_1 - \theta_0$ , on a aussi  $\rho_2 - \rho_1 = \rho_1 - \rho_0$ . Cette propriété de la ligne considérée constitue la proposition 12<sup>e</sup> d'Archimède. (1909, p. 60)*

No entanto, é de salientar que, apesar de Gomes Teixeira citar o número da proposição na obra de Arquimedes, por vezes as proposições aqui enunciadas não estão

<sup>3</sup> Loria, 1911, p. 37.

escritas na forma original, tal como podemos ver no caso da proposição anterior que, de acordo com uma tradução da obra de Arquimedes, toma a forma:

*If any number of straight lines drawn from the origin to meet the spiral make equal angles with one another, the lines will be in arithmetical progression.* (Heath, 1897, p.166)

Para começar esta fase do estudo, Gomes Teixeira apresenta a equação polar da espiral:

$$\rho = a\theta,$$

salientando o sentido do movimento da espiral (positivo ou negativo) de acordo com os valores atribuídos a  $\theta$  (positivos ou negativos). Não iremos aqui abordar a forma da espiral de um modo exaustivo dado que tal já foi feito no capítulo anterior. Mas, de modo a evidenciar o trabalho de Gomes Teixeira e a sua preocupação em ser claro na sua exposição, salientamos que na descrição da forma das espirais o autor tenta, sempre que possível, ilustrar as suas palavras com auxílio da figura respectiva, como podemos ver na seguinte transcrição:

*(...) quand  $\theta$  varie depuis 0 jusqu'à  $\infty$ , le point M décrit une partie OABCD... de la courbe, en faisant un nombre infini de circonvolutions autour du pôle O, et en s'éloignant constamment de ce point. Aux valeurs négatives de  $\theta$  correspond une autre partie de la même ligne, symétrique de OABCD... par rapport à la droite OE, perpendiculaire à l'axe OD.*  
(1909, p.60)

A partir da equação polar da espiral, no número 460, Gomes Teixeira apresenta as equações que permitem determinar, a subnormal, designada por  $S_n$ , a subtangente, designada por  $S_t$ , o comprimento da normal, designado por  $N$  e a tangente do ângulo  $V$  formado pela recta tangente e pelo vector associado ao ponto de tangência, que apresentamos de seguida:

$$S_n = a, \quad S_t = \rho\theta, \quad N = \sqrt{a^2 + \rho^2}, \quad \text{tang}V = \frac{\rho}{a}.$$

Apesar de não definir os conceitos introduzidos anteriormente e apenas apresentar as fórmulas de obtenção para a espiral de Arquimedes, na obra *Tratado de las Curvas*, o autor

apresenta também as expressões que permitem obter estas propriedades para uma curva, definida em coordenadas polares, sendo estas:  $S_n = \frac{d\rho}{d\theta}$ ,  $S_t = \frac{\rho^2 d\theta}{d\rho}$  e  $\text{tang}V = \frac{\rho d\theta}{d\rho}$ .<sup>4</sup>

O estudo destas propriedades torna-se importante na medida em que permite traçar as rectas tangentes e as rectas normais à curva. Desta forma, é evidente que na maioria das espirais seja apresentado o estudo destas propriedades. Para esta espiral, talvez por ser a primeira, Gomes Teixeira tem a preocupação ainda de explicitar o seu raciocínio através da figura apresentada, dado que, relativamente a um ponto qualquer da espiral designado por M, a subnormal corresponde ao segmento de recta ON, a subtangente corresponde a [OT], sendo a recta tangente à curva a recta MT e a recta normal MN.

O raio de curvatura da espiral de Arquimedes num dado ponto, de coordenadas  $(\rho, \theta)$ , é dado pela equação:

$$R = \frac{(\rho^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}}{\rho^2 + 2a^2}.$$

E, tendo em conta o comprimento da normal,  $N = \sqrt{\rho^2 + a^2}$ , obtém-se ainda a expressão

$$R = \frac{N^3}{N^2 + a^2}.$$

No número 461, o autor aborda algumas propriedades relacionadas com a área da espiral, estabelecendo um paralelismo entre estas e as suas correspondentes na obra de Arquimedes. Assim, a área  $A$  definida pelo vector associado ao ponto  $(\rho, \theta)$ , quando  $\theta$  varia entre dois valores,  $\theta_1$  e  $\theta_2$ , é determinada pela equação:

$$A = \frac{1}{6a}(\rho_1^3 - \rho_0^3).$$

É a partir desta fórmula que Gomes Teixeira apresenta algumas proposições das quais apresentamos apenas duas. Na primeira proposição é abordada a área definida por um vector associado ao ponto  $(\rho, \theta)$  quando o ângulo polar varia entre  $\theta_0 = 2(n-1)\pi$  e  $\theta_1 = 2n\pi$ , ou seja, a área definida pela curva quando esta descreve a espira<sup>5</sup> de ordem  $n$ . Assim, designando-a por  $A^{(n)}$ , temos:

<sup>4</sup> Teixeira, 1905, p.364.

<sup>5</sup> Parte da espiral que compreende o arco formado ao longo de uma volta completa (revolução).



$$A^{(n)} = \frac{4}{3} \pi^3 a^2 (3n^2 - 3n + 1).$$

Seguidamente, Gomes Teixeira determina a área das primeiras espiras e apresenta a expressão da soma das áreas das espiras de ordem 1 até  $n$  :

$$A^{(1)} + A^{(2)} + \dots + A^{(n)} = \frac{4}{3} n^3 \pi^2 a^2 .$$

No entanto, através da expressão de  $A^{(n)}$ , facilmente se conclui que a expressão anterior não está correcta, como se pode ver na demonstração apresentada na secção seguinte, onde a expressão toma a seguinte forma:

$$\frac{4}{3} n^3 \pi^3 a^2 ,$$

sendo o expoente de  $\pi$ , 3 e não 2.

Pensamos que apesar de, não podermos ver se a lacuna se mantinha na obra *Tratado de las Curvas*, dado que a soma das áreas das sucessivas espiras não foi abordada na publicação anterior, o erro provém de um lapso cometido na redacção do documento.

Para terminar o estudo da espiral, no número 462, é abordado o estudo do comprimento de um arco da espiral, compreendido entre a origem e o ponto de coordenadas  $(\rho, \theta)$ , sendo este determinado pela equação:

$$s = \int_0^\rho \sqrt{\rho^2 \frac{d\rho^2}{d\theta^2} + 1} d\rho = \frac{1}{a} \int_0^\rho \sqrt{\rho^2 + a^2} d\rho .$$

Mas, pelo que foi abordado em 2.1, a expressão apresentada anteriormente para determinar o comprimento do arco numa curva, definida em coordenadas polares, contém uma imprecisão, dado que a derivada de que se necessita é a de  $\theta$  em função de  $\rho$ ,  $\frac{d\theta}{d\rho}$ , e não o inverso,  $\frac{d\rho}{d\theta}$ .

Na segunda edição apenas, Gomes Teixeira calcula o integral anterior surgindo assim a expressão seguinte para o comprimento de um arco da espiral:

$$s = \frac{\rho}{2a} \sqrt{\rho^2 + a^2} + \frac{a}{2} \log \frac{\rho + \sqrt{\rho^2 + a^2}}{a} .^6$$

---

<sup>6</sup> O logaritmo aqui utilizado corresponde ao logaritmo neperiano.

Relativamente ainda ao estudo desta espiral, é curioso observar que, na obra entregue a concurso, o autor terminava este estudo informando que, para mais informações referentes à história da espiral, o leitor poderia consultar a obra de Gino Loria, *Le scienze esatte nel'antica Grécia*, estando longe de imaginar que seria este o matemático que iria, mais tarde, ser premiado no concurso em ex-quo consigo. Na edição posterior, essa informação deixou de existir.

### 3.1.2. A espiral de Galileu

Na obra intitulada *Oeuvres* e em cartas escritas a Mersenne em 1636, Fermat, segundo Gomes Teixeira, fazia menção a uma espiral, a que não dava definição, mas que se pensa ser a espiral de Galileu. Salienta ainda que, na mesma obra de Fermat, foram reproduzidos trabalhos de Mersenne que também referiam uma espiral a que P. Tannery reconhece como sendo a espiral de Galileu.

No *Tratado de las Curvas*, Gomes Teixeira é mais explícito e afirma que, para além de Fermat incluir a espiral nos seus estudos foi este o matemático que lhe atribuiu o nome de Galileu.<sup>7</sup> Na obra de Gino Loria podemos ainda ler que, na obra de P. Tannery, a espiral era designada por *Helix Baliani*<sup>8</sup>.

A equação polar que a define é:

$$\rho = a - b\theta^2,$$

sendo  $a$  e  $b$  duas constantes positivas.

A espiral de Galileu surge com Fermat, quando este tentava dar resposta ao problema que Gomes Teixeira enuncia da seguinte forma, e para o qual esta é solução:

(...) *déterminer la courbe que décrirait à l'intérieur de la terre un point pesant, tombant librement jusqu'au centre suivant la loi de Galileu, c'est-à-dire avec une accélération constante.* (1909, p.64)

O nome da espiral (espiral de Galileu) deve-se ao facto de o problema acima enunciado ter sido exposto por esse matemático.

<sup>7</sup> Teixeira, 1905, p. 367.

<sup>8</sup> Nome também já mencionado na secção 2.2.

Ainda no mesmo ponto, 463, é descrita a forma da espiral, de acordo com a variação de  $\theta$ , ilustrando-a com a seguinte figura:

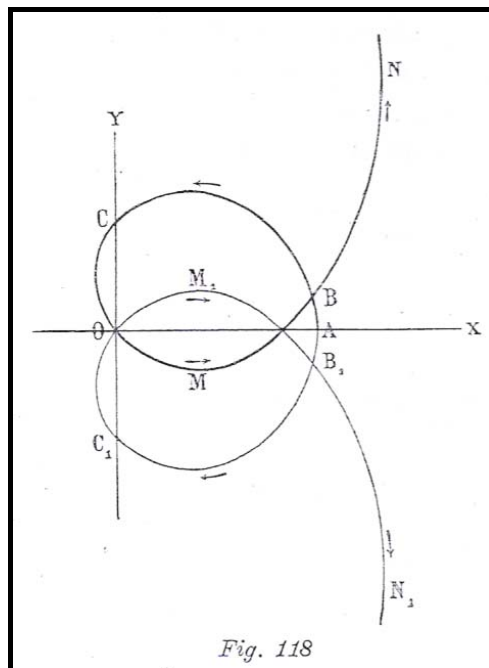


Figura 3.2 - Espiral de Galileu - fig.118 da obra de Gomes Teixeira

Para esta espiral, Gomes Teixeira apenas inclui a expressão que permite obter a amplitude do ângulo formado pela recta tangente e o vector do ponto de tangência:

$$\text{tang}V = -\frac{\rho}{2\sqrt{b(a-\rho)}}.$$

No entanto, a subtangente, a subnormal, o comprimento da tangente e o comprimento da normal desta espiral, são dados pelas equações seguintes, como veremos na secção 3.2:

$$S_t = -\frac{\rho^2}{2\sqrt{b(a-\rho)}}, S_n = -2b\theta, N = \sqrt{\rho^2 + 4b(a-\rho)} \text{ e } T = \frac{\rho}{2} \sqrt{\frac{\rho^2 + 4b(a-\rho)}{b(a-\rho)}}.$$

A equação que permite determinar o raio de curvatura num ponto de coordenadas  $(\rho, \theta)$  é:

$$R = \frac{(\rho^2 - 4b\rho + 4ab)^{\frac{3}{2}}}{\rho^2 - 6b\rho + 8ab}.$$

De inovador, Gomes Teixeira inclui o estudo da curva quanto à existência de pontos de inflexão e de pontos duplos. Quanto aos pontos de inflexão conclui, pelo raio de curvatura, que a espiral não admite pontos de inflexão. No que se refere aos pontos duplos,

conclui que para cada valor de  $n$ , inteiro e positivo, que satisfaz a desigualdade  $2a > b\pi^2(2n+1)^2$ , existe um ponto duplo, real e positivo, sendo as suas coordenadas dadas pelas seguintes equações:

$$\theta = \frac{-(2n+1)\pi b \pm \sqrt{4ab - b^2\pi^2(2n+1)^2}}{b} \quad \text{e} \quad \rho = a - b\theta^2.$$

A primeira expressão contém um pequeno erro dado que em denominador deveria aparecer o dobro de  $b$ , tal como demonstramos na secção seguinte.

Ainda relativamente aos pontos duplos da espiral, neste estudo apenas são abordados os pontos da parte da curva que correspondem a valores de  $\theta$  positivos. Podemos ainda observar que para além destes, a espiral possui pontos duplos na parte da curva correspondente a valores de  $\theta$  negativos, sendo estes simétricos aos anteriores, relativamente ao eixo  $Ox$ , e sobre este eixo quando as duas partes se intersectam.

A área definida pelo vector de um ponto de coordenadas  $(\rho, \theta)$ <sup>9</sup>, quando  $\theta$  varia, é dada pela equação:

$$A = \frac{1}{2} \left( a^2\theta - \frac{2}{3}ab\theta^3 + \frac{1}{5}b^2\theta^5 \right).$$

Mas, previamente, o autor apresenta o integral que permite obter a expressão anterior,  $A = \frac{1}{2} \int_0^\theta \rho^2 d\theta$ , mostrando novamente as suas qualidades de pedagogo ao revelar a sua preocupação em que o leitor perceba a origem das expressões. Comparando as duas obras, podemos também observar o cuidado que Gomes Teixeira teve na segunda edição em escrever as expressões de uma forma mais organizada e por vezes mais simplificada. Sendo um exemplo disso a atenção especial que teve em reescrever os termos da expressão final da área  $A$ , por ordem crescente do seu grau.

Esta espiral apenas é rectificável algebricamente quando  $a = 0$ . E, neste caso, o comprimento da espiral é dado por:

$$s = \frac{1}{3}b \left[ (\theta^2 + 4)^{\frac{3}{2}} - 8 \right].$$

---

<sup>9</sup> Gomes Teixeira escreveu as coordenadas do ponto da forma  $(\theta, \rho)$ . E, ao longo do capítulo das espirais, volta usar esta notação, não deixando de usar também a forma  $(\rho, \theta)$ . Neste trabalho, iremos usar sempre a notação  $(\rho, \theta)$  para determinar as coordenadas polares de um ponto.

Para os restantes casos, Gomes Teixeira apresenta um estudo onde conclui que o valor do comprimento do arco da espiral depende de integrais elípticas de 1ª e de 2ª espécies. É de notar que o estudo do comprimento do arco no caso particular de  $a = 0$  foi inserido nesta edição, não aparecendo no *Tratado de las Curvas*. Nesta obra, apenas foi feito o estudo do caso geral.

Também aqui, as fórmulas apresentadas por Gomes Teixeira contêm algumas imprecisões como veremos na secção seguinte. Ainda observando a edição anterior, podemos denotar a existência de algumas incorrecções na primeira edição que foram alteradas na segunda, bem como existem incorrecções na segunda edição que não existiam na primeira edição, mas abordaremos isso na secção seguinte.

### 3.1.3. A espiral de Fermat

Contrariamente ao que podemos ver no tratamento da maioria das espirais, Gomes Teixeira não faz uma introdução histórica à espiral de Fermat<sup>10</sup>, iniciando o seu estudo com a apresentação da equação polar da espiral:

$$\rho^2 = a^2\theta.$$

De seguida, descreve então a forma da espiral inserindo a seguinte imagem da espiral:

---

<sup>10</sup> Refere posteriormente, que a espiral foi considerada pelo grande géometra Fermat numa das suas cartas endereçadas a Mersenne a 3 de Junho de 1636.

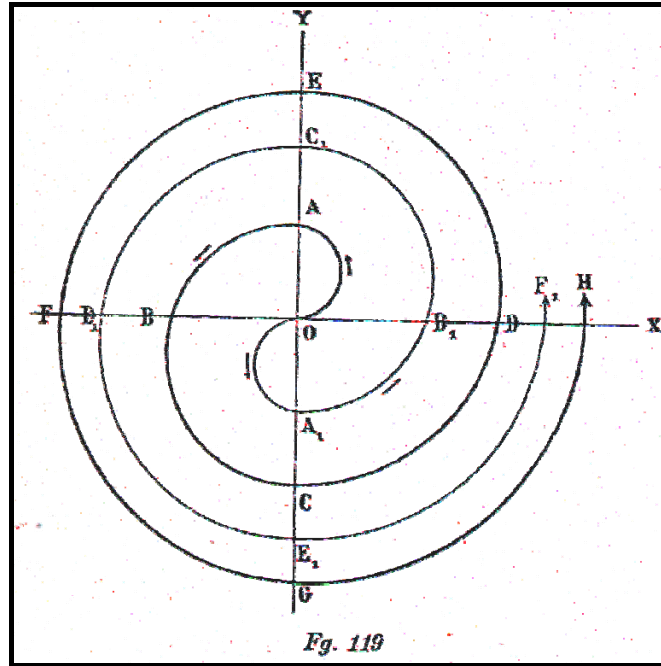


Figura 3.3 - Espiral de Fermat – fig. 119 da obra de Gomes Teixeira

A subtangente, a subnormal, a amplitude do ângulo  $V$  formado pela recta tangente e pelo vector do ponto de tangência e o raio de curvatura da espiral são dados por:

$$S_n = \frac{a^2}{2\rho}, \quad S_t = \frac{2\rho^3}{a^2}, \quad \text{tang}V = \frac{2\rho^2}{a^2} \quad \text{e} \quad R = \frac{(4\rho^4 + a^4)^{\frac{3}{2}}}{2\rho(4\rho^4 + 3a^4)}.$$

Atendendo à expressão incluída no *Tratado de las Curvas* para o raio de curvatura,

$$R = \frac{\left(\rho^2 + \frac{a^4}{4\rho^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\rho^2 + \frac{3a^4}{4\rho^2}},$$

podemos observar que a expressão actual está escrita de uma forma

mais simplificada.

De acordo com o raio de curvatura, conclui-se que a curva possui um ponto de inflexão, sendo este o pólo  $O$ , indicado na figura anterior. Relativamente à existência de pontos duplos, nada foi referido, induzindo-nos a concluir a sua inexistência, ideia também já sugerida pela própria figura apresentada anteriormente.

A área definida pelo vector de coordenadas  $(\rho, \theta)$ , quando  $\theta$  varia entre dois valores,  $\theta_0$  e  $\theta_1$ , é dada pela equação:

$$A = \frac{a^2}{4}(\theta_1^2 - \theta_0^2).$$

A partir desta, obtém-se a área definida por cada espira, ou seja, quando  $\theta$  varia entre  $0$  e  $2\pi$ ,  $2\pi$  e  $4\pi$ ,  $4\pi$  e  $6\pi$ , ....

$$A_1 = a^2\pi^2, A_2 = 3a^2\pi^2, A_3 = 5a^2\pi^2, \dots$$

Donde, deduzimos a expressão geral para a área definida por uma espira de ordem  $n$ :

$$A_n = a^2\pi^2(2n-1).$$

Daqui resulta ainda que, quando o vector associado ao ponto  $(\rho, \theta)$  completa uma revolução, a área  $A$  aumenta uma quantidade igual à área do círculo centrado na origem e de raio  $\overline{OD}$ , ou seja,  $2a^2\pi^2$ .

Para terminar, apresenta o comprimento do arco da espiral compreendido entre o pólo  $O$  e o ponto de coordenadas  $(\rho, \theta)$ , que depende de um integral elíptico de 1ª espécie:

$$s = \frac{a}{3} \left[ \sqrt{\theta(4\theta^2 + 1)} + \int_0^\theta \frac{d\theta}{\sqrt{\theta(4\theta^2 + 1)}} \right].$$

### 3.1.4. A espiral parabólica

Para esta curva, Gomes Teixeira começa por dar a equação polar que a define:

$$(\rho - a)^2 = 2p\theta.$$

Continuando, o autor cita o nome de Jacob Bernoulli<sup>11</sup> como o matemático que se ocupou pelo estudo, mais ou menos exaustivo, da curva em questão, no ano de 1691, e que designou esta curva por *parabole hélicoidique*.

Através da equação polar, vemos que a espiral de Fermat é um caso particular da espiral parabólica, bastando para tal tomar, na equação anterior,  $p = \frac{b^2}{a}$  e  $a = 0$ .

Seguidamente, o autor descreve a forma da espiral com o auxílio da figura seguinte:

<sup>11</sup> Jacques Bernoulli no *Traité des Courbes*.

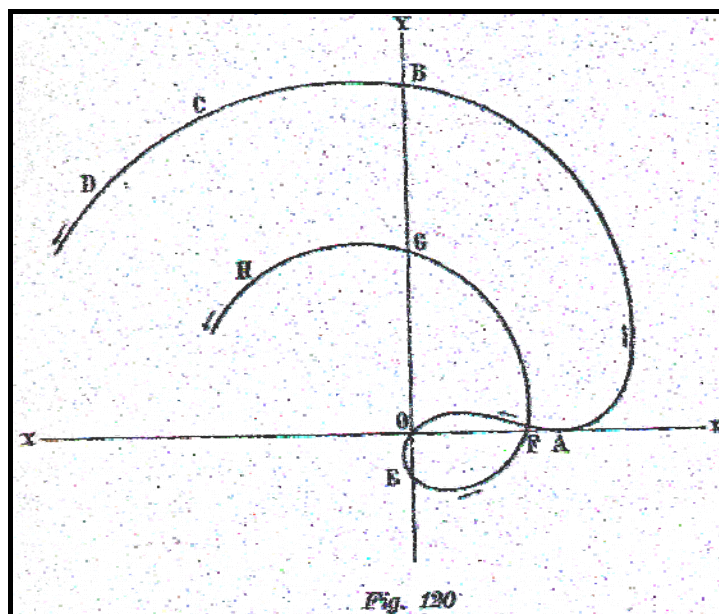


Figura 3.4 - Espiral parabólica - fig.120 da obra de Gomes Teixeira

E afirma ainda que a parte ABCD... da linha corresponde à equação  $\rho = a + \sqrt{2pa\theta}$  e a parte AOEFG... corresponde à equação  $\rho = a - \sqrt{2pa\theta}$ .

Para esta espiral, apenas são apresentadas as equações da subtangente e da amplitude do ângulo formado pela recta tangente e pelo vector do ponto de contacto da tangente com a curva, neste caso designado por  $\omega$  e não por  $V$  :

$$S_t = \frac{\rho^2(\rho - a)}{pa} \quad \text{e} \quad \text{tang} \omega = \frac{\rho(\rho - a)}{ap}.$$

Através da equação polar, podemos ainda concluir que a subnormal, o comprimento da normal e o comprimento da tangente são dados pelas equações:

$$S_n = \frac{pa}{\rho - a}, \quad N = \sqrt{\rho^2 + \frac{pa}{2\theta}} \quad \text{e} \quad T = \rho \sqrt{1 + \frac{2\rho^2\theta}{pa}}.$$

Tal como a figura sugere, a curva admite infinitos pontos duplos, sendo o ângulo polar determinado para cada valor de  $n$ , positivo e inteiro, pela equação  $\theta = \frac{[2a - p(2n+1)\pi]^2}{8ap}$  e, a partir deste e da equação polar, obtém-se o valor de  $\rho$ , ficando assim definidas as coordenadas dos pontos duplos. Relativamente aos pontos de inflexão conclui-se que todos os pontos de inflexão reais estão situados no interior do círculo de raio  $\overline{OA} = a$  e centro  $O$ .



A equação que permite determinar a área definida pelo vector associado ao ponto de coordenadas  $(\rho, \theta)$  é:

$$A = \frac{1}{2} \left[ a^2 \theta + pa\theta^2 \pm \frac{4}{3} a\theta \sqrt{2pa\theta} \right].$$

Para rectificar o arco da espiral considerada, compreendido entre o ponto A e o ponto de coordenadas  $(\rho, \theta)$ , é apresentada a equação:

$$s = \frac{1}{ap} \int_a^\rho \sqrt{\rho^2 (\rho - a)^2 + a^2 p^2} d\rho,$$

que depende novamente de um integral elíptico.

### 3.1.5. A espiral hiperbólica

A espiral hiperbólica, também designada por espiral inversa da espiral de Arquimedes, é definida pela equação polar:

$$\rho\theta = m.$$

Gomes Teixeira inicia o seu estudo com uma breve resenha histórica relativa aos matemáticos que se debruçaram sobre esta espiral e a incluíram nos seus estudos, sendo eles: Varignon, numa das suas obras em 1704, Jean Bernoulli, numa carta a Hermann em 1710 e Cotes numa das suas obras de 1722. Salienta ainda que esta espiral bem como a espiral logarítmica são duas das cinco espirais que descrevem o seguinte movimento:

(...) un point attiré vers un centre par une force inversement proportionnelle au cube de sa distance à ce centre, (...). (1909, p.72)

Na obra *Tratado de las Curvas*, o autor apenas refere o nome do matemático Juan Bernoulli<sup>12</sup>, dizendo que foi este que lhe atribuiu o nome de espiral hiperbólica.

Por último, neste número, é descrita a forma da curva com auxílio da figura da espiral:

<sup>12</sup> Jean Bernoulli escrito na obra castelhana.

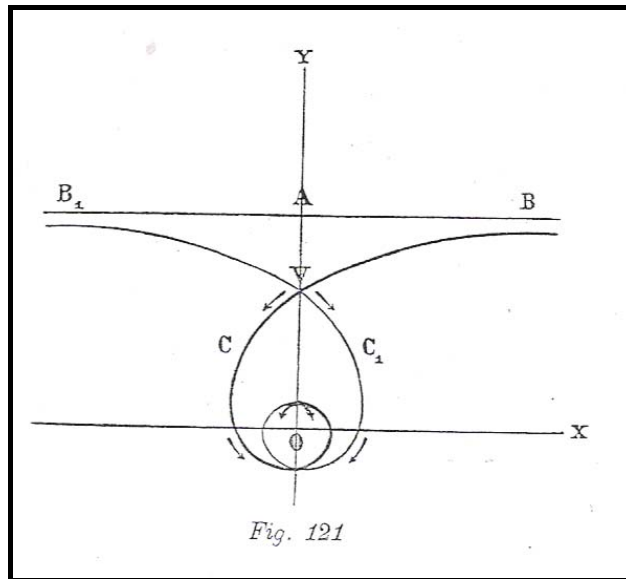


Figura 3.5 - Espiral hiperbólica - fig.121 da obra de Gomes Teixeira

Pela figura, podemos observar que a espiral possui um ponto assintótico que coincide com o seu pólo e possui também uma assíntota horizontal, que dista  $m$  do eixo das abcissas.

Relativamente a esta espiral, as equações que permitem o cálculo da subnormal, da subtangente e do comprimento da normal são dadas por:

$$S_n = -\frac{\rho^2}{m}, \quad S_t = -m \quad \text{e} \quad N = \frac{\rho}{m} \sqrt{\rho^2 + m^2} .$$

Pela primeira vez, Gomes Teixeira insere a equação que permite determinar o comprimento da tangente, designando-o por  $T$  :

$$T = \sqrt{\rho^2 + m^2} .$$

A equação do raio de curvatura da espiral é:

$$R = \frac{\rho(m^2 + \rho^2)^{\frac{3}{2}}}{m^3},$$

que, atendendo às expressões dadas anteriormente, pode ser escrita da seguinte forma

$$R = \frac{N^3}{S_n S_t} .$$

A partir da primeira expressão do raio de curvatura conclui-se que a curva não

possui pontos de inflexão, tal como sugere a figura anterior.

A área definida pelo vector associado ao ponto de coordenadas  $(\rho, \theta)$ , quando  $\theta$  varia entre  $\theta_0$  e  $\theta_1$ , é dada pela equação:

$$A = \frac{m}{2}(\rho_0 - \rho_1),$$

Para terminar, o comprimento do arco da espiral compreendido entre os pontos  $(\rho_0, \theta_0)$  e  $(\rho_1, \theta_1)$  é determinado pela expressão:

$$s = T_1 - T_0 + \frac{m}{2} \log \frac{(T_1 - m)(T_0 + m)}{(T_1 + m)(T_0 - m)},$$

sendo  $T_0$  e  $T_1$  os comprimentos das tangentes nos pontos considerados, respectivamente.

### 3.1.6. A lítuo

A lítuo foi estudada por Cotes numa das suas obras *Harmonia mensurarum* publicada em 1722. Esta é definida pela equação polar:

$$\rho^2 \theta = a^2.$$

Com o auxílio da figura seguinte, pode-se observar que a espiral possui um ponto assintótico correspondente ao pólo  $O$  e uma assíntota que coincide com o eixo das abcissas, tal como referimos no capítulo anterior.

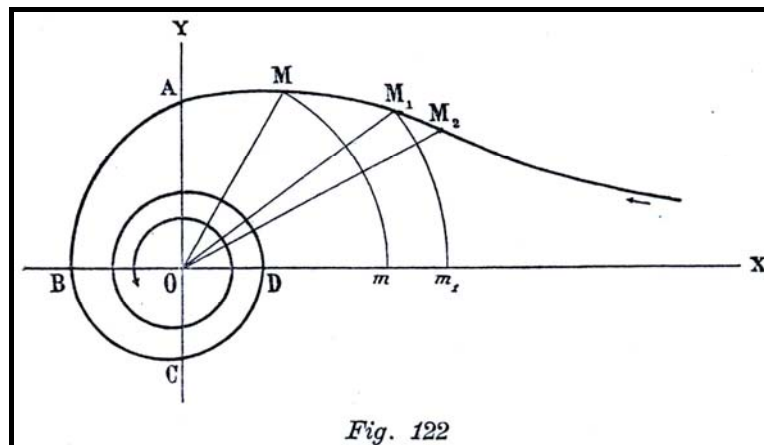


Figura 3.6 - A lítuo - fig.122 da obra de Gomes Teixeira

Atendendo à equação polar e observando a figura, deduz-se que a lítuo é a linha definida por um ponto  $M$  que se movimenta de maneira a que a área do sector circular

$MOm$  de centro  $O$  e de raio  $OM$ , compreendido entre  $OX$  e  $OM$ , se mantenha constante.<sup>13</sup>

Para esta espiral, a subtangente no ponto  $(\rho, \theta)$  é dada pela equação  $S_t = -\frac{2a^2}{\rho}$ . E, a partir desta, deduz-se duas propriedades enunciadas por Cotes:

- A subtangente da espiral no ponto  $M$  é inversamente proporcional ao vector  $MO$  e igual ao dobro do arco  $Mm$ .

-A área do triângulo, formado pelo vector  $OM$ , pela perpendicular a esse vector no ponto  $O$  e pela tangente ao ponto  $M$ , é igual ao dobro da área do sector circular  $MOm$ .

A subnormal, o comprimento da normal, o comprimento da tangente e a amplitude do ângulo  $V$  da lítuo, apesar de não serem abordadas pelo autor, são dadas pelas equações:

$$S_n = -\frac{\rho^3}{2a^2}, \quad T = \frac{1}{\rho} \sqrt{\rho^4 + 4a^4}, \quad N = \frac{\rho}{2a^2} \sqrt{4a^4 + \rho^4} \quad \text{e} \quad \text{tang}V = -\frac{2a^2}{\rho^2}.$$

No número 474, é apresentada a fórmula do raio de curvatura:

$$R = \frac{\rho(4a^4 + \rho^4)^{\frac{3}{2}}}{2a^2(\rho^4 - 4a^4)},$$

donde resulta a existência de um ponto de inflexão de coordenadas  $\left(\frac{1}{2}, a\sqrt{2}\right)$ .

A área definida pelo vector associado ao ponto  $(\rho, \theta)$ , quando  $\theta$  varia entre  $\theta_0$  e  $\theta_1$ , é dada pela equação:

$$A = a^2 \log \frac{\rho_0}{\rho_1}.$$

Também aqui podemos observar que, na obra *Tratado de las Curvas*, não foi apresentada esta expressão para o cálculo da área (em função da variável  $\rho$ ), mas sim a expressão da qual obtemos esta, definida em função de  $\theta$ ,  $A = \frac{1}{2} a^2 \log \frac{\theta_1}{\theta_0}$ .

A rectificação desta curva depende também de um integral elíptico de segunda espécie:

<sup>13</sup> Esta dedução é a tradução da publicação francesa inserida na página 74, onde a notação usada foi preservada.

$$s = a \left[ \frac{\sqrt{\theta_0(1+4\theta_0^2)}}{\theta_0} - \frac{\sqrt{\theta_1(1+4\theta_1^2)}}{\theta_1} + 4 \int_{\theta_0}^{\theta_1} \frac{\theta d\theta}{\sqrt{\theta(1+4\theta^2)}} \right].$$

### 3.1.7. A espiral logarítmica

O estudo da espiral logarítmica é, em comparação com as restantes espirais, o mais completo e de maior tamanho.

Para esta espiral, Gomes Teixeira inicia o estudo não pela nota histórica, mas pela descrição de uma propriedade da espiral que diz que o ângulo  $V$ , formado pelo vector de um ponto de coordenadas  $(\rho, \theta)$  e pela tangente à curva no mesmo ponto, é sempre constante, ou seja:

$$\text{tang } V = \frac{\rho d\theta}{d\rho} = \frac{1}{c}$$

A partir desta propriedade, deduz-se então a equação polar da espiral:

$$\rho = Ce^{c\theta}$$

A espiral assim definida, também designada por espiral equiangular, foi pela primeira vez mencionada por Descartes, numa carta endereçada a Mersenne a 12 de Setembro de 1638. De entre os matemáticos Torricelli, Wallis e Jacques Bernoulli, também referidos por Gomes Teixeira, salientamos o nome de Torricelli e de Jacob Bernoulli. O primeiro nome pelo facto de ter efectuado o estudo do comprimento de um arco da espiral e da área definida por esta curva. O segundo nome, pelo facto de ter dedicado três trabalhos ao estudo da espiral, publicados nos anos de 1691, 1692 e 1693 em *Actas eruditorum*, onde, no primeiro trabalho, demonstra os resultados obtidos por Torricelli e por Wallis e, nos restantes dois, enuncia algumas propriedades importantes da espiral. Uma observação que podemos fazer em relação ao *Tratado de las Curvas* é relativa à nota histórica da espiral, onde Gomes Teixeira apenas mencionava o nome de Descartes e de Jacobo Bernoulli<sup>14</sup>, descrevendo os seus feitos de uma forma muito sucinta e, relativamente aos trabalhos de Bernoulli, apenas mencionava os dois primeiros.

<sup>14</sup> Jacques Bernoulli escrito no *Tratado de las Curvas*.

Posteriormente e à semelhança do que foi feito para as outras espirais, é descrita a forma da espiral, sendo o ponto  $O$  um ponto assintótico da curva, como sugere a seguinte figura:

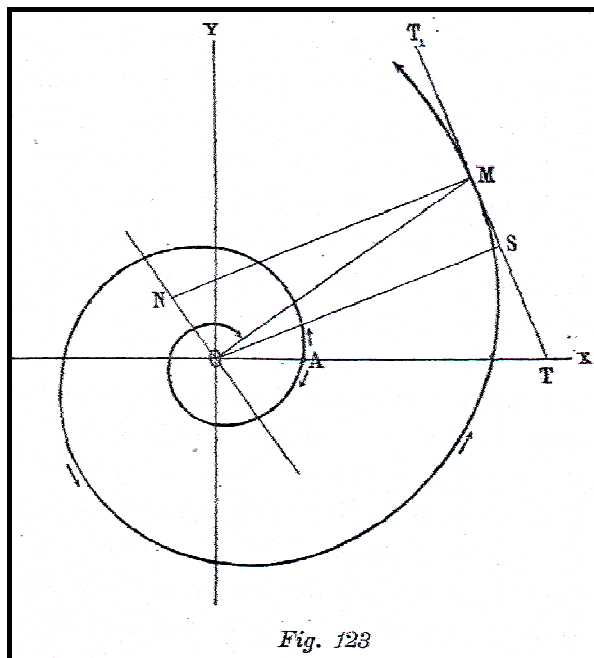


Figura 3.7 - Espiral logarítmica - fig.123 da obra de Gomes Teixeira

Para esta espiral as equações da subnormal, da subtangente, do comprimento da normal e, pela primeira vez, da amplitude do ângulo  $\alpha$ , formado pela normal  $NM$  com o vector associado ao ponto  $M$ , são:

$$S_n = c\rho, \quad S_t = \frac{\rho}{c}, \quad N = \rho\sqrt{1+c^2} \quad \text{e} \quad \text{tang}\alpha = c.$$

Comparando esta publicação com a publicação castelhana, podemos verificar também que esta última expressão da amplitude do ângulo  $\alpha$  não era mencionada na primeira publicação. No entanto, consideramos que a importância do seu estudo, nesta edição, se deve ao facto de Gomes Teixeira, mais tarde, numa das propriedades que enuncia da espiral, fazer referência a este ângulo.

Para terminar o estudo das tangentes e das normais à curva, apresentamos a equação que permite determinar o comprimento da tangente num dado ponto:

$$T = \frac{\rho}{c}\sqrt{1+c^2}.$$

Para esta espiral, o raio de curvatura, a área definida por um vector associado ao ponto  $(\rho, \theta)$ , quando  $\theta$  varia, e o comprimento do arco da curva, compreendido entre o pólo e o ponto de coordenadas  $(\rho, \theta)$ , são determinados pelas equações:

$$R = \rho\sqrt{1+c^2}, \quad A = \frac{1}{4c}(\rho^2 - \rho_0^2) \text{ e } s = \frac{\rho}{\cos V}.$$

Daqui resulta que a espiral logarítmica é uma curva cujo o comprimento do arco, compreendido entre um ponto fixo e um ponto variável de coordenadas  $(\rho, \theta)$ , é proporcional ao vector  $\rho$  deste ponto.

Segundo Gomes Teixeira, todas as propriedades descritas anteriormente foram obtidas pelos matemáticos Descartes, Wallis e Torricelli. No número 478, são então apresentadas cinco propriedades encontradas por Jacob Bernoulli. Para cada propriedade, Gomes Teixeira enuncia a propriedade, apresenta a sua demonstração e, por vezes, menciona ainda outros resultados que se podem obter a partir da propriedade inicial. Na obra *Tratado de las Curvas*, Gomes Teixeira apenas apresenta duas dessas propriedades e de uma forma menos profunda.

No ponto 479, são apresentadas três novas propriedades da espiral em estudo, sendo estas não obtidas por Jacob Bernoulli, mas por outros matemáticos como F. Klein, S.Lie e M. Haton de La Goupillière. Neste ponto o autor também apresenta algumas falhas, nomeadamente na escrita do nome dos matemáticos a que se deve as propriedades, onde aparece M. Klein e não F. Klein e também nas páginas da revista onde o artigo foi publicado, não sendo p. 330 mas sim p. 50.<sup>15</sup>

Gomes Teixeira, para cada propriedade, apresenta a sua demonstração e refere os nomes dos matemáticos que, de alguma forma, estão ligados a cada propriedade ou por a enunciar ou por a demonstrar. Voltando a comparar esta obra com o *Tratado de las Curvas*, vemos que estas três propriedades também não foram incluídas na primeira obra.

Por último, Gomes Teixeira menciona pela primeira vez uma situação onde podemos observar uma espiral na Natureza, referindo-se à concha de um Nautilus que tem a forma da espiral logarítmica.

---

<sup>15</sup> Klein, 1871, p.50.

### 3.1.8. A espiral de Poinsot

Relativamente à espiral de Poinsot, Gomes Teixeira pouco refere relativamente à sua história. Apenas menciona que a espiral foi estudada pelo geométra Poinsot que a considerou num artigo publicado, em 1834, no *Journal de Liouville*. A equação polar que define a espiral é:

$$\rho = \frac{2a}{e^{m\theta} + e^{-m\theta}}$$

Seguidamente, é descrita a forma da espiral, salientando que esta é simétrica em relação à recta AO e admite um ponto assintótico correspondente ao pólo O, como mostra a seguinte figura:

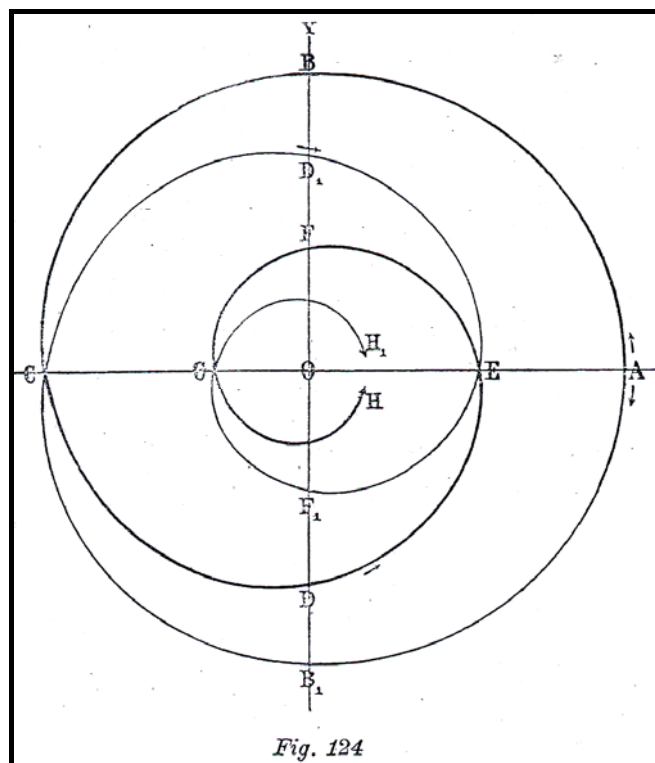


Figura 3.8 - Espiral de Poinsot - fig.124 da obra de Gomes Teixeira

Da equação polar obtém-se a amplitude do ângulo, formado pela tangente à curva e o vector de um ponto de coordenadas  $(\rho, \theta)$  e o comprimento da normal, que podem ser determinados pelas equações:

$$\text{tang}V = -\frac{2a}{m\rho(e^{m\theta} - e^{-m\theta})} \text{ e } N = \frac{\rho}{a} \sqrt{(1+m^2)a^2 - m^2\rho^2} .$$



Também a subnormal, a subtangente e o comprimento da tangente podem ser determinadas através das equações seguintes, como veremos na secção 3.2:

$$S_n = -\rho^2 \frac{m(e^{m\theta} - e^{-m\theta})}{2a}, S_t = -\frac{a}{m(e^{m\theta} - e^{-m\theta})} \text{ e } T = \frac{\rho}{m} \sqrt{\frac{m^2(a^2 - \rho^2) + a^2}{a^2 - \rho^2}}.$$

Através da expressão do raio de curvatura da espiral,

$$R = \frac{\rho \left[ (1+m^2)a^2 - m^2\rho^2 \right]^{\frac{3}{2}}}{a^3(1+m^2)},$$

conclui-se que a curva não possui pontos de inflexão.

Seguidamente, é apresentada a fórmula que permite o cálculo da área definida pelo vector do ponto de coordenadas  $(\rho, \theta)$ , quando  $\theta$  varia:

$$A = \frac{1}{2m} \left[ \frac{1}{2} - \frac{1}{1+e^{2m\theta}} \right].$$

No entanto, esta expressão não está escrita de forma correcta, como podemos concluir através da demonstração feita na secção seguinte donde resulta que

$A = \frac{a^2}{m} \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{e^{2m\theta} + 1} \right)$ , pelo que lhe faltava multiplicar por  $2a^2$ . Esta falha parece-nos

surgir do facto de Gomes Teixeira ter escrito que a área era dada pela fórmula

$A = 2a^2 \int_0^\theta \rho^2 d\theta$ , o que não está correcto. Mas, observando a obra anterior, a falha persiste

na expressão final de  $A$ . No entanto, a expressão inicial está correcta

$A = 2a^2 \int_0^\theta \frac{1}{(e^{m\theta} + e^{-m\theta})^2} d\theta$ . Desta forma, esta falha deverá ter surgido do facto do autor

ter calculado apenas o valor do integral, esquecendo-se de no final multiplicá-lo por  $2a^2$ .

Ainda no mesmo ponto, Gomes Teixeira faz o estudo para determinar a rectificação da espiral, concluindo que esta depende novamente de integrais elípticas de 1ª e de 2ª espécies.

No último ponto dedicado a esta espiral, Gomes Teixeira apresenta as equações polares de três novas espirais:

$$\rho = \frac{a}{2}(e^{m\theta} + e^{-m\theta}), \rho = \frac{a}{2}(e^{m\theta} - e^{-m\theta}) \text{ e } \rho = \frac{2a}{e^{m\theta} - e^{-m\theta}},$$

que se denominam, respectivamente por espiral do co-seno hiperbólico, espiral do seno hiperbólico e espiral da co-secante hiperbólica. Salienta-se ainda que a primeira destas espirais é a curva inversa da espiral de Poincot.

Ao observar a obra publicada anteriormente, vemos que todo este ponto relativo às novas espirais não foi abordado no *Tratado de las Curvas*, sendo uma novidade nesta edição.

### 3.1.9. A espiral tractriz

Para esta espiral Gomes Teixeira começa por dar a seguinte definição:

(...) *ligne dont la longueur de la tangente, rapportée aux coordonnées polaires, est constante.* (1909, p.90)

De seguida, menciona alguns matemáticos e os estudos que estes efectuaram relativos à espiral, sendo eles: Varignon, Cotes, Rouquel e M. Haton de La Goupillière. Gomes Teixeira salienta o facto do matemático Varignon mencionar a espiral numa *mémoire*, com o nome de *tractrice compliquée*. Na obra anterior, podemos ver que Gomes Teixeira apenas refere os estudos de dois destes matemáticos: Rouquel e M. Haton de La Goupillière, inseridos em *Nouvelles Annales de Mathématiques* em 1863. Estes são estudos mais recentes que os de Varignon e de Cotes, constituindo provavelmente uma das possíveis razões para que os estudos mais antigos não sejam mencionados na primeira obra. Uma outra razão plausível será o facto do matemático Varignon designar a espiral por *tractrice compliquée*.

Da definição dada anteriormente, o autor obtém a seguinte equação:

$$\rho^2 + \rho^4 \left( \frac{d\theta}{d\rho} \right)^2 = a^2,$$

sendo  $a$  uma constante arbitrária. Resolvendo esta expressão em ordem a  $d\theta$  e integrando-a seguidamente, obtemos a equação polar implícita:

$$\theta = \mp \left[ \frac{\sqrt{a^2 - \rho^2}}{\rho} - \arccos \frac{\rho}{a} \right].$$

Atendendo às equações apresentadas anteriormente, é descrita a forma da espiral, sendo também para esta o pólo um ponto assintótico.

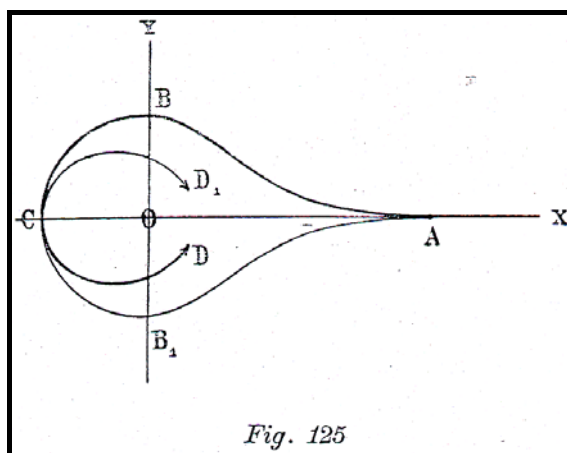


Figura 3.9 - Espiral tractriz – fig. 125 da obra de Gomes Teixeira

Ainda no mesmo número, Gomes Teixeira apresenta o estudo dos pontos da espiral onde a recta tangente é paralela ao eixo das abcissas, concluindo que estes são determinados pela equação:

$$\text{tang}\theta = \frac{\sqrt{a^2 - \rho^2}}{\rho}.$$

Donde, passando esta expressão para coordenadas cartesianas, obtém-se a expressão  $x^2 + y^2 \pm ax = 0$ , que representa dois círculos iguais, pelo que o autor conclui que *les points de la spirale tractrice où la tangente est parallèle à l'axe des abcisses sont situés sur les circonférences de ces deux cercles.*

No *Tratado de las Curvas*, Gomes Teixeira apresenta o mesmo estudo, mas enuncia esta conclusão de forma diferente: *los puntos de la curva donde y pasa por un máximo ó por un mínimo corresponden á las circonferências de los círculos á que acabamos de referirnos.* Ainda nesta obra, o autor conclui também que *los puntos donde x pasa por un máximo ó por un mínimo se hallan situados sobre las circonferências  $x^2 + y^2 \pm ay = 0$ .* Relativamente a esta propriedade, salienta que não encontrou qualquer autor que mencionasse esta propriedade. No entanto, na obra mais recente, retirou esta propriedade introduzindo a generalização da propriedade anterior, ou seja, apresenta a conclusão relativamente à posição dos pontos da curva onde a tangente é paralela a uma recta dada qualquer.

Os dois números seguintes do *Traité des Courbes* referem-se a duas proposições da espiral e são parcialmente novos, dado que apenas a segunda proposição é referida superficialmente no *Tratado de las Curvas*. No número 485, é apresentada a primeira proposição, dada por Maclaurin, na sua obra *Treatrise of fluxions*, que diz:

*La spirale tractrice est la podaire de la spirale logarithmique  $\rho\theta = a$  par rapport au pôle.* (1909, p.91)

E, no número 486, é apresentada e comentada a outra proposição, dada agora por M. Haton de La Goupillière e demonstrada por Rouquel e Laquière:

*Le lieu du pôle d'une spirale hyperbolique qui roule sur une autre égale, dont le pôle coïncide avec celui-là à l'origine du mouvement, est une spirale tractrice.* (1909, p.92)

Para a espiral tractriz, o raio de curvatura é dado pela expressão:

$$R = \frac{a\rho\sqrt{a^2 - \rho^2}}{a^2 - 2\rho^2}$$

donde se conclui que a curva possui dois pontos de inflexão, obtidos quando  $\rho = -\frac{\sqrt{2}a}{2}$  e

$\rho = \frac{\sqrt{2}a}{2}$ . No entanto, ainda no mesmo número, é deduzida uma nova expressão para o raio de curvatura, agora dado em função do ângulo  $\alpha$ , formado pela normal no ponto de coordenadas  $(\rho, \theta)$  e o vector associado a esse ponto. É de notar aqui também algumas correcções e alterações feitas por Gomes Teixeira, da primeira edição para a segunda, nas expressões apresentadas.

Para terminar o estudo desta espiral, no último número, Gomes Teixeira começa por definir o comprimento do arco da espiral compreendido entre o ponto  $(\rho, \theta)$  e o ponto  $A$ :

$$s = -a \log \sin \alpha,$$

tendo em conta que  $\sin \alpha = \frac{\rho}{a}$ .

De seguida, introduz pela primeira vez o conceito de equação intrínseca de uma curva, deduzindo a sua expressão:

$$R^2 = a^2 \frac{e^{\frac{2s}{a}} - 1}{\left(e^{\frac{2s}{a}} - 2\right)^2}.$$

Para terminar, é dada a expressão que permite determinar a área definida pelo vector da espiral, quando este varia entre  $a$  e  $\rho$ :

$$A = \frac{1}{8} a^2 [\pi - 2\alpha - 2 \sin 2\alpha].$$

### 3.1.10. A tractriz circular

Como já foi referido anteriormente, esta espiral apenas foi estudada no *Traité des Courbes*, não sendo mencionada a sua existência no *Tratado de las Curvas*.

Gomes Teixeira começa por definir a espiral da seguinte forma:

*On appelle tractrice circulaire la courbe qui jouit de la propriété d'être constante la longueur d'un des segments de la tangente compris entre le point de contact et une circonférence donnée.* (1909, p.93)

E, a partir desta definição, deduz a seguinte equação que a define:

$$\theta = \pm \int_a^\rho \frac{\sqrt{4a^2 \rho^2 - (\rho^2 + a^2 - b^2)^2}}{\rho(\rho^2 - a^2 + b^2)} d\rho$$

sendo, de acordo com a definição anterior,  $a$  o raio da circunferência dada e  $b$  a distância entre o ponto de contacto e a circunferência, que é constante. Apesar desta equação depender de um integral, o autor descreve a forma da espiral a partir desta expressão e auxilia a sua exposição com a seguinte figura:

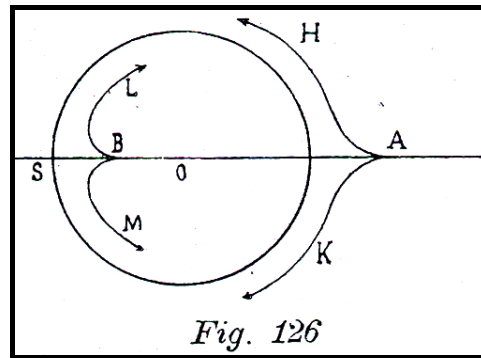


Figura 3.10 - A tractriz circular - fig.126 da obra de Gomes Teixeira

Na descrição da forma da espiral, Gomes Teixeira dividiu o estudo em três partes, sendo a primeira quando  $a > b$ , a segunda quando  $a < b$  e a última quando  $a$  e  $b$  tomam os mesmos valores. No primeiro caso,  $a > b$ , Gomes Teixeira começa por analisar previamente o valor do integral e estabelece que a curva é simétrica em relação ao eixo das abcissas. Considerando  $\alpha = a + b$ , obtém-se um ramo da curva que começa no ponto do eixo das abcissas, onde  $\rho = a + b$  e onde a curva apresenta um ponto de retrocesso e faz de seguida duas séries de circunvoluções à volta da circunferência de raio igual a  $\sqrt{a - b}$  e de centro  $O$ , aproximando-se constantemente desta linha que é uma circunferência assintótica. Considerando  $\alpha = a - b$  na equação anterior, obtém-se outro ramo da curva que começa no ponto do eixo das abcissas, onde  $\rho = a - b$ , no qual apresenta também um ponto de retrocesso, e faz um número infinito de circunvoluções à volta do pólo e tende para a circunferência já mencionada, permanecendo sempre no seu interior. Considerando  $\alpha$  diferente de  $a - b$  e  $a + b$ , obtém-se outros ramos da curva iguais aos anteriores, mas com um eixo de simetria diferente.

No segundo caso,  $a < b$ , a curva tem a forma de uma oval com dois pontos de reversão onde  $\rho = b - a$  e  $\rho = b + a$ .

No último caso,  $a = b$ , a equação anterior toma a forma de:

$$\theta = \pm \int_{\alpha}^{\rho} \frac{\sqrt{4a^2 - \rho^2}}{\rho^2} d\rho,$$

definindo assim uma curva que coincide com a espiral tractriz.

Ao longo do número 490, o autor apresenta, tal como para a espiral anterior, o estudo dos pontos da espiral, onde a tangente é paralela ao eixo das abcissas e, posteriormente, generaliza a conclusão para o caso em que a tangente é paralela a uma recta qualquer dada.

No número seguinte, é apresentada a expressão que permite determinar o comprimento do arco compreendido entre os pontos  $(\rho, 0)$  e  $(\alpha, 0)$ :

$$s = b \log \frac{\rho^2 - a^2 + b^2}{\alpha^2 - a^2 + b^2},$$

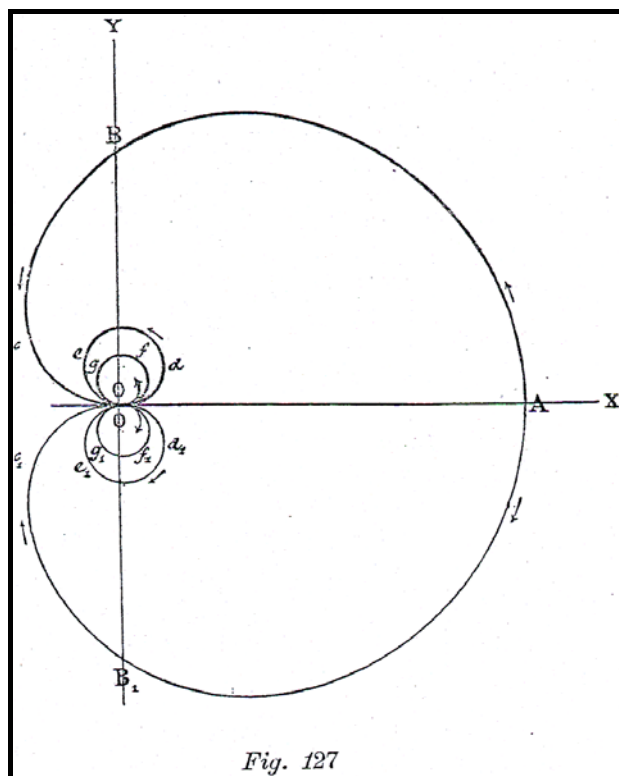
bem como uma expressão da área definida pelo vector associado ao ponto de coordenadas  $(\rho, \theta)$ , quando  $\theta$  varia, que depende do integral  $\int \rho^2 d\theta$ .

### 3.1.11. A cochleioide

A cochleioide é a curva definida pela equação:

$$\rho = a \frac{\sin \theta}{\theta}.$$

O seu nome surge com Falkenburg e Benthem que, segundo o *Tratado de las Curvas*, deriva da palavra  $\kappa\omicron\gamma\chi\eta$ , que significa concha. Na verdade, por observação da figura, podemos constatar que a forma da espiral se assemelha bastante à forma de uma concha. No entanto, relativamente a este assunto, nada é referido no *Traité des Courbes*.



Seguidamente, são referidos mais alguns nomes de matemáticos que se dedicaram ao estudo da espiral ou de alguma forma a mencionaram nos seus estudos. Entre estes matemáticos salientam-se os nomes de Papo, Proclus e Eutócio<sup>16</sup>, dado que Papo designou pelo nome de cochleioide à curva que Proclus e Eutócio chamavam de *conchoïde*<sup>17</sup>, reforçando a ideia dada por Gomes Teixeira de que a curva, assim designada nesta obra, já adquiriu diferentes formas.

A forma da espiral é descrita tendo em conta a equação da espiral apresentada inicialmente, fazendo-se o estudo quando  $\theta$  toma valores positivos e negativos.

Ainda no mesmo número, Gomes Teixeira chega a algumas conclusões relativamente aos pontos da espiral, onde  $\rho$  toma um valor máximo ou um valor mínimo, bem como os pontos onde a tangente é paralela a uma recta dada, assunto este já abordado na espiral anterior.

No número 493, é dada a equação polar da tangente à espiral no ponto de coordenadas  $(\rho_1, \theta_1)$ , e, mais tarde, surge a equação do raio de curvatura da cochleioide:

$$R = \frac{\rho(a^2 + \rho^2 - 2a\rho \cos \theta)^{\frac{3}{2}}}{2a^2 \sin \theta (a - \rho \cos \theta)}.$$

No número seguinte, é apresentada uma propriedade descoberta por Cesàro que, apesar de também surgir na *Tratado de las Curvas*, nesta última obra é introduzida também a sua demonstração.

Apesar de, no *Tratado de las Curvas* nada mais ser referido sobre esta espiral, no *Traité des Courbes*, Gomes Teixeira ainda lhe dedica mais dois números. No primeiro, é apresentada a expressão da área definida pelo vector de coordenadas  $(\rho, \theta)$ , quando  $\theta$  varia, que depende de um integral:

$$A = \frac{\cos 2\theta - 1}{\theta} + \frac{1}{2} a^2 \int_0^\theta \frac{\sin 2\theta}{\theta} d\theta.$$

No segundo, é apresentada a cochleioide como uma curva pertencente a uma classe de curvas descobertas por M. Haton de La Goupillière, quando este procurava:

<sup>16</sup> Designado por Eutocius no *Traité des Courbes*.

<sup>17</sup> Espiral estudada também na obra de Gomes Teixeira.



*(...) le lieu des centres de gravité des arcs d'un cercle donné, dont la densité varie proportionnellement à une puissance  $n+1$  de la longueur de l'arc.* (1909, p.100)

Relativamente a esta classe de curvas, Gomes Teixeira começa por dar as suas equações, bem como apresentar um processo de construção das curvas, das suas tangentes e dos círculos de curvatura.

### 3.1.12. A clothoide

A espiral estudada nesta subsecção deve o seu nome ao matemático Cesàro, que se debruçou sobre a curva, obtendo assim algumas das suas principais propriedades. No entanto, já Jacob Bernoulli, alguns séculos antes, tinha encontrado uma maneira de construir a curva e apesar de ter permanecido esquecida por muito tempo, foi redescoberta por Cornu, quando estudava fenómenos de difracção da luz.

De acordo com a obra de Gomes Teixeira, a espiral é :

*(...) la ligne dont le rayon de courbure  $R$  à un point quelconque est inversement proportionnel à la longueur  $s$  de l'arc compris entre ce point et un autre fixe.* (1909, p.102)

E, pela definição anterior, surge a sua equação intrínseca:

$$Rs = a^2,$$

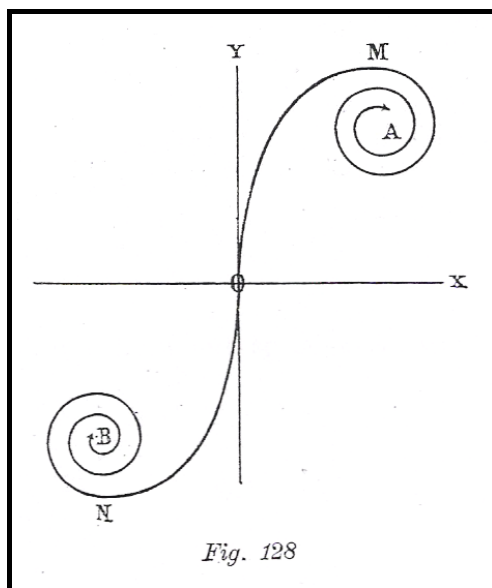
sendo  $a$  uma constante,  $R$  o raio de curvatura e  $s$  o comprimento do arco .

Ainda no primeiro número dedicado a esta espiral, são deduzidas, aplicando as equações gerais a esta curva, as equações que permitem determinar as coordenadas  $(x, y)$  de um ponto qualquer da clothoide, em função do parâmetro  $s$ , quando se toma para origem do referencial o ponto onde  $s = 0$  e para eixo das ordenadas a tangente à curva nesse ponto:

$$x = \int_0^s \sin \frac{s^2}{2a^2} ds \quad \text{e} \quad y = \int_0^s \cos \frac{s^2}{2a^2} ds,$$

equações estas utilizadas por Cornu para definir a espiral.

A forma da espiral é descrita no número 498, induzida de certa forma pela equação intrínseca. Aquando desta descrição, salienta-se a existência de um único ponto de inflexão, a origem do referencial e dois pontos assintóticos,  $A$  e  $B$ , de coordenadas  $\left(\frac{a}{2}\sqrt{\pi}, \frac{a}{2}\sqrt{\pi}\right)$  e  $\left(-\frac{a}{2}\sqrt{\pi}, -\frac{a}{2}\sqrt{\pi}\right)$ , tal como se pode ver na figura seguinte.



**Figura 3.12** - A clothoide - fig. 128 da obra de Gomes Teixeira

Ainda partindo das equações gerais, podemos obter as coordenadas  $(\alpha, \beta)$  do centro de curvatura correspondente ao ponto  $(x, y)$ .

Como já foi referido anteriormente, foi Cesàro que obteve as principais propriedades da espiral e, no número 500, Gomes Teixeira afirma que *les propriétés plus intéressantes de la clothoïde se rapportent au centre de gravité de ses arcs*, apresentando assim duas dessas propriedades.

Para terminar o estudo da clothoide, Gomes Teixeira salienta que esta espiral pertence a uma classe importante de curvas, de equação:

$$s^m R = k,$$

à qual também pertence a espiral logarítmica. A partir desta equação, são assim abordadas diferentes características da classe de curvas considerada.

### 3.1.13. A pseudo-catenária

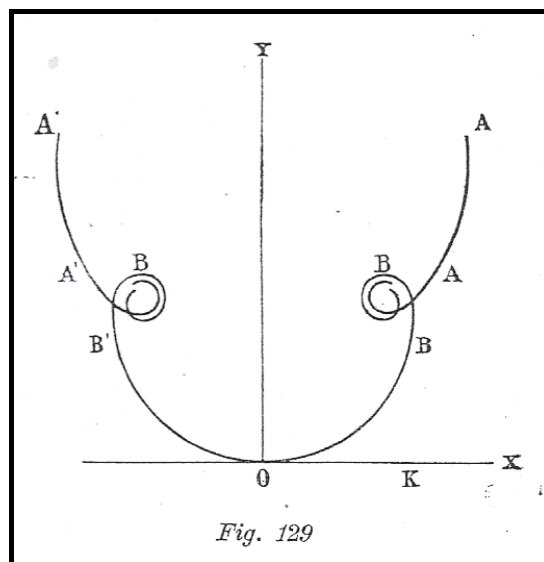
A espiral designada por pseudo-catenária define-se, segundo Cesàro, pela equação intrínseca:

$$R = k^2 a - \frac{s^2}{a},$$

onde  $R$  representa o raio de curvatura e  $s$  o comprimento do arco.

Tal como na espiral anterior, deduz-se as equações das coordenadas dos pontos da curva em função do ângulo formado pela tangente a um outro ponto qualquer com o eixo das abcissas. Para tal, considera-se da mesma forma o ponto  $O$  como a origem das coordenadas e a tangente a esse ponto o eixo das abcissas.

Seguidamente, é descrita a forma da espiral, considerando para tal as equações anteriores e dividindo o seu estudo em duas partes: quando  $s$  varia entre  $0$  e  $ka$  e quando varia entre  $ka$  e  $\infty$ . Como podemos verificar, através da seguinte figura, no primeiro caso, esta curva não possui pontos de inflexão. No entanto, possui dois pontos assintóticos, aos quais são apresentadas as expressões, dependentes de um integral, que permitem determinar as suas coordenadas.



**Figura 3.13** - A pseudo-catenária - fig.129 da obra de Gomes Teixeira

No segundo caso, conclui-se novamente que a curva não possui pontos de inflexão. No entanto, possui um ponto assintótico correspondente a  $s = ka$ .

### 3.1.14. A pseudo-tractriz

Para terminar o capítulo das espirais, Gomes Teixeira apresenta o estudo da pseudo-tractriz, curva definida pela equação intrínseca:

$$R = ka\sqrt{1 - e^{-\frac{2s}{a}}}$$

Considerando para esta curva o ponto pertencente à curva, onde  $s = 0$ , a origem do referencial e para eixo das abcissas a tangente a esse ponto, obtém-se as equações que definem as coordenadas dos pontos da espiral, em função do ângulo  $\varphi$ , formado pela tangente a um ponto qualquer e o eixo das abcissas.

A forma da espiral, como mostra a figura seguinte, é descrita no número 505, onde se conclui que a curva não possui pontos de inflexão, mas possui dois círculos assintóticos, para os quais são deduzidas as equações das coordenadas do centro  $(x_1, y_1)$ , correspondentes ao ponto  $(x, y)$ , ou seja:

$$x_1 = x - R \sin \varphi, \quad y_1 = y - R \cos \varphi$$

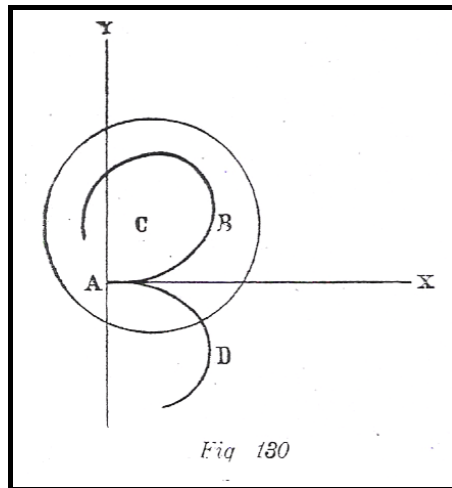


Figura 3.14 - A pseudo-tractriz - fig. 130 da obra de Gomes Teixeira

Gomes Teixeira termina, o estudo breve desta espiral, com a seguinte conclusão retirada a partir das equações anteriores: a evoluta da pseudo-tractriz é uma pseudo-catenária.

### 3.2. Complemento ao Estudo de Gomes Teixeira

Com a secção anterior ficámos a conhecer um pouco mais de cada uma das espirais tratadas por Gomes Teixeira. No entanto, como podemos observar, o matemático nem sempre aborda as mesmas características para cada espiral. As características mais estudadas ao longo das várias espirais foram o raio de curvatura, a área definida pela espiral e o comprimento de um arco da espiral, como podemos observar através do apêndice III. No entanto, também a subnormal, a subtangente, o comprimento da normal, o comprimento da tangente, a tangente do ângulo formado entre a tangente à curva e o vector associado ao ponto de tangência são características estudadas para algumas espirais. É neste sentido que, nesta fase, tentamos deduzir estas características para as restantes espirais e desta forma completar o estudo anterior. No entanto, a maioria destas características já foram inseridas na secção anterior, aquando do estudo das características de Gomes Teixeira pois, considerámos importante reuni-las de modo a que o estudo de cada espiral ficasse mais completo e concentrado e não dividido em duas secções distintas.

Outro dos objectivos que pretendemos atingir na consecução desta secção consiste na apresentação das demonstrações das propriedades apresentadas por Gomes Teixeira de forma a identificar e corrigir eventuais erros inseridos no *Traité des Courbes*.

Assim, iremos para cada espiral apresentar e demonstrar um conjunto de propriedades, nomeadamente: a subnormal, a subtangente, o comprimento da normal, o comprimento da tangente, o ângulo  $V$ , o raio de curvatura, a área definida pela espiral e o comprimento de um arco da curva. Sempre que for identificada alguma discrepância entre a expressão aqui obtida e a expressão apresentada por Gomes Teixeira, salientaremos esse facto e atrever-nos-emos a dar até uma justificação provável para tal falha no final da demonstração, tal como já foi mencionado na secção anterior. Alertamos que, sempre que a propriedade em estudo seja um complemento à obra de Gomes Teixeira, ou seja, não tenha sido estudada pelo autor, distinguimo-la com o símbolo  $\langle Comp \rangle$ .

Gostaríamos ainda de salientar que, sempre que a figura da espiral apresentada por Gomes Teixeira desempenhe um papel relevante na compreensão do raciocínio, esta será novamente inserida.

### 3.2.1. A espiral de Arquimedes

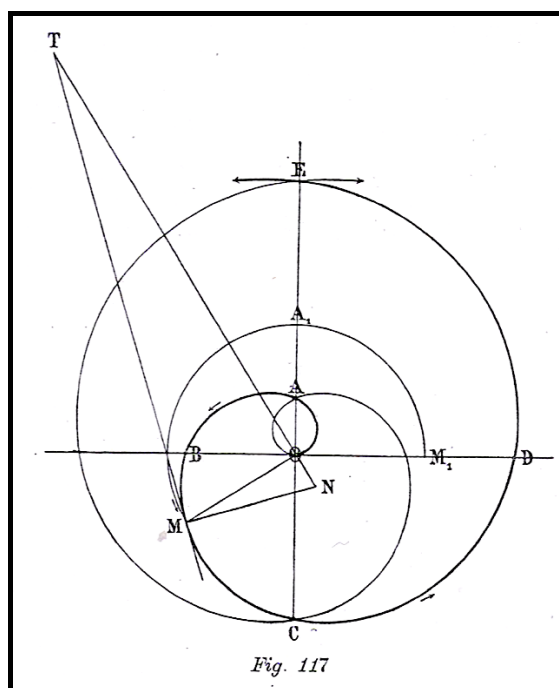


Figura 3.15 - Espiral de Arquimedes – fig.117 da obra de Gomes Teixeira

[I.1] A subnormal da espiral de Arquimedes é dada pela equação:

$$S_n = a$$

Demonstração:

De acordo com o que foi referido em 2.1, a subnormal de uma curva, definida em coordenadas polares, é dada pela expressão  $S_n = \frac{d\rho}{d\theta}$ . Tendo em conta a equação polar da espiral de Arquimedes,  $\rho = a\theta$ , obtém-se  $\frac{d\rho}{d\theta} = a$ . Assim, conclui-se que  $S_n = a$ . De acordo com a figura,  $S_n = \overline{OT} = a$ .

[I.2] A subtangente desta espiral é dada pela equação:

$$S_t = \rho\theta$$

Demonstração:

A expressão que permite obter a subtangente, para uma curva definida em coordenadas polares, é  $\rho^2 \frac{d\theta}{d\rho}$ . Como da equação polar da espiral, se obtém que  $\frac{d\theta}{d\rho} = \frac{1}{a}$

$$\text{então } S_i = \rho^2 \frac{1}{a} = \rho a \theta \frac{1}{a} = \rho \theta.$$

[I.3] A equação que permite determinar o comprimento da normal é:

$$N = \sqrt{a^2 + \rho^2}$$

Demonstração:

Atendendo à imagem apresentada por Gomes Teixeira, figura 3.15, o comprimento da normal corresponde à hipotenusa [MN] do triângulo [MON], rectângulo em O. Recorrendo ao Teorema de Pitágoras, podemos determinar o seu comprimento, atendendo a que  $\overline{ON} = a$  e  $\overline{OM} = \rho$ :

$$\overline{MN}^2 = \overline{NO}^2 + \overline{OM}^2 \Leftrightarrow \overline{MN} = \sqrt{a^2 + \rho^2} \Leftrightarrow N = \sqrt{a^2 + \rho^2}.$$

Note-se que a estratégia adoptada anteriormente para o cálculo do comprimento da normal está de acordo com a expressão apresentada em 2.1:

$$N = \sqrt{\rho^2 + \left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2}.$$

[I.4]  $\langle \text{Comp} \rangle$  A equação que permite determinar o comprimento da tangente é:

$$T = \frac{\rho}{a} \sqrt{a^2 + \rho^2}$$

Demonstração:

Da mesma forma que para o comprimento da normal, o comprimento da tangente também se pode obter através da aplicação do Teorema de Pitágoras ao triângulo rectângulo [MOT]. Mas, iremos agora atender à expressão  $T = \sqrt{\rho^2 + S_i^2}$ , apresentada em 2.1, donde se obtém:

$$T = \sqrt{\rho^2 + (\rho\theta)^2} = \rho\sqrt{1 + \theta^2} = \rho\sqrt{1 + \left(\frac{\rho}{a}\right)^2} = \frac{\rho}{a} \sqrt{a^2 + \rho^2}.$$

[I.5] A amplitude do ângulo  $V$ , formado pela recta tangente à curva, num dado ponto, e pelo seu raio vector, é dada pela fórmula:

$$\text{tang } V = \frac{\rho}{a}$$

Demonstração:

De acordo com a figura 3.15, podemos observar que o ângulo designado por  $V$ , corresponde ao ângulo  $TMO$ , pelo que, designando por  $\alpha$  o ângulo  $OMN$ , conclui-se que  $V$  e  $\alpha$  são ângulos complementares.

Pela figura, obtém-se que:  $\text{tang } \alpha = \frac{\overline{ON}}{\overline{OM}} = \frac{a}{\rho}$  donde resulta, pelo facto dos ângulos serem complementares, que  $\text{tang } V = \frac{\rho}{a}$ .

Note-se que, também aqui, a amplitude do ângulo poderia ser obtida a partir da relação  $\text{tang } V = \frac{S_t}{\rho}$ , ou seja:

$$\text{tang } V = \frac{S_t}{\rho} = \frac{\rho\theta}{\rho} = \theta = \frac{\rho}{a}.$$

[I.6] O raio de curvatura da espiral é dado pela equação:

$$R = \frac{(\rho^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}}{\rho^2 + 2a^2} = \frac{N^3}{N^2 + a^2}$$

Demonstração:

Pelo que foi dito em 2.1, o raio de curvatura de uma curva, definida em coordenadas polares, é calculado através da equação geral:

$$R = \frac{\left[ \rho^2 + \left( \frac{d\rho}{d\theta} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}}{\left| \rho^2 + 2 \left( \frac{d\rho}{d\theta} \right)^2 - \rho \frac{d^2\rho}{d\theta^2} \right|}$$

Neste caso, sabemos que a equação polar da espiral é  $\rho = a\theta$  e  $\frac{d\rho}{d\theta} = a$ , donde se obtém  $\frac{d^2\rho}{d\theta^2} = 0$ . Assim,



$$R = \frac{(\rho^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}}{|\rho^2 + 2a^2 - \rho \times 0|} = \frac{(\rho^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}}{|\rho^2 + 2a^2|} = \frac{(\rho^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}}{\rho^2 + 2a^2} .$$

Outra expressão que nos permite determinar o raio de curvatura da espiral, também abordada por Gomes Teixeira, é a expressão obtida a partir do comprimento da normal,

$$N = \sqrt{a^2 + \rho^2} :$$

$$R = \frac{(\rho^2 + a^2)^{\frac{1}{2} \times 3}}{\left(\sqrt{\rho^2 + a^2}\right)^2 + a^2} = \frac{N^3}{N^2 + a^2} .$$

[I.7] A área definida pelo vector associado ao ponto de coordenadas  $(\rho, \theta)$ , quando  $\theta$  varia entre dois valores,  $\theta_1$  e  $\theta_2$ , é determinada pela expressão:

$$A = \frac{1}{6a} (\rho_1^3 - \rho_0^3)$$

Demonstração:

Pelo que foi dito em 2.1, a área definida por uma curva, dada em coordenadas polares, é determinada por  $A = \frac{1}{2} \int_a^b \rho^2 d\theta$ .

Atendendo à equação polar da espiral de Arquimedes,  $\rho = a\theta$ , obtém-se,

$$A = \frac{1}{2} \int_{\theta_0}^{\theta_1} (a\theta)^2 d\theta = \frac{1}{2} a^2 \int_{\theta_0}^{\theta_1} \theta^2 d\theta = \frac{a^2}{2} \times \frac{\theta^3}{3} \Big|_{\theta_0}^{\theta_1} = \frac{a^2}{6} (\theta_1^3 - \theta_0^3) .$$

Mas, como  $\theta = \frac{\rho}{a}$ , vem,

$$A = \frac{a^2}{6} \left( \frac{\rho_1^3}{a^3} - \frac{\rho_0^3}{a^3} \right) = \frac{a^2}{6} \times \frac{1}{a^3} (\rho_1^3 - \rho_0^3) = \frac{1}{6a} (\rho_1^3 - \rho_0^3) .$$

Seguidamente, Gomes Teixeira apresenta algumas proposições do Tratado de Arquimedes. Nesta fase, apenas iremos demonstrar duas delas.

A partir das áreas,  $A_0$  e  $A_1$ , dos sectores circulares de raio igual a  $\rho_0$  e  $\rho_1$  correspondentes a um ângulo de amplitude  $\theta_1 - \theta_0$ , dadas pelas expressões:

$$A_0 = \frac{1}{2a} \rho_0^2 (\rho_1 - \rho_0) \quad A_1 = \frac{1}{2a} \rho_1^2 (\rho_1 - \rho_0)$$

Gomes Teixeira apresenta as seguintes relações:

$$(A) \quad \frac{A}{A_1} = \frac{\rho_1 \rho_0 + \frac{1}{3}(\rho_1 - \rho_0)^2}{\rho_1^2} \quad (B) \quad \frac{A_1 - A}{A - A_0} = \frac{\rho_0 + \frac{2}{3}(\rho_1 - \rho_0)}{\rho_0 + \frac{1}{3}(\rho_1 - \rho_0)}$$

Demonstração:

Começemos por deduzir a expressão da área  $A_0$  e consideremos que  $A_1$  se obtém da mesma forma. Para tal, basta considerar a equação polar de uma circunferência de raio arbitrário  $\rho$ ,  $f(\theta) = \rho$ .

Deste modo, para a circunferência de raio  $\rho_0$ , a equação polar é  $f(\theta) = \rho_0$  donde,

$$A_0 = \frac{1}{2} \int_{\theta_0}^{\theta_1} (\rho_0)^2 d\theta = \frac{1}{2} \rho_0^2 \theta \Big|_{\theta_0}^{\theta_1} = \frac{1}{2} \rho_0^2 (\theta_1 - \theta_0) = \frac{1}{2} \rho_0^2 \left( \frac{\rho_1}{a} - \frac{\rho_0}{a} \right) = \frac{1}{2a} \rho_0^2 (\rho_1 - \rho_0) \text{ Pa}$$

ra obter as relações (A) e (B) basta considerar as expressões deduzidas anteriormente:

(A)

$$\begin{aligned} \frac{A}{A_1} &= \frac{\frac{1}{6a}(\rho_1^3 - \rho_0^3)}{\frac{1}{2a}\rho_1^2(\rho_1 - \rho_0)} = \frac{1}{3} \frac{\rho_1^3 - \rho_0^3}{\rho_1^2(\rho_1 - \rho_0)} = \frac{1}{3} \frac{(\rho_1 - \rho_0)^3 + 3\rho_1\rho_0(\rho_1 - \rho_0)}{\rho_1^2(\rho_1 - \rho_0)} \\ &= \frac{1}{3} \frac{(\rho_1 - \rho_0)^2 + 3\rho_1\rho_0}{\rho_1^2} = \frac{\rho_1\rho_0 + \frac{1}{3}(\rho_1 - \rho_0)^2}{\rho_1^2} \end{aligned}$$

(B)

$$\begin{aligned} \frac{A_1 - A}{A - A_0} &= \frac{\frac{1}{2a}\rho_1^2(\rho_1 - \rho_0) - \frac{1}{6a}(\rho_1^3 - \rho_0^3)}{\frac{1}{6a}(\rho_1^3 - \rho_0^3) - \frac{1}{2a}\rho_0^2(\rho_1 - \rho_0)} = \frac{\frac{1}{2a} \left[ \rho_1^2(\rho_1 - \rho_0) - \frac{1}{3}(\rho_1^3 - \rho_0^3) \right]}{\frac{1}{2a} \left[ \frac{1}{3}(\rho_1^3 - \rho_0^3) - \rho_0^2(\rho_1 - \rho_0) \right]} \\ &= \frac{3\rho_1^2(\rho_1 - \rho_0) - (\rho_1 - \rho_0)^3 - 3\rho_1\rho_0(\rho_1 - \rho_0)}{(\rho_1 - \rho_0)^3 + 3\rho_1\rho_0(\rho_1 - \rho_0) - 3\rho_0^2(\rho_1 - \rho_0)} = \frac{3\rho_1^2 - (\rho_1 - \rho_0)^2 - 3\rho_1\rho_0}{(\rho_1 - \rho_0)^2 + 3\rho_1\rho_0 - 3\rho_0^2} \\ &= \frac{3\rho_1(\rho_1 - \rho_0) - (\rho_1 - \rho_0)^2}{3\rho_0(\rho_1 - \rho_0) + (\rho_1 - \rho_0)^2} = \frac{3\rho_1 - (\rho_1 - \rho_0)}{3\rho_0 + (\rho_1 - \rho_0)} = \frac{2\rho_1 + \rho_0}{2\rho_0 + \rho_1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{2\rho_1 + \rho_0}{3} = \frac{2}{3}\rho_1 + \left(\rho_0 - \frac{2}{3}\rho_0\right) = \rho_0 + \frac{2}{3}(\rho_1 - \rho_0) \\
 &= \frac{\rho_1 + 2\rho_0}{3} = \frac{1}{3}\rho_1 + \left(\rho_0 - \frac{1}{3}\rho_0\right) = \rho_0 + \frac{1}{3}(\rho_1 - \rho_0)
 \end{aligned}$$

[I.8] A área definida pela espiral e por um vector associado a um ponto cujo ângulo polar varia entre  $\theta_0 = 2(n-1)\pi$  e  $\theta_1 = 2n\pi$ , ou seja, a área definida pela curva quando esta descreve a espira de ordem  $n$ , é dada por:

$$A^{(n)} = \frac{4}{3}\pi^3 a^2 (3n^2 - 3n + 1)$$

Demonstração:

$$\begin{aligned}
 A^{(n)} &= \frac{1}{2} \int_{2(n-1)\pi}^{2n\pi} (a\theta)^2 d\theta = \frac{1}{2} a^2 \frac{\theta^3}{3} \Big|_{2(n-1)\pi}^{2n\pi} = \frac{1}{6} a^2 \left[ (2n\pi)^3 - (2(n-1)\pi)^3 \right] \\
 &= \frac{1}{6} a^2 \left[ 8n^3 \pi^3 - 8(n-1)^3 \pi^3 \right] = \frac{4}{3} a^2 \pi^3 \left[ n^3 - (n^3 - 3n^2 + 3n - 1) \right] \\
 &= \frac{4}{3} a^2 \pi^3 (3n^2 - 3n + 1)
 \end{aligned}$$

[I.9] A expressão da área definida entre a espira de ordem  $n-1$  e ordem  $n$  é dada por:

$$A^{(n)} - A^{(n-1)} = 8(n-1)\pi^3 a^2$$

Demonstração:

Começemos por calcular a área definida entre a primeira e a segunda espira. Depois, generalizemos, calculando a expressão da área definida entre a espira de ordem  $n-1$  e a de ordem  $n$ :

Pela expressão obtida anteriormente verifica-se que  $A^{(1)} = \frac{4}{3}\pi^3 a^2$  e  $A^{(2)} = \frac{4}{3}\pi^3 a^2 \times 7$ .

Donde, a área definida entre a primeira e a segunda espira é determinada por:

$$A^{(2)} - A^{(1)} = \frac{4}{3}\pi^3 a^2 \times 7 - \frac{4}{3}\pi^3 a^2 = \frac{4}{3}\pi^3 a^2 (7-1) = 8\pi^3 a^2$$

Generalizando,

$$\begin{aligned}
 A^{(n)} - A^{(n-1)} &= \frac{4}{3}\pi^3 a^2 (3n^2 - 3n + 1) - \frac{4}{3}\pi^3 a^2 \left[ 3(n-1)^2 - 3(n-1) + 1 \right] \\
 &= \frac{4}{3}\pi^3 a^2 \left[ 3n^2 - 3n + 1 - 3(n^2 - 2n + 1) + 3n - 4 \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{4}{3} \pi^3 a^2 (6n - 6) \\
 &= 8(n-1) \pi^3 a^2
 \end{aligned}$$

[I.10] A soma das áreas de todas as espiras de ordens 1 até  $n$ , é dada por:

$$A^{(1)} + A^{(2)} + \dots + A^{(n)} = \frac{4}{3} n^3 \pi^3 a^2$$

Demonstração:

Atendendo às expressões das áreas definidas pela curva ao longo da  $1^a$ ,  $2^a$ , ...,  $n^a$  espira,  $A^{(1)} = \frac{4}{3} \pi^3 a^2$ ,  $A^{(2)} = \frac{4}{3} \pi^3 a^2 \times 7$ , ...,  $A^{(n)} = \frac{4}{3} \pi^3 a^2 (3n^2 - 3n + 1)$ , obtemos então a expressão da soma das áreas de todas as espiras até à ordem  $n$ :

$$\begin{aligned}
 A^{(1)} + A^{(2)} + \dots + A^{(n)} &= \frac{4}{3} \pi^3 a^2 + \frac{4}{3} \pi^3 a^2 7 + \dots + \frac{4}{3} \pi^3 a^2 (3n^2 - 3n + 1) \\
 &= \frac{4}{3} \pi^3 a^2 [1 + 7 + \dots + (3n^2 - 3n + 1)] \\
 &= \frac{4}{3} \pi^3 a^2 \left[ \sum_{i=1}^n (3n^2 - 3n + 1) \right] \\
 &= \frac{4}{3} \pi^3 a^2 \left[ 3 \sum_{i=1}^n n^2 - 3 \sum_{i=1}^n n + \sum_{i=1}^n 1 \right] \\
 &= \frac{4}{3} \pi^3 a^2 \left[ 3 \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6} - 3 \frac{n(n+1)}{2} + n \right] \\
 &= \frac{4}{3} \pi^3 a^2 \left[ \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{2} - \frac{3n(n+1)}{2} + \frac{2n}{2} \right] \\
 &= \frac{2}{3} \pi^3 a^2 (2n^3 + 3n^2 + n - 3n^2 - 3n + 2n) \\
 &= \frac{4}{3} n^3 \pi^3 a^2
 \end{aligned}$$

Tal como já foi referido na secção anterior, a expressão que encontramos difere da expressão que Gomes Teixeira apresentou,  $A^{(1)} + A^{(2)} + \dots + A^{(n)} = \frac{4}{3} n^3 \pi^2 a^2$ , no expoente de  $\pi$ , que é 3 e não 2.

[I.11] O comprimento do arco da espiral compreendido entre o pólo  $O$  e o ponto de coordenadas  $(\rho, \theta)$  é dado pela equação:

$$s = \frac{\rho}{2a} \sqrt{\rho^2 + a^2} + \frac{a}{2} \log \left( \frac{\rho + \sqrt{\rho^2 + a^2}}{a} \right)$$

Demonstração:

Sabe-se de 2.1 que o comprimento do arco de uma curva, definida em coordenadas polares, pode ser obtida neste caso a partir da fórmula  $\int_0^\rho \sqrt{\rho^2 \left( \frac{d\theta}{d\rho} \right)^2 + 1} d\rho$ .

Através de cálculos anteriores, tem-se que  $\frac{d\theta}{d\rho} = \frac{1}{a}$ , donde,

$$s = \int_0^\rho \sqrt{\frac{\rho^2}{a^2} + 1} d\rho = \frac{1}{a} \int_0^\rho \sqrt{\rho^2 + a^2} d\rho.$$

Sabendo que:

$$\int \sqrt{ax^2 + b} dx = \frac{x}{2} \sqrt{ax^2 + b} + \frac{b}{2\sqrt{a}} \ln(x\sqrt{a} + \sqrt{ax^2 + b}), \quad a > 0$$

obtem-se,

$$\begin{aligned} s &= \frac{1}{a} \int_0^\rho \sqrt{\rho^2 + a^2} d\rho = \frac{1}{a} \left[ \frac{\rho}{2} \sqrt{\rho^2 + a^2} + \frac{a^2}{2} \log(\rho + \sqrt{\rho^2 + a^2}) \right]_0^\rho \\ &= \frac{\rho}{2a} \sqrt{\rho^2 + a^2} + \frac{a}{2} \log(\rho + \sqrt{\rho^2 + a^2}) - \frac{a}{2} \log(a) \\ &= \frac{\rho}{2a} \sqrt{\rho^2 + a^2} + \frac{a}{2} \log \left( \frac{\rho + \sqrt{\rho^2 + a^2}}{a} \right) \end{aligned}$$

### 3.2.2. A espiral de Galileu

[II.1]  $\langle Comp \rangle$  A subnormal da espiral de Galileu é dada por:

$$S_n = -2b\theta$$

Demonstração:

Tendo em conta a equação polar da espiral,  $\rho = a - b\theta^2$ , obtém-se  $\frac{d\rho}{d\theta} = -2b\theta$ ,  
 donde resulta que  $S_n = \frac{d\rho}{d\theta} = -2b\theta$ .

[II.2] *<Comp>* A subtangente desta espiral é dada pela equação:

$$S_t = -\frac{\rho^2}{2\sqrt{b(a-\rho)}}.$$

Demonstração:

Da equação polar da espiral, facilmente se obtém que  $\theta = \sqrt{\frac{a-\rho}{b}}$  (considerando a parte positiva da curva), donde  $\frac{d\theta}{d\rho} = -\frac{1}{2b} \left(\frac{a-\rho}{b}\right)^{-1/2} = -\frac{1}{2\sqrt{b(a-\rho)}}$ . Desta forma,

$$S_t = \rho^2 \frac{d\theta}{d\rho} = \rho^2 \left( -\frac{1}{2\sqrt{b(a-\rho)}} \right) = -\frac{\rho^2}{2\sqrt{b(a-\rho)}}.$$

Se considerarmos a parte negativa a subtangente será simétrica à anterior.

[II.3] *<Comp>* A equação que permite determinar o comprimento da normal é:

$$N = \sqrt{\rho^2 + 4b(a-\rho)}.$$

Demonstração:

Através da expressão geral que permite determinar o comprimento da normal apresentada em 2.1 obtém-se:

$$N = \sqrt{\rho^2 + \left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2} = \sqrt{\rho^2 + 4b^2\theta^2} = \sqrt{\rho^2 + 4b(a-\rho)}.$$

[II.4] *<Comp>* A equação que permite determinar o comprimento da tangente é:

$$T = \frac{\rho}{2} \sqrt{\frac{4b(a-\rho) + \rho^2}{b(a-\rho)}}.$$

Demonstração:

O comprimento da tangente também pode ser determinado a partir da subtangente da espiral, pela fórmula  $T = \sqrt{\rho^2 + S_t^2}$ . Daqui resulta que,

$$T = \sqrt{\rho^2 + \frac{\rho^4}{4b(a-\rho)}} = \frac{\rho}{2} \sqrt{\frac{4b(a-\rho) + \rho^2}{b(a-\rho)}}.$$

[II.5] A amplitude do ângulo formado pela recta tangente e pelo vector associado ao ponto de tangência, é dada pela expressão:

$$\text{tang } V = -\frac{\rho}{2\sqrt{b(a-\rho)}}$$

Demonstração:

A amplitude do ângulo obtém-se a partir da relação  $\text{tang } V = \frac{S_t}{\rho}$ , donde resulta:

$$\text{tang } V = \frac{-\frac{\rho^2}{2\sqrt{b(a-\rho)}}}{\rho} = -\frac{\rho}{2\sqrt{b(a-\rho)}}.$$

[II.6] O raio de curvatura da espiral no ponto de coordenadas  $(\rho, \theta)$  é dado pela equação:

$$R = \frac{(\rho^2 - 4b\rho + 4ab)^{\frac{3}{2}}}{\rho^2 - 6b\rho + 8ab}.$$

Demonstração:

Sabe-se que o raio de curvatura de uma curva, definida em coordenadas polares, é calculado através da expressão:

$$R = \frac{\left[ \rho^2 + \left( \frac{d\rho}{d\theta} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}}{\left| \rho^2 + 2 \left( \frac{d\rho}{d\theta} \right)^2 - \rho \frac{d^2\rho}{d\theta^2} \right|}$$

Neste caso, através da equação polar da espiral  $\rho = a - b\theta^2$ , obtém-se:  $\frac{d\rho}{d\theta} = -2b\theta$

e  $\frac{d^2\rho}{d\theta^2} = -2b$ . Assim,

$$R = \frac{\left[\rho^2 + (-2b\theta)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\left|\rho^2 + 2(-2b\theta)^2 - \rho(-2b)\right|} = \frac{\left(\rho^2 + 4b^2\theta^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\left|\rho^2 + 8b^2\theta^2 + 2b\rho\right|}.$$

Atendendo a que  $a$  e  $b$  são constantes positivas, por definição da espiral, e como  $\theta^2 = \frac{a - \rho}{b}$ , tem-se que:

$$R = \frac{\left(\rho^2 + 4b^2\theta^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\left|\rho^2 + 8b^2\theta^2 + 2b\rho\right|} = \frac{\left(\rho^2 + 4b^2\frac{a - \rho}{b}\right)^{\frac{3}{2}}}{\rho^2 + 8b^2\frac{a - \rho}{b} + 2b\rho} = \frac{\left(\rho^2 - 4b\rho + 4ab\right)^{\frac{3}{2}}}{\rho^2 + 8ab - 6b\rho}.$$

**[II.7]** As coordenadas dos pontos duplos da espiral, situados sobre a parte positiva da curva, são determinadas pelas equações,

$$\theta = \frac{-(2n+1)\pi b \pm \sqrt{4ab - b^2\pi^2(2n+1)^2}}{2b} \text{ e } \rho = a - b\theta^2,$$

quando  $n$  é um número inteiro, positivo e que satisfaz a condição  $2a > b\pi^2(2n+1)^2$ . Esta condição é exigida para que os valores obtidos para o ângulo  $\theta$  sejam reais e positivos.

Demonstração:

Sabe-se que, numa curva definida em coordenadas polares, os pontos de coordenadas  $(\rho, \theta)$  e  $(-\rho, \theta + (2n+1)\pi)$  representam o mesmo ponto. De acordo com isto, as coordenadas dos pontos duplos devem verificar as equações:

$$\begin{aligned} (1) \quad & \rho = a - b\theta^2 \\ (2) \quad & -\rho = a - b[\theta + (2n+1)\pi]^2 \end{aligned}$$

Destas duas condições pode-se, então, deduzir uma expressão para o ângulo  $\theta$ , eliminando o valor de  $\rho$  na equação (2):

$$\begin{aligned} -\rho &= a - b[\theta + (2n+1)\pi]^2 \\ \Leftrightarrow -(a - b\theta^2) &= a - b[\theta + (2n+1)\pi]^2 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \Leftrightarrow -2a + b\theta^2 &= -b\theta^2 - 2b\theta(2n+1)\pi - b(2n+1)^2 \pi^2 \\ \Leftrightarrow 2b\theta^2 + 2b\pi(2n+1)\theta + b\pi^2(2n+1)^2 - 2a &= 0 \\ \Leftrightarrow \theta &= \frac{-2b\pi(2n+1) \pm \sqrt{4b^2\pi^2(2n+1)^2 - 8b^2\pi^2(2n+1)^2 + 16ab}}{4b} \\ \Leftrightarrow \theta &= \frac{-2b\pi(2n+1) \pm 2\sqrt{-b^2\pi^2(2n+1)^2 + 4ab}}{4b} \\ \Leftrightarrow \theta &= \frac{-b\pi(2n+1) \pm \sqrt{4ab - b^2\pi^2(2n+1)^2}}{2b} \end{aligned}$$

Como este estudo apenas incide nos pontos duplos situados na parte positiva da espiral, é necessário que os valores de  $\theta$  obtidos sejam positivos. Para tal, na expressão obtida anteriormente, é necessário garantir que,  $\sqrt{4ab - b^2\pi^2(2n+1)^2} > b\pi(2n+1)$ , donde resulta:

$$\begin{aligned} 4ab - b^2\pi^2(2n+1)^2 &> b^2\pi^2(2n+1)^2 \\ \Leftrightarrow 4ab &> 2b^2\pi^2(2n+1)^2 \\ \Leftrightarrow 2a &> b\pi^2(2n+1)^2 \quad (i) \end{aligned}$$

Ainda relativamente aos valores de  $\theta$ , para que estes sejam números reais, é necessário que  $4ab > b^2\pi^2(2n+1)^2$  logo  $4a > b\pi^2(2n+1)^2$  (ii).

Conclui-se, através de (i) e (ii) que, para que os valores de  $\theta$  obtidos pela expressão acima sejam valores reais positivos, é necessário que  $n$  verifique a condição  $2a > b\pi^2(2n+1)^2$ .

Tal como foi referido em 3.1, a expressão que encontramos para determinar o ângulo polar dos pontos duplos difere da expressão  $\theta = \frac{-(2n+1)\pi b \pm \sqrt{4ab - b^2\pi^2(2n+1)^2}}{b}$ , que Gomes Teixeira apresentou, no denominador que é  $2b$  e não somente  $b$ .

**[II.8]** A área definida pelo vector associado ao ponto de coordenadas  $(\rho, \theta)$ , quando  $\theta$  varia, é determinada pela expressão:

$$A = \frac{1}{2} \left( a^2\theta - \frac{2}{3}ab\theta^3 + \frac{1}{5}b^2\theta^5 \right).$$

Demonstração:

Neste caso sabemos que  $A = \frac{1}{2} \int_0^{\theta} \rho^2 d\theta$  onde  $\rho = a - b\theta^2$ . Assim,

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2} \int_0^{\theta} (a - b\theta^2)^2 d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{\theta} (a^2 - 2ab\theta^2 + b^2\theta^4) d\theta \\ &= \frac{1}{2} \left( a^2\theta - 2ab \frac{\theta^3}{3} + b^2 \frac{\theta^5}{5} \right) \Big|_0^{\theta} = \frac{1}{2} \left( a^2\theta - \frac{2}{3} ab\theta^3 + \frac{1}{5} b^2\theta^5 \right) \end{aligned}$$

**[II.9]** A espiral de Galileu é rectificável algebricamente apenas quando  $a = 0$ . E, neste caso, o comprimento da espiral é dado por:

$$s = \frac{1}{3} b \left[ (\theta^2 + 4)^{\frac{3}{2}} - 8 \right].$$

Demonstração:

Atendendo à equação polar da espiral de Galileu, quando  $a = 0$ , a equação toma a forma  $\rho = -b\theta^2$ , donde se obtém  $\frac{d\rho}{d\theta} = -2b\theta$ . Assim o comprimento do arco da espiral:

$$\begin{aligned} s &= \int_0^{\theta} \sqrt{\rho^2 + \left( \frac{d\rho}{d\theta} \right)^2} d\theta = \int_0^{\theta} \sqrt{(-b\theta^2)^2 + (-2b\theta)^2} d\theta = \int_0^{\theta} \sqrt{b^2\theta^4 + 4b^2\theta^2} d\theta \\ &= b \int_0^{\theta} \theta \sqrt{\theta^2 + 4} d\theta = \frac{b}{2} \times \frac{2}{3} (\theta^2 + 4)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^{\theta} = \frac{b}{3} \left[ (\theta^2 + 4)^{\frac{3}{2}} - 4^{\frac{3}{2}} \right] \\ &= \frac{1}{3} b \left[ (\theta^2 + 4)^{\frac{3}{2}} - 8 \right]. \end{aligned}$$

**[II.10]** O comprimento do arco da espiral, quando  $a \neq 0$ , é dado pela seguinte fórmula:

$$ds = \sqrt{a^2 + 2b(2b-a)\theta^2 + b^2\theta^4} d\theta,$$

que, depois das mudanças de variável,  $\theta^2 = z$  e  $z = v + h$ , obtemos a seguinte expressão que depende de integrais elípticos de 1ª e de 2ª espécies:

$$ds = \frac{1}{3} \left[ \frac{b}{2} d\sqrt{4v^3 - g_1v - g_2} + \frac{2(2b-a)v dv}{\sqrt{4v^3 - g_1v - g_2}} + \frac{2(2b-a)h dv}{\sqrt{4v^3 - g_1v - g_2}} + \frac{2a^2 dv}{b\sqrt{4v^3 - g_1v - g_2}} \right]$$

sendo,  $g_1 = 4\left(3h^2 - \frac{a^2}{b^2}\right)$ ,  $g_2 = 4\left(2h^2 - \frac{a^2}{b^2}\right)h$  e  $h = -\frac{2(2b-a)}{3b}$ .

Demonstração:

Tal como vimos em casos anteriores o comprimento do arco da espiral é obtido a partir da seguinte expressão  $s = \int_0^\theta \sqrt{\rho^2 + \left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2} d\theta$  onde, para esta espiral,  $\rho = a - b\theta^2$  e

$$\frac{d\rho}{d\theta} = -2b\theta. \text{ Assim,}$$

$$s = \int_0^\theta \sqrt{(a - b\theta^2)^2 + (-2b\theta)^2} d\theta = \int_0^\theta \sqrt{a^2 + 2b(2b - a)\theta^2 + b^2\theta^4} d\theta,$$

que podemos escrever na forma:

$$ds = \sqrt{a^2 + 2b(2b - a)\theta^2 + b^2\theta^4} d\theta.$$

Fazendo a mudança de variável  $\theta^2 = z$  obtemos  $d\theta = \frac{1}{2\sqrt{z}} dz$ , donde:

$$\begin{aligned} ds &= \sqrt{a^2 + 2b(2b - a)z + b^2z^2} \frac{1}{2\sqrt{z}} dz = \frac{1}{2} \frac{a^2 + 2b(2b - a)z + b^2z^2}{\sqrt{z}\sqrt{a^2 + 2b(2b - a)z + b^2z^2}} dz \\ &= \frac{1}{2} \frac{a^2 + 2b(2b - a)z + b^2z^2}{\sqrt{z(a^2 + 2b(2b - a)z + b^2z^2)}} dz \end{aligned}$$

Considerando  $F(z) = z(b^2z^2 + 2b(2b - a)z + a^2)$ , tem-se que

$F'(z) = 3b^2z^2 + 4b(2b - a)z + a^2$  donde resulta,

$$\begin{aligned} ds &= \frac{1}{2} \frac{a^2 + 2b(2b - a)z + b^2z^2}{\sqrt{F(z)}} dz = \frac{1}{6} \frac{3a^2 + 6b(2b - a)z + 3b^2z^2}{\sqrt{F(z)}} dz \\ &= \frac{1}{6} \frac{F'(z) + 2b(2b - a)z + 2a^2}{\sqrt{F(z)}} dz = \frac{1}{3} \left[ \frac{1}{2} \frac{F'(z)}{\sqrt{F(z)}} dz + \frac{b(2b - a)z + a^2}{\sqrt{F(z)}} dz \right] \\ &= \frac{1}{3} \left[ d\sqrt{F(z)} + \frac{b(2b - a)z + a^2}{\sqrt{F(z)}} dz \right] \quad (1) \end{aligned}$$

Atendendo, agora à mudança de variável  $z = v + h$ , sendo  $h = -\frac{2(2b-a)}{3b}$ ,

provemos, em primeiro que,  $F(z) = \frac{b^2}{4}(4v^3 - g_1v - g_2)$ , com  $g_1 = 4\left(3h^2 - \frac{a^2}{b^2}\right)$ ,

$$g_2 = 4\left(2h^2 - \frac{a^2}{b^2}\right)h.$$

$$\begin{aligned} F(z) &= z(b^2z^2 + 2b(2b-a)z + a^2) \\ &= (v+h)\left[b^2(v+h)^2 + 2b(2b-a)(v+h) + a^2\right] \\ &= (v+h)b^2\left[v^2 + 2hv + h^2 + \frac{2v(2b-a)}{b} + \frac{2h(2b-a)}{b} + \frac{a^2}{b^2}\right] \\ &= b^2\left[v^3 + 3hv^2 + 3vh^2 + h^3 + \frac{6v^2(2b-a)}{3b} + \frac{12vh(2b-a)}{3b} + \frac{6h^2(2b-a)}{3b} + \frac{a^2v}{b^2} + \frac{a^2h}{b^2}\right] \\ &= b^2\left[v^3 + 3hv^2 + 3vh^2 + h^3 - 3hv^2 - 3h^2v - 3h^2v - 3h^3 + \frac{a^2v}{b^2} + \frac{a^2h}{b^2}\right] \\ &= b^2\left[v^3 - 2h^3 - 3h^2v + \frac{a^2v}{b^2} + \frac{a^2h}{b^2}\right] \\ &= b^2\left[v^3 - \left(3h^2 + \frac{a^2}{b^2}\right)v - \left(2h^2 - \frac{a^2}{b^2}\right)h\right] \\ &= \frac{b^2}{4}\left[4v^3 - g_1v - g_2\right] \end{aligned}$$

Substituindo na expressão (1), obtém-se:

$$\begin{aligned} ds &= \frac{1}{3}\left[d\sqrt{\frac{b^2}{4}\left[4v^3 - g_1v - g_2\right]} + \frac{b(2b-a)(v+h) + a^2}{\sqrt{\frac{b^2}{4}\left[4v^3 - g_1v - g_2\right]}}dv\right] \\ &= \frac{1}{3}\left[\frac{b}{2}d\sqrt{4v^3 - g_1v - g_2} + \frac{2b(2b-a)(v+h) + 2a^2}{b\sqrt{4v^3 - g_1v - g_2}}dv\right] \\ &= \frac{1}{3}\left[\frac{b}{2}d\sqrt{4v^3 - g_1v - g_2} + \frac{2(2b-a)(v+h)}{\sqrt{4v^3 - g_1v - g_2}} + \frac{2a^2}{b\sqrt{4v^3 - g_1v - g_2}}dv\right] \\ &= \frac{1}{3}\left[\frac{b}{2}d\sqrt{4v^3 - g_1v - g_2} + \frac{2(2b-a)v dv}{\sqrt{4v^3 - g_1v - g_2}} + \frac{2(2b-a)h dv}{\sqrt{4v^3 - g_1v - g_2}} + \frac{2a^2 dv}{b\sqrt{4v^3 - g_1v - g_2}}\right] \end{aligned}$$

Esta expressão difere da expressão apresentada por Gomes Teixeira, na medida em que lhe falta o termo  $\frac{2(2b-a)hdv}{\sqrt{4v^3 - g_1v - g_2}}$ , dado que  $z = v + h$ . No último termo da expressão também apresentada por Gomes Teixeira, falta  $b$  em denominador. No entanto, este último erro não é cometido na expressão apresentada na obra anterior, *Tratado de las Curvas*.

### 3.2.3. A espiral de Fermat:

[III.1] A subnormal da espiral de Fermat é dada por:

$$S_n = \frac{a^2}{2\rho}.$$

Demonstração:

Tendo em conta a equação polar da espiral,  $\rho^2 = a^2\theta$ , obtém-se  $\frac{d\rho}{d\theta} = \frac{a^2}{2\rho}$ , donde resulta que  $S_n = \frac{d\rho}{d\theta} = \frac{a^2}{2\rho}$ .

[III.2] A subtangente desta espiral é dada pela expressão:

$$S_t = \frac{2\rho^3}{a^2}.$$

Demonstração:

Da equação polar da espiral, facilmente se obtém que  $\theta = \frac{\rho^2}{a^2}$  donde,  $\frac{d\theta}{d\rho} = \frac{2\rho}{a^2}$ .  
 Desta forma,  $S_t = \rho^2 \frac{2\rho}{a^2} = \frac{2\rho^3}{a^2}$ .

[III.3] *<comp>* A equação que permite determinar o comprimento da normal é:

$$N = \frac{1}{2\rho} \sqrt{4\rho^4 + a^4}.$$

Demonstração:

A expressão que permite determinar o comprimento da normal pode-se obter a partir da subnormal da espiral considerada:

$$N = \sqrt{\rho^2 + S_n^2} = \sqrt{\rho^2 + \frac{a^4}{4\rho^2}} = \frac{1}{2\rho} \sqrt{4\rho^4 + a^4}.$$

[III.4] *⟨comp⟩* A equação que permite determinar o comprimento da tangente é:

$$T = \frac{\rho}{a^2} \sqrt{a^4 + 4\rho^4}.$$

Demonstração:

O comprimento da tangente é obtido através da expressão  $T = \sqrt{\rho^2 + S_t^2}$ . Daqui resulta que,

$$T = \sqrt{\rho^2 + \frac{4\rho^6}{a^4}} = \frac{\rho}{a^2} \sqrt{a^4 + 4\rho^4}.$$

[III.5] A amplitude do ângulo formado pela recta tangente e pelo vector associado ao ponto de contacto da tangente com a curva, é dada pela expressão:

$$\text{tang}V = \frac{2\rho^2}{a^2}.$$

Demonstração:

A amplitude do ângulo obtém-se da relação já referida anteriormente:

$$\text{tang}V = \frac{S_t}{\rho} = \frac{\frac{2\rho^3}{a^2}}{\rho} = \frac{2\rho^2}{a^2}.$$

[III.6] O valor do raio da curvatura da espiral no ponto  $(\rho, \theta)$  é determinado pela equação:

$$R = \frac{(4\rho^4 + a^4)^{\frac{3}{2}}}{2\rho(4\rho^4 + 3a^4)}.$$

Demonstração:

Para obter a expressão anterior vamos novamente utilizar a expressão geral do raio de curvatura de uma curva definida em coordenadas polares. De acordo com a equação

polar  $\rho^2 = a^2\theta$  e de  $\frac{d\rho}{d\theta} = \frac{a^2}{2\rho}$  vem,

$$\frac{d^2\rho}{d\theta^2} = \pm \frac{a}{2} \left(-\frac{1}{2}\right) \theta^{-\frac{3}{2}} = \pm \frac{-a}{4\sqrt{\theta^3}} = -\frac{a^4}{4(\pm a\sqrt{\theta})^3} = -\frac{a^4}{4\rho^3}$$

Assim, obtemos para o raio de curvatura:

$$\begin{aligned} R &= \frac{\left[\rho^2 + \left(\frac{a^2}{2\rho}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\left|\rho^2 + 2\left(\frac{a^2}{2\rho}\right)^2 - \rho\left(-\frac{a^4}{4\rho^3}\right)\right|} = \frac{\left[\rho^2 + \frac{a^4}{4\rho^2}\right]^{\frac{3}{2}}}{\left|\rho^2 + \frac{a^4}{2\rho^2} + \frac{a^4}{4\rho^2}\right|} = \frac{\frac{1}{8\rho^3} [4\rho^4 + a^4]^{\frac{3}{2}}}{\frac{1}{4\rho^2} (4\rho^4 + 2a^4 + a^4)} \\ &= \frac{(4\rho^4 + a^4)^{\frac{3}{2}}}{2\rho(4\rho^4 + 3a^4)} \end{aligned}$$

**[III.7]** A área definida pelo vector  $\rho$ , quando  $\theta$  varia entre  $\theta_0$  e  $\theta_1$ , é determinada pela expressão:

$$A = \frac{a^2}{4} (\theta_1^2 - \theta_0^2).$$

Demonstração:

Sabemos que  $A = \frac{1}{2} \int_a^b \rho^2 d\theta$  onde  $\rho^2 = a^2\theta$ . Assim,

$$A = \frac{1}{2} \int_{\theta_0}^{\theta_1} a^2\theta d\theta = \frac{1}{2} a^2 \frac{\theta^2}{2} \Big|_{\theta_0}^{\theta_1} = \frac{a^2}{4} (\theta_1^2 - \theta_0^2).$$

A partir da área definida anteriormente, Gomes Teixeira apresenta a área definida por cada uma das espiras da espiral assim como duas propriedades relacionadas com essas áreas:

1ª Propriedade - A área definida pela primeira espira é igual a metade da área de um círculo centrado na origem e de raio igual ao raio vector quando  $\theta = 2\pi$ , ou seja,  $\overline{OD}$ .

2ª Propriedade - A área da espira de ordem  $n+1$  obtém-se da área da espira de ordem  $n$  somando-lhe uma quantidade igual à área do mesmo círculo.

Demonstração:

Começemos por encontrar a expressão geral da área de uma espira de ordem  $n$ :

Consideremos  $\theta_{n-1} = 2(n-1)\pi$  e  $\theta_n = \theta_{n-1} + 2\pi = 2n\pi$ , com  $n \in \mathbb{N}$ , então pela expressão da área definida anteriormente obtém-se:

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{a^2}{4}(\theta_n^2 - \theta_{n-1}^2) = \frac{a^2}{4}[(2n\pi)^2 - (2(n-1)\pi)^2] = \frac{a^2}{4}[4n^2\pi^2 - 4(n-1)^2\pi^2 + 8n\pi^2 - 4\pi^2] \\ &= a^2\pi^2(2n-1). \end{aligned}$$

Para demonstrar a primeira propriedade vamos calcular a área do círculo de centro na origem e raio  $\overline{OD}$ . Sabemos que  $\overline{OD} = a\sqrt{2\pi}$  donde  $A_{\square} = \pi(a\sqrt{2\pi})^2 = 2a^2\pi^2$ .

Como a área da espira de ordem 1 é determinada pela expressão  $A_1 = a^2\pi^2(2-1) = a^2\pi^2$ , obtém-se facilmente que  $A_1 = \frac{A_{\square}}{2}$ .

Para demonstrar a segunda propriedade basta determinar a diferença entre as áreas de duas espiras consecutivas obtendo-se assim a área do círculo considerado anteriormente:

$$\begin{aligned} A_n - A_{n-1} &= a^2\pi^2(2n-1) - a^2\pi^2(2(n-1)-1) \\ &= a^2\pi^2 2n - a^2\pi^2 - a^2\pi^2 2n + 3a^2\pi^2 \\ &= -a^2\pi^2 + 3a^2\pi^2 \\ &= 2a^2\pi^2, \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

E assim conclui-se que:  $A_n = A_{n-1} + A_{\square}$ .

**[III.8]** O comprimento do arco da curva compreendido entre o ponto  $O$  e o ponto de coordenadas  $(\rho, \theta)$  é dado pela equação:

$$s = \frac{a}{3} \left( \sqrt{\theta(4\theta^2 + 1)} + \int_0^{\theta} \frac{d\theta}{\sqrt{\theta(4\theta^2 + 1)}} \right).$$

Demonstração:

Atendendo à equação polar da espiral,  $\rho^2 = a^2\theta$ , obtém-se  $\frac{d\rho}{d\theta} = \frac{a^2}{2\rho}$ . Assim o comprimento do arco da espiral:



$$\begin{aligned}
 s &= \int_0^\theta \sqrt{\rho^2 + \left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2} d\theta = \int_0^\theta \sqrt{a^2\theta + \frac{a^4}{4\rho^2}} d\theta = \frac{a}{2} \int_0^\theta \sqrt{4\theta + \frac{a^2}{\rho^2}} d\theta \\
 &= \frac{a}{2} \int_0^\theta \sqrt{\frac{4\theta^2 + 1}{\theta}} d\theta = \frac{a}{2} \int_0^\theta \frac{4\theta^2 + 1}{\sqrt{\theta(4\theta^2 + 1)}} d\theta = \frac{a}{2} \left[ 4 \int_0^\theta \frac{\theta^2 d\theta}{\sqrt{\theta(4\theta^2 + 1)}} + \int_0^\theta \frac{d\theta}{\sqrt{\theta(4\theta^2 + 1)}} \right]
 \end{aligned}$$

Desta expressão vemos que o valor de  $s$  depende de dois integrais diferentes. Gomes Teixeira reduziu o primeiro integral ao segundo integral. Para tal, iremos integrar por partes, obtendo-se:

$$\begin{aligned}
 \int \frac{\theta^2}{\sqrt{\theta(4\theta^2 + 1)}} d\theta &= \frac{1}{8} \int \frac{8\theta}{\sqrt{4\theta^2 + 1}} \sqrt{\theta} d\theta \\
 &= \frac{1}{8} \left[ 2\sqrt{\theta} \sqrt{4\theta^2 + 1} - \int \frac{1}{\sqrt{\theta}} \sqrt{4\theta^2 + 1} d\theta \right] \\
 &= \frac{1}{8} \left[ 2\sqrt{\theta(4\theta^2 + 1)} - \frac{1}{3} \int \frac{12\theta^2 + 3}{\sqrt{\theta(4\theta^2 + 1)}} d\theta \right] \\
 &= \frac{1}{8} \left[ 2\sqrt{\theta(4\theta^2 + 1)} - \frac{1}{3} \left[ \int \frac{12\theta^2 + 1}{\sqrt{\theta(4\theta^2 + 1)}} + \int \frac{2}{\sqrt{\theta(4\theta^2 + 1)}} d\theta \right] \right] \\
 &= \frac{1}{8} \left[ 2\sqrt{\theta(4\theta^2 + 1)} - \frac{2}{3} \sqrt{\theta(4\theta^2 + 1)} - \frac{1}{3} \int \frac{2}{\sqrt{\theta(4\theta^2 + 1)}} d\theta \right] \\
 &= \frac{1}{8} \left( \frac{4}{3} \sqrt{\theta(4\theta^2 + 1)} - \frac{2}{3} \int \frac{d\theta}{\sqrt{\theta(4\theta^2 + 1)}} \right) \\
 &= \frac{1}{6} \left( \sqrt{\theta(4\theta^2 + 1)} - \frac{1}{2} \int \frac{d\theta}{\sqrt{\theta(4\theta^2 + 1)}} \right)
 \end{aligned}$$

Voltando à expressão de  $s$  e substituindo o integral  $\int \frac{\theta^2}{\sqrt{\theta(4\theta^2 + 1)}} d\theta$  pela expressão anterior obtém-se:

$$s = \frac{a}{2} \left[ 4 \int_0^\theta \frac{\theta^2}{\sqrt{\theta(4\theta^2 + 1)}} d\theta + \int_0^\theta \frac{d\theta}{\sqrt{\theta(4\theta^2 + 1)}} \right]$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{a}{2} \left[ \frac{4}{6} \left( \sqrt{\theta(4\theta^2 + 1)} - \frac{1}{2} \int_0^\theta \frac{d\theta}{\sqrt{\theta(4\theta^2 + 1)}} \right) + \int_0^\theta \frac{d\theta}{\sqrt{\theta(4\theta^2 + 1)}} \right] \\
 &= \frac{a}{2} \left[ \frac{2}{3} \sqrt{\theta(4\theta^2 + 1)} + \frac{2}{3} \int_0^\theta \frac{d\theta}{\sqrt{\theta(4\theta^2 + 1)}} \right] \\
 &= \frac{a}{3} \left( \sqrt{\theta(4\theta^2 + 1)} + \int_0^\theta \frac{d\theta}{\sqrt{\theta(4\theta^2 + 1)}} \right)
 \end{aligned}$$

### 3.2.4. A espiral parabólica:

[IV.1] *<comp>* A subnormal da espiral de parabólica é dada por:

$$S_n = \frac{pa}{\rho - a}.$$

Demonstração:

Tendo em conta a equação polar da espiral,  $(\rho - a)^2 = 2pa\theta$ , e resolvendo-a em ordem a  $\rho$ ,  $\rho = a \pm \sqrt{2pa\theta}$  obtém-se  $\frac{d\rho}{d\theta} = \pm \frac{pa}{\sqrt{2pa\theta}} = \frac{pa}{\rho - a}$ . Assim,

$$S_n = \frac{d\rho}{d\theta} = \frac{pa}{\rho - a}.$$

[IV.2] A subtangente desta espiral é dada pela expressão:

$$S_t = \frac{\rho^2(\rho - a)}{pa}.$$

Demonstração:

Da equação polar da espiral, facilmente se obtém que  $\theta = \frac{(\rho - a)^2}{2pa}$  donde,

$$\frac{d\theta}{d\rho} = \frac{1}{2pa} 2(\rho - a) = \frac{(\rho - a)}{pa}. \text{ Desta forma, } S_t = \rho^2 \frac{d\theta}{d\rho} = \frac{\rho^2(\rho - a)}{pa}.$$

[IV.3] *<comp>* A equação que permite determinar o comprimento da normal é:

$$N = \sqrt{\rho^2 + \frac{pa}{2\theta}}.$$

Demonstração:

A expressão que permite determinar o comprimento da normal pode-se obter a partir da subnormal da espiral considerada:

$$N = \sqrt{\rho^2 + s_n^2} = \sqrt{\rho^2 + \frac{(pa)^2}{(\rho-a)^2}} = \sqrt{\rho^2 + \frac{(pa)^2}{2pa\theta}} = \sqrt{\rho^2 + \frac{pa}{2\theta}}.$$

[IV.4] *<comp>* A equação que permite determinar o comprimento da tangente é:

$$T = \rho \sqrt{1 + \rho^2 \frac{2\theta}{pa}}.$$

Demonstração:

Utilizando a expressão geral para o cálculo do comprimento da tangente resulta para esta espiral que,

$$T = \sqrt{\rho^2 + s_t^2} = \sqrt{\rho^2 + \rho^4 \frac{(\rho-a)^2}{(pa)^2}} = \rho \sqrt{1 + \rho^2 \frac{2pa\theta}{(pa)^2}} = \rho \sqrt{1 + \rho^2 \frac{2\theta}{pa}}.$$

[IV.5] A amplitude do ângulo formado pela recta tangente e pelo vector associado ao ponto de contacto da tangente com a curva, é dada pela expressão:

$$\text{tang } V = \frac{\rho(\rho-a)}{pa}$$

É de notar que Gomes Teixeira, para esta espiral designou o ângulo pela letra  $\omega$ , escrevendo  $\text{tang } \omega = \frac{\rho(\rho-a)}{pa}$ , no entanto, aqui vamos manter a letra  $V$  por uma questão de continuidade do trabalho anterior.

Demonstração:

A amplitude do ângulo obtém-se da relação  $\text{tang } V = \frac{S_t}{\rho}$  que, tendo em conta a equação polar da espiral:

$$\operatorname{tang} V = \frac{\frac{\rho^2(\rho-a)}{pa}}{\rho} = \frac{\rho(\rho-a)}{pa}.$$

[IV.6] O valor que  $\theta$  toma nos pontos duplos é determinado pela seguinte expressão:

$$\theta = \frac{[2a - p(2n+1)\pi]^2}{8ap},$$

sendo  $n$  um número inteiro e positivo.

Demonstração:

Sabe-se que, numa curva definida em coordenadas polares, os pontos de coordenadas

$$(\rho, \theta) \text{ e } (-\rho, \theta + (2n+1)\pi)$$

representam o mesmo ponto no plano. A partir destes pontos podemos então determinar os pontos duplos da espiral considerando as seguintes relações resultantes da equação polar nestes pontos:

$$(1) \rho = a + \sqrt{2pa\theta} \quad e \quad -\rho = a + \sqrt{2pa[\theta + (2n+1)\pi]} \quad (\text{parte positiva})$$

$$(2) \rho = a - \sqrt{2pa\theta} \quad e \quad -\rho = a - \sqrt{2pa[\theta + (2n+1)\pi]} \quad (\text{parte negativa})$$

Atendendo à relação (1) resulta que:

$$\begin{aligned} & -\left(a + \sqrt{2pa\theta}\right) = a + \sqrt{2pa[\theta + (2n+1)\pi]} \\ \Leftrightarrow & (-2a)^2 = \left(\sqrt{2pa\theta} + \sqrt{2pa[\theta + (2n+1)\pi]}\right)^2 \\ \Leftrightarrow & 4a^2 = 2pa\theta + 2\sqrt{4p^2a^2\theta[\theta + (2n+1)\pi]} + 2pa[\theta + (2n+1)\pi] \\ \Leftrightarrow & 4a^2 - 2pa[2\theta + (2n+1)\pi] = 4pa\sqrt{\theta[\theta + (2n+1)\pi]} \\ \Leftrightarrow & [2a - p[2\theta + (2n+1)\pi]]^2 = [2p\sqrt{\theta[\theta + (2n+1)\pi]}]^2 \\ \Leftrightarrow & 4a^2 - 4pa[2\theta + (2n+1)\pi] + p^2[4\theta^2 + 4\theta(2n+1)\pi + (2n+1)^2\pi^2] \\ & = 4p^2\theta[\theta + (2n+1)\pi] \\ \Leftrightarrow & 4a^2 - 8pa\theta - 4pa(2n+1)\pi + 4p^2\theta^2 + 4p^2\theta(2n+1)\pi + p^2(2n+1)^2\pi^2 \\ & = 4p^2\theta^2 + 4p^2\theta(2n+1)\pi \\ \Leftrightarrow & 4a^2 - 8pa\theta - 4pa(2n+1)\pi + p^2(2n+1)^2\pi^2 = 0 \end{aligned}$$

Resolvendo em ordem a  $\theta$  vem:

$$\Leftrightarrow 8ap\theta = 4a^2 - 4ap(2n+1)\pi + p^2(2n+1)^2\pi^2$$

$$\Leftrightarrow \theta = \frac{[2a - p(2n+1)\pi]^2}{8ap}$$

Considerando a relação (2), obtemos, da mesma forma, a expressão anterior para  $\theta$ .

**[IV.7]** *<comp>* O raio de curvatura, nesta espiral, é dado pela expressão:

$$R = \frac{(\rho^2(\rho-a)^2 + p^2a^2)^{\frac{3}{2}}}{|\rho^2(\rho-a)^3 + p^2a^2(3\rho-2a)|}$$

Demonstração:

Considerando a equação polar da espiral,  $(\rho-a)^2 = 2pa\theta$ , e  $\frac{d\rho}{d\theta} = \frac{pa}{\rho-a}$  obtém-se:

$$\begin{aligned} \frac{d^2\rho}{d^2\theta} &= \pm \frac{-pa(2pa\theta)^{-\frac{1}{2}} \times pa}{2pa\theta} = -\frac{pa}{2\theta(\pm\sqrt{2pa\theta})} = -\frac{pa}{2\theta(\rho-a)} \\ &= -\frac{pa}{2\frac{(\rho-a)^2}{2pa}(\rho-a)} = -\frac{p^2a^2}{(\rho-a)^3}. \end{aligned}$$

De acordo com estas derivadas, o raio de curvatura é dado pela expressão:

$$\begin{aligned} R &= \frac{\left[\rho^2 + \left(\frac{pa}{\rho-a}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\left|\rho^2 + 2\left(\frac{pa}{\rho-a}\right)^2 - \rho\left(-\frac{p^2a^2}{(\rho-a)^3}\right)\right|} = \frac{\frac{1}{(\rho-a)^3}[\rho^2(\rho-a)^2 + p^2a^2]^{\frac{3}{2}}}{\frac{1}{(\rho-a)^3}|\rho^2(\rho-a)^3 + 2p^2a^2(\rho-a) + \rho p^2a^2|} \\ &= \frac{[\rho^2(\rho-a)^2 + p^2a^2]^{\frac{3}{2}}}{|\rho^2(\rho-a)^3 + p^2a^2(3\rho-2a)|}. \end{aligned}$$

**[IV.8]** A área definida pelo vector associado ao ponto de coordenadas  $(\rho, \theta)$ , quando  $\theta$  varia, é determinada pela expressão:

$$A = \frac{1}{2} \left[ a^2\theta + pa\theta^2 \pm \frac{4}{3}a\theta\sqrt{2pa\theta} \right].$$

Demonstração:

Neste caso sabemos que  $A = \frac{1}{2} \int_a^b \rho^2 d\theta$  onde  $(\rho - a)^2 = 2pa\theta \Rightarrow \rho = a \pm \sqrt{2pa\theta}$ .

Assim,

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2} \int_0^\theta \rho^2 d\theta = \frac{1}{2} \int_0^\theta (a \pm \sqrt{2ap\theta})^2 d\theta = \frac{1}{2} \int_0^\theta (a^2 \pm 2a\sqrt{2ap\theta} + 2ap\theta) d\theta \\ &= \frac{1}{2} \left[ a^2\theta \pm 2a \frac{2}{3} \sqrt{2ap\theta^3} + 2pa \frac{\theta^2}{2} \right]_0^\theta = \frac{1}{2} \left[ a^2\theta + pa\theta^2 \pm \frac{4}{3} a\theta\sqrt{2pa\theta} \right]. \end{aligned}$$

[IV.9] Para rectificar a espiral compreendida entre o ponto A e o ponto  $(\rho, \theta)$  Gomes Teixeira apresenta a seguinte expressão:

$$s = \frac{1}{pa} \int_a^\rho \sqrt{\rho^2 (\rho - a)^2 + p^2 a^2} d\rho.$$

Demonstração:

Neste caso, como  $(\rho - a)^2 = 2pa\theta \Leftrightarrow \theta = \frac{(\rho - a)^2}{2pa}$  obtemos

$$\frac{d\theta}{d\rho} = \frac{1}{2pa} 2(\rho - a) = \frac{\rho - a}{pa}, \text{ donde,}$$

$$\begin{aligned} s &= \int_a^\rho \sqrt{\rho^2 \frac{d\theta^2}{d\rho^2} + 1} d\rho = \int_a^\rho \sqrt{\rho^2 \frac{(\rho - a)^2}{p^2 a^2} + 1} d\rho = \int_a^\rho \sqrt{\frac{\rho^2 (\rho - a)^2 + p^2 a^2}{p^2 a^2}} d\rho \\ &= \frac{1}{pa} \int_a^\rho \sqrt{\rho^2 (\rho - a)^2 + p^2 a^2} d\rho \end{aligned}$$

### 3.2.5. A espiral hiperbólica

[V.1] A subnormal da espiral considerada obtém-se a partir da expressão:

$$S_n = -\frac{\rho^2}{m}.$$

Demonstração:

Pela equação polar da espiral  $\rho\theta = m$  temos que  $\rho = \frac{m}{\theta}$  e  $\frac{d\rho}{d\theta} = -\frac{m}{\theta^2}$ , donde concluimos:

$$S_n = \frac{d\rho}{d\theta} = -\frac{m}{\theta^2} = -\frac{m^2}{\theta^2 m} = -\frac{\rho^2}{m}.$$

[V.2] A subtangente da espiral hiperbólica é dada por:

$$S_t = -m.$$

Demonstração:

Considerando a equação polar da curva,  $\rho = \frac{m}{\theta}$ , facilmente se obtém que  $\theta = \frac{m}{\rho}$

donde,  $\frac{d\theta}{d\rho} = -\frac{m}{\rho^2}$ . Atendendo à expressão geral da subtangente,  $S_t = \rho^2 \frac{d\theta}{d\rho}$ , obtém-se

$$S_t = \rho^2 \left( -\frac{m}{\rho^2} \right) = -m.$$

[V.3] O comprimento da normal, para esta espiral é determinado pela relação:

$$N = \frac{\rho}{m} \sqrt{\rho^2 + m^2}.$$

Demonstração:

Sabemos que o comprimento da normal é determinado pela expressão

$N = \sqrt{\rho^2 + S_n^2}$ . E, atendendo ao ponto V.1 obtemos:

$$N = \sqrt{\rho^2 + \left( -\frac{\rho^2}{m} \right)^2} = \sqrt{\rho^2 + \frac{\rho^4}{m^2}} = \frac{\rho}{m} \sqrt{\rho^2 + m^2}.$$

[V.4] O comprimento da tangente é determinado pela expressão:

$$T = \sqrt{\rho^2 + m^2}.$$

Demonstração:

Atendendo também à expressão que permite determinar o comprimento da tangente à curva, obtemos:

$$T = \sqrt{\rho^2 + S_t^2} = \sqrt{\rho^2 + (-m)^2} = \sqrt{\rho^2 + m^2}.$$

[V.5] A amplitude do ângulo formado pela recta tangente e pelo vector associado ao ponto de tangência é dada pela equação:

$$\text{tang}V = -\frac{m}{\rho}$$

Demonstração:

A partir da relação já referida anteriormente a amplitude do ângulo  $V$  é determinada da seguinte forma:

$$\text{tang}V = \frac{S_t}{\rho} = \frac{-m}{\rho}.$$

[V.6] O raio de curvatura da espiral hiperbólica é dado pela equação:

$$R = \frac{\rho(m^2 + \rho^2)^{\frac{3}{2}}}{m^3}$$

Mas, atendendo à expressão do comprimento da normal, podemos escrever uma nova equação para o raio de curvatura da espiral:

$$R = \frac{N^3}{S_t S_n}$$

Demonstração:

Para a espiral definida pela equação  $\rho\theta = m$  tem-se que  $\frac{d\rho}{d\theta} = -\frac{m}{\theta^2}$  e  $\frac{d^2\rho}{d\theta^2} = \frac{2m}{\theta^3}$ .

E, de acordo com a expressão que nos permite determinar o raio de curvatura de uma curva e atendendo a que  $\rho^2 = \frac{m^2}{\theta^2}$  obtemos:

$$\begin{aligned} R &= \frac{\left[ \rho^2 + \left( -\frac{m}{\theta^2} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}}{\left| \rho^2 + 2 \left( -\frac{m}{\theta^2} \right)^2 - \rho \frac{2m}{\theta^3} \right|} = \frac{\left( \rho^2 + \frac{m^2}{\theta^4} \right)^{\frac{3}{2}}}{\left| \rho^2 + 2 \frac{m^2}{\theta^4} - \rho \frac{2m}{\theta^3} \right|} = \frac{\left( \rho^2 + \rho^2 \frac{1}{\theta^2} \right)^{\frac{3}{2}}}{\left| \rho^2 + \rho^2 \frac{2}{\theta^2} - \rho^2 \frac{2}{\theta^2} \right|} \\ &= \frac{\left( \rho^2 \theta^2 + \rho^2 \right)^{\frac{3}{2}}}{\theta^3 |\rho^2|} = \frac{\left( m^2 + \rho^2 \right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{m^3}{\rho^3} \rho^2} = \frac{\left( m^2 + \rho^2 \right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{m^3}{\rho}} = \frac{\rho \left( m^2 + \rho^2 \right)^{\frac{3}{2}}}{m^3}. \end{aligned}$$



Tendo em conta que para a espiral hiperbólica  $N = \frac{\rho}{m} \sqrt{\rho^2 + m^2}$ ,  $S_n = -\frac{\rho^2}{m}$  e

$S_t = -m$ , obtemos:

$$\begin{aligned} R &= \frac{\rho(m^2 + \rho^2)^{\frac{3}{2}}}{m^3} = \rho \left( \frac{\sqrt{m^2 + \rho^2}}{m} \right)^3 \times \frac{\rho^2}{\rho^2} = \left( \frac{\rho \sqrt{m^2 + \rho^2}}{m} \right)^3 \times \frac{1}{\rho^2} = \frac{N^3}{\rho^2} = \frac{N^3}{m \frac{\rho^2}{m}} \\ &= -\frac{N^3}{m S_n} = \frac{N^3}{S_t S_n}. \end{aligned}$$

[V.7] A área definida pelo vector associado a um ponto de coordenadas  $(\rho, \theta)$ , quando  $\theta$  varia entre  $\theta_0$  e  $\theta_1$ , pode ser determinada pela fórmula:

$$A = \frac{m}{2}(\rho_0 - \rho_1).$$

Demonstração:

Na espiral hiperbólica sabemos que  $\rho = \frac{m}{\theta}$ , pelo que:

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2} \int_{\theta_0}^{\theta_1} \rho^2 d\theta = \frac{1}{2} \int_{\theta_0}^{\theta_1} \left( \frac{m}{\theta} \right)^2 d\theta = \frac{m^2}{2} \int_{\theta_0}^{\theta_1} \frac{1}{\theta^2} d\theta = \frac{m^2}{2} \times \left( -\frac{1}{\theta} \right) \Big|_{\theta_0}^{\theta_1} = -\frac{m^2}{2} \left( \frac{1}{\theta_1} - \frac{1}{\theta_0} \right) \\ &= \frac{m}{2} \left( \frac{m}{\theta_0} - \frac{m}{\theta_1} \right) = \frac{m}{2}(\rho_0 - \rho_1). \end{aligned}$$

[V.8] O comprimento de um arco da espiral compreendido entre os pontos de coordenadas  $(\rho_0, \theta_0)$  e  $(\rho_1, \theta_1)$  é determinado pela expressão:

$$s = \sqrt{m^2 + \rho_1^2} - \sqrt{m^2 + \rho_0^2} + \frac{m}{2} \log \frac{(\sqrt{m^2 + \rho_1^2} - m)(\sqrt{m^2 + \rho_0^2} + m)}{(\sqrt{m^2 + \rho_1^2} + m)(\sqrt{m^2 + \rho_0^2} - m)}$$

E, atendendo à fórmula do comprimento da tangente à espiral num dado ponto, apresentada anteriormente, obtemos uma nova expressão mais simplificada para o comprimento de um arco da curva:

$$s = T_1 - T_0 + \frac{m}{2} \log \frac{(T_1 - m)(T_0 + m)}{(T_1 + m)(T_0 - m)}$$

Demonstração:

Sabemos que o comprimento do arco de uma curva é dado pela expressão geral

$$s = \int \sqrt{\rho^2 \left( \frac{d\theta}{d\rho} \right)^2 + 1} d\rho. \text{ Atendendo à equação polar desta curva, } \rho\theta = m, \text{ obtém-se}$$

$$\frac{d\theta}{d\rho} = -\frac{m}{\rho^2}. \text{ Assim, o comprimento de um arco da espiral compreendido entre os pontos de}$$

coordenadas  $(\rho_0, \theta_0)$  e  $(\rho_1, \theta_1)$  é dado por:

$$s = \int_{\rho_0}^{\rho_1} \sqrt{\rho^2 \left( -\frac{m}{\rho^2} \right)^2 + 1} d\rho = \int_{\rho_0}^{\rho_1} \sqrt{\frac{m^2}{\rho^2} + 1} d\rho = \int_{\rho_0}^{\rho_1} \sqrt{\frac{m^2 + \rho^2}{\rho^2}} d\rho = \int_{\rho_0}^{\rho_1} \rho^{-1} \sqrt{m^2 + \rho^2} d\rho$$

Para determinar o valor deste integral vamos considerar a seguinte primitiva:

$$\int \frac{\sqrt{ax^2 + b}}{x} = \sqrt{ax^2 + b} + \sqrt{b} \ln \frac{\sqrt{ax^2 + b} - \sqrt{b}}{x} \quad (b > 0)$$

Donde,

$$\begin{aligned} \int \rho^{-1} \sqrt{m^2 + \rho^2} d\rho &= \sqrt{m^2 + \rho^2} + m \log \frac{\sqrt{m^2 + \rho^2} - m}{\rho} \\ &= \sqrt{m^2 + \rho^2} + \frac{m}{2} \log \left( \frac{\sqrt{m^2 + \rho^2} - m}{\rho} \right)^2 \\ &= \sqrt{m^2 + \rho^2} + \frac{m}{2} \log \frac{(\sqrt{m^2 + \rho^2} - m)^2}{\rho^2 + m^2 - m^2} \\ &= \sqrt{m^2 + \rho^2} + \frac{m}{2} \log \frac{(\sqrt{m^2 + \rho^2} - m)^2}{(\sqrt{m^2 + \rho^2} - m)(\sqrt{m^2 + \rho^2} + m)} \\ &= \sqrt{m^2 + \rho^2} + \frac{m}{2} \log \frac{\sqrt{m^2 + \rho^2} - m}{\sqrt{m^2 + \rho^2} + m} \end{aligned}$$

Assim, o comprimento do arco da espiral é dado por:

$$\begin{aligned} s &= \int_{\rho_0}^{\rho_1} \rho^{-1} \sqrt{m^2 + \rho^2} d\rho \\ &= \sqrt{m^2 + \rho_1^2} - \sqrt{m^2 + \rho_0^2} + \frac{m}{2} \left( \log \frac{\sqrt{m^2 + \rho_1^2} - m}{\sqrt{m^2 + \rho_1^2} + m} - \log \frac{\sqrt{m^2 + \rho_0^2} - m}{\sqrt{m^2 + \rho_0^2} + m} \right) \end{aligned}$$

$$= \sqrt{m^2 + \rho_1^2} - \sqrt{m^2 + \rho_0^2} + \frac{m}{2} \log \frac{(\sqrt{m^2 + \rho_1^2} - m)(\sqrt{m^2 + \rho_0^2} + m)}{(\sqrt{m^2 + \rho_1^2} + m)(\sqrt{m^2 + \rho_0^2} - m)}.$$

De modo a simplificar a expressão, vamos atender a que o comprimento da tangente desta espiral é dado por  $T = \sqrt{m^2 + \rho^2}$  e designar por  $T_0$  o comprimento da tangente no ponto de coordenadas  $(\rho_0, \theta_0)$  e  $T_1$  o comprimento da tangente no ponto de coordenadas  $(\rho_1, \theta_1)$ :

$$s = T_1 - T_0 + \frac{m}{2} \log \frac{(T_1 - m)(T_0 + m)}{(T_1 + m)(T_0 - m)}.$$

### 3.2.6. A lítuo

[VI.1]  $\langle Comp \rangle$  A subnormal da espiral lítuo é dada por:

$$S_n = -\frac{\rho^3}{2a^2}.$$

Demonstração:

Tendo em conta a equação polar da espiral,  $\rho^2 \theta = a^2$ , e resolvendo-a em ordem a

$$\rho, \quad \rho = \pm \frac{a}{\sqrt{\theta}}, \quad \text{obtem-se} \quad \frac{d\rho}{d\theta} = \pm \frac{-a\theta^{-\frac{1}{2}}}{2\theta} = \pm \frac{-a}{2\sqrt{\theta^3}} = -\frac{1}{2a^2} \left( \pm \frac{a}{\sqrt{\theta}} \right)^3 = -\frac{\rho^3}{2a^2}, \quad \text{donde}$$

$$\text{resulta que } S_n = \frac{d\rho}{d\theta} = -\frac{\rho^3}{2a^2}.$$

[VI.2] A subtangente desta espiral é dada pela expressão:

$$S_t = -\frac{2a^2}{\rho}.$$

Demonstração:

Da equação polar da espiral, facilmente se obtém que  $\theta = \left( \frac{a}{\rho} \right)^2$  donde,

$$\frac{d\theta}{d\rho} = -2 \frac{a}{\rho^2} \frac{a}{\rho} = -2 \frac{a^2}{\rho^3}. \text{ Desta forma, } S_t = \rho^2 \frac{d\theta}{d\rho} = \rho^2 \left( -\frac{2a^2}{\rho^3} \right) = -\frac{2a^2}{\rho}.$$

[VI.3] *⟨Comp⟩* A equação que permite determinar o comprimento da normal é:

$$N = \frac{\rho}{2a^2} \sqrt{4a^4 + \rho^4}.$$

Demonstração:

A expressão que permite determinar o comprimento da normal pode-se obter facilmente a partir da subnormal da espiral considerada:

$$N = \sqrt{\rho^2 + (s_n)^2} = \sqrt{\rho^2 + \frac{\rho^6}{4a^4}} = \frac{\rho}{2a^2} \sqrt{4a^4 + \rho^4}.$$

[VI.4] *⟨Comp⟩* A equação que permite determinar o comprimento da tangente é:

$$T = \frac{1}{\rho} \sqrt{4a^4 + \rho^4}.$$

Demonstração:

O comprimento da tangente também pode ser determinado através da subtangente da espiral, através da igualdade  $T = \sqrt{\rho^2 + S_t^2}$ . Daqui resulta que,

$$T = \sqrt{\rho^2 + \frac{4a^4}{\rho^2}} = \frac{1}{\rho} \sqrt{4a^4 + \rho^4}.$$

[VI.5] *⟨Comp⟩* A amplitude do ângulo formado pela recta tangente e pelo vector associado ao ponto de contacto da tangente com a curva, é dada pela expressão:

$$\text{tang } V = -\frac{2a^2}{\rho^2}.$$

Demonstração:

A amplitude do ângulo obtém-se, facilmente, a partir da relação  $\text{tang } V = \frac{S_t}{\rho}$  e tendo em conta a equação polar da espiral:

$$\text{tang } V = \frac{S_t}{\rho} = -\frac{2a^2}{\rho^2}.$$

[VI.6] O valor do raio de curvatura é determinado pela equação:

$$R = \frac{\rho(4a^4 + \rho^4)^{\frac{3}{2}}}{2a^2|4a^4 - \rho^4|}$$

Demonstração:

Atendendo à expressão geral do raio de curvatura apresentada anteriormente, e à equação polar da espiral,  $\rho^2\theta = a^2$ , donde se obtém  $\rho = \pm \frac{a}{\theta}$ , temos que  $\frac{d\rho}{d\theta} = -\frac{\rho^3}{2a^2}$  e

$$\frac{d^2\rho}{d\theta^2} = \pm \frac{3a}{4\sqrt{\theta^5}} = \frac{3\rho^5}{4a^4}. \text{ Assim,}$$

$$R = \frac{\left[ \rho^2 + \left( -\frac{\rho^3}{2a^2} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}}{\left| \rho^2 + 2 \left( -\frac{\rho^3}{2a^2} \right)^2 - \rho \frac{3\rho^5}{4a^4} \right|} = \frac{\frac{\rho^3}{8a^6} (4a^4 + \rho^4)^{\frac{3}{2}}}{\frac{\rho^2}{4a^4} |4a^4 + 2\rho^4 - 3\rho^4|} = \frac{\rho(4a^4 + \rho^4)^{\frac{3}{2}}}{2a^2|4a^4 - \rho^4|}$$

Atendendo a que nem sempre  $4a^4 > \rho^4$  não é possível garantir que o denominador seja sempre positivo, pelo que não é possível retirar o símbolo módulo da expressão. Desta forma, a expressão aqui obtida difere da expressão apresentada por Gomes Teixeira na permanência do símbolo módulo nesta fórmula.

[VI.7] A área definida pelo vector associado ao ponto de coordenadas  $(\rho, \theta)$ , quando  $\theta$  varia entre  $\theta_0$  e  $\theta_1$ , é determinada pela expressão:

$$A = \frac{1}{2} a^2 \log \frac{\theta_1}{\theta_0} = a^2 \log \frac{\rho_0}{\rho_1}.$$

Demonstração:

Neste caso, sabemos que  $A = \frac{1}{2} \int_{\theta_0}^{\theta_1} \rho^2 d\theta$  onde  $\rho^2 = \frac{a^2}{\theta}$ . Assim,

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2} \int_{\theta_0}^{\theta_1} \frac{a^2}{\theta} d\theta = \frac{a^2}{2} \log \theta \Big|_{\theta_0}^{\theta_1} = \frac{a^2}{2} (\log \theta_1 - \log \theta_0) = \frac{a^2}{2} \log \frac{\theta_1}{\theta_0} = \frac{a^2}{2} \log \left( \frac{\rho_0}{\rho_1} \right)^2 \\ &= a^2 \log \left( \frac{\rho_0}{\rho_1} \right) \end{aligned}$$

[VI.8] A espiral considerada é rectificável sendo o comprimento de um arco dado por:

$$s = a \left[ \frac{\sqrt{\theta_0(1+4\theta_0^2)}}{\theta_0} - \frac{\sqrt{\theta_1(1+4\theta_1^2)}}{\theta_1} + 4 \int_{\theta_0}^{\theta_1} \frac{\theta d\theta}{\sqrt{\theta(1+4\theta^2)}} \right].$$

Demonstração:

Atendendo à equação polar da espiral,  $\rho^2\theta = a^2$ , donde se obtém

$$\frac{d\rho}{d\theta} = \pm a \left( -\frac{1}{2\theta^{\frac{3}{2}}} \right) = \mp \frac{a}{2\sqrt{\theta^3}}, \text{ obtém-se,}$$

$$\begin{aligned} s &= \int_{\theta_0}^{\theta_1} \sqrt{\rho^2 + \left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2} d\theta = \int_{\theta_0}^{\theta_1} \sqrt{\frac{a^2}{\theta} + \left(\mp \frac{a}{2\sqrt{\theta^3}}\right)^2} d\theta = \int_{\theta_0}^{\theta_1} \sqrt{\frac{a^2}{\theta} + \frac{a^2}{4\theta^3}} d\theta = \frac{a}{2} \int_0^{\theta} \sqrt{\frac{4}{\theta} + \frac{1}{\theta^3}} d\theta \\ &= \frac{a}{2} \int_{\theta_0}^{\theta_1} \frac{\sqrt{4\theta^2+1}}{\theta\sqrt{\theta}} d\theta = \frac{a}{2} \int_{\theta_0}^{\theta_1} \frac{4\theta^2+1}{\theta\sqrt{\theta(4\theta^2+1)}} d\theta \end{aligned}$$

Donde,

$$s = \frac{a}{2} \left[ \int_{\theta_0}^{\theta_1} \frac{d\theta}{\theta\sqrt{\theta(4\theta^2+1)}} + 4 \int_{\theta_0}^{\theta_1} \frac{\theta d\theta}{\sqrt{\theta(4\theta^2+1)}} \right].$$

concluindo-se que o comprimento da espiral depende de dois integrais distintos.

Mas atendendo a que:

$$\int \frac{d\theta}{\theta\sqrt{\theta(4\theta^2+1)}} = -\frac{2\sqrt{\theta(4\theta^2+1)}}{\theta} + 4 \int \frac{\theta d\theta}{\sqrt{\theta(4\theta^2+1)}} \quad (1)$$

obtém-se,

$$\begin{aligned} s &= \frac{a}{2} \left[ \int_{\theta_0}^{\theta_1} \frac{d\theta}{\theta\sqrt{\theta(4\theta^2+1)}} + 4 \int_{\theta_0}^{\theta_1} \frac{\theta d\theta}{\sqrt{\theta(4\theta^2+1)}} \right] \\ &= \frac{a}{2} \left[ -\frac{2\sqrt{\theta(4\theta^2+1)}}{\theta} \Big|_{\theta_0}^{\theta_1} + 4 \int_{\theta_0}^{\theta_1} \frac{\theta d\theta}{\sqrt{\theta(4\theta^2+1)}} + 4 \int_{\theta_0}^{\theta_1} \frac{\theta d\theta}{\sqrt{\theta(4\theta^2+1)}} \right] \\ &= a \left[ \frac{\sqrt{\theta_0(4\theta_0^2+1)}}{\theta_0} - \frac{\sqrt{\theta_1(4\theta_1^2+1)}}{\theta_1} + 4 \int_{\theta_0}^{\theta_1} \frac{\theta d\theta}{\sqrt{\theta(4\theta^2+1)}} \right]. \end{aligned}$$

Para terminar, vamos demonstrar a igualdade (1). Para tal vamos recorrer à seguinte primitiva:

$$P \frac{1}{x^n \sqrt{ax^2 + b}} = -\frac{\sqrt{ax^2 + b}}{b(n-1)x^{n-1}} - \frac{(n-2)a}{(n-1)b} P \frac{1}{x^{n-2} \sqrt{ax^2 + b}}$$

$$\int \frac{d\theta}{\theta \sqrt{\theta(4\theta^2 + 1)}} = \int \frac{d\theta}{\theta^{\frac{3}{2}} \sqrt{4\theta^2 + 1}} = -\frac{\sqrt{4\theta^2 + 1}}{\frac{1}{2}\theta^{\frac{1}{2}}} - \frac{-\frac{1}{2} \times 4}{\frac{1}{2} \times 1} \int \frac{d\theta}{\theta^{\frac{1}{2}} \sqrt{4\theta^2 + 1}}$$

$$= -\frac{2\sqrt{4\theta^2 + 1}}{\sqrt{\theta}} + 4 \int \frac{\sqrt{\theta} d\theta}{\sqrt{4\theta^2 + 1}} = -\frac{2\sqrt{\theta(4\theta^2 + 1)}}{\theta} + 4 \int \frac{\theta d\theta}{\sqrt{\theta(4\theta^2 + 1)}}$$

Salientamos que a expressão (1), aqui apresentada, não coincide com a de Gomes Teixeira. As duas diferem no numerador da expressão que se situa no interior do integral, faltando-lhe o ângulo  $\theta$ , como podemos ver:

$$\int \frac{d\theta}{\theta \sqrt{\theta(4\theta^2 + 1)}} = -\frac{2\sqrt{\theta(4\theta^2 + 1)}}{\theta} + 4 \int \frac{d\theta}{\sqrt{\theta(4\theta^2 + 1)}}$$

### 3.2.7. A espiral logarítmica:

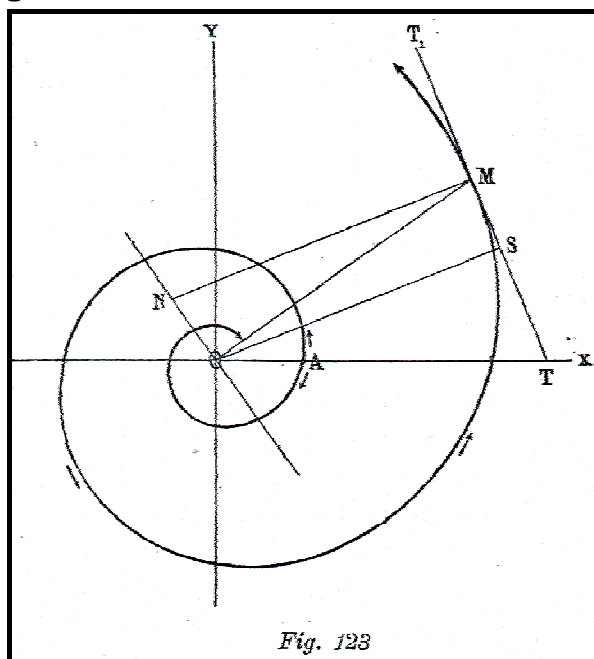


Figura 3.16 - Espiral logarítmica - fig.123 da obra de Gomes Teixeira

[VII.1] A subnormal da espiral logarítmica é dada por:

$$S_n = -\frac{\rho^3}{2a^2}.$$

Demonstração:

Esta espiral é definida pela equação polar  $\rho = Ce^{c\theta}$ , donde resulta que  $\frac{d\rho}{d\theta} = Ce^{c\theta}c = \rho c$ . Concluimos assim que a subnormal desta espiral é determinada por

$$S_n = \frac{d\rho}{d\theta} = \rho c.$$

[VII.2] A subtangente desta espiral é dada por:

$$S_t = \frac{\rho}{c}.$$

Demonstração:

Resolvendo em ordem a  $\theta$  a equação polar que define esta espiral obtemos:

$$\rho = Ce^{c\theta} \Leftrightarrow \frac{\rho}{C} = e^{c\theta} \Leftrightarrow \ln \frac{\rho}{C} = c\theta \Leftrightarrow \theta = \frac{\ln\left(\frac{\rho}{C}\right)}{c}.$$

Daqui resulta que  $\frac{d\theta}{d\rho} = \frac{1}{c} \frac{1}{\frac{\rho}{C}} = \frac{1}{c\rho}$ . Assim, a subtangente desta espiral é dada por:

$$S_t = \rho^2 \frac{d\theta}{d\rho} = \rho^2 \frac{1}{c\rho} = \frac{\rho}{c}.$$

[VII.3] O comprimento da normal na espiral logarítmica é dado pela expressão:

$$N = \rho\sqrt{c^2 + 1}.$$

Demonstração:

De acordo com o que obtivemos anteriormente, o comprimento da normal obtém-se da seguinte forma:

$$N = \sqrt{(\rho c)^2 + \rho^2} = \sqrt{\rho^2 c^2 + \rho^2} = \rho\sqrt{c^2 + 1}.$$



[VII.4] *Comp* O comprimento da tangente é dado pela expressão:

$$T = \frac{\rho}{c} \sqrt{c^2 + 1}$$

Demonstração:

À semelhança do que se obteve anteriormente, o comprimento da tangente é dada por:

$$T = \sqrt{\rho^2 + \left(\frac{\rho}{c}\right)^2} = \sqrt{\rho^2 + \frac{\rho^2}{c^2}} = \frac{\rho}{c} \sqrt{c^2 + 1}.$$

[VII.5] *Comp* A amplitude do ângulo formado pela tangente TM e o vector do ponto M é dado pela expressão:

$$\text{tang}V = \frac{1}{c}.$$

Demonstração:

Pelo que vimos anteriormente e pela figura 3.16 a tangente do ângulo  $V$  obtém-se da seguinte forma:

$$\text{tang}V = \frac{S_t}{\rho} = \frac{c}{\rho} = \frac{1}{c}.$$

[VII.6] A amplitude do ângulo  $\alpha$  formado pela normal NM e o vector do ponto M é dada pela expressão:

$$\text{tg}\alpha = c.$$

Demonstração:

Pela figura 3.16, sabemos que o ângulo  $\alpha$  corresponde ao ângulo OMN donde pelas razões trigonométricas obtemos:

$$\text{tg}\alpha = \frac{\overline{NO}}{\overline{MO}} = \frac{S_n}{\rho} = \frac{\rho c}{\rho} = c.$$

Esta expressão também poderia ser obtida atendendo a que os ângulos  $\alpha$  e  $V$  são complementares,  $\hat{V} + \hat{\alpha} = 90^\circ$ , resultando a seguinte condição  $tgV = \frac{1}{tg\alpha}$ . Assim,

$$tg\alpha = \frac{1}{tgV} = \frac{1}{\frac{1}{c}} = c.$$

[VII.7]O raio de curvatura da espiral logarítmica obtém-se através da expressão:

$$R = \rho\sqrt{1+c^2}.$$

Demonstração:

Para determinar o raio de curvatura precisamos das derivadas de 1ª e 2ª ordem, pelo que, através da equação polar da espiral obtemos  $\frac{d\rho}{d\theta} = Cce^{c\theta}$  e  $\frac{d^2\rho}{d\theta^2} = Cc^2e^{c\theta}$ . Desta forma,

$$\begin{aligned} R &= \frac{\left[\rho^2 + \left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\left|\rho^2 + 2\left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2 - \rho\frac{d^2\rho}{d\theta^2}\right|} = \frac{\left[\rho^2 + (Cce^{c\theta})^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\left|\rho^2 + 2(Cce^{c\theta})^2 - \rho Cc^2e^{c\theta}\right|} = \frac{(\rho^2 + c^2\rho^2)^{\frac{3}{2}}}{\left|\rho^2 + 2c^2\rho^2 - c^2\rho^2\right|} \\ &= \frac{\rho^3(1+c^2)^{\frac{3}{2}}}{\rho^2|1+2c^2-c^2|} = \frac{\rho(1+c^2)^{\frac{3}{2}}}{|1+c^2|} = \frac{\rho(1+c^2)\sqrt{1+c^2}}{1+c^2} = \rho\sqrt{1+c^2}. \end{aligned}$$

[VII.8]A área definida pelo raio vector de um ponto de coordenadas  $(\rho, \theta)$ , quando  $\theta$  varia, é determinada pela equação:

$$A = \frac{1}{4c}(\rho_1^2 - \rho_0^2).$$

Demonstração:

Atendendo à equação polar da espiral logarítmica,  $\rho = Ce^{c\theta}$ , obtém-se a seguinte expressão para a área definida pela espiral, quando  $\theta$  varia entre dois valores,  $\theta_0$  e  $\theta_1$ :

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2} \int_{\theta_0}^{\theta_1} \rho^2 d\theta = \frac{1}{2} \int_{\theta_0}^{\theta_1} (Ce^{c\theta})^2 d\theta = \frac{C^2}{2} \int_{\theta_0}^{\theta_1} e^{2c\theta} d\theta = \frac{C^2}{4c} e^{2c\theta} \Big|_{\theta_0}^{\theta_1} \\ &= \frac{C^2}{4c} (e^{2c\theta_1} - e^{2c\theta_0}) = \frac{1}{4c} \left[ (Ce^{c\theta_1})^2 - (Ce^{c\theta_0})^2 \right] = \frac{1}{4c} (\rho_1^2 - \rho_0^2). \end{aligned}$$

Salientamos aqui que, Gomes Teixeira na sua obra apresenta a expressão  $A = \frac{1}{4c}(\rho^2 - \rho_0^2)$ , que se obtém se considerarmos os parâmetros para os quais o valor  $\theta$  varia, entre  $\theta_0$  e  $\theta$ . Nós escolhemos a variação de  $\theta_0$  a  $\theta_1$  para seguir o raciocínio já aqui utilizado.

[VII.9]O comprimento do arco da espiral compreendido entre o pólo e o ponto de coordenadas  $(\rho, \theta)$  é dado pela equação:

$$s = \frac{\rho}{\cos V}.$$

Demonstração:

Sabemos que o comprimento do arco de uma curva definida em coordenadas polares é dado pela expressão  $s = \int_0^\rho \sqrt{\rho^2 \left(\frac{d\theta}{d\rho}\right)^2 + 1} d\rho$ . E, pelo que já vimos anteriormente podemos escrever:

$$\begin{aligned} s &= \int_0^\rho \sqrt{\rho^2 \left(\frac{1}{c\rho}\right)^2 + 1} d\rho = \int_0^\rho \sqrt{\frac{1}{c^2} + 1} d\rho = \frac{1}{c} \sqrt{1+c^2} \int_0^\rho 1 d\rho \\ &= \frac{1}{c} \sqrt{1+c^2} \rho \Big|_0^\rho = \frac{\sqrt{1+c^2}}{c} \rho \end{aligned}$$

Pela figura 3.16 obtemos que:

$$\cos V = \frac{\rho}{T} = \frac{\rho}{\frac{\rho}{c} \sqrt{c^2+1}} = \frac{c}{\sqrt{c^2+1}}.$$

Donde, a expressão do comprimento do arco pode tomar a seguinte forma:

$$s = \frac{\sqrt{1+c^2}}{c} \rho = \frac{1}{\frac{c}{\sqrt{1+c^2}}} \rho = \frac{\rho}{\cos V}.$$

### 3.2.8. A espiral de Poincot

[VIII.1] *<Comp>* A subnormal da espiral de Poincot é dada pela equação:

$$S_n = -\rho^2 \frac{m(e^{m\theta} - e^{-m\theta})}{2a}.$$

Demonstração:

Sabe-se que  $S_n = \frac{d\rho}{d\theta}$  pelo que, através da equação polar da espiral  $\rho = \frac{2a}{e^{m\theta} + e^{-m\theta}}$ ,

vamos calcular a derivada de  $\rho$ :

$$\frac{d\rho}{d\theta} = \frac{-2am(e^{m\theta} - e^{-m\theta})}{(e^{m\theta} + e^{-m\theta})^2} = -\frac{(2a)^2}{(e^{m\theta} + e^{-m\theta})^2} \cdot \frac{m(e^{m\theta} - e^{-m\theta})}{2a} = -\rho^2 \frac{m(e^{m\theta} - e^{-m\theta})}{2a}.$$

$$\text{Assim, } S_n = -\rho^2 \frac{m(e^{m\theta} - e^{-m\theta})}{2a}.$$

[VIII.2] *<Comp>* A subtangente da espiral de Poincot é dada por:

$$S_t = -\frac{2a}{m(e^{m\theta} - e^{-m\theta})}.$$

Demonstração:

Sabemos que a subtangente de uma dada curva se obtém através da equação

$S_t = \rho^2 \frac{d\theta}{d\rho}$ . A partir da equação polar da espiral  $\rho = \frac{2a}{e^{m\theta} + e^{-m\theta}}$  obtemos a equação de  $\theta$

em função de  $\rho$ :

$$\rho = \frac{2a}{e^{m\theta} + e^{-m\theta}} \Leftrightarrow \rho = \frac{a}{\cosh(m\theta)} \Leftrightarrow m\theta = \operatorname{arch}\left(\frac{a}{\rho}\right) \Leftrightarrow \theta = \frac{\operatorname{arch}\left(\frac{a}{\rho}\right)}{m}$$

$$\text{Obtendo-se, } \frac{d\theta}{d\rho} = \frac{1}{m} \frac{-\frac{a}{\rho^2}}{\sqrt{\frac{a^2}{\rho^2} - 1}} = -\frac{a}{\rho m \sqrt{a^2 - \rho^2}}.$$

$$\text{Assim, } S_t = \rho^2 \frac{d\theta}{d\rho} = \rho^2 \frac{-a}{\rho m \sqrt{a^2 - \rho^2}} = -\frac{a\rho}{m \sqrt{a^2 - \rho^2}}.$$

Mas, atendendo ainda à equação polar tem-se que  $e^{m\theta} + e^{-m\theta} = \frac{2a}{\rho}$  e

$$e^{m\theta} = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - \rho^2}}{\rho}, \text{ donde se pode escrever:}$$

$$\begin{aligned} e^{m\theta} - e^{-m\theta} &= e^{m\theta} - \left( \frac{2a}{\rho} - e^{m\theta} \right) = 2e^{m\theta} - \frac{2a}{\rho} = 2 \frac{a \pm \sqrt{a^2 - \rho^2}}{\rho} - \frac{2a}{\rho} \\ &= \frac{2a}{\rho} \pm \frac{2\sqrt{a^2 - \rho^2}}{\rho} - \frac{2a}{\rho} = \pm \frac{2\sqrt{a^2 - \rho^2}}{\rho}. \end{aligned}$$

Assim, a expressão obtida para  $S_t$  pode escrever-se da seguinte forma:

$$S_t = -\frac{a\rho}{m\sqrt{a^2 - \rho^2}} = -\frac{2a}{m \frac{2\sqrt{a^2 - \rho^2}}{\rho}} = -\frac{2a}{m(e^{m\theta} - e^{-m\theta})}.$$

[VIII.3] O comprimento  $N$  da normal desta curva é dado pela relação:

$$N = \frac{\rho}{a} \sqrt{(1+m^2)a^2 - m^2\rho^2}.$$

Demonstração:

Sabe-se que o comprimento da normal é dado pela equação geral  $N = \sqrt{\rho^2 + S_n^2}$  e,

atendendo a que  $S_n = -\rho^2 \frac{m(e^{m\theta} - e^{-m\theta})}{2a}$ , obtém-se:

$$N = \sqrt{\rho^2 + \frac{\rho^4 m^2 (e^{m\theta} - e^{-m\theta})^2}{4a^2}} = \frac{\rho}{a} \sqrt{a^2 + \frac{\rho^2 m^2}{4} (e^{m\theta} - e^{-m\theta})^2}.$$

Mas considerando

$$(e^{m\theta} - e^{-m\theta})^2 = e^{2m\theta} + e^{-2m\theta} - 2 = e^{2m\theta} + e^{-2m\theta} - 4 + 2 = (e^{m\theta} + e^{-m\theta})^2 - 4$$

obtém-se,

$$\begin{aligned} N &= \frac{\rho}{a} \sqrt{a^2 + \frac{\rho^2 m^2}{4} (e^{m\theta} + e^{-m\theta})^2 - \rho^2 m^2} = \frac{\rho}{a} \sqrt{a^2 + \frac{\rho^2 m^2}{4} \times \frac{4a^2}{\rho^2} - \rho^2 m^2} \\ &= \frac{\rho}{a} \sqrt{a^2 + m^2 a^2 - \rho^2 m^2} = \frac{\rho}{a} \sqrt{a^2 (1+m^2) - \rho^2 m^2}. \end{aligned}$$

[VIII.4] *<Comp>* O comprimento T da tangente para a espiral de Poinot é dado pela equação:

$$T = \frac{\rho}{m} \sqrt{\frac{m^2(a^2 - \rho^2) + a^2}{a^2 - \rho^2}}.$$

Demonstração:

Como o comprimento da tangente pode ser determinado pela expressão  $\sqrt{\rho^2 + S_t^2}$ , temos:

$$\begin{aligned} T &= \sqrt{\rho^2 + \left(-\frac{2a}{m(e^{m\theta} - e^{-m\theta})}\right)^2} = \sqrt{\rho^2 + \frac{4a^2}{m^2(e^{m\theta} - e^{-m\theta})^2}} = \sqrt{\rho^2 + \frac{4a^2}{m^2[(e^{m\theta} + e^{-m\theta})^2 - 4]}} \\ &= \sqrt{\rho^2 + \frac{1}{m^2 \frac{(e^{m\theta} + e^{-m\theta})^2}{4a^2} - \frac{4m^2}{4a^2}}} = \sqrt{\rho^2 + \frac{1}{\frac{m^2}{\rho^2} - \frac{m^2}{a^2}}} = \sqrt{\rho^2 + \frac{a^2 \rho^2}{a^2 m^2 - m^2 \rho^2}} \\ &= \rho \sqrt{1 + \frac{a^2}{m^2(a^2 - \rho^2)}} = \frac{\rho}{m} \sqrt{\frac{m^2(a^2 - \rho^2) + a^2}{a^2 - \rho^2}}. \end{aligned}$$

[VIII.5] A amplitude do ângulo formado pela tangente à curva no ponto  $(\rho, \theta)$  e pelo raio vector desse ponto, é determinada pela equação:

$$\text{tang}V = -\frac{2a}{m\rho(e^{m\theta} - e^{-m\theta})}.$$

Demonstração:

Sabe-se que a tangente do ângulo V pode ser determinada recorrendo à fórmula

$\text{tang}V = \frac{S_t}{\rho}$ . Donde, atendendo à expressão obtida para a subtangente vem,

$$\text{tang}V = -\frac{\frac{2a}{m(e^{m\theta} - e^{-m\theta})}}{\rho} = -\frac{2a}{m\rho(e^{m\theta} - e^{-m\theta})}.$$

[VIII.6] O raio da curvatura da espiral de Poinot é determinado pela equação:

$$R = \frac{\rho \left[ (1+m^2)a^2 - m^2\rho^2 \right]^{\frac{3}{2}}}{a^3(1+m^2)}.$$

Demonstração:

Dos números anteriores sabe-se que  $\frac{d\rho}{d\theta} = -\rho^2 \frac{m(e^{m\theta} - e^{-m\theta})}{2a}$ . Vamos então calcular

a derivada de 2ª ordem:

$$\begin{aligned} \frac{d^2\rho}{d\theta^2} &= -2am \frac{m(e^{m\theta} + e^{-m\theta})^3 - 2m(e^{m\theta} - e^{-m\theta})^2(e^{m\theta} + e^{-m\theta})}{(e^{m\theta} + e^{-m\theta})^4} \\ &= -2am^2 \frac{(e^{m\theta} + e^{-m\theta})^2 - 2(e^{m\theta} + e^{-m\theta})^2 + 8}{(e^{m\theta} + e^{-m\theta})^3} = -2am^2 \frac{8 - (e^{m\theta} + e^{-m\theta})^2}{(e^{m\theta} + e^{-m\theta})^3} \\ &= \frac{2am^2}{e^{m\theta} + e^{-m\theta}} - \frac{2m^2 \times 2^3 a}{(e^{m\theta} + e^{-m\theta})^3} = m^2\rho - \frac{2m^2\rho^3}{a^2}. \end{aligned}$$

Assim, substituindo as derivadas de 1ª e de 2ª ordens na expressão geral do raio de curvatura obtém-se,

$$\begin{aligned} R &= \frac{\left[ \rho^2 + \left( \frac{d\rho}{d\theta} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}}{\left| \rho^2 + 2 \left( \frac{d\rho}{d\theta} \right)^2 - \rho \frac{d^2\rho}{d\theta^2} \right|} = \frac{\left[ \rho^2 + \frac{\rho^4 m^2 (e^{m\theta} - e^{-m\theta})^2}{4a^2} \right]^{\frac{3}{2}}}{\left| \rho^2 + 2 \frac{\rho^4 m^2 (e^{m\theta} - e^{-m\theta})^2}{4a^2} - \rho \left( m^2\rho - \frac{2m^2\rho^3}{a^2} \right) \right|} \\ &= \frac{\frac{\rho^3}{a^3} \left( a^2 + \frac{m^2\rho^2 (e^{m\theta} + e^{-m\theta})^2}{4} - \frac{4\rho^2 m^2}{4} \right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{\rho^2}{a^2} \left| a^2 + \frac{m^2\rho^2 (e^{m\theta} + e^{-m\theta})^2}{2} - \frac{4\rho^2 m^2}{2} - m^2 a^2 + 2m^2\rho^2 \right|} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \rho \left( a^2 + \frac{\rho^2 m^2 a^2}{\rho^2} - \rho^2 m^2 \right)^{\frac{3}{2}} \\
 &= \frac{\rho \left( a^2 + \frac{\rho^2 m^2 a^2}{\rho^2} - \rho^2 m^2 \right)^{\frac{3}{2}}}{a \left| a^2 + \frac{2\rho^2 m^2 a^2}{\rho^2} - 2\rho^2 m^2 - m^2 a^2 + 2m^2 \rho^2 \right|} \\
 &= \frac{\rho \left[ a^2 (1+m^2) - m^2 \rho^2 \right]^{\frac{3}{2}}}{a \left| a^2 + m^2 a^2 \right|} = \frac{\rho \left[ a^2 (1+m^2) - m^2 \rho^2 \right]^{\frac{3}{2}}}{a^3 (1+m^2)}.
 \end{aligned}$$

[VIII.7] A área definida pelo raio vector associado ao ponto de coordenadas  $(\rho, \theta)$ , quando  $\theta$  varia entre 0 e  $\theta$ , é dada pela expressão:

$$A = \frac{a^2}{m} \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{e^{2m\theta} + 1} \right).$$

Demonstração:

Atendendo à equação polar da espiral obtemos:

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{1}{2} \int_0^\theta \rho^2 d\theta = \frac{1}{2} \int_0^\theta \frac{4a^2}{(e^{m\theta} + e^{-m\theta})^2} d\theta = 2a^2 \int_0^\theta \frac{1}{(e^{m\theta} + e^{-m\theta})^2} d\theta \\
 &= 2a^2 \int_0^\theta \frac{e^{2m\theta}}{(e^{2m\theta} + 1)^2} d\theta = \frac{2a^2}{-2m} \int_0^\theta \frac{-2me^{2m\theta}}{(e^{2m\theta} + 1)^2} d\theta = \frac{a^2}{-m} \frac{1}{e^{2m\theta} + 1} \Big|_0^\theta \\
 &= \frac{a^2}{m} \left( -\frac{1}{e^{2m\theta} + 1} + \frac{1}{2} \right) = \frac{a^2}{m} \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{e^{2m\theta} + 1} \right).
 \end{aligned}$$

Ao observarmos a expressão dada por Gomes Teixeira,  $A = \frac{1}{2m} \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{e^{2m\theta} + 1} \right)$ ,

vemos que esta difere da expressão aqui obtida, pois falta-lhe multiplicar pelo termo  $2a^2$ .

Parece-nos que esta falha pode ser justificada pelo facto de Gomes Teixeira ter escrito na

obra que a área era dada pela fórmula  $A = 2a^2 \int_0^\theta \rho^2 d\theta$ , o que não está correcto.

Observando a obra anterior a expressão inicial da área está correcta

$A = 2a^2 \int_0^\theta \frac{1}{(e^{m\theta} + e^{-m\theta})^2} d\theta$ . Desta forma, o erro observado na expressão final da área, na

obra de Gomes Teixeira, deverá surgir devido ao facto de o autor ter calculado apenas o

valor do integral esquecendo-se de no final multiplicá-lo por  $2a^2$ .



[VIII.8] O comprimento do arco da espiral, compreendido entre o ponto A e o ponto de coordenadas  $(\rho, \theta)$ , é dado pela expressão:

$$s = \frac{a\sqrt{1+m^2}}{m} \left[ \frac{5+m^2}{3(1+m^2)} \int_{v_0}^v \frac{dv}{\Delta v} - \int_{v_0}^v \frac{v}{\Delta v} dv + \frac{\Delta v}{2(v+h+1)} - \frac{1}{4} \Delta v_0 \right].$$

Demonstração:

Pela equação polar da espiral obtém-se:

$$\begin{aligned} s &= \int_0^\theta \sqrt{\rho^2 + \left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2} d\theta = \int_0^\theta \sqrt{\frac{4a^2}{(e^{m\theta} + e^{-m\theta})^2} + 4a^2 m^2 \frac{(e^{m\theta} - e^{-m\theta})^2}{(e^{m\theta} + e^{-m\theta})^4}} d\theta \\ &= \int_0^\theta \sqrt{\frac{4a^2}{(e^{m\theta} + e^{-m\theta})^4} \left[ (e^{m\theta} + e^{-m\theta})^2 + m^2 (e^{m\theta} - e^{-m\theta})^2 \right]} d\theta \\ &= \int_0^\theta \frac{2a}{(e^{m\theta} + e^{-m\theta})^2} \sqrt{e^{2m\theta} + 2 + e^{-2m\theta} + m^2 (e^{2m\theta} - 2 + e^{-2m\theta})} d\theta \\ &= \int_0^\theta \frac{2a}{(e^{m\theta} + e^{-m\theta})^2} \sqrt{(1+m^2)(e^{2m\theta} + e^{-2m\theta}) + 2(1-m^2)} d\theta \end{aligned}$$

Considerando  $e^{2m\theta} = z$  obtemos  $d\theta = \frac{dz}{2mz}$ , donde substituindo:

$$\begin{aligned} s &= \int_1^z \frac{2a}{\left(\sqrt{z} + \frac{1}{\sqrt{z}}\right)^2} \sqrt{(1+m^2)\left(z + \frac{1}{z}\right) + 2(1-m^2)} \frac{dz}{2mz} \\ &= \frac{2a}{2m} \int_1^z \frac{z}{z(z+1)^2} \sqrt{(1+m^2)\left(\frac{z^2+1}{z}\right) + 2(1-m^2)} dz \\ &= \frac{a}{m} \int_1^z \frac{z}{z(z+1)^2 \sqrt{z}} \sqrt{(1+m^2)z^2 + 2(1-m^2)z + 1 + m^2} dz \\ &= \frac{a}{m} \int_1^z \frac{1}{(z+1)^2 \sqrt{z}} \frac{(1+m^2)z^2 + 2(1-m^2)z + 1 + m^2}{\sqrt{(1+m^2)z^2 + 2(1-m^2)z + 1 + m^2}} dz \\ &= \frac{a}{m} \int_1^z \frac{(1+m^2)z^2 + 2(1-m^2)z + 1 + m^2}{(z+1)^2 \sqrt{F(z)}} dz, \end{aligned}$$

sendo  $F(z) = z \left[ (1+m^2)z^2 + 2(1-m^2)z + 1 + m^2 \right]$ .

Tendo em conta que:

$$\begin{aligned}
 \frac{F(z)}{z(z+1)^2} &= \frac{z[(1+m^2)z^2 + 2(1-m^2)z + 1 + m^2]}{z(z+1)^2} \\
 &= \frac{(1+m^2)z^2 + 2(1-m^2)z + (1+m^2) + 2(1+m^2)z - 2(1+m^2)z}{(z+1)^2} \\
 &= \frac{(1+m^2)(z^2 + 1 + 2z)}{(z+1)^2} + \frac{2(1-m^2)z - 2(1+m^2)z}{(z+1)^2} \\
 &= 1 + m^2 + \frac{2z - 2m^2z - 2z - 2m^2z}{(z+1)^2} \\
 &= 1 + m^2 + \frac{-4m^2z}{(z+1)^2} \\
 &= 1 + m^2 - 4m^2 \frac{z}{(z+1)^2} \\
 &= 1 + m^2 - 4m^2 \left[ \frac{z+1}{(z+1)^2} - \frac{1}{(z+1)^2} \right] \\
 &= 1 + m^2 - 4m^2 \left[ \frac{1}{z+1} - \frac{1}{(z+1)^2} \right],
 \end{aligned}$$

podemos escrever:

$$\begin{aligned}
 s &= \frac{a}{m} \int_1^z \frac{[(1+m^2)z^2 + 2(1-m^2)z + 1 + m^2]}{(z+1)^2 \sqrt{F(z)}} dz = \frac{a}{m} \int_1^z \frac{F(z)}{z(z+1)^2 \sqrt{F(z)}} dz \\
 &= \frac{a}{m} \int_1^z \left[ 1 + m^2 - 4m^2 \left[ \frac{1}{z+1} - \frac{1}{(z+1)^2} \right] \right] \times \frac{1}{\sqrt{F(z)}} dz \\
 &= \frac{a}{m} \left[ (1+m^2) \int_1^z \frac{dz}{\sqrt{F(z)}} - 4m^2 \int_1^z \frac{dz}{(z+1)\sqrt{F(z)}} + 4m^2 \int_1^z \frac{dz}{(z+1)^2 \sqrt{F(z)}} \right] \\
 &= \frac{a}{m} \left[ (1+m^2) \int_1^z \frac{dz}{\sqrt{F(z)}} - 4m^2 \int_1^z \frac{dz}{(z+1)\sqrt{F(z)}} + \right. \\
 &\quad \left. + 4m^2 \left[ \frac{\sqrt{F(z)}}{4m^2(z+1)} + \int_1^z \frac{dz}{(z+1)\sqrt{F(z)}} - \frac{1+m^2}{2m^2} \int_1^z \frac{(z+1)}{\sqrt{F(z)}} dz \right] \right] \\
 &= \frac{a}{m} \left[ (1+m^2) \int_1^z \frac{dz}{\sqrt{F(z)}} + \frac{\sqrt{F(z)}}{(z+1)} - \frac{1+m^2}{2} \int_1^z \frac{(z+1)}{\sqrt{F(z)}} dz \right]
 \end{aligned}$$

$$= \frac{a}{m} \left[ \frac{\sqrt{F(z)}}{z+1} + (1+m^2) \int_1^z \frac{dz}{\sqrt{F(z)}} - \frac{1+m^2}{2} \left[ \int_1^z \frac{zdz}{\sqrt{F(z)}} + \int_1^z \frac{dz}{\sqrt{F(z)}} \right] \right]$$

$$= \frac{a}{m} \left[ \frac{\sqrt{F(z)}}{z+1} + \frac{1+m^2}{2} \int_1^z \frac{dz}{\sqrt{F(z)}} - \frac{1+m^2}{2} \int_1^z \frac{zdz}{\sqrt{F(z)}} \right]$$

Considerando agora, a mudança de variável  $z = v + h$ , onde  $h = -\frac{2(1-m^2)}{3(1+m^2)}$

obtemos:

$$\begin{aligned} F(z) &= z \left[ (1+m^2)z^2 + 2(1-m^2)z + 1+m^2 \right] \\ &= (v+h) \left[ (1+m^2)(v+h)^2 + 2(1-m^2)(v+h) + 1+m^2 \right] \\ &= (v+h) \left[ (1+m^2)(v^2 + 2vh + h^2) + 2v - 2m^2 + 2h - 2m^2 + 1+m^2 \right] \\ &= (v+h) \left[ v^2 + 2vh + h^2 + m^2v^2 + 2m^2vh + m^2h^2 + 2v - 2m^2v + 2h - 2m^2h + 1+m^2 \right] \\ &= (v+h) \left[ v^2(1+m^2) + v(2h + 2m^2h + 2 - 2m^2) + (1+m^2)(h^2 + 1) + 2h(1-m^2) \right] \\ &= v^3(1+m^2) + v^2 \left[ 2h(1+m^2) - h3(1+m^2) \right] + v(1+m^2)(h^2 + 1) + 2vh(1-m^2) + v^2h(1+m^2) \\ &+ vh \left[ 2h(1+m^2) + 2(1-m^2) \right] + h(1+m^2)(h^2 + 1) + 2h^2(1-m^2) \\ &= v^3(1+m^2) + v^2 \left[ 2h(1+m^2) - h3(1+m^2) \right] + v(1+m^2)(h^2 + 1) - h^2v3(1+m^2) + v^2h(1+m^2) \\ &+ vh \left[ 2h(1+m^2) - 3h(1+m^2) \right] + h(1+m^2)(h^2 + 1) - 3h^3(1+m^2) \\ &= v^3(1+m^2) - v^2h(1+m^2) + v(1+m^2)(h^2 + 1) - 3h^2v(1+m^2) + v^2h(1+m^2) - vh^2(1+m^2) + \\ &h(1+m^2)(h^2 + 1) - 3h^3(1+m^2) \\ &= v^3(1+m^2) + v^2h(1+m^2) + v(1+m^2) - 4h^2v(1+m^2) + h^3(1+m^2) + h(1+m^2) - 3h^3(1+m^2) \\ &= (1+m^2)(v^3 - 3h^2v + v - 2h^3 + h) \\ &= (1+m^2) \left[ v^3 - v(3h^2 - 1) - h(2h^2 - 1) \right] \\ &= \frac{(1+m^2)}{4} \left[ 4v^3 - 4(3h^2 - 1)v - 4h(2h^2 - 1) \right] \\ &= \frac{1+m^2}{4} (4v^3 - g_1v - g_2) \\ &= \frac{1+m^2}{4} \Delta v^2 \end{aligned}$$

sendo  $\Delta v = \sqrt{4v^3 - g_1v - g_2}$  com  $g_1 = 4(3h^2 - 1)$  e  $g_2 = 4h(2h^2 - 1)$ .

Assim, voltando a expressão do comprimento do arco,

$$\begin{aligned}
 s &= \frac{a}{m} \left[ \frac{\sqrt{m^2 + 1} \Delta v}{2(v+h+1)} \right]_{v_0}^v + \frac{m^2 + 1}{2} \int_{v_0}^v \frac{2dv}{\sqrt{m^2 + 1} \Delta v} - \frac{1+m^2}{2} \int_{v_0}^v \frac{2(v+h)}{\sqrt{m^2 + 1} \Delta v} dv \\
 &= \frac{a}{m} \left[ \frac{\sqrt{m^2 + 1} \Delta v}{2(v+h+1)} \right]_{v_0}^v + \sqrt{1+m^2} \int_{v_0}^v \frac{dv}{\Delta v} - \sqrt{1+m^2} \int_{v_0}^v \frac{v}{\Delta v} dv - \sqrt{1+m^2} \int_{v_0}^v \frac{h}{\Delta v} dv \\
 &= \frac{a\sqrt{1+m^2}}{m} \left[ \frac{\Delta v}{2(v+h+1)} - \frac{\Delta v_0}{2(v_0+h+1)} + \int_{v_0}^v \frac{dv}{\Delta v} - \int_{v_0}^v \frac{v}{\Delta v} dv - h \int_{v_0}^v \frac{dv}{\Delta v} \right] \\
 &= \frac{a\sqrt{1+m^2}}{m} \left[ (1-h) \int_{v_0}^v \frac{dv}{\Delta v} - \int_{v_0}^v \frac{v}{\Delta v} dv + \frac{\Delta v}{2(v+h+1)} - \frac{\Delta v_0}{2(1-h+h+1)} \right] \\
 &= \frac{a\sqrt{1+m^2}}{m} \left[ 1 + \frac{2(1-m^2)}{3(1+m^2)} \int_{v_0}^v \frac{dv}{\Delta v} - \int_{v_0}^v \frac{v}{\Delta v} dv + \frac{\Delta v}{2(v+h+1)} - \frac{1}{4} \Delta v_0 \right] \\
 &= \frac{a\sqrt{1+m^2}}{m} \left[ \frac{3+3m^2+2-2m^2}{3(1+m^2)} \int_{v_0}^v \frac{dv}{\Delta v} - \int_{v_0}^v \frac{v}{\Delta v} dv + \frac{\Delta v}{2(v+h+1)} - \frac{1}{4} \Delta v_0 \right] \\
 &= \frac{a\sqrt{1+m^2}}{m} \left[ \frac{5+m^2}{3(1+m^2)} \int_{v_0}^v \frac{dv}{\Delta v} - \int_{v_0}^v \frac{v}{\Delta v} dv + \frac{\Delta v}{2(v+h+1)} - \frac{1}{4} \Delta v_0 \right]
 \end{aligned}$$

Observando a expressão final apresentada por Gomes Teixeira,

$$s = \frac{a\sqrt{1+m^2}}{m} \left[ \frac{5+m^2}{3(1+m^2)} \int_{v_0}^v \frac{dv}{\Delta v} - \int_{v_0}^v \Delta v dv + \frac{\Delta v}{2(v+h+1)} - \frac{1}{4} \Delta v_0 \right], \text{ verificamos que esta}$$

tem uma falha no segundo integral, pois onde aparece  $\Delta v$  deveria aparecer  $\frac{v}{\Delta v}$ . Pela

observação da obra *Tratado de las Curvas*, a expressão apresentada está de acordo com aquilo que obtivemos anteriormente, confirmando a falha existente nesta última versão.

### 3.2.9. A cochléoide

[IX.1] *<Comp>* A subnormal desta espiral é dada pela relação:

$$S_n = \frac{\rho(a \cos \theta - \rho)}{a \sin \theta}.$$

Demonstração:

Sabe-se que  $S_n = \frac{d\rho}{d\theta}$  pelo que, através da equação polar da espiral,  $\rho = a \frac{\sin \theta}{\theta}$

vamos determinar a primeira derivada:

$$\frac{d\rho}{d\theta} = a \frac{\theta \cos \theta - \sin \theta}{\theta^2}$$

Atendendo a que  $\theta^2 = \frac{a^2 \sin^2 \theta}{\rho^2}$ , vem,

$$\frac{d\rho}{d\theta} = a \frac{\theta \cos \theta - \sin \theta}{\frac{a^2 \sin^2 \theta}{\rho^2}} = \rho^2 \frac{\theta \cos \theta - \sin \theta}{a \sin^2 \theta} = \frac{\rho a \sin \theta \cos \theta - \rho^2 \sin \theta}{a \sin^2 \theta} = \frac{\rho(a \cos \theta - \rho)}{a \sin \theta}$$

Assim,  $S_n = \frac{d\rho}{d\theta} = \frac{\rho(a \cos \theta - \rho)}{a \sin \theta}$ .

[IX.2] *<Comp>* A subtangente desta espiral é dada por:

$$S_t = \frac{a\rho \sin \theta}{a \cos \theta - \rho}.$$

Demonstração:

Sabe-se que a subtangente é determinada pela equação  $S_t = \rho^2 \frac{d\theta}{d\rho}$ . Mas, como não conseguimos deduzir a expressão que relaciona  $\theta$  em função de  $\rho$ , a partir da equação polar, não obtemos a expressão da derivada de  $\theta$ ,  $\frac{d\theta}{d\rho}$ . No entanto, atendendo à relação existente entre a subnormal, a subtangente, o comprimento da normal e o comprimento da tangente podemos obter então a subtangente:

$$T^2 + N^2 = (S_n + S_t)^2$$

Sabemos, do ponto anterior, que  $S_n = \frac{\rho(a \cos \theta - \rho)}{a \sin \theta}$  e como veremos

posteriormente  $N = \frac{\rho}{a \sin \theta} \sqrt{a^2 + \rho(\rho - 2a \cos \theta)}$ , donde:

$$\begin{aligned}
 T^2 + N^2 &= (S_n + S_t)^2 \\
 \Leftrightarrow (\rho^2 + S_t^2) + \frac{\rho^2}{a^2 \sin^2 \theta} (a^2 + \rho(\rho - 2a \cos \theta)) &= S_n^2 + 2S_n S_t + S_t^2 \\
 \Leftrightarrow \frac{\rho^2 a^2 \sin^2 \theta + \rho^2 a^2 + \rho^3 (\rho - 2a \cos \theta) - \rho^2 (a \cos \theta - \rho)^2}{a^2 \sin^2 \theta} &= 2 \frac{\rho (a \cos \theta - \rho)}{a \sin \theta} S_t \\
 \Leftrightarrow \frac{\rho^2 a^2 \sin^2 \theta + \rho^2 a^2 + \rho^4 - 2\rho^3 a \cos \theta - \rho^2 (a^2 \cos^2 \theta - 2\rho a \cos \theta + \rho^2)}{a \sin \theta} &= 2\rho (a \cos \theta - \rho) S_t \\
 \Leftrightarrow \frac{\rho^2 a^2 \sin^2 \theta + \rho^2 a^2 - \rho^2 a^2 \cos^2 \theta}{a \sin \theta} &= 2\rho (a \cos \theta - \rho) S_t \\
 \Leftrightarrow S_t = \frac{\rho a^2 (\sin^2 \theta + 1 - \cos^2 \theta)}{2a \sin \theta (a \cos \theta - \rho)} &\Leftrightarrow S_t = \frac{\rho a (\sin^2 \theta + \sin^2 \theta)}{2 \sin \theta (a \cos \theta - \rho)} \Leftrightarrow S_t = \frac{a \rho \sin \theta}{a \cos \theta - \rho}.
 \end{aligned}$$

[IX.3] *⟨Comp⟩* O comprimento  $N$  da normal à curva é dado pela equação:

$$N = \frac{\rho}{a \sin \theta} \sqrt{a^2 + \rho(\rho - 2a \cos \theta)}.$$

Demonstração:

O comprimento da normal é dado pela expressão  $\sqrt{\rho^2 + S_n^2}$  donde, neste caso:

$$\begin{aligned}
 N &= \sqrt{\rho^2 + \frac{\rho^2 (a \cos \theta - \rho)^2}{a^2 \sin^2 \theta}} = \frac{\rho}{a \sin \theta} \sqrt{a^2 \sin^2 \theta + a^2 \cos^2 \theta - 2\rho a \cos \theta + \rho^2} \\
 &= \frac{\rho}{a \sin \theta} \sqrt{a^2 + \rho(\rho - 2a \cos \theta)}.
 \end{aligned}$$

[IX.4] *⟨Comp⟩* O comprimento da tangente da espiral é dado pela equação:

$$T = \frac{\rho}{a \cos \theta - \rho} \sqrt{a(a - 2\rho \cos \theta) + \rho^2}.$$

Demonstração:

Como o comprimento da tangente é dado pela expressão geral  $\sqrt{\rho^2 + S_t^2}$  e, atendendo a que  $S_t = \frac{a \rho \sin \theta}{a \cos \theta - \rho}$ , obtém-se,

$$T = \sqrt{\rho^2 + \frac{a^2 \rho^2 \sin^2 \theta}{(a \cos \theta - \rho)^2}} = \frac{\rho}{a \cos \theta - \rho} \sqrt{(a \cos \theta - \rho)^2 + a^2 \sin^2 \theta}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\rho}{a \cos \theta - \rho} \sqrt{a^2 \cos^2 \theta - 2\rho a \cos \theta + \rho^2 + a^2 \sin^2 \theta} = \frac{\rho}{a \cos \theta - \rho} \sqrt{a^2 - 2\rho a \cos \theta + \rho^2} \\
 &= \frac{\rho}{a \cos \theta - \rho} \sqrt{a(a - 2\rho \cos \theta) + \rho^2}.
 \end{aligned}$$

[IX.5]  $\langle Comp \rangle$  A amplitude do ângulo formado pela tangente à curva e o vector associado ao ponto de tangência é dada pela equação:

$$\text{tang}V = \frac{a \sin \theta}{a \cos \theta - \rho}.$$

Demonstração:

Como a tangente do ângulo  $V$  pode ser determinada através da expressão  $\frac{S_t}{\rho}$ ,

obtem-se, neste caso:

$$\text{tang}V = \frac{S_t}{\rho} = \frac{\frac{a\rho \sin \theta}{a \cos \theta - \rho}}{\rho} = \frac{a \sin \theta}{a \cos \theta - \rho}.$$

[IX.6] O raio de curvatura desta espiral é dado pela equação:

$$\frac{\rho(a^2 + \rho^2 - 2a\rho \cos \theta)^{\frac{3}{2}}}{2a^2 \sin \theta |a - \rho \cos \theta|}.$$

Demonstração:

Para determinar o raio de curvatura é necessário determinar as derivadas de 1ª e 2ª ordens. Atendendo ao número IX.1, sabe-se que  $\frac{d\rho}{d\theta} = \frac{\rho(a \cos \theta) - \rho}{a \sin \theta}$ , donde falta

determinar  $\frac{d^2\rho}{d\theta^2}$ :

$$\begin{aligned}
 \frac{d^2\rho}{d\theta^2} &= a \frac{(\cos \theta - \theta \sin \theta - \cos \theta)\theta^2 - (\theta \cos \theta - \sin \theta)2\theta}{\theta^4} \\
 &= a \frac{-\theta^3 \sin \theta - 2\theta^2 \cos \theta + 2\theta \sin \theta}{\theta^4} = a \frac{2 \sin \theta - \theta^2 \sin \theta - 2\theta \cos \theta}{\theta^3} \\
 &= a \frac{2 \frac{\rho}{a} - \theta \sin \theta - 2 \cos \theta}{\theta^2} = \frac{2\rho - a\theta \sin \theta - 2a \cos \theta}{\theta^2}
 \end{aligned}$$

$$= \rho^2 \frac{2\rho - a \frac{a \sin \theta}{\rho} \sin \theta - 2a \cos \theta}{a^2 \sin^2 \theta} = \rho^2 \frac{2\rho^2 - a^2 \sin^2 \theta - 2a\rho \cos \theta}{a^2 \sin^2 \theta}$$

Com isto,

$$\begin{aligned} R &= \frac{\left[ \rho^2 + \left( \frac{d\rho}{d\theta} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}}{\left| \rho^2 + 2 \left( \frac{d\rho}{d\theta} \right)^2 - \rho \frac{d^2\rho}{d\theta^2} \right|} = \frac{\left[ \rho^2 + \frac{\rho^2 (a \cos \theta - \rho)^2}{a^2 \sin^2 \theta} \right]^{\frac{3}{2}}}{\left| \rho^2 + 2 \frac{\rho^2 (a \cos \theta - \rho)^2}{a^2 \sin^2 \theta} - \rho^2 \frac{2\rho^2 - a^2 \sin^2 \theta - 2a\rho \cos \theta}{a^2 \sin^2 \theta} \right|} \\ &= \frac{\frac{\rho^3}{a^3 \sin^3 \theta} \left[ a^2 \sin^2 \theta + (a \cos \theta - \rho)^2 \right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{\rho^2}{a^2 \sin^2 \theta} \left| a^2 \sin^2 \theta + 2(a \cos \theta - \rho)^2 - 2\rho^2 + a^2 \sin^2 \theta + 2a\rho \cos \theta \right|} \\ &= \frac{\rho \left( a^2 \sin^2 \theta + a^2 \cos^2 \theta - 2a \cos \theta \rho + \rho^2 \right)^{\frac{3}{2}}}{a \sin \theta \left| 2a^2 \sin^2 \theta + 2a^2 \cos^2 \theta - 4a\rho \cos \theta + 2a\rho \cos \theta \right|} \\ &= \frac{\rho \left( a^2 + \rho^2 - 2a\rho \cos \theta \right)^{\frac{3}{2}}}{2a \sin \theta \left| a^2 - a\rho \cos \theta \right|} = \frac{\rho \left( a^2 + \rho^2 - 2a\rho \cos \theta \right)^{\frac{3}{2}}}{2a^2 \sin \theta \left| a - \rho \cos \theta \right|}. \end{aligned}$$

[IX.7] A área definida pelo vector do ponto de coordenadas  $(\rho, \theta)$ , quando  $\theta$  varia, é dada pela fórmula:

$$A = \frac{a^2 (\cos(2\theta) - 1)}{4\theta} + \frac{a^2}{2} \int_0^\theta \frac{\sin(2\theta)}{\theta} d\theta.$$

Demonstração:

A expressão que nos permite determinar a área definida por uma curva em coordenadas polares é  $\frac{1}{2} \int \rho^2 d\theta$  pelo que, tendo em conta a equação polar da espiral, obtém-se:

$$A = \frac{1}{2} \int_0^\theta \rho^2 d\theta = \frac{1}{2} \int_0^\theta \frac{a^2 \sin^2 \theta}{\theta^2} d\theta = \frac{a^2}{2} \int_0^\theta \frac{\sin^2 \theta}{\theta} d\theta.$$

Atendendo a que  $2 \sin^2 \theta = 1 - \cos(2\theta)$  vem,

$$A = \frac{a^2}{4} \int_0^\theta \frac{1 - \cos(2\theta)}{\theta^2} d\theta = \frac{a^2}{4} \int_0^\theta \frac{1}{\theta^2} (1 - \cos(2\theta)) d\theta$$



Integrando por partes obtém-se,

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{a^2}{4} \left[ \left( -\frac{1}{\theta} (1 - \cos(2\theta)) \right) \Big|_0^\theta + \int_0^\theta \frac{2}{\theta} \sin(2\theta) d\theta \right] \\
 &= \frac{a^2}{4} \left( \frac{\cos(2\theta) - 1}{\theta} + 2 \int_0^\theta \frac{\sin(2\theta)}{\theta} d\theta \right) \\
 &= \frac{a^2 (\cos(2\theta) - 1)}{4\theta} + \frac{a^2}{2} \int_0^\theta \frac{\sin(2\theta)}{\theta} d\theta
 \end{aligned}$$

Se observarmos a expressão apresentada por Gomes Teixeira,

$$A = \frac{\cos(2\theta) - 1}{\theta} + \frac{1}{2} a^2 \int_0^\theta \frac{\sin(2\theta)}{\theta} d\theta$$

vemos que existe uma falha resultante de não ter

efectuado a multiplicação de  $\frac{a^2}{4}$  pelo primeiro termo resultante do integral.



## Capítulo 4 - Anotações Biográficas de Francisco Gomes Teixeira

---

---

Francisco Gomes Teixeira, nome bastante referenciado tanto no nosso país como no estrangeiro, foi um dos matemáticos mais proeminentes em Portugal. Autor de uma vastíssima obra, este matemático português do final do século XIX e das primeiras décadas do século XX deu grandes, valiosos e inovadores contributos em diversas áreas da matemática, nomeadamente análise, geometria e história da matemática.

Mas, apesar de Gomes Teixeira ser uma das figuras mais dominante nesta época, e com um contributo inquestionável para a evolução matemática, pensamos que, actualmente e para o público em geral, o seu nome não tem o devido reconhecimento, ao contrário do que acontece com José Anastácio da Cunha e Pedro Nunes, matemáticos portugueses mais conhecidos em Portugal. No entanto, esse reconhecimento é bem visível no seio matemático, como se pode verificar nas palavras de J. Silva Oliveira:

*Na sua História das Matemáticas em Portugal, editada em 1934, Gomes Teixeira considera Pedro Nunes, Anastácio da Cunha, Monteiro da Rocha e Daniel da Silva como os grandes nomes da matemática no nosso país.*

*A generalidade dos autores que nos primeiros decénios do século se debruçaram sobre o mesmo tema emite opinião idêntica apenas acrescentando, aos quatro nomes citados, mais um, o do próprio Gomes Teixeira. (2000, p.301)*

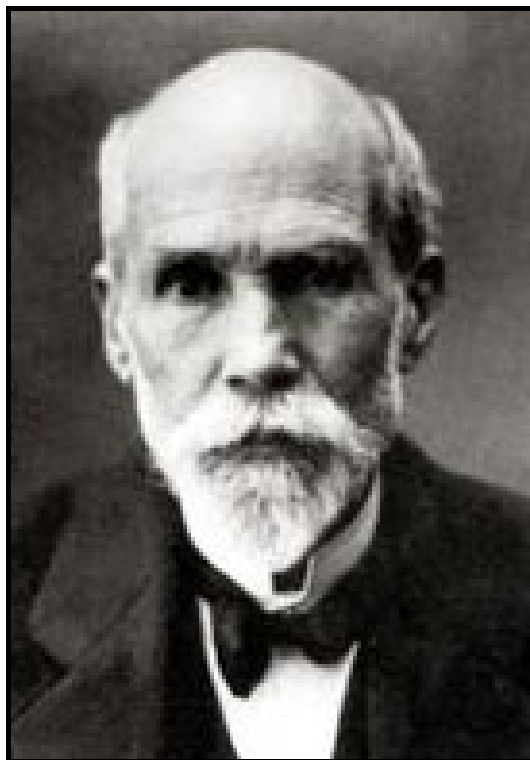
Por esta e outras razões evidentes, quando o nosso objectivo é pesquisar sobre Gomes Teixeira, é vasta a informação que temos à nossa disposição, tanto através dos livros, como da Internet. Da informação disponível, salientamos as três biografias de Gomes Teixeira, da autoria, por ordem cronológica, de Rodolfo Guimarães, de Henrique Vilhena e de Sarmiento Beires. Para além destes trabalhos, surgiram também diversos artigos, publicados em revistas, tanto portuguesas como estrangeiras. E, para terminar,

destacamos ainda a obra de Maria Graça Alves, intitulada *Francisco Gomes Teixeira o homem, o cientista, o pedagogo*, onde, na primeira parte, apresenta um estudo exaustivo da vida e obra deste matemático.

É com base, principalmente, nas três biografias de Gomes Teixeira e na tese de doutoramento de Maria Graça Alves que, neste capítulo, tentaremos apresentar numa primeira parte a biografia de Gomes Teixeira e, numa segunda parte a actividade científica de Gomes Teixeira, realçando o seu excelente percurso como matemático e como docente e analisando sumariamente a sua obra.

Nesta análise, não iremos apresentar uma exposição exaustiva da vida e obra de Gomes Teixeira. Tentaremos apenas mostrar alguns dos momentos mais marcantes da sua existência, pois consideramos que este trabalho, sem uma breve resenha da vida deste matemático, ficava incompleto.

## 4.1. A Biografia de Gomes Teixeira



**Figura 4.1** - Francisco Gomes Teixeira

Francisco Gomes Teixeira nasceu na aldeia de S. Cosmado, pertencente à freguesia de Armamar, no distrito de Viseu, a 28 de Janeiro de 1851. Da sua família, sabe-se que o seu pai, de nome Manuel Gomes Teixeira Pinto, era comerciante e sua mãe, Maria Magdalena Machado, dedicava-se à família. Os seus três irmãos Pedro, Sebastião e Victoria Carolina seguiram rumos distintos: Pedro optou pela carreira de engenharia militar, Sebastião, seguindo os passos do pai, dedicou-se ao comércio em S. Cosmado e, por último, Victoria, como era normal da época, dedicou-se à família, tal como sua mãe.

Gomes Teixeira passou a infância na sua terra natal, onde frequentou a escola primária, com o professor oficial Gabriel Mendes Mourão. Mais tarde, depois de concluir a instrução primária, foi estudar para o Colégio do Padre Roseira em Lamego, devido ao desejo de seu pai de vir a ser padre, ficando hospedado em casa de seu primo médico, Dr. Francisco Maria de Carvalho.

Para além do desejo de, vir a ser padre, seu pai queria também que ele seguisse a carreira de Teologia e/ou Direito, pelo que Gomes Teixeira ia anualmente a Coimbra, ao Colégio de São Bento, preparar-se para os exames necessários ao ingresso na Universidade, dado o Liceu de Lamego ser de 2ª classe e os exames aí efectuados não servirem para a matrícula na Universidade.

Gomes Teixeira acabou por se matricular, em Outubro de 1869, na Faculdade de Mathematica da Universidade de Coimbra, a única em Portugal até então.

Esta mudança de carreira da Teologia para a Matemática deveu-se, segundo as referências de Rodolfo Guimarães, ao seu primo, Dr. Francisco Maria de Carvalho, que o ajudou a se preparar para o exame de Geometria<sup>1</sup>, ao qual obteve aprovação:

*O primo, não vendo talvez com satisfação que o jovem Gomes Teixeira seguisse a carreira eclesiástica, tratou de aconselhar o pai do futuro sábio a que o mandasse formar antes em matemática. Manuel Gomes Teixeira – assim se chamava o pai – não se opôs, e perguntando ao filho por qual das carreiras optava, respondeu este ser-lhe indiferente uma ou outra, e portanto seguiria aquela que seu pai quisesse.*

*«Nesse caso tire-se à sorte», disse Gomes Teixeira pai. E a Sorte destinou Gomes Teixeira para matemática! (Guimarães, 2000, p.322)*

Através desta atitude, o futuro matemático deixa transparecer a ideia de ser uma pessoa pouco determinada e com pouco interesse pela matemática. Estas ideias foram mais tarde esclarecidas pelo próprio Gomes Teixeira que, numa entrevista com o jornalista Tomaz Pessoa, a 17 de Março de 1925, para o Diário de Notícias, fala um pouco dos seus estudos secundários:

*Fiz um curso liceal completo (ciências e letras) em que não faltou o estudo desenvolvido das humanidades. Atraiu-me nessa distante mocidade a literatura latina, (...) a literatura portuguesa (...). Tinha um especial interesse pela história, sobretudo pela história de Portugal. (...)*  
(Vilhena, 1936, p.113)

Relativamente às ciências, afirma ainda que:

---

<sup>1</sup> Um dos exames necessários para a matrícula na Universidade.

*A que mais chamou a minha atenção foi a Física, por explicar fenómenos que via diàriamente. Às matemáticas não tinha afecto nem aversão. Estudei-as e bem, apenas para cumprir o meu dever escolar.*  
(Vilhena, 1936, p.113)

A confirmar de certo modo estas suas recordações de infância pode ainda referir-se o facto de, aos 16 anos de idade, com o primeiro dinheiro que ganhou a leccionar, ter adquirido três obras tão díspares na sua essência: a *Geometria de Euclides*, as *orações fúnebres de Bossuet* e a *Química de Regnault*.<sup>2</sup>

Apesar da aparente indiferença revelada por Gomes Teixeira na escolha da carreira a seguir no final dos estudos secundários, como acabamos de ver, este, depois de ingressar no curso de Matemática por obra do *acaso*, sempre obteve as mais altas classificações, demonstrando grande facilidade, rapidez e profundidade na assimilação das diferentes matérias. A salientar isso, logo no final do 1º ano de estudo, foi-lhe atribuído um *partido*<sup>3</sup>, prémio este que raramente, e há quem diga mesmo nunca, era atribuído a estudantes do 1º ano. E, segundo Rodolfo Guimarães, foi o professor Dr. Tôrres Coelho<sup>4</sup>, considerado o mais severo professor da Faculdade, que propôs Gomes Teixeira para *partido*, ao qual se opuseram os professores Dr. Florêncio Barreto Feio e Dr. Gonçalves Mamede, devido ao facto de não ser comum a atribuição deste prémio no 1º ano. Durante o curso, continuou a receber prémios semelhantes, nomeadamente no final do 2º ano, proposto pelo professor Dr. Raimundo Venâncio Rodrigues e, no final do 3º ano, curiosamente proposto pelos professores já citados que no 1º ano se opuseram à sua candidatura.

Para além dos prémios atribuídos, este matemático destaca-se ainda como aluno, na escrita de trabalhos na área de matemática. Quanto à primeira dissertação elaborada por Gomes Teixeira, há algumas incertezas, visto que nos deparamos com duas informações distintas provenientes da bibliografia que consultamos. Segundo Rodolfo Guimarães e Henrique de Vilhena, Gomes Teixeira escreveu o seu primeiro trabalho, intitulado *Desenvolvimento das funções em fracção contínua*, durante o 3º ano do curso, em 1871. No entanto, segundo Maria da Graça Alves, este matemático escreveu a primeira dissertação, intitulada *Cálculo das Variações*, ainda enquanto aluno do 2º ano, também em

---

<sup>2</sup> Vilhena, 1936, pp.113-114.

<sup>3</sup> Equivalente a um prémio de mérito.

<sup>4</sup> Professor de Gomes Teixeira nas cadeiras de Álgebra e Geometria Analítica.

1871, considerando o trabalho citado anteriormente a segunda dissertação apresentada pelo autor. Apesar desta discrepância de informação, interessa referir que o trabalho elaborado ao longo do 3º ano, *Desenvolvimento das funções em fracção contínua*, foi publicado pela imprensa da Universidade, no final do ano de 1871, por incentivo do Dr. Rodrigo Ribeiro de Sousa Pinto<sup>5</sup>, que o tinha examinado a pedido de Gomes Teixeira e reconheceu que este trabalho era de grande valor. Este foi talvez um dos momentos mais marcantes para Gomes Teixeira e um dos mais importantes para o prosseguimento do seu estudo das *ciências matemáticas*, como podemos ver nas palavras de Henrique Vilhena:

(...) já pelo começo do 3º ano do curso (1871), Gomes Teixeira publica o seu primeiro trabalho, o que revela não sòmente sua vocação própria mas o incentivo do ambiente, ao qual não foi extranho o voto do professor Sousa Pinto, que consultara. Oferece exemplar dêsse estudo a Daniel Augusto da Silva, (...), e recebe dêle carta amistosa e animadora, outro grande impulso que foi – disse-o já – na vida de Gomes Teixeira. (1936, p.13-14)

No ano seguinte, matriculado no 4º ano do curso, Gomes Teixeira publica novo trabalho, agora no *Jornal de Sciencias Mathematicas Physicas e Naturaes*, intitulado *Aplicação das fracções contínuas à determinação das raízes das equações*, que foi apresentado por Daniel da Silva, em 1 de Maio de 1872, na *Academia das Ciências de Lisboa*. Salientamos ainda que o autor não se descuidou dos seus deveres escolares e termina o ano lectivo com a mais elevada classificação.<sup>6</sup>

No último ano do curso e sendo um aluno exemplar, Gomes Teixeira voltou a obter a mais elevada classificação, ou como Rodolfo Guimarães afirma, voltou a obter novamente prémio.

Em 1874, com 23 anos de idade, foi-lhe conferido o grau de Bacharel, com a informação *Muito Bom, por unanimidade, com 20 valores*<sup>7</sup>.

A 8 de Janeiro de 1875, Gomes Teixeira fez o exame de licenciado e, a 30 de Junho, o acto de conclusões magnas, onde defendeu a dissertação intitulada *Integração das*

---

<sup>5</sup> Neste momento, professor da *Faculdade de Mathematica*.

<sup>6</sup> Nos 4º e 5º anos não eram atribuídos partidos pelo que o prémio era a mais elevada classificação.

<sup>7</sup> Segundo Henrique de Vilhena, esta classificação apenas tinha sido atribuída, anteriormente a Gomes Teixeira, a três alunos, Manuel Gonçalves de Miranda (1804), José Ferreira Pestana (1819) e José Maria Baldy (1839).



*equações ás derivadas parciais de segunda ordem* e, ainda, *Theses de Mathematicas puras e applicadas*. E, ainda no mesmo ano, a 18 de Julho, realizou o seu doutoramento, onde obteve novamente a classificação de *Muito Bom, por unanimidade, com 20 valores*. De acordo com as palavras de Rodolfo Guimarães, o doutoramento de Gomes Teixeira foi um sensacional acontecimento, pois jamais havia sido conferida esta mais alta classificação simultaneamente no bacharelato e no doutoramento.

Tendo em conta a rapidez com que Gomes Teixeira efectuou o exame de licenciado e se doutorou, este não foi classificado como licenciado, passando logo a ser classificado de doutor.

Cerca de um ano depois do seu doutoramento, a 30 de Junho, Gomes Teixeira foi eleito sócio correspondente da *Academia das Ciências de Lisboa* e, a 20 de Dezembro, ingressou no quadro da *Faculdade de Mathematica* como lente substituto<sup>8</sup>, após ter apresentado em concurso a dissertação intitulada *Sôbre o emprêgo dos eixos coordenados oblíquos na mecânica analítica*. Tinha então 25 anos de idade, sendo-lhe atribuídas a 1<sup>a</sup>, a 2<sup>a</sup> e a 4<sup>a</sup> cadeiras de *Mathematica*.

Em 1877, Gomes Teixeira fundou o *Jornal de Sciencias Mathematicas e Astronomicas*, primeiro jornal publicado em Portugal, dedicado exclusivamente à matemática e à astronomia e que tinha como objectivo projectar o trabalho produzido por matemáticos portugueses no estrangeiro. Este jornal foi publicado pela última vez em 1905, tendo sido publicados 15 volumes durante os 28 anos de existência. Nele colaboraram vários matemáticos portugueses, nomeadamente Francisco Horta, Mota Pegado, Schiappa Monteiro, bem como matemáticos estrangeiros, tais como Bellavitis, Ernesto Césaro, Júlio Tannery, Gino Loria, e tantos outros. De forma a enaltecer a atitude de Gomes Teixeira ao criar este jornal e a realçar a importância que teve a sua publicação no desenvolvimento das ciências matemáticas, Rodolfo Guimarães profere as seguintes palavras:

*O jornal de sciências matemáticas e astronómicas, que adquiriu notoriedade durante os vinte e oito anos da sua existência, contribuiu poderosamente para reanimar em Portugal, o gôsto pelas sciências matemáticas, e, graças a êle, o nosso país tomou sempre parte nos trabalhos internacionais, tendo por objecto o progresso da Matemática.*

---

<sup>8</sup> A vaga aberta no quadro da Faculdade, para este cargo, deveu-se à jubilação do Dr. Gonçalves Mamede.

*Inútil será dizer que o mais assíduo colaborador do jornal fôra o seu illustre director.* (2000, p.330)

Em Julho de 1878, foi nomeado terceiro astrónomo do novo Observatório Astronómico de Lisboa (Tapada), cargo que aceitou devido à insistência de Daniel da Silva, pelo que deixou temporariamente o seu cargo de lente substituto da *Faculdade de Mathematica*.

Regressando à faculdade nos finais desse mesmo ano, 1878, Gomes Teixeira retoma o seu lugar de lente substituto, que mantém até 1880. Neste ano, é promovido a lente catedrático, devido à jubilação do Dr. Florêncio Barreto Feio, ficando a regência da cadeira de Análise<sup>9</sup> à sua responsabilidade.

Ainda em 1879, fazendo parte do Partido Regenerador, foi eleito deputado às Cortes, pelo que passou a frequentar a Câmara dos Deputados. Tal voltou a acontecer em 1883 e em 1884.

Por razões familiares, em 1883<sup>10</sup>, pediu transferência da *Faculdade de Mathematica* da Universidade de Coimbra para a *Academia Polytechnica do Porto*, instituição com características de ensino técnico e sem o prestígio daquela Universidade<sup>11</sup>. Ali, passou a reger a 26 de Maio, tal como tinha solicitado, a cadeira de Cálculo Diferencial e Integral que se encontrava vaga.

Segundo os netos, Gomes Teixeira terá casado por volta dos 32 ou 33 anos de idade, ou seja, nos anos de 1882 - 1883, com uma jovem portuense de nome Ana Arminda Cardoso, de 17 anos de idade.<sup>12</sup> Este facto justifica as *razões familiares* indicadas anteriormente acerca do pedido de transferência de Gomes Teixeira para o Porto.

Em 1905, ano da última publicação do *Jornal de Sciencias Mathematicas e Astronómicas*, Gomes Teixeira fundou uma nova publicação *Annaes da Academia Polytechnica* do Porto. Esta publicação não era restrita à área de matemática. Também publicava artigos relativos a outras áreas ensinadas na *Academia Polytechnica do Porto*.

---

<sup>9</sup> Gomes Teixeira já leccionava esta cadeira desde Novembro de 1879, altura em que faleceu o professor Dr. Raimundo Venâncio.

<sup>10</sup> Na biografia de Rodolfo Guimarães o ano indicado para o pedido de transferência de Gomes Teixeira é o de 1884.

<sup>11</sup> Alves, 2004, p.51.

<sup>12</sup> *Ibidem*, p.8.

Ao fim de três anos como lente na Academia Politécnica do Porto, Gomes Teixeira foi nomeado director desta Academia, cargo que desempenhou até 1911. Neste ano, foi eleito reitor da nova Universidade do Porto<sup>13</sup>, por decreto de 23 de Agosto.

Apesar da Academia Politécnica ter sido transformada em Universidade do Porto, Gomes Teixeira continuou a reger a cadeira de Cálculo Diferencial e Integral agora na faculdade de Ciências até 1929, ano em que saiu uma nova lei de limite de idade no exercício de cargos públicos. Desta forma, o governo nomeou-o director honorário do Instituto de Investigação de História das matemáticas, de que era até então director.

Ao longo destes anos como docente, Gomes Teixeira, na tentativa de interessar e cativar a atenção dos seus alunos pelo prazer de fazer matemática, dava-lhes questões para resolver. E segundo Rodolfo Guimarães:

*“...os que chegavam a resultados satisfatórios, iam contribuir, embora em modestas proporções, para o progresso da ciência.”*  
(2000, p.327)

Esta atitude revela que Gomes Teixeira apesar de investigador e cientista, nunca deixou de valorizar a profissão de docente, demonstrando grande empenho e dedicação aos seus alunos.

Gomes Teixeira faleceu a 8 de Fevereiro de 1933, no Porto, com 82 anos de idade, e foi sepultado, como era seu desejo, na Igreja de S. Cosmado, sua terra natal, onde existe uma inscrição com as seguintes palavras, que ele próprio escreveu:

*SERAPHICO FRANCISCO ASSISIENSI*  
*Atque*  
*DIVO ANTONIO OLYSIPPONENSI*  
*Hoc monumentum erexit*  
*FRANCISCUS GOMES TEIXEIRA*  
Qui hic jacet<sup>14</sup>

---

<sup>13</sup> A implantação da República em 5 de Outubro de 1910 provocou modificações no campo do ensino, nomeadamente a criação de duas Universidades, a de Lisboa e a do Porto.

<sup>14</sup> Francisco Gomes Teixeira, que jaz aqui, erigiu este monumento ao Seráfico Francisco de Assis e ao Divino António de Lisboa.

Durante a sua vida, Gomes Teixeira teve contacto com vários matemáticos de renome, deslocou-se várias vezes a outros países onde contactava com outros matemáticos, participava em congressos e era membro de várias sociedades científicas nacionais e estrangeiras. Tudo isto teve grande influência na sua vida e obra, tendo publicado inúmeros trabalhos, tanto em Portugal como em revistas de vários países.

## 4.2. A actividade científica de Gomes Teixeira

Francisco Gomes Teixeira foi uma das mais insignes figuras científicas de Portugal e a sua obra, bastante extensa, é conhecida e admirada universalmente.

Com a Reforma Pombalina da Universidade, de 1772, foram abertos novos caminhos no sentido de valorizar a actividade científica. A criação da *Faculdade de Mathematica* instituiu a disciplina de Matemática como uma ciência autónoma, sendo José Monteiro da Rocha<sup>15</sup> e José Anastácio da Cunha<sup>16</sup>, duas importantes figuras desta Universidade, nesta época. Após esta reforma instaurou-se um período de decadência científica em Portugal. Esta decadência deu-se por causa da situação de grande agitação vivida no nosso país, primeiro devido às guerras napoleónicas e mais tarde às campanhas para a conquista da liberdade. Só na segunda metade do século XIX, é que a situação política melhorou, surgindo assim uma nova era na matemática e com ela um dos seus nomes marcantes, Daniel Augusto da Silva. Mas, é mais no final deste século que a Universidade Portuguesa começa a surgir como o centro, por excelência, de cultivo das ciências exactas, sendo a figura dominante deste fim de século e início do seguinte o ilustre matemático Gomes Teixeira.

Desta forma, foi num período de efervescência no estudo das matemáticas puras que Gomes Teixeira começou a sua actividade científica, tendo como antecessores os ilustres matemáticos Monteiro da Rocha e José Anastácio da Cunha e como grande mentor Daniel Augusto da Silva.

Depois de ingressar na Universidade não tardou para que Gomes Teixeira, em 1871, ainda estudante, a frequentar o segundo ano do curso, começasse a sua actividade como investigador, escrevendo o seu primeiro trabalho. A partir deste momento, o autor não mais parou pelo que, como aluno do terceiro ano, no final de 1871, publica o seu primeiro trabalho *Desenvolvimento das funções em fracção contínua*.

Apesar das palavras de incentivo e de apreço recebidas graças a este primeiro trabalho publicado, foram as palavras de Daniel da Silva, proferidas numa carta datada de

---

<sup>15</sup> José Monteiro da Rocha nasceu em 1734, faleceu em 1819 e distinguiu-se ao apresentar o primeiro método regular para determinar as órbitas dos cometas.

<sup>16</sup> José Anastácio da Cunha nasceu em 1744, faleceu em 1787 e distinguiu-se através de trabalhos originais sobre séries, números irracionais e mecânica racional.

6 de Janeiro de 1872, onde este matemático agradece o exemplar que o autor lhe enviara e o elogio, que mais significado tiveram para Gomes Teixeira. A esta carta seguiram muitas outras, revelando-se Daniel da Silva como uma pessoa de grande influência na vida e obra de Gomes Teixeira.

As dificuldades vividas por Daniel da Silva, devido ao isolamento científico que se vivia em Portugal e devido tanto ao limitado alcance da língua como à falta da publicação de trabalhos em revistas conceituadas, levaram Gomes Teixeira a agir. E, logo em 1877, funda o *Jornal de Sciencias Mathematicas e Astronomicas* e bem como, em 1878, publica o seu primeiro trabalho escrito em francês, numa revista internacional, *Mémoires de la Société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux*. Estes dois momentos proporcionaram uma nova fase, onde as investigações científicas desenvolvidas em Portugal começaram a ter repercussões no estrangeiro.

Nesta nova perspectiva de abertura, Gomes Teixeira continua a sua longa e rigorosa investigação. Ao longo da sua vida, publicou numerosos trabalhos, tanto em revistas estrangeiras como nacionais, escritos tanto em português como em francês, castelhano, italiano, inglês ou mesmo em alemão, como já tivemos oportunidade de observar nos capítulos anteriores. Este facto também é bem visível nas palavras de Maria Graça Alves:

*Gomes Teixeira publicou 83 trabalhos, em revistas nacionais, e 149, em revistas estrangeiras, o que traduz bem a sua projecção internacional.*

(2004, p.215)

Ao longo da sua vida, Gomes Teixeira ocupou-se de questões muito diversificadas e de diferentes áreas da matemática, apresentando inúmeros trabalhos em análise, em geometria e em história da matemática.

Não se pode falar em fases distintas da vida de Gomes Teixeira, nas quais se tenha ocupado de cada uma das áreas, porque existiram momentos em que apresentou, simultaneamente, trabalhos de diferentes áreas, como veremos mais à frente. No entanto, pode-se afirmar que, nos primeiros anos, Gomes Teixeira apenas se dedicou a temas que incidiam sobre conteúdos de análise, mais tarde, começou a desenvolver trabalhos de geometria e, numa terceira fase, trabalhos de história da matemática.

Na área de análise, os seus primeiros trabalhos surgiram ainda durante a sua vida de estudante como já foi referido. Gomes Teixeira publicou *Desenvolvimento das funções em fracção continua*, onde apresenta, segundo Rodolfo Guimarães, fórmulas para desenvolver funções em fracções contínuas e aplica as fracções contínuas ao cálculo integral e à determinação de raízes das equações, observando que este método obtém resultados mais convergentes do que os métodos de Newton e de Lagrange.

A este trabalho, seguiu-se um novo estudo intitulado por *Aplicação das fracções continuas à determinação das raízes das equações*, que segundo Rodolfo Guimarães:

(...) foi apresentado por Daniel da Silva, em 1 de Maio de 1872, a esta Academia – onde pela primeira vez foi pronunciado o nome do estudante Gomes Teixeira, que mais tarde tanto a havia de honrar – a qual deliberou que o trabalho fosse publicado no *Jornal da 1ª classe*.  
(2000, p.324)

Em 1875, seguiu-se a apresentação da dissertação para aquisição do grau de doutoramento na Universidade de Coimbra, intitulada *Integração das equações às derivadas parciais de segunda ordem*, constituída por 4 volumes. O primeiro volume refere-se à teoria de Ampère, o segundo trata das transformações de Euler e de Imschenetsky, no terceiro são expostos os métodos de Monge, de Ampère e de Imschenetsky e, por último, o quarto volume apresenta a integração de algumas equações.

Depois de terminados os seus estudos, Gomes Teixeira procedeu à elaboração de uma dissertação, que abrange três capítulos, intitulada *Sobre o emprego dos eixos coordenados oblíquos na mecânica analítica*, para o concurso de ingresso no quadro da *Faculdade de Mathematica* da Universidade de Coimbra.

Depois de iniciar a sua vida activa, como lente da *Faculdade de Mathematica* da Universidade de Coimbra, Gomes Teixeira publica, em 1877, na revista fundada por si neste mesmo ano, *Jornal de Sciencias Mathematicas e Astronomicas*, um artigo com o título *Sur la décomposition des fractions rationnelles*. No ano seguinte, internacionaliza-se, tal como já referimos, publicando o seu primeiro trabalho numa revista estrangeira, intitulado *Sur le nombre des fonctions arbitraires des intégrales des équations aux dérivées partielles*, que consistia na generalização do teorema de Ampère a uma equação com qualquer número de variáveis independentes.

Nos anos seguintes, Gomes Teixeira prosseguiu a sua actividade científica, publicando inúmeros trabalhos, na área de análise, em revistas tanto nacionais como estrangeiras, salientando-se os seguintes anos: 1881, ano em que publicou cinco artigos dos quais quatro apareceram em revistas estrangeiras; 1884, ano em que não publicou nenhum artigo; 1887, ano da publicação da 1ª edição de um trabalho intitulado *Curso de Análise Infinitesimal – Cálculo Diferencial*, de grande valor para a comunidade matemática portuguesa, como será referido posteriormente; 1889, ano em que publicou o maior número de trabalhos nesta área, 10 artigos; 1897, ano em que, apesar de não publicar nenhum trabalho, foi premiado, pela *Real Academia de Ciencias Exactas, Fisicas y Naturales de Madrid*, o artigo intitulado *Sobre o desenvolvimento das funções em fracção contínua*.

A partir de 1898, a sua actividade científica, na área de análise, diminui consideravelmente, não ultrapassando 4 artigos publicados por ano, excepto no ano de 1904 em que voltou a publicar 8 artigos (número considerável de artigos). O último trabalho publicado foi no ano de 1926, cujo o título era *Manual de Calculo Diferencial: extracto do curso de análise infinitesimal*. Esta decadência acentua-se ainda mais a partir de 1906 como podemos ver no quadro seguinte, elaborado por Maria da Graça Alves:

Anos	Número total de trabalhos publicados	Número total de trabalhos sobre análise	Anos	Número total de trabalhos publicados	Número total de trabalhos sobre análise
1876	1	1	1905	7	4
1877	3	1	1906	6	3
1878	3	2	1907	3	0
1879	1	1	1908	1	0
1880	2	2	1909	6	2
1881	7	5	1910	4	2
1882	1	1	1911	2	0
1883	2	2	1912	8	2
1885	10	8	1913	10	1
1886	6	6	1914	8	1
1887	7	7	1915	5	0
1888	6	6	1916	6	0
1889	11	10	1917	7	0
1890	5	4	1919	1	0
1891	6	6	1920	2	0
1892	7	6	1921	2	1
1893	2	2	1922	1	0
1896	4	4	1923	4	0
1897	1	0	1924	1	0
1898	3	0	1925	2	0
1899	1	0	1926	2	1
1900	10	1	1928	1	0
1901	2	0	1930	2	0
1902	4	0	1931	1	0
1903	4	4	1934	1 <sup>61</sup>	0
1904	12	8			

Comparação do número total de trabalhos publicados com os de temas versando a análise

**Figura 4.2** - Quadro de comparação do número de trabalhos publicados com os de temas versando a análise



Como já foi referido, uma das obras mais importantes de Gomes Teixeira surgiu em 1887, intitulada por *Curso de Análise Infinitesimal – Cálculo Diferencial*, sendo esta a primeira de quatro edições (a segunda edição saiu em 1890, a terceira em 1896 e a quarta em 1906). Gomes Teixeira foi actualizando esta obra de edição para edição. O volume IV das *Obras sobre Mathematica*, de 1906 corresponde à 4ª edição do *Curso de Análise Infinitesimal – Cálculo Diferencial*.

No entanto, apesar da obra ter sido editada pela primeira vez em 1887, Gomes Teixeira começou a publicar internamente, na Academia Polytechnica do Porto, no ano lectivo de 1884-1885, uma série de textos que designava por *Fragmentos de um Curso d'Analyse Infinitesimal – Calculo Diferencial*. Esta publicação interna foi feita anualmente e até 1887-1888, onde eram inseridos novos conteúdos e novos capítulos a cada nova publicação.

Esta obra evidencia a enorme preocupação de Gomes Teixeira no ensino da Matemática em Portugal, na medida em que esta serviria de manual para a cadeira de *Cálculo Diferencial e Integral*, como veio a acontecer no ano lectivo de 1884-188 (ainda apenas em forma de textos visto a obra não estar completa).

Esta ideia é reforçada pelas próprias palavras de Gomes Teixeira:

*Entendo porém, que, para honra do professor e do País, deve aquele, logo que possa, substituir livro de texto, quando não é seu, por lições litografadas, que aperfeiçoe em anos sucessivos e que depois de bem pensadas imprima, afim de termos compêndios portugueses e se nacionalizar assim o ensino.* (Amorim, 1951, p.11)

Esta preocupação de Gomes Teixeira tem sentido se tivermos em conta que, naquela época, os manuais adoptados, tanto na Universidade de Coimbra como na *Academia Polytechnica do Porto*, eram na sua maioria livros estrangeiros ou traduções destes, como salienta Diogo Amorim:

*Assim no tempo de Gomes Teixeira, como estudante da Universidade de Coimbra, os livros sobre análise, adoptados nesta Universidade, eram traduções de livros estrangeiros, nomeadamente franceses.* (1951, p.11)

No ano lectivo de 1888-1889, Gomes Teixeira começou a publicar, da mesma forma que anteriormente, textos sobre Cálculo Integral intitulados *Fragmentos de um Curso de Analyse Infinitesimal – Calculo Integral*. Mais tarde, em 1889, surge então a primeira edição da obra intitulada *Curso de Analyse Infinitesimal*, dividida em duas partes, à qual se seguiram outras edições.

Uma das edições desta obra pode ser consultada no Volume VI das *Obras Sobre Mathematica*, de 1912.

É de salientar que, também na Universidade de Coimbra no ano lectivo de 1889-1890, foi adoptado o *Curso de Analyse Infinitesimal*.

Em 1888, foi concedido à obra *Curso de Analyse Infinitesimal – Calculo Diferencial*, pela *Academia Real das Sciencias de Lisboa*, o prémio D. Luís I, correspondente ao ano de 1887, depois de alguma polémica levantada por Alfredo Schiappa Monteiro<sup>17</sup>, que apresentou uma reclamação à apreciação feita às obras apresentadas em concurso, em particular, à de Gomes Teixeira.

Estas duas obras, que têm vindo a ser referidas, foram consideradas de grande valor e prestígio, tendo Gomes Teixeira recebido vários elogios de diferentes matemáticos estrangeiros que focavam, nomeadamente, a sua originalidade, rigor e clareza na abordagem científica dos conteúdos.

Como já foi referido anteriormente, Gomes Teixeira dedicou-se mais tarde à geometria. Iniciou a sua pesquisa nesta área devido à abertura de um concurso pela *Real Academia de Ciencias de Madrid*. Em 1897, Gomes Teixeira faz chegar à Academia o trabalho intitulado *Tratado de las Curvas Especiales Notables* e, em 1898, é publicado o seu primeiro trabalho nesta área.

Assim, deu-se o início de uma nova fase da vida de Gomes Teixeira, em que este deixou de se dedicar única e exclusivamente à investigação na área de análise, passando a dedicar-se também à geometria. Este foi o início de um intenso trabalho, nesta área, donde surgiu ainda um considerável número de artigos, publicados tanto em revistas nacionais como estrangeiras, num total de setenta e dois trabalhos, segundo Maria da Graça Alves:

---

<sup>17</sup> Alfredo Monteiro apresentou também a concurso um trabalho intitulado *Estudo synthetico das secções conicas sob o ponto de vista da sua geração cyclica*.

Anos	Número total de trabalhos publicados	Número total de trabalhos sobre geometria	Anos	Número total de trabalhos publicados	Número total de trabalhos sobre geometria
1876	1	0	1905	7	2
1877	3	0	1906	6	3
1878	3	0	1907	3	3
1879	1	0	1908	1	1
1880	2	0	1909	6	4
1881	7	0	1910	4	2
1882	1	0	1911	2	2
1883	2	0	1912	8	6
1885	10	0	1913	10	8
1886	6	0	1914	8	7
1887	7	0	1915	5	5
1888	6	0	1916	6	5
1889	11	0	1917	7	6
1890	5	0	1919	1	0
1891	6	0	1920	2	0
1892	7	0	1921	2	0
1893	2	0	1922	1	0
1896	4	0	1923	4	0
1897	1	0	1924	1	0
1898	3	2	1925	2	0
1899	1	1	1926	2	0
1900	10	6	1928	1	0
1901	2	2	1930	2	1
1902	4	2	1931	1	0
1903	4	0	1934	1	0
1904	12	4			

Lista anual do n.º total de trabalhos publicados e o n.º total de trabalhos sobre geometria publicados por Gomes Teixeira

**Figura 4.3** - Quadro de comparação do número total de trabalhos publicados e o número de trabalhos sobre geometria

Como se pode observar, foi no ano de 1913 que Gomes Teixeira publicou um maior número de trabalhos nesta área, num total de oito. Outro ano a salientar é o de 1903 em que, ao contrário do anterior, Gomes Teixeira não publicou qualquer artigo. Em comparação com aquilo que se fez aquando da abordagem da actividade científica na área de análise, em geometria, não se verifica uma diminuição no que diz respeito à publicação de artigos ao longo da sua vida. Pelo contrário, atendendo que Gomes Teixeira publicou artigos nesta área apenas entre os anos de 1898 e 1917, (excepto o caso de um artigo que foi publicado em 1930, após 13 anos sem qualquer publicação, intitulado *Sobre as quárticas com pontos duplos coincidentes*), foi nos últimos seis anos que a sua actividade parece mais intensa, visto que neste período publica em média seis artigos por ano.

Alguns destes trabalhos foram também compilados e inseridos na colecção *Obras sobre Mathematica*, compondo os volumes I e II.

Apesar desta vasta panóplia de trabalhos na área de geometria, foi com o trabalho *Tratado de las curvas especiales notables* que Gomes Teixeira se imortalizou.

Tal como foi abordado no capítulo 1, em resposta ao concurso anunciado pela *Real Academia de Ciencias de Madrid* em 1895, fizeram-se chegar a esta Academia dois trabalhos, um de Gino Loria e outro de D. Joaquín de Vargas y Aguirre, para além do trabalho de Gomes Teixeira.

Após ser tornado público o resultado da apreciação das três memórias apresentadas a concurso, onde ditava que Gomes Teixeira a par de Gino Loria tinha sido premiado, foram várias as congratulações que se fizeram chegar, mais uma vez, a Gomes Teixeira, elogiando-o agora numa área diferente – a geometria.

Com este favorável resultado, Gomes Teixeira passou a dedicar-se mais intensamente a esta área como o sublinha Rodolfo Guimarães no seguinte comentário:

*Após o estudo que tam bom resultado tivera, Gomes Teixeira, o antigo analista, começou a ocupar-se, de preferência e com entusiasmo, de questões de geometria, que achou muito mais interessantes que as de análise, evidentemente muito áridas, chegando um dia, em conversa, a manifestar-me pesar em não se ter há mais tempo dedicado à geometria, mais fácil que a análise, e onde se encontram a cada passo horizontes novos. (2000, p.341)*

Ainda referente a este trabalho, é de salientar o facto de Gomes Teixeira ter publicado mais tarde um outro trabalho, onde completou o estudo de algumas curvas e inseriu o estudo de novas curvas, na medida em que, ainda durante o concurso, Gomes Teixeira salientou que a obra apresentada não estava completa pela falta de tempo.

Para além da análise e da geometria, Gomes Teixeira também se dedicou à área da história da matemática. A dedicação demonstrada por esta área também já foi evidenciada anteriormente, aquando da referência da obra *Tratado de las Curvas*, onde Gomes Teixeira, para além de fazer um estudo das curvas notáveis, enriquece a obra com um pouco da história de cada uma (comentários bibliográficos). Gomes Teixeira refere mesmo que:

*Tive sempre grande predilecção pelos estudos históricos. Nos meus trabalhos matemáticos, procurei ligar todos os assuntos geométricos e analíticos de que me ocupei, com informações relativas a sua invenção e,*

*no meu “Traité des courbes spéciales”, dei mesmo um desenvolvimento à história das curvas. Por isso este tratado, depois de ter sido premiado pela Academia das Ciências de Madrid pelo seu conteúdo geral, foi ainda coroado pelo Instituto de França com o prémio de Filosofia e História das Ciências.* (Alves, 2004, p.266)

Esta preocupação em evidenciar marcos históricos, relativos aos diferentes estudos feitos, é uma constante nas suas obras, não sendo exclusivo ao *Tratado de las Curvas*. Até mesmo na elaboração de textos de apoio aos seus alunos havia a preocupação de inserir notas históricas. Neste sentido, o seu primeiro trabalho, em 1881, que tinha como objectivo servir de manual para os alunos, intitulado *Prelecção sobre a origem e sobre os princípios do calculo infinitesimal*, apresenta uma pequena introdução relatando a origem do cálculo infinitesimal.

Apesar de Gomes Teixeira ter elaborado alguns escritos de carácter bibliográfico sobre matemáticos, inseridos no *Jornal de Sciencias Mathematicas e Astronomicas*<sup>18</sup>, e mais tarde nos *Annaes*, foi em 1902 que o autor publica o seu primeiro artigo, dedicado exclusivamente à história da matemática, no *Boletim da Direcção Geral de Instrucção Publica*, intitulado *Apontamentos biographicos sobre Daniel Augusto da Silva*, onde apresenta uma biografia de Daniel Augusto da Silva. Este trabalho, dedicado a Daniel da Silva, surge da “necessidade” de Gomes Teixeira demonstrar a sua admiração e o seu agradecimento pelo apoio e incentivo dado por este a Gomes Teixeira no início da sua carreira, sendo estas as primeiras de muitas outras palavras dedicadas a este matemático português. Este trabalho foi inserido no primeiro volume da colecção *Obras sobre Mathematica*, publicada pelo Governo Português em 1904.

A este, seguiram-se outros elogios a matemáticos portugueses, como Anastácio da Cunha, Monteiro da Rocha e Pedro Nunes, tanto através da publicação de artigos, como proferindo conferências (em Portugal e no estrangeiro). Um exemplo é a conferência proferida por Gomes Teixeira, em 1923, na Academia de Ciências de Lisboa, intitulada *Elogio histórico do Doutor José Monteiro da Rocha*, seu antigo professor na Faculdade de Mathematica da Universidade de Coimbra, onde demonstra a grandiosidade da sua obra e

---

<sup>18</sup> O primeiro trabalho deste género publicado nesta revista remonta a 1878, onde o autor escreve sobre Bellavitis.

também o carinho e admiração que tem pela sua pessoa. Henrique de Vilhena salienta mesmo as palavras proferidas por Gomes Teixeira durante a conferência:

*Evocar a sua memória nesta sala em sessão solene, não foi para mim somente uma grande honra, foi também um motivo de intensa satisfação. A Universidade de Coimbra é com efeito semelhante a um pomar, em que por ordem do Marquês de Pombal foi plantada uma nova árvore, a sua Faculdade de Matemática. Monteiro da Rocha foi o hortelão encarregado de tratar dela nos primeiros anos. Cultivou-a com amor, enquanto pôde, e a árvore cresceu, floresceu e frutificou. Os seus frutos excelentes foram colhidos por numerosos estudantes de sucessivas gerações académicas. Eu fui um dêles, e por isso adoro a árvore, como se fôsse sagrada, e venero a memória do varão insigne que primeiro cuidou dela. (1936, p.53)*

Outro matemático português a quem Gomes Teixeira se dedicou, evidenciando a sua grandiosa obra, foi Pedro Nunes. Em 1921, fez um discurso dedicado à *colaboração dos espanhóis e portugueses nas grandes navegações do século XV e XVI*. Mais tarde, em 1925, numa obra intitulada *Panegíricos e conferências*, inclui um artigo onde analisa e comenta trabalhos de Pedro Nunes, como *De Crepusculis*, *Livro de Álgebra* e *De erratis Orontii Finei*, indicando o que este fez de mais relevante, bem como os seus erros, os seus métodos, os seus instrumentos (salientando a invenção do *Nonius*), não deixando de faltar uma breve referência ao meio social em que viveu este matemático ilustre.

Uma outra conferência de Gomes Teixeira, dedicada a esta área, intitula-se *Biographias de quatro mulheres celebres na Philosophia e nas Mathematicas*, onde, como o próprio nome evidencia, Gomes Teixeira fez uma breve resenha da biografia de quatro matemáticas, sendo elas: Hipatia de Alexandria, Sofia Kovalevsky, Maria Agnesi e Sofia Germain. Em 1930, Gomes Teixeira publica um livro, intitulado *Uma santa e uma sábia* e dedicado, neste caso, apenas a duas mulheres: a Sofia Kovalevsky (considerando-a sábia) e, pela primeira vez, à Santa Clara de Assis.

Na obra *Panegíricos e Conferências*, já citada anteriormente, de 1925, Gomes Teixeira reúne alguns dos artigos e conferências num conjunto de 8 capítulos. Os primeiros quatro capítulos são constituídos por elogios a matemáticos portugueses e os últimos

quatro compreendem conferências proferidas por ele, sendo exemplo disso *Biographies de quatro mulheres celebres na Philosophia e nas Mathematicas*.

Por último, salienta-se a obra intitulada *A História das Matemáticas em Portugal*, publicada já depois da sua morte, em 1934, onde Gomes Teixeira tenta relatar um pouco da história da cultura das Matemáticas em Portugal até ao século XIX.

Para terminar esta breve referência à actividade científica de Gomes Teixeira, não queríamos deixar de referir que, na última década da sua vida, para além de trabalhos científicos, este também se dedicou à escrita de livros sobre temas religiosos.

Um dos livros publicado neste âmbito foi já aqui mencionado, *Uma santa e uma sábia*, onde Gomes Teixeira faz um paralelismo entre a vida de uma matemática e a de uma santa. São também exemplos desta dedicação por temas religiosos os livros intitulados *Santuários de Montanha*, publicado em 1926, *Apoteose de S. Francisco de Assis*, de 1928, e *Santo António de Lisboa*, de 1931.

Gomes Teixeira justifica esta mudança das matemáticas para a religião da seguinte forma:

*Estou com 76 anos. Fatigado. Resolvi de há muito abandonar as sciencias matematicas para as quais vivi grande parte da minha vida. Já me não sentia com boa cabeça para cálculos e locubrações. Mas, assim, como o exercício da marcha e do movimento são precisos para que se não emperrem os membros cansados, tambem o trabalho é indispensavel ao nosso espirito curioso, para que se não apague e não deixe de nos alumiar na vida. E porque estava acostumado a não passar um dia sem trabalhar, devotei-me ao estudo das grandes figuras do cristianismo. (...) É, como vê, uma doce maneira de ocupar agradavelmente a minha velhice.*  
(Alves, 2004, p.71)

## Bibliografia

---

---

- [1] ALVES, Maria da Graça - *Francisco Gomes Teixeira o homem, o cientista o pedagogo*. Tese de Doutoramento. Braga: Universidade do Minho, 2004.
- [2] AMORIM, Diogo Pacheco - *Da cultura geral do universitário*. Coimbra, 1951.
- [3] ANTON, Howard – *Cálculo, um novo horizonte*. Vol.2, 6.ª edição. Porto Alegre: Bookman, 2000.
- [4] BEIRES, Rodrigo Sarmiento – *Evocação da vida e da obra do Professor Gomes Teixeira*. In Anais da Faculdade de Ciências do Porto, Extracto do tomo XXXV, p.5-24, Porto: Imprensa Portuguesa, 1950-1951.
- [5] BERGER, Marcel - *Geometry I*. Berlin: Springer, 1994.
- [6] BERGER, Marcel - *Geometry II*. Berlin: Springer, 1996.
- [7] BOYER, Carl B. *História da Matemática*. 2.ª edição, tradução por Elza F. Gomide. São Paulo: Editora Edgard Blücher Ltda, 1999.
- [8] CARMO, Manfredo P. - *Differential Geometry of Curves and Surfaces*. New Jersey: Printice Hall, 1976.
- [9] DAVIS, Philip J. - *Spirals from Theodorus to Chaos*. USA: A K Peters, Massachusetts, 1993.
- [10] ESTRADA, Maria Fernanda, et al. - *História da Matemática*. Lisboa: Universidade Aberta, 2000.
- [11] EVES, Howard - *An Differential geometry of Curves and surfaces with Mathematica*. 2.ª edição. CRC Press. 1998.



- 
- [12] EVES, Howard - *Introdução à História da Matemática*. 2.<sup>a</sup> edição. Campinas: Editora da Unicamp, 1994.
- [13] GRAY, Alfred - *Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces*. Florida: CRC Press, 1993.
- [14] GRIBBIN, John - *História da Ciência de 1543 ao presente*. Mem Martins: Publicações Europa-América, 2005.
- [15] GUIMARÃES, Rodolfo - *Biografia de F. G. Teixeira, História e Memórias da Academia das Ciências de Lisboa*. In Silva, Jaime C. - *Antologias de textos essenciais sobre a História da Matemática em Portugal*. Lisboa: SPM, 2000. pp.319-351.
- [16] HEATH, T. L. - *The Works of Archimedes*. Cambridge: At the University Press, 1897. (University of Michigan Electronic Library)
- [17] KATZ, Victor J. - *A History of Mathematics*. Pearson: Addison Wesley, 2004.
- [18] KLEIN, F.; LIE, S. - *Ueber diejenigen ebenen Curven, welche durch ein geschlossenes System von einfach unendlich vielen vertauschbaren linearen Transformationen in sich übergehen*. In *Mathematische Annalen*, t.IV. Leipzig: Druck und Verlag von B. G. Teubner, 1871, pp. 50-84.
- [19] LAWRENCE, J. Dennis - *A catalog of Special Plane Curves*. New York: Dover publications, Inc., 1972.
- [20] LOCKWOOD, E. H. - *A book of Curves*. Cambridge: Cambridge University Press, 1976.
- [21] LORIA, Gino - *Spezielle algebraische und transzendente ebene Kurven Theorie und Geschichte*. Vol. I. Leipzig e Berlim: Editora B. G. Teubner, 1911a.
- [22] LORIA, Gino - *Spezielle algebraische und transzendente ebene Kurven Theorie und Geschichte*. Vol. II. Leipzig e Berlim: Editora B. G. Teubner, 1911b.

- 
- [23] Mathematical Society of Japan - *Encyclopedic dictionary of mathematics*. Cambridge: MIT, 1980.
- [24] OLIVEIRA, J. Silva - *Daniel Augusto da Silva*. In Antologias de textos essenciais sobre a História da Matemática em Portugal, ed. J. C. e Silva, SPM, Lisboa, 2000, p.299-313.
- [25] OLIVEIRA, J. Tiago - *O essencial sobre a História das Matemáticas em Portugal*. Lisboa: Imprensa Nacional - Casa da moeda, 1989.
- [26] OLNEY, Edward – *A general geometry and calculus*. New York: Sheldon and company, 1871. (University of Michigan Electronic Library)
- [27] PORTO EDITORA – Dicionário da língua portuguesa. 6.<sup>a</sup>edição. Porto: Porto Editora, 1993. (Dicionários editora).
- [28] PRATS, Leopoldo Crusat; RULL, Manuel Daurella – *Geometria Descriptiva aplicada al dibujo*. Barcelona: Bosch, 1950.
- [29] SALMON, George - *A treatise on the higher plane curves: intended as a sequel to a treatise on conics sections*. Photographic reprint of the third Edition of 1879. New York: G. E. Stechert & Co, 1934. (University of Michigan Electronic Library)
- [30] SICELOFF, Lewis Parker, et al. – *Analytic Geometry*. Boston: Ginn and Company, 1922. (University of Michigan Electronic Library)
- [31] SMITH, David Eugene - *History of mathematics*. Vol. 1. New York: Dover publications, Inc., 1923.
- [32] SOUSA, J. M. Rodrigues – *Trissecção do ângulo e duplicação do cubo: as soluções da antiga Grécia*. Tese de Mestrado, Faculdade de Ciências da Universidade do Porto, 2001.
- [33] STOKER, J. J. – *Differential Geometry*. New York: Wiley- Interscience, 1989.
- [34] STRUIK, Dirk J. - *História Concisa das Matemáticas*. 3.<sup>a</sup>edição. Lisboa: Gradiva, 1997.

- 
- [35] TEIXEIRA, Francisco Gomes - *Obras Sobre Matemática*. Vol.1. Coimbra: Imprensa da Universidade, 1904.
- [36] TEIXEIRA, Francisco Gomes - *Tratado de las Curvas Especiales Notables*. Madrid: Imprenta de la “Gaceta de Madrid”, 1905.
- [37] TEIXEIRA, Francisco Gomes - *Obras Sobre Matemática*. Vol.2. Coimbra: Imprensa da Universidade, 1906a.
- [38] TEIXEIRA, Francisco Gomes - *Obras Sobre Matemática*. Vol.3. Coimbra: Imprensa da Universidade, 1906b.
- [39] TEIXEIRA, Francisco Gomes – *Traité des Courbes spéciales remarquables: Planes et gauches*. Tomo I. In *Obras Sobre Matemática*, Vol.4. Coimbra: Imprensa da Universidade, 1908.
- [40] TEIXEIRA, Francisco Gomes -*Traité des courbes spéciales remarquables: Planes et gauches*. Tomo II. In *Obras Sobre Matemática*, Vol.5. Coimbra: Imprensa da Universidade, 1909a.
- [41] TEIXEIRA, Francisco Gomes – *Sobre algumas propriedades de duas curvas notáveis*. Tomo VII. In *Jornal de Sciencias Mathematicas, Physicas e Naturaes*, 2ªséria, tomo VII, nº XXVIII. Lisboa: Typographia da Academia, 1909b.
- [42] TEIXEIRA, Francisco Gomes - *Curso de Analyse Infinitesimal – Calculo Integral*. 3.ªedição. In *Obras Sobre Matemática*. Vol.6. Coimbra: Imprensa da Universidade, 1912.
- [43] TEIXEIRA, Francisco Gomes – *História das Matemáticas em Portugal*. Coimbra: Imprensa da Universidade, 1934.
- [44] TEIXEIRA, Francisco Gomes -*Traité des courbes spéciales remarquables: Planes et gauches*. New York: Chelsea Publishing Company Bronx, 1971.
- [45] VAN DER WAERDEN, B. L. – *Science awakening*. Groningen ,Holland: P. Noordhoff LTD, 1954.

- [46] VARGAS Y AGUIRRE, Joaquin - *Catálogo general de curvas*. Madrid: Imprenta de la “Gaceta de Madrid”, 1908.
- [47] VELOSO, Eduardo - *Geometria, Temas Actuais*. Lisboa: Instituto de Inovação Educacional (Grafis, CRL), 1998.
- [48] VILHENA, Henrique - *O Professor Doutor Francisco Gomes Teixeira: elogio, notas, notas de biografia, bibliografia, documentos*. Lisboa: “Oficinas Fernandes”, 1936.

## URL

<http://www.mathcurve.com/courbes2d/courbes2d.shtml>

<http://turnbull.mcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/>

<http://www.mathcurve.com/courbes2d/cochleoid/cochleoid.shtml>

<http://www.mathcurve.com/courbes2d/fermat/fermatspirale.shtml>

<http://www.mathcurve.com/courbes2d/cochleoid/cochleoid.shtm>

<http://www.mathematische-basteleien.de/spiral.htm>

[http://www.formacion.pntic.mec.es/web\\_espisal/matematicas\\_1/espisalmatema.htm](http://www.formacion.pntic.mec.es/web_espisal/matematicas_1/espisalmatema.htm)

<http://www.divulgamat.net/weborriak/Exposiciones/Expode/AntonioPerez/Espiral.asp>

[http://www.xahlee.org/SpecialPlaneCurves\\_dir/specialPlaneCurves.html](http://www.xahlee.org/SpecialPlaneCurves_dir/specialPlaneCurves.html)

---



---

## Notação

---



---

$(\rho, \theta)$	coordenadas polares $f(\rho, \theta) = 0$ representa uma equação polar arbitrária
$V$	amplitude do ângulo formado entre a tangente e o vector do ponto de tangência
$\alpha$	amplitude do ângulo formado entre a normal e o vector do ponto de tangência
$s$	comprimento do arco de uma curva
$R$	raio de curvatura
$(s, R)$	coordenadas intrínsecas (Cesáro) <sup>1</sup>
$A$	área
$c$	curvatura
sin	seno
cos	co-seno
tang	tangente
sinh	seno hiperbólico
cosh	co-seno hiperbólico
$O$	origem; pólo
$T$	comprimento da tangente
$N$	comprimento da normal
$S_n$	subnormal
$S_t$	subtangente
$\dot{O}A$	semi-recta com origem no ponto $O$ e que passa por $A$
$[MON]$	triângulo de vértices $M, O$ e $N$
$[MN]$	segmento de recta

---

<sup>1</sup> Lawrence, 1972, p.x.

---

$\overset{\square}{AB}$	arco de uma curva
$\overset{\square}{V}$	Amplitude do ângulo $V$
arch	co-seno-área

## APÊNDICES

## Apêndice I

Artigos que compõem o volume II de *Obras sobre Mathematica* de acordo com a revista onde foram publicados

Revista	Título do artigo	Ano de Publicação	Cap.
Acta matemática - <b>Stockholm</b>	Notes sur deux travaux d'Abel relatifs à l'intégration des différences finies	1904	I
Jornal de Sciencias mathematicas e astronomicas - <b>Coimbra</b>	Sur la décomposition des fractions rationnelles	1877 e 1878	II
Bulletin des Sciences Mathématiques - <b>Paris</b>	Extrait d'une lettre adressée à M. Hermite	1893	III - I
	Sur la fonction $p(u)$	1892	III - V
	Extrait d'une lettre adressée à M. Hermite	1888	XIII - VIII
	Extrait d'une lettre de F. Gomes Teixeira à M. Jules Tannery	1887	XIII - IX
Mémoires de la Société Royale des Sciences de Liège - <b>Liège</b>	Sur une formule d'interpolation	1883	III - II
Nouvelles Annales de Mathématiques - <b>Paris</b>	Sur la formule de Stirling	1891	III - III
	Sur l'interpolation au moyen des fonctions circulaires	1885	III - XI
	Sur une formule pour le calcul numérique des logarithmes	1905	XIII - I
	Sur une formule d'Analyse	1886	XIII - IV
	Sur une propriété de la strophoïde et sur les cubiques qui coïncident avec leurs cissoïdales	1906	XIV - II
Gaceta de Matematicas elementales - <b>Vitoria</b>	Sobre la teoría de logaritmos	1903	III - IV



Bulletin de la Société phisico-mathématique de Kasan - <b>Kasan</b>	Remarques sur un travail publié par N. Bougaïev	1903	III - VI
Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure de Paris – <b>Paris</b>	Sur le développement des fonctions satisfaisant a une équation différentielle	1885	III - VII
	Deuxième Note sur le développement des fonctions satisfaisant a une équation differentielle	1886	III - VIII
Journal für die reine und angewandte Mathematik, gegründet von Crelle - <b>Berlin</b>	Sur un théorème de M. Hermite relatif à l'interpolation	1887	III - IX
	Sur quelques aplications des séries ordonnées suivant les puissances du sinus	1906	XI
Bulletin de la Société Royale des Sciences de Bohême - <b>Prague</b>	Sur la réduction des intégrales hyperelliptiques	1888	III - X
L'Enseignement mathématique - <b>Genève</b>	Sur une formule trigonométrique d'interpolation	1904	III - XII
	Sur le nombre des tangentes qu'on Peut mener à une courbe par un point situé sur la courbe	1905	XII - IV
	Sur les démonstrations de deux formules pour le calcul des nombres de Bernoulli	1905	XIII - III
Universidade de Coimbra - <b>Coimbra</b>	Integração das equações às derivadas parciais de segunda ordem	1875	IV
	Sobre o emprego dos eixos coordenados oblíquos na Mecanica Analytica	1876	VI
Mémoires de la Société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux – <b>Bordeaux</b>	Sur le nombre des fonctions arbitraires des intégrales des équations aux dérivées partielles	1878	V - I
Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris – <b>Paris</b>	Sur l'intégration d'une équation aux dérivées partielles du deuxième ordre	1881	V - II
Bulletins de l'Académie Royale des Sciences de Belgique - <b>Bruxelles</b>	Sur l'intégration d'une classe d'équations aux dérivées partielles du deuxième ordre	1882	V - III

American Journal of Mathematics - <b>Baltimore</b>	Sur les nombres de Bernoulli	1885	VII
Mémoires de l'Académie Royale des Sciences de Belgique - <b>Bruxelles</b>	Sur la série de Lagrange et ses applications	1904	VIII
Annali di Matematica – <b>Milano</b>	Sur la théorie des cubiques circulaires et des quartiques bicirculaires	1904	IX
Giornale di Matematiche – <b>Napoli</b>	Sur un problème de Gauss et une classe particulière de fonctions symétriques	1904	X
The Quarterly Journal of pure and applied Mathematics - <b>London</b>	On the rectification of Booth's logarithmic ellipse and logarithmic hyperbola	1904	XII - I
Revista trimestral de Matemáticas - <b>Zaragoza</b>	Sobre una propiedad de las cúbicas circulares	1904	XII - II
Periodico di Matematica – <b>Livorno</b>	Nota sull'applicazione del theorema di Fagnano agli archi della lumaca di Pascal e della sinussoide	1904	XII - III
Mathesis - <b>Gand</b>	Sur les transformations linéaires	1906	XII - V
Nieuw Archief loor Wiskunde, tweede reeks - <b>Amsterdam</b>	Sur quelques propriétés des cubiques	1906	XII - VI
Archiv der Mathematik und Physik - <b>Leipzig</b>	Sur quelques intégrales définies	1905	XIII - II
	Sur deux manières de construire les spiriques de Perseus	1906	XIV - I
Gaceta de Matemáticas elementales - <b>Madrid</b>	Sobre una ecuación lineal indeterminada	1904	XIII - V
	De algunas series que pueden sumarse por los métodos elementales	1904	XIII-VI
Comptes rendus des séances de la Société Royale des Sciences de Bohême - <b>Prague</b>	Remarques sur l'emploi de la fonction $p(u)$ dans la théorie des fonctions elliptiques	1892	XIII - VII
	Sur l'intégrale $\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$	1889	XIII - X
Intermédiaire des Mathématiciens – <b>Paris</b>	Sur une fonction numérique	1905	XIII - XI

---

---

## Apêndice II

---

---

Comparação da notação utilizada por Gomes Teixeira e da notação utilizada actualmente.

<b>Notação utilizada na obra de Gomes Teixeira</b>	<b>Notação actual</b>	<b>Designação</b>
<i>tang</i>	<i>tg</i> ou <i>tan</i>	Tangente
<i>OA</i>	$\overline{OA}$	Distância entre os dois pontos
<i>log</i>	<i>log</i> ou <i>ln</i>	Logaritmo de base <i>e</i>
<i>cot</i>	<i>cot</i> ou <i>cotg</i>	Co-tangente

### Apêndice III

Esta tabela inclui as propriedades principais apresentadas por Gomes Teixeira na obra *Traité des Courbes*.

	Equação Polar	Equação Intrínseca	Subnormal $S_n$
Espiral Arquimedes	$\rho = a\theta$	----	$a$
Espiral Galileu	$\rho = a - b\theta^2$	----	---
Espiral Fermat	$\rho^2 = a^2\theta$	----	$\frac{a^2}{2\rho}$
Espiral parabólica	$(\rho - a)^2 = 2pa\theta$	----	---
Espiral hiperbólica	$\rho\theta = m$	----	$-\frac{\rho^2}{m}$
Lítuo	$\rho^2\theta = a^2$	----	---
Espiral logarítmica	$\rho = Ce^{c\theta}$	----	$c\rho$
Espiral Poincot	$\rho = \frac{2a}{e^{m\theta} + e^{-m\theta}}$	----	---
Espiral tractriz	$\theta = \pm \left[ \frac{\sqrt{a^2 - \rho^2}}{\rho} - \arccos \frac{\rho}{a} \right]$	$R^2 = a^2 \frac{e^{\frac{2s}{a}} - 1}{\left( e^{\frac{2s}{a}} - 2 \right)^2}$	----
Tractriz circular	$\theta = \pm \int_a^b \frac{\sqrt{4a^2\rho^2 - (\rho^2 + a^2 - b^2)^2}}{\rho(\rho^2 - a^2 + b^2)} d\rho$	----	----
Cochleide	$\rho = a \frac{\sin \theta}{\theta}$	----	---
Clothoide	----	$R_s = a^2$	----
Pseudo-catenária	----	$R = k^2 a - \frac{s^2}{a}$	----
Pseudo-tractriz	----	$R = ka\sqrt{1 - e^{-\frac{2s}{a}}}$	----

	Subtangente $S_t$	Comprimento da normal $N$
Espiral Arquimedes	$\rho\theta$	$\sqrt{a^2 + \rho^2}$
Espiral Galileu	---	---
Espiral Fermat	$\frac{2\rho^3}{a^2}$	---
Espiral parabólica	$\frac{\rho^2(\rho - a)}{ap}$	---
Espiral hiperbólica	$-m$	$\frac{\rho}{m}\sqrt{\rho^2 + m^2}$
Lítuo	$-\frac{2a^2}{\rho}$	---
Espiral logarítmica	$\frac{\rho}{c}$	$\rho\sqrt{1+c^2}$
Espiral Poincot	---	$\frac{\rho}{a}\sqrt{(1+m^2)a^2 - m^2\rho^2}$
Espiral tractriz	----	----
Tractriz circular	----	----
Cochleide	---	---
Clothoide	----	----
Pseudo-catenária	----	----
Pseudo-tractriz	----	----

	Comprimento da tangente $T$	Ângulo formado pela tangente com o vector associado ao ponto de tangência $V$
Espiral Arquimedes	---	$\frac{\rho}{a}$
Espiral Galileu	---	$-\frac{\rho}{2\sqrt{b(a-\rho)}}$
Espiral Fermat	---	$\frac{2\rho^2}{a^2}$
Espiral parabólica	---	---
Espiral hiperbólica	$\sqrt{\rho^2 + m^2}$	---
Lítuo	---	---
Espiral logarítmica	---	---
Espiral de Poinot	---	---
Espiral tractriz	---	----
Tractriz circular	---	----
Cochleide	---	---
Clothoide	---	---
Pseudo- catenária	---	----
Pseudo- tractriz	---	----

	<b>Raio de curvatura <math>R</math></b>	<b>Área definida pelo vector <math>(\rho, \theta)</math> quando <math>\theta</math> varia</b>
<b>Espiral Arquimedes</b>	$\frac{(\rho^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}}{\rho^2 + 2a^2}$	$\frac{1}{6a}(\rho_1^3 - \rho_0^3)$
<b>Espiral Galileu</b>	$\frac{(\rho^2 - 4b\rho + 4ab)^{\frac{3}{2}}}{\rho^2 - 6b\rho + 8ab}$	$\frac{1}{2}\left(a^2\theta - \frac{2}{3}ab\theta^3 + \frac{1}{5}b^2\theta^5\right)$
<b>Espiral Fermat</b>	$\frac{(4\rho^4 + a^4)^{\frac{3}{2}}}{2\rho(4\rho^4 + 3a^4)}$	$\frac{a^2}{4}(\theta_1^2 - \theta_0^2)$
<b>Espiral parabólica</b>	---	$\frac{1}{2}\left[a^2\theta + pa\theta^2 \pm \frac{4}{3}a\theta\sqrt{2pa\theta}\right]$
<b>Espiral hiperbólica</b>	$\frac{\rho(m^2 + \rho^2)^{\frac{3}{2}}}{m^3}$	$\frac{m}{2}(\rho_0 - \rho_1)$
<b>Lítuo</b>	$\frac{\rho(4a^4 + \rho^4)^{\frac{3}{2}}}{2a^2(\rho^4 - 4a^4)}$	$a^2 \log \frac{\rho_0}{\rho_1}$
<b>Espiral logarítmica</b>	$\rho\sqrt{1+c^2}$	$\frac{1}{4c}(\rho^2 - \rho_0^2)^2$
<b>Espiral Poincot</b>	$\frac{\rho\left[(1+m^2)a^2 - m^2\rho^2\right]^{\frac{3}{2}}}{a^3(1+m^2)}$	$\frac{a^2}{m}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{e^{2m\theta} + 1}\right)$
<b>Espiral tractriz</b>	$R = \frac{a\rho\sqrt{a^2 - \rho^2}}{a^2 - 2\rho^2}$	$\frac{1}{8}a^2[\pi - 2\alpha - \sin 2\alpha]$
<b>Tractriz circular</b>	---	$\int \frac{\rho\sqrt{4a^2\rho^2 - (\rho^2 + a^2 - b^2)^2}}{\rho^2 - a^2 + b^2} d\rho$
<b>Cochleóide</b>	$R = \frac{\rho(a^2 + \rho^2 - 2\rho a \cos \theta)^{\frac{3}{2}}}{2a^2 \operatorname{sen}\theta(a - \rho \cos \theta)}$	$\frac{a^2(\cos(2\theta) - 1)}{4\theta} + \frac{a^2}{2} \int_0^\theta \frac{\sin(2\theta)}{\theta} d\theta$
<b>Clothoide</b>	----	----
<b>Pseudo- catenária</b>	----	----
<b>Pseudo- tractriz</b>	----	----

	<b>Comprimento do arco da espiral</b>
	$s$
<b>Espiral Arquimedes</b>	$\frac{\rho}{2a} \sqrt{\rho^2 + a^2} + \frac{a}{2} \log \left( \frac{\rho + \sqrt{\rho^2 + a^2}}{a} \right)$
<b>Espiral Galileu</b>	$\frac{1}{3} b \left[ (\theta^2 + 4)^{\frac{3}{2}} - 8 \right] \quad a = 0$
<b>Espiral Fermat</b>	$\frac{a}{3} \left( \sqrt{\theta(4\theta^2 + 1)} + \int_0^\theta \frac{d\theta}{\sqrt{\theta(4\theta^2 + 1)}} \right)$
<b>Espiral parabólica</b>	$\frac{1}{pa} \int_a^\rho \sqrt{\rho^2 (\rho - a)^2 + p^2 a^2} d\rho$
<b>Espiral hiperbólica</b>	$T_1 - T_0 + \frac{m}{2} \log \frac{(T_1 - m)(T_0 + m)}{(T_1 + m)(T_0 - m)}$
<b>Lítuo</b>	$a \left[ \frac{\sqrt{\theta_0(1+4\theta_0^2)}}{\theta_0} - \frac{\sqrt{\theta_1(1+4\theta_1^2)}}{\theta_1} + 4 \int_{\theta_0}^{\theta_1} \frac{\theta d\theta}{\sqrt{\theta(1+4\theta^2)}} \right]$
<b>Espiral logarítmica</b>	$\frac{\rho}{\cos V}$
<b>Espiral Poincot</b>	$\frac{a\sqrt{1+m^2}}{m} \left[ \frac{5+m^2}{3(1+m^2)} \int_{v_0}^v \frac{dv}{\Delta v} - \int_{v_0}^v \frac{v}{\Delta v} dv + \frac{\Delta v}{2(v+h+1)} - \frac{1}{4} \Delta v_0 \right]$
<b>Espiral tractriz</b>	---
<b>Tractriz circular</b>	$b \log \frac{\rho^2 - a^2 + b^2}{a^2 - a^2 + b^2}$
<b>Cochleóide</b>	---
<b>Clothoide</b>	---
<b>Pseudo-catenária</b>	---
<b>Pseudo-tractriz</b>	---



### Apêndice IV

Esta tabela inclui as propriedades obtidas por Gomes Teixeira mas com as correcções devidas, bem como as propriedades obtidas na secção 3.2.

	<b>Equação Polar</b>	<b>Equação Intrínseca</b>	<b>Subnormal S<sub>n</sub></b>
<b>Espiral Arquimedes</b>	$\rho = a\theta$	----	$a$
<b>Espiral Galileu</b>	$\rho = a - b\theta^2$	----	$-2b\theta$
<b>Espiral Fermat</b>	$\rho^2 = a^2\theta$	----	$\frac{a^2}{2\rho}$
<b>Espiral Parabólica</b>	$(\rho - a)^2 = 2pa\theta$	----	$\frac{pa}{\rho - a}$
<b>Espiral hiperbólica</b>	$\rho\theta = m$	----	$-\frac{\rho^2}{m}$
<b>Lítuo</b>	$\rho^2\theta = a^2$	----	$-\frac{\rho^3}{2a^2}$
<b>Espiral logarítmica</b>	$\rho = Ce^{c\theta}$	----	$c\rho$
<b>Espiral Poinsoit</b>	$\rho = \frac{2a}{e^{m\theta} + e^{-m\theta}}$	----	$-\rho^2 \frac{m(e^{m\theta} - e^{-m\theta})}{2a}$
<b>Espiral Tractriz</b>	$\theta = \pm \left[ \frac{\sqrt{a^2 - \rho^2}}{\rho} - \arccos \frac{\rho}{a} \right]$	$R^2 = a^2 \frac{e^{\frac{2s}{a}} - 1}{\left( e^{\frac{2s}{a}} - 2 \right)^2}$	----
<b>Tractriz Circular</b>	$\theta = \pm \int_a^\rho \frac{\sqrt{4a^2\rho^2 - (\rho^2 + a^2 - b^2)^2}}{\rho(\rho^2 - a^2 + b^2)} d\rho$	----	----
<b>Cochleide</b>	$\rho = a \frac{\sin \theta}{\theta}$	----	$\frac{\rho(a \cos \theta - \rho)}{a \sin \theta}$
<b>Clothoide</b>	----	$R_s = a^2$	----
<b>Pseudo-catenária</b>	----	$R = k^2 a - \frac{s^2}{a}$	----
<b>Pseudo-tractriz</b>	----	$R = ka \sqrt{1 - e^{-\frac{2s}{a}}}$	----

	Subtangente $S_t$	Comprimento da normal $N$
<b>Espiral Arquimedes</b>	$\rho\theta$	$\sqrt{a^2 + \rho^2}$
<b>Espiral Galileu</b>	$-\frac{\rho^2}{2\sqrt{b(a-\rho)}}$	$\sqrt{\rho^2 + 4b(a-\rho)}$
<b>Espiral Fermat</b>	$\frac{2\rho^3}{a^2}$	$\frac{1}{2\rho}\sqrt{4\rho^4 + a^4}$
<b>Espiral parabólica</b>	$\frac{\rho^2(\rho-a)}{ap}$	$\sqrt{\rho^2 + \frac{pa}{2\theta}}$
<b>Espiral hiperbólica</b>	$-m$	$\frac{\rho}{m}\sqrt{\rho^2 + m^2}$
<b>Lítuo</b>	$-\frac{2a^2}{\rho}$	$\frac{\rho}{2a^2}\sqrt{4a^4 + \rho^4}$
<b>Espiral logarítmica</b>	$\frac{\rho}{c}$	$\rho\sqrt{1+c^2}$
<b>Espiral Poinot</b>	$-\frac{2a}{m(e^{m\theta} - e^{-m\theta})}$	$\frac{\rho}{a}\sqrt{(1+m^2)a^2 - m^2\rho^2}$
<b>Espiral Tractriz</b>	----	----
<b>Tractriz Circular</b>	----	----
<b>Cochleide</b>	$\frac{a\rho\sin\theta}{a\cos\theta - \rho}$	$\frac{\rho}{a\sin\theta}\sqrt{a^2 + \rho(\rho - 2a\cos\theta)}$
<b>Clothoide</b>	----	----
<b>Pseudo-catenária</b>	----	----
<b>Pseudo-tractriz</b>	----	----

	Comprimento da tangente $T$	Ângulo formado pela tangente e pelo vector associado ao ponto de tangência $V$
<b>Espiral Arquimedes</b>	$\frac{\rho}{a} \sqrt{a^2 + \rho^2}$	$\frac{\rho}{a}$
<b>Espiral Galileu</b>	$\frac{\rho}{2} \sqrt{\frac{4b(a-\rho) + \rho^2}{b(a-\rho)}}$	$-\frac{\rho}{2\sqrt{b(a-\rho)}}$
<b>Espiral Fermat</b>	$\frac{\rho}{a^2} \sqrt{a^4 + 4\rho^4}$	$\frac{2\rho^2}{a^2}$
<b>Espiral parabólica</b>	$\rho \sqrt{1 + \rho^2 \frac{2\theta}{pa}}$	$\frac{\rho(\rho - a)}{pa}$
<b>Espiral hiperbólica</b>	$\sqrt{\rho^2 + m^2}$	$-\frac{m}{\rho}$
<b>Lítuo</b>	$\frac{1}{\rho} \sqrt{4a^4 + \rho^4}$	$-\frac{2a^2}{\rho^2}$
<b>Espiral logarítmica</b>	$\frac{\rho}{c} \sqrt{c^2 + 1}$	$\frac{1}{c}$
<b>Espiral Poinot</b>	$\frac{\rho}{m} \sqrt{\frac{m^2(a^2 - \rho^2) + a^2}{a^2 - \rho^2}}$	$-\frac{2a}{m\rho(e^{m\theta} - e^{-m\theta})}$
<b>Espiral Tractriz</b>		----
<b>Tractriz Circular</b>		----
<b>Cochleóide</b>	$\frac{\rho}{a \cos \theta - \rho} \sqrt{a(a - 2\rho \cos \theta) + \rho^2}$	$\frac{a \sin \theta}{a \cos \theta - \rho}$
<b>Clothoide</b>		---
<b>Pseudo- catenária</b>		----
<b>Pseudo- tractriz</b>		----

	<b>Raio de curvatura</b> $R$	<b>Área definida pelo vector <math>(\rho, \theta)</math></b> <b>quando <math>\theta</math> varia</b>
<b>Espiral Arquimedes</b>	$\frac{(\rho^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}}{\rho^2 + 2a^2}$	$\frac{1}{6a}(\rho_1^3 - \rho_0^3)$
<b>Espiral Galileu</b>	$\frac{(\rho^2 - 4b\rho + 4ab)^{\frac{3}{2}}}{\rho^2 - 6b\rho + 8ab}$	$\frac{1}{2}\left(a^2\theta - \frac{2}{3}ab\theta^3 + \frac{1}{5}b^2\theta^5\right)$
<b>Espiral Fermat</b>	$\frac{(4\rho^4 + a^4)^{\frac{3}{2}}}{2\rho(4\rho^4 + 3a^4)}$	$\frac{a^2}{4}(\theta_1^2 - \theta_0^2)$
<b>Espiral parabólica</b>	$\frac{\left[\rho^2(\rho - a)^2 + p^2a^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\left \rho^2(\rho - a)^3 + p^2a^2(3\rho - 2a)\right }$	$\frac{1}{2}\left[a^2\theta + pa\theta^2 \pm \frac{4}{3}a\theta\sqrt{2pa\theta}\right]$
<b>Espiral hiperbólica</b>	$\frac{\rho(m^2 + \rho^2)^{\frac{3}{2}}}{m^3}$	$\frac{m}{2}(\rho_0 - \rho_1)$
<b>Lítuo</b>	$\frac{\rho(4a^4 + \rho^4)^{\frac{3}{2}}}{2a^2 4a^4 - \rho^4 }$	$a^2 \log \frac{\rho_0}{\rho_1}$
<b>Espiral logarítmica</b>	$\rho\sqrt{1+c^2}$	$\frac{1}{4c}(\rho^2 - \rho_0)^2$
<b>Espiral Poincot</b>	$\frac{\rho\left[(1+m^2)a^2 - m^2\rho^2\right]^{\frac{3}{2}}}{a^3(1+m^2)}$	$\frac{a^2}{m}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{e^{2m\theta} + 1}\right)$
<b>Espiral Tractriz</b>	$\frac{a\rho\sqrt{a^2 - \rho^2}}{a^2 - 2\rho^2}$	$\frac{1}{8}a^2[\pi - 2\alpha - \sin 2\alpha]$
<b>Tractriz circular</b>	----	$\int \frac{\rho\sqrt{4a^2\rho^2 - (\rho^2 + a^2 - b^2)^2}}{\rho^2 - a^2 + b^2} d\rho$
<b>Cochleóide</b>	$\frac{\rho(a^2 + \rho^2 - 2\rho a \cos \theta)^{\frac{3}{2}}}{2a^2 \sin \theta (a - \rho \cos \theta)}$	$\frac{a^2(\cos(2\theta) - 1)}{4\theta} + \frac{a^2}{2} \int_0^\theta \frac{\sin(2\theta)}{\theta} d\theta$
<b>Clothoide</b>	----	----
<b>Pseudo-catenária</b>	----	----
<b>Pseudo-tractriz</b>	----	----

	<b>Comprimento do arco da espiral</b>
	$s$
<b>Espiral Arquimedes</b>	$\frac{\rho}{2a}\sqrt{\rho^2+a^2} + \frac{a}{2}\log\left(\frac{\rho+\sqrt{\rho^2+a^2}}{a}\right)$
<b>Espiral Galileu</b>	$\frac{1}{3}b\left[(\theta^2+4)^{\frac{3}{2}}-8\right]$ quando $a=0$
<b>Espiral Fermat</b>	$\frac{a}{3}\left(\sqrt{\theta(4\theta^2+1)} + \int_0^\theta \frac{d\theta}{\sqrt{\theta(4\theta^2+1)}}\right)$
<b>Espiral parabólica</b>	$\frac{1}{pa}\int_a^\rho \sqrt{\rho^2(\rho-a)^2+p^2a^2}d\rho$
<b>Espiral hiperbólica</b>	$T_1-T_0 + \frac{m}{2}\log\frac{(T_1-m)(T_0+m)}{(T_1+m)(T_0-m)}$
<b>Lítuo</b>	$a\left[\frac{\sqrt{\theta_0(1+4\theta_0^2)}}{\theta_0} - \frac{\sqrt{\theta_1(1+4\theta_1^2)}}{\theta_1} + 4\int_{\theta_0}^{\theta_1} \frac{\theta d\theta}{\sqrt{\theta(1+4\theta^2)}}\right]$
<b>Espiral logarítmica</b>	$\frac{\rho}{\cos V}$
<b>Espiral Poincot</b>	$\frac{a\sqrt{1+m^2}}{m}\left[\frac{5+m^2}{3(1+m^2)}\int_{v_0}^v \frac{dv}{\Delta v} - \int_{v_0}^v \frac{v}{\Delta v} dv + \frac{\Delta v}{2(v+h+1)} - \frac{1}{4}\Delta v_0\right]$
<b>Espiral Tractriz</b>	---
<b>Tractriz circular</b>	$b\log\frac{\rho^2-a^2+b^2}{\alpha^2-a^2+b^2}$
<b>Cochleioide</b>	---
<b>Clothoide</b>	---
<b>Pseudo-catenária</b>	---
<b>Pseudo-tractriz</b>	---