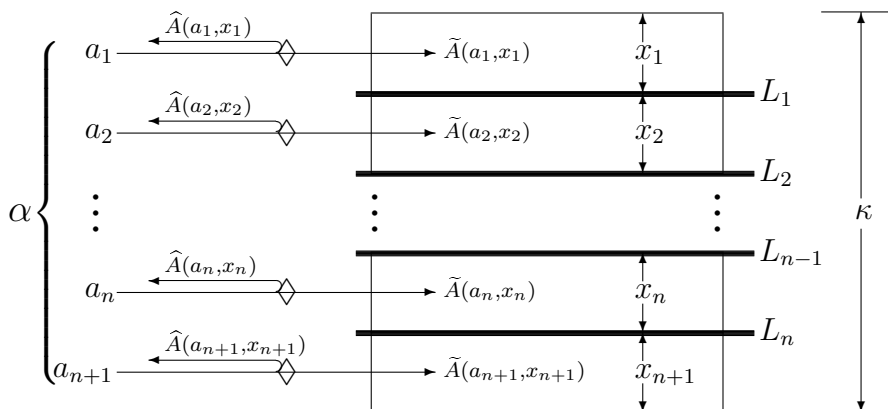


Jorge Manuel

Sá Esteves

## Equidade e Eficiência na Optimização de Sistemas Multidimensionais de Erlang-B





**Jorge Manuel  
Sá Esteves**

**Equidade e Eficiência na Optimização de  
Sistemas Multidimensionais de Erlang-B**

Dissertação apresentada na Universidade de Aveiro para cumprimento dos requisitos necessários à obtenção do grau de Doutor em Matemática, realizada sob a orientação científica do Doutor José Manuel Fernandes Craveirinha, Professor Catedrático da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade de Coimbra e do Doutor Domingos Moreira Cardoso, Professor Catedrático da Universidade de Aveiro.



À Belita, pela solidariedade.



**o júri / the jury**

presidente / president

**Vítor José Babau Torres**

Professor Catedrático da Universidade de Aveiro (por delegação da Reitora da Universidade de Aveiro)

vogais / examiners committee

**João Carlos Namorado Clímaco**

Professor Catedrático da Faculdade de Economia da Universidade de Coimbra

**José Manuel Fernandes Craveirinha**

Professor Catedrático da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade de Coimbra (orientador)

**Maria Filomena Guimarães Dias d'Almeida**

Professora Catedrática da Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto

**Domingos Moreira Cardoso**

Professor Catedrático da Universidade de Aveiro (co-orientador)

**Fernando João Pereira de Bastos**

Professor Auxiliar da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa

**João Manuel da Silva Santos**

Professor Auxiliar da Universidade de Aveiro





**agradecimentos /  
acknowledgements**

Agradeço ao Senhor Professor Doutor José Craveirinha e ao Senhor Professor Doutor Domingos Cardoso não só a superior orientação científica, como o apoio prestado desde o início. Institucionalmente tenho de agradecer as boas condições que me foram dadas na Universidade de Aveiro para realização deste trabalho, assim como a concessão, a título excepcional, da isenção de propinas.

Agradeço também ao Senhor Professor Doutor Júlio Pedrosa, então Reitor da Universidade de Aveiro, pelo voto de confiança na pior altura por que passei. Um agradecimento muito especial é devido à Senhora Professora Doutora Paula Rocha Malonek, pelo dom de se aproximar e ajudar nos piores momentos, o que foi determinante para a retoma da escrita.

Por fim, peço desculpa por não nomear todas as restantes pessoas que me ajudaram, de uma forma ou de outra, pois no rol de agradecimentos teria de ir a narrativa das minhas tribulações. Terminarei dedicando à Belita esta dissertação, em agradecimento pelas inigualáveis qualidades humanas expressas na sua constante solidariedade, sem a qual teria sido de todo impossível realizar este trabalho.



**palavras-chave**

Modelos Estocásticos, Função de Erlang-B, Algoritmos Numéricos, Optimização Convexa Multiobjectivo.

**resumo**

Formula-se um problema de optimização relativo à afectação de servidores entre grupos funcionais de Erlang-B ( $M/M/n/0$ ), que ocorre na modelação de sistemas de Teletráfego. Na prática, há normalmente dois objectivos a atingir no dimensionamento de tais sistemas: Maximizar o volume de tráfego transportado (minimizando o tráfego perdido pelo sistema global) e optimizar o grau de serviço (minimizando as probabilidades de bloqueio). Analisa-se o conflito potencial entre os dois objectivos e caracteriza-se o conjunto  $\mathcal{N}$  das soluções não dominadas do problema. A abordagem do problema de optimização é antecedida de um estudo numérico (cálculo das derivadas da função de Erlang-B) e analítico (propriedades de convexidade do modelo). Estabelecem-se dois métodos numéricos de cálculo das derivadas parciais de primeira e segunda ordem na variável número de servidores (*Método da Recursão Completa Generalizada* e *Método da Recursão Reduzida*). Uma análise do erro propagado nessas recursões mostra a notável estabilidade numérica dos processos de cálculo. Extensos resultados computacionais mostram a grande eficiência dos métodos propostos, mesmo para valores elevados dos argumentos. No que toca às propriedades analíticas, estabelece-se o sinal das derivadas parciais de segunda ordem da função tráfego de transbordo num sistema de Erlang-B. A convexidade em cada uma das variáveis é demonstrada no sentido estrito e em todo o domínio, generalizando resultados já conhecidos. É proposto um algoritmo para percorrer  $\mathcal{N}$ , que usa o método de Newton combinado com uma estratégia especial de determinação das restrições que estão activas em cada óptimo de Pareto.



**keywords**

Stochastic Models, Erlang-B Function, Numerical Algorithms, Multiobjective Convex Optimization.

**abstract**

An optimization problem related to the server allocation between Erlang-B functional groups is formulated. This problem occurs in Teletraffic Systems modeling. In applied situations, the design of such a system usually involves two objectives: to minimize the overflow traffic of the global system and to minimize the blocking probabilities. The potential conflict between these objectives is shown and the set  $\mathcal{N}$  of the non inferior solutions of the problem is characterized. An algorithm for traveling on  $\mathcal{N}$  is given. This algorithm uses the Newton-Raphson method together with a special strategy for determining the set of active restrictions for each Pareto optimal solution. Previously to the explanation of this optimization problem, a numerical and analytic study of the model, including the determination of the Erlang-B function derivatives and convexity properties is presented. Two methods are proposed for the numerical evaluation of the first and second order derivatives of the Erlang-B function: *Complete Generalized Recursion Method* and *Reduced Recursion Method*. A good numerical stability of both methods is ensured by including a detailed error analysis. Furthermore, extensive computations show the great efficiency of those methods even for high argument values. Concerning the analytic properties, the sign of the second order partial derivatives of the overflow traffic function is established and the strict convexity in each variables is shown.



# Conteúdo

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
1.1	Enquadramento . . . . .	1
1.2	Objectivos Gerais do Trabalho . . . . .	6
1.3	Organização da Dissertação . . . . .	8
	Referências do Capítulo 1 . . . . .	16
<b>2</b>	<b>O Cálculo das Derivadas da Função de Erlang-B</b>	<b>17</b>
2.1	Introdução . . . . .	18
2.2	O Cálculo da Derivada de Ordem $n$ . . . . .	21
2.2.1	Expressão Geral . . . . .	21
2.2.2	Uma Recursão para $I_k$ . . . . .	22
2.3	O Cálculo das Condições Iniciais . . . . .	26
2.3.1	Análise da Estabilidade Numérica do Processo Recorrente . . . . .	28
2.4	Número de Circuitos não Inteiro . . . . .	39
2.5	Resultados Computacionais . . . . .	40
2.6	Conclusões . . . . .	49

2.A	Resultados Adicionais e Auxiliares . . . . .	49
2.B	Algoritmo baseado na Quadratura por Séries Cardinais . . . . .	54
	Referências do Capítulo 2 . . . . .	60
<b>3</b>	<b>O Método da Recursão Reduzida para o Cálculo da Função de Erlang- B e suas Derivadas</b>	<b>61</b>
3.1	Introdução . . . . .	62
3.2	Formulação Base do Método . . . . .	64
3.2.1	A Precisão do Método . . . . .	70
3.2.2	A Eficiência do Método . . . . .	72
3.3	Generalização para o Cálculo das Derivadas . . . . .	74
3.3.1	Majorante para $ r(1, x + l) $ . . . . .	75
3.3.2	Majorante para $ r(2, x + l) $ . . . . .	76
3.3.3	Majorante para $\ln  r(m, x + l) $ , $m = 1, 2$ . . . . .	78
3.3.4	Algumas Desigualdades Fundamentais . . . . .	79
3.3.5	Generalização do Teorema 1 . . . . .	82
3.3.6	Exemplo de Cálculo de $\ell^*$ . . . . .	87
3.3.7	A Precisão do Método . . . . .	90
3.3.8	A Eficiência do Método . . . . .	95
3.4	Conclusões . . . . .	95
3.A	Resultados Computacionais . . . . .	98
3.B	Cálculo de Derivadas de Ordem Superior a Dois . . . . .	107
	Referências do Capítulo 3 . . . . .	112



<b>4</b>	<b>Condições de Segunda Ordem para o Tráfego de Transbordo de um Sistema de Erlang-B</b>	<b>113</b>
4.1	Introdução e Resultados Principais . . . . .	114
4.2	Demonstração do Teorema 4.1 . . . . .	118
4.2.1	A Prova do Ponto 1) . . . . .	119
4.2.2	A Prova do Ponto 2) . . . . .	121
4.2.3	A Prova do Ponto 3) . . . . .	124
4.3	A Convexidade Conjunta de $\hat{A}(a, x)$ . . . . .	128
4.3.1	Um Contraexemplo . . . . .	129
4.3.2	A Condição de Convexidade Conjunta . . . . .	132
4.3.3	Experiências Computacionais e Conjecturas . . . . .	133
4.4	Conclusões . . . . .	134
4.A	Lema Auxiliar . . . . .	135
	Referências do Capítulo 4 . . . . .	139
<b>5</b>	<b>Optimização de Sistemas Multidimensionais de Erlang-B</b>	<b>141</b>
5.1	Introdução . . . . .	142
5.2	Formulação do Problema . . . . .	149
5.2.1	O Conjunto de Soluções Admissíveis . . . . .	151
5.2.2	A Função Vectorial de Bloqueio . . . . .	151
5.2.3	Função Critério de Eficiência . . . . .	153
5.2.4	Função Critério de Equidade . . . . .	155
5.3	Solução de Máxima Eficiência . . . . .	160

5.3.1	Solução de Máxima Eficiência em Pontos Interiores . . . . .	160
5.3.2	Solução de Máxima Eficiência em Pontos Fronteiros . . . . .	162
5.4	Solução de Máxima Equidade . . . . .	164
5.5	Conflito entre Eficiência e Equidade . . . . .	165
5.6	Caracterização dos Ótimos de Pareto . . . . .	169
5.6.1	Linearização das Restrições . . . . .	172
5.7	Cálculo de Ótimos de Pareto . . . . .	173
5.8	Algoritmo para Percorrer $\mathcal{N}$ . . . . .	177
5.9	Nota Final . . . . .	178
5.A	Aplicação do Método de Newton . . . . .	180
5.B	Classificação das Formas Quadráticas . . . . .	184
5.C	Gama Típica dos Dados do Problema . . . . .	186
	Referências do Capítulo 5 . . . . .	191
<b>6</b>	<b>Conclusões</b>	<b>193</b>
6.1	Síntese das Principais Contribuições da Dissertação . . . . .	193
6.2	Áreas de Trabalho Futuro . . . . .	196
6.2.1	Ainda o Sistema de Erlang-B . . . . .	196
6.2.2	Incursões na Teoria/Algoritmos Sobre Funções Especiais . . . . .	197
6.2.3	Exploração do Modelo Multidimensional de Erlang-C . . . . .	200
6.2.4	Campo Aberto para Sistemas Mais Complexos . . . . .	201
	Referências do Capítulo 6 . . . . .	202

# Lista de Figuras

3.1	Ilustração gráfica do exemplo de cálculo de $\ell_2$ . . . . .	88
4.1	Modelo de fluxo determinista para um grupo de Erlang-B em equilíbrio. . . . .	116
5.1	Esquema básico de escoamento de tráfego telefónico. . . . .	144
5.2	Representação esquemática de um sistema de perda de Erlang. . . . .	145
5.3	Modelo de fluxo para um grupo de Erlang-B em equilíbrio estatístico. . . . .	147
5.4	Modelo de fluxo para o sistema multidimensional de Erlang-B. . . . .	148

# Lista de Tabelas

2.1	Método RC: Aproximações e tempos de processamento ( $B \approx 0.5$ ) . . .	42
2.2	Método RC: Aproximações e tempos de processamento ( $B \approx 10^{-1}$ ) . .	43
2.3	Método RC: Aproximações e tempos de processamento ( $B \approx 10^{-2}$ ) . .	44
2.4	Método RC: Aproximações e tempos de processamento ( $B \approx 10^{-3}$ ) . .	45
2.5	Método RC: Aproximações e tempos de processamento ( $B \approx 10^{-4}$ ) . .	46
2.6	Método RC: Aproximações e tempos de processamento ( $B \approx 10^{-5}$ ) . .	47
2.7	Método RC: Aproximações e tempos de processamento ( $B \approx 10^{-6}$ ) . .	48
3.1	Método RR: Aproximações e tempos de processamento ( $B \approx 10^{-1}$ ) . .	101
3.2	Método RR: Aproximações e tempos de processamento ( $B \approx 10^{-2}$ ) . .	102
3.3	Método RR: Aproximações e tempos de processamento ( $B \approx 10^{-3}$ ) . .	103
3.4	Método RR: Aproximações e tempos de processamento ( $B \approx 10^{-4}$ ) . .	104
3.5	Método RR: Aproximações e tempos de processamento ( $B \approx 10^{-5}$ ) . .	105
3.6	Método RR: Aproximações e tempos de processamento ( $B \approx 10^{-6}$ ) . .	106
4.1	Aproximações para os zeros de $\Delta(a, x)$ . . . . .	134

# Lista de Algoritmos

2.1	Recursão para o cálculo de $B_x^{(n)}$ , $n = 0(1)m$ conhecendo $I_n(a, 0)$ . . . . .	24
2.2	Cálculo de $B_k$ , $k = 0(1)m$ conhecendo $I_k$ , $k = 0(1)m$ . . . . .	25
2.3	Quadratura por séries cardinais para o cálculo de $B(a, x), \dots, B_x^{(m)}(a, x)$ . . . . .	57
3.1	Recursão Reduzida para o cálculo da função de Erlang-B . . . . .	73
3.2	Recursão Reduzida para o cálculo de $B(a, x)$ , $B'_x(a, x)$ e $B''_x(a, x)$ . . . . .	93
3.3	Recursão Reduzida para o cálculo de $B(a, x)$ , $B'_x(a, x), \dots, B_x^{(m)}(a, x)$ . . . . .	108
5.1	Tabelação dos ótimos de Pareto (“Travelling on $\mathcal{N}$ ”) . . . . .	179
5.2	Resolução dos sistemas de equações não lineares . . . . .	183



“Chegamos então a uma questão prévia e radical: se há uma dimensão cognitiva em toda a operação computante e se a computação é apta para as actividades cognitivas mais diversas, *todo o conhecimento, seja qual for a sua natureza, não supõe computação, e esta não supõe um problema a tratar?*”

Edgar Morin (1986), La Methode 3. La connaissance de la connaissance.





# Capítulo 1

## Introdução

### 1.1 Enquadramento

O dimensionamento de sistemas estocásticos de serviço<sup>1</sup> tem vindo a recorrer cada vez mais a processos de optimização. Em particular, os sistemas com perda surgem como os modelos estocásticos adequados a muitos sistemas de telecomunicações, incluindo redes de comutação por circuitos, e sistemas de comunicação móvel ou via satélite. No contexto da revolução tecnológica na área das comunicações a que temos vindo a assistir, há constantemente novas aplicações a considerar, mercê do extraordinário desenvolvimento em curso. Para citar um exemplo clássico, os modelos de dimensionamento de redes telefónicas inter-centrais conduzem a problemas de optimização de muito elevada complexidade e geralmente de grande dimensão, sendo normalmente abordados com base numa decomposição em vários problemas e sub-problemas de optimização (ver por exemplo [8, 15]).

---

<sup>1</sup>A Teoria dos Sistemas Estocásticos de Serviço pode considerar-se como parte do campo das aplicações dos processos estocásticos, sendo referida na literatura por denominações diversas, como Teoria de Tráfego ou Teoria das Filas de Espera. É comum na literatura internacional usar a palavra inglesa “*Queueing*” para designar a área, enquanto que os sistemas são designados por “*Queues*”. No contexto das aplicações em Telecomunicações é conhecida por Teoria do Teletráfego.

No âmbito das questões de Investigação Operacional associadas ao planeamento de tais sistemas, estamos interessados em múltiplos problemas de optimização incidindo sobre diferentes níveis e facetas do processo de planeamento/dimensionamento (por exemplo rede nuclear “*core network*”/rede local; rede funcional/rede de transmissão; planeamento de curto/médio prazo). Uma resenha sobre aplicações de métodos clássicos de programação matemática em planeamento de redes por comutação por circuitos pode ser vista, por exemplo, em [6]. De uma maneira bastante genérica, pretende-se sempre rentabilizar ao máximo os meios instalados, tendo em conta a procura prevista. Essa rentabilização passa, não só pelo cálculo dos parâmetros de dimensionamento dos meios a instalar, mas também pela definição da melhor política de utilização desses meios. O objectivo, será oferecer um serviço de qualidade elevada aos utentes, ao mínimo custo.

Tipicamente, se um equipamento com perda (i.e. sem fila de espera) for desenhado para responder ao número médio de solicitações a que está sujeito, uma proporção inaceitável de utentes encontra bloqueio. Para melhorar a qualidade de serviço pode aumentar-se a quantidade de equipamento instalado no sistema mas, dessa forma, os custos de instalação serão também aumentados. Estes custos, reflectem-se num agravamento do preço que o utilizador terá de pagar pelo serviço prestado. Incrementando a quantidade de equipamento para além de um certo limite, não se produzirá nenhuma melhoria significativa na qualidade de serviço e os utentes não estarão dispostos a pagar o correspondente aumento de custos.

As estratégias de optimização desses sistemas encontram um bom compromisso para obter a solução correspondente ao sistema a instalar. Genericamente trata-se da optimização estrutural da rede (topologia do grafo associado à rede e dimensionamento da capacidade dos arcos em número de canais ou circuitos) e, conjuntamente, da determinação dos encaminhamentos dos fluxos aleatórios de chamadas entre pares de nodos. Estão em causa questões de planeamento muito complexas e elaboradas, recorrendo a modelos de optimização de vários níveis, podendo-se ter em cada nível formulações mono ou multicritério dos problemas de optimização que estão associados

aos problemas de decisão de diferentes tipos envolvidos nos processos de planeamento.

Assim se compreende que o planeamento de tais redes seja abordado com base numa decomposição em vários problemas e sub-problemas de optimização, como já foi dito. De entre as várias classes de problemas que assim vão surgindo nessa estratégia decompositiva incluem-se frequentemente problemas relativos a modelos básicos de representação da rede, classicamente conhecidos e extensamente estudados. De entre estes modelos, o sistema com perda introduzido pelo matemático dinamarquês A. K. Erlang, ao serviço da operadora dinamarquesa de Telecomunicações, baseado na fórmula  $B$  do seu histórico artigo [7] de 1917, constitui um dos mais conhecidos e também dos mais estudados na literatura. Este modelo está intimamente relacionado com o segundo sistema introduzido nesse mesmo artigo e designado por modelo de Erlang-C, por estar baseado na sua fórmula  $C$ . Além desses dois modelos, tem surgido uma crescente lista de outros modelos generalizados (ver [33, 24, 22, 37, 35, 17]) e híbridos [34, 36] tendo em conta uma adaptação às necessidades das aplicações, ou como resultado abstracto da investigação de carácter mais teórico. As generalizações propostas são imensas, mesmo se considerarmos apenas as referentes ao regime estacionário (resultante do equilíbrio estatístico dos sistemas estocásticos) — contudo, há que acrescentar também os modelos referentes aos sistemas em regime transitório [45, 31, 26, 27, 30, 29, 39]. Além disso, surgem análises dos referidos sistemas em regimes assintóticos [19, 2] e/ou críticos [16, 38].

Tendo em conta a extensa lista de trabalhos publicados relativos a propriedades analíticas desses modelos e a métodos numéricos aplicados aos mesmos, pode falar-se de uma sub-área de investigação (inserida na Teoria dos Sistemas Estocásticos de Serviço), que designaremos por “*Sistemas de Erlang.*” É importante frisar, que esta classe de sistemas constitui um campo bastante fértil em novos problemas e aplicações, o que justifica a dedicação e a atenção de uma comunidade científica que já se pode considerar numerosa. Para ilustrar sucintamente essa actividade de investigação nos anos mais recentes (e tendo também em conta um critério de proximidade com os tópicos tratadas nesta dissertação), escolhemos referir a seguinte lista seleccionada de

publicações que podem ser encontradas numa pesquisa bibliográfica temática: [43, 27, 25, 5, 28, 18, 46, 40, 41, 44, 39, 32, 29, 3, 4, 17].

Os referidos trabalhos podem considerar-se relacionados com a Teoria das Funções Especiais — “*High Transcendental Functions*” na literatura internacional (ver por exemplo a obra de referência [1]). Com efeito, as fórmulas  $B$  e  $C$  de Erlang, assim como as extensões analíticas normalmente adoptadas (sugeridas inicialmente por R. Fortet [42, pag.602]), estão intimamente relacionadas com classes de funções especiais conhecidas da teoria clássica das funções. Na verdade, para um matemático dessa área, a função de Erlang-B pode classificar-se como uma função gama incompleta, uma função de Whittaker, uma função de confluência hipergeométrica de Kummer ou ainda como uma função de probabilidade  $\chi^2$ . Estas interrelações são referidas em [23, pag.332] e exploradas por D. L. Jagerman [19]. Ora, os estudos na área dos “*Sistemas de Erlang*” inserem-se, nesse contexto, nas propriedades analíticas relativas a essas classes de funções especiais, assim como nos métodos numéricos com elas relacionados.

Neste trabalho abordam-se problemas básicos de optimização de um sistema de teletráfego muito comum em redes do referido tipo, o sistema básico de Erlang-B, focando a repartição de um total de  $\kappa \in \mathbb{R}^+$  canais de comunicação por vários grupos de circuitos funcionais aos quais são oferecidos tráfegos de Poisson, de intensidades conhecidas. Surge então um problema de afectação de servidores no contexto de um modelo multidimensional de Erlang-B, uma vez que o sistema global é constituído por múltiplos canais independentes, cada um deles sendo um sistema básico (unidimensional) de Erlang-B. No contexto do projecto óptimo, os critérios geralmente adoptados são ou a igualdade de oportunidades para os utilizadores dos vários grupos (critério de equidade no grau de serviço, dividindo-se os circuitos de tal modo que sejam iguais as probabilidades de bloqueio de chamadas), ou a maximização do tráfego transportado no sistema global. Provar-se-á que o primeiro critério é equivalente a minimizar a maior probabilidade de bloqueio do conjunto de todos os canais, exprimindo assim uma preocupação de obter a melhor qualidade de serviço possível. Podia dizer-se que traduz o *critério dos utilizadores* do sistema que desejam a melhor qualidade de serviço possível,

ou seja um *critério social*. No entanto, de entre as designações possíveis escolhemos a sugestiva designação de *Critério de Equidade*. O segundo critério (maximização do tráfego transportado no sistema global), é equivalente a minimizar o tráfego total perdido no sistema multidimensional. Esta preocupação traduz a preocupação da empresa operadora que explora economicamente o sistema instalado. Essa entidade procurará maximizar os lucros inerentes ao serviço prestado aos utilizadores (que estará na razão directa do volume de tráfego transportado). Poderia ser designado por *critério da administração* ou mesmo *critério da operadora*. De entre as designações possíveis, usaremos a bastante adequada designação de *Critério de Eficiência*. A optimização do sistema é assim abordada com base numa formulação bicritério. Conseguiu-se uma prova matemática de um resultado que pode parecer sugestivamente óbvio: Há conflito entre o critérios de *Equidade* e *Eficiência*, salvo num caso degenerado de simetria geral do estado de todos os canais. Isto quer dizer que se o sistema estiver optimizado em termos de eficiência não estará optimizado em termos de equidade (e vice-versa).

Qualquer tentativa de abordar o problema de optimização descrito (afecção de servidores bicritério num sistema multidimensional de Erlang-B), depara com uma série de questões analíticas relativas a eventuais propriedades do modelo básico de Erlang-B. Em muitos casos, a resposta a essas questões não é encontrada na literatura, constituindo cada uma delas um tópico de investigação com eventual interesse independente (uma vez que o esclarecimento dessas questões constituirá uma nova propriedade do modelo básico de Erlang-B). Tomemos como exemplo as propriedades de convexidade. Efectivamente, no dimensionamento óptimo dos referidos modelos é muito importante saber quando as medidas de “*performance*” (funções objectivo), são convexas nas variáveis de decisão. Na verdade, como uma função estritamente convexa têm um único mínimo, as técnicas para determinar um mínimo local determinam, com efeito, o mínimo global. Como veremos neste trabalho foi necessário estabelecer novas propriedades de convexidade para o modelo de Erlang-B, que se revelam bastante úteis tanto no problema de optimização descrito como noutros problemas de optimização correlacionados.

Da mesma forma, se pretendermos abordar o problema de otimização proposto tendo em vista o cálculo efectivo das soluções (que neste caso será uma tabela de óptimos de Pareto do problema bicritério), teremos de adoptar uma abordagem algorítmica adequada. Tendo em conta considerações de eficiência computacional, é comum tentar definir métodos com convergência quadrática, ou seja, dentro de uma classe de métodos que necessitam do cálculo numérico dos gradientes das funções objectivo. Deste modo, surge imediatamente a necessidade de dispor de métodos numéricos eficazes não só para o cálculo da função de Erlang-B, como também das suas derivadas de primeira e segunda ordem. É sabido que estes problemas foram investigados extensivamente. No entanto, no decorrer do nosso trabalho conseguiram-se estabelecer novos e melhores métodos numéricos de cálculo que constituem uma das principais contribuições do trabalho que conduziu a esta dissertação.

Assim se explica porque nos dedicámos ao estudo de um modelo basilar no contexto da Teoria do Teletráfego: o modelo de Erlang-B. Este modelo, apesar de ter sido intensiva e extensivamente estudado há mais de 80 anos veio a revelar-se ainda fértil em matéria de investigação, tanto na vertente numérica como analítica. O nosso trabalho de investigação manteve-se nesses estudos uma vez que se avolumava a lista de novas questões que eramos capazes de formular, sem que a resolução das mesmas fosse feita à mesma velocidade com que eram criadas. . .

Por fim, importa salientar que no contexto do nosso estudo do problema bicritério proposto, foram levantadas uma série de questões relativas a propriedades de sistemas de Erlang-B que deram origem a trabalho adicional (não incluído nesta dissertação), assim como tópicos reservados para um trabalho futuro de investigação.

## 1.2 Objectivos Gerais do Trabalho

Os objectivos deste trabalho dizem respeito a três classes de matérias relativas ao estudo de modelos estacionários de Erlang-B:

- (i) Estabelecimento de resultados relativos a propriedades analíticas das funções que descrevem o estado do sistema (prova de proposições que estabelecem desigualdades, condições de monotonia, de convexidade, etc.);
- (ii) Definição de algoritmos numéricos para o cálculo de valores das funções de estado, assim como das suas derivadas parciais de primeira e segunda ordem (na variável tráfego oferecido e também na variável número de circuitos);
- (iii) Investigação do problema de optimização na afectação de servidores em sistemas multidimensionais de Erlang-B com tráfego mono-classe numa formulação bicritério (com os objectivos de *Eficiência* do sistema e *Equidade* no acesso aos diferentes canais).

Convém frisar que estas três classes de matérias se encontram intimamente relacionadas. Com efeito, na abordagem do problema de optimização revela-se essencial conhecer as propriedades analíticas a que nos referimos no ponto (i). Por outro lado, para definir os algoritmos de optimização é determinante dispor dos algoritmos básicos a que nos referimos no ponto (ii).

Na verdade, pode afirmar-se que os objectivos centrais do trabalho dizem respeito ao problema de optimização, ou seja à matéria referida no ponto (iii). O estudo efectuado nos pontos (i) e (ii) revela-se importante porque estabelece resultados preliminares que permitem depois abordar o problema de optimização de forma expedita. De facto, os resultados obtidos no estudo relativo aos pontos (i) e (ii) foram obtidos com o propósito de esclarecer questões básicas que se revelavam importantes no contexto de problemas de optimização.

No entanto, deve referir-se que o estudo das matérias (i) e (ii) veio a revelar-se bastante produtivo, pois foram estabelecidos resultados e algoritmos com interesse independente. Na verdade, em relação ao ponto (i) estabelecem-se resultados relativos à convexidade estrita da função tráfego de transbordo, assim como algumas proposições relativas à conhecida propriedade de eficácia dos grandes grupos. Por outro lado, no que

diz respeito ao ponto (ii) define-se um algoritmo de cálculo das derivadas da função de Erlang-B que se revela importante em vários contextos, nomeadamente em problemas de dimensionamento de redes de telecomunicações.

É importante salientar que o problema de optimização referido no ponto (iii) foi formulado usando uma aproximação bicritério. Usam-se, dessa forma, duas funções objectivo nessas formulações (designadas por *Eficiência* e *Equidade*). Procura-se estabelecer um conjunto de resultados que caracterizem o conjunto de soluções não dominadas (óptimos de Pareto). A especificação de algoritmos de cálculo dessas soluções é também objectivo deste trabalho.

Por fim, procurar-se-á apresentar e discutir um conjunto significativo de resultados computacionais obtidos a partir da implementação dos algoritmos especificados durante a exposição do trabalho. Essa especificação foi feita usando um pseudo-código padrão definido por nós num livro [9] de índole didáctica publicado pela Universidade de Aveiro.

### 1.3 Organização da Dissertação

Durante o trabalho que conduziu a esta dissertação, fomos registando sempre em relatórios os resultados obtidos sempre que se entendia que tinha sido terminado o tratamento de um tópico de investigação a que nos tínhamos proposto. Nos casos em que os resultados se afiguravam conjuntamente originais e interessantes, esses relatórios sofriram correcções e adaptações sucessivas gerando por vezes versões resumidas em língua inglesa com o objectivo de serem publicadas. Importa salientar que se gerou assim uma colecção de textos com um volume assinalável e que se revela importante no contexto da prossecução do trabalho seguindo várias linhas de investigação já iniciadas ou vislumbradas. Por outro lado, pareceu-nos conveniente aproveitar no essencial algumas versões desses textos para figurarem nesta dissertação com as convenientes adaptações. Por estas razões, a corpo da dissertação é constituída por quatro capítulos sendo cada



um deles baseado num dos referidos relatórios de investigação. Assim, cada um desses capítulos mantém ainda a estrutura própria de um documento independente, ou seja de *memorandum*. Na abertura de cada capítulo, achámos conveniente deixar em nota de rodapé algumas referências não só ao documento original que deu origem ao capítulo em causa, mas também às publicações/apresentações a que a matéria nele contida deu origem.

No Capítulo 2, apresenta-se um método genérico de cálculo da função de Erlang-B e das suas derivadas parciais de qualquer ordem [11]. Esse método (que veio a ser designado no seguimento do trabalho como *Método da Recursão Completa Generalizada (RC)*), baseia-se numa recursão matricial que generaliza uma recursão escalar sugerida por D. L. Jagerman [20]. Um dos aspectos mais importantes do capítulo é a análise da estabilidade numérica da recursão, estabelecendo-se propriedades que sustentam a robustez do método. Além disso, analisa-se o caso em que o número de circuitos não é inteiro e indica-se uma abordagem para aproximar os valores iniciais por um método de integração numérica de Gauss-Laguerre. Para efeitos de comparação de resultados em termos de precisão e eficiência é exposto um método alternativo de cálculo da função e suas derivadas baseado num método de quadratura por séries cardinais que nos foi enviado por D. L. Jagerman na forma de um relatório interno dos *AT&T Bell Laboratories* [21]. Extensa experimentação computacional é exposta na forma de tabelas e é feita uma análise dos resultados mostrando o excelente desempenho do método proposto, excepto em termos de eficiência para valores muito elevados dos argumentos da função.

No Capítulo 3, apresenta-se um novo algoritmo especialmente importante nos casos em que os argumentos da função são muito elevados. Apresenta-se assim o *Método da Recursão Reduzida (RR)* [12]. Prova-se, assim, que se os argumentos da função são suficientemente elevados, o número de passos desse cálculo recursivo pode ser consideravelmente reduzido sem se perder precisão nos resultados. Este método conduz a um algoritmo que calcula resultados com precisão igual à da máquina que executa os cálculos e exhibe uma extraordinária eficiência mesmo para valores muito elevados dos

argumentos da função. O método é inicialmente estabelecido para o cálculo da função, sendo depois generalizado para o cálculo das derivadas de primeira e segunda ordem. Resultados de uma extensa experimentação computacional são incluídos no fim do trabalho, comparando a precisão e a eficiência do algoritmo proposto com os resultados obtidos pelo método da recursão completa. Os resultados computacionais evidenciam as vantagens em eficiência e precisão do algoritmo proposto.

Dedica-se o Capítulo 4 a estabelecer novas propriedades de convexidade da função tráfego de transbordo num sistema de Erlang-B, tendo em vista a sua crucial importância no contexto dos problemas de optimização [14, 13]. Prova-se que a dita função que define o tráfego de transbordo é estritamente convexa na variável número de circuitos. Prova-se também que a mesma função é estritamente convexa na variável tráfego oferecido. Os dois resultados citados, obtêm-se estabelecendo o sinal das derivadas parciais de segunda ordem da função. Usando o mesmo processo, demonstra-se depois que as derivadas rectangulares de segunda ordem são funções estritamente negativas. Por fim, aborda-se a questão da convexidade estrita conjunta da função em algum domínio aberto e convexo de  $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$  e conjectura-se que tal acontecerá em zonas de baixo bloqueio, onde o *tráfego oferecido nominal* é inferior a  $-1$ .

No Capítulo 5, aborda-se finalmente o problema de optimização para a afectação de servidores num sistema multidimensional de Erlang-B com tráfego mono-classe (i.e. com tráfegos oferecidos parciais todos com chamadas do mesmo tipo), com base na formulação bicritério já descrita [10]. Como já foi dito, os critérios adoptados são ou a igualdade de oportunidades para os utilizadores dos vários grupos (dividindo-se os circuitos de tal modo que sejam iguais as probabilidades de bloqueio de chamadas), ou a maximização do tráfego transportado no sistema global. A optimização do sistema é assim abordada com base numa formulação bicritério, designando os critérios descritos, respectivamente, por *Equidade* e *Eficiência*. Demonstrem-se propriedades da função de Erlang-B que põem e evidência o conflito entre esses dois objectivos, e abordam-se várias formulações relacionadas com o mesmo problema. Abordam-se depois algoritmos de resolução destes problemas, tirando partido de propriedades de convexidade

das funções objectivo deduzidas a partir dos resultados do Capítulo 4. Para o efeito utiliza-se o método de Newton-Raphson, calculando-se valores das funções objectivo e das suas derivadas até à segunda ordem recorrendo ao *Método da Recursão Completa Generalizada* (exposto no Capítulo 2) e ao *Método da Recursão Reduzida* apresentado no Capítulo 3.

Finalmente, no Capítulo 6 discute-se genericamente todo o trabalho (fazendo uma síntese de toda a dissertação), colocando ênfase especial nas inter-relações da matéria exposta nos vários capítulos. Estabelecem-se, por tópicos, as principais contribuições de todo o trabalho nas suas vertentes teóricas e aplicadas. Termina-se com uma secção referente a alguns assuntos que esperamos estudar em trabalho futuro a desenvolver.

# Referências do Capítulo 1

- [1] M. Abramowitz and I. Stegun. *Handbook of Mathematical Functions*. Dover Publications, 9th edition, 1970.
- [2] H. Akimaru and H. Takahashi. Asymptotic expansion for Erlang loss function and its derivative. *IEEE Transactions on Communications*, 29(9):1257–1260, 1981.
- [3] S. A. Berezner and A. E. Krzesinski. An efficient stable recursion to compute multiservice blocking probabilities. *Performance Evaluation*, 43:151–164, 2001.
- [4] S. A. Berezner, A. E. Krzesinski, and P. G. Taylor. On the inverse of Erlang’s function. *Journal of Applied Probability*, 35:246–252, 1998.
- [5] B. A. Chiera, A. E. Krzesinski, and P. G. Taylor. Some properties of the capacity value function. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 65(4):1407–1419, 2005.
- [6] J. Craveirinha and J. Clímaco. A survey of applications of mathematical programming to circuit-switched network planning problems. *European Transactions on Telecommunications and Related Technologies*, 3:75–92, Set-Out 1992.
- [7] A. K. Erlang. Solution of some problems in the theory of probabilities of significance in automatic telephone exchanges. (*Danish*) *Elektroteknikerens [English Translation in the P. O. Elect. Engrs. Journal 10, 1917–1918, 189–197]*, 13:5–28, 1917.
- [8] Jorge Sá Esteves. Metodologias de análise e cálculo numérico em redes de teletráfego com encaminhamento alternativo. Dissertação de mestrado em ciências de computação, Universidade de Coimbra, F.C.T.U.C., 1991.

- [9] Jorge Sá Esteves. *Introdução à Análise Numérica, Vol. I — Conceitos Fundamentais de Matemática Numérica*. Universidade de Aveiro, 1996.
- [10] Jorge Sá Esteves, J. Craveirinha, and D. Cardoso. A bicriterion resource allocation approach for an Erlang-B teletraffic system. Talk for the XIth MCDM — Int. Conference on Multiple Criteria Decision Making (Coimbra), August 1994.
- [11] Jorge Sá Esteves, J. Craveirinha, and D. Cardoso. Computing Erlang-B function derivatives in the number of servers — a generalized recursion. *ORSA Communications in Statistics, Stochastic Models*, 11(2):311–331, 1995.
- [12] Jorge Sá Esteves, J. Craveirinha, and D. Cardoso. A reduced recursion for computing Erlang-B function derivatives. In V. Ramaswami and P. E. Wirth (AT&T), editors, *Proceedings of the 15th International Teletraffic Congress, Washington D.C., USA*, number 2 Teletraffic Contributions for the Information Age in Teletraffic Science and Engineering, pages 1315–1326, Boston, June 1997. Elsevier Science B. V.
- [13] Jorge Sá Esteves, J. Craveirinha, and D. Cardoso. The overflow traffic from the Erlang-B system — what convexity properties? In J. J. Júdice and M. C. Gouveia, editors, *Actas da Conferência — Matemática em Telecomunicações — Que Problemas?*, pages 6–11, Coimbra, Portugal, September 1998. Instituto das Telecomunicações.
- [14] Jorge Sá Esteves, J. Craveirinha, and D. Cardoso. Second order conditions on the overflow traffic from the Erlang-B system. *Cadernos de Matemática — Série de Investigação*, CM 06/I-20, 2006.
- [15] A. Girard. *Routing and Dimensioning in Circuit-Switched Networks*. Addison-Wesley, 1990.
- [16] P. J. Hunt and F. P. Kelly. On critically loaded loss networks. *Advances in Applied Probability*, 21:831–841, 1989.

- [17] V. B. Iversen and S. T. Mirtchev. Generalised Erlang loss formula. *Electronic Letters*, 32(8):712–713, 1996.
- [18] V. B. Iversen, S. N. Stepanov, and V. O. Kostrov. The derivation of a stable recursion for multi-service models. In *Proc. of the Int. Conference on Next Generation Teletraffic and WiredWireless Advanced Networking*, pages 1–11, St. Petersburg, Russia, February 2004.
- [19] D. L. Jagerman. Some properties of the Erlang loss function. *The Bell System Technical Journal*, 53(3):525–551, 1974.
- [20] D. L. Jagerman. Methods in traffic calculations. *The Bell System Technical Journal*, 63(7):1283–1310, September 1984.
- [21] D. L. Jagerman. Mathcalc. Technical Report WPN 311521–0101, FC 40416, AT&T Bell Laboratories Technical Memorandum, March 1987.
- [22] J. P. Jarvis. Approximating the equilibrium behavior of multi-server loss systems. *Management Science*, 31(2):235–239, February 1985.
- [23] I. Kaufman. *A Property of the First Erlang Function*, pages 332–334. Problems in Applied Mathematics, Selection from SIAM Review. M. S. Klamkin Ed., SIAM, New York, 1994.
- [24] Joseph S. Kaufman. Blocking in a shared resource environment. *IEEE Transactions on Communications*, COM-29(10):1474–1481, October 1981.
- [25] Hakyong Kim. An approach to reduce the Erlang B probability in the M/M/2/2 system with heterogeneous servers. In *Asia-Pacific Conference on Communications*, Perth, Australia, 2005.
- [26] C. Knessl. On the transient behavior of the Erlang loss model. *Comm. Statist. Stochastic Models*, (6):749–776, 1990.

- [27] C. Knessl and Yongzhi Yang. On the Erlang loss model with time dependent input. *Queueing Systems*, (52):49–104, 2006.
- [28] Avi Mandelbaum and Sergey Zeltyn. The impact of customers' patience on delay and abandonment: Some empirically-driven experiments with the M/M/n+G queue. *Operations Research Spectrum*, 26:377–411, 2004.
- [29] William A. Massey. The analysis of queues with time-varying rates for telecommunication models. *Telecommunication Systems*, 21(2-4):173–204, 2002.
- [30] William A. Massey and Ward Whitt. Stationary-process approximations for the nonstationary Erlang loss model. *Operations Research*, 44(6):976–983, 1996.
- [31] D. Mitra and A. Weiss. The transient behavior in Erlang's model for large trunk groups and various traffic conditions. In *Proc. of the 12th Int. Teletraffic Congress*, 1988.
- [32] John A. Morrison and Debasis Mitra. Asymptotic shape of the Erlang capacity region of a multi-service shared resource. *Performance Evaluation*, 49:273–281, 2002.
- [33] Philippe Nain. Qualitative properties of the Erlang blocking model with heterogeneous user requirements. *Queueing Systems*, (1), 1990.
- [34] M. Nesenbergs. An hybrid of Erlang-B and C formulas and its applications. *IEEE Transactions in Communications*, COM-27(1), 1979.
- [35] António Pacheco. Second-order properties of the loss probability in M/M/s/s+c systems. *Queueing Systems Theory and Applications*, 15(1), 1994.
- [36] M. F. Ramalhoto. The 3rd Erlang formula and Continuing Engineering Education. *Int. J. Continuing Engineering Education*, 4:58–68, 1994.
- [37] M. Reiman. A critically loaded multiclass Erlang loss system. *Queueing Systems*, (9):65–81, 1991.

- [38] M. Reiman. Some allocation problems for critically loaded loss systems with independent links. *Performance Evaluation*, (13):17–25, 1991.
- [39] Sheldon M. Ross and Sridhar Seshadri. Hitting time in an Erlang loss system. *Probability in the Engineering and Informational Sciences*, 16:167–184, 2002.
- [40] Alexander Simampo and Sarah M. Ryan. Capacity expansion for a loss system with exponential demand growth. *Computers and Operations Research*, 30:1525–1537, 2003.
- [41] J. MacGregor Smith. M/G/c/K blocking probability models and system performance. *Performance Evaluation*, 52, 2003.
- [42] R. Sysky. *Congestion Theory in Telephone Systems*. Oliver and Boyd, 1960.
- [43] Naishuo Tian, Mingxin Liu, Zhanyou Ma, and Xiuli Xu. Performance analysis of discrete-time Erlang loss system. In *Proc. of the 38th Southeastern Symposium on System Theory*, pages 192–195, Cookeville, TN, USA, March 2006.
- [44] Ronald W. Wolff and Chia-Li Wang. On the convexity of loss probabilities. *Journal of Applied Probability*, 39:402–406, 2002.
- [45] Shisheng Xie and Charles Knessl. On the transient behavior of the Erlang loss model: Heavy usage asymptotics. *SIAM Journal of Applied Mathematics*, 53(2):555–599, 1993.
- [46] Guoping Zeng. Two common properties of the Erlang-B function, Erlang-C function, and Engset blocking function. *Mathematical and Computer Modelling*, 37:1287–1296, 2003.



## Capítulo 2

# O Cálculo das Derivadas da Função de Erlang-B

### Resumo<sup>1</sup>

Apresenta-se um algoritmo para o cálculo das derivadas de ordem  $n$  da função de Erlang-B relativamente ao número de servidores  $x$ , passando esse cálculo pelo uso de uma relação recursiva matricial. Faz-se uma análise detalhada do erro relativo propagado para os sucessivos termos calculados por essa recursão, quando as condições iniciais são estimadas com erro. Entre outros resultados, prova-se que esse erro propagado decresce sempre (em certo sentido) e que tende assintoticamente para uma constante que pode ser muito pequena. Apresentam-se numerosos resultados computacionais comparando a eficiência e precisão do método apresentado com um algoritmo alternativo, usando quadratura por séries cardinais [14]. Estes resultados mostram um bom desempenho numa grande gama de argumentos da função. Adicionalmente, mostrando o interesse teórico da referida recursão, apresenta-se uma breve prova de uma propriedade de convexidade estrita da função de Erlang-B (entre outras desigualdades).

---

<sup>1</sup>O conteúdo deste capítulo é parcialmente baseado no “*research report*” [8] e no artigo [9].

## 2.1 Introdução

A bem conhecida fórmula de Erlang-B, que fornece a probabilidade de bloqueio de uma chamada num sistema  $M/M/x$  com perda, tem um papel importante em muitos problemas da teoria do teletráfego e talvez por essa razão tenha sido objecto de estudo intensivo [6, 10, 12, 13, 15, 21, 25].

Para  $x \in \mathbb{N}_0$  e tráfego oferecido  $a \in \mathbb{R}^+$ , a fórmula de Erlang-B é dada por

$$B(a, x) = \frac{a^x/x!}{\sum_{j=0}^x a^j/j!}. \quad (2.1)$$

Os estudos numéricos relativos a esta fórmula são usualmente feitos à custa da sua extensão analítica, atribuída a R. Fortet [24, pag.602]:

$$B(a, x) = \left( a \int_0^{+\infty} e^{-az} (1+z)^x dz \right)^{-1}, \quad (2.2)$$

que permite considerar o número de circuitos  $x$  como um número real não negativo. Vários métodos numéricos tem sido propostos para o cálculo de  $B(a, x)$ , ver por exemplo [10, 12, 17, 21].

Um importante resultado, devido a D.L. Jagerman, é a seguinte recursão obtida por integração por partes de (2.2):

$$B(a, x)^{-1} = \frac{x}{a} B(a, x-1)^{-1} + 1, \quad (2.3)$$

proposta em [13] sem ter sido esclarecida a sua estabilidade numérica (o que faremos mais adiante neste capítulo). Uma vez que  $B(a, 0) = 1$ ,  $\forall a \in \mathbb{R}^+$ ,  $B(a, x)$  pode ser calculada por (2.3) para todo o inteiro  $x$ .

As derivadas de primeira ordem de  $B(a, x)$  relativamente a  $a$  e  $x$  são dadas por (ver por exemplo [12])

$$B'_a(a, x) = \frac{\partial B}{\partial a}(a, x) = \left[ \frac{x}{a} - 1 + B(a, x) \right] B(a, x), \quad (2.4)$$

$$B'_x(a, x) = \frac{\partial B}{\partial x}(a, x) = -[B(a, x)]^2 a \int_0^{+\infty} e^{-az} (1+z)^x \ln(1+z) dz. \quad (2.5)$$

As derivadas de ordem superior a um na variável  $a$  podem ser obtidas por derivação sucessiva de (2.4) e o seu cálculo numérico resume-se à avaliação de uma expressão racional em  $a$ ,  $x$  e  $B(a, x)$ . A obtenção de um algoritmo eficaz de cálculo das derivadas  $B_x^{(k)}(a, x)$ ,  $k = 0(1)n$  revela-se também de grande importância. Com esses valores podemos por exemplo calcular todas as derivadas da função de Erlang-C até à ordem  $n$ . Na verdade, a função de Erlang-B não só está relacionada com a função de Erlang-C mas também com outras funções especiais como a função gama incompleta, as funções de Whittaker, a função de probabilidade  $\chi^2$  e as funções de confluência hipergeométrica de Kummer (ver por exemplo [1]). Assim, qualquer método de cálculo de  $B_x^{(k)}(a, x)$ ,  $k = 0(1)n$  terá interesse independente para o cálculo de valores das citadas funções e suas derivadas até à ordem  $n$ . Neste trabalho propomos um novo método de cálculo das derivadas de qualquer ordem de  $B(a, x)$  na variável  $x$ .

Faremos agora uma breve revisão dos métodos propostos na literatura. Dois trabalhos clássicos neste assunto são [4, 5]. Neles os autores estabelecem um complexo método numérico de cálculo das derivadas até à ordem 2, usando algumas funções especiais relacionadas com a função gama. Esse método é o procedimento padrão referido num excelente livro [3] de 1993 que inclui também programas em linguagem BASIC, apesar de não haver nenhum estudo do erro associado aos valores calculados e tabelados. Outros algoritmos alternativos para a obtenção  $B'_x(a, x)$  foram propostos, sempre com o objectivo de se obter um procedimento mais simples. Todavia, este problema tem sido considerado na literatura (ver por exemplo [13]) como algo difícil, especialmente se a precisão requerida for da mesma ordem de grandeza da obtida para  $B'_a(a, x)$  e  $B(a, x)$ . Métodos usando diferenciação numérica são abordados em [25], mas a precisão é relativamente pobre. Podemos incluir nesta classe de algoritmos o método resultante do Teorema 17 de [12]. Com este método atinge-se uma precisão de 4 algarismos significativos numa grande gama de valores de  $a$  e  $x$ . Por outro lado, o cálculo numérico usando várias fórmulas de quadratura numérica aplicadas a (2.5) mostrou-se pouco eficiente, pelo que esta técnica não tem sido proposta na literatura. Tanto quanto sabemos, o método de cálculo mais preciso de  $B_x^{(n)}$ , usando a teoria da

quadratura por séries cardinais (ver Apêndice 2.B), foi proposto por D.L. Jagerman num relatório interno dos AT&T Bell Laboratories [14] (gentilmente cedido pelo autor juntamente com os programas de cálculo em linguagem C).

Para além do interesse em termos de análise numérica, a obtenção de um método eficiente, com boa precisão, para o cálculo de  $B_x^{(n)}(a, x)$  é de clara importância em problemas de optimização em sistemas estocásticos de teletráfego e redes [11], especialmente para soluções obtidas pelo método de Newton-Raphson ou outros métodos de gradiente. Nesses métodos iterativos é de capital importância utilizar um método eficiente (e de precisão prescrita), pois em cada iteração é requerido o cálculo do valor da função de Erlang-B e da sua derivada em  $x$ , num conjunto de pontos relativo às componentes da função objectivo definida. A eficiência do método de optimização fica claramente limitada pela precisão do método de cálculo de  $B(a, x)$  e  $B'_x(a, x)$ . Neste trabalho propomos um método para o cálculo dessas derivadas que pode ser visto como a generalização natural do clássico algoritmo de cálculo da função de Erlang-B baseado na recursão de Jagerman (2.3).

Na secção seguinte apresenta-se o método e os correspondentes algoritmos recursivos. Na Secção 2.3 examinam-se o cálculo das condições iniciais da recursão e as propriedades de propagação do erro relativo associado aos valores iniciais, obtendo-se alguns resultados analíticos. Outros resultados auxiliares e adicionais são incluídos no Apêndice 2.A, nomeadamente uma propriedade de convexidade estrita da função de Erlang-B. Os aspectos práticos relativos ao cálculo e precisão das condições iniciais são tratados na Secção 2.3. A aplicação do método para valores de  $x$  não inteiros será aí tratada. Na Secção 2.5 apresenta-se um considerável número de resultados computacionais, tendo em conta a discussão sobre a eficiência e precisão do método proposto. Em especial, é feita a comparação com o método de Jagerman (baseado na quadratura de séries cardinais, que é brevemente discutido no Apêndice 2.B). Finalmente, são apresentadas algumas conclusões sobre os aspectos mais importantes do método proposto no presente capítulo.

## 2.2 O Cálculo da Derivada de Ordem $n$

### 2.2.1 Expressão Geral

O primeiro passo para conseguir uma expressão para  $B_x^{(n)}$  é a definição de uma notação adequada por forma a evitar-se o aparecimento de fórmulas complicadas. Por exemplo,  $B_x''$  é dada por:

$$\begin{aligned} B_x''(a, x) &= -2 B(a, x) B_x'(a, x) a \int_0^{+\infty} e^{-az} (1+z)^x \ln(1+z) dz - \\ &\quad - [B(a, x)]^2 a \int_0^{+\infty} e^{-az} (1+z)^x [\ln(1+z)]^2 dz. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Usaremos ao longo deste trabalho a seguinte notação:

$$I_k(a, x) = \frac{\partial^k}{\partial x^k} B(a, x)^{-1} = a \int_0^{+\infty} e^{-az} (1+z)^x [\ln(1+z)]^k dz, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (2.7)$$

Quando  $a$  e  $x$  estiverem subentendidos no contexto,  $B$  e  $I_k$  podem substituir  $B(a, x)$  e  $I_k(a, x)$ , respectivamente, e:

$$B_k = B_x^{(k)}(a, x), \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (2.8)$$

Note-se que (2.5) pode ser escrita como:

$$B_1 = -B^2 I_1, \quad (2.9)$$

ou, de forma mais simples

$$B_1 = \beta_0 I_1, \quad (2.10)$$

introduzindo a seguinte notação:

$$\beta = \beta_0 = -B^2, \quad (2.11)$$

$$\beta_k = \frac{\partial^k \beta}{\partial x^k}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (2.12)$$

Para obter uma expressão geral para  $B_n$ , deriva-se sucessivamente (2.10). Começemos por determinar uma expressão geral para  $\beta_k$ . Para isso, usa-se a fórmula de Leibniz para obter  $\beta_k$  como um polinómio em  $B_0, \dots, B_k$ :

$$\beta_k = -[B \cdot B]^{(k)} = - \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} B_i B_{k-i}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (2.13)$$

Então, de (2.10):

$$B_{n+1} = B_1^{(n)} = [\beta_0 I_1]^{(n)}, \quad (2.14)$$

$$\begin{aligned} B_{n+1} &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \beta_0^{(k)} I_1^{(n-k)} \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \beta_k I_{n+1-k}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (2.15)$$

e, considerando (2.13):

$$B_{n+1} = - \sum_{k=0}^n \left[ \binom{n}{k} \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} B_i B_{k-i} \right] I_{n+1-k}. \quad (2.16)$$

Mostra-se, assim, que  $B_{n+1}$  se pode escrever como uma combinação linear de  $I_1, I_2, \dots, I_{n+1}$ , onde os coeficientes são polinómios em  $B_0, B_1, \dots, B_n$ . Deste modo, desde que se obtenha um algoritmo adequado de cálculo dos valores de  $I_k, k = 0(1)n$ , é possível calcular todas as derivadas  $B_k, k = 0(1)n$ . Os coeficientes binomiais que constam em (2.16) podem ser eficientemente calculados recursivamente (ver [16]).

### 2.2.2 Uma Recursão para $I_k$

Note-se que a recursão (2.3) pode ser escrita na seguinte forma:

$$I_0(a, x) = \frac{x}{a} I_0(a, x-1) + 1. \quad (2.17)$$

A derivação sucessiva de (2.17) em ordem a  $x$  conduz à seguinte relação recursiva,

$$I_k(a, x) = \frac{k}{a} I_{k-1}(a, x-1) + \frac{x}{a} I_k(a, x-1), \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (2.18)$$

Agora, mostraremos que (2.17) e (2.18) permitem estabelecer uma equação matricial recursiva. De facto,

$$I(a, x) = A(a, x) I(a, x - 1) + b, \quad x = 1, 2, 3, \dots \quad (2.19)$$

onde  $I(a, x) = [I_0(a, x) \ I_1(a, x), \dots, I_m(a, x)]^T$  e  $b = [1 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0]^T$  são matrizes coluna e  $A(a, x)$  é a seguinte matriz triangular inferior,  $(m + 1) \times (m + 1)$ ,

$$A(a, x) = \frac{1}{a} \begin{bmatrix} x & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & x & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 2 & x & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 3 & x & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & m & x \end{bmatrix}. \quad (2.20)$$

Na verdade esta apresentação vectorial do sistema de recursões apenas facilita a exposição do método e não apresenta vantagens computacionais (o esquema computacional é dado no Algoritmo 2.1). O algoritmo que permite o cálculo das derivadas  $B_x^{(n)}(a, x)$ ,  $k = 0(1)m$  — Algoritmo 2.1 — pode ser formalizado, assumindo que os valores iniciais para  $I_k(a, 0)$  são conhecidos e que  $B_k$  são calculados em função de  $I_k$ ,  $k = 0(1)m$ , usando o Algoritmo 2.2.

Uma questão central fica por resolver. Para aplicar o procedimento Algoritmo 2.1/Algoritmo 2.2 é necessário obter aproximações para as condições iniciais  $I_k(a, 0)$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} I_0(a, 0) = 1 \\ I_1(a, 0) = a \int_0^{+\infty} e^{-az} \ln(1+z) dz \\ I_2(a, 0) = a \int_0^{+\infty} e^{-az} [\ln(1+z)]^2 dz \\ \vdots \quad \quad \quad \vdots \\ I_m(a, 0) = a \int_0^{+\infty} e^{-az} [\ln(1+z)]^m dz. \end{array} \right. \quad (2.21)$$

**Algoritmo 2.1 (Recursão para o cálculo de  $B_x^{(n)}$ ,  $n = 0(1)m$  dado  $I_n(a, 0)$ )**

*Nota: O contador  $k$  da linha 3 deve tomar os valores  $m, m - 1, \dots, 1$  por ordem decrescente.*

**Input:** Valores de  $a \in \mathbb{R}^+$ ,  $x \in \mathbb{N}$  e  $m \in \mathbb{N}_0$ ;

```

    begin
1.      Obtenha as condições iniciais  $I_n(a, 0)$ ,  $n = 0(1)m$ ;
2.      for  $j \leftarrow 1$  to  $x$  do
          begin
3.          for  $k \leftarrow m$  to  $1$  do  $I_k \leftarrow (k I_{k-1} + j I_k)/a$ ;
4.           $I_0 \leftarrow 1 + (j/a)I_0$ ;
          end
5.      Calcule  $B_x^{(n)}$ ,  $n = 0(1)m$  pelo Algoritmo 2.2;
    end;

```

**Output:**  $B_x^{(n)}(a, x)$ ,  $n = 0(1)m$ ;



**Algoritmo 2.2** (Cálculo de  $B_k$ ,  $k = 0(1)m$  conhecendo  $I_k$ ,  $k = 0(1)m$ )

*Nota: Os coeficientes binomiais são calculados na linha 9.*

**Input:**  $m \in \mathbb{N}_0$  e valores  $I_k$ ,  $k = 0(1)m$ ;

```

    begin
1.       $B_0 \leftarrow 1/I_0$ ;
2.      for  $n \leftarrow 0$  to  $m - 1$  do
        begin
3.           $\beta_n \leftarrow 0$ ;
4.           $B_{n+1} \leftarrow 0$ ;
5.           $C \leftarrow 1$ ;
6.          for  $k \leftarrow 0$  to  $n$  do
            begin
7.               $\beta_n \leftarrow \beta_n - C B_k B_{n-k}$ ;
8.               $B_{n+1} \leftarrow B_{n+1} + C \beta_k I_{n+1-k}$ ;
9.              if  $(n > 1)$  then  $C \leftarrow (n - k) C / (k + 1)$ ;
            end
        end
    end;

```

**Output:** Derivadas sucessivas:  $B_k$ ,  $k = 0(1)m$ ;

A condição inicial  $I_1(a, 0)$  pode ser escrita em termos da função exponencial integral  $E_1(a)$ :

$$E_1(a) = \int_a^{\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt. \quad (2.22)$$

Isso é facilmente obtido por integração parcial e por mudança de variável de integração, obtendo-se:

$$I_1(a, 0) = e^a E_1(a). \quad (2.23)$$

No caso particular da primeira derivada (e para se obter  $I_1(a, x)$  para o inteiro  $x$ ) o valor inicial  $I_1(a, 0)$  pode ser calculado usando aproximações polinomiais e racionais, já conhecidas, para a função  $E_1(a)$ , [1, pag.231], [20, pag.540].

## 2.3 O Cálculo das Condições Iniciais

Nesta secção temos como objectivo desenvolver um algoritmo numérico geral para o cálculo dos integrais impróprios (2.21), que assegure boa precisão e, quanto for possível, simples de implementar e eficiente.

Usando a mudança de variável  $y = az$ , (2.21) pode ser escrita na seguinte forma,

$$I_k(a, 0) = \int_0^{+\infty} e^{-y} \left[ \ln\left(1 + \frac{y}{a}\right) \right]^k dy. \quad (2.24)$$

Ora, este integral é da seguinte forma genérica:

$$\int_0^{\infty} e^{-y} f_k(y) dy, \quad (2.25)$$

para os quais existe um método particular de cálculo numérico, a quadratura de Gauss-Laguerre (ver [22, pag.105] e [1, pag.890]). O resultado base do método é o seguinte:

$$\int_0^{\infty} e^{-y} f_k(y) dy = \sum_{i=1}^n w_i f_k(y_i) + R_n, \quad (2.26)$$

onde  $y_i$  é o  $i$ .<sup>ésimo</sup> zero do polinómio de Laguerre de grau  $n$ ,  $L_n(y)$ , e  $w_i$  são pesos apropriados de forma a garantir que  $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = 0$ :

$$w_i = \frac{(n!)^2 y_i}{(n+1)^2 [L_{n+1}(y_i)]^2}. \quad (2.27)$$

O termo de erro é dado por

$$R_n = \frac{(n!)^2}{(2n)!} f_k^{(2n)}(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}^+. \quad (2.28)$$

Para  $n = 1, \dots, 15$  os valores  $y_i, w_i$  estão tabelados em [1, pag.923].

O método é especialmente indicado se for possível obter majorantes para as derivadas  $f_k^{(2n)}(z)$  em  $\mathbb{R}^+$ . Noutros casos poderá não haver estimativa do erro e a aproximação calculada não terá nenhuma garantia referente à sua precisão. As expressões analíticas das sucessivas derivadas das funções,

$$f_k(y) = \left[ \ln \left( 1 + \frac{y}{a} \right) \right]^k, \quad (2.29)$$

são bastantes complicadas e os resultados obtidos para as majorações são bastante fracos (excepto no caso de  $k = 1, 2$  e  $a > 30$ ). Todavia, esta questão não coloca em causa a precisão do método proposto, como teremos oportunidade de mostrar na subsecção seguinte, ao estudarmos as propriedades da propagação do erro.

Poder-se-ia argumentar que o processo usado para obter  $I_k(a, 0)$  pode ser aplicado directamente para o cálculo de  $I_k(a, x)$ , e nesse caso o Algoritmo 2.1 seria desnecessário. Contudo, esse processo têm a desvantagem inerente de conduzir a aproximações grosseiras para valores de  $x$  elevados. De facto, neste caso, a função  $f_k(y)$  em (2.25) tem a seguinte forma:

$$f_k(y) = \left( 1 + \frac{y}{a} \right)^x \left[ \ln \left( 1 + \frac{y}{a} \right) \right]^k. \quad (2.30)$$

Como, para valores de  $x$  elevados, a função  $f_k^{(2n)}$  (à qual o erro é proporcional) assumirá em  $\mathbb{R}^+$  valores muito elevados, a precisão pode ser pobre. Deste modo, no método proposto,  $I_k(a, 0)$  é calculado num primeiro passo e só depois é aplicado o Algoritmo 2.1.

### 2.3.1 Análise da Estabilidade Numérica do Processo Recorrente

Foram propostas várias definições de estabilidade de uma equação às diferenças (ver por exemplo [2, pag. 240]); No entanto, no que toca à computação numérica das soluções em termos práticos é vital saber o modo pelo qual os erros relativos são propagados no processo recorrente, ou citando Abramowitz & Stegun [1, pag. xiii]: *“If the errors do not grow relative to the size of the wanted function, the process is said to be stable. If, however, the relative errors grow and will eventually overwhelm the wanted function, the process is unstable.”*

Nesta subsecção analisaremos a propagação do erro associados às condições iniciais, para os sucessivos valores calculados durante o procedimento recursivo proposto no sentido progressivo (ou seja para  $x$  crescente). Esta análise é uma das questões chave na avaliação da utilidade do método. Se não for estabelecida a estabilidade conforme a supracitada noção, o processo seria de nenhuma utilidade. Note-se que é o que acontece com a recursão proposta se usada no sentido regressivo (ou seja, para  $x$  decrescente). Neste caso, experiências computacionais extensivas mostram facilmente que o método não tem utilidade por ser instável — ao fim de alguns passos a precisão degrada-se de tal forma que se perdem todos os algarismos significativos.

Assumiremos até o caso geral em que  $I_0(a, x)$  poderá ser calculado com erro associado (note-se que conhecemos exactamente o seu valor para  $x = 0$ ,  $I_0(a, 0) = 1$ ). Esta assumptione permitirá obter resultados perfeitamente genéricos, em especial para situações em que as condições iniciais não estão estabelecidas em  $x = 0$ . Essa situação ocorre por exemplo na clássica interpolação de Rapp [23] para calcular valores da função  $B(a, x)$  usando (2.17), para  $x \in \mathbb{R}^+$  não inteiro.

Inicialmente, vamos supor que os erros de arredondamento gerados nas operações aritméticas inerentes ao cálculo dos sucessivos termos da relação recorrente (2.19) são desprezáveis. Devido ao erro associado à condição inicial, para  $k = 0(1)m$ , o valor

calculado para  $I_k(a, x)$  será denotado por  $\tilde{I}_k(a, x)$ . Além desta notação usaremos  $\epsilon(k, x)$  para o erro dessa aproximação:

$$\tilde{I}_k(a, x) = I_k(a, x) + \epsilon(k, x). \quad (2.31)$$

O erro relativo  $r(k, x)$  é

$$\tilde{I}_k(a, x) = [1 + r(k, x)] I_k(a, x). \quad (2.32)$$

Veremos que as funções

$$M_k(x) = \frac{x I_k(a, x-1)}{a I_k(a, x)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (2.33)$$

têm um papel crucial na análise do erro. No contexto ver-se-á porque podem designar-se por *funções multiplicadoras do erro*. Usando as recursões (2.17) e (2.18), e depois de algumas simplificações,

$$M_k(x) = \begin{cases} 1 - B(a, x) & \text{se } k = 0 \\ \frac{1}{1 + \frac{k I_{k-1}(a, x-1)}{x I_k(a, x-1)}} & \text{se } k > 0. \end{cases} \quad (2.34)$$

Logo,  $M_k(x) \in ]0, 1[$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ . No Apêndice 2.A (Teorema 2.6) é provado que as funções  $M_k(x)$  são estritamente crescentes na variável  $x$ , e que  $\lim_{x \rightarrow \infty} M_k(x) = 1$ . Em seguida são apresentados alguns resultados preparatórios.

### Lema 2.1

*Se usarmos a relação recursiva (2.17) para calcular uma aproximação de  $I_0(a, x+1)$  quando dispomos de um valor aproximado de  $I_0(a, x)$ , então:*

$$r(0, x+1) = M_0(x+1) r(0, x) \quad \text{com} \quad M_0(x+1) = 1 - B(a, x+1).$$

**Prova:** Uma vez que

$$\tilde{I}_0(a, x+1) = \frac{x+1}{a} \tilde{I}_0(a, x) + 1, \quad (2.35)$$

e considerando (2.32):

$$[1 + r(0, x + 1)] I_0(a, x + 1) = \frac{x + 1}{a} [1 + r(0, x)] I_0(a, x) + 1. \quad (2.36)$$

Usando a recursão (2.17),

$$r(0, x + 1) I_0(a, x + 1) = \frac{x + 1}{a} r(0, x) I_0(a, x), \quad (2.37)$$

logo,

$$r(0, x + 1) = \frac{(x + 1) I_0(a, x)}{a I_0(a, x + 1)} r(0, x). \quad (2.38)$$

Combinando (2.38) com as expressões (2.33) e (2.34), obtem-se o resultado pretendido.  $\square$

**Observação 2.1** Uma vez que  $M_0(x + 1) \in ]0, 1[$ , então  $\text{sign}[r(0, x + 1)] = \text{sign}[r(0, x)]$  e  $|r(0, x + 1)| < |r(0, x)|$ . Usando argumentos indutivos é possível provar que o cálculo de  $I_0(a, x)$  pode ser feito com mais precisão que  $I_0(a, 0)$ .  $\square$

Por outro lado, de acordo com o próximo lema, para  $k > 0$ , o erro de  $I_k(a, x + 1)$  depende dos erros associados a  $I_{k-1}(a, x)$  e  $I_k(a, x)$ .

### Lema 2.2

*Se usarmos a relação (2.18) para calcular uma aproximação de  $I_k(a, x + 1)$  para valores aproximados de  $I_{k-1}(a, x)$  e  $I_k(a, x)$ , então*

$$r(k, x + 1) = M_k(x + 1) r(k, x) + [1 - M_k(x + 1)] r(k - 1, x).$$

**Prova:** O valor aproximado  $\tilde{I}_k(a, x + 1)$ , calculado a partir de (2.18), é

$$\tilde{I}_k(a, x + 1) = \frac{k \tilde{I}_{k-1}(a, x) + (x + 1) \tilde{I}_k(a, x)}{a}. \quad (2.39)$$

Então,

$$\begin{aligned} [1 + r(k, x + 1)] I_k(a, x + 1) &= \frac{k [1 + r(k - 1, x)] I_{k-1}(a, x)}{a} + \\ &+ \frac{(x + 1) [1 + r(k, x)] I_k(a, x)}{a}. \end{aligned} \quad (2.40)$$

Esta igualdade pode ser ainda escrita da seguinte forma,

$$r(k, x + 1) I_k(a, x + 1) = \frac{k r(k - 1, x) I_{k-1}(a, x) + (x + 1) r(k, x) I_k(a, x)}{a}, \quad (2.41)$$

ou seja,

$$r(k, x + 1) = \frac{(x + 1) I_k(a, x)}{a I_k(a, x + 1)} r(k, x) + \frac{k I_{k-1}(a, x)}{a I_k(a, x + 1)} r(k - 1, x), \quad (2.42)$$

ou finalmente,

$$r(k, x + 1) = M_k(x + 1) r(k, x) + [1 - M_k(x + 1)] r(k - 1, x),$$

como se pretendia demonstrar.  $\square$

**Observação 2.2** Usando o Lema 2.2, pode afirmar-se que  $r(k, x + 1)$ ,  $k > 0$  é uma combinação linear convexa dos valores  $r(k, x)$  e  $r(k - 1, x)$  (para cada  $x$  fixo). É também imediato que:

- (i)  $r(k, x + 1) = r(k, x)$  se  $r(k, x) = r(k - 1, x)$ ;
- (ii)  $r(k, x + 1) \in ]r(k - 1, x), r(k, x)[$  se  $r(k, x) > r(k - 1, x)$ ;
- (iii)  $r(k, x + 1) \in ]r(k, x), r(k - 1, x)[$  se  $r(k, x) < r(k - 1, x)$ .

$\square$

Definimos agora o vector dos erros relativos

$$R(x) = \begin{bmatrix} r(0, x) \\ r(1, x) \\ \vdots \\ r(m, x) \end{bmatrix}, \quad x = 0, 1, 2, \dots, \quad m \in \mathbb{N}, \quad (2.43)$$

associado à aproximação

$$\tilde{I}(a, x) = \begin{bmatrix} \tilde{I}_0(a, x) \\ \tilde{I}_1(a, x) \\ \vdots \\ \tilde{I}_m(a, x) \end{bmatrix} \quad \text{do vector} \quad I(a, x) = \begin{bmatrix} I_0(a, x) \\ I_1(a, x) \\ \vdots \\ I_m(a, x) \end{bmatrix}. \quad (2.44)$$

A sucessão vectorial definida por  $R(x)$ ,  $x = 0, 1, 2, \dots$  satisfaz o próximo teorema.

**Teorema 2.1**

Se a relação recorrente (2.19) for usada, partindo de uma aproximação  $\tilde{I}(a, 0)$  do vector  $I(a, 0)$ , então

$$\|R(x+1)\|_\infty \leq \|R(x)\|_\infty, \quad x = 0, 1, 2, \dots$$

**Prova:** Em primeiro lugar, introduza-se a seguinte notação

$$\widehat{M}_k(x+1) = 1 - M_k(x+1), \quad k = 1(1)m.$$

Usando os Lemas 2.1 e 2.2, pode escrever-se a seguinte igualdade,

$$R(x+1) = W(x+1)R(x), \quad (2.45)$$

onde

$$W(x+1) = \begin{bmatrix} M_0(x+1) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \widehat{M}_1(x+1) & M_1(x+1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \widehat{M}_2(x+1) & M_2(x+1) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \widehat{M}_m(x+1) & M_m(x+1) \end{bmatrix}. \quad (2.46)$$

Dado que  $|M_0(x+1)| < 1$  e  $|\widehat{M}_k(x+1)| + |M_k(x+1)| = 1$ ,  $k = 1(1)m$ , então

$$\|W(x+1)\|_\infty = 1, \quad x = 0, 1, 2, \dots \quad (2.47)$$

A norma vectorial  $\|\cdot\|_\infty$  é compatível com a norma matricial  $\|\cdot\|_\infty$ , logo

$$\|R(x+1)\|_\infty = \|W(x+1)R(x)\|_\infty \leq \|W(x+1)\|_\infty \|R(x)\|_\infty = \|R(x)\|_\infty. \quad (2.48)$$

□

**Observação 2.3** O Teorema 2.1 permite afirmar que, em certo sentido, o erro relativo dos valores obtidos da relação recursiva (2.19) não pode crescer. Note-se que a igualdade que o teorema estabelece só ocorre se duas componentes consecutivas de  $R(x)$  são iguais (caso (i) da Observação 2.2). De facto, nos casos (ii) e (iii) da Observação 2.2,  $\|R(x+1)\|_\infty < \|R(x)\|_\infty$ . □



**Observação 2.4** O conjunto dos valores próprios de  $W(x+1)$  é

$$\{M_0(x+1), M_1(x+1), \dots, M_m(x+1)\}.$$

Portanto, para todo o  $x$ , o raio espectral  $\rho[W(x+1)]$  é estritamente menor que 1. Consequentemente (ver por exemplo [7, pag.228]), para um valor fixo de  $x$ , existe uma norma matricial  $\|\cdot\|_m$  compatível com uma norma vectorial  $\|\cdot\|_v$  tal que  $\|W(x+1)\|_m < 1$ . É fácil de verificar que  $\|R(x+1)\|_v < \|R(x)\|_v$ .

Se admitissemos a hipótese da existência de uma norma matricial, fixa, compatível com uma norma vectorial para todo o  $x \in \mathbb{N}$  tal que  $\|W(x)\|_m < 1 - \epsilon$  para algum  $\epsilon > 0$ , então teríamos:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \|R(x)\|_v \leq \lim_{x \rightarrow \infty} \|R(0)\|_v \prod_{j=1}^x \|W(j)\|_m = 0.$$

Mas, pelo Teorema 2.6 do Apêndice 2.A,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \rho[W(x+1)] = 1.$$

e portanto, tal hipótese não é verdadeira. □

Seguidamente, são estabelecidos alguns resultados respeitantes ao comportamento assintótico de  $R(x)$ .

**Teorema 2.2**

A sequência  $R(x)$ ,  $x = 0, 1, \dots$ , é convergente, e

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \|R(x)\|_\infty \leq \|R(0)\|_\infty.$$

**Prova:** Do Teorema 2.1 resulta que, para  $x = 0, 1, \dots$ ,

$$|r(k, x)| \leq \|R(0)\|_\infty, \quad k = 0(1)m.$$

Logo, as sequências  $r(k, x)$  são limitadas. Provaremos, de seguida, que estas sequências são monótonas para  $x \geq j$  (para algum  $j \in \mathbb{N}$ ). Esta monotonia deduz-se directamente dos Lemas 2.1 e 2.2. De facto,  $r(0, x)$  é monótona para  $x \geq 0$ . Admitamos que  $r(k-1, x)$  é monótona para  $x \geq j_0$ . Em primeiro lugar, suponhamos  $r(k-1, x)$  é decrescente.

- Se  $r(k, j_0) \geq r(k-1, j_0)$ , então, pelos casos (i) e (ii) da Observação 2.2,  $r(k, x)$  é decrescente para  $x \geq j_0 + 1$ .
- Se  $r(k, j_0) < r(k-1, j_0)$  dividimos a análise nos dois casos seguintes:
  - se  $r(k, j_0 + n) < r(k-1, j_0 + n)$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ , então usando o caso (iii) da Observação 2.2 mostra-se que  $r(k, x)$  é crescente para  $x \geq j_0$ .
  - se  $\exists n \in \mathbb{N} : r(k, j_0 + n) \geq r(k-1, j_0 + n)$ , então, pelos casos (i) e (ii) da Observação 2.2,  $r(k, x)$  é decrescente para  $x \geq j_0 + n + 1$ .

Se  $r(k-1, x)$  é monótona crescente, a prova é análoga. □

Note-se que, contudo, em geral, o limite a que se refere o teorema anterior não é nulo, como se prova no teorema seguinte.

### Teorema 2.3

Se a relação recursiva (2.17) for usada para calcular aproximações de  $I_0(a, x)$ ,  $x = 1, 2, 3, \dots$ , então

$$\lim_{x \rightarrow \infty} r(0, x) = e^{-a} r(0, 0).$$

**Prova:** Aplicando o Lema 2.1 sucessivamente:

$$r(0, x+1) = r(0, 0) \prod_{j=0}^x M_0(j+1). \quad (2.49)$$

Sendo assim,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} r(0, x+1) = r(0, 0) \prod_{j=0}^{\infty} [1 - B(a, j+1)]. \quad (2.50)$$

Seja  $L_0 = \prod_{j=0}^{\infty} [1 - B(a, j+1)]$ . A proposição seguinte é usada no cálculo de  $L_0$ .

Sejam  $b_n \in ]0, 1[$  para cada  $n$ , o produto  $\prod_{n=1}^{\infty} (1 - b_n)$  é convergente (*i. e.*,  $\prod_{n=1}^{\infty} [1 - b_n] = p \neq 0$ ) se e só se a série  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  é convergente (ver por exemplo [18, pag.77]).

Aplicamos estes resultados, se a série  $\sum_{x=1}^{\infty} B(a, x)$  é convergente, então  $L_0 \neq 0$ . Uma vez que

$$\ell = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{B(a, x+1)}{B(a, x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{I_0(a, x)}{\frac{x+1}{a} I_0(a, x) + 1} = 0 < 1,$$

o Critério de D'Alembert garante que a série é convergente. Defina-se a função seguinte para o cálculo de  $L_0$ :

$$P(y) = \prod_{x=1}^y [1 - B(a, x)] = \exp \left[ \sum_{x=1}^y \ln(1 - B(a, x)) \right].$$

Dado que para  $x$  inteiro:

$$1 - B(a, x) = \frac{\sum_{j=0}^{x-1} a^j / j!}{\sum_{j=0}^x a^j / j!},$$

então

$$P(y) = \exp \left\{ \sum_{x=1}^y \left[ \ln \left( \sum_{j=0}^{x-1} a^j / j! \right) - \ln \left( \sum_{j=0}^x a^j / j! \right) \right] \right\},$$

e é fácil de verificar que

$$P(y) = \exp \left[ - \ln \left( \sum_{j=0}^y a^j / j! \right) \right] = \left( \sum_{j=0}^y a^j / j! \right)^{-1}.$$

O resultado pretendido fica provado reconhecendo a expansão de MacLaurin da função exponencial, quando se faz  $y \rightarrow \infty$ . □

**Observação 2.5** Para valores de  $x$  não inteiro, as condições iniciais são estimadas para um ponto  $(a, h)$ , com  $h \in ]0, 1[$ , obtendo-se

$$\lim_{x \rightarrow \infty} r(0, x+1) = r(0, h) \prod_{j=0}^{\infty} M_0(j+1+h).$$

Adicionalmente, do Teorema 2.6 (Apêndice 2.A),

$$e^{-a} = \prod_{j=0}^{\infty} M_0(j+1) < \prod_{j=0}^{\infty} M_0(j+1+h) < \prod_{j=1}^{\infty} M_0(j+1) = \frac{e^{-a}}{1 - B(a, 1)} = (1+a)e^{-a}.$$

Consequentemente, do Teorema de Bolzano, tem-se para algum  $\alpha \in ]0, a[$ :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} r(0, x+1) = (1+\alpha)e^{-a} r(0, h).$$

□

O Teorema 2.3 permite concluir que para  $a$  e  $x$  suficientemente elevados,  $B(a, x)$  pode ser calculada com grande precisão mesmo que a condição inicial seja estimada de um modo grosseiro. O exemplo seguinte ilustra de forma, talvez surpreendente, a afirmação anterior. Se a recursão (2.17) for usado para calcular  $B(100, 100)$ , usando, como habitual, a condição inicial  $I_0(100, 0) = 1$ , obtem-se

$$B(100, 100) = I_0^{-1}(100, 100) \approx 0.075\ 700\ 452\ 710\ 860\ 97 \quad (2.51)$$

Considerando valores iniciais absurdos, como  $10^{27}$  ou  $-10^{27}$ , o resultado obtido após 100 passos é exactamente o mesmo que (2.51).

O seguinte resultado importante pode agora ser provado.

#### Teorema 2.4

Se  $r(0, 0) = r(1, 0) = \dots = r(k-1, 0) = 0$ , então

$$\lim_{x \rightarrow \infty} r(k, x) = 0.$$

**Prova:** Note-se que  $r(j, 0) = 0$ ,  $j = 0(1)k-1$  implica  $r(j, x) = 0$ ,  $x = 1, 2, \dots$ ,  $j = 0(1)k-1$ . Nesse caso, do Lema 2.2 resulta que:

$$r(k, x) = r(k, 0) \prod_{j=1}^x M_k(j).$$

Seja  $L_k = \prod_{j=1}^{\infty} M_k(j)$ . Então

$$\lim_{x \rightarrow \infty} r(k, x) = r(k, 0) L_k.$$

Uma vez que  $L_k$  é o limite de uma sequência monótona decrescente tomando valores no intervalo  $[0, 1]$ , é óbvio que  $L_k \in [0, 1]$ . Observe-se que

$$M_k(x) = 1 - u(x), \quad k = 1, 2, \dots$$

tomando

$$u(x) = \frac{k I_{k-1}(a, x-1)}{a I_k(a, x)}.$$

No sentido de provarmos que o produto infinito dos  $M_k(j)$  é igual a zero, mostraremos que a série  $\sum_{x=1}^{\infty} u(x)$  é divergente (ver [18, pag.77]). Usando a recursão (2.18), pode escrever-se

$$u(x) = \frac{1}{1 + \frac{x I_k(a, x-1)}{k I_{k-1}(a, x-1)}}.$$

Para  $k > 1$ , o Lema 2.3 do Apêndice 2.A permite concluir que

$$\frac{I_k(a, x-1)}{I_{k-1}(a, x-1)} \leq \ln \left( \frac{x}{a} + \frac{(k-1) I_{k-2}(a, x-1)}{a I_{k-1}(a, x-1)} \right).$$

Mas, do Lema 2.6 do Apêndice 2.A, o termo  $I_{k-2}(a, x-1)/I_{k-1}(a, x-1)$  anula-se quando  $x \rightarrow \infty$ , logo

$$\exists x_0 \in \mathbb{N} : \frac{(k-1) I_{k-2}(a, x-1)}{a I_{k-1}(a, x-1)} < 1, \quad \forall x > x_0.$$

Deste modo,

$$1 + \frac{x I_k(a, x-1)}{k I_{k-1}(a, x-1)} \leq 1 + \frac{x}{k} \ln \left( \frac{x}{a} + 1 \right), \quad \forall x > x_0,$$

e portanto

$$u(x) \geq w(x) = \frac{1}{1 + \frac{x}{k} \ln \left( \frac{x}{a} + 1 \right)}, \quad \forall x > x_0.$$

Mas a série  $\sum_{x=x_0}^{\infty} w(x)$  é divergente (ver por exemplo [18, pag.296]). Sendo assim,  $\sum_{x=1}^{\infty} u(x)$  é também divergente. Fica, assim, provado o pretendido para  $k > 1$ . Para  $k = 1$ , o mesmo processo pode ser utilizado usando a relação (2.60) (do Apêndice 2.A), em vez da que se obteve do Lema 2.3.  $\square$

**Observação 2.6** Se  $r(0, 0) = 0$ , isto é, se a condição inicial da função for exacta ( $I_0(a, 0) = 1$ ), do teorema anterior conclui-se que o erro relativo da aproximação calculada para a primeira derivada anula-se quando  $x \rightarrow \infty$ .  $\square$

De seguida focaremos a nossa atenção em algumas formulações assintóticas de relações anteriormente estabelecidas. Estas formulações podem clarificar alguns aspectos qualitativos e podem ser importantes para valores de  $x$  muito elevados.

A este respeito, o resultado principal é o Teorema 2.6, do Apêndice 2.A, que estabelece que  $\lim_{x \rightarrow \infty} M_k(x) = 1$ . Assim, do Lema 2.2, e para  $x$  suficientemente grande,

obtem-se a seguinte aproximação para  $r(k, x + 1)$ :

$$r(k, x + 1) \simeq M_k(x) r(k, x). \quad (2.52)$$

Uma vez que, nestas condições,  $M_k(x) \simeq 1$ , então

$$r(k, x + 1) \simeq r(k, x). \quad (2.53)$$

Podem também concluir-se que a zona de pior caso para a precisão do método será quando  $x \gg a$  (zonas extremas de baixo bloqueio). Nessas zonas, uma pequena contribuição do erro de arredondamento pode conduzir a que a precisão dos sucessivos termos calculados se venha a degradar. Devido a este efeito, será de esperar que para  $x$  bastante elevado, e em presença de erros de arredondamento associados aos cálculos, a precisão não melhore arbitrariamente. Experiências computacionais levam a concluir que esta última situação não é detectada porque antes de tal acontecer, ocorre uma interrupção de processamento por “*overflow*” (note que as quantidades  $I_k(a, x)$  crescem com  $x$ ).

Expressões assintóticas para a própria relação recorrente podem também ser obtidas. Tendo em conta que  $\lim_{x \rightarrow \infty} I_0(a, x) = +\infty$ , de (2.17) obtem-se a seguinte aproximação para valores elevados de  $x$ ,

$$I_0(a, x) \simeq \frac{x}{a} I_0(a, x - 1). \quad (2.54)$$

Como uma consequência do Teorema 2.6 do Apêndice 2.A, de (2.18) obtem-se a seguinte aproximação

$$I_k(a, x) \simeq \frac{x}{a} I_k(a, x - 1), \quad k > 0, \quad (2.55)$$

que permite escrever a seguinte relação assintótica vectorial:

$$I(a, x) \simeq \frac{x}{a} I(a, x - 1). \quad (2.56)$$

## 2.4 Número de Circuitos não Inteiro

Se  $x \in \mathbb{R}^+ \wedge x \notin \mathbb{N}$  pode usar-se interpolação parabólica tal como Rapp propôs para o cálculo da função. No entanto, propomos outro processo.

Sendo  $n = \lfloor x \rfloor$  (o maior inteiro menor que  $x$ ) e  $h = x - n$  a parte fraccionária de  $x$ , estimaremos as condições iniciais no ponto  $(a, h)$  em vez de o fazer no ponto  $(a, 0)$  como no caso em que  $x \in \mathbb{N}$ . Ou seja, há que calcular as quantidades:

$$\left\{ \begin{array}{l} I_0(a, h) = a \int_0^{+\infty} e^{-az} (1+z)^h dz \\ I_1(a, h) = a \int_0^{+\infty} e^{-az} (1+z)^h \ln(1+z) dz \\ I_2(a, h) = a \int_0^{+\infty} e^{-az} (1+z)^h [\ln(1+z)]^2 dz \\ \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \\ I_m(a, h) = a \int_0^{+\infty} e^{-az} (1+z)^h [\ln(1+z)]^m dz. \end{array} \right. \quad (2.57)$$

Esse cálculo é feito por quadratura de Gauss-Laguerre. Uma vez que  $h \in ]0, 1[$ , o erro dessa operação de quadratura não será muito maior que na operação de cálculo das condições iniciais no ponto  $(a, 0)$ . Contudo, sugerimos um procedimento para melhorar a precisão, que é de especial importância para valores de  $a$  pequenos ( $a < 2$ ). Experiências computacionais extensivas sugerem que a precisão da quadratura de Gauss-Laguerre é muito sensível à mudança de variável que se venha a usar nos integrais (2.57). Propomos a mudança de variável  $y = cz$ ,  $c > 0$ , que origina a seguinte expressão:

$$I_k(a, x) = \int_0^{+\infty} e^{-y} \underbrace{\frac{a}{c} e^{(c-a)y/c} (1+y/c)^h [\ln(1+y/c)]^k}_{f_k(y)} dy, \quad (2.58)$$

onde  $f_k(y)$  pode ser usada para a quadratura de Gauss-Laguerre (ver fórmula (2.26)).

O melhor valor para o parâmetro  $c$  depende de  $a$ . Sugerimos:

$$c = a \left( 3.3371 e^{-1.3784\sqrt{a}} + 1.3629 \right). \quad (2.59)$$

A expressão (2.59) foi obtida usando análise de regressão não linear, com o objectivo de

minimizar o erro das aproximações de Gauss-Laguerre de grau 15. Com este propósito, foi preparada uma tabela relativa aos acima citados erros (para  $h \in [0, 1[$  e  $k = 0, 1, 2$ ).

Depois do cálculo das condições iniciais, basta usar a recursão (2.19) para obter sucessivamente os vectores:

$$I(a, 1 + h), I(a, 2 + h), \dots, I(a, n + h) = I(a, x).$$

Note-se que a adaptação do Algoritmo 2.1 é imediata e o mesmo é verdadeiro para os resultados sobre a sensibilidade ao erro da condição inicial.

## 2.5 Resultados Computacionais

Nas Tabelas 2.1 – 2.7 apresentam-se resultados computacionais. Estes resultados permitem comparar a precisão e eficiência do método aqui proposto com o algoritmo de Jagerman (baseado na quadratura por séries cardinais). A implementação foi feita com um compilador Turbo C (versão 2.0) e um microcomputador com processador INTEL 80486 (50 MHz). Todos os cálculos foram feitos usando dupla precisão e as tabelas listadas foram produzidas automaticamente em código  $\text{\LaTeX}$ .

Em cada tabela, o parâmetro  $a$  toma todos os valores do conjunto:

$$\{ 1, 5, 10, 100, 1000, 5000 \}.$$

Os valores de  $x$  para cada valor de  $a$  foram calculados de forma a obter bloqueios quase constantes em cada tabela. Assim, na Tabela 2.1 os argumentos  $(a, x)$  são sempre tais que  $B(a, x) \approx 0.5$ . Apresentam-se depois tabelas para bloqueios de aproximadamente  $10^{-p}$ ,  $p = 1(1)6$ , cobrindo assim todas as zonas de interesse nas aplicações de teletráfego.

Para a leitura das tabelas tenham-se em conta as seguintes convenções:

- $B_j^{(k)} \approx B^{(k)}$  usando o algoritmo de Jagerman implementado como se mostra no Apêndice 2.B ( $h = 0.1$  e  $\epsilon = 10^{-15}$ ).



- $B_c^{(k)} \approx B^{(k)}$  usando o método proposto e estimando as condições iniciais por quadratura de Gauss-Laguerre de grau 15, com base nas fórmulas (2.26), (2.58) e (2.59).

Os tempos de processamento (em segundos) são registados juntamente com a aproximação obtida. No sentido de ser obtida melhor precisão nos tempos de processamento, foram tomadas médias dos tempos obtidos para 200 aplicações repetidas do método proposto e 100 do método de Jagerman. Este procedimento foi tomado devido às limitações na precisão do relógio do sistema operativo. Para cada par  $(a, x)$  são apresentadas aproximações para  $B^{(k)}$ ,  $k = 0(1)5$ . O tempo de processamento de  $B^{(0)}$  é associado ao cálculo da função de Erlang-B.

As tabelas apresentadas (2.1 – 2.7) permitem tirar as seguintes conclusões:

- Como esperado, a eficiência do método proposto depende linearmente de  $x$ , enquanto que, o método de Jagerman parece não depender muito de  $a$  e  $x$ .
- O algoritmo proposto, com raras excepções, é mais eficiente do que o de Jagerman. De facto, o método de Jagerman torna-se mais eficiente apenas para valores suficientemente elevados de  $x$ . O valor crítico de  $x$  para o qual tal acontece parece situar-se entre 1000 a 5000 (se a ordem máxima da derivada calculada não for muito alta).
- Outros resultados computacionais mostram que se  $a < 1$  a precisão do método proposto é menor do que a que se obtém por aplicação do método de Jagerman (comparações com métodos baseados em quadratura adaptativa mostram que os resultados obtidos nessa gama de valores, pelo método de Jagerman, apresentam mais do que 10 dígitos exactos). Este facto facilmente se explica: a quadratura de Gauss-Laguerre calcula uma aproximação grosseira das condições iniciais e, para valores pequenos de  $a$  e  $x$ ,  $r(k, x) \approx r(k, 0)$ . No entanto, a precisão do método proposto deverá ser suficiente na maioria das aplicações. Contudo, para  $a \approx 0$ , o cálculo com elevada precisão deve ser feito com o algoritmo de Jagerman.

	$(a = 1E + 00 ; x = 1.0000000E + 00)$		$(a = 5E + 00 ; x = 3.2155683E + 00)$	
$B_j^{(0)}$	5.00000000000000E - 01	0.0181 s	5.00000758447493E - 01	0.0181 s
$B_c^{(0)}$	5.00000000000119E - 01	0.0006 s	5.00000758447486E - 01	0.0008 s
$B_j^{(1)}$	-3.99086840580799E - 01	0.0187 s	-1.35958180529581E - 01	0.0187 s
$B_c^{(1)}$	-3.99086840604816E - 01	0.0014 s	-1.35958180529589E - 01	0.0019 s
$B_j^{(2)}$	2.05924851621253E - 01	0.0198 s	1.53814525193731E - 02	0.0197 s
$B_c^{(2)}$	2.05924851794575E - 01	0.0017 s	1.53814525193714E - 02	0.0030 s
$B_j^{(3)}$	-4.79694603639133E - 03	0.0197 s	3.23833275832963E - 03	0.0204 s
$B_c^{(3)}$	-4.79694670810504E - 03	0.0027 s	3.23833275833656E - 03	0.0038 s
$B_j^{(4)}$	-7.41549244463252E - 02	0.0214 s	3.92471297185028E - 05	0.0208 s
$B_c^{(4)}$	-7.41549233512078E - 02	0.0031 s	3.92471297213842E - 05	0.0050 s
$B_j^{(5)}$	-1.53269480254462E - 02	0.0215 s	-5.41138478498768E - 04	0.0215 s
$B_c^{(5)}$	-1.53269415960370E - 02	0.0038 s	-5.41138478505544E - 04	0.0060 s
	$(a = 1E + 01 ; x = 5.8013897E + 00)$		$(a = 1E + 02 ; x = 5.0964608E + 01)$	
$B_j^{(0)}$	4.99999999306830E - 01	0.0186 s	5.00000098813628E - 01	0.0187 s
$B_c^{(0)}$	4.99999999306829E - 01	0.0008 s	5.00000098813628E - 01	0.0014 s
$B_j^{(1)}$	-7.83502860689015E - 02	0.0187 s	-9.64010266948887E - 03	0.0186 s
$B_c^{(1)}$	-7.83502860689020E - 02	0.0022 s	-9.64010266948886E - 03	0.0022 s
$B_j^{(2)}$	3.80918139776773E - 03	0.0198 s	1.23560867041674E - 05	0.0198 s
$B_c^{(2)}$	3.80918139776703E - 03	0.0031 s	1.23560867041670E - 05	0.0036 s
$B_j^{(3)}$	7.22066038700939E - 04	0.0203 s	5.97425133570281E - 07	0.0203 s
$B_c^{(3)}$	7.22066038700780E - 04	0.0038 s	5.97425133570292E - 07	0.0047 s
$B_j^{(4)}$	1.05083409513570E - 04	0.0209 s	3.61276681005393E - 08	0.0209 s
$B_c^{(4)}$	1.05083409513862E - 04	0.0052 s	3.61276681005380E - 08	0.0060 s
$B_j^{(5)}$	-9.89733324036962E - 06	0.0214 s	2.55060110842441E - 09	0.0220 s
$B_c^{(5)}$	-9.89733324011200E - 06	0.0060 s	2.55060110842344E - 09	0.0071 s
	$(a = 1E + 03 ; x = 5.0099605E + 02)$		$(a = 5E + 03 ; x = 2.5009992E + 03)$	
$B_j^{(0)}$	5.00000004754066E - 01	0.0181 s	5.00000000445624E - 01	0.0181 s
$B_c^{(0)}$	5.00000004754063E - 01	0.0030 s	5.00000000445634E - 01	0.0112 s
$B_j^{(1)}$	-9.96047020480103E - 04	0.0187 s	-1.99840382396836E - 04	0.0187 s
$B_c^{(1)}$	-9.96047020480100E - 04	0.0063 s	-1.99840382396836E - 04	0.0239 s
$B_j^{(2)}$	1.55352801547917E - 08	0.0198 s	1.27237039507049E - 10	0.0198 s
$B_c^{(2)}$	1.55352801548273E - 08	0.0094 s	1.27237039504249E - 10	0.0357 s
$B_j^{(3)}$	9.08732319103777E - 11	0.0203 s	1.51896271276143E - 13	0.0203 s
$B_c^{(3)}$	9.08732319103256E - 11	0.0126 s	1.51896271274587E - 13	0.0483 s
$B_j^{(4)}$	7.03278718053532E - 13	0.0208 s	2.41395513390495E - 16	0.0209 s
$B_c^{(4)}$	7.03278718052400E - 13	0.0159 s	2.41395513381516E - 16	0.0601 s
$B_j^{(5)}$	6.75080439867837E - 15	0.0220 s	4.78774240325394E - 19	0.0214 s
$B_c^{(5)}$	6.75080439863668E - 15	0.0192 s	4.78774240257388E - 19	0.0728 s

Tabela 2.1: Método RC: Aproximações e tempos de processamento ( $B \approx 0.5$ )

	$(a = 1E + 00 ; x = 2.6209426E + 00)$		$(a = 5E + 00 ; x = 7.3611300E + 00)$	
$B_j^{(0)}$	1.00005807301472E - 01	0.0187 s	1.00000075730118E - 01	0.0192 s
$B_c^{(0)}$	1.00005807301490E - 01	0.0008 s	1.00000075730117E - 01	0.0011 s
$B_j^{(1)}$	-1.19365140548035E - 01	0.0197 s	-5.31173696245123E - 02	0.0198 s
$B_c^{(1)}$	-1.19365140546107E - 01	0.0022 s	-5.31173696245130E - 02	0.0019 s
$B_j^{(2)}$	1.17730346076375E - 01	0.0209 s	2.01797412047067E - 02	0.0203 s
$B_c^{(2)}$	1.17730346074438E - 01	0.0031 s	2.01797412047065E - 02	0.0031 s
$B_j^{(3)}$	-8.00771208463008E - 02	0.0214 s	-2.79510960229252E - 03	0.0220 s
$B_c^{(3)}$	-8.00771208525040E - 02	0.0041 s	-2.79510960229169E - 03	0.0041 s
$B_j^{(4)}$	6.09101755851744E - 03	0.0225 s	-2.10487105297507E - 03	0.0220 s
$B_c^{(4)}$	6.09101767745716E - 03	0.0053 s	-2.10487105297426E - 03	0.0053 s
$B_j^{(5)}$	6.61803136721127E - 02	0.0231 s	7.22083674685190E - 04	0.0236 s
$B_c^{(5)}$	6.61803130119859E - 02	0.0063 s	7.22083674683484E - 04	0.0063 s
	$(a = 1E + 01 ; x = 1.2529184E + 01)$		$(a = 1E + 02 ; x = 9.6253099E + 01)$	
$B_j^{(0)}$	9.99999974040460E - 02	0.0192 s	1.00001078507925E - 01	0.0192 s
$B_c^{(0)}$	9.99999974040459E - 02	0.0011 s	1.00001078507925E - 01	0.0014 s
$B_j^{(1)}$	-3.51556915623686E - 02	0.0198 s	-6.85715417434888E - 03	0.0203 s
$B_c^{(1)}$	-3.51556915623686E - 02	0.0019 s	-6.85715417434888E - 03	0.0028 s
$B_j^{(2)}$	8.08069358927986E - 03	0.0203 s	1.85308277353753E - 04	0.0209 s
$B_c^{(2)}$	8.08069358927983E - 03	0.0033 s	1.85308277353754E - 04	0.0041 s
$B_j^{(3)}$	-2.23072522870991E - 04	0.0220 s	1.03541019939746E - 05	0.0214 s
$B_c^{(3)}$	-2.23072522871006E - 04	0.0042 s	1.03541019939745E - 05	0.0055 s
$B_j^{(4)}$	-4.90160174849523E - 04	0.0225 s	1.81076215011981E - 07	0.0231 s
$B_c^{(4)}$	-4.90160174849534E - 04	0.0052 s	1.81076215011979E - 07	0.0066 s
$B_j^{(5)}$	-2.61474938914116E - 05	0.0231 s	-8.69084328987174E - 08	0.0236 s
$B_c^{(5)}$	-2.61474938913645E - 05	0.0063 s	-8.69084328987119E - 08	0.0082 s
	$(a = 1E + 03 ; x = 9.0832319E + 02)$		$(a = 5E + 03 ; x = 4.5088325E + 03)$	
$B_j^{(0)}$	1.00000007709741E - 01	0.0192 s	9.99999945560833E - 02	0.0198 s
$B_c^{(0)}$	1.00000007709740E - 01	0.0047 s	9.99999945560827E - 02	0.0190 s
$B_j^{(1)}$	-9.24257386073624E - 04	0.0203 s	-1.96270339524381E - 04	0.0203 s
$B_c^{(1)}$	-9.24257386073615E - 04	0.0090 s	-1.96270339524391E - 04	0.0382 s
$B_j^{(2)}$	1.09185365652642E - 06	0.0215 s	1.36671734915341E - 08	0.0214 s
$B_c^{(2)}$	1.09185365652642E - 06	0.0140 s	1.36671734915471E - 08	0.0574 s
$B_j^{(3)}$	2.10480541295856E - 08	0.0219 s	7.26370129403711E - 11	0.0220 s
$B_c^{(3)}$	2.10480541295854E - 08	0.0187 s	7.26370129404892E - 11	0.0769 s
$B_j^{(4)}$	4.78875253701160E - 10	0.0231 s	4.97748407189178E - 13	0.0231 s
$B_c^{(4)}$	4.78875253701131E - 10	0.0231 s	4.97748407189687E - 13	0.0964 s
$B_j^{(5)}$	1.17464208710836E - 11	0.0236 s	4.12022996671873E - 15	0.0241 s
$B_c^{(5)}$	1.17464208710833E - 11	0.0280 s	4.12022996671858E - 15	0.1156 s

Tabela 2.2: Método RC: Aproximações e tempos de processamento ( $B \approx 10^{-1}$ )

	$(a = 1E + 00 ; x = 4.2793084E + 00)$		$(a = 5E + 00 ; x = 1.0773433E + 01)$	
$B_j^{(0)}$	1.00022483115374E - 02	0.0193 s	1.00000042848267E - 02	0.0192 s
$B_c^{(0)}$	1.00022483114981E - 02	0.0011 s	1.00000042848265E - 02	0.0008 s
$B_j^{(1)}$	-1.57046041536782E - 02	0.0197 s	-8.19748252622490E - 03	0.0198 s
$B_c^{(1)}$	-1.57046041535992E - 02	0.0022 s	-8.19748252622496E - 03	0.0022 s
$B_j^{(2)}$	2.26404804572695E - 02	0.0209 s	5.88913457240624E - 03	0.0209 s
$B_c^{(2)}$	2.26404804580081E - 02	0.0030 s	5.88913457240628E - 03	0.0030 s
$B_j^{(3)}$	-2.88875029711649E - 02	0.0214 s	-3.43045673075925E - 03	0.0219 s
$B_c^{(3)}$	-2.88875029781007E - 02	0.0041 s	-3.43045673075912E - 03	0.0044 s
$B_j^{(4)}$	3.01028776615126E - 02	0.0225 s	1.27271537572931E - 03	0.0226 s
$B_c^{(4)}$	3.01028776970701E - 02	0.0052 s	1.27271537572912E - 03	0.0052 s
$B_j^{(5)}$	-1.94977805917258E - 02	0.0231 s	1.61885493782140E - 04	0.0230 s
$B_c^{(5)}$	-1.94977806895138E - 02	0.0063 s	1.61885493782145E - 04	0.0066 s
	$(a = 1E + 01 ; x = 1.7444968E + 01)$		$(a = 1E + 02 ; x = 1.1687667E + 02)$	
$B_j^{(0)}$	1.00000052599076E - 02	0.0193 s	9.99732341896558E - 03	0.0197 s
$B_c^{(0)}$	1.00000052599076E - 02	0.0009 s	9.99732341896558E - 03	0.0014 s
$B_j^{(1)}$	-5.92168565787150E - 03	0.0197 s	-1.69386382239408E - 03	0.0198 s
$B_c^{(1)}$	-5.92168565787150E - 03	0.0022 s	-1.69386382239408E - 03	0.0030 s
$B_j^{(2)}$	2.99505225716655E - 03	0.0209 s	2.17825920311457E - 04	0.0214 s
$B_c^{(2)}$	2.99505225716655E - 03	0.0030 s	2.17825920311457E - 04	0.0041 s
$B_j^{(3)}$	-1.16136870736870E - 03	0.0220 s	-1.48896936587608E - 05	0.0220 s
$B_c^{(3)}$	-1.16136870736870E - 03	0.0044 s	-1.48896936587609E - 05	0.0058 s
$B_j^{(4)}$	2.24194576779685E - 04	0.0225 s	-1.12225101015360E - 06	0.0225 s
$B_c^{(4)}$	2.24194576779697E - 04	0.0055 s	-1.12225101015354E - 06	0.0074 s
$B_j^{(5)}$	9.63530327536803E - 05	0.0231 s	3.19891287905291E - 07	0.0236 s
$B_c^{(5)}$	9.63530327536647E - 05	0.0063 s	3.19891287905282E - 07	0.0088 s
	$(a = 1E + 03 ; x = 1.0288499E + 03)$		$(a = 5E + 03 ; x = 5.0097148E + 03)$	
$B_j^{(0)}$	9.99999570347182E - 03	0.0198 s	1.00000035153668E - 02	0.0198 s
$B_c^{(0)}$	9.99999570347185E - 03	0.0049 s	1.00000035153659E - 02	0.0206 s
$B_j^{(1)}$	-3.87827067455430E - 04	0.0203 s	-1.20305181501181E - 04	0.0209 s
$B_c^{(1)}$	-3.87827067455430E - 04	0.0101 s	-1.20305181501171E - 04	0.0423 s
$B_j^{(2)}$	9.19635451952077E - 06	0.0215 s	6.63187557408619E - 07	0.0219 s
$B_c^{(2)}$	9.19635451952071E - 06	0.0154 s	6.63187557408587E - 07	0.0637 s
$B_j^{(3)}$	1.16944115032087E - 08	0.0225 s	4.41962746240752E - 09	0.0225 s
$B_c^{(3)}$	1.16944115032118E - 08	0.0203 s	4.41962746240671E - 09	0.0849 s
$B_j^{(4)}$	-6.68367829289525E - 09	0.0230 s	-1.79247795637051E - 11	0.0237 s
$B_c^{(4)}$	-6.68367829289501E - 09	0.0258 s	-1.79247795636908E - 11	0.1065 s
$B_j^{(5)}$	-1.72303480080373E - 10	0.0242 s	-1.51700555820558E - 12	0.0247 s
$B_c^{(5)}$	-1.72303480080397E - 10	0.0310 s	-1.51700555820542E - 12	0.1277 s

Tabela 2.3: Método RC: Aproximações e tempos de processamento ( $B \approx 10^{-2}$ )

	$(a = 1E + 00 ; x = 5.6359785E + 00)$		$(a = 5E + 00 ; x = 1.3277772E + 01)$	
$B_j^{(0)}$	1.00004291318624E - 03	0.0187 s	1.00000011833902E - 03	0.0192 s
$B_c^{(0)}$	1.00004291318670E - 03	0.0011 s	1.00000011833902E - 03	0.0011 s
$B_j^{(1)}$	-1.81569239777465E - 03	0.0203 s	-1.01440992930602E - 03	0.0203 s
$B_c^{(1)}$	-1.81569239775621E - 03	0.0019 s	-1.01440992930602E - 03	0.0019 s
$B_j^{(2)}$	3.13463288383654E - 03	0.0203 s	9.57082545315479E - 04	0.0204 s
$B_c^{(2)}$	3.13463288379557E - 03	0.0031 s	9.57082545315483E - 04	0.0033 s
$B_j^{(3)}$	-5.07797802025786E - 03	0.0220 s	-8.20248173471356E - 04	0.0219 s
$B_c^{(3)}$	-5.07797802024920E - 03	0.0043 s	-8.20248173471354E - 04	0.0042 s
$B_j^{(4)}$	7.55306014014504E - 03	0.0225 s	6.11089986755429E - 04	0.0226 s
$B_c^{(4)}$	7.55306014127197E - 03	0.0053 s	6.11089986755437E - 04	0.0052 s
$B_j^{(5)}$	-9.90296465076301E - 03	0.0231 s	-3.56468372029068E - 04	0.0236 s
$B_c^{(5)}$	-9.90296466018513E - 03	0.0063 s	-3.56468372029119E - 04	0.0063 s
	$(a = 1E + 01 ; x = 2.0846056E + 01)$		$(a = 1E + 02 ; x = 1.2787541E + 02)$	
$B_j^{(0)}$	1.00000028032820E - 03	0.0192 s	9.98386046515345E - 04	0.0193 s
$B_c^{(0)}$	1.00000028032820E - 03	0.0011 s	9.98386046515345E - 04	0.0014 s
$B_j^{(1)}$	-7.59038123478144E - 04	0.0198 s	-2.50264869118105E - 04	0.0203 s
$B_c^{(1)}$	-7.59038123478144E - 04	0.0022 s	-2.50264869118105E - 04	0.0031 s
$B_j^{(2)}$	5.29822068264649E - 04	0.0208 s	5.51800571738899E - 05	0.0209 s
$B_c^{(2)}$	5.29822068264648E - 04	0.0033 s	5.51800571738899E - 05	0.0044 s
$B_j^{(3)}$	-3.30029118979932E - 04	0.0220 s	-1.00346927613647E - 05	0.0219 s
$B_c^{(3)}$	-3.30029118979931E - 04	0.0044 s	-1.00346927613646E - 05	0.0060 s
$B_j^{(4)}$	1.72800161000717E - 04	0.0225 s	1.26367135368746E - 06	0.0231 s
$B_c^{(4)}$	1.72800161000716E - 04	0.0055 s	1.26367135368743E - 06	0.0074 s
$B_j^{(5)}$	-6.45004970373198E - 05	0.0236 s	-1.94160736776320E - 08	0.0236 s
$B_c^{(5)}$	-6.45004970373194E - 05	0.0066 s	-1.94160736776109E - 08	0.0090 s
	$(a = 1E + 03 ; x = 1.0717152E + 03)$		$(a = 5E + 03 ; x = 5.1327815E + 03)$	
$B_j^{(0)}$	9.99969516945129E - 04	0.0198 s	9.99998226492439E - 04	0.0198 s
$B_c^{(0)}$	9.99969516945128E - 04	0.0052 s	9.99998226492341E - 04	0.0214 s
$B_j^{(1)}$	-7.06901046881261E - 05	0.0209 s	-2.72940501211021E - 05	0.0208 s
$B_c^{(1)}$	-7.06901046881263E - 05	0.0104 s	-2.72940501210992E - 05	0.0431 s
$B_j^{(2)}$	4.13332519309903E - 06	0.0214 s	5.77192341608950E - 07	0.0220 s
$B_c^{(2)}$	4.13332519309905E - 06	0.0160 s	5.77192341608892E - 07	0.0651 s
$B_j^{(3)}$	-1.73235063555545E - 07	0.0225 s	-7.13242491923295E - 09	0.0225 s
$B_c^{(3)}$	-1.73235063555546E - 07	0.0212 s	-7.13242491923258E - 09	0.0871 s
$B_j^{(4)}$	2.38047488053354E - 09	0.0231 s	-4.46796899973034E - 11	0.0236 s
$B_c^{(4)}$	2.38047488053353E - 09	0.0266 s	-4.46796899972886E - 11	0.1087 s
$B_j^{(5)}$	3.00286996257147E - 10	0.0247 s	3.40235339050566E - 12	0.0248 s
$B_c^{(5)}$	3.00286996257186E - 10	0.0319 s	3.40235339050557E - 12	0.1310 s

Tabela 2.4: Método RC: Aproximações e tempos de processamento ( $B \approx 10^{-3}$ )

	$(a = 1E + 00 ; x = 6.8430406E + 00)$		$(a = 5E + 00 ; x = 1.5395620E + 01)$	
$B_j^{(0)}$	$9.99915717356544E - 05$	0.0192 s	$1.00000150550145E - 04$	0.0192 s
$B_c^{(0)}$	$9.99915717361617E - 05$	0.0008 s	$1.00000150550145E - 04$	0.0011 s
$B_j^{(1)}$	$-1.99438581798955E - 04$	0.0198 s	$-1.15682483335080E - 04$	0.0204 s
$B_c^{(1)}$	$-1.99438581797390E - 04$	0.0022 s	$-1.15682483335080E - 04$	0.0019 s
$B_j^{(2)}$	$3.84201107410050E - 04$	0.0208 s	$1.27541470663977E - 04$	0.0208 s
$B_c^{(2)}$	$3.84201107405820E - 04$	0.0033 s	$1.27541470663977E - 04$	0.0033 s
$B_j^{(3)}$	$-7.10265221591953E - 04$	0.0220 s	$-1.32618776686128E - 04$	0.0214 s
$B_c^{(3)}$	$-7.10265221575731E - 04$	0.0041 s	$-1.32618776686127E - 04$	0.0041 s
$B_j^{(4)}$	$1.24856791466830E - 03$	0.0225 s	$1.27988208342030E - 04$	0.0231 s
$B_c^{(4)}$	$1.24856791465541E - 03$	0.0052 s	$1.27988208342028E - 04$	0.0053 s
$B_j^{(5)}$	$-2.05799946500319E - 03$	0.0231 s	$-1.11565520703645E - 04$	0.0231 s
$B_c^{(5)}$	$-2.05799946536715E - 03$	0.0066 s	$-1.11565520703644E - 04$	0.0065 s
	$(a = 1E + 01 ; x = 2.3648709E + 01)$		$(a = 1E + 02 ; x = 1.3605356E + 02)$	
$B_j^{(0)}$	$1.00000058536932E - 04$	0.0192 s	$1.00012018797699E - 04$	0.0192 s
$B_c^{(0)}$	$1.00000058536932E - 04$	0.0011 s	$1.00012018797699E - 04$	0.0017 s
$B_j^{(1)}$	$-8.81779763794253E - 05$	0.0203 s	$-3.11671601686467E - 05$	0.0204 s
$B_c^{(1)}$	$-8.81779763794253E - 05$	0.0022 s	$-3.11671601686467E - 05$	0.0030 s
$B_j^{(2)}$	$7.36187029313865E - 05$	0.0209 s	$8.98304084620716E - 06$	0.0214 s
$B_c^{(2)}$	$7.36187029313864E - 05$	0.0033 s	$8.98304084620715E - 06$	0.0044 s
$B_j^{(3)}$	$-5.74568948831180E - 05$	0.0220 s	$-2.34003937164691E - 06$	0.0219 s
$B_c^{(3)}$	$-5.74568948831180E - 05$	0.0044 s	$-2.34003937164690E - 06$	0.0060 s
$B_j^{(4)}$	$4.10813981786534E - 05$	0.0225 s	$5.28459657393709E - 07$	0.0231 s
$B_c^{(4)}$	$4.10813981786534E - 05$	0.0055 s	$5.28459657393705E - 07$	0.0077 s
$B_j^{(5)}$	$-2.59509151924320E - 05$	0.0236 s	$-9.41338405631909E - 08$	0.0236 s
$B_c^{(5)}$	$-2.59509151924323E - 05$	0.0066 s	$-9.41338405631882E - 08$	0.0093 s
	$(a = 1E + 03 ; x = 1.0994725E + 03)$		$(a = 5E + 03 ; x = 5.2017151E + 03)$	
$B_j^{(0)}$	$9.99902019105554E - 05$	0.0198 s	$9.99991421330760E - 05$	0.0198 s
$B_c^{(0)}$	$9.99902019105548E - 05$	0.0053 s	$9.99991421330710E - 05$	0.0217 s
$B_j^{(1)}$	$-9.53711629424037E - 06$	0.0209 s	$-3.97442921276089E - 06$	0.0208 s
$B_c^{(1)}$	$-9.53711629424034E - 06$	0.0107 s	$-3.97442921276057E - 06$	0.0437 s
$B_j^{(2)}$	$8.19665785275192E - 07$	0.0214 s	$1.39130369982005E - 07$	0.0220 s
$B_c^{(2)}$	$8.19665785275191E - 07$	0.0162 s	$1.39130369981990E - 07$	0.0659 s
$B_j^{(3)}$	$-6.10100186901850E - 08$	0.0225 s	$-4.04277401324455E - 09$	0.0231 s
$B_c^{(3)}$	$-6.10100186901851E - 08$	0.0217 s	$-4.04277401324399E - 09$	0.0881 s
$B_j^{(4)}$	$3.61083591723021E - 09$	0.0236 s	$8.36688966972629E - 11$	0.0236 s
$B_c^{(4)}$	$3.61083591723027E - 09$	0.0269 s	$8.36688966972512E - 11$	0.1104 s
$B_j^{(5)}$	$-1.27148155358415E - 10$	0.0242 s	$-4.35454092265974E - 13$	0.0247 s
$B_c^{(5)}$	$-1.27148155358428E - 10$	0.0327 s	$-4.35454092265924E - 13$	0.1324 s

Tabela 2.5: Método RC: Aproximações e tempos de processamento ( $B \approx 10^{-4}$ )

	$(a = 1E + 00 ; x = 7.9571450E + 00)$		$(a = 5E + 00 ; x = 1.7292024E + 01)$	
$B_j^{(0)}$	9.99952903726644E - 06	0.0192 s	1.00000121113964E - 05	0.0187 s
$B_c^{(0)}$	9.99952903734967E - 06	0.0011 s	1.00000121113963E - 05	0.0011 s
$B_j^{(1)}$	-2.13549501258932E - 05	0.0198 s	-1.26945036541139E - 05	0.0203 s
$B_c^{(1)}$	-2.13549501257550E - 05	0.0019 s	-1.26945036541139E - 05	0.0019 s
$B_j^{(2)}$	4.44245937640395E - 05	0.0208 s	1.55531844234021E - 05	0.0209 s
$B_c^{(2)}$	4.44245937636865E - 05	0.0033 s	1.55531844234022E - 05	0.0033 s
$B_j^{(3)}$	-8.96897414813743E - 05	0.0220 s	-1.82860373988769E - 05	0.0220 s
$B_c^{(3)}$	-8.96897414795945E - 05	0.0042 s	-1.82860373988769E - 05	0.0041 s
$B_j^{(4)}$	1.74877085311957E - 04	0.0225 s	2.04683291316862E - 05	0.0225 s
$B_c^{(4)}$	1.74877085306492E - 04	0.0055 s	2.04683291316860E - 05	0.0055 s
$B_j^{(5)}$	-3.27098007295419E - 04	0.0236 s	-2.15621875585320E - 05	0.0236 s
$B_c^{(5)}$	-3.27098007302075E - 04	0.0063 s	-2.15621875585320E - 05	0.0063 s
	$(a = 1E + 01 ; x = 2.6121242E + 01)$		$(a = 1E + 02 ; x = 1.4291732E + 02)$	
$B_j^{(0)}$	1.00000014080815E - 05	0.0192 s	9.94411099478511E - 06	0.0198 s
$B_c^{(0)}$	1.00000014080815E - 05	0.0011 s	9.94411099478508E - 06	0.0014 s
$B_j^{(1)}$	-9.79189154953739E - 06	0.0204 s	-3.58583443902344E - 06	0.0203 s
$B_c^{(1)}$	-9.79189154953740E - 06	0.0019 s	-3.58583443902343E - 06	0.0033 s
$B_j^{(2)}$	9.21257555624739E - 06	0.0208 s	1.22374086434365E - 06	0.0209 s
$B_c^{(2)}$	9.21257555624741E - 06	0.0033 s	1.22374086434365E - 06	0.0047 s
$B_j^{(3)}$	-8.27136018918793E - 06	0.0220 s	-3.90822511307359E - 07	0.0220 s
$B_c^{(3)}$	-8.27136018918796E - 06	0.0044 s	-3.90822511307359E - 07	0.0060 s
$B_j^{(4)}$	7.01904900434914E - 06	0.0225 s	1.14827848649864E - 07	0.0231 s
$B_c^{(4)}$	7.01904900434922E - 06	0.0053 s	1.14827848649865E - 07	0.0080 s
$B_j^{(5)}$	-5.54882006467356E - 06	0.0236 s	-3.01578411732063E - 08	0.0241 s
$B_c^{(5)}$	-5.54882006467381E - 06	0.0065 s	-3.01578411732071E - 08	0.0093 s
	$(a = 1E + 03 ; x = 1.1213593E + 03)$		$(a = 5E + 03 ; x = 5.2533092E + 03)$	
$B_j^{(0)}$	9.99841545947869E - 06	0.0198 s	9.99987350702791E - 06	0.0198 s
$B_c^{(0)}$	9.99841545947862E - 06	0.0052 s	9.99987350702800E - 06	0.0219 s
$B_j^{(1)}$	-1.14978643396663E - 06	0.0203 s	-4.95245922155050E - 07	0.0208 s
$B_c^{(1)}$	-1.14978643396663E - 06	0.0110 s	-4.95245922155044E - 07	0.0440 s
$B_j^{(2)}$	1.23320364448860E - 07	0.0220 s	2.26286458696043E - 08	0.0220 s
$B_c^{(2)}$	1.23320364448859E - 07	0.0165 s	2.26286458696035E - 08	0.0667 s
$B_j^{(3)}$	-1.21274018080897E - 08	0.0225 s	-9.32499095392884E - 10	0.0231 s
$B_c^{(3)}$	-1.21274018080895E - 08	0.0219 s	-9.32499095392829E - 10	0.0890 s
$B_j^{(4)}$	1.06300712661386E - 09	0.0231 s	3.32819276705260E - 11	0.0236 s
$B_c^{(4)}$	1.06300712661385E - 09	0.0274 s	3.32819276705217E - 11	0.1113 s
$B_j^{(5)}$	-7.86109290015103E - 11	0.0247 s	-9.40345681185631E - 13	0.0247 s
$B_c^{(5)}$	-7.86109290015061E - 11	0.0333 s	-9.40345681185409E - 13	0.1338 s

Tabela 2.6: Método RC: Aproximações e tempos de processamento ( $B \approx 10^{-5}$ )

	$(a = 1E + 00 ; x = 9.0060722E + 00)$		$(a = 5E + 00 ; x = 1.9040339E + 01)$	
$B_j^{(0)}$	$1.00000815727023E - 06$	0.0187 s	$1.00000049543813E - 06$	0.0192 s
$B_c^{(0)}$	$1.00000815727020E - 06$	0.0009 s	$1.00000049543813E - 06$	0.0011 s
$B_j^{(1)}$	$-2.25240960917973E - 06$	0.0203 s	$-1.36315329868760E - 06$	0.0204 s
$B_c^{(1)}$	$-2.25240960921375E - 06$	0.0019 s	$-1.36315329868760E - 06$	0.0020 s
$B_j^{(2)}$	$4.96820812636139E - 06$	0.0209 s	$1.80702159239667E - 06$	0.0208 s
$B_c^{(2)}$	$4.96820812668577E - 06$	0.0030 s	$1.80702159239667E - 06$	0.0033 s
$B_j^{(3)}$	$-1.07058634110273E - 05$	0.0214 s	$-2.32114003440415E - 06$	0.0220 s
$B_c^{(3)}$	$-1.07058634129144E - 05$	0.0042 s	$-2.32114003440415E - 06$	0.0041 s
$B_j^{(4)}$	$2.24704622560922E - 05$	0.0231 s	$2.87573647539933E - 06$	0.0225 s
$B_c^{(4)}$	$2.24704622633112E - 05$	0.0049 s	$2.87573647539932E - 06$	0.0053 s
$B_j^{(5)}$	$-4.57611015959763E - 05$	0.0230 s	$-3.41516857081288E - 06$	0.0236 s
$B_c^{(5)}$	$-4.57611016036734E - 05$	0.0060 s	$-3.41516857081291E - 06$	0.0063 s
	$(a = 1E + 01 ; x = 2.8377763E + 01)$		$(a = 1E + 02 ; x = 1.4896015E + 02)$	
$B_j^{(0)}$	$1.00000043673657E - 06$	0.0193 s	$9.92447785370510E - 07$	0.0192 s
$B_c^{(0)}$	$1.00000043673657E - 06$	0.0011 s	$9.92447785370508E - 07$	0.0014 s
$B_j^{(1)}$	$-1.06053773596253E - 06$	0.0203 s	$-3.98827336931698E - 07$	0.0204 s
$B_c^{(1)}$	$-1.06053773596253E - 06$	0.0019 s	$-3.98827336931697E - 07$	0.0033 s
$B_j^{(2)}$	$1.09011512528497E - 06$	0.0209 s	$1.53633798100821E - 07$	0.0214 s
$B_c^{(2)}$	$1.09011512528497E - 06$	0.0033 s	$1.53633798100820E - 07$	0.0047 s
$B_j^{(3)}$	$-1.08146805415227E - 06$	0.0219 s	$-5.63587032535713E - 08$	0.0220 s
$B_c^{(3)}$	$-1.08146805415227E - 06$	0.0044 s	$-5.63587032535709E - 08$	0.0063 s
$B_j^{(4)}$	$1.02980816889530E - 06$	0.0231 s	$1.95108680998527E - 08$	0.0230 s
$B_c^{(4)}$	$1.02980816889529E - 06$	0.0058 s	$1.95108680998523E - 08$	0.0080 s
$B_j^{(5)}$	$-9.34173980776077E - 07$	0.0236 s	$-6.29041024361340E - 09$	0.0242 s
$B_c^{(5)}$	$-9.34173980776070E - 07$	0.0066 s	$-6.29041024361311E - 09$	0.0093 s
	$(a = 1E + 03 ; x = 1.1400369E + 03)$		$(a = 5E + 03 ; x = 5.2962705E + 03)$	
$B_j^{(0)}$	$1.00004307004477E - 06$	0.0198 s	$9.99981544062352E - 07$	0.0203 s
$B_c^{(0)}$	$1.00004307004475E - 06$	0.0055 s	$9.99981544062399E - 07$	0.0220 s
$B_j^{(1)}$	$-1.31505747853364E - 07$	0.0208 s	$-5.76592915013898E - 08$	0.0209 s
$B_c^{(1)}$	$-1.31505747853362E - 07$	0.0110 s	$-5.76592915013936E - 08$	0.0448 s
$B_j^{(2)}$	$1.64163226144666E - 08$	0.0215 s	$3.13592055948897E - 09$	0.0219 s
$B_c^{(2)}$	$1.64163226144666E - 08$	0.0168 s	$3.13592055948901E - 09$	0.0670 s
$B_j^{(3)}$	$-1.92742375305273E - 09$	0.0225 s	$-1.59020689720269E - 10$	0.0231 s
$B_c^{(3)}$	$-1.92742375305276E - 09$	0.0222 s	$-1.59020689720253E - 10$	0.0895 s
$B_j^{(4)}$	$2.09985253155485E - 10$	0.0236 s	$7.38809090438953E - 12$	0.0236 s
$B_c^{(4)}$	$2.09985253155482E - 10$	0.0280 s	$7.38809090438896E - 12$	0.1123 s
$B_j^{(5)}$	$-2.07805747733279E - 11$	0.0242 s	$-3.05373674478129E - 13$	0.0247 s
$B_c^{(5)}$	$-2.07805747733254E - 11$	0.0335 s	$-3.05373674478178E - 13$	0.1349 s

Tabela 2.7: Método RC: Aproximações e tempos de processamento ( $B \approx 10^{-6}$ )



## 2.6 Conclusões

Foi proposta uma nova abordagem algorítmica para o cálculo das derivadas da função de Erlang-B na variável número de servidores. Essa abordagem baseia-se numa relação recursiva matricial. Esta recursão pode ser vista como uma generalização da recursão classicamente usada para o cálculo da fórmula de Erlang-B, onde tanto o número de servidores como a ordem de derivação intervêm como parâmetros. Apresentou-se uma análise teórica mostrando que o erro associado ao cálculo das condições iniciais decresce (em certo sentido) e que tende assintoticamente para uma constante que pode ser muito próxima de zero nos casos práticos. Em apêndice, provam-se várias desigualdades, das quais destacamos a prova da convexidade estrita da função de Erlang-B, como função de  $x$ , no intervalo  $[1, \infty[$ .

Através de numerosos resultados computacionais mostrou-se que o método proposto é muito preciso numa vasta gama de valores de  $a$  e  $x$  e a sua comparação em termos de eficiência com o método proposto por D.L. Jagerman é-lhe favorável, exceção feita para valores de  $x$  elevados. De facto, o tempo de processamento do método aumenta linearmente com  $x$  (como acontece com qualquer recursão). Para valores de  $a$  e  $x$  elevados, pode obter-se um significativo acréscimo de eficiência considerando uma *recursão reduzida* inicializada num ponto mais próximo do valor desejado de  $x$ . Isto pode ser feito sem pôr em causa a precisão requerida. Dedicaremos o próximo capítulo ao estudo dessa recursão reduzida.

## 2.A Resultados Adicionais e Auxiliares

Neste Apêndice apresentamos várias desigualdades que foram usadas nas provas dos resultados principais. Algumas delas têm interesse por si só e generalizam dois conhecidos resultados:

(i) Em [13, pag.1287] é provada a seguinte desigualdade:

$$\frac{I_1(a, x)}{I_0(a, x)} \leq \ln \left( \frac{I_0(a, x+1)}{I_0(a, x)} \right) = \ln \left( \frac{x+1}{a} + \frac{1}{I_0(a, x)} \right). \quad (2.60)$$

(ii)  $I_0(a, x)$  é uma função log-convexa de  $x$ , [12, pag.545]<sup>2</sup>.

### Lema 2.3

$$\frac{I_{k+1}(a, x)}{I_k(a, x)} \leq \ln \left( \frac{I_k(a, x+1)}{I_k(a, x)} \right) = \ln \left( \frac{x+1}{a} + \frac{k I_{k-1}(a, x)}{a I_k(a, x)} \right) \quad k = 1, 2, \dots$$

**Prova:** Seja  $Z$  uma variável aleatória real não negativa com a seguinte função densidade de probabilidade:

$$f(z) = \frac{a}{I_k(a, x)} e^{-az} (1+z)^x [\ln(1+z)]^k.$$

Se  $Y = 1 + Z$ , então

$$E(Y) = \frac{a}{I_k(a, x)} \int_0^\infty e^{-az} (1+z)^{x+1} [\ln(1+z)]^k dz = \frac{I_k(a, x+1)}{I_k(a, x)}.$$

Da recursão (2.18):

$$E(Y) = \frac{x+1}{a} + \frac{k I_{k-1}(a, x)}{a I_k(a, x)},$$

obtendo-se, também,

$$E(-\ln(Y)) = -\frac{I_{k+1}(a, x)}{I_k(a, x)}.$$

A desigualdade de Jensen, [19, pag.454], para uma variável aleatória  $\xi$  e para uma função  $g(\xi)$  convexa no domínio de  $\xi$  escreve-se da seguinte forma:

$$E(g(\xi)) \geq g(E(\xi)).$$

Uma vez que  $-\ln(Y)$  é convexa para  $Y \geq 1$ , usando a desigualdade de Jensen, obtemos:

$$E(-\ln(Y)) \geq -\ln(E(Y)).$$

---

<sup>2</sup>Uma função  $g(x) > 0$  é dita log-convexa num intervalo  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  se  $h(x) = \ln g(x)$  é convexa nesse intervalo.

Combinando esta desigualdade com as expressões acima obtidas mostra-se o resultado pretendido.  $\square$

A log-convexidade das funções  $I_k(a, x)$  pode ser estabelecida usando a desigualdade de Cauchy-Schwartz, como é observado em [15, pag.45], para o caso  $k = 0$ . No entanto, a log-convexidade estrita pode ser provada usando um teorema relacionado com a desigualdade de Jensen, [19, pag.455], atribuído a Hardy, Littlewood e Pólya:

“Se  $X$  é uma variável aleatória não negativa e  $r < s$ , então

$$[E(X^r)]^{1/r} \leq [E(X^s)]^{1/s}.$$

A igualdade verifica-se se e só se  $X$  é degenerada, ou  $r \geq 0$  e  $E(X^r) = \infty$ , ou  $s \leq 0$  e  $E(X^s) = \infty$ .”

Sendo assim, o lema seguinte pode ser provado.

#### Lema 2.4

$I_k(a, x)$  é uma função log-convexa estrita de  $x$ :

$$\frac{\partial^2 \ln(I_k(a, x))}{\partial x^2} > 0 \Leftrightarrow \frac{I_{k+2}(a, x)}{I_{k+1}(a, x)} > \frac{I_{k+1}(a, x)}{I_k(a, x)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

**Prova:** Seja  $Z$  uma variável aleatória real não negativa com função densidade de probabilidade:

$$f(z) = \frac{a}{I_{k+1}(a, x)} e^{-az} (1+z)^x [\ln(1+z)]^{k+1}.$$

Definindo  $Y = \ln(1+Z)$  como uma variável aleatória não negativa, tem-se

$$[E(Y^{-1})]^{-1} = \left[ \frac{a}{I_{k+1}(a, x)} \int_0^\infty e^{-az} (1+z)^x [\ln(1+z)]^k dz \right]^{-1} = \frac{I_{k+1}(a, x)}{I_k(a, x)},$$

e

$$E(Y) = \frac{I_{k+2}(a, x)}{I_{k+1}(a, x)}.$$

Aplicando a desigualdade de Hardy et. al. a  $Y$  (com  $r = -1$  e  $s = 1$ ) obtém-se o resultado desejado.  $\square$

Atendendo ao lema anterior,  $\phi_k(a, x) = I_k(a, x)/I_{k-1}(a, x)$ ,  $k = 1, 2, \dots$  são funções de  $x$  estritamente crescentes. De facto:

$$\frac{\partial \phi_k}{\partial x} = \frac{I_{k+1}(a, x) I_{k-1}(a, x) - [I_k(a, x)]^2}{[I_{k-1}(a, x)]^2} > 0. \quad (2.61)$$

A frequentemente conjecturada convexidade da função de Erlang-B (relativamente à variável  $x$ ) foi provada por A.A. Jagers e E.A. Van Doorn [15]. O próximo resultado estabelece a convexidade estrita para  $x \geq 1$ , e é um exemplo do interesse teórico da recursão (2.18).

### Teorema 2.5

$B(a, x)$  é uma função de  $x$  estritamente convexa no intervalo  $[1, \infty[$  para todo o  $a > 0$ .

**Prova:** Note-se que

$$B_x''(a, x) = \frac{2[I_1(a, x)]^2 - I_0(a, x) I_2(a, x)}{[I_0(a, x)]^3} > 0 \Leftrightarrow \frac{I_2(a, x)}{I_1(a, x)} < 2 \frac{I_1(a, x)}{I_0(a, x)}.$$

Se  $x \geq 1$ , por recursão obtém-se:

$$\frac{I_2(a, x)}{I_1(a, x)} = \frac{x I_2(a, x-1) + 2 I_1(a, x-1)}{x I_1(a, x-1) + I_0(a, x-1)} = 2 \frac{I_1(a, x-1)}{I_0(a, x-1)} \frac{\frac{x I_2(a, x-1)}{2 I_1(a, x-1)} + 1}{\frac{x I_1(a, x-1)}{I_0(a, x-1)} + 1}.$$

Usando a convexidade de  $B$  (em sentido lato):

$$\frac{x I_2(a, x-1)}{2 I_1(a, x-1)} \leq \frac{x I_1(a, x-1)}{I_0(a, x-1)},$$

e a relação (2.61), vem

$$\frac{I_2(a, x)}{I_1(a, x)} \leq 2 \frac{I_1(a, x-1)}{I_0(a, x-1)} < 2 \frac{I_1(a, x)}{I_0(a, x)}.$$

Isto implica que  $B_x''(a, x) > 0$ , para  $x \geq 1$ . □

Para valores de  $x$  significativamente maiores que  $a$  (i.e.  $x \gg a$ ) a desigualdade seguinte é bastante útil.

### Lema 2.5

$$\frac{I_{k+1}(a, x)}{I_k(a, x)} > \Psi(x+1) - \ln a, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

onde  $\Psi(x+1) = \Gamma'(x+1)/\Gamma(x+1)$  denota a função digama.

**Prova:** Considerando a equação (27) de [12, pag.533],  $I_0(a, x)$  pode ser escrito da seguinte forma:

$$I_0(a, x) = \frac{e^a}{a^x} \Gamma(x+1) - a \int_0^1 e^{a(1-z)} z^x dz.$$

Por derivação, obtem-se

$$I_1(a, x) = \frac{e^a}{a^x} \Gamma(x+1) [\Psi(x+1) - \ln a] - a \int_0^1 e^{a(1-z)} z^x \ln z dz.$$

Dado que

$$\int_0^1 e^{a(1-z)} z^x dz > 0 \quad e \quad \int_0^1 e^{a(1-z)} z^x \ln z dz < 0,$$

então

$$\frac{I_1(a, x)}{I_0(a, x)} > \Psi(x+1) - \ln a.$$

Deste modo, o resultado pretendido surge do Lema 2.4.  $\square$

### Lema 2.6

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{I_{k+1}(a, x)}{I_k(a, x)} = \infty \quad e \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{I_{k+1}(a, x)}{I_k(a, x) \ln x} \right) = 1.$$

**Prova:** Do Lema 2.5 e sabendo que  $\lim_{x \rightarrow \infty} \Psi(x+1) = +\infty$ , o primeiro limite é facilmente calculado. Sejam  $Y$ ,  $U$  e  $V$  as seguintes funções:

$$\begin{aligned} Y(x) &= \frac{\ln \left( \frac{I_k(a, x+1)}{I_k(a, x)} \right)}{\ln x}, \\ U(x) &= \frac{I_{k+1}(a, x)}{\ln(x) I_k(a, x)}, \\ V(x) &= \frac{\Psi(x+1) - \ln a}{\ln x}. \end{aligned}$$

Uma vez que,

$$Y(x) = \begin{cases} \frac{\ln \left( \frac{x+1}{a} + \frac{1}{I_0(a, x)} \right)}{\ln x} & \text{se } k = 0 \\ \frac{\ln \left( \frac{x+1}{a} + \frac{k I_{k-1}(a, x)}{a I_k(a, x)} \right)}{\ln x} & \text{se } k > 0, \end{cases}$$

é imediato que  $\lim_{x \rightarrow \infty} Y(x) = 1$  se  $k = 0$ . Por outro lado, considerando que  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{I_{k+1}(a, x)}{I_k(a, x)} = \infty$ ,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} Y(x) = 1, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Para o cálculo do limite de  $V(x)$  usamos a expressão de Binet para  $\Psi(x)$ , [1, pag.259]:

$$\Psi(x) = \ln x - \frac{1}{2x} - 2 \int_0^\infty \frac{t dt}{(t^2 + x^2)(e^{2\pi t} - 1)},$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} V(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x+1) - \frac{1}{2(x+1)} - \ln a - 2 \int_0^\infty \frac{t dt}{[t^2 + (x+1)^2](e^{2\pi t} - 1)}}{\ln x} = 1.$$

Da expressão (2.60), do Lema 2.3 e do Lema 2.5 resulta que

$$V(x) \leq U(x) \leq Y(x), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Consequentemente,  $\lim_{x \rightarrow \infty} U(x) = 1$ . □

### Teorema 2.6

$M_k(x)$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$  são funções de  $x$  estritamente crescentes, e

$$\lim_{x \rightarrow \infty} M_k(x) = 1, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

**Prova:** Uma vez que  $M_0(x) = 1 - B(a, x)$ , o resultado é trivial para  $k = 0$ . Se  $k > 0$ ,

$$M_k(x) = \frac{1}{1 + \frac{k I_{k-1}(a, x-1)}{x I_k(a, x-1)}}.$$

Como já referimos anteriormente,  $I_k(a, x-1)/I_{k-1}(a, x-1)$  é estritamente crescente como função de  $x$ , consequentemente  $M_k(x)$  tem a mesma propriedade. Usando o Lema 2.6, concluímos que  $\lim_{x \rightarrow \infty} M_k(x) = 1$ . □

## 2.B Algoritmo baseado na Quadratura por Séries Cardinais

Em seguida faz-se uma breve exposição da teoria de quadratura por séries cardinais seguindo o texto de [14, pag.3–5, 17–19]. Neste trabalho, D.L. Jagerman propõe o método directo de cálculo dos integrais que temos vindo a designar por  $I_k(a, x)$ . Uma possível melhoria na implementação do método será também considerada.

Seja uma função real de variável real  $f(t) \in L^2(\mathbb{R})$ . Suponha-se que existe a sua transformada de Fourier  $F(u)$ , definida por:

$$F(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \exp(iut) du .$$

Se

$$F(u) \equiv 0 \quad \text{para } u \notin [-\sigma, +\sigma],$$

diz-se que  $f(t)$  é de *banda limitada* com largura de banda espectral igual a  $\sigma$  e escreve-se  $f(t) \in W_\sigma$ .

A fórmula (ver [14]):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt \simeq h \sum_{j=-\infty}^{+\infty} f(jh), \quad (2.62)$$

é especialmente simples pois usa somente os valores de  $f(t)$  nos pontos nodais  $jh$  ( $j \in \mathbb{Z}$ ) com iguais pesos  $h$ . A quadratura é exacta para  $f \in W_\sigma$  desde que  $h \leq \pi/\sigma$ . Contudo, para  $f \in L^2(\mathbb{R}) \setminus W_\sigma$ , a lei de quadratura (2.62) é uma aproximação de valor do integral.

D. L. Jagerman propõe avaliar transformadas de Laplace não elementares através de um método inspirado na fórmula (2.62). Frequentemente o cálculo de uma função pode-se fazer relacionando-a com uma transformada.

As funções  $I_k(a, x)$  podem ser definidas como:

$$I_k(a, x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} (1 + t/a)^x [\ln(1 + t/a)]^k dt. \quad (2.63)$$

Sejam  $g_k(t) = (1 + t/a)^x [\ln(1 + t/a)]^k$  e  $G_k(s)$  a transformada de Laplace de  $g_k(t)$ , isto é,

$$G_k(s) = \mathcal{L}[g_k(t)] = \int_0^{+\infty} e^{-st} g_k(t) dt. \quad (2.64)$$

Logo,

$$I_k(a, x) = G_k(1). \quad (2.65)$$

Na expressão (2.65) escreve-se  $I_k(a, x)$  como um integral de Laplace, onde o parâmetro de Laplace,  $s$ , tem valor 1.

Recorrendo à mudança de variável  $z = \ln t$ , de (2.63) obtem-se

$$I_k(a, x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(z - \exp(z)) \left(1 + \frac{e^z}{a}\right)^x \left[\ln\left(1 + \frac{e^z}{a}\right)\right]^k dz. \quad (2.66)$$

A regra de quadratura por séries cardinais baseia-se na seguinte fórmula:

$$I_k(a, x) \approx h \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \exp(jh - \exp(jh)) \left(1 + e^{jh}/a\right)^x \left[\ln\left(1 + e^{jh}/a\right)\right]^k. \quad (2.67)$$

Para especificar o algoritmo, deve ser definido o parâmetro  $h$  e ocorre um erro de truncatura associado ao processo:

$$p_k(jh) = \exp(jh - \exp(jh)) \left(1 + e^{jh}/a\right)^x \left[\ln\left(1 + e^{jh}/a\right)\right]^k, \quad (2.68)$$

$$I_k(a, x) \approx h \sum_{\substack{j \in \mathbf{Z} \\ p_k(jh) > \epsilon}} p_k(jh). \quad (2.69)$$

A rotina que nos foi enviada por D.L. Jagerman usa  $h = 0.1$  e  $\epsilon = 10^{-15}$ . O seguinte melhoramento foi feito nessa rotina:

- Para evitar problemas de “*overflow*”, a expressão (2.68) é calculada da seguinte forma:

$$p_k(jh) = \exp(jh - \exp(jh) + x \ln(1 + e^{jh}/a)) \left[\ln\left(1 + e^{jh}/a\right)\right]^k. \quad (2.70)$$

- Quando  $I_k(a, x)$  é calculado para vários valores de  $k$ , pode usar-se, com a vantagem de melhorar significativamente a eficiência do algoritmo, a seguinte recursão para  $p_k(jh)$ :

$$p_0(jh) = \exp(jh - \exp(jh) + x \ln(1 + e^{jh}/a)), \quad (2.71)$$

$$p_k(jh) = p_{k-1}(jh) \ln(1 + e^{jh}/a), \quad k = 1(1)m. \quad (2.72)$$

Esta versão do método de D. L. Jagerman é especificada pelo Algoritmo 2.3. Alguns resultados obtidos mostram igual precisão e mais eficiência. Adicionalmente, o algoritmo pode ser usado para valores dos parâmetros muito elevados sem problemas de “*overflow*”.



**Algoritmo 2.3** (Quadratura por séries cardinais para o cálculo de  $B(a, x), \dots, B_x^{(m)}(a, x)$ )  
*Quadratura de Séries Cardinais: O método é a aplicação das fórmulas (2.69), (2.71) e (2.72).*

---

**Input:** Valores de  $a > 0$ ,  $x \geq 0$  e  $m \in \mathbb{N}_0$ ;

```

    begin
1.      $h \leftarrow 0.1$ ;
2.      $\epsilon \leftarrow 10^{-15}$ ;
3.      $L \leftarrow \ln(1 + 1/a)$ ;
4.      $I_0 \leftarrow \exp(-1 + xL)$ ;
5.     for  $k \leftarrow 1$  to  $m$  do  $I_k \leftarrow L I_{k-1}$ ;
6.     for  $n \leftarrow 0$  to  $1$  do
        begin
7.          $s \leftarrow 2n - 1$ ;
8.          $j \leftarrow 0$ ;
        repeat
9.              $j \leftarrow j + s$ ;
10.             $w \leftarrow jh$ ;
11.             $q \leftarrow 1 + e^w/a$ ;
12.             $L \leftarrow \ln q$ ;
13.             $f \leftarrow \exp(w - e^w + xL)$ ;
14.             $g \leftarrow f$ ;
15.             $I_0 \leftarrow I_0 + f$ ;
16.            for  $k \leftarrow 1$  to  $m$  do
                begin
17.                     $g \leftarrow gL$ ;
18.                     $I_k \leftarrow I_k + g$ ;
                end
            until  $((f < \epsilon) \wedge (g < \epsilon))$ ;
        end
19.    for  $k \leftarrow 0$  to  $m$  do  $I_k \leftarrow h I_k$ ;
20.    Calcule  $B_k$ ,  $k = 0(1)m$  pelo Algoritmo 2.2 ;
    end;
```

**Output:**  $B_x^{(k)}(a, x) = B_k$ ,  $k = 0(1)m$ ;

---

## Referências do Capítulo 2

- [1] M. Abramowitz and I. Stegun. *Handbook of Mathematical Functions*. Dover Publications, 9th edition, 1970.
- [2] R.P. Agarwal. *Difference Equations and Inequalities*. Marcel Dekker, 1992.
- [3] H. Akimaru and K. Kawashima. *Teletraffic, Theory and Applications*. Springer, 1993.
- [4] H. Akimaru and T. Nishimura. The derivatives of the Erlang’s B formula. *Rev. Electr. Commun. Labr., NTT*, 11(9–10):428–445, 1963.
- [5] H. Akimaru and T. Nishimura. The derivatives of the Erlang’s C formula. *Rev. Electr. Commun. Labr., NTT*, 12(5–6):325–401, 1964.
- [6] A. Arel. Convexity properties of the Erlang loss formula. *Operations Research*, 38(3):499–505, May-June 1990.
- [7] S. D. Conte and C. de Boor. *Elementary Numerical Analysis*. McGraw-Hill, 1980.
- [8] Jorge Sá Esteves, J. Craveirinha, and D. Cardoso. Computing Erlang-B function derivatives. Research Report ET-T3, INESC-Coimbra, R. Antero de Quental, 199, 3000 COIMBRA, Portugal, November 1993.
- [9] Jorge Sá Esteves, J. Craveirinha, and D. Cardoso. Computing Erlang-B function derivatives in the number of servers — a generalized recursion. *ORSA Communications in Statistics, Stochastic Models*, 11(2):311–331, 1995.

- [10] R. F. Farmer and I. Kaufman. On the numerical evaluation of some basic traffic formulae. *Networks*, 8:153–186, 1978.
- [11] A. Girard. *Routing and Dimensioning in Circuit-Switched Networks*. Addison-Wesley, 1990.
- [12] D. L. Jagerman. Some properties of the Erlang loss function. *The Bell System Technical Journal*, 53(3):525–551, 1974.
- [13] D. L. Jagerman. Methods in traffic calculations. *The Bell System Technical Journal*, 63(7):1283–1310, September 1984.
- [14] D. L. Jagerman. Mathcalc. Technical Report WPN 311521–0101, FC 40416, AT&T Bell Laboratories Technical Memorandum, March 1987.
- [15] A. A. Jagers and E. A. Van Dorn. On the continued Erlang loss function. *Operations Research Letters*, 5(1):43–46, June 1986.
- [16] R. Kenyon. Algorithm 19 — binomial coefficients. *Communications of the ACM*, 3(10), October 1960.
- [17] J. Kubasik. On some numerical methods for the computation of Erlang and Engset functions. In *Proc. 11th Int. Telet. Cong.*, Kyoto, 1985.
- [18] K. Kuratowski. *Introduction to Calculus*. Pergamon Press, 1961.
- [19] A. W. Marshall and I. Olkin. *Inequalities — Theory of Majorization and Its Applications*. Academic Press, 1979.
- [20] S. Peavy. Algorithm 20 — real exponential integral. *Communications of the ACM*, 3(10), October 1960.
- [21] E. Pinsky. A simple approximation for the Erlang loss function. *Performance Evaluation*, 15:155–161, 1992.

- [22] A. Ralston and P. Rabinowitz. *First Course in Numerical Analysis*. McGraw-Hill, 1978.
- [23] Y. Rapp. Planning of junctions network in a multi-exchange area, part I. *Ericsson Technics*, 20:77–130, 1964.
- [24] R. Sysky. *Congestion Theory in Telephone Systems*. Oliver and Boyd, 1960.
- [25] E. Szybicki. Some numerical methods used for telephone traffic applications. *Ericsson Technics*, 22:203–229, 1964.

## Capítulo 3

# O Método da Recursão Reduzida para o Cálculo da Função de Erlang-B e suas Derivadas

### Resumo<sup>1</sup>

A recursão de Jagerman [4, pag. 1285] constitui um dos melhores métodos de cálculo da função de Erlang-B. Esse algoritmo foi generalizado no capítulo anterior para o cálculo das derivadas (de qualquer ordem) da mesma função relativamente à variável número de servidores  $x$ . Essa versão generalizada será designada por *Método da Recursão Completa Generalizada*, ou simplesmente por *Método da Recursão Completa* (RC). Nesse capítulo foi também feita a comparação desse método com o melhor método de cálculo das derivadas da função de Erlang-B (o método de quadratura por séries cardinais). Essa comparação era favorável ao método RC excepto para valores elevados dos argumentos da função onde a eficiência do método RC era pior. Para minorar essa desvantagem apresenta-se neste capítulo um melhoramento do método RC. Prova-se, assim, que se os argumentos da função são suficientemente elevados, o número de pas-

---

<sup>1</sup>O conteúdo deste capítulo é parcialmente baseado no artigo [3] e no *Memorandum* [2].

os desse cálculo recursivo pode ser consideravelmente reduzido sem se perder precisão nos resultados. Este método que designamos por *Método da Recursão Reduzida*<sup>2</sup> (RR) conduz a um algoritmo que calcula resultados com precisão igual à da máquina que executa os cálculos e exibe uma notável eficiência mesmo para valores muito elevados dos argumentos da função. O método é inicialmente estabelecido para o cálculo da função, sendo depois generalizado para o cálculo das derivadas de primeira e segunda ordem. Resultados de uma extensa experimentação computacional são incluídos no fim do trabalho, comparando a precisão e a eficiência do algoritmo proposto com os resultados obtidos pelo método da recursão completa. Incluem-se também resultados obtidos pelo algoritmo de referência proposto por D.L. Jagerman usando a teoria de quadratura por séries cardinais (já exposto no capítulo anterior). Os resultados computacionais evidenciam as vantagens em eficiência e precisão do algoritmo proposto. Incluem-se depois em apêndice algumas considerações sobre o cálculo de derivadas de ordem superior a dois usando recursões reduzidas.

### 3.1 Introdução

Recordando a notação:

$$I_k(a, x) = a \int_0^{+\infty} e^{-az} (1+z)^x [\ln(1+z)]^k dz, \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (3.1)$$

a recursão classicamente usada para o cálculo da função de Erlang-B (2.2), pode ser escrita como:

$$I_0(a, x+1) = \frac{x+1}{a} I_0(a, x) + 1, \quad x \geq 0. \quad (3.2)$$

No capítulo anterior obtiveram-se as recursões:

$$I_k(a, x+1) = \frac{x+1}{a} I_k(a, x) + \frac{k}{a} I_{k-1}(a, x), \quad x \geq 0, \quad k = 1, 2, \dots \quad (3.3)$$

que conjuntamente com (3.2) permitiram definir uma recursão matricial que pode ser usada para o cálculo numérico da função e suas derivadas. Nesse capítulo estabeleceu-

---

<sup>2</sup>Esta designação foi sugerida pela Doutora Isabel Brás, docente no Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro, em conversa informal na qual lhe explicava a ideia base do método.

-se um algoritmo de cálculo das derivadas  $B_x^{(k)}(a, x)$ ,  $k = 0(1)m$  quando se conhecem as quantidades  $I_k(a, x)$ ,  $k = 0(1)m$ .

Para o cálculo da função de Erlang-B usa-se normalmente a recursão (3.2) partindo do valor  $I_0(a, 0) = 1$ , pelo que a eficiência computacional do algoritmo depende linearmente de  $x$ . O algoritmo de cálculo das derivadas apresentado no capítulo anterior apresenta a mesma característica. Ora, se  $x$  é elevado o algoritmo é pouco eficiente. Este processo de cálculo da função e suas derivadas será designado por *Método da Recursão Completa Generalizada (RC)*.

Veremos que se  $a$  e  $x$  são suficientemente elevados então não é necessário iniciar o cálculo das recursões em zero, mas num valor muito maior. O problema de estimar as condições iniciais nesse ponto é facilmente contornado usando aproximações grosseiras com um erro relativo de valor absoluto exactamente igual a 100% (usa-se simplesmente zero para as condições iniciais). Ver-se-á que se pode atingir uma precisão nos valores calculados igual à precisão da máquina onde se efectua os cálculos. Este método, que aqui propomos será designado por *Método da Recursão Reduzida*, uma vez que é fundamentado na ideia base de reduzir o número de passos do cálculo recursivo.

Para estabelecer este método, há que majorar o erro relativo propagado nos cálculos. No capítulo anterior obtiveram-se expressões para o erro relativo propagado entre termos consecutivos. Fazemos agora uma breve revisão dos resultados fundamentais. Suponha-se que dispomos de uma aproximação de  $\tilde{I}_k(a, x)$  do valor  $I_k(a, x)$ . Definimos o erro relativo dessa aproximação como sendo:

$$r(k, x) = \frac{\tilde{I}_k(a, x) - I_k(a, x)}{I_k(a, x)}. \quad (3.4)$$

Suponha-se agora que dispomos de aproximações  $\tilde{I}_k(a, x)$ ,  $k = 0(1)m$  das quantidades  $I_k(a, x)$ ,  $k = 0(1)m$ . Usando essas aproximações nas expressões (3.2) e (3.3), calculam-se aproximações  $\tilde{I}_k(a, x+1)$ ,  $k = 0(1)m$  para as quantidades  $I_k(a, x+1)$ ,  $k = 0(1)m$ .

Obtiveram-se as seguintes expressões para o erro relativo destas aproximações:

$$r(0, x + 1) = M_0(x + 1) r(0, x), \quad (3.5)$$

$$r(k, x + 1) = M_k(x + 1) r(k, x) + [1 - M_k(x + 1)] r(k - 1, x), \quad k \in \mathbb{N}, x \geq 0, \quad (3.6)$$

onde,

$$M_k(x + 1) = \frac{(x + 1) I_k(a, x)}{a I_k(a, x + 1)} \in ]0, 1[, \quad k \in \mathbb{N}_0. \quad (3.7)$$

Serão estes os resultados de que partimos para desenvolver o trabalho deste capítulo.

## 3.2 Formulação Base do Método

Estabelece-se inicialmente o *Método da Recursão Reduzida* para o cálculo da função de Erlang-B. Mais adiante é feita a generalização para o cálculo da primeira e da segunda derivada. A razão de ser desta opção é iniciar a exposição com o caso mais simples, o que permite uma introdução mais adequada à ideia base do método.

A partir daqui, considera-se sempre que  $a \in \mathbb{R}^+$  e que  $x \in \mathbb{R}_0^+$ .

**Lema 3.1** *Para todo o  $x \in \mathbb{R}_0^+$  e para todo o  $a \in \mathbb{R}^+$ ,*

$$\begin{aligned} |r(0, x + 1)| &< \frac{x + 1}{a} |r(0, x)|, \\ |r(k, x + 1)| &< \frac{x + 1}{a} |r(k, x)| + |r(k - 1, x)|, \quad k = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

**Prova:** As igualdades (3.5) and (3.6) fornecem exactamente  $r(k, x + 1)$ . Como  $I_k(a, x)$  são funções de  $x$  estritamente crescentes, podemos à custa disso obter majorantes para as funções  $M_k(x + 1)$ . De facto,

$$M_k(x + 1) = \frac{(x + 1) I_k(a, x)}{a I_k(a, x + 1)} < \frac{x + 1}{a}, \quad \forall x \in \mathbb{R}_0^+, \quad \forall a \in \mathbb{R}^+.$$

Mais, uma vez que as funções  $M_k(x + 1)$  são estritamente crescentes e estando garantido que  $\lim_{x \rightarrow \infty} M_k(x) = 1$ , (ver Teorema 2.6), podemos afirmar que  $|1 - M_k(x + 1)| < 1$ .



Usando estas majorantes e a desigualdade triangular, partindo de (3.5) e (3.6) obtemos

$$\begin{aligned} |r(0, x+1)| &= |M_0(x+1)| |r(0, x)| < \frac{x+1}{a} |r(0, x)|, \\ |r(k, x+1)| &\leq |M_k(x+1)| |r(k, x)| + |1 - M_k(x+1)| |r(k-1, x)| \\ &< \frac{x+1}{a} |r(k, x)| + |r(k-1, x)|, \quad k \in \mathbb{N}, \quad x \geq 0, \end{aligned}$$

□

Como consequência imediata do lema anterior, podemos escrever, ainda, o seguinte lema.

**Lema 3.2**

Se  $|r(0, x)| \leq \epsilon$  e  $l \geq 1$ , então

$$|r(0, x+l)| < \epsilon \prod_{j=1}^l \frac{x+j}{a}.$$

**Prova:** Aplicando sucessivamente a primeira das desigualdades do Lema 3.1, obtemos:

$$\begin{aligned} |r(0, x+l)| &= |r(0, (x+l-1)+1)|, \\ &< \frac{x+l}{a} |r(0, x+l-1)| \\ &< \frac{x+l}{a} \frac{x+l-1}{a} |r(0, x+l-2)| \\ &\vdots \\ &< \prod_{j=1}^l \frac{x+j}{a} |r(0, x)|. \end{aligned}$$

Como por hipótese  $|r(0, x)| \leq \epsilon$ , da desigualdade anterior resulta que

$$|r(0, x+l)| < \epsilon \prod_{j=1}^l \frac{x+j}{a}.$$

□

Importa-nos sobretudo majorar a ordem de grandeza do erro relativo, para estimar o número de algarismos significativos. Nesse sentido vamos logaritmizar a relação de

ordem obtida no lema anterior. Em primeiro lugar, no próximo lema, deduziremos uma desigualdade que permitirá uma importante simplificação na expressão da majorante do logaritmo do erro relativo. Observe-se que a expressão é especialmente simples pois é uma função quadrática em  $l$ .

**Lema 3.3** *Se  $a \in \mathbb{R}^+$ ,  $x \in \mathbb{R}_0^+$  e  $l \geq n$ , então*

$$\ln \left( \prod_{j=n}^l \frac{x+j}{a} \right) \leq -\frac{2(a-x)-l-n}{2a} (l-n+1).$$

**Prova:** Aplicando a desigualdade entre médias aritméticas e geométricas [1, pag. 10], obtemos

$$\prod_{j=n}^l \frac{x+j}{a} \leq \left( \frac{1}{a(l-n+1)} \sum_{j=n}^l (x+j) \right)^{l-n+1}.$$

Uma vez que  $\sum_{j=n}^l (x+j)$  é a soma de  $(l-n+1)$  termos de uma progressão aritmética,

$$\prod_{j=n}^l \frac{x+j}{a} \leq \left( \frac{2x+n+l}{2a} \right)^{l-n+1}.$$

Logaritimizando a desigualdade anterior, obtemos

$$\ln \left( \prod_{j=1}^l \frac{x+j}{a} \right) \leq (l-n+1) \ln \left( \frac{2x+n+l}{2a} \right). \quad (3.8)$$

Por outro lado, tendo em conta que  $\ln z \leq z-1$ , para todo o  $z > 0$ ,

$$\ln \left( \frac{2x+n+l}{2a} \right) < \frac{2x+n+l}{2a} - 1,$$

isto é,  $\ln \left( \frac{2x+n+l}{2a} \right) < -\frac{2(a-x)-l-n}{2a}$ . Logo, atendendo a (3.8), deduz-se o resultado pretendido.  $\square$

**Lema 3.4**

*Se  $|r(0, x)| \leq \epsilon$  e  $l \geq 1$ , então*

$$\ln |r(0, x+l)| < -\frac{2(a-x)-l-1}{2a} l + \ln \epsilon.$$

**Prova:**

Dos lemas 3.2 e 3.3, para  $l \geq 1$ ,

$$\begin{aligned} \ln |r(0, x + l)| &\leq \ln \left( \prod_{j=1}^l \frac{x + j}{a} \right) + \ln \epsilon \\ &\leq -\frac{2(a - x) - l - 1}{2a}(l - 1 - 1) + \ln \epsilon, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\ln |r(0, x + l)| < -\frac{2(a - x) - l - 1}{2a}l + \ln \epsilon$$

□

Tal como no capítulo anterior, usa-se a notação  $[z]$  para designar o maior inteiro menor do que  $z$ .

Suponha-se que pretendemos calcular  $I_0(a, x^*)$  com erro relativo de valor absoluto inferior a  $10^{-w} < 1$  sendo  $a$  e  $x^*$  valores reais maiores que 2. Definimos:

$$h = x^* - [x^*], \quad (3.9)$$

$$y = \min\{[x^*], [a - 1]\}. \quad (3.10)$$

Se  $a$  e  $x^*$  são maiores que 2, então o conjunto  $\{1, 2, \dots, y\}$  não é vazio. Fixamos agora um certo valor de  $\ell^* \in \{1, 2, \dots, y\}$  (a calcular), e definimos:

$$x_0^* = y - \ell^* + h. \quad (3.11)$$

Agora, usamos a aproximação grosseira:

$$I_0(a, x_0^*) \approx 0, \quad (3.12)$$

com erro relativo associado

$$r(0, x_0^*) = \frac{0 - I_0(a, x_0^*)}{I_0(a, x_0^*)} = -1,$$

ou seja, com percentagem de erro conhecida exactamente e igual a 100%. Uma vez que  $x_0^*$  tem a mesma parte fraccionária de  $x^*$ , podemos calcular uma aproximação de

$I_0(a, x^*)$  usando a recursão (3.2). Calculamos assim, sucessivamente, aproximações para as quantidades:

$$I_0(a, x_0^* + 1), I_0(a, x_0^* + 2), \dots, I_0(a, x_0^* + \ell^*). \quad (3.13)$$

Se  $y = \lfloor x^* \rfloor$ , então  $x_0^* + \ell^* = x^*$  e portanto a aproximação para  $I_0(a, x^*)$  está obtida, e é  $I_0(a, x_0^* + \ell^*)$ . Nos restantes casos tem de ser  $x_0^* + \ell^* < x^*$  e então continuamos o cálculo:

$$I_0(a, x_0^* + \ell^* + 1), I_0(a, x_0^* + \ell^* + 2), \dots, I_0(a, x^*). \quad (3.14)$$

Se no cálculo indicado em (3.13),  $I_0(a, x_0^* + \ell^*)$  for calculado com erro relativo  $r(0, x_0^* + \ell^*)$ , então:

- Se  $y = \lfloor x^* \rfloor$ ,  $r(0, x^*) = r(0, x_0^* + \ell^*)$ ;
- Se  $y = \lfloor a - 1 \rfloor < \lfloor x^* \rfloor$ , então  $|r(0, x^*)| < |r(0, x_0^* + \ell^*)|$  porque:

$$M_0(x_0^* + \ell^* + j) \in ]0, 1[, \quad j = 1, 2, \dots$$

Sendo assim, no caso geral  $|r(0, x^*)| \leq |r(0, x_0^* + \ell^*)|$ . Por este processo, basta calcular  $I_0(a, x_0^* + \ell^*)$  com erro relativo de valor absoluto inferior a  $10^{-w}$ .

Tendo em conta (3.11):

$$x_0^* + \ell^* = y + h \leq \lfloor a - 1 \rfloor + h < \lfloor a - 1 \rfloor + 1 \leq a, \quad (3.15)$$

verificamos que no cálculo indicado em (3.13) calculam-se aproximações para quantidades  $I_0(a, x)$  com  $x < a$ . Para calcular  $\ell^*$ , de forma a que  $|r(0, x_0^* + \ell^*)| < 10^{-w}$ , podemos usar o Lema 3.4.

O teorema seguinte resume o processo de cálculo:

### Teorema 3.1

*Se  $\min\{a, x^*\} > 2$ , calcula-se uma aproximação de  $I_0(a, x^*)$  com erro relativo de valor*

absoluto inferior a  $10^{-w}$ , tomando  $I_0(a, x_0^*) \approx 0$  e usando a recursão (3.2) inicializada em  $x_0^*$ , se o valor de  $x_0^*$  calculado como segue for não negativo:

$$\begin{aligned}
h &= x^* - \lfloor x^* \rfloor; \\
y &= \min\{\lfloor x^* \rfloor, \lfloor a - 1 \rfloor\}; \\
\ell &= \frac{-2(a - y - h) + 1 + \sqrt{[2(a - y - h) - 1]^2 + 8aw \ln 10}}{2}; \\
\ell^* &= \lfloor \ell + 1 \rfloor; \\
x_0^* &= y - \ell^* + h.
\end{aligned} \tag{3.16}$$

**Prova:**

A prova apoia-se em toda a discussão anterior e o cálculo de  $\ell^*$  faz-se por aplicação directa do Lema 3.4. Na verdade, se pretendemos que

$$|r(0, x_0^* + \ell^*)| \leq 10^{-w} \iff \ln |r(0, x_0^* + \ell^*)| \leq -w \ln 10,$$

basta impor que:

$$-\frac{2(a - x_0^*) - \ell^* - 1}{2a} \ell^* \leq -w \ln 10.$$

Tendo em conta (3.16):

$$-\frac{2(a - y - h) + \ell^* - 1}{2a} \ell^* \leq -w \ln 10,$$

$$(\ell^*)^2 + [2(a - y - h) - 1] \ell^* - 2aw \ln 10 \geq 0,$$

basta agora obter um valor de  $\ell^* \in \mathbb{N}$  que satisfaça a inequação quadrática anterior:

$$\ell^* \geq \ell = \frac{-2(a - y - h) + 1 + \sqrt{[2(a - y - h) - 1]^2 + 8aw \ln 10}}{2}. \tag{3.17}$$

Sendo assim,  $\ell^*$  poderá ser o inteiro imediatamente superior a  $\ell$ , ou seja  $\ell^* = \lfloor \ell + 1 \rfloor$ . Se  $\ell^*$  não exceder  $y$ , o valor de  $x_0^*$  é não negativo e o processo de cálculo descrito pode aplicar-se.  $\square$

### 3.2.1 A Precisão do Método

Como vimos, o método só será aplicável se o valor de  $x_0^*$  for não negativo. Fixados os valores de  $a$  e  $x^*$ , que valores de  $w$  se podem usar, de forma a que  $x_0^*$  calculado conforme o enunciado do Teorema 3.1 resulte não negativo ?

Como vimos, para certo valor de  $1 \leq \ell^* \leq y$ , terá de se cumprir a condição:

$$(\ell^*)^2 + [2(a - y - h) - 1] \ell^* - 2aw \ln 10 \geq 0, \quad (3.18)$$

ou seja:

$$w \leq \frac{(\ell^*)^2 + [2(a - y - h) - 1] \ell^*}{2a \ln 10}.$$

Um valor possível para  $\ell^*$  é exactamente  $y$ , pelo que  $w$  pode ser qualquer valor positivo que cumpra:

$$w \leq \frac{y^2 + [2(a - y - h) - 1] y}{2a \ln 10}.$$

Esta condição é equivalente a:

$$w \leq \frac{y}{\ln 10} - \frac{[y + 2h + 1] y}{2a \ln 10}. \quad (3.19)$$

A partir daqui usaremos a notação:

$$h' = a - [a]. \quad (3.20)$$

O valor de  $y$  é  $[x^*]$  ou  $[a - 1]$ . Analisamos agora em separado ambos os casos:

- $y = [x^*]$  e portanto  $[a - 1] \geq [x^*]$ .

Pela relação (3.19) se vê que quanto maior for  $a$ , maior será a precisão que se garante. Por outro lado, a menor precisão que assim se garante é para o caso em que  $a$  assume o menor valor possível, ou seja:  $[a - 1] = [x^*] = y$ . Vindo então que, nessa situação,  $a = y + 1 + h'$ .

- $y = [a - 1]$  e portanto  $[a - 1] < [x^*]$ .

Neste caso tem-se de imediato  $a = y + 1 + h'$ .

Então, no caso geral, podemos dizer que a situação de pior caso para a precisão que se garante é se  $a = y + 1 + h'$ . Substituindo na relação (3.19), garante-se que dados  $a$  e  $x^*$  o valor de  $w$  pode ser qualquer real positivo que cumpra:

$$w \leq \frac{y}{\ln 10} - \frac{[y + 2h + 1]y}{2(y + 1 + h') \ln 10},$$

e como  $h$  e  $h'$  pertencem ao intervalo  $]0, 1[$ , podemos escrever mais simplesmente:

$$w \leq \frac{y}{\ln 10} - \frac{[y + 2 + 1]y}{2(y + 1 + 0) \ln 10} = \frac{y}{2 \ln 10} \left[ 2 - \frac{y + 3}{y + 1} \right].$$

A desigualdade anterior pode ainda ser escrita da seguinte forma:

$$w \leq w_m(y) = \frac{y(y - 1)}{2 \ln 10 (y + 1)}. \quad (3.21)$$

É fácil de concluir que a função  $w_m(y)$  é estritamente crescente na variável  $y$ , o que leva a concluir que quanto maior for  $y$  maior é a precisão que se garante.

Calculam-se agora alguns valores para  $w_m$ :

$$y = 25 \implies w_m = 5.0111 \dots$$

$$y = 50 \implies w_m = 10.431 \dots$$

$$y = 78 \implies w_m = 16.509 \dots$$

$$y = 90 \implies w_m = 19.114 \dots$$

$$y = 100 \implies w_m = 21.285 \dots$$

$$y = 200 \implies w_m = 42.997 \dots$$

$$y = 500 \implies w_m = 108.14 \dots$$

Como  $w_m$  dá aproximadamente o número de algarismos significativos da aproximação calculada para  $I_0(a, x^*)$  verificamos que se podem atingir precisões muito elevadas, desde que  $y$  seja pelo menos da ordem das centenas. Na verdade, mesmo efectuando os cálculos com aritmética de dupla precisão, o erro relativo associado às operações aritméticas é da ordem de  $10^{-16}$ , pelo que se  $y$  for pelo menos 78 então o erro propagado é já inferior ao erro de arredondamento. Nessas condições, desde que  $y > 78$  o

processo de cálculo é sempre aplicável e conduz a uma precisão igual à da máquina que executa os cálculos. Para  $y \leq 78$  o método da recursão completa é eficiente, pelo que o melhoramento proposto não tem interesse.

Para se garantir que  $y \geq 78$ , basta que  $a$  e  $x^*$  não sejam inferiores a 80, tal como se indica no Algoritmo 3.1, que especifica o método da recursão reduzida para o cálculo da função de Erlang-B.

### 3.2.2 A Eficiência do Método

Como vimos, se  $y$ , tal como definido em (3.10), é de elevada ordem de grandeza o método da recursão reduzida pode atingir uma precisão igual à da máquina que executa os cálculos, tal como o método da recursão completa que também usa a recursão (3.2) partindo de zero. Provaremos agora que o processo de cálculo que propomos pode permitir um grande melhoramento de eficiência relativamente ao método clássico.

Suponhamos que  $x^*$  é um inteiro de elevada ordem de grandeza e que  $a = x^*$ . Neste caso  $y = a - 1$  e da relação (3.17) resulta:

$$\ell = \frac{-1 + \sqrt{1 + 8x^*w \ln 10}}{2}. \quad (3.22)$$

Se  $x^*$  é de elevada ordem de grandeza e  $w > 1$  então, por boa aproximação tem-se:

$$\ell \approx \frac{\sqrt{8x^*w \ln 10}}{2} = \sqrt{2x^*w \ln 10}. \quad (3.23)$$

Como no método da recursão reduzida, o número de operações aritméticas do algoritmo cresce linearmente com  $\ell$  e no método da recursão completa cresce linearmente com  $x^*$ , tem-se para a relação  $Q$  desses dois números<sup>3</sup>:

$$Q = \frac{\ell}{x^*} \approx \sqrt{\frac{2w \ln 10}{x^*}}. \quad (3.24)$$

---

<sup>3</sup>Sendo  $x^*$  o número de circuitos e  $n = \lfloor x^* \rfloor$ , no âmbito das hipóteses admitidas a relação (3.23) estabelece que o Método RR envolve um número de operações aritméticas proporcional a  $\sqrt{n}$  ( $RR \sim \mathcal{O}(\sqrt{n})$ ), enquanto que para o método RC o número de operações aritméticas é proporcional a  $n$  ( $RC \sim \mathcal{O}(n)$ ). Esta observação permite justificar o ganho em eficiência observado nos resultados computacionais quando o número de circuitos é muito elevado.



**Algoritmo 3.1 (Recursão Reduzida para o cálculo da função de Erlang-B)**

*Método da Recursão Reduzida:* Calcula  $B(a, x)$  com erro relativo inferior a  $10^{-w}$ , usando a recursão 3.2 (linha 10). O valor de  $x_0$  é estimado (linhas 4–8) usando o Teorema 3.1. Na linha 9 aproxima-se  $I_0(a, x_0) \approx 0$ .

---

**Input:** Valores de  $a \geq 80$ ,  $x \geq 80$  e  $1 < w < 16$ ;

```

begin
1.    $h \leftarrow x - \lfloor x \rfloor$ ;
2.    $y \leftarrow \lfloor x \rfloor$ ;
3.   if  $(x > \lfloor a - 1 \rfloor)$  then  $y \leftarrow \lfloor a - 1 \rfloor$ ;
4.    $d \leftarrow 2(a - y - h) - 1$ ;
5.    $s \leftarrow \sqrt{d^2 + 8aw \ln 10}$ ;
6.    $\ell \leftarrow (s - d)/2$ ;
7.    $\ell \leftarrow \lfloor \ell + 1 \rfloor$ ;
8.    $x_0 \leftarrow y - \ell$ ;
9.    $I_0 \leftarrow 0$ ;
10.  for  $j \leftarrow x_0 + 1$  to  $\lfloor x \rfloor$  do  $I_0 \leftarrow (j + h)I_0/a + 1$ ;
11.   $B \leftarrow 1/I_0$ ;
end;

```

**Output:**  $B(a, x) \approx B$  com erro relativo inferior a  $10^{-w}$ ;

---

Alguns valores de  $Q$  são agora calculados, tomando  $w = 16$ :

$$x^* = 100 \implies Q \approx 0.8584 \dots$$

$$x^* = 200 \implies Q \approx 0.6070 \dots$$

$$x^* = 500 \implies Q \approx 0.3839 \dots$$

$$x^* = 10^3 \implies Q \approx 0.2714 \dots$$

$$x^* = 10^4 \implies Q \approx 0.0858 \dots$$

$$x^* = 10^5 \implies Q \approx 0.0271 \dots$$

$$x^* = 10^6 \implies Q \approx 0.0086 \dots$$

Para  $x^* > 500$  verifica-se que o método da recursão reduzida envolve menos de metade do número de operações aritméticas do método da recursão completa. Para  $x^* > 10^4$  o processo revela-se muito mais eficiente que o método da recursão completa, sendo de esperar que os tempos de processamento do algoritmo proposto sejam 10 a 100 vezes menores. Se  $a > x^*$  a situação revela-se ainda melhor, embora para  $a < x^*$  piore. Mas se  $x^*$  é elevado, então  $a$  é da mesma ordem de grandeza de  $x^*$  na maior parte dos casos práticos (bloqueios médios).

### 3.3 Generalização para o Cálculo das Derivadas

O *Método da Recursão Reduzida* pode ser generalizado para o cálculo das derivadas da função de Erlang-B. Nesta secção estabeleceremos o método para o cálculo das derivadas de ordem não superior a dois, por estes cálculos serem especialmente importantes em termos das aplicações.

Suponhamos então que pretendemos calcular as derivadas  $B^{(k)}(a, x^*)$ ,  $k = 0(1)m$  (com  $m = 1$  ou  $m = 2$ ) usando uma recursão reduzida obtida a partir do método RC. Para o cálculo das quantidades  $I_k(a, x^*)$ ,  $k = 0(1)m$  usa-se a recursão matricial a partir de um ponto  $x_0 > 0$ . Nesse ponto, estimamos as condições iniciais  $I_k(a, x_0)$ ,  $k = 0(1)m$

com erro relativo de valor absoluto igual a 100%. Para fundamentar o método, há que obter majorantes para o erro relativo propagado nas recursões que permitem calcular a primeira e a segunda derivadas.

Recorremos agora às expressões (3.6) e (3.7). Como  $I_k(a, x+1) > I_k(a, x)$ , tem-se:

$$M_k(x+1) = \frac{(x+1)I_k(a, x)}{a I_k(a, x+1)} < \frac{x+1}{a}, \quad (3.25)$$

e como  $1 - M_k(x+1) \in ]0, 1[$ , podemos escrever a partir do Lema 3.1:

$$|r(0, x+1)| < \frac{x+1}{a} |r(0, x)|, \quad (3.26)$$

$$|r(1, x+1)| < \frac{x+1}{a} |r(1, x)| + |r(0, x)|, \quad (3.27)$$

$$|r(2, x+1)| < \frac{x+1}{a} |r(2, x)| + |r(1, x)|. \quad (3.28)$$

A partir desta desigualdades, obtêm-se agora majorantes para  $|r(k, x+l)|$ ,  $k = 1, 2$ .

### 3.3.1 Majorante para $|r(1, x+l)|$

#### Lema 3.5

Se  $|r(k, x)| \leq \epsilon$ ,  $k = 0, 1$ , então, para  $l \geq 2$  e  $x+1 \leq a$ ,

$$|r(1, x+l)| < (l+1)\epsilon \prod_{j=2}^l \frac{x+j}{a}.$$

#### Prova:

A prova faz-se por indução sobre  $l$ . Inicialmente provaremos que para  $l = 2$  a desigualdade se verifica. Tendo em conta (3.26) e (3.27), podemos escrever:

$$\begin{aligned} |r(1, x+2)| &< \frac{x+2}{a} |r(1, x+1)| + |r(0, x+1)|, \\ |r(1, x+2)| &< \frac{(x+2)(x+1)}{a^2} |r(1, x)| + \frac{x+2}{a} |r(0, x)| + \frac{x+1}{a} |r(0, x)|. \end{aligned}$$

Mas, como  $(x+1) \leq a$ ,

$$|r(1, x+2)| < [|r(1, x)| + 2|r(0, x)|] \frac{x+2}{a}.$$

Uma vez que  $|r(0, x)| < \epsilon$  e  $|r(1, x)| < \epsilon$ ,

$$|r(1, x+2)| < 3\epsilon \prod_{j=2}^2 \frac{x+j}{a}.$$

Concluindo-se que a desigualdade se verifica para  $l = 2$ . Para completar a prova, suponha-se por hipótese que se verifica para certo  $l \geq 2$ . Para  $l+1$ , escrevemos:

$$|r(1, x+l+1)| < \frac{x+l+1}{a} |r(1, x+l)| + |r(0, x+l)|.$$

Usando a hipótese de indução e o Lema 3.2:

$$|r(1, x+l+1)| < (l+1)\epsilon \prod_{j=2}^{l+1} \frac{x+j}{a} + \epsilon \prod_{j=1}^l \frac{x+j}{a}.$$

Sendo claro que:

$$|r(1, x+l+1)| < (l+2)\epsilon \prod_{j=2}^{l+1} \frac{x+j}{a}.$$

Concluindo-se que a desigualdade se verifica para  $l+1$ , o que completa a prova.  $\square$

### 3.3.2 Majorante para $|r(2, x+l)|$

#### Lema 3.6

Se  $|r(k, x)| \leq \epsilon$ ,  $k = 0, 1, 2$ , então, para  $l \geq 3$  e  $x+2 \leq a$ ,

$$|r(2, x+l)| < (l+1)^2 \epsilon \prod_{j=3}^l \frac{x+j}{a}.$$

#### Prova:

A prova segue processo análogo à do lema anterior. Notaremos primeiro que a desigualdade se verifica para  $l = 3$ . Tendo em conta a expressão (3.28):

$$|r(2, x+2)| < \frac{x+2}{a} |r(2, x+1)| + |r(1, x+1)|,$$

e, por (3.27), pode escrever-se:

$$\begin{aligned} |r(2, x+2)| &< \frac{(x+2)(x+1)}{a^2} |r(2, x)| + \frac{x+2}{a} |r(1, x)| + \\ &+ \frac{x+1}{a} |r(1, x)| + |r(0, x)|. \end{aligned}$$

Da mesma forma:

$$|r(2, x + 3)| < \frac{x + 3}{a} |r(2, x + 2)| + |r(1, x + 2)|.$$

Recorrendo à expressão obtida para  $|r(1, x + 2)|$  obtida no lema anterior:

$$\begin{aligned} |r(2, x + 3)| &< \frac{(x + 3)(x + 2)(x + 1)}{a^3} |r(2, x)| + \frac{(x + 3)(x + 2)}{a^2} |r(1, x)| + \\ &+ \frac{(x + 3)(x + 1)}{a^2} |r(1, x)| + \frac{x + 3}{a} |r(0, x)| + \\ &+ \frac{(x + 2)(x + 1)}{a^2} |r(1, x)| + \frac{x + 2}{a} |r(0, x)| + \frac{x + 1}{a} |r(0, x)|. \end{aligned}$$

Reordenando e agrupando parcelas no segundo membro da desigualdade anterior,

$$\begin{aligned} |r(2, x + 3)| &< \frac{(x + 3)(x + 2)(x + 1)}{a^3} |r(2, x)| + \\ &+ \left[ \frac{(x + 3)(x + 2)}{a^2} + \frac{(x + 3)(x + 1)}{a^2} + \frac{(x + 2)(x + 1)}{a^2} \right] |r(1, x)| + \\ &+ \left[ \frac{x + 3}{a} + \frac{x + 2}{a} + \frac{x + 1}{a} \right] |r(0, x)|. \end{aligned}$$

Como  $x + 2 \leq a$ , podemos agora escrever:

$$|r(2, x + 3)| < [|r(2, x)| + 3|r(1, x)| + 3|r(0, x)|] \frac{x + 3}{a}.$$

Atendendo a que  $|r(k, x)| \leq \epsilon$ ,  $k = 0, 1, 2$ :

$$|r(2, x + 3)| < 7\epsilon \frac{x + 3}{a},$$

e finalmente,

$$|r(2, x + 3)| < 4^2 \epsilon \prod_{j=3}^3 \frac{x + j}{a}.$$

Deste modo, verifica a desigualdade para  $l = 3$ .

Admita-se que para certo  $l$  se verifica a desigualdade. Para  $l + 1$ , escrevemos:

$$|r(2, x + l + 1)| < \frac{x + l + 1}{a} |r(2, x + l)| + |r(1, x + l)|.$$

Usando a hipótese de indução e o Lema 3.5:

$$|r(2, x + l + 1)| < (l + 1)^2 \epsilon \prod_{j=3}^{l+1} \frac{x + j}{a} + (l + 1) \epsilon \prod_{j=2}^l \frac{x + j}{a},$$

e portanto,

$$|r(2, x + l + 1)| < [(l + 1)^2 + (l + 1)] \epsilon \prod_{j=3}^{l+1} \frac{x + j}{a}.$$

Mas, como  $(l + 1)^2 + (l + 1) < (l + 2)^2$ , verifica-se a desigualdade para  $l + 1$ , o que conclui a prova.  $\square$

É fácil de verificar que usando as mesmas condições impostas no lema anterior podíamos ter estabelecido uma desigualdade mais forte:

$$|r(2, x + l)| < \frac{(l + 1)^2}{2} \epsilon \prod_{j=3}^l \frac{x + j}{a},$$

mas, com o objectivo de não complicar a exposição que se segue, optou-se por usar (no que se segue) a majorante que consta do enunciado do lema.

### 3.3.3 Majorante para $\ln |r(m, x + l)|$ , $m = 1, 2$

Iremos agora obter um resultado que de certa forma generaliza o Lema 3.4, garantindo uma majorante fácil de calcular para  $\ln |r(m, x + l)|$ ,  $m = 1, 2$ . Por aplicação directa do Lema 3.3, surge de imediato a majorante pretendida e que será usada adiante para fundamentar o método.

#### Lema 3.7

*Sejam  $m = 0, 1, 2$ ,  $l \geq 3$  e  $x + 2 \leq a$ . Se  $|r(k, x)| \leq \epsilon$ ,  $k = 0(1)m$ , então:*

$$\ln |r(m, x + l)| \leq m \ln(l + 1) - \frac{2(a - x) - l - m - 1}{2a} (l - m) + \ln \epsilon.$$

#### Prova:

Para  $m = 0$  a prova é imediata em face do Lema 3.4. Para  $m = 1$  e  $m = 2$  e tendo-se  $l \geq 3$  e  $x + 2 \leq a$ , então temos as condições necessárias para aplicar os Lemas 3.5 e 3.6. Deste modo, para  $m = 1, 2$ ,

$$\ln |r(m, x + l)| \leq m \ln(l + 1) + \ln \left( \prod_{j=m+1}^l \frac{x + j}{a} \right) + \ln \epsilon,$$

e, por conseguinte, o Lema 3.3 permite escrever:

$$\ln |r(m, x + l)| \leq m \ln(l + 1) - \frac{2(a - x) - l - m - 1}{2a} (l - m) + \ln \epsilon.$$

□

### 3.3.4 Algumas Desigualdades Fundamentais

Na subsecção anterior fizemos uma análise quantitativa do erro relativo propagado desde que  $x + 2 \leq a$ . Para estabelecer o método é, no entanto, necessário estabelecer algumas desigualdades que nos permitem estudar o comportamento do erro relativo propagado, cumprindo-se ou não a restrição  $x + 2 \leq a$ . Caso  $r(k, x) = -1$  para  $k = 0(1)m$ , a prova destas propriedades torna-se fácil.

#### Lema 3.8

Seja  $m = 1$  ou  $m = 2$ . Se  $r(k, x) = -1$  para  $k = 0(1)m$ , então, para  $j \geq 2$ ,

$$|r(k, x + j)| < |r(k + 1, x + j)|, \quad k = 0(1)m.$$

#### Prova:

Faremos a prova no caso em que  $m = 2$ , sendo fácil de verificar que dessa forma o caso  $m = 1$  fica igualmente provado.

Se  $r(0, x) = r(1, x) = r(2, x) = -1$ , é fácil de concluir por (3.5) e (3.6) que:

$$r(k, x + j) < 0, \quad \forall j \in \mathbb{N}, \quad k = 0, 1, 2.$$

Tendo o erro sempre sinal negativo, tomamos o valor absoluto de cada membro da equação (3.6), cumprindo-se neste caso a desigualdade triangular no sentido lato para  $k = 1, 2$ :

$$|r(k, x + j + 1)| = M_k(x + j + 1)|r(k, x + j)| + [1 - M_k(x + j + 1)]|r(k - 1, x + j)|, \quad \forall j \in \mathbb{N}.$$

Ora pela expressão anterior, o valor de  $|r(k, x + j + 1)|$  é uma média aritmética ponderada das quantidades  $|r(k, x + j)|$  e  $|r(k - 1, x + j)|$ . Isto implica que  $|r(k, x + j + 1)|$  é um

ponto do intervalo de  $\mathbb{R}$  cujos extremos são  $|r(k+1, x+j)|$  e  $|r(k, x+j)|$ . Podendo até concluir-se que será um ponto do interior desse intervalo a menos que o intervalo degenerere num só ponto. Partimos então de:

$$|r(0, x)| = |r(1, x)| = |r(2, x)| = 1.$$

Tendo agora em conta as considerações feitas e o facto de pela expressão (3.5) ser claro que  $|r(0, x+j+1)| < |r(0, x+j)|$ , obtemos:

$$\begin{aligned} |r(0, x+1)| &< |r(0, x)|; \\ |r(1, x+1)| &= 1; \\ |r(2, x+1)| &= 1. \end{aligned}$$

Logo,

$$|r(0, x+1)| < |r(1, x+1)| = |r(2, x+1)| = 1.$$

Seguindo o mesmo processo:

$$\begin{aligned} |r(0, x+2)| &< |r(0, x+1)|; \\ |r(1, x+2)| &\in ] |r(0, x+1)|, |r(1, x+1)| [; \\ |r(2, x+2)| &= 1, \end{aligned}$$

e portanto,

$$|r(0, x+2)| < |r(1, x+2)| < |r(2, x+2)| = 1.,$$

Cumprindo-se o enunciado para  $j = 2$ . Admita-se agora que se cumpre para algum  $j \geq 2$ :

$$|r(0, x+j)| < |r(1, x+j)| < |r(2, x+j)|.$$

Como é fácil de verificar, isso implica que terá de se cumprir para o sucessor de  $j$ :

$$\begin{aligned} |r(0, x+j+1)| &< |r(0, x+j)|; \\ |r(1, x+j+1)| &\in ] |r(0, x+j)|, |r(1, x+j)| [; \\ |r(2, x+j+1)| &\in ] |r(1, x+j)|, |r(2, x+j)| [, \end{aligned}$$



e portanto,

$$|r(0, x + j + 1)| < |r(1, x + j + 1)| < |r(2, x + j + 1)|,$$

o que completa a prova.  $\square$

Para  $m = 1, 2$  definimos o vector do erro relativo:

$$R(x + j) = [r(0, x + j), \dots, r(m, x + j)]^T,$$

e nas condições deste lema estabelece-se que a maior componente em valor absoluto deste vector é exactamente a última, ou seja:

$$\|R(x + j)\|_\infty = \max\{|r(0, x + j), \dots, |r(m, x + j)|\} = |r(m, x + j)|.$$

Dizendo de outra forma, se  $|r(m, x + j)| < 10^{-w}$ , então o valor absoluto de todas as componentes de  $R(x + j)$  é inferior a  $10^{-w}$ .

### Lema 3.9

Seja  $m = 1$  ou  $m = 2$ . Se  $r(k, x) = -1$  para  $k = 0(1)m$ , então, para  $j \geq 2$ ,

$$|r(k, x + j + 1)| < |r(k, x + j)|, \quad k = 0(1)m.$$

### Prova:

Para  $k = 0$  temos o resultado pretendido uma vez que:

$$|r(k, x + j + 1)| = M_0(x + j + 1) |r(k, x + j)| < |r(k, x + j)|.$$

Para  $k = 1, 2$ , recorremos ao Teorema 2.1 do capítulo anterior, para estabelecer que:

$$\|R(x + j + 1)\|_\infty \leq \|R(x + j)\|_\infty.$$

Além disso, atentando à Observação 2.3, a desigualdade anterior pode estabelecer-se em sentido estrito, desde que esteja assegurado que duas componentes contíguas do vector não sejam iguais. Ora como vimos no lema anterior, essa situação não ocorre desde que  $j \geq 2$ , pelo que se pode estabelecer:

$$\|R(x + j + 1)\|_\infty < \|R(x + j)\|_\infty.$$

Mas pelo enunciado do Lema 3.8, a maior componente em valor absoluto do vector é exactamente a última, pelo que:

$$\|R(x+j+1)\|_\infty = |r(m, x+j+1)| < |r(m, x+j)| = \|R(x+j)\|_\infty, \quad m = 1, 2,$$

o que completa a prova.  $\square$

Já era conhecido o facto de que a sucessão:

$$|r(0, x+2)|, |r(0, x+3)|, \dots, |r(0, x+j)|, \dots$$

é estritamente decrescente. Nas condições do lema anterior garante-se agora que (para  $m = 1$  e  $m = 2$ ) a sucessão:

$$|r(m, x+2)|, |r(m, x+3)|, \dots, |r(m, x+j)|, \dots$$

também é estritamente decrescente.

### 3.3.5 Generalização do Teorema 1

Generalizamos agora o método da recursão reduzida para o cálculo das derivadas. Sejam  $a$  e  $x^*$  valores reais maiores que 6. Suponha-se que pretendemos calcular  $I_k(a, x^*)$ ,  $k = 0(1)m$  ( $m = 0, 1, 2$ ) com erro relativo de valor absoluto inferior a  $10^{-w} < 1$ . Definimos:

$$h = x^* - \lfloor x^* \rfloor; \tag{3.29}$$

$$y = \min\{\lfloor x^* \rfloor, \lfloor a - 3 \rfloor\}. \tag{3.30}$$

Se  $a$  e  $x^*$  são maiores que 6, então o conjunto  $\{3, 4, 5, \dots, y\}$  não é vazio. Fixamos um valor de  $\ell^* \in \{3, 4, 5, \dots, y\}$  (a calcular) e definimos:

$$x_0^* = y - \ell^* + h. \tag{3.31}$$

Desta forma,  $x_0^*$  será um valor real não negativo, menor que  $x^*$ , mas com a mesma parte fraccionária deste.

Introduzimos agora o vector de  $(m + 1)$  componentes:

$$\vec{I}(a, x) = [I_0(a, x), \dots, I_m(a, x)]^T. \quad (3.32)$$

Note-se que, se  $m = 0$ , o vector  $\vec{I}(a, x)$  é unidimensional. Usamos a aproximação:

$$\vec{I}(a, x_0^*) \approx \vec{0}, \quad (3.33)$$

o que implica que

$$r(k, x_0^*) = -1, \quad k = 0(1)m.$$

Partindo dessa aproximação e usando as recursões (3.2) e (3.3) calculamos sucessivamente aproximações para os vectores:

$$\vec{I}(a, x_0^* + 1), \vec{I}(a, x_0^* + 2), \dots, \vec{I}(a, x_0^* + \ell^*). \quad (3.34)$$

Se  $y = \lfloor x^* \rfloor$ , então  $x_0^* + \ell^* = x^*$  e portanto a aproximação para o vector  $\vec{I}(a, x^*)$  está obtida, e é  $\vec{I}(a, x_0^* + \ell^*)$ . Nos restantes casos tem de ser  $x_0^* + \ell^* < x^*$  e então continuamos o cálculo:

$$\vec{I}(a, x_0^* + \ell^* + 1), \vec{I}(a, x_0^* + \ell^* + 2), \dots, \vec{I}(a, x^*). \quad (3.35)$$

Se no cálculo indicado em (3.34),  $I_m(a, x_0^* + \ell^*)$  for calculado com erro relativo dado por  $r(m, x_0^* + \ell^*)$ , então:

- Se  $y = \lfloor x^* \rfloor$ ,  $r(m, x^*) = r(m, x_0^* + \ell^*)$ ,
- Se  $y = \lfloor a - 3 \rfloor < \lfloor x^* \rfloor$  então,  $|r(m, x^*)| < |r(m, x_0^* + \ell^*)|$  pelo Lema 3.9.

Sendo assim, no caso geral,  $|r(m, x^*)| \leq |r(m, x_0^* + \ell^*)|$ . Se  $m = 1$  ou  $m = 2$  o vector  $\vec{I}(a, x^*)$  tem mais de uma componente. Mas, pelo Lema 3.8, se a última componente do vector  $\vec{I}(a, x^*)$  for calculada com erro relativo inferior a  $10^{-w}$  em valor absoluto, todas as outras componentes (se existirem) estão também calculadas com precisão superior a essa.

Tendo em conta que, por (3.31),

$$x_0^* + \ell^* = y + h \leq \lfloor a - 3 \rfloor + h < \lfloor a - 3 \rfloor + 1 \leq a - 2, \quad (3.36)$$

verificamos que no cálculo indicado em (3.34) calculam-se aproximações para vectores  $\vec{I}(a, x)$  com  $x + 2 < a$ . Como há que calcular  $\ell^* \in \{3, 4, 5, \dots, y\}$  de forma a que  $|r(0, x_0^* + \ell^*)| < 10^{-w}$ , podemos usar o Lema 3.7 para esse efeito. O processo é exposto no teorema seguinte.

### Teorema 3.2

Sejam  $m = 0, 1, 2$  e  $a$  e  $x^*$  reais maiores que 6. Então calcula-se uma aproximação de  $I_k(a, x^*)$ ,  $k = 0(1)m$  com erro relativo de valor absoluto inferior a  $10^{-w} < 1$ , tomando  $I_k(a, x_0^*) \approx 0$ ,  $k = 0(1)m$  e usando as recursões (3.2) e (3.3), inicializadas em  $x_0^*$ , se  $x_0^*$  (calculado como segue)

$$h = x^* - \lfloor x^* \rfloor \quad (3.37)$$

$$y = \min\{\lfloor x^* \rfloor, \lfloor a - 3 \rfloor\} \quad (3.38)$$

$$b = 2(a - y - h) - 2m - 1 \quad (3.39)$$

$$c = m(m + 1) - 2m(a - y - h) - 2aw \ln 10 \quad (3.40)$$

$$\ell_0 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4c}}{2} \quad (3.41)$$

$$\ell_m = \frac{-(b - \frac{2am}{\ell_0 + 1}) + \sqrt{\left(b - \frac{2am}{\ell_0 + 1}\right)^2 - 4\left\{c - 2am\left[\ln(\ell_0 + 1) - \frac{\ell_0}{\ell_0 + 1}\right]\right\}}}{2} \quad (3.42)$$

$$\ell^* = \max\{3, \lfloor \ell_m + 1 \rfloor\} \quad (3.43)$$

$$x_0^* = y - \ell^* + h, \quad (3.44)$$

é um valor não negativo.

### Prova:

Inicialmente note-se que, se  $m = 0$ , então  $\ell_m = \ell_0$  e a prova faz-se seguindo processo idêntico ao da demonstração do Teorema 3.1.

Resta analisar os casos  $m = 1$  e  $m = 2$ . O processo de cálculo das quantidades  $I_k(a, x^*)$ ,  $k = 0(1)m$ , que se refere no enunciado é o discutido anteriormente. Há que

demonstrar que, se  $x_0^*$  (definido como no enunciado) for não negativo, então garante-se a precisão desejada para o cálculo dessas quantidades. Conforme explicado atrás, basta que o valor de  $|r(m, x_0^* + \ell^*)|$  não exceda  $10^{-w}$ . Pretende-se então que

$$|r(m, x_0^* + \ell^*)| < 10^{-w}, \quad (3.45)$$

ou seja, que

$$\ln |r(m, x_0^* + \ell^*)| \leq -w \ln 10.$$

Para  $x_0^*$  ser não negativo, basta que  $\ell^* \leq y$  e portanto nas condições do enunciado tem-se:

$$\begin{aligned} |r(k, x_0^*)| &= 1, \quad k = 0(1)m \\ \ell^* &\in \{3, 4, 5, \dots, y\}. \end{aligned}$$

Além disso, no cálculo indicado em (3.34) calculam-se aproximações para as quantidades  $I_k(a, x)$ ,  $k = 0(1)m$  com  $x + 2 < a$ . Temos então reunidas as condições necessárias para aplicar o Lema 3.7. Usando esse resultado, para se verificar (3.45), basta que:

$$m \ln(\ell^* + 1) - \frac{2(a - x_0^*) - \ell^* - m - 1}{2a} (\ell^* - m) + \ln 1 \leq -w \ln 10, \quad (3.46)$$

mas, como  $x_0^* = y - \ell^* + h$ , obtém-se:

$$m \ln(\ell^* + 1) - \frac{2(a - y - h) + \ell^* - m - 1}{2a} (\ell^* - m) \leq -w \ln 10. \quad (3.47)$$

Condições equivalentes a esta, são:

$$\begin{aligned} [2(a - y - h) + \ell^* - m - 1] (\ell^* - m) - 2aw \ln 10 &\geq 2am \ln(\ell^* + 1), \\ (\ell^*)^2 + [2(a - y - h) - 2m - 1] \ell^* &+ \\ + [m(m + 1) - 2m(a - y - h) - 2aw \ln 10] &\geq 2am \ln(\ell^* + 1). \end{aligned} \quad (3.48)$$

Sendo  $\ell$  uma variável que toma valores em  $\mathbb{R}^+$ , definimos agora as funções:

$$\begin{aligned} p_2(\ell) &= \ell^2 + \overbrace{[2(a - y - h) - 2m - 1]}^b \ell + \\ &\quad + \underbrace{[m(m + 1) - 2m(a - y - h) - 2aw \ln 10]}_c \end{aligned} \quad (3.49)$$

$$f(\ell) = 2am \ln(\ell + 1). \quad (3.50)$$

Então a condição (3.48) pode ser escrita como:

$$p_2(\ell^*) \geq f(\ell^*), \quad \ell^* \in \{3, 4, 5, \dots, y\}. \quad (3.51)$$

Para encontrar um valor de  $\ell^*$  que cumpra a condição (3.51), iremos primeiro encontrar um valor de  $\ell$ , não necessariamente inteiro, que cumpra:

$$p_2(\ell) \geq f(\ell), \quad \ell > 0. \quad (3.52)$$

Tendo em conta (3.36) estabelece-se que  $(a - y - h) > 2$ . Desse facto, é fácil de provar que  $c < 0$ , para  $m = 1, 2$ . Assim,  $p_2(\ell) = \ell^2 + b\ell + c$  é uma parábola convexa com ordenada na origem negativa, tendo portanto uma raiz real negativa e outra positiva.

A raiz positiva, que designaremos por  $\ell_0$  é:

$$\ell_0 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4c}}{2}.$$

Como  $\ell_0 > 0$ , temos  $f(\ell_0) > 0$ . É então fácil de concluir que para  $\ell_0$  não satisfaz a condição (3.52), pois  $p_2(\ell_0) = 0$  e  $f(\ell_0) > 0$ . Para calcular um valor que cumpra essa relação, pode-se pensar em resolver a equação transcendente  $p_2(\ell) = f(\ell)$  para  $\ell > \ell_0$  usando um método numérico iterativo. No entanto, propomos aqui um processo muito eficiente e que determina um valor de  $\ell$  que cumpre (3.52) e é muito próximo dessa raiz da equação.

Inicialmente definimos a recta tangente ao gráfico de  $f(\ell)$  no ponto  $(\ell_0, f(\ell_0))$ . Analiticamente essa recta é definida pela função  $p_1(\ell)$ :

$$p_1(\ell) = 2am \left[ \frac{\ell - \ell_0}{\ell_0 + 1} + \ln(\ell_0 + 1) \right], \quad (3.53)$$

isto é,

$$p_1(\ell) = \frac{2am}{\ell_0 + 1} \ell + 2am \left[ \ln(\ell_0 + 1) - \frac{\ell_0}{\ell_0 + 1} \right]. \quad (3.54)$$

Sendo  $\ell_0 > 0$ , então

$$p_1(\ell_0) = f(\ell_0) > p_2(\ell_0) = 0.$$

Por esta relação e pela convexidade de  $p_2$ , a recta  $p_1(\ell)$  terá de interpolar  $p_2(\ell)$  exactamente em dois pontos de  $\mathbb{R}$ , um deles menor que  $\ell_0$  e o outro maior que  $\ell_0$ . Este

último será designado por  $\ell_m$  e é a maior solução da equação quadrática:

$$p_2(\ell) = p_1(\ell) \iff \ell^2 + \left[ b - \frac{2am}{\ell_0 + 1} \right] \ell + \left\{ c - 2am \left[ \ln(\ell_0 + 1) - \frac{\ell_0}{\ell_0 + 1} \right] \right\} = 0, \quad (3.55)$$

ou seja:

$$\ell_m = \frac{-(b - \frac{2am}{\ell_0 + 1}) + \sqrt{\left(b - \frac{2am}{\ell_0 + 1}\right)^2 - 4 \left\{ c - 2am \left[ \ln(\ell_0 + 1) - \frac{\ell_0}{\ell_0 + 1} \right] \right\}}}{2}. \quad (3.56)$$

Ora este ponto cumpre a condição (3.52), como se prova facilmente. Na verdade, como  $f(\ell)$  é um função côncava e  $p_1(\ell)$  é uma recta tangente ao seu gráfico em  $(\ell_0, f(\ell_0))$ , temos:

$$\begin{aligned} f(\ell_0) &= p_1(\ell_0), \\ f(\ell) &< p_1(\ell), \quad \ell \neq \ell_0, \end{aligned} \quad (3.57)$$

tomando  $\ell = \ell_m$ , obtemos:

$$p_2(\ell_m) = p_1(\ell_m) > f(\ell_m). \quad (3.58)$$

Como a equação (3.55) não tem raízes para  $\ell > \ell_m$ , é claro que  $p_2(\ell) > p_1(\ell)$ , para  $\ell > \ell_m$ . Definindo agora  $\ell^* = \lceil 3, \ell_m + 1 \rceil$  como no enunciado, tem-se  $\ell^* \geq \ell_m$  e portanto:

$$p_2(\ell^*) \geq p_1(\ell^*) > f(\ell^*). \quad (3.59)$$

Finalmente, como  $\ell^*$  é um inteiro não inferior a 3, se  $\ell^*$  for menor que  $y$ , cumpre-se a condição (3.51). Ou seja,  $x_0^*$  é não negativo e pode usar-se o processo de cálculo descrito, com a garantia de que  $|r(m, x_0^* + \ell^*)| \leq 10^{-w}$ , tal como se pretendia demonstrar.  $\square$

### 3.3.6 Exemplo de Cálculo de $\ell^*$

O processo apresentado para a demonstração do Teorema 3.2 será agora ilustrado por um exemplo numérico e gráfico. Definiremos todas as funções auxiliares introduzidas, e calcula-se o valor de  $\ell^*$  e de  $x_0^*$ .

Seja  $a = x^* = 250$ ,  $m = 2$  e  $w = 6$  (pretende-se calcular a função, a primeira e a segunda derivada no ponto  $(250, 250)$  com erro relativo inferior a  $10^{-6}$  em valor absoluto). Neste caso:

$$h = 250 - \lfloor 250 \rfloor = 0$$

$$y = \min\{250, 247\} = 247.$$

Sendo  $2(a - y - h) = 6$ , temos por (3.49) e (3.50):

$$b = 2(a - y - h) - 2m - 1 = 1,$$

$$c = m(m + 1) - 2m(a - y - h) - 2aw \ln 10 = 6 - 12 - 12(250 \ln 10),$$

$$c \approx -6913.755279,$$

$$p_2(\ell) \approx \ell^2 + \ell - 6913.755279, \quad (3.60)$$

$$f(\ell) = 1000 \ln(\ell + 1). \quad (3.61)$$

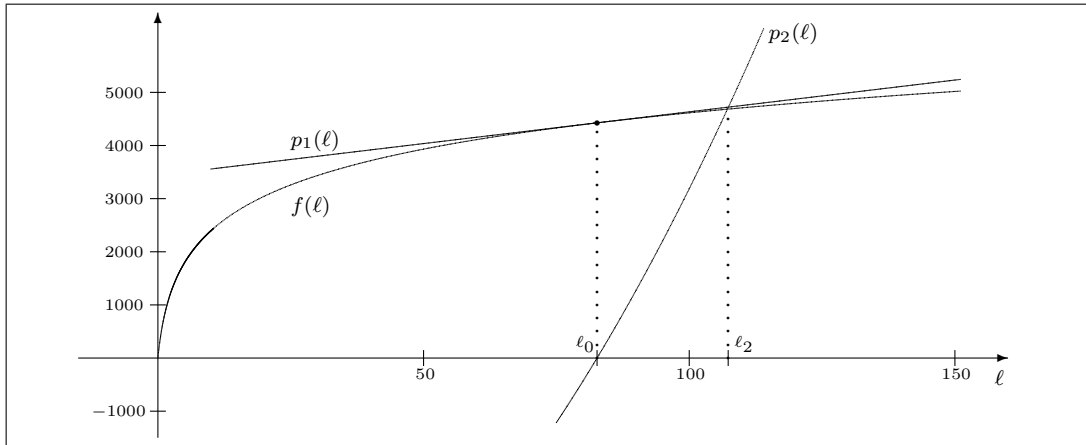


Figura 3.1: Ilustração gráfica do exemplo de cálculo de  $\ell_2$

Calculamos depois:

$$\ell_0 \approx \frac{-1 + \sqrt{1 + 4(6913.755279)}}{2} \approx 82.65049777. \quad (3.62)$$

A recta tangente ao gráfico de  $f(\ell)$  no ponto  $(\ell_0, f(\ell_0))$  tem expressão analítica  $p_1(\ell)$ :

$$p_1(\ell) = 1000 \left[ \frac{\ell - \ell_0}{\ell_0 + 1} + \ln(\ell_0 + 1) \right] \approx 11.95450149 \ell + 3438.60188. \quad (3.63)$$



O valor de  $\ell_2$  é agora calculado como a maior raiz da equação:

$$\ell_2^2 + \ell_2 - 6913.755279 = 11.95450149 \ell_2 + 3438.60188,$$

$$\ell_2^2 - 10.95450149 \ell_2 - 10\,352.35716 = 0,$$

resultando:

$$\ell_2 \approx 107.3711045. \quad (3.64)$$

Logo,  $\ell^* = 108$  e portanto  $x_0^* = 247 - 108 = 139$ .

Na Figura 3.1 ilustra-se graficamente o processo de cálculo, pondo em evidência que na zona de interesse a função  $p_1(\ell)$  aproxima muito bem a função  $f(\ell)$ . Embora não seja importante para a consistência analítica do processo, para que o processo resulte eficiente, o valor de  $\ell^*$  deve ser o mais pequeno possível desde que se garanta a precisão pretendida (ou seja que seja cumprida a condição (3.51)). Neste exemplo põe-se agora em evidência que o cálculo de  $\ell_m$  pelo processo exposto, fornece um valor muito próximo do mínimo necessário. No exemplo apresentado, esse valor mínimo é a abcissa do ponto de interseção de  $f(\ell)$  com  $p_2(\ell)$  que quase se confunde, no gráfico da Figura 3.1, com o valor calculado (a abcissa do ponto de interseção de  $p_1(\ell)$  com  $f(\ell)$ ).

Designa-se esse valor mínimo por  $\ell'_2$ . Obtivemos  $\ell'_2$  aplicando o método de Newton-Raphson na resolução da equação  $p_2(\ell) = f(\ell)$  com a aproximação inicial  $\ell_2$ :

$$\ell'_2 = 107.1936776783 \dots .$$

Observe-se que, este último processo exigiu mais esforço computacional que o cálculo de  $\ell_2$  pelo Teorema 3.2 e conduziria a um valor de  $\ell^*$  igual.

Extensa experimentação computacional evidencia que não compensa usar o método de Newton-Raphson em toda a gama de parâmetros  $a$  e  $x^*$  no intervalo  $[10^2, 10^7]$  desde que  $w$  não seja inferior a 1. O cálculo de  $\ell^*$  pelas expressões do Teorema 3.2 só não forneceu bons resultados em situações onde  $a \gg x^*$  e  $w \approx 0$  (tipicamente  $w < 0.1$ ). Ora, na prática exige-se normalmente uma precisão superior a  $10^{-1}$  ( $w = 1$ ) pelo que as expressões do Teorema 3.2 revelam-se adequadas em todas as situações práticas.

### 3.3.7 A Precisão do Método

Pode pôr-se em causa a possibilidade de atingir precisões elevadas com o método de cálculo proposto. Para responder a esta questão faremos agora um análise elucidativa para os casos  $m = 1$  e  $m = 2$ , uma vez que o caso  $m = 0$  já foi analisado anteriormente. Suponha-se que fixamos valores para  $a$  e  $x^*$  e pretendemos calcular  $I_k(a, x^*)$ ,  $k = 0(1)m$  com uma precisão  $10^{-w}$  usando o método proposto. Quão elevado pode ser  $w$ ? Ou seja, qual a precisão máxima que se pode exigir? Não responderemos exactamente a esta questão, mas estabeleceremos valores que se podem atingir em função do valor de  $y$  definido em (3.30). Usando a relação (3.47), podemos dizer que  $w$  terá de cumprir:

$$w \leq \frac{2(a - y - h) + \ell^* - m - 1}{2a \ln 10} (\ell^* - m) - m \log_{10}(\ell^* + 1). \quad (3.65)$$

Um dos valores possíveis para  $\ell^*$  é  $y$ . Podendo-se usar  $\ell^* = y$  no método proposto, pode-se atingir um  $w$  que cumpra:

$$w \leq \frac{2a - y - 2h - m - 1}{2a \ln 10} (y - m) - m \log_{10}(y + 1), \quad (3.66)$$

ou, escrevendo de outra forma:

$$w \leq \frac{y - m}{\ln 10} - \frac{y + 2h + m + 1}{2a \ln 10} (y - m) - m \log_{10}(y + 1). \quad (3.67)$$

Introduzimos agora a notação:

$$h' = a - [a].$$

O valor de  $y$  é  $[x^*]$  ou  $[a - 3]$ . Analisamos em separado cada um dos dois casos:

- $y = [x^*]$  e portanto  $[a - 3] \geq [x^*]$ .

Pela relação (3.67) se vê que quanto maior for  $a$ , maior será a precisão que se garante. Por outro lado, a menor precisão, que assim se garante, é para o caso em que  $a$  assume o menor valor possível, ou seja:  $[a - 3] = [x^*] = y$ . Então nessa situação,  $a = y + 3 + h'$ .

- $y = [a - 3]$  e portanto  $[a - 3] < [x^*]$ .

Neste caso tem-se de imediato  $a = y + 3 + h'$ .

Então, no caso geral, podemos dizer que a situação de pior caso para a precisão que se garante é se  $a = y + 3 + h'$ . Substituindo na relação (3.66)  $a$  por  $y + 3 + h'$ , garante-se que, dados  $a$  e  $x^*$ , o valor de  $w$  pode ser qualquer real positivo que cumpra:

$$w \leq \frac{y - m}{\ln 10} - \frac{y + 2h + m + 1}{2(y + 3 + h') \ln 10} (y - m) - m \log_{10}(y + 1). \quad (3.68)$$

Mas, como  $h$  e  $h'$  pertencem ao intervalo  $]0, 1[$ , podemos escrever mais simplesmente:

$$w \leq \frac{y - m}{\ln 10} - \frac{y + 2 + m + 1}{2(y + 3 + 0) \ln 10} (y - m) - m \log_{10}(y + 1). \quad (3.69)$$

Simplificando a expressão anterior,

$$w \leq w_m(y), \quad (3.70)$$

onde

$$w_m(y) = \frac{y - m}{2 \ln 10} \left( 1 - \frac{m}{y + 3} \right) - m \log_{10}(y + 1).$$

Estuda-se em seguida a monotonia da função  $w_m(y)$ .

### Lema 3.10

Para  $m = 1, 2$ , a função  $w_m(y)$  é estritamente crescente no intervalo  $y \in [5, \infty[$ .

### Prova:

Como  $w_m(y)$  é diferenciável para  $y \geq 5$ , provaremos que a sua derivada é positiva, ou seja:

$$\frac{dw_m(y)}{dy} = w'_m(y) > 0, \quad \forall y \geq 5,$$

$$w'_m(y) = \frac{1}{2 \ln 10} \left( 1 - \frac{m}{y + 3} \right) + \frac{y - m}{2 \ln 10} \frac{m}{(y + 3)^2} - \frac{m}{(y + 1) \ln 10},$$

$$w'_m(y) = \frac{1}{2 \ln 10} \left[ 1 - \frac{m}{y + 3} + \frac{m(y - m)}{(y + 3)^2} - \frac{2m}{y + 1} \right],$$

$$w'_m(y) = \frac{1}{2 \ln 10} \left[ 1 + \frac{m(y - m)}{(y + 3)^2} - \frac{3my + 7m}{(y + 1)(y + 3)} \right],$$

$$w'_m(y) = \frac{1}{2 \ln 10} \left[ 1 + \frac{-2my^2 - (m^2 + 15m)y - m^2 - 21m}{(y + 1)(y + 3)^2} \right],$$

$$w'_m(y) = \frac{1}{2 \ln 10} \left[ 1 - \frac{2y^2 + (m + 15)y + m + 21}{(y + 1)(y + 3)^2} m \right],$$

Bastando agora provar que se  $y \geq 5$ , então, para  $m = 1, 2$ ,

$$\Psi_m(y) = \frac{2y^2 + (m+15)y + m + 21}{(y+1)(y+3)^2} m < 1.$$

Como,

$$\Psi_1(5) = \frac{88}{384} \quad \text{e} \quad \Psi_2(5) = \frac{180}{384},$$

é fácil de concluir que  $\Psi_m(y) < 1$  para  $y \geq 5$ . Pelo que,

$$w'_m(y) > 0, \quad y \geq 5,$$

conforme pretendido. □

As funções  $w_m(y)$ ,  $m = 1, 2$ , são agora tabeladas para alguns valores de  $y$ :

$y = 25$	$w_1 \approx 3.610434$	$w_2 \approx 1.807698$
$y = 50$	$w_1 \approx 8.731886$	$w_2 \approx 6.614604$
$y = 97$	$w_1 \approx 18.64645$	$w_2 \approx 16.23396$
$y = 100$	$w_1 \approx 19.28454$	$w_2 \approx 16.85857$
$y = 200$	$w_1 \approx 40.69624$	$w_2 \approx 37.96516$
$y = 500$	$w_1 \approx 105.4412$	$w_2 \approx 102.3097.$

Tendo em conta esta tabela e o Lema 3.10, podemos concluir que para  $y \geq 97$  o método permite calcular tanto a primeira, como a segunda derivada com erro relativo inferior a  $10^{-16}$  em valor absoluto. Usando o formato IEEE de dupla precisão (aritmética com precisão entre 15 e 16 dígitos) não tem sentido exigir maior precisão, pois os erros de arredondamento já são desta ordem. Para impor  $y \geq 97$  basta que  $a$  e  $x^*$  não sejam inferiores a 100.

Note-se que não se provou que o valor de  $x_0^*$  era não negativo se calculado pelas expressões do Teorema 3.2 para  $y \geq 97$  e  $w \leq 16$ , uma vez que por esse teorema o valor de  $l^*$  não é (no caso geral) o mínimo necessário para que se cumpra (3.65). Mas, em face das experiências computacionais que indicam que para  $w \geq 1$  esse valor é muito próximo do mínimo, é de esperar que as expressões do Teorema 3.2 calculem um valor

**Algoritmo 3.2 (Recursão Reduzida para o cálculo de  $B(a, x)$ ,  $B'_x(a, x)$  e  $B''_x(a, x)$ )**

*Método da Recursão Reduzida:* O valor do ponto inicial é calculado pelo enunciado do Teorema 3.2 (linhas 2–12). A recursão matricial especifica-se nas linhas 13–15.

**Input:** Valores de  $a, x \geq 100$ ,  $w \in [1, 16]$  e  $m \in \{0, 1, 2\}$ ;

```

    begin
1.   for  $k \leftarrow 0$  to  $m$  do  $I_k \leftarrow 0$ ;
2.    $h \leftarrow x - \lfloor x \rfloor$ ;
3.    $y \leftarrow \min\{\lfloor x \rfloor, \lfloor a - 3 \rfloor\}$ ;
4.    $b \leftarrow 2(a - y - h) - 2m - 1$ ;
5.    $c \leftarrow m(m + 1) - 2m(a - y - h) - 2aw \ln 10$ ;
6.    $l \leftarrow (-b + \sqrt{b^2 - 4c})/2$ ;
7.   if  $(m \geq 1)$  then
      begin
8.      $b \leftarrow b - 2am/(l + 1)$ ;
9.      $c \leftarrow c - 2am[\ln(l + 1) - l/(l + 1)]$ ;
10.     $l \leftarrow (-b + \sqrt{b^2 - 4c})/2$ ;
      end
       $l \leftarrow \lfloor l + 1 \rfloor$ ;
11.  if  $(l < 3)$  then  $l \leftarrow 3$ ;
12.   $x_0 \leftarrow y - l$ ;
13.  for  $j \leftarrow x_0$  to  $\lfloor x \rfloor$  do
      begin
14.    for  $k \leftarrow m$  to  $1$  do  $I_k \leftarrow (k I_{k-1} + (j + h) I_k)/a$ ;
15.     $I_0 \leftarrow 1 + (j + h)I_0/a$ ;
      end
16.   $B_0 \leftarrow 1/I_0$ ;
17.  if  $(m > 0)$  then  $B_1 \leftarrow -B_0^2 I_1$ ;
18.  if  $(m = 2)$  then  $B_2 \leftarrow -2 B_0 B_1 I_1 - B_0^2 I_2$ ;
    end;

```

**Output:**  $B_x^{(k)}(a, x) = B_k$ ,  $k = 0(1)m$ ;

de  $x_0^*$  não negativo para valores ligeiramente inferiores a  $w_m(y)$ . Daremos agora um exemplo que ilustrará a situação e que servirá para responder à questão:

*Qual a restrição a impor aos valores de  $a$  e  $x^*$  para que se aplique o Teorema 3.2 no cálculo de  $I_k(a, x^*)$ ,  $k = 0(1)m$  com erro relativo inferior a  $10^{-16}$  em valor absoluto?*

Tendo em conta a discussão tida na demonstração do Lema 3.10 podemos dizer que para  $y \geq 97$  o caso pior (para a precisão que assim se garante) é ter-se  $m = 2$  e:

$$\begin{aligned} y &= \lfloor a - 3 \rfloor = \lfloor x^* \rfloor, \\ h &\approx 1, \\ h' &= 0, \end{aligned}$$

ou seja, o caso:

$$\begin{aligned} m &= 2, \\ a &= 100, \\ x^* &= 97.99999999 \dots \end{aligned}$$

Usam-se agora as expressões do Teorema 3.2 para calcular  $x_0^*$  para valores de  $w$  próximos de  $w_2(97) \approx 16.23396$ :

$$\begin{aligned} w = 16.23396 \quad \ell^* &= 98 \\ w = 16.23300 \quad \ell^* &= 98 \\ w = 16.23000 \quad \ell^* &= 98 \\ w = 16.22000 \quad \ell^* &= 97 \\ w = 16.00000 \quad \ell^* &= 97. \end{aligned}$$

Assim, para  $w \leq 16.22$ , o Teorema 3.2 é aplicável porque  $x_0^*$  resulta não negativo.

Em face da discussão tida, adopta-se o intervalo  $[1, 16]$  para domínio da variável  $w$ , nos algoritmos de cálculo da primeira e segunda derivadas com base no método proposto. Os valores de  $a$  e  $x^*$  serão não inferiores a 100.

### 3.3.8 A Eficiência do Método

Para ilustrar a eficiência do método nos casos  $m = 1, 2$ , fizemos algumas experiências numéricas, avaliando  $\lfloor x^* - x_0^* \rfloor$  pelo Teorema 3.2. Esta quantidade dá o número de passos da recursão matricial no método proposto, por oposição a  $\lfloor x^* \rfloor$  que dá o número de passos da recursão matricial usada no método proposto no capítulo anterior. Assim, um parâmetro para avaliar o ganho de eficiência será para  $m = 1, 2$ :

$$Q_m = \frac{\lfloor x^* - x_0^* \rfloor}{\lfloor x^* \rfloor}.$$

Fazemos agora uma tabela de  $Q_m$  impondo  $a = x^*$  e  $w = 16$ :

$$\begin{aligned} a = x^* = 10^2 & \quad Q_1 \approx 0.9300 \quad Q_2 \approx 0.9900, \\ a = x^* = 10^3 & \quad Q_1 \approx 0.2940 \quad Q_2 \approx 0.3140, \\ a = x^* = 10^4 & \quad Q_1 \approx 0.0937 \quad Q_2 \approx 0.1010, \\ a = x^* = 10^5 & \quad Q_1 \approx 0.0300 \quad Q_2 \approx 0.0326, \\ a = x^* = 10^6 & \quad Q_1 \approx 0.0096 \quad Q_2 \approx 0.0105, \\ a = x^* = 10^7 & \quad Q_1 \approx 0.0031 \quad Q_2 \approx 0.0034. \end{aligned}$$

Tal como no cálculo dos valores da função, verifica-se assim que o ganho em eficiência pode ser muito significativo se  $a$  e  $x^*$  são de elevada ordem de grandeza.

Tendo em conta os resultados obtidos, o Algoritmo 3.2 especifica o método proposto para o cálculo da função, primeira e segunda derivadas.

## 3.4 Conclusões

Conforme reconhecido na literatura, a maior desvantagem do uso da recursão clássica (3.2) no cálculo da função de Erlang-B é a baixa eficiência quando os argumentos da função são de elevada ordem de grandeza. A primeira conclusão deste trabalho é demonstrar que tal recursão não era usada da forma mais eficiente nesses cálculos. O *Método da Recursão Reduzida* permite elevados ganhos de eficiência sem perder a

precisão verificada no *Método da Recursão Completa*. Com o melhoramento proposto, obtém-se um algoritmo competitivo para cálculos de alta precisão dos valores da função em toda a gama prática dos argumentos, e muito especialmente se o bloqueio não for muito baixo (ver Apêndice 3.A). Na verdade, este algoritmo obtém melhor precisão e eficiência que o método de Jagerman (implementando este método com os melhoramentos sugeridos no capítulo anterior) se ambos os argumentos estiverem no intervalo  $[10^2, 10^5]$  mesmo para bloqueios da ordem de  $10^{-6}$ .

Qualitativamente, as mesmas conclusões podem ser tiradas para o cálculo das derivadas (pelo menos até à ordem dois). Nestes cálculos o método proposto apresenta sempre melhor precisão que o método de Jagerman. Obtém-se melhores tempos de processamento, pelo menos para os casos em que os argumentos não excedem  $10^4$ . Na verdade, se o bloqueio não é muito baixo os argumentos podem ir quase até  $5 \times 10^4$  com tempos de processamento favoráveis ao método proposto. Refira-se também que em muitos casos em que o algoritmo de Jagerman revela melhores tempos de processamento, a precisão dos resultados calculados cai para 7–11 algarismos significativos correctos enquanto que o método proposto mantém invariavelmente 15. Além disso, note-se que são raros nas aplicações os casos em que os argumentos excedem a ordem de grandeza  $10^4$ .

Além de termos proposto os algoritmos de cálculo numérico, saliente-se que é apresentada uma análise da sua consistência analítica e da sua estabilidade numérica, o que permite ter completa segurança quanto à precisão dos resultados. Apesar de termos apresentado resultados computacionais para  $w = 16$  (precisão de cerca de 15 dígitos), o método proposto tem a flexibilidade de permitir cálculos mais eficientes se não necessitamos de uma precisão tão elevada.

No Apêndice 3.B apresenta-se um algoritmo para ser usado para o cálculo de derivadas de ordem superior a dois, se bem que estes cálculos não sejam tão comuns nas aplicações. Se pretendemos calcular derivadas de ordem muito elevada, torna-se claro que o método que propomos pode não ser competitivo relativamente ao método de



Jagerman, se os argumentos forem de elevada ordem de grandeza.

Como nota final, queremos referir uma das características da metodologia do nosso trabalho, sem a qual não nos teria sido possível estabelecer o *Método da Recursão Reduzida*. Normalmente analisa-se o erro propagado em recursões com o simples objectivo de estudar a sua estabilidade, ou seja provar que o erro associado ao valor inicial e às constantes perturbações introduzidas pelos erros de arredondamento não levam a um acumular progressivo do termo de erro. Os primeiros resultados que obtivemos tinham esse objectivo, mas uma vez que em termos metodológicos procuramos confirmar todos os resultados analíticos encontrados com experiências numéricas, fomos surpreendidos nessas experiências com a grande insensibilidade dos valores calculados pelas recursões usadas, relativamente ao seu valor inicial. A ideia de tirar partido dessa propriedade para aumentar a eficiência do algoritmo surgiu imediatamente.

É muito comum ver na literatura análises que dizem respeito ao erro absoluto propagado, quando em termos de cálculo numérico importa sobretudo o erro relativo. A ideia base do *Método da Recursão Reduzida* pode tentar estender-se a outras recursões usadas em Matemáticas Aplicadas, desde que estas comunguem da propriedade do erro relativo associado aos sucessivos termos calculados decrescer em módulo. Como se demonstrou neste trabalho, podemos nestas circunstâncias ser levados à construção de algoritmos muito eficientes.

### 3.A Resultados Computacionais

Nas tabelas seguintes apresentam-se resultados computacionais dos vários algoritmos que intervêm na discussão do trabalho. As implementações foram feitas usando um compilador de TURBO C e um microcomputador compatível IBM com processador INTEL 80486 (50 MHz). Usou-se em todos os casos aritmética de dupla precisão nos cálculos. Todas as tabelas foram geradas automaticamente em código  $\text{\LaTeX}$  por um programa escrito em linguagem C.

Em todas as tabelas o argumento  $a$  toma todos os valores do conjunto:

$$\{ 10^2, 10^3, 10^4, 5 \times 10^4, 10^5, 10^6 \}.$$

Os valores de  $x$  para cada valor de  $a$  foram calculados de forma a obter bloqueios quase constantes em cada tabela. Assim, na Tabela 3.1 os argumentos  $(a, x)$  são sempre tais que  $B(a, x) \approx 10^{-1}$ . Apresentam-se depois tabelas para bloqueios de  $10^{-p}$ ,  $p = 2(1)6$ , cobrindo assim todas as zonas de interesse nas aplicações.

A seguinte legenda deve ser tida em conta na leitura das tabelas ( $k = 0, 1, 2$ ):

- $B_r^{(k)} \equiv B^{(k)}$  pelo Método da Recursão Reduzida com  $w = 16$ .
- $B_j^{(k)} \equiv B^{(k)}$  pelo Método de D.L. Jagerman com  $h = 0.1$  e  $\epsilon = 10^{-15}$  (Algoritmo implementado conforme o exposto no Apêndice 2.B do capítulo anterior).
- $B_c^{(k)} \equiv B^{(k)}$  pelo Método da Recursão Completa, estimando as condições iniciais  $I_k(a, 0)$ ,  $k = 0(1)m$  por quadratura de Gauss-Laguerre (ver capítulo anterior).

Para a leitura das tabelas é muito importante atender à explicação seguinte. Nos três algoritmos acima citados, ao calcular a segunda derivada, calculam-se também a primeira derivada e o valor da função, mas regista-se apenas nas tabelas o valor de  $B^{(2)}$  e o tempo de processamento associado. Da mesma forma, ao calcular a primeira derivada calcula-se também o valor da função, mas nas tabelas só se regista o valor de  $B^{(1)}$  e o tempo de processamento deste cálculo. Por fim, os valores de  $B^{(0)}$  indicados

foram obtidos aplicando os três algoritmos no cálculo apenas da função. Desta forma temos os tempos de processamento dos algoritmos no cálculo apenas da função, função e primeira derivada e finalmente função, primeira e segunda derivada.

Os tempos de processamento foram obtidos em segundos e figuram na coluna à direita da correspondente aproximação obtida. Todos os tempos foram obtidos repetindo o cálculo 1000 vezes e dividindo o tempo total obtido por 1000 para obter melhor precisão no cálculo dos intervalos de tempo. As únicas exceções a esta regra foram para o Método da Recursão Completa nos casos  $a = 10^4, 5 \times 10^4$  (100 vezes) e  $a = 10^5, 10^6$  (50 vezes). O registo do tempo no início e no fim do processamento foi feito recorrendo ao relógio do sistema operativo<sup>4</sup>.

Note-se que na Tabela 3.1, no caso em que  $a = 100$ , temos  $x = 96.253099$  podendo pôr-se em dúvida se o método da recursão reduzida é aplicável quando impomos  $w = 16$ . Na verdade, o método é aplicável como se pode verificar pelas expressões do Teorema 3.2, pois obtem-se  $x_0^* = 1$ .

As tabelas permitem agora tirar algumas conclusões:

- Tal como se esperava, o Método da Recursão Reduzida é muito mais eficiente que o Método da Recursão Completa, e em todos os valores tabelados obtém exactamente a mesma aproximação. Ou seja, melhora a eficiência sem perder precisão.
- Para valores dos argumentos muito elevados, o Método da Recursão Reduzida apresenta tempos de processamento bastante aceitáveis, contrariamente ao Método da Recursão Completa.
- A eficiência do Método da Recursão Reduzida depende da ordem de grandeza do bloqueio, revelando-se tanto melhor quanto maior for o bloqueio.

---

<sup>4</sup>Como é fácil de verificar a construção das seis tabelas levou um tempo de processamento de várias horas...

- Dada a natureza do método de Jagerman, nunca se pode garantir a correção de alguns dos dígitos menos significativos pois estes são afectados pelos erros de arredondamento. Este efeito parece especialmente importante nos casos em que os parâmetros são de muito elevada ordem de grandeza.
- Se pretendemos calcular apenas a função, o método proposto é o mais eficiente em todas as tabelas para  $a \leq 10^5$ . Se  $B \geq 1\%$ , então também é mais eficiente nos casos em que  $a = 10^6$ .
- Para os cálculos da primeira derivada, o método proposto é o mais eficiente em todas as tabelas para  $a \leq 10^4$ . Conclui-se também que, se  $B \geq 10^{-3}$ , então também será mais eficiente até um valor de  $a$  próximo de  $5 \times 10^4$ .
- Para os cálculos da segunda derivada, o método proposto é o mais eficiente em todas as tabelas para  $a \leq 10^4$ . Conclui-se também que, se  $B \geq 10^{-2}$ , então também será mais eficiente até um valor de  $a$  próximo de  $5 \times 10^4$ .

	$(a = 1E + 02 ; x = 9.6253099E + 01)$		$(a = 1E + 03 ; x = 9.0832319E + 02)$	
$B_r^{(0)}$	$1.00001078507925E - 01$	0.0004 s	$1.00000007709740E - 01$	0.0009 s
$B_j^{(0)}$	$1.00001078507925E - 01$	0.0192 s	$1.00000007709741E - 01$	0.0194 s
$B_c^{(0)}$	$1.00001078507925E - 01$	0.0010 s	$1.00000007709740E - 01$	0.0043 s
$B_r^{(1)}$	$-6.85715417434888E - 03$	0.0008 s	$-9.24257386073615E - 04$	0.0019 s
$B_j^{(1)}$	$-6.85715417434888E - 03$	0.0200 s	$-9.24257386073624E - 04$	0.0203 s
$B_c^{(1)}$	$-6.85715417434888E - 03$	0.0022 s	$-9.24257386073615E - 04$	0.0087 s
$B_r^{(2)}$	$1.85308277353754E - 04$	0.0013 s	$1.09185365652642E - 06$	0.0030 s
$B_j^{(2)}$	$1.85308277353753E - 04$	0.0209 s	$1.09185365652642E - 06$	0.0212 s
$B_c^{(2)}$	$1.85308277353754E - 04$	0.0033 s	$1.09185365652642E - 06$	0.0131 s
	$(a = 1E + 04 ; x = 9.0089134E + 03)$		$(a = 5E + 04 ; x = 4.5008982E + 04)$	
$B_r^{(0)}$	$9.9999899794256E - 02$	0.0014 s	$1.00000002766402E - 01$	0.0015 s
$B_j^{(0)}$	$9.9999899794254E - 02$	0.0194 s	$1.00000002766421E - 01$	0.0195 s
$B_c^{(0)}$	$9.9999899794256E - 02$	0.0374 s	$1.00000002766402E - 01$	0.1807 s
$B_r^{(1)}$	$-9.90357334557540E - 05$	0.0031 s	$-1.99603001296107E - 05$	0.0035 s
$B_j^{(1)}$	$-9.90357334557620E - 05$	0.0204 s	$-1.99603001296097E - 05$	0.0203 s
$B_c^{(1)}$	$-9.90357334557540E - 05$	0.0741 s	$-1.99603001296107E - 05$	0.3653 s
$B_r^{(2)}$	$1.84152142883647E - 09$	0.0051 s	$1.57270120329487E - 11$	0.0058 s
$B_j^{(2)}$	$1.84152142883591E - 09$	0.0213 s	$1.57270120327460E - 11$	0.0213 s
$B_c^{(2)}$	$1.84152142883647E - 09$	0.1115 s	$1.57270120329487E - 11$	0.5487 s
	$(a = 1E + 05 ; x = 9.0008991E + 04)$		$(a = 1E + 06 ; x = 9.0000900E + 05)$	
$B_r^{(0)}$	$1.00000000348377E - 01$	0.0015 s	$9.99999991004407E - 02$	0.0015 s
$B_j^{(0)}$	$1.00000000348197E - 01$	0.0194 s	$9.99999991001640E - 02$	0.0193 s
$B_c^{(0)}$	$1.00000000348377E - 01$	0.3592 s	$9.99999991004407E - 02$	3.6394 s
$B_r^{(1)}$	$-9.99003775592443E - 06$	0.0035 s	$-9.99900037973594E - 07$	0.0036 s
$B_j^{(1)}$	$-9.99003775590260E - 06$	0.0203 s	$-9.99900037969118E - 07$	0.0203 s
$B_c^{(1)}$	$-9.99003775592443E - 06$	0.7250 s	$-9.99900037973594E - 07$	7.3634 s
$B_r^{(2)}$	$1.98277109624775E - 12$	0.0060 s	$1.99826178306777E - 15$	0.0063 s
$B_j^{(2)}$	$1.98277109680914E - 12$	0.0213 s	$1.99826182967021E - 15$	0.0212 s
$B_c^{(2)}$	$1.98277109624775E - 12$	1.0918 s	$1.99826178306777E - 15$	11.0894 s

Tabela 3.1: Método RR: Aproximações e tempos de processamento ( $B \approx 10^{-1}$ )

	$(a = 1E + 02 ; x = 1.1687667E + 02)$		$(a = 1E + 03 ; x = 1.0288499E + 03)$	
$B_r^{(0)}$	$9.99732341896558E - 03$	0.0005 s	$9.99999570347185E - 03$	0.0013 s
$B_j^{(0)}$	$9.99732341896558E - 03$	0.0192 s	$9.99999570347182E - 03$	0.0196 s
$B_c^{(0)}$	$9.99732341896558E - 03$	0.0011 s	$9.99999570347185E - 03$	0.0048 s
$B_r^{(1)}$	$-1.69386382239408E - 03$	0.0010 s	$-3.87827067455430E - 04$	0.0027 s
$B_j^{(1)}$	$-1.69386382239408E - 03$	0.0201 s	$-3.87827067455430E - 04$	0.0204 s
$B_c^{(1)}$	$-1.69386382239408E - 03$	0.0024 s	$-3.87827067455430E - 04$	0.0097 s
$B_r^{(2)}$	$2.17825920311457E - 04$	0.0015 s	$9.19635451952071E - 06$	0.0043 s
$B_j^{(2)}$	$2.17825920311457E - 04$	0.0210 s	$9.19635451952077E - 06$	0.0214 s
$B_c^{(2)}$	$2.17825920311457E - 04$	0.0035 s	$9.19635451952071E - 06$	0.0146 s
	$(a = 1E + 04 ; x = 9.9690121E + 03)$		$(a = 5E + 04 ; x = 4.9586714E + 04)$	
$B_r^{(0)}$	$1.00000991576714E - 02$	0.0034 s	$1.00000008958486E - 02$	0.0062 s
$B_j^{(0)}$	$1.00000991576707E - 02$	0.0199 s	$1.00000008958544E - 02$	0.0202 s
$B_c^{(0)}$	$1.00000991576714E - 02$	0.0412 s	$1.00000008958486E - 02$	0.1988 s
$B_r^{(1)}$	$-6.96191314551322E - 05$	0.0075 s	$-1.75150428691398E - 05$	0.0139 s
$B_j^{(1)}$	$-6.96191314551246E - 05$	0.0209 s	$-1.75150428691483E - 05$	0.0211 s
$B_c^{(1)}$	$-6.96191314551322E - 05$	0.0824 s	$-1.75150428691398E - 05$	0.4015 s
$B_r^{(2)}$	$1.83885734048235E - 07$	0.0121 s	$5.90102116350077E - 09$	0.0232 s
$B_j^{(2)}$	$1.83885734048190E - 07$	0.0218 s	$5.90102116350106E - 09$	0.0221 s
$B_c^{(2)}$	$1.83885734048235E - 07$	0.1236 s	$5.90102116350077E - 09$	0.6042 s
	$(a = 1E + 05 ; x = 9.9091588E + 04)$		$(a = 1E + 06 ; x = 9.9009805E + 05)$	
$B_r^{(0)}$	$1.00000054664674E - 02$	0.0077 s	$9.99999709005389E - 03$	0.0126 s
$B_j^{(0)}$	$1.00000054664741E - 02$	0.0202 s	$9.99999708996065E - 03$	0.0204 s
$B_c^{(0)}$	$1.00000054664674E - 02$	0.3954 s	$9.99999709005389E - 03$	3.9238 s
$B_r^{(1)}$	$-9.25083458136039E - 06$	0.0179 s	$-9.90373437439282E - 07$	0.0307 s
$B_j^{(1)}$	$-9.25083458135610E - 06$	0.0211 s	$-9.90373437437318E - 07$	0.0214 s
$B_c^{(1)}$	$-9.25083458136039E - 06$	0.7976 s	$-9.90373437439282E - 07$	7.9412 s
$B_r^{(2)}$	$1.07844378810694E - 09$	0.0299 s	$1.83710309862508E - 12$	0.0538 s
$B_j^{(2)}$	$1.07844378808130E - 09$	0.0221 s	$1.83710309965852E - 12$	0.0224 s
$B_c^{(2)}$	$1.07844378810694E - 09$	1.2018 s	$1.83710309862508E - 12$	13.0876 s

Tabela 3.2: Método RR: Aproximações e tempos de processamento ( $B \approx 10^{-2}$ )

	$(a = 1E + 02 ; x = 1.2787541E + 02)$		$(a = 1E + 03 ; x = 1.0717152E + 03)$	
$B_r^{(0)}$	$9.98386046515345E - 04$	0.0006 s	$9.99969516945128E - 04$	0.0016 s
$B_j^{(0)}$	$9.98386046515345E - 04$	0.0187 s	$9.99969516945129E - 04$	0.0191 s
$B_c^{(0)}$	$9.98386046515345E - 04$	0.0013 s	$9.99969516945128E - 04$	0.0053 s
$B_r^{(1)}$	$-2.50264869118105E - 04$	0.0011 s	$-7.06901046881263E - 05$	0.0033 s
$B_j^{(1)}$	$-2.50264869118105E - 04$	0.0195 s	$-7.06901046881261E - 05$	0.0199 s
$B_c^{(1)}$	$-2.50264869118105E - 04$	0.0025 s	$-7.06901046881263E - 05$	0.0108 s
$B_r^{(2)}$	$5.51800571738899E - 05$	0.0018 s	$4.13332519309905E - 06$	0.0053 s
$B_j^{(2)}$	$5.51800571738899E - 05$	0.0203 s	$4.13332519309903E - 06$	0.0208 s
$B_c^{(2)}$	$5.51800571738899E - 05$	0.0038 s	$4.13332519309905E - 06$	0.0163 s
	$(a = 1E + 04 ; x = 1.0169083E + 04)$		$(a = 5E + 04 ; x = 5.0265059E + 04)$	
$B_r^{(0)}$	$1.00010006777656E - 03$	0.0045 s	$1.00001362182125E - 03$	0.0093 s
$B_j^{(0)}$	$1.00010006777662E - 03$	0.0195 s	$1.00001362182174E - 03$	0.0197 s
$B_c^{(0)}$	$1.00010006777656E - 03$	0.0445 s	$1.00001362182125E - 03$	0.2170 s
$B_r^{(1)}$	$-1.78096022097379E - 05$	0.0099 s	$-6.29457688818009E - 06$	0.0209 s
$B_j^{(1)}$	$-1.78096022097371E - 05$	0.0203 s	$-6.29457688818487E - 06$	0.0205 s
$B_c^{(1)}$	$-1.78096022097379E - 05$	0.0912 s	$-6.29457688818009E - 06$	0.4443 s
$B_r^{(2)}$	$2.36518704320655E - 07$	0.0159 s	$2.60144748489676E - 08$	0.0340 s
$B_j^{(2)}$	$2.36518704320623E - 07$	0.0211 s	$2.60144748489921E - 08$	0.0214 s
$B_c^{(2)}$	$2.36518704320655E - 07$	0.1378 s	$2.60144748489676E - 08$	0.6712 s
	$(a = 1E + 05 ; x = 1.0029209E + 05)$		$(a = 1E + 06 ; x = 9.9969664E + 05)$	
$B_r^{(0)}$	$1.00000945624375E - 03$	0.0127 s	$1.00000380971930E - 03$	0.0350 s
$B_j^{(0)}$	$1.00000945624290E - 03$	0.0198 s	$1.00000380971956E - 03$	0.0202 s
$B_c^{(0)}$	$1.00000945624375E - 03$	0.4306 s	$1.00000380971930E - 03$	4.2612 s
$B_r^{(1)}$	$-3.92021346894595E - 06$	0.0288 s	$-6.97251972533186E - 07$	0.0812 s
$B_j^{(1)}$	$-3.92021346894690E - 06$	0.0206 s	$-6.97251972526656E - 07$	0.0211 s
$B_c^{(1)}$	$-3.92021346894595E - 06$	0.8810 s	$-6.97251972533186E - 07$	8.7354 s
$B_r^{(2)}$	$9.31651163151952E - 09$	0.0471 s	$1.83712081489143E - 10$	0.1354 s
$B_j^{(2)}$	$9.31651163154806E - 09$	0.0215 s	$1.83712081481486E - 10$	0.0220 s
$B_c^{(2)}$	$9.31651163151952E - 09$	1.3314 s	$1.83712081489143E - 10$	13.2128 s

Tabela 3.3: Método RR: Aproximações e tempos de processamento ( $B \approx 10^{-3}$ )

	$(a = 1E + 02 ; x = 1.3605356E + 02)$		$(a = 1E + 03 ; x = 1.0994725E + 03)$	
$B_r^{(0)}$	$1.00012018797699E - 04$	0.0006 s	$9.99902019105548E - 05$	0.0016 s
$B_j^{(0)}$	$1.00012018797699E - 04$	0.0188 s	$9.99902019105554E - 05$	0.0192 s
$B_c^{(0)}$	$1.00012018797699E - 04$	0.0013 s	$9.99902019105548E - 05$	0.0054 s
$B_r^{(1)}$	$-3.11671601686467E - 05$	0.0013 s	$-9.53711629424034E - 06$	0.0036 s
$B_j^{(1)}$	$-3.11671601686467E - 05$	0.0195 s	$-9.53711629424037E - 06$	0.0200 s
$B_c^{(1)}$	$-3.11671601686467E - 05$	0.0026 s	$-9.53711629424034E - 06$	0.0110 s
$B_r^{(2)}$	$8.98304084620715E - 06$	0.0020 s	$8.19665785275191E - 07$	0.0057 s
$B_j^{(2)}$	$8.98304084620716E - 06$	0.0204 s	$8.19665785275192E - 07$	0.0208 s
$B_c^{(2)}$	$8.98304084620715E - 06$	0.0038 s	$8.19665785275191E - 07$	0.0166 s
	$(a = 1E + 04 ; x = 1.0272371E + 04)$		$(a = 5E + 04 ; x = 5.0538012E + 04)$	
$B_r^{(0)}$	$1.00000296133543E - 04$	0.0049 s	$1.00004205765965E - 04$	0.0104 s
$B_j^{(0)}$	$1.00000296133573E - 04$	0.0195 s	$1.00004205765943E - 04$	0.0198 s
$B_c^{(0)}$	$1.00000296133543E - 04$	0.0450 s	$1.00004205765965E - 04$	0.2186 s
$B_r^{(1)}$	$-2.70201838313375E - 06$	0.0107 s	$-1.08125781632978E - 06$	0.0232 s
$B_j^{(1)}$	$-2.70201838313433E - 06$	0.0203 s	$-1.08125781632980E - 06$	0.0206 s
$B_c^{(1)}$	$-2.70201838313375E - 06$	0.0918 s	$-1.08125781632978E - 06$	0.4466 s
$B_r^{(2)}$	$6.35414733155387E - 08$	0.0173 s	$9.81957130015842E - 09$	0.0376 s
$B_j^{(2)}$	$6.35414733155435E - 08$	0.0211 s	$9.81957130016252E - 09$	0.0215 s
$B_c^{(2)}$	$6.35414733155387E - 08$	0.1389 s	$9.81957130015842E - 09$	0.6750 s
	$(a = 1E + 05 ; x = 1.0071407E + 05)$		$(a = 1E + 06 ; x = 1.0016912E + 06)$	
$B_r^{(0)}$	$1.00000806103333E - 04$	0.0145 s	$9.99971524736038E - 05$	0.0434 s
$B_j^{(0)}$	$1.00000806103164E - 04$	0.0199 s	$9.99971524749220E - 05$	0.0203 s
$B_c^{(0)}$	$1.00000806103333E - 04$	0.4318 s	$9.99971524736038E - 05$	4.2700 s
$B_r^{(1)}$	$-7.21999379262370E - 07$	0.0325 s	$-1.79013236823956E - 07$	0.0986 s
$B_j^{(1)}$	$-7.21999379261030E - 07$	0.0208 s	$-1.79013236826123E - 07$	0.0212 s
$B_c^{(1)}$	$-7.21999379262370E - 07$	0.8842 s	$-1.79013236823956E - 07$	8.7540 s
$B_r^{(2)}$	$4.29186926253446E - 09$	0.0527 s	$2.38528918524433E - 10$	0.1619 s
$B_j^{(2)}$	$4.29186926252694E - 09$	0.0216 s	$2.38528918525609E - 10$	0.0221 s
$B_c^{(2)}$	$4.29186926253446E - 09$	1.3380 s	$2.38528918524433E - 10$	13.2402 s

Tabela 3.4: Método RR: Aproximações e tempos de processamento ( $B \approx 10^{-4}$ )



	$(a = 1E + 02 ; x = 1.4291732E + 02)$		$(a = 1E + 03 ; x = 1.1213593E + 03)$	
$B_r^{(0)}$	$9.94411099478508E - 06$	0.0007 s	$9.99841545947862E - 06$	0.0018 s
$B_j^{(0)}$	$9.94411099478511E - 06$	0.0188 s	$9.99841545947869E - 06$	0.0192 s
$B_c^{(0)}$	$9.94411099478508E - 06$	0.0013 s	$9.99841545947862E - 06$	0.0055 s
$B_r^{(1)}$	$-3.58583443902343E - 06$	0.0013 s	$-1.14978643396663E - 06$	0.0038 s
$B_j^{(1)}$	$-3.58583443902344E - 06$	0.0196 s	$-1.14978643396663E - 06$	0.0199 s
$B_c^{(1)}$	$-3.58583443902343E - 06$	0.0026 s	$-1.14978643396663E - 06$	0.0112 s
$B_r^{(2)}$	$1.22374086434365E - 06$	0.0020 s	$1.23320364448859E - 07$	0.0059 s
$B_j^{(2)}$	$1.22374086434365E - 06$	0.0204 s	$1.23320364448860E - 07$	0.0208 s
$B_c^{(2)}$	$1.22374086434365E - 06$	0.0040 s	$1.23320364448859E - 07$	0.0170 s
	$(a = 1E + 04 ; x = 1.0347592E + 04)$		$(a = 5E + 04 ; x = 5.0721276E + 04)$	
$B_r^{(0)}$	$9.99783772674103E - 06$	0.0053 s	$1.00002021690197E - 05$	0.0112 s
$B_j^{(0)}$	$9.99783772674504E - 06$	0.0196 s	$1.00002021690139E - 05$	0.0198 s
$B_c^{(0)}$	$9.99783772674103E - 06$	0.0456 s	$1.00002021690197E - 05$	0.2192 s
$B_r^{(1)}$	$-3.42194891816583E - 07$	0.0114 s	$-1.43425385265599E - 07$	0.0248 s
$B_j^{(1)}$	$-3.42194891816722E - 07$	0.0204 s	$-1.43425385265534E - 07$	0.0206 s
$B_c^{(1)}$	$-3.42194891816583E - 07$	0.0923 s	$-1.43425385265599E - 07$	0.4476 s
$B_r^{(2)}$	$1.07494819016306E - 08$	0.0182 s	$1.86130956905430E - 09$	0.0400 s
$B_j^{(2)}$	$1.07494819016347E - 08$	0.0212 s	$1.86130956905366E - 09$	0.0215 s
$B_c^{(2)}$	$1.07494819016306E - 08$	0.1395 s	$1.86130956905430E - 09$	0.6761 s
	$(a = 1E + 05 ; x = 1.0098483E + 05)$		$(a = 1E + 06 ; x = 1.0027172E + 06)$	
$B_r^{(0)}$	$9.99946062569531E - 06$	0.0157 s	$9.99928846962935E - 06$	0.0477 s
$B_j^{(0)}$	$9.99946062568470E - 06$	0.0199 s	$9.99928846968405E - 06$	0.0204 s
$B_c^{(0)}$	$9.99946062569531E - 06$	0.4328 s	$9.99928846962935E - 06$	4.2732 s
$B_r^{(1)}$	$-9.81449389568806E - 08$	0.0349 s	$-2.72380563450794E - 08$	0.1075 s
$B_j^{(1)}$	$-9.81449389567487E - 08$	0.0208 s	$-2.72380563454133E - 08$	0.0213 s
$B_c^{(1)}$	$-9.81449389568806E - 08$	0.8866 s	$-2.72380563450794E - 08$	8.7640 s
$B_r^{(2)}$	$8.65253004651364E - 10$	0.0563 s	$6.44963051352833E - 11$	0.1755 s
$B_j^{(2)}$	$8.65253004649880E - 10$	0.0217 s	$6.44963051364437E - 11$	0.0221 s
$B_c^{(2)}$	$8.65253004651364E - 10$	1.3390 s	$6.44963051352833E - 11$	13.2534 s

Tabela 3.5: Método RR: Aproximações e tempos de processamento ( $B \approx 10^{-5}$ )

	$(a = 1E + 02 ; x = 1.4896015E + 02)$		$(a = 1E + 03 ; x = 1.1400369E + 03)$	
$B_r^{(0)}$	$9.92447785370508E - 07$	0.0006 s	$1.00004307004475E - 06$	0.0018 s
$B_j^{(0)}$	$9.92447785370510E - 07$	0.0189 s	$1.00004307004477E - 06$	0.0192 s
$B_c^{(0)}$	$9.92447785370508E - 07$	0.0013 s	$1.00004307004475E - 06$	0.0056 s
$B_r^{(1)}$	$-3.98827336931697E - 07$	0.0014 s	$-1.31505747853362E - 07$	0.0040 s
$B_j^{(1)}$	$-3.98827336931698E - 07$	0.0197 s	$-1.31505747853364E - 07$	0.0200 s
$B_c^{(1)}$	$-3.98827336931697E - 07$	0.0027 s	$-1.31505747853362E - 07$	0.0114 s
$B_r^{(2)}$	$1.53633798100820E - 07$	0.0021 s	$1.64163226144666E - 08$	0.0062 s
$B_j^{(2)}$	$1.53633798100821E - 07$	0.0205 s	$1.64163226144666E - 08$	0.0208 s
$B_c^{(2)}$	$1.53633798100820E - 07$	0.0041 s	$1.64163226144666E - 08$	0.0172 s
	$(a = 1E + 04 ; x = 1.0409479E + 04)$		$(a = 5E + 04 ; x = 5.0867249E + 04)$	
$B_r^{(0)}$	$9.99842688807309E - 07$	0.0055 s	$1.00004100821410E - 06$	0.0119 s
$B_j^{(0)}$	$9.99842688807658E - 07$	0.0196 s	$1.00004100821322E - 06$	0.0198 s
$B_c^{(0)}$	$9.99842688807309E - 07$	0.0455 s	$1.00004100821410E - 06$	0.2197 s
$B_r^{(1)}$	$-4.01744317245784E - 08$	0.0120 s	$-1.72077994872498E - 08$	0.0261 s
$B_j^{(1)}$	$-4.01744317245941E - 08$	0.0204 s	$-1.72077994872372E - 08$	0.0207 s
$B_c^{(1)}$	$-4.01744317245784E - 08$	0.0934 s	$-1.72077994872498E - 08$	0.4488 s
$B_r^{(2)}$	$1.51823175435219E - 09$	0.0190 s	$2.76453663728048E - 10$	0.0419 s
$B_j^{(2)}$	$1.51823175435276E - 09$	0.0213 s	$2.76453663727892E - 10$	0.0216 s
$B_c^{(2)}$	$1.51823175435219E - 09$	0.1406 s	$2.76453663728048E - 10$	0.6788 s
	$(a = 1E + 05 ; x = 1.0119688E + 05)$		$(a = 1E + 06 ; x = 1.0034624E + 06)$	
$B_r^{(0)}$	$1.00003566834164E - 06$	0.0166 s	$1.00015668389752E - 06$	0.0509 s
$B_j^{(0)}$	$1.00003566834104E - 06$	0.0199 s	$1.00015668388577E - 06$	0.0204 s
$B_c^{(0)}$	$1.00003566834164E - 06$	0.4340 s	$1.00015668389752E - 06$	4.2764 s
$B_r^{(1)}$	$-1.19040998856007E - 08$	0.0367 s	$-3.45845819666310E - 09$	0.1140 s
$B_j^{(1)}$	$-1.19040998855926E - 08$	0.0208 s	$-3.45845819664671E - 09$	0.0213 s
$B_c^{(1)}$	$-1.19040998856007E - 08$	0.8876 s	$-3.45845819666310E - 09$	8.7694 s
$B_r^{(2)}$	$1.31832347302748E - 10$	0.0592 s	$1.09658076349158E - 11$	0.1854 s
$B_j^{(2)}$	$1.31832347302626E - 10$	0.0217 s	$1.09658076349616E - 11$	0.0222 s
$B_c^{(2)}$	$1.31832347302748E - 10$	1.3424 s	$1.09658076349158E - 11$	13.2634 s

Tabela 3.6: Método RR: Aproximações e tempos de processamento ( $B \approx 10^{-6}$ )

### 3.B Cálculo de Derivadas de Ordem Superior a Dois

Neste trabalho fundamentou-se teoricamente o Método da Recursão Reduzida para o cálculo da função de Erlang-B e das suas derivadas até à ordem dois. As derivadas de ordem superior a dois são menos importantes em termos de aplicações, mas o método pode ser generalizado para se aplicar nesse cálculo.

Pode pensar-se em generalizar o Teorema 3.2 para  $m > 2$  seguindo uma abordagem idêntica à seguida para os casos  $m = 0, 1, 2$ . Começa-se então por obter majorantes para  $|r(m, x + l)|$ ,  $m > 2$  tal como se fez nos Lemas 3.2, 3.5 e 3.6 para os casos  $m = 0, 1, 2$ . O seguinte lema que generaliza esses resultados é fácil de provar pelo menos até  $m = 3$ :

#### Lema 3.11

Se  $|r(k, x)| \leq \epsilon$ ,  $k = 0(1)m$ , então para  $l \geq m + 1$  e  $x + m \leq a$ ,

$$|r(m, x + l)| < \frac{(l + 1)^k}{k!} \epsilon \prod_{j=m+1}^l \frac{x + j}{a}.$$

Experiências computacionais demonstram que a qualidade das majorantes assim obtidas degrada-se à medida que  $m$  aumenta. As consequências desse facto são óbvias: o valor calculado para  $x_0^*$  é muito menor que o mínimo necessário e o ganho em eficiência deixa de ser tão atractivo como se verificou ser para os casos  $m = 0, 1, 2$ . Constata-se então que o modelo matemático usado para majorar o erro relativo, tendo conduzido a bons resultados nos casos  $m = 0, 1, 2$ , não é adequado se  $m$  for muito maior que dois.

Surge então a seguinte questão:

*Calcule-se  $x_0^*$  pelo Teorema 3.2 com  $m = 2$ . Use-se esse  $x_0^*$  para calcular não só a função, primeira derivada e segunda derivada, mas também derivadas de ordem superior a dois (ver o Algoritmo 3.3). A precisão dos resultados é satisfatória?*

**Algoritmo 3.3 (Recursão Reduzida para o cálculo de  $B(a, x)$ ,  $B'_x(a, x)$ ,  $\dots$ ,  $B_x^{(m)}(a, x)$ )**

*Método da Recursão Reduzida:* O valor do ponto inicial é calculado pelo enunciado do teorema 3.2 (linhas 2–14) — Para  $m > 2$  toma-se o mesmo que para  $m = 2$ . A recursão matricial especifica-se nas linhas 15–17.

**Input:** Valores de  $a, x \geq 100$ ,  $w \in [1, 16]$  e  $m \in \mathbb{N}_0$ ;

```

begin
1.   for  $k \leftarrow 0$  to  $m$  do  $I_k \leftarrow 0$ ;
2.    $m' \leftarrow m$ ;
3.   if  $(m > 2)$  then  $m' \leftarrow 2$ ;
4.    $h \leftarrow x - \lfloor x \rfloor$ ;
5.    $y \leftarrow \min\{\lfloor x \rfloor, \lfloor a - 3 \rfloor\}$ ;
6.    $b \leftarrow 2(a - y - h) - 2m' - 1$ ;
7.    $c \leftarrow m'(m' + 1) - 2m'(a - y - h) - 2aw \ln 10$ ;
8.    $l \leftarrow (-b + \sqrt{b^2 - 4c})/2$ ;
9.   if  $(m' > 1)$  then
      begin
10.     $b \leftarrow b - 2am'/(l + 1)$ ;
11.     $c \leftarrow c - 2am'[\ln(l + 1) - l/(l + 1)]$ ;
12.     $l \leftarrow (-b + \sqrt{b^2 - 4c})/2$ ;
      end
       $l \leftarrow \lfloor l + 1 \rfloor$ ;
13.  if  $(l < 3)$  then  $l \leftarrow 3$ ;
14.   $x_0 \leftarrow y - l$ ;
15.  for  $j \leftarrow x_0$  to  $\lfloor x \rfloor$  do
      begin
16.    for  $k \leftarrow m$  to 1 do  $I_k \leftarrow (kI_{k-1} + (j + h)I_k)/a$ ;
17.     $I_0 \leftarrow 1 + (j + h)I_0/a$ ;
      end
18.  Calcule  $B_k$ ,  $k = 0(1)m$  a partir de  $I_k$ ,  $k = 0(1)m$ ;
end;
```

**Output:**  $B_x^{(k)}(a, x) = B_k$ ,  $k = 0(1)m$ ;

Em face da extensa experimentação computacional efectuada com  $w = 16$ , adiantamos algumas conclusões:

- A resposta é afirmativa pelo menos até às derivadas de ordem 5. Na verdade, se os parâmetros  $a$  e  $x^*$  estiverem no intervalo  $[10^2, 10^5]$  e  $m \leq 5$  os valores assim obtidos não diferem dos obtidos pelo Método da Recursão Completa nem no dígito menos significativo. Para  $a$  e  $x^*$  no intervalo  $[10^5, 10^6]$  os valores apenas diferem nos três últimos dígitos para a 5ª derivada em zonas de bloqueio próximos de 10% a 20%.
- Na mesma zona de parâmetros  $a$  e  $x^*$  em zonas de bloqueio inferior a 1% calculam-se aproximações iguais às obtidas pelo Método da Recursão Completa, mesmo para derivadas de ordem 10 (encontraram-se raras excepções a esta regra e as diferenças foram assinaladas nos dois últimos dígitos).
- A zona pior para a precisão parece ser a correspondente a bloqueios da ordem de 10% a 20%.

A completa explicação analítica deste comportamento do erro relativo propagado nas recursões não foi encontrada. Invocaremos alguns argumentos que contribuem para essa discussão com base numa classe de modelos que estimam o erro relativo propagado nos casos em que  $m > 2$ .

Para não complicar a exposição analisaremos o caso  $m = 3$ , sendo fácil generalizar a discussão para casos em que  $m > 3$ . Partimos então do modelo exacto do erro relativo propagado, ou seja das fórmulas (3.5), (3.6) e (3.7). Para o caso  $m = 3$ , as recursões que descrevem exactamente a evolução do erro relativo são:

$$r(0, x + 1) = M_0(x + 1) r(0, x), \quad (3.71)$$

$$r(1, x + 1) = [1 - M_1(x + 1)] r(0, x) + M_1(x + 1) r(1, x), \quad (3.72)$$

$$r(2, x + 1) = [1 - M_2(x + 1)] r(1, x) + M_2(x + 1) r(2, x), \quad (3.73)$$

$$r(3, x + 1) = [1 - M_3(x + 1)] r(2, x) + M_3(x + 1) r(3, x). \quad (3.74)$$

Como vimos atrás  $M_k(x+1) < (x+1)/a$  e  $[1 - M_k(x+1)] < 1$ . Invocando os mesmos argumentos explicitados quando tratámos os casos  $m = 0, 1, 2$ , somos levados às majorações seguintes:

$$|r(0, x+1)| < \frac{x+1}{a} |r(0, x)|, \quad (3.75)$$

$$|r(1, x+1)| < |r(0, x)| + \frac{x+1}{a} |r(1, x)|, \quad (3.76)$$

$$|r(2, x+1)| < |r(1, x)| + \frac{x+1}{a} |r(2, x)|, \quad (3.77)$$

$$|r(3, x+1)| < |r(2, x)| + \frac{x+1}{a} |r(3, x)|. \quad (3.78)$$

Ora é este modelo de majorantes do erro relativo, que testes computacionais indicam ser demasiado pessimista. Podemos pensar em abandonar a ideia de majorar o erro relativo e optar por obter simples estimativas. Ao fazer isso perde-se qualquer certeza quanto à precisão dos resultados, mas podemos ser conduzidos a métodos de cálculo bastante práticos. Opta-se portanto por verificar *a posteriori* a precisão dos resultados calculados mediante extensa experimentação computacional, uma vez que não há nenhuma garantia analítica que fixe a precisão dos resultados.

Parece-nos razoável optar pela seguinte simplificação do modelo. Na linha dos argumentos invocados para demonstrar o Lema 3.8, prova-se que para  $j \geq 3$  se tem:

$$|r(0, x+j)| < |r(1, x+j)| < |r(2, x+j)| < |r(3, x+j)|.$$

Assim, desprezamos o termo  $|r(0, x)|$  nas expressões (3.75) e (3.76) para de alguma forma compensar as majorações feitas ao obter essas expressões. Chega-se agora ao seguinte modelo aproximado para descrever a evolução do erro relativo:

$$|r(0, x+1)| \approx 0, \quad (3.79)$$

$$|r(1, x+1)| \approx \frac{x+1}{a} |r(1, x)|, \quad (3.80)$$

$$|r(2, x+1)| \approx |r(1, x)| + \frac{x+1}{a} |r(2, x)|, \quad (3.81)$$

$$|r(3, x+1)| \approx |r(2, x)| + \frac{x+1}{a} |r(3, x)|. \quad (3.82)$$

Este modelo é francamente inadequado para descrever o evoluir de  $|r(0, x+l)|$ . Mas o mesmo já não poderá ser afirmado tão seguramente para o termo  $|r(3, x+l)|$ . . . Ora,

para estabelecer o método para  $m = 3$  há que estimar  $|r(3, x+l)|$  e, portanto, o modelo indicado pode fornecer bons resultados.

Comparemos agora o modelo aproximado estabelecido acima, com o usado para estabelecer o método para  $m = 2$ :

$$|r(0, x+1)| < \frac{x+1}{a} |r(0, x)|, \quad (3.83)$$

$$|r(1, x+1)| < |r(0, x)| + \frac{x+1}{a} |r(1, x)|, \quad (3.84)$$

$$|r(2, x+1)| < |r(1, x)| + \frac{x+1}{a} |r(2, x)|. \quad (3.85)$$

Facilmente se verifica que se partirmos das expressões (3.79) – (3.82) podemos chegar a uma estimativa para  $|r(3, x+l)|$  com expressão análoga à encontrada para  $|r(2, x+l)|$  no Lema 3.6.

Estas considerações podem ajudar a compreender o facto de o valor de  $x_0^*$  calculado com  $m = 2$  poder ser também adequado para calcular a terceira derivada pelo Método da Recursão Reduzida, o que pelo menos com  $w = 16$  vem amplamente verificado por testes computacionais.

Por fim, note-se que o que foi dito para o modelo aproximado de  $|r(3, x+j)|$  pode ser estendido para  $|r(m, x+j)|$  com  $m > 3$ , ou seja:

$$|r(0, x+1)| \approx 0,$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$|r(m-3, x+1)| \approx 0, \quad (3.86)$$

$$|r(m-2, x+1)| \approx \frac{x+1}{a} |r(m-2, x)|, \quad (3.87)$$

$$|r(m-1, x+1)| \approx |r(m-2, x)| + \frac{x+1}{a} |r(m-1, x)|, \quad (3.88)$$

$$|r(m, x+1)| \approx |r(m-1, x)| + \frac{x+1}{a} |r(m, x)|. \quad (3.89)$$

A validade do modelo à medida que o valor de  $m$  cresce torna-se cada vez mais questionável. Mas como referimos, pelo menos para  $m \leq 5$  testes computacionais indicam que os resultados são satisfatórios, pelo menos quando se toma  $w = 16$ .

## Referências do Capítulo 3

- [1] M. Abramowitz and I. Stegun. *Handbook of Mathematical Functions*. Dover Publications, 9th edition, 1970.
- [2] Jorge Sá Esteves. Relatório ROUTING-08 — o método da recursão reduzida para o cálculo da função de Erlang-B e suas derivadas. Unpublished Research Report, Novembro 1993.
- [3] Jorge Sá Esteves, J. Craveirinha, and D. Cardoso. A reduced recursion for computing Erlang-B function derivatives. In V. Ramaswami and P. E. Wirth (AT&T), editors, *Proceedings of the 15th International Teletraffic Congress, Washington D.C., USA*, number 2 Teletraffic Contributions for the Information Age in Teletraffic Science and Engineering, pages 1315–1326, Boston, June 1997. Elsevier Science B. V.
- [4] D. L. Jagerman. Methods in traffic calculations. *The Bell System Technical Journal*, 63(7):1283–1310, September 1984.



# Capítulo 4

## Condições de Segunda Ordem para o Tráfego de Transbordo de um Sistema de Erlang-B

### Resumo<sup>1</sup>

Neste trabalho considerou-se o sistema de perda de Erlang, generalizado para o caso em que o número de circuitos  $x$  é um valor real não negativo. Usa-se para isso a extensão analítica de R. Fortet para a função de Erlang-B. Prova-se que a função  $\hat{A}(a, x)$  que define o tráfego de transbordo nesse sistema é estritamente convexa na variável  $x$  (número de circuitos), para  $x \geq 0$ , considerando o tráfego oferecido  $a$  como um parâmetro real positivo. A convexidade no sentido lato foi demonstrada por A.A. Jagers e Erik A. Van Doorn [10]. Usando um processo similar ao usado por estes autores nessa demonstração, prova-se também que  $\hat{A}(a, x)$  é estritamente convexa na variável  $a$ , para todo o  $(a, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$  — um resultado bem conhecido e devido a C. Palm [15, pp.180–181], mas provado com a condição de  $x$  ser um inteiro positivo. Os dois resultados citados, obtêm-se estabelecendo o sinal das derivadas de segunda

---

<sup>1</sup>O conteúdo deste capítulo é parcialmente baseado no artigo [4] e no “preprint” [5].

ordem  $\widehat{A}''_{aa}(a, x)$  e  $\widehat{A}''_{xx}(a, x)$  nos pontos  $(a, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ . Usando o mesmo processo, demonstra-se depois que as derivadas rectangulares de segunda ordem  $\widehat{A}''_{ax}(a, x) = \widehat{A}''_{xa}(a, x)$  são funções estritamente negativas para todo o  $(a, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}_0^+$ . Por fim, aborda-se a questão da convexidade estrita conjunta de  $\widehat{A}(a, x)$ , em algum domínio aberto e convexo de  $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ . Aborda-se essa questão em alguns casos particulares, e com base em alguns resultados computacionais apresentados, conjectura-se que a função  $\widehat{A}(a, x)$  é estritamente convexa em zonas de baixo bloqueio, onde o *tráfego oferecido standard* é inferior a  $-1$ .

## 4.1 Introdução e Resultados Principais

Recorde-se a recursão (2.3):

$$B(a, x)^{-1} = \frac{x}{a} B(a, x-1)^{-1} + 1, \quad \forall (a, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}. \quad (4.1)$$

Como  $B(a, 0) = 1$ ,  $\forall a \in \mathbb{R}^+$ , podemos avaliar  $B(a, x)$  por (4.1) quando  $x$  é um valor inteiro positivo. A partir daqui, sempre que seja conveniente e as variáveis  $a$  e  $x$  possam ser facilmente determinadas pelo contexto, o argumento  $(a, x)$  será omitido. As expressões das derivadas parciais de primeira ordem de  $B$  podem ser encontradas em [8] e são dadas por:

$$B'_a = \left( \frac{x}{a} - 1 + B \right) B, \quad (4.2)$$

$$B'_x = -a B^2 \int_0^{+\infty} e^{-az} (1+z)^x \ln(1+z) dz. \quad (4.3)$$

Enquanto que  $B'_x(a, x)$  é estritamente negativa para  $(a, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ ,  $B'_a(a, x)$  é estritamente positiva se  $x > 0$ , e igual a zero se  $x = 0$  (ver prova em [9, pag.1289]).

As expressões analíticas das derivadas parciais de segunda ordem de  $B(a, x)$ , podem

agora ser obtidas:

$$B''_{aa} = \left( B'_a - \frac{x}{a^2} \right) B + \frac{(B'_a)^2}{B}, \quad (4.4)$$

$$= \left( 3 \frac{x}{a} - 3 + 2B \right) B^2 + [(x-a)^2 - x] \frac{B}{a^2}, \quad (4.5)$$

$$\begin{aligned} B''_{xx} &= -2aB B'_x \int_0^{+\infty} e^{-az} (1+z)^x \ln(1+z) dz - \\ &\quad - aB^2 \int_0^{+\infty} e^{-az} (1+z)^x [\ln(1+z)]^2 dz, \\ &= 2a^2 B^3 \left[ \int_0^{+\infty} e^{-az} (1+z)^x \ln(1+z) dz \right]^2 - \\ &\quad - aB^2 \int_0^{+\infty} e^{-az} (1+z)^x [\ln(1+z)]^2 dz, \end{aligned}$$

$$B''_{ax} = B'_a \frac{B'_x}{B} + \left( B'_x + \frac{1}{a} \right) B, \quad (4.6)$$

$$= \left( \frac{x}{a} - 1 + 2B \right) B'_x + \frac{B}{a}. \quad (4.7)$$

Note que pelo teorema de Schwarz, verifica-se a igualdade das derivadas rectangulares  $B''_{ax}(a, x) = B''_{xa}(a, x)$ .

Introduzimos agora duas funções especialmente importantes para a análise do sistema de Erlang-B em equilíbrio:

$$\tilde{A}(a, x) = a[1 - B(a, x)], \quad (4.8)$$

$$\hat{A}(a, x) = aB(a, x). \quad (4.9)$$

A função  $\tilde{A}$  designa-se por *tráfego transportado* e pode demonstrar-se que dá o valor esperado de servidores ocupados no sistema. A função  $\hat{A}$  designa-se por *tráfego perdido* ou *tráfego de transbordo* e dá o valor esperado das solicitações que sofrem bloqueio no sistema durante a duração média dos tempos de serviço.

Em estudos de análise e optimização relativos ao sistema de Erlang-B, é muito sugestivo o correspondente modelo determinista que descreve, em muitos aspectos, o estado de equilíbrio do sistema. Para introduzir esse modelo, podemos verificar que as funções  $\tilde{A}$  e  $\hat{A}$  relacionam-se bem se pensarmos num fluxo determinista de intensidade

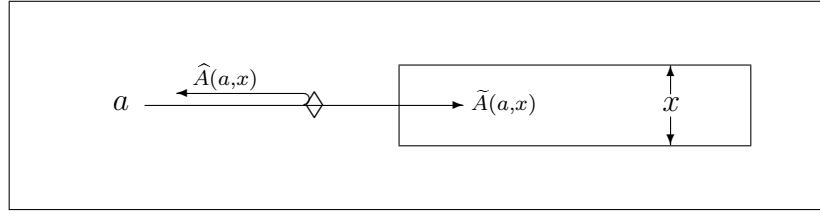


Figura 4.1: Modelo de fluxo determinista para um grupo de Erlang-B em equilíbrio.

$a$ , que é oferecido a um canal com capacidade  $x \geq 0$  através de um nodo de acesso (Figura 4.1).

A conservação de fluxo nesse nodo obriga a que  $a = \tilde{A}(a, x) + \hat{A}(a, x)$ , o que se cumpre sempre por (4.8) e (4.9). É claro que, este modelo para um sistema de Erlang-B com um número real não negativo de circuitos, cria uma imagem simplista do sistema, mas tem interesse conceptual pois permite relacionar bem as principais entidades em estudo, no estado de equilíbrio do sistema. Note-se a propósito que o sistema não é determinista, mas aqui só estamos interessados no estudo de quantidades que são valores esperados das variáveis aleatórias que descrevem o sistema no estado de equilíbrio. Assim, o modelo introduzido servirá de base para este trabalho.

Neste capítulo estabeleceremos o sinal das derivadas de segunda ordem da função tráfego de transbordo, definida pela expressão analítica seguinte:

$$\hat{A}(a, x) = a B(a, x) = \left\{ \int_0^{+\infty} e^{-az} (1+z)^x dz \right\}^{-1}. \quad (4.10)$$

As expressões analíticas das primeiras derivadas de  $\hat{A}(a, x)$  podem ser obtidas por diferenciação de (4.10), verificando-se que:

$$\hat{A}'_a = B + a B'_a = a B^2 + (x - a + 1) B, \quad (4.11)$$

$$\hat{A}'_x = a B'_x = - \left[ \hat{A}(a, x) \right]^2 \int_0^{+\infty} e^{-az} (1+z)^x \ln(1+z) dz. \quad (4.12)$$

Por diferenciação de (4.11) e (4.12) e após alguma manipulação algébrica usando (4.4),

(4.5), (4.6) e (4.7), obtemos as expressões analíticas das segundas derivadas de  $\widehat{A}(a, x)$ :

$$\widehat{A}''_{xx} = a B''_{xx}, \quad (4.13)$$

$$\widehat{A}''_{aa} = 2 B'_a + \left( a B'_a - \frac{x}{a} \right) B + a \frac{(B'_a)^2}{B}, \quad (4.14)$$

$$= 2 a B^3 + [3(x - a) + 2] B^2 + \left[ \frac{(x - a)^2}{a} + \frac{x}{a} - 2 \right] B, \quad (4.15)$$

$$\widehat{A}''_{ax} = \left[ a \frac{B'_a}{B} + a B + 1 \right] B'_x + B, \quad (4.16)$$

$$= (x - a + 2 a B + 1) B'_x + B. \quad (4.17)$$

De novo, pelo teorema de Schwarz tem-se a igualdade das derivadas mistas  $\widehat{A}''_{ax}(a, x) = \widehat{A}''_{xa}(a, x)$ .

O estudo do sinal das derivadas  $\widehat{A}''_{xx}$ ,  $\widehat{A}''_{aa}$  e  $\widehat{A}''_{ax}$  dadas pelas relações (4.13), (4.14) e (4.16) revela-se importante em muitos problemas de otimização de sistemas estocásticos de serviço, nomeadamente em redes de teletráfego (ver por exemplo [7]) e em problemas de partilha de carga e de alocação de servidores (algumas formulações podem ser encontradas em [17]). Na verdade, através do estudo das derivadas de segunda ordem de  $\widehat{A}(a, x)$ , podemos inferir propriedades importantes dos problemas de otimização, nomeadamente condições de convexidade estrita das funções objectivo.

O resultado principal deste capítulo é o seguinte teorema:

**Teorema 4.1** *Para todo o  $(a, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}_0^+$ , tem-se:*

- 1)  $\widehat{A}''_{xx}(a, x) > 0$ ;
- 2)  $\widehat{A}''_{aa}(a, x) \geq 0 \wedge [\widehat{A}''_{aa}(a, x) = 0 \text{ sse } x = 0]$ ;
- 3)  $\widehat{A}''_{ax}(a, x) = \widehat{A}''_{xa}(a, x) < 0$ .

Fazendo uma revisão da literatura, podemos dizer que:

1. A prova do ponto 1) foi estabelecida em [13], mas restringindo o número de circuitos  $x$  aos inteiros positivos. Mais tarde, A. A. Jagers e Erik A. Van Doorn [10] estabelecem que  $B''_{xx}(a, x) \geq 0$  desde que  $(a, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}_0^+$  (o que implica que

$\widehat{A}''_{xx}(a, x) \geq 0$  no domínio indicado). Mais recentemente, obtivemos a prova de que  $\widehat{A}''_{xx}(a, x) > 0$ , mas somente para  $x \geq 1$  (ver Teorema 2.5 e o artigo [2]).

2. A prova do ponto 2) é um resultado clássico bem conhecido e devido a C. Palm [15, pp.180–181], mas provado com a condição de  $x$  ser um inteiro positivo.
3. Tanto quanto sabemos o resultado expresso no ponto 3) é inteiramente original.

Outros resultados de convexidade da função de Erlang-B foram investigados em [1], mas restringindo o número de circuitos aos inteiros positivos. Outros trabalhos que têm alguma proximidade com as questões tratadas neste capítulo são [11, 12, 21, 14, 20].

Note-se, a propósito, que a extensão analítica da função de perda de Erlang para  $x \in \mathbb{R}_0^+$ , torna-se imprescindível em muitos métodos de modelização, análise e optimização de sistemas estocásticos de serviço (ver os trabalhos clássicos [16] e [19]). Dessa forma, o Teorema 4.1 assume não só interesse teórico como se torna relevante nas aplicações.

Observando o enunciado do Teorema 4.1, podemos concluir que os pontos 1) e 2) estabelecem condições de convexidade estrita de  $\widehat{A}$  na variável  $x$  e na variável  $a$ , e por esse facto têm importantes implicações em problemas de optimização. Por outro lado, o ponto 3) estabelece o sinal das derivadas rectangulares de segunda ordem de  $\widehat{A}$  que se revela importante, por exemplo, na investigação de regiões de  $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$  de convexidade conjunta de  $\widehat{A}(a, x)$ . Na Secção 4.3 tentaremos abordar essa questão, mas sem obter resultados concludentes. Estamos agora em posição de provar o Teorema 4.1, o que será feito na Secção 4.2.

## 4.2 Demonstração do Teorema 4.1

Provaremos cada um dos pontos do enunciado em subsecções separadas. A prova do ponto 1) faz-se por redução ao absurdo e as provas dos pontos 2) e 3) seguem, passo a passo e *mutatis mutandis*, o processo de demonstração da autoria de A. A. Jagers e Erik A. Van Doorn apresentado em [10]. O principal argumento usado nesse

trabalho baseia-se no facto de que para provar que uma dada função é completamente monótona<sup>2</sup>, provar que a sua transformada inversa de Laplace existe e é uma função não negativa em  $\mathbb{R}^+$  (ver [6, pag.439]).

### 4.2.1 A Prova do Ponto 1)

Pretende-se demonstrar que  $\widehat{A}''_{xx}(a, x) > 0, \forall (a, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}_0^+$ . Como  $\widehat{A}''_{xx} = aB''_{xx}$ , a prova resume-se a demonstrar que  $B''_{xx}(a, x) > 0, \forall (a, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}_0^+$ . Trata-se, portanto, de estabelecer que a derivada parcial de segunda ordem  $B(a, x)$  na variável  $x$  é estritamente positiva se  $(a, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}_0^+$ . Como já se afirmou, este resultado implica condições de convexidade estrita de  $B(a, x)$  na variável  $x$ .

A convexidade estrita de  $B(a, x)$  na variável  $x$  foi estabelecida em 1972 por E.J. Messerli [13] restringindo  $x$  aos inteiros não negativos. A convexidade no sentido lato para o caso de  $x$  ser uma variável real não negativa, foi estabelecida em 1986 por A.A. Jagers e E. Van Doorn [10], provando que:

$$B''_{xx}(a, x) \geq 0, \quad \forall (a, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}_0^+. \quad (4.18)$$

Em [3] estabelece-se que  $B''_{xx} > 0$  para todo o  $x \geq 1$  e todo o  $a > 0$ . Apresentamos agora uma demonstração não construtiva de que a desigualdade (4.18) se cumpre sempre no sentido estrito.

Antes de iniciar o processo de demonstração, provaremos a seguinte proposição auxiliar:

$$\text{“Para todo o } (a, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}_0^+ \text{ tem-se: } B'_x(a, x) + \frac{1}{a} > 0\text{”}. \quad (4.19)$$

---

<sup>2</sup>Uma função  $\phi$  definida em  $\mathbb{R}^+$  é completamente monótona se possui derivadas  $\phi^{(n)}$  de todas as ordens  $n \in \mathbb{N}_0$ , cumprindo-se  $(-1)^n \phi^{(n)}(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}^+$ . O teorema que invocamos é devido a S. Bernstein (1928) e pode ser enunciado como segue: “Uma função  $\phi$  definida em  $\mathbb{R}^+$  é completamente monótona se e só se é da forma  $\phi(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda z} F\{dz\}$ ,  $\lambda > 0$ , onde  $F$  é uma medida não necessariamente finita em  $\mathbb{R}^+$ ” (ver [6, pag.439]).

Para provar (4.19), notemos que se  $x \geq 0$  e  $a > 0$ , então podemos usar a proposição (4.18) para concluir que  $B'_x$  não decresce na variável  $x$ . Então:

$$B'_x(a, x) \geq B'_x(a, 0), \quad \forall (a, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}_0^+.$$

Usando a expressão (4.3), obtemos:

$$B'_x(a, x) \geq B'_x(a, 0) = -a \int_0^\infty e^{-az} \ln(1+z) dz.$$

Mas tendo em conta a conhecida identidade  $\ln(1+z) < z$ ,  $\forall z \in \mathbb{R}^+$ , podemos escrever:

$$B'_x(a, x) \geq B'_x(a, 0) > -a \int_0^\infty e^{-az} z dz.$$

Integrando por partes facilmente se obtém:

$$\int_0^\infty e^{-az} z dz = \left[ -\frac{az+1}{a^2} e^{-az} \right]_0^\infty = \frac{1}{a^2}.$$

Resultando que:

$$B'_x(a, x) \geq B'_x(a, 0) > -\frac{1}{a}.$$

Provada assim a proposição (4.19), faremos ainda algumas manipulações algébricas preparatórias do processo de demonstração. Derivemos sucessivamente (4.2) em ordem a  $x$ , para obter:

$$\begin{aligned} B''_{ax} &= \left( \frac{x}{a} - 1 + B \right) B'_x + \left( B'_x + \frac{1}{a} \right) B, \\ B'''_{axx} &= 2B'_x \left( B'_x + \frac{1}{a} \right) + \left( \frac{x}{a} - 1 + 2B \right) B''_{xx}. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Como  $B(a, x)$  é uma função infinitamente diferenciável em  $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ , aplicamos o Teorema de Schwarz para concluir que na obtenção das suas derivadas parciais a ordem de derivação é indiferente. Mais adiante usaremos, em particular, a igualdade das derivadas mistas:

$$\frac{\partial}{\partial a} B''_{xx} = B'''_{xxa} = B'''_{axx}. \quad (4.21)$$

O resultado anunciado no ponto 1) do Teorema 4.1 pode agora ser provado. Fixamos  $x_0$  como um valor real não negativo arbitrário e definimos a função:

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}^+ &\longrightarrow \mathbb{R} \\ a &\longmapsto \varphi(a) = B''_{xx}(a, x_0). \end{aligned}$$



Tendo em conta a proposição (4.18), o problema resume-se a provar que  $\varphi$  não tem zeros em  $\mathbb{R}^+$ . Suponhamos o contrário, ou seja, que existe um valor  $a_0 \in \mathbb{R}^+$  tal que  $\varphi(a_0) = 0$ . Por (4.18) se conclui que  $\varphi$  assume o seu valor mínimo em  $\mathbb{R}^+$  no ponto  $a_0$ . Mas, uma vez que  $\mathbb{R}^+$  é um conjunto aberto e a função  $\varphi$  é diferenciável em  $\mathbb{R}^+$ ,  $a_0$  tem de ser um ponto crítico de  $\varphi$ , ou seja:

$$\varphi'(a_0) = B'''_{xxa}(a_0, x_0) = 0.$$

Tendo agora em conta a igualdade (4.21), o valor de  $\varphi'(a_0)$  pode ser obtido pela expressão (4.20). Lembrando que  $B''_{xx}(a_0, x_0) = 0$ , resulta simplesmente:

$$\varphi'(a_0) = 2B'_x(a_0, x_0) \left[ B'_x(a_0, x_0) + \frac{1}{a} \right].$$

Usando agora a proposição (4.19), e também o facto de  $B'_x(a_0, x_0)$  ser estritamente negativa, conclui-se que  $\varphi'(a_0) < 0$ , contrariando que  $a_0$  é ponto crítico de  $\varphi$ . É então absurdo admitir que  $a_0$  é um zero de  $\varphi$  em  $\mathbb{R}^+$ . Isso leva a concluir que

$$\varphi(a) > 0, \quad \forall a \in \mathbb{R}^+,$$

o que é equivalente ao que se pretendia demonstrar, uma vez que  $x_0$  foi tomado arbitrariamente em  $\mathbb{R}_0^+$ .

### 4.2.2 A Prova do Ponto 2)

Nesta subsecção provaremos que  $\widehat{A}''_{aa}(a, x) > 0, \forall (a, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$  e que  $\widehat{A}''_{aa}(a, 0) = 0, \forall a \in \mathbb{R}^+$ . Restringindo  $x$  aos inteiros positivos este resultado é bem conhecido e devido a C. Palm [15, pp.180–181]. Para generalizar o resultado quando  $x \in \mathbb{R}_0^+$ , o processo de demonstração que iremos usar é análogo ao usado por A. A. Jagers e Erik A. Van Doorn [10], quando provaram que  $B''_{xx}(a, x) \geq 0, \forall (a, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}_0^+$ .

Definam-se as funções:

$$\begin{aligned} f(a, x) &= \int_0^{+\infty} e^{-at} (1+t)^x dt, \\ \Phi(a, x) &= 2[f'_a(a, x)]^2 - f(a, x) f''_{aa}(a, x). \end{aligned} \tag{4.22}$$

Importa agora salientar que usando a expressão (4.10), se obtém:

$$\begin{aligned}\widehat{A}(a, x) &= \frac{1}{f(a, x)}, \\ \widehat{A}'_a(a, x) &= -\frac{f'_a(a, x)}{[f(a, x)]^2},\end{aligned}\quad (4.23)$$

$$\widehat{A}''_{aa}(a, x) = \frac{2[f'_a(a, x)]^2 - f(a, x) f''_{aa}(a, x)}{[f(a, x)]^3} = \frac{\Phi(a, x)}{[f(a, x)]^3}. \quad (4.24)$$

Uma vez que  $f(a, x)$  é estritamente positiva, pela igualdade (4.24) tem-se que o sinal de  $\widehat{A}''_{aa}(a, x)$  é o mesmo de  $\Phi(a, x)$ . Então o que se pretende demonstrar é equivalente a

$$\begin{cases} \Phi(a, 0) = 0, & \forall a \in \mathbb{R}^+ \\ \Phi(a, x) > 0, & \forall (a, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+. \end{cases}$$

Note-se que a partir de (4.22), podemos escrever

$$\begin{aligned}f'_a(a, x) &= -\int_0^{+\infty} e^{-at} (1+t)^x t \, dt, \\ f''_{aa}(a, x) &= \int_0^{+\infty} e^{-at} (1+t)^x t^2 \, dt.\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\{f(a, x)\} &= (1+t)^x, \\ \mathcal{L}^{-1}\{f'_a(a, x)\} &= -(1+t)^x t, \\ \mathcal{L}^{-1}\{f''_{aa}(a, x)\} &= (1+t)^x t^2.\end{aligned}$$

Aplica-se agora o teorema da convolução, para obter:

$$\mathcal{L}^{-1}\{f'_a(a, x) f'_a(a, x)\} = \int_0^t [(1+u)^x u] [(1+t-u)^x (t-u)] \, du, \quad (4.25)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{f(a, x) f''_{aa}(a, x)\} = \int_0^t [(1+u)^x u^2] [(1+t-u)^x] \, du. \quad (4.26)$$

Defina-se

$$g(t, x) = 2 \mathcal{L}^{-1}\{f'_a(a, x) f'_a(a, x)\} - \mathcal{L}^{-1}\{f(a, x) f''_{aa}(a, x)\}. \quad (4.27)$$

Atendendo a (4.25) e (4.26), obtemos uma expressão analítica que define a função  $g(t, x)$ :

$$\begin{aligned} g(t, x) &= \int_0^t [2(1+u)^x u (1+t-u)^x (t-u) - (1+u)^x u^2 (1+t-u)^x] du, \\ g(t, x) &= \int_0^t [2u(t-u) - u^2] [(1+t-u)^x (1+u)^x] du, \\ g(t, x) &= \int_0^t [3u^2 - 2ut] [-(1+t-u)^x (1+u)^x] du. \end{aligned}$$

Observe-se que, por construção,  $g(t, x) = \mathcal{L}^{-1} \{ \Phi(a, x) \}$ , isto é,  $\mathcal{L} \{ g(t, x) \} = \Phi(a, x)$ . De seguida estuda-se o sinal de  $g(t, x)$ , para  $(t, x) \in \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}^+$ .

Usando argumentos de simetria<sup>3</sup>, resulta então:

$$g(t, x) = \int_0^{t/2} \underbrace{[6u^2 - 6ut + t^2]}_{q(u)} \underbrace{[-(1+t-u)^x (1+u)^x]}_{p(u)} du = \int_0^{t/2} q(u) p(u) du.$$

Observe-se agora que se  $x = 0$ , então  $p(u) = -1$ ,  $\forall u \in [0, t/2]$ , resultando que:

$$g(t, 0) = - \int_0^{t/2} q(u) du = - [2u^3 - 3u^2t + t^2u]_0^{t/2} = - \left[ \frac{1}{4}t^3 - \frac{3}{4}t^3 + \frac{1}{2}t^3 \right] = 0. \quad (4.28)$$

Para analisar o caso em que  $x > 0$ , observemos que  $q(0) = t^2 > 0$  e que  $q(t/2) = -t^2/2 < 0$ . Além disso  $q(u)$  é estritamente decrescente no intervalo  $[0, t/2]$ :

$$q'(u) = 12u - 6t < 0, \quad \forall u \in [0, t/2[.$$

Assim, é imediato que existe um valor  $u^* \in ]0, t/2[$  tal que:

$$q(u) > 0, \forall u \in ]0, u^*[ \quad \wedge \quad q(u) < 0, \forall u \in ]u^*, t/2[. \quad (4.29)$$

---

<sup>3</sup>Sendo  $p(u) = -(1+t-u)^x (1+u)^x$ , e efectuando a mudança de variável  $v = t-u$ , obtemos:  $\int_{t/2}^t (3u^2 - 2ut) p(u) du = - \int_{t/2}^0 [3(t-v)^2 - 2(t-v)t] p(v) dv = \int_0^{t/2} (3v^2 - 4vt + t^2) p(v) dv$ . Conclui-se então que:

$$g(t, x) = \int_0^{t/2} (3u^2 - 2ut) p(u) du + \int_0^{t/2} (3u^2 - 4ut + t^2) p(u) du = \int_0^{t/2} (6u^2 - 6ut + t^2) p(u) du.$$

Verifiquemos também que  $p(u)$  é estritamente decrescente no intervalo  $[0, t/2]$ . Como  $x > 0$ , então

$$p'(u) = x(1+t-u)^{x-1}(1+u)^{x-1}(2u-t) < 0, \quad \forall u \in [0, t/2[. \quad (4.30)$$

Note-se agora que as relações (4.28), (4.29) e (4.30) permitem aplicar o caso *i*) do Lema 4.1 (ver Apêndice 4.A) para concluir que se  $t \in \mathbb{R}^+$  e  $x > 0$ , então:

$$g(t, x) = \int_0^{t/2} q(u)p(u) > 0.$$

Pela igualdade (4.28) tínhamos já visto que  $g(t, 0) = 0, \forall t \in \mathbb{R}_0^+$ . Em resumo, tem-se:

$$\begin{aligned} g(t, 0) &= 0, & \forall t \in \mathbb{R}_0^+, \\ g(t, x) &> 0, & \forall t \in \mathbb{R}^+, \forall x \in \mathbb{R}^+. \end{aligned}$$

Logo, atendendo a que  $\Phi(a, x) = \int_0^{+\infty} e^{-at}g(t, x) dt$ ,

$$\begin{aligned} \Phi(a, 0) &= 0, \quad \forall a \in \mathbb{R}^+, \\ \Phi(a, x) &> 0, \quad \forall (a, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+. \end{aligned}$$

Conseqüentemente, por análise da relação (4.24), conclui-se finalmente o resultado pretendido:

$$\begin{aligned} \widehat{A}_{aa}''(a, 0) &= 0, \quad \forall a \in \mathbb{R}^+, \\ \widehat{A}_{aa}''(a, x) &> 0, \quad \forall (a, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+. \end{aligned}$$

### 4.2.3 A Prova do Ponto 3)

Para completar a demonstração do Teorema 4.1, resta a prova de que  $\widehat{A}_{ax}''(a, x) = \widehat{A}_{xa}''(a, x) < 0, \forall (a, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}_0^+$ . A igualdade  $\widehat{A}_{ax}''(a, x) = \widehat{A}_{xa}''(a, x)$  obtém-se facilmente pelo teorema de Schwarz. O processo de demonstração é similar ao usado na subsecção anterior, embora envolvendo detalhes técnicos diferentes.

Considere-se mais uma vez a função  $f(a, x)$  definida por (4.22) e defina-se desta vez:

$$\Psi(a, x) = 2f'_x(a, x)f'_a(a, x) - f(a, x)f''_{ax}(a, x).$$

A partir da expressão (4.23) obtem-se, por derivação em ordem à variável  $x$ :

$$\widehat{A}_{ax}''(a, x) = \frac{2 f'_x(a, x) f'_a(a, x) - f(a, x) f''_{ax}(a, x)}{[f(a, x)]^3} = \frac{\Psi(a, x)}{[f(a, x)]^3}. \quad (4.31)$$

Uma vez que  $f(a, x)$  é estritamente positiva, pela igualdade (4.31) tem-se que o sinal de  $\widehat{A}_{ax}''(a, x)$  é o mesmo de  $\Psi(a, x)$ . Então o que se pretende demonstrar é equivalente a

$$\Psi(a, x) < 0, \quad \forall (a, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}_0^+.$$

Note-se que a partir de (4.22), podemos escrever

$$\begin{aligned} f'_a(a, x) &= - \int_0^{+\infty} e^{-at} (1+t)^x t \, dt, \\ f'_x(a, x) &= \int_0^{+\infty} e^{-at} (1+t)^x \ln(1+t) \, dt, \\ f''_{ax}(a, x) &= - \int_0^{+\infty} e^{-at} (1+t)^x t \ln(1+t) \, dt, \end{aligned}$$

e portanto,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1} \{f(a, x)\} &= (1+t)^x, \\ \mathcal{L}^{-1} \{f'_a(a, x)\} &= -(1+t)^x t, \\ \mathcal{L}^{-1} \{f'_x(a, x)\} &= (1+t)^x \ln(1+t), \\ \mathcal{L}^{-1} \{f''_{ax}(a, x)\} &= -(1+t)^x t \ln(1+t). \end{aligned}$$

Aplica-se novamente o teorema da convolução, para obter:

$$\mathcal{L}^{-1} \{f'_x(a, x) f'_a(a, x)\} = \int_0^t [(1+u)^x \ln(1+u)] [-(1+t-u)^x (t-u)] \, du, \quad (4.32)$$

$$\mathcal{L}^{-1} \{f''_{ax}(a, x) f(a, x)\} = \int_0^t [-(1+u)^x u \ln(1+u)] [(1+t-u)^x] \, du. \quad (4.33)$$

Seja

$$h(t, x) = 2 \mathcal{L}^{-1} \{f'_x(a, x) f'_a(a, x)\} - \mathcal{L}^{-1} \{f(a, x) f''_{ax}(a, x)\}. \quad (4.34)$$

Observe-se que, por construção,  $h(t, x) = \mathcal{L}^{-1} \{\Psi(a, x)\}$ , isto é,  $\mathcal{L} \{h(t, x)\} = \Psi(a, x)$ .

Mais, a partir das expressões (4.32) e (4.33), obtemos uma expressão analítica que

define a função  $h(t, x)$ :

$$\begin{aligned} h(t, x) &= - \int_0^t [u \ln(1+u) - 2(t-u) \ln(1+u)] [-(1+t-u)^x (1+u)^x] du, \\ h(t, x) &= - \int_0^t [(3u-2t) \ln(1+u)] [-(1+t-u)^x (1+u)^x] du. \end{aligned}$$

Para investigar o sinal da função  $h(t, x)$  iremos analisar inicialmente o caso  $x = 0$ , para depois nos dedicarmos ao caso  $x > 0$ . Para verificar que  $h(t, 0) < 0, \forall t \in \mathbb{R}^+$  teremos de enfrentar alguma manipulação algébrica que foi feita com ajuda do programa de cálculo simbólico MATHEMATICA.

$$\begin{aligned} h(t, 0) &= \int_0^t (3u-2t) \ln(1+u) du, \\ h(t, 0) &= \left( -\frac{t^2}{2} - 2t - \frac{3}{2} \right) \ln(1+t) + 5\frac{t^2}{4} + 3\frac{t}{2}. \end{aligned} \quad (4.35)$$

Fazemos intervir agora a seguinte desigualdade:

$$\ln(1+t) > \frac{6t+3t^2}{6+6t+t^2}, \quad \forall t \in \mathbb{R}^+,$$

que é citada em [18, pag.124] e foi obtida usando métodos de aproximação de Padé. Usando-a na expressão (4.35), obtemos para  $t > 0$  e usando também o programa MATHEMATICA:

$$\begin{aligned} h(t, 0) &< \left( -\frac{t^2}{2} - 2t - \frac{3}{2} \right) \frac{6t+3t^2}{6+6t+t^2} + 5\frac{t^2}{4} + 3\frac{t}{2}, \\ h(t, 0) &< -\frac{t^4}{4t^2+24t+24} < 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}^+. \end{aligned} \quad (4.36)$$

Se  $x = 0$ , então, atendendo a (4.36) e a que  $\Psi(a, x) = \int_0^{+\infty} e^{-at} h(t, x) dt$ , conclui-se que para todo o  $a \in \mathbb{R}^+$  tem-se  $\Psi(a, 0) < 0$  e portanto,  $\widehat{A}_{ax}''(a, 0) < 0$ .

Resta analisar o sinal de  $h(t, x)$  quando  $x > 0$ . Para isso, recorremos inicialmente a um argumento de simetria<sup>4</sup>, para obter a expressão:

$$h(t, x) = - \int_0^{t/2} \underbrace{[(3u-2t) \ln(1+u) + (t-3u) \ln(1+t-u)]}_{r(u)} \underbrace{[-(1+t-u)^x (1+u)^x]}_{p(u)} du. \quad (4.37)$$

<sup>4</sup>Sendo  $p(u) = -(1+t-u)^x (1+u)^x$ , e efectuando a mudança de variável  $v = t-u$ , obtemos:

$$\int_{t/2}^t (3u-2t) \ln(1+u) p(u) du = - \int_{t/2}^0 [3(t-v)-2t] \ln(1+t-v) p(v) dv = \int_0^{t/2} (t-3v) \ln(1+t-v) p(v) dv.$$

Verifiquemos agora que tanto  $p(u)$  como  $r(u)$  são funções estritamente decrescentes no intervalo  $[0, t/2]$  desde que  $x > 0$ . Essa conclusão relativa a  $p(u)$  é imediata, pela análise do sinal da sua derivada de primeira ordem:

$$p'(u) = x(1+t-u)^{x-1}(1+u)^{x-1}(2u-t) < 0, \text{ se } x > 0, \forall u \in [0, t/2[.$$

Analisemos agora o sinal de  $r'(u)$  no intervalo  $[0, t/2]$ :

$$\begin{aligned} r'(u) &= 3\ln(1+u) + \frac{3u-2t}{1+u} - 3\ln(1+t-u) - \frac{t-3u}{1+t-u}, \\ r'(u) &= -3[\ln(1+t-u) - \ln(1+u)] + \frac{3u-2t}{1+u} - \frac{t-3u}{1+t-u}, \\ r'(u) &= -3[\ln(1+t-u) - \ln(1+u)] + \frac{6u+4ut-2t^2-3t}{(1+u)(1+t-u)}. \end{aligned} \quad (4.38)$$

Como para  $t > 0$ :

$$\begin{aligned} \ln(1+u) &< \ln(1+t-u), \quad \forall u \in [0, t/2[, \\ 6u+4ut-2t^2-3t &< 0, \quad \forall u \in [0, t/2[, \end{aligned}$$

resulta de (4.38) que:

$$r'(u) < 0, \quad \forall u \in [0, t/2[,$$

ou seja, tal como  $p(u)$  também  $r(u)$  é estritamente decrescente no intervalo  $[0, t/2]$ .

Observe-se que  $r(0) = t \ln(1+t) > 0$  e que, para  $t > 0$ ,

$$r(t/2) = -t \ln(1+t/2) < 0.$$

Sendo assim, uma vez que  $r$  é estritamente decrescente em  $[0, t/2]$ , existe um ponto  $u^* \in ]0, t/2[$ , tal que:

$$r(u) > 0, \quad \forall u \in ]0, u^*[ \quad \wedge \quad r(u) < 0, \quad \forall u \in ]0, u^*[.$$

---

Conclui-se então que:

$$\begin{aligned} h(t, x) &= - \int_0^{t/2} (3u-2t) \ln(1+u) p(u) du - \int_0^{t/2} (t-3u) \ln(1+t-u) p(u) du, \\ h(t, x) &= - \int_0^{t/2} [(3u-2t) \ln(1+u) + (t-3u) \ln(1+t-u)] p(u) du. \end{aligned}$$

Além disso, a função  $p(u)$  mantém sinal negativo no intervalo  $]0, t/2[$  e, como vimos, é estritamente decrescente nesse intervalo. Deste modo, dado que  $h(t, 0) = \int_0^{t/2} r(u) du < 0$ , estão reunidas as condições para aplicar o caso *iii*) do Lema 4.1 (ver Apêndice 4.A) e concluir que

$$\int_0^{t/2} r(u) p(u) du > 0.$$

Por (4.37) tem-se então:

$$h(t, x) = - \int_0^{t/2} r(u) p(u) du < 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}^+, \quad \forall x \in \mathbb{R}^+. \quad (4.39)$$

Finalmente, usa-se a desigualdade (4.39), atendendo a que  $\Psi(a, x) = \int_0^{+\infty} e^{-at} h(t, x) dt$ , para se estabelecer  $\Psi(a, x) < 0, \forall (a, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ . Uma vez que tínhamos provado que  $\Psi(a, 0) < 0, \forall a \in \mathbb{R}^+$ , completa-se a prova observando a relação (4.31) para concluir que  $\widehat{A}''_{ax}(a, x) < 0, \forall (a, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}_0^+$ .

### 4.3 A Convexidade Conjunta de $\widehat{A}(a, x)$

Nesta secção reúnem-se algumas notas dispersas acerca de resultados de convexidade conjunta de  $\widehat{A}(a, x)$ . Até aqui temo-nos referido sempre a resultados de convexidade na variável  $x$  (fixando  $a$  em  $\mathbb{R}^+$ ), ou a resultados de convexidade na variável  $a$  (fixando  $x$  em  $\mathbb{R}_0^+$ ). Entendendo agora  $\widehat{A}(a, x)$  como uma função das duas variáveis  $a$  e  $x$ , pode questionar-se se será convexa (ou mesmo estritamente convexa) em algum domínio aberto e convexo de  $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}_0^+$ . Quase todos os problemas que essa questão levantou ficaram por resolver e afiguram-se de difícil resolução.

Recordando o enunciado do Teorema 4.1, é natural colocar a questão da convexidade estrita conjunta de  $\widehat{A}(a, x)$  em algum domínio aberto e convexo de  $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}_0^+$ . Para abordar essa questão, calcule-se a matriz Hessiana de  $\widehat{A}(a, x)$ :

$$\nabla^2 \widehat{A}(a, x) = \begin{bmatrix} \widehat{A}''_{aa}(a, x) & \widehat{A}''_{ax}(a, x) \\ \widehat{A}''_{xa}(a, x) & \widehat{A}''_{xx}(a, x) \end{bmatrix}.$$



Note-se que, pelo teorema de Schwarz,  $\widehat{A}''_{ax}(a, x) = \widehat{A}''_{xa}(a, x)$ ,  $\forall (a, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}_0^+$ , pelo que  $\nabla^2 \widehat{A}(a, x)$  é uma matriz simétrica. Relembremos também que, as expressões analíticas das derivadas de segunda ordem da  $\widehat{A}(a, x)$  foram dadas em (4.13), (4.14) e (4.16).

Para estabelecer a convexidade estrita conjunta de  $\widehat{A}(a, x)$  em algum domínio aberto e convexo de  $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ , há que estabelecer que  $\nabla^2 \widehat{A}(a, x)$  é uma matriz definida positiva nesse domínio. Condição equivalente a essa (pelo critério de Sylvester), é verificarem-se conjuntamente as duas desigualdades seguintes:

$$\widehat{A}''_{aa} > 0, \quad (4.40)$$

$$\left| \nabla^2 \widehat{A}(a, x) \right| = \widehat{A}''_{aa} \widehat{A}''_{xx} - [\widehat{A}''_{ax}]^2 > 0. \quad (4.41)$$

A desigualdade (4.40) é verificada em  $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ , pelo ponto 1) do Teorema 4.1. Se definirmos a função:

$$\Delta(a, x) = \left| \nabla^2 \widehat{A}(a, x) \right| = \widehat{A}''_{aa}(a, x) \widehat{A}''_{xx}(a, x) - [\widehat{A}''_{ax}(a, x)]^2, \quad (4.42)$$

a questão resume-se a encontrar um domínio  $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$  aberto e convexo de pontos onde se verifica  $\Delta(a, x) > 0$ . Neste caso, estabeleceríamos a convexidade estrita conjunta da função  $\widehat{A}(a, x)$  no domínio  $\mathcal{D}$ .

### 4.3.1 Um Contraexemplo

Pelo ponto 2) do Teorema 4.1, tem-se que se  $x = 0$  então  $\widehat{A}''_{aa}(a, x) = 0$ . Por (4.42), é imediato concluir que nesse caso se tem  $\left| \nabla^2 \widehat{A}(a, x) \right| < 0$ . Nesta subsecção provaremos um resultado mais forte, que implica nomeadamente que  $\widehat{A}(a, x)$  não é convexa em  $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ .

Usando a recursão classicamente usada para o cálculo da função de Erlang-B, po-

demos escrever:

$$\begin{aligned} B(a, 0) &= 1, \\ B(a, 1) &= \frac{a}{a+1}, \\ B(a, 2) &= \frac{a^2}{a^2+2a+2}, \\ B(a, 3) &= \frac{a^3}{a^3+3a^2+6a+6}. \end{aligned}$$

Então também se tem:

$$\begin{aligned} \widehat{A}(a, 0) &= a, \\ \widehat{A}(a+1, 1) &= \frac{(a+1)^2}{a+2}, \\ \widehat{A}(a+2, 2) &= \frac{(a+2)^3}{(a+2)^2+2(a+2)+2}, \\ \widehat{A}(a+3, 3) &= \frac{(a+3)^4}{(a+3)^3+3(a+3)^2+6(a+3)+6}. \end{aligned}$$

Fixado um valor para  $a \in \mathbb{R}^+$ , verifica-se facilmente que  $(a+1, 1)$  é o ponto médio do segmento que une os pontos  $(a, 0)$  e  $(a+2, 2)$ :

$$(a+1, 1) = \frac{1}{2}(a, 0) + \frac{1}{2}(a+2, 2).$$

Supondo, por absurdo, que  $\widehat{A}(a, x)$  é estritamente convexa em  $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}_0^+$ , teria de se verificar por definição de função estritamente convexa:

$$\widehat{A}(a+1, 1) < \frac{1}{2}\widehat{A}(a, 0) + \frac{1}{2}\widehat{A}(a+2, 2).$$

Esta condição é equivalente às seguintes:

$$\begin{aligned} \frac{(a+1)^2}{a+2} &< \frac{1}{2} \left( a + \frac{(a+2)^3}{(a+2)^2+2(a+2)+2} \right), \\ F_1(a) &= \frac{(a+1)^2}{a+2} - \frac{1}{2} \left( a + \frac{(a+2)^3}{(a+2)^2+2(a+2)+2} \right) < 0. \end{aligned}$$

Depois de alguma manipulação algébrica (efectuada pelo MATHEMATICA), pode obter-se a expressão analítica simplificada para a função  $F_1(a)$ :

$$F_1(a) = \frac{2}{a^3+8a^2+22a+20}. \quad (4.43)$$

Verifica-se imediatamente, por (4.43), que  $F_1(a) > 0, \forall a \in \mathbb{R}^+$ . Logo tem-se que é absurdo considerar que  $\widehat{A}(a, x)$  é convexa em  $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}_0^+$ .

Por outro lado e seguindo a mesma linha de raciocínio, fixamos um valor para  $a \in \mathbb{R}^+$  e verificamos que  $(a + 2, 2)$  é o ponto médio do segmento que une os pontos  $(a + 1, 1)$  e  $(a + 3, 3)$ :

$$(a + 2, 2) = \frac{1}{2}(a + 1, 1) + \frac{1}{2}(a + 3, 3).$$

Supondo, por absurdo, que  $\widehat{A}(a, x)$  é estritamente convexa em  $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ , teria de se verificar por definição de função estritamente convexa:

$$\widehat{A}(a + 2, 2) < \frac{1}{2}\widehat{A}(a + 1, 1) + \frac{1}{2}\widehat{A}(a + 3, 3).$$

Esta condição é equivalente à seguinte:

$$\frac{(a + 2)^3}{(a + 2)^2 + 2(a + 2) + 2} - \frac{1}{2} \left( \frac{(a + 1)^2}{a + 2} + \frac{(a + 3)^4}{(a + 3)^3 + 3(a + 3)^2 + 6(a + 3) + 6} \right) < 0.$$

Depois de alguma manipulação algébrica (efectuada pelo MATHEMATICA), pode obter-se a expressão analítica seguinte para representar o primeiro membro da desigualdade anterior (que denotaremos por  $F_2(a)$ ):

$$F_2(a) = \frac{2a^3 + 24a^2 + 72a + 48}{a^6 + 20a^5 + 169a^4 + 770a^3 + 1986a^2 + 2736a + 1560}. \quad (4.44)$$

Ao examinar (4.44) é imediato verificar que  $F_2(a) > 0, \forall a \in \mathbb{R}^+$ . Logo tem-se que é absurdo considerar que  $\widehat{A}(a, x)$  é convexa em  $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ .

Das considerações acima tecidas é também óbvio que  $\widehat{A}(a, x)$  não é convexa no seguinte domínio:

$$\mathcal{G} = \{ (a, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ : a > x \}.$$

Focaremos assim a nossa atenção para o subdomínio:

$$\mathcal{H} = \{ (a, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ : a < x \},$$

onde  $\widehat{A}(a, x)$  poderá ser estritamente convexa. Note-se que os pontos do conjunto  $\mathcal{H}$  são zonas em que  $B(a, x)$  é baixo (zonas de baixo bloqueio).

### 4.3.2 A Condição de Convexidade Conjunta

Formas equivalentes à desigualdade (4.41) são agora obtidas. Para esse efeito, há vantagens de notação em introduzir a família de funções:

$$Y_{k,l}(a, x) = \int_0^\infty e^{-az}(1+z)^x z^k [\ln(1+z)]^l dz, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad ; \quad l = 0, 1, 2, \dots$$

Por diferenciação da expressão anterior, são imediatas as seguintes regras:

$$\frac{\partial Y_{k,l}}{\partial a} = -Y_{k+1,l}, \quad e \quad \frac{\partial Y_{k,l}}{\partial x} = +Y_{k,l+1}. \quad (4.45)$$

Por outro lado, é fácil de verificar que:

$$\widehat{A}(a, x) = \frac{1}{Y_{0,0}(a, x)}. \quad (4.46)$$

Usando as igualdades (4.45), obtemos por diferenciação sucessiva da expressão (4.46), a matriz Hessiana de  $\widehat{A}(a, x)$  na forma:

$$\nabla^2 \widehat{A}(a, x) = \frac{1}{Y_{00}^3} \begin{bmatrix} 2Y_{1,0}^2 - Y_{0,0}Y_{2,0} & Y_{1,1}Y_{0,0} - 2Y_{0,1}Y_{1,0} \\ Y_{1,1}Y_{0,0} - 2Y_{0,1}Y_{1,0} & 2Y_{0,1}^2 - Y_{0,0}Y_{0,2} \end{bmatrix}.$$

Uma condição equivalente à desigualdade (4.41), é então obtida em termos das funções  $Y_{k,l}$ :

$$(2Y_{0,1}^2 - Y_{0,0}Y_{0,2}) (2Y_{1,0}^2 - Y_{0,0}Y_{2,0}) - (Y_{1,1}Y_{0,0} - 2Y_{0,1}Y_{1,0})^2 > 0.$$

Desenvolvendo e simplificando esta última desigualdade, obtemos sucessivamente:

$$4Y_{0,1}^2Y_{1,0}^2 - 2Y_{0,1}^2Y_{0,0}Y_{2,0} - 2Y_{1,0}^2Y_{0,0}Y_{0,2} - Y_{1,1}^2Y_{0,0}^2 + 2Y_{0,1}Y_{1,0}Y_{0,0}Y_{1,1} - 4Y_{0,1}^2Y_{1,0}^2 > 0,$$

$$Y_{0,0} [2Y_{0,1}Y_{1,0}Y_{1,1} - Y_{1,1}^2Y_{0,0} - 2Y_{0,1}^2Y_{2,0} - 2Y_{1,0}^2Y_{0,2}] > 0.$$

Definimos agora a função:

$$\Upsilon(a, x) = 2Y_{0,1}Y_{1,0}Y_{1,1} - Y_{1,1}^2Y_{0,0} - 2Y_{0,1}^2Y_{2,0} - 2Y_{1,0}^2Y_{0,2}.$$

Uma vez que  $Y_{00}(a, x) > 0$ , é fácil de concluir que para encontrar um domínio  $\mathcal{D} \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$  aberto e convexo onde a função  $\widehat{A}(a, x)$  seja estritamente convexa, basta garantir que nesse domínio se tem  $\Upsilon(a, x) > 0$ . Esta desigualdade não se verifica em todos os pontos de  $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ , como vimos na subsecção anterior. Afigura-se difícil estabelecer em que pontos se verifica.

### 4.3.3 Experiências Computacionais e Conjecturas

Os valores da função  $\Delta(a, x)$ , definida pela expressão (4.42), podem ser numericamente calculados usando as expressões analíticas das derivadas  $\widehat{A}''_{xx}$ ,  $\widehat{A}''_{aa}$  e  $\widehat{A}''_{ax}$  dadas pelas relações (4.13), (4.15) e (4.17). Basta para isso dispôr de um algoritmo de cálculo da função de Erlang-B e das suas derivadas. Nas experiências computacionais efectuadas, usaram-se o Método da Recursão Completa (ver Capítulo 2) e o Método da Recursão Reduzida (ver Capítulo 3).

Fixando  $x > 1$ , as experiências computacionais efectuadas parecem sugerir que  $\Delta(a, x)$  é positiva para  $a$  suficientemente baixo, e negativa para  $a$  suficientemente elevado. Parece também ser sugerido que, fixado  $x > 1$ , a equação  $\Delta(a, x) = 0$  tem solução única.

Assim, fixando diferentes valores de  $x$ , resolvemos a equação  $\Delta(a, x) = 0$  (equivalente a  $\Upsilon(a, x) = 0$ ). Para método numérico de resolução da equação usou-se o método das secantes. Os resultados figuram na Tabela 1. Note-se que nem sequer se provou que  $\Delta(a, x)$  tem um único zero fixado um certo  $x > 1$ , pelo que estas experiências computacionais não são mais do que especulações.

As experiências numéricas efectuadas e a discussão tida nesta secção, parecem sugerir que  $\widehat{A}(a, x)$  não será estritamente convexa (conjuntamente) em todo o  $\mathcal{H}$ . No entanto, parecem também sustentar uma conjectura acerca de uma subregião de convexidade estrita conjunta de  $\widehat{A}(a, x)$ . Assim, apresentamos a seguinte conjectura.

**Conjectura 4.1**  $\widehat{A}(a, x)$  é estritamente convexa no seguinte aberto e convexo de  $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ :

$$\mathcal{S} = \{ (a, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ : a < x - \sqrt{x} \} .$$

Note-se que o subconjunto  $\mathcal{S}$  de  $\mathcal{H}$ , considerado na conjectura anterior, pode ser encarado da forma que em seguida se explica. Em [8] define-se a constante

$$c = \frac{a - x}{\sqrt{x}} ,$$

$x$	$a$	$x$	$a$	$x$	$a$	$x$	$a$
1.5	30.4856	15.00	16.78463	70.0	69.8533	600.0	593.637
1.75	17.9625	20.0	21.47984	75.0	74.7377	700.0	692.885
2.0	13.2023	25.0	26.2363	80.0	79.626	800.0	792.185
3.0	8.46005	30.0	31.0270	85.0	84.518	900.0	891.528
4.0	8.01297	35.0	35.8417	90.0	89.4139	1E3	990.906
5.0	8.35763	40.0	40.6723	95.0	94.3124	1E4	9964.73
6.0	8.97296	45.0	45.5156	100.0	99.213	1E5	99882.0
7.0	9.71151	50.0	50.3689	200.0	197.611	1E6	999620.
8.0	10.5165	55.0	55.2304	300.0	296.389	1E7	9998793.
9.0	11.3695	60.0	60.99019	400.0	395.361	1E8	99996180.
10.0	12.2328	65.0	64.9735	500.0	494.455		

Tabela 4.1: Aproximações para os zeros de  $\Delta(a, x)$ .

como sendo o *tráfego oferecido standard*, quando  $a$  é o tráfego oferecido e  $x$  o número de circuitos. Pode verificar-se, com facilidade, que os pontos do conjunto  $\mathcal{S}$  são caracterizados pela condição  $c < -1$ .

Para terminar note-se que outra questão muito relacionada com esta, será a da convexidade conjunta da própria função de Erlang-B —  $B(a, x)$ . Na verdade, fixado  $x$ , para  $a$  suficientemente baixo tem-se  $B''_{aa} > 0$  (ver [1]) e, portanto,  $B(a, x)$  é convexa na variável  $a$  e na variável  $x$ . A questão da convexidade conjunta de  $B(a, x)$  põe-se do mesmo modo que se põe a questão da convexidade de  $\hat{A}(a, x)$ . *A priori*, afigura-se possível que haja regiões comuns de convexidade conjunta de  $B(a, x)$  e de  $\hat{A}(a, x)$ .

## 4.4 Conclusões

Neste trabalho considerou-se o sistema de perda de Erlang, generalizado para o caso em que o número de circuitos  $x$  é um valor real não negativo. Usou-se para isso a extensão

analítica de R. Fortet para a função de Erlang-B. Estabeleceu-se no Teorema 4.1, o sinal das derivadas de segunda ordem da função tráfego de transbordo,  $\widehat{A}(a, x)$ , nesse sistema. Surgem de imediato consequências relativas à convexidade estrita da função  $\widehat{A}(a, x)$  nas variáveis  $a$  e  $x$ . Estes resultados têm potencial interesse nas aplicações, especialmente em problemas de otimização, nomeadamente em formulações de partilha de carga e alocação de servidores. Por outro lado, o facto da derivada rectangular  $\widehat{A}''_{ax}$  ser negativa, implica uma desigualdade envolvendo a função derivada  $B'_x$ . Por fim, considera-se a questão da convexidade estrita conjunta de  $\widehat{A}(a, x)$ , em algum domínio aberto e convexo de  $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ . Aborda-se essa questão em alguns casos particulares, e com base em alguns resultados computacionais apresentados, conjectura-se que a função  $\widehat{A}(a, x)$  é estritamente convexa em zonas de baixo bloqueio, onde o *tráfego oferecido standard* é inferior a  $-1$ .

## 4.A Lema Auxiliar

**Lema 4.1** *Sejam  $g(z)$  e  $h(z)$  funções reais definidas em  $[\alpha, \beta[ \subset \mathbb{R}$  que cumprem:*

$$\{g(z) > 0 \wedge h(z) > \kappa, \forall z \in ]\alpha, z^*[ \} \wedge \{g(z) < 0 \wedge h(z) < \kappa, \forall z \in ]z^*, \beta[ \}, \quad (4.47)$$

para valores fixos de  $z^* \in ]\alpha, \beta[$  e de  $k \in \mathbb{R}$ . Se  $U = \int_{\alpha}^{\beta} g(z) dz$  e  $V = \int_{\alpha}^{\beta} g(z)h(z) dz$  existem e são finitos para certo  $\beta \in ]\alpha, +\infty[$ , então  $V > 0$  quando se verifica um dos quatro casos a seguir enumerados:

$$i) U = 0, \quad ii) k > 0 \wedge U \geq 0, \quad iii) k < 0 \wedge U \leq 0, \quad iv) k = 0. \quad (4.48)$$

**Prova:** Consideremos as decomposições:

$$V = \underbrace{\int_{\alpha}^{z^*} g(z)h(z) dz}_{V_1} + \underbrace{\int_{z^*}^{\beta} g(z)h(z) dz}_{V_2} \quad \text{e} \quad U = \underbrace{\int_{\alpha}^{z^*} g(z) dz}_{U_1} + \underbrace{\int_{z^*}^{\beta} g(z) dz}_{U_2}.$$

Claramente  $V_1, V_2, U_1$  e  $U_2$  existem e são finitos. Pela hipótese (4.47) conclui-se que  $U_1 > 0$  e  $U_2 < 0$ , pelo que estes integrais são diferentes de zero. Existem então

números reais  $\kappa_1$  e  $\kappa_2$  tais que  $\kappa_1 = V_1/U_1$  e  $\kappa_2 = V_2/U_2$ . Podemos então escrever  $V = \kappa_1 U_1 + \kappa_2 U_2$  e deduzir, sucessivamente:

$$\begin{aligned}
 g(z)h(z) > g(z)\kappa, \quad \forall z \in ]\alpha, z^*[ &\implies V_1 > \int_{\alpha}^{z^*} g(z)\kappa dz \\
 &\implies \kappa_1 U_1 > \kappa U_1 \\
 &\implies \kappa_1 > \kappa, \\
 g(z)h(z) > g(z)\kappa, \quad \forall z \in ]z^*, \beta[ &\implies V_2 > \int_{z^*}^{\beta} g(z)\kappa dz \\
 &\implies \kappa_2 U_2 > \kappa U_2 \\
 &\implies \kappa_2 < \kappa.
 \end{aligned}$$

Note-se que as duas relações de ordem obtidas permitem concluir que  $\kappa_1 > \kappa_2$ . Provaremos agora que qualquer uma das quatro condições listadas em (4.48), por si só, garante que  $V > 0$ :

- (i) Se  $U = 0$ , então  $U_2 = -U_1$ . Obtem-se:  $V = \kappa_1 U_1 + \kappa_2 U_2 = \kappa_1 U_1 - \kappa_2 U_1 = U_1(\kappa_1 - \kappa_2) > 0$ .
- (ii) Se  $U \geq 0$ , então  $U_1 \geq -U_2$ . Como  $\kappa > 0$ , então  $g(z)h(z) > g(z)\kappa > 0$ ,  $\forall z \in ]\alpha, z^*[$ , donde resulta  $V_1 > 0$ . Mas como  $U_1 > 0$ , temos  $\kappa_1 = V_1/U_1 > 0$ . Obtemos  $\kappa_1 U_1 \geq -\kappa_1 U_2$  e somando a ambos os membros desta desigualdade o termo  $\kappa_2 U_2$ , conclui-se  $V \geq -\kappa_1 U_2 + \kappa_2 U_2 = U_2(\kappa_2 - \kappa_1) > 0$ .
- (iii) Se  $U \leq 0$ , então  $U_2 \leq -U_1$ . Como  $\kappa < 0$ , então  $g(z)h(z) > g(z)\kappa > 0$ ,  $\forall z \in ]z^*, \beta[$ , donde resulta  $V_2 > 0$ . Mas como  $U_2 < 0$ , temos  $\kappa_2 = V_2/U_2 < 0$ . Obtemos  $\kappa_2 U_2 \geq -\kappa_2 U_1$  e somando a ambos os membros desta desigualdade o termo  $\kappa_1 U_1$ , conclui-se  $V \geq -\kappa_2 U_1 + \kappa_1 U_1 = U_1(\kappa_1 - \kappa_2) > 0$ .
- (iv) Se  $k = 0$ , então  $g(z)h(z) > 0, \forall z \in ]\alpha, z^*[ \cup ]z^*, \beta[$ . Claramente, tem-se  $V > 0$ .  $\square$



# Referências do Capítulo 4

- [1] A. Arel. Convexity properties of the Erlang loss formula. *Operations Research*, 38(3):499–505, May-June 1990.
- [2] Jorge Sá Esteves, J. Craveirinha, and D. Cardoso. A bicriterion resource allocation approach for an Erlang-B teletraffic system. Talk for the XIth MCDM — Int. Conference on Multiple Criteria Decision Making (Coimbra), August 1994.
- [3] Jorge Sá Esteves, J. Craveirinha, and D. Cardoso. Computing Erlang-B function derivatives in the number of servers — a generalized recursion. *ORSA Communications in Statistics, Stochastic Models*, 11(2):311–331, 1995.
- [4] Jorge Sá Esteves, J. Craveirinha, and D. Cardoso. The overflow traffic from the Erlang-B system — what convexity properties? In J. J. Júdice and M. C. Gouveia, editors, *Actas da Conferência — Matemática em Telecomunicações — Que Problemas?*, pages 6–11, Coimbra, Portugal, September 1998. Instituto das Telecomunicações.
- [5] Jorge Sá Esteves, J. Craveirinha, and D. Cardoso. Second order conditions on the overflow traffic from the Erlang-B system. *Cadernos de Matemática — Série de Investigação*, CM 06/I-20, 2006.
- [6] W. Feller. *An Introduction to Probability Theory and its Application*. Wiley, 1970.
- [7] A. Girard. *Routing and Dimensioning in Circuit-Switched Networks*. Addison-Wesley, 1990.

- [8] D. L. Jagerman. Some properties of the Erlang loss function. *The Bell System Technical Journal*, 53(3):525–551, 1974.
- [9] D. L. Jagerman. Methods in traffic calculations. *The Bell System Technical Journal*, 63(7):1283–1310, September 1984.
- [10] A. A. Jagers and E. A. Van Dorn. On the continued Erlang loss function. *Operations Research Letters*, 5(1):43–46, June 1986.
- [11] A. A. Jagers and E. A. Van Dorn. Convexity of functions which are generalizations of the Erlang loss function and the Erlang delay function. *SIAM Review*, 33(2):281–283, June 1991.
- [12] K. R. Krishnan. The convexity of loss rate in an Erlang loss system and sojourn in Erlang delay system with respect to arrival and service rates. *IEEE Transactions on Communications*, 38(9):1314–1316, 1990.
- [13] E. J. Messerli. Proof of a convexity property of the Erlang-B formula. *The Bell System Technical Journal*, 51:951–953, 1972.
- [14] António Pacheco. Second-order properties of the loss probability in M/M/s/s+c systems. *Queueing Systems Theory and Applications*, 15(1), 1994.
- [15] C. Palm. *Intensity Variations in Telephone Traffic*. North-Holland Studies in Telecommunications, 1988.
- [16] Y. Rapp. Planning of junctions network in a multi-exchange area, part I. *Ericsson Technics*, 20:77–130, 1964.
- [17] M. Reiman. Some allocation problems for critically loaded loss systems with independent links. *Performance Evaluation*, (13):17–25, 1991.
- [18] L. R. Shenton and A. W. Kemp. An S-fraction and  $\ln^2(1+x)$ . *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 25:121–124, 1989.

- [19] R. I. Wilkinson. Theories for toll traffic engineering in the USA. *The Bell System Technical Journal*, 35:421–514, 1956.
- [20] Ronald W. Wolff and Chia-Li Wang. On the convexity of loss probabilities. *Journal of Applied Probability*, 39:402–406, 2002.
- [21] David D. Yao. Convexity properties of the overflow in an ordered-entry system with heterogeneous servers. *Operations Research Letters*, 5(3):145–147, 1986.



# Capítulo 5

## Optimização de Sistemas

## Multidimensionais de Erlang-B

### Resumo<sup>1</sup>

Os modelos de dimensionamento de redes de comutação por circuitos (do tipo das redes telefónicas), conduzem a problemas de optimização de muito elevada complexidade e geralmente de grande dimensão, sendo normalmente abordados com base numa decomposição em vários problemas e sub-problemas de optimização. Genericamente trata-se da optimização estrutural da rede e conjuntamente da determinação dos encaminhamentos dos fluxos aleatórios de chamadas entre pares de nodos.

Neste capítulo abordam-se problemas básicos de optimização de um sistema de teletráfego muito comum em redes deste tipo, o sistema de Erlang-B, focando a repartição de um total de  $\kappa$  canais de transmissão por vários grupos de circuitos funcionais aos quais são oferecidos tráfegos de Poisson, de intensidades conhecidas. Os critérios geralmente adoptados são ou a igualdade de oportunidades para os utilizadores dos vários grupos (dividindo-se os circuitos de tal modo que sejam iguais as probabilidades de bloqueio de chamadas) ou a maximização do tráfego transportado no sistema global.

---

<sup>1</sup>O conteúdo deste capítulo é parcialmente baseado nos Memorandos [9, 7].

Designa-se o primeiro critério por *Equidade* e o segundo por *Eficiência*. Põe-se em evidência o conflito entre os dois objectivos e caracterizam-se as soluções de máxima *Equidade* e de máxima *Eficiência*. Apresentam-se ainda algoritmos de cálculo dessas soluções, tirando partido de propriedades de convexidade das funções objectivo provadas no Capítulo 4. Para o efeito, utiliza-se o método de Newton-Raphson, calculando derivadas de primeira e segunda ordem da função de Erlang-B relativamente ao número de circuitos, usando os algoritmos numéricos propostos nos Capítulos 2 e 3.

Finalmente, aborda-se a formulação bicritério do problema e apresentam-se alguns resultados matemáticos que caracterizam o conjunto  $\mathcal{N}$  das soluções não dominadas (óptimos de Pareto). Sugere-se uma formulação paramétrica monocritério equivalente, após um processo expedito de linearização das restrições. Mostra-se que o cálculo dos óptimos de Pareto se resume à minimização de uma função estritamente convexa num domínio que é um *simplex* de  $\mathbb{R}^n$ . Por todas essas razões, é proposto um algoritmo para percorrer  $\mathcal{N}$  (“*travelling on  $\mathcal{N}$* ”), usando de novo o método de Newton-Raphson. Adopta-se uma estratégia, designada por *monotonia das restrições activas*, para lidar com a questão de saber quais as restrições activas em cada óptimo de Pareto. Em cada iteração do algoritmo, as derivadas parciais da função de Erlang-B de primeira e segunda ordem (na variável número de circuitos) são calculadas pelos métodos numéricos propostos nos Capítulos 2 e 3.

## 5.1 Introdução

O estudo dos fluxos em sistemas de teletráfego passa inicialmente pelo estabelecimento de modelos que descrevem alguns sistemas básicos. Neste trabalho definimos um sistema que pode ser inteiramente descrito em termos do modelo de Erlang-B, pelo que começamos por uma breve exposição relativa ao contexto em que surge. Esse modelo foi introduzido no histórico artigo [5] do matemático A. K. Erlang ao serviço da empresa operadora da rede telefónica da Dinamarca. Esse modelo foi introduzido para descre-

ver uma situação básica de escoamento de tráfego telefónico como a que se encontra esquematizada de forma sugestiva na Figura 5.1 (ver página seguinte).

Considere-se então um universo de assinantes de grande dimensão que gera chamadas telefónicas seguindo um processo de Poisson. Se  $\Pr\{N(T) = i\}$  denotar a probabilidade de serem geradas exactamente  $i$  chamadas no intervalo de tempo  $]0, T]$ , então:

$$\Pr\{N(T) = i\} = \frac{(\lambda T)^i}{i!} e^{-\lambda T}, \quad (5.1)$$

sendo  $\lambda$  o número médio de chamadas geradas na unidade de tempo. Considere-se depois que a duração de uma chamada telefónica que está em progresso e tem origem num tal universo, tem média  $\mu^{-1}$  e segue uma distribuição exponencial negativa<sup>2</sup>. Se  $\Pr\{t > \tau\}$  designar a probabilidade de uma chamada ter duração superior a  $\tau$ , então:

$$\Pr\{t > \tau\} = e^{-\mu\tau}. \quad (5.2)$$

Sendo

$$a = \frac{\lambda}{\mu}, \quad (5.3)$$

diz-se que esse universo de assinantes gera um tráfego de Poisson de média  $a$  (expressa na unidade Erlang). Quando está implícito que o tráfego é de Poisson, é comum dizer-se que o *tráfego oferecido* ao sistema que encaminha as chamadas é  $a$ .

Considere-se então a Figura 5.1, que representa um grupo de  $x \in \mathbb{N}$  circuitos com acesso completo, ao qual é oferecido um tráfego de Poisson com média  $a \in \mathbb{R}_+$ . Para uma chamada ser encaminhada é necessário ocupar um e um só circuito no grupo. Quando uma chamada é gerada no universo descrito, e há algum circuito livre, essa chamada ocupa um qualquer circuito livre durante o período da sua duração. Quando uma chamada é gerada e todos os circuitos estão ocupados, diz-se que é perdida ou bloqueada. Esta situação de bloqueio impede o utilizador de obter a ligação pretendida.

---

<sup>2</sup>Por ser um modelo adequado para este efeito considera-se esta distribuição exponencial negativa, mas para o que segue podia-se considerar uma distribuição arbitrária de média  $\mu^{-1}$  com média e variância finitas, dada a propriedade de insensibilidade à distribuição dos tempos de serviço do sistema  $M/M/n/0$ .

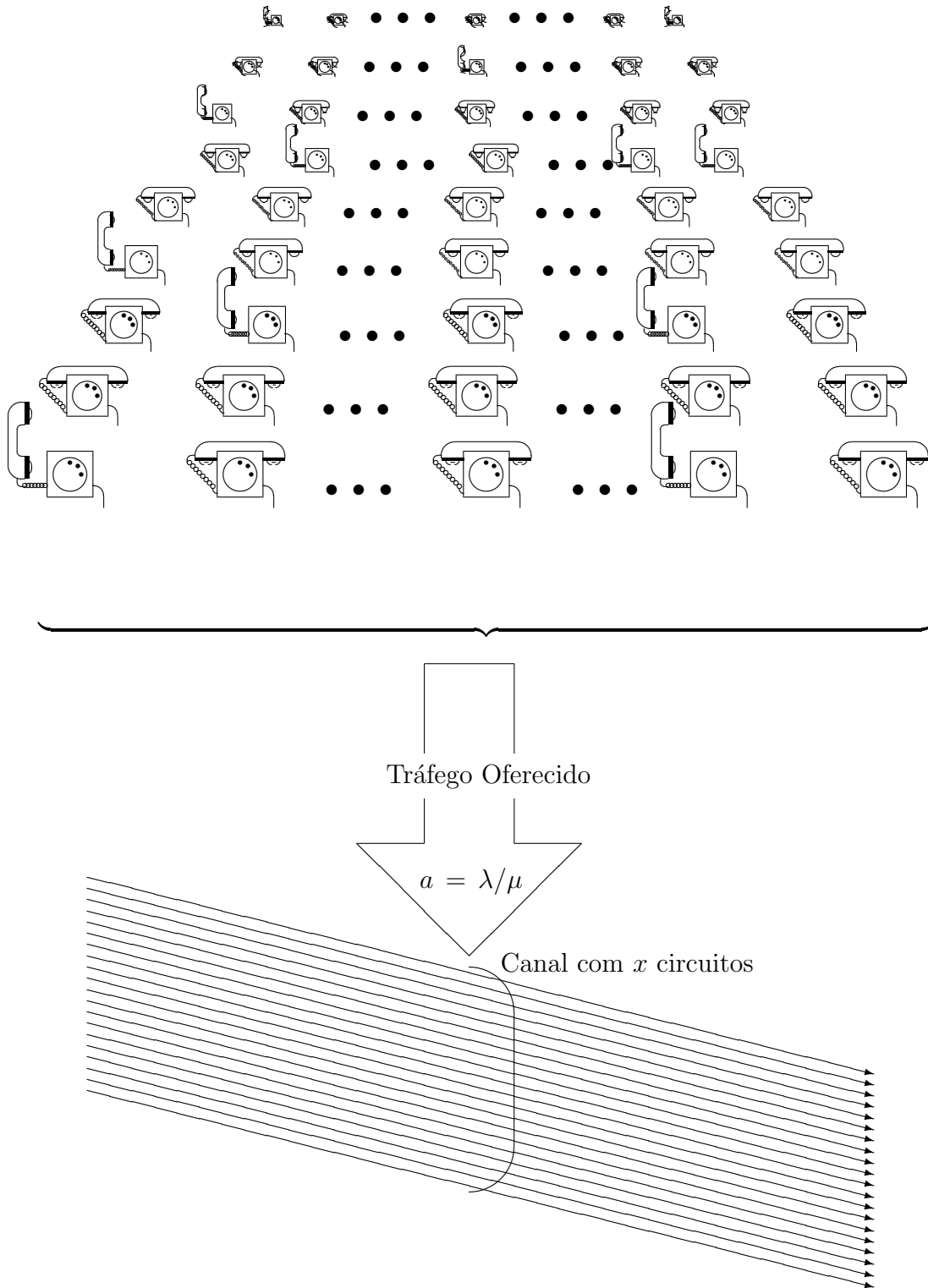


Figura 5.1: Esquema básico de escoamento de tráfego telefónico.



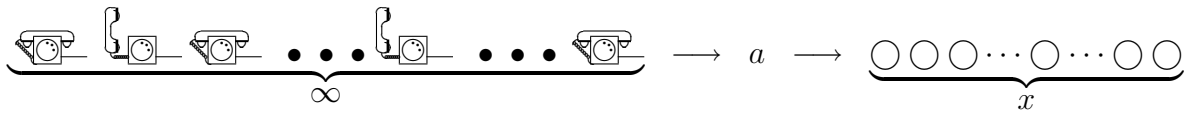


Figura 5.2: Representação esquemática de um sistema de perda de Erlang.

Em 1917, A. K. Erlang, [5], provou que na situação de equilíbrio estatístico, a probabilidade de bloqueio num tal sistema, denotada por  $B(a, x)$ , podia ser obtida por

$$B(a, x) = \frac{a^x/x!}{\sum_{j=0}^x a^j/j!}, \tag{5.4}$$

expressão que ficou conhecida como fórmula de perda de Erlang ou fórmula de Erlang-B. As hipóteses em que assenta o estabelecimento do modelo estão largamente confirmadas por dados experimentais, pelo que em 1977 o modelo de Erlang-B foi recomendado na norma E.520 do *International Consultative Committee for Telegraphs and Telephones (CCITT)* para a análise e projecto de sistemas com perda, de tipo telefónico.

Pode dizer-se que a função assim definida, tem uma importância central em toda a teoria de teletráfego e por esse facto tem vindo a ser intensamente estudada (ver por exemplo [1, 11, 12, 13, 19]). Esses estudos passam normalmente por obter a extensão analítica de R. Fortet [21, pag.602] referida no Capítulo 2:

$$B(a, x) = \left( a \int_0^{+\infty} e^{-az} (1+z)^x dz \right)^{-1}, \tag{5.5}$$

podendo-se assim considerar que o número de circuitos é uma variável<sup>3</sup>  $x \in \mathbb{R}_\oplus$ . Note que um canal de comunicação de um sistema real tem de ter uma capacidade que é um número inteiro positivo de circuitos. Mas considerar  $x$  um real não negativo, tem vantagens na análise destes sistemas uma vez que permite definir grupos fictícios de Erlang-B (que não correspondem a grupos físicos do sistema). Este processo tem inegável interesse na modelação dos sistemas e em termos de engenharia do teletráfego, pois permite obter métodos de optimização muito eficientes.

---

<sup>3</sup>Usamos a notação  $\mathbb{R}_\oplus$  para designar o conjunto  $\mathbb{R}_0^+$ .

Note que  $B(a, x) \in [0, 1]$  e que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} B(a, x) = 0, \quad \forall a \in \mathbb{R}_+.$$

Como  $B(a, 0) = 1$ ,  $\forall a \in \mathbb{R}_+$ , podemos avaliar  $B(a, x)$  através da recursão (2.3) quando  $x$  é um número natural. Essa recursão foi estudada e generalizada em [8, 10] (ver Capítulos 2 e 3), permitindo estabelecer métodos de cálculo não só da função como das suas derivadas parciais na variável  $x$ .

Por derivação de (5.5) estabelece-se que as derivadas parciais de primeira ordem de  $B(a, x)$  são dadas por (ver [11]):

$$B'_a(a, x) = \left( \frac{x}{a} - 1 + B(a, x) \right) B(a, x), \quad (5.6)$$

$$B'_x(a, x) = -[B(a, x)]^2 a \int_0^{+\infty} e^{-az} (1+z)^x \ln(1+z) dz. \quad (5.7)$$

Por (5.7) se verifica que a função de Erlang-B é estritamente decrescente na variável  $x$  para todo o  $a \in \mathbb{R}_+$ . Por outro lado, demonstra-se que  $B'_a$  é sempre positiva (ver [12]).

Derivando (5.7) obtem-se a derivada de segunda ordem na variável  $x$ :

$$\begin{aligned} B''_{xx}(a, x) &= -2 B(a, x) B'_x(a, x) a \int_0^{+\infty} e^{-az} (1+z)^x \ln(1+z) dz - \\ &\quad - [B(a, x)]^2 a \int_0^{+\infty} e^{-az} (1+z)^x [\ln(1+z)]^2 dz. \end{aligned} \quad (5.8)$$

A convexidade da função de Erlang-B na variável  $x$  manteve-se como conjectura durante décadas. Foi inicialmente provada para  $x \in \mathbb{N}_0$  em 1972 por E.J. Messerli [16]. Para o caso geral ( $x \in \mathbb{R}_\oplus$ ) foi demonstrada em 1986 por A.A. Jagers e E.A. Van Doorn [13]. Em [8] demonstra-se que  $B''_{xx}(a, x)$  é estritamente positiva para  $x \in [1, +\infty[$  e para qualquer  $a$  positivo (ver Capítulo 2). Este resultado implica a convexidade estrita da função na variável  $x$ , se  $x \geq 1$ . No Capítulo 4, apresenta-se uma prova alternativa dessa convexidade estrita na forma de um resultado mais geral pois é válida para  $x \geq 0$ .

Na especificação dos algoritmos que apresentaremos torna-se imprescindível o cálculo de  $B(a, x)$ ,  $B'_x(a, x)$  e  $B''_{xx}(a, x)$ . O métodos numéricos usados foram propostos em [8, 10] e foram expostos nos Capítulos 2 e 3.

Como  $B(a, x)$  representa a proporção de chamadas que são perdidas, a função:

$$\tilde{A}(a, x) = a [1 - B(a, x)], \tag{5.9}$$

designa-se por *tráfego transportado* e pode demonstrar-se que dá o número médio de chamadas em progresso no grupo.

A função:

$$\hat{A}(a, x) = a B(a, x), \tag{5.10}$$

designa-se por *tráfego perdido* e dá o número médio de chamadas que sofrem bloqueio durante a duração média de uma chamada.

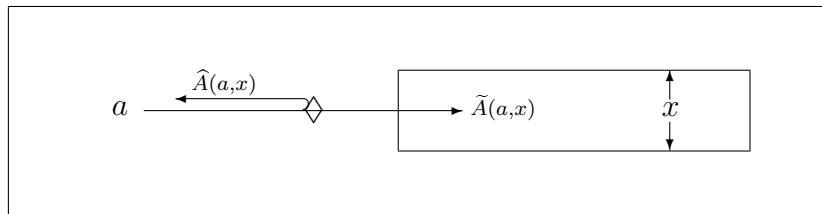


Figura 5.3: Modelo de fluxo para um grupo de Erlang-B em equilíbrio estatístico.

As funções atrás definidas podem relacionar-se bem se pensarmos num fluxo determinista de intensidade  $a$ , que é oferecido a um canal com capacidade  $x$  através de um nodo de acesso (Figura 5.3). Este nodo rejeita uma quantidade de fluxo igual a  $\hat{A}(a, x)$  e aceita para fluir no canal uma quantidade de fluxo igual a  $\tilde{A}(a, x)$ .

A conservação de fluxo nesse nodo obriga a que  $a = \tilde{A}(a, x) + \hat{A}(a, x)$ , o que se cumpre sempre por (5.9) e (5.10). É claro que esta concretização para um sistema de Erlang-B, com um número real não negativo de circuitos, cria uma imagem simplificada do sistema, mas tem interesse conceptual e em termos de cálculo (no âmbito de problemas de optimização), pois permite relacionar bem as principais entidades em estudo no sistema. Note-se a propósito que embora o sistema seja estocástico, neste tipo de abordagem só estamos interessados no estudo de quantidades que são esperanças matemáticas das variáveis aleatórias que descrevem o sistema na situação de equilíbrio estatístico. Por exemplo, o fluxo no canal é o número *médio* de chamadas em progresso.

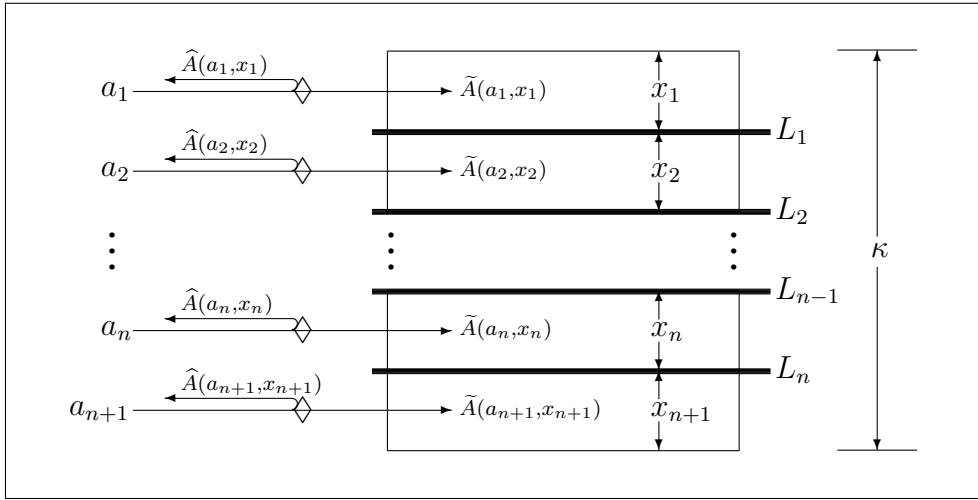


Figura 5.4: Modelo de fluxo para o sistema multidimensional de Erlang-B.

Considere agora a Figura 5.4 que representa um sistema  $S_{n+1}$  constituído por  $n + 1$  grupos independentes com acesso completo e com capacidades não negativas  $x_i$ ,  $i = 1(1)n + 1$ , respectivamente. Ao grupo  $i$ ,  $i = 1(1)n + 1$ , é oferecido um tráfego de Poisson com média  $a_i \in \mathbb{R}_+$ . Neste sistema dispomos de um total de  $\kappa$  circuitos para distribuir pelos  $n + 1$  grupos, ou seja, o projecto está sujeito à restrição  $\sum_{i=1}^{n+1} x_i = \kappa$ , sendo  $\kappa$  uma quantidade fixa. Deste modo, na Figura 5.4, esquematiza-se uma divisão de recursos entre  $n + 1$  grupos de Erlang-B: As linhas divisórias  $L_i$ ,  $i = 1(1)n$  podem sofrer deslocamentos verticais, alterando as capacidades  $x_i$  dos  $n + 1$  canais, mas mantendo a sua soma  $\sum_{i=1}^{n+1} x_i = \kappa$  constante. Quaisquer que sejam os critérios envolvidos na escolha dos  $x_i$ ,  $i = 1(1)n + 1$ , há só  $n$  variáveis de decisão. Na verdade, a restrição imposta para a soma das capacidades dos canais torna, por exemplo,  $x_{n+1}$  determinada quando se determinam as restantes  $n$  variáveis  $x_i$ ,  $i = 1(1)n$ .

Nesse projecto há normalmente dois critérios envolvidos. O primeiro critério é o da eficiência global do sistema — pretende-se maximizar o número médio de chamadas em progresso no sistema, ou seja a soma  $\sum_{i=1}^{n+1} \tilde{A}(a_i, x_i)$ . É um critério economicista pois reflecte a preocupação de maximizar receitas advindas da exploração comercial do serviço prestado aos utilizadores. O segundo critério é manter a qualidade desse

serviço dentro de níveis uniformes e aceitáveis para todos os utilizadores (critério de equidade). No contexto do problema, a qualidade do serviço tem a ver com a proporção de chamadas bloqueadas. O ideal seria que essa proporção fosse tão baixa, que as situações de bloqueio fossem tão raras que os utilizadores permanecessem com a ideia de que têm o serviço sempre disponível. A medida da qualidade de serviço num grupo é a probabilidade de bloqueio nesse grupo.

Como veremos, estes dois critérios são conflituosos, ou seja a maximização da eficiência do sistema conduz necessariamente a que haja uma qualidade de serviço não uniforme para todos os grupos<sup>4</sup>. Neste trabalho pretende-se obter um método de apoio à decisão envolvida no projecto do sistema, ou seja determinar a capacidade de cada um dos grupos de Erlang-B, tendo em conta uma formulação matemática que envolva os dois critérios apresentados.

## 5.2 Formulação do Problema

Inicialmente introduziremos alguns pormenores de notação.  $\mathbb{R}_+^p$  e  $\mathbb{R}_\oplus^p$  designam, respectivamente, o ortante positivo e não negativo de  $\mathbb{R}^p$ , ou seja:

$$\begin{aligned}\mathbb{R}_+^p &= \{ \mathbf{y} \in \mathbb{R}^p : y_i > 0, i = 1(1)p \}, \\ \mathbb{R}_\oplus^p &= \{ \mathbf{y} \in \mathbb{R}^p : y_i \geq 0, i = 1(1)p \}.\end{aligned}$$

Para  $\mathcal{D} \in \mathbb{R}^p$ , os conjuntos  $\overset{\circ}{\mathcal{D}}$  e  $\partial\mathcal{D}$  designam, respectivamente o interior e a fronteira de  $\mathcal{D}$ . Denotamos por  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}_+^{n+1}$  o vector de tráfegos oferecidos, e  $\bar{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}_\oplus^{n+1}$  designa o vector de capacidades dos grupos:

$$\begin{aligned}\mathbf{a} &= [a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1}]^T, \\ \bar{\mathbf{x}} &= [\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n, \bar{x}_{n+1}]^T,\end{aligned}\tag{5.11}$$

---

<sup>4</sup>No caso geral, pois no caso simétrico em que todos os  $a_i$ ,  $i = 1(1)n + 1$  são iguais não há conflito.

onde  $a_j$  é o tráfego oferecido ao grupo  $j$  que tem uma capacidade dada por  $\bar{x}_j$  para  $j = 1(1)n + 1$ . Supomos sem perda de generalidade que

$$a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \cdots \geq a_n \geq a_{n+1}. \quad (5.12)$$

Fixado o vector  $\mathbf{a}$ , a sua norma absoluta de Holder é designada por  $\alpha$ , ou seja

$$\alpha = \|\mathbf{a}\|_1 = \sum_{j=1}^{n+1} a_j. \quad (5.13)$$

As primeiras  $n$  posições de  $\bar{\mathbf{x}}$  formam um vector de  $\mathbb{R}_{\oplus}^n$  que designamos por  $\mathbf{x}$ . Ou seja,  $x_j = \bar{x}_j$ ,  $j = 1(1)n$ .

Sempre que o valor de  $\bar{x}_j$  (capacidade do canal  $j$ ) esteja claro no contexto, usa-se a notação  $b_j$  para designar  $B(a_j, \bar{x}_j)$  — o bloqueio no grupo  $j$ . Da mesma forma, as derivadas na variável número de circuitos  $B'_x(a_j, \bar{x}_j)$  e  $B''_{xx}(a_j, \bar{x}_j)$  são denotadas, respectivamente, por  $b'_j$  e  $b''_j$ .

Fixando o vector  $\mathbf{a}$ , o vector  $\mathbf{x}$  incorpora as variáveis de decisão, e o problema pode agora ser definido como:

### Problema 5.1 (Afectação de Recursos Bicritério entre Grupos de Erlang-B)

Dados  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\kappa \in \mathbb{R}_+$  e um vector de tráfegos oferecidos  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}_+^{n+1}$ , calcular óptimos de Pareto da seguinte formulação bicritério:

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x}} \quad & f_1(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^n a_j B(a_j, x_j) + a_{n+1} B\left(a_{n+1}, \kappa - \sum_{j=1}^n x_j\right) \\ \min_{\mathbf{x}} \quad & f_2(\mathbf{x}) = \max \left\{ B(a_1, x_1), B(a_2, x_2), \dots, B(a_n, x_n), B\left(a_{n+1}, \kappa - \sum_{j=1}^n x_j\right) \right\} \\ \text{s.a.} \quad & \sum_{j=1}^n x_j \leq \kappa \\ & x_j \geq 0, \quad j = 1(1)n. \end{aligned}$$

A partir daqui  $f_1$  e  $f_2$  designam, sem excepção, as funções objectivo definidas no Problema 5.1. O primeiro objectivo é simplesmente a minimização do tráfego total perdido pelo sistema  $S_{n+1}$ , o que corresponde à maximização do tráfego total transportado. Corresponde assim a um critério de eficiência do sistema de tráfego (“critério de

*eficiência/economicista*). O segundo objectivo corresponde a maximizar a qualidade de serviço (definida pela pior probabilidade de bloqueio de chamadas) e, como veremos, corresponderá também a uniformizar as oportunidades entre os utilizadores de todos os  $n + 1$  grupos (*“critério de equidade/qualidade de serviço”*).

### 5.2.1 O Conjunto de Soluções Admissíveis

O conjunto de soluções admissíveis do Problema 5.1, que denotaremos por  $\mathcal{S}$ , é:

$$\mathcal{S} = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}_{\oplus}^n : \sum_{j=1}^n x_j \leq \kappa \right\}.$$

O conjunto  $\mathcal{S}$  é um *simplex* de  $\mathbb{R}^n$ . Para isso, basta verificar que  $\mathcal{S}$  é a envolvente convexa do seguinte conjunto de  $n + 1$  vectores de  $\mathbb{R}^n$ :

$$\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \kappa \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ \kappa \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \kappa \end{bmatrix} \right\}.$$

Sendo um *simplex*,  $\mathcal{S}$  é um conjunto convexo limitado e fechado de  $\mathbb{R}^n$ . Dizendo de outra forma,  $\mathcal{S}$  é um compacto convexo de  $\mathbb{R}^n$ .

### 5.2.2 A Função Vectorial de Bloqueio

O bloqueio em cada grupo do sistema  $S_{n+1}$ , pode agora ser definido como uma função definida em  $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^n$  com valores em  $[0, 1] \subset \mathbb{R}$ . Para  $j = 1(1)n + 1$ , introduzimos as funções:

$$\begin{aligned} B_j : \mathcal{S} \subset \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \mathbf{x} &\longmapsto B_j(\mathbf{x}), \end{aligned} \tag{5.14}$$

definidas por:

$$\begin{aligned} B_j(\mathbf{x}) &= B(a_j, x_j), \quad j = 1(1)n \\ B_{n+1}(\mathbf{x}) &= B\left(a_{n+1}, \kappa - \sum_{j=1}^n x_j\right). \end{aligned} \quad (5.15)$$

O estudo das propriedades destas *funções de bloqueio* são fundamentais para a resolução do Problema 5.1.

### Lema 5.1

As funções  $B_j : \mathcal{S} \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$  com  $j = 1(1)n + 1$  definidas por (5.15) são funções contínuas em  $\mathcal{S}$  e, além disso, são convexas e de classe  $\mathcal{C}^\infty$  em  $\overset{\circ}{\mathcal{S}}$ .

#### Prova:

É imediato que as funções são contínuas em  $\mathcal{S}$ . É também imediato que as funções são de classe  $\mathcal{C}^\infty$  em  $\overset{\circ}{\mathcal{S}}$  pois a função de Erlang-B é de classe  $\mathcal{C}^\infty$  em  $\mathbb{R}_+$ . A convexidade estrita também será consequência da convexidade estrita da função de Erlang-B na variável  $x$  (ver Capítulo 4). Para  $j = 1(1)n$  o gradiente de  $B_j$  é um vector de  $\mathbb{R}^n$  com todas componentes nulas à excepção da componente  $j$  que tem o valor  $b'_j$ :

$$\nabla B_j = [0 \cdots 0 b'_j 0 \cdots 0]^T.$$

A Hessiana de  $B_j$ ,  $j = 1(1)n$ , é então a matriz com todas as entradas nulas, à excepção da entrada de posição  $(j, j)$  que é igual a  $b''_j$ . Essa matriz é triangular, pelo que tem um valor próprio  $\lambda_1 = 0$  de multiplicidade algébrica  $n - 1$  e um valor próprio  $\lambda_2 = b''_j > 0$ . A matriz Hessiana de  $B_j$ ,  $j = 1(1)n$  é então semidefinida positiva para todo o ponto de  $\overset{\circ}{\mathcal{S}}$ . Este facto implica a convexidade de  $B_j$  em  $\overset{\circ}{\mathcal{S}}$ .

Falta verificar a convexidade de  $B_{n+1}$  em  $\overset{\circ}{\mathcal{S}}$ . O gradiente dessa função é:

$$\nabla B_{n+1} = [-b'_{n+1} \quad -b'_{n+1} \quad -b'_{n+1} \quad \cdots \quad -b'_{n+1}]^T.$$

É fácil de ver que a matriz Hessiana de  $B_{n+1}$  é uma matriz com todas as entradas iguais a  $b''_{n+1}$ . Tem um valor próprio  $\lambda_1 = 0$  (de multiplicidade algébrica  $n - 1$ ) e um valor próprio  $\lambda_2 = n b''_{n+1} > 0$  (ver Lema 5.12 no Apêndice 5.B). Então essa matriz é também semidefinida positiva, o que implica que  $B_{n+1}$  é convexa em  $\overset{\circ}{\mathcal{S}}$ .  $\square$



Para definir completamente o “estado” do sistema  $S_{n+1}$  num dado ponto  $\mathbf{x} \in \mathcal{S}$ , define-se agora a seguinte *função vectorial de bloqueio*:

$$\begin{aligned} \mathbf{B} : \mathcal{S} \subset \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^{n+1} \\ \mathbf{x} &\longmapsto \mathbf{B}(\mathbf{x}) = [B_1(\mathbf{x}), B_2(\mathbf{x}), \dots, B_n(\mathbf{x}), B_{n+1}(\mathbf{x})]^T. \end{aligned} \tag{5.16}$$

Podemos agora obter uma formulação mais elegante e concisa do Problema 5.1:

$$\min_{\mathbf{x} \in \mathcal{S}} \begin{bmatrix} \mathbf{a}^T \mathbf{B}(\mathbf{x}) \\ \|\mathbf{B}(\mathbf{x})\|_\infty \end{bmatrix}. \tag{5.17}$$

### 5.2.3 Função Critério de Eficiência

#### Lema 5.2

A função  $f_1 : \mathcal{S} \longrightarrow \mathbb{R}$  tem as seguintes propriedades:

- a) É contínua em  $\mathcal{S}$  e de classe  $\mathcal{C}^\infty$  em  $\overset{\circ}{\mathcal{S}}$ ;
- b) É estritamente convexa em  $\overset{\circ}{\mathcal{S}}$ ;
- c)  $f_1(\mathbf{x}) \in [\alpha B(\alpha, \kappa), \alpha[$ ,  $\forall \mathbf{x} \in \mathcal{S}$ .

#### Prova:

- a) As funções  $B_j$ ,  $j = 1(1)n + 1$ , são de classe  $\mathcal{C}^\infty$  em  $\overset{\circ}{\mathcal{S}}$  e  $f_1$  é uma combinação linear dessas funções, para todo o  $\mathbf{x}$  em  $\overset{\circ}{\mathcal{S}}$ .
- b) Na verdade, o gradiente de  $f_1$  é

$$\nabla f_1(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} a_1 b'_1 - a_{n+1} b'_{n+1} \\ a_2 b'_2 - a_{n+1} b'_{n+1} \\ \vdots \\ a_n b'_n - a_{n+1} b'_{n+1} \end{bmatrix}, \tag{5.18}$$

e a matriz Hessiana de  $f_1$  é:

$$Hf_1(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} a_1 b_1'' + a_{n+1} b_{n+1}'' & a_{n+1} b_{n+1}'' & \cdots & a_{n+1} b_{n+1}'' \\ a_{n+1} b_{n+1}'' & a_2 b_2'' + a_{n+1} b_{n+1}'' & \cdots & a_{n+1} b_{n+1}'' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n+1} b_{n+1}'' & a_{n+1} b_{n+1}'' & \cdots & a_n b_n'' + a_{n+1} b_{n+1}'' \end{bmatrix}. \quad (5.19)$$

No Capítulo 4 prova-se que  $B_x''(a, x) > 0$  para  $x \geq 0$  qualquer que seja  $a \in \mathbb{R}_+$ . Sendo  $\mathbf{x} \in \overset{\circ}{\mathcal{S}}$  e  $b_{n+1}'' \neq 0$ , podemos escrever:

$$Hf_1(\mathbf{x}) = a_{n+1} b_{n+1}'' \left[ E + \text{diag} \left[ \frac{a_1 b_1''}{a_{n+1} b_{n+1}''}, \frac{a_2 b_2''}{a_{n+1} b_{n+1}''}, \dots, \frac{a_n b_n''}{a_{n+1} b_{n+1}''} \right] \right],$$

sendo  $E$  a matriz de  $\mathbb{R}^{n \times n}$  com entradas todas iguais a 1. Note que a matriz diagonal indicada na expressão anterior tem todos os elementos principais estritamente maiores do que zero. Verificando da mesma forma que  $a_{n+1} b_{n+1}'' > 0$ , o Lema 5.13 do Apêndice 5.B é suficiente para provar que para todo o  $\mathbf{x} \in \overset{\circ}{\mathcal{S}}$  a Hessiana de  $f_1$  é definida positiva. Resulta então que  $f_1$  é estritamente convexa em  $\overset{\circ}{\mathcal{S}}$ .

- c) É imediato que  $f_1(\mathbf{x}) < \alpha$  pois  $\kappa > 0$ . A prova de que  $f_1 \geq \alpha B(\alpha, \kappa)$  foi obtida inicialmente em [19] sem usar a convexidade da função de Erlang-B. Conforme referido nesse artigo a prova é imediata usando essa propriedade.

□

Como  $\mathcal{S}$  é limitado e fechado, a função  $f_1$  sendo contínua, atinge em  $\mathcal{S}$  um valor mínimo (Teorema de Wierstrass). Mas tirando partido da propriedade de convexidade estrita invocada, podemos caracterizar melhor o ponto onde esse mínimo é atingido. É esse o propósito do lema seguinte.

### Lema 5.3

*A função  $f_1$  tem um único mínimo local em  $\mathcal{S}$  que é também único mínimo global, num ponto  $\mathbf{x}^*$  que se for do interior de  $\mathcal{S}$  é o ponto crítico de  $f_1$  em  $\mathcal{S}$  :*

$$\nabla f_1(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}.$$

**Prova:** A prova é imediata, uma vez que  $f_1$  é estritamente convexa e está definida num compacto convexo  $\mathcal{S} \in \mathbb{R}^n$ .  $\square$

## 5.2.4 Função Critério de Equidade

### Lema 5.4

A função  $f_2 : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}$  tem as seguintes propriedades:

- a) É contínua em  $\mathcal{S}$  ;
- b) É convexa em  $\overset{\circ}{\mathcal{S}}$  ;
- c) Se num ponto  $\hat{\mathbf{x}}$  de  $\overset{\circ}{\mathcal{S}}$  , o máximo do conjunto  $\{B_1, \dots, B_{n+1}\}$  for apenas atingido para uma única função  $B_j$ , para  $j = 1, \dots, n+1$ , então existe uma bola centrada em  $\hat{\mathbf{x}}$ , contida em  $\mathcal{S}$  , onde  $f_2$  é de classe  $\mathcal{C}^\infty$ ;
- d)  $f_2(\mathbf{x}) \in ]0, 1]$ ,  $\forall \mathbf{x} \in \mathcal{S}$  .

### Prova:

- a) Como foi verificado no Lema 5.1 as funções  $B_j$ ,  $j = 1(1)n+1$  são contínuas em  $\mathcal{S}$ . Note agora que se  $\mathbf{x}$  pertence a  $\mathcal{S}$  , então  $f_2(\mathbf{x}) = \|\mathbf{B}(\mathbf{x})\|_\infty$ . Como uma norma é uma aplicação contínua, temos  $f_2$  definida como a composição de duas funções contínuas.
- b) No Lema 5.1 demonstrou-se que as funções  $B_j$ ,  $j = 1(1)n+1$ , são convexas em  $\mathcal{S}$ . Como  $f_2 = \max\{B_1, \dots, B_n, B_{n+1}\}$ , o seu epigrafo é a intersecção dos epigrafos das funções convexas  $B_1, \dots, B_{n+1}$ . A intersecção de conjuntos convexos é um convexo, pelo que o epigrafo de  $f_2$  é um convexo. Resultando que  $f_2$  é uma função convexa em  $\mathcal{S}$  [17, pag.78].
- c) Se  $\max\{B_1, \dots, B_n, B_{n+1}\} = B_j$  e  $B_i \neq B_j$ , para  $i \neq j$ , num certo ponto  $\mathbf{x} \in \overset{\circ}{\mathcal{S}}$  , então (pela continuidade da função de Erlang-B), existe uma bola centrada em

$\mathbf{x}$  contida em  $\mathcal{S}$ , onde  $f_2(\mathbf{x}) = B_j(\mathbf{x})$ , sendo portanto uma função de classe  $\mathcal{C}^\infty$  nessa bola.

- d) A função de Erlang-B exprime uma probabilidade, pelo que  $f_2(\mathbf{x}) \in [0, 1]$ . Por outro lado,  $f_2(\mathbf{x})$  não pode ser zero, pois  $\kappa$  é um valor finito.

□

Como  $f_2$  é contínua e  $\mathcal{S}$  limitado e fechado, então o teorema de Weierstrass garante a existência de um valor mínimo da função  $f_2$  em  $\mathcal{S}$ . Caracterizamos no lema seguinte o ponto onde esse mínimo é atingido.

### Lema 5.5

*A função  $f_2$  tem um único mínimo local em  $\mathcal{S}$  que é também mínimo global, num ponto  $\mathbf{x}^{**}$ , para o qual se verifica:*

- a)  $\mathbf{x}^{**}$  é a única solução em  $\mathcal{S}$  do sistema de equações:

$$B(a_1, x_1^{**}) = B(a_2, x_2^{**}) = \dots = B(a_n, x_n^{**}) = B\left(a_{n+1}, \kappa - \sum_{j=1}^n x_j^{**}\right); \quad (5.20)$$

- b)  $\mathbf{x}^{**}$  é um ponto interior de  $\mathcal{S}$ , ou seja:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n x_j^{**} &< \kappa, \\ x_j^{**} &> 0, \quad j = 1(1)n. \end{aligned} \quad (5.21)$$

**Prova:** Inicialmente note-se que sendo  $\mathcal{S}$  limitado e fechado e  $f_2$  contínua,  $f_2$  tem um mínimo global em  $\mathcal{S}$ . Por outro lado, note-se que  $f_2$  é uma função convexa definida num domínio convexo  $\mathcal{S}$ . Então, qualquer mínimo local de  $f_2$  em  $\mathcal{S}$  é também mínimo global de  $f_2$  em  $\mathcal{S}$ . Resta então provar que o mínimo global de  $f_2$  é atingido num único ponto  $\mathbf{x}^{**}$  de  $\mathcal{S}$  que cumpre a) e b).

Para facilitar a prova, definimos o problema monocritério seguinte:

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{n+1}} \quad & g(\mathbf{y}) = \max \{B(a_1, y_1), B(a_2, y_2), \dots, B(a_n, y_n), B(a_{n+1}, y_{n+1})\} \\ \text{s.a.} \quad & \sum_{j=1}^{n+1} y_j = \kappa \\ & y_j \geq 0, \quad j = 1(1)n + 1. \end{aligned} \quad (5.22)$$

O conjunto das soluções admissíveis deste problema será designado por  $\mathcal{Y} \subset \mathbb{R}_{\oplus}^{n+1}$ . Usando uma óbvia mudança de variável, é fácil de verificar que para provar o enunciado, basta provar que a solução óptima de (5.22), que designaremos por  $\mathbf{y}^{**}$ , é única e além disso cumpre:

$$B(a_1, y_1^{**}) = B(a_2, y_2^{**}) = \dots = B(a_n, y_n^{**}) = B(a_{n+1}, y_{n+1}^{**}) \quad (5.23)$$

$$y_j^{**} > 0, \quad j = 1(1)n + 1. \quad (5.24)$$

Usando a notação  $\mathcal{I} = \{1, 2, \dots, n, n+1\}$ , definimos os seguintes conjuntos associados a cada ponto  $\mathbf{y} \in \mathcal{Y}$ :

$$\mathcal{L}(\mathbf{y}) = \{j \in \mathcal{I} : B(a_j, y_j) < g(\mathbf{y})\},$$

$$\mathcal{M}(\mathbf{y}) = \{j \in \mathcal{I} : B(a_j, y_j) = g(\mathbf{y})\}.$$

Note-se que  $\mathcal{M}(\mathbf{y})$  não pode ser vazio, mas  $\mathcal{L}(\mathbf{y}) \cap \mathcal{M}(\mathbf{y}) = \emptyset$  e também  $\mathcal{L}(\mathbf{y}) \cup \mathcal{M}(\mathbf{y}) = \mathcal{I}$ . Refira-se também que se  $j \in \mathcal{L}(\mathbf{y})$ , então  $y_j > 0$  pois, no caso de se ter  $y_j = 0$ ,  $B(a_j, y_j) = 1$ , o que torna absurda a desigualdade  $B(a_j, y_j) < g(\mathbf{y})$ . Então,

$$\forall j \in \mathcal{L}(\mathbf{y}), \quad y_j > 0. \quad (5.25)$$

Vamos agora dividir a prova em duas partes:

- (i) Provaremos inicialmente que qualquer minimizante de  $g$  em  $\mathcal{Y}$  é solução do sistema de equações (5.23).

Suponhamos, por absurdo, o contrário. Seja  $\hat{\mathbf{y}}$  um minimizante global da função em  $\mathcal{Y}$  (que como vimos existe), mas que não verifica (5.23). Então,  $\mathcal{L}(\hat{\mathbf{y}})$  não

é vazio. Tome-se um valor  $i \in \mathcal{L}(\hat{\mathbf{y}})$  e um valor  $\epsilon > 0$  e defina-se um ponto  $\check{\mathbf{y}} \in \mathbb{R}^{n+1}$ , com as seguintes componentes:

$$\begin{aligned}\check{y}_i &= \hat{y}_i - \epsilon, \\ \check{y}_j &= \hat{y}_j, \quad \forall j \in \mathcal{L}(\hat{\mathbf{y}}) \setminus \{i\}, \\ \check{y}_j &= \hat{y}_j + \frac{\epsilon}{|\mathcal{M}(\hat{\mathbf{y}})|}, \quad \forall j \in \mathcal{M}(\hat{\mathbf{y}}),\end{aligned}$$

onde  $|\mathcal{M}(\hat{\mathbf{y}})|$  designa o cardinal do conjunto  $\mathcal{M}(\hat{\mathbf{y}})$ . Por (5.25) é fácil de verificar que para  $\epsilon < \hat{y}_i$  se tem  $\check{\mathbf{y}} \in \mathcal{Y}$ , pois  $\sum_{j=1}^{n+1} \check{y}_j = \kappa$  e  $\check{y}_j \geq 0$ ,  $j = 1(1)n + 1$ . Por outro lado, ao passar do ponto  $\hat{\mathbf{y}}$  para  $\check{\mathbf{y}}$  só o grupo  $i$  aumentou o bloqueio. Além disso, todos os grupos relativos ao conjunto  $\mathcal{M}(\hat{\mathbf{y}})$  diminuíram o bloqueio. Pela continuidade da função de Erlang-B é possível escolher um  $\epsilon$  ( $0 < \epsilon < \hat{y}_i$ ), suficientemente pequeno de forma a que o bloqueio no grupo  $i$  aumente tão pouco que não se torne o máximo do sistema no ponto  $\check{\mathbf{y}}$ . Ora, esta conclusão leva a que

$$g(\check{\mathbf{y}}) < g(\hat{\mathbf{y}}),$$

pelo que  $\hat{\mathbf{y}}$  não pode ser minimizante da função  $g$  em  $\mathcal{Y}$ . Então, o mínimo da função só pode ser atingido num ponto  $\mathbf{y}^{**}$  onde  $\mathcal{L}(\mathbf{y}^{**})$  seja vazio, ou seja  $\mathcal{M}(\mathbf{y}^{**}) = \mathcal{I}$ . Então, é absurdo admitir que um minimizante de  $g$  em  $\mathcal{Y}$  não cumpre o sistema de equações (5.23). Além disso, este sistema admite uma solução em  $\mathcal{Y}$  (note que admitir o contrário seria também admitir que  $g(\mathbf{y})$  não atinge mínimo em  $\mathcal{Y}$ , o que é absurdo).

- (ii) Provamos agora que a solução de (5.23) em  $\mathcal{Y}$  é única e pertence ao interior de  $\mathcal{Y}$ .

Veriquemos que (5.23) não pode ter duas soluções distintas em  $\mathcal{Y}$ . Admita-se então, por absurdo, que  $\mathbf{y} \in \mathcal{Y}$  e  $\mathbf{y}' \in \mathcal{Y}$  são soluções distintas de (5.23). Seja  $\beta = B_j(a_j, y_j)$ ,  $j = 1(1)n + 1$  e  $\beta' = B_j(a_j, y'_j)$ ,  $j = 1(1)n + 1$ . Se as soluções são distintas, então pela monotonia da função de Erlang-B na variável  $x$ , tem-se  $\beta \neq \beta'$ . Seja por exemplo  $\beta < \beta'$ . Ora, esta desigualdade implica que

$y_j > y'_j$ ,  $j = 1(1)n + 1$ . Mas isso é absurdo, pois se  $\mathbf{y}$  e  $\mathbf{y}'$  são pontos de  $\mathcal{Y}$ , tem-se  $\|\mathbf{y}\|_1 = \|\mathbf{y}'\|_1 = \kappa$ . Ficando provada a unicidade da solução de (5.23).

É por outro lado absurdo, admitir que alguma componente de  $\mathbf{y}$  seja nula, pois isso levava a que o correspondente grupo apresentasse bloqueio igual a um. Ora o sistema  $S_{n+1}$  não pode ter todos os grupos com bloqueio igual a um, pois  $\kappa > 0$ . Então podemos concluir que a solução de (5.23) só pode ser um ponto situado no interior do conjunto  $\mathcal{S}$ .

□

É óbvio que a função  $f_2$  nos fornece uma adequada medida da qualidade de serviço do sistema  $S_{n+1}$ . Além disso, após este teorema (e especialmente pelo processo de demonstração apresentado) fica muito mais claro que a função  $f_2$  é um critério de equidade. Na verdade, na demonstração efectuada verificou-se que se o sistema não se encontra na situação de máxima equidade (bloqueios iguais em todos os grupos), então é possível diminuir  $f_2$  (medida de equidade) transferindo parte da capacidade atribuída aos grupos que apresentam melhor qualidade de serviço para os grupos que apresentam pior qualidade de serviço. Outras medidas de equidade poderiam ter sido sugeridas na formulação do problema. Uma discussão especialmente dedicada a medidas de equidade pode ser encontrada em [15], embora no contexto de problemas de localização. Em Estatística Descritiva as medidas de dispersão normalmente usadas (como o desvio padrão) também podem ser usadas neste tipo de formulações. A função  $f_2$  (do tipo da primeira que é discutida em [15]) parece-nos a mais adequada no contexto do sistema  $S_{n+1}$ . Na verdade, em muitas abordagens de sistemas e redes de teletráfego verifica-se a qualidade de serviço observando o bloqueio máximo apresentado. Nas formulações monocritério de optimização desses sistemas, inclui-se normalmente uma restrição para garantir que todos os bloqueios sejam inferiores a um certo valor  $\beta$ , considerado o limite para a qualidade de serviço admissível. Tal restrição na nossa notação seria escrita como  $f_2(\mathbf{x}) < \beta$ .





de Newton-Raphson<sup>5</sup> (ver Apêndice 5.A). Conforme discutido nesse apêndice, em cada iteração do método há que resolver o sistema de equações lineares  $\Phi'(\mathbf{x}) \mathbf{y} = -\Phi(\mathbf{x})$ , sendo  $\mathbf{x}$  o valor da aproximação corrente e  $\Phi'(\mathbf{x})$  a matriz Jacobiana de  $\Phi(\mathbf{x})$ . Ou seja,  $\Phi'$  é a matriz Hessiana de  $f_1$ :

$$\begin{bmatrix} a_1 b_1'' + a_{n+1} b_{n+1}'' & a_{n+1} b_{n+1}'' & a_{n+1} b_{n+1}'' & \cdots & a_{n+1} b_{n+1}'' \\ a_{n+1} b_{n+1}'' & a_2 b_2'' + a_{n+1} b_{n+1}'' & a_{n+1} b_{n+1}'' & \cdots & a_{n+1} b_{n+1}'' \\ a_{n+1} b_{n+1}'' & a_{n+1} b_{n+1}'' & a_3 b_3'' + a_{n+1} b_{n+1}'' & \cdots & a_{n+1} b_{n+1}'' \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n+1} b_{n+1}'' & a_{n+1} b_{n+1}'' & a_{n+1} b_{n+1}'' & \cdots & a_n b_n'' + a_{n+1} b_{n+1}'' \end{bmatrix}.$$

Note também que:

$$-\Phi(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} a_{n+1} b_{n+1}' - a_1 b_1' \\ a_{n+1} b_{n+1}' - a_2 b_2' \\ a_{n+1} b_{n+1}' - a_3 b_3' \\ \vdots \\ a_{n+1} b_{n+1}' - a_n b_n' \end{bmatrix}.$$

É agora fundamental recordar que  $B''_{xx}(a, x) > 0$  para todo o  $x \geq 0$  e todo o  $a \in \mathbb{R}_+$  (ver Capítulo 4). Como  $b''_{n+1} \neq 0$ , então o sistema linear  $\Phi'(\mathbf{x}) \mathbf{y} = -\Phi(\mathbf{x})$  é equivalente a:

$$[E + \text{diag}(w_\Phi)] \mathbf{y} = b_\Phi, \tag{5.27}$$

sendo:

$$w_\Phi = \left[ \frac{a_1 b_1''}{a_{n+1} b_{n+1}''}, \frac{a_2 b_2''}{a_{n+1} b_{n+1}''}, \frac{a_3 b_3''}{a_{n+1} b_{n+1}''}, \dots, \frac{a_n b_n''}{a_{n+1} b_{n+1}''} \right]^T, \tag{5.28}$$

$$b_\Phi = \left[ \frac{a_{n+1} b_{n+1}' - a_1 b_1'}{a_{n+1} b_{n+1}''}, \frac{a_{n+1} b_{n+1}' - a_2 b_2'}{a_{n+1} b_{n+1}''}, \dots, \frac{a_{n+1} b_{n+1}' - a_n b_n'}{a_{n+1} b_{n+1}''} \right]^T. \tag{5.29}$$

Note que  $w_\Phi$  é sempre um vector com todas as componentes estritamente positivas. Nestas condições, o algoritmo apresentado no Apêndice 5.A permite obter a solução do sistema. O cálculo dos vectores  $w_\Phi$  e  $b_\Phi$  em cada iteração do método de Newton-Raphson pode fazer-se calculando os valores da função de Erlang-B e das suas derivadas

---

<sup>5</sup>Uma boa obra de referência sobre a aplicação do método de Newton no contexto do nosso trabalho é [20].

até à ordem dois pelos algoritmos propostos em [8, 10] (ver Capítulos 2 e 3). Para aproximação inicial, sugerimos a seguinte *regra de proporção*:

$$x_j^{(0)} = \frac{\kappa}{\alpha} a_j, \quad j = 1(1)n. \quad (5.30)$$

É imediato que a aproximação inicial sugerida pertence ao interior de  $\mathcal{S}$ . Na verdade é fácil de verificar que é o *centro* desse simplex. Por outro lado, invocando argumentos de simetria é também fácil de verificar que será a solução exacta do sistema  $\Phi(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$  se os tráfegos oferecidos são todos iguais.

### 5.3.2 Solução de Máxima Eficiência em Pontos Fronteiros

Sendo  $\mathbf{x}^* \in \mathcal{S}$  a solução de máxima eficiência, então o correspondente vector de capacidades dos  $n + 1$  grupos no sistema  $S_{n+1}$  será designado por  $\bar{\mathbf{x}}^*$ , ou seja:

$$\begin{aligned} \bar{x}_j^* &= x_j^*, \quad j = 1(1)n, \\ \bar{x}_{n+1}^* &= \kappa - \sum_{j=1}^n x_j^*. \end{aligned}$$

Se  $\mathbf{x}^* \in \partial\mathcal{S}$ , então

$$\exists j \in \{1, 2, \dots, n, n + 1\} : \bar{x}_j^* = 0,$$

ou seja, no sistema  $S_{n+1}$  correspondente há grupos aos quais é atribuído um canal de capacidade nula.

O seguinte lema é de grande importância na obtenção de um algoritmo de cálculo da solução de máxima eficiência em pontos fronteiros.

#### Lema 5.6

*Se  $\mathbf{x}^* \in \partial\mathcal{S}$  é mínimo de  $f_1$  em  $\mathcal{S}$ , então o correspondente vector de capacidades dos grupos  $\bar{\mathbf{x}}^*$  no sistema  $S_{n+1}$  tem pelo menos uma componente nula  $x_k^*$ , com  $k \in \{1, 2, \dots, n, n + 1\}$ , e tem-se também:*

$$\bar{x}_k^* = 0 \implies \bar{x}_{k+j}^* = 0, \quad j = 1(1)n - k.$$

**Prova:**

Da definição do conjunto  $\mathcal{S}$  se conclui que qualquer ponto da sua fronteira terá de ter uma coordenada nula. Se  $a_j = a_{j+1}$ , um óbvio argumento de simetria leva à conclusão de que se  $\bar{x}_j^* = \bar{x}_{j+1}^*$ , pelo que ou são ambos nulos ou ambos diferentes de zero.

Analisemos então o caso  $a_j > a_{j+1}$ . Inicialmente note que

$$f_1(\mathbf{x}^*) = \sum_{j=1}^{n+1} a_j B(a_j, \bar{x}_j^*),$$

e também que:

$$\bar{x}_j^* = 0 \implies a_j B(a_j, \bar{x}_j^*) = a_j.$$

Suponha-se então por absurdo que  $\bar{x}_j^* = 0$  e que  $\bar{x}_{j+1}^* = \epsilon > 0$ . Se  $a_j > a_{j+1}$  então seria possível diminuir a função objectivo à custa da transferência dos  $\epsilon$  circuitos do grupo  $j + 1$  para o grupo  $j$ . Esta demonstração (ver [6, Lema 4.4–pag.21]) é consequência de a função tráfego transportado num grupo de Erlang-B (definida por (5.9)), ser estritamente crescente na variável  $a$  (ver [6, Lema 3.14–pag.18]). Nesta condições  $\mathbf{x}^*$  não seria solução de máxima eficiência. Então, se  $\bar{x}_j^* = 0$  terá de se ter  $\bar{x}_{j+1}^* = 0$ .  $\square$

Este lema é muito importante no contexto da obtenção numérica da solução de máxima eficiência, pois permite fundamentar o processo de cálculo seguinte. Como à partida não sabemos se a solução  $\mathbf{x}^*$  é um ponto interior ou um ponto fronteiro, começamos por executar o processo descrito na subsecção anterior, ou seja resolver o sistema de estacionaridade  $\nabla f_1(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$  pelo método de Newton-Raphson. Se esse sistema não tem solução em  $\mathcal{S}$ , então a sucessão de Newton-Raphson, definindo sucessivamente direcções de descida para  $f_1$ , acaba por calcular um ponto fora da região admissível. Logo que se detecte essa situação, verifica-se que a solução  $\mathbf{x}^*$  será um ponto fronteiro de  $\mathcal{S}$ . Pelo lema anterior surge imediatamente  $\bar{x}_{n+1}^* = 0$ . Estando essa componente determinada, basta resolver de novo o problema tentando alocar os  $\kappa$  circuitos pelos restantes  $n$  grupos. Se a sucessão tornar a sair da região admissível, então temos também  $\bar{x}_n^* = 0$ , e o processo repete-se.

Este processo de cálculo é classicamente conhecido como *Método de Newton para*

*Optimização com Restrições Activas.* Um bom trabalho sobre este assunto é [20]. A grande questão que se coloca no desenho desses algoritmos é tentar *adivinhar* quais as restrições activas na solução óptima. No nosso caso essa questão surge bastante simplificada em face do Lema 5.6. Refira-se também que em casos típicos não haverá muitas restrições activas na solução de máxima eficiência, pois isso seria sinal de grande escassez de recursos, ou seja, o sistema  $S_{n+1}$  estaria muito subdimensionado em face dos tráfegos oferecidos.

## 5.4 Solução de Máxima Equidade

Designamos por solução de máxima equidade, o ponto  $\mathbf{x}^{**} \in \mathcal{S}$  onde  $f_2$  atinge o seu valor mínimo.

Definimos a função vectorial:

$$\begin{aligned} \Psi : \mathcal{S} \subset \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ \mathbf{x} &\longmapsto \Psi(\mathbf{x}) = [\psi_1(\mathbf{x}), \psi_2(\mathbf{x}), \dots, \psi_n(\mathbf{x})]^T, \end{aligned}$$

sendo

$$\begin{cases} \psi_1(\mathbf{x}) = B(a_1, x_1) - B\left(a_{n+1}, \kappa - \sum_{j=1}^n x_j\right), \\ \psi_2(\mathbf{x}) = B(a_2, x_2) - B\left(a_{n+1}, \kappa - \sum_{j=1}^n x_j\right), \\ \psi_3(\mathbf{x}) = B(a_3, x_3) - B\left(a_{n+1}, \kappa - \sum_{j=1}^n x_j\right), \\ \vdots \\ \psi_n(\mathbf{x}) = B(a_n, x_n) - B\left(a_{n+1}, \kappa - \sum_{j=1}^n x_j\right). \end{cases} \quad (5.31)$$

O Lema 5.5 estabelece que a solução de máxima equidade do Problema 5.1 pode ser obtida pela resolução em  $\mathcal{S}$  da equação vectorial  $\Psi(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ . Note que  $\Psi$  é de classe  $\mathcal{C}^2$  no interior de  $\mathcal{S}$ . Para a obtenção de uma aproximação do valor exacto da solução, usaremos o método de Newton-Raphson (ver Apêndice 5.A). Conforme discutido nesse apêndice, em cada iteração do método há que resolver o sistema de equações lineares  $\Psi'(\mathbf{x}) \mathbf{y} = -\Psi(\mathbf{x})$ , sendo  $\mathbf{x}$  o valor da aproximação corrente e  $\Psi'(\mathbf{x})$  a matriz Jacobiana

de  $\Psi(\mathbf{x})$ . O referido sistema linear tem a forma geral:

$$\begin{bmatrix} b'_1 + b'_{n+1} & b'_{n+1} & b'_{n+1} & \cdots & b'_{n+1} \\ b'_{n+1} & b'_2 + b'_{n+1} & b'_{n+1} & \cdots & b'_{n+1} \\ b'_{n+1} & b'_{n+1} & b'_3 + b'_{n+1} & \cdots & b'_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b'_{n+1} & b'_{n+1} & b'_{n+1} & \cdots & b'_n + b'_{n+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{n+1} - b_1 \\ b_{n+1} - b_2 \\ b_{n+1} - b_3 \\ \vdots \\ b_{n+1} - b_n \end{bmatrix}$$

É agora fundamental recordar que  $B'_x(a, x) < 0$  para todo o  $x \in \mathbb{R}_\oplus$  e todo o  $a \in \mathbb{R}_+$ .

Como  $b'_{n+1} \neq 0$ , o sistema é equivalente a

$$[E + \text{diag}(w_\Psi)] \mathbf{y} = b_\Psi, \quad (5.32)$$

sendo:

$$w_\Psi = \left[ \frac{b'_1}{b'_{n+1}}, \frac{b'_2}{b'_{n+1}}, \frac{b'_3}{b'_{n+1}}, \dots, \frac{b'_n}{b'_{n+1}} \right]^T, \quad (5.33)$$

$$b_\Psi = \left[ \frac{b_{n+1} - b_1}{b'_{n+1}}, \frac{b_{n+1} - b_2}{b'_{n+1}}, \frac{b_{n+1} - b_3}{b'_{n+1}}, \dots, \frac{b_{n+1} - b_n}{b'_{n+1}} \right]^T. \quad (5.34)$$

Note que  $w_\Psi$  é sempre um vector com todas as componentes estritamente positivas. Nestas condições, o algoritmo apresentado no Apêndice 5.A permite obter a solução do sistema. O cálculo dos vectores  $w_\Psi$  e  $b_\Psi$  em cada iteração do método de Newton-Raphson pode fazer-se calculando os valores da função de Erlang-B e da sua derivada pelos algoritmos propostos nos Capítulos 2 e 3. Tal como anteriormente, sugerimos a seguinte *regra de proporção* para aproximação inicial:

$$x_j^{(0)} = \frac{\kappa}{\alpha} a_j, \quad j = 1(1)n. \quad (5.35)$$

É imediato que a aproximação inicial sugerida pertence ao interior de  $\mathcal{S}$ . Por outro lado, invocando argumentos de simetria é também fácil de verificar que será a solução exacta do sistema  $\Psi(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$  se os tráfegos oferecidos forem todos iguais.

## 5.5 Conflito entre Eficiência e Equidade

Usando um argumento de simetria é fácil de verificar que se os tráfegos oferecidos a todos os grupos são iguais (ou seja  $a_j = a$ ,  $j = 1(1)n + 1$ ), então a solução de máxima

eficiência e de máxima equidade coincidem. Nesse caso não há conflito entre os dois objectivos da formulação bicritério. Além disso, a resolução do problema é trivial e reduz-se a efectuar apenas a divisão em partes iguais do total de recursos pelos grupos do sistema:

$$\bar{x}_j^* = \bar{x}_j^{**} = \frac{\kappa}{n+1}, \quad j = 1(1)n+1.$$

Noutro qualquer caso, demonstraremos nesta secção que os dois critérios são conflituosos, ou seja, a solução de máxima eficiência não coincide com a solução de máxima equidade.

Inicialmente note-se que se a solução de máxima eficiência é um ponto fronteiro de  $\mathcal{S}$ , o conflito é obvio, pois a solução de máxima equidade é um ponto interior de  $\mathcal{S}$ .

Resta analisar o caso em que a solução de máxima eficiência é um ponto interior de  $\mathcal{S}$ . Este resultado não é tão óbvio e é consequência do teorema 6 de [6, pag.32]. Nesse trabalho foi analisado um sistema  $S_{n+1}$  com  $n = 1$ , ou seja a alocação de recursos entre apenas dois grupos de Erlang-B. Nesse caso, o Problema 5.1 é formulado como um problema com apenas uma variável de decisão:

$$\begin{aligned} \min_{x_1} \quad & f_1(x_1) = a_1 B(a_1, x_1) + a_2 B(a_2, \kappa - x_1) & (5.36) \\ \min_{x_1} \quad & f_2(x_1) = \max \{B(a_1, x_1), B(a_2, \kappa - x_1)\} \\ \text{s.a.} \quad & x_1 \in [0, \kappa] \end{aligned}$$

Designando por  $x_1^* \in [0, \kappa]$  a solução de máxima eficiência e por  $x_1^{**} \in ]0, \kappa[$  a solução de máxima equidade, o enunciado do teorema 6 de [6] resume-se à proposição:

$$a_1 > a_2 \implies \frac{df_1}{dx_1}(x_1^{**}) < 0, \quad \forall \kappa \in \mathbb{R}_+. \quad (5.37)$$

A demonstração deste resultado não será aqui reproduzida dada a sua extensão. Conforme referido em [6] trata-se de um resultado com importantes consequências para o estudo da afectação de recursos entre grupos de Erlang-B. Na verdade, este resultado pode ser classificado como uma propriedade relacionada com a conhecida propriedade de eficácia dos grandes grupos [4, pag.81]. A consequência mais óbvia é estabelecida no lema seguinte.

**Lema 5.7**

Sendo  $x_1^*$  a solução de máxima eficiência de (5.36), e  $a_1 > a_2$ , então

$$B(a_1, x_1^*) < B(a_2, \kappa - x_1^*), \quad \forall \kappa \in \mathbb{R}_+.$$

**Prova:**

Note que sendo  $f_1$  convexa e de classe  $\mathcal{C}^\infty$  em  $[0, k]$ , a sua derivada  $f_1'$  não decresce em  $[0, k]$ . Por (5.37) tem-se que  $f_1'(x_1^{**}) < 0$ , e portanto

$$f_1'(x_1) < 0, \quad \forall x_1 \in [0, x_1^{**}],$$

logo,  $f_1$  atinge o seu mínimo em  $[0, k]$  num ponto pertencente ao intervalo  $]x_1^{**}, \kappa]$ .

Concluindo-se então que:

$$x_1^* > x_1^{**}.$$

Mas, pelo Lema 5.5 e pela monotonia da função de Erlang-B pode escrever-se:

$$\begin{aligned} B(a_1, x_1^{**}) &= B(a_2, \kappa - x_1^{**}), \\ B(a_1, x_1) &< B(a_2, \kappa - x_1), \quad \forall x_1 > x_1^{**}. \end{aligned}$$

Deste modo, teremos de ter  $b_1 < b_2$  no ponto de máxima eficiência como se afirma no enunciado.  $\square$

O último lema estabelece claramente o conflito entre os dois critérios no caso de um sistema  $S_2$ . A generalização desse resultado para um sistema  $S_{n+1}$ ,  $n > 1$  necessita do lema seguinte, que pode ser entendido como o *Princípio da Optimalidade de Bellman* aplicado ao sistema  $S_{n+1}$  (ver por exemplo [22, pag.164]).

**Lema 5.8**

Qualquer conjunto de  $l < n + 1$  grupos de um sistema  $S_{n+1}$  otimizado em eficiência, constitui também um sistema  $S_l$  otimizado em eficiência, desde que  $S_l$  tenha capacidade alocada não nula.

**Prova:**

Se  $S_l$  tem capacidade alocada nula, então o problema de alocação em  $S_l$  não faz sentido pois não há capacidade a distribuir pelos seus grupos constituintes. Se essa capacidade é não nula (positiva), então faz sentido falar-se numa alocação de eficiência máxima. A demonstração faz-se mais uma vez usando *reductio ab absurdum*. Na verdade, se  $S_l$  não está otimizado em eficiência então seria possível redistribuir capacidade dentro dos seus grupos constituintes, diminuindo-se o tráfego perdido por  $S_l$  e portanto também diminuindo o tráfego total perdido por  $S_{n+1}$ . Isto implicaria que  $S_{n+1}$  não estaria otimizado em eficiência.  $\square$

O conflito entre os dois critérios pode agora ser provado no caso mais geral.

**Teorema 5.1 (Conflito entre Equidade e Eficiência)**

*Sendo  $\mathbf{x}^*$  a solução de máxima eficiência do Problema 5.1, e  $b_j^*$ ,  $j = 1(1)n + 1$  os correspondentes bloqueios nos grupos do sistema, tem-se:*

a) *Se  $a_1 > a_2 > \dots > a_n > a_{n+1}$ , e  $\mathbf{x}^* \in \overset{\circ}{\mathcal{S}}$ , então*

$$b_1^* < b_2^* < \dots < b_n^* < b_{n+1}^* ;$$

b) *No caso geral de  $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n \geq a_{n+1}$ , e  $\mathbf{x}^* \in \mathcal{S}$ , então*

$$b_j^* \leq b_{j+1}^*, \quad j = 1(1)n,$$

*verificando-se a igualdade  $b_m^* = b_{m+1}^*$  para algum  $m \in \{1, 2, \dots, n\}$ , se e só se*

$$(a_m = a_{m+1}) \vee (\bar{x}_m^* = 0).$$

**Prova:**

a) A proposição a) decorre directamente da aplicação conjunta dos Lemas 5.7 e 5.8. Na verdade, se  $\mathbf{x}^* \in \overset{\circ}{\mathcal{S}}$  todos os grupos do sistema têm capacidade positiva



atribuída. Então, pelo Lema 5.8 qualquer sistema  $S_2$  formado por dois grupos de  $S_{n+1}$  está também otimizado em eficiência. Por exemplo, o primeiro e o segundo grupo formam um sistema otimizado em eficiência. Aplicando o Lema 5.7 a esse sistema, temos  $b_1^* < b_2^*$ . Um argumento indutivo óbvio completa a prova.

- b) Como vimos, se  $a_m = a_{m+1}$ , então tem-se  $b_m^* = b_{m+1}^*$ . Numa situação em que  $\bar{x}_m^* = 0$ , tem-se também  $\bar{x}_{m+1}^* = 0$  pelo Lema 5.6, ou seja  $b_m^* = b_{m+1}^* = 1$ . Por outro lado, se nenhuma destas duas situações ocorre, aplica-se o argumento invocado em *a)* para concluir que  $b_m^* < b_{m+1}^*$ .

□

O teorema anterior permite agora concluir que, excepto na situação dos tráfegos oferecidos serem todos iguais, existe conflito entre o critério de eficiência e o critério de equidade. Com efeito, o Lema 5.5 estabelece que a solução de máxima equidade se atinge quando os bloqueios em todos os grupos forem iguais. Por outro lado o Teorema 5.1 permite concluir que a solução de máxima eficiência se atinge num ponto distinto desse, a menos que  $a_j = a$ ,  $j = 1(1)n + 1$ .

Outra conclusão importante que se tira para a análise do sistema  $S_{n+1}$  é que, na situação de máxima eficiência, um grupo que tem maior tráfego tem também melhor qualidade de serviço. Inversamente, os grupos que apresentam pior qualidade de serviço são os grupos que apresentam menor tráfego oferecido. O critério da eficiência estabelece assim uma preferência entre os grupos de utilizadores, beneficiando os grupos *maiores*.

## 5.6 Caracterização dos Óptimos de Pareto

Por serem únicas, a solução de máxima eficiência e de máxima equidade são óptimos de Pareto do Problema 5.1. Nesta secção trataremos de caracterizar as outras soluções

pertencentes a  $\mathcal{S}$  e que também são óptimos de Pareto do Problema 5.1.

Veremos nesta secção que o cálculo de óptimos de Pareto pode ser feito à custa da resolução de certos problemas monocritério com a mesma estrutura de um problema de máxima eficiência.

O cálculo dos óptimos de Pareto de problemas bicritério envolvendo duas funções objectivo convexas definidas num domínio convexo está tratado na literatura da especialidade (ver por exemplo [2] e [18]). A aplicação desses resultados ao cálculo das soluções não dominadas do Problema 5.1 é feita de modo muito expedito. Na verdade, tirando partido de certas propriedades das duas funções objectivo, a aplicação do referido método ao Problema 5.1 é extremamente facilitada.

Tal como antes,  $\mathbf{x}^*$  e  $\mathbf{x}^{**}$  designam, respectivamente, a solução de máxima eficiência e de máxima equidade do Problema 5.1. Introduzimos agora a notação

$$\begin{aligned}\beta^* &= f_2(\mathbf{x}^*), \\ \beta^{**} &= f_2(\mathbf{x}^{**}).\end{aligned}$$

No Teorema 2 de [18] prova-se que sendo  $f_1$  e  $f_2$  convexas e  $\mathcal{S}$  convexo, uma solução  $\hat{\mathbf{x}} \in \mathcal{S}$  é óptimo de Pareto do Problema 5.1 se e só se é solução óptima do problema monocritério seguinte, para  $\beta \in [\beta^{**}, \beta^*]$ .

**Problema 5.2 (1.ª Formulação Paramétrica Monocritério do Problema 5.1)**

Dados  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\kappa \in \mathbb{R}_+$  e um vector de tráfegos oferecidos  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}_+^{n+1}$ , calcular soluções óptimas do problema seguinte fixado o valor do parâmetro  $\beta$ :

$$\begin{aligned}\min_{\mathbf{x}} \quad & f_1(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^n a_j B(a_j, x_j) + a_{n+1} B\left(a_{n+1}, \kappa - \sum_{j=1}^n x_j\right) \\ \text{s.a.} \quad & f_2(\mathbf{x}) \leq \beta \\ & \sum_{j=1}^n x_j \leq \kappa \\ & x_j \geq 0, \quad j = 1(1)n.\end{aligned}$$

Note-se que, sendo  $f_2$  uma função convexa, o conjunto de soluções admissíveis do

Problema 5.2, que designaremos por  $\mathcal{D}_\beta$ , é também convexo. Na verdade, o conjunto

$$\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : f_2(\mathbf{x}) \leq \beta\},$$

é convexo. Note-se depois que  $\mathcal{D}_\beta$  é a intersecção desse conjunto com o conjunto  $\mathcal{S}$  e que a intersecção de convexos é um convexo.

O conjunto  $\mathcal{N}$  das soluções óptimas de Pareto do Problema 5.1 pode ser então definido como:

$$\mathcal{N} = \left\{ \hat{\mathbf{x}} \in \mathcal{S} : \mathbf{a}^T \mathbf{B}(\hat{\mathbf{x}}) = \min_{x \in \mathcal{D}_\beta} \mathbf{a}^T \mathbf{B}(\mathbf{x}), \beta \in [\beta^{**}, \beta^*] \right\}.$$

Designemos por  $\mathbf{x}_\beta^*$  a única solução do Problema 5.1 para certo valor de  $\beta$ . É fácil de verificar que:

- (i) O problema é impossível para  $\beta < \beta^{**}$ ;
- (ii)  $\mathbf{x}_\beta^* = \mathbf{x}^{**}$ , se  $\beta = \beta^{**}$ ;
- (iii)  $\mathbf{x}_\beta^* = \mathbf{x}^*$ , se  $\beta \geq \beta^*$ ;
- (iv) Se  $\mathbf{x}^*$  e  $\mathbf{x}^{**}$  pertencem ao interior de  $\mathcal{S}$ , então qualquer solução do Problema 5.2 pertence ao interior de  $\mathcal{S}$ . Como  $f_1$  é estritamente convexa nesse domínio, o valor de  $\mathbf{x}_\beta^*$  é único. Nestas condições a cada valor do intervalo real  $[\beta^{**}, \beta^*] \subset \mathbb{R}$  associa-se um e um só valor de  $\mathbf{x}_\beta^* \in \mathcal{S} \subset \mathbb{R}^n$  que é a solução do Problema 5.2 e é uma solução não dominada do Problema 5.1. Dizendo de outra forma, está definida uma função<sup>6</sup> de  $[\beta^{**}, \beta^*]$  em  $\mathbb{R}^n$ .

Na obtenção da solução de máxima eficiência e da solução de máxima equidade, lidamos com programas convexos com restrições lineares. Para o cálculo dos restantes óptimos de Pareto do Problema 5.1, teremos de lidar com um programa convexo onde figura uma restrição não linear. Como veremos, será possível linearizar essa restrição, ou seja, obter um conjunto de restrições lineares equivalente.

<sup>6</sup>Poder-se-á demonstrar que a função referida atrás é contínua e, portanto, que define uma linha em  $\mathbb{R}^n$  que une  $\mathbf{x}^*$  a  $\mathbf{x}^{**}$ ? A resposta poderá passar por uma análise de sensibilidade da solução do problema a variações do parâmetro  $\beta$ , mas a questão fica em aberto.

### 5.6.1 Linearização das Restrições

Facilmente se verifica que,

$$f_2(\mathbf{x}) \leq \beta \iff \left\{ \begin{array}{l} B(a_1, x_1) \leq \beta \\ B(a_1, x_1) \leq \beta \\ \vdots \\ B(a_n, x_n) \leq \beta \\ B(a_{n+1}, \kappa - \sum_{j=1}^n x_j) \leq \beta. \end{array} \right.$$

Tendo em conta a monotonia da função de Erlang-B na variável  $x$ , existem valores únicos  $x_1^\beta, x_2^\beta, \dots, x_{n+1}^\beta$ , tais que

$$\left\{ \begin{array}{l} B(a_1, x_1^\beta) = \beta \\ B(a_2, x_2^\beta) = \beta \\ \vdots \\ B(a_n, x_n^\beta) = \beta \\ B(a_{n+1}, x_{n+1}^\beta) = \beta. \end{array} \right.$$

Vários métodos numéricos têm sido propostos para esse cálculo, conhecidos na literatura como *métodos de inversão da fórmula de Erlang-B* (ver [12, 14, 3]). Trata-se simplesmente de resolver uma equação escalar não linear por um método iterativo, por exemplo pelo método de Newton-Raphson. Tendo calculado esses valores, mais uma vez pela monotonia da função de Erlang-B na variável  $x$ , podemos escrever:

$$f_2(\mathbf{x}) \leq \beta \iff \left\{ \begin{array}{l} x_1 \geq x_1^\beta \\ x_2 \geq x_2^\beta \\ \vdots \\ x_n \geq x_n^\beta \\ \sum_{j=1}^n x_j \leq \kappa - x_{n+1}^\beta \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} \bar{x}_1 \geq x_1^\beta \\ \bar{x}_2 \geq x_2^\beta \\ \vdots \\ \bar{x}_n \geq x_n^\beta \\ \bar{x}_{n+1} \geq x_{n+1}^\beta \end{array} \right. . \quad (5.38)$$

Como  $x_j^\beta > 0$ ,  $j = 1(1)n+1$ , é fácil de concluir que o conjunto de restrições indicado na relação anterior define  $\mathcal{D}_\beta$  (conjunto das soluções admissíveis do Problema 5.2), pelo que o problema está formulado como um programa convexo com restrições lineares.

**Problema 5.3 (2.<sup>a</sup> Formulação Paramétrica Monocritério do Problema 5.1)**

Dados  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\kappa \in \mathbb{R}_+$  e um vector de tráfegos oferecidos  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}_+^{n+1}$ , calcular soluções óptimas do problema seguinte fixado o valor do parâmetro  $\beta$ :

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x}} \quad & f_1(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^n a_j B(a_j, x_j) + a_{n+1} B\left(a_{n+1}, \kappa - \sum_{j=1}^n x_j\right) \\ \text{s.a.} \quad & x_j \geq x_j^\beta, \quad j = 1(1)n \\ & \sum_{j=1}^n x_j \leq \kappa - x_{n+1}^\beta \end{aligned}$$

Note que, se  $\beta = \beta^{**}$ , então a região admissível tem um só ponto, pois  $\mathcal{D}_\beta = \{\mathbf{x}^{**}\}$ . É também fácil de concluir que para  $\beta \in ]\beta^{**}, \beta^*]$  o conjunto  $\mathcal{D}_\beta$  é um *simplex* de  $\mathbb{R}^n$ . Além disso, se  $\beta$  e  $\beta'$  são valores no intervalo  $[\beta^{**}, \beta^*]$  tais que  $\beta' < \beta$ , então

$$\mathcal{D}_{\beta'} \subset \mathcal{D}_\beta.$$

Assim, à medida que  $\beta$  decresce de  $\beta^*$  para  $\beta^{**}$  a região admissível é um *simplex* que contém sempre o ponto  $\mathbf{x}^{**}$  mas de *volume* a tender para zero. Esta redução da região admissível à medida que o parâmetro  $\beta$  decresce de  $\beta^*$  para  $\beta^{**}$  leva à conclusão que o valor óptimo de  $f_1$  também tem de crescer.

## 5.7 Cálculo de Óptimos de Pareto

Pelo Teorema 1 de [18] a restrição  $f_2(\mathbf{x}) \leq \beta$  é uma restrição activa na solução óptima do Problema 5.2. Ou seja, se  $\mathbf{x}_\beta^*$  é solução óptima do Problema 5.2, então  $f_2(\mathbf{x}_\beta^*) = \beta$ . A partir de (5.38) conclui-se então que

$$\exists j \in \{1, 2, \dots, n, n + 1\} : \bar{x}_j^* = x_j^\beta. \tag{5.39}$$

Note-se, no entanto, que o valor de  $j$  a que se refere a relação anterior pode não ser único, ou seja pode haver mais de uma restrição activa na solução óptima. Se soubermos à partida quais são as restrições activas na solução óptima, então o processo resume-se

a fixar as correspondentes variáveis e a resolver um problema de máxima eficiência no espaço das restantes variáveis (livres).

É fácil de concluir que o método indicado neste trabalho para a obtenção da solução de máxima eficiência é aplicável. Como à partida não sabemos, para um dado valor de  $\beta$ , quais as restrições activas na solução óptima (ou seja quais as variáveis que devemos fixar), o cálculo numérico de uma solução óptima de Pareto apresenta algumas dificuldades. Pode-se usar um algoritmo baseado em processos de penalidade, formando uma nova função objectivo que incorpora termos para pesar a violação de cada restrição, resumindo-se depois o problema a resolver um programa não linear sem restrições. No entanto, essa abordagem não é fácil, sendo de esperar algumas complicações de ordem numérica. Outra classe de métodos, muito desenvolvida no caso do problema incorporar apenas restrições simples (“*box constraints*”), conduz aos algoritmos de restrições activas. Estes algoritmos, em geral, efectuam uma primeira tentativa de identificação dos limites activos no mínimo local, fixam as correspondentes variáveis, e resolvem o problema de optimização sem restrições no espaço das restantes variáveis. A busca de processos eficientes para *adivinhar* quais as restrições activas na solução óptima constitui o cerne da questão. Um bom trabalho sobre este assunto é [20].

Para evitar o uso de métodos gerais para resolver este tipo de problemas (minimizar uma função convexa num domínio convexo definido por restrições lineares) iremos tirar partido de algumas propriedades específicas do nosso problema para estabelecer um algoritmo de restrições activas específico.

Vamos então numerar as restrições do Problema 5.3, seguindo a seguinte convenção. A restrição  $x_j \geq x_j^\beta$  será designada por restrição  $j$  para  $j = 1(1)n$ . A restrição  $\sum_{j=1}^n x_j \leq \kappa - x_{n+1}^\beta$  será designada por restrição  $n + 1$ . A partir daqui usamos a notação  $\mathcal{A}(\beta)$  com o seguinte significado:

*Dado um valor  $\beta \in [\beta^{**}, \beta^*]$ , o conjunto de índices das restrições activas na solução óptima do Problema 5.3 será designado por  $\mathcal{A}(\beta)$ .*

O lema seguinte fornece um resultado fundamental para o estabelecimento do algoritmo que proporemos para o cálculo de soluções óptimas de Pareto do Problema 5.1 calculadas, como vimos, como soluções do Problema 5.3.

**Lema 5.9**

*Se a restrição  $m \in \{1, 2, \dots, n\}$  está activa na solução óptima do Problema 5.3, então também estão activas as restrições  $m + 1, m + 2, \dots, n + 1$ , ou seja:*

$$m \in \mathcal{A}(\beta) \implies \{m, m + 1, m + 2, \dots, n + 1\} \subset \mathcal{A}(\beta).$$

**Prova:**

Suponha-se por absurdo que a restrição  $m$  está activa e que a restrição  $m + 1$  não está activa. Isto quer dizer que  $b_m = \beta$  e  $b_{m+1} < \beta$ . Pelo Lema 5.8, o sistema  $S_2$  formado pelos grupos  $m$  e  $m + 1$  não pode estar optimizado em eficiência. Seria então possível redistribuir capacidade entre os dois de forma a diminuir o tráfego perdido por esse sistema  $S_2$  e permanecer na região admissível (retirando parte da capacidade do grupo  $m + 1$  para o grupo  $m$ ). Então o tráfego perdido pelo sistema  $S_{n+1}$  (formado por todos os grupos) também poderia ser diminuído, pelo que a solução não seria óptima. Então é absurdo admitir que a restrição  $m$  está activa e que a restrição  $m + 1$  não está activa na solução óptima. Um óbvio argumento indutivo completa a prova. □

Com este lema, temos uma regra para activar restrições, ou seja fixar variáveis. Como vimos em (5.39), tem-se

$$\mathcal{A}(\beta) \neq \emptyset, \quad \forall \beta \in [\beta^{**}, \beta^*]. \tag{5.40}$$

Pelo Teorema 5.9 tem-se então que

$$n + 1 \in \mathcal{A}(\beta), \quad \forall \beta \in [\beta^{**}, \beta^*]. \tag{5.41}$$

Por outro lado, é fácil de concluir que

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\beta^{**}) &= \{1, 2, \dots, n, n + 1\}, \\ \mathcal{A}(\beta^*) &= \{n + 1\} \text{ se } (a_{n+1} < a_n) \wedge (x_n^* > 0). \end{aligned}$$

Para calcular um óptimo de Pareto correspondente a um certo  $\beta \in ]\beta^{**}, \beta^*[$  podemos pensar no seguinte processo de cálculo.

- Fixamos  $\bar{x}_{n+1}$  com o valor  $x_{n+1}^\beta$  e resolvemos o problema de máxima eficiência (sem restrições) correspondente à alocação dos restantes  $k - x_{n+1}^\beta$  circuitos pelos grupos  $1, 2, \dots, n$ . Se a solução encontrada for admissível, ou seja se todos os grupos apresentarem um bloqueio não superior a  $\beta$  obtivemos claramente o óptimo de Pareto correspondente a  $\beta$ . Caso contrário avançamos para o ponto seguinte.
- Fixamos agora as variáveis  $\bar{x}_{n+1}$  e  $\bar{x}_n$  e repetimos o processo *mutatis mutandis*. Se a solução óptima for admissível encontrámos o óptimo de Pareto para  $\beta$ . Caso contrário avançamos para o ponto seguinte.
- Fixamos agora as variáveis  $\bar{x}_{n+1}$ ,  $\bar{x}_n$  e  $\bar{x}_{n-1}$  e repetimos o processo *mutatis mutandis*. Se a solução óptima for admissível encontrámos o óptimo de Pareto para  $\beta$ . Caso contrário avançamos para o ponto seguinte e assim sucessivamente.

O processo pode não ser muito eficiente para calcular um só óptimo de Pareto se  $n$  for um número de elevada ordem de grandeza. No entanto, interessa-nos sobretudo um algoritmo para “travelling on  $\mathcal{N}$ ”, ou seja, para obter uma tabela de óptimos de Pareto. Veremos seguidamente que o processo descrito será bastante eficiente nesse caso.

### Lema 5.10

Sendo  $\beta$  e  $\beta'$  valores do intervalo  $[\beta^{**}, \beta^*]$ , então

$$\beta' < \beta \implies \mathcal{A}(\beta) \subseteq \mathcal{A}(\beta').$$

### Prova:

Em linguagem menos formal, o que se pretende provar é que se uma restrição está



activa na solução óptima do Problema 5.3 para um certo valor do parâmetro  $\beta$ , essa restrição estará activa na solução óptima quando se usa um parâmetro  $\beta'$  inferior a  $\beta$ .

Para verificar isso, basta provar que para todo o  $m \in \{1, 2, \dots, n, n + 1\}$  se tem

$$m \in \mathcal{A}(\beta) \implies m \in \mathcal{A}(\beta').$$

Se  $\beta' < \beta$ , então pela monotonia da função de Erlang-B, tem-se

$$x_m^\beta < x_m^{\beta'}. \quad (5.42)$$

No problema correspondente a  $\beta$  a restrição  $m$  é  $x_m \geq x_m^\beta$  e no problema correspondente a  $\beta'$  a restrição  $m$  é  $x_m \geq x_m^{\beta'}$ . Tendo em conta a desigualdade (5.42), e a convexidade da função  $f_1$  tem-se o resultado pretendido.  $\square$

Pelo lema anterior, ao resolver sucessivamente o Problema 5.3 com valores de  $\beta$  sucessivamente menores, as variáveis fixadas para obter a solução óptima de um certo problema terão obrigatoriamente de ser fixadas para obter a solução óptima do seguinte (havendo necessidade de, eventualmente, fixar outras).

Desta forma, para calcular uma tabela de óptimos de Pareto do Problema 5.1 tomamos valores de  $\beta$  no intervalo  $[\beta^{**}, \beta^*]$  sucessivamente menores, tal como exposto no algoritmo da secção seguinte. Se o passo da tabela for suficientemente pequeno a maior parte dos óptimos de Pareto são calculados apenas pela resolução de um problema de máxima eficiência. Note-se também que a dimensão destes problemas decresce de uma unidade cada vez que se fixa uma variável, ou seja, a sua resolução numérica vai-se tornando menos pesada à medida que o valor de  $\beta$  se vai aproximando de  $\beta^{**}$ .

## 5.8 Algoritmo para Percorrer $\mathcal{N}$

O Algoritmo 5.1 especifica a estratégia exposta para a obtenção de óptimos de Pareto por resolução sucessiva de problemas de máxima eficiência por um método de determinação das restrições activas na solução usando as já expostas *Propriedades de*

*Monotonia de Restrições Activas.* Para aclarar a leitura do pseudo-código tecemos agora alguns comentários acerca da referida especificação. Inicialmente, note-se que o número de variáveis fixadas nos sucessivos problemas vai crescendo e a dimensão dos mesmos vai diminuindo. Na especificação, “XERL” designa a função que efectua a inversão da função de Erlang-B. Na linha 12, o procedimento “ALLOC” calcula as primeiras  $N_\ell$  posições do vector  $X$  correspondentes à solução de máxima eficiência de afectação de uma capacidade total  $\kappa_\beta$  pelos primeiros  $N_\ell$  grupos. O tráfego oferecido a esses grupos está definido nas primeiras  $N_\ell$  posições do vector  $A$ . O algoritmo calcula  $N_p$  óptimos de Pareto correspondentes a valores decrescentes e igualmente espaçados do parâmetro  $\beta$  no intervalo  $[\beta^{**}, \beta^*]$ . Os óptimos de Pareto correspondentes aos extremos desse intervalo (solução de máxima equidade e de máxima eficiência) são obtidos previamente pelo método já proposto.

## 5.9 Nota Final

Neste capítulo, abordou-se a optimização de sistemas multidimensionais de Erlang-B, na forma de um problema de afectação de servidores num contexto bicritério. Com este capítulo conclui-se a contribuição desta dissertação, a qual, simultaneamente, ilustra a importância dos estudos dos Capítulos 2, 3 e 4. Assim, todo o texto pode ser entendido como um estudo integrado de sistemas de Erlang-B com tráfego monoclasse.

O vector fundamental do trabalho foi eminentemente numérico e analítico, pois o objectivo central era definir e fundamentar o algoritmo para percorrer o conjunto de óptimos de Pareto. Com esse intuito, foi essencial fazer todo o trabalho de base dos Capítulos 2 e 3, para obter subrotinas fiáveis e eficientes de cálculo das derivadas da função de Erlang-B na variável número de circuitos. Também ficou clara a necessidade de definir métodos eficientes não só para o cálculo das derivadas de primeira ordem, como também para as derivadas de segunda ordem (caso da resolução dos sistemas de estacionaridade a que corresponde o cálculo de cada ponto de Pareto).

**Algoritmo 5.1** (Tabelação dos óptimos de Pareto/“Travelling on  $\mathcal{N}$ ”)

**Input:**  $N$ .º de grupos  $N \geq 2$ ; parâmetro  $\kappa$ ; vector tráf. of.  $A$ ; limites  $\beta^*$  e  $\beta^{**}$ ;  $n$ .º de óptimos  $N_p$ ;

```

    begin
1.       $\delta \leftarrow (\beta^* - \beta^{**}) / (N_p + 1)$ ;
2.       $\beta \leftarrow \beta^*$ ;
3.       $N_\beta \leftarrow 1$ ;
4.      for  $j \leftarrow 1$  to  $N_p$  do
        begin
5.           $\beta \leftarrow \beta - \delta$ ;
6.           $S_\beta \leftarrow 0$ ;
7.          for  $i \leftarrow N$  to  $N - N_\beta$  do
            begin
8.               $X[i] \leftarrow XERL(A[i], \beta)$ ;
9.               $S_\beta \leftarrow S_\beta + X[i]$ ;
            end
        repeat
10.          $N_\ell \leftarrow N - N_\beta$ ;
11.          $\kappa_\beta \leftarrow \kappa - S_\beta$ ;
12.          $ALLOC(A, X, \kappa_\beta, N_\ell)$ ;
13.          $M \leftarrow \max \{B(A[j], X[j]) : j = 1, \dots, N_\ell\}$ ;
14.         if  $(M > \beta)$  then
            begin
15.              $N_\beta \leftarrow N_\beta + 1$ ;
16.              $I_g \leftarrow N - N_\beta + 1$ ;
17.              $X[I_g] \leftarrow XERL(A[I_g], \beta)$ ;
18.              $S_\beta \leftarrow S_\beta + X[I_g]$ ;
            end
        until  $(M \leq \beta)$ ;
19.          $A_t \leftarrow \sum_{j=1}^N A[j] B(A[j], X[j])$ ;
20.         Ponto de Pareto: Escreva  $(f_1 = A_t, f_2 = \beta)$  e o vector  $X$ ;
        end
    end;

```

**Output:** Tabela de óptimos de Pareto;

## 5.A Aplicação do Método de Newton

Neste apêndice especificamos o algoritmo de Newton-Raphson aplicado à resolução de uma certa classe de sistemas de equações não lineares. Essa classe de sistemas pode ser definida como segue. Defina-se  $\Phi \in \mathcal{C}^2(\mathcal{D})$ :

$$\begin{aligned} \Phi : \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^p &\longrightarrow \mathbb{R}^p \\ \mathbf{x} &\longmapsto \Phi(\mathbf{x}), \end{aligned}$$

tal que  $\Phi$  tem um só zero em  $\mathcal{D}$ . A sucessão de Newton-Raphson para a resolução de  $\Phi(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$  é definida por um processo iterativo que passa, em cada iteração, por calcular o vector  $\mathbf{y}$  que é solução do sistema linear:

$$\Phi'(\mathbf{x}) \mathbf{y} = -\Phi(\mathbf{x}), \quad (5.43)$$

onde  $\Phi'(\mathbf{x})$  designa a matriz Jacobiana de  $\Phi$  calculada no ponto  $\mathbf{x}$ . Dada uma aproximação inicial, o algoritmo que especificaremos calcula sucessivos termos dessa sucessão se o sistema linear (5.43) for equivalente a um outro do tipo referido no enunciado do lema seguinte.

### Lema 5.11 <sup>7</sup>

*Sendo  $E$  a matriz de  $\mathbb{R}^{p \times p}$  com todas as entradas iguais a 1,  $\mathbf{w} \in \mathbb{R}_+^p$  e  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^p$ , a solução do sistema de Cramer:*

$$[E + \text{diag}(\mathbf{w})] \mathbf{y} = \mathbf{b}, \quad (5.44)$$

*é dada por*

$$y_j = \frac{b_j - \sigma}{w_j}, \quad j = 1(1)p, \quad \text{sendo} \quad \sigma = \frac{\sum_{i=1}^p (b_i/w_i)}{1 + \sum_{i=1}^p (1/w_i)} = \sum_{i=1}^p y_i.$$

---

<sup>7</sup>Este lema é inteiramente devido ao Professor Doutor Domingos Cardoso. Ao chamar a atenção para este resultado mostrou que a inversão de matriz necessária em cada iteração do método de Newton-Raphson é feita com os mesmos custos computacionais que a inversão de uma matriz diagonal.

**Prova:**

O sistema em causa pode escrever-se como  $M \mathbf{y} = \mathbf{b}$ , sendo  $M = E + \text{diag}(\mathbf{w})$ . Denotando,

$$\begin{aligned}\mathbf{e} &= [1 \ 1 \ 1 \ \cdots \ 1]^T \in \mathbb{R}^p, \\ D &= \text{diag}(\mathbf{w}),\end{aligned}$$

pode escrever-se:

$$M \mathbf{y} = \mathbf{b} \iff E \mathbf{y} + D \mathbf{y} = \mathbf{b} \iff D \mathbf{y} + \left( \sum_{i=1}^p y_i \right) \mathbf{e} = \mathbf{b}.$$

Definindo  $y_{p+1} = \sum_{i=1}^p y_i$ , o sistema  $M \mathbf{y} = \mathbf{b}$  fica escrito na forma:

$$\begin{cases} D \mathbf{y} + y_{p+1} \mathbf{e} = \mathbf{b} \\ -\mathbf{e}^T \mathbf{y} + y_{p+1} = 0 \end{cases} \iff \begin{bmatrix} D & \mathbf{e} \\ -\mathbf{e}^T & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{y} \\ y_{p+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{b} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Aplicando o método da condensação de Gauss, obtém-se:

$$\begin{bmatrix} D & \mathbf{e} \\ \mathbf{0}^T & 1 + \sum_{i=1}^n (1/w_i) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{y} \\ y_{p+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{b} \\ \sum_{i=1}^n (b_i/w_i) \end{bmatrix}.$$

Por substituição inversa, obtem-se  $\sigma = y_{p+1}$  e as componentes de  $\mathbf{y}$  conforme o enunciado.  $\square$

Em todo o trabalho, os sistemas não lineares a resolver pelo método de Newton têm uma estrutura que leva a que, em cada iteração, seja resolvido um sistema linear do tipo do referido no lema seguinte. É, como vimos, o caso do cálculo da solução de máxima eficiência e também da solução de máxima equidade. Além disso, para o cálculo de cada óptimo de Pareto, os sistemas não lineares a resolver têm a estrutura idêntica ao do sistema não linear resolvido para obtenção da solução de máxima eficiência.

Como já foi dito, os sistemas lineares da classe definida no lema anterior são quase tão fáceis de resolver como um sistema diagonal. Na verdade, o número de operações envolvidas na obtenção da solução é proporcional a  $p$ , sendo  $p$  a ordem da matriz do sistema. Note-se também que se o sistema a resolver é do tipo referido, então esse

sistema fica completamente especificado quando definimos o vector  $\mathbf{w}$  e o vector  $\mathbf{b}$ . Assim, se para cada ponto  $\mathbf{x} \in \mathcal{D}$  for possível obter a transformação:

$$\begin{aligned}\Phi'(\mathbf{x}) &= g(\mathbf{x}) [E + \text{diag}(\mathbf{w})], \\ \mathbf{w} &\in \mathbb{R}_+^n, \\ g(\mathbf{x}) &\neq 0,\end{aligned}$$

teremos o seguinte sistema equivalente a (5.43):

$$[E + \text{diag}(\mathbf{w})] \mathbf{y} = \mathbf{b}, \quad \text{sendo} \quad \mathbf{b} = -\frac{1}{g(\mathbf{x})} \Phi(\mathbf{x}).$$

Nessas condições o Algoritmo 5.2 calcula sucessivos termos de uma sucessão de Newton-Raphson para  $\Phi(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$  e, em caso de convergência<sup>8</sup>, calcula uma aproximação arbitrariamente precisa do zero de  $\Phi$ .

---

<sup>8</sup>O método de Newton define em cada iteração uma direcção. Para assegurar a convergência basta definir o passo a dar nessas direcções (ver [20]).

**Algoritmo 5.2 (Resolução dos sistemas de equações não lineares)**

Método de Newton-Raphson: O sistema não linear é da forma descrita neste apêndice. Nos dados de entrada figuram as funções  $\mathbf{f}_w$  e  $\mathbf{f}_b$  como argumentos procedurais, que permitem definir o sistema linear a resolver em cada iteração (resolvido pelo processo estabelecido no Lema 5.11). A sucessão de Newton-Raphson é calculada na linha 10. Quando a norma do vector  $\mathbf{y}$  (diferença entre aproximações sucessivas) é inferior a  $\epsilon \|\mathbf{x}\|$ , sendo  $\mathbf{x}$  a aproximação corrente, satisfaz-se o critério de paragem.

---

**Input:** Ordem do sistema  $p \geq 2$ ; Parâmetro  $\kappa$ ; Vector tráfegos oferecidos  $\mathbf{a}$ ; Aprox. inicial  $\mathbf{x}^{(0)}$ ; Funções  $\mathbf{f}_w$  e  $\mathbf{f}_b$ ; Parâmetro de precisão  $\epsilon$ ;

```

    begin
1.       $\mathbf{x} \leftarrow \mathbf{x}^{(0)}$ ;
        repeat
2.       $\mathbf{w} \leftarrow \mathbf{f}_w(\mathbf{a}, \mathbf{x}, \kappa, p)$ ;
3.       $\mathbf{b} \leftarrow \mathbf{f}_b(\mathbf{a}, \mathbf{x}, \kappa, p)$ ;
4.       $\sigma_1 \leftarrow 0$ ;
5.       $\sigma_2 \leftarrow 0$ ;
6.      for  $i \leftarrow 1$  to  $p$  do  $\sigma_1 \leftarrow b_i/w_i$ ;
7.      for  $i \leftarrow 1$  to  $p$  do  $\sigma_2 \leftarrow 1/w_i$ ;
8.       $\sigma \leftarrow \sigma_1/(1 + \sigma_2)$ ;
9.      for  $i \leftarrow 1$  to  $p$  do  $y_i \leftarrow (b_j - \sigma)/w_j$ ;
10.     for  $i \leftarrow 1$  to  $p$  do  $x_i \leftarrow x_i + y_i$ ;
        until  $(\|\mathbf{y}\|/\|\mathbf{x}\| < \epsilon)$ ;
11.      $\check{\mathbf{x}} \leftarrow \mathbf{x}$ ;
    end;

```

**Output:**  $\check{\mathbf{x}}$  — solução aprox. do sistema não linear;

---

## 5.B Classificação das Formas Quadráticas

Neste apêndice incluem-se dois lemas auxiliares que permitem classificar as formas quadráticas associadas às matrizes Hessianas referidas neste capítulo.

### Lema 5.12

*Sendo  $E$  a matriz de  $\mathbb{R}^{p \times p}$  com todas as entradas iguais a 1, a matriz  $B = \gamma E \in \mathbb{R}^{p \times p}$  com  $\gamma \geq 0$ , é semidefinida positiva.*

#### Prova:

A matriz  $B$  é uma matriz com todas as entradas iguais a  $\gamma \geq 0$ . Se  $\gamma = 0$ , então a matriz  $B$  é a matriz nula, e pela definição se verifica que é semidefinida positiva:

$$\mathbf{x}^T B \mathbf{x} \geq 0, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^p.$$

Analise-se agora o caso em que  $\gamma > 0$ .

- Critério da cadeia de determinantes (Sylvester). Sejam  $D_k$ ,  $k = 1(1)p$  os menores principais de  $B$ . É imediato que  $D_1 = \gamma > 0$  e que  $D_k = 0$ ,  $k = 2(1)p$ , pelo que  $B$  é semidefinida positiva.
- Critério dos valores próprios. Note que  $\text{rank}(B) = 1$  pelo que  $B$  tem valor próprio  $\lambda = 0$  com multiplicidade  $p - 1$ . Dos  $p$  valores próprios, só fica por calcular um deles que designamos por  $\lambda_p$ . Por outro lado, a soma dos valores próprios é igual ao traço da matriz:

$$\sum_{j=1}^p \lambda_j = \lambda_p = \sum_{j=1}^p \gamma = p\gamma.$$

Se  $\gamma > 0$ , então  $B$  tem um valor próprio estritamente positivo e os restantes nulos, pelo que  $B$  é semidefinida positiva.

□



**Lema 5.13**

Seja  $E$  a matriz de  $\mathbb{R}^{p \times p}$  com todas as entradas iguais a 1 e  $\mathbf{w} \in \mathbb{R}_+^p$ , a matriz

$$H_p = E + \text{diag}(\mathbf{w}),$$

é definida positiva.

**Prova:**

Usamos o critério de Sylvester. Provaremos que todos os menores principais da matriz  $H_p$  são estritamente positivos. A prova faz-se por indução sobre  $p$ . Note inicialmente que:

$$\det(H_1) = 1 + w_1 > 0 \quad \text{e que} \quad \det(H_2) = (1 + w_1)(1 + w_2) - 1 > 0.$$

Admita-se como hipótese de indução que  $\det(H_k) > 0$  para um número natural  $k$  genérico. Como,

$$\det(H_{k+1}) = \begin{vmatrix} 1 + w_1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 + w_2 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 + w_3 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 + w_k & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 + w_{k+1} \end{vmatrix},$$

somando à última linha o simétrico da penúltima, obtemos:

$$\det(H_{k+1}) = \begin{vmatrix} 1 + w_1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 + w_2 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 + w_3 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 + w_k & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -w_k & w_{k+1} \end{vmatrix}.$$

Usando o Teorema de Laplace na última linha, obtemos:

$$\det(H_{k+1}) = w_{k+1} \det(H_k) + w_k \det(A),$$

sendo:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 + w_1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 + w_2 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 + w_3 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 + w_{k-1} & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Somando a todas as colunas o simétrico da última:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} w_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & w_2 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & w_3 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & w_{k-1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Pelo Teorema de Laplace na última linha:

$$\det(A) = \prod_{j=1}^{k-1} w_j,$$

resultando que:

$$\det(H_{k+1}) = w_{k+1} \det(H_k) + \prod_{j=1}^k w_j.$$

Tendo-se  $\det(H_k) > 0$ , pela hipótese de indução, resulta que  $\det(H_{k+1}) > 0$ . Este facto implica que todos os menores principais de  $H_p$  são estritamente positivos, pelo que a matriz  $H_p$  é definida positiva para todo o  $p \in \mathbb{N}$ .  $\square$

## 5.C Gama Típica dos Dados do Problema

Neste apêndice faremos algumas considerações de ordem prática, tendo em vista a aplicação do modelo de afectação de recursos bicritério entre grupos de Erlang-B no contexto da optimização de sistemas e redes de teletráfego. O objectivo da discussão

é chamar a atenção para a gama típica dos dados normalmente encontrados nessas aplicações. Os dados do problema são, como vimos

$$\begin{aligned} n + 1 &\equiv \text{N.º de grupos de Erlang-B;} \\ \kappa &\equiv \text{Total de capacidade de canal a alocar;} \\ \mathbf{a} &\equiv \text{Vector de tráfegos oferecidos.} \end{aligned}$$

Inicialmente, note-se que em situações práticas um tráfego de Poisson de média  $a = 0.01$  oferecido separadamente a um grupo é já uma situação muito pouco típica. Pelo que imporemos para a gama típica dos parâmetros a primeira desigualdade:

$$a_j > 0.01, \quad j = 1(1)n + 1. \quad (5.45)$$

Vamos agora verificar que é bastante razoável admitir que em situações reais se tenha

$$\kappa > n + 1. \quad (5.46)$$

Analisemos o caso  $\kappa = n + 1$ , para verificar que é uma situação muito pouco típica. Nessa hipótese, é fácil de verificar que há uma solução admissível do problema que é  $\mathbf{x} = [1 \ 1 \ \cdots \ 1]^T$ , sendo as restantes caracterizadas por terem pelo menos um grupo ao qual está atribuído menos de um circuito. Se os grupos de Erlang-B teoricamente definidos correspondem a grupos físicos a implementar, essas soluções não têm sentido pois não tem sentido um canal físico com menos de um circuito. Se os grupos de Erlang-B que definimos correspondem a grupos fictícios no contexto da análise de um sistema real, então a situação é muito pouco típica. Na verdade, basta analisar um grupo de Erlang-B com um só circuito para verificar isso. O bloqueio é neste caso calculado exactamente em termos do tráfego oferecido:

$$B(a, 1) = \frac{a}{1 + a}. \quad (5.47)$$

Em situações típicas a probabilidade de bloqueio não deve exceder a ordem de 0.01, pelo que o valor de  $a$  teria de ser também de ordem inferior a 0.01 (que é um tráfego oferecido muito baixo). Concluindo-se que é bastante razoável admitir (5.46).

Por considerações análogas, também é bastante razoável impor que

$$\alpha < 5000 \implies \kappa > \alpha = \sum_{j=1}^{n+1} a_j. \quad (5.48)$$

Analisemos o caso  $k = \alpha$ . Temos uma solução admissível que é dada pela *regra da proporção*:

$$\bar{x}_j = \frac{a_j}{\alpha} \kappa, \quad j = 1(1)n + 1, \quad (5.49)$$

sendo as restantes soluções admissíveis caracterizadas por haver pelo menos um grupo  $i$  tal que  $x_i < a_i$ . Qualquer que seja a solução, o sistema  $S_{n+1}$  tem sempre um grupo tal que  $x_j \leq a_j$ . Por tabelas da função de Erlang-B se verifica que esse grupo terá sempre um bloqueio superior a 0.01 a menos que  $a$  e  $x$  sejam pelo menos da ordem dos milhares. Na verdade, se  $a = x \leq 5000$  então  $B(a, x) > 0.01$ . Sem usar tabelas, pode chegar-se a conclusões análogas, usando a expressão assintótica da função de Erlang-B para  $a = x$  obtida por D. L. Jagerman [11, pag.540]:

$$B(z, z) \approx \left( \sqrt{\frac{\pi z}{2}} + \frac{2}{3} + \frac{1}{12} + \sqrt{\frac{\pi}{2z}} \right)^{-1}.$$

Note-se que, se  $z = 5000$ , então  $B(z, z) \approx 0.0112$ . Assim, a menos que  $\alpha$  e  $\kappa$  sejam da ordem dos milhares, é razoável impor a condição (5.48) para garantir que o sistema  $S_{n+1}$  apresente uma qualidade de serviço aceitável. Estas considerações são confirmadas por numerosas experiências numéricas efectuadas. Essas experiências mostram até que a situação é muito pior do que a análise feita mostra, quando estamos na solução de máxima eficiência. Nessa solução surgem grupos com bloqueios muito elevados se não se cumpre (5.48).

É claro que também terá algum interesse analisar sistemas em regime de sobrecarga, mas mesmo nesses casos esse regime corresponde normalmente a bloqueios que não excedem muito 10%. As considerações feitas indicam que mesmo em sistemas em regime de sobrecarga,  $\kappa$  não deve ser muito inferior a  $\alpha$ .

# Referências do Capítulo 5

- [1] A. Arel. Convexity properties of the Erlang loss formula. *Operations Research*, 38(3):499–505, May-June 1990.
- [2] H. P. Benson. Vector maximization with two objective functions. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 28(2):253–257, 1979.
- [3] S. A. Berezner and A. E. Krzesinski P. G. Taylor. On the inverse of Erlang’s function. *Journal of Applied Probability*, 35:246–252, 1998.
- [4] R. Cooper. *Introduction to Queueing Theory*. North Holland, 1981.
- [5] A. K. Erlang. Solution of some problems in the theory of probabilities of significance in automatic telephone exchanges. (*Danish*) *Elektroteknikerens [English Translation in the P. O. Elect. Engrs. Journal 10, 1917–1918, 189–197]*, 13:5–28, 1917.
- [6] Jorge Sá Esteves. Relatório ROUTING-03 — Alocação de Recursos em Sistemas de Tráfego. Unpublished Research Report, Dezembro 1992.
- [7] Jorge Sá Esteves, J. Craveirinha, and D. Cardoso. A bicriterion resource allocation approach for an Erlang-B teletraffic system. Talk for the XIth MCDM — Int. Conference on Multiple Criteria Decision Making (Coimbra), August 1994.
- [8] Jorge Sá Esteves, J. Craveirinha, and D. Cardoso. Computing Erlang-B function derivatives in the number of servers — a generalized recursion. *ORSA Communications in Statistics, Stochastic Models*, 11(2):311–331, 1995.

- [9] Jorge Sá Esteves, J. Craveirinha, and D. Cardoso. A Newton-Raphson approach to a server allocation problem for an Erlang loss system. Talk for the APMOD'95 — Applied Mathematical Programming and Modelling, University of West London, United Kingdom, April 1995.
- [10] Jorge Sá Esteves, J. Craveirinha, and D. Cardoso. A reduced recursion for computing Erlang-B function derivatives. In V. Ramaswami and P. E. Wirth (AT&T), editors, *Proceedings of the 15th International Teletraffic Congress, Washington D.C., USA*, number 2 Teletraffic Contributions for the Information Age in Teletraffic Science and Engineering, pages 1315–1326, Boston, June 1997. Elsevier Science B. V.
- [11] D. L. Jagerman. Some properties of the Erlang loss function. *The Bell System Technical Journal*, 53(3):525–551, 1974.
- [12] D. L. Jagerman. Methods in traffic calculations. *The Bell System Technical Journal*, 63(7):1283–1310, September 1984.
- [13] A. A. Jagers and E. A. Van Dorn. On the continued Erlang loss function. *Operations Research Letters*, 5(1):43–46, June 1986.
- [14] J. Kubasik. On some numerical methods for the computation of Erlang and Engset functions. In *Proc. 11th Int. Telet. Cong.*, Kyoto, 1985.
- [15] M. T. Marsh and D. A. Schilling. Foundations of equity measurement in facility siting locations. *Studies in Locational Analysis*, 4:207–211, 1993.
- [16] E. J. Messerli. Proof of a convexity property of the Erlang-B formula. *The Bell System Technical Journal*, 51:951–953, 1972.
- [17] A. L. Peressini, F. E. Sullivan, and J. J. Uhl Jr. *The Mathematics of Nonlinear Programming*. Springer, 1980.
- [18] S. Sadagopan and A. Ravidran. Iterative solution of bi-criteria mathematical programs. *Naval Research Logistics Quarterly*, 29(3):443–459, 1982.

- [19] D. R. Smith and W. Whitt. Resource sharing for efficiency in traffic systems. *The Bell System Technical Journal*, 60(1):39–55, January 1981.
- [20] J. L. Soares. Métodos de Newton para otimização com restrições simples. Provas de aptidão pedagógica e capacidade científica, Universidade de Coimbra, F.C.T.U.C., 1993.
- [21] R. Sysky. *Congestion Theory in Telephone Systems*. Oliver and Boyd, 1960.
- [22] G. R. Walsh. *Methods of Optimization*. John Wiley & Sons, 1979.





# Capítulo 6

## Conclusões

Neste capítulo deixamos algumas notas finais que procuram situar o estado em que se encontra o nosso trabalho de investigação. Essa discussão traça a fronteira do campo do “já conseguido” para a vastidão da área “por conseguir.” Melhor dizendo, procederemos a uma síntese final referindo as principais contribuições da dissertação e, por último, apontaremos questões que ficam em aberto e que merecerão novos esforços em trabalho futuro.

### 6.1 Síntese das Principais Contribuições da Dissertação

As contribuições do trabalho que conduziu a esta dissertação podem inserir-se todas no campo das propriedades analíticas e numéricas do modelo de Erlang-B em equilíbrio estatístico. Todavia, para efeitos de enumeração das contribuições consideradas principais, podemos subdividi-las agrupando-as em três classes: algoritmos numéricos fundamentais, propriedades analíticas fundamentais e otimização do modelo multidimensional.

**Algoritmos Numéricos Fundamentais:**

- O Algoritmo baseado no *Método da Recursão Completa Generalizada* (Capítulo 2), para o cálculo das derivadas parciais de ordem  $n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) da função de Erlang-B na variável número de servidores, aplicável em toda a gama  $(a, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ . Deve referir-se que o algoritmo é proposto não só com todos os pormenores de implementação estabelecidos na forma da sua especificação em pseudo-código, mas também sustentado pela análise da sua consistência analítica e com uma análise do erro propagado pelo processo recursivo de cálculo a partir das condições iniciais. Esta última análise permite estabelecer a robustez do método perante os inevitáveis erros associados no cálculo, ou seja, estabelecer a *estabilidade numérica da recursão*.
- O Algoritmo baseado no *Método da Recursão Reduzida* (Capítulo 3), para o cálculo da função de Erlang-B e das derivadas parciais de primeira e segunda ordem na variável número de servidores, especialmente importante quando aplicado a *grandes grupos de Erlang-B*. Convém frisar, que o algoritmo é sustentado por uma análise de *consistência analítica* e de *estabilidade numérica* que permitem ao utilizador prescrever a precisão desejada no cálculo. A eficiência do algoritmo é notável (mesmo para valores muito elevados dos argumentos), conforme foi mostrado através de uma extensa experimentação computacional.

**Propriedades Analíticas Fundamentais:**

- O teorema que estabelece o sinal das derivadas parciais de segunda ordem da função tráfego de transbordo de um sistema de Erlang-B em equilíbrio estatístico a que se dedica o Capítulo 4. Estabeleceu-se assim a convexidade estrita de  $\hat{A}(a, x)$  nas variáveis  $x$  e  $a$ , resultado com implicações importantes em problemas de optimização. Com efeito, sendo o tráfego de transbordo uma quantidade a minimizar em muitas formulações em que há que optimizar o desempenho dos sistemas em termos de eficiência, estas propriedades

de convexidade são de grande importância. Na verdade, como já foi referido, uma função estritamente convexa tem um único mínimo, pelo que o cálculo de um mínimo local obtém o mínimo global. Além destas propriedades, o sinal negativo das derivadas rectangulares de segunda ordem  $\widehat{A}_{ax}''(a, x) = \widehat{A}_{xa}''(a, x)$  estabelece uma propriedade do sistema de Erlang-B com eventual interesse independente. A seguinte interpretação é imediata: A derivada  $\widehat{A}'_a(a, x)$  sabe-se que é positiva, mas agora sabemos que decresce na variável  $x$ ; Da mesma forma, a função derivada  $\widehat{A}'_x(a, x)$  sabe-se que é negativa, mas agora sabemos que decresce na variável  $a$ . Assim, este resultado permite alargar o conhecimento que tínhamos da monotonia do tráfego de transbordo  $\widehat{A}(a, x)$  nas variáveis  $a$  e  $x$ . Finalmente, a conjectura da convexidade estrita conjunta de  $\widehat{A}(a, x)$  no aberto convexo definido pela condição do *tráfego oferecido standard* ser inferior a  $-1$ , é conseguida pelo facto de dispormos dos algoritmos estabelecidos nos Capítulos 2 e 3 (surge como uma evidência numérica após computação massiva).

- As *Propriedades de Eficácia/Eficiência dos Grandes Grupos* permitem provar não só uma propriedade muito conhecida, mas sem demonstração como estabelecer outros enunciados. Estes resultados além de serem importantes na análise dos sistemas com perda são também relevantes em optimização, nomeadamente para estabelecer o conflito entre os objectivos do problema de alocação bicritério definido.

### Optimização do Modelo Multidimensional:

- A formulação do problema bicritério estudado, com as duas funções objectivo referentes aos critérios *Equidade* e *Eficiência*. Apontamos esta formulação como uma das contribuições do trabalho que conduziu a esta dissertação, pois foi com base na dita formulação que surgiram os problemas analíticos e numéricos que depois analisámos.
- A caracterização das soluções de máxima eficiência e de máxima equidade (conseguida usando a convexidade estrita na variável  $x$  estabelecida no

Capítulo 4), e o seu cálculo numérico recorrendo ao método de Newton (conseguido usando os algoritmos de cálculo de  $B$ ,  $B'_x$  e  $B''_{xx}$  estabelecidos nos Capítulos 2 e 3).

- A prova do conflito entre os dois objectivos recorrendo às *Propriedades de Eficácia/Eficiência dos Grandes Grupos*.
- A formulação monocritério do problema usando a linearização das restrições por inversão da função de Erlang-B, assim como a correspondente aplicação do algoritmo de Newton baseado na propriedade de “*monotonia das restrições activas*”. Esta metodologia permite percorrer o conjunto de soluções não dominadas (“*travelling on  $\mathcal{N}$* ”), tabelando os óptimos de Pareto do problema.

## 6.2 Áreas de Trabalho Futuro

Procuraremos agora analisar questões em aberto suscitadas por este trabalho, propondo em simultâneo possíveis temas para desenvolvimento futuro.

### 6.2.1 Ainda o Sistema de Erlang-B

No que diz respeito ao modelo de Erlang-B, estaremos atentos a possíveis desenvolvimentos no que toca ao estabelecimento de novas propriedades e também a algoritmos numéricos — o presente trabalho mostra que esse modelo se pode revelar terreno fértil. Observe-se que os ditos desenvolvimentos surgem normalmente na forma de novas questões que são suscitadas no âmbito do estudo de problemas de optimização que possam surgir.

Ainda no contexto dos sistemas multidimensionais de Erlang-B, será interessante investigar a formulação seguinte de um problema de partilha de carga:

**Problema 6.1** (“Partilha de Carga Bicritério num Sistema de Erlang-B”)

Dados  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\alpha, \kappa \in \mathbb{R}_+$  e um vector  $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n]^T \in \mathbb{R}_\oplus^n$  tal que:

$$x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_n \geq \kappa - \sum_{j=1}^n x_j \geq 0,$$

calcule o conjunto de soluções óptimas de Pareto do seguinte programa:

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{a}} \quad & \widehat{L}(\mathbf{a}) \equiv \sum_{j=1}^n \widehat{A}(a_j, x_j) + \widehat{A}\left(\alpha - \sum_{j=1}^n a_j, \kappa - \sum_{j=1}^n x_j\right) \\ \min_{\mathbf{a}} \quad & \overline{L}(\mathbf{a}) \equiv \max \left\{ B(a_1, x_1), \dots, B(a_n, x_n), B\left(\alpha - \sum_{j=1}^n a_j, \kappa - \sum_{j=1}^n x_j\right) \right\} \\ \text{s.a.} \quad & \sum_{j=1}^n a_j < \alpha; \\ & a_j > 0, \quad j = 1(1)n. \end{aligned}$$

onde o vector de decisão é  $\mathbf{a} = [a_1, a_2, \dots, a_n]^T \in \mathbb{R}_+^n$ .

Efectivamente, bastante trabalho preparatório foi já feito. O algoritmo de cálculo de  $B(a, x)$  baseado no Método da Recursão Reduzida, permite calcular de forma eficiente os valores de  $B'_a(a, x)$  e  $B''_{aa}(a, x)$  eventualmente necessários para calcular o mínimo da primeira função objectivo (mesmo no caso em que os argumentos são de elevada ordem de grandeza). Por outro lado, a convexidade estrita dessa primeira função objectivo deduz-se facilmente a partir do sinal de  $\widehat{A}''_{aa}(a, x)$ , estabelecido no Capítulo 4. Já no que toca à segunda função objectivo, é fácil de concluir que o seu mínimo corresponde a uma situação de igualdade de bloqueios, usando um processo de prova análogo ao usado no problema de afectação de servidores. O conflito entre as duas funções objectivo pode deduzir-se também a partir de propriedades de eficácia de grandes grupos.

### 6.2.2 Incursões na Teoria/Algoritmos Sobre Funções Especiais

Em termos de investigação fundamental (sem ter em conta as aplicações a sistemas de teletráfego), achamos de interesse o estudo das relações da função de Erlang-B com

outras funções especiais. Como já foi dito, a extensão analítica de R. Fortet para a função de Erlang-B insere esta função na classe das funções especiais como uma função transcendente não elementar (“*high transcendental function*”). Com efeito, a função  $B(a, x)$  está intimamente relacionada com outras funções especiais genéricas bem conhecidas, com vasto interesse nas aplicações e extensivamente estudadas na literatura. Para revelar essas relações, relembramos agora a definição das seguintes funções:

- Função gama [1, pag.255]:

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{\alpha-1} dt; \quad (6.1)$$

- Função gama incompleta [4, pag.1285]:

$$\Gamma(\alpha, \beta) = \int_{\beta}^{+\infty} e^{-t} t^{\alpha-1} dt; \quad (6.2)$$

- Função de probabilidade  $\chi^2$  (“*Chi-square*”) [1, pag.940]:

$$Q(\chi^2 | \nu) = [2^{\nu/2} \Gamma(\nu/2)]^{-1} \int_{\chi^2}^{+\infty} e^{-t/2} (t)^{\nu/2-1} dt; \quad (6.3)$$

- Funções de Whittaker [3, pag.534]:

$$W_{k,m}(a) = \frac{e^{-a/2} a^k}{\Gamma(1/2 - k + m)} \int_0^{+\infty} e^{-t} \left(1 + \frac{t}{a}\right)^{k-1/2+m} t^{-k-1/2+m} dt; \quad (6.4)$$

- Funções de confluência hipergeométrica de Kummer [1, pag.505]:

$$U(u, v, w) = \frac{1}{\Gamma(u)} \int_0^{+\infty} e^{-wt} t^{u-1} (1+t)^{v-u-1} dt. \quad (6.5)$$

Facilmente se obtêm as relações:

$$B(a, x)^{-1} = a^{-x} e^a \Gamma(x+1, a); \quad (6.6)$$

$$B(a, x)^{-1} = a^{-x} e^a \Gamma(x+1) Q(2a | 2(x+1)), \quad (6.7)$$

$$B(a, x)^{-1} = a^{-x/2} e^{a/2} W_{x/2, (x+1)/2}(a); \quad (6.8)$$

$$B(a, x)^{-1} = a U(1, x+2, a). \quad (6.9)$$

Por (6.6), (6.7), (6.8) e (6.9) temos a função de Erlang-B relacionada com a função gama incompleta, com a função de probabilidade  $\chi^2$  (“*chi-square*”), com as funções de Whittaker e com as funções de confluência hipergeométrica de Kummer. Tendo em conta estas relações é fácil de concluir que novos resultados analíticos e de cálculo numérico para  $B(a, x)$  terão potencialmente um interesse independente e alargado na área das funções especiais e suas aplicações. Assim, os resultados do presente trabalho não devem ser entendidos apenas como resultados muito particulares obtidos para sistemas de Erlang-B mas também tendo interesse potencial no estudo de outras funções especiais e suas aplicações.

Especialmente interessante é a definição de algoritmos de cálculo das funções especiais atrás referidas (assim como das suas derivadas), baseados nos algoritmos definidos nos Capítulos 2 e 3. Refira-se, a propósito, que tem havido intensa actividade no que toca à publicação de novos algoritmos nessas áreas em revistas da especialidade.

Adicionalmente, é fácil de verificar que  $B(a, x)$  está relacionada com transformações integrais bem conhecidas. Para expôr este tópico, relembremos a definição de transformada de Laplace  $F(a)$  de uma função  $f(z)$  (real de variável real):

$$F(a) \equiv \mathcal{L}\{f(z)\} \equiv \int_0^{+\infty} e^{-az} f(z) dz, \quad (6.10)$$

onde  $f(z)$  é uma função de  $z$  definida em  $\mathbb{R}^+$  e onde supomos que a variável  $a \in \mathbb{R}^+$ . Resulta assim da definição das funções  $I_k(a, x)$  que:

$$I_k(a, x) = \mathcal{L}\{(1+z)^x [\ln(1+z)]^k\}, \quad \forall (a, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (6.11)$$

Por outras palavras, podemos dizer que no nosso trabalho estudamos as transformadas de Laplace das funções  $f(z) = (1+z)^x [\ln(1+z)]^k$ . De facto, os algoritmos definidos nos Capítulos 2 e 3 não fazem mais do que obter processos numéricos de cálculo de tais transformadas. Será possível obter processos mais gerais, ou seja, métodos de cálculo numérico de transformadas de outras classes de funções?

Conscientes das dificuldades (uma vez que é um tema extensivamente estudado), entendemos que será alcançável nalguns casos a definição de métodos de cálculo base-

ados em recursões reduzidas.

### 6.2.3 Exploração do Modelo Multidimensional de Erlang-C

No histórico artigo de A. K. Erlang [2] introduz-se não só uma fórmula  $B$  (primeira fórmula para sistemas de perda) mas também a fórmula  $C$  (segunda fórmula para sistemas com fila de espera infinita). Nesta fórmula, a função  $C$  dá a probabilidade de uma solicitação ter de esperar num sistema  $M/M/n(\infty)$ :

$$C(a, n) = \frac{a^n}{n!} \left[ \frac{a^n}{n!} + \left(1 - \frac{a}{n}\right) \sum_{j=0}^{n-1} \frac{a^j}{j!} \right]^{-1}. \quad (6.12)$$

A relação entre  $B(a, n)$  e  $C(a, n)$  é conhecida desde os tempos de A. K. Erlang:

$$C(a, n) = \frac{n}{n - a [1 - B(a, n)]} B(a, n), \quad (6.13)$$

o que permite obter uma extensão analítica da função de Erlang-C usando a extensão analítica de R. Fortet para  $B(a, n)$ . Assim, se  $x \in \mathbb{R}_0^+$ :

$$C(a, x) = \frac{x}{x - a [1 - B(a, x)]} B(a, x), \quad (6.14)$$

sendo  $B(a, x)$  dada pela relação de Fortet. Usando estas relações podem inferir-se propriedades da função  $C(a, x)$  a partir de propriedades analíticas estabelecidas para  $B(a, x)$ . Além disso, os algoritmos de cálculo numérico de  $B(a, x)$  e das suas derivadas podem ser úteis para a definição de algoritmos de cálculo de  $C(a, x)$  e das suas derivadas.

Importa salientar que o modelo de Erlang-C é especialmente interessante, para nós, no contexto de problemas de optimização. Com efeito, os problemas de afectação de servidores e de partilha de carga que definimos, podem facilmente ser formulados no contexto de um *sistema multidimensional de Erlang-C*. A investigação desses dois problemas e das questões analíticas e numéricas que, por certo, serão levantadas afiguram-se muito interessantes e uma vez resolvidas podem estabelecer novas propriedades do modelo base de Erlang-C.



Analogamente ao que foi dito para o caso do modelo multidimensional de Erlang-B, também no contexto dos sistemas de Erlang-C as formulações dos problemas de otimização poderão suscitar uma colecção de questões muito interessantes. Adicionalmente, como o modelo de Erlang-C é um sistema com fila de espera (infinita), é natural que surjam medidas de desempenho relacionadas com a espera nessa fila (por exemplo, o tempo médio de espera na fila). A otimização de tais sistemas terá, necessariamente, de reflectir esses aspectos. Assim, as formulações têm mais variantes e possibilidades<sup>1</sup> que podem ser exploradas na base do “paradigma” multicritério e também dos problemas de decisão que se geram.

#### 6.2.4 Campo Aberto para Sistemas Mais Complexos

O que se disse para sistemas multidimensionais de Erlang-C pode estender-se *mutatis mutandis* para outros *Sistemas de Erlang* baseados em generalizações e fórmulas híbridas, conforme se referiu no Capítulo da Introdução, nomeadamente com tráfego de entrada multiclasse associado a fluxos de chamadas/solicitações com diferentes requisitos, nomeadamente em termos de número de servidores ocupados simultaneamente e de tempos médios de serviço.

Essas variantes podem ser fruto da imaginação de investigadores mais teóricos, mas podem também ser inspiradas pela modelização de novos sistemas de teletráfego no contexto da revolução das Telecomunicações em curso. A estratégia a seguir será a investigação de problemas de partilha de carga e de afectação de servidores no contexto geral dos *Sistemas de Erlang*.

---

<sup>1</sup>Sem entrar em pormenores, note-se que há várias disciplinas da fila possíveis, gerando diferentes variantes nas formulações.

## Referências do Capítulo 6

- [1] M. Abramowitz and I. Stegun. *Handbook of Mathematical Functions*. Dover Publications, 9th edition, 1970.
- [2] A. K. Erlang. Solution of some problems in the theory of probabilities of significance in automatic telephone exchanges. (*Danish*) *Elektroteknikerens* [*English Translation in the P. O. Elect. Engrs. Journal 10, 1917–1918, 189–197*], 13:5–28, 1917.
- [3] D. L. Jagerman. Some properties of the Erlang loss function. *The Bell System Technical Journal*, 53(3):525–551, 1974.
- [4] D. L. Jagerman. Methods in traffic calculations. *The Bell System Technical Journal*, 63(7):1283–1310, September 1984.