



Universidade de Aveiro Departamento de Matemática
2002

**Maria Emília Resende
Silva**

Geometrias Finitas

Dissertação apresentada à Universidade de Aveiro para cumprimento dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre em Matemática, realizada sob a orientação científica do Prof^o Doutor Domenico Antonino Catalano, Professor Auxiliar do Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro.

o júri

presidente

Doutora Ana Maria Reis d´Azevedo Breda, Professora Associada da Universidade de Aveiro.

vogais

Doutor Domenico Antonino Catalano, Professor Auxiliar da Universidade de Aveiro (orientador).

Doutora Ana Maria Almeida Santos Pereira do Vale,
Professora Auxiliar da Escola de Ciências da Universidade do Minho.

agradecimentos

Ao meu orientador, Professor Doutor Domenico Catalano, pela sua orientação científica, apoio e disponibilidade.

A todos os professores do Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro que de alguma forma me apoiaram na parte escolar e na realização deste trabalho, especialmente à Professora Doutora Enide Martins pela leitura e sugestões apresentadas.

Às minhas colegas de Mestrado, Áuria Santos e Iola Mara, pelo saudável espírito com que ultrapassamos a parte escolar.

Aos meus pais e irmão, pelo apoio e carinho oferecidos nos momentos mais difíceis.

À Olívia, pelo grande incentivo e ânimo que sempre me transmitiu.

resumo

Neste trabalho o objectivo principal é fazer um estudo das estruturas de incidência mais tradicionais na geometria finita: o plano afim, o plano projectivo e ainda uma abordagem ao espaço afim e ao espaço projectivo.

Os conceitos introdutórios serão apresentados no primeiro capítulo.

No segundo capítulo exibimos alguns resultados que caracterizam o plano afim e projectivo. Mostramos que todo o plano afim se pode obter de um plano projectivo e reciprocamente. Mostramos também que a existência de um plano afim (projectivo) de ordem n equivale à existência de um conjunto completo de quadrados latinos de ordem n . Estudamos alguns tipos de colineações do plano afim e projectivo, dando no plano projectivo uma maior importância às (C,I) -colineações, visto que a partir destas podemos construir algumas configurações, nomeadamente a configuração de Desargues. Mostramos que todo o plano projectivo finito admite várias configurações de Desargues mas, no entanto, nem todo o plano projectivo finito é um plano de Desargues. Finalmente fazemos uma abordagem ao plano de Möbius, no sentido de dar mais um exemplo de uma estrutura de incidência.

No terceiro capítulo abordamos o plano projectivo e afim em termos algébricos. Introduzimos coordenadas nestas estruturas de incidência por dois processos diferentes. Mostramos que a partir de um corpo finito podemos obter um plano projectivo (afim) finito de Desargues e reciprocamente. Mostramos ainda que todo o plano projectivo de Pappus é um plano de Desargues, sendo o recíproco verdadeiro só no caso finito.

No quarto capítulo fazemos um pequeno estudo do espaço projectivo e afim, que será visto como um espaço projectivo sem um hiperplano. Mostramos que, sendo \mathbf{S} um espaço projectivo de dimensão $d \geq 3$, \mathbf{S} é um espaço projectivo de Desargues e todo o plano do espaço afim $\mathbf{S}H$, onde H é um hiperplano de \mathbf{S} , é um plano de Desargues.

abstract

The main aim of this work is to study more traditional incidence structures in finite geometry: the affine plane, the projective plane, and the affine and projective spaces.

The introductory concepts will be presented in the first chapter.

In the second chapter, some results that characterize the affine plane and the projective plane will be shown. It will be demonstrated that every affine plane can be obtained from a projective plane and vice-versa. It will also be demonstrated that the existence of an affine (projective) plane of order n is equivalent to the existence of a complete set of latin squares of order n . Several types of collineations of affine and projective planes will be studied, with a higher importance given in the projective plane to (C, I) -collineations, since they generate some configurations, for instance Desargues configuration. It will also be demonstrated that every finite projective plane allows several Desargues configurations, but not all finite projective planes are Desarguesian planes. Finally, the Möbius plane is analysed, to show yet another example of an incidence structure.

In the third chapter, the projective and affine plane is analysed in algebraic terms. Coordinates are introduced in these incidences structure through two different processes. It will be shown that starting from a finite field it is possible to obtain a finite Desarguesian projective (affine) plane and vice-versa, and that every Pappian projective plane is a Desarguesian plane, while the opposite is true only in the finite case.

In the fourth chapter, we will give a small study of the projective and affine space that will be considered as a projective space less a hyperplane. It will be demonstrated that being \mathbf{S} a projective space with dimension $d \geq 3$, \mathbf{S} is a Desarguesian projective space and that every plane of an affine space $\mathbf{S} \setminus \mathbf{H}$, where \mathbf{H} is a hyperplane of \mathbf{S} , is a Desarguesian plane.

Índice

Introdução	iii
1 Estruturas de incidência	1
1.1 Princípio de dualidade	2
1.2 Isomorfismos entre estruturas de incidência	3
1.3 Espaços lineares	4
1.3.1 Dimensão de um espaço linear	4
2 Plano afim, plano projectivo e plano de Möbius	9
2.1 Plano afim	9
2.1.1 Paralelismo	11
2.1.2 Dimensão de um plano afim	11
2.1.3 Ordem de um plano afim finito	11
2.1.4 Colineações em planos afins	15
2.1.5 Quadrados latinos	20
2.2 Plano projectivo	26
2.2.1 Dimensão de um plano projectivo	27
2.2.2 Ordem de um plano projectivo finito	29
2.2.3 Subplanos	30
2.2.4 Colineações em planos projectivos	32
2.2.5 Obtenção de um plano afim a partir de um plano projectivo e reciprocamente	42
2.2.6 Configuração de Desargues	45
2.3 Plano de Möbius	54
2.3.1 Obtenção de um plano afim a partir de um plano de Möbius	56
2.3.2 Ordem de um plano de Möbius finito	56
3 Introdução de coordenadas	61
3.1 Introdução de coordenadas num plano projectivo	61
3.1.1 Método de Marshall Hall	61
3.1.2 Configuração de Pappus	72
3.1.3 Introdução de coordenadas a partir de um espaço vectorial sobre um anel de divisão \mathbb{K}	74
3.2 Introdução de coordenadas num plano afim	77
3.2.1 Método de Marshall Hall	77
3.2.2 Introdução de coordenadas a partir de um anel de divisão	80

4	Espaço projectivo e espaço afim	83
4.1	Espaço projectivo	83
4.1.1	Planos num espaço projectivo	84
4.1.2	Hiperplanos de um espaço projectivo	88
4.1.3	Espaço projectivo finito	89
4.1.4	Espaço projectivo de Desargues	90
4.2	Espaço afim	91
4.2.1	Espaço afim finito	92
4.2.2	Planos de um espaço afim	93
A	Corpos finitos	97
B	Unicidade (a menos de isomorfismo) de planos afins e projectivos de ordem 2 e de ordem 3	99
B.1	Existe um único plano afim \mathcal{A} de ordem 2	99
B.2	Existe um único plano afim \mathcal{A} de ordem 3 (a menos de isomorfismo)	99
B.3	Existe um único plano projectivo de ordem 2, de ordem 3 e de ordem 4 (a menos de isomorfismo)	101
	Bibliografia	103

Introdução

No século XIX os matemáticos confrontaram-se com a questão dos fundamentos da Matemática. Tentaram ajustar algumas disciplinas para examinar e fortalecer a base axiomática da Matemática. Uma dessas disciplinas era a geometria, que tinha alcançado o seu topo no início deste século e tinha sido considerada como um modelo para a axiomática. Após Euclides, um dos primeiros matemáticos a axiomatizar a geometria foi Hilbert. Convém notar que alguns matemáticos não consideram a geometria como uma área da Matemática, mas mais como um modo de ver a Matemática. Efectivamente, a definição de geometria actual afasta-se muito do conceito tradicional. A definição actual generaliza os significados de termos como ponto, recta, plano, etc., que aparecem na geometria tradicional, a geometria euclidiana, de modo a poderem ser adaptados a estruturas abstractas que podem ser consideradas como geométricas. Passaremos então a apresentar a definição actual de geometria.

Uma pré-geometria é um conjunto \mathbf{X} com um par $(\mathcal{P}, \mathcal{I})$, onde \mathcal{P} é uma partição de \mathbf{X} e \mathcal{I} é uma relação simétrica em \mathbf{X} tal que, para todo o $A \in \mathcal{P}$, $(A \times A) \cap \mathcal{I} = \emptyset$.

Se $\mathcal{P} = \{\mathbf{X}_\alpha\}$ e $x \in \mathbf{X}_\alpha$ dizemos que x é um elemento de \mathbf{X} do tipo α . Assim, por definição de pré-geometria, dois elementos do mesmo tipo não estão em relação. Se dois elementos (de tipo diferentes) estão em relação dizemos que são incidentes.

Uma geometria é uma pré-geometria onde todo o elemento é incidente com pelo menos um elemento de cada tipo (diferente do tipo desse elemento). Notemos que na geometria tradicional os tipos de elementos que temos são pontos, rectas, planos, etc., e a incidência é dada pela relação de pertença. No caso em que \mathbf{X} é um conjunto finito dizemos que a geometria é finita.

A geometria finita pode ser incluída em diversas áreas, entre as quais temos a Combinatória. Após 1935, as necessidades estatísticas conduziram a um desenvolvimento combinatorial e geométrico dos chamados *block designs* que generalizam principalmente o plano projectivo, mas também o espaço projectivo finito e o espaço afim finito.

Em 1968, Peter Dembowski [5] no seu livro intitulado *Finite Geometries* reúne resultados sobre geometrias finitas, o que veio estimular os matemáticos interessados nesta área. Alguns dos novos resultados encontram-se no livro *Handbook of Incidence Geometry* [4].

O tema desta dissertação, Geometrias Finitas, é muito vasto e, claro, impossível de ser tratado na sua totalidade. Assim, o que nos propomos fazer é estudar as geometrias finitas mais clássicas. Estudaremos então o plano afim finito, o plano projectivo finito, o espaço projectivo finito e o espaço afim finito (visto como um espaço projectivo sem um hiperplano), que são geometrias finitas com apenas dois tipos de elementos e a relação de incidência é a relação de pertença usual. Estas geometrias também são designadas por estruturas de incidência.

Capítulo 1

Estruturas de incidência

Uma **estrutura de incidência** é um terno $\mathbf{S} = (\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$ de conjuntos tais que

$$\mathcal{P} \cap \mathcal{L} = \emptyset \quad \text{e} \quad \mathcal{I} \subseteq \mathcal{P} \times \mathcal{L}.$$

Aos elementos de \mathcal{P} chamamos **pontos de S** e aos elementos de \mathcal{L} chamamos **blocos de S**. Pontos e blocos são objectos distintos. \mathcal{I} é uma relação entre os elementos de \mathcal{P} e os elementos de \mathcal{L} , chamada **relação de incidência** entre pontos e blocos.

De um modo geral, usaremos a notação A, B, C, \dots (possivelmente com índices) para pontos e l, m, r, s, \dots (possivelmente com índices) para blocos. Se $(P, l) \in \mathcal{I}$, dizemos que P e l são **incidentes**, ou que P **pertence a** l , ou que l **passa por** P , ou que l **contém** P e escrevemos $P \mathcal{I} l$.

Exemplos.

1.

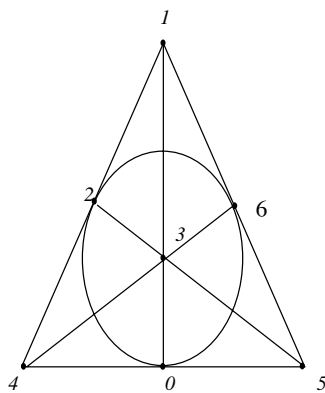


FIGURA 1

Consideremos os conjuntos

$$\mathcal{P} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

e

$$\mathcal{L} = \{\{1, 2, 4\}, \{0, 1, 3\}, \{1, 5, 6\}, \{0, 4, 5\}, \{3, 4, 6\}, \{2, 3, 5\}, \{0, 2, 6\}\}.$$

Definimos uma relação \mathcal{I} entre os elementos de \mathcal{P} e os elementos de \mathcal{L} do seguinte modo:

$$\mathcal{I} = \{(P, l) \in \mathcal{P} \times \mathcal{L} : P \in l\}.$$

É claro que o terno $\mathbf{S} = (\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$ é uma estrutura de incidência. A figura 1 é uma representação gráfica da estrutura de incidência \mathbf{S} .

2. Facilmente verificamos que $\mathbf{S} = (\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$ onde

$$\mathcal{P} = \{A, B, C, D\}; \quad \mathcal{L} = \{r, s, t\} \quad \text{e} \quad \mathcal{I} = \{(A, r), (B, r), (A, s), (B, s), (C, t)\}$$

é uma estrutura de incidência.

3. Seja $r_{a,b,c} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : ax + by + c = 0\}$, com $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $(a, b) \neq (0, 0)$, isto é, a e b não ambos nulos. Consideremos os conjuntos

$$\mathcal{P} = \mathbb{R}^2 \quad \text{e} \quad \mathcal{L} = \{r_{a,b,c} : a, b, c \in \mathbb{R} \text{ e } (a, b) \neq (0, 0)\}.$$

Definimos uma relação de incidência \mathcal{I} entre os elementos de \mathcal{P} e os elementos de \mathcal{L} do seguinte modo:

$$(x, y) \mathcal{I} r_{a,b,c} \Leftrightarrow ax + by + c = 0.$$

Então $\mathbf{S} = (\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$ é uma estrutura de incidência, chamada **plano afim (euclidiano)** (notemos que a relação de incidência \mathcal{I} é a relação de pertença usual).

Numa estrutura de incidência blocos distintos podem conter os mesmos pontos, como ilustra o exemplo 2. Uma **estrutura de incidência** $\mathbf{S} = (\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$ é **finita** se os conjuntos \mathcal{P} e \mathcal{L} são finitos. As estruturas de incidência dos exemplos 1 e 2 são finitas.

1.1 Princípio de dualidade

A **estrutura dual** $\mathbf{S}^* = (\mathcal{P}^*, \mathcal{L}^*, \mathcal{I}^*)$ da estrutura de incidência $\mathbf{S} = (\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$ é definida do seguinte modo:

$$\mathcal{P}^* = \mathcal{L}, \quad \mathcal{L}^* = \mathcal{P} \quad \text{e} \quad (l, P) \in \mathcal{I}^* \text{ se } (P, l) \in \mathcal{I}.$$

É fácil verificar que \mathbf{S}^* é uma estrutura de incidência e que $(\mathbf{S}^*)^* = \mathbf{S}$.

Seja \mathcal{F} uma afirmação sobre pontos e blocos de uma estrutura de incidência \mathbf{S} . Designemos por \mathcal{F}^* a afirmação que se obtém de \mathcal{F} trocando as palavras “ponto” e “bloco”. Dizemos que \mathcal{F}^* é a **afirmação dual da afirmação** \mathcal{F} . É imediato que \mathcal{F} é uma afirmação verdadeira em \mathbf{S} se e só se \mathcal{F}^* é uma afirmação verdadeira em \mathbf{S}^* . Também é fácil observar que $(\mathcal{F}^*)^* = \mathcal{F}$. A proposição seguinte é conhecida como **Princípio de Dualidade**.

Proposição 1.1.1 *Seja \mathcal{C} uma classe de estruturas de incidência tal que se $\mathbf{S} \in \mathcal{C}$ então $\mathbf{S}^* \in \mathcal{C}$. Se a afirmação \mathcal{F} é verdadeira para toda a estrutura de incidência $\mathbf{S} \in \mathcal{C}$ então a afirmação \mathcal{F}^* também é verdadeira para toda a estrutura de incidência $\mathbf{S} \in \mathcal{C}$.*

Demonstração. Seja \mathcal{F} uma afirmação tal que \mathcal{F} é verdadeira para toda a estrutura de incidência $\mathbf{S} \in \mathcal{C}$. Então, por hipótese, \mathcal{F} é verdadeira em \mathbf{S}^* , para toda a estrutura de incidência $\mathbf{S} \in \mathcal{C}$. Assim, \mathcal{F}^* é verdadeira em $(\mathbf{S}^*)^* = \mathbf{S}$, para toda a estrutura de incidência $\mathbf{S} \in \mathcal{C}$. ■

Uma aplicação desta proposição é a seguinte: se \mathcal{F} é uma afirmação verdadeira em \mathbf{S} e em \mathbf{S}^* ($\mathcal{C} = \{\mathbf{S}, \mathbf{S}^*\}$) então podemos imediatamente concluir que a afirmação \mathcal{F}^* também é verdadeira em \mathbf{S} . Notemos que pode acontecer $\mathcal{F} = \mathcal{F}^*$, isto é, a afirmação \mathcal{F} é a afirmação dual de si própria. Neste caso, podemos dizer que se \mathcal{F} é verdadeira em \mathbf{S} , então \mathcal{F} é verdadeira em \mathbf{S}^* .

1.2 Isomorfismos entre estruturas de incidência

Sejam $\mathbf{S} = (\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$ e $\bar{\mathbf{S}} = (\bar{\mathcal{P}}, \bar{\mathcal{L}}, \bar{\mathcal{I}})$ duas estruturas de incidência. Um **isomorfismo entre \mathbf{S} e $\bar{\mathbf{S}}$** é uma aplicação $f : \mathcal{P} \cup \mathcal{L} \rightarrow \bar{\mathcal{P}} \cup \bar{\mathcal{L}}$ tal que

- (I_1) f é uma bijecção;
- (I_2) f aplica pontos em pontos;
- (I_3) f aplica blocos em blocos;
- (I_4) Para qualquer ponto P e para qualquer bloco l ,

$$(P, l) \in \mathcal{I} \Leftrightarrow (f(P), f(l)) \in \bar{\mathcal{I}}.$$

Dizemos que **duas estruturas de incidência \mathbf{S} e $\bar{\mathbf{S}}$ são isomorfas** e escrevemos $\mathbf{S} \cong \bar{\mathbf{S}}$ se existir um isomorfismo entre \mathbf{S} e $\bar{\mathbf{S}}$. Um **automorfismo de \mathbf{S}** é um isomorfismo entre \mathbf{S} e \mathbf{S} . Em geometria a um automorfismo de \mathbf{S} é usual chamar **colineação de \mathbf{S}** .

Proposição 1.2.1 *O conjunto de todas as colineações de uma estrutura de incidência \mathbf{S} com a composição de funções é um grupo.*

Demonstração. Vejamos que se f e g são colineações de $\mathbf{S} = (\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$ então $f \circ g$ e f^{-1} também são colineações de \mathbf{S} . É imediato que $f \circ g$ e f^{-1} são bijectivas, aplicam pontos em pontos e blocos em blocos. Sejam P um ponto de \mathbf{S} e l um bloco de \mathbf{S} . De f e g serem colineações resulta que

$$(P, l) \in \mathcal{I} \Leftrightarrow (g(P), g(l)) \in \mathcal{I}$$

e

$$(g(P), g(l)) \in \mathcal{I} \Leftrightarrow (f(g(P)), f(g(l))) \in \mathcal{I}.$$

Logo $f \circ g$ é uma colineação. Como f é uma colineação temos

$$(f(f^{-1}(P)), f(f^{-1}(l))) \in \mathcal{I} \Leftrightarrow (f^{-1}(P), f^{-1}(l)) \in \mathcal{I}$$

donde

$$(P, l) \in \mathcal{I} \Leftrightarrow (f^{-1}(P), f^{-1}(l)) \in \mathcal{I}$$

já que $f(f^{-1}(P)) = P$ e $f(f^{-1}(l)) = l$. Logo f^{-1} é uma colineação.

É evidente que a composição de colineações é associativa. Assim, o conjunto de todas as colineações com a operação composição de funções constitui um grupo em que o elemento neutro é a aplicação identidade e o elemento inverso de f é a aplicação f^{-1} . ■

1.3 Espaços lineares

Uma **configuração** é uma estrutura de incidência \mathbf{S} que satisfaz a condição:

Dois pontos distintos pertencem, no máximo, a um bloco.

Resulta imediatamente da definição de configuração que a intersecção de dois blocos distintos contém, no máximo, um ponto¹. Observemos que, numa configuração dados dois pontos distintos pode não existir nenhum bloco que contenha esses pontos. Os espaços lineares são exemplos de configurações.

Dizemos que uma estrutura de incidência \mathbf{S} é um **espaço linear** se satisfaz as condições:

(EL_1) Qualquer bloco contém pelo menos dois pontos;

(EL_2) Dois pontos distintos pertencem a um único bloco.

Num espaço linear, atendendo a (EL_2), escrevemos $l = AB$ se o bloco l contém os pontos A e B . É consequência da condição (EL_2) que um espaço linear é uma configuração. Assim, em espaços lineares se dois blocos distintos l e r se intersectam escrevemos $P = l \cap r$, onde P é o ponto incidente a ambos os blocos e dizemos que l e r **intersectam-se no ponto** P .

1.3.1 Dimensão de um espaço linear

Seja $\mathbf{S} = (\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$ um espaço linear e seja $\bar{\mathcal{P}}$ um subconjunto de \mathcal{P} que verifica a condição:

(\mathcal{S}) Dados dois pontos distintos P e Q de $\bar{\mathcal{P}}$, todos os pontos do bloco PQ pertencem a $\bar{\mathcal{P}}$.

Consideremos os conjuntos

$$\bar{\mathcal{L}} = \{l \in \mathcal{L} : l \text{ contém pelo menos dois pontos de } \bar{\mathcal{P}}\} \quad \text{e} \quad \bar{\mathcal{I}} = \mathcal{I} \cap (\bar{\mathcal{P}} \times \bar{\mathcal{L}}).$$

A estrutura de incidência $\bar{\mathbf{S}} = (\bar{\mathcal{P}}, \bar{\mathcal{L}}, \bar{\mathcal{I}})$ é ainda um espaço linear e dizemos que $\bar{\mathbf{S}}$ é um **subespaço de \mathbf{S}** .

Observemos que, para obter um subespaço de um espaço linear $\mathbf{S} = (\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$ basta encontrar um subconjunto $\bar{\mathcal{P}}$ de \mathcal{P} que satisfaz (\mathcal{S}). Assim, por abuso de linguagem, é usual definir subespaço de um espaço linear $\mathbf{S} = (\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$ como sendo um subconjunto $\bar{\mathcal{P}}$ de \mathcal{P} que satisfaz (\mathcal{S}).

Facilmente verificamos que o conjunto vazio, qualquer ponto, qualquer bloco e \mathcal{P} são subespaços de \mathbf{S} , chamados **subespaços triviais de \mathbf{S}** .

¹A intersecção de dois blocos é o conjunto dos pontos que são incidentes aos dois blocos. Dizemos que dois blocos se intersectam se a intersecção desses blocos é diferente do conjunto vazio.

Exemplos.

1. A estrutura de incidência \mathbf{S} do exemplo 1 da página 1 é um espaço linear. Os subespaços de \mathbf{S} são: o conjunto vazio, qualquer ponto, qualquer bloco e \mathcal{P} .
2. Consideremos o espaço linear representado na figura 2.

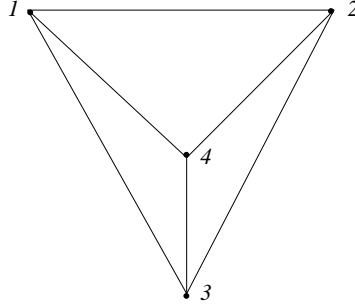


FIGURA 2

Além dos subespaços triviais temos os seguintes subespaços de \mathbf{S} : $\{1, 2, 3\}$, $\{2, 3, 4\}$, $\{1, 3, 4\}$ e $\{1, 2, 4\}$.

Seja Ω um conjunto e $(\mathbf{S}_i)_{i \in \Omega}$ uma família de subespaços de um espaço linear \mathbf{S} . Seja $\mathbf{I} = \bigcap_{i \in \Omega} \mathbf{S}_i$. É claro que \mathbf{I} é um subespaço de \mathbf{S} . De facto, sendo $P, Q \in \mathbf{I}$ temos $P, Q \in \mathbf{S}_i$, para todo o $i \in \Omega$. Então todos os pontos do bloco PQ pertencem a \mathbf{S}_i , para todo o $i \in \Omega$ e, conseqüentemente, todos os pontos do bloco PQ pertencem a \mathbf{I} . Assim, sendo \mathbf{X} um conjunto de pontos de \mathbf{S} , a intersecção de todos os subespaços de \mathbf{S} que contêm \mathbf{X} é ainda um subespaço de \mathbf{S} .

Chamamos **fecho de \mathbf{X}** e denotamos por $\langle \mathbf{X} \rangle$, à intersecção de todos os subespaços de \mathbf{S} que contêm \mathbf{X} . O fecho de \mathbf{X} é, portanto, o menor ² subespaço de \mathbf{S} que contém \mathbf{X} . Resulta imediatamente da definição que $\langle \emptyset \rangle = \emptyset$, $\mathbf{X} \subseteq \langle \mathbf{X} \rangle$, $\langle \langle \mathbf{X} \rangle \rangle = \langle \mathbf{X} \rangle$ e se $\mathbf{X} \subseteq \mathbf{Y}$ então $\langle \mathbf{X} \rangle \subseteq \langle \mathbf{Y} \rangle$.

Lema 1.3.1 *Seja \mathbf{S} um espaço linear. Então $\langle \mathbf{X} \cup \{P\} \rangle = \langle \langle \mathbf{X} \rangle \cup \{P\} \rangle$, para todo o conjunto \mathbf{X} de pontos de \mathbf{S} e para todo o ponto P de \mathbf{S} .*

Demonstração. Uma vez que $\mathbf{X} \cup \{P\} \subseteq \langle \mathbf{X} \rangle \cup \{P\}$ temos $\langle \mathbf{X} \cup \{P\} \rangle \subseteq \langle \langle \mathbf{X} \rangle \cup \{P\} \rangle$.

Seja $Q \notin \langle \mathbf{X} \cup \{P\} \rangle$. Então existe um subespaço $\bar{\mathbf{S}}$ de \mathbf{S} tal que $\bar{\mathbf{S}} \supseteq \mathbf{X} \cup \{P\}$ e $Q \notin \bar{\mathbf{S}}$. Temos $\bar{\mathbf{S}} \supseteq \mathbf{X}$ e $\bar{\mathbf{S}} \supseteq \{P\}$. Então $\bar{\mathbf{S}} = \langle \bar{\mathbf{S}} \rangle \supseteq \langle \mathbf{X} \rangle$ e, conseqüentemente, $\bar{\mathbf{S}} \supseteq \langle \mathbf{X} \rangle \cup \{P\}$ e $Q \notin \bar{\mathbf{S}}$. Logo $Q \notin \langle \langle \mathbf{X} \rangle \cup \{P\} \rangle$. Concluimos então que $\langle \langle \mathbf{X} \rangle \cup \{P\} \rangle \subseteq \langle \mathbf{X} \cup \{P\} \rangle$.

Portanto $\langle \langle \mathbf{X} \rangle \cup \{P\} \rangle = \langle \mathbf{X} \cup \{P\} \rangle$. ■

²Menor relativamente à inclusão entre conjuntos.

Se $\langle \mathbf{X} \rangle = \mathbf{R}$ dizemos que \mathbf{X} gera \mathbf{R} ou que \mathbf{R} é gerado por \mathbf{X} . Dizemos que um conjunto \mathbf{X} é independente se, para todo o $P \in \mathbf{X}$, $P \notin \langle \mathbf{X} \setminus \{P\} \rangle$.

Chamamos **base de um espaço linear \mathbf{S}** a um conjunto independente que gera \mathbf{S} . Através dos exemplos que a seguir vamos apresentar é possível ver que pode existir mais do que uma base de um espaço linear e que duas bases podem não ter o mesmo número de elementos.

Consideremos o conjunto $\mathcal{B} = \{\mathbf{B} : \mathbf{B} \text{ é uma base de } \mathbf{S} \text{ e } \mathbf{B} \text{ é finito}\}$. No caso em que $\mathcal{B} \neq \emptyset$, definimos **dimensão do espaço linear \mathbf{S}** , e denotamos por $dim(\mathbf{S})$, do seguinte modo:

$$dim(\mathbf{S}) = \left(\min_{\mathbf{B} \in \mathcal{B}} |\mathbf{B}| \right) - 1,$$

onde $|\mathbf{B}|$ designa o número de elementos da base \mathbf{B} ³. Neste caso ($\mathcal{B} \neq \emptyset$), dizemos que \mathbf{S} tem dimensão finita. Resulta da definição que qualquer ponto é um subespaço de dimensão 0 e qualquer bloco é um subespaço de dimensão 1. Convencionamos que o conjunto vazio é um subespaço de dimensão -1 .

Exemplos.

1. Consideremos o espaço linear do exemplo 1 da página 1. Temos $\langle \{0, 4, 5\} \rangle = \{0, 4, 5\}$ e $\langle \{0, 5\} \rangle = \{0, 4, 5\}$ pelo que $\{0, 4, 5\}$ não é um conjunto independente. De facto, $4 \in \langle \{0, 5\} \rangle = \langle \{0, 4, 5\} \setminus \{4\} \rangle$. Uma vez que $\langle \{0, 1, 5\} \rangle = \mathbf{S}$ ⁴, $\langle \{0, 1\} \rangle = \{0, 1, 3\}$, $\langle \{0, 5\} \rangle = \{0, 4, 5\}$ e $\langle \{1, 5\} \rangle = \{1, 5, 6\}$ o conjunto $\{0, 1, 5\}$ é uma base de \mathbf{S} .
2. Consideremos o espaço linear \mathbf{E} representado na figura 3 (espaço linear com 9 pontos e 22 blocos).

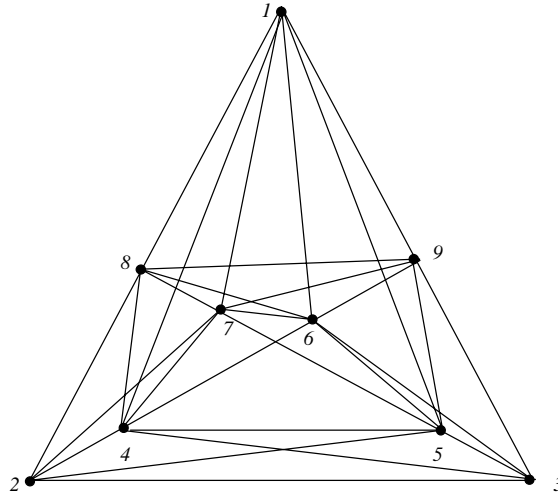


FIGURA 3

$\{1, 2, 3\}$ é uma base de \mathbf{E} pois $\langle \{1, 2, 3\} \rangle = \mathbf{E}$, $\langle \{1, 2\} \rangle = \{1, 2, 8\}$, $\langle \{1, 3\} \rangle = \{1, 3, 9\}$ e $\langle \{2, 3\} \rangle = \{2, 3\}$. Atendendo a que $\langle \{4, 5, 6, 7\} \rangle = \mathbf{E}$, $\langle \{5, 6, 7\} \rangle = \{3, 5, 6, 7, 8\}$,

³Em geral, para um conjunto finito \mathbf{X} denotamos por $|\mathbf{X}|$ o número de elementos de \mathbf{X} .

⁴Se \mathbf{X} é um conjunto de pontos de uma estrutura de incidência $\mathbf{S} = (\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$ tal que $\langle \mathbf{X} \rangle = \mathcal{P}$ escrevemos $\langle \mathbf{X} \rangle = \mathbf{S}$.

$\langle\{4, 6, 7\}\rangle = \{2, 4, 6, 7, 9\}$, $\langle\{4, 5, 7\}\rangle = \{3, 4, 5, 7, 8\}$ e $\langle\{4, 5, 6\}\rangle = \{2, 4, 5, 6, 9\}$ resulta que $\{4, 5, 6, 7\}$ é também uma base de \mathbf{E} .

Dizemos que o espaço linear \mathbf{S} tem a propriedade de intercâmbio⁵ se, para todos os pontos P e Q e para todos os conjuntos de pontos \mathbf{X} , se $P \notin \langle\mathbf{X}\rangle$ e $P \in \langle\mathbf{X} \cup \{Q\}\rangle$ então $Q \in \langle\mathbf{X} \cup \{P\}\rangle$.

Proposição 1.3.2 *Seja \mathbf{S} um espaço linear com a propriedade de intercâmbio. Se $P \in \langle\mathbf{X} \cup \{Q\}\rangle$ e $P \notin \langle\mathbf{X}\rangle$ então $\langle\mathbf{X} \cup \{Q\}\rangle = \langle\mathbf{X} \cup \{P\}\rangle$.*

Demonstração. É claro que $\langle\mathbf{X} \cup \{P\}\rangle \subseteq \langle\mathbf{X} \cup \{Q\}\rangle$, já que

$$\mathbf{X} \cup \{P\} \subseteq (\mathbf{X} \cup \{Q\}) \cup \{P\} \subseteq \langle\mathbf{X} \cup \{Q\}\rangle \cup \{P\} = \langle\mathbf{X} \cup \{Q\}\rangle.$$

Pela propriedade de intercâmbio temos $Q \in \langle\mathbf{X} \cup \{P\}\rangle$ e, portanto, $\langle\mathbf{X} \cup \{Q\}\rangle \subseteq \langle\mathbf{X} \cup \{P\}\rangle$. Concluimos então que $\langle\mathbf{X} \cup \{Q\}\rangle = \langle\mathbf{X} \cup \{P\}\rangle$. ■

De seguida, iremos mostrar que a propriedade de intercâmbio é uma condição suficiente para que qualquer base de um espaço linear tenha o mesmo número de elementos.

Teorema 1.3.3 *Seja \mathbf{S} um espaço linear de dimensão finita com a propriedade de intercâmbio. Então duas quaisquer bases de \mathbf{S} têm o mesmo número de elementos.*

Demonstração. Sejam $\mathbf{X} = \{P_1, \dots, P_n\}$ e \mathbf{Y} duas bases de \mathbf{S} tais que $|\mathbf{Y}| \geq n$.

Se $\mathbf{Y} \subseteq \langle\mathbf{X} \setminus \{P_1\}\rangle$ então $\mathbf{S} = \langle\mathbf{Y}\rangle \subseteq \langle\mathbf{X} \setminus \{P_1\}\rangle$ e, portanto, $\langle\mathbf{X} \setminus \{P_1\}\rangle = \mathbf{S}$, o que é falso pois \mathbf{X} é uma base de \mathbf{S} . Assim, existe $Q_1 \in \mathbf{Y}$ tal que $Q_1 \notin \langle\mathbf{X} \setminus \{P_1\}\rangle$. Seja

$$\mathbf{Y}_1 = (\mathbf{X} \setminus \{P_1\}) \cup \{Q_1\} = \{Q_1, P_2, \dots, P_n\}.$$

Atendendo a que $Q_1 \in \langle\mathbf{X}\rangle$ e $Q_1 \notin \langle\mathbf{X} \setminus \{P_1\}\rangle$, pela propriedade de intercâmbio, temos que $P_1 \in \langle(\mathbf{X} \setminus \{P_1\}) \cup \{Q_1\}\rangle = \langle\mathbf{Y}_1\rangle$ e, portanto, $\mathbf{X} \subseteq \langle\mathbf{Y}_1\rangle$ donde concluimos que \mathbf{Y}_1 gera \mathbf{S} . Vamos agora mostrar que \mathbf{Y}_1 é um conjunto independente. Sabemos que $Q_1 \notin \langle\mathbf{X} \setminus \{P_1\}\rangle = \langle\mathbf{Y}_1 \setminus \{Q_1\}\rangle$. Seja $i \in \{2, \dots, n\}$. Como $\langle\mathbf{X} \setminus \{P_1, P_i\}\rangle \subseteq \langle\mathbf{X} \setminus \{P_i\}\rangle$ e $P_i \notin \langle\mathbf{X} \setminus \{P_i\}\rangle$ temos $P_i \notin \langle\mathbf{X} \setminus \{P_1, P_i\}\rangle$. Se $P_i \in \langle\mathbf{Y}_1 \setminus \{P_i\}\rangle = \langle(\mathbf{X} \setminus \{P_1, P_i\}) \cup \{Q_1\}\rangle$ então, pela propriedade de intercâmbio, $Q_1 \in \langle\mathbf{X} \setminus \{P_1\}\rangle$, o que é falso. Logo $P_i \notin \langle\mathbf{Y}_1 \setminus \{P_i\}\rangle$, para todo o $i \in \{2, \dots, n\}$.

Concluimos então que \mathbf{Y}_1 é uma base de \mathbf{S} .

Suponhamos agora que, se $1 \leq k < n$,

$$\mathbf{Y}_k = \{Q_1, \dots, Q_k, P_{k+1}, \dots, P_n\}$$

é uma base de \mathbf{S} tal que $\{Q_1, \dots, Q_k\} \subseteq \mathbf{Y}$. Se $\mathbf{Y} \subseteq \langle\mathbf{Y}_k \setminus \{P_{k+1}\}\rangle$ então $\langle\mathbf{Y}_k \setminus \{P_{k+1}\}\rangle = \mathbf{S}$, o que é falso. Assim, existe $Q_{k+1} \in \mathbf{Y}$ tal que $Q_{k+1} \notin \langle\mathbf{Y}_k \setminus \{P_{k+1}\}\rangle$. Notemos que $Q_{k+1} \notin \langle\{Q_1, \dots, Q_k\}\rangle$. Seja

$$\mathbf{Y}_{k+1} = (\mathbf{Y}_k \setminus \{P_{k+1}\}) \cup \{Q_{k+1}\}.$$

⁵Em Inglês “exchange property”.

Como $Q_{k+1} \notin \langle \mathbf{Y}_k \setminus \{P_{k+1}\} \rangle$ e $Q_{k+1} \in \langle \mathbf{Y}_k \rangle$ então $P_{k+1} \in \langle (\mathbf{Y}_k \setminus \{P_{k+1}\}) \cup \{Q_{k+1}\} \rangle = \langle \mathbf{Y}_{k+1} \rangle$ e, portanto, $\mathbf{Y}_k \subseteq \langle \mathbf{Y}_{k+1} \rangle$, donde concluímos que \mathbf{Y}_{k+1} gera \mathbf{S} .

Sabemos que $Q_{k+1} \notin \langle \mathbf{Y}_k \setminus \{P_{k+1}\} \rangle = \langle \mathbf{Y}_{k+1} \setminus \{Q_{k+1}\} \rangle$. Seja $i \in \{1, \dots, k\}$. Suponhamos que $Q_i \in \langle \mathbf{Y}_{k+1} \setminus \{Q_i\} \rangle = \langle (\mathbf{Y}_k \setminus \{Q_i, P_{k+1}\}) \cup \{Q_{k+1}\} \rangle$. Atendendo a que $Q_i \notin \langle \{\mathbf{Y}_k \setminus \{Q_i, P_{k+1}\}\} \rangle$, pela propriedade de intercâmbio, $Q_{k+1} \in \langle \mathbf{Y}_k \setminus \{P_{k+1}\} \rangle$, o que é falso. Então $Q_i \notin \langle \mathbf{Y}_{k+1} \setminus \{Q_i\} \rangle$. Observemos que, se $k = n - 1$ então $\mathbf{Y}_{k+1} \subseteq \mathbf{Y}$. Se $k \leq n - 2$ suponhamos que $P_i \in \langle \mathbf{Y}_{k+1} \setminus \{P_i\} \rangle = \langle (\mathbf{Y}_k \setminus \{P_{k+1}, P_i\}) \cup \{Q_{k+1}\} \rangle$, para algum $i \in \{k+2, \dots, n\}$. Atendendo a que $P_i \notin \langle \mathbf{Y}_k \setminus \{P_{k+1}, P_i\} \rangle$, pela propriedade de intercâmbio, $Q_{k+1} \in \langle (\mathbf{Y}_k \setminus \{P_{k+1}, P_i\}) \cup \{P_i\} \rangle = \langle \mathbf{Y}_k \setminus \{P_{k+1}\} \rangle$, o que é falso. Portanto $P_i \notin \langle \mathbf{Y}_{k+1} \setminus \{P_i\} \rangle$. Assim, \mathbf{Y}_{k+1} é um conjunto independente.

Concluímos então que \mathbf{Y}_{k+1} é uma base de \mathbf{S} .

Temos assim uma sequência

$$\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2, \dots, \mathbf{Y}_n$$

de bases de \mathbf{S} e sendo $\mathbf{Y}_n \subseteq \mathbf{Y}$ uma base de \mathbf{S} concluímos que $|\mathbf{Y}| = n$. ■

Frequentemente usamos estruturas de incidência em que os blocos são conjuntos de pontos e a relação de incidência é a relação de pertença usual. A estas estruturas de incidência também é usual chamar **hipergrafo**. Assim, quando escrevemos $\mathbf{S} = (\mathcal{P}, \mathcal{L})$ estamos a considerar uma estrutura de incidência que é um hipergrafo. De seguida, iremos mostrar que todo o espaço linear é isomorfo a um hipergrafo.

Seja $\mathbf{S} = (\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$ um espaço linear. Dado $l \in \mathcal{L}$, definimos o conjunto

$$\bar{l} = \{P \in \mathcal{P} : P \mathcal{I} l\}.$$

Consideremos agora os conjuntos

$$\bar{\mathcal{P}} = \mathcal{P}, \quad \bar{\mathcal{L}} = \{\bar{l} : l \in \mathcal{L}\} \quad \text{e} \quad \bar{\mathcal{I}} = \{(P, \bar{l}) \in \bar{\mathcal{P}} \times \bar{\mathcal{L}} : P \in \bar{l}\}.$$

É evidente que $\bar{\mathbf{S}} = (\bar{\mathcal{P}}, \bar{\mathcal{L}}, \bar{\mathcal{I}})$ é uma estrutura de incidência. Notemos que a relação de incidência $\bar{\mathcal{I}}$ é a relação de pertença. Vejamos que \mathbf{S} e $\bar{\mathbf{S}}$ são estruturas de incidência isomorfas.

Consideremos a aplicação $f : \mathcal{P} \cup \mathcal{L} \rightarrow \bar{\mathcal{P}} \cup \bar{\mathcal{L}}$ definida do seguinte modo:

$$f(P) = P, \quad \text{para todo o ponto } P \in \mathcal{P}$$

e

$$f(l) = \bar{l}, \quad \text{para todo o bloco } l \in \mathcal{L}.$$

É claro que f aplica pontos em pontos e blocos em blocos. Vejamos agora que f é uma bijecção. Para isso, basta mostrar que $f|_{\mathcal{P}}$ e $f|_{\mathcal{L}}$ são bijectivas⁶. É evidente que $f|_{\mathcal{P}}$ é bijectiva, pois é a aplicação identidade. Por definição de $f|_{\mathcal{L}}$ resulta que esta aplicação é sobrejectiva. Sejam $l_1, l_2 \in \mathcal{L}$ tais que $f|_{\mathcal{L}}(l_1) = f|_{\mathcal{L}}(l_2)$. Sabemos que $f|_{\mathcal{L}}(l_1) = \{P \in \mathcal{P} : P \mathcal{I} l_1\}$ e $f|_{\mathcal{L}}(l_2) = \{P \in \mathcal{P} : P \mathcal{I} l_2\}$. Atendendo a (EL_1) , existem $P, Q \in \mathcal{P}$ tais que $P \mathcal{I} l_1$, $Q \mathcal{I} l_1$, $P \mathcal{I} l_2$ e $Q \mathcal{I} l_2$. Por (EL_2) concluímos que $l_1 = l_2$ e, portanto, $f|_{\mathcal{L}}$ é uma aplicação injectiva.

Além disso, para todo o ponto $P \in \mathcal{P}$ e para todo o bloco $l \in \mathcal{L}$

$$\begin{aligned} (P, l) \in \mathcal{I} &\Leftrightarrow f(P) = P \in f(l) \\ &\Leftrightarrow (f(P), f(l)) \in \bar{\mathcal{I}}. \end{aligned}$$

Concluímos assim que as estruturas de incidência \mathbf{S} e $\bar{\mathbf{S}}$ são isomorfas, pois f é um isomorfismo entre essas duas estruturas de incidência.

⁶Denotemos por $f|_{\mathbf{X}}$ a restrição de f a \mathbf{X} .

Capítulo 2

Plano afim, plano projectivo e plano de Möbius

2.1 Plano afim

Um **plano afim** $\mathcal{A} = (\mathcal{P}, \mathcal{L})$ é uma estrutura de incidência, onde os elementos de \mathcal{L} são designados por rectas, que satisfaz as seguintes condições:

- (A₁) Dados dois pontos distintos existe uma única recta que contém ambos os pontos;
- (A₂) Dada uma recta l e um ponto P que não pertence a l , existe uma única recta m que contém P e tal que m e l não contêm pontos comuns;
- (A₃) Existem três pontos que não pertencem à mesma recta.

Dado um conjunto de pontos dizemos que estes são **colineares** se pertencem a uma mesma recta. Assim, a condição (A₃) pode ser enunciada do seguinte modo: existem três pontos não colineares.

Se l e r são rectas de \mathcal{A} que se intersectam em dois pontos distintos A e B então, por (A₁), $l = AB = r$. Assim, duas rectas distintas de \mathcal{A} cuja intersecção é não vazia contêm um único ponto comum.

Exemplo.

Consideremos os conjuntos

$$\mathcal{P} = \{1, 2, 3, 4\} \text{ e } \mathcal{L} = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{1, 4\}, \{1, 3\}, \{2, 4\}\}.$$

É claro que a estrutura de incidência $(\mathcal{P}, \mathcal{L})$ é um plano afim.

Da definição de plano afim resultam os dois lemas seguintes:

Lema 2.1.1 *Qualquer recta de um plano afim \mathcal{A} contém pelo menos dois pontos.*

Demonstração. Seja l uma recta de \mathcal{A} . Por (A_3) , existem três pontos A , B e C não colineares. Temos três casos a considerar:

1. A recta l contém dois desses pontos e, portanto, contém pelo menos dois pontos.
2. A recta l contém um desses pontos, digamos A .
Se BC intersecta l então o ponto de intersecção é distinto de A (pois A , B e C não são colineares) e, portanto, l contém pelo menos dois pontos.
Suponhamos que BC não intersecta l . Por (A_2) , pelo ponto C passa uma única recta m que não contém pontos da recta AB (ver figura 1).

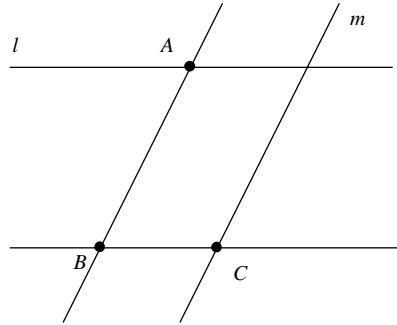


FIGURA 1

A recta m intersecta l pois, por (A_2) , a recta BC é a única recta que passa por C e não contém pontos de l . É claro que o ponto de intersecção das rectas m e l é distinto de A e, portanto, l contém pelo menos dois pontos.

3. Suponhamos que l não contém nenhum dos pontos A , B e C .
Atendendo a (A_2) , pelo menos duas das rectas AB , AC e BC intersectam a recta l . Sem perda de generalidade, podemos supor que as rectas AB e AC intersectam a recta l . Sejam $P = AB \cap l$ e $Q = AC \cap l$. Como os pontos A , B e C não são colineares então $P \neq Q$ e, portanto, l contém pelo menos dois pontos. ■

Atendendo a (A_1) e ao lema anterior concluímos que todo o plano afim é um espaço linear.

Lema 2.1.2 *Num plano afim, qualquer ponto ou qualquer par de pontos pertence a um terço de pontos não colineares.*

Demonstração. Por (A_3) , existem pontos A , B e C não colineares.

1. Suponhamos que P é um ponto distinto de A , B e C . É claro que, pelo menos um dos pontos B ou C não pertence à recta AP . Suponhamos que $B \notin AP$. Assim, A , P e B são três pontos não colineares.
2. Suponhamos que P e Q são pontos distintos de A , B e C e tais que $P \neq Q$. É claro que, pelo menos um dos pontos A , B ou C não pertence à recta PQ . Suponhamos que $A \notin PQ$. Então A , P e Q são três pontos não colineares. ■

2.1.1 Paralelismo

Começemos por definir uma relação \parallel no conjunto das rectas de um plano afim \mathcal{A} , a qual é denominada **relação de paralelismo**:

$$l \parallel r \text{ se } l = r \text{ ou } l \cap r = \emptyset.$$

Facilmente verificamos que \parallel é uma relação de equivalência. Se l e r são rectas de um plano afim \mathcal{A} tais que $l \parallel r$ dizemos que l e r são **rectas paralelas**.

Para cada recta l de um plano afim \mathcal{A} , consideremos o conjunto $[l] = \{r : r \parallel l\}$, isto é, o conjunto de todas as rectas paralelas a l . Ao conjunto $[l]$ chamamos classe de rectas paralelas e dizemos que a recta l é um representante dessa classe. De (A_2) , resulta imediatamente que cada ponto de um plano afim \mathcal{A} pertence exactamente a uma recta de cada uma das classes de rectas paralelas.

Assim, sendo l, r e m três rectas distintas tais que $l \parallel r$, se m intersecta a recta l então m também intersecta a recta r .

Proposição 2.1.3 *Num plano afim \mathcal{A} existem pelo menos três classes de rectas paralelas.*

Demonstração. Por (A_3) , existem três pontos A, B e C não colineares. Consideremos as classes de rectas paralelas $[AB]$, $[BC]$ e $[AC]$. Sem perda de generalidade, suponhamos que $[AB] = [BC]$. Temos então que $AB \parallel BC$ donde $AB = BC$. Resulta então que A, B e C são três pontos colineares, o que é falso. Assim, $[AB], [BC]$ e $[AC]$ são três classes distintas de rectas paralelas. ■

2.1.2 Dimensão de um plano afim

O plano afim apresentado no exemplo da página 9 tem dimensão 3, já que $\{1, 2, 3, 4\}$ é a única base desse plano afim.

Proposição 2.1.4 *Seja \mathcal{A} um plano afim em que qualquer recta contém pelo menos três pontos. Então \mathcal{A} tem dimensão 2.*

Demonstração. Sejam A, B e C três pontos não colineares de \mathcal{A} . É claro que $\{A, B, C\}$ é um conjunto independente e que $\langle \{A, B, C\} \rangle \subseteq \mathcal{A}$. Vejamos que $\mathcal{A} \subseteq \langle \{A, B, C\} \rangle$. Seja $P \in \mathcal{A}$. Se $P = C$ então $P \in \langle \{A, B, C\} \rangle$. Suponhamos que $P \neq C$. Se $PC \cap AB \neq \emptyset$ então $P \in \langle \{A, B, C\} \rangle$. Suponhamos agora que $PC \cap AB = \emptyset$. Seja $D \in AC$ tal que $D \neq A, C$. É claro que $PD \neq PC$ e $D \in \langle \{A, B, C\} \rangle$. Atendendo a (A_2) , temos que $PD \cap AB \neq \emptyset$ donde resulta que $P \in \langle \{A, B, C\} \rangle$. Logo $\mathcal{A} \subseteq \langle \{A, B, C\} \rangle$ e, portanto, $\{A, B, C\}$ é uma base de \mathcal{A} . Atendendo a (A_3) , não existe nenhuma base de \mathcal{A} com menos de três elementos pelo que \mathcal{A} tem dimensão 2. ■

2.1.3 Ordem de um plano afim finito

Num plano afim todas as rectas contêm o mesmo número de pontos.

Proposição 2.1.5 *Dadas duas rectas l e r de um plano afim \mathcal{A} , existe uma bijecção entre os pontos de l e os pontos de r .*

Demonstração. Sejam l e r duas rectas distintas de um plano afim \mathcal{A} . Temos dois casos a considerar:

1. As rectas l e r intersectam-se num ponto que vamos designar por P . Consideremos os pontos L_1 e R_1 de l e r , respectivamente, ambos distintos de P . Para cada ponto L da recta l , distinto de L_1 e P , designemos por m a recta que passa por L e é paralela à recta L_1R_1 . Seja Q o ponto de intersecção da recta m com a recta r (ver figura 2).

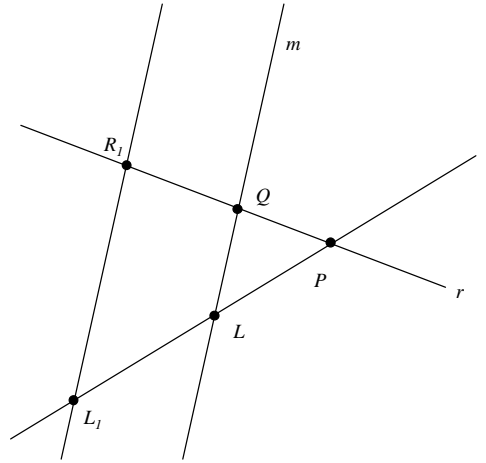


FIGURA 2

Consideremos a aplicação f entre os pontos de l e os pontos de r definida por:

$$f(P) = P; f(L_1) = R_1 \text{ e } f(L) = Q,$$

onde P , L_1 , R_1 , L e Q são definidos como anteriormente.

Vejamos que f é uma aplicação bijectiva.

Injectividade: Sejam M e L pontos distintos de l . É evidente que, se um dos pontos é o ponto L_1 ou P então $f(M) \neq f(L)$.

Suponhamos que os pontos M e L são ambos distintos de L_1 e P . Temos $f(L) = Q_1$, onde Q_1 é o ponto de intersecção da recta r com a recta que passa por L e é paralela a L_1R_1 e $f(M) = Q_2$, onde Q_2 é o ponto de intersecção da recta r com a recta que passa por M e é paralela a L_1R_1 . É claro que Q_1 e Q_2 são pontos distintos, caso contrário, por um ponto passavam duas rectas distintas e paralelas à recta L_1R_1 , o que contraria (A_2) . Logo f é injectiva.

Sobrejectividade: Seja Q um ponto da recta r . Pretendemos mostrar que existe um ponto L da recta l tal que $f(L) = Q$.

Se $Q = P$ tomamos $L = P$. Se $Q = R_1$ tomamos $L = L_1$. Suponhamos que Q é distinto dos pontos P e R_1 . Por (A_2) , sabemos que existe uma só recta que passa por Q e é paralela à recta L_1R_1 . Designemos por m_1 essa recta. A recta m_1 intersecta a recta l , caso contrário, L_1 pertencia a duas rectas distintas e paralelas a m_1 . Basta então tomarmos L como sendo o ponto de intersecção da recta m_1 com a recta l . Logo f é sobrejectiva.

2. As rectas l e r são paralelas.

Como l e r são rectas distintas temos $l \cap r = \emptyset$. Seja L_1 um ponto da recta l e R_1 um

ponto da recta r . As rectas l e L_1R_1 intersectam-se no ponto L_1 . Por 1., existe uma aplicação bijectiva entre os pontos de l e os pontos de L_1R_1 . Designemos essa aplicação por f . De novo por 1., existe uma aplicação bijectiva, que vamos designar por g , entre os pontos de L_1R_1 e os pontos de r . Assim, $g \circ f$ é uma aplicação bijectiva entre os pontos de l e os pontos de r . ■

Um **plano afim finito** é uma estrutura de incidência finita que é um plano afim. Dizemos que um **plano afim finito tem ordem n** se cada recta desse plano contém exactamente n pontos.

Proposição 2.1.6 *Seja \mathcal{A} um plano afim de ordem n . Então em \mathcal{A}*

1. o número de pontos é n^2 ;
2. cada ponto pertence a $n + 1$ rectas;
3. cada recta é paralela a n rectas;
4. o número de rectas é $n^2 + n$;
5. existem $n + 1$ classes de rectas paralelas;
6. cada recta intersecta n^2 rectas.

Demonstração.

1. Seja $l = \{A_1, \dots, A_n\}$ uma recta ¹ de \mathcal{A} . Seja B um ponto de \mathcal{A} que não pertence à recta l (tal ponto existe atendendo ao lema 2.1.2). Consideremos a recta $r_1 = A_1B$ e, para cada $i \in \{2, \dots, n\}$, definimos a recta r_i paralela à recta r_1 e que contém A_i (ver figura 3).

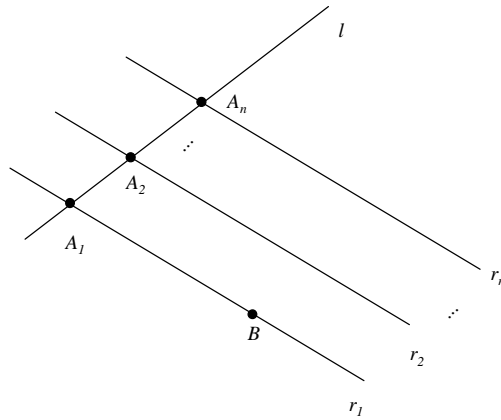


FIGURA 3

¹Num plano afim de ordem n cada recta contém exactamente n pontos. Designando por l a recta que contém os pontos A_1, \dots, A_n podemos escrever $l = \{A_1, \dots, A_n\}$.

Cada uma destas rectas contém n pontos e, para cada $i, j \in \{1, \dots, n\}$ com $i \neq j$, as rectas r_i e r_j não contém nenhum ponto comum. Temos assim que o número total de pontos que pertencem a estas n rectas é $n \cdot n = n^2$. Seja P um ponto de \mathcal{A} . Então P pertence a exactamente uma recta s da classe de rectas paralelas $[r_1]$. É claro que s intersecta l num dos pontos A_1, \dots, A_n (caso contrário, $r_1 \parallel l$, o que contraria a definição de r_1). Assim, $s = r_i$ para algum $i \in \{1, \dots, n\}$, donde resulta que em \mathcal{A} existem exactamente n^2 pontos.

- Sejam P um ponto e $l = \{A_1, \dots, A_n\}$ uma recta de \mathcal{A} que não contém P (tal recta existe atendendo ao lema 2.1.2). Para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, definimos a recta $r_i = A_iP$ e consideremos a recta s paralela à recta l e que contém P (ver figura 4).

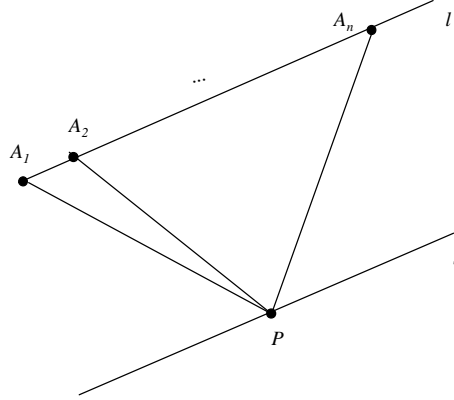


FIGURA 4

É claro que as rectas r_i , com $i \in \{1, \dots, n\}$, e a recta s são todas distintas. Cada recta que contém P ou intersecta a recta l e, portanto, é uma das rectas r_i , ou é paralela à recta l e, portanto, é a recta s . Assim, podemos concluir que em \mathcal{A} existem $n + 1$ rectas que passam por P .

- Seja l_1 uma recta de \mathcal{A} e suponhamos que P_1 e P_2 são pontos de \mathcal{A} tais que P_1 pertence a l_1 e P_2 não pertence a l_1 (tais pontos existem atendendo ao lema 2.1.2). Sabemos que a recta $r = P_1P_2$ contém n pontos. Podemos então escrever $r = \{P_1, \dots, P_n\}$. Para cada $i \in \{2, \dots, n\}$, definimos a recta l_i que contém P_i e é paralela à recta l_1 (ver figura 5). Como os pontos P_1, \dots, P_n são distintos, as rectas l_1, \dots, l_n são todas distintas. Seja s uma recta paralela a l_1 . Então s intersecta a recta r num dos pontos P_i , com $i \in \{1, \dots, n\}$. Assim, $s = l_i$ para algum $i \in \{1, \dots, n\}$, o que permite-nos concluir que cada recta é paralela a n rectas (notemos que l_1 é paralela a $n - 1$ rectas distintas de l_1 , já que $l_1 \parallel l_1$).
- Seja P um ponto de \mathcal{A} . Atendendo a 2., P pertence a $n + 1$ rectas, a saber, r_1, \dots, r_{n+1} . Cada uma destas rectas é paralela a n rectas. Temos assim $(n + 1)n = n^2 + n$ rectas distintas. Seja r uma recta de \mathcal{A} . Temos dois casos a considerar: P é um ponto da recta r ou P não é um ponto da recta r . Se P é um ponto da recta r então r é

uma das rectas r_i , com $i \in \{1, \dots, n + 1\}$. Se P não pertence à recta r então existe uma recta s (distinta da recta r) paralela à recta r e que contém P . Então, $s = r_i$ e $r \in [s] = [r_i]$, para algum $i \in \{1, \dots, n + 1\}$. Portanto em \mathcal{A} existem $n^2 + n$ rectas.

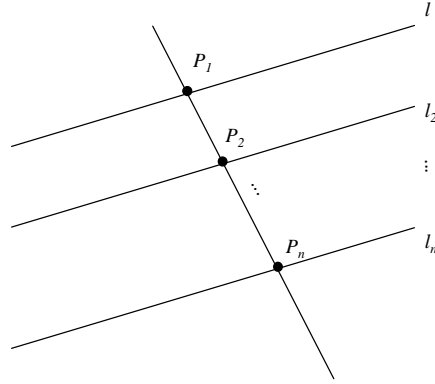


FIGURA 5

5. Por 3., cada recta é paralela a n rectas e, por 4., existem $n(n + 1)$ rectas. Podemos então concluir que existem $n + 1$ classes de rectas paralelas.
6. Seja l uma recta de \mathcal{A} . Por 3., l é paralela a n rectas. Então, por 4., a recta l intersecta $n^2 + n - n = n^2$ rectas (distintas de l). ■

2.1.4 Colineações em planos afins

Seja \mathcal{A} um plano afim. Uma **colineação de \mathcal{A}** é um automorfismo de \mathcal{A} .

Exemplo.

Designemos por \mathcal{A} o plano afim considerado no exemplo da página 9. Consideremos a aplicação f definida por $f(1) = 3$, $f(2) = 4$, $f(3) = 1$ e $f(4) = 2$. Facilmente verificamos que f é uma colineação² de \mathcal{A} .

Qualquer colineação de um plano afim aplica rectas paralelas em rectas paralelas.

Proposição 2.1.7 *Seja f uma colineação de um plano afim \mathcal{A} e sejam l e m rectas de \mathcal{A} . Então $l \parallel m$ se e só se $f(l) \parallel f(m)$.*

Demonstração. Se l e m são rectas distintas então $f(l)$ e $f(m)$ também são rectas distintas. Suponhamos que $l \parallel m$ e que $P \in f(l) \cap f(m)$. Então, existem pontos distintos Q_1 e Q_2 tais que $f(Q_1) = P$ e $f(Q_2) = P$, o que contraria o facto de f ser uma colineação (f é injectiva). Logo $f(l) \parallel f(m)$.

² Observemos que ao conhecer as imagens, por f , dos pontos do plano ficamos a conhecer também a imagem, por f , de qualquer recta desse plano, já que as rectas são subconjuntos de pontos do plano.

Reciprocamente, suponhamos que l e m são rectas distintas tais que $f(l) \parallel f(m)$ (notemos que $f(l) \cap f(m) = \emptyset$) e $P \in l \cap m$. Temos então que $f(P) \in f(l) \cap f(m)$, o que é falso. Logo $l \parallel m$. ■

Corolário 2.1.8 *Seja \mathcal{A} um plano afim e l uma recta de \mathcal{A} . Para qualquer colineação f de \mathcal{A} , $f([l]) = [f(l)]$.*

Demonstração. Seja $m \in f([l])$. Então existe $r \in [l]$ tal que $f(r) = m$. Como $r \parallel l$, pela proposição 2.1.7, $f(r) \parallel f(l)$, ou seja, $m \parallel f(l)$. Portanto $m \in [f(l)]$.

Reciprocamente, suponhamos que $m \in [f(l)]$. Como f^{-1} é uma colineação e $m \parallel f(l)$, pela proposição 2.1.7, temos $f^{-1}(m) \parallel f^{-1}(f(l)) = l$. Então $f^{-1}(m) \in [l]$ e como $m = f(f^{-1}(m))$ resulta que $m \in f([l])$. ■

O corolário anterior mostra que, a imagem de uma classe de rectas paralelas, em que l é um representante dessa classe, por uma colineação f de um plano afim \mathcal{A} , é ainda uma classe de rectas paralelas em que um representante é $f(l)$.

Uma **dilatação** de um plano afim \mathcal{A} é uma colineação f tal que, para cada recta l , $f(l) \parallel l$. Atendendo ao corolário 2.1.8 temos que, para qualquer dilatação f , $f([l]) = [l]$. Chamamos **homotetia** a uma dilatação que fixa um ponto. Temos as duas seguintes proposições:

Proposição 2.1.9 *Se f é uma homotetia e l é uma recta que contém um ponto fixo de f então $f(l) = l$.*

Demonstração. Seja C um ponto fixo de f e l uma recta que contém C . Como $f(l) \parallel l$ e $f(C) = C$ temos $f(l) = l$. ■

Proposição 2.1.10 *Toda a homotetia com mais de um ponto fixo é a identidade.*

Demonstração. Suponhamos que f é uma homotetia que fixa dois pontos, a saber C_1 e C_2 . Então a homotetia f

1. fixa todos os pontos que não pertencem a C_1C_2 .
Se $X \notin C_1C_2$ então $f(XC_1) = XC_1$ e $f(XC_2) = XC_2$. Como $f(X) \in f(XC_1) \cap f(XC_2)$ temos $f(X) = X$.
2. fixa os pontos da recta C_1C_2 .
Seja $X \in C_1C_2$ tal que $X \neq C_1$ e seja $Y \notin C_1C_2$. Pela primeira parte da demonstração sabemos que $f(Y) = Y$. Como $f(XC_1) = XC_1$ e $f(XY) = XY$ temos $f(X) = X$.

Logo f é a identidade. ■

O único ponto fixo por uma homotetia, diferente da identidade, é chamado **centro**. Uma **translação** ou é a identidade ou é uma dilatação que não fixa pontos.

Proposição 2.1.11 *Seja f uma translação diferente da identidade. Então, dados dois pontos P e Q temos $PP' \parallel QQ'$, onde $P' = f(P)$ e $Q' = f(Q)$.*

Demonstração. Suponhamos que as rectas PP' e QQ' intersectam-se num ponto R . Como f é uma dilatação temos $f(PP') = P'f(P')\parallel PP'$ e $f(QQ') = Q'f(Q')\parallel QQ'$ e, consequentemente, $f(PP') = PP'$ e $f(QQ') = QQ'$. Atendendo a que $R \in PP' \cap QQ'$ temos $f(R) \in PP' \cap QQ'$ donde resulta que $f(R) = R$, o que é falso pois f é uma translação diferente da identidade. Logo $PP' \parallel QQ'$. ■

Designemos por \mathcal{D} o conjunto de todas as dilatações, por \mathcal{H} o conjunto de todas as homotetias e por \mathcal{T} o conjunto de todas as translações de um plano afim \mathcal{A} . Temos $\mathcal{D} = \mathcal{H} \cup \mathcal{T}$ e $\mathcal{H} \cap \mathcal{T} = \{id\}$, onde id designa a aplicação identidade.

Proposição 2.1.12 *O conjunto de todas as dilatações de um plano afim \mathcal{A} com a operação composição de funções é um subgrupo do grupo das colineações de \mathcal{A} .*

Demonstração. Basta mostrar que, se $f, g \in \mathcal{D}$ então $g \circ f \in \mathcal{D}$ e $f^{-1} \in \mathcal{D}$. Seja l uma recta. Temos $f(l) \parallel l$ e $g(l) \parallel l$. Então, pela proposição 2.1.7, $g(f(l)) \parallel g(l)$ e $f^{-1}(f(l)) \parallel f^{-1}(l)$. Assim, $(g \circ f)(l) \parallel l$ e $f^{-1}(l) \parallel l$. ■

Proposição 2.1.13 *O conjunto de todas as translações de um plano afim \mathcal{A} com a operação composição de funções é um subgrupo do grupo das dilatações de \mathcal{A} . Além disso, para todo o $f \in \mathcal{T}$ e para todo o $g \in \mathcal{D}$ temos $g \circ f \circ g^{-1} \in \mathcal{T}$.*

Demonstração. Sejam $f, g \in \mathcal{T}$. As aplicações $g \circ f$ e f^{-1} são dilatações. É claro que $f^{-1} \in \mathcal{T}$. Suponhamos que $g \circ f$ fixa um ponto P . Se $f(P) = P'$ então $g(P') = P$. Seja $Q \notin PP'$. Então $f(PQ) = f(P)f(Q) = P'f(Q) \parallel PQ$. Pela proposição 2.1.11, temos $PP' \parallel Qf(Q)$. Designemos por l a recta que contém P' e é paralela à recta PQ e por r a recta que contém Q e é paralela à recta PP' . Então $f(Q) = l \cap r$. Seja $Q' = f(Q)$. Raciocinando de modo análogo temos $g(Q') = Q$. Assim, $(g \circ f)(Q) = g(f(Q)) = g(Q') = Q$. Logo, pela proposição 2.1.10, $g \circ f = id$ e, portanto, $g \circ f$ é uma translação.

Vamos agora mostrar que, sendo $f \in \mathcal{T}$ e $g \in \mathcal{D}$ temos $g \circ f \circ g^{-1} \in \mathcal{T}$. É claro que $g \circ f \circ g^{-1} \in \mathcal{D}$. Se $g \circ f \circ g^{-1}$ não tem pontos fixos então $g \circ f \circ g^{-1} \in \mathcal{T}$. Suponhamos que $g \circ f \circ g^{-1}$ tem um ponto fixo P . Então $(f \circ g^{-1})(P) = g^{-1}(P)$, isto é, $g^{-1}(P)$ é um ponto fixo por f e, por conseguinte, $f = id$. Resulta assim que $g \circ f \circ g^{-1} = id$. Em qualquer dos casos $g \circ f \circ g^{-1} \in \mathcal{T}$. ■

Uma colineação de \mathcal{A} que fixa ponto por ponto uma recta de \mathcal{A} é chamada **perspectiva** afim e toda a recta fixa ponto por ponto é chamada **eixo**.

Proposição 2.1.14 *Seja l um eixo de uma perspectiva afim f e $P \notin l$. Se $f(P) = P$ então $f = id$.*

Demonstração. Sejam f uma perspectiva afim, l um eixo de f e $P \notin l$ tal que $f(P) = P$.

É claro que, se $Q \in l$ então $f(Q) = Q$. Suponhamos agora que $Q \notin l$ e $Q \neq P$. Qualquer recta que passa por P e intersecta l é fixa por f , pois contém dois pontos fixos. A recta que passa por P e é paralela a l também é fixa por f pois, caso contrário, f não seria injectiva (o que não acontece já que f é uma colineação) ou P não seria um ponto fixo. Temos então que $f(PQ) = PQ$ e, portanto, $f(Q) \in PQ$. Pode acontecer que a recta PQ seja paralela à

recta l ou que intersecte a recta l . Em ambos os casos é possível escolher um ponto R tal que $R \in l$ e $R \notin PQ$. Designemos por r a recta paralela à recta RQ e que passa por P . Então $f(r) = r$. Atendendo a que uma colinação aplica rectas paralelas em rectas paralelas temos $f(r) \parallel f(RQ)$, isto é, $r \parallel Rf(Q)$. Por (A_2) , resulta que $Rf(Q) = RQ$ e, portanto, $f(Q) \in RQ$. Temos assim que $f(Q) \in PQ \cap RQ$ donde resulta que $f(Q) = Q$. Como $f(P) = P$ podemos concluir que f é a aplicação identidade. ■

Corolário 2.1.15 *Toda a perspectiva afim diferente da identidade tem um único eixo.*

Demonstração. Resulta imediatamente da definição de eixo e da proposição anterior. ■

Dada uma perspectiva afim f de um plano afim \mathcal{A} , se $P \neq f(P)$, à recta $Pf(P)$ chamamos **traço** de f . Designemos por Γ o conjunto dos traços de f .

Proposição 2.1.16 *Qualquer perspectiva afim fixa traços.*

Demonstração. Seja f uma perspectiva afim e seja P um ponto tal que $f(P) \neq P$. Designemos por l o eixo de f . Temos duas possibilidades:

1. As rectas $Pf(P)$ e l intersectam-se num ponto que vamos designar por Q .
É claro que $Q \neq P$ e $Q \neq f(P)$. Então $f(Pf(P)) = f(PQ) = f(P)Q = Pf(P)$.
2. As rectas $Pf(P)$ e l são paralelas.
Então $f(Pf(P)) \parallel f(l) = l$. Atendendo a que $f(P) \in f(Pf(P))$ e $f(Pf(P)) \parallel l$ temos $f(Pf(P)) = Pf(P)$, uma vez que $Pf(P)$ é a única recta que contém $f(P)$ e é paralela a l . ■

Proposição 2.1.17 *As únicas rectas fixas por uma perspectiva afim diferente da identidade são os traços e o eixo.*

Demonstração. Seja f uma perspectiva afim diferente da identidade e de eixo l . É claro que o eixo é uma recta fixa por f .

Seja r uma recta distinta de l e tal que $f(r) = r$. Seja $P \in r$ tal que $P \notin l$. Observemos que $f(P) \neq P$, visto que f só fixa os pontos da recta l . Como $f(r) = r$ temos $f(P) \in r$ donde $r = Pf(P)$ e, portanto, r é um traço. ■

Proposição 2.1.18 *Seja f uma perspectiva afim, diferente da identidade, de eixo l .*

1. *Se existe um traço de f que intersecta l então Γ é uma classe de rectas paralelas.*
2. *Se nenhum traço de f intersecta l então $\Gamma \cup \{l\}$ é uma classe de rectas paralelas.*

Demonstração. Seja f uma perspectiva afim, diferente da identidade, de eixo l .

1. Seja t um traço de f tal que t intersecta l . Pretendemos mostrar que $[t] = \Gamma$.
Veamos que $[t] \subseteq \Gamma$. Seja r uma recta tal que $r \parallel t$. Se $r = t$ então r é um traço de f . Suponhamos que $r \neq t$. Seja $P = r \cap l$. Como $t \parallel r$, pela proposição 2.1.7, $f(t) \parallel f(r)$. Atendendo a que f fixa traços e a que t é um traço temos $t \parallel f(r)$. Como P é um ponto do eixo, é um ponto fixo por f . Assim, $P \in f(r)$. Então, por (A_2) , $f(r) = r$ e pela proposição anterior, r é um traço, o que prova que $r \in \Gamma$.

Vejamus que $\Gamma \subseteq [t]$. Seja r um traço de f . Então $r = Qf(Q)$. Designemos por s a recta que contém Q e é paralela a t . Pelo que já vimos, s é um traço. Atendendo a que $Q \in s$ e $f(s) = s$ temos $f(Q) \in s$ pelo que $s = Qf(Q) = r$. Assim, $r \parallel t$, o que prova que $r \in [t]$.

2. Suponhamos que nenhum traço de f intersecta l . Seja t um traço de f . Pretendemos mostrar que $\Gamma \cup \{l\} = [t]$.

Vejamus que $\Gamma \cup \{l\} \subseteq [t]$. É claro que $l \parallel t$. Seja r um traço de f . Se $r = t$ então $r \parallel t$. Suponhamos que $r \neq t$. Com vista a uma contradição, suponhamos que $r \cap t = P$. Como $f(P) \in f(r) \cap f(t) = r \cap t$ temos que $f(P) = P$. Assim, P é um ponto fixo por f que não pertence a l , o que contraria a proposição 2.1.14. Concluimos então que $r \parallel t$, o que prova que $r \in [t]$.

Vejamus agora que $[t] \subseteq \Gamma \cup \{l\}$. Observemos que $l \in [t]$. Seja r uma recta distinta de l tal que $r \parallel t$. Seja P um ponto da recta r . É evidente que $P \neq f(P)$. A recta $Pf(P)$ é paralela a l . Como $P \in r$ e $P \in Pf(P)$, por (A_2) , resulta que $r = Pf(P)$, o que prova que r é um traço. ■

Resulta da proposição anterior que, ou todos os traços de uma perspectiva afim f diferente da identidade intersectam l ou nenhum traço de f intersecta l .

Corolário 2.1.19 *Uma perspectiva afim f diferente da identidade é univocamente determinada pelo seu eixo l , por um ponto P que não pertence ao eixo e pela sua imagem.*

Demonstração. Seja f uma perspectiva afim diferente da identidade de eixo l e seja P um ponto tal que $P \notin l$. Seja Q um ponto tal que $Q \neq P$ e $Q \notin l$. Pela proposição anterior, $Pf(P) \parallel Qf(Q)$. Designemos por r a recta que contém Q e é paralela a $Pf(P)$. Observemos que $f(Q) \in r$. Suponhamos que $Q \notin Pf(P)$.

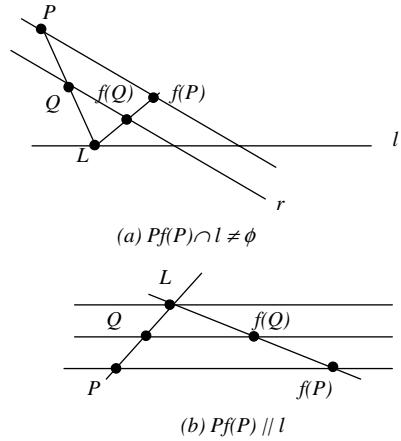


FIGURA 6

Temos duas possibilidades:

1. $PQ \cap l \neq \emptyset$.

Seja $L = PQ \cap l$. Como $f(Q) \in f(P)L = f(P)L$ resulta que $f(Q) = r \cap f(P)L$ (ver figura 6).

2. $PQ \cap l = \emptyset$.

Como f é uma colinação de um plano afim e $PQ \parallel l$ então $f(PQ) \parallel f(l) = l$. Designemos por s a recta paralela a l e que contém $f(P)$. Temos $f(Q) = r \cap s$ (ver figura 7).

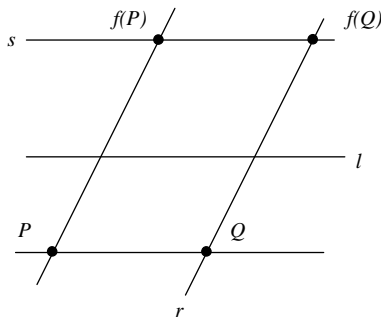


FIGURA 7

Suponhamos agora que $Q \in Pf(P)$. Seja R um ponto tal que $R \notin Pf(P)$ e $R \notin l$. Pela construção dada no caso anterior determinamos $f(R)$. É claro que $Q \notin Rf(R)$. Voltamos agora a usar o caso anterior para encontrar $f(Q)$ (utilizando R e $f(R)$ em vez de P e $f(P)$). ■

Estas colinações são fundamentais no estudo de determinadas configurações, como iremos ver no plano projectivo.

2.1.5 Quadrados latinos

Um **quadrado latino de ordem** n é uma matriz $L = [a_{ij}]$ de dimensão $n \times n$ cujos coeficientes pertencem a um conjunto \mathbb{S} de n elementos e tal que:

- (i) cada elemento de \mathbb{S} ocorre exactamente uma vez em cada linha;
- (ii) cada elemento de \mathbb{S} ocorre exactamente uma vez em cada coluna.

Exemplo.

Consideremos o conjunto $\mathbb{Z}_4 = \{0, 1, 2, 3\}$ e a matriz

$$L = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

A matriz L é um quadrado latino de ordem 4.

Dois quadrados latinos $L = [a_{ij}]$ e $M = [b_{ij}]$ de ordem n dizem-se **ortogonais** se, para cada par $(k, l) \in \mathbb{S} \times \mathbb{S}$ existe um único par (i, j) tal que $(a_{ij}, b_{ij}) = (k, l)$. A um conjunto de quadrados latinos dois a dois ortogonais chamamos **conjunto de quadrados latinos mutuamente ortogonais**.

Exemplos.

1. Os quadrados latinos

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

são ortogonais.

2. Os quadrados latinos

$$L = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

não são ortogonais. De facto, considerando $L = [a_{ij}]$ e $M = [b_{ij}]$ temos $(0, 1) = (a_{11}, b_{11})$ e $(0, 1) = (a_{22}, b_{22})$. Só existem dois quadrados latinos de ordem 2 (com os mesmos símbolos) e, como vimos, não são ortogonais.

Seja $L = [a_{ij}]$ um quadrado latino de ordem n . Consideremos as seguintes permutações:

Permutação do tipo P_1 : Permutação das linhas de L ;

Permutação do tipo P_2 : Permutação das colunas de L ;

Permutação do tipo P_3 : Permutação dos elementos de \mathbb{S} .

Seja σ uma permutação do tipo P_i ($i \in \{1, 2, 3\}$). Designemos por L_σ a matriz que se obtém de L por aplicação da permutação σ . É claro que L_σ é ainda um quadrado latino e dizemos que L_σ é **equivalente a L** . De um modo geral, dizemos que o quadrado latino L é equivalente ao quadrado latino M se L se obtém de M por aplicação de uma permutação de um dos três tipos anteriores. Sejam \mathcal{C}_1 e \mathcal{C}_2 dois conjuntos de quadrados latinos de ordem n . Dizemos que \mathcal{C}_1 e \mathcal{C}_2 são **equivalentes** se existe uma aplicação bijectiva f entre \mathcal{C}_1 e \mathcal{C}_2 tal que, para todo o $L \in \mathcal{C}_1$, L e $f(L)$ são equivalentes relativamente ao mesmo tipo de permutação, isto é, existe uma permutação σ tal que $f(L) = L_\sigma$ e o tipo da permutação σ não depende de L .

A seguir, vamos considerar \mathbb{S} como sendo o conjunto $\mathbb{Z}_n = \{0, \dots, n-1\}$ e, por uma questão de conveniência, sempre que considerarmos o quadrado latino $L = [a_{ij}]$ estamos a considerar $i, j \in \mathbb{Z}_n$.

Lema 2.1.20 *Qualquer conjunto de quadrados latinos de ordem n mutuamente ortogonais é equivalente a um conjunto de quadrados latinos de ordem n mutuamente ortogonais em que a primeira linha de cada uma destas matrizes é $(0, 1, \dots, n-1)$.*

Demonstração. Seja $\mathcal{C} = \{L^{(1)}, \dots, L^{(m)}\}$ um conjunto de quadrados latinos de ordem n mutuamente ortogonais. Suponhamos que a primeira linha de $L^{(1)}$ é $(a_0, a_1, \dots, a_{n-1})$ onde, para cada $i \in \mathbb{Z}_n$, $a_i \in \mathbb{Z}_n$. Consideremos a permutação σ_1 do tipo P_3

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} \\ 0 & 1 & \cdots & n-1 \end{pmatrix}$$

A matriz $L_{\sigma_1}^{(1)} = [\sigma_1(a_{ij})]$ é um quadrado latino de ordem n . Vejamos que o conjunto $\{L_{\sigma_1}^{(1)}, L^{(2)}, \dots, L^{(m)}\}$ é ainda um conjunto de quadrados latinos mutuamente ortogonais. Para tal, basta mostrar que para qualquer $s \in \{2, \dots, m\}$, $L_{\sigma_1}^{(1)}$ e $L^{(s)}$ são ortogonais. Seja $s \in \{2, \dots, m\}$ e suponhamos que $L^{(s)} = [b_{ij}]$. Seja $(k, l) \in \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n$. Como $L^{(1)}$ e $L^{(s)}$ são ortogonais, existe um único par (i, j) tal que $(a_{ij}, b_{ij}) = (\sigma_1^{-1}(k), l)$ e, portanto, (i, j) é o único par tal que $(\sigma_1(a_{ij}), b_{ij}) = (k, l)$, o que prova que $L_{\sigma_1}^{(1)}$ e $L^{(s)}$ são ortogonais. Então, designando por σ_i ($i \in \{1, \dots, m\}$) a permutação dos elementos de \mathbb{Z}_n tal que a primeira linha da matriz $L_{\sigma_i}^{(i)}$ é $(0, 1, \dots, n-1)$, o conjunto $\{L_{\sigma_1}^{(1)}, \dots, L_{\sigma_m}^{(m)}\}$ é um conjunto de quadrados latinos de ordem n mutuamente ortogonais. É imediato que o conjunto \mathcal{C} e o conjunto $\{L_{\sigma_1}^{(1)}, \dots, L_{\sigma_m}^{(m)}\}$ são equivalentes ³. ■

O lema anterior mostra que, se existe um conjunto de quadrados latinos de ordem n mutuamente ortogonais então existe mais do que um conjunto de quadrados latinos de ordem n mutuamente ortogonais.

Proposição 2.1.21 *Qualquer conjunto de quadrados latinos de ordem n mutuamente ortogonais tem, no máximo, $n-1$ elementos.*

Demonstração. Seja \mathcal{C} um conjunto de quadrados latinos de ordem n mutuamente ortogonais. Atendendo ao lema anterior, \mathcal{C} é equivalente a um conjunto \mathcal{C}_1 de quadrados latinos mutuamente ortogonais em que a primeira linha destas matrizes é $(0, 1, \dots, n-1)$. Observe-mos que:

1. não há dois quadrados latinos de \mathcal{C}_1 em que o primeiro elemento das segundas linhas sejam iguais (caso contrário, se $L = [a_{ij}]$ e $M = [b_{ij}]$ são dois elementos de \mathcal{C}_1 tais que $a_{10} = b_{10} = s \in \mathbb{Z}_n$ então $(s, s) = (a_{10}, b_{10}) = (a_{0s}, b_{0s})$, o que contraria o facto de L e M serem ortogonais);
2. o primeiro elemento da segunda linha de qualquer quadrado latino de \mathcal{C}_1 não pode ser zero, pois num quadrado latino os elementos de cada coluna são todos diferentes.

Então, como existem $n-1$ possibilidades para o primeiro elemento da segunda linha, tendo em conta a observação 1., concluímos que \mathcal{C}_1 tem, no máximo, $n-1$ elementos. ■

A um conjunto de quadrados latinos de ordem n mutuamente ortogonais com $n-1$ elementos chamamos **conjunto completo de quadrados latinos de ordem n** .

³A aplicação $f : \mathcal{C} \longrightarrow \{L_{\sigma_1}^{(1)}, \dots, L_{\sigma_m}^{(m)}\}$ definida por $f(L^{(j)}) = L_{\sigma_j}^{(j)}$, para cada $j \in \{1, \dots, m\}$, é bijectiva e $L^{(j)}$ e $L_{\sigma_j}^{(j)}$ são equivalentes. A permutação σ_j é do tipo P_3 , para todo o $j \in \{1, \dots, m\}$. Notemos ainda que, o conjunto \mathcal{C} é equivalente a um conjunto de quadrados latinos de ordem n mutuamente ortogonais em que a linha i é igual em todos esses quadrados latinos.

Proposição 2.1.22 *Seja $\mathcal{C} = \{L^{(1)}, \dots, L^{(n-1)}\}$ ($L^{(\alpha)} = [a_{ij}^{\alpha}]$, $\alpha \in \mathbb{Z}_n^*$)⁴ um conjunto completo de quadrados latinos de ordem n e sejam $h, h', k, k' \in \mathbb{Z}_n$ tais que $h \neq h'$ e $k \neq k'$. Então existe $\alpha_0 \in \mathbb{Z}_n^*$ tal que $a_{hk}^{\alpha_0} = a_{h'k'}^{\alpha_0}$.*

Demonstração. Sem perda de generalidade, podemos supor que, para todo o $\alpha \in \mathbb{Z}_n^*$ a linha h de $L^{(\alpha)}$ é $(0, 1, \dots, n-1)$. Então, para todo o $\alpha \in \mathbb{Z}_n^*$, $a_{hk}^{\alpha} = k$. Suponhamos, com vista a uma contradição, que para todo o $\alpha \in \mathbb{Z}_n^*$, $a_{h'k'}^{\alpha} \neq k$. Sabemos que, para todo o $\alpha \in \mathbb{Z}_n^*$, $a_{h'k'}^{\alpha} \neq a_{h'k'}^{\alpha} = k'$. Temos assim que, para todo o $\alpha \in \mathbb{Z}_n^*$, $a_{h'k'}^{\alpha} \in \mathbb{Z}_n \setminus \{k, k'\}$. Podemos então concluir que existem α_1 e $\alpha_2 \in \mathbb{Z}_n^*$ tais que $a_{h'k'}^{\alpha_1} = a_{h'k'}^{\alpha_2}$. Seja $l = a_{h'k'}^{\alpha_1}$. Então $(a_{hl}^{\alpha_1}, a_{hl}^{\alpha_2}) = (a_{h'k'}^{\alpha_1}, a_{h'k'}^{\alpha_2}) = (l, l)$, o que está em contradição com a ortogonalidade de $L^{(\alpha_1)}$ e $L^{(\alpha_2)}$. Portanto existe $\alpha_0 \in \mathbb{Z}_n^*$ tal que $a_{hk}^{\alpha_0} = k = a_{h'k'}^{\alpha_0}$. ■

O nosso objectivo agora é mostrar que, a existência de um conjunto completo de quadrados latinos de ordem n equivale à existência de um plano afim de ordem n .

Teorema 2.1.23 *Existe um plano afim de ordem n se e só se existe um conjunto completo de quadrados latinos de ordem n .*

Demonstração. Seja \mathcal{A} um plano afim de ordem n . Em \mathcal{A} existem $n+1$ classes de rectas paralelas e cada uma destas classes contém n rectas. Designemos por Γ_1 e Γ_2 duas dessas classes de rectas paralelas. Denotemos as rectas de Γ_1 por m_0, \dots, m_{n-1} e as rectas de Γ_2 por r_0, \dots, r_{n-1} . Cada ponto de \mathcal{A} pertence a uma única recta de cada uma das classes de rectas paralelas. Assim, cada ponto P de \mathcal{A} pode ser etiquetado por um único par (i, j) , onde $P = m_i \cap r_j$ (ver figura 8).

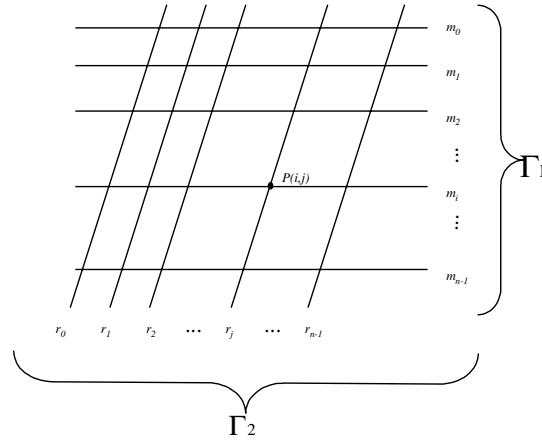


FIGURA 8

⁴ $\mathbb{Z}_n^* = \{1, 2, \dots, n-1\}$

Agora vamos numerar as $n-1$ restantes classes de rectas paralelas por $1, \dots, n-1$ e numerar as rectas de cada uma destas classes por $0, 1, \dots, n-1$. À classe de rectas numeradas ⁵ pelo número α , com $\alpha \in \mathbb{Z}_n^*$, vamos associar uma matriz $L^{(\alpha)} = [a_{ij}^\alpha]$ de dimensão $n \times n$ onde a_{ij}^α é o número da recta dessa classe a que pertence o ponto etiquetado pelo par (i, j) . Facilmente observamos que cada elemento da matriz $L^{(\alpha)}$ pertence ao conjunto \mathbb{Z}_n . Suponhamos que existem $i, j, j' \in \mathbb{Z}_n$, com $j \neq j'$, tal que $a_{ij}^\alpha = a_{ij'}^\alpha$. Os pontos etiquetados por (i, j) e (i, j') pertencem ambos à mesma recta l da classe de rectas paralelas α e pertencem, por definição, à recta m_i . Concluimos então que $m_i = l$, o que contraria a hipótese. Logo cada símbolo de \mathbb{Z}_n ocorre exactamente uma vez em cada linha de $L^{(\alpha)}$. De modo análogo mostramos que cada elemento de \mathbb{Z}_n ocorre exactamente uma vez em cada coluna de $L^{(\alpha)}$. A matriz $L^{(\alpha)}$ é, portanto, um quadrado latino de ordem n . Assim, um plano afim dá origem a $n-1$ quadrados latinos ⁶ de ordem n .

Vejamus agora que estes $n-1$ quadrados latinos são ortogonais dois a dois. Sejam $L^{(\alpha)} = [a_{ij}^\alpha]$ e $L^{(\alpha')} = [a_{ij}^{\alpha'}]$ dois desses quadrados latinos e seja $(k, l) \in \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n$. Na classe de rectas paralelas α existe uma só recta numerada por k e na classe de rectas paralelas α' existe uma só recta numerada por l . Estas duas rectas intersectam-se num único ponto P que, como sabemos, pode ser etiquetado por um único par (i, j) , onde $P = m_i \cap r_j$. Temos então $a_{ij}^\alpha = k$ e $a_{ij}^{\alpha'} = l$, donde se pode concluir que $L^{(\alpha)}$ e $L^{(\alpha')}$ são quadrados latinos ortogonais.

Reciprocamente, suponhamos que $\{L^{(1)}, L^{(2)}, \dots, L^{(n-1)}\}$ é um conjunto com $n-1$ quadrados latinos de ordem n mutuamente ortogonais. Cada um dos quadrados latinos $L^{(\alpha)}$ ($\alpha \in \mathbb{Z}_n^*$) tem n^2 elementos e cada um destes elementos dá origem a um par (i, j) , onde i designa a linha e j a coluna a que esse elemento pertence. Vamos designar cada um dos pares (i, j) por ponto. Temos assim n^2 pontos. Designemos por rectas os seguintes subconjuntos:

1. Fixemos $i \in \mathbb{Z}_n$ e consideremos $m_i = \{(i, j) : j \in \mathbb{Z}_n\}$
(temos n conjuntos deste tipo).
2. Fixemos $j \in \mathbb{Z}_n$ e consideremos $r_j = \{(i, j) : i \in \mathbb{Z}_n\}$
(temos n conjuntos deste tipo).
3. Fixemos $\alpha \in \mathbb{Z}_n^*$ e designemos por a_{ij}^α ($i, j \in \mathbb{Z}_n$) o elemento que pertence à linha i e à coluna j do quadrado latino $L^{(\alpha)}$.
Para cada $k \in \mathbb{Z}_n$, consideremos o conjunto $l_k^\alpha = \{(i, j) : a_{ij}^\alpha = k\}$
(para cada $\alpha \in \mathbb{Z}_n^*$, temos n conjuntos deste tipo).

O número total de rectas é $n(n-1) + n + n = n^2 + n$ e cada recta contém n pontos. Fixemos $\alpha \in \mathbb{Z}_n^*$. Para cada par (i, j) temos um único valor para a_{ij}^α . Assim, para cada $\alpha \in \mathbb{Z}_n^*$ as rectas l_k^α e $l_{k'}^\alpha$ ($k, k' \in \mathbb{Z}_n$ e $k \neq k'$) não se intersectam. As rectas m_i ($i \in \mathbb{Z}_n$) e as rectas r_j ($j \in \mathbb{Z}_n$) formam duas classes de rectas paralelas ⁷ e as rectas l_k^α formam $n-1$ classes de rectas paralelas. Ao todo temos $n+1$ classes de rectas paralelas e cada uma destas classes contém n rectas. Vamos agora mostrar que duas rectas de classes distintas de rectas

⁵Daqui para a frente, em vez de dizermos classe de rectas paralelas numerada pelo número α vamos dizer classe de rectas paralelas α .

⁶Reparemos que, dados $\alpha, \alpha' \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ temos $L^{(\alpha)} \neq L^{(\alpha')}$. Se tal não acontece, isto é, se $L^{(\alpha)} = L^{(\alpha')}$, então as rectas da classe de rectas paralelas α são as mesmas que as da classe de rectas paralelas α' e, portanto, não se tem $n+1$ classes de rectas paralelas.

⁷Dada uma recta r , a classe de rectas paralelas que contém r é o conjunto que contém r e todas as rectas que não intersectam r .

paralelas intersectam-se num único ponto. Sejam l e r duas rectas de classes distintas. Temos quatro casos a considerar:

1. $m = m_i$ e $r = r_j$, para algum $i, j \in \mathbb{Z}_n$.
Facilmente verificamos que o ponto (i, j) pertence a ambas as rectas e é o único ponto nestas condições. De facto, se $(a, b) \in m \cap r$ então $(a, b) \in m_i$ e $(a, b) \in r_j$ donde $a = i$ e $b = j$.
2. $m = m_i$ e $r = l_k^\alpha$, para algum $i, k \in \mathbb{Z}_n, \alpha \in \mathbb{Z}_n^*$.
No quadrado latino $L^{(\alpha)} = [a_{ij}^\alpha]$ existe um único $j' \in \mathbb{Z}_n$ tal que $a_{ij'}^\alpha = k$. Logo (i, j') é o único ponto de intersecção das rectas m e r .
3. $m = r_j$ e $r = l_k^\alpha$, para algum $j, k \in \mathbb{Z}_n, \alpha \in \mathbb{Z}_n^*$.
Análogo ao caso anterior.
4. $m = l_k^\alpha$ e $r = l_{k'}^{\alpha'}$, para algum $\alpha, \alpha' \in \mathbb{Z}_n^*$ com $\alpha \neq \alpha'$ e $k, k' \in \mathbb{Z}_n$.
Como $L^{(\alpha)} = [a_{ij}^\alpha]$ e $L^{(\alpha')} = [a_{ij}^{\alpha'}]$ são ortogonais então existe um único par (i, j) tal que $(a_{ij}^\alpha, a_{ij}^{\alpha'}) = (k, k')$. Logo as rectas l e r intersectam-se num único ponto que é o ponto (i, j) .

Designemos por \mathcal{P} o conjunto dos pontos e por \mathcal{L} o conjunto das rectas. Vejamos que a estrutura de incidência $\mathcal{A} = (\mathcal{P}, \mathcal{L})$ é um plano afim.

Verificação de (A_1) . Sejam P e Q dois pontos distintos.

- (i) Se $P = (i, j)$ e $Q = (i, j')$, com $j \neq j'$, os pontos pertencem à recta m_i e só a esta recta, pois duas rectas distintas intersectam-se, no máximo, num só ponto.
- (ii) Se $P = (i, j)$ e $Q = (i', j)$, com $i' \neq i$, é claro que a única recta que contém ambos os pontos é a recta r_j .
- (iii) Suponhamos agora que $P = (i, j)$ e $Q = (i', j')$, com $i \neq i'$ e $j \neq j'$. Duas rectas distintas intersectam-se, no máximo, num ponto. Assim, os pontos P e Q pertencem, no máximo, a uma mesma recta. Atendendo à proposição 2.1.22, existe $\alpha \in \mathbb{Z}_n^*$ tal que $a_{ij}^\alpha = a_{i'j'}^\alpha$, onde $L^{(\alpha)} = [a_{hh'}^\alpha]$. Logo os pontos pertencem à recta l_k^α sendo $k = a_{ij}^\alpha = a_{i'j'}^\alpha$.

Verificação de (A_2) . Sejam l uma recta e P um ponto tal que $P \notin l$.

- (i) Se $l = m_i$, para algum $i \in \mathbb{Z}_n$, então $P = (i', j)$ com $i' \neq i$. A única recta que contém o ponto P e é paralela a m_i é a recta $m_{i'}$.
- (ii) Se $l = r_j$, para algum $j \in \mathbb{Z}_n$, então $P = (i, j')$ com $j' \neq j$. A única recta que contém P e é paralela a r_j é a recta $r_{j'}$.
- (iii) Se $l = l_k^\alpha$, para algum $\alpha \in \mathbb{Z}_n^*$ e $k \in \mathbb{Z}_n$, temos $P = (i, j)$, onde $a_{ij}^\alpha = s \neq k$ com $L^{(\alpha)} = [a_{hh'}^\alpha]$. A recta l_s^α é a única recta que contém o ponto P e é paralela à recta l .

Verificação de (A_3) . Nenhuma recta contém os pontos $(0, 0)$, $(0, 1)$ e $(1, 0)$. Logo existem três pontos não colineares.

Mostrámos assim que $\mathcal{A} = (\mathcal{P}, \mathcal{L})$ é um plano afim. Observemos que \mathcal{A} tem ordem n pois cada recta contém exactamente n pontos. ■

2.2 Plano projectivo

Um **plano projectivo** $\pi = (\mathcal{P}, \mathcal{L})$ é uma estrutura de incidência, onde os elementos de \mathcal{L} são designados por rectas, que satisfaz as seguintes condições:

- (P_1) Dados dois pontos distintos existe uma única recta que contém ambos os pontos;
- (P_2) Dadas duas rectas distintas existe um único ponto que pertence a ambas as rectas;
- (P_3) Existe um conjunto de quatro pontos tais que não há três colineares ⁸.

Resulta imediatamente de (P_1), (P_2) e (P_3) que existem pelo menos seis rectas.

Exemplos.

1. A estrutura de incidência dada no exemplo 1 da página 1 é um plano projectivo, chamado Plano de Fano.
2. Fixemos um referencial cartesiano em \mathbb{R}^3 e designemos por O a origem desse referencial. Seja \mathcal{P} o conjunto das rectas de \mathbb{R}^3 que passam por O e \mathcal{L} o conjunto dos planos de \mathbb{R}^3 que contêm O . Consideremos a relação de incidência $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{P} \times \mathcal{L}$ definida por:

$$(l, \alpha) \in \mathcal{I} \Leftrightarrow l \subseteq \alpha.$$

Facilmente verificamos que a estrutura de incidência $\mathbf{S} = (\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$ é um espaço linear. Para cada $\alpha \in \mathcal{L}$, definimos o conjunto $\bar{\alpha} = \{l \in \mathcal{P} : l \mathcal{I} \alpha\}$. Consideremos os conjuntos

$$\bar{\mathcal{P}} = \mathcal{P} \quad \text{e} \quad \bar{\mathcal{L}} = \{\bar{\alpha} : \alpha \in \mathcal{L}\}.$$

É evidente que a estrutura de incidência $\bar{\mathbf{S}} = (\bar{\mathcal{P}}, \bar{\mathcal{L}})$ é um plano projectivo. Com efeito, a condição (P_1) é verificada, visto que duas rectas de \mathbb{R}^3 que passam pela origem definem um único plano de \mathbb{R}^3 que contém a origem. Dois planos distintos de \mathbb{R}^3 que contêm a origem intersectam-se numa recta de \mathbb{R}^3 que passa pela origem, pelo que a condição (P_2) é verificada. A condição (P_3) também é verificada, pois existem quatro rectas de \mathbb{R}^3 que passam pela origem tais que não há três rectas coplanares. Por exemplo, as rectas r , s , t e u que passam pela origem e têm a direcção do vector $\vec{r} = (1, 0, 0)$, $\vec{s} = (0, 1, 0)$, $\vec{t} = (0, 0, 1)$ e $\vec{u} = (1, 1, 1)$, respectivamente.

Como \mathbf{S} e $\bar{\mathbf{S}}$ são estruturas de incidência isomorfas, dizemos que \mathbf{S} é um plano projectivo.

Resulta da definição o lema seguinte:

Lema 2.2.1 *Qualquer recta de um plano projectivo contém pelo menos três pontos.*

Demonstração. Por (P_3), existe um conjunto $\{Q_1, Q_2, Q_3, Q_4\}$ de quatro pontos tais que não há três pontos colineares. Seja l uma recta. Suponhamos, sem perda de generalidade que $Q_1 \notin l$. Consideremos os pontos P , Q e R tais que

$$Q_1Q_2 \cap l = P, \quad Q_1Q_3 \cap l = Q \quad \text{e} \quad Q_1Q_4 \cap l = R,$$

⁸A definição de pontos colineares em planos projectivos é a mesma definição dada na página 9 para planos afins.

cuja unicidade é garantida por (P_2) . Então P , Q e R são pontos distintos de l , caso contrário, por (P_1) , em $\{Q_1, Q_2, Q_3, Q_4\}$ existiam três pontos colineares. ■

A definição de plano projectivo permite-nos afirmar que dois pontos distintos definem uma única recta e duas rectas distintas definem um único ponto. Iremos ver que, num plano projectivo, se uma afirmação \mathcal{F} é verdadeira então também é verdadeira a afirmação dual de \mathcal{F} .

Para cada $i \in \{1, 2, 3\}$, designemos por (P_i^*) a afirmação dual de (P_i) . É imediato que, num plano projectivo π , as afirmações (P_1^*) e (P_2^*) são verdadeiras em π ((P_1^*) é (P_2) e (P_2^*) é (P_1)). Vejamos agora que a afirmação

(P_3^*) Existe um conjunto de quatro rectas tal que não há três com um ponto comum,

também é uma afirmação verdadeira em π . Atendendo a (P_3) , existem quatro pontos A , B , C e D tais que não há três colineares. Consideremos as rectas AB , BC , CD e AD . Suponhamos que as rectas AB , BC e CD intersectam-se num ponto P . Por (P_2) , B é o único ponto comum às rectas AB e BC e C é o único ponto comum às rectas BC e CD . Temos então que $B = P = C$. Tal é falso, pois A , B , C e D são quatro pontos distintos. Aplicando o mesmo raciocínio a quaisquer três das quatro rectas dadas, concluímos que $\{AB, BC, CD, AD\}$ é um conjunto de quatro rectas tais que não há três com um ponto comum.

Seja $\pi = (\mathcal{P}, \mathcal{L})$ um plano projectivo e $\pi^* = (\mathcal{P}^*, \mathcal{L}^*)$ a estrutura dual da estrutura de incidência π . Facilmente observamos que π^* é também um plano projectivo⁹.

Proposição 2.2.2 *Seja π um plano projectivo e seja \mathcal{F} uma afirmação verdadeira em π . Então a afirmação dual de \mathcal{F} , \mathcal{F}^* , também é verdadeira em π .*

Demonstração. Designemos por \mathcal{C} a classe de todos os planos projectivos. É claro que π e π^* pertencem a \mathcal{C} . Então, pelo Princípio de Dualidade, podemos concluir que se \mathcal{F} é uma afirmação verdadeira em π então \mathcal{F}^* também é verdadeira em π . ■

Lema 2.2.3 *Num plano projectivo π , qualquer ponto, qualquer par de pontos ou qualquer terço de pontos não colineares pertencem a um conjunto de quatro pontos tais que não há três colineares.*

Demonstração. Atendendo ao lema 2.2.1 e à proposição 2.2.2, qualquer ponto P pertence a pelo menos três rectas l_1 , l_2 e l_3 . Sejam P_1 , P_2 e P_3 pontos de l_1 , l_2 e l_3 , respectivamente, distintos de P e não colineares (notemos que tais pontos existem). Então $\{P, P_1, P_2, P_3\}$ é um conjunto de quatro pontos tais que não há três colineares. Notemos que podemos aplicar este raciocínio também ao caso em que são dados dois ou três pontos. ■

2.2.1 Dimensão de um plano projectivo

Seja $\pi = (\mathcal{P}, \mathcal{L})$ um plano projectivo. Seja $\bar{\mathcal{P}}$ um subconjunto de \mathcal{P} . Vejamos que possibilidades temos para o fecho de $\bar{\mathcal{P}}$.

1. Se $\bar{\mathcal{P}} = \emptyset$ ou $\bar{\mathcal{P}} = \{P\}$ então $\langle \bar{\mathcal{P}} \rangle = \bar{\mathcal{P}}$.
2. Se $\bar{\mathcal{P}} = \{P, Q\}$ então $\langle \bar{\mathcal{P}} \rangle = PQ$.

⁹Basta observar que $(P_1^*) = (P_2)$, $(P_2^*) = (P_1)$ e (P_3^*) implica (P_3) .

3. Suponhamos que $\bar{\mathcal{P}}$ tem pelo menos três pontos.

- (i) Se os pontos de $\bar{\mathcal{P}}$ são colineares então $\langle \bar{\mathcal{P}} \rangle$ é a recta que contém esses pontos.
- (ii) Suponhamos agora que existem em $\bar{\mathcal{P}}$ três pontos A, B e C não colineares. Seja P um ponto de \mathcal{P} . Por definição de fecho, todos os pontos das rectas AB, BC e AC pertencem ao fecho de $\bar{\mathcal{P}}$. Suponhamos que P não pertence a nenhuma destas rectas. Por (P_2) , a recta AP intersecta a recta BC num ponto que designamos por Q (ver figura 9).

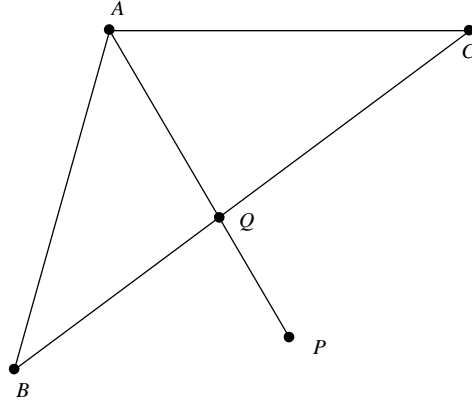


FIGURA 9

Então, todos os pontos da recta AQ pertencem ao fecho de $\bar{\mathcal{P}}$ e, conseqüentemente, $P \in \langle \bar{\mathcal{P}} \rangle$. Assim, neste caso temos $\langle \bar{\mathcal{P}} \rangle = \pi$.

Concluimos assim que o fecho de $\bar{\mathcal{P}}$ pode ser o conjunto vazio, um ponto, uma recta ou π .

Proposição 2.2.4 *Todas as bases de um plano projectivo π têm o mesmo número de elementos.*

Demonstração. Atendendo ao teorema 1.3.3 basta mostrar que π tem a propriedade de intercâmbio. Sejam X e Y pontos de π e $\bar{\mathcal{P}}$ um subconjunto de pontos de π tais que $X \notin \langle \bar{\mathcal{P}} \rangle$ e $X \in \langle \bar{\mathcal{P}} \cup \{Y\} \rangle$. Vejamos que $Y \in \langle \bar{\mathcal{P}} \cup \{X\} \rangle$.

Temos três casos a considerar:

1. $\langle \bar{\mathcal{P}} \rangle = \emptyset$.

Neste caso temos $\bar{\mathcal{P}} = \emptyset$. Como $X \in \langle \bar{\mathcal{P}} \cup \{Y\} \rangle = \{Y\}$ resulta que $X = Y$ e, portanto, $Y \in \langle \bar{\mathcal{P}} \cup \{X\} \rangle$.

2. $\langle \bar{\mathcal{P}} \rangle = \{P\}$.

Neste caso temos $\bar{\mathcal{P}} = \{P\}$. Atendendo a que $X \notin \langle \bar{\mathcal{P}} \rangle = \{P\}$ temos $P \neq X$ e atendendo a que $X \in \langle \bar{\mathcal{P}} \cup \{Y\} \rangle$ temos $P \neq Y$ (caso contrário, $X \in \langle \bar{\mathcal{P}} \cup \{Y\} \rangle = \{P\}$). Então, como $X \in \langle \bar{\mathcal{P}} \cup \{Y\} \rangle = PY$ temos $Y \in PX$ e, portanto, $Y \in \langle \bar{\mathcal{P}} \cup \{X\} \rangle$.

3. $\langle \bar{\mathcal{P}} \rangle = l$, onde l é uma recta de π .

Atendendo a que $\bar{\mathcal{P}} \subseteq \bar{\mathcal{P}} \cup \{X\}$ vem $\langle \bar{\mathcal{P}} \rangle \subseteq \langle \bar{\mathcal{P}} \cup \{X\} \rangle$. Temos assim que $\langle \bar{\mathcal{P}} \cup \{X\} \rangle = l$ ou $\langle \bar{\mathcal{P}} \cup \{X\} \rangle = \pi$. Como $X \in \langle \bar{\mathcal{P}} \cup \{X\} \rangle$ resulta que $\langle \bar{\mathcal{P}} \cup \{X\} \rangle \neq l$, já que $X \notin \langle \bar{\mathcal{P}} \rangle = l$. Assim, $\langle \bar{\mathcal{P}} \cup \{X\} \rangle = \pi$ e, portanto, $Y \in \langle \bar{\mathcal{P}} \cup \{X\} \rangle$. ■

Corolário 2.2.5 *Qualquer plano projectivo tem dimensão 2.*

Demonstração. Sejam P, Q e R três pontos não colineares de um plano projectivo π (tais pontos existem sempre atendendo a (P_3)). Então $\langle\{P, Q, R\}\rangle = \pi$, isto é $\{P, Q, R\}$ gera π . Facilmente verificamos que $\{P, Q, R\}$ é um conjunto independente. Logo $\{P, Q, R\}$ é uma base de π . Podemos então concluir que π tem dimensão 2, já que todas as bases de π têm o mesmo número de elementos. ■

2.2.2 Ordem de um plano projectivo finito

Um **plano projectivo finito** é uma estrutura de incidência finita que é um plano projectivo. Iremos mostrar que, num plano projectivo finito, cada recta contém o mesmo número de pontos, cada ponto pertence ao mesmo número de rectas e o número de pontos de cada recta é igual ao número de rectas a que cada ponto pertence. Além disso, também iremos mostrar que, num plano projectivo finito, o número de pontos é igual ao número de rectas. Para isso, necessitamos dos seguintes resultados:

Lema 2.2.6 *Sejam l e r duas rectas distintas de um plano projectivo π . Então existe um ponto P de π tal que P não pertence a l nem a r .*

Demonstração. Seja $X = l \cap r$ e sejam A, B, C e D pontos distintos de X tais que $A, B \in l$ e $C, D \in r$ (observemos que tais pontos existem, pois qualquer recta de π contém pelo menos três pontos). Então $\{A, B, C, D\}$ é um conjunto de quatro pontos tais que não há três colineares. Designemos por P o ponto de intersecção das rectas AC e BD . Suponhamos, com vista a uma contradição, que P pertence a pelo menos uma das rectas l ou r . Sem perda de generalidade, podemos supor que P pertence à recta $l = AB$. Como A, B e C são pontos não colineares temos que as rectas AB e AC são distintas. Atendendo a que $P \in AB \cap AC$ e $A \in AB \cap AC$, por (P_2) , resulta que $P = A$. Tal é falso, pois P é um ponto da recta BD e A, B e D não são colineares. Concluimos assim que existe um ponto P de π tal que P não pertence a l nem a r . ■

Proposição 2.2.7 *Sejam π um plano projectivo, l e r rectas de π e P um ponto de π . Então:*

1. *Existe uma bijecção entre os pontos de l e os pontos de r ;*
2. *Existe uma bijecção entre os pontos de l e as rectas que contém P .*

Demonstração.

1. Sejam l e r duas rectas distintas de π . Pelo lema anterior, existe um ponto P de π que não pertence a l nem a r . Cada ponto X pertencente a l define um ponto X' pertencente a r do modo seguinte: $X' = PX \cap r$.

Como, para cada $X \in l$, a recta PX é única e duas rectas intersectam-se num único ponto, temos que o ponto X' determinado por X é único. Consideremos a aplicação f entre os pontos de l e os pontos de r definida por $f(X) = X' = PX \cap r$.

A aplicação f é injectiva. De facto, se X_1 e X_2 são dois pontos distintos da recta l então PX_1 e PX_2 são rectas distintas e, portanto, os pontos $X'_1 = PX_1 \cap r$ e $X'_2 = PX_2 \cap r$ são distintos, já que $P \notin r$.

Vejamos agora que f é sobrejectiva. Seja Y um ponto qualquer de r . Pretendemos encontrar um ponto X de l tal que $f(X) = Y$. Basta considerar $X = PY \cap l$.

Concluimos assim que f é uma bijecção entre os pontos de l e os pontos de r .

2. Temos dois casos a considerar:

(a) A recta l não contém P .

Designemos por \mathcal{L}' o conjunto das rectas que contêm P . Cada ponto X de l define uma recta l' pertencente a \mathcal{L}' do seguinte modo : $l' = PX$.

Como dois pontos distintos definem uma única recta temos que a recta l' determinada por X é única. Consideremos a aplicação f entre os pontos de l e as rectas que contêm P definida por $f(X) = l' = PX$.

Sejam X_1 e X_2 dois pontos distintos da recta l . As rectas PX_1 e PX_2 pertencem a \mathcal{L}' e são distintas. Temos assim que f é uma aplicação injectiva.

Seja l' uma recta que contém P . Como π é um plano projectivo, l e l' intersectam-se num único ponto X_1 . Como X_1 e P são pontos de l' temos que $l' = PX_1$. Temos assim que existe $X_1 \in l$ tal que $PX_1 = l'$, o que mostra que f é sobrejectiva.

(b) A recta l contém P .

A afirmação dual do lema 2.2.3 permite-nos concluir que existe uma recta r que não contém P . Já vimos que existe uma bijecção, que vamos designar por f , entre os pontos da recta r e as rectas que passam por P . Também vimos que existe uma bijecção, que vamos designar por g , entre os pontos da recta l e os pontos da recta r . Temos então que $f \circ g$ é uma bijecção entre os pontos da recta l e as rectas que passam por P . ■

Corolário 2.2.8 *Seja π um plano projectivo finito. Então, existe um inteiro positivo $n \geq 2$ tal que:*

1. cada recta contém exactamente $n + 1$ pontos;
2. cada ponto pertence exactamente a $n + 1$ rectas;
3. π contém exactamente $n^2 + n + 1$ pontos e $n^2 + n + 1$ rectas.

Demonstração. Se π é um plano projectivo finito então π contém um número finito de pontos e um número finito de rectas. Assim, 1. e 2. resultam da proposição anterior. Observemos que $n \geq 2$, pois qualquer recta de um plano projectivo contém pelo menos três pontos.

Vamos agora demonstrar 3.. Seja Q um ponto qualquer de π . Atendendo a 1., cada recta que passa por Q contém n pontos distintos de Q . Como todo o ponto de π pertence a uma destas rectas, o número total de pontos é $(n + 1)n + 1$, ou seja, $n^2 + n + 1$. Argumentando de modo análogo para as afirmações duais provamos que em π existem $n^2 + n + 1$ rectas. ■

Definimos **ordem de um plano projectivo finito** como sendo o número inteiro n a que se refere o corolário anterior. Como $n \geq 2$ o número de pontos e o número de rectas de um plano projectivo finito é pelo menos $2^2 + 2 + 1 = 7$. O Plano de Fano é um plano projectivo de ordem 2.

2.2.3 Subplanos

Seja $\pi = (\mathcal{P}, \mathcal{L})$ um plano projectivo. Seja $\bar{\mathcal{P}}$ um subconjunto de \mathcal{P} . Consideremos o conjunto $\bar{\mathcal{L}}_1 = \{l \cap \bar{\mathcal{P}} : l \in \mathcal{L}\}$. Seja $\bar{\mathcal{L}}$ um subconjunto de $\bar{\mathcal{L}}_1$. Dizemos que a estrutura de incidência

$\bar{\pi} = (\bar{\mathcal{P}}, \bar{\mathcal{L}})$ é um **subplano de** π se $\bar{\pi}$ é um plano projectivo. Resulta da definição que π é um subplano de π . Dizemos que $\bar{\pi}$ é um **subplano próprio** de π se $\bar{\pi}$ é diferente de π .

Teorema 2.2.9 (Teorema de Bruck, 1963) *Seja $\pi = (\mathcal{P}, \mathcal{L})$ um plano projectivo de ordem n e seja $\bar{\pi} = (\bar{\mathcal{P}}, \bar{\mathcal{L}})$ um subplano próprio de π de ordem m . Então $n = m^2$ ou $n \geq m^2 + m$.*

Demonstração. Como $\bar{\pi}$ é um subplano próprio de π temos que $\bar{\pi} \neq \pi$ e, portanto, $m < n$. Seja $\bar{l} = l \cap \bar{\mathcal{P}}$ uma recta de $\bar{\pi}$. Como \bar{l} contém $m + 1$ pontos de $\bar{\pi}$ temos que l contém $n + 1 - (m + 1) = n - m$ pontos de $\pi \setminus \bar{\pi}$. Duas quaisquer rectas de $\bar{\pi}$ intersectam-se num ponto de $\bar{\pi}$ e em $\bar{\pi}$ existem $m^2 + m + 1$ rectas. Designemos por \mathcal{M} o conjunto das rectas de π que contêm pelo menos dois pontos de $\bar{\pi}$. Notemos que toda a recta de $\bar{\pi}$ está contida numa recta de \mathcal{M} e toda a recta de \mathcal{M} contém uma recta de $\bar{\pi}$. O número de pontos de $\pi \setminus \bar{\pi}$ que pertencem às rectas de \mathcal{M} é $(m^2 + m + 1)(n - m)$. Assim, em π há pelo menos $m^2 + m + 1 + (m^2 + m + 1)(n - m)$ pontos.

Temos assim que

$$\begin{aligned} n^2 + n + 1 &\geq m^2 + m + 1 + (m^2 + m + 1)(n - m) \\ n^2 &\geq m^2 n - m^3 + mn \\ 0 &\geq m^2(n - m) + n(m - n) \\ 0 &\geq (m^2 - n)(n - m). \end{aligned} \tag{2.1}$$

Como $n > m$ para que se verifique a desigualdade (2.1) resulta que $m^2 - n \leq 0$, ou seja, $m^2 \leq n$. Se $m^2 = n$ qualquer ponto de π pertence a uma recta de \mathcal{M} , já que

$$\begin{aligned} \underbrace{n^\circ \text{ de pontos de } \bar{\pi}}_{m^2 + m + 1} + \underbrace{(m^2 + m + 1)(n - m)}_{n^\circ \text{ de pontos de } \pi \setminus \bar{\pi} \text{ que pertencem às rectas de } \mathcal{M}} &= m^4 + m^2 + 1 \\ &= \underbrace{n^2 + n + 1}_{n^\circ \text{ de pontos de } \pi}. \end{aligned}$$

Suponhamos agora que $m^2 \neq n$. Então existe um ponto A de π que não pertence a nenhuma recta de \mathcal{M} . Temos assim que qualquer recta de π que passa por A contém, no máximo, um ponto de $\bar{\pi}$. Assim, como qualquer ponto de $\bar{\pi}$ pertence a uma recta de π que contém A , o número total de rectas de π que contém A é maior ou igual ao número de pontos de $\bar{\pi}$. Temos assim que $n + 1 \geq m^2 + m + 1$, ou seja, $n \geq m^2 + m$. ■

Na bibliografia usada neste trabalho não temos conhecimento de nenhum subplano próprio de ordem m de um plano projectivo de ordem n tal que $n = m^2 + m$. A demonstração do teorema anterior permite-nos constatar que, no caso em que $n = m^2$ qualquer ponto de π pertence a uma recta que contém pelo menos dois pontos de $\bar{\pi}$.

Chamamos **subplano de Baer** de um plano projectivo π a um subplano $\bar{\pi}$ de π em que qualquer ponto de π pertence a uma recta que contém pelo menos dois pontos de $\bar{\pi}$ e qualquer recta de π contém pelo menos um ponto de $\bar{\pi}$.

Corolário 2.2.10 *Sejam π um plano projectivo de ordem n e $\bar{\pi}$ um subplano próprio de π de ordem m . Então $\bar{\pi}$ é um subplano de Baer se e só se $n = m^2$.*

Demonstração. Suponhamos que $\bar{\pi}$ é um subplano de Baer. Como o número de pontos de $\pi \setminus \bar{\pi}$ que pertencem às rectas de π que contêm pontos de $\bar{\pi}$ é $(m^2 + m + 1)(n - m)$ e qualquer ponto de π pertence a uma recta de $\bar{\pi}$ temos que

$$n^2 + n + 1 = m^2 + m + 1 + (m^2 + m + 1)(n - m),$$

ou seja, $(m^2 - n)(n - m) = 0$. Como $n \neq m$, pois $\bar{\pi}$ é um subplano próprio de π , resulta que $n = m^2$.

Reciprocamente, suponhamos que $n = m^2$. Já vimos (na demonstração do teorema 2.2.9) que, neste caso, qualquer ponto de π pertence a uma recta de π que contém pelo menos dois pontos de $\bar{\pi}$. É claro que qualquer recta de π contém pelo menos um ponto de $\bar{\pi}$. Caso contrário, teríamos que

$$\underbrace{n^2 + n + 1}_{\text{n}^\circ \text{ de pontos de } \pi} > \underbrace{m^2 + m + 1}_{\text{n}^\circ \text{ de pontos de } \bar{\pi}} + \underbrace{(m^2 + m + 1)(n - m)}_{\text{n}^\circ \text{ de pontos de } \pi \setminus \bar{\pi} \text{ que pertencem às rectas de } \mathcal{M}},$$

onde \mathcal{M} designa o conjunto das rectas de π que contêm pelo menos dois pontos de $\bar{\pi}$. Uma vez que $n = m^2$ teríamos

$$m^4 + m^2 + 1 > m^4 + m^2 + 1,$$

o que é falso. Concluimos então que $\bar{\pi}$ é um subplano de Baer. ■

2.2.4 Colineações em planos projectivos

Seja π um plano projectivo. Uma **colineação de π** é um automorfismo de π .

Exemplo.

Consideremos o Plano de Fano cuja representação gráfica é a figura 10.

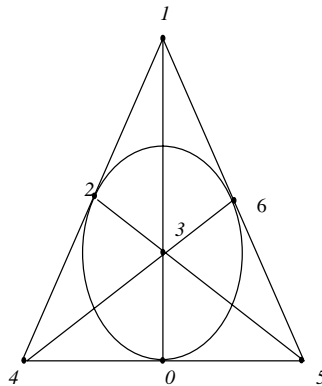


FIGURA 10

A aplicação f definida por $f(0) = 3$, $f(1) = 1$, $f(2) = 2$, $f(3) = 0$, $f(4) = 4$, $f(5) = 6$ e $f(6) = 5$ é uma colineação desse plano ¹⁰.

¹⁰Ver nota de rodapé da página 15.

Dizemos que f é uma **colineação central** (também chamada **perspectiva**) se f é uma colineação tal que existe um ponto C , chamado **centro**, com a seguinte propriedade:

$$f(C) = C \text{ e } f(X) \in XC, \text{ para todo o ponto } X \neq C.$$

Resulta imediatamente da definição de colineação central que qualquer colineação central fixa as rectas que contêm o centro. De facto, sendo m uma recta que contém C e $X \neq C$ um ponto qualquer de m temos $f(C) = C \in XC$ e $f(X) \in XC$, donde resulta que $f(XC) = XC$. É claro que a aplicação identidade é uma colineação central. Na proposição seguinte vamos ver que uma colineação f diferente da identidade tem, no máximo, um centro.

Proposição 2.2.11 *Uma colineação f não pode ter mais do que um centro, a menos que seja a aplicação identidade.*

Demonstração. Suponhamos que f é uma colineação com dois centros que vamos designar por C_1 e C_2 . Seja X um ponto que não pertence à recta C_1C_2 . Como C_1 e C_2 são centros, então $f(XC_1) = XC_1$ e $f(XC_2) = XC_2$. Como $X = XC_1 \cap XC_2$ e $f(X) \in XC_1 \cap XC_2$, por (P_2) , resulta que $f(X) = X$.

Suponhamos agora que $X \in C_1C_2$. Pelo lema 2.2.3, existe um ponto Y que não pertence à recta C_1C_2 . Temos então $X = XY \cap C_1C_2$. Num plano projectivo qualquer recta contém pelo menos três pontos. Assim, é possível encontrar um ponto Z pertencente à recta XY distinto de X e de Y . Pela primeira parte da demonstração sabemos que $f(Y) = Y$ e $f(Z) = Z$ pelo que $f(YZ) = YZ$. Como f é uma colineação, $X \in YZ$ e $X \in C_1C_2$ temos $f(X) \in YZ$ e $f(X) \in C_1C_2$ donde resulta que $f(X) = X$.

Portanto, se f é uma colineação com mais do que um centro, f é a aplicação identidade. ■

Dizemos que f é uma **colineação axial** se f é uma colineação que fixa uma recta, chamada **eixo**, ponto por ponto. De seguida, vamos mostrar que uma colineação diferente da identidade tem, no máximo, um eixo.

Proposição 2.2.12 *Uma colineação f não pode ter mais do que um eixo, a menos que seja a aplicação identidade.*

Demonstração. Suponhamos que f é uma colineação com dois eixos que vamos designar por l e m . Seja P o ponto de intersecção das rectas l e m . Qualquer recta que não contém o ponto P intersecta l e m em pontos distintos A e B , respectivamente. Como $f(A) = A$ e $f(B) = B$ temos $f(AB) = AB$.

Seja X um ponto que não pertence a nenhuma das rectas l e m . Num plano projectivo qualquer ponto pertence a pelo menos três rectas. Assim, X pertence a duas rectas r_1 e r_2 tais que $f(r_1) = r_1$ e $f(r_2) = r_2$. Logo $f(X) = X$.

É claro que se X é um ponto da recta l ou da recta m , $f(X) = X$. Portanto, f é a aplicação identidade. ■

A questão que colocamos agora é a seguinte:

Será que o centro de uma colineação central diferente da identidade é o único ponto fixo?

A resposta a esta questão é dada pela proposição seguinte:

Proposição 2.2.13 *Qualquer colineação central é uma colineação axial.*

Demonstração. A identidade é uma colineação axial. Seja, portanto, f uma colineação central diferente da identidade. Seja C o centro de f (proposição 2.2.11). Podemos ter duas situações:

1. Existem rectas que não contêm o centro e são fixas.
Designemos por l uma dessas rectas. Seja X um ponto de l . Então $f(X) \in XC \cap l$, donde se conclui que $f(X) = X$ e, portanto, l é o eixo (proposição 2.2.12).
2. Só são fixas as rectas que contêm o centro.
Seja l uma recta que não contém o centro e seja $A = l \cap f(l)$. Notemos que $C \notin f(l)$, pois $C \notin l$ e $f(C) = C$. Como $A \in AC \cap f(l)$ e $f(A) \in AC \cap f(l)$ temos $f(A) = A$. Vamos agora mostrar que a recta AC é o eixo.
Sejam $B \in AC$ tal que $B \neq A, C$, m uma recta distinta de AC que contém B e $X = m \cap f(m)$. Como $X \in XC \cap f(m)$ e $f(X) \in XC \cap f(m)$ temos $f(X) = X$. Então $f(AX) = AX$. Portanto, $AX = AC$ e, conseqüentemente, $X = m \cap AC = B$. ■

Reciprocamente temos a seguinte proposição:

Proposição 2.2.14 *Qualquer colineação axial é uma colineação central.*

Demonstração. A identidade é uma colineação central. Seja, portanto, f uma colineação axial diferente da identidade. Seja l o eixo de f (proposição 2.2.12). Temos dois casos a considerar.

1. Existem pontos que não pertencem à recta l e que são fixos por f .
Designemos por C um desses pontos. Seja X um ponto distinto de C . Se $X \in l$ então $f(X) = X \in XC$. Suponhamos agora que $X \notin l$. Seja $A = XC \cap l$. Então $f(A) = A$, pois l é o eixo. Como f é uma colineação e $X \in CA$ temos $f(X) \in CA = XC$. Portanto, C é o centro (proposição 2.2.11).
2. Só são fixos os pontos da recta l .
Seja $B \notin l$ e seja $m = Bf(B)$. Notemos que $f(B) \neq B$, pois $B \notin l$. Seja $C = m \cap l$. Como $m = f(B)C$ e $f(m) = f(BC) = f(B)C$ temos $f(m) = m$. Vamos agora mostrar que C é o centro.
Sejam X um ponto distinto de C tal que $X \notin l$ e $A = Xf(X) \cap l$ ($f(X) \neq X$ pois $X \notin l$ e $A \neq X$ pois $A \in l$). Como $Xf(X) = XA$ e $f(XA) = XA$ temos $f(Xf(X)) = Xf(X)$. Então $Xf(X)$ e $Bf(B)$ são rectas fixas e, portanto, $Xf(X) \cap Bf(B)$ é um ponto fixo. Concluimos então que $Xf(X) \cap Bf(B) = C = A$. Assim, $Xf(X) = XC$ e, portanto, $f(X) \in XC$. ■

Visto que a estrutura de incidência dual de um plano projectivo é um plano projectivo, a proposição 2.2.14 é consequência da proposição 2.2.13 e do Princípio de Dualidade (a proposição 2.2.14 é a proposição dual da proposição 2.2.13). Por isso, não era necessário fazer a demonstração da proposição 2.2.14. Assim, dada uma proposição relativa a um plano projectivo, no seguimento deste trabalho não vamos fazer a demonstração da proposição dual.

Chamamos (C, l) -**colineação** a uma colineação com centro C e eixo l . Podemos distinguir dois casos:

1. $C \in l$ e, neste caso, a colineação é chamada **elação**;
2. $C \notin l$ e, neste caso a colineação é chamada **homologia**.

Proposição 2.2.15 *Sejam C um ponto e l uma recta de um plano projectivo π . O conjunto de todas as (C, l) -colineações de π com a composição de funções é um subgrupo do grupo das colineações de π .*

Demonstração. Sejam f e g duas (C, l) -colineações de π . É claro que f^{-1} e $f \circ g$ são colineações. Sendo $X \neq C$, temos:

$$g(X) \in XC \text{ donde } (f \circ g)(X) = f(g(X)) \in f(XC) = XC$$

e

$$X \in f(XC) = XC \text{ donde } f^{-1}(X) \in f^{-1}(f(XC)) = XC.$$

Além disso, $(f \circ g)(C) = f(g(C)) = f(C) = C$ e $f^{-1}(C) = C$. Logo C é o centro de $f \circ g$ e de f^{-1} . É evidente que f^{-1} fixa l ponto por ponto. Seja $P \in l$. Temos $(f \circ g)(P) = f(g(P)) = f(P) = P$. Logo l é o eixo de $f \circ g$ e de f^{-1} .

Concluimos então que $f \circ g$ e f^{-1} são (C, l) -colineações. ■

Consideremos a colineação f do Plano de Fano definida no exemplo da página 32. Fazendo $C = 1$ e $l = \{1, 2, 4\}$ temos que f é uma (C, l) -colineação. É claro que a aplicação identidade também é uma (C, l) -colineação. Podemos então dizer que existe mais do que uma (C, l) -colineação de π . Por este motivo, é claro que, não é suficiente conhecer o centro e o eixo para definir uma (C, l) -colineação.

Proposição 2.2.16 *Uma (C, l) -colineação é univocamente determinada pelo seu centro C , pelo seu eixo l , por um ponto $X \notin l \cup \{C\}$ e a sua imagem.*

Demonstração. Seja f uma (C, l) -colineação e seja X um ponto tal que $X \neq C$ e $X \notin l$. É claro que $f(X) \notin l$, $f(X) \neq C$ e $f(X) \in XC$. Seja Y um ponto. Se $Y \in l$ então $f(Y) = Y$. Se $Y \notin l$ temos duas situações a considerar:

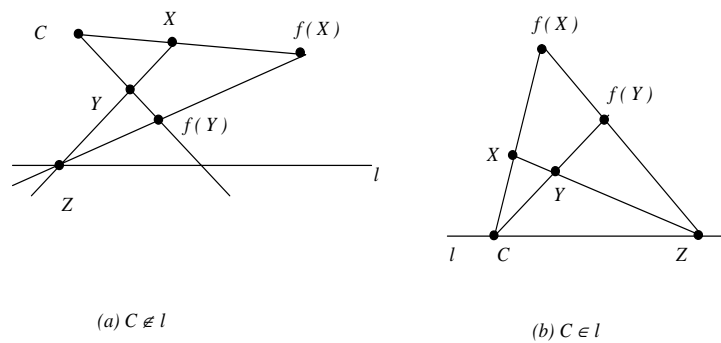


FIGURA 11

1. $Y \notin XC$.

Seja $Z = XY \cap l$. Observemos que $Y \in XZ$ e Z é um ponto fixo por f . Então $f(Y) \in YC \cap f(X)Z$. Por (P_2) , resulta que $f(Y)$ é o ponto de intersecção das rectas YC e $f(X)Z$ (ver figura 11).

2. $Y \in XC$.

Seja X_1 um ponto tal que $X_1 \notin XC$ e $X_1 \notin l$. Seja $Z = XX_1 \cap l$. Por 1., sabemos que $f(X_1) = X_1C \cap f(X)Z$. Seja $Z_1 = X_1Y \cap l$. Observemos que $Y \notin X_1C$ e $Y \notin l$. Então, por 1., resulta que $f(Y)$ é o ponto de intersecção das rectas YC e $f(X_1)Z_1$ (ver figura 12 (a) e (b)).

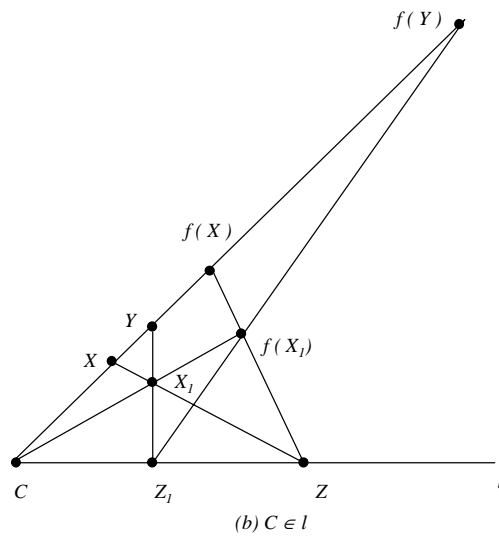
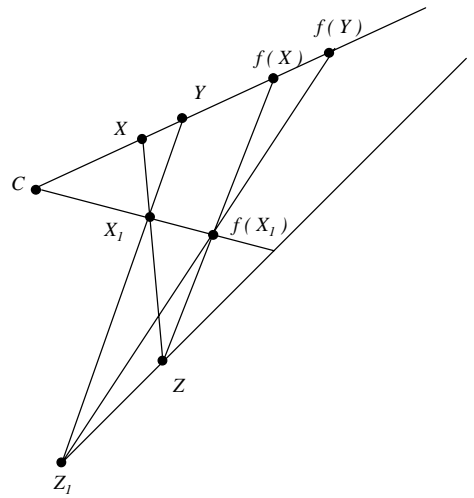


FIGURA 12



Numa (C, l) -colineação f diferente da identidade existe um único centro e um único eixo. Será que existem pontos fixos por f distintos do centro e que não pertençam ao eixo?

Proposição 2.2.17 *Qualquer (C, l) -colineação, diferente da identidade, só fixa C e todos os pontos da recta l (não fixa outros pontos além destes).*

Demonstração. Suponhamos que $X \notin l$, $X \neq C$ e $f(X) = X$. Seja $Y \notin XC$ e $Y \notin l$. Seja $Z = XY \cap l$. Pela proposição 2.2.16, $f(Y) = YC \cap XZ$. Como $Y \in XZ$ resulta que $f(Y) = Y$. Seja $Y \in XC$ e $Y \notin l$. Usando um raciocínio análogo ao do caso 2. da demonstração da proposição 2.2.16 concluímos que $f(Y) = Y$ (ver figura 13).

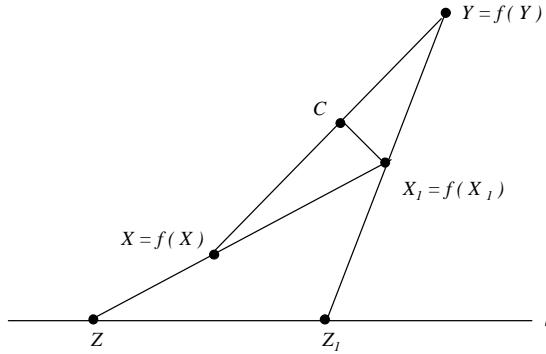


FIGURA 13

Logo f é a identidade. ■

Proposição 2.2.18 *A composta de duas elações (diferentes da identidade) com o mesmo eixo e diferentes centros é ainda uma elação com o mesmo eixo e centro diferente dos anteriores.*

Demonstração. Sejam $f \neq id$ uma elação de centro C_1 e eixo l e $g \neq id$ uma elação de centro C_2 e eixo l , com $C_1 \neq C_2$. Sejam $h = f \circ g$ e $P \in l$. Temos $h(P) = f(g(P)) = f(P) = P$, ou seja, h é uma colineação que fixa a recta l ponto por ponto. Observemos que $h \neq id$. De facto, se $h = id$ então $f = g^{-1}$ e, portanto, f seria uma elação de centro C_2 e eixo l , o que não acontece. Pelas proposições 2.2.14 e 2.2.11, h tem um único centro que vamos designar por C .

Vamos agora mostrar que h só fixa os pontos da recta l . Suponhamos, com vista a uma contradição, que existe $P \notin l$ tal que $h(P) = P$. Então $g(P) = f^{-1}(P)$. Os pontos P , C_1 e $f^{-1}(P)$ são colineares, assim como os pontos P , C_2 e $g(P)$. Designemos por l_1 a recta que contém os pontos P , C_1 e $f^{-1}(P)$ e por l_2 a recta que contém os pontos P , C_2 e $g(P)$. Se $g(P) = f^{-1}(P)$ então $l_1 = l_2$. Logo $l_1 \cap l = l_2 \cap l$ pelo que $C_1 = C_2$, o que é falso. Assim, h só fixa os pontos da recta l e, portanto, $C \in l$. Então h é uma elação de centro C e eixo l .

Se $C_1 = C$ então $g = f^{-1} \circ h$ é uma elação de centro C_1 e eixo l (é a composição de duas elações de centro C_1 e eixo l), o que não acontece. Logo $C_1 \neq C$. De modo análogo provamos

que $C_2 \neq C$. ■

É imediato que o conjunto de todas as elações com o mesmo eixo com a composição de funções é um grupo, chamado **grupo de translação com eixo l** , que denotamos por $G(l)$. Denotemos por $G(C, l)$ o grupo das elações de centro C e eixo l . A proposição que a seguir vamos mostrar dá-nos uma condição suficiente para que o grupo de translação com eixo l seja abeliano.

Proposição 2.2.19 *Se existem dois grupos não triviais¹¹ de elações de centros distintos e eixo l , então $G(l)$ é um grupo abeliano.*

Demonstração. Sejam $f_1, f_2 \in G(l)$. Se $f_1 = id$ ou $f_2 = id$ então $f_1 \circ f_2 = f_2 \circ f_1$. Suponhamos que $f_1, f_2 \neq id$. Temos dois casos a considerar:

1. $f_1 \in G(C_1, l)$ e $f_2 \in G(C_2, l)$, com $C_1 \neq C_2$.

Seja P um ponto que não pertence a l . Consideremos as rectas $m_1 = Pf_1(P)$ e $m_2 = Pf_2(P)$. Temos $f_2(m_1) = f_2(P)f_2(f_1(P))$ e $f_1(m_2) = f_1(P)f_1(f_2(P))$. Além disso, $C_1 = f_2(C_1) \in f_2(m_1)$ e $C_2 = f_1(C_2) \in f_1(m_2)$ e, portanto, $(f_1 \circ f_2)(P) \in C_2f_1(P)$ e $(f_2 \circ f_1)(P) \in C_1f_2(P)$. Por definição, os pontos $C_1, f_2(P)$ e $f_1(f_2(P))$ são colineares assim como os pontos $C_2, f_1(P)$ e $f_2(f_1(P))$. Então, $(f_1 \circ f_2)(P) \in C_1f_2(P) \cap C_2f_1(P)$ e $(f_2 \circ f_1)(P) \in C_1f_2(P) \cap C_2f_1(P)$ donde se conclui que $(f_2 \circ f_1)(P) = (f_1 \circ f_2)(P)$. Como P é um ponto arbitrário que não pertence a l e f_1 e f_2 fixam todos os pontos da recta l , concluimos que $f_2 \circ f_1 = f_1 \circ f_2$.

2. $f_1, f_2 \in G(C_1, l)$.

Por hipótese, existe $g \in G(C_2, l)$ tal que $g \neq id$ e $C_1 \neq C_2$. Então $f_2 \circ g \in G(C_3, l)$, com $C_3 \neq C_1, C_2$. Como

$$\begin{aligned} (f_1 \circ f_2) \circ g &= f_1 \circ (f_2 \circ g) \\ &= (f_2 \circ g) \circ f_1 \\ &= (g \circ f_2) \circ f_1 \\ &= g \circ (f_2 \circ f_1) \\ &= (f_2 \circ f_1) \circ g. \end{aligned}$$

Concluimos assim que $f_1 \circ f_2 = f_2 \circ f_1$, para todos os $f_1, f_2 \in G(l)$. ■

Um plano projectivo é **(C, l) -transitivo para algum ponto C e alguma recta l** se, para qualquer par de pontos distintos X e Y tais que nenhum pertence a $l \cup \{C\}$ e C, X e Y são colineares, existe uma (C, l) -colineação f tal que $f(X) = Y$.

Lema 2.2.20 *Se π é (C, l) -transitivo e f é uma colineação de π , então π é também $(f(C), f(l))$ -transitivo.*

¹¹Um grupo diz-se trivial se contém apenas o elemento neutro.

Demonstração. Sejam $f(X)$ e $f(Y)$ pontos que não pertencem a $f(l) \cup \{f(C)\}$ e tais que $f(X)$, $f(Y)$ e $f(C)$ são colineares. Pretendemos encontrar uma $(f(C), f(l))$ -colineação h tal que $h(f(X)) = f(Y)$.

Como f é uma colineação, f^{-1} também é uma colineação e como $f(X)$, $f(Y)$ e $f(C)$ são colineares, resulta que $f^{-1}(f(X)) = X$, $f^{-1}(f(Y)) = Y$ e $f^{-1}(f(C)) = C$ também são colineares. Atendendo a que π é (C, l) -transitivo, existe uma (C, l) -colineação g tal que $g(X) = Y$. Seja $h = f \circ g \circ f^{-1}$. É imediato que h é uma colineação.

Vejamus que $f(C)$ é o centro. Temos

$$\begin{aligned} h(f(C)) &= (f \circ g \circ f^{-1})(f(C)) \\ &= (f \circ g)(f^{-1}(f(C))) \\ &= (f \circ g)(C) \\ &= f(g(C)) \\ &= f(C), \end{aligned}$$

isto é, $f(C)$ é fixo por h . Seja Z um ponto tal que $f(Z) \neq f(C)$. Então $Z \neq C$ e $g(Z) \in ZC$ donde $h(f(Z)) = f(g(Z)) \in f(ZC) = f(Z)f(C)$. Logo $f(C)$ é o centro.

Para todo o $P \in l$,

$$\begin{aligned} h(f(P)) &= (f \circ g \circ f^{-1})(f(P)) \\ &= (f \circ g)(P) \\ &= f(P), \end{aligned}$$

isto é, $f(l)$ é fixa ponto por ponto.

Temos também

$$\begin{aligned} h(f(X)) &= (f \circ g \circ f^{-1})(f(X)) \\ &= (f \circ g)(X) \\ &= f(Y), \end{aligned}$$

como pretendíamos. ■

É claro que, num plano projectivo finito o número de pontos fixos por uma colineação f é finito, assim como o número de rectas fixas por f . Dizemos que **o ponto P e a recta l formam um par com respeito a f** , e escrevemos $(P, l)_f$, se $P \in l$ e $P \in f(l)$ e dizemos que **o ponto P e a recta l formam um duplo¹² com respeito a f** , e escrevemos $[P, l]_f$, se $P \in l$ e $f(P) \in l$.

Proposição 2.2.21 *Seja f uma colineação de um plano projectivo de ordem n . Então o número de pontos fixos por f é igual ao número de rectas fixas por f .*

Demonstração. Denotemos por $Fix(f|_{\mathcal{P}})$ o conjunto dos pontos fixos por f e por $Fix(f|_{\mathcal{L}})$ o conjunto das rectas fixas por f . Se l é uma recta fixa por f então

$$(P, l)_f \Leftrightarrow P \in l.$$

¹²Em Inglês “couple”.

Atendendo a que cada recta de π contém $n + 1$ pontos, o número de pares $(P, l)_f$ onde l é uma recta fixa por f , é igual a $(n + 1)|\text{Fix}(f|_{\mathcal{L}})|$. Se l não é uma recta fixa por f então l e $f(l)$ intersectam-se num único ponto. Assim, $(l \cap f(l), l)_f$ é o único par que contém a recta l .

Denotemos por $\mathbf{P}(f)$ o conjunto dos pares distintos com respeito a f . Como em π há $n^2 + n + 1$ rectas temos

$$\begin{aligned} |\mathbf{P}(f)| &= (n + 1)|\text{Fix}(f|_{\mathcal{L}})| + (n^2 + n + 1 - |\text{Fix}(f|_{\mathcal{L}})|) \\ &= n|\text{Fix}(f|_{\mathcal{L}})| + n^2 + n + 1. \end{aligned}$$

Denotemos por $\mathbf{D}(f)$ o conjunto dos duplos distintos com respeito a f . Reparemos que o dual de um par é um duplo. Fazendo agora um raciocínio análogo ao anterior em termos das afirmações duais temos $|\mathbf{D}(f)| = n|\text{Fix}(f|_{\mathcal{P}})| + n^2 + n + 1$.

Observemos que:

$$\begin{aligned} (P, l)_f &\Leftrightarrow P \in l \text{ e } P \in f(l) \\ &\Leftrightarrow P \in l \text{ e } f^{-1}(P) \in f^{-1}(f(l)) = l \\ &\Leftrightarrow [P, l]_{f^{-1}}. \end{aligned}$$

Resulta então que $|\mathbf{P}(f)| = |\mathbf{D}(f^{-1})|$. Sendo $|\mathbf{P}(f)| = n|\text{Fix}(f|_{\mathcal{L}})| + n^2 + n + 1$ e $|\mathbf{D}(f^{-1})| = n|\text{Fix}(f^{-1}|_{\mathcal{P}})| + n^2 + n + 1$ resulta que $|\text{Fix}(f|_{\mathcal{L}})| = |\text{Fix}(f^{-1}|_{\mathcal{P}})|$. Dado que o número de pontos fixos por f é igual ao número de pontos fixos por f^{-1} temos

$$\begin{aligned} |\mathbf{P}(f)| &= n|\text{Fix}(f|_{\mathcal{L}})| + n^2 + n + 1 \\ &= n|\text{Fix}(f^{-1}|_{\mathcal{P}})| + n^2 + n + 1 \\ &= n|\text{Fix}(f|_{\mathcal{P}})| + n^2 + n + 1. \end{aligned}$$

Concluimos então que $|\text{Fix}(f|_{\mathcal{L}})| = |\text{Fix}(f|_{\mathcal{P}})|$. ■

Dizemos que uma colinação f é uma **involução** se $f \neq id$ e $f^2 = id$, onde $f^2 = f \circ f$.

Proposição 2.2.22 *Seja f uma involução de um plano projectivo π . Então qualquer ponto de π pertence a uma recta fixa.*

Demonstração. Seja P um ponto de π . Temos duas possibilidades:

- (a) P não é um ponto fixo. Então $f(P) \neq P$ e, portanto, a recta $Pf(P)$ é fixa já que $f^2(P) = P$. Logo P pertence a uma recta fixa.
- (b) P é um ponto fixo. Seja Q um ponto distinto de P . Se PQ é uma recta fixa então P pertence a uma recta fixa. Se PQ não é uma recta fixa então $f(Q) \notin PQ$. Seja R um ponto da recta PQ distinto dos pontos P e Q . Então $f(R) \in f(PQ) = Pf(Q)$. Seja $M = Qf(R) \cap Rf(Q)$. Como $f(Qf(R)) = f(Q)R$ e $f(Rf(Q)) = f(R)Q$ temos $f(M) \in Qf(R) \cap Rf(Q)$ e, por conseguinte, $M = f(M)$. Logo a recta MP é fixa por f . ■

Proposição 2.2.23 *Seja f uma involução de um plano projectivo π . Então qualquer recta de π contém um ponto fixo.*

Demonstração. Notemos que esta proposição é a proposição dual da anterior. ■

Teorema 2.2.24 *Seja f uma involução de um plano projectivo π de ordem n . Então temos uma das duas situações:*

1. *Existe um número natural m tal que $n = m^2$ e os pontos fixos e as rectas fixas de f formam um subplano de π de ordem m .*
2. *f é uma colinação central e, neste caso, f é uma homologia se n é ímpar e é uma elação se n é par.*

Demonstração. Qualquer recta que contém dois pontos fixos é uma recta fixa e a intersecção de duas rectas fixas é um ponto fixo. Temos duas situações a considerar:

1. Existe um conjunto de quatro pontos fixos tais que não há três colineares.
Então, os pontos fixos e as rectas fixas formam um subplano próprio de π (notemos que existem pontos em π que não são fixos, pois $f \neq id$). Designemos por $\bar{\pi}$ tal subplano e, suponhamos que a sua ordem é m . Então, pelo teorema 2.2.9, $n \geq m^2$. Se $n > m^2$ existe uma recta de π que não contém nenhum ponto de $\bar{\pi}$, o que é falso pois qualquer recta de π contém um ponto fixo. Logo $n = m^2$.
2. Não existe um conjunto de quatro pontos fixos tais que não há três colineares.
Vejamus que, neste caso, existe uma recta que contém três pontos fixos. Seja l uma recta e seja P um ponto fixo pertencente a l . Escolhemos uma recta r que não passa por P . A recta r contém um ponto fixo $R \neq P$ e a recta $t = PR$ é fixa. Seja $Q \in t$ tal que $Q \neq R$ e $Q \neq P$. Se Q é fixo então a recta t contém três pontos fixos. Suponhamos que Q não é fixo. Designemos por s uma recta que contém Q e é distinta da recta t . A recta s contém um ponto fixo S que não pertence à recta t (ver figura 14).

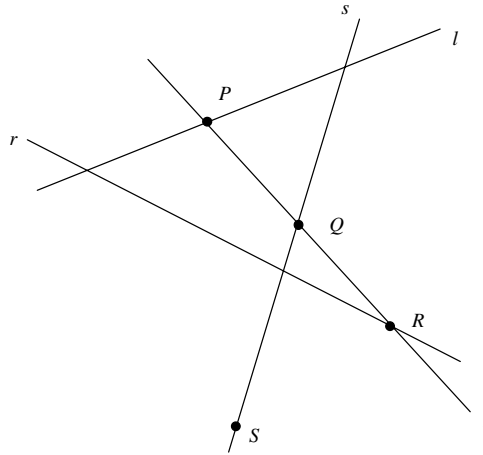


FIGURA 14

Os pontos P , S e R são três pontos fixos não colineares. Designemos por m uma recta que contém Q e é distinta de s e de t . É claro que m não contém os pontos P , S e R . A recta m contém um ponto fixo M . Como na situação que estamos a considerar não existe um conjunto de quatro pontos fixos tais que não há três colineares, M terá que pertencer a uma das rectas PS ou RS . Portanto, existe uma recta com três pontos

fixos.

Seja l uma recta que contém três pontos fixos P , Q e R . Como não existe um conjunto de quatro pontos fixos tais que não há três colineares, não podem existir dois ou mais pontos fixos que não pertençam a l . Assim, ou existe um só ponto fixo que não pertence a l ou todos os pontos fixos pertencem a l .

Suponhamos agora que todos os pontos fixos pertencem a l . Seja X um ponto de l e seja r uma recta que contém X e é distinta de l . Atendendo a que qualquer recta contém um ponto fixo é evidente que X é um ponto fixo. Então l é fixa ponto por ponto. Como f é uma colineação axial diferente da identidade, pela proposição 2.2.14, f é uma colineação central. Atendendo a que f só fixa os pontos do eixo, concluímos que f é uma elação.

Suponhamos que existe um ponto fixo que não pertence a l . Designemos esse ponto por C . Seja X um ponto de l . Existe uma recta r que contém X e é distinta de l e de XC . Como r tem um ponto fixo e C não pertence a r , resulta que X é um ponto fixo de r . Logo qualquer ponto da recta l é fixo. Como f é uma colineação axial diferente da identidade, pela proposição 2.2.14, f é uma colineação central. Atendendo a que f só fixa o centro e todos os pontos do eixo, concluímos que f é uma homologia.

Como l contém $n + 1$ pontos existem n^2 pontos que não pertencem a l . Atendendo a que f é uma involução, para todo o ponto P , $f(f(P)) = P$. Vamos dispor os pontos de π que não pertencem a l em pares do tipo $(P, f(P))$. Então $(f(P), P)$ também é um par tal que $f(P) \notin l$. Se n é ímpar então n^2 também é ímpar e, neste caso, existe um par $(C, f(C))$ com $f(C) = C$, ou seja, existe um ponto C que não pertence a l e é fixo por f , donde se conclui que f é uma homologia. Se n é par então n^2 também é par e, neste caso, não existem pontos que não pertencem a l que sejam fixos por f , pois esse número de pontos teria que ser maior ou igual a 2 e já vimos que só poderá existir um ponto nestas condições. Logo f só fixa os pontos da recta l pelo que é uma elação. ■

2.2.5 Obtenção de um plano afim a partir de um plano projectivo e reciprocamente

Um plano afim pode ser estendido a um plano projectivo através da construção que a seguir vamos descrever.

Seja $\mathcal{A} = (\mathcal{P}, \mathcal{L})$ um plano afim. Para cada recta $l \in \mathcal{L}$, $[l]$ designa a classe de rectas paralelas a l . Como a relação de paralelismo é uma relação de equivalência, $r \in [l]$ se e só se $[r] = [l]$. Seja $l_\infty = \{[l] : l \in \mathcal{L}\}$. Consideremos os conjuntos

$$\bar{\mathcal{P}} = \mathcal{P} \cup l_\infty \quad \text{e} \quad \bar{\mathcal{L}} = \{l \cup \{[l]\} : l \in \mathcal{L}\} \cup \{l_\infty\}.$$

Cada classe de rectas paralelas é chamada **ponto no infinito** e l_∞ é o conjunto de todos os pontos no infinito. Designemos l_∞ por **recta no infinito**.

Proposição 2.2.25 *A estrutura de incidência $\pi = (\bar{\mathcal{P}}, \bar{\mathcal{L}})$ é um plano projectivo.*

Demonstração.

Verificação de (P_1) . Sejam P e Q dois pontos distintos de π . Temos três situações a considerar:

1. Se $P, Q \in \mathcal{P}$ então existe uma única recta l de \mathcal{A} que contém os pontos P e Q . Assim, $l \cup \{[l]\}$ é a única recta de π que contém ambos os pontos.

2. Se P e Q são pontos no infinito a única recta que contém ambos os pontos é a recta l_∞ .
3. Suponhamos que $P \in \mathcal{P}$ e Q é um ponto no infinito. Então $Q = [l]$, para alguma recta l de \mathcal{A} . Sabemos também que P pertence exactamente a uma recta r da classe de rectas paralelas a l . Assim, $r \cup \{[r]\}$ é a única recta de π que contém P e Q .

Verificação de (P_2) . Sejam l_1 e r_1 duas rectas distintas de π . Temos duas situações a considerar:

1. $l_1 = l_\infty$ e $r_1 = r \cup \{[r]\}$, onde r é uma recta de \mathcal{A} .
É evidente que as rectas l_1 e r_1 intersectam-se num único ponto, o ponto $[r]$.
2. $l_1 = l \cup \{[l]\}$ e $r_1 = r \cup \{[r]\}$, onde l e r são duas rectas distintas de \mathcal{A} .
Se $l \parallel r$, atendendo ao facto de que as rectas l e r não têm nenhum ponto comum e a que $[l] = [r]$, concluímos que as rectas l_1 e r_1 intersectam-se num único ponto, o ponto no infinito $[l]$.
Se $l \not\parallel r$ ¹³ então as rectas l e r têm um único ponto comum que designamos por P . Como $[r] \neq [l]$ concluímos que as rectas l_1 e r_1 intersectam-se num único ponto, o ponto P .

Verificação de (P_3) . Sejam P_1, P_2 e P_3 três pontos não colineares de \mathcal{A} . Então as rectas $l = P_1P_2$, $r = P_2P_3$ e $m = P_1P_3$ não são paralelas e, portanto, pertencem a classes distintas de rectas paralelas $[l]$, $[r]$ e $[m]$. Assim, por exemplo, $P_1, P_3, [l]$ e $[r]$ são quatro pontos de π tais que não há três colineares (ver figura 15).

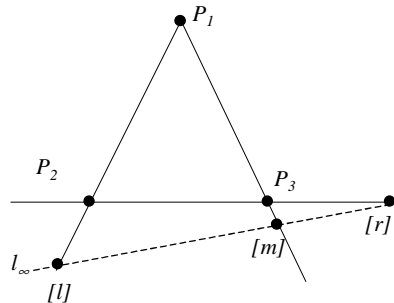


FIGURA 15

■

Denotemos por $\pi = \mathcal{A} \cup l_\infty$ o plano projectivo obtido a partir do plano afim \mathcal{A} através da construção atrás descrita. Se \mathcal{A} é um plano afim de ordem n então existem $n + 1$ classes de rectas paralelas e, portanto, $n + 1$ pontos no infinito. Como em \mathcal{A} existem n^2 pontos temos que em π existem $n^2 + n + 1$ pontos. É claro que, em π também existem $n^2 + n + 1$ rectas. Portanto, π é um plano finito. Como cada recta de \mathcal{A} contém exactamente n pontos temos que cada recta de π contém exactamente $n + 1$ pontos e, portanto, π tem ordem n .

¹³A expressão $l \not\parallel r$ significa que as rectas l e r não são paralelas.

Consideremos agora um plano projectivo $\pi = (\bar{\mathcal{P}}, \bar{\mathcal{L}})$ e seja \bar{m} uma recta de π . Para cada recta \bar{r} de π distinta de \bar{m} , definimos uma nova recta r do seguinte modo:

$$r = \{P \in \bar{r} : P \notin \bar{m}\}.$$

Consideremos os conjuntos

$$\mathcal{P} = \{P \in \bar{\mathcal{P}} : P \notin \bar{m}\} \quad \text{e} \quad \mathcal{L} = \{r : \bar{r} \in \bar{\mathcal{L}} \text{ e } \bar{r} \neq \bar{m}\}.$$

Proposição 2.2.26 *A estrutura de incidência $\mathcal{A} = (\mathcal{P}, \mathcal{L})$ é um plano afim.*

Demonstração.

Verificação de (A₁). Sejam $P, Q \in \mathcal{P}$. Como $P, Q \in \mathcal{P} \subseteq \bar{\mathcal{P}}$ existe uma única recta \bar{r} de π que contém ambos os pontos (é claro que $\bar{r} \neq \bar{m}$). Assim, a recta $r = \{R \in \bar{r} : R \notin \bar{m}\}$ é a única recta de \mathcal{A} que contém ambos os pontos.

Verificação de (A₂). Sejam R um ponto e r uma recta de \mathcal{A} tal que $R \notin r$. Temos $r = \{P \in \bar{r} : P \notin \bar{m}\}$, para alguma recta \bar{r} de π . Seja $Q = \bar{m} \cap \bar{r}$. É claro que $Q \in \bar{\mathcal{P}} \setminus \mathcal{P}$. Seja $s = \{P \in RQ : P \notin \bar{m}\}$. A recta s é uma recta de \mathcal{A} que contém R e tal que s e r não têm nenhum ponto comum. Atendendo a (P₂), Q é o único ponto de \bar{r} que pertence a \bar{m} . Então, podemos concluir que s é a única recta de \mathcal{A} tal que $R \in s$ e $s \parallel r$.

Verificação de (A₃). Seja $P \in \bar{m}$. Sejam \bar{r} e \bar{s} duas rectas distintas de π que contêm P e tais que $\bar{r} \neq \bar{m}$ e $\bar{s} \neq \bar{m}$. Sejam $S_1, S_2 \in \bar{s}$ tais que $S_1 \neq P$ e $S_2 \neq P$ e seja $R \in \bar{r}$ tal que $R \neq P$. É claro que S_1, S_2 e R são três pontos de \mathcal{A} não colineares. ■

Denotemos por $\mathcal{A} = \pi \setminus \bar{m}$ o plano afim obtido a partir do plano projectivo π através da construção anterior. Se π é um plano projectivo de ordem n então \mathcal{A} é um plano afim de ordem n . De facto, como em π existem $n^2 + n + 1$ rectas e nesta construção removemos uma destas rectas temos que em \mathcal{A} existem $n^2 + n$ rectas. Além disso, como removemos todos os pontos de uma recta de π e como em π existem $n^2 + n + 1$ pontos e cada recta contém $n + 1$ pontos resulta que em \mathcal{A} há n^2 pontos.

A existência de um plano projectivo de ordem n equivale à existência de um conjunto completo de quadrados latinos.

Teorema 2.2.27 *Existe um plano projectivo de ordem n se e só se existe um conjunto completo de quadrados latinos de ordem n .*

Demonstração. É uma consequência imediata das duas proposições anteriores e do teorema 2.1.23. ■

Daqui em diante, ao escrevermos $\mathcal{A} \cup l_\infty$ estamos a referir-nos ao plano projectivo que se obtém do plano afim \mathcal{A} e ao escrevermos $\pi \setminus \bar{m}$ estamos a referir-nos ao plano afim que se obtém do plano projectivo π através das construções atrás descritas.

Consideremos o plano projectivo $\pi = \mathcal{A} \cup l_\infty$ e seja f uma colineação de \mathcal{A} . Designemos por f_π a **extensão de f a π** definida do seguinte modo:

$$f_\pi(P) = f(P), \text{ para todo o ponto } P \text{ de } \mathcal{A} \quad \text{e} \quad f_\pi([l]) = [f(l)], \text{ para toda a recta } l \text{ de } \mathcal{A}.$$

A extensão de f a π , f_π , é uma colineação de π . É claro que se $f = id$ então $f_\pi = id$.

- (i) Suponhamos que f é uma perspectiva afim de \mathcal{A} , diferente da identidade, com eixo l . Seja t um traço de f . O ponto $[t]$ pertence à recta l_∞ e é fixo por f_π (notemos que f fixa traços). Como os únicos pontos fixos por f são os pontos da recta l e $[l]$ é um ponto fixo por f_π (visto que l é uma recta fixa por f) concluímos que, em π , a recta $l \cup \{[l]\}$ é a única recta fixa, por f_π , ponto por ponto. Então f_π é uma colineação axial com eixo a recta $l \cup \{[l]\}$. Consequentemente f_π é uma colineação central de centro $[t]$. Se algum traço de f intersecta l então $\Gamma = [t]$ e $[t] \neq [l]$ (Γ é o conjunto dos traços de f). Neste caso f_π é uma homologia. Se nenhum traço de f intersecta l então $[t] = \Gamma \cup \{l\}$ e, portanto, $[t] = [l]$. Neste caso f_π é uma elação.
- (ii) Suponhamos que f é uma dilatação diferente da identidade. Então, para toda a recta l de \mathcal{A} , f_π fixa todos os pontos da recta l_∞ . Logo f_π é uma colineação axial e, consequentemente, uma colineação central. Se f é uma homotetia de centro C então f_π é uma homologia de centro C e eixo l_∞ . Se f é uma translação então f_π é uma elação de eixo l_∞ e centro $[Pf(P)]$ com $P \in \mathcal{A}$ ¹⁴.

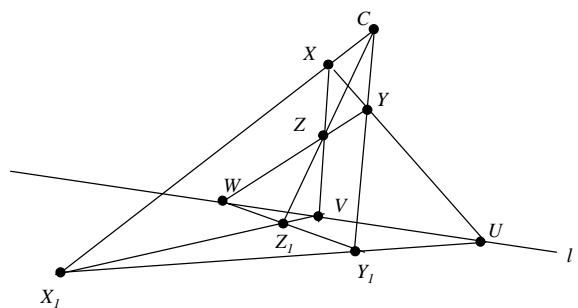
Consideremos agora o plano afim $\mathcal{A} = \pi \setminus \bar{m}$ e seja f uma colineação de π .

- (a) Suponhamos que f é uma (C, \bar{m}) -colineação de π .
Qualquer recta \bar{r} de π , distinta de \bar{m} , intersecta a recta \bar{m} num ponto que vamos designar por P . É claro que, em π , as rectas \bar{r} e $f(\bar{r})$ intersectam-se no ponto P . Atendendo a que $f|_{\mathcal{A}}(r) = \{f(P) : P \in \bar{r} \text{ e } P \notin \bar{m}\}$ concluímos que, em \mathcal{A} , r e $f|_{\mathcal{A}}(r)$ são rectas paralelas.
 - (i) Se f é uma elação então $f|_{\mathcal{A}}$ não fixa pontos e, portanto, $f|_{\mathcal{A}}$ é uma translação.
 - (ii) Se f é uma homologia então $f|_{\mathcal{A}}$ só fixa o ponto C e, portanto, $f|_{\mathcal{A}}$ é uma homotetia.
- (b) Suponhamos que f é uma (C, \bar{l}) -colineação de π , com $C \in \bar{m}$ e $\bar{l} \neq \bar{m}$.
Então a recta $l = \{P \in \bar{l} : P \notin \bar{m}\}$ é uma recta fixa, por $f|_{\mathcal{A}}$, ponto por ponto. Observemos que $f|_{\mathcal{A}}$ não fixa outros pontos. Logo $f|_{\mathcal{A}}$ é uma perspectiva afim.
 - (i) Se f é uma elação então $f|_{\mathcal{A}}$ é uma perspectiva afim cujos traços são paralelos a l já que, em π , $C = \bar{l} \cap Pf(P)$, para todo o ponto P de π que não pertence a \bar{l} .
 - (ii) Se f é uma homologia então $f|_{\mathcal{A}}$ é uma perspectiva afim cujos traços intersectam l .

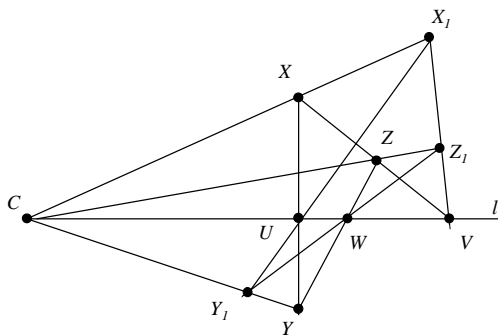
2.2.6 Configuração de Desargues

Da existência de certos tipos de colineações de um plano projectivo podem surgir algumas configurações especiais. Seja f uma (C, l) -colineação de um plano projectivo π tal que existam três pontos X, Y e Z que não são fixos por f e $\{X, Y, Z, C\}$ é um conjunto de quatro pontos onde não há três colineares. Sejam $X_1 = f(X)$, $Y_1 = f(Y)$ e $Z_1 = f(Z)$. Vejamos que os pontos $U = XY \cap X_1Y_1$, $V = XZ \cap X_1Z_1$ e $W = YZ \cap Y_1Z_1$ pertencem à recta l (ver figura 16 (a) e (b)).

¹⁴Observemos que, se P e Q são pontos de \mathcal{A} então $[Pf(P)] = [Qf(Q)]$, caso contrário, f teria um ponto fixo que seria o ponto $Pf(P) \cap Qf(Q)$.



(a) $C \notin l$



(b) $C \in l$

FIGURA 16

Observemos que $U \neq C$, $V \neq C$ e $W \neq C$, pois $U \in XY$, $V \in XZ$, $W \in YZ$ e $\{X, Y, Z, C\}$ é um conjunto de quatro pontos onde não há três colineares. Como $U \in XY$ então $f(U) \in f(XY) = X_1Y_1$. Atendendo ao facto que C é o centro e $U \neq C$ vem $f(U) \in CU$. Por conseguinte $f(U) \in X_1Y_1 \cap CU$. Como $U \in X_1Y_1 \cap CU$ concluímos que $U = f(U)$. Raciocinando de modo análogo temos $V = f(V)$ e $W = f(W)$. Como f fixa apenas o centro e todos os pontos de l concluímos que U, V e W pertencem a l .

À configuração constituída pelos dez pontos $C, X, Y, Z, X_1, Y_1, Z_1, U, V$ e W e pelas dez rectas $CX, CY, CZ, XY, XZ, YZ, X_1Y_1, X_1Z_1, Y_1Z_1$ e l chamamos **configuração de Desargues**. Uma configuração de Desargues pode surgir ou não de uma (C, l) -colineação. Dizemos que sete pontos distintos C, X, Y, Z, X_1, Y_1 e Z_1 estão nas condições da configuração

de Desargues se C, X, X_1 e C, Y, Y_1 e C, Z, Z_1 são ternos de pontos colineares, $\{C, X, Y, Z\}$ é um conjunto de quatro pontos tais que não há três colineares e X_1, Y_1, Z_1 não são colineares. Assim, dados sete pontos C, X, Y, Z, X_1, Y_1 e Z_1 nas condições da configuração de Desargues temos uma configuração de Desargues se os pontos $U = XY \cap X_1Y_1$, $V = XZ \cap X_1Z_1$ e $W = YZ \cap Y_1Z_1$ são colineares.

Se X, Y e Z são três pontos não colineares dizemos que formam um **triângulo de vértices** X, Y e Z e escrevemos ΔXYZ . Sejam $\Delta X_1Y_1Z_1$ e $\Delta X_2Y_2Z_2$ dois triângulos. Se existe um ponto C tal que $CX_1 = CX_2$, $CY_1 = CY_2$ e $CZ_1 = CZ_2$ dizemos que os triângulos $\Delta X_1Y_1Z_1$ e $\Delta X_2Y_2Z_2$ **encontram-se em perspectiva a partir de C** . Se existe uma recta l tal que os pontos $X_1Y_1 \cap X_2Y_2$, $X_1Z_1 \cap X_2Z_2$ e $Y_1Z_1 \cap Y_2Z_2$ pertencem à recta l dizemos que os triângulos $\Delta X_1Y_1Z_1$ e $\Delta X_2Y_2Z_2$ **encontram-se em perspectiva a partir de l** (ver figura 17).

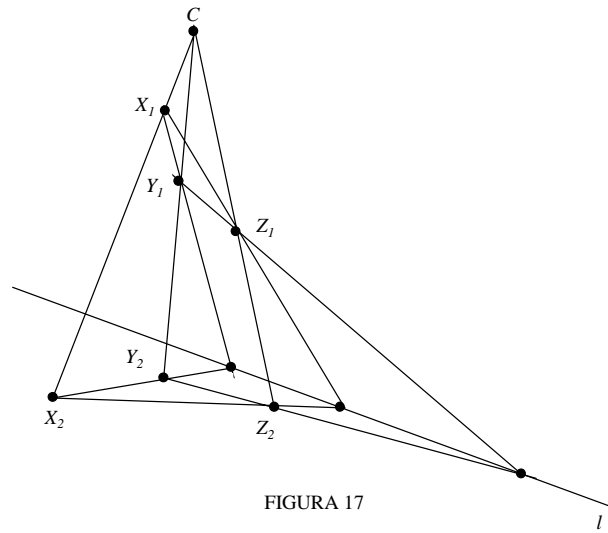


FIGURA 17

Seja ΔXYZ um triângulo e f uma (C, l) -colinação que não fixa os vértices desse triângulo nem as rectas XY , XZ e YZ . Atendendo ao início desta secção podemos concluir que os triângulos ΔXYZ e $\Delta f(X)f(Y)f(Z)$ encontram-se em perspectiva a partir de C e de l .

A existência de uma configuração de Desargues é equivalente à existência de um par de triângulos em perspectiva a partir de um ponto e de uma recta.

Dizemos que um plano projectivo π é um **plano de Desargues** se, para qualquer escolha de sete pontos C, X, Y, Z, X_1, Y_1 e Z_1 nas condições da configuração de Desargues os pontos $U = XY \cap X_1Y_1$, $V = XZ \cap X_1Z_1$ e $W = YZ \cap Y_1Z_1$ são colineares.

No Plano de Fano não é possível encontrar um conjunto de sete pontos nas condições da configuração de Desargues. Assim, toda a afirmação relativa a qualquer conjunto de sete pontos do Plano de Fano nas condições da configuração de Desargues é sempre verdadeira. O Plano de Fano é, portanto, um plano de Desargues. Excepto o Plano de Fano, um plano projectivo π que admita uma (C, l) -colinação, diferente da identidade, admite uma configuração de Desargues induzida pela colinação. O teorema seguinte dá-nos uma condição necessária e suficiente para que um plano projectivo π seja um plano de Desargues. Dizemos que um plano projectivo tem um **conjunto completo de colinações centrais** se é (C, l) -transitivo

para qualquer ponto C e para qualquer recta l .

Teorema 2.2.28 *O plano projectivo π tem um conjunto completo de colineações centrais se e só se π é um plano de Desargues.*

Demonstração. Qualquer (C, l) -colineação, diferente da identidade, do Plano de Fano é uma elação. Assim, é fácil ver que o Plano de Fano tem um conjunto completo de colineações centrais. Suponhamos que π tem um conjunto completo de colineações centrais. Sejam C, X, Y, Z, X_1, Y_1 e Z_1 pontos nas condições da configuração de Desargues. Como π tem um conjunto completo de colineações centrais existe uma (C, UV) -colineação f , onde $U = XY \cap X_1Y_1$ e $V = XZ \cap X_1Z_1$ tal que $f(X) = X_1$. Notemos que $X, X_1 \notin UV$ (caso contrário, teríamos $X = U = X_1$). Vamos mostrar que o ponto $W = YZ \cap Y_1Z_1$ pertence à recta UV . Como $U \in UV$ e UV é o eixo temos $f(U) = U$ e, portanto, resulta que $f(XU) = X_1U$. Atendendo a que $U \in XY$ temos $Y \in XU$ donde $f(Y) \in X_1U$. Por outro lado sabemos que $f(Y) \in CY$ (porque C é o centro). Assim, $f(Y) \in CY \cap X_1U$ e, portanto, $f(Y) = Y_1$ já que $Y_1 \in CY \cap X_1U$ (C, Y e Y_1 são colineares e $U \in X_1Y_1$). De modo análogo podemos provar que $f(Z) = Z_1$.

Temos assim que $f(W) \in f(YZ) = Y_1Z_1$. Além disso, $f(W) \in CW$. Uma vez que $W \in CW \cap Y_1Z_1$ temos $f(W) = W$. Como f é uma (C, UV) -colineação diferente da identidade, f fixa somente C e todos os pontos da recta UV . Atendendo a que W é um ponto fixo temos $W \in UV$ ou $W = C$. Suponhamos que $W = C$. Então $C \in YZ \cap Y_1Z_1 = Y$. Logo $C = Y$, o que é falso. Resulta assim que $W \in UV$ e, portanto, U, V e W são colineares donde concluímos que π é um plano de Desargues.

Reciprocamente, suponhamos que π é um plano de Desargues. Pretendemos mostrar que, para qualquer ponto C e para qualquer recta l , π é (C, l) -transitivo. Sejam l uma recta e X, X_1 e C três pontos distintos colineares tais que $X, X_1 \notin l$. Vamos mostrar que existe uma (C, l) -colineação f tal que $f(X) = X_1$. Designemos por \mathcal{P} o conjunto de pontos do plano π . Definimos em $(\mathcal{P} \setminus \{XX_1\}) \cup \{C\}$ a aplicação f_1 por

$$f_1(P) = \begin{cases} P & \text{se } P \in l \cup \{C\} \\ CP \cap X_1U & \text{onde } U = XP \cap l \text{ se } P \notin l \text{ e } P \notin XX_1. \end{cases}$$

Fixemos $Y \notin XX_1$ e $Y \notin l$. Seja $Y_1 = f_1(Y)$. Definimos em $(\mathcal{P} \setminus \{YY_1\}) \cup \{C\}$ a aplicação f_2 por

$$f_2(P) = \begin{cases} P & \text{se } P \in l \cup \{C\} \\ CP \cap Y_1U & \text{onde } U = YP \cap l \text{ se } P \notin l \text{ e } P \notin YY_1. \end{cases}$$

Temos $f_1(P) = f_2(P) = P$, para todo o $P \in l \cup \{C\}$. Vejamos agora que, para todo o $Z \in \mathcal{P} \setminus \{XX_1, YY_1, l\}$, $f_1(Z) = f_2(Z)$. Temos dois casos a considerar:

1. $Z \in XY$.

Como $XZ \cap l = YZ \cap l = U$ temos $f_1(Z) = CZ \cap X_1U$ e $f_2(Z) = CZ \cap Y_1U$. Notemos que $X_1U = Y_1U$ pois $f_1(Y) = Y_1$ (ver figura 18). Concluímos então que $f_1(Z) = f_2(Z)$.

2. $Z \notin XY$.

Sejam $U = XY \cap l$, $V = XZ \cap l$ e $W = YZ \cap l$. Seja $Z_1 = f_1(Z)$ (ver figura 19).

Os pontos C, X, Y, Z, X_1, Y_1 e Z_1 são distintos e estão nas condições da configuração de Desargues. Como π é um plano de Desargues os pontos $XY \cap X_1Y_1$, $XZ \cap X_1Z_1$ e $YZ \cap Y_1Z_1$ são colineares. Por definição de f_1 , temos $XY \cap X_1Y_1 = U \in l$,

$XZ \cap X_1Z_1 = V \in l$. Resulta então que $YZ \cap Y_1Z_1$ é um ponto da recta l . Como $YZ \cap l = W$ vem que $YZ \cap Y_1Z_1 = W$, donde concluímos que os pontos Y_1, Z_1 e W são colineares. Logo $f_2(Z) = Y_1W \cap CZ = Z_1 = f_1(Z)$.

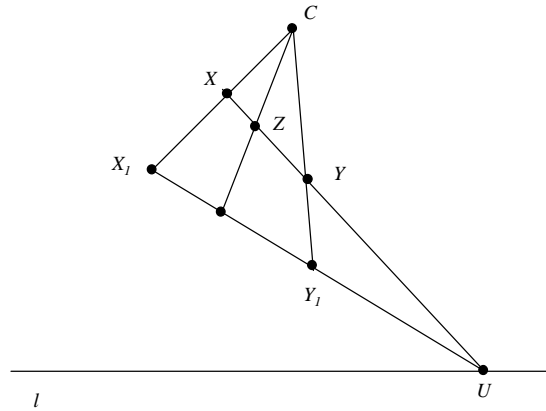


FIGURA 18

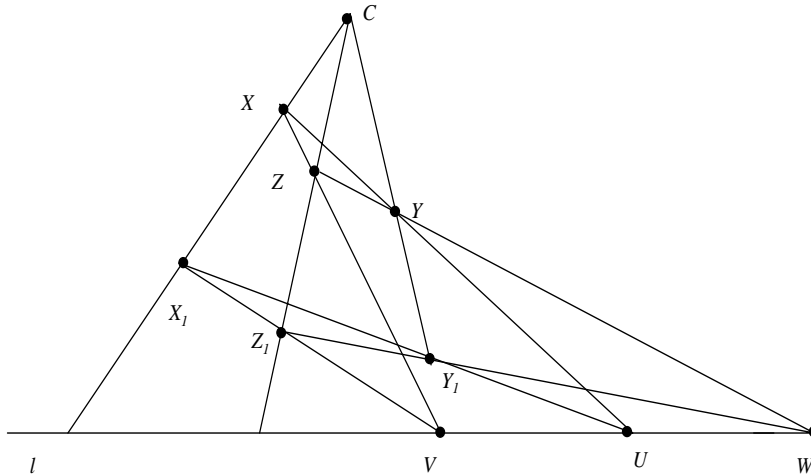


FIGURA 19

Definimos em \mathcal{P} a aplicação f por

$$f(P) = \begin{cases} P & \text{se } P \in l \cup \{C\} \\ f_1(P) & \text{se } P \in \mathcal{P} \setminus (XX_1 \cup l) \\ f_2(P) & \text{se } P \in XX_1 \setminus \{C\}. \end{cases}$$

Vamos agora mostrar que f aplica rectas em rectas. Seja m uma recta qualquer. Temos dois casos:

1. Se $m = l$ resulta imediatamente da definição de f que $f(m) = m$.
2. Suponhamos que $m \neq l$. É claro que, se $m = XX_1$ então $f(m) = m$. Suponhamos agora que $m \neq XX_1$. Seja $M = m \cap l$ e sejam M' e M'' dois pontos da recta m distintos de M . Sejam $M'_1 = f(M')$ e $M''_1 = f(M'')$.
 - (i) Se $X \in m$, por definição de f , temos $M'_1 \in X_1M$ e $M''_1 \in X_1M$ e, portanto M'_1, M''_1 e M são colineares pelo que concluímos que $f(m)$ é uma recta.
 - (ii) Suponhamos que $C \in m$. Se $M = C$ então $f(m) = m$, uma vez que $f(C) = C \in m$, $f(M') = M'_1 \in CM' = m$ e $f(M'') = M''_1 \in CM'' = m$. Se $M \neq C$ então pelo menos um dos pontos M' ou M'' é distinto de C . Sem perda de generalidade, podemos supor $M' \neq C$. Temos $f(C) = C \in m$, $f(M) = M \in m$ e $f(M') = M'_1 \in CM' = m$ pelo que $f(m) = m$.
 - (iii) Suponhamos agora que m não passa por C nem por X . Sejam $U = XM' \cap l$ e $V = XM'' \cap l$ (ver figura 20).

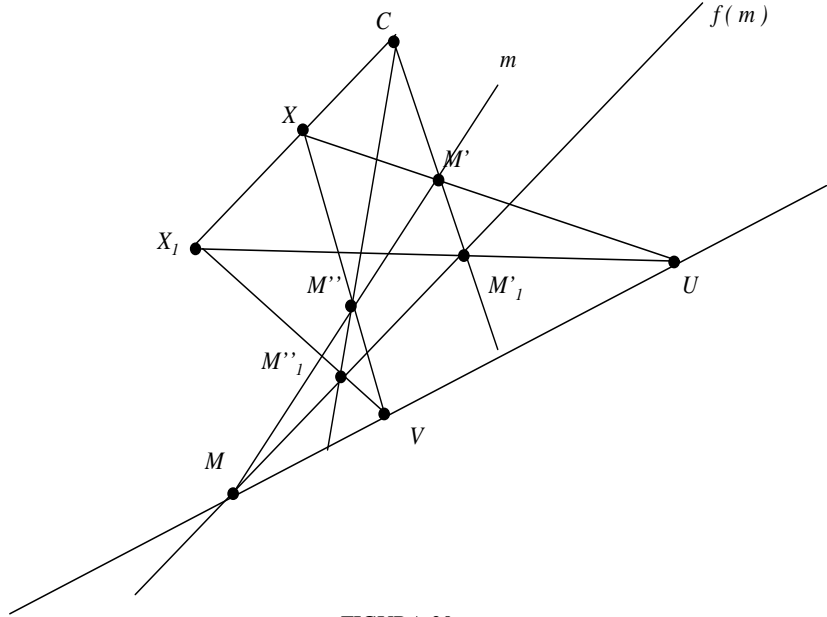


FIGURA 20

Os pontos C, X, M', M'', X_1, M'_1 e M''_1 estão nas condições da configuração de Desargues. Como π é um plano de Desargues temos que os pontos $XM'' \cap X_1M''_1 = V$, $XM' \cap X_1M'_1 = U$ e $M'M'' \cap M'_1M''_1$ são colineares. Atendendo a que os pontos U e V pertencem à recta l e a que $m = M'M''$ resulta que $M = M'M'' \cap M'_1M''_1$ donde concluímos que M, M'_1 e M''_1 são colineares e, portanto, $f(m)$ é uma recta.

A aplicação f é bijectiva (resulta da definição de f , do facto que f aplica rectas em rectas e de que π é um plano projectivo), aplica pontos em pontos, aplica rectas em rectas, fixa a recta l ponto por ponto, $f(C) = C$ e, para todo o $X \neq C$, $f(X) \in XC$. Portanto f é uma (C, l) -colineação. É imediato que $f(X) = X_1$. ■

Em geral, existem configurações de Desargues que não provêm de uma (C, l) -colinação. Mas, se um plano projectivo é um plano de Desargues então todas as configurações de Desargues provêm de uma (C, l) -colinação. No apêndice B, em particular secção B.3, iremos ver que se π é um plano projectivo de ordem 2, 3 ou 4 então π é um plano de Desargues. Em qualquer plano projectivo de ordem $n > 2$ existem sete pontos nas condições da configuração de Desargues. De seguida, vamos mostrar que em qualquer plano projectivo de ordem $n > 2$ existe pelo menos uma configuração de Desargues.

Proposição 2.2.29 *Todo o plano projectivo de ordem $n > 2$ admite uma configuração de Desargues.*

Demonstração. Seja π um plano projectivo de ordem n . É claro que, no caso em que $n = 3$ ou $n = 4$ existem várias configurações de Desargues. Suponhamos que $n \geq 5$. Seja l uma recta qualquer e C um ponto qualquer que não pertence à recta l . Sejam l_1, l_2 e l_3 três rectas que passam por C e sejam A e B pontos de l tais que nenhum deles pertence a qualquer uma das rectas l_1, l_2 e l_3 (observemos que é possível fazer tal escolha já que, como $n \geq 5$, cada recta contém pelo menos seis pontos e cada ponto pertence a pelo menos seis rectas). Sejam $L_1 = l_1 \cap l$, $L_2 = l_2 \cap l$ e $L_3 = l_3 \cap l$. Para cada ponto $X \in l_1 \setminus \{C, L_1\}$, construímos pontos X_2 e X_3 do seguinte modo (ver figura 21): $X_2 = XA \cap l_2$ e $X_3 = X_2B \cap l_3$

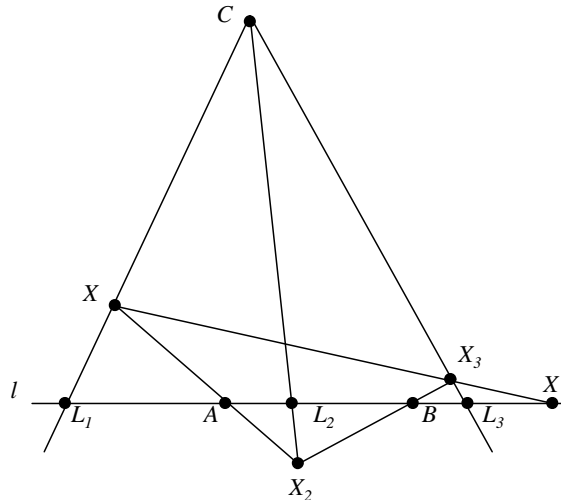


FIGURA 21

Consideremos a aplicação f definida em $l_1 \setminus \{C, L_1\}$ por $f(X) = X' = XX_3 \cap l$. Como duas rectas intersectam-se num único ponto temos que, dado $X \in l_1 \setminus \{C, L_1\}$, X' é único e $X' \in l \setminus \{A, B, L_1, L_2, L_3\}$. Sabemos também que $l_1 \setminus \{C, L_1\}$ contém $n - 1$ pontos e $l \setminus \{A, B, L_1, L_2, L_3\}$ contém $n - 4$ pontos. Assim, existem pontos $Y, Z \in l_1 \setminus \{C, L_1\}$ tais que $f(Y) = f(Z)$. Sejam $P, Q \in l_1 \setminus \{C, L_1\}$.

Sejam P_2 e P_3 construídos a partir de P e Q_2 e Q_3 construídos a partir de Q do mesmo modo que X_2 e X_3 foram construídos a partir de X . Temos que C, P, P_2, P_3, Q, Q_2 e Q_3 são sete pontos nas condições da configuração de Desargues. Além disso, $PP_2 \cap QQ_2 = A \in l$ e $P_2P_3 \cap Q_2Q_3 = B \in l$. Temos uma configuração de Desargues se o ponto $PP_3 \cap QQ_3 \in l$,

o que acontece quando $f(P) = f(Q)$. Assim, a configuração constituída pelos dez pontos $C, Y, Y_2, Y_3, Z, Z_2, Z_3, A, B, e Z'$ e pelas dez rectas $l, CZ, CZ_2, CZ_3, ZZ_2, YY_2, Z_2Z_3, Y_2Y_3, YY_3$ e ZZ_3 é uma configuração de Desargues. ■

Observemos que todo o plano projectivo de ordem $n > 2$ admite várias configurações de Desargues, uma vez que na demonstração da proposição anterior a escolha de l e de C é arbitrária. Dizemos que **um plano afim \mathcal{A} é um plano de Desargues** se o plano projectivo $\pi = \mathcal{A} \cup l_\infty$ é um plano de Desargues.

Proposição 2.2.30 *Seja \mathcal{A} um plano afim de Desargues e AA', BB' e CC' três rectas distintas tais que $AA' \parallel BB' \parallel CC'$ ou $AA' \cap BB' \cap CC' = P$, onde $P \notin \{A, A', B, B', C, C'\}$. Se $AB \parallel A'B'$ e $AC \parallel A'C'$ então $BC \parallel B'C'$.*

Demonstração.

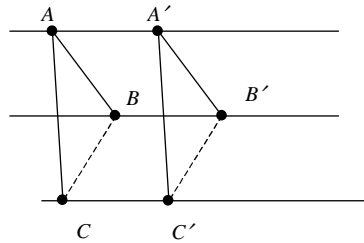


FIGURA 22

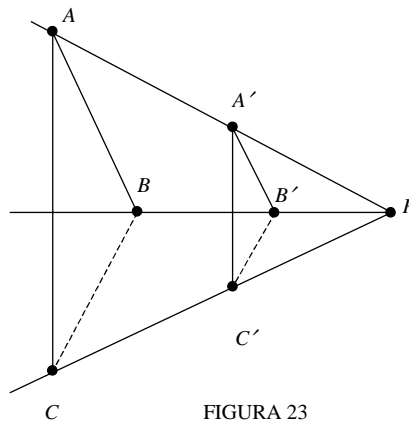


FIGURA 23

Suponhamos que $AA' \parallel BB' \parallel CC'$ e que $AB \parallel A'B'$ e $AC \parallel A'C'$. Em $\mathcal{A} \cup l_\infty$ temos $AA' \cap BB' \cap CC' = X \in l_\infty$, $AB \cap A'B' = Y \in l_\infty$ e $AC \cap A'C' = Z \in l_\infty$. Se $Y = Z$

então $AC = BC$ e $A'C' = B'C'$ donde, em \mathcal{A} , $BC \parallel B'C'$. Se $Y \neq Z$, então X, A, B e C são quatro pontos distintos de $\mathcal{A} \cup l_\infty$ tais que não há três colineares, X, A, A' e X, B, B' e X, C, C' são ternos de pontos colineares e A, B, C e A', B', C' são ternos de pontos não colineares (ver figura 22). Como $\mathcal{A} \cup l_\infty$ é um plano de Desargues, em $\mathcal{A} \cup l_\infty$, $BC \cap B'C' \in YZ = l_\infty$. Logo, em \mathcal{A} , $BC \parallel B'C'$.

Suponhamos agora que $AA' \cap BB' \cap CC' = P$ e que $AB \parallel A'B'$ e $AC \parallel A'C'$. Se $C \in AB$ então $C' \in A'B'$, pois $AC \parallel A'C'$. Logo $BC \parallel B'C'$. Suponhamos que $C \notin AB$ (ver figura 23). Em $\mathcal{A} \cup l_\infty$, $AB \cap A'B' = X \in l_\infty$ e $AC \cap A'C' = Y \in l_\infty$. Notemos que $X \neq Y$. P, A, B e C são quatro pontos de $\mathcal{A} \cup l_\infty$ tais que não há três colineares, P, A, A' e P, B, B' e P, C, C' são ternos de pontos colineares e A, B, C e A', B', C' são ternos de pontos não colineares. Então, em $\mathcal{A} \cup l_\infty$, $BC \cap B'C' \in XY = l_\infty$. Logo, em \mathcal{A} , $BC \parallel B'C'$. ■

Dizemos que um plano afim \mathcal{A} tem um **conjunto completo de dilatações** se, dados três pontos colineares e distintos C, X e X_1 existe uma homotetia f de \mathcal{A} com centro C e tal que $f(X) = X_1$ e dados pontos P e Q de \mathcal{A} existe uma translação g tal que $g(P) = Q$ (notemos que no caso de $P = Q$, g é a identidade).

Dizemos que um plano afim \mathcal{A} tem um **conjunto completo de perspectivas afins**, se dada uma recta qualquer l e dois pontos $P, Q \notin l$, existe uma perspectiva afim f de \mathcal{A} com eixo l tal que $f(P) = Q$.

Proposição 2.2.31 *O plano projectivo π é um plano de Desargues se e só se para toda a recta \bar{m} de π , o plano afim $\pi \setminus \bar{m}$ tem um conjunto completo de dilatações e um conjunto completo de perspectivas afins.*

Demonstração. Suponhamos que π é um plano de Desargues. Então π tem um conjunto completo de colineações centrais. Seja \bar{m} uma recta de π . Vejamos que:

1. O plano afim $\pi \setminus \bar{m}$ tem um conjunto completo de dilatações.

Sejam C, X e X_1 três pontos distintos e colineares de $\pi \setminus \bar{m}$. Atendendo a que π tem um conjunto completo de colineações centrais, existe uma (C, \bar{m}) -colineação f de π que aplica X em X_1 . Como f é uma homologia de π resulta que $f|_{\pi \setminus \bar{m}}$ é uma homotetia de centro C que aplica X em X_1 .

Sejam P e Q pontos distintos de $\pi \setminus \bar{m}$. Seja $C_1 = PQ \cap \bar{m}$. Existe uma (C_1, \bar{m}) -colineação g de π que aplica P em Q . Como g é uma elação de π temos que $g|_{\pi \setminus \bar{m}}$ é uma translação.

2. O plano afim $\pi \setminus \bar{m}$ tem um conjunto completo de perspectivas afins.

Sejam l_1 uma recta de $\pi \setminus \bar{m}$ e P e Q dois pontos distintos de $\pi \setminus \bar{m}$ tais que $P, Q \notin l_1$. Seja $C = PQ \cap \bar{m}$. Existe uma (C, l_1) -colineação f de π tal que $f(P) = Q$. Como f é uma homologia de π temos que $f|_{\pi \setminus \bar{m}}$ é uma perspectiva afim de eixo l_1 tal que $f(P) = Q$.

Reciprocamente, suponhamos que para toda a recta \bar{m} de π , o plano afim $\pi \setminus \bar{m}$ tem um conjunto completo de dilatações e um conjunto completo de perspectivas afins. Seja C um ponto de π e \bar{l} uma recta de π . Sejam X e X_1 pontos de π tais que $X, X_1 \notin \{C\} \cup \bar{l}$ e C, X e X_1 são colineares. Temos duas situações a considerar:

1. $C \notin \bar{l}$.

Como $\pi \setminus \bar{l}$ tem um conjunto completo de dilatações, existe uma homotetia f de $\pi \setminus \bar{l}$ com centro C e tal que $f(X) = X_1$. Então, $f|_\pi$ (extensão de f a π) é uma (C, \bar{l}) -colineação tal que $f|_\pi(X) = X_1$.

2. $C \in \bar{l}$.

Designemos por \bar{r} uma recta de π que contém C e tal que $\bar{r} \neq \bar{l}$ e $X, X_1 \notin \bar{r}$ (notemos que tal recta existe). Como $\pi \setminus \bar{r}$ tem um conjunto completo de perspectivas afins, existe uma perspectiva afim f de eixo $l = \bar{l} \setminus \{C\}$ tal que $f(X) = X_1$. A recta de $\pi \setminus \bar{r}$ que contém os pontos X e X_1 é um traço de f . Designemos por t essa recta. Como t é paralela a l temos que nenhum traço de f intersecta a recta l . Então, sendo Γ o conjunto dos traços de f temos $\Gamma \cup \{l\} = [t]$ e, portanto, $[t] = [l] = C$. Logo $f|_\pi$ é uma (C, \bar{l}) -colineação. ■

2.3 Plano de Möbius

Um plano de Möbius ¹⁵ é uma estrutura de incidência $\mathcal{M} = (\mathcal{P}, \mathcal{L})$, em que os elementos de \mathcal{L} são designados por círculos, que satisfaz as seguintes condições:

(M_1) Dados três pontos existe um único círculo que os contém;

(M_2) Dado um círculo α e dois pontos P e Q tais que P pertence a α e Q não pertence a α , existe um único círculo β que contém os pontos P e Q e tal que P é o único ponto comum aos círculos α e β ;

(M_3) Existem quatro pontos que não pertencem ao mesmo círculo. Existem pelo menos cinco pontos. Qualquer círculo contém pontos.

Designemos por PQR o círculo que contém os pontos P, Q e R . Dado um conjunto de pontos dizemos que estes são **concíclicos** se pertencem a um mesmo círculo. Assim, num plano de Möbius existem quatro pontos não concíclicos.

Exemplo.

Consideremos os conjuntos

$$\mathcal{P} = \{P_1, P_2, P_3, P_4, P_5\}$$

e

$$\mathcal{L} = \{\{P_1, P_2, P_3\}, \{P_1, P_2, P_4\}, \{P_1, P_2, P_5\}, \{P_1, P_3, P_4\}, \{P_1, P_3, P_5\}, \\ \{P_1, P_4, P_5\}, \{P_2, P_3, P_4\}, \{P_2, P_3, P_5\}, \{P_2, P_4, P_5\}, \{P_3, P_4, P_5\}\}.$$

A estrutura de incidência $\mathcal{M} = (\mathcal{P}, \mathcal{L})$ satisfaz (M_1), (M_2) e (M_3).

Como o exemplo anterior mostra, a intersecção de dois círculos pode ser um conjunto de dois pontos. Em geral, temos a seguinte proposição:

¹⁵Também designado por plano inversivo.

Lema 2.3.1 *A intersecção de dois círculos distintos de um plano de Möbius contém, no máximo, dois pontos.*

Demonstração. Sejam α e β dois círculos e suponhamos que α e β intersectam-se em três pontos. Por (M_1) , resulta que $\alpha = \beta$. Portanto dois círculos distintos intersectam-se, no máximo, em dois pontos. ■

Ao escrevermos $\alpha \cap \beta = \{P\}$ pretendemos dizer que P é o único ponto comum aos círculos α e β e dizemos que os círculos α e β **são tangentes em P** e P é o **ponto de tangência**. Ao escrevermos $\alpha \cap \beta = \{P, Q\}$ pretendemos dizer que α e β intersectam-se nos pontos P e Q e dizemos que os círculos α e β **são secantes**. Se os círculos α e β não têm nenhum ponto comum dizemos que α e β **são disjuntos**.

Lema 2.3.2 *Num plano de Möbius, um ponto, dois pontos ou três pontos pertencem a um conjunto de quatro pontos não concíclicos.*

Demonstração. Basta ter em atenção que existe um conjunto de quatro pontos não concíclicos e que três pontos distintos definem um único círculo. ■

Lema 2.3.3 *Num plano de Möbius qualquer círculo contém pelo menos três pontos.*

Demonstração. Seja α um círculo de \mathcal{M} . Seja P_1 um ponto de α (tal ponto existe atendendo a (M_3)). Pelo lema anterior, existem pontos P_2, P_3 e P_4 tais que P_1, P_2, P_3 e P_4 são quatro pontos não concíclicos. Consideremos os círculos $\alpha_2 = P_1P_3P_4, \alpha_3 = P_1P_2P_4$ e $\alpha_4 = P_1P_2P_3$ (notemos que estes círculos são distintos).

Se existe $i \in \{2, 3, 4\}$ tal que $\alpha = \alpha_i$ então α contém pelo menos três pontos. Suponhamos agora que $\alpha_1 = \alpha, \alpha_2, \alpha_3$ e α_4 são círculos distintos. Observemos que $P_1 \in \alpha_i$, para todo $i \in \{1, 2, 3, 4\}$. Como, para todos os $i, j \in \{2, 3, 4\}$ com $i \neq j$, existe $k \in \{2, 3, 4\}$ tal que $\alpha_i \cap \alpha_j = \{P_1, P_k\}$, no máximo, um dos três círculos é tangente a α no ponto P_1 (notemos que dois círculos distintos ambos tangentes a α em P_1 não têm pontos comuns além de P_1). Concluimos assim que, no mínimo, dois dos três círculos α_2, α_3 e α_4 são secantes a α e, portanto, α contém pelo menos três pontos. ■

Seja N um ponto de um plano de Möbius $\mathcal{M} = (\mathcal{P}, \mathcal{L})$. Designemos por \mathcal{L}_N o conjunto dos círculos de \mathcal{L} que contêm N . Em \mathcal{L}_N definimos uma relação T_N , chamada **relação de tangência relativamente a N** , do seguinte modo:

$$\alpha T_N \beta \text{ se } \alpha = \beta \text{ ou } \alpha \cap \beta = \{N\}.$$

É evidente que T_N é uma relação reflexiva e simétrica. Sejam $\alpha, \beta, \gamma \in \mathcal{L}_N$ tais que $\alpha T_N \beta$ e $\beta T_N \gamma$. Se $\alpha = \beta$ ou $\beta = \gamma$ ou $\alpha = \gamma$ resulta imediatamente que $\alpha T_N \gamma$. Suponhamos que α, β e γ são distintos. Temos $\alpha \cap \beta = \{N\}$ e $\beta \cap \gamma = \{N\}$. Então $N \in \alpha \cap \gamma$. Suponhamos, com vista a uma contradição, que existe $Q \neq N$ tal que $Q \in \alpha \cap \gamma$. É imediato que $Q \notin \beta$. Por (M_2) , existe um único círculo δ que contém os pontos N e Q e tal que $\delta \cap \beta = \{N\}$. Logo $\delta = \gamma = \alpha$, o que é falso. Concluimos assim que $\alpha T_N \gamma$ e, portanto, T_N é transitiva. Logo T_N é uma relação de equivalência em \mathcal{L}_N .

2.3.1 Obtenção de um plano afim a partir de um plano de Möbius

Vamos agora mostrar que a partir de um plano de Möbius $\mathcal{M} = (\mathcal{P}, \mathcal{L})$ podemos construir um plano afim. Fixemos $N \in \mathcal{P}$. Consideremos os conjuntos

$$\bar{\mathcal{P}} = \mathcal{P} \setminus \{N\} \text{ e } \bar{\mathcal{L}} = \{\alpha \setminus \{N\} : \alpha \in \mathcal{L}_N\}.$$

Proposição 2.3.4 *A estrutura de incidência $\mathcal{A} = (\bar{\mathcal{P}}, \bar{\mathcal{L}})$ é um plano afim.*

Demonstração.

Verificação de (A_1) . Sejam $P, Q \in \bar{\mathcal{P}}$ tais que $P \neq Q$. Por (M_1) , existe um único círculo $\alpha \in \mathcal{L}$ que contém os pontos P, Q e N . Então $\alpha \setminus \{N\}$ é o único elemento de $\bar{\mathcal{L}}$ que contém P e Q .

Verificação de (A_2) . Sejam $\alpha \setminus \{N\} \in \bar{\mathcal{L}}$ e $P \in \bar{\mathcal{P}}$ tais que $P \notin \alpha \setminus \{N\}$. Por (M_2) , existe um único círculo β de \mathcal{L} que contém o ponto P e é tangente a α no ponto N . Então $\beta \setminus \{N\}$ é o único elemento de $\bar{\mathcal{L}}$ que contém P e tal que $(\alpha \setminus \{N\}) \cap (\beta \setminus \{N\}) = \emptyset$.

Verificação de (A_3) . Por (M_3) , existem quatro pontos de \mathcal{P} não concíclicos, a saber P, Q, R e S . Temos duas hipóteses:

1. Um desses pontos é o ponto N , digamos $P = N$.

Então $QRS \in \mathcal{L} \setminus \mathcal{L}_N$, caso contrário, os pontos P, Q, R e S seriam concíclicos. Assim, Q, R e S são três pontos de $\bar{\mathcal{P}}$ tais que não há nenhum elemento de $\bar{\mathcal{L}}$ que os contenha.

2. Nenhum desses pontos é o ponto N .

Atendendo a (M_1) , PQN é o único círculo de \mathcal{L}_N que contém os pontos P e Q . Pelo menos um dos pontos R ou S não pertence ao círculo PQN , caso contrário, os pontos P, Q, R e S seriam concíclicos. Suponhamos então que $R \notin PQN$. Assim, $P, Q, R \in \bar{\mathcal{P}}$ e não há nenhum elemento de $\bar{\mathcal{L}}$ que os contenha. ■

Daqui para a frente, $\mathcal{M} \setminus N$ designa o plano afim que se obtém do plano de Möbius \mathcal{M} através do processo atrás descrito.

2.3.2 Ordem de um plano de Möbius finito

Um **plano de Möbius finito** é uma estrutura de incidência finita que é um plano de Möbius. Todos os círculos de um plano de Möbius contém o mesmo número de pontos.

Lema 2.3.5 *Sejam α e β dois círculos de um plano de Möbius \mathcal{M} que se intersectam em dois pontos. Então existe um ponto C de \mathcal{M} que não pertence a nenhum dos círculos α e β .*

Demonstração. Seja $\{P, Q\} = \alpha \cap \beta$. Designemos por R um ponto do círculo α tal que $R \neq P$ e $R \neq Q$ (tal ponto existe atendendo ao lema 2.3.3). Atendendo a (M_2) , existe um único círculo γ que contém R e é tangente a β em P . Como $\gamma \cap \alpha = \{P, R\}$ e, atendendo ao lema 2.3.3, existe um ponto C que pertence a γ e tal que $C \notin \alpha$ e $C \notin \beta$. ■

Proposição 2.3.6 *Seja \mathcal{M} um plano de Möbius e α e β dois círculos de \mathcal{M} . Então existe uma bijecção entre os pontos de α e os pontos de β .*

Demonstração. Temos três casos a considerar:

1. Os círculos α e β intersectam-se em dois pontos.

Seja $\{P, Q\} = \alpha \cap \beta$. Atendendo ao lema anterior, existe um ponto C tal que $C \notin \alpha$ e $C \notin \beta$. Vamos agora definir uma aplicação f entre os pontos de α e os pontos de β . Seja X um ponto de α tal que $X \neq P$. Consideremos o círculo $\gamma_X = CPX$. Suponhamos que o círculo γ_X não é tangente a β (ver figura 24).

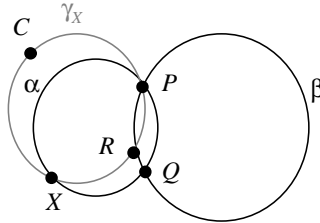


FIGURA 24

Então temos $\gamma_X \cap \beta = \{P, R\}$, onde R é um ponto de β distinto de P . Neste caso, fazemos $f(X) = R$. Observemos que $f(Q) = Q$.

Suponhamos agora que o círculo γ_X é tangente a β (ver figura 25).

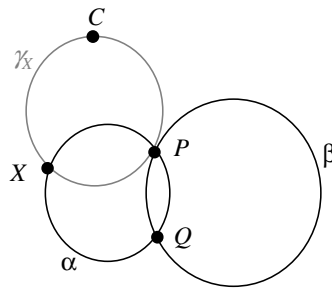


FIGURA 25

Neste caso, fazemos $f(X) = P$.

Existe um único círculo γ que contém P e C e é tangente a α em P . Se γ fosse tangente a β , o ponto de tangência seria P . Teríamos então que $\gamma T_P \alpha$ e $\gamma T_P \beta$, donde resultava que $\alpha T_P \beta$, o que é falso. Assim, γ intersecta β num ponto que vamos designar por S . Fazemos $f(P) = S$.

Vejam agora que a aplicação f é bijetiva.

Injectividade: Sejam X e Y dois pontos de α tais que $X \neq Y$. Se $X = P$ ou $Y = P$ então é evidente que $f(X) \neq f(Y)$. Suponhamos agora que X e Y são ambos distintos de P . Consideremos os círculos $\gamma_X = CPX$ e $\gamma_Y = CPY$. É claro que $\gamma_X \neq \gamma_Y$. Temos dois casos a considerar:

- (a) ambos os círculos γ_X e γ_Y são secantes a β ;
- (b) um dos círculos γ_X ou γ_Y é secante a β e o outro é tangente a β .

Atendendo ao modo como definimos a aplicação f é fácil ver que, em ambos os casos, $f(X) \neq f(Y)$.

Sobrejectividade: Seja Y um ponto qualquer de β . Suponhamos que $Y = P$. O círculo que contém P e C e é tangente a β intersecta α num ponto X . Temos $f(X) = Y$. Suponhamos agora que $Y \neq P$. Seja $\gamma_Y = CPY$. Se γ_Y é tangente a α então $f(P) = Y$. Se γ_Y é secante a α temos $\gamma_Y \cap \alpha = \{P, X\}$. Temos $f(X) = Y$.

2. Os círculos α e β intersectam-se num só ponto que vamos designar por P .
Sejam Q e R dois pontos distintos de P tais que $Q \in \alpha$ e $R \in \beta$. O círculo PQR é distinto de α e β e intersecta cada um destes círculos em dois pontos. Por 1., existe uma bijecção f_1 entre os pontos de α e os pontos de PQR e existe uma bijecção f_2 entre os pontos de PQR e os pontos de β . Então $f = f_2 \circ f_1$ é uma bijecção entre os pontos de α e os pontos de β .
3. Os círculos α e β não têm nenhum ponto comum.
Sejam P e Q dois pontos tais que $P \in \alpha$ e $Q \in \beta$. Designemos por γ o círculo que contém os pontos P e Q e tal que $\gamma \cap \alpha = \{P\}$. O círculo γ intersecta β num só ponto ou em dois pontos. Em qualquer dos casos, atendendo a 1. e a 2., é possível encontrar uma bijecção f_1 entre os pontos de α e os pontos de γ e uma bijecção f_2 entre os pontos de γ e os pontos de β . Então $f = f_2 \circ f_1$ é uma bijecção entre os pontos de α e os pontos de β . ■

Corolário 2.3.7 *Seja \mathcal{M} um plano de Möbius finito. Então existe um número inteiro $n \geq 2$ tal que:*

1. *Qualquer círculo contém $n + 1$ pontos;*
2. *Qualquer ponto pertence a $n^2 + n$ círculos;*
3. *O número de pontos é igual a $n^2 + 1$ e o número de círculos é igual a $n^3 + n$.*

Demonstração. Seja N um ponto de \mathcal{M} . Consideremos o plano afim finito $\mathcal{A} = \mathcal{M} \setminus N$. Designemos por n ($n \geq 2$) a ordem de \mathcal{A} . Assim, cada círculo que passa pelo ponto N contém exactamente $n + 1$ pontos. Então, pela proposição anterior, qualquer círculo contém $n + 1$ pontos. Além disso, a proposição 2.1.6 permite afirmar que em \mathcal{M} existem $n^2 + 1$ pontos e que existem $n^2 + n$ círculos que contêm N . Logo, qualquer ponto pertence a $n^2 + n$ círculos. Temos também que existem $\frac{(n^2+1)(n^2+n)}{n+1} = n^3 + n$ círculos. ■

Ao número inteiro n referido no corolário 2.3.7 chamamos **ordem do plano de Möbius finito** \mathcal{M} . É claro que, \mathcal{M} tem ordem n se e só se o plano afim $\mathcal{A} = \mathcal{M} \setminus N$ tem ordem n .

Designemos por $\mathcal{B}(P, Q)$ o conjunto de todos os círculos de um plano de Möbius que contêm dois pontos distintos P e Q .

Proposição 2.3.8 *Sejam \mathcal{M} um plano de Möbius de ordem n e P e Q pontos distintos de \mathcal{M} . Então $\mathcal{B}(P, Q)$ contém $n + 1$ círculos.*

Demonstração. Consideremos o plano afim $\mathcal{A} = \mathcal{M} \setminus Q$. Resulta da segunda afirmação da proposição 2.1.6 que P pertence a $n + 1$ círculos que contêm Q . Assim, existem $n + 1$ círculos que contêm P e Q . ■

A proposição seguinte mostra que, sendo N um ponto de um plano de Möbius finito, todas as classes de círculos tangentes em N contêm o mesmo número de elementos.

Proposição 2.3.9 *Sejam \mathcal{M} um plano de Möbius de ordem n e N um ponto de \mathcal{M} . Então cada classe de círculos tangentes em N contém n círculos.*

Demonstração. Atendendo a que o plano afim $\mathcal{A} = \mathcal{M} \setminus N$ tem ordem n , resulta imediatamente da terceira afirmação da proposição 2.1.6 que cada classe de círculos tangentes em N contém n círculos. ■

Proposição 2.3.10 *Seja \mathcal{M} um plano de Möbius de ordem n e seja α um círculo de \mathcal{M} . Então existem:*

1. $\frac{n^2(n+1)}{2}$ círculos secantes a α ;
2. $n^2 - 1$ círculos tangentes a α ;
3. $\frac{n(n-1)(n-2)}{2}$ círculos disjuntos a α .

Demonstração. Sejam P e N dois pontos distintos de α . Pela proposição 2.3.8, existem n círculos secantes a α que contêm os pontos P e N . Como α contém $n + 1$ pontos, então existem $n \binom{n+1}{2} = \frac{n^2(n+1)}{2}$ círculos secantes a α .

Pela proposição anterior, existem $n - 1$ círculos tangentes a α em N . Então existem $(n + 1)(n - 1) = n^2 - 1$ círculos tangentes a α .

Resulta então que existem $n^3 + n - \frac{n^2(n+1)}{2} - (n^2 - 1) - 1 = \frac{n(n-1)(n-2)}{2}$ círculos disjuntos a α . ■

Capítulo 3

Introdução de coordenadas

A introdução de coordenadas num plano projectivo π (respectivamente, plano afim \mathcal{A}) é equivalente à construção de um plano projectivo $\bar{\pi}$ (respectivamente, plano afim $\bar{\mathcal{A}}$) que é isomorfo a π (respectivamente, \mathcal{A}). Assim, a cada ponto P de π (respectivamente, \mathcal{A}) fazemos corresponder (pelo isomorfismo) as suas coordenadas, identificando o ponto P com essas coordenadas.

3.1 Introdução de coordenadas num plano projectivo

Um dos nossos objectivos é mostrar que a existência de um corpo finito dá origem à existência de um plano projectivo finito que, como iremos mostrar, trata-se de um plano de Desargues e, reciprocamente, qualquer plano projectivo finito de Desargues pode ser obtido a partir de um corpo finito.

Não existe um único método de introduzir coordenadas num plano projectivo finito. Vamos descrever dois desses métodos, o primeiro, denominado por método de Marshall Hall, é usado para qualquer plano projectivo, enquanto o segundo método só é usado em planos projectivos de Desargues.

3.1.1 Método de Marshall Hall

Seja π um plano projectivo de ordem n e seja \mathbb{S} um conjunto com n símbolos distintos, entre os quais temos os símbolos 0 e 1. Sejam X, Y, I e O quatro pontos de π tais que não há três colineares. Vamos designar por recta no infinito a recta XY e denotar por l_∞ . Por uma questão de conveniência, vamos designar os pontos de π que pertencem a l_∞ por pontos no infinito e os restantes pontos de π por pontos finitos.

Aos pontos Y, X, O e I atribuímos coordenadas $(\infty)^1, (0), (0,0)$ e $(1,1)$, respectivamente. Seja $E = OI \cap XY$. A este ponto atribuímos coordenada (1). Consideremos uma aplicação bijectiva $\phi : OI \setminus \{E\} \rightarrow \mathbb{S}$ tal que $\phi(O) = 0$ e $\phi(I) = 1$. A cada ponto finito A de OI atribuímos coordenadas $(\phi(A), \phi(A))$. Assim, ao escrevermos (a, a) estamos a considerar o ponto finito A de OI tal que $\phi(A) = a$. Portanto, podemos escrever (a, a) em vez de A (ver figura 1).

Se B é um ponto finito tal que $B \in OY$ e $XB \cap OI = (b, b)$ então a B atribuímos coordenadas $(0, b)$. Se C é um ponto finito tal que $C \in OX$ e $YC \cap OI = (c, c)$ então a C atribuímos coordenadas $(c, 0)$. Se D é um ponto finito tal que D não pertence a nenhuma

¹O símbolo ∞ não pertence a \mathbb{S} .

das rectas OX , OY e OI e tal que $DY \cap OX = (d_1, 0)$ e $DX \cap OY = (0, d_2)$ então a D atribuímos coordenadas (d_1, d_2) (ver figura 2).

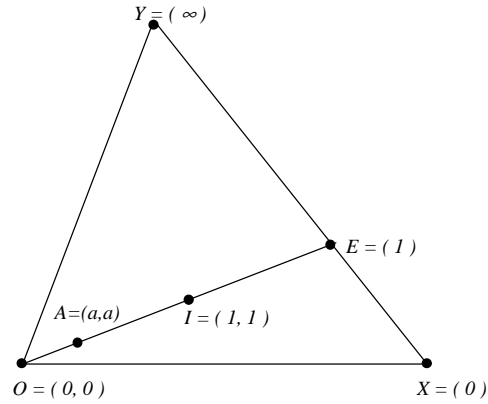


FIGURA 1

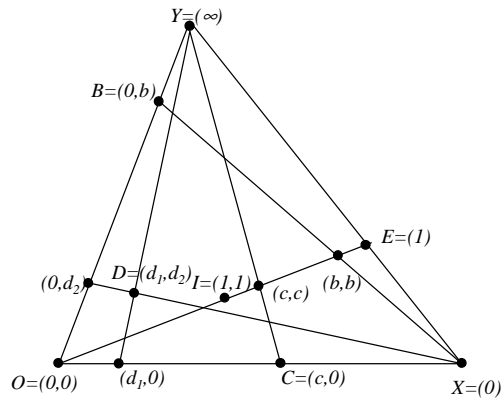


FIGURA 2

A recta que passa por O e por $(1, m)$ intersecta a recta no infinito num ponto que vamos designar por F . A esse ponto atribuímos coordenada (m) (ver figura 3).

Temos assim uma bijecção entre o conjunto dos pontos de π e o conjunto

$$\{(a, b) : a, b \in \mathbb{S}\} \cup \{(m) : m \in \mathbb{S}\} \cup \{(\infty)\}.$$

Todos os pontos finitos têm coordenadas (x, y) e dizemos que x é a abcissa e y é a ordenada do ponto ².

²Observemos que existe uma certa analogia com a introdução de coordenadas no plano euclidiano.

contém os pontos $(0, b)$ e (1) (ver figura 4).

Observemos que, se (x, y) pertence a r então $y = x + b$. Assim, dizemos que $y = x + b$ é a equação da recta r . Temos:

1. $0 + b = b$, para todo o $b \in \mathbb{S}$.
Resulta imediatamente da definição.
2. $a + 0 = a$, para todo o $a \in \mathbb{S}$.
Seja $a \in \mathbb{S}$. Os pontos $(0, 0)$, (a, a) e (1) são colineares pelo que temos $a + 0 = a$.

Definamos agora a multiplicação. Definimos $a \times b$ como sendo a ordenada do ponto de abcissa b que pertence à recta s que contém os pontos $(0, 0)$ e (a) (ver figura 5).

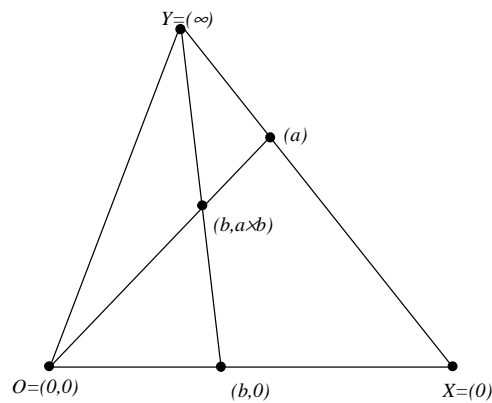


FIGURA 5

Para simplificar a escrita escrevemos ab em vez de $a \times b$. Observemos que, se (x, y) pertence a s então $y = ax$. Assim, dizemos que $y = ax$ é a equação da recta s . Temos:

1. $a1 = a$, para todo o $a \in \mathbb{S}$.
Seja $a \in \mathbb{S}$. Os pontos $(0, 0)$, $(1, a)$ e (a) são colineares pelo que temos $a1 = a$.
2. $1a = a$, para todo o $a \in \mathbb{S}$.
Seja $a \in \mathbb{S}$. O ponto (a, a) pertence à recta que contém os pontos $(0, 0)$ e (1) . Então $1a = a$.
3. $a0 = 0$, para todo o $a \in \mathbb{S}$.
Resulta imediatamente da definição.
4. $0a = 0$, para todo o $a \in \mathbb{S}$.
Seja $a \in \mathbb{S}$. O ponto $(a, 0)$ pertence à recta que contém os pontos $(0, 0)$ e (0) e, portanto, temos $0a = 0$.

Vamos agora definir em \mathbb{S} uma operação ternária³ T . Definimos $T(m, a, b)$ como sendo a ordenada do ponto de abscissa a que pertence à recta t que contém os pontos $(0, b)$ e (m) (ver figura 6).

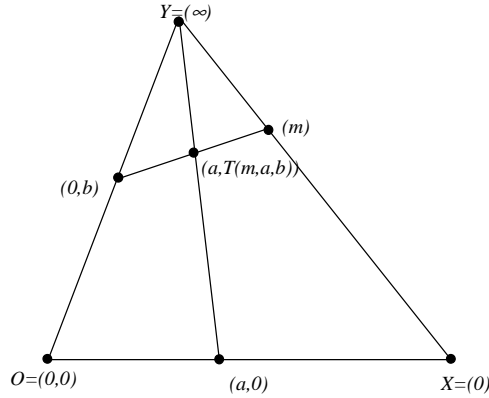


FIGURA 6

Observemos que, se (x, y) é um ponto da recta t então $y = T(m, x, b)$. Assim, dizemos que $y = T(m, x, b)$ é a equação da recta t . Em particular, temos $T(1, a, b) = a + b$ e $T(a, b, 0) = ab$. Assim, a adição e multiplicação definidas antes são casos particulares desta operação ternária T .

A um conjunto \mathbb{S} não vazio com uma operação ternária T chamamos **anel ternário**⁴ e denotamos por (\mathbb{S}, T) . Pretendemos agora mostrar que qualquer plano projectivo finito pode ser representado por um anel ternário satisfazendo certas propriedades e, reciprocamente, um anel ternário satisfazendo certas propriedades determina um plano projectivo finito.

Proposição 3.1.1 *Seja T a operação ternária definida anteriormente. Então:*

- (T_1) $T(0, a, b) = T(m, 0, b) = b$, para todos os $m, a, b \in \mathbb{S}$.
- (T_2) $T(1, a, 0) = a = T(a, 1, 0)$, para todo o $a \in \mathbb{S}$.
- (T_3) Dados $m, a, c \in \mathbb{S}$, existe um único $b \in \mathbb{S}$ tal que $T(m, a, b) = c$.
- (T_4) Dados $a, a', c, c' \in \mathbb{S}$, com $a \neq a'$, existe um único par de elementos $m, b \in \mathbb{S}$ tal que $T(m, a, b) = c$ e $T(m, a', b) = c'$.
- (T_5) Dados $m, m', b, b' \in \mathbb{S}$, com $m \neq m'$, existe um único $a \in \mathbb{S}$ tal que $T(m, a, b) = T(m', a, b')$.

Demonstração.

- (T_1) Sejam $m, a, b \in \mathbb{S}$ e $c = T(m, 0, b)$. Então $(0, c)$ pertence à recta que contém os pontos (m) e $(0, b)$ e também pertence à recta OY . Como duas rectas intersectam-se num único

³ $T : \mathbb{S} \times \mathbb{S} \times \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{S}$.

⁴Esta definição encontra-se em [12].

ponto e $(0, b)$ é um ponto da recta OY concluímos que $c = b$.

Seja $d = T(0, a, b)$. O ponto (a, d) pertence à recta que contém $(0, b)$ e (0) . Temos então que $d = b$.

(T_2) Seja $a \in \mathbb{S}$. Então $T(1, a, 0) = 1a = a = a1 = T(a, 1, 0)$.

(T_3) Sejam $a, c, m \in \mathbb{S}$. A recta r que contém os pontos (a, c) e (m) intersecta a recta OY num único ponto. Assim, existe um único $b \in \mathbb{S}$ tal que $(0, b)$ é o ponto da recta OY que pertence à recta r e, portanto, temos $T(m, a, b) = c$.

(T_4) Sejam $a, a', c, c' \in \mathbb{S}$ tais que $a \neq a'$. Existe uma única recta r que contém os pontos (a, c) e (a', c') . Como $a \neq a'$ a recta r intersecta a recta OY no ponto $(0, b)$, para algum $b \in \mathbb{S}$, e intersecta a recta XY no ponto (m) , para algum $m \in \mathbb{S}$. Atendendo a que os pontos (a, c) , (a', c') , $(0, b)$ e (m) pertencem à recta r temos $c = T(m, a, b)$ e $c' = T(m, a', b)$.

(T_5) Sejam $m, m', b, b' \in \mathbb{S}$ tais que $m \neq m'$. Existe uma única recta r que contém os pontos $(0, b)$ e (m) e existe uma única recta s que contém os pontos $(0, b')$ e (m') . Como $m \neq m'$ temos que r e s são rectas distintas. Assim, r e s intersectam-se num único ponto que é um ponto finito. Então existe um único $a \in \mathbb{S}$ tal que $T(m, a, b) = T(m', a, b')$. ■

Seja π um plano projectivo de ordem n . Vimos que, para qualquer escolha de quatro pontos X, Y, O e I de π tais que não há três colineares é possível construir um anel ternário (\mathbb{S}, T) , onde 0 e 1 pertencem a \mathbb{S} e T satisfaz as propriedades (T_1), (T_2), (T_3), (T_4) e (T_5) da proposição anterior.

Seja \mathbb{S} um conjunto não vazio com n símbolos, entre os quais temos os símbolos 0 e 1 e o símbolo ∞ não pertence a \mathbb{S} . Seja T uma operação ternária definida em \mathbb{S} que satisfaz as propriedades (T_1), (T_2), (T_3), (T_4) e (T_5). Consideremos a estrutura de incidência $\pi(\mathbb{S}) = (\mathcal{P}, \mathcal{L})$ definida do seguinte modo:

$$\mathcal{P} = (\mathbb{S} \times \mathbb{S}) \cup \{(m) : m \in \mathbb{S}\} \cup \{(\infty)\};$$

$$\mathcal{L} = \{l_{m,b} : m, b \in \mathbb{S}\} \cup \{l_c : c \in \mathbb{S}\} \cup \{l_\infty\}$$

onde, para cada $m, b, c \in \mathbb{S}$,

$$l_{m,b} = \{(x, y) \in \mathcal{P} : y = T(m, x, b)\} \cup \{(m)\};$$

$$l_c = \{(x, y) \in \mathcal{P} : x = c\} \cup \{(\infty)\}$$

e

$$l_\infty = \{(m) \in \mathcal{P}\} \cup \{(\infty)\}.$$

Designemos por pontos os elementos de \mathcal{P} e por rectas os elementos de \mathcal{L} . A proposição seguinte mostra que $\pi(\mathbb{S})$ é uma estrutura de incidência que satisfaz (P_1), (P_2) e (P_3).

Proposição 3.1.2 *A estrutura de incidência $\pi(\mathbb{S})$ é um plano projectivo de ordem n .*

Demonstração.

Verificação de (P_1). Sejam $P, Q \in \mathcal{P}$ tais que $P \neq Q$. Se $P = (m)$ e $Q = (\infty)$ ou $P = (m)$ e $Q = (m')$ então $P, Q \in l_\infty$. Se $P = (a, c)$ e $Q = (m)$ então, por (T_3), sabemos que existe um único $b \in \mathbb{S}$ tal que $c = T(m, a, b)$ e, portanto, $P, Q \in l_{m,b}$. Se $P = (a, c)$ e $Q = (\infty)$ então $P, Q \in l_a$. Se $P = (a, c)$ e $Q = (a', c')$ então:

(i) se $a = a'$ temos $P, Q \in l_a$;

(ii) se o caso anterior não se verificar , por (T_4) , sabemos que existe um único par de elementos $m, b \in \mathbb{S}$ tal que $T(m, a, b) = c$ e $T(m, a, b) = c'$. Logo $P, Q \in l_{m,b}$.

É evidente que em todos os casos a recta é única.

Verificação de (P_2) . Sejam $l, r \in \mathcal{L}$ tais que $l \neq r$. Se $l = l_c$ e $r = l'_c$ ou $l = l_c$ e $r = l_\infty$ então $l \cap r = (\infty)$. Se $l = l_c$ e $r = l_{m,b}$ então $l \cap r = (c, T(m, c, b))$. Se $l = l_\infty$ e $r = l_{m,b}$ então $l \cap r = (m)$. Suponhamos agora que $l = l_{m,b}$ e $r = l_{m',b'}$, com $m \neq m'$ ou $b \neq b'$.

(i) Se $m \neq m'$ então, por (T_5) , existe um único $a \in \mathbb{S}$ tal que $T(m, a, b) = T(m', a, b')$. Logo as duas rectas intersectam-se num único ponto.

(ii) Se $b \neq b'$ interessa estudar apenas o caso em que $m = m'$. É claro que $(m) \in l_{m,b} \cap l_{m,b'}$ e, por (T_3) , concluímos que (m) é o único ponto comum a ambas as rectas.

Verificação de (P_3) . Os pontos (0) , $(0,0)$, (∞) e $(1, 1)$ são quatro pontos tais que não há três colineares, pois facilmente verificamos que:

(i) não há três desses pontos que pertençam à recta l_∞ ;

(ii) não existe $c \in \mathbb{S}$ tal que três desses pontos pertençam à recta l_c ;

(iii) não existem $m, b \in \mathbb{S}$ tais que três desses pontos pertençam à recta $l_{m,b}$, caso contrário, os pontos colineares seriam $X = (0)$, $O = (0,0)$ e $I = (1, 1)$, o que claramente é falso.

Provámos assim que $\pi(\mathbb{S})$ é um plano projectivo. É evidente que $\pi(\mathbb{S})$ tem ordem n , já que cada recta contém exactamente $n + 1$ pontos. ■

No que se segue, $\pi = (\mathcal{P}, \mathcal{L})$ é um plano projectivo de ordem n e X, Y, O e I são quatro pontos de π tais que não há três colineares. Introduzimos coordenadas em π do modo descrito atrás. Seja (\mathbb{S}, T) um anel ternário onde T é a operação ternária definida na página 65. Dizemos que (\mathbb{S}, T) é um **anel ternário linear** se $T(m, a, b) = ma + b$, para todos os $a, b, m \in \mathbb{S}$.

Teorema 3.1.3 *Se π é um plano de Desargues então (\mathbb{S}, T) é um anel ternário linear e $(\mathbb{S}, +, \times)$ é um anel de divisão*⁵.

Demonstração. Se π é um plano de Desargues então π tem um conjunto completo de colineações centrais, isto é, π é (P, l) -transitivo, para qualquer ponto P e para qualquer recta l .

1. (\mathbb{S}, T) é um anel ternário linear:

É claro que se $m = 1$ ou $b = 0$ temos $T(m, a, b) = ma + b$. Também é claro que $T(m, 0, b) = m0 + b$.

Fixemos $b \in \mathbb{S}^* = \mathbb{S} \setminus \{0\}$. Os pontos $Y = (\infty)$, $O = (0,0)$ e $B = (0, b)$ são colineares. Seja $F = (m)$, com $m \in \mathbb{S} \setminus \{1\}$. Se $P \in BF$ é tal que $P \neq F$ e $P \neq B$ então $P = (a, T(m, a, b))$, para algum $a \in \mathbb{S}^*$. Seja $E = (1)$.

Observemos que as equações das rectas OF , BE e YP são, respectivamente, $y = mx$,

⁵Ver apêndice A.

$y = x + b$ e $x = a$. Sejam $U = YP \cap OF$ e $W = XU \cap OE$ (ver figura 7).

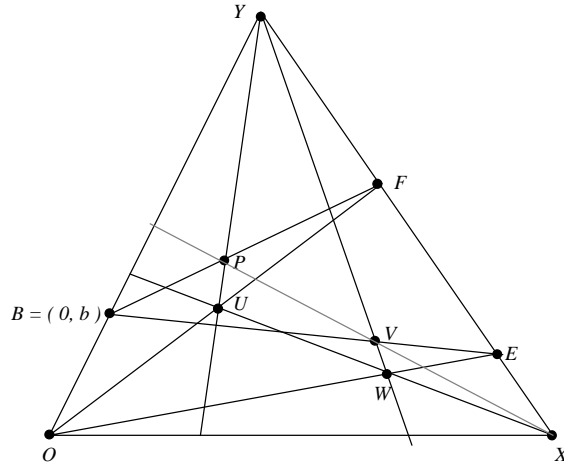


FIGURA 7

Temos $U = (a, ma)$ e $W = (ma, ma)$ (notemos que as equações das rectas XU e OE são, respectivamente, $y = ma$ e $y = x$). Seja $V = BE \cap YW$. Então $V = (ma, ma + b)$. Vejamos que P, V e X são colineares.

Como π é (Y, l_∞) -transitivo, existe uma (Y, l_∞) -colineação f_1 tal que $f_1(O) = B$. Atendendo a que as rectas PU e VW contêm o centro vem $f_1(PU) = PU$ e $f_1(VW) = VW$. Temos também $f_1(OF) = f_1(O)f_1(F) = BF$ e $f_1(OE) = f_1(O)f_1(E) = BE$. Como $U \in PU \cap OF$ temos $f_1(U) \in PU \cap BF$ pelo que $f_1(U) = P$ e como $W \in YV \cap OE$ temos $f_1(W) = V$. Assim, $f_1(UW) = PV$. Como $X \in UW$ e $f_1(X) = X$ resulta que $X \in PV$ e, portanto, P, V e X são colineares. Uma vez que todos os pontos finitos da recta XV têm a mesma ordenada vem $T(m, a, b) = ma + b$. Atendendo a que P é um ponto finito arbitrário da recta BF podemos concluir que (\mathbb{S}, T) é um anel ternário linear.

2. $(\mathbb{S}, +, \times)$ é um anel de divisão:

(a) $(\mathbb{S}, +)$ é um grupo comutativo.

(i) Sejam f_1 e f_2 duas (Y, l_∞) -colineações tais que $f_1(O) = B$ e $f_2(O) = D$, onde $B = (0, b)$ e $D = (0, d)$ com $b, d \in \mathbb{S}^*$. A aplicação $f = f_2 \circ f_1$ é ainda uma (Y, l_∞) -colineação. Sejam $a, c \in \mathbb{S}$. Consideremos os pontos $A = (a, a)$ e $C = (c, a)$ (ver figura 8).

Como $A \in OE \cap YA$ temos $f_1(A) \in BE \cap YA$ e $f_2(A) \in DE \cap YA$. Então $f_1(A) = (a, a + b)$ e $f_2(A) = (a, a + d)$. Como $C \in XA \cap YC$ temos $f_1(C) \in Xf_1(A) \cap YC$ e $f_2(C) \in Xf_2(A) \cap YC$. Então $f_1(C) = (c, a + b)$ e $f_2(C) = (c, a + d)$. Uma vez que $f(O) = f_2(0, b) = (0, b + d)$ temos $f(C) = (c, a + (b + d))$.

Por outro lado, temos $f(C) = f_2(c, a + b) = (c, (a + b) + d)$. Podemos então concluir que, para todos os $a, b, d \in \mathbb{S}$, $(a + b) + d = a + (b + d)$, o que prova

que a adição é associativa.

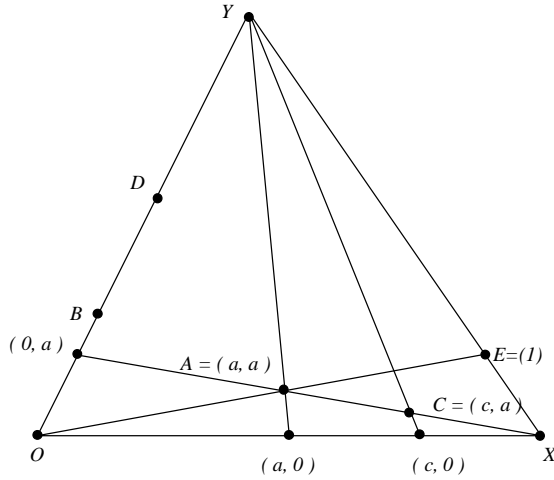


FIGURA 8

(ii) Atendendo à proposição 2.2.19 e a que π é um plano de Desargues, temos que $G(l_\infty)$ é um grupo abeliano. Sejam f_1 e f_2 definidas como em (i). Temos então $(f_1 \circ f_2)(O) = (f_2 \circ f_1)(O)$, ou seja, $(0, d + b) = (0, b + d)$. Concluimos então que $d + b = b + d$, para todos os $b, d \in \mathbb{S}$, o que prova que a adição é comutativa.

(iii) 0 é o elemento neutro de $(\mathbb{S}, +)$, pois $0 + a = a = a + 0$, para todo o $a \in \mathbb{S}$.

(iv) Seja $a \in \mathbb{S}$. Por (T_3) , existe um único $b \in \mathbb{S}$ tal que $T(1, a, b) = 0$, ou seja, $a + b = 0$. Atendendo a (ii), temos $b + a = 0$. Provamos assim que todos os elementos de \mathbb{S} admitem simétrico. Designemos o elemento simétrico de a por $-a$.

(b) Distributividade da multiplicação em relação à adição.

(i) Dado $a \in \mathbb{S}$, existe uma (X, l_∞) -colineação h tal que $h(0, 0) = A$ onde $A = (a, 0)$ (ver figura 9).

Sendo $E = (1)$, temos $h(OE) = AE$. Como A é um ponto finito da recta AE , existe $b \in \mathbb{S}$ tal que $T(1, a, b) = 0$. Facilmente verificamos que $b = -a$. Observemos que $y = x - a$ é a equação da recta AE . Seja $C = (c, c)$, para algum $c \in \mathbb{S}$. Temos $h(XC) = XC$. Então $h(C) \in XC \cap AE$ e, consequentemente, $h(C) = (a + c, c)$. Sejam $D = (c, mc)$ e $F = (m)$, para algum $m \in \mathbb{S}$. Como $A \in FA$, existe $b' \in \mathbb{S}$ tal que $T(m, a, b') = 0$. É claro que $b' = -ma$. A equação da recta FA é $y = mx - ma$. Como $h(D) \in XD \cap Yh(C)$ temos $h(D) = (a + c, mc)$ e atendendo a que $h(D) \in FA$ resulta que $m(a + c) - ma = mc$ e, portanto, $m(a + c) = mc + ma$, ou seja, para todos os $m, a, c \in \mathbb{S}$, $m(a + c) = ma + mc$.

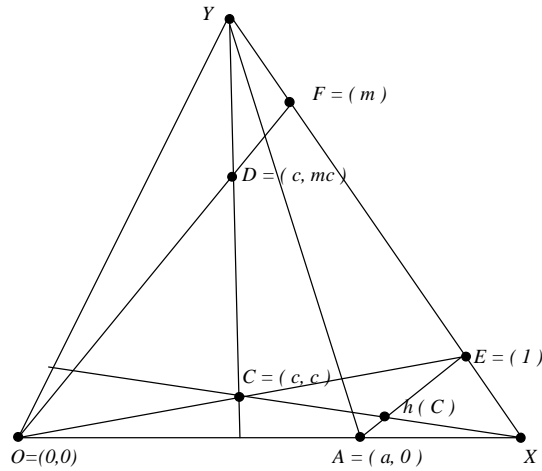


FIGURA 9

(ii) Dado $m \in \mathbb{S}$, existe uma (Y, OY) -colineação f tal que $f(X) = F$ onde $F = (m)$. Seja $A = (a, b)$, com $a, b \in \mathbb{S}$. Designemos por B e C os pontos de coordenadas, respectivamente, $(0, b)$ e $(1, b)$ (ver figura 10). Temos $f(XB) = FB$ e $f(YA) = YA$.

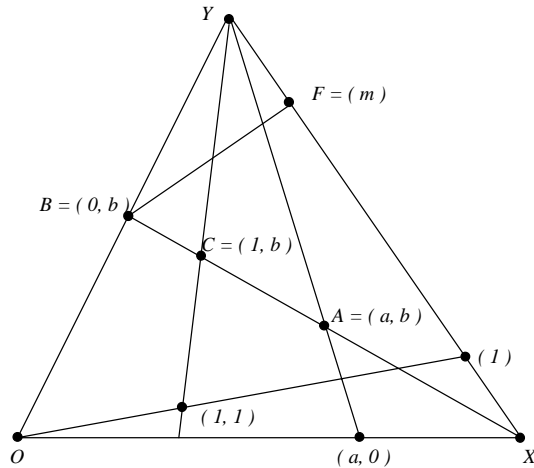


FIGURA 10

Então $f(A) = (a, ma + b)$ e, em particular, $f(C) = (1, m + b)$. Consideremos o ponto $(a, ba) \in OC$. Como $f(OC) = Of(C)$ resulta que o ponto $f(a, ba)$ pertence à recta de equação $y = (m + b)x$. Mas, $f(a, ba) = (a, ma + ba)$. Provamos assim que $(m + b)a = ma + ba$, para todos os $m, a, b \in \mathbb{S}$.

(c) (\mathbb{S}^*, \times) é um grupo.

- (i) Se $\mathbb{S}^* = \{1\}$ é claro que (\mathbb{S}^*, \times) é um grupo. Suponhamos agora que \mathbb{S}^* contém pelo menos dois elementos. Existe uma (X, OY) -colineação g_1 tal que $g_1(F) = E$ onde $E = (1)$ e $F = (m)$, com $m \in \mathbb{S}^* \setminus \{1\}$ (ver figura 11). Sejam $G = (a, 1)$, com $a \in \mathbb{S}^*$, e $H = YG \cap OF$. Então $H = (a, ma)$.

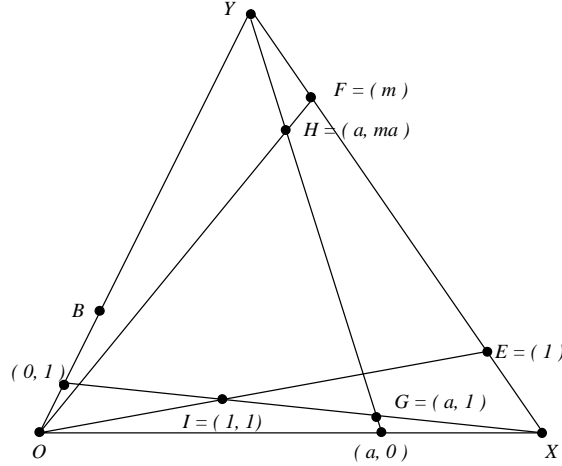


FIGURA 11

Atendendo a que $g_1(H) \in XH$ e $g_1(H) \in OE$ vem $g_1(H) = (ma, ma)$. Assim, como $g_1(G) \in XG$ e $g_1(G) \in Yg_1(H)$ temos $g_1(G) = (ma, 1)$. Em particular, temos $g_1(1, 1) = (m, 1)$. Sabemos também que existe uma (X, OY) -colineação g_2 tal que $g_2(n) = E$, para algum $n \in \mathbb{S}^* \setminus \{1\}$. Seja $g = g_2 \circ g_1$. A aplicação g é ainda uma (X, OY) -colineação. Temos $g(1, 1) = g_2(m, 1) = (nm, 1)$ e $g(a, 1) = g_2(ma, 1) = (n(ma), 1)$. Como $g(1, 1) = (nm, 1)$ temos que g é a (X, OY) -colineação tal que $g(nm) = (1)$. Assim, $g(a, 1) = ((nm)a, 1)$ e, portanto, $n(ma) = (nm)a$ para todos os $a, m, n \in \mathbb{S}^*$, o que prova que a multiplicação é associativa.

- (ii) 1 é o elemento neutro de (\mathbb{S}^*, \times) , pois $1m = m = m1$, para todo o $m \in \mathbb{S}^*$.
 (iii) Vejamos agora que, dado $a \in \mathbb{S}^*$, existe $u \in \mathbb{S}^*$ tal que $au = 1 = ua$, isto é, todos os elementos de \mathbb{S}^* admitem inverso.

Consideremos a (O, OY) -colineação g tal que $g(X) = P$ onde $P = (-1 - a, 0)$, para algum $a \in \mathbb{S}$. Observemos que $a \neq -1$, caso contrário, g não seria injectiva. Seja $R = (0, b + ba)$, para algum $b \in \mathbb{S}^*$. Temos então que $g(XR) = PR$. Se $y = \bar{m}x + \bar{b}$ é a equação da recta PR temos

$$b + ba = \bar{b} \text{ e } 0 = \bar{m}(-1 - a) + b + ba,$$

donde

$$0 = -\bar{m}(1 + a) + b(1 + a)$$

e, portanto, $\bar{m} = b$ já que $-pq = (-p)q$, para todos os $p, q \in \mathbb{S}$ ⁶. Assim, $y = bx + b + ba$ é a equação da recta PR . A recta de equação $y = (b + ba)x$ é fixa por g , pois é uma recta que contém o centro. Seja $A = (1, b + ba)$. Como

⁶A propriedade $-pq = (-p)q$, para todos os $p, q \in \mathbb{S}$ resulta do facto de $(\mathbb{S}, +)$ ser um grupo e de que a operação multiplicação é distributiva em relação à adição.

o ponto A pertence à recta de equação $y = (b + ba)x$, existe $d \in \mathbb{S}^*$ tal que $g(A) = (d, (b + ba)d)$ e como A pertence à recta XR temos $g(A) \in PR$ donde $(b + ba)d = bd + b + ba$. Considerando $d = u + 1$ e usando (b) concluímos que $(ba)u = b$.

Em particular, se $b = 1$ temos $au = 1$. Observemos que a igualdade $(ba)u = b$ verifica-se para $a = -1$ (basta tomar $u = -1$). Argumentando de forma análoga para $u \neq 0$ e $b = 1$, existe $v \in \mathbb{S}$ tal que $uv = 1$. Então $(au)v = a(uv) = a$ donde resulta que $v = a$, já que $au = 1$. Portanto $au = 1 = ua$, para todos os $a \in \mathbb{S}^*$. Designemos o elemento inverso de a por a^{-1} . ■

3.1.2 Configuração de Pappus

Sejam A, B, C, A_1, B_1 e C_1 seis pontos de um plano projectivo π tais que A, B, C e A_1, B_1, C_1 são ternos de pontos colineares, nenhum destes pontos pertence à intersecção das rectas AB e A_1B_1 . Se os pontos $U = AB_1 \cap A_1B$, $V = AC_1 \cap A_1C$ e $W = BC_1 \cap B_1C$ são colineares à configuração constituída pelos nove pontos $A, B, C, A_1, B_1, C_1, U, V$ e W e pelas nove rectas $AB, A_1B_1, AB_1, A_1B, AC_1, A_1C, CB_1, C_1B$ e UV chamamos **configuração de Pappus** (ver figura 12).

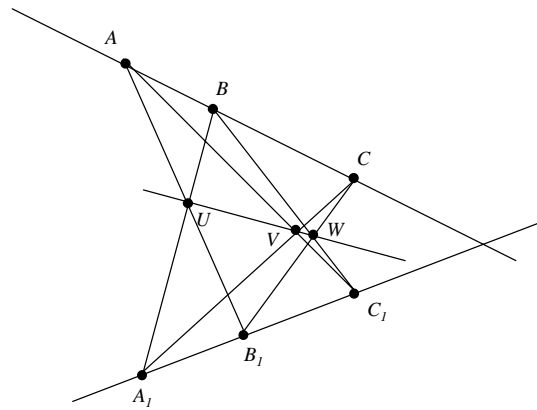


FIGURA 12

Dizemos que seis pontos distintos A, B, C, A_1, B_1 e C_1 estão nas condições da configuração de Pappus se A, B, C e A_1, B_1, C_1 são ternos de pontos colineares e nenhum destes pontos pertence à intersecção das rectas AB e A_1B_1 . Um **plano de Pappus** é um plano projectivo tal que, para qualquer escolha de seis pontos A, B, C, A_1, B_1 e C_1 nas condições da configuração de Pappus os pontos $U = AB_1 \cap A_1B$, $V = AC_1 \cap A_1C$ e $W = BC_1 \cap B_1C$ são colineares.

Teorema 3.1.4 *Todo o plano de Pappus é um plano de Desargues.*

Demonstração. Seja π um plano de Pappus. Sejam C, X, Y, Z, X_1, Y_1 e Z_1 sete pontos nas condições da configuração de Desargues. Pretendemos mostrar que os pontos $XY \cap X_1Y_1$, $XZ \cap X_1Z_1$ e $YZ \cap Y_1Z_1$ são colineares. Temos duas situações a considerar:

1. Uma das três afirmações seguintes é verdadeira.

- (i) X, Y, Z_1 não são colineares e X, Y_1, Z_1 não são colineares;
- (ii) Y, Z, X_1 não são colineares e Y, Z_1, X_1 não são colineares;
- (iii) Z, X, Y_1 não são colineares e Z, X_1, Y_1 não são colineares.

Sem perda de generalidade podemos assumir que se verifica (i). Seja $A = XY \cap Y_1Z_1$. Facilmente verificamos que o ponto A é distinto dos sete pontos atrás considerados. Os pontos A, Y, X, Z, Z_1 e C estão nas condições da configuração de Pappus. Sejam $W = AZ_1 \cap ZY$, $D = AC \cap ZX$ e $B = YC \cap Z_1X$. Como π é um plano de Pappus os pontos W, D e B são colineares.

Os pontos C, X_1, X, Z_1, A e Y_1 estão nas condições da configuração de Pappus. Observemos que $CY_1 \cap Z_1X = B$. Sejam $U = X_1Y_1 \cap AX$ e $E = CA \cap Z_1X_1$. Como π é um plano de Pappus os pontos E, B e U são colineares.

Os pontos X, Z_1, B, E, D e A estão nas condições da configuração de Pappus. Seja $V = XD \cap EZ_1$. Observemos que $Z_1A \cap DB = YZ \cap Y_1Z_1 = W$ e $XA \cap EB = XY \cap X_1Y_1 = U$. Como π é um plano de Pappus os pontos V, U e W são colineares. Atendendo a que $V = XZ \cap X_1Z_1$ concluímos que π é um plano de Desargues.

2. Nenhuma das três afirmações (i), (ii) e (iii) é verdadeira.

Vejamos que esta situação implica apenas uma das seguintes condições:

- (i) X, Y_1, Z_1 são colineares e Y, Z_1, X_1 são colineares e Z, X_1, Y_1 são colineares;
- (ii) X, Y, Z_1 são colineares e Y, Z, X_1 são colineares e Z, X, Y_1 são colineares.

Começemos por assumir que X, Y_1, Z_1 são colineares. Se Z, X, Y_1 fossem colineares teríamos que C, X, Z seriam colineares, o que é falso. Então Z, X_1, Y_1 são colineares. Se Y, Z, X_1 fossem colineares teríamos que C, Y, Z seriam colineares, o que é falso. Então Y, Z_1, X_1 são colineares. Assumindo agora que X, Y, Z_1 são colineares conseguimos provar que Y, Z, X_1 são colineares e Z, X, Y_1 são colineares.

Assim, sem perda de generalidade, para demonstrar o caso 2. podemos assumir que X, Y_1, Z_1 são colineares e Y, Z_1, X_1 são colineares e Z, X_1, Y_1 são colineares. Sejam $U = XY \cap X_1Y_1$, $V = XZ \cap X_1Z_1$ e $W = YZ \cap Y_1Z_1$. Observemos que U, V e W são pontos distintos dos sete pontos dados. Sejam $A = XC \cap Z_1U$ e $B = YC \cap Z_1U$. Notemos que $Z_1U \neq X_1Z, Y_1Z_1, ZZ_1$ e os pontos $U, A, B, X, Y, Z, X_1, Y_1, Z_1$ e C são todos distintos.

Os pontos X, Y, U, Z_1, Z e C estão nas condições da configuração de Pappus. Como π é um plano de Pappus os pontos $XZ \cap Z_1Y = XZ \cap X_1Z_1 = V$, $A = XC \cap Z_1U$ e $Y_1 = YC \cap ZU$ são colineares assim como os pontos $W = YZ \cap Z_1X = YZ \cap Y_1Z_1$, $B = YC \cap Z_1U$ e $X_1 = XC \cap ZU$ são colineares.

Os pontos A, X, X_1, Y, B e Y_1 estão nas condições da configuração de Pappus. Então, como π é um plano de Pappus os pontos $AB \cap YX = XY \cap X_1Y_1 = U$, $AY_1 \cap YX_1 = XZ \cap X_1Z_1 = V$ e $XY_1 \cap BX_1 = YZ \cap Y_1Z_1 = W$ são colineares. Concluímos assim que π é um plano de Desargues. ■

O teorema 3.1.3 garante que a partir de um plano projectivo de Desargues de ordem n podemos construir um anel de divisão com n elementos. Vejamos agora que, em termos geométricos, dizer que o anel de divisão é um corpo é equivalente a dizer que o plano é um plano de Pappus.

Proposição 3.1.5 *Seja $(\mathbb{S}, +, \times)$ definido como no teorema 3.1.3. Então $(\mathbb{S}, +, \times)$ é um corpo se e só se π é um plano de Pappus.*

Demonstração. Sejam A, B, C, A_1, B_1 e C_1 seis pontos estão nas condições da configuração de Pappus. Sem perda de generalidade, podemos supor $A = (1, 0)$, $B = (m^{-1}, 0)$, $C = (0)$, $A_1 = (0, 1)$, $B_1 = (\infty)$ e $C_1 = (0, n)$, com $m, n \in \mathbb{S}^* \setminus \{1\}$ (ver figura 13).

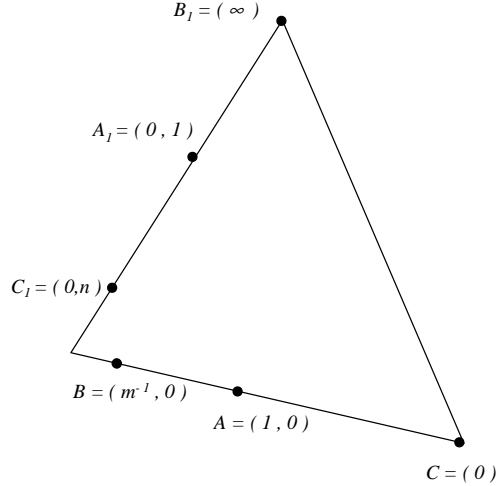


FIGURA 13

Observemos que as equações das rectas AB_1 , A_1B , AC_1 , A_1C e BC_1 são, respectivamente, $x = 1$, $y = -mx + 1$, $y = -nx + n$, $y = 1$ e $y = -nmx + n$. Assim, sendo $U = AB_1 \cap A_1B$, $V = AC_1 \cap A_1C$ e $W = BC_1 \cap B_1C$ temos $U = (1, -m + 1)$, $V = (1 - n^{-1}, 1)$ e $W = (-nm)$. A equação da recta UV é $y = -mnx + m(n - 1) + 1$. Então, U, V e W são colineares se e só se $W \in UV$ o que equivale a $nm = mn$. ■

Uma vez que todo o anel de divisão finito é um corpo, podemos então afirmar que, se π é um plano projectivo finito, π é um plano de Desargues se e só se π é um plano de Pappus.

A seguir, vamos construir a partir de um espaço vectorial V de dimensão 3 uma estrutura de incidência, que iremos denotar por $\pi(V)$, que é um plano projectivo de Desargues.

3.1.3 Introdução de coordenadas a partir de um espaço vectorial sobre um anel de divisão \mathbb{K}

Sejam \mathbb{K} um anel de divisão e V um espaço vectorial de dimensão 3 sobre \mathbb{K} . Convencionamos que a multiplicação por escalares é uma aplicação $V \times \mathbb{K} \rightarrow V$ (multiplicação por escalares à direita). Designemos por pontos as rectas que passam pela origem, isto é, os subespaços de V de dimensão 1 e designemos por rectas os planos que contêm a origem, isto é, os subespaços de V de dimensão 2. Denotemos por \mathcal{P} o conjunto de todas as rectas que passam pela origem e por \mathcal{L} o conjunto de todos os planos que passam pela origem, encarados como conjuntos de rectas que passam pela origem. Denotemos por $\pi(V)$ a estrutura de incidência $(\mathcal{P}, \mathcal{L})$.

Proposição 3.1.6 *A estrutura de incidência $\pi(V)$ é um plano projectivo.*

Demonstração.

Verificação de (P₁). Dados dois subespaços distintos de dimensão 1, U_1 e U_2 , existe um único subespaço de dimensão 2, W , tal que $U_1 \subseteq W$ e $U_2 \subseteq W$. Então, dois pontos distintos definem uma única recta.

Verificação de (P₂). Dados dois subespaços distintos de dimensão 2, W_1 e W_2 , existe um único subespaço de dimensão 1, U , tal que $U \subseteq W_1$ e $U \subseteq W_2$. Então, duas rectas distintas intersectam-se num único ponto.

Verificação de (P₃). Seja $\{e_1, e_2, e_3\}$ uma base de V . Consideremos os subespaços $U_1 = \{\alpha e_1 : \alpha \in \mathbb{K}\}$, $U_2 = \{\alpha e_2 : \alpha \in \mathbb{K}\}$, $U_3 = \{\alpha e_3 : \alpha \in \mathbb{K}\}$ e $U_4 = \{\alpha(e_1 + e_2 + e_3) : \alpha \in \mathbb{K}\}$. Não existe nenhum subespaço de dimensão 2 que contenha três dos subespaços anteriores. Então, existe um conjunto de quatro pontos tais que não há três colineares. Podemos assim concluir que $\pi(V)$ é um plano projectivo. ■

Na proposição seguinte mostraremos que, sendo \mathbb{K} um anel de divisão finito (um corpo finito), $\pi(V)$ é um plano projectivo finito.

Proposição 3.1.7 *Se \mathbb{K} é um corpo finito com n elementos então $\pi(V)$ é um plano projectivo de ordem n .*

Demonstração. Todo o subespaço de V de dimensão 2 contém $n^2 - 1$ vectores diferentes do vector nulo. Cada subespaço de V de dimensão 1 contém $n - 1$ vectores diferentes do vector nulo. Como a intersecção de dois subespaços distintos de V de dimensão 1 é o vector nulo, então todo o subespaço de V de dimensão 2 contém $\frac{n^2-1}{n-1} = n + 1$ subespaços de V de dimensão 1, isto é, toda a recta de $\pi(V)$ contém $n + 1$ pontos. ■

Seja $\{e_1, e_2, e_3\}$ uma base de V . A cada ponto P de $\pi(V)$ vamos atribuir coordenadas $[a, b, c]$, com $a, b, c \in \mathbb{K}$ e não simultaneamente nulos, onde (a, b, c) são as coordenadas relativamente à base $\{e_1, e_2, e_3\}$ de um vector da recta de V que representa o ponto P . Sendo assim, se $k \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ então $[a, b, c]$ e $[ak, bk, ck]$ representam o mesmo ponto em $\pi(V)$ e escrevemos $P = [a, b, c]$. Temos duas possibilidades: $a \neq 0$ e, portanto, $[a, b, c] = [1, ba^{-1}, ca^{-1}]$ ou $a = 0$ e, neste caso, $[a, b, c] = [0, 1, cb^{-1}]$ se $b \neq 0$ ou $[a, b, c] = [0, 0, 1]$ se $b = 0$.

Em V , qualquer plano que passe pela origem tem equação $ax + by + cz = 0$, com $a, b, c \in \mathbb{K}$ e não simultaneamente nulos. Designemos por $\langle a, b, c \rangle$ as coordenadas da recta l em $\pi(V)$ a que corresponde em V o plano de equação $ax + by + cz = 0$. Observemos que, se $a' = ka$, $b' = kb$ e $c' = kc$, para algum $k \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$, então $\langle a, b, c \rangle = \langle a', b', c' \rangle$ e escrevemos $l = \langle a, b, c \rangle$. O ponto $[x, y, z]$ pertence à recta $\langle a, b, c \rangle$ se e só se $ax + by + cz = 0$. Os pontos $[1, 0, 0]$, $[0, 1, 0]$, $[0, 0, 1]$ e $[1, 1, 1]$ são quatro pontos de $\pi(V)$ tais que não há três colineares. Então, sem perda de generalidade, podemos assumir que quaisquer quatro pontos naquelas condições têm coordenadas $[1, 0, 0]$, $[0, 1, 0]$, $[0, 0, 1]$ e $[1, 1, 1]$ (escolhendo uma base adequada para V).

Proposição 3.1.8 *O plano $\pi(V)$ é um plano de Desargues.*

Demonstração. Sejam C, X, Y, Z, X_1, Y_1 e Z_1 sete pontos nas condições da configuração de Desargues. Pretendemos mostrar que os pontos $U = XY \cap X_1Y_1$, $V = XZ \cap X_1Z_1$ e $W = YZ \cap Y_1Z_1$ são colineares. Sem perda de generalidade, podemos supor $C = [1, 0, 0]$, $X = [0, 1, 0]$, $Y = [0, 0, 1]$ e $Z = [1, 1, 1]$.

Então ⁷ $CX = \langle 0, 0, 1 \rangle$, $CY = \langle 0, 1, 0 \rangle$, $CZ = \langle 0, -1, 1 \rangle$, $XY = \langle 1, 0, 0 \rangle$, $XZ = \langle -1, 0, 1 \rangle$ e $YZ = \langle -1, 1, 0 \rangle$. O ponto X_1 pertence à recta CX . Sendo $X_1 = [x, y, z]$ temos $0x + 0y + 1z = 0$, isto é, $z = 0$. Atendendo a que $X_1 \neq X$ e $X_1 \neq C$ temos $x \neq 0$ e $y \neq 0$ donde concluimos que $X_1 = [1, r, 0]$, com $r \neq 0$. Procedendo de modo análogo temos $Y_1 = [1, 0, s]$, com $s \neq 0$ e $Z_1 = [t, 1, 1]$, com $t \neq 1$. Assim, temos $X_1Y_1 = \langle r, -1, -rs^{-1} \rangle$, $X_1Z_1 = \langle r, -1, -rt + 1 \rangle$ e $Y_1Z_1 = \langle s, -st + 1, -1 \rangle$. Facilmente verificamos que $U = [0, -rs^{-1}, 1]$, $V = [1, r - rt + 1, 1]$ e $W = [1, 1, s - st + 1]$. Então $UV = \langle -r + rt - 1 - rs^{-1}, 1, rs^{-1} \rangle$. Usando alguns cálculos facilmente verificamos que o ponto W pertence à recta UV e, portanto, U, V e W são colineares. ■

Proposição 3.1.9 *O plano $\pi(V)$ é um plano de Pappus se e só se \mathbb{K} é um corpo.*

Demonstração. Sejam X, Y, Z, X_1, Y_1 e Z_1 seis pontos nas condições da configuração de Pappus. Observemos que X, Y, X_1 e Y_1 são quatro pontos tais que não há três colineares. Então, sem perda de generalidade, podemos assumir que $X = [1, 0, 0]$, $Y = [0, 1, 0]$, $X_1 = [0, 0, 1]$ e $Y_1 = [1, 1, 1]$. Temos $XY = \langle 0, 0, 1 \rangle$ e $X_1Y_1 = \langle -1, 1, 0 \rangle$ e, portanto, $Z = [1, s, 0]$, com $s \neq 0$ e $Z_1 = [1, 1, t]$, com $t \neq 1$. Resulta então que $XY_1 = \langle 0, -1, 1 \rangle$, $YX_1 = \langle 1, 0, 0 \rangle$, $XZ_1 = \langle 0, -t, 1 \rangle$, $ZX_1 = \langle -s, 1, 0 \rangle$, $YZ_1 = \langle -t, 0, 1 \rangle$ e $ZY_1 = \langle -s, 1, s - 1 \rangle$.

Sejam $U = XY_1 \cap YX_1$, $V = XZ_1 \cap X_1Z$ e $W = ZY_1 \cap YZ_1$. Temos $U = [0, 1, 1]$, $V = [1, s, ts]$, $W = [1, s - st + t, t]$ e $UV = \langle s - ts, -1, 1 \rangle$. Então $W \in UV$ se e só se $st = ts$. ■

De seguida, iremos dar um exemplo de um plano projectivo de Desargues que não é um plano de Pappus. Designemos por $\mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ o conjunto de todas as matrizes reais de ordem 2. Sejam $GL_2(\mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) : \det(A) \neq 0\}$ e $\mathcal{M} = \{O_2\} \cup GL_2(\mathbb{R})$, onde O_2 designa a matriz nula de ordem 2. O conjunto \mathcal{M} com as operações de adição e multiplicação usual de matrizes é um anel de divisão. Consideremos o espaço vectorial V de dimensão 3 sobre \mathcal{M} . A estrutura de incidência $\pi(V)$ é um plano de Desargues mas não é um plano de Pappus.

O teorema 3.1.3 e a proposição 3.1.8 permitem-nos concluir que dado um corpo finito é possível construir um plano projectivo finito de Desargues e, reciprocamente, dado um plano projectivo finito de Desargues é possível construir um corpo finito. Assim, se π é um plano projectivo de Desargues de ordem n então $n = p^r$, para algum primo p e para algum inteiro positivo r . Atendendo a que, para toda a potência p^r , com p primo e r inteiro positivo, existe um corpo com p^r elementos, resulta que para toda a potência p^r existe um plano projectivo de Desargues de ordem p^r . No entanto podem existir planos projectivos de ordem p^r que não são planos de Desargues (existem quatro planos projectivos de ordem 9 não isomorfos e apenas um desses planos é de Desargues [14]).

No teorema seguinte iremos mostrar que, qualquer plano projectivo de Desargues de ordem n é isomorfo a $\pi(V)$, onde V é um espaço vectorial de dimensão 3 sobre um corpo \mathbb{K} com n elementos.

Teorema 3.1.10 *Seja π um plano projectivo de Desargues de ordem n e seja V um espaço vectorial de dimensão 3 sobre um corpo com n elementos. Então $\pi \cong \pi(V)$.*

⁷Designemos por $\langle a, b, c \rangle$ a recta que contém os pontos C e X . Os pontos C e X pertencem à recta $\langle a, b, c \rangle$ se e só se $a1 + b0 + c0 = 0$ e $a0 + b1 + c0 = 0$. Temos então $a = 0$ e $b = 0$. Logo $CX = \langle 0, 0, 1 \rangle$. Procedemos de modo análogo para as outras rectas. Devemos apenas ter em atenção que, uma vez que estamos a considerar um anel de divisão, a multiplicação não é comutativa.

Demonstração. Seja \mathbb{S} um conjunto com n símbolos distintos entre os quais temos os símbolos 0 e 1. Sejam $+$ e \times as operações binárias em \mathbb{S} definidas na secção 3.1.1. Pelo teorema 3.1.3, $(\mathbb{S}, +, \times)$ é um corpo com n elementos. Consideremos o espaço vectorial V de dimensão 3 sobre este corpo. A estrutura de incidência $\pi(V)$ é um plano projectivo de Desargues. Seja $\pi = (\mathcal{P}, \mathcal{L})$ e $\pi(V) = (\bar{\mathcal{P}}, \bar{\mathcal{L}})$. Observemos que

$$\bar{\mathcal{P}} = \{[0, 0, 1]\} \cup \{[0, 1, c] : c \in \mathbb{S}\} \cup \{[1, a, b] : a, b \in \mathbb{S}\};$$

$$\bar{\mathcal{L}} = \{< 0, 0, 1 >\} \cup \{< 0, 1, c > : c \in \mathbb{S}\} \cup \{< 1, a, b > : a, b \in \mathbb{S}\};$$

$$\mathcal{P} = (\mathbb{S} \times \mathbb{S}) \cup \{(m) : m \in \mathbb{S}\} \cup \{(\infty)\};$$

$$\mathcal{L} = \{l_{m,b} : m, b \in \mathbb{S}\} \cup \{l_c : c \in \mathbb{S}\} \cup \{l_\infty\};$$

onde, para cada $m, b, c \in \mathbb{S}$,

$$l_{m,b} = \{(x, y) \in \mathcal{P} : y = mx + b\} \cup \{(m)\};$$

$$l_c = \{(x, y) \in \mathcal{P} : x = c\} \cup \{(\infty)\};$$

e

$$l_\infty = \{(x) \in \mathcal{P}\} \cup \{(\infty)\}.$$

Consideremos a aplicação $f : \bar{\mathcal{P}} \cup \bar{\mathcal{L}} \longrightarrow \mathcal{P} \cup \mathcal{L}$ definida por

$$f([0, 0, 1]) = (\infty), \quad f([0, 1, c]) = (c), \quad f([1, a, b]) = (a, b), \quad \text{para todos os } a, b, c \in \mathbb{S}$$

e

$$f(l) = \{f(P) : P \in l\}, \quad \text{para todo o } l \in \bar{\mathcal{L}}.$$

Facilmente verificamos que $f|_{\mathcal{P}}$ é uma aplicação bijectiva, o que basta para mostrar que f é bijectiva. A aplicação f aplica pontos em pontos e rectas em rectas. Portanto, f é um isomorfismo. ■

3.2 Introdução de coordenadas num plano afim

3.2.1 Método de Marshall Hall

Sejam \mathcal{A} um plano afim de ordem n e O um ponto de \mathcal{A} . Por cada ponto de um plano afim passam pelo menos três rectas. Sejam X, Y e I três pontos tais que as rectas OX, OY e OI sejam distintas. Seja \mathbb{S} um conjunto com n símbolos, entre os quais temos os símbolos 0 e 1.

Ao ponto O atribuímos coordenadas $(0, 0)$ e ao ponto I atribuímos coordenadas $(1, 1)$. A cada ponto da recta OI , distinto de O e de I , atribuímos coordenadas (a, a) com $a \in \mathbb{S} \setminus \{0, 1\}$, tendo em atenção que a pontos distintos correspondem coordenadas diferentes. Seja P um ponto que não pertence à recta OI (ver figura 14). Por P passa uma única recta paralela à recta OY , a qual intersecta a recta OI no ponto de coordenadas (a, a) , para algum $a \in \mathbb{S}$. Também por P passa uma única recta paralela à recta OX , a qual intersecta a recta OI no ponto de coordenadas (b, b) , para algum $b \in \mathbb{S}$. Ao ponto P atribuímos coordenadas (a, b) .

Facilmente observamos que as coordenadas dos pontos da recta OX são da forma $(x, 0)$ e as coordenadas dos pontos da recta OY são da forma $(0, y)$, com $x, y \in \mathbb{S}$. As coordenadas

de um ponto qualquer de \mathcal{A} são da forma (x, y) , com $x, y \in \mathbb{S}$. À coordenada x chamamos abcissa e à coordenada y chamamos ordenada. Como todos os pontos da recta OI têm abcissa e ordenada iguais dizemos que $y = x$ é a equação da recta OI .

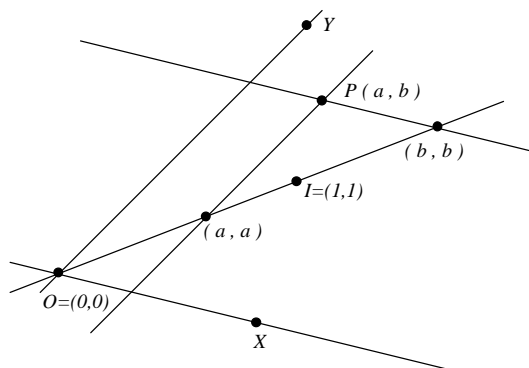


FIGURA 14

Todos os pontos de uma recta qualquer paralela à recta OY têm a mesma abcissa. Assim, dizemos que a equação da recta paralela a OY que contém o ponto (a, b) é $x = a$. A equação da recta paralela a OX que contém o ponto (a, b) é $y = b$. Em particular, as equações das rectas OY e OX são, respectivamente, $x = 0$ e $y = 0$.

Chamamos recta dos declives à recta que contém I e é paralela à recta OY cuja equação é $x = 1$. Seja l uma recta não paralela à recta OY . A recta paralela a l que passa por O intersecta a recta dos declives no ponto $(1, m)$, para algum $m \in \mathbb{S}$. Dizemos que m é o declive da recta l . É evidente que qualquer recta paralela a l também tem declive m . Notemos que qualquer recta paralela a OI tem declive 1.

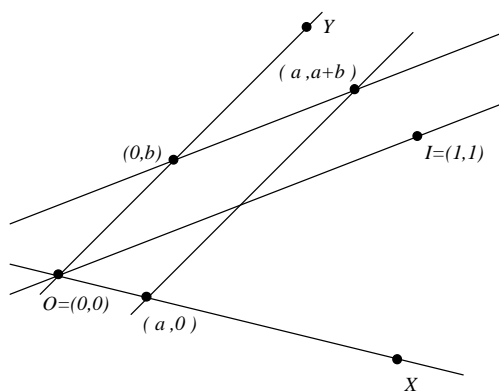


FIGURA 15

Vamos agora definir em \mathbb{S} duas operações: a adição e a multiplicação que denotamos por “+” e “ \times ”, respectivamente. Começemos por definir a adição. Definimos $a + b$ como sendo a ordenada do ponto de abscissa a que pertence à recta r que contém o ponto $(0, b)$ e é paralela à recta OI (ver figura 15).

Observemos que, se o ponto (x, y) pertence à recta r então $y = x + b$. Assim, dizemos que $y = x + b$ é a equação da recta r .

Definamos agora a multiplicação. Definimos $a \times b$ como sendo a ordenada do ponto de abscissa b que pertence à recta s que contém os pontos $(0, 0)$ e $(1, a)$ (ver figura 16).

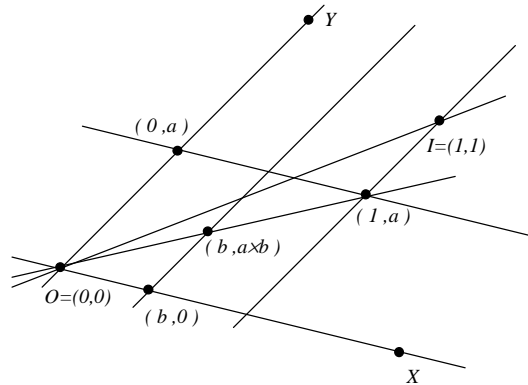


FIGURA 16

Para simplificar a escrita escrevemos ab em vez de $a \times b$. Observemos que, se (x, y) é um ponto da recta s então $y = ax$. Assim, dizemos que $y = ax$ é a equação da recta s .

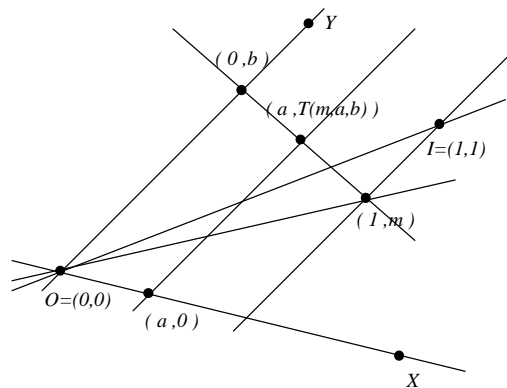


FIGURA 17

Passaremos agora a definir em \mathbb{S} uma operação ternária T . Definimos $T(m, a, b)$ como sendo a ordenada do ponto de abscissa a que pertence à recta t que contém os pontos $(0, b)$ e

$(1, m)$ (ver figura 17).

Observemos que, se (x, y) é um ponto da recta t então $y = T(m, x, b)$. Assim, dizemos que $y = T(m, x, b)$ é a equação da recta t . A operação T satisfaz as condições (T_1) , (T_2) , (T_3) , (T_4) e (T_5) da proposição 3.1.1.

Observação. Seja \mathcal{A} um plano afim de ordem n . Então $\mathcal{A} = \pi \setminus l_\infty$, para algum plano projectivo π de ordem n e alguma recta l_∞ de π . Introduzimos coordenadas em π pelo método de Marshall Hall de modo que l_∞ seja a recta no infinito. Os pontos de \mathcal{A} são os pontos finitos de π . Notemos que cada ponto de l_∞ determina em \mathcal{A} uma classe de rectas paralelas.

3.2.2 Introdução de coordenadas a partir de um anel de divisão

Sejam \mathbb{K} um anel de divisão, $\mathcal{P} = \mathbb{K} \times \mathbb{K}$ e \mathcal{L} um conjunto definido do seguinte modo:

$l \in \mathcal{L}$ se $l = \{(x, y) \in \mathbb{K} \times \mathbb{K} : ax + by + c = 0\}$ com $a, b, c \in \mathbb{K}$ e a e b não ambos nulos.

Observemos que, para todo o $\lambda \neq 0$,

$$\{(x, y) \in \mathbb{K} \times \mathbb{K} : ax + by + c = 0\} = \{(x, y) \in \mathbb{K} \times \mathbb{K} : \lambda ax + \lambda by + \lambda c = 0\}.$$

Designemos por pontos os elementos de \mathcal{P} e por rectas os elementos de \mathcal{L} . Denotemos por $\mathcal{A}(\mathbb{K})$ a estrutura de incidência $(\mathcal{P}, \mathcal{L})$.

Proposição 3.2.1 *A estrutura de incidência $\mathcal{A}(\mathbb{K})$ é um plano afim.*

Demonstração.

Verificação de (A_1) . Sejam (x_1, y_1) e (x_2, y_2) dois pontos distintos de \mathcal{P} . Pretendemos determinar $a, b, c \in \mathbb{K}$, com a e b não simultaneamente nulos, tais que

$$\begin{cases} ax_1 + by_1 + c = 0 \\ ax_2 + by_2 + c = 0 \end{cases} \quad (*)$$

Se $x_1 = x_2$ então ambos os pontos pertencem à recta definida pela equação $x - x_1 = 0$. Suponhamos agora que $x_1 \neq x_2$. Ambos os pontos pertencem à recta definida pela equação

$$(y_2 - y_1)(x_2 - x_1)^{-1}x - y - (y_2 - y_1)(x_2 - x_1)^{-1}x_1 + y_1 = 0.$$

Atendendo a que a solução do sistema $(*)$ é

$$\begin{cases} \{a(1, 0, -x_1) : a \in \mathbb{K}\} & \text{se } x_1 = x_2 \\ \{b((y_2 - y_1)(x_2 - x_1)^{-1}, -1, -(y_2 - y_1)(x_2 - x_1)^{-1}x_1 + y_1) : b \in \mathbb{K}\} & \text{se } x_1 \neq x_2 \end{cases}$$

e atendendo à observação anterior a esta proposição podemos concluir que existe uma única recta que contém os pontos (x_1, y_1) e (x_2, y_2) .

Verificação de (A_2) . Notemos que as rectas definidas pelas equações $ax + by + c = 0$ e $ax + by + d = 0$, com $c \neq d$, não têm nenhum ponto comum. Assim, dado um ponto (x_1, y_1) que não pertence à recta l definida pela equação $ax + by + c = 0$, a recta s definida pela equação $ax + by - (ax_1 + by_1) = 0$ contém o ponto dado e é paralela à recta l . Vejamos agora que esta recta s é a única nestas condições. Para tal, basta observar que o sistema

$$\begin{cases} x + by + c = 0 \\ x + b'y + c' = 0 \end{cases}$$

com $c \neq c'$ é impossível se e só se $b = b'$.

Verificação de (A_3) . Os pontos $(0,0)$, $(1,1)$ e $(0,1)$ são três pontos distintos não colineares. ■

Seja l uma recta de $\mathcal{A}(\mathbb{K})$. Então existem $a, b, c \in \mathbb{K}$, com a e b não simultaneamente nulos, tais que $l = \{(x, y) \in \mathbb{K} \times \mathbb{K} : ax + by + c = 0\}$. Se $b = 0$ temos $l = \{(x, y) \in \mathbb{K} \times \mathbb{K} : x = k\}$ com $k = -a^{-1}c$ e, neste caso, dizemos que l é uma recta vertical. Se $b \neq 0$ temos $l = \{(x, y) \in \mathbb{K} \times \mathbb{K} : y = mx + k\}$ com $m = -b^{-1}a$ e $k = -b^{-1}c$ e, neste caso, dizemos que l é uma recta (não vertical) de declive m .

É claro que duas rectas verticais distintas não têm pontos comuns. Seja l uma recta definida pela equação $x = k$ e r uma recta definida pela equação $y = mx + k'$. É evidente que estas rectas intersectam-se no ponto $(k, mk + k')$. Temos então que o conjunto das rectas verticais de $\mathcal{A}(\mathbb{K})$ forma uma classe de rectas paralelas.

Seja l uma recta definida pela equação $y = mx + k$ e seja r uma recta definida pela equação $y = mx + k'$. É claro que, se (x_1, y_1) é um ponto que pertence a ambas as rectas então $k = k'$. Assim, duas rectas com o mesmo declive são paralelas. Seja s uma recta definida pela equação $y = m'x + k$. Suponhamos que $s \parallel r$. Como $r \parallel l$ temos $s \parallel l$. Observemos que o ponto $(0, k)$ pertence às rectas s e l . Resulta então que $s = l$ pelo que $m = m'$. Assim, o conjunto de todas as rectas com o mesmo declive forma uma classe de rectas paralelas.

É consequência imediata da proposição que a seguir iremos mostrar que o plano afim $\mathcal{A}(\mathbb{K})$ é um plano afim de Desargues.

Proposição 3.2.2 *Seja \mathbb{K} um anel de divisão e seja $\pi = \mathcal{A}(\mathbb{K}) \cup l_\infty$ o plano projectivo que se obtém do plano afim $\mathcal{A}(\mathbb{K})$. Então $\pi \cong \pi(V)$, onde V é um espaço vectorial de dimensão 3 sobre \mathbb{K} .*

Demonstração. Seja $\mathcal{P} = (\mathbb{K} \times \mathbb{K}) \cup \{[r] : r \text{ recta de } \mathcal{A}(\mathbb{K})\}$. Para cada $m, k \in \mathbb{K}$ definimos os conjuntos $l_k = \{(x, y) \in \mathbb{K} \times \mathbb{K} : x = k\}$ e $r_{m,k} = \{(x, y) \in \mathbb{K} \times \mathbb{K} : y = mx + k\}$.

As rectas de π são subconjuntos de \mathcal{P} do tipo $l_k \cup \{[l_k]\}$ ou $r_{m,k} \cup \{[r_{m,k}]\}$ ou $l_\infty = \{[l] : l \text{ recta de } \mathcal{A}(\mathbb{K})\}$. Designemos por \mathcal{L} o conjunto de todas as rectas de π . Temos $\pi = (\mathcal{P}, \mathcal{L})$. Seja $\pi(V) = (\bar{\mathcal{P}}, \bar{\mathcal{L}})$. Os pontos de $\pi(V)$ podem ser identificados por $[1, x, y]$, $[0, 1, m]$ e $[0, 0, 1]$, com $x, y, m \in \mathbb{K}$ e as rectas de $\pi(V)$ por $\langle a, b, c \rangle$, com $a, b, c \in \mathbb{K}$ e não simultaneamente nulos.

Consideremos a aplicação $f : \mathcal{P} \cup \mathcal{L} \longrightarrow \bar{\mathcal{P}} \cup \bar{\mathcal{L}}$ definida do seguinte modo:

$$f(P) = \begin{cases} [1, x, y] & \text{se } P = (x, y) \\ [0, 1, m] & \text{se } P = [r_{m,0}] \\ [0, 0, 1] & \text{se } P = [l_0] \end{cases}$$

e

$$f(l) = \{f(P) : P \in l\}$$

É evidente que f aplica pontos em pontos e rectas em rectas. Para mostrar que f é bijectiva basta mostrar que $f|_{\mathcal{P}}$ é bijectiva, o que é imediato. Concluimos então que f é um isomorfismo de π em $\pi(V)$. ■

Corolário 3.2.3 *O plano afim $\mathcal{A}(\mathbb{K})$ é um plano afim de Desargues.*

Demonstração. Resulta imediatamente da proposição anterior e da proposição 3.1.8. ■

Dizemos que um plano afim \mathcal{A} é um plano afim de Pappus se o plano projectivo $\pi = \mathcal{A} \cup l_\infty$ é um plano de Pappus.

Proposição 3.2.4 *O plano afim $\mathcal{A}(\mathbb{K})$ é um plano de Pappus se e só se \mathbb{K} é um corpo.*

Demonstração. $\mathcal{A}(\mathbb{K})$ é um plano afim de Pappus se o plano projectivo $\pi = \mathcal{A}(\mathbb{K}) \cup l_\infty$ é um plano de Pappus. O resultado que pretendemos mostrar decorre imediatamente das proposições 3.2.2 e 3.1.9. ■

Proposição 3.2.5 *$\mathcal{A}(\mathbb{K})$ é um plano afim de Pappus se e só se dados seis pontos X, Y, Z, X_1, Y_1 e Z_1 nas condições da configuração de Pappus verifica-se uma das seguintes condições:*

- (i) *Se $XY_1 \parallel X_1Y$ e $XZ_1 \parallel X_1Z$ então $YZ_1 \parallel Y_1Z$.*
- (ii) *Se $XY_1 \cap X_1Y \neq \emptyset$, $XZ_1 \cap X_1Z \neq \emptyset$ e $YZ_1 \cap Y_1Z \neq \emptyset$ então os pontos $U = XY_1 \cap X_1Y$, $V = XZ_1 \cap X_1Z$ e $W = YZ_1 \cap Y_1Z$ são colineares.*
- (iii) *Se $XY_1 \cap X_1Y \neq \emptyset$, $XZ_1 \cap X_1Z \neq \emptyset$ e $YZ_1 \parallel Y_1Z$ então $UV \parallel YZ_1$ sendo $U = XY_1 \cap X_1Y$ e $V = XZ_1 \cap X_1Z$.*

Demonstração. Suponhamos que $\mathcal{A}(\mathbb{K})$ é um plano afim de Pappus. Então $\mathcal{A}(\mathbb{K}) \cup l_\infty$ é um plano projectivo de Pappus. Sejam X, Y, Z, X_1, Y_1 e Z_1 seis pontos distintos de $\mathcal{A}(\mathbb{K})$ nas condições da configuração de Pappus. É evidente que uma das três condições (i), (ii) ou (iii) se verifica.

Vamos agora demonstrar a implicação recíproca. Sejam X, Y, Z, X_1, Y_1 e Z_1 seis pontos distintos de $\mathcal{A}(\mathbb{K}) \cup l_\infty$ nas condições da configuração de Pappus. Sejam $U = XY_1 \cap X_1Y$, $V = XZ_1 \cap X_1Z$ e $W = YZ_1 \cap Y_1Z$. Temos dois casos a considerar:

1. $UV = l_\infty$.
Temos $U \in l_\infty$ e $V \in l_\infty$. Facilmente verificamos que, neste caso, X, Y, Z, X_1, Y_1 e Z_1 são pontos de $\mathcal{A}(\mathbb{K})$. Então, por (i), concluímos que $W \in l_\infty$. Logo U, V e W são colineares.
2. $UV \neq l_\infty$.
É claro que pelo menos um dos pontos U ou V não pertence a l_∞ . Suponhamos que $U \notin l_\infty$. Seja $C = l_\infty \cap UV$. É claro que $C \neq U$. Por C passam pelo menos três rectas. Designemos por l uma recta que passa por C e é distinta de l_∞ e UV . Seja $P \in l_\infty$ tal que $P \neq C$. Atendendo às proposições 3.1.8 e 3.2.2, o plano projectivo $\mathcal{A}(\mathbb{K}) \cup l_\infty$ é um plano de Desargues. Consideremos a (C, l) -colineação f que aplica U em P . Temos $f(UV) = l_\infty$ e, portanto, $f(U), f(V) \in l_\infty$.
Os pontos $f(X), f(Y), f(Z), f(X_1), f(Y_1)$ e $f(Z_1)$ estão nas condições da configuração de Pappus. Como $f(U)f(V) = l_\infty$, pelo caso 1., concluímos que $f(W) \in l_\infty = f(UV)$. Então $W \in UV$.

Atendendo aos dois casos anteriores concluímos que $\mathcal{A}(\mathbb{K}) \cup l_\infty$ é um plano de Pappus ⁸. ■

⁸Observemos que as condições (ii) e (iii) e todos os outros casos onde nem todos os pontos X, Y, Z, X_1, Y_1 e Z_1 pertencem a \mathcal{A} podem ser sempre transformadas na condição (i) através de uma colineação.

Capítulo 4

Espaço projectivo e espaço afim

4.1 Espaço projectivo

Um espaço projectivo é uma estrutura de incidência $\mathbf{S} = (\mathcal{P}, \mathcal{L})$ que satisfaz as seguintes condições:

(EP_1) Dados dois pontos distintos, existe uma única recta que os contém;

(EP_2) Dados A, B, C, D e E pontos distintos tais que $AB = AC \neq AD = AE$, existe um ponto $F \in BD \cap CE$ (ver figura 1);

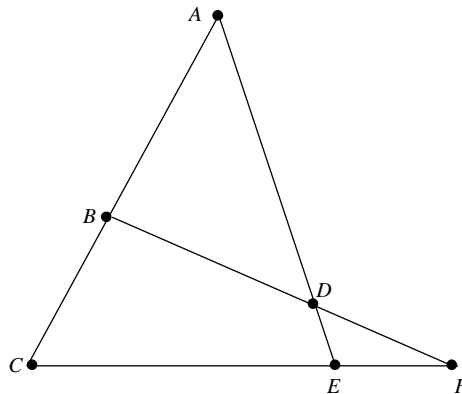


FIGURA 1

(EP_3) Cada recta contém pelo menos três pontos. Existem três pontos não colineares.

A condição (EP_2) é conhecida como axioma de Pasch. Resulta imediatamente da definição que um espaço projectivo é um espaço linear. Assim, duas rectas de um espaço projectivo intersectam-se, no máximo, num ponto.

Exemplo.

Todo o plano projectivo é um espaço projectivo.

4.1.1 Planos num espaço projectivo

Seja $\mathbf{S} = (\mathcal{P}, \mathcal{L})$ um espaço projectivo e sejam M um ponto e l uma recta de \mathbf{S} tais que $M \notin l$. Chamamos **plano de \mathbf{S} determinado por M e l** ao conjunto

$$\{P \in \mathcal{P} \setminus \{M\} : PM \cap l \neq \emptyset\} \cup \{M\}.$$

Denotemos o plano de \mathbf{S} determinado por M e l por $\mathbf{S}(M, l)$. Observemos que $l \cup \{M\} \subseteq \mathbf{S}(M, l)$.

Proposição 4.1.1 *Sejam \mathbf{S} um espaço projectivo e $\mathbf{S}(M, l)$ um plano de \mathbf{S} . Se P e Q são pontos do plano $\mathbf{S}(M, l)$ então todos os pontos da recta PQ pertencem ao plano $\mathbf{S}(M, l)$.*

Demonstração. Sejam P e Q dois pontos do plano $\mathbf{S}(M, l)$ e seja R um ponto da recta PQ distinto de P e de Q . Se um dos pontos P ou Q é o ponto M , digamos $P = M$, temos $MQ \cap l \neq \emptyset$. Como $MQ = MR$ temos $MR \cap l \neq \emptyset$ e, portanto, $R \in \mathbf{S}(M, l)$. Suponhamos agora que P e Q são ambos distintos de M . Temos duas possibilidades:

1. Os pontos P, Q e M são colineares.
Como $MP \cap l \neq \emptyset$ e $MP = MR$ temos $MR \cap l \neq \emptyset$ e, conseqüentemente, $R \in \mathbf{S}(M, l)$.

2. Os pontos P, Q e M não são colineares.

Temos três casos a considerar:

- (i) Se $P, Q \in l$ é imediato que $R \in \mathbf{S}(M, l)$.
- (ii) Suponhamos que apenas um dos pontos P ou Q pertence à recta l , digamos $P \in l$. Seja $B = MQ \cap l$. Temos $QM = QB \neq QR = QP$. Então, por (EP_2) , $MR \cap BP \neq \emptyset$. Como $l = BP$ resulta que $MR \cap l \neq \emptyset$ e, portanto, $R \in \mathbf{S}(M, l)$.
- (iii) Suponhamos agora que nenhum dos pontos P e Q pertence à recta l . Sejam $A = MP \cap l$ e $B = MQ \cap l$. Temos $MP = MA \neq MQ = MB$. Então, por (EP_2) , existe $C \in PQ \cap AB$. Atendendo a que $PR = PC \neq PM = PA$, por (EP_2) , resulta que $RM \cap CA \neq \emptyset$. Como $CA = l$ temos $RM \cap l \neq \emptyset$ e, portanto, $R \in \mathbf{S}(M, l)$. ■

Atendendo à proposição anterior podemos dizer que o plano de $\mathbf{S} = (\mathcal{P}, \mathcal{L})$ determinado por M e l é o subespaço $(\bar{\mathcal{P}}, \bar{\mathcal{L}})$ onde

$$\bar{\mathcal{P}} = \{P \in \mathcal{P} : PM \cap l \neq \emptyset\} \cup \{M\} \quad \text{e} \quad \bar{\mathcal{L}} = \{PQ \in \mathcal{L} : P, Q \in \bar{\mathcal{P}}\}.$$

Dizemos que n rectas de um espaço projectivo são **complanares** se existe um plano que contém essas rectas. Na proposição seguinte apresentamos uma condição necessária e suficiente para que duas rectas de um espaço projectivo sejam complanares.

Proposição 4.1.2 *Duas rectas de um espaço projectivo \mathbf{S} intersectam-se se e só se são complanares.*

Demonstração. Sejam r e l duas rectas de um espaço projectivo que se intersectam num ponto P . Atendendo a (EP_3) e a que P é o único ponto comum às rectas r e l , existe um ponto Q tal que $Q \in r$ e $Q \notin l$. Então o plano $\mathbf{S}(Q, l)$ contém as rectas r e l pelo que estas rectas são complanares.

Reciprocamente, suponhamos que r e s são rectas complanares. Designemos por $\mathbf{S}(M, l)$ um plano que contém ambas as rectas. Temos quatro casos a considerar:

1. $l = r$ e $M \in s$.

Seja $P \in s$ tal que $P \neq M$. Então $P \in \mathbf{S}(M, l)$ e, portanto, $MP \cap l \neq \emptyset$, ou seja, $s \cap r \neq \emptyset$.

2. $l = r$ e $M \notin s$.

Sejam S_1 e S_2 pontos distintos da recta s , $A = MS_1 \cap l$ e $B = MS_2 \cap l$. Se $A = S_1$ ou $B = S_2$ então $s \cap r \neq \emptyset$. Suponhamos agora que $A \neq S_1$ e $B \neq S_2$ (ver figura 2).

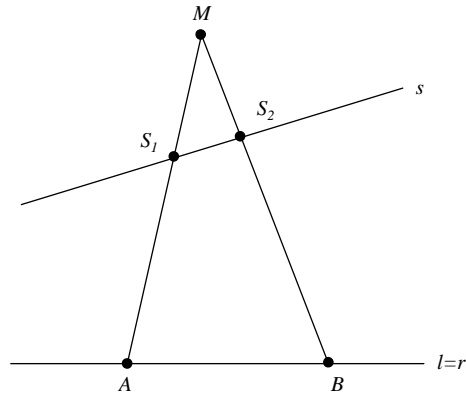


FIGURA 2

Então, por (EP_2) , $S_1S_2 \cap AB \neq \emptyset$, ou seja, $s \cap l \neq \emptyset$.

3. $r, s \neq l$, $M \in r$ e $M \notin s$.

Por 2., a recta s intersecta a recta l num ponto L_1 . Seja S_1 um ponto da recta s distinto de L_1 . Por 1., a recta r intersecta a recta l num ponto L_2 e a recta MS_1 intersecta a recta l num ponto L_3 . Se $L_1 = L_2$ então $r \cap s \neq \emptyset$. Suponhamos agora que $L_1 \neq L_2$ (ver figura 3).

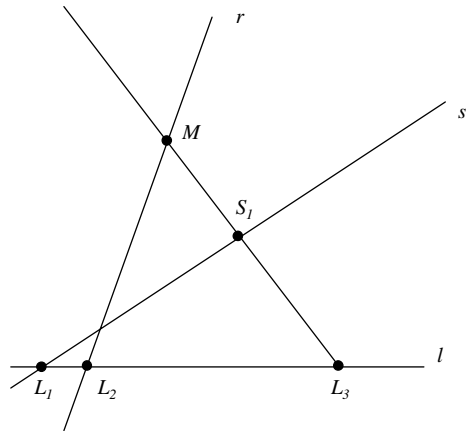


FIGURA 3

As rectas MS_1 e L_1L_2 intersectam-se no ponto L_3 . Por (EP_2) , temos $L_2M \cap L_1S_1 \neq \emptyset$, isto é, $r \cap s \neq \emptyset$.

4. $r, s \neq l$, e $M \notin s, r$.

Por 2., a recta s intersecta a recta l num ponto L_1 e a recta r intersecta a recta l num ponto L_2 . Se $L_1 = L_2$ então $r \cap s \neq \emptyset$. Suponhamos agora que $L_1 \neq L_2$. Sejam R_1 e R_2 dois pontos da recta r distintos de L_2 . Por 3., as rectas R_1M e s intersectam-se num ponto S_1 e as rectas MR_2 e s intersectam-se num ponto S_2 . Então, por (EP_2) , temos $R_1R_2 \cap S_1S_2 \neq \emptyset$, isto é, $r \cap s \neq \emptyset$. ■

Corolário 4.1.3 *Qualquer plano de um espaço projectivo \mathbf{S} é um plano projectivo.*

Demonstração. Seja $\mathbf{S}(M, l)$ um plano de \mathbf{S} . É imediato que $\mathbf{S}(M, l)$ satisfaz (P_1) e (P_2) . Sejam P, Q e R três pontos distintos da recta l . As rectas PM, QM e RM são distintas e M é o único ponto comum às três rectas. Seja T um ponto da recta QM distinto de Q e M . Temos assim que T, P, R e M são quatro pontos de $\mathbf{S}(M, l)$ tais que não há três colineares. ■

Os subespaços triviais de um espaço projectivo \mathbf{S} não são espaços projectivos.

Proposição 4.1.4 *Todo o subespaço não trivial de um espaço projectivo \mathbf{S} é ainda um espaço projectivo.*

Demonstração. Resulta imediatamente da definição de subespaço. ■

Proposição 4.1.5 *Seja $\mathbf{V} \neq \emptyset$ um subespaço de um espaço projectivo \mathbf{S} e seja $P \notin \mathbf{V}$.*

Então $\langle \mathbf{V} \cup \{P\} \rangle = \bigcup_{Q \in \mathbf{V}} PQ$.

Demonstração. Começemos por mostrar que $\mathbf{X} = \bigcup_{Q \in \mathbf{V}} PQ$ é um subespaço de \mathbf{S} . Sejam X_1, X_2 pontos distintos de \mathbf{X} . Então existem $Q_1, Q_2 \in \mathbf{V}$ tais que $X_1 \in PQ_1$ e $X_2 \in PQ_2$. Se $Q_1 = Q_2$, então $PQ_1 = X_1X_2$ e, portanto, todos os pontos da recta X_1X_2 pertencem a \mathbf{X} . Suponhamos que $Q_1 \neq Q_2$. Como $P \notin Q_1Q_2$ (pois $P \notin \mathbf{V}$ e $Q_1Q_2 \subseteq \mathbf{V}$) temos que $\mathbf{S}(P, Q_1Q_2)$ é um plano de \mathbf{S} . Seja $S \in X_1X_2$. Atendendo a que $X_1, X_2 \in \mathbf{S}(P, Q_1Q_2)$ resulta que $S \in \mathbf{S}(P, Q_1Q_2)$. Então as rectas Q_1Q_2 e PS são complanares e, portanto, intersectam-se num ponto R . É claro que $R \in \mathbf{V}$. Então $S \in \mathbf{X}$, já que $S \in PR$. Portanto \mathbf{X} é um subespaço de \mathbf{S} .

Atendendo a que $\mathbf{V} \cup \{P\} \subseteq \mathbf{X}$ e a que \mathbf{X} é um subespaço de \mathbf{S} temos $\langle \mathbf{V} \cup \{P\} \rangle \subseteq \langle \mathbf{X} \rangle = \mathbf{X}$ e como, por definição de fecho, $\mathbf{X} \subseteq \langle \mathbf{V} \cup \{P\} \rangle$, concluímos que $\langle \mathbf{V} \cup \{P\} \rangle = \mathbf{X}$. ■

É consequência da proposição anterior que o plano de \mathbf{S} determinado por M e l é o fecho do conjunto $l \cup \{M\}$. Pretendemos agora mostrar que todo o plano de um espaço projectivo \mathbf{S} é um subespaço de \mathbf{S} de dimensão 2.

Proposição 4.1.6 *Todo o espaço projectivo satisfaz a propriedade de intercâmbio.*

Demonstração. Sejam P e Q pontos de \mathbf{S} e \mathbf{X} um conjunto de pontos de \mathbf{S} tais que $P \notin \langle \mathbf{X} \rangle$ e $P \in \langle \mathbf{X} \cup \{Q\} \rangle$. Pretendemos mostrar que $Q \in \langle \mathbf{X} \cup \{P\} \rangle$. Se $\mathbf{X} = \emptyset$ é evidente que $Q \in \langle \mathbf{X} \cup \{P\} \rangle$. Suponhamos agora que $\mathbf{X} \neq \emptyset$. Uma vez que $\langle \mathbf{X} \rangle$ é um subespaço de

\mathbf{S} e $P \in \langle \mathbf{X} \cup \{Q\} \rangle = \langle \langle \mathbf{X} \rangle \cup \{Q\} \rangle$, pela proposição 4.1.5, temos que $P \in QR$, para algum $R \in \langle \mathbf{X} \rangle$. Assim, $Q \in PR$ e, portanto, novamente pela proposição 4.1.5, concluímos que $Q \in \langle \langle \mathbf{X} \rangle \cup \{P\} \rangle = \langle \mathbf{X} \cup \{P\} \rangle$. ■

Resulta imediatamente da proposição 4.1.6 e do teorema 1.3.3 que todas as bases de um espaço projectivo têm o mesmo número de elementos.

Proposição 4.1.7 *Sejam \mathbf{S} um espaço projectivo, \mathbf{V} um subespaço de \mathbf{S} de dimensão $d \geq 1$ e $P \notin \mathbf{V}$. Então o subespaço $\langle \mathbf{V} \cup \{P\} \rangle$ é um espaço projectivo de dimensão $d + 1$.*

Demonstração. É claro que $\langle \mathbf{V} \cup \{P\} \rangle$ é um espaço projectivo, pois é um subespaço não trivial de um espaço projectivo. Como \mathbf{V} tem dimensão d , então todas as bases de \mathbf{V} têm $d + 1$ elementos. Seja $\mathbf{B} = \{V_1, \dots, V_{d+1}\}$ uma base de \mathbf{V} . Vejamos que $\{V_1, \dots, V_{d+1}, P\}$ é uma base de $\langle \mathbf{V} \cup \{P\} \rangle$. Como

$$\langle \{V_1, \dots, V_{d+1}, P\} \rangle = \langle \mathbf{B} \cup \{P\} \rangle = \langle \langle \mathbf{B} \rangle \cup \{P\} \rangle = \langle \mathbf{V} \cup \{P\} \rangle$$

concluímos que $\{V_1, \dots, V_{d+1}, P\}$ gera $\langle \mathbf{V} \cup \{P\} \rangle$.

Vamos agora mostrar que $\{V_1, \dots, V_{d+1}, P\}$ é um conjunto independente. É claro que $P \notin \langle \mathbf{B} \rangle = \mathbf{V}$. Suponhamos que existe $i \in \{1, \dots, d + 1\}$ tal que $V_i \in \langle (\mathbf{B} \setminus \{V_i\}) \cup \{P\} \rangle$. Como $V_i \notin \langle \mathbf{B} \setminus \{V_i\} \rangle$, pela propriedade de intercâmbio, $P \in \langle (\mathbf{B} \setminus \{V_i\}) \cup \{V_i\} \rangle = \langle \mathbf{B} \rangle = \mathbf{V}$, o que é falso. Logo $V_i \notin \langle (\mathbf{B} \setminus \{V_i\}) \cup \{P\} \rangle$ e, portanto, $\{V_1, \dots, V_{d+1}, P\}$ é um conjunto independente.

Concluímos assim que $\{V_1, \dots, V_{d+1}, P\}$ é uma base de $\langle \mathbf{V} \cup \{P\} \rangle$. Então a dimensão de $\langle \mathbf{V} \cup \{P\} \rangle$ é $d + 1$. ■

Proposição 4.1.8 *Seja \mathbf{S} um espaço projectivo. $\bar{\mathbf{S}}$ é um plano de \mathbf{S} se e só se $\bar{\mathbf{S}}$ é um subespaço de \mathbf{S} de dimensão 2.*

Demonstração. Seja $\bar{\mathbf{S}} = \mathbf{S}(M, l)$ um plano de \mathbf{S} . Atendendo a que $\bar{\mathbf{S}} = \langle l \cup \{M\} \rangle$ resulta imediatamente das duas proposições anteriores que $\bar{\mathbf{S}}$ é um subespaço de \mathbf{S} de dimensão 2.

Reciprocamente, suponhamos que $\bar{\mathbf{S}}$ é um subespaço de \mathbf{S} de dimensão 2. Seja $\{A, B, C\}$ uma base de $\bar{\mathbf{S}}$. Então

$$\bar{\mathbf{S}} = \langle \{A, B, C\} \rangle = \langle \{A, B\} \cup \{C\} \rangle = \langle \langle \{A, B\} \rangle \cup \{C\} \rangle = \langle l \cup \{C\} \rangle = \mathbf{S}(C, l),$$

onde $l = AB$. Portanto, $\bar{\mathbf{S}}$ é um plano de \mathbf{S} (é o plano determinado por l e C). ■

Colocamos agora a seguinte questão: será que existe mais do que um plano que contém M e l ? Parece ser intuitivo que a resposta a esta questão é negativa.

Proposição 4.1.9 *O único plano de um espaço projectivo \mathbf{S} que contém M e l é o plano $\mathbf{S}(M, l)$.*

Demonstração. Seja $\bar{\mathbf{S}}$ um plano de \mathbf{S} que contém M e l . Como $l \cup \{M\} \subseteq \bar{\mathbf{S}}$ então $\mathbf{S}(M, l) = \langle l \cup \{M\} \rangle \subseteq \bar{\mathbf{S}}$.

Seja $P \in \bar{\mathbf{S}}$. Se $P = M$ então $P \in \mathbf{S}(M, l)$. Suponhamos que $P \neq M$. Todos os pontos da recta PM pertencem a $\bar{\mathbf{S}}$. Logo PM e l são rectas coplanares. Seja $L = PM \cap l$. Então

$L \in \mathbf{S}(M, l)$ e, portanto, todos os pontos da recta LM pertencem a $\mathbf{S}(M, l)$. Como $P \in LM$ resulta que $P \in \mathbf{S}(M, l)$.

Concluimos assim que $\mathbf{S}(M, l) = \bar{\mathbf{S}}$. ■

Observação.

Três pontos não colineares de um espaço projectivo \mathbf{S} pertencem a um único plano de \mathbf{S} . Com efeito, se P, Q e R são três pontos não colineares então esses pontos pertencem ao plano $\bar{\mathbf{S}} = \langle \{P, Q, R\} \rangle$, que é o único plano que contém o ponto R e a recta PQ .

4.1.2 Hiperplanos de um espaço projectivo

Um **hiperplano** \mathbf{H} de um espaço linear \mathbf{S} é um subespaço próprio maximal, isto é, é um subespaço de \mathbf{S} que satisfaz a condição: Se \mathbf{H}_1 é um subespaço de \mathbf{S} tal que $\mathbf{H} \subset \mathbf{H}_1$ então $\mathbf{H}_1 = \mathbf{S}$.

Lema 4.1.10 *Seja \mathbf{H} um hiperplano de um espaço projectivo \mathbf{S} . Então $\mathbf{S} = \langle \mathbf{H} \cup \{P\} \rangle$, para todo o ponto $P \notin \mathbf{H}$.*

Demonstração. Seja $P \notin \mathbf{H}$. Atendendo a que $\langle \mathbf{H} \cup \{P\} \rangle$ é um subespaço de \mathbf{S} tal que $\mathbf{H} \subset \langle \mathbf{H} \cup \{P\} \rangle$ resulta que $\langle \mathbf{H} \cup \{P\} \rangle = \mathbf{S}$, pois \mathbf{H} é um hiperplano de \mathbf{S} . ■

Lema 4.1.11 *Seja \mathbf{S} um espaço projectivo de dimensão d . \mathbf{H} é um hiperplano de \mathbf{S} se e só se \mathbf{H} é um subespaço de \mathbf{S} de dimensão $d - 1$.*

Demonstração. Sejam \mathbf{H} um hiperplano de \mathbf{S} e $P \notin \mathbf{H}$. Como $\langle \mathbf{H} \cup \{P\} \rangle = \mathbf{S}$ então, pela proposição 4.1.7, $\dim(\langle \mathbf{H} \cup \{P\} \rangle) = \dim(\mathbf{H}) + 1$ donde concluimos que $\dim(\mathbf{H}) = d - 1$.

Reciprocamente, seja \mathbf{H} um subespaço de \mathbf{S} de dimensão $d - 1$. Seja \mathbf{H}_1 um subespaço de \mathbf{S} tal que $\mathbf{H} \subset \mathbf{H}_1$. Então existe $P \in \mathbf{H}_1$ tal que $P \notin \mathbf{H}$. O subespaço $\langle \mathbf{H} \cup \{P\} \rangle$ de \mathbf{S} tem dimensão d . Logo $\langle \mathbf{H} \cup \{P\} \rangle = \mathbf{S}$, já que \mathbf{S} é o único subespaço de \mathbf{S} que tem dimensão d . Como $\mathbf{H} \cup \{P\} \subseteq \mathbf{H}_1$ então $\mathbf{S} = \langle \mathbf{H} \cup \{P\} \rangle \subseteq \mathbf{H}_1 \subseteq \mathbf{S}$ e, portanto, $\mathbf{H}_1 = \mathbf{S}$. Logo \mathbf{H} é um hiperplano de \mathbf{S} . ■

Proposição 4.1.12 *Sejam \mathbf{S} um espaço projectivo e \mathbf{H} um subespaço próprio de \mathbf{S} . \mathbf{H} é um hiperplano de \mathbf{S} se e só se qualquer recta de \mathbf{S} contém pelo menos um ponto de \mathbf{H} .*

Demonstração. Suponhamos que \mathbf{H} é um hiperplano. Então existe $P \in \mathbf{S}$ tal que $P \notin \mathbf{H}$. Atendendo à proposição 4.1.5 e ao lema 4.1.10 temos $\bigcup_{Q \in \mathbf{H}} PQ = \mathbf{S}$. Seja l uma recta de \mathbf{S} . É

evidente que, se $P \in l$ então a recta l contém pelo menos um ponto de \mathbf{H} . Suponhamos que $P \notin l$. Sejam L_1 e L_2 pontos distintos de l . Então existem $Q_1, Q_2 \in \mathbf{H}$ tais que $L_1 \in PQ_1$ e $L_2 \in PQ_2$ (é claro que $Q_1 \neq Q_2$, visto que $P \notin l$). Se Q_1 ou Q_2 pertence a l então l contém pelo menos um ponto de \mathbf{H} . Se nenhum dos pontos Q_1 e Q_2 pertence a l , por (EP_2) , as rectas Q_1Q_2 e l intersectam-se e, portanto, l contém pelo menos um ponto de \mathbf{H} .

Reciprocamente, suponhamos que todas as rectas de \mathbf{S} contém pelo menos um ponto de \mathbf{H} . Seja \mathbf{H}_1 um subespaço de \mathbf{S} tal que $\mathbf{H} \subset \mathbf{H}_1$. Seja $P \in \mathbf{H}_1$ tal que $P \notin \mathbf{H}$. Observemos que $\langle \mathbf{H} \cup \{P\} \rangle \subseteq \mathbf{H}_1$, já que \mathbf{H}_1 é um subespaço de \mathbf{S} que contém $\mathbf{H} \cup \{P\}$. Para cada ponto $Q \in \mathbf{S} \setminus \{P\}$ existe pelo menos um ponto Q_1 da recta PQ que pertence a \mathbf{H} . Então, $Q \in PQ_1$ e, pela proposição 4.1.5, $Q \in \langle \mathbf{H} \cup \{P\} \rangle$, o que mostra que $\mathbf{S} \subseteq \langle \mathbf{H} \cup \{P\} \rangle$. Temos assim que $\mathbf{S} \subseteq \mathbf{H}_1$ e, portanto, $\mathbf{H}_1 = \mathbf{S}$. Concluimos então que \mathbf{H} é um hiperplano de \mathbf{S} . ■

Corolário 4.1.13 *Seja \mathbf{H} um hiperplano de um espaço projectivo \mathbf{S} . Então qualquer recta de \mathbf{S} que não esteja contida em \mathbf{H} intersecta \mathbf{H} num só ponto.*

Demonstração. Seja l uma recta de \mathbf{S} que não esteja contida em \mathbf{H} . Pela proposição anterior, l intersecta \mathbf{H} em pelo menos um ponto. Seja $P \in l \cap \mathbf{H}$. Se existe outro ponto Q distinto de P tal que $Q \in l \cap \mathbf{H}$ então todos os pontos da recta $PQ = l$ pertencem a \mathbf{H} , o que é falso. Logo l intersecta \mathbf{H} num só ponto. ■

Proposição 4.1.14 *Sejam \mathbf{H} um hiperplano e $\bar{\mathbf{S}}$ um plano de um espaço projectivo \mathbf{S} tal que $\bar{\mathbf{S}} \not\subseteq \mathbf{H}$. Então $\bar{\mathbf{S}}$ intersecta \mathbf{H} numa recta.*

Demonstração. Como $\bar{\mathbf{S}} \not\subseteq \mathbf{H}$, existe $P \in \bar{\mathbf{S}}$ tal que $P \notin \mathbf{H}$. Sejam l e r duas rectas de $\bar{\mathbf{S}}$ que contêm P . Então, pela proposição 4.1.12, r e l contêm pelo menos um ponto de \mathbf{H} . Sejam R e L pontos de \mathbf{H} tais que $R \in r$ e $L \in l$. É claro que R, L e P são três pontos distintos. Também é claro que todos os pontos da recta RL pertencem a $\bar{\mathbf{S}}$ e a \mathbf{H} . Suponhamos, com vista a uma contradição, que existe $Q \in \bar{\mathbf{S}} \cap \mathbf{H}$ tal que $Q \notin RL$. $\bar{\mathbf{S}}$ é um plano que contém Q e RL . Então $\bar{\mathbf{S}} = \mathbf{S}(Q, RL)$. Como $\{Q\} \cup RL \subseteq \mathbf{H}$ temos $\bar{\mathbf{S}} = \mathbf{S}(Q, RL) = \langle \{Q\} \cup RL \rangle \subseteq \mathbf{H}$, o que contraria a hipótese. Concluimos assim que $\bar{\mathbf{S}} \cap \mathbf{H} = RL$. ■

Corolário 4.1.15 *A intersecção de dois planos distintos de um espaço projectivo \mathbf{S} de dimensão 3 é uma recta.*

Demonstração. Sejam $\bar{\mathbf{S}}_1$ e $\bar{\mathbf{S}}_2$ dois planos distintos de \mathbf{S} . Então $\bar{\mathbf{S}}_1 \not\subseteq \bar{\mathbf{S}}_2$. Como $\bar{\mathbf{S}}_2$ é um subespaço de \mathbf{S} de dimensão 2, pelo lema 4.1.11, $\bar{\mathbf{S}}_2$ é um hiperplano de \mathbf{S} . Então, pela proposição anterior, $\bar{\mathbf{S}}_1$ e $\bar{\mathbf{S}}_2$ intersectam-se numa recta. ■

Proposição 4.1.16 *Todo o espaço projectivo \mathbf{S} contém um hiperplano.*

Demonstração. Seja \mathbf{B} uma base de \mathbf{S} . Seja $P \in \mathbf{B}$. Vejamos que $\mathbf{H} = \langle \mathbf{B} \setminus \{P\} \rangle$ é um hiperplano de \mathbf{S} . É claro que \mathbf{H} é um subespaço próprio de \mathbf{S} , pois $P \notin \mathbf{H}$. Seja \mathbf{H}_1 um subespaço de \mathbf{S} tal que $\mathbf{H} \subset \mathbf{H}_1$. Então existe $Q \in \mathbf{H}_1$ tal que $Q \notin \mathbf{H} = \langle \mathbf{B} \setminus \{P\} \rangle$. Como $Q \in \langle \mathbf{B} \setminus \{P\} \cup \{P\} \rangle$ e \mathbf{S} tem a propriedade de intercâmbio, atendendo à proposição 1.3.2, resulta que

$$\mathbf{S} = \langle \mathbf{B} \setminus \{P\} \cup \{P\} \rangle = \langle \mathbf{B} \setminus \{P\} \cup \{Q\} \rangle \subseteq \mathbf{H}_1,$$

donde concluimos que $\mathbf{H}_1 = \mathbf{S}$ e, portanto, \mathbf{H} é um hiperplano de \mathbf{S} . ■

4.1.3 Espaço projectivo finito

Tal como nos planos projectivos, todas as rectas de um espaço projectivo contêm o mesmo número de pontos. Com efeito, suponhamos que l e r são duas rectas de um espaço projectivo \mathbf{S} . Se l e r são rectas complanares existe um plano (que é um plano projectivo) que as contém pelo que ambas as rectas contêm o mesmo número de pontos. Suponhamos agora que as rectas não são complanares. Sejam $L_1, L_2 \in l$ e $R_1, R_2 \in r$. Os planos $\mathbf{S}(R_1, l)$ e $\mathbf{S}(L_1, r)$ são distintos. As rectas R_1L_1 e l pertencem ao plano $\mathbf{S}(R_1, l)$ e as rectas R_1L_1 e r pertencem ao plano $\mathbf{S}(L_1, r)$. Então r e l contêm o mesmo número de pontos.

Um **espaço projectivo finito** \mathbf{S} é uma estrutura de incidência finita que é um espaço projectivo. Seja $n+1$ o número de pontos de cada recta de \mathbf{S} . Ao número n chamamos ordem de \mathbf{S} . Observemos que $n \geq 2$. Se \mathbf{S} tem dimensão 2 então é um plano projectivo e, como já sabemos, tem $n^2 + n + 1$ pontos. Qual será o número de pontos de um espaço projectivo finito \mathbf{S} de dimensão d e de ordem n ? E o número de rectas?

Lema 4.1.17 *Qualquer espaço projectivo de dimensão $d \geq 2$ e ordem n contém $n^d + n^{d-1} + \dots + n + 1$ pontos.*

Demonstração. Vamos demonstrar este lema por indução sobre d . É evidente que a afirmação é verdadeira no caso em que d é igual a 2. Suponhamos que a afirmação é verdadeira para qualquer espaço projectivo finito de dimensão d e ordem n . Seja \mathbf{S} um espaço projectivo de dimensão $d + 1$ e ordem n . Seja $\{A_1, \dots, A_{d+2}\}$ uma base de \mathbf{S} . O subespaço $\mathbf{H} = \langle \{A_1, \dots, A_{d+1}\} \rangle$ é um hiperplano de \mathbf{S} ¹. Então, por hipótese, em \mathbf{H} existem $n^d + n^{d-1} + \dots + n + 1$ pontos. Atendendo a que

$$\mathbf{S} = \langle \{A_1, \dots, A_{d+2}\} \rangle = \langle \mathbf{H} \cup \{A_{d+2}\} \rangle = \bigcup_{P \in \mathbf{H}} PA_{d+2}$$

e, para cada ponto $P \in \mathbf{H}$, a recta PA_{d+2} contém n pontos distintos de A_{d+2} e um só ponto de \mathbf{H} resulta que em \mathbf{S} existem $(n^d + n^{d-1} + \dots + n + 1)n + 1 = n^{d+1} + n^d + \dots + n + 1$ pontos. ■

Lema 4.1.18 *Qualquer espaço projectivo de dimensão $d \geq 2$ e ordem n contém $\frac{(n^d + n^{d-1} + \dots + n + 1)(n^{d-1} + n^{d-2} + \dots + n + 1)}{n+1}$ rectas.*

Demonstração. Pelo lema anterior \mathbf{S} contém $m = n^d + n^{d-1} + \dots + n + 1$ pontos. Em \mathbf{S} existem $\binom{m}{2}$ pares de pontos e cada recta de \mathbf{S} contém $\binom{n+1}{2}$ pares de pontos. Assim, em \mathbf{S} existem $\frac{\binom{m}{2}}{\binom{n+1}{2}} = \frac{(n^d + n^{d-1} + \dots + n + 1)(n^{d-1} + n^{d-2} + \dots + n + 1)}{n+1}$ rectas. Observemos que se d é par $n + 1$ é um divisor de $n^{d-1} + n^{d-2} + \dots + n + 1$ e se d é ímpar $n + 1$ é um divisor de $n^d + n^{d-1} + \dots + n + 1$. ■

4.1.4 Espaço projectivo de Desargues

Sejam C, X, Y, Z, X_1, Y_1 e Z_1 sete pontos de um espaço projectivo \mathbf{S} nas condições da configuração de Desargues. Observemos que $C, X, Y, X_1, Y_1 \in \mathbf{S}(C, XY)$, $C, X, Z, X_1, Z_1 \in \mathbf{S}(C, XZ)$ e $C, Y, Z, Y_1, Z_1 \in \mathbf{S}(C, YZ)$. Então os pontos $U = XY \cap X_1Y_1$, $V = XZ \cap X_1Z_1$ e $W = YZ \cap Y_1Z_1$ existem.

Um espaço projectivo \mathbf{S} é um **espaço de Desargues** se, para qualquer escolha de sete pontos C, X, Y, Z, X_1, Y_1 e Z_1 nas condições da configuração de Desargues os pontos $U = XY \cap X_1Y_1$, $V = XZ \cap X_1Z_1$ e $W = YZ \cap Y_1Z_1$ são colineares.

Observemos que todo o espaço projectivo de dimensão 2 é um plano projectivo. De facto, sendo \mathbf{S} um espaço projectivo de dimensão 2, todas as bases de \mathbf{S} têm três elementos. Seja $\{A, B, C\}$ uma base de \mathbf{S} . É claro que $\mathbf{S} = \langle \{A, B, C\} \rangle = \langle AB \cup \{C\} \rangle$. Como $\langle AB \cup \{C\} \rangle$ é um plano de \mathbf{S} , pelo corolário 4.1.3, é um plano projectivo. Assim, existem espaços projectivos de dimensão 2 que não são espaços de Desargues.

Dizemos que \mathbf{X} é um conjunto de **pontos coplanares** de um espaço projectivo \mathbf{S} se existe um plano de \mathbf{S} que contém todos os pontos de \mathbf{X} . Portanto, se \mathbf{S} é um espaço projectivo tal que nem todos os pontos são coplanares então a dimensão de \mathbf{S} é maior ou igual a 3.

A proposição 4.1.7 permite-nos afirmar que, se $\bar{\mathbf{S}}$ é um plano de um espaço projectivo \mathbf{S} e $P \notin \bar{\mathbf{S}}$ então $\langle \bar{\mathbf{S}} \cup \{P\} \rangle$ é um espaço projectivo de dimensão 3 (e que contém o plano $\bar{\mathbf{S}}$ e o ponto P). Denotemos este espaço projectivo por $\mathbf{S}(P, \bar{\mathbf{S}})$.

¹É um espaço projectivo de dimensão d e ordem n .

Decorre da proposição que a seguir vamos mostrar, que todo o plano projectivo que não seja um plano de Desargues não pode ser um plano de um espaço projectivo de dimensão $d \geq 3$.

Proposição 4.1.19 *Todo o espaço projectivo \mathbf{S} de dimensão $d \geq 3$ é um espaço de Desargues.*

Demonstração. Sejam C, X, Y, Z, X_1, Y_1 e Z_1 sete pontos de \mathbf{S} nas condições da configuração de Desargues. Pretendemos mostrar que os pontos $U = XY \cap X_1Y_1$, $V = XZ \cap X_1Z_1$ e $W = YZ \cap Y_1Z_1$ são colineares.

Consideremos os planos $\mathbf{S}(Y, XZ)$ e $\mathbf{S}(Y_1, X_1Z_1)$.

1. Suponhamos que $\mathbf{S}(Y, XZ) \neq \mathbf{S}(Y_1, X_1Z_1)$.

Como os dois planos pertencem ao espaço projectivo $\mathbf{S}(C, \mathbf{S}(Y, XZ))$ que tem dimensão 3, pelo corolário 4.1.15, intersectam-se numa recta. Os pontos U, V e W pertencem aos dois planos pelo que são colineares.

2. Suponhamos que $\mathbf{S}(Y, XZ) = \mathbf{S}(Y_1, X_1Z_1) = \bar{\mathbf{S}}$.

Escolhemos um ponto P de \mathbf{S} tal que $P \notin \bar{\mathbf{S}}$ (tal escolha é possível porque a dimensão de \mathbf{S} é maior ou igual a 3) e seja $Q \in CP$ um ponto distinto de P e de C . Observemos que $Q \notin \bar{\mathbf{S}}$ (caso contrário, como $P \in QC$, teríamos $P \in \bar{\mathbf{S}}$). Atendendo a (EP_2) , os pontos $X_2 = QX \cap PX_1$, $Y_2 = QY \cap PY_1$ e $Z_2 = QZ \cap PZ_1$ existem. Notemos que X_2, Y_2 e Z_2 são pontos não colineares que não pertencem a $\bar{\mathbf{S}}$. Então $\bar{\bar{\mathbf{S}}} = \mathbf{S}(Y_2, X_2Z_2) \neq \bar{\mathbf{S}}$. Além disso, os planos $\bar{\mathbf{S}}$ e $\bar{\bar{\mathbf{S}}}$ pertencem ao espaço projectivo $\mathbf{S}(Q, \bar{\mathbf{S}})$. Logo, pelo corolário 4.1.15, estes planos intersectam-se numa recta que vamos designar por l .

Por (EP_2) , os pontos $U_1 = XY \cap X_2Y_2$, $V_1 = XZ \cap X_2Z_2$ e $W_1 = YZ \cap Y_2Z_2$ existem e, pelo caso 1., pertencem à recta l .

De novo por (EP_2) , os pontos $U_2 = X_1Y_1 \cap X_2Y_2$, $V_2 = X_1Z_1 \cap X_2Z_2$ e $W_2 = Y_1Z_1 \cap Y_2Z_2$ existem e, pelo caso 1., pertencem à recta l .

Como $U_1, U_2 \in l \cap X_2Y_2$, $V_1, V_2 \in l \cap X_2Z_2$ e $W_1, W_2 \in l \cap Y_2Z_2$ resulta que $U_1 = U_2$, $V_1 = V_2$ e $W_1 = W_2$. Concluimos então que $U_1 = U_2 = XY \cap X_1Y_1 = U$, $V_1 = V_2 = XZ \cap X_1Z_1 = V$ e $W_1 = W_2 = YZ \cap Y_1Z_1 = W$ pelo que os pontos U, V e W são colineares. ■

Corolário 4.1.20 *Qualquer plano de um espaço projectivo \mathbf{S} de Desargues de dimensão $d \geq 3$ é um plano de Desargues.*

Demonstração. Resulta de que qualquer plano de \mathbf{S} é um plano projectivo e da proposição anterior. ■

4.2 Espaço afim

Sejam $\mathbf{S} = (\bar{\mathcal{P}}, \bar{\mathcal{L}})$ um espaço projectivo e \mathbf{H} um hiperplano de \mathbf{S} . Designemos por $\bar{\mathcal{L}}_1$ o conjunto de todas as rectas de $\bar{\mathcal{L}}$ que intersectam \mathbf{H} num só ponto. Para cada recta $\bar{l} \in \bar{\mathcal{L}}_1$, definimos o conjunto $l = \bar{l} \setminus \{P\}$, onde $P = \bar{l} \cap \mathbf{H}$. Consideremos os conjuntos

$$\mathcal{P} = \{P \in \bar{\mathcal{P}} : P \notin \mathbf{H}\} \quad \text{e} \quad \mathcal{L} = \{l : \bar{l} \in \bar{\mathcal{L}}_1\}.$$

À estrutura de incidência $\mathcal{E} = (\mathcal{P}, \mathcal{L})$ chamamos **espaço afim**² e denotamos por $\mathcal{E} = \mathbf{S} \setminus \mathbf{H}$. Da definição de espaço afim resulta imediatamente que, dados dois pontos distintos existe uma única recta que contém ambos os pontos e qualquer recta contém pelo menos dois pontos. Portanto, \mathcal{E} é um espaço linear.

Exemplo.

Todo o plano afim é um espaço afim.

Dizemos que **duas rectas l e r de um espaço afim $\mathcal{E} = \mathbf{S} \setminus \mathbf{H}$ são paralelas** e escrevemos $l \parallel r$, se

$$l = r \text{ ou } l \cap r = \emptyset \text{ e as rectas } \bar{l} \text{ e } \bar{r} \text{ são complanares.}$$

Sejam l, r e s rectas de $\mathcal{E} = \mathbf{S} \setminus \mathbf{H}$. É claro que $l \parallel l$ e se $l \parallel r$ então $r \parallel l$. Suponhamos agora que $l \parallel r$ e $r \parallel s$. Se $l = r$ ou $r = s$ então $l \parallel s$. Suponhamos que l, r e s são rectas distintas. Como $l \parallel r$ e $r \parallel s$ temos que $\bar{l} \cap \bar{r} = P$ e $\bar{r} \cap \bar{s} = Q$, onde $\mathbf{H} \cap \bar{l} = P = \mathbf{H} \cap \bar{r}$ e $\mathbf{H} \cap \bar{r} = Q = \mathbf{H} \cap \bar{s}$ (observemos que rectas complanares de \mathbf{S} intersectam-se). Como, por definição, \bar{r} só contém um ponto de \mathbf{H} temos $P = Q$. Então $\bar{l} \cap \bar{s} = P$ e, portanto, \bar{l} e \bar{s} são rectas complanares. Além disso, $l \cap s = \emptyset$. Concluimos então que $l \parallel s$.

A relação \parallel é uma relação de equivalência no conjunto das rectas de um espaço afim \mathcal{E} . Designemos por $[l]$ a classe de todas as rectas paralelas a l . Na proposição seguinte iremos mostrar que, dado um ponto P e uma recta l de \mathcal{E} tais que $P \notin l$, existe uma única recta de $[l]$ que contém P .

Proposição 4.2.1 *Seja $\mathcal{E} = \mathbf{S} \setminus \mathbf{H}$ um espaço afim. Seja P um ponto e l uma recta de \mathcal{E} tais que $P \notin l$. Então existe uma única recta m de \mathcal{E} tal que $P \in m$ e $m \parallel l$.*

Demonstração. Temos $l = \bar{l} \setminus \{L\}$, onde $L = \mathbf{H} \cap \bar{l}$. Seja \bar{m} a recta de \mathbf{S} que contém os pontos L e P . Seja $m = \bar{m} \setminus \{L\}$. É claro que $m \cap l = \emptyset$ e as rectas \bar{m} e \bar{l} são complanares. Temos então que $P \in m$ e $l \parallel m$.

Vejam agora que m é a única recta de \mathcal{E} nestas condições. Suponhamos que r é uma recta de \mathcal{E} que contém P e tal que $r \parallel l$. É evidente que $m \parallel r$. Como $P \in m \cap r$ e $m \parallel r$ resulta que $m = r$. ■

4.2.1 Espaço afim finito

Seja $\mathcal{E} = \mathbf{S} \setminus \mathbf{H}$ um espaço afim. Todas as rectas do espaço projectivo \mathbf{S} contêm o mesmo número de pontos e qualquer recta de \mathbf{S} que não esteja contida em \mathbf{H} intersecta \mathbf{H} num só ponto. Assim, ao retirar a \mathbf{S} o hiperplano \mathbf{H} estamos a retirar um ponto a todas as rectas de \mathbf{S} que não estão contidas em \mathbf{H} . Então todas as rectas de $\mathcal{E} = \mathbf{S} \setminus \mathbf{H}$ contêm o mesmo número de pontos.

O espaço afim $\mathcal{E} = \mathbf{S} \setminus \mathbf{H}$ é um **espaço afim finito** se \mathbf{S} é um espaço projectivo finito. Seja n o número de pontos de cada recta de \mathcal{E} . Dizemos que n é a ordem de \mathcal{E} . É evidente que $n \geq 2$.

²Sempre que seja necessário denotamos por $l(X, Y)$ a recta de \mathcal{E} que contém os pontos X e Y e denotamos por $\bar{l}(X, Y)$ a recta de \mathbf{S} que contém os pontos X e Y . Observemos que $l(X, Y) = \bar{l}(X, Y) \setminus \{H_1\}$, onde $H_1 = \bar{l}(X, Y) \cap \mathbf{H}$.

Lema 4.2.2 *Sejam \mathbf{S} um espaço projectivo de dimensão d e ordem n e \mathbf{H} um hiperplano de \mathbf{S} . Então o espaço afim $\mathcal{E} = \mathbf{S} \setminus \mathbf{H}$ contém n^d pontos.*

Demonstração. O hiperplano \mathbf{H} é um subespaço de \mathbf{S} de dimensão $d - 1$. Em \mathbf{H} existem $n^{d-1} + n^{d-2} + \dots + n + 1$ pontos.

Assim, em \mathcal{E} existem $n^d + n^{d-1} + \dots + n + 1 - (n^{d-1} + n^{d-2} + \dots + n + 1) = n^d$ pontos. ■

Observemos que o número de rectas de uma classe de rectas paralelas não depende da classe. Com efeito, como a cada ponto de \mathbf{H} corresponde uma classe de rectas paralelas e cada recta de \mathcal{E} contém n pontos resulta que cada classe de rectas paralelas contém $\frac{n^d}{n} = n^{d-1}$ rectas.

Lema 4.2.3 *Sejam \mathbf{S} um espaço projectivo de dimensão d e ordem n e \mathbf{H} um hiperplano de \mathbf{S} . Então o espaço afim $\mathcal{E} = \mathbf{S} \setminus \mathbf{H}$ contém $n^{d-1}(n^{d-1} + n^{d-2} + \dots + n + 1)$ rectas.*

Demonstração. Em \mathbf{H} existem $n^{d-1} + n^{d-2} + \dots + n + 1$ pontos. Então, em \mathcal{E} existem $n^{d-1}(n^{d-1} + n^{d-2} + \dots + n + 1)$ rectas. ■

4.2.2 Planos de um espaço afim

Chamamos **plano de $\mathcal{E} = \mathbf{S} \setminus \mathbf{H}$** a todo o subespaço de \mathcal{E} de dimensão 2.

Seja $\bar{\mathbf{S}}$ um plano de um espaço projectivo \mathbf{S} de ordem $n > 2$ tal que $\bar{\mathbf{S}} \not\subseteq \mathbf{H}$ e seja $\bar{m} = \bar{\mathbf{S}} \cap \mathbf{H}$. Vejamos que $\bar{\mathbf{S}} \setminus \bar{m}$ é um subespaço de $\mathcal{E} = \mathbf{S} \setminus \mathbf{H}$ de dimensão 2, isto é, $\bar{\mathbf{S}} \setminus \bar{m}$ é um plano de \mathcal{E} . Sejam $P, Q \in \bar{\mathbf{S}} \setminus \bar{m}$. Então $P, Q \in \bar{\mathbf{S}}$ e $P, Q \notin \mathbf{H}$. A recta $\bar{l}(P, Q)$ intersecta \mathbf{H} num único ponto $H_1 \in \bar{m}$. Como $\bar{\mathbf{S}}$ é um subespaço de \mathbf{S} , todos os pontos da recta $\bar{l}(P, Q)$ pertencem a $\bar{\mathbf{S}}$. Assim, todos os pontos da recta $l(P, Q)$ pertencem a $\bar{\mathbf{S}} \setminus \bar{m}$. A dimensão de $\bar{\mathbf{S}} \setminus \bar{m}$ é 2, pois $\bar{\mathbf{S}} \setminus \bar{m}$ é um plano afim de ordem $n > 2$.

Proposição 4.2.4 *Sejam \mathbf{S} um espaço projectivo de ordem $n > 2$ e \mathbf{H} um hiperplano de \mathbf{S} . $\bar{\mathcal{E}}$ é um plano de $\mathcal{E} = \mathbf{S} \setminus \mathbf{H}$ se e só se $\bar{\mathcal{E}} = \bar{\mathbf{S}} \setminus \bar{m}$, onde $\bar{\mathbf{S}}$ é um plano de \mathbf{S} tal que $\bar{\mathbf{S}} \not\subseteq \mathbf{H}$ e $\bar{m} = \bar{\mathbf{S}} \cap \mathbf{H}$.*

Demonstração. Seja $\bar{\mathcal{E}}$ um plano de \mathcal{E} . Seja $\{A, B, C\}$ uma base de $\bar{\mathcal{E}}$. É imediato que, $\bar{\mathbf{S}} = \langle \{A, B, C\} \rangle_{\mathbf{S}}$ ³ é um plano de \mathbf{S} . Sejam $H_1 = \bar{l}(A, B) \cap \mathbf{H}$ e $H_2 = \bar{l}(A, C) \cap \mathbf{H}$. Os pontos H_1 e H_2 são distintos. Designemos por \bar{m} a recta de \mathbf{S} que contém os pontos H_1 e H_2 . É claro que \bar{m} é uma recta de $\bar{\mathbf{S}}$, $\bar{\mathbf{S}} \not\subseteq \mathbf{H}$ e $\bar{m} = \bar{\mathbf{S}} \cap \mathbf{H}$. Vejamos que $\bar{\mathcal{E}} = \bar{\mathbf{S}} \setminus \bar{m}$.

Como $\bar{\mathbf{S}} \setminus \bar{m}$ é um subespaço de \mathcal{E} e $\{A, B, C\} \subseteq \bar{\mathbf{S}} \setminus \bar{m}$ resulta que

$$\bar{\mathcal{E}} = \langle \{A, B, C\} \rangle_{\mathcal{E}} \subseteq \langle \bar{\mathbf{S}} \setminus \bar{m} \rangle_{\mathcal{E}} = \bar{\mathbf{S}} \setminus \bar{m}.$$

Seja $P \in \bar{\mathbf{S}} \setminus \bar{m}$. Como $\bar{\mathbf{S}} \cap \mathbf{H} = \bar{m}$ temos $P \notin \mathbf{H}$. Se P pertence a uma das rectas AB , AC ou BC então é claro que $P \in \bar{\mathcal{E}}$. Suponhamos agora que P não pertence a nenhuma das rectas AB , AC e BC . Como $\bar{\mathbf{S}}$ tem ordem $n > 2$, por P passam pelo menos quatro rectas. As rectas $\bar{l}(P, A)$, $\bar{l}(P, B)$ e $\bar{l}(P, C)$ são distintas e contém o ponto P . Seja \bar{r} uma recta que contém P e distinta das três rectas anteriores. Sejam $H_3 = \bar{l}(B, C) \cap \mathbf{H}$ e $H_4 = \bar{r} \cap \mathbf{H}$. Os pontos H_1 , H_2 e H_3 são distintos. É evidente que pelo menos dois dos pontos H_1, H_2 ou H_3

³Denotamos por $\langle \mathbf{X} \rangle_{\mathbf{S}}$ o fecho de \mathbf{X} em \mathbf{S} .

são distintos do ponto H_4 . Sem perda de generalidade, podemos assumir que H_1, H_2 e H_4 são pontos distintos. Então os pontos $\bar{l}(A, B) \cap \bar{r}$ e $\bar{l}(A, C) \cap \bar{r}$ pertencem a $\bar{\mathcal{E}}$ e, portanto, $P \in \bar{\mathcal{E}}$.

Reciprocamente, suponhamos que $\bar{\mathcal{E}} = \bar{\mathbf{S}} \setminus \bar{m}$, onde $\bar{\mathbf{S}}$ é um plano de \mathbf{S} tal que $\bar{\mathbf{S}} \not\subseteq \mathbf{H}$ e $\bar{m} = \bar{\mathbf{S}} \cap \mathbf{H}$. Já vimos que $\bar{\mathcal{E}}$ é um plano de \mathcal{E} . ■

Corolário 4.2.5 *Todo o plano de um espaço afim $\mathcal{E} = \mathbf{S} \setminus \mathbf{H}$ de ordem $n > 2$ é um plano afim.*

Demonstração. Seja $\bar{\mathcal{E}}$ um plano de \mathcal{E} . Pela proposição anterior, $\bar{\mathcal{E}} = \bar{\mathbf{S}} \setminus \bar{m}$, onde $\bar{\mathbf{S}}$ é um plano de \mathbf{S} tal que $\bar{\mathbf{S}} \not\subseteq \mathbf{H}$ e $\bar{m} = \bar{\mathbf{S}} \cap \mathbf{H}$. Como $\bar{\mathbf{S}}$ é um plano projectivo concluímos que $\bar{\mathcal{E}}$ é um plano afim. ■

Observemos que a proposição 4.2.4 não é válida no caso em que o plano projectivo \mathbf{S} tem ordem 2. Com efeito, consideremos o Plano de Fano π cuja representação é a figura 10 do exemplo da página 32. Seja $\bar{m} = \{0, 2, 6\}$. É claro que $\mathcal{A} = \pi \setminus \bar{m}$ é um espaço afim. Seja $\bar{\mathbf{S}} = \langle \{1, 4, 5\} \rangle_\pi$. É evidente que $\bar{\mathbf{S}}$ é um plano de π tal que $\bar{\mathbf{S}} \not\subseteq \bar{m}$ e $\bar{\mathbf{S}} \cap \bar{m} = \bar{m}$. O subespaço $\bar{\mathcal{E}} = \bar{\mathbf{S}} \setminus \bar{m}$ não é um plano de \mathcal{A} , pois tem dimensão 3. Observemos também que $\bar{\mathcal{E}} = \langle \{1, 3, 4\} \rangle_{\mathcal{A}} = \{1, 3, 4\}$ é um subespaço de \mathcal{A} de dimensão 2 que não é um plano afim (o corolário 4.2.5 também não é válido neste caso).

Proposição 4.2.6 *Duas rectas distintas de um espaço afim $\mathcal{E} = \mathbf{S} \setminus \mathbf{H}$ de ordem $n > 2$ são paralelas se e só se são complanares em \mathcal{E} e não se intersectam ⁴.*

Demonstração. Sejam r e s duas rectas distintas de \mathcal{E} . Suponhamos que r e s são rectas paralelas. Então $r \cap s = \emptyset$ e existe um plano $\bar{\mathbf{S}}$ de \mathbf{S} que contém as rectas \bar{r} e \bar{s} . Temos então que $\bar{r} \cap \mathbf{H} = \bar{s} \cap \mathbf{H}$. É claro que $\bar{\mathbf{S}} \not\subseteq \mathbf{H}$. Seja $\bar{m} = \bar{\mathbf{S}} \cap \mathbf{H}$. Pela proposição 4.2.4, $\bar{\mathcal{E}} = \bar{\mathbf{S}} \setminus \bar{m}$ é um plano de \mathcal{E} . É claro que $\bar{\mathcal{E}}$ contém as rectas r e s pelo que estas rectas são complanares em \mathcal{E} .

Reciprocamente, suponhamos que r e s são rectas complanares em \mathcal{E} e não se intersectam. Então existe um plano $\bar{\mathcal{E}}$ de \mathcal{E} que contém as rectas r e s . Pela proposição 4.2.4, $\bar{\mathcal{E}} = \bar{\mathbf{S}} \setminus \bar{m}$ onde $\bar{\mathbf{S}}$ é um plano de \mathbf{S} tal que $\bar{\mathbf{S}} \not\subseteq \mathbf{H}$ e $\bar{m} = \bar{\mathbf{S}} \cap \mathbf{H}$. Observemos que $r \subseteq \bar{r}$ e $s \subseteq \bar{s}$. Temos então que \bar{r} e \bar{s} são rectas de $\bar{\mathbf{S}}$ pelo que são rectas complanares. Como $r \cap s = \emptyset$ concluímos que as rectas r e s são paralelas. ■

Proposição 4.2.7 *Seja \mathbf{S} um espaço projectivo de dimensão $d \geq 3$ e ordem $n > 2$. Então todo o plano do espaço afim $\mathcal{E} = \mathbf{S} \setminus \mathbf{H}$ é um plano de Desargues.*

Demonstração. Seja $\bar{\mathcal{E}}$ um plano de \mathcal{E} . Pela proposição 4.2.4, $\bar{\mathcal{E}} = \bar{\mathbf{S}} \setminus \bar{m}$ onde $\bar{\mathbf{S}}$ é um plano de \mathbf{S} tal que $\bar{\mathbf{S}} \not\subseteq \mathbf{H}$ e $\bar{\mathbf{S}} \cap \mathbf{H} = \bar{m}$. Como a dimensão de \mathbf{S} é $d \geq 3$, pelo corolário 4.1.20, $\bar{\mathbf{S}}$ é um plano projectivo de Desargues. Uma vez que, para cada recta r de $\bar{\mathcal{E}}$, à classe de rectas paralelas $[r]$ corresponde um ponto H de \bar{m} , onde $H = \bar{r} \cap \mathbf{H}$, o plano projectivo $\bar{\mathcal{E}} \cup l_\infty$ é isomorfo a $\bar{\mathbf{S}}$. Concluímos assim que $\bar{\mathcal{E}}$ é um plano afim de Desargues. ■

⁴Dizemos que n rectas de um espaço afim \mathcal{E} são complanares se existe um plano de \mathcal{E} que contém as rectas.

Terminamos este trabalho com a seguinte questão: será que dado um número natural $n \geq 2$ existe um plano projectivo (afim) de ordem n ? No caso afirmativo, quantos existem não isomorfos?

Neste trabalho, vimos que existe pelo menos um plano projectivo (afim) de Desargues de ordem n , para todo o $n = p^r$, com p primo e $r \in \mathbb{N}$ (no caso em que $n = 2$, $n = 3$ ou $n = 4$ existe um único plano (a menos de isomorfismo)). Se $n \equiv 1, 2 \pmod{4}$ não existe um plano projectivo de ordem n a menos que $n = a^2 + b^2$ com $a, b \in \mathbb{N}$ (resultado encontrado em [10]). Usando a computação já foram encontradas respostas para determinadas ordens. No entanto, ainda não conhecemos uma resposta completa a esta questão.

Apêndice A

Corpos finitos

Um **anel de divisão**¹ é um terno $(\mathbb{K}, +, \times)$ que satisfaz as condições:

1. $(\mathbb{K}, +)$ é um grupo comutativo (com elemento neutro que denotamos por 0);
2. (\mathbb{K}^*, \times) , onde $\mathbb{K}^* = \mathbb{K} \setminus \{0\}$, é um grupo (com elemento neutro que denotamos por 1);
3. Para todos os $u, v, w \in \mathbb{K}$

$$(u + v) \times w = u \times w + v \times w \quad \text{e} \quad u \times (v + w) = u \times v + u \times w.$$

Dizemos que $(\mathbb{K}, +, \times)$ é um **anel de divisão finito** se \mathbb{K} é um conjunto com um número finito de elementos. A um anel de divisão $(\mathbb{K}, +, \times)$ em que (\mathbb{K}^*, \times) é um grupo comutativo chamamos **corpo**.

Teorema A.0.8 (Wedderburn) *Todo o anel de divisão finito é um corpo.*

O teorema seguinte classifica os corpos finitos.

Teorema A.0.9 *Existe um corpo finito com q elementos se e só se q é da forma p^n para algum primo p e algum inteiro positivo n . Além disso, dois corpos finitos com o mesmo número de elementos são isomorfos.*

¹Em Inglês “*skewfield*”.

Apêndice B

Unicidade (a menos de isomorfismo) de planos afins e projectivos de ordem 2 e de ordem 3

B.1 Existe um único plano afim \mathcal{A} de ordem 2

Designemos por A, B, C e D os pontos de \mathcal{A} . Cada ponto de \mathcal{A} pertence a três rectas e cada recta de \mathcal{A} contém dois pontos. Assim, as rectas que contêm A são: $\{A, B\}$, $\{A, C\}$ e $\{A, D\}$. É claro que $\{B, C\}$ e $\{B, D\}$ são as outras duas rectas que contêm o ponto B e $\{C, D\}$ é a recta que contém os pontos C e D (ver figura 1). Facilmente verificamos que esta construção é única a menos da etiquetagem dos pontos.

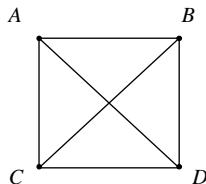


FIGURA 1

B.2 Existe um único plano afim \mathcal{A} de ordem 3 (a menos de isomorfismo)

Designemos por A, B, C, D, E, F, G, H e I os pontos de \mathcal{A} . Cada ponto de \mathcal{A} pertence a quatro rectas e cada recta de \mathcal{A} contém três pontos. Assim, o ponto A pertence a quatro rectas. Sem perda de generalidade, podemos supor que as rectas que contêm A são: $\{A, B, C\}$, $\{A, D, G\}$, $\{A, E, I\}$ e $\{A, F, H\}$ (ver figura 2). O ponto G também pertence a quatro rectas, uma das quais é a recta $\{A, D, G\}$. Existe uma única recta que contém os pontos G e H . Sem perda de generalidade, podemos supor que é a recta $\{G, H, I\}$. G e E pertencem a uma única recta.

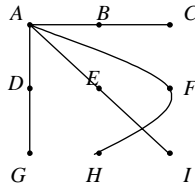


FIGURA 2

Tal recta não pode conter o ponto F pois, caso contrário, os pontos G, B e C teriam que pertencer à mesma recta, o que é falso. Temos então a recta $\{G, E, C\}$. E claro, a outra recta que contém G será a recta $\{G, B, F\}$ (ver figura 3).

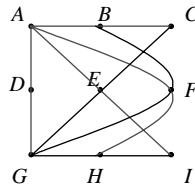


FIGURA 3

Existe uma única recta que contém os pontos B e D . Essa recta não pode conter os pontos E ou H pois, caso contrário, não existia nenhuma recta que contém os pontos B e I . Deste raciocínio concluímos que $\{B, E, H\}$ é a única recta que contém os pontos B e E e $\{B, D, I\}$ é a única recta que contém os pontos B e D (ver figura 4).

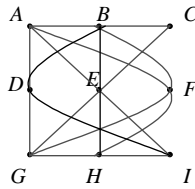


FIGURA 4

Já conhecemos três das quatro rectas que contém o ponto E . Os pontos D e E pertencem a uma única recta. Facilmente verificamos que a recta que contém os pontos D e E é a recta $\{D, E, F\}$ (ver figura 5).

Também é claro que $\{D, H, C\}$ é a única recta que contém os pontos D e H e $\{C, F, I\}$ é a única recta que contém os pontos C e F (ver figura 6).

Bibliografia

- [1] Artin, E., *Algèbre Géométrique*, Gauthier-Villars, New Paris, 1972.
- [2] Batten, L. M., *Combinatorics of finite geometries*, Cambridge University Press, New York, 1997.
- [3] Bennet, M. K., *Affine and Projective Geometry*, A Wiley-Interscience publication, New York, 1995.
- [4] Buekenhout, F., *Handbook of Incidence Geometry*, Buildings and Foundations, Elsevier, 1995.
- [5] Dembowski, P., *Finite Geometries*, Springer, New York, 1968.
- [6] Dénes, J. e Keedwell, A.D., *Latin Squares*, Annals of Discrete Mathematics **46**, North-Holland, 1991.
- [7] Hall, M., “Projective planes”, *Trans. Am. Math. Soc.*, **54**(1943), 229-277.
- [8] Hall, M., Correction to “Projective planes”, *Trans. Am. Math. Soc.*, **65**(1949), 473-474.
- [9] Hall, M., “Finite projective planes”, *Am. Math. Monthly*, **62**(1955), 18-24.
- [10] Hall, M. Jr., *The Theory of Groups*, Chelsea Publishing Company, New York, 1976.
- [11] Harper, M. A. e Saskatchewan, R., *Finite Inversive Planes*, A Report Submitted to the Faculty of Graduate Studies and Research in Partial Fulfillment of the Requirements for the Degree of Master of Science in Mathematics University of Regina, 1994.
- [12] Hughes, D. R. e Piper, F. C., *Projective Planes*, Springer-Verlage, New York, 1982.
- [13] Kadison, L. e Kromann, M.T., *Projective Geometry and Modern Algebra*, Birkhäuser, Boston, 1996.
- [14] Lam, C.W.H., Kolesova, G. e Thiel, L., “A computer search for finite projective planes of order 9”, *Discrete Mathematics*, **92**(1991), 187-195.
- [15] Pedoe, D., *An Introduction to Projective Geometry*, International Series of Monographs in Pure and Applied Mathematics **33**, Pergamon Press, Oxford, 1963.