Universidade de Aveiro Departamento de Matemática
2008

Gabriela Félix Monteiro

Valores Próprios da Soma de Matrizes

Universidade de Aveiro Departamento de Matemática
2008

Gabriela Félix Monteiro

Valores Próprios da Soma de Matrizes

Dissertação apresentada à Universidade de Aveiro para cumprimento dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre em Matemática (perfil de Ensino), realizada sob a orientação científica das Professoras Doutoras Enide Cascais Silva Andrade Martins e Virgínia Maria Marques Santos, Professoras Auxiliares do Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro.

agradecimentos

Aos meus pais.

Às minhas orientadoras, Professora Doutora Enide Cascais Silva Andrade Martins e Professora Doutora Virgínia Maria Marques Santos, pela orientação científica, apoio, disponibilidade e paciência.

À minha família.

A todos os colegas de Mestrado, pelo espírito de equipa que se instalou no grupo e que proporcionou o ultrapassar de muitos obstáculos.

Aos meus amigos.

o júri

presidente	Professor Doutor Domingos Moreira Cardoso Professor Catedrático da Universidade de Aveiro
vogais	Professora Doutora Isabel Maria Teixeira Matos Equiparada a Professora Adjunta do Instituto Superior de Engenharia de Lisboa Professor Doutor Carlos Martins Fonseca Professor Auxiliar da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade de Coimbra
	Professora Doutora Enide Cascais Silva Andrade Martins Professora Auxiliar do Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro Professora Doutora Virgínia Maria Marques Santos Professora Auxiliar do Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro

pensamento

“O dever cumprido deixa ainda uma sensação de culpa porque nunca se faz absolutamente tudo.”

Goethe

palavras-chave Valores próprios, pares de matrizes espectralmente completos, transformações elementares e de semelhança.

resumo No primeiro capítulo é feita uma pequena divagação por conceitos e tópicos da Teoria de Matrizes, necessária para a compreensão dos resultados dos capítulos seguintes.

No segundo capítulo é iniciado um estudo sobre os valores próprios da matriz $XAX^{-1}+B$, onde as matrizes A e B são matrizes fixas com entradas no corpo F e $X \in F^{n \times n}$ é uma matriz não singular, tendo como base a definição de par de matrizes espectralmente completo
.
Por fim, no terceiro capítulo é feita a identificação de todos os pares de matrizes espectralmente completos.

keywords

Eigenvalues, spectrally complete pairs of matrices, similarity transformations.

abstract

In the 1st chapter a small divagation is made about concepts and topics of Matrix Theory. This explanation is needed to a better understanding of the results of the next chapters.

In the 2nd chapter is started a study about eigenvalues of the matrix $XAX^{-1} + B$, where A, B are fixed matrices with entries in a field F and $X \in F^{n \times n}$ is a nonsingular matrix. With the purpose of studying the eigenvalues of $XAX^{-1} + B$, it was introduced in this chapter the concept of spectrally complete pair of matrices.

Finally, in 3rd chapter the identification of all spectrally complete pairs of matrices is made.

Valores Próprios da Soma de Matrizes

Universidade de Aveiro

Setembro de 2008

Conteúdo

Tabela de Símbolos

D	Domínio de integridade
F	Corpo
$\widetilde{F}$	Extensão algebricamente fechada do corpo F
$F[x]$	Anel dos polinómios na indeterminada x com coeficientes em F
$f(x)$	Polinómio na indeterminada x
$\mathrm{gr}(f)$	Grau do polinómio f
$A, B, \ldots$	Matrizes
$F[x]^{m\times n}$	Conjunto das matrizes de tamanho $m \times n$ com coeficientes em $F[x]$
$F^{m\times n}$	Conjunto das matrizes de tamanho $m \times n$ com coeficientes em F
I_n	Matriz identidade de tamanho $n \times n$
$f_i^{(n)}$	i-ésima coluna da matriz identidade I_n
$\mathrm{diag}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$	$\begin{bmatrix} \alpha_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_n \end{bmatrix}$
$\det A$	Determinante da matriz A
$\mathrm{car} A$	Característica da matriz A
$\mathrm{tr} A$	Traço da matriz A
A^T	Matriz transposta da matriz A
A^{-1}	Matriz inversa da matriz A
0_n	Matriz nula de tamanho $n \times n$
0	Matriz nula de tamanho apropriado
$d_k(A)$	Divisor determinantal de ordem k da matriz A
$i_k(A)$	Factor invariante de ordem k da matriz A
$C(f)$	Matriz companheira do polinómio f
$\chi(A)$	Número de indices k, tais que as entradas $a_{k,k+1}$ da matriz A são não nulas
$A \oplus B$	Matriz resultante da soma directa das matrizes A e B
$i(A)$	Número de polinómios invariantes da matriz A, diferentes de 1

Introdução

Sejam A e B matrizes quadradas com entradas num corpo F.

No primeiro capítulo são apresentados conceitos e resultados da teoria de matrizes considerados pertinentes para o desenvolvimento e percepção dos resultados apresentados nos dois capítulos seguintes.

No segundo capítulo é introduzido o conceito de par de matrizes espectralmente completo. O par (A, B) é espectralmente completo se, para todo o n-uplo $(c_1, \ldots, c_n)$ de elementos de F que satisfaz $c_1 + \cdots + c_n = \text{tr}A + \text{tr}B$, existe uma matriz não singular X tal que $XAX^{-1} + B$ tem valores próprios $c_1, \ldots, c_n$, ou, o que é equivalente, se para todo o n-uplo $(c_1, \ldots, c_n)$ de elementos de F que satisfaz $c_1 + \cdots + c_n = \text{tr}A + \text{tr}B$, existem matrizes A' e B' semelhantes a A e B, respectivamente, tais que $A' + B'$ tem valores próprios $c_1, \ldots, c_n$.

O mesmo conceito foi também estudado por F. C. Silva ([8]) e revelou-se muito importante para a resolução completa do problema da caracterização dos valores próprios de $A' + B$. Este resultado é apenas referenciado nesta dissertação.

Relativamente à matriz $A' + B$ conhecem-se alguns resultados sobre os possíveis números de polinómios invariantes diferentes de 1. Alguns resultados parciais podem ainda ser encontrados no segundo capítulo desta dissertação mas a sua completa descrição está apenas resolvida para corpos algebricamente fechados por F. C. Silva e Wasin So ([9]).

Neste segundo capítulo prova-se que, se existir uma matriz não singular $X \in F^{n \times n}$ tal que $XAX^{-1} + B$ é não derrogatória, então $i(A) + i(B) \leq n + 1$. F. C. Silva provou uma generalização deste resultado e estudou o seu recíproco ([10]).

Usando os resultados anteriores, F. C. Silva ([11]) identificou em todos os pares de matrizes espectralmente completos quando $F \neq \{0, 1\}$. Essa identificação é apresentada no 3º capítulo desta dissertação.

Capítulo 1

Preliminares

Este capítulo é dedicado à apresentação de alguma notação e resultados que são usados ao longo do trabalho.

Apresentam-se alguns tópicos de Teoria de Matrizes considerados importantes para a compreensão dos resultados apresentados nos capítulos seguintes e que podem ser encontrados, na sua generalidade, nos volumes existentes na lista de referências $[1, 2, 3, 4, 5, 6]$.

1.1 Algumas Convenções de Notação

Ao longo de todo o trabalho F denota um corpo.

Representa-se por $\widetilde{F}$ uma extensão algebricamente fechada de F.

Seja x uma indeterminada. Representa se por $F[x]$ o anel dos polinómios na indeterminada x com coeficientes em F.

Dado um polinómio $f \in F[x] \backslash \{0\}$ o grau de f representa-se por $\mathrm{gr}(f)$. Diz-se também que f é mónico se o monómio de maior grau que ocorre em f tem coeficiente 1.

Se f, $g \in F[x]$, $f|g$ significa que f divide g.

Se m e n forem inteiros positivos, $F[x]^{m\times n}$ e $F^{m\times n}$ representam os conjuntos das matrizes de tamanho $m \times n$ com coeficientes em $F[x]$ e F, respectivamente.

Representa-se por 0_n e 0, respectivamente, a matriz nula de tamanho $n \times n$ e a matriz nula de tamanho não especificado e por $f_i^{(n)}$ a i-ésima coluna da matriz identidade, I_n.

Sendo $A \in F^{m\times n}$, $\mathrm{car}(A)$, $\mathrm{tr}(A)$ e $\det(A)$ representam, respectivamente, a característica, o traço e o determinante da matriz A. Representa-se por A^T a transposta da matriz A e, se A for invertível, representa-se a sua inversa por A^{-1}.

Sejam $A \in F^{n\times m}$ e $i_1, \ldots, i_p, j_1, \ldots, j_q$ inteiros tais que

$$1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_p \leq n \quad \text{e} \quad 1 \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_q \leq m,$$

onde p e q são inteiros positivos. Denota-se por:

$A[i_1, \ldots, i_p \,|\, j_1, \ldots, j_q]$ a submatriz de A correspondente às linhas $i_1, \ldots, i_p$ e às colunas $j_1, \ldots, j_q$,

$A(i_1, \ldots, i_p \,|\, j_1, \ldots, j_q)$ a submatriz de A que se obtém da matriz A eliminando as linhas $i_1, \ldots, i_p$ e as colunas $j_1, \ldots, j_q$ e mantendo invariantes as restantes linhas e colunas.

Sejam $A_i \in F^{n_i\times n_i}$, $i \in \{1, 2, \ldots, p\}$. À matriz diagonal por blocos $\begin{bmatrix} A_1 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & A_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & A_p \end{bmatrix}$ chama-se soma directa das matrizes $A_1, A_2, \ldots, A_p$ e representa-se por $A_1 \oplus A_2 \oplus \cdots \oplus A_p$.

Dados elementos $a_1, \ldots, a_n \in F$, a matriz A cuja entrada (i, j) é $\delta_{ij}a_i$ designa-se por matriz diagonal e representa-se por $\mathrm{diag}(a_1, \ldots, a_n)$.

Representa-se por m.d.c.$(\alpha,\ \beta)$ o máximo divisor comum entre os elementos $\alpha,\ \beta \in D$, onde D é um domínio de integridade.

1.2 Factores Invariantes de uma Matriz Polinomial

Nesta secção definem-se factores invariantes e divisores elementares de uma matriz com entradas no anel de polinómios $F[x]$.

Definição 1.2.1. *Seja $A \in F[x]^{m\times n}$ com $r = \mathrm{car}A$. Sendo $j \in \{1, \ldots, r\}$, chama-se divisor determinantal de ordem j da matriz A ao máximo divisor comum mónico dos menores de ordem j de A e representa-se por $d_j(A)$.*

Por convenção, $d_0(A) = 1$.

Proposição 1.2.1. *Dada a matriz $A \in F[x]^{m\times n}$, tem-se que $d_{j-1}(A)|d_j(A)$, $j \in \{1, \ldots, r\}$.*

Demonstração. Recorra-se ao processo de indução sobre j para se proceder à demonstração do resultado.

Para $j = 1$, tem-se que $d_0(A) = 1$, que divide qualquer divisor determinantal.

Suponha-se agora que $j \geq 2$ e que $B = [b_{ij}]$ é submatriz de A de tamanho $j \times j$ arbitrária. Tem-se, pela regra de Laplace,

$$\det B = \sum_{i=1}^{j} (-1)^{1+i} b_{1i} \det B(1|i), \tag{1.1}$$

em que $\det B(1|i)$ é o determinante de uma submatriz de A de tamanho $(j-1) \times (j-1)$. Mas, por indução, tem-se que

$$d_{j-1}(A) \mid \det B(1|i), \ \ \forall i \in \{1, \ldots, j\}.$$

Assim sendo, pela igualdade (1.1), $d_{j-1}(A)$ divide todas as parcelas de $\det B$, pelo que

$$d_{j-1}(A) \mid \det B.$$

Como a submatriz B é arbitrária, conclui-se que

$$d_{j-1}(A) \mid d_j(A), \text{ para todo o } j \in \{1, \ldots, r\}.$$

$\square$

Definição 1.2.2. *Seja $A \in F[x]^{m\times n}$. Chama-se k-ésimo factor invariante da matriz A ao elemento*

$$i_k(A) = \frac{d_k(A)}{d_{k-1}(A)},$$

em que $k \in \{1, \ldots, r\}$.

Por convenção, $i_0(A) = 1$.

Prova-se que $i_{k-1}(A)|i_k(A)$, $k \in \{1, \ldots, r\}$.

Definição 1.2.3. *Sejam $A \in F[x]^{m\times n}$ com $r = \text{car}A$ e $i_1, \ldots, i_r$ os factores invariantes da matriz A. Suponha-se que:*

$$i_1 = p_1^{n_{11}} p_2^{n_{12}} \cdots p_t^{n_{1t}}$$

$$i_2 = p_1^{n_{21}} p_2^{n_{22}} \cdots p_t^{n_{2t}}$$

$$\cdots$$

$$i_r = p_1^{n_{r1}} p_2^{n_{r2}} \cdots p_t^{n_{rt}}$$

onde p_j, para $j \in \{1, \ldots, t\}$, são polinómios irredutíveis distintos dois a dois e $n_{kj} \geq 0$ para $k \in \{1, \ldots, r\}$ e $j \in \{1, \ldots, t\}$, são números inteiros. Os elementos $p_j^{n_{kj}}$ para os quais $n_{kj} > 0$ designam-se por divisores elementares de A.

Se F é um corpo algebricamente fechado, então os polinómios irredutíveis considerados são polinómios mónicos de grau 1 da forma $p_j = x - \alpha_j$ e, portanto,

$$(x - \alpha_j)^{n_{kj}}$$

são os divisores elementares da matriz $A \in F[x]^{m\times n}$.

1.3 Matrizes Equivalentes. Forma Normal de Smith

Nesta secção é apresentado o conceito de matrizes equivalentes com entradas em $F[x]$, bem como um resultado clássico de Teoria de Matrizes habitualmente designado por Forma Normal de Smith.

Definição 1.3.1. *Sejam A, $B \in F[x]^{m\times n}$. Diz-se que as matrizes A e B são equivalentes se existirem matrizes invertíveis $U \in F[x]^{m\times m}$ e $V \in F[x]^{n\times n}$ tais que $B = U\,A\,V$.*

Prova-se que toda a matriz $A \in F[x]^{m\times n}$ com car$A = r$ é equivalente a uma única matriz com a forma

$$\left[\begin{array}{c|c} \mathrm{diag}(f_1,\ldots,f_r) & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right], \tag{1.2}$$

onde $f_1,\ldots,f_r$ são polinómios mónicos tais que $f_1|\ldots|f_r$. Mais ainda, os polinómios $f_1,\ldots,f_r$ são os factores invariantes de A.

À matriz da forma (1.2) chama-se Forma Normal de Smith.

Daqui resulta que duas matrizes A , $B \in F[x]^{m\times n}$ são equivalentes se e só se têm os mesmos factores invariantes, donde, se e só se têm os mesmos divisores determinantais.

Tem-se ainda que A , $B \in F[x]^{m\times n}$ são equivalentes se e só têm a mesma característica e os mesmos divisores elementares, contando com as repetições.

Há ainda a considerar a equivalência de matrizes à esquerda e à direita. Assim sendo:

Definição 1.3.2. *Sejam A, $B \in F[x]^{m\times n}$. Diz-se que a matriz A é equivalente à esquerda à matriz B se existir uma matriz invertível $U \in F[x]^{m\times m}$ tal que $B = U\,A$.*

Repare-se que a matriz A ser equivalente à esquerda à matriz B é um caso particular da equivalência das matrizes A e B. Com efeito basta, na equivalência de matrizes, considerar $V = I_n$.

Definição 1.3.3. *Sejam A, $B \in F[x]^{m\times n}$. Diz-se que a matriz A é equivalente à direita à matriz B se existir uma matriz invertível $V \in F[x]^{n\times n}$ tal que $B = A\,V$.*

Mais uma vez se constata que a matriz A ser equivalente à direita à matriz B é um caso particular da equivalência das matrizes A e B. Basta agora considerar $U = I_m$.

De forma análoga se define equivalência de matrizes com entradas no corpo F. De facto,

Definição 1.3.4. *Sejam A, $B \in F^{m\times n}$. Diz-se que as matrizes A e B são equivalentes se existirem matrizes não singulares $U \in F^{m\times m}$ e $V \in F^{n\times n}$ tais que $B = U\,A\,V$.*

1.4 Matrizes Semelhantes. Matriz Companheira

Nesta secção define-se a relação de semelhança de duas matrizes com entradas no corpo F.

Dada a matriz $A \in F^{n\times n}$, seja $xI_n - A$ a sua matriz característica. Atendendo ao Teorema Fundamental para a Semelhança que estabelece que duas matrizes, com entradas num corpo, são semelhantes se e só se as respectivas matrizes características forem equivalentes, definem-se conceitos e estabelecem-se propriedades relativas a matrizes com entradas num corpo e à noção de semelhança de matrizes.

Definição 1.4.1. *Sejam A, $B \in F^{n\times n}$. Diz-se que as matrizes A e B são semelhantes se existir uma matriz não singular $P \in F^{n\times n}$ tal que $A = PBP^{-1}$.*

Definição 1.4.2. *Seja $A \in F^{n\times n}$.*

Chamam-se divisores elementares de A aos divisores elementares da matriz característica de A.

Chamam-se polinómios invariantes de A aos factores invariantes da matriz característica de A.

Tendo em conta que as matrizes A, $B \in F^{n\times n}$ são semelhantes se e só se as matrizes $xI_n - A$ e $xI_n - B$ forem equivalentes, conclui-se que as matrizes A e B são semelhantes se e só se têm os mesmos polinómios invariantes.

A matriz característica de A é não singular pois o polinómio característico de $A \in F^{n\times n}$, $\det(xI_n - A)$, é diferente do polinómio nulo. Assim, a matriz $xI_n - A$ tem precisamente n factores invariantes.

Representa-se por $r = i(A)$ o número de polinómios invariantes da matriz A que são diferentes de 1.

Proposição 1.4.1. *Sendo $A \in F^{n\times n}$, o seu polinómio característico é igual ao produto dos seus polinómios invariantes.*

Demonstração. Sejam $f_1, \dots, f_n$ os polinómios invariantes da matriz A tais que $f_1 \mid \cdots \mid f_n$. Note-se que $f_1 \mid \cdots \mid f_n$ são os factores invariantes de $xI_n - A$. Assim, pela Forma Normal de Smith existem $U, V \in F[x]^{n\times n}$, matrizes invertíveis, tais que

$$U(xI_n - A)V = \operatorname{diag}(f_1, \dots, f_n).$$

Desta igualdade resulta que

$$\det(U(xI_n - A)V) \quad = \quad \det(\text{diag}(f_1, \ldots, f_n)) \ ,$$

ou seja, pelas propriedades dos determinantes,

$$\det(UV)\det(xI_n - A) \quad = \quad f_1 \cdots f_n.$$

Como as matrizes U e V são invertíveis, tem-se que $\det(UV) \neq 0$. Por outro lado, o polinómio característico e os polinómios invariantes de A são mónicos, pelo que $\det(UV) = 1$ e, portanto,

$$\det(xI_n - A) \quad = \quad f_1 \cdots f_n \ .$$

□

Definição 1.4.3. *Seja $A \in F^{n \times n}$. Diz-se que o polinómio $f \in F[x]$ é um polinómio anulador de A se $f(A) = 0$, onde $f(A) = A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \cdots + a_1 A + a_0 I_n$.*

Pelo Teorema de Hamilton-Cayley, se $p(x)$ for o polinómio característico da matriz A, tem-se que $p(A) = 0$. Mais, a aplicação $\phi : F[x] \mapsto F^{n \times n}$ definida por $\phi(f) = f(A)$, para qualquer $f \in F[x]$, é um homomorfismo de anéis. Assim, o conjunto $\{g(x) \in F[x] : g(A) = 0\}$ é um ideal de $F[x]$. Como $F[x]$ é um domínio de ideais principais existe um único polinómio mónico de grau mínimo $h(x) \in F[x] \backslash \{0\}$ tal que $h(A) = 0$.

Definição 1.4.4. *Chama-se polinómio mínimo de $A \in F^{n \times n}$ ao polinómio $h \in F[x] \backslash \{0\}$ mónico de grau mínimo tal que $h(A) = 0$.*

Se F for algebricamente fechado, pode-se estabelecer outro facto importante:

Sejam $A \in F^{n \times n}$ e $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ os seus valores próprios. Então, existe uma matriz $U \in F^{n \times n}$ não singular, tal que

$$UAU^{-1} = T = [t_{ij}]$$

é uma matriz triangular inferior, com $t_{ii} = \lambda_i, i \in \{1, \ldots, n\}$.

Definição 1.4.5. *Seja $f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, $n \geq 1$, um polinómio de $F[x]$. Chama-se matriz companheira de f à matriz*

$$C(f) = [f_2^{(n)} \cdots f_n^{(n)} a]^T \ \ \text{onde} \ \ a = [-a_0 \cdots - a_{n-1}]^T. \tag{1.3}$$

Proposição 1.4.2. *Seja $f \in F[x]$ um polinómio mónico de grau n diferente de 1. Então*

$$\det(xI_n - C(f)) = f(x).$$

Demonstração. Recorra-se ao processo de indução sobre n para se proceder à demonstração.

Seja $C(f)$ a matriz companheira do polinómio f.

Para $n = 1$, tem-se que $f(x) = x + a_0$, pelo que $C(f) = [-a_0]$. Então $xI_1 - C(f) = [x + a_0]$ e, portanto,

$$d_1(xI_1 - C(f)) = x + a_0 = f(x).$$

Suponha-se agora que $n \geq 2$, e calcule-se o determinante da matriz $xI_n - C(f)$ desenvolvendo--o segundo a primeira coluna da respectiva matriz, usando a regra de Laplace.

$$\det(xI_n - C(f)) = \det \left[\begin{array}{c:cccc} x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-2} & x + a_{n-1} \end{array}\right] =$$

$$= (-1)^2\, x \det \begin{bmatrix} x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-2} & x + a_{n-1} \end{bmatrix} + a_0(-1)^{n+1} \det \begin{bmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & x & -1 \end{bmatrix}$$

Usando a hipótese de indução, tem-se

$$\begin{aligned} \det(xI_n - C(f)) &= x(x^{n-1} + a_{n-1}x^{n-2} + \cdots + a_2x + a_1) + a_0(-1)^{n+1}(-1)^{n-1} \\ &= x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0 \\ &= f(x). \end{aligned}$$

Está então provado que $\det(xI_n - C(f)) = f(x)$, para todo o $n \in \mathbb{N}$. $\square$

Proposição 1.4.3. *Seja $f \in F[x]$ um polinómio mónico de grau $n \geq 1$. As matrizes*

$$xI_n - C(f) \ \ e \ \operatorname{diag}(1, \ldots, 1, f)$$

são equivalentes.

Demonstração. Suponha-se que se tem $f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1x + a_0$ com $a_i \in F$, $i \in \{0, \ldots, n-1\}$. Portanto

$$xI_n - C(f) = \begin{bmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-2} & x + a_{n-1} \end{bmatrix}.$$

Seja $k \in \{1, \ldots, n-1\}$, arbitrário. Seja C_k a submatriz de $xI_n - C(f)$ definida por

$$C_k = (xI_n - C(f))[1, 2, \ldots, k \mid 2, \ldots, k+1].$$

Então C_k é uma matriz de tamanho $k \times k$ tal que $\det(C_k) = (-1)^k$. Consequentemente o divisor determinantal de ordem k de $xI_n - C(f)$ é igual a 1. Tem-se então $d_k(xI_n - C(f)) = 1$ e, portanto, dada a arbitrariedade de $k \in \{1, \ldots, n-1\}$ tem-se que $i_k(xI_n - C(f)) = 1$ e, pela Proposição 1.4.2

$$d_n(xI_n - C(f)) = \det(xI_n - C(f)) = f(x).$$

Assim, a Forma Normal de Smith de $xI_n - C(f)$ é $\mathrm{diag}(1, \ldots, 1, f)$. $\square$

1.5 Matrizes Elementares. Transformações Elementares e de Semelhança

Seja D um domínio de integridade. Definem-se, nesta secção, matrizes elementares e transformações elementares sobre as linhas ou colunas de uma matriz com entradas num domínio de integridade. Verifica-se sem grande dificuldade que cada transformação elementar sobre as linhas ou colunas de uma matriz pode ser escrita como o produto adequado da matriz por uma matriz elementar.

As transformações:

a_1) trocar, na matriz A, as linhas i e j, mantendo as restantes linhas invariantes,

a_2) somar, na matriz A, a linha j multiplicada por $a \in D$ à linha i, mantendo as restantes entradas invariantes,

a_3) multiplicar, na matriz A, a linha i por c, onde c é uma unidade de D, mantendo as restantes entradas invariantes,

b_1) trocar, na matriz A, as colunas i e j, mantendo as restantes colunas invariantes,

b_2) somar, na matriz A, a coluna j multiplicada por $a \in D$ à coluna i, mantendo as restantes entradas invariantes,

b_3) multiplicar, na matriz A, a coluna i por c, onde c é uma unidade de D, mantendo as restantes entradas invariantes,
designam-se por transformações elementares.

Definam-se de seguida matrizes elementares.

Definição 1.5.1. *Designa-se por matriz elementar uma matriz com alguma das três formas indicadas de seguida:*

1) $P(i,j)$, $i,j \in \{1,...,n\}$, $i \neq j$, a matriz que se obtém da matriz identidade I_n, trocando as linhas i e j e mantendo as restantes linhas invariantes,

2) $S(a;i,j)$, com $a \in F$, $i,j \in \{1,...,n\}$, $i \neq j$, a matriz que se obtém da matriz identidade I_n substituindo a entrada (i,j) por a e mantendo as restantes entradas invariantes,

3) $M(c,i)$, com c uma unidade de D, $i \in \{1,...,n\}$, a matriz que se obtém da matriz identidade I_n substituindo a entrada (i,i) por c e mantendo as restantes entradas invariantes.

Seja A uma matriz $n \times n$. É um exercício simples verificar que:

a_1) $P(i,j)A$ é a matriz que se obtém de A trocando as suas i-ésima e j-ésima linhas e mantendo invariantes as restantes linhas;

a_2) $S(a;i,j)A$ é a matriz que se obtém de A somando a sua j-ésima linha multiplicada por a à sua i-ésima linha e mantendo invariantes as restantes linhas;

a_3) $M(c,i)A$ é a matriz que se obtém de A multiplicando a sua i-ésima linha por c, onde c é uma unidade de D, e mantendo invariantes as restantes linhas;

b_1) $AP(i,j)$ é a matriz que se obtém de A trocando as suas i-ésima e j-ésima colunas e mantendo invariantes as restantes colunas;

b_2) $AS(a;i,j)$ é a matriz que se obtém de A somando a sua i-ésima coluna multiplicada por a à sua j-ésima coluna e mantendo invariantes as restantes colunas;

b_3) $AM(c,i)$ é a matriz que se obtém de A multiplicando a sua i-ésima coluna por c, onde c é uma unidade de D, e mantendo invariantes as restantes colunas.

Repare-se então que duas matrizes são equivalentes se e só se é possível obter uma a partir da outra efectuando uma sequência de transformações elementares sobre as suas linhas e/ou colunas.

Definem-se, de seguida, transformações elementares de semelhança.

Observe-se, em primeiro lugar, que as matrizes elementares são invertíveis e que a matriz inversa de cada uma das matrizes elementares também é uma matriz elementar. Com efeito tem-se que:

$$\begin{aligned} [P(i,j)]^{-1} &= P(i,j), \\ [S(a;i,j)]^{-1} &= S(-a;i,j)\ , \\ [M(c,j)]^{-1} &= M(c^{-1},j), \text{ onde c é uma unidade de } D. \end{aligned}$$

Seja Z uma matriz elementar de uma das três formas indicadas. Efectuar uma transformação de semelhança sobre A é transformá-la na matriz ZAZ^{-1}, pelo que as matrizes A e B tais que $B = P(i,j)\,A\,P(i,j)$, ou $B = S(a;i,j)\,A\,S(-a;i,j)$, ou $B = M(c,j)\,A\,M(c^{-1},j)$ são semelhantes.

A operação ZAZ^{-1} tem um dos seguintes resultados:

$a)$ trocar as linhas i e j de A e, em seguida as colunas i e j, mantendo as restantes linhas e colunas inalteradas,

$b)$ somar a linha j de A, multiplicada por $a \in D$, à linha i e, seguidamente, subtrair a coluna i, multiplicada por a, à coluna j, mantendo as restantes linhas e colunas inalteradas,

$c)$ multiplicar a linha j de A por c, uma unidade de D, e, em seguida, multiplicar a coluna j por c^{-1}, mantendo as restantes linhas e colunas inalteradas.

Atendendo a que toda a matriz invertível é produto de matrizes elementares, duas matrizes quadradas A e B são semelhantes se e só se é possível obter uma a partir da outra efectuando uma sequência de transformações de semelhança.

1.6 Forma Normal Companheira. Matriz não Derrogatória

São apresentadas, nesta secção, duas formas para a semelhança de matrizes, a Forma Normal de Jordan e a Segunda Forma Normal para a Semelhança.

Proposição 1.6.1. *Sejam $A \in F^{n\times n}$, $f_1, \dots, f_r \in F[x]$ polinómios mónicos diferentes de 1 tais que $f_1 \mid \dots \mid f_r$, com $r = i(A)$.*

Então a matriz A é semelhante à matriz $C(f_1) \oplus \cdots \oplus C(f_r)$ se e só se $f_1, \dots, f_r$ são polinómios invariantes da matriz A.

Demonstração. Sejam $i \in \{1, \dots, r\}$ arbitrário e $d_i = \mathrm{gr}(f_i)$. Suponhamos que a matriz A é semelhante à matriz $B = C(f_1) \oplus \cdots \oplus C(f_r)$. Como, pela Proposição 1.4.3, $xI_{d_i} - C(f_i)$ é equivalente a $\text{diag}(1,\ldots,1,f_i)$, existem matrizes invertíveis P_i e $Q_i \in F[x]^{d_i\times d_i}$ tais que

$$P_i(xI_{d_i} - C(f_i))Q_i = \text{diag}(1,\ldots,1,f_i).$$

Então $xI_n - B$ é equivalente a

$$(P_1 \oplus \cdots \oplus P_r)(xI_n - B)(Q_1 \oplus \cdots \oplus Q_r).$$

Permutando convenientemente as linhas e colunas desta matriz obtém-se a matriz

$$\text{diag}(1,1,\ldots,1,f_1,\ldots,f_r).$$

Como esta é a Forma Normal de Smith da matriz $xI_n - B$, tem-se que $f_1,\ldots,f_r$ são os polinómios invariantes de B, diferentes de 1. Como as matrizes A e B são semelhantes, então $f_1,\ldots,f_r$ também são os polinómios invariantes de A diferentes de 1.

Reciprocamente, suponha-se que $f_1|\cdots|f_r$ são os factores invariantes de $xI_n - A$ diferentes de 1. Seja $i \in \{1,\ldots,r\}$, arbitrário. Como

$$P_i(xI_{d_i} - C(f_i))Q_i = \text{diag}(1,1,\ldots,f_i),$$

tem-se que,

$$(P_1 \oplus \cdots \oplus P_r)((xI_{d_1} - C(f_1)) \oplus \cdots \oplus (xI_{d_r} - C(f_r)))(Q_1 \oplus \cdots \oplus Q_r) =$$
$$= P_1(xI_{d_1} - C(f_1))Q_1 \oplus \cdots \oplus P_r(xI_{d_r} - C(f_r))Q_r$$

é equivalente a

$$\text{diag}(1,\ldots,1,f_1,\ldots,f_r)$$

após conveniente permutação de linhas e colunas. Então, $1,\ldots,1,f_1,\ldots,f_r$ são os factores invariantes de $xI_n - B$, onde $B = C(f_1) \oplus \cdots \oplus C(f_r)$. Como duas matrizes são semelhantes se e só se têm os mesmos polinómios invariantes e, como $xI_n - A$ e $xI_n - B$ têm os mesmos factores invariantes, tem-se que A e B têm os mesmos polinómios invariantes e, portanto, são semelhantes. $\square$

A matriz $C(f_1) \oplus \cdots \oplus C(f_r)$ onde $f_1, f_2, \ldots, f_r$ são os polinómios invariantes de A diferentes de 1, tais que $f_1|\ldots|f_r$, designa-se por Forma Normal Companheira da matriz A.

Chama-se bloco de Jordan de tamanho $k \times k$ associado a $\lambda_0 \in F$ à matriz

$$J_k(\lambda_0) = \begin{bmatrix} \lambda_0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \lambda_0 \end{bmatrix} \in F^{k\times k}.$$

Em particular $J_1(\lambda_0) = [\lambda_0]$. Repare-se também que $(x - \lambda_0)^k$ é o único divisor elementar, diferente de 1, da matriz $xI_k - J_k$.

Seja $A \in F^{n\times n}$ e sejam $\lambda_1, \ldots, \lambda_s \in F$ e $\gamma_1, \ldots, \gamma_s$ inteiros positivos tais que $\gamma_1 + \cdots + \gamma_s = n$. Prova-se que a matriz A é semelhante a

$$J = J_{\gamma_1} \oplus \cdots \oplus J_{\gamma_s}$$

se e só se

$$(x - \lambda_1)^{\gamma_1}, \ldots, (x - \lambda_s)^{\gamma_s}$$

são os divisores elementares de A.

A matriz J é única, a menos da ordem dos blocos de Jordan e designa-se por Forma Normal de Jordan.

Proposição 1.6.2. *Sejam $A \in F^{n\times n}$ e $f_1, \ldots, f_n$ polinómios invariantes de A tais que $f_1|\ldots|f_n$. O polinómio mínimo da matriz A é f_n.*

Demonstração. Seja r o número de polinómios invariantes de A que são diferentes de 1. Então, pela Proposição 1.6.1, a matriz A é semelhante à matriz

$$B = C(f_{n-r+1}) \oplus \cdots \oplus C(f_n).$$

Seja $j \in \{n - r + 1, \ldots, n\}$. De acordo com o Teorema de Hamilton-Cayley,

$$f_j(C(f_j)) = 0.$$

Como $f_j|f_n$, $f_n(C(f_j)) = 0$. Assim,

$$f_n(A) = f_n(C(f_{n-r+1})) \oplus \cdots \oplus f_n(C(f_n)) = 0,$$

o que mostra que o polinómio mínimo de A, μ, divide f_n.

Por outro lado,

$$0 = \mu(A) = \mu(C(f_{n-r+1})) \oplus \cdots \oplus \mu(C(f_n)),$$

pelo que

$$\mu(C(f_n)) = 0,$$

o que mostra que o polinómio mínimo de $C(f_n)$, f_n divide μ. □

Proposição 1.6.3. *Se $A \in F^{n\times n}$, com F algebricamente fechado, então A é semelhante a uma matriz diagonal sobre F se e só se as raízes do seu polinómio mínimo são distintas.*

Demonstração. Caso as raízes do polinómio mínimo da matriz A sejam distintas, ou seja, os divisores elementares do polinómio $xI - A$ têm grau 1, da Forma Normal de Jordan conclui-se que A é semelhante a uma matriz diagonal.

Suponha-se agora que A é semelhante à matriz $\text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$. Então, tem-se que as matrizes $xI_n - A$ e $\text{diag}(x - \lambda_1, x - \lambda_2, \ldots, x - \lambda_n)$ são equivalentes. Os divisores elementares de $xI_n - A$ são então divisores de $x - \lambda_i$, $i \in \{1, \ldots, n\}$, pelo que terão que ser de grau 1. □

A matriz diagonal atrás referida designa-se por Segunda Forma Normal para a Semelhança.

Definição 1.6.1. *Seja $A \in F^{n \times n}$. Diz-se que A é não derrogatória se o seu polinómio mínimo coincidir com o seu polinómio característico. Caso contrário diz-se derrogatória.*

Pode verificar-se que a matriz companheira de um polinómio é não derrogatória. De facto, atendendo à definição de polinómios invariantes de uma matriz quadrada sobre um corpo F, conclui-se que os polinómios invariantes da matriz $C(f)$ são $1, \ldots, 1, f$. Pela Proposição 1.6.2, conclui-se que o polinómio mínimo de $C(f)$ é exactamente f. Pela Proposição 1.4.2, o polinómio característico é exactamente f, o que permite concluir que a matriz $C(f)$ é não derrogatória.

Conclui-se então que se $f_1, \ldots, f_r$, $r = i(A)$, forem os polinómios invariantes da matriz A diferentes de 1, ordenados de modo que $f_1 | \ldots | f_r$, então os polinómios mínimo e característico são, respectivamente $h = f_r$ e $f = f_1 \cdots f_r$. Logo uma matriz $A \in F^{n \times n}$ é não derrogatória se e só se $i(A) = 1$.

Seja $\widetilde{F}$ uma extensão algebricamente fechada do corpo F e seja

$$R_{\widetilde{F}}(A) = \min_{\lambda \in \widetilde{F}} \text{car}(A - \lambda I_n).$$

Observe-se que no cálculo de $R_{\widetilde{F}}(A)$ se pode substituir a matriz A por qualquer matriz semelhante a A. De facto, sendo $B = U^{-1}AU$, com U matriz não singular, uma matriz semelhante a A e, atendendo a que

$$\begin{aligned} \text{car}(A - \lambda I_n) &= \text{car}(U^{-1}(A - \lambda I_n)U) \\ &= \text{car}(U^{-1}AU - U^{-1}(\lambda I_n)U) \\ &= \text{car}(B - \lambda I_n), \end{aligned}$$

tem-se

$$R_{\widetilde{F}}(A) = R_{\widetilde{F}}(B).$$

Proposição 1.6.4. *Sejam $\widetilde{F}$ uma extensão algebricamente fechada de F e $A \in F^{n\times n}$. Então $R_{\widetilde{F}}(A) = n - i(A)$.*

Demonstração. Pela observação feita acima podemos substituir a matriz A pela sua Forma Normal Companheira.

Sejam $f_1|\ldots|f_r$ os polinómios invariantes de A diferentes de 1 e

$$K = C(f_1) \oplus \cdots \oplus C(f_r)$$

a sua Forma Normal Companheira.

Seja $\beta \in \widetilde{F}$. Então

$$\operatorname{car}(K - \beta I_n) = \sum_{i=1}^{r} \operatorname{car}(C(f_i) - \beta I_{n_i})$$

onde para todo o $i \in \{1, \ldots, r\}$, $n_i = \operatorname{gr}(f_i)$. Tendo em atenção a forma da matriz $C(f_i)$, temos que, para todo o $\beta \in \widetilde{F}$,

$$\begin{aligned} \operatorname{car}(K - \beta I_n) &\geq \textstyle\sum_{i=1}^{r}(n_i - 1) \\ &= \textstyle\sum_{i=1}^{r} n_i - r \\ &= n - r. \end{aligned}$$

Por outro lado, seja β_0 uma raiz de f_1. Como $f_1|\ldots|f_r$, β_0 é uma raiz de f_i, $i \in \{1, \ldots, r\}$, que é o polinómio característico de $C(f_i)$. Portanto, β_0 é valor próprio de $C(f_i)$ e

$$\operatorname{car}(C(f_i) - \beta_0 I_{n_i}) < n_i.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \operatorname{car}(K - \beta_0 I_n) &= \textstyle\sum_{i=1}^{r} car(C(f_i) - \beta_0 I_{n_i}) \\ &\leq \textstyle\sum_{i=1}^{r}(n_i - 1) \\ &= \textstyle\sum_{i=1}^{r} n_i - r \\ &= n - r. \end{aligned}$$

Assim tem-se

$$R_{\widetilde{F}}(K) = R_{\widetilde{F}}(A) = n - r = n - i(A).$$

□

Observe-se que $A \in F^{n\times n}$ é não derrogatória se e só se $i(A) = 1$. Assim, $A \in F^{n\times n}$ é não derrogatória se e só se $R_{\widetilde{F}}(A) = n - 1$.

Capítulo 2

Sobre os Valores Próprios da Matriz $XAX^{-1} + B$

Neste capítulo inicia-se o estudo sobre os possíveis valores próprios de $XAX^{-1} + B$, onde A e B são matrizes fixas com entradas num corpo F e X percorre o conjunto das matrizes não singulares do mesmo tamanho que A. Este problema foi completamente resolvido por F. C. Silva ([8]). Observe-se que, este estudo, pode ser feito para a matriz $XAX^{-1} + YBY^{-1}$ quando X e Y são não singulares. No entanto, como as matrizes $XAX^{-1} + YBY^{-1}$ e $(Y^{-1}X)A(Y^{-1}X)^{-1}+B$ são semelhantes é suficiente estudar os valores próprios de $XAX^{-1}+B$. Observe-se ainda que os papeis de A e B podem ser trocados.

Pretende-se também indicar em que condições existe uma matriz não singular $X \in F^{n\times n}$ tal que a matriz $XAX^{-1} + B$ é não derrogatória.

Apresenta-se a definição de par de matrizes espectralmente completo.

Sejam (A, B) um par de matrizes de $F^{n\times n}$ e $\widetilde{F}$ uma extensão algébrica de F contendo os valores próprios de A e B.

Definição 2.1. *O par (A, B) é espectralmente completo se para cada n-uplo $(v_1, \ldots, v_n)$ de elementos de F satisfazendo $v_1 + \cdots + v_n = tr\ A + tr\ B$, existe uma matriz não singular X tal que $XAX^{-1} + B$ tem valores próprios $v_1, \ldots, v_n$.*

Repare-se que se o par (A, B) é espectralmente completo também o par $(A, B+(\alpha+\beta)I_n)$ é espectralmente completo, para $\alpha, \beta \in F$. De facto, seja $(v_1', \ldots, v_n')$ um n-uplo de elementos de F tais que

$$v_1' + \cdots + v_n' = \mathrm{tr}A + \mathrm{tr}(B + (\alpha + \beta)I_n).$$

Pretende-se provar que existe uma matriz não singular $X \in F^{n\times n}$ tal que a matriz $XAX^{-1}+$

$B + (\alpha + \beta)I_n$ tem valores próprios $v_1^{'}, \ldots, v_n^{'}$.

De

$$v_1^{'} + \cdots + v_n^{'} = \mathrm{tr}A + \mathrm{tr}(B + (\alpha + \beta)I_n)$$

vem

$$v_1^{'} - (\alpha + \beta) + \cdots + v_n^{'} - (\alpha + \beta) = \mathrm{tr}A + \mathrm{tr}B.$$

Como o par (A, B) é espectralmente completo, existe uma matriz não singular $X \in F^{n \times n}$ tal que $XAX^{-1} + B$ tem valores próprios $v_1^{'} - (\alpha + \beta), \ldots, v_n^{'} - (\alpha + \beta)$. Ora, isso significa que $XAX^{-1} + B + (\alpha + \beta)I_n$ tem valores próprios $v_1^{'}, \ldots, v_n^{'}$ e portanto $(A, B + (\alpha + \beta)I_n)$ é espectralmente completo.

Repare-se também que se a matriz $N = XAX^{-1} + B$ é não derrogatória, para $\alpha, \beta \in \widetilde{F}$, também a matriz $N + (\alpha + \beta)I_n$ é não derrogatória. Com efeito, suponha-se que a matriz $N + (\alpha + \beta)I_n$ é derrogatória. Então

$$R_{\widetilde{F}}(N + (\alpha + \beta)I_n) < n - 1,$$

pelo que existe $v \in \widetilde{F}$ tal que

$$\mathrm{car}(vI_n - (N + (\alpha + \beta)I_n)) < n - 1,$$

o que é equivalente a

$$\mathrm{car}((v - \alpha - \beta)I_n - N) < n - 1,$$

ou seja, existe $t = v - \alpha - \beta \in \widetilde{F}$ tal que

$$\mathrm{car}(tI_n - N) < n - 1,$$

o que implica que

$$R_{\widetilde{F}}(N) < n - 1$$

o que é absurdo uma vez que a matriz N é não derrogatória.

Proposição 2.1. *Seja F um corpo com pelo menos três elementos. Seja $\delta \in F \backslash \{0\}$. Então existem elementos a, $b \in F \backslash \{0\}$ tais que $\delta = a + b$.*

Demonstração. Como F tem mais que dois elementos existem a', $a'' \in F \backslash \{0\}$ tais que $a' \neq a''$. Seja $b' = \delta - a'$ e $b'' = \delta - a''$. Facilmente se constata que $b' \neq b''$ e pelo menos um deles é não nulo pois, caso contrário, ter-se-ia $a' = a''$.

Suponha-se que $b' \neq 0$. Seja $b = b'$ e tome-se $a = a'$.

Se $b' = 0$, então $b'' \neq 0$. Tome-se $b = b''$ e $a = a''$.

Então $a + b = \delta$ com $a \neq 0$ e $b \neq 0$. $\square$

O próximo teorema apresenta uma condição necessária para que a matriz $XAX^{-1} + B$, com X não singular, seja não derrogatória.

Teorema 2.1. *Sejam $A, B \in F^{n\times n}$. Se existe uma matriz $X \in F^{n\times n}$ não singular tal que $XAX^{-1} + B$ é não derrogatória, então $i(A) + i(B) \leq n + 1$.*

Demonstração. Sejam $\alpha,\ \beta \in \widetilde{F}$. Se a matriz $N = XAX^{-1} + B$ é não derrogatória, também a matriz $N + (\alpha + \beta)I_n$ é não derrogatória e, portanto, $\mathrm{car}(N + (\alpha + \beta)I_n) \geq n - 1$. Tem-se também que

$$\mathrm{car}(N + (\alpha + \beta)I_n) \quad \leq \quad \mathrm{car}(A + \alpha I_n) + \mathrm{car}(B + \beta I_n)\ ,$$

ou seja,

$$\mathrm{car}(X(A + \alpha I_n)X^{-1} + (B + \beta I_n)) \quad \leq \quad \mathrm{car}(A + \alpha I_n) + \mathrm{car}(B + \beta I_n)$$

e, portanto,

$$\mathrm{car}(A + \alpha I_n) + \mathrm{car}(B + \beta I_n) \quad \geq \quad n - 1,$$

ou seja,

$$\mathrm{car}(A + \alpha I_n) + \mathrm{car}(B + \beta I_n) \geq n - 1,\ \forall \alpha,\ \beta \in \widetilde{F}.$$

Atendendo à definição de $R_{\widetilde{F}}(A)$ e $R_{\widetilde{F}}(B)$ tem-se

$$R_{\widetilde{F}}(A) + R_{\widetilde{F}}(B) \geq n - 1.$$

Por outro lado,

$$i(A) = n - R_{\widetilde{F}}(A) \text{ e } i(B) = n - R_{\widetilde{F}}(B),$$

pelo que

$$i(A) + i(B) \leq n + 1.$$

$\square$

Tendo em atenção a definição de par de matrizes espectralmente completo para a soma prova-se o seguinte teorema:

Teorema 2.2. *Sejam $A, B \in F^{n\times n}$. Suponha-se que o corpo F tem pelo menos 3 elementos. Se o par (A, B) é espectralmente completo, então $i(A) + i(B) \leq n$.*

Demonstração. Atendendo à Proposição 1.6.4, provar que

$$i(A) + i(B) \leq n$$

é equivalente a mostrar que

$$\text{car}(A + \alpha I_n) + \text{car}(B + \beta I_n) \geq n, \quad \text{para todos } \alpha,\, \beta \in \widetilde{F}.$$

Considerem-se, de seguida, os dois casos:

Caso 1 $\alpha + \beta \in F$.

Escolha-se $\gamma \in F\backslash\{0\}$. Como F tem pelo menos 3 elementos, existem em F dois elementos não nulos a e b, que satisfazem

$$a + b = \text{tr}(A + B + (\alpha + \beta)I_n) - (n - 2)\gamma.$$

Assim,

$$\text{tr}A + \text{tr}(B + (\alpha + \beta)I_n) = a + b + (n - 2)\gamma,$$

ou seja,

$$\text{tr}(A + B + (\alpha + \beta)I_n) = (n - 2)\gamma + a + b.$$

O par (A, B) é espectralmente completo e, como consequência, o par $(A, B + (\alpha + \beta)I_n)$ também é espectralmente completo, pelo que existe uma matriz não singular X tal que $C = XAX^{-1} + B + (\alpha + \beta)I_n$ tem valores próprios $\gamma, \gamma, \ldots, \gamma, a, b$. Mas,

$$\begin{aligned} C &= XAX^{-1} + B + (\alpha + \beta)I_n \\ &= XAX^{-1} + \alpha I_n + B + \beta I_n \\ &= X(A + \alpha I_n)X^{-1} + (B + \beta I_n). \end{aligned}$$

Como todos os valores próprios de C são não nulos,

$$\begin{aligned} n &= \text{car } C \\ &\leq \text{car } (X(A + \alpha I_n)X^{-1}) + \text{car}(B + \beta I_n). \\ &= \text{car } (A + \alpha I_n) + \text{car}(B + \beta I_n). \end{aligned}$$

Provou-se que

$$\text{car}(A + \alpha I_n) + \text{car}(B + \beta I_n) \geq n, \forall \alpha, \beta \in \widetilde{F}.$$

Em particular, esta desigualdade vale para o valor mínimo da característica. Por isso pode-se dizer que

$$R_{\widetilde{F}}(A) + R_{\widetilde{F}}(B) \quad \geq \quad n.$$

Caso 2 $\alpha + \beta \notin F$.

Como o par (A, B) é espectralmente completo, existe então uma matriz não singular $X \in F^{n \times n}$, tal que $0, \ldots, 0, \mathrm{tr}(A + B)$ são os valores próprios da matriz $D = XAX^{-1} + B$. Assim sendo, os valores próprios de $D + (\alpha + \beta)I$ são os elementos $\alpha + \beta, \ldots, \alpha + \beta, \mathrm{tr}(A + B) + \alpha + \beta$, pelo que a matriz $D + (\alpha + \beta)I_n$ é não singular. Pode-se assim dizer que $\mathrm{car}(D + (\alpha + \beta)I)$ é n. Assim, tal como no caso anterior,

$$\mathrm{car}(A + \alpha I_n) + \mathrm{car}(B + \beta I_n) \geq n,$$

e, pela Proposição 1.6.4, da desigualdade,

$$R_{\widetilde{F}}(A) + R_{\widetilde{F}}(B) \geq n$$

obtém-se

$$i(A) + i(B) \leq n.$$

□

O teorema que se apresenta a seguir estabelece uma condição suficiente para que um par de matrizes (A, B) seja espectralmente completo.

Teorema 2.3. *Sejam $A, B \in F^{n \times n}$. Se uma das matrizes é não derrogatória e a outra é não escalar, então o par (A, B) é espectralmente completo.*

Para a sua demonstração são necessários alguns lemas, que se apresentam de seguida, assim como as respectivas demonstrações.

Lema 2.1. *Sejam $M \in F^{n \times n}$ uma matriz não escalar, $a \in F$ e $b \in F \backslash \{0\}$. Então M é semelhante à matriz $B = [b_{ij}]$ que satisfaz:*

1) $b_{11} = a$, $b_{1n} = b$ e $b_{1i} = 0$ para $1 < i < n$,

2) se $n \geq 3$, $B(1|1)$ é não escalar.

Demonstração. Pretende-se mostrar, em primeiro lugar, que M é semelhante a uma matriz $M^{(1)}$ com pelo menos um elemento não nulo fora da diagonal principal.

Caso M verifique a propriedade referida, tome-se $M^{(1)} = M$.

Caso contrário, ou seja, se fora da diagonal principal todos os elementos são nulos então $M = \mathrm{diag}(m_{11}, m_{22}, \ldots, m_{ii}, \ldots, m_{jj}, \ldots, m_{nn})$, $i, j \in \{1, \ldots, n\}$.

Como M é não escalar, há na sua diagonal principal dois elementos diferentes entre si. Sejam esses elementos m_{ii} e m_{jj}, com $m_{ii} \neq m_{jj}$.

Suponha-se, sem perda de generalidade, que $i \leq j$. Pretende-se obter uma matriz semelhante à matriz M, cuja entrada $(1, n)$ seja $b \neq 0$.

Comece-se por determinar a matriz $M^{(1)}$, semelhante à matriz M, com uma entrada não nula. Para tal efectue-se uma transformação elementar de semelhança sobre M. Adicione-se à sua j-ésima linha a i-ésima linha e, de seguida, subtraia-se à sua i-ésima coluna a j-ésima coluna. Obtém-se assim a matriz:

$$M^{(1)} = [m_{ij}]^{(1)} = \begin{bmatrix} m_{11} & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & m_{22} & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & m_{ii} & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & m_{ii} - m_{jj} & \cdots & m_{jj} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & m_{nn} \end{bmatrix}.$$

Observe-se que como $m_{ii} \neq m_{jj}$, tem-se que $m_{ii} - m_{jj} \neq 0$.

De seguida efectuem-se uma série de transformações elementares de semelhança, de modo a obter uma matriz semelhante em que o elemento $m_{ji}^{(1)} = m_{ii} - m_{jj} \neq 0$ esteja na posição pretendida, a posição $(1, n)$, de uma matriz semelhante à matriz $M^{(1)}$.

Comece-se por trocar as linhas 1 e j e, de seguida, as colunas 1 e j. Obtém-se a matriz:

$$M^{(2)} = \begin{bmatrix} m_{jj} & 0 & \cdots & m_{ii} - m_{jj} & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & m_{22} & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & m_{ii} & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & m_{11} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & m_{nn} \end{bmatrix}.$$

De seguida, efectue-se a transformação elementar de semelhança, sobre $M^{(2)}$ que consiste na troca das linhas i e n e, de seguida, das colunas i e n da matriz. Obtém-se a matriz:

$$M^{(3)} = \begin{bmatrix} m_{jj} & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & m_{ii}-m_{jj} \\ 0 & m_{22} & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & m_{nn} & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & m_{11} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & m_{ii} \end{bmatrix}.$$

Já está determinada a matriz semelhante à matriz M, cuja entrada (1,n) é não nula, como pretendido. Falta provar que esta matriz é semelhante a uma matriz cuja entrada (1,n) é o elemento $b \neq 0$. Efectue-se, sobre a matriz $M^{(3)}$, a seguinte transformação elementar de semelhança: multiplicar a sua n-ésima linha por $b^{-1}(m_{ii} - m_{jj})$ e, de seguida, multiplicar a sua n-ésima coluna por $b(m_{ii} - m_{jj})^{-1}$. Obtém-se a matriz:

$$M^{(4)} = \begin{bmatrix} m_{jj} & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & b \\ 0 & m_{22} & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & m_{nn} & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & m_{11} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & m_{ii} \end{bmatrix}.$$

De seguida pretende-se encontrar uma matriz semelhante a $M^{(4)}$ e cuja entrada (1,1) seja a. Efectue-se uma nova transformação elementar de semelhança sobre a matriz $M^{(4)}$: somar à sua n-ésima linha a primeira linha multiplicada por $(m_{11}^{(4)} - a)b^{-1}$ e, de seguida, subtrair à sua primeira coluna a n-ésima coluna multiplicada por $(m_{11}^{(4)} - a)b^{-1}$. Obtém-se a matriz:

$$M^{(5)} = \begin{bmatrix} a & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & b \\ 0 & m_{22} & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & m_{nn} & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & m_{11} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & m_{jj} - a + m_{ii} \end{bmatrix}.$$

Repare-se que na matriz $M^{(5)}$ já se tem $m_{11}^{(5)} = a$ e $m_{1n}^{(5)} = b$.

Caso nas posições $(1, j)$, $j \in \{2, \ldots, n-1\}$, existam elementos não nulos, efectue-se sobre a matriz $M^{(5)}$ a seguinte transformação elementar de semelhança: adicionar à sua n-ésima linha a j-ésima linha multiplicada por $m_{1j}^{(5)} b^{-1}$ e, de seguida, subtrair à sua j-ésima coluna a n-ésima coluna multiplicada por $m_{1j}^{(5)} b^{-1}$, para $j \in \{2, \ldots, n-1\}$. Obtém-se a matriz $M^{(6)}$ semelhante à matriz $M^{(5)}$, cujos elementos das entradas $(1, 2), \ldots, (1, n-1)$ são nulos e as entradas $(1, 1)$ e $(1, n)$ são iguais a a e b, respectivamente. Repare-se que esta situação pode ocorrer sob a condição inicial do presente lema, ou seja de M ser semelhante a uma matriz $M^{(1)}$ com pelo menos um elemento não nulo fora da diagonal principal.

Tem-se, para já, uma matriz $M^{(6)}$ semelhante à matriz M em que:

- os elementos das entradas $(1, 2), \ldots, (1, n-1)$ são nulos,
- $m_{11}^{(6)} = a$,
- $m_{1n}^{(6)} = b$.

A demonstração da primeira parte do lema está então concluída.

Se $n > 2$ e $M^{(6)}(1|1)$ é não escalar, a segunda parte do lema está também concluída.

Suponha-se que $n > 2$ e $M^{(6)}(1|1)$ é escalar. A matriz $M^{(6)}$ terá a forma

$$\left[\begin{array}{c:ccccc} a & 0 & \cdots & 0 & \cdots & b \\ \hdashline 0 & & & & & \\ \vdots & & & & & \\ 0 & & & \alpha I_{n-1} & & \\ \vdots & & & & & \\ * & & & & & \end{array}\right],$$

com $\alpha \in F$.

Pretende-se encontrar uma matriz $M^{(7)}(1|1)$, semelhante a $M^{(6)}(1|1)$, não escalar. Efectue--se então sobre a matriz $M^{(6)}$ a transformação elementar de semelhança que consiste em somar à sua segunda linha a primeira linha e, de seguida, subtrair à sua primeira coluna a segunda coluna. obtém-se a matriz:

$$M^{(7)} = \left[\begin{array}{c|cccccc} a & 0 & \cdots & 0 & \cdots & b \\ \hline a-\alpha & \alpha & \cdots & 0 & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & 0 & \cdots & 0 & \cdots & \alpha \end{array}\right].$$

Como $b \neq 0$, tem-se que $M^{(7)}(1|1)$ é não escalar, como se queria provar. □

Lema 2.2. *Seja $M \in F^{n\times n}$ uma matriz não escalar. Sejam v um elemento de F e m um inteiro tal que $1 \leq m \leq n-1$. Então existe uma matriz B, semelhante a M, que se pode escrever na forma $B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}$ com $B_{11} \in F^{m\times m}$ e $\mathrm{tr}B_{11} = v$.*

Mais:

1) se $m \geq 2$, B_{11} é não escalar;

2) se $n-m \geq 2$, B_{22} é não escalar.

Demonstração. Pelo Lema 2.1, existe uma matriz

$$P = \left[\begin{array}{cccc|cccc} p_{11} & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2m} & p_{2,m+1} & \cdots & p_{2,n-1} & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ p_{m1} & p_{m2} & \cdots & p_{mm} & p_{m,m+1} & \cdots & p_{m,n-1} & p_{mn} \\ \hline p_{m+1,1} & p_{m+1,2} & \cdots & p_{m+1,m} & p_{m+1,m+1} & \cdots & p_{m+1,n-1} & p_{m+1,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ p_{n-1,1} & p_{n-1,2} & \cdots & p_{n-1,m} & p_{n-1,m+1} & \cdots & p_{n-1,n-1} & p_{n-1,n} \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nm} & p_{n,m+1} & \cdots & p_{n,n-1} & p_{nn} \end{array}\right]$$

semelhante a M, com $p_{1n} \neq 0$ e $p_{1i} = 0$, $1 < i < n$.

Comece-se por mostrar que existe uma matriz $P^{(1)}$, semelhante à matriz P, tal que $\mathrm{tr}P^{(1)}[1,\ldots,m|1,\ldots,m] = v$.

Efectue-se, sobre a matriz P, a seguinte transformação elementar de semelhança: adicionar à sua n-ésima linha a primeira linha multiplicada por $(\sum_{i=1}^{m} p_{ii} - v)p_{1n}^{-1}$ e, de seguida, subtraia-se à sua primeira coluna a n-ésima coluna multiplicada por $(\sum_{i=1}^{m} p_{ii}-v)p_{1n}^{-1}$. Obtém--se a matriz:

$$P^{(1)} = \left[\begin{array}{cccc:ccc} p_{11}-\sum_{i=1}^{m} p_{ii}+v & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & p_{1n} \\ * & p_{22} & \cdots & p_{2m} & p_{2,m+1} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & p_{m2} & \cdots & p_{mm} & p_{m,m+1} & \cdots & p_{mn} \\ \hdashline * & p_{m+1,2} & \cdots & p_{m+1,m} & p_{m+1,m+1} & \cdots & p_{m+1,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & p_{n2} & \cdots & p_{nm} & p_{n,m+1} & \cdots & * \end{array}\right],$$

em que, efectivamente, se tem

$$\mathrm{tr}P^{(1)}[1,\ldots,m|1,\ldots,m] = p_{11} - \sum_{i=1}^{m} p_{ii} + v + p_{22} + \cdots + p_{mm} = v.$$

Analise-se, de seguida, o que se passa quando $m \geq 2$ e $n-m \geq 2$.

Se $m \geq 2$ e $P^{(1)}[1,\ldots,m|1,\ldots,m]$ é não escalar, o resultado está provado.

Se $P^{(1)}[1,\ldots,m|1,\ldots,m]$ é escalar e, de modo a manter a condição do traço, tem-se que $p_{11} \in F$, $p_{22} = \cdots = p_{mm} (= \theta,$ por exemplo) e $v = m\theta$. A matriz $P^{(1)}$ tem então a forma:

$$P^{(1)} = \left[\begin{array}{cccc:ccc} \theta & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & p_{1n} \\ 0 & \theta & \cdots & 0 & p_{2,m+1} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \theta & p_{m,m+1} & \cdots & p_{mn} \\ \hdashline * & p_{m+1,2} & \cdots & p_{m+1,m} & p_{m+1,m+1} & \cdots & p_{m+1,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & p_{n2} & \cdots & p_{nm} & p_{n,m+1} & \cdots & p_{nn} \end{array}\right].$$

A finalidade é obter uma matriz $P^{(3)}$, semelhante à matriz $P^{(1)}$, com a submatriz $P^{(3)}[1,\ldots,m|1,\ldots,m]$ não escalar.

Atendendo a que $p_{1n} \neq 0$ e aplicando transformações elementares de semelhança que envolvam as m-ésima e n-ésima linhas e colunas da matriz $P^{(1)}$ respectivamente, consegue--se obter uma matriz semelhante a $P^{(1)}$ cuja entrada $(1,m)$ é $-p_{1n}$. No entanto, e dada a necessidade de se manter o traço, previamente há que anular a entrada (m,n) da matriz $P^{(1)}$. Aplique-se, sobre a matriz $P^{(1)}$, a transformação elementar de semelhança que consiste em adicionar à sua m-ésima linha a primeira linha multiplicada por $-p_{mn}^{(1)}\ p_{1n}^{(1)-1}$ e, de seguida, subtrair à sua primeira coluna a m-ésima coluna multiplicada por $-p^{(1)}_{mn}\ p^{(1)-1}_{1n}$. Obtém-se a matriz:

$$P^{(2)} = \left[\begin{array}{cccc:ccc}
\theta & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & p_{1n} \\
0 & \theta & \cdots & 0 & p_{2,m+1} & \cdots & p_{2n} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & \theta & p_{m,m+1} & \cdots & 0 \\
\hdashline
* & p_{m+1,2} & \cdots & p_{m+1,m} & p_{m+1,m+1} & \cdots & p_{m+1,n} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
* & p_{n2} & \cdots & p_{nm} & p_{n,m+1} & \cdots & *
\end{array}\right].$$

Finalmente, à matriz $P^{(2)}$ aplique-se a transformação elementar de semelhança: adicionar à sua n-ésima linha a m-ésima linha e, de seguida, subtrair à sua m-ésima coluna a n-ésima coluna. Obtém-se a matriz:

$$P^{(3)} = \left[\begin{array}{cccc:ccc}
\theta & 0 & \cdots & -p_{1n} & 0 & \cdots & p_{1n} \\
0 & \theta & \cdots & * & p_{2,m+1} & \cdots & p_{2n} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & \theta & p_{m,m+1} & \cdots & 0 \\
\hdashline
* & p_{m+1,2} & \cdots & * & p_{m+1,m+1} & \cdots & * \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
* & * & \cdots & * & * & \cdots & *
\end{array}\right].$$

Como $p_{1n} \neq 0$, a matriz $P^{(3)}[1,\dots,m|1,\dots,m]$ é não escalar, continuando a verificar-se a condição $\mathrm{tr}P^{(3)}[1,\dots,m|1,\dots,m] = v$, uma vez que $p^{(2)}_{mn} = 0$.

Se $n-m \geq 2$ e caso $P^{(3)}[m+1,\dots,n \mid m+1,\dots,n]$ seja não escalar, o resultado está provado.

Se $P^{(3)}[m+1,\dots,n \mid m+1,\dots,n]$ é escalar, a matriz $P^{(3)}$ tem então a forma

$$P^{(3)} = \left[\begin{array}{cccc:ccc}
p_{11} - \sum_{i=1}^{m} p_{ii} + v & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & p_{1n} \\
* & p_{22} & \cdots & p_{2m} & p_{2,m+1} & \cdots & p_{2n} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
* & p_{m2} & \cdots & p_{mm} & p_{m,m+1} & \cdots & p_{mn} \\
\hdashline
* & p_{m+1,2} & \cdots & p_{m+1,m} & \theta & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
* & p_{n2} & \cdots & p_{nm} & 0 & \cdots & \theta
\end{array}\right],$$

onde $\theta \in F$.

Recorrendo, mais uma vez, ao facto de p_{1n} ser não nulo, efectue-se sobre a matriz $P^{(3)}$ a transformação elementar de semelhança: adicionar à sua $(m+1)$-ésima linha a primeira linha e, de seguida, subtrair à sua primeira coluna a $(m+1)$-ésima coluna. Obtém-se a matriz:

$$P^{(4)} = \left[\begin{array}{cccc|ccc} p_{11} - \sum_{i=1}^{m} p_{ii} + v & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & p_{1n} \\ * & p_{22} & \cdots & p_{2m} & p_{2,m+1} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & p_{m2} & \cdots & p_{mm} & p_{m,m+1} & \cdots & p_{mn} \\ \hline * & p_{m+1,2} & \cdots & p_{m+1,m} & \theta & \cdots & p_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & p_{n2} & \cdots & p_{nm} & 0 & \cdots & \theta \end{array}\right],$$

cuja submatriz $P^{(4)}[m+1, \ldots, n \mid m+1, \ldots, n]$ é não escalar.

Repare-se que em relação à matriz $P^{(3)}$ as únicas alterações sofridas com as operações indicadas, para além da entrada $(m+1, n)$, são as entradas $(i, 1)$, $i \in \{2, \ldots, m+1\}$, pelo que o traço da submatriz de $P^{(4)}$ se mantém, ou seja, $\text{tr}P^{(4)}[1, \ldots, m|1, \ldots, m]) = v$. $\square$

Lema 2.3. *Sejam $B \in F^{n \times n}$ uma matriz não escalar, p um inteiro tal que $1 \leq p \leq n$ e $(t_1, \ldots, t_p)$ um p-uplo de elementos de F tais que $t_1 + \cdots + t_p = \text{tr}B$. Seja $(n_1, \ldots, n_p)$ um p-uplo de inteiros tais que $n_i \geq 1, i \in \{1, \ldots, p\}$ e $n_1 + \cdots + n_p = n$.*

Então existe uma matriz $Q \in F^{n \times n}$, semelhante à matriz B, que pode ser escrita na forma $Q = [Q_{ij}], i, j \in \{1, \ldots, p\}$, com Q_{ij} matrizes de tamanho $n_i \times n_j$, que verificam:

1) $\text{tr}Q_{ii} = t_i, i \in \{1, \ldots, p\}$,

2) *Q_{ii} é não escalar sempre que $n_i \geq 2, i \in \{1, \ldots, p\}$.*

Demonstração. Pelo Lema 2.2, a matriz B é semelhante à matriz $C = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix}$, onde C_{11} é uma matriz de tamanho $n_1 \times n_1$ e $\text{tr}C_{11} = t_1$. Se $n_1 \geq 2$, então C_{11} é não escalar e no caso em que $n - n_1 \geq 2$, C_{22} é não escalar. Note-se que $n - n_1 \geq 2$ é equivalente a $n_2 + \cdots + n_p \geq 2$. Suponha-se agora que $n_2 + n_3 + \cdots + n_p \geq 2$. Então, pelo Lema 2.2 a matriz C_{22} é semelhante à matriz

$$D = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{bmatrix},$$

onde D_{11} é uma matriz de tamanho $n_2 \times n_2$ e $\text{tr}D_{11} = t_2$. A matriz D_{11} é não escalar se $n_2 \geq 2$ e a matriz D_{22} é não escalar se $n_3 + n_4 + ... + n_p \geq 2$.

A matriz B é então semelhante à matriz

$$D = \begin{bmatrix} C_{11} & * & * \\ * & D_{11} & * \\ * & * & D_{22} \end{bmatrix}.$$

Continuando este processo obtém-se uma matriz Q com as propriedades pretendidas. $\square$

Lema 2.4. *Seja $f(\lambda) = \lambda^n - c\lambda^{n-1} + \cdots$ um polinómio mónico de grau n com coeficientes em F. Seja $a \in F$ tal que $f(a) \neq 0$. Sejam $\gamma_{ij}, 1 \leq i \leq j \leq n$, elementos de F tais que:*

1) $\sum_{i=1}^{n} \gamma_{ii} = c$,

2) $\gamma_{1i} = 0$, $1 < i < n$,

3) se $n \geq 2$, $\gamma_{1n} \neq 0$.

Então existe uma matriz $n \times n$ não derrogatória, com entradas em F, tal que $g_{ij} = \gamma_{ij}$, $1 \leq i \leq j \leq n$ e cujo polinómio característico é $f(\lambda)$.

Demonstração. Para $n = 1$, o resultado é trivial.

De facto, $f(\lambda) = \lambda - c$, $\gamma_{11} = c$, e $G = [\gamma_{11}]$. O polinómio característico de G é, então $\det(\lambda I - G) = \lambda - \gamma_{11} = \lambda - c = f(\lambda)$.

Suponha-se então que $n \geq 2$.

Considere-se a matriz

$$C(x) = C(x_1, \ldots, x_{n-1}) = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \gamma_{1n} \\ -f(a)\,\gamma_{1n}^{-1} & \gamma_{22} & \gamma_{23} & \cdots & \gamma_{2,n-2} & \gamma_{2,n-1} & x_1 \\ 0 & 1 & \gamma_{33} & \cdots & \gamma_{3,n-2} & \gamma_{3,n-1} & x_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \gamma_{n-1,n-1} & x_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & x_{n-1} \end{bmatrix}.$$

Inicie-se a demonstração provando que a matriz $C(x)$ é não derrogatória. Utilizando a Proposição 1.6.4 bastará provar que

$$R_{\widetilde{F}}(C(x)) = \min_{\lambda \in \widetilde{F}} \operatorname{car}(\lambda I - C(x)) = n - 1.$$

$$\lambda I - C(x) = \left[\begin{array}{cccccc:c} \lambda - a & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -\gamma_{1n} \\ \hdashline f(a)\,\gamma_{1n}^{-1} & \lambda-\gamma_{22} & -\gamma_{23} & \cdots & -\gamma_{2,n-2} & -\gamma_{2,n-1} & -x_1 \\ 0 & -1 & \lambda-\gamma_{33} & ... & -\gamma_{3,n-2} & -\gamma_{3,n-1} & -x_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & \lambda-\gamma_{n-1,n-1} & -x_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & \lambda - x_{n-1} \end{array}\right]$$

Desenvolva-se segundo a primeira coluna o determinante da submatriz que se obtém da matriz $\lambda I - C(x)$ eliminando a primeira linha e a última coluna. Obtém-se

$$\det \begin{bmatrix} f(a)\,\gamma_{1n}^{-1} & \lambda-\gamma_{22} & -\gamma_{23} & \cdots & -\gamma_{2,n-2} & -\gamma_{2,n-1} \\ 0 & -1 & \lambda-\gamma_{33} & \cdots & -\gamma_{3,n-2} & -\gamma_{3,n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & \lambda-\gamma_{n-1,n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \end{bmatrix}$$
$$= (-1)^2 f(a)\,\gamma_{1n}^{-1}\,(-1)^{n-2} = f(a)\,\gamma_{1n}^{-1}\,(-1)^n \neq 0,$$

pois tanto $f(a)$ como γ_{1n} são não nulos. Mais, o determinante desta submatriz não depende de λ. Assim,

$$\min_{\lambda \in \widetilde{F}} \operatorname{car}(\lambda I - C(x)) = n - 1$$

e, portanto, $R_{\widetilde{F}}(C(x)) = n - 1$, pelo que a matriz $C(x)$ é não derrogatória, para quaisquer valores de $x_i \in F$, $i \in \{1, \ldots, n-1\}$.

Prove-se, de seguida, que $C(x)$ tem $f(\lambda)$ por polinómio característico. Seja

$$h(\lambda, x) = \det(\lambda I - C(x))$$

e $\psi(\lambda, x)$ o determinante da submatriz que se obtém de $\lambda I - C(x)$ eliminando a primeira linha e a primeira coluna.

Usando a regra de Laplace, desenvolva-se $h(\lambda, x)$ segundo a primeira linha da respectiva matriz. Tem-se então:

$$
\begin{aligned}
h(\lambda, x) &= (\lambda - a)(-1)^2\psi(\lambda, x) + \\
&\quad +(-\gamma_{1n})(-1)^{1+n} \det \begin{bmatrix} f(a)\,\gamma_{1n}^{-1} & \lambda - \gamma_{22} & -\gamma_{23} & \cdots & -\gamma_{2,n-1} \\ 0 & -1 & \lambda - \gamma_{33} & ... & -\gamma_{3,n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda - \gamma_{n-1,n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 \end{bmatrix} \\
&= (-1)^2\,(\lambda - a)\,\psi(\lambda, x) + (-\gamma_{1n})(-1)^{n+1} f(a)\,\gamma_{1n}^{-1}(-1)^2(-1)^{n-2} \\
&= (\lambda - a)\,\psi(\lambda, x) + (-1)^{n+2+n}\,\gamma_{1n}\,\gamma_{1n}^{-1}\,f(a) \\
&= (\lambda - a)\,\psi(\lambda, x) + f(a),
\end{aligned}
$$

Usando a regra de Laplace, desenvolva-se $\psi(\lambda, x)$ segundo a última coluna da respectiva matriz. Tem-se então

$$
\psi(\lambda, x) = \det \left[\begin{array}{cccccc:c} \lambda - \gamma_{22} & -\gamma_{23} & -\gamma_{24} & \cdots & -\gamma_{2,n-1} & & -x_1 \\ -1 & \lambda - \gamma_{33} & -\gamma_{34} & \cdots & -\gamma_{3,n-1} & & -x_2 \\ 0 & -1 & \lambda - \gamma_{44} & \cdots & -\gamma_{4,n-1} & & -x_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda - \gamma_{n-1,n-1} & & -x_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & & \lambda - x_{n-1} \end{array}\right]
$$

$$
= -x_1(-1)^n \det \begin{bmatrix} -1 & \lambda - \gamma_{33} & -\gamma_{34} & \cdots & -\gamma_{3,n-2} & -\gamma_{3,n-1} \\ 0 & -1 & \lambda - \gamma_{44} & \cdots & -\gamma_{4,n-2} & -\gamma_{4,n-1} \\ 0 & 0 & -1 & \cdots & -\gamma_{5,n-2} & -\gamma_{5,n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & \lambda - \gamma_{n-1,n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \end{bmatrix} +
$$

$$
+(-x_2)(-1)^{n+1} \det \begin{bmatrix} \lambda - \gamma_{22} & -\gamma_{23} & -\gamma_{24} & \cdots & -\gamma_{2,n-2} & -\gamma_{2,n-1} \\ 0 & -1 & \lambda - \gamma_{44} & \cdots & -\gamma_{4,n-2} & -\gamma_{4,n-1} \\ 0 & 0 & -1 & \cdots & -\gamma_{5,n-2} & -\gamma_{5,n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & \lambda - \gamma_{n-1,n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \end{bmatrix} +
$$

$+ \cdots +$

$$+(-1)^{2n-3}(-x_{n-2})\det\begin{bmatrix} \lambda-\gamma_{22} & -\gamma_{23} & -\gamma_{24} & \cdots & -\gamma_{2,n-2} & -\gamma_{2,n-1} \\ -1 & \lambda-\gamma_{33} & -\gamma_{34} & \cdots & -\gamma_{3,n-2} & -\gamma_{3,n-1} \\ 0 & -1 & \lambda-\gamma_{44} & \cdots & -\gamma_{4,n-2} & -\gamma_{4,n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda-\gamma_{n-2,n-2} & -\gamma_{n-2,n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \end{bmatrix}+$$

$$+(-1)^{2n+2}(\lambda-x_{n-1})\det\begin{bmatrix} \lambda-\gamma_{22} & -\gamma_{23} & -\gamma_{24} & \cdots & -\gamma_{2,n-2} & -\gamma_{2,n-1} \\ -1 & \lambda-\gamma_{33} & -\gamma_{34} & \cdots & -\gamma_{3,n-2} & -\gamma_{3,n-1} \\ 0 & -1 & \lambda-\gamma_{44} & \cdots & -\gamma_{4,n-2} & -\gamma_{4,n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda-\gamma_{n-2,n-2} & -\gamma_{n-2,n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & \lambda-\gamma_{n-1,n-1} \end{bmatrix}$$

$$= -x_1 + (-x_2)(\lambda-\gamma_{22}) + \cdots +$$

$$+x_{n-2}\det\begin{bmatrix} \lambda-\gamma_{22} & -\gamma_{23} & -\gamma_{24} & \cdots & -\gamma_{2,n-2} & -\gamma_{2,n-1} \\ -1 & \lambda-\gamma_{33} & -\gamma_{34} & \cdots & -\gamma_{3,n-2} & -\gamma_{3,n-1} \\ 0 & -1 & \lambda-\gamma_{44} & \cdots & -\gamma_{4,n-2} & -\gamma_{4,n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda-\gamma_{n-2,n-2} & -\gamma_{n-2,n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \end{bmatrix}+$$

$$+(-x_{n-1})\det\begin{bmatrix} \lambda-\gamma_{22} & -\gamma_{23} & -\gamma_{24} & \cdots & -\gamma_{2,n-2} & -\gamma_{2,n-1} \\ -1 & \lambda-\gamma_{33} & -\gamma_{34} & \cdots & -\gamma_{3,n-2} & -\gamma_{3,n-1} \\ 0 & -1 & \lambda-\gamma_{44} & \cdots & -\gamma_{4,n-2} & -\gamma_{4,n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda-\gamma_{n-2,n-2} & -\gamma_{n-2,n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & \lambda-\gamma_{n-1,n-1} \end{bmatrix}+$$

$$+\lambda \det \begin{bmatrix} \lambda-\gamma_{22} & -\gamma_{23} & -\gamma_{24} & \cdots & -\gamma_{2,n-2} & -\gamma_{2,n-1} \\ -1 & \lambda-\gamma_{33} & -\gamma_{34} & \cdots & -\gamma_{3,n-2} & -\gamma_{3,n-1} \\ 0 & -1 & \lambda-\gamma_{44} & \cdots & -\gamma_{4,n-2} & -\gamma_{4,n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda-\gamma_{n-2,n-2} & -\gamma_{n-2,n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & \lambda-\gamma_{n-1,n-1} \end{bmatrix}$$

$$= x_1(-1) + x_2(\gamma_{22}-\lambda) + \cdots +$$

$$+(-x_{n-1}) \det \begin{bmatrix} \lambda-\gamma_{22} & -\gamma_{23} & -\gamma_{24} & \cdots & -\gamma_{2,n-2} & -\gamma_{2,n-1} \\ -1 & \lambda-\gamma_{33} & -\gamma_{34} & \cdots & -\gamma_{3,n-2} & -\gamma_{3,n-1} \\ 0 & -1 & \lambda-\gamma_{44} & \cdots & -\gamma_{4,n-2} & -\gamma_{4,n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda-\gamma_{n-2,n-2} & -\gamma_{n-2,n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & \lambda-\gamma_{n-1,n-1} \end{bmatrix} +$$

$$+\lambda \det \begin{bmatrix} \lambda-\gamma_{22} & -\gamma_{23} & -\gamma_{24} & \cdots & -\gamma_{2,n-2} & -\gamma_{2,n-1} \\ -1 & \lambda-\gamma_{33} & -\gamma_{34} & \cdots & -\gamma_{3,n-2} & -\gamma_{3,n-1} \\ 0 & -1 & \lambda-\gamma_{44} & \cdots & -\gamma_{4,n-2} & -\gamma_{4,n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda-\gamma_{n-2,n-2} & -\gamma_{n-2,n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & \lambda-\gamma_{n-1,n-1} \end{bmatrix}$$

$$= x_1\psi_0(\lambda) + x_2\psi_1(\lambda) + \cdots + x_{n-1}\psi_{n-2}(\lambda) + \psi_{n-1}(\lambda),$$

com $\psi_{n-1}(\lambda)$ polinómio mónico e $\psi_i(\lambda)$ polinómio de grau $i \in \{0, \ldots, n-1\}$.

Assim, podem escolher-se $x_1, \ldots, x_{n-1}$ tais que $\psi(\lambda, x)$ seja um qualquer polinómio mónico de grau $n-1$. Como $\frac{f(\lambda)-f(a)}{\lambda-a}$ é mónico, temos $\psi(\lambda, x) = \frac{f(\lambda)-f(a)}{\lambda-a}$ para uma escolha apropriada $u = (u_1, \ldots, u_{n-1})$ de x. Assim,

$$h(\lambda, u) = (\lambda - a)\,\psi(\lambda, u) + f(a) = (\lambda - a)\,\frac{f(\lambda)-f(a)}{\lambda - a} + f(a) = f(\lambda),$$

ou seja, o polinómio característico de $C(u)$ é $f(\lambda)$. Aplicando agora, sobre a matriz $C(u)$, a transformação de semelhança que consiste em adicionar à sua n-ésima linha a primeira linha multiplicada por $\gamma_{1n}^{-1}(a-\gamma_{11})$ e, de seguida, subtrair à primeira coluna a n-ésima coluna multiplicada por $\gamma_{1n}^{-1}(a-\gamma_{11})$, obtém-se a matriz

$$C'(u) = \begin{bmatrix} \gamma_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 & \gamma_{1n} \\ * & \gamma_{22} & \gamma_{23} & \cdots & \gamma_{2,n-1} & u_1 \\ * & 1 & \gamma_{33} & \cdots & \gamma_{3,n-1} & u_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ * & 0 & 0 & \cdots & \gamma_{n-1,n-1} & u_{n-2} \\ * & 0 & 0 & \cdots & 1 & u_{n-1} + a - \gamma_{11} \end{bmatrix}$$

Por forma a obter uma matriz semelhante a $C'(u)$, em que os elementos das entradas (i, n), $i \in \{2, \ldots, n-1\}$ sejam iguais a γ_{in}, efectuem-se as seguintes transformações elementares de semelhança sobre a matriz $C'(u)$: adicionar à sua i-ésima linha a primeira linha multiplicada por $\gamma_{1n}^{-1}(\gamma_{in} - u_{i-1})$ e, de seguida, subtrair à sua primeira coluna a i-ésima coluna multiplicada por $\gamma_{1n}^{-1}(\gamma_{in} - u_{i-1})$. Obtém-se uma matriz G semelhante à matriz $C(x)$, que verifica as condições do lema.

A entrada γ_{nn} é acertada pela condição do traço. Com efeito como

$$\operatorname{tr} C(u) = c,$$

tem-se

$$a + \gamma_{22} + \cdots + \gamma_{n-1,n-1} + u_{n-1} = c,$$

o que é equivalente a

$$a + u_{n-1} - \gamma_{11} = c - \gamma_{11} - \gamma_{22} - \gamma_{33} - \cdots - \gamma_{n-1,n-1}.$$

Assim,

$$a + u_{n-1} - \gamma_{11} = c - \gamma_{11} - \gamma_{22} - \gamma_{33} - \cdots - \gamma_{n-1,n-1} = \gamma_{nn}.$$

□

Lema 2.5. *Sejam $A_1 \in F^{n \times n}$, $A_2 \in F^{m \times m}$, $C \in F^{n \times m}$. Suponha-se que os polinómios característicos de A_1 e A_2 são primos entre si.*

Então as matrizes $P = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}$ *e* $Q = \begin{bmatrix} A_1 & C \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}$ *são semelhantes.*

Demonstração. Seja $\widetilde{F}$ uma extensão algébrica de F que contém as raízes dos polinómios característicos de A_1 e A_2. Estes não têm em $\widetilde{F}$ nenhuma raiz em comum. Considere-se a matriz

$$xI - Q = \begin{bmatrix} xI_n - A_1 & -C \\ 0 & xI_m - A_2 \end{bmatrix}.$$

Como a matriz característica $xI_n - A_1$ é não singular, o seu determinante é um polinómio de grau n. Tem-se então que $xI_n - A_1$ tem precisamente n factores invariantes $f_1, \ldots, f_n$, tais que

$$f_1 \mid \cdots \mid f_n \quad \text{e} \quad \det(xI_n - A_1) = f_1(x) \cdots f_n(x).$$

Analogamente, $xI_m - A_2$ tem m factores invariantes $g_1 , \ldots , g_m$, tais que

$$g_1 \mid \cdots \mid g_m \quad \text{e} \quad \det(xI_n - A_2) = g_1(x) \cdots g_m(x)$$

e, assim sendo, $xI - Q$ é equivalente a

$$(xI - Q)^{(1)} = \left[\begin{array}{c:c} \operatorname{diag}(f_1, \ldots, f_i, \ldots, f_n) & -C \\ \hdashline 0 & \operatorname{diag}(g_1, \ldots, g_j, \ldots, g_m) \end{array}\right]$$

onde $-C = [m_{ij}] \in F^{n \times m}$.

Como os polinómios característicos de A_1 e A_2 são primos entre si, existem $x_i, y_j \in F[x]$, tais que $m_{ij} = f_i\, x_i + g_j\, y_j$, para todo o $i \in \{1, \ldots, n\}$, $j \in \{1, \ldots, m\}$.

De facto, como m.d.c.$(f_i, g_j) = 1$, tem-se que $1 = \nu\, f_i + \nu^\star\, g_j$, para ν, $\nu^\star \in F[x]$ e, portanto,

$$m_{ij} = m_{ij}\, \nu\, f_i + m_{ij}\, \nu^\star\, g_j$$

com $m_{ij}\, \nu = x_i$ e $m_{ij}\, \nu^\star = y_j$.

Assim, é possível escolher polinómios em $F[x]$ tais que somando à coluna $n+j$ a coluna i multiplicada por $-x_i$ e, somando à linha i a linha $n+j$ multiplicada por $-y_j$, a entrada m_{ij} da matriz resultante é nula.

Obtém-se assim uma matriz equivalente a $(xI - Q)^{(1)}$,

$$(xI - Q)^{(2)} = \left[\begin{array}{c:c} \operatorname{diag}(f_1, \ldots, f_n) & 0 \\ \hdashline 0 & \operatorname{diag}(g_1, \ldots, g_m) \end{array}\right]$$

Tem-se então que $xI - Q$ é equivalente a $xI - P$ e, portanto, a matriz Q é semelhante à matriz P. $\square$

Lema 2.6. *Sejam $A_1, \ldots, A_p$, $R_{ij} \in F^{n_i \times n_j}$ $(1 \leq i < j \leq p)$, $A_i \in F^{n_i \times n_i}$. Suponha-se que os polinómios característicos de A_i e A_j são primos entre si. Então*

$$\begin{bmatrix} A_1 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & A_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & A_p \end{bmatrix} \quad e \quad \begin{bmatrix} A_1 & R_{12} & \cdots & R_{1p} \\ 0 & A_2 & & R_{2p} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & A_p \end{bmatrix}$$

são semelhantes.

Demonstração. A demonstração deste lema é feita por indução em p.

Para $p = 2$ o resultado é uma consequência do Lema 2.5.

Seja $p \geq 3$ e considere-se como hipótese de indução o facto de as matrizes $A_1 \oplus \cdots \oplus A_{p-1}$ e

$$\begin{bmatrix} A_1 & R_{12} & \cdots & R_{1,p-1} \\ \vdots & A_2 & & R_{2,p-1} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & A_{p-1} \end{bmatrix}$$

serem semelhantes entre si. Sejam $\theta_1, \ldots, \theta_p$ os polinómios característicos de A_i, $i \in \{1, \ldots, p\}$. O polinómio característico de $\begin{bmatrix} A_1 & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & A_{p-1} \end{bmatrix}$ é $\theta_1 \cdots \theta_{p-1}$. Suponha-se que θ_p não é primo com $\theta_1 \cdots \theta_{p-1}$. Então existe $j \in \{1, \ldots, p-1\}$ tal que $\theta_p \mid \theta_j$, o que contraria o facto de os polinómios característicos de A_i e A_j serem primos entre si, para $i \neq j$ e $1 \leq i < j \leq p$. Sendo assim e uma vez que o argumento é válido para $p = 2$, temos que a matriz

$$\left[\begin{array}{cccc:c} A_1 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & A_2 & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & A_{p-1} & 0 \\ \hdashline 0 & \cdots & \cdots & 0 & A_p \end{array}\right]$$

é semelhante à matriz

$$\left[\begin{array}{cccc:c} A_1 & * & \cdots & * & * \\ 0 & A_2 & & * & * \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & A_{p-1} & * \\ \hdashline 0 & \cdots & \cdots & 0 & A_p \end{array}\right].$$

□

Está-se em condições de proceder à demonstração do principal resultado deste capítulo, o Teorema 2.3.

Demonstração. Sejam A não derrogatória e B não escalar.

Seja $(v_1, \ldots, v_n)$ um n-uplo de elementos de F tais que $v_1 + \cdots + v_n = \operatorname{tr} A + \operatorname{tr} B$.

Seja $f(\lambda)$ o polinómio característico de A.

Considerem-se 2 casos. O primeiro, é um caso particular do segundo, e será utilizado na sua demonstração.

Caso 1. Existe $a \in F$ tal que $f(a) \neq 0$.

Pelo Lema 2.1 a matriz B é semelhante à matriz

$$B' = \begin{bmatrix} b_{11} & 0 & 0 & ... & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & ... & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n-1,1} & b_{n-1,2} & b_{n-1,3} & ... & b_{n-1,n} \\ b_{n1} & b_{n2} & b_{n3} & ... & b_{nn} \end{bmatrix}$$

com $b_{1n} \neq 0$. Sem perda de generalidade faça-se $B = B'$.

Sejam

$$\begin{cases} \gamma_{ii} = v_i - b_{ii}, & i \in \{1, \dots, n\}; \\ \gamma_{ij} = -b_{ij}, & 1 \leq i < j \leq n. \end{cases}$$

Repare-se que

$$\sum_{i=1}^{n}(v_i - b_{ii}) = \sum_{i=1}^{n} v_i - \sum_{i=1}^{n} b_{ii} = (\text{tr}\, A + \text{tr}\, B) - \text{tr} B = \text{tr}\, A.$$

Então as condições do Lema 2.4 são verificadas, pelo que existe uma matriz não derrogatória G, tal que $g_{ij} = \gamma_{ij}$ para $1 \leq i \leq j \leq n$ e tem $f(\lambda)$ por polinómio característico.

Como A e G são não derrogatórias e têm o mesmo polinómio característico, tem-se que A é semelhante a G, ou seja, existe a matriz não singular W tal que $G = W\, A\, W^{-1}$.

Pode verificar-se que $W\, A\, W^{-1} + B$ é uma matriz triangular inferior com $v_1, \dots, v_n$ como elementos da diagonal principal. De facto,

$$W\, A\, W^{-1} + B = G + B = \begin{bmatrix} v_1 - b_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 & -b_{1n} \\ * & v_2 - b_{22} & -b_{23} & \cdots & -b_{2,n-1} & -b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ * & * & * & \cdots & v_{n-1} - b_{n-1,n-1} & -b_{n-1,n} \\ * & * & * & \cdots & * & v_n - b_{nn} \end{bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} b_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & \cdots & b_{2,n-1} & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ b_{n-1,1} & b_{n-1,2} & b_{n-1,3} & \cdots & b_{n-1,n-1} & b_{n-1,n} \\ b_{n1} & b_{n2} & b_{n3} & \cdots & b_{n,n-1} & b_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ * & v_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ * & * & * & \cdots & v_{n-1} & 0 \\ * & * & * & \cdots & * & v_n \end{bmatrix}$$

Então $W\,A\,W^{-1}+B$ tem valores próprios $v_1,\ldots,v_n$ e, portanto, (A,B) é espectralmente completo.

Caso 2. Sejam $\phi_1,\ldots,\phi_p$ os divisores elementares de A, com $\mathrm{gr}(\phi_i)=n_i$.

Seja A_i a matriz companheira de ϕ_i. Mudando a notação, escreva-se $(v_1,\ldots,v_n)$ da seguinte forma

$$(v_1^{(1)},\ldots,v_{n_1}^{(1)},v_1^{(2)},\ldots,v_{n_2}^{(2)},\ldots,v_1^{(p)},\ldots,v_{n_p}^{(p)}).$$

Seguidamente faça-se

$$t_i=\sum_{k=1}^{n_i}v_k^{(i)}-\mathrm{tr}A_i,\;\; i\in\{1,\ldots,p\}$$

ou sejam,

$$t_1=v_1^{(1)}+\cdots+v_{n_1}^{(1)}-\mathrm{tr}A_1$$

$$t_2=v_1^{(2)}+\cdots+v_{n_2}^{(2)}-\mathrm{tr}A_2$$

$$\cdots$$

$$t_p=v_1^{(p)}+\cdots+v_{n_p}^{(p)}-\mathrm{tr}A_p.$$

Tendo em conta a Proposição 1.6.1, as matrizes A e $\widetilde{A}=A_1\oplus\cdots\oplus A_p$ são semelhantes. Então têm o mesmo traço, isto é, $\mathrm{tr}A=\mathrm{tr}\widetilde{A}$. Por outro lado,

$$\mathrm{tr}\widetilde{A}=\mathrm{tr}A_1+\cdots+\mathrm{tr}A_p.$$

Facilmente se constata que $\sum_{i=1}^p t_i=\mathrm{tr}B$. Com efeito,

$$\begin{array}{lcl}\sum_{i=1}^p t_i & = & v_1^{(1)}+\cdots+v_{n_1}^{(1)}+v_1^{(2)}+\cdots+v_{n_2}^{(2)}+\cdots+v_1^{(p)}+\cdots+v_{n_p}^{(p)}-\mathrm{tr}A_1-\mathrm{tr}A_2-\cdots-\mathrm{tr}A_p\\ & = & v_1+v_2+\cdots+v_p-\mathrm{tr}A\\ & = & \mathrm{tr}(A+B)-\mathrm{tr}A\\ & = & \mathrm{tr}B\end{array}$$

Pelo Lema 2.3, existe uma matriz $Q=[Q_{ij}]$, $i\in\{1,\ldots,\,p\}$, semelhante a B, que verifica:

1) $\mathrm{tr}\,Q_{ii}=t_i,\; i\in\{1,\ldots,\,p\}$.

2) Q_{ii} é não escalar sempre que $n_i\geq 2,\; i\in\{1,\ldots,\,p\}$.

Os polinómios ϕ_i são potências de polinómios irredutíveis com coeficientes em F, pelo que existe $a_i\in F$ tal que $\phi_i(a_i)\neq 0$.

Quando $n_i\geq 2$, como Q_{ii} é não escalar e A_i é não derrogatória, pelo Caso 1, tem-se que o par (A_i,Q_{ii}) é espectralmente completo, para qualquer $i\in\{1,\ldots,p\}$.

Sabendo que

$$\mathrm{tr}Q_{ii}=t_i, i\in\{1,\ldots,p\}$$

e

$$\mathrm{tr} A_i + t_i = \sum_{k=1}^{n_i} v_k^{(i)}$$

temos

$$\mathrm{tr} A_i + \mathrm{tr} Q_{ii} = \sum_{k=1}^{n_i} v_k^{(i)},\ \ i \in \{1, \ldots, p\}.$$

Do exposto conclui-se que existe uma matriz U_i não singular, de tamanho $n_i \times n_i$ tal que $U_i A_i U_i^{-1} + Q_{ii}$ tem valores próprios $v_1^{(i)},\ v_2^{(i)}, \ldots,\ v_{n_i}^{(i)},\ \ i \in \{1, \ldots,\ p\}$.

Considere-se agora a matriz

$$\widehat{A} = \begin{bmatrix} A_1 & \widehat{A}_{12} & \widehat{A}_{13} & \cdots & \widehat{A}_{1,p-1} & \widehat{A}_{1,p} \\ 0 & A_2 & \widehat{A}_{23} & \cdots & \widehat{A}_{2,p-1} & \widehat{A}_{2,p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & A_{p-1} & \widehat{A}_{p-1,p} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & A_p \end{bmatrix}$$

com $\widehat{A}_{ij} = -U_i^{-1} Q_{ij} U_j$, para $1 \leq j \leq n$.

Como A é não derrogatória e ϕ_i são primos entre si dois a dois, para $i \in \{1, \ldots,\ p\}$, pelo Lema 2.6, $\widehat{A}$ é semelhante a $\widetilde{A}$, e portanto, $\widehat{A}$ é semelhante a A.

Seja

$$U = U_1 \oplus \cdots \oplus U_p \ \text{ e } \ K = U\,\widehat{A}\,U^{-1} + Q.$$

Então:

$$\begin{aligned} K &= U\,\widehat{A}\,U^{-1} + Q \\ &= \begin{bmatrix} U_1 A_1 U_1^{-1} + Q_{11} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ Q_{21} & U_2 A_2 U_2^{-1} + Q_{22} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ Q_{p-1,1} & Q_{p-1,2} & \cdots & U_{p-1} A_{p-1} U_{p-1}^{-1} + Q_{p-1,p-1} & 0 \\ Q_{p1} & Q_{p2} & \cdots & Q_{p,p-1} & U_p A_p U_p^{-1} + Q_{pp} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Assim sendo, os valores próprios de K são $v_1^{(1)}, \ldots, v_{n_1}^{(1)}, \ldots, v_1^{(p)}, \ldots, v_{n_p}^{(p)}$.

Como $\widehat{A}$ é semelhante a A e Q é semelhante a B, tem-se que $U\,\widehat{A}\,U^{-1} + Q$ é semelhante a $UAU^{-1} + B$, pelo que $UAU^{-1} + B$ também tem por valores próprios $v_1^{(1)}, \ldots, v_{n_1}^{(1)}, \ldots, v_1^{(p)}, \ldots, v_{n_p}^{(p)}$, ou seja, $U A\, U^{-1} + B$ tem valores próprios $v_1, \ldots,\ v_p$.

Conclui-se então que o par (A, B) é espectralmente completo.

$\square$

Capítulo 3

Pares de Matrizes Espectralmente Completos

No capítulo anterior foi introduzido o conceito de par de matrizes espectralmente completo. Neste capítulo identificam-se todos os pares de matrizes espectralmente completos quando $F \neq \{0,1\}$ e $n \geq 2$. O resultado principal, o Teorema 3.2, teve como motivação principal os teoremas demonstrados por G. N. Oliveira, E. Marques de Sá e J. A. Dias da Silva, os Teoremas 2.2 e 2.3, do capítulo anterior.

O teorema que se enuncia a seguir será usado na demonstração do Teorema 3.2, o principal resultado deste capítulo, e será aqui apresentado sem demonstração, a sua demonstração poderá ser encontrada em F. C. Silva ([7]).

Teorema 3.1. *Sejam* $A_{11} \in F^{p\times p}$, $A_{22} \in F^{q\times q}$. $n = p + q$, $c_1, \ldots, c_n \in F$, $f_1|\ldots|f_p$ *os polinómios invariantes de* A_{11}. *Suponha-se que* $p \geq q$. *Existem matrizes* $A_{12} \in F^{p\times q}$, $A_{21} \in F^{q\times p}$ *tais que a matriz* $A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$ *tem valores próprios* $c_1, \ldots, c_n$ *se e só se são satisfeitas as condições seguintes:*

1) $c_1 + \cdots + c_n = \mathrm{tr}A_{11} + \mathrm{tr}A_{22}$

2) $f_1 \cdots f_{p-q}|(x - c_1)\cdots(x - c_n)$

3) Uma das seguintes condições é satisfeita:

c1) *pelo menos uma das matrizes* A_{11}, A_{22} *é não escalar*

c2) $A_{11} = aI_p$, $A_{22} = bI_q$, *com* $a, b \in F$, *e existe uma permutação* $\sigma : \{1, \ldots, n\} \mapsto \{1, \ldots, n\}$ *tal que:* $\begin{cases} c_{\sigma(2i-1)} + c_{\sigma(2i)} = a + b, & \text{para } i \in \{1, \ldots, q\} \\ c_{\sigma(j)} = a, & \text{para } j \in \{2q+1, \ldots, n\} \end{cases}$

Seja $C \in F^{n\times n}$ uma matriz da forma

$$C = \begin{bmatrix} * & c_{12} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ * & * & c_{23} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ * & * & * & \cdots & * & c_{n-1,n} \\ * & * & * & \cdots & * & * \end{bmatrix}, \tag{3.1}$$

ou seja, $c_{kr} = 0$, se $r > k+1$. Denota-se por $\chi(C)$ o número de indices $k \in \{1, \dots, n-1\}$ tais que $c_{k,k+1} \neq 0$.

Não é difícil provar a proposição:

Proposição 3.1. *Seja $A \in F^{n\times n}$ uma matriz da forma (3.1). Então $i(A) \leq n - \chi(A)$.*

Demonstração. Seja $\widetilde{F}$ uma extensão algebricamente fechada de F que contem os valores próprios da matriz A e suponha-se que $\chi(A) = k$.

Então, qualquer que seja $\lambda \in \widetilde{F}$, as linhas $l_1, \dots, l_k$ de $A - \lambda I_n$ são linearmente independentes. Logo, $\mathrm{car}(A - \lambda I_n) \geq k$ pelo que também se tem $R_{\widetilde{F}}(A) \geq k$.

Atendendo a que, pela Proposição 1.6.4, $R_{\widetilde{F}}(A) = n - i(A)$, tem-se então $n - i(A) \geq k$ o que é equivalente a $i(A) \leq n - \chi(A)$. □

Também se constata que se $K = K_1 \oplus \cdots \oplus K_r$ é matriz de tamanho $n \times n$, em que cada bloco K_i é uma matriz companheira de um polinómio, então $\chi(K) = n - r$.

Com efeito, para cada matriz K_i, de tamanho $n_i \times n_i$, sabe-se que $\chi(K_i) = n_i - 1$, $i \in \{1, \dots, r\}$, pelo que $\chi(K) = n_1 - 1 + n_2 - 1 + \cdots + n_r - 1 = n - r$.

O principal resultado deste capítulo é o teorema que a seguir de enuncia.

Teorema 3.2. *Sejam F um corpo, A, $B \in F^{n\times n}$, com $n \geq 2$. Sejam $f_1, \dots, f_r$ polinómios invariantes de A, diferentes de 1, e $g_1, \dots, g_s$ polinómios invariantes de B, diferentes de 1.*

1. *Se $i(A) + i(B) \leq n$ e pelo menos uma das seguintes condições é verificada:*

   (a) $n = 2$,

   (b) há pelo menos um polinómio $f_1, \dots, f_r, g_1, \dots, g_s$ que não tem grau 2,

   então (A, B) é espectralmente completo.

2. *A recíproca de 1. verifica-se se F tem pelo menos três elementos.*

Os lemas a seguir enunciados, assim como as respectivas demonstrações, serão usados na demonstração do Teorema 3.2.

Lema 3.1. *Seja* $K = K_1 \oplus \cdots \oplus K_r \in F^{n\times n}$, $n \geq 3$, *onde cada* K_i *é da forma (1.3). Sejam* $a, b, c \in F$ *com* $c \neq 0$. *Suponha-se que, pelo menos um dos blocos* K_i *é de tamanho* $t \times t$ *com* $t \geq 3$, *e que* $r \geq 2$. *Então* K *é semelhante à matriz*

$$\left[\begin{array}{c|c|c} a & 0 & c \\ \hline * & K_0 & 0 \\ \hline * & * & b \end{array}\right],$$

onde $K_0 \in F^{(n-2)\times(n-2)}$ *é uma soma directa de blocos da forma (1.3) e satisfaz* $\chi(K_0) = \chi(K) - 1$.

Além disso, se $r \leq n-3$, *isto é, se* $\chi(K) \geq 3$, *então* K_0 *pode ser escolhido de modo que pelo menos um dos blocos da forma (1.3) que aparecem em* K_0 *seja de tamanho* $p \times p$, *com* $p \geq 3$.

Demonstração. Sem perda de generalidade suponha-se que o bloco K_1 é de tamanho $t\times t$, com $t \geq 3$. Com efeito, se o primeiro bloco não verifica esta condição pode-se, com as adequadas permutações de linhas e colunas, colocar um bloco nestas condições na posição pretendida.

Se $\chi(K) \geq 3$, tem-se um dos seguintes casos:

i) um dos blocos K_i é de tamanho $t \times t$, com $t \geq 4$,

ii) um dos blocos K_i é de tamanho 3×3 e outro bloco é não escalar.

Caso a matriz K satisfaça a condição i), suponha-se que a matriz K_1 é de tamanho $t \times t$, com $t \geq 4$. Caso a matriz K não satisfaça i) e satisfaça a condição ii), suponha-se que a matriz K_1 é de tamanho 3×3 e que a matriz K_2 é não escalar.

Assim,

$$K = \left[\begin{array}{cc|cccc} 0 & 1 & & 0 & & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline & * & & N & & \end{array}\right],$$

onde $\chi(N) = \chi(K) - 2$.

Note-se que $N = N_1 \oplus K_2 \oplus \cdots \oplus K_r$, a matriz N_1 é de tamanho 1×1 caso a condição ii) seja verificada, e é de tamanho $s \times s$, com $s \geq 2$, tendo a forma (1.3), caso a condição i) seja verificada. Tem-se então que

$$K_1 = \left[\begin{array}{cc|cccc} 0 & 1 & & 0 & & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline * & & & N_1 & & \end{array}\right].$$

Com as adequadas permutações das linhas e colunas da matriz K, obtém-se a matriz semelhante a K,

$$K^{(1)} = \left[\begin{array}{c|cccc|c} 0 & & 0 & & & 1 \\ \hline * & & N & & & * \\ \hline 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Na matriz $K^{(1)}$, subtraia-se à segunda linha a n-ésima linha multiplicada por $a+b$ e, de seguida, some-se à n-ésima coluna a segunda coluna multiplicada por $a+b$. Obtém-se a matriz:

$$K^{(2)} = \left[\begin{array}{c|cccc|c} 0 & & 0 & & & 1 \\ \hline & N_1^{(1)} & & & & \\ * & & K_2 & & & * \\ & & & \ddots & & \\ & & & & K_r & \\ \hline 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & a+b \end{array}\right].$$

A matriz $N_1^{(1)}$ é diferente da matriz N_1 quando muito na sua entrada $(1,1)$, pelo que continua a ter-se $\chi(N_1^{(1)}) = \chi(N_1)$, mas a matriz $N_1^{(1)}$ deixa de ter a forma (1.3) e passa a ter a forma (3.1).

Considere-se que a matriz $N_1^{(1)} \oplus K_2$ é de tamanho $p \times p$. De modo a obter uma matriz semelhante a $K^{(2)}$ com a forma pretendida, adicione-se à $(p+1)$-ésima linha da matriz $K^{(2)}$ a sua n-ésima linha e, de seguida, subtraia-se à sua n-ésima coluna a sua $(p+1)$-ésima coluna. Obtém-se a matriz:

$$K^{(3)} = \left[\begin{array}{c|cccc|c} 0 & & 0 & & & 1 \\ \hline & N_2 & & & & \\ * & & K_3 & & & * \\ & & & \ddots & & \\ & & & & K_r & \\ \hline 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & a+b \end{array}\right], \text{ onde } \quad N_2 = \left[\begin{array}{cccc|c} & & N_1^{(1)} & & 0 \\ \hline 0 & \cdots & \cdots & 0 & \\ \vdots & & & \vdots & K_2 \\ 0 & & & 0 & \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & \end{array}\right].$$

Com permutações apropriadas nas linhas e colunas da matriz N_2, obtém-se a matriz semelhante a N_2,

$$N_2^{(1)} = \left[\begin{array}{c|cccc} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ K_2 & \vdots & & & \vdots \\ & 0 & & & \vdots \\ & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & & N_1^{(1)} & & \end{array}\right].$$

Repare-se que a matriz $N_2^{(1)}$ é uma matriz na forma (3.1). Então,

$$\chi(N_2^{(1)}) = \chi(K_2) + \chi(N_1^{(1)}) + 1 = p - 1,$$

pelo que

$$i(N_2^{(1)}) \leq p - \chi(N_2^{(1)}) = p - (p-1) = 1.$$

Conclui-se que a matriz $N_2^{(1)}$ é não derrogatória. Então, a matriz $N_2^{(1)}$ é semelhante à matriz companheira do seu polinómio característico, ou seja, a uma matriz $N_2^{(2)}$ da forma (1.3). A matriz $K^{(3)}$ é então semelhante à matriz

$$K^{(4)} = \left[\begin{array}{c|cccc|c} 0 & & 0 & & & 1 \\ \hline & N_2^{(2)} & & & & \\ * & & K_3 & & & * \\ & & & \ddots & & \\ & & & & K_r & \\ \hline 0 & & * & & & a+b \end{array}\right].$$

Seja $K_0 = N_2^{(2)} \oplus K_3 \oplus \cdots \oplus K_r$. Tem-se que $\chi(K_0) = \chi(K) - 1$. Com efeito,

$$\begin{array}{rcl} \chi(K_0) & = & \chi(N_2^{(2)}) + \chi(K_3) + \cdots + \chi(K_r) \\ & = & (\chi(K_2) + \chi(N_1^{(1)}) + 1) + \chi(K_3) + \cdots + \chi(K_r) \\ & = & \chi(N_1) + \chi(K_2) + \chi(K_3) + \cdots + \chi(K_r) + 1 \\ & = & \chi(N) + 1 \\ & = & \chi(K) - 2 + 1 \\ & = & \chi(K) - 1. \end{array}$$

Para finalizar a demonstração do lema pretende-se ainda obter uma matriz semelhante à anterior onde as entradas $(1,1)$, (i,n) com $i \in \{1,\ldots,n\}$, fiquem com a forma pretendida. Para cada $i \in \{2,\ldots,n-1\}$ adicione-se à i-ésima linha da matriz $K^{(4)}$ a sua primeira linha multiplicada por α_i e, de seguida, subtraia-se à sua primeira coluna a sua i-ésima coluna multiplicada por α_i, e para os adequados valores de α_i. Com estas transformações elementares de semelhança anulam-se as entradas da última coluna da matriz $K^{(4)}$, com excepção das entradas $(1,n)$ e (n,n), obtendo-se a matriz:

$$K^{(5)} = \left[\begin{array}{c:c:c} 0 & 0 & 1 \\ \hdashline * & K_0 & 0 \\ \hdashline * & * & a+b \end{array}\right].$$

Subtraia-se de seguida, à n-ésima linha da matriz $K^{(5)}$ a sua primeira linha multiplicada por a e seguidamente, adicione-se à sua primeira coluna a sua n-ésima coluna multiplicada por a. Obtém-se a matriz:

$$K^{(6)} = \left[\begin{array}{c:c:c} a & 0 & 1 \\ \hdashline * & K_0 & 0 \\ \hdashline * & * & b \end{array}\right],$$

semelhante a $K^{(5)}$, com as entradas $(1,1)$ e (n,n) pretendidas.

Finalmente, e de modo a obter uma matriz semelhante em que a entrada $(1,n)$ seja igual a c, multiplique-se a n-ésima linha da matriz $K^{(6)}$ por c^{-1} e, de seguida, multiplique-se a sua n-ésima coluna por c. Obtém-se a matriz:

$$K^{(7)} = \left[\begin{array}{c:c:c} a & 0 & c \\ \hdashline * & K_0 & 0 \\ \hdashline * & * & b \end{array}\right],$$

semelhante a $K^{(6)}$ e, portanto, semelhante a K, onde K_0 é soma directa de blocos da forma (1.3) e $\chi(K_0) = \chi(K) - 1$.

Se $\chi(K) \geq 3$, a suposição inicial dos tamanhos de K_1 e K_2 implica que $N_2^{(2)}$ seja de tamanho $p \times p$, com $p \geq 3$. □

Lema 3.2. *Sejam $K = K_1 \oplus \cdots \oplus K_r \in F^{n\times n}$ e $L = L_1 \oplus \cdots \oplus L_s \in F^{n\times n}$, onde cada bloco K_i, L_j é da forma (1.3).*

Se $r + s \leq n$ e pelo menos um dos blocos K_i, L_j, $i \in \{1, \ldots, r\}$ e $j \in \{1, \ldots, s\}$, é de tamanho $t \times t$, com $t \geq 3$, então o par (K,L) é espectralmente completo.

Demonstração. Para a demonstração deste lema vai usar-se o processo de indução sobre n.

Se $n = 1$ ou $n = 2$, o resultado é trivial pois as hipóteses do lema nunca são verificadas.

Suponha-se então que $n \geq 3$, $r+s \leq n$ e que pelo menos um dos blocos $K_1, \ldots, K_r, L_1, \ldots, L_s$ é de tamanho $t \times t$, com $t \geq 3$. Sem perda de generalidade, suponha-se que $r \leq s$.

Seja $(c_1, \ldots, c_n)$ um n-uplo de elementos de F tal que

$$\sum_{i=1}^{n} c_i = \operatorname{tr} K + \operatorname{tr} L. \tag{3.2}$$

Mostrar-se-á que existem matrizes K' e L', semelhantes às matrizes K e L, respectivamente, tais que a matriz $K' + L'$ tem valores próprios $c_1, \ldots, c_n$.

Observe-se que:

1) Da condição $r + s \leq n$ conclui-se que $r \leq \frac{n}{2}$. De facto, como $r + s \leq n$ e $r \leq s$ resulta que $r \leq n - r$ e portanto $2r \leq n$, donde $r \leq \frac{n}{2}$.

Se $r < \frac{n}{2}$, pelo menos um dos blocos $K_1, \ldots, K_r$ é de tamanho $t \times t$ com $t \geq 3$. De facto, se $r < \frac{n}{2}$ e com vista a um absurdo, suponha-se que todos os blocos $K_1, \ldots, K_r$ têm tamanho inferior ou igual a 2. Ter-se-ia então

$$n = \operatorname{gr}(f_1) + \cdots + \operatorname{gr}(f_r) \leq 2r,$$

pelo que $r \geq \frac{n}{2}$, o que é um absurdo.

Suponha-se agora que $r = \frac{n}{2}$. Se $r = \frac{n}{2}$, também se tem $s = \frac{n}{2}$ e podemos supor, sem perda de generalidade, que pelo menos um dos blocos K_i é de tamanho $t \geq 3$.

2) Da condição $r + s \leq n$, conclui-se que as matrizes K e L são não escalares. Com efeito, se a matriz K ou a matriz L fossem escalares, ter-se-ia $r = n$ ou $s = n$, pelo que da condição $r + s \leq n$ se concluiria que $s \leq 0$ ou $r \leq 0$, o que é absurdo.

De seguida, sob a condição $r + s \leq n$, estudem-se as possíveis variações de r e s.

Considere-se então $r = 1$ ou $s = 1$. Repare-se que, se $r = 1$, então a matriz K é não derrogatória. Como L é não escalar, pelo Teorema 2.3, conclui-se que o par (K, L) é espectralmente completo. O mesmo se conclui quando $s = 1$.

Suponha-se agora que $r \geq 2$ e $s \geq 2$. Note-se que, neste caso, $n \geq 4$.

A condição $r + s \leq n$ implica que pelo menos um dos blocos $L_1, \ldots, L_s$ é de tamanho superior a 1.

Surgem então duas alternativas:

i) pelo menos um dos blocos $L_1, \ldots, L_s$ é de tamanho 2×2.

Com convenientes permutações das linhas e colunas da matriz L obtém-se uma matriz $L^{(1)}$, semelhante a L,

$$L^{(1)} = \left[\begin{array}{c|c|c} 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & L_0 & 0 \\ \hline b & 0 & a \end{array}\right]$$

onde $a, b \in F$, L_0 é soma directa de blocos da forma (1.3) e $\chi(L_0) = \chi(L) - 1$.

ii) pelo menos um dos blocos $L_1, \ldots, L_s$ é de tamanho superior a 2.

Então, pelo Lema 3.1, pode-se dizer que a matriz L é semelhante a uma matriz da forma

$$L^{(1)} = \left[\begin{array}{c|c|c} 0 & 0 & 1 \\ \hline * & L_0 & 0 \\ \hline * & * & a \end{array}\right],$$

onde $a \in F$, L_0 é soma directa de blocos da forma (1.3) e $\chi(L_0) = \chi(L) - 1$.

Independentemente da alternativa que se considere para a forma da matriz $L^{(1)}$ e, pelo Lema 3.1, a matriz K é semelhante a uma matriz da forma

$$K^{(1)} = \left[\begin{array}{c|c|c} c_1 & 0 & -1 \\ \hline * & K_0 & 0 \\ \hline * & * & c_n - a \end{array}\right],$$

onde K_0 é soma directa de blocos da forma (1.3) e $\chi(K_0) = \chi(K) - 1$.

Prove-se agora que o par (K_0, L_0) é espectralmente completo.

Como $r + s \leq n$ com $r, s \geq 2$ tem-se que $r, s \leq n - 2$, ou seja, $\chi(K) \geq 2$ e $\chi(L) \geq 2$. Então, $\chi(K_0) \geq 1$ e $\chi(L_0) \geq 1$, e portanto, as matrizes K_0 e L_0 são não escalares.

Por outro lado, como $r \leq \frac{n}{2}$, ou seja $\chi(K) \geq \frac{n}{2}$, tem-se

$$\begin{aligned} \chi(K_0) &= \chi(K) - 1 \\ &\geq \tfrac{n}{2} - 1. \end{aligned}$$

Analise-se o que se passa quando $n \geq 4$.

Se $n = 4$, tem-se que $\chi(K_0) = 1$, ou seja, a matriz K_0 é não derrogatória e, pelo Teorema 2.3 o par (K_0, L_0) é espectralmente completo.

Se $n \geq 5$, a condição $\chi(K) \geq \frac{n}{2}$ implica que $\chi(K) \geq 3$. Então pelo Lema 3.1 pode escolher-se uma matriz K_0 de modo que, pelo menos um dos seus blocos seja de ordem $t \times t$, com $t \geq 3$, e da forma (1.3). Por outro lado, como

$$\begin{aligned}\chi(K_0)+\chi(L_0) &= \chi(K)-1+\chi(L)-1\\ &= \chi(K)+\chi(L)-2\\ &= n-r+n-s-2\\ &= 2n-(r+s)-2\\ &\geq n-2,\end{aligned}$$

por hipótese de indução, o par (K_0, L_0) é espectralmente completo. Consequentemente, e atendendo a que

$$\operatorname{tr} K_0 + \operatorname{tr} L_0 = c_2 + c_3 + \cdots + c_{n-1},$$

existem matrizes $K_0^{(1)}$ e $L_0^{(1)}$, semelhantes a K_0 e L_0, respectivamente, tais que a matriz $K_0^{(1)} + L_0^{(1)}$ tem valores próprios $c_2 + c_3 + \cdots + c_{n-1}$.

Com efeito, repare-se que de

$$\operatorname{tr}K_0 = \operatorname{tr}K - c_1 - c_n + a \quad \text{e} \quad \operatorname{tr}L_0 = \operatorname{tr}L - a,$$

obtém-se

$$\operatorname{tr}K_0 + \operatorname{tr}L_0 = c_2 + c_3 + \cdots + c_{n-1}.$$

Facilmente se constata que as matrizes $K^{(1)}$ e $L^{(1)}$ são, respectivamente, semelhantes a

$$K^{(2)} = \left[\begin{array}{c|c|c} c_1 & 0 & -1 \\ \hline * & K_0^{(1)} & 0 \\ \hline * & * & c_n - a \end{array}\right], \quad L^{(2)} = \left[\begin{array}{c|c|c} 0 & 0 & 1 \\ \hline * & L_0^{(1)} & 0 \\ \hline * & * & a \end{array}\right],$$

e $K^{(2)} + L^{(2)}$ tem valores próprios $c_1, c_2, \ldots, c_n$. Como a matriz $K^{(2)}$ é semelhante à matriz K e a matriz $L^{(2)}$ é semelhante à matriz L, conclui-se que o par (K, L) é espectralmente completo. $\square$

Nas condições do Teorema 3.2, demonstre-se a sua condição 1., ou seja, demonstre-se que se $i(A) + i(B) \leq n$ e pelo menos uma das condições (a) ou (b) são verificadas, então o par (A, B) é espectralmente completo.

Considerem-se as matrizes $A, B \in F^{n\times n}$ e suponha-se que $i(A) + i(B) \leq n$.

Se $n = 2$, tem-se que $i(A) = i(B) = 1$. Então as matrizes A e B são não derrogatórias (e não escalares). Pelo Teorema 2.3, o par (A, B) é espectralmente completo.

Se no conjunto $\{f_1, \ldots, f_r, g_1, \ldots, g_s\}$ há pelo menos um polinómio que não tem grau 2, então, pela condição $r + s \leq n$ há, pelo menos, um polinómio de grau superior a 2. Com efeito, se todos os polinómios no conjunto referido fossem de grau menor ou igual a 2, ter-se-ia

$$n = \mathrm{gr}(f_1) + \cdots + \mathrm{gr}(f_r) \quad \text{e} \quad n = \mathrm{gr}(g_1) + \cdots + \mathrm{gr}(g_s)$$
$$n \leq 2r \quad \text{e} \quad n \leq 2s$$

ou seja,

$$r + s \geq n.$$

Se $r + s > n$, contradiz imediatamente a suposição inicial.

Admita-se que $r + s = n$. Note-se que se está a admitir que o grau de todos os polinómios é inferior ou igual a 2. Por hipótese, em $\{f_1, \ldots, f_r, g_1, \ldots, g_s\}$ há um polinómio que não tem grau 2. Então é porque existe um polinómio de grau 1. Suponha-se que esse polinómio se encontra no conjunto $\{f_1, \ldots, f_r\}$. Logo, $n < 2r$, e portanto $r+s > \frac{n}{2} + \frac{n}{2} = n$, que contradiz novamente a suposição inicial.

Considerem-se as matrizes

$$K = C(f_1) \oplus C(f_2) \oplus \cdots \oplus C(f_r)$$
$$L = C(g_1) \oplus C(g_2) \oplus \cdots \oplus C(g_s)$$

Pelo Lema 3.2, o par (K, L) é espectralmente completo. Como as matrizes K e L são semelhantes a A e B, respectivamente, então o par (A, B) também é espectralmente completo.

Demonstre-se de seguida a condição 2. do Teorema 3.2, recorrendo, para tal, ao método de redução ao absurdo.

Seja F um corpo com pelo menos três elementos e suponha-se o par (A, B) espectralmente completo, onde $A, B \in F^{n \times n}$. Suponha-se que $n \neq 2$ e que todos os polinómios invariantes das matrizes A e B diferentes de 1 têm grau 2.

Com as condições apresentadas e pelo Teorema 2.2, conclui-se que $i(A) + i(B) \leq n$.

Tem-se também que $n = 2m$, com $m \geq 2$. Repare-se que se $f_1, \ldots, f_r$ são os polinómios invariantes diferentes de 1 da matriz A, como são de grau 2 e existe entre eles uma relação de divisibilidade, ter-se-á $f_1 = \cdots = f_r$. Analogamente, se $g_1, \ldots, g_s$ são os polinómios invariantes de B diferentes de 1, ter-se-á $g_1 = \cdots = g_s$.

Seja f (respectivamente g) o único polinómio invariante diferente de 1 da matriz A (respectivamente B). Então A e B são, respectivamente, semelhantes a:

$$A^{(1)} = \bigoplus_{i=1}^{m} C(f) \quad , \quad B^{(1)} = \bigoplus_{i=1}^{m} C(g).$$

As matrizes $C(f)$ e $C(g)$ são, respectivamente, semelhantes sobre $\widetilde{F}$ a matrizes N e M que pertencem ao conjunto

$$\left\{\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix}, a,\, c \in \widetilde{F},\, a \neq c,\, a + c \in F\right\} \bigcup \left\{\begin{bmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{bmatrix}, a \in \widetilde{F},\, 2a \in F\right\}.$$

Com efeito, suponha-se que $f(x) = x^2 - (a+c)x + ac \in F[x]$. A matriz companheira do polinómio f é $C(f) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -ac & a+c \end{bmatrix}$.

Se as raízes de f são distintas, então $C(f)$ é semelhante a uma matriz diagonal. Sem perda de generalidade suponha-se que $C(f) = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix}$.

Se as raízes de f coincidem, então $C(f) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a^2 & 2a \end{bmatrix}$.

Subtraindo à segunda linha da matriz $C(f)$ a sua primeira linha multiplicada por a e, de seguida, adicionando à sua primeira coluna a segunda multiplicada por a, tem-se que $C(f)$ é ainda semelhante à matriz $\begin{bmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{bmatrix}$. Sem perda de generalidade suponha-se que $C(f) = \begin{bmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{bmatrix}$.

Assim sendo, $A^{(1)}$ e $B^{(1)}$ são semelhantes, respectivamente, a

$$A^{(2)} = \bigoplus_{i=1}^{m} N \quad , \quad B^{(2)} = \bigoplus_{i=1}^{m} M.$$

Facilmente se constata que as matrizes $A^{(2)}$ e $B^{(2)}$ são permutacionalmente semelhantes a matrizes K e L pertencentes à reunião dos dois conjuntos:

$$\left\{\begin{bmatrix} aI_m & 0 \\ 0 & cI_m \end{bmatrix}, a,\, c \in \widetilde{F},\, a \neq c,\, a + c \in F\right\} \bigcup \left\{\begin{bmatrix} aI_m & I_m \\ 0 & aI_m \end{bmatrix}, a \in \widetilde{F},\, 2a \in F\right\}.$$

Há então a considerar quatro casos distintos, consoante a variação da forma das matrizes K e L, que são as seguintes:

$$K = \begin{bmatrix} aI_m & 0 \\ 0 & cI_m \end{bmatrix}, \quad L = \begin{bmatrix} bI_m & 0 \\ 0 & dI_m \end{bmatrix},$$

$$K = \begin{bmatrix} aI_m & I_m \\ 0 & aI_m \end{bmatrix}, \quad L = \begin{bmatrix} bI_m & I_m \\ 0 & bI_m \end{bmatrix},$$

$$K = \begin{bmatrix} aI_m & I_m \\ 0 & aI_m \end{bmatrix}, \quad L = \begin{bmatrix} bI_m & 0 \\ 0 & dI_m \end{bmatrix}.$$

$$\text{e} \quad K = \begin{bmatrix} aI_m & 0 \\ 0 & cI_m \end{bmatrix}, \qquad L = \begin{bmatrix} bI_m & I_m \\ 0 & bI_m \end{bmatrix}.$$

Proceda-se então à análise de cada um dos casos:

Caso I. $K = \begin{bmatrix} aI_m & 0 \\ 0 & cI_m \end{bmatrix}$, $L = \begin{bmatrix} bI_m & 0 \\ 0 & dI_m \end{bmatrix}$ com $a, b, c, d \in \widetilde{F}$, $a \neq c$, $b \neq d$, $a + c \in F$, $b + d \in F$.

Repare-se que $a + d \in F$ se e só se $b + c \in F$. Com efeito $a + d = (a + c) + (b + d) - (b + c)$, com $(a + c), (b + d) \in F$.

Escolha-se um 2m-uplo $(\lambda_1, \ldots, \lambda_{2m})$ de elementos de F da seguinte forma:

(i) se $a + d \in F$ escolha-se $\begin{cases} x \in F \backslash \{0,\ 1 + a + d - b - c\} \\ w \in F \backslash \{0,\ a + d - b - c\} \end{cases}$ e tome-se

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= a + d \\
\lambda_2 &= b + c - 1 \\
\lambda_3 &= b + c + x \\
\lambda_4 &= a + d + 1 - x \\
\lambda_5 &= \cdots = \lambda_{m+2} = a + d - w \\
\lambda_{m+3} &= \cdots = \lambda_{2m} = b + c + w.
\end{aligned}$$

(ii) se $a + d \notin F$ escolha-se $\begin{cases} x \in F \backslash \{0,\ 1 - a - d - b - c\} \\ w \in F \backslash \{0,\ a + d + b + c\} \end{cases}$ e tome-se

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= 0 \\
\lambda_2 &= a + b + c + d - 1 \\
\lambda_3 &= a + b + c + d + x \\
\lambda_4 &= 1 - x \\
\lambda_5 &= \cdots = \lambda_{m+2} = a + b + c + d - w \\
\lambda_{m+3} &= \cdots = \lambda_{2m} = w.
\end{aligned}$$

Para ambas as hipóteses as três observações seguintes são verificadas:

1ª Observação. *Não existem* $j, k \in \{1, \ldots, 2m\}$, $j \neq k$, *tais que* $\lambda_j = a + d$ *e* $\lambda_k = b + c$.

Quer $a + d \in F$ quer $a + d \notin F$, o resultado é trivial, uma vez que resulta da escolha dos próprios elementos.

2ª Observação. *Não existe* $i \in \{2, 3, \ldots, 2m\}$ *tal que* $\lambda_1 + \lambda_i = a + b + c + d$.

De facto se $a + d \in F$:

$\lambda_1 + \lambda_2 = a + b + c + d - 1$,

$\lambda_1 + \lambda_3 = a + b + c + d + x \neq a + b + c + d$, pois $x \neq 0$,

$\lambda_1 + \lambda_4 = 2a + 2d + 1 - x \neq a + b + c + d$, pois $x \neq a + d - b - c + 1$,

$\lambda_1 + \lambda_p = 2a + 2d - w \neq a + b + c + d$, pois $w \neq a + d - b - c$, para $p \in \{5, \ldots, m + 2\}$,

$\lambda_1 + \lambda_q = a + b + c + d + w \neq a + b + c + d$, pois $w \neq 0$, para $q \in \{m + 3, \ldots, 2m\}$.

Se $a + d \notin F$:

$\lambda_1 + \lambda_2 = a + b + c + d - 1$,

$\lambda_1 + \lambda_3 = a + b + c + d + x \neq a + b + c + d$, pois $x \neq 0$,

$\lambda_1 + \lambda_4 = 1 - x \neq a + b + c + d$, pois $x \neq 1 - a - d - c - d$,

$\lambda_1 + \lambda_r = a + b + c + d - w \neq a + b + c + d$, pois $w \neq 0$, para $r \in \{5, \ldots, m + 2\}$,

$\lambda_1 + \lambda_s = w \neq a + b + c + d$, pois $w \neq a + b + c + d$, para $s \in \{m + 3, \ldots, 2m\}$.

3ª Observação.

$$\sum_{i=1}^{2m} \lambda_i = m(a + b + c + d) = \mathrm{tr}A + \mathrm{tr}B.$$

Quer $a + d \in F$ quer $a + d \notin F$, facilmente se constata que

$$\sum_{i=1}^{2m} \lambda_i = m(a + c) + m(b + d) = \mathrm{tr}K + \mathrm{tr}L.$$

Por outro lado, como a matriz K é semelhante à matriz A, a matriz L é semelhante à matriz B e o traço de uma matriz é invariante por semelhança, tem-se que

$$\sum_{i=1}^{2m} \lambda_i = \mathrm{tr}A + \mathrm{tr}B.$$

Por hipótese o par (A, B) é espectralmente completo pelo que existe uma matriz não singular $X \in \widetilde{F}^{2m\times 2m}$, tal que $XKX^{-1} + L$ tem valores próprios $\lambda_1, \ldots, \lambda_{2m}$.

Considere-se que as matrizes X e X^{-1} têm, respectivamente, as formas:

$$X = \begin{bmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{bmatrix}, \; X^{-1} = \begin{bmatrix} X_1' & X_2' \\ X_3' & X_4' \end{bmatrix},$$

com X_i e X_i' matrizes $m \times m$, para $i \in \{1, 2, 3, 4\}$.

4ª Observação. *Se* car$X_1 = p$, *então existem matrizes não singulares* W_1, W_2, Z_1, $Z_2 \in \widetilde{F}^{m\times m}$, *tais que* $Y = (W_1 \oplus W_2)X(Z_1 \oplus Z_2)$ *e a sua inversa têm as formas:*

$$Y = \left[\begin{array}{cc:cc} I_p & 0 & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{m-p} \\ \hdashline * & 0 & * & * \\ 0 & I_{m-p} & * & * \end{array}\right] \quad ; \quad Y^{-1} = \left[\begin{array}{cc:cc} * & * & * & 0 \\ * & * & * & I_{m-p} \\ \hdashline * & * & * & 0 \\ 0 & I_{m-p} & 0 & 0 \end{array}\right].$$

De facto, se car$X_1 = p$, existem matrizes não singulares U_1, $V_1 \in \widetilde{F}^{m\times m}$ tais que

$$U_1X_1V_1 = I_p \oplus 0_{m-p}.$$

Sejam U_2, $V_2 \in \widetilde{F}^{m\times m}$ não singulares tais que $U_2(X_3V_1)$ é triangular inferior e $(U_1X_2)V_2$ é triangular superior.

Considere-se a matriz $X^{(1)} = (U_1 \oplus U_2)X(V_1 \oplus V_2)$. Tem-se então que:

$$\begin{aligned} X^{(1)} &= \begin{bmatrix} U_1 & 0 \\ 0 & U_2 \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} V_1 & 0 \\ 0 & V_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (U_1X_1)V_1 & (U_1X_2)V_2 \\ (U_2X_3)V_1 & (U_2X_4)V_2 \end{bmatrix} \\ &= \left[\begin{array}{cc:cc} I_p & 0 & R_1 & R_2 \\ 0 & 0 & 0 & R_3 \\ \hdashline R_4 & 0 & R_5 & R_6 \\ R_7 & R_8 & R_9 & R_{10} \end{array}\right] \end{aligned}$$

onde R_1, R_4, $R_5 \in \widetilde{F}^{p\times p}$, R_2, $R_6 \in \widetilde{F}^{p\times(m-p)}$, R_3, R_8, $R_{10} \in \widetilde{F}^{(m-p)\times(m-p)}$ e R_7, $R_9 \in \widetilde{F}^{(m-p)\times p}$.

Atendendo a que a matriz X é não singular, então também as matrizes R_3 e R_8 o são. De facto, se a matriz R_3 fosse singular, a sua característica não seria máxima e R_3 seria equivalente a uma matriz com $m-p-\mathrm{car}(R_3)$ linhas nulas. Então também a matriz $X^{(1)}$ teria o mesmo número de linhas nulas, pelo que a matriz X seria singular. Um raciocínio análogo, mas em termos de colunas, mostra que a matriz R_8 também é não singular.

Pretende-se uma matriz equivalente a $X^{(1)}$ onde, na posição da submatriz R_2 apareça a matriz 0 e na posição da submatriz R_3 apareça I_{m-p}. Multiplique-se então a matriz $X^{(1)}$, à esquerda, pela matriz W, onde

$$
\begin{aligned}
W &= \left[\begin{array}{cc|cc} I_p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_3^{-1} & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & I_p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{m-p} \end{array}\right] \left[\begin{array}{cc|cc} I_p & -R_2R_3^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & I_{m-p} & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & I_p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{m-p} \end{array}\right] \\
&= \left[\begin{array}{cc|cc} I_p & -R_2R_3^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & R_3^{-1} & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & I_p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{m-p} \end{array}\right],
\end{aligned}
$$

A matriz $X^{(1)}$ é então equivalente a

$$
WX^{(1)} = X_\star^{(1)} = \left[\begin{array}{cc|cc} I_p & 0 & R_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{m-p} \\ \hline R_4 & 0 & R_5 & R_6 \\ R_7 & R_8 & R_9 & R_{10} \end{array}\right].
$$

Pretende-se uma matriz equivalente à matriz $X_\star^{(1)}$ onde, na posição das submatrizes R_7 e R_8 apareçam, respectivamente, as matrizes 0 e I_{m-p}. Multiplique-se então a matriz $X_\star^{(1)}$, à direita, pela matriz Z, onde

$$
Z = \left[\begin{array}{cc|cc} I_p & 0 & 0 & 0 \\ -R_8^{-1}R_7 & I_{m-p} & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & I_p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{m-p} \end{array}\right] \left[\begin{array}{cc|cc} I_p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_8^{-1} & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & I_p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{m-p} \end{array}\right]
$$

$$= \left[\begin{array}{cc|cc} I_p & 0 & 0 & 0 \\ -R_8^{-1}R_7 & R_8^{-1} & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & I_p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{m-p} \end{array}\right].$$

A matriz $X_\star^{(1)}$ é então equivalente à matriz $Y = X_\star^{(1)}Z$. Com efeito,

$$\begin{aligned} WX^{(1)}Z &= \left[\begin{array}{cc|cc} I_p & 0 & R_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{m-p} \\ \hline R_4 & 0 & R_5 & R_6 \\ R_7 & R_8 & R_9 & R_{10} \end{array}\right] \left[\begin{array}{cc|cc} I_p & 0 & 0 & 0 \\ -R_8^{-1}R_7 & R_8^{-1} & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & I_p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{m-p} \end{array}\right] \\ &= \left[\begin{array}{cc|cc} I_p & 0 & R_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{m-p} \\ \hline R_4 & 0 & R_5 & R_6 \\ 0 & I_{m-p} & R_9 & R_{10} \end{array}\right] \\ &= Y. \end{aligned}$$

Falta determinar a matriz Y^{-1}.

Tenha-se em conta que $YY^{-1} = Y^{-1}Y = I$. Particione-se a matriz Y^{-1} na forma

$$Y^{-1} = \left[\begin{array}{cc|cc} R_{11} & R_{12} & R_{13} & R_{14} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} & R_{24} \\ \hline R_{31} & R_{32} & R_{33} & R_{34} \\ R_{41} & R_{42} & R_{43} & R_{44} \end{array}\right].$$

De $YY^{-1} = I$, tem-se

$$\left[\begin{array}{cc|cc} I_p & 0 & R_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{m-p} \\ \hline R_4 & 0 & R_5 & R_6 \\ 0 & I_{m-p} & R_9 & R_{10} \end{array}\right] \left[\begin{array}{cc|cc} P_{11} & P_{12} & P_{13} & P_{14} \\ P_{21} & P_{22} & P_{23} & P_{24} \\ \hline P_{31} & P_{32} & P_{33} & P_{34} \\ P_{41} & P_{42} & P_{43} & P_{44} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|cc} I_p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_{m-p} & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & I_p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{m-p} \end{array}\right]$$

e obtém-se $P_{41} = 0$, $P_{42} = I_{m-p}$, $P_{43} = 0$ e $P_{44} = 0$.

De $Y^{-1}Y = I$, tem-se

$$\left[\begin{array}{cc:cc} P_{11} & P_{12} & P_{13} & P_{14} \\ P_{21} & P_{22} & P_{23} & P_{24} \\ \hdashline P_{31} & P_{32} & P_{33} & P_{34} \\ 0 & I_{m-p} & 0 & 0 \end{array}\right] \left[\begin{array}{cc:cc} I_p & 0 & R_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{m-p} \\ \hdashline R_4 & 0 & R_5 & R_6 \\ 0 & I_{m-p} & R_9 & R_{10} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc:cc} I_p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_{m-p} & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & I_p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{m-p} \end{array}\right]$$

e obtém-se $P_{14} = 0$, $P_{24} = I_{m-p}$ e $P_{34} = 0$.

A matriz Y^{-1} tem então a forma: $Y^{-1} = \left[\begin{array}{cc:cc} * & * & * & 0 \\ * & * & * & I_{m-p} \\ \hdashline * & * & * & 0 \\ 0 & I_{m-p} & 0 & 0 \end{array}\right]$.

5ª Observação. *A matriz X_1 é não singular.*

Seja $\operatorname{car} X_1 = p$. Escolham-se matrizes não singulares $W_1, W_2, Z_1, Z_2 \in \widetilde{F}^{m\times m}$ tais que $Y = (W_1 \oplus W_2)X(Z_1 \oplus Z_2)$ e Y^{-1} têm a forma indicada na 4ª Observação.

Note-se que $L = (W_1 \oplus W_2)L(W_1^{-1} \oplus W_2^{-1})$ e $K = (Z_1 \oplus Z_2)K(Z_1^{-1} \oplus Z_2^{-1})$.

A matriz $XKX^{-1} + L$ é então semelhante a

$$\begin{aligned} & (W_1 \oplus W_2)(XKX^{-1} + L)(W_1^{-1} \oplus W_2^{-1}) \\ = \; & (W_1 \oplus W_2)XKX^{-1}(W_1^{-1} \oplus W_2^{-1}) + (W_1 \oplus W_2)L(W_1^{-1} \oplus W_2^{-1}) \\ = \; & (W_1 \oplus W_2)X(Z_1 \oplus Z_2)K(Z_1^{-1} \oplus Z_2^{-1})X^{-1}(W_1^{-1} \oplus W_2^{-1}) + L \\ = \; & YKY^{-1} + L \end{aligned}$$

$$= \left[\begin{array}{cc:cc} I_p & 0 & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{m-p} \\ \hdashline * & 0 & * & * \\ 0 & I_{m-p} & * & * \end{array}\right] \left[\begin{array}{c:c} aI_m & 0 \\ \hdashline 0 & cI_m \end{array}\right] \left[\begin{array}{cc:cc} * & * & * & 0 \\ * & * & * & I_{m-p} \\ \hdashline * & * & * & 0 \\ 0 & I_{m-p} & 0 & 0 \end{array}\right] + \left[\begin{array}{c:c} bI_m & 0 \\ \hdashline 0 & dI_m \end{array}\right]$$

$$= \left[\begin{array}{cc:cc} aI_p & 0 & cI_p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & cI_{m-p} \\ \hdashline aI_p & 0 & cI_p & cI_{m-p} \\ 0 & aI_{m-p} & cI_p & cI_{m-p} \end{array}\right] \left[\begin{array}{cc:cc} * & * & * & 0 \\ * & * & * & I_{m-p} \\ \hdashline * & * & * & 0 \\ 0 & I_{m-p} & 0 & 0 \end{array}\right] + \left[\begin{array}{c:c} bI_m & 0 \\ \hdashline 0 & dI_m \end{array}\right]$$

$$= \left[\begin{array}{cc:cc} * & * & * & 0 \\ 0 & cI_{m-p} & 0 & 0 \\ \hdashline * & * & * & 0 \\ * & * & * & aI_{m-p} \end{array}\right] + \left[\begin{array}{c:c} bI_m & 0 \\ \hdashline 0 & dI_m \end{array}\right]$$

$$= \left[\begin{array}{cc:cc} * & * & * & 0 \\ 0 & (c+b)I_{m-p} & 0 & 0 \\ \hdashline * & * & * & 0 \\ * & * & * & (a+d)I_{m-p} \end{array}\right].$$

Assim sendo, se a matriz X_1 fosse singular, que é o mesmo que dizer que $p < m$, então $XKX^{-1} + L$ teria, pelo menos, um valor próprio igual a $a + d$ e outro igual a $b + c$, que contradiz a 1ª Observação. Logo a matriz X_1 é não singular.

6ª Observação. *A matriz X_1' é não singular.*

As matrizes $XKX^{-1}+L$ e $(XKX^{-1}+L)^T = (X^{-1})^T K^T X^T + L^T$ têm os mesmos valores próprios. Então, se X_1 é não singular, também o será X_1'. Assim, esta observação é uma consequência da observação anterior.

7ª Observação. *Se car$X_3 = q$, então existem matrizes não singulares W_1, W_2, Z_1, $Z_2 \in \widetilde{F}^{m\times m}$, tais que $Y = (W_1 \oplus W_2)X(Z_1 \oplus Z_2)$ e a sua inversa têm a forma:*

$$Y = \left[\begin{array}{cc:cc} I_q & 0 & * & * \\ 0 & I_{m-q} & * & * \\ \hdashline I_q & 0 & I_q & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{m-q} \end{array}\right] \quad , \quad Y^{-1} = \left[\begin{array}{cc:cc} * & 0 & * & * \\ * & I_{m-q} & * & * \\ \hdashline * & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & I_{m-q} \end{array}\right]$$

Como car$X_3 = q$, existem matrizes não singulares $U_2, V_1 \in \widetilde{F}^{m\times m}$ tais que $U_2X_3V_1 = I_q \oplus 0_{m-q}$.

Sejam U_1, $V_2 \in \widetilde{F}^{m\times m}$ matrizes não singulares tais que $U_1(X_1V_1)$ é triangular inferior e $(U_2X_4)V_2$ é triangular superior.

Seja $X^{(1)} = (U_1 \oplus U_2)X(V_1 \oplus V_2)$. Então,

$$X^{(1)} = \begin{bmatrix} U_1 & 0 \\ 0 & U_2 \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} V_1 & 0 \\ 0 & V_2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (U_1X_1)V_1 & (U_1X_2)V_2 \\ (U_2X_3)V_1 & (U_2X_4)V_2 \end{bmatrix}$$

$$= \left[\begin{array}{cc:cc} S_1 & 0 & S_2 & S_3 \\ S_4 & S_5 & S_6 & S_7 \\ \hdashline I_q & 0 & S_8 & S_9 \\ 0 & 0 & 0 & S_{10} \end{array}\right].$$

Como a matriz X é não singular, também as matrizes S_5 e S_{10} são não singulares.

Pretende-se uma matriz equivalente a $X^{(1)}$ onde, na posição da submatriz S_9 apareça a matriz nula e na posição da submatriz S_{10} apareça I_{m-q}. Multiplique-se então a matriz $X^{(1)}$, à esquerda, pela matriz W, onde

$$W = \left[\begin{array}{cc:cc} I_q & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_{m-q} & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & I_q & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{10}^{-1} \end{array}\right] \left[\begin{array}{cc:cc} I_q & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_{m-q} & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & I_q & -S_9S_{10}^{-1} \\ 0 & 0 & 0 & I_{m-q} \end{array}\right]$$

$$= \left[\begin{array}{cc:cc} I_q & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_{m-q} & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & I_q & -S_9S_{10}^{-1} \\ 0 & 0 & 0 & S_{10}^{-1} \end{array}\right].$$

A matriz $X^{(1)}$ é então equivalente a

$$WX^{(1)} = X_\star^{(1)} = \left[\begin{array}{cc:cc} S_1 & 0 & S_2 & S_3 \\ S_4 & S_5 & S_6 & S_7 \\ \hdashline I_q & 0 & S_8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{m-q} \end{array}\right].$$

Pretende-se uma matriz equivalente a $X_\star^{(1)}$ onde, na posição da submatriz S_5 apareça I_{m-q} e na posição da submatriz S_4 apareça a matriz nula. Multiplique-se então a matriz

$X_\star^{(1)}$, à direita, pela matriz Z, onde

$$Z = \left[\begin{array}{cc|cc} I_q & 0 & 0 & 0 \\ -S_5^{-1}S_4 & I_{m-q} & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & I_q & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{m-q} \end{array}\right] \left[\begin{array}{cc|cc} I_q & 0 & 0 & 0 \\ 0 & S_5^{-1} & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & I_q & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{m-q} \end{array}\right]$$

$$= \left[\begin{array}{cc|cc} I_q & 0 & 0 & 0 \\ -S_5^{-1}S_4 & S_5^{-1} & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & I_q & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{m-q} \end{array}\right].$$

Tem-se então que a matriz $X_\star^{(1)}$ é equivalente a

$$X_\star^{(1)}Z = \left[\begin{array}{cc|cc} S_1 & 0 & S_2 & S_3 \\ S_4 & S_5 & S_6 & S_7 \\ \hline I_q & 0 & S_8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{m-q} \end{array}\right] \left[\begin{array}{cc|cc} I_q & 0 & 0 & 0 \\ -S_5^{-1}S_4 & S_5^{-1} & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & I_q & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{m-q} \end{array}\right]$$

$$= \left[\begin{array}{cc|cc} S_1 & 0 & S_2 & S_3 \\ 0 & I_{m-q} & S_6 & S_7 \\ \hline I_q & 0 & S_8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{m-q} \end{array}\right]$$

$$= X^{(2)}.$$

Como a matriz $X^{(2)}$ é equivalente à matriz X, não singular, então também se tem que a matriz $X^{(2)}$ é não singular. Pode então determinar-se a matriz $(X^{(2)})^{-1}$.

De $X^{(2)}(X^{(2)})^{-1} = I_{2m}$, tem-se

$$\left[\begin{array}{cc|cc} S_1 & 0 & S_2 & S_3 \\ 0 & I_{m-q} & S_6 & S_7 \\ \hline I_q & 0 & S_8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{m-q} \end{array}\right] \left[\begin{array}{cc|cc} P_{11} & P_{12} & P_{13} & P_{14} \\ P_{21} & P_{22} & P_{23} & P_{24} \\ \hline P_{31} & P_{32} & P_{33} & P_{34} \\ P_{41} & P_{42} & P_{43} & P_{44} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|cc} I_q & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_{m-q} & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & I_q & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{m-q} \end{array}\right]$$

e obtém-se $P_{41} = 0$, $P_{42} = 0$, $P_{43} = 0$ e $P_{44} = I_{m-q}$.

De $(X^{(2)})^{-1}X^{(2)} = I_{2m}$, tem-se

$$\left[\begin{array}{cc|cc} P_{11} & P_{12} & P_{13} & P_{14} \\ P_{21} & P_{22} & P_{23} & P_{24} \\ \hline P_{31} & P_{32} & P_{33} & P_{34} \\ 0 & 0 & 0 & I_{m-q} \end{array}\right] \left[\begin{array}{cc|cc} S_1 & 0 & S_2 & S_3 \\ 0 & I_{m-q} & S_6 & S_7 \\ \hline I_q & 0 & S_8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{m-q} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|cc} I_q & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_{m-q} & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & I_q & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{m-q} \end{array}\right]$$

e obtém-se $P_{12} = 0$, $P_{22} = I_{m-q}$ e $P_{32} = 0$.

A matriz $(X^{(2)})^{-1}$ tem então a forma:

$$(X^{(2)})^{-1} = \left[\begin{array}{cc|cc} * & 0 & * & * \\ * & I_{m-q} & * & * \\ \hline * & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & I_{m-q} \end{array}\right].$$

Por conveniência de notação, faça-se $(X^{(2)})^{-1} = \left[\begin{array}{cc|cc} T_1 & 0 & T_2 & T_3 \\ T_4 & I_{m-q} & T_5 & T_6 \\ \hline T_7 & 0 & T_8 & T_9 \\ 0 & 0 & 0 & I_{m-q} \end{array}\right]$.

De

$$X^{(2)}(X^{(2)})^{-1} = \left[\begin{array}{cc|cc} S_1T_1 + S_2T_7 & 0 & S_1T_2 + S_2T_8 & S_1T_3 + S_2T_9 + S_3 \\ T_4 + S_6T_7 & I_{m-q} & T_5 + S_6T_8 & T_6 + S_6T_9 + S_7 \\ \hline T_1 + S_8T_7 & 0 & T_2 + S_8T_8 & T_3 + S_8T_9 \\ 0 & 0 & 0 & I_{m-q} \end{array}\right]$$

e de $X^{(2)}(X^{(2)})^{-1} = I_{2m}$ conclui-se que:

$$T_1 + S_8T_7 = 0 \text{ o que é equivalente a } T_1 = -S_8T_7.$$

Tem-se também que a matriz X^{-1} é equivalente à matriz $(X^{(2)})^{-1}$, pelo que a matriz X_1' é equivalente à matriz $\begin{bmatrix} T_1 & 0 \\ T_4 & I_{m-q} \end{bmatrix}$, com X_1' matriz não singular, pelo que também a matriz T_1 é não singular. Conclui-se que também as matrizes S_8 e T_7 são não singulares.

Por outro lado, como a matriz X é equivalente à matriz $X^{(2)}$, tem-se que X_1 é equivalente a $\begin{bmatrix} S_1 & 0 \\ 0 & I_{m-q} \end{bmatrix}$, com X_1 não singular, pelo que também a matriz S_1 é não singular.

Para se obter a matriz Y pretendida, multiplique-se a matriz $X^{(2)}$ à esquerda por

$$\left[\begin{array}{cc|cc} S_1^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_{m-q} & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & I_q & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{m-q} \end{array}\right]$$

e à direita por

$$\left[\begin{array}{cc|cc} I_q & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_{m-q} & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & S_8^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{m-q} \end{array}\right].$$

Então,

$$(S_1^{-1} \oplus I_{2m-q})X^{(2)}(I_m \oplus S_8^{-1} \oplus I_{m-q}) = \left[\begin{array}{cc|cc} I_q & 0 & * & * \\ 0 & I_{m-q} & * & * \\ \hline I_q & 0 & I_q & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{m-q} \end{array}\right] = Y.$$

Para determinar Y^{-1}, e tendo em conta que $YY^{-1} = Y^{-1}Y = I_{2m}$, obtém-se

$$Y^{-1} = \left[\begin{array}{cc|cc} * & 0 & * & * \\ * & I_{m-q} & * & * \\ \hline * & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & I_{m-q} \end{array}\right].$$

Suponha-se agora que $\text{car}X_3 = q$. Sejam $W_1,\ W_2,\ Z_1,\ Z_2 \in \widetilde{F}^{m\times m}$ matrizes não singulares tais que $Y = (W_1 \oplus W_2)X(Z_1 \oplus Z_2)$ e a sua inversa têm a forma indicada na 7ª Observação, ou seja

$$Y = \left[\begin{array}{cc|cc} I_q & 0 & * & * \\ 0 & I_{m-q} & * & * \\ \hline I_q & 0 & I_q & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{m-q} \end{array}\right] \quad \text{e} \quad Y^{-1} = \left[\begin{array}{cc|cc} * & 0 & * & * \\ * & I_{m-q} & * & * \\ \hline * & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & I_{m-q} \end{array}\right].$$

A matriz $XKX^{-1}+L$ é então semelhante a

$$\begin{aligned}
& (W_1 \oplus W_2)(XKX^{-1}+L)(W_1^{-1} \oplus W_2^{-1}) \\
= \;& (W_1 \oplus W_2)XKX^{-1}(W_1^{-1} \oplus W_2^{-1}) + (W_1 \oplus W_2)L(W_1^{-1} \oplus W_2^{-1}) \\
= \;& (W_1 \oplus W_2)X(Z_1 \oplus Z_2)K(Z_1^{-1} \oplus Z_2^{-1})X^{-1}(W_1^{-1} \oplus W_2^{-1}) + L \\
= \;& YKY^{-1}+L
\end{aligned}$$

$$= \left[\begin{array}{cc|cc} I_q & 0 & P_1 & P_2 \\ 0 & I_{m-q} & P_3 & P_4 \\ \hline I_q & 0 & I_q & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{m-q} \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} aI_m & 0 \\ \hline 0 & cI_m \end{array}\right] \left[\begin{array}{cc|cc} Q_1 & 0 & Q_2 & Q_3 \\ Q_4 & I_{m-q} & Q_5 & Q_6 \\ \hline Q_7 & 0 & Q_8 & Q_9 \\ 0 & 0 & 0 & I_{m-q} \end{array}\right] + \left[\begin{array}{c|c} bI_m & 0 \\ \hline 0 & dI_m \end{array}\right]$$

$$= \left[\begin{array}{cc|cc} (a-c)Q_1+(c+b)I_q & 0 & (a-c)Q_2 & (a-c)Q_3 \\ (a-c)Q_4 & (a+b)I_{m-q} & (a-c)Q_5 & (a-c)Q_6 \\ \hline (a-c)Q_1 & 0 & (a-c)Q_2+(c+d)I_q & (a-c)Q_3 \\ 0 & 0 & 0 & (c+d)I_{m-q} \end{array}\right].$$

A matriz anterior resulta do facto de que $YY^{-1}=I_{2m}$. De facto, efectuando alguns cálculos, de $YY^{-1}=I_{2m}$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} I_q & 0 & P_1 & P_2 \\ 0 & I_{m-q} & P_3 & P_4 \\ \hline I_q & 0 & I_q & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{m-q} \end{array}\right] \left[\begin{array}{cc|cc} Q_1 & 0 & Q_2 & Q_3 \\ Q_4 & I_{m-q} & Q_5 & Q_6 \\ \hline Q_7 & 0 & Q_8 & Q_9 \\ 0 & 0 & 0 & I_{m-q} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|cc} I_q & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_{m-q} & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & I_q & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{m-q} \end{array}\right],$$

tem-se

$$\left[\begin{array}{cc|cc} Q_1+P_1Q_7 & 0 & Q_2+P_1Q_8 & Q_3+P_1Q_9+P_2 \\ Q_4+P_3Q_7 & I_{m-q} & Q_5+P_3Q_8 & Q_6+P_3Q_9+P_4 \\ \hline Q_1+Q_7 & 0 & Q_2+Q_8 & Q_3+Q_9 \\ 0 & 0 & 0 & I_{m-q} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|cc} I_q & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_{m-q} & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & I_q & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{m-q} \end{array}\right],$$

concluindo-se que $\begin{cases} P_1Q_7 = I_q - Q_1 \\ P_1Q_8 = -Q_2 \\ P_1Q_9 = -P_2 - Q_3 \\ P_3Q_7 = -Q_4 \\ P_3Q_8 = -Q_5 \\ P_3Q_9 = -P_4 - Q_6 \\ Q_7 = -Q_1 \\ Q_8 = I_q - Q_2 \\ Q_3 = -Q_9 \end{cases}$

Repare-se ainda que a matriz $YKY^{-1} + L$ é semelhante a

$$T = \left[\begin{array}{c:cc:c} (a+b)I_{m-q} & (a-c)Q_4 & (a-c)Q_5 & (a-c)Q_6 \\ \hdashline 0 & (a-c)Q_1 + (c+b)I_q & (a-c)Q_2 & (a-c)Q_3 \\ 0 & (a-c)Q_1 & (a-c)Q_2 + (c+d)I_q & (a-c)Q_3 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & (c+d)I_{m-q} \end{array}\right].$$

De facto, basta reparar que

$$T = \left[\begin{array}{cc:cc} 0 & I & 0 & 0 \\ I & 0 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{array}\right] (YKY^{-1} + L) \left[\begin{array}{cc:cc} 0 & I & 0 & 0 \\ I & 0 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{array}\right].$$

Como matrizes semelhantes têm os mesmos valores próprios, conclui-se que a matriz $YKY^{-1} + L$ tem $m - q$ valores próprios iguais a $a + b$, $m - q$ valores próprios iguais a $c + d$ e os restantes $2q$ valores próprios são os valores próprios da matriz

$$C_1 = \begin{bmatrix} (a-c)Q_1 + (c+b)I_q & (a-c)Q_2 \\ (a-c)Q_1 & (a-c)Q_2 + (c+d)I_q \end{bmatrix}.$$

Tem-se também que a matriz C_1 é semelhante a

$$\begin{aligned} C_1^{(1)} &= \left[\begin{array}{c:c} I_q & 0 \\ \hdashline -I_q & I_q \end{array}\right] C_1 \left[\begin{array}{c:c} I_q & 0 \\ \hdashline I_q & I_q \end{array}\right] \\ &= \begin{bmatrix} (a-c)(Q_1 + Q_2) + (c+b)I_q & (a-c)Q_2 \\ (d-b)I_q & (c+d)I_q \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

De $Y^{-1}Y = I_{2m}$ tem-se que

$$\left[\begin{array}{cc|cc} Q_1 & 0 & Q_2 & Q_3 \\ Q_4 & I_{m-q} & Q_5 & Q_6 \\ \hline Q_7 & 0 & Q_8 & Q_9 \\ 0 & 0 & 0 & I_{m-q} \end{array}\right] \left[\begin{array}{cc|cc} I_q & 0 & P_1 & P_2 \\ 0 & I_{m-q} & P_3 & P_4 \\ \hline I_q & 0 & I_q & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{m-q} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|cc} I_q & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_{m-q} & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & I_q & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{m-q} \end{array}\right]$$

que é equivalente a

$$\left[\begin{array}{cc|cc} Q_1+Q_2 & 0 & Q_1P_1+Q_2 & Q_1P_2+Q_3 \\ Q_4+Q_5 & I_{m-q} & Q_4P_1+P_3+Q_5 & Q_4P_2+P_4+Q_6 \\ \hline Q_7+Q_8 & 0 & Q_7P_1+Q_8 & Q_7P_2+Q_9 \\ 0 & 0 & 0 & I_{m-q} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|cc} I_q & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_{m-q} & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & I_q & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{m-q} \end{array}\right].$$

Conclui-se que $Q_1 + Q_2 = I_q$ e, portanto,

$$\begin{aligned} C_1^{(1)} &= \begin{bmatrix} (a-c)(Q_1+Q_2)+(c+b)I_q & (a-c)Q_2 \\ (d-b)I_q & (c+d)I_q \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (a+b)I_q & (a-c)Q_2 \\ (d-b)I_q & (c+d)I_q \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Pelo Teorema 3.1, os valores próprios de $C_1^{(1)}$ podem agrupar-se em pares de tal forma que a soma dos dois valores de cada par é $a+b+c+d$. Então, para cada valor próprio λ_i de T, há um valor próprio λ_j tal que $\lambda_i + \lambda_j = a+b+c+d$, com $i \neq j$, que contradiz a 2ª observação.

Conclui-se então que a hipótese inicial das condições $n{\neq}2$ e todos os polinómios invariantes de A e de B diferentes de 1 terem grau 2 se verificarem simultaneamente não pode ocorrer, ou seja, pelo menos uma das condições não se verifica, e, portanto, o caso 1 é impossível.

Caso II. $K = \begin{bmatrix} aI_m & I_m \\ 0 & aI_m \end{bmatrix}$, $L = \begin{bmatrix} bI_m & I_m \\ 0 & bI_m \end{bmatrix}$ com $a, b \in \widetilde{F}$, $2a \in F$, $2b \in F$.

Escolha-se um $2m$-uplo $(\lambda_1, \ldots, \lambda_{2m})$ de elementos de F da seguinte forma:

(i) se $a+b \in F$ escolha-se $x \in F \backslash \{0,1\}$, e tome-se

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= a+b \\ \lambda_2 &= a+b-1 \\ \lambda_3 &= a+b+x \\ \lambda_4 &= a+b+1-x \\ \lambda_5 &= \cdots = \lambda_{m+2} = a+b+x \\ \lambda_{m+3} &= \cdots = \lambda_{2m} = a+b-x. \end{aligned}$$

(ii) se $a+b \notin F$ escolha-se $\begin{cases} x \in F \backslash \{0,\ 1-2a-2b\} \\ w \in F \backslash \{0,\ 2a+2b\} \end{cases}$, e tome-se

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 0 \\ \lambda_2 &= 2a+2b-1 \\ \lambda_3 &= 2a+2b+x \\ \lambda_4 &= 1-x \\ \lambda_5 &= \cdots = \lambda_{m+2} = 2a+2b-w \\ \lambda_{m+3} &= \cdots = \lambda_{2m} = w. \end{aligned}$$

Para ambos os casos as três observações seguintes são verificadas:

1ª Observação. *Não existem* $j,\ k \in \{1, \ldots, 2m\}$, $j \neq k$, *tal que* $\lambda_j = \lambda_k = a+b$.

Quer $a+b \in F$ quer $a+b \notin F$, o resultado é trivial, uma vez que resulta da escolha dos próprios elementos.

2ª Observação. *Não existe* $i \in \{2, 3, \ldots, 2m\}$ *tal que* $\lambda_1 + \lambda_i = 2a+2b$.

Se $a+b \in F$:

$\lambda_1 + \lambda_2 = 2a+2b-1 \neq 2a+2b$

$\lambda_1 + \lambda_3 = 2a+2b+x \neq 2a+2b$, pois $x \neq 0$

$\lambda_1 + \lambda_4 = 2a+2b+1-x \neq 2a+2b$, pois $x \neq 1$

$\lambda_1 + \lambda_p = 2a+2b+x \neq 2a+2b$, pois $x \neq 0$, para $p \in \{5, \ldots, m+2\}$

$\lambda_1 + \lambda_q = 2a+2b-x \neq 2a+2b$, pois $x \neq 0$, para $q \in \{m+3, \ldots, 2m\}$

Se $a+b \notin F$:

$\lambda_1 + \lambda_2 = 2a + 2b - 1 \neq 2a + 2b$

$\lambda_1 + \lambda_3 = 2a + 2b + x \neq 2a + 2b$, pois $x \neq 0$

$\lambda_1 + \lambda_4 = 1 - x \neq 2a + 2b$, pois $x \neq -2a - 2b{+}1$

$\lambda_1 + \lambda_r = 2a + 2b - w \neq 2a + 2b$, pois $w \neq 0$, para $r \in \{5, \ldots, m+2\}$

$\lambda_1 + \lambda_s = w \neq 2a + 2b$, pois $w \neq 2a + 2b$, para $s \in \{m+3, \ldots, 2m\}$

3ª Observação.

$$\sum_{i=1}^{2m} \lambda_i = 2m(a+b) = \mathrm{tr}A + \mathrm{tr}B.$$

Quer $a+b \in F$ quer $a+b \notin F$, facilmente se constata que

$$\sum_{i=1}^{2m} \lambda_i = m(2a) + m(2b) = \mathrm{tr}K + \mathrm{tr}L.$$

Por outro lado, como a matriz K é semelhante à matriz A, a matriz L é semelhante à matriz B e o traço de uma matriz é invariante por semelhança, tem-se que

$$\sum_{i=1}^{2m} \lambda_i = \mathrm{tr}A + \mathrm{tr}B.$$

Como o par (A, B) é espectralmente completo, existe uma matriz não singular $X \in \widetilde{F}^{2m \times 2m}$, tal que $XKX^{-1} + L$ tem valores próprios $\lambda_1, \ldots, \lambda_{2m}$.

Considere-se que as matrizes X e X^{-1} têm, respectivamente, as formas:

$$X = \begin{bmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{bmatrix}, \; X^{-1} = \begin{bmatrix} X_1' & X_2' \\ X_3' & X_4' \end{bmatrix},$$

com X_i e X_i' matrizes de tamanho $m \times m$, para $i \in \{1, 2, 3, 4\}$.

4ª Observação. *Se* $\mathrm{car}X_3 = q$ *existem matrizes não singulares* $\begin{bmatrix} U & S \\ 0 & U \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} V & T \\ 0 & V \end{bmatrix} \in \widetilde{F}^{2m \times 2m}$, *com* $U, V, S, T \in \widetilde{F}^{m \times m}$, *tais que* $Y = \begin{bmatrix} U & S \\ 0 & U \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} V & T \\ 0 & V \end{bmatrix}$ *e a sua inversa têm a forma*

$$Y = \begin{bmatrix} I_q & 0 & 0 \\ 0 & I_{m-q} & 0 \\ * & 0 & * \end{bmatrix} \quad , \quad Y^{-1} = \begin{bmatrix} I_q & 0 & 0 \\ 0 & I_{m-q} & 0 \\ * & 0 & * \end{bmatrix}.$$

Seja car$X_3 = q$. Existem então matrizes $U_1, V_1 \in \widetilde{F}^{m\times m}$ não singulares tais que $U_1X_3V_1 = I_q \oplus 0_{m-q}$. Logo

$$\begin{aligned}
X^{(1)} &= \begin{bmatrix} U_1 & 0 \\ 0 & U_1 \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} V_1 & 0 \\ 0 & V_1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} (U_1X_1)V_1 & (U_1X_2)V_1 \\ (U_1X_3)V_1 & (U_1X_4)V_1 \end{bmatrix} \\
&= \left[\begin{array}{c:c:c} R_1 & R_2 & R_3 \\ \hdashline R_4 & R_5 & R_6 \\ \hdashline I_q & 0 & R_7 \\ \hdashline 0 & 0 & R_8 \end{array}\right]
\end{aligned}$$

onde $R_1 \in \widetilde{F}^{q\times q}$, $R_2 \in \widetilde{F}^{q\times(m-q)}$, $R_3,\ R_7 \in \widetilde{F}^{q\times m}$, $R_4 \in \widetilde{F}^{(m-q)\times q}$, $R_5 \in \widetilde{F}^{(m-q)\times(m-q)}$ e $R_6,\ R_8 \in \widetilde{F}^{(m-q)\times m}$.

Pretende-se uma matriz equivalente à matriz $X^{(1)}$ onde, nas entradas correspondentes às submatrizes R_1 e R_4, apareçam blocos nulos.

A matriz $X^{(1)}$ é então equivalente a:

$$\begin{aligned}
X^{(2)} &= \left[\begin{array}{cc:cc} I_q & 0 & -R_1 & 0 \\ 0 & I_{m-q} & -R_4 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & I_q & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{m-q} \end{array}\right] \left[\begin{array}{cc:c} R_1 & R_2 & R_3 \\ R_4 & R_5 & R_6 \\ \hdashline I_q & 0 & R_7 \\ 0 & 0 & R_8 \end{array}\right] \\
&= \left[\begin{array}{cc:c} 0 & R_2 & R_3^{(1)} \\ 0 & R_5 & R_6^{(1)} \\ \hdashline I_q & 0 & R_7 \\ 0 & 0 & R_8 \end{array}\right].
\end{aligned}$$

Determine-se, de seguida, a matriz equivalente a $X^{(2)}$ em que na entrada correspondente à submatriz R_5 apareça a matriz I_{m-q}. Repare-se que a matriz $\begin{bmatrix} R_2 \\ R_5 \end{bmatrix}$ é de tamanho $m \times (m-q)$, pelo que car $\begin{bmatrix} R_2 \\ R_5 \end{bmatrix} = m - q$. Com efeito, se a sua característica fosse inferior a $m-q$, na matriz $X^{(2)}$ haveria colunas nulas e, consequentemente, como as matrizes $X^{(1)}$

e $X^{(2)}$ são equivalentes, $X^{(1)}$ seria singular. Assim sendo, existe uma matriz não singular $U_2 \in \widetilde{F}^{m\times m}$ tal que $U_2 \begin{bmatrix} R_2 \\ R_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ I_{m-q} \end{bmatrix}$. Tem-se então que

$$X^{(3)} = \begin{bmatrix} U_2 & 0 \\ 0 & U_2 \end{bmatrix} \left[\begin{array}{cc:c} 0 & R_2 & R_3^{(1)} \\ 0 & R_5 & R_6^{(1)} \\ \hdashline I_q & 0 & R_7 \\ 0 & 0 & R_8 \end{array}\right]$$

$$= \left[\begin{array}{cc:c} 0 & 0 & R_3^{(2)} \\ 0 & I_{m-q} & R_6^{(2)} \\ \hdashline R_9 & 0 & R_{10} \end{array}\right].$$

A matriz R_9 é uma matriz de tamanho $m \times q$, a matriz R_{10} é de tamanho $m \times m$ e $\mathrm{car} R_9 = q$, pelo que existe então uma matriz não singular $U_3 \in \widetilde{F}^{m\times m}$ tal que $U_3 R_9 = \begin{bmatrix} I_q \\ 0 \end{bmatrix}$. Tem-se então que $X^{(3)}$ é equivalente à matriz

$$X^{(4)} = \begin{bmatrix} I_m & U_3 \\ 0 & I_m \end{bmatrix} \left[\begin{array}{cc:c} 0 & 0 & R_3^{(2)} \\ 0 & I_{m-q} & R_6^{(2)} \\ \hdashline R_9 & 0 & R_{10} \end{array}\right]$$

$$= \left[\begin{array}{cc:c} I_q & 0 & R_3^{(3)} \\ 0 & I_{m-q} & R_6^{(3)} \\ \hdashline R_9 & 0 & R_{10} \end{array}\right].$$

Finalmente, seja,

$$Q = \left[\begin{array}{cc:c} I_q & 0 & -R_3^{(3)} \\ 0 & I_{m-q} & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & I_m \end{array}\right] \left[\begin{array}{cc:c} I_q & 0 & 0 \\ 0 & I_{m-q} & -R_6^{(3)} \\ \hdashline 0 & 0 & I_m \end{array}\right]$$

$$= \left[\begin{array}{cc:c} I_q & 0 & -R_3^{(3)} \\ 0 & I_{m-q} & -R_6^{(3)} \\ \hdashline 0 & 0 & I_m \end{array}\right].$$

A matriz

$$\begin{aligned}
Y &= X^{(4)}Q \\
&= \left[\begin{array}{cc:c} I_q & 0 & R_3^{(3)} \\ 0 & I_{m-q} & R_6^{(3)} \\ \hdashline R_9 & 0 & R_{10} \end{array}\right] \left[\begin{array}{cc:c} I_q & 0 & -R_3^{(3)} \\ 0 & I_{m-q} & -R_6^{(3)} \\ \hdashline 0 & 0 & I_m \end{array}\right] \\
&= \left[\begin{array}{cc:c} I_q & 0 & 0 \\ 0 & I_{m-q} & 0 \\ \hdashline R_9 & 0 & R_{10}^{(1)} \end{array}\right],
\end{aligned}$$

é ainda equivalente à matriz $X^{(4)}$ e tem a forma pretendida.

Repare-se ainda que

$$\begin{bmatrix} U & S \\ 0 & U \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_m & U_3 \\ 0 & I_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_2 & 0 \\ 0 & U_2 \end{bmatrix} \left[\begin{array}{cc:cc} I_q & 0 & -R_1 & 0 \\ 0 & I_{m-q} & -R_4 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & I_q & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{m-q} \end{array}\right] \begin{bmatrix} U_1 & 0 \\ 0 & U_1 \end{bmatrix},$$

e que

$$\begin{bmatrix} V & T \\ 0 & V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_1 & 0 \\ 0 & V_1 \end{bmatrix} \left[\begin{array}{cc:c} I_q & 0 & -R_3^{(3)} \\ 0 & I_{m-q} & -R_6^{(3)} \\ \hdashline 0 & 0 & I_m \end{array}\right].$$

Para determinar a matriz Y^{-1} recorra-se, mais uma vez, às igualdades $YY^{-1} = I_{2m}$ e $Y^{-1}Y = I_{2m}$.

De $YY^{-1} = I_{2m}$, tem-se

$$\left[\begin{array}{cc:c} I_q & 0 & 0 \\ 0 & I_{m-q} & 0 \\ \hdashline R_9 & 0 & R_{10}^{(1)} \end{array}\right] \left[\begin{array}{cc:c} P_{11} & P_{12} & P_{13} \\ P_{21} & P_{22} & P_{23} \\ \hdashline P_{31} & P_{32} & P_{33} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc:c} I_q & 0 & 0 \\ 0 & I_{m-q} & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & I_m \end{array}\right],$$

e obtém-se $P_{11} = I_q$, $P_{12} = P_{21} = P_{13} = P_{23} = 0$ e $P_{22} = I_{m-q}$.

Por outro lado, de $Y^{-1}Y = I_{2m}$ tem-se

$$\left[\begin{array}{cc:c} I_q & 0 & 0 \\ 0 & I_{m-q} & 0 \\ \hdashline P_{31} & P_{32} & P_{33} \end{array}\right] \left[\begin{array}{cc:c} I_q & 0 & 0 \\ 0 & I_{m-q} & 0 \\ \hdashline R_9 & 0 & R_{10}^{(1)} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc:c} I_q & 0 & 0 \\ 0 & I_{m-q} & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & I_m \end{array}\right],$$

e obtém-se $P_{32} = 0$.

Obtém-se então a matriz Y^{-1} com a forma pretendida.

5ª Observação. *A matriz X_3 é não singular.*

Seja $\text{car}X_3 = q$ e $Y = \left[\begin{array}{cc|cc} I_q & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_{m-q} & 0 & 0 \\ \hline R_1 & 0 & U_1 & U_2 \\ R_2 & 0 & U_3 & U_4 \end{array}\right]$ e $Y^{-1} = \left[\begin{array}{cc|cc} I_q & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_{m-q} & 0 & 0 \\ \hline S_1 & 0 & V_1 & V_2 \\ S_2 & 0 & V_3 & V_4 \end{array}\right]$, com R_1, U_1, S_1 e $V_1 \in \widetilde{F}^{q\times q}$, $U_2, V_2 \in \widetilde{F}^{q\times(m-q)}$, $R_2, U_3, S_2, V_3 \in \widetilde{F}^{(m-q)\times q}$ e $U_4, V_4 \in \widetilde{F}^{(m-q)\times(m-q)}$.

Repare-se que as matrizes Y e Y^{-1} são da forma referida na 4ª observação.

Tem-se ainda,

$$\begin{bmatrix} U & S \\ 0 & U \end{bmatrix} L \begin{bmatrix} U & S \\ 0 & U \end{bmatrix}^{-1} = L,$$

e

$$\begin{bmatrix} V & T \\ 0 & V \end{bmatrix} K \begin{bmatrix} V & T \\ 0 & V \end{bmatrix}^{-1} = K.$$

Então a matriz $XKX^{-1} + L$ é semelhante a

$$\begin{aligned}
\text{C} &= \begin{bmatrix} U & S \\ 0 & U \end{bmatrix} (XKX^{-1} + L) \begin{bmatrix} U & S \\ 0 & U \end{bmatrix}^{-1} \\
&= YKY^{-1} + L \\
&= \left[\begin{array}{cc|cc} I_q & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_{m-q} & 0 & 0 \\ \hline R_1 & 0 & U_1 & U_2 \\ R_2 & 0 & U_3 & U_4 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} aI_m & I_m \\ \hline 0 & aI_m \end{array}\right] \left[\begin{array}{cc|cc} I_q & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_{m-q} & 0 & 0 \\ \hline S_1 & 0 & V_1 & V_2 \\ S_2 & 0 & V_3 & V_4 \end{array}\right] + \left[\begin{array}{c|c} bI_m & I_m \\ \hline 0 & bI_m \end{array}\right] \\
&= \left[\begin{array}{cc|cc} (a+b)I_q + S_1 & 0 & V_1 + I_q & V_2 \\ S_2 & (a+b)I_{m-q} & V_3 & V_4 + I_{m-q} \\ \hline aX_1 + R_1S_1 & 0 & R_1V_1 + aX_3 + bI_q & R_1V_2 + aX_4 \\ aX_2 + R_2S_1 & 0 & R_2V_1 + aX_5 & R_2V_2 + aX_6 + bI_{m-q} \end{array}\right]
\end{aligned}$$

em que:

$$\left\{\begin{array}{r} X_1 = R_1 + U_1S_1 + U_2S_2 \\ X_2 = R_2 + U_3S_1 + U_4S_2 \\ X_3 = U_1V_1 + U_2V_3 \\ X_4 = U_1V_2 + U_2V_4 \\ X_5 = U_3V_1 + U_4V_3 \\ X_6 = U_3V_2 + U_4V_4 \end{array}\right. .$$

Calculando o produto $YY^{-1} = I_{2m}$, conclui-se que:

$$\begin{aligned} R_1 + U_1S_1 + U_2S_2 &= 0, & U_1V_2 + U_2V_4 &= 0, \\ R_2 + U_3S_1 + U_4S_2 &= 0, & U_3V_1 + U_4V_3 &= 0, \\ U_1V_1 + U_2V_3 &= I_q, & U_3V_2 + U_4V_4 &= I_{m-q}, \end{aligned}$$

e, portanto

$$C = \left[\begin{array}{cc:cc} (a+b)I_q + S_1 & 0 & V_1 + I_q & V_2 \\ S_2 & (a+b)I_{m-q} & V_3 & V_4 + I_{m-q} \\ \hdashline R_1S_1 & 0 & R_1V_1 + (a+b)I_q & R_1V_2 \\ R_2S_1 & 0 & R_2V_1 & R_2V_2 + (a+b)I_{m-q} \end{array}\right].$$

Uma vez que C é semelhante à matriz

$$C' \quad = \quad \left[\begin{array}{c:ccc} (a+b)I_{m-q} & S_2 & V_3 & V_4 + I_{m-q} \\ \hdashline 0 & (a+b)I_q + S_1 & V_1 + I_q & V_2 \\ 0 & R_1S_1 & R_1V_1 + (a+b)I_q & R_1V_2 \\ 0 & R_2S_1 & R_2V_1 & R_2V_2 + (a+b)I_{m-q} \end{array}\right],$$

os valores próprios de C são os valores próprios de

$$(a+b)I_{m-q} \oplus [(a+b)I_{m+q} + E],$$

onde

$$E = \begin{bmatrix} I_q \\ R_1 \\ R_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_1 & V_1 & V_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & I_q & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Suponha-se que a matriz X_3 é singular, ou seja, que $\mathrm{car} X_3 = q < m$. Então:

1) a matriz E é singular.

Repare-se que

$$\begin{aligned}
\text{car}E &= \text{car}\left(\begin{bmatrix} I_q \\ R_1 \\ R_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} S_1 & V_1 & V_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & I_q & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right) \\
&\leq \text{car}\left(\begin{bmatrix} I_q \\ R_1 \\ R_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} S_1 & V_1 & V_2 \end{bmatrix}\right) + \text{car}\begin{bmatrix} 0 & I_q & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&\leq \min \text{car}\left\{\begin{bmatrix} I_q \\ R_1 \\ R_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} S_1 & V_1 & V_2 \end{bmatrix}\right\} + q \\
&\leq 2q
\end{aligned}$$

e, como $q < m$, a caracteristica da matriz E é inferior ao seu tamanho.

2) $(a+b)I_{m+q} + E$ tem pelo menos um valor próprio igual a $a+b$.

Repare-se que a submatriz $(a+b)I_{m+q}$ tem todos os valores próprios iguais a $a+b$. A matriz E tem, pelo menos, $m+q-\text{car}E$ valores próprios nulos e, portanto, $(a+b)I_{m+q}+E$ tem, pelo menos um valor próprio igual a $a+b$.

A matriz C, que é semelhante à matriz $(a+b)I_{m-q} \oplus [(a+b)I_{m+q}+E]$, tem então, pelo menos, dois valores próprios iguais a $a+b$, que contradiz a 1^{a} observação.

Conclui-se então a matriz X_3 é não singular.

6^{a} Observação. *Existem matrizes não singulares* $\begin{bmatrix} U & S \\ 0 & U \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} V & T \\ 0 & V \end{bmatrix} \in \widetilde{F}^{2m\times 2m}$, *tais que*

$$\begin{bmatrix} U & S \\ 0 & U \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} V & T \\ 0 & V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & W \\ I_m & 0 \end{bmatrix},$$

onde $W \in \widetilde{F}^{m\times m}$.

Seja $X = \begin{bmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{bmatrix}$. Atendendo ao facto da matriz X_3 ser não singular, tome-se

$$\begin{bmatrix} U & S \\ 0 & U \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_3^{-1} & -X_3^{-1}X_1X_3^{-1} \\ 0 & X_3^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_3^{-1} & 0 \\ 0 & I_m \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_m & -X_1 \\ 0 & I_m \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_m & 0 \\ 0 & X_3^{-1} \end{bmatrix}.$$

Tem-se

$$X^{(1)} = \begin{bmatrix} U & S \\ 0 & U \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & * \\ I_m & X_3^{-1}X_4 \end{bmatrix}.$$

Finalmente tome-se

$$\begin{bmatrix} V & T \\ 0 & V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_m & -X_3^{-1}X_4 \\ 0 & I_m \end{bmatrix},$$

tem-se então

$$X^{(1)} \begin{bmatrix} I_m & -X_3^{-1}X_4 \\ 0 & I_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & W \\ I_m & 0 \end{bmatrix},$$

onde $W \in \widetilde{F}^{m\times m}$.

A matriz $XKX^{-1} + L$ é então semelhante à matriz

$$\begin{aligned} C &= \begin{bmatrix} U & S \\ 0 & U \end{bmatrix} (XKX^{-1} + L) \begin{bmatrix} U & S \\ 0 & U \end{bmatrix}^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} U & S \\ 0 & U \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} V & T \\ 0 & V \end{bmatrix} K \begin{bmatrix} V & T \\ 0 & V \end{bmatrix}^{-1} X^{-1} \begin{bmatrix} U & S \\ 0 & U \end{bmatrix}^{-1} + L \\ &= \begin{bmatrix} 0 & W \\ I_m & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} aI_m & I_m \\ o & aI_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & I_m \\ W^{-1} & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} bI_m & I_m \\ 0 & bI_m \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (a+b)I_m & I_m \\ W^{-1} & (a+b)I_m \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Pelo Teorema 3.1, os valores próprios da matriz C podem ser agrupados em pares de tal forma que a soma de dois valores próprios de cada par é $2a + 2b$, que contradiz a 2ª Observação.

Caso III. $K = \begin{bmatrix} aI_m & I_m \\ 0 & aI_m \end{bmatrix}$, $L = \begin{bmatrix} bI_m & 0 \\ 0 & dI_m \end{bmatrix}$ com $a, b, d \in \widetilde{F}$, $b \neq d$, $2a \in F$, $b + d \in F$.

Repare-se que $a+b \in F$ se e só se $a+d \in F$. Com efeito $a+b = 2a-(a+d)+(b+d) \in F$, com $2a, a+b \in F$.

Escolha-se um $2m$-uplo $(\lambda_1, \ldots, \lambda_{2m})$ de elementos de F da seguinte forma:

(i) se $a+b \in F$, escolha-se $x \in F \backslash \{0, d-b\}$, e tome-se

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= a+b \\
\lambda_2 &= a+d+x \\
\lambda_3 &= a+b \\
\lambda_4 &= a+d-x \\
\lambda_5 &= \cdots = \lambda_{m+2} = a+b+x \\
\lambda_{m+3} &= \cdots = \lambda_{2m} = a+d-x.
\end{aligned}$$

(ii) se $a+b \notin F$, escolha-se $\begin{cases} x \in F \backslash \{0,\ 1-2a-b-d\} \\ w \in F \backslash \{0,\ 2a+b+d\} \end{cases}$, e tome-se

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= 0 \\
\lambda_2 &= 2a+b+d-1 \\
\lambda_3 &= 2a+b+d+x \\
\lambda_4 &= 1-x \\
\lambda_5 &= \cdots = \lambda_{m+2} = 2a+b+d-w \\
\lambda_{m+3} &= \cdots = \lambda_{2m} = w.
\end{aligned}$$

Para ambos os casos tem-se:

1ª Observação. *Não existe* $i \in \{1, \ldots, 2m\}$ *tal que* $\lambda_i = a+d$.

Quer $a+b \in F$, quer $a+b \notin F$, a conclusão resulta da análise dos elementos escolhidos.

2ª Observação. *Não existe* $i \in \{2, 3, \ldots, 2m\}$ *tal que* $\lambda_1 + \lambda_i = 2a+b+d$.

De facto se $a+b \in F$:

$\lambda_1 + \lambda_2 = 2a+b+d+x \neq 2a+b+d$, pois $x \neq 0$,

$\lambda_1 + \lambda_3 = 2a+2b \neq 2a+b+d$, pois $b \neq d$,

$\lambda_1 + \lambda_4 = 2a+b+d-x \neq 2a+b+d$, pois $x \neq 0$,

$\lambda_1 + \lambda_p = 2a+2b+x \neq 2a+b+d$, pois $x \neq d-b \ \wedge\ b \neq d$, para $p \in \{5, \ldots, m+2\}$,

$\lambda_1 + \lambda_q = 2a+b+d-x \neq 2a+b+d$, pois $x \neq 0$, para $q \in \{m+3, \ldots, 2m\}$.

Se $a+b \notin F$:

$\lambda_1 + \lambda_2 = 2a + b + d - 1 \neq 2a + b + d,$

$\lambda_1 + \lambda_3 = 2a + b + d + x \neq 2a + b + d$, pois $x \neq 0$,

$\lambda_1 + \lambda_4 = 1 - x \neq 2a + 2b \neq 2a + b + d$, pois $x \neq 1 - 2a - b - d$,

$\lambda_1 + \lambda_r = 2a + b + d - w \neq 2a + b + d$, pois $w \neq 0$, para $r \in \{5, \ldots, m+2\}$,

$\lambda_1 + \lambda_s = w \neq 2a + b + d$, atendendo à escolha de w, para $s \in \{m+3, \ldots, 2m\}$.

3ª Observação. $\sum_{i=1}^{2m} \lambda_i = m(2a+b+d) = \mathrm{tr}A + \mathrm{tr}B$

Facilmente se constata que

$$\sum_{i=1}^{2m} \lambda_i = m(2a) + m(b+d) = \mathrm{tr}K + \mathrm{tr}L.$$

Por outro lado, como a matriz K é semelhante à matriz A, a matriz L é semelhante à matriz B e o traço de uma matriz é invariante por semelhança, tem-se que

$$\sum_{i=1}^{2m} \lambda_i = m(2a+b+d) = \mathrm{tr}A + \mathrm{tr}B.$$

Como o par (A,B) é espectralmente completo existe uma matriz $X \in \widetilde{F}^{2m\times 2m}$, não singular, tal que $XKX^{-1} + L$ tem valores próprios $\lambda_1, \ldots, \lambda_{2m}$.

Particionem-se as matrizes X e X^{-1} da seguinte forma:

$$X = \begin{bmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{bmatrix} \quad , \quad X^{-1} = \begin{bmatrix} X_1' & X_2' \\ X_3' & X_4' \end{bmatrix}.$$

4ª Observação. *Se* $\mathrm{car}X_1 = p$, *então existem matrizes não singulares* $\begin{bmatrix} W & 0 \\ 0 & Z \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} V & T \\ 0 & V \end{bmatrix} \in \widetilde{F}^{2m\times 2m}$, *com* W, Z, V *e* $T \in \widetilde{F}^{m\times m}$, *tais que* $Y = \begin{bmatrix} W & 0 \\ 0 & Z \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} V & T \\ 0 & V \end{bmatrix}$ *e a sua inversa têm as formas*
$$Y = \left[\begin{array}{c:c:c:c} I_p & 0 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & * & * \\ \hdashline * & 0 & * & * \\ \hdashline 0 & I_{m-p} & * & * \end{array}\right] \quad , \quad Y^{-1} = \left[\begin{array}{c:c:c:c} I_p & 0 & 0 & 0 \\ \hdashline * & * & * & I_{m-p} \\ \hdashline * & * & * & 0 \\ \hdashline * & * & * & 0 \end{array}\right].$$

Seja $\mathrm{car}X_1 = p$. Existem então matrizes W_1, $V_1 \in \widetilde{F}^{m\times m}$, não singulares, tais que $W_1X_1V_1 = I_p \oplus 0_{m-p}$. Seja $Z_1 \in \widetilde{F}^{m\times m}$ uma matriz não singular tal que $Z_1(X_3V_1)$ é triangular inferior.

Considere-se a matriz

$$
\begin{aligned}
X^{(1)} &= \begin{bmatrix} W_1 & 0 \\ 0 & Z_1 \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} V_1 & 0 \\ 0 & V_1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} (W_1X_1)V_1 & (W_1X_2)V_1 \\ (Z_1X_3)V_1 & (Z_1X_4)V_1 \end{bmatrix} \\
&= \left[\begin{array}{cc|cc} I_p & 0 & T_1 & T_2 \\ 0 & 0 & T_3 & T_4 \\ \hline T_5 & 0 & T_6 & T_7 \\ T_8 & T_9 & T_{10} & T_{11} \end{array}\right],
\end{aligned}
$$

em que T_1, T_5 e $T_6 \in \widetilde{F}^{p\times p}$, T_2, $T_7 \in \widetilde{F}^{p\times(m-p)}$, T_3, T_8 e $T_{10} \in \widetilde{F}^{(m-p)\times p}$, T_4, T_9 e $T_{11} \in \widetilde{F}^{(m-p)\times(m-p)}$.

Pretende-se assim obter uma matriz equivalente a $X^{(1)}$ na forma $Y = \left[\begin{array}{cc|cc} I_p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * & * \\ \hline * & 0 & * & * \\ 0 & I_{m-p} & * & * \end{array}\right]$.

Analisando a matriz $X^{(1)}$ conclui-se que a submatriz T_9 é não singular. De modo a obter uma matriz equivalente a $X^{(1)}$ em que o bloco correspondente à posição $(4,2)$ seja I_{m-p}, multiplique-se a matriz $X^{(1)}$ à direita por

$$
B^{(1)} = \left[\begin{array}{cc|cc} I_p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & T_9^{-1} & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & I_p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{m-p} \end{array}\right],
$$

obtendo-se

$$
\begin{aligned}
X^{(2)} &= X^{(1)}B^{(1)} \\
&= \left[\begin{array}{cc|cc} I_p & 0 & T_1 & T_2 \\ 0 & 0 & T_3 & T_4 \\ \hline T_5 & 0 & T_6 & T_7 \\ T_8 & T_9 & T_{10} & T_{11} \end{array}\right] \left[\begin{array}{cc|cc} I_p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & T_9^{-1} & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & I_p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{m-p} \end{array}\right]
\end{aligned}
$$

$$= \left[\begin{array}{cc:cc} I_p & 0 & T_1 & T_2 \\ 0 & 0 & T_3 & T_4 \\ \hdashline T_5 & 0 & T_6 & T_7 \\ T_8 & I_{m-p} & T_{10} & T_{11} \end{array}\right].$$

Pretende-se agora obter uma matriz equivalente a $X^{(2)}$ em que o bloco correspondente à posição $(4,1)$ seja nulo. Para isso multiplique-se a matriz $X^{(2)}$, à direita, por

$$B^{(2)} = \left[\begin{array}{cc:cc} I_p & 0 & 0 & 0 \\ -T_8 & I_{m-p} & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & I_p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{m-p} \end{array}\right].$$

Obtém-se a matriz

$$\begin{aligned} X^{(3)} &= X^{(2)}B^{(2)} \\ &= \left[\begin{array}{cc:cc} I_p & 0 & T_1 & T_2 \\ 0 & 0 & T_3 & T_4 \\ \hdashline T_5 & 0 & T_6 & T_7 \\ T_8 & I_{m-p} & T_{10} & T_{11} \end{array}\right] \left[\begin{array}{cc:cc} I_p & 0 & 0 & 0 \\ -T_8 & I_{m-p} & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & I_p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{m-p} \end{array}\right] \\ &= \left[\begin{array}{cc:cc} I_p & 0 & T_1 & T_2 \\ 0 & 0 & T_3 & T_4 \\ \hdashline T_5 & 0 & T_6 & T_7 \\ 0 & I_{m-p} & T_{10} & T_{11} \end{array}\right]. \end{aligned}$$

Novamente, por forma a obter uma matriz equivalente a esta em que o bloco correspondente à posição $(1,3)$ seja nulo, multiplique-se a matriz $X^{(3)}$, à direita, por

$$B^{(3)} = \left[\begin{array}{cc:cc} I_p & 0 & -T_1 & 0 \\ 0 & I_{m-p} & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & I_p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{m-p} \end{array}\right].$$

Obtém-se assim a matriz

$$
\begin{aligned}
X^{(4)} &= X^{(3)}B^{(3)} \\
&= \left[\begin{array}{cc:cc} I_p & 0 & T_1 & T_2 \\ 0 & 0 & T_3 & T_4 \\ \hdashline T_5 & 0 & T_6 & T_7 \\ 0 & I_{m-p} & T_{10} & T_{11} \end{array}\right] \left[\begin{array}{cc:cc} I_p & 0 & -T_1 & 0 \\ 0 & I_{m-p} & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & I_p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{m-p} \end{array}\right] \\
&= \left[\begin{array}{cc:cc} I_p & 0 & 0 & T_2 \\ 0 & 0 & T_3 & T_4 \\ \hdashline T_5 & 0 & * & T_7 \\ 0 & I_{m-p} & T_{10} & T_{11} \end{array}\right].
\end{aligned}
$$

Finalmente, e de modo a obter uma matriz equivalente a $X^{(4)}$ em que o bloco correspondente à posição $(1,4)$ seja nulo, multiplique-se a matriz à direita, por

$$
B^{(4)} = \left[\begin{array}{cc:cc} I_p & 0 & 0 & -T_2 \\ 0 & I_{m-p} & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & I_p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{m-p} \end{array}\right].
$$

Efectuando-se o produto $B^{(1)}B^{(2)}B^{(3)}B^{(4)}$ obtém-se a matriz

$$
C_1 = \left[\begin{array}{cc:cc} I_p & 0 & -T_1 & -T_2 \\ -T_9^{-1}T_8 & T_9^{-1} & T_9^{-1}T_8T_1 & T_9^{-1}T_8T_2 \\ \hdashline 0 & 0 & I_p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{m-p} \end{array}\right].
$$

De modo a obter uma matriz C com a forma pretendida, multiplique-se de seguida a matriz C_1, à direita, por

$$
\left[\begin{array}{cc:cc} I_p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_{m-p} & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & I_p & 0 \\ 0 & 0 & -T_9^{-1}T_8 & I_{m-p} \end{array}\right] \left[\begin{array}{cc:cc} I_p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_{m-p} & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & I_p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & T_9^{-1} \end{array}\right].
$$

Obtém-se então a matriz

$$
C = \left[\begin{array}{cc:cc} I_p & 0 & T_2T_9^{-1}T_8 - T_1 & -T_2T_9^{-1} \\ -T_9^{-1}T_8 & T_9^{-1} & * & * \\ \hdashline 0 & 0 & I_p & 0 \\ 0 & 0 & -T_9^{-1}T_8 & T_9^{-1} \end{array}\right].
$$

A matriz $X^{(5)} = X^{(1)}C$ tem então a forma pretendida. De facto,

$$\begin{aligned}
X^{(5)} &= X^{(1)}C \\
&= \left[\begin{array}{cc|cc} I_p & 0 & T_1 & T_2 \\ 0 & 0 & T_3 & T_4 \\ \hline T_5 & 0 & T_6 & T_7 \\ T_8 & T_9 & T_{10} & T_{11} \end{array}\right] \left[\begin{array}{cc|cc} I_p & 0 & T_2T_9^{-1}T_8 - T_1 & -T_2T_9^{-1} \\ -T_9^{-1}T_8 & T_9^{-1} & * & * \\ \hline 0 & 0 & I_p & 0 \\ 0 & 0 & -T_9^{-1}T_8 & T_9^{-1} \end{array}\right] \\
&= \left[\begin{array}{cc|cc} I_p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * & * \\ \hline * & 0 & * & * \\ 0 & I_{m-p} & * & * \end{array}\right].
\end{aligned}$$

Tem-se então que

$$\begin{aligned}
Y &= \begin{bmatrix} W_1 & 0 \\ 0 & Z_1 \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} V_1 & 0 \\ 0 & V_1 \end{bmatrix} C \\
&= \begin{bmatrix} W & 0 \\ 0 & Z \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} V & T \\ 0 & V \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Com efeito, repare-se que

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} V_1 & 0 \\ 0 & V_1 \end{bmatrix} C &= \left[\begin{array}{c|c} V_1 \begin{bmatrix} I_p & 0 \\ -T_9^{-1}T_8 & T_9^{-1} \end{bmatrix} & V_1 \begin{bmatrix} T_2T_9^{-1}T_8 - T_1 & -T_2T_9^{-1} \\ * & * \end{bmatrix} \\ \hline 0 & V_1 \begin{bmatrix} I_p & 0 \\ -T_9^{-1}T_8 & T_9^{-1} \end{bmatrix} \end{array}\right] \\
&= \begin{bmatrix} V & T \\ 0 & V \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

5ª Observação. *A matriz X_1 é não singular.*

Seja car$X_1 = p$. A matriz $XKX^{-1} + L$ é semelhante a

$$
\begin{aligned}
C &= \begin{bmatrix} W & 0 \\ 0 & Z \end{bmatrix} (XKX^{-1}+L) \begin{bmatrix} W & 0 \\ 0 & Z \end{bmatrix}^{-1} \\
&= \begin{bmatrix} W & 0 \\ 0 & Z \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} V & T \\ 0 & V \end{bmatrix} K \begin{bmatrix} V & T \\ 0 & V \end{bmatrix}^{-1} X^{-1} \begin{bmatrix} W & 0 \\ 0 & Z \end{bmatrix}^{-1} + L \\
&= \left(\begin{bmatrix} W & 0 \\ 0 & Z \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} V & T \\ 0 & V \end{bmatrix} \right) K \left(\begin{bmatrix} V & T \\ 0 & V \end{bmatrix}^{-1} X^{-1} \begin{bmatrix} W & 0 \\ 0 & Z \end{bmatrix}^{-1} \right) + L \\
&= YKY^{-1} + L.
\end{aligned}
$$

Repare-se que se usou a notação referida na 4ª Observação. Efectuando um cálculo directo,

$$
\begin{aligned}
C &= YKY^{-1} + L \\
&= \left[\begin{array}{cc:cc} I_p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * & * \\ \hdashline * & 0 & * & * \\ 0 & I_{m-p} & * & * \end{array}\right] \begin{bmatrix} aI_m & I_m \\ 0 & aI_m \end{bmatrix} \left[\begin{array}{cc:cc} I_p & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & I_{m-p} \\ \hdashline * & * & * & 0 \\ * & * & * & 0 \end{array}\right] + \begin{bmatrix} bI_m & 0 \\ 0 & dI_m \end{bmatrix} \\
&= \left[\begin{array}{cc:cc} * & * & * & 0 \\ * & * & * & 0 \\ \hdashline * & * & * & 0 \\ * & * & * & (a+d)I_{m-p} \end{array}\right].
\end{aligned}
$$

Caso a matriz X_1 seja singular, ou seja se $p < m$, a matriz C tem $m-p$ valores próprios iguais a $a+d$, que contradiz a 1ª Observação deste caso.

6ª Observação. *Existem matrizes não singulares* $\begin{bmatrix} W & 0 \\ 0 & Z \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} V & T \\ 0 & V \end{bmatrix} \in \widetilde{F}^{2m \times 2m}$, *tais que* $\begin{bmatrix} W & 0 \\ 0 & Z \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} V & T \\ 0 & V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_m & 0 \\ R & I_m \end{bmatrix}$, *com* $R \in \widetilde{F}^{m \times m}$.

Multiplique-se a matriz X, à esquerda, por $\begin{bmatrix} X_1^{-1} & 0 \\ 0 & I_m \end{bmatrix}$. Obtém-se a matriz

$$\begin{aligned} X^{(1)} &= \begin{bmatrix} X_1^{-1} & 0 \\ 0 & I_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} I_m & X_1^{-1}X_2 \\ X_3 & X_4 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Seguidamente, multiplique-se a matriz $X^{(1)}$, à direita, por $\begin{bmatrix} I_m & -X_1^{-1}X_2 \\ 0 & I_m \end{bmatrix}$. Obtém-se a matriz

$$\begin{aligned} X^{(2)} &= \begin{bmatrix} I_m & X_1^{-1}X_2 \\ X_3 & X_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_m & -X_1^{-1}X_2 \\ 0 & I_m \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} I_m & 0 \\ X_3 & -X_3X_1^{-1}X_2 + X_4 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Repare-se que se a matriz X é não singular, então também a submatiz de $X^{(2)}$, $X_4 - X_3X_1^{-1}X_2$ é não singular.

Multiplique-se ainda a matriz $X^{(2)}$, à esquerda, por $\begin{bmatrix} I_m & 0 \\ 0 & (-X_3X_1^{-1}X_2 + X_4)^{-1} \end{bmatrix}$.

Obtém-se a matriz

$$\begin{aligned} X^{(3)} &= \begin{bmatrix} I_m & 0 \\ 0 & (-X_3X_1^{-1}X_2 + X_4)^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_m & 0 \\ X_3 & -X_3X_1^{-1}X_2 + X_4 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} I_m & 0 \\ (-X_3X_1^{-1}X_2 + X_4)^{-1}X_3 & I_m \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} I_m & 0 \\ R & I_m \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Tem-se então que:

$$\begin{aligned} Y &= \begin{bmatrix} I_m & 0 \\ 0 & (-X_3X_1^{-1}X_2+X_4)^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1^{-1} & 0 \\ 0 & I_m \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} I_m & -X_1^{-1}X_2 \\ 0 & I_m \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} X_1^{-1} & 0 \\ 0 & (-X_3X_1^{-1}X_2-X_4)^{-1} \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} V & T \\ 0 & V \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} W & 0 \\ 0 & Z \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} V & T \\ 0 & V \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

A matriz $XKX^{-1}+L$ é então semelhante à matriz

$$\begin{aligned} C &= \begin{bmatrix} W & 0 \\ 0 & Z \end{bmatrix} (XKX^{-1}+L) \begin{bmatrix} W & 0 \\ 0 & Z \end{bmatrix}^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} W & 0 \\ 0 & Z \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} V & T \\ 0 & V \end{bmatrix} K \begin{bmatrix} V & T \\ 0 & V \end{bmatrix}^{-1} X^{-1} \begin{bmatrix} W & 0 \\ 0 & Z \end{bmatrix}^{-1} + \begin{bmatrix} W & 0 \\ 0 & Z \end{bmatrix} L \begin{bmatrix} W & 0 \\ 0 & Z \end{bmatrix}^{-1} \\ &= \left(\begin{bmatrix} W & 0 \\ 0 & Z \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} V & T \\ 0 & V \end{bmatrix} \right) K \left(\begin{bmatrix} W & 0 \\ 0 & Z \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} V & T \\ 0 & V \end{bmatrix} \right)^{-1} + \begin{bmatrix} W & 0 \\ 0 & Z \end{bmatrix} L \begin{bmatrix} W & 0 \\ 0 & Z \end{bmatrix}^{-1} \\ &= YKY^{-1}+L. \end{aligned}$$

Repare-se que se usou a notação referida na 5ª Observação,

$$Y = \begin{bmatrix} W & 0 \\ 0 & Z \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} V & T \\ 0 & V \end{bmatrix}.$$

Continuando,

$$\begin{aligned} C &= YKY^{-1}+L \\ &= \begin{bmatrix} I_m & 0 \\ R & I_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} aI_m & I_m \\ 0 & aI_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_m & 0 \\ R & I_m \end{bmatrix}^{-1} + \begin{bmatrix} bI_m & 0 \\ 0 & dI_m \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (a+b)I_m - R & I_m \\ -R^2 & (a+d)I_m - R \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

C é semelhante à matriz

$$C^{(1)} = \begin{bmatrix} I_m & 0 \\ -R & I_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (a+b)I_m - R & I_m \\ -R^2 & (a+d)I_m - R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_m & 0 \\ R & I_m \end{bmatrix}.$$

$$= \begin{bmatrix} (a+b)I_m & I_m \\ (d-b)R & (a+d)I_m \end{bmatrix}$$

Pelo Teorema 3.1, os valores próprios da matriz $C^{(1)}$ podem agrupar-se em pares de tal forma que a soma de dois valores de cada par é $2a+b+d$, o que contradiz a 2ª Observação. Então, também para o 3º Caso considerado conclui-se que a hipótese inicial das condições $n \neq 2$ e que todos os polinómios invariantes de A e de B diferentes de 1 têm grau 2, se verificarem simultaneamente não pode ocorrer, ou seja, pelo menos uma delas não se verifica.

Caso IV. $K = \begin{bmatrix} aI_m & 0 \\ 0 & cI_m \end{bmatrix}$, $L = \begin{bmatrix} bI_m & I_m \\ 0 & bI_m \end{bmatrix}$ com $a, b, c \in \widetilde{F}$, $a \neq c$, $2b \in F$, $a + c \in F$.

Tendo em conta que

$$X^{-1}(XKX^{-1} + L)X = K + X^{-1}LX,$$

e que matrizes semelhantes têm os mesmos valores próprios, este caso resume-se ao Caso III.

Com a análise dos quatro casos anteriormente referidos está concluída a demonstração do Teorema 3.2.

Bibliografia

[1] F. R. Gantmacher. *The Theory of Matrices.* Chelsea Publ. Comp. New York, (1959,1960).

[2] P. Lancaster e M. Timenetsky. *The Theory of Matrices.* Academia Press. New York, (1985).

[3] P. Lancaster e M. Timenetsky. *Topics in Matrix Analysis.* Cambridge Univ. Press, (1991).

[4] Marcus, Marvin. *Introduction to Linear Algebra.* Dover Publications, Inc. New York, (1988).

[5] R. A. Horn e C. Johnson. *Matrix Analysis.* Cambridge Univ. Press, (1990).

[6] R. A. Horn e C. Johnson. *Topics in Matrix Analysis.* Cambridge Univ. Press, (1991).

[7] F. C. Silva. *Matrices with Prescribed Eigenvalues and Principal Submatrices, Linear Algebra.* 92:241-250, (1987).

[8] F. C. Silva. *The Eigenvalues of the Sum of Matrices with Prescribed Invariant Polynomials (II), Linear and Multilinear Algebra.* 24:45-49, (1988).

[9] F. C. Silva e Wasin So. *Possibilities for the Number of Invariant Polynomials of the Difference of Two Similarity Classes, Linear and Multilinear Algebra.* 41:289-302, (1996).

[10] F. C. Silva. *On the Number of Invariant Polynomials of the Matrix* $XAX^{-1}+B$*, Linear Algebra and its Applications.* 79:1-21, (1986).

[11] F. C. Silva. *Spectrally Complete Pairs of Matrices, Linear Algebra and its Applications.* 108:239-262, (1988).

[12] G. N. Oliveira, E. Marques de Sá e J. A. Dias da Silva. *On the Eigenvalues of the Matrix* $XAX^{-1}+B$*, Linear and Multilinear Algebra.* 5:119-128, (1977).

[13] S. Lang. *Algebra.* Addison Wesley, 3rd Edition, (1993).