Universidade de Aveiro Departamento de Matemática
2009

Dora Alice Rocha da Silveira

Equações diferenciais descontínuas e inclusões diferenciais

Universidade de Aveiro Departamento de Matemática
2009

Dora Alice Rocha da Silveira

Equações diferenciais descontínuas e inclusões diferenciais

Dissertação apresentada à Universidade de Aveiro para cumprimento dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre em Ensino de Matemática, realizada sob a orientação científica do Dr. Vasile Staicu, Professor Catedrático do Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro

Aos meus pais e a minha avó Adelaide.

o júri

Presidente

Prof. Doutor Luís Filipe Pinheiro de Castro
Professor catedrático da Universidade de Aveiro

Prof. Doutor Manuel D.P. Monteiro Marques
Professor catedrático da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa

Prof. Doutor Vasile Staicu
Professor catedrático da Universidade de Aveiro (Orientador)

agradecimentos

Passei algum tempo a pensar na difícil tarefa de como poderia com palavras descrever os sentimentos, não há uma função, fórmula ou programa para ajudar. Isto por que apesar de uma dissertação ser um trabalho individual, devido ao seu objectivo académico, há sempre contributos de natureza diversa que não podem deixar de ser mencionados, como a compreensão do meu orientador, o professor Dr. Vasile Staicu, nos momentos difíceis pelos quais passei, a sua tolerância, paciência, sugestões, críticas e principalmente o apoio incansável e incentivo à realização desta dissertação; os meus mais profundos e sinceros agradecimentos.

Também aos meus colegas do Mestrado, pela excelente relação que criámos e que espero que não se perca, assim como ajuda e intercâmbio de ideias e informação.

Aos meus amigos, pelo carinho que mostraram e por estarem sempre presentes, pela confiança em mim depositada, fazendo-me acreditar que era possível chegar ao fim.

A minha família e todas as pessoas que contribuíram para a concretização desta dissertação os meus eternos agradecimentos.

palavras-chave

Equação diferencial, solução clássica, solução de Carathéodory, solução de Hermes, solução de Euler, solução de Krasowski, solução de Filippov, inclusão diferencial.

resumo

O objectivo desta dissertação é estudar as soluções de equações diferenciais definidas por campos vectoriais descontínuos e suas relações com as inclusões diferenciais.

Começamos por analisar a existência, unicidade e dependência contínua dos dados iniciais, das soluções de Carathéodory. De seguida estudamos as soluções generalizadas recorrendo a duas abordagens. Uma primeira abordagem consiste em definir solução generalizada como limite uniforme duma certa sucessão de soluções aproximadas, introduzindo assim as soluções de Hermes e de Euler: A outra abordagem baseia-se em definir solução generalizada, como sendo solução duma inclusão diferencial associada a equação diferencial. Estuda-se desta forma a regularização das equações diferenciais com lado direito descontínuo, e introduz-se os conceitos de solução de Krasowski e de Filippov.

keywords

Differential equation, classical solution, Carathéodory solution, Hermes solution, Euler solution, Krasowski solution, Filippov solution, differential inclusion.

abstract

The aim of this dissertation is to study the solutions of differential equations defined by discontinuous vector fields and its relationship with differential inclusions.

We begin by analyzing the existence, uniqueness and continuous dependence with respect to initial data of Carathéodory solutions. Then we study the generalized solutions using two approaches. One approach is to define general solution as uniform limit of a certain sequence of approximate solutions, thus introducing the solutions of Euler and Hermes. The other approach consists on defining general solution as solution of a certain differential inclusion associated with the differential equation, and we use it study the regularization of differential equations with discontinuous right side, and to introduce the concepts of Krasowski and Filippov solutions.

Conteúdo

Capítulo 1

Introdução

Vários processos evolutivos (físicos, químicos, biológicos, sociológicos, etc.) podem ser modelados por equações diferenciais ordinárias

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x) \tag{1.1}$$

onde $f : \Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ descreve a dinâmica interna do processo e $x = x(t)$ descreve o estado do processo no instante t. Uma solução desta equação descreve a evolução do estado do processo.

Se f for contínua então o conceito clássico de solução é apropriado. Uma função φ definida e derivável num intervalo I diz-se solução clássica da equação (1.1) se satisfazer a condição

$$\frac{d\varphi}{dt}(t) = f(t, \varphi(t)) \text{ para todo } t \in I. \tag{1.2}$$

As soluções clássicas não existem se f for descontínua, mas, surgem frequentemente modelos matemáticos com equações diferenciais da forma (1.1) em que f é descontínua. A teoria do controlo, por exemplo, é uma fonte importante de tais equações, onde f é apenas mensurável em t, e para qual o conceito de solução clássica não é apropriado. Por esta razão, é interessante procurarmos generalizar o conceito de solução duma equação diferencial.

O objectivo desta dissertação é apresentar algumas generalizações do conceito de solução duma equação diferencial. Começa-se por estudar as soluções de Carathéodory, que podem existir mesmo no caso em que o campo vectorial não é contínuo, mas satisfaz as chamadas condições de Carathéodory.

Para estudar as equações diferenciais cujo termo direito não satisfazem as condições de Carathéodory, duas alternativas podem ser seguidas. A primeira consiste em procurar condições mais fracas do que as condições de Carathéodory, mas que no entanto, garantem a existência de soluções de Carathéodory. A segunda, consiste na introdução de soluções generalizadas. Esta última é seguida na teoria do controlo. Nesta dissertação seguimos as duas alternativas e para além das soluções de Carathéodory para equações definidas por campos vectoriais direccionalmente contínuos, estuda-se as soluções de Euler, de Hermes, de Krasowski e de Filippov.

Começamos por relembrar alguns conceitos básicos, na Secção 2, entre eles, o conceito de conjunto convexo, de função absolutamente contínua e algumas noções da análise multívoca. Fixamos também algumas notações que serão utilizadas posteriormente.

A Secção 3, é dedicada as soluções de Carathéodory (soluções $\mathcal{C}$) para a equação diferencial (1.1) com f satisfazendo as condições de Carathéodory. Recorrendo ao princípio das contracções de Banach provámos a existência, unicidade e dependência contínua dos dados iniciais das soluções de Carathéodory para (1.1) . Apresentamos também um resultado de existência de soluções de Carathéodory sob condições mais fracas de que as condições de Carathéodory, sobre o campo vectorial, nomeadamente, a continuidade direccional.

Ao longo da Secção 4, estuda–se a existência de soluções para inclusões diferenciais do tipo

$$\dot{x}(t) \in F(t,x) \tag{1.3}$$

para F semi-contínua inferiormente e F semi-contínua superiormente, com imagens fechadas e convexas. Nesta secção apresenta-se também um resultado relativo à regularização de equações diferenciais com lado direito descontínuo, importante para a compreensão de algumas soluções generalizadas descritas a posteriori.

Associamos a equação diferencial (1.1) uma inclusão diferencial (1.3) com F uma multifunção definida de tal modo que, $F(t,x)$ contém $f(t,x)$ para todo (t,x) , e coincide com $f(t,x)$ nos pontos (t,x) de continuidade de f. Toda a solução desta inclusão diferencial satisfaz a equação nos pontos de continuidade de f.

Na Secção 5, definem-se as soluções generalizadas de Euler (soluções $\mathcal{E}$), de Hermes (soluções $\mathcal{H}$) obtidas como limite uniforme de sucessões de soluções aproximadas (afins por partes) para o problema (1.1). Introduzem- -se, também, as soluções de Krasowski (soluções $\mathcal{K}$) e de Filippov (soluções $\mathcal{F}$). Comparando as soluções apresentadas chegamos a conclusão que

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{F} & \subset & \mathcal{K} & \supset & \mathcal{H} \\ & & \cup & & \\ & & \mathcal{C} & & \end{array}.$$

Capítulo 2

Preliminares

Neste capítulo apresentamos algumas notações, definições e resultados básicos que iremos utilizar ao longo desta dissertação.

O conjunto dos números reais será representado por $\mathbb{R}$. Com $\mathbb{R}^n$ indicamos o conjuntos dos n-uplos $(x_1, x_2, ..., x_n)$, onde $x_i \in \mathbb{R}$ para $1 \leq i \leq n$. Em relação as operações de adição e de multiplicação por escalares definidas por:

$$(x_1, x_2, ..., x_n) + (y_1, y_2, ..., y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n)$$

e

$$\lambda (x_1, x_2, ..., x_n) = (\lambda x_1, \lambda x_2, ..., \lambda x_n)$$

respectivamente, verifica-se que $\mathbb{R}^n$ é um espaço vectorial. Tem-se também que a aplicação $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definida por

$$\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + ... + x_n y_n$$

com $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ e $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$ é um *produto interno* em $\mathbb{R}^n$ e a aplicação $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$ definida por

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} \tag{2.1}$$

é uma norma em $\mathbb{R}^n$, chamada a *norma euclidiana*.

Para todo $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ e para todo o número real $\lambda \in \mathbb{R}$, a norma euclidiana verifica as seguintes propriedades:

(i) $\|x\| = 0$ se e só se $x = 0$;

(ii) $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$;

(iii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Se X é um espaço vectorial e se $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}^+$ satisfaz as condições (i), (ii) e (iii) então diz-se que $\|\cdot\|$ é uma norma em X e que $(X, \|\cdot\|)$ é um espaço (vectorial) normado. Em particular, $\mathbb{R}^n$ é um espaço normado com a norma definida em (2.1).

Observa-se que todo o espaço vectorial normado (em particular $\mathbb{R}^n$) é um espaço métrico, com a *distância* $d : X \times X \to \mathbb{R}$ definida por

$$d(x, y) = \|x - y\|.$$

Se $x_0 \in X$ e $r > 0$ então o conjunto $B_r(x_0) = \{x \in X : \|x - x_0\| < r\}$ chama-se *bola aberta centrada em x_0 e de raio r.* O conjunto $\overline{B}_r(x_0) = \{x \in X : \|x - x_0\| \le r\}$ chama-se *bola fechada centrada em x_0 e de raio r.*

Se $x_0 = 0$ e $r = 1$ então denotamos por $B := B_1(0)$ e $\overline{B} = \overline{B}_1(0)$ as bolas unitárias centradas na origem, aberta e fechada, respectivamente.

Observa-se que se, x e y pertencem a X, $\|x\| \le r$, $\|y\| \le r$ e $\lambda \in [0, 1]$ então

$$\|\lambda x + (1 - \lambda)y\| \le r.$$

Com efeito,

$$\begin{aligned} \|\lambda x + (1 - \lambda)y\| &\le \|\lambda x\| + \|(1 - \lambda)y\| = \lambda \|x\| + (1 - \lambda) \|y\| \\ &\le \lambda r + (1 - \lambda)r = r. \end{aligned}$$

Relembramos que um conjunto $A \subset X$ diz-se *convexo* se para todo o $x, y \in A$ e $\lambda \in [0, 1]$ tem-se que

$$\lambda x + (1 - \lambda)y \ \in A.$$

Pela observação anterior tem-se que $\overline{B}_r(x_0)$ é um conjunto convexo. Uma afirmação análoga vale para $B_r(x_0)$.

Resulta facilmente pela definição de conjunto convexo que:

(i) A intersecção de conjuntos convexos é um conjunto convexo.

(ii) Se A, B convexos e α, β números reais então

$$\alpha A + \beta B = \{\alpha a + \beta b : a \in A,\ b \in B\}$$

é convexo.

(iii) Se A convexo então o seu interior $int(A)$ e a sua aderência $\overline{A}$ são convexos.

Seja A um subconjunto de um espaço vectorial normado $(X, \|\cdot\|)$ (em particular $\mathbb{R}^n$). Chamamos *invólucro convexo* de A, denotado por $co(A)$ à intersecção de todos os conjuntos convexos que contém A, ou seja, o menor conjunto convexo que contêm A.

Chamamos *invólucro convexo fechado* a intersecção de todos os conjuntos fechados e convexos que contêm A e denotamos por $\overline{co}(A)$, ou seja, o menor conjunto convexo e fechado que contêm A.

Pelo Teorema de Carathéodory temos que, o invólucro convexo de um conjunto compacto é um conjunto compacto. Para $x \in X$, $\lambda \in \mathbb{R}$ e $A, B \subset X$, definimos

$$A + \lambda B = \{a + \lambda b : a \in A \text{ e } b \in B\} \text{ e } x + B = \{x + b : b \in B\}.$$

Observa-se então que

$$B_r(x_0) = B(x_0, r) = x_0 + rB_1(0)$$

e

$$A + B_r(0) = \{x \in \mathbb{R}^n : d(x, A) < r\}$$

onde

$$d(x, A) = \inf\{\|x - a\| : a \in A\}, x \in \mathbb{R}^n. \tag{2.2}$$

é a distância de $x \in X$ ao conjunto $A \subset X$.

Se A e B são dois subconjuntos não vazios fechados e limitados de X então

$$d_H(A, B) = \max\left\{\sup_{a\in A} d(a, B), \sup_{b\in B} d(b, A)\right\} \tag{2.3}$$

chama-se *distância de Hausdorff-Pompeiu* entre A e B.

Uma aplicação $\phi : X \to X$ diz-se *localmente compacta* (*localmente limitada*) se para todo o ponto do domínio de ϕ existe uma vizinhança cuja imagem é um subconjunto compacto (subconjunto limitado).

Relembremos que num espaço normado $(X, \|\cdot\|)$, uma sucessão $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é chamada *sucessão de Cauchy* se $\forall\varepsilon > 0$ existe um inteiro N tal que $\|x_m - x_n\| \leq \varepsilon$, $\forall m, n \geq N$.

Uma sucessão $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diz-se *convergente* se existe $\overline{x} \in X$ e se para todo $\varepsilon > 0$ existe $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que para todo o $n \geq n_\varepsilon$ tem-se que $\|x_n - \overline{x}\| < \varepsilon$.

Dizemos que um espaço normado X é *espaço de Banach* se toda a sucessão de Cauchy converge para um ponto limite em X.

Ao considerar um subconjunto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, dizemos que a aplicação $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ é *Lipschitz contínua* se existe a constante L tal que,

$$\|f(x) - f(y)\| \leq L\|x - y\|, \; \forall x, y \in \Omega.$$

O espaço $Lip(\Omega, \mathbb{R}^n)$ de todas as *aplicações Lipschitz* contínuas é um espaço de Banach com norma

$$\|f\|_{Lip} = \sup_{x\in\Omega} |f(x)| + \sup_{x\neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|}.$$

Um conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ diz-se *mensurável segundo Lebesgue* se para todo $\varepsilon > 0$ existe V aberto e K compacto tal que

$$K \subseteq A \subseteq V \text{ e } \mu(V\backslash K) < \varepsilon,$$

sendo

$$V\backslash K = \{x; x \in V \text{ e } x \notin K\}$$

a diferença entre os conjuntos e μ a medida de Lebesgue. Uma função $f : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ diz-se *mensurável Lebesgue* se para todo o conjunto aberto $V \subset \mathbb{R}^n$ a sua pré-imagem

$$f^{-1}(V) = \{t \in [a, b]\, ;\ f(t) \in V\}$$

é um conjunto mensurável Lebesgue. Em particular, toda a função contínua é mensurável.

Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo. Uma propriedade P diz-se verificada *q.t.p em* I se essa propriedade verifica-se em $I\backslash N$, onde N é um conjunto de medida Lebesgue nula.

As funções absolutamente contínuas têm um papel fundamental na teoria das Equações diferenciais. Uma função $\varphi : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^n$ diz-se *absolutamente contínua* se $\forall\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para toda a família numerável $\{]\alpha_k, \beta_k] : k \in \mathbb{N}\}$ de subintervalos disjuntos de $[\alpha, \beta]$ tais que

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\beta_k - \alpha_k| \leq \delta$$

tem-se que,

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\varphi(\beta_k) - \varphi(\alpha_k)| \leq \varepsilon.$$

Uma função absolutamente contínua é contínua e de variação limitada (o contrário é falso). Toda a função Lipschitziana é absolutamente contínua.

É conhecido que uma função com variação limitada, em particular uma função absolutamente contínua, tem derivada finita, excepto no máximo num conjunto de medida nula.

Temos o seguinte resultado:
Teorema. Uma função contínua $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ é absolutamente contínua se e só se

$$\varphi(t_1) - \varphi(t_0) = \int_{t_0}^{t_1} \dot{\varphi}(t)\, dt \text{ para todo } t_0, t_1 \in [a,b]\,.$$

Seja $C([a,b], \mathbb{R}^n)$ o espaço normado das funções contínuas $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ com a norma definida por

$$\|\varphi\|_\infty = \sup_{t \in [a,b]} \|\varphi(t)\|\,.$$

Uma sucessão $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $C([a,b], \mathbb{R}^n)$ diz-se *equicontínua* se,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0 : \forall t, s \in [a,b]\,,\ \ |t-s| < \alpha \Rightarrow \|\varphi_n(t) - \varphi_n(s)\| < \varepsilon, \forall n \in \mathbb{N}.$$

A sucessão $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ chama-se *equilimitada* se

$$\exists M \geq 0 : \|\varphi_n(t)\| \leq M, \quad \forall t \in [a,b]\,, \forall n \in \mathbb{N}.$$

O *Teorema de Ascoli-Arzelà* diz-nos que: se $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C([a,b], \mathbb{R}^n)$ é uma sucessão equicontínua e equilimitada em $C([a,b], \mathbb{R}^n)$, então existe uma subsucessão de $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que converge uniformemente para alguma função $\varphi \in C([a,b], \mathbb{R}^n)$.

De seguida apresentamos alguns conceitos da Análise das multifunções (funções com valores conjuntos). Suponhamos que X e Y são espaços topológicos.

Uma aplicação F que associa a cada $x \in X$ um único subconjunto $F(x) \subset Y$ é chamada *multifunção* ou *função multívoca* de X em Y e indica-se por $F : X \to 2^Y$. Cada conjunto $F(x)$ chama-se *valor de* F *em* x.

O *gráfico* de uma multifunção F é definido por

$$Graf(F) = \{(x,y) \in X \times Y : y \in F(x)\}\,.$$

Diz-se que F é uma *multifunção fechada* ou com *gráfico fechado* se o seu gráfico é um subconjunto fechado de $X \times Y$ (isto é, sempre que $x_v \to x$, $y_v \to y$ e $y_v \in F(x_v)$ $\forall v \geq 1$ temos que $y \in F(x)$).

Uma multifunção $F : X \to 2^Y$ diz-se *semi-contínua superiormente* ($s.c.s$) *em* $x_0 \in X$ se para todo o conjunto aberto $\mathcal{U} \subset Y$ tal que $F(x_0) \subset \mathcal{U}$ existe uma vizinhança $\mathcal{V}$ de x_0 tal que $F(x) \subset \mathcal{U}, \forall x \in \mathcal{V}$. A multifunção F diz-se *semi-contínua superiormente em* X se é s.c.s em todo o $x_0 \in X$.

Uma multifunção $F : X \to 2^Y$ diz-se *semi-contínua inferiormente* $(s.c.i)$ *em* $x_0 \in X$ se para qualquer $y_0 \in F(x_0)$ e qualquer vizinhança $\mathcal{N}(y_0)$ de y_0, existe uma vizinhança $\mathcal{N}(x_0)$ de x_0 tal que $\forall x \in \mathcal{N}(x_0)$, $F(x) \cap \mathcal{N}(y_0) \neq \emptyset$. A multifunção F diz-se *semi-contínua inferiormente em* X se é s.c.i para todo o $x_0 \in X$.

Uma multifunção $F : X \to 2^Y$ diz-se *contínua em* X se for semi-contínua superiormente e semi-contínua inferiormente em X.

Exemplo: *A multifunção* $F^+ : \mathbb{R} \to 2^{\mathbb{R}}$ *definida por*

$$F^+(x) = \begin{cases} \{0\} & \text{se } x \neq 0 \\ [-1, 1] & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

é s.c.s em $x_0 = 0$ *mas não é s.c.i. em* $x_0 = 0$.

Com efeito, $y_0 = 1 \in F^+(0)$ e $\mathcal{U} = \left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right) = B_{\frac{1}{3}}(1)$ é uma vizinhança de $y_0 = 1$. Para toda a vizinhança $V = (-\varepsilon, \varepsilon)$ de $x_0 = 0$ existe $x_\varepsilon = \frac{\varepsilon}{2} \in V$ tal que $F^+(x_\varepsilon) \cap \mathcal{U} = \emptyset$, provando que F^+ não é s.c.i. em $x_0 = 0$.

Obviamente, F^+ é s.c.s. em $x_0 = 0$ porque se $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}$ é tal que $F^+(0) = [-1, 1] \subset \mathcal{U}$ então para qualquer vizinhança $\mathcal{V}$ de $x_0 = 0$ e para todo $x \in \mathcal{V}$ tem-se que $F^+(x) \subset [-1, 1] \subset \mathcal{U}$.

Exemplo: *A multifunção* $F^- : \mathbb{R} \to 2^{\mathbb{R}}$ *definida por*

$$F^-(x) = \begin{cases} [-1, 1] & \text{se } x \neq 0 \\ \{0\} & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

é s.c.i. em $x_0 = 0$ *mas não é s.c.s. em* $x_0 = 0$.

Para ver que F^- não é semi-contínua superiormente em $x_0 = 0$, seja $\mathcal{U} = \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) = B_{\frac{1}{3}}(0)$ e observa-se que $\mathcal{U}$ é aberto e $F^-(0) = \{0\} \subset \mathcal{U}$. Para qualquer vizinhança $V = (-\varepsilon, \varepsilon)$ de $x_0 = 0$ existe $x_\varepsilon \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ tal que $F^-(x_\varepsilon) = [-1, 1] \nsubseteq \mathcal{U}$. Portanto $F^-(x)$ não é semi-contínua superiormente em $x_0 = 0$. Verifica-se facilmente que F^- é s.c.i. em $x_0 = 0$.

Sejam X e Y espaços métricos e seja d_H a distância de Hausdorff-Pompeiu definida por (2.3). Uma multifunção $F : X \to 2^Y$ diz-se *Hausdorff contínua* em X se para todo $x \in X$ tem-se que

$$\lim_{y \to x} d_H(F(y), F(x)) = 0.$$

Observamos que se F toma valores compactos então $F : X \to 2^Y$ é *Hausdorff contínua* se e só se F é contínua.

Definição. Chama-se *selecção* da multifunção $F : X \to 2^Y$ uma função $f : X \to Y$ tal que $f(x) \in F(x)$ para todo $x \in X$.

Teorema de Michael. *Se X é um espaço métrico, Y é um espaço de Banach e se $F : X \to 2^Y$ é uma multifunção semi-contínua inferiormente com valores fechados e convexos, então existe $f : X \to Y$, uma selecção contínua de F.*

Definição. *Se Y é um espaço de Hilbert e se $A \subset Y$* é fechado e convexo então $m(A) \in A$ tal que

$$\|m(A)\| = \inf \{\|w\| : w \in A\}$$

chama-se *elemento minimal* de A.

Teorema. *Se X é um espaço métrico, Y é um espaço de Hilbert e se $F : X \to 2^Y$ é uma multifunção contínua com valores fechados e convexos então a aplicação $x \to m(F(x))$* é uma selecção contínua de F (e chama-se a selecção minimal de F).

Capítulo 3

Soluções de Carathéodory

Neste capítulo vamos definir as soluções de Carathéodory e estudar a existência, a unicidade e a dependência contínua dos dados iniciais das mesmas.

3.1 Resultados auxiliares

Um dos principais interesses da matemática é resolver equações, no entanto, em muitos casos não é possível encontrar uma fórmula para a solução.

Segundo o Teorema de Banach (Princípio das contracções) se a equação diferencial pode ser escrita na forma

$$x = \phi(\lambda, x),$$

onde $\phi(\lambda, \cdot)$ é uma contracção para cada valor dado ao parâmetro λ, então existe uma única solução, que é o ponto fixo da aplicação $\phi(\lambda, \cdot)$ e pode ser encontrada por um processo iterativo.

Definição. Seja (X, d) um espaço métrico. *Uma aplicação $\phi : X \to X$, diz-se uma **contracção** se existe $\alpha \in (0,1)$ tal que*

$$d(\phi(x), \phi(y)) \leq \alpha d(x, y), \text{ para todos os } x, y \in X.$$

Teorema de Banach (Princípio das contracções). *Seja X um espaço de Banach com norma $\|\cdot\|$ e Λ espaço métrico. Seja $\phi : \Lambda \times X \to X$ contínua tal que, para algum $k \in (0,1)$*

$$\|\phi(\lambda, x) - \phi(\lambda, y)\| \leq k\|x - y\|, \forall \lambda \in \Lambda, \forall x, y \in X.$$

Então:

(a) *Para todo o $\lambda \in \Lambda$ existe um único $x(\lambda) \in X$ tal que $x(\lambda) = \phi(\lambda, x(\lambda))$.*

(b) *A aplicação* $\lambda \to x(\lambda)$ *é contínua.*

(c) *Para todo o* $\lambda \in \Lambda$ *e todo* $y \in X$ *tem-se que*

$$\|y - x(\lambda)\| \leq \frac{1}{1-k}\|y - \phi(\lambda, y)\|. \tag{3.1}$$

Demonstração. Fixamos um $y \in X$ qualquer e para $\lambda \in \Lambda$ definimos a sucessão $(y_n)_{n\geq 0} \subset X$ da seguinte forma:

$$y_0 = y,\ y_1 = \phi(\lambda, y_0), ...,\ y_{n+1} = \phi(\lambda, y_n).$$

Prova-se por indução que para todo $n \geq 0$ tem-se que

$$\|y_{n+1} - y_n\| \leq k^n\|y_1 - y_0\| = k^n\|y - \phi(\lambda, y)\|. \tag{3.2}$$

Para $n = 0$ a relação (3.2) toma a forma

$$\|y_1 - y_0\| \leq k^0\|y_1 - y_0\| = \|y_1 - y_0\|,$$

portanto é verdadeira. Suponhamos a relação (3.2) verdadeira para n e provámos que fica verdadeira para $n+1$. Ora, pela definição de y_n, o facto de $\phi(\lambda, \cdot)$ ser uma contracção e a hipótese de indução obtém-se sucessivamente

$$\begin{aligned}
\|y_{n+2} - y_{n+1}\| &= \|\phi(\lambda, y_{n+1}) - \phi(\lambda, y_n)\| \\
&\leq k\|y_{n+1} - y_n\| \\
&\leq kk^n\|y_1 - y_0\| \\
&= k^{n+1}\|y_1 - y_0\|,
\end{aligned}$$

logo a relação (3.2) resulta verdadeira para $n + 1$, e por consequência essa é verdadeira para todo $n \geq 0$. Sendo $0 < k < 1$ utilizando a relação (3.2) provemos que a sucessão $(y_n)_{n\geq 0}$ é de Cauchy no espaço de Banach X, e consequentemente, converge para algum ponto limite que chamamos $x(\lambda)$.

Vamos verificar que $(y_n)_{n\geq 0}$ é uma sucessão de Cauchy, ou seja, que para todo $\varepsilon > 0$ existe $n_\varepsilon > 0$ tal que para todo $n \geq n_\varepsilon$ e para todo $p > 0$ tem-se que $\|y_{n+p} - y_n\| \leq \varepsilon$.

Observa-se que

$$\begin{aligned}
\|y_{n+p} - y_n\| &= \|y_{n+p} - y_{n+p-1} + y_{n+p-1} - y_{n+p-2} + ... + y_{n+1} - y_n\| \\
&\leq \|y_{n+p} - y_{n+p-1}\| + \|y_{n+p-1} - y_{n+p-2}\| + ... + \|y_{n+1} - y_n\| \\
&\leq k^{n+p-1}\|y_1 - y_0\| + k^{n+p-2}\|y_1 - y_0\| + ... + k^n\|y_1 - y_0\| \\
&= k^n\|y_1 - y_0\| \sum_{j=0}^{p-1} k^j \leq k^n\|y_1 - y_0\| \sum_{j=0}^{\infty} k^j \\
&= \frac{k^n}{1-k}\|y_1 - y_0\|.
\end{aligned}$$

Como $k < 1$ resulta que $k^n \to 0$ quando $n \to \infty$. Resulta então que para todo $\varepsilon > 0$ existe $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq n_\varepsilon$ tem-se que $k^n < \varepsilon$. Seja $\varepsilon > 0$ qualquer e seja

$$\varepsilon\prime = \frac{1-k}{\|y_1 - y_0\|}\varepsilon.$$

Então $\varepsilon\prime > 0$ e existe $n_{\varepsilon'} = n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq n_\varepsilon$ tem-se que $k^n < \varepsilon'$. Logo

$$\|y_{n+p} - y_n\| \leq \frac{\|y_1 - y_0\|}{1-k}\left(\frac{1-k}{\|y_1 - y_0\|}\varepsilon\right) = \varepsilon$$

como pretendíamos. Seja $x(\lambda) \in X$ o limite da sucessão $(y_n)_{n\geq 0}$.

Por outro lado pela definição de y_{n-1} e a continuidade de $\phi(\overline{\lambda}, \cdot)$ obtém-se que

$$x(\lambda) = \lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} \phi(\lambda, y_{n-1}) = \phi(\lambda, \lim_{n\to\infty} y_{n-1}) = \phi(\lambda, x(\lambda))$$

ficando provada a existência anunciada na alínea (a).

Suponhamos por redução a absurdo que existem $x_1(\lambda)$ e $x_2(\lambda) \in X$ tais que

$$x_1(\lambda) = \phi(\lambda, x_1(\lambda)) \text{ e } x_2(\lambda) = \phi(\lambda, x_2(\lambda)).$$

Então

$$\|x_1(\lambda) - x_2(\lambda)\| = \|\phi(\lambda, x_1(\lambda)) - \phi(\lambda, x_2(\lambda))\| \leq k\|x_1(\lambda) - x_2(\lambda)\|$$

e sendo $0 < k < 1$, resulta $\|x_1(\lambda) - x_2(\lambda)\| = 0$, portanto $x_1(\lambda) = x_2(\lambda)$. Provámos a unicidade, portanto fica provada a alínea (a).

Para provar (c) observa-se que

$$\begin{aligned}\|y - y_{n+1}\| &\leq \sum\nolimits_{j=0}^{n} \|y_j - y_{j+1}\| \leq \sum\nolimits_{j=0}^{n} k^j \|y - \phi(\lambda, y)\| \\ &\leq \frac{1}{1-k}\|y - \phi(\lambda, y)\|\end{aligned}$$

e passando ao limite obtém-se (3.1), provando a alínea (c).

Falta provar a continuidade de $\lambda \to x(\lambda)$. Seja $(\lambda_n)_{n\geq 1}$ uma sucessão de parâmetros que converge para $\overline{\lambda}$, aplicando (3.1) para $\lambda = \lambda_n$ e $y = x(\overline{\lambda})$ obtemos

$$\begin{aligned}\|x(\overline{\lambda}) - x(\lambda_n)\| &\leq \frac{1}{1-k}\|x(\overline{\lambda}) - \phi(\lambda_n, x(\overline{\lambda}))\| \\ &\leq \frac{1}{1-k}\|\phi(\overline{\lambda}, x(\overline{\lambda})) - \phi(\lambda_n, x(\overline{\lambda}))\| \qquad (3.3)\end{aligned}$$

e tendo em conta a continuidade de ϕ, passando ao limite para $n \to \infty$ obtém-se

$$\|\phi(\overline{\lambda}, x(\overline{\lambda})) - \phi(\lambda_n, x(\overline{\lambda}))\| \to 0$$

e a relação (3.3) implica

$$\lim_{n\to\infty} \|x(\overline{\lambda}) - x(\lambda_n)\| = 0$$

completando a demonstração da alínea (b) e do teorema.■

Seja $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto e seja $f : D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ uma função (campo vectorial em D). Para $(t_0, x_0) \in D$ consideramos o problema de Cauchy

$$\dot{x} = f(t, x), \;\; x(t_0) = x_0. \tag{3.4}$$

Definição. *Chama-se **solução clássica** do problema de Cauchy* (3.4) *a uma função $\varphi \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$ com I uma vizinhança de t_0 tal que $Graf(\varphi) \subset D$,*

$$\varphi(t_0) = x_0 \text{ e } \dot{\varphi}(t) = f(t, \varphi(t)) \text{ para todo } t \in I. \tag{3.5}$$

Observação. Se $\varphi \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$ satisfaz (3.5) então φ é contínua e satisfaz

$$\varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi(s))ds \text{ para todo } t \in I,$$

isto é, φ é uma solução da equação integral

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds. \tag{3.6}$$

Se f é contínua, então o problema de Cauchy (3.4) é equivalente à equação integral (3.6), no sentido que $\varphi : I \to \mathbb{R}^n$ é uma solução de (3.4) se e só se φ é uma solução de (3.6) .

Para a teoria clássica de equações diferenciais ordinárias assumimos que f é contínua em ambas as variáveis em todo o seu domínio D. No entanto para algumas aplicações das equações diferenciais, na teoria de controlo por exemplo, é importante considerar o caso em que f só é mensurável na variável t.

Observa-se que se a continuidade de f em (3.5) é necessária para que a solução φ de (3.4) seja de classe C^1, a equação integral (3.6) faz sentido e admite soluções para muitas funções descontínuas. Um bom exemplo do caso em que f é contínua em x mas descontínua em t é a equação linear $\dot{x} - Ax = f(t)$ com $f(\cdot)$ integrável de Lebesgue.

O seguinte resultado será utilizado para provar a unicidade das soluções de Carathéodory para o problema de Cauchy (3.4) :

Lema de Gronwall. *Sejam* $t_0 > 0$, $\gamma \geq 0$, $\alpha, \beta : [t_0, T] \to \mathbb{R}$ *funções integráveis e seja* $Z(\cdot)$ *uma função absolutamente contínua em* $[t_0, T]$*, não negativa e tal que*

$$Z(t_0) \leq \gamma \text{ e } \dot{Z}(t) \leq \alpha(t)Z(t) + \beta(t) \text{ q.t.p. em } [t_0, T]. \tag{3.7}$$

Então $Z(\cdot)$ *satisfaz*

$$Z(t) \leq \gamma e^{\int_{t_0}^{t} \alpha(s)ds} + \int_{t_0}^{t} \beta(s) e^{\int_{t_0}^{s} \alpha(\sigma)d\sigma} ds, \forall t \in [t_0, T]. \tag{3.8}$$

Demonstração. Note-se que o lado direito de (3.8) é precisamente a solução do Problema de Cauchy

$$\dot{W}(t) = \alpha(t)W(t) + \beta(t), W(t_0) = \gamma.$$

A fim de estabelecer a desigualdade, considere a função absolutamente contínua

$$\psi(t) = e^{-\int_{t_0}^{t} \alpha(s)ds} \left[Z(t) - \int_{t_0}^{t} \beta(s) e^{\int_{s}^{t} \alpha(\sigma)d\sigma} ds \right].$$

Usando (3.7) demonstramos por cálculo directo que

$$\dot{\psi}(t) \leq 0, \text{ q.t.p. em } [t_0, T],$$

portanto,

$$\psi(t) \leq \psi(t_0) = Z(t_0) \leq \gamma, \forall t \in [t_0, T]. \tag{3.9}$$

Multiplicando (3.9) por $e^{\int_{t_0}^{t} \alpha(s)ds}$, a partir da definição de ψ obtemos (3.8).■

3.2 Soluções de Carathéodory, existência e unicidade

Definição. *Uma função* $\varphi : [t_0, t_0 + a] \to \mathbb{R}^n$, *com* $a > 0$, *diz-se* ***solução de Carathéodory*** (ou ***solução*** $\mathcal{C}$) *do problema de Cauchy* (3.4) *se* φ *é absolutamente contínua em* $[t_0, t_0 + a]$, *com gráfico* $Graf(\varphi) \subset D$ *e satisfaz*

$$\varphi(t_0) = x_0 \text{ e } \dot{\varphi}(t) = f(t, \varphi(t)) \text{ q.t.p em } I. \tag{3.10}$$

Definição. *Seja* $D := I \times \Omega$ *onde* I *é um intervalo aberto de* $\mathbb{R}$ *e* Ω *é um subconjunto aberto de* $\mathbb{R}^n$. *Diz-se que uma função* $f : D := I \times \Omega \to \mathbb{R}^n$ *satisfaz as* ***condições de Carathéodory*** *em* $I \times D$ *se:*

(i) $x \to f(t, x)$ *é contínua em* Ω *para todo o* $t \in I$.

(ii) $t \to f(t, x)$ *é mensurável em* I *para todo o* $x \in \Omega$.

(iii) Existe uma função integrável não negativa $m : I \to R$ *tal que*

$$\|f(t, x)\| \leq m(t), \forall t \in I.$$

Vamos agora enunciar e provar o resultado relativo a existência e a unicidade das soluções de Carathéodory. Para formular as hipóteses sobre o campo vectorial introduzimos primeiro algumas notações.

Se $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ é um conjunto aberto então indicamos por:

$$D_x = \{t \in \mathbb{R} : (t, x) \in D\}, \ D_t = \{x \in \mathbb{R}^n : (t, x) \in D\},$$

e se $f : D \to \mathbb{R}^n$ é uma função então indicamos por f_x e respectivamente f_t as funções parciais:

$$f_x : D_x \to \mathbb{R}^n, \ f_x(t) = f(t, x)$$

e

$$f_t : D_t \to \mathbb{R}^n, \ f_t(x) = f(t, x).$$

As hipóteses sobre o campo vectorial f são as seguintes:

$(\mathbf{H}_1)$ A função $f : D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é tal que:

(I) $f_x : D_x \to \mathbb{R}^n$, $f_x(t) = f(t, x)$ é mensurável em D_x para todo o x,

(II) $f_t : D_t \to \mathbb{R}^n$, $f_t(x) = f(t, x)$ é contínua em D_t para todo o t.

($\mathbf{H}_2$) Para todo o compacto $K \subset D$ existem constantes C_K, L_K tal que

$$|f(t,x)| \leq C_k, \ \ |f(t,x) - f(t,y)| \leq L_k\,|x-y| \ \ \forall (t,x),(t,y) \in K.$$

Teorema. **(**Existência e unicidade de soluções de Carathéodory)
Seja $f : D \subset \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ e para $(t_0, x_0) \in D$ consideramos o problema de Cauchy

$$\dot{x} = f(t,x), \ \ x(t_0) = x_0. \tag{3.11}$$

i) Se f satisfaz (H_1) e (H_2) então existe $\varepsilon > 0$ tal que (3.11) tem solução local $x(\cdot)$ definida para $t \in [t_0, t_0+\varepsilon]$.

ii) Se $D = \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ e se existem as constantes $C, L > 0$ tal que:

$$|f(t,x)| \leq C, \ \ |f(t,x) - f(t,y)| \leq L\,|x-y| \ \ \forall (t,x),(t,y) \in D, \tag{3.12}$$

então para todo $T > t_0$, o problema de Cauchy (3.11) tem solução global única $x(\cdot)$ definida em $[t_0, T]$.

Para além disso a solução $x(\cdot, t_0, x_0) : [t_0, T] \to \mathbb{R}^n$ do (3.11) tem uma dependência contínua de x_0, ou seja a aplicação $x_0 \to x(\cdot, t_0, x_0)$ é contínua da D_{t_0} para $C([t_0,T],\mathbb{R}^n)$.

Demonstração. Vamos começar por provar *ii*).
Consideremos $T > t_0$ e suponhamos que f é definida no espaço $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ e existem as constantes $C, L > 0$ tal que sejam verificadas as condições em (3.12).

Recorremos ao Princípio das Contracções para obter uma solução do problema (3.11) definida no intervalo $[t_0, T]$. Consideramos $X = C([t_0,T],\mathbb{R}^n)$ o espaço das funções contínuas de $[t_0,T]$ em $\mathbb{R}^n$ dotado com a norma $\|\cdot\|_+$ definida por

$$\|x(\cdot)\|_+ = \max_{t\in[t_0,T]} e^{-2Lt}\,|x(t)|\,, \tag{3.13}$$

com L dado por (3.12). Esta norma resulta equivalente à norma habitual definida por

$$\|x(\cdot)\|_\infty = \sup_{t\in[t_0,T]} |x(t)|\,.$$

Logo, X é espaço de Banach com a norma $\|x(\cdot)\|_+$. Seja $\Lambda = \mathbb{R}^n$ e defina-se $\phi : \Lambda \times X \to X$ da seguinte forma,

$$\phi(x_0, w(\cdot))(t) = x_0 + \int_{t_o}^{t} f(s, w(s))ds, t \in [t_0, T]. \tag{3.14}$$

Temos de provar que ϕ é bem definida e toma valores em X, para toda a função $w(\cdot) \in X$. Para isso é preciso verificar que $s \to f(s, w(s))$ é integrável, o que não é óbvio uma vez que f não é contínua.

Consideremos uma sucessão de funções seccionalmente constantes ou em escada $\{w_n\}_{n\geq 1}$ onde $w_n(t) \to w(t)$ com

$$w_n(t) = w\left(t_0 + \frac{\delta}{n}\right) \text{ se } t \in \left[t_0 + \frac{k\delta}{n}, t_0 + \frac{(k+1)\delta}{n}\right].$$

Sabemos por $(\mathbf{H}_1)$ que $f_x(\cdot)$ é mensurável. Logo $t \to f(t, w_n(t))$ é mensurável para todo $n \geq 1$. Por outro lado, pela hipótese (3.12)

$$\lim_{n\to\infty} |f(t, w(t)) - f(t, w_n(t))| \leq \lim_{n\to\infty} L\, |w(t) - w_n(t)| = 0.$$

Logo $f(t, w_n(t)) \to f(t, w(t))$ e como $f(\cdot, w_n(\cdot))$ é mensurável então resulta que $f(\cdot, w(\cdot))$ também é mensurável.

Mais uma vez, por (3.12), $|f(t,x)| \leq C$, logo $|f(s, w(s))| \leq C\ \forall s$ o que implica que $s \to f(s, w(s))$ é integrável. Assim temos o que pretendíamos $\phi(x_0, w)$ é bem definida.

Observa-se que $x_0 \to \phi(x_0, w)$ é contínua. Para estudar a dependência contínua de ϕ relativamente a w, $\phi\ (x_0, w)(t)$, consideremos $w, w\prime \in X$ e

$$\delta = \|w - w\prime\|_{\dagger} = \max_{t\in I} e^{-2Lt}\, |w(t) - w\prime(t)|\,.$$

Então,

$$e^{-2Ls}\, |w(s) - w\prime(s)| \leq \max_{t\in I} e^{-2Lt}\, |w(t) - w\prime(t)| = \delta, \forall s \in I,$$

o que implica

$$|w(s) - w\prime(s)| \leq \delta e^{2Ls}, \forall s \in I.$$

Pela continuidade de Lipschitz assumida em (3.12) temos:

$$\begin{aligned}
e^{-2Lt}\, |\phi(x_0, w)(t) - \phi(x_0, w\prime)(t)| &= e^{-2Lt} \left| \int_{t_0}^{t} [f(s, w(s)) - f(s, w\prime(s))]\, ds \right| \\
&\leq e^{-2Lt} \int_{t_o}^{t} |f(s, w(s)) - f(s, w\prime(s))|\, ds \\
&\leq e^{-2Lt} \int_{t_o}^{t} L\, |w(s) - w\prime(s)|\, ds \\
&\leq e^{-2Lt} \int_{t_o}^{t} \delta L e^{2Ls} ds \\
&= \frac{\delta}{2} e^{-2Lt} \left(e^{2Lt} - e^{2Lt_0}\right) \\
&= \frac{\delta}{2} (e^0 - e^{2L(t_0 - t)}).
\end{aligned}$$

Portanto,

$$e^{-2Lt}\left|\phi(x_0,w)(t)-\phi(x_0,w\prime)(t)\right|\leq\frac{\delta}{2}=\frac{1}{2}\left\|w-w\prime\right\|_+$$

e

$$\begin{aligned}\left\|\phi(x_0,w)(t)-\phi(x_0,w\prime)(t)\right\|_+ &= \max_{t\in I} e^{-2Lt}\left|\phi(x_0,w)(t)-\phi(x_0,w\prime)(t)\right| \\ &\leq \frac{1}{2}\left\|w-w\prime\right\|_+ .\end{aligned}$$

Verificando-se as hipóteses do teorema de Banach obtemos a existência de um único ponto fixo $x\left(\cdot,x_0\right)$ da contracção $\phi(x_0,w)$ definida em (3.14), isto é, tal que

$$x(t,x_0)=x_0+\int_{t_o}^{t}f(s,x(s,x_0))ds,\ \forall t\in[t_0,T]$$

ou seja $x\left(\cdot,x_0\right):[t_0,T]\rightarrow\mathbb{R}^n$ é uma solução do problema (3.11).

Vamos agora provar a afirmação $i)$ relativamente a existência local, sem assumir (3.12).

Escolhemos $\varepsilon>0$ pequeno tal que o cilindro

$$K=\{(t,x):|t-t_0|\leq\varepsilon,\ \ |x-x_0|\leq\varepsilon\}$$

é inteiramente contido no domínio D. Então consideremos $\phi:\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\rightarrow[0,1]$ tal que

$$\phi(t,x)=\begin{cases}1 & \text{se } (t,x)\in K\\ 0 & \text{se } (t,x)\notin K\end{cases}$$

e definimos $f^+:\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\rightarrow\mathbb{R}^n$ por

$$f^+(t,x)=\begin{cases}\phi(t,x)f(t,x) & \text{se } (t,x)\in D\\ 0 & \text{se } (t,x)\notin D.\end{cases}$$

A função $f^+:\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\rightarrow\mathbb{R}^n$ satisfaz $(\mathbf{H}_1)$ e $(\mathbf{H}_2)$ e pela demonstração de $ii)$ para todo $T>0$ existe solução $x\left(\cdot,x_0\right):[t_0,T]\rightarrow\mathbb{R}^n$ do problema de Cauchy

$$\dot{x}=f^+(t,x(t)),x(t_0)=x_0. \qquad (3.15)$$

Seja $\varepsilon>0$ suficientemente pequeno tal que o ponto $(t,x(t,x_0))\in K$ para $t\in[t_0,t_0+\varepsilon]$. Então, para $t\in[t_0,t_0+\varepsilon]$:

$$f^+(t,x(t,x_0))=f(t,x(t,x_0))$$

e portanto $x(\cdot, x_0) : [t_0, t_0 + \varepsilon] \to \mathbb{R}^n$ é solução local do problema original (3.11).

Uma vez provada a existência da solução resta-nos provar a sua unicidade, para isso vamos considerar, $x_1(\cdot)$ e $x_2(\cdot)$ soluções de (3.11) definidas nos intervalos $[t_0, t_1]$ e $[t_0, t_2]$, respectivamente. Para $T = \min\{t_1, t_2\}$ veremos que

$$x_1(t) = x_2(t), \forall t \in [t_0, T]. \tag{3.16}$$

Se $x_1(\cdot)$ e $x_2(\cdot)$ são soluções de (3.11), então

$$\dot{x_1}(t) = f(t, x_1), \text{ q.t.p em } t \in [t_0, t_1] \text{ e } \dot{x_2}(t) = f(t, x_2), \text{ q.t.p em } t \in [t_0, t_2],$$

sabendo isto e por $(\mathbf{H}_2)$ temos que,

$$\begin{aligned} \left|\dot{x_1}(t) - \dot{x_2}(t)\right| &= |f(t, x_1(t)) - f(t, x_2(t))| \\ &\leq L_K |x_1(t) - x_2(t)| \text{ q.t.p. em } [t_0, T] \end{aligned}$$

onde L_K representa a constante de Lipschitz de f, para o conjunto compacto

$$K = \{(t, x_1(t)), (t, x_2(t)) : t \in [t_0, T]\}.$$

Se consideramos $Z(t) = |x_1(t) - x_2(t)|$ então

$$Z(t_0) = 0 \text{ e } \dot{Z}(t) \leq L_K Z(t), \text{ q.t.p. em } [t_0, T].$$

Aplicando o lema de Gronwall para $\alpha = L_k$, $\beta \equiv \gamma \equiv 0$ temos que,

$$Z(t) \leq 0, \forall t \in [t_0, T].$$

e tendo em conta a definição de Z podemos concluir que

$$Z(t) = 0, \forall t \in [t_0, T]$$

logo verifica-se (3.16) como pretendido. ■

3.3 Soluções de Carathéodory e continuidade direccional

Vamos introduzir a noção de continuidade direccional duma função $f : [0, T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ e obter existência de soluções de Carathéodory requerendo sobre f condições mais fracas do que as condições de Carathéodory consideradas na secção anterior.

Para definir uma tal propriedade, sejam $M > 0$ e Γ^M o cone em $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ de abertura M,

$$\Gamma^M = \{(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n : \|x\| \leq Mt\}.$$

Uma função $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ diz-se Γ^M *contínua* se para todo o $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ se tiver que

$$\lim_{n \to \infty} f(t_n, x_n) = f(t, x),$$

para toda a sucessão (t_n, x_n) convergente para (t, x), tal que, para todo $n \in \mathbb{N}$, $(t_n - t, x_n - x) \in \Gamma^M$.

Uma função $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ (que pode ser descontínua), diz-se *direccionalmente contínua* se for Γ^M contínua para algum $M > 0$.

Temos o seguinte teorema:

Teorema. *Seja $f : [0, T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ uma função limitada, Γ^M contínua e tal que $|f(t, x)| \leq L$ para algum $L < M$ e para todo $(t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n$. Então para todo $x_0 \in \mathbb{R}^n$, o problema de Cauchy*

$$x' = f(t, x), x(0) = x_0, \tag{3.17}$$

admite pelo menos uma solução de Carathéodory definida em $[0, T]$.

A existência de soluções de Carathéodory para o problema de Cauchy (3.17) onde $f : [0, T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é direccionalmente contínua foi provada por Pucci [10] utilizando aproximações seccionalmente lineares.

Uma demostração alternativa deste resultado foi obtida por Bressan [4] onde utiliza a continuidade do operador de Picard gerado por f,

$$P(u)(t) = x_0 + \int_0^t f(s, u(s))\, ds. \tag{3.18}$$

Seja K o conjunto das funções $u : [0, T] \to \mathbb{R}^n$ com $u(0) = x_0$ e que satisfazem a condição de Lipschitz com a constante L. Pelo teorema 2 em [4] tem-se que o operador P definido por (3.18) é contínuo e satisfaz $P(K) \subset K$, portanto, pelo teorema de Schauder, existe $u^* \in K$ tal que $P(u^*) = u^*$, isto é,

$$u^*(t) = x_0 + \int_0^t f(s, u^*(s))\, ds,$$

portanto u^* é uma solução de (3.17) .■

3.4 Comparação entre a solução de Newton e de Carathéodory

Definição. *Seja* $f : D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *e seja* $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ *um intervalo fechado com* $a < b$. *Uma função* $\varphi : I \to R^n$ *diz-se* ***solução de Newton*** *(ou* ***solução*** $\mathcal{N}$*) da equação*

$$\dot{x} = f(t, x) \tag{3.19}$$

se admite uma extensão $\widehat{\varphi} : (a\prime, b\prime) \to \mathbb{R}^n$, *com* $[a, b] \subset (a\prime, b\prime)$, *tal que* $\widehat{\varphi}$ *é diferenciável em todo o intervalo* $(a\prime, b\prime)$ *e*

$$\dot{\widehat{\varphi}}(t) = f(t, \widehat{\varphi}(t)) \; \forall t \in I.$$

Observação. Toda solução de Newton é uma solução de Carathéodory, mas o contrário nem sempre acontece como se pode ver nos seguintes exemplos:

1. Para a equação diferencial (3.19) com

$$f(x) = \begin{cases} 1 \text{ se } x \neq 0 \\ 0 \text{ se } x = 0 \end{cases}$$

a função $\varphi(t) = 0$ é solução de Newton e de Carathéodory.

2. Para a equação diferencial (3.19) com

$$f(x) = \begin{cases} 1 \text{ se } x \leq 0 \\ 2 \text{ se } x > 0 \end{cases}$$

tem-se que a função $\varphi(\cdot)$ definida por

$$\varphi(t) = \begin{cases} t \text{ se } t \leq 0 \\ 2t \text{ se } t > 0 \end{cases}$$

é solução de Carathéodory tal que $\varphi(0) = 0$ e φ não é solução de Newton na vizinhança de $t = 0$.

Capítulo 4

Soluções de Inclusões diferenciais

4.1 Existência de soluções no caso convexo

Consideremos nesta secção a inclusão diferencial

$$\dot{x} \in F(t,x), x(0) = x_0 \tag{4.1}$$

definida por uma multifunção $F : \Omega \to 2^{\mathbb{R}^n}$, onde $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$.

Uma função absolutamente contínua $x : I \to \mathbb{R}^n$, com I um intervalo, diz-se *solução* da inclusão diferencial (4.1) se $\{(t, x(t)) : t \in I\} \subset \Omega$ e

$$\dot{x}(t) \in F(t, x(t)), \text{ q.t.p em } I. \tag{4.2}$$

Vamos considerar os seguintes casos:

Caso 1: F semi-contínua inferiormente com valores fechados e convexos.
Caso 2: F semi-contínua superiormente com valores fechados e convexos.

Para o Caso 1 temos:

Teorema. *Se $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ é um conjunto aberto, $(0, x_0) \in \Omega$ e se $F : \Omega \to 2^{\mathbb{R}^n}$* é *uma multifunção semi-contínua inferiormente com valores fechados, convexos e não vazios então existe um intervalo $I = (w_-, w_+)$ tal que $w_- < 0 < w_+$ e uma função diferenciável $\varphi : I \to \mathbb{R}^n$ tal que $\varphi(0) = x_0$ e*

$$\dot{\varphi}(t) \in F(t, \varphi(t)) \text{ para todo o } t \in I, \tag{4.3}$$

isto é, φ é solução clássica do problema de Cauchy (4.1) .

Demonstração. Aplicando o teorema de Michael, obtemos a existência de uma selecção contínua $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ da multifunção F (isto é, $f(t,x) \in F(t,x), \forall(t,x) \in \Omega$). Consideramos então o problema de Cauchy

$$\dot{x} = f(t,x), x(0) = x_0. \tag{4.4}$$

Pelo teorema de Peano existe um intervalo $I = (w_-, w_+)$ tal que $w_- < 0 < w_+$ e uma solução clássica $\varphi : I \to \mathbb{R}^n$ do problema de Cauchy (4.4). Resulta então que $\varphi : I \to \mathbb{R}^n$ é diferenciável em I, $\varphi(0) = x_0$ e

$$\dot{\varphi}(t) = f(t, \varphi(t)) \in F(t, \varphi(t)) \text{ para todo o } t \in I.$$

Portanto $\varphi : I \to \mathbb{R}^n$ é uma solução clássica do problema (4.1).■

Para o Caso 2 vamos provar um resultado de existência local análogo ao teorema de Peano. Para isso vamos necessitar de alguns resultados, como o teorema das selecções aproximadas, o teorema da convergência e o teorema da compacidade.

Os teoremas referidos serão apresentados de seguida, no entanto, as suas respectivas demonstrações não serão expostas nesta dissertação mas podem ser consultadas em [1].

Teorema das selecções aproximadas. *Seja X espaço métrico e Y espaço de Banach e $F : X \longrightarrow 2^Y$ semicontínua superiormente com valores fechados e convexos. Então para todo $\varepsilon > 0$ existe $f_\varepsilon : X \longrightarrow Y$ localmente lipschitzeana tal que*

$$Graf\,(f_\varepsilon) \subset Graf\,(F) + \varepsilon B.$$

onde B é a bola unitaria centrada na origem do espaço $X \times Y$.

Teorema da convergência. *Seja $F : X \longrightarrow 2^Y$ uma multifunção semicontínua superiormente com valores fechados e convexos, com X e Y* espaços de Banach. *Seja I um intervalo de $\mathbb{R}$ e sejam $x_k(\cdot)$, $y_k(\cdot)$ funções mensuráveis com valores de I em X e Y respectivamente, tais que, para quase todo o $t \in I$, e para qualquer vizinhança $\mathcal{N}$ de 0 em $X \times Y$* existe *$k_0 = k_0(t, \mathcal{N})$ tal que,*

$$(x_k(t), y_k(t)) \in graf\,(F) + \mathcal{N},\ \forall k \geqslant k_0.$$

Se $x_k(\cdot)$ converge q.t.p em I para uma função $x : I \to X$ e se $y_k(\cdot)$ pertence a $L^1(I,Y)$ e converge fracamente para $y(\cdot)$ em $L^1(I,Y)$, então

$$(x(t), y(t)) \in graf(F) \text{ q.t.p em } I,$$

ou seja, $y(t) \in F(x(t))$ *q.t.p em* I.

Teorema da compacidade. *Considere-se uma sucessão de funções absolutamente contínuas* $x_k(\cdot) : I \subset R \longrightarrow X$ *com* I *um intervalo e* X *espaço de Banach, que satisfaz as seguintes condições*

(i) *Para todo* $t \in I$, $\{x_k(t) : k \in \mathbb{N}\}$ *é um subconjunto compacto de* X*;*

(ii) *Existe* $c(\cdot) \in L^1(I)$ *uma função positiva tal que* $\left\|\dot{x}_k(t)\right\| \leqslant c(t)$ *q.t.p em* I.

Então existe uma subsucessão que denotamos por $\{x_{n_k}(\cdot)\}_{n_k \in \mathbb{N}}$ *e* $x(\cdot) : I \longrightarrow X$ *alguma função absolutamente contínua tais que:*

(a) $x_{n_k}(\cdot)$ *converge uniformemente para* $x(\cdot)$ *num subconjunto compacto de* I.

(b) $\dot{x}_{n_k}(\cdot)$ *converge fracamente para* $\dot{x}(\cdot)$ *em* $L^1(I, X)$.

Teorema. *Seja* X *um espaço de Hilbert e* $\Omega \subset \mathbb{R} \times X$ *um subconjunto aberto que contém* $(0, x_0)$, $F : \Omega \to 2^X$ *semi-contínua superiormente com valores fechados e convexos. Assumimos que* $(t, x) \to m(F(t, x))$ *é localmente compacta. Então existe* $T > 0$ *e* $x(\cdot)$ *absolutamente contínua definida em* $[0, T]$, *que é solução da inclusão diferencial* (4.1).

Demonstração. Sendo $(t, x) \to m(F(t, x))$ localmente compacta, existem $a > 0$ e $b > 0$ tais que

$$Q := \{(t, x) \in \Omega : \ |t| < a, \|x_0 - x\| < b\} \subset \Omega$$

e um subconjunto compacto e convexo K tal que,

$$m(F(t, x)) \in K, \forall (t, x) \in Q.$$

Fixemos $T = \min\left(a, \frac{b}{\|K\|}\right)$ e vamos provar a existência de solução em $[0, T]$.

No sentido do teorema das selecções aproximadas, consideremos f_n uma sucessão de aproximações contínuas (unívocas) localmente lipschitzeana tal que, $Graf\,(f_\varepsilon) \subset Graf\,(F) + \varepsilon_n B$, com $\varepsilon_n \to 0$ e $x_n : [0, T] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ com

$$\{(t, x_n(t)) : t \in [0, T]\} \subset \Omega$$

uma solução do problema

$$\dot{x}_n(t) = f_n(t, x_n(t)),\ \ x(0) = x_0.$$

Em particular cada $\left\|\dot{x}_n(t)\right\|$ é limitado por $\|K\|$ e cada x_n toma valores no conjunto compacto $x_0 + TK$.

Pelo Teorema da compacidade existe uma subsucessão x_{n_k} que converge uniformemente para $x(\cdot)$ em I e $\dot{x}_{n_k}$converge fracamente para $\dot{x}(\cdot)$ em $L^1(I)$. Por outro lado,

$$d(((t, x_{n_k}(t)), \dot{x}_{n_k}(t)), graf(F)) = d(((t, x_{n_k}(t)), f_{n_k}(t, x_{n_k}(t))), graf(F)) \to 0.$$

Aplicando o teorema de convergência para $(t, x_{n_k}(t))$ no lugar de $x_k(t)$ e $\dot{x}_{n_k}(t)$ no lugar de y_k obtém-se $((t, x(t)), \dot{x}(t)) \in graf(F)$, isto é,

$$\dot{x}(t) \in F(t, x(t)). \quad \blacksquare$$

4.2 Regularização de equações diferenciais com campo vectorial descontínuo

No intuito de assegurar a existência de soluções para equações diferenciais

$$\dot{x}(t) = f(x(t)), \tag{4.5}$$

com $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ descontínuo, uma possibilidade é considerar a menor aplicação multívoca F, semi-contínua superiormente com valores compactos e convexos cujo gráfico contém o gráfico de f, e associamos à inclusão diferencial

$$\dot{x}(t) \in F(x(t)). \tag{4.6}$$

Quando f é localmente limitada a multifunção F é definida por

$$F(x) = \bigcap_{\varepsilon>0} \overline{co} f(x + \varepsilon B)$$

e satisfaz as seguintes propriedades:

1) Para todo o x, $f(x) \in F(x)$,

2) A aplicação $F(x)$ é semi-contínua superiormente com valores convexos,

3) Sempre que f é contínua em x tem-se $F(x) = \{f(x)\}$.

Resulta então que, toda a solução da equação diferencial (4.5) é solução da inclusão diferencial (4.6). Por outro lado, se f é contínua em $(t, x(t))$ então verifica-se $\dot{x}(t) = f(t, x(t))$.

Na proposição seguinte vamos descrever uma aplicação multívoca ϕ tal que uma solução da inclusão diferencial $\dot{x}(t) \in \phi(x(t))$ satisfaz (4.5) sempre que f é contínua em $x(t)$.

Proposição. *Considere $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ com Ω aberto, uma multifunção localmente limitada. Fixemos*

$$\phi(x) = \bigcap_{\varepsilon>0} \bigcap_{\mu(N)=0} \overline{co} f\left(((x+\varepsilon B) \cap \Omega) \setminus N\right)$$

então,

1. *A aplicação $\phi(x)$ é semi-contínua superiormente com valores não vazios e convexos,*
2. *Sempre que f é contínua em x temos $\phi(x) = \{f(x)\}$,*
3. *Se f é mensurável em Ω então $f(x)$ pertence a $\phi(x)$ para todo o $x \in \Omega$.*

Demonstração. a) Temos que f é limitada, portanto, para $\varepsilon > 0$ pequeno temos $(x + \varepsilon B) \subset \Omega$.Uma vez que o conjunto

$$\bigcap_{\mu(N)=0} \overline{co} f\left(((x+\varepsilon B) \cap \Omega) \setminus N\right)$$

decresce com respeito a $\varepsilon > 0$ e é compacto, este facto é suficiente para provar que $\phi(x)$ é não vazio assim como cada um dos conjuntos acima. Uma vez que cada

$$\overline{co} f\left(((x+\varepsilon B) \cap \Omega) \setminus N\right) = \overline{co} f\left((x+\varepsilon B) \setminus N\right)$$

é compacto, é o suficiente para mostrar que para toda a família

$$\{N_i, \text{com } \mu(N_i) = 0\}_1^m$$

o conjunto

$$\bigcap_{i=1}^{m} \overline{co} f\left((x+\varepsilon B) \setminus N_i\right)$$

é não vazio. Na verdade, desde que $\mu\left((x+\varepsilon B) \setminus \bigcup_{i=1}^{m} N_i\right) > 0$ então existe $\overline{x} \in (x+\varepsilon B) \setminus N_i, \forall i = 1, ..., m.$

b) Vamos de seguida provar que o gráfico de ϕ é fechado.

Considere $y_n \to y_*$ com $y_n \in \phi(x_n)$ logo

$$y_n \in \bigcap_{\mu(N)=0} \overline{co} f\left((x_n + \varepsilon B) \backslash N\right),$$

no entanto considerando $x_n \to x_*$ com $x_n, x_* \in \Omega$, para cada n existe um $K(n)$ dependente de n tal que $x_n \in x_* + \varepsilon_{K(n)} B$, assim sendo

$$y_n \in \bigcap_{\mu(N)=0} \overline{co} f\left((x_* + 2\varepsilon_{K(n)} B) \backslash N\right),$$

portanto,

$$y_* \in \bigcap_{\varepsilon_{K(n)}} \overline{co} f\left((x_* + 2\varepsilon B) \backslash N\right).$$

c) Seja f contínua em $x \in \Omega$. Para $\alpha > 0$ e ε suficientemente pequeno, temos $\phi(x) \subset f(x) + \alpha B$ portanto $\phi(x) = \{f(x)\}$.

d) Uma vez que f é mensurável em Ω, pelo *teorema de Lusin*, podemos escrever

$$\Omega = \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n\right) \cup M, \text{ para } \mu(M) = 0$$

sendo E_n subconjuntos compactos e $f|_{E_n}$ restrições contínuas de f.

Pelo teorema de Vitali-Lebesgue podemos supor, sem perda de generalidade, que cada E_n coincide com os seus pontos de densidade, isto é com os pontos x tais que

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\mu\left(E_n \cap (x + \varepsilon B)\right)}{\mu\left(x + \varepsilon B\right)} = 1.$$

Ao fixar x em algum E_n, temos que $\mu\left(E_n \cap (x + \varepsilon B)\right)$ é positiva, para todo $\varepsilon > 0$ e

$$\bigcap_{\mu(N)=0} \overline{co} f\left(((x + \varepsilon B) \cap E_n) \backslash N\right)$$

não é vazio, por um raciocínio análogo ao da alínea a), e está contido em $f(x) + \alpha B$ para α arbitrário e $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno. Quando $\alpha \to 0$ temos que

$$\{f(x)\} = \bigcap_{\varepsilon > 0} \overline{co} f\left(((x + \varepsilon B) \cap E_n) \backslash N\right) \subset \phi(x). \quad \blacksquare$$

Capítulo 5

Soluções Generalizadas

5.1 Soluções de Hermes e de Euler.

Estes tipos de soluções se introduzem utilizando aproximações poligonais definidas por meio de valores de campo vectorial f e permitindo possíveis perturbações internas e/ou externas.

Vejamos como construir estes novos tipos de aproximações para o problema de Cauchy

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)), x(a) = x_0 \tag{5.1}$$

com $f : [a, b] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Para cada $m \in \mathbb{N}$, considere-se

$$a = t_0^m < t_1^m < ... < t_{k^m-1}^m < t_{k^m}^m = b$$

e

$$\mathcal{P} = \left\{t_0^m, t_1^m, ..., t_{k^m-1}^m, t_{k^m}^m\right\}$$

uma partição do intervalo $[a, b]$. O *diâmetro* da partição $\mathcal{P}$ é dado por

$$d_{\mathcal{P}} = \max\left\{t_{i+1}^m - t_i^m, \forall i = 0, .., k^m - 1\right\}.$$

Definição. *Uma* ***aproximação poligonal de Euler****, associada ao problema de Cauchy e correspondente à partição $\mathcal{P}$, é uma função afim por partes $\varphi^m(t)$ no intervalo $[a, b]$ definida por:*

$$\begin{cases} \varphi^m(t_0^m) = x_0^m \\ \varphi^m(t) = \varphi^m(t_i^m) + (t - t_i^m)\left(f\left(t_i^m, \varphi^m(t_i^m) + p_i^m\right) + q_i^m\right), \ t \in \left[t_i^m, t_{i+1}^m\right] \end{cases}$$

com $i = 0, ..., k^m - 1$ onde q_i^m e p_i^m são vectores de $\mathbb{R}^n$ designados por perturbações internas e externas respectivamente.

É de notar que as aproximações poligonais de Euler são funções absolutamente contínuas.

Definição. *A função $\varphi(t) : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ chama-se* ***solução perturbada de Euler*** *para o problema (5.1) se para todo o $\varepsilon > 0$ existe um número inteiro m e uma aproximação poligonal contínua $\varphi^m(t)$ tal que*

$$|\varphi(t) - \varphi^m(t)| < \varepsilon, \forall t \in [a,b]$$

onde $0 < d_{\mathcal{P}} < \varepsilon$, $0 \leq |q_i^m| < \varepsilon$ e $0 \leq |p_i^m| < \varepsilon$ para $i = 0, ..., k^m - 1$.

Dependendo da escolha dos vectores perturbadores podemos definir subconjuntos de solução:

1. No caso em que $q_i^m = p_i^m = 0, \forall i = 0, ..., k^m - 1$ e $\varphi^m(t_0^m) = x_0 = \varphi(t_0)$ obtemos uma *solução de Euler*.
2. No caso de $p_i^m = 0, \forall i = 0, ..., k^m - 1$ obtemos *soluções de Euler perturbadas exteriormente.*
3. No caso de $q_i^m = 0, \forall i = 0, ..., k^m - 1$ obtemos *soluções de Euler perturbadas interiormente.*

Exemplo. Consideremos $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ com

$$f(x) = \begin{cases} 1, x \leq 0 \\ -1, x > 0 \end{cases}.$$

Seja $x_0 = 0$, $a = 0$ e $b = 1$.

Vamos encontrar a aproximação poligonal de Euler sem perturbações externas nem internas.

Para cada $m \in \mathbb{N}$, considere a partição, $a = t_0^m < t_1^m < ... < t_{k^m-1}^m < t_{k^m}^m = b$ e

$$\begin{cases} \varphi^m(t_0^m) = x_0^m \\ \varphi^m(t) = \varphi^m(t_i^m) + (t - t_i^m) f(\varphi^m(t_i^m)), \ t \in [t_i^m, t_{i+1}^m] \end{cases}.$$

Para $m = 2$, temos $a = t_0^2 < t_1^2 < t_2^2 = b$.

(A) $t \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ logo,

$$\begin{aligned} \varphi^2(t_0^2) &= x_0 = 0 \\ \varphi^2(t) &= \varphi^2(t_0^2) + \left(t - t_0^2\right) f\left(\varphi^2(t_0^2)\right) \\ &= 0 + (t-0) f(0) \\ &= t. \end{aligned}$$

(B) $t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ logo,

$$\begin{aligned}
\varphi^2(t_1^2) &= \frac{1}{2} \\
\varphi^2(t) &= \varphi^2(t_1^2) + \left(t - t_1^2\right) f\left(\varphi^2(t_1^2)\right) \\
&= \frac{1}{2} + \left(t - \frac{1}{2}\right) f\left(\frac{1}{2}\right) \\
&= \frac{1}{2} + \left(t - \frac{1}{2}\right)(-1) \\
&= 1 - t.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\varphi^2(t) = \begin{cases} t & , t \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ 1 - t & , t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases}.$$

Quando $m \to \infty, \left(\varphi^m\right)_{m\in\mathbb{N}} \to 0$ em $\left(C\left([0,1], \mathbb{R}^n\right), \|\cdot\|_\infty\right)$ (o que é equivalente a dizer que $\left(\varphi^m\right)_{m\in\mathbb{N}} \to 0$ uniformemente em $[0,1]$).

Então $\varphi(t) = 0$ é solução de Euler, embora não satisfaça

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)) \forall t \in [0, 1].$$

Exemplo. Seja f definida da seguinte forma

$$f(x) = \begin{cases} 1, x \neq 0 \\ -1, x = 0 \end{cases}$$

com $x_0 = 0$, $a = 0$ e $b = 1$.

De forma análoga ao exemplo anterior obtemos para cada $m \in \mathbb{N}$ uma aproximação poligonal de Euler sem perturbações externas nem internas.Para $m = 2$, temos $a = t_0^2 < t_1^2 < t_2^2 = b$ e

$$\varphi^2(t) = \begin{cases} -t & , t \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ -1 + t & , t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases}.$$

A sucessão $\left(\varphi^m\right)_{m\in\mathbb{N}} \to 0$ em $\left(C\left([0,1], \mathbb{R}^n\right), \|\cdot\|_\infty\right)$ e $\varphi(t) = 0$ é solução de Euler, embora não satisfaça

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)) \forall t \in [0, 1].$$

Temos o seguinte resultado:

Teorema. *Se $f(t, x)$ é limitada num conjunto R então existe uma solução local de Euler de* (5.1).

Demonstração. Para o campo vectorial $f(t,x) : [a,b] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, vamos considerar o seguinte conjunto

$$R = \{(t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n : a \leq t \leq a+\beta, \|x - x_0\| \leq c\},$$

para $\beta = \min\left\{a, \frac{c}{M}\right\}$.

Uma vez que f é limitada em R obtemos que, existe $M > 0$ tal que

$$\|f(t,x)\| \leq M, \forall (t,x) \in R.$$

Pretendemos provar que existe uma solução de Euler definida no intervalo $[a, a+\beta]$, para isso vamos considerar uma partição deste intervalo. Para cada $n \in \mathbb{N}$ consideremos a partição

$$\mathcal{P} = \{t_0^n, t_1^n, ..., t_n^n\}$$

onde $t_k^n = a + k\frac{\beta}{n}$. Observemos que

$$d_{\mathcal{P}} = \max\left\{t_{k+1}^n - t_k^n : 0 \leq k \leq n-1\right\} = \frac{\beta}{n}$$

portanto quando $n \to \infty$ temos que $d_{\mathcal{P}} \to 0$.

Vamos construir a aproximação poligonal de Euler para a partição $\mathcal{P}$ da seguinte forma,

$$\varphi^n(t) : [a, a+\beta] \to \mathbb{R}^n \text{ tal que}$$

$$\begin{cases} \varphi^n(t_0^n) = x_0 \\ \varphi^n(t) = \varphi^n(t_k^n) + (t - t_k^n)\, f(t_k^n, \varphi^n(t_k^n)), \; t \in \left[t_k^n, t_{k+1}^n\right], \; 0 \leq k \leq n-1 \end{cases}$$

agora vejamos se $(t, \varphi^n(t)) \in R, \forall t \in [a, a+\beta]$, ou seja, que

$$\|\varphi^n(t) - x_0\| \leq c, \forall t \in \left[t_k^n, t_{k+1}^n\right].$$

Portanto para todo o $t \in \left[t_k^n, t_{k+1}^n\right]$ temos,

$$\begin{aligned}
\|\varphi^n(t) - x_0\| &= \|\varphi^n(t_k^n) + (t - t_k^n)\, f(t_k^n, \varphi^n(t_k^n)) - x_0\| \\
&= \big\|\varphi^n(t_{k-1}^n) + \left(t - t_{k-1}^n\right) f(t_{k-1}^n, \varphi^n(t_{k-1}^n)) \\
&\quad + (t - t_k^n)\, f(t_k^n, \varphi^n(t_k^n)) - x_0\| \\
&= \|x_0 + (t_1^n - t_0^n)\, f(t_0^n, x_0) + (t_2^n - t_1^n)\, f(t_1^n, \varphi^n(t_1^n)) + ...+ \\
&\quad \left(t_k^n - t_{k-1}^n\right) f(t_{k-1}^n, \varphi^n(t_{k-1}^n)) + (t - t_k^n)\, f(t_k^n, \varphi^n(t_k^n)) - x_0\big\| \\
&\leq \sum_{i=1}^{k} \left|t_i^n - t_{i-1}^n\right| \left\|f(t_{i-1}^n, \varphi^n(t_{i-1}^n))\right\| + |(t - t_k^n)|\, \|f(t_k^n, \varphi^n(t_k^n))\| \\
&\leq \sum_{i=1}^{k+1} \frac{\beta}{n} M \leq k\frac{\beta}{n} M \leq \beta M \leq c.
\end{aligned}$$

Como para algum k, com $0 \leq k \leq n-1$, t pertence ao intervalo $\left[t_k^n, t_{k+1}^n\right]$ resulta que

$$\|\varphi^n(t) - x_0\| \leq c, \forall t \in \left[t_k^n, t_{k+1}^n\right].$$

Se $\varphi^n(t)$ for equilimitada e equicontínua, o teorema de Ascoli-Arzelà diz-nos que existe uma subsucessão $\left(\varphi^n(t)\right)_n$ que converge uniformemente para uma função $\varphi(t) \in C\left([a, a+\beta], \mathbb{R}^n\right)$.

Verificamos que

$$\|\varphi^n(t) - x_0\| \leq c \Leftrightarrow \|\varphi^n(t)\| \leq \|x_0\| + c$$

logo $\left(\varphi^n(t)\right)_n$ é equilimitada no intervalo $[a, a+\beta]$.

Agora, $\left(\varphi^n(t)\right)_n$ é equicontínua se e só se

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \theta > 0,\ \ \forall t_1, t_2 \in [a, a+\beta], \quad |t_2 - t_1| < \theta \Rightarrow \|\varphi^n(t_1) - \varphi^n(t_2)\| < \varepsilon.$$

Vejamos o que acontece quando $t_1, t_2 \in \left[t_k^n, t_{k+1}^n\right]$ e quando $t_1 \in \left[t_{k-1}^n, t_k^n\right]$ e $t_2 \in \left[t_k^n, t_{k+1}^n\right]$.

(A) Se $t_1, t_2 \in \left[t_k^n, t_{k+1}^n\right]$, para $k = 0, ..., n-1$, temos que $|t_2 - t_1| \leq \frac{\beta}{n} < \frac{c}{M}$ e

$$\begin{aligned}
\|\varphi^n(t_1) - \varphi^n(t_2)\| &= \|\varphi^n(t_k^n) + (t_1 - t_k^n) f(t_k^n, \varphi^n(t_k^n)) - \varphi^n(t_k^n) \\
&\quad - (t_2 - t_k^n) f(t_k^n, \varphi^n(t_k^n))\| \\
&\leq \|[(t_1 - t_k^n) - (t_2 - t_k^n)] f(t_k^n, \varphi^n(t_k^n))\| \\
&\leq |t_1 - t_2| \, \|f(t_k^n, \varphi^n(t_k^n))\| \\
&\leq \frac{\beta}{n} M \leq \varepsilon.
\end{aligned}$$

(B) Se $t_1 \in \left[t_{k-1}^n, t_k^n\right]$ e $t_2 \in \left[t_k^n, t_{k+1}^n\right]$, para $k = 1, ..., n-1$ temos que $|t_2 - t_1| \leq 2\frac{\beta}{n} < \frac{c}{M}$ e

$$\begin{aligned}
\|\varphi^n(t_1) - \varphi^n(t_2)\| &= \left\|\varphi^n(t_{k-1}^n) + \left(t_1 - t_{k-1}^n\right) f\left(t_{k-1}^n, \varphi^n(t_{k-1}^n)\right)\right. \\
&\quad \left. - \varphi^n(t_k^n) - (t_2 - t_k^n) f(t_k^n, \varphi^n(t_k^n))\right\|.
\end{aligned}$$

Mas

$$\begin{aligned}
\varphi^n(t_k^n) &= x_0 + (t_1^n - t_0^n) f(t_0^n, x_0) + (t_2^n - t_1^n) f(t_1^n, \varphi^n(t_1^n)) + ... \\
&\quad + \left(t_k^n - t_{k-1}^n\right) f(t_{k-1}^n, \varphi^n(t_{k-1}^n))
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\varphi^n(t_{k-1}^n) &= x_0 + (t_1^n - t_0^n) f(t_0^n, x_0) + (t_2^n - t_1^n) f(t_1^n, \varphi^n(t_1^n)) + ... \\
&\quad + \left(t_{k-1}^n - t_{k-2}^n\right) f(t_{k-2}^n, \varphi^n(t_{k-2}^n)),
\end{aligned}$$

portanto

$\|\varphi^n(t_1)-\varphi^n(t_2)\|$

$$
\begin{aligned}
&= \left\| \left(t_{k-1}^n - t_{k-2}^n\right) f\left(t_{k-2}^n, \varphi^n(t_{k-2}^n)\right) + \left(t_1 - t_{k-1}^n\right) f\left(t_{k-1}^n, \varphi^n(t_{k-1}^n)\right) \right. \\
&\left. - \left(t_k^n - t_{k-1}^n\right) f(t_{k-1}^n, \varphi^n(t_{k-1}^n)) - (t_2 - t_k^n)\, f\left(t_k^n, \varphi^n(t_k^n)\right) \right\| \\
&\leq \left|t_{k-1}^n - t_{k-2}^n\right| \left\| f(t_{k-2}^n, \varphi^n(t_{k-2}^n))\right\| + \left|(t_1 - t_k^n)\right| \left\| f\left(t_{k-1}^n, \varphi^n(t_{k-1}^n)\right)\right\| \\
&+ \left|t_k^n - t_2\right| \left\| f\left(t_k^n, \varphi^n(t_k^n)\right)\right\| \\
&\leq 3\frac{\beta}{n} M \leq \varepsilon
\end{aligned}
$$

Portanto existe uma solução local de Euler.■

Uma das outras soluções generalizadas é a que Hajek [8] designou por Soluções de Hermes.

Definição. *Seja* $\varphi : J \to \mathbb{R}^n$ *, onde* J *é um intervalo de* $\mathbb{R}$, *absolutamente contínua e compacta para todo o subintervalo de* J. *Então* φ *é chamada* ***solução de Hermes*** (*ou* ***solução*** $\mathcal{H}$) *de* (5.1), *se para todo o* $\varepsilon > 0$ *existe uma função mensurável* $p(t) : J \to \mathbb{R}^n$ *e uma solução de Carathéodory* φ_C : $J \to \mathbb{R}^n$ *de*

$$\dot{x} = f(x + p(t))$$

tal que

$$|p(t)| < \varepsilon \text{ e } |\varphi(t) - \varphi_C(t)| < \varepsilon, \forall t \in J.$$

À função $p(t)$ chamamos perturbação interna em

$$\dot{x}(t) = f(x + p(t))$$

no entanto podemos ter perturbações externas $q(t)$ em

$$\dot{x}(t) = f(x) + q(t).$$

Por outro lado, para f contínua uma pequena perturbação interna pode ser vista como uma pequena perturbação externa,

$$\dot{x} = f(x + p(t)) = f(x) + q(t),$$
$$q(t) = f(x + p(t)) - f(x)$$

Mesmo sem continuidade, a condição recíproca tende para o limite, se

$$\dot{x} = f(x) + q(t) \text{ e } y = x - \int_{t_0}^{t} q(s)ds$$

então,

$$\dot{y} = f(y + p) \text{ e } p \to 0,\ q \to 0,\ y \to x$$

para $p(t) = \int\limits_{t_0}^{t} q(s)ds$ $(t_0 \in J\ )$[8].

Note-se que no caso em que $p(t) = 0$ toda a solução de Hermes é solução de Carathéodory, pelo que $\mathcal{C} \subset \mathcal{H}$.

Teorema. *Seja f localmente limitada e mensurável em t. Então para qualquer valor inicial t_0 e x_0, existe solução de Hermes $\varphi(\cdot)$ para o problema de Cauchy definida pelo menos em algum intervalo $(t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$.*

Demonstração. Na forma usual, consideramos $t_0 = 0$ e $x_0 = 0$; e tratamos apenas o lado direito da vizinhança de $t_0 = 0$, ou seja, $[0, \varepsilon)$, e assumindo que f é globalmente limitada, para alguma constante L; escolhemos uma função f limitada que coincide com f numa vizinhança apropriada.

Para todo o $\alpha = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ...$construimos a aproximação poligonal de Euler de $y(\cdot)$, com $j = 0, 1, 2, ...$ para $t_j = j\alpha$, $y_0 = 0$ e obtemos

$$y(t) = y_j + \int\limits_{t_j}^{t} f(s, y_j)ds, \ \forall t \in \ \ [t_j, t_{j+1}]$$

onde $y_{j+1} = y(t_{j+1})$. Então $y(\cdot)$ tem a constante de Lipschitz L, e

$$\dot{y}(t) = f(t, y(t) + p(t))$$

em quase toda a parte onde

$$|p(t)| = |y_j - y(t)| \leq L\,|t - t_j| \leq L\alpha.$$

Deste modo $y(\cdot)$ é solução de Carathéodory da equação perturbada com perturbações internas $p \to 0$ uniformemente, quando $\alpha \to 0^+$.

Uma vez que $y(0) = 0$ e L é a constante de Lipschitz, pelo teorema de Arzelá-Ascoli temos que a subsucessão y_α de y converge uniformemente, e o seu limite é uma solução de Hermes para $\dot{x} = f(t, x)$ por definição. ■

Exemplo. Consideremos a função

$$f(x) = \begin{cases} 1, x \leq 0 \\ -1, x > 0 \end{cases}.$$

Para $\dot{x} = f(x)$ com $x(0) = 0$, no intervalo $[0, 1]$. Após a construção da aproximação poligonal no teorema anterior, termos:

Com $\alpha = \frac{1}{2}$ e $j = 0, 1, 2, ...$ para $t_j = j\alpha$ obtemos

$$y(t) = y_j + \int_{t_j}^{t} f(s, y_j) ds, \ \forall t \in \ [t_j, t_{j+1}] \, .$$

Para $t \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ e $y_0 = x(t_0) = 0$ temos,

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(y_0) ds = 0 + \int_{0}^{t} f(0) ds = \int_{0}^{t} 1 ds = t.$$

Para $t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ e $y_1 = y(t_1) = \frac{1}{2}$ temos,

$$y(t) = y_1 + \int_{t_1}^{t} f(y_1) ds = \frac{1}{2} + \int_{\frac{1}{2}}^{t} f(\frac{1}{2}) ds = \frac{1}{2} - \int_{\frac{1}{2}}^{t} 1 ds = 1 - t.$$

Logo, temos a aproximação

$$y(t) = \begin{cases} t & , t \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ 1 - t & , t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases} .$$

No caso, $\alpha = 1$ temos para $t \in [0, 1]$

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(y_0) ds = 0 + \int_{0}^{t} f(0) ds = \int_{0}^{t} 1 ds = t.$$

Logo as aproximações convergem para a solução de Hermes $\varphi(t) = 0$, embora não satisfaça a equação para qualquer t.

Proposição. *Toda a solução perturbada de Euler é solução de Hermes.*

Demonstração. Seja $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ uma solução de Euler perturbada e $\alpha > 0$ fixo. Seja Vum subconjunto compacto de $\mathbb{R}^n$ tal que

$$\bigcup_{t \in [a,b} B(\varphi(t), 2) \subset V.$$

Seja $|f(t, x)| \leq M$ para $x \in V$ e consideremos

$$\theta = \min \left\{ 1, \frac{\alpha}{3(M+1)}, \frac{\alpha}{3(b-a)} \right\} .$$

Pela definição de solução de Euler perturbada, temos uma aproximação poligonal contínua $\psi(t)$ tal que

$$|\varphi(t) - \psi(t)| < \theta, \ \forall t \in [a,b], \ \ (t_{i+1} - t_i) < \theta, \ \ |p_i| < \theta$$

e

$$|q_i| < \theta, \forall i = 0, ..., k-1.$$

Note-se que,

$$\dot{\psi}(t) = f(t, \psi(t_i) + p_i) + q_i, \ \text{com } t \in (t_i, t_{i+1}).$$

Definimos a função contínua por partes $Q(t) = q_i$ para $t \in [t_i, t_{i+1}]$. então definimos $\chi(t)$

$$\chi(t) = \psi(t) - \int_a^t Q(s) ds, \ t \in [a,b]. \tag{5.2}$$

Logo

$$\dot{\chi}(t) = \dot{\psi}(t) - q_i = f(t, \psi(t_i) + p_i) = f(t, \chi(t) + P(t))$$

com

$$P(t) = \psi(t_i) + p_i - \psi(t) + \int_a^t Q(s) ds.$$

Assim $\chi(t)$ é a solução de Carathéodory de

$$\dot{x} = f(t, x + P(t))$$

na definição de soluções de Hermes. Agora temos uma estimativa para $P(t)$,

$$|P(t)| \leq |p_i| + |f(t, \psi(t_i) + p_i) + q_i| \, |t - t_i| + \int_{t_i}^t |Q(s)| \, ds, \ t \in [t_i, t_{i+1}]$$

como $|p_i| < \theta < \frac{\alpha}{3}$, logo

$$|\psi(t_i) + p_i - \varphi(t_i)| < 2\theta \leq 2$$

tal que $\psi(t_i) + p_i \in V$, uma vez que f é limitada por M e como $|q_i| < \theta \leq 1$ então

$$|f(t, \psi(t_i) + p_i) + q_i| \, |t - t_i| < (M+1)\theta \leq \frac{\alpha}{3}.$$

Finalmente, $|Q(s)| \leq \max |q_i| < \theta$ portanto $\int\limits_a^t |Q(s)|\, ds \leq \theta\,(b-a) \leq \frac{\alpha}{3}$.

Em conclusão, vimos que $|P(t)| < \alpha$ e

$$
\begin{aligned}
|\varphi(t) - \chi(t)| &\leq |\varphi(t) - \psi(t)| + |\psi(t) - \chi(t)| \\
&\leq \theta + \int\limits_a^t |Q(s)|\, ds \text{ por } (5.2) \\
&\leq \frac{2\alpha}{3} \leq \alpha. \qquad \blacksquare
\end{aligned}
$$

5.2 Soluções de Krasowski e de Filippov

A ideia por trás dos conceitos de solução de Filippov e Krasowski é que o valor de uma solução num determinado ponto deve ser determinada pelo comportamento da derivada na vizinhança de esses pontos. Por outro lado, a solução de Filippov sugere que é possível um mau comportamento da derivada num conjunto de medida nula, que pode ser ignorado[8] .

Para estas soluções, como já foi referido, vamos associar ao sistema de equações diferenciais ordinárias

$$\dot{x} = f(t,x), x \in \mathbb{R}^n \tag{5.3}$$

com $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ descontínua, mensurável de Lebesgue e localmente limitada, uma inclusão diferencial

$$\dot{x} \in F(t,x). \tag{5.4}$$

Definam-se para cada $(t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ os conjuntos,

$$F_K(t,x) = \bigcap_{\varepsilon>0} \overline{co}\,\{f(t, B(x,\varepsilon)\} \tag{5.5}$$

e

$$F_F(t,x) = \bigcap_{\varepsilon>0} \bigcap_{\mu(N)=0} \overline{co}\,\{f(t, B(x,\varepsilon)\backslash N\} \tag{5.6}$$

onde $\overline{co}$ representa o invólucro convexo, μ é a medida de Lebesgue e $B(x,\varepsilon)$ é a bola de centro em x e raio ε.

Definição. *Seja $\varphi : I \to \mathbb{R}^n$ com I um intervalo em $\mathbb{R}$,uma função absolutamente contínua em cada compacto de I, então φ é chamada **solução de Krasowski** (ou **solução** $\mathcal{K}$) de* (5.3) *se φ é solução da inclusão diferencial* (5.4) *com F_K no lugar de F .*

Observando a definição anterior temos que:

(i) Para todo o $(t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, $f(t,x) \in F_K(t,x)$, temos que $\mathcal{C} \subset \mathcal{K}$, portanto toda a solução de Carathéodory é solução de Krasowski.

(ii) A aplicação $F_K(t,x)$ é semi-contínua superiormente com valores compactos e convexos.

(iii) Sempre que f é contínua em (t,x), $F_K(t,x) = \{f(t,x)\}$.

Toda solução da equação $\dot{x} = f(t,x)$ é solução da inclusão diferencial $\dot{x} \in F_K(t,x)$. Nos pontos onde f é contínua relativamente a x então a solução da inclusão diferencial satisfaz a equação $\dot{x} = f(t,x)$, nos pontos onde f é descontínua não precisamos de (i) e olhamos para pequenas multifunções que satisfaçam (ii) e (iii).

Definição. *Seja $\varphi : I \to \mathbb{R}^n$, com I um intervalo em $\mathbb{R}$, uma função absolutamente contínua, diz-se que φ é **solução de Filippov** (ou **solução $\mathcal{F}$**) de* (5.3) *se é solução da inclusão diferencial* (5.4) *com F_F no lugar de F .*

Portanto podemos dizer que:

(a) A aplicação $F_F(t,x)$ é semi-contínua superiormente com valores compactos e convexos e não vazios.

(b) Sempre que f é contínua para (t,x), $F_F(t,x) = \{f(t,x)\}$.

(c) $f(t,x)$ pertence a $F_F(t,x)$ para quase todo o (t,x).

Temos portanto que $F_F \subset F_K$, o que nos leva a dizer que cada solução de Filippov é uma solução de Krasowski, $\mathcal{F} \subset \mathcal{K}$.

Por outro lado Hajek [8] apresenta uma condição para que $\mathcal{F} \equiv \mathcal{K}$. A mesma é importante devido à pouca informação que temos das soluções $\mathcal{K}$.

Lema. *Considere o sistema autónomo $\dot{x} = f(x)$, onde f satisfaz a seguinte condição: existe uma partição disjunta de $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^n = \bigcup_{i \in I} \Omega_i$ com $\Omega_i \subset \overline{int\ \Omega_i}$ e existem funções contínuas $f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tal que $f = f_i$ em $\Omega_i, \forall i \in I$. Então toda a solução de Krasowski de* (5.3) *é solução de Filippov , isto é, $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{F}$.*

Demonstração. Chega mostrar que $F_K \subset F_F$, ou provar que

$$f(B(x,\varepsilon)) \subset \overline{f(B(x,\varepsilon) \backslash N)}, \forall x \in \mathbb{R}^n, \varepsilon > 0,\ \forall N \text{ com } \mu(N) = 0$$

Considerando qualquer $y \in B(x, \varepsilon)$, existe k tal que $y \in \Omega_k$, deste modo $f(y) = f_k(y)$. Porque $\mathbb{R}^n = \underset{i \in I}{\cup} \Omega_i$ *com* $\Omega_i \subset \overline{int\ \Omega_i}$ então existe $y_j \to y$ com $y_j \in int\ \Omega_k$. Podemos ter $y_j \in int\ \Omega_k \backslash N$ e $y_j \in B(x, \varepsilon)$. Pela continuidade de f_k, $f_k(y_j) \to f_k(y)$ tal que $f(y)$ é o fecho de $f(B(x, \varepsilon) \backslash N)$ como se afirmou.■

Após estas definições vimos uma relação directa entre as soluções de Carathéodory (soluções $\mathcal{C}$) e as de Krasowski (soluções $\mathcal{K}$), assim como, entre as soluções de Filippov (soluções $\mathcal{F}$) e de Krasowski (soluções $\mathcal{K}$), portanto

$$\mathcal{F} \subset \mathcal{K} \supset \mathcal{C}.$$

Tendo em consideração o lema anterior e tratando-se de um sistema autónomo, podemos ter $\mathcal{F} \equiv \mathcal{K} \supset \mathcal{C}$.

No exemplo seguinte mostra a ideia de como calcular os conjuntos F_F e F_K.

Exemplo. Consideremos

$$f(x) = \begin{cases} 1 \ se \ x \neq 0 \\ 0 \ se \ x = 0 \end{cases}.$$

Portanto

$$\begin{aligned} F_K(0) &= \bigcap_{\varepsilon>0} \overline{co} \{f(B(0, \varepsilon))\} \\ &= \bigcap_{\varepsilon>0} \overline{co} \{f(0 + \varepsilon B)\} \\ &= \bigcap_{\varepsilon>0} \overline{co} \{0, 1\} = [0, 1] \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} F_F(0) &= \bigcap_{\varepsilon>0} \bigcap_{\mu(N)=0} \overline{co} \{f(B(0, \varepsilon) \backslash N)\} \\ &= \bigcap_{\varepsilon>0} \bigcap_{\mu(N)=0} \overline{co} \{f((0 + \varepsilon B) \backslash N)\} \\ &= \bigcap_{\varepsilon>0} \bigcap_{\mu(N)=0} \overline{co} \{\{0, 1\} \setminus \{0\}\} = \{1\}. \end{aligned}$$

Para multifunções $F(t, x)$ s.c.s em q.t.p com valores fechados e convexos e com selecções mensuráveis $f(t, x)$ de $F(t, x)$. Em [5] temos o seguinte resultado;

Teorema. *Se* $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ localmente limitada (limitada) então existe solução local de Krasowski (Filippov) de (5.3).

Pelas definições de $F_K(t,x)$ e $F_K(t,x)$ tem-se que estas multifunções são s.c.s com valores fechados e convexos, e pelo que vimos no Capitulo 4, no Caso 2, os problemas de Cauchy associados a inclusão diferencial (5.4) com F_K e F_K no lugar de F, admitem soluções.

5.3 Comparação entre soluções de Filippov e de Carathéodory

Vamos observar alguns exemplos e tirar conclusões.
Exemplo. Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} 1 \; se \; x = 0 \\ 0 \; se \; x \neq 0 \end{cases}$$

e supomos $x_0 = 0$.

Então $\varphi(t) = 0$ é solução de Filippov mas não é de Carathéodory. Portanto uma solução de Filippov pode não ser de Carathéodory.

Exemplo. Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} 1 \; se \; x \neq 0 \\ 0 \; se \; x = 0 \end{cases}$$

e supomos $x_0 = 0$.

Então $\varphi(t) = 0$ é solução clássica de Newton portanto, também é de Carathéodory, mas não é de Filippov .

Logo, uma solução de Filippov pode não ser de Carathéodory nem mesmo uma solução clássica de Newton.

Então existe algum caso em que as soluções de Carathéodory e de Filippov são iguais? Quando $f(t,x)$ é mensurável na variável t e contínua relativamente a x para todo o t fixo, então $\mathcal{F} \equiv \mathcal{C}$, uma vez que devido à continuidade de $f(t,x)$ relativamente a x, o conjunto $F_F(t,x)$ é composto por um único ponto que coincide com $f(t,x)$ [5]. Portanto com a continuidade de $f(t,x)$ relativamente a x temos que

$$F_F(t,x) = F_K(t,x) = \{f(t,x)\},$$

ou seja,

$$\mathcal{F} \equiv \mathcal{K} \equiv \mathcal{C},$$

é bom relembrar que isto nem sempre ocorre pois $\mathcal{K} \nsubseteq \mathcal{C}$ e $\mathcal{F} \nsubseteq \mathcal{C}$.

5.4 Soluções de Sentis

Para problemas de estabilização de sistemas não lineares, há muitas soluções de Filippov.

Para encontrar a solução de $\dot{x} = f(x)$ vamos substituir a equação pela inclusão diferencial $\dot{x} \in F(x)$ onde

$$F(x) = F_S(x) = \bigcap_{\varepsilon>0} \bigcap_{\mu(N)=0} \overline{\{f(B(x,\varepsilon)\backslash N)\}}.$$

A multifunção $F_S(x)$ torna-se superiormente semi-contínua, localmente limitada e compacta, embora nem sempre convexa. Vamos verificar que $F_F(x) = coF_S(x)$, portanto $F_S(x) \subseteq F_F(x)$.

Para N um conjunto de $\mathbb{R}^n$ com medida nula e N_0 o conjunto dos pontos onde f não é uma aproximação contínua, considere:

(a) $L_N(x) = \left\{ v : \exists \{x_i\} \text{ com } x_i \to x \text{ tal que } x_i \notin N \text{ e } v = \lim_i f(x_i) \right\}.$

(b) $L(x) = \left\{ \begin{array}{c} v : \forall N \text{ com } \mu(N) = 0, \exists \{x_i\} \text{ com } x_i \to x \text{ tal que } x_i \notin N \text{ e} \\ v = \lim_i f(x_i) \end{array} \right\}$

Ao observar a definição de $L_N(x)$ e $L(x)$ podemos chegar a conclusão que

$$L(x) = \bigcap_{\mu(N)=0} L_N(x).$$

Pela proposição apresentada de seguida, será claro que $L_{N_0}(x) = L(x)$ e podemos encontrar uma expressão diferente para $F_F(x)$,

$$\begin{aligned} F_F(x) &= \bigcap_{\varepsilon>0} \overline{co}\{f(B(x,\varepsilon)\backslash N_0)\} \qquad (5.7) \\ &= co \bigcap_{\varepsilon>0} \overline{\{f(B(x,\varepsilon)\backslash N_0)\}} \\ &= co(L_{N_0}(x)). \end{aligned}$$

Pretendemos determinar uma fórmula similar para $F_S(x)$, à custa de (5.6). Recorrendo a proposição seguinte obtemos

$$F_F(x) = co(F_S(x)).$$

Proposição. *Para todo* $x \in \mathbb{R}^n$,

$$F_S(x) = \bigcap_{\varepsilon>0} \overline{\{f(B(x,\varepsilon)\backslash N_0)\}} = L_{N_0}(x) = L(x).$$

Demonstração. Vamos provar a seguinte inclusão,

$$F_S(x) \subseteq \bigcap_{\varepsilon>0} \overline{\{f(B(x,\varepsilon)\backslash N_0)\}} \subseteq L_{N_0}(x) \subseteq L(x) \subseteq F_S(x).$$

Seja $v \in F_S(x)$ então $v \in \overline{\{f(B(x,\varepsilon)\backslash N\}}$ $\forall\varepsilon > 0$ e $\forall N$ em particular,

$$v \in \overline{\{f(B(x,\varepsilon)\backslash N_0)\}} \forall\varepsilon > 0.$$

Por outro lado, uma vez que $v \in \bigcap_{\varepsilon>0} \overline{\{f(B(x,\varepsilon)\backslash N_0\}}$ então

$$v \in \overline{\left\{f\left(B\left(x,\frac{1}{i}\right)\backslash N_0\right)\right\}} \forall i > 0.$$

Assim sendo podemos encontrar um y_i tal que, $|v - y_i| < \frac{1}{i}$ e

$$y_i \in \left\{f\left(B\left(x,\frac{1}{i}\right)\backslash N_0\right)\right\}$$

logo existe algum $x_i \in B\left(x,\frac{1}{i}\right)\backslash N_0$ tal que $y_i = f(x_i)$. Claramente, $\lim_i x_i = x$ com $x_i \notin N_0$ e $\lim_i f(x_i) = v$.

Por definição de $L_{N_0}(x)$ temos que $v \in L_{N_0}(x)$ e existe $\{x_i\}$ um conjunto não vazio de sucessões tais que $x_i \to x$, e $v = \lim_i f(x_i)$ com $x_i \in N_0$. Tomando qualquer conjunto $N \subset \mathbb{R}^n$ com medida nula, para um inteiro positivo k, existe $i_{(k)}$ tal que:

$$\left|x_{i_{(k)}} - x\right| < \frac{1}{k} \text{ e } \left|f\left(x_{i_{(k)}}\right) - v\right| < \frac{1}{k}$$

como f é contínua em qualquer $x_{i_{(k)}}$, existem pontos fixos $\widetilde{x}_k \notin N$ com propriedades semelhantes, então

$$\left|x_{i_{(k)}} - \widetilde{x}_k\right| < \frac{1}{k} \text{ e } \left|f\left(x_{i_{(k)}}\right) - f\left(\widetilde{x}_k\right)\right| < \frac{1}{k}.$$

Temos que

$$|\widetilde{x}_k - x| \leq \left|x_{i_{(k)}} - \widetilde{x}_k\right| + \left|x_{i_{(k)}} - x\right| \leq \frac{2}{k}$$

e

$$|f(\widetilde{x}_k) - v| \leq \left|f\left(x_{i_{(k)}}\right) - f\left(\widetilde{x}_k\right)\right| + \left|f\left(x_{i_{(k)}}\right) - v\right| \leq \frac{2}{k},$$

logo $\widetilde{x_k} \to x$ e $f\left(\widetilde{x_k}\right) \to v$, com $\widetilde{x_k} \notin N$, concluimos então que $v \in L(x)$.

Para $v \in L(x)$ e fixando um $\varepsilon > 0$, por definição para cada N com $\mu(N) = 0$, existe $\{x_i\}$ com $x_i \notin N$ tal que, $x_i \to x$ e $f(x_i) \to v$. Temos que $x_i \in B(x, \varepsilon)$ a partir de certa ordem, isto implica que $v \in \overline{f(B(x,\varepsilon)\backslash N)}$. Uma vez que a escolha de ε e N é arbitraria vem que $v \in F_S(x)$.■

Seja $\overline{x}$ um ponto de $\mathbb{R}^n$, $I = [a, b]$ para $m \in \mathbb{N}$. Considere-se a partição

$$a = t_0^m < t_1^m < ... < t_{k^m-1}^m < t_{k^m}^m = b$$

com k^m inteiro positivo e

$$d_m = \max\left\{t_{i+1}^m - t_i^m, \forall i = 0, ..., k^m - 1\right\}$$

então para cada $i = 0, ..., k^m - 1$ escolhemos $\xi_i^m \in \mathbb{R}^n$ e construimos a função $\varphi^m(t)$ contínua por partes, que designamos por **aproximação poligonal descontínua,**

$$\begin{cases} \varphi^m(t_0^m) = \overline{x} \\ \varphi^m(t) = \varphi^m(t_i^m) + (t - t_i^m)\, v_i^m + \xi_i^m, t \in \left[t_i^m, t_{i+1}^m\right] \end{cases}$$

onde v_i^m é um elemento de $F_S\left(\varphi^m(t_i^m)\right)$.

Definição. *Dizemos que a função $\varphi(t) : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ é **solução de Sentis*** (ou ***solução** $\mathcal{S}$*) *de*

$$\dot{x} = f(t, x)$$

se para todo $\varepsilon > 0$ existe m inteiro e a aproximação poligonal descontínua $\varphi^m(t)$ tal que,

$$|\varphi(t) - \varphi^m(t)| < \varepsilon, \quad \forall t \in [a, b]$$

com $0 < L_m < \varepsilon$ *e* $0 \leq \sum\limits_{i=0}^{k^m-1} |\xi_i^m| < \varepsilon$.

Por outras palavras $\varphi(\cdot)$ é o limite uniforme de uma sucessão de aproximações poligonais descontínuas $\{\varphi^m(\cdot)\}$ tal que d_m tende para zero.

5.5 Comparação entre soluções de Hermes e de Krasowski

Hajek [8] estabelece uma forte relação entre as soluções de Krasowski e de Hermes, como verificamos através do **teorema do fecho** para soluções de Krasowski. Este teorema será apresentado de seguida com ligeiras alterações pois desprezamos o controlo $u(\cdot)$, mas antes vamos ver dois lemas que serão úteis na demonstração do teorema.

O *integral de uma multifunção* F definida em $I = [a, b]$ define-se por,

$$\int_a^b F(t)dt = \left\{ \int_a^b f(t)dt : f \text{ integrável em } [a,b] \text{ e } f(t) \in F(t) \text{ q.t.p } t \in I \right\}$$

Lema 1.1. *Seja* $A : [0,1] \to 2^{\mathbb{R}^n} = P(\mathbb{R}^n)$ *uma multifunção mensurável cujos valores* $A(t)$ *são compactos, convexos e contidos numa bola comum. Então*

$$\int_0^1 A(t) = \left\{ \int_0^1 a(t)dt : a(t) \text{ é uma selecção mensurável de } A(t) \right\}$$

Lema1.2. *Seja* $S : [0,1] \to 2^{\mathbb{R}^n} = P(\mathbb{R}^n)$ *uma multifunção cujos valores estão contidos numa bola de* $\mathbb{R}^n$. *Se temos uma multifunção* $x : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ *que verifique*

$$x(t) - x(s) \in \int_s^t S(r)dr, \forall t > s$$

em $[0,1]$, *então* $x(\cdot)$ *é absolutamente contínua e satisfaz* $\dot{x}(t) \in \overline{co}(S(t))$ *q.t.p, em particular*

$$x(t) = x(0) + \int_0^t \dot{x}(r)dr \in x(0) + \int_0^t \overline{co}(S(r))dr, \forall t \in [0,1].$$

As demonstrações de estes lemas podem ser consultadas em [8].

Teorema do Fecho. *(Para solução de Krasowski).*
Seja $\varphi_k(\cdot)$ *a solução de Krasowski de*

$$\dot{x} = f(t, x + p_k(t,x)) + q_k(t,x)$$

em $[0,1]$ *com* $p_k \to 0$ e $q_k \to 0$ *uniformemente, assumindo que* f *é limitada e mensurável em* t,

1. *Se* φ_k *converge uniformemente então a função limite é solução de Krasowski de* $\dot{x} = f(t,x)$.
2. *A menos que* $\varphi_k(0) \to \infty$, *alguma subsucessão de* $\varphi_k(\cdot)$ *converge uniformente em algum intervalo pequeno* $[0,\varepsilon]$ *(onde* $\varepsilon > 0$ *dependente de* f e $\liminf |\varphi_k(0)|$).

Demonstração. Assumimos que $\varphi_k \to \varphi$ uniformemente, e sejam $\varepsilon > 0$ e $\delta > 0$ arbitrários.

Então, para k suficientemente grande $\|p_k(\cdot)\| < \varepsilon$, $\|q_k(\cdot)\| < \delta$ e $|\varphi_k(\cdot) - \varphi(\cdot)| < \varepsilon$ em $[0,1]$, portanto.

$$\dot{\varphi}_k(t) \in \overline{co}(f(t, B(\varphi_k(t),\varepsilon)) + \delta B) \subset \overline{co}(f(t, B(\varphi(t), 2\varepsilon)) + \delta B)$$

Então, para todo o $t > s$ em $[0,1]$,

$$\varphi_k(t) - \varphi_k(s) \in \int_s^t \overline{co}(f(r, B(\varphi(r), 2\varepsilon)) + \delta B) dr.$$

Aplicamos o **lema 1.1** e para $k \to \infty$ e obtemos,

$$\varphi(t) - \varphi(s) \in \int_s^t \overline{co}(f(r, B(\varphi(r), 2\varepsilon) + \delta B) dr$$

Pelo **lema 1.2**, $\varphi(t)$ é absolutamente contínua e

$$\dot{\varphi}(t) \in \overline{co}(f(t, B(\varphi(t), 2\varepsilon) + \delta B) \text{ q.t.p.}$$

Da última relação, para $\delta \to 0$ obtemos:

$$\dot{\varphi}(t) \in \overline{co}(f(t, B(\varphi(t), 2\varepsilon)) \text{ q.t.p.}$$

Como ε foi arbitrário, para $\varepsilon \to 0$, obtemos

$$\dot{\varphi}(t) \in \overline{co}(f(t, \varphi(t)) \text{ q.t.p.}$$

Assim, na verdade $\varphi(t)$ é uma solução de Krasowski.

Para provar a alínea 2) vamos supor que só o caso em que $\varphi_k(0) \to \infty$. Então para alguma subsucessão $y_i = \varphi_{k_i}$ e algum x_0, temos que $\varphi_{k_i}(0) \to x_0$.

Podemos agora incluir $y_i(0) - x_0$ na perturbação interna $p(\cdot)$ e assumir que todos os $y_i(0) = 0$. Seja

$$\alpha > 0 \text{ e } \beta = \sup |f([0,1], (\alpha+1)B)| + 1,$$

então para todo $t \in \left[0, \frac{\beta}{\alpha}\right]$ (para i suficientemente grande $|p_i| < 1,\ |q_i| < 1$) temos $y_i(t) \in \alpha B$ porque $|y(t)| < B$.

Então todos $y_i(t)$ é limitada de $\mathbb{R}^n$ e a sua derivada são uniformemente limitadas. Pelo Teorema de Ascoli-Arzelà, a subsucessão de y_i (subsucessão de φ_k) converge uniformemente em $\left[0, \frac{\beta}{\alpha}\right]$. ■

Corolário. *Para $\dot{x} = f(t,x)$ com f localmente limitada e mensurável em t, toda a solução de Hermes é solução de Krasowski.*

Demonstração. Para toda a solução de Hermes, temos uma solução de Carathéodory, onde $\varphi_C(t) \to \varphi(t)$ uniformemente e $\dot{x} = f(t, x + p(t))$ com $p \to 0$ uniformemente.

Uma vez que toda a solução de Carathéodory é de Krasowski então $\varphi_C(\cdot)$ é solução de Krasowski, assim pelo teorema anterior, $\varphi = \lim \varphi_C$ é solução de $\dot{x} = f(t,x)$. ■

Exemplo. Seja f uma função limitada e definida por

$$f(x) = \begin{cases} 1, se\ x = 0 \\ -1, se\ x \neq 0 \end{cases}, \ x(0) = 0 \text{ em } [0,1].$$

A solução $\varphi(t) = 0$ é de Hermes e também de Krasowski, pois $0 \in F_k(0) = [-1,1]$.

Mas $\varphi(t) = 0$ não é solução de Filippov $0 \notin F_F(0) = \{-1\}$.

Capítulo 6

Bibliografia

[1] Aubin J. P., and Cellina A., Differential Inclusions, Springer-Verlag (1984).

[2] Bacciotti A., On Several Notions of Generalized Solutions for Discontinuous Differential Equations and their Relatiouship, Internal Report 19 (2003), Dipartimento di Matematics, Politecnico di Torino.

[3] Bressan A., Caratheodory solutions for a class of discontinuous differential equations, R.T. 58, (1986).

[4] Bressan A., Directionally continuous selections and differential inclusions, Funkc. Ekvac., 31(1988), 459-470.

[5] Ceragioli F., Discontinuous ordinary differential equation and stabilization, Università degli Studi di Firenze, Dipartimento di Matimatica, (1995-1999)

[6] Filippov A. F., Classical solutions of differential equations with multivalued right-hand side, SIAM J. Control, 5 (1967), 609-621.

[7] Filippov A. F., Differential equation with discontinuous right-hand side, American Mathematical Society, translation, 42 (1964), 199-231.

[8] Hajek O., Discontinuous differential equations I, II, Journal of Differential Equations, 32, (1979), 149-170.

[9] Khalid al-Shammari, Filippov's operator and discontinuous differential equations, Maio (2006).

[10] Pucci A., Sistemi di equazioni differenziali con secondo membro discontinuo rispetto all'incognita, Rend. Inst. Mat. Univ. Trieste, 3, (1971), 75-89.

[11] Sentis R., Equations différentielles à second membre mesurable, Bollettino U.M.I., 15-B (1978), 724-742.

[12] Clark. F., Optimization and Nonsmooth Analysis, Centre de Recherches Mathématiques Université de Montréal, March (1989).