Universidade de Aveiro Departamento de Matemática
2007

ANA ISABEL SANTOS COELHO

MÍNIMOS DE FUNCIONAIS INTEGRAIS E A VALIDADE DA EQUAÇÃO DE EULER-LAGRANGE

Universidade de Aveiro Departamento de Matemática
2007

ANA ISABEL SANTOS COELHO

MÍNIMOS DE FUNCIONAIS INTEGRAIS E A VALIDADE DA EQUAÇÃO DE EULER-LAGRANGE

dissertação apresentada à Universidade de Aveiro para cumprimento dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre em Matemática, realizada sob a orientação científica do Prof. Doutor Vasile Staicu, Professor Catedrático do Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro

o júri

presidente

Prof. Dr. Luís Filipe Pinheiro de Castro
professor associado com agregação da Universidade de Aveiro

Prof. Dr. Gueorgui V. Smirnov
professor associado com agregação da Faculdade de Ciências da Universidade do Porto

Prof. Dr. Vasile Staicu
professor catedrático da Universidade de Aveiro (Orientador)

agradecimentos

Agradeço ao meu orientador, o Prof. Doutor Vasile Staicu, por todo o apoio que me deu na elaboração desta dissertação. A sua orientação científica e a sua visão prática foram essenciais.

Agradeço também aos meus pais, à minha irmã e ao João pelo apoio e carinho demonstrados, que tanto contribuíram para a elaboração desta dissertação.

Por fim, agradeço ainda aos amigos que tanto me ajudaram.

palavras-chave

Existência de mínimos, Condição de Pendência Limitada, Validade da Equação de Euler-Lagrange, Fenómeno de Lavrentiev.

resumo

Nesta dissertação estudam-se problemas de mínimo, com especial atenção ao problema clássico do Cálculo das Variações. Nomeadamente, após algumas considerações gerais, estuda-se a existência de mínimos para certas classes de funcionais, incluindo os funcionais integrais do Cálculo das Variações e prova-se a existência de mínimos Lipschitzianos para funcionais integrais sob a "Condição de Pendência Limitada".

Na segunda parte apresenta-se a equação de Euler-Lagrange como condição necessária para a existência de mínimos ilustrando a sua utilidade e a sua relação com o Fenómeno de Lavrentiev.

O último capítulo contém uma apresentação de resultados recentes sobre a validade da equação de Euler-Lagrange e sobre o Fenómeno de Lavrentiev.

keywords

Existence of minimum, Bounded slope condition, validity of Euler-Lagrange equation, Lavrentiev phenomenon.

abstract

In this dissertation minimum problems, with special attention to the classic problem of the Calculation of the Variations, are studied. Namely, after some general considerations, the existence of minimum for certain functional classes, are studied, including the integral functional for the classic problem of the Calculus of Variations and under the Bounded Slope Condition, the existence of Lipschitzians minimum for the integral functional.
In the second part we present the Euler-Lagrange equation as necessary condition for the existence of minimum illustrating its usefulness and its relation with Lavrentiev phenomenon.
The last chapter contains a presentation of recent results on Euler-Lagrange equation's validity and the Lavrentiev phenomenon.

Mínimos de funcionais integrais e a validade da equação de Euler-Lagrange

Ana Isabel Santos Coelho
Universidade de Aveiro

3 de Dezembro de 2007

Conteúdo

1 Introdução **5**

2 Preliminares **7**

3 Existência de mínimos **11**
- 3.1 Generalidades sobre problemas de mínimo 11
- 3.2 Mínimos de funcionais integrais 16
- 3.3 Condição de Pendência Limitada 18

4 Equação de Euler-Lagrange **27**
- 4.1 A validade da equação de Euler-Lagrange 27
- 4.2 Fenómeno de Lavrentiev 33

5 Resultados recentes **37**
- 5.1 Validade da equação de Euler-Lagrange 37
- 5.2 Não ocorrência do Fenómeno de Lavrentiev 51

Capítulo 1

Introdução

O Cálculo das Variações é uma das áreas clássicas da Matemática em que muitos matemáticos importantes contribuíram ao longo de vários séculos. Para além da sua importância matemática e das suas interligações com outras áreas matemáticas, tal como a Geometria ou as Equações Diferenciais, o Cálculo das Variações é muito utilizado em Física, Engenharias, Economia e Biologia.

Foi Euler que lhe deu este nome, mas o seu estudo tem uma história muito mais antiga, começando com um dos mais antigos problemas em matemática: a desigualdade paramétrica. Uma variante desta desigualdade é conhecida como o problema de Dido. Muitas demostrações mais ou menos rigorosas se conhecem desde o tempo de Zenodorus (200 a.C.), que provou a desigualdade para polígonos.

Outros problemas importantes do cálculo das variações foram consideradas no século XVII na Europa, tal como o trabalho de Fermat sobre óptica geométrica (1632), o problema de Newton (1685) para o estudo dos movimentos em fluidos ou o problema de Braquistócrona formulado por Galileo em 1638. Este último problema teve uma forte influência sobre o desenvolvimento do cálculo das variações. Foi resolvido por John Bernoulli em 1696 e quase imediatamente depois pelo seu irmão James, por Leibnitz e Newton.

Um passo decisivo foi dado com os trabalhos de Euler e Lagrange, que introduziram o que hoje se chama equação Euler-Lagrange. Este trabalho foi extendido em várias direcções por Bliss, Bolza, Carathéodory, Clebsch, Hahn, Hamilton, Hilbert, Kneser, Jacobi, Legrendre, Mayer, Weierstrass, apenas para citar alguns nomes. (ver o livro Goldstine [19] para uma interessante história dos problemas de cálculo das variações em dimensão 1). Resultados recentes relativos à validade da equação de Euler-Lagrange foram obtidos por Cellina e seus colaboradores (ver [11], [7], [16], [9]) e alguns destes resultados serão apresentados nesta dissertação.

A presente dissertação está estruturada da seguinte maneira: no capítulo 2 colectamos alguns preliminares necessários ao longo desta dissertação. No terceiro capítulo estudamos a existência de mínimos para certas classes de funcionais, incluindo os funcionais integrais do Cálculo das Variações. Na última secção deste capítulo prova-se a existência de mínimos Lipschitzianos para funcionais integrais sob a "Condição de Pendência Limitada". O quarto capítulo dedica-se à equação de Euler-Lagrange. Começamos por deduzir esta equação, ilustrando a sua utilidade e a sua relação com o Fenómeno de Lavrentiev. O quinto e último capítulo contém uma apresentação de resultados recentes sobre a validade da equação de Euler-Lagrange e sobre o Fenómeno de Lavrentiev. As nossas considerações relativas ao Fenómeno de Lavrentiev limitam-se ao problema clássico do Cálculo das Variações, com Lagrangeano da primeira ordem. Para Lagrangeanos de ordem superior que apresentam o Fenómeno de Lavrentiev referimos o artigo de Sarychev [26].

Capítulo 2

Preliminares

Neste capítulo vamos apresentar algumas notações e alguns conceitos e resultados básicos que vão ser utilizados nos capítulos seguintes.

Para $n \geq 1$ consideramos o espaço linear normado $\mathbb{R}^n$, cuja norma indicamos por $\|.\|$. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto e limitado. Então a sua fronteira será indicada por $\partial\Omega$ e o seu fecho (ou aderência) será indicado por $\overline{\Omega}$. Em particular, vamos considerar o caso em que $\Omega = (a, b)$ é um intervalo aberto, caso em que $\partial\Omega = \{a, b\}$. Indicamos por $C\left(\overline{\Omega}\right)$ o espaço de Banach das funções contínuas $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ com a norma

$$\|u\|_\infty = \max_{x \in \overline{\Omega}} |u(x)|,$$

onde $|.|$ indica a norma (módulo) em $\mathbb{R}$. Para $0 \leq k \leq \infty$ indicamos por $C^k(\Omega)$, o espaço das funções que têm derivadas contínuas em Ω até e incluindo a ordem k (se $k = 0$, será o espaço das funções contínuas em Ω). Por $C^k\left(\overline{\Omega}\right)$ indicamos o espaço de funções em $C^k(\Omega)$, cujas derivadas até à ordem k podem ser extendidas a funções contínuas até à fronteira $\partial\Omega$.

O suporte de uma função $u : \Omega \to \mathbb{R}$ é definido por *supp* $(u) = \overline{\{x \in \Omega : u(x) \neq 0\}}$. Se Ω é suposto limitado então o suporte de toda a função $u : \Omega \to \mathbb{R}$ resulta compacto.

Se $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto (não necessariamente limitado) então indicamos por $C_0^k(\Omega)$ o subespaço de $C^k\left(\overline{\Omega}\right)$ das funções $u : \Omega \to \mathbb{R}$ com suporte compacto contido em Ω. Se $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto e limitado então obviamente $C_0^k(\Omega) = C^k(\Omega)$.

Se $u : \Omega \to \mathbb{R}$ é uma função de classe $C^1(\Omega)$ então $\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_n}\right)$ indica o gradiente da função u.

Indicamos por $\mathcal{L}$ a $\sigma-$ álgebra dos conjuntos mensuráveis à Lebesgue de $\mathbb{R}^n$ e por $\mu : \mathcal{L} \to \mathbb{R}$ a medida de Lebesgue. Uma função $u : \Omega \to \mathbb{R}$ diz-se *mensurável (à Lebesgue)* em Ω se para todo $r \in \mathbb{R}$ o conjunto

$$\{x \in \Omega : f(x) > r\} \in \mathcal{L}.$$

Observa-se que toda a função contínua é mensurável e, pelo teorema de Lusin, se $f : \Omega \to \mathbb{R}$ é mensurável à Lebesgue em Ω então para todo $\varepsilon > 0$ existem um compacto $K_\varepsilon \subset \Omega$ e uma função contínua $g : \Omega \to \mathbb{R}$ tais que $\mu(\Omega \setminus K_\varepsilon) < \varepsilon$ e $f(x) = g(x)$ para todo $x \in K_\varepsilon$.

Uma propriedade (P) relativa aos elementos de Ω diz-se que se verifica *q.t.p.* em Ω (*em quase toda a parte de* Ω) se existe um subconjunto mensurável $N \subset \mathbb{R}^n$ tal que $\mu(N) = 0$ e tal que (P) se verifica em todo $\Omega \setminus N$.

Duas funções f e $g : \Omega \to \mathbb{R}$ que coincidem q.t.p. em Ω dizem-se equivalentes. O espaço das classes de equivalência de funções integráveis à Lebesgue indicamos por $L^1(\Omega)$. O integral à Lebesgue duma função integrável $u : \Omega \to \mathbb{R}$ será indicado por $\int_\Omega f d\mu$ ou ainda por $\int_\Omega f(x)\, dx$. Se f e $g : \Omega \to \mathbb{R}$ coincidem q.t.p. em Ω então $\int_\Omega f d\mu = \int_\Omega g d\mu$.

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto e seja $1 \leq p \leq \infty$. Diz-se que uma função $u : \Omega \to \mathbb{R}$ pertence ao espaço $L^p(\Omega)$ se

$$\|u\|_{L^p} = \begin{cases} \left(\int_\Omega |u(x)|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}} & se\ 1 \leq p < \infty \\ \inf\{\alpha : |u(x)| \leq \alpha \text{ q.t.p. em } \Omega\} & se\ p = \infty \end{cases} \tag{2.0.1}$$

for finita. Se $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é aberto e se $1 \leq p \leq \infty$ então $\|.\|_{L^p}$ é uma norma, e o espaço $L^p(\Omega)$ equipado com esta norma é um espaço de Banach.

Se $(X, \|.\|)$ é um espaço linear normado então $X^* = \{f : X \to \mathbb{R} \,| f \text{ linear e contínua}\}$ é o espaço dual de X. Se $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sucessão em X então diz-se que a sucessão $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge fortemente para $x_0 \in X$ se $\lim_{n\to+\infty} \|x_n - x_0\| = 0$.

Diz-se que a sucessão $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge fracamente para $x_0 \in X$ se a sucessão $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge para $f(x_0)$ para todo f em X^*. Um conjunto $A \subset X$ diz-se fracamente fechado se para qualquer sucessão $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em A fracamente convergente para algum $x_0 \in X$ tem-se que $x_0 \in A$. Se $A \subset X$ é um conjunto convexo então A é fechado se e só se é fracamente fechado.

O espaço $L^p(\Omega)$ com a norma definida em (2.0.1) é um espaço de Banach e o seu dual $L^p(\Omega)^*$ identifica-se com o espaço $L^{p'}(\Omega)$, onde $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Pela *desigualdade de Hölder* tem-se que se $u \in L^p(\Omega)$ e $v \in L^{p'}(\Omega)$ onde $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ e $1 \leq p \leq \infty$ então $uv \in L^1(\Omega)$ e

$$\|uv\|_{L^1} \leq \|u\|_{L^p} \|v\|_{L^{p'}}.$$

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto, $1 \leq p \leq \infty$, e seja $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão em $L^p(\Omega)$.

Diz-se que a sucessão $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge pontualmente para u se para todo $x \in \Omega$ tem-se que $(u_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge para $u(x)$. A sucessão $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge fortemente para u em $L^p(\Omega)$ e indica-se por $u_n \to u \in L^p(\Omega)$ se

$$\lim_{n\to\infty} \|u_n - u\|_{L^p} = 0,$$

e a sucessão $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para u fracamente, e indica-se por $u_n \rightharpoonup u$, se

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega (u_n(x) - u(x))\,\varphi(x)\,dx = 0, \text{ para todo } \varphi \in L^{p'}(\Omega).$$

Para a completude desta dissertação relembramos alguns resultados relativos à passagem ao limite nos integrais, que serão utilizados nos capítulos seguintes.

Lema 2.1 *(Fatou) Se $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sucessão de funções mensuráveis, $f_n : \Omega \to \mathbb{R}$, então*

$$\int_\Omega \left(\lim_{n\to\infty} \inf f_n\right) d\mu \leq \lim_{n\to\infty} \inf \int_\Omega f_n d\mu.$$

Teorema 2.0.1 *(da Convergência monótona) Se $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sucessão crescente de funções mensuráveis não negativas com $\int_\Omega f_n d\mu < \infty$, que converge pontualmente para f então*

$$\int_\Omega f d\mu = \int_\Omega \left(\lim_{n\to+\infty} f_n\right) d\mu = \lim_{n\to+\infty} \int_\Omega f_n d\mu.$$

Teorema 2.0.2 *(da Convergência Dominada) Se $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sucessão de funções mensuráveis, que converge pontualmente para uma função f, e se existe $\psi : \Omega \to \mathbb{R}$ uma função integrável (à Lebesgue) tal que para todo n, $|f_n(x)| \leq \psi(x)$ q.t.p. em Ω então f é integrável e*

$$\int_\Omega f(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty} \int_\Omega f_n(x)\,dx.$$

De seguida iremos relembrar algumas generalidades sobre os espaços *de Sobolev,* $W^{1,p}(\Omega)$, onde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um conjunto aberto e $1 \leq p \leq \infty$ (para detalhes ver [17], [13], [1]).

Diz-se que $u \in L^p_{loc}(\Omega)$ se $u \in L^p(\Omega')$ para todo o conjunto aberto Ω' com fecho compacto contido em Ω. Se $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ então dizemos que $v \in L^1_{loc}(\Omega)$ é a derivada parcial fraca de u relativamente a x_i se

$$\int_\Omega v(x)\,\varphi(x)\,dx = -\int_\Omega u(x)\,\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}(x)\,dx,$$

para toda a função $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$. Por abuso de notações, indicamos esta derivada fraca por $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ ou u_{x_i}.Diremos que u é diferenciável fracamente se todas as derivadas parciais fracas, $u_{x_1}, ..., u_{x_n}$ existem.

Chama-se espaço de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ ao espaço das funções $u \in L^p(\Omega)$, cujas derivadas parciais fracas u_{x_i}, $1 \leq i \leq n$, pertencem ao espaço $L^p(\Omega)$.Munimos o espaço $W^{1,p}(\Omega)$ com a seguinte norma

$$\|u\|_{W^{1,p}} = \left(\|u\|^p_{L^p} + \|\nabla u\|^p_{L^p}\right)^{\frac{1}{p}} \text{ se } 1 \leq p < \infty$$

e

$$\|u\|_{W^{1,\infty}} = \max\left\{\|u\|_{L^\infty}, \|\nabla u\|_{L^\infty}\right\} \text{ se } p = \infty.$$

Uma função $f : [a,b] \to \mathbb{R}^n$diz-se *absolutamente contínua* em $[a,b]$, quando para qualquer $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$, de tal modo que para qualquer família finita de subintervalos abertos de $[a,b]$, $\{(a_i, b_i) : 1 \leq i \leq n\}$, disjuntos dois a dois, tem-se que

$$\sum_{i=1}^n (b_i - a_i) < \delta \Rightarrow \sum_{i=1}^n \|f(b_i) - f(a_i)\| < \varepsilon.$$

Denotamos por $AC([a,b], \mathbb{R}^n)$ o espaço das funções absolutamente contínuas. Resulta facilmente da definição que, toda a função absolutamente contínua é contínua. No entanto, há funções contínuas que não são absolutamente contínuas. Observa-se que uma função absolutamente contínua em $[a,b]$ tem derivada finita q.t.p. em $[a,b]$. Diz-se que a função $f : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ é integral da sua derivada se para todo $\alpha, \beta \in [a,b]$ tem-se que

$$f(\beta) - f(\alpha) = \int_\alpha^\beta f'(\tau)\,d\tau.$$

Uma característica importante das funções absolutamente contínuas é dada pelo seguinte resultado (ver [5], p.13).

Proposição 2.1 *Uma função contínua $f : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ é integral da sua derivada se e só se f é absolutamente contínua.*

O seguinte teorema (ver [18]) será utilizado na dedução da equação de Euler-Lagrange, quando precisamos de diferenciar um integral em relação a um parâmetro.

Teorema 2.0.3 *Sejam dados dois intervalos I_1 e I_2 em $\mathbb{R}$ e três funções $f : I_1 \times I_2 \to \mathbb{R}$, $g : I_2 \to I_1$ e $h : I_2 \to I_1$ com valores denotados por $f(t,\alpha)$, $g(t,\alpha)$ e $h(\alpha)$.Se supusermos que $f(.,.)$ e a sua derivada parcial $f_\alpha(.,.)$ são ambas contínuas em $I_1 \times I_2$ e que $g(.)$ e $h(.)$ têm derivadas finitas num ponto $\beta \in I_2$, então a função $F : I_2 \to \mathbb{R}$ definida por*

$$F(\alpha) = \int_{g(\alpha)}^{h(\alpha)} f(t,\alpha)\,dt$$

tem derivada finita em β e

$$F'(\beta) = \int_{g(\beta)}^{h(\beta)} f_\alpha(t,\alpha)\,dt + f(h(\beta),\beta)\,h'(\beta) - f(g(\beta),\beta)\,g'(\beta).$$

Capítulo 3

Existência de mínimos

3.1 Generalidades sobre problemas de mínimo

Nesta secção apresentamos algumas generalidades e resultados abstractos relativos a problemas de mínimo, que se podem encontrar, por exemplo, em [18] e [24].

Definição 3.1.1 *Seja X um conjunto não vazio e seja $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ uma função. Diz-se que $\underline{x} \in X$ é um ponto de mínimo de f ou que f tem um mínimo no ponto $\underline{x}$ se*

$$f(\underline{x}) \leq f(x), \text{ para todo } x \in X.$$

Definição 3.1.2 *Seja (X, τ) um espaço topológico. Uma função $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ diz-se semicontínua inferiormente (s.c.i) no ponto $x_0 \in X$ se para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ com $f(x_0) > \lambda$, existe V uma vizinhança de x_0, tal que $f(x) > \lambda$, para todo $x \in V$. Diz-se que f é semicontínua inferiormente em X se f é semicontínua inferiormente em todo $x_0 \in X$.*

Observação 3.1 *Se $f(x_0) \in \mathbb{R}$ então f é semicontínua inferiormente em x_0 se e só se para todo $\varepsilon > 0$, existe V uma vizinhança aberta de x_0 tal que $f(x) > f(x_0) - \varepsilon$, para todo $x \in V$.*

Definição 3.1.3 *Chama-se o epígrafo de uma função $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ o subconjunto de $X \times \mathbb{R}$ definido por*

$$epi(f) = \{(x, \lambda) \in X \times \mathbb{R} : f(x) \leq \lambda\}.$$

Prova-se facilmente a seguinte proposição.

Proposição 3.1 *Se (X, τ) é um espaço topológico e se $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, f é semicontínua inferiormente se e só se $epi(f)$ é fechado em $X \times \mathbb{R}$.*

Observação 3.2 *Se (X, d) é um espaço métrico então $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ é semicontínua inferiormente (em X) se e só se para todo $x_0 \in X$ e para toda $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em X convergente para x_0 tem-se que $f(x_0) \leq \liminf_{n \to +\infty} f(x_n)$.*

Definição 3.1.4 *Seja $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ uma função e seja $\lambda \in \mathbb{R}$. O conjunto*

$$S_\lambda(f) = \{x \in X : f(x) \leq \lambda\}$$

chama-se uma secção de f. Diz-se que f é uma função própria se o conjunto

$$dom(f) = \{x \in X : f(x) < +\infty\}$$

é não vazio.

Observação 3.3 *Se $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ é semicontínua inferiormente então $S_\lambda(f)$ é fechada em X para todo $\lambda \in \mathbb{R}$.*

Teorema 3.1.1 ***Teorema de Weierstrass (versão 1)*** *Se (X, τ) é um espaço topológico compacto e se $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ é uma função própria e semicontínua inferiormente então existe $\underline{x} \in X$ tal que*

$$f(\underline{x}) \leq f(x), \ \textit{para todo } x \in X.$$

Demonstração. Seja $m = \inf\limits_{x \in X} f(x)$. Suponhamos, por redução ao absurdo, que $m = -\infty$. Então existe uma sucessão $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos de X tal que, $f(x_n) < -n$, para todo $\forall n \in \mathbb{N}$. Para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, existe $n_\lambda \in \mathbb{N}$ tal que $f(x_n) < \lambda$, para todo $n > n_\lambda$. Sendo X um espaço compacto, existe $\underline{x} \in X$ e uma subsucessão $(x_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ convergente para $\underline{x}$. A função f é semicontínua inferiormente em $\underline{x}$, por hipótese, portanto existe uma vizinhança V de $\underline{x}$ tal que $f(x) > \lambda$, para todo x em V. Como $\underline{x} \in V$ e $(x_{k_n})_{n\in\mathbb{N}} \to \underline{x}$, então existe $n_v \in \mathbb{N}$ tal que $x_{k_n} \in V$, para todo $n \geq n_v$, e portanto $f(x_{k_n}) > \lambda$, para todo $n \geq n_v$. Seja $n_0 = \max\{n_v, n_\lambda\}$, então para todo $n \geq n_0$ tem-se que $f(x_{k_n}) < \lambda$ e $f(x_{k_n}) > \lambda$. Esta contradição permite concluir que $m \in \mathbb{R}$.

Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão em X tal que $f(x_n)$ converge para m. Então sendo X compacto existe uma subsucessão $(x_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ convergente para algum $\underline{x} \in X$. Suponhamos, por redução ao absurdo, que $f(\underline{x}) > m$. Então, existe $\delta > 0$ tal que $f(\underline{x}) > m + \delta$.

Sendo, por hipótese, a função f semicontínua inferiormente em $\underline{x}$, existe V uma vizinhança de $\underline{x}$ tal que $f(x) > m+\delta$, para todo $x \in V$. Sendo $(x_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ convergente para $\underline{x}$, existe $n_v \in \mathbb{N}$ tal que $x_{k_n} \in V$ para todo $n \geq n_v$. Por consequência, para todo $n \geq n_v$ tem-se que

$$f(x_{k_n}) > m + \delta. \tag{3.1.1}$$

Pela escolha de $(x_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$, tem-se que $(f(x_{k_n}))_{n\in\mathbb{N}}$ converge para m. Portanto existe $n_\delta \in \mathbb{N}$ tal que

$$m \leq f(x_{k_n}) < m + \delta, \text{ para todo } n \geq n_{\delta.} \tag{3.1.2}$$

Para $n_0 = \max\{n_\delta, n_v\}$ e para todo $n \geq n_0$, de (3.1.1) e (3.1.2) tem-se que $m + \delta < f(x_{k_n}) < m + \delta$. Contradição.

Resulta então que $f(\underline{x}) \leq m$ e como $m \leq f(\underline{x})$, obtemos que $f(\underline{x}) = m$ e portanto $\underline{x}$ é um mínimo de f. ■

Definição 3.1.5 *Seja (X, τ) um espaço topológico. Um subconjunto K de X diz-se sequencialmente compacto se toda a sucessão $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos de K contém uma subsucessão que converge para um elemento de K.*

Seguindo os passos da demonstração anterior obtém-se a seguinte forma do Teorema de Weierstrass.

Teorema 3.1.2 ***Teorema de Weierstrass (versão 2)*** *Se (X, τ) é um espaço topológico sequencialmente compacto e se $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ é uma função própria e sequencialmente semicontínua inferiormente então existe $\underline{x} \in X$ tal que*

$$f(\underline{x}) \leq f(x), \ \textit{para todo } x \in X.$$

Definição 3.1.6 *Seja (X, τ) um espaço topológico. Uma função $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ diz-se coerciva se para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ tem-se que o conjunto $S_\lambda(f) = \{x \in X : f(x) \leq \lambda\}$ é relativamente compacto em X. (i. e., $\overline{S_\lambda(f)}$ é compacto). Diz-se que $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ é sequencialmente coerciva se o fecho de toda a secção $S_\lambda(f)$ é sequencialmente compacto em X.*

Observação 3.4 *Se X é um espaço de Banach com a norma $\|.\|_X$ então a coercividade de f caracteriza-se pela propriedade*

$$\lim_{\|x\|_X \to +\infty} f(x) = +\infty.$$

De facto, tem-se a seguinte proposição

Proposição 3.2 *Se $(X, \|.\|_X)$ é um espaço de Banach reflexivo então a função f é fracamente sequencialmente coerciva se e só se*

$$\lim_{\|x\|_X \to +\infty} f(x) = +\infty. \tag{3.1.3}$$

Demonstração. Suponhamos que f é fracamente sequencialmente coerciva. Suponhamos, por redução ao absurdo, que $\lim\limits_{\|x\|_X \to +\infty} f(x) \neq +\infty$. Então existe uma sucessão $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $\lim\limits_{n\to+\infty} \|x_n\|_X = +\infty$ e $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada. Seja então $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\|f(x_n)\| \leq \lambda$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Sendo f fracamente sequencialmente coerciva, tem-se que $S_\lambda(f)$ é fracamente sequencialmente compacta, e portanto a sucessão $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge fracamente para algum $\underline{x} \in S_\lambda(f)$. Então $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ é limitada. Esta contradição permite concluir que se verifica (3.1.3).

Provemos agora a afirmação recíproca. Seja $\lambda \in \mathbb{R}$ e $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão de elementos de $S_\lambda(f)$. Então, pela hipótese, resulta que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sucessão limitada e como o espaço X é reflexivo resulta que existe uma subsucessão $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ que converge fracamente em $\overline{S_\lambda(f)}$. Resulta então que, $\overline{S_\lambda(f)}$ é fracamente sequencialmente compacto e portanto f é fracamente sequencialmente coerciva. ∎

Teorema 3.1.3 ***Teorema de Tonelli (1)*** *Seja (X, τ) um espaço topológico e seja $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, uma função semicontínua inferiormente, própria e coerciva. Então f admite um mínimo em X.*

Demonstração. Seja $x_0 \in X$ tal que $f(x_0) < +\infty$. Sendo f coerciva tem-se que $S_{f(x_0)}(f) = \{x \in X : f(x) \leq f(x_0)\}$ é relativamente compacta, isto é, $\overline{S_{f(x_0)}(f)}$ é compacto. Sendo também f semicontínua inferiormente, resulta que $S_{f(x_0)}(f)$ é fechada. Podemos então concluir que $S_{f(x_0)}(f)$ é compacta e portanto, pelo Teorema de Weierstrass, existe $\underline{x} \in S_{f(x_0)}(f)$ tal que $f(\underline{x}) \leq f(x)$, para qualquer $x \in S_{f(x_0)}(f)$.

Como resultado $f(\underline{x}) \leq f(x)$, para todo $x \in X$, ou seja, $\underline{x}$ é mínimo de f em X. ∎

De maneira análoga, prova-se a seguinte forma do Teorema de Tonelli.

Teorema 3.1.4 ***Teorema de Tonelli (2)*** *Se (X, τ) é um espaço topológico e se $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ é uma função semicontínua inferiormente, própria e sequencialmente coerciva então f admite um mínimo em X.*

Definição 3.1.7 *Seja agora (X, τ) um espaço topológico e seja $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ uma função. Chama-se sucessão minimizante de f em X uma sucessão $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ tal que*

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = \inf_{x\in X} f(x) =: m.$$

Observação 3.5 *Seja (X, τ) um espaço topológico e seja $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ uma função própria e semicontínua inferiormente. Pelos Teoremas de Tonelli acima mencionados tem-se que:*

(i) Se f é coerciva então toda a sucessão minimizante $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de f admite um ponto limite $\underline{x} \in X$ que resulta ponto de mínimo de f, isto é, $f(\underline{x}) = m$.

(ii) Se f é sequencialmente coerciva então toda a sucessão minimizante $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de f admite uma subsucessão $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ convergente para um ponto $\underline{x} \in X$, onde $\underline{x}$ é um ponto de mínimo de f.

O resultado que se segue generaliza o Teorema de Weierstrass.

Teorema 3.1.5 *Seja (X, τ) um espaço topológico, V um subconjunto de X e seja $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ uma função sequencialmente semicontínua inferiormente. Assumamos que existe uma sucessão minimizante de f em V, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, que converge para um ponto $x_0 \in V$. Então, $f(x_0)$ é o mínimo de f em V.*

Demonstração. Por hipótese temos que f é sequencialmente semicontínua inferiormente, portanto, por definição, para toda a sucessão $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente para algum $x_0 \in X$, temos

$$f(x_0) \leq \lim_{n\to+\infty} \inf f(x_n).$$

Como, também por hipótese, se assumiu que existe uma sucessão minimizante $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, que converge para um ponto $x_0 \in V$, então, temos que

$$\inf_V f \leq f(x_0) \leq \lim_{n\to+\infty} \inf f(x_n) = \inf_V f$$

e portanto $-\infty < f(x_0) = \inf_V f$, ou seja, $f(x_0)$ é o mínimo de f em V. ■

O seguinte teorema representa o Método Directo do Cálculo das Variações, e serve para provar existência de mínimos.

Teorema 3.1.6 *Sejam X um espaço topológico e a função $f : X \to \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ tal que*

(i) f é semicontínua inferiormente em X (respectivamente sequencialmente semicontínua inferiormente em X),

(ii) f é coerciva (respectivamente sequencialmente coerciva).

Então f tem mínimo em X.

Demonstração. Consideremos $m = \inf\{f(x) : x \in X\} \in \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$. Se $m = +\infty$, cada ponto $x \in X$ é um ponto de mínimo para f e não temos nada que demonstrar. Suponhamos $m < +\infty$ e consideremos uma sucessão decrescente $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente para m. Sendo f semicontínua inferiormente em X, pela Observação 3.3, segue que, para todo $n \in \mathbb{N}$, o conjunto $\{x \in X : f(x) \leq \lambda_n\}$ é fechado em X, e sendo X compacto, resulta que este conjunto é compacto. Sendo a sucessão $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ decrescente, resulta que

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \{x \in X : f(x) \leq \lambda_n\} \neq \emptyset,$$

facto que implica que existe $x_0 \in X$ tal que

$$x_0 \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \{x \in X : f(x) \leq \lambda_n\}.$$

Segue então que, tal ponto x_0 é um ponto de mínimo para f. De facto, $f(x_0) \leq \lambda_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e passando ao limite quando $n \to +\infty$, segue que

$$f(x_0) \leq m.$$

Portanto, $x_0 \in X$ é um ponto de mínimo para f. ■

Definição 3.1.8 *Seja X um espaço linear normado com a norma $\|.\|_X$. Um subconjunto C de X diz-se convexo se para todo $t \in [0,1]$ e para todo $x, y \in C$ tem-se que $tx + (1-t)\,y \in C$.*

Definição 3.1.9 *Seja $(X, \|.\|)$ um espaço linear normado e seja C um subconjunto convexo de X. Uma função $f : C \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ diz-se função convexa se para todo $t \in [0,1]$ e para todo $x, y \in C$ tem-se que $f(tx + (1-t)\,y) \leq tf(x) + (1-t)\,f(y)$. Diz-se que a função f é estritamente convexa se para todo $t \in [0,1]$ e para todo $x, y \in C$ se tem $f(tx + (1-t)\,y) < tf(x) + (1-t)\,f(y)$, com x diferente de y.*

Prova-se facilmente a seguinte proposição.

Proposição 3.3 *Uma função $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ é convexa se e só se epi(f) é convexo em $X \times \mathbb{R}$.*

Proposição 3.4 *Seja $(X, \|.\|)$ um espaço linear normado. Uma função convexa $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ é semicontínua inferiormente se e só se f é fracamente semicontínua inferiormente.*

Demonstração. Sendo f convexa resulta que *epi*(f) é convexo e portanto *epi*(f) é fechado se e só se *epi*(f) é fracamente fechado. ■

Proposição 3.5 *Sejam X um espaço de Banach e $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ uma função convexa. Então f é semicontínua inferiormente para a topologia forte em X se e só se f é semicontínua inferiormente para a topologia fraca em X.*

Demonstração. A função $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ é convexa, portanto, pela proposição 3.3, *epi*(f) convexo. Por um teorema tem-se que sendo *epi*(f) convexo, então *epi*(f) é fechado, seja para a topologia forte, seja para a topologia fraca.

Consequentemente, por uma Proposição que afirma que uma função f é semicontínua inferiormente se e só se *epi*(f) é fechado, f é semicontínua inferiormente seja para a topologia forte, seja para a topologia fraca em X. ■

A Proposição que se segue tem o propósito de apresentar um resultado de unicidade do mínimo, utilizando a definição de convexidade estrita.

Proposição 3.6 *Seja X um espaço linear normado e $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ uma função estritamente convexa e própria. Então f admite no máximo um ponto de mínimo.*

Demonstração. Suponhamos que existem $a, b \in X$ tais que $a \neq b$ e $f(a) = f(b) \leq f(x)$, para todo $x \in X$. Então

$$f(a) \leq f\left(\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b\right) < \frac{1}{2}f(a) + \frac{1}{2}f(b) = f(a).$$

Absurdo. Não pode existir mais do que um mínimo. ■

Teorema 3.1.7 *Seja X um espaço de Banach reflexivo. Se $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ é semicontínua inferiormente, própria e convexa e tal que $\lim\limits_{\|x\| \to +\infty} f(x) = +\infty$, então f admite um mínimo em X.*

Demonstração. Como por hipótese $\lim\limits_{\|x\| \to +\infty} f(x) = +\infty$, f é coerciva e consequentemente tem secções limitadas. Então, as secções de f são fechadas, convexas e limitadas, portanto são fracamente compactas. Sendo f própria e fracamente semicontínua inferiormente aplica-se o Teorema de Tonelli e obtém-se que f admite um mínimo. ■

3.2 Mínimos de funcionais integrais

Nesta secção queremos aplicar o método directo para provar a existência de mínimos para funcionais integrais. O problema clássico do cálculo das variações, consiste em minimizar funcionais integrais da forma $I(u) = \int_{\Omega} L(x, u(x), \nabla u(x))\, dx$ sobre um conjunto de funções X, onde $L : \overline{\Omega} \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^{N\times n} \to \mathbb{R}$ é uma função chamada Lagrangeano e $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ é um conjunto aberto com fronteira $\partial\Omega$. O conjunto X contém funções $u : \Omega \to \mathbb{R}^N$ que satisfazem certas condições na fronteira de Ω e com alguma classe de regularidade. Nesta dissertação consideramos apenas os casos em que $n = 1$ ou $N = 1$.

No caso $n = 1$ o problema toma a forma

$$\min\left\{ J(x) = \int_a^b L(t, x(t), x'(t))dt : x \in X \right\}, \tag{P}$$

onde $L : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, $\Omega = (a, b)$ é um intervalo aberto de $\mathbb{R}$ e X será o conjunto das funções de classe C^1 ou absolutamente contínuas definidas em (a, b) e que satisfazem as condições $x(a) = \alpha,\ x(b) = \beta$. Será também considerado o caso em que $X = W_0^{1,p}(\Omega)$.

No caso $N = 1$ o problema será da forma

$$\min\left\{ J(u) = \int_{\Omega} L(x, u(x), \nabla u(x))dx : u \in X \right\}, \tag{$\widetilde{P}$}$$

onde $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, $L : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e X é subconjunto de algum espaço de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$.

No que se segue vamos utilizar o método directo para provar a existência de mínimos para o problema do tipo $\left(\widetilde{P}\right)$ com $X = W_0^{1,p}(\Omega)$ e

$$J(u) = \int_{\Omega} f(x, \nabla u(x))\, dx$$

Definição 3.2.1 *Seja $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ a $\sigma-$álgebra de Borel em $\mathbb{R}^n$ (gerada pela família dos conjuntos abertos de $\mathbb{R}^n$). Uma função $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diz-se boreliana se para todo o aberto $A \subset \mathbb{R}$, tem-se $f^{-1}(A) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$.*

Teorema 3.2.1 *Suponhamos que $1 < p < \infty$, a função $f : \Omega \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é boreliana e tal que:*
(i) existe $a \in L^1(\Omega)$ e existe $b \in \mathbb{R}$, com $b > 0$ tais que

$$f(x, \xi) \geq -a(x) - b\,|\xi|^p,$$

para todo x pertencente a Ω e todo ξ em $\mathbb{R}^n$;
(ii) para todo $x \in \Omega$, a aplicação $\xi \to f(x, \xi)$ é convexa.
Então, existe $u_0 \in W_0^{1,p}(\Omega)$ tal que $J(u_0) = \min_{u \in W_0^{1,p}(\Omega)} J(u)$.

Demonstração. (a) Provaremos que J é semicontínuo inferiormente na topologia fraca de $W_0^{1,p}(\Omega)$. Pela hipótese (ii) do teorema tem-se que J é convexo. Portanto, pela Proposição 3.5, será suficiente demonstrar que J é semicontínuo inferiormente para a topologia forte de $W_0^{1,p}(\Omega)$. Sendo $W_0^{1,p}(\Omega)$ espaço de Banach, basta demonstrar que J é sequencialmente semicontínuo inferiormente. Considere-se a sucessão $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a convergir fortemente para u em $W_0^{1,p}(\Omega)$. Temos de verificar que

$$J(u) \leq \liminf_{n\to\infty} J(u_n).$$

Uma vez que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge fortemente para u em $W_0^{1,p}(\Omega)$ tem-se que $(\nabla u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge fortemente em $L^p(\Omega)$ para ∇u. Passando a uma subsucessão, se necessário, tem-se que $\nabla u_n \to \nabla u$ q.t.p. em Ω. Pela hipótese (ii) tem-se que a função $\xi \to f(x,\xi)$ sendo convexa é contínua em $\mathbb{R}^n$ (aberto e convexo) o que implica

$$f(x,\nabla u(x)) + b\,|\nabla u(x)|^p \leq \liminf_{n\to\infty} \left[f(x,\nabla u_n(x)) + b\,|\nabla u_n(x)|^p\right].$$

Sendo

$$f(x,\nabla u_n(x)) + b\,|\nabla u_n(x)|^p \geq -a(x)\,,\ \text{com } a \in L^1(\Omega)\,,$$

podemos aplicar o Lema de Fatou para concluir que

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \left[f(x,\nabla u(x)) + b\,|\nabla u(x)|^p\right] dx \\
&\leq \int_\Omega \left[\liminf_{n\to\infty} f(x,\nabla u_n(x)) + b\,|\nabla u_n(x)|^p\right] dx \\
&\leq \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega \left[f(x,\nabla u_n(x)) + b\,|\nabla u_n(x)|^p\right] dx
\end{aligned}$$

portanto,

$$\int_\Omega \left[f(x,\nabla u(x)) + b\,|\nabla u(x)|^p\right] dx \leq \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega \left[f(x,\nabla u_n(x)) + b\,|\nabla u_n(x)|^p\right] dx$$

ou seja,

$$J(u) + b\,|\nabla u(x)|^p_{L^p(\Omega)} \leq \liminf_{n\to\infty} \left[J(u_n) + b\,|\nabla u_n(x)|^p_{L^p(\Omega)}\right].$$

Uma vez que $(\nabla u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge fortemente em $L^p(\Omega)$ para ∇u, resulta que

$$J(u) \leq \liminf_{n\to\infty} J(u_n)\,.$$

(b) Provaremos agora que J é coercivo na topologia fraca de $W_0^{1,p}(\Omega)$, ou seja, que para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ o conjunto $K = \left\{u \in W_0^{1,p}(\Omega) : J(u) \leq \lambda\right\}$ é fracamente compacto em $W_0^{1,p}(\Omega)$. Sendo $W_0^{1,p}(\Omega)$ um espaço de Banach reflexivo, será suficiente que o conjunto K seja limitado. Pela hipótese (i) tem-se que

$$\lambda \geq J(u) \geq -\|a\|_{L^1} + b\,\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}\,,$$

portanto $\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)} \leq const\,(a,b,\lambda)$. Mas $\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}$ é uma norma em $W_0^{1,p}(\Omega)$ e pela reflexividade de $W_0^{1,p}(\Omega)$ resulta que

$$\left\{u \in W_0^{1,p}(\Omega) : J(u) \leq \lambda\right\} \subseteq B(0, const\,(a,b,\lambda))$$

é fracamente compacto. Sendo verificadas as hipóteses do teorema 3.1.6, resulta que existe $u_0 \in W_0^{1,p}(\Omega)$, tal que

$$J(u_0) = \min_{u\in W_0^{1,p}(\Omega)} J(u)\,.$$

■

3.3 Condição de Pendência Limitada

A *Condição de Pendência Limitada (CPL)* foi introduzida por *Hartman* e *Nirenberg* e, num contexto variacional, por *Stampacchia*, com o propósito de obter majorantes pontuais para a norma do gradiente $\nabla u(x)$ de uma solução u para um problema de mínimo da forma

$$\min\left\{\int_\Omega f\left(\nabla u(x)\right)dx : u(x)=\varphi(x) \ \text{ para } x\in\partial\Omega\right\} \tag{$\widehat{P}$}$$

(ver [6] e [18]). Nesta secção mostraremos que sob a Condição de Pendência Limitada existe um minimizante Lipschitziano do problema $\left(\widehat{P}\right)$ onde $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ é um conjunto aberto e limitado e $\varphi:\partial\Omega\to\mathbb{R}$ é uma função dada.

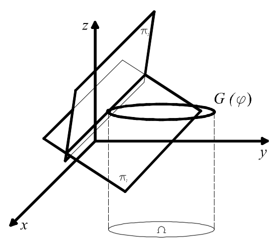
Definição 3.3.1 *A função φ satisfaz a Condição de Pendência Limitada (CPL) se existe $k\in\mathbb{R}$ tal que para todo $x\in\partial\Omega$, existem $a,\, b\in\mathbb{R}^n$ com $\|a\|\le k,\ \|b\|\le k$ tais que*

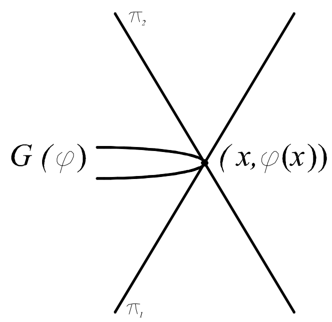
$$\varphi(y)\le\varphi(x)+\langle a,y-x\rangle\,,\ \text{para todo } y\in\partial\Omega$$

e

$$\varphi(x)+\langle b,y-x\rangle\le\varphi(y)\,,\ \text{para todo } y\in\partial\Omega.$$

Por outras palavras, φ satisfaz a *Condição de Pendência Limitada* se para todo $x\in\partial\Omega$, existem dois hiperplanos π_1 e π_2 que passam por $(x,\varphi(x))$ tais que *graph* (φ) permanece abaixo de π_1 e acima de π_2. Os dois esboços que se seguem representam esta situação:





Proposição 3.7 *Se a função $\varphi:\partial\Omega\to\mathbb{R}$ satisfaz a condição de pendência limitada e tal que $\varphi|_{\partial\Omega}$ não é afim, então Ω é convexo e φ é lipschitziana em $\partial\Omega$.*

Demonstração. Para provar a convexidade, pela condição de pendência limitada e temos que para todo $x\in\partial\Omega$, existem $a,\, b\in\mathbb{R}^n$ com $\|a\|\le k,\ \|b\|\le k$ tais que, para todo $y\in\partial\Omega$,

$$\varphi(x)+\langle b,y-x\rangle\le\varphi(y)\le\varphi(x)+\langle a,y-x\rangle\,,$$

o que implica

$$0\le\langle a-b,y-x\rangle\,,\ \text{para todo } y\in\partial\Omega.$$

Resulta então que o hiperplano H_x de equação $\langle a-b,y-x\rangle=0$ é um hiperplano de suporte de Ω em $x\in\partial\Omega$. Seja S_x o semi-espaço determinado pelo hiperplano H_x que contém Ω. Então $\Omega=\bigcap\limits_{x\in\partial\Omega}S_x$ e portanto Ω é convexo. Por outro lado, para mostrar que φ é Lipschitziana, partimos novamente da condição de pendência limitada, $\varphi(y) \leq \varphi(x) + \langle a, y - x\rangle$ e $\varphi(x) + \langle b, y - x\rangle \leq \varphi(y)$ e obtemos que

$$\varphi(y) - \varphi(x) \leq \langle a, y - x\rangle \leq k \|y - x\|$$

e também que

$$\varphi(x) - \varphi(y) \leq \langle b, x - y\rangle \leq k \|y - x\| .$$

Uma vez que $\|a\| \leq k$ e $\|b\| \leq k$, então temos que

$$\|\varphi(y) - \varphi(x)\| \leq k \|y - x\| ,$$

para todo $y \in \partial\Omega$ e consequentemente concluimos que φ é Lipschitziana. ■

Definição 3.3.2 *Um subconjunto Ω de $\mathbb{R}^n$ diz-se uniformemente convexo se existe $c > 0$ tal que para todo $x, y \in \partial\Omega$,*

$$\|x - y\|^2 \leq c \langle n(x), y - x\rangle ,$$

onde n é a normal interna.

Lema 3.1 *Se Ω é uniformemente convexo e $\varphi : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ é a restrição de uma função de classe C^2, então φ satisfaz a condição de pendência limitada.*

Demonstração. Partindo da hipótese que Ω é uniformemente convexo então é equivalente a dizermos que existe $c > 0$ tal que para todo $x, y \in \partial\Omega$,

$$\|x - y\|^2 \leq c \langle n(x), y - x\rangle ,$$

onde n é a normal interna. Então, como a função $\varphi \in C^2$, pode concluir-se que

$$\|\varphi(y) - \varphi(x) - \langle \nabla\varphi(x), y - x\rangle\| \leq c_1 \|x - y\|^2 , \tag{3.3.1}$$

o que implica que

$$\varphi(y) \leq \varphi(x) + \langle \nabla\varphi(x), y - x\rangle + c_1 \|x - y\|^2 .$$

Uma vez que Ω é uniformemente convexo, então

$$\varphi(y) \leq \varphi(x) + \langle \nabla\varphi(x) + cn(x), y - x\rangle ,$$

pelo que

$$\varphi(y) \leq \varphi(x) + \langle a, y - x\rangle , \tag{3.3.2}$$

já vez que $a = \nabla\varphi(x) + cn(x)$. Portanto, de (3.3.1) pode concluir-se que

$$\varphi(y) \geq \varphi(x) + \langle \nabla\varphi(x), y - x\rangle - c \langle n(x), y - x\rangle$$

e consequentemente que

$$\varphi(y) \geq \varphi(x) + \langle \nabla\varphi(x) + cn(x), y - x\rangle .$$

Por outro lado, como $b = \nabla\varphi(x) + cn(x)$, vem que para todo $y \in \partial\Omega$,

$$\varphi(y) \geq \varphi(x) + \langle b, y - x\rangle . \tag{3.3.3}$$

Então, de (3.3.2) e (3.3.3) obtém-se a Condição de Pendência Limitada. ■

Notação 1 *Denotamos por* $Lip_k\left(\overline{\Omega}\right)$ *o conjunto das funções Lipschitzianas* $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$, *com constante de Lipschitz menor ou igual do que* k. *Tambem indicamos por* $Lip\left(\overline{\Omega}\right)$ *o conjunto de todas as funções Lipschitzianas com alguma constante de Lipschitz.*

Teorema 3.3.1 *Seja* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *um conjunto aberto e limitado, a função* $\varphi : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ *satisfaz a condição de pendência limitada e* $f : \mathbb{R}^n \to [0, +\infty[$ *é estritamente convexa. Então existe uma solução (função mínimo) para o problema de mínimo*

$$\min\left\{\int_\Omega f\left(\nabla u\left(x\right)\right) dx : u\left(x\right) = \varphi\left(x\right) \;\; \textit{para } x \in \partial\Omega \;\textit{ e } u \in Lip\left(\overline{\Omega}\right)\right\}.$$

O Teorema enunciado será provado posteriormente. Queremos encontrar uma solução para o problema de mínimo nesta classe, e mediante a condição de pendência limitada demonstraremos que tal solução (para um k oportuno) é solução do problema de mínimo acima. Para esse propósito precisamos do resultado apresentado a seguir.

Lema 3.2 ***(Critério de Comparação)*** *Se* u *é solução do problema de mínimo*

$$\min\left\{\int_\Omega f\left(\nabla z\left(x\right)\right) dx : z\left(x\right) = u\left(x\right) \;\; \textit{para } x \in \partial\Omega \;\textit{ e } z \in Lip_k\left(\overline{\Omega}\right)\right\}, \qquad (P_u)$$

e v *é solução do problema*

$$\min\left\{\int_\Omega f\left(\nabla z\left(x\right)\right) dx : z\left(x\right) = v\left(x\right) \;\; \textit{para } x \in \partial\Omega \;\textit{ e } z \in Lip_k\left(\overline{\Omega}\right)\right\}, \qquad (P_v)$$

e se $u \leq v$ *em* $\partial\Omega$, *então* $u \leq v$ *em* Ω.

Demonstração. Observemos que se $u,\ v$ pertencem ao espaço $W^{1,p}\left(\Omega\right)$, então $u \vee v$ pertence também a $W^{1,p}\left(\Omega\right)$ e

$$\nabla\left(u \vee v\right) = \nabla \max\left\{u, v\right\} = \left\{\begin{array}{l} \nabla u \text{ q.t.p. em } \{u > v\} \\ \nabla v \text{ q.t.p. em } \{u \leq v\} \end{array}\right.,$$

sendo

$$\{u > v\} = \{x \in \Omega : u\left(x\right) > v\left(x\right)\} \text{ e } \{u \leq v\} = \{x \in \Omega : u\left(x\right) \leq v\left(x\right)\}.$$

Em particular, observemos que, se u, v pertencem a $Lip\left(\Omega\right)$, então $u \vee v$ também pertance a $Lip\ \left(\Omega\right)$ e

$$\nabla\left(u \vee v\right) = \left\{\begin{array}{l} \nabla u \textit{ se } \{u > v\} \\ \nabla v \textit{ se } \{u \leq v\} \end{array}\right..$$

Indiquemos

$$w^+ = u \vee v \text{ e } w^- = u \wedge v.$$

Se u, v pertencem a $Lip_k\ \left(\overline{\Omega}\right)$ então $w^+,\ w^-$ também pertencem a $Lip_k\ \left(\overline{\Omega}\right)$. De facto, $w^+ = v$ em $\partial\Omega$, porque $u \leq v$ em $\partial\Omega$ e $w^- = u$ em $\partial\Omega$, porque $u \leq v$ em $\partial\Omega$. Sendo v solução de (P_v), como $w^+ = v$ em $\partial\Omega$, então,

$$\int_\Omega f\left(\nabla v\right) dx \leq \int_\Omega f\left(\nabla w^+\right) dx.$$

Por outro lado, sendo u solução de (P_u), como $w^- = u$ em $\partial\Omega$, então

$$\int_\Omega f\left(\nabla u\right) dx \leq \int_\Omega f\left(\nabla w^-\right) dx.$$

Suponhamos, por redução ao absurdo, que o conjunto aberto $A = \{x \in \Omega : u(x) > v(x)\}$ é não vazio. Temos então que

$$\begin{aligned}\int_\Omega f(\nabla v)\,dx &= \int_\Omega f(\nabla v)\,dx - \int_A f(\nabla v)\,dx + \int_A f(\nabla v)\,dx \\ &= \int_\Omega f(\nabla v)\,dx \leq \int_\Omega f\left(\nabla w^+\right)dx = \int_{\Omega\setminus A} f(\nabla v)\,dx + \int_A f(\nabla u)\,dx\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\int_\Omega f(\nabla u)\,dx &= \int_\Omega f(\nabla u)\,dx - \int_A f(\nabla u)\,dx + \int_A f(\nabla u)\,dx \\ &= \int_\Omega f(\nabla u)\,dx \leq \int_\Omega f\left(\nabla w^-\right)dx = \int_{\Omega\setminus A} f(\nabla u)\,dx + \int_A f(\nabla v)\,dx.\end{aligned}$$

Obtemos então que

$$\int_A f(\nabla v)\,dx \leq \int_A f(\nabla u)\,dx \text{ e } \int_A f(\nabla u)\,dx \leq \int_A f(\nabla v)\,dx.$$

Portanto, se $A \neq \emptyset$ então

$$\int_A f(\nabla u)\,dx = \int_A f(\nabla v)\,dx.$$

Observe-se que $u = v$ sobre ∂A e pelo Princípio de localização, temos que $u|_A$ é solução do problema

$$\min\left\{\int_A f(\nabla z(x))\,dx : z(x) = u(x) \text{ para } x \in \partial A \text{ e } z \in Lip_k\left(\overline{A}\right)\right\}$$

e, de forma análoga, $v|_A$ é uma solução do problema

$$\min\left\{\int_A f(\nabla z(x))\,dx : z(x) = v(x) \text{ para } x \in \partial A \text{ e } z \in Lip_k\left(\overline{A}\right)\right\}.$$

Então, isto implica que

$$\min_{\substack{z\in Lip_k(\overline{A}),\\ z=u \text{ em } \partial A}} \int_A f(\nabla z)\,dx = \int_A f(\nabla u)\,dx = \int_A f(\nabla v)\,dx = \min_{\substack{z\in Lip_k(\overline{A}),\\ z=v \text{ em } \partial A}} \int_A f(\nabla z)\,dx$$

e pela convexidade estrita de f, isto implica que

$$u = v \text{ em } A. \tag{3.3.4}$$

De facto, se $u \neq v$ sobre um subconjunto de A de medida positiva, então tendo em conta a desigualdade de Poincaré tem-se que para algum $c > 0$

$$0 < \int_A |u(x) - v(x)|\,dx \leq c\int_A |\nabla u(x) - \nabla v(x)|\,dx$$

e portanto nalgum subconjutno $A' \subseteq A$ de medida positiva tem-se que $|\nabla u(x) - \nabla v(x)| > 0$ e podemos concluir que $\nabla u \neq \nabla v$ em A'. Consideremos então a função admissível $\frac{1}{2}\nabla u + \frac{1}{2}\nabla v$

e obtemos que

$$\begin{aligned}
\min_{\substack{z\in Lip_k(\overline{A}),\\ z=u \text{ em } \partial A}} \int_A f(\nabla z)\,dx &\leq \int_A f\left(\frac{1}{2}\nabla u + \frac{1}{2}\nabla v\right)dx \\
&< \frac{1}{2}\int_A f(\nabla u)\,dx + \frac{1}{2}\int_A f(\nabla v)\,dx \\
&= \int_A f(\nabla u)\,dx = \min_{\substack{z\in Lip_k(\overline{A}),\\ z=u \text{ em } \partial A}} \int_A f(\nabla z)\,dx,
\end{aligned}$$

o que é absurdo. Portanto a suposição $A \neq \{\emptyset\}$ leva a uma contradição, logo deve ser $A = \{\emptyset\}$, e consequentemente $u \leq v$ em Ω. ■

Temos o seguinte corolário:

Lema 3.3 ***(Princípio do Máximo)*** *Sejam u solução do problema de mínimo*

$$\min\left\{\int_\Omega f(\nabla z(x))\,dx : z(x) = u(x) \ \textit{para } x\in\partial\Omega \ \textit{e } z\in Lip_k\left(\overline{\Omega}\right)\right\}, \qquad (P_u)$$

e v solução do problema

$$\min\left\{\int_\Omega f(\nabla z(x))\,dx : z(x) = v(x) \ \textit{para } x\in\partial\Omega \ \textit{e } z\in Lip_k\left(\overline{\Omega}\right)\right\}. \qquad (P_v)$$

Então

$$\max_{\overline{\Omega}} \|u-v\| \leq \max_{\partial\Omega} \|u-v\|.$$

Demonstração. Consideremos $c = \max_{\partial\Omega}\|u-v\|$. Temos que $u+c$ é solução do problema de mínimo

$$\min\left\{\int_\Omega f(\nabla z)\,dx : z\in Lip_k\left(\overline{\Omega}\right), z = u+c \text{ em } \partial\Omega\right\}.$$

Temos também que v é uma solução do problema de mínimo

$$\min\left\{\int_\Omega f(\nabla z)\,dx : z\in Lip_k\left(\overline{\Omega}\right), z = v \text{ em } \partial\Omega\right\}.$$

Uma vez que $v \leq u+c$ em $\partial\Omega$, segue-se que $v \leq u+c$ em Ω, pelo Lema anterior (Critério de Comparação). Portanto, $v-u \leq c$ em Ω. Analogamente obtemos que $u \leq v+c$ em Ω. Portanto,

$$\|u-v\| \leq c \text{ em } \Omega,$$

isto é,

$$\max_{\Omega}\|u-v\| \leq c = \max_{\partial\Omega}\|u-v\|,$$

como se pretendia. ■

No Lema que se segue, a Condição de Pendência Limitada é essencial.

Lema 3.4 *Consideremos $k > K$, onde K é a constante da Condição de Pendência Limitada de φ. Seja u solução do problema de mínimo*

$$\min\left\{\int_\Omega f(\nabla z(x))\,dx : z(x) = \varphi(x) \ \textit{para } x\in\partial\Omega \ \textit{e } z\in Lip_k\left(\overline{\Omega}\right)\right\}.$$

Então $u \in Lip_K\left(\overline{\Omega}\right)$.

Demonstração. Sejam x, x' pertencentes a Ω. Queremos estimar $u(x') - u(x)$. Consideremos x pertencente a $\partial\Omega$ e x' pertencente a Ω. Uma vez que φ satisfaz a Condição de Pendência Limitada, $(CPL)_K$, tem-se que,

$$\pi_1(y) \leq \varphi(y) \leq \pi_2(y) \text{ para todo } y \in \partial\Omega, \tag{3.3.5}$$

onde

$$\pi_1(y) = \varphi(x) + \langle b, y - x\rangle \text{ e } \pi_2(y) = \varphi(x) + \langle a, y - x\rangle. \tag{3.3.6}$$

Uma vez que $\varphi = u$ em $\partial\Omega$, resulta que

$$\pi_1(y) \leq u(y) \leq \pi_2(y) \text{ para todo } y \in \partial\Omega.$$

Observemos que se w é uma função afim, então

$$\int_\Omega f(\nabla w)\,dx \leq \int_\Omega f(\nabla z)\,dx, \text{ para todo } z \in Lip\left(\overline{\Omega}\right) \text{ com } z = w \text{ em } \partial\Omega. \tag{3.3.7}$$

Com efeito, se w é afim, então ∇w é constante e verifica-se a equação de Euler-Lagrange,

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i}\left[f_{\xi_i}(\nabla w)\right] = 0,$$

e pela convexidade de f resulta $(3.3.7)$.

Em particular, para $w = \pi_1$ e $w = \pi_2$ temos

$$\pi_1(y) \leq u(y) \leq \pi_2(y),$$

para todo y pertencente a $\partial\Omega$ e, pelo Critério de Comparação, implica que

$$\pi_1\left(x'\right) \leq u\left(x'\right) \leq \pi_2\left(x'\right),$$

para todo x' pertencente a $\overline{\Omega}$. Da desigualdade direita, segue que

$$\pi_2\left(x'\right) = u(x) + \left\langle a, x' - x\right\rangle,$$

isto é, que $\pi_2(x') \leq u(x) + \|a\|\,\|x' - x\|$. O que implica $u(x') \leq \pi_2(x') \leq u(x) + K\,\|x' - x\|$, ou seja, que

$$u\left(x'\right) - u(x) \leq K\left\|x' - x\right\|. \tag{3.3.8}$$

Utilizando a outra desigualdade,

$$\pi_1\left(x'\right) \leq u\left(x'\right),$$

segue que $u(x') \geq \pi_1(x') = u(x) + \langle b, x' - x\rangle$ pelo que $u(x') \geq u(x) - K\,\|x' - x\|$. Portanto,

$$u\left(x'\right) - u(x) \geq -K\left\|x' - x\right\|. \tag{3.3.9}$$

Então, utilizando (3.3.8) e (3.3.9) resulta que

$$\left\|u\left(x'\right) - u(x)\right\| \leq K\left\|x' - x\right\|,$$

para todo x' pertencente a $\overline{\Omega}$, para todo x pertencente a $\partial\Omega$. Consideremos agora x, x' pertencentes a $\overline{\Omega}$. Definamos $\tau = x' - x$ e consideremos o conjunto $\Omega_\tau = \{y + \tau : y \in \Omega\}$. Definamos $u_\tau : \Omega \to \mathbb{R}$ por $u_\tau(y) = u(y - \tau)$. Consideremos o conjunto $\Omega \cap \Omega_\tau$ e observemos que $x' \in \Omega \cap \Omega_\tau$. De facto, $\tau = x' - x$ implica que $x' = x + \tau \in \Omega_\tau$. Uma vez que $x \in \Omega$, então

$$u\left(x'\right) - u(x) \underset{x = x' - \tau}{=} u\left(x'\right) - u_\tau\left(x'\right),$$

já que $u_\tau(x') = u(x' - \tau)$. Observemos que u_τ é uma solução do problema de mínimo

$$\min\left\{\int_{\Omega\cap\Omega_\tau} f(\nabla z)\,dx : z(x) = u(x) \text{ para } x \in \partial(\Omega\cap\Omega_\tau)\right\}$$

e dado que u é também solução do problema de mínimo

$$\min\left\{\int_{\Omega\cap\Omega_\tau} f(\nabla z)\,dx : z(x) = u(x) \text{ para } x \in \partial(\Omega\cap\Omega_\tau)\right\},$$

então, utilizando o Princípio de Máximo, obtemos

$$\max_{\Omega\cap\Omega_\tau} \|u - u_\tau\| \leq \max_{\partial(\Omega\cap\Omega_\tau)} \|u - u_\tau\|,$$

o que implica que existe $y \in \partial(\Omega\cap\Omega_\tau)$ tal que

$$\left\|u(x') - u_\tau(x')\right\| \leq \|u(y) - u_\tau(y)\|,$$

pelo que $\|u(x') - u_\tau(x')\| = \|u(y) - u(y-\tau)\|$ e portanto $\|u(x') - u_\tau(x')\| \leq k\|\tau\|$, ou seja,

$$\left\|u(x') - u_\tau(x')\right\| = K\left\|x' - x\right\|,$$

com $y \in \partial(\Omega\cap\Omega_\tau) \subseteq \partial\Omega \cup \partial\Omega_\tau$, se $y \in \partial\Omega$, cai no caso apresentado anteriormente, se $y \in \partial\Omega_\tau$, aplica-se a estimativa a $y - \tau$ e obtemos o que se pretende. ■

Utilizando então este lema queremos demonstrar o Teorema 3.3.1, enunciado anteriormente.

Demonstração. Fixemos $k \in \mathbb{R}$, $k > K$, onde K é a constante dada pela Condição de Pendência Limitada para φ. Provaremos que o problema

$$\min\left\{\int_\Omega f(\nabla z)\,dx : z(x) = \varphi(x) \text{ para } x \in \partial\Omega \text{ e } z \in Lip_k\left(\overline{\Omega}\right)\right\}$$

tem uma solução u. Seja

$$w(x) = \inf\{\pi(x) : \pi \text{ afim, } \|\nabla\pi\| \leq K,\ \pi \geq \varphi \text{ em } \partial\Omega\}.$$

Da Condição de Pendência Limitada segue que existem funções afins π com $\|\nabla\pi\| \leq K$, $\pi \geq \varphi$ em $\partial\Omega$. Sendo tais funções Lipschitzianas com constante K, resulta que w também é Lipschitziana com constante K. Para além disso, do facto de $\pi \geq \varphi$ em $\partial\Omega$, para cada π do conjunto da definição de w, resulta que

$$w \geq \varphi \text{ em } \partial\Omega. \tag{3.3.10}$$

Por outro lado, pela (3.3.5) e (3.3.6), resulta que $\pi_1(x) \leq \varphi(x)$ em $\partial\Omega$ e consequentemente

$$w(x) \leq \pi_1(x) \leq \varphi(x) \text{ em } \partial\Omega. \tag{3.3.11}$$

Pelas (3.3.10) e (3.3.11) resulta que $w = \varphi$ em $\partial\Omega$.

Portanto w é uma função admissível. Então, aplicando o método directo do Cálculo de Variações, e tomando uma sucessão $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de funções em $Lip_k\left(\overline{\Omega}\right)$ (equicontínua) tal que $\int_\Omega f(\nabla u_n)\,dx$ tende para o ínfimo, $u_n = \varphi$ em $\partial\Omega$ (equilimitada). Então, pelo Teorema Arzelá-Ascoli, uma subsucessão u_{n_k} converge uniformemente para u em $\overline{\Omega}$, pelo que $u_{n_k} \rightharpoonup u$ em $W^{1,p}(\Omega)$, o que implica que u pertence a $Lip_k\left(\overline{\Omega}\right)$, com $u = \varphi$ em $\partial\Omega$.

Portanto, u é uma solução do problema de mínimo

$$\min\left\{\int_\Omega f(\nabla z)\,dx : z(x)=\varphi(x)\ \text{ para } x\in\partial\Omega \text{ e } z\in Lip_k\left(\overline{\Omega}\right)\right\}.$$

Pelo Lema 3.4, segue que u pertence a $Lip_K\left(\overline{\Omega}\right)$. Queremos provar que se $z\in Lip\left(\overline{\Omega}\right)$, com $z=\varphi$ em $\partial\Omega$, então

$$\int_\Omega f(\nabla z)\geq\int_\Omega f(\nabla u)$$

e portanto u é mínimo nesta classe de funções. Indiquemos $u+t(z-u)$, com $t>0$ ($z\in Lip\left(\overline{\Omega}\right)$ implica que existe uma constante de Lipschitz que indicamos por k_z). Escolhendo t oportunamente, tal que $t<(k-K)\,k_{z-u}$, então $u+t(z-u)$ pertence a $Lip_K\left(\overline{\Omega}\right)$,e portanto $u+t(z-u)=\varphi$ é uma função sobre $\partial\Omega$, admissível no estudo de

$$\min\left\{\int_\Omega f(\nabla z)\,dx : z(x)=\varphi(x)\ \text{ para } x\in\partial\Omega \text{ e } z\in Lip_k\left(\overline{\Omega}\right)\right\}.$$

Segue que

$$\int_\Omega f(\nabla u)\,dx\leq\int_\Omega f((1-t)\nabla u+t\nabla z)\,dx,$$

ou seja,

$$\int_\Omega f(\nabla u)\,dx\leq(1-t)\int_\Omega f(\nabla u)\,dx+t\int_\Omega f(\nabla z)\,dx.$$

O que implica que

$$t\int_\Omega f(\nabla u)\,dx\leq t\int_\Omega f(\nabla z)\,dx$$

e portanto

$$\int_\Omega f(\nabla u)\,dx\leq\int_\Omega f(\nabla z)\,dx$$

como se pretendia demonstrar. ∎

Capítulo 4

Equação de Euler-Lagrange

4.1 A validade da equação de Euler-Lagrange

Consideremos o problema de mínimo

$$\min \left\{ J(x) = \int_a^b L(t, x(t), x'(t))dt : x \in X \right\}, \tag{P}$$

onde

$$X = \left\{ x \in C^1\left([a,b]\right) : x(a) = \alpha,\ x(b) = \beta \right\}.$$

Uma função $\widetilde{x} \in C^1\left([a,b]\right)$ que satisfaz as condições $x(a) = \alpha,\ x(b) = \beta$ e tal que $J(\widetilde{x}) = \min \left\{ J(x) : x \in X \right\}$ diz-se solução óptima do problema (P).

O resultado que se segue fornece uma condição necessária de optimalidade, nomeadamente uma equação verificada pelas soluções óptimas do problema (P). (ver [14], [25] e [27]).

Teorema 4.1.1 *Seja $L \in C^2\left([a,b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}\right)$ e se $\widetilde{x} \in X \cap C^2\left([a,b]\right)$ é uma solução óptima do problema (P) então necessariamente*

$$\frac{d}{dt}\left[L_\xi\left(t, \widetilde{x}(t), \widetilde{x}'(t)\right)\right] = L_x\left(t, \widetilde{x}\left(t\right), \widetilde{x}'\left(t\right)\right), \tag{$E-L$}$$

com t em (a,b), onde

$$L_\xi = \frac{\partial L}{\partial \xi} \text{ e } L_x = \frac{\partial L}{\partial x}.$$

Demonstração. Seja $\widetilde{x}$ uma função contínua, duas vezes diferenciável e que minimiza (P). Considere-se também uma qualquer função $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ de C^1, com valor nulo em a e b, ou seja, satisfazendo o requisito

$$\varphi\left(a\right) = \varphi\left(b\right) = 0,$$

(que chamaremos variação) e, para $\lambda \in \mathbb{R}$, considere-se a função $\widetilde{x} + \lambda\varphi$. Observa-se que, $\widetilde{x} + \lambda\varphi \in C^1\left([a,b]\right)$ e satisfaz as restrições de fronteira de (P)

$$\left(\widetilde{x} + \lambda\varphi\right)(a) = \widetilde{x}\left(a\right) \text{ e } \left(\widetilde{x} + \lambda\varphi\right)(b) = \widetilde{x}\left(b\right).$$

Dado que $\widetilde{x}$ é solução de (P), é um minimizante entre todos os elementos de X, temos que

$$J\left(\widetilde{x}\left(.\right)\right) \leq J\left[\left(\widetilde{x} + \lambda\varphi\right)(.)\right],$$

para todo $\varphi(.) \in C^1$ e para todo $\lambda \in \mathbb{R}$. Considere-se a função $g(.)$ de uma única variável definida por

$$g(\lambda) = J[(\widetilde{x} + \lambda\varphi)(.)] = \int_a^b L\left(t, \widetilde{x}(t) + \lambda\varphi(t), \widetilde{x}'(t) + \lambda\varphi'(t)\right) dt,$$

que admite um mínimo em $\lambda = 0$. Uma condição necessária para a ocorrência de tal mínimo é que a derivada seja zero em tal ponto.

Dado que $L(.,.,.) \in C^2$, a função g é diferenciável

$$g'(\lambda) = \frac{dg(\lambda)}{d\lambda} = \int_a^b \frac{d}{d\lambda}\left\{L\left(t, \widetilde{x}(t) + \lambda\varphi(t), \widetilde{x}'(t) + \lambda\varphi'(t)\right)\right\} dt,$$

e $g'(0)$ deve ser zero. O cálculo dá

$$g'(0) = \frac{d}{d\lambda} J[(\widetilde{x} + \lambda\varphi)(.)]\bigg|_{\lambda=0} = 0,$$

que é equivalente a

$$\int_a^b \left[L_x\left(t, \widetilde{x}(t), \widetilde{x}'(t)\right)\varphi(t) + L_\xi\left(t, \widetilde{x}(t), \widetilde{x}'(t)\right)\varphi'(t)\right] dt = 0. \tag{4.1.1}$$

A condição obtida em (4.1.1) não é prática. Vejamos como obter uma outra mais simples, eliminando qualquer referência às variações.

Integre-se agora por partes o segundo termo de (4.1.1), tendo em mente que $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$. Obtém-se

$$\begin{aligned}\int_a^b L_\xi\left(t, \widetilde{x}(t), \widetilde{x}'(t)\right)\varphi'(t)\, dt &= L_\xi\left(t, \widetilde{x}(t), \widetilde{x}'(t)\right)\varphi(t)\Big|_a^b - \int_a^b \frac{d}{dt} L_\xi\left(t, \widetilde{x}(t), \widetilde{x}'(t)\right)\varphi(t)\, dt \\ &= -\int_a^b \frac{d}{dt} L_\xi\left(t, \widetilde{x}(t), \widetilde{x}'(t)\right)\varphi(t)\, dt.\end{aligned}$$

Isto porque,

$$L_\xi\left(t, \widetilde{x}(t), \widetilde{x}'(t)\right)\varphi(t)\Big|_a^b = L_\xi\left(b, \widetilde{x}(b), \widetilde{x}'(b)\right)\varphi(b) - L_\xi\left(a, \widetilde{x}(a), \widetilde{x}'(a)\right)\varphi(a) = 0,$$

uma vez que $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$. Portanto, aplicando em (4.1.1) obtém-se

$$\int_a^b \left[L_x\left(t, \widetilde{x}(t), \widetilde{x}'(t)\right)\varphi(t) - \frac{d}{dt} L_\xi\left(t, \widetilde{x}(t), \widetilde{x}'(t)\right)\varphi(t)\right] dt = 0,$$

que é equivalente a

$$\int_a^b \left[L_x\left(t, \widetilde{x}(t), \widetilde{x}'(t)\right) - \frac{d}{dt} L_\xi\left(t, \widetilde{x}(t), \widetilde{x}'(t)\right)\right]\varphi(t)\, dt = 0.$$

Uma vez que φ é arbitrária, excepto para os seus valores que se anulam em ambos os pontos limite do intervalo, a e b, pelo Lema fundamental do Cálculo das Variações, obtém-se que

$$L_x\left(t, \widetilde{x}(t), \widetilde{x}'(t)\right) - \frac{d}{dt} L_\xi\left(t, \widetilde{x}(t), \widetilde{x}'(t)\right) = 0,$$

ficando assim provada a equação de Euler-Lagrange:

$$\frac{d}{dt} L_\xi\left(t, \widetilde{x}(t), \widetilde{x}'(t)\right) = L_x\left(t, \widetilde{x}(t), \widetilde{x}'(t)\right).$$

■

Definição 4.1.1 *Às soluções da equação de Euler-Lagrange chamam-se extremais.*

O seguinte resultado mostra que se o Lagrangeano é convexo então os extremais são soluções óptimas (ver também [14] e [25]).

Teorema 4.1.2 *Se $\widetilde{x}$ satisfaz a equação de Euler-Lagrange e se L é convexo em relação às variáveis (x,ξ) para cada $t \in [a,b]$, então $\widetilde{x}$ é também uma solução óptima do problema variacional, um minimizante de (P).*

Demonstração. Suponha-se que o integrando $L(t,x,\xi)$ é juntamente convexo nas variáveis (x,ξ) para todo o $t \in [a,b]$ e que $\widetilde{x}$ é uma solução da equação de Euler-Lagrange $\frac{d}{dt}L_\xi(t,\widetilde{x}(t),\widetilde{x}'(t)) = L_x(t,\widetilde{x}(t),\widetilde{x}'(t))$, juntamente com as condições de fronteira apropriadas.

Por um teorema sabe-se que sendo $F:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $F \in C^1(\mathbb{R}^n)$, a função F é convexa se e só se para todo $x,y \in \mathbb{R}^n$,

$$F(x) \geq F(y) + \langle \nabla F(y), x-y \rangle,$$

onde $\langle .,. \rangle$ denota o produto escalar em $\mathbb{R}^n$. Portanto,

$$F(x) - F(y) \geq \langle \nabla F(y), x-y \rangle.$$

Considere-se $\overline{x}$ uma outra função admissível (uma solução da equação de Euler-Lagrange) tal que $\overline{x}(a) = A$ e $\overline{x}(b) = B$. Uma vez que, por hipótese, L é convexa em relação às variáveis (x,ξ), aplicando o teorema referido anteriormente, vem que

$$L\left(t,\widetilde{x}(t),\widetilde{x}'(t)\right) \geq L\left(t,\overline{x}(t),\overline{x}'(t)\right) + \left\langle \nabla L\left(t,\overline{x}(t),\overline{x}'(t)\right), \widetilde{x}(t)-\overline{x}(t) \right\rangle,$$

o que equivale a

$$\begin{aligned} L\left(t,\widetilde{x}(t),\widetilde{x}'(t)\right) \geq{} & L\left(t,\overline{x}(t),\overline{x}'(t)\right) + L_x\left(t,\overline{x}(t),\overline{x}'(t)\right)(\widetilde{x}(t)-\overline{x}(t)) \\ & + L_\xi\left(t,\overline{x}(t),\overline{x}'(t)\right)\left(\widetilde{x}'(t)-\overline{x}'(t)\right). \end{aligned}$$

Integrando a desigualdade acima obtém-se

$$\begin{aligned} J(\widetilde{x}(t)) \geq{} & J(\overline{x}(t)) + \int_a^b [L_x\left(t,\overline{x}(t),\overline{x}'(t)\right)(\widetilde{x}(t)-\overline{x}(t)) \\ & + L_\xi\left(t,\overline{x}(t),\overline{x}'(t)\right)\left(\widetilde{x}'(t)-\overline{x}'(t)\right)]dt, \end{aligned} \tag{4.1.2}$$

para todo $\widetilde{x} \in X$. Integremos agora por partes o segundo termo do integral considerado em (4.1.2) e obtém-se então que,

$$\int_a^b L_\xi\left(t,\overline{x}(t),\overline{x}'(t)\right)\left(\widetilde{x}'(t)-\overline{x}'(t)\right)dt =$$

$$\begin{aligned} &= L_\xi\left(t,\overline{x}(t),\overline{x}'(t)\right)(\widetilde{x}(t)-\overline{x}(t))\Big]_a^b - \int_a^b \frac{d}{dt}L_\xi\left(t,\overline{x}(t),\overline{x}'(t)\right)(\widetilde{x}(t)-\overline{x}(t))\,dt \\ &= -\int_a^b \frac{d}{dt}L_\xi\left(t,\overline{x}(t),\overline{x}'(t)\right)(\widetilde{x}(t)-\overline{x}(t))\,dt, \end{aligned}$$

uma vez que

$$L_\xi\left(t,\overline{x}(t),\overline{x}'(t)\right)(\widetilde{x}(t)-\overline{x}(t))\Big]_a^b =$$

$$= L_\xi\left(b, \overline{x}\left(b\right), \overline{x}'\left(b\right)\right)\left(\widetilde{x}(b) - \overline{x}\left(b\right)\right) - L_\xi\left(a, \overline{x}\left(a\right), \overline{x}'\left(a\right)\right)\left(\widetilde{x}(a) - \overline{x}\left(a\right)\right) = 0,$$

dado que $\widetilde{x}(b) - \overline{x}\left(b\right) = \widetilde{x}(a) - \overline{x}\left(a\right) = 0$. Portanto, aplicando em $(4.1.2)$, obtém-se que

$$J\left(\widetilde{x}(t)\right) \geq J\left(\overline{x}\left(t\right)\right) + \int_a^b [L_x\left(t, \overline{x}\left(t\right), \overline{x}'\left(t\right)\right)\left(\widetilde{x}(t) - \overline{x}\left(t\right)\right)$$

$$-\frac{d}{dt}L_\xi\left(t, \overline{x}\left(t\right), \overline{x}'\left(t\right)\right)\left(\widetilde{x}(t) - \overline{x}\left(t\right)\right)]dt,$$

que é o mesmo que

$$J\left(\widetilde{x}(t)\right) \geq J\left(\overline{x}\left(t\right)\right) + \int_a^b \left[L_x\left(t, \overline{x}\left(t\right), \overline{x}'\left(t\right)\right) - \frac{d}{dt}L_\xi\left(t, \overline{x}\left(t\right), \overline{x}'\left(t\right)\right)\right]\left(\widetilde{x}(t) - \overline{x}\left(t\right)\right)dt.$$

A equação de Euler-Lagrange para $\overline{x}$ é precisamente

$$\frac{d}{dt}L_\xi\left(t, \overline{x}\left(t\right), \overline{x}'\left(t\right)\right) = L_x\left(t, \overline{x}\left(t\right), \overline{x}'\left(t\right)\right),$$

ou seja,

$$L_x\left(t, \overline{x}\left(t\right), \overline{x}'\left(t\right)\right) - \frac{d}{dt}L_\xi\left(t, \overline{x}\left(t\right), \overline{x}'\left(t\right)\right) = 0.$$

Então,

$$J\left(\widetilde{x}\right) \geq J\left(\overline{x}\right) + \int_a^b 0dt.$$

Portanto,

$$J\left(\widetilde{x}\right) \geq J\left(\overline{x}\right),$$

e $\overline{x}$ é verdadeiramente uma solução óptima para o problema. ■

O Teorema que se segue prova a unicidade das soluções óptimas sob a convexidade estrita de L. (ver [14] el [25]).

Teorema 4.1.3 *Nas condições dos teoremas anteriores, se adicionalmente L é estritamente convexa em relação às variáveis (x, ξ) para todo $t \in [a, b]$, a solução óptima $\widetilde{x}$ de (P), se exite é única.*

Demonstração. A forma mais fácil de lidar com a convexidade estrita neste contexto consiste em requerer que a igualdade

$$f\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y\right) = \frac{1}{2}f\left(x\right) + \frac{1}{2}f\left(y\right)$$

implique automaticamente $x = y$ se f é uma função estritamente convexa. Vamos tentar chegar a esta situação quando assumimos que $L\left(t, x, \xi\right)$ é estritamente convexa. Suponha-se que o nosso problema variacional admite duas soluções óptimas $\widetilde{x}$ e $\overline{x}$. Devido à convexidade, deduz-se que

$$J\left(\lambda\widetilde{x} + \left(1 - \lambda\right)\overline{x}\right) \leq \lambda J\left(\widetilde{x}\right) + \left(1 - \lambda\right)J(\overline{x}),$$

isto é, que

$$0 \leq \lambda J\left(\widetilde{x}\right) + \left(1 - \lambda\right)J(\overline{x}) - J\left(\lambda\widetilde{x} + \left(1 - \lambda\right)\overline{x}\right).$$

Considerando $\lambda = \frac{1}{2}$, vem que $(1 - \lambda) = \frac{1}{2}$ e portanto

$$\frac{1}{2}J\left(\widetilde{x}\right) + \frac{1}{2}J(\overline{x}) - J\left(\frac{1}{2}\widetilde{x} + \frac{1}{2}\overline{x}\right) \geq 0.$$

Se denotarmos por m o valor do mínimo, isto é, $J(\widetilde{x}) = J(\overline{x}) = m$, aplicando em $\frac{1}{2}J(\widetilde{x}) + \frac{1}{2}J(\overline{x}) - J\left(\frac{1}{2}\widetilde{x} + \frac{1}{2}\overline{x}\right) \geq 0$, vem que

$$\frac{1}{2}m + \frac{1}{2}m - J\left(\frac{1}{2}\widetilde{x} + \frac{1}{2}\overline{x}\right) \geq 0,$$

ou seja, que

$$m - J\left(\frac{1}{2}\widetilde{x} + \frac{1}{2}\overline{x}\right) \geq 0.$$

Por outro lado, uma vez que m é o valor do mínimo, $J\left(\frac{1}{2}\widetilde{x} + \frac{1}{2}\overline{x}\right) \geq m$. Considerando que $J(\widetilde{x}) = J(\overline{x}) = m$, então

$$m = \frac{1}{2}J(\widetilde{x}) + \frac{1}{2}J(\overline{x}) \geq J\left(\frac{1}{2}\widetilde{x} + \frac{1}{2}\overline{x}\right) \geq m.$$

Portanto,

$$m \geq J\left(\frac{1}{2}\widetilde{x} + \frac{1}{2}\overline{x}\right) \geq m,$$

logo, podemos concluir que, de facto,

$$J\left(\frac{1}{2}\widetilde{x} + \frac{1}{2}\overline{x}\right) = m.$$

Da desigualdade

$$\frac{1}{2}J(\widetilde{x}) + \frac{1}{2}J(\overline{x}) - J\left(\frac{1}{2}\widetilde{x} + \frac{1}{2}\overline{x}\right) \geq 0,$$

e depois de se ter concluído que

$$J\left(\frac{1}{2}\widetilde{x} + \frac{1}{2}\overline{x}\right) = m,$$

sabe-se que

$$\frac{1}{2}J(\widetilde{x}) + \frac{1}{2}J(\overline{x}) - J\left(\frac{1}{2}\widetilde{x} + \frac{1}{2}\overline{x}\right) = 0$$

e portanto, chegamos a

$$\begin{aligned}
&\int_a^b \frac{1}{2}L\left(t, \widetilde{x}(t), \widetilde{x}'(t)\right) + \frac{1}{2}L\left(t, \overline{x}(t), \overline{x}'(t)\right) dt \\
&= \int_a^b L\left(t, \frac{1}{2}\widetilde{x}(t) + \frac{1}{2}\overline{x}(t), \frac{1}{2}\widetilde{x}'(t) + \frac{1}{2}\overline{x}'(t)\right)]dt.
\end{aligned}$$

O integrando anterior é não negativo, novamente pela convexidade de L. A única possibilidade para uma função não negativa, cujo integral seja zero é ser identicamente nula, tal que

$$\frac{1}{2}L\left(t, \widetilde{x}(t), \widetilde{x}'(t)\right) + \frac{1}{2}L\left(t, \overline{x}(t), \overline{x}'(t)\right) - L\left(t, \frac{1}{2}\widetilde{x}(t) + \frac{1}{2}\overline{x}(t), \frac{1}{2}\widetilde{x}'(t) + \frac{1}{2}\overline{x}'(t)\right) \equiv 0.$$

Pela nota realizada anteriormente, isto implica que $\widetilde{x} = \overline{x}$, e a solução óptima é portanto única se existe. ■

Considerem-se de seguida alguns casos particulares da equação de Euler-Lagrange. Comecemos pela situação mais simples, na qual L depende de ξ exclusivamente.

Caso 1. $L = L(\xi)$. Neste caso, $L = L(\xi)$ e a equação de Euler-Lagrange simplifica para

$$\frac{d}{dt}\left[L'\left(\widetilde{x}'(t)\right)\right] = 0,$$

que, por sua vez, se verifica se

$$L'\left(\widetilde{x}'(t)\right) = k,$$

k constante. Evidentemente, este último requisito é satisfeito se tomarmos $\widetilde{x}'$ constante ao longo de todo o intervalo (a, b), ou seja, se $\widetilde{x}'$ é de facto a linha recta que une os pontos (a, α), (b, β). Tal função linear (afim) é sempre uma solução da equação de Euler-Lagrange se L depender apenas da derivada, da variável ξ. Se adicionalmente L é convexa, essa função linear será um minimizante. Se, além disso, L é estritamente convexa, esta função linear é o único minimizante do problema.

Caso 2. $L = L(t, \xi)$. Quando o integrando L depende das duas variáveis, t e ξ, a equação de Euler-Lagrange torna-se

$$\frac{d}{dt}\left[L_\xi\left(t, \widetilde{x}'(t)\right)\right] = 0,$$

ou equivalentemente,

$$L_\xi\left(t, \widetilde{x}'(t)\right) = \text{constante}.$$

Finalmente analisamos o caso no qual $L = L(x, \xi)$.

Caso 3. $L = L(x, \xi)$. Nesta situação, a equação de Euler-Lagrange tem a forma

$$\frac{d}{dt}\left[L_\xi\left(\widetilde{x}(t), \widetilde{x}'(t)\right)\right] = L_x\left(\widetilde{x}(t), \widetilde{x}'(t)\right).$$

O Teorema que se segue dá uma forma diferente de expressar a equação de Euler-Lagrange. Esta segunda forma da equação de Euler-Lagrange é algumas vezes chamada *equação de DuBois-Reymond.* Esta equação parece ser útil quando f não depende explicitamente de t.

Teorema 4.1.4 *Sejam* $L \in C^2([a, b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R})$, *com* $L = L(t, x, \xi)$, *e*

$$\inf_{x \in X}\left\{J(x) = \int_a^b L\left(t, \widetilde{x}(t), \widetilde{x}'(t)\right) dt\right\} = m \qquad (P)$$

onde $X = \left\{x \in C^1([a, b]) : x(a) = \alpha,\ x(b) = \beta\right\}$. *Seja* $\widetilde{x} \in X \cap C^2([a, b])$ *um minimizante de* (P), *então para todo* $t \in [a, b]$ *a seguinte equação verifica-se*

$$\frac{d}{dt}\left[L\left(t, \widetilde{x}(t), \widetilde{x}'(t)\right) - \widetilde{x}'(t) L_\xi\left(t, \widetilde{x}(t), \widetilde{x}'(t)\right)\right] = L_t\left(t, \widetilde{x}(t), \widetilde{x}'(t)\right).$$

Demonstração. A prova usa a equação de Euler-Lagrange. Observemos primeiro que para qualquer $\widetilde{x} \in C^2([a, b])$, temos por diferenciação directa que

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\left[L\left(t, \widetilde{x}(t), \widetilde{x}'(t)\right) - \widetilde{x}'(t) L_\xi\left(t, \widetilde{x}(t), \widetilde{x}'(t)\right)\right] \\
&= L_t\left(t, \widetilde{x}(t), \widetilde{x}'(t)\right) + \widetilde{x}'(t)\left[L_x\left(t, \widetilde{x}(t), \widetilde{x}'(t)\right) - \frac{d}{dt}\left[L_\xi\left(t, \widetilde{x}(t), \widetilde{x}'(t)\right)\right]\right].
\end{aligned}$$

Pelo primeiro Teorema apresentado neste capítulo (4.1.1), sabemos que qualquer solução $\widetilde{x}$ de (P) satisfaz a equação de Euler-Lagrange,

$$\frac{d}{dt}\left[L_\xi\left(t, \widetilde{x}(t), \widetilde{x}'(t)\right)\right] = L_x\left(t, \widetilde{x}(t), \widetilde{x}'(t)\right),$$

e portanto, combinando as duas identidades temos o resultado. De facto,

$$\frac{d}{dt}\left[L\left(t,\widetilde{x}\left(t\right),\widetilde{x}'\left(t\right)\right)-\widetilde{x}'\left(t\right)L_{\xi}\left(t,\widetilde{x}\left(t\right),\widetilde{x}'\left(t\right)\right)\right]$$

é o mesmo que

$$L_{t}\left(t,\widetilde{x}\left(t\right),\widetilde{x}'\left(t\right)\right)+\widetilde{x}'\left(t\right)\left[L_{x}\left(t,\widetilde{x}\left(t\right),\widetilde{x}'\left(t\right)\right)-\frac{d}{dt}\left[L_{\xi}\left(t,\widetilde{x}\left(t\right),\widetilde{x}'\left(t\right)\right)\right]\right],$$

que é igual a $L_{t}\left(t,\widetilde{x}\left(t\right),\widetilde{x}'\left(t\right)\right)$, uma vez que,

$$L_{x}\left(t,\widetilde{x}\left(t\right),\widetilde{x}'\left(t\right)\right)-\frac{d}{dt}\left[L_{\xi}\left(t,\widetilde{x}\left(t\right),\widetilde{x}'\left(t\right)\right)\right]=0. \qquad (E-L)$$

$\therefore \frac{d}{dt}\left[L\left(t,\widetilde{x}\left(t\right),\widetilde{x}'\left(t\right)\right)-\widetilde{x}'\left(t\right)L_{\xi}\left(t,\widetilde{x}\left(t\right),\widetilde{x}'\left(t\right)\right)\right]=L_{t}\left(t,\widetilde{x}\left(t\right),\widetilde{x}'\left(t\right)\right).$ ■

E consequentemente, no caso em que $L=L\left(x,\xi\right)$, a equação pode ser reescrita da seguinte forma

$$\frac{d}{dt}\left[L\left(\widetilde{x}\left(t\right),\widetilde{x}'\left(t\right)\right)-\widetilde{x}'\left(t\right)L_{\xi}\left(\widetilde{x}\left(t\right),\widetilde{x}'\left(t\right)\right)\right]=0,$$

o que leva a

$$L\left(\widetilde{x}\left(t\right),\widetilde{x}'\left(t\right)\right)-\widetilde{x}'\left(t\right)L_{\xi}\left(\widetilde{x}\left(t\right),\widetilde{x}'\left(t\right)\right)=\text{constante}.$$

4.2 Fenómeno de Lavrentiev

Os resultados apresentados nesta secção podem ser vistos com mais detalhe em [15] e em [27]. É bem conhecido que, mesmo para o problema básico do cálculo das variações, problemas de aspecto muito simples podem apresentar soluções para as quais as condições necessárias usuais, como a equação de Euler-Lagrange, falham. Uma das razões pode ser o facto de o ínfimo na classe das funções Lipschitzianas ser diferente do ínfimo na classe das funções absolutamente contínuas, ou seja, o Fenómeno de Lavrentiev.

De facto, o conjunto X das trajectórias desempenha um papel importante no problema (P), que não é apenas técnico. Efectivamente, um exemplo da importância da escolha de X é dado pelo *Fenómeno de Lavrentiev.* Um Lagrangeano L apresenta o fenómeno de Lavrentiev se o ínfimo tomado do conjunto das trajectórias absolutamente contínuas $AC\left[a,b\right]$ é estritamente inferior ao ínfimo tomado do conjunto das trajectórias Lipschitzianas $Lip\left[a,b\right]$, com condições de fronteira fixas. A ocorrência deste fenómeno previne a possibilidade de calcular o mínimo, e o minimizante, por um método finito standard. Mais ainda, diz algo sobre a regularidade do minimizante (se ele existe).

Um das características deste fenómeno é que ele ocorre para Lagrangeanos simples, como é o caso de: $L\left(t,x,x'\right)=\left(x^{3}-t\right)^{2}x'^{6}$, no intervalo $\left[0,1\right]$, com condições de fronteira $x\left(0\right)=0$, $x(1)=1$, que de facto apresenta o Fenómeno de Lavrentiev.

De seguida iremos apresentar e discutir o exemplo dado por B. Manià (ver [21]) de um Lagrangeano que apresenta o fenómeno de Lavrentiev (ver [22]). Também iremos mostrar a persistência do Fenómeno de Lavrentiev por perturbação e a propriedade de repulsão para o Lagrangeano de Manià, ou seja, o funcional calculado nas trajectórias de uma sucessão minimizante absolutamente contínua tende para $+\infty$.

Consideremos então o problema de minimizar

$$J\left(x\right)=\int_{0}^{1}\left[x^{3}\left(t\right)-t\right]^{2}x'^{6}\left(t\right)dt,$$

sobre as trajectórias x satisfazendo as condições de fronteira $x\left(0\right)=0$, $x(1)=1$.

Teorema 4.2.1 *(Manià, 1934). O Lagrangeano* $L(t,x,\xi)=\left(x^3-t\right)^2\xi^6$ *apresenta o fenómeno de Lavrentiev, ou seja,*

$$\inf_{x\in AC_*[0,1]} J(x) < \inf_{x\in Lip_*[0,1]} J(x),$$

onde $AC_*[0,1]=\{x\in AC[0,1]: x(0)=0,\ x(1)=1\}$ *e* $Lip_*[0,1]=\{x\in Lip[0,1]: x(0)=0,\ x(1)=1\}$.

Demonstração. Por definição, o Lagrangeano L e o funcional J têm valores não negativos. Pelo facto de J calculado em $\hat{x}(t)=\sqrt[3]{t}$ ser zero, temos que $\hat{x}$ é um minimizante de J em $AC_*[0,1]$.

Seja x uma trajectória qualquer em $Lip_*[0,1]$ e considere-se a função $f(t)=\sqrt[3]{t}/2$. Pela regularidade de x, existe um número real a em $(0,1)$ tal que $x(t)\le f(t)$, para qualquer $t\in[0,a]$, e $x(a)=f(a)$. Consequentemente,

$$\left[x^3(t)-t\right]^2\xi^6(t)\ge\left[f^3(t)-t\right]^2\xi^6(t)=\frac{7^2}{8^2}t^2\xi^6,$$

para qualquer t em $[0,a]$ e ξ em $\mathbb{R}$. Pela desigualdade de Hölder, temos que

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt[3]{a}}{2}&=\int_0^a\frac{\sqrt[3]{t}}{\sqrt[3]{t}}x'(t)\,dt\le\left(\int_0^a t^{-2/5}dt\right)^{5/6}\left(\int_0^a t^2x'^6(t)\,dt\right)^{1/6}\\&=\frac{5^{5/6}}{3^{5/6}}a^{1/2}\left(\int_0^a t^2x'^6(t)\,dt\right)^{1/6}.\end{aligned}$$

Concluimos que, para qualquer x em $Lip_*[0,1]$,

$$J(x)\ge\int_0^a\left[x^3(t)-t\right]^2x'^6(t)\,dt\ge\frac{7^23^5}{8^25^52^6a}\ge\frac{7^23^5}{8^25^52^6}>0.$$

■

Alterando o Lagrangeano de Manià é possível construir Lagrangeanos que apresentam o Fenómeno de Lavrentiev. O resultado que se segue é válido para um Lagrangeano genérico:

Proposição 4.1 *Seja L um Lagrangeano que apresenta o Fenómeno de Lavrentiev. Suponhamos que $J\ge 0$ e que existe um minimizante $\hat{x}$ com $J(\hat{x})=0$.*

Então, para qualquer funcional $P(x)=\int_a^b P(t,x,x')$ tal que $P\ge0$ e $P(\hat{x})$ é finito, existe $\hat{\varepsilon}>0$ tal que, para qualquer ε em $[0,\hat{\varepsilon}]$, o Lagrangeano $L+\varepsilon P$ apresenta o Fenómeno de Lavrentiev.

Demonstração. Seja c uma constante positiva tal que $J(x)\ge c$, para qualquer trajectória de Lipschitz x. Fixando $\hat{\varepsilon}=c/\left[2P(\hat{x})\right]$, temos que, para qualquer ε em $[0,\hat{\varepsilon}]$, $J(\hat{x})+\varepsilon P(\hat{x})\le c/2$ e $J(x)+\varepsilon P(x)\ge c$, para qualquer trajectória de Lipschitz x. Consequentemente, $L+\varepsilon P$ apresenta o fenómeno de Lavrentiev. ■

Consideremos o Lagrangeano $P(t,x,\xi)=|\xi|^{5/4}$. Da Proposição anterior segue que o problema do Cálculo das Variações com o funcional

$$\int_0^1\left\{\left[x^3(t)-t\right]^2x'^6(t)+\varepsilon\left|x'(t)\right|^{5/4}\right\}\,dt,$$

e condições de fronteira $x(0)=0,\ x(1)=1$, apresenta o Fenómeno de Lavrentiev. Este facto é significativo uma vez que o Lagrangeano nestes problemas é estritamente convexo na sua última variável e com crescimento linear superior.

O Lagrangeano de Manià apresenta também outro fenómeno interessante: a propriedade de repulsão.

Teorema 4.2.2 *Para qualquer sucessão de trajectórias* $\{x_n\}_n \subseteq Lip_* [0,1]$ *, tal que* x_n *tende para* $\hat{x}$*, quando* n *tende para* ∞*, quase em toda a parte em* $[0,1]$ *, temos que* $J(x_n)$ *tende para* ∞.

Demonstração. Para qualquer natural n, considere-se a_n em $(0,1)$ tal que $x_n(t) \leq \sqrt[3]{t}/2$, para qualquer t em $[0, a_n]$, e $x(a_n) = \sqrt[3]{a_n}/2$. Pela convergência de $x_n(t)$ para $\hat{x}(t)$, para quase todo o t em $[0,1]$, temos que a_n tende para 0.

Usando a desigualdade obtida na prova do Teorema 4.2.1., temos que

$$J(x_n) \geq \int_0^{a_n} \left[x^3(t) - t\right]^2 x'^6(t)\, dt \geq \frac{7^2 3^5}{8^2 5^5 2^6 a_n}.$$

Consequentemente, $J(x_n)$ tende para ∞, quando n tende para ∞. ■

Capítulo 5

Resultados recentes

5.1 Validade da equação de Euler-Lagrange

Um grande número de trabalhos têm sido dedicados a este problema clássico. Ball e Mizel, modificando um exemplo anterior de Maniá, construíram um problema variacional produzindo um mínimo $\widetilde{x}$, tal que

$$\int_a^b L\left(t, \widetilde{x}\left(t\right), \widetilde{x}'\left(t\right)\right)\ dt$$

é finito, mas não satisfaz a equação de Euler-Lagrange na forma integral (que irá ser introduzida no que se segue).

O que acontece no caso deste exemplo é que a função $t \rightarrow \nabla_x L\left(t, \widetilde{x}\left(t\right), \widetilde{x}'\left(t\right)\right)$ não está em L^1. Consequentemente, o requisito da integrabilidade da aplicação $t \rightarrow \nabla_x L\left(t, \widetilde{x}\left(t\right), \widetilde{x}'\left(t\right)\right)$ não se verifica. No entanto, este é essencial à prova da validade da equação de Euler-Lagrange, pois caso contrário, esta não é verdadeira ao longo da solução (minimizante).

Desta forma, alguma condição no termo $\nabla_x L\left(t, \widetilde{x}\left(t\right), \widetilde{x}'\left(t\right)\right)$ tem que ser imposta com o objectivo de assegurar a validade da equação de Euler-Lagrange. Um resultado de Clarke implica que o pressuposto que se segue no termo $\nabla_x L\left(t, \widetilde{x}\left(t\right), \widetilde{x}'\left(t\right)\right)$ é suficiente para estabelecer a validade da equação de Euler-Lagrange: existe um escalar δ e uma função $S\left(t\right) \in L^1\left(I\right)$, integrável em I, tal que, para quase todo o t em I, e y numa vizinhança da solução, $\left\|y - \widetilde{x}\left(t\right)\right\| \leq \delta$, então

$$\left\|\nabla_x L\left(t, y, \widetilde{x}'\left(t\right)\right)\right\| \leq S\left(t\right).$$

Esta condição implica que, localmente ao longo da solução, a aplicação $x \rightarrow L\left(t, x, x'\right)$ é Lipschitziana, numa vizinhança de $\widetilde{x}\left(t\right)$, com constante de Lipschitz $S\left(t\right)$.

A validade da equação de Euler-Lagrange sob esta condição de Lipschitz localmente, relativamente a x foi primeiro provada por Clarke no contexto de Inclusões Diferenciais, tal como refere Cellina em [7]. No entanto, existem exemplos simples e significativos de problemas variacionais onde esta condição de Lipschitz não é verificada. Considere-se o Lagrangeano definido por

$$L\left(x, \xi\right) = \left(\xi\sqrt{|x|} - \frac{2}{3}\right)^2$$

e o problema $\left(P^*\right)$ de minimizar

$$\int_0^1 L\left(x\left(t\right), x'\left(t\right)\right) dt$$

sobre as funções absolutamente contínuas x, com $x\left(0\right) = 0$, $x\left(1\right) = 1$ (ver [7]). Pode verificar-se facilmente que $\widetilde{x}\left(t\right) = t^{\frac{2}{3}}$ é um minimizante para $\left(P^*\right)$. De facto, $L\left(\widetilde{x}\left(t\right), \widetilde{x}'\left(t\right)\right) = 0$ em

$[0,1]$ e L é não negativo em todo o ponto. Considerando $\widetilde{x}(t) = t^{\frac{2}{3}}$, vem que $\widetilde{x}'(t) = \frac{2}{3}\ t^{-\frac{1}{3}}$, então

$$L\left(\widetilde{x}(t), \widetilde{x}'(t)\right) = \left(\widetilde{x}'(t)\sqrt{|\widetilde{x}(t)|} - \frac{2}{3}\right)^2 = 0.$$

O lagrangeano L é não lipschitziano localmente ao longo da solução $\widetilde{x}$. Neste caso, apesar de L não ser diferenciável em todo o ponto, $L_x(\widetilde{x}(t), \widetilde{x}'(t))$ existe em quase todo o ponto (é zero em quase todo o ponto) e é integrável. Uma condição mais fraca, que não implica esta lipschitzianidade, foi recentemente apresentada por Ferriero e Marchini para o caso standard do Cálculo das Variações.

Nesta secção provamos um resultado sobre a validade da equação de Euler-Lagrange sob as condições de Carathéodory, que é satisfeita por lagrangeanos que são lipschitzianos em x, mas que se aplica também a casos não lipschitzianos como o exemplo anterior.

O método da prova consiste em demonstrar primeiro que o facto de $\widetilde{x}$ ser uma solução implica a integrabilidade de

$$\nabla_\xi L\left(t, \widetilde{x}(t), \widetilde{x}'(t)\right).$$

Depois, usando este resultado, estabelecemos a validade da equação de Euler-Lagrange sob a condição de Carathéodory. Notemos que não é assumida nenhuma hipótese sobre convexidade do lagrangeano. Mais ainda, também não é assumida nenhuma condição de crescimento (ver [16], [15] e [23]).

Integrabilidade de $\nabla_\xi L(t, x(t), x'(t))$ ao longo da solução

Considere-se o problema de minimizar o funcional

$$J(x) = \int_I L\left(t, x(t), x'(t)\right) dt,$$

no conjunto das funções absolutamente contínuas $x : I \to \mathbb{R}^N$, satisfazendo as condições de fronteira $x(a) = A$, $x(b) = B$. Diz-se que $x \in \Omega$ é um *mínimo local fraco* para J se existe $\sigma > 0$ e $\tau > 0$ tais que para qualquer $y \in \Omega$, com o gráfico contido na $\sigma - vizinhança$ do gráfico de x, $\Gamma_\sigma = \{(t, y) : t \in I,\ |y - x(t)| \leq \sigma\}$ e tal que $|y'(t) - x'(t)| < \tau$ q.t.p. $t \in I$, $J(y) \geq J(x)$. No que se segue, precisamos também da função característica de um conjunto arbitrário A, que se indica por χ_A, e é definida por

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in A \\ 0 & \text{se } x \notin A \end{cases}.$$

Seja então $\widetilde{x}$ um minimizante (local fraco) rendendo um valor finito para o funcional J, e considere-se $\mu = \sup\limits_{t\in[a,b]} \|\widetilde{x}(t)\|$.

Os resultados que se seguem dependerão do pressuposto seguinte.

A: (i) L é diferenciável em x ao longo de $\widetilde{x}$, para quase todo o t, e a aplicação $\nabla_x L(., \widetilde{x}(.), \widetilde{x}'(.))$ é integrável em I;

(ii) existe uma função $S(t)$ integrável em I tal que, para qualquer $y \in B(0, \mu + 1)$,

$$L\left(t, y, \widetilde{x}'(t)\right) \leq L\left(t, \widetilde{x}(t), \widetilde{x}'(t)\right) + S(t)\|y - \widetilde{x}(t)\|.$$

Teorema 5.1.1 *Suponhamos que $L : I \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ é uma função com valores extendidos, finita no seu domínio efectivo da forma dom $L = I \times \mathbb{R}^N \times G$, onde $G \subset \mathbb{R}^N$ é um conjunto aberto e que satisfaz as condições de Carathéodory, ou seja, $L(., x, \xi)$ é mensurável* *em t para (x,ξ) fixos e $L(t,.,.)$ é contínua em (x,ξ) para quase todo o t. Mais ainda, assuma-se que L é diferenciável em ξ no dom L e que ∇_ξ L satisfaz as condições de Carathéodory no dom L. Suponhamos que o pressuposto A se verifica. Então,*

$$\int_I \left\|\nabla_\xi L\left(t,\widetilde{x}(t),\widetilde{x}'(t)\right)\right\| dt < +\infty.$$

Demonstração. (1) Por suposição, $L(.,\widetilde{x}(.),\widetilde{x}'(.)) \in L^1(I)$, consequentemente fixando $S_0 = \{t \in I : \widetilde{x}'(t) \notin G\}$, temos $\mu(S_0) = 0$.

Dado $\varepsilon > 0$, podemos cobrir S_0 com um conjunto aberto O_1 de medida $\mu(O_1) < \frac{\varepsilon}{2}$. Temos também que $\nabla_\xi L$ é uma função de Carathéodory e que $\widetilde{x}'$ é mensurável em I. Consequentemente, pelos Teoremas de Scorza Dragoni e de Lusin, para o dado $\varepsilon > 0$ existe um conjunto aberto O_2 tal que $\mu(O_2) < \frac{\varepsilon}{2}$ e definitivamente $\widetilde{x}'$ é contínua em $I \setminus O_2$, e portanto $\nabla_\xi L$ é contínua em $(I \setminus O_2) \times \mathbb{R}^N \times G$. Tomando $k_\varepsilon = I \setminus (O_1 \cup O_2)$, como O_1 e O_2 são abertos e I fechado, temos que k_ε é um conjunto fechado, no qual $\widetilde{x}'$ é contínua com valores em G, $\nabla_\xi L$ é contínua em $k_\varepsilon \times \mathbb{R}^N \times G$ e $\mu(I \setminus k_\varepsilon) < \varepsilon$.

Para $n \geq 1$, considere-se $\varepsilon_n = (b-a)\diagup 2^{n+1}$ e $k_n = k_\varepsilon$; considere-se também $C_n = \bigcup_{j=1}^{n} k_j$. Então C_n são conjuntos fechados, pois é a reunião de conjuntos fechados, k_ε, $C_n \subset C_{n+1}$, crescentes, $\widetilde{x}'$ é contínua em C_n com valores em G, $\nabla_\xi L$ é contínua em $C_n \times \mathbb{R}^N \times G$ e $\lim_{n\to+\infty} \mu(I \setminus C_n) = 0$. Tomando em consideração estas propriedades segue-se que existe $k_n > 0$ tal que, para todo $t \in C_n$,

$$\left\|\nabla_\xi L\left(t,\widetilde{x}(t),\widetilde{x}'(t)\right)\right\| < k_n,$$

portanto a norma do gradiente é limitada. Sem perda de generalidade podemos assumir $k_n \geq k_{n-1}$. Mais ainda, temos que $\mu\ (C_1) \geq (b-a)\diagup 2$ e

$$\sum_{n=2}^{\infty} \mu(C_n \setminus C_{n-1}) \leq \frac{b-a}{2}.$$

Para todo $n > 1$, consideramos $A_n = C_n \setminus C_{n-1}$. Consequentemente, obtemos que $C_m = C_1 \bigcup_{n=2}^{m} A_n$ e que $I = E \cup C_1 \cup \left(\bigcup_{n>1} A_n\right)$, onde $\mu(E) = 0$.

(2) Consideremos a função

$$\theta(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } \nabla_\xi L(t,\widetilde{x}(t),\widetilde{x}'(t)) = 0 \\ \frac{\nabla_\xi L(t,\widetilde{x}(t),\widetilde{x}'(t))}{\left\|\nabla_\xi L(t,\widetilde{x}(t),\widetilde{x}'(t))\right\|} & \text{nos outros casos } (\nabla_\xi L \neq 0) \end{cases},$$

e $v_n = \int_{A_n} \theta(t)\, dt$, tem-se então que

$$\|v_n\| \leq \mu(A_n).$$

Isto porque

$$\|v_n\| = \left\| \int_{A_n} \theta(t)\, dt \right\|,$$

e portanto,

$$\|\theta(t)\| \leq 1 \Rightarrow \|v_n\| \leq \sup \|\theta(t)\| .\mu(A_n) \leq \mu(A_n).$$

Existe um conjunto fechado $B_n \subseteq C_1$ tal que $\mu(B_n) = \|v_n\|$. Considere-se

$$\theta_n'(t) = -\theta(t)\chi_{A_n}(t) + \frac{v_n}{\|v_n\|}\chi_{B_n}(t) = \begin{cases} -\theta(t) & \text{se } t \in A_n \\ \frac{v_n}{\|v_n\|} & \text{se } t \in B_n \end{cases}.$$

O facto de $t \in B_n$ implica que

$$\frac{v_n}{\|v_n\|} = \frac{\int_{A_n} \theta(t)\, dt}{\left\| \int_{A_n} \theta(t)\, dt \right\|}, \text{ com } \left\| \int_{A_n} \theta(t)\, dt \right\| = \mu(B_n).$$

Então,

$$\theta_n'(t) = \begin{cases} -\theta(t) & \text{se } t \in A_n \\ \frac{\int_{A_n} \theta(t) dt}{\mu(B_n)} & \text{se } t \in B_n \end{cases}.$$

Sabemos que $I = E \cup C_1 \cup \left(\bigcup_{n=2}^{\infty} A_n \right)$. Temos então que

$$\int_I \theta_n'(t)\, dt = \int_I \left(-\theta(t)\, \chi_{A_n}(t) + \frac{v_n}{\|v_n\|} \chi_{B_n}(t) \right) dt,$$

que é equivalente a

$$\int_I \theta_n'(t)\, dt = \int_{A_n} -\theta(t)\, dt + \int_{B_n} \frac{v_n}{\|v_n\|} dt,$$

ou seja,

$$\int_I \theta_n'(t)\, dt = -\int_{A_n} \theta(t)\, dt + \frac{v_n}{\|v_n\|} \mu(B_n),$$

que é o mesmo que

$$\int_I \theta_n'(t)\, dt = -\int_{A_n} \theta(t)\, dt + \frac{v_n}{\|v_n\|} \|v_n\|,$$

ou equivalentemente

$$\int_I \theta_n'(t)\, dt = -\int_{A_n} \theta(t)\, dt + v_n.$$

Como $v_n = \int_{A_n} \theta(t)\, dt$, então

$$\int_I \theta_n'(t)\, dt = -\int_{A_n} \theta(t)\, dt + v_n,$$

isto é,

$$\int_I \theta_n'(t)\, dt = 0.$$

Consequentemente, fixando agora

$$\theta_n(t) = \int_a^t \theta_n'(\tau)\, d\tau,$$

vemos que as funções $\theta_n(t)$ são variações admissíveis. Mais ainda, obtemos

$$\|\theta_n\|_\infty \leq \sup_{t \in I} \int_a^t |\theta_n'(\tau)|\, d\tau \leq \int_I |\theta_n'(\tau)|\, d\tau = \int_{A_n} \theta(t)\, dt + v_n,$$

logo

$$\|\theta_n\|_\infty = 2v_n \leq 2\mu(A_n).$$

(3) Para t em A_n, temos $\|\nabla_\xi L(t, \widetilde{x}(t), \widetilde{x}'(t))\| < k_n$; Para t em B_n,

$$\left\| \nabla_\xi L\left(t, \widetilde{x}(t), \widetilde{x}'(t)\right) \right\| < k_1 \leq k_n.$$

Relembrando que $\overline{A_n} \subset C_n$, inferimos que, para todo o $t \in \overline{A_n} \cup B_n$,

$$\left\| \nabla_\xi L \left(t, \widetilde{x}(t), \widetilde{x}'(t) \right) \right\| \leq k_n.$$

Queríamos obter um limite uniforme para $\|\nabla_\xi L\|$ calculado numa vizinhança apropriada da solução $(\widetilde{x}(.), \widetilde{x}'(.))$. Consideremos o conjunto $\left(\overline{A_n} \cup B_n\right) \times \mathbb{R}^N \times G$ como um espaço métrico M_n com distância

$$d\left((t,x,\xi), (t',x',\xi')\right) = \sup\left(|t-t'|, |x-x'|, |\xi-\xi'|\right).$$

Em M_n, $\nabla_\xi L$ é contínua. Mais ainda, o seu subconjunto

$$G_n = \left\{ \left(t, \widetilde{x}(t), \widetilde{x}'(t) \right) : t \in \overline{A_n} \cup B_n \right\}$$

é compacto e, em G_n, $\|\nabla_\xi L\|$ é limitada por k_n. Consequentemente, existe $\delta_n > 0$ tal que, para $(t,x,\xi) \in M_n$ com $d((t,x,\xi), (t, \widetilde{x}(t), \widetilde{x}'(t))) < \delta_n$, temos

$$\|\nabla_\xi L(t,x,\xi)\| < k_n + 1.$$

(4) Para $|\lambda| < \min\left\{ \frac{1}{2\ \mu(A_n)}, \frac{\delta_n}{2\ \mu(A_n)}, \delta_n \right\}$, consideremos os integrais

$$\begin{aligned}
&\int_I \frac{1}{\lambda} \left[L\left(t, \widetilde{x}(t) + \lambda\theta_n(t), \widetilde{x}'(t) + \lambda\theta_n'(t)\right) - L\left(t, \widetilde{x}(t), \widetilde{x}'(t)\right) \right] dt \\
&= \int_I \frac{1}{\lambda} \left[L\left(t, \widetilde{x}(t) + \lambda\theta_n(t), \widetilde{x}'(t) + \lambda\theta_n'(t)\right) - L\left(t, \widetilde{x}(t) + \lambda\theta_n(t), \widetilde{x}'(t)\right) \right] dt \\
&+ \int_I \frac{1}{\lambda} \left[L\left(t, \widetilde{x}(t) + \lambda\theta_n(t), \widetilde{x}'(t)\right) - L\left(t, \widetilde{x}(t), \widetilde{x}'(t)\right) \right] dt \\
&= \int_{A_n \cup B_n} \frac{1}{\lambda} \left[L\left(t, \widetilde{x}(t) + \lambda\theta_n(t), \widetilde{x}'(t) + \lambda\theta_n'(t)\right) - L\left(t, \widetilde{x}(t) + \lambda\theta_n(t), \widetilde{x}'(t)\right) \right] dt \\
&+ \int_I \frac{1}{\lambda} \left[L\left(t, \widetilde{x}(t) + \lambda\theta_n(t), \widetilde{x}'(t)\right) - L\left(t, \widetilde{x}(t), \widetilde{x}'(t)\right) \right] dt.
\end{aligned}$$

Para todo $t \in A_n \cup B_n$ existe $\zeta_\lambda(t) \in (0, \lambda)$ tal que

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\lambda} \left[L\left(t, \widetilde{x}(t) + \lambda\theta_n(t), \widetilde{x}'(t) + \lambda\theta_n'(t)\right) - L\left(t, \widetilde{x}(t) + \lambda\theta_n(t), \widetilde{x}'(t)\right) \right] \\
&= \left\langle \nabla_\xi L\left(t, \widetilde{x}(t) + \lambda\theta_n(t), \widetilde{x}'(t) + \zeta_\lambda(t)\,\theta_n'(t)\right), \theta_n'(t) \right\rangle \\
&\leq \left\| \nabla_\xi L\left(t, \widetilde{x}(t) + \lambda\theta_n(t), \widetilde{x}'(t) + \zeta_\lambda(t)\,\theta_n'(t)\right) \right\|
\end{aligned}$$

e, da escolha de λ,

$$\left\| \nabla_\xi L\left(t, \widetilde{x}(t) + \lambda\theta_n(t), \widetilde{x}'(t) + \zeta_\lambda(t)\,\theta_n'(t)\right) \right\| < k_n + 1.$$

Consequentemente, podemos aplicar o Teorema da Convergência Dominada, para obter que

$$\begin{aligned}
&\lim_{\lambda \to 0} \int_{A_n \cup B_n} \frac{1}{\lambda} \left[L\left(t, \widetilde{x}(t) + \lambda\theta_n(t), \widetilde{x}'(t) + \lambda\theta_n'(t)\right) - L\left(t, \widetilde{x}(t) + \lambda\theta_n(t), \widetilde{x}'(t)\right) \right] dt \\
&= \int_{A_n \cup B_n} \left\langle \nabla_\xi L\left(t, \widetilde{x}(t), \widetilde{x}'(t)\right), \theta_n'(t) \right\rangle\ dt.
\end{aligned}$$

(5) Consideremos $f^+(S) = \max\{0, f(S)\}$, $f^-(S) = \max\{0, -f(S)\}$. Uma vez que

$$0 \leq \frac{1}{\lambda} \left[L\left(t, \widetilde{x}(t) + \lambda\theta_n(t), \widetilde{x}'(t)\right) - L\left(t, \widetilde{x}(t), \widetilde{x}'(t)\right) \right]^+ \leq S(t)\,\|\theta_n(t)\|,$$

pelo Teorema da Convergência Dominada,

$$\begin{aligned}&\lim_{\lambda\to 0}\int_I \frac{1}{\lambda}\left[L\left(t,\widetilde{x}(t)+\lambda\theta_n(t),\widetilde{x}'(t)\right)-L\left(t,\widetilde{x}(t),\widetilde{x}'(t)\right)\right]^+ dt\\ &=\int_I \lim_{\lambda\to 0}\frac{1}{\lambda}\left[L\left(t,\widetilde{x}(t)+\lambda\theta_n(t),\widetilde{x}'(t)\right)-L\left(t,\widetilde{x}(t),\widetilde{x}'(t)\right)\right]^+ dt.\end{aligned}$$

Pelo Lema de Fatou vem que

$$\begin{aligned}&\liminf_{\lambda\to 0}\int_I \frac{1}{\lambda}\left[L\left(t,\widetilde{x}(t)+\lambda\theta_n(t),\widetilde{x}'(t)\right)-L\left(t,\widetilde{x}(t),\widetilde{x}'(t)\right)\right]^- dt\\ &\geq\int_I \liminf_{\lambda\to 0}\frac{1}{\lambda}\left[L\left(t,\widetilde{x}(t)+\lambda\theta_n(t),\widetilde{x}'(t)\right)-L\left(t,\widetilde{x}(t),\widetilde{x}'(t)\right)\right]^- dt.\end{aligned}$$

Obtivemos que

$$\begin{aligned}&\limsup_{\lambda\to 0}\int_I \frac{1}{\lambda}\left[L\left(t,\widetilde{x}(t)+\lambda\theta_n(t),\widetilde{x}'(t)\right)-L\left(t,\widetilde{x}(t),\widetilde{x}'(t)\right)\right] dt\\ &\leq\lim_{\lambda\to 0}\int_I \frac{1}{\lambda}\left[L\left(t,\widetilde{x}(t)+\lambda\theta_n(t),\widetilde{x}'(t)\right)-L\left(t,\widetilde{x}(t),\widetilde{x}'(t)\right)\right]^+ dt\\ &-\liminf_{\lambda\to 0}\int_I \frac{1}{\lambda}\left[L\left(t,\widetilde{x}(t)+\lambda\theta_n(t),\widetilde{x}'(t)\right)-L\left(t,\widetilde{x}(t),\widetilde{x}'(t)\right)\right]^- dt\\ &\leq\int_I \lim_{\lambda\to 0}\frac{1}{\lambda}\left[L\left(t,\widetilde{x}(t)+\lambda\theta_n(t),\widetilde{x}'(t)\right)-L\left(t,\widetilde{x}(t),\widetilde{x}'(t)\right)\right]^+ dt\\ &-\int_I \liminf_{\lambda\to 0}\frac{1}{\lambda}\left[L\left(t,\widetilde{x}(t)+\lambda\theta_n(t),\widetilde{x}'(t)\right)-L\left(t,\widetilde{x}(t),\widetilde{x}'(t)\right)\right]^- dt\\ &=\int_I \liminf_{\lambda\to 0}\frac{1}{\lambda}\left[L\left(t,\widetilde{x}(t)+\lambda\theta_n(t),\widetilde{x}'(t)\right)-L\left(t,\widetilde{x}(t),\widetilde{x}'(t)\right)\right] dt\\ &=\int_I \left\langle\nabla_x L\left(t,\widetilde{x}(t),\widetilde{x}'(t)\right),\theta_n(t)\right\rangle dt.\end{aligned}$$

(6) Dado que $\widetilde{x}$ é um minimizante, temos

$$\begin{aligned}0&\leq\int_{A_n\cup B_n}\left\langle\nabla_\xi L\left(t,\widetilde{x}(t),\widetilde{x}'(t)\right),\theta_n'(t)\right\rangle dt\\ &+\limsup_{\lambda\to 0}\int_I \frac{1}{\lambda}\left[L\left(t,\widetilde{x}(t)+\lambda\theta_n(t),\widetilde{x}'(t)\right)-L\left(t,\widetilde{x}(t),\widetilde{x}'(t)\right)\right] dt\\ &\leq\int_{A_n\cup B_n}\left\langle\nabla_\xi L\left(t,\widetilde{x}(t),\widetilde{x}'(t)\right),\theta_n'(t)\right\rangle dt+\int_I \left\langle\nabla_x L\left(t,\widetilde{x}(t),\widetilde{x}'(t)\right),\theta_n(t)\right\rangle dt.\end{aligned}$$

Uma vez que

$$\theta_n'(t)=-\frac{\nabla_\xi L\left(t,\widetilde{x}(t),\widetilde{x}'(t)\right)}{\left\|\nabla_\xi L\left(t,\widetilde{x}(t),\widetilde{x}'(t)\right)\right\|},$$

para todo o t em A_n, segue-se que

$$-\left\langle\nabla_\xi L\left(t,\widetilde{x}(t),\widetilde{x}'(t)\right),\theta_n'(t)\right\rangle\chi_{A_n}(t)=\left\|\nabla_\xi L\left(t,\widetilde{x}(t),\widetilde{x}'(t)\right)\right\|\chi_{A_n}(t).$$

Consequentemente, obtemos que

$$\begin{aligned}&\int_{A_n}\left\|\nabla_\xi L\left(t,\widetilde{x}(t),\widetilde{x}'(t)\right)\right\| dt\\ &=-\int_{A_n}\left\langle\nabla_\xi L\left(t,\widetilde{x}(t),\widetilde{x}'(t)\right),\theta_n'(t)\right\rangle dt\\ &\leq\int_{B_n}\left\langle\nabla_\xi L\left(t,\widetilde{x}(t),\widetilde{x}'(t)\right),\theta_n'(t)\right\rangle dt+\int_I \left\langle\nabla_x L\left(t,\widetilde{x}(t),\widetilde{x}'(t)\right),\theta_n(t)\right\rangle dt.\end{aligned}$$

Em B_n, $\|\nabla_\xi L(t, \widetilde{x}(t), \widetilde{x}'(t))\|$ é limitada por k_1; da desigualdade de Hölder e da estimativa de $\|\theta_n\|_\infty$ obtida em (2), temos que existe uma constante C (independente de n) tal que

$$\int_{A_n} \left\|\nabla_\xi L\left(t, \widetilde{x}(t), \widetilde{x}'(t)\right)\right\| dt \leq C\mu(A_n).$$

(7) À medida que $m \to +\infty$, a sucessão de funções

$$\left(\left\|\nabla_\xi L\left(t, \widetilde{x}(t), \widetilde{x}'(t)\right)\right\| \chi_{\left\{\overset{m}{\underset{n=2}{\cup}} A_n\right\}}(t)\right)_m$$

converge monotonamente para a função $\|\nabla_\xi L(t, \widetilde{x}(t), \widetilde{x}'(t))\| \chi_{\left\{\underset{n>1}{\cup} A_n\right\}}(t)$. Da estimativa anterior e pela convergência monótona, obtemos

$$\begin{aligned}\int_{I\setminus C_1} \left\|\nabla_\xi L\left(t, \widetilde{x}(t), \widetilde{x}'(t)\right)\right\| dt &= \int_I \left\|\nabla_\xi L\left(t, \widetilde{x}(t), \widetilde{x}'(t)\right)\right\| \chi_{\left\{\underset{n>1}{\cup} A_n\right\}}(t) \\ &\leq C\mu\left(\underset{n>1}{\cup} A_n\right).\end{aligned}$$

Em C_1, $\|\nabla_\xi L(t, \widetilde{x}(t), \widetilde{x}'(t))\| < k_1$. Consequentemente,

$$\int_I \left\|\nabla_\xi L\left(t, \widetilde{x}(t), \widetilde{x}'(t)\right)\right\| dt < +\infty.$$

■

Para que a equação de Euler-Lagrange faça sentido, temos que ter que ambos $\nabla_x L$ e $\nabla_\xi L$ sejam integráveis ao longo da solução. A integrabilidade de $\nabla_\xi L$ e de $\nabla_x L$ ao longo de uma dada função não resulta do facto de o integral de L existir e ser finito quando calculado ao longo dessa função. Por exemplo, quando $L(\xi)$ é e^{ξ^2}, a integrabilidade de $t \to e^{\|x'(t)\|^2}$ não implica a integrabilidade de $t \to 2\|x'(t)\| e^{\|x'(t)\|^2}$.

O significado do raciocínio anterior é que para estabelecer a validade da equação de Euler-Lagrange temos que impor algumas condições com o objectivo de ter a integrabilidade dos termos $\nabla_{x'} L$ e $\nabla_x L$ ao longo da solução.

Corolário 5.1 *Sob as mesmas suposições do Teorema anterior (5.1.1.), para toda a variação* η, $\eta(a) = 0$, $\eta(b) = 0$ *e* $\eta' \in L^\infty(I)$, *temos*

$$\int_I \left[\left\langle \nabla_\xi L\left(t, \widetilde{x}(t), \widetilde{x}'(t)\right), \eta'(t)\right\rangle + \left\langle \nabla_x L\left(t, \widetilde{x}(t), \widetilde{x}'(t)\right), \eta(t)\right\rangle\right] dt = 0.$$

Demonstração. Pretendemos provar que, para toda a variação η em $AC(I)$, conjunto das funções absolutamente contínuas, com derivada limitada, tal que $\eta(a) = \eta(b) = 0$, temos

$$\int_I \left[\left\langle \nabla_\xi L\left(t, \widetilde{x}(t), \widetilde{x}'(t)\right), \eta'(t)\right\rangle + \left\langle \nabla_x L\left(t, \widetilde{x}(t), \widetilde{x}'(t)\right), \eta(t)\right\rangle\right] dt \geq 0.$$

Fixemos η e consideremos $\|\eta'(t)\| \leq k$ para quase todo t em I.

(1) Definamos C_n e k_n como no ponto (1) da prova do Teorema anterior (5.1.1.). Desta forma, $C_n = \overset{n}{\underset{j=1}{\cup}} k_j$, com $k_n = k_\varepsilon$ e $k_\varepsilon = I \setminus (O_1 \cup O_2)$ um conjunto fechado. Então C_n são conjuntos fechados, $C_n \subset C_{n+1}$.

Consideremos

$$v_n = \int_{I \setminus C_n} \eta'(t)\, dt.$$

Então,

$$\begin{aligned} \|v_n\| &= \left\| \int_{I \setminus C_n} \eta'(t)\, dt \right\| \\ &= \sup \left\| \eta'(t) \right\| .\mu(I \setminus C_n). \end{aligned}$$

Como a variação η tem derivada limitada, $\|\eta'(t)\| \leq k$ e vimos em (1) da prova do Teorema anterior (5.1.1.) que

$$\lim_{n \to +\infty} \mu(I \setminus C_n) = 0,$$

temos que

$$\lim_{n \to +\infty} \|v_n\| = 0.$$

Em particular, para $n \geq \sigma$, existe $B_n \subseteq C_1$ tal que $\mu(B_n) = \|v_n\|$. Consideremos

$$(\eta_n)'(t) = \begin{cases} 0 & \text{para } t \in I \setminus C_n \\ \eta'(t) & \text{para } t \in C_n \setminus B_n \\ \frac{v_n}{\|v_n\|} + \eta'(t) & \text{para } t \in B_n \end{cases}.$$

Obtemos

$$\begin{aligned} \int_I \eta_n'(t)\, dt &= \int_{I \setminus C_n} 0dt + \int_{C_n \setminus B_n} \eta'(t)\, dt + \int_{B_n} \left[\frac{v_n}{\|v_n\|} + \eta'(t) \right] dt \\ &= \int_{C_n} \eta'(t)\, dt - \int_{B_n} \eta'(t)\, dt + \int_{B_n} \frac{v_n}{\|v_n\|} dt + \int_{B_n} \eta'(t)\, dt \\ &= \int_{C_n} \eta'(t)\, dt + \frac{v_n}{\|v_n\|} .\mu(B_n) = \int_{C_n} \eta'(t)\, dt + v_n \\ &= \int_{C_n} \eta'(t)\, dt + \int_{I \setminus C_n} \eta'(t)\, dt = \int_I \eta'(t)\, dt = 0. \end{aligned}$$

Consequentemente, considerando $\eta_n(t) = \int_a^t \eta_n'(\tau)\ d\tau$, temos que as funções $\eta_n(t)$ são variações e que, para quase todo t em I,

$$\left\| \eta_n'(t) \right\| \leq (1 + k),$$

tal que

$$\|\eta_n\|_\infty = \sup_{t \in [a,b]} \left| \int_a^t \eta_n'(\tau)\, d\tau \right| \leq (1 + k)(b - a).$$

(2) Como no ponto (3) da prova do Teorema anterior (5.1.1.), existe $\delta_n > 0$ tal que, para $(t, x, \xi) \in C_n \times \mathbb{R}^N \times G$, com $d((t, x, \xi), (t, \widetilde{x}(t), \widetilde{x}'(t))) < \delta_n$, temos

$$\|\nabla_\xi L(t, x, \xi)\| < k_n + 1.$$

(3) Para $|\lambda| < \min\left\{\frac{1}{(1+k)\ (b-a)}, \frac{\delta_n}{(1+k)\ (b-a)}, \frac{\delta_n}{(1+k)}\right\}$, consideremos os integrais

$$\begin{aligned}
&\int_I \frac{1}{\lambda}\left[L\left(t, \widetilde{x}(t) + \lambda\eta_n(t), \widetilde{x}'(t) + \lambda\eta_n'(t)\right) - L\left(t, \widetilde{x}(t), \widetilde{x}'(t)\right)\right] dt \\
&= \int_I \frac{1}{\lambda}\left[L\left(t, \widetilde{x}(t) + \lambda\eta_n(t), \widetilde{x}'(t) + \lambda\eta_n'(t)\right) - L\left(t, \widetilde{x}(t) + \lambda\eta_n(t), \widetilde{x}'(t)\right)\right] dt \\
&+ \int_I \frac{1}{\lambda}\left[L\left(t, \widetilde{x}(t) + \lambda\eta_n(t), \widetilde{x}'(t)\right) - L\left(t, \widetilde{x}(t), \widetilde{x}'(t)\right)\right] dt \\
&= \int_{C_n} \frac{1}{\lambda}\left[L\left(t, \widetilde{x}(t) + \lambda\eta_n(t), \widetilde{x}'(t) + \lambda\eta_n'(t)\right) - L\left(t, \widetilde{x}(t) + \lambda\eta_n(t), \widetilde{x}'(t)\right)\right] dt \\
&+ \int_I \frac{1}{\lambda}\left[L\left(t, \widetilde{x}(t) + \lambda\eta_n(t), \widetilde{x}'(t)\right) - L\left(t, \widetilde{x}(t), \widetilde{x}'(t)\right)\right] dt.
\end{aligned}$$

Para quase todo $t \in C_n$, existe $\zeta_\lambda(t) \in (0, \lambda)$ tal que

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\lambda}\left[L\left(t, \widetilde{x}(t) + \lambda\eta_n(t), \widetilde{x}'(t) + \lambda\eta_n'(t)\right) - L\left(t, \widetilde{x}(t) + \lambda\eta_n(t), \widetilde{x}'(t)\right)\right] \\
&= \left\langle \nabla_\xi L\left(t, \widetilde{x}(t) + \lambda\eta_n(t), \widetilde{x}'(t) + \zeta_\lambda(t)\eta_n'(t)\right), \eta_n'(t)\right\rangle \\
&\leq \left\|\nabla_\xi L\left(t, \widetilde{x}(t) + \lambda\eta_n(t), \widetilde{x}'(t) + \zeta_\lambda(t)\eta_n'(t)\right)\right\| (1+k),
\end{aligned}$$

já que $\|\eta_n'(t)\| \leq (1+k)$,

$$< (k_n + 1)(1+k),$$

uma vez que $\|\nabla_\xi L(t, x, \xi)\| < k_n + 1$. Consequentemente, podemos aplicar o Teorema da Convergência Dominada para obter que

$$\begin{aligned}
&\lim_{\lambda\to 0}\int_I \frac{1}{\lambda}\left[L\left(t, \widetilde{x}(t) + \lambda\eta_n(t), \widetilde{x}'(t) + \lambda\eta_n'(t)\right) - L\left(t, \widetilde{x}(t) + \lambda\eta_n(t), \widetilde{x}'(t)\right)\right] dt \\
&= \int_{C_n} \left\langle \nabla_\xi L\left(t, \widetilde{x}(t), \widetilde{x}'(t)\right), \eta_n'(t)\right\rangle\ dt \\
&= \int_I \left\langle \nabla_\xi L\left(t, \widetilde{x}(t), \widetilde{x}'(t)\right), \eta_n'(t)\right\rangle\ dt.
\end{aligned}$$

(4) Seguindo a prova do ponto (5) do Teorema anterior (5.1.1.), obtemos que

$$\begin{aligned}
&\lim_{\lambda\to 0}\sup\int_I \frac{1}{\lambda}\ \left[L\left(t, \widetilde{x}(t) + \lambda\eta_n(t), \widetilde{x}'(t)\right) - L\left(t, \widetilde{x}(t), \widetilde{x}'(t)\right)\right]\ dt \\
&\leq \int_I \left\langle \nabla_x L\left(t, \widetilde{x}(t), \widetilde{x}'(t)\right), \eta_n(t)\right\rangle dt.
\end{aligned}$$

(5) Uma vez que $\widetilde{x}$ é um minimizante, temos

$$\begin{aligned}
0 &\leq \int_I \left\langle \nabla_\xi L\left(t, \widetilde{x}(t), \widetilde{x}'(t)\right), \eta_n'(t)\right\rangle dt \\
&+ \lim_{\lambda\to 0}\sup\int_I \frac{1}{\lambda}\left[L\left(t, \widetilde{x}(t) + \lambda\eta_n(t), \widetilde{x}'(t)\right) - L\left(t, \widetilde{x}(t), \widetilde{x}'(t)\right)\right] dt \\
&\leq \int_I \left[\left\langle \nabla_\xi L\left(t, \widetilde{x}(t), \widetilde{x}'(t)\right), \eta_n'(t)\right\rangle + \left\langle \nabla_x L\left(t, \widetilde{x}(t), \widetilde{x}'(t)\right), \eta_n(t)\right\rangle\right] dt.
\end{aligned}$$

(6) Uma vez que

$$\lim_{n\to+\infty}\eta_n'(t) = \eta'(t)$$

e

$$\left\|\nabla_{\xi}L\left(t,\widetilde{x}\left(t\right),\widetilde{x}'\left(t\right)\right)\right\|\left\|\eta_n'\left(t\right)\right\|\leq\left\|\nabla_{\xi}L\left(t,\widetilde{x}\left(t\right),\widetilde{x}'\left(t\right)\right)\right\|\left(1+k\right)$$

e

$$\lim_{n\to+\infty}\eta_n\left(t\right)=\eta\left(t\right)$$

e

$$\left\|\nabla_{x}L\left(t,\widetilde{x}\left(t\right),\widetilde{x}'\left(t\right)\right)\right\|\left\|\eta_n\left(t\right)\right\|\leq\left\|\nabla_{x}L\left(t,\widetilde{x}\left(t\right),\widetilde{x}'\left(t\right)\right)\right\|\left(1+k\right)\left(b-a\right),$$

pela Convergência Dominada obtemos

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to+\infty}\int_I\left\langle\nabla_{\xi}L\left(t,\widetilde{x}\left(t\right),\widetilde{x}'\left(t\right)\right),\eta_n'\left(t\right)\right\rangle dt\\&=\int_I\left\langle\nabla_{\xi}L\left(t,\widetilde{x}\left(t\right),\widetilde{x}'\left(t\right)\right),\eta'\left(t\right)\right\rangle dt\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to+\infty}\int_I\left\langle\nabla_{x}L\left(t,\widetilde{x}\left(t\right),\widetilde{x}'\left(t\right)\right),\eta_n\left(t\right)\right\rangle dt\\&=\int_I\left\langle\nabla_{x}L\left(t,\widetilde{x}\left(t\right),\widetilde{x}'\left(t\right)\right),\eta\left(t\right)\right\rangle dt.\end{aligned}$$

Segue-se então que

$$\int_I\left[\left\langle\nabla_{\xi}L\left(t,\widetilde{x}\left(t\right),\widetilde{x}'\left(t\right)\right),\eta'\left(t\right)\right\rangle+\left\langle\nabla_{x}L\left(t,\widetilde{x}\left(t\right),\widetilde{x}'\left(t\right)\right),\eta\left(t\right)\right\rangle\right]dt\geq 0.$$

■

No Teorema que se segue provamos um resultado adicional sobre regularidade para o Lagrangeano, avaliado ao longo do minimizante.

Teorema 5.1.2 *Sob os mesmos pressupostos do Teorema* 5.1.1., *a aplicação* $t\to\nabla_{\xi}L\left(t,\widetilde{x}\left(t\right),\widetilde{x}'\left(t\right)\right)$ *está em* $L^{\infty}\left(I\right)$.

Demonstração. Usando um processo iterativo, iremos provar que para todo p em $\mathbb{N}$, $\nabla_{\xi}L\left(.,\widetilde{x}\left(.\right),\widetilde{x}'\left(.\right)\right)$ está em $L^p\left(I\right)$. Uma vez que $L^p\left(I\right)$ são encaixados, isto prova que

$$\nabla_{\xi}L\left(.,\widetilde{x}\left(.\right),\widetilde{x}'\left(.\right)\right)\in\bigcap_{p\geq 1}L^p\left(I\right).$$

Simultaneamente, iremos provar que existe uma constante $k>0$ tal que, para todo $1\leq p<+\infty$, $\left\|\nabla_{\xi}L\right\|_p\leq k$, portanto provando que $\nabla_{\xi}L\left(.,\widetilde{x}\left(.\right),\widetilde{x}'\left(.\right)\right)$ está em $L^{\infty}\left(I\right)$.

Pelo Teorema 5.1.1., sabemos que $\nabla_{\xi}L\left(.,\widetilde{x}\left(.\right),\widetilde{x}'\left(.\right)\right)$ está em $L^1\left(I\right)$. Fixemos $p\in\mathbb{N}$ e suponhamos que $\nabla_{\xi}L\left(.,\widetilde{x}\left(.\right),\widetilde{x}'\left(.\right)\right)\in L^p\left(I\right)$. Pretendemos provar que

$$\nabla_{\xi}L\left(.,\widetilde{x}\left(.\right),\widetilde{x}'\left(.\right)\right)\in L^{p+1}\left(I\right).$$

Podemos assumir que $\left\|\nabla_{\xi}L\right\|_p\neq 0$. Defina-se C_n, A_n, k_n como no ponto (1) da prova do Teorema 5.1.1. Para todo $n>1$, consideremos

$$v_n^p=\frac{(b-a)}{2\left\|\nabla_{\xi}L\right\|_p^p}\int_{A_n}\nabla_{\xi}L\left(t,\widetilde{x}\left(t\right),\widetilde{x}'\left(t\right)\right)\left\|\nabla_{\xi}L\left(t,\widetilde{x}\left(t\right),\widetilde{x}'\left(t\right)\right)\right\|^{p-1}dt.$$

Uma vez que $\mu(C_1) \geq \frac{b-a}{2}$ e

$$\begin{aligned}\|v_n^p\| &= \left\| \frac{(b-a)}{2\|\nabla_\xi L\|_p^p} \int_{A_n} \nabla_\xi L\left(t, \widetilde{x}(t), \widetilde{x}'(t)\right) \left\|\nabla_\xi L\left(t, \widetilde{x}(t), \widetilde{x}'(t)\right)\right\|^{p-1} dt \right\| \\ &\leq \frac{(b-a)}{2\|\nabla_\xi L\|_p^p} \int_{A_n} \left\|\nabla_\xi L\left(t, \widetilde{x}(t), \widetilde{x}'(t)\right)\right\|^p dt \leq \frac{(b-a)}{2},\end{aligned}$$

existe um conjunto $B_n^p \subset C_1$ tal que $\mu(B_n^p) = \|v_n^p\|$, tal que

$$v_n^p = \frac{(b-a)}{2\|\nabla_\xi L\|_p^p} \int_{A_n} \nabla_\xi L\left(t, \widetilde{x}(t), \widetilde{x}'(t)\right) \left\|\nabla_\xi L\left(t, \widetilde{x}(t), \widetilde{x}'(t)\right)\right\|^{p-1} dt,$$

que é equivalente a

$$\frac{2\|\nabla_\xi L\|_p^p}{(b-a)}.v_n^p = \int_{A_n} \nabla_\xi L\left(t, \widetilde{x}(t), \widetilde{x}'(t)\right) \left\|\nabla_\xi L\left(t, \widetilde{x}(t), \widetilde{x}'(t)\right)\right\|^{p-1} dt,$$

e como

$$\int_{B_n^p} \frac{v_n^p}{\|v_n^p\|} dt = \frac{v_n^p}{\|v_n^p\|} \mu(B_n^p) = v_n^p,$$

vem que

$$\frac{2\|\nabla_\xi L\|_p^p}{(b-a)} \int_{B_n^p} \frac{v_n^p}{\|v_n^p\|} dt = \int_{A_n} \nabla_\xi L\left(t, \widetilde{x}(t), \widetilde{x}'(t)\right) \left\|\nabla_\xi L\left(t, \widetilde{x}(t), \widetilde{x}'(t)\right)\right\|^{p-1} dt.$$

Consideremos

$$\begin{aligned}(\theta_n^p)'(t) = &-\nabla_\xi L\left(t, \widetilde{x}(t), \widetilde{x}'(t)\right) \left\|\nabla_\xi L\left(t, \widetilde{x}(t), \widetilde{x}'(t)\right)\right\|^{p-1} \chi_{A_n}(t) \\ &+ \frac{2\|\nabla_\xi L\|_p^p}{(b-a)} \frac{v_n^p}{\|v_n^p\|} \chi_{B_n^p}(t)\end{aligned}$$

e

$$\theta_n^p(t) = \int_a^t (\theta_n^p)'(\tau)\, d\tau.$$

Obtemos que

$$\begin{aligned}\|\theta_n^p\|_\infty &= \left\| \int_a^t (\theta_n^p)'(\tau)\, d\tau \right\|_\infty = \sup_{t\in I} \int_a^t \left|(\theta_n^p)'(\tau)\right| d\tau \\ &= \sup_{t\in I} \int_a^t \left| -\nabla_\xi L\left(\tau, \widetilde{x}(\tau), \widetilde{x}'(\tau)\right) \left\|\nabla_\xi L\left(\tau, \widetilde{x}(\tau), \widetilde{x}'(\tau)\right)\right\|^{p-1} \chi_{A_n}(\tau) + \frac{2\|\nabla_\xi L\|_p^p}{(b-a)} \frac{v_n^p}{\|v_n^p\|} \chi_{B_n^p}(\tau) \right| d\tau \\ &\leq \int_{A_n} \left| -\nabla_\xi L\left(t, \widetilde{x}(t), \widetilde{x}'(t)\right) \left\|\nabla_\xi L\left(t, \widetilde{x}(t), \widetilde{x}'(t)\right)\right\|^{p-1} \right| dt + \int_{B_n^p} \left| \frac{2\|\nabla_\xi L\|_p^p}{(b-a)} \frac{v_n^p}{\|v_n^p\|} \right| dt.\end{aligned}$$

Como

$$\frac{2\|\nabla_\xi L\|_p^p}{(b-a)} \int_{B_n^p} \frac{v_n^p}{\|v_n^p\|} dt = \int_{A_n} \nabla_\xi L\left(t, \widetilde{x}(t), \widetilde{x}'(t)\right) \left\|\nabla_\xi L\left(t, \widetilde{x}(t), \widetilde{x}'(t)\right)\right\|^{p-1} dt,$$

obtemos então que

$$\|\theta_n^p\|_\infty \leq 2 \int_{A_n} \left\|\nabla_\xi L\left(t, \widetilde{x}(t), \widetilde{x}'(t)\right)\right\|^p dt.$$

As variações θ_n^p têm derivadas limitadas, portanto podemos aplicar o Corolário anterior, para obter que

$$\int_I \left[\left\langle \nabla_\xi L\left(t, \widetilde{x}(t), \widetilde{x}'(t)\right), (\theta_n^p)'(t)\right\rangle + \left\langle \nabla_x L\left(t, \widetilde{x}(t), \widetilde{x}'(t)\right), \theta_n^p(t)\right\rangle\right] dt = 0.$$

Considerando também

$$\begin{aligned}(\theta_n^p)'(t) &= -\nabla_\xi L\left(t, \widetilde{x}(t), \widetilde{x}'(t)\right) \left\|\nabla_\xi L\left(t, \widetilde{x}(t), \widetilde{x}'(t)\right)\right\|^{p-1} \chi_{A_n}(t) \\ &\quad + \frac{2\left\|\nabla_\xi L\right\|_p^p}{(b-a)} \frac{v_n^p}{\|v_n^p\|} \chi_{B_n^p}(t),\end{aligned}$$

segue-se que

$$\begin{aligned}&\int_{A_n} \left\|\nabla_\xi L\left(t, \widetilde{x}(t), \widetilde{x}'(t)\right)\right\|^{p+1} dt \\ &= \frac{2\left\|\nabla_\xi L\right\|_p^p}{(b-a)} \int_{B_n^p} \left\langle \nabla_\xi L\left(t, \widetilde{x}(t), \widetilde{x}'(t)\right), \frac{v_n^p}{\|v_n^p\|}\right\rangle dt \\ &+ \int_I \left\langle \nabla_x L\left(t, \widetilde{x}(t), \widetilde{x}'(t)\right), \theta_n^p(t)\right\rangle dt \\ &\leq k_1 \int_{A_n} \left\|\nabla_\xi L\left(t, \widetilde{x}(t), \widetilde{x}'(t)\right)\right\|^p dt + 2\int_{A_n} \left\|\nabla_\xi L\left(t, \widetilde{x}(t), \widetilde{x}'(t)\right)\right\|^p dt \\ &\cdot \int_I \left\|\nabla_x L\left(t, \widetilde{x}(t), \widetilde{x}'(t)\right)\right\| dt \\ &\leq \widetilde{C} \int_{A_n} \left\|\nabla_\xi L\left(t, \widetilde{x}(t), \widetilde{x}'(t)\right)\right\|^p dt,\end{aligned}$$

onde $\widetilde{C}$ é independente de n e p (suponhamos $\widetilde{C} \geq 1$). A sucessão de aplicações

$$\left(\left\|\nabla_\xi L\left(t, \widetilde{x}(t), \widetilde{x}'(t)\right)\right\|^{p+1} \chi_{\left\{\bigcup_{n=2}^{m} A_n\right\}}(t)\right)_m$$

converge monotonamente para

$$\left\|\nabla_\xi L\left(t, \widetilde{x}(t), \widetilde{x}'(t)\right)\right\|^{p+1} \chi_{\left\{\bigcup_{n>1} A_n\right\}}(t),$$

e cada integral

$$\int_I \left\|\nabla_\xi L\left(t, \widetilde{x}(t), \widetilde{x}'(t)\right)\right\|^{p+1} \chi_{\left\{\bigcup_{n=2}^{m} A_n\right\}}(t)\, dt$$

é limitado pela mesma constante,

$$\widetilde{C} \sum_{n=2}^{\infty} \int_{A_n} \left\|\nabla_\xi L\left(t, \widetilde{x}(t), \widetilde{x}'(t)\right)\right\|^p dt = \widetilde{C} \int_{I \setminus C_1} \left\|\nabla_\xi L\left(t, \widetilde{x}(t), \widetilde{x}'(t)\right)\right\|^p dt.$$

Consequentemente, pelo Teorema da Convergência Monótona,

$$\int_{I \setminus C_1} \left\|\nabla_\xi L\left(t, \widetilde{x}(t), \widetilde{x}'(t)\right)\right\|^{p+1} dt \leq \widetilde{C} \int_{I \setminus C_1} \left\|\nabla_\xi L\left(t, \widetilde{x}(t), \widetilde{x}'(t)\right)\right\|^p dt < +\infty.$$

Dado que $C_n = \bigcup_{j=1}^{n} k_j$, em C_1, $\|\nabla_\xi L(t, \widetilde{x}(t), \widetilde{x}'(t))\| < k_1$, provando que

$$\nabla_\xi L\left(., \widetilde{x}(.), \widetilde{x}'(.)\right) \in L^{p+1}(I).$$

Mais ainda, obtivemos também que

$$\int_{I \setminus C_1} \left\|\nabla_\xi L\left(t, \widetilde{x}(t), \widetilde{x}'(t)\right)\right\|^{p+1} dt \leq \widetilde{C}^p \int_{I \setminus C_1} \left\|\nabla_\xi L\left(t, \widetilde{x}(t), \widetilde{x}'(t)\right)\right\| dt,$$

tal que

$$\left(\int_{I \setminus C_1} \left\|\nabla_\xi L\left(t, \widetilde{x}(t), \widetilde{x}'(t)\right)\right\|^{p+1} dt\right)^{\frac{1}{(p+1)}} \leq \widetilde{C}S,$$

onde $S = \max\left\{1, \int_{I \setminus C_1} \|\nabla_\xi L(t, \widetilde{x}(t), \widetilde{x}'(t))\| \, dt\right\}$. Consideremos $T = \max\{1, \mu(C_1)\}$, temos que, para todo $p \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
\|\nabla_\xi L\|_{(p+1)} &= \left(\int_{C_1} \left\|\nabla_\xi L\left(t, \widetilde{x}(t), \widetilde{x}'(t)\right)\right\|^{p+1} dt + \int_{I \setminus C_1} \left\|\nabla_\xi L\left(t, \widetilde{x}(t), \widetilde{x}'(t)\right)\right\|^{p+1} dt\right)^{\frac{1}{(p+1)}} \\
&\leq \left(k_1^{(p+1)}.\mu(C_1) + \int_{I \setminus C_1} \left\|\nabla_\xi L\left(t, \widetilde{x}(t), \widetilde{x}'(t)\right)\right\|^{p+1} dt\right)^{\frac{1}{(p+1)}} \\
&\leq k_1.\mu(C_1)^{\frac{1}{(p+1)}} + \left(\int_{I \setminus C_1} \left\|\nabla_\xi L\left(t, \widetilde{x}(t), \widetilde{x}'(t)\right)\right\|^{p+1} dt\right)^{\frac{1}{(p+1)}} \\
&\leq k_1 T + \widetilde{C}S = k,
\end{aligned}$$

portanto, provou-se que $\nabla_\xi L(t, \widetilde{x}(t), \widetilde{x}'(t)) \in L^\infty(I)$. ■

Corolário 5.2 *Sob as mesmas condições do Teorema* 5.1.1., *para toda a variação* η, $\eta(a) = 0$, $\eta(b) = 0$ *e* $\eta' \in L^1(I)$, *temos*

$$\int_I \left[\left\langle \nabla_\xi L\left(t, \widetilde{x}(t), \widetilde{x}'(t)\right), \eta'(t)\right\rangle + \left\langle \nabla_x L\left(t, \widetilde{x}(t), \widetilde{x}'(t)\right), \eta(t)\right\rangle\right] dt = 0.$$

Como consequência, $t \to \nabla_\xi L(t, \widetilde{x}(t), \widetilde{x}'(t))$ *é absolutamente contínua.*

Demonstração. Iremos provar que, para toda a variação η em $AC(I)$, tal que $\eta(a) = \eta(b) = 0$, temos

$$\int_I \left[\left\langle \nabla_\xi L\left(t, \widetilde{x}(t), \widetilde{x}'(t)\right), \eta'(t)\right\rangle + \left\langle \nabla_x L\left(t, \widetilde{x}(t), \widetilde{x}'(t)\right), \eta(t)\right\rangle\right] dt \geq 0.$$

(1) Fixemos uma variação η. Através dos mesmos passos do ponto (1) da prova do Teorema 5.1.1., para todo $n \in \mathbb{N}$, podemos definir um conjunto fechado C_n tal que nele, η' é contínua, $\widetilde{x}'$ é contínua com valores em G, $\nabla_\xi L$ é contínua em $C_n \times \mathbb{R}^N \times G$ e $\lim_{n \to +\infty} \mu(I \setminus C_n) = 0$. Em particular, segue-se que existem constantes k_n e $c_n > 0$, tais que, para todo $t \in C_n$,

$$\left\|\nabla_\xi L\left(t, \widetilde{x}(t), \widetilde{x}'(t)\right)\right\| < k_n \text{ e } \left\|\eta'(t)\right\| < c_n.$$

Definamos v_n, B_n, η_n' e η_n como na prova do Corolário anterior. Dado que, para todo $t \in I$, $\|\eta_n'(t)\| \leq 1 + \|\eta'(t)\|$, segue-se que

$$\left\|\eta_n'\right\|_1 \leq (b-a) + \left\|\eta'\right\|_1.$$

Mais ainda,

$$\|\eta_n\|_\infty \leq \left\|\eta_n'\right\|_1 \leq (b-a) + \left\|\eta'\right\|_1.$$

(2) Como no ponto (3) da prova do Teorema 5.1.1., existe $\delta_n > 0$ tal que, para $(t,x,\xi) \in C_n \times \mathbb{R}^N \times G$, com

$$d\left((t,x,\xi), \left(t, \widetilde{x}(t), \widetilde{x}'(t)\right)\right) < \delta_n,$$

temos

$$\|\nabla_\xi L(t,x,\xi)\| < k_n + 1.$$

(3) Para $|\lambda| < \min\left\{\frac{1}{\left((b-a)+\|\eta'\|_1\right)}, \frac{\delta_n}{\left((b-a)+\|\eta'\|_1\right)}, \frac{\delta_n}{(c_n+1)}\right\}$, considerem-se os integrais

$$\begin{aligned}
&\int_I \frac{1}{\lambda}\left[L\left(t, \widetilde{x}(t) + \lambda\eta_n(t), \widetilde{x}'(t) + \lambda\eta_n'(t)\right) - L\left(t, \widetilde{x}(t), \widetilde{x}'(t)\right)\right] dt \\
&= \int_I \frac{1}{\lambda}\left[L\left(t, \widetilde{x}(t) + \lambda\eta_n(t), \widetilde{x}'(t) + \lambda\eta_n'(t)\right) - L\left(t, \widetilde{x}(t) + \lambda\eta_n(t), \widetilde{x}'(t)\right)\right] dt \\
&+ \int_I \frac{1}{\lambda}\left[L\left(t, \widetilde{x}(t) + \lambda\eta_n(t), \widetilde{x}'(t)\right) - L\left(t, \widetilde{x}(t), \widetilde{x}'(t)\right)\right] dt \\
&= \int_{C_n} \frac{1}{\lambda}\left[L\left(t, \widetilde{x}(t) + \lambda\eta_n(t), \widetilde{x}'(t) + \lambda\eta_n'(t)\right) - L\left(t, \widetilde{x}(t) + \lambda\eta_n(t), \widetilde{x}'(t)\right)\right] dt \\
&+ \int_I \frac{1}{\lambda}\left[L\left(t, \widetilde{x}(t) + \lambda\eta_n(t), \widetilde{x}'(t)\right) - L\left(t, \widetilde{x}(t), \widetilde{x}'(t)\right)\right] dt.
\end{aligned}$$

Para todo $t \in C_n$, existe $\zeta_\lambda(t) \in (0,\lambda)$ tal que

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\lambda}\left[L\left(t, \widetilde{x}(t) + \lambda\eta_n(t), \widetilde{x}'(t) + \lambda\eta_n'(t)\right) - L\left(t, \widetilde{x}(t) + \lambda\eta_n(t), \widetilde{x}'(t)\right)\right] \\
&= \left\langle \nabla_\xi L\left(t, \widetilde{x}(t) + \lambda\eta_n(t), \widetilde{x}'(t) + \zeta_\lambda(t)\eta_n'(t)\right), \eta_n'(t)\right\rangle \\
&\leq \left\|\nabla_\xi L\left(t, \widetilde{x}(t) + \lambda\eta_n(t), \widetilde{x}'(t) + \zeta_\lambda(t)\eta_n'(t)\right)\right\|_{c_n} \\
&< (k_n+1)\, c_n,
\end{aligned}$$

uma vez que $\|\nabla_\xi L(t,x,\xi)\| < k_n$ e $\|\eta'(t)\| < c_n$, com $\|\eta_n'(t)\| \leq 1 + \|\eta'(t)\|$.

Consequentemente, podemos aplicar o Teorema da Convergência Dominada para obter que

$$\begin{aligned}
&\lim_{\lambda\to 0} \int_I \frac{1}{\lambda}\left[L\left(t, \widetilde{x}(t) + \lambda\eta_n(t), \widetilde{x}'(t) + \lambda\eta_n'(t)\right) - L\left(t, \widetilde{x}(t) + \lambda\eta_n(t), \widetilde{x}'(t)\right)\right] dt \\
&= \int_{C_n} \left\langle \nabla_\xi L\left(t, \widetilde{x}(t), \widetilde{x}'(t)\right), \eta_n'(t)\right\rangle dt \\
&= \int_I \left\langle \nabla_\xi L\left(t, \widetilde{x}(t), \widetilde{x}'(t)\right), \eta_n'(t)\right\rangle dt.
\end{aligned}$$

(4) Seguindo o ponto (5) da prova do Teorema 5.1.1., obtemos que

$$\begin{aligned}
&\lim_{\lambda\to 0} \int_I \frac{1}{\lambda}\left[L\left(t, \widetilde{x}(t) + \lambda\eta_n(t), \widetilde{x}'(t)\right) - L\left(t, \widetilde{x}(t), \widetilde{x}'(t)\right)\right] dt \\
&\leq \int_I \left\langle \nabla_x L\left(t, \widetilde{x}(t), \widetilde{x}'(t)\right), \eta_n(t)\right\rangle dt
\end{aligned}$$

e, uma vez que $\widetilde{x}$ é um minimizante, temos

$$\begin{aligned}
0 &\leq \int_I \left\langle \nabla_\xi L\left(t, \widetilde{x}(t), \widetilde{x}'(t)\right), \eta_n'(t)\right\rangle dt \\
&+ \limsup_{\lambda\to 0} \int_I \frac{1}{\lambda}\left[L\left(t, \widetilde{x}(t) + \lambda\eta_n(t), \widetilde{x}'(t)\right) - L\left(t, \widetilde{x}(t), \widetilde{x}'(t)\right)\right] dt \\
&\leq \int_I \left[\left\langle \nabla_\xi L\left(t, \widetilde{x}(t), \widetilde{x}'(t)\right), \eta_n'(t)\right\rangle + \left\langle \nabla_x L\left(t, \widetilde{x}(t), \widetilde{x}'(t)\right), \eta_n(t)\right\rangle\right] dt.
\end{aligned}$$

(5) Finalmente temos

$$\lim_{n\to+\infty} \eta_n'(t) = \eta'(t)$$

e

$$\left\|\nabla_\xi L\left(t, \widetilde{x}(t), \widetilde{x}'(t)\right)\right\| \left\|\eta_n'(t)\right\| \leq \left\|\nabla_\xi L\left(t, \widetilde{x}(t), \widetilde{x}'(t)\right)\right\|_\infty \left(1 + \left\|\eta'(t)\right\|\right),$$

e

$$\lim_{n\to+\infty} \eta_n(t) = \eta(t)$$

e

$$\left\|\nabla_x L\left(t, \widetilde{x}(t), \widetilde{x}'(t)\right)\right\| \left\|\eta_n(t)\right\| \leq \left\|\nabla_x L\left(t, \widetilde{x}(t), \widetilde{x}'(t)\right)\right\| \left((b-a) + \left\|\eta'(t)\right\|_1\right),$$

tal que, pela Convergência Dominada obtemos

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to+\infty} \int_I \left\langle \nabla_\xi L\left(t, \widetilde{x}(t), \widetilde{x}'(t)\right), \eta_n'(t)\right\rangle dt \\
&= \int_I \left\langle \nabla_\xi L\left(t, \widetilde{x}(t), \widetilde{x}'(t)\right), \eta'(t)\right\rangle dt
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to+\infty} \int_I \left\langle \nabla_x L\left(t, \widetilde{x}(t), \widetilde{x}'(t)\right), \eta_n(t)\right\rangle dt \\
&= \int_I \left\langle \nabla_x L\left(t, \widetilde{x}(t), \widetilde{x}'(t)\right), \eta(t)\right\rangle dt.
\end{aligned}$$

Consequentemente, segue-se que

$$\int_I \left[\left\langle \nabla_\xi L\left(t, \widetilde{x}(t), \widetilde{x}'(t)\right), \eta'(t)\right\rangle + \left\langle \nabla_x L\left(t, \widetilde{x}(t), \widetilde{x}'(t)\right), \eta(t)\right\rangle\right] dt \geq 0.$$

A continuidade absoluta de $t \to \nabla_\xi L\left(t, \widetilde{x}(t), \widetilde{x}'(t)\right)$ é clássica. ■

5.2 Não ocorrência do Fenómeno de Lavrentiev

De seguida apresentamos um teorema de aproximação geral para o funcional J que implica a não ocorrência do Fenómeno de Lavrentiev para Lagrangeanos autónomos e uma classe de Lagrangeanos não autónomos, sem assumir nenhuma condição de crescimento (ver [15], [23], [10]). O nosso propósito é apresentar um teorema geral sobre reparametrizações de um intervalo nele próprio, que estabelece que, dada uma função absolutamente contínua x num intervalo $[a, b]$ e $\varepsilon > 0$, sob condições apropriadas sobre L e ψ, existe uma reparametrização $s = s_\varepsilon(t)$ de $[a, b]$ tal que a composição $x_\varepsilon = x \circ s_\varepsilon$ é imediatamente Lipschitziana e é tal que

$$\int_a^b L\left(x_\varepsilon(t), x_\varepsilon'(t)\right) \psi\left(t, x_\varepsilon(t)\right) dt \leq \int_a^b L\left(x(t), x'(t)\right) \psi\left(t, x(t)\right) dt + \varepsilon.$$

Uma aplicação do Teorema que apresentamos a seguir é a não ocorrência do Fenómeno de Lavrentiev para uma classe de funcionais do Cálculo das Variações. No caso autónomo, condições suficientes para prevenir a ocorrência deste fenómeno foram dadas por vários autores, impondo condições de crescimento suficientes sobre o Lagrangeano L para assegurar que as próprias soluções (existem e) são Lipschitzianas, como em [8], em [3] ou em [12] ou assumindo algumas condições de regularidade sobre o Lagrangeano como em [2] ou em [4]. O resultado que apresentamos aplica-se a problemas não autónomos. O Teorema que se segue, Teorema de Reparametrização, é um dos resultados principais, apresentado em [15] e [10].

Teorema 5.2.1 *Seja a trajectória* $x : [a,b] \to \mathbb{R}^N$ *absolutamente contínua e considere-se o conjunto* $C = \{x(t) : t \in [a,b]\}$ *. Seja* $L : C \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ *contínuo e tal que* $L(x,.)$ *é convexo, e seja* $\psi : [a,b] \times C \to [c,+\infty)$ *contínua, com* $c > 0$*. Então:*

(i) *existe em* $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ *o seguinte integral*

$$J(x) = \int_a^b L\left(x(t), x'(t)\right) \psi(t, x(t))\, dt;$$

(ii) *dado qualquer* $\varepsilon > 0$, *existe uma função Lipschitziana* x_ε, *uma reparametrização de* x, *tal que* $x(a) = x_\varepsilon(a)$, $x(b) = x_\varepsilon(b)$ *e*

$$\int_a^b L\left(x_\varepsilon(t), x_\varepsilon'(t)\right) \psi(t, x_\varepsilon(t))\, dt \leq \int_a^b L\left(x(t), x'(t)\right) \psi(t, x(t))\, dt + \varepsilon,$$

ou seja, $J(x_\varepsilon) \leq J(x) + \varepsilon$.

Observação 5.1 *O único pressuposto técnico do Teorema anteriormente enunciado é a hipótese que* ψ *é limitada inferiormente por uma constante positiva. No entanto, na prova deste Teorema, este pressuposto é usado apenas para concluir que* $\int_a^b L(x(t), x'(t))\, dt$ *é finito. Consequentemente, o Teorema verifica-se sob o seguinte pressuposto mais geral:* $\psi(t,x) \geq 0$ *e* $\int_a^b L(x(t), x'(t))\, dt < +\infty$.

Para verificar como são exigentes estes pressupostos, considere-se o seguinte exemplo (de Manià). Considere-se o problema de minimizar o funcional

$$\int_0^1 \left[t - x^3(t)\right]^2 x'^6(t)\, dt,\ x(0) = 0, x(1) = 1.$$

Então o ínfimo tomado no espaço das funções absolutamente contínuas (atingido em $x(t) = \sqrt[3]{t}$) é estritamente inferior ao ínfimo tomado no espaço das trajectórias Lipschitzianas.

Como uma consequência, o resultado do Teorema anterior não se verifica para o funcional de Manià calculado ao longo de $x(t) = \sqrt[3]{t}$.

Considerando $\psi(t,x) = \left[t - x^3\right]^2$ e $L(x,\xi) = \xi^6$, vemos que $\psi \geq 0$ (mas não se verifica $\psi \geq c > 0$) e que

$$\int_0^1 x'^6(t)\, dt = \int_0^1 1/\left(3^6 t^4\right) dt = +\infty.$$

Consequentemente, os pressupostos $\psi(t,x) \geq 0$ e $\int_a^b L(x(t), x'(t))\, dt < +\infty$ não são possíveis de serem deixadas de lado.

Aplicações: a não ocorrência do Fenómeno de Lavrentiev

Os teoremas que se seguem apresentam algumas aplicações do Teorema 5.2.1 que previnem a ocorrência do Fenómeno de Lavrentiev para diferentes classes de Problemas de Mínimo. Denote-se por *Lip* $([a,b])$ o espaço de todas as funções Lipschitzianas definidas em $[a,b]$ para

$\mathbb{R}^N$ e por $AC([a,b])$, o espaço de todas as funções absolutamente contínuas de $[a,b]$ para $\mathbb{R}^N$. Seja $E \subset \mathbb{R}^N$ e considere-se o funcional

$$J(x) = \int_a^b L\left(x(t), x'(t)\right) \psi(t, x(t))\, dt.$$

Notação 2 *Vamos indicar por*

$$\inf (P)_\infty := \inf \{J(x) : x \in Lip([a,b]),\ x(t) \in E,\ x(a) = A,\ x(b) = B\}$$

e

$$\inf (P)_1 := \inf \{J(x) : x \in AC([a,b]),\ x(t) \in E,\ x(a) = A,\ x(b) = B\}.$$

Teorema 5.2.2 *Seja $L : E \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ contínuo e tal que $L(x,.)$ é convexo e seja $\psi : [a,b] \times E \to [c, +\infty)$ contínua, com $c > 0$. Então*

$$\inf (P)_\infty = \inf (P)_1.$$

No Teorema anterior, E pode ser qualquer subconjunto de $\mathbb{R}^N$ tal que o conjunto das funções absolutamente contínuas com valores em E e satisfazendo as condições de fronteira é não vazio. Em particular, $x \in E$ pode descrever um problema com um obstáculo ou impedimento.

Como exemplo de uma aplicação a um problema com uma restrição diferente de um obstáculo, consideremos $E = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ e chamemos $\inf \left(P^i\right)_\infty$ o ínfimo de

$$\{J(x) : x \in Lip,\ x(t) \in E,\ x(a) = \ x(b)\},$$

com número de rotação $i(x) = k$. Chamemos $\inf \left(P^i\right)_1$ o ínfimo do mesmo problema mas para $x \in AC$.

Teorema 5.2.3 *Seja $L : E \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ contínuo e tal que $L(x,.)$ é convexo e seja $\psi : [a,b] \times E \to [c, +\infty)$ contínua, com $c > 0$. Então*

$$\inf \left(P^i\right)_\infty = \inf \left(P^i\right)_1.$$

Demonstração. Como é bem conhecido, o número de rotação i é independente das parametrizações de x. ■

O teorema anterior aplica-se em particular ao caso $L(x,\xi) = |\xi|^2/2 + 1/|x|$, o caso do potencial Newtoniano gerado por um corpo fixo na origem. Gordon em [20] provou que órbitas Keplerianas são mínimas para este problema com $k = 1$.

Como exemplo de uma outra aplicação, consideramos o caso vectorial. Seja $L : E \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ uma função contínua tal que $L(u,.)$ é convexo (devemos assumir que o Lagrangeano é independente da variável de integração). Suponhamos que $L(u,.)$ tem a simetria de ser rotacionalmente invariante, ou seja, assumindo que existe uma função $h : E \times [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ tal que $L(u,\xi) = h(u, |\xi|)$.

Consideremos o funcional

$$J(u) = \int_{S[a,b]} L(u(x), \nabla u(x))\, dx$$

onde $S[a,b] = \left\{x \in \mathbb{R}^{D+1} : a \le |x| \le b\right\}$. Denotemos por $\inf (P)_\infty$ o ínfimo de

$$\left\{J(u) : u \in Lip(S[a,b]),\ u(x) \in E,\ u \text{ radiais},\ u|_{\partial B(0,a)} = A,\ u|_{\partial B(0,b)} = B\right\}$$

e $\inf (P)_1$ o ínfimo de

$$\left\{ J(u) : u \in W^{1,1}(S[a,b]),\ u(x) \in E,\ u \text{ radiais},\ u|_{\partial B(0,a)} = A,\ u|_{\partial B(0,b)} = B \right\}.$$

É nosso propósito apresentar que $\inf (P)_\infty = \inf (P)_1$.

Observe-se que se $w : [a,b] \to E$ é tal que $u(x) = w(|x|)$ então

$$J(u) = C_D \int_a^b L\left(w(r), w'(r)\right) r^D dr,\ w(a) = A,\ w(b) = B,$$

onde $C_D = \frac{\pi^{(D+1)/2}}{\Gamma((D+3)/2)} \left(b^{D+1} - a^{D+1}\right)$.

Teorema 5.2.4 *Seja* $L : E \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ *contínuo e tal que* $L(u,.)$ *é convexo. Então* $\inf (P)_\infty = \inf (P)_1$.

Bibliografia

[1] R. Adams. *Sobolev Spaces*. Academic Press, New York, 1975.

[2] G. Alberti and F. Serra Cassano. *Non-Occurrence of Gap for One-Dimemsional Autonomous Functionals, Calculus of Variations, Homogenization and Continuum Mechanics*. World Scientic, Singapore, 1994.

[3] L. Ambrosio, O. Ascenzi, and G. Buttazzo. Lipschitz regularity for minimizers of integral functionals with highly discontinuous integrands. *Jour. Math. Anal. Appl.*, 143:301–316, 1989.

[4] T. S. Angell. A note on approximation of optimal solutions of free problems of the calculus of variations. *Rend. Circ. Mat. Palermo (2)*, 28:258–272, 1979.

[5] J. P. Aubin and A. Cellina. *Differential Inclusions*. Springer-Verlag, Heidelberg, 1984.

[6] A. Cellina. On the bounded slope condition and the validity of the Euler-Lagrange equation. Preprint, 1999.

[7] A. Cellina. On the validity of the Euler-Lagrange equation. *J. Differential Equations*, 171:430–442, 2001.

[8] A. Cellina. The classical problem of the calculus of variations in the autonomous case: Relaxation and Lipschitzianity of solutions. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 356:415–426, 2004.

[9] A. Cellina. The Euler Lagrange equation and the Pontriagin aximum principle. In *Atti Del Diciassettesimo Congresso dell'Unione Matematica Italiana, Milano, 8-13 Settembre 2003*, pages 83–107. Unione Matematica Italiana, Bologna, 2004.

[10] A. Cellina, A. Ferriero, and E. Marchini. Reparametrizations and approximation values of integrals of the calculus of variations. *Journal of Differential Equations*, 193:374–384, 2003.

[11] A. Cellina and S. Perotta. On the validity of the maximum principle and of the Euler-Lagrange equation for a minimum problem depending on the gradient. *SIAM J. Control*, 36:1987–1998, 1998.

[12] F. H. Clarke and R. B. Vinter. Regularity properties of solutions to the basic problem in the calculus of variations. *Trans. Am. Math. Soc.*, 289:73–98, 1985.

[13] B. Dacorogna. *Introduction Au Calcul Des Variations*. Press Polytechniques et Univesrsitaire Romandes, Lausanne, 1992.

[14] B. Dacorogna. *Introduction to the Calculus of Variations*. Imperial College Press, London, 2004.

[15] A. Ferriero. *The Lavrentiev Phenomenon in the Calculus of Variations.* PhD thesis, Consorzio Università degli Studi di Milano-Bicocca, Università Cattolica del Sacro Cuore, 2004.

[16] A. Ferriero and E. M. Marchini. On the validity of the Euler-Lagrange equation. *J. Math. Anal. Appl.*, 304:356–369, 2005.

[17] D. Gilbarg and N. S. Trudinger. *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order.* Springer-Verlag, Berlin, 1983.

[18] E. Giusti. *Direct Methods in the Calculus of Variations.* World Scientific, New Jersey, London, Singapore, Hong Kong, 2005 (2ł ed).

[19] H. Goldstine. *A History of the Calculus of Variations from the 17th to the 19th Century.* Springer, Berlin, 1980.

[20] W. B. Gordon. A minimizing property of Keplerian orbits. *Amer. J. Math.*, 99:961–971, 1977.

[21] M. Lavrentiev. Sur quelques problemes du calcul des variations. *Ann. Matem. Pura Appl.*, 4:7–28, 1926.

[22] B. Manià. Sopra un esempio di Lavrentieff. *Boll. Un. Matem. Ital.*, 13:147–153, 1934.

[23] E. M. Marchini. *Techniques in the Calculus of Variations.* PhD thesis, Consorzio Università degli Studi di Milano-Bicocca, Università Cattolica del Sacro Cuore, 2004.

[24] M. T. Niane. *Introduction to Optimization and Calculus of Variations*, 2006.

[25] P. Pedregal. *Parametrized Measured and Variational Principles.* Birkhauser, 1997.

[26] A. V. Sarychev. First- and second-order integral functionals of the calculus of variations which exhibit the Lavrentiev phenomenon. *J. Dynamical and Control Systems*, 3:565–588, 1997.

[27] G. Treu. On the Lavrentiev phenomenon and the validity of Euler-Lagrange equations for a class of integral functionals. *J. Math. Anal. Appl.*, 184:56–74, 1994.