Universidade de Aveiro Departamento de Matemática
2005

Nelson Felipe Loureiro Vieira

Transformações de Möbius em $R^{0,n}$

Dissertação apresentada à Universidade de Aveiro para cumprimento dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre em Matemática, realizada sob a orientação científica da Professora Doutora. Paula Cerejeiras, Professora Associada do Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro

Dedico este trabalho à minha família e amigos pela compreensão e apoio ao longo destes dois anos de trabalho.

O júri

Presidente

Professor Doutor Helmuth Robert Malonek
Professor Catedrático da Universidade de Aveiro

Professora Doutora Paula Cristina Supardo Machado Marques Cerejeiras
Professora Associada da Universidade de Aveiro

Professor Doutor Gil Manuel Araújo Silva Bernardes
Professor Auxiliar da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade de Coimbra

Agradecimentos

Em primeiro lugar gostaria de agradecer à Professora. Paula Cerejeiras pela sua orientação, paciência e apoio ao longo destes anos.

Agradeço aos docentes da parte curricular do mestrado, uma vez que através das cadeiras que leccionaram adquiri conhecimentos e técnicas de investigação úteis na elaboração desta dissertação.

Agradeço ainda ao Professor Uwe Kähler pelas suas sugestões.

Gostaria de deixar uma saudação meus colegas de mestrado, em especial à Dina, à Raquel e ao António, pela sua amizade e companheirismo.

Quero agradecer ao meu colega e amigo Milton pelos seus incentivos, sugestões e apoio nos momentos bons e menos bons destes dois anos de trabalho.

O meu agradecimento a todos aqueles que acreditaram nas minhas capacidades e me incentivaram a não desistir nos momentos mais difíceis.

Aos meus pais pelo apoio ao longo destes anos de trabalho.

À minha família e aos meus colegas da Palhaça pelo incentivo e amizade, e peço a sua compreensão pelas minhas ausências e falhas ao longo destes dois anos.

Ao Daniel porque os jovens de hoje são o futuro do amanhã!

Palavras-chave

Transformações conformes, álgebras de Clifford, bola e superfície unitária, métrica, fórmula de Poisson, coordenadas projectivas, grupo de Clifford, operador de Laplace, operador de Dirac.

Resumo

O principal objectivo deste trabalho texto consiste em estudar a influência das transformações Möbius, em vários aspectos da análise de Clifford.

No capítulo zero introduziremos as definições e resultados preliminares, necessários para boa compreensão do texto; encerraremos este capítulo com o problema de Dirichlet na bola unitária em C.

O primeiro capítulo é dedicado ao problema de Dirichlet para o caso da bola unitária em $R^{0,n.}$ Serão obtidas as generalizações dos resultados apresentados no capítulo zero para o caso complexo.

No capítulo seguinte serão introduzidas as coordenadas projectivas e algumas definições associadas. Com este tipo de coordenadas, estabeleceremos um isomorfismo entre $(R_{p,q})^{2x2}$ e $R_{p+1,q+1}$. Com base nesta relação, estabeleceremos uma descrição matricial das superfícies esféricas, a qual conduzirá a uma conveniente representação matricial das transformações Möbius – dita representação de Vahlen. Na secção final deste capítulo será feita uma caracterização do grupo de Clifford (1,n+1) em termos destas matrizes.

No terceiro e último capítulo estudaremos a métrica diferencial invariante sob a acção das transformações de Möbius. Finalmente, concluiremos com o estudo do comportamento dos operadores de Laplace e de Dirac sob a acção das transformações de Möbius.

Keywords

Conformal transformations, Clifford algebras, unit circle, unit ball, metric, Poisson formula, projective coordinates, Clifford group, Laplace operator, Dirac operator.

Abstract

The main objective of this work is to study the influence of the Möbius transformations in some aspects of Clifford analysis.

In the preliminary chapter we introduce some definitions and preliminary results which are necessary for a good comprehension of the present text; we finish this chapter with the Dirichlet problem over the complex unit ball.

The first chapter is dedicated to the study of the Dirichlet problem in the n-dimensional unit ball. We will obtain the generalizations of the results presented in the complex case.

In the next chapter we will introduce projective coordinates and some associated definitions. With this kind of coordinates we will establish an isomorphism between $(R_{p,q})^{2x2}$ and $R_{p+1,q+1}$. With this relation we will also establish a matricial description of the unit sphere which implies a convenient matricial representation of Möbius transformation - usually called Vahlen representation. In the final section we will characterized the Clifford group $\Gamma(1,n+1)$ in terms of these matrices.

In the third chapter we will study the invariant differential metric under the action of Möbius transformation. Finally, we will study the behaviour of Laplace and Dirac operator under the action of Möbius transformations.

Palavras-chave

Transformações conformes, álgebras de Clifford, bola e superfície unitária, métrica, fórmula de Poisson, coordenadas projectivas, grupo de Clifford, operador de Laplace, operador de Dirac.

Resumo

O principal objectivo deste trabalho texto consiste em estudar a influência das transformações Möbius, em vários aspectos da análise de Clifford.

No capítulo zero introduziremos as definições e resultados preliminares, necessários para boa compreensão do texto; encerraremos este capítulo com o problema de Dirichlet na bola unitária em C.

O primeiro capítulo é dedicado ao problema de Dirichlet para o caso da bola unitária em $R^{0,n.}$ Serão obtidas as generalizações dos resultados apresentados no capítulo zero para o caso complexo.

No capítulo seguinte serão introduzidas as coordenadas projectivas e algumas definições associadas. Com este tipo de coordenadas, estabeleceremos um isomorfismo entre $(R_{p,q})^{2x2}$ e $R_{p+1,q+1}$. Com base nesta relação, estabeleceremos uma descrição matricial das superfícies esféricas, a qual conduzirá a uma conveniente representação matricial das transformações Möbius – dita representação de Vahlen. Na secção final deste capítulo será feita uma caracterização do grupo de Clifford (1,n+1) em termos destas matrizes.

No terceiro e último capítulo estudaremos a métrica diferencial invariante sob a acção das transformações de Möbius. Finalmente, concluiremos com o estudo do comportamento dos operadores de Laplace e de Dirac sob a acção das transformações de Möbius.

Keywords

Conformal transformations, Clifford algebras, unit circle, unit ball, metric, Poisson formula, projective coordinates, Clifford group, Laplace operator, Dirac operator.

Abstract

The main objective of this work is to study the influence of the Möbius transformations in some aspects of Clifford analysis.

In the preliminary chapter we introduce some definitions and preliminary results which are necessary for a good comprehension of the present text; we finish this chapter with the Dirichlet problem over the complex unit ball.

The first chapter is dedicated to the study of the Dirichlet problem in the n-dimensional unit ball. We will obtain the generalizations of the results presented in the complex case.

In the next chapter we will introduce projective coordinates and some associated definitions. With this kind of coordinates we will establish an isomorphism between $(R_{p,q})^{2x2}$ and $R_{p+1,q+1}$. With this relation we will also establish a matricial description of the unit sphere which implies a convenient matricial representation of Möbius transformation - usually called Vahlen representation. In the final section we will characterized the Clifford group $\Gamma(1,n+1)$ in terms of these matrices.

In the third chapter we will study the invariant differential metric under the action of Möbius transformation. Finally, we will study the behaviour of Laplace and Dirac operator under the action of Möbius transformations.

Conteúdo

Introdução

Neste trabalho apresentaremos um estudo (não exaustivo) das Transformações de Möbius em $\mathbb{R}^{0,n}$. Numa primeira parte, estudaremos a descrição matricial destas transformações, a qual conduzirá a uma caracterização do grupo das transformações de Möbius em dimensão superior semelhante à existente no caso bi-dimensional. Numa segunda fase, estudaremos o comportamento dos operadores de Laplace e Dirac, quando sujeitos à acção destas transformações.

No caso complexo, é bem conhecido o facto de que uma transformação conforme não é necessariamente uma transformação de Möbius. Todavia, quando em espaços vectoriais de dimensão superior, as únicas transformações conformes *são* transformação de Möbius. K. T. Vahlen publicou, em [27], uma representação destas transformações em termos de matrizes de 2×2, e cujas entradas eram números de Clifford. Neste artigo, o autor procurou ligar e unificar as diferentes teorias do grupo de movimentos para as diferentes geometrias - euclidiana, hiperbólica e elíptica.

Tendo passado despercebida durante quase meio século, esta abordagem foi retomada por Ahlfors em [1], o qual obteve assim uma completa descrição destas matrizes (que este designou por *matrizes de Clifford*). Paralelamente, há também a referir que durante este período de esquecimento, o matemático suiço Fueter publicou (independentemente de Vahlen) alguns artigos (consulte-se [14], [15], [16]) em que recorria ao uso extensivo de quaterniões para descrição do grupo de Klein em espaços de dimensão superior a dois.

No capítulo preliminar introduziremos os resultados básicos necessários à compreensão e bom desenvolvimento dos conceitos que se pretendem estudar. Para maior detalhe, consulte-se [11], [17], [6], e [9]. Como ponto de partida para o presente trabalho, usaremos a descrição das transformações conformes, do núcleo de Poisson e do problema de Dirichlet em $\mathbb{C}$, efectuada em [19]. Uma das principais conclusões, neste capítulo, é a possibilidade de ver o núcleo de Poisson como o jacobiano de uma transformação conforme, bem como a influência da métrica no núcleo.

No primeiro capítulo generalizaremos o grupo das transformações de Möbius do tipo $w = \frac{z-a}{1-\bar{a}z}$ ao caso de $\mathbb{R}^{0,n}$, usando como base a tradicional decomposição em transformações elementares feita no plano complexo; deduziremos a expressão para a métrica invariante associada, e a forma geral de um operador invariante sob a acção deste grupo. Estudaremos também, relativamente aos operadores invariantes obtidos, o problema de Dirichlet associado e respectivo núcleo de Poisson para a bola unitária. Na parte final desenvolveremos o núcleo harmónico de Poisson através das soluções do operador invariante obtido e das funções harmónicas.

O segundo capítulo inicia-se com a representação em coordenadas projectivas de superfícies esféricas e hiperplanos em $\mathbb{R}^{p,q}$, permitindo obter uma identificação projectiva do cone isotrópico de $\mathbb{R}^{p+1,q+1}$ com $\mathbb{R}^{p,q}$. A extensão de Fillmore e Springer permitirá a utilização da identificação obtida anteriormente para mostrar a existência de um isomorfismo entre $(\mathbb{R}_{p,q})^{2\times 2}$ e $\mathbb{R}_{p+1,q+1}$, o qual levará a uma representação matricial dos elementos de $\mathbb{R}_{p+1,q+1}$ e das involuções neste espaço. A penúltima secção é dedicada à representação matricial de superfícies esféricas em $\mathbb{R}_{p,q}$, e das transformações conformes que as preservam. No final deste capítulo será dada uma caracterização do grupo de Clifford $\Gamma(1, n+1)$.

No último capítulo estudaremos a métrica invariante associada às transformações de Möbius, o que nos permitirá estudar o comportamento dos operadores de Dirac e Laplace sob a acção destas transformações. Será ainda estudada a existência de operadores invariantes associados ao Laplaciano e serão apresentados alguns exemplos.

Termino esta introdução com a seguinte citação, retirada de [10]:

"A História mostra que aqueles dirigentes de impérios que encorajaram o estudo das matemáticas ... foram também aqueles cujos reinados estiveram entre os mais brilhantes e cuja glória foi mais duradoira."

Michael Chasles, 1793-1880

Capítulo 0

Preliminares

"A Ciência é construída de factos, tal como uma casa o é de tijolos. Mas uma colecção de factos é tanto uma ciência, como um conjunto de tijolos é uma casa."

Henri Poincaré

0.1 Álgebras reais de Clifford

Consideremos o par $(X, \mathcal{B})$, que designaremos por espaço real ortogonal não degenerado, onde X é um espaço vectorial real de dimensão n e $\mathcal{B}$ uma forma bilinear real simétrica não degenerada em X, isto é, $\mathcal{B} : X \times X \to \mathbb{R}$ satisfaz:

1. **Bilinearidade** - $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R} \quad \forall u, u', v, v' \in X$

$$\mathcal{B}(\lambda(u + u'), v) = \lambda \mathcal{B}(u, v) + \mathcal{B}(u', v)$$
$$\mathcal{B}(u, \mu(v + v')) = \mu \mathcal{B}(u, v) + \mathcal{B}(u, v');$$

2. **Simetria** - $\forall u, v \in X \ \mathcal{B}(v, u) = \mathcal{B}(u, v)$;

3. **Não degenerescência** - $\forall u \in X \backslash \{0\}, \exists v \in X : \mathcal{B}(u,\ v) \neq 0$.

Definição 0.1.1 ***(ver [11])*** *Seja $(X, \mathcal{B})$ um espaço real ortogonal não degenerado de dimensão n, e seja $\mathcal{A}$ a álgebra real associativa, com identidade 1, que satisfaz*

1. *$\mathcal{A}$ contém subespaços lineares isomorfos a $\mathbb{R}$ e X,*

2. *$\forall u \in X, u^2 = \mathcal{B}(u, u)$,*

3. *$\mathcal{A}$ é gerada, como álgebra, por $\{1\}$ e X.*

Então $\mathcal{A}$ dir-se-á a Álgebra de Clifford para o par $(X, \mathcal{B})$.

Quando $\dim(\mathcal{A}) = 2^n$, *dizemos que $\mathcal{A}$ é a Álgebra Universal de Clifford para $(X, \mathcal{B})$. Neste caso $\mathcal{A}$ é indicado por $\mathbb{R}_{p,q}$, com $p + q = n$ e $p, q \in \mathbb{N}_0$.*

Da definição anterior podemos concluir que independentemente da base $e = \{e_1, ..., e_n\}$ que considerarmos para $(X, \mathcal{B})$, a condição 2 implicará, em $\mathcal{A}$, as seguintes relações:

$$e_i^2 = 1, \quad \text{se } i = 1, ..., p$$
$$e_i^2 = -1, \quad \text{se } i = p + 1, ..., p + q = n$$
$$e_i e_j + e_j e_i = 0, \quad \text{para } i, j = 1, ..., n, \quad i \neq j.$$

pelo que diremos então que $\mathcal{A}$ tem assinatura (p, q). No caso de $\mathcal{A}$ ser $\mathbb{R}_{p,q}$ consideramos $\mathbb{R}^{p,q}$ como sendo o espaço vectorial real de dimensão n, gerado por $\{e_1, \ldots, e_p, e_{p+1}, \ldots, e_{p+q}\}$.

0.2 Involuções em $\mathbb{R}_{p,q}$

Seja $\mathbb{R}_{p,q}$ a álgebra de Clifford universal associada a $(X, \mathcal{B})$. De seguida serão definidas três involuções na álgebra real de Clifford, cujos papéis são semelhantes ao da conjugação no plano complexo.

O subespaço linear de $\mathbb{R}_{p,q}$ gerado pelos $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$ vectores da base $e_{i_1} e_{i_2} \ldots e_{i_k}$, $i_1 < i_2 < \ldots < i_k$, é denotado por $\mathbb{R}_{p,q}^k$, e os seus elementos são designados por $k-$*vectores* e denotados por $[x]_k$.

Para todo $k = 0, ..., n$, defina-se em $\mathbb{R}_{p,q}^k$ o operador involução principal.

$$x \to x' = \begin{cases} x & \text{se } k \equiv 0 (\mod 2) \\ -x & \text{se } k \equiv 1 (\mod 2) \end{cases},$$

o qual pode ser estendido a todo $\mathbb{R}_{p,q}$ tomando $x \to x' = \sum_{k=0}^{n} [x]_k'$. Esta transformação constitui um automorfismo em $\mathbb{R}_{p,q}$, satisfazendo, para todo $x, y \in \mathbb{R}_{p,q}$ e todo $\lambda \in \mathbb{R}$, as seguintes propriedades:

$$(\lambda x + y)' = \lambda x' + y' \qquad (xy)' = x'y' \qquad (x')' = x.$$

De forma semelhante, definimos em $\mathbb{R}_{p,q}^k$ o operador reversão como

$$x \to x^* = \begin{cases} x & \text{se } k \equiv 0, 1 (\mod 4) \\ -x & \text{se } k \equiv 2, 3 (\mod 4) \end{cases}$$

que se estende a $\mathbb{R}_{p,q}$ por $x \to x^* = \sum_{k=0}^{n} [x]_k^*$. Este operador de $\mathbb{R}_{p,q}$ em si mesmo satisfaz, para todo $x, y \in \mathbb{R}_{p,q}$ e todo $\lambda \in \mathbb{R}$, as seguintes propriedades:

$$(\lambda x + y)^* = \lambda x^* + y^* \qquad (xy)^* = y^* x^* \qquad (x^*)^* = x$$

e como tal representa um anti-automorfismo involutório em $\mathbb{R}_{p,q}$.

Sendo a involução principal e a reversão operadores que comutam em $\mathbb{R}_{p,q}$, estamos em condições de definir um terceiro operador $x \to \overline{x} = (x^*)' = (x')^*$, ao qual iremos chamar conjugação. Pelas propriedades anteriores, resulta que a conjugação é também um anti-automorfismo involutório em $\mathbb{R}_{p,q}$, verificando-se, para todo $x, y \in \mathbb{R}_{p,q}$ e todo $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\overline{\lambda x + y} = \lambda \overline{x} + \overline{y} \qquad \overline{xy} = \overline{y}\,\overline{x} \qquad \overline{(\overline{x})} = x$$

0.3 O grupo Pin(p, q)

Consideremos $(X, \mathcal{B})$, um espaço real ortogonal não degenerado, cuja álgebra universal de Clifford associada tem assinatura (p, q).

Uma aplicação linear $L : X \to X$ diz-se ortogonal se

$$\mathcal{B}(L(u), L(v)) = \mathcal{B}(u, v), \forall u, v \in X.$$

Como $\mathcal{B}(u, v) = \frac{1}{2}(\mathcal{B}(u + v, u + v) - \mathcal{B}(u, u) - \mathcal{B}(v, v))$, L será ortogonal quando e só quando $\mathcal{B}(L(v), L(v)) = \mathcal{B}(v, v), \forall v \in X$, ou seja, $\det L = \pm 1$ (relativamente a qualquer base de X).

Definição 0.3.1 *Define-se $O(p, q)$ como o grupo de todas as transformações ortogonais em $(X, \mathcal{B})$.*

De seguida iremos caracterizar o grupo anteriormente definido como subgrupo particular de $\mathbb{R}_{p,q}$, que é a álgebra de Clifford universal associada ao par $(X, \mathcal{B})$.

Definição 0.3.2 *O grupo de Clifford, $\Gamma(p, q)$, é definido como:*

$$\Gamma(p, q) = \left\{ s \in \mathbb{R}_{p,q} : s \text{ é } \quad \text{invertível} \quad \text{e} \quad sv(s')^{-1} \in X, \forall v \in X \right\}.$$

Relativamente à definição anterior devem ser feitas duas observações:

- Dizemos que $s \in \mathbb{R}_{p,q}$ é invertível se existe $a \in \mathbb{R}_{p,q}$ tal que $sa = as = 1_{\mathbb{R}_{p,q}}$;
- O seguinte lema permite-nos definir um homomorfismo de $\Gamma(p, q)$ em $O(p, q)$.

Lema 0.3.3 *Para $s \in \Gamma(p, q)$ a aplicação $\chi(s)$, definida por*

$$\chi(s): \begin{array}{ccc} X & \to & X \\ v & \longmapsto & svs'^{-1} \end{array}$$

pertence a $O(p, q)$, sendo então χ um homomorfismo de $\Gamma(p, q)$ em $O(p, q)$.

Demonstração: Como $v' = -v$ quando $v \in X$ temos

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}(\chi(s)(v), \chi(s)(v)) &= (svs'^{-1})^2 \\
&= -\left[svs'^{-1}\right]' svs'^{-1} \\
&= -s'v'vs'^{-1} \\
&= s'v^2s'^{-1} \\
&= v^2 = \mathcal{B}(v, v).
\end{aligned}$$

■

- Para um elemento invertível $s \in \mathbb{R}_{p,q}$ temos $(s')^{-1} = (s^{-1})'$. Como $(uv)'^{-1} = v'^{-1}u'^{-1}$ e, atendendo ao lema anterior, $s^{-1} \in \Gamma(p,q)$ se $s \in \Gamma(p,q)$ é imediato que $\Gamma(p,q)$ é de facto um grupo.

Para completar a caracterização de $O(p,q)$ como imagem por χ de um subgrupo da Álgebra de Clifford $\mathbb{R}_{p,q}$ temos que ter em atenção os seguintes pontos

1. $\chi(s_1 s_2) = \chi(s_1)\chi(s_2)$, para todo $s_1, s_2 \in \Gamma(p,q)$;

2. Se $s \in X$ é invertível então $\chi(s) = \chi(\hat{s})$, onde $\hat{s} = s/|\mathcal{B}(s,s)|$, e consequentemente $\mathcal{B}(\hat{s}, \hat{s}) = \pm 1$;

juntamente com o Teorema de Cartan-Dieudonné, para podermos concluir que $O(p,q)$ é imagem por χ do seguinte subgrupo de $\Gamma(p,q)$:

$$Pin(p,q) = \{v \in \Gamma(p,q) : \mathcal{B}(v,v) = 1\}.$$

0.4 O problema de Dirichlet no círculo unitário.

0.4.1 As transformações conformes em $\mathbb{C}$

Como é sabido, uma função real de variável real $y = f(x)$ determina no plano xOy uma curva (x e y coordenadas rectangulares). A representação geométrica de uma função constitui uma ajuda valiosa para o seu estudo.

No caso das funções de variável complexa, existe uma complicação adicional resultante da necessidade de uma representação visual no espaço tetra-dimensional. Uma forma de colmatar esta complicação consiste em analisar o comportamento da função complexa $w = f(z)$, sendo z e w pontos de dois planos diferentes, o plano-z e o plano-w, e f uma relação entre os pontos do plano-z e os pontos do plano-w.

Definição 0.4.1 *(ver [4]) Uma função diferenciável $f : \Omega \to \Omega'$, onde $\Omega, \Omega' \subseteq \mathbb{R}^n$ são abertos e conexos, é conforme se existir uma função $\lambda : \Omega \to]0, +\infty[$ tal que para todo o $x \in \Omega$ se tem*

$$||J_f(x)(v)|| = \lambda(x)||v||, \forall v \in \mathbb{R}^n.$$

Desta forma, uma aplicação de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^n$ diz-se conforme se e só se preserva os ângulos em amplitude.

Para $n = 2$ uma aplicação é conforme se e só se a correspondente função de $\mathbb{C}$ em $\mathbb{C}$ é holomorfa ou anti-holomorfa e a sua derivada nunca se anula em Ω. Um caso particular é dado pelas funções holomorfas de expressão

$$f(z) = \frac{bz + c}{dz + e},$$

onde b, c, d, $e \in \mathbb{C}$ e $be - cd \neq 0$. Estas transformações são conhecidas por transformações de Möbius e têm a propriedade adicional de aplicarem circunferências em circunferências (entendendo-se aqui rectas como circunferências com um raio infinito).

Durante esta dissertação daremos mais importância ao caso em que $b = 1$, $c = -a$, $d = -\overline{a}$ e $e = 1$, com a um número complexo tal que $|a| < 1$, ou seja,

$$w = f(z) = \frac{z - a}{1 - \overline{a}z}. \tag{1}$$

Relativamente a (1) podemos dizer que

$$1 - |w|^2 = \frac{(1 - |a|^2)(1 - |z|^2)}{|1 - a\overline{z}|^2}, \tag{2}$$

o que implica que, apenas para $|a| < 1$, (1) transforma a circunferência unitária $B(1)$ em si própria e faz corresponder $z = a$ a $w = 0$. Derivando (1) obtemos a seguinte relação diferencial

$$dw = \frac{1 - |a|^2}{(1 - \overline{a}z)^2} dz. \tag{3}$$

Combinando (2) e (3) obtemos o seguinte diferencial invariante

$$\frac{|dw|}{|1 - |w|^2|} = \frac{|dz|}{|1 - |z|^2|}, \tag{4}$$

associado à transformação (1) e ao operador

$$A_z = (1 - |z|^2)^2 \Delta_z, \tag{5}$$

onde Δ_z denota o operador de Laplace em $\mathbb{C}$, isto é

$$\Delta_z = 4\frac{\partial^2}{\partial z \partial \overline{z}} \tag{6}$$

$$= \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}; \quad z = x + iy \tag{7}$$

ou, em coordenadas polares $z = \rho e^{i\theta}$,

$$\Delta_z = \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}. \tag{8}$$

Definição 0.4.2 *Seja f uma função definida num subconjunto Ω do plano complexo, tal que as derivadas de 2^a ordem existem em todos os pontos de Ω. Se f é contínua em Ω e se*

$$\Delta F = 0 \tag{9}$$

em todos os pontos de Ω, então F diz-se harmónica em Ω.

0.4.2 O núcleo de Poisson

Dado que a transformação (1) aplica a circunferência unitária em si própria, podemos parametrizar $z = e^{i\tau}$, $\tau \in [0, 2\pi[$, e $w = e^{i\psi}$, $\psi \in [0, 2\pi[$, ou seja

$$e^{i\psi} = \frac{1 - ae^{-i\tau}}{1 - \overline{a}e^{i\tau}} \, e^{i\tau}, \tag{10}$$

e obtemos de (3) a relação entre diferenciais

$$e^{i\psi} \, d\psi = \frac{1 - |a|^2}{(1 - \overline{a}e^{i\tau})^2} \, e^{i\tau} \, d\tau. \tag{11}$$

Substituindo (10) em (11) obtemos a seguinte relação diferencial

$$d\psi = \frac{1 - |a|^2}{|1 - \overline{a}e^{i\tau}|^2} \, d\tau, \tag{12}$$

que se encontra também associada a (1).

Definição 0.4.3 *Para $a = \rho e^{i\theta}$, $\rho < 1$ e $z = e^{i\tau}$, definimos o Núcleo de Poisson como*

$$P(a, z) = \frac{1 - |a|^2}{|1 - \overline{a}z|^2}$$

ou em coordenadas polares

$$P(\rho, \theta - \tau) = \frac{1 - \rho^2}{1 - 2\rho\cos(\theta - \tau) + \rho^2}. \tag{13}$$

Lema 0.4.4 *O Núcleo de Poisson tem as seguintes propriedades:*

1. ***Positividade:*** *Para cada $\rho < 1$ temos que $P(\rho, \theta - \tau) > 0$.*

2. *Quando nos* ***aproximamos da fronteira do círculo unitário*** *verifica-se o seguinte comportamento*

$$\begin{cases} \lim\limits_{\rho\to 1^-} \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} P(\rho,\theta-\tau)f(\tau)\,d\tau = 0, & se \quad \theta \neq \tau \\ \\ \lim\limits_{\rho\to 1^-} \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} P(\rho,\theta-\tau)f(\tau)\,d\tau = f(\theta), & se \quad \theta = \tau \end{cases}.$$

   A demonstração desta propriedade encontra-se em [3] (pág. 13).

3. *O* ***integral ao longo da fronteira*** *toma o seguinte valor*

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(\rho,\theta-\tau)\,d\tau = 1. \tag{14}$$

4. *Para $\rho < 1$, $P(\rho,\theta-\tau)$ é uma função harmónica em $a = \rho e^{i\theta}$.*

Demonstração:

1. A prova desta propriedade é imediata. De facto, para $\rho < 1$,

$$1 - 2\rho\cos(\theta-\tau) + \rho^2 \geq 1 - 2\rho + \rho^2 = (1-\rho)^2 > 0.$$

2. Para $\theta = \tau$, temos que $1 - 2\rho\cos(\theta-\tau) + \rho^2 = (1-\rho)^2$, donde

$$\lim_{\rho\to 1^-} P(\rho,\theta-\tau) = \lim_{\rho\to 1^-} \frac{1-\rho^2}{(1-\rho)^2} = \lim_{\rho\to 1^-} \frac{1+\rho}{1-\rho} = \infty.$$

   Para $\theta \neq \tau$

$$\lim_{\rho\to 1^-} P(\rho,\theta-\tau) = \frac{0}{2-2\cos(\theta-\tau)} = 0.$$

3. A prova desta propriedade é imediata. De facto, tendo em conta (12), podemos dizer que

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(\rho,\theta-\tau)\,d\tau = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\psi = 1.$$

4. De facto

$$\begin{aligned} P(\rho,\theta-\tau) &= \frac{1-\rho^2}{(1-\rho e^{-i(\theta-\tau)})(1-\rho e^{i(\theta-\tau)})} \\ &= 1 + \frac{\rho e^{-i(\theta-\tau)}}{1-\rho e^{-i(\theta-\tau)}} + \frac{\rho e^{i(\theta-\tau)}}{1-\rho e^{i(\theta-\tau)}} \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \rho^n \left(e^{-in(\theta-\tau)} + e^{in(\theta-\tau)}\right) \\ &= 1 + 2\sum_{n=1}^{+\infty} \rho^n \cos(n(\theta-\tau)). \end{aligned} \tag{15}$$

Para um determinado n temos que

$$\begin{aligned}\Delta(\rho^n \cos(n(\theta-\tau))) &= \rho\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho^n\cos(n(\theta-\tau)))\right)+\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}(\rho^n\cos(n(\theta-\tau)))\\ &= n^2\rho^2\cos(n(\theta-\tau))-n^2\rho^n\cos(n(\theta-\tau))\\ &= 0,\end{aligned}$$

donde cada termo de (15) é harmónico, e portanto $\Delta P = 0$ em $B(1)$.

■

0.4.3 O problema de Dirichlet

Vamos apresentar e resolver o problema de valores iniciais na fronteira conhecido por problema de Dirichlet, para o caso do círculo unitário.

Problema de Dirichlet (ver [19])

Dados um domínio limitado Ω de $\mathbb{R}^2$ e uma função real φ contínua na fronteira Γ de Ω, que se supõe ser uma curva seccionalmente regular, o problema de Dirichlet consiste em procurar uma função real μ harmónica em Ω, contínua em $\overline{\Omega}$ e que coincida com a função φ na fronteira de Ω. No caso de $\Omega = B(1)$ este problema corresponde a determinar a função real μ que verifica as seguintes condições:

$$\begin{cases}\lim_{\rho\to 1^-}\mu(\rho e^{i\theta}) = \varphi(e^{i\theta})\\ \Delta\mu = 0, \text{em } B(1)\end{cases}. \tag{16}$$

Considerando $0<\rho<1$ e $\theta\in[0,2\pi]$, vamos agora provar (em cinco passos) a existência da função μ e estudar algumas das suas propriedades.

1. **Fórmula do valor médio**.

   Se $\mu(\rho e^{i\theta})$ é uma função harmónica definida na bola unitária $B(1)$, então satisfaz

$$\mu(0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mu(\rho^{i\theta})d\theta, \quad 0<\rho<1. \tag{17}$$

<u>Prova:</u>

Do facto de μ ser harmónica resulta, para $0 < \rho < 1$

$$\begin{aligned}
\rho \frac{\partial}{\partial \rho}\left[\rho \frac{\partial}{\partial \rho}\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mu(\rho e^{i\theta})\, d\theta\right)\right] &= \frac{-1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}\mu(\rho e^{i\theta})\, d\theta \\
&= \frac{-1}{2\pi}\, \frac{\partial}{\partial \theta}\, \mu(\rho e^{i\theta})\Big]_0^{2\pi} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Então

$$\rho \frac{\partial}{\partial \rho}\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mu(\rho e^{i\theta})\, d\theta\right) = k,$$

com k uma constante real. Quando $\rho \to 0^+$ temos que $k = 0$. Integrando novamente obtemos

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mu(\rho e^{i\theta})\, d\theta = c,$$

com c uma constante real independente de ρ. Quando $\rho \to 0^+$ obtemos

$$\int_0^{2\pi} \mu(0)\, d\theta = c \Leftrightarrow \mu(0) = c$$

que corresponde à igualdade (17).

2. **Fórmula de Poisson**.

Se, além de harmónica em $B(1)$, a função $\mu(\rho e^{i\theta})$ for contínua em $\overline{B(1)}$, obtemos

$$\mu(\rho e^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mu(e^{i\tau})\, P(\rho, \theta - \tau)\, d\tau. \tag{18}$$

<u>Prova:</u>

Vamos considerar a mudança de variável feita no estudo da terceira propriedade do núcleo de Poisson

$$w = \frac{z-a}{1-\overline{a}z},$$

com

$$\mu(z) = v(w) \qquad \mu(e^{i\tau}) = v(e^{i\psi}) \qquad \mu(a) = v(0).$$

Como μ é harmónica em $B(1)$, podemos dizer que v também o é. Para $\rho = 1$ temos que

$$\begin{aligned}
\mu(a) &= v(0) \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v(e^{i\psi})\, d\psi \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mu(e^{i\tau})\, P(\rho, \theta - \tau)\, d\tau.
\end{aligned}$$

3. **Princípio do Máximo**.

Se μ é uma função não constante, harmónica em $B(1)$ e contínua em $\overline{B(1)}$, então assume o seu máximo na circunferência unitária, isto é, existe $z_0 = e^{i\theta_0}$ $(z_1 = e^{i\theta_1})$ tal que

$$|\mu(z)| \leq |\mu(z_0)|, \qquad \forall z \in \overline{B(1)}. \tag{19}$$

<u>Prova:</u>

Suponhamos que μ assume o seu máximo em $\rho_0 e^{i\theta_0}$, com $\rho_0 < 1$. Então

$$|\mu(\rho e^{i\theta})| = \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mu(e^{i\tau}) P(\rho_0, \theta_0 - \tau) d\tau \right| \leq \left| \mu(\rho_0 e^{i\theta_0}) \right| \frac{1}{2\pi} \left| \int_o^{2\pi} P(\rho_o, \theta_o - \tau) d\tau \right|.$$

Tendo em conta (14) podemos dizer que

$$\left| \mu(\rho_0 e^{i\theta_0}) \right| \; \frac{1}{2\pi} \left| \int_0^{2\pi} P(\rho_0, \theta_0 - \tau) d\tau \right| = \left| \mu(\rho_0 e^{i\theta_0}) \right|.$$

Como μ é uma função não constante, então tem que existir um arco na circunferência unitária onde $\mu(z) < \mu(\rho_0 e^{i\theta_0})$, isto é

$$|\mu(z)| = \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mu(e^{i\tau}) P(\rho_0, \theta_0 - \tau)\, d\tau \right| < \left| \mu(\rho_0 e^{i\theta_0}) \right|,$$

o que contradiz a fórmula de Poisson (18). Assim, o máximo será assumido por μ na circunferência unitária. Analogamente se procede para a prova do princípio do mínimo.

4. **Unicidade da Solução**.

A solução do problema de Dirichlet é única.

Prova:

Admitamos que existem duas soluções para o problema de Dirichlet (16), nomeadamente $\mu(\rho e^{i\theta})$ e $v(\rho e^{i\theta})$. Então

$$w(\rho e^{i\theta}) = \mu(\rho e^{i\theta}) - v(\rho e^{i\theta})$$

é uma função harmónica em $B(1)$ e continua em $\overline{B(1)}$ e é tal que

$$w(e^{i\theta}) = 0 \Rightarrow |w(e^{i\theta})| = 0, \ \forall \theta \in [0, 2\pi[,$$

desde que μ e v coincidam na circunferência unitária.

Pelo princípio do máximo concluímos

$$w \equiv 0 \Leftrightarrow \mu \equiv v, \ \text{em } \overline{B(1)}.$$

5. **Existência da Solução**.

A seguinte função é o integral de Poisson de φ no círculo unitário

$$\mu(\rho e^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(e^{i\tau}) P(\rho, \theta - \tau) d\tau. \tag{20}$$

Esta função é a solução do Problema de Dirichlet (16).

Prova:

(a) μ satisfaz a equação de Laplace (9) em $B(1)$. De facto, atendendo às propriedades do núcleo de Poisson,

$$\Delta\mu(\rho e^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(e^{i\tau}) \underbrace{\Delta P(\rho, \theta - \tau)}_{0} d\tau = 0.$$

Mais uma vez, $\varphi(e^{i\tau})P(\rho, \theta - \tau)$ e as suas derivadas parciais são contínuas em ordem a ρ e θ. Este facto permite uma permuta entre o integral e a derivação em $B(1)$.

(b) Temos que

$$\mu(\rho e^{i\theta}) - \varphi(e^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[\varphi(e^{i\tau}) - \varphi(e^{i\theta})\right] P(\rho, \theta - \tau) d\tau.$$

Como φ é uma função contínua podemos dizer que dado um $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$|\theta - \tau| < \delta \Rightarrow |\varphi(e^{i\tau}) - \varphi(e^{i\theta})| < \epsilon,$$

e portanto

$$\begin{aligned}
\left|\frac{1}{2\pi}\int_{|\theta-\tau|<\delta}\left[\varphi(e^{i\tau}) - \varphi(e^{i\theta})\right] P(\rho,\theta-\tau)\right| d\tau &\leq \epsilon\frac{1}{2\pi}\int_{|\theta-\tau|<\delta} P(\rho,\theta-\tau)d\tau \\
&\leq \epsilon\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(\rho,\theta-\tau)d\tau \\
&= \epsilon. \qquad (21)
\end{aligned}$$

No caso $|\theta - \tau| \geq \delta$, pela propriedade 2 do núcleo de Poisson, podemos escolher ρ_0 próximo de 1 tal que, $\rho \in]\rho_0, 1[$,

$$P(\rho,\theta-\tau) \leq \frac{1-\rho^2}{1-2\rho\cos\delta+\rho^2} < \frac{\epsilon}{2M}\rho_0 < \rho < 1,$$

onde $M = \max_{\theta\in[0,2\pi[} |\varphi(e^{i\theta})|$.
Assim

$$\begin{aligned}
\left|\frac{1}{2\pi}\int_{|\theta-\tau|\geq\delta}\left[\varphi(e^{i\tau}) - \varphi(e^{i\theta})\right] P(\rho,\theta-\tau)d\tau\right| &\leq \frac{1}{2\pi}\int_{|\theta-\tau|\geq\delta} 2M\ \frac{\epsilon}{2M}d\tau \\
&\leq \epsilon\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\tau \\
&\leq \epsilon. \qquad (22)
\end{aligned}$$

A partir de (21) e (22) concluímos finalmente que

$$|\mu(\rho e^{i\tau}) - \varphi(e^{i\theta})| < 2\epsilon,$$

isto é,

$$\lim_{\rho\to 1^-} \mu(\rho e^{i\tau}) = \varphi(e^{i\theta}).$$

Capítulo 1

O problema de Dirichlet para a superfície esférica unitária em $\mathbb{R}^{0,n}$

"Com excepção dos nossos pensamentos, não há nada de absoluto no nosso poder"

René Descartes

1.1 A transformação de Möbius na álgebra de Clifford

É bem sabido que as transformações de Möbius resultam da composição de quatro aplicações básicas: rotações, translações, dilatações e a inversão $z \mapsto \frac{1}{z}$ (esta consiste numa aplicação que conserva a orientação, obtida compondo uma inversão relativamente à superfície unitária com uma inversão em relação ao eixo real). Pretende-se construir uma generalização da transformação de Möbius

$$w = \frac{z-a}{1-\overline{a}z}, \ |a| < 1$$

para $\mathbb{R}^{0,n}$ e fazer um estudo dos operadores de 2^a ordem invariantes sob a acção do grupo destas transformações. No plano complexo tem-se

$$w = \frac{z-a}{1-\overline{a}z} = -\frac{1}{\overline{a}} - \frac{\frac{a}{|a|} - \frac{1}{a|a|}}{\frac{\overline{a}}{|a|}\left(z - \frac{1}{a}\right)} = -\frac{1}{a} + \left(\frac{\frac{a}{|a|}\left(1 - \frac{1}{a^2}\right)}{\frac{\overline{a}}{|a|}\left(z - \frac{1}{a}\right)}\right), \quad a = \rho e^{i\theta}. \tag{1.1}$$

que resulta da composição de translações, rotações, homotetia de razão $\left|\left(a - \frac{1}{a}\right)\right|$ e inversão relativamente à circunferência unitária e reflexão no eixo real.

Vamos deduzir, em $\mathbb{R}^{0,n}$, uma transformação análoga a (1.1) e que resulta da generalização multidimensional das transformações elementares correspondentes. Designe-se por $a^c = \frac{1}{\overline{a}} = \frac{a}{|a|^2}$ o conjugado de a relativamente à superfície esférica unitária e por $\alpha = \frac{a}{|a|}$ o vector unitário com direcção de a, ou seja, a generalização de (1.1) para $\mathbb{R}^{0,n}$ é

$$w = -a^c + \frac{\alpha\left(1 - \frac{1}{|a|^2}\right)}{\overline{\alpha}\,(z - a^c)}.$$

Observe-se que apesar de $\overline{a} = -a$, para $a \in \mathbb{R}^{0,n}$, as expressões para α e a^c não sofrem alterações. Tome-se agora $x \in \mathbb{R}^{0,n}$, $a \in B_1(0)$, então ter-se-á

- **Translação inicial**

$$x \mapsto \xi_1 = x - a^c. \tag{1.2}$$

- **Conjugação relativamente à superfície esférica unitária**

$$\xi_1 \mapsto \xi_2 = (\xi_1)^c = \frac{-1}{x - a^c}. \tag{1.3}$$

- **Reflexão segundo o hiperplano $\mathbf{H}_\alpha$**

  Note-se que a composição a efectuar em $\mathbb{R}^{0,n}$ é diferente da usual em $\mathbb{C}$: no plano complexo, é executada uma rotação de amplitude $-\theta$, seguida de inversão relativamente à circunferência unitária, composta com uma reflexão segundo o eixo definido por $\frac{a}{|a|}$, à qual sucede uma nova rotação de ângulo θ.

  Uma vez que a conjugação relativamente à superfície esférica unitária e as reflexões em hiperplanos que contêm a origem **comutam** com rotações, podemos então simplificar esta acção, reduzindo-a a conjugação relativamente à superfície esférica unitária seguida de uma reflexão com respeito ao hiperplano definido pelo vector $a \in \mathbb{R}^{0,n}$, ou seja

$$\xi_2 \mapsto \xi_3 = \alpha\xi_2\alpha = \alpha\left(\frac{-1}{x - a^c}\right)\alpha. \tag{1.4}$$

- **Homotetia seguida de translação**

$$\begin{aligned} \xi_3 \mapsto y \quad &= \quad \left(\frac{1}{|a|^2} - 1\right)\alpha\left(\frac{-1}{x - a^c}\right)\alpha - a^c \\ &= \quad \left(1 - \frac{1}{|a|^2}\right)a\,\frac{1}{|a|}\left(\frac{-1}{x - a^c}\right)\overline{\alpha} - a^c. \end{aligned} \tag{1.5}$$

Lema 1.1.1 *A expressão (1.5) admite a simplificação*

$$y = (x - a)\,(ax + 1)^{-1}, \tag{1.6}$$

que corresponde a uma transformação que é análoga a (1) e que está definida em $\mathbb{R}^{0,n}$ *para* $|x| < 1$*, com* $|a| < 1$*. De agora em diante designaremos por* $\mathcal{M}$ *o grupo das transformações do tipo (1.6) (no capítulo* 2 *será provado de que* $\mathcal{M}$ *é de facto um grupo).*

Demonstração: A partir de (1.5) podemos dizer que $\frac{1}{|a|}\left(\frac{-1}{x-a^c}\right)\overline{\alpha} = -(ax+1)$ e $\left(1-\frac{1}{|a|^2}\right)a = a - a^c$. Assim, para $x \neq a^c$, obtemos

$$\begin{aligned} y &= -(a-a^c)(ax+1)^{-1} - a^c \\ &= (x-a)(ax+1)^{-1}. \end{aligned}$$

■

Nota: A inversa de (1.6) é

$$x = (y+a)(1-ay)^{-1}. \tag{1.7}$$

Relativamente a uma transformação do tipo (1.6) podemos concluir que, para $|a|<1$, a bola unitária $|x| \leq 1$ é transformada em si própria ($|y|^2 \leq 1$). De facto, da expressão (1.6) podemos retirar a seguinte relação:

$$1-|y|^2 = (1-|x|^2)(1-|a|^2)\overline{(ax+1)^{-1}}(ax+1)^{-1}. \tag{1.8}$$

Por um lado, pelas condições inicias podemos desde logo dizer que os primeiros dois termos da expressão anterior são não negativos. Por outro lado, tendo em conta que

$$ax+1 = a\left(x + \frac{\overline{a}}{|a|^2}\right),$$

e atendendo ao facto de que o produto de vectores invertíveis é um vector invertível concluímos que $(ax+1)$ é invertível. Além disso, podemos dizer que

$$\overline{(ax+1)^{-1}}(ax+1)^{-1} = \left(x+\frac{\overline{a}}{|a|^2}\right)^{-1} a^{-1}\,\overline{a^{-1}}\,\overline{\left(x+\frac{\overline{a}}{|a|^2}\right)^{-1}},$$

ou seja, o segundo membro da igualdade anterior é igual ao produto de dois escalares não negativos.

Portanto, o membro à direita de (1.8) é o produto de escalares não negativos, pelo que $1-|y|^2 \geq 0$, que corresponde ao que pretendíamos provar.

1.2 A métrica invariante

Para calcular o diferencial de y necessitamos de ter $d(u^{-1})$ em termos de du, com $u \in \mathbb{R}^{0,n}$.

Lema 1.2.1 *Para* $u \in \mathbb{R}^{0,n}$*, temos*

$$d\left(\frac{1}{u}\right) = -\frac{u(du)u}{u^4}. \tag{1.9}$$

Demonstração: Para $u \in \mathbb{R}^{0,n}$

$$\begin{aligned} d\left(\frac{1}{u}\right) &= d\left(\frac{u}{uu}\right) \\ &= \frac{du}{u^2} - u\,\frac{d(uu)}{u^4} \\ &= \frac{du}{u^2} - \frac{u\,d(uu)}{u^4} \\ &= \frac{u^2(du) - u(u(du) + (du)u)}{u^4} \\ &= \frac{u^2du - u^2du - u\,du\,u}{u^4} \\ &= -\frac{u(du)u}{u^4}. \end{aligned}$$

∎

Lema 1.2.2 *A métrica diferencial, invariante em* $\mathbb{R}^{0,n}$ *sob a acção dos elementos do grupo* $\mathcal{M}$, *é*

$$\frac{|dy|}{(1-|y|^2)} = \frac{|dx|}{(1-|x|^2)}. \tag{1.10}$$

Demonstração: Uma vez que

$$y = \left(1 - \frac{1}{|a|^2}\right)\alpha\left(\frac{-1}{x-a^c}\right)\overline{\alpha} - a^c$$

concluímos que

$$dy = \left(1 - \frac{1}{|a|^2}\right)\alpha\left[\frac{(x-a^c)\;dx\;(x-a^c)}{(x-a^c)^4}\right]\overline{\alpha}.$$

Donde

$$|dy|^2 = (|a|^2-1)^2\;\frac{1}{|ax+1|^4}\;|dx|^2. \tag{1.11}$$

Tendo em conta a expressão anterior e atendendo a (1.8) obtemos

$$\frac{|dy|^2}{(1-|y|^2)^2} = \frac{|dx|^2}{(1-|x|^2)^2}.$$

∎

1.3 Operadores invariantes

Nesta secção será estudada a existência de operadores invariantes relativamente à acção da transforma1ção (1.6). Diremos que um operador D é invariante relativamente à acção $(T_g : f \mapsto f \circ g)$ de uma transformação g de $\Omega \subset \mathbb{R}^{0,n} \to \mathbb{R}^{0,n}$ se $T_gD = DT_g$.

Consideremos o operador de Laplace

$$\Delta f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}, \tag{1.12}$$

que tem a seguinte representação em coordenadas polares ($x = \rho\xi$), $\xi \in S^{n-1}$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{n-1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho} \; + \; \frac{\Delta_\xi}{\rho^2}, \tag{1.13}$$

onde $\Delta_\xi f \;=\; \Delta\left(f\left(\frac{x}{|x|}\right)\right)$. O operador Δ é invariante relativamente a transformações ortogonais e translações, mas não é relativamente a inversões. De entre as suas aplicações, destacam-se as seguintes (ver [13]):

- Determinação do potencial gravitacional de uma região do espaço que não contém matéria;
- Resolução de problemas de electrostática que envolvem superfícies limitadas onde se pretende estudar o potencial electrostático;
- Determinação da velocidade da corrente de um fluído incompressível sem fontes ou vortex;
- Estudo do potencial eléctrico, na teoria que analisa o comportamento da corrente eléctrica em condutores sólidos.

Vamos agora estudar o comportamento do operador de Laplace sob a acção do grupo $\mathcal{M}$ em $\mathbb{R}^{0,n}$.

Lema 1.3.1 *O operador*

$$(1-|x|^2)^{\frac{n}{2}+1}\Delta_x(1-|x|^2)^{-\frac{n}{2}+1} \tag{1.14}$$

é invariante relativamente à transformação definida em (1.6).

Demonstração: Consideremos o seguinte operador

$$r^\gamma \Delta r^\beta, \tag{1.15}$$

e vamos ver para que valores de γ e β este é invariante segundo

$$y = -\frac{1}{x} = x^c,$$

que corresponde à inversão com respeito à superfície esférica unitária. Usando coordenadas polares $y = \rho\xi$ e $x = r\xi$, onde

$$\rho = \frac{1}{r}, \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial}{\partial \rho} = -r^2\frac{\partial}{\partial r}. \tag{1.16}$$

Assim, a partir de (1.13), podemos dizer que para todo o f se verifica

$$r^{\gamma}\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{n-1}{r}\,\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\Delta_\xi}{r^2}\right)r^{\beta}f(x) \quad = \quad \rho^{\gamma}\left(\frac{\partial^2}{\partial \rho^2}+\frac{n-1}{\rho}\,\frac{\partial}{\partial \rho}+\frac{\Delta_\xi}{\rho^2}\right)\rho^{\beta}f(x(y)) \tag{1.17}$$

onde $x(y)$ é definida por (1.7).

Tomando f constante relativamente a r obtemos, a partir de (1.17) e de $\rho=\frac{1}{r}$

$$\rho^{\gamma+\beta-2}\Delta_\xi f(\xi) \quad = \quad r^{\gamma+\beta-2}\Delta_\xi f(x) \quad = \quad \rho^{2-\beta-\gamma}\Delta_\xi f(\xi).$$

Dada a arbitrariedade de $f(\xi)$ podemos dizer que

$$\gamma+\beta-2=0 \Leftrightarrow \gamma=2-\beta. \tag{1.18}$$

Desenvolvendo o 1^o membro de (1.17), com f não necessáriamente uma função constante relativamente a r, obtemos

$$r^2\,\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}(x)+(2\beta+n-1)r\frac{\partial f}{\partial r}(x)+\beta(\beta+n-2)f(x)+\Delta_\xi f(x),$$

e, por outro lado,desenvolvendo o 2^o membro, temos

$$r^2\,\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}(x)+(3-2\beta-n)r\frac{\partial f}{\partial r}(x)+\beta(\beta+n-2)f(x)+\Delta_\xi f(x),$$

donde existirá igualdade entre os dois membros na condição de

$$2\beta+n-1=3-2\beta-n \quad \Leftrightarrow \quad \beta=1-\frac{n}{2}. \tag{1.19}$$

Então para a transformação

$$y+a^c \quad = \quad \left(\frac{1}{|a|^2-1}\right)\alpha\left(\frac{-1}{x-a^c}\right)\overline{\alpha} \tag{1.20}$$

temos

$$|x-a^c|^{\frac{n}{2}+1}\Delta_x|x-a^c|^{1-\frac{n}{2}}F(x)=$$

$$=\left(\frac{1}{|a|^2-1}\right)^{-\gamma-\beta+2}|y+a^c|^{\frac{n}{2}+1}\Delta_y|y+a^c|^{1-\frac{n}{2}}F(x(y)), \tag{1.21}$$

mas atendendo a (1.18) podemos dizer que

$$\left(\frac{1}{|a|^2-1}\right)^{-\gamma-\beta+2}=\left(\frac{1}{|a|^2-1}\right)^{0}=1,$$

assim o segundo membro de (1.21) é simplificado, obtendo-se

$$|x-a^c|^{\frac{n}{2}+1}\Delta_x|x-a^c|^{1-\frac{n}{2}}F(x) \quad = \quad |y+a^c|^{\frac{n}{2}+1}\Delta_y|y+a^c|^{1-\frac{n}{2}}F(x(y)). \tag{1.22}$$

Tendo em conta (1.5) e (1.8) concluímos que

$$\frac{|y+a^c|}{1-|y|^2} = \frac{|x-a^c|}{1-|x|^2}. \tag{1.23}$$

Efectuando a substituição

$$\begin{aligned} F(x) &= \left(\frac{1-|x|^2}{|x-a^c|}\right)^{1-\frac{n}{2}} f(x) \\ &= \left(\frac{1-|y|^2}{|y+a^c|}\right)^{1-\frac{n}{2}} f(x(y)) = F(x(y)) \end{aligned}$$

e se multiplicarmos o 1^o e o 2^o membros de (1.22), respectivamente, por $\left(\frac{1-|x|^2}{|x-a^c|}\right)^{\frac{n}{2}+1}$ e $\left(\frac{1-|y|^2}{|y+a^c|}\right)^{\frac{n}{2}+1}$, obtemos a seguinte igualdade

$$(1-|x|^2)^{\frac{n}{2}+1}\Delta_x(1-|x|^2)^{-\frac{n}{2}+1}f(x) = (1-|y|^2)^{\frac{n}{2}+1}\Delta_y(1-|y|^2)^{-\frac{n}{2}+1}f(x(y)),$$

ou seja,

$$(1-|x|^2)^{\frac{n}{2}+1}\Delta_x(1-|x|^2)^{-\frac{n}{2}+1},$$

que corresponde ao operador invariante associado à transformação (1.6).

■

Repare-se que este operador não preserva as funções harmónicas, isto é, o transformado de uma função harmónica não é necessáriamente harmónico. No entanto, de seguida apresenta-se um mecanismo que permite "preservar"a harmonicidade de uma função quando aplicamos este operador.

Seja $h(x)$ uma função harmónica e considere-se a seguinte função H, definida por

$$H(y) = \left(\frac{1-|y|^2}{1-|x(y)|^2}\right)^{1-\frac{n}{2}} h(x(y)), \tag{1.24}$$

que também é harmónica. De facto, para $f(x) = \left(1-|x|^2\right)^{\frac{n}{2}-1} h(x)$ temos, por um lado

$$(1-|x|^2)^{\frac{n}{2}+1}\Delta_x h(x) = (1-|y|^2)^{\frac{n}{2}+1}\Delta_y H(x(y)). \tag{1.25}$$

Por outro lado

$$\begin{aligned} (1-|x|^2)^{\frac{n}{2}+1}\Delta_x(1-|x|^2)^{-\frac{n}{2}+1}f(x) &= (1-|x|^2)^2\Delta_x f(x) + n(n-2)f(x) + \\ &\quad +2(n-2)(1-|x|^2)\sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x), \end{aligned}$$

donde resulta a seguinte expressão

$$(1-|x|^2)^2\ \Delta_x + 2(n-2)(1-|x|^2)\sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial}{\partial x_i} \tag{1.26}$$

que é outro operador invariante associado à transformação (1.6), mas que é equivalente ao operador deduzido anteriormente em (1.14).

1.4 Um problema análogo ao problema de Dirichlet

Vamos agora provar que, dada uma função φ, contínua na superfície esférica unitária $|u| = 1$, existe uma função contínua ψ na bola unitária $|u| \leq 1$ tal que para $|u| = 1$

$$\psi(u) = \varphi(u) \tag{1.27}$$

e, para $|x| < 1$,

$$(1-|x|^2)^2\ \Delta_x + 2(n-2)(1-|x|^2)\sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial \psi}{\partial x_i} = 0. \tag{1.28}$$

Consideremos novamente a transformação (1.6)

$$v = (u-x)(xu+1)^{-1}. \tag{1.29}$$

Atendendo a (1.8) podemos dizer que para $|u| = 1$ temos $|v| = 1$, esta conclusão, juntamente com (1.11), permite-nos dizer que

$$\begin{aligned} |dv|^2 &= \frac{(1-|x|^2)^2}{|xu+1|^4}\ |du|^2 \\ &= \left(\frac{1-|x|^2}{|x|^2 + 2|x|\left\langle u, \frac{x}{|x|}\right\rangle + 1}\right)^2 |du|^2 \end{aligned} \tag{1.30}$$

e portanto, o elemento de área é dado por

$$dS_v = \left(\frac{1-|x|^2}{|x|^2 + 2|x|\left\langle u, \frac{x}{|x|}\right\rangle + 1}\right)^{n-1} dS_u, \tag{1.31}$$

onde $\left\langle u, \dfrac{x}{|x|}\right\rangle = \dfrac{1}{|x|}\ \langle u, x\rangle = \dfrac{1}{|x|}\ \dfrac{1}{2}\ \mathcal{B}(u,x) = \dfrac{1}{2|x|}\ (ux + xu).$

Definição 1.4.1 ***(ver [19])*** *Para* $|x| < 1$ *e* $|u| = 1$*, definimos em* $\mathbb{R}^{0,n}$*, o análogo do Núcleo de Poisson da seguinte forma*

$$\begin{aligned} P(x,u) &= \left(\frac{1-|x|^2}{|x|^2 + 2|x| \left\langle u, \frac{x}{|x|} \right\rangle + 1} \right)^{n-1} \\ &= \left(\frac{1-|x|^2}{\rho^2 - 2\rho\cos\theta + 1} \right)^{n-1}, \end{aligned} \tag{1.32}$$

onde $x = \rho\xi, \quad \rho \geq 0 \;$ *e* $\; \cos\theta = - < u, \xi > = -\frac{1}{2}\,\mathcal{B}(u,\xi) = -\frac{1}{2}\,(u\xi + \xi u).$

Esta função tem as seguintes propriedades:

- **Positividade:** Para cada $\rho < 1$ temos que $P(x,u) > 0$.
  A prova desta propriedade é imediata. De facto, para os valores de ρ referidos temos

  $$\rho^2 - 2\rho\cos\theta + 1 \geq \rho^2 - 2\rho + 1 = (\rho - 1)^2 > 0$$

- Quando nos **aproximamos da fronteira da bola unitária** verifica-se o seguinte comportamento

  $$\lim_{\rho\to 1} P(\rho,\theta) = \begin{cases} 0, & u \neq \xi \\ \infty, & u = \xi \end{cases}$$

  De facto, para $u \neq \xi$ e $\cos\theta < 1$ temos que

  $$P\,(x,u) = \left(\frac{1-\rho^2}{\rho^2 - 2\rho\cos\theta + 1} \right)^{n-1},$$

  donde

  $$\lim_{\rho\to 1} P(\rho,\theta) = \frac{0}{2 - 2\cos\theta} = 0.$$

  Para $u = \xi$ concluímos que $\cos\theta = - < u, u > = 1$. De facto temos que

  $$P\,(x,u) = \left(\frac{1-\rho^2}{(1-\rho)^2} \right)^{n-1} = \left(\frac{1+\rho}{1-\rho} \right)^{n-1},$$

  donde

  $$\lim_{\rho\to 1^-} P(\rho,\theta) = \infty.$$

- O **integral ao longo da fronteira** toma o seguinte valor
$$\frac{1}{w_{n-1}}\int_{\partial B(1)} P(x,u)dS_u = 1, \tag{1.33}$$
onde w_{n-1} é a área da superfície esférica unitária $\partial B(1)$.

  A prova desta igualdade é imediata. Através da mudança de variável (1.29) podemos dizer que
$$\frac{1}{w_{n-1}}\int_{\partial B(1)} P(x,u)dS_u = \frac{1}{w_{n-1}}\int_{\partial B(1)} dS_v = 1.$$

- $P(x,u)$ é a solução da equação diferencial (1.28). De facto verifica-se que
$$(1-|x|^2)^{\frac{n}{2}+1}\Delta_x(1-|x|^2)^{1-\frac{n}{2}}P(x,u) = n(n-2)P(x,u)$$
donde
$$(1-|x|^2)^2\Delta_x + 2(n-2)(1-|x|^2)\sum_{i=1}^{n} x_i\frac{\partial P}{\partial x_i}(x,u) = 0.$$

Definição 1.4.2 *Para uma função φ, contínua na superfície esférica unitária, definimos a seguinte função ψ*

$$\psi(x) = \frac{1}{w_{n-1}}\int_{\partial B(1)} \varphi(u)P(x,u)dS_u,\ |x|<1. \tag{1.34}$$

Vamos agora provar que esta função é a solução do problema de tipo Dirichlet na superfície esférica unitária, isto é, satisfaz (1.28) e $\lim_{\rho\to 1^-}\psi(\rho u) = \varphi(u)$, para $|u| = 1$.

Assim

- Uma vez que $\varphi(u)$ e $P(x,u)$ são contínuas e têm derivadas parciais contínuas em $B(1)$ concluímos que $P(x,u)$ satisfaz (1.28). Portanto, a função definida em (1.34) satisfaz (1.28).

- Considere-se, para $|y| = 1$ $\rho < 1$, a seguinte diferença
$$\begin{aligned}\psi(\rho y) - \varphi(y) &= \frac{1}{w_{n-1}}\int_{\partial B(1)} P(\rho y,u)\left[\varphi(u)-\varphi(y)\right]dS_u \\ &= \frac{1}{w_{n-1}}\int_{\partial B(1)}\left(\frac{1-\rho^2}{\rho^2-2\rho\cos\theta+1}\right)^{n-1}\left[\varphi(u)-\varphi(y)\right]dS_u,\end{aligned}$$
onde $\cos\theta = -<u,y>$.

  Pela continuidade de φ, para cada $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que
$$|\theta| < \delta \Rightarrow |\varphi(u)-\varphi(y)| < \epsilon$$

e portanto

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{w_{n-1}}\int_{\partial B(1),|\theta|<\delta} P(\rho y,u)[\varphi(u)-\varphi(y)]dS_u\right| &\leq \epsilon\frac{1}{w_{n-1}}\int_{\partial B(1),|\theta|<\delta} P(\rho y,u)dS_u \\ &\leq \epsilon\frac{1}{w_{n-1}}\int_{\partial B(1)} P(\rho y,u)dS_u \\ &= \epsilon.\end{aligned}$$

Quando $|\theta| \geq \delta$, pelas propriedades de (1.32), existe $\rho_0 < 1$ tal que

$$P(\rho y,u) \leq \left(\frac{1-\rho^2}{\rho^2 - 2\rho\cos\delta + 1}\right)^{n-1} < \frac{\epsilon}{2M},$$

onde

$$\rho_o < \rho < 1 \text{ e } M = \max_{|u|=1}|\varphi(u)|.$$

Assim

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{w_{n-1}}\int_{\partial B(1),|\theta|\geq\delta} P(\rho y,u)[\varphi(u)-\varphi(y)]dS_u\right| &\leq \frac{1}{w_{n-1}}\int_{\partial B(1),|\theta|\geq\delta} 2M\frac{\epsilon}{2M}dS_u \\ &\leq \epsilon\frac{1}{w_{n-1}}\int_{\partial B(1)} dS_u = \epsilon\end{aligned}$$

Deste modo concluímos que

$$|\psi(\rho y) - \varphi(y)| < 2\epsilon \Leftrightarrow \lim_{\rho\to 1^-}\psi(\rho y) = \varphi(y).$$

1.5 A fórmula de Poisson para a equação de Laplace

De forma a construir a fórmula de Poisson para a equação de Laplace, vamos provar o seguinte resultado que nos dá a fórmula de valor médio para a equação de Laplace:

Teorema 1.5.1 *Se φ é uma função harmónica em $B(1)$ e contínua em $\overline{B(1)}$, então para $0 \leq \rho \leq 1$ temos que*

$$\varphi(0) = \frac{1}{w_{n-1}}\int_{|u|=1}\varphi(\rho u)dS_u. \tag{1.35}$$

Demonstração: Como φ é harmónica em $B(1)$, podemos escrevê-la em termos de esféricas harmónicas (ver [20])

$$\varphi(\rho u) = \sum_{k=0}^{\infty} \rho^k S_k(u)$$

e, para $\rho < 1$,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{w_{n-1}} \int_{|u|=1} \varphi(\rho u) dS_u &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{w_{n-1}} \rho^k \int_{|u|=1} S_k(u) dS_u \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \rho^k \langle S_k, 1 \rangle \; = \; S_0
\end{aligned}$$

onde, quando $\rho \to 0$

$$S_0 = \varphi(0) \qquad \text{com} \qquad \varphi(0) = \frac{1}{w_{n-1}} \int_{|u|=1} \varphi(\rho u) dS_u.$$

Como φ é harmónica, é de classe C^∞ em $B(1)$. Além disso, a sua continuidade em $\overline{B(1)}$ permite considerar $\rho = 1$.

■

Anteriormente vimos em (1.8) que

$$\begin{aligned}
H(y) &= \left(\frac{1 - |y|^2}{1 - |x|^2} \right)^{1 - \frac{n}{2}} h(x(y)) \\
&= \left(\frac{1 - |a|^2}{|ax + 1|^2} \right)^{1 - \frac{n}{2}} h(x(y)),
\end{aligned} \tag{1.36}$$

é harmónica sempre que h é harmónica.

Atendendo à fórmula do valor médio temos que

$$H(0) = \frac{1}{w_{n-1}} \int_{|v|=1} H(v) dS_v. \tag{1.37}$$

Considerando a seguinte mudança de variável

$$v = (u - a)(au + 1)^{-1}, \tag{1.38}$$

onde

$$dS_v = \left(\frac{1 - |a|^2}{|a|^2 + 2|a| < \alpha, u > +1} \right)^{n-1} dS_u,$$

com $|u| = |v| = 1$ e $\alpha = \frac{a}{|a|}$.

Uma vez que (1.38) transforma $u = a$ em $v = 0$, obtemos

$$H(0) = (1 - |a|^2)^{\frac{n}{2}-1} h(a) \tag{1.39}$$

e

$$H(v) = \left(\frac{1 - |a|^2}{|a|^2 + 2|a| < \alpha, u > +1} \right)^{1-\frac{n}{2}} h(u) \tag{1.40}$$

novamente com $|u| = |v| = 1$.

Assim (1.37) toma a seguinte forma

$$\begin{aligned} (1 - |a|^2)^{\frac{n}{2}-1} h(a) &= \frac{1}{w_{n-1}} \int_{|u|=1} \left(\frac{1 - |a|^2}{|a|^2 + 2|a| < \alpha, u > +1} \right)^{n-1+(1-\frac{n}{2})} h(u) dS_u \\ &= \frac{1}{w_{n-1}} \int_{|u|=1} \frac{1 - |a|^2}{(|a|^2 + 2|a| < \alpha, u > +1)^{\frac{n}{2}}} h(u) dS_u, \end{aligned}$$

donde resulta a Fórmula Integral de Poisson para a equação de Laplace

$$h(a) = \frac{1}{w_{n-1}} \int_{|u|=1} \frac{1 - |a|^2}{(|a|^2 + 2|a| < \alpha, u > +1)^{\frac{n}{2}}} h(u) dS_u.$$

Uma das vantagens da expressão deduzida é de que dada uma função h harmónica na bola unitária, a fórmula integral de Poisson dá os valores da função h no interior da bola unitária a partir dos valores sobre a superfície esférica, à semelhança da fórmula de Cauchy para as funções holomorfas no plano complexo.

Capítulo 2

Esferas em $\mathbb{R}^{p,q}$ - coordenadas projectivas

"Se eu vi mais longe do que outros, foi por estar sobre os ombros de gigantes"

Issac Newton

O plano projectivo pode ser definido através de um modelo "concreto"que obedece a algumas propriedades típicas do plano euclidiano, ou então através de uma estrutura abstracta que satisfaz um conjunto de axiomas.

As definições que seguem a via axiomática têm a vantagem de serem concisas e elegantes, mas a sua generalização a espaços de dimensão arbitrária exige alguns cuidados. Apesar deste inconveniente, durante este trabalho será considerada a via axiomática como ponto de partida para a definição do nosso modelo concreto.

A utilização das coordenadas projectivas tem algumas vantagens, tais como:

- **Simplificação das fórmulas**: A utilização de coordenadas projectivas permite simplificar as expressões que envolvem as operações básicas da álgebra linear: determinantes, adições, multiplicações, produtos internos, produtos externos, multiplicação de matrizes, etc. Todas as transformações euclidianas e respectivas projecções podem ser expressas em termos de transformações lineares que actuam num determinado ponto.

- **Permite o omissão de alguns casos particulares**: A utilização de coordenadas projectivas permite representar pontos e linhas no infinito de uma forma natural, sem ter que utilizar uma notação alternativa nem condições suplementares. Esta vantagem torna-se muito importante nas aplicações a algoritmos uma vez que o número de condições envolvidas diminui e na redacção de teoremas porque o número de casos particulares também vai diminuir.

- **Unificação e extensão dos conceitos**: Uma das vantagens da utilização das coordenadas projectivas é a unificação dos conceitos. Por exemplo, as diferenças entre círculos, elipses, parábolas e hipérboles desaparecem quando estamos a trabalhar com coordenadas projectivas, pelo que estas curvas "se transformam"numa outra curva.

- **Dualidade**: A determinação de um ponto a partir da intersecção de duas linhas está relacionada com a determinação de uma linha a partir de dois pontos. Mais geralmente, dizemos que toda a proposição sobre pontos e linhas (no plano) pode ser substituída por uma proposição *dual* sobre linhas e pontos. A possibilidade de fazer esta substituição é conhecida por *princípio da dualidade ou princípio de Plücker*. A dualidade transmite à geometria projectiva características peculiares, tornando-a mais simétrica que a usual geometria Euclidiana. Além disso, a dualidade é uma ferramenta muito útil a nível prático e a nível teórico.

No entanto, a geometria projectiva também tem alguns inconvenientes, tais como:

- **O plano projectivo não tem orientação**: Formalmente está-se a dizer que não é possível definir um sentido *horário* e um sentido *anti-horário* relativamente à orientação dos ângulos.

- **As linhas possuem apenas um lado**: Se removermos uma linha do plano projectivo, o que resta é um conjunto conexo de pontos que é topológicamente equivalente a um disco. Assim, não faz sentido perguntar quando é que dois pontos estão do mesmo lado de uma dada linha. De uma forma geral, podemos dizer que falha o teorema de Jordan, uma vez que uma curva simples e fechada não divide o plano em duas regiões distintas.

- **Os segmentos e as direcções são ambíguos**: Na geometria projectiva não é possível definir de uma forma consistente um segmento que une dois pontos. Dois pontos dividem a linha que passa por eles em dois arcos, e não é possível fazer uma distinção consistente entre os dois. Neste contexto não faz sentido a seguinte afirmação *"dado um ponto r entre dois pontos p e q"*. Tal como no caso anterior, não é possível definir a direcção que vai do ponto p para o ponto q.

- **Não existem figuras convexas**: A noção de conjunto convexo não faz sentido no plano projectivo. O problema não esta apenas na definição de conjunto convexo, mas também no facto de não ser possível distinguir um conjunto convexo de um conjunto não convexo.

As desvantagens apresentadas, apesar de terem alguma importância, não têm influência no trabalho que irá ser desenvolvido nos próximos capítulos. Além disso, as vantagens apresentadas inicialmente reforçam ainda mais a sua utilização no estudo das transformadas de Möbius em $\mathbb{R}^{0,n}$.

A equação de uma superfície esférica s em $\mathbb{R}^{p,q}$, com centro m e raio r[1] é dada por

$$\begin{aligned} s \; : \;\; & |y-m|^2 = r^2 \\ & (y-m)\,\overline{(y-m)} = r^2 \\ & |y|^2 + 2\langle y, m\rangle + |m|^2 = r^2. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Usando coordenadas projectivas, identificamos uma superfície esférica s em $\mathbb{R}^{p,q}$ com

$$s : (\mu, k, \nu) = k\left(m, 1, |m|^2 - r^2\right) \qquad , k \neq 0. \tag{2.2}$$

Um ponto x de $\mathbb{R}^{p,q}$ é assim identificado com uma superfície esférica de centro x e raio zero, pelo que terá as seguintes coordenadas projectivas

$$x : (\mu, k, \nu) = k\left(x, 1, |x|^2\right) \qquad , k \neq 0, \tag{2.3}$$

enquanto que um hiperplano h de equação

$$h : 2\langle y, m\rangle + 2b = 0, \tag{2.4}$$

terá as seguintes coordenadas projectivas

$$h : (\xi, 0, \eta) = \rho\,(m, 0, 2b) \qquad , \rho \neq 0. \tag{2.5}$$

2.1 Intersecção ortogonal

Necessitamos de uma forma bilinear em $\mathbb{R}^{n+2}$, para tal atenderemos ao conceito de ortogonalidade entre superfícies esféricas em $\mathbb{R}^{p,q}$. Consideremos s_1 e s_2 duas superfícies esféricas em $\mathbb{R}^{p,q}$, com as seguintes coordenadas

$$s_1 : (\mu_1, k_1, \nu_1) = k_1\left(m_1, 1, |m_1|^2 - r_1^2\right) \qquad , k_1 \neq 0 \tag{2.6}$$

$$s_2 : (\mu_2, k_2, \nu_2) = k_2\left(m_2, 1, |m_2|^2 - r_2^2\right) \qquad , k_2 \neq 0. \tag{2.7}$$

Definição 2.1.1 *Dizemos que s_1 intersecta ortogonalmente s_2 se e só se*

$$\langle m_1 - y, m_2 - y\rangle = 0, \forall y \in s_1 \cap s_2,$$

[1] De momento, tomemos $r > 0$; note-se todavia que faz igualmente sentido tomar uma superfície esférica de raio imaginário ir, $r > 0$

isto é, se e só se

$$\begin{aligned} |m_1 - m_2|^2 &= |m_1 - y + y - m_2|^2 \qquad y \in s_1 \cap s_2 \\ &= |m_1 - y|^2 + |m_2 - y|^2 + 2\langle m_1 - y, m_2 - y\rangle \\ &= r_1^2 + r_2^2. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Desenvolvendo o primeiro membro da expressão (2.8) obtemos

$$\frac{|m_1|^2 + |m_2|^2 - r_1^2 - r_2^2}{2} = -\langle m_1, m_2\rangle, \tag{2.9}$$

onde $-\langle m_1, m_2\rangle = -\frac{1}{2}\,\mathcal{B}(m_1, m_2) = -\frac{1}{2}\,(m_1 m_2 + m_2 m_1)$.

Usando a relação anterior estabelecemos assim uma forma bilinear no espaço projectivo $\mathbb{R}^{n+2}$ que preserva a ortogonalidade das superfícies esféricas originais.

$$S_1 \daleth S_2^T = 0 \quad\Leftrightarrow\quad (\mu_1, k_1, \nu_1)\begin{pmatrix} I_p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -I_q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}(\mu_2, k_2, \nu_2)^T = 0 \tag{2.10}$$

$$\Leftrightarrow\quad \sum_{i=1}^{p} \mu_i^1 \mu_i^2 - \sum_{i=p+1}^{p+q} \mu_i^1 \mu_i^2 + \frac{k_1 \nu_2 + k_2 \nu_1}{2} = 0. \tag{2.11}$$

A última expressão é igual, a menos de uma constante $k_1 k_2$, à expressão (2.9).
Assim, podemos dizer que um ponto X verifica a equação de uma superfície esférica S se e só se considerando X como uma superfície esférica de raio zero, esta intersecta ortogonalmente a superfície esférica S, isto é, em coordenadas projectivas, $X \daleth S^T = 0$.
Outra conclusão que resulta da definição de ortogonalidade é de que uma superfície esférica tem raio zero se e só se se intersectar ortogonalmente a si própria.

Nota: No Apêndice B será estudado o caso particular do hiperplano.

2.2 Identificação com $\mathbb{R}_{p+1,q+1}$

A matriz $\daleth$ em (2.10) está associada a uma forma bilinear, simétrica e não degenerada de $\mathbb{R}^{p+q+2}$. Se determinarmos os seus valores próprios e correspondentes vectores próprios.

Valores Próprios de $\daleth$	**Vector Próprio Associado**
1	$e_i = (e_i, 0, 0) : e_i \daleth e_i^T = 1 \qquad , i = \overline{1, p}$
-1	$e_i = (e_i, 0, 0) : e_i \daleth e_i^T = -1 \qquad , i = \overline{p+1, q+p}$
$\frac{1}{2}$	$e_+ = (0, 1, 1) : e_+ \daleth e_+^T = 1$
$-\frac{1}{2}$	$e_- = (0, 1, -1) : e_- \daleth e_-^T = -1$

concluímos que podemos associar a cada superfície esférica (μ, k, ν) um número da Álgebra de Clifford $\mathbb{R}_{p+1,q+1}$, gerada por $\mathbb{R}^{p,q}$ e por e_+ e e_- onde $e_+^2 = 1, e_-^2 = -1$ e e_+ e e_- são ortogonais entre si e ortogonais a $\mathbb{R}^{p,q}$. Assim:

$$\begin{aligned} S : (\mu, k, \nu) \longrightarrow S &= \sum_{i=1}^{p+q} \mu_i e_i + k\frac{e_+ + e_-}{2} + \nu\frac{e_+ - e_-}{2} \\ &= \sum_{i=1}^{p+q} \mu_i e_i + \frac{k-\nu}{2}e_- + \frac{k+\nu}{2}e_+. \end{aligned} \tag{2.12}$$

Passando para a Álgebra de Clifford concluímos que

$$k = S \cdot \left(\frac{e_+ - e_-}{2}\right) \neq 0 \qquad m_i = \frac{u_i}{k}\ , i = \overline{1, p+q} \qquad \nu = S \cdot \left(\frac{e_+ - e_-}{2}\right),$$

onde $\cdot$ tem a interpretação indicada para $<,>$ em (2.9), e

$$\begin{aligned} S_1 \cdot S_2 &= \left(\sum_{i=1}^{p+q} \mu_i^1 e_i + \frac{k_1 - \nu_1}{2}e_- + \frac{k_1+\nu_1}{2}e_+\right) \cdot \left(-\sum_{i=1}^{p+q} \mu_i^2 e_i - \frac{k_2-\nu_2}{2}e_- - \frac{k_2+\nu_2}{2}e_+\right) \\ &= -\sum_{i=1}^{p} \mu_i^1\mu_i^2 + \sum_{i=p+1}^{p+q} \mu_i^1\mu_i^2 + \frac{(k_1-\nu_1)(k_2-\nu_2)-(k_1+\nu_1)(k_2+\nu_2)}{4} \\ &= -\langle \mu_1, \mu_2 \rangle - \frac{k_1\nu_2 + k_2\nu_1}{2} \\ &= -k_1k_2\left(\langle m_1, m_2\rangle + \frac{|m_1|^2 + |m_2|^2 - r_1^2 - r_2^2}{2}\right). \end{aligned}$$

Se $S_1 = S_2 = S$ obtemos

$$S\overline{S} = k^2r^2,$$

o que nos permite identificar o vector S de $\mathbb{R}^{p+1,q+1}$ com a superfície esférica de raio real se $S\overline{S} > 0$, com um ponto se $S\overline{S} = 0$ ou com uma superfície esférica de raio imaginário se $S\overline{S} < 0$.

A ortogonalidade entre duas superfícies esféricas s_1 e s_2 de $\mathbb{R}^{p,q}$, vistas como vectores S_1, S_2 de $\mathbb{R}^{p+1,q+1}$, é dada por

$$S_1 \cdot S_2 = 0. \tag{2.13}$$

Desta forma identificámos projectivamente o cone isotrópico de $\mathbb{R}^{p+1,q+1}$ (conjunto dos vectores com norma zero) com $\mathbb{R}^{p,q}$.

2.3 O grupo ortogonal $O(p+1, q+1)$

Considere-se o grupo ortogonal $O(p+1, q+1)$, juntamente com o grupo Pin que lhe está associado. Uma vez que neste grupo podemos definir um produto interno em $\mathbb{R}^{p,q}$ invariante sob a acção dos elementos de O, obtemos uma aplicação definida no conjunto das superfícies esféricas de $\mathbb{R}^{p,q}$ com as seguintes propriedades:

1. Transforma pontos em pontos, desde que a nossa aplicação seja definida de $\mathbb{R}^{p,q}$ em $\mathbb{R}^{p,q}$.

2. Transforma superfícies esféricas em superfícies esféricas.

3. É uma aplicação conforme, isto é, transforma superfícies esféricas ortogonais em superfícies esféricas ortogonais. Assim, qualquer transformação de Möbius g em $\mathbb{R}^{p,q}$ estará associada a um elemento de $O(p+1, q+1)$.

4. Uma vez que estamos a trabalhar projectivamente, a aplicação $S \to -S$ corresponde à identidade em $\mathbb{R}^{p,q}$. Deste modo cada transformação de Möbius é identificada com dois elementos de $O(p+1, q+1)$.

2.4 O isomorfismo entre $(\mathbb{R}_{p,q})^{2\times 2}$ e $\mathbb{R}_{p+1,q+1}$

Vamos agora estudar a existência de uma representação matricial para os elementos de $\mathbb{R}_{p+1,q+1}$, com entradas em $\mathbb{R}_{p,q}$.

Teorema 2.4.1 *A aplicação de $(\mathbb{R}_{p,q})^{2\times 2}$ em $\mathbb{R}_{p+1,q+1}$ definida por*

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \longrightarrow af_1 + bf_2 + c'f_3 + d'f_4, \tag{2.14}$$

onde

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \to f_1, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \to f_2, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \to f_3, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \to f_4$$

é um isomorfismo de álgebras.

Demonstração: Uma base natural para o conjunto de matrizes de 2×2 é

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \to f_1, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \to f_2, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \to f_3, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \to f_4$$

para a qual podemos construir a seguinte tabela de multiplicação

$$\begin{array}{c|cccc} f_if_j & f_1 & f_2 & f_3 & f_4 \\ \hline f_1 & f_1 & f_2 & 0 & 0 \\ f_2 & 0 & 0 & f_1 & f_2 \\ f_3 & f_3 & f_4 & 0 & 0 \\ f_4 & 0 & 0 & f_3 & f_4 \end{array}.$$

Por outro lado, $\mathbb{R}_{p+1,q+1}$ é a álgebra de Clifford gerada por $\mathbb{R}^{p,q}, e_+, e_-$, pelo que iremos identificar os elementos f_1, f_2, f_3, f_4 com combinações lineares adequadas de $1, e_+, e_-$ e e_+e_-.

Uma vez que f_1 e f_4 são elementos idempotentes podemos dizer que

$$f_1 = \frac{1}{2}(1 - e_-e_+) \text{ e } \ f_4 = \frac{1}{2}(1 + e_-e_+)$$

isto é, f_1 e f_4 geram $\mathbb{R}^+_{p+1,q+1}$. Por outro lado, atendendo à tabela de multiplicação apresentada anteriormente, f_2 e f_3 podem ser vistos como uma combinação linear de e_- e e_+, isto é,

$$f_2 = \frac{1}{2}(-e_- + e_+) \ \text{ e } \ f_3 = \frac{1}{2}(e_- - e_+).$$

É fácil de verificar que f_1 e f_4 comutam com $\mathbb{R}_{p,q}$, enquanto que f_2 e f_3 comutam com $\mathbb{R}^+_{p,q}$ mas anti-comutam com $\mathbb{R}^-_{p,q}$, isto é

$$f_2 a = a' f_2 \ \text{ e } \ f_3 a = a' f_3, \quad \forall\, a \in \mathbb{R}_{p,q}.$$

Para $a, b, c, d, e, f, g, h \in \mathbb{R}_{p,q}$ obtemos, por um lado, o seguinte resultado para a multiplicação de matrizes

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ae + bg & af + bh \\ ce + dg & cf + dh \end{bmatrix},$$

por outro lado

$$\begin{aligned} (af_1 + bf_2 + c'f_3 + d'f_4)(ef_1 + ff_2 + g'f_3 + h'f_4) &= af_1ef_1 + af_1ff_2 + \\ bf_2g'f_3 + bf_2h'f_4 + c'f_3ef_1 + c'f_3ff_2 &+ d'f_4g'f_3 + d'f_4h'f_4 \\ = aef_1^2 + aff_1f_2 + bgf_2f_3 + bhf_2f_4 + c'e'f_3f_1 &+ c'f'f_3f_2 + d'g'f_4f_3 + d'h'f_4f_4 \\ = (ae + bg)f_1 + (af + bh)f_2 &+ (ce + dg)'f_3 + (cf + dh)'f_4. \end{aligned}$$

Assim, a aplicação de $(\mathbb{R}_{p,q})^{2\times 2}$ em $\mathbb{R}_{p+1,q+1}$ dada por

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \longrightarrow af_1 + bf_2 + cf_3 + df_4$$

é um isomorfismo de álgebras.

$\blacksquare$

De seguida vão ser definidas três involuções em $(\mathbb{R}_{p,q})^{2\times 2}$, cujas propriedades são semelhantes relativamente ao que definimos anteriormente para o caso de $\mathbb{R}_{p,q}$.

Tendo em conta as propriedades relativas às involuções em $\mathbb{R}_{p,q}$ podemos dizer que

$$\begin{aligned}
\overline{(af_1 + bf_2 + c'f_3 + d'f_4)} &= \overline{af_1} + \overline{bf_2} + \overline{c'f_3} + \overline{d'f_4} \\
&= f_4\overline{a} - f_2\overline{b} - f_3\overline{c'} + f_1\overline{d'} \\
&= \overline{d'}f_1 - \overline{b'}f_2 - \overline{c}f_3 + \overline{a}f_4 \\
&= d^*f_1 - b^*f_2 - (c^*)'f_3 + (a^*)'f_4,
\end{aligned}$$

o que nos permite concluir que a conjugação em $(\mathbb{R}_{p,q})^{2\times 2}$ é definida da seguinte forma

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \longrightarrow \overline{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} d^* & -b^* \\ -c^* & a^* \end{bmatrix}.$$

Analogamente podemos dizer que

$$\begin{aligned}
(af_1 + bf_2 + c'f_3 + d'f_4)^* &= f_1^*a^* + f_2^*b^* + f_3^*(c')^* + f_4^*(d')^* \\
&= f_4a^* + f_2b^* + f_3\overline{c} + f_1\overline{d} \\
&= \overline{d}f_1 + (b^*)'f_2 + (\overline{c})'f_3 + a^*f_4 \\
&= \overline{d}f_1 + \overline{b}f_2 + (\overline{c})'f_3 + (\overline{a})'f_4,
\end{aligned}$$

o que permite concluir que a reversão em $(\mathbb{R}_{p,q})^{2\times 2}$ é definida da seguinte forma

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^* = \begin{bmatrix} \overline{d} & \overline{b} \\ \overline{c} & \overline{a} \end{bmatrix}.$$

No caso da conjugação e a reversão podemos dizer que cada uma é um anti-automorfismo involutório em $(\mathbb{R}_{p,q})^{2\times 2}$.

Finalmente vamos definir a involução principal em $(\mathbb{R}_{p,q})^{2\times 2}$. Tendo a relação

$$\begin{aligned}
(af_1 + bf_2 + c'f_3 + d'f_4)' &= a'f_1' + b'f_2' + cf_3' + d'f_4' \\
&= a'f_1 - b'f_2 - cf_3 + df_4,
\end{aligned}$$

em $\mathbb{R}^{p+1,q+1}$, o isomorfismo (2.14) implica para $(\mathbb{R}_{p,q})^{2\times 2}$ a involução principal dada por:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} a' & -b' \\ -c' & d' \end{bmatrix}.$$

2.5 Representação matricial das superfícies esféricas e das transformações conformes

Considere-se S um elemento de $Pin(p+1,q+1)$, com representação matricial

$$G = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in (\mathbb{R}_{p,q})^{2\times 2}.$$

De modo a determinar a imagem de um vector por S necessitamos de saber G^{-1}.

Definição 2.5.1 *Seja* $G = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in (\mathbb{R}_{p,q})^{2\times 2}$.
O pseudo-determinante de A *é dado pela expressão* $ad^* - bc^*$.

Lema 2.5.2 *Considerando* S *e* G *nas condições anteriormente referidas podemos dizer que:*

1. *O pseudo-determinante de* G *é* ± 1.

2. $G'^{-1} = \pm G^*$.

Demonstração:

1. Consideremos um elemento S do grupo $Pin(p+1,q+1)$, que verifica

$$S\overline{S} = \pm 1.$$

A representação matricial da identidade em $(\mathbb{R}_{p,q})^{2\times 2}$ é a matriz identidade. Assim

$$\begin{aligned} \pm \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \overline{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}} \\ &= \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d^* & -b^* \\ -c^* & a^* \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} ad^* - bc^* & -ab^* + ba^* \\ cd^* - c^*d & -cb^* + da^* \end{bmatrix}, \end{aligned} \tag{2.15}$$

o que nos permite concluir que

$$\begin{cases} ab^* - ba^* = cd^* - c^*d = 0 \\ ad^* - bc^* = -cb^* + da^* = \pm 1 \end{cases}.$$

2. Atendendo às conclusões obtidas na demonstração do ponto 1, podemos dizer que

$$\begin{aligned}
(G'G^*) &= \begin{bmatrix} a' & -b' \\ -c' & d' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{d} & \overline{b} \\ \overline{c} & \overline{a} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a'\overline{d} - b'\overline{c} & a'\overline{b} - b'\overline{a} \\ -c'\overline{d} + d'\overline{c} & -c'\overline{b} + d'\overline{a} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} (ad^* - bc^*)' & (ab^* - ba^*)' \\ (-c'd^* + dc^*)' & (-cb^* + d'a^*)' \end{bmatrix} \\
&= \pm \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

■

De uma forma geral, se S é um elemento do grupo de Clifford $\Gamma(p+1, q+1)$ (que será estudado na secção seguinte), o pseudo-determinante da matriz que o representa é um número real não nulo, e G^* representa, a menos de uma constante $\pm\frac{1}{ad^*-bc^*}$, a matriz inversa de G'.

A matriz representativa de um ponto $x \in \mathbb{R}^{p,q}$ é dada, a menos de produto por $k \neq 0$, por

$$\begin{aligned}
x \longrightarrow X = \begin{bmatrix} x & |x|^2 \\ 1 & -x \end{bmatrix} &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} x & x \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -x \\ 1 & -x \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} x & x \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & x \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^*, \qquad (2.16)
\end{aligned}$$

e portanto, a imagem de x por S (que corresponde a um vector de $\mathbb{R}^{p,q}$), tem a seguinte representação matricial

$$g(x) \quad \longrightarrow \quad GXG'^{-1} = \frac{1}{2} G \begin{bmatrix} x & x \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & x \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^* G^*;$$

uma vez que

$$\begin{aligned}
G \begin{bmatrix} x & x \\ 1 & 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} ax+b & ax+b \\ cx+d & cx+d \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} (ax+b)(cx+d)^{-1} & (ax+b)(cx+d)^{-1} \\ 1 & 1 \end{bmatrix} (cx+d), \qquad (2.17)
\end{aligned}$$

e $(cx+d)(cx+d)^*$ é um número real, resulta que a imagem de x por S é dada por

$$g(x) = (ax+b)(cx+d)^{-1}, \qquad (2.18)$$

ou seja, $O(p+1,q+1)$ coincide com o grupo das transformações de Möbius de $\mathbb{R}^{p,q}$.

Quando S é uma superfície esférica de centro m e raio $r>0$, a representação matricial de S é

$$s \longrightarrow \rho \begin{bmatrix} m & |m|^2-r^2 \\ 1 & -m \end{bmatrix},$$

e o vector simétrico de x relativamente à superfície esférica S é dado por

$$\begin{aligned} g(x) &= sxs'^{-1} \\ &= (mx+|x|^2-r^2)(x-m)^{-1} \\ &= m-r^2(x-m)^{-1}. \end{aligned} \tag{2.19}$$

Lema 2.5.3 *As matrizes da forma* $\begin{bmatrix} a & b \\ b' & a' \end{bmatrix}$ *ou* $\begin{bmatrix} a & b \\ -b' & -a' \end{bmatrix}$*, que verificam o lema 2.5.2, transformam a superfície esférica unitária em si própria.*

Demonstração: A superfície esférica unitária tem a seguinte representação matricial

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

As matrizes da forma $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ transformam a superfície esférica unitária em si própria, se satisfizerem

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \bar{d} & \bar{b} \\ \bar{c} & \bar{a} \end{bmatrix} = \rho \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \rho \neq 0,$$

para uma constante não nula ρ. Multiplicando o lado esquerdo da igualdade anterior por $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ e o lado direito por $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}'$, obtemos

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} &= k\begin{bmatrix} a' & -b' \\ -c' & d' \end{bmatrix} \\ \Leftrightarrow \qquad \begin{bmatrix} -d & c \\ b & -a \end{bmatrix} &= k\begin{bmatrix} a' & -b' \\ -c' & d' \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

onde k é igual a ρ a menos de um sinal. A igualdade anterior origina o seguinte sistema

$$\begin{cases} a = -kd' \\ b = -kc' \\ c = -kb' \\ d = -ka' \end{cases},$$

que nos permite concluir que $k^2 = 1$, $d = \pm a'$, $c = \pm b'$. Assim, obtemos as seguintes transformações

$$g_1(x) = (ax+b)(b'x+a')^{-1} \tag{2.20}$$

$$g_2(x) = (ax+b)(-b'x-a')^{-1} \tag{2.21}$$

que transformam a superfície esférica unitária em si própria desde que a norma de

$$g_i(0) = \pm b(a')^{-1}, \quad i = 1, 2$$

seja menor que 1, isto é, $|b| < |a|$.

■

Cada transformação de Möbius pode ser expressa em termos de superfícies esféricas de raio real e hiperplanos. De facto, a imagem de um vector x por uma superfície esférica de raio imaginário e com representação matricial $\begin{bmatrix} m & |m|^2 + r^2 \\ 1 & -m \end{bmatrix}$ é o vector dado por

$$\begin{aligned} g(x) &= r^2(x-m)^{-1} + m \\ &= -(-r^2(x-m)^{-1} + m) + 2m \end{aligned} \tag{2.22}$$

que pode ser interpretado como sendo o vector simétrico daquele que resulta quando estamos a trabalhar com uma superfície esférica de raio real com representação matricial $\begin{bmatrix} m & |m|^2 - r^2 \\ 1 & -m \end{bmatrix}$. Geometricamente corresponde a fazer uma reflexão relativamente ao hiperplano de coordenadas $x_i = 0$, $i = \overline{1, p+q}$ seguida de uma translação segundo o vector $2m$, que é uma combinação de todas as reflexões segundo dois hiperplanos paralelos.

2.6 Caracterização das matrizes do grupo de Clifford $\Gamma(1, n+1)$

A teoria das transformações de Möbius pode ser estudada segundo várias perspectivas. Uma corresponde à utilização da geometria descritiva que expressa as transformações de Möbius em termos de elementos do grupo de matrizes $O(n+1, n)$. Apesar de ser uma perspectiva muito satisfatória do ponto de vista teórico revela-se extremamente complicada ao nível das expressões numéricas envolvidas.

Um dos primeiros artigos sobre a descrição das transformações de Möbius que vamos abordar nesta secção foi publicado por Vahlen em 1901 e tinha o titulo "Über Bewegungen und complexe Zahlen". A motivação de Vahlen foi a tentativa de conciliação da teoria euclidiana, hiperbólica e elíptica. A unificação referida tem como principal ideia imitar a teoria relativa a $GL_2(\mathbb{C})$ no contexto das transformações de Möbius no plano complexo.

Vahlen começou por utilizar matrizes de dimensão 2×2 em que as entradas eram números de Clifford, sendo consideradas à partida algumas condições.

Assim, considerou matrizes do tipo $g = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ actuando sobre um vector $x \in \mathbb{R}^{0,n}$ e segundo a seguinte transformação de Möbius $g(x) = (ax+b)(cx+d)^{-1}$, e necessitou de impor algumas condições de modo a que o seu raciocínio tivesse sentido.

Vamos agora utilizar as ideias de Vahlen e tentar aplicá-las ao nosso caso.

Anteriormente vimos que existe um isomorfismo entre $\mathbb{R}_{p+1.q+1}$ e $(\mathbb{R}_{p,q})^{2\times 2}$, e vimos que o grupo de Möbius de $\mathbb{R}^{p,q}$ coincide com o grupo ortogonal de $\mathbb{R}_{p+1,q+1}$.

Vamos agora estudar o caso em que $p = 0$, e vamos estudar a representação matricial de um elemento de $Pin(1, n+1)$.

Definição 2.6.1 *Definimos $T(p,q)$ com sendo o conjunto de todos os produtos finitos entre vectores de $\mathbb{R}^{p,q}$. Para cada $a \in T(p,q)$, $aa^* = a^*a$ é um número real e a é invertível se $aa^* \neq 0$. Além disso, se $p = 0$, $aa^* = 0$ implica que $a = 0$. Assim*

$$T(0,n) = \Gamma(0,n) \cup \{0\} \tag{2.23}$$

(Analogamente podemos concluir que $T(n,0) = \Gamma(n,0) \cup \{0\}$).

Teorema 2.6.2 *O conjunto M das matrizes $G = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ que satisfaz as seguintes propriedades:*

1. *$a, b, c, d \in \Gamma(0,n) \cup \{0\}$.*
2. *$bd^*, ac^*, a^*b, c^*d \in \mathbb{R}^{0,n}$.*
3. *O pseudo-determinante de G, $\lambda = ad^* - bc^*$, é um número real não nulo.*

munido do produto usual de matrizes forma um grupo.

Demonstração: Em primeiro lugar podemos dizer a partir de 2 que bd^*, $ac^* = ca^*$, $a^*b = b^*a$ e $c^*d = d^*c$.

Logo

$$\begin{cases} b^*\lambda d &= (d^*d)b^*a - (b^*b)c^*d \\ a^*\lambda c &= (a^*a)d^*c - (c^*c)a^*b \\ ab^*\lambda &= ab^*ad^* - (b^*b)a^*c = (aa^*)bd^* - (b^*b)ac^* \\ \lambda cd^* &= ad^*cd^* - bc^*cd^* = (d^*d)ac^* - (c^*c)bd^* \end{cases}$$

também são vectores em $\mathbb{R}^{0,n}$ porque estamos perante o produto de um escalar por um vector.

Assim:

- A identidade $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ pertence a M.
- A multiplicação de matrizes é associativa.
- Cada matriz $G \in M$ tem inverso em M. De facto

$$\begin{aligned} G\overline{G} &= \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d^* & -b^* \\ -c^* & a^* \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} ad^* - bc^* & -ab^* + ba^* \\ cd^* - dc^* & -ab^* + da^* \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \\ &= \lambda I \end{aligned}$$

Refira-se que a igualdade anterior é válida apenas se $(ad - bc^*)^* = da^* - cb^*$.

Assim, $G^{-1} = \lambda^{-1}\overline{G}$ é a matriz inversa de G. Esta matriz satisfaz 1, 2 e o seu pseudo-determinante é $\frac{d^*a-b^*c}{\lambda^2}$.

Mas,

$$\begin{aligned} \overline{G\overline{G}} &= \overline{G}G \\ \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} d^* & -b^* \\ -c^* & a^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} d^*a - b^*c & 0 \\ 0 & -c^*b + a^*d \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

donde $d^*a - b^*c = \lambda$, isto é, G^{-1} satisfaz 3.

- M é fechado para a multiplicação de matrizes. Para provar tal facto comecemos por considerar o seguinte resultado

Lema 2.6.3 *Considere-se* $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in G$.

Se a ou d não são invertíveis, então b e c são invertíveis.

Demonstração: Se a não é invertível então $a = 0$ e

$$0 \neq \lambda = (-bc^*)(-bc^*)^* = (bb^*)(cc^*),$$

donde b e c são ambos invertíveis. Analogamente se procede para o caso em que d não é invertível.

■

Consideremos o produto de duas matrizes de G

$$A_1A_2 = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1a_2 + b_1c_2 & a_1b_2 + b_1d_2 \\ c_1a_2 + d_1c_2 & c_1b_2 + d_1d_2 \end{bmatrix} \tag{2.24}$$

Vamos agora estudar cada uma das entradas da matriz obtida em (2.24).

Assim

- $a_1a_2 + b_1c_2 \in \Gamma(0,n) \cup \{0\}$.

  1º Caso: a_1 e c_2 são ambos invertíveis.

  Tendo em conta a nossa hipótese concluímos que

$$\begin{aligned} a_1a_2 + b_1c_2 &= a_1(a_2c_2^{-1} + a_1^{-1}b_1)c_2 \\ &= a_1\left[a_2\left(\frac{c_2^*}{c_2c_2^*}\right) + \left(\frac{a_1^*}{a_1a_1^*}\right)b_1\right]c_2. \end{aligned}$$

  Uma vez que $a_2c_2^*$ e a_1b_1 são vectores então os termos entre parentêsis rectos originam também é um vector e todos os produtos continuarão a ser elementos de $\Gamma(0,n)$ ou o vector nulo.

  2º Caso: a_2 e b_1 são ambos invertíveis.

  O estudo para este caso é análogo ao que foi feito no caso anterior.

  3º Caso: a_1 ou c_2 não é invertível.

  Suponhamos sem perda de generalidade que a_1 não é invertível, isto é, $a_1 = 0$. Assim, a primeira entrada da matriz obtida em (2.24) toma o valor b_1c_2, que corresponde a um elemento de $\Gamma(0,n) \cup \{0\}$.

  Analogamente se procede para o caso em que $c_2 = 0$.

  4º Caso: a_2 ou b_1 não é invertível.

  O estudo para este caso é análogo ao que foi feito no caso anterior.

  Para as restantes entradas o raciocínio é análogo ao que foi apresentado.

– $(a_1b_2+b_1d_2)(c_1b_2+d_1d_2)^* \in \mathbb{R}^{0,n}$.

Inicialmente podemos fazer a seguinte simplificação

$$\begin{aligned}(a_1b_2+b_1d_2)(c_1b_2+d_1d_2) &= (a_1b_2+b_1d_2)(b_2^*c_1^*+d_2^*d_1^*)\\ &= a_1(b_2b_2^*)c_1^*+a_1b_2d_2^*d_1^*+\\ &\quad +b_1d_2b_2^*c_1^*+b_1(d_2d_2^*)d_1^*. \qquad (2.25)\end{aligned}$$

Relativamente à igualdade anterior, podemos dizer que o primeiro e o último termos são vectores e

$$a_1b_2d_2^*d_1+b_1d_2b_2^*d_1 = a_1xd_1^*+b_1xc_1^*. \qquad (2.26)$$

Atendendo ao lema apresentado anteriormente concluímos que a_1 e d_1 são invertíveis, ou b_1 e c_1 são invertíveis.

Suponhamos, sem perda de generalidade, que se verifica o primeiro caso.

Assim $b_1=a_1(a_1^*b_1)=a_1y$ e

$$a_1xa_1^*+b_1xc_1^* = a_1(xd_1^*+yxc_1^*). \qquad (2.27)$$

Uma vez que $a_1\in\Gamma(0,n)$, a_1^* é igual, a menos de um sinal, a $a_1'^{-1}$, resulta que

$$a_1xa_1^*(a_1d_1^*-b_1c_1^*)=(a_1^*a_1)a_1(xd_1^*-xyc_1^*)\in\mathbb{R}^{0,n}$$

e a diferença

$$a_1(xd_1^*+yxc_1^*)-a_1(xd_1^*-xyc_1^*)=2a_1\langle x,y\rangle c_1^*\in\mathbb{R}^{0,n},$$

assim (2.27) é um vector.

Para o caso em que b_1 e c_1 são invertíveis é similar.

– O pseudo-determinante do produto A_1A_2 é dado por

$$A_1A_2\overline{A_1A_2} = A_1\left(A_2\overline{A_2}\right)\overline{A_1} = \begin{bmatrix}\lambda_1\lambda_2 & 0\\ 0 & \lambda_1\lambda_2\end{bmatrix} \qquad (2.28)$$

onde λ_1 e λ_2 são os pseudo-determinantes de A_1 e A_2, respectivamente, donde são números reais não nulos.

■

Teorema 2.6.4 *O grupo G referido no teorema anterior é o grupo de Clifford* $\Gamma(1,n+1)$.

Demonstração:

- Mostrar que $G \subset \Gamma(1, n+1)$.

  Consideremos $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in G$.

  Sabe-se que A é invertível (consequência do teorema anterior), assim resta provar que se Y é a matriz representativa de um vector de $\mathbb{R}^{1,n+1}$, então $AY\overline{A}$ também é a matriz representativa de um vector de $\mathbb{R}^{1,n+1}$.

  Um vector de $\mathbb{R}^{1,n+1}$ tem a seguinte representação matricial

$$Y = \begin{bmatrix} y & \mu \\ \nu & -y \end{bmatrix}, \tag{2.29}$$

  onde $y \in \mathbb{R}^{0,n}$ e $\mu, \nu \in \mathbb{R}$.

  Assim

$$\begin{aligned} AY\overline{A} &= \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y & \mu \\ \nu & -y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d^* & -b^* \\ -c^* & a^* \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} ay + b\nu & a\mu - by \\ cy + d\nu & c\nu - dy \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d^* & -b^* \\ -c^* & a^* \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} ayd^* + b\nu d^* - a\mu c^* + byc^* & -ayb^* - b\nu b^* + a\mu a^* - bya^* \\ cyd^* + d\nu d^* - c\mu c^* + dyc^* & -cyb^* - d\nu b^* + c\mu a^* - dya^* \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{2.30}$$

  Mais uma vez, vamos supor sem perda de generalidade que a e d são ambos invertíveis (para o caso em que b e c são ambos invertíveis a prova é similar). Assim

$$b = aa^*b = ax \qquad \text{e} \qquad c = dd^*c = dz.$$

  A primeira entrada da nossa matriz é um vector de $\mathbb{R}^{0,n}$. De facto

$$b\nu d^* - a\mu c^* = \nu(bd^*) - \mu(ac^*)$$

  é um vector, logo

$$ayd^* + byc^* = a(yd^* + xyc^*)$$

  também é um vector.

  Relativamente à segunda entrada podemos dizer que

$$-ayb^* - b\nu b^* + a\mu a^* - bya^* = a\mu a^* - b\nu b^* - ayxa^* - axya^*,$$

ou seja, a segunda entrada é um número real.

De uma forma análoga se conclui que a terceira entrada é um número real e finalmente a quarta entrada é simétrica da primeira. Assim

$$AY\overline{A} \longrightarrow \mu \in \mathbb{R}^{1,n+1}$$

- Mostrar que $\Gamma(1, n+1) \subset G$.

  Cada vector de $\mathbb{R}^{1,n+1}$ é representado por uma matriz que pertence a G, como a multiplicação de matrizes é uma operação interna em G concluímos que o produto de matrizes de G origina matrizes de G. Portanto $\Gamma(1, n+1) \subset G$.

■

Corolário 2.6.5 *Seja g um elemento de $\mathbb{R}_{0,n+1}$ com $g = g_0 + g_1 e_-, g_0, g_1 \in \mathbb{R}_{0,n}$. Assim, $g \in \Gamma(0, n+1)$ se e só se*

1. $g_0, g_1 \in \Gamma(0, n) \cup \{0\}$.
2. $g_0 g_1^* \in \mathbb{R}^{0,n}$.
3. $g_0\overline{g_0} + g_1\overline{g_1} \neq 0$.

Demonstração: Um elemento de $\mathbb{R}_{0,n+1}$ pertence ao grupo de Clifford $\Gamma(0, n+1)$ se e só se pertence ao grupo de Clifford $\Gamma(1, n+1)$.

Uma vez que $g = g_0 + g_1 e_-$, concluímos que a representação matricial de g é

$$g \longrightarrow \begin{bmatrix} g_0 & -g_1 \\ g_1' & g_0' \end{bmatrix}. \tag{2.31}$$

Aplicando o teorema 3.13 obtemos as condições 1, 2 e 3.

Nota: Uma decomposição semelhante é válida em $\mathbb{R}_{1.n+1}$ para $g = g_0 + g_1 e_+, g_0 g_1 \in \mathbb{R}_{0,n+1}$. A terceira condição resulta do facto de que $g_0\overline{g_0} - g_1\overline{g_1} \neq 0$.

■

Tendo em conta as ideias de Vahlen e atendendo ao trabalho desenvolvido por Maks [7] podemos estabelecer uma generalização para $\Gamma(p+1, q+1)$.

Teorema 2.6.6 *O grupo de Clifford $\Gamma(p+1, q+1)$ é o conjunto das matrizes $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ que satisfaz as seguintes propriedades:*

1. *a, b, c, d são elementos de $T(p, q)$;*

2. *bd^*, ac^*, a^*b, $c^*d \in \mathbb{R}^{p,q}$;*

3. *O pseudodeterminante de A é um número real não nulo.*

Observe-se que, se compararmos com a caracterização feita anteriormente no Teorema 2.6.2, ocorreram alterações na primeira e segunda propriedades. Assim, quando $p = 0$ ou $q = 0$ é indiferente a ordem considerada nos produtos, isto é $ab^* = a^*b$. No caso geral esta igualdade não é verdadeira.

De modo a provar o resultado apresentado serão apresentados e demonstrados alguns lemas. No primeiro iremos estudar algumas propriedades importantes de $T(p,q)$.

Lema 2.6.7 *Para cada $a \in T(p,q)$ não nulo e x e y vectores arbitrários são válidas as seguintes propriedades*

1. *$aa^* = a^*a$ é um número real. Será um real não nulo se e só se a é invertível;*

2. *aya é um elemento de $\mathbb{R}^{p,q}$;*

3. *é válida uma das seguintes condições:*

   (a) $aza = 0$ para todos os vectores z;

   (b) para $a = t\alpha$ com $\alpha \in \Gamma(p,q)$ e t um vector qualquer;

4. *$1 + xy \in T(p,q)$;*

5. *Se existe um vector z tal que $aza^* \neq 0$ então $xa + ay \in T(p,q)$.*

Demonstração:

1. A prova desta propriedade é imediata.

2. Para provar esta propriedade basta estudar o caso em que a é um vector. Assim suponhamos que $a = x$, então $xyx = -\mathcal{B}(x,y)x^* - y\mathcal{B}(xx)$.

3. A prova é imediata nos casos em que a é invertível ou quando se verifica a segunda hipótese.

   Suponhamos que $aa^* = 0$. Assim, a pode ser escrito sob a forma do seguinte produto $t_1 t_2 ... t_k$, onde podemos assumir que todos os vectores não invertíveis se encontram nas primeiras posições do produto. Sem perda de generalidade vamos supor que a pode ser escrito como sendo o produto de dois vectores (analogamente se procede para o caso geral).

Seja $a = st$ onde s e t não são invertíveis. Se $\mathcal{B}(s,t) \neq 0$ então $(s+t)$ é invertível e $a = s(s+t)$, o que corresponde à segunda alternativa. Se $\mathcal{B}(s,t) = 0$ então para z qualquer, $tzt = -2\mathcal{B}(t,z)t$ e $sts = -2\mathcal{B}(s,t)t = 0$. Fazendo a composição resulta que $aza^* = 0$, que corresponde à primeira alternativa.

4. Se x é invertível (analogamente para o caso em que y é invertível), então $1 + xy = x(x^{-1}1 + y)$ porque é o produto de dois vectores.

   Se $2x \cdot y \neq 0$, então o vector $z = x + y$ é invertível. Tendo em conta que $xyx = x(2x \cdot y) - y(2x \cdot x)$ concluímos que o produto $(1 + xy)z$ é um vector. Uma vez que z^{-1} é um vector concluímos que $1 + ab$ está em $T(p,q)$.

   Suponhamos que $2x \cdot y = 0$. Uma vez que $\mathbb{R}^{p,q}$ é não singular consideremos os vectores isotrópicos x' e y' tais que $2x \cdot x = 1$, $2y \cdot y' = 1$, e os subespaços gerados por x e x' e por y e y' são ortogonais. Consideremos k uma constante real diferente de ± 1, de modo a que os vectores $w = x + x'k$ e $u = x - x'k$ não sejam isotrópicos. Uma vez que o produto $w(1 + xy)u$ é igual a $L + AB$, onde $L = k$ é um escalar não nulo e $A = 2x + bk$ e $B = -a'k$ são vectores isotrópicos, além disso $2A \cdot B = -2k \neq 0$. Estamos assim na situação descrita anteriormente. Uma vez que z é invertível, resulta que $1 + xy$ está em $T(p,q)$.

5. A prova desta propriedade tem por base a indução sobre o número de vectores que constituem a. Inicialmente suponhamos que $a = t$ para algum vector, assim $xt + ty = (x - y)t - 2\mathcal{B}(t,y)$ que, atendendo a 4, é um elemento de $T(p,q)$.

   Agora consideremos que a na forma canónica, isto é, $a = t\alpha$, onde α é o produto de vectores invertíveis, e vamos fazer a prova através da indução sobre o número de vectores presentes na forma canónica. Suponhamos que 5 está provada para um produto de k vectores e que a é o produto de $k+1$ vectores. Assim podemos escrever a como bu, onde $B4$ é o produto de k vectores e u é invertível. Neste caso $xa + ay$ é igual a

$$xbu + buy = xbu - byu - b(2\mathcal{B}(u,y)) = \left(xb - b\left(y + \frac{2\mathcal{B}(u,y)}{u^2}u\right)\right)u.$$

   Atendendo à indução concluímos que esta quantidade está em $T(p,q)$.

■

Vamos agora definir G como o conjunto das matrizes que satisfazem as condições do Teorema 2.6.6, o que permite dizer que $\Gamma(p+1, q+1) = G$.

Lema 2.6.8 *G é fechado para a conjugação.*

Demonstração: Temos que provar que $\overline{A}$ está em G, se à partida $A \in G$. Calculando $A\overline{A}$ obtemos

$$\left[\begin{array}{cc} a & b \\ c & d \end{array}\right]\left[\begin{array}{cc} d^* & -b^* \\ -c^* & a^* \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc} ad^* - bc^* & -ab^* + ba^* \\ cd^* - dc^* & -cb^* + da^* \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{array}\right]$$

onde a segunda e a terceira entrada são nulas, e como λ é o pseudodeterminante de A, que é um número real não nulo. Multiplicando a segunda entrada à direita por λ obtemos

$$-ab^*ad^* + ab^*bc^* + ba^*ad^* - ba^*bc^* = -(aa^*)bd^* + (bb^*)ac^* + (aa^*)bd^* - (bb^*)ac^*.$$

A expressão anterior á igual a 0 porque a é um vector e desde que $ab^* - b^* = 0$. De uma forma mais imediata podemos dizer que $\lambda = \lambda^*$. Podemos assim dizer que $\lambda^{-1}\overline{A}$ é o inverso de A.

Claramente $\overline{A}$ satisfaz 1 e 2. Para provar que verifica 3 calculemos $A\overline{A}$, cujo resultado será λI desde que A e $\overline{A}$ comutem. Assim

$$\begin{aligned} \overline{A}A &= \left[\begin{array}{cc} d^* & -b^* \\ -c^* & a^* \end{array}\right]\left[\begin{array}{cc} a & b \\ c & d \end{array}\right] \\ &= \left[\begin{array}{cc} d^*a - b^*c & d^*b - b^*d \\ c^*a + a^*c & -c^*b + a^*d \end{array}\right] \\ &= \left[\begin{array}{cc} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{array}\right] \end{aligned}$$

e portanto o pseudodeterminante de $\overline{A}$ é igual ao de A.

■

Lema 2.6.9 *Cada entrada de uma matriz $A \in G$ pode ser escrita na forma $t\alpha$, onde α é um elemento do grupo de Clifford $\Gamma(p,q)$. Além disso, existem vectores u, v, w, s que verificam pelo menos uma das seguintes relações:*

- $a = cu$ *ou* $c = au$;
- $a = vb$ *ou* $b = va$;
- $b = dw$ *ou* $d = bw$;
- $c = sd$ *ou* $d = sc$.

Demonstração: Provemos a primeira explicitamente para a e a segunda parte para a e c (analogamente para os restantes casos). Se c é invertível então $a = tc$ com $t = ac^*/(c^*c)$

e podemos considerar $u = c^{-1}tc$. Se a é invertível então a primeira condição verifica-se de imediato e podemos considerar $u = a^*(ca^*)a/(aa^*)^2$. Se ambos não forem invertíveis então $\lambda c = (ad^* - bc^*)c = a(d^*c)$ e $(da^* - cb^*)a = c(b^*a)$ (de acordo com a propriedade 2 que caracterizam a matriz A).

Uma vez que ambos não podem ser simultaneamente nulos (porque o pseudo determinante é não nulo) concluímos que são simultaneamente não nulos. Portanto $a(d^*c) = (ac^*)d$ e $ac^*(da^* - cb^*)a^*$ são não nulos. De acordo com a propriedade 3 de Lema 2.7.7 podemos escrever a como $t\alpha$.

∎

Com estes resultados podemos demonstrar agora o teorema 2.6.6.

Demonstração: Este lema permite-nos construir uma decomposição da matriz $A \in G$.

Assumamos em primeiro lugar que nenhum dos elementos a, b, c ou d é invertível. Então $a = t\alpha$, $b\lambda = (bd^*)a$, $\lambda c = a(d^*c)$ e $\lambda d = -b(c^*d)$. Considerando $v = \lambda^{-1}(bd^*)$, $u = \lambda^{-1}\alpha(d^*c)\alpha^{-1}$ obtemos a decomposição

$$A = \begin{bmatrix} t & vt \\ tu & -vtu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix}.$$

Multiplicando A com $V = \begin{bmatrix} v & 1 \\ 1 & -v \end{bmatrix}$ (observe-se que $V^2 = I$ desde que $v^2 = 0$), obtemos

$$A = V \begin{bmatrix} vt + tu & -vtu \\ t - vtu & vt \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix}.$$

A primeira entrada da segunda matriz é invertível, desde que

$$(vt + tu)(tv + ut) = vtut + tutv$$

que é igual, a menos de um sinal, ao pseudo determinante de $\begin{bmatrix} t & vt \\ tu & -vtu \end{bmatrix}$, e portanto não nulo. De uma forma semelhante concluímos que a segunda e quarta entradas são elementos de $T(p,q)$. A condição $ac^* \in \mathbb{R}^{p,q}$ é claramente satisfeita e, desde que a seja invertível, podemos também dizer que $c = (ca^*)a/(aa^*)$ é um elemento de $T(p,q)$ e assim a propriedade (1) do Teorema 2.7.6 é satisfeita. De uma forma elementar verifica-se que as restantes propriedades do Teorema 2.7.6 são satisfeitas.

Sem perda de generalidade consideremos a partir deste momento que um dos elementos, por exemplo $a = \alpha$ é invertível e que pertence ao grupo de Clifford. Assim podemos multiplicar todas as entradas da nossa matriz à direita por α^{-1} e assumir que $a = 1$. Assim, b e c terão que ser vectores, digamos y e u. A expressão para o pseudodeterminante passa a ser

$\mu = d^* - bc^*$ e obtemos a seguinte decomposição

$$A = \begin{bmatrix} 1 & v \\ u & \mu + uv \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix},$$

onde cada um dos elementos do produto apresentado pertence a G.

$\blacksquare$

Capítulo 3

Métrica diferencial associada à transformação de Möbius

"Dêem-me uma alavanca suficientemente grande e um ponto de apoio, e eu moverei o mundo"

Arquimedes

Este terceiro capítulo tem como principal objectivo estudar a acção das transformações conformes sobre os operadores diferenciais de Dirac e de Laplace. As primeiras secção serão preparatórias e servirão para estudar algumas propriedades dos operadores referidos, analisar a métrica associada às transformações de Möbius e determinar os operadores que são invariantes segundo operador de Laplace. As últimas secções são dedicadas à obtenção do transformado dos operadores de Dirac e Laplace segundo a transformação de Möbius $g(x) = (ax + b)(cx + d)^{-1}$.

3.1 O operador de Dirac

Definição 3.1.1 (Ver [11]) *O operador de Dirac, que iremos denotar por D, é o seguinte operador diferencial de primeira ordem*

$$D = \sum_{j=1}^{n} e_j \partial_{x_j} = \sum_{j=1}^{n} e_j \frac{\partial}{\partial_{x_j}}. \tag{3.1}$$

Uma vez que $D(Df) = (fD)D = -\Delta f$, onde Δ é o operador de Laplace, podemos dizer que $(-D)D$ é uma factorização do operador de Laplace em operadores diferenciais lineares de primeira ordem.

Assim, se $f : \Omega \subset \mathbb{R}^{0,n} \to \mathbb{R}_{0,n}$, com Ω um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^{0,n}$, tem derivadas parciais contínuas, a acção à esquerda (resp. à direita) do operador de Dirac sobre f é dada por

$$(Df)(x) = \sum_{i,A} e_i e_A \partial_{x_i} f_A(x), \qquad \left(\text{resp.}(fD)(x) = \sum_{i,A} e_A e_i \partial_{x_i} f_A(x)\right)$$

sendo $f(x) = \sum_{A \subset \{1,\ldots,n\}} f_A(x)\, e_A$, com $e_A = \prod_{i \in A} e_i$ e onde cada f_A toma valores reais.

Definição 3.1.2 *Uma função $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_{0,n}$, de classe C^1 em Ω, diz-se monogénica à esquerda (resp. à direita) no aberto Ω se, para todo $x \in \Omega$*

$$Df = 0 \quad (\textit{resp. } fD = 0).$$

No caso unidimensional, para uma função f de classe $C^1(\Omega)$ a actuação do operador de Dirac à esquerda da função resulta em

$$\begin{aligned} Df(x) &= ef'(x) \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{ef(x+h) - ef(x-h)}{2h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{1}{w_0 h} \int_{\partial B(x,h)} \nu_y f(y) dS_y, \quad x \in \Omega \end{aligned} \tag{3.2}$$

onde $w_0 = 2$, ν_y é o vector unitário perpendicular à superfície esférica unidimensional $\partial B(x,h) \subset \Omega$ e dS_y é o elemento de superfície.

No caso geral de $n > 1$, $\overline{B}(x,h) \subset \Omega$. Aplicando a fórmula de Stokes obtemos

$$\int_{B(x,h)} Df(y) dy = \int_{\partial B(x,h)} d\sigma_y f(y) = \int_{\partial B(x,h)} \vec{\nu}_y f(y) dS_y. \tag{3.3}$$

As condições assumidas para f implicam

$$Df(y) = Df(x) + h(y),$$

onde h é uma função contínua satisfazendo $\lim_{y \to x} h(y) = 0$.

Assim

$$\int_{B(x,h)} Df(y) dy = Df(x) \int_{B(x,h)} dy + \int_{B(x,h)} h(y) dy. \tag{3.4}$$

Uma vez que

$$\int_{B(x,h)} dy = w_{n-1} \int_0^h \tau^{n-1} d\tau = w_{n-1} \frac{h^n}{n}$$

e

$$\int_{B(x,h)} h(y)\,dy = C_h w_{n-1} \frac{h^n}{n},$$

com w_{n-1} a área da superfície esférica unitária e $\lim_{h\to 0} C_h = 0$, a expressão (3.4) pode ser simplificada da seguinte forma

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{n}{w_{n-1}h^n} \int_{B(x,n)} Df(y)dy &= \lim_{h\to 0} \frac{n}{w_{n-1}h^n} \left[\frac{w_{n-1}h^n}{n} \left(Df(x) + C_h\right)\right] \\
&= Df(x).
\end{aligned}$$

Tendo em conta (3.3) obtemos

$$Df(x) = \lim_{h\to 0} \frac{n}{w_{n-1}h^n} \int_{\partial B(x,h)} \overrightarrow{\nu_y} f(y) dS_y, \tag{3.5}$$

que corresponde à generalização do caso unidimensional estudado em (3.2).

Assim, podemos ver a acção à esquerda do operador de Dirac sobre f como limite de uma média de um integral de fronteira.

3.2 O operador de Laplace

Considere-se f uma função de classe $\mathcal{C}_2$. No caso unidimensional podemos dizer que, para $x \in \Omega$,

$$\begin{aligned}
\Delta f(x) &= -DDf(x) \\
&= -D^2 f(x).
\end{aligned}$$

Assim, com $\tau = 2h$

$$\begin{aligned}
\Delta f(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f'(x+h) - f'(x-h)}{2h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+2h) - f(x) - f(x) + f(x-2h)}{4h^2} \\
&= \lim_{\tau\to 0} \left[\frac{2}{\tau^2 w_0} \int_{\partial B(x,\tau)} f(y) dS_y - \frac{2}{\tau^2} f(x)\right]. \qquad (3.6)
\end{aligned}$$

Para estudar o caso geral (n>2) consideremos a função de Green para a bola $B(0,R)$

$$G(x) = \begin{cases} c\left[|x-y|^{2-n} - R^{n-2}\left(|y|\left|x+\frac{R^2}{y}\right|\right)^{2-n}\right], & y \neq 0 \\ c\left(|x|^{2-n} - R^{2-n}\right), & y = 0 \end{cases}, \tag{3.7}$$

onde $c = -\frac{1}{(n-2)w_{n-1}}$, $R > 0$ e $|y| < R$. A função considerada satisfaz a seguinte relação em $B(0, R)$

$$\Delta G(x) \quad = \quad \delta(x - y), \tag{3.8}$$

que se encontra provada em [20]

Para $|x| = R$

$$\begin{aligned} |x-y|^{2-n} &= R^{n-2}|-x^2+xy|^{2-n} \\ &= R^{n-2}\left(\left|\frac{R^2}{y}+x\right||y|\right)^{2-n}, \end{aligned}$$

e assim

$$G(x) \quad = \quad 0, \quad \text{para } x \in \partial B(0, R). \tag{3.9}$$

Suponhamos agora que $\overline{B(0,R)} \subset \Omega$, com $B(0, R)$ a bola centrada na origem e com raio R, e que $y = 0$.

Pelo teorema de Green

$$\int_{\partial B(0,R)} \left(f\frac{\partial G}{\partial \nu} - \frac{\partial f}{\partial \nu}G\right) dS_u = \int_{B(0,R)} (f\Delta G - (\Delta f)G)\, du$$

e uma vez que G satisfaz (3.8) e (3.9), concluímos que

$$\int_{\partial B(0,R)} f\frac{\partial G}{\partial \nu} dS_u \quad = \quad f(0) - \int_{B(0,R)} (\Delta f)G du. \tag{3.10}$$

Vamos agora calcular $\frac{\partial G}{\partial \nu}$. Usando coordenadas polares $\nu = r\xi$

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial \nu} &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial G}{\partial \nu_i}\xi_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial G}{\partial r}\left(\frac{\partial r}{\partial \nu_i}\xi_i\right) \\ &= \frac{\partial G}{\partial r}\sum_{i=1}^{n} \xi_i^2 \\ &= \frac{\partial G}{\partial r}. \end{aligned} \tag{3.11}$$

Uma vez que $G(u) = c\left(|u|^{2-n} - R^{2-n}\right)$ obtemos

$$\frac{\partial G}{\partial r} \;=\; c(2-n)|u|^{1-n} \;=\; \frac{|u|^{1-n}}{w_{n-1}}.$$

Substituindo em (3.10) obtemos

$$\begin{aligned} \int_{\partial B(0,R)} f(u)\frac{|u|^{1-n}}{w_{n-1}}dS_u &= f(0) - \int_{B(0,R)} \Delta f(u)G(u)du \\ \Leftrightarrow \quad f(0) - \frac{R^{1-n}}{w_{n-1}}\int_{\partial B(0,R)} f(u)dS_u &= c\int_{B(0,R)} \Delta f(u)\left(|u|^{2-n} - R^{2-n}\right)du. \quad (3.12) \end{aligned}$$

Para determinar o valor do integral que se encontra no 2^o membro de (3.12) serão utilizadas coordenadas polares $u = r\xi$.

Além disso, uma vez que f é uma função de classe $\mathcal{C}_2$,

$$\Delta f(u) \quad = \quad \Delta f(0) + h(u),$$

com h uma função contínua tal que $\lim_{u\to 0} h(u) = 0$.

Assim

$$c\int_{B(0,R)} \Delta f(u)\left(|u|^{2-n} - R^{2-n}\right)du =$$

$$\Delta f(0)\int_{B(0,R)} c\left(|u|^{2-n} - R^{2-n}\right)du + \int_{B(0,R)} ch(u)\left(|u|^{2-n} - R^{2-n}\right)du.$$

Por um lado, temos

$$\begin{aligned} \int_{B(0,R)} c\left(|u|^{2-n} - R^{2-n}\right)du &= \int_0^R c\left(r^{2-n} - R^{2-n}\right)w_{n-1}r^{n-1}dr \\ &= cw_{n-1}\int_0^R \left(r - R^{2-n}r^{n-1}\right)dr \\ &= \frac{1}{2-n}\left(\frac{R^2}{2} - R^{2-n}\frac{R^n}{n}\right) \\ &= -\frac{R^2}{2n}. \end{aligned}$$

Por outro lado

$$\begin{aligned} \int_{B(0,R)} ch(u)\left(|u|^{2-n} - R^{2-n}\right)du &= C_R\int_{B(0,R)} c\left(|u|^{2-n} - R^{2-n}\right)du \\ &= -\frac{R^2}{2n}C_R, \end{aligned}$$

com $C_R \to 0$ quando $R \to 0^+$.

Assim a partir de (3.12) concluímos que

$$\Delta f(0) + C_R = -\frac{2n}{R^2}\left[f(0) - \frac{R^{1-n}}{w_{n-1}}\int_{\partial B(0,R)} f(u)dS_u\right]$$

e

$$\Delta f(0) \;=\; \lim_{R\to 0}\left[\frac{2n}{R^{n+1}w_{n-1}}\int_{\partial B(0,R)} f(u)dS_u - \frac{2n}{R^2}f(0)\right]. \tag{3.13}$$

Substituindo $f(u+x) = h(u)$ obtemos

$$\begin{aligned}\Delta f(x) &= \Delta h(0)\\ &= \lim_{R\to 0}\left[\frac{2n}{R^{n+1}w_{n-1}}\int_{\partial B(0,R)} f(u+x)dS_u - \frac{2n}{R^2}f(x)\right]\\ &= \lim_{R\to 0}\left[\frac{2n}{R^{n+1}w_{n-1}}\int_{\partial B(x,R)} f(y)dS_y - \frac{2n}{R^2}f(x)\right],\end{aligned} \tag{3.14}$$

que corresponde à generalização de (3.6) para $n > 2$.

Este resultado é sintetizado pelo seguinte teorema

Teorema 3.2.1 *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um subconjunto não vazio e f uma função de classe $C^2(\Omega)$. Então, para $x \in \Omega$,*

$$\Delta f(x) = \lim_{R\to 0}\left[\frac{2n}{R^{n+1}w_{n-1}}\int_{\partial B(x,R)} f(y)dS_y - \frac{2n}{R^2}f(x)\right].$$

3.3 A métrica diferencial associada à transformação de Möbius

Nesta secção serão estudados dois resultados relacionados com as transformações de Möbius, e que vão ser necessários na secção seguinte. O primeiro lema é um resultado cuja aplicação está patente na manipulação algébrica deste tipo de transformações. O segundo resultado permite estabelecer o diferencial associado às transformações conformes em termos da medida que se encontra a elas associada.

Consideremos $g(x) = (ax+b)(cx+d)^{-1}$ uma transformação de Möbius em $\mathbb{R}^{0,n}$ tal que $ad^* - bc^* = \pm 1$. A partir desta secção designaremos $g(u)$ por gu, com $u \in \mathbb{R}^{0,n}$.

Lema 3.3.1 *Sendo g a transformação de Möbius referida anteriormente, é válida a seguinte igualdade*

$$|gu - gv| = |cv+d|^{-1}|u-v||cu+d|^{-1}$$

para quaisquer $u, v \in \mathbb{R}^{0,n}$.

Demonstração: Consideremos $u, v \in \mathbb{R}^{0,n}$ quaisquer e seja $g(x) = (ax+b)(cx+d)^{-1}$ uma transformação de Möbius em $\mathbb{R}^{0,n}$. Assim

$$\begin{aligned} gu - gv &= (au+b)(cu+d)^{-1} - (av+b)(cv+d)^{-1} \\ &= (au+b)(cu+d)^{-1} - (cv+d)^{*^{-1}}(av+b)^* \quad \text{porque } gu = (gu)^* \\ &= (cv+d)^{*^{-1}}\left[(cv+d)^*(au+b) - (av+b)^*(cu+d)\right](cu+d)^{-1}, \end{aligned}$$

onde

$$(cv+d)^*(au+b) - (av+b)^*(cu+d) = v\,(c^*b - a^*d) + vc^*au - va^*cu + (d^*a - b^*c)\,u.$$

Uma vez que

- a^*c é um vector concluímos que $a^*c = c^*a$, consequentemente $vc^*au - va^*cu = 0$.
- é válida a seguinte igualdade

$$\begin{aligned} \pm a &= (ad^* - bc^*)\,a \\ &= ad^*a - ba^*c \\ &= ad^*a - ab^*c \\ &= a\,(d^*a - b^*c) \end{aligned}$$

concluímos que

$$(cv+d)^*(au+b) - (av+b)^*(cu+d) = \pm(u-v),$$

e portanto

$$|gu - gv| = |cv+d|^{-1}|u-v||cu+d|^{-1}.$$

■

Seja $\mu(x) = |cx+d|^{-2}$. No seguinte resultado, veremos que $\mu(x)$ é a métrica associada à transformação g.

Lema 3.3.2 *Tendo em conta a transformação de Möbius considerada e atendendo à medida considerada anteriormente concluímos que*

$$|d(gx)| = \mu(x)|dx|.$$

Demonstração: Anteriormente vimos que

$$d\left(\frac{1}{u}\right) = -\frac{u(du)u}{u^4}.$$

Assim

$$\begin{aligned} g(x) &= (ax+b)(cx+d)^{-1} \\ &= (ac^{-1}cx + ac^{-1}d - ac^{-1}d + b)(cx+d)^{-1} \\ &= ac^{-1} + (b - ac^{-1}d)(cx+d)^{-1}, \end{aligned}$$

logo

$$d(g(x)) = -(b - ac^{-1}d)\frac{(cx+d)(cdx)(cx+d)}{(cx+d)^4}.$$

Uma vez que

$$\begin{aligned} (b - ac^{-1}d)c^* &= bc^* - ac^{-1}dc^* \\ &= bc^* - ac^{-1}cd^* \\ &= bc^* - ad^* \\ &= \pm 1, \end{aligned}$$

concluímos que

$$\begin{aligned} |d(gx)| &= |b - ac^{-1}d||c|\frac{|dx|}{|cx+d|^2} \\ &= \mu(x)|dx|. \end{aligned}$$

■

Consideremos novamente $g(x) = (ax+b)(cx+d)^{-1}$ uma transformação de Möbius em $\mathbb{R}^{0,n}$.

Seja Ω_1 um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^{0,n}$ e consideremos $\Omega_2 = g(\Omega_1)$. Designemos por $F(\Omega_1)$ e $F(\Omega_2)$ como sendo os espaços das funções de domínio Ω_1 e Ω_2, respectivamente.

Definição 3.3.3 *Para cada $f \in F(\Omega_1)$, definimos $G_g[f] \in F(\Omega_2)$ da seguinte forma*

$$G_g[f](y) = f(g^{-1}(y))$$

Definição 3.3.4 *Se A é um operador que actua em $F(\Omega_1)$, o operador transformado de A, que actua em $F(\Omega_2)$ é o operador $G_gAG_{g^{-1}}$ e definido como a acção*

$$(G_gAG_{g^{-1}})G_g[f](y) := G_g[Af](y).$$

Se $\Omega_1 = \Omega_2$ (o que implica que $F(\Omega_1) = F(\Omega_2)$) dizemos que A é invariante relativamente a G se e só se $G_gAG_{g^{-1}} = A$.

De seguida vamos estudar o operador transformado $G_g\Delta G_{g^{-1}}$.

3.4 O operador de Laplace sob a influência das transformações de Möbius

Seja g uma transformação de Möbius que aplica $B(0,R)$ em $B(a,T)$, tal que $g(0)=0$. Considere-se

$$F(y) = f(g^{-1}y)\mu^{1-\frac{n}{2}}(g^{-1}y).$$

De (3.13) podemos dizer que

$$\Delta f(0) = \lim_{R\to 0} \frac{2n}{R^2}\left[\frac{1}{w_{n-1}}\int_{\partial B(0,R)} R^{1-n} f(x) dS_x - f(0)\right] \tag{3.15}$$

Considerando a seguinte mudança de coordenadas $y = g(x)$ à qual está associada o seguinte Jacobiano

$$\left|\frac{dS_x}{dS_y}\right| = \mu^{1-n}(g^{-1}y),$$

obtemos

$$\begin{aligned}\int_{\partial B(0,R)} R^{1-n} f(x) dS_x &= \int_{\partial B(a,T)} R^{1-n} f(g^{-1}y)\mu^{1-n}(g^{-1}y) dS_y \\ &= \int_{\partial B(a,T)} R^{1-n} F(y)\mu^{-\frac{n}{2}}(g^{-1}y) dS_y. \end{aligned} \tag{3.16}$$

Consideremos agora a função de Green associada a $B(a,T)$, com $y=-a$

$$G(u) = c\left[|u|^{2-n} - T^{n-2}\left(|a|\left|u - a - \frac{T^2}{a}\right|\right)^{2-n}\right], \tag{3.17}$$

onde $c = -\frac{1}{(n-2)w_{n-1}}$, e que verifica a seguinte igualdade em $B(a,T)$

$$\Delta G(u) = \delta(u+a) = \delta(u+0). \tag{3.18}$$

Com a igualdade anterior podemos concluir que para termos uma transformação g nas condições referidas no início da secção temos que considerar $a=0$.

Além disso, para $|u-a| = T$,

$$\begin{aligned}
|u|^{2-n} &= T^{n-2}\left(|u-a||u|\right)^{2-n} \\
&= T^{n-2}\left|u^2 - au - ua + ua - a^2 + a^2\right|^{2-n} \\
&= T^{n-2}\left|u^2 - a^2 + (u+a)^2\right|^{2-n} \\
&= T^{n-2}\left|u^2 - a^2 + T^2\right|^{2-n} \\
&= T^{n-2}\left(\left|u - a + \frac{T^2}{a}\right||a|\right)^{2-n},
\end{aligned}$$

o que nos permite concluir que para $|u-a| = T$

$$G(u) = 0. \tag{3.19}$$

Aplicando o teorema de Green obtemos

$$\int_{B(a,T)} (G\Delta F - F\Delta G)\, du = \int_{\partial B(a,T)} \left(G\frac{\partial F}{\partial \nu} - F\frac{\partial G}{\partial \nu}\right) dS_u$$

e, atendendo a (3.18) e (3.19)

$$\int_{B(a,T)} G(u)\Delta F(u) du - F(a) = -\int_{\partial B(a,T)} F(u)\frac{\partial G}{\partial \nu} dS_u. \tag{3.20}$$

Usando coordenadas polares $u = r\xi + a$ para calcular $\frac{\partial G}{\partial \nu}$ obtemos de uma forma análoga a (3.11)

$$\frac{\partial G}{\partial \nu}(u) = \frac{\partial G}{\partial r}(u).$$

Uma vez que

$$G(u) = c\left[|u|^{2-n} - T^{2-n}\left(|a|\left|u - a - \frac{T^2}{a}\right|\right)^{2-n}\right]$$

e

$$\begin{aligned}
|u|^2 &= |u-a+a|^2 \\
&= |u-a|^2 + 2\langle u-a, a\rangle + |a|^2 \\
&= r^2 + 2r\langle \xi, a\rangle + |a|^2,
\end{aligned}$$

concluímos que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial r}\left(|u|^{2-n}\right) &= \frac{2-n}{2}\left(r^2+2r<\xi,a>+|a|^2\right)^{-\frac{n}{2}}\left(2r+2<\xi,a>\right) \\
&= (2-n)\left(r^2+2r<\xi,a>+|a|^2\right)^{-\frac{n}{2}}\left(r+<\xi,a>\right).
\end{aligned}$$

De uma forma análoga

$$\begin{aligned}
T^{-2}|a|^2\left|u-a-\frac{T^2}{a}\right|^2 &= T^{-2}|a|^2\left|r\xi-\frac{T^2}{a}\right|^2 \\
&= T^{-2}|a|^2\left(r^2-2\left\langle r\xi,\frac{T^2}{a}\right\rangle+\frac{T^4}{|a|^2}\right) \\
&= T^{-2}|a|^2\left(r^2+2r\frac{T^2}{|a|^2}<\xi,a>+\frac{T^4}{|a|^2}\right) \\
&= \frac{r^2|a|^2}{T^2}+2r<\xi,a>+T^2,
\end{aligned}$$

e portanto

$$\frac{\partial}{\partial r}\left[T^{n-2}\left(|a|\left|u-a-\frac{T^2}{a}\right|\right)^{2-n}\right]=$$

$$\frac{2-n}{2}\left(\frac{r^2|a|^2}{T^2}+2r<\xi,a>+T^2\right)^{-\frac{n}{2}}\left(\frac{2r|a|^2}{T^2}+2<\xi,a>\right).$$

Assim

$$\begin{aligned}
\left.\frac{\partial G}{\partial r}\right|_{|u-a|=T} &= c(2-n)\Big[\left(T^2+2T<\xi,a>+|a|^2\right)^{-\frac{n}{2}}\left(T+<\xi,a>\right)- \\
&\qquad -\left(|a|^2+2T<\xi,a>+T^2\right)^{-\frac{n}{2}}\left(\frac{|a|^2}{T}+<\xi,a>\right)\Big] \\
&= \frac{1}{w_{n-1}}\left(T^2+2T<\xi,a>+|a|^2\right)^{-\frac{n}{2}}\left(T-\frac{|a|^2}{T}\right) \\
&= \frac{1}{w_{n-1}}|u|^{-n}\frac{T^2-|a|^2}{T},
\end{aligned}$$

substituindo em (3.20)

$$\int_{B(a,T)}G(u)\Delta F(u)du-F(a)=-\frac{1}{w_{n-1}}\int_{\partial B(a,T)}F(u)|u|^{-n}\left(\frac{T^2-|a|^2}{T}\right)dS_u. \qquad (3.21)$$

Atendendo ao lema 3.3.1 e tendo em conta que $u \in \partial B(a,T)$ concluímos que

$$\begin{aligned}
|u| &= |a-u| \\
&= \left|g^{-1}a - g^{-1}u\right| \sqrt{\mu(g^{-1}a)\mu(g^{-1}u)} \\
&= \left|g^{-1}u\right| \sqrt{\mu(0)\mu(g^{-1}u)} \\
&= R\sqrt{\mu(0)\mu(g^{-1}u)},
\end{aligned}$$

e portanto

$$\int_{B(a,T)} G(u)\Delta F(u)du - F(a)$$

$$= -\frac{1}{w_{n-1}} \int_{\partial B(a,T)} F(u) R^{-n} \mu^{-\frac{n}{2}}(0) \mu^{-\frac{n}{2}}(g^{-1}u) \left(\frac{T^2-|a|^2}{T}\right) dS_u$$

$$= -\frac{1}{w_{n-1}} \mu^{-\frac{n}{2}}(0) \left(\frac{T^2-|a|^2}{RT}\right) \int_{\partial B(a,T)} F(u) R^{1-n} \mu^{-\frac{n}{2}}(g^{-1}u) dS_u. \tag{3.22}$$

Comparando (3.22) e (3.16) concluímos

$$\frac{2n}{R^2}\left[\frac{1}{w_{n-1}} \int_{\partial B(0,R)} R^{1-n} f(x) dS_x - f(0)\right]$$

$$= \frac{2n}{R^2}\left[-\frac{RT}{T^2-|a|^2}\mu^{\frac{n}{2}}(a)\left(\int_{B(a,T)} G(u)\Delta F(u)du - F(a)\right) - f(0)\right]$$

$$= \frac{2n}{R^2}\left[-\frac{RT}{T^2-|a|^2}\mu^{\frac{n}{2}}(a)\left(\int_{B(a,T)} G(u)\Delta F(u)du - F(0)\right) - F(0)\mu^{\frac{n}{2}-1}(0)\right]. \tag{3.23}$$

Tendo em conta (3.15) resulta que o lado esquerdo da igualdade (3.23) tende para $\Delta f(0)$ quando $R \to 0$.

Para calcular o limite do lado direito da igualdade referida necessitamos dos seguintes resultados auxiliares:

-
$$\lim_{R\to 0} \frac{T(R)}{R} = \mu(0) \tag{3.24}$$

  À medida que R se aproxima de 0 verificamos que $T \to 0$ e $a \to 0$ (porque g transforma $B(0,R)$ em $B(a,T)$). Assim, para $x \in \partial B(0,R)$ podemos estabelecer a seguinte relação de aproximação

$$T = |gx - a| \sim |gx - 0| = |x|\sqrt{\mu(x)\mu(0)} = R\sqrt{\mu(x)\mu(0)}$$

e portanto

$$\lim_{R\to 0} \frac{T}{R} = \lim_{R\to 0} \sqrt{\mu(x)\mu(0)} = \mu(0).$$

-
$$\lim_{R\to 0} \frac{T^2 - |a|^2}{R^2} = \mu^2(0) \tag{3.25}$$

De facto

$$\lim_{R\to 0} \frac{T^2 - |a|^2}{R^2} = \lim_{R\to 0} \frac{(T - |a|)(T + |a|)}{R^2}.$$

Por um lado

$$T - |a| \;=\; \min_{|x|=R} |g0 - gx| \;=\; \min_{|x|=R} |-x|\sqrt{\mu(0)\mu(x)} \;=\; R \min_{|x|=R} \sqrt{\mu(0)\mu(x)},$$

por outro lado

$$T + |a| \;=\; R \max_{|x|=R} \sqrt{\mu(0)\mu(x)}.$$

Uma vez que $R \to 0$ implica que $\mu(x) \to \mu(0)$ resulta de imediato o resultado apresentado.

-
$$\int_{B(a,T)} G(u)du \sim -\frac{T^2}{2n}, \tag{3.26}$$

onde

$$G(u) = c\left[|u|^{2-n} - T^{n-2}\left(|a|\left|u - a - \frac{T^2}{a}\right|\right)^{2-n}\right].$$

Mais uma vez, tendo em conta que $R \to 0$ implica que $T \to 0$ e $a \to 0$ concluímos que

$$\begin{aligned} |u|^{2-n} &= |u-a|^{n-2}\left|u^2 - au\right|^{2-n} \\ &= t^{n-2}\left|(u-a)^2 + ua - a^2\right|^{2-n}; \qquad u - a = t\xi \\ &= t^{n-2}\left|-t^2 + ua - a^2\right|^{2-n} \sim t^{2-n} \end{aligned}$$

e também que

$$T^{n-2}\left(|a|\left|u - a - \frac{T^2}{a}\right|\right)^{2-n} \;=\; T^{n-2}\left|au - a^2 - T^2\right|^{2-n} \;\sim\; T^{2-n}.$$

- $$\Delta F(u) = \Delta F(0) + h(u)$$

  onde h é uma função contínua e $\lim_{u\to 0} h(u) = 0$.

Atendendo aos resultados obtidos anteriormente vamos calcular o limite do lado direito da igualdade (3.23). Este cálculo será feito em duas partes.

- **<u>1ª Parte</u>**.

$$\lim_{R\to 0} \frac{2n}{R^2} \frac{RT}{T^2 - |a|^2} \mu^{\frac{n}{2}}(0) \int_{B(a,T)} G(u)\Delta F(u) du$$

$$= \lim_{R\to 0} 2n \left(\frac{T}{R}\right)^3 \left(\frac{R^2}{T^2 - |a|^2}\right) \frac{1}{T^2} \mu^{\frac{n}{2}}(0) \left(\Delta F(0) \int_{B(a,T)} G(u)du + \int_{B(a,T)} G(u)h(u)du\right)$$

$$= 2n\mu^3(0)\mu^{-2}(a) \frac{1}{T^2} \mu^{\frac{n}{2}}(0) \left(-\frac{T^2}{2n} \Delta F(0) + 0\right)$$

$$= -\Delta F(0) \mu^{\frac{n}{2}+1}(0). \tag{3.27}$$

- **<u>2ª Parte</u>**.

  Comecemos por assumir que o seguinte limite existe e que é válida a seguinte igualdade

$$\lim_{R\to 0} \frac{2n}{R^2} \mu^{\frac{n}{2}-1}(0) F(0) \left(\frac{RT}{T^2 - |a|^2} \mu(0) - 1\right) \;=\; \lambda F(0)$$

  com λ um número real.

  Tomemos $h(x) = f(x) - f(0)$. Assim

$$H(0) = F(0) - F(0) = 0$$

  analogamente também podemos dizer que

$$\Delta h(0) = \lambda H(0) + \mu^{\frac{n}{2}+1}(0)\Delta H(0) \;=\; \mu^{\frac{n}{2}+1}(0)\Delta H(0)$$

  e

$$\Delta f(0) = \lambda F(0) + \mu^{\frac{n}{2}+1}(0)\Delta F(0).$$

  Uma vez que $\Delta f(0) = \Delta h(0)$ e $\Delta F(0) = \Delta H(0)$ concluímos que $\lambda = 0$.

Tendo em conta os cálculos efectuados anteriormente, podemos dizer que o limite de (3.23) quando R tende para 0 é

$$\Delta f(0) = \mu^{\frac{n}{2}+1}(0)\Delta F(0). \tag{3.28}$$

Para o caso geral, consideremos $g(u) = (au+b)(cu+d)^{-1}$ uma transformação de Möbius genérica e consideremos também

$$f(u+x) = h(u).$$

Assim $f(x) = h(0)$ e $\Delta f(x) = \Delta h(0)$. Defina-se também a seguinte função auxiliar F

$$F(z) = \mu^{1-\frac{n}{2}}(g^{-1}z)f(g^{-1}z). \tag{3.29}$$

Para $g(x) = y$ defina-se a transformação de Möbius g_1 da seguinte forma

$$\begin{array}{rcl} g_1(u) & = & g(u+x) - y \\ & = & [(a-yc)(u+x) + b - yd]\left[c(u+x) + d^{-1}\right], \end{array}$$

sendo esta tal que $g_1(0) = 0$.

Relativamente a g_1 podemos dizer que

$$\mu_1(u) = |c(u+x)+d|^{-2} = \mu(u+x)$$

Para $v = g_1(v)$ temos

$$\begin{array}{rcl} H(v) & = & \mu_1^{1-\frac{n}{2}}(g_1^{-1}v)h(g_1^{-1}v) \\ \\ & = & \mu_1^{1-\frac{n}{2}}(u)h(u) \\ \\ & = & \mu_1^{1-\frac{n}{2}}(u+x)f(u+x) \\ \\ & = & \mu_1^{1-\frac{n}{2}}(g^{-1}(v+y))f(g^{-1}(v+y)) \\ \\ & = & F(v+y) \end{array}$$

assim $\Delta H(0) = \Delta F(y)$.

Assim, obtemos

$$\Delta f(x) = \Delta h(0) = \mu_1^{\frac{n}{2}+1}(0)\Delta H(0) = \mu^{\frac{n}{2}+1}(x)\Delta F(y) \tag{3.30}$$

que corresponde a uma generalização de (3.28).

Considerando a expressão anterior juntamente com (3.29) obtemos

$$\Delta_x f(x) = \mu^{\frac{n}{2}+1}(x)\Delta_y \mu^{1-\frac{n}{2}}(g^{-1}y)f(g^{-1}y). \tag{3.31}$$

Logo

$$\begin{aligned}\left(G_g \Delta G_{g^{-1}}\right)(G_g[f])(y) &= \mu^{\frac{n}{2}+1}(g^{-1}y)\ \Delta_y \mu^{1-\frac{n}{2}}(g^{-1}y)f(g^{-1}y) \\ &= (G_g[\mu])^{\frac{n}{2}+1}(y)\ \Delta_y (G_g[\mu])^{1-\frac{n}{2}}(y)(G_g[f](y)),\end{aligned}$$

isto é

$$G_g \Delta G_{g^{-1}} = (G_g[\mu])^{\frac{n}{2}+1}\ \Delta_y (G_g[\mu])^{1-\frac{n}{2}}. \tag{3.32}$$

Através deste raciocínio acabámos de provar o seguinte teorema

Teorema 3.4.1 *O transformado do Laplaciano segundo a transformação de Möbius $g(x) = (ax+b)(cx+d)^{-1}$ é dado por*

$$G_g \Delta G_{g^{-1}} = (G_g[\mu])^{\frac{n}{2}+1}\ \Delta_y (G_g[\mu])^{1-\frac{n}{2}}.$$

3.5 Operadores invariantes associados a Δ

Vamos agora estudar a existência de um subgrupo T do grupo $\mathcal{M}(n)$ das transformações de Möbius e de um operador A (associado com o Laplaciano) tal que A é invariante relativamente a T, isto é

$$G_g A G_{g^{-1}} = A \qquad \forall g \in T.$$

Definição 3.5.1 *Seja s uma superfície esférica em $\mathbb{R}^{0,n}$ com matriz representativa S. Define-se I_s como sendo o subgrupo das transformações de Möbius que deixa a superfície esférica s invariante, isto é*

$$I_s = \{g \in \mathcal{M}(n) : g(s) = s\}.$$

Seja G uma matriz pertencente a $(\mathbb{R}_{0,n})^{2\times 2}$ representativa de um elemento g de $Pin(1, n+1)$ e que deixa a superfície esférica s invariante.

Então

$$G(s) = s \quad \longrightarrow \quad GSG' = \rho S. \tag{3.33}$$

onde ρ é uma constante real não nula. Uma vez que g preserva o produto interno obtemos

$$\begin{aligned} S\overline{S} &= (GSG'^{-1})\overline{(GSG'^{-1})} \\ &= \rho^2 S\overline{S}, \end{aligned} \tag{3.34}$$

o que permite concluir que $\rho^2 = 1$.

Definição 3.5.2 *Seja x um ponto de $\mathbb{R}^{0,n}$, com matriz representativa X. Define-se o produto interno entre x e s (e que se representa por (S,x)) como sendo o produto entre as matrizes S e X, isto é:*

$$(S,x) = S \cdot X. \tag{3.35}$$

Tal como vimos anteriormente , se x é um ponto da superfície esférica s então

$$(S,x) = 0.$$

Seja g um elemento do grupo I_s considerado em (3.33). Então $y = g(x)$ tem a seguinte representação a nível matricial

$$Y = k\, GXG'^{-1},$$

onde k é uma constante real não nula, e

$$Y = \begin{bmatrix} y & |y|^2 \\ 1 & -y \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} x & |x|^2 \\ 1 & -x \end{bmatrix} \quad G = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

Supondo que $k = 1$ obtemos o seguinte

$$\begin{aligned} GXG'^{-1} &= \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & |x|^2 \\ 1 & -x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{d} & \bar{b} \\ \bar{c} & \bar{a} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (ax+b)\overline{(cx+d)} & (ax+b)\overline{(ax+b)} \\ (cx+d)\overline{(cx+d)} & (cx+d)\overline{(ax+b)} \end{bmatrix} \\ &= |cx+d|^2 \begin{bmatrix} (ax+b)(cx+d)^{-1} & (|ax+b|/|cx+d|)^2 \\ 1 & -(ax+b)(cx+d)^{-1} \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

isto é

$$GXG'^{-1} = \mu^{-1}(x)Y. \tag{3.36}$$

Uma vez que

$$GSG'^{-1} \cdot GXG'^{-1} = \pm GS \cdot XG'^{-1} = S \cdot X \tag{3.37}$$

concluímos que

$$\begin{aligned} (S,x) &= S \cdot X \\ &= GSG'^{-1} \cdot GXG'^{-1} \\ &= \pm S \cdot (\mu^{-1}Y) \\ &= \pm\mu^{-1}(x)(S,y), \end{aligned}$$

e portanto o diferencial da transformação g é

$$\left|\frac{(S,y)}{(S,x)}\right| = \mu(x). \tag{3.38}$$

Sabemos de (3.31) que o transformado do Laplaciano segundo a transformação de Möbius g é

$$\Delta_x f(x) = \mu^{\frac{n}{2}+1}(x)\Delta_y \mu^{1-\frac{n}{2}}(g^{-1}y)f(g^{-1}y). \tag{3.39}$$

Consideremos

$$h(x) = |(S,x)|^{\frac{n}{2}-1} f(x) \Leftrightarrow f(x) = |(S,x)|^{1-\frac{n}{2}} h(x).$$

Assim

$$\Delta_x f(x) = \Delta_x |(S,x)|^{1-\frac{n}{2}} h(x) \tag{3.40}$$

e

$$\mu^{\frac{n}{2}+1}(g^{-1}y)\Delta_y \mu^{1-\frac{n}{2}}(g^{-1}y)f(g^{-1}y) = \left|\frac{(S,y)}{(S,x)}\right|^{\frac{n}{2}+1} \Delta_y |(S,y)|^{1-\frac{n}{2}} h(g^{-1}y). \tag{3.41}$$

Tendo em conta (3.40) e (3.41) concluímos a partir de (3.39) que

$$|(S,x)|^{\frac{n}{2}+1} \Delta_x |(S,x)|^{1-\frac{n}{2}} h(x) = |(S,y)|^{\frac{n}{2}+1} \Delta_y |(S,y)|^{1-\frac{n}{2}} h(g^{-1}y), \tag{3.42}$$

e uma vez que $|dy| = \mu(x)|dx|$, podemos dizer que a métrica invariante é

$$\frac{|dy|}{|(S,y)|} = \frac{|dx|}{|(S,x)|}. \tag{3.43}$$

Assim, o operador

$$|(S,x)|^{\frac{n}{2}+1} \Delta_x |(S,x)|^{1-\frac{n}{2}}$$

é invariante segundo o grupo I_s correspondente à superfície esférica s, com métrica invariante dada por

$$\frac{|dx|}{|(S,x)|}.$$

Exemplo 3.5.3 *Seja s a superfície esférica unitária, cuja representação matricial é*

$$S = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Assim

$$\begin{aligned}(S,x) &= Re\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & |x|^2 \\ 1 & -x \end{bmatrix} \\ &= Re\begin{bmatrix} -1 & x \\ x & |x|^2 \end{bmatrix} \\ &= Re\left(-f_1 + xf_2 - xf_3 + |x|^2 f_4\right) \\ &= \frac{|x|^2-1}{2}.\end{aligned}$$

Logo

$$|1-|x|^2|^{\frac{n}{2}+1}\Delta_x|1-|x|^2|^{1-\frac{n}{2}}$$

é o operador invariante para o grupo que fixa a superfície esférica unitária, com métrica invariante dada por

$$\frac{|dx|}{|1-|x|^2|} = \frac{|dy|}{|1-|y|^2|}.$$

Exemplo 3.5.4 *Seja s o hiperplano de equação $x_1 = 0$, ou seja, $(< x, e_1 >= 0)$; a sua representação matricial será*

$$S = \begin{bmatrix} e_1 & 0 \\ 0 & -e_1 \end{bmatrix}.$$

Assim

$$\begin{aligned}(S,x) &= Re\begin{bmatrix} e_1 & 0 \\ 0 & -e_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & |x|^2 \\ 1 & -x \end{bmatrix} \\ &= Re\begin{bmatrix} e_1 x & e_1|x|^2 \\ -e_1 & e_1 x \end{bmatrix} \\ &= -x_1,\end{aligned}$$

e teremos

$$|x_1|^{\frac{n}{2}+1}\Delta_x|x_1|^{1-\frac{n}{2}}$$

como operador invariante para o grupo que deixa invariante o hiperplano $x_1 = 0$. Note-se que a métrica invariante dada por

$$\frac{|dx|}{|x_1|} = \frac{|dy|}{|y_1|}.$$

é a métrica de Poincaré.

3.6 O operador de Dirac sob a acção do grupo de Möbius

Anteriormente vimos que

$$Df(x) = \lim_{R\to 0} \frac{n}{w_{n-1}} \int_{\partial B(x,R)} \nu_u f(u) dS_u.$$

O vector unitário perpendicular a $\partial B(x,R)$ é $\nu = \frac{u-x}{R}$, pelo que a expressão anterior pode ser reescrita da seguinte forma

$$Df(x) \quad = \quad \lim_{R\to 0} \frac{n}{w_{n-1}R^{n+1}} \int_{\partial B(x,R)} (u-x) f(u) dS_u. \tag{3.44}$$

Consideremos $y = g(x)$ uma transformação de Möbius, que aplica $B(x,R)$ em $B(a,T)$, e a mudança de coordenadas $v = g(u)$, cujo jacobiano é dado por

$$\left|\frac{dS_u}{dS_v}\right| = \mu^{1-n}(g^{-1}v).$$

Atendendo ao lema 3.18 concluímos que

$$v - y = (cx+d)^{*^{-1}}(u-x)(cu+d)^{-1},$$

logo

$$u - x = (cx+d)^*(v-y)(cu+d)$$

e

$$Df(x) \quad = \quad \lim_{R\to 0} \frac{n}{w_{n-1}R^{n+1}} (cx+d)^* \int_{\partial B(a,T)} (v-y)(cg^{-1}v+d) f(g^{-1}u) \mu^{1-n}(g^{-1v}) dS_v. \tag{3.45}$$

Defina-se

$$F(v) = \mu^{1-n}(g^{-1}v)(cg^{-1}v+d) f(g^{-1}v). \tag{3.46}$$

Note-se que

$$v - y = v - a + a - y = T\nu_y + a - y,$$

com ν_v o vector unitário perpendicular a $\partial B(a,T)$.

De (3.45) podemos dizer que

$$Df(x) = \lim_{R\to 0} \frac{n}{w_{n-1}R^{n+1}} (cx+d)^* \left(\int_{\partial B(a,T)} T\nu_v F(v) dS_v + \int_{\partial B(a,T)} (a-y) F(v) dS_v \right). \tag{3.47}$$

Aplicando o teorema de Stokes [1] ao primeiro integral obtemos

$$\begin{aligned} I_1 &= \lim_{R\to 0} \frac{n}{w_{n-1}R^{n+1}}(cx+d)^* T \int_{\partial B(a,T)} \nu_v F(v) dS_v \\ &= \lim_{R\to 0} \frac{n}{w_{n-1}R^{n+1}}(cx+d)^* T \int_{B(a,T)} DF(v) dS_v. \end{aligned}$$

Uma vez que $DF(v) = Df(y)+h(v)$, onde h é uma função contínua, tal que $\lim_{v\to y} h(v) = 0$, obtemos

$$\begin{aligned} I_1 &= \lim_{R\to 0} \frac{n}{w_{n-1}R^{n+1}}(cx+d)^* T \left(DF(y) \int_{B(a,T)} dv + \int_{B(a,T)} h(v) dv \right) \\ &= \lim_{R\to 0} \left(\frac{T^{n+1}}{R^{n+1}}(cx+d)^* DF(y) + \frac{n}{w_{n-1}}(cx+d)^* \frac{T}{R^{n+1}} \int_{B(a,T)} h(v) dv \right). \end{aligned}$$

Por um lado, anteriormente concluiu-se que, quando $R \to 0^+$, se tem $\frac{T}{R} \to \mu(x)$.

Por outro lado

$$\left| \frac{T}{R^{n+1}} \int_{B(a,T)} h(v) dv \right| \leq \frac{T^{n+1}}{R^{n+1}} \frac{w_{n-1}}{n} \max_{v\in B(a,T)} |h(v)|$$

e $\max_{v\in B(a,T)} |h(v)| \to 0$ quando $R \to 0^+$.

Assim

$$I_1 = \mu^{n+1}(x)(cx+d)^* DF(y). \tag{3.48}$$

Uma vez que $F(v) = F(y) + H(y)$, com H uma função contínua e tal que $\lim_{v\to y} H(v)$, podemos dizer que

$$\begin{aligned} I_2 &= \lim_{R\to 0} \frac{1}{R^{n+1}} \int_{\partial B(a,T)} (a-y) F(y) dS_v \\ &= \lim_{R\to 0} \left(\frac{a-y}{R^2} \frac{T^{n-1}}{R^{n-1}} w_{n-1} F(y) + \frac{1}{R^{n+1}} \int_{\partial B(a,T)} (a-y) H(v) dS_v \right). \end{aligned}$$

Vamos agora calcular o valor de $\lim_{R\to 0^+} \frac{a-y}{R^2}$. Pelo teorema de Stokes podemos dizer que

$$\int_{\partial B(a,T)} \nu_v \mu(g^{-1}y)\mu(g^{-1}v) dS_v = \int_{B(a,T)} \mu(g^{-1}y) D_v \mu(g^{-1}v) dv. \tag{3.49}$$

[1] A demonstração deste teorema encontra-se no apêndice A.

Tendo em conta o lema 3.18 concluímos que a seguinte igualdade

$$\begin{aligned}
\mu(g^{-1}y)\mu(g^{-1}v) &= \frac{|v-y|^2}{|u-x|^2} \\
&= \frac{|v-a+a-y|^2}{R^2} \\
&= \frac{T^2+|a-y|^2-2<a,a-y>+2<v,a-y>}{R^2},
\end{aligned}$$

é válida em $\partial B(a,T)$, logo

$$\begin{aligned}
\int_{\partial B(a,T)} \nu_v \mu(g^{-1}y)\mu(g^{-1}v)dS_V &= \int_{B(a,T)} D_v \frac{T^2+|a-y|^2-2<a,a-y>}{R^2}dv + \\
& 2\int_{B(a,T)} D_v \frac{<v,a-y>}{R^2}dv. \qquad (3.50)
\end{aligned}$$

O primeiro integral do segundo membro assume o valor zero. Por outro lado

$$\begin{aligned}
D_v <v,a-y> &= \sum_{i=1}^{n} e_i \partial_{v_i} \left(\sum_{j=1}^{n} v_j(a_j-y_j) \right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} e_i(a_i-y_i) \\
&= a-y.
\end{aligned}$$

Assim, (3.49) pode ser reescrita como

$$\int_{B(a,T)} D_v \mu(g^{-1}y)\mu(g^{-1}v)dv = 2\frac{a-y}{R^2}\frac{w_{n-1}T^n}{n}. \qquad (3.51)$$

Temos também que

$$\int_{B(a,T)} D_v \mu(g^{-1}y)\mu(g^{-1}v)dv = \mu(g^{-1}y)D_v\mu(g^{-1}v)\big|_{v=y}\frac{w_{n-1}T^n}{n} + \mu(g^{-1}y)\int_{B(a,T)} l(v)dv, \qquad (3.52)$$

onde

$$l(v) = D_v\mu(g^{-1}v) - D_v\mu(g^{-1}v)\big|_{v=y}$$

Uma vez que

$$\left| \frac{n}{w_{n-1}T^n}\mu(g^{-1}y)\int_{B(a,T)} l(v)dv \right| \leq \mu(g^{-1}y) \max_{v\in B(a,T)} |l(v)| \longrightarrow 0,$$

quando $R \to 0$, resulta então

$$\lim_{R\to 0} \frac{a-y}{R^2} = \frac{1}{2}\mu(g^{-1}y)D_v\mu(g^{-1}v)\Big|_{v=y}. \tag{3.53}$$

Substituindo em I_2 obtemos

$$\begin{aligned} I_2 &= \lim_{R\to 0} \frac{1}{R^{n+1}} \int_{\partial B(a,T)} (a-y)F(v)dS_v \\ &= \frac{1}{2}\mu(g^{-1}y)D_v\mu(g^{-1}v)\Big|_{v=y} \mu^{n-1}(x)w_{n-1}F(y) + \\ &\qquad + \lim_{R\to 0}\frac{1}{R^{n+1}}\int_{\partial B(a,T)}(a-y)H(v)dS_v \end{aligned} \tag{3.54}$$

e

$$\left|\frac{1}{R^{n+1}}\int_{\partial B(a,T)}(a-y)H(v)dS_v\right| \leq \frac{|a-y|}{R^2}w_{n-1}\frac{T^{n-1}}{R^{n-1}}\max_{v\in\partial B(a,T)}|H(v)| \longrightarrow 0,$$

quando $R \to 0^+$.

Temos assim

$$\begin{aligned} I_2 &= \lim_{R\to 0} \frac{1}{R^{n+1}} \int_{\partial B(a,T)} (a-y)F(v)dS_v \\ &= \frac{w_{n-1}}{2}\mu^n(g^{-1}y)D_v\mu(g^{-1}v)\Big|_{v=y} F(y). \end{aligned} \tag{3.55}$$

Substituindo I_1 e I_2 em (3.47) obtemos finalmente

$$\begin{aligned} Df(x) &= (cx+d)^*\left(DF(y)\mu^{n+1}(g^{-1}y) + \frac{n}{2}\mu^n(g^{-1}y)D_v\mu(g^{-1}v)\Big|_{v=y}F(y)\right) \\ &= (cx+d)^*\left(DF(y)\mu^{n+1}(g^{-1}y) + \mu^{\frac{n}{2}+1}(g^{-1}y)\frac{n}{2}\mu^{\frac{n}{2}-1}(g^{-1}y)D_v\mu(g^{-1}v)\Big|_{v=y}F(y)\right) \\ &= (cx+d)^*\mu^{\frac{n}{2}+1}(g^{-1}y)\left(\mu^{\frac{n}{2}}(g^{-1}y)DF(y) + D_v\mu^{\frac{n}{2}}(g^{-1}v)\Big|_{v=y}F(y)\right) \\ &= (cx+d)^*\mu^{\frac{n}{2}+1}(g^{-1}y)D_v\left(\mu^{\frac{n}{2}}(g^{-1}v)F(v)\right)\Big|_{v=y}. \end{aligned} \tag{3.56}$$

Tomando $F(v) = \mu^{1-n}(g^{-1}v)(cg^{-1}v+d)f(g^{-1}v)$, a expressão anterior toma então a forma

$$Df(x) = (cx+d)^*\mu^{\frac{n}{2}+1}(g^{-1}y)D_y\mu^{1-\frac{n}{2}}(g^{-1}y)(cg^{-1}y+d)f(g^{-1}y).$$

Obtemos assim o seguinte resultado

Teorema 3.6.1 *O operador*

$$D_x G_{g^{-1}}[g^{-1}](y) \quad = \quad (cg^{-1}y+d)^* \mu^{\frac{n}{2}+1}(g^{-1}y) D_y \mu^{1-\frac{n}{2}}(g^{-1}y)(cg^{-1}y+d) \qquad (3.57)$$

é o transformado do operador de Dirac segundo a transformação de Möbius $g(x) = (ax+b)(cx+d)^{-1}$.

Apêndice A

Teorema de Stokes

"A ciência é uma equação diferencial. A religião, uma condição de fronteira"

Alan Turing

Consideremos U, V e W tais que $UV \subset W$ e seja $\mathcal{E}^*(\Omega)$ o espaço das formas diferenciais em $\Omega \subset \mathbb{R}^{m+1}$. Consideremos também $\tilde{w}, \tilde{r} \in \mathcal{E}^*(\Omega)$ e seja $u \in U$, $v \in V$.

Assim, tomando $w = \tilde{w} \otimes u \in \mathcal{E}^*(\Omega) \otimes U$ e $r = \tilde{r} \otimes v \in \mathcal{E}^*(\Omega) \otimes V$, definimos $w \wedge r \in \mathcal{E}^* \otimes W$ da seguinte forma

$$w \wedge r = (\tilde{w} \wedge \tilde{r}) \otimes uv$$

Além disso, a acção do diferencial exterior d sobre o vector sobre o vector forma é definida, no sentido horário, da seguinte forma

$$d(\tilde{w} \otimes u) = d\tilde{w} \otimes u.$$

Podemos assim concluir que

Lema A.0.2 *Se w é uma k-forma e r é uma l-forma, então*

$$d(w \wedge r) = dw \wedge r + (-1)^k w \wedge dr.$$

Agora consideremos Σ uma variedade compacta orientável de dimensão $m+1$ e com fronteira $\partial\Sigma$, e definamos o elemento de superfície $d\sigma$ em $\partial\Sigma$ da seguinte forma

$$d\sigma = \sum_{j=0}^{m} (-1)^j e_j d\hat{x}_j$$

onde para cada $j = 0, 1, ..., m$,

$$d\hat{x}_j = dx_0 \wedge ... \wedge [dx_j] \wedge ... \wedge dx_m.$$

Logo, se $n = (n_0, n_1, ..., n_m)$ então a normal unitária exterior é identificada por $n = \sum_{j=0}^{n} n_j e_j$ e sendo $d\Sigma$ o "usual"elemento de superfície concluímos que $d\sigma = nd\Sigma$.

Além disso, uma vez que

$$dx = dx_0 \wedge dx_1 \wedge ... \wedge dx_m$$

concluímos que o elemento de volume tem dimensão $m+1$ e está orientado.

Teorema A.0.3 *(Fórmula de Stokes) Se $f \in \mathcal{C}_1(\Omega; V)$ e $g \in \mathcal{C}_1(\Omega, U)$, então para todo $\Sigma \subset \Omega$*

$$\int_{\partial\Sigma} gd\sigma f = \int_{\Sigma} [(g\partial_x)f + g(\partial_x f)]\, dx.$$

Demonstração: Assumindo que $f \in \mathcal{E}^0(\Omega) \otimes V$, $g \in \mathcal{E}^0(\Omega) \otimes U$ e $d\sigma \in \mathcal{E}^{(m)}(\Omega) \otimes \mathcal{C}$, concluímos, pelo lema anterior, que

$$\begin{aligned} d(gd\sigma f) &= d((gd\sigma)f) \\ &= d(gd\sigma)f + (-1)^m gd\sigma \wedge df \\ &= dg \wedge d\sigma f + (-1)^m (gd\sigma) \wedge df. \end{aligned}$$

Mas para cada $j = 0, 1, ...m$,

$$dx_j \wedge d\sigma = e_j dx \qquad d\sigma \wedge dx_j = (-1)^m e_j dx \qquad dg \wedge d\sigma f = (g\partial_x) f dx.$$

Assim

$$(-1)^m gd\sigma \wedge df = g(\partial_x f) dx.$$

■

Nota: Os principais casos em que aplicamos a Fórmula de Stokes são os seguintes:

1. Considerando $V = S$ e $U = \overline{S}$ obtemos que $\overline{S}\mathcal{C}S = \mathrm{C}I$;
2. Considerando $V = S$ e $U = \mathcal{C}$ obtemos que $\mathcal{C}\mathcal{C}S = S$;
3. Considerando $V = \mathcal{C}$ e $U = \overline{S}$ obtemos que $\overline{S}\mathcal{C}\mathcal{C} = \overline{S}$;
4. Considerando $V = \mathcal{C}$ e $U = \mathcal{C}$ obtemos que $\mathcal{C}\mathcal{C}\mathcal{C} = \mathcal{C}$.

Corolário A.0.4 *Consideremos $\partial_x f = 0$ e $g\partial_x = 0$. Então para todo $\Sigma \subset \Omega$*

$$\int_{\partial\Sigma} gd\sigma f = 0.$$

Corolário A.0.5 *Consideremos $\partial_x f = 0$. Então para todo $\Sigma \subset \Omega$*

$$\int_{\partial\Sigma} d\sigma f = 0.$$

Os dois últimos corolários são designados por Teorema de Cauchy para funções monogénicas.

A.1 Fórmula integral de Cauchy

Uma das principais ferramentas no estudo das equações do tipo $\Delta_x f = g$ é a solução fundamental $N(x)$ de Δ_x dada por

$$N(x) = \begin{cases} \frac{1}{(1-m)A_{m+1}|x|^{m-1}} & , \quad m > 1 \\ \\ \frac{1}{2\pi}\log|x| & , \quad m = 1 \end{cases},$$

onde A_{m+1} corresponde à área da superfície esférica unitária de $\mathbb{R}^{m+1}$.

Esta função satisfaz as seguintes propriedades:

1. N é localmente integrável em $\mathbb{R}^{m+1}$, isto é, $N \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^{m+1})$;

2. N é analítica em $\mathbb{R}^{m+1}_0$;

3. $\Delta_x N = \delta$, isto é, para todo $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$,

$$\begin{aligned} \langle \Delta_x N, \varphi \rangle &= \langle \delta, \varphi \rangle \\ & \varphi(0). \end{aligned}$$

Atendendo à relação $\partial_x \overline{\partial_x} = \Delta_x$ obtemos a seguinte função

$$\begin{aligned} E(x) &= \overline{\partial_x}(N(x)) \\ &= (N(x))\overline{\partial_x} \\ &= \frac{1}{A_{m+1}} \frac{\overline{x}}{|x|^{m+1}} \end{aligned}$$

que satisfaz as seguintes propriedades

1. E é uma função monogénica à direita e à esquerda em $\mathbb{R}^{m+1}_0$ com $\lim_{x \to \infty E(x) = 0}$;

2. $E \in \mathcal{A}(\mathbb{R}^{m+1}_0)$;

3. $E \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^{m+1})$;

4. $\partial_x E = E \partial_x = \delta$, no sentido distribucional.

Como consequência das propriedades referidas podemos dizer que E é uma solução fundamental à direita e à esquerda do operador de Dirac ∂_x.

Teorema A.1.1 *(Fórmula Integral de Cauchy) Seja $f \in \mathcal{C}_1(\Omega, V)$ e seja $\Sigma \subset \Omega$. Então*

$$\int_{\partial\Sigma} E(y-x)d\sigma_y f(y) - \int_{\Sigma} E(y-x)\partial_y f(y)dy = \begin{cases} f(x) & , \quad x \in \dot{\Sigma} \\ 0 & , \quad x \in \Omega \setminus \Sigma \end{cases}.$$

Demonstração: Primeiro consideremos $x \in \Omega \setminus \Sigma$. Seja $\eta = d(x, \Sigma)$ e seja Ω^* uma vizinhança de raio $\eta/2$ de Σ. Aplicando a fórmula de Stokes a $\Sigma \subset \Omega^*$ obtemos, considerando $g(y) = E(y-x)$

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Sigma} E(y-x)d\sigma_y f(y) &= \int_{\Sigma} \left[\left(E(y-x)\partial_y \right) f(y) + E(y-x)(\partial_y f) \right] dy \\ &= \int_{\Sigma} E(y-x)(\partial_y f)dy. \end{aligned}$$

Fixemos $x \in \dot{\Sigma}$ e seja $R > 0$ tal que $\overline{B}(x, R) \subset \dot{\Sigma}$. Aplicando novamente a fórmula de Stokes

$$\int_{\partial(\Sigma\setminus B)} E(y-x)d\sigma_y f(y) = \int_{\Sigma\setminus B} E(y-x)(\partial_y f)dy. \tag{A.1}$$

Mas, considerando $R' > 0$ de tal forma que $\Sigma \subset \dot{B}(x, R')$, concluímos que para uma constante $C > 0$, independente de R', é válida a seguinte igualdade

$$\int_{\Sigma} |E(y-x)|\, dy \leq CR',$$

porque $\partial_y f$ é contínua em Ω e portanto $E(y-x)(\partial_y f)$ é integrável em Σ.

Consequentemente, se considerarmos o limite quando $R \to 0^+$ do lado direito da expressão (A.1), obtemos

$$\int_{\Sigma} E(y-x)(\partial_y f)dy.$$

Relativamente ao lado esquerdo da igualdade (A.1), este pode ser reescrito da seguinte forma

$$\int_{\partial\Sigma} E(y-x)d\sigma_y f(y) - \int_{\partial B(x,R)} E(y-x)d\sigma_y f(y)$$

onde

$$\lim_{R\to 0^+} \int_{\partial B(x,R)} E(y-x)d\sigma_y f(y) = f(x).$$

∎

Corolário A.1.2 *Se $\partial_x f = 0$ em Ω então para cada $\Sigma \subset \Omega$,*

$$\int_{\partial\Sigma} E(y-x)d\sigma_y f(y) = \begin{cases} f(x) & , \quad x \in \dot{\Sigma} \\ 0 & , \quad x \in \Omega \setminus \Sigma \end{cases}.$$

Nota: A fórmula de Cauchy apresentada e deduzida correspondem ao caso em que estamos a trabalhar com funções monogénicas à esquerda. De forma análoga se procede quando estamos a trabalhar com funções monogénicas à direita, isto é, para o caso em que temos funções que verificam $f\partial_x = 0$. Para este caso obteremos

$$\int_{\partial\Sigma} f(y)d\sigma_y E(y-x) = \begin{cases} f(x) & , \quad x \in \dot{\Sigma} \\ 0 & , \quad x \in \Omega \setminus \Sigma \end{cases} .$$

Apêndice B

O Caso Especial do Hiperplano

"Enquanto as leis da matemática se referirem à realidade, elas não estão correctas; e enquanto estiverem correctas, não se aplicam à realidade."

Albert Einstein

Tal como vimos em (2.5) um hiperplano tem a seguinte representação em coordenadas projectivas:

$$h : (\xi, 0, \eta) = \rho\,(m, 0, 2b) \qquad , \rho \neq 0.$$

Definição B.0.3 *Dizemos que a superfície esférica* $s : (\mu, k, \nu) = k\left(m, 1, |m|^2 - r^2\right)$ *intersecta ortogonalmente o hiperplano* $h : (\xi, 0, \mu) = \rho\,(m, 0, 2b)$ *se e só se o centro da superfície esférica pertence ao hiperplano, isto é*

$$\langle n, m\rangle + b = 0, \tag{B.1}$$

ou seja, em coordenadas projectivas

$$\begin{aligned} h \rfloor s^T = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad (\xi, k_1, \eta)\begin{pmatrix} I_p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -I_q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}(\mu, k, \nu)^T = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \langle \xi, \mu\rangle + \frac{k\eta}{2} = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad (\langle n, m\rangle + b) = 0. \end{aligned}$$

A partir da definição podemos concluir que um ponto x pertence a um determinado hiperplano se e só se ao ser considerado como sendo uma superfície esférica intersecta ortogonalmente o hiperplano.

Consideremos dois hiperplanos $h_1 : (\xi_1, 0, \eta_1) = \rho_1 (m_1, 0, 2b_1), \rho_1 \neq 0$ e $h_2 : (\xi_2, 0, \eta_2) = \rho_2 (m_2, 0, 2b_2), \rho_2 \neq 0$ de $\mathbb{R}^{p,q}$.

Definição B.0.4 *O hiperplano h_1 intersecta ortogonalmente h_2 se e só se n_1 e n_2 são ortogonais, isto é*

$$\langle n_{1,n_2} \rangle = 0$$

ou, em coordenadas esféricas

$$\begin{aligned} h_1 \rceil h_2^T = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad (\xi_1, 0, \eta_1) \rceil (\xi_2, 0, \eta_2) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \langle \xi_1, \xi_2 \rangle = 0. \end{aligned} \tag{B.2}$$

Tal como se fez para o caso das superfícies esféricas, podemos associar a cada hiperplano um vector de $\mathbb{R}^{p+1,q+1}$, isto é,

$$h : (\xi, 0, \eta) \implies h = \sum_{i=1}^{p+q} \xi_i e_i - \frac{\eta}{2} e_- + \frac{\eta}{2} e_+. \tag{B.3}$$

Da expressão anterior resulta a seguinte relação

$$h \cdot (e_+ - e_-) = \frac{\eta}{2} - \frac{\eta}{2} = 0.$$

Bibliografia

[1] Ahlfors, Lars V.; Clifford Numbers and Möbius Transformation in $\mathbb{R}^n$, *Clifford Algebras and Their Applications of Mathematical Physics*, (1986), pp. 167-175.

[2] Ahlfors, Lars V.; Möbius Transformation in $\mathbb{R}^n$ expressed trought 2×2 Matrices of Clifford Numbers, *Complex Variables*, **Vol. 5**, (1986), pp. 215-224.

[3] Axler, S., Bourdon, P., Ramey, W.; *Harmonic Function Theory*, Graduate Texts in Mathematics - 137, Springer-Verlang, 1992.

[4] Bernardes, Gil; Funções Monogénicas de Spin Superior com Valores em Produtos Tensoriais de Álgebras de Clifford (Tese de Doutoramento, Universidade de Coimbra, 2004)

[5] Brackx, F.; Delandhe, R.; Serras, H.; *Clifford Algebras and their Applications in Mathematical Physics - Deinze, 1993*, Kluwer Academic Publishers, Volume 55, 1993.

[6] Brackx, F.; Delanghe, R.; Sommen, F.; *Clifford Analysis*, Pitman Advanced Publishing Program, 1982.

[7] Cnops, J.; Spherical Geometry and Möbius Transformations, *Clifford Algebras and their Applications in Mathematical Physics*,(1993), pp. 75-78.

[8] Cnops, J.; *Hurwitz Pairs and Applications of Möbius Transformations*, Universiteit Gent - Faculteit van de Wetenschappen Akademiejaar, 1993-1994.

[9] Cerejeiras, P.; O Operador de Dirac em Espaços Hiperbólicos (Tese de Doutoramento, Universidade de Aveiro, 1997)

[10] Coxeter, H. S. M.; *Projective Geometry - Second Edition*, Springer - Verlag, 1974.

[11] Delanghe,R.; Sommen, F.; Souček, V.; *Clifford Algebra and Spinor - Valued Functions. A Function Theory for the Dirac Operator*, Kluwer Academic Publishers, 1992.

[12] Fillmore, Jay P.; Springer, A.; Möbius Groups over General Fields Using Clifford Algebras Associated with Spheres, *International Journal of Theoretical Physics*, **Vol. 29 - N.o 3**, (1990), pp. 225-246.

[13] Fikhtengol'ts, G. M.; *The Fundamentals of Mathematical Analysis - Volume II*, Pergamon Press, 1965.

[14] Fueter, R.; Sur les groupes improprement discontinuos, *Comptes Rendus Acad. des Sciences*, **Vol. 182**, (1926).

[15] Fueter, R.; Über automorphe Funktionen in bezug auf Greeppen, die in de Ebene uneigentlich diskontinuierlich sid, *Crelle Journal*, **Vol. 157**, (1927).

[16] Fueter, R.; Die Singularitäten der eindeutigen regulären Funktion einer Quaternionen variablen, *Comment Math Helv*, **Vol. 9**, (1937), pp. 320-335.

[17] Gilbert, J.; Murray, M.; *Clifford Algebras and Dirac Operators in harmonic analysis*, Cambridge University Press, Cambridge, 1991.

[18] Lam, T.Y.; *The Algebraic Theory of Quadratic Forms*, Benjamin, New York, 1973.

[19] Hua, Loo-keng; *Starting with the Unit Circle - Background to Higher Analysis*, Springer-Verleag, 1981.

[20] Hochstad, H.; *The Functions of Mathematical Physics*, Dover Publications, New York, 1986.

[21] Peskine, Christian; *An Algebraic Introdution to Complex Projective Geometry*, Cambridge University Press, Volume 47, 1996.

[22] Pipes, A. Louis; Harvill, Lawrence, R.; *Applied Mathematics for Engineers and Physicists - Third Edition*, Mc Graw-Hill, 1970.

[23] Riley, K. F.; Hobson, M. P.; *Mathematical Methods for Physics and Engineering*, Cambridge University Press, 1997.

[24] Ryan, John; Conformally Covariant Operators in Clifford Analysis, *Z. Anal. Anwend.*, **Vol. 14 - N.o 4**, (1995), 677-704.

[25] Stolfi, Jorge; *Oriented Projective Geometry - A Framework for Geometric Computaions*, Academic Press, 1991.

[26] Sudbery, A.; Quaternionic Analysis, *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.*, **Vol. 85**, (1979), pp. 199-225.

[27] Vahlen, K. Th.; Über Bewegungen und komplexe Zahlen, *Math. Annalen*, **Vol. 55**, (1902), pp. 585-593.

[28] Waterman, P. L.; Möbius Transformation in Several Dimensions, *Advances in Mathematics*, **Vol. 101**, (1993), pp. 87-113.

[29] Yosida, K.; *Functional Analysis*, Springer-Verlag, 6^a edição, 1980.

[30] Zymmerman, Robert, L.; Olness, Fredrick I.; *Mathematica for Physics*, Addison-Wesley Publishin Company, 1995.