



**José António
Teixeira Mendes**

**PROCEDIMENTO PARA PROJECTO DE SISTEMAS
DE ESCAPE PARA VEÍCULOS**



**José António
Teixeira Mendes**

**PROCEDIMENTO PARA PROJECTO DE SISTEMAS
DE ESCAPE PARA VEÍCULOS**

dissertação apresentada à Universidade de Aveiro para cumprimento dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre em Engenharia Mecânica realizada sob a orientação científica do Dr. Vítor António Ferreira da Costa, Professor Associado do Departamento de Engenharia Mecânica da Universidade de Aveiro

Dedico este trabalho aos meus pais, pela possibilidade que me deram em concluir os meus estudos.

o júri

presidente

Prof. Dr. Francisco José Malheiro Queirós de Melo

professor associado, Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade de Aveiro

Prof. Dr. Manuel Carlos Gameiro da Silva

professor associado com agregação, Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade de Coimbra

Prof. Dr. Vítor António Ferreira da Costa

professor associado, Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade de Aveiro (orientador)

agradecimentos

ao prof. Dr. Vítor António Ferreira da Costa, pelo seu dinamismo, dedicação e orientação durante este trabalho.

a todos os colegas e amigos que de alguma forma contribuíram para a concretização deste trabalho.

palavras-chave

Sistemas de escape, Silenciadores, Método da matriz de transferência, Perda de transmissão, Filtros acústicos

resumo

Com o aumento da quantidade de veículos e, conseqüentemente, da poluição sonora urbana, o estudo da redução de ruído tem ganho cada vez mais importância. Daí que nas últimas cinco décadas se tenham conseguido muitos avanços na teoria dos filtros acústicos e, particularmente, no projecto de sistemas de escape para veículos. Tais sistemas devem, também, atender aos requisitos da legislação ambiental em vigor, que são cada vez mais exigentes e rigorosos, assim como contribuir para um bom funcionamento global do motor. Sendo o silenciador responsável pela redução do ruído, constituído por um conjunto de filtros acústicos, torna-se crucial conhecer o seu funcionamento, quer em termos individuais quer operando em conjunto.

Neste trabalho, através de uma análise unidimensional, baseada no método das matrizes de transferência, estuda-se o funcionamento individual e de conjunto dos filtros usados nos silenciadores dos sistemas de escape para veículos e, em especial dos filtros reactivos. É elaborada e implementada uma metodologia de cálculo de silenciadores de sistemas de escape para veículos, que permite simular a performance acústica de tais silenciadores, através do cálculo da perda de transmissão, evitando-se, desta forma, a construção de protótipos e a realização de testes experimentais insequentes. São analisados alguns casos particulares de silenciadores de sistemas de escape para veículos, e os resultados obtidos são comparados com outros disponíveis na literatura.

keywords

Exhaust systems, Mufflers, Transfer matrix method, Transmission loss, Acoustic filters

abstract

As the number of vehicles increases, as well as urban sound pollution, study of noise reduction becomes more and more important. In the last five decades, many and relevant advances have been achieved in what concerns the theory of acoustic filters, and in particular in the design of vehicles exhaust systems. Such systems also need to meet the demands of environmental legislation, which is more and more exigent and rigorous, and, at the same time, they must contribute towards a good global performance of the engines. The muffler is the part responsible for noise reduction, and since it is constituted by a set of acoustic filters, it becomes crucial to understand the way they work, either individually or when set together.

In this work, using a one-dimensional analysis, based on the transfer matrix method, the individual and group behaviour of filters used in mufflers are studied, specially the reactive acoustic filters. A methodology for the design of mufflers is developed and implemented, allowing the evaluation of the acoustic performance of such mufflers, using transmission loss as the main performance parameter, thus avoiding building prototypes and test experiments without previously know guidelines. Some particular cases are considered, and the obtained results are then compared to others available in the literature.

Índice de Figuras

Fig. 1.1 – Sistema de escape.....	13
Fig. 2.1 – Esquema interno de um silenciador reactivo.	16
Fig. 2.2 – Esquema interno de um silenciador dissipativo.	16
Fig. 2.3 – Esquema de um silenciador com controlo activo.....	17
Fig. 2.4 – Perda de inserção.....	19
Fig. 2.5 – Perda de transmissão.	20
Fig. 2.6 – Redução de ruído.....	21
Fig. 2.7 – Método dos dois microfones.	25
Fig. 3.1 – Propagação do som.	28
Fig. 3.2 – Primeiro harmónico para um tubo aberto nas duas extremidades.....	29
Fig. 3.3 – Segundo harmónico.....	30
Fig. 3.4 – Primeiro harmónico para um tubo fechado numa das extremidades.	31
Fig. 3.5 – Terceiro harmónico.	32
Fig. 3.6 – Sistema de coordenadas polares cilíndricas num tubo; Fonte: Munjal (1987). ..	37
Fig. 3.7 – Linhas nodais para a distribuição transversal da pressão num tubo circular até $m=2$ e $n=2$;Fonte: Munjal (1987).	39
Fig. 4.1 – Tubo uniforme de comprimento l	42
Fig. 4.2 – Tubo uniforme de comprimento l com terminação rígida.....	43
Fig. 4.3 – Tubo uniforme de comprimento l com terminação anecóica.....	44
Fig. 4.4 – Filtro acústico, ramificação lateral, Fonte: Gerges (1992).....	48
Fig. 4.5 – Filtro com inertância acústica.	51
Fig. 4.6 – Filtro com compliância acústica.....	52
Fig. 4.7 – Filtro passa baixo.	55
Fig. 4.8 – Coeficiente de transmissão para um filtro passa baixo.	56
Fig. 4.9 – Filtro passa alto.	57
Fig. 4.10 – Coeficiente de transmissão para um filtro passa alto.	58
Fig. 4.11 – Filtro rejeita banda – Ressonador de Helmholtz.	59

Fig. 4.12 – Coeficiente de transmissão para um filtro rejeita banda.	60
Fig. 4.13 – Tubo representado como <i>lumped element</i> com inertância em linha.	62
Fig. 4.14 – Tubo representado como <i>lumped element</i> com compliância em <i>shunt</i>	62
Fig. 4.15 – <i>Extended-tube resonators</i>	63
Fig. 4.16 – <i>Branch resonator</i> típico.	64
Fig. 4.17 – Ressonador de Helmholtz.	65
Fig. 4.18 – Ressonador concêntrico	67
Fig. 4.19 – Silenciador para construção do circuito equivalente, Fonte: Munjal (1987). ...	69
Fig. 4.20 – Construção do circuito equivalente, Fonte: Munjal (1987).	70
Fig. 5.1 – Os três elementos básicos de um circuito equivalente.	71
Fig. 5.2 – Representação geral de um elemento.	72
Fig. 5.3 – Diagrama geral para um filtro unidimensional, Fonte: Munjal (1987).	75
Fig. 5.4 – Diagrama para o cálculo da perda de transmissão.	78
Fig. 6.1 – Câmara de expansão simples.	80
Fig. 6.2 – Efeito da razão de expansão, e $l=50$ cm.	81
Fig. 6.3 – Efeito do comprimento da câmara de expansão.	82
Fig. 6.4 – Câmara de expansão com partições.	83
Fig. 6.5 – Efeito do número de partições.	84
Fig. 6.6 – Duas câmaras de expansão simples em série.	85
Fig. 6.7 – Efeito do número de câmaras simples em série e $l_1=10$ cm.	85
Fig. 6.8 – Efeito do número de câmaras simples em série e $l_1=25$ cm.	86
Fig. 6.9 – Efeito do número de câmaras simples em série e $l_1=50$ cm.	87
Fig. 6.10 – Câmara simples com extensões nos tubos de entrada e de saída.	88
Fig. 6.11 – Efeito da extensão no tubo de entrada, para $l_1=8.0$ cm e $l_2=0$	89
Fig. 6.12 – Efeito do comprimento da extensão no tubo de entrada, para $l_2=0$	90
Fig. 6.13 – Efeito das extensões nos tubos de entrada e de saída, para $l_1=8.0$ cm e $l_2=4.0$ cm.	91
Fig. 6.14 – Efeito otimizado dos comprimentos das extensões nos tubos de entrada e de saída.	92

Fig. 6.15 – Silenciador com duas câmaras ligadas por um tubo de conexão.	93
Fig. 6.16 – Efeito do diâmetro do furo de comunicação entre câmaras, para $l = 28$ cm.	95
Fig. 6.17 – Efeito da posição axial da divisória, para $l=40$ cm.	96
Fig. 6.18 – Efeito da presença de extensões, para $l= 28$ cm.	97
Fig. 7.1 – Elementos com um tubo perfurado, Fonte: Munjal (1987).	100
Fig. 7.2 – Zona comum entre o tubo e a câmara, e secção perfurada, Fonte: Munjal (1987).	101
Fig. 7.3 – Silenciadores com dois tubos perfurados.	103
Fig. 7.4 – Zona comum entre os dois tubos e a câmara, e secção perfurada, Fonte: Munjal (1987).	103
Fig. 7.5 – Silenciador com três tubos perfurados.	105
Fig. 7.6 – Zona comum entre os três tubos e a câmara, e secção perfurada.	105
Fig. 7.7 – Silenciador com três tubos de passagem.	109
Fig. 7.8 – Perda de transmissão, para $l_p=27.4$ cm, $l_a=l_b=2.79$ cm, $L_C=15$ cm, $L_A=10.2$ cm; $d_1=d_2=d_3=4.89$ cm; $d_c=16.51$ cm; $d_h=0.234$ cm; $l_1=l_2=l_3=l_4=0$, $M=0$ e $\sigma=0.045$	113
Fig. 7.9 – Perda de transmissão, para $l_p=10.5$ cm; $l_a=2,5$ cm; $l_b=5$ cm; $L_C=25$ cm; $L_A=14.8$ cm; $d_1=4.82$ cm; $d_2=4.24$ cm $d_3=4.75$ cm; $d_c=15.7$ cm; $d_h=0.249$ cm; $l_1=20.5$ cm; $l_2=l_3=0$; $l_4=11.2$ cm, $M=0$ e $\sigma=0.09$	114
Fig. 7.10 – Perda de transmissão, para $l_p=27.4$ cm; $l_a=l_b=2.79$ cm; $L_C=15$ cm; $L_A=10.2$ cm; $d_1=d_2=d_3=4.89$ cm; $d_c=16.51$ cm; $d_h=0.234$ cm; $l_1=l_2=l_3=l_4=0$ e $M=0$	115
Fig. 7.11 – Perda de transmissão; $l_p=27.4$ cm; $l_a=l_b=2.79$ cm; $d_1=d_2=d_3=4.89$ cm; $d_c=16.51$ cm; $d_h=0.234$ cm; $l_1=l_2=l_3=l_4=0$, $M=0$ e $\sigma=0.045$	116
Fig. 7.12 – Perda de transmissão, para $l_a=l_b=2.79$ cm; $L_C=15$ cm; $L_D=10.2$ cm; $d_1=d_2=d_3=4.89$ cm; $d_c=16.51$ cm; $d_h=0.234$ cm; $l_1=l_2=l_3=l_4=0$, $M=0$ e $\sigma=0.045$	117
Fig. 7.13 – Perda de transmissão; $l_p=27.4$ cm; $l_a=l_b=2.79$ cm; $L_C=15$ cm, $L_D=10.2$ cm $d_1=d_2=d_3=4.89$ cm; $d_h=0.234$ cm; $l_1=l_2=l_3=l_4=0$, $M=0$ e $\sigma=0.045$	118
Fig. 8.1 – Ressonador concêntrico com material absorvente.	122
Fig. 8.2 – Efeito da porosidade num ressonador concêntrico.	126
Fig. 8.3 – Efeito da densidade do material num ressonador concêntrico, $\sigma=0.02$	127

Fig. 8.4 – Efeito da densidade do material num ressonador concêntrico, $\sigma=0.08$	128
Fig. 9.1 – Configuração do ressonador concêntrico na interface.	132
Fig. 9.2 – Configuração do silenciador com três tubos de passagem na interface.	133
Fig. 9.3 – Configuração do silenciador com três tubos e com um ressonador de Helmholtz.	134
Fig. 9.4 – Efeito da adição de um ressonador de Helmholtz no silenciador de 3 tubos de passagem.....	135
Fig. 10.1 – Diferentes fronteiras no silenciador de três tubos de passagem sem extensões.	156
Fig. 10.2 – Diferentes fronteiras no silenciador de três tubos de passagem com extensões.	160

Índice de Tabelas

Tabela 1 – Analogia electroacústica, Fonte: Munjal (1987). 53

Tabela 2 – Valores de resistividade da Fibra de vidro, Fonte: Selamet *et al.* (2001)..... 121

Nomenclatura

A_n	Amplitude da onda complexa à entrada do silenciador	[Pa]
A_l	Amplitude da onda complexa à saída do silenciador	[Pa]
B_n	Amplitude da onda complexa reflectida à entrada do silenciador	[Pa]
C	Compliância	[ms ²]
\tilde{c}	Velocidade complexa do som	[m/s]
c_0	Velocidade do som	[m/s]
d_h	Diâmetro dos furos	[m]
f	Frequência	[s ⁻¹]
f_r	Frequência de ressonância	[s ⁻¹]
IL	Perda de inserção	[dB]
k_0	Número de onda	[1/m]
\tilde{k}	Número de onda complexo	[1/m]
L_{W_2}	Nível de potência sonora irradiada com silenciador	[dB]
L_{W_1}	Nível de potência sonora irradiada sem silenciador	[dB]
M	Número de Mach do escoamento médio	
M	Inertância	[1/m]
NR	Redução do ruído	[dB]
p	Pressão acústica associada a onda progressiva	[Pa]
p_c	Pressão aeroacústica	[Pa]
p_0	Pressão ambiente	[Pa]
R	Coefficiente de reflexão	
r_f	Raio das fibras	[m]
R_0	Resistência à radiação	[Pa.s/kg]
R	Resistividade	[mks rayl / m]

TL	Perda de transmissão	[dB]
t	Espessura do tubo	[m]
t_s	Espessura da amostra	[m]
u	Velocidade acústica de uma partícula	[m/s]
U	Velocidade do escoamento médio	[m/s]
u_f	Velocidade do fluxo que atravessa a amostra	[m/s]
v	Velocidade acústica da massa associada à onda progressiva	[kg/s]
v_c	Velocidade aeroacústica	[kg/s]
W_2	Potência sonora com silenciador	[W]
W_i	Potência sonora incidente na entrada do silenciador	[W]
W_l	Potência sonora sem silenciador	[W]
W_t	Potência sonora transmitida após o silenciador	[W]
X_0	Reactância	[Pa.s/kg]
Y	Impedância característica do tubo	[1/ms]
Z	Impedância acústica	[Pa.s/kg]
Z_0	Impedância de radiação	[Pa.s/kg]

Letras Gregas

α_t	Coefficiente de transmissão	
β	Valor próprio	
γ	Razão entre o calor específico á pressão constante e o calor específico á volume constante,	
ζ	Impedância acústica específica	[kg/m ² .s]
ζ_p	Impedância de perfuração	[Pa.m.s ² /kg]
λ	Comprimento de onda	[m]

ξ	Deslocamento de uma partícula	[m]
$\tilde{\rho}$	Densidade complexa do material absorvente	[kg/m ³]
ρ_f	Densidade de compactação do material absorvente	[kg/m ³]
ρ_0	Densidade do meio	[kg/m ³]
σ	Porosidade de perfuração	
Φ	Vector de transformação	
ψ	Matriz dos vectores próprios	
ω	Frequência angular	[rad/s]
Ω	Porosidade do material absorvente	

Índice

Capítulo 1	Introdução.....	12
1.1	Enquadramento	12
1.2	Sistemas de escape	13
Capítulo 2	Conceitos Básicos	15
2.1	Introdução	15
2.2	Classificação dos silenciadores	15
2.2.1	<i>Silenciadores reactivos.....</i>	<i>16</i>
2.2.2	<i>Silenciadores dissipativos</i>	<i>16</i>
2.2.3	<i>Silenciadores activos</i>	<i>17</i>
2.2.4	<i>Desvantagens e vantagens de cada tipo de silenciadores.....</i>	<i>17</i>
2.3	Parâmetros que definem a performance dos silenciadores	19
2.3.1	<i>Perda de inserção (IL).....</i>	<i>19</i>
2.3.2	<i>Perda de transmissão (TL)</i>	<i>20</i>
2.3.3	<i>Redução de ruído.....</i>	<i>21</i>
2.3.4	<i>Comparação dos três parâmetros</i>	<i>21</i>
2.4	Métodos de análise	22
2.4.1	<i>Métodos numéricos.....</i>	<i>22</i>
2.4.2	<i>Métodos experimentais</i>	<i>25</i>
Capítulo 3	Propagação das ondas.....	28
3.1	Introdução	28
3.2	Oscilação do ar dentro de um tubo.....	29
3.2.1	<i>Tubo aberto nas duas extremidades</i>	<i>29</i>
3.2.2	<i>Tubo fechado numa das extremidades.....</i>	<i>31</i>
3.3	Teoria da onda plana	33
3.3.1	<i>Propagação de ondas planas num meio estacionário e não-viscoso.....</i>	<i>33</i>
3.3.2	<i>Propagação de ondas tridimensionais num meio estacionário e não-viscoso</i>	<i>36</i>

3.3.3	<i>Propagação de ondas em tubos circulares</i>	37
Capítulo 4	Filtros acústicos	41
4.1	Introdução	41
4.2	Tubo uniforme	41
4.3	Impedância de radiação	45
4.4	Coeficiente de reflexão à saída de um tubo aberto	47
4.5	Coeficiente de reflexão e transmissão em aberturas laterais	48
4.6	Inertância acústica	51
4.7	Compliância acústica	52
4.8	Analogia electroacústica	53
4.9	Correcção do comprimento de uma abertura lateral	54
4.10	Comportamento dos filtros, passa baixo, passa alto e rejeita banda	55
4.10.1	<i>Filtro passa baixo</i>	55
4.10.2	<i>Filtro passa alto</i>	57
4.10.3	<i>Filtro rejeita banda</i>	59
4.11	Representação do tubo como “lumped element”	61
4.12	Definição de impedâncias	63
4.12.1	<i>Extended-tube resonators</i>	63
4.12.2	<i>Ressonador de Helmholtz</i>	65
4.12.3	<i>Ressonador concêntrico</i>	67
4.13	Construção do circuito equivalente	69
Capítulo 5	Método da matriz de transferência	71
5.1	Introdução	71
5.2	Matrizes de transferência para os diferentes elementos	73
5.3	Evolução da sequência das matrizes de transferência	75
5.4	Cálculo da perda de transmissão	78
Capítulo 6	Efeito da variação dimensional e construtiva em filtros simples	80
6.1	Introdução	80

6.2	Efeito da razão de expansão	80
6.3	Efeito do comprimento da câmara	82
6.4	Efeito do número de partições.....	83
6.5	Efeito do número de câmaras simples em série	85
6.6	Efeito da presença de extensões nos tubos de entrada e de saída	88
6.7	Câmara dupla com extensões	93
Capítulo 7 Silenciadores reactivos com elementos perfurados.....		98
7.1	Introdução	98
7.2	Variáveis aeroacústicas de estado	98
7.3	Elementos perfurados.....	100
7.3.1	<i>Um tubo perfurado</i>	<i>100</i>
7.3.2	<i>Dois tubos perfurados</i>	<i>103</i>
7.3.3	<i>Três tubos perfurados.....</i>	<i>105</i>
7.3.4	<i>Impedância acústica de perfurações</i>	<i>107</i>
7.3.5	<i>Silenciador com três tubos de passagem.....</i>	<i>109</i>
Capítulo 8 Silenciadores dissipativos		119
8.1	Introdução	119
8.2	Propriedades físicas.....	119
8.3	Propriedades acústicas	121
8.4	Ressonador concêntrico	122
Capítulo 9 Procedimento para simulação da perda de transmissão		130
9.1	Introdução	130
9.2	Procedimento.....	131
9.3	Interface gráfica	132
Capítulo 10 Conclusões		136
Bibliografia.....		138
Apêndices.....		143

Capítulo 1 **Introdução**

1.1 Enquadramento

Com o aumento do número de veículos e, conseqüentemente, da poluição sonora, o estudo de técnicas para redução de ruído ganhou extrema importância. Nos veículos existem várias fontes de ruído, tais como: o motor, o sistema de aspiração, o ruído aerodinâmico, o ruído causado pelo contacto dos pneus com o piso, o sistema de refrigeração, o sistema de transmissão e até mesmo o sistema eléctrico. Entre estas, a fonte mais considerável de ruído é, sem dúvida, o motor, nomeadamente quando ocorre a explosão e queima do combustível no interior da câmara de combustão e a conseqüente expulsão dos gases resultantes da combustão para o exterior da câmara. É, por isso, extremamente importante o controlo desta fonte de ruído, sendo necessário inserir filtros acústicos ao longo do sistema de exaustão dos gases do motor, chamados silenciadores.

Os silenciadores veiculares, na sua maioria, mostram-se bastante eficazes na atenuação do ruído. Contudo, muitas empresas ainda os desenvolvem através de métodos empíricos, que envolvem pouca teoria acústica, fazendo diversos protótipos e ensaios até conseguirem um que respeite a legislação ambiental em vigor. Isto corresponde a uma abordagem de tentativa-e-erro. Contudo, actualmente, os clientes são muito exigentes e a alta competitividade associada a um ciclo de vida curto do produto torna crucial abreviar o tempo de desenvolvimento dos produtos.

Um sistema de escape é o último componente a ser considerado no projecto de um veículo, o que obriga, muitas das vezes, à concepção de silenciadores com geometrias bastante complexas, compactas, e de difícil execução. Por estes motivos, nas últimas cinco décadas tem-se feito um esforço considerável para desenvolver técnicas capazes de simular acusticamente o sistema de escape na fase de projecto, encurtando, desta maneira, o tempo de desenvolvimento e, conseqüentemente, o custo final do produto.

1.2 Sistemas de escape

Como já mencionado, nos motores e nos automóveis uma fonte de ruído muito considerável está, sem dúvida, associada à explosão e queima do combustível no interior da câmara de combustão, nos motores alternativos de combustão interna. Tal ruído é transmitido para o exterior através de tubagens de exaustão e pode ser atenuado com a inclusão de silenciadores, que não são mais que um conjunto de filtros acústicos. Ao conjunto das tubagens com os silenciadores dá-se o nome de sistema de escape, ou de exaustão. Na Fig. 1.1 podemos observar um sistema de escape com os diferentes componentes que o integram, apresentando três silenciadores. No entanto, muitas das vezes o sistema só apresenta um ou dois silenciadores. O número de silenciadores tem a ver com a cilindrada do veículo, a qual determina o volume total do sistema de escape, e com a configuração do chassis, porque por vezes não permite silenciadores de grandes dimensões, e daí a necessidade de ter mais que um para obedecer ao volume mínimo do sistema. O facto de haver mais que um silenciador também permite dimensionar cada um deles para atenuar o ruído numa determinada gama de frequências, e desta forma ter um bom comportamento do sistema numa maior gama de frequências.

De seguida, de forma resumida, indicam-se as funções de cada um dos principais componentes que integram um sistema de escape:

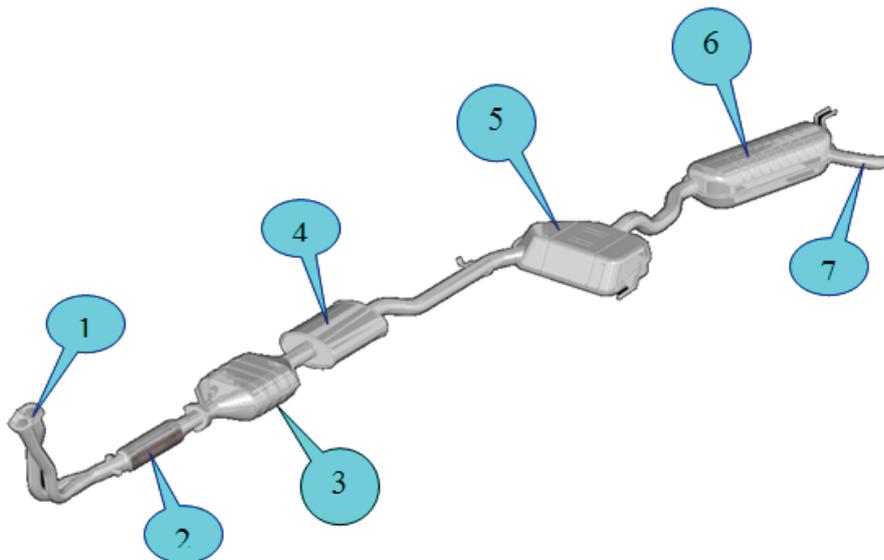


Fig. 1.1 – Sistema de escape.

1-Tubo Colector:

O tubo colector faz a ligação entre o motor e o resto do sistema de escape, e deve ser construído de forma a facilitar a saída dos gases de combustão, para que assim não influencie o normal funcionamento do motor.

2-Tubo Flexível:

A principal função deste tubo, constituído por um componente flexível, é permitir a absorção das vibrações transmitidas ao tubo colector pelo motor. Desta forma, minimiza-se a possibilidade de ocorrência de fracturas em zonas críticas do sistema de escape, como são as zonas soldadas.

3-Catalisador:

O objectivo da inclusão do catalisador no sistema de escape é reduzir a quantidade de gases poluentes e perigosos emitidos para a atmosfera pelo sistema de escape, e que são o monóxido de carbono (CO), os hidrocarbonetos não queimados (HC) e os NO_x. O seu bom funcionamento depende, nos motores a gasolina, da informação enviada pela sonda lambda à unidade de comando do motor, a qual vai influenciar a estequiometria da mistura ar-combustível. Uma má leitura da quantidade de O₂ presente no sistema de escape por parte da sonda lambda vai levar a uma relação combustível/ar não estequiométrica, e a eficiência do catalisador vai ser afectada.

4,5,6-Silenciadores:

A principal função dos silenciadores é atenuar o ruído produzido pelo motor, não devendo introduzir grandes perdas de carga no sistema. Devem ser construídos de forma a permitirem às ondas incidentes perderem energia e, conseqüentemente, promoverem a redução de ruído. Para isso, são compostos por: elementos reactivos, que permitem reflectir as ondas para a fonte, perdendo desta forma energia na colisão com as ondas incidentes e com o fluxo de gases, e por elementos dissipativos, que permitem às ondas perder energia por perdas térmicas e por viscosidade, ao passarem por eles.

7-Tubo de saída:

O tubo de saída estabelece a ligação entre o último silenciador e a atmosfera. Deve ser construído de forma a permitir uma saída livre dos gases e a terminar num ponto seguro, sobretudo para evitar a entrada de gases no habitáculo.

Capítulo 2 **Conceitos Básicos**

2.1 Introdução

Um dos grandes problemas encontrados em motores de combustão interna é o elevado nível de ruído produzido pelo mecanismo de combustão, nomeadamente durante a explosão e queima, a qual, para um motor de 4 tempos, ocorre com uma frequência definida por $f = (\text{Rotação do motor (rpm)} \times \text{Número de cilindros}) / 120$. Desta forma, é necessário atenuar o nível de ruído com a inserção de filtros acústicos no sistema de exaustão, chamados silenciadores.

No projecto de um veículo, o silenciador deve reduzir ao máximo o ruído emitido pelo motor e permitir que os gases resultantes da combustão fluam no seu interior sem grande resistência, para que não haja perdas de carga significativas que possam afectar o desempenho do motor, nomeadamente na diminuição da sua potência. Além disso, os sistemas de exaustão devem ser: compactos, resistentes à corrosão, e manterem a sua eficiência de forma a respeitarem a legislação ambiental.

2.2 Classificação dos silenciadores

Os silenciadores são classificados como passivos ou activos. Os silenciadores passivos ainda são subdivididos em reactivos e dissipativos, dependendo se a energia acústica é reflectida para a fonte devido a descontinuidades de área ou se é dissipada como calor. Muitas vezes, os silenciadores são compostos por uma parte reactiva e uma outra dissipativa, sendo chamados de silenciadores híbridos.

2.2.1 Silenciadores reactivos

Os silenciadores reactivos (Fig. 2.1) consistem num conjunto de elementos tubulares de dimensões transversais variadas, com câmaras de volumes e formas diferentes. Tais elementos têm impedâncias próprias, e são unidos de forma a reflectirem parte da energia acústica para a fonte.

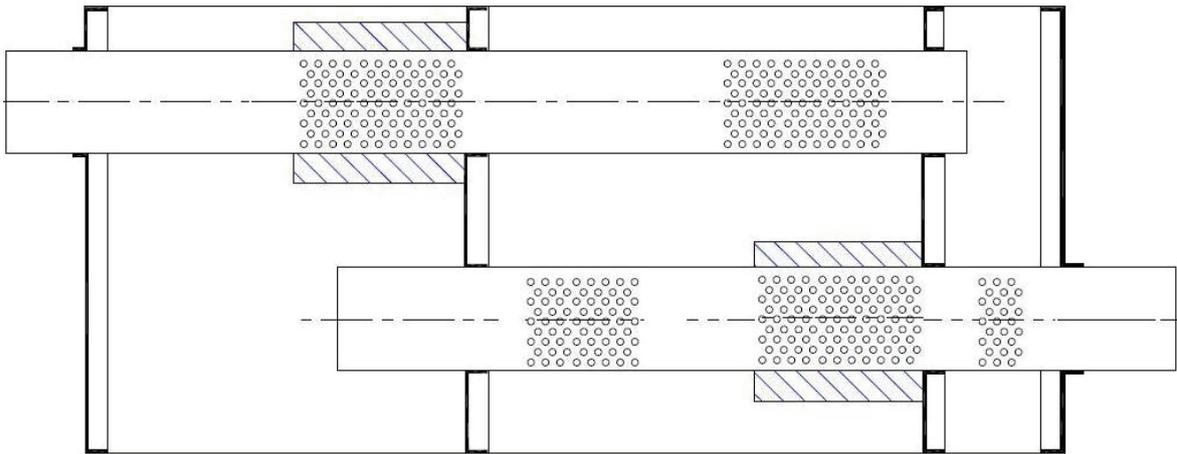


Fig. 2.1 – Esquema interno de um silenciador reactivo.

2.2.2 Silenciadores dissipativos

Os silenciadores dissipativos (Fig. 2.2) são fabricados com tubos internos perfurados envolvidos em materiais absorventes acústicos, onde a energia sonora incidente é transformada irreversivelmente em calor. Silenciadores deste tipo perdem a sua eficiência gradualmente, ao longo do tempo, com a degradação de tais materiais. Portanto, sempre que possível, deve evitar-se o uso deste tipo de silenciadores.

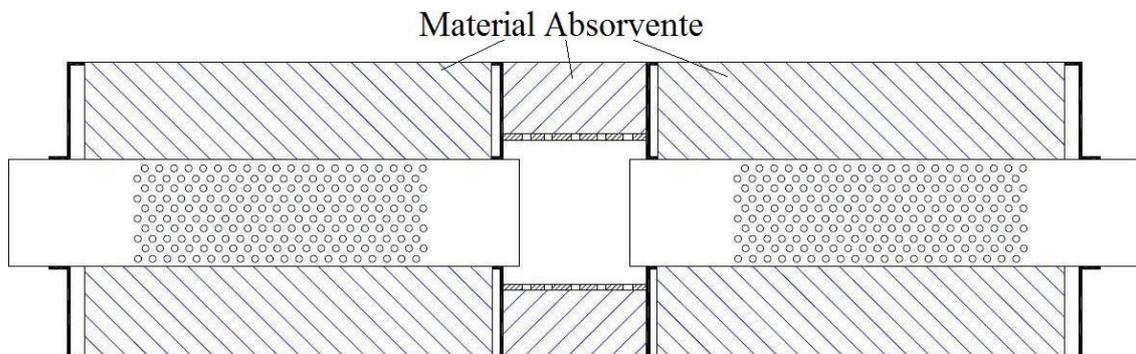


Fig. 2.2 – Esquema interno de um silenciador dissipativo.

2.2.3 Silenciadores activos

Os silenciadores activos (Fig. 2.3) utilizam o princípio da interferência destrutiva de ondas. Uma onda de pressão inversa é gerada através de dispositivos electrónicos para atenuar o ruído proveniente da fonte.

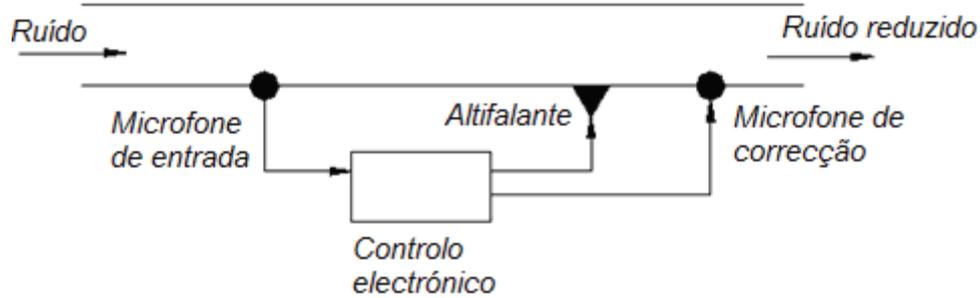


Fig. 2.3 – Esquema de um silenciador com controlo activo.

2.2.4 Desvantagens e vantagens de cada tipo de silenciadores

Silenciadores reactivos:

Vantagens:

- Alta performance nas baixas frequências;
- Mantêm a sua performance em condições severas, tais como as altas velocidades e altas temperaturas;
- Geralmente têm alta perda por inserção na presença de ondas estacionárias.

Desvantagens:

- Baixa performance nas altas frequências;
- Poderão ser ineficazes se a frequência do som mudar bruscamente, devido a mudanças acentuadas na velocidade e temperatura.

Silenciadores dissipativos:

Vantagens:

- Alta performance nas altas frequências;
- Produzem menos perda de carga quando comparados com os silenciadores reactivos.

Desvantagens:

- Baixa performance nas baixas frequências;
- O material absorvente, com o passar do tempo, tem tendência a desintegrar-se, devido principalmente às altas temperaturas, o que faz baixar a sua eficiência.

Silenciadores activos:

Vantagens:

- Perdas de carga mínimas.

Desvantagens:

- Extremamente dispendiosos.

Na prática, o que se verifica é que os construtores de sistemas de escape usam uma combinação entre elementos reactivos e dissipativos. No entanto, por questões ambientais, a tendência é cada vez mais usar somente elementos reactivos. O tempo de vida do produto é mais longo e, findo este, os problemas para eliminar os materiais absorventes não existem.

2.3 Parâmetros que definem a performance dos silenciadores

O desempenho acústico de um silenciador é medido e caracterizado através da análise da perda de inserção (*IL-Insertion Loss*), perda de Transmissão (*TL-Transmission Loss*) e da redução de ruído (*NR-Noise Reduction*).

2.3.1 Perda de inserção (IL)

É definida como sendo a diferença entre a potência acústica irradiada num mesmo ponto do sistema de exaustão sem e com silenciador (Fig. 2.4).

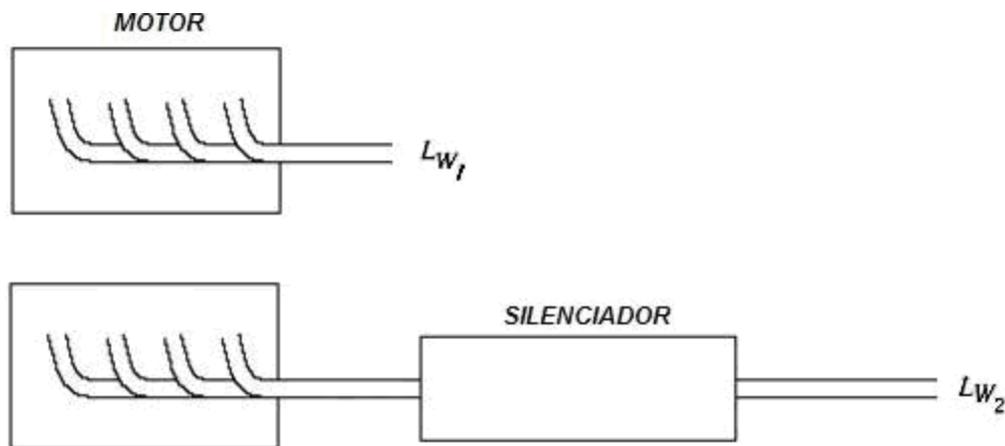


Fig. 2.4 – Perda de inserção.

$$\begin{aligned} IL &= (L_{W_1} - L_{W_2}) \\ &= 10 \log \left(\frac{W_1}{W_2} \right) \end{aligned} \quad (2.1)$$

onde:

L_{W_1} é o nível de potência sonora irradiada sem silenciador,

L_{W_2} é o nível de potência sonora irradiada com silenciador,

W_1 é a potência sonora irradiada sem silenciador,

W_2 é a potência sonora irradiada com silenciador.

2.3.2 Perda de transmissão (TL)

É definida como sendo a diferença entre a potência incidente no silenciador e a potência transmitida após o silenciador, sendo independente da fonte de ruído. Neste critério, presume-se que a terminação de saída seja anecóica, ou seja, não há reflexão no tubo de saída, (Fig. 2.5).

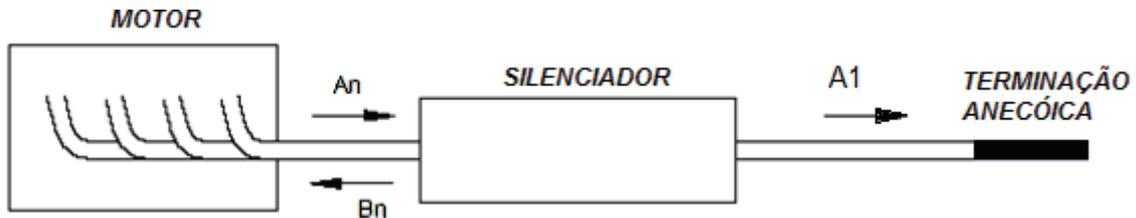


Fig. 2.5 – Perda de transmissão.

$$\begin{aligned}
 TL &= (L_{W_i} - L_{W_t}) \\
 &= 10 \log \left(\frac{W_i}{W_t} \right)
 \end{aligned} \tag{2.2}$$

Assumindo que as ondas que saem do silenciador não sofrem reflexão, ou seja $B_2=0$, temos:

$$\begin{aligned}
 TL &= 10 \log \left(\frac{S_n A_n^2}{2} \frac{2}{S_1 A_1^2} \right) \\
 &= 10 \log \left(\frac{S_n A_n^2}{S_1 A_1^2} \right)
 \end{aligned} \tag{2.3}$$

onde:

L_{W_i} é o nível de potência sonora incidente à entrada do silenciador,

L_{W_t} é o nível de potência sonora transmitida após o silenciador,

W_i é a potência sonora incidente à entrada do silenciador,

W_t é a potência sonora transmitida após o silenciador,

A_n é a amplitude da onda complexa à entrada do silenciador,

A_1 é a amplitude da onda complexa à saída do silenciador,

B_n é a amplitude da onda complexa reflectida à entrada do silenciador,

S_1 e S_2 são, respectivamente, as áreas dos tubos de entrada e de saída.

2.3.3 Redução de ruído

É definida como sendo a diferença entre os níveis de pressão sonora medida em dois pontos arbitrários, um ponto antes do silenciador e o outro após silenciador (Fig. 2.6).

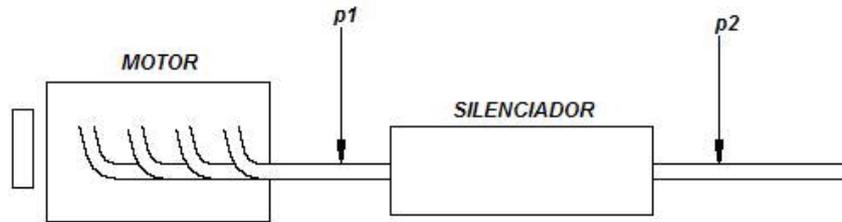


Fig. 2.6 – Redução de ruído.

$$NR = \log \left| \frac{p_1}{p_2} \right| \quad (2.4)$$

onde:

p_1 é a pressão sonora antes do silenciador,

p_2 é a pressão sonora após o silenciador.

2.3.4 Comparação dos três parâmetros

Segundo Munjal (1987), dos três parâmetros descritos anteriormente a perda por inserção (IL) é claramente o único que representa a performance real de um silenciador, porque representa a perda do nível de potência irradiada em consequência da colocação do silenciador entre a fonte e o receptor. Como inconveniente, necessita que a impedância interna da fonte seja conhecida, o que não é muito usual.

A perda de transmissão não envolve a impedância da fonte nem a impedância de irradiação, porque representa a diferença entre a energia acústica incidente e a transmitida para a terminação anecóica, permitindo saber a influência que tem na performance global do silenciador o adicionar ou retirar um elemento acústico.

A redução de ruído apenas nos dá a diferença de pressão entre dois pontos arbitrários, não sendo para o seu cálculo necessário saber a impedância da fonte, nem recorrer a uma terminação anecóica.

Portanto, cada parâmetro tem as suas vantagens e desvantagens, mas, numa análise final, e por ser mais fácil de calcular, a perda de transmissão será o parâmetro utilizado neste trabalho.

2.4 Métodos de análise

Os sistemas de exaustão de motores de combustão interna são um dos maiores responsáveis pela poluição sonora ambiental. No entanto, somente a partir dos anos 50 foi alcançado algum progresso no estudo de silenciadores veiculares, com o desenvolvimento de novas teorias e sistemas de medição.

Com o avanço tecnológico digital, e a disponibilidade de computadores cada vez mais potentes na execução de cálculos rápidos e de grande memória para armazenar dados, tornou-se possível a solução de problemas acústicos complexos. As características vibroacústicas dos sistemas podem ser previstas e optimizadas na fase inicial do projecto, com maior rapidez e precisão. Com isso elimina-se a construção e teste de grande número de protótipos, de alto custo, fazendo a optimização com modelos numéricos e apenas testando experimentalmente os modelos optimizados por via numérica. Existem várias técnicas numéricas para análise vibroacústica de sistemas complexos, tais como o Método dos Elementos Finitos (FEM), o Método dos Elementos de Fronteira (BEM), e o Método da Matriz de Transferência (TMM). No que respeita a métodos experimentais, podem indicar-se o método dos dois microfones, o método das duas cargas, e o método das duas fontes.

2.4.1 Métodos numéricos

Método da matriz de transferência:

Somente no final dos anos 50, em trabalhos publicados por Igarashi *et al.* (1958-60), é que os cálculos das propriedades de silenciadores começaram a ser feitos utilizando a analogia electroacústica. Nesses estudos, a pressão sonora e a velocidade de volume são relacionados antes e após o silenciador através de uma multiplicação de matrizes, cada uma referente a um elemento básico que compõe o silenciador. Também conhecidas como matrizes dos quatro parâmetros, ou matrizes dos quatro pólos, são compostas de quatro elementos que representam cada elemento acústico. Algumas matrizes para elementos básicos de silenciadores foram obtidas por Igarashi *et al.* (1958-60), e por Fukuda *et al.* (1963-70) e por Munjal (1987). Este método é o utilizado neste trabalho, sendo estudado em pormenor no Capítulo 5.

Método dos elementos finitos:

O método dos elementos finitos é uma técnica de discretização numérica de aproximação de problemas complexos. Desenvolvido, originalmente, como uma ferramenta para análise estrutural, o método foi estendido para análise acústica por Gladweel (1965) e Craggs (1972). No entanto, os estudos da propagação acústica em silenciadores foram iniciados, para um meio estacionário, por Young (1975) e Crocker (1976). A partir daí, inúmeros estudos têm sido realizados com base neste método.

O procedimento de análise por elementos finitos consiste na discretização do elemento a ser estudado através da divisão do mesmo em vários sistemas equivalentes de elementos finitos. Este método não está limitado à propagação de ondas planas. Por isso, permite obter bons resultados na simulação de silenciadores com geometrias complexas, onde predomina a propagação de ondas tridimensionais, sendo esta a sua principal vantagem quando comparado com métodos unidimensionais.

Método dos elementos de fronteira:

Este método, como o próprio nome indica, baseia-se na criação de malhas apenas nas superfícies de fronteira, sendo esta uma das suas principais vantagens quando comparado com o método dos elementos finitos. Na análise acústica de silenciadores, este método consiste em dividir o domínio acústico em vários sub-domínios e, através do segundo teorema de Green, obter a solução da equação de Helmholtz de cada sub-domínio à qual corresponde uma equação integral de contorno.

Dado os silenciadores terem geometrias complexas, muitas vezes havia a necessidade de criar uma grande quantidade de sub-domínios, o que tornava difícil a sua identificação assim como a definição das condições de continuidade entre as várias interfaces. Para ultrapassar este problema, Wu *et al.* (1996), partindo deste método, obtiveram um novo método designado por *the direct mixed-body BEM*. Este método combina as equações integrais dos vários sub-domínios em equações integrais de apenas um domínio, ou seja, o domínio acústico é tratado como um só. Desta forma, evitaram a necessidade de criar vários sub-domínios e interfaces artificiais entre eles.

Comparação dos três métodos:

Dos três métodos numéricos descritos, o método dos elementos finitos e dos elementos de fronteira são os únicos que permitem fazer um estudo acústico satisfatório, quer nas baixas quer nas altas frequências. Contudo, estes métodos requerem muito tempo para executar simulações. Além disso, são necessárias pessoas altamente qualificadas e softwares comerciais, que normalmente são muito dispendiosos. O método das matrizes de transferência, baseado na propagação de ondas planas, garante uma boa aproximação dos resultados experimentais na gama das baixas e médias frequências, onde o ruído se deve essencialmente às frequências de explosão e aos seus primeiros harmónicos.

2.4.2 Métodos experimentais

Para validar os resultados obtidos pelos diferentes métodos teóricos ou numéricos existem várias técnicas experimentais, através das quais é possível conhecer a eficiência de um determinado filtro acústico. Para isso são medidos os parâmetros que definem a performance dos filtros acústicos. Dentro desses parâmetros, e por depender apenas do filtro, a perda de transmissão, é o parâmetro considerado pela maioria dos métodos experimentais. Entre os vários métodos existentes, descreve-se, de forma resumida, o mais usado: o método dos dois microfones, Seybert *et al.* (2001).

Método dos dois microfones:

Este método, como o próprio nome indica, utiliza dois microfones, localizados em posições fixas e conhecidas. A excitação pode ser um sinal aleatório (contendo todas as frequências de interesse) ou um sinal harmónico discreto. A Fig. 2.7 mostra esquematicamente a colocação dos dois microfones nos respectivos pontos. As variáveis medidas são as densidades auto-espectrais do sinal nessas duas posições e a densidade espectral ocorrida entre elas, assim como a densidade espectral entre as amplitudes da onda incidente e reflectida.

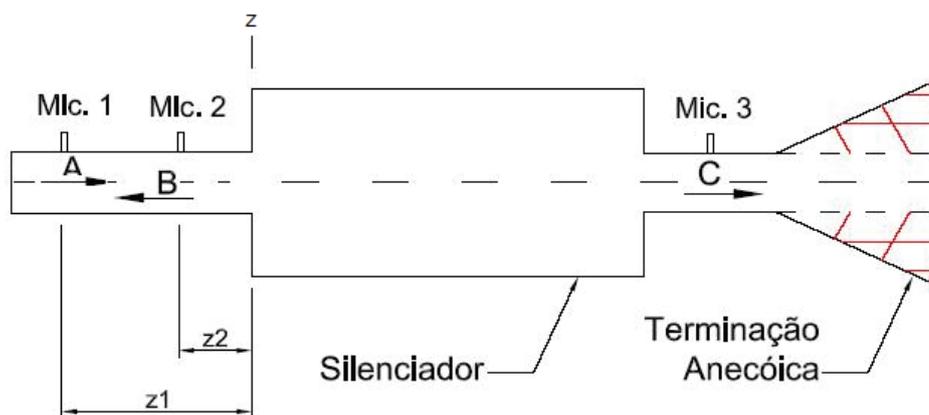


Fig. 2.7 – Método dos dois microfones.

Segundo Munjal (1987), a pressão e a velocidade da onda sonora propagada no plano podem ser definidas, para um meio estacionário, da seguinte forma:

$$p(z, t) = A(f) e^{j(\omega t - k_0 z)} + B(f) e^{j(\omega t + k_0 z)} \quad (2.5)$$

$$v(z, t) = \frac{1}{Y} \{ A(f) e^{j(\omega t - k_0 z)} - B(f) e^{j(\omega t + k_0 z)} \} \quad (2.6)$$

onde:

ω é a frequência angular,

k_0 é o número de onda,

Y é a impedância característica no tubo onde são feitas as medições,

$A(f)$ e $B(f)$ são funções da frequência (f), e são, respectivamente as amplitudes complexas da onda incidente e da onda reflectida à entrada do silenciador.

Aplicando transformadas de Fourier nas equações (2.5) e (2.6) nos dois pontos, obtêm-se as seguintes expressões:

$$S_{11}(f) = S_{AA}(f) + S_{BB}(f) + 2[C_{AB}(f) \cos(2k_0 z_1) + Q_{AB}(f) \text{sen}(2k_0 z_1)] \quad (2.7)$$

$$S_{22}(f) = S_{AA}(f) + S_{BB}(f) + 2[C_{AB}(f) \cos(2k_0 z_2) + Q_{AB}(f) \text{sen}(2k_0 z_2)] \quad (2.8)$$

$$C_{12}(f) = [S_{AA}(f) + S_{BB}(f)] \cos(k_0(z_1 - z_2)) + 2[C_{AB}(f) \cos(k_0(z_1 + z_2)) + Q_{AB}(f) \text{sen}(k_0(z_1 + z_2))] \quad (2.9)$$

$$Q_{12}(f) = [-S_{AA}(f) + S_{BB}(f)] \text{sen}(k_0(z_1 - z_2)) \quad (2.10)$$

onde:

S_{11} é a densidade auto-espectral no ponto 1,

S_{22} é a densidade auto-espectral no ponto 2,

S_{AA} é a densidade auto-espectral da onda incidente (A),

S_{BB} é a densidade auto-espectral da onda reflectida (B),

C_{AB} e Q_{AB} são a parte real e a imaginária, respectivamente, da densidade espectral entre A e B,

C_{12} e Q_{12} são a parte real e a imaginária, respectivamente, da densidade espectral ocorrida entre os pontos 1 e 2.

Como as variáveis do lado esquerdo das equações (2.7) a (2.10) são obtidas directamente através dos sinais dos microfones, as outras 4 incógnitas, S_{AA} , S_{BB} , C_{AB} e Q_{AB} são obtidas pela resolução do sistema de equações.

Assim, pode-se calcular a perda de transmissão de um determinado filtro, assumindo que os tubos de entrada e de saída têm o mesmo diâmetro, que, segundo Munjal (1987), é dada pela seguinte expressão:

$$TL = 10 \log \left(\frac{S_{AA}(f)}{S_{CC}(f)} \right) \quad (2.11)$$

onde:

S_{CC} é a densidade auto-espectral no ponto 3.

Esta densidade corresponde à potência transmitida, e pode ser obtida directamente recorrendo à transformada de Fourier do sinal do microfone, uma vez que o tubo de saída tem terminação anecóica.

A utilização deste método requer alguns cuidados, nomeadamente que os dois microfones colocados antes da câmara têm que adquirir o sinal em simultâneo, para que seja possível calcular a densidade espectral entre os dois pontos. Contudo, a medição à saída do silenciador pode ser feita isoladamente, não havendo necessidade de um terceiro microfone.

Os microfones devem ser colocados o mais próximo possível do silenciador, para evitar erros de medição, assim como a distância entre eles também deve ser mínima. No entanto, esta distância não deve ser menor que o seu diâmetro.

Um outro factor importante para a eficácia deste método é a terminação anecóica, a qual deve assegurar uma boa medição da potência transmitida após o silenciador.

Capítulo 3 Propagação das ondas

3.1 Introdução

O som é definido como uma vibração mecânica de um meio elástico, sólido, líquido ou gasoso, através da qual a energia é emitida, a partir de uma fonte, em ondas sonoras progressivas. No caso de sinais audíveis, o fenómeno a que se chama som corresponde à interpretação que o cérebro humano faz do estímulo que resulta da vibração do tímpano, provocada pelo movimento das moléculas de ar que com ele colidem.

A propagação do som é assim explicada através de oscilações longitudinais das moléculas de ar em torno das suas posições de equilíbrio. Estas vibrações das moléculas de ar conduzem a zonas de mais elevada densidade, ou seja, maior pressão (compressão), e de mais baixa densidade, ou seja, menor pressão (rarefacção). Deste modo, podem relacionar-se as ondas sonoras com variações da pressão entre valores máximos e mínimos. É importante chamar a atenção para o facto de o máximo de pressão corresponder ao deslocamento mínimo das partículas. Na Fig. 3.1 pode observar-se a propagação do som num tubo fechado numa das extremidades, onde se verifica o que foi dito atrás.

Neste capítulo, estudam-se as características de propagação das ondas planas em condições ideais: ondas que se propagam em tubos de paredes rígidas de dimensões transversais relativamente pequenas, num meio estacionário e não viscoso, e também as limitações desta teoria para o estudo da propagação de ondas no meio (real) tridimensional.

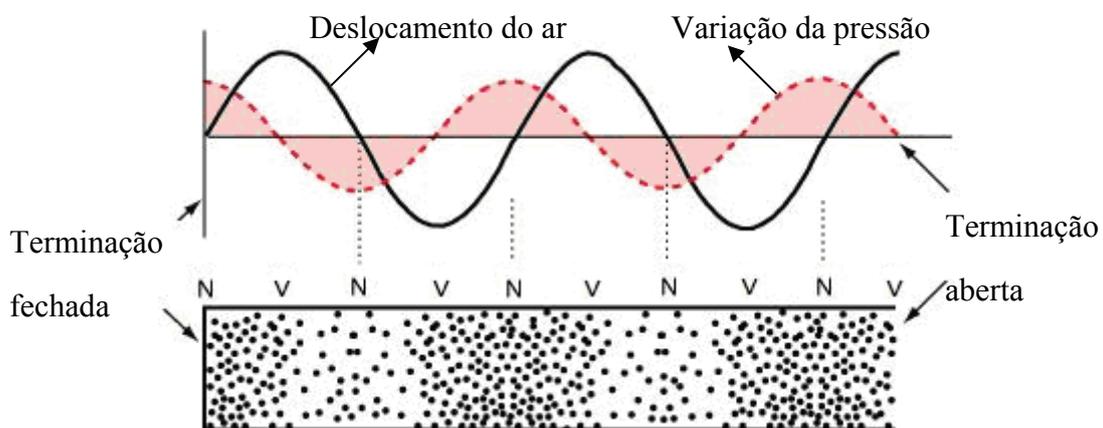


Fig. 3.1 – Propagação do som.

3.2 Oscilação do ar dentro de um tubo

Um tubo de ar no qual se propaga som comporta-se como uma coluna oscilante. As ondas estacionárias que se geram no tubo obedecem às seguintes condições de fronteira (Fig. 3.1):

- Numa extremidade fechada do tubo, o deslocamento das moléculas tem de ser nulo. Pelo contrário, a pressão é máxima.
- Numa extremidade aberta do tubo, a variação de pressão tem de ser nula, para que não haja descontinuidade com o exterior. Neste caso, o deslocamento das moléculas tem de ser máximo neste lado do tubo.

3.2.1 Tubo aberto nas duas extremidades

Ao soprar ar num tubo aberto nas duas extremidades produz-se uma onda que vai da entrada até à saída. Ao atingi-la, a onda encontra um meio diferente, devido à diferença de temperatura, pressão e densidade, sofrendo reflexão e refração. A onda reflectida retorna e pode formar, com a incidente, uma onda estacionária, emitindo assim um som de maior intensidade. A onda estacionária é formada por ventres (V) e por nós (N), que correspondem ao máximo e ao mínimo deslocamento de partículas, respectivamente. Na situação de um único nó, existe uma onda estacionária de menor frequência possível, denominada de primeiro harmónico ou frequência fundamental, Fig. 3.2.

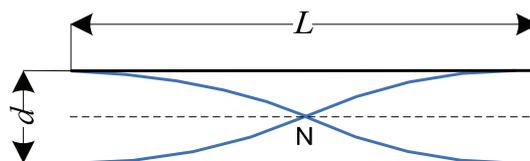


Fig. 3.2 – Primeiro harmónico para um tubo aberto nas duas extremidades.

O comprimento da onda (λ) pode ser definido como a distância compreendida entre dois pontos consecutivos nos quais a onda tem a mesma amplitude. Para o presente caso:

$$\lambda = 2L \quad (3.1)$$

O comprimento de onda relaciona-se com a frequência de excitação da seguinte forma:

$$\lambda = \frac{c_0}{f} \quad (3.2)$$

onde:

c_0 e f são, respectivamente, a velocidade e a frequência de propagação do som.

Chega-se assim à equação da frequência fundamental:

$$\begin{aligned} f_1 &= \frac{c_0}{\lambda_1} \\ &= \frac{c_0}{2L} \end{aligned} \quad (3.3)$$

Para o segundo harmónico, a propagação das ondas pode ser observada na Fig. 3.3.

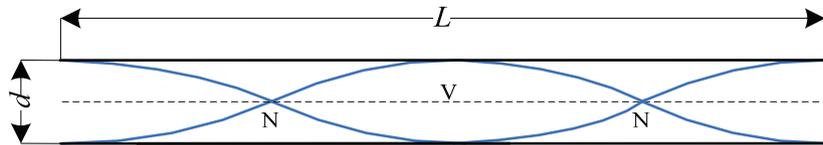


Fig. 3.3 – Segundo harmónico.

Neste caso, o comprimento de onda é igual ao comprimento do tubo:

$$\lambda = L \quad (3.4)$$

Fazendo uso da Eq.(3.2), chega-se à equação da frequência correspondente ao segundo harmónico:

$$f_2 = \frac{2c_0}{2L} \quad (3.5)$$

Desta forma, para tubos abertos nas duas extremidades, a frequência de corte ou de ressonância e o respectivo comprimento de onda são dados pelas seguintes equações:

$$f_n = \frac{nc_0}{2L} \quad (3.6)$$

$$\lambda_n = \frac{2L}{n} \quad (3.7)$$

onde:

$$n=1,2,3,4,\dots$$

Obtém-se assim a frequência de corte e o comprimento de onda correspondente ao modo de vibração n . É de registar que estas frequências correspondem à situação em que a impedância de entrada é mínima e a potência irradiada para fora do tubo aberto é máxima, Gerges (1992).

3.2.2 Tubo fechado numa das extremidades

Ao soprar ar num tubo fechado pode ocorrer a formação de uma onda estacionária, de forma a emitir um som mais intenso. Para se formar uma onda estacionária, na extremidade fechada do tubo, a onda deve terminar em nó. O som de menor frequência (primeiro harmónico ou frequência fundamental) acontece para uma onda estacionária de apenas um nó, o da extremidade fechada (Fig. 3.4). Nos tubos fechados não se formam harmónicos de ordem par, mas apenas de ordem ímpar.

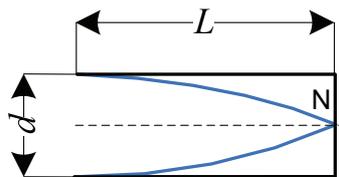


Fig. 3.4 – Primeiro harmónico para um tubo fechado numa das extremidades.

Para este caso o comprimento de onda é igual a 4 vezes o comprimento do tubo. Então:

$$\lambda = 4L \quad (3.8)$$

Fazendo uso da Eq. (3.2), obtém-se a equação da frequência fundamental:

$$f_1 = \frac{c_0}{4L} \quad (3.9)$$

Para o terceiro harmónico, a propagação das ondas pode ser observada na Fig. 3.5.

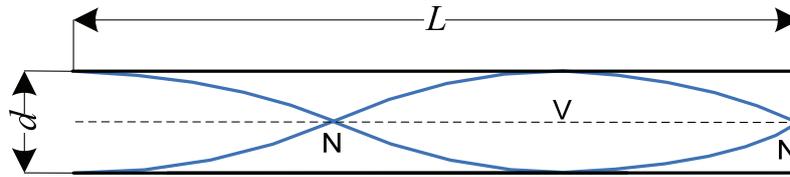


Fig. 3.5 – Terceiro harmónico.

Neste caso, o comprimento de onda é igual a 4/3 do comprimento do tubo:

$$\lambda = \frac{4}{3}L \quad (3.10)$$

Fazendo uso da Eq.(3.2), chega-se à equação da frequência correspondente ao terceiro harmónico:

$$f_3 = \frac{3c_0}{4L} \quad (3.11)$$

Assim, para tubos fechados numa das extremidades, a frequência de corte ou de ressonância e o respectivo comprimento são dados pelas seguintes equações:

$$f_n = \frac{nc_0}{4L} \quad (3.12)$$

$$\lambda_n = \frac{4L}{n} \quad (3.13)$$

onde:

$$n=1,3,5,7,\dots$$

Obtém-se assim a frequência de corte e o comprimento de onda correspondentes ao modo de vibração n .

3.3 Teoria da onda plana

3.3.1 Propagação de ondas planas num meio estacionário e não-viscoso

Considerando um tubo, de paredes rígidas e de pequenas dimensões transversais, preenchido com um fluido estacionário não-viscoso, ondas de pequena amplitude viajam como ondas planas. Consequentemente, a pressão sonora, p , e a velocidade da partícula, u , em todos os pontos de uma determinada secção transversal (um plano normal à direcção de propagação), têm a mesma amplitude e fase (a superfície de fase é plana). No caso de um tubo, a direcção de propagação é o eixo longitudinal. Com esta hipótese, as equações básicas linearizadas são, segundo Munjal (1987):

Equação da conservação de massa:

$$\rho_0 \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (3.14)$$

Equação do equilíbrio dinâmico:

$$\rho_0 \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial z} = 0 \quad (3.15)$$

Equação da energia (escoamento isentrópico):

$$\left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s = \frac{\gamma (p_0 + p)}{\rho_0 + \rho} \cong \frac{\gamma p_0}{\rho_0} = c_0^2 \quad (3.16)$$

onde:

γ é a razão entre o calor específico à pressão constante e o calor específico à volume constante,

z é a coordenada axial, ou longitudinal,

p é a flutuação da pressão instantânea,

p_0 é a pressão ambiente,

s é a entropia,

ρ é a flutuação instantânea da densidade,

ρ_0 é a densidade do meio,

$p/p_0 \ll 1$ para pequenas perturbações,

$\rho / \rho_0 \ll 1$ para um meio estacionário.

A eq. (3.16) implica que:

$$\rho = \frac{p}{c_0^2} ; \frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial p}{\partial t} ; \frac{\partial \rho}{\partial z} = \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial p}{\partial z} \quad (3.17)$$

Substituindo a Eq. (3.17) na Eq.(3.14) e eliminando, por diferenciação, a velocidade da partícula u na Eq. (3.14) em relação ao tempo e na Eq. (3.15) em relação a z e subtraindo as equações resultantes obtém-se a equação unidimensional da onda (Munjaj (1987)):

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c_0^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] p = 0 \quad (3.18)$$

A Eq. (3.18) é uma equação diferencial linear, unidimensional, homogénea com coeficientes constantes, onde c_0 é independente de z e t .

Usando a técnica de separação de variáveis e considerando uma função harmónica com dependência no tempo na forma $e^{j\omega t}$ a solução da Eq. (3.18) é:

$$p(z, t) = C_1 e^{j\omega(t-z/c_0)} + C_2 e^{j\omega(t+z/c_0)} \quad (3.19)$$

A equação anterior representa a sobreposição de duas ondas progressivas movimentando-se com amplitudes constantes e com velocidade c_0 . O primeiro termo da Eq. (3.19), corresponde a onda progressiva movimentando-se no sentido positivo com amplitude C_1 e o segundo a onda progressiva movimentando-se em sentido oposto com amplitude C_2 .

A Eq.(3.19) pode ser redefinida da seguinte forma:

$$p(z, t) = \left(C_1 e^{-j\omega k_0 z} + C_2 e^{+j\omega k_0 z} \right) e^{j\omega t} \quad (3.20)$$

onde:

$$k_0 = \omega / c_0 = 2\pi / \lambda . \quad (3.21)$$

De igual modo se encontra a equação da velocidade da partícula que satisfaz a Eq. (3.18):

$$u(z,t) = (C_3 e^{-jk_0 z} + C_4 e^{+jk_0 z}) e^{j\omega t} \quad (3.22)$$

Substituindo as Eq. (3.20) e (3.22) na equação do equilíbrio dinâmico (3.15), obtêm-se:

$$C_3 = \frac{C_1}{\rho_0 c_0}$$

$$C_4 = -\frac{C_2}{\rho_0 c_0}$$

Consequentemente:

$$u(z,t) = \frac{1}{Z_0} (C_1 e^{-jk_0 z} - C_2 e^{+jk_0 z}) e^{j\omega t} \quad (3.23)$$

onde Z_0 é a impedância característica do meio, definida como sendo a razão entre a pressão acústica e a velocidade da partícula, e é dada por:

$$Z_0 = \rho_0 c_0 \quad (3.24)$$

Para tubos que conduzem gases de escape é mais apropriado falar de velocidade acústica da massa, e designa-se por Y_0 a impedância característica do tubo que segundo Munjal (1987) é dada por:

$$Y_0 = \frac{c_0}{S} \quad (3.25)$$

onde:

S é a área da secção transversal do tubo.

Assim, partindo das Eq. (3.23) e (3.25) pode definir-se a velocidade acústica da massa:

$$v(z,t) = \frac{1}{Y_0} (C_1 e^{-jk_0 z} - C_2 e^{+jk_0 z}) e^{j\omega t} \quad (3.26)$$

O subscrito 0 em Y e em k indica condições não viscosas (fluido não viscoso).

3.3.2 Propagação de ondas tridimensionais num meio estacionário e não-viscoso

Para estudar as limitações da teoria da onda plana é necessário considerar a propagação de ondas tridimensionais em tubos, que para um sistema tridimensional obedece às seguintes equações:

Equação da conservação de massa:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho_0 (\nabla \cdot u) = 0 \quad (3.27)$$

Equação do equilíbrio dinâmico:

$$\rho_0 \frac{\partial u}{\partial t} + \nabla p = 0 \quad (3.28)$$

A equação da energia é igual à Eq.(3.16).

Substituindo a Eq. (3.17) na Eq. (3.27), e derivando em relação ao tempo obtém-se:

$$\frac{1}{c_0^2} \frac{\partial p}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot u) = 0 \quad (3.29)$$

Aplicando o operador ∇ na Eq. (3.28) e subtraindo o resultado na eq. (3.29), resulta a conhecida equação tridimensional da onda (Munjaj (1987)):

$$\left[\nabla^2 - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] p = 0 \quad (3.30)$$

onde o Laplaciano é dado, em coordenadas polares cilíndricas por:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (3.31)$$

3.3.3 Propagação de ondas em tubos circulares

A equação da onda (3.30), juntamente com o Laplaciano dado pela Eq. (3.31), governa a propagação da onda em tubos circulares (Fig. 3.6).

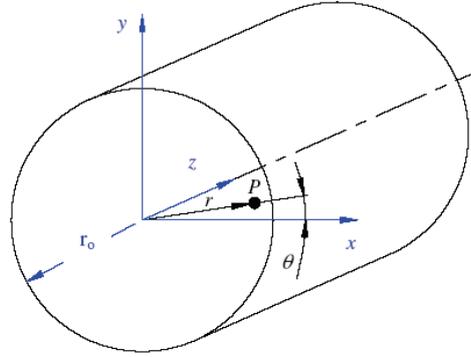


Fig. 3.6 – Sistema de coordenadas polares cilíndricas num tubo; Fonte: Munjal (1987).

Utilizando a técnica da separação de variáveis e escrevendo a dependência no tempo na forma $e^{j\omega t}$, e a dependência em θ na forma $e^{jm\theta}$, tem-se (Munjal (1987)):

$$p(r, \theta, z, t) = \sum_m R_m(r) e^{jm\theta} Z(z) e^{j\omega t} \quad (3.32)$$

A função $Z(z)$ tem a forma:

$$\frac{d^2 Z}{dz^2} = -k_z^2 Z \quad (3.33)$$

Desta forma, substituindo as Eq. (3.32) e (3.33) na equação da onda (3.30), tem-se a equação de Bessel para $R(r)$:

$$\frac{d^2 R_m}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR_m}{dr} + \left(k_0^2 - k_z^2 - \frac{m^2}{r^2} \right) R_m = 0 \quad (3.34)$$

A equação anterior tem como solução geral:

$$R_m = C_3 J_m(k_r r) + C_4 N_m(k_r r) \quad (3.35)$$

onde:

$$k_r^2 = k_0^2 - k_z^2, \quad (3.36)$$

k_r é o número de onda transversal,

k_z é o número de onda axial,

N_m é a Função de Neumann de ordem “ m ”,

J_m é a Função de Bessel de ordem “ m ”,

m é um número inteiro.

Quando $r=0$, $N_m(k_r r)$ tende para o infinito. Contudo, a pressão sonora em qualquer ponto do plano considerado tem de ser finita. Portanto, a constante C_4 deve ser zero. Considerando a velocidade radial na parede ($r = r_0$) zero, então:

$$\frac{dJ_m(k_r r)}{dr} = 0, \text{ para } r = r_0 \quad (3.37)$$

Consequentemente, k_r assume somente valores discretos que satisfazem a seguinte equação:

$$J'_m(k_r r_0) = 0 \quad (3.38)$$

onde:

J'_m é a derivada da Função de Bessel de ordem “ m ”.

Denotando o valor de k_r correspondente à n -ésima raiz da eq. (3.38) como $k_{r,m,n}$, tem-se:

$$p(r, \theta, z, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} J_m(k_{r,m,n}) e^{jm\theta} e^{j\omega t} (C_{1,m,n} e^{-jk_{z,m,n}z} + C_{2,m,n} e^{+jk_{z,m,n}z}) \quad (3.39)$$

onde o número de onda é dado por:

$$k_{z,m,n} = (k_0 - k_{r,m,n})^{1/2} \quad (3.40)$$

Como o primeiro zero de J'_0 (ou J_1) é zero, $k_{r,0,1} = 0$ e $k_{r,1,0} = k_0$, assim para o modo (0,1) a Eq. (3.39) reduz-se à Eq. (3.20), que é a equação de propagação da onda plana. Desta forma, o modo (0,1) corresponde à onda plana que se propaga sem atenuação. A Fig. 3.7, mostra a distribuição transversal da pressão para tubos circulares, onde n corresponde ao número de nós circulares e m corresponde ao número de nós diametrais.

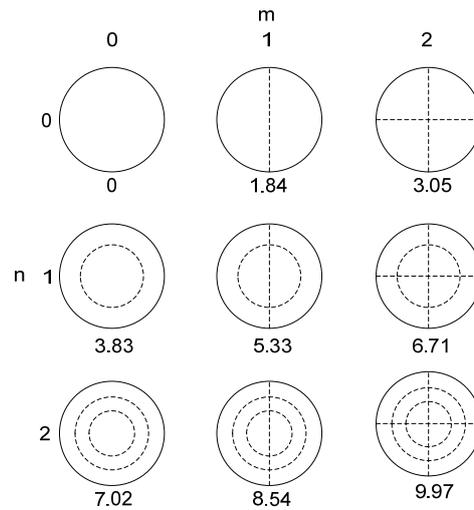


Fig. 3.7 – Linhas nodais para a distribuição transversal da pressão num tubo circular até $m=2$ e $n=2$; Fonte: Munjal (1987).

Os dois primeiros modos superiores (1,0) e (0,1) possuem frequências de corte se $K_{z,1,0}$ e $K_{z,0,1}$ assumirem valores reais, isto é, se k_0 for maior que $K_{r,1,0}$ e $K_{r,0,1}$. Assim, o primeiro zero de J'_1 ocorre para 1.84 e o segundo zero de J'_0 ocorre para 3.83. Portanto, os números de onda para as frequências de corte serão $1.84/r_0$ e $3.83/r_0$, respectivamente. Por outras palavras, o primeiro modo diametral começará a propagar-se quando $k_0 r_0 = 1.84$, e o primeiro modo circular para $k_0 r_0 = 3.83$. Então, se a frequência de excitação é suficientemente pequena (ou a onda tem um comprimento suficientemente grande) de maneira que:

$$k_0 r_0 < 1.84 \quad (3.41)$$

ou

$$\lambda > \frac{\pi}{1.84} d \quad (3.42)$$

ou

$$f < \frac{1.84}{\pi d} c_0 \quad (3.43)$$

onde:

d é o diâmetro $2r_0$, apenas ondas planas se propagam.

Felizmente, as frequências de interesse no ruído do sistema de escape de motores de combustão interna são suficientemente baixas, de tal modo que as condições para uma máxima dimensão transversal determinada pelas Eq. (3.41), (3.42) e (3.43) são geralmente satisfeitas. Portanto, uma análise nos sistemas de escape através de conceitos de onda plana pode-se considerar adequada (Munjaj (1987)).

A velocidade da partícula é encontrada substituindo o modo (m,n) da Eq. (3.39) na equação do equilíbrio dinâmico na direcção axial, Eq.(3.28).

$$u_{z,m,n} = J_m(k_{r,m,n}r)e^{jm\theta}e^{j\omega t} \frac{k_{z,m,n}}{k_0\rho_0c_0} (C_{1,m,n}e^{-jk_{z,m,n}z} + C_{2,m,n}e^{+jk_{z,m,n}z}) \quad (3.44)$$

Desta forma, a velocidade da partícula para o modo (m,n) difere de um factor $k_{z,m,n}/k_0$ da onda plana.

Capítulo 4 Filtros acústicos

4.1 Introdução

Um filtro acústico consiste num elemento, ou num conjunto de elementos, com uma determinada geometria, inseridos entre a fonte geradora de ruído e o receptor, que no caso presente são o motor e a atmosfera, respectivamente.

Um filtro acústico tem sempre associada a si uma impedância, que reflecte a sua contribuição na atenuação da intensidade acústica. As ondas, ao passarem pelo silenciador encontram uma mudança de impedância acústica para um valor muito pequeno ou muito grande. Desta forma, uma pequena parte da energia propaga-se pelo silenciador e a maior parte é reflectida de volta para a fonte.

Na teoria dos filtros acústicos existe uma profusão de termos técnicos em língua inglesa, com difícil tradução para o Português. Desta forma, optou-se, nesses casos, por mantê-los na língua original.

4.2 Tubo uniforme

Um tubo uniforme é considerado o elemento acústico mais simples, e a sua impedância característica (Y) é definida da seguinte forma:

$$Y = \frac{\text{Pressão acústica associada à onda progressiva}}{\text{Velocidade acústica da massa associada à onda progressiva}} = \frac{p}{v}. \quad (4.1)$$

Tendo em conta as Eq. (3.20), (3.25) e (3.26), obtém-se:

$$p = Ae^{-jk_0z} + Be^{+jk_0z} \quad (4.2)$$

$$v = \frac{1}{Y_0}(Ae^{-jk_0z} - Be^{+jk_0z}) \quad (4.3)$$

onde a variável exponencial temporal está absorvida nas constantes A e B .

Desta maneira, pode definir-se a impedância acústica específica em qualquer ponto da onda estacionária da seguinte forma:

$$\zeta(z) = \frac{p(z)}{v(z)} = Y_0 \frac{Ae^{-jk_0z} + Be^{+jk_0z}}{Ae^{-jk_0z} - Be^{+jk_0z}}, \quad (4.4)$$

a qual representa a impedância equivalente do subsistema passivo a jusante de um determinado ponto.

O valor da impedância acústica à entrada do tubo, $Z=0$, pode relacionar-se com os valores à saída, $Z=l$, usando a Eq. (4.4) e eliminando as constantes A e B (Fig. 4.1):

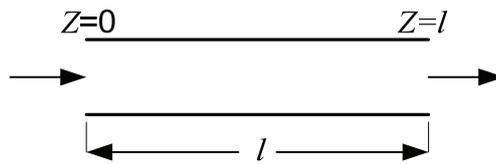


Fig. 4.1 – Tubo uniforme de comprimento l .

$$\zeta(0) = Y_0 \frac{A + B}{A - B} \quad (4.5)$$

$$\zeta(l) = Y_0 \frac{Ae^{-jk_0l} + Be^{+jk_0l}}{Ae^{-jk_0l} - Be^{+jk_0l}} \quad (4.6)$$

$$= Y_0 \frac{(A + B)\cos(k_0l) - j(A - B)\sin(k_0l)}{(A - B)\cos(k_0l) - j(A + B)\sin(k_0l)}$$

$$= Y_0 \frac{(A + B)/(A - B) - j \tan(k_0l)}{1 - j(A + B)/(A - B) \tan(k_0l)}$$

Escrevendo a equação anterior em função de $\zeta(0)$, obtém-se:

$$\frac{\zeta(l)}{Y_0} = \frac{\zeta(0)/Y_0 - j \tan(k_0 l)}{1 - j \zeta(0)/Y_0 \tan(k_0 l)} \quad (4.7)$$

e, reajustando, chega-se a:

$$\frac{\zeta(0)}{Y_0} = \frac{\zeta(l)/Y_0 + j \tan(k_0 l)}{1 + j \zeta(l)/Y_0 \tan(k_0 l)}$$

$$\zeta(0) = \frac{\zeta(l) \cos(k_0 l) + j Y_0 \sin(k_0 l)}{j \zeta(l)/Y_0 \sin(k_0 l) + \cos(k_0 l)} \quad (4.8)$$

A Eq. (4.7) pode igualmente ser escrita da seguinte forma:

$$\zeta(l) = \frac{\zeta(0) \cos(k_0 l) - j Y_0 \sin(k_0 l)}{-j \zeta(0)/Y_0 \sin(k_0 l) + \cos(k_0 l)} \quad (4.9)$$

Para um tubo que termine em parede rígida (Fig. 4.2), $v(l) \rightarrow 0$, logo a impedância acústica $\zeta(l) \rightarrow \infty$.

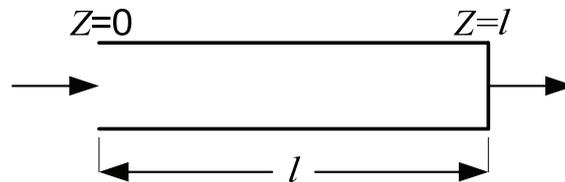


Fig. 4.2 – Tubo uniforme de comprimento l com terminação rígida.

Desta forma, a partir da Eq.(4.8), obtém-se:

$$\zeta(0)_{rigid\ end} = -j Y_0 \cot(k_0 l) \quad (4.10)$$

Na realidade, muitas das vezes usam-se paredes finas nas extremidades dos tubos, que não asseguram impedância infinita. Neste caso deve-se usar a Eq. (4.8) em vez da Eq. (4.10).

O comportamento acústico nas terminações é muitas vezes descrito em termos do coeficiente de reflexão R , definido como a razão entre a pressão da onda reflectida e a pressão da onda incidente:

$$R \equiv |R|e^{j\theta} \quad (4.11)$$

onde:

$|R|$ e θ são, respectivamente, a amplitude e a fase do coeficiente de reflexão.

Assim:

$$R(0) = \frac{B}{A} \quad (4.12)$$

$$R(l) = \frac{Be^{jk_0l}}{Ae^{-jk_0l}} \quad (4.13)$$

$$\zeta = Y_0 \frac{1+R}{1-R} \quad (4.14)$$

Reajustando a equação anterior:

$$R = \frac{\zeta - Y_0}{\zeta + Y_0} \quad (4.15)$$

Considerando uma terminação rígida, $\nu \rightarrow 0$, $\zeta \rightarrow \infty$, logo:

$$R_{Term. Rígida} = 1 \quad (4.16)$$

Desta forma, uma terminação perfeitamente rígida reflecte a onda incidente na sua totalidade, com a mesma amplitude e fase que a incidente.

Para um tubo com terminação anecóica (Fig. 4.3), o coeficiente de reflexão é zero:

$$R_{Term. Anec.} = 0, \quad (4.17)$$

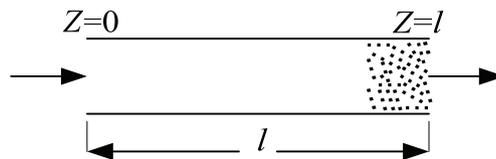


Fig. 4.3 – Tubo uniforme de comprimento l com terminação anecóica.

ou seja, não há reflexão de ondas ($B=0$). Então, a partir da Eq. (4.14) obtém-se:

$$\zeta_{aneic. term.} = Y \quad (4.18)$$

Assim, a impedância equivalente para um tubo com terminação anecóica é igual à impedância característica do tubo em todos os pontos.

4.3 Impedância de radiação

A impedância de radiação, Z_0 , representa a impedância imposta pela atmosfera à radiação acústica à saída de um tubo. Se considerarmos um pistão localizado num dos extremos do tubo vibrando sempre à mesma velocidade de partícula, u_0 , a impedância de radiação é definida da seguinte forma:

$$Z_0 = \frac{\text{Pressão média } p_0 \text{ no pistão}}{\text{Velocidade acústica da massa } v_0 \text{ do pistão}} \quad (4.19)$$

onde:

$$v_0 = \rho_0 S u_0 \quad (4.20)$$

Como em qualquer cálculo de impedâncias, Z_0 presume pressões e velocidades sinusoidais e é função da excitação da frequência de radiação ω .

Considerando a propagação de ondas planas num tubo que termina numa flange infinita

$$Z_0 = R_0 + jX_0 \quad (4.21)$$

onde a parte real (R_0) é designada por resistência à radiação e a parte imaginária (X_0) é designada por reactância, sendo dadas segundo Munjal (1987) pelas seguintes expressões:

$$R_0 = Y_0 \left\{ 1 - \frac{2J_1(2k_0 r_0)}{2k_0 r_0} \right\} = \left\{ \frac{(2k_0 r_0)^2}{2.4} - \frac{(2k_0 r_0)^2}{2.4^2 \cdot 6} + \frac{(2k_0 r_0)^2}{2.4^2 \cdot 6^2 \cdot 8} - \dots \right\} Y_0 \quad (4.22a)$$

$$X_0 = \left\{ \frac{4}{\pi} \frac{2k_0 r_0}{3} - \frac{(2k_0 r_0)^3}{3^2 \cdot 5} + \frac{(2k_0 r_0)^5}{3^2 \cdot 5^2 \cdot 7} - \dots \right\} Y_0 \quad (4.22b)$$

A frequências suficientemente baixas, tal que $k_0 r_0 < 0.5$, as equações atrás reduzem-se a:

$$R_0 = Y_0 \left(\frac{k_0^2 r_0^2}{2} \right) \quad (4.22a1)$$

$$X_0 = Y_0 (0.85 k_0 r_0) \quad (4.22b1)$$

Felizmente, as frequências de interesse em sistemas de escape são, na generalidade, suficientemente baixas, de maneira que, para raios típicos do tubo de saída, $k_0 r_0$ é de facto menor que 0.5, pelo que se pode trabalhar com estas equações (Munjal (1987)).

Assim, a frequências suficientemente baixas, a impedância de radiação pode ser aproximada do seguinte modo:

$$Z_{0, \text{Open end}} = Y_0 \left(\frac{k_0^2 r_0^2}{4} + j0.6 k_0 r_0 \right) \quad (4.23)$$

de onde:

$$R_{0, \text{Open end}} = Y_0 \frac{k_0^2 r_0^2}{4} = 0.5 R_{0, \text{Infinite Flange}} \quad (4.24)$$

$$X_{0, \text{Open end}} = Y_0 (0.6 k_0 r_0) < X_{0, \text{Infinite Flange}} \quad (4.25)$$

4.4 Coeficiente de reflexão à saída de um tubo aberto

O coeficiente de reflexão num determinado ponto relaciona-se com a impedância acústica específica nesse ponto, de acordo com a Eq. (4.15). Na radiação final, a impedância acústica específica é igual a impedância de radiação. Assim, pode obter-se o coeficiente de reflexão em função da impedância de radiação como:

$$R = \frac{Z_0 - Y}{Z_0 + Y} \quad (4.26)$$

ou:

$$\begin{aligned} |R|e^{j\theta} &= \frac{R_0 + jX_0 - Y}{R_0 + jX_0 + Y} \\ &= \frac{(0.25k_0^2r_0^2 - 1) + j(0.6k_0r_0)}{(0.25k_0^2r_0^2 + 1) + j(0.6k_0r_0)} \end{aligned} \quad (4.27)$$

Racionalizando obtém-se:

$$\begin{aligned} R &= \frac{\left\{ (0.0625k_0^4r_0^4 + 0.36k_0^2r_0^2 - 1)^2 + (1.2k_0r_0)^2 \right\}^{1/2}}{0.0625k_0^4r_0^4 + 0.86k_0^2r_0^2 + 1} \\ &\cong 1 - 0.14k_0^2r_0^2 \end{aligned} \quad (4.28)$$

$$\begin{aligned} \theta &= \tan^{-1} \left(\frac{1.2k_0r_0}{0.0625k_0^4r_0^4 + 0.36k_0^2r_0^2 - 1} \right) \\ &\cong \tan^{-1}(-1.2k_0r_0) \\ &= \pi - \tan^{-1}(1.2k_0r_0) \end{aligned} \quad (4.29)$$

Assim, o coeficiente de reflexão à saída de um tubo aberto é muito próximo da unidade, ainda que ligeiramente inferior à unidade, e o ângulo de fase é aproximadamente π radianos. Desta forma, conclui-se que as ondas que chegam à saída são praticamente todas reflectidas.

4.5 Coeficiente de reflexão e transmissão em aberturas laterais

A presença de uma abertura lateral muda a impedância acústica na região onde ela se localiza. Neste caso, uma parte da energia incidente é transmitida e dissipada na abertura lateral. A Fig. 4.4 mostra um tubo de secção uniforme com área S e uma abertura lateral de área S_b , com impedância acústica a entrada Z_b .

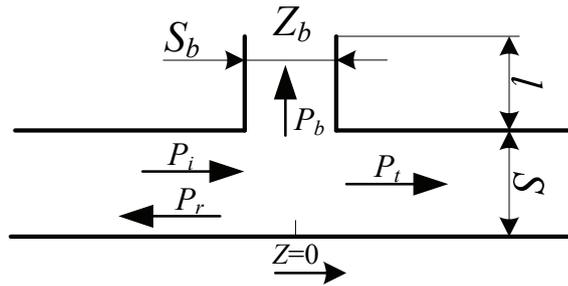


Fig. 4.4 – Filtro acústico, ramificação lateral, Fonte: Gerges (1992).

Com base na Eq. (3.20) podem apresentar-se as equações para as diferentes ondas:

A onda incidente:

$$P_i = A_1 e^{j(\omega t - k_0 z)} \quad (4.30)$$

A onda reflectida:

$$P_r = B_1 e^{j(\omega t + k_0 z)} \quad (4.31)$$

A onda transmitida no tubo:

$$P_t = A_2 e^{j(\omega t - k_0 z)} \quad (4.32)$$

A onda transmitida na abertura:

$$P_b = A_b e^{j\omega t} \quad (4.33)$$

Considerando que os diâmetros dos tubos são bem menores que o comprimento acústico da onda, aplicando a condição de continuidade de pressão acústica na junção:

$$P_i + P_r = P_t = P_b \quad (4.34)$$

As velocidades de volume são segundo Gerges (1992):

$$U_i = \frac{P_i}{\rho c_0 / S} \quad (4.35)$$

$$U_r = \frac{P_r}{\rho c_0 / S} \quad (4.36)$$

$$U_t = \frac{P_t}{\rho c_0 / S} \quad (4.37)$$

$$U_b = \frac{P_b}{\rho c_0 / S_b} \quad (4.38)$$

Aplicando-se a condição de continuidade da velocidade de volume na junção, temos:

$$U_i + U_r = U_t + U_b \quad (4.39)$$

Dividindo a Eq. (4.39) pela Eq. (4.34):

$$\frac{U_i + U_r}{P_i + P_r} = \frac{U_t}{P_t} + \frac{U_b}{P_b} \quad (4.40)$$

Escrevendo a equação anterior em termos de impedância:

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{Z_t} + \frac{1}{Z_b} \quad (4.41)$$

onde:

$$Z = \frac{\rho c_0}{S} \frac{A_1 + B_1}{A_1 + B_1} \quad (4.42)$$

$$Z_t = \frac{\rho c_0}{S} \quad (4.43)$$

Substituindo Z e Z_t na Eq.(4.41), obtém-se a razão entre a amplitude da pressão da onda reflectida e da onda incidente:

$$\frac{B_1}{A_1} = \frac{-\rho c_0 / 2S}{\rho c_0 / 2S + Z_b} \quad (4.44)$$

e $A_2 / A_1 = A_b / A_1$ são dadas por:

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{A_b}{A_1} = \frac{Z_b}{\frac{\rho c_0}{2S} + Z_b} \quad (4.45)$$

Desta forma, segundo Gerges (1992), os diferentes coeficientes são dados da seguinte maneira:

Coefficiente de reflexão:

$$R = \left| \frac{B_1}{A_1} \right|^2 = \frac{\left(\frac{\rho c_0}{2S} \right)^2}{\left(\frac{\rho c_0}{2S} + R_b \right)^2 + X_b^2} \quad (4.46)$$

Coefficiente de transmissão no tubo principal:

$$\alpha_t = \left| \frac{A_2}{A_1} \right|^2 = \frac{R_b^2 + X_b^2}{\left(\frac{\rho c_0}{2S} + R_b \right)^2 + X_b^2} \quad (4.47)$$

Coefficiente de transmissão na abertura lateral:

$$\alpha_b = 1 - R - \alpha_t = \frac{\frac{\rho c_0}{S} R_b}{\left(\frac{\rho c_0}{2S} + R_b \right)^2 + X_b^2} \quad (4.48)$$

onde:

$$Z_b = R_b + jX_b \quad (4.49)$$

As equações dos coeficientes de transmissão desenvolvidas vão permitir estudar melhor os diferentes tipos de filtros, baseados em aberturas laterais em tubos.

4.6 Inertância acústica

Considerando uma onda que se propaga num tubo de pequeno comprimento e secção transversal S , como por exemplo um furo numa placa divisória (Fig. 4.5), esta sofrerá um ligeiro desfasamento entre as duas extremidades do tubo ($k_0 r_0 \ll 1$). Pode considerar-se que todas as partículas do meio se movem juntas, com velocidade u .

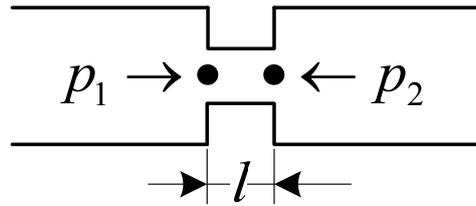


Fig. 4.5 – Filtro com inertância acústica.

Assim, aplicando a Segunda Lei de Newton,

$$S(p_1 - p_2) = (\rho_0 S l) \frac{du}{dt} \quad (4.50)$$

ou

$$\Delta p = \rho_0 l j \omega u \quad (4.51)$$

ou

$$Z \equiv \frac{p}{v} = \frac{j \rho_0 l \omega u}{\rho_0 S u} \quad (4.52)$$

Chega-se assim à impedância para este tipo de filtro:

$$Z_{\text{inertância}} = j \omega \frac{l}{S} \quad (4.53)$$

$$Z_M = j \omega M \quad (4.54)$$

onde M se designa por inertância.

4.7 Compliância acústica

Considerando uma cavidade de volume V com uma pequena abertura, designada por “pescoço”(Fig. 4.6), pode afirmar-se que, quando sujeita a uma excitação acústica, consegue armazenar energia e ter um movimento acústico no pescoço. Aplicando uma pressão acústica p no pescoço de secção transversal S , o volume da cavidade decresce de ΔV adiabaticamente. Então:

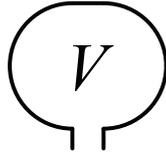


Fig. 4.6 – Filtro com compliância acústica.

$$\frac{p}{p_0} + \gamma \frac{\Delta V}{V} = 0 \quad (4.55)$$

ou

$$p = \frac{\gamma p_0 \Delta V}{V} \quad (4.56)$$

Se se designar por ξ o deslocamento interno no pescoço, então:

$$\Delta V = -S\xi = -\frac{Su}{j\omega} \quad (4.57)$$

Substituindo a Eq. (4.57) na Eq.(4.56):

$$p = \frac{\gamma p_0}{V} \frac{Su}{j\omega} \quad (4.58)$$

$$Z \equiv \frac{p}{v} = \frac{p}{\rho_0 Su} = \frac{\gamma p_0}{\rho_0 V j\omega} \quad (4.59)$$

Chega-se assim à impedância para este tipo de filtro:

$$Z_{\text{compliância}} = \frac{1}{j\omega(V/c_0^2)} \quad (4.60)$$

$$Z_c = \frac{1}{j\omega C} \quad (4.61)$$

onde C se designa por compliância.

4.8 Analogia electroacústica

Segundo Munjal (1987), existe uma analogia muito estreita entre as variáveis que definem a impedância de um sistema acústico e as variáveis presentes numa análise no domínio da frequência de um sistema eléctrico. Esta analogia é apresentada na Tabela 1:

Tabela 1 – Analogia electroacústica, Fonte: Munjal (1987).

Termos acústicos			Termos eléctricos correspondentes		
Variável	Símbolo	Unidade	Variável	Símbolo	Unidade
Pressão	p	N/m ²	Força electromotriz	e	Volt
Velocidade da massa	v	kg/s	Corrente	i	Ampere
Impedância acústica	Z	1/ms	Impedância eléctrica	Z	Ohm
Resistência	R	1/ms	Resistência	R	Ohm
Inertância	M	1/m	Indutância	L	Henry
Compliância	C	ms ²	Capacitância	C	Faraday

Esta analogia é designada por analogia directa, uma vez que a força acústica corresponde à força electromotriz e a variável de movimento no sistema acústico corresponde à variável de movimento no sistema eléctrico. A impedância característica de um tubo longo pode ser expressa em termos de total inertância e compliância:

$$Y_0 = \frac{c_0}{S} = \frac{l}{S} \frac{c_0^2}{lS} = \left(\frac{M}{C} \right)^{1/2} \quad (4.62)$$

assim como a velocidade de propagação das ondas:

$$c_0 = l \left(\frac{S}{l} \frac{c_0^2}{lS} \right)^{1/2} = \frac{l}{(MC)^{1/2}} \quad (4.63)$$

Estas duas relações são igualmente análogas às expressões usadas na análise de sistemas eléctricos.

4.9 Correção do comprimento de uma abertura lateral

Quando um pequeno tubo é exposto à atmosfera ou a um grande volume, a reactância à radiação pode ser adicionada à impedância do tubo e a combinação desta reactância pode ser vista como a impedância de um tubo estendido. Este hipotético comprimento adicional é designado por correção de terminação (Munjal, 1987).

A partir das Eq. (4.22b1) e (4.53), para um tubo que termina em flange infinita, obtém-se:

$$j\omega(\text{Correção } \Delta l \text{ devido a terminação em flange}) / S = j(0.85k_0r_0)c_0 / S \quad (4.64)$$

ou

$$\Delta l = 0.85r_0 \quad (4.65)$$

Da mesma forma, a partir das equações (4.25) e (4.53) para um tubo que termine abertamente, obtém-se:

$$\Delta l = 0.6r_0 \quad (4.66)$$

Assim, o comprimento efectivo de um furo numa divisória ou na periferia de um tubo de largo diâmetro deve ser corrigido para:

$$\begin{aligned} l_{eq_{furo}} &= t + 2(0.85r_h) \\ &= t + 0.85d_h \end{aligned} \quad (4.67)$$

onde:

t é a espessura da divisória ou do tubo,

d_h é o diâmetro do furo.

No caso de um tubo acusticamente longo, a reactância à radiação não pode ser calculada considerando a correção de terminação. O tubo e a impedância de radiação devem ser considerados como dois elementos acústicos separados no sistema.

4.10 Comportamento dos filtros, passa baixo, passa alto e rejeita banda

4.10.1 Filtro passa baixo

Este tipo de filtros permite a passagem de baixas frequências e atenua a amplitude das frequências acima da frequência de corte. Como exemplo deste tipo de filtros temos uma câmara de expansão simples que consiste numa expansão num tubo de secção S para uma secção S_1 e comprimento l (Fig. 4.7). O comprimento l da câmara é ajustado para reflectir a onda incidente e atenuar a propagação da energia sonora na saída.

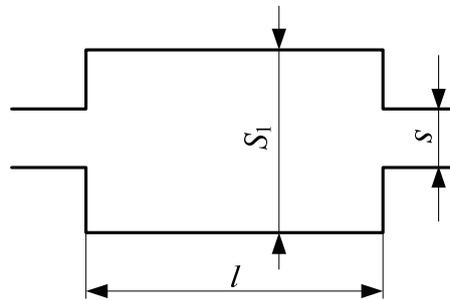


Fig. 4.7 – Filtro passa baixo.

Para baixas frequências, $k_0l \ll 1$, a resistência acústica deste filtro é nula, pois não existe mecanismo de dissipação, sendo a impedância puramente reactiva devida à compliância do volume da expansão, dada segundo Gerges (1992) por:

$$X_b = \frac{\rho c_0^2}{\omega S_1 l} \quad (4.68)$$

e substituindo na Eq. (4.48), obtém-se o coeficiente de transmissão:

$$\alpha_t = \frac{1}{1 + \left(\frac{S_1}{2S} k_0 l \right)^2}, \text{ para } k_0 l \ll 1 \quad (4.69)$$

O gráfico seguinte representa os valores do coeficiente de transmissão para uma câmara de expansão de 200 cm de comprimento e com a secção transversal cinco vezes maior que o tubo original ($S_1=5S$).

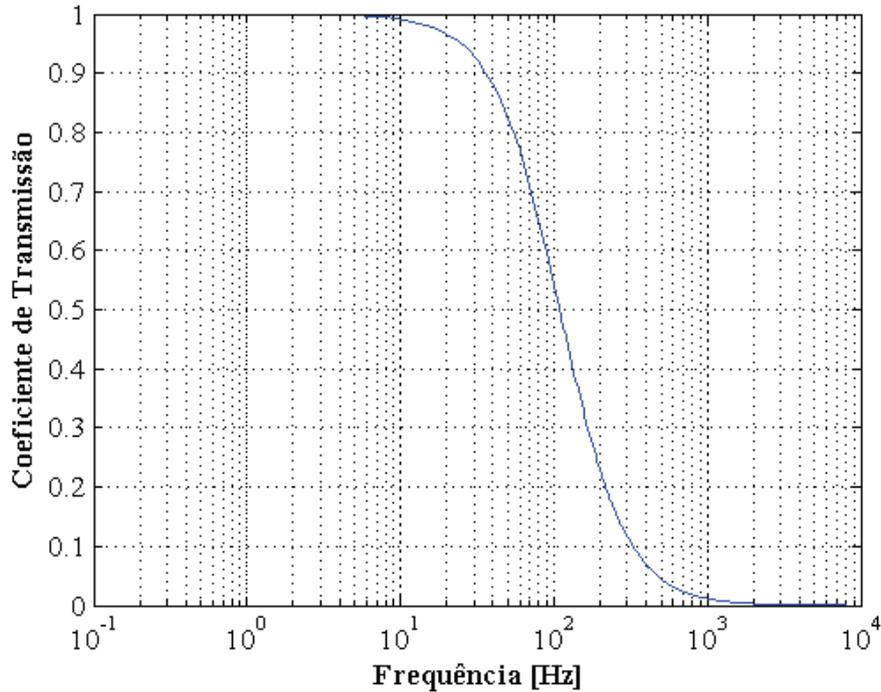


Fig. 4.8 – Coeficiente de transmissão para um filtro passa baixo.

Para altas frequências, onde k_0l pode ser maior que a unidade, o coeficiente de transmissão deve ser calculado a partir da equação (Gerges (1992)):

$$\alpha_t = \frac{4}{4 \cos^2(k_0l) + \left(\frac{S_1}{S} + \frac{S}{S_1}\right)^2 \sin^2(k_0l)} \quad (4.70)$$

Analisando o gráfico, verifica-se que na gama das baixas frequências o coeficiente de transmissão é aproximadamente um. Daí se poder dizer que uma câmara de expansão simples actua como um filtro passa baixo.

O coeficiente de transmissão assume valor mínimo quando $k_0l = \pi/2$ ou $l = \lambda/4$, dado por:

$$\alpha_{t \min} = \left(\frac{2SS_1}{S^2 + S_1^2}\right)^2 \quad (4.71)$$

4.10.2 Filtro passa alto

Este tipo de filtros permite a passagem de frequências altas e atenua a amplitude das frequências abaixo da frequência de corte. Como exemplo deste tipo filtros temos a inserção de uma ramificação lateral no tubo principal (Fig. 4.9).

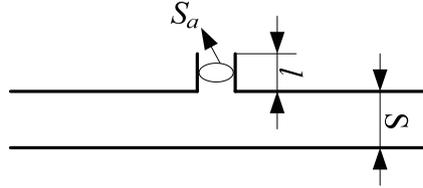


Fig. 4.9 – Filtro passa alto.

Considerando um tubo de pequeno comprimento, na lateral do tubo principal, cujo raio a e comprimento l são menores do que o comprimento da onda acústica, a impedância para este filtro é dada segundo Gerges (1992) pela seguinte expressão:

$$Z_b = \frac{\rho c_0 k_0^2}{2\pi} + i \frac{\rho l_{eq} \omega}{\pi a^2} \quad (4.73)$$

$$l_{eq} = l + 1,7a \quad (4.74)$$

O primeiro termo da Eq. (4.73) é a radiação sonora no orifício para o exterior, e o segundo termo é a inertância do fluido no orifício.

Substituindo a Eq. (4.73) na Eq. (4.48) obtém-se o coeficiente de transmissão para este tipo de filtro:

$$\alpha_t = \frac{\left(\frac{\rho c_0 k_0^2}{2\pi} \right)^2 + \left(\frac{\rho l_{eq} \omega}{\pi a^2} \right)^2}{\left(\frac{\rho c_0}{2S} + \frac{\rho c_0 k_0^2}{2\pi} \right)^2 + \left(\frac{\rho l_{eq} \omega}{\pi a^2} \right)^2} \quad (4.75)$$

A razão entre a resistência acústica e a reactância é:

$$\frac{R_b}{X_b} = \frac{\rho c_0 k_0^2 / 2\pi}{\rho l_{eq} \omega / \pi a^2} = \frac{k_0 a^2}{2l_{eq}} \quad (4.76)$$

Para apenas um furo no tubo principal, tem-se:

$$l = 0 \Rightarrow l_{eq} = 1.7a$$

$$\frac{R_b}{X_b} = \frac{k_0 a^2}{3.4} \quad (4.77)$$

Se $k_0 a \ll 1$, a resistência acústica pode ser desprezada em comparação com a reactância acústica no cálculo do coeficiente de transmissão. Então, desprezando o termo $\rho c_0 k_0^2 / 2\pi$ na Eq. (4.75):

$$\alpha_t = \frac{1}{1 + \left(\frac{\pi a^2}{2S l_{eq} k_0} \right)^2} \quad (4.75a)$$

O gráfico seguinte representa os valores do coeficiente de transmissão para um pequeno tubo na lateral de um tubo principal. As dimensões consideradas são: $S = 30 \text{ cm}^2$, $a = 1.5 \text{ cm}$ e $l = 3.65 \text{ cm}$.

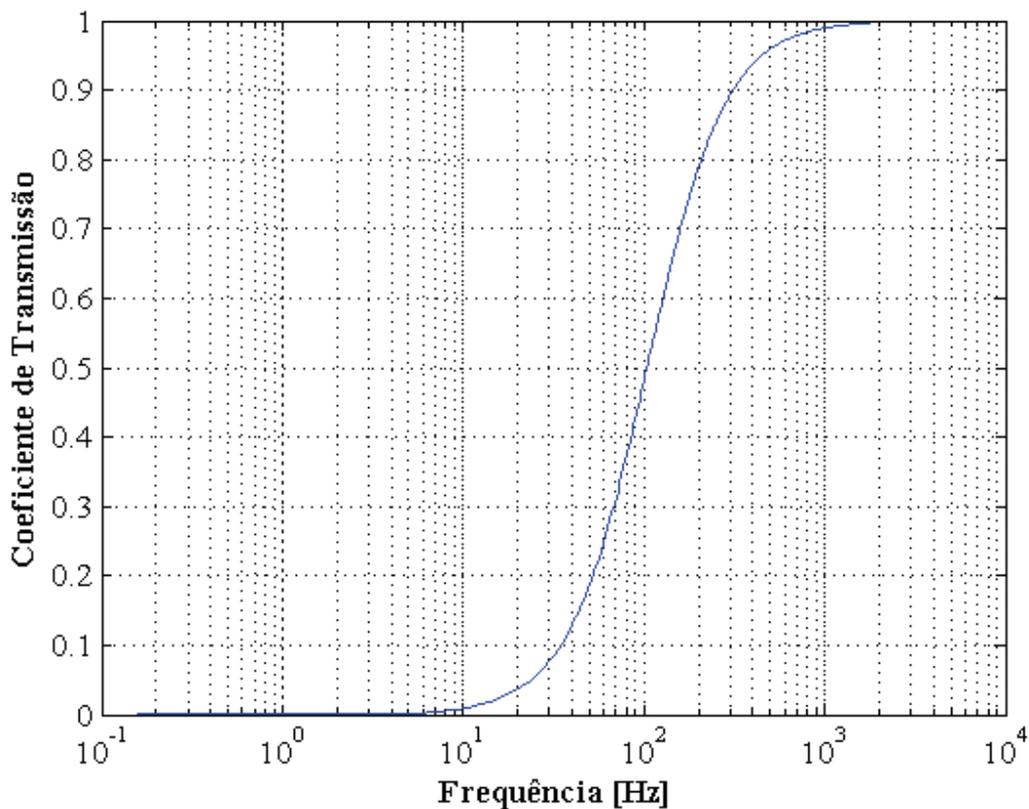


Fig. 4.10 – Coeficiente de transmissão para um filtro passa alto.

Analisando o gráfico, verifica-se que na gama das altas frequências o coeficiente de transmissão é aproximadamente 1. Daí se poder dizer que este tipo de filtro funciona como um filtro passa alto.

4.10.3 Filtro rejeita banda

Este tipo de filtros atenua frequências dentro de uma determinada faixa e permite a passagem de frequências fora dessa faixa. Como exemplo deste tipo de filtros refere-se o ressonador de Helmholtz. Este filtro consiste numa ligação lateral, designada por “pescoço” a uma cavidade de volume V (Fig. 4.11). Desprezando as perdas por atrito, não há nenhuma dissipação de energia, logo a energia absorvida pelo ressonador durante um período volta para o tubo durante outro período do ciclo acústico. Daí se deduzir que a impedância deste filtro é apenas reactiva e a resistência acústica (R_b) é nula.

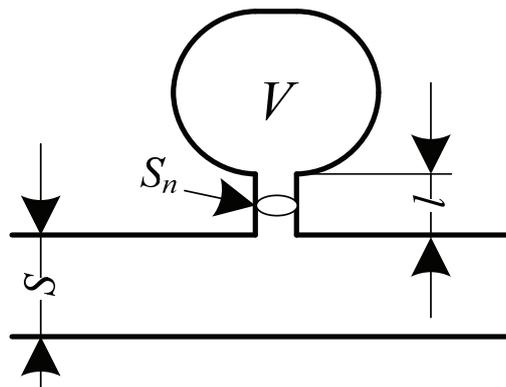


Fig. 4.11 – Filtro rejeita banda – Ressonador de Helmholtz.

Sendo a reactância acústica composta pela inertância devida ao pescoço e pela compliância devida à cavidade:

$$X_b = \rho \left(\frac{\omega l_{eq}}{S_n} - \frac{c_0^2}{\omega V} \right) \quad (4.78)$$

onde:

$$l_{eq} = l + 1,7a$$

$$S_n = \pi a^2$$

Substituindo os valores de R_b e X_b na Eq. (4.48), obtém-se o coeficiente de transmissão:

$$\alpha_t = \frac{1}{1 + \frac{c_0^2}{4S^2 \left(\frac{\omega l_{eq}}{S_n} - \frac{c_0^2}{\omega V} \right)^2}} \quad (4.79)$$

O gráfico apresentado na Fig. (4.12) representa os valores do coeficiente de transmissão para um ressonador de Hemholtz com as seguintes dimensões: $S= 30 \text{ cm}^2$, $a= 1.5 \text{ cm}$, $V=1500 \text{ cm}^3$ e $l=1 \text{ cm}$.

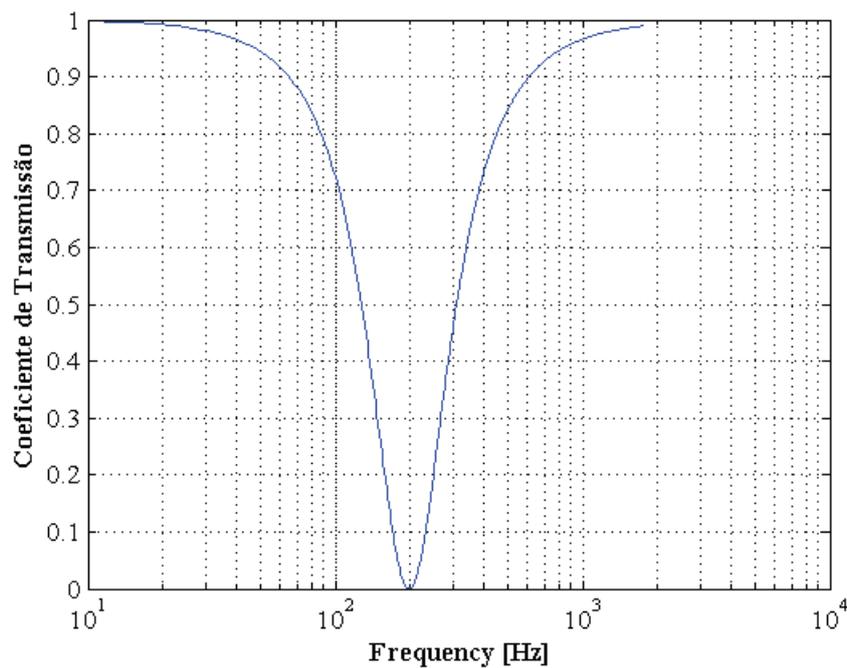


Fig. 4.12 – Coeficiente de transmissão para um filtro rejeita banda.

O coeficiente de transmissão será zero na frequência de ressonância do ressonador de Helmholtz, dada pela seguinte equação:

$$f_r = \frac{c_0}{2\pi} \sqrt{\left(\frac{S_n}{l_{eq}V} \right)} \quad (4.80)$$

Para as dimensões consideradas neste exemplo, a frequência de ressonância é igual a 198.89 Hz.

Esta frequência corresponde à média geométrica das frequências de corte inferior e superior, as quais definem a largura da banda de corte, na qual o filtro actua, reduzindo o

ruído incidente, sendo que na frequência de ressonância a atenuação é 100%, e toda a energia é reflectida para a fonte.

Um filtro deste tipo resulta da combinação de um filtro passa baixo e de um filtro passa alto, a sua impedância tem uma componente devida à inertância acústica, e outra devida a compliância acústica.

4.11 Representação do tubo como “lumped element”

Lumped elements representam uma estrutura em que as variáveis físicas envolvidas variam linearmente em toda a parte dessa estrutura quando o meio onde estão inseridas sofre alguma perturbação.

A representação em forma de circuito eléctrico de filtros acústicos unidimensionais é bastante útil para compreender o comportamento de combinações de elementos, e de *lumped elements* em particular. Para isso recorre-se à combinação das suas impedâncias.

A frequências suficientemente baixas ou em tubos curtos (Fig. 4.1), $k_0^2 l^2 \ll 1$, logo $k_0 l \cong 1$ e $\sin k_0 l \cong k_0 l$. Desta forma, pode-se simplificar a Eq. (4.8) que relaciona a impedância equivalente no ponto $Z=0$, $\zeta(0)$, com a impedância equivalente no ponto $Z=l$, $\zeta(l)$:

$$\begin{aligned} \zeta(0) &= \frac{\zeta(l) + jYk_0 l}{j\zeta(l)k_0 l / Y + 1} \\ &= \frac{\zeta(l) + j\omega l / S}{\zeta(l)j\omega V / c_0^2 + 1} \\ &= \frac{\zeta(l) + Z_M}{\zeta(l) / Z_C + 1} \end{aligned} \quad (4.81)$$

onde:

Z_M representa a impedância inertante total do tubo, $j\omega l / S$,

$1/Z_C$ representa a admitância de compliância total do tubo, $j\omega V / c_0^2$.

Nos casos limite:

$$\zeta(0) \xrightarrow[k_0^2 l^2 \ll 1]{\zeta(l) \ll Z_C} \zeta(l) + Z_M \quad (4.82)$$

$$\zeta(0) \xrightarrow[k_0^2 l^2 \ll 1]{Z_M \ll \zeta(l)} \frac{\zeta(l) Z_C}{\zeta(l) + Z_C} \quad (4.83)$$

No primeiro caso, representado pela Eq. (4.82), o tubo actua como um *lumped element* com a inertância em linha, e Z_M aparece em série com $\zeta(l)$ (Fig. 4.13).

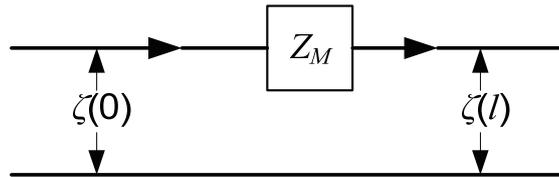


Fig. 4.13 – Tubo representado como *lumped element* com inertância em linha.

No segundo caso, representado pela Eq. (4.83), o tubo actua como um *lumped element* com a compliância em *shunt*, Z_C aparece em paralelo com $\zeta(l)$, (Fig. 4.14).

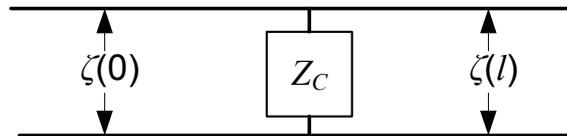


Fig. 4.14 – Tubo representado como *lumped element* com compliância em *shunt*.

Um exemplo do primeiro caso é o representado na Fig. 4.5, em que um tubo acusticamente pequeno, $k_0^2 l^2 \ll 1$, se encontra entre dois tubos de muito maior diâmetro. O tubo actua como *lumped element* com impedância $j\omega l / S$, onde l inclui a correcção de terminação de ambos os lados. Um exemplo do segundo caso é o representado pela Fig. 4.7, em que um tubo se encontra entre dois tubos de muito menor diâmetro. O tubo actua como *lumped element* com impedância $c_0^2 / (j\omega V)$, onde V é o volume do tubo ou cavidade.

4.12 Definição de impedâncias

Como já referido, um silenciador é composto por vários elementos acústicos, e cada um destes elementos contribui para a atenuação global do silenciador. Essa contribuição traduz-se na impedância que o elemento acústico tem associada a si.

4.12.1 Extended-tube resonators

Para os quatro tipos destes ressonadores (Fig. 4.15), assumindo a propagação de ondas planas em todos os tubos, pode afirmar-se que junto à junção as pressões são iguais, tal que:

$$p_3 = p_1 = p_2 \quad (4.84)$$

e considerando a propagação no sentido positivo o indicado pelas setas, quanto à velocidade acústica vem:

$$v_3 = v_1 + v_2 \quad (4.85)$$

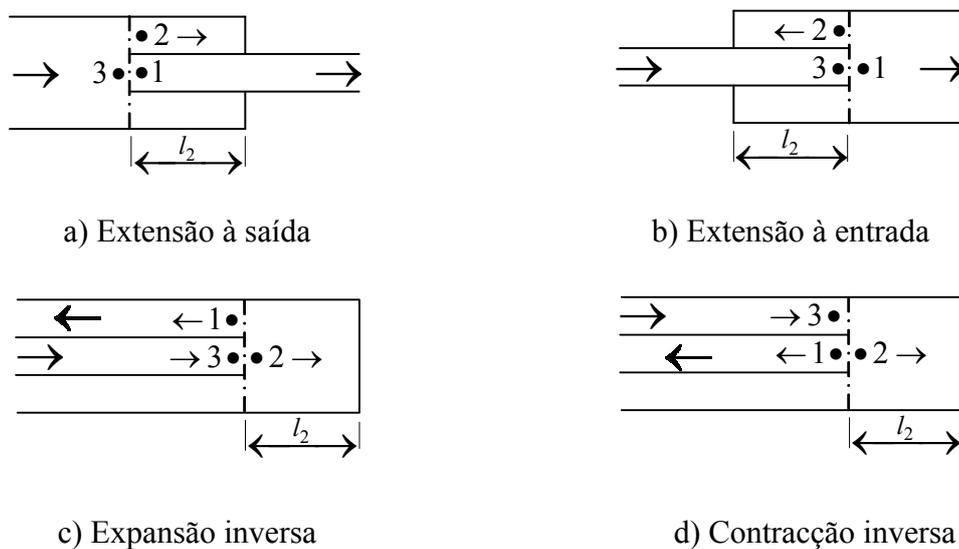


Fig. 4.15 – *Extended-tube resonators*.

A cavidade ressonadora pode ser representada junto à junção pela impedância equivalente, dada segundo a Eq. (4.1):

$$Z_2 = \frac{p_2}{v_2} \quad (4.86)$$

a qual pode ser escrita segundo a Eq.(4.8) da seguinte forma:

$$Z_2 = Y_2 \frac{\zeta_{end} \cos(k_0 l_2) + jY_2 \sin(k_0 l_2)}{j\zeta_{end} \sin(k_0 l_2) + Y_2 \cos(k_0 l_2)} \quad (4.87)$$

onde:

ζ_{end} é a impedância normal da parede terminal da cavidade 2.

Assumindo que $\zeta_{end} \rightarrow \infty$, ou seja, que se está na presença de uma terminação rígida, logo com uma impedância infinita, pode-se simplificar a Eq. (4.87) e obter a impedância para este tipo de elementos:

$$Z_2 \Big|_{\zeta_{end} \rightarrow \infty} = -jY_2 \cot(k_0 l_2) \quad (4.88)$$

Dividindo a Eq. (4.85) pela Eq. (4.84) obtém-se:

$$\frac{v_3}{p_3} = \frac{v_1}{p_1} + \frac{v_2}{p_2}$$

e, tendo em conta a eq. (4.86):

$$\frac{1}{\zeta_3} = \frac{1}{\zeta_1} + \frac{1}{Z_2} \quad (4.89)$$

A partir das Eq. (4.84), (4.85) e (4.89), pode dizer-se que este tipo de ressonadores podem ser representados como um *branch (shunt) element*, sendo o circuito equivalente dado pela Fig. 4.16.

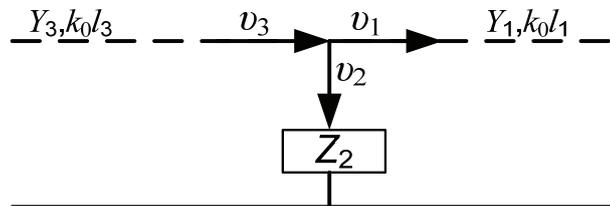


Fig. 4.16 – *Branch resonator* típico.

A determinadas frequências, Z_2 tende para zero, o *branch element* actua como um curto-circuito e não ocorre transmissão de energia ao longo do tubo 1. Toda a energia é usada na ressonância da cavidade final, e daí o nome *branch resonator*.

Se a parede final da cavidade não for suficientemente rígida, esta pode entrar em vibração devido às frequências de ressonância, e o som pode ser irradiado para o interior do silenciador ou directamente para a atmosfera. No primeiro caso, a espessura da parede deve ser aumentada, e no segundo caso a cavidade deve ser preenchida com material absorvente, tal como por exemplo, fibra de vidro.

Para paredes rígidas, a ressonância da cavidade ocorre quando $\cot(k_0 l_2) \rightarrow 0$, ou quando:

$$k_0 l_2 = (2n + 1) \frac{\pi}{2}, \quad n=0,1,2,\dots \quad (4.90a)$$

ou quando o comprimento da câmara a dividir pelo comprimento da onda é igual a $\frac{1}{4}$ para o primeiro modo de propagação. Generalizando:

$$\frac{l_2}{\lambda} = (2n + 1) / 4, \quad n=0,1,2,\dots \quad (4.90b)$$

Logo, *extended-tube resonators* são conhecidos também por *quarter-wave resonators*.

Na prática, as paredes finais ou divisórias num silenciador não asseguram um coeficiente de reflexão, R_{end} , unitário, tendo um valor aproximado de 0.95 (Munjaj (1987)). Assim, para maior rigor deve-se usar a Eq. (4.87) em vez da Eq. (4.88).

4.12.2 Ressonador de Helmholtz

Um *branch resonator* conforme o representado na Fig. 4.17, é conhecido como ressonador de Helmholtz. Pode ser considerado como um sistema de um grau de liberdade acústico, com os três elementos que se seguem (Gerges (1992)):

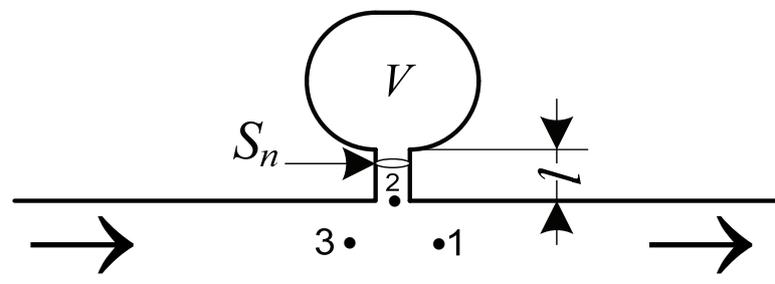


Fig. 4.17 – Ressonador de Helmholtz.

Elemento de massa (Inertância acústica): Na abertura (pescoço), considera-se que o fluido se move como um elemento de massa.

Elemento de rigidez (Compliância acústica): A pressão do fluido dentro da cavidade muda quando ele é alternadamente comprimido ou expandido pela excitação acústica do fluido através da abertura.

Elemento de resistência (Impedância de radiação): A resistência do sistema é o termo responsável pela dissipação de energia acústica. Dois mecanismos são responsáveis pela absorção acústica: a radiação acústica do cilindro de ar vibrante na abertura, e o atrito viscoso entre o ar vibrante e a superfície da abertura.

A impedância do *branch*, Z_2 , consiste assim na inertância devido ao pescoço (Eq.(4.53)) e na compliância devida a cavidade (Eq.(4.60)) em série com a soma da impedância de radiação de ambos os lados do pescoço (Eq.(4.22a1)). Assim:

$$Z_2 = j\omega \frac{l_{eq}}{S_n} + \frac{1}{j\omega V / c_0^2} + 2Y_n \frac{k_0^2 r_0^2}{2} \quad (4.91)$$

onde:

$$l_{eq} = l + t + 1.7r_0, \quad (4.92)$$

$$Y_n = c_0 / S_n,$$

$$S_n = \pi r_0^2,$$

r_0 é o raio do pescoço.

Reescrevendo a Eq. (4.91), na forma:

$$Z_2 = j \left\{ \omega \frac{l_{eq}}{S_n} - \frac{c_0^2}{\omega V} \right\} + \frac{\omega^2}{\pi c_0} \quad (4.93)$$

e desprezando o termo correspondente à resistência à radiação, a impedância do *branch*, Z_2 , tende para zero quando:

$$\omega = c_0 \left(\frac{S_n}{l_{eq} V} \right)^{1/2} \quad (4.94)$$

Esta é a frequência de ressonância do ressonador, na qual há uma alta perda de transmissão, cuja amplitude é limitada apenas pelo termo correspondente à resistência de radiação em Z_2 .

O circuito equivalente para um ressonador de Helmholtz é o da Fig. 4.16, e as relações entre as pressões p_3 , p_2 e p_1 e entre as velocidades v_3 , v_1 e v_2 são dadas, respectivamente, pelas Eq. (4.84) e (4.85).

Este tipo de ressonadores é geralmente aplicado para atenuar o ruído na gama das baixas frequências (Gerges (1992)).

4.12.3 Ressonador concêntrico

A Fig. 4.18 representa um filtro acústico composto por uma cavidade tubular concêntrica com um tubo perfurado. A comunicação entre o tubo e cavidade dá-se através dos furos existentes na periferia do tubo. Assim como, no caso do *extended-tube resonators* e do ressonador de Helmholtz, também o ressonador concêntrico pode ser representado pelo circuito equivalente da Fig. 4.16, assim como a relações entre pressões e velocidades, que são dadas, respectivamente, pelas Eq. (4.84) e (4.85).

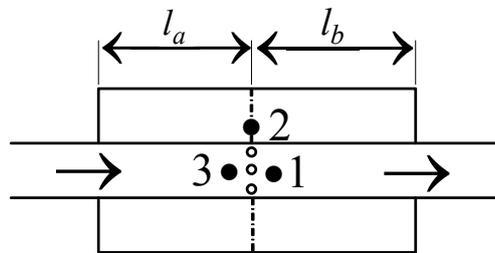


Fig. 4.18 – Ressonador concêntrico

Um ressonador concêntrico tem o seu princípio de funcionamento similar a um ressonador de Helmholtz, sendo constituído pelos mesmos elementos, sendo que o “pescoço” é agora substituído pelos furos no tubo central. No entanto a expressão para a impedância do *branch* Z_2 , apesar de similar a de um ressonador de Helmholtz, difere desta pelo facto de a cavidade anular ser acusticamente longa, ou seja, $k_0 l_a$ e $k_0 l_b$ não serem $\ll 1$. Além disto, neste caso existem também dois *quarter-wave resonators* em paralelo e o comprimento do pescoço é igual à espessura dos furos que estabelecem a comunicação.

Considerando que a cavidade tem paredes finais rígidas, segundo Munjal (1987) a impedância na junção entre a zona perfurada e a cavidade anular pode ser dada da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 Z_2 &= \frac{1}{n_h} \left\{ j\omega \frac{l_{eq}}{S_h} + \frac{\omega^2}{\pi c_0} \right\} + \frac{(-jY_c \cot(k_0 l_a))(-jY_c \cot(k_0 l_b))}{(-jY_c \cot(k_0 l_a)) + (-jY_c \cot(k_0 l_b))} \\
 &= \frac{1}{n_h} \left\{ j\omega \frac{l_{eq}}{S_h} + \frac{\omega^2}{\pi c_0} \right\} - jY_c \frac{1}{\tan(k_0 l_a) + \tan(k_0 l_b)} \quad (4.95)
 \end{aligned}$$

onde:

$$S_h = \frac{\pi d_h^2}{4},$$

$$Y_c = \frac{c_0}{S_c},$$

$$l_{eq} = t + 0.85 d_h$$

os subscritos h e c referem-se, respectivamente, aos furos e à cavidade,

n_h é o número de furos,

d_h é o diâmetro dos furos,

S_c é a área da concavidade,

A Eq. (4.95) reduz-se à Eq.(4.93) na presença de baixas frequências, quando $\tan(k_0 l_a) \cong k_0 l_a$ e $\tan(k_0 l_b) \cong k_0 l_b$. Desta forma, pode concluir-se que um ressonador de Helmholtz não é mais que uma aproximação como um *lumped-element* de um ressonador concêntrico.

A frequência de ressonância neste caso corresponde ao estado em que a impedância devida à inércia dos furos é igual e oposta à impedância devida à compliância da cavidade anular. Partindo da Eq. (4.95), a frequência de ressonância, também conhecida neste caso por frequência sintonizadora, pode ser obtida a partir da seguinte função transcendente:

$$\frac{1}{n_h} \frac{\omega l_{eq}}{S_h} = \frac{Y_c}{\tan(k_0 l_a) + \tan(k_0 l_b)} \quad (4.96)$$

Verifica-se que n_h (número de furos) aparece no denominador. Desta forma, a impedância, correspondente a n_h furos é $1/n_h$ vezes a impedância de apenas um furo. Isto permite uma considerável flexibilidade no desenho de ressonadores concêntricos.

4.13 Construção do circuito equivalente

A construção do circuito equivalente de um determinado silenciador consiste em identificar o número e o tipo de elementos que o compõem, e as junções entre eles. Torna-se assim mais fácil obter a sequência de matrizes e, conseqüentemente, os parâmetros que caracterizam a performance global do filtro. A direcção de propagação das ondas é a representada pelas setas, desde a fonte até à atmosfera.

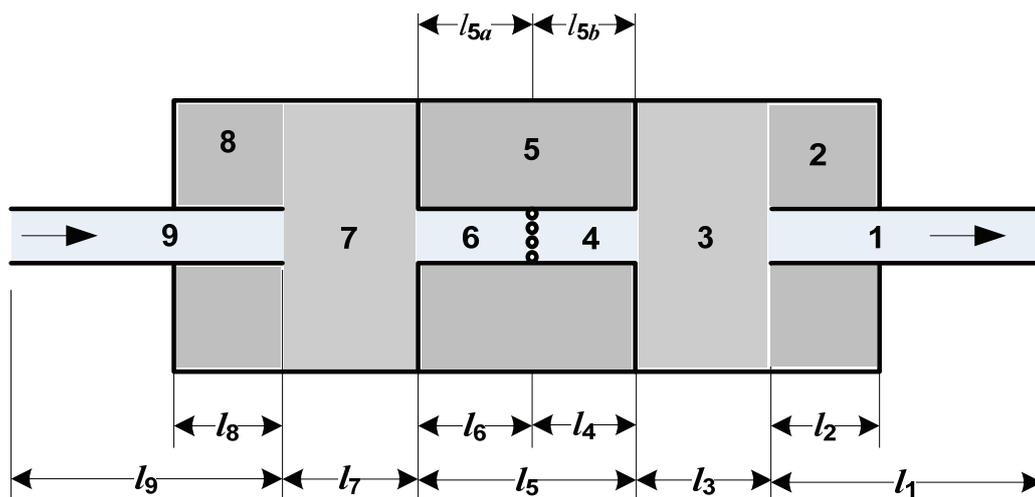


Fig. 4.19 – Silenciador para construção do circuito equivalente, Fonte: Munjal (1987).

Verifica-se, assim, que o silenciador é constituído por 9 elementos distintos. Os elementos 1,3,4,6,7 e 9 são elementos tubulares simples, e são conhecidos por *distributed elements*, e representam-se no circuito equivalente em série, e os restantes como *branch elements*, representando-se no circuito em paralelo. A fonte de ruído e a atmosfera, no que respeita às suas impedâncias, são representadas, respectivamente, em paralelo e em linha.

Identificados os elementos, o seu tipo e as junções entre eles, pode construir-se o circuito equivalente:

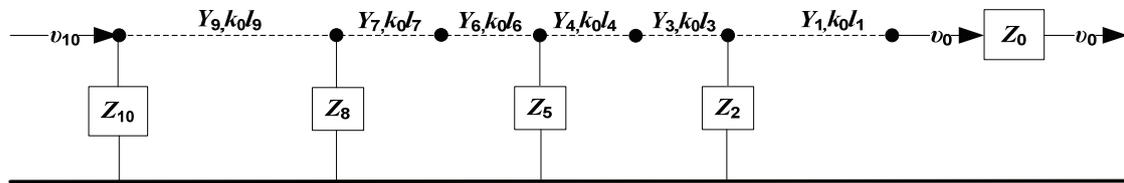


Fig. 4.20 – Construção do circuito equivalente, Fonte: Munjal (1987).

onde:

Z_0 e Z_{10} são respectivamente, as impedâncias de radiação e da fonte,

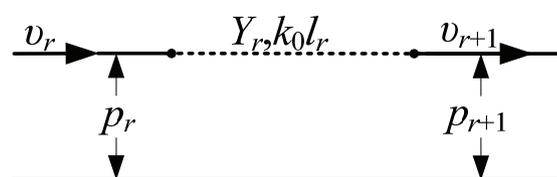
v_0 e v_{10} são, respectivamente, a velocidade de saída e de entrada no filtro.

No próximo capítulo, concretiza-se a identificação das matrizes de cada elemento.

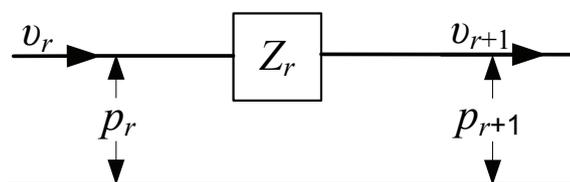
Capítulo 5 Método da matriz de transferência

5.1 Introdução

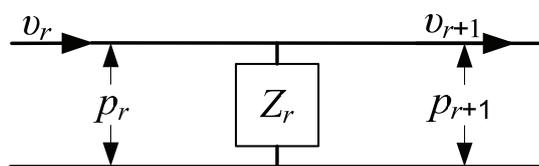
Como já foi referido, este método consiste na obtenção de uma matriz por cada elemento básico que faz parte do silenciador. A multiplicação das matrizes correspondentes a todos os elementos permite calcular a perda de transmissão e a perda de inserção e, assim, conhecer a atenuação a que o ruído está sujeito com a aplicação deste filtro. Observando as Fig. 4.19 e Fig. 4.20, encontra-se três tipos de elementos básicos que podem ser representados de forma esquemática da seguinte maneira:



a) *Distributed element.*



b) *In-line lumped element.*



c) *Shunt lumped element.*

Fig. 5.1 – Os três elementos básicos de um circuito equivalente.

Adoptando a pressão acústica p e a velocidade da massa v como sendo as duas variáveis de estado, e definindo por $[p_r \ v_r]$ o vector de estado no ponto r a montante do elemento, e por $[p_{r-1} \ v_{r-1}]$ o vector de estado no ponto $r-1$, a jusante do elemento (Fig. 5.2):

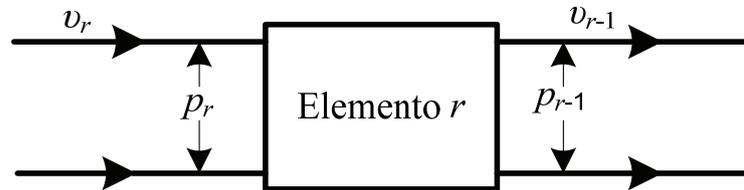


Fig. 5.2 – Representação geral de um elemento.

pode escrever-se uma matriz que as relaciona tais variáveis à entrada e à saída desse elemento:

$$\begin{bmatrix} p_r \\ v_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{Matriz de transferência (2X2)} \\ \text{para o elemento } r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{r-1} \\ v_{r-1} \end{bmatrix} \quad (5.1)$$

Denotando por $[T_r]$ a matriz para o elemento r e, escrevendo-a na forma:

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

facilmente se deduz a partir da relação da matriz de transferência (5.1) que:

$$A_{11} = \frac{p_r}{p_{r-1}} \Big|_{v_{r-1}=0}$$

$$A_{12} = \frac{p_r}{v_{r-1}} \Big|_{p_{r-1}=0}$$

$$A_{21} = \frac{v_r}{p_{r-1}} \Big|_{v_{r-1}=0}$$

$$A_{22} = \frac{v_r}{v_{r-1}} \Big|_{p_{r-1}=0}$$

Cada uma destas relações tem um significado físico individual. Por exemplo, A_{11} é a razão entre a pressão a montante e a pressão a jusante, assumindo que o elemento tem terminação rígida ($\zeta_{r-1} \rightarrow \infty$), e A_{12} é a razão entre a pressão a montante e a velocidade a jusante, assumindo que o elemento termina totalmente livre, sem constrangimentos ($\zeta_{r-1} \rightarrow 0$). O parâmetro A_{12} representa a razão entre a velocidade de entrada e a velocidade de saída, assumindo mais uma vez uma terminação completamente livre. Aqui, ζ_{r-1} significa a impedância acústica equivalente a jusante do elemento no ponto $r-1$. Para obter os valores destes parâmetros recorre-se a medições feitas em laboratório a elementos separados, ou a subconjuntos de elementos, Munjal (1987).

5.2 Matrizes de transferência para os diferentes elementos

Como referido cada matriz de transferência é composta por quatro elementos, chamados de *four-pole parameters*. Fazendo uso das Eq. (4.2) e (4.3) vão deduzir-se as matrizes correspondentes aos três elementos básicos da Fig. 5.1:

$$\begin{aligned}
 p_r &= A_r + B_r \\
 v_r &= (A_r - B_r)/Y_r \\
 p_{r-1} &= A_r e^{-jk_0 l_r} + B_r e^{+jk_0 l_r} \\
 &= (A_r + B_r) \cos(k_0 l_r) - j(A_r - B_r) \sin(k_0 l_r) \\
 &= p_r \cos(k_0 l_r) - jY_r v_r \sin(k_0 l_r)
 \end{aligned} \tag{5.2}$$

$$\begin{aligned}
 v_{r-1} &= (A_r e^{-jk_0 l_r} - B_r e^{+jk_0 l_r})/Y_r \\
 &= \frac{A_r - B_r}{Y_r} \cos(k_0 l_r) - j \frac{A_r + B_r}{Y_r} \sin(k_0 l_r) \\
 &= v_r \cos(k_0 l_r) - j \frac{p_r}{Y_r} \sin(k_0 l_r)
 \end{aligned} \tag{5.3}$$

Escrevendo as Eq. (5.2) e (5.3) na forma de matrizes:

$$\begin{bmatrix} p_{r-1} \\ v_{r-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos k_0 l_r & -jY_r \sin k_0 l_r \\ -j/Y_r \sin k_0 l_r & \cos k_0 l_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_r \\ v_r \end{bmatrix}$$

Invertendo agora a sua ordem, obtém-se a matriz de transferência para um *distributed element* (Fig. 5.1a):

$$\begin{bmatrix} p_r \\ v_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos k_0 l_r & jY_r \sin k_0 l_r \\ j/Y_r \sin k_0 l_r & \cos k_0 l_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{r-1} \\ v_{r-1} \end{bmatrix} \quad (5.4)$$

Para um *in-line lumped element*, observando a Fig. 5.1b, podem escrever-se as seguintes relações:

$$p_r = p_{r-1} + Z_r v_{r-1} \quad (5.5)$$

$$v_r = v_{r-1} \quad (5.6)$$

Escrevendo as Eq. (5.5) e (5.6) na forma de matrizes obtém-se a matriz de transferência para um *in-line lumped element*:

$$\begin{bmatrix} p_r \\ v_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & Z_r \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{r-1} \\ v_{r-1} \end{bmatrix} \quad (5.7)$$

Para um *branch lumped element*, observando a Fig. 5.1c, podem escrever-se as seguintes relações:

$$p_r = p_{r-1} \quad (5.8)$$

$$v_r = p_{r-1}/Z_r + v_{r-1} \quad (5.9)$$

Escrevendo as equações anteriores sob a forma de matrizes tem-se a matriz de transferência para um *branch lumped element*:

$$\begin{bmatrix} p_r \\ v_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1/Z_r & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{r-1} \\ v_{r-1} \end{bmatrix} \quad (5.10)$$

Chega-se, assim, às matrizes de transferência para os 3 elementos básicos (Fig. 5.1):

Distributed element (Tubo):

$$\begin{bmatrix} \cos k_0 l_r & jY_r \sin k_0 l_r \\ j/Y_r \sin k_0 l_r & \cos k_0 l_r \end{bmatrix} \quad (5.11)$$

Lumped in-line element:

$$\begin{bmatrix} 1 & Z_r \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.12)$$

Lumped shunt element:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1/Z_r & 1 \end{bmatrix} \quad (5.13)$$

Para contracções e expansões abruptas a pressão acústica e velocidade acústica da massa permanecem inalteráveis, e por isso as matrizes de transferência são matrizes unitárias.

5.3 Evolução da sequência das matrizes de transferência

No ponto 4.13 construímos o circuito equivalente correspondente a um silenciador composto por 9 elementos distintos. De uma forma geral, qualquer filtro unidimensional com n elementos, assim como a fonte e o elemento terminal (a atmosfera), podem ser representados pelo seguinte diagrama:

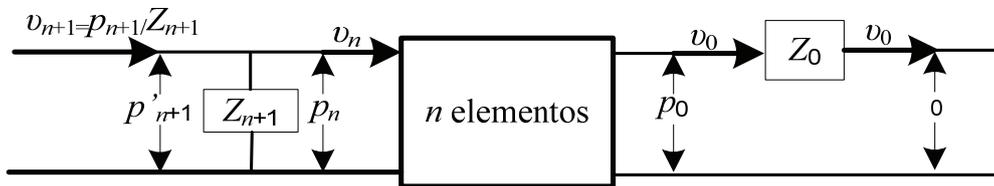


Fig. 5.3 – Diagrama geral para um filtro unidimensional, Fonte: Munjal (1987).

Aplicando sucessivamente a relação (5.1), encontra-se a sequência de matrizes que compõem o sistema, relacionando as variáveis de estado a jusante e montante do sistema:

$$\{S_{n+1}\} = [T_{n+1}][T_n] \dots [T_r] \dots [T_1]\{S_0\} \quad (5.14)$$

onde o vector de estado $\{S_0\}$ é:

$$\{S_0\} = \begin{bmatrix} p_0 \\ v_0 \end{bmatrix} \quad (5.15)$$

e pode ser redefinido na seguinte forma:

$$\{S_0\} = \begin{bmatrix} p_0 \\ v_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & Z_0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ v_0 \end{bmatrix} \quad (5.16)$$

uma vez que:

$$p_0 / v_0 = Z_0.$$

Assim, a impedância de radiação Z_0 pode ser colocada em linha no diagrama e o vector de estado $\{0 \ v_0\}$ refere-se ao ponto a jusante de Z_0 (Fig. 5.3), logo, de acordo com a matriz (5.12), tem-se:

$$[T_1] = \begin{bmatrix} 1 & Z_0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.17)$$

Como v_{n+1} é independente da pressão da fonte p_{n+1} , a pressão do outro lado de Z_{n+1} é indicada na Fig. 5.3 por p'_{n+1} , e assim:

$$\{S_{n+1}\} = \begin{bmatrix} p'_{n+1} \\ v_{n+1} \end{bmatrix} \quad (5.18)$$

e Z_{n+1} aparece como *branch* impedância no diagrama, e logo, segundo a matriz (5.13), vem:

$$[T_{n+1}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1/Z_{n+1} & 1 \end{bmatrix} \quad (5.19)$$

Assim, pode obter-se a sequência de matrizes correspondente ao silenciador representado pela Fig. 4.19 A inclusão das matrizes de transferência, correspondentes as impedâncias da fonte e de radiação, apenas é necessária para o cálculo da perda de inserção. Partindo da Eq. (5.14) e tendo em conta as Eq. (5.17) e (5.19) e as diferentes matrizes (5.11), (5.12) e (5.13), para os vários tipos de elementos, obtém-se a referida sequência:

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} p_{10} \\ v_{10} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1/Z_{10} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos k_0 l_9 & jY_9 \sin k_0 l_9 \\ j/Y_9 \sin k_0 l_9 & \cos k_0 l_9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1/Z_8 & 0 \end{bmatrix} \\
 &\times \begin{bmatrix} \cos k_0 l_7 & jY_7 \sin k_0 l_7 \\ j/Y_7 \sin k_0 l_7 & \cos k_0 l_7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos k_0 l_6 & jY_6 \sin k_0 l_6 \\ j/Y_6 \sin k_0 l_6 & \cos k_0 l_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1/Z_5 & 0 \end{bmatrix} \\
 &\times \begin{bmatrix} \cos k_0 l_4 & jY_4 \sin k_0 l_4 \\ j/Y_4 \sin k_0 l_4 & \cos k_0 l_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos k_0 l_3 & jY_3 \sin k_0 l_3 \\ j/Y_3 \sin k_0 l_3 & \cos k_0 l_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1/Z_2 & 0 \end{bmatrix} \\
 &\times \begin{bmatrix} \cos k_0 l_1 & jY_1 \sin k_0 l_1 \\ j/Y_1 \sin k_0 l_1 & \cos k_0 l_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1/Z_0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ v_0 \end{bmatrix} \tag{5.20}
 \end{aligned}$$

Como a impedância da fonte, Z_{n+1} , é, na maioria dos casos, desconhecida, apenas se vai calcular a perda de transmissão para estudar a performance dos silenciadores que, como já foi referido, é independente das impedâncias da fonte e de radiação. Desta forma, a sequência reduz-se apenas às matrizes dos elementos do silenciador. O resultado da multiplicação das matrizes permite-nos obter os quatro parâmetros da matriz final, a partir dos quais se calcula a perda de transmissão de todo o sistema.

5.4 Cálculo da perda de transmissão

Como já foi referido, o estudo vai concentra-se apenas no cálculo da perda de transmissão, para avaliar o comportamento dos silenciadores.

Para um silenciador, excluindo os tubos de entrada e de saída, com $n-2$ elementos (Fig. 5.4):

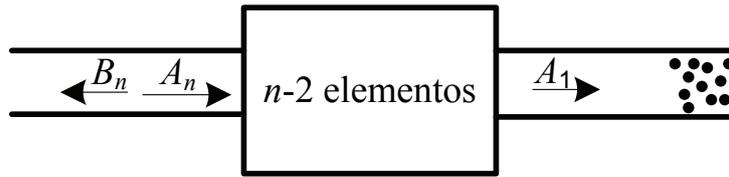


Fig. 5.4 – Diagrama para o cálculo da perda de transmissão.

tem-se:

$$\begin{bmatrix} p_n \\ v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ v_1 \end{bmatrix} \quad (5.21)$$

onde:

$[T]$ é a matriz resultante da multiplicação das matrizes individuais,

$$p_n = A_n + B_n,$$

$$v_n = \frac{1}{Y_n}(A_n - B_n).$$

Quando $B_1=0$, ou seja, existe uma terminação anecóica:

$$p_1 = A_1 + B_1 = A_1$$

$$v_1 = \frac{1}{Y_1}(A_1 - B_1) = \frac{A_1}{Y_1}$$

Assim,

$$\begin{aligned} A_n &= (p_n + Y_n v_n)/2 \\ &= \left[\left(T_{11} A_1 + T_{12} \frac{A_1}{Y_1} \right) + Y_n \left(T_{12} A_1 + T_{22} \frac{A_1}{Y_1} \right) \right] / 2 \end{aligned}$$

Dividindo a equação anterior por A_1 , obtém-se:

$$\frac{A_n}{A_1} = \frac{1}{2} \left[T_{11} + \frac{T_{12}}{Y_1} + Y_n T_{21} + \frac{Y_n}{Y_1} T_{22} \right]$$

Substituindo a expressão anterior na Eq. (2.3) obtém-se a fórmula para o cálculo da perda de transmissão:

$$TL = 20 \log \left[\left(\frac{Y_1}{Y_n} \right)^{1/2} \left| \frac{T_{11} + T_{12}/Y_1 + Y_n T_{21} + (Y_n/Y_1) T_{22}}{2} \right| \right] \quad (5.22)$$

onde:

Y_1 e Y_n são as impedâncias características do tubo de saída e de entrada, respectivamente.

De forma a simular a perda de transmissão para as várias configurações de silenciadores, ao longo deste trabalho usou-se o programa, Matlab R14. É de referir ainda que a geometria exterior dos silenciadores em todos os casos considerados é circular, dada a pouca informação disponível no que se refere a outras geometrias, nomeadamente com resultados experimentais. Contudo, no que se refere ao método de análise usado neste trabalho, a geometria exterior é irrelevante, já que em termos de cálculo apenas é considerada a área da secção transversal do silenciador. Assim, por exemplo, um silenciador de geometria oval pode ser simulado como sendo circular, desde que a área da secção transversal seja igual.

Capítulo 6 Efeito da variação dimensional e construtiva em filtros simples

6.1 Introdução

Neste capítulo, partindo de uma câmara de expansão simples, vai-se estudar o efeito da variação de algumas das suas dimensões básicas e da introdução de alguns elementos simples na performance global do filtro. Nomeadamente, o efeito da razão de expansão, do comprimento da câmara, da presença de partições no interior da câmara, a presença de câmaras simples em série e, por fim, o efeito das extensões. Neste último estudo, consideram-se dois exemplos, que foram simulados experimentalmente por outros autores, de forma a poder comparar os resultados obtidos por diferentes fontes.

6.2 Efeito da razão de expansão

Definindo por (S_1/S) a razão de expansão de uma câmara de expansão simples (Fig. 6.1):

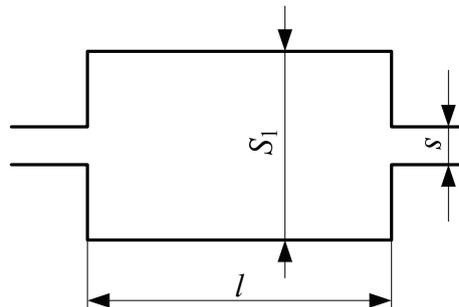


Fig. 6.1 – Câmara de expansão simples.

e observando o gráfico seguinte facilmente se conclui que quanto maior for a razão de expansão, ou seja, quanto mais abruptas forem as transições, melhores características o filtro apresenta em termos de perda de transmissão.

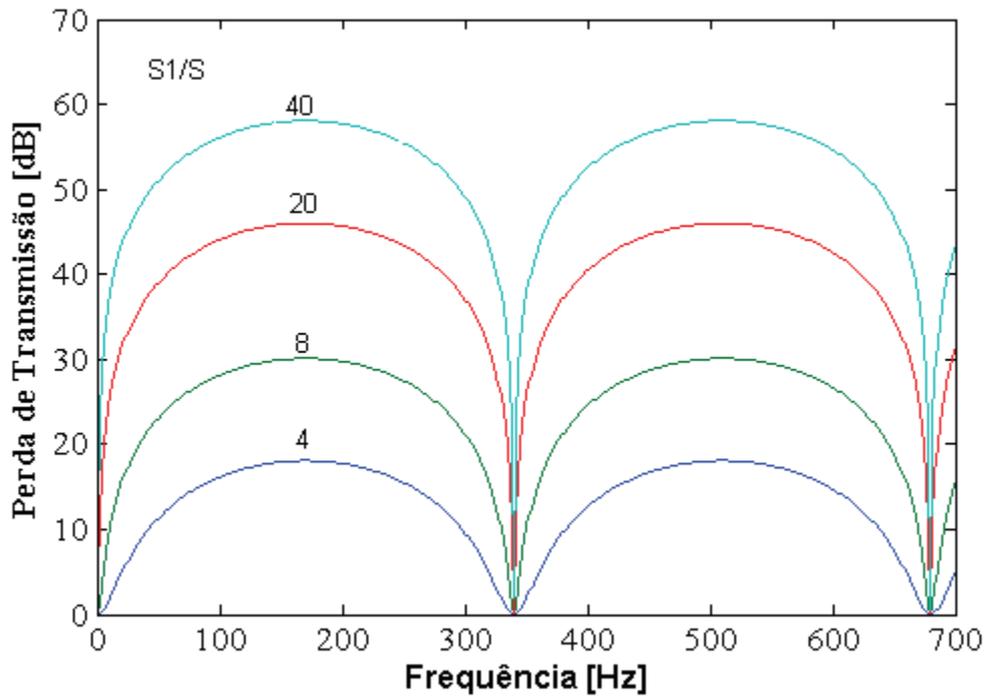


Fig. 6.2 – Efeito da razão de expansão, e $l=50$ cm.

No estudo deste tipo de filtros passa baixo, verifica-se que o coeficiente de transmissão assume valor mínimo quando $k_0 l = \pi/2$ ou $l = \lambda/4$, ou seja, que existe uma perda de transmissão máxima quando:

$$k_0 l = (2n + 1) \frac{\pi}{2}, \text{ para } n=0,1,2,3,\dots \quad (6.1)$$

Portanto, a atenuação ocorre quando:

$$l = \frac{\lambda}{4}, \frac{3\lambda}{4}, \frac{5\lambda}{4}, \dots \text{etc.} \quad (6.2)$$

6.3 Efeito do comprimento da câmara

Consideraram-se duas câmaras, uma com 50 cm e uma outra com 100 cm de comprimento e uma razão de expansão de 4. Observando o gráfico seguinte:

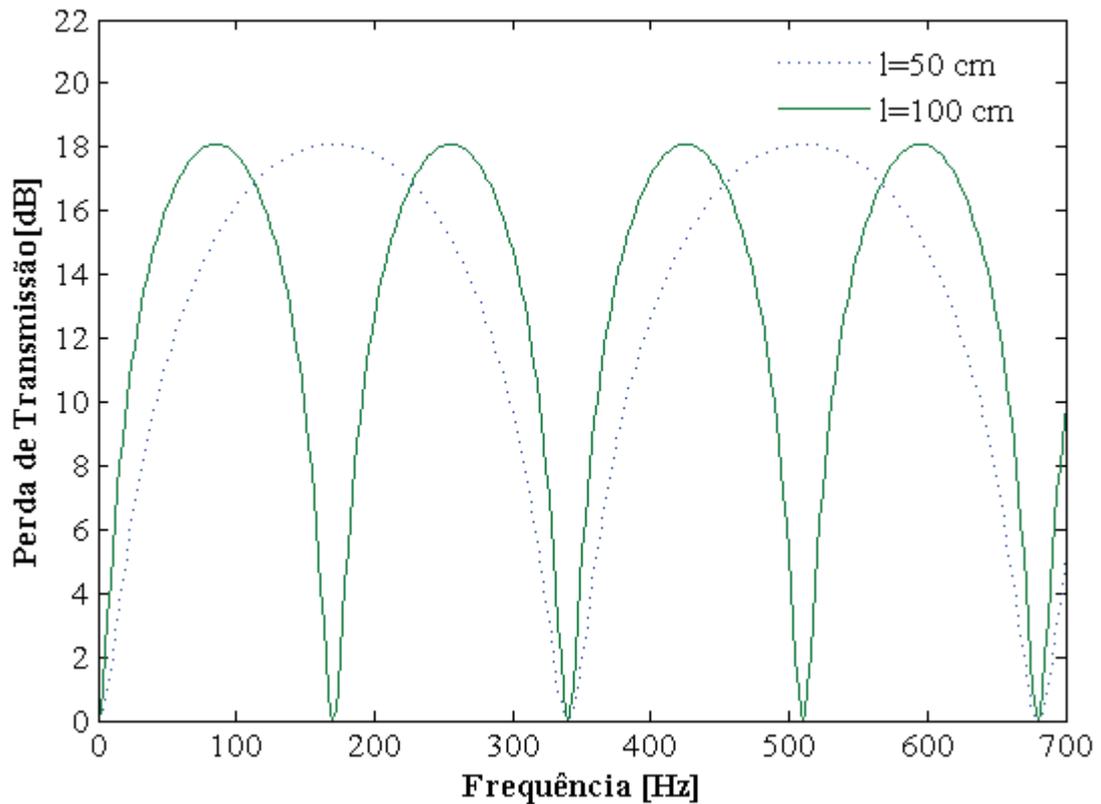


Fig. 6.3 – Efeito do comprimento da câmara de expansão

pode verificar-se que a variação do comprimento da câmara praticamente não afecta o valor máximo da perda de transmissão, que se situa para as duas câmaras à volta dos 18 dB. No entanto, a duplicação do comprimento da câmara faz com que no mesmo intervalo de frequências, se tenham 2 bandas de atenuação em vez de uma só. Conclui-se, assim, que no caso de uma câmara simples a duplicação do comprimento da câmara implica que o número de bandas de atenuação também duplique, dentro do mesmo intervalo de frequências. Isto leva ao aparecimento de uma banda de passagem nesse mesmo intervalo, ou seja, uma banda em que a perda de transmissão é muito próxima de zero, piorando assim notavelmente a performance do filtro.

A partir da Eq. (4.70), pode concluir-se que o coeficiente de transmissão assume valores máximos na seguinte situação:

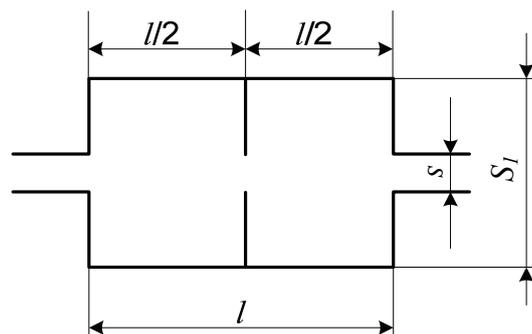
$$k_0 l = n\pi, \quad n=0,1,2,3,\dots$$

Isto é, a perda de transmissão é nula nas frequências em o comprimento da câmara é igual a metade do comprimento de onda vezes um número inteiro:

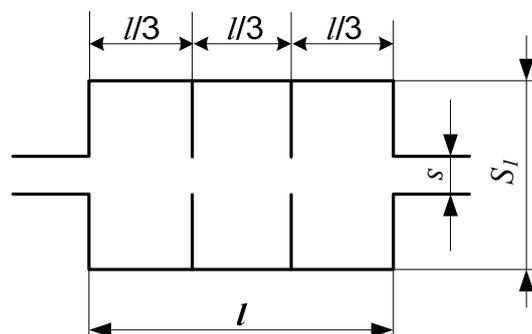
$$l = \frac{\lambda}{2} n \Rightarrow f = \frac{c}{2l} n, \quad n=0,1,2,3,\dots$$

6.4 Efeito do número de partições

Um silenciador, que tenha no seu interior uma ou mais divisórias, diz-se que é um silenciador com múltiplas câmaras ou partições. A Fig. 6.4 representa a situação de uma câmara simples com 2 e 3 partições:



a) Câmara de expansão com duas partições.



b) Câmara de expansão com três partições.

Fig. 6.4 – Câmara de expansão com partições.

No gráfico seguinte pode observar-se a influência que tem a divisão da secção principal de uma câmara em várias partições, quer a nível da atenuação máxima quer no seu comportamento ao longo da banda de frequência. É representada a perda de transmissão para as situações de uma câmara sem partições (Fig. 6.1), de uma câmara com duas partições (Fig. 6.4a), e de uma câmara com três partições (Fig. 6.4b). O comprimento total e a razão de expansão são, respectivamente, 50 cm e 4 em todos os casos.

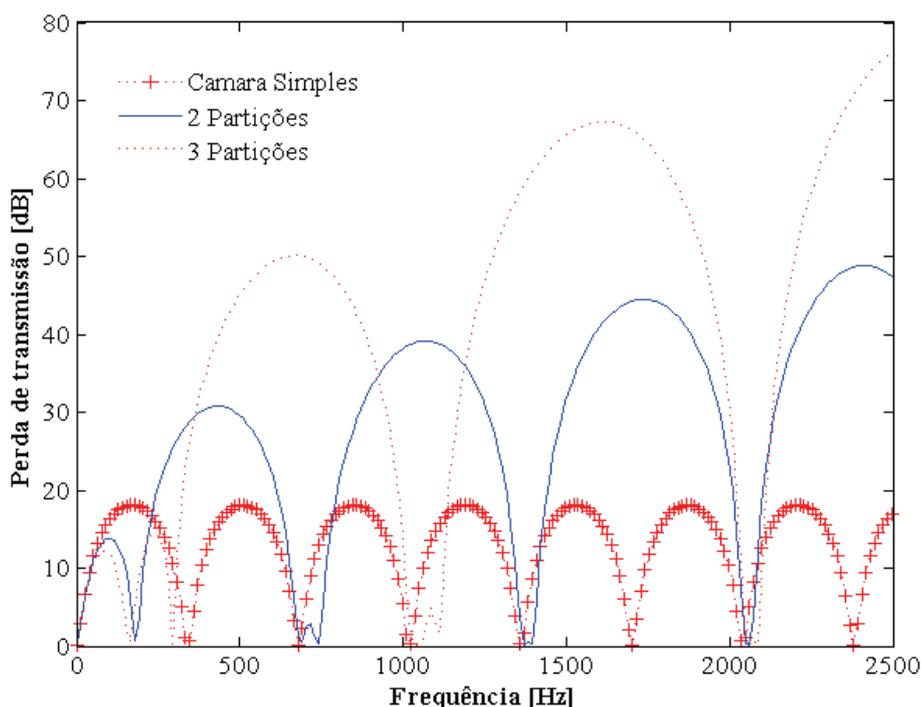


Fig. 6.5 – Efeito do número de partições.

Ao contrário de uma câmara simples, que tem pares de bandas de atenuação muito semelhantes à medida que a frequência aumenta, na presença de uma câmara com múltiplas partições isso já não se verifica. Com o aumento da frequência a primeira banda de cada par tende a desaparecer, e a segunda aumenta em largura e em amplitude. No entanto, o aumento do número de partições faz com que a primeira banda de atenuação seja menor em amplitude e em largura, sendo que esta diferença é mais evidente quando se passa de uma câmara simples para uma com duas partições. Pode assim concluir-se que, excepto na primeira banda de atenuação, aumentando o número de partições aumenta-se a eficácia do silenciador, sendo que essa eficácia vai aumentando à medida que a frequência aumenta.

6.5 Efeito do número de câmaras simples em série

Considerando duas câmaras de expansão iguais, ligadas entre si por um tubo de conexão de comprimento l_1 (Fig. 6.6), vai-se estudar o efeito na perda de transmissão da presença das duas câmaras em série e do comprimento do tubo de conexão entre ambas. O comprimento (l) é igual a 50 cm e a razão de expansão é 4.

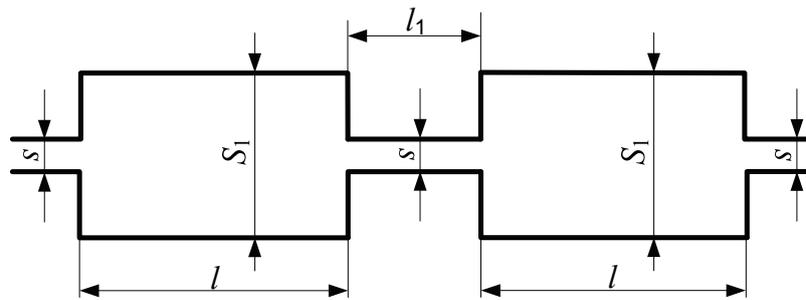


Fig. 6.6 – Duas câmaras de expansão simples em série.

O gráfico seguinte representa a perda de transmissão para a situação de $l_1=10$ cm:

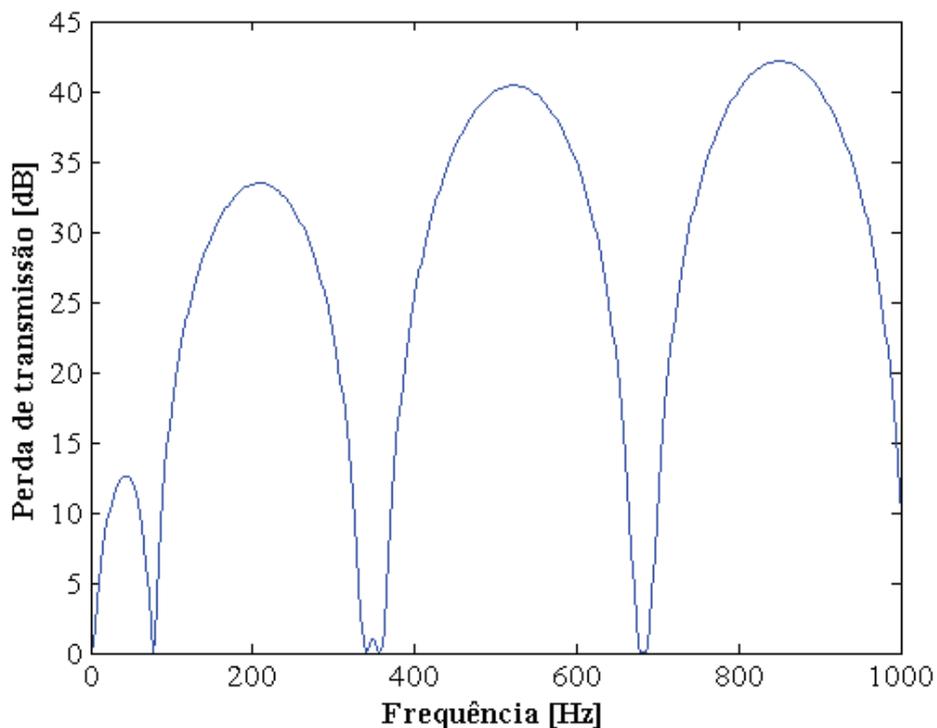


Fig. 6.7 – Efeito do número de câmaras simples em série e $l_1=10$ cm.

Verifica-se que na presença de duas câmaras em série há um aumento na perda de transmissão, quando comparada com a situação de apenas uma câmara (Fig. 6.2). No entanto, foi introduzida uma banda de baixa amplitude, na zona das baixas frequências, que corresponde à primeira banda de atenuação, causada pelo tubo de conexão entre as duas câmaras.

O gráfico seguinte representa a perda de transmissão para a situação: $l_1 = 25$ cm:

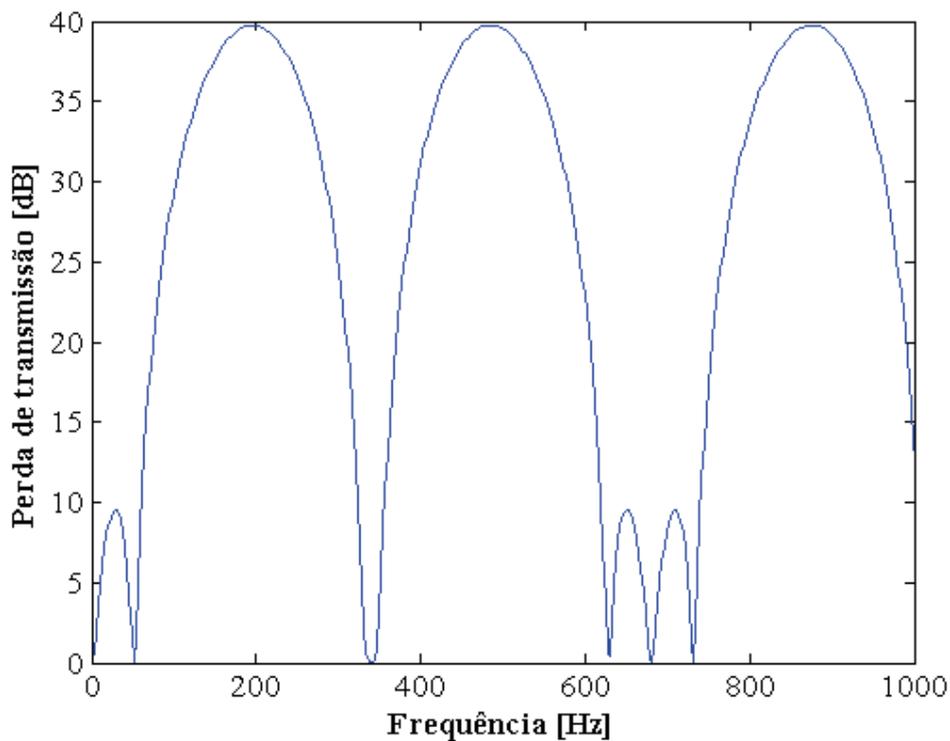


Fig. 6.8 – Efeito do número de câmaras simples em série e $l_1 = 25$ cm.

Comparando o gráfico anterior com o gráfico da Fig. 6.7, verifica-se que o aumento do comprimento do tubo de conexão faz baixar a amplitude da primeira banda de atenuação, assim como a sua largura. No entanto, este aumento no comprimento do tubo permite que as bandas de maior atenuação tenham a mesma amplitude desde as baixas frequências. Por outro lado, permite o aparecimento de duas bandas de pequena amplitude a seguir à segunda banda de grande atenuação.

O gráfico seguinte representa a perda de transmissão para a situação: $l_1 = 50$ cm:

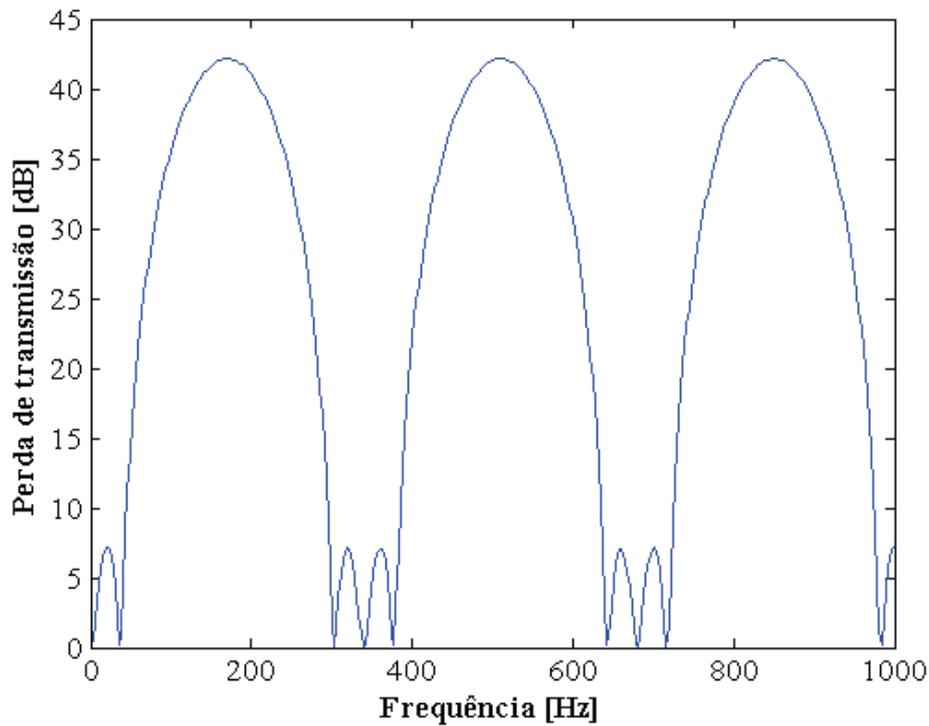


Fig. 6.9 – Efeito do número de câmaras simples em série e $l_1 = 50$ cm.

Verifica-se que pelo facto de se ter aumentando o tubo de conexão para o dobro mais duas bandas de pequena amplitude aparecem, logo a seguir à primeira banda de grande atenuação.

Conclui-se, assim, que a partir de um determinado comprimento do tubo de conexão as bandas de maior atenuação têm todas a mesma amplitude. Contudo, este aumento permite o aparecimento de bandas de pequena amplitude, a qual decresce com o aumento do comprimento do tubo de conexão.

6.6 Efeito da presença de extensões nos tubos de entrada e de saída

A Fig. 6.10 representa uma câmara simples, com ambos os tubos de entrada e de saída com extensões. Para além de se estudar o efeito da presença das extensões ir-se-á também avaliar o efeito de pequenas variações nos seus comprimentos. De forma a comparar os resultados obtidos, vão-se considerar as dimensões que Selamet *et al.* (1998) utilizou no seu estudo, realizando testes experimentais. Assim, como dimensões fixas consideram-se: comprimento da câmara (l)=28.23 cm; diâmetro da câmara (d_2)=15.32 cm; diâmetros dos tubos (d_1)=4.86 cm.

No silenciador da Fig. 4.19, os vários elementos que o compõem estão enumerados da direita para a esquerda, segundo o critério de Munjal (1987). Desta forma, já que a impedância de radiação é conhecida por Z_0 , as restantes impedâncias aparecem numeradas sequencialmente. No entanto, para o cálculo da perda de transmissão apenas interessam as impedâncias dos elementos do silenciador, e por se achar mais conveniente passam-se a numerar os vários elementos da esquerda para direita, a partir de agora.

Assim, para o exemplo da Fig. 6.10, podem identificar-se 5 elementos distintos. Os elementos 1,3 e 5 comportam-se como *distributed element*, e representam-se pela matriz (5.11), e os elementos 2 e 4 são *quarter-wave resonators*, e representam-se pela matriz (5.13).

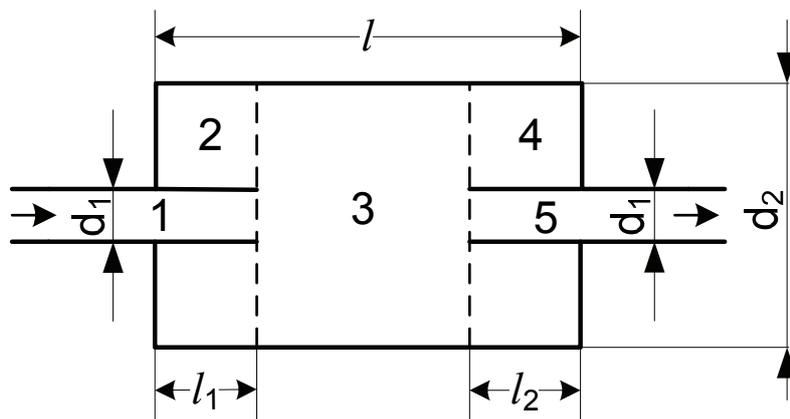


Fig. 6.10 – Câmara simples com extensões nos tubos de entrada e de saída.

O gráfico seguinte compara a perda de transmissão entre uma câmara simples e uma com o tubo de entrada com extensão.

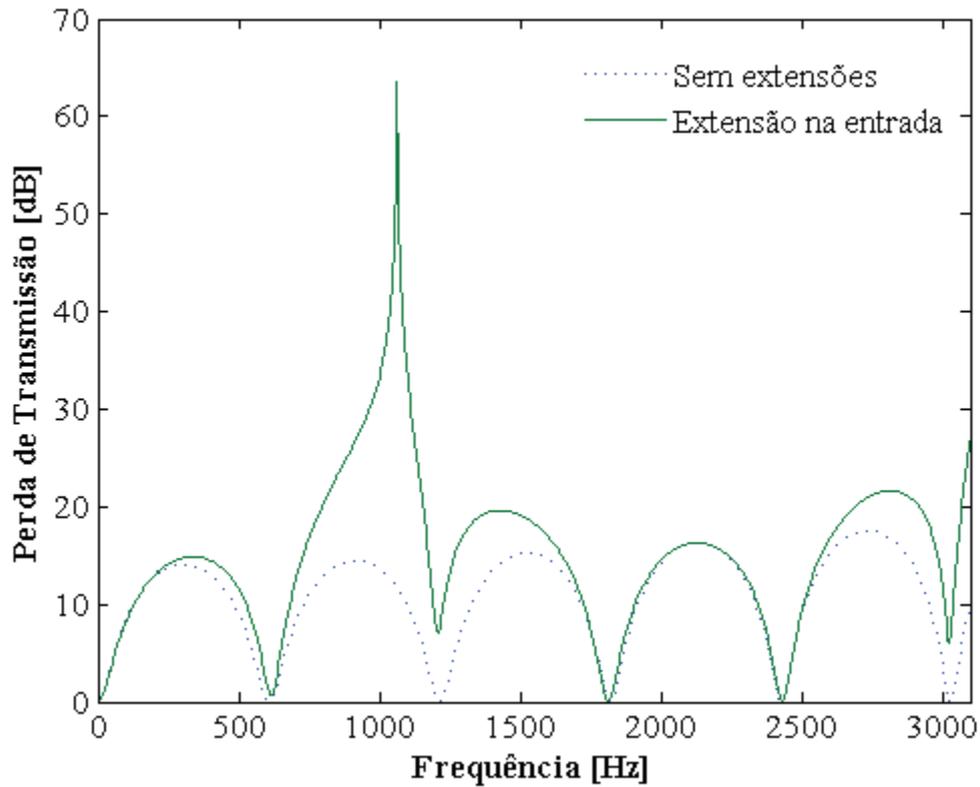


Fig. 6.11 – Efeito da extensão no tubo de entrada, para $l_1=8.0$ cm e $l_2=0$.

Verifica-se que a adição da extensão no tubo de entrada permite o aparecimento de um pico de ressonância na banda das baixas frequências, que corresponde à zona de propagação de ondas planas. Nas restantes frequências apenas se nota um ligeiro aumento da perda de transmissão.

O gráfico seguinte compara a perda de transmissão para dois comprimentos diferentes da extensão do tubo de entrada.

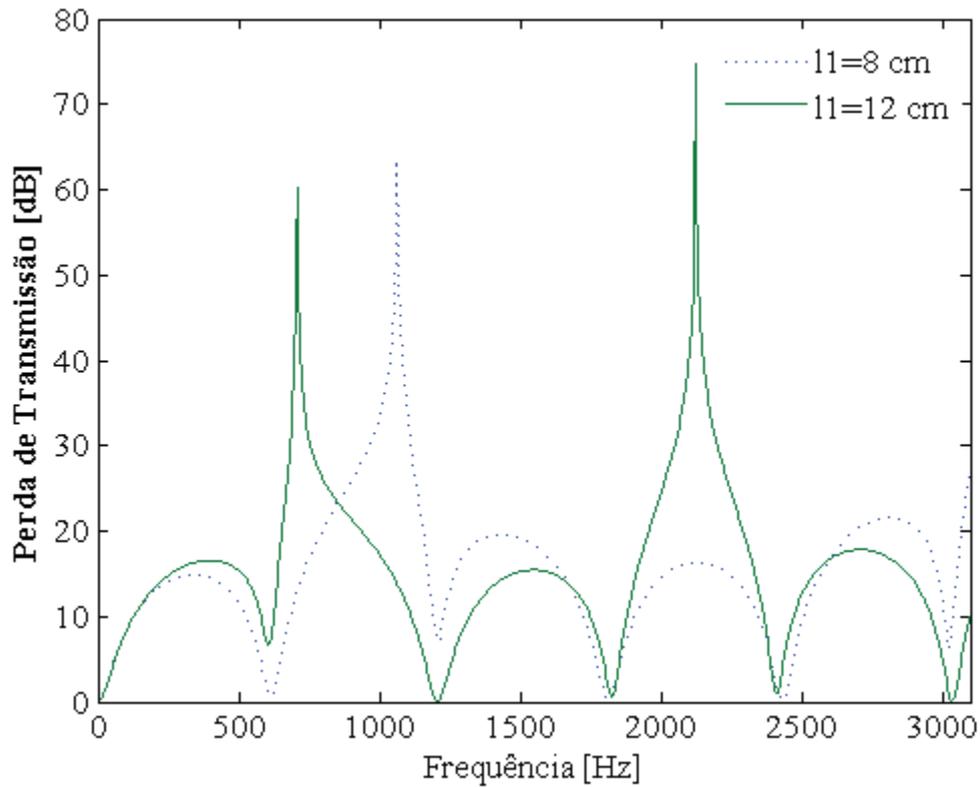


Fig. 6.12 – Efeito do comprimento da extensão no tubo de entrada, para $l_2=0$.

Verifica-se que o aumento de 4 cm no comprimento da extensão faz aparecer mais um pico de ressonância, aproximadamente a 2150 Hz. No entanto, o primeiro pico deslocou-se aproximadamente 400 Hz no sentido das baixas frequências. Isto leva a concluir que uma boa escolha dos comprimentos das extensões permite posicionar os picos de ressonância nas frequências correspondentes a perdas de transmissão nulas, no caso de uma câmara sem extensões.

O gráfico seguinte representa a perda de transmissão para uma câmara simples com extensões à entrada e à saída.

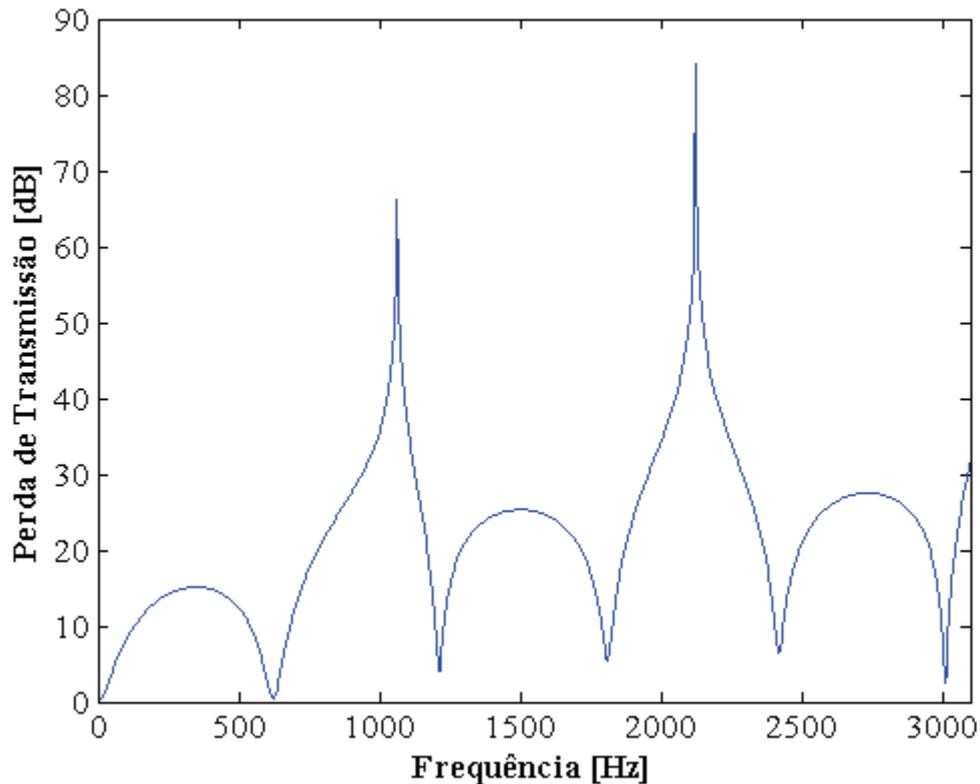


Fig. 6.13 – Efeito das extensões nos tubos de entrada e de saída, para $l_1=8.0\text{cm}$ e $l_2=4.0\text{ cm}$.

Comparando o gráfico anterior com o da Fig. 6.11 concluí-se que a adição da extensão no tubo de saída faz aparecer um segundo pico de ressonância a frequências mais altas, aproximadamente a 2100 Hz. Como já foi referido, a variação dos comprimentos das extensões tem grande influência na performance do filtro. Com o objectivo de otimizar o filtro, Salemet *et al.* (1999) concluíram experimentalmente que as dimensões que correspondem a melhor combinação são apresentadas no gráfico seguinte:

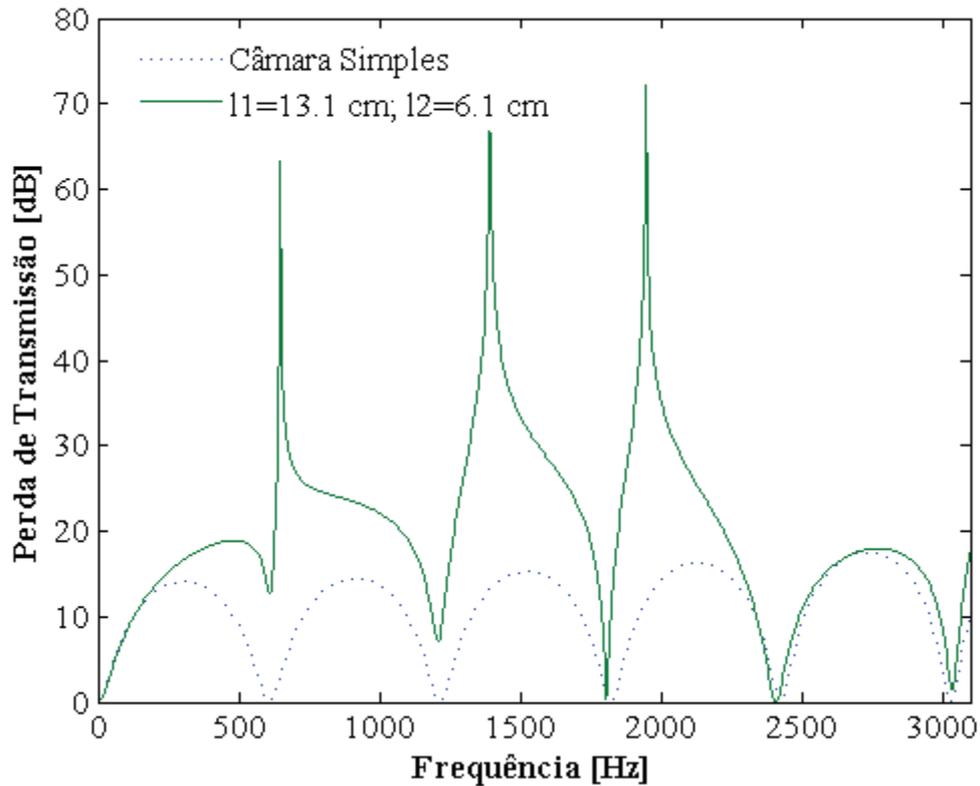


Fig. 6.14 – Efeito otimizado dos comprimentos das extensões nos tubos de entrada e de saída.

O comprimento l_1 foi escolhido para coincidir com a primeira banda de passagem a cerca de 600 Hz, e l_2 foi escolhido para coincidir com a segunda banda de passagem a cerca de 1250 Hz. Contudo, como se pode observar, o segundo pico de ressonância através da simulação unidimensional acontece aproximadamente a 1400 Hz. O resto dos resultados apresentam razoável concordância até aproximadamente aos 3000 Hz, se excluindo a banda de passagem que se observa a aproximadamente os 1800 Hz, que experimentalmente não se verifica.

6.7 Câmara dupla com extensões

O silenciador representado na Fig. 6.15 é uma combinação dos filtros representados pela Fig. 6.4a e pela Fig. 6.10, sendo que a comunicação entre câmaras é feita agora por um tubo de conexão.

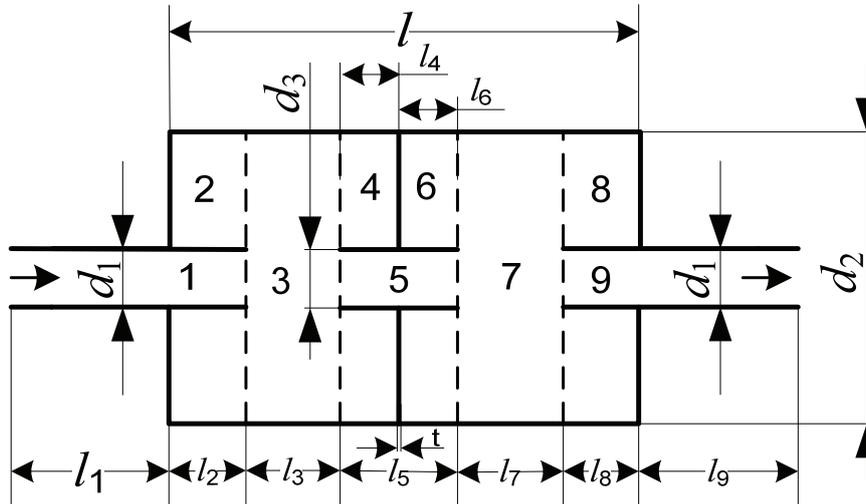


Fig. 6.15 – Silenciador com duas câmaras ligadas por um tubo de conexão.

Para este exemplo, vai-se apresentar a sequência de matrizes correspondentes aos vários elementos e as correspondentes impedâncias. Este silenciador é composto por 9 elementos distintos. Os elementos 1,3,5,7 e 9 comportam-se como *distributed element* e representam-se pela matriz (5.11) e os elementos 2,4,6 e 8 são *quarter-wave resonators* e representam-se pela matriz (5.13).

Assim, partido da Eq. (5.21) tem-se:

$$\begin{bmatrix} P_{entrada} \\ v_{entrada} \end{bmatrix} = [T] \begin{bmatrix} P_{saída} \\ v_{saída} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} P_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = [T] \begin{bmatrix} P_9 \\ v_9 \end{bmatrix}$$

onde a matriz resultante para o cálculo da perda de transmissão é dada pela seguinte sequência:

$$\begin{aligned}
[T] &= \begin{bmatrix} \cos k_0 l_1 & jY_1 \sin k_0 l_1 \\ j/Y_1 \sin k_0 l_1 & \cos k_0 l_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1/Z_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos k_0 l_3 & jY_3 \sin k_0 l_3 \\ j/Y_3 \sin k_0 l_3 & \cos k_0 l_3 \end{bmatrix} \\
&\times \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1/Z_4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos k_0 l_5 & jY_5 \sin k_0 l_5 \\ j/Y_5 \sin k_0 l_5 & \cos k_0 l_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1/Z_6 & 0 \end{bmatrix} \\
&\times \begin{bmatrix} \cos k_0 l_7 & jY_7 \sin k_0 l_7 \\ j/Y_7 \sin k_0 l_7 & \cos k_0 l_7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1/Z_8 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos k_0 l_9 & jY_9 \sin k_0 l_9 \\ j/Y_9 \sin k_0 l_9 & \cos k_0 l_9 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

onde as impedâncias características dos tubos são dadas pela eq.(3.25):

$$Y_1 = Y_9 = \frac{c_0}{S_1}; S_1 = \pi \frac{d_1^2}{4},$$

$$Y_5 = \frac{c_0}{S_5}; S_5 = \pi \frac{d_3^2}{4},$$

$$Y_3 = Y_7 = \frac{c_0}{S_3}; S_3 = \pi \frac{d_2^2}{4},$$

e as impedâncias dos *quarter-wave resonators* são dadas pela eq.(4.88):

$$Z_2 = -jY_2 \cot(k_0 l_2),$$

$$Z_4 = -jY_4 \cot(k_0 l_4),$$

$$Z_6 = -jY_6 \cot(k_0 l_6),$$

$$Z_8 = -jY_8 \cot(k_0 l_8),$$

$$Y_2 = Y_8 = \frac{c_0}{S_2},$$

$$Y_4 = Y_6 = \frac{c_0}{S_4},$$

$$S_2 = \pi \frac{(d_2^2 - d_1^2)}{4},$$

$$S_4 = \pi \frac{(d_2^2 - d_3^2)}{4}.$$

As dimensões consideradas coincidem com as que Selamet *et al.* (2002) usaram no seu estudo, onde foram considerados vários métodos teóricos para comparar resultados. Assim, como dimensões fixas consideram-se: $d_1 = 4.86$ cm, $d_2 = 15.32$ cm, e $t = 0.001$ cm.

Para estudar o efeito do diâmetro do furo de comunicação (d_3) entre as duas câmaras, não vão ser considerar extensões, ou seja, $l_2 = l_4 = l_6 = l_8 = 0$. Desta forma, o gráfico seguinte apresenta resultados para $d_3 = 3.5$ e 7.5 cm.

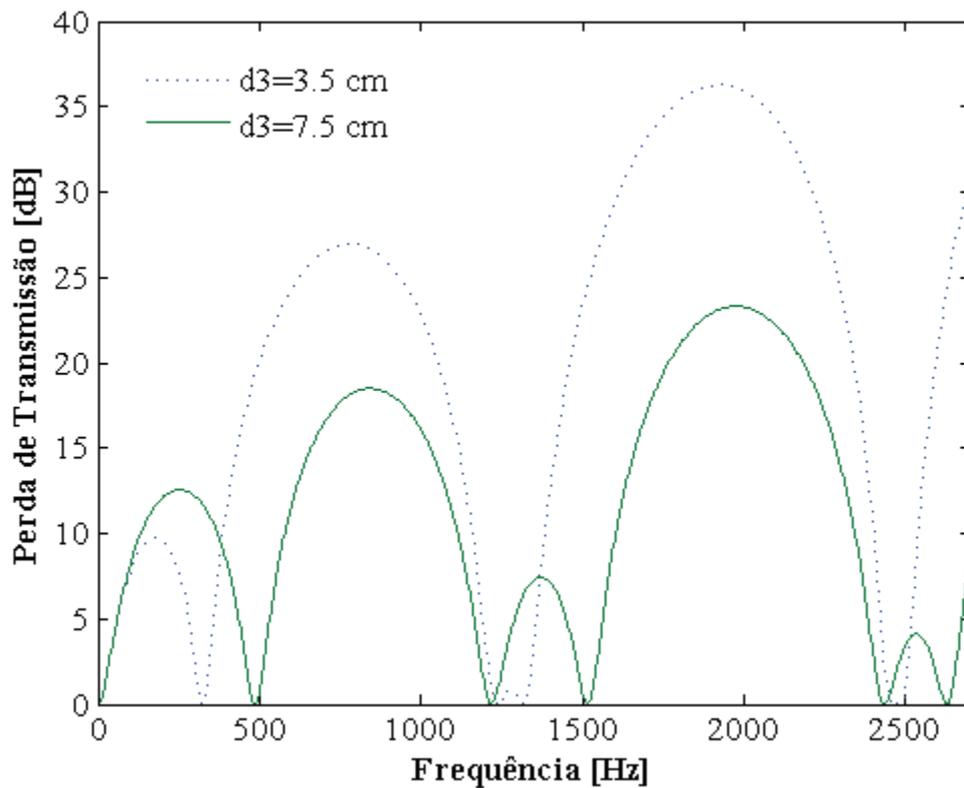


Fig. 6.16 – Efeito do diâmetro do furo de comunicação entre câmaras, para $l = 28$ cm.

Observando o gráfico anterior conclui-se que aumentando o diâmetro do furo de comunicação entre câmaras a amplitude da perda de transmissão decresce praticamente em toda a gama de frequências. Este resultado era esperado, uma vez que, no limite, quando $d_3 = d_2$ se cai na situação de uma câmara de expansão simples. No entanto, a diminuição do diâmetro faz com que a primeira banda de atenuação decresça em amplitude e em comprimento.

De seguida vai-se estudar o efeito da posição da divisória dentro da câmara de expansão. Desta forma o gráfico seguinte apresenta resultados para 3 posições medidas a partir da entrada: $l/3$, $l/4$ e $l/5$ para além da posição central ($l/2$).

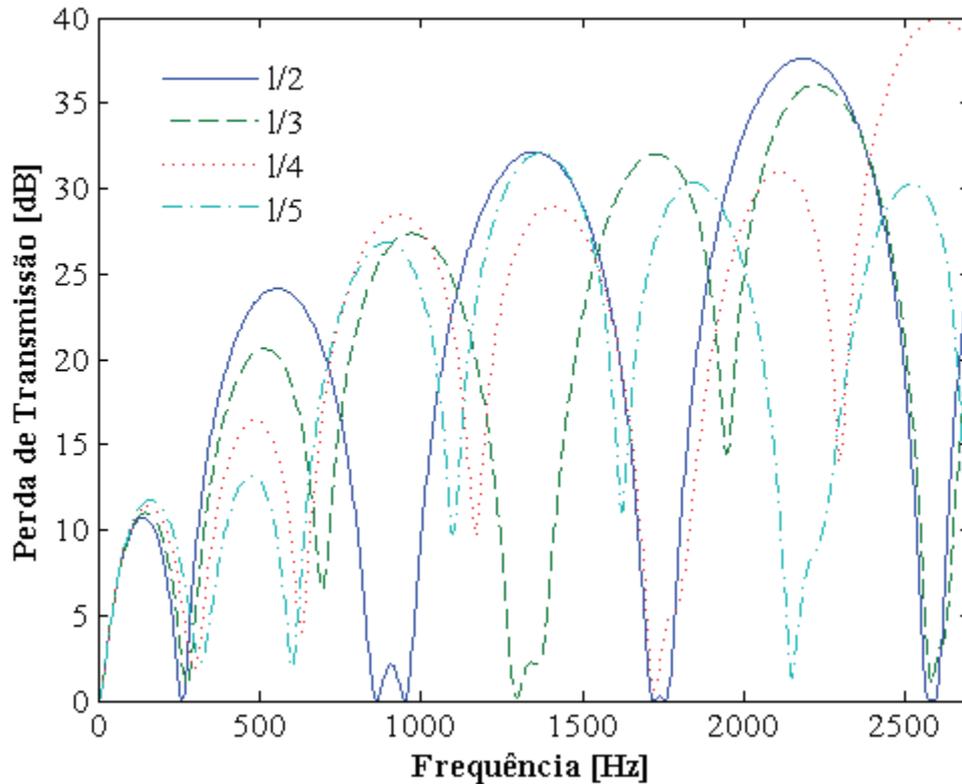


Fig. 6.17 – Efeito da posição axial da divisória, para $l=40$ cm.

Observando o gráfico anterior, verifica-se que a posição axial da divisória afecta fortemente a performance acústica. A primeira banda de atenuação é similar em todos os casos, sendo que a primeira banda de passagem cresce ligeiramente à medida que a câmara de entrada fica mais pequena. A segunda banda de atenuação é maior em amplitude quando a divisória se aproxima do centro. A banda de passagem para a situação da câmara igualmente bipartida a 860 Hz é deslocada para 1290 Hz para a posição $l/3$, e para 1720 Hz para a posição $l/4$ e, por fim para 2140 Hz para a posição $l/5$. Os valores referidos correspondem a valores aproximados. Desta forma, a localização da banda de passagem pode ser controlada movendo a divisória, melhorando assim a performance da câmara localmente.

Por fim, vai-se comparar a performance do silenciador com e sem extensões. As dimensões consideradas para as extensões foram: $l_2=l_6=5.9\text{cm}$; $l_4=l_8=2.5\text{ cm}$.

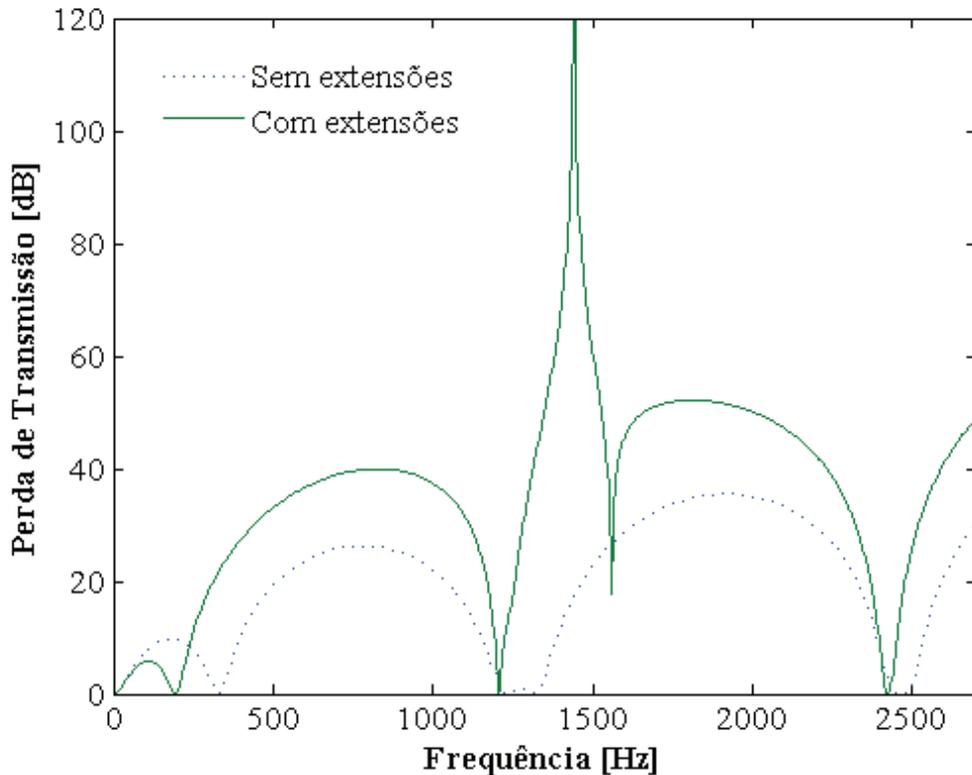


Fig. 6.18 – Efeito da presença de extensões, para $l=28\text{ cm}$.

Observando o gráfico anterior verifica-se que a adição das extensões melhora globalmente a performance do silenciador no intervalo de frequências entre 250 Hz e 2400 Hz, aproximadamente. As dimensões das referidas extensões foram escolhidas de forma a eliminar a banda de passagem a 1200 Hz, que acontece na ausência de extensões, criando para o efeito um pico de ressonância próximo dessa frequência. No entanto, no intervalo de frequências entre 0 Hz e 250 Hz a performance do silenciador diminui. A primeira banda de passagem deslocou-se no sentido das frequências mais baixas, dos 350 Hz para os 200 Hz. A introdução de uma câmara de Helmholtz dimensionada para entrar em ressonância próximo dos 200 Hz aumenta a atenuação no referido intervalo de frequências, segundo Salemet *et al.* (2002). Comparando os resultados obtidos com os resultados experimentais obtidos por Salemet *et al.* (2002), verifica-se razoável concordância até aproximadamente aos 2500 Hz, se se excluir a banda de passagem que antecede o pico de ressonância, que nos resultados experimentais não se verifica.

Capítulo 7 Silenciadores reactivos com elementos perfurados

7.1 Introdução

O estudo da performance acústica de silenciadores com vários elementos perfurados necessita que se tenham em linha de conta efeitos convectivos no fluxo. No entanto, para o resto dos elementos acústicos, segundo os estudos feitos por Munjal (1987), a diferença nos resultados obtidos considerando um meio estacionário e um meio não estacionário são insignificantes. Daí continuarem a utilizar-se as matrizes de transferência deduzidas anteriormente para meios estacionários.

7.2 Variáveis aeroacústicas de estado

A energia acústica do fluxo num tubo, segundo Munjal (1987), pode ser definida como sendo a variação temporal do produto da perturbação na massa do fluxo pela perturbação na entalpia de estagnação:

$$W = \overline{m'J'} \quad (7.1)$$

onde:

$$\begin{aligned} m' &= (\rho_0 + \rho)S(U + u) - \rho_0 SU \\ &= \rho_0 S v + \rho S U, \text{ desprezando os termos de segunda ordem} \\ &= v + \frac{p}{c_0^2} S U \\ &= v + \frac{U}{c_0} \frac{S}{c_0} p \\ &= v + M \frac{p}{Y} \end{aligned} \quad (7.2)$$

$$J' = \frac{p_0 + p}{\rho_0} + \frac{1}{2} (U + u)^2 - \left(\frac{p_0}{\rho_0} + \frac{1}{2} U^2 \right)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{p}{\rho_0} + Uv, \text{ desprezando os termos de segunda ordem} \\
&= \frac{1}{\rho_0} \left(p + \frac{Uc_0}{c_0S} (\rho_0 Su) \right) \\
&= \frac{1}{\rho_0} (p + MYv) \tag{7.3}
\end{aligned}$$

onde:

U é a velocidade do escoamento médio ao longo do tubo,

M é o número de Mach do escoamento médio,

S é a área da secção transversal do tubo.

Uma vez que a entalpia de estagnação J é igual à pressão de estagnação dividida pela densidade do ambiente, J' pode ser vista igualmente como uma pressão de estagnação dividida pela densidade do ambiente. Designando esta pressão de estagnação por pressão aeroacústica (p_c), de igual modo se pode designar a perturbação no fluxo de massa, m' , de velocidade aeroacústica da massa (v_c).

Assim, usando o subscrito c para convecção, vem:

$$W_c = \frac{1}{\rho_0} \overline{v_c \cdot p_c} \tag{7.4}$$

onde, as variáveis aeroacústicas de estado estão linearmente relacionadas com as variáveis acústicas para um meio estacionário da seguinte forma:

$$p_c = p + MYv \tag{7.5}$$

$$v_c = v + \frac{Mp}{Y} \tag{7.6}$$

Escrevendo as equações anteriores sob a forma de matrizes maneira:

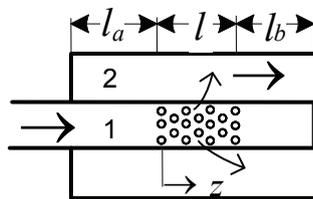
$$\begin{bmatrix} p_c \\ v_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & MY \\ M/Y & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ v \end{bmatrix} \tag{7.7}$$

7.3 Elementos perfurados

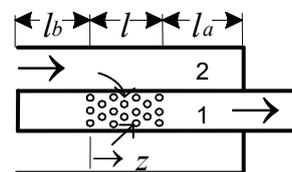
As matrizes correspondentes a elementos perfurados são obtidas partindo das equações de continuidade e quantidade de movimento em cada tubo. O seu desenvolvimento é complexo e é feito segundo o número de elementos perfurados que partilham a mesma cavidade. Dentro dos silenciadores mais comuns com elementos perfurados encontram-se o ressonador concêntrico (Fig. 4.18) e o silenciador composto por três partições e por três tubos perfurados na partição central (Fig. 7.7). Estes dois tipos de silenciadores fazem em muitos casos parte do sistema de escape de diferentes veículos, daí serem conhecidos por modelos universais entre construtores. Por este motivo, serão estudados mais ao pormenor neste trabalho.

7.3.1 Um tubo perfurado

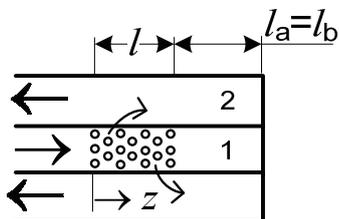
O ressonador concêntrico é um caso particular em com apenas um elemento perfurado, e pelo facto de normalmente a sua utilização incluir materiais absorventes será estudado no próximo capítulo. Como outros exemplos encontram-se os elementos representados na Fig. 7.1.



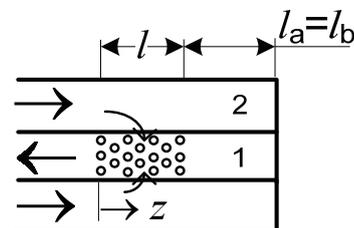
a) *Cross-flow expansion element*



b) *Cross Flow contraction element*



c) *Reverse-flow expansion element*



d) *Reverse-flow contraction element*

Fig. 7.1 – Elementos com um tubo perfurado, Fonte: Munjal (1987).

Limitando a zona comum entre o tubo perfurado e a câmara correspondente a secção perfurada de acordo com a Fig. 7.2:

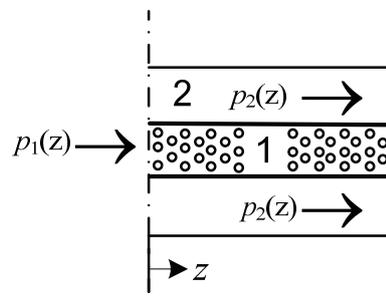


Fig. 7.2 – Zona comum entre o tubo e a câmara, e secção perfurada, Fonte: Munjal (1987).

as equações de continuidade e de quantidade de movimento em cada um dos tubos podem ser escritas segundo Munjal (1987) e Wang (1999) da seguinte forma:

Equação de continuidade:

Tubo (1):

$$U_1 \frac{\partial \rho_1}{\partial z} + \rho_0 \frac{\partial u_1}{\partial z} + \frac{4\rho_0}{d_1} u = -\frac{\partial \rho_2}{\partial t} \quad (7.8)$$

Câmara (2):

$$U_2 \frac{\partial \rho_2}{\partial z} + \rho_0 \frac{\partial u_2}{\partial z} - \frac{4d_1\rho_0}{d_2^2 - d_1^2} u = -\frac{\partial \rho_2}{\partial t} \quad (7.9)$$

Equação de quantidade de movimento:

Tubo (1):

$$\rho_0 \left(\frac{Du_1}{Dt} \right) = \frac{-\partial p_1}{\partial z} \quad (7.10)$$

Câmara (2):

$$\rho_0 \left(\frac{Du_2}{Dt} \right) = \frac{-\partial p_2}{\partial z} \quad (7.11)$$

onde:

ρ_0 é a média temporal da densidade,

U_1 e U_2 são a média temporal da velocidade axial, respectivamente no tubo 1 e na câmara,

u_1 e u_2 correspondem à flutuação na velocidade axial de uma partícula, respectivamente no tubo 1 e na câmara,

ρ_1 e ρ_2 correspondem à flutuação na densidade de uma partícula, respectivamente no tubo 1 e na câmara,

p_1 e p_2 correspondem à flutuação na pressão de uma partícula, respectivamente no tubo 1 e na câmara,

u corresponde à flutuação da velocidade radial de uma partícula nas perfurações.

Assumindo que a impedância da perfuração $\rho_0 c_0 \zeta$ é uniforme, a velocidade radial de uma partícula na perfuração pode ser relacionada com a diferença de pressões entre o tubo e a câmara:

$$u(z) = [p_1(z) - p_2(z)] / (\rho_0 c_0 \zeta) \quad (7.12)$$

onde ζ é a impedância acústica específica.

Considerando que o processo é isotrópico, e que a dependência no tempo para todas as variáveis das Eq. (7.8) a (7.11) é harmónica, e eliminando as variáveis ρ_1, ρ_2, u, u_1 e u_2 nas respectivas equações chega-se a um sistema de duas equações diferenciais:

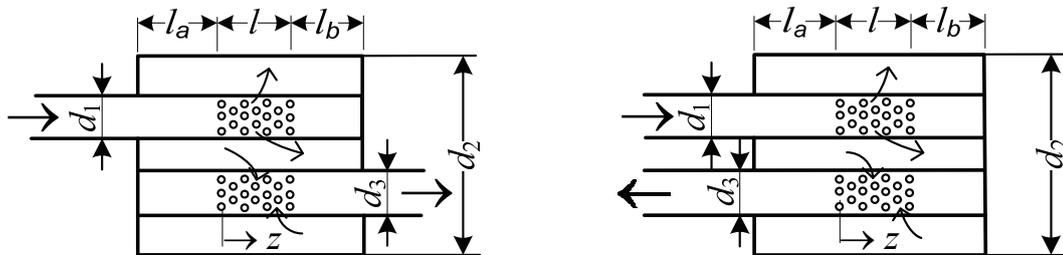
$$\begin{aligned} \frac{d^2 p_1}{dz^2} + \alpha_1 \frac{dp_1}{dz} + \alpha_2 p_1 + \alpha_3 \frac{dp_2}{dz} + \alpha_4 p_2 &= 0 \\ \alpha_5 \frac{dp_1}{dz} + \alpha_6 p_1 + \frac{d^2 p_2}{dz^2} + \alpha_7 \frac{dp_2}{dz} + \alpha_8 p_2 &= 0 \end{aligned} \quad (7.13)$$

onde os coeficientes α_i , com $i=1,2,3,4,5,6,7$ e 8 são apresentados no Apêndice A.

Após várias manipulações algébricas e consideradas condições de fronteira, chega-se à matriz de transferência que traduz a impedância do elemento perfurado. Combinando esta matriz com a dos restantes elementos obtém-se a perda de transmissão no silenciador. O desenvolvimento das matrizes para cada um dos elementos partindo da Eq.(7.13) está detalhada no Apêndice A.

7.3.2 Dois tubos perfurados

Para as situações em que existem dois tubos perfurados, encontram-se como exemplos os silenciadores representados na Fig. 7.3.



a) *Cross Flow expansion chamber.*

b) *Reverse flow expansion chamber.*

Fig. 7.3 – Silenciadores com dois tubos perfurados.

Limitando a zona comum entre os dois tubos e a câmara correspondente às secções perfuradas de acordo com a Fig. 7.4:

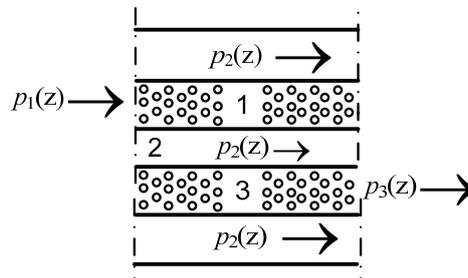


Fig. 7.4 – Zona comum entre os dois tubos e a câmara, e secção perfurada, Fonte: Munjal (1987).

as equações de continuidade e de quantidade de movimento em cada um dos tubos e na câmara podem ser escritas segundo Munjal (1987) da seguinte forma:

Equação de continuidade:

Tubo (1):

$$\rho_0 \frac{\partial u_1}{\partial z} + U_1 \frac{\partial \rho_1}{\partial z} + \frac{4}{d_1} \rho_0 u_{1,2} = - \frac{\partial \rho_1}{\partial t} \quad (7.14)$$

Tubo (3):

$$\rho_0 \frac{\partial u_3}{\partial z} + U_3 \frac{\partial \rho_3}{\partial z} - \frac{4}{d_3} \rho_0 u_{2,3} = -\frac{\partial \rho_3}{\partial t} \quad (7.15)$$

Câmara (2):

$$\rho_0 \frac{\partial u_2}{\partial z} + U_2 \frac{\partial \rho_2}{\partial z} - \frac{4d_1}{d_2^2 - d_1^2 - d_3^2} \rho_0 u_{1,2} + \frac{4d_3}{d_2^2 - d_1^2 - d_3^2} \rho_0 u_{2,3} = -\frac{\partial \rho_2}{\partial t} \quad (7.16)$$

Equação de quantidade de movimento:

Tubo (1):

$$\rho_0 \frac{Du_1}{Dt} = -\frac{\partial p_1}{\partial z} \quad (7.17)$$

Tubo (3):

$$\rho_0 \frac{Du_3}{Dt} = -\frac{\partial p_3}{\partial z} \quad (7.18)$$

Câmara (2):

$$\rho_0 \frac{Du_2}{Dt} = -\frac{\partial p_2}{\partial z} \quad (7.19)$$

E ainda as equações da velocidade radial, segundo a Eq.(7.12), entre as interfaces dos tubos 1 e 3 com a câmara 2, por:

$$u_{1,2} = \frac{p_1 - p_2}{\rho_0 a_0 \zeta_1} \quad (7.20)$$

$$u_{2,3} = \frac{p_2 - p_3}{\rho_0 a_0 \zeta_2} \quad (7.21)$$

Assumindo que o processo é isotrópico e que a dependência no tempo para todas as variáveis das Eq. (7.15) a (7.22) é harmónica, e eliminando as variáveis $\rho_1, \rho_2, u, u_1, u_2, u_3, u_{1,2}$ e $u_{2,3}$ nas respectivas equações chega-se a um sistema de três equações diferenciais:

$$\begin{aligned}
\frac{d^2 p_1}{dz} + \alpha_1 \frac{dp_1}{dz} + \alpha_2 p_1 + \alpha_3 \frac{dp_2}{dz} + \alpha_4 p_2 &= 0 \\
\alpha_5 \frac{dp_1}{dz} + \alpha_6 p_1 + \frac{d^2 p_2}{dz} + \alpha_7 \frac{dp_2}{dz} + \alpha_8 p_2 + \alpha_9 \frac{dp_3}{dz} + \alpha_{10} p_3 &= 0 \\
\alpha_{11} \frac{dp_2}{dz} + \alpha_{12} p_2 + \frac{d^2 p_3}{dz} + \alpha_{13} \frac{dp_3}{dz} + \alpha_{14} p_3 &= 0
\end{aligned}
\tag{7.22}$$

onde os coeficientes α_i , com $i=1, \dots, 14$ são apresentados no Apêndice A.

Após várias manipulações algébricas, e consideradas condições de fronteira chega-se à respectiva matriz de transferência, que permite simular acusticamente estes dois silenciadores. O desenvolvimento destas matrizes está detalhado no Apêndice A.

7.3.3 Três tubos perfurados

Para as situações em que existem três tubos perfurados, encontram-se como exemplo o silenciador representado na Fig. 7.5.

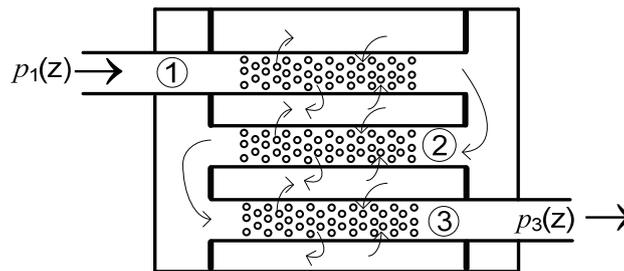


Fig. 7.5 – Silenciador com três tubos perfurados.

Limitando a zona comum entre os três tubos e a câmara correspondente às secções perfuradas de acordo com a Fig. 7.6:

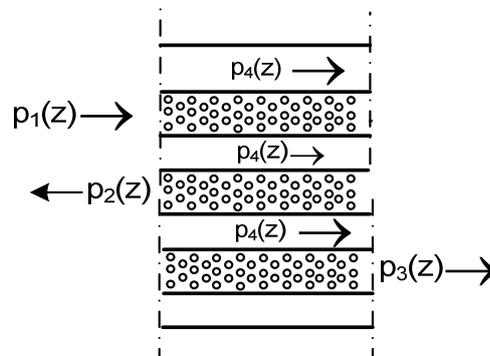


Fig. 7.6 – Zona comum entre os três tubos e a câmara, e secção perfurada.

as equações de continuidade e de quantidade de movimento em cada um dos tubos podem ser escritas segundo Selamet *et al.*(1998) da seguinte forma:

Equação de continuidade:

Tubos e câmara:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + U_i \frac{\partial \rho}{\partial z} + \rho_0 \frac{\partial u_i}{\partial z} + \rho_0 f_i = 0, \quad i = 1, 2, 3 \text{ e } 4 \quad (7.23)$$

Equação de quantidade de movimento:

Tubos e câmara:

$$\rho_0 \frac{\partial u_i}{\partial t} + \rho_0 U_i \frac{\partial u_i}{\partial z} + \frac{\partial p_i}{\partial z} = 0, \quad i = 1, 2, 3 \text{ e } 4 \quad (7.24)$$

As equações da velocidade radial, entre as interfaces dos tubos 1,2 e 3 com a câmara 4, obtém-se como:

$$u_{i,4} = \frac{p_i - p_4}{\rho_0 c \zeta_i}, \quad i = 1, 2 \text{ e } 3 \quad (7.25)$$

onde:

ρ_0 é a média temporal da densidade,

ρ corresponde à flutuação na densidade de uma partícula, assumindo ser igual em todos os tubos e câmara,

p_i corresponde à flutuação na pressão de uma partícula nos tubos e câmara, $i=1,2,3$ e 4,

$$f_i = \frac{4u_{i,4}}{d_i}, \quad i = 1, 2, 3$$

$$f_4 = -\frac{4(d_1 u_{1,4} + d_2 u_{2,4} + d_3 u_{3,4})}{d_4^2 - (d_1^2 + d_2^2 + d_3^2)}$$

Assumindo que o processo é isotrópico, e que a dependência no tempo para todas as variáveis das equações (7.23) a (7.25) é harmónica, e eliminando as variáveis $\rho, u_1, u_2, u_3, u_4, u_{1,4}, u_{2,4}, u_{3,4}$ nas respectivas equações chega-se a um sistema de quatro equações diferenciais:

$$\begin{aligned}
 \frac{d^2 p_1}{dz} + \alpha_1 \frac{dp_1}{dz} + \alpha_4 p_1 + \alpha_7 \frac{dp_4}{dz} + \alpha_{10} p_4 &= 0 \\
 \frac{d^2 p_2}{dz} + \alpha_2 \frac{dp_2}{dz} + \alpha_5 p_2 + \alpha_8 \frac{dp_4}{dz} + \alpha_{11} p_4 &= 0 \\
 \frac{d^2 p_3}{dz} + \alpha_3 \frac{dp_3}{dz} + \alpha_6 p_3 + \alpha_9 \frac{dp_4}{dz} + \alpha_{12} p_4 &= 0 \\
 \alpha_{13} p_1 + \alpha_{14} p_2 + \alpha_{15} p_3 + \frac{d^2 p_4}{dz} + \alpha_{16} p_4 &= 0
 \end{aligned}
 \tag{7.26}$$

sendo os coeficientes α_i , com $i=1,2,\dots,16$ apresentados no Apêndice B.

Após várias manipulações algébricas e considerando condições de fronteira chega-se à respectiva matriz de transferência, que permite simular acusticamente os silenciadores deste tipo. No ponto 7.3.5, o silenciador da Fig. 7.5 vai ser alvo de estudo, onde se mostrará em conjunto com o Apêndice B como chegar à matriz de transferência desejada em cada uma das variantes deste silenciador.

7.3.4 Impedância acústica de perfurações

A impedância acústica de perfurações é o parâmetro mais importante na análise aereoacústica de silenciadores com elementos perfurados. É uma função complexa de muitas variáveis físicas tais como: porosidade (assume-se que é uniforme), velocidade média do fluxo nos furos, diâmetro e espessura do tubo e, menos importante, o diâmetro dos furos. Modelar analiticamente a interacção do fluxo e das ondas acústicas através de furos muito próximos uns dos outros é uma tarefa complexa. Para contornar esta dificuldade muitas experiências foram feitas, para diferentes frequências e vários números de Reynolds do fluxo através dos furos. Desta forma, várias fórmulas empíricas foram obtidas, e segundo Munjal (1987), Sullivan (1979) fez uma revisão de toda a literatura

existente e definiu uma fórmula para o cálculo da impedância no meio estacionário e outra para o caso de haver fluxo:

Impedância das perfurações com fluxo:

$$\zeta_p = \frac{p}{\rho_0 c_0 u} = \left(0.514 \frac{d_1 M}{l \sigma} + j 0.95 k_0 (t + 0.75 d_h) \right) / \sigma \quad (7.27)$$

Impedância das perfurações para um meio estacionário:

$$\zeta_p = \left(6 \times 10^{-3} + j k_0 (t + 0.75 d_h) \right) / \sigma \quad (7.28)$$

onde:

d_1 é o diâmetro do tubo perfurado,

M é o número de Mach do fluxo médio no tubo,

l é o comprimento da perfuração,

σ é a porosidade e corresponde à percentagem de área aberta na secção perfurada do tubo,

t é a espessura do tubo,

d_h é o diâmetro dos furos.

7.3.5 Silenciador com três tubos de passagem

A configuração do silenciador da Fig. 7.7 é das mais comuns e a mais utilizada pelos construtores de sistemas de escape para veículos. Desta forma, ir-se-á estudar o efeito que tem na sua performance global a presença de extensões, a porosidade, e os tamanhos das câmaras e a razão de expansão.

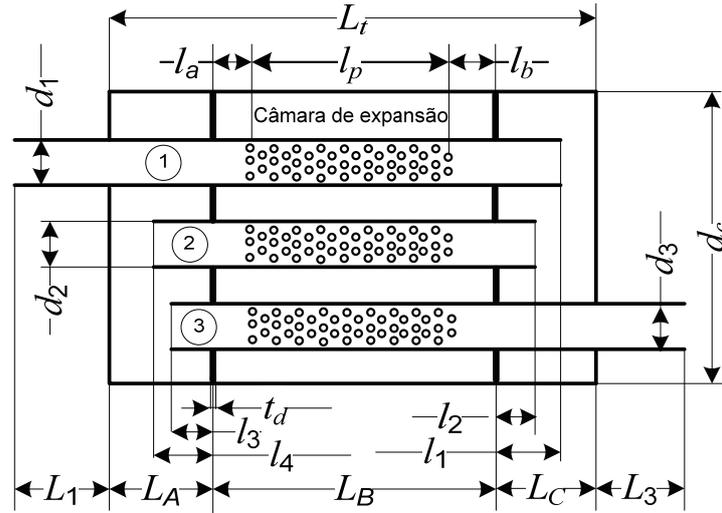


Fig. 7.7 – Silenciador com três tubos de passagem.

Em primeiro lugar vai-se encontrar a matriz de transferência correspondente às impedâncias da perfuração nos três tubos, que posteriormente será combinada com as matrizes correspondentes ao resto dos elementos, de acordo com as condições de fronteira.

Assim, escrevendo as Eq. (7.26) sobre a forma de matriz vem:

$$\begin{bmatrix} D^2 + \alpha_1 D + \alpha_4 & 0 & 0 & \alpha_7 D + \alpha_{10} \\ 0 & D^2 + \alpha_2 D + \alpha_5 & 0 & \alpha_8 D + \alpha_{11} \\ 0 & 0 & D^2 + \alpha_3 D + \alpha_6 & \alpha_9 D + \alpha_{12} \\ \alpha_{13} & \alpha_{14} & \alpha_{15} & D^2 + \alpha_{16} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (7.29)$$

onde:

$$D = \frac{d}{dz}$$

Denotando por:

$$y_1 = p'_1, y_2 = p'_2, y_3 = p'_3, y_4 = p'_4, y_5 = p_1, y_6 = p_2, y_7 = p_3 \text{ e } y_8 = p_4 \quad (7.30)$$

onde o símbolo (') significa $\frac{d}{dz}$, e substituindo a Eq.(7.30) na Eq. (7.29) obtém-se:

$$\{y'\} = [B]\{y\} \quad (7.31)$$

onde:

$$\{y\} = [y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6, y_7, y_8]^T \quad (7.32)$$

$$[B] = \begin{bmatrix} -\alpha_1 & 0 & 0 & -\alpha_7 & -\alpha_4 & 0 & 0 & -\alpha_{10} \\ 0 & -\alpha_2 & a_{23} & -\alpha_8 & 0 & -\alpha_5 & 0 & -\alpha_{11} \\ 0 & 0 & -\alpha_1 & -\alpha_9 & 0 & 0 & -\alpha_6 & -\alpha_{12} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\alpha_{13} & -\alpha_{14} & -\alpha_{15} & -\alpha_{16} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (7.33)$$

O vector $\{y\}$ pode ser escrito na forma:

$$\{y\} = [\psi]\{\Phi\} \quad (7.34)$$

onde as colunas da matriz $[\psi]$ são os vectores próprios da matriz $[B]$ e $\{\Phi\}$ um vector de transformação das variáveis principais de estado.

Substituindo a Eq.(7.34) na Eq.(7.31) obtém-se:

$$\{\Phi'\} = [\psi]^{-1} [B][\psi]\{\Phi\} \equiv [\Upsilon]\{\Phi\} \quad (7.35)$$

onde $[\Upsilon]$ é uma matriz diagonal composta pelos valores próprios (β s) da matriz $[B]$.

Substituindo a solução da Eq.(7.35),

$$\{\Phi\} = \left[c_1 e^{\beta_{1x}}, c_2 e^{\beta_{2x}}, c_3 e^{\beta_{3x}}, c_4 e^{\beta_{4x}}, c_5 e^{\beta_{5x}}, c_6 e^{\beta_{6x}}, c_7 e^{\beta_{7x}}, c_8 e^{\beta_{8x}} \right]^T \quad (7.36)$$

na Eq.(7.34) obtém-se:

$$\{y\} = [\Psi] \left[c_1 e^{\beta_{1x}}, c_2 e^{\beta_{2x}}, c_3 e^{\beta_{3x}}, c_4 e^{\beta_{4x}}, c_5 e^{\beta_{5x}}, c_6 e^{\beta_{6x}}, c_7 e^{\beta_{7x}}, c_8 e^{\beta_{8x}} \right]^T \quad (7.37)$$

Substituindo a Eq.(7.37) na Eq.(7.30), obtém-se:

$$\{p\} = [A(z)] \{c\} \quad (7.38)$$

onde:

$$\{p\} = \left[p_1, \rho_0 c_0 u_1, p_2, \rho_0 c_0 u_2, p_3, \rho_0 c_0 u_3, p_4, \rho_0 c_0 u_4 \right]^T \quad (7.39)$$

$$\{c\} = \left[c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6, c_7, c_8 \right]^T \quad (7.40)$$

$$[A(z)] = \begin{bmatrix} \frac{\psi_{51} e^{\beta_1 z}}{ik_0 + M_1 \lambda_1} & \frac{\psi_{52} e^{\beta_2 z}}{ik_0 + M_1 \lambda_2} & \dots & \frac{\psi_{58} e^{\beta_8 z}}{ik_0 + M_1 \lambda_8} \\ \frac{-\psi_{11} e^{\beta_1 z}}{ik_0 + M_2 \lambda_1} & \frac{-\psi_{12} e^{\beta_2 z}}{ik_0 + M_2 \lambda_2} & \dots & \frac{-\psi_{18} e^{\beta_8 z}}{ik_0 + M_2 \lambda_8} \\ \frac{\psi_{61} e^{\beta_1 z}}{ik_0 + M_3 \lambda_1} & \frac{\psi_{62} e^{\beta_2 z}}{ik_0 + M_3 \lambda_2} & \dots & \frac{\psi_{68} e^{\beta_8 z}}{ik_0 + M_3 \lambda_8} \\ \frac{-\psi_{21} e^{\beta_1 z}}{ik_0 + M_4 \lambda_1} & \frac{-\psi_{22} e^{\beta_2 z}}{ik_0 + M_4 \lambda_2} & \dots & \frac{-\psi_{28} e^{\beta_8 z}}{ik_0 + M_4 \lambda_8} \\ \frac{\psi_{71} e^{\beta_1 z}}{ik_0 + M_5 \lambda_1} & \frac{\psi_{72} e^{\beta_2 z}}{ik_0 + M_5 \lambda_2} & \dots & \frac{\psi_{78} e^{\beta_8 z}}{ik_0 + M_5 \lambda_8} \\ \frac{-\psi_{31} e^{\beta_1 z}}{ik_0 + M_6 \lambda_1} & \frac{-\psi_{32} e^{\beta_2 z}}{ik_0 + M_6 \lambda_2} & \dots & \frac{-\psi_{38} e^{\beta_8 z}}{ik_0 + M_6 \lambda_8} \\ \frac{\psi_{81} e^{\beta_1 z}}{ik_0 + M_7 \lambda_1} & \frac{\psi_{82} e^{\beta_2 z}}{ik_0 + M_7 \lambda_2} & \dots & \frac{\psi_{88} e^{\beta_8 z}}{ik_0 + M_7 \lambda_8} \\ \frac{-\psi_{41} e^{\beta_1 z}}{ik_0 + M_8 \lambda_1} & \frac{-\psi_{42} e^{\beta_2 z}}{ik_0 + M_8 \lambda_2} & \dots & \frac{-\psi_{48} e^{\beta_8 z}}{ik_0 + M_8 \lambda_8} \end{bmatrix} \quad (7.41)$$

Finalmente, as pressões e as velocidades em $z=0$ e $z=l$ podem ser relacionadas através da seguinte expressão:

$$\begin{Bmatrix} p_1(0) \\ \rho_0 c_0 u_1(0) \\ p_2(0) \\ \rho_0 c_0 u_2(0) \\ p_3(0) \\ \rho_0 c_0 u_3(0) \end{Bmatrix} = [R] \begin{Bmatrix} p_1(l) \\ \rho_0 c_0 u_1(l) \\ p_2(l) \\ \rho_0 c_0 u_2(l) \\ p_3(l) \\ \rho_0 c_0 u_3(l) \end{Bmatrix} \quad (7.42)$$

onde:

$$[R] = [A(0)][A(l)]^{-1}$$

A desejada matriz de transferência 2X2, que permita calcular a perda de transmissão, resulta da combinação da matriz $[R]$ com as matrizes de transferência correspondentes aos restantes elementos em conjunto com as condições de fronteira. É de registar que para este silenciador em concreto, no que diz respeito ao desenvolvimento da sequência de matrizes, podem ter-se duas situações distintas: ausência ou não de extensões. No caso em que existem extensões, a sequência de matrizes vem em função da relação de comprimentos das mesmas nas respectivas cavidades. Isto é, tem-se duas sequências diferentes por cada cavidade, de acordo com os comprimentos das extensões. O desenvolvimento de todas estas sequências e que serão usadas ao longo das simulações relacionadas com este silenciador é apresentado no Apêndice B.

Salemet *et al.* (1998) obtiveram experimentalmente a perda de transmissão para dois silenciadores baseados na configuração da Fig. 7.7, para um meio estacionário. Desta forma, os dois próximos gráficos vão permitir comparar os resultados obtidos pelo método unidimensional, usado neste trabalho, com os resultados por ele obtidos, considerando exactamente as mesmas dimensões e parâmetros por ele usados. Assim, como dimensões e parâmetros comuns, e que serão válidos para o resto das simulações salientam-se: espessura das divisórias (t_d) = 1.27 cm; espessura dos tubos (t) = 0.08 cm, velocidade do som (c_0) = 343.7 m/s e a densidade do ar (ρ) = 1.18 kg/m³.

O gráfico seguinte corresponde à situação em que não há extensões em nenhum dos tubos.

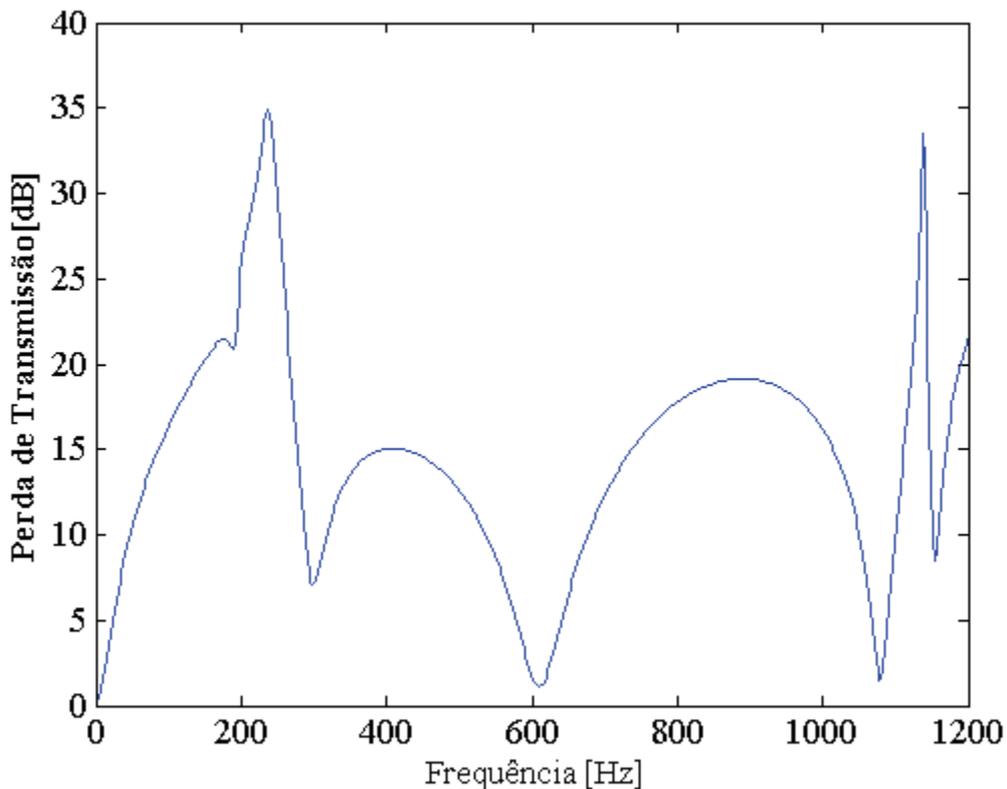


Fig. 7.8 – Perda de transmissão, para $l_p=27.4$ cm, $l_a=l_b=2.79$ cm, $L_C=15$ cm, $L_A=10.2$ cm; $d_1=d_2=d_3=4.89$ cm; $d_c=16.51$ cm; $d_h=0.234$ cm; $l_1=l_2=l_3=l_4=0$, $M=0$ e $\sigma=0.045$.

Observando os resultados obtidos e comparando-os com os experimentais verifica-se boa concordância até aproximadamente 900 Hz. Para além desta frequência modos de ordem superior ao da onda plana começam a propagar-se, limitando assim a conclusão de

resultados a partir desta frequência. Partindo da Eq.(3.43), a frequência que limita a propagação de ondas planas na câmara de expansão é de 1220 Hz, um pouco superior a 900 Hz. No entanto, este limite sofre alteração nas altas frequências, quando a velocidade do som ou a temperatura aumenta, assumindo que a velocidade do som varia proporcionalmente com a raiz quadrada da temperatura do gás (modelo de gás ideal).

A segunda configuração representada pelo gráfico seguinte corresponde à situação em que os tubos 1 e 2 têm extensões à saída.

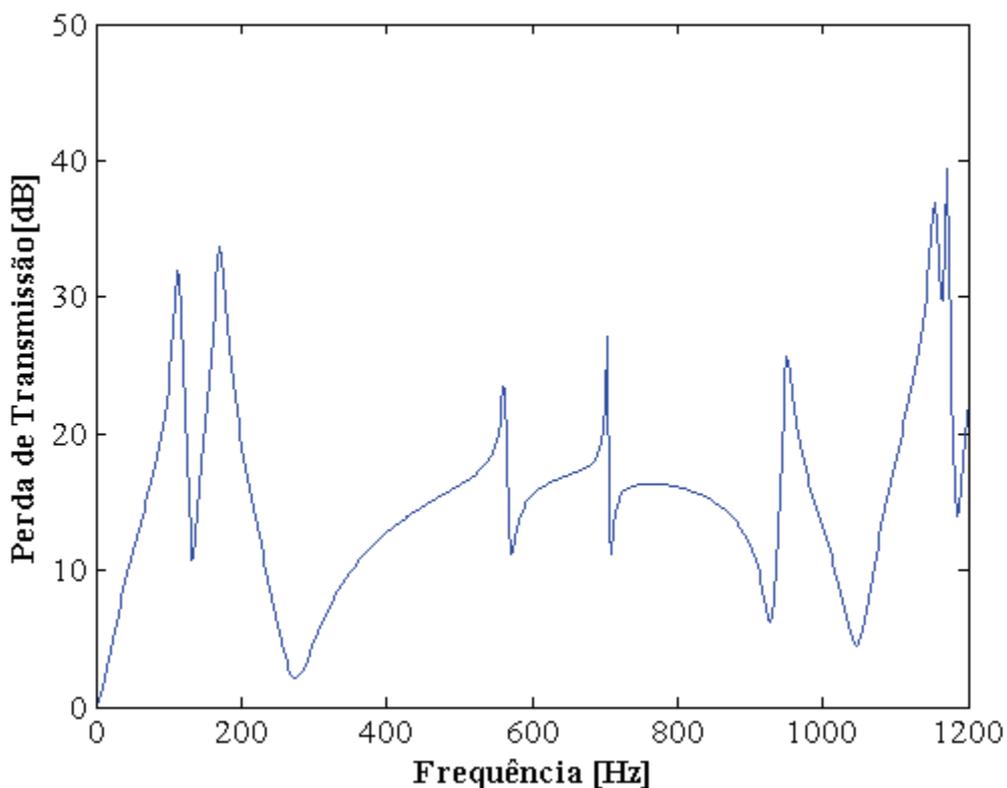


Fig. 7.9 – Perda de transmissão, para $l_p=10.5$ cm; $l_a=2,5$ cm; $l_b=5$ cm; $L_C=25$ cm; $L_A=14.8$ cm; $d_1=4.82$ cm; $d_2=4.24$ cm $d_3=4.75$ cm; $d_c=15.7$ cm; $d_n=0.249$ cm; $l_1=20.5$ cm; $l_2=l_3=0$; $l_4=11.2$ cm, $M=0$ e $\sigma=0.09$.

Observando os resultados obtidos e comparando-os com os experimentais verifica-se boa concordância até aproximadamente 500 Hz, começando a divergir ligeiramente a partir daqui até aos 900 Hz, e convergindo novamente até aos 1100 Hz. Ao contrário da situação anterior, em que há um pico de ressonância nas baixas frequências, aqui existem dois. Pode

concluir-se que no caso anterior o pico se deve à presença das cavidades de entrada e de saída, já que aproximadamente a partir dos 300 Hz o silenciador apresenta um comportamento característico de uma câmara de expansão simples, enquanto que aqui os dois picos se devem ao efeito da combinação das cavidades com as extensões. É de salientar que Selamet *et al.* (1998) obtiveram resultados experimentais para esta configuração com um silenciador de geometria exterior oval.

O gráfico seguinte permite estudar o efeito da porosidade, para os seguintes valores: 0.02, 0.045 e 0.06, assumindo-se porosidade uniforme em todos os tubos.

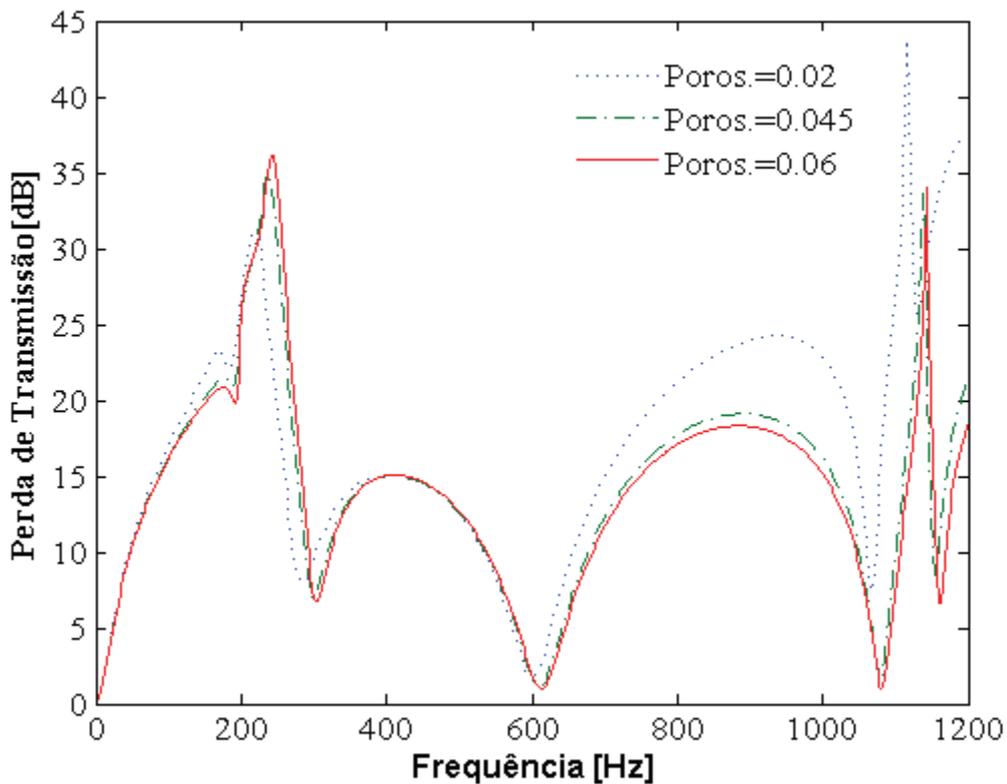


Fig. 7.10 – Perda de transmissão, para $l_p=27.4$ cm; $l_a=l_b=2.79$ cm; $L_c=15$ cm; $L_A=10.2$ cm; $d_1=d_2=d_3=4.89$ cm; $d_c=16.51$ cm; $d_h=0.234$ cm; $l_1=l_2=l_3=l_4=0$ e $M=0$.

O efeito da porosidade é desprezável até aos 600 Hz (desta frequência para a frente o comportamento acústico deve-se essencialmente à câmara de expansão). A frequências maiores que os 600 Hz, a perda de transmissão é maior quanto mais baixa for a porosidade. No entanto, a baixas frequências, em que os picos de ressonância se devem essencialmente

às cavidades de entrada e de saída, a perda de transmissão no intervalo entre os 100 Hz e os 200 Hz aumenta ligeiramente com a diminuição da porosidade, e entre o intervalo dos 200 Hz aos 300 Hz aumenta com o aumento da porosidade.

O gráfico seguinte permite estudar o efeito do comprimento das cavidades de entrada e de saída.

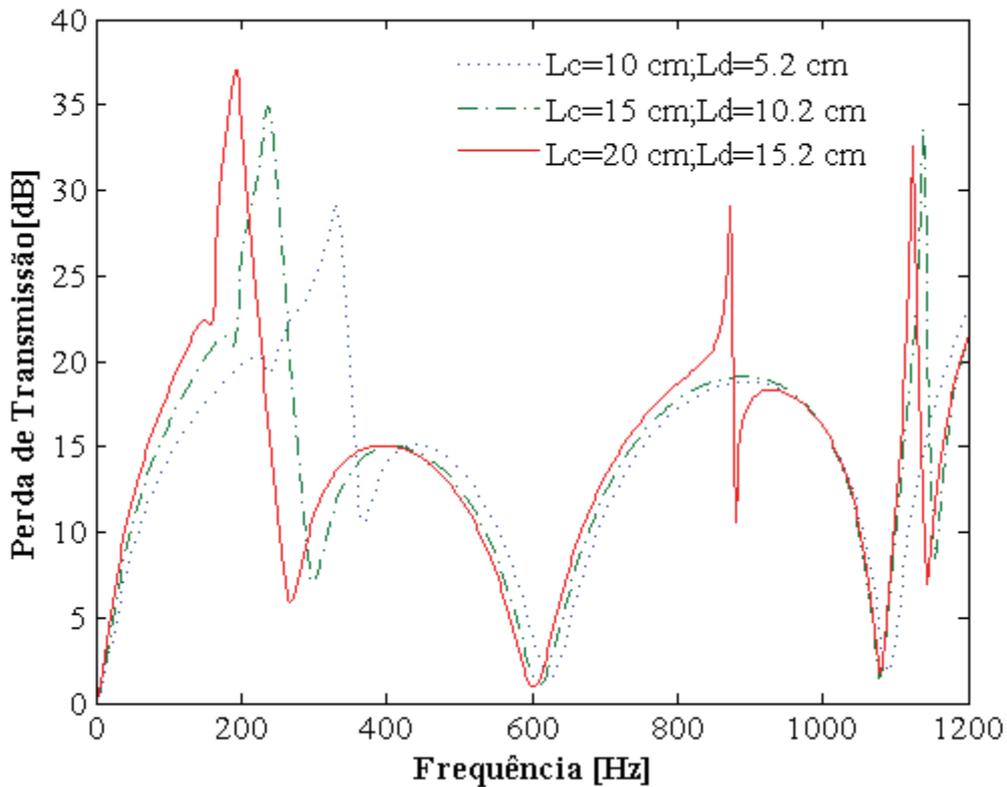


Fig. 7.11 – Perda de transmissão; $l_p=27.4$ cm; $l_a=l_b=2.79$ cm; $d_1=d_2=d_3=4.89$ cm; $d_c=16.51$ cm; $d_h=0.234$ cm; $l_1=l_2=l_3=l_4=0$, $M=0$ e $\sigma=0.045$.

Verifica-se que o aumento do comprimento das cavidades de saída e de entrada muda a frequência em que ocorre o pico de ressonância nas baixas frequências. O aumento desses comprimentos faz com que o pico aconteça a frequências mais baixas e que a sua amplitude aumente. O comportamento dos tubos perfurados em conjunto com as cavidades finais assemelha-se a um ressonador de Helmholtz, se se tiver em conta, e de acordo com a Eq.(4.80), que a frequência de ressonância de um ressonador de Helmholtz é inversamente proporcional à raiz quadrada do comprimento da cavidade de ressonância, que neste caso

são os comprimentos das cavidades de entrada e de saída. Isto explica a diminuição da frequência de ressonância quando se aumentam os comprimentos das cavidades terminais.

O gráfico seguinte permite estudar o efeito do comprimento da câmara de expansão central.

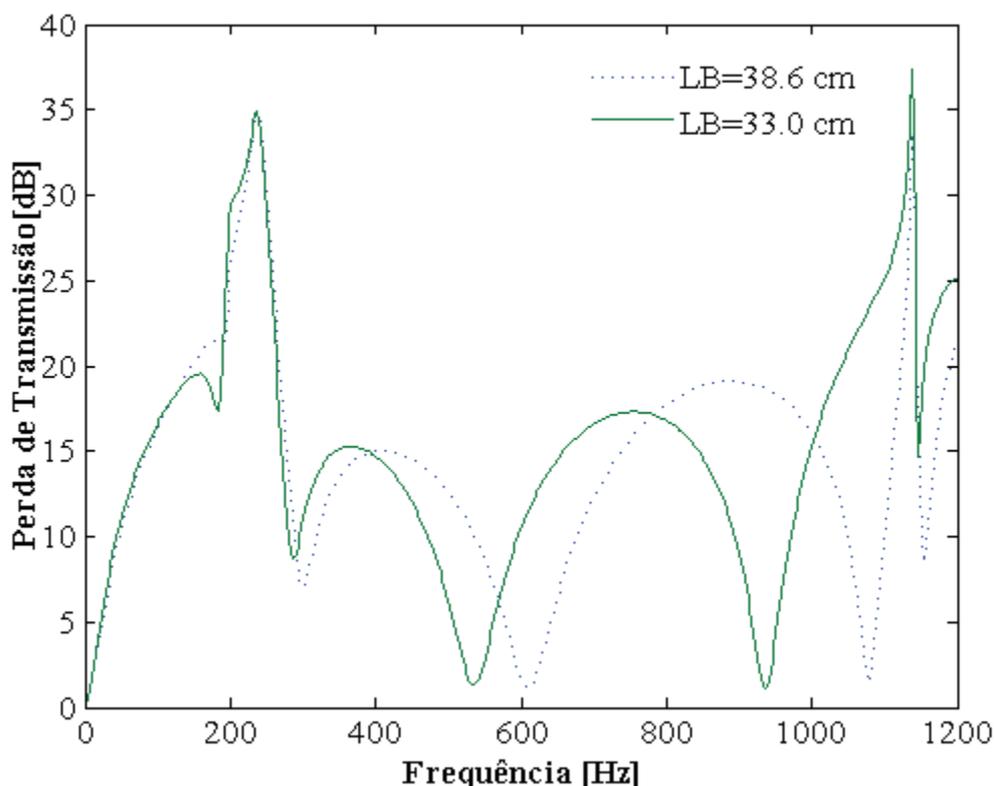


Fig. 7.12 – Perda de transmissão, para $l_a=l_b=2.79$ cm; $L_c=15$ cm; $L_D=10.2$ cm; $d_1=d_2=d_3=4.89$ cm; $d_c=16.51$ cm; $d_h=0.234$ cm; $l_1=l_2=l_3=l_4=0$, $M=0$ e $\sigma=0.045$.

A variação do comprimento da cavidade central não afecta a perda de transmissão até aproximadamente 300 Hz, onde o efeito das cavidades de entrada e de saída predomina. A partir desta frequência verifica-se que aumentando o comprimento da câmara as bandas de atenuação aumentam o seu tamanho e, conseqüentemente, há mudança das frequências de passagem. Em termos de amplitude máxima de atenuação não há grande diferença entre os dois comprimentos. Estes resultados estão de acordo com a análise que se fez à câmara de expansão simples da Fig. 6.3.

O gráfico seguinte permite estudar o efeito da razão de expansão (d_c/d_1).

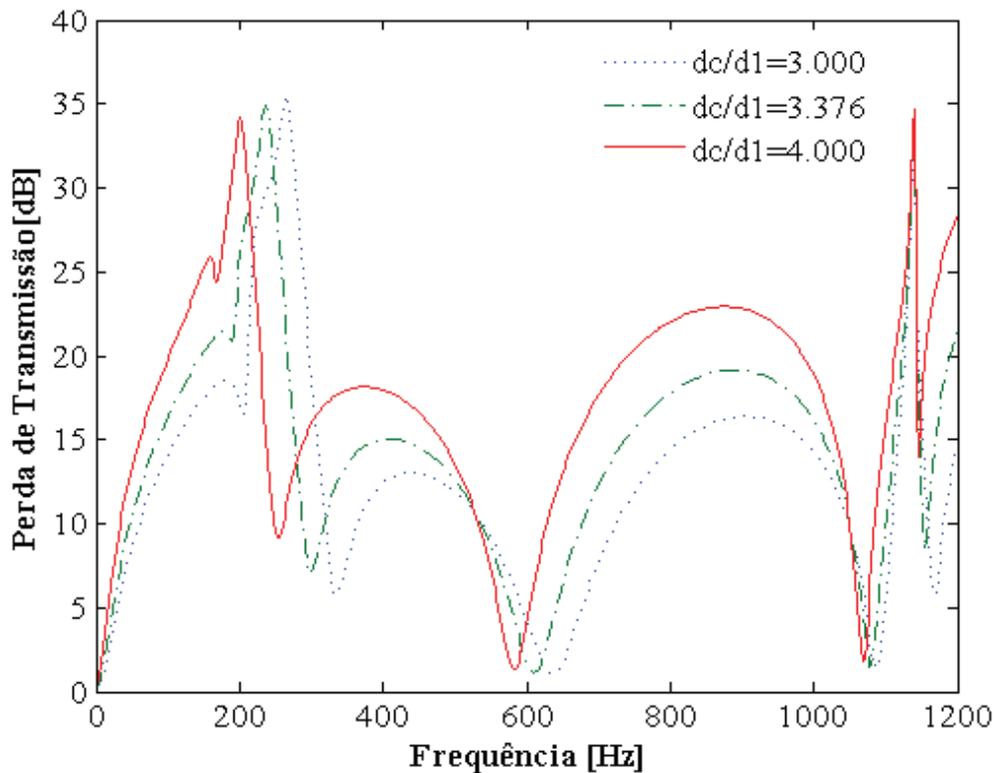


Fig. 7.13 – Perda de transmissão; $l_p=27.4$ cm; $l_a=l_b=2.79$ cm; $L_C=15$ cm, $L_D=10.2$ cm
 $d_1=d_2=d_3=4.89$ cm; $d_h=0.234$ cm; $l_1=l_2=l_3=l_4=0$, $M=0$ e $\sigma=0.045$.

Verifica-se que o aumento da razão de expansão faz aumentar a perda de transmissão na globalidade das frequências. Estes resultados estão de acordo com os obtidos quando se estudou o efeito da razão de expansão numa câmara simples, (Fig. 6.2). Como já foi referido, as cavidades de entrada e de saída afectam principalmente a perda de transmissão com a introdução de um pico de ressonância a baixas frequências, enquanto que o efeito da cavidade central predomina a partir de uma determinada frequência. Tendo em conta que a primeira banda de passagem ocorre para $c_0/2L_B=520$ Hz e as próximas a múltiplos desta, pode-se afirmar que no intervalo de frequências aproximadamente entre os 520 Hz e os 1100 Hz o silenciador tem as características de uma câmara de expansão simples. O deslocamento dos picos de ressonância no sentido das baixas frequências deve-se às cavidades de entrada e de saída em conjunto com os tubos perfurados se comportarem como um ressonador de Helmholtz, em que de acordo com a Eq.(4.80), o aumento do diâmetro da secção faz diminuir a frequência de ressonância.

Capítulo 8 Silenciadores dissipativos

8.1 Introdução

Estes silenciadores são caracterizados pelo uso de materiais absorventes, através dos quais as ondas acústicas sofrem atenuação devida principalmente a perdas térmicas e por viscosidade. O conhecimento das propriedades acústicas do material é fundamental para entender o funcionamento deste tipo de silenciadores. No entanto, devido à sua estrutura complexa, tais propriedades são normalmente obtidas experimentalmente. É de referir que a utilização destes materiais está normalmente associada ao uso de elementos perfurados, nomeadamente tubos perfurados. Daí ser estudada a sua utilização para o caso de um ressonador concêntrico.

8.2 Propriedades físicas

Existem vários materiais que são utilizados em silenciadores dissipativos. Os mais usados são a fibra de vidro e o *biosil* (nome comercial) que veio substituir a lã de rocha de basalto, cuja utilização foi proibida por conter substâncias cancerígenas. As suas propriedades físicas são normalmente facultadas pelos fabricantes do material. Uma das mais importantes é a resistência ao fluxo, ou resistividade, que é definida como sendo:

$$R = \frac{\Delta p_f}{t_s u_f} \quad (8.1)$$

onde:

Δp_f é a diferença de pressão,

u_f é a velocidade do fluxo que atravessa a amostra,

t_s é a espessura da amostra, que se considera homogénea na secção de atravessamento do fluxo.

A resistividade é principalmente dependente da orientação das camadas de fibras, do seu diâmetro e da densidade de compactação. Nichols (1947) obteve a seguinte fórmula empírica para o seu cálculo:

$$R = \gamma \frac{\rho_f^{(1+\beta)}}{t_s^\beta r_f^2} \quad (8.2)$$

onde:

γ é uma constante,

ρ_f é a densidade de compactação,

r_f é o raio das fibras,

β é um parâmetro, dado em função da orientação das camadas de fibras.

A resistividade de uma determinada camada em que as fibras ficam perpendiculares à direcção do fluxo é, em geral, maior que no caso em que as fibras são colocadas aleatoriamente.

Outra propriedade do material absorvente é a sua porosidade, definida como a razão entre o volume ocupado pelo ar e o volume total de uma dada amostra:

$$\Omega = \frac{V_{ar}}{V_t} \quad (8.3)$$

onde:

V_{ar} é o volume de ar,

V_t é o volume total,

e pode ser calculada usando a densidade de compactação (ρ_f) e a densidade do material sólido (ρ_m):

$$\Omega = 1 - \frac{\rho_f}{\rho_m} \quad (8.4)$$

Os valores da resistividade para o material usado neste trabalho, segundo Selamet *et al.* (2001), para duas densidades de compactação diferentes são apresentados na tabela seguinte:

Tabela 2 – Valores de resistividade da Fibra de vidro, Fonte: Selamet *et al.* (2001).

Densidade de compactação (kg / m^3)	Resistividade ($mks rayl / m$)
100	4.896
200	17.378

8.3 Propriedades acústicas

A absorção de ondas acústicas por parte do material absorvente, como já referido, acontece principalmente por dissipação térmica e por viscosidade, a qual pode ser expressa em termos de impedância característica complexa e número de onda complexo. Vários estudos experimentais foram realizados no sentido de encontrar as melhores expressões empíricas para o seu cálculo. No entanto segundo Selamet *et al.* (2001), as que melhores resultados apresentam foram desenvolvidas por Owens Corning (1978). Assim, para o cálculo da impedância característica e do número de onda, ambos complexos, podem usar-se respectivamente, as seguintes expressões:

$$\frac{\tilde{\rho}c}{\rho_0 c_0} = \left[1 + 0.0511(f/R)^{-0.75} \right] + i \left[-0.0768(f/R)^{-0.73} \right] \quad (8.5)$$

$$\frac{\tilde{K}}{k_0} = \left[1 + 0.0858(f/R)^{-0.70} \right] + i \left[-0.1749(f/R)^{-0.59} \right] \quad (8.6)$$

8.4 Ressonador concêntrico

O ressonador concêntrico preenchido com material absorvente (Fig. 8.1.) vai ser usado para estudarmos a aplicação de materiais dissipativos como alternativa ou como complemento aos elementos reactivos na atenuação do ruído, estudados até aqui.

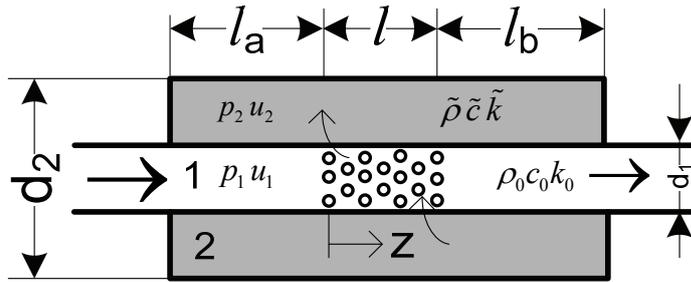


Fig. 8.1 – Ressonador concêntrico com material absorvente.

As equações de continuidade para este exemplo são dadas pelas Eq. (7.8) e (7.9), e as de quantidade de movimento pelas Eq. (7.10) e (7.11). Assim, a Eq. (7.13), para um meio estacionário, reduz-se à forma seguinte:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 p_1}{dz} + \alpha_2 p_1 + \alpha_4 p_2 &= 0 \\ \alpha_6 p_1 + \frac{d^2 p_2}{dz} + \alpha_8 p_2 &= 0 \end{aligned} \quad (8.7)$$

onde os coeficientes são dados, segundo Wang (1999) de forma a contabilizarem o efeito do material absorvente:

$$\begin{aligned} \alpha_2 &= k_0 - \frac{4ik_0}{d_1 \zeta_p} & \alpha_4 &= \frac{4ik_0}{d_1 \zeta_p} \\ \alpha_6 &= \frac{4d_1 ik_0}{(d_2^2 - d_1^2)} \frac{\tilde{\rho}}{\rho_0} \frac{ik_0}{\zeta_p} & \alpha_8 &= \tilde{k}^2 - \frac{4d_1}{(d_2^2 - d_1^2)} \frac{\tilde{\rho}}{\rho_0} \frac{ik_0}{\zeta_p} \end{aligned} \quad (8.8)$$

e ζ_p é a impedância acústica que contempla a impedância devida a perfuração mais a impedância do material absorvente. Para isso é necessário introduzir as variáveis dadas pelas Eq.(8.5) e (8.6). Assim, a Eq.(7.28) é modificada segundo Salemet *et al.* (2001) por Kirby e Cummings (1998), para:

$$\zeta_p = \left(6 \times 10^{-3} + jk_0 \left(t + 0.375d_h \left(1 + \frac{\tilde{\rho}\tilde{c}}{\rho_0 c_0} \frac{\tilde{k}}{k_0} \right) \right) \right) / \sigma \quad (8.9)$$

onde:

\tilde{k} é o número de onda complexo,

\tilde{c} é a velocidade complexa do som,

$\tilde{\rho}$ é a densidade complexa do material.

Escrevendo a Eq.(8.7) sobre a forma de matriz vem:

$$\begin{bmatrix} D^2 + \alpha_2 & \alpha_4 \\ \alpha_6 & D^2 + \alpha_8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (8.10)$$

onde:

$$D = \frac{d}{dz}$$

Denotando por:

$$y_1 = p_1, y_2 = p_2, y_3 = p_1' \text{ e } y_4 = p_2' \quad (8.11)$$

onde (') significa $\frac{d}{dz}$, e substituindo a eq. (8.11) na eq.(8.10) obtém-se :

$$\{y'\} = [B]\{y\} \quad (8.12)$$

onde:

$$\{y\} = [y_1, y_2, y_3, y_4]^T$$

$$[B] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\alpha_2 & -\alpha_4 & 0 & 0 \\ -\alpha_6 & -\alpha_8 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

A pressão acústica e a velocidade da partícula podem ser escritas de acordo com o procedimento utilizado para o silenciador estudado no capítulo anterior da seguinte forma:

$$\begin{Bmatrix} p_1(z) \\ p_2(z) \\ \rho_1 c_0 u_1(z) \\ \rho_2 c_0 u_2(z) \end{Bmatrix} = [\psi] \begin{Bmatrix} c_1 e^{\beta_1 z} \\ c_2 e^{\beta_2 z} \\ c_3 e^{\beta_3 z} \\ c_4 e^{\beta_4 z} \end{Bmatrix} \quad (8.13)$$

onde os valores de β_i com $i=1,2,3$ e 4 são os valores próprios da matriz $[B]$ e as colunas da matriz $[\psi]$ os vectores próprios da matriz $[B]$.

A solução da Eq.(8.13) pode ser escrita na seguinte forma:

$$\begin{Bmatrix} p_1(z) \\ p_2(z) \\ \rho_1 c_0 u_1(z) \\ \rho_2 c_0 u_2(z) \end{Bmatrix} = [A(z)] \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{Bmatrix} \quad (8.14)$$

onde:

$$A(z) = \begin{bmatrix} \psi_{1,1} e^{\beta_1 z} & \dots & \psi_{1,4} e^{\beta_4 z} \\ \psi_{2,1} e^{\beta_1 z} & \dots & \psi_{2,4} e^{\beta_4 z} \\ -\frac{\psi_{3,1} e^{\beta_1 z}}{ik_0} & \dots & -\frac{\psi_{3,4} e^{\beta_4 z}}{ik_0} \\ -\frac{\psi_{4,1} e^{\beta_1 z}}{i\tilde{k}} & \dots & -\frac{\psi_{4,4} e^{\beta_4 z}}{i\tilde{k}} \end{bmatrix}$$

segundo Wang (1999).

Finalmente, as pressões e as velocidades em $z=0$ e $z=l$ podem ser relacionadas através seguinte expressão:

$$\begin{Bmatrix} p_1(0) \\ p_2(0) \\ \rho_1 c_0 u_1(0) \\ \rho_2 c_0 u_2(0) \end{Bmatrix} = [R] \begin{Bmatrix} p_1(l) \\ p_2(l) \\ \rho_1 c_0 u_1(l) \\ \rho_2 c_0 u_2(l) \end{Bmatrix} \quad (8.15)$$

onde: $[R] = [A(0)][A(l)]^{-1}$

Partindo da matriz 4X4 $[R]$, e de duas condições de fronteira:

$$Z_2(0) = \frac{p_2(0)}{-u_2(0)} = -j\tilde{\rho}\tilde{c} \cot(\tilde{k}l_a) \quad (8.16)$$

$$Z_2(l) = \frac{p_2(l)}{u_2(l)} = -j\tilde{\rho}\tilde{c} \cot(\tilde{k}l_b), \quad (8.17)$$

está-se em condições de obter a perda de transmissão do ressonador concêntrico.

A matriz de transferência final 2X2 que relacionada as variáveis de entrada e de saída é dada na seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} p_1(0) \\ \rho_0 c_0 u_1(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1(l) \\ \rho_0 c_0 u_1(l) \end{bmatrix} \quad (8.18)$$

onde os seus coeficientes são dados segundo Munjal (1987) e Wang (1999), pela Eq. (A.11-Apêndice A).

Está-se assim em condições de obter a perda de transmissão de um ressonador concêntrico, dada pela seguinte fórmula segundo Salemet *et al.* (2001):

$$TL = 20 \log_{10} \left(\frac{1}{2} |T_{11} + T_{12} + T_{21} + T_{22}| \right) \quad (8.19)$$

Vários estudos já foram publicados no que diz respeito a ressonadores concêntricos. No entanto, Salemet *et al.* (2001), no seu estudo para um meio estacionário, utilizaram vários métodos e compararam-nos com resultados experimentais. Daí utilizar-se as dimensões e parâmetros por eles considerados, para poder comparar resultados. Assim, como dimensões válidas para todas as simulações do ressonador concêntrico representado na Fig. 8.1 consideram-se: $l_a=0$; $l_b=0$; $l=25.72$ cm; $d_1=4.9$ cm; $d_2=16.44$ cm, $d_h=0.249$ cm e $t=0.09$.

O gráfico seguinte compara a perda de transmissão para dois valores de porosidade do tubo central, na ausência de material absorvente:

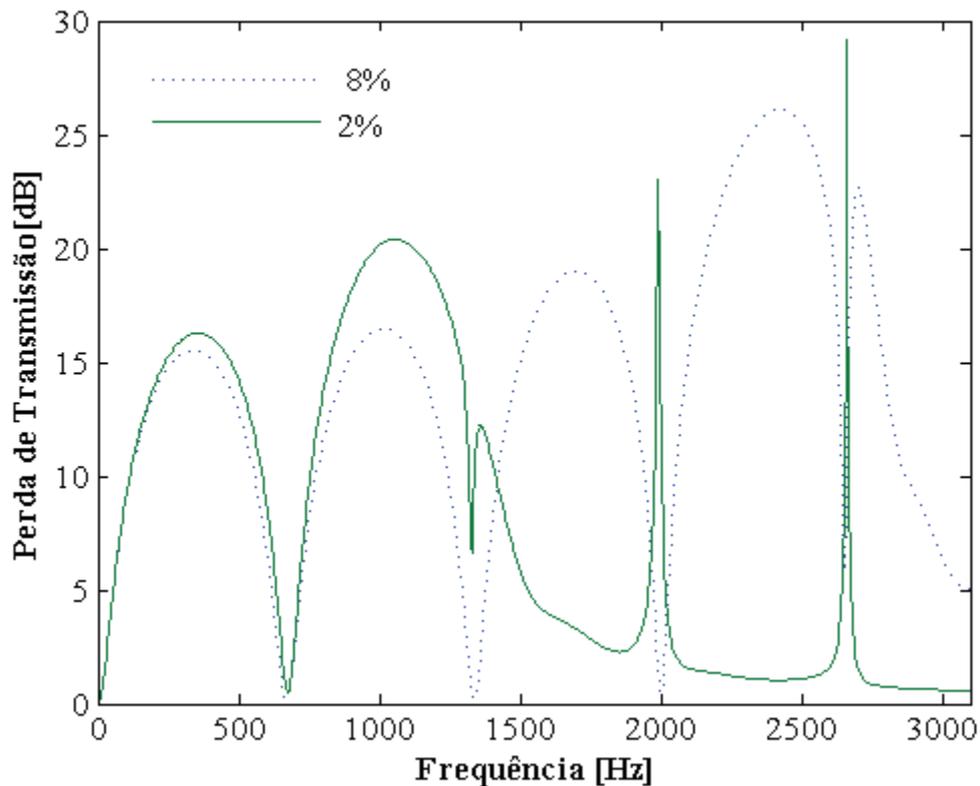


Fig. 8.2 – Efeito da porosidade num ressonador concêntrico.

Comparando os resultados obtidos com os resultados experimentais de Salemet *et al.* (2001), pode concluir-se que em ambos os casos há convergência na gama das baixas frequências. No caso em que a porosidade é de 8% verificam-se que os resultados começam a divergir a partir dos 1500 Hz, divergindo completamente a partir dos 2000 Hz. Enquanto que para o caso em que há apenas 2% de porosidade os resultados divergem no

intervalo de frequências entre os 1350 Hz e os 1900 Hz, convergindo nas restantes frequências, desprezando os 2 picos a 2000 Hz e a 2650 Hz. Na globalidade, o aumento da porosidade faz baixar a perda de transmissão na gama das baixas frequências, sendo mais evidente no intervalo de frequências entre os 700 Hz e os 1350 Hz. Segundo os resultados experimentais obtidos por Selamet *et al.* (2001), no caso de maior porosidade, a perda de transmissão não é afectada a partir dos 2500 Hz, enquanto que no caso de menor porosidade, isso verifica-se a partir dos 1500 Hz.

O gráfico seguinte compara a perda de transmissão para o caso em que a câmara do ressonador é preenchida com fibra de vidro com duas densidades de compactação diferentes, 100 e 200 g/l, sendo a porosidade do tubo central de 2%.

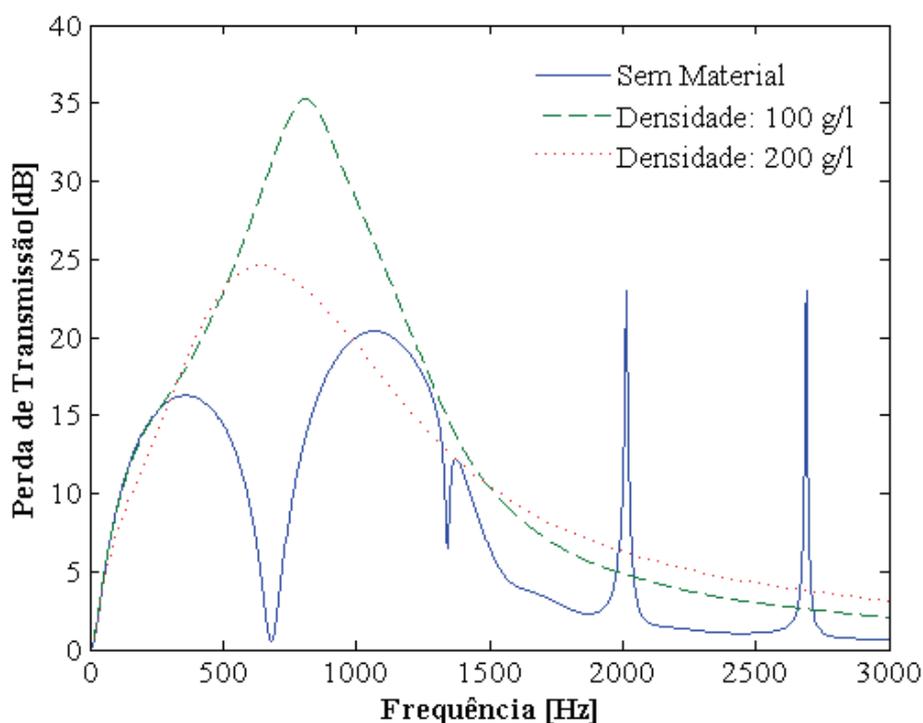


Fig. 8.3 – Efeito da densidade do material num ressonador concêntrico, $\sigma=0.02$.

Observando o gráfico verifica-se que a adição de material faz aumentar significativamente a perda de transmissão em ambas as situações a partir aproximadamente dos 300 Hz, sendo que esse aumento é mais significativo no caso de menor densidade até aproximadamente 1500 Hz. A partir desta frequência, o ressonador com material de maior densidade tem

ligeiramente maior perda de transmissão. Na situação de ausência de material, o ressonador até aproximadamente 1400 Hz tem um comportamento característico de uma câmara simples de expansão, sendo que a banda de passagem a aproximadamente 700 Hz é substituída por um pico de atenuação com a adição de material. Na gama das altas frequências, a adição de material para uma porosidade de 2% aumenta apenas ligeiramente a perda de transmissão. Comparando estes resultados com os obtidos por Selamet *et al.* (2001), verifica-se boa concordância para ambas as densidades e em toda a gama de frequências.

O gráfico seguinte compara a perda de transmissão para o caso em que a câmara do ressonador é preenchida com material absorvente com duas densidades de compactação diferentes, 100 e 200 g/l, sendo a porosidade do tubo central de 8%.

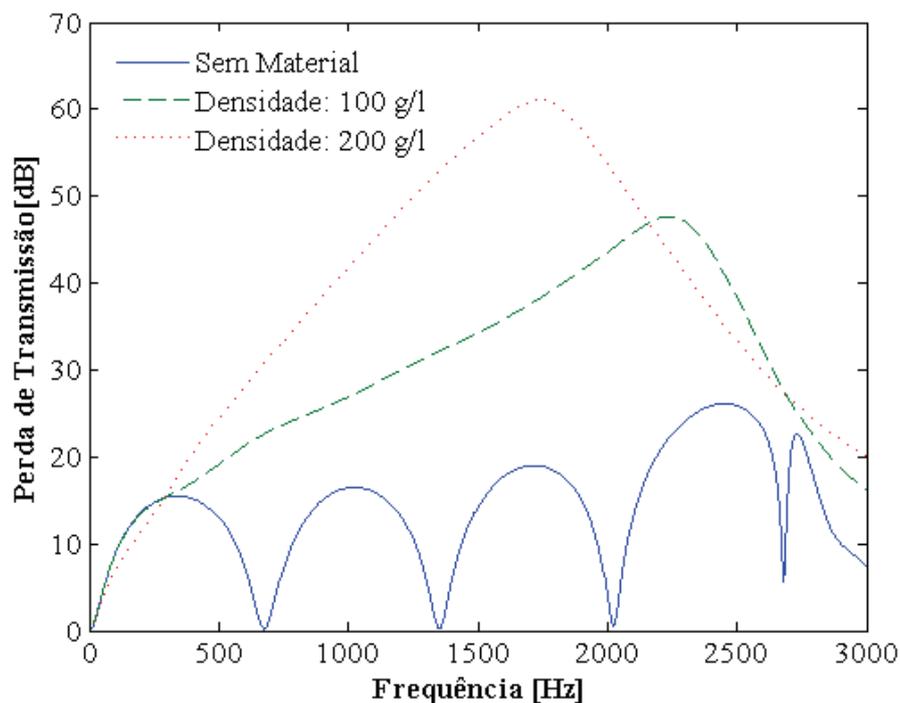


Fig. 8.4 – Efeito da densidade do material num ressonador concêntrico, $\sigma=0.08$.

Verifica-se que a adição de material faz aumentar significativamente a perda de transmissão em ambas as situações, a partir aproximadamente dos 300 Hz. No entanto, ao contrário do caso anterior, para uma porosidade de 8% verifica-se um aumento mais significativo no caso de maior densidade. Contudo, quando comparados estes resultados

com experimentais, verifica-se boa concordância apenas no caso de maior densidade até aproximadamente 1100 Hz e no caso de menor densidade até aproximadamente 1600 Hz. Para uma porosidade de 8% a adição de material absorvente aumenta significativamente a perda de transmissão, na gama das altas frequências ao contrário do caso anterior. Pode concluir-se que é necessária uma boa combinação entre os valores da porosidade do tubo perfurado e da densidade de compactação do material de forma a obter uma boa performance acústica do silenciador.

Capítulo 9 Procedimento para simulação da perda de transmissão

9.1 Introdução

O desenvolvimento de sistemas de escape, nomeadamente de silenciadores, a nível dimensional é imposto pelo construtor do veículo. Isto é, o sistema de escape é dos últimos componentes a ser desenvolvido, daí ter que se adaptar à configuração do chassis do veículo, o que muitas das vezes dificulta o seu desenvolvimento. Por outro lado, o sistema de escape, está directamente relacionado com o rendimento do motor, daí o construtor do motor impor um limite máximo para a perda de carga introduzida pelo sistema de escape de forma a garantir o seu bom funcionamento. A nível de emissão de ruído, os limites são impostos pela lei em vigor, que no caso de veículos ligeiros é de 74 dB. Desta forma, o dimensionamento de sistemas de escape, não contabilizando aspectos a nível de vibração, terá que ser ajustado a nível dimensional ao espaço destinado à sua colocação e obedecer aos limites de perda de carga e emissão sonora. A fase inicial de projecto, no que respeita aos silenciadores, normalmente começa por um protótipo com uma configuração interna baseada noutras já existentes, onde a experiência da equipa de desenvolvimento tem grande relevância. Já que os pacotes de software comercial existentes apenas permitem simular uma determinada configuração, e não fazem propriamente dimensionamento. No entanto, o facto de se poder simular um determinado protótipo ou o resultado de alguma alteração feita sobre o sistema de escape, elimina a realização dos protótipos físicos e a realização de testes experimentais em vão, reduzindo, assim, custos e tempo de projecto.

9.2 Procedimento

Os silenciadores, no caso da sua geometria exterior, podem ser ovais, circulares, ou terem uma geometria complexa, normalmente estampada. No entanto, o seu interior é constituído na sua maioria por elementos tubulares, que podem ser fechados do lado esquerdo ou direito, abertos dos dois lados, e ainda perfurados (Fig.10.1).

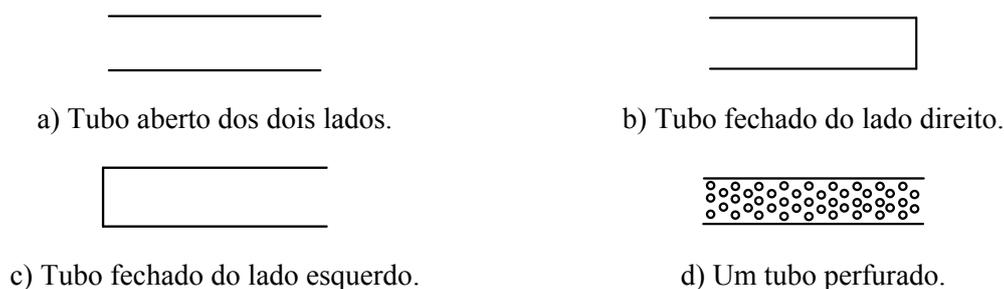


Fig.10.1 – Elementos tubulares básicos de um silenciador.

Ao iniciar o projecto, na selecção da configuração de partida cola-se a questão de saber qual o volume mínimo do silenciador ou silenciadores, isto no caso do sistema necessitar de mais que um. Jian Pang, *et al.* (2003) propõem que o volume total do conjunto de silenciadores deve ser maior ou igual a 10 vezes a cilindrada do motor. Seleccionado o primeiro protótipo, há necessidade de realizar testes experimentais, se possível com o veículo ou num banco de ensaios, no sentido de se conhecer o espectro dos níveis de ruído emitidos ao longo das frequências de interesse. Depois desta fase, o facto de se poder simular qualquer alteração, antes propriamente de realizar novamente ensaios experimentais é de extrema importância.

Neste sentido, usando o método das matrizes de transferência descrito no Capítulo 5, o primeiro passo será encontrar a sequência correcta de elementos simples e as respectivas matrizes de transferência, de acordo com o percurso executado pelos gases, e classificá-los de acordo com o tipo de impedância que impõem no sistema. Sendo conhecida a sequência de matrizes de transferência, pode-se criar um algoritmo que permita simular acusticamente o silenciador. De forma a facilitar a visualização e distribuição de variáveis, principalmente dimensionais da configuração que se está a simular, pode criar-se uma interface gráfica, através da qual um utilizador menos experiente, a nível de programação, pode fazer várias alterações e visualizar os resultado sem necessitar de alterações na

ferramenta de cálculo base. O contrário seria pouco prático, e poderia levar à introdução de erros na simulação, dado que a atribuição ou substituição de valores na variável errada facilmente poderia acontecer.

9.3 Interface gráfica

Para criar a interface gráfica usou-se o Visual Basic, pertencente ao Visual Studio 2005. Os valores são introduzidos na interface, que através da tecnologia Microsoft COM (*Component Object Model*) são enviados para o Matlab R14, que os processa utilizando o algoritmo desenvolvido.

A interface gráfica criada permite simular a perda de transmissão do ressonador concêntrico (Fig. 8.1), do silenciador com três tubos de passagem (Fig. 7.7) e um novo derivado deste último, com uma configuração ligeiramente diferente. A interface tem como opções iniciais a definição das unidades de trabalho, e se se quer executar a simulação considerando escoamento dos gases ou em meio estacionário. Permite gravar as várias simulações executadas e comparar os resultados, antes e depois de se terem feito alterações. No entanto, apenas se vai apresentar o conjunto de janelas com as diferentes configurações, onde são introduzidos os valores das diferentes variáveis.

A imagem seguinte corresponde à configuração do ressonador concêntrico:

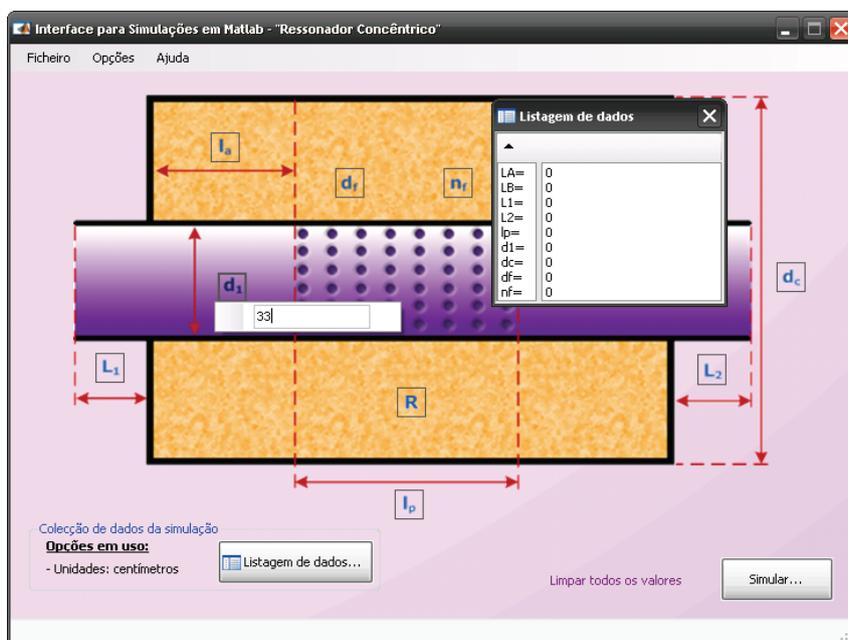


Fig. 9.1 – Configuração do ressonador concêntrico na interface.

Para introdução dos dados é necessário pressionar com o botão do rato em cima do campo da variável, abrindo uma janela para introdução do respectivo valor, conforme exemplo na figura. Depois de todos os campos preenchidos, pode-se dar ordem de simulação. É de registar que a variável R , na interface correspondente ao valor da resistividade do material absorvente, e que se lhe for atribuído zero equivale a executar a simulação na ausência de material absorvente. Em qualquer momento pode-se visualizar a listagem de valores introduzidos.

A imagem seguinte corresponde à configuração do silenciador com três tubos de passagem:

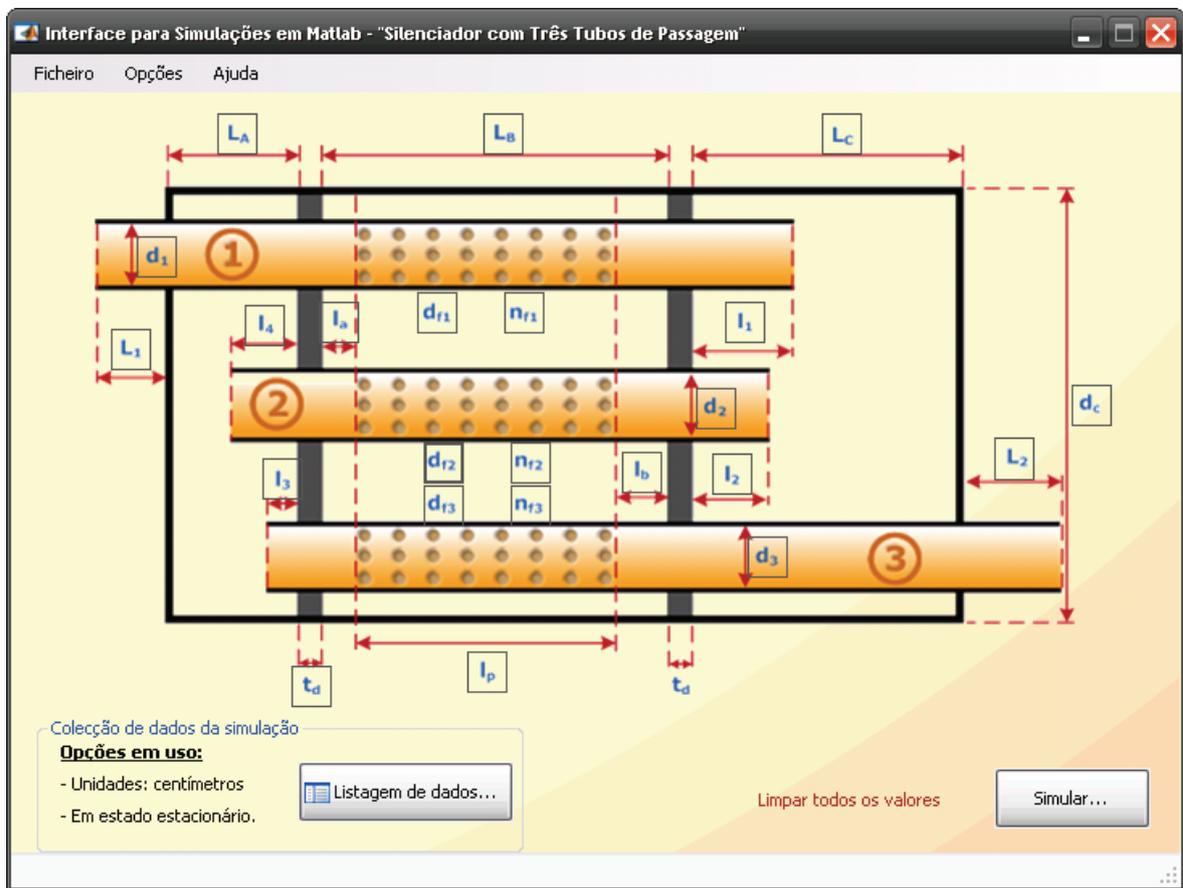


Fig. 9.2 – Configuração do silenciador com três tubos de passagem na interface.

De igual modo, preenchendo todos os campos, pode dar-se ordem para simulação.

Com o objectivo de melhorar a performance acústica deste silenciador, adicionou-se mais uma cavidade na parte final, conforme imagem abaixo:

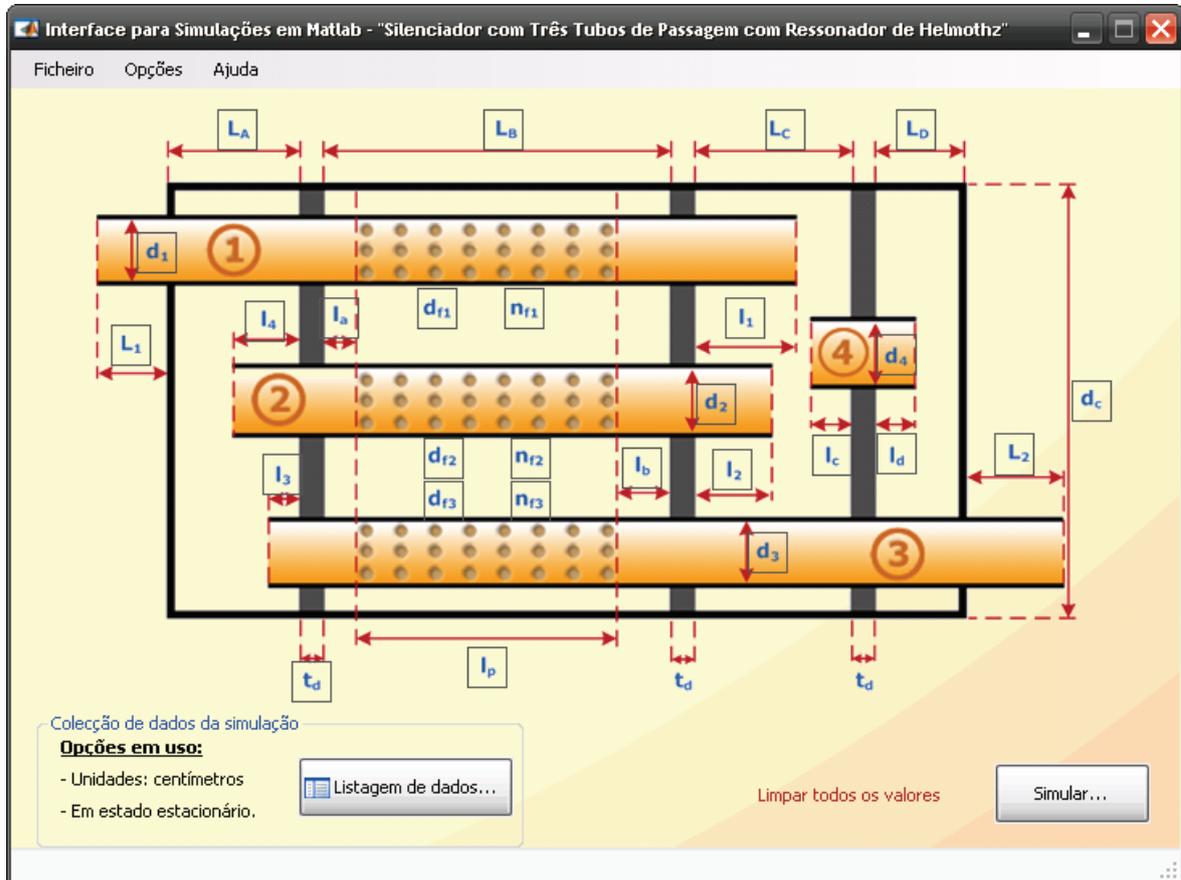


Fig. 9.3 – Configuração do silenciador com três tubos e com um ressonador de Helmholtz.

O conjunto composto pela nova cavidade e o tubo de comunicação funcionam como um ressonador de Helmholtz. As suas dimensões podem ser escolhidas de forma a que a cavidade entre em ressonância numa determinada frequência. No entanto, como já foi referido, estes ressonadores são aplicados para atenuar o ruído na gama das baixas frequências.

O gráfico seguinte compara a perda de transmissão para a situação do silenciador de três tubos de passagem da Fig. 9.2 sem extensões com a nova configuração da Fig. 9.3, em que apenas o tubo adicionado tem extensões:

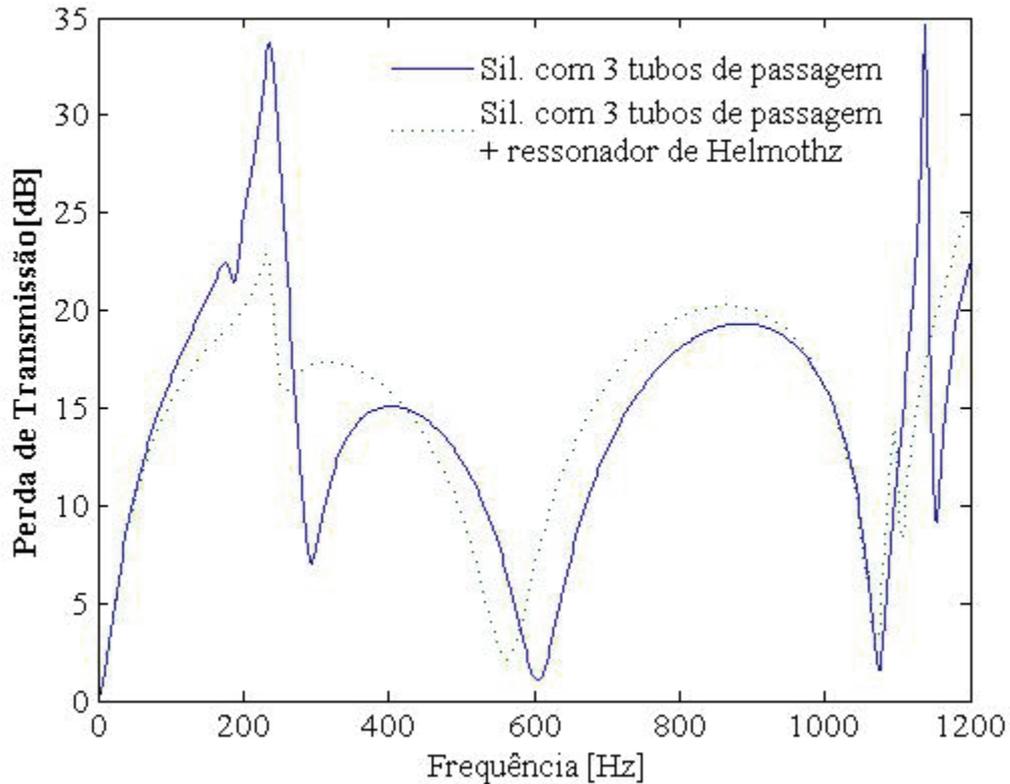


Fig. 9.4 – Efeito da adição de um ressonador de Helmholtz no silenciador de 3 tubos de passagem.

As dimensões da cavidade L_D e a das extensões do tubo de comunicação, l_c e l_d , foram escolhidas de forma a que a cavidade entre em ressonância a aproximadamente 300 Hz. Se se analisar o gráfico, verifica-se que a essa frequência houve um aumento de perda de transmissão significativo. No entanto, a amplitude do pico de ressonância a aproximadamente 200 Hz diminuiu.

Capítulo 10 **Conclusões**

Os resultados obtidos através da análise unidimensional apresentada, baseada no método das matrizes de transferência que puderam ser comparados com resultados experimentais realizados por outros investigadores, permitem concluir que este método apresenta resultados satisfatórios nas baixas e médias frequências. Há uma divergência significativa nas altas frequências, onde predomina a propagação de modos superiores aos da onda plana. Esta é a principal desvantagem deste método quando comparado com outros, como por exemplo o método dos elementos finitos ou o método dos elementos de fronteira. Contudo, uma análise desta natureza será uma mais valia na fase de projecto de um sistema de escape, já que os resultados obtidos permitirão convergir mais rapidamente para a solução final do silenciador que garanta níveis de ruído dentro dos limites estabelecidos por lei. Nomeadamente, através da análise da perda de transmissão imposta pelo conjunto de filtros que constituem o silenciador, sendo possível identificar as frequências onde ele é menos eficiente. De seguida, podem ser feitas diferentes alterações às variáveis da configuração existente, assim como adicionar ou remover elementos, no sentido de procurar melhorar a eficiência do silenciador nessas frequências, calculando novamente a perda de transmissão. Desta forma não há necessidade de se realizarem testes experimentais prévios, para se conhecer o resultado das alterações feitas no sentido de se melhorar a performance acústica do silenciador.

Este trabalho focalizou-se no estudo de silenciadores reactivos. No entanto, da análise efectuada a silenciadores dissipativos, que se resumiu ao estudo de um ressonador concêntrico em que o tubo central perfurado é envolvido em material absorvente, comprova-se que, de facto, são mais eficientes nas altas frequências em comparação com os silenciadores reactivos. Contudo, verifica-se que é necessária uma boa combinação entre os valores da porosidade do tubo perfurado e entre a densidade de compactação do material utilizado para uma boa performance acústica de tais sistemas.

Em relação aos silenciadores reactivos, os elementos acústicos considerados foram apenas circulares, sendo esta a forma da maioria dos elementos que constituem o interior dos silenciadores comuns. No entanto, a geometria exterior dos silenciadores é, em muitos dos

casos, oval. O método das matrizes de transferência não contempla a forma dos elementos acústicos, e apenas considera a área da sua secção transversal, limitando desta forma o estudo do efeito da geometria exterior do silenciador. Entre os elementos perfurados, para além de tubos, por vezes as divisórias também são perfuradas, permitindo a comunicação entre cavidades, e funcionando também como filtros acústicos. Este tipo de elementos não fez parte do âmbito deste trabalho, mas será interessante encontrar as matrizes de transferência que traduzam a impedância devida a estes elementos, de forma a aumentar o campo de aplicação do método das matrizes de transferência. Outro aspecto pouco estudado foi o efeito da presença de fluxo de gases na análise acústica. Por estes motivos como sugestões para outros trabalhos futuros podem indicar-se as seguintes direcções:

- Estudar o efeito da geometria exterior do silenciador, utilizando outros métodos de análise,
- Obter as matrizes de transferência que traduzam a impedância devida à presença de divisórias perfuradas no interior do silenciador,
- Criar uma interface gráfica, composta por uma biblioteca de elementos acústicos simples, permitindo criar e alterar configurações de silenciadores de uma forma rápida, expedita e segura,
- Aprofundar a análise e o estudo dos silenciadores dissipativos,
- Analisar os silenciadores considerando o escoamento dos gases.

Bibliografia

Beranek, Leo L., 1993, *Acoustics*, Acoustical Society of America.

Blair, G. P., Goulburn, J. R., 1969, An unsteady flow analysis of exhaust systems for multicylinder automobile engines, Society of Automotive Engineers, Inc., Mid-Year Meeting, Chicago, Ill., May 19-23, 690469.

Blair, G. P., Mackey D. O., Ashe, M. C. and Chatfield, G. F., 2001, Exhaust tuning on four-stroke engine; Experimentation and simulation, Small Engine Technology Conference and Exhibition, Pisa, Italy, November 28-30, SAE Paper 2001-01-1797/ 4218.

Brand, J., Garcia, P. and Wiemeler, D., 2004, Surface radiated noise of exhaust systems – Calculation and optimization with CAE, SAE World Congress, Detroit, Michigan, March 8-11, SAE Paper 2004-01-0407.

Davis, Jr., Don D., Stokes, G. M., Moore, D., Stevens, Jr., G. L., 1954, Theoretical and experimental investigation of mufflers with comments on engine-exhaust muffler design, Report 1192, National Advisory Committee for Aeronautics.

Fu, Y., Chuang, C. H., Li, G. and Yang, R. J., 2004, Reliability-based design optimization of a vehicle exhaust system, SAE World Congress, Detroit, Michigan, March 8-11, SAE Paper 2004-01-1128.

Fuhrmann, B., Garcia, P. and Wiemeler, D., 2006, Exhaust system sounds, SAE World Congress, Detroit, Michigan, April 3-6, SAE Paper 2006-01-1372.

Gerges, S N. Y., Heidrich, R. M. e Marques, E. R.C., 1992, Ruído: Fundamentos e Controle, Laboratório de Acústica e Vibrações, Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Santa Catarina.

Gerges, S. N. Y., Jordan, R., Thieme, F. A., Coelho, J. L., Arenas, J. P., 2005, Muffler modeling by transfer matrix method and experimental verification, *J. of the Braz. Soc. of Mech. Sci. & Engineering*, Vol. n.º 2, 132-140

Harris, C. M., *Handbook of Noise Control*, 1979, McGraw-Hill Book Company, New York.

Jawad, B., Biggs, C. and Klein, B., 2002, Exhaust system design for a four cylinder engine, Motorsports Engineering Conference & Exhibition Indianapolis, Indiana, December 2-5, SAE Paper 2002-01-3316.

Jennings, A., 1977, *Matrix Computation for Engineers and Scientists*, John Wiley & Sons, New York.

Ji, Z. L., Selamet, A., 2000, Boundary element analysis of three-pass perforated duct mufflers, Preliminary version presented at INTER-NOISE 99, December 6-8, 1999, Fort Lauderdale, Florida.

Ji, Z.L., 2005, Acoustic attenuation performance analysis of multi-chamber reactive silencers, *Journal of Sound and Vibration*, 283, 459-466.

Jones, A. D., Exhaust noise modelling for muffler design”, National Exhaust Industries Pty. Ltd., Now: Weapons Systems Research Laboratory, South Australia.

Kar, T., Munjal, M.L., Generalized analysis of a muffler with any number of interacting ducts, Facility for Research in Technical Acoustics, Department of Mechanical Engineering, Indian Institute of Science, Bangalore-560 012, India

Lakshmikantha, M. and Kec, M., 2002, Optimization of exhaust systems”, SAE World Congress, Detroit, Michigan, March 4-7, SAE Paper 2002-01-0059.

Lee, I. J., Selamet, A., Huff, N. T., 2003, Acoustic Characteristics of coupled dissipative and reactive silencers, Society of Automotive Engineers.

Lee, I. J., Selamet, A., Huff, N. T., and Hrdlicka, M., 2005, Design of an hybrid exhaust silencing system for a production engine, SAE International, Paper 2005-01-2349.

Lee, I., Selamet, A., Huff, N. T., 2006, Acoustic impedance of perforations in contact with fibrous material, Journal of the Acoustical Society of America, Vol. 1198, 2785-2797.

Massey, S., Williamson, P. S. and Chuter, R. J., 2002, Modelling exhaust systems using one-dimensional methods, SAE World Congress, Detroit, Michigan, March 4-7, SAE Paper 2002-01-0005.

Munjal, M. L., 1987, *Acoustics of Ducts and Mufflers*, John Wiley and Sons, New York.

Nichols, R. H., 1947, Flow-resistance characteristics of fibrous acoustical materials, Journal of the Acoustical Society of America, 19, 866-871.

Pang, J., Kurrle, P., Qatu, M., Rebandt, R. and Malkowski, R., 2003, Attribute analysis and criteria for automotive exhaust systems, SAE World Congress, Detroit, Michigan, March 3-6, SAE Paper 2003-01-0221.

Panigrahi, S. N., Munjal, M. L., 2005, Plane wave propagation in generalized multiply connected acoustic filters Journal of the Acoustical Society of America., Vol. 118, n.º 5, 2860-2868.

Panigrahi, S. N., Munjal, M. L., 2005, Plane wave propagation in generalized multiplyn connected acoustic filters”, Facility for Research in Technical Acoustics.

Rossing, T. D. and Fletcher, N. H., 1994, Principles of Vibration and Sound, Springer-Verlag, New York.

Salemet, A., Easwaran, V., Falkowski, A.G., 1999, Three-pass mufflers with uniform perforations, Journal of the Acoustical Society of America, Vol. 105, n.º 3, 1548-1562.

Selamet, A. and Ji, Z. L., 1999, Acoustic attenuation performance of circular expansion chambers with extended inlet/ outlet, Journal of Sound and Vibration, Vol. 223, n.º2, 197-212.

Selamet, A. and Lee, I., 2006, Acoustic impedance of perforations in contact with fibrous material, Journal of the Acoustical Society of America, Vol. 119, n.º5, 2785-2797.

Selamet, A., Denia, F.D., Besa, A.J., 2003, Acoustic behaviour of circular dual-chamber mufflers, Journal of Sound and Vibration, 265, 967-985.

Selamet, A., Lee, I. J., Huff, N. T, 2003, Acoustic attenuation of hybrid silencers, Journal of Sound and Vibration, 262, 509-527.

Selamet, A., Lee, I. J., Ji, Z. L., and Huff, N. T., 2001, Acoustic attenuation performance of perforated absorbing silencers, SAE Noise and Vibration Conference and Exposition, April 30-May 3, Traverse City , MI, SAE Paper 2001-01-1435.

Seybert, A.F., Tao, Z, 2001, A review of current techniques for measuring muffler transmission loss, Society of Automotive Engineers.

Smith, P. H. and Morrison, J. C., 1971, The scientific design of exhaust and intake systems, 3rd Edition, Robert Bentley Automotive Publishing, England, (Reprinted 1996).

Wang, C.-N., 1995, A Numerical scheme for the analysis of perforated intruding tube muffler components, *Applied Acoustics*, 44, 275-286.

Wang, C.-N., 1999, Numerical decoupling analysis of a resonator with absorbent material, *Applied Acoustics*, 58, 109-122.

Xu, M. B., Selamet, A., Lee, I. J., Huff, N. T, 2004, Sound attenuation in dissipative expansion chambers, *Journal of Sound and Vibration*, 272, 1125-1133.

Apêndices

Apêndice A

(Parte 1)

Para os elementos apresentados na Fig. 7.1, descreve-se de forma pormenorizada como chegar à matriz de transferência correspondente a cada elemento, segundo a metodologia apresentada por Munjal (1987). Assim, escrevendo a Eq. (7.13) na forma de matriz:

$$\begin{bmatrix} D^2 + \alpha_1 D + \alpha_2 & \alpha_3 D + \alpha_4 \\ \alpha_5 D + \alpha_6 & D^2 + \alpha_7 D + \alpha_8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1(z) \\ p_2(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.1})$$

onde:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= -\frac{jM_1}{1-M_1^2} \left(\frac{k_a^2 + k_0^2}{k_0} \right) & \alpha_2 &= -\frac{k_a^2}{1-M_1^2} & \alpha_3 &= \frac{jM_1}{1-M_1^2} \left(\frac{k_a^2 - k_0^2}{k_0} \right) \\ \alpha_4 &= -\left(\frac{k_a^2 - k_0^2}{1-M_1^2} \right) & \alpha_5 &= \frac{jM_2}{1-M_2^2} \left(\frac{k_b^2 - k_0^2}{k_0} \right) & \alpha_6 &= -\left(\frac{k_b^2 - k_0^2}{1-M_2^2} \right) \\ \alpha_7 &= -\frac{jM_2}{1-M_2^2} \left(\frac{k_b^2 - k_0^2}{k_0} \right) & \alpha_8 &= \frac{k_b^2}{1-M_2^2} \end{aligned}$$

e:

$$k_0 = \frac{\omega}{c_0};$$

$$M_1 = \frac{U_1}{c_0}; \quad M_2 = \frac{U_2}{c_0};$$

$$k_a^2 = k_0^2 - \frac{j4k}{d_1 \zeta}, \quad k_b^2 = k_0^2 - \frac{j4kd_1}{(d_2^2 - d_1^2)\zeta};$$

$$D = \frac{d}{dz}$$

a sua segunda ordem como um conjunto de 4 equações de primeira ordem vem:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \alpha_1 & \alpha_3 \\ 0 & 1 & \alpha_5 & \alpha_7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1'' \\ p_2'' \\ p_1' \\ p_2' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_2 & \alpha_4 \\ 0 & 0 & \alpha_6 & \alpha_8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1' \\ p_2' \\ p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.2})$$

Definindo por:

$$p_1' = y_1 ; p_2' = y_2 ; p_1 = y_3 \text{ e } p_2 = y_4 \quad (\text{A.3})$$

as Eq. (A.2) reduzem-se a uma forma mais conveniente:

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & D & 0 \\ 0 & -1 & 0 & D \\ D & 0 & \alpha_1 D + \alpha_2 & \alpha_3 D + \alpha_4 \\ 0 & D & \alpha_5 D + \alpha_6 & \alpha_7 D + \alpha_8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.4a})$$

ou

$$[\Delta]\{y\} = \{0\} \quad (\text{A.4b})$$

As Eq. (A.4) são transformadas, assim, nas variáveis principais $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ e Γ_4 :

$$\begin{bmatrix} D - \beta_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & D - \beta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & D - \beta_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D - \beta_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Gamma_1 \\ \Gamma_2 \\ \Gamma_3 \\ \Gamma_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.5})$$

onde os β 's são os zeros do polinómio característico $|\Delta|$.

O estado principal das variáveis $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ e Γ_4 é relacionado com as variáveis y_1, y_2, y_3 e y_4 através da matriz de valores próprios $[\psi]$ tal que:

$$\{y\} = [\psi]\{\Gamma\} \quad (\text{A.6})$$

onde:

$$\psi_{1,i} = 1 \quad \psi_{2,i} = -\frac{\beta_i^2 + \alpha_1\beta_i + \alpha_2}{\alpha_3\beta_i + \alpha_4}$$

$$\psi_{3,i} = \frac{1}{\beta_i} \quad \psi_{4,i} = \frac{\psi_{2,i}}{\beta_i} = \psi_{2,i}\psi_{3,i}$$

e $i=1,2,3,4$.

As soluções das Eq. (A.5) e (A.6) podem ser escritas na forma:

$$\Gamma_1(z) = C_1 e^{\beta_1 z} \quad \Gamma_2(z) = C_1 e^{\beta_2 z}$$

$$\Gamma_3(z) = C_1 e^{\beta_3 z} \quad \Gamma_4(z) = C_1 e^{\beta_4 z}$$

Agora, as Eq. (7.10) e (7.11) podem ser usadas para obter as expressões para $u_1(z)$ e $u_2(z)$.

Então, pode-se escrever:

$$\begin{bmatrix} p_1(z) \\ p_2(z) \\ \rho_0 c_0 u_1(z) \\ \rho_0 c_0 u_2(z) \end{bmatrix} = [A(z)] \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{bmatrix} \quad (\text{A.7})$$

onde:

$$A_{1,i} = \psi_{3,i} e^{\beta_i(z)} \quad A_{2,i} = \psi_{4,i} e^{\beta_i(z)}$$

$$A_{3,i} = -\frac{e^{\beta_i(z)}}{jk_0 + M_1\beta_i} \quad A_{4,i} = -\frac{\psi_{2,i} e^{\beta_i(z)}}{jk_0 + M_2\beta_i}$$

$i=1,2,3,4$ para obter as respectivas colunas de $[A(z)]$.

Finalmente, as pressões e velocidades em $z=0$ e $z=l$ podem ser relacionadas através da seguinte expressão:

$$\begin{bmatrix} p_1(0) \\ p_2(0) \\ \rho_0 c_0 u_1(0) \\ \rho_0 c_0 u_2(0) \end{bmatrix} = [R] \begin{bmatrix} p_1(l) \\ p_2(l) \\ \rho_0 c_0 u_1(l) \\ \rho_0 c_0 u_2(l) \end{bmatrix} \quad (\text{A.8})$$

onde $[R]$ é uma matriz 4X4 dada por:

$$[R] = [A(0)][A(l)]^{-1} \quad (\text{A.9})$$

A matriz para o cálculo da perda de transmissão obtém-se a partir de $[R]$, fazendo uso de variáveis apropriadas a montante e a jusante do elemento, assim como de duas condições de fronteira de cada elemento.

Assim, tem-se para os vários elementos da Fig. 7.1:

Cross-Flow Expansion Element (Fig. 7.1a):

Condições de fronteira:

$$Z_2(0) = \frac{p_2(0)}{-u_2(0)} = -j\rho_0 c_0 \cot(k_0 l_a) \quad (\text{A.10a})$$

$$Z_1(l) = \frac{p_1(l)}{u_1(l)} = -j\rho_0 c_0 \cot(k_0 l_b) \quad (\text{A.10b})$$

A relação da matriz de transferência:

$$\begin{bmatrix} p_1(0) \\ \rho_0 c_0 u_1(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_a & T_b \\ T_c & T_d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1(l) \\ \rho_0 c_0 u_1(l) \end{bmatrix} \quad (\text{A.11})$$

onde:

$$\begin{aligned} T_a &= R_{12} + A_1 A_2 & T_b &= R_{14} + B_1 A_2 \\ T_c &= R_{32} + A_1 B_2 & T_d &= R_{34} + B_1 B_2 \\ A_1 &= (X_1 R_{22} - R_{42}) / F_1 & B_1 &= (X_1 R_{24} - R_{44}) / F_1 \\ A_2 &= R_{11} + X_2 R_{13} & B_2 &= R_{31} + X_2 R_{33} \\ X_1 &= -j \tan(k_0 l_a) & X_2 &= j \tan(k_0 l_b) \\ F_1 &= R_{32} + X_2 R_{24} - X_1 (R_{22} + X_2 R_{24}) \end{aligned}$$

Cross-Flow Contraction Element (Fig. 7.1b)

$$Z_2(0) = \frac{p_2(0)}{-u_2(0)} = -j \rho_0 c_0 \cot(k_0 l_a) \quad (\text{A.12a})$$

$$Z_1(l) = \frac{p_1(l)}{u_1(l)} = -j \rho_0 c_0 \cot(k_0 l_b) \quad (\text{A.12b})$$

A relação da matriz de transferência:

$$\begin{bmatrix} p_1(0) \\ \rho_0 c_0 u_1(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_a & T_b \\ T_c & T_d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_2(l) \\ \rho_0 c_0 u_2(l) \end{bmatrix} \quad (\text{A.13})$$

onde:

$$\begin{aligned} T_a &= R_{21} + A_1 A_2 & T_b &= R_{23} + B_1 A_2 \\ T_c &= R_{41} + A_1 B_2 & T_d &= R_{43} + B_1 B_2 \\ A_1 &= (X_1 R_{11} - R_{31}) / F_1 & B_1 &= (X_1 R_{13} - R_{33}) / F_1 \\ A_2 &= R_{22} + X_2 R_{24} & B_2 &= R_{42} + X_2 R_{44} \\ X_1 &= -j \tan(k_0 l_a) & X_2 &= j \tan(k_0 l_b) \\ F_1 &= R_{32} + X_2 R_{24} - X_1 (R_{22} + X_2 R_{24}) \end{aligned}$$

Reverse-flow Expansion Element (Fig. 7.1c)

$$Z_1(l) = \frac{p_1(l)}{u_1(l)} = -j\rho_0 c_0 \cot(k_0 l_b) \quad (\text{A.14a})$$

$$Z_2(l) = \frac{p_2(l)}{u_2(l)} = -j\rho_0 c_0 \cos(k_0 l_b) \quad (\text{A.14b})$$

A relação da matriz de transferência:

$$\begin{bmatrix} p_1(0) \\ \rho_0 a_0 u_1(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_a & -T_b \\ T_c & -T_d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_2(0) \\ \rho_0 a_0 u_2(0) \end{bmatrix} \quad (\text{A.15})$$

onde:

$$\begin{bmatrix} T_a & T_b \\ T_c & T_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{bmatrix}^{-1} \quad (\text{A.16})$$

onde:

$$A_1 = R_{11} + X_2 R_{13} \quad A_2 = R_{12} + X_2 R_{14}$$

$$A_3 = R_{31} + X_2 R_{33} \quad A_4 = R_{32} + X_2 R_{34}$$

$$B_1 = R_{21} + X_2 R_{23} \quad B_2 = R_{22} + X_2 R_{24}$$

$$B_3 = R_{41} + X_2 R_{43} \quad B_4 = R_{42} + X_2 R_{44}$$

$$X_2 = j \tan(k_0 l_b)$$

Reverse-flow Contraction Element (Fig. 7.1d)

As condições de fronteira são iguais as Eq. A.14a e A.14b.

A relação da matriz de transferência:

$$\begin{bmatrix} p_2(0) \\ \rho_0 a_0 u_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_a & -T_b \\ T_c & -T_d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1(0) \\ \rho_0 a_0 u_1(0) \end{bmatrix} \quad (\text{A.17})$$

$$\begin{bmatrix} T_a & T_b \\ T_c & T_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix}^{-1} \quad (\text{A.18})$$

onde as expressões para o cálculo dos valores dos B 's e dos A 's são as mesmas que se usam no caso anterior.

(Parte 2)

Para os silenciadores representados na Fig. 7.3, vai-se descrever de forma pormenorizada como chegar à matriz de transferência para cada silenciador, segundo a metodologia apresentada por Munjal (1987). Assim, escrevendo a eq. (7.13) na forma de matriz:

$$\begin{bmatrix} D^2 + \alpha_1 D + \alpha_2 & \alpha_3 D + \alpha_4 & 0 \\ \alpha_5 D + \alpha_6 & D^2 + \alpha_7 D + \alpha_8 & \alpha_9 D + \alpha_{10} \\ 0 & \alpha_{11} D + \alpha_{12} & D^2 + \alpha_{13} D + \alpha_{14} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1(z) \\ p_2(z) \\ p_3(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.19})$$

onde:

$$\begin{aligned} \alpha_9 &= \frac{-jM_1}{1-M_1^2} \left(\frac{k_a^2 + k_0^2}{k} \right) & \alpha_{10} &= \frac{k_a^2}{1-M_1^2} & \alpha_{11} &= \frac{jM_1}{1-M_1^2} \left(\frac{k_a^2 - k_0^2}{k} \right) & \alpha_{12} &= \frac{k_a^2 - k_0^2}{1-M_1^2} \\ \alpha_{13} &= \frac{jM_2}{1-M_2^2} \left(\frac{k_b^2 - k_0^2}{k} \right) & \alpha_{14} &= -\frac{k_b^2 - k_0^2}{1-M_2^2} & \alpha_{15} &= \frac{-jM_2}{1-M_2^2} \left(\frac{k_b^2 + k_c^2}{k_0} \right) & \alpha_{16} &= \frac{k_b^2 + k_c^2 - k_0^2}{1-M_2^2} \\ \alpha_{17} &= \frac{jM_2}{1-M_2^2} \left(\frac{k_c^2 - k_0^2}{k_0} \right) & \alpha_{18} &= -\frac{k_c^2 - k_0^2}{1-M_2^2} & \alpha_{19} &= \frac{jM_3}{1-M_3^2} \left(\frac{k_d^2 - k_0^2}{k_0} \right) & \alpha_{20} &= -\frac{k_d^2 - k_0^2}{1-M_3^2} \\ \alpha_{21} &= \frac{-jM_3}{1-M_3^2} \left(\frac{k_d^2 + k_0^2}{k_0} \right) & \alpha_{22} &= \frac{k_d^2}{1-M_3^2} \end{aligned}$$

$$k_0 = \frac{\omega}{c_0},$$

$$M_1 = \frac{U_1}{c_0}, \quad M_2 = \frac{U_2}{c_0}, \quad M_3 = \frac{U_3}{c_0},$$

$$k_a^2 = k^2 - \frac{j4k}{d_1 \zeta}, \quad k_b^2 = k^2 - \frac{j4k_0 d_3}{(d_2^2 - d_1^2 - d_3^2) \zeta_2}, \quad k_c^2 = k^2 - \frac{j4k_0 d_3}{(d_2^2 - d_1^2 - d_3^2) \zeta_2}$$

$$D = \frac{d}{dz}$$

a sua segunda ordem pode escrever-se como um conjunto de 4 equações de primeira ordem:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \alpha_1 & \alpha_3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \alpha_5 & \alpha_7 & \alpha_9 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \alpha_{11} & \alpha_{13} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1'' \\ p_2'' \\ p_3'' \\ p_1' \\ p_2' \\ p_3' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_2 & \alpha_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_6 & \alpha_8 & \alpha_{10} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_{12} & \alpha_{14} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1' \\ p_2' \\ p_3' \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.20})$$

Definindo por:

$$p_1' = y_1 ; p_2' = y_2 ; p_3' = y_3 ; p_1 = y_4 , p_2 = y_5 \text{ e } p_3 = y_6 \quad (\text{A.21})$$

as Eq.(A.19) reduzem-se a uma forma mais conveniente:

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & D & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & D & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & D \\ D & 0 & 0 & \alpha_1 D + \alpha_2 & \alpha_3 D + \alpha_4 & 0 \\ 0 & D & 0 & \alpha_5 D + \alpha_6 & \alpha_7 D + \alpha_8 & \alpha_9 D + \alpha_{10} \\ 0 & 0 & D & 0 & \alpha_{11} D + \alpha_{12} & \alpha_{13} D + \alpha_{14} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ y_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.22a})$$

ou

$$[\Delta]\{y\} = \{0\} \quad (\text{A.22b})$$

As Eq. (A.22) são transformadas assim nas variáveis principais $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4, \Gamma_5$ e Γ_6 :

$$\begin{bmatrix} D - \beta_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & D - \beta_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & D - \beta_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D - \beta_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & D - \beta_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D - \beta_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Gamma_1 \\ \Gamma_2 \\ \Gamma_3 \\ \Gamma_4 \\ \Gamma_5 \\ \Gamma_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.23})$$

onde os β 's são os zeros do polinómio característico $|\Delta|$.

O principal estado das variáveis $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4, \Gamma_5$ e Γ_6 é relacionado com as variáveis y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 e y_6 através da matriz dos valores próprios $[\psi]$ tal que:

$$\{y\} = [\psi]\{\Gamma\} \quad (\text{A.24})$$

onde:

$$\psi_{1,i} = 1 \quad \psi_{2,i} = \frac{(\beta_i^2 + \alpha_1\beta_i + \alpha_2)}{(\alpha_3\beta_i + \alpha_4)}, \quad \psi_{4,i} = 1/\beta_i \quad \psi_{5,i} = \psi_{2,i}\beta_i \quad \psi_{6,i} = \psi_{3,i}\beta_i$$

$$\psi_{3,i} = \frac{(\beta_i^2 + \alpha_1\beta_i + \alpha_2)(\beta_i^2 + \alpha_7\beta_i + \alpha_8) - (\alpha_3\beta_i + \alpha_4)(\alpha_5\beta_i + \alpha_6)}{(\alpha_3\beta_i + \alpha_4)(\alpha_9\beta_i + \alpha_{10})}$$

e $i=1,2,3,4$.

As soluções das Eq. (A.23) e (A.24) podem ser escritas na forma:

$$\Gamma_1(z) = C_1 e^{\beta_1 z} \quad \Gamma_2(z) = C_1 e^{\beta_2 z} \quad \Gamma_5(z) = C_5 e^{\beta_5 z}$$

$$\Gamma_3(z) = C_1 e^{\beta_3 z} \quad \Gamma_4(z) = C_1 e^{\beta_4 z} \quad \Gamma_6(z) = C_6 e^{\beta_6 z}$$

Agora, as Eq.(7.17) e (7.18) e (7.19) podem ser usadas para obter as expressões para $u_1(z), u_2(z)$ e $u_3(z)$.

Então, pode escrever-se:

$$\begin{bmatrix} p_1(z) \\ p_2(z) \\ p_3(z) \\ \rho_0 c_0 u_1(z) \\ \rho_0 c_0 u_2(z) \\ \rho_0 c_0 u_3(z) \end{bmatrix} = [A(z)] \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \\ C_5 \\ C_6 \end{bmatrix} \quad (\text{A.25})$$

$$A_{1,i} = \psi_{4,i} e^{\beta_i z},$$

$$A_{2,i} = \psi_{5,i} e^{\beta_i z},$$

$$A_{3,i} = \psi_{6,i} e^{\beta_i z},$$

$$A_{4,i} = -e^{\beta_i z} / (jk_0 + M_1 \beta_i),$$

$$A_{5,i} = -\psi_{2,i} e^{\beta_i z} / (jk_0 + M_2 \beta_i),$$

$$A_{6,i} = -\psi_{3,i} e^{\beta_i z} / (jk_0 + M_3 \beta_i),$$

onde $i=1,2,3,4$, para obter as respectivas colunas de $[A(z)]$.

Finalmente, as pressões e velocidades em $z=0$ e $z=l$ podem ser relacionadas através da seguinte relação:

$$\begin{bmatrix} p_1(0) \\ p_2(0) \\ p_3(0) \\ \rho_0 c_0 u_1(0) \\ \rho_0 c_0 u_2(0) \\ \rho_0 c_0 u_3(0) \end{bmatrix} = [R] \begin{bmatrix} p_1(l) \\ p_2(l) \\ p_3(l) \\ \rho_0 c_0 u_1(l) \\ \rho_0 c_0 u_2(l) \\ \rho_0 c_0 u_3(l) \end{bmatrix} \quad (\text{A.26})$$

onde $[R]$ é uma matriz 4X4 dada por:

$$[R] = [A(0)][A(l)]^{-1} \quad (\text{A.27})$$

A matriz para o cálculo da perda de transmissão obtém-se a partir de $[R]$, fazendo uso de variáveis apropriadas a montante e a jusante do elemento, assim como de quatro condições de fronteira de cada elemento.

Assim, para os silenciadores da Fig. 7.3:

Cross Flow expansion chamber (Fig. 7.3a):

Condições de fronteira:

$$Z_2(0) = \frac{p_2(0)}{-u_2(0)} = -j\rho_0 c_0 \cot(k_0 l_a) \quad (\text{A.28a})$$

$$Z_3(0) = \frac{p_3(0)}{-u_3(0)} = -j\rho_0 c_0 \cot(k_0 l_a) \quad (\text{A.28b})$$

$$Z_1(l) = \frac{p_1(l)}{u_1(l)} = -j\rho_0 c_0 \cot(k_0 l_b) \quad (\text{A.28c})$$

$$Z_2(l) = \frac{p_2(l)}{u_2(l)} = -j\rho_0 c_0 \cot(k_0 l_b) \quad (\text{A.28d})$$

A relação da matriz de transferência:

$$\begin{bmatrix} p_1(0) \\ \rho_0 c_0 u_1(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_a & T_b \\ T_c & T_d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_3(l) \\ \rho_0 c_0 u_3(l) \end{bmatrix} \quad (\text{A.29})$$

onde:

$$\begin{aligned} T_a &= TT_{1,2} + A_3 C_3, & T_b &= TT_{1,4} + B_3 C_3, & T_c &= TT_{3,2} + A_3 D_3, \\ T_d &= TT_{3,4} + B_3 D_3, & A_3 &= (TT_{2,2} X_2 - TT_{4,2}) / F_2 & B_3 &= (TT_{2,4} X_2 - TT_{4,4}) / F_2 \\ C_3 &= TT_{1,1} + X_1 TT_{1,3}, & D_3 &= TT_{3,1} + X_1 TT_{3,3} \\ F_2 &= TT_{4,1} + X_1 TT_{4,3} - X_2 (TT_{2,1} + X_1 TT_{2,3}), \end{aligned}$$

sendo que $[TT]$ é uma matriz intermédia definida como:

$$\begin{bmatrix} p_1(0) \\ p_2(0) \\ \rho_0 c_0 u_1(0) \\ \rho_0 c_0 u_2(0) \end{bmatrix} = [TT] \begin{bmatrix} p_1(l) \\ p_2(l) \\ \rho_0 c_0 u_1(l) \\ \rho_0 c_0 u_2(l) \end{bmatrix} \quad (\text{A.30})$$

onde:

$$\begin{aligned} TT_{1,1} &= A_1 A_2 + R_{1,2} & TT_{1,2} &= B_1 A_2 + R_{1,3} & TT_{1,3} &= C_1 A_2 + R_{1,5} & TT_{1,4} &= D_1 A_2 + R_{1,6} \\ TT_{2,1} &= A_1 B_2 + R_{2,2} & TT_{2,2} &= B_1 B_2 + R_{2,3} & TT_{2,3} &= C_1 B_2 + R_{2,5} & TT_{2,4} &= D_1 B_2 + R_{2,6} \\ TT_{3,1} &= A_1 C_2 + R_{4,2} & TT_{3,2} &= B_1 C_2 + R_{4,3} & TT_{3,3} &= C_1 C_2 + R_{4,5} & TT_{3,4} &= D_1 C_2 + R_{4,6} \\ TT_{4,1} &= A_1 D_2 + R_{5,2} & TT_{4,2} &= B_1 D_2 + R_{5,3} & TT_{4,3} &= C_1 D_2 + R_{5,5} & TT_{4,4} &= D_1 D_2 + R_{5,6} \\ A_1 &= (R_{3,2} X_2 - R_{6,2}) / F_1 & B_1 &= (R_{3,3} X_2 - R_{6,3}) / F_1 \\ C_1 &= (R_{3,5} X_2 - R_{6,5}) / F_1 & D_1 &= (R_{3,6} X_2 - R_{6,6}) / F_1 \\ A_2 &= R_{1,1} + R_{1,4} X_1 & B_2 &= R_{2,1} + R_{2,4} X_1 \\ C_2 &= R_{4,1} + R_{4,4} X_1 & D_2 &= R_{5,1} + R_{5,4} X_1 \\ X_1 &= j \tan(k_0 l_b) & X_2 &= -j \tan(k_0 l_a) \\ F_1 &= R_{6,1} + X_1 R_{6,4} - X_2 (R_{3,1} + X_1 R_{3,4}) \end{aligned}$$

Reverse flow expansion chamber (Fig. 7.3b)

Condições de fronteira:

$$Z_2(0) = \frac{p_2(0)}{-u_2(0)} = -j\rho_0 c_0 \cot(k_0 l_a) \quad (\text{A.31a})$$

$$Z_1(l) = \frac{p_1(l)}{u_1(l)} = -j\rho_0 c_0 \cot(k_0 l_b) \quad (\text{A.31b})$$

$$Z_2(l) = \frac{p_2(l)}{u_2(l)} = -j\rho_0 c_0 \cot(k_0 l_b) \quad (\text{A.31c})$$

$$Z_3(l) = \frac{p_3(l)}{u_3(l)} = -j\rho_0 c_0 \cot(k_0 l_b) \quad (\text{A.31d})$$

A relação da matriz de transferência:

$$\begin{bmatrix} p_1(0) \\ \rho_0 a_0 u_1(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_a & -T_b \\ T_c & -T_d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_3(l) \\ \rho_0 a_0 u_3(l) \end{bmatrix} \quad (\text{A.32})$$

onde:

$$T_a = B_{1,1}D_{1,1} + B_{1,2}D_{2,1} + B_{1,3}D_{3,1} \quad T_b = B_{1,1}D_{1,2} + B_{1,2}D_{2,2} + B_{1,3}D_{3,1}$$

$$T_c = B_{4,1}D_{1,1} + B_{4,2}D_{2,1} + B_{4,3}D_{3,1} \quad T_d = B_{4,1}D_{1,2} + B_{4,2}D_{2,2} + B_{4,3}D_{3,2}$$

$$B_{i_1, i_2} = T_{i_1, i_2} + T_{i_1, i_2 + 3} \quad i_1 = 1, 2, \dots, 6; i_2 = 1, 2, 3$$

$$X_1 = j \tan(k_0 l_b)$$

$$D_{1,1} = C_{1,1}D_{2,1} + C_{1,2}D_{3,1} \quad D_{1,2} = C_{1,1}D_{2,2} + C_{1,2}D_{3,1}$$

$$D_{2,1} = C_{3,2} / F_4 \quad D_{2,2} = -C_{2,2} / F_4$$

$$D_{3,1} = -C_{3,1} / F_4 \quad D_{3,2} = -C_{2,1} / F_4$$

$$F_4 = C_{2,1}C_{3,2} - C_{2,2}C_{3,1}$$

$$C_{1,1} = (B_{5,2} - X_2 B_{2,2}) / F_3 \quad C_{1,2} = (B_{5,3} - X_2 B_{2,3}) / F_3$$

$$C_{2,1} = B_{3,2} - C_{1,1}B_{3,1}$$

$$C_{2,2} = B_{3,3} - C_{1,2}B_{3,1}$$

$$C_{3,1} = B_{6,2} - C_{1,1}B_{6,1}$$

$$C_{3,2} = B_{6,3} - C_{1,2}B_{6,1}$$

$$F_3 = X_2 B_{2,1} - B_{5,1}$$

$$X_2 = -j \tan(k_0 l_a)$$

Apêndice B

O procedimento que se segue para a obtenção das matrizes de transferência para as várias configurações do silenciador da Fig. 7.7 é baseado na metodologia usada por Salamet *et al.* (1988), para silenciadores deste tipo.

Os seguintes coeficientes fazem parte da Eq. (7.26)

$$\alpha_j = \frac{-2M_j}{1-M_j^2} \left(\frac{2}{\zeta_j d_j} + ik_0 \right), j=1,2,3$$

$$\alpha_{j+3} = \frac{1}{1-M_j^2} \left(k_0^2 - \frac{4ik_0}{\zeta_j d_j} \right), j=1,2,3$$

$$\alpha_{j+6} = \frac{4M_j}{(1-M_j^2)\zeta_j d_j}, j=1,2,3$$

$$\alpha_{j+9} = \frac{4ik_0}{(1-M_j^2)\zeta_j d_j}, j=1,2,3$$

$$\alpha_{j+12} = \frac{4ik_0 d_j / \zeta_j}{d_4^2 - (d_1^2 + d_2^2 + d_3^2)}, j=1,2,3$$

$$\alpha_{16} = (k_0^2 - \alpha_{13} - \alpha_{14} - \alpha_{15})$$

De seguida será apresentado detalhadamente o desenvolvimento da sequência de matrizes para as várias configurações simuladas do silenciador da Fig. 7.7,

1ª Situação: Tubos perfurados sem extensões:

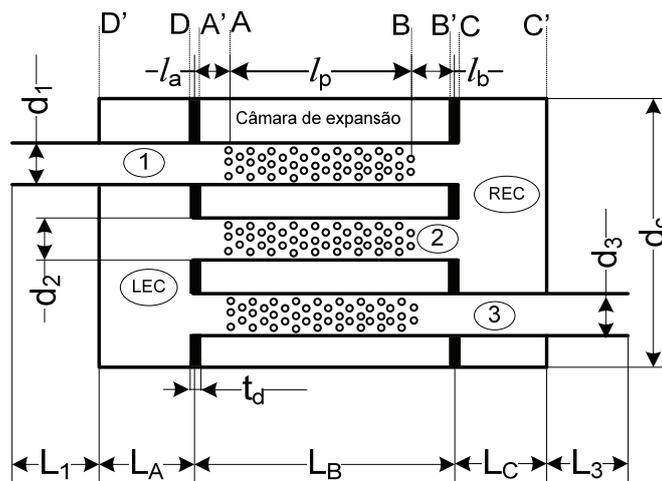


Fig. 10.1 – Diferentes fronteiras no silenciador de três tubos de passagem sem extensões.

Condições de fronteira:

Câmara de expansão:

Considerando a câmara de expansão, limitada entre A' e B' , em que as divisórias são rígidas, $u_4 = 0$, vem:

$$\rho_0 c_0 u_4 |_{A'} = -i \tan(k_0 l_a) p_4 \quad (B.1)$$

$$\rho_0 c_0 u_4 |_{B'} = i \tan(k_0 l_b) p_4$$

Cavidades terminais LEC e REC:

Da mesma forma, assumindo as tampas de entrada e de saída rígidas, para a cavidade de saída (REC) vem:

$$p_1 = p_2 = p_{REC}$$

$$A_1 u_1 + A_2 u_2 = A_{REC} u_{REC} \quad , \quad (B.2)$$

$$i \tan(k_0 L_C) p_{REC} = \rho_0 c_0 u_{REC}$$

onde:

A_1 , A_2 e A_{REC} são, respectivamente, as áreas dos tubos 1 e 2 e da cavidade de saída.

Para a parte terminal dos tubos 1 e 2 sem furação vem respectivamente:

$$\left\{ \begin{array}{c} p_1 \\ \rho_0 c_0 u_1 \end{array} \right\}_B = \begin{bmatrix} \cos(k_0 l_{b1}) & i \sin(k_0 l_{b1}) \\ i \sin(k_0 l_{b1}) & \cos(k_0 l_{b1}) \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{c} p_1 \\ \rho_0 c_0 u_1 \end{array} \right\}_C \quad (B.3)$$

$$\left\{ \begin{array}{c} p_2 \\ \rho_0 c_0 u_2 \end{array} \right\}_B = \begin{bmatrix} \cos(k_0 l_{b2}) & i \sin(k_0 l_{b2}) \\ i \sin(k_0 l_{b2}) & \cos(k_0 l_{b2}) \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{c} p_2 \\ \rho_0 c_0 u_2 \end{array} \right\}_C \quad (B.4)$$

onde:

$$\ell_{b1} = l_b + t_d + \delta_1$$

$$\ell_{b2} = l_b + t_d + \delta_{2C}$$

$$\delta_1 = 0.425d_1 \left(1.0 - 1.25 \frac{d_1}{\sqrt{d_c^2 - d_3^2}} \right)$$

$$\delta_{2C} = 0.425d_2 \left(1.0 - 1.25 \frac{d_2}{\sqrt{d_c^2 - d_3^2}} \right)$$

sendo que δ_1 e δ_{2C} são as correcções da terminação dos tubos 1 e 2. Estes comprimentos são adicionados para se ter em conta a inertância acústica devido ao facto de os tubos terminarem em flange infinita, a face da divisória, em C.

Combinadas as Eq. (B.2) a (B.4), obtemos a relação de matrizes que correspondem aos elementos a jusante da perfuração:

$$\begin{Bmatrix} p_1 \\ \rho_0 c_0 u_1 \end{Bmatrix}_B = [Q] \begin{Bmatrix} p_2 \\ \rho_0 c_0 u_2 \end{Bmatrix}_B \quad (\text{B.5})$$

onde:

$$\begin{aligned} [Q] &= \begin{bmatrix} \cos(k_0 l_{b1}) & i \sin(k_0 l_{b1}) \\ i \sin(k_0 l_{b1}) & \cos(k_0 l_{b1}) \end{bmatrix} \\ &\times \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ i \frac{A_{REC}}{A_1} \tan(k_0 L_C) & -\frac{A_2}{A_1} \end{bmatrix} \\ &\times \begin{bmatrix} \cos(k_0 l_{b2}) & i \sin(k_0 l_{b2}) \\ i \sin(k_0 l_{b2}) & \cos(k_0 l_{b2}) \end{bmatrix}^{-1} \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

Da mesma forma, aplicando as condições de fronteira, chega-se a relação das matrizes que correspondem aos elementos a montante da perfuração:

$$\begin{Bmatrix} p_2 \\ \rho_0 c_0 u_2 \end{Bmatrix}_A = [S] \begin{Bmatrix} p_3 \\ \rho_0 c_0 u_3 \end{Bmatrix}_A \quad (\text{B.7})$$

onde $[S]$ pode ser obtida a partir de $[Q]$ fazendo as seguintes substituições: l_b por $-l_a$, t_d por $-t_d$, L_C por $-L_A$, A_1 por A_2 e A_2 por A_3 .

Assim:

$$\begin{aligned}
 [S] &= \begin{bmatrix} \cos(k_0 l_{a1}) & -i \sin(k_0 l_{a1}) \\ -i \sin(k_0 l_{a1}) & \cos(k_0 l_{a1}) \end{bmatrix} \\
 &\times \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -i \frac{A_{LEC}}{A_2} \tan(k_0 L_A) & -\frac{A_3}{A_2} \end{bmatrix} \\
 &\times \begin{bmatrix} \cos(k_0 l_{a2}) & i \sin(k_0 l_{a2}) \\ -i \sin(k_0 l_{a2}) & \cos(k_0 l_{a2}) \end{bmatrix}^{-1}
 \end{aligned} \tag{B.8}$$

onde:

$$\ell_{a1} = l_b + t_d + \delta_{2D}$$

$$\ell_{b2} = l_a + t_d + \delta_3$$

$$\delta_{2D} = 0,425d_2 \left(1.0 - 1.25 \frac{d_2}{\sqrt{d_4^2 - d_1^2}} \right)$$

$$\delta_3 = 0,425d_3 \left(1.0 - 1.25 \frac{d_3}{\sqrt{d_4^2 - d_1^2}} \right)$$

sendo que δ_{2D} e δ_3 são as correcções da terminação dos tubos 2 e 3 na cavidade de entrada (LEC).

2ª Situação: Tubos perfurados com extensões:

Caso 1 ($l_1 \geq l_2$):

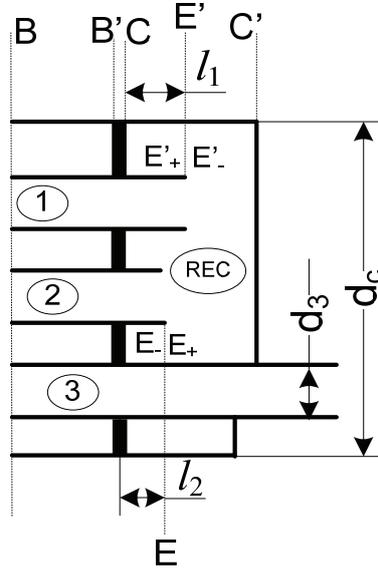


Fig. 10.2 – Diferentes fronteiras no silenciador de três tubos de passagem com extensões.

Na fronteira E' :

$$p_1|_{E'} = p_{REC}|_{E'_-} = p_{REC}|_{E'_+} \quad (B.9)$$

$$A_1 \rho_0 c_0 u_1|_{E'} + (A_{REC} - A_1) \rho_0 c_0 u_{REC}|_{E'_-} = A_{REC} \rho_0 c_0 u_{REC}|_{E'_+} \quad (B.10)$$

Considerando, mais uma vez, divisórias e tampas rígidas, nas fronteiras C e C' $u_{REC} = 0$.

Assim:

$$\frac{\rho_0 c_0 u_{REC}}{p_{REC}} \Big|_{E'_+} = i \tan k_0 (L_C - l_1) \quad (B.11)$$

$$\frac{\rho_0 c_0 u_{REC}}{p_{REC}} \Big|_{E_-} = -i \tan k_0 l_2 \quad (B.12)$$

Combinando as Eq. (B9) a (B12), obtém-se:

$$\begin{Bmatrix} p_1 \\ \rho_0 c_0 u_1 \end{Bmatrix}_{E'} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ i \frac{A_{REC}}{A_1} \tan k_0 (L_C - \ell_1) & -\frac{(A_{REC} - A_1)}{A_1} \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} p_{REC} \\ \rho_0 c_0 u_{REC} \end{Bmatrix}_{E'} \quad (B.13)$$

Na fronteira E :

$$p_{REC} \Big|_{E_+} = p_{REC} \Big|_{E_-} = p_2 \Big|_E \quad (B.14)$$

$$(A_{REC} - A_1) \rho_0 c_0 u_{REC} \Big|_{E_+} = (A_{REC} - A_1 - A_2) \rho_0 c_0 u_{REC} \Big|_{E_-} + A_2 \rho_0 c_0 u_2 \Big|_E \quad (B.15)$$

Combinado as Eq.(B.12), (B.14) e (B.15) obtém-se:

$$\begin{Bmatrix} p_{REC} \\ \rho_0 c_0 u_{REC} \end{Bmatrix}_{E_+} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -i \left(\frac{A_{REC} - A_1 - A_2}{A_{REC} - A_1} \right) \tan k_0 l_2 & \frac{A_2}{A_{REC} - A_1} \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} p_2 \\ \rho_0 c_0 u_2 \end{Bmatrix}_E \quad (B.16)$$

As variáveis de estado p_{REC} e u_{REC} , em ambos os lados do segmento do tubo E-E', podem ser relacionadas da seguinte forma:

$$\begin{Bmatrix} p_{REC} \\ \rho_0 c_0 u_{REC} \end{Bmatrix}_{E'_-} = \begin{bmatrix} \cos k_0 (l_1 - l_2) & -\sin k_0 (l_1 - l_2) \\ -\sin k_0 (l_1 - l_2) & \cos k_0 (l_1 - l_2) \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} p_{REC} \\ \rho_0 c_0 u_{REC} \end{Bmatrix}_{E_+} \quad (B.17)$$

Considerando as Eq. (B.13), (B.16) e (B.17), obtém-se:

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} p_1 \\ \rho_0 c_0 u_1 \end{Bmatrix}_{E_-} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ i \frac{A_{REC}}{A_1} \tan k_0 (L_C - l_1) & -\frac{(A_{REC} - A_1)}{A_1} \end{bmatrix} \\ &\times \begin{bmatrix} \cos k_0 (l_1 - l_2) & -i \sin k_0 (l_1 - l_2) \\ -i \sin k_0 (l_1 - l_2) & \cos k_0 (l_1 - l_2) \end{bmatrix} \\ &\times \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -i \left(\frac{A_{REC} - A_1 - A_2}{A_{REC} - A_1} \right) \tan k_0 l_2 & \frac{A_2}{A_{REC} - A_1} \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} p_2 \\ \rho_0 c_0 u_2 \end{Bmatrix}_E \end{aligned} \quad (B.18)$$

Na presença de tubos estendidos dentro das cavidades, as Eq. (B.3) e (B.4) ficam, respectivamente:

$$\begin{Bmatrix} p_1 \\ \rho_0 c_0 u_1 \end{Bmatrix}_B = \begin{bmatrix} \cos(k_0 l_{b3}) & i \sin(k_0 l_{b3}) \\ i \sin(k_0 l_{b3}) & \cos(k_0 l_{b3}) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_1 \\ \rho_0 c_0 u_1 \end{Bmatrix}_{E'} \quad (\text{B.19})$$

$$\begin{Bmatrix} p_2 \\ \rho_0 c_0 u_2 \end{Bmatrix}_B = \begin{bmatrix} \cos(k_0 l_{b4}) & i \sin(k_0 l_{b4}) \\ i \sin(k_0 l_{b4}) & \cos(k_0 l_{b4}) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_2 \\ \rho_0 c_0 u_2 \end{Bmatrix}_{E'} \quad (\text{B.20})$$

onde:

$$\begin{aligned} \ell_{b3} &= l_b + t_d + l_1 + \delta_1 \\ \ell_{b4} &= l_b + t_d + l_2 + \delta_2 \end{aligned}$$

sendo que δ_1 e δ_2 são as correcções das terminações do tubo 1 na fronteira E' e do tubo 2 na fronteira E .

Chega-se assim a sequência de matrizes correspondente aos elementos a jusante da perfuração para o caso em que $l_1 \geq l_2$:

$$\begin{aligned} [Q] &= \begin{bmatrix} \cos(k_0 l_{b3}) & i \sin(k_0 l_{b3}) \\ i \sin(k_0 l_{b3}) & \cos(k_0 l_{b3}) \end{bmatrix} \\ &\times \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -i \frac{A_{REC}}{A_1} \tan k_0 (L_C - l_1) & -\frac{(A_{REC} - A_1)}{A_1} \end{bmatrix} \\ &\times \begin{bmatrix} \cos k_0 (l_1 - l_2) & -i \sin k_0 (l_1 - l_2) \\ -i \sin k_0 (l_1 - l_2) & \cos k_0 (l_1 - l_2) \end{bmatrix} \\ &\times \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -i \left(\frac{A_{REC} - A_1 - A_2}{A_{REC} - A_1} \right) \tan k_0 \ell_2 & \frac{A_2}{A_{REC} - A_1} \end{bmatrix} \\ &\times \begin{bmatrix} \cos(k_0 l_{b4}) & i \sin(k_0 l_{b4}) \\ i \sin(k_0 l_{b4}) & \cos(k_0 l_{b4}) \end{bmatrix}^{-1} \end{aligned} \quad (\text{B.21})$$

Caso 2 ($l_1 < l_2$):

No seguimento do procedimento utilizado no caso 1, vem:

$$\begin{aligned}
 \begin{Bmatrix} p_2 \\ \rho_0 c_0 u_2 \end{Bmatrix}_E &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -i \frac{A_{REC}}{A_2} \tan k_0 (L_C - l_2) & -\frac{(A_{REC} - A_2)}{A_2} \end{bmatrix} \\
 &\times \begin{bmatrix} \cos k_0 (l_2 - l_1) & -i \sin k_0 (l_2 - l_1) \\ -i \sin k_0 (l_2 - l_1) & \cos k_0 (l_2 - l_1) \end{bmatrix} \\
 &\times \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -i \left(\frac{A_{REC} - A_1 - A_2}{A_{REC} - A_2} \right) \tan k_0 l_2 & \frac{A_1}{A_{REC} - A_2} \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} p_1 \\ \rho_0 c_0 u_1 \end{Bmatrix}_{E'}
 \end{aligned} \tag{B.22}$$

Se se comparar a equação anterior com a Eq.(B.18), verifica-se que apenas os subscritos 1, 2, E e E' mudaram. Assim, a matriz $[Q]$ vem:

$$\begin{aligned}
 [Q] &= \begin{bmatrix} \cos(k_0 l_{b3}) & i \sin(k_0 l_{b3}) \\ i \sin(k_0 l_{b3}) & \cos(k_0 l_{b3}) \end{bmatrix} \\
 &\times \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -i \left(\frac{A_{REC} - A_1 - A_2}{A_{REC} - A_2} \right) \tan k_0 l_1 & \frac{A_1}{A_{REC} - A_2} \end{bmatrix}^{-1} \\
 &\times \begin{bmatrix} \cos k_0 (l_2 - l_1) & -i \sin k_0 (l_2 - l_1) \\ -i \sin k_0 (l_2 - l_1) & \cos k_0 (l_2 - l_1) \end{bmatrix}^{-1} \\
 &\times \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ i \frac{A_{REC}}{A_2} \tan k_0 (L_C - l_2) & -\frac{(A_{REC} - A_2)}{A_2} \end{bmatrix}^{-1} \\
 &\times \begin{bmatrix} \cos(k_0 l_{b4}) & i \sin(k_0 l_{b4}) \\ i \sin(k_0 l_{b4}) & \cos(k_0 l_{b4}) \end{bmatrix}^{-1}
 \end{aligned} \tag{B.23}$$

A matriz $[S]$, definida pela Eq.(B.8) correspondente aos elementos a montante da perfuração no caso da presença de extensões, para cada uma das relações entre os comprimentos l_3 e l_4 é obtida pelo mesmo procedimento que se seguiu para as outras duas extensões, l_1 e l_2 .

A matriz de transferência final para cada uma das situações acabamos de analisar obtém-se partindo dos elementos da matriz correspondente a impedância da perfuração dada pela Eq.(7.42), que serão usados para o cálculo dos elementos de uma matriz intermédia, dados pela seguinte expressão:

$$TR_{mn} = R_{mn} - \frac{(R_{8n} + i \tan(k_0 \ell_a) R_{7n})(R_{m7} + i \tan(k_0 \ell_b) R_{m8})}{(R_{87} + i \tan(k_0 \ell_b) R_{88}) + i \tan(k_0 \ell_a)(R_{77} + i \tan(k_0 \ell_b) R_{78})}, m, n=1, \dots, 6. \quad (B.24)$$

Substituindo os elementos dados pela expressão anterior, juntamente com as matrizes $[Q]$ e $[S]$, obtém-se a matriz final:

$$\begin{aligned} [T_{overall}] = & [TR_{13}] - ([TR_{11}][Q] + [TR_{12}])([TR_{21}][Q] \\ & + [TR_{22}] - [R][TR_{31}][Q] - [R][TR_{32}])^{-1}, \\ & \times ([TR_{33}] - [R][TR_{33}]) \end{aligned} \quad (B.25)$$

tal que:

$$\left\{ \begin{array}{c} P_1 \\ \rho_0 c_0 u_1 \end{array} \right\}_A = [T_{overall}] \left\{ \begin{array}{c} P_3 \\ \rho_0 c_0 u_3 \end{array} \right\}_B \quad (B.26)$$

Desta forma, pode-se calcular a perda de transmissão em cada uma das situações analisadas através da seguinte expressão:

$$TL = 20 \log_{10} \left[\frac{1}{2} \sqrt{\frac{A_1}{A_2}} |T_{11} + T_{12} + T_{21} + T_{22}| \frac{1 + M_1}{1 + M_2} \right] \quad (B.27)$$