



Carlos Miguel Ferreira Dimensionamento e Gestão de Recursos em Redes
Soares Borges Lopes Multi-Serviço



Carlos Miguel Ferreira Soares Borges Lopes **Dimensionamento e Gestão de Recursos em Redes Multi-Serviço**

tese apresentada à Universidade de Aveiro para cumprimento dos requisitos necessários à obtenção do grau de Doutor em Engenharia Electrotécnica, realizada sob a orientação científica do Dr. Amaro Fernandes de Sousa, Professor Auxiliar do Departamento de Electrónica, Telecomunicações e Informática da Universidade de Aveiro

Apoio financeiro da FCT e do FSE no âmbito do III Quadro Comunitário de Apoio.

o júri

presidente

Reitora da Universidade de Aveiro

Professor Doutor Carlos Alberto Henggeler de Carvalho Antunes
Professor Catedrático da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade de Coimbra

Professor Doutor Luís Eduardo Neves Gouveia
Professor Associado com Agregação da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa

Professor Doutor Rui Jorge Morais Tomaz Valadas
Professor Associado com Agregação da Universidade de Aveiro

Professor Doutor Filipe Pereira Pinto Cunha Alvelos
Professor Auxiliar da Escola de Engenharia da Universidade do Minho

Professor Doutor Amaro Fernandes de Sousa (Orientador)
Professor Auxiliar da Universidade de Aveiro

agradecimentos

Gostaria de agradecer aqui a todos os que permitiram que este trabalho fosse possível.

Em primeiro lugar gostaria de agradecer ao Prof. Doutor Amaro de Sousa pela orientação dedicada, sugestões propostas, encorajamento constante e revisão detalhada dos textos, sem os quais este trabalho não teria sido possível.

Gostaria também de agradecer ao Prof. Doutor Rui Valadas pela introdução a esta área científica e pelo acompanhamento do trabalho desenvolvido na dissertação de Mestrado da qual partiu este trabalho.

Os meus agradecimentos ao Prof. Doutor Luís Gouveia pela revisão de algum do trabalho científico.

Um agradecimento aos meus colegas de trabalho pelo ambiente proporcionado.

Gostaria de expressar também os meus agradecimentos aos meus pais e irmãos pelo excelente ambiente e apoio proporcionados.

O trabalho apresentado nesta tese foi desenvolvido no Instituto de Telecomunicações - polo de Aveiro e foi financiado pelo Ministério Português da Ciência e Tecnologia, sob o programa PRAXIS XXI.

palavras-chave

Redes de telecomunicações, dimensionamento de redes, gestão de recursos, otimização, modelos de programação linear inteira, heurísticas.

resumo

Esta tese visa o estudo de métodos para o dimensionamento e gestão de recursos em redes de telecomunicações de suporte a múltiplos serviços tais como as redes MPLS e ATM. Por dimensionamento de uma rede entende-se a determinação da rede física capaz de suportar o tráfego previsto. O objectivo escolhido para a tarefa de dimensionamento consiste em minimizar o custo da rede física cumprindo com os requisitos dos serviços suportados. Este objectivo visa melhorar a competitividade de um operador de telecomunicações, e como tal, deve ser uma das suas prioridades.

A tarefa de dimensionamento aparece interligada com a tarefa de gestão de recursos, uma vez que a forma como os recursos são utilizados determina a rede física necessária e a qualidade de serviço que esta proporciona. São abordados dois métodos distintos de gestão de recursos: um baseado no encaminhamento de tráfego sem restrições e outro baseado no encaminhamento de tráfego por percursos de peso mínimo. São formulados os problemas de dimensionamento de redes que resultam da utilização de cada um destes métodos de gestão de recursos e são apresentadas técnicas para resolver esses problemas.

Os problemas de optimização resultantes são complexos e apenas podem ser resolvidos de forma exacta para instâncias de pequena dimensão. Para estes casos, são estudados e comparados métodos de resolução baseados em programação linear inteira. Para resolver instâncias de maiores dimensões, recorre-se ao uso de técnicas heurísticas que não garantem soluções óptimas. No caso do dimensionamento com base em encaminhamento sem restrições são estudadas heurísticas baseadas na relaxação lagrangeana e em heurísticas construtivas e é proposta uma nova heurística lagrangeana. São também estudados melhoramentos para todas as heurísticas. No caso do dimensionamento com base em encaminhamento por percursos de peso mínimo são estudadas heurísticas baseadas na relaxação lagrangeana e *simulated annealing* e é proposta uma heurística GRASP. Em ambos os problemas, as heurísticas são comparadas entre si, verifica-se que apresentam desempenhos distintos e que as heurísticas propostas proporcionam vantagens significativas face às existentes. Além disso, para instâncias de dimensões reduzidas, verifica-se que as heurísticas propostas obtêm resultados próximos das soluções óptimas, o que leva a acreditar que os resultados para instâncias de dimensões superiores são também de boa qualidade.

keywords

Telecommunications networks, network dimensioning, resource management, optimization, linear integer programming models, heuristics.

abstract

This thesis aims to study methods for the task of dimensioning and resource management of multi-service telecommunication networks, such as MPLS and ATM. The task of network dimensioning consists in determining the physical network that can support the predicted traffic. The goal of the dimensioning task is to minimize the cost of the physical network while providing the required service quality. This goal aims to improve the ability of a telecommunications operator to compete with other operators, and as such, should be one of his priorities.

The dimensioning task is related to the resource management task, because the way the resources are used determines the required physical network and the quality of service it provides. Two distinct methods of resource management are addressed: one based on traffic routing without constraints and another based on traffic routing through minimum weight paths. The problems of network dimensioning that result from the utilization of each of these methods are formulated and techniques to solve these problems are presented.

The resulting optimization problems are complex and can only be solved exactly for small problem instances. For these case studies, several linear integer programming methods are studied and compared. To solve larger instances, heuristics techniques are used that cannot guarantee optimal solutions. In the case of network dimensioning with unconstrained traffic routing, lagrangean relaxation and greedy based heuristics are studied and a new lagrangean based heuristic is proposed. In the case of network dimensioning based on minimum weight routing, lagrangean relaxation and simulated annealing heuristics are studied and a new GRASP heuristic is proposed. In both dimensioning problems, the heuristics are compared among themselves; it is shown that they have different performances and that the proposed heuristics have significant advantages. Also, for reduced size problem instances the proposed heuristics obtain results that are close to optimal, which leads to believe that they also obtain good solutions for larger instances.

Índice

| | | |
|------------|--|----|
| CAPÍTULO 1 | Introdução..... | 1 |
| 1.1 | Enquadramento..... | 1 |
| 1.2 | Tema e objectivos..... | 4 |
| 1.3 | Principais contribuições..... | 6 |
| 1.4 | Estrutura..... | 7 |
| CAPÍTULO 2 | Tecnologias de redes..... | 9 |
| 2.1 | ATM (Asynchronous Transfer Mode)..... | 9 |
| 2.2 | MPLS (MultiProtocol Label Switching) | 12 |
| 2.3 | IGPs com encaminhamento por pesos mínimos | 15 |
| 2.4 | Gestão de recursos..... | 19 |
| CAPÍTULO 3 | Dimensionamento de redes baseadas em encaminhamento sem restrições | 23 |
| 3.1 | Estado-da-arte | 24 |
| 3.2 | Formulação do problema | 30 |
| 3.2.1 | Modelo | 30 |
| 3.2.2 | Restrições adicionais..... | 33 |
| 3.3 | Técnicas heurísticas..... | 36 |
| 3.3.1 | Heurística iterativa construtiva..... | 36 |
| 3.3.2 | Heurística lagrangeana..... | 39 |
| 3.3.3 | Variação da heurística lagrangeana | 45 |
| 3.3.4 | Heurísticas de melhoramento | 48 |
| 3.4 | Resultados computacionais | 51 |
| 3.4.1 | Casos de estudo | 52 |
| 3.4.2 | Heurísticas..... | 54 |
| 3.4.3 | Avaliação da eficácia das melhores heurísticas..... | 66 |
| 3.5 | Conclusões | 68 |
| CAPÍTULO 4 | Dimensionamento de redes baseadas em encaminhamento por percursos de peso mínimo | 71 |
| 4.1 | Estado-da-arte | 72 |
| 4.2 | Formulações do problema..... | 81 |
| 4.2.1 | Modelo base | 81 |
| 4.2.2 | Variantes | 85 |
| 4.3 | Técnica iterativa de duas fases..... | 88 |

| | | |
|--|---|-----|
| 4.3.1 | Primeira fase | 89 |
| 4.3.2 | Segunda fase | 90 |
| 4.3.3 | Procedimento iterativo..... | 91 |
| 4.4 | Técnicas heurísticas | 92 |
| 4.4.1 | Primeira fase – heurísticas de dimensionamento e encaminhamento | 93 |
| 4.4.2 | Segunda fase – atribuição de pesos às ligações | 116 |
| 4.5 | Resultados computacionais | 118 |
| 4.5.1 | Formulação do modelo completo..... | 118 |
| 4.5.2 | Técnica iterativa de duas fases..... | 123 |
| 4.5.3 | Afinação de parâmetros das heurísticas OH1 e OH2 | 127 |
| 4.5.4 | Comparação das heurísticas..... | 130 |
| 4.5.5 | Avaliação da eficácia de OH1..... | 139 |
| 4.5.6 | Comparação de resultados com método de dimensionamento sem restrições | 140 |
| 4.6 | Conclusões..... | 142 |
| CAPÍTULO 5 Considerações finais e propostas de trabalho futuro | | 145 |
| Referências | | 149 |
| Lista de acrónimos..... | | 157 |
| Anexo A – Tabelas de resultados | | 159 |

Deleted: 158

Deleted: 159

CAPÍTULO 1 Introdução

1.1 Enquadramento

Durante as últimas décadas têm ocorrido importantes avanços no domínio das redes de telecomunicações. A popularidade sempre crescente da Internet enquanto rede de comunicações global e novos avanços tecnológicos ao nível da electrónica de consumo e da informática fomentam constantemente o desenvolvimento de novos serviços e aplicações. Estes, por sua vez, impulsionam o avanço tecnológico das redes de telecomunicações no sentido de proporcionar maiores capacidades de transmissão com variados requisitos de qualidade de serviço.

O aumento da capacidade de processamento e armazenamento de informação dos equipamentos electrónicos permitiu a emergência de novos sistemas de comunicação digital por texto, imagem, som e vídeo. A digitalização de serviços tradicionalmente proporcionados por sistemas de transmissão analógicos como a transmissão de voz e vídeo permitiu a convergência das várias tecnologias de comunicação para redes multi-serviço de alto débito. No entanto, dada a maior sensibilidade destes serviços à qualidade de serviço (QoS) proporcionada, as redes de dados tradicionais não são apropriadas ao suporte destes. Enquanto que se um utilizador acede à Internet através de um *browser*, um atraso e eventual falha na transmissão pode ser tolerável, o mesmo não se aplica a uma chamada de voz sobre IP (VoIP) em que os clientes se habituaram à qualidade de serviço da rede telefónica pública tradicional. Neste sentido, foram desenvolvidas tecnologias capazes de integrar na mesma rede diferentes serviços com requisitos próprios de qualidade de serviço. A tecnologia ATM (Asynchronous Transfer Mode) ((CCITT, 1992a) e (CCITT, 1992b)), introduzida na década de 80 pelo ITU-T (*International Telecommunication Union Telecommunication Standardization Sector*), foi um dos frutos destes desenvolvimentos.

À medida que aumenta a quantidade de tráfego a encaminhar nas redes centrais (*core*) torna-se necessário um maior controlo de gestão da rede por parte dos operadores da

mesma. Tradicionalmente os operadores proporcionavam largura de banda em excesso, mas essa alternativa tornou-se economicamente inviável no competitivo mercado actual das telecomunicações. A forma de gerir os recursos da rede por forma a encaminhar os fluxos de tráfego na rede física denomina-se por Engenharia de Tráfego e é um dos tópicos mais estudados na área das redes de telecomunicações.

No início dos anos 90, na maioria das redes centrais o encaminhamento de tráfego era baseado em métricas. Segundo este esquema de encaminhamento, a cada ligação é atribuído um peso e o tráfego é encaminhado pelo(s) percurso(s) de peso mínimo. Este esquema proporciona um controlo sobre o encaminhamento de tráfego com base no ajustamento dos pesos das ligações. Típicamente um operador atribuía pesos às ligações inversamente proporcionais às suas larguras de banda. Este método simples de gestão causa muitas vezes uma distribuição pouco uniforme de tráfego, em que certas ligações ficam sobrecarregadas, enquanto que outras ficam com excesso de largura de banda disponível. Com o aumento das dimensões da rede este processo torna-se mais imprevisível, pois o valor atribuído à métrica de uma ligação da rede pode afectar cada vez mais fluxos de tráfego e consequentemente a sua distribuição nas outras ligações da rede.

Com o aumento do tráfego as tecnologias de redes deixaram de ser apropriadas para satisfazer as necessidades de largura de banda do tráfego IP e muitos dos operadores migraram para a tecnologia ATM. Tradicionalmente, o encaminhamento do tráfego em ATM era feito através de ligações virtuais ponto-a-ponto permanentes (PVCs – *Permanent Virtual Connections*) definidos explicitamente pelo operador. Existiam alguns mecanismos para o estabelecimento automático de ligações virtuais (VCs), mas a falta de maturidade destes significava que o operador tinha frequentemente de recorrer à especificação manual de todos os PVCs (Semeria, 2000). No entanto, a possibilidade de controlar precisamente os percursos dos PVCs permitia um melhor aproveitamento dos recursos disponíveis e constituía uma vantagem significativa face às redes baseadas somente no encaminhamento por percursos de peso mínimo. Segundo esta metodologia, em cima da rede lógica definida pela estrutura de PVCs um protocolo de encaminhamento IP é responsável pelo estabelecimento dos percursos dos pacotes. Os PVCs são assim tratados como ligações com métricas associadas. Esta estratégia permite também a definição de percursos alternativos para os pacotes em caso de falha num ponto da rede. Para tal, são especificados PVCs alternativos e a estes é atribuída uma métrica mais elevada.

O encaminhamento do tráfego através de PVCs explícitos implica também algumas desvantagens. Uma desvantagem significativa consiste na complexidade e nos custos inerentes à gestão simultânea de uma rede ATM e de uma rede lógica IP. O número de PVCs cresce rapidamente à medida que as dimensões da rede aumentam e a tarefa de os configurar e gerir duplica em complexidade se o operador pretender a existência de caminhos alternativos para uso em caso de falhas. A rede IP em cima da rede ATM torna-se também mais complicada de gerir com o aumento do número de PVCs. O número de ligações lógicas cresce, aumentando o tamanho das bases de dados dos estados das ligações e a complexidade da tarefa de actualizar as bases de dados dos equipamentos e de calcular e actualizar os percursos de peso mínimo por parte do IGP. Outra desvantagem desta metodologia consiste na perda de capacidade de transmissão da rede devido ao tamanho relativamente grande do cabeçalho de uma célula ATM (só 48 dos 53 bytes de uma célula ATM são usados para transporte de dados). Por último, muitos operadores evitam a tecnologia ATM devido ao maior custo dos equipamentos ATM (um *switch* ATM é geralmente mais caro que um *router* IP).

Nas redes IP tradicionais, o encaminhamento dos pacotes é efectuado com base num protocolo de encaminhamento como o RIP, OSPF ou IS-IS. Não existe controlo sobre a qualidade de serviço proporcionada e o tráfego é encaminhado segundo uma política de *best-effort*. Estas redes são incapazes de proporcionar a Qualidade de Serviço necessária a certas aplicações como transmissão de voz e vídeo. Mais recentemente, foi desenvolvida uma tecnologia capaz de providenciar mecanismos mais flexíveis de Engenharia de Tráfego e de Qualidade de Serviço em redes IP, o MPLS. O MPLS deve as suas origens a uma tecnologia desenvolvida pela Cisco em 1996, denominada por *Tag Switching*. Um ano mais tarde, foi apontado um grupo de trabalho do IETF para com base nesta tecnologia desenvolver as especificações do MPLS. O MPLS define um conjunto de extensões para as redes IP tradicionais utilizando alguns dos conceitos introduzidos pela tecnologia ATM, como a capacidade de estabelecer caminhos virtuais entre dois pontos da rede. Estes caminhos denominam-se por LSPs (*Label Switched Paths*) e identificam um percurso na rede definido através da troca de etiquetas de pacotes. O processo de envio dos pacotes (*forwarding*) é separado do processo de encaminhamento (*routing*) o que permite um maior controlo sobre a utilização dos recursos da rede.

A utilização do MPLS evita o desperdício de capacidade de transmissão que ocorre com as células ATM. Além disso, a gestão e manutenção da rede fica limitada à rede IP evitando a gestão e manutenção da rede ATM adicional. Uma das vantagens mais significativas da tecnologia MPLS consiste na capacidade de estabelecer LSPs sujeitos a restrições de políticas administrativas ou de recursos disponíveis (*Constraint-Based Routing*). Estas restrições podem servir, por exemplo, para limitar o percurso de um LSP a determinadas ligações ou para indicar um requisito de largura de banda disponível necessária. Através deste método, os LSPs são determinados automaticamente sem necessidade de intervenção humana e com o mesmo grau de controlo que os processos tradicionais de Engenharia de Tráfego. Este método de estabelecer LSPs também permite uma resposta mais rápida da rede a falhas ou alteração de valores de tráfego a encaminhar.

1.2 Tema e objectivos

Esta tese visa o estudo de métodos para o dimensionamento e gestão de recursos em redes de telecomunicações. Por dimensionamento de uma rede entende-se a determinação da rede física capaz de suportar o tráfego previsto. A tarefa de dimensionamento aparece interligada com a tarefa de gestão de recursos, uma vez que a forma como os recursos são utilizados determina a rede física necessária e a qualidade de serviço que esta proporciona. Ao longo desta tese considera-se que os recursos a gerir consistem na capacidade de encaminhamento e transmissão de tráfego dos equipamentos da rede. Estes equipamentos correspondem normalmente às ligações físicas e encaminhadores da rede. Nesta tese é utilizada também a designação desenho de rede para referir as tarefas conjuntas de dimensionamento e gestão de recursos.

Num regime de mercado livre, uma pequena redução de custos pode traduzir-se numa vantagem competitiva determinante. Uma vez que todos os operadores têm acesso às mesmas tecnologias e a equipamentos semelhantes, a optimização do desempenho fica muitas vezes reduzida a escolhas estratégicas de planeamento. O correcto dimensionamento e gestão dos recursos de rede é crucial para a redução dos custos de operação e manutenção a esta associados, melhorando a competitividade do operador.

O conceito de caminho virtual simplifica a forma como os recursos são alocados ao permitir o agrupamento de várias ligações virtuais num único caminho. O controlo do processo de alocação de recursos passa assim a ser feito ao nível dos caminhos virtuais e

não ao nível das ligações virtuais que são geralmente em muito maior número (Handel, 1994). A gestão de recursos através de caminhos virtuais permite também a separação dos serviços com base nos seus requisitos de Qualidade de Serviço (QoS). A QoS é caracterizada por certos parâmetros que devem ser acordados entre o fornecedor e o cliente do serviço. O conceito de rede lógica, definida através de um conjunto de caminhos virtuais, permite a separação do suporte a diferentes serviços em cima da mesma rede física.

Ao longo desta tese, a qualidade de serviço é garantida por um valor de largura de banda efectiva que é necessário reservar para o caminho virtual entre dois nós da rede. Esta largura de banda pode ser calculada com base no valor de pico de tráfego esperado ou com base num método de cálculo de largura de banda efectiva (estes modelos entram em linha de conta com vários parâmetros de tráfego como por exemplo a probabilidade de bloqueio).

O custo do dimensionamento da rede consiste na soma de todos os custos de operação e manutenção dos equipamentos da rede necessários para satisfazer os requisitos de tráfego. Estes custos são tipicamente maiores nas ligações que nos nós da rede, pelo que nos problemas abordados nesta tese só se consideram os custos associados às ligações. A forma como o tráfego é encaminhado determina o número de ligações necessárias em cada aresta. Um esquema de encaminhamento endereçado nesta tese é o encaminhamento sem restrições. Tal como o nome indica, este esquema permite a escolha de qualquer percurso entre dois nós da rede. O operador deve possuir um meio de especificar os percursos entre todos os nós da rede nas tabelas de encaminhamento dos equipamentos respectivos. A gestão dos percursos torna-se uma tarefa demasiado complexa à medida que as dimensões das redes aumentam, uma vez que o número de entradas nas tabelas de encaminhamento é, no limite, igual a $|N| \times |N-1|$ (sendo N o número de nós da rede com tráfego a encaminhar entre si).

Outra alternativa de encaminhamento endereçada nesta tese é o encaminhamento baseado em percursos de peso mínimo. Neste esquema, a cada ligação é atribuído um peso e os percursos entre os nós de tráfego da rede são estabelecidos automaticamente através de um protocolo de encaminhamento que determina os percursos de peso mínimo entre estes nós. Neste caso, a complexidade da tarefa de configuração e gestão da rede é reduzida ao seu

número de ligações (LL). Além disso, no caso de ocorrer uma falha na rede, existe uma reconfiguração automática e o tráfego é reencaminhado pelos novos percursos de peso mínimo. O encaminhamento baseado em percursos de peso mínimo é utilizado nos protocolos de encaminhamento OSPF e IS-IS em redes IP e PNNI em redes ATM.

Os objectivos propostos para esta tese consistem na identificação e resolução de problemas relevantes no contexto do dimensionamento e gestão de recursos em redes de telecomunicações multi-serviço baseadas em ligações virtuais ponto-a-ponto. Os problemas de dimensionamento e gestão de recursos abordados consistem na determinação da rede física de custo mínimo necessária para o encaminhamento de uma matriz de tráfego esperada. Dependendo da tecnologia subjacente, o encaminhamento de tráfego pode ser sem restrições ou baseado em percursos de peso mínimo. Para a resolução destes problemas são usados métodos habitualmente utilizados em problemas de optimização. Alguns destes métodos consistem na formulação matemática do problema e sua resolução através de um algoritmo de *Branch-and-Bound*. No entanto, dada a grande complexidade destes problemas, esta abordagem torna-se impraticável para instâncias dos problemas de maiores dimensões. Isto sucede devido à grande quantidade de recursos computacionais necessária (memória e velocidade de processamento) que cresce de forma exponencial com o aumento da dimensão dos casos de estudo. Para estes casos são estudadas e desenvolvidas outras técnicas baseadas em métodos heurísticos para a sua resolução aproximada (que em alguns casos pode ser óptima).

1.3 Principais contribuições

As principais contribuições desta tese no problema do desenho de redes com encaminhamento sem restrições são:

- No algoritmo baseado na relaxação lagrangeana com optimização por subgradiente, estudo da influência dos seus parâmetros no seu desempenho e escolha dos melhores parâmetros.
- Proposta de uma variação do algoritmo baseado na relaxação lagrangeana com optimização por subgradiente e comparação do seu desempenho com o algoritmo standard.

- Estudo da eficiência dos algoritmos anteriores com dois algoritmos de melhoramentos que foram previamente propostos no trabalho de Mestrado.
- Validação experimental da qualidade das soluções obtidas com as heurísticas através da resolução de modelos de programação linear inteira previamente conhecidos por forma a obter bons limites teóricos.

As principais contribuições desta tese no problema do desenho de redes com encaminhamento baseado em percursos de peso mínimo são:

- Proposta de diferentes variantes de modelos de programação linear inteira que definem o problema de optimização e comparação da sua eficiência quando resolvidas por métodos standard (*Branch-and-Bound*).
- Proposta de técnica iterativa de duas fases, capaz de determinar as soluções óptimas com tempos de cálculo muito inferiores aos da resolução dos modelos anteriores.
- Proposta de um algoritmo heurístico, baseado no método GRASP, para resolução de problemas de grande dimensão, cujos resultados experimentais mostram ser mais eficiente que outras estratégias heurísticas previamente conhecidas.
- Validação experimental da qualidade das soluções obtidas com a heurística proposta através das soluções da técnica iterativa de duas fases por forma a obter bons limites teóricos.
- Comparação dos resultados obtidos para encaminhamento sem restrições e encaminhamento baseado em percursos de peso mínimo que permite concluir que o encaminhamento por percursos de peso mínimo tem uma penalidade pequena no custo da rede.

1.4 Estrutura

Esta tese está estruturada da seguinte forma.

O capítulo 2 faz uma descrição das tecnologias de redes de telecomunicações que motivaram este estudo e introduz os métodos de gestão de recursos considerados nos capítulos seguintes.

O capítulo 3 aborda o dimensionamento e gestão de recursos de redes com encaminhamento sem restrições. É apresentado o estado-da-arte de métodos utilizados por outros autores para resolver problemas relacionados com os que se abordam neste capítulo. São apresentados métodos para resolver estes problemas baseados em modelos de programação linear inteira para redes pequenas e heurísticas para redes de maiores dimensões. São comparados os desempenhos destes métodos.

O capítulo 4 aborda o dimensionamento e gestão de recursos de redes com encaminhamento baseado em percursos de peso mínimo. É apresentado o estado-da-arte de técnicas descritas por outros autores para resolver problemas relacionados com os que se abordam neste capítulo. São apresentados modelos de programação linear inteira para resolver este problema para redes pequenas e técnicas heurísticas apropriadas a redes de grandes dimensões. Os resultados obtidos para este problema são comparados com os resultados do capítulo 3 para estimar as diferenças em custo entre os dois métodos de gestão de recursos.

O capítulo 5 apresenta as conclusões que se retiram do trabalho efectuado e apresenta também sugestões de áreas de trabalho para desenvolvimento futuro.

CAPÍTULO 2 Tecnologias de redes

A tarefa de dimensionamento de uma rede de telecomunicações tem de considerar os mecanismos e métodos de gestão de recursos proporcionados pela tecnologia em uso. Neste capítulo é feita uma descrição sumária das tecnologias que motivaram os estudos apresentados nesta tese. São também feitas algumas considerações sobre os métodos de gestão de recursos que podem ser utilizados nestas redes e as suas implicações na tarefa de dimensionamento.

Este capítulo encontra-se organizado da seguinte forma. Na secção 2.1 é descrita a tecnologia ATM. Na secção 2.2 é descrita a tecnologia MPLS. Na secção 2.3 são descritos IGPs com encaminhamento por percursos de peso mínimo. Por último, a secção 2.4 aborda métodos de gestão de recursos disponíveis em redes com as tecnologias descritas atrás.

2.1 ATM (*Asynchronous Transfer Mode*)

O ATM é uma tecnologia de comutação de pacotes orientada à ligação. Esta tecnologia foi desenvolvida com o objectivo de integrar na mesma rede o suporte a serviços com diferentes características de tráfego com altas velocidades de transmissão. O ATM é uma norma definida pelo ITU-T (*International Telecommunication Union Telecommunication Standardization Sector*) – (CCITT, 1992a) e (CCITT, 1992b).

Um pacote ATM é designado por célula e tem um tamanho constante de 53 bytes, 5 dos quais transportam a informação necessária para a correcta transmissão do pacote enquanto que os restantes bytes são utilizados para transmissão de dados. As pequenas dimensões de uma célula ATM permitem uma multiplexagem mais eficiente do tráfego. Isto traduz-se numa redução do atraso e da variação do atraso (*jitter*) que são importantes para serviços mais sensíveis ao atraso como a transmissão de voz ou vídeo. Por outro lado, as pequenas dimensões da célula significam que uma maior capacidade de transmissão é desperdiçada

devido ao tamanho relativamente grande do cabeçalho comparativamente com o tamanho da célula.

Uma rede ATM é composta por um conjunto de comutadores e equipamentos terminais. Um equipamento terminal ATM é um equipamento que contém um interface de rede ATM e que pode ser, por exemplo, uma estação de trabalho, um *router* ou um comutador de rede local não ATM. Existem dois tipos de interfaces que podem ligar dois equipamentos ATM (comutadores ou terminais): o interface UNI (*User-Network Interface*) e o interface NNI (*Network-Network Interface*). Um interface UNI liga um equipamento terminal a um comutador ATM, enquanto que um interface NNI liga dois comutadores ATM. O cabeçalho de uma célula ATM depende do tipo de interface por onde é enviada: UNI ou NNI. O cabeçalho de uma célula ATM no formato UNI tem a estrutura representada na

[Tabela 1](#), O cabeçalho de uma célula ATM no formato NNI tem a estrutura representada na

[Tabela 2](#).

Deleted: Tabela 1

Deleted: Tabela 1

Deleted: Tabela 2

Deleted: Tabela 2

Tabela 1: Cabeçalho de uma célula ATM UNI

| | | | | | |
|--------|--------|---------|--------|-------|--------|
| GFC | VPI | VCI | PT | CLP | HEC |
| 4 bits | 8 bits | 16 bits | 3 bits | 1 bit | 8 bits |

Tabela 2: Cabeçalho de uma célula ATM NNI

| | | | | |
|---------|---------|--------|-------|--------|
| VPI | VCI | PT | CLP | HEC |
| 12 bits | 16 bits | 3 bits | 1 bit | 8 bits |

Os campos dos cabeçalhos das células ATM são os seguintes:

GFC (*Generic Flow Control*) – permite, entre outras funções, o controlo do fluxo entre os equipamentos terminais e os comutadores ATM;

VPI (*Virtual Path Identifier*) – identifica um caminho virtual num interface ATM;

VCI (*Virtual Channel Identifier*) – identifica uma ligação virtual pertencente ao caminho virtual identificado pelo VPI num interface ATM;

PT (*Payload Type*) – indica no primeiro bit se a célula contém dados do utilizador ou de controlo; de acordo com o valor deste bit, o segundo e o terceiro bits contêm mais informação relacionada com os dados desta célula;

CLP (*Cell Loss Priority*) – indica se a célula deve ser descartada no caso de haver congestão ao longo do seu percurso na rede;

HEC (*Header Error Control*) – contém um código CRC (*cyclic redundancy check*) que permite a cada receptor detectar erros de transmissão que possam acontecer nos 5 bytes do cabeçalho.

Dois tipos de serviços suportados nas redes ATM são: PVC (*Permanent Virtual Connection*) corresponde a uma ligação virtual permanente entre dois pontos da rede; SVC (*Switched Virtual Connection*) corresponde a uma ligação iniciada e terminada dinamicamente, que dura enquanto necessário. Uma das vantagens dos PVCs consiste em dispensarem o recurso a mecanismos automáticos de sinalização para reserva de recursos na rede. Como os recursos estão disponíveis permanentemente, a transmissão de dados pode iniciar-se mais rapidamente. Por outro lado, é necessária a especificação manual dos PVCs e estes mantêm-se imutáveis, independentemente da ocorrência de alterações no funcionamento da rede. Os SVCs têm a desvantagem de necessitarem do seu estabelecimento prévio, o que demora algum tempo e implica a transmissão de informação adicional ao longo da rede. Estes procedimentos podem ser efectuados automaticamente sem requererem intervenção humana.

Uma rede ATM é orientada à ligação. Para a transferência de informação na rede é necessário o estabelecimento prévio de ligações. As ligações ATM são de dois tipos: caminhos virtuais ou VPCs (*Virtual Path Connections*) e ligações virtuais ou VCCs (*Virtual Channel Connections*). Um caminho virtual consiste num conjunto de ligações virtuais que partilham o mesmo VPI. Uma ligação virtual é identificada pelos campos VPI e VCI. Os campos VPI e VCI só têm significado numa ligação física, podendo ser atribuídos diferentes valores em cada ligação física por onde passam. Quando é necessário estabelecer uma ligação virtual, são atribuídos valores VPI e VCI ao longo de todas as ligações físicas da rede a percorrer. Através das tabelas de encaminhamento dos comutadores ATM é atribuída a cada combinação VPI e VCI à entrada do comutador, a ligação de saída correspondente, atribuindo novos valores aos campos VPI e VCI. As tabelas de encaminhamento são construídas por gestão no caso dos PVCs ou através de sinalização no caso dos SVCs. Na Figura 1 pode-se observar um exemplo de uma rede ATM. O estabelecimento de ligações virtuais (VCCs) do Terminal 1 para o 5, do 2 para o 4

e do 3 para o 4 resulta na atribuição de VPIs e VCIs em cada ligação física representados na figura. No exemplo representado, cada ligação física é percorrida por apenas um caminho virtual identificado pelo valor do campo VPI, mas no caso geral podem ser enviadas células ATM de caminhos virtuais diferentes na mesma ligação física. As linhas com tracejados distintos indicam ligações virtuais que são identificadas pela concatenação de pares de valores VPI e VCI ao longo das várias ligações físicas.

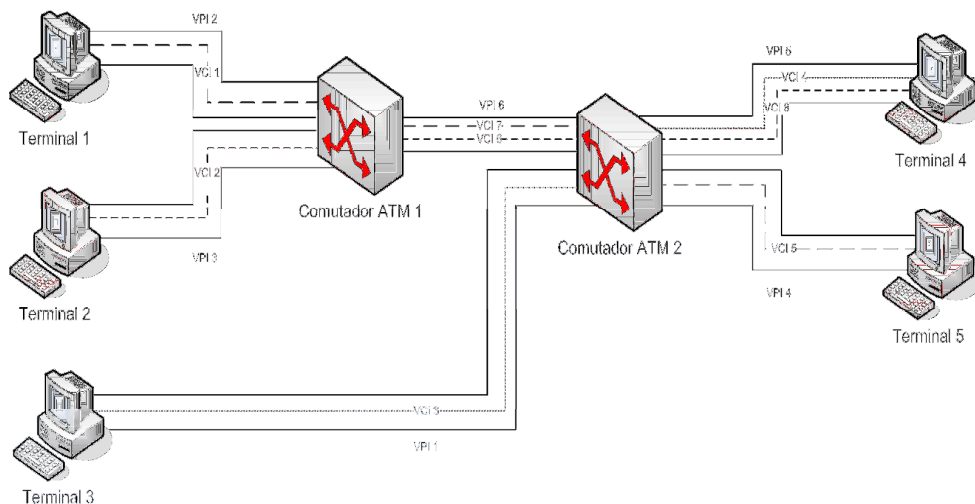


Figura 1: Exemplo de uma rede ATM

No caso dos serviços comutados (SVCs), o processo de estabelecimento de um VCC designa-se por CAC (*Call Admission Control*). Este processo é responsável por determinar um trajecto capaz de satisfazer os requisitos de tráfego e QoS do VCC a estabelecer.

2.2 MPLS (*Multi-Protocol Label Switching*)

O MPLS (Rosen, 2001) define um conjunto de extensões para redes IP destinadas a providenciar mecanismos de Engenharia de Tráfego e maiores velocidades de comutação de pacotes. Engenharia de Tráfego (Awduche, 1999) é o nome dado ao processo de seleccionar os percursos do tráfego na rede de modo a otimizar o seu desempenho e a utilização de recursos. Estes percursos podem ser sujeitos a vários tipos de restrições tendo como base a largura de banda disponível ou podem servir para implementação de políticas administrativas. A tecnologia MPLS foi desenvolvida com base no protocolo *Tag Switching* da Cisco (Rekhter, 1997). Este protocolo baseia-se na comutação rápida de

pacotes rotulados por etiquetas que são facilmente processadas pelos *routers* MPLS. A tecnologia MPLS separa os mecanismos de envio de pacotes e de encaminhamento, permitindo uma maior flexibilidade na implementação de diversos esquemas de encaminhamento. Outra das suas vantagens é que um domínio MPLS pode ser implementado através de várias tecnologias de camada 2 como ATM, Frame Relay ou Ethernet.

Um domínio MPLS é constituído por um conjunto de *routers* MPLS interligados em rede que se designam por LSRs (*Label-Switching Routers*). Os percursos dos pacotes ao longo de um domínio MPLS designam-se por LSPs (*Label-Switched Paths*). Ao entrarem num domínio MPLS os pacotes são classificados para encaminhamento com base na informação do cabeçalho IP, no tipo de serviço e na tabela de encaminhamento mantida pelo LSR. Este procedimento é efectuado pelos *routers* de fronteira, os LERs (*Label Edge Routers*). A classificação dos pacotes é feita em classes denominadas de FECs (*Forwarding Equivalent Classes*) que identificam grupos de pacotes a serem encaminhados pelo mesmo percurso. Esta classificação permite alguma flexibilidade na medida em que é possível estabelecer um equilíbrio entre o tamanho das tabelas de encaminhamento dos *routers* e o número de tipos de serviço disponíveis. Quanto maior for o número de serviços disponíveis, maiores serão as tabelas de encaminhamento dos *routers*. A uma FEC podem ser atribuídos mais do que um LSP. Um LSP pode também ser utilizado por mais do que uma FEC. Com base na FEC correspondente é inserido um cabeçalho com uma etiqueta ao pacote (dependendo da tecnologia da camada inferior ao MPLS, o cabeçalho pode ter de ser codificado nos seus campos em vez de adicionado). Um pacote MPLS tem um cabeçalho com o formato definido na [Tabela 3](#).

Deleted: Tabela 3
Deleted: Tabela 3

Tabela 3: Cabeçalho de um pacote MPLS

| | | | |
|------------------|---------------|----------------|---------------|
| Label 20 bits | CoS 3 bits | Stack 1 bit | TTL 8 bits |
|------------------|---------------|----------------|---------------|

Os campos do cabeçalho MPLS são os seguintes:

Label valor que identifica a etiqueta do pacote;

CoS identifica os algoritmos de descartagem e de fila de espera a aplicar ao pacote ao longo do seu percurso;

Stack identifica se é usado um esquema hierárquico de etiquetas;

TTL *Time to Live* – identifica o número máximo de passagens por LSRs do pacote até este ser descartado.

Em cada LSR a etiqueta do pacote é utilizada para identificar o seu próximo destino na tabela de encaminhamento do LSR. A etiqueta de entrada é substituída pela etiqueta de saída e o pacote é enviado para o seu destino segundo um processo similar ao processamento VCI/VPI num comutador ATM. Ao deixar o domínio MPLS o cabeçalho MPLS é removido. O percurso seguido por um pacote ao longo de um domínio MPLS é ilustrado na Figura 2.

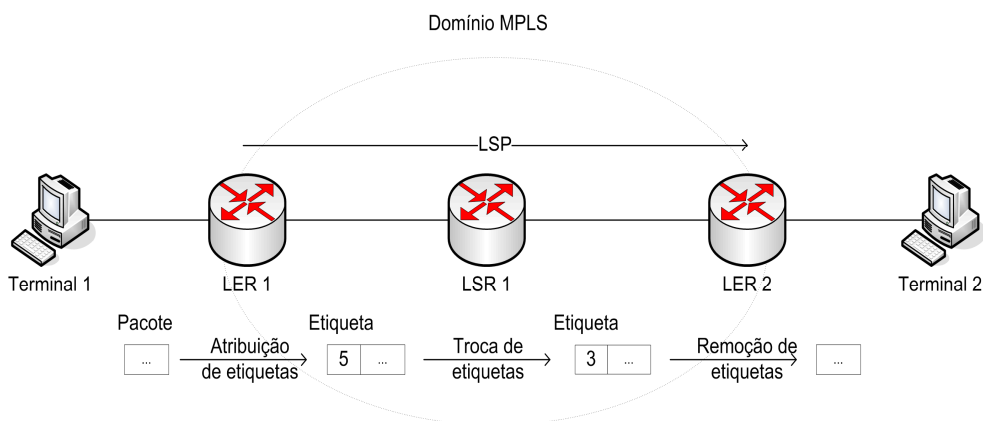


Figura 2: Exemplo de uma rede MPLS

A distribuição das etiquetas para a especificação dos LSPs é feita através de um protocolo como o RSVP-TE (*Resource Reservation Protocol-Traffic Extension*) (Awduche, 2001) ou o CR-LDP (*Constraint based-Label Distribution Protocol*) (Jamoussi, 2002). Estes protocolos são responsáveis pelo estabelecimento dos percursos ao longo da rede e pela reserva de recursos requerida pelo tipo de serviços a encaminhar.

O CR-LDP define um conjunto de extensões ao LDP (*Label Distribution Protocol*) para expandir a sua capacidade de estabelecer percursos. Através deste protocolo um LSP pode ser estabelecido com base em restrições explícitas de percurso, restrições de QoS

(Qualidade de Serviço) ou outras restrições. Este protocolo providencia mecanismos para o LSR de ingresso estabelecer um CR-LSP (*Constraint based routed LSP*) ponto-a-ponto e mecanismos para sinalizar e reservar os recursos necessários através do LDP. Este protocolo suporta também preempção, que funciona do seguinte modo. O CR-LDP sinaliza os recursos requeridos pelos LSPs em cada salto do percurso. Se não é encontrado um percurso com suficientes recursos, os LSPs existentes podem ser reencaminhados para libertar recursos para o novo LSP. Este processo leva em conta as prioridades individuais dos LSPs para manter os recursos e as prioridades para estabelecimento dos LSPs, que são usadas para determinar se um LSP novo pode forçar o reencaminhamento de um LSP já estabelecido. O RSVP-TE é uma extensão ao RSVP para estabelecer LSPs em redes MPLS. A definição deste protocolo permite a criação de LSPs encaminhados explicitamente com ou sem reserva de recursos. Permite também o reencaminhamento de LSPs, preempção e detecção de ciclos. Com as extensões providenciadas pelo RSVP-TE ou pelo CR-LDP, o LSR de ingresso pode determinar os percursos dos LSPs com base em restrições de Engenharia de Tráfego.

Para realizar o encaminhamento baseado em restrições, a determinação dos percursos deve levar em conta não só o custo das ligações, mas também um conjunto de propriedades que lhes são associadas. Estas propriedades permitem restringir um conjunto de percursos a determinadas ligações escolhidas administrativamente ou com base no desempenho que proporcionam (largura de banda, prioridade ou atraso máximo). A escolha dos percursos sujeitos às restrições impostas pode ser feita por um protocolo de encaminhamento por peso mínimo com suporte a Engenharia de Tráfego como o OSPF-TE. Este protocolo encarrega-se de escolher os percursos que depois são estabelecidos através de um protocolo de distribuição de etiquetas como o CR-LDP ou o RSVP-TE.

2.3 IGP com encaminhamento por pesos mínimos

Os protocolos de encaminhamento OSPF (*Open Shortest Path First*) (Moy, 1998) e IS-IS (*Intermediate System to Intermediate System*) (Callon, 1990) são protocolos IGP (*Interior Gateway Protocol*) do tipo *link state*. Este tipo de protocolos é caracterizado por cada *router* possuir a informação sobre toda a topologia da rede sob a forma de uma base de dados. Desta forma, cada *router* corre localmente um algoritmo centralizado para calcular os percursos a atribuir aos pacotes de tráfego.

As bases de dados dos *routers* consistem em colecções dos estados locais de todos os *routers* participantes (isto é, a interface activa do *router* e todos os seus vizinhos acessíveis). Para a construção da base de dados, cada *router* participante anuncia o seu estado local na rede através de LSAs (*Link State Advertisement*) que são recebidos por todos os outros *routers* participantes. Eventualmente todos os *routers* participantes terão bases de dados idênticas. Quando as bases de dados estiverem sincronizadas, cada *router* irá correr o algoritmo de percurso de peso mínimo em árvore dele próprio para todos os destinos possíveis que conhece. As tabelas de encaminhamento do *router* são baseadas no resultado deste algoritmo. Se ocorrerem alterações no estado da rede, estas são anunciadas de imediato, os algoritmos são de novo executados e as tabelas de encaminhamento actualizadas de acordo com os novos resultados.

A cada ligação é atribuído um peso que é uma métrica administrativa utilizada pelo algoritmo de percurso de peso mínimo. Este algoritmo é baseado no algoritmo de Dijkstra. Se existir mais do que um percurso com o mesmo peso, os *routers* dividem os agregados de fluxos de tráfego em igual proporção entre estes percursos. Este mecanismo denomina-se por ECMP (*Equal Cost Multi-Pathing*) e permite um melhor balanceamento de carga médio entre as ligações ao distribuir o tráfego entre percursos de peso idêntico. Considere-se a rede representada na Figura 3. Considere-se também que existe um agregado de fluxos de tráfego a encaminhar do Terminal 1 para o Terminal 2. Os números representados nas ligações entre os *routers* indicam os pesos das ligações e os números ao lado dos agregados de fluxos de tráfego indicam a carga em cada ligação. Se for utilizado o protocolo OSPF ou IS-IS, o tráfego segue pelos dois percursos de menor peso total que são os percursos Router 1 – Router 2 – Router 4 e Router 1 – Router 2 – Router 3 – Router 4. Segundo o mecanismo ECMP, o tráfego é dividido de forma igual entre os dois percursos de menor peso entre o Router 2 e o Router 4, o que permite um melhor balanceamento do tráfego entre as ligações.

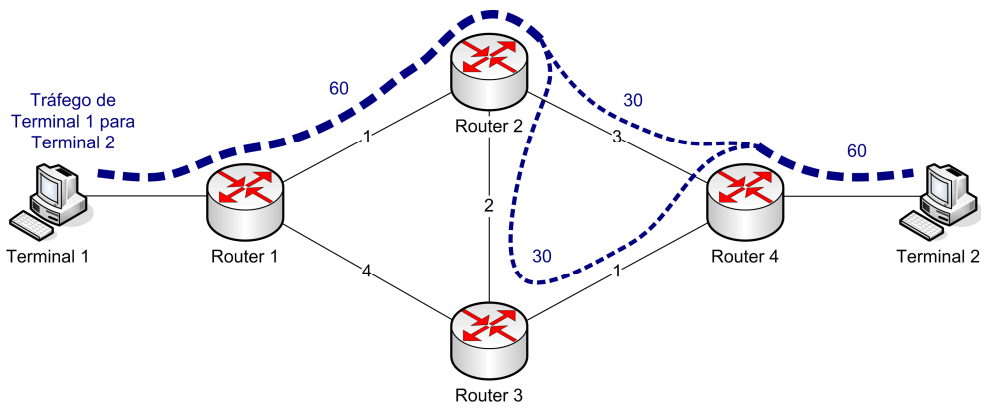


Figura 3: Distribuição de tráfego com ECMP (i)

No entanto, se o peso da ligação entre o Router 1 e o Router 3 for alterado para 3, obtém-se a distribuição de carga representada na Figura 4. Note-se que a distribuição de carga não é igual ao longo de todos os percursos de peso mínimo, mas varia de ligação para ligação. Isto sucede porque a distribuição de carga segundo ECMP é feita nó a nó e não com base nos percursos totais. Como tal, considerando ECMP, determinar a carga em cada ligação não é um processo trivial e a distribuição de carga entre as ligações nem sempre é a mais balanceada.

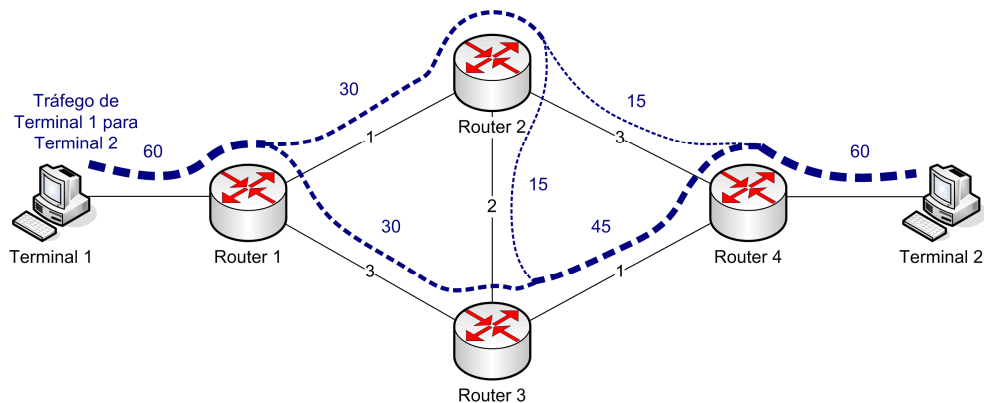


Figura 4: Distribuição de tráfego com ECMP (ii)

Estes protocolos designam-se por protocolos de encaminhamento dinâmicos, pois reconfiguram automaticamente as tabelas de encaminhamento em reacção a eventuais falhas no funcionamento de um ou mais elementos de rede. Os novos percursos são

calculados após um intervalo de tempo de convergência e o protocolo garante a não existência de ciclos. No entanto, uma das limitações destes protocolos consiste na grande quantidade de LSAs que são enviados na rede se esta não se mantiver estável. Para superar este problema em redes de maiores dimensões existe a possibilidade de hierarquizar a rede em áreas, o que reduz a quantidade de LSAs a serem enviados.

O protocolo OSPF corre em cima do protocolo IP. Como tal, é mais vulnerável a ataques, permite ligações virtuais e depende da fragmentação dos pacotes IP para grandes LSAs (*Link State Advertisement*). O protocolo IS-IS corre directamente em cima da camada 2 (está ao nível do IP). Como tal, é menos vulnerável a ataques mas mais difícil de implementar em alguns ambientes. Ambos os protocolos suportam hierarquia de áreas de 2 níveis, o que permite reduzir a complexidade do cálculo dos percursos de peso mínimo ou a eventual agregação de rotas.

No que respeita a extensões de *Traffic Engineering* (TE) do MPLS, ambos os protocolos enviam a informação de TE das ligações (largura de banda disponível, cor das ligações, etc.) sem se ocuparem do seu conteúdo. As funções de TE são independentes do IGP e como tal, os mecanismos dos dois protocolos são idênticos.

(Katz, 2003) descreve extensões para o protocolo OSPF versão 2 suportar Engenharia de Tráfego. Estas extensões fornecem um meio para descrever a topologia de Engenharia de Tráfego (incluindo as restrições administrativas e de largura de banda) e distribuir esta informação dentro de uma área OSPF. Com base nesta informação adicional é possível construir uma base de dados expandida na qual as ligações possuem atributos adicionais. Esta informação é difundida através de LSAs com mais atributos de ligações. Os novos atributos de ligação são:

Tipo de ligação – ponto a ponto ou de acesso múltiplo;

Identificação de ligação – identificação do *router* vizinho (ponto a ponto) ou *designated router* (acesso múltiplo);

Endereços IP locais – endereço(s) do(s) interface(s) correspondente(s) a esta ligação;

Endereços IP remotos – endereço(s) do(s) interface(s) do vizinho correspondente(s) a esta ligação;

Métrica de Engenharia de Tráfego – métrica da ligação para Engenharia de Tráfego (pode ser diferente da métrica OSPF);

Largura de banda máxima – largura de banda máxima que pode ser usada nesta ligação neste sentido (do *router* que originou o LSA para o vizinho);

Largura de banda máxima reservável – largura de banda máxima que pode ser reservada nesta ligação neste sentido;

Largura de banda não reservada – largura de banda ainda não reservada para cada um dos níveis de prioridade de estabelecimento de percursos;

Cor/classe do recurso.

A base de dados expandida pode ser usada para monitorar os atributos das ligações (i), para efectuar encaminhamento sujeito a restrições local (ii) ou para Engenharia de Tráfego global (iii).

Como exemplo de (i), um *router* OSPF pode construir uma base de dados de Engenharia de Tráfego e providenciar informação sobre o estado de reserva das ligações na área. Um exemplo de (ii) consiste num *router* construir um percurso sujeito a restrições dele próprio (ou de outra origem) para um destino qualquer. Este percurso pode ser sujeito a várias restrições, como por exemplo, atravessar ligações apenas de uma determinada cor e com uma largura de banda não reservada de pelo menos X Mbps. Note-se que o encaminhamento sujeito a restrições pode ser difícil ou não ter solução para determinadas restrições e, como tal, muitas implementações recorrem a heurísticas. Como exemplo de (iii), um *router* pode construir uma base de dados de Engenharia de Tráfego e, com base numa matriz de tráfego global, utilizar uma função de optimização para determinar uma configuração de encaminhamento óptima ou quase óptima para toda a rede. Este *router* pode continuar a monitorar a topologia de Engenharia de Tráfego e reagir a alterações recalculando novas configurações de encaminhamento.

2.4 Gestão de recursos

A tarefa de dimensionamento de uma rede é tanto mais exacta quanto maior e mais precisa é a informação disponível sobre esta. O modo como é feita a gestão de recursos, nomeadamente o encaminhamento dos agregados de fluxos de tráfego e os recursos por estes usados, tem um grande impacto no custo e no desempenho da rede física a

dimensionar. As tecnologias de redes enunciadas nas secções anteriores permitem diferentes graus de liberdade no modo como os recursos de rede são geridos.

Ambas as tecnologias ATM e MPLS permitem o estabelecimento de caminhos virtuais entre dois pontos da rede. Estes caminhos virtuais podem ser estabelecidos através de VPCs em ATM ou LSPs em MPLS. A definição de caminhos virtuais permite a configuração de diferentes redes lógicas em cima da mesma rede física, o que permite o suporte a serviços com diferentes requisitos de QoS, simplificando o processo de gestão de recursos. Estes caminhos virtuais podem ser estabelecidos por configuração explícita nas tabelas de encaminhamento dos *routers* ou através de mecanismos automáticos de reserva de recursos. No primeiro caso os caminhos assim estabelecidos são permanentes, permitindo a reserva de recursos na rede necessários para os serviços. No segundo caso os recursos da rede são reservados apenas quando são requeridos pelos serviços.

Os caminhos virtuais permanentes têm de ser configurados de forma explícita pelo gestor de rede nos *routers* (ou por um sistema de gestão centralizado adequado). Esta tarefa pode tornar-se bastante complexa para redes de grandes dimensões, devido ao grande número de caminhos a gerir. No entanto, uma vez que se conhecem à partida os percursos dos caminhos virtuais, é possível prever com mais exactidão os recursos de rede necessários para o seu funcionamento normal. Deste modo, pode-se garantir que estes estão disponíveis para utilização dos serviços, diminuindo a probabilidade de ocorrência de falhas de comunicação por falta de recursos.

No caso dos caminhos virtuais não permanentes, os recursos de rede são reservados para um serviço apenas quando solicitados através de mecanismos de pedidos de reserva de percursos. Como o estabelecimento dos caminhos é feito pedido a pedido, este método não leva em conta os pedidos posteriores para determinar os trajectos dos caminhos virtuais. Como tal, este método não permite uma optimização global do aproveitamento dos recursos da rede, levando muitos gestores de rede a preferir a primeira alternativa. Por outro lado, no caso de ocorrência de falhas, os caminhos são estabelecidos normalmente pelas ligações em operação, o que não acontece com os caminhos virtuais permanentes que requerem a definição de percursos alternativos para o caso de ocorrência de falhas na rede. Esta última opção aumenta ainda mais o número de caminhos virtuais a gerir, e consequentemente, a complexidade da tarefa de gestão e manutenção da rede.

Para a tarefa do dimensionamento das redes, ao longo desta tese considera-se a utilização de caminhos virtuais permanentes, uma vez que estes permitem o maior controlo sobre a utilização dos recursos e, como tal, a redução dos custos associados. Este método de dimensionamento aplica-se tanto a redes ATM como MPLS.

A utilização de um protocolo de encaminhamento por peso mínimo como o OSPF ou o IS-IS simplifica o processo de configuração e gestão dos percursos do tráfego na rede e requer uma menor atenção do gestor. Este apenas precisa de atribuir pesos às ligações e o protocolo encarrega-se de encaminhar o tráfego na rede. Se ocorrer uma falha numa ligação, esta comporta-se como se tivesse um peso infinito e o tráfego é encaminhado normalmente pelas restantes ligações em operação. No entanto, esta forma de encaminhar o tráfego não permite a definição de políticas de gestão mais elaboradas como as proporcionadas pelo MPLS, nomeadamente a especificação de ligações permitidas com base em cores, a definição de percursos explícitos, ou outras.

Como foi referido, a utilização de caminhos virtuais permanentes tem como principal desvantagem a complexidade inerente à tarefa de configuração e gestão dos caminhos virtuais, que podem ser em número demasiado grande, especialmente para redes de maiores dimensões. Uma alternativa, referida por exemplo em (Fortz, 2000) e (Wang, 2001), consiste na conjugação da flexibilidade proporcionada pelo MPLS ao nível do estabelecimento dos LSPs com a simplicidade de estabelecer os percursos com base num protocolo de encaminhamento por peso mínimo como o OSPF ou o IS-IS. Segundo esta estratégia é possível configurar alguns LSPs de forma explícita e deixar que o protocolo de encaminhamento estabeleça automaticamente os percursos dos restantes LSPs. Como vantagens, o processo de configuração e gestão destes restantes LSPs fica limitado à definição dos pesos das ligações que são normalmente em muito menor número que os LSPs a estabelecer, especialmente para as redes de maiores dimensões. Como desvantagens, o custo da rede física dimensionada com base no encaminhamento por peso mínimo é sempre igual ou superior ao custo da rede física dimensionada com base no encaminhamento sem restrições. No entanto, alguns autores – (Fortz, 2000) por exemplo – reportam que esta diferença de custo é pouco significativa. Isto torna esta estratégia atraente para os gestores de rede que geralmente preferem uma rede mais simples de gerir, o que pode compensar ou até superar esta diferença de custo.

Ao abordar nesta tese o problema de dimensionamento de uma rede MPLS baseada em encaminhamento por percursos de peso mínimo, considera-se que os agregados de fluxos de tráfego são indivisíveis, isto é, seguem um único percurso. Para tal, escolhem-se conjuntos de pesos que determinem percursos de peso mínimo únicos, o que faz com que o mecanismo de ECMP não divida os agregados de fluxos de tráfego. Esta opção é tomada para diminuir o número de LSPs a configurar e gerir na rede e para evitar o balanceamento de tráfego pouco uniforme e difícil de prever que resulta da divisão de tráfego segundo ECMP (como foi ilustrado na secção 2.3).

CAPÍTULO 3 Dimensionamento de redes baseadas em encaminhamento sem restrições

Para auferir alguma precisão à tarefa de desenho da rede é necessária uma estimativa da matriz de tráfego que a mesma deve suportar. Tomando em conta as restrições impostas pelos mecanismos de gestão de recursos da rede, são determinadas as capacidades a pôr em operação na rede e os percursos dos vários agregados de fluxos de tráfego que minimizam uma função de custo. Esta função de custo pode depender de vários parâmetros como sejam os custos de instalação e manutenção dos equipamentos da rede ou os custos de gestão dos caminhos virtuais dos agregados de fluxos de tráfego. A tarefa de desenho da rede é assim formulada como um problema de optimização em que o objectivo é minimizar o custo total de operação e manutenção da rede. Ao longo desta tese considera-se que o custo total depende apenas dos custos das capacidades a pôr em operação nas ligações da rede, que geralmente são os custos mais significativos.

Neste capítulo considera-se que os agregados de fluxos de tráfego a encaminhar na rede não estão sujeitos a qualquer tipo de restrição. Estes agregados de fluxos de tráfego são especificados por cada par origem e destino de tráfego. Este problema modela o desenho de redes ATM com VPCs definidos estaticamente e o desenho de redes IP/MPLS com LSPs definidos de forma explícita entre todos os nós de tráfego da rede. Neste capítulo, à reserva de uma largura de banda fixa ao longo de um percurso na rede dá-se o nome de caminho virtual. Na tecnologia ATM estas reservas podem ser implementadas através de VPCs, enquanto que na tecnologia MPLS estas podem ser implementadas através de LSPs.

O problema de desenho da rede estudado neste capítulo é conhecido na literatura por *Multicommodity Capacitated Loading Problem*.

Este capítulo encontra-se organizado da seguinte forma. Na secção 3.1 é referido trabalho de outros autores realizado na área de gestão de recursos e na área de dimensionamento de

redes com encaminhamento sem restrições. Na secção 3.2 é apresentada uma formulação matemática do problema. Na secção 3.3 são descritas várias técnicas heurísticas para resolver de forma aproximada instâncias de grandes dimensões. Na secção 3.4 são apresentados os resultados computacionais das diferentes técnicas referidas nas secções anteriores. Por último, a secção 3.5 enuncia as principais conclusões obtidas ao longo do capítulo.

3.1 Estado-da-arte

Os problemas de desenho, dimensionamento e encaminhamento em redes de telecomunicações têm sido abordados em muitas referências ao longo das últimas décadas, quer seja em conjunto, quer individualmente. Os critérios de optimização destes problemas consistem normalmente nos custos de operação da rede, ou na optimização do desempenho desta. Os parâmetros que definem as restrições destes problemas são muitas vezes os parâmetros que medem o desempenho da rede, como o atraso médio ou a utilização das ligações.

A referência (Kereshbaum, 1991) apresenta um algoritmo heurístico para determinar uma topologia de custo mínimo e o encaminhamento de tráfego numa rede. É dada uma matriz com os requisitos de largura de banda entre os nós de tráfego e os custos de ligações de várias capacidades entre todos os pares de nós. Este algoritmo de desenho da rede tem uma complexidade da ordem N^2 , o que o torna apropriado para redes de grandes dimensões. Quando os requisitos de largura de banda entre nós origem e destino são altos o tráfego é enviado por percursos directos, nos outros casos, o algoritmo utiliza uma árvore abrangente para encaminhar o tráfego. O algoritmo é rápido porque os percursos são determinados de forma implícita ao longo do algoritmo.

No artigo (Awerbuch, 1994), os autores descrevem um algoritmo para controlo local com tamanho de fila de espera limitado para encaminhar os fluxos de múltiplas fontes de tráfego numa rede dinâmica. Não é feita qualquer escolha dos caminhos com base no custo ou distância do percurso. A escolha dos agregados de fluxos de tráfego a encaminhar é feita com base na maior disparidade dos tamanhos das filas de espera nos dois extremos de uma ligação. Os autores mostram que uma versão ligeiramente mais lenta deste algoritmo pode ser usada para encaminhar o tráfego quando as capacidades das ligações variam de forma desconhecida e imprevisível. Desde que exista capacidade suficiente para

encaminhar o tráfego das origens para os destinos a cada passo, o algoritmo consegue encaminhar os agregados de fluxos de tráfego com tamanhos de filas de espera limitados e com atraso médio quase óptimo. Em certas circunstâncias o algoritmo corre em tempo quase linear por agregado de fluxos de tráfego.

A referência (Elbaum, 1996) apresenta um algoritmo para desenhar redes locais com o objectivo de minimizar o atraso médio na rede. A tarefa de desenho das redes consiste na determinação do número de segmentos da rede, atribuir os utilizadores aos diferentes segmentos e determinar as interligações e o encaminhamento entre os segmentos. Esta tarefa resulta num problema de optimização combinatoria difícil e como tal, é apresentado um algoritmo heurístico baseado em métodos genéticos. São também calculados limites inferiores para o atraso médio e os resultados obtidos indicam que estes são da mesma ordem de grandeza das soluções obtidas.

Um dos métodos utilizados para simplificar o problema de dimensionamento de uma rede multi-serviço com serviços com diferentes características consiste em considerar que os requisitos de capacidade para um agregado de fluxos de tráfego são dados por uma largura de banda efectiva equivalente. O artigo (Guérin, 1991) apresenta um método para determinar a largura de banda equivalente de várias conexões individuais ou multiplexadas.

A referência (Bienstock, 1997) considera o problema da instalação da capacidade de menor custo nas ligações para suportar um conjunto de agregados de fluxos de tráfego a encaminhar entre pares de nós de uma rede. Os autores estudam duas abordagens: uma baseada numa formulação que usa apenas um número de variáveis (as de capacidade) igual ao número de arcos; a outra baseada numa formulação agregada que usa um número de variáveis igual ao número de nós a multiplicar pelo número de arcos. Os agregados de fluxos de tráfego podem ser divididos por vários arcos, ou seja, as variáveis que representam a largura de banda utilizada por estes nos arcos são reais. As capacidades nas ligações são dadas por múltiplos inteiros de uma unidade base de capacidade. Os autores descrevem também duas classes de restrições fortes válidas e usam-nas para descrever de forma completa o poliedro para o grafo completo em três nós. Os resultados computacionais demonstram que as duas formulações são comparáveis e aplicáveis em instâncias na vida real.

No contexto das redes ATM o problema de desenho de redes ATM é abordado por exemplo em (Gerla, 1989), (Mitra, 1996), (Tang, 1998), (Thompson, 1998), (Thompson, 2000).

Em (Gerla, 1989) é abordada a tarefa de desenho de uma rede de comutação de pacotes inserida numa rede de *backbone*. Esta tarefa é formulada como um problema de optimização para minimizar o atraso médio dos pacotes sujeito às restrições de capacidade reservada na rede de *backbone*. O problema pretende determinar o encaminhamento dos caminhos virtuais da rede de comutação de pacotes e a largura de banda reservada para estes. Para este problema é apresentado um algoritmo que fornece soluções subóptimas. Este algoritmo baseia-se numa estratégia GRASP (*Greedy Randomized Adaptive Search Procedure*), i.e., na geração aleatória de várias soluções iniciais e pesquisa de mínimos locais com base nestas soluções. Este algoritmo pode ser utilizado *offline* ou *online* e demonstrou conseguir melhoramentos substanciais face a redes não optimizadas.

(Mitra, 1996) aborda o desenho e optimização de redes ATM ao nível da chamada. Neste processo é utilizado o conceito de largura de banda efectiva. O problema consiste no desenho da rede lógica e encaminhamento do tráfego. É proposto um método de optimização guiado por gradientes obtidos a resolver um sistema de equações para custos implícitos. É usado o algoritmo EM (*Expectation-Maximization*) para calcular custos implícitos com variações de tráfego. O algoritmo EM consiste num algoritmo para determinar estimativas de parâmetros de máxima semelhança em modelos probabilísticos. O caso de estudo utilizado tem 8 nós, 20 ligações e 6 serviços. São utilizadas técnicas assintóticas para simplificar a complexidade numérica de considerar ligações com muita largura de banda na presença de muitos serviços com ritmos de transmissão distintos.

(Tang, 1998) propõe um algoritmo genético para o desenho de uma rede ATM embebida numa rede de comutação de pacotes. O problema consiste em determinar a topologia da rede ATM, o encaminhamento dos agregados de fluxos de tráfego e as capacidades das ligações da rede ATM com o objectivo de minimizar o atraso médio dos pacotes. Neste problema são consideradas restrições para garantir que: a soma das capacidades das ligações ATM que utilizam uma ligação da rede de comutação de pacotes não excedem a capacidade desta ligação; a capacidade de comutação dos comutadores ATM não é excedida; o fluxo total de tráfego em cada ligação ATM não excede a capacidade desta. Os

autores mostram que este problema de optimização com muitos tipos de restrições é resolvido de melhor forma com um algoritmo genético.

A referência (Thompson, 1998) compara dois tipos de algoritmos para o desenho de uma rede ATM de custo mínimo. A tarefa de desenho consiste em determinar as posições dos comutadores ATM de entre um conjunto de posições possíveis, as capacidades dos comutadores ATM e das ligações a estabelecer entre estes e o encaminhamento do tráfego. Um tipo de algoritmo é baseado na troca de posições de comutadores ATM usadas com posições não usadas e o outro tipo de algoritmo é um algoritmo genético. O algoritmo genético demonstrou ter o potencial de determinar redes de menor custo que as variantes do algoritmo de trocas de posições de comutadores.

A referência (Thompson, 2000) compara um algoritmo genético com um algoritmo de *Simulated Annealing* para o problema de optimizar o desenho topológico de uma rede ATM. Para além de optimizar a localização das ligações, o número e a localização dos concentradores (comutadores ATM, *routers* ou *hubs*) também são variáveis de decisão. A solução média do algoritmo genético custa menos que a solução média do algoritmo de *Simulated Annealing* em cerca de 5%.

Em redes MPLS o problema de desenho é abordado em (Pióro, 2001), (Beker, 2003) (El-Alfy, 2006).

A referência (Pióro, 2001) aborda o problema de optimização do custo de uma rede IP/MPLS seleccionando as posições dos nós e das ligações e dimensionando as ligações para suportar o tráfego ao longo dos percursos admissíveis. São propostos e testados algoritmos baseados em *Branch-and-Bound* para resolver este problema de forma óptima em instâncias pequenas. Para redes de maiores dimensões (mais de 15 nós), é apresentado um algoritmo *Branch-and-Bound* que usa uma técnica heurística para obter soluções sub-óptimas. Os autores concluem através de exemplos numéricos que os algoritmos apresentados são eficientes.

No artigo (Beker, 2003) os autores consideram a determinação dos percursos dos LSPs em redes MPLS *off-line*. Esta abordagem tem a vantagem de permitir uma rede global optimizada. Para tal, os autores propõem um problema de optimização cujo objectivo é minimizar o número de LSPs requeridos para uma dada matriz de tráfego, com restrições de atraso nos LSPs extremo-a-extremo para garantir os requisitos de QoS. Com este

objectivo, os autores pretendem reduzir a complexidade da rede. Isto facilita a tarefa de gestão da rede, o que baixa os custos de operação e melhora o desempenho do processo de restabelecimento de ligações com falhas. Para resolver o problema de encaminhamento dos LSPs é usada uma formulação MINLP (*Mixed Integer Non Linear Program*). Devido à complexidade NP-Completa do problema, as instâncias resolvidas com esta abordagem são de dimensões reduzidas.

A referência (El-Alfy, 2006) aborda o desenho de topologias de redes MPLS óptimas utilizando algoritmos genéticos. O problema pretende determinar as posições dos nós e das ligações e a capacidade destas para minimizar os custos, satisfazendo os requisitos de tráfego e restrições de ordem técnica e administrativa. O problema é difícil e sujeito a muitos tipos de restrições, decorrendo daí o uso de técnicas heurísticas para a sua resolução. Através da comparação de resultados com um algoritmo *Branch-and-Bound*, o autor conclui que o método proposto é eficaz e pode obter soluções óptimas ou quase óptimas. No entanto, a qualidade das soluções é afectada pelos parâmetros do algoritmo genético. Estes parâmetros obtêm desempenhos diferentes para diferentes casos de estudo.

O problema de encaminhamento em redes de telecomunicações de forma a cumprir com restrições de Qualidade de Serviço (QoS) é abordado em (Jüttner, 2001) e (Yuan, 2002).

No artigo (Jüttner, 2001) é apresentado um algoritmo de encaminhamento QoS para o problema de encaminhamento de custo mínimo com restrições de atraso. O algoritmo usa o conceito de custos agregados e faz uso da relaxação lagrangeana para obter uma solução e também um limite inferior do problema. Os custos agregados são obtidos a partir de vários parâmetros QoS pesados e como tal, este algoritmo é bastante sensível aos pesos dos parâmetros escolhidos. Os resultados mostram que a diferença entre as soluções e os limites inferiores é pequena o que prova a boa qualidade destes resultados. Relaxando a optimalidade dos caminhos, é apresentada uma forma de ajustar o tempo demorado pelo algoritmo e a qualidade dos caminhos encontrados. Os resultados deste algoritmo polinomial são comparados com outros algoritmos de encaminhamento QoS e os autores mostram que o algoritmo consegue uma solução próxima do óptimo encontrado por um algoritmo de complexidade exponencial.

A referência (Yuan, 2002) lida com o problema de encaminhamento QoS sujeito a múltiplas restrições. São apresentadas duas heurísticas: uma heurística de granularidade

limitada e uma heurística de percursos limitados. Ambas as heurísticas são baseadas em extensões do algoritmo de Bellman-Ford. Os resultados indicam que o desempenho da heurística de percursos limitados é relativamente independente do número de restrições e que é superior ao desempenho da heurística de granularidade limitada quando o número de restrições é maior. A ideia da heurística de granularidade limitada consiste em utilizar aproximações das métricas de QoS usando intervalos finitos limitados para reduzir a complexidade do problema. A heurística de percursos limitados mantém um número limitado de percursos QoS óptimos em cada nó para reduzir a complexidade do problema.

Problemas de dimensionamento de redes mais semelhantes ao endereçado neste capítulo são abordados em (Sousa, 1999), (Sousa, 2001), (Cardoso, 2000), (Cardoso, 2001), (Lopes, 2001a) e (Lopes, 2001b).

As referências (Sousa, 1999) e (Cardoso, 2000) apresentam um modelo de optimização semelhante ao referido neste capítulo para o problema de dimensionamento de redes ATM. Nestas referências o modelo contempla serviços simétricos e assimétricos (do tipo cliente/servidor) e dimensionamento multi-horário. Estas referências apresentam também a técnica heurística baseada na relaxação lagrangeana com optimização por subgradiente para resolver as instâncias de maiores dimensões. Em (Sousa, 1999) é reportado que esta técnica consegue resolver instâncias de até 50 nós em alguns minutos. É também apresentado um estudo sobre a qualidade das soluções obtidas com a técnica heurística tendo como base os limites inferiores obtidos com a relaxação do problema.

Em (Sousa, 2001) são propostos modelos de programação linear inteira para o dimensionamento de redes ATM com VPCs extremo-a-extremo com suporte a serviços conversacionais e do tipo cliente/servidor. É proposta uma heurística baseada na relaxação lagrangeana com optimização por subgradiente para a resolução dos modelos propostos. É também proposta uma arquitectura hierárquica de dois níveis para redes com suporte a serviços conversacionais e modelos de dimensionamento adequados.

A referência (Cardoso, 2001) apresenta uma técnica heurística para o dimensionamento de redes MPLS com base na relaxação lagrangeana com optimização por subgradiente. Esta técnica considera os atributos de Engenharia de Tráfego dos LSPs e das ligações para seleccionar apenas percursos que respeitem as restrições impostas. Nesta referência o modelo contempla também serviços do tipo cliente/servidor e dimensionamento multi-horário.

As referências (Lopes, 2001a) e (Lopes, 2001b) apresentam as técnicas heurísticas baseadas na heurísticas lagrangeana e construtiva com e sem melhoramentos referidas neste capítulo aplicadas ao problema de dimensionamento de redes com encaminhamento sem restrições. É apresentada também uma heurística baseada em algoritmos genéticos para resolver o mesmo problema.

Em (Patrão, 2003) são abordados dois problemas distintos. O primeiro problema consiste na determinação de bons limites inferiores para o problemas de dimensionamento de redes com encaminhamento sem restrições. Através destes limites é avaliada a eficácia da heurística lagrangeana com melhoramentos II apresentada em (Lopes, 2001a), (Lopes, 2001b) e referida neste capítulo. O segundo problema abordado é o problema do dimensionamento dos nós da rede. Este dimensionamento é feito com base na informação sobre as ligações a instalar entre cada par de nós (i.e., a solução do problema de dimensionamento abordado neste capítulo) e nos equipamentos de rede (*routers* e cartas de rede) existentes. A solução deste problema indica quais os equipamentos a adquirir para cada nó da rede, quais os que devem ser transferidos de um nó para outro e quais os equipamentos a armazenar para possível uso futuro. É apresentado um modelo de Programação Linear Inteira que descreve o problema e que permite resolver instâncias de média dimensão do mesmo de forma ótima em intervalos de tempo curtos.

3.2 Formulação do problema

Esta secção está organizada em duas sub-secções. Na primeira sub-secção, é apresentado um modelo de programação linear inteira que define o problema abordado neste capítulo e na segunda sub-secção são apresentados cortes adicionais que, acrescentados ao modelo anterior, melhoram a sua eficiência na obtenção de soluções óptimas.

3.2.1 Modelo

Considere-se uma rede cuja topologia é representada por um grafo bidireccional (N,E) . Os nós definidos pelo conjunto N representam posições onde podem ser colocados *routers* e as arestas definidas pelo conjunto E representam pares de nós entre os quais é possível instalar ligações físicas. Para melhor apresentar o modelo é também definido o conjunto A que engloba todos os arcos que compõem as arestas de E . O subconjunto de nós U ($U \subseteq N$) representa o conjunto de nós de tráfego entre os quais existem agregados de fluxos de

tráfego a estabelecer na rede. Estes agregados são caracterizados por um nó origem p , um nó destino q e uma largura de banda efectiva b_{pq} a reservar ao longo do percurso escolhido. Considera-se que os agregados são simétricos, isto é, b_{pq} é igual a b_{qp} . A tarefa de estabelecer os agregados de fluxos de tráfego consiste em determinar os percursos dos caminhos virtuais (por cada par de nós $\{p,q\}$ estabelece-se um caminho virtual de p para q e um caminho virtual de q para p) e as ligações físicas a instalar nas arestas para satisfazer os requisitos de largura de banda ao longo dos percursos determinados. O conjunto de todos os pares não ordenados de nós de tráfego é denominado por S . Uma vez que a escolha de percursos simétricos simplifica o problema de dimensionamento (permite a redução do número de restrições e variáveis) e a tarefa de manutenção e gestão da rede, considera-se que o percurso estabelecido para um par de nós $\{p,q\}$ pertencentes a U define os percursos dos caminhos virtuais entre (p,q) e (q,p) . O percurso entre o nó p e o nó q percorre os mesmos nós e arestas que o percurso entre o nó q e o nó p na ordem inversa (por exemplo, se o percurso para o par de nós $\{A,B\}$ é $A-C-D-B$, ($\{A,B,C,D\} \subseteq N$) então o percurso do LSP de A para B é $A \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow B$ e o percurso do LSP de B para A é $B \rightarrow D \rightarrow C \rightarrow A$).

As ligações físicas são caracterizadas por uma capacidade α (em cada um dos sentidos) e um custo de operação e manutenção $C_{\{ij\}}$ que depende da aresta onde são instaladas.

Para modelizar o problema de optimização precisamos de um conjunto de variáveis cujo resultado nos indique a solução do problema. Assim, considera-se que as variáveis binárias x_{ij}^{pq} indicam se o agregado de fluxos de tráfego de p para q utiliza o arco (i,j) e as variáveis inteiras $y_{\{ij\}}$ indicam o número de ligações físicas a pôr em operação na aresta $\{i,j\}$.

Em resumo, o problema de optimização usa os seguintes parâmetros:

- N conjunto de nós do grafo da rede;
- U conjunto de nós de tráfego do grafo da rede ($U \subseteq N$);
- E conjunto de arestas $\{i,j\}$, $i \in N$, $j \in N \setminus \{i\}$;
- A conjunto de arcos (i,j) , tal que $\{i,j\} \in E$;
- α capacidade de cada ligação física;
- $C_{\{ij\}}$ custo de uma ligação física na aresta $\{i,j\}$;
- S conjunto de todos os pares de nós de tráfego $\{p,q\}$, $p \in U$, $q \in U \setminus \{p\}$;

b_{pq} largura de banda requerida pelo tráfego a suportar em cada um dos sentidos entre o nó $p \in U$ e o nó $q \in U \setminus \{p\}$;

e as seguintes variáveis:

$y_{\{ij\}}$ variável inteira que indica o número de ligações físicas a instalar numa aresta $\{i,j\}$;

x_{ij}^{pq} variável binária que indica se o arco (i,j) é utilizado no percurso seguido pelo tráfego entre p e q .

O modelo de programação linear inteira do problema de dimensionamento de rede com encaminhamento sem restrições é, então, definido da seguinte forma:

Minimizar
$$\sum_{\{i,j\} \in E} C_{\{ij\}} \cdot y_{\{ij\}}$$

(1)

Sujeito a:

$$\sum_{j \in A(i)} (x_{ij}^{pq} - x_{ji}^{pq}) = \begin{cases} 1 & , i = p \\ -1 & , i = q, \\ 0 & , c.c \end{cases} \quad \forall i \in N, \forall \{p,q\} \in S \quad (2)$$

$$\sum_{\{p,q\} \in S} b_{pq} (x_{ij}^{pq} + x_{ji}^{pq}) \leq \alpha \cdot y_{\{ij\}}, \quad \forall \{i,j\} \in E \quad (3)$$

$$x_{ij}^{pq} \in \{0,1\}$$

$y_{\{ij\}}$ inteiros não negativos

A função objectivo (1) define a soma dos custos de todas as ligações físicas a instalar em todas as arestas da rede.

As restrições (2) garantem que as variáveis x definem percursos entre os nós p e q . Para cada nó da rede excepto p e q , o número de arcos de saída do nó é igual ao número de arcos de entrada. Se o nó não é usado no percurso ambos são iguais a 0, caso contrário ambos são maiores ou iguais a 1. Um número de arcos de saída e de entrada maior do que 1 indica a existência de ciclos no percurso que, se existirem na solução, é porque não afectam o custo final da função objectivo. Para retirar estes ciclos deve ser feita uma análise aos percursos da solução do problema de dimensionamento.

Deleted: 1
Formatted: Do not check spelling or grammar
Deleted: 1
Formatted: Do not check spelling or grammar

Deleted: 3
Formatted: Do not check spelling or grammar
Deleted: 3
Formatted: Do not check spelling or grammar

Formatted: Do not check spelling or grammar
Deleted: 1
Formatted: Do not check spelling or grammar
Deleted: 1

As restrições (3) garantem que a capacidade total instalada em cada ligação satisfaz os requisitos de largura de banda de todos os agregados de fluxos de tráfego que utilizam essa ligação no seu percurso.

Deleted: 3
Deleted: 3
Formatted: Do not check spelling or grammar
Formatted: Do not check spelling or grammar

3.2.2 Restrições adicionais

Um algoritmo de *Branch-and-Bound* permite calcular a solução óptima de um problema de Programação Linear Inteira (problema com apenas variáveis inteiras) ou Programação Linear Inteira Mista (problema com variáveis inteiras e reais). Este algoritmo consiste em alternadamente: decompor um problema em dois sub-problemas (*Branch*) e resolver os sub-problemas para determinar limites para o conjunto de soluções possíveis (*Bound*). O algoritmo termina quando encontra uma solução óptima ou quando determina que o problema não tem solução.

A descrição do algoritmo *Branch-and-Bound* que se segue é baseada em (Mital, 1983). Considere-se um problema de minimização P com m variáveis inteiras e n variáveis reais ($n \geq 0$). As variáveis são identificadas por x_i ($1 \leq i \leq m+n$). A relaxação linear deste problema consiste em considerar que todas as variáveis inteiras são convertidas em variáveis reais. Este problema é muito mais simples de resolver e a sua solução é um limite inferior para o problema original

Considere-se o problema R como sendo a relaxação linear do problema original P. Se a solução de R for dada por valores de variáveis inteiras, então está encontrada a solução óptima de P. Se isto não suceder, é escolhida uma das variáveis x_i com um valor Z não inteiro. A partir de R são gerados dois novos problemas R1 e R2. R1 consiste no problema R com a restrição adicional que $x_i \leq \lfloor Z \rfloor$ e R2 consiste em R com a restrição adicional que $x_i \geq \lfloor Z \rfloor + 1$ ($\lfloor Z \rfloor$ indica o maior valor inteiro não superior a Z). R1 e R2 são disjuntos e a solução óptima de P está contida num dos conjuntos de soluções de R1 ou R2, pois o espaço de soluções descartado não contém nenhuma solução dada por variáveis com valores inteiros.

Caso os problemas gerados (R1 e R2) não verifiquem uma das seguintes condições, estes problemas são por sua vez decompostos da mesma forma com base numa variável com valor não inteiro. As condições para que um problema R_i não seja decomposto são as seguintes:

(i) o problema R_i tem uma solução com todos os valores de variáveis inteiras. Neste caso não é necessário decompor o problema R_i pois nunca será encontrada uma solução com valores de variáveis inteiras de valor inferior;

(ii) o problema R_i tem uma solução com um valor maior ou igual do que a melhor solução inteira encontrada até ao momento para o problema original. Qualquer decomposição de R_i tem sempre uma solução de valor igual ou superior a R_i e, como tal, pior que a melhor solução inteira do problema original.

(iii) o problema não tem solução.

O algoritmo termina quando todos os problemas estão numa das condições enunciadas atrás. Se houve pelo menos um problema que não terminou pela condição (iii), então a solução óptima é a solução com valores de variáveis inteiras de menor valor encontrada para todos os problemas. Caso contrário, o problema original não tem solução.

A eficiência do algoritmo *Branch-and-Bound* depende geralmente de dois factores. Um deles é a complexidade do modelo, ou seja, do número de variáveis e de restrições que ele contém. Quanto menos complexo for o modelo, mais iterações do algoritmo são processadas no mesmo intervalo de tempo. Outro factor é o valor óptimo da relaxação linear. Quanto mais próximo estiver o valor óptimo da relaxação linear do valor da solução óptima, menos iterações são precisas para fazer aproximar o limite do valor óptimo. Como tal, uma técnica possível para aumentar a eficiência do *Branch-and-Bound* é a adição de restrições que aproximem o valor da solução da relaxação linear do valor óptimo na esperança que este efeito compense o efeito do aumento de complexidade do modelo.

Para melhorar a eficiência do algoritmo de *Branch-and-Bound* usamos dois conjuntos de restrições conhecidos de outros trabalhos. O primeiro conjunto de restrições, usado, por exemplo, em (Magnanti, 1995), define-se do seguinte modo. Considere-se uma divisão P do conjunto de nós N em dois subconjuntos disjuntos. Considere-se $S_P \in S$ o conjunto de pares de nós $\{p, q\}$ em que p está num subconjunto e q está no outro. Considere-se também $E_P \in E$ o conjunto de arestas $\{i, j\}$ em que o nó i está num subconjunto e o nó j está no outro.

Para qualquer partição P , a restrição (4) deverá ser respeitada por uma qualquer solução do problema:

Deleted: 4

Deleted: 4

Formatted: Do not check spelling or grammar

Formatted: Do not check spelling or grammar

$$\sum_{\{i,j\} \in E_p} y_{\{ij\}} \geq \left\lceil \frac{\sum_{\{p,q\} \in S_p} b_{pq}}{\alpha} \right\rceil,$$

(4)

- Deleted: 4
- Formatted: Do not check spelling or grammar
- Deleted: 4
- Formatted: Do not check spelling or grammar

, onde $\lceil a \rceil$ significa o menor inteiro não inferior a a . Para melhor compreender o funcionamento destas restrições, considere-se uma rede dividida em duas partições unidas por apenas uma ligação. Os agregados de fluxos de tráfego que têm origem e destino em partições diferentes têm obrigatoriamente de atravessar esta ligação. Como tal, se o total de largura de banda dos agregados entre as duas partições for de 100Mbps e as capacidades disponíveis forem de 155Mbps, podemos afirmar que o número mínimo de capacidades a instalar na ligação será de $\lceil 100/155 \rceil = 1$. Esta restrição elimina o espaço de soluções do problema relaxado em que $y < 1$ e como tal, melhora a sua relaxação linear.

Nesta tese, consideram-se apenas as restrições (4) resultantes de dividir o conjunto N no subconjunto composto por um nó único $p \in U$ e no subconjunto dos restantes nós da rede. Esta decisão baseia-se na referência (Patrão, 2003) que reporta experiências com este tipo de restrições adicionais e conclui que são estas as que proporcionam melhores resultados.

O segundo conjunto de restrições, usado em muitos trabalhos, é dado por (5):

$$x_{ij}^{pq} + x_{ji}^{pq} \leq y_{\{ij\}}, \quad \forall \{i, j\} \in E, \forall \{p, q\} \in S$$

(5)

- Deleted: 4
- Formatted: Do not check spelling or grammar
- Deleted: 4
- Formatted: Do not check spelling or grammar
- Formatted: Do not check spelling or grammar
- Deleted: 5
- Formatted: Do not check spelling or grammar
- Deleted: 5
- Formatted: Do not check spelling or grammar
- Deleted: 5
- Deleted: 5
- Formatted: Do not check spelling or grammar
- Formatted: Do not check spelling or grammar
- Deleted: 5
- Formatted: Do not check spelling or grammar
- Deleted: 5

que garante que deve ser instalada pelo menos uma ligação física numa aresta que seja utilizada pelo menos por um percurso (especificado pelas variáveis x). O conjunto de restrições definido por (5) é bastante numeroso ($|E| \times |S|$) e nem todas as restrições são úteis (isto é, nem todas contribuem para melhorar o valor da relaxação linear). Como tal utilizou-se o seguinte método para determinar as restrições úteis. Resolve-se a relaxação linear do problema original sem restrições adicionais. De seguida, a solução óptima do problema é testada para verificar se cumpre as restrições a adicionar ao modelo. As restrições não cumpridas são adicionadas ao modelo e a sua relaxação linear é resolvida de novo. As restrições restantes são verificadas como anteriormente e se ainda houver restrições não cumpridas estas são adicionadas ao modelo e o processo é repetido. O processo termina quando não existem mais restrições não cumpridas a acrescentar e o conjunto de restrições úteis é dado pelo conjunto de restrições adicionadas em todas as iterações.

3.3 Técnicas heurísticas

Embora os resultados experimentais mostrem que as restrições adicionais efectivamente melhoram os tempos de cálculo, ainda assim verifica-se que a formulação apresentada é demasiado complexa para resolver instâncias de dimensões razoáveis em tempo útil. Para resolver instâncias de grandes dimensões, as únicas técnicas possíveis são baseadas em heurísticas. Estas técnicas obtêm soluções que não sendo óptimas na maior parte dos casos, são no entanto suficientemente próximas do óptimo para poderem ser implementadas sem grandes acréscimos de custo.

Uma configuração de encaminhamento dos agregados de fluxos de tráfego determina o conjunto de capacidades de custo mínimo a instalar na rede. As técnicas heurísticas baseiam-se por isso em encaminhar os agregados de fluxos de tráfego de forma a encontrar uma solução de capacidades que tenha o menor custo possível.

Nesta secção são descritas as técnicas heurísticas para o problema de dimensionamento de redes com encaminhamento sem restrições que foram investigadas nesta tese. Estas técnicas são baseadas numa heurística iterativa construtiva, numa heurística lagrangeana e numa variação da heurística lagrangeana. Para todas as técnicas são também apresentadas heurísticas de melhoramentos que em conjunto com as técnicas principais permitem obter soluções de melhor qualidade.

3.3.1 Heurística iterativa construtiva

Uma heurística construtiva é uma heurística que constrói uma solução elemento a elemento. Em cada iteração da heurística é adicionada uma parte da solução, até que se obtenha uma solução completa para o problema. Para obter a melhor solução possível é comum utilizar-se a estratégia *greedy*. A estratégia *greedy* consiste em cada iteração escolher o elemento que proporciona melhores resultados.

Uma das técnicas desenvolvidas para resolver o problema de dimensionamento é um algoritmo que repete uma heurística construtiva *greedy* até atingir um tempo de execução máximo. No fim, a solução é a melhor de todas as soluções dadas pelas corridas da heurística construtiva. Esta técnica foi previamente explorada em (Lopes, 2001a) e (Lopes, 2001b).

No algoritmo em questão, a heurística construtiva consiste em cada iteração escolher um percurso para um dos agregados de fluxos de tráfego e reservar a largura de banda requerida por este. Se não existir largura de banda suficiente em nenhum dos percursos, são adicionadas as capacidades necessárias numa ou mais ligações. A escolha do percurso de um agregado é feita com base na estratégia *greedy* de escolher o percurso que requer o menor custo em capacidades a acrescentar nas ligações onde passa. Este procedimento é repetido para todos os agregados de fluxos de tráfego, até que todos tenham sido encaminhados. Após encaminhar todos os agregados, obtém-se uma solução cujo custo é dado pelo custo de todas as capacidades adicionadas à rede. O algoritmo implementado consiste em executar várias vezes a heurística construtiva, de forma a obter um conjunto de soluções para o problema. Para obter soluções diferentes em cada execução da heurística construtiva, os agregados são ordenados aleatoriamente antes de executar a heurística construtiva.

Considere-se o grafo (N,E) e os parâmetros definidos na secção 3.2.1:

- α capacidade de uma ligação física que é possível instalar numa aresta;
- $C_{\{ij\}}$ custo de uma ligação física na aresta $\{i,j\}$;
- S conjunto de todos os pares de nós de tráfego $\{p,q\}$, $p \in U$, $q \in U \setminus \{p\}$;
- b_{pq} largura de banda total requerida pelo tráfego a suportar em cada um dos sentidos entre o nó $p \in U$ e o nó $q \in U \setminus \{p\}$.

Considerem-se também as variáveis seguintes:

- MelhorCusto* melhor custo de solução encontrado até ao momento;
- CustoPres* custo da solução actual;
- TempoMax* tempo limite de execução do algoritmo;
- $w_{\{ij\}}$ peso de uma aresta a usar no algoritmo de percurso de peso mínimo;
- $n_{\{ij\}}$ número de capacidades a adicionar na aresta $\{i,j\}$;
- $LB_{\{ij\}}$ capacidade livre na aresta $\{i,j\}$.

O algoritmo é definido da seguinte forma.

Algoritmo HC:

1. $MelhorCusto \leftarrow +\infty$;
2. *Repetir*:
3. *Ordenar os agregados de fluxos de tráfego de forma aleatória*;
4. $CustoPres \leftarrow 0$;
5. $LB_{\{ij\}} \leftarrow 0, \forall \{i,j\} \in E$;
6. *Repetir para cada agregado de fluxos de tráfego $\{p,q\} \in S$:*
7. *Repetir para todas arestas $\{i,j\}$:*
8. $n_{\{ij\}} \leftarrow \text{máximo}(\lceil (b_{pq} - LB_{\{ij\}}) / \alpha \rceil, 0)$;
9. $w_{\{ij\}} \leftarrow n_{\{ij\}} \times C_{\{ij\}}$;
10. *Determinar o percurso de peso mínimo para $\{p,q\}$ com os pesos de arestas dados por $w_{\{ij\}}$;*
11. *Repetir para as arestas $\{i,j\}$ usadas no percurso de peso mínimo:*
12. $LB_{\{ij\}} \leftarrow LB_{\{ij\}} + n_{\{ij\}} \times \alpha - b_{pq}$;
13. $CustoPres \leftarrow CustoPres + w_{\{ij\}}$;
14. *Se ($CustoPres < MelhorCusto$) então:*
15. *Guardar configuração de encaminhamento actual*;
16. $MelhorCusto \leftarrow CustoPres$;
17. *Até (atingir TempoMax)*

O ciclo mais exterior do algoritmo (linhas 2 a 17) termina após atingir o tempo limite dado por *TempoMax*. Em cada iteração deste ciclo uma solução do problema é construída e avaliada. No início do ciclo os agregados de fluxos de tráfego são ordenados aleatoriamente para impedir que seja construída sempre a mesma solução. De seguida, cada agregado é encaminhado pelo caminho de menor custo em capacidades adicionais (linhas 6 a 13). Nas linhas 7 a 9 é determinado o número de capacidades que é necessário em cada aresta ($n_{\{ij\}}$) se o percurso do agregado a atravessar. Este cálculo leva em conta a capacidade disponível na aresta dada por $LB_{\{ij\}}$. Com base no número de capacidades necessário em cada aresta, é determinado o custo em capacidades adicionais $w_{\{ij\}}$ para que o percurso do agregado possa atravessar esta aresta. Uma vez determinados estes custos para todas as arestas, é executado um algoritmo de percurso de peso mínimo (Dijkstra) para determinar o percurso de menor peso para o agregado. As linhas 11 a 13 calculam a nova capacidade livre nas arestas atravessadas pelo percurso e somam ao custo da solução

o custo das capacidades adicionadas ao longo deste. Após terem sido processados todos os agregados, a solução está completa e o seu custo é comparado com o melhor custo obtido até ao momento (linha 14). Se esta for a solução de menor custo, então a sua configuração de encaminhamento (que permite identificar de forma única a solução de dimensionamento) é guardada. Se o tempo limite ainda não foi atingido, é construída uma nova solução pelo mesmo processo. No final do tempo limite, a melhor solução encontrada é a solução final do algoritmo.

3.3.2 Heurística lagrangeana

Uma das técnicas para obter limites inferiores/superiores em problemas de minimização/maximização é a relaxação lagrangeana (Held, 1970). A relaxação lagrangeana é uma técnica que consiste em mover restrições para a função objectivo multiplicadas por parâmetros (multiplicadores lagrangeanos) de forma a obter um problema mais simples cujo valor da sua solução constitui um limite teórico do valor óptimo do problema original.

Considere-se um problema de minimização genérico dado com uma notação matricial:

$$\begin{aligned}
 \text{P:} \quad & \text{Minimizar:} \quad ax \\
 & \text{Sujeito a:} \quad Bx \geq d \\
 & \quad \quad \quad Cx \geq e \\
 & \quad \quad \quad x \in \{0,1\}
 \end{aligned}$$

onde B e C são matrizes de constantes, a , d e e são vectores de constantes e x é o vector de variáveis que se pretende determinar. A relaxação lagrangeana deste problema define-se através da relaxação de uma ou mais restrições na função objectivo. A escolha destas restrições deve ser feita de forma cuidadosa, uma vez que tem grande impacto nos resultados desta técnica. As restrições a relaxar são geralmente escolhidas de forma a obter um problema mais simples de resolver e cuja solução contenha informação útil para obter uma solução do problema original. Cada restrição relaxada é introduzida na função objectivo multiplicada por um parâmetro não negativo (designado por multiplicador lagrangeano) da seguinte forma (μ representa o vector de multiplicadores lagrangeanos):

$$\text{R}(\mu): \text{ Minimizar:} \quad ax + \mu(d - Bx)$$

$$\begin{aligned} \text{Sujeito a: } & Cx \geq e \\ & x \in \{0,1\} \end{aligned}$$

Uma vez que $\mu \geq 0$ e $d - Bx \leq 0$, a função objectivo de $R(\mu)$ é sempre inferior ou igual à função objectivo de P. Além disso, o problema $R(\mu)$ possui menos restrições que P, o que significa que a solução de $R(\mu)$ será sempre um limite inferior para o problema P.

Para obter os melhores limites inferiores possíveis, a escolha dos valores do vector μ é feita resolvendo outro problema de optimização:

$$\text{Maximizar: } \left\{ \begin{array}{l} \text{Minimizar : } ax + \mu(d - Bx) \\ \text{Sujeito a : } Cx \geq e \\ x \in \{0,1\} \end{array} \right\}$$

$$\text{Sujeito a: } \mu \geq 0$$

Este problema é denominado de problema lagrangeano dual. A diferença entre a solução deste problema e a solução do problema original P fornece uma medida de confiança da solução encontrada. Se a diferença for pequena, significa que a solução encontrada está perto do valor óptimo. Quanto maior for esta diferença, menos informação se têm sobre a qualidade da solução.

Duas técnicas possíveis para a escolha do vector μ apropriado são: optimização por subgradiente (Held, 1974), (Beasley, 1993); ajustamento de multiplicadores (Beasley, 1993). Segundo (Beasley, 1993) a optimização por subgradiente proporciona normalmente melhores limites inferiores e, além disso, pode ser aplicada de igual forma independentemente da natureza das restrições a relaxar. No caso do ajustamento de multiplicadores, são necessários algoritmos diferentes para problemas de optimização diferentes.

A optimização por subgradiente permite gerar iterativamente multiplicadores lagrangeanos a partir de um qualquer conjunto inicial de valores. A geração iterativa de multiplicadores tende a maximizar o limite inferior lagrangeano resolvendo o problema lagrangeano dual. Para descrever esta técnica, considere-se de novo o problema de minimização P.

Representem-se as restrições $Bx \geq d$ por $\sum_{j=1}^n b_{ij}x_j \geq d_i, i=1, \dots, m$ (onde n é o número de variáveis e m é o número de restrições) e considerem-se os seguintes parâmetros:

- P_{LS} limite superior de P;
- P_{LI} limite inferior de P;
- π parâmetro geralmente compreendido entre]0;2];
- T intervalo que depende da diferença entre os limites inferior e superior;
- μ_i multiplicadores lagrangeanos ($i = 1, \dots, m$);
- G_i subgradientes ($i = 1, \dots, m$);

A otimização por subgradiente é descrita da seguinte forma:

Método OS:

1. *Atribuir valores iniciais a $\mu_i, i = 1, \dots, m$;*
 2. *Determinar P_{LS} com base numa solução admissível para P;*
 3. *Repetir:*
 4. *Resolver $R(\mu)$ para determinar P_{LI} e variáveis $x_j (j = 1, \dots, n)$;*
 5. *Com base nos valores das variáveis x_j determinar solução para P e actualizar P_{LS} se o custo da solução de P for inferior ao valor de P_{LS} anterior;*
 6.
$$G_i \leftarrow d_i - \sum_{j=1}^n b_{ij}x_j, i = 1, \dots, m;$$
 7.
$$T \leftarrow \frac{\pi(P_{LS} - P_{LI})}{\sum_{i=1}^m (G_i)^2};$$
 8.
$$\mu_i \leftarrow \max(0, \mu_i + TG_i), i = 1, \dots, m;$$
 9. *Até (critério de paragem)*
-

Em cada iteração da otimização por subgradiente (linhas 4 a 8) obtém-se um limite inferior P_{LI} dado pela solução de $R(\mu)$. Com base na estrutura desta solução, obtém-se informação útil para a construção de uma solução admissível para o problema original P que pode melhorar o valor de P_{LS} . Na linha 8 os multiplicadores lagrangeanos são actualizados e, se não foi atingido o critério de paragem, o ciclo (linhas 4 a 8) é repetido

com estes novos valores. Este critério de paragem pode ser dado por um tempo limite ou um número máximo de iterações.

O parâmetro π controla a amplitude da variação dos multiplicadores lagrangeanos. Um valor maior permite maiores alterações nos multiplicadores lagrangeanos de iteração para iteração. Uma estratégia frequente consiste em reduzir o valor de π se P_L não melhorar após um determinado número de iterações (neste caso, o critério de paragem pode ser π atingir um valor suficientemente pequeno). Esta estratégia é eficiente quando se usa a optimização por sub-gradiente para obter bons limites mas, conforme se verá nos resultados computacionais desta tese, não é a mais adequada quando se pretende obter boas soluções admissíveis.

Para se entender a forma como esta técnica se aplicou ao problema abordado neste capítulo, considere-se novamente o modelo de programação linear inteira atrás apresentado:

Minimizar
$$\sum_{\{i,j\} \in E} C_{\{ij\}} \cdot y_{\{ij\}} \quad (6)$$

Sujeito a:

$$\sum_{j:\{i,j\} \in A} (x_{ij}^{pq} - x_{ji}^{pq}) = \begin{cases} 1 & , i = p \\ -1 & , i = q, \\ 0 & , c.c. \end{cases} \quad \forall i \in N, \forall \{p,q\} \in S \quad (7)$$

$$\sum_{\{p,q\} \in S} b_{pq} (x_{ij}^{pq} + x_{ji}^{pq}) \leq \alpha \cdot y_{\{ij\}}, \quad \forall \{i,j\} \in E \quad (8)$$

$$x_{ij}^{pq} \in \{0,1\}$$

$y_{\{ij\}}$ inteiros não negativos

A heurística lagrangeana para este problema é apresentada em (Amaro, 2001). Para implementar a heurística lagrangeana são relaxadas na função objectivo as restrições (8) uma vez que, como se vai descrever a seguir, resulta num problema fácil de resolver.

Define-se como relaxação lagrangeana do problema a função (9).

$$L(\mu, x, y) = \sum_{\{i,j\} \in E} C_{\{ij\}} \cdot y_{\{ij\}} + \sum_{\{i,j\} \in E} \mu_{\{ij\}} \cdot \left[\sum_{\{p,q\} \in S} b_{pq} (x_{ij}^{pq} + x_{ji}^{pq}) - \alpha \cdot y_{\{ij\}} \right] \quad (9)$$

Esta expressão é equivalente a (10) que contém duas parcelas distintas (a) e (b).

- Deleted: 6
- Formatted: Do not check spelling or grammar
- Deleted: 6
- Formatted: Do not check spelling or grammar
- Deleted: 8
- Deleted: 8
- Formatted: Do not check spelling or grammar
- Formatted: Do not check spelling or grammar
- Formatted: Do not check spelling or grammar
- Deleted: 8
- Formatted: Do not check spelling or grammar
- Deleted: 8
- Formatted: Do not check spelling or grammar
- Deleted: 9
- Deleted: 9
- Formatted: Do not check spelling or grammar
- Formatted: Do not check spelling or grammar
- Deleted: 9
- Deleted: 9
- Formatted: Do not check spelling or grammar
- Formatted: Do not check spelling or grammar
- Deleted: 9
- Formatted: Do not check spelling or grammar
- Deleted: 10
- Formatted: Do not check spelling or grammar
- Deleted: 10

$$L(\mu, x, y) = \sum_{\{i,j\} \in E} \sum_{\{p,q\} \in S} (\mu_{\{ij\}} \cdot b_{pq}) (x_{ij}^{pq} + x_{ji}^{pq}) + \sum_{\{i,j\} \in E} (C_{\{ij\}} - \mu_{\{ij\}} \cdot \alpha) \cdot y_{\{ij\}} \quad (10)$$

(a)
(b)

O valor mínimo de (10a) sujeito a (7) pode ser determinado através do cálculo dos percursos mínimos entre os nós $\{p, q\}$ num grafo em que os pesos de cada aresta são dados por $\mu_{\{ij\}} b_{pq}$. Para determinar o valor mínimo de (10b) atribui-se às variáveis y os valores:

$$y_{\{ij\}} = \begin{cases} 0 & , C_{\{i,j\}} \geq \mu_{\{ij\}} \cdot \alpha \\ Y_{\{ij\}} & , C_{\{i,j\}} < \mu_{\{ij\}} \cdot \alpha \end{cases} \quad (11)$$

em que $Y_{\{ij\}}$ corresponde ao número máximo possível de ligações na aresta $\{i, j\}$.

Os multiplicadores lagrangeanos são actualizados em cada iteração com um algoritmo de optimização por subgradiente baseado no método OS descrito atrás. Considerem-se os parâmetros apresentados para este método. O problema $R(\mu)$ é definido pela função objectivo (10) sujeita às restrições (7). Para obter uma solução admissível para P com base em $R(\mu)$, são utilizados os percursos determinados pelos valores das variáveis x encontradas a resolver o problema $R(\mu)$. Os agregados de fluxos de tráfego são encaminhados na rede pelos percursos assim determinados, e são escolhidas em cada aresta as capacidades de custo mínimo que suportam a largura de banda total do tráfego que atravessa essa aresta. O custo da solução é dado pelo custo total das capacidades em todas as arestas. Considere-se também o parâmetro NM que é o número de iterações ao fim das quais o valor de π é reduzido para metade se o valor de P_{LI} não aumentou entretanto. O parâmetro $TempoMax$ indica o tempo limite dado para execução do algoritmo.

O algoritmo de optimização por subgradiente é descrito de seguida.

- Deleted: 10
- Formatted: Do not check spelling or grammar
- Deleted: 10
- Formatted: Do not check spelling or grammar
- Deleted: 10
- Formatted: Do not check spelling or grammar
- Deleted: 10
- Formatted: Do not check spelling or grammar
- Deleted: 10
- Formatted: Do not check spelling or grammar
- Deleted: 10
- Formatted: Do not check spelling or grammar
- Deleted: 11
- Deleted: 11
- Formatted: Do not check spelling or grammar
- Formatted: Do not check spelling or grammar
- Deleted: 10
- Formatted: Do not check spelling or grammar
- Deleted: 10

Algoritmo OS:

1. $\mu_{\{ij\}} \leftarrow 0, \forall \{i, j\} \in E;$
2. $P_{LI} \leftarrow$ valor da solução óptima de $R(\mu);$
3. $P_{LS} \leftarrow$ custo da solução de P com base na configuração de encaminhamento dada por $R(\mu);$
4. *Repetir:*
5. *Se (P_{LI} não aumentou nas últimas NM iterações) então:*
6. $\pi \leftarrow \pi/2;$
7. $G_{\{ij\}} \leftarrow \sum_{\{p,q\} \in S} b_{pq} (x_{ij}^{pq} + x_{ji}^{pq}) - \alpha \cdot y_{\{ij\}}, \forall \{i, j\} \in E;$
8. $T \leftarrow \frac{\pi(P_{LS} - P_{LI})}{\sum_{i=1}^m (G_{\{ij\}})^2};$
9. $\mu_{\{ij\}} \leftarrow \max(0, \mu_{\{ij\}} + TG_{\{ij\}}), \forall \{i, j\} \in E;$
10. $P_{LI} \leftarrow$ valor da solução óptima de $R(\mu);$
11. $P_{LS} \leftarrow$ mínimo entre P_{LS} e o custo da solução de P com base na configuração de encaminhamento dada por $R(\mu);$
12. *Se custo da solução de P for o melhor até ao momento guardar solução;*
13. *Até (atingir TempoMax)*

Este algoritmo segue o método OS apresentado atrás com algumas diferenças. Na linha 5 é feito um teste para verificar se o parâmetro π deve ser reduzido para metade. Na linha 12 é determinado se o custo da solução de P é o melhor até ao momento. Se for, esta solução é guardada para solução do algoritmo. As variáveis x_j referidas no método OS correspondem às variáveis x da formulação do problema de dimensionamento que determinam a configuração de encaminhamento.

De notar que a solução de encaminhamento determinada pelo algoritmo de relaxação lagrangeana é uma solução de encaminhamento baseada em percursos de peso mínimo, devido ao modo como as variáveis que determinam o encaminhamento são calculadas (algoritmo de Dijkstra). Esta característica permite usar esta heurística também para encontrar soluções para o problema abordado no capítulo seguinte (dimensionamento de redes baseadas em percursos de peso mínimo).

Formatted: Space Before: 6 pt

3.3.3 Variação da heurística lagrangeana

Note-se que a heurística lagrangeana assume um valor π inicial e vai reduzindo este valor sempre que em NM iterações a melhor solução não seja melhorada. Como o valor de π é um parâmetro multiplicativo do factor que é somado aos multiplicadores de Lagrange em cada iteração, então esta heurística gera grandes alterações aos multiplicadores de Lagrange nas iterações iniciais e vai progressivamente gerando alterações menores ao longo da sua execução. Assim, no início a heurística produz soluções muito diferentes entre iterações consecutivas e vai progressivamente concentrando a sua pesquisa em soluções cada vez mais próximas durante a sua execução. Com o objectivo de desenvolver uma outra heurística capaz de obter também bons resultados, foi considerada no âmbito desta tese uma variação da heurística lagrangeana com um ciclo principal e um ciclo secundário por cada iteração do ciclo principal. No ciclo principal, é utilizado um valor de π elevado para permitir uma variação grande entre os multiplicadores lagrangeanos. No ciclo secundário, que é executado após cada iteração principal, é executado um determinado número de subiterações com um valor de π reduzido para limitar a variação dos multiplicadores lagrangeanos. Com esta estratégia, pretende-se que nas iterações principais seja feita uma procura alargada no espaço de soluções e nas subiterações, a partir dos multiplicadores da iteração principal, seja feita uma procura mais focada nas soluções mais próximas da solução presente.

Os multiplicadores lagrangeanos transitam da iteração principal para as subiterações, mas não no sentido inverso (no final das subiterações os valores dos multiplicadores são descartados, e são retomados os valores da iteração principal). Para o cálculo do valor de T dentro das subiterações é utilizado o menor valor de P_{LS} encontrado até ao momento nas iterações principais ou dentro da própria subiteração. O valor de P_{LS} no final das subiterações não transita para as iterações principais.

Considere-se os parâmetros usados na heurística lagrangeana original e também os seguintes parâmetros:

| | |
|---------|---|
| π_p | Parâmetro π do ciclo principal; |
| π_s | Parâmetro π do ciclo secundário; |
| $Niter$ | Número de iterações do ciclo secundário a executar por cada iteração do ciclo principal |

Considere-se também uma função SHL com os seguintes parâmetros de entrada:

Função SHL($\pi, \mu_{\{ij\}}, P_{LS}, Niteras, ChamarSHL$)

em que $Niteras$ define o número de iterações e $ChamarSHL$ é uma variável booleana. O parâmetro NM não é utilizado no ciclo principal nem no ciclo secundário pois pretende-se um valor de π grande constante ao longo das iterações principais e um valor de π pequeno constante ao longo das subiterações.

O algoritmo da variação da heurística lagrangeana é descrito de seguida.

Algoritmo VHL:

1. $\mu_{\{ij\}} \leftarrow 0, \forall \{i, j\} \in E;$
 2. Resolver $R(\mu)$ para determinar P_{LI} e configuração de encaminhamento;
 3. $P_{LS} \leftarrow$ custo da solução de P com base na configuração de encaminhamento dada por $R(\mu)$;
 4. Chamar $SHL(\pi_p, \mu_{\{ij\}}, P_{LS}, +\infty, \text{verdadeiro})$
-

Função SHL:

1. Função $SHL(\pi, \mu_{\{ij\}}, P_{LS}, \text{Niteras}, \text{ChamarSHL})$
 2. Repetir:
 3. $G_{\{ij\}} \leftarrow \sum_{\{p,q\} \in S} b_{pq} (x_{ij}^{pq} + x_{ji}^{pq}) - \alpha \cdot y_{\{ij\}}, \forall \{i, j\} \in E;$
 4. $T \leftarrow \frac{\pi(P_{LS} - P_{LI})}{\sum_{i=1}^m (G_{\{ij\}})^2};$
 5. $\mu_{\{ij\}} \leftarrow \max(0, \mu_{\{ij\}} + TG_{\{ij\}}), \forall \{i, j\} \in E;$
 6. Resolver $R(\mu)$ para determinar P_{LI} e configuração de encaminhamento;
 7. Com base na configuração de encaminhamento, determinar solução para P e atualizar P_{LS} se o custo da solução de P for inferior;
 8. Se custo da solução de P for o melhor até ao momento guardar solução;
 9. Se (ChamarSHL) então:
 10. $\mu'_{\{ij\}} \leftarrow \mu_{\{ij\}}, \forall \{i, j\} \in E;$
 11. $P_{LS}' \leftarrow P_{LS};$
 12. $\pi' \leftarrow \pi_s;$
 13. Chamar $SHL(\pi', \mu'_{\{ij\}}, P_{LS}', \text{Niter}, \text{falso});$
 14. Até (*atingir TempoMax*) ou (*atingir Niteras*)
-

As linhas 3 a 8 da função SHL são semelhantes às linhas 5 a 12 do algoritmo OS. A função SHL é chamada para executar o ciclo principal, e em cada iteração do ciclo (linhas 2 a 13) esta função chama-se a si própria com os parâmetros do ciclo secundário para executar um dado número de subiterações (*Niter*). O ciclo secundário é executado como o algoritmo da heurística lagrangeana original, mas com multiplicadores iniciais e P_{LS} dados pelo ciclo principal. Além disso, no ciclo secundário a função já não se chama a si mesma (a variável *ChamarSHL* tem o valor *falso*).

3.3.4 Heurísticas de melhoramento

As heurísticas atrás apresentadas proporcionam soluções admissíveis mas geralmente não ótimas. Com o intuito de encontrar melhores soluções para o problema de desenho de rede, foram exploradas duas heurísticas distintas de melhoramento que, com base numa solução admissível, constroem novas soluções potencialmente de menor custo que a solução de partida. Estas heurísticas foram previamente apresentadas em (Lopes, 2001a) e (Lopes, 2001b).

A primeira heurística de melhoramento (HMI) foi concebida para recalcular os percursos de determinados conjuntos de agregados de fluxos de tráfego seleccionados aleatoriamente com o intuito de obter uma rede física de menor custo. Em cada iteração desta heurística é escolhida uma ordem aleatória para os agregados de fluxos de tráfego. Seguindo esta ordem, é retirado um conjunto de NB agregados de fluxos de tráfego e a rede física necessária é recalculada. Os NB agregados de fluxos de tráfego são reencaminhados um a um pelo percurso que implica o menor custo em ligações físicas adicionais a instalar na rede através de um processo idêntico ao utilizado na heurística construtiva. As ligações físicas adicionais necessárias são instaladas na rede. De seguida, são processados da mesma forma os grupos de NB agregados de fluxos de tráfego seguintes até todos os agregados de fluxos de tráfego terem sido considerados. Por cada iteração da heurística de melhoramento são geradas $\lceil |K|/NB \rceil$ novas soluções, onde $|K|$ indica o número total de agregados de fluxos de tráfego. Este procedimento é repetido um número NI de vezes por cada iteração da heurística principal.

Algoritmo HMI:

1. Executar uma iteração da heurística principal para obter uma solução admissível;
2. Guardar a solução se esta for a melhor solução obtida;
3. Repetir:
 4. Ordenar os agregados de fluxos de tráfego de forma aleatória;
 5. Seleccionar os primeiros NB agregados de fluxos de tráfego;
 6. Repetir:
 7. Retirar à solução actual os NB agregados de fluxos de tráfego actuais;
 8. Determinar rede física necessária;
 9. Seleccionar o primeiro dos NB agregados de fluxos de tráfego;
 10. Repetir:
 11. Determinar o percurso do agregado de fluxos de tráfego actual que implique o menor custo em capacidades a instalar;
 12. Instalar capacidades necessárias;
 13. Reservar largura de banda do agregado de fluxos de tráfego ao longo do percurso;
 14. Seleccionar o agregado de fluxos de tráfego seguinte dos NB agregados de fluxos de tráfego;
 15. Até (ter processado os NB agregados de fluxos de tráfego)
 16. Guardar a solução se esta for a melhor solução obtida;
 17. Seleccionar NB agregados de fluxos de tráfego seguintes;
 18. Até (terem sido processados todos os agregados de fluxos de tráfego)
19. Até (executar NI iterações)

As iterações da heurística de melhoramentos ocorrem entre as linhas 3 e 19. Dentro deste ciclo, nas linhas 4 a 5, o conjunto de todos os agregados de fluxos de tráfego é dividido em $\lceil |K|/NB \rceil$ conjuntos de NB agregados (em que o último conjunto pode ter menos de NB agregados). Para cada um destes conjuntos é repetido o seguinte procedimento (linhas 6 a 18). Os recursos atribuídos a este conjunto de agregados são libertados. De seguida, estes são reencaminhados um a um pelos percursos de menor custo em capacidades adicionais (linhas 10 a 15 – ver secção de heurística construtiva para explicação deste processo). Após todos os agregados do conjunto terem sido reencaminhados, obtém-se uma nova solução para o problema, que é guardada se for a melhor obtida até ao momento. O procedimento de retirar e reencaminhar os conjuntos de agregados descrito nas linhas 7 a 17 é repetido até que todos os conjuntos tenham sido processados.

A segunda heurística de melhoramento (HMII) selecciona os agregados de fluxos de tráfego a reencaminhar com base na escolha de uma aresta aleatória. Para tal, por cada iteração da heurística principal é executado um número NI de ciclos em que em cada ciclo é escolhida uma aresta de forma aleatória. Todos os agregados de fluxos de tráfego que utilizam a aresta no seu percurso são retirados e a rede física de menor custo necessária é recalculada. De seguida, os agregados de fluxos de tráfego retirados são reencaminhados pelo percurso de menor custo em ligações físicas um a um segundo um processo idêntico ao utilizado em HMI. Por cada iteração da heurística principal, são geradas NI novas soluções.

Algoritmo HMII:

1. *Executar uma iteração da heurística principal para obter uma solução admissível;*
2. *Guardar a solução se esta for a melhor solução obtida;*
3. *Repetir:*
4. *Seleccionar uma aresta de forma aleatória;*
5. *Retirar todos os agregados de fluxos de tráfego que utilizam a aresta no seu percurso;*
6. *Determinar rede física necessária;*
7. *Seleccionar o primeiro dos agregados de fluxos de tráfego retirados;*
8. *Repetir:*
9. *Determinar percurso do agregado de fluxos de tráfego actual que implique o menor custo em capacidades a instalar;*
10. *Instalar capacidades necessárias;*
11. *Reservar a largura de banda do agregado de fluxos de tráfego ao longo do percurso;*
12. *Seleccionar o agregado de fluxos de tráfego seguinte dos agregados de fluxos de tráfego retirados;*
13. *Até (ter processado todos os agregados de fluxos de tráfego retirados)*
14. *Guardar a solução se esta for a melhor solução obtida;*
15. *Até (executar NI iterações)*

O objectivo deste algoritmo é permitir que se baixe o custo em capacidades atribuídas a uma ligação ao tentar reencaminhar os agregados de fluxos de tráfego que passam pela ligação por outras ligações com largura de banda livre ou que necessitem de um menor custo em capacidades adicionais.

A Figura 5 ilustra a forma como as heurísticas de melhoramento são combinadas com as heurísticas anteriores por forma a obter os algoritmos heurísticos. Após uma iteração do ciclo principal de uma das heurísticas apresentadas (heurística construtiva (HC), heurística lagrangeana (HL) ou variação da heurística lagrangeana (VHL)) é obtida uma solução admissível para o problema. Essa solução é processada pela heurística de melhoramento escolhida (HMI ou HMII) durante NI subiterações, ao longo das quais são geradas novas soluções admissíveis. Estas soluções podem ser de custo mais baixo que a solução fornecida pela iteração da heurística principal.

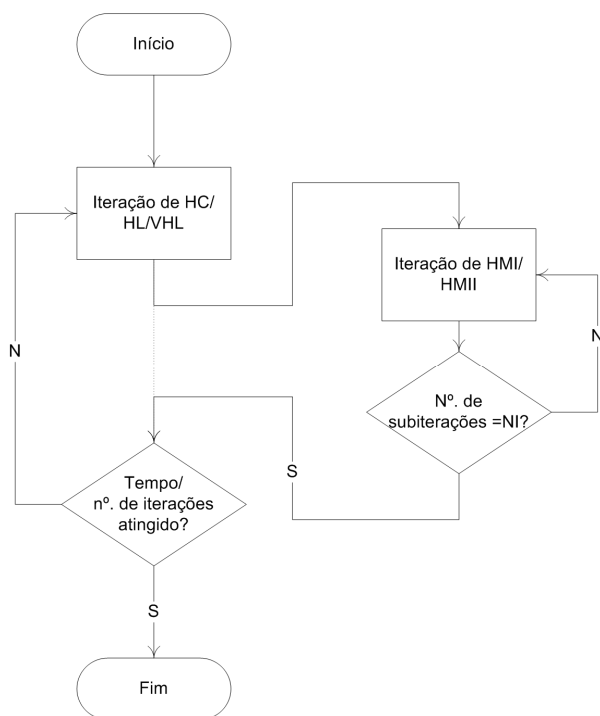


Figura 5: Esquema de inclusão das heurísticas de melhoramento nos algoritmos heurísticos

3.4 Resultados computacionais

Todos os resultados computacionais foram obtidos numa plataforma PC Pentium 4 a 3.4 GHz com 1GByte de memória de RAM e sistema operativo MS Windows XP. Os modelos de programação linear inteira foram executados no programa ILOG CPLEX 9.0. As heurísticas foram programadas em MS Visual C++ 6.0.

3.4.1 Casos de estudo

Para efectuar os testes de desempenho às técnicas heurísticas apresentadas, foram utilizados casos de estudo baseados em topologias de rede e cenários de tráfego gerados aleatoriamente com determinadas características para permitir as conclusões desejadas. Os casos de estudo concebidos são comuns a este capítulo e ao CAPÍTULO 4 seguinte.

Foram escolhidas três dimensões diferentes para as redes: 16 nós e 32 arestas (A16 e B16); 30 nós e 60 arestas (A30 e B30); 50 nós e 100 arestas (A50 e B50). De todos os nós, metade foram escolhidos para nós de tráfego. A Figura 6 apresenta a topologia dos casos de estudo utilizados. Os nós mais escuros representam nós de tráfego entre os quais existem agregados de fluxos de tráfego a encaminhar na rede. As topologias foram escolhidas de forma a cada nó de tráfego estar ligado a pelo menos dois outros nós. As redes A foram desenhadas de forma a terem comprimentos de arestas mais uniformes, ao passo que as redes B foram desenhadas de forma a terem comprimentos de arestas mais irregulares. As capacidades a instalar nas arestas são de 622Mbps e o custo $C_{\{ij\}}$ associado a uma capacidade numa aresta $\{i,j\}$ é dado por $C_{\{ij\}} = 100 + 5 \times l_{\{ij\}}$, onde $l_{\{ij\}}$ representa o comprimento da aresta.

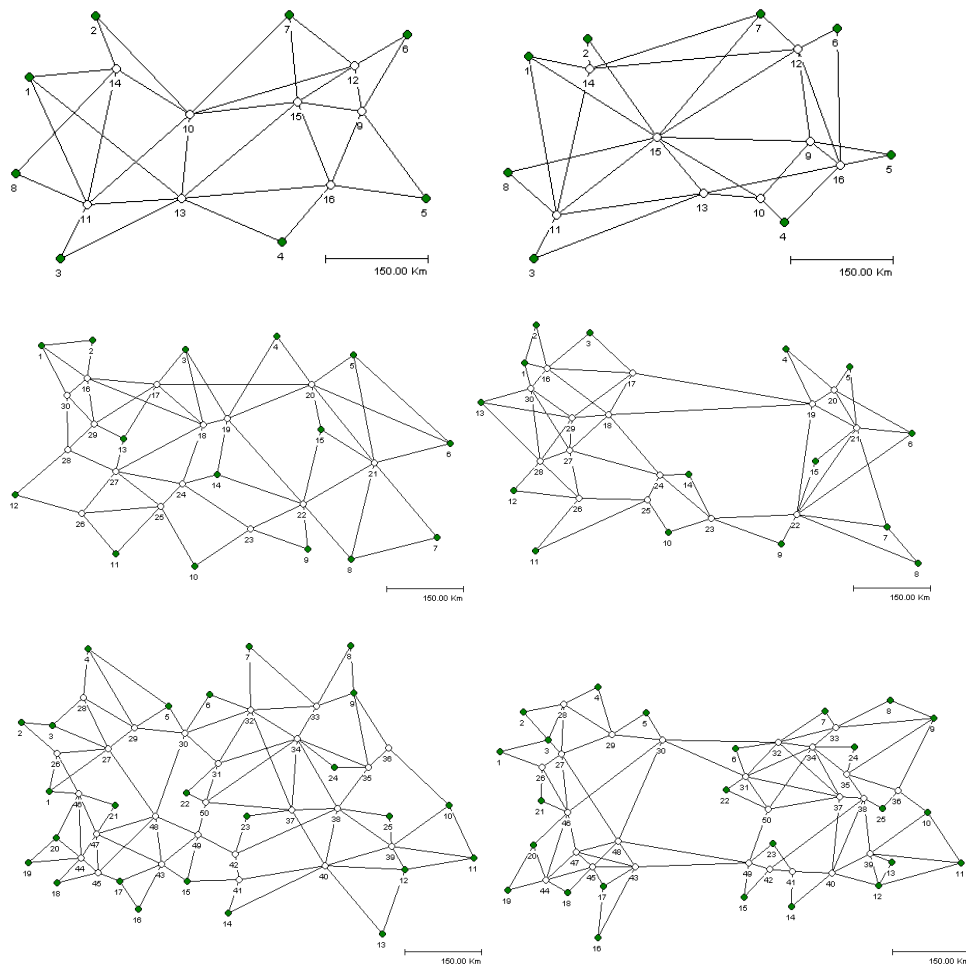


Figura 6: Topologia dos casos de estudo – da esquerda para a direita, de cima para baixo: A16, B16, A30, B30, A50, B50

As redes de maiores dimensões (30 e 50 nós) foram concebidas para avaliar o desempenho das técnicas heurísticas, uma vez que estas técnicas são tipicamente úteis para resolver instâncias de dimensões demasiado grandes para serem resolvidas de forma óptima. As redes de 16 nós foram concebidas para avaliar a qualidade das soluções das heurísticas, dado que para redes com estas dimensões mais reduzidas foi possível determinar soluções óptimas ou bons limites inferiores usando os modelos de programação linear inteira.

Para gerar cada cenário de tráfego, considerou-se a existência de uma matriz com valores aleatoriamente atribuídos entre todas as combinações de pares de nós de tráfego. Para cada

topologia de rede foram gerados três cenários com diferentes quantidades de tráfego. As redes de 16, 30 e 50 nós são também identificadas com a letra L, M ou H para indicar os casos de estudo com pouco (L), médio (M) ou muito tráfego (H). Foram utilizados estes diferentes cenários de tráfego para que os resultados médios obtidos pelas técnicas heurísticas sejam representativos de um conjunto mais alargado de cenários de redes. Os valores médios de tráfego foram escolhidos de forma a que as melhores soluções indiquem em média um número de capacidades por aresta existente na solução: entre 1 e 2 para as redes com pouco tráfego; entre 2 e 3 para as redes com tráfego médio; entre 3 e 4 para as redes com muito tráfego.

Para as redes A16 e B16 foram escolhidos os valores médios de tráfego: 100, 300 e 500 Mbps e foi gerada uma matriz de tráfego com valores entre 20% e 80% destes valores num total de 6 casos de estudo. Para as redes A30 e B30 foram escolhidos os valores médios de tráfego: 75, 150 e 300 Mbps e foi gerada uma matriz de tráfego com valores entre 20% e 80% destes valores num total de 6 casos de estudo. Para as redes A50 e B50 foram escolhidos os valores médios de tráfego: 50, 100 e 150 Mbps e foi gerada uma matriz de tráfego com valores entre 20% e 80% destes valores num total de 6 casos de estudo.

3.4.2 Heurísticas

Nesta secção são apresentados e comparados os resultados obtidos pelas diferentes técnicas heurísticas para resolver o problema de dimensionamento de redes com encaminhamento sem restrições. É avaliada a qualidade dos resultados obtidos pelas várias heurísticas apresentadas tendo como referência os melhores valores de custo encontrados. Dada a dificuldade em encontrar bons limites inferiores para as redes de grandes dimensões, esta foi a alternativa possível.

Para identificar as técnicas heurísticas foram utilizadas as seguintes designações:

HC – Heurística construtiva;

HCM I – Heurística construtiva + HMI;

HCM II – Heurística construtiva + HMII;

HL – Heurística lagrangeana;

HLMI – Heurística lagrangeana + HMI;

HLMII – Heurística lagrangeana + HMII;

VHL – Variação da heurística lagrangeana;

VHLMII – Variação da heurística lagrangeana + HMI;

VHLMII – Variação da heurística lagrangeana + HMII;

Para as heurísticas de melhoramento, consideraram-se dois valores de NI , 10 e 100 subiterações por cada iteração da heurística principal. O parâmetro NB da técnica HMI é escolhido com base no número de agregados de fluxos de tráfego do caso de estudo. Para a técnica HMI foi escolhido $NB = 5$ ou $NB = 10$ para as redes de 30 nós e $NB = 5$ ou $NB = 30$ para as redes de 50 nós. Os valores 10 e 30 correspondem a cerca de 10% do número total de agregados de fluxos de tráfego.

Foram escolhidos para tempos de cálculo 5 minutos para as redes de 30 nós e 30 minutos para as redes de 50 nós. Estes tempos permitiram a execução de um número médio de iterações muito significativo. O número médio aproximado de iterações executado para cada técnica é apresentado na Tabela 4 (os valores têm pouca precisão e servem apenas para analisar a quantidade de soluções geradas para cada técnica). As linhas 30 e 50 indicam as redes de 30 e 50 nós. Os números apresentados indicam: o número total de iterações para as heurísticas HC e HL; o número de iterações a multiplicar pelo número de subiterações para HCMII, HCMII, HLMI, HLMII e VHL; o número de iterações a multiplicar pelo número de subiterações da heurística lagrangeana e pelo número de subiterações das heurísticas de melhoramentos para VHLMII e VHLMII. No caso de HCMII optou-se por apresentar em separado estes números para $NI = 10$ e $NI = 100$, visto que estes eram bastante diferentes. Note-se que estes números indicam o número total de soluções geradas por cada técnica heurística nos intervalos de tempo fornecidos, com a exceção das técnicas que usam as heurísticas de melhoramentos I, que geram ainda mais soluções do que os números apresentados (cerca de $\lceil |K|/NB \rceil$ vezes mais, onde $|K|$ representa o número total de agregados e NB representa o parâmetro desta heurística).

Tabela 4: Número médio de iterações e subiterações executado pelas técnicas heurísticas

| | HC | HCMII | HCMII NI=10 | HCMII NI=100 | HL | HLMI | HLMII | VHL | VHLMII | VHLMII |
|----|--------|--------|----------------|-----------------|--------|--------|---------|--------|--------|---------|
| 30 | 100000 | 100000 | 500000 | 1000000 | 500000 | 100000 | 1000000 | 500000 | 100000 | 1000000 |
| 50 | 100000 | 100000 | 500000 | 1000000 | 900000 | 100000 | 1500000 | 900000 | 100000 | 1500000 |

Comecemos primeiro por analisar o desempenho das técnicas baseadas na relaxação lagrangeana. As técnicas baseadas na relaxação lagrangeana foram executadas uma vez para cada combinação de parâmetros. Para a técnica HL muitos autores recomendam $\pi = 2$ e $NM = 40$. Como tal, esta combinação de parâmetros é utilizada, junto com algumas variações desta combinação sugeridas por algumas experiências computacionais. Para π escolheram-se os valores 5, 2 e 1. Para NM escolheram-se os valores ∞ (o valor de π não decresce ao longo do tempo), 100 e 40. Para perfazer um total de 10 combinações utilizou-se uma combinação adicional: como para $NM = 40$, π decresce mais depressa ao longo do tempo, usou-se também uma combinação com um valor inicial de π maior ($\pi = 10$ e $NM = 40$). Como posteriormente se verificou que alguns dos melhores resultados foram obtidos para valores limite dos parâmetros, foram executadas corridas com mais 4 combinações de parâmetros: $NM = \infty$ com $\pi = 0,5$ e $NM = 1000$ com π igual a 5, 2 ou 1. Em resumo, para a técnica HL foram utilizadas as combinações de parâmetros apresentadas na Tabela 5.

Tabela 5: Combinações de parâmetros de HL

| | π | NM |
|-------|-------|----------|
| HL 1 | 5 | ∞ |
| HL 2 | 2 | ∞ |
| HL 3 | 1 | ∞ |
| HL 4 | 5 | 100 |
| HL 5 | 2 | 100 |
| HL 6 | 1 | 100 |
| HL 7 | 10 | 40 |
| HL 8 | 5 | 40 |
| HL 9 | 2 | 40 |
| HL 10 | 1 | 40 |
| HL 11 | 0,5 | ∞ |
| HL 12 | 5 | 1000 |
| HL 13 | 2 | 1000 |
| HL 14 | 1 | 1000 |

Para a técnica VHL foram escolhidos valores grandes de π_p para as iterações principais e valores pequenos de π_s para as subiteraões. Algumas experiências preliminares permitiram deduzir os valores de π_p a serem usados: 100, 50 e 20 para as iterações principais. Para as subiteraões foi escolhido um valor de π_s pequeno: 1. Foram também efectuados testes com π_s igual a 0,5, mas os resultados obtidos com este valor foram manifestamente piores e, como tal, não são aqui apresentados.

Para diversificar o número de subiterações por iteração (*Niter*) escolheram-se os valores de 20, 50 e 100 subiterações por iteração principal. Para perfazer um total de 10 combinações de parâmetros, escolheu-se também para as iterações principais um valor de π_p de 10 para ser usado com o número de subiterações maior $Niter = 100$. A Tabela 6 indica todas as combinações de parâmetros de π_p de iteração principal e número de subiterações por iteração principal. Dado que os melhores resultados foram obtidos para combinações de parâmetros nos limites dos valores escolhidos, foram adicionadas mais 3 combinações num total de 13 combinações de parâmetros.

Tabela 6: Combinações de parâmetros de VHL

| | π_p | π_s | Niter |
|--------|---------|---------|-------|
| VHL 1 | 100 | 1 | 20 |
| VHL 2 | 50 | 1 | 20 |
| VHL 3 | 20 | 1 | 20 |
| VHL 4 | 100 | 1 | 50 |
| VHL 5 | 50 | 1 | 50 |
| VHL 6 | 20 | 1 | 50 |
| VHL 7 | 100 | 1 | 100 |
| VHL 8 | 50 | 1 | 100 |
| VHL 9 | 20 | 1 | 100 |
| VHL 10 | 10 | 1 | 100 |
| VHL 11 | 5 | 1 | 100 |
| VHL 12 | 10 | 1 | 200 |
| VHL 13 | 5 | 1 | 200 |

No Anexo A estão presentes as tabelas com os valores de custo obtidos com todas as técnicas heurísticas (Tabela 39 a Tabela 59). Os tempos em minutos em que foram encontradas as melhores soluções para cada técnica estão indicados entre a Tabela 60 e a Tabela 80. Para comparação dos resultados das várias técnicas heurísticas, em cada caso de estudo determinou-se a melhor solução admissível encontrada para o problema. Estas soluções estão indicadas na Tabela 7. A coluna “Custo” indica o custo da solução; a coluna “Técnica” indica a técnica que obteve a solução com este custo; a coluna “Caps/Aresta” indica o número médio de capacidades por aresta usada da melhor solução encontrada. Assumindo que estas soluções têm valores de custo não muito distantes dos valores ótimos, verifica-se que os valores dos números de capacidades por aresta estão próximos dos valores planeados aquando da concepção dos casos de estudo.

Tabela 7: Melhores soluções encontradas com heurísticas

| | Custo | Técnica | Caps/Aresta |
|------|--------|-----------------------|-------------|
| A30L | 44595 | HLM I 4 NI=10 NB=10 | 1,3 |
| B30L | 43395 | VHLM II 13 NI=100 | 1,2 |
| A30M | 77520 | HLM I 6 NI=10 NB=5 | 1,8 |
| B30M | 93615 | VHLM I 12 NI=10 NB=5 | 2,4 |
| A30H | 151040 | HLM II 7 NI=10 | 3,7 |
| B30H | 156970 | HLM II 11 NI=100 | 3,9 |
| A50L | 88500 | HLM I 11 NI=10 NB=30 | 1,5 |
| B50L | 82490 | VHLM I 10 NI=10 NB=30 | 1,6 |
| A50M | 157580 | HLM II 7 NI=10 | 2,7 |
| B50M | 153400 | HLM I 13 NI=10 NB=30 | 2,6 |
| A50H | 222525 | HLM I 14 NI=10 NB=5 | 3,7 |
| B50H | 229445 | HLM I 8 NI=10 NB=5 | 3,9 |

De seguida, são comparados os resultados das várias combinações de parâmetros para a heurística lagrangeana e para a sua variação.

Uma vez determinado o menor valor de custo para cada caso de estudo de entre todas as corridas de todas as técnicas heurísticas (apresentados na Tabela 7), foram construídas a Tabela 8 e a Tabela 9. Nestas tabelas são apresentados os valores percentuais médios das técnicas HL e VHL (sem e com melhoramentos) para as várias combinações de parâmetros. Estes valores correspondem à média de todos os casos de estudo de 30 e 50 nós de $(C - M)/M$, onde C representa o custo obtido com a técnica e M representa o melhor custo obtido para o caso de estudo respectivo. O parâmetro NI indica o número de iterações da heurística de melhoramento por cada iteração da heurística principal e o parâmetro NB indica o parâmetro com o mesmo nome referido na heurística de melhoramentos I. Em ambas as tabelas os valores mínimos por coluna estão indicados a negrito.

Tabela 8: Resultados médios da técnica HL sem e com melhoramentos

| | π | NM | HL | HLMII | | HLM I | | | |
|-------|-------|----------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|
| | | | | NI=10 | NI=100 | NI=10 | | NI=100 | |
| | | | | | | NB=5 | NB=10/30 | NB=5 | NB=10/30 |
| HL 1 | 5 | ∞ | 12,25% | 7,96% | 7,80% | 6,64% | 6,63% | 12,46% | 12,29% |
| HL 2 | 2 | | 6,58% | 3,59% | 4,23% | 3,65% | 3,80% | 9,92% | 10,01% |
| HL 3 | 1 | | 5,95% | 0,94% | 1,58% | 1,04% | 0,95% | 7,23% | 7,04% |
| HL 11 | 0,5 | | 7,83% | 0,73% | 1,42% | 0,64% | 1,00% | 7,56% | 7,39% |
| HL 12 | 5 | 1000 | 7,96% | 0,80% | 1,42% | 1,06% | 0,94% | 12,02% | 11,83% |
| HL 13 | 2 | | 7,85% | 1,03% | 1,52% | 0,87% | 0,83% | 9,95% | 9,64% |
| HL 14 | 1 | | 8,56% | 0,91% | 1,27% | 0,97% | 1,16% | 7,11% | 7,11% |
| HL 4 | 5 | 100 | 8,14% | 1,09% | 1,30% | 1,03% | 0,73% | 6,69% | 6,76% |
| HL 5 | 2 | | 8,95% | 0,94% | 1,61% | 1,12% | 1,12% | 7,15% | 7,15% |
| HL 6 | 1 | | 9,99% | 1,02% | 1,38% | 0,97% | 0,96% | 7,39% | 7,36% |
| HL 7 | 10 | 40 | 9,26% | 0,85% | 1,12% | 1,09% | 1,17% | 6,78% | 6,81% |
| HL 8 | 5 | | 9,30% | 1,11% | 1,30% | 1,08% | 1,26% | 7,41% | 7,41% |
| HL 9 | 2 | | 9,97% | 1,10% | 1,38% | 1,12% | 1,30% | 7,58% | 7,45% |
| HL 10 | 1 | | 10,28% | 1,03% | 1,36% | 0,96% | 1,23% | 7,46% | 7,43% |
| Média | | | 8,78% | 1,65% | 2,05% | 1,59% | 1,65% | 8,34% | 8,26% |

Os resultados da coluna “HL” da Tabela 8 mostram que para a técnica HL sem melhoramentos, os parâmetros habitualmente usados na literatura ($\pi = 2$ e $NM = 40$) não são os que obtêm os melhores resultados. De forma geral, os resultados melhoram com o aumento do contador NM pelo que os melhores resultados são obtidos quando $NM = \infty$, ou seja, sem diminuir o valor de π ao longo do tempo. Uma observação importante nos resultados obtidos é a qualidade dos resultados que se obtêm para diferentes valores de π . Para $NM = \infty$, os resultados melhoram significativamente quando se passa o valor de π de 5 para 2 e de 2 para 1 e depois piora significativamente quando se passa de 1 para 0,5. Para menores valores de NM , o efeito vai progressivamente sendo contrário e as diferenças tornam-se cada vez menos significativas. De qualquer modo, conclui-se que os melhores resultados são obtidos com um valor de π igual a 1 e com o contador $NM = \infty$, ou seja, sem diminuir o valor de π ao longo do tempo.

As restantes colunas da Tabela 8 mostram que o uso de heurísticas de melhoramentos permite obter, na maior parte dos casos, soluções de custo significativamente mais baixo. As exceções ocorrem quando a heurística de melhoramentos I é usada com um grande número de subiterações ($NI = 100$). Com as heurísticas de melhoramentos, os ganhos

obtidos não são proporcionais aos resultados sem as heurísticas de melhoramentos, e como tal, os melhores resultados não são os resultados com π de 1 e $NM = \infty$.

Analisando as médias globais (linha “Média”) das diferentes heurísticas, pode-se concluir que a heurística de melhoramentos que melhores resultados deu foi a heurística de melhoramentos I (HLMI) com um número de subiterações pequeno ($NI = 10$). Com $NB = 5$ ou $NB = 10/30$ os resultados são muito próximos. Os resultados também estão muito próximos dos da heurística de melhoramentos II (HLMII) com $NI = 10$. Os melhores resultados médios são obtidos, para cada combinação de parâmetros π e NM , sempre por uma destas três heurísticas. Um número de subiterações NI grande piora um pouco os resultados de HLMII (menos de 0,5%), enquanto que piora bastante os resultados de HLMI (cerca de 5%). Recomenda-se como tal um número de iterações NI pequeno para HLMI.

Note-se no entanto que as diferenças nos valores médios globais é resultante principalmente dos resultados obtidos com π de 5 e 2 com um $NM = \infty$ (primeiras duas linhas). Assim, se dos resultados da Tabela 8 excluirmos a primeira coluna, as duas últimas colunas (relativas à heurística HLMI com $NI = 100$ que deu maus resultados) e as duas primeiras linhas (que consideram um π de 5 e 2 com um $NM = \infty$), então todos os outros valores estão entre os 0,64% e os 1,61%. Assim se conclui que a utilização da heurística de melhoramentos I (com $NM = 10$) ou da heurística de melhoramentos II produz resultados semelhantes e relativamente independentes dos parâmetros adoptados para a relaxação lagrangeana desde que não se usem valores de π muito grandes com um $NM = \infty$. Esta conclusão é importante pois não exige que o utilizador tenha de escolher criteriosamente os parâmetros a adoptar quando aplica estas técnicas a outro qualquer caso de estudo particular.

Tabela 9: Resultados médios da técnica VHL sem e com melhoramentos

| | π_p | Niter | VHL | VHLMII | | VHLM I | | | |
|--------|---------|-------|--------------|--------------|--------|--------------|--------------|--------------|--------------|
| | | | | NI=10 | NI=100 | NI=10 | | NI=100 | |
| | | | | | | NB=5 | NB=10/30 | NB=5 | NB=10/30 |
| VHL 1 | 100 | 20 | 15,51% | 5,42% | 5,76% | 4,94% | 4,74% | 11,00% | 11,44% |
| VHL 2 | 50 | | 13,39% | 5,48% | 5,92% | 4,60% | 4,68% | 11,10% | 11,06% |
| VHL 3 | 20 | | 11,68% | 4,55% | 4,61% | 3,34% | 3,45% | 9,92% | 10,22% |
| VHL 4 | 100 | 50 | 11,03% | 4,55% | 4,37% | 2,61% | 3,11% | 9,09% | 8,64% |
| VHL 5 | 50 | | 10,37% | 4,00% | 4,21% | 2,71% | 2,81% | 8,54% | 8,63% |
| VHL 6 | 20 | | 8,94% | 3,41% | 3,05% | 1,89% | 2,24% | 7,57% | 7,84% |
| VHL 7 | 100 | 100 | 10,08% | 3,98% | 3,81% | 2,26% | 2,60% | 8,09% | 8,18% |
| VHL 8 | 50 | | 9,03% | 3,71% | 3,19% | 2,50% | 2,20% | 7,47% | 7,55% |
| VHL 9 | 20 | | 7,86% | 2,36% | 2,33% | 1,92% | 1,68% | 7,18% | 6,92% |
| VHL 10 | 10 | | 6,38% | 1,62% | 1,96% | 1,34% | 1,00% | 7,38% | 7,38% |
| VHL 11 | 5 | | 6,07% | 1,07% | 2,01% | 0,90% | 1,17% | 7,04% | 7,30% |
| VHL 12 | 10 | | 6,23% | 1,39% | 1,82% | 1,04% | 1,07% | 7,06% | 7,23% |
| VHL 13 | 5 | 6,09% | 1,15% | 1,52% | 1,27% | 1,28% | 7,11% | 6,99% | |
| Média | | | 9,44% | 3,28% | 3,43% | 2,41% | 2,46% | 8,35% | 8,41% |

Considere-se agora a Tabela 9 relativa à variação da heurística lagrangeana. Nesta tabela (coluna “VHL”) verifica-se que sem melhoramentos, a variação da heurística lagrangeana obtém resultados significativamente melhores quando o número de subiterações *Niter* aumenta até 100 e semelhantes para os valores de *Niter* de 100 e 200. Os resultados melhoram também quando se consideram menores valores de π_p . Assim, os melhores resultados acontecem com $\pi_p = 5$ e *Niter* = 100 ou *Niter* = 200. Note-se que as soluções dadas com estes parâmetros estão 6,07% e 6,09% em média acima das melhores soluções, um valor praticamente igual aos 5,95% do melhor resultado da heurística lagrangeana anterior (mostrado na Tabela 8).

As restantes colunas da Tabela 9 mostram que o mérito das diferentes heurísticas de melhoramentos é semelhante ao observado no caso anterior. Tal como para a heurística lagrangeana, a melhor heurística de melhoramentos foi a heurística de melhoramentos I com um número de iterações *NI* pequeno (10) com resultados em média menos de 3% acima do melhor custo obtido. Com *NI* de 10 e *NB* = 5 ou *NB* = 10/30 são obtidos para cada combinação de parâmetros de π e *NM* os melhores resultados alternadamente. A heurística de melhoramentos II consegue obter resultados pouco acima destes (cerca de 1%). Como aconteceu para a heurística lagrangeana, o uso de *NI* grande (100) piora

significativamente os resultados de VHLMI (em cerca de 6%). Para VHLMI os resultados obtidos com NI grande e com NI pequeno são semelhantes.

Note-se que, ao contrário da heurística lagrangeana, neste caso existe uma correlação entre os melhores parâmetros da variação da heurística lagrangeana sem melhoramentos e os melhores parâmetros com melhoramentos. Assim, qualquer uma das heurísticas de melhoramentos obtém os melhores resultados com os menores valores de π_p considerados (5 e 10) e os maiores valores de $Niter$ considerados (100 e 200). Se dos resultados da Tabela 9 excluirmos a primeira coluna, as duas últimas colunas (relativas à heurística HLMI com $NI = 100$ que deu maus resultados) e considerarmos apenas as quatro últimas linhas (que consideram os menores valores de π_p e os maiores valores de $Niter$), então todos os valores estão entre os 0,90% e os 1,96%, suficientemente próximos para se concluir que a utilização da heurística de melhoramentos I (com $NM = 10$) ou da heurística de melhoramentos II produz resultados semelhantes desde que os parâmetros adoptados para a variação da relaxação lagrangeana sejam da ordem dos 5 a 10 para o π_p e entre 100 e 200 para o $Niter$.

Na Tabela 8 observa-se que duas das melhores combinações de parâmetros são HLMI 11 com $NI = 10$ e $NB = 5$ (em média a 0,64% do melhor custo) e HLMI 4 com $NI = 10$ e $NB = 10/30$ (a 0,73% do melhor custo). Na Tabela 9 observa-se que as duas melhores combinações de parâmetros são VHLMI 11 com $NI = 10$ e $NB = 5$ (a 0,9% do melhor custo) e VHLMI 10 com $NI = 10$ e $NB = 10/30$ (a 1% do melhor custo).

Uma vez que os resultados das heurísticas lagrangeanas com melhoramentos variam de corrida para corrida, foram executadas 10 corridas para cada uma das 2 melhores combinações de parâmetros de HL e VHL. Os resultados encontram-se no Anexo A (Tabela 81 a Tabela 84). A partir destes resultados construiu-se a Tabela 10 com os valores percentuais médios e máximos acima dos melhores valores de custo apresentados na Tabela 7. A coluna “Média 1” indica os resultados de HLMI 11 com $NI = 10$ e $NB = 5$ e a coluna “Média 2” indica os resultados de HLMI 4 com $NI = 10$ e $NB = 10/30$. A coluna “Média 3” indica os resultados de VHLMI 11 com $NI = 10$ e $NB = 5$ e a coluna “Média 4” indica os resultados de VHLMI 10 com $NI = 10$ e $NB = 10/30$. As colunas “Máximo #” indicam os valores máximos percentuais para cada caso respectivo. Os melhores valores por linha encontram-se indicados a negrito.

Tabela 10: Resultados percentuais médios e máximos das heurísticas lagrangeanas com melhoramentos para as 2 melhores combinações de parâmetros

| | Média 1 | Média 2 | Média 3 | Média 4 | Máximo 1 | Máximo 2 | Máximo 3 | Máximo 4 |
|--------|--------------|--------------|--------------|--------------|----------|----------|----------|----------|
| A30L | 1,61% | 2,18% | 1,37% | 1,50% | 2,01% | 2,70% | 2,12% | 2,23% |
| B30L | 2,40% | 3,27% | 1,63% | 2,09% | 3,03% | 4,16% | 2,45% | 2,82% |
| A30M | 0,90% | 1,09% | 2,00% | 1,75% | 1,48% | 1,43% | 2,55% | 2,41% |
| B30M | 0,92% | 1,01% | 1,50% | 1,19% | 1,68% | 1,48% | 1,97% | 1,83% |
| A30H | 0,95% | 1,03% | 1,38% | 1,29% | 1,34% | 1,30% | 1,65% | 1,68% |
| B30H | 0,76% | 0,53% | 1,04% | 0,86% | 1,01% | 0,84% | 1,51% | 1,28% |
| A50L | 0,43% | 0,52% | 0,75% | 1,09% | 0,68% | 0,86% | 1,16% | 1,38% |
| B50L | 1,14% | 1,65% | 1,36% | 1,06% | 1,54% | 1,95% | 1,87% | 1,59% |
| A50M | 0,60% | 0,57% | 1,06% | 1,13% | 0,91% | 0,82% | 1,36% | 1,48% |
| B50M | 0,46% | 0,61% | 1,04% | 1,01% | 0,95% | 0,78% | 1,30% | 1,24% |
| A50H | 0,27% | 0,40% | 0,65% | 0,54% | 0,54% | 0,63% | 0,84% | 0,75% |
| B50H | 0,34% | 0,29% | 0,66% | 0,72% | 0,52% | 0,49% | 0,95% | 1,06% |
| L | 1,40% | 1,91% | 1,28% | 1,43% | 3,03% | 4,16% | 2,45% | 2,82% |
| M | 0,72% | 0,82% | 1,40% | 1,27% | 1,68% | 1,48% | 2,55% | 2,41% |
| H | 0,58% | 0,56% | 0,93% | 0,85% | 1,34% | 1,30% | 1,65% | 1,68% |
| 30 | 1,26% | 1,52% | 1,49% | 1,44% | 3,03% | 4,16% | 2,55% | 2,82% |
| 50 | 0,54% | 0,67% | 0,92% | 0,92% | 1,54% | 1,95% | 1,87% | 1,59% |
| Global | 0,90% | 1,10% | 1,20% | 1,18% | 3,03% | 4,16% | 2,55% | 2,82% |

A partir desta tabela observa-se que os melhores resultados são normalmente obtidos com HLMI 11, $NI = 10$ e $NB = 5$ (primeira coluna). Verifica-se que em valores médios os resultados globais para as quatro técnicas são próximos e estão cerca de 1% acima dos melhores valores de custo. Em valores máximos globais verifica-se que as técnicas 3 e 4 obtiveram melhores valores que as técnicas 1 e 2. Isto significa que para os melhores parâmetros a variação da heurística lagrangeana com melhoramentos apesar de em média obter resultados um pouco piores, os resultados têm uma variação máxima mais pequena, o que é vantajoso porque se garantem melhores soluções nos piores casos. Isto sucede no entanto apenas para as redes de 30 nós com pouco tráfego pelo que é possível que esta vantagem nem sempre se verifique com outros casos de estudo. Para qualquer dos casos de estudo resolvidos, verifica-se que a técnica de variação da heurística lagrangeana com os melhores parâmetros obtém resultados a menos de 3% do custo da melhor solução encontrada. Para a heurística lagrangeana os resultados estão no máximo a cerca de 4% da melhor solução, embora este resultado se deva apenas a um caso de estudo, estando os resultados dos outros casos de estudo também a menos de 3% da melhor solução.

Estes resultados permitem tirar ainda outras conclusões importantes. Verifica-se que os resultados são mais próximos dos melhores valores de custo encontrados à medida que

aumenta a quantidade de tráfego dos casos de estudo. Isto sucede porque as diferenças de custo entre soluções com muitas capacidades nas arestas são menores. Os resultados são também mais próximos para os casos de estudo maiores (de 50 nós).

Analisemos agora o desempenho das heurísticas baseadas na heurística construtiva. As heurísticas baseadas na heurística construtiva foram executadas 10 vezes para cada caso de estudo. A Tabela 11 apresenta os resultados médios percentuais da heurística construtiva sem e com as técnicas de melhoramento em função do caso de estudo.

Tabela 11: Resultados percentuais médios da heurística construtiva sem e com as técnicas de melhoramento

| | HC | HCMII | | HCMI | | | |
|--------|--------|--------|--------|--------|----------|--------|----------|
| | | NI=10 | NI=100 | NI=10 | | NI=100 | |
| | | | | NB=5 | NB=10/30 | NB=5 | NB=10/30 |
| A30L | 13,93% | 8,47% | 5,73% | 2,74% | 2,78% | 13,52% | 13,81% |
| B30L | 17,36% | 10,46% | 8,47% | 5,59% | 5,15% | 17,17% | 17,33% |
| A30M | 15,92% | 11,07% | 9,04% | 10,89% | 11,34% | 16,32% | 16,31% |
| B30M | 15,15% | 11,59% | 9,84% | 12,86% | 13,06% | 15,48% | 15,51% |
| A30H | 7,50% | 6,34% | 5,17% | 8,36% | 8,20% | 8,11% | 8,22% |
| B30H | 7,55% | 6,21% | 5,48% | 8,29% | 8,40% | 8,23% | 8,18% |
| A50L | 27,92% | 19,84% | 16,24% | 7,68% | 7,96% | 18,47% | 18,49% |
| B50L | 26,01% | 17,60% | 14,01% | 6,00% | 5,69% | 18,64% | 18,41% |
| A50M | 31,63% | 24,29% | 20,37% | 14,67% | 14,41% | 30,22% | 29,55% |
| B50M | 28,24% | 20,98% | 18,11% | 13,47% | 13,30% | 28,35% | 28,17% |
| A50H | 26,89% | 22,02% | 18,75% | 18,28% | 18,31% | 27,73% | 27,58% |
| B50H | 24,15% | 19,23% | 17,02% | 19,49% | 19,39% | 26,05% | 25,63% |
| L | 21,30% | 14,09% | 11,11% | 5,50% | 5,39% | 16,95% | 17,01% |
| M | 22,73% | 16,98% | 14,34% | 12,97% | 13,03% | 22,60% | 22,38% |
| H | 16,52% | 13,45% | 11,60% | 13,60% | 13,58% | 17,53% | 17,40% |
| 30 | 12,90% | 9,02% | 7,29% | 8,12% | 8,15% | 13,14% | 13,23% |
| 50 | 27,47% | 20,66% | 17,42% | 13,26% | 13,18% | 24,91% | 24,64% |
| Global | 20,19% | 14,84% | 12,35% | 10,69% | 10,67% | 19,03% | 18,93% |

Através desta tabela verifica-se que a técnica de melhoramentos que em média obteve melhores resultados foi a HMI com número de iterações de 10. Os resultados desta técnica foram muito semelhantes para os valores de $NB = 5$ e $NB = 10$ ou 30 (consoante o número de nós do caso de estudo). Contudo, tal como sucedeu para as técnicas HL e VHL, com o aumento do número de iterações para 100 os resultados pioraram bastante (desta vez em cerca de 8%).

Convém salientar que para as redes de 30 nós a heurística construtiva com a técnica HMII e NI=100 obteve em média ligeiramente melhores resultados que a melhor das técnicas

apresentadas nesta tabela (HC com HMI e $NI = 10$). Para as redes com muito tráfego esta técnica foi também superior em média cerca de 2% face à melhor das técnicas. O aumento do número de iterações de HMII tem um efeito contrário ao aumento de iterações em HMI, melhorando os resultados em cerca de 2%.

Conclui-se também que qualquer das técnicas de melhoramento aplicada à heurística construtiva (com os parâmetros indicados) tem um impacto benéfico, isto é, permite em média a obtenção de soluções de custo mais baixo. O ganhos obtidos foram muito altos, atingindo cerca de 10% em média para a melhor técnica. Como tal, a utilização da heurística construtiva não deve dispensar a utilização de uma técnica de melhoramento, dado que esta técnica por si só não obtém bons resultados.

Comparando com os resultados das heurísticas lagrangeanas, verifica-se que qualquer uma das heurísticas baseadas na heurística construtiva tem um desempenho muito pior, uma vez que obtém resultados em média mais do que 5% acima do custo da melhor solução. Esta comparação mostra o mérito das heurísticas lagrangeanas na obtenção de boas soluções para o problema do dimensionamento de redes com encaminhamento sem restrições.

Assim, as principais conclusões a reter do conjunto de resultados computacionais apresentados nesta secção são:

- ◇ As heurísticas de melhoramentos mostram-se eficazes quando aplicadas a qualquer das heurísticas principais na obtenção de melhores soluções.
- ◇ As heurísticas lagrangeanas são superiores à heurística construtiva tanto com como sem as heurísticas de melhoramentos.
- ◇ As duas heurísticas lagrangeanas com melhoramentos têm desempenhos com características diferentes: a heurística lagrangeana base apresenta uma melhoria ligeira nos resultados médios que obtém enquanto que a variação da heurística lagrangeana apresenta uma melhoria ligeira nos resultados de pior caso que obtém.
- ◇ As heurísticas de melhoramentos tornam a eficácia das heurísticas lagrangeanas menos dependentes dos seus parâmetros.

3.4.3 Avaliação da eficácia das melhores heurísticas

A secção anterior comparou o desempenho das várias técnicas heurísticas usando como medida de qualidade a melhor solução encontrada de entre todas as técnicas. Este método é válido para comparar diferentes técnicas entre si mas não nos dá nenhuma informação sobre a qualidade das soluções obtidas. Para se obter uma estimativa desta qualidade, utilizaram-se os casos de estudo mais pequenos (baseados nas redes A16 e B16), para os quais é possível encontrar a solução óptima, ou pelo menos um bom limite inferior. A Tabela 12, Tabela 13, Tabela 14 e a Tabela 15 apresentam os valores de custo encontrados em 10 corridas de 1 minuto de tempo de execução cada usando as heurísticas lagrangeanas com a técnica de melhoramento HMI com as melhores combinações de parâmetros para os casos de estudo de 30 e 50 nós determinadas na secção anterior. Nestes casos, em vez de utilizar $NB = 10\%$ do número de agregados de fluxos de tráfego, utilizou-se $NB = 5$, uma vez que 10% era um valor pequeno demais.

Tabela 12: Resultados da heurística lagrangeana HLMI 11 ($\pi=0,5$, $NM=\infty$), $NI=10$, $NB=5$

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| A16L | 15975 | 15860 | 15725 | 15570 | 15925 | 15810 | 15805 | 15860 | 15860 | 15710 |
| B16L | 15100 | 15020 | 15020 | 15100 | 15020 | 15020 | 15180 | 15020 | 15020 | 15020 |
| A16M | 38330 | 38565 | 38650 | 38590 | 38355 | 38650 | 38700 | 38670 | 38380 | 38180 |
| B16M | 37905 | 37945 | 37910 | 37930 | 37995 | 37665 | 37910 | 37705 | 37915 | 37905 |
| A16H | 68855 | 68855 | 68855 | 68855 | 68855 | 68855 | 68855 | 68855 | 68855 | 68855 |
| B16H | 58995 | 58995 | 59145 | 59010 | 58995 | 58995 | 58995 | 58995 | 59010 | 58995 |

Tabela 13: Resultados da heurística lagrangeana HLMI 4 ($\pi=5$, $NM=100$), $NI=10$, $NB=5$

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| A16L | 15755 | 16110 | 15755 | 15655 | 15805 | 16125 | 15970 | 16090 | 16110 | 16055 |
| B16L | 15100 | 15010 | 15010 | 15020 | 15100 | 15020 | 15010 | 15020 | 15020 | 15020 |
| A16M | 38240 | 38920 | 38720 | 38725 | 38700 | 38655 | 38735 | 38540 | 38655 | 38630 |
| B16M | 37825 | 37905 | 37905 | 37890 | 37905 | 37825 | 37930 | 37665 | 37705 | 37905 |
| A16H | 68855 | 68885 | 68855 | 68855 | 68835 | 68855 | 68655 | 68855 | 68855 | 68855 |
| B16H | 58995 | 58995 | 58995 | 58995 | 58995 | 58995 | 59120 | 58995 | 59230 | 58995 |

Tabela 14: Resultados da variação da heurística lagrangeana VHLMI 11 ($\pi=5$, Niters=100), NI=10, NB=5

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| A16L | 15710 | 15710 | 15795 | 15740 | 15710 | 15805 | 15725 | 15725 | 15890 | 15660 |
| B16L | 15010 | 15020 | 15100 | 14880 | 15020 | 15020 | 15020 | 15180 | 15020 | 15020 |
| A16M | 38330 | 38550 | 38665 | 38515 | 38665 | 38700 | 38330 | 38565 | 38545 | 38630 |
| B16M | 37735 | 37755 | 37825 | 38070 | 38235 | 37825 | 38130 | 37870 | 38015 | 38155 |
| A16H | 68855 | 68655 | 68850 | 68655 | 68855 | 68655 | 68855 | 68855 | 68885 | 68655 |
| B16H | 58995 | 59230 | 58995 | 59300 | 59175 | 58995 | 58995 | 59175 | 58995 | 58995 |

Tabela 15: Resultados da variação da heurística lagrangeana VHLMI 10 ($\pi=10$, Niters=100), NI=10, NB=5

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| A16L | 15655 | 15710 | 15655 | 15710 | 15740 | 15860 | 15570 | 15740 | 15860 | 15755 |
| B16L | 15100 | 15095 | 15020 | 15020 | 15020 | 15020 | 15180 | 15020 | 15020 | 15020 |
| A16M | 38490 | 38380 | 38620 | 38030 | 38330 | 38370 | 38675 | 38495 | 38180 | 38560 |
| B16M | 37705 | 38090 | 37995 | 38000 | 38160 | 38240 | 38255 | 37905 | 38120 | 38105 |
| A16H | 68805 | 68855 | 68885 | 68855 | 68885 | 68655 | 69065 | 68855 | 68855 | 68855 |
| B16H | 58995 | 58995 | 59190 | 58995 | 59010 | 59250 | 59190 | 58995 | 58995 | 59010 |

A Tabela 16 apresenta os resultados obtidos para os casos de estudo de 16 nós através do modelo de programação linear inteira com os cortes apresentados e os resultados médios das técnicas heurísticas com os melhoramentos. A coluna “Melhor Solução” indica a melhor solução encontrada a resolver o modelo de programação linear inteira, a coluna “Limite Inferior” indica o melhor limite inferior encontrado e a coluna intervalo indica (“Melhor Solução” – “Limite Inferior”)/”Limite Inferior”. A coluna “Tempo” indica o tempo total em minutos gasto a resolver o modelo. As colunas “Média” apresentam os valores médios obtidos nas 10 corridas representadas nas 4 tabelas anteriores pela ordem respectiva. As colunas “Intervalo MS” indicam os valores (“Média #”–“Melhor Solução”)/”Melhor Solução”, para # = 1, 2, 3 e 4.

Tabela 16: Resultados do modelo de programação e das heurísticas lagrangeanas com melhoramentos

| | Melhor Solução | Limite Inferior | Intervalo | Tempo (min) | Média 1 | Média 2 | Média 3 | Média 4 | Intervalo MS 1 | Intervalo MS 2 | Intervalo MS 3 | Intervalo MS 4 |
|-------|----------------|-----------------|-----------|-------------|---------|---------|---------|---------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| A16L | 15570 | 15570 | 0,00% | 83,3 | 15810 | 15943 | 15747 | 15726 | 1,54% | 2,40% | 1,14% | 1,00% |
| B16L | 14720 | 14720 | 0,00% | 13,7 | 15052 | 15033 | 15029 | 15052 | 2,26% | 2,13% | 2,10% | 2,25% |
| A16M | 38030 | 37050 | 2,65% | 627,8 | 38507 | 38652 | 38550 | 38413 | 1,25% | 1,64% | 1,37% | 1,01% |
| B16M | 37665 | 36179 | 4,11% | 426,3 | 37879 | 37846 | 37962 | 38058 | 0,57% | 0,48% | 0,79% | 1,04% |
| A16H | 68655 | 68655 | 0,00% | 250,8 | 68855 | 68836 | 68778 | 68857 | 0,29% | 0,26% | 0,18% | 0,29% |
| B16H | 58995 | 58375 | 1,06% | 633,2 | 59013 | 59031 | 59085 | 59063 | 0,03% | 0,06% | 0,15% | 0,11% |
| Média | | | | | | | | | 0,99% | 1,16% | 0,95% | 0,95% |

Nesta tabela os resultados não óptimos obtidos com o modelo, ou seja, as linhas em que o limite inferior não é igual à solução óptima, deveram-se à ocorrência de erros na execução do CPLEX por falta de memória. Estes erros resultam da árvore de *Branch-and-Bound* ser demasiado grande para ser processada com os recursos computacionais disponíveis.

Verifica-se que em média os resultados das heurísticas lagrangeanas com os melhoramentos estão a cerca de 1% da melhor solução encontrada (linha “Média”). Verifica-se que todas as técnicas heurísticas com diferentes parâmetros obtiveram resultados em média muito próximos uns dos outros. Para cada caso de estudo individual, os intervalos para o limite inferior não ultrapassam os 4%, o que significa que os resultados das heurísticas estão no máximo a cerca de 5% do valor óptimo. Nesta tabela também se verifica que os resultados das heurísticas se aproximam mais dos valores das melhores soluções do modelo à medida que aumenta a quantidade de tráfego.

É também importante salientar que os resultados obtidos com o modelo de programação linear inteira demoraram normalmente cerca de 5 horas (com a exceção de B16L que demorou 14 minutos e A16L que demorou pouco mais que 1 hora), enquanto que os resultados obtidos com as técnicas heurísticas demoraram 1 minuto. Como tal, conclui-se que a partir de redes com esta dimensão, as técnicas heurísticas são mais adequadas à resolução deste problema.

3.5 Conclusões

Neste capítulo foi abordado o dimensionamento de redes de custo mínimo com encaminhamento sem restrições. Para resolver a tarefa de dimensionamento foi apresentado o problema de determinação das capacidades de custo mínimo a instalar nas ligações para suportar uma determinada matriz de tráfego conhecida entre alguns dos nós. Foi também apresentada uma formulação matemática para resolver este problema. Dada a complexidade do problema, esta formulação só é adequada para redes de pequenas dimensões.

Foram apresentadas algumas técnicas heurísticas para resolver o problema de forma aproximada para redes de grandes dimensões. Estas técnicas heurísticas são baseadas numa heurística construtiva e numa heurística lagrangeana. Foram também descritas técnicas de melhoramento a aplicar a qualquer das heurísticas apresentadas para encontrar soluções de menor custo. Foi proposta uma variação da heurística lagrangeana que, associada à melhor

heurística de melhoramentos, produz soluções de qualidade semelhante (embora ligeiramente inferior) à heurística lagrangeana tradicional mas que tem um comportamento melhor em termos de pior caso aumentando assim a confiança do utilizador na qualidade da solução encontrada.

Foi feito um estudo sobre a eficácia das heurísticas com e sem melhoramentos. Concluiu-se que a heurística que obtém em média os melhores resultados é a heurística lagrangeana com a heurística de melhoramento I com um número de subiterações NI baixo. No entanto, a heurística lagrangeana com a heurística de melhoramento II também consegue obter soluções de custo baixo. Verificou-se que as variações da heurística lagrangeana com a heurística de melhoramentos I obtêm resultados em média muito próximos dos da heurística lagrangeana com melhoramentos I. Para as melhores combinações de parâmetros as soluções são nos piores casos 3% (do valor da melhor solução) piores que as melhores soluções encontradas.

Conclui-se que as técnicas de melhoramento são úteis para qualquer das heurísticas apresentadas. No entanto, deve ser feita uma selecção cuidadosa do número de iterações destas consoante a heurística principal. A heurística de melhoramentos I, dado ser mais intensiva, deve ser executada com um número menor de subiterações. Este número depende do intervalo de tempo total disponível. Deve-se permitir que a heurística principal atinja as melhores soluções antes do limite de tempo, para que a heurística de melhoramentos possa ter boas soluções como ponto de partida. Verificou-se também que a heurística construtiva mesmo com a utilização de técnicas de melhoramento não consegue ser competitiva para as dimensões dos casos de estudo utilizados.

Através de comparação dos resultados do modelo de programação linear inteira e da melhor das técnicas heurísticas para redes de pequena dimensão verificou-se que os resultados das melhores heurísticas estão em média muito próximos do valor óptimo. Estes resultados levam a crer que para redes de médias e grandes dimensões, as técnicas heurísticas também devem proporcionar bons resultados. No entanto, tal não é possível confirmar devido à complexidade do problema, que não permite a obtenção de bons limites inferiores para as instâncias de maiores dimensões.

CAPÍTULO 4 Dimensionamento de redes baseadas em encaminhamento por percursos de peso mínimo

O protocolo MPLS define um conjunto de extensões para as redes IP que permitem a implementação de mecanismos de Engenharia de Tráfego. Muitos ISPs (*Internet Service Providers*) concordam que os mecanismos de Engenharia de Tráfego do MPLS têm um impacto benéfico nas suas redes (RFC 2702, Xiao, 2000). Apesar de providenciar grande flexibilidade ao nível das políticas de encaminhamento, algumas implementações do MPLS requerem do operador uma gestão mais pormenorizada e complexa. Este aumento de complexidade resulta do aumento do número de LSPs a configurar e gerir que cresce com as dimensões da rede numa razão aproximada de $N(N-1)$, onde N é o número de nós de tráfego. Uma alternativa à configuração e gestão explícita dos LSPs consiste na utilização de um protocolo de encaminhamento por percursos de peso mínimo como o OSPF ou IS-IS para a determinação automática dos LSPs.

A utilização de um protocolo de encaminhamento por pesos mínimos dispensa a necessidade de um sistema de gestão central para gerir os LSPs. Os percursos dos LSPs são determinados na rede de forma distribuída com base nos pesos atribuídos às ligações. O número de ligações é normalmente bastante inferior ao número de LSPs e cresce numa razão aproximadamente constante com o aumento das dimensões da rede (kN , k constante). Adicionalmente, considera-se nesta tese que os percursos de peso mínimo são únicos para evitar que o mecanismo de ECMP (*Equal Cost Multi-Pathing*) divida um agregado de fluxos de tráfego por vários percursos. Esta opção é tomada não só porque ao impôr que cada agregado de fluxos de tráfego utilize apenas um percurso reduz-se o número de LSPs a configurar e gerir mas também porque evita-se assim o balanceamento de carga nas ligações pouco uniforme e difícil de prever resultante da utilização de ECMP (ver secção 2.3).

Este capítulo aborda o problema do dimensionamento de redes em que o encaminhamento do tráfego é efectuado através de percursos de peso mínimo. Este problema é descrito através de algumas formulações matemáticas. São apresentados métodos para resolver o problema de forma exacta através de uma ferramenta de programação linear inteira e de forma aproximada através de técnicas heurísticas. Estes métodos são comparados para instâncias com diferentes dimensões e quantidade de tráfego. É também feita uma comparação dos custos associados ao dimensionamento de redes com encaminhamento sem restrições face aos custos associados ao dimensionamento de redes com encaminhamento baseado em percursos de peso mínimo.

Este capítulo encontra-se organizado da seguinte forma. Na secção 4.1 é referido trabalho de outros autores realizado na área de gestão de recursos e na área de dimensionamento de redes com encaminhamento baseado em percursos de peso mínimo. Na secção 4.2 são apresentadas formulações matemáticas do problema completo. Na secção 4.3 é proposto um procedimento iterativo de duas fases para resolver de forma mais eficiente o problema aqui abordado. Na secção 4.4 são descritas técnicas heurísticas para resolver de forma aproximada instâncias de grandes dimensões. Na secção 4.5 são apresentados os resultados computacionais das diferentes técnicas referidas nas secções anteriores. Alguns destes resultados são comparados com resultados do capítulo anterior e são expostas algumas conclusões. Por último, a secção 4.6 enuncia as principais conclusões obtidas ao longo do capítulo.

4.1 Estado-da-arte

Nos últimos anos, o encaminhamento de tráfego através de percursos de peso mínimo para otimizar uma medida do desempenho da rede tem sido alvo de muita atenção por parte de investigadores e operadores de redes (Fortz, 2000, Wang, 2001, Ramakrishnan, 2001, Fortz, 2002, Ericsson, 2002, Buriol, 2004, Pióro, 2002, Sridharan, 2003, Gajowniczek, 2000, Bourquia, 2003, Ajili, 2005, Eremin, 2005, Tomaszewski, 2005). Dada uma topologia de rede, uma matriz de tráfego e o conjunto de capacidades de encaminhamento e transmissão de informação dos equipamentos, é determinado o conjunto de pesos que melhor satisfaz os requisitos de desempenho da rede.

Em (Ramakrishnan, 2001) os autores abordam o problema do encaminhamento óptimo de tráfego em redes baseadas no encaminhamento pelos percursos de peso mínimo com o

objectivo de minimizar o atraso dos pacotes. Os autores enumeram e classificam vários tipos de problemas de encaminhamento em redes de telecomunicações como: problema com encaminhamento óptimo geral (permite divisão arbitrária dos agregados de fluxos de tráfego por percursos distintos); problema com encaminhamento dos fluxos por percursos únicos (redes com circuitos virtuais); problema com encaminhamento por percursos únicos baseado no endereço de destino; problema com encaminhamento baseado nos percursos de peso mínimo. Estes diferentes tipos de problemas são formulados com a adição de restrições ao problema de encaminhamento óptimo geral que transformam este problema num problema NP-Difícil. Os autores propõem um algoritmo de pesquisa combinatório para resolver o problema de encaminhamento por percursos de peso mínimo e mostram que este algoritmo converge em tempo limitado e obtém soluções quase óptimas mesmo quando a matriz de tráfego não é conhecida com exactidão.

As referências (Fortz, 2000) e (Fortz, 2002) abordam a tarefa de determinação de pesos OSPF com o objectivo de minimizar a carga em todas as ligações da rede considerando que os agregados de fluxos de tráfego podem ser divididos segundo o mecanismo ECMP. Nestas referências são propostos algoritmos baseados em heurísticas de pesquisa local para resolver estes problemas. Em (Fortz, 2000) é mostrado que o encaminhamento OSPF origina apenas uma pequena perda de desempenho quando comparado com o encaminhamento óptimo. É prática comum de alguns operadores de rede abdicar de algum do desempenho a favor de uma rede mais fácil de configurar e gerir.

Em (Fortz, 2000) os autores provam que o problema de determinação de pesos óptimos em redes OSPF é NP-Difícil e que mesmo a aproximação de um factor constante do resultado óptimo é também NP-Difícil. A noção de vizinhança do algoritmo de pesquisa local proposto nesta referência consiste na definição de um vizinho pela alteração do peso de uma ligação ou pelo balanceamento dos agregados de fluxos de tráfego que saem de um nó de forma igual entre os seus arcos de saída. Para tornar o algoritmo mais rápido, apenas uma percentagem aleatória da vizinhança total é processada. Este algoritmo utiliza tabelas de *hashing* para evitar a ocorrência de ciclos. Uma vez que entre avaliações consecutivas de conjuntos de pesos apenas alguns pesos são diferentes, os autores utilizam o algoritmo de (Ramalingam, 1996) para poupar tempo de cálculo a determinar percursos que se mantêm inalterados. Os autores apresentam também um método para determinar mais rapidamente as mudanças na carga das ligações. Para além de comparados com os

resultados do encaminhamento óptimo, os resultados deste algoritmo são também comparados com os de alguns métodos simples de atribuição de pesos às ligações como: atribuir o peso 1 a todas as ligações; atribuir peso proporcional ao comprimento das ligações; atribuir pesos aleatórios; atribuir pesos inversamente proporcionais à capacidade das ligações. Estes resultados mostram que o algoritmo apresentado consegue geralmente resultados a menos de 2% de diferença do encaminhamento óptimo. Os resultados do algoritmo comparados com os dos outros métodos de atribuição de pesos às ligações são superiores em mais de 15%.

(Fortz, 2002) aborda o problema da determinação óptima de pesos OSPF ou IS-IS para evitar ligações sobrecarregadas no caso de alterações na rede. As alterações consideradas na rede consistem em mudanças periódicas nos valores de tráfego, falhas nas ligações e aumento de tráfego em determinados pontos da rede. É apresentado um método para determinar o menor conjunto de alterações nos pesos a implementar no caso de ocorrerem alterações inesperadas na rede. Isto é proposto porque as alterações de pesos na rede provocam instabilidade que é tanto maior quanto maior o número de pesos alterados. O conjunto de pesos é mantido fixo para mudanças periódicas nos valores de tráfego (como no caso em que existem matrizes de tráfego diurno e noturno distintas). O método apresentado consiste numa modificação do algoritmo proposto em (Fortz, 2000) que limita o algoritmo de procura a conjuntos de soluções baseadas em pequenas alterações de pesos face ao conjunto de pesos iniciais.

Em (Ericsson, 2002) e (Buriol, 2004) são usados algoritmos evolucionários para resolver problemas de optimização de redes OSPF. Em (Ericsson, 2002) os autores propõem um algoritmo genético para resolver o problema apresentado em (Fortz, 2000) e reportam resultados semelhantes aos obtidos por estes autores. Em (Buriol, 2004) os autores descrevem um método para resolver uma versão deste problema com resistência a falhas na rede determinando os pesos dos arcos e as multiplicidades (número de ligações associadas ao arco) que conseguem o menor total de multiplicidades pesadas (multiplicidade a multiplicar pelo comprimento do arco) necessárias para encaminhar o tráfego requerido no caso de uma única falha num arco ou *router*. Ao longo desta tese consideramos que cada arco do grafo tem uma multiplicidade de 1 e que as capacidades atribuídas a cada arco podem ser tratadas como uma única capacidade igual à soma destas.

Em (Pióro, 2002), os autores provam que, dadas as capacidades fixas das ligações, as tarefas de optimização de uma medida de desempenho da rede (maximização da capacidade residual em todas as ligações, por exemplo) baseadas em encaminhamento OSPF são NP-Completas (consultar (Garey, 1979) para uma definição de um problema NP-Completo) e enunciam várias técnicas heurísticas para resolver estes problemas: heurísticas de pesquisa local (por ajustamento de pesos), *Simulated Annealing*, relaxação lagrangeana, *Simulated Allocation* (ver também Gajowniczek, 2000) entre outras. Os autores formulam também uma abordagem de duas fases para resolver estes problemas. Na primeira fase determinam o encaminhamento dos agregados de fluxos de tráfego e na segunda fase determinam o conjunto de pesos a atribuir às ligações. Na primeira fase, os agregados de fluxos de tráfego são encaminhados por percursos únicos de forma a otimizar uma medida do desempenho da rede, como a capacidade residual nas ligações. Na segunda fase determinam o conjunto de pesos capaz de proporcionar o encaminhamento dos agregados de fluxos de tráfego calculado na primeira fase, se tal conjunto de pesos existir.

(Bourquia, 2003) modela o problema de determinar o conjunto de percursos de peso mínimo que maximiza uma medida do desempenho da rede como um problema MIP (*Mixed Integer Program*). Neste caso, pretende-se maximizar a capacidade residual mínima de todas as ligações. É considerado o requisito de que cada percurso de peso mínimo deve ser único. É apresentado um algoritmo de *Branch-and-Cut* e alguns resultados computacionais. Para uso no algoritmo de *Branch-and-Cut* são apresentados cortes que verificam a condição de sub-optimalidade. Esta condição permite verificar facilmente se um conjunto de percursos pode ser um conjunto de percursos de peso mínimo únicos. Um conjunto de percursos P é definido como sub-ótimo se para quaisquer dois percursos de P com dois nós em comum, os sub-percursos entre os dois nós em comum são idênticos. Os autores concluem que este é um problema de optimização muito difícil, mas com o uso da propriedade de sub-optimalidade conseguiram resolver instâncias de tamanho médio.

Em (Ajili, 2005) é usada uma heurística de Pesquisa Tabu para resolver o problema de determinação de pesos e encaminhamento por percursos de peso mínimo únicos. O objectivo é minimizar a utilização da ligação mais usada e existe apenas um caminho de peso mínimo de uma fonte para o seu destino. A resolução do problema é feita em duas fases. Sabe-se através de (Rodošek, 2004) que qualquer conjunto de pesos reais pode ser

substituído por um conjunto de pesos inteiros que preserva o encaminhamento. Na primeira fase é usado um algoritmo de Pesquisa Tabu para determinar o conjunto de pesos reais das ligações que minimizam a utilização da ligação mais usada. A vizinhança é definida da seguinte forma: é identificada aleatoriamente uma aresta h de entre as arestas com a maior utilização e é escolhido o agregado com maior largura de banda requerida que atravessa essa aresta. A vizinhança é definida por todos os estados que resultam de uma troca de pesos entre a aresta h e outra aresta com pouca utilização. Se não existir nenhum vizinho, a procura é reiniciada a partir de uma permutação aleatória não pertencente à lista tabu. Os pesos reais das ligações são definidos por potências de base 2 entre $2^{-|E|}$ e 2^{-1} (onde E representa o conjunto de ligações) garantindo que para quaisquer dois conjuntos $E_1, E_2 \subseteq E$, as somas dos pesos de cada conjunto são diferentes, excepto se $E_1 = E_2$ (para redes com muitas ligações este método pode levar a erros de falta de precisão, no entanto, os autores fornecem também um método baseado em somas simbólicas para contornar este problema). Este procedimento garante a unicidade de todos os percursos de peso mínimo entre todos os nós da rede. Na segunda fase é encontrado um conjunto de pesos inteiros que preserve os percursos de peso mínimo determinados pelos pesos reais e minimiza o maior peso das ligações. Os autores comparam os resultados da sua técnica com a solução da técnica de geração de colunas e com a solução do encaminhamento óptimo MPLS e concluem que obtiveram bons resultados com esta técnica aplicada a três redes comerciais com até 175 *routers* e 800 ligações.

O problema de encaminhamento OSPF é resolvido em (Eremin, 2005) com uma técnica de *Branch-and-Bound* baseada em conjuntos de percursos. O objectivo do problema endereçado consiste em minimizar a utilização da ligação mais usada da rede. Este trabalho considera que os agregados de fluxos de tráfego podem ser divididos através de ECMP e introduz uma restrição que limita o número de ligações de saída num nó envolvidos em percursos de peso mínimo a um valor máximo, o que pode revelar-se útil para uso operacional. Os autores justificam esta restrição com base na memória limitada dos *routers* para as tabelas de encaminhamento. Os resultados deste algoritmo são comparados com os de uma técnica de geração de colunas para a variante do problema com percursos únicos em instâncias com até 90 nós e 340 ligações. O algoritmo proposto conseguiu encontrar soluções admissíveis para todos os casos de estudo, enquanto que a técnica de geração de colunas só encontrou soluções admissíveis em cerca de 61% dos casos.

Em (Tomaszewski, 2005) os autores propõem uma técnica de *Branch-and-Cut* para resolver o problema de encaminhamento OSPF assumindo a regra ECMP para a divisão dos agregados de fluxos de tráfego. Estes autores introduzem um conjunto de restrições válidas para melhorar a relaxação do problema e gerar hiperplanos de corte adicionais. Os autores apresentam também uma formulação alternativa baseada na decomposição da carga assumindo percursos mínimos únicos. A carga é definida por variáveis binárias que indicam se os agregados de fluxos de tráfego consecutivos podem ser encaminhados numa dada ligação. Não são fornecidos resultados computacionais, dado este ser um trabalho em progresso.

Problemas de desenho de redes baseadas em protocolos de encaminhamento por pesos mínimos (nos quais o trabalho desta tese se insere) são também abordados na literatura recente (Holmberg, 2004, Ben-Ameur, 2000, Pióro, 2004, Bley, 1998, Bley, 2003) embora a quantidade de referências seja substancialmente menor do que para o caso da otimização do desempenho de uma rede existente. Para uma referência exaustiva em modelar problemas de desenho de rede é possível consultar (Pióro, 2004).

A referência (Bley, 2003) apresenta uma técnica de relaxação lagrangeana para dimensionar redes OSPF com encaminhamento por percursos de peso mínimo únicos. Esta técnica pretende determinar a topologia da rede, os componentes de *hardware* e os pesos das ligações que minimizam o custo total da rede. No cálculo dos percursos de peso mínimo é utilizada uma versão modificada do algoritmo de Dijkstra para determinar percursos de peso mínimo únicos desempatando percursos de peso igual com base numa numeração das arestas. O autor afirma que os multiplicadores lagrangeanos podem ser usados como pesos de encaminhamento e, como tal, a relaxação lagrangeana para além de permitir a determinação de limites inferiores, também determina um conjunto de pesos que pode ser usado como ponto de partida para outras heurísticas que determinem soluções de desenho de redes. São apresentadas duas heurísticas lagrangeanas: (i) a primeira heurística utiliza os multiplicadores lagrangeanos como pesos das ligações e determina a configuração de *hardware* de menor custo requerida; a segunda heurística opera de igual modo, mas, após determinar a configuração de *hardware* de menor custo, atribui um valor muito elevado aos arcos não usados, para que estes sejam evitados quando possível. A primeira heurística consegue um melhor desempenho quando existem soluções possíveis de *hardware* para quase todas as configurações de encaminhamento. A segunda heurística é

mais apropriada para quando existem menos configurações possíveis de *hardware* ou quando existem mais restrições na tarefa de reconfiguração de *hardware*. O autor conclui que a técnica de relaxação lagrangeana é útil para determinar boas soluções de problemas baseados em casos reais num pequeno intervalo de tempo, apesar de produzir piores limites inferiores que um algoritmo de *Branch-and-Cut*. A referência (Bley, 2003) endereça um problema mais complexo que o abordado nesta tese. De qualquer modo, esta técnica é também aqui explorada e comparada com outras técnicas que conseguem ser superiores em termos de qualidade de soluções. Os únicos custos de *hardware* considerados nesta tese são apenas os custos das ligações.

Na referência (Bley, 1998) os autores descrevem um problema de desenho de redes e reserva de largura de banda aplicado a uma rede privada virtual de banda larga. Esta rede é baseada na tecnologia ATM e permite o aluguer de ligações com determinadas capacidades como caminhos virtuais na rede comutada ATM. O encaminhamento dos agregados de fluxos de tráfego é efectuado pelo protocolo OSPF numa rede IP consistindo de circuitos virtuais permanente (PVCs). Os pacotes são encaminhados através de percursos de peso mínimo únicos para os seus destinos uma vez que a divisão dos agregados de fluxos de tráfego não é suportada. A sobrevivência (*survivability*) é considerada na política de encaminhamento OSPF na forma de falhas singulares em componentes que definem os vários estados de operação. O protocolo OSPF é utilizado para encaminhar os agregados de fluxos de tráfego em todos os estados de operação e os percursos de peso mínimo devem ser únicos em todos estes estados de operação.

O problema de encaminhamento e desenho da rede consiste na determinação das capacidades a instalar nas arestas e nos pesos das arestas que determinam a configuração de encaminhamento para cada estado de operação. Este trabalho apresenta heurísticas para resolver este problema com base na modificação dos pesos atribuídos às arestas. Um conjunto de pesos determina a configuração de encaminhamento e o conjunto de capacidades de menor custo a instalar nas arestas. Heurísticas iniciais usam técnicas diversas para atribuir pesos às arestas de raiz e, se as restrições forem cumpridas, definem soluções possíveis. De seguida, são usadas heurísticas de melhoramento baseadas em pesquisa local para trocar ou modificar os pesos das arestas para determinar novas soluções de custo reduzido. O procedimento de pesquisa local baseia-se em utilizar funções de vizinhança que trocam ou modificam os pesos de algumas arestas de acordo com algum

critério para reduzir o custo total. Esta referência aborda um problema de desenho de redes com sobrevivência mas as estratégias adoptadas não pareceram potencialmente eficientes para o problema abordado nesta tese.

(Bley, 2002) apresenta o estudo de um problema de desenho de uma rede nacional constituída por uma rede de acesso e uma rede de *backbone*. Dadas as posições dos nós, o tráfego a encaminhar entre eles, as ligações e configurações de *hardware* possíveis e restrições de ordem técnica e administrativa, é determinado a que nível da rede os nós pertencem, como os nós são ligados, que *hardware* deve ser instalado e como o tráfego é encaminhado na rede. São apresentados modelos de programação linear inteira mista (MILP - *Mixed Integer Linear Program*) e métodos de resolução do problema. Em particular é apresentado um modelo MILP de desenho de uma rede com sobrevivência (*survivability*) e encaminhamento por percurso único e são apresentados métodos para incorporar as restrições de encaminhamento via OSPF neste modelo. Para tal, entre outras, são utilizadas restrições que garantem que os subpercursos de um percurso de peso mínimo também são percursos de peso mínimo.

Em (Holmberg, 2004) os autores abordam o problema de desenho de redes e encaminhamento para redes IP com encaminhamento por percursos de peso mínimo. Este problema considera a regra ECMP. Os autores apresentam uma formulação matemática do modelo de desenho e encaminhamento da rede para minimizar o custo do desenho da rede que é baseado em custos fixos e custos de expansão de capacidade lineares. Uma vez que este problema é NP-Difícil, só pode ser resolvido por *Branch-and-Bound* apenas para instâncias muito reduzidas. Como tal, são apresentadas também duas técnicas heurísticas para obter soluções. A primeira técnica é uma heurística iterativa que considera encaminhamento OSPF para um agregado de fluxos de tráfego em cada iteração. Esta heurística divide o problema numa sequência de subproblemas mais pequenos e aplica programação linear inteira a cada um destes subproblemas. A segunda técnica é baseada em *Simulated Annealing* para procurar no espaço de métricas OSPF uma boa solução de desenho de rede baseada num conjunto de pesos de ligações. As duas técnicas obtiveram bons resultados, mas a técnica de *Simulated Annealing* provou ser mais eficiente para instâncias com muitos agregados de fluxos de tráfego.

Nesta tese, a técnica de *Simulated Annealing* proposta por (Holmberg, 2004) e adaptada ao problema aqui estudado foi usada nos estudos computacionais comparativos e obteve resultados piores que as técnicas aqui propostas. No entanto, o problema abordado é ligeiramente diferente (considera ECMP), e como tal, os resultados podem não se aplicar ao problema abordado por (Holmberg, 2004).

Algumas das estratégias usadas para resolver estes problemas são baseadas numa abordagem de duas fases. Numa primeira fase é determinada uma configuração de encaminhamento (e a capacidade das ligações, no caso de problemas de desenho de redes) e numa segunda fase o objectivo é encontrar um conjunto de pesos de ligações que providenciem os percursos de peso mínimo desejados. O problema de determinar um conjunto de pesos compatível com um dado conjunto de percursos de peso mínimo é denominado de problema Inverso de Percursos Mínimos (*Inverse Shortest Paths*). Dependendo do método utilizado para determinar a configuração de encaminhamento, esta abordagem pode às vezes dar origem a que a segunda fase não tenha solução. Em algumas instâncias, não é possível atingir uma solução de encaminhamento através de uma configuração de percursos por peso mínimo. O encaminhamento baseado no endereço de destino pode muitas vezes ser obtido com a escolha apropriada dos pesos das ligações, mas isso pode nem sempre ser possível. A referência (Ben-Ameur, 2003) apresenta condições necessárias e suficientes para a existência de pesos compatíveis no caso em que partes de um grafo G pertencem a uma de um conjunto de classes particulares que incluem pontes e ciclos entre outras. Apresenta também condições necessárias para a existência de um conjunto de pesos compatíveis em qualquer tipo de grafo. Nesta referência, os autores apresentam modelos de Programação Linear para determinar conjuntos de pesos que são compatíveis com dadas configurações de encaminhamento. Os autores apresentam também uma técnica heurística para resolver o problema de encontrar pequenos pesos inteiros que providenciem os mesmos percursos que um conjunto de pesos reais.

Na referência (Broström, 2005) os autores apresentam novas condições necessárias para a existência de um conjunto de pesos de ligações que é compatível com uma dada configuração de encaminhamento. Este trabalho assume que os agregados de fluxos de tráfego podem ser divididos de acordo com a regra ECMP. Os autores providenciam também um método polinomial para determinar a maior parte das instâncias de

encaminhamento que não têm um conjunto de pesos de ligações compatível. O algoritmo também indica que partes dos padrões de tráfego é que provocam esta incompatibilidade.

A utilização das condições necessárias para a existência de um conjunto de pesos de ligações que é compatível com uma dada configuração de encaminhamento seria uma ideia útil de implementar na técnica iterativa de duas fases exactas que se propõe nesta tese. No entanto, conforme fica aparente nos resultados computacionais obtidos, verificou-se que geralmente as soluções eram obtidas em uma ou muito raramente em duas iterações, e como tal, não seria muito compensador em termos de eficiência a análise destas condições necessárias.

Em (Bley, 2005) o autor lida com o problema de encontrar pequenos pesos inteiros que cumpram com percursos de peso mínimo dados à partida. O autor apresenta duas formulações de programação linear deste problema, uma para minimizar o comprimento do percurso mais longo (para protocolos de encaminhamento baseados em vectores de distância) e outra para minimizar o máximo peso das ligações (para protocolos de encaminhamento baseados no estado das ligações). O autor mostra como calcular soluções aproximadas através de programação linear e mostra que determinar se uma configuração de encaminhamento pode ser implementada com um sistema de pesos de ligações é NP-Difícil. Apesar disto, o autor também afirma que para instâncias baseadas em casos reais, estes problemas são geralmente resolvidos muito eficientemente com ferramentas de programação linear inteira.

4.2 Formulações do problema

Esta secção está organizada em duas sub-secções. A primeira apresenta um modelo base que define o problema abordado para modelar o problema de dimensionamento de redes com encaminhamento por percursos de peso mínimo. Na segunda sub-secção, são apresentadas variantes do modelo base que se podem obter através de cortes adicionais, substituição de restrições ou relaxação de variáveis que nalguns casos permitem resolver o modelo de forma mais eficiente.

4.2.1 Modelo base

Tal como no capítulo anterior, considere-se uma rede cuja topologia é representada por um grafo bidireccional (N,E) . Os nós definidos pelo conjunto N representam posições onde

podem ser colocados *routers* e as arestas definidas pelo conjunto E representam pares de nós (arestas) entre os quais é possível instalar ligações físicas. Considere-se também o conjunto A que engloba todos os arcos que compõem as arestas de E . O subconjunto de nós U ($U \subseteq N$) representa o conjunto de nós de tráfego entre os quais existem agregados de fluxos de tráfego a estabelecer na rede. Pretende-se determinar os pesos a atribuir às arestas e as ligações físicas a instalar na rede de modo a que os agregados de fluxos de tráfego estabelecidos por LSPs pelos percursos de peso mínimo sejam suportados. O conjunto de todos os pares não ordenados de nós de tráfego é denominado por S . Considera-se que o tráfego a suportar entre os pares de nós de S é simétrico, mas o modelo pode ser facilmente adaptado para considerar o caso de tráfego assimétrico.

Considera-se também no problema de dimensionamento que os percursos a estabelecer para os vários nós de tráfego deverão ser simétricos. Numa rede IP uma grande parte dos protocolos aos vários níveis (por exemplo o TCP) exige a troca de informação nos dois sentidos entre dois nós de tráfego. Isto significa que se qualquer dos percursos nos dois sentidos for interrompido, acontecerá uma falha na comunicação nos dois sentidos. Se estes dois percursos não coincidirem nas ligações utilizadas (não forem simétricos), uma falha na rede tem mais hipóteses de afectar um dos percursos do que se estes forem simétricos. Ou seja, a utilização de percursos simétricos minimiza o número de LSPs afectados por uma falha na rede (maximiza a robustez da rede). Finalmente, a escolha de percursos simétricos simplifica também o problema de dimensionamento, uma vez que permite a redução do número de restrições e variáveis. Assim, o percurso definido para um LSP de um nó origem p para um nó destino q ($\{p,q\} \subseteq U$) define também o percurso do LSP de q para p (o percurso entre o nó p e o nó q percorre os mesmos nós e arestas que o percurso entre o nó q e o nó p na ordem inversa).

As ligações físicas são caracterizadas por uma capacidade α e um custo de operação e manutenção C_{ij} que depende da aresta onde são instaladas. Note-se que os modelos aqui propostos são facilmente adaptados para o caso mais geral de considerar ligações com diferentes capacidades. Em resumo, os parâmetros que definem o problema de dimensionamento são os seguintes:

- N conjunto de nós do grafo da rede;
- U conjunto de nós de tráfego do grafo da rede ($U \subseteq N$);

- E conjunto de arestas $\{i,j\}, i \in N, j \in N \setminus \{i\}$;
- A conjunto de arcos (i,j) , tal que $\{i,j\} \in E$;
- α capacidade de cada ligação física possível de instalar numa aresta;
- $C_{\{ij\}}$ custo de uma ligação física na aresta $\{i,j\}$;
- S conjunto de todos os pares de nós de tráfego $\{p,q\}, p \in U, q \in U \setminus \{p\}$;
- b_{pq} largura de banda total requerida pelo tráfego a suportar em cada um dos sentidos entre o nó $p \in U$ e o nó $q \in U \setminus \{p\}$.

Para definir o problema de dimensionamento, é também necessário definir previamente todas as variáveis de interesse. Neste caso, considere-se as seguintes variáveis:

- $y_{\{ij\}}$ variável inteira que indica o número de ligações físicas a instalar numa aresta $\{i,j\}$;
- x_{ij}^{pq} variável binária que indica se o arco (i,j) é utilizado no percurso seguido pelo LSP de p para q ;
- z_{ij}^q variável binária que indica se o arco (i,j) é utilizado no percurso de peso mínimo do nó i para o nó q ;
- w_{ij} variável inteira que indica o peso a atribuir ao arco (i,j) ;
- π_i^q variável inteira que indica o peso total do percurso de peso mínimo de i para q (considera-se $\pi_q^q = 0$).

O modelo base de programação linear inteira que representa o problema de dimensionamento abordado neste capítulo é definido da seguinte forma:

Minimizar
$$\sum_{\{i,j\} \in E} C_{\{ij\}} \cdot y_{\{ij\}}$$

Sujeito a:

$$\sum_{j:(i,j) \in A} (x_{ij}^{pq} - x_{ji}^{pq}) = \begin{cases} 1 & , i = p \\ -1 & , i = q \\ 0 & , otherwise \end{cases} , \forall i \in N, \forall \{p,q\} \in S$$

$$x_{ij}^{pq} \leq z_{ij}^q, \quad \forall (i,j) \in A, \forall \{p,q\} \in S$$

$$x_{ij}^{pq} \leq z_{ji}^p, \quad \forall (i,j) \in A, \forall \{p,q\} \in S$$

(12)

(13)

(14)

(15)

Deleted: 12

Formatted: Do not check spelling or grammar

Deleted: 12

Formatted: Do not check spelling or grammar

Deleted: 14

Formatted: Do not check spelling or grammar

Deleted: 14

Formatted: Do not check spelling or grammar

Deleted: 15

Formatted: Do not check spelling or grammar

Deleted: 15

$$\sum_{j:(i,j) \in A} z_{ij}^q \leq 1, \quad \forall q \in U, \forall i \in N \setminus \{q\} \quad (16)$$

$$\sum_{\{p,q\} \in S} b_{pq} (x_{ij}^{pq} + x_{ji}^{pq}) \leq \alpha \cdot y_{(ij)}, \quad \forall \{i,j\} \in E \quad (17)$$

$$z_{ij}^q + w_{ij} + \pi_j^q - \pi_i^q \geq 1, \quad \forall (i,j) \in A, \forall q \in U \quad (18)$$

$$z_{ij}^q + (w_{ij} + \pi_j^q - \pi_i^q) / M \leq 1, \quad \forall (i,j) \in A, \forall q \in U \quad (19)$$

$$w_{ij} \geq 1, \quad \forall (i,j) \in A \quad (20)$$

$$w_{ij} \leq w_{\max}, \quad \forall (i,j) \in A \quad (21)$$

$$w_{ij} = w_{ji}, \quad \forall \{i,j\} \in E \quad (22)$$

$$x_{ij}^{pq} \in \{0,1\}, z_{ij}^q \in \{0,1\}$$

$y_{(ij)}$, w_{ij} e π_i^q inteiros não negativos

| |
|-------------------|
| Deleted: 16 |
| Formatted ... [1] |
| Formatted ... [2] |
| Deleted: 16 |
| Formatted ... [3] |
| Deleted: 17 |
| Deleted: 17 |
| Formatted ... [4] |
| Formatted ... [5] |
| Deleted: 18 |
| Formatted ... [6] |
| Deleted: 18 |
| Formatted ... [7] |
| Deleted: 19 |
| Deleted: 19 |
| Formatted ... [8] |

A função objectivo (12) define a soma dos custos de todas as ligações físicas a instalar em todas as arestas da rede.

As restrições (13) garantem que as variáveis x definem um percurso entre o nó p e q e um percurso entre o nó q e p de forma implícita (cada variável x de p para q no arco (i,j) também define o valor que teria a variável x de q para p no arco (j,i) se esta variável fosse utilizada no modelo). Para cada nó da rede excepto p e q , o número de arcos de saída do nó é igual ao número de arcos de entrada. Se o nó não é usado no percurso ambos são iguais a 0, caso contrário ambos são maiores ou iguais a 1. Um número de arcos de saída e de entrada maior do que 1 indica a existência de ciclos no percurso; no entanto, estes ciclos só existirão na solução se não afectarem o valor mínimo da função objectivo.

As restrições (14), (15) e (16) garantem que os percursos definidos pelas variáveis x estão contidos nos percursos de peso mínimo definidos pelas variáveis z . As restrições (14) garantem que se o arco (i,j) está no percurso de um LSP com destino q , então este arco é utilizado no percurso de peso mínimo de i para o nó q . De igual modo, as restrições (15) garantem que se o arco (i,j) está no percurso de um LSP com origem no nó p , então o arco (j,i) é utilizado no percurso de peso mínimo de j para p (a validade desta restrição é garantida pelo facto dos percursos dos LSPs serem simétricos, dado que nesta formulação o percurso de cada LSP de p para q indica também o percurso de q para p no sentido inverso). As restrições (16) garantem que o número de arcos de saída dos percursos de

| |
|--------------------|
| Formatted ... [9] |
| Deleted: 12 |
| Formatted ... [10] |
| Deleted: 12 |
| Formatted ... [11] |
| Deleted: 14 |
| Deleted: 16 |
| Formatted ... [12] |
| Deleted: 14 |
| Formatted ... [13] |
| Deleted: 15 |
| Formatted ... [14] |
| Deleted: 15 |
| Formatted ... [15] |
| Deleted: 16 |
| Formatted ... [16] |
| Formatted ... [17] |
| Deleted: 14 |
| Formatted ... [18] |
| Deleted: 14 |
| Formatted ... [19] |
| Deleted: 15 |
| Formatted ... [20] |
| Deleted: 15 |
| Formatted ... [21] |
| Deleted: 16 |
| Formatted ... [22] |
| Deleted: 16 |

peso mínimo para qualquer destino é no máximo 1, ou seja, só existe um percurso de peso mínimo de cada nó da rede em N para cada nó em U .

As restrições (17) garantem que a capacidade total instalada em cada ligação satisfaz os requisitos de largura de banda de todos os LSPs que utilizam essa ligação no seu percurso.

As restrições (18) e (19) garantem que existe um conjunto de pesos associados às arestas que define os percursos de peso mínimo indicados pelas variáveis z . Restrições semelhantes a estas são usadas nas referências (Bley, 1998) e (Holmberg, 2004). Se $z_{ij}^q = 1$, estas restrições são equivalentes a (23),

$$w_{ij} + \pi_j^q - \pi_i^q = 0 \quad (23)$$

que garantem que o peso atribuído ao arco (i,j) é igual à diferença de pesos entre os percursos de peso mínimo para q dos seus nós extremos. Se $z_{ij}^q = 0$, estas restrições são equivalentes a (24),

$$1 \leq w_{ij} + \pi_j^q - \pi_i^q \leq M \quad (24)$$

que garantem que o peso atribuído ao arco (i,j) é maior que a diferença de pesos entre os percursos de peso mínimo para q dos seus nós extremos. Ao parâmetro M deve ser atribuído um valor suficientemente elevado, bastando para tal o valor $2w_{max}$ (Bley, 1998). Este valor nunca é inferior à soma de w_{ij} ($\leq w_{max}$) com $\pi_j^q - \pi_i^q$ ($\leq w_{max}$, pois $\pi_j^q - \pi_i^q \leq w_{ij} \leq w_{max}$).

As restrições (20) e (21) limitam os valores possíveis dos pesos ao intervalo $[1;w_{max}]$ e as restrições (22) garantem que os pesos dos arcos da mesma aresta são iguais. Esta opção é normalmente tomada pelos operadores de rede pois simplifica a tarefa de gestão e manutenção da rede. O uso de pesos iguais nos dois arcos de uma aresta garante também que se os percursos de peso mínimo forem únicos então são simétricos (embora não seja uma condição necessária para a simetria dos percursos).

4.2.2 Variantes

Um problema com variáveis inteiras é mais complexo que o mesmo problema com variáveis reais. O algoritmo de *Branch-and-Bound* utiliza a relaxação de variáveis (conversão de variáveis inteiras em variáveis reais) para resolver problemas de

Deleted: 17

Formatted: Do not check spelling or grammar

Deleted: 17

Formatted: Do not check spelling or grammar

Deleted: 18

Deleted: 19

Formatted: Do not check spelling or grammar

Deleted: 18

Deleted: 19

Formatted: Do not check spelling or grammar

Formatted: Do not check spelling or grammar

Formatted: Do not check spelling or grammar

programação linear inteira ou programação linear inteira mista. Em cada iteração do algoritmo é resolvido o problema composto pela relaxação linear do problema original e por restrições que limitam algumas variáveis. Na relaxação linear todas as variáveis inteiras do problema original são relaxadas, o que resulta num problema muito mais simples de resolver. A análise dos resultados obtidos pela relaxação linear de um problema permite a obtenção de conclusões sobre a eficiência do algoritmo de *Branch-and-Bound*. Por um lado, se o valor óptimo da função objectivo da relaxação linear de uma formulação for superior ao de outra, então o número de iterações necessárias para resolver o problema será potencialmente inferior pois são eliminadas mais iterações do algoritmo de *Branch-and-Bound*. Por outro, se a relaxação linear de uma formulação for resolvida mais rapidamente que a de outra, então o tempo total para resolver o algoritmo de *Branch-and-Bound* será potencialmente inferior uma vez que cada iteração é resolvida em menos tempo.

Através da modificação de restrições do modelo ou da adição de novas restrições é possível obter modelos potencialmente mais úteis. Novas restrições podem introduzir cortes no espaço de soluções do problema relaxado, melhorando a relaxação linear do problema e reduzindo o número de iterações a processar pelo algoritmo de *Branch-and-Bound*. Outra possibilidade é que as novas restrições tornem a relaxação linear do problema mais simples de resolver, diminuindo o tempo consumido pelo algoritmo de *Branch-and-Bound* em cada nó. Ambas as possibilidades têm como efeito a diminuição do tempo total de resolução do problema, podendo permitir a resolução de instâncias de dimensões superiores em tempo útil. Nesta secção, são apresentadas algumas variantes da formulação do modelo completo com o objectivo de tentar obter modelos mais úteis.

Note-se que o modelo base contempla um total de $|A| \times |S|$ restrições (14) e outras tantas restrições (15). Para reduzir o número de restrições do problema, considera-se a agregação destas restrições nas restrições (25) que são em menor número ($|A| \times |U|$). Por esta razão, as restrições (14) e (15) são denominadas por restrições desagregadas e as restrições (25) são denominadas de restrições agregadas.

$$\sum_{\forall p: \{p,t\} \in S} x_{ij}^{pt} + \sum_{\forall q: \{t,q\} \in S} x_{ji}^{tq} \leq T \cdot z_{ij}^t, \quad \forall (i,j) \in A, \forall t \in U \quad (25)$$

Deleted: 14

Formatted: Do not check spelling or grammar

Deleted: 14

Formatted: Do not check spelling or grammar

Deleted: 15

Formatted: Do not check spelling or grammar

Deleted: 15

Formatted: Do not check spelling or grammar

Deleted: 25

Formatted: Do not check spelling or grammar

Deleted: 25

Formatted: Do not check spelling or grammar

Deleted: 25

Formatted: Do not check spelling or grammar

Deleted: 14

Deleted: 14

Formatted: Do not check spelling or grammar

Deleted: 15

Formatted: Do not check spelling or grammar

Deleted: 15

Formatted: Do not check spelling or grammar

Deleted: 25

Formatted: Do not check spelling or grammar

Formatted: Do not check spelling or grammar

Deleted: 25

Formatted: Do not check spelling or grammar

Formatted: Do not check spelling or grammar

Deleted: 25

Formatted: Do not check spelling or grammar

Deleted: 25

O somatório do lado esquerdo destas restrições representa a soma dos LSPs para o destino t que usam o arco (i,j) mais os LSPs desde a origem t que usam o arco (j,i) . Como este somatório pode ser no máximo $|U|-1$, onde $|U|$ corresponde ao número de nós de tráfego da rede, então ao parâmetro T deve ser atribuído este mesmo valor $|U|-1$. Se um dos LSPs com destino t utilizar o arco (i,j) ou um dos LSPs com origem t utilizar o arco (j,i) , então o arco (i,j) está no percurso de custo mínimo de i para t e a variável z para o destino t no arco (i,j) é 1.

É conhecido que para qualquer conjunto de pesos reais é possível encontrar um conjunto de pesos inteiros que determina os mesmos percursos entre os pares de nós de tráfego, desde que os limites dos valores inteiros sejam suficientemente grandes (Rodošek, 2004, Bley, 2005). Dado que os limites dos pesos usados nas tecnologias OSPF e IS-IS são suficientemente grandes ($2^{16}-1$ no caso do OSPF e $2^{24}-1$ na versão mais recente do IS-IS), podemos simplificar a formulação do modelo completo relaxando as variáveis dos pesos w e soma dos pesos π . Ao relaxar algumas das variáveis, estamos a diminuir a complexidade do problema pois esta deve-se principalmente à integralidade das variáveis.

Uma outra alternativa que se considera nesta tese consiste em acrescentar restrições que melhorem a relaxação linear do modelo (à semelhança do que foi feito no capítulo anterior). Para tal, definimos dois conjuntos de restrições. O primeiro conjunto de restrições é o apresentado na secção 3.2.2. Considere-se uma divisão P do conjunto de nós N em dois subconjuntos disjuntos. Considere-se $S_p \in S$ o conjunto de pares de nós $\{p,q\}$ em que p está num subconjunto e q está no outro. Considere-se também $E_p \in E$ o conjunto de arestas $\{i,j\}$ em que o nó i está num subconjunto e o nó j está no outro. Para qualquer partição P , a restrição (26) deverá ser respeitada por uma qualquer solução do problema:

$$\sum_{\{i,j\} \in E_p} y_{\{ij\}} \geq \left\lceil \frac{\sum_{\{p,q\} \in S_p} b_{pq}}{\alpha} \right\rceil, \quad (26)$$

, onde $\lceil a \rceil$ significa o inteiro mais pequeno não inferior a a . Nestes modelos, consideramos apenas as restrições (26) resultantes de dividir o conjunto N no subconjunto composto pelo nó único $p \in U$ e no subconjunto dos restantes nós da rede.

O segundo conjunto de restrições é dado por (27)

- Deleted: 26
- Formatted: Do not check spelling or grammar
- Deleted: 26
- Formatted: Do not check spelling or grammar
- Deleted: 26
- Formatted: Do not check spelling or grammar
- Deleted: 26
- Formatted: Do not check spelling or grammar
- Formatted: Do not check spelling or grammar
- Deleted: 26
- Formatted: Do not check spelling or grammar
- Deleted: 26
- Formatted: Do not check spelling or grammar
- Deleted: 27
- Deleted: 27
- Formatted: Do not check spelling or grammar

$$z_{ij}^q + z_{ji}^q \leq y_{(ij)}, \quad \forall \{i, j\} \in E, \forall q \in U$$

(27)

Deleted: 27

Deleted: 27

Formatted: Do not check spelling or grammar

Formatted: Do not check spelling or grammar

e indica que deve ser instalada pelo menos uma ligação física numa aresta que é utilizada num dos percursos de peso mínimo especificados pelas variáveis z . Note-se que estas restrições utilizam as variáveis z em vez das variáveis x usadas no capítulo anterior, uma vez que estas são potencialmente em menor número resultando em menos restrições. Este último conjunto de restrições é ainda assim bastante numeroso ($|E| \times |U|$) e nem todas as restrições são úteis (isto é, nem todas contribuem para melhorar o valor da relaxação linear). Como tal, para determinar as restrições úteis utilizou-se o método apresentado na secção 3.2.2 para restrições semelhantes mas expressas nas variáveis x em vez de z . Resolve-se a relaxação linear do problema original sem restrições adicionais. De seguida, a solução óptima do problema é testada para verificar se cumpre as restrições a adicionar ao modelo. As restrições não cumpridas são adicionadas ao modelo e a sua relaxação linear é resolvida de novo. As restrições restantes são verificadas como anteriormente e se ainda houver restrições não cumpridas estas são adicionadas ao modelo e o processo é repetido. O processo termina quando não existem mais restrições não cumpridas a acrescentar e o conjunto de restrições úteis é dado pelo conjunto de restrições adicionadas em todas as iterações.

Foram realizados estudos computacionais para determinar as variantes da formulação do modelo completo mais eficientes (apresentados na secção devida). Estas variantes são indicadas por V1-V2-V3, onde V1 indica se são utilizadas as restrições agregadas ou não (Agregada/Desagregada), V2 indica se são utilizadas variáveis de pesos contínuas ou inteiras (PesosReais/PesosInteiros) e V3 indica se são usadas as restrições adicionais para melhorar a relaxação linear do modelo ou não (ComCortes/SemCortes).

4.3 Técnica iterativa de duas fases

Apesar de haver diferenças, os resultados computacionais mostram que qualquer das formulações do modelo completo é ainda assim demasiado complexa para resolver instâncias de dimensões razoáveis em tempo útil.

É conhecido que uma solução de encaminhamento baseada no endereço de destino é uma condição necessária mas não suficiente para ser uma solução de encaminhamento por percursos de peso mínimo (Ben-Ameur, 2003). No entanto, também é conhecido que na

maior parte dos casos pode ser encontrada uma solução de encaminhamento por percursos de peso mínimo quando temos um conjunto de percursos com a propriedade do encaminhamento baseado no endereço de destino (Ben-Ameur, 2003). Como tal, apresenta-se uma técnica para resolução do problema de dimensionamento baseada em duas fases distintas.

Na primeira fase, é desenhada a rede impondo apenas a propriedade de encaminhamento baseada no endereço de destino. Na segunda fase é determinado um conjunto de pesos que implemente o esquema de encaminhamento definido pela solução da primeira fase. Estas fases definem-se pela decomposição de um dos modelos completos em dois modelos diferentes: o modelo do problema de desenho da rede e encaminhamento dos LSPs e o modelo do problema da atribuição de pesos às ligações.

Se na segunda fase for encontrado um conjunto de pesos compatível com o esquema de encaminhamento da primeira fase, então a solução encontrada será uma solução óptima do problema. Caso contrário, exclui-se do conjunto de soluções da primeira fase a solução presente e executa-se de novo as duas fases. Esta operação é repetida até que a segunda fase possa ser resolvida. Quando for encontrada uma solução, esta será uma solução óptima do problema original.

4.3.1 Primeira fase

Considere-se a formulação desagregada do modelo completo de dimensionamento com encaminhamento baseado em percursos de peso mínimo e retire-se as restrições (18) e (19). As variáveis relacionadas com os pesos w e π não são utilizadas e como tal, as restrições (20-22) são também retiradas. A formulação assim definida garante o encaminhamento dos LSPs baseado no destino.

Minimizar
$$\sum_{\{i,j\} \in E} C_{\{ij\}} \cdot y_{\{ij\}}$$

Sujeito a:

$$\sum_{j(i,j) \in A} (x_{ij}^{pq} - x_{ji}^{pq}) = \begin{cases} 1 & , i = p \\ -1 & , i = q \\ 0 & , otherwise \end{cases} , \forall i \in N, \forall \{p,q\} \in S$$

$$x_{ij}^{pq} \leq z_{ij}^q, \quad \forall (i,j) \in A, \forall \{p,q\} \in S$$

(28)

(29)

(30)

- Deleted: 18
- Formatted: Do not check spelling or grammar
- Deleted: 18
- Deleted: 19
- Deleted: 19
- Formatted: Do not check spelling or grammar
- Formatted: Do not check spelling or grammar
- Formatted: Do not check spelling or grammar
- Formatted: Do not check spelling or grammar
- Formatted: Do not check spelling or grammar
- Deleted: 28
- Formatted: Do not check spelling or grammar
- Deleted: 28
- Formatted: Do not check spelling or grammar
- Deleted: 30
- Deleted: 30
- Formatted: Do not check spelling or grammar

$$x_{ij}^{pq} \leq z_{ji}^p, \quad \forall (i, j) \in A, \forall \{p, q\} \in S \quad (31)$$

$$\sum_{j:(i,j) \in A} z_{ij}^q \leq 1, \quad \forall q \in U, \forall i \in N \setminus \{q\} \quad (32)$$

$$\sum_{\{p,q\} \in S} b_{pq} (x_{ij}^{pq} + x_{ji}^{pq}) \leq \alpha \cdot y_{(ij)}, \quad \forall \{i, j\} \in E \quad (33)$$

$$x_{ij}^{pq} \in \{0,1\}, z_{ij}^q \in \{0,1\}$$

$y_{(ij)}$ inteiros não negativos

Note-se que um esquema de encaminhamento baseado no endereço de destino tem como propriedade que o percurso de encaminhamento de um nó i para um destino t é o mesmo qualquer que seja o nó origem do LSP. Esta propriedade é garantida se todos os percursos de encaminhamento para um destino t formarem uma árvore de encaminhamento. As restrições (30-32) garantem que as variáveis z para cada destino definem árvores abrangentes para os destinos correspondentes, em que cada nó da rede excepto o destino tem no máximo um arco de saída. Estas restrições definem também que as variáveis x estão contidas nas árvores definidas pelas variáveis z . Assim, no seu conjunto estas restrições definem que os percursos das variáveis x obedecem a um esquema de encaminhamento baseado no endereço de destino.

4.3.2 Segunda fase

Considere-se as restrições (18-22) que foram retiradas de uma das formulações do modelo completo para enunciar a formulação da primeira fase. Se substituirmos as variáveis z pelos valores determinados na primeira fase, obtém-se um sistema de desigualdades em que qualquer solução, se existir, define um conjunto de pesos compatível com os percursos determinados na primeira fase. Dado que os operadores de rede preferem valores de pesos pequenos e para evitar os limites de algumas tecnologias, enuncia-se um problema de optimização em que a função objectivo consiste na minimização do maior valor de peso de ligação sujeito às restrições (18-22). Enquanto que na formulação completa w_{max} era uma constante, agora representa uma variável.

De notar que a solução de desenho de rede encontrada na primeira fase pode ter menos nós e menos ligações que as definidas no grafo original. As ligações que não estão incluídas em nenhum percurso de peso mínimo não existem na solução de desenho de rede. Além disso, qualquer nó que não tenha ligações de saída também não existe na solução de

Deleted: 31

Formatted: Do not check spelling or grammar

Deleted: 31

Formatted: Do not check spelling or grammar

Formatted: Do not check spelling or grammar

Deleted: 32

Deleted: 32

Formatted: Do not check spelling or grammar

Formatted: Do not check spelling or grammar

Deleted: 33

Formatted: Do not check spelling or grammar

Deleted: 33

Formatted: Do not check spelling or grammar

Deleted: 30

Deleted: 30

Formatted: Do not check spelling or grammar

Deleted: 32

Formatted: Do not check spelling or grammar

Deleted: 32

Formatted: Do not check spelling or grammar

Formatted: Do not check spelling or grammar

Deleted: 18

Formatted: Do not check spelling or grammar

Deleted: 18

Formatted: Do not check spelling or grammar

Deleted: 18

Formatted: Do not check spelling or grammar

Deleted: 18

desenho de rede. Assim, considera-se nesta fase o grafo $G' = (N', E')$ onde $N' \subset N$ é o conjunto de nós de rede que estão na solução da primeira fase e $E' \subset E$ é o conjunto de ligações que também estão na solução da primeira fase. O conjunto $A' \subset A$ é o conjunto de todos os arcos que fazem parte da solução da primeira fase. O problema de atribuição de pesos às ligações pretende encontrar um conjunto de pesos que minimiza o máximo valor de peso e é definido pelo seguinte modelo de programação linear inteira:

Minimizar w_{\max}

Sujeito a:

$$z_{ij}^q + w_{ij} + \pi_j^q - \pi_i^q \geq 1, \quad \forall (i, j) \in A', \forall q \in U \quad (34)$$

$$z_{ij}^q + (w_{ij} + \pi_j^q - \pi_i^q) / M \leq 1, \quad \forall (i, j) \in A', \forall q \in U \quad (35)$$

$$w_{ij} \geq 1, \quad \forall \{i, j\} \in E' \quad (36)$$

$$w_{ij} \leq w_{\max}, \quad \forall \{i, j\} \in E' \quad (37)$$

$$w_{ij} = w_{ji}, \quad \forall \{i, j\} \in E' \quad (38)$$

$$w_{\max}, w_{ij} \text{ e } \pi_i^q \text{ inteiros não negativos} \quad (39)$$

Em alguns casos esta formulação não permite a obtenção de uma solução possível. Isso sucede quando não existe um conjunto de pesos compatível com os percursos dos LSPs determinados na primeira fase. A experiência computacional demonstra que este modelo é normalmente resolvido ou declarado impossível em poucos segundos para instâncias de dimensão razoável.

4.3.3 Procedimento iterativo

Para impedir que a solução do modelo da primeira fase seja a mesma e a segunda fase seja de novo declarada impossível, adicionamos a restrição (40) ao modelo da primeira fase.

$$z_{i_1 j_1}^{q_1} + z_{i_2 j_2}^{q_2} + \dots + z_{i_N j_N}^{q_N} \leq Z - 1 \quad (40)$$

Nesta restrição, as variáveis z correspondem às mesmas variáveis cujos valores eram 1 na solução anterior do modelo da primeira fase e Z é o número destas variáveis. Ao adicionar esta restrição ao modelo, garantimos que esta solução é excluída do conjunto de soluções possíveis. De seguida repete-se o processo de resolver o modelo da primeira fase e, com base na nova solução, volta-se a resolver o modelo da segunda fase. Se o modelo da

segunda fase ainda não tiver solução volta-se a adicionar uma restrição ao primeiro modelo, como indicado anteriormente, e o processo é repetido. Este processo termina quando o modelo da segunda fase consegue obter uma solução. Esta solução é óptima relativamente ao problema inicial de dimensionamento com base em percursos de peso mínimo. A Figura 7 ilustra este procedimento iterativo.

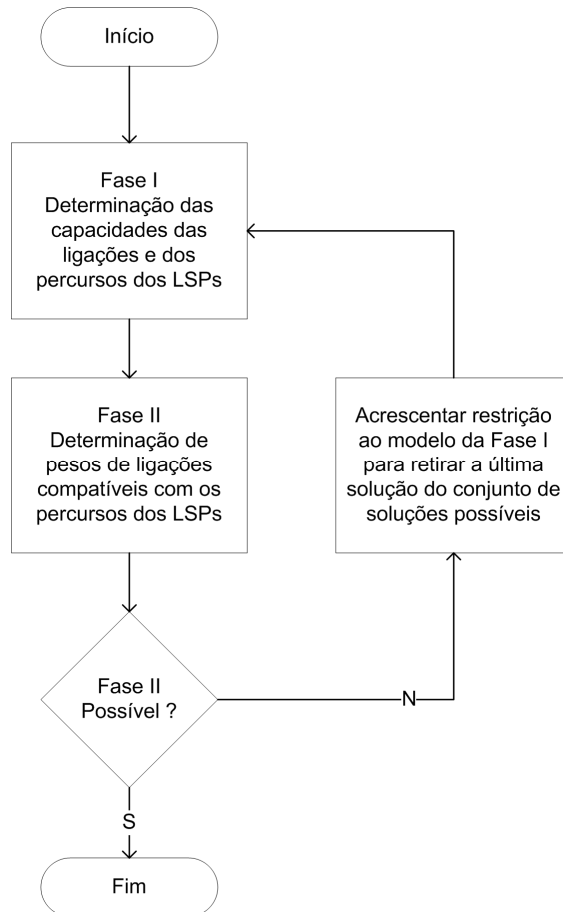


Figura 7: Técnica iterativa de duas fases

4.4 Técnicas heurísticas

A abordagem típica para implementar algoritmos heurísticos para o desenho de redes com encaminhamento por pesos mínimos é atribuir diferentes conjuntos de pesos (um por cada ligação) e, para cada conjunto, determinar os percursos de peso mínimo e as capacidades das ligações requeridas. Esta abordagem torna-se directa quando se considera a regra ECMP, uma vez que qualquer conjunto de pesos define uma solução de desenho da rede.

No caso do encaminhamento por percursos de peso mínimo únicos, esta abordagem não é directa porque um conjunto de pesos de ligações pode originar múltiplos percursos de peso mínimo para alguns pares de nós da rede. Além disso, não existe nenhuma maneira trivial de determinar um conjunto de pesos inteiros cujos percursos de peso mínimo sejam únicos para todos os pares de nós. Como tal, para obter um algoritmo heurístico válido, propõe-se uma abordagem de duas fases:

- (i) na primeira fase determina-se uma solução de desenho da rede através da geração de conjuntos de pesos de ligações; para cada conjunto, selecciona-se apenas um percurso de peso mínimo para cada agregado de fluxos de tráfego de entre os percursos de peso mínimo entre os seus nós extremos;
- (ii) na segunda fase determina-se um conjunto de pesos apropriado que defina os percursos de peso mínimo únicos especificados na solução prévia.

Note-se que para esta técnica heurística, a solução de encaminhamento da primeira fase já é compatível com um conjunto de pesos, que no entanto não garantem a unicidade dos percursos de peso mínimo. Isto não sucedia no caso da técnica iterativa de duas fases, onde os percursos determinados na primeira fase apenas garantiam o encaminhamento baseado no destino. De seguida, descreve-se cada uma das duas fases das técnicas heurísticas de forma separada.

4.4.1 Primeira fase – heurísticas de dimensionamento e encaminhamento

Na fase de desenho da rede, para um dado conjunto de pesos das ligações, o algoritmo de cálculo dos percursos de peso mínimo deve seleccionar cuidadosamente os percursos dos agregados de fluxos de tráfego nos casos em que existe mais do que um percurso de peso mínimo. Os percursos seleccionados pelo algoritmo devem ter as seguintes propriedades:

- (i) se o percurso de peso mínimo escolhido desde o nó p até ao nó q passa pelo nó intermédio i , este percurso deve coincidir com a composição do percurso de peso mínimo escolhido desde o nó p até ao nó i mais o percurso de peso mínimo escolhido desde o nó i até ao nó q ;

- (ii) o percurso de peso mínimo escolhido desde o nó p até ao nó q deve atravessar os mesmos nós (por ordem inversa) que o percurso de peso mínimo escolhido desde o nó q até ao nó p .

A propriedade (i) especifica que qualquer subpercurso de um percurso de peso mínimo escolhido também é um percurso de peso mínimo escolhido. Este é um requisito para que seja possível encontrar um conjunto de pesos que determine na segunda fase os percursos escolhidos. A propriedade (ii) garante que os percursos de peso mínimo escolhidos são simétricos. Este é um requisito do problema de dimensionamento.

De forma a obter um algoritmo de cálculo de percursos de peso mínimo com estas propriedades propõe-se uma modificação ao algoritmo de Dijkstra padrão. O algoritmo de Dijkstra padrão permite determinar um percurso de peso mínimo e o seu peso entre dois nós de um grafo, em que os pesos dos arcos são dados por valores não negativos. Este algoritmo permite também determinar percursos de peso mínimo a partir de um nó origem para todos os outros nós. Uma vez que as técnicas apresentadas calculam os percursos para vários agregados de fluxos de tráfego com os mesmos pesos de arcos, torna-se computacionalmente mais eficiente calcular de uma vez todos os percursos a partir de cada nó origem, em vez de calcular separadamente os percursos entre todos os pares de nós envolvidos.

O algoritmo de Dijkstra para um grafo definido por um conjunto de nós N e um conjunto de arcos A em que a cada arco (i,j) é associado um peso w_{ij} , é definido do seguinte modo. Considere-se as seguintes variáveis:

- c_i peso do percurso de peso mínimo do nó origem s até ao nó i ($c_s = 0$);
- p_i nó predecessor de i no percurso de peso mínimo do nó origem s até ao nó i ;
- S sub-conjunto dos nós da rede ($S \subset N$) que contém os nós cujos percursos de peso mínimo já foram determinados.

O algoritmo de Dijkstra que determina o conjunto de percursos de peso mínimo de s para todos os restantes nós do grafo é dado por:

Algoritmo de Dijkstra Padrão

1. $S \leftarrow \{s\};$
 2. $p_i \leftarrow \text{NULL}, \forall i \in N;$
 3. $c_s \leftarrow 0;$
 4. $c_i \leftarrow +\infty, \forall i \in N \setminus \{s\};$
 5. $i \leftarrow s;$
 6. *Repetir* $|N|-1$ vezes:
 7. *Repetir para* $\forall j \in N \setminus S$ tal que $(i,j) \in A:$
 8. *Se* $(c_j > c_i + w_{ij})$ então:
 9. $c_j \leftarrow c_i + w_{ij};$
 10. $p_j \leftarrow i;$
 11. *Escolher* $i \in N \setminus S$ tal que $c_i = \min c_j, \forall j \in N \setminus S;$
 12. $S \leftarrow S \cup \{i\};$
-

Inicialmente o conjunto S é constituído apenas pelo nó origem s que está à distância (peso do percurso) 0 da origem. Os predecessores de todos os nós são indeterminados (NULL) e como tal, todos os nós não em S estão a distância infinita da origem. Uma vez que em cada iteração principal do algoritmo (linhas 7 a 12) é adicionado um nó a S (é determinado o percurso mínimo da origem a esse nó) e se pretende determinar os percursos de peso mínimo para todos os nós da rede, este ciclo tem então um número fixo de $|N|-1$ iterações (se fosse pretendido determinar apenas um percurso de peso mínimo até um nó q , bastaria terminar a execução do ciclo quando o nó q fosse adicionado a S).

No início do ciclo (linhas 7 a 10) são actualizados os pesos e os percursos dos nós j não em S ligados por arcos (i,j) , sendo i o nó cujo percurso de peso mínimo acabou de ser calculado. Na primeira iteração este nó corresponde à origem s . Se o nó j pode ser atingido por um percurso de peso inferior ao actual, então o peso do nó é actualizado e o predecessor do nó j passa a ser o nó i . No fim do ciclo (linhas 11 a 12) é determinado o nó i não em S a menor peso da origem e este nó é adicionado a S . Em cada iteração do ciclo é adicionada uma das ligações de menor peso à árvore com origem em s , até que esteja construída a árvore abrangente de percursos de peso mínimo para todos os nós do grafo. No final do algoritmo, os percursos de peso mínimo são construídos percorrendo os predecessores de cada nó até atingir o nó origem.

De seguida é ilustrado um exemplo de como o algoritmo de Dijkstra original não garante as duas propriedades requeridas. Considere-se o grafo representado na Figura 8.

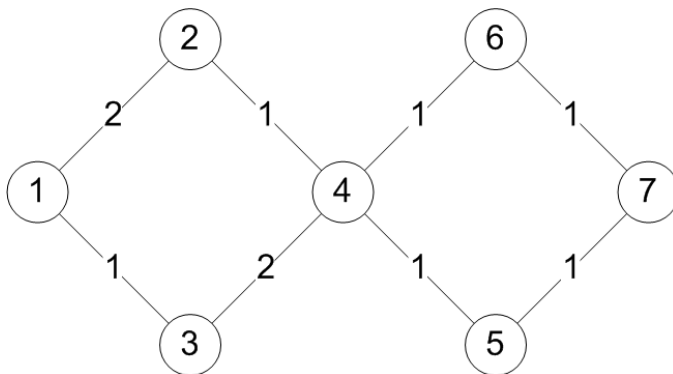


Figura 8: Grafo de uma rede com 7 nós e 8 arestas

Nesta figura as ligações representam arcos nos dois sentidos e os nós têm os identificadores de 1 a 7 apresentados. Considere-se que se pretendem determinar os percursos desde o nó origem 1 e desde o nó origem 7. Com o algoritmo de Dijkstra padrão os percursos escolhidos a partir do nó 1 podem ser determinados da seguinte forma:

Passo 1: o nó 1 é adicionado ao conjunto S – $c_1=0$;

Passo 2: os nós 2 e 3 são actualizados – $c_2=2$, $c_3=1$, $p_2=1$, $p_3=1$;

Passo 3: o nó 3 é adicionado ao conjunto S ;

Passo 4: o nó 4 é actualizado – $c_4=3$, $p_4=3$;

Passo 5: o nó 2 é adicionado ao conjunto S ;

Passo 6: o nó 4 é adicionado ao conjunto S ;

Passo 7: os nós 5 e 6 são actualizados – $c_5=4$, $c_6=4$, $p_5=4$, $p_6=4$;

Passo 8: o nó 6 é adicionado ao conjunto S ;

Passo 9: o nó 7 é actualizado – $c_7=6$, $p_7=6$;

Passo 10: o nó 5 é adicionado ao conjunto S ;

Passo 11: o nó 7 é adicionado ao conjunto S ;

Note-se que no passo 8 o nó 6 foi escolhido aleatoriamente entre o 5 e o 6, dado que o algoritmo não especifica qual dos nós de peso mínimo escolher. O percurso de peso mínimo resultante do nó 1 para o nó 7 é $1 - 3 - 4 - 6 - 7$.

Ao determinar os percursos a partir do nó 7 a ordem de adição dos nós a S pode ser 7, 5, 6, 4, 2, 3, 1, que corresponde à ordenação dos pesos por ordem crescente. Neste caso, o percurso escolhido do nó 7 para o nó 1 será $7 - 5 - 4 - 2 - 1$. Note-se que o percurso desde o nó 1 para o nó 7 não é simétrico do percurso do nó 7 para o nó 1. Prova-se assim que o algoritmo de Dijkstra original não garante a propriedade (ii).

Para verificar se o algoritmo garante a propriedade (i) considere-se que se pretende determinar o percurso de peso mínimo do nó 4 para o nó 7. Neste caso:

Passo 1: o nó 4 é adicionado ao conjunto $S - c_4=0$;

Passo 2: os nós 5 e 6 são actualizados - $c_5=4, c_6=4, p_5=4, p_6=4$;

Passo 3: o nó 5 é adicionado ao conjunto S ;

Passo 4: o nó 7 é actualizado - $c_7=5, p_7=5$;

Passo 5: o nó 6 é adicionado ao conjunto S ;

Passo 6: o nó 7 é adicionado ao conjunto S ;

Neste caso o nó 5 foi adicionado a S antes do nó 6. No algoritmo Dijkstra original, nada garante que a ordem pela qual os nós de igual peso são adicionados seja a mesma, e como tal, qualquer dos nós de menor peso pode ser escolhido. Desta vez foi escolhido o nó 5 antes do 6. Assim, o percurso de peso mínimo de 4 para 7 é $4 - 5 - 7$, que não coincide com a parte do percurso $4 - 6 - 7$ determinado atrás a partir de 1. Verifica-se assim que o algoritmo de Dijkstra original não garante a propriedade (i).

Para modificar o algoritmo de Dijkstra de forma a garantir as propriedades enunciadas atrás é necessário identificar de forma única os percursos de peso mínimo a serem seleccionados. Isto é feito através da atribuição de um identificador a cada nó constituído por um valor inteiro não negativo único. Em (Bley, 2003) é usada uma estratégia semelhante: é atribuído um identificador único a cada nó ou aresta para desempatar percursos de peso idêntico. Quando existem vários percursos com o mesmo peso entre dois nós, escolhe-se o percurso que utiliza o nó não comum aos outros percursos com o menor

identificador. Como todos os percursos diferem pelo menos num nó é sempre possível determinar assim de forma única o percurso a seleccionar.

Este método garante a propriedade (ii), pois os conjuntos de percursos de peso mínimo de p para q são os percursos simétricos dos percursos de peso mínimo existentes de q para p . Como dois percursos simétricos percorrem os mesmos nós em sentidos opostos, se um percurso de peso mínimo é escolhido para um sentido, o percurso de peso mínimo escolhido no sentido inverso será o percurso simétrico deste.

A propriedade (i) também é garantida, pois os subpercursos escolhidos entre os nós de um percurso têm para escolha de percurso os mesmos nós com os mesmos identificadores usados a escolher o percurso. Como tal, os subpercursos escolhidos entre dois nós do percurso estarão contidos nesse percurso.

Considere-se o seguinte procedimento que determina para dois nós $i \in N$ e $j \in N \setminus \{i\}$ os nós do percurso de s a i $P(i,j)$ não comuns ao percurso de s a j e os nós do percurso de s a j $P(j,i)$ não comuns ao percurso de s a i :

-
1. *Determinar $P(i,j)$ como sendo o conjunto constituído pelo nó i e predecessores sucessivos de i no percurso de peso mínimo escolhido desde s ;*
 2. *Determinar $P(j,i)$ como sendo o conjunto constituído pelo nó j e predecessores sucessivos de j até atingir um nó $k \in P(i,j)$ excluindo esse nó;*
 3. *Retirar de $P(i,j)$ o nó k e todos os seus nós predecessores;*
-

Para determinar $P(i,j)$ e $P(j,i)$, é analisado primeiro o percurso inverso desde i até à origem e depois, o percurso inverso desde j até ao primeiro nó do outro percurso. Como os percursos inversos dos nós são dados pelos seus predecessores que são únicos para cada nó, se estes dois percursos se encontrarem num nó intermédio, então os percursos inversos desde esse nó até à origem serão idênticos. Como tal, estes nós comuns são retirados dos conjuntos de nós $P(i,j)$ e $P(j,i)$.

Considere-se $\min P(i,j)$ como sendo o menor identificador dos nós pertencentes a $P(i,j)$. O algoritmo de Dijkstra modificado versão 1 é dado por:

Algoritmo de Dijkstra Versão 1

1. $S \leftarrow \{s\};$
2. $p_i \leftarrow \text{NULL}, \forall i \in N;$
3. $c_s \leftarrow 0;$
4. $c_i \leftarrow +\infty, \forall i \in N \setminus \{s\};$
5. $i \leftarrow s;$
6. *Repetir* $|N|-1$ vezes:
 7. *Repetir para* $\forall j \in N \setminus S$ tal que $(i,j) \in A:$
 8. *Se* $(c_j > c_i + w_{ij})$ *então:*
 9. $c_j \leftarrow c_i + w_{ij};$
 10. $p_j \leftarrow i;$
 11. *Caso contrário se* $(c_j = c_i + w_{ij})$ *então:*
 12. *Se* $(\min P(i,p_j) < \min P(p_j,i))$ *então:*
 13. $p_j \leftarrow i;$
 14. *Escolher* $i \in N \setminus S$ tal que $(c_i = \min c_j, \forall j \in N \setminus S)$ e $(\min P(i,j) < \min P(j,i), \forall j \in N \setminus S: c_j = c_i)$;
15. $S \leftarrow S \cup \{i\};$

Uma das diferenças para o algoritmo de Dijkstra padrão é que aquando da actualização dos pesos dos nós j ligados a i , é contemplada a situação em que o peso do nó j é igual ao peso do nó i mais o peso do arco (i,j) (linha 11). Neste caso é necessário decidir se o percurso para o nó j deve ser modificado ou não. A decisão de modificar o predecessor de j é tomada se o percurso até ao nó i possui um identificador menor que o identificador do percurso até ao nó predecessor corrente de j (linha 12). No caso em que um dos dois conjuntos seja vazio convencionou-se que o seu valor mínimo é negativo. Na linha 14 é adicionado um novo critério para escolha do nó i . Este critério só é necessário se os pesos das arestas puderem assumir o valor zero (útil para as heurísticas lagrangeanas, que permitem que os multiplicadores lagrangeanos, que funcionam como pesos, assumam o valor zero).

Considere-se de novo o grafo da Figura 8. Se for utilizado o algoritmo de Dijkstra modificado, os percursos desde o nó 1 são determinados da seguinte forma. Os nós são adicionados ao conjunto S pela mesma ordem (1; 3; 2; 4; 6; 5; 7), mas após o nó 2 ser

adicionado a S verifica-se que o nó 3 proporciona um percurso com o mesmo peso para 4. No algoritmo de Dijkstra padrão esta situação é ignorada. No algoritmo modificado irá haver uma comparação dos valores mínimos de $P(2,3)$ e $P(3,2)$. Como $\min P(2,3) = 2$ e $\min P(3,2) = 3 \Rightarrow \min P(2,3) < \min P(3,2)$, o nó 4 é actualizado com o predecessor 2. Na iteração seguinte o nó 4 é adicionado a S . Do mesmo modo, o nó 6 é adicionado a S e o predecessor de 7 passa a ser 6. Na iteração seguinte o nó 5 é adicionado a S e como $\min P(5,6) = 5$ e $\min P(6,5) = 6 \Rightarrow \min P(5,6) < \min P(6,5)$, então o nó 7 é actualizado com o predecessor 5. O percurso escolhido de 1 para 7 é assim 1 – 2 – 4 – 5 – 7.

Ao determinar o percurso de 7 para 1 com o algoritmo de Dijkstra modificado o nó 5 é adicionado a S antes do nó 6 e o predecessor do nó 4 passa a ser 5. Como $\min P(6,5) = 6$ e $\min P(5,6) = 5 \Rightarrow \min P(6,5) \geq \min P(5,6)$, o predecessor de 4 não é modificado para 6. Após o algoritmo adicionar o nó 2 a S o predecessor de 1 passa a ser 2. Como $\min P(3,2) = 3$ e $\min P(2,3) = 2 \Rightarrow \min P(3,2) \geq \min P(2,3)$, o predecessor de 1 já não é modificado para 3. O percurso escolhido de 7 para 1 é assim 7 – 5 – 4 – 2 – 1.

Com o algoritmo de Dijkstra modificado, de entre os percursos disponíveis de 1 para 7 é escolhido o percurso com o nó de menor identificador não comum ao outro percurso (o percurso com o nó 2). O percurso de 7 para 1 é escolhido com base no mesmo critério. Garante-se assim a simetria no processo de escolha dos percursos a partir de nós distintos.

A propriedade (i) também está garantida pois a partir de um nó origem os percursos determinados para todos os outros nós formam uma árvore, logo se o percurso de s para i passa por j , então o percurso de s para j está contido no percurso de s para i . Além disso, ao determinar o percurso de j para i este deve obedecer aos critérios de selecção especificados que identificam um percurso de forma única. Estes critérios são os mesmos que são usados quando se está a calcular o percurso de s para i e o nó j acabou de ser finalizado. Como tal, o percurso de j para i está contido no percurso de s para i .

Para minimizar a utilização dos recursos da rede é possível ainda adicionar outro critério ao processo de selecção dos percursos de peso mínimo. Este critério consiste em preferir de entre os percursos de peso mínimo os percursos com o menor número de nós e consequentemente o menor número de arcos. Este procedimento pretende reduzir as ligações utilizadas pelos percursos de peso mínimo escolhidos e, assim, minimizar os recursos da rede usados. Esta procedimento pode baixar o custo da rede e pode também

reduzir o impacto de falhas na rede, que a acontecer, afectam em média menos agregados de tráfego. Uma vez que este critério pode ser bastante útil, atribui-se a este maior prioridade. O novo algoritmo modificado de Dijkstra versão 2 é então obtido modificando as linhas 12 e 14.

Algoritmo de Dijkstra Versão 2

1. $S \leftarrow \{s\};$
 2. $p_i \leftarrow \text{NULL}, \forall i \in N;$
 3. $c_s \leftarrow 0;$
 4. $c_i \leftarrow +\infty, \forall i \in N \setminus \{s\};$
 5. $i \leftarrow s;$
 6. *Repetir* $|N|-1$ vezes:
 7. *Repetir para* $\forall j \in N \setminus S$ tal que $(i,j) \in A:$
 8. *Se* $(c_j > c_i + w_{ij})$ então:
 9. $c_j \leftarrow c_i + w_{ij};$
 10. $p_j \leftarrow i;$
 11. *Caso contrário se* $(c_j = c_i + w_{ij})$ então:
 12. *Se* $(|P(i,p_j)| < |P(p_j,i)|)$ ou
 $((|P(i,p_j)| = |P(p_j,i)|) \text{ e } (\min P(i,p_j) < \min P(p_j,i)))$ então:
 13. $p_j \leftarrow i;$
 14. *Escolher* $i \in N \setminus S$ tal que $(c_i = \min c_j, \forall j \in N \setminus S)$ e
 $(|P(i,j)| < |P(j,i)|)$ ou
 $(|P(i,j)| = |P(j,i)| \text{ e } (\min P(i,j) < \min P(j,i)))$, $\forall j \in N \setminus S: c_j \neq c_i$);
 15. $S \leftarrow S \cup \{i\};$
-

Nesta versão, o peso de um nó j é actualizado se o número de nós em $P(i,j)$ for inferior ao número de nós em $P(j,i)$. Caso contrário, é feito também o teste anterior para encontrar o percurso com o nó de menor identificador. Do mesmo modo, na linha 14 ao determinar se um nó deve ser finalizado, primeiro verifica-se se o número de nós do seu percurso é inferior ao número de nós dos percursos de igual peso, se estes existirem. Esta versão do algoritmo também verifica as duas propriedades requeridas inicialmente.

Como já foi afirmado, os critérios da linha 14 (escolher nó i tal que o número de nós em $P(i,j)$ seja inferior ou tenha o menor valor de $\min P(i,j)$) só são necessários no caso em que os pesos das ligações podem ser zero. Neste caso, é necessário que o nó cujo percurso de peso mínimo é finalizado (nó i determinado na linha 14 do algoritmo de Dijkstra modificado versão 2) só o seja se, para além de ser o nó com o menor peso não finalizado, também tenha o percurso com menor número de saltos ou com o menor identificador não em comum com os percursos para os outros nós com o mesmo peso. Caso contrário corre-se o risco de um percurso ser finalizado sem ser o percurso com as propriedades desejadas.

Considere-se o grafo exemplo representado na Figura 9 em que se pretende determinar o percurso do nó 2 para o nó 1. Se na linha 14 se escolher apenas o nó a menor peso da origem não em S , então o nó 5 pode ser adicionado a S antes do nó 6. Se isso acontecer, o percurso para 5 utiliza o predecessor 4 e uma vez que o nó 5 é adicionado a S , o seu percurso já não é mais modificado. Como tal, é escolhido o percurso 2 – 3 – 4 – 5 com peso 3 e número de saltos 3 quando deveria ter sido escolhido o percurso 2 – 6 – 5 com peso 3, mas número de saltos 2.

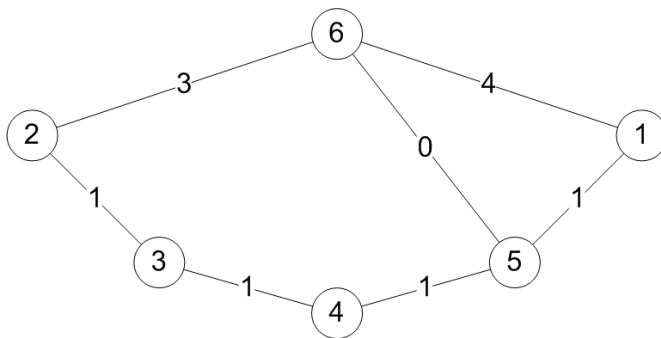


Figura 9: Grafo de uma rede com 6 nós e 7 arestas

Quando os pesos das arestas não podem ser zero é possível substituir a linha 14 do algoritmo modificado versão 2 pela linha 11 do algoritmo padrão. Este procedimento evita o cálculo de $P(i,j)$ e $P(j,i)$ em algumas situações e contribui para tornar o algoritmo mais rápido. São assim definidas duas versões finais do algoritmo de Dijkstra modificado versão 2: uma para grafos com pesos de arestas superiores a zero (versão 2a) e outra para grafos com pesos iguais ou superiores a zero (versão 2b). Estes algoritmos permitem determinar

os percursos de peso mínimo com menor número de saltos garantindo as propriedades enunciadas inicialmente.

Um conjunto de pesos de ligações determina uma solução de desenho de rede do seguinte modo: primeiro, são calculados todos os percursos dos agregados de fluxos de tráfego com base num dos algoritmos de Dijkstra modificados versão 2 e, de seguida, são determinadas as capacidades a instalar em cada ligação que garantem a largura de banda necessária para suportar os agregados de fluxos de tráfego assim encaminhados. O custo desta solução de desenho de rede é a soma dos custos das capacidades requeridas em cada ligação.

Para a primeira fase do algoritmo heurístico de desenho de redes propõe-se uma procura de pesos baseada num algoritmo GRASP (*Greedy Randomized Adaptive Search Procedure*). De seguida, é apresentado um algoritmo de *Simulated Annealing* baseado no trabalho de outros autores para avaliar a qualidade das soluções encontradas com o algoritmo GRASP. É também apresentado um segundo algoritmo GRASP com uma estrutura de vizinhança adoptada do algoritmo de *Simulated Annealing* para comparar as estratégias de pesquisa e de vizinhança dos algoritmos anteriores. São também referidas as heurísticas baseadas na relaxação lagrangeana apresentadas no capítulo anterior. As sub-secções seguintes apresentam cada um dos algoritmos separadamente.

4.4.1.1 Heurística GRASP

O método GRASP consiste num processo iterativo em que cada iteração inclui duas fases: na primeira fase é construída uma solução aleatória para o problema; na segunda fase é feita uma pesquisa de melhores soluções tendo como base a solução da primeira fase. O método GRASP para resolver um problema de minimização é genericamente descrito da seguinte forma:

Método GRASP

1. $MelhorCusto \leftarrow +\infty$;
 2. *Repetir*:
 3. $Sol = ProcedimentoAleatórioConstrutivo()$;
 4. $Sol = ProcedimentoDeBuscaAdaptativo(Sol)$;
 5. *Se* $(F(Sol) < MelhorCusto)$
 6. *Então*:
 7. $MelhorSol = Sol$;
 8. $MelhorCusto = F(Sol)$;
 9. *Até (Critério de Paragem)*
-

O algoritmo heurístico que se propõe nesta tese é baseado no método GRASP onde para cada solução gerada aleatoriamente (passo 3) é executado um procedimento de pesquisa local no passo 4. Neste procedimento, é procurada a melhor solução de entre todas as soluções vizinhas. O algoritmo salta para a solução vizinha de melhor custo se tiver menor custo que a solução presente e também se tiver o mesmo custo que a solução presente. No entanto, só é permitido um pequeno número de saltos consecutivos entre vizinhos com o mesmo custo. O algoritmo pára após um intervalo de tempo de execução predefinido.

O algoritmo GRASP que se propõe assume a seguinte estrutura de vizinhança: dada uma solução de rede associada a um conjunto W de pesos de ligações, o conjunto vizinho é constituído pelas soluções de rede associadas a todos os conjuntos de pesos válidos B , sendo B diferente de W no peso de uma única ligação. Esta diferença é dada por um dos valores do conjunto de diferenças $X = \{1, -1, 2, -2, \dots, 2^n, -2^n\}$, sendo n um valor inteiro não inferior a 2. O conjunto de valores que determina esta estrutura de vizinhança é denominado de conjunto de diferenças exponencialmente crescente, uma vez que considera valores que crescem exponencialmente com a base de 2.

Note-se que X é composto por $2n$ valores, o que significa que o número de vizinhos válidos de uma dada solução é igual a $2n$ vezes o número de ligações (com a exceção dos vizinhos que têm pesos que se encontram fora dos limites de valores válidos, como exemplo os pesos menores do que 1 no caso do OSPF). Note-se também que alguns valores de X podem representar a mesma solução de encaminhamento (não há garantia de que uma mudança no peso de uma ligação irá mudar os percursos de encaminhamento por

peso mínimo). O conjunto de diferenças proposto é um compromisso entre demasiados vizinhos a calcular e demasiados vizinhos que representam a mesma solução de desenho de rede.

Considere-se que os pesos das ligações podem assumir valores entre 1 e Wx , onde Wx é um valor positivo. Dado um conjunto de pesos de ligações W considere-se a função $Custo(W)$ que calcula o custo da solução de desenho da rede associada a este conjunto W como descrito anteriormente. Considere-se o parâmetro $TempoMax$ que é o tempo de execução total máximo e o parâmetro $ContMax$ que está relacionado com o número máximo de saltos consecutivos permitido entre vizinhos com o mesmo custo. Na descrição do algoritmo são utilizados também os seguintes parâmetros:

| | |
|-----------------------|---|
| <i>CustoPres</i> | é o custo da solução de desenho da rede associado ao conjunto de pesos de ligações presente W ; |
| <i>MelhorW</i> | é o conjunto de pesos de ligações que resulta na melhor solução de desenho de rede; |
| <i>MelhorCusto</i> | é o custo da melhor solução de desenho de rede; |
| <i>B</i> | é o conjunto de pesos de ligações de um vizinho de W ; |
| <i>MelhorB</i> | é o conjunto de pesos de ligações do melhor vizinho de W ; |
| <i>MelhorCustoViz</i> | é o custo da solução de desenho de rede associada ao melhor vizinho de W ; |
| W_e | é o peso atribuído à ligação $e \in E$ no conjunto W , onde $1 \leq W_e \leq Wx$; |
| B_e | é o peso atribuído à ligação $e \in E$ no conjunto B , onde $1 \leq B_e \leq Wx$. |

O algoritmo que se propõe é descrito da seguinte forma:

Algoritmo OH1:

1. $MelhorCusto \leftarrow +\infty$;
 2. *Repetir:*
 3. *Definir W atribuindo pesos a todas as ligações;*
 4. $CustoPres \leftarrow Custo(W)$;
 5. $cont \leftarrow 0$;
 6. *Repetir:*
 7. $MelhorCustoViz \leftarrow +\infty$;
 8. *Ordenar as ligações de forma aleatória;*
 9. *Repetir para todas as ligações $e \in E$ pela ordem estabelecida:*
 10. *Repetir para todos os valores $x \in X$:*
 11. *Se $(1 \leq (W_e + x) \leq W_x)$ então:*
 12. $B \leftarrow W$
 13. $B_e \leftarrow B_e + x$;
 14. *Se $(Custo(B) \leq MelhorCustoViz)$ então:*
 15. $MelhorB \leftarrow B$;
 16. $MelhorCustoViz \leftarrow Custo(B)$;
 17. *Se $(MelhorCustoViz < CustoPres)$ então:*
 18. $W \leftarrow MelhorB$;
 19. $CustoPres \leftarrow MelhorCustoViz$;
 20. $cont \leftarrow 0$;
 21. *Caso contrário se $(MelhorCustoViz = CustoPres)$ então:*
 22. $W \leftarrow MelhorB$;
 23. $cont \leftarrow cont + 1$;
 24. *Caso contrário:*
 25. $cont \leftarrow ContMax$;
 26. *Até ($(cont \geq ContMax)$ ou $(atingir TempoMax)$)*
 27. *Se $(CustoPres < MelhorCusto)$ então:*
 28. $MelhorW \leftarrow W$;
 29. $MelhorCusto \leftarrow CustoPres$;
 30. *Até (atingir TempoMax)*
-

Neste algoritmo, o ciclo *Repetir ... Até* exterior (linhas de 2 a 30) controla o tempo de execução. No princípio deste ciclo (linha 3) são atribuídos pesos às ligações. Após algumas experiências preliminares determinou-se que:

- (i) pesos pequenos de ligações normalmente obtêm melhores resultados e
- (ii) atribuir o peso 1 a todas as ligações resulta frequentemente numa boa solução inicial.

O ponto (i) justifica-se pelo facto dos valores mais pequenos de pesos de ligações sujeitos a alterações de pesos com base em valores pequenos são mais propícios a mudanças na configuração de encaminhamento na rede, do que pesos iniciais grandes e alterações baseadas em valores pequenos. Logo, começando com valores pequenos conseguem-se vizinhanças iniciais com soluções mais variadas em termos de percursos dos agregados de fluxos de tráfego. O ponto (ii) corresponde a começar com uma solução equilibrada que é a solução com encaminhamento baseado nos percursos com menos ligações. Como tal, decidiu-se atribuir a todos os pesos das ligações o valor 1 na primeira execução deste ciclo e valores aleatórios com distribuição uniforme no intervalo [1,4] nas execuções seguintes.

No ciclo *Repetir ... Até* nas linhas 6 a 26, o algoritmo executa uma pesquisa local começando pelos valores de pesos de W . Nas linhas 7 a 16 é determinada a melhor solução na vizinhança da solução corrente. A seguir (linhas 17 a 25): se o custo da melhor solução vizinha é melhor que o custo da solução corrente, então a solução corrente passa a ser a melhor solução vizinha e é atribuído o valor 0 à variável *cont*; se os seus custos são iguais, a solução corrente passa a ser a melhor solução vizinha e a variável *cont* é incrementada em 1; quando a melhor solução vizinha tem um custo pior que a solução corrente, é atribuído o valor *ContMax* à variável *cont*. Este ciclo termina quando a variável *cont* é maior ou igual a *ContMax*, o que acontece quando a melhor solução vizinha é pior que a solução presente ou se é atingido o número máximo de saltos permitido entre vizinhos com o mesmo custo. De seguida (linhas 27 a 29), o algoritmo guarda a solução corrente se é a melhor solução encontrada até ao momento. Note-se que, antes da determinação das soluções vizinhas, o algoritmo ordena as ligações por ordem aleatória (linha 8). Quando a melhor solução vizinha tem o mesmo custo que a solução corrente, o algoritmo escolhe para solução corrente a solução vizinha de igual custo que foi processada em último lugar segundo a ordem escolhida. Desta forma, quando existe mais do que uma solução vizinha

de igual custo, a ordenação aleatória permite a procura aleatória entre vizinhos de igual custo por forma a que o algoritmo possa encontrar uma solução que tenha um vizinho melhor. Como os pesos não assumem o valor 0, é utilizado o algoritmo de Dijkstra modificado versão 2a para calcular os percursos de peso mínimo.

4.4.1.2 *Simulated Annealing*

Em (Holmberg, 2004) é proposto um algoritmo baseado em *Simulated Annealing* para a variante do problema de desenho de rede que se considera nesta tese mas assumindo a possibilidade de múltiplos percursos de peso mínimo e encaminhamento ECMP. O custo da rede física depende de custos fixos e custos lineares de expansão das capacidades. Nesse trabalho é utilizada a seguinte estrutura de vizinhança: dada uma solução de rede associada a um conjunto W de pesos de ligações, o conjunto de soluções vizinhas é composto pelas soluções de rede associadas a todos os conjuntos válidos B , onde B é diferente de W num único peso de ligação e esta diferença é o valor mínimo que muda pelo menos um percurso de peso mínimo. A esta estrutura de vizinhança denominamos de conjunto de diferenças mínimas.

É apresentada aqui uma adaptação do algoritmo de (Holmberg, 2004) ao problema aqui estudado. Para perceber como estas diferenças de pesos mínimas são calculadas, considere-se a seguinte notação para um dado agregado de fluxos de tráfego k num grafo de rede G e uma determinada ligação e :

w_k peso do percurso de peso mínimo entre a origem e o destino do agregado de fluxos de tráfego k no grafo G ;

w_{ke} peso do percurso de peso mínimo entre a origem e o destino do agregado de fluxos de tráfego k no grafo G sem a ligação e ;

w_{keo} peso do percurso de peso mínimo desde a origem do agregado de fluxos de tráfego k até um dos nós extremo de e ;

w_{ked} peso do percurso de peso mínimo do outro nó extremo de e até ao destino do agregado de fluxos de tráfego k .

Note-se que os nós extremo de e usados no cálculo de w_{keo} e w_{ked} são os que minimizam o valor $w_{keo} + w_{ked}$. Para cada ligação e , são calculadas duas diferenças de peso mínimas: x_{up}

é o menor valor positivo que, adicionado ao peso da ligação e , remove esta ligação de pelo menos um percurso de peso mínimo; x_{down} é o menor valor positivo que subtraído do peso da ligação e , adiciona esta ligação a pelo menos um percurso de peso mínimo. Estes valores são calculados da seguinte forma:

-
1. $x_{up} \leftarrow +\infty; x_{down} \leftarrow +\infty;$
 2. *Repetir para todos os agregados de fluxos de tráfego k :*
 3. *Se (ligação e está no percurso de peso mínimo entre os nós origem e destino de k) então:*
 4. $x \leftarrow w_{ke} - w_k + 1;$
 5. *Se ($x < x_{up}$) então: $x_{up} \leftarrow x;$*
 6. *Caso contrário:*
 7. $x \leftarrow (w_{keo} + w_{ked} + W_e) - w_k + 1;$
 8. *Se ($x < x_{down}$) então: $x_{down} \leftarrow x;$*
-

Neste procedimento, quando a ligação e está no percurso de peso mínimo do agregado de fluxos de tráfego k , a diferença x é o menor valor que temos de adicionar ao peso corrente da ligação para retirar esta ligação do percurso de peso mínimo. Quando a ligação e não está no percurso de peso mínimo do agregado de fluxos de tráfego k , a diferença x é o menor valor que temos de subtrair ao peso corrente da ligação para colocar esta ligação no percurso de peso mínimo. Este procedimento calcula as diferenças para todos os agregados de fluxos de tráfego e guarda em cada iteração os valores mínimos de x_{up} e x_{down} .

Considere-se como exemplo a Figura 10 que representa uma rede com 6 nós e 6 ligações. Existe um único agregado de fluxos de tráfego k de o_k para d_k . Se a ligação e tem peso 1 e as outras ligações têm os pesos representados na figura, o agregado de fluxos de tráfego k passa pela ligação e uma vez que o percurso por esta ligação tem peso 3 e o outro percurso tem peso 4. O valor x que é necessário somar ao peso da ligação e para desviar o agregado de fluxos de tráfego de e é igual a $4-3+1$, ou seja, 2. Como só existe um agregado de fluxos de tráfego, x_{up} toma este valor. Se considerarmos que a ligação e tem peso 4 e as outras ligações têm os pesos representados, o agregado de fluxos de tráfego k passa pelo percurso que não usa a ligação e , que é o percurso de menor peso. Para desviar o agregado de fluxos de tráfego k por forma a utilizar a ligação e , o valor x que é necessário subtrair ao

peso de e é igual a $1+1+4-4+1$, ou seja, 3. Como só existe um agregado de fluxos de tráfego, x_{down} toma este valor.

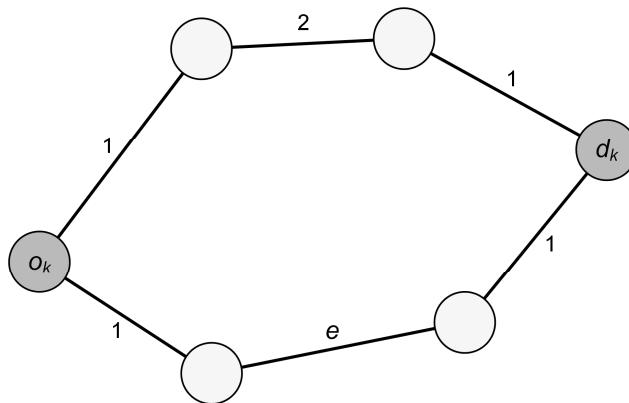


Figura 10: Determinação do peso de uma ligação

Quando se compara este conjunto de diferenças mínimas com o conjunto de diferenças exponencialmente crescente, este conjunto tem a vantagem de evitar a pesquisa em soluções vizinhas com a mesma solução de encaminhamento. No entanto, este conjunto de diferenças mínimas tem duas desvantagens. A primeira desvantagem é que é computacionalmente pesado. Para determinar os valores x_{up} e x_{down} é necessário determinar vários percursos mínimos para todos os agregados de fluxos de tráfego que podem ser em número bastante grande. A segunda desvantagem é que é conservativo no espaço de pesquisa pois não permite demasiadas mudanças no encaminhamento entre vizinhos. Na referência (Holmberg, 2004) este procedimento não inclui a soma do valor 1 no cálculo das diferenças x , uma vez que nesta referência é considerado o caso ECMP, que aceita múltiplos percursos de peso mínimo com o mesmo custo. Os autores aplicam o conjunto de diferenças mínimas a um algoritmo *Simulated Annealing*, onde em cada iteração é seleccionada apenas uma única ligação aleatória.

Dado um conjunto de pesos de ligações W , considere-se a função $LimiteSuperior(W,e)$ que calcula o peso mínimo (o valor $W_e + x_{up}$) que altera pelo menos um percurso de peso mínimo (quando não existe tal valor de peso, esta função é igual a $+\infty$). De igual modo, considere-se a função $LimiteInferior(W,e)$ que calcula o peso máximo (o valor $W_e - x_{down}$) que altera pelo menos um percurso de peso mínimo (quando não existe tal valor de peso, esta função é igual a $-\infty$). Considere-se também a função $Random(a,b)$, com $a < b$, que

determina um valor aleatório entre a e b com uma distribuição uniforme e o parâmetro β , um valor entre 0 e 1, que controla em cada iteração o decaimento do parâmetro de temperatura T .

O algoritmo proposto em (Holmberg, 2004) foi adaptado ao problema de desenho de redes endereçado neste capítulo e designado por OSA.

Algoritmo OSA:

1. Definir W atribuindo um peso de 1 a todas as ligações;
2. $CustoPres \leftarrow Custo(W)$;
3. $T \leftarrow CustoPres$;
4. $MelhorW \leftarrow W$;
5. $MelhorCusto \leftarrow CustoPres$;
6. Repetir:
 7. Seleccionar aleatoriamente uma ligação $e \in E$;
 8. Se $(LimiteSuperior(W,e) \leq Wx)$ ou $(LimiteInferior(W,e) \geq 1)$ então:
 9. Se $(LimiteSuperior(W,e) \leq Wx)$ e $(LimiteInferior(W,e) \geq 1)$ então:
 10. Atribuir a x com igual probabilidade o valor $LimiteSuperior(W,e)$ ou o valor $LimiteInferior(W,e)$;
 11. Caso contrário se $(LimiteSuperior(W,e) \leq Wx)$ então:
 12. $x \leftarrow LimiteSuperior(W,e)$;
 13. Caso contrário:
 14. $x \leftarrow LimiteInferior(W,e)$;
 15. $B \leftarrow W$;
 16. $B_e \leftarrow x$;
 17. $\Delta \leftarrow Custo(B) - CustoPres$;
 18. Se $(\Delta < 0)$ então:
 19. $W \leftarrow B$;
 20. $CustoPres \leftarrow W$;
 21. Se $(CustoPres < MelhorCusto)$ então:
 22. $MelhorW \leftarrow W$;
 23. $MelhorCusto \leftarrow CustoPres$;
 24. Caso contrário se $(Random(0,1) < e^{-\Delta/T})$ então:
 25. $W \leftarrow B$;
 26. $CustoPres \leftarrow Custo(W)$;
 27. $T \leftarrow \beta \times T$;
 28. Até (atingir $TempoMax$)

De forma a comparar o desempenho dos dois algoritmos, adoptou-se o mesmo critério de paragem do algoritmo OH1. O algoritmo pára quando atinge um tempo de cálculo

predefinido que é controlado pelo ciclo *Repetir ... Até exterior* (linhas 6 a 28). Antes deste ciclo é atribuído um conjunto inicial de pesos de ligações W e o custo da solução de desenho da rede é associado à temperatura inicial T e gravado como o custo da melhor solução encontrada até ao momento. Na referência (Holmberg, 2004) os autores propõem que seja atribuído o valor 50 aos pesos iniciais. Contudo, as experiências computacionais demonstraram que pesos iniciais com o valor 1 conseguem normalmente melhores resultados. Dentro do ciclo: o algoritmo primeiro selecciona uma ligação aleatoriamente; de seguida determina uma solução vizinha (quando as soluções vizinhas que se obtêm aumentando e diminuindo o peso da ligação são valores de pesos válidos, o algoritmo escolhe uma delas com igual probabilidade); então salta para essa solução vizinha se essa solução determina uma rede de menor custo (e guarda esta solução se é a melhor solução de desenho de rede encontrada até ao momento) ou salta para essa solução com a probabilidade $e^{-\Delta T}$ se tem um custo maior ou igual; finalmente diminui o valor da temperatura T multiplicando o seu valor corrente por β . Como os pesos não assumem o valor 0, é utilizado o algoritmo de Dijkstra modificado versão 2a para calcular os percursos de peso mínimo.

4.4.1.3 Heurística GRASP II

Como se verá na secção dos resultados, o algoritmo OH1 proposto nesta tese demonstra ter melhor desempenho que o algoritmo OSA baseado na referência (Holmberg, 2004). Para verificar se os méritos do algoritmo OH1 se devem ao algoritmo GRASP ou à noção de vizinhança proposta, foi implementado um outro algoritmo denominado OH2 que se baseia numa estratégia GRASP (tal como o OH1) e na noção de vizinhança dada pelo conjunto de diferenças mínimas (utilizada no algoritmo OSA).

Algoritmo OH2:

1. $MelhorCusto \leftarrow +\infty$;
2. *Repetir*:
3. *Definir* W atribuindo pesos a todas as ligações;
4. $CustoPres \leftarrow Custo(W)$;
5. $cont \leftarrow 0$;
6. *Repetir*:
7. $MelhorCustoViz \leftarrow +\infty$;
8. *Ordenar as ligações de forma aleatória*;
9. *Repetir para todas as ligações* $e \in E$ *ordenadas aleatoriamente*:
10. $x \leftarrow LimiteSuperior(W,e)$;
11. *Se* $(x < Wx)$ *então*:
12. $B \leftarrow W; B_e \leftarrow x$;
13. *Se* $(Custo(B) \leq MelhorCustoViz)$ *então*:
14. $MelhorB \leftarrow B$;
15. $MelhorCustoViz \leftarrow Custo(B)$
16. $x \leftarrow LimiteInferior(W,e)$;
17. *Se* $(x \geq 1)$ *então*:
18. $B \leftarrow W; B_e \leftarrow x$;
19. *Se* $(Custo(B) \leq MelhorCustoViz)$ *então*:
20. $MelhorB \leftarrow B$;
21. $MelhorCustoViz \leftarrow Custo(B)$
22. *Se* $(MelhorCustoViz < CustoPres)$ *então*:
23. $W \leftarrow MelhorB$;
24. $CustoPres \leftarrow MelhorCustoViz$;
25. $cont \leftarrow 0$;
26. *Caso contrário se* $(MelhorCustoViz = CustoPres)$ *então*:
27. $W \leftarrow MelhorB$;
28. $cont \leftarrow cont + 1$;
29. *Caso contrário*:
30. $cont \leftarrow ContMax$;
31. *Até* $((cont \geq ContMax) \text{ ou } (atingir TempoMax))$
32. *Se* $(CustoPres < MelhorCusto)$ *então*:
33. $MelhorW \leftarrow W; MelhorCusto \leftarrow CustoPres$;
34. *Até* $(atingir TempoMax)$

No ciclo *Repetir ... Até* nas linhas 6 a 31, o algoritmo executa uma pesquisa local começando pelos valores de pesos de W . Nas linhas 9 a 22 é determinada a melhor solução na vizinhança da solução corrente. Esta vizinhança é dada pelos limites inferiores e

superiores dos pesos para cada aresta que alteram a configuração de encaminhamento actual. A seguir (linhas 22 a 30): se o custo da melhor solução vizinha é melhor que o custo da solução corrente, então a solução corrente passa a ser a melhor solução vizinha e é atribuído o valor 0 à variável *cont*; se os seus custos são iguais, a solução corrente passa a ser a melhor solução vizinha e a variável *cont* é incrementada em 1; quando a melhor solução vizinha tem um custo pior que a solução corrente, é atribuído o valor *ContMax* à variável *cont*. Este ciclo termina quando a variável *cont* é maior ou igual a *ContMax*, o que acontece quando a melhor solução vizinha é pior que a solução presente ou se é atingido o número máximo permitido de saltos entre vizinhos com o mesmo custo. De seguida (linhas 32 a 33), o algoritmo guarda a solução corrente se é a melhor solução encontrada até ao momento. Como os pesos não assumem o valor 0, é utilizado o algoritmo de Dijkstra modificado versão 2a para calcular os percursos de peso mínimo.

4.4.1.4 Heurísticas lagrangeanas

Outras heurísticas que podem ser utilizadas para determinar soluções para o problema aqui abordado são as heurísticas lagrangeanas descritas no capítulo anterior sem nenhum dos algoritmos de melhoramentos. Nestes casos, em vez de existir um conjunto de pesos que é modificado iterativamente de forma a melhorar a solução obtida, o que é modificado em cada iteração são os multiplicadores lagrangeanos. Um método semelhante foi adoptado por (Bley, 2003) noutro problema com encaminhamento baseado em percursos de peso mínimo. Escolhendo as restrições apropriadas para relaxar na função objectivo, verifica-se que os lagrangeanos podem ser utilizados também como pesos reais de ligações. Para tal, considere-se a definição do problema inicial sem as restrições de encaminhamento baseado no destino e sem as restrições de encaminhamento baseado em pesos mínimos:

Minimizar

$$\sum_{\{i,j\} \in E} C_{\{ij\}} \cdot y_{\{ij\}}$$

(41)

Sujeito a:

$$\sum_{j:(i,j) \in A} (x_{ij}^{pq} - x_{ji}^{pq}) = \begin{cases} 1 & , i = p \\ -1 & , i = q \\ 0 & , otherwise \end{cases} , \forall i \in N, \forall \{p,q\} \in S$$

(42)

$$\sum_{\{p,q\} \in S} b_{pq} (x_{ij}^{pq} + x_{ji}^{pq}) \leq \alpha \cdot y_{\{ij\}} , \quad \forall \{i,j\} \in E$$

(43)

Deleted: 41
Formatted: Do not check spelling or grammar
Deleted: 41
Formatted: Do not check spelling or grammar

Deleted: 43
Formatted: Do not check spelling or grammar
Deleted: 43
Formatted: Do not check spelling or grammar

$$x_{ij}^{pq} \in \{0,1\}$$

$y_{\{ij\}}$ inteiros não negativos

Se escolhermos relaxar na função objectivo as restrições (43) podemos definir como relaxação lagrangeana do problema a função (44).

$$L(\mu, x, y) = \sum_{\{i,j\} \in E} C_{\{ij\}} \cdot y_{\{ij\}} + \sum_{\{i,j\} \in E} \mu_{\{ij\}} \cdot \left[\sum_{\{p,q\} \in S} b_{pq} (x_{ij}^{pq} + x_{ji}^{pq}) - \alpha \cdot y_{\{ij\}} \right] \quad (44)$$

Esta função é equivalente a (45) e pode ser calculada dividindo-a em duas parcelas distintas (a) e (b).

$$L(\mu, x, y) = \sum_{\{i,j\} \in E} \sum_{\{p,q\} \in S} (\mu_{\{ij\}} \cdot b_{pq}) (x_{ij}^{pq} + x_{ji}^{pq}) + \sum_{\{i,j\} \in E} (C_{\{ij\}} - \mu_{\{ij\}} \cdot \alpha) \cdot y_{\{ij\}} \quad (45)$$

(a) (b)

O valor mínimo de (45a) sujeito a (42) pode ser determinado através do cálculo dos percursos mínimos entre os nós $\{p, q\}$ num grafo em que os pesos de cada aresta são dados por $\mu_{\{ij\}} b_{pq}$. Para determinar o valor mínimo de (45b) atribui-se às variáveis y os valores indicados em (46).

$$y_{\{ij\}} = \begin{cases} 0 & , C_{\{i,j\}} \geq \mu_{\{ij\}} \cdot \alpha \\ Y_{\{ij\}} & , C_{\{i,j\}} < \mu_{\{ij\}} \cdot \alpha \end{cases} \quad (46)$$

$Y_{\{ij\}}$ corresponde ao valor máximo possível para o número de ligações na aresta $\{i, j\}$. Como a solução admissível é determinada pelos percursos definidos pelas variáveis x obtidos a resolver (45a), verifica-se que esta solução obedece ao encaminhamento baseado em percursos de peso mínimo. No entanto, tal como para as outras heurísticas, esta solução não garante que os percursos de peso mínimo são únicos.

Utilizando a optimização por subgradiente descrita no CAPÍTULO 3, os multiplicadores lagrangeanos são actualizados em cada iteração. Em cada iteração, os lagrangeanos são utilizados como pesos e a solução de desenho de rede é determinada como para as outras heurísticas: os LSPs são encaminhados pelos percursos de peso mínimo e é instalado o menor número de ligações que suporta a largura de banda requerida em cada aresta. A solução final da heurística será a solução de menor custo encontrada no fim de todas as iterações. Para mais informação sobre esta heurística é possível consultar a secção 3.3.2.

Deleted: 43

Formatted: Do not check spelling or grammar

Deleted: 43

Formatted: Do not check spelling or grammar

Deleted: 44

Formatted: Do not check spelling or grammar

Deleted: 44

Formatted: Do not check spelling or grammar

Deleted: 44

Formatted: Do not check spelling or grammar

Deleted: 44

Formatted: Do not check spelling or grammar

Deleted: 44

Formatted: Do not check spelling or grammar

Deleted: 44

Formatted: Do not check spelling or grammar

Deleted: 45

Deleted: 45

Formatted: ... [23]

Formatted: ... [24]

Deleted: 45

Formatted: ... [25]

Deleted: 45

Formatted: ... [26]

Deleted: 45

Formatted: ... [27]

Deleted: 45

Formatted: ... [28]

Deleted: 45

Formatted: ... [29]

Deleted: 45

Formatted: ... [30]

Deleted: 46

Deleted: 46

Formatted: ... [31]

Formatted: ... [32]

Deleted: 46

Formatted: ... [33]

Deleted: 46

Formatted: ... [34]

Deleted: 45

Formatted: ... [35]

Deleted: 45

Uma vez que a variação da heurística lagrangeana se baseia em princípios semelhantes aos desta heurística, verifica-se que esta técnica também pode ser utilizada para obter uma solução admissível com encaminhamento baseado em percursos de peso mínimo.

Para estas duas heurísticas é utilizado o algoritmo de Dijkstra modificado versão 2b para calcular os percursos. Esta versão é utilizada porque neste caso é necessária a variante para pesos de ligações que podem tomar o valor 0, dado que os multiplicadores lagrangeanos podem assumir o valor zero.

4.4.2 Segunda fase – atribuição de pesos às ligações

A solução dada pelo algoritmo heurístico da primeira fase define o conjunto de ligações físicas a instalar nas ligações e conjunto de percursos de peso mínimo que devem ser verificados através da escolha apropriada de um conjunto de pesos a atribuir às ligações. Apesar do algoritmo heurístico da primeira fase determinar os percursos com base num conjunto de pesos, este conjunto de pesos não pode ser utilizado como solução uma vez que geralmente contem múltiplos percursos de peso mínimo igual. Para resolver este problema utilizamos o modelo de programação linear inteira apresentado na secção 4.3.2 e resolvemo-lo utilizando o *Branch-and-Bound*.

Conforme foi já enunciado, uma condição necessária mas não suficiente para existir uma solução para este problema é que os percursos observem a propriedade de encaminhamento baseado no destino: a sobreposição de todos os percursos para o mesmo nó destino deve formar uma árvore direccionada para esse nó. Note-se, no entanto, que a solução da primeira fase não só observa essa propriedade mas também tem a seguinte propriedade adicional: existe um conjunto de pesos de ligações em que cada percurso é um dos percursos de peso mínimo definidos por esta solução. Apesar de ser necessária prova matemática, os nossos resultados computacionais sugerem que esta propriedade adicional leva a que a solução do problema de atribuição de pesos seja sempre possível e fácil de obter.

Foi desenvolvido também outro método para determinar um conjunto de pesos inteiros compatível com encaminhamento por percursos de peso mínimo únicos que não necessite de recorrer ao *Branch-and-Bound*. Este método baseia-se numa pesquisa local a partir dos pesos determinados na primeira fase.

Ao resolver a primeira fase podem obter-se soluções de rede física que não usam todas as arestas do grafo. Nesse caso, podem existir arestas da solução da primeira fase que têm obrigatoriamente de pertencer à solução do problema global. Essas arestas (pontes) podem ter um qualquer valor de peso e , como tal é desnecessário o ajuste dos seus pesos, pois este não altera a configuração de encaminhamento. Estas arestas são retiradas do conjunto de arestas cujos pesos vão ser modificados. Este procedimento permite reduzir o espaço de soluções a procurar.

Para o procedimento de busca, é efectuado um ciclo para todas as arestas por ordem aleatória. Em cada iteração é somado ao peso de uma aresta um dos valores de um conjunto S (por exemplo $S = \{1, -1\}$) de cada vez e são encontrados novos conjuntos de pesos para as arestas que determinam soluções vizinhas. A solução de encaminhamento dada por um conjunto de pesos é comparada com a da primeira fase. Se for igual, é verificado um parâmetro U relacionado com o número de percursos de peso mínimo não únicos. Este parâmetro é determinado durante o algoritmo de Dijkstra modificado e constitui uma função de mérito de uma solução. Quando, ao actualizar a distância para um nó com base no peso do vizinho e do arco, existe mais do que um nó à mesma distância é incrementado um contador. Após determinados todos os percursos de peso mínimo, este contador fornece uma medida aproximada do número de percursos de peso mínimo não únicos.

Se o valor de U for menor que o da solução actual e as configurações de encaminhamento forem equivalentes, então a solução vizinha passa a ser a solução actual e a procura é retomada na vizinhança do novo conjunto de pesos. Se o valor de U é igual não se salta para a solução vizinha para evitar ciclos. No caso em que o algoritmo não consegue diminuir o valor de U após algumas iterações, é efectuada uma multiplicação dos pesos por 2, que obtém a mesma configuração de encaminhamento e permite ao algoritmo evoluir para novas soluções vizinhas. Uma vez efectuadas estas operações, o ciclo principal é repetido enquanto não se obteve uma solução com percursos de peso mínimo únicos (com $U = 0$).

Esta heurística deu resultados piores que o modelo da segunda fase em termos de tempos de execução e houve alguns casos em que não conseguiu obter solução. Como tal, não são

apresentados resultados computacionais deste método uma vez que o modelo da segunda fase é significativamente mais eficiente.

4.5 Resultados computacionais

Todos os resultados computacionais foram obtidos numa plataforma PC Pentium 4 a 3.4 GHz com 1GByte de memória RAM e sistema operativo MS Windows XP. Os modelos de programação linear inteira foram resolvidos com a aplicação CPLEX 9.0 da ILOG. As heurísticas foram programadas em MS Visual C++ 6.0.

4.5.1 Formulação do modelo completo

Para estudar o desempenho das diferentes variantes da formulação do modelo completo descritas na secção 4.2 foram utilizados vários casos de estudo baseados nas redes A11 e B14 com diferentes parâmetros de tráfego. A topologia destas redes encontra-se representada na Figura 11. Note-se que foram escolhidos casos de estudo de dimensão reduzida devido à complexidade do problema de dimensionamento representado pelas variantes da formulação completa.

A rede A11 tem a dimensão de 11 nós e 22 arestas e a rede B14 tem a dimensão de 14 nós e 21 arestas. Em ambas as redes foram escolhidos 6 nós para nós de tráfego. Os nós mais escuros representam nós de tráfego entre os quais existem agregados de fluxos de tráfego a encaminhar na rede. As topologias foram escolhidas de forma a cada nó de tráfego estar ligado a pelo menos dois outros nós. A rede A11 foi desenhada de forma a ser uma rede mais esparsa, ao passo que a rede B14 foi desenhada de forma a ser uma rede mais densa. As capacidades a instalar nas arestas são de 622Mbps e o custo de operação e manutenção $C_{\{ij\}}$ associado a uma capacidade numa aresta $\{i,j\}$ é dado por $C_{\{ij\}} = 100 + 5 \times l_{\{ij\}}$, onde $l_{\{ij\}}$ representa o comprimento da aresta.

Foram escolhidos 5 valores médios de tráfego: 100, 200, 300, 400 e 600Mbps. Para cada um destes valores, foram geradas 10 matrizes de tráfego. Os valores de cada matriz de tráfego foram gerados aleatoriamente com uma distribuição uniforme entre 20% e 80% do valor médio respectivo. Assim, foi considerado um total de 100 casos de estudo. Os valores médios de tráfego foram escolhidos de forma a que as melhores soluções indiquem em média números diferentes de capacidades por aresta usada, para representar cenários com diferentes quantidades de tráfego.

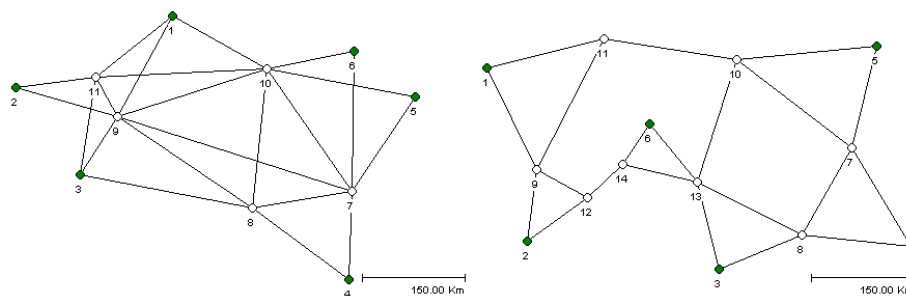


Figura 11: Topologia dos casos de estudo – da esquerda para a direita: A11 e B14

Se considerarmos um problema de minimização em que o custo da solução óptima é dado por S , o valor óptimo da relaxação linear é um limite inferior I e designa-se nesta tese por intervalo dual ao valor $100(S-I)/I$ por cento. Para consultar os resultados detalhados das formulações apresentadas para os vários casos de estudo é possível consultar a Tabela 85 (Anexo A). A Tabela 17 sintetiza a Tabela 85 e apresenta os resultados das linhas com os valores médios dos intervalos duais e intervalos de tempo consumidos a resolver a relaxação linear das formulações nas suas diferentes variantes.

Nesta tabela observa-se que o intervalo dual diminui geralmente com a quantidade de tráfego médio. Isto acontece porque quanto maior é o número de ligações físicas a instalar nas arestas para suportar os agregados de fluxos de tráfego, mais o custo da solução do problema original se aproxima, em percentagem do custo da solução da sua relaxação linear (em que o número de interfaces a instalar em cada aresta é uma variável contínua). No que diz respeito aos intervalos de tempo de resolução da relaxação linear, verifica-se que estes também apresentam uma tendência a decrescer com o aumento da quantidade de tráfego a encaminhar na rede. Esta tendência decrescente pode ser observada mais rigorosamente na variante com restrições adicionais desagregada em que os intervalos de tempo são maiores. O facto da relaxação linear do problema se tornar mais fácil com o aumento do tráfego na rede sugere que estes casos sejam mais fáceis de resolver.

Tabela 17: Médias dos resultados da relaxação linear para as variantes da formulação do modelo completo

| | Sem Restrições Adicionais | | | | Com Restrições Adicionais | | | |
|-------------|---------------------------|---------------|----------|---------------|---------------------------|---------------|----------|---------------|
| | Desagregada | | Agregada | | Desagregada | | Agregada | |
| | Int.Dual | $\Delta T(s)$ | Int.Dual | $\Delta T(s)$ | Int.Dual | $\Delta T(s)$ | Int.Dual | $\Delta T(s)$ |
| Média 100 | 58,8% | 0,04 | 58,8% | 0,01 | 13,0% | 0,20 | 35,2% | 0,04 |
| Média 200 | 36,9% | 0,04 | 36,9% | 0,01 | 18,4% | 0,17 | 22,0% | 0,02 |
| Média 300 | 25,0% | 0,04 | 25,0% | 0,01 | 15,7% | 0,15 | 17,3% | 0,02 |
| Média 400 | 23,5% | 0,04 | 23,5% | 0,01 | 15,4% | 0,13 | 16,4% | 0,02 |
| Média 600 | 16,7% | 0,03 | 16,7% | 0,01 | 12,7% | 0,10 | 13,0% | 0,02 |
| Média Total | 32,2% | 0,04 | 32,2% | 0,01 | 15,0% | 0,15 | 20,8% | 0,02 |

Para determinar qual a variante mais eficiente de entre as formulações apresentadas, considere-se os valores apresentados na linha com a média total. Observa-se que sem as restrições adicionais, as variantes desagregada e agregada apresentam os mesmos valores de relaxação linear, uma vez que os intervalos duais são ambos de 32,2%. Isto verifica-se para todos os casos de estudo e não apenas para os valores médios (ver Tabela 85 no Anexo A). No entanto, a relaxação linear da variante desagregada demora mais tempo a ser calculada, facto este perfeitamente compreensível pois o modelo desagregado é mais complexo (tem mais restrições). Com a adição das restrições adicionais, a relaxação linear da variante desagregada sobe significativamente mais que a da variante agregada (intervalo dual de 15% contra intervalo dual de 20,8%) mas à custa de um maior aumento no tempo de cálculo (enquanto que os tempos médios de cálculo sem as restrições adicionais são de 0,04 e 0,01, com as restrições de corte os intervalos de tempo aumentam para 0,15 e 0,02).

Estes resultados levam a crer que sem as restrições adicionais, as variantes agregadas são superiores às variantes desagregadas, pois: o valor de custo da relaxação linear é igual em ambas as variantes e a relaxação linear das variantes agregadas é resolvida em menos tempo que a das variantes desagregadas. Como tal, espera-se que o algoritmo de *Branch-and-Bound* termine mais depressa para as variantes agregadas.

Com as restrições adicionais não se consegue prever qual a variante mais eficiente, pois apesar dos valores de custo obtidos com a relaxação linear das variantes desagregadas serem superiores, o tempo demorado a resolvê-las também é superior ao das variantes desagregadas.

A Tabela 86 (Anexo A) apresenta em detalhe os intervalos de tempo gastos para resolver cada uma das 8 variantes da formulação do modelo completo. A Tabela 18 contém os

valores médios dos resultados da Tabela 86 e a Tabela 19 contém os valores máximos destes resultados. Por análise dos valores das médias e máximos globais verifica-se que as restrições adicionais são muito eficientes na redução dos intervalos de tempo gastos na resolução das formulações. As variantes desagregadas obtêm tempos equivalentes às variantes agregadas, o que significa que a melhoria no valor da relaxação linear não compensa a complexidade resultante de terem um número maior de restrições quando comparadas com as variantes agregadas. A utilização de variáveis de pesos reais face ao uso de variáveis de pesos inteiras não altera significativamente os valores de tempo de cálculo. Existem duas razões para este resultado. Primeiro, a percentagem destas variáveis relativamente ao número total de variáveis é pequena e, como tal, os ganhos não são significativos. Segundo, os valores destas variáveis que se obtêm na solução óptima da relaxação linear do problema são geralmente inteiros.

Tabela 18: Médias dos tempos em minutos gastos a resolver as formulações do modelo completo

| Caso de estudo | Pesos Reais | | | | Pesos Inteiros | | | |
|----------------|-----------------------|----------|-----------------------|----------|-----------------------|----------|-----------------------|----------|
| | Sem Restr. Adicionais | | Com Restr. Adicionais | | Sem Restr. Adicionais | | Com Restr. Adicionais | |
| | Desagreg. | Agregada | Desagreg. | Agregada | Desagreg. | Agregada | Desagreg. | Agregada |
| Média 100 | 1,4 | 1,8 | 0,5 | 0,8 | 1,3 | 1,3 | 0,5 | 0,8 |
| Média 200 | 16,0 | 33,8 | 5,7 | 6,2 | 27,5 | 35,1 | 5,2 | 5,6 |
| Média 300 | 8,1 | 10,6 | 3,5 | 3,3 | 10,2 | 12,6 | 5,7 | 5,6 |
| Média 400 | 9,6 | 11,7 | 7,7 | 5,5 | 9,1 | 10,3 | 4,8 | 4,6 |
| Média 600 | 1,1 | 1,3 | 1,0 | 0,9 | 2,5 | 1,5 | 1,3 | 0,7 |
| Média Total | 7,2 | 11,8 | 3,7 | 3,3 | 10,1 | 12,2 | 3,5 | 3,5 |

Tabela 19: Máximos dos tempos em minutos gastos a resolver as formulações do modelo completo

| Caso de estudo | Pesos Reais | | | | Pesos Inteiros | | | |
|----------------|-----------------------|----------|-----------------------|----------|-----------------------|----------|-----------------------|----------|
| | Sem Restr. Adicionais | | Com Restr. Adicionais | | Sem Restr. Adicionais | | Com Restr. Adicionais | |
| | Desagreg. | Agregada | Desagreg. | Agregada | Desagreg. | Agregada | Desagreg. | Agregada |
| Máximo 100 | 2,7 | 3,9 | 1,1 | 1,8 | 2,9 | 3,1 | 1,3 | 1,9 |
| Máximo 200 | 54,2 | 145,5 | 16,6 | 21,5 | 156,3 | 217,0 | 19,5 | 13,6 |
| Máximo 300 | 24,1 | 57,1 | 12,3 | 15,1 | 49,2 | 45,1 | 18,9 | 21,4 |
| Máximo 400 | 44,3 | 64,7 | 52,1 | 31,4 | 41,6 | 44,7 | 24,0 | 23,2 |
| Máximo 600 | 4,1 | 7,3 | 4,1 | 2,9 | 16,5 | 6,1 | 3,5 | 3,6 |
| Máximo Global | 54,2 | 145,5 | 52,1 | 31,4 | 156,3 | 217,0 | 24,0 | 23,2 |

A Tabela 20 apresenta os resultados comparativos entre todas as formulações com e sem restrições adicionais. Verifica-se que a utilização de restrições adicionais permite uma redução do tempo médio de cálculo de 10,3 para 3,5 minutos, o que se traduz numa redução de 66% no tempo médio de resolução. A Tabela 21 compara os resultados de todas as formulações agregadas e todas as formulações desagregadas. Esta tabela permite concluir que as formulações desagregadas são em média ligeiramente melhores que as formulações agregadas. No entanto, tendo em conta os resultados da Tabela 18, verifica-se

que estes ganhos se devem principalmente aos resultados sem restrições adicionais, que já se concluiu não serem eficientes. A Tabela 22 apresenta os resultados comparativos entre todas as formulações com pesos inteiros e com pesos reais. Mais uma vez se verifica que não existe grande diferença em termos de eficiência entre utilizar variáveis de pesos inteiras ou reais.

Tabela 20: Comparação das formulações do modelo completo com e sem restrições adicionais

| Tráfego Médio | Sem Restr. Adicionais | | Com Restr. Adicionais | |
|---------------|-----------------------|--------|-----------------------|--------|
| | Média | Máximo | Média | Máximo |
| 100 | 1,5 | 3,9 | 0,6 | 1,9 |
| 200 | 28,1 | 217,0 | 5,7 | 21,5 |
| 300 | 10,4 | 57,1 | 4,5 | 21,4 |
| 400 | 10,2 | 64,7 | 5,6 | 52,1 |
| 600 | 1,6 | 16,5 | 1,0 | 4,1 |
| Global | 10,3 | 217,0 | 3,5 | 52,1 |

Tabela 21: Comparação das formulações do modelo completo agregadas e desagregadas

| Tráfego Médio | Desagregada | | Agregada | |
|---------------|-------------|--------|----------|--------|
| | Média | Máximo | Média | Máximo |
| 100 | 0,9 | 2,9 | 1,2 | 3,9 |
| 200 | 13,6 | 156,3 | 20,2 | 217,0 |
| 300 | 6,9 | 49,2 | 8,0 | 57,1 |
| 400 | 7,8 | 52,1 | 8,0 | 64,7 |
| 600 | 1,5 | 16,5 | 1,1 | 7,3 |
| Global | 6,1 | 156,3 | 7,7 | 217,0 |

Tabela 22: Comparação das formulações do modelo completo com pesos reais e pesos inteiros

| Tráfego Médio | Pesos Reais | | Pesos Inteiros | |
|---------------|-------------|--------|----------------|--------|
| | Média | Máximo | Média | Máximo |
| 100 | 1,1 | 3,9 | 1,0 | 3,1 |
| 200 | 15,4 | 145,5 | 18,4 | 217,0 |
| 300 | 6,4 | 57,1 | 8,5 | 49,2 |
| 400 | 8,6 | 64,7 | 7,2 | 44,7 |
| 600 | 1,1 | 7,3 | 1,5 | 16,5 |
| Global | 6,5 | 145,5 | 7,3 | 217,0 |

Através da observação das tabelas atrás referidas verifica-se também que em média, as redes com tráfego médio de 200 e 300 são as mais difíceis de resolver, enquanto que as redes com menos tráfego (100) e mais tráfego (600) são as mais fáceis de resolver. Para as redes com menos tráfego isto deve-se ao facto de as soluções óptimas serem árvores de custo mínimo. Como tal, as restrições de árvore tornam-se desnecessárias facilitando a resolução do problema. Para as redes com mais tráfego, o problema aproxima-se da sua relaxação em que as variáveis das capacidades são reais, e como tal, é possível obter

melhores limites inferiores do problema, reduzindo o número de iterações do algoritmo de *Branch-and-Bound*.

Após análise dos resultados apresentados atrás, recomenda-se o uso da variante desagregada com as restrições adicionais para resolver o problema de dimensionamento em foco. Recomenda-se também o uso de variáveis de pesos inteiros, visto que estas fornecem directamente a solução do conjunto de pesos a implementar na rede, sem grande perda de eficiência face às variantes com variáveis de pesos reais.

4.5.2 Técnica iterativa de duas fases

Para estudar o desempenho do modelo de duas fases foram novamente utilizados os casos de estudo constituídos pelas redes A11 e B14. São também utilizados os casos de estudo baseados em A16 e B16 para explorar até que dimensões de casos de estudo é possível obter soluções óptimas. É também determinada qual a melhor das variantes da formulação (agregada ou desagregada). Assim, para definir os modelos da primeira fase foram utilizadas as variantes desagregada e agregada com todas as restrições adicionais.

A Tabela 87 (Anexo A) apresenta os tempos em minutos gastos a resolver a formulação da primeira fase para todos os casos de estudo A11 e B14 nas suas variantes agregada e desagregada. A Tabela 23 apresenta os valores médios para os casos de estudo com diferentes valores de tráfego e a Tabela 24 apresenta os valores máximos. Destas duas tabelas conclui-se que as duas formulações agregada e desagregada são equivalentes no que respeita ao tempo gasto a resolvê-las. Os tempos de cálculo da resolução dos modelos da segunda fase (média de 0,01 segundos) são desprezáveis comparados com os tempos gastos a resolver as formulações da primeira fase (Tabela 88 do [Anexo A – Tabelas de resultados](#)). Para os casos de estudo considerados foi possível encontrar sempre na primeira iteração soluções de pesos mínimos capazes de realizar os percursos determinados na primeira fase. Apesar de normalmente ser possível encontrar uma solução de pesos mínimos à primeira, isto pode nem sempre suceder (Ben-Ameur, 2003). Para as redes destes casos de estudo, o maior peso necessário para todas as ligações foi o valor 5 (Tabela 88 do [Anexo A – Tabelas de resultados](#)).

Deleted: Anexo A – Tabelas de resultados

Deleted: Anexo A – Tabelas de resultados

Deleted: Anexo A – Tabelas de resultados

Deleted: Anexo A – Tabelas de resultados

Tabela 23: Médias dos tempos em minutos gastos a resolver as formulações da primeira fase

| Caso de estudo | Desagreg. | Agregada |
|----------------|-----------|----------|
| Média 100 | 0,2 | 0,2 |
| Média 200 | 1,1 | 1,1 |
| Média 300 | 0,9 | 0,8 |
| Média 400 | 1,3 | 1,3 |
| Média 600 | 0,1 | 0,2 |
| Média Total | 0,7 | 0,7 |

Tabela 24: Máximos dos tempos em minutos gastos a resolver as formulações da primeira fase

| Caso de estudo | Desagreg. | Agregada |
|----------------|-----------|----------|
| Máximo 100 | 0,4 | 0,5 |
| Máximo 200 | 2,9 | 3,0 |
| Máximo 300 | 3,5 | 3,6 |
| Máximo 400 | 8,7 | 9,7 |
| Máximo 600 | 0,4 | 0,9 |
| Máximo Global | 8,7 | 9,7 |

Na Tabela 89 ([Anexo A – Tabelas de resultados](#)) é possível comparar os resultados da formulação do modelo completo e da técnica de duas fases exacta. A Tabela 25 apresenta apenas os valores médios desta tabela e os totais de tempo demorados a resolver as duas técnicas. Os tempos apresentados relativos à formulação do modelo completo correspondem à variante com restrições adicionais, agregada e com pesos inteiros. Foi escolhida a variante agregada visto ser esta a que proporcionou resultados ligeiramente melhores com as restrições adicionais. Apesar de os melhores resultados terem sido obtidos com pesos reais, foi escolhida a variante com pesos inteiros pois esta obteve resultados muito semelhantes e tem a vantagem de proporcionar pesos que podem ser utilizados directamente pelos protocolos de encaminhamento. Além disso, isto é necessário para uma comparação justa, uma vez que a técnica de duas fases proporciona também pesos inteiros. No que respeita à técnica de duas fases foi escolhida a variante desagregada que obteve um tempo máximo de cálculo ligeiramente inferior. No entanto, se fosse escolhida a variante agregada, os resultados seriam muito semelhantes.

Deleted: Anexo A – Tabelas de resultados

Deleted: Anexo A – Tabelas de resultados

Tabela 25: Comparação dos tempos de execução das técnicas de uma e duas fases (médias e total)

| Caso de estudo | Modelo completo (minutos) | Técnica 2 Fases (minutos) | Ganho |
|----------------|---------------------------|---------------------------|-------|
| Média 100 | 0,8 | 0,2 | 61,6% |
| Média 200 | 5,6 | 1,1 | 78,9% |
| Média 300 | 5,6 | 0,9 | 69,9% |
| Média 400 | 4,6 | 1,3 | 71,8% |
| Média 600 | 0,7 | 0,1 | 73,6% |
| Média Simples | 3,5 | 0,7 | 71,1% |
| Ganho Global | | | 79,3% |

A coluna “Ganho” da Tabela 25 representa o valor $(T1F-T2F)/T1F$, onde T1F corresponde ao tempo da técnica de formulação do modelo completo e T2F corresponde ao tempo da técnica de duas fases. Na linha “Média Simples” é apresentada a média do ganho de todos os casos. Verifica-se que em média conseguiu-se resolver o mesmo problema de forma exacta com uma redução de 71,1% no tempo de cálculo para cada caso. Verifica-se ainda que estes ganhos são mais ou menos independentes da carga da matriz de tráfego.

O valor “Ganho Global” apresentado na Tabela 25 indica o ganho obtido no tempo total de resolução de todos os casos de estudo usando a técnica de duas fases. Note-se que o ganho global foi ainda mais elevado (quase 80%) do que a média simples o que significa que o ganho foi maior para os casos que demoraram mais tempo, que são os casos de estudo mais relevantes. A Tabela 26 apresenta apenas os casos mais difíceis de resolver (cujo modelo completo demorou mais de 10 minutos).

Tabela 26: Comparação dos tempos de execução das técnicas de uma e duas fases para os casos mais difíceis (>10 minutos)

| Caso de estudo | Modelo completo | Técnica de 2 fases | Ganho |
|----------------|-----------------|--------------------|-------|
| A1 200 | 13,1 | 1,7 | 86,7% |
| A2 200 | 13,6 | 1,6 | 88,4% |
| A4 200 | 10,2 | 2,4 | 76,9% |
| A1 300 | 21,4 | 3,5 | 83,6% |
| A2 300 | 11,5 | 1,0 | 91,0% |
| A4 300 | 11,6 | 1,2 | 90,0% |
| A1 400 | 23,2 | 8,7 | 62,5% |
| Média | | | 82,7% |

Nesta tabela verifica-se que para estes casos mais difíceis, a vantagem em utilizar a técnica de duas fases foi ainda maior – 83%. Conclui-se assim que a técnica de duas fases é útil,

especialmente para os casos de estudo que estão no limite do que se consegue resolver de forma óptima.

De seguida são analisados os resultados obtidos para as redes A16 e B16 (cujos casos de estudo foram apresentados no capítulo anterior). Estas redes têm uma dimensão superior aos casos de estudo A11 e B14 e, pelos resultados computacionais obtidos, estão numa dimensão limite a partir da qual não é possível serem resolvidos pelos métodos exactos. São novamente resolvidas as duas variantes desagregada e agregada com restrições adicionais que se mostrou obterem desempenhos semelhantes nas redes anteriores.

A Tabela 27 apresenta os intervalos de tempo consumidos pelas duas variantes da técnica de duas fases. A coluna “Ganho” apresenta as diferenças percentuais entre as duas variantes ($(Agr-Desagr)/Agr$).

Tabela 27: Tempos em horas demorados pelas variações da técnica iterativa de duas fases (Um “*” indica que o algoritmo não terminou por erro de falta de memória)

| | Agregada | Desagr. | Ganho |
|-------|----------|---------|-------|
| A16L | 4,91 | 2,87 | 41,5% |
| A16M | 28,12 | 15,87 | 43,6% |
| A16H | 0,69 | 0,63 | 9,3% |
| B16L | 33,90 | 13,87 | 59,1% |
| B16M | 16,64* | 15,67* | 5,8% |
| B16H | 15,69 | 8,83 | 43,7% |
| Média | | | 33,8% |

Através da Tabela 27 conclui-se que a variante desagregada permite em média ganhar cerca de 34% do tempo consumido pela variante agregada. No entanto, os piores casos (com ganhos de 9,3% e 5,8%) não são significativos pois: um demorou menos de uma hora (foi o menos demorado) e o outro não terminou por falta de memória. Nos casos restantes, no tempo gasto a resolver os casos de estudo para a variante desagregada, ganhou-se mais de 40% do tempo consumido pela variante agregada.

Apesar de não ter sido possível determinar claramente a melhor das variantes com os testes para as redes A11 e B14, os testes para as redes A16 e B16 (sendo mais intensivos) permitem concluir que a variante desagregada é mais eficiente. A Tabela 27 mostra que em todos os casos de estudo, excepto o caso B16M, foi atingida a solução óptima. Para o caso B16M os cálculos não foram concluídos por falta de memória nas duas variantes agregada

e desagregada. Como tal, não é possível saber se a melhor solução encontrada é a solução ótima.

Como estes são casos de estudo mais demorados, comprova-se assim a superioridade da versão desagregada nos casos em que a eficiência é mais importante. Verifica-se também que a partir destas dimensões começa a não ser possível determinar as soluções ótimas.

4.5.3 Afiinação de parâmetros das heurísticas OH1 e OH2

Como foi definida, a heurística OH1 depende de alguns parâmetros que afectam o seu desempenho. Estes são o tempo de execução *TempoMax*, *ContMax* e o conjunto *X*. Quanto maior o tempo de execução, maior o número de iterações, o que permite percorrer mais soluções de pesos e eventualmente conseguir melhores resultados. O parâmetro *ContMax* controla o número de saltos permitidos entre soluções do mesmo custo. Um valor demasiado baixo pode não permitir que o algoritmo encontre soluções melhores a partir de um vizinho de igual custo, enquanto que um valor demasiado alto pode fazer com que o algoritmo perca muito tempo a saltar entre soluções de custo igual que não têm vizinhos melhores. O conjunto *X* define a estrutura de vizinhança a utilizar. Um conjunto *X* com muitos valores permite que o algoritmo procure soluções numa vizinhança maior mas, em contrapartida, torna cada iteração mais demorada. De forma a estudar o impacto da escolha destes parâmetros nos resultados que se obtêm executando este algoritmo, efectuaram-se testes com diferentes valores de alguns destes parâmetros. Os parâmetros escolhidos são *ContMax* e o conjunto *X*. Para valores a atribuir a *ContMax* escolheram-se 0, 10 e 40. Para conjuntos *X* escolheram-se {1, -1, 2, -2, 4, -4}, {1, -1, 2, -2, ..., 16, -16} e {1, -1, 2, -2, ..., 64, -64}. Como casos de estudo foram escolhidos os casos de estudo associados às redes A30, B30, A50 e B50 apresentados no CAPÍTULO 3.

Para tempo de execução escolheu-se uma hora, o que permitiu a execução do número total de iterações indicado na Tabela 90. Foram executadas 5 corridas cujos resultados se encontram representados nas tabelas entre a Tabela 91 e a Tabela 105 ([Anexo A – Tabelas de resultados](#)). A Tabela 28 apresenta a média das percentagens de custo acima do melhor custo de todas as 5 corridas (de 1 hora) para os tempos de 5 minutos (redes de 30 nós) e 30 minutos (redes de 50 nós). Esta tabela permite a escolha dos melhores parâmetros para os tempos de execução que foram escolhidos também para as outras heurísticas. Permite também verificar se as conclusões obtidas com 1 hora se mantêm. A Tabela 29 apresenta a

Deleted: Anexo A – Tabelas de resultados

Deleted: Anexo A – Tabelas de resultados

média das percentagens de custo acima do melhor custo de todas as 5 corridas ao fim de 1 hora. As colunas “L”, “M” e “H” representam os casos de estudo com pouco, médio e muito tráfego. As colunas “30” e “50” representam os casos de estudo com 30 e 50 nós. A coluna média representa todos os casos de estudo. A Tabela 30 apresenta a média dos tempos em que foi encontrada a melhor solução.

Tabela 28: Média das percentagens de custo acima do melhor custo obtido para as várias combinações de parâmetros *ContMax* e conjunto *X* para as 5 corridas (tempos de 5/30 minutos)

| X | MC | L | M | H | 30 | 50 | Média |
|--------|----|--------|-------|-------|--------|--------|--------|
| 1...4 | 0 | 17,55% | 9,53% | 7,61% | 12,28% | 10,84% | 11,56% |
| | 10 | 2,62% | 1,41% | 1,23% | 2,09% | 1,42% | 1,75% |
| | 40 | 2,36% | 1,53% | 1,23% | 2,06% | 1,35% | 1,70% |
| 1...16 | 0 | 17,75% | 9,96% | 7,55% | 12,38% | 11,12% | 11,75% |
| | 10 | 2,98% | 1,62% | 1,40% | 2,25% | 1,75% | 2,00% |
| | 40 | 3,13% | 1,49% | 1,27% | 2,33% | 1,60% | 1,97% |
| 1...64 | 0 | 17,84% | 9,92% | 7,70% | 12,41% | 11,23% | 11,82% |
| | 10 | 2,99% | 1,80% | 1,41% | 2,31% | 1,82% | 2,06% |
| | 40 | 3,16% | 1,50% | 1,42% | 2,20% | 1,85% | 2,02% |

Tabela 29: Média das percentagens de custo acima do melhor custo obtido para as várias combinações de parâmetros *ContMax* e conjunto *X* para as 5 corridas (tempo de 1 hora)

| X | CM | L | M | H | 30 | 50 | Média |
|--------|----|--------|-------|-------|--------|--------|--------|
| 1...4 | 0 | 15,73% | 8,52% | 6,75% | 10,39% | 10,28% | 10,33% |
| | 10 | 1,81% | 0,96% | 0,75% | 1,07% | 1,28% | 1,18% |
| | 40 | 1,57% | 0,72% | 0,53% | 0,79% | 1,08% | 0,94% |
| 1...16 | 0 | 16,32% | 8,94% | 7,00% | 10,68% | 10,82% | 10,75% |
| | 10 | 1,97% | 0,95% | 0,73% | 1,01% | 1,43% | 1,22% |
| | 40 | 1,52% | 0,98% | 0,74% | 0,91% | 1,25% | 1,08% |
| 1...64 | 0 | 15,55% | 9,02% | 7,31% | 10,36% | 10,89% | 10,63% |
| | 10 | 1,98% | 1,10% | 0,89% | 1,12% | 1,52% | 1,32% |
| | 40 | 2,09% | 1,01% | 0,89% | 1,17% | 1,49% | 1,33% |

Tabela 30: Média dos tempos em minutos em que foi encontrada a melhor solução para as várias combinações de parâmetros para as 5 corridas (tempo de 1 hora)

| X | CM | L | M | H | 30 | 50 | Média |
|--------|----|------|------|------|------|------|-------|
| 1...4 | 0 | 34,3 | 29,5 | 28,7 | 28,7 | 32,9 | 30,8 |
| | 10 | 30,9 | 24,2 | 31,8 | 30,9 | 27,1 | 29,0 |
| | 40 | 20,0 | 33,3 | 31,2 | 25,1 | 31,3 | 28,2 |
| 1...16 | 0 | 29,0 | 32,9 | 23,0 | 27,8 | 28,8 | 28,3 |
| | 10 | 28,8 | 27,7 | 34,3 | 31,4 | 29,2 | 30,3 |
| | 40 | 37,4 | 31,9 | 38,3 | 35,9 | 35,8 | 35,9 |
| 1...64 | 0 | 32,4 | 35,3 | 26,2 | 31,9 | 30,7 | 31,3 |
| | 10 | 29,5 | 34,6 | 31,7 | 30,5 | 33,4 | 31,9 |
| | 40 | 30,0 | 28,4 | 27,1 | 26,4 | 30,6 | 28,5 |

Através da análise dos valores da coluna “Média” indicados na Tabela 28 e Tabela 29, verifica-se que colocando o parâmetro *ContMax* a 0, isto é, recomeçando a procura de soluções cada vez que a melhor solução vizinha é igual ou pior em custo que a solução corrente, obtém-se resultados cerca de 10% piores que com os outros valores de *ContMax*. Para todas as outras combinações de parâmetros verifica-se que os resultados são muito semelhantes mas que existe uma ligeira vantagem na utilização do conjunto *X* mais pequeno, que permite um maior número de iterações total. Relativamente aos valores de *ContMax*, verifica-se que com 10 ou 40 os resultados são bastante semelhantes mas que *ContMax* a 40 permite em média resultados ligeiramente melhores. A Tabela 30 mostra que os resultados obtidos com *ContMax* a 40 e o conjunto *X* mais pequeno são também os que são obtidos em menos tempo. Esta combinação de parâmetros é a que produz quase sempre melhores resultados independentemente da quantidade de tráfego na rede e das suas dimensões. Como tal, escolheram-se os valores $ContMax = 40$ e $X = \{1, -1, 2, -2, 4, -4\}$ para a execução da heurística OH1.

Determinaram-se assim os melhores parâmetros para a execução da técnica OH1 ($ContMax = 40$ e $X = \{1, -1, 2, -2, 4, -4\}$). Apesar disso, de entre os parâmetros testados, excepto para $ContMax = 0$, todos proporcionam resultados de semelhante qualidade.

A heurística OH2, tal como OH1, utiliza o parâmetro *ContMax* cujo valor afecta a qualidade dos resultados. Para determinar o melhor valor de *ContMax* para a heurística OH2 foram executadas também 5 corridas de 1 hora para 3 valores distintos de *ContMax*: {0, 10, 40}. São também apresentados os resultados a 5 ou 30 minutos (redes com 30 ou 50 nós) de tempo de execução, que foi o tempo atribuído aos casos de estudo de 30 e 50 nós para a comparação das heurísticas. A Tabela 31 apresenta as médias das percentagens de custo acima do melhor custo obtido (em todas as corridas de 1 hora) para os diferentes valores de *ContMax* (0, 10 e 40) para os casos de estudo com pouco (L), médio (M) e muito (H) tráfego e para os casos com 30 e 50 nós após 5 ou 30 minutos respectivamente. A Tabela 32 apresenta os mesmos resultados mas ao fim de 1 hora de execução para cada caso de estudo.

Tabela 31: Média das percentagens de custo acima do melhor custo obtido para as várias combinações de parâmetros *ContMax* nas 5 corridas (tempos de 5/30 minutos)

| CM | L | M | H | 30 | 50 | Média |
|----|--------|-------|-------|--------|-------|--------|
| 0 | 15,76% | 9,09% | 6,98% | 11,47% | 9,75% | 10,61% |
| 10 | 3,20% | 1,61% | 1,49% | 2,32% | 1,87% | 2,10% |
| 40 | 2,92% | 1,87% | 1,36% | 2,21% | 1,90% | 2,05% |

Tabela 32: Média das percentagens de custo acima do melhor custo obtido para as várias combinações de parâmetros *ContMax* nas 5 corridas (tempos de 1 hora)

| CM | L | M | H | 30 | 50 | Média |
|----|--------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 0 | 13,53% | 8,05% | 6,21% | 9,57% | 8,96% | 9,26% |
| 10 | 1,50% | 0,73% | 0,83% | 0,81% | 1,22% | 1,02% |
| 40 | 1,30% | 1,01% | 0,84% | 0,72% | 1,38% | 1,05% |

Através destas tabelas conclui-se que os ganhos obtidos em expandir o intervalo de tempo para além dos 5 ou 30 minutos não são muito significativos (cerca de 1%). Em ambas as tabelas se conclui que os melhores resultados se obtêm com *ContMax* igual a 10 ou 40, sendo que os resultados são cerca de 8% piores para *ContMax* igual a 0. Estes resultados vêm confirmar também os resultados obtidos para OH1.

4.5.4 Comparação das heurísticas

Para análise do desempenho das técnicas heurísticas de dimensionamento de redes com encaminhamento baseado em percursos de pesos mínimos foram utilizados os casos de estudo de 30 e 50 nós atrás referidos. Foram escolhidos para tempo de cálculo 5 minutos para as redes de 30 nós e 30 minutos para as redes de 50 nós. Estes tempos foram determinados pela execução de 50000 iterações pela técnica OSA. A técnica OH1 executou aproximadamente 2300 iterações para cada caso de estudo de 30 ou 50 nós. Para a técnica OH2 estes tempos permitiram a execução de cerca de 920 iterações nos casos de estudo com 30 nós e cerca de 530 iterações nos casos de estudo com 50 nós. Nos casos das heurísticas lagrangeanas foram executadas cerca de 450000 iterações para as redes de 30 nós e cerca de 800000 iterações para as redes de 50 nós.

As técnicas OH1, OH2 e OSA foram executadas 10 vezes para cada caso de estudo. Para a execução da técnica OH1 foram utilizados os parâmetros que melhores resultados obtiveram em média ($ContMax = 40$ e $X = \{1, -1, 2, -2, 4, -4\}$). Para a técnica OH2 foi utilizado o parâmetro $ContMax = 10$ que foi um dos valores de parâmetros que obteve em

Tabela 33: Parâmetros da heurística OSA

| P | δ | β | i |
|-------|----------|---------|-------|
| 0,958 | 0,05 | 0,9999 | 1 |
| 0,958 | 0,05 | 0,9999 | 10 |
| 0,958 | 0,05 | 0,9999 | 100 |
| 0,954 | 0,05 | 0,9999 | 1000 |
| 0,891 | 0,05 | 0,9999 | 10000 |
| 0,098 | 0,05 | 0,9999 | 40000 |
| 0,002 | 0,05 | 0,9999 | 50000 |

As técnicas baseadas na relaxação lagrangeana foram executadas com diferentes parâmetros em cada corrida, uma vez que estas técnicas obtêm sempre os mesmos resultados se forem mantidos os parâmetros. Para estas técnicas foram utilizadas as mesmas combinações de parâmetros utilizadas no CAPÍTULO 3.

A Tabela 106 ([Anexo A – Tabelas de resultados](#)) apresenta os valores de custo obtidos com a heurística OH1 para todos os casos de estudo e para todas as 10 corridas. A Tabela 107 apresenta os valores de custo obtidos com a heurística OH2 e a Tabela 108 apresenta os valores de custo obtidos com a heurística OSA. A Tabela 46 apresenta os custos obtidos com a heurística lagrangeana e a Tabela 53 apresenta os custos obtidos com a variação da heurística lagrangeana.

Deleted: Anexo A – Tabelas de resultados

Deleted: Anexo A – Tabelas de resultados

Verifica-se que os melhores resultados obtidos ocorreram sempre com a técnica OH1. A Tabela 109 contém os resultados percentuais da técnica OH1 em relação ao melhor valor de custo obtido para cada caso de estudo em todas as corridas de todas as técnicas heurísticas. A Tabela 110 apresenta os mesmos resultados para a técnica OH2; a Tabela 111 para a técnica OSA; a Tabela 112 para a heurística lagrangeana; a Tabela 113 para a variação da heurística lagrangeana. Em média a combinação de parâmetros que obteve os melhores resultados para a heurística lagrangeana foi HL 3 ($\pi = 1$; $NM = \text{Infinito}$). Para a variante da heurística lagrangeana a melhor combinação de parâmetros foi VHL 11 ($\pi = 5$; $NM = \text{Infinito}$; 100 subiterações com $\pi = 1$; $NM = \text{Infinito}$).

A Tabela 34 apresenta os resultados médios percentuais das 10 corridas de cada técnica em relação ao melhor custo obtido. No caso da heurística lagrangeana foram efectuadas 14 corridas e no caso da variação da heurística lagrangeana foram efectuadas 13 corridas pelas razões enunciadas no Capítulo 3 (os melhores resultados foram encontrados para valores limites dos parâmetros). A Tabela 35 apresenta os melhores resultados percentuais das

corridas de cada técnica em relação ao melhor custo obtido. Conclui-se que a técnica heurística que consistentemente obteve os melhores resultados quer em termos de média das corridas quer em termos de melhores resultados obtidos foi a heurística OH1. A menos de 2% dos resultados de OH1 encontra-se a técnica OH2 que foi em média e em termos de melhores resultados obtidos a segunda melhor técnica. Para comparar os resultados das heurísticas lagrangeanas utilizam-se os melhores resultados e não as médias, uma vez que os resultados destas técnicas variam consoante parâmetros que são diferentes em cada corrida. As restantes técnicas são executadas sempre com os mesmos parâmetros, pois como possuem uma componente aleatória, obtêm normalmente resultados diferentes em cada corrida. Tendo em atenção a Tabela 35, verifica-se que a terceira melhor técnica é a heurística lagrangeana com resultados cerca de 2% piores que OH2, seguida da sua variante com resultados 0,5% piores e por último da heurística OSA com resultados 1% piores que a variante da heurística lagrangeana.

Tabela 34: Resultados percentuais médios das várias heurísticas

| | OH1 | OH2 | OSA | HL | VHL |
|-------------|------|------|------|-------|-------|
| A30L | 0,8% | 2,4% | 3,9% | 14,1% | 15,6% |
| B30L | 1,1% | 2,3% | 6,0% | 9,4% | 12,2% |
| A30M | 1,0% | 2,1% | 3,4% | 7,9% | 8,5% |
| B30M | 0,5% | 1,5% | 5,8% | 5,9% | 6,5% |
| A30H | 1,0% | 2,1% | 5,1% | 4,1% | 4,5% |
| B30H | 1,0% | 2,0% | 5,9% | 3,8% | 4,1% |
| A50L | 0,5% | 2,9% | 9,1% | 9,5% | 11,2% |
| B50L | 1,8% | 4,5% | 9,9% | 10,2% | 10,6% |
| A50M | 0,7% | 2,2% | 7,2% | 5,1% | 5,2% |
| B50M | 1,0% | 3,0% | 6,7% | 4,4% | 4,2% |
| A50H | 0,6% | 1,6% | 6,3% | 2,4% | 2,1% |
| B50H | 0,7% | 2,3% | 5,8% | 2,9% | 2,7% |
| L | 1,1% | 3,0% | 7,2% | 10,8% | 12,4% |
| M | 0,8% | 2,2% | 5,8% | 5,8% | 6,1% |
| H | 0,8% | 2,0% | 5,8% | 3,3% | 3,4% |
| 30 | 0,9% | 2,1% | 5,0% | 7,5% | 8,6% |
| 50 | 0,9% | 2,8% | 7,5% | 5,7% | 6,0% |
| Média Total | 0,9% | 2,4% | 6,3% | 6,6% | 7,3% |

Tabela 35: Resultados percentuais mínimos das várias heurísticas

| | OH1 | OH2 | OSA | HL | VHL |
|-------------|------|------|------|------|------|
| A30L | 0,0% | 0,8% | 1,8% | 4,3% | 9,6% |
| B30L | 0,0% | 1,2% | 4,0% | 3,2% | 6,0% |
| A30M | 0,0% | 0,8% | 1,4% | 3,8% | 3,8% |
| B30M | 0,0% | 0,6% | 5,2% | 3,3% | 3,2% |
| A30H | 0,0% | 1,4% | 3,9% | 2,3% | 2,2% |
| B30H | 0,0% | 1,6% | 4,7% | 2,2% | 2,2% |
| A50L | 0,0% | 1,9% | 6,9% | 6,6% | 6,1% |
| B50L | 0,0% | 1,1% | 5,9% | 5,4% | 5,9% |
| A50M | 0,0% | 1,1% | 6,4% | 2,9% | 2,8% |
| B50M | 0,0% | 1,9% | 5,4% | 1,3% | 1,1% |
| A50H | 0,0% | 0,4% | 5,5% | 0,5% | 0,7% |
| B50H | 0,0% | 1,5% | 4,5% | 1,2% | 1,1% |
| L | 0,0% | 1,3% | 4,6% | 4,9% | 6,9% |
| M | 0,0% | 1,1% | 4,6% | 2,8% | 2,8% |
| H | 0,0% | 1,2% | 4,7% | 1,5% | 1,6% |
| 30 | 0,0% | 1,1% | 3,5% | 3,2% | 4,5% |
| 50 | 0,0% | 1,3% | 5,8% | 3,0% | 3,0% |
| Média Total | 0,0% | 1,2% | 4,6% | 3,1% | 3,7% |

Dado OH2 apresentar melhores resultados que OSA e ambas as técnicas partilharem a mesma estratégia de vizinhança, conclui-se que a estratégia GRASP de pesquisa de toda a vizinhança é mais eficaz que a estratégia de pesquisa *Simulated Annealing* que selecciona um vizinho aleatoriamente. Por comparação dos resultados de OH1 com OH2 conclui-se que a estrutura de vizinhança baseada no conjunto de diferenças exponencialmente crescente produz melhores resultados que a estrutura de vizinhança baseada nas diferenças mínimas. Como tal, apesar de o conjunto baseado nas diferenças mínimas evitar avaliar soluções vizinhas com o mesmo encaminhamento, o conjunto de diferenças exponencialmente crescentes permite um cálculo mais eficiente dos vizinhos e permite saltos para vizinhos com maiores diferenças no encaminhamento dos agregados de fluxos de tráfego. Estas vantagens fazem com que esta estrutura de vizinhança permita encontrar melhores soluções.

Verifica-se também que enquanto as heurísticas OH1, OH2 e OSA obtêm desempenhos relativos mais ou menos constantes independentemente do tráfego, as heurísticas lagrangeanas obtêm melhores desempenhos quanto maior é o tráfego dos casos de estudo. A Figura 12 apresenta os custos médios, mínimos e máximos obtidos para cada caso de estudo de 30 nós. A Figura 13 apresenta os mesmos resultados para as redes de 50 nós.

Estas figuras confirmam os resultados anteriores e permitem uma melhor comparação dos resultados das várias técnicas heurísticas. Nestas figuras consegue-se observar a maior variação entre os valores mínimos e máximos de custos obtidos com a heurística lagrangeana (que se sabe ser muito dependente dos parâmetros π e NM). Os resultados de OSA apresentam uma variação ligeiramente superior em média a OH2, cujos resultados apresentam por sua vez um variação pouco superior em média aos de OH1.

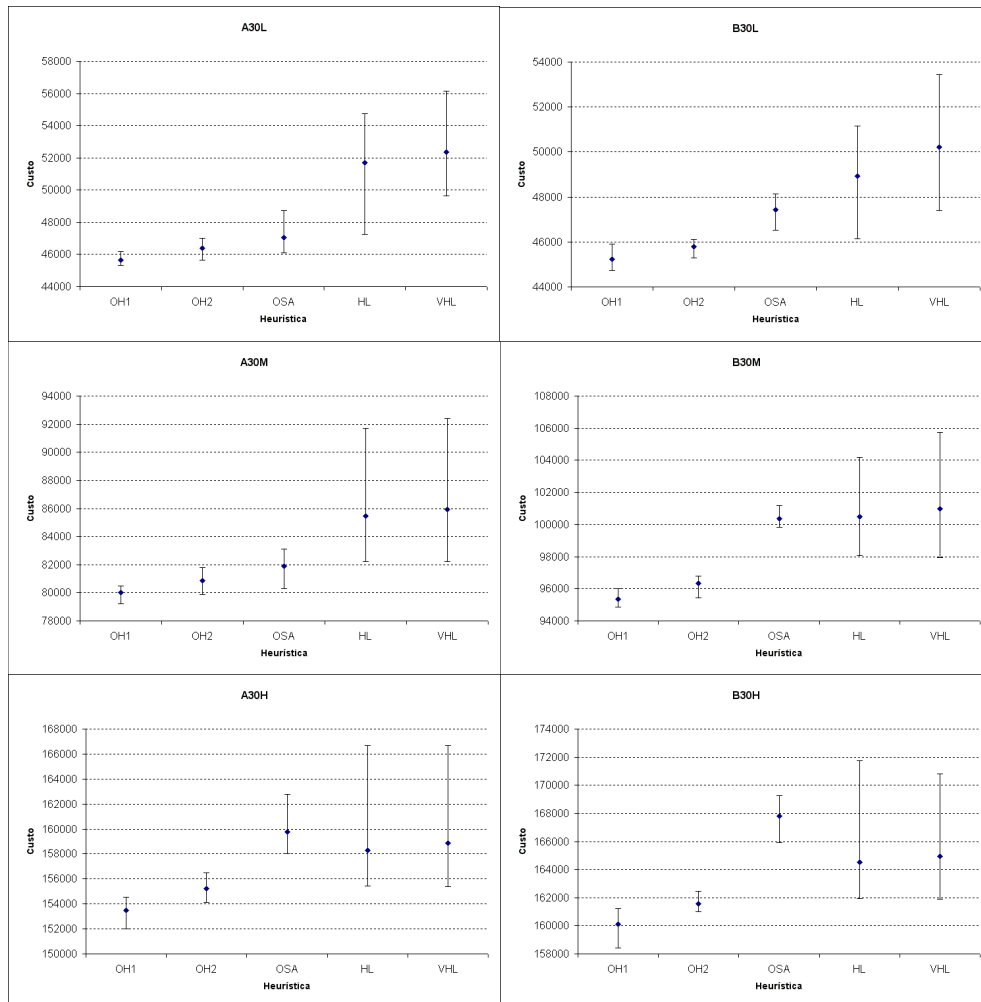


Figura 12: Resultados das heurísticas para as redes de 30 nós

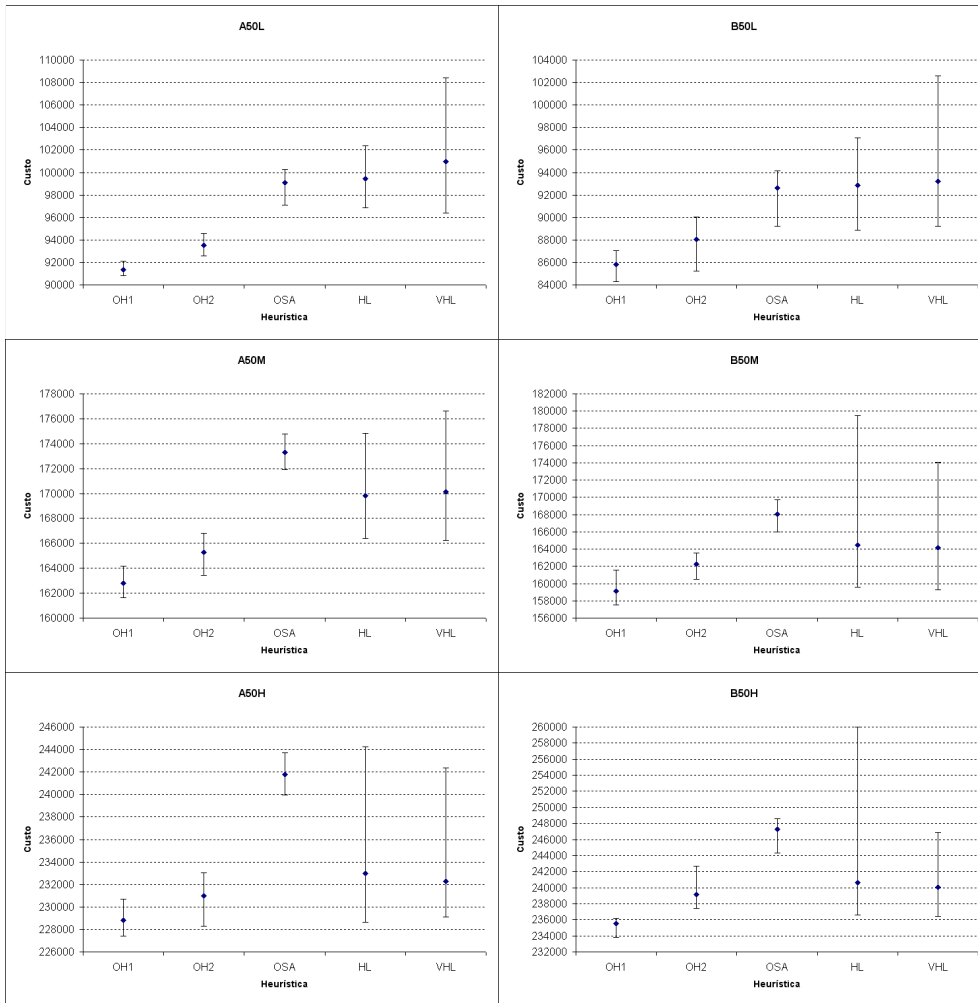


Figura 13: Resultados das heurísticas para as redes de 50 nós

De seguida é feito um estudo para verificar se os tempos de execução atribuídos às heurísticas foram apropriados. Este estudo foi limitado às 10 combinações de parâmetros iniciais de HL e VHL, dado que os ganhos obtidos com mais combinações de parâmetros foram desprezáveis. Um tempo muito curto pode evitar que as heurísticas obtenham bons resultados e um tempo demasiado longo torna-se desnecessário se não ocorrerem melhorias significativas nas soluções. As tabelas entre a Tabela 114 e a Tabela 118 ([Anexo A – Tabelas de resultados](#)) apresentam os melhores custos obtidos em cada corrida das técnicas heurísticas depois de decorrida metade do tempo total de corrida. As tabelas entre

Deleted: Anexo A – Tabelas de resultados

Deleted: Anexo A – Tabelas de resultados

a Tabela 119 e Tabela 123 ([Anexo A – Tabelas de resultados](#)) apresentam as percentagens de custo reduzidas na última metade do tempo de cálculo ($((CM-CF)/CM)$, onde CM representa o custo a metade do tempo e CF representa o custo final). Nestas tabelas a coluna mais à direita indica a média das restantes colunas. As linhas “30” e “50” indicam a média para as redes de 30 e 50 nós respectivamente, as linhas “L”, “M” e “H” indicam a média para as redes com pouco, médio e muito tráfego e a linha “Global” indica a média para todos os casos de estudo. A Tabela 36 apresenta os valores médios obtidos para cada técnica heurística. Nesta tabela verifica-se que em média os resultados de OH1 melhoraram menos de 0,5% na última metade do tempo de execução. Os resultados para OH2 foram semelhantes, o que indica que o tempo de execução atribuído a cada corrida destas técnicas foi apropriado e que o uso de mais tempo não contribuiria para melhorar significativamente os resultados. Os resultados obtidos para HL e VHL indicam que o tempo utilizado foi excessivo para estas técnicas e que as vantagens de permitir mais tempo de execução seriam desprezáveis se existentes. No caso da heurística OSA, verifica-se que os resultados melhoraram em média cerca de 4% na última metade do tempo de execução, ou seja, esta heurística beneficiaria provavelmente com a atribuição de mais tempo de execução. No entanto, visto que esta heurística obteve piores resultados que OH1 em cerca de 5% (ver Tabela 34 e Tabela 35), conclui-se que a atribuição de mais tempo de execução a todas heurísticas não mudaria o facto de OH1 obter os melhores resultados.

Deleted: Anexo A – Tabelas de resultados

Deleted: Anexo A – Tabelas de resultados

Tabela 36: Percentagem de custo reduzida na metade final do tempo total das heurísticas

| | OH1 | OH2 | OSA | HL | VHL |
|--------|-------|-------|-------|-------|-------|
| A30L | 0,64% | 1,12% | 9,90% | 0,25% | 0,00% |
| B30L | 0,47% | 0,31% | 8,77% | 0,11% | 0,00% |
| A30M | 0,37% | 0,38% | 5,51% | 0,00% | 0,00% |
| B30M | 0,51% | 0,52% | 3,11% | 0,03% | 0,00% |
| A30H | 0,13% | 0,20% | 2,37% | 0,00% | 0,00% |
| B30H | 0,47% | 0,10% | 1,49% | 0,09% | 0,00% |
| A50L | 0,36% | 0,42% | 3,81% | 0,04% | 0,00% |
| B50L | 0,27% | 0,81% | 3,71% | 0,05% | 0,00% |
| A50M | 0,22% | 0,48% | 1,27% | 0,00% | 0,00% |
| B50M | 0,53% | 0,39% | 1,53% | 0,05% | 0,00% |
| A50H | 0,16% | 0,45% | 0,43% | 0,11% | 0,00% |
| B50H | 0,45% | 0,59% | 1,67% | 0,00% | 0,00% |
| L | 0,44% | 0,67% | 6,55% | 0,11% | 0,00% |
| M | 0,41% | 0,44% | 2,85% | 0,02% | 0,00% |
| H | 0,31% | 0,34% | 1,49% | 0,05% | 0,00% |
| 30 | 0,43% | 0,44% | 5,19% | 0,08% | 0,00% |
| 50 | 0,33% | 0,53% | 2,07% | 0,04% | 0,00% |
| Global | 0,38% | 0,48% | 3,63% | 0,06% | 0,00% |

Para todos os casos de estudo foi também resolvida a segunda fase dos métodos heurísticos. Esta fase consiste na resolução do modelo para encontrar pesos que determinem percursos de peso mínimo únicos com o CPLEX 9.0. Este método permitiu encontrar uma solução de pesos em conformidade com os percursos determinados por todas as heurísticas em todos os casos de estudo e para todas as corridas num total de 600 casos. A Tabela 124 ([Anexo A – Tabelas de resultados](#)) apresenta os tempos gastos em segundos para resolver a segunda fase do problema para os casos de estudo com 30 nós. A Tabela 125 apresenta os mesmos resultados para os casos de estudo com 50 nós. Para os casos de 30 nós os tempos consumidos a resolver a segunda fase não excederam 1.3 segundos, enquanto que para os casos de 50 nós a segunda fase foi resolvida sempre em menos de 4 minutos com tempos médios de cerca de 10 segundos.

Deleted: Anexo A – Tabelas de resultados

Deleted: Anexo A – Tabelas de resultados

A Tabela 126 ([Anexo A – Tabelas de resultados](#)) apresenta os pesos máximos obtidos em cada corrida e para cada técnica heurística, para as redes com 30 nós. A Tabela 127 apresenta os mesmos resultados para as redes de 50 nós. Verifica-se que foi sempre possível encontrar um conjunto de pesos em que o peso máximo nunca excedeu o valor 12.

Deleted: Anexo A – Tabelas de resultados

Deleted: Anexo A – Tabelas de resultados

4.5.5 Avaliação da eficácia de OH1

Concluiu-se na secção anterior que a heurística OH1 foi a heurística que em média conseguiu melhores resultados para os casos de estudo testados. No entanto, para avaliar a eficácia desta heurística quanto à proximidade dos resultados em relação ao óptimo, são precisos bons limites inferiores. Nesta secção são recuperados os resultados exactos dos casos de estudo A16 e B16 (Tabela 27) para avaliar a eficácia de OH1. Foram efectuadas 10 corridas desta técnica com 1 minuto de tempo limite cada. Em cada corrida foram efectuadas cerca de 3800 iterações.

A Tabela 37 apresenta os resultados obtidos pela técnica heurística OH1 e pelas duas variantes da técnica de duas fases iterativa (agregada e desagregada). São escolhidos em cada caso os melhores valores de soluções e limites inferiores encontrados a resolver as duas variantes. A coluna “Melhor Solução” apresenta o custo das melhores soluções encontradas com a técnica de duas fases exacta. A coluna “Limite Inferior” apresenta os melhores limites inferiores obtidos a resolver as duas variantes desta técnica. A coluna “OH1 Mínimo” contém os melhores custos encontrados nas 10 corridas da heurística OH1. A coluna “Intervalo MS” contém os intervalos percentuais entre os custos obtidos por OH1 e pela técnica de duas fases exacta ($(OH1-MS)/MS$, onde MS indica a melhor solução). A coluna “Intervalo LI” contém os intervalos percentuais entre os custos obtidos por OH1 e os limites inferiores obtidos pela técnica de duas fases exacta ($(OH1-LI)/LI$). A coluna “OH1 Média” contém a média dos valores dos custos encontrados nas 10 corridas de OH1 e as colunas seguintes apresentam os intervalos entre estes valores e as melhores soluções ou os limites inferiores.

Tabela 37: Avaliação da eficácia de OH1

| | Melhor Solução | Limite inferior | OH1 Mínimo | Interv. MS | Interv. LI | OH1 Média | Interv. MS | Interv. LI |
|-------|----------------|-----------------|------------|------------|------------|-----------|------------|------------|
| A16L | 15810 | 15810 | 15960 | 0,95% | 0,95% | 16419 | 3,85% | 3,85% |
| B16L | 15235 | 15235 | 15235 | 0,00% | 0,00% | 16380 | 7,52% | 7,52% |
| A16M | 38660 | 38660 | 38660 | 0,00% | 0,00% | 38682,5 | 0,06% | 0,06% |
| B16M | 38.160 | 36.977 | 38160 | 0,00% | 3,20% | 38424 | 0,69% | 3,91% |
| A16H | 70.565 | 70.565 | 70600 | 0,05% | 0,05% | 70666,5 | 0,14% | 0,14% |
| B16H | 59.885 | 59.885 | 60110 | 0,38% | 0,38% | 60222,5 | 0,56% | 0,56% |
| Média | | | | 0,23% | 0,76% | | 2,14% | 2,67% |

Se considerarmos os resultados da heurística OH1 como sendo os melhores das 10 corridas, então verifica-se que as soluções encontradas pela heurística estão em média a

0,2% e no máximo a 1% da melhor solução encontrada pela técnica de duas fases exacta. O intervalo para o limite inferior é no máximo cerca de 3%. Se considerarmos os resultados de OH1 como sendo os de cada corrida individual, verifica-se que em média os resultados estão em média a 2% e no máximo a 7,5% da melhor solução. Neste caso os intervalos para o limite inferior são no máximo cerca de 7,5%. Verifica-se assim que esta técnica heurística (OH1) consegue obter resultados óptimos ou próximos do valor óptimo para redes com estas dimensões, o que leva a crer que também obtém bons resultados para as redes com maiores dimensões.

Comparando a técnica de duas fases variante desagregada e a técnica OH1 verifica-se o seguinte: as soluções obtidas por OH1 estão a menos de 1% da melhor solução e em média a 0,2% desta. Além disso, note-se que os tempos de execução de OH1 são de 1 minuto face às horas que demora a técnica de duas fases. Estes resultados levam a concluir que para redes com estas dimensões ou superiores, torna-se mais apropriada a utilização desta técnica heurística do que a técnica de duas fases exacta.

4.5.6 Comparação de resultados com método de dimensionamento sem restrições

Ao longo deste capítulo foram apresentados métodos para o dimensionamento de redes com encaminhamento baseado em percursos de peso mínimo. Nos casos em que também existe a possibilidade de recorrer ao encaminhamento sem restrições, convém ter uma estimativa dos custos envolvidos em optar por um modelo de gestão de recursos face ao outro. Para fazer esta estimativa, são comparados nesta secção os resultados das técnicas de dimensionamento para os dois métodos de encaminhamento.

A Tabela 38 apresenta os resultados das duas técnicas heurísticas que obtiveram em média os melhores valores de custo. A heurística lagrangeana com a técnica de melhoramento HMI que foi apresentada no capítulo anterior encontra-se indicada por “HLMI” e a heurística OH1 apresentada neste capítulo por “OH1”. Como tal, “HLMI” representa valores de custo obtidos com dimensionamento através de encaminhamento sem restrições, enquanto que “OH1” representa valores de custo obtidos com dimensionamento através de encaminhamento por percursos de peso mínimo. São apresentados os valores médios de 10 corridas bem como os melhores valores (indicados nas colunas com “Min”). As colunas “Ganho” apresentam os valores $(EPM - ESR)/ESR$, onde EPM representa o valor de custo

obtido na coluna “OH1” imediatamente à esquerda e *ESR* representa o valor de custo obtido na coluna “HLMI” à esquerda dessa coluna “OH1”. As colunas “Ganho” apresentam assim uma estimativa do ganho percentual em custos que se obtém ao optar pelo encaminhamento sem restrições face ao encaminhamento por percursos de peso mínimo.

Tabela 38: Comparação de resultados dos dois métodos de encaminhamento

| | HLMI Média | | Ganho | HLMI Min | | Ganho |
|--------|------------|-----------|--------|----------|---------|-------|
| | NB=5 | OH1 Média | | NB=5 | OH1 Min | |
| | NI=10 | | | NI=10 | | |
| A16L | 15973 | 16419 | 2,80% | 15710 | 15960 | 1,59% |
| B16L | 15014 | 16380 | 9,10% | 14990 | 15235 | 1,63% |
| A16M | 38646 | 38683 | 0,10% | 38275 | 38660 | 1,01% |
| B16M | 37935 | 38424 | 1,29% | 37665 | 38160 | 1,31% |
| A16H | 68815 | 70667 | 2,69% | 68655 | 70600 | 2,83% |
| B16H | 59065 | 60223 | 1,96% | 58995 | 60110 | 1,89% |
| A30L | 45508 | 45659 | 0,33% | 44825 | 45305 | 1,07% |
| B30L | 44705 | 45235 | 1,18% | 44110 | 44740 | 1,43% |
| A30M | 79285 | 79999 | 0,90% | 77520 | 79200 | 2,17% |
| B30M | 95198 | 95356 | 0,17% | 93860 | 94875 | 1,08% |
| A30H | 154194 | 153508 | -0,44% | 151530 | 152005 | 0,31% |
| B30H | 159614 | 160095 | 0,30% | 157145 | 158445 | 0,83% |
| A50L | 89492 | 91344 | 2,07% | 88590 | 90850 | 2,55% |
| B50L | 84136 | 85840 | 2,03% | 83115 | 84285 | 1,41% |
| A50M | 159898 | 162807 | 1,82% | 157600 | 161645 | 2,57% |
| B50M | 156188 | 159155 | 1,90% | 153715 | 157505 | 2,47% |
| A50H | 225666 | 228829 | 1,40% | 222755 | 227430 | 2,10% |
| B50H | 233558 | 235503 | 0,83% | 229445 | 233785 | 1,89% |
| L | | | 2,92% | | | 1,61% |
| M | | | 1,03% | | | 1,77% |
| H | | | 1,12% | | | 1,64% |
| 16 | | | 2,99% | | | 1,71% |
| 30 | | | 0,41% | | | 1,15% |
| 50 | | | 1,67% | | | 2,16% |
| Global | | | 1,72% | | | 1,68% |

Como se pode observar, o ganho global quer em valores mínimos, quer em valores médios, não chega a atingir os 2%. Para os casos de estudo individuais a diferença máxima ocorreu para os valores médios de B16L em que o ganho atingiu 9%. Em todos os outros casos, o ganho nunca ultrapassou os 3%. No entanto, convém frisar que os valores comparados não correspondem aos valores óptimos obtidos com os dois métodos de encaminhamento, mas sim uma estimativa das soluções que se conseguem obter com as melhores técnicas

heurísticas apresentadas nesta tese. Existe assim a possibilidade de as heurísticas comparadas não terem um desempenho equiparável, ou seja, uma delas poder ser mais eficaz. No entanto, os estudos efectuados com estas heurísticas e os limites inferiores obtidos para as redes de 16 nós indicam que ambas atingem valores muito próximos dos óptimos, levando a concluir que pelo menos para as redes de 16 nós, os resultados obtidos ilustram a diferença de custos que traduz a opção por um método de encaminhamento face ao outro.

4.6 Conclusões

Neste capítulo foi enunciado um problema de dimensionamento de redes com encaminhamento baseado em percursos de peso mínimo. Tal como com o problema apresentado no capítulo anterior, é conhecido que este problema é demasiado difícil para ser resolvido de forma exacta, excepto para instâncias de pequenas dimensões.

Para resolver este problema em instâncias de dimensões reduzidas foram apresentadas e comparadas algumas variantes de uma formulação MIP para determinar soluções óptimas. Determinou-se a variante que obtém os melhores resultados na maior parte dos casos. Foi proposta uma nova técnica para obter soluções óptimas composta de duas fases que se repetem. Na primeira fase é determinada a configuração de rede física e o encaminhamento dos agregados de fluxos de tráfego; na segunda fase são determinados os pesos que resultam na configuração de encaminhamento encontrada na primeira fase. Esta segunda fase pode não ter solução e, como tal, esta técnica nem sempre pode ser resolvida com apenas uma iteração da primeira e da segunda fase. Neste caso, acrescenta-se uma restrição na formulação da primeira fase para evitar que seja escolhida de novo a mesma solução e volta-se a correr as duas fases. Este procedimento iterativo termina quando se encontrar uma solução na segunda fase. Os resultados mostram que esta técnica termina normalmente na primeira iteração, sendo esta a situação encontrada em todos os casos testados neste capítulo. Com a utilização desta técnica conseguiu-se uma redução do tempo total de cálculo de todas as instâncias em cerca de 80% comparativamente à formulação MIP inicial.

Para instâncias de médias e grandes dimensões foi proposta uma técnica heurística de duas fases. A primeira fase de dimensionamento da rede e encaminhamento dos agregados de fluxos de tráfego é baseada numa heurística GRASP; a segunda fase usa a técnica para

encontrar pesos apresentada para as redes pequenas. Esta técnica foi comparada com outras heurísticas baseadas no ajustamento de pesos e na técnica da segunda fase e verificou-se que foi capaz de obter os melhores resultados para todos os casos de estudo. A segunda melhor técnica com resultados médios cerca de 2% piores é também baseada numa heurística GRASP mas com uma estrutura de vizinhança diferente. As restantes técnicas (heurísticas lagrangeanas e *simulated annealing*) foram também capazes de obter bons resultados, com soluções de custo no máximo cerca de 5% piores que a melhor solução. Verificou-se também que a técnica usada na segunda fase conseguiu sempre obter uma solução de pesos compatível com a solução de encaminhamento determinada na primeira fase. Isto, conjugado com o facto de as soluções de primeira fase serem à partida determinadas com base num sistema de pesos, leva a crer que seja sempre possível encontrar um novo sistema de pesos que determine uma configuração de encaminhamento pelos mesmos percursos de peso mínimo, mas tal que os percursos de peso mínimo sejam únicos entre todos os nós de tráfego.

Neste capítulo foram também comparados os resultados da melhor técnica heurística apresentada com os da melhor técnica heurística apresentada no capítulo anterior. Esta comparação permitiu fazer uma estimativa dos custos adicionais incorridos para o operador ao optar pelo encaminhamento por percursos de peso mínimo face ao encaminhamento sem restrições. Esta estimativa revelou que estas perdas normalmente não ultrapassam os 3%, o que é um valor perfeitamente razoável, tendo em conta as vantagens deste método de encaminhamento.

CAPÍTULO 5 Considerações finais e propostas de trabalho futuro

Nesta tese foram abordados problemas de dimensionamento de redes de telecomunicações multi-serviço de custo mínimo. Foram considerados os métodos de gestão de recursos baseados em encaminhamento sem restrições e encaminhamento por percursos de peso mínimo. O objectivo dos problemas de dimensionamento consistiu na determinação da rede física de custo mínimo. Foram apresentados métodos exactos para resolução dos problemas em que as instâncias são de dimensão reduzida. Devido à complexidade dos problemas enunciados, foram também apresentados métodos heurísticos para resolver de forma aproximada os problemas para instâncias de maior dimensão. Foram feitas comparações sobre a eficácia das técnicas apresentadas.

Foi estudada uma heurística lagrangeana conhecida de outros trabalhos para determinar a influência dos seus parâmetros e foram determinadas as melhores combinações destes. Foi proposta uma variação da relaxação lagrangeana que foi comparada com a heurística lagrangeana base. Estas heurísticas podem ser aplicadas a ambos os problemas de dimensionamento de redes: com encaminhamento sem restrições e com encaminhamento por percursos de peso mínimo. No entanto, em ambos os casos foram apresentadas técnicas mais eficazes.

Foram estudados melhoramentos propostos em outros trabalhos para uso com as heurísticas lagrangeanas para resolver o problema de dimensionamento com encaminhamento sem restrições. Verificou-se que estas técnicas obtêm os melhores resultados. A qualidade das soluções foi avaliada através da resolução de modelos conhecidos de programação linear inteira.

Foram também propostos modelos de programação linear inteira para resolver o problema de dimensionamento baseado em encaminhamento por percursos de peso mínimo. Foi

comparada a eficiência destes modelos. Foi proposta uma técnica iterativa de duas fases que se mostrou ser muito mais eficiente que estes modelos. Foi proposta uma heurística baseada no método GRASP que se mostrou obter melhores resultados que outras heurísticas previamente conhecidas.

Foram comparados os custos de redes dimensionadas com encaminhamento sem restrições e encaminhamento com base em percursos de peso mínimo. Concluiu-se que as diferenças de custo são mínimas e que como tal, a simplificação dos processos de configuração e gestão da rede proporcionada pela gestão de recursos com encaminhamento baseado em percursos de peso mínimo pode ser mais vantajosa que a pequena redução de custos proporcionada pela outra estratégia de encaminhamento.

Para trabalho futuro, destacam-se as seguintes opções. Em primeiro lugar seria útil obter prova ou contrariar a hipótese de que a partir de um conjunto de pesos em que é escolhido um percurso único de peso mínimo para cada par origem destino, é sempre possível obter outro conjunto de pesos que determina a mesma configuração de percursos, mas garantindo que os percursos de peso mínimo são únicos. Os resultados computacionais parecem indicar esta hipótese mas não foi possível prová-la matematicamente.

Em segundo lugar, são necessários métodos mais eficientes para determinar bons limites inferiores em instâncias de grandes dimensões que permitam avaliar mais precisamente a qualidade das soluções obtidas com as técnicas heurísticas apresentadas nesta tese. Este estudo permitiria também determinar até que ponto é útil investigar novas técnicas heurísticas ou melhoramentos para as técnicas apresentadas.

Outra opção de estudo de interesse seria elaborar uma comparação de resultados do problema de dimensionamento com encaminhamento sem restrições aplicado a casos de estudo com mais do que um agregado de tráfego por par de nós origem/destino face a casos de estudo com um único agregado por par de nós origem/destino. Esta variante aumentaria a complexidade da gestão da rede pois exigiria maior número de LSPs (no caso de redes MPLS) ou VPCs (no caso de redes ATM). No entanto, poderia potencialmente permitir um melhor nível de utilização de recursos com um conseqüente decréscimo no custo do desenho da rede.

Finalmente, existe um conjunto de problemas de dimensionamento de grande interesse actual, principalmente problemas com encaminhamento por percursos de peso mínimo, que

são extensões mais complexas dos problemas aqui abordados e que, por isso, poderiam beneficiar das técnicas que aqui se investigaram. Por exemplo, uma das vantagens do encaminhamento por percursos de peso mínimo é o facto do conjunto de pesos atribuídos às ligações definir os percursos de encaminhamento em qualquer situação, ou seja, tanto em operação normal como em caso de falha de um ou mais elementos de rede. Assim, seria fácil incluir na heurística OH1, por exemplo, a contabilização das capacidades necessárias em cada aresta do grafo para todas as situações de falha. Isto resultaria numa heurística cuja eficiência teria de ser investigada e comparada com outras alternativas existentes na literatura.

Referências

- (Ajili, 2005) Ajili, F., Rodošek, R., Eremin, A., 2005. A Scalable Tabu Search Algorithm for Optimising IGP Routing. INOC 2005, 2, 348-354, Lisbon.
- (Awduche, 1999) Awduche, D., Malcolm, J., Agogbua, J., O'Dell, M., McManus, J., 1999. Requirements for Traffic Engineering Over MPLS. IETF RFC 2702.
- (Awduche, 2001) Awduche, D., Berger, L., Gan, D., Li, T., Srinivasan, V., Swallow, G., 2001. RSVP-TE: Extensions to RSVP for LSP Tunnels. IETF RFC 3209.
- (Awerbuch, 1994) Awerbuch, B., Leighton, T., 1994. Improved Approximation Algorithms for the Multi-Commodity Flow Problem and Local Competitive Routing in Dynamic Networks. ACM Press, 487-496, Series-Proceeding-Article.
- (Beasley, 1993) Beasley, J., 1993. Lagrangean Relaxation. Modern Heuristic Techniques for Combinatorial Problem. Ed. Colin Reeves, Blackwell Scientific publications.
- (Beker, 2003) Beker, S., Kofman, D., Puech, N., 2003. Off-line reduced complexity layout design for MPLS networks. 3rd IEEE Workshop on IP Operations and Management, IPOM 2003. 99- 105.
- (Ben-Ameur, 2000) Ben-Ameur, W., Gourdin E., Liau, B., Michel, N., 2000. Designing Internet Networks. DRCN 2000, 56-61, Munich.

- (Ben-Ameur, 2003) Ben-Ameur, W., Gourdin, E., 2003. Internet Routing and Related Topology Issues. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, 17, 1, 18-49.
- (Bienstock, 1997) Bienstock, D., Chopra, S., Günlük, O., Tsai, C., 1997. Minimum Cost Capacity Installation for Multicommodity Flows. ACM Press, 619-628.
- (Bley, 1998) Bley, A., Grötschel, M., Wessäly, R., 1998. Design of Broadband Virtual Private Networks: Model and Heuristics for the B-Win. Robust Communication Networks: Interconnection and Survivability. DIMACS Series in Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science, 53, 1-16.
- (Bley, 2002) Bley, A., Koch, T., 2002. Integer programming approaches to access and backbone IP-network planning, ZIB Preprint ZR-02-41, Konrad-Zuse-Zentrum für Informationstechnik, Berlin.
- (Bley, 2003) Bley A., 2003. A Lagrangian Approach for Integrated Network Design and Routing in IP Networks. INOC 2003, 107-113, Paris.
- (Bley, 2005) Bley A., 2005. Finding Small Administrative Lengths for Shortest Path Routing. INOC 2005, 1, 121-128, Lisbon.
- (Bourquie, 2003) Bourquie, N., Ben-Ameur, W., Gourdin, E., Tolla, P., 2003. Optimal shortest path routing for internet networks. INOC 2003, 119-125, Paris.
- (Broström, 2005) Broström, P., Holmberg, K., 2005. Determining the Non-Existence of a Compatible OSPF Metric. INOC 2005, 1, 106-113, Lisbon.
- (Buriol, 2004) Buriol, L. S., Resende, M. G. C., Thorup, M., 2004. Survivable IP Network Design with OSPF Routing. AT&T Labs Research Technical Report TD-64KUAW.
- (Callon, 1990) Callon R., 1990. Use of OSI IS-IS for Routing in TCP/IP and Dual Environments. IETF RFC 1195.
- (Cardoso, 2000) Cardoso, L., Lopes, C., de Sousa, A., Valadas, R., 2000. A Tool for

- Multi-Hour ATM Network Design considering Mixed Peer-to-Peer and Client-Server Services. *Networks 2000*, Toronto, Canadá.
- (Cardoso, 2001) Cardoso, L., Patrão, J., Lopes, C., de Sousa, A., Valadas, R., 2001. PTPlan MPLS: A Tool for MPLS Network Dimensioning. *Proceedings of the Ninth International Symposium on Modeling, Analysis and Simulation of Computer and Telecommunication Systems (MASCOTS 2001)*, 339-345, Cincinnati, Ohio.
- (CCITT, 1992a) CCITT Rec. I.311, 1992. B-ISDN General Network Aspects.
- (CCITT, 1992b) CCITT Rec. I.361, 1992. B-ISDN ATM Layer Specification.
- (Diriltén, 1977) Diriltén, H., Donaldson, R., 1977. Topological design of distributed data communication networks using linear regression clustering. *IEEE Transactions on Communications*, 25, 1083-1092.
- (El-Alfy, 2006) El-Alfy, E.-S.M., "MPLS Network Topology Design Using Genetic Algorithms,". *IEEE International Conference on Computer Systems and Applications*, 2006, 1059-1065.
- (Elbaum, 1996) Elbaum, R., Sidi, M., 1996. Topological Design of Local-Area Networks Using Genetic Algorithms. *IEEE/ACM Trans. on Networking*, 4, 5, 766–778.
- (Eremin, 2005) Eremin, A., Ajili, F., Rodošek, R., 2005. A Set-based Approach to the Optimal IGP Weight Setting Problem. *INOC 2005*, 2, 386-392, Lisbon.
- (Ericsson, 2002) Ericsson, M., Resende, M.G.C., Pardalos, P.M., 2002. A Genetic Algorithm for the Weight Setting Problem in OSPF Routing. *Journal of Combinatorial Optimization*, 6, 299-333.
- (Fortz, 2000) Fortz, B., Thorup, M., 2000. Increasing Internet Capacity using Local Search. Technical Report, AT&T Labs Research. Preliminary short version of this paper published as: Internet Traffic Engineering by Optimizing OSPF Weights. *IEEE INFOCOM 2000*.

- (Fortz, 2002) Fortz, B., Thorup, M., 2002. Optimizing OSPF/IS-IS Weights in a Changing World. *IEEE Journal on Selected Areas in Communications*, 20, 4.
- (Gajowniczek, 2000) Gajowniczek, P., Pióro, M., Szentesi, A., Harmatos, J., Jüttner, A., 2000. Solving an ospf routing problem with simulated allocation. *First Polish-German Teletraffic Symposium*, 177–184, Dresden.
- (Garey, 1979) Garey, M.R., Johnson, D.S., 1979. Computers and Intractability – A Guide to the Theory of NP-Completeness, W. H. Freeman and Company.
- (Gerla, 1977) Gerla, M., Kleinrock, L., 1977. On the topological design of distributed computer networks. *IEEE Transactions on Communications*, 25, 48-60.
- (Gerla, 1989) Gerla, M., Monteiro, J., Pazos, R., 1989. Topology design and bandwidth allocation in ATM nets. *IEEE Journal on Selected Areas in Communications*, 7, 8, 1253-1262.
- (Gouveia, 2003) Gouveia, L., Patrício, P., de Sousa, A., Valadas, R., 2003. MPLS over WDM Network Design with Packet Level QoS Constraints based on ILP Models. *IEEE INFOCOM 2003*.
- (Guérin, 1991) Guérin, R., Ahmadi, H., Naghshineh, M., 1991. Equivalent capacity and its application to bandwidth allocation in high-speed networks. *IEEE J. Select. Areas Commun.*, 9, 968–981.
- (Handel, 1994) Handel, R., Manfred, H., Schroder, S., 1994. ATM Networks: Concepts, Protocols, Applications. Addison-Wesley Publishing company Inc..
- (Held, 1970) Held, M., Karp, R., 1970. The travelling-salesman problem and minimum spanning trees. *Operations Research* 18, 1138-1162.
- (Held, 1974) Held, M., Wolfe, P., Crowder, H., 1974. Validation of subgradient optimisation. *Mathematical Programming* 6, 62-88.

- (Holmberg, 2004) Holmberg, K., Yuan, D., 2004. Optimization of Internet Protocol Network Design and Routing. *Networks*, 43, 1, 39-53.
- (Jamoussi, 2002) Jamoussi, B., et al, 2002. Constraint Based LSP Setup using LDP. IETF RFC 3212.
- (Jüttner, 2001) Jüttner, A., Szviatovszki, B., Mécs, I., Rajkó, Z., 2001. Lagrange Relaxation Based Method for the QoS Routing Problem. INFOCOM 2001. Proceedings IEEE, 2, 859-868.
- (Katz, 2003) Katz, D., Kompella, K., Yeung, D., 2003. Traffic Engineering (TE) Extensions to OSPF version 2. IETF RFC 3630.
- (Kershenbaum, 1991) Kershenbaum, A., Kermani, P., Grover, G., 1991. MENTOR an algorithm for mesh network topological optimization and routing. *IEEE Transactions on Communications*, 39, 4, 503-513.
- (Lopes, 2001a) Lopes, C., 2001. Estudo de Heurísticas para o Dimensionamento de Redes de Telecomunicações Multi-Serviço. Dissertação de Mestrado, Universidade de Aveiro.
- (Lopes, 2001b) Lopes, C., de Sousa, A., Valadas, R., 2001. Heuristics for dimensioning large-scale MPLS networks. *Internet Performance and Control of Network Systems II*, Proceedings of SPIE, 4523, 27-34.
- (Lopes, 2005a) Lopes, C., de Sousa, A., Gouveia, L., 2005. Combined Link Dimensioning and Weight Assignment of Minimum Weight Routing Networks. NGI 2005, Roma, Itália.
- (Lopes, 2005b) Lopes, C., de Sousa, A. F., 2005. Heuristics for the MPLS Network Design with Single Path Minimum Weight Routing. *The Third International Conference on Performance Modelling and Evaluation of Heterogeneous Networks HET-NETs'2005*, West Yorkshire, UK, 48.1-48.10.
- (Magnanti, 1995) Magnanti, T.L., Mirchandani, P.B., Vachani, R., 1995. Modeling and Solving the Two-Facility Capacitated Network Loading Problem. *Operations Research*, 43, 142-156.

- (Mital, 1983) Mital, K. V., 1983. *Optimisation Methods*. Wiley Eastern Limited, 2^a Edição.
- (Mitra, 1996) Mitra, D., Morrison, J., Ramakrishnan, K., 1996. ATM network design and optimization: a multirate loss network framework. *IEEE/ACM Transactions on Networking*, 4, 4, 531-543.
- (Moy, 1998) Moy, J., 1998. OSPF Version 2. IETF RFC 2328.
- (Patrão, 2003) Patrão, J., 2003. Aspectos de dimensionamento de redes MPLS: optimização de nós e ligações. Dissertação de Mestrado, Universidade de Aveiro.
- (Pióro, 2001) Pióro, M., Myslek, A., Juttner, A., Harmatos, J., Szentesi, A., 2001. Topological design of MPLS networks. Global Telecommunications Conference, GLOBECOM '01, San Antonio.
- (Pióro, 2002) Pióro, M., Szentesi, Á., Harmatos, J., Juttner, A., Gajowniczek, P., Kozdrowski, S., 2002. On Open Shortest Path First Related Network Optimization Problems. *Performance Evaluation*, 42, 201-223.
- (Pióro, 2004) Pióro, M., Medhi, D., 2004. *Routing, Flow, and Capacity Design of Communication and Computer Networks*. Morgan Kaufmann Publishers (Elsevier).
- (Ramakrishnan, 2001) Ramakrishnan, K. G., Rodrigues, M. A., 2001. Optimal routing in shortest-path data networks. *Bell Labs Technical Journal*, 6, 1, 117–138.
- (Ramalingam, 1996) Ramalingam, G., Reps, T., 1996. An incremental algorithm for a generalization of the shortest-path problem. *Journal of Algorithms*, 21, 2, 267-305.
- (Rekhter, 1997) Rekhter, Y., Davie, B., Katz, D., Rose, E., Swallow, E., Swallow, G., 1997. Cisco Systems' Tag Switching Architecture – Overview. IETF RFC 2105.
- (Rodošek, 2004) Rodošek, R., Ajili, F., Eremin, A., 2004. Mathematical models for the igp metric optimisation problem with no flow splitting.

- Technical Report IC-PARC-04-1, IC-Parc, Imperial College London.
- (Rosen, 2001) Rosen, E., Viswanathan, A., Callon, R., 2001. Multiprotocol Label Switching Architecture. IETF RFC 3031.
- (Semeria, 2000) Semeria, C., 2000. Traffic Engineering for the New Public Network. White paper, Juniper Networks.
- (Sousa, 1999) de Sousa, A., Valadas, R., Cardoso, L., Duarte, A., 1999. ATM Network Dimensioning for Mixed Symmetrical and Asymmetrical Services with Dynamic Reconfiguration in a Multi-Network Provider Environment. Proc. Third IFIP Workshop on Traffic Management and Design of ATM Networks, 5/1-5/15, London.
- (Sousa, 2001) de Sousa, A., 2001. Dimensionamento de redes ATM Multi-Serviço. Tese de Doutoramento, Universidade de Aveiro.
- (Sridharan, 2003) Sridharan, A., Guerin, R., Diot, C., 2003. Achieving Near-Optimal Traffic Engineering Solutions for Current OSPF/IS-IS Networks. IEEE/ACM Transactions on Networking, 13, 2, 234-247.
- (Tang, 1998) Tang, K., Ko, K., Man, K., Kwong, S., 1998. Topology Design and Bandwidth Allocation of Embedded ATM Networks Using Genetic Algorithm. IEEE Communications Letters, 2, 6, 171-173.
- (Thompson, 1998) Thompson, D., Bilbro, G., 1998. Comparison of two swap heuristics with a genetic algorithm for the design of an ATM network. Proc. 7th Int'l Conf. Computer Communications and Networks, Lafayette, Louisiana, Oct. 12-15, 833-837.
- (Thompson, 2000) Thompson, D., Bilbro, G., 2000. Comparison of a Genetic Algorithm with a Simulated Annealing Algorithm for the Design of an ATM Network. IEEE Communications Letters, 4, 8, 267-269.
- (Tomaszewski, 2005) Tomaszewski, A., Pióro, M., Dzida, M., Zagożdżon, M., 2005. Optimization of Administrative Weights in IP Networks Using the Branch-And-Cut Approach. INOC 2005, 2, 393-400, Lisbon.

- (Wang, 2001) Wang, Y., Wang, Z., Zhang, L., 2001. Internet Traffic Engineering without Full Mesh Overlaying. Proceedings of INFOCOM 2001, Anchorage, Alaska.
- (Xiao, 2000) Xiao, X., Hannan, A., Bailey, B., Ni, L., 2000. Traffic Engineering with MPLS in the Internet. *IEEE Network Magazine*, March, 28-33.
- (Yuan, 2002) Yuan, X., 2002. Heuristic Algorithms for Multiconstrained Quality-of-Service Routing. *IEEE/ACM Transactions on Networking*, 10, 2, 244-256.

Lista de acrónimos

| | |
|---------|---|
| ATM | <i>Asynchronous Transfer Mode</i> |
| CR-LDP | <i>Constraint based-Label Distribution Protocol</i> |
| ECMP | <i>Equal Cost Multi-Pathing</i> |
| FEC | <i>Forwarding Equivalent Class</i> |
| IGP | <i>Interior Gateway Protocol</i> |
| IP | <i>Internet Protocol</i> |
| IS-IS | <i>Intermediate System to Intermediate System</i> |
| ISP | <i>Internet Service Provider</i> |
| ITU-T | <i>International Telecommunication Union Telecommunication Standardization Sector</i> |
| LER | <i>Label Edge Router</i> |
| LDP | <i>Label Distribution Protocol</i> |
| LSA | <i>Link State Advertisement</i> |
| LSP | <i>Label-Switched Path</i> |
| LSR | <i>Label-Switching Router</i> |
| MILP | <i>Mixed Integer Linear Program</i> |
| MPLS | <i>MultiProtocol Label Switching</i> |
| NNI | <i>Network-Network Interface</i> |
| OSPF | <i>Open Shortest Path First</i> |
| OSPF-TE | <i>Open Shortest Path First-Traffic Extension</i> |
| PNNI | <i>Private Network-to-Network Interface</i> |
| PVC | <i>Permanent Virtual Connection</i> |

| | |
|---------|--|
| QoS | Qualidade de Serviço |
| RIP | <i>Routing Information Protocol</i> |
| RSVP | <i>Resource Reservation Protocol</i> |
| RSVP-TE | <i>Resource Reservation Protocol-Traffic Extension</i> |
| SVC | <i>Switched Virtual Connection</i> |
| UNI | <i>User-Network Interface</i> |
| VoIP | <i>Voice over IP</i> |
| VCC | <i>Virtual Channel Connection</i> |
| VCI | <i>Virtual Channel Identifier</i> |
| VPC | <i>Virtual Path Connection</i> |
| VPI | <i>Virtual Path Identifier</i> |

Anexo A – Tabelas de resultados

As tabelas seguintes (Tabela 39 a Tabela 59) contêm os resultados do problema de dimensionamento com encaminhamento sem restrições para os cenários das redes de 30 e 50 nós apresentados na secção 3.4.1. São apresentados todos os resultados das técnicas heurísticas consideradas na secção 3.3. Cada tabela representa os resultados de uma técnica heurística. Se a técnica depender de um conjunto de parâmetros, então é apresentada uma tabela distinta para cada conjunto de parâmetros seleccionado. A primeira linha indica em cada coluna o caso de estudo a que correspondem os resultados dessa coluna. As linhas restantes indicam os melhores custos absolutos obtidos em cada uma das corridas de 5 minutos para as redes de 30 nós e de 30 minutos para as redes de 50 nós.

Tabela 39: Resultados da heurística construtiva para as redes de 30 e 50 nós (HC)

| | A30L | B30L | A30M | B30M | A30H | B30H | A50L | B50L | A50M | B50M | A50H | B50H |
|----|-------|-------|-------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 1 | 50750 | 51395 | 90470 | 107175 | 162240 | 167510 | 113225 | 104025 | 207790 | 198155 | 282090 | 285615 |
| 2 | 50500 | 50750 | 89815 | 107785 | 162095 | 168915 | 112870 | 103545 | 208425 | 195415 | 282475 | 285005 |
| 3 | 50880 | 51415 | 89255 | 107955 | 162405 | 169985 | 112290 | 103870 | 208905 | 196860 | 281445 | 285535 |
| 4 | 51200 | 50490 | 90555 | 108045 | 161840 | 168445 | 113535 | 104195 | 207010 | 196280 | 280705 | 283690 |
| 5 | 51035 | 50750 | 90175 | 107075 | 161320 | 168875 | 113555 | 103900 | 206185 | 196400 | 284425 | 285035 |
| 6 | 51245 | 50895 | 90030 | 107770 | 161985 | 168265 | 113530 | 103395 | 207940 | 195325 | 283195 | 285700 |
| 7 | 49645 | 50520 | 89655 | 107285 | 163740 | 169535 | 112910 | 104285 | 205870 | 197235 | 282735 | 283050 |
| 8 | 50630 | 51165 | 89030 | 108160 | 163325 | 168220 | 114265 | 104305 | 208250 | 198095 | 281820 | 284590 |
| 9 | 51135 | 50705 | 89770 | 108185 | 162235 | 169065 | 112265 | 104425 | 206940 | 198430 | 282850 | 285275 |
| 10 | 51045 | 51185 | 89860 | 108520 | 162495 | 169370 | 113650 | 103490 | 206865 | 195060 | 281810 | 285170 |

Tabela 40: Resultados da heurística construtiva com heurística de melhoramento I, NI=10, NB=5 (HCMI)

| | A30L | B30L | A30M | B30M | A30H | B30H | A50L | B50L | A50M | B50M | A50H | B50H |
|----|-------|-------|-------|--------|--------|--------|-------|-------|--------|--------|--------|--------|
| 1 | 46005 | 45900 | 86135 | 106910 | 164345 | 170365 | 94885 | 87245 | 181470 | 174375 | 262975 | 275450 |
| 2 | 46105 | 45230 | 86650 | 105165 | 162640 | 169990 | 94630 | 87305 | 180880 | 172615 | 263015 | 272835 |
| 3 | 45605 | 45740 | 85895 | 106220 | 163575 | 170530 | 94840 | 87135 | 181325 | 173635 | 262700 | 269850 |
| 4 | 45840 | 45545 | 86720 | 106290 | 163675 | 170995 | 95830 | 87435 | 180865 | 175340 | 261470 | 275355 |
| 5 | 45460 | 45995 | 84975 | 105440 | 164095 | 169650 | 96440 | 87445 | 180695 | 174565 | 263665 | 274360 |
| 6 | 45695 | 45995 | 85330 | 105790 | 163935 | 169695 | 95015 | 87635 | 181235 | 174085 | 263615 | 274205 |
| 7 | 46025 | 45910 | 85425 | 105420 | 163825 | 170725 | 95555 | 87625 | 179885 | 174710 | 264300 | 275250 |
| 8 | 45880 | 46045 | 85595 | 106555 | 163560 | 168550 | 96065 | 86980 | 179755 | 173550 | 263525 | 274840 |
| 9 | 45755 | 45775 | 86470 | 103765 | 163890 | 169300 | 94145 | 87795 | 180890 | 174230 | 264050 | 274770 |
| 10 | 45780 | 46065 | 86395 | 105010 | 163160 | 170045 | 95525 | 87770 | 179940 | 173460 | 262705 | 274635 |

Tabela 41: Resultados da heurística construtiva com heurística de melhoramento I, NI=10, NB=10/30 (HCMI)

| | A30L | B30L | A30M | B30M | A30H | B30H | A50L | B50L | A50M | B50M | A50H | B50H |
|----|-------|-------|-------|--------|--------|--------|-------|-------|--------|--------|--------|--------|
| 1 | 45610 | 46025 | 85945 | 105430 | 163440 | 170755 | 95705 | 87555 | 180555 | 172900 | 264575 | 274755 |
| 2 | 46060 | 45435 | 85990 | 105520 | 163545 | 170785 | 94005 | 86355 | 181990 | 174000 | 263810 | 275020 |
| 3 | 46025 | 45890 | 86435 | 105375 | 162730 | 170245 | 95905 | 86905 | 179350 | 172515 | 263110 | 272895 |
| 4 | 45830 | 45450 | 86555 | 105640 | 163265 | 169170 | 96285 | 87380 | 177560 | 174390 | 263655 | 275555 |
| 5 | 46230 | 45990 | 86485 | 106445 | 164350 | 170865 | 94640 | 87260 | 181085 | 173330 | 263070 | 274770 |
| 6 | 45650 | 45085 | 85735 | 105410 | 162975 | 169940 | 96085 | 87505 | 181515 | 173070 | 262120 | 272295 |
| 7 | 45815 | 45400 | 86320 | 106605 | 164475 | 168670 | 95545 | 86995 | 180030 | 174225 | 262925 | 272945 |
| 8 | 45840 | 45480 | 86555 | 105655 | 162995 | 170130 | 95485 | 87130 | 180940 | 174915 | 263800 | 275550 |
| 9 | 45605 | 45500 | 86535 | 106125 | 163835 | 171100 | 96390 | 87120 | 179280 | 174050 | 263075 | 275210 |
| 10 | 45680 | 46045 | 86555 | 106195 | 162625 | 169895 | 95410 | 87600 | 180585 | 174605 | 262600 | 270375 |

Tabela 42: Resultados da heurística construtiva com heurística de melhoramento I, NI=100, NB=5 (HCMI)

| | A30L | B30L | A30M | B30M | A30H | B30H | A50L | B50L | A50M | B50M | A50H | B50H |
|----|-------|-------|-------|--------|--------|--------|--------|-------|--------|--------|--------|--------|
| 1 | 50770 | 50700 | 89870 | 107625 | 162790 | 170235 | 105150 | 97575 | 205665 | 195025 | 281670 | 288510 |
| 2 | 50165 | 50550 | 89465 | 108110 | 162435 | 169810 | 105705 | 97685 | 204485 | 197005 | 284580 | 288480 |
| 3 | 50490 | 51170 | 90180 | 108395 | 163410 | 168675 | 104275 | 97785 | 204915 | 197750 | 284205 | 290050 |
| 4 | 50520 | 50915 | 90435 | 107965 | 164200 | 169890 | 105465 | 98060 | 205805 | 196135 | 285115 | 288920 |
| 5 | 50945 | 51255 | 90905 | 108320 | 162620 | 169720 | 105700 | 97950 | 204490 | 197370 | 284575 | 290020 |
| 6 | 51180 | 50680 | 90140 | 108890 | 163470 | 170815 | 104780 | 98280 | 204495 | 197315 | 284290 | 288675 |
| 7 | 50265 | 51130 | 90575 | 107885 | 164035 | 170085 | 103350 | 98135 | 204875 | 196390 | 283050 | 289075 |
| 8 | 50650 | 50955 | 89745 | 108985 | 162760 | 170070 | 105175 | 97660 | 206000 | 197145 | 284950 | 289525 |
| 9 | 50190 | 50935 | 90300 | 106910 | 163535 | 169745 | 103765 | 98140 | 204885 | 198230 | 284950 | 290215 |
| 10 | 51085 | 50165 | 90120 | 107985 | 163700 | 169915 | 105100 | 97420 | 206470 | 196565 | 284980 | 288580 |

Tabela 43: Resultados da heurística construtiva com heurística de melhoramento I, NI=100, NB=10/30 (HCMI)

| | A30L | B30L | A30M | B30M | A30H | B30H | A50L | B50L | A50M | B50M | A50H | B50H |
|----|-------|-------|-------|--------|--------|--------|--------|-------|--------|--------|--------|--------|
| 1 | 50905 | 51360 | 90525 | 108425 | 163510 | 169175 | 105050 | 98305 | 203655 | 196860 | 284060 | 287925 |
| 2 | 50215 | 50780 | 89875 | 108620 | 164390 | 169625 | 104380 | 97765 | 203195 | 196755 | 282700 | 287780 |
| 3 | 50890 | 50490 | 90460 | 108270 | 163995 | 170475 | 105475 | 97505 | 203870 | 196050 | 285395 | 286760 |
| 4 | 51210 | 51365 | 87940 | 107415 | 163060 | 169950 | 104595 | 96585 | 204205 | 193615 | 284975 | 289185 |
| 5 | 49920 | 51245 | 89980 | 107160 | 162850 | 170205 | 106455 | 98320 | 204585 | 197605 | 284300 | 288915 |
| 6 | 50730 | 50655 | 90540 | 108040 | 162930 | 170195 | 104535 | 96605 | 204995 | 194860 | 283025 | 288615 |
| 7 | 50745 | 50785 | 90490 | 107490 | 163020 | 169595 | 104910 | 98405 | 204310 | 197610 | 285140 | 288390 |
| 8 | 50900 | 50850 | 90560 | 108515 | 163335 | 169920 | 104255 | 97690 | 202200 | 197635 | 285355 | 288505 |
| 9 | 51305 | 50780 | 90440 | 108320 | 163650 | 169905 | 103375 | 97135 | 204225 | 197375 | 282805 | 288515 |
| 10 | 50700 | 50850 | 90820 | 109075 | 163800 | 169050 | 105575 | 98450 | 206245 | 197705 | 281295 | 288025 |

Tabela 44: Resultados da heurística construtiva com heurística de melhoramento II, NI=10 (HCMII)

| | A30L | B30L | A30M | B30M | A30H | B30H | A50L | B50L | A50M | B50M | A50H | B50H |
|----|-------|-------|-------|--------|--------|--------|--------|-------|--------|--------|--------|--------|
| 1 | 48700 | 47635 | 85725 | 104275 | 160705 | 166495 | 107040 | 97925 | 195375 | 183460 | 270860 | 274475 |
| 2 | 48555 | 47985 | 86490 | 104505 | 160920 | 166740 | 107180 | 97215 | 196125 | 185440 | 271200 | 272720 |
| 3 | 48565 | 48140 | 87190 | 105010 | 160980 | 166710 | 105370 | 96980 | 196535 | 185995 | 271235 | 274025 |
| 4 | 48610 | 47975 | 84335 | 104120 | 160280 | 166450 | 105235 | 96885 | 197170 | 185620 | 270870 | 274850 |
| 5 | 48615 | 47895 | 85535 | 103665 | 161455 | 166350 | 105975 | 96580 | 195910 | 185760 | 271475 | 273250 |
| 6 | 48655 | 47630 | 84370 | 105115 | 160230 | 167430 | 104950 | 96740 | 193820 | 184725 | 272805 | 274605 |
| 7 | 48115 | 47820 | 86520 | 104450 | 160740 | 166180 | 105925 | 97580 | 195770 | 186365 | 272540 | 273840 |
| 8 | 47745 | 48440 | 87265 | 104690 | 160245 | 166775 | 105850 | 96020 | 197015 | 186145 | 271300 | 271195 |
| 9 | 47770 | 47500 | 86630 | 104900 | 159995 | 166555 | 106880 | 97070 | 193805 | 185485 | 273005 | 273595 |
| 10 | 48370 | 48305 | 86960 | 103890 | 160540 | 167450 | 106140 | 97110 | 197015 | 186825 | 270035 | 273070 |

Tabela 45: Resultados da heurística construtiva com heurística de melhoramento II, NI=100 (HCMII)

| | A30L | B30L | A30M | B30M | A30H | B30H | A50L | B50L | A50M | B50M | A50H | B50H |
|----|-------|-------|-------|--------|--------|--------|--------|-------|--------|--------|--------|--------|
| 1 | 46220 | 47060 | 84490 | 103370 | 159085 | 165915 | 103195 | 93785 | 190010 | 179900 | 261030 | 269215 |
| 2 | 47325 | 47425 | 84045 | 103100 | 158280 | 165430 | 102300 | 94780 | 190005 | 180375 | 263530 | 269440 |
| 3 | 47265 | 46930 | 84415 | 102165 | 159310 | 166170 | 102790 | 93945 | 190155 | 181205 | 264995 | 267360 |
| 4 | 47305 | 46875 | 83625 | 103185 | 158845 | 165865 | 103225 | 93795 | 190105 | 180955 | 265410 | 269425 |
| 5 | 46730 | 47400 | 84580 | 101395 | 158785 | 165360 | 103135 | 93845 | 190045 | 181725 | 265380 | 268215 |
| 6 | 47255 | 47125 | 85305 | 104140 | 158585 | 164755 | 102275 | 94485 | 190020 | 181860 | 264400 | 269610 |
| 7 | 47475 | 47500 | 84475 | 102325 | 158345 | 164915 | 102390 | 93675 | 188535 | 180970 | 264505 | 267250 |
| 8 | 47430 | 46285 | 85200 | 103230 | 159550 | 165520 | 102845 | 94405 | 187860 | 181945 | 263770 | 269130 |
| 9 | 47325 | 46900 | 84500 | 101855 | 159040 | 165860 | 103460 | 94335 | 189820 | 181260 | 265200 | 267315 |
| 10 | 47185 | 47210 | 84635 | 103460 | 158640 | 165900 | 103070 | 93450 | 190190 | 181610 | 264240 | 267960 |

Tabela 46: Resultados da heurística lagrangeana para os casos de estudo de 30 e 50 nós (HL)

| | A30L | B30L | A30M | B30M | A30H | B30H | A50L | B50L | A50M | B50M | A50H | B50H |
|----|-------|-------|-------|--------|--------|--------|--------|-------|--------|--------|--------|--------|
| 1 | 48945 | 46700 | 91690 | 104190 | 166675 | 171740 | 98730 | 97080 | 174840 | 179510 | 244235 | 259960 |
| 2 | 47260 | 46150 | 83130 | 98045 | 159165 | 162655 | 97680 | 88865 | 171845 | 163450 | 235400 | 243625 |
| 3 | 49705 | 47470 | 82200 | 98090 | 155440 | 161945 | 96890 | 89625 | 166405 | 159580 | 228615 | 236600 |
| 4 | 50500 | 47305 | 85970 | 101485 | 157145 | 164375 | 98730 | 93575 | 169375 | 162810 | 232360 | 239425 |
| 5 | 51830 | 49690 | 85775 | 100845 | 158220 | 164405 | 100295 | 92740 | 169710 | 163180 | 232665 | 239715 |
| 6 | 54205 | 51145 | 86325 | 101125 | 157965 | 164540 | 100785 | 94140 | 169155 | 164820 | 232020 | 240040 |
| 7 | 52685 | 49135 | 84775 | 99780 | 158020 | 164345 | 101255 | 94845 | 171045 | 165190 | 232990 | 238980 |
| 8 | 53045 | 50465 | 86090 | 100725 | 158330 | 164180 | 98730 | 92740 | 170700 | 164325 | 233150 | 238880 |
| 9 | 54750 | 50090 | 86150 | 101950 | 158210 | 164765 | 101160 | 93300 | 170045 | 164360 | 232710 | 240070 |
| 10 | 54665 | 51145 | 86445 | 101125 | 157985 | 164715 | 102370 | 94360 | 169155 | 164890 | 232575 | 239715 |
| 11 | 52315 | 48770 | 83570 | 99885 | 156485 | 164080 | 98345 | 92015 | 167820 | 162055 | 230385 | 237085 |
| 12 | 51040 | 48455 | 84640 | 100400 | 157505 | 164175 | 98730 | 91790 | 168890 | 162550 | 231845 | 238460 |
| 13 | 50285 | 49180 | 84625 | 98625 | 157140 | 163510 | 99005 | 92490 | 169265 | 163035 | 231450 | 238015 |
| 14 | 52600 | 49245 | 84980 | 100555 | 157540 | 163585 | 99445 | 92540 | 169155 | 162630 | 231435 | 238300 |

Tabela 47: Resultados da heurística lagrangeana com a heurística de melhoria I, NI=10, NB=5 (HLMI)

| | A30L | B30L | A30M | B30M | A30H | B30H | A50L | B50L | A50M | B50M | A50H | B50H |
|----|-------|-------|-------|-------|--------|--------|-------|-------|--------|--------|--------|--------|
| 1 | 45770 | 44900 | 85450 | 99475 | 164750 | 170190 | 91150 | 87975 | 167205 | 166885 | 234435 | 251570 |
| 2 | 45625 | 44440 | 80780 | 96215 | 157820 | 161725 | 91010 | 83805 | 165200 | 161010 | 233495 | 241805 |
| 3 | 44825 | 44110 | 78695 | 95385 | 152955 | 158715 | 89240 | 83515 | 159130 | 153715 | 223830 | 230925 |
| 4 | 45595 | 44605 | 78395 | 94455 | 152455 | 157905 | 88590 | 83845 | 158215 | 154610 | 223770 | 229995 |
| 5 | 45600 | 44890 | 78595 | 94160 | 152765 | 157145 | 89260 | 83945 | 158815 | 154025 | 222755 | 230695 |
| 6 | 45385 | 44950 | 77520 | 94265 | 153070 | 158065 | 88955 | 83470 | 157600 | 154720 | 223830 | 230220 |
| 7 | 45655 | 44585 | 78255 | 94540 | 151530 | 158020 | 89265 | 84015 | 158635 | 154545 | 223440 | 230540 |
| 8 | 45565 | 45115 | 78305 | 94585 | 152640 | 158025 | 89055 | 83115 | 158120 | 154290 | 224060 | 229445 |
| 9 | 45680 | 45045 | 78460 | 93860 | 152400 | 158315 | 89345 | 83870 | 157985 | 153975 | 223575 | 230080 |
| 10 | 45380 | 44410 | 78390 | 95040 | 151550 | 158035 | 89050 | 83805 | 158075 | 154100 | 223465 | 230305 |
| 11 | 45270 | 43795 | 78245 | 94655 | 151840 | 157595 | 88610 | 82860 | 158880 | 153800 | 222750 | 230660 |
| 12 | 45625 | 44165 | 78360 | 95060 | 152895 | 158105 | 89095 | 83535 | 158505 | 154460 | 223325 | 230420 |
| 13 | 45390 | 43850 | 77970 | 94430 | 152605 | 158435 | 89105 | 83390 | 158985 | 154225 | 223485 | 230590 |
| 14 | 45400 | 44610 | 78400 | 94875 | 153035 | 158740 | 88540 | 83175 | 158415 | 153860 | 222525 | 230420 |

Tabela 48: Resultados da heurística lagrangeana com a heurística de melhoria I, NI=10, NB=10/30 (HLMI)

| | A30L | B30L | A30M | B30M | A30H | B30H | A50L | B50L | A50M | B50M | A50H | B50H |
|----|-------|-------|-------|-------|--------|--------|-------|-------|--------|--------|--------|--------|
| 1 | 45620 | 44405 | 85180 | 99745 | 162910 | 168435 | 92195 | 87355 | 167815 | 168855 | 238870 | 250805 |
| 2 | 45500 | 44200 | 80510 | 97065 | 158730 | 162310 | 90065 | 85020 | 167735 | 160440 | 232370 | 241895 |
| 3 | 44900 | 43735 | 78750 | 95175 | 152425 | 158750 | 89490 | 83065 | 159155 | 154320 | 224000 | 230615 |
| 4 | 44595 | 43860 | 77865 | 94915 | 152635 | 158015 | 89100 | 83575 | 158380 | 154485 | 223965 | 230025 |
| 5 | 45385 | 44890 | 78275 | 93995 | 153085 | 157930 | 89245 | 84005 | 158535 | 154110 | 223630 | 230860 |
| 6 | 45290 | 45150 | 78215 | 93935 | 152570 | 157695 | 89020 | 83330 | 158025 | 154575 | 223235 | 230070 |
| 7 | 45530 | 45025 | 78445 | 94795 | 152205 | 158070 | 88945 | 83980 | 158875 | 153760 | 223580 | 230325 |
| 8 | 45760 | 44930 | 78230 | 95145 | 152405 | 158170 | 89000 | 83975 | 158460 | 154510 | 223940 | 230495 |
| 9 | 45755 | 45285 | 78360 | 94705 | 151835 | 158025 | 89115 | 84085 | 158690 | 154650 | 223450 | 230765 |
| 10 | 45270 | 45435 | 78330 | 94900 | 152195 | 157915 | 88660 | 84010 | 158685 | 154505 | 224190 | 230700 |
| 11 | 45610 | 44425 | 78265 | 94545 | 152735 | 158455 | 88500 | 83565 | 158650 | 154420 | 223265 | 230310 |
| 12 | 45265 | 44095 | 78640 | 94510 | 152570 | 157835 | 89125 | 83410 | 159040 | 154125 | 223605 | 230695 |
| 13 | 45545 | 44165 | 77965 | 94455 | 152735 | 157485 | 89185 | 83350 | 158125 | 153400 | 223835 | 230225 |
| 14 | 45680 | 44895 | 78595 | 94170 | 152465 | 158295 | 88970 | 83805 | 158270 | 154750 | 223130 | 230575 |

Tabela 49: Resultados da heurística lagrangeana com a heurística de melhoramento I, NI=100, NB=5 (HLMI)

| | A30L | B30L | A30M | B30M | A30H | B30H | A50L | B50L | A50M | B50M | A50H | B50H |
|----|-------|-------|-------|--------|--------|--------|-------|-------|--------|--------|--------|--------|
| 1 | 50375 | 49255 | 90360 | 104190 | 164330 | 170045 | 98140 | 95760 | 174840 | 179510 | 244235 | 259960 |
| 2 | 50285 | 49415 | 85760 | 100655 | 162470 | 168250 | 96370 | 90750 | 176615 | 167385 | 243740 | 252215 |
| 3 | 50935 | 49245 | 85100 | 100555 | 157715 | 163585 | 93915 | 86870 | 169155 | 162630 | 231435 | 239560 |
| 4 | 50500 | 47305 | 85970 | 101485 | 157145 | 164375 | 91960 | 86630 | 167175 | 162810 | 232360 | 239425 |
| 5 | 50565 | 49690 | 85775 | 100845 | 158220 | 164405 | 91575 | 85665 | 169255 | 162980 | 232665 | 239715 |
| 6 | 51130 | 50105 | 86325 | 101125 | 157965 | 164540 | 91095 | 86015 | 167830 | 164375 | 232020 | 240040 |
| 7 | 50290 | 49135 | 84775 | 99780 | 158020 | 164345 | 91065 | 86395 | 167390 | 164645 | 232990 | 238980 |
| 8 | 50835 | 50195 | 86090 | 100725 | 158330 | 164180 | 91235 | 86400 | 169175 | 164325 | 233150 | 238880 |
| 9 | 50990 | 50090 | 86150 | 101950 | 158210 | 164765 | 91200 | 86635 | 169490 | 163510 | 232710 | 240070 |
| 10 | 50970 | 50260 | 86445 | 101125 | 157985 | 164715 | 90865 | 86460 | 169005 | 163510 | 232575 | 239715 |
| 11 | 51090 | 50625 | 85565 | 101575 | 158285 | 164925 | 92420 | 85960 | 168930 | 162905 | 232720 | 239045 |
| 12 | 50085 | 49255 | 88920 | 104170 | 163470 | 169245 | 98730 | 93970 | 174840 | 179425 | 244235 | 259960 |
| 13 | 50285 | 49415 | 85760 | 100655 | 162470 | 168250 | 97355 | 90035 | 176615 | 167385 | 243740 | 252215 |
| 14 | 50770 | 49245 | 85100 | 100555 | 157715 | 163585 | 92025 | 87780 | 169155 | 162630 | 231435 | 239560 |

Tabela 50: Resultados da heurística lagrangeana com a heurística de melhoramento I, NI=100, NB=10/30 (HLMI)

| | A30L | B30L | A30M | B30M | A30H | B30H | A50L | B50L | A50M | B50M | A50H | B50H |
|----|-------|-------|-------|--------|--------|--------|-------|-------|--------|--------|--------|--------|
| 1 | 50880 | 49255 | 89940 | 104190 | 161630 | 169715 | 96770 | 97080 | 174840 | 178485 | 244235 | 259960 |
| 2 | 50285 | 49415 | 85760 | 100655 | 162470 | 168250 | 97650 | 90375 | 176615 | 167385 | 243740 | 252215 |
| 3 | 50800 | 49245 | 85100 | 100555 | 157715 | 163585 | 92685 | 86370 | 169155 | 162630 | 231435 | 239560 |
| 4 | 50500 | 47305 | 85970 | 101485 | 157145 | 164375 | 91775 | 86375 | 169375 | 162810 | 232360 | 239425 |
| 5 | 50565 | 49690 | 85775 | 100845 | 158220 | 164405 | 91650 | 85490 | 169365 | 163180 | 232665 | 239715 |
| 6 | 50970 | 50390 | 86325 | 101125 | 157965 | 164540 | 90600 | 85580 | 168985 | 163885 | 232020 | 240040 |
| 7 | 50565 | 49135 | 84775 | 99780 | 158020 | 164345 | 89995 | 86345 | 168705 | 164965 | 232990 | 238980 |
| 8 | 51245 | 50465 | 86090 | 100725 | 158330 | 164180 | 90490 | 86735 | 167355 | 164325 | 233150 | 238880 |
| 9 | 50730 | 50090 | 86150 | 101950 | 158210 | 164765 | 90495 | 86725 | 168160 | 164360 | 232710 | 240070 |
| 10 | 50470 | 50920 | 86445 | 101125 | 157985 | 164715 | 90435 | 86135 | 169155 | 163555 | 232575 | 239715 |
| 11 | 50475 | 50520 | 85565 | 101575 | 158285 | 164925 | 91505 | 86215 | 169295 | 162905 | 232720 | 239045 |
| 12 | 50310 | 49255 | 88920 | 104170 | 162260 | 169680 | 96725 | 94230 | 174840 | 178805 | 244235 | 259960 |
| 13 | 50285 | 49415 | 85760 | 100655 | 162470 | 168250 | 93110 | 91005 | 176615 | 167385 | 243740 | 252215 |
| 14 | 51170 | 49245 | 85100 | 100555 | 157715 | 163585 | 92045 | 87055 | 169155 | 162630 | 231435 | 239560 |

Tabela 51: Resultados da heurística lagrangeana com a heurística de melhoramento II, NI=10 (HLMII)

| | A30L | B30L | A30M | B30M | A30H | B30H | A50L | B50L | A50M | B50M | A50H | B50H |
|----|-------|-------|-------|--------|--------|--------|-------|-------|--------|--------|--------|--------|
| 1 | 46325 | 44140 | 84530 | 101545 | 160940 | 167550 | 93425 | 93620 | 172585 | 172215 | 239520 | 253840 |
| 2 | 45825 | 43895 | 79755 | 95560 | 156280 | 160305 | 92380 | 85340 | 165515 | 161295 | 234145 | 241825 |
| 3 | 45020 | 43605 | 78195 | 94415 | 152210 | 157570 | 89920 | 83050 | 160160 | 155235 | 224425 | 231850 |
| 4 | 45790 | 44200 | 78420 | 93960 | 152240 | 157655 | 89375 | 83930 | 158360 | 155105 | 224420 | 230830 |
| 5 | 45665 | 43985 | 78380 | 94120 | 152000 | 157195 | 89100 | 83395 | 158225 | 155105 | 224410 | 231640 |
| 6 | 45850 | 44400 | 78030 | 94445 | 151430 | 157665 | 89120 | 83595 | 158050 | 154930 | 224180 | 231250 |
| 7 | 45785 | 44365 | 78180 | 94020 | 151040 | 158000 | 88730 | 83570 | 157580 | 154175 | 223715 | 231185 |
| 8 | 45755 | 44250 | 78690 | 94115 | 152100 | 157520 | 89135 | 83935 | 158645 | 154560 | 224605 | 231275 |
| 9 | 45920 | 44100 | 78415 | 94005 | 151790 | 157310 | 89495 | 84100 | 158825 | 155290 | 223545 | 231235 |
| 10 | 45565 | 44395 | 77840 | 94485 | 151755 | 157815 | 89580 | 83235 | 158535 | 155265 | 224180 | 231315 |
| 11 | 45245 | 43555 | 77570 | 94430 | 151620 | 157585 | 89530 | 83735 | 158360 | 154780 | 223125 | 231300 |
| 12 | 45365 | 43865 | 77850 | 94280 | 151950 | 157720 | 89055 | 83175 | 158905 | 155040 | 223945 | 230700 |
| 13 | 45375 | 44290 | 78580 | 93820 | 151790 | 157545 | 89530 | 83910 | 158290 | 155030 | 224190 | 231720 |
| 14 | 45240 | 44315 | 78520 | 94280 | 151670 | 157545 | 88850 | 83035 | 158750 | 155145 | 224295 | 231370 |

Tabela 52: Resultados da heurística lagrangeana com a heurística de melhoramento II, NI=100 (HLMII)

| | A30L | B30L | A30M | B30M | A30H | B30H | A50L | B50L | A50M | B50M | A50H | B50H |
|----|-------|-------|-------|--------|--------|--------|-------|-------|--------|--------|--------|--------|
| 1 | 45910 | 45360 | 84875 | 100500 | 158390 | 165265 | 96750 | 91905 | 171545 | 171990 | 235895 | 255505 |
| 2 | 45515 | 44450 | 81210 | 96690 | 157180 | 161565 | 92240 | 85505 | 167280 | 163405 | 233035 | 243070 |
| 3 | 45355 | 43840 | 79320 | 95140 | 152130 | 158480 | 91370 | 83740 | 160640 | 156085 | 224840 | 232010 |
| 4 | 45805 | 43815 | 78445 | 94040 | 152260 | 158415 | 89660 | 84145 | 159830 | 155770 | 225020 | 232000 |
| 5 | 45890 | 44650 | 79365 | 94920 | 152565 | 158040 | 89945 | 84500 | 158695 | 155565 | 224825 | 231465 |
| 6 | 45710 | 44510 | 78685 | 94280 | 152290 | 158055 | 90170 | 83730 | 159025 | 155470 | 224440 | 232240 |
| 7 | 45140 | 43840 | 78670 | 94645 | 152010 | 157445 | 89500 | 83995 | 158430 | 156240 | 224605 | 232530 |
| 8 | 45255 | 44205 | 78755 | 94520 | 152815 | 158065 | 90015 | 83910 | 159130 | 155560 | 224345 | 232250 |
| 9 | 45940 | 44230 | 78785 | 94820 | 152440 | 157870 | 88815 | 84805 | 159400 | 155240 | 224060 | 231770 |
| 10 | 45560 | 44295 | 78495 | 94920 | 152085 | 158410 | 90050 | 83880 | 158990 | 155085 | 225185 | 232165 |
| 11 | 45890 | 44400 | 78205 | 95105 | 152265 | 156970 | 90630 | 83945 | 159940 | 155595 | 224020 | 231220 |
| 12 | 46065 | 44525 | 78840 | 94575 | 152225 | 157545 | 89445 | 84260 | 159465 | 154815 | 224735 | 231685 |
| 13 | 45745 | 44310 | 78795 | 95270 | 152920 | 157025 | 89955 | 84425 | 159820 | 155955 | 224475 | 231580 |
| 14 | 45075 | 44205 | 79155 | 94280 | 152270 | 157905 | 89760 | 84225 | 159330 | 156045 | 224865 | 231080 |

Tabela 53: Resultados da variação da heurística lagrangeana para os casos de estudo de 30 e 50 nós (VHL)

| | A30L | B30L | A30M | B30M | A30H | B30H | A50L | B50L | A50M | B50M | A50H | B50H |
|----|-------|-------|-------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 1 | 56145 | 53440 | 89960 | 105745 | 166675 | 170765 | 108445 | 102605 | 176615 | 174035 | 242365 | 246865 |
| 2 | 52585 | 51910 | 92405 | 105745 | 163620 | 170800 | 108050 | 94915 | 175695 | 170925 | 236445 | 246790 |
| 3 | 53910 | 52470 | 89955 | 104235 | 160750 | 167030 | 102000 | 93420 | 172600 | 169375 | 232135 | 241780 |
| 4 | 54335 | 51140 | 86795 | 102290 | 160480 | 165675 | 104160 | 94930 | 171630 | 165105 | 234600 | 240805 |
| 5 | 52585 | 51910 | 86555 | 100555 | 159470 | 166060 | 103755 | 94915 | 170945 | 163905 | 231935 | 240015 |
| 6 | 53385 | 50425 | 84745 | 100350 | 158430 | 163910 | 98615 | 92800 | 169895 | 162285 | 230575 | 239565 |
| 7 | 54335 | 51065 | 86685 | 99970 | 158010 | 163780 | 100900 | 94430 | 171140 | 164240 | 233065 | 240805 |
| 8 | 52585 | 50605 | 86000 | 100155 | 157705 | 164140 | 100685 | 91055 | 168780 | 163905 | 231840 | 239945 |
| 9 | 51295 | 48945 | 84745 | 100350 | 157835 | 163910 | 96390 | 92800 | 168940 | 161925 | 229300 | 238280 |
| 10 | 50160 | 48100 | 82240 | 98535 | 155380 | 161875 | 97875 | 90240 | 166405 | 159295 | 229825 | 236685 |
| 11 | 49635 | 47540 | 82425 | 98565 | 156185 | 162195 | 97085 | 89225 | 166225 | 159830 | 229305 | 236395 |
| 12 | 50160 | 47845 | 82240 | 97925 | 155380 | 161875 | 97875 | 90005 | 166315 | 159295 | 229410 | 236685 |
| 13 | 49635 | 47405 | 82425 | 98565 | 155495 | 162195 | 97085 | 90005 | 166515 | 159830 | 229110 | 236395 |

Tabela 54: Resultados da variação da heurística lagrangeana com a heurística de melhoria I, NI=10, NB=5 (VHLMI)

| | A30L | B30L | A30M | B30M | A30H | B30H | A50L | B50L | A50M | B50M | A50H | B50H |
|----|-------|-------|-------|-------|--------|--------|-------|-------|--------|--------|--------|--------|
| 1 | 45965 | 45600 | 81465 | 98560 | 159495 | 165020 | 91715 | 87940 | 163370 | 164310 | 231325 | 241090 |
| 2 | 46120 | 45325 | 80530 | 98785 | 160265 | 163320 | 92250 | 87030 | 164905 | 164080 | 227795 | 238750 |
| 3 | 46030 | 45065 | 80865 | 97640 | 155485 | 161425 | 91200 | 86405 | 163770 | 159265 | 224325 | 234715 |
| 4 | 45590 | 44285 | 81185 | 94785 | 154445 | 161680 | 91625 | 85920 | 162215 | 156560 | 225005 | 234055 |
| 5 | 45110 | 45780 | 81300 | 96070 | 155295 | 160515 | 90950 | 85245 | 161675 | 155760 | 225750 | 233085 |
| 6 | 45675 | 44275 | 79860 | 96835 | 154815 | 159640 | 89105 | 83940 | 160315 | 155605 | 223990 | 232385 |
| 7 | 45360 | 44645 | 79370 | 96155 | 155360 | 160000 | 90955 | 85280 | 160920 | 155430 | 225785 | 232985 |
| 8 | 45800 | 45735 | 80135 | 95885 | 155540 | 159625 | 90130 | 84525 | 161650 | 156400 | 224900 | 232820 |
| 9 | 45765 | 45000 | 79880 | 96290 | 154725 | 158920 | 89720 | 83710 | 160225 | 155455 | 224000 | 230835 |
| 10 | 45450 | 44420 | 78920 | 95205 | 152920 | 159005 | 89445 | 83795 | 158615 | 154760 | 224325 | 231125 |
| 11 | 45170 | 43855 | 77940 | 95005 | 153235 | 158620 | 89300 | 82930 | 159725 | 154245 | 222900 | 230455 |
| 12 | 45295 | 43970 | 79005 | 93615 | 152865 | 158450 | 89210 | 83665 | 159125 | 155355 | 223825 | 230370 |
| 13 | 45525 | 44535 | 78925 | 94660 | 153325 | 158510 | 89115 | 83430 | 158775 | 155010 | 224450 | 230920 |

Tabela 55: Resultados da variação da heurística lagrangeana com a heurística de melhoramento I, NI=10, NB=10/30 (VHLMI)

| | A30L | B30L | A30M | B30M | A30H | B30H | A50L | B50L | A50M | B50M | A50H | B50H |
|----|-------|-------|-------|-------|--------|--------|-------|-------|--------|--------|--------|--------|
| 1 | 45540 | 44930 | 81110 | 98895 | 159270 | 165050 | 91360 | 87885 | 163960 | 163465 | 231815 | 242840 |
| 2 | 45825 | 45495 | 81655 | 98495 | 159415 | 163270 | 92480 | 87385 | 165140 | 163410 | 229685 | 237370 |
| 3 | 45605 | 44825 | 81260 | 99005 | 156570 | 162530 | 91490 | 86375 | 163435 | 157585 | 225555 | 234350 |
| 4 | 45670 | 45515 | 80690 | 97600 | 153905 | 161270 | 91020 | 86135 | 162255 | 158795 | 225975 | 233565 |
| 5 | 45190 | 45465 | 80650 | 97790 | 154945 | 160855 | 90625 | 85810 | 160590 | 157335 | 225195 | 233855 |
| 6 | 45370 | 45120 | 80450 | 97195 | 155320 | 159245 | 90080 | 85140 | 159900 | 155130 | 224235 | 231625 |
| 7 | 45770 | 45515 | 80435 | 96585 | 153905 | 160100 | 91395 | 84265 | 161460 | 156835 | 225630 | 232435 |
| 8 | 45785 | 44885 | 79915 | 95895 | 154535 | 159750 | 89850 | 84215 | 160940 | 156645 | 225810 | 232500 |
| 9 | 45160 | 45035 | 79170 | 95550 | 154340 | 159410 | 89725 | 84180 | 159630 | 154835 | 224445 | 230975 |
| 10 | 44690 | 44460 | 79035 | 94450 | 153305 | 158440 | 89580 | 82490 | 158710 | 154960 | 223995 | 230525 |
| 11 | 44725 | 44275 | 79655 | 95015 | 153025 | 158100 | 89240 | 83575 | 159505 | 154925 | 223755 | 230615 |
| 12 | 45230 | 43845 | 78785 | 94935 | 153170 | 158375 | 88850 | 83785 | 159685 | 154480 | 223495 | 230860 |
| 13 | 45450 | 44325 | 78870 | 95015 | 153505 | 158795 | 89155 | 83060 | 159980 | 154910 | 224425 | 230425 |

Tabela 56: Resultados da variação da heurística lagrangeana com a heurística de melhoramento I, NI=100, NB=5 (VHLMI)

| | A30L | B30L | A30M | B30M | A30H | B30H | A50L | B50L | A50M | B50M | A50H | B50H |
|----|-------|-------|-------|--------|--------|--------|-------|-------|--------|--------|--------|--------|
| 1 | 49970 | 51140 | 89960 | 105745 | 162775 | 169255 | 95380 | 90710 | 172935 | 174035 | 242365 | 246865 |
| 2 | 51175 | 50840 | 89185 | 105745 | 163620 | 170150 | 95875 | 91935 | 175695 | 170925 | 236445 | 246790 |
| 3 | 50535 | 51135 | 89955 | 104235 | 160750 | 167030 | 95125 | 90610 | 172600 | 169375 | 233615 | 241780 |
| 4 | 51480 | 49635 | 86795 | 102290 | 160480 | 165675 | 96280 | 91140 | 171630 | 165105 | 234600 | 240805 |
| 5 | 50940 | 50935 | 86555 | 100555 | 159470 | 166060 | 95640 | 89245 | 170945 | 163905 | 231935 | 240015 |
| 6 | 50595 | 50425 | 84745 | 100350 | 158430 | 163910 | 94060 | 87755 | 169825 | 163230 | 231580 | 239565 |
| 7 | 50870 | 50865 | 86685 | 99970 | 158010 | 163780 | 93310 | 88620 | 171140 | 164240 | 233065 | 240805 |
| 8 | 50985 | 49870 | 86000 | 100155 | 157705 | 164140 | 93570 | 86675 | 168780 | 163905 | 231840 | 239945 |
| 9 | 50655 | 48945 | 84745 | 100350 | 157835 | 163910 | 93295 | 87715 | 169895 | 162950 | 231570 | 239855 |
| 10 | 50715 | 50195 | 85315 | 99885 | 157775 | 164515 | 92595 | 87670 | 169520 | 163295 | 231470 | 238985 |
| 11 | 50465 | 49530 | 84600 | 100070 | 157550 | 163485 | 93130 | 87210 | 169880 | 162250 | 231875 | 238480 |
| 12 | 50705 | 49055 | 85150 | 99885 | 157375 | 164675 | 92575 | 86600 | 169520 | 164090 | 231675 | 238755 |
| 13 | 50875 | 49440 | 85435 | 100070 | 157550 | 164715 | 91680 | 87730 | 168990 | 162250 | 231615 | 238480 |

Tabela 57: Resultados da variação da heurística lagrangeana com a heurística de melhoramento I, NI=100, NB=10/30 (VHLMI)

| | A30L | B30L | A30M | B30M | A30H | B30H | A50L | B50L | A50M | B50M | A50H | B50H |
|----|-------|-------|-------|--------|--------|--------|-------|-------|--------|--------|--------|--------|
| 1 | 50800 | 50740 | 89960 | 105745 | 162750 | 170105 | 95065 | 92450 | 176250 | 174035 | 242365 | 246865 |
| 2 | 50835 | 50690 | 89980 | 105745 | 163620 | 170095 | 94850 | 92910 | 175220 | 170925 | 236445 | 246790 |
| 3 | 50925 | 50880 | 89955 | 104235 | 160750 | 167030 | 96530 | 92545 | 171745 | 169375 | 233615 | 241780 |
| 4 | 50230 | 50495 | 86795 | 102290 | 160480 | 165675 | 94310 | 89250 | 171630 | 165105 | 234600 | 240805 |
| 5 | 51140 | 50830 | 86555 | 100555 | 159470 | 166060 | 96245 | 89410 | 170945 | 163905 | 231935 | 240015 |
| 6 | 50890 | 50425 | 84745 | 100350 | 158430 | 163910 | 94985 | 88980 | 169895 | 163230 | 231580 | 239565 |
| 7 | 50340 | 51065 | 86685 | 99970 | 158010 | 163780 | 95175 | 88350 | 171140 | 164240 | 233065 | 240805 |
| 8 | 50145 | 50605 | 86000 | 100155 | 157705 | 164140 | 93125 | 88000 | 168780 | 163905 | 231840 | 239945 |
| 9 | 49680 | 48945 | 84745 | 100350 | 157835 | 163910 | 93360 | 86890 | 169895 | 162950 | 231570 | 239855 |
| 10 | 50810 | 50195 | 85315 | 99885 | 157775 | 164515 | 92700 | 87415 | 169520 | 163295 | 231470 | 238985 |
| 11 | 51355 | 49530 | 84600 | 100070 | 157550 | 163485 | 93595 | 87705 | 169880 | 162250 | 231875 | 238480 |
| 12 | 50850 | 49055 | 85150 | 99885 | 157375 | 164675 | 93570 | 87110 | 169440 | 164090 | 231675 | 238755 |
| 13 | 49685 | 49440 | 85435 | 100070 | 157550 | 164715 | 93595 | 86980 | 168990 | 162250 | 231615 | 238480 |

Tabela 58: Resultados da variação da heurística lagrangeana com a heurística de melhoramento II, NI=10 (VHLMII)

| | A30L | B30L | A30M | B30M | A30H | B30H | A50L | B50L | A50M | B50M | A50H | B50H |
|----|-------|-------|-------|-------|--------|--------|-------|-------|--------|--------|--------|--------|
| 1 | 47500 | 45870 | 81910 | 98195 | 158055 | 162410 | 92000 | 88555 | 165485 | 164080 | 232990 | 243620 |
| 2 | 47625 | 45290 | 81725 | 97945 | 158770 | 162525 | 92610 | 89300 | 166540 | 164990 | 232570 | 241425 |
| 3 | 48005 | 45455 | 81160 | 97715 | 156020 | 161375 | 92670 | 87945 | 165435 | 163115 | 224865 | 236965 |
| 4 | 48030 | 45495 | 81710 | 98170 | 155450 | 161010 | 92895 | 88345 | 164045 | 160990 | 228450 | 235290 |
| 5 | 48245 | 44515 | 81255 | 96880 | 154955 | 160835 | 93350 | 86910 | 164925 | 158710 | 227410 | 235570 |
| 6 | 47835 | 46395 | 80955 | 96370 | 154920 | 160335 | 89775 | 87040 | 162340 | 156450 | 224570 | 233370 |
| 7 | 48165 | 45515 | 81560 | 96660 | 154635 | 160315 | 92950 | 88045 | 161970 | 158250 | 226810 | 234750 |
| 8 | 47685 | 45335 | 81365 | 96835 | 153995 | 159770 | 92475 | 87370 | 162235 | 158385 | 227395 | 234370 |
| 9 | 47015 | 45100 | 79805 | 95725 | 154250 | 158385 | 90255 | 85635 | 160240 | 155380 | 224000 | 232560 |
| 10 | 46660 | 44040 | 79000 | 94620 | 152190 | 158145 | 90475 | 83870 | 159980 | 156365 | 223880 | 231415 |
| 11 | 45105 | 43590 | 78530 | 93860 | 151795 | 157260 | 89875 | 84325 | 160315 | 155500 | 224795 | 231970 |
| 12 | 45920 | 44080 | 78650 | 93905 | 152360 | 157535 | 90585 | 83845 | 160145 | 155855 | 224295 | 232075 |
| 13 | 45085 | 43690 | 77805 | 94720 | 152095 | 158010 | 89960 | 83995 | 160415 | 155865 | 224630 | 232400 |

Tabela 59: Resultados da variação da heurística lagrangeana com a heurística de melhoramento II, NI=100 (VHLMII)

| | A30L | B30L | A30M | B30M | A30H | B30H | A50L | B50L | A50M | B50M | A50H | B50H |
|----|-------|-------|-------|-------|--------|--------|-------|-------|--------|--------|--------|--------|
| 1 | 47525 | 46065 | 82215 | 97050 | 159400 | 162685 | 93015 | 89575 | 166090 | 165930 | 234360 | 240865 |
| 2 | 47645 | 45995 | 82585 | 98865 | 158645 | 162610 | 93160 | 89745 | 166430 | 165865 | 232995 | 240685 |
| 3 | 47475 | 44600 | 81380 | 97715 | 156075 | 162285 | 91990 | 89270 | 167250 | 162680 | 227375 | 237460 |
| 4 | 47445 | 46565 | 80400 | 98600 | 154840 | 158635 | 93155 | 88400 | 164370 | 159785 | 229125 | 234625 |
| 5 | 47255 | 46470 | 80425 | 97245 | 155775 | 159800 | 94020 | 88120 | 162955 | 160040 | 228005 | 233230 |
| 6 | 46935 | 45495 | 80255 | 96760 | 153895 | 160080 | 90730 | 86095 | 163365 | 155815 | 225735 | 234315 |
| 7 | 46895 | 45475 | 81875 | 95705 | 154835 | 160805 | 94075 | 86455 | 163645 | 158340 | 227595 | 235220 |
| 8 | 47070 | 45785 | 79060 | 95780 | 154270 | 160200 | 91555 | 86345 | 162140 | 158290 | 227655 | 234630 |
| 9 | 46180 | 44610 | 80150 | 95375 | 154305 | 159805 | 89915 | 85380 | 160960 | 156550 | 225305 | 233615 |
| 10 | 45925 | 44090 | 79950 | 95320 | 152720 | 158650 | 90935 | 84230 | 161220 | 157005 | 225290 | 231925 |
| 11 | 46285 | 44120 | 79290 | 95155 | 152560 | 158325 | 91180 | 84770 | 161220 | 156680 | 225065 | 232920 |
| 12 | 45790 | 44265 | 78975 | 95230 | 152600 | 158645 | 90820 | 84015 | 161260 | 156760 | 224810 | 232620 |
| 13 | 45160 | 43395 | 78890 | 95380 | 152440 | 158630 | 90970 | 84420 | 160810 | 156295 | 224460 | 232640 |

As tabelas seguintes (Tabela 60 a Tabela 80) apresentam os instantes de tempo em minutos em que foram encontradas as soluções com os custos apresentados nas tabelas anteriores (Tabela 39 a Tabela 59). A estrutura destas tabelas é semelhante à das tabelas anteriores. Por exemplo: os tempos da Tabela 60 correspondem aos custos apresentados na Tabela 39, os tempos da Tabela 61 correspondem aos custos apresentados na Tabela 40, etc.. Note-se que cada valor destas tabelas (Tabela 60 a Tabela 80) não corresponde ao tempo limite, mas sim ao tempo demorado a encontrar a melhor solução dentro do tempo limite.

Tabela 60: Tempos em minutos em que foi encontrada a melhor solução da heurística construtiva (HC)

| | A30L | B30L | A30M | B30M | A30H | B30H | A50L | B50L | A50M | B50M | A50H | B50H |
|----|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| 1 | 0,0 | 3,4 | 0,3 | 5,0 | 1,8 | 3,2 | 4,4 | 9,1 | 2,4 | 27,9 | 27,5 | 7,5 |
| 2 | 1,1 | 4,1 | 2,8 | 0,7 | 4,2 | 2,1 | 24,7 | 24,4 | 10,9 | 11,6 | 23,8 | 23,9 |
| 3 | 4,7 | 3,1 | 3,1 | 4,2 | 4,5 | 2,3 | 10,5 | 11,5 | 11,8 | 22,2 | 30,0 | 0,8 |
| 4 | 1,3 | 0,3 | 2,4 | 1,4 | 2,0 | 3,9 | 14,0 | 28,5 | 13,9 | 6,9 | 18,8 | 27,1 |
| 5 | 3,6 | 0,8 | 4,5 | 1,0 | 4,6 | 0,3 | 4,8 | 4,1 | 22,4 | 17,0 | 5,5 | 15,8 |
| 6 | 4,0 | 4,7 | 0,8 | 2,1 | 1,8 | 3,4 | 11,5 | 18,3 | 17,2 | 21,1 | 19,0 | 0,0 |
| 7 | 3,8 | 0,9 | 0,0 | 0,8 | 1,1 | 4,4 | 27,3 | 8,1 | 9,2 | 12,3 | 1,1 | 8,8 |
| 8 | 3,9 | 2,4 | 4,8 | 4,9 | 3,5 | 2,9 | 1,3 | 18,8 | 5,9 | 16,0 | 9,7 | 6,4 |
| 9 | 0,4 | 3,8 | 4,8 | 4,1 | 4,7 | 1,3 | 13,5 | 14,5 | 21,6 | 9,2 | 1,9 | 18,2 |
| 10 | 3,9 | 3,6 | 0,1 | 2,5 | 2,7 | 1,7 | 21,2 | 8,3 | 19,7 | 1,3 | 14,2 | 28,7 |

Tabela 61: Tempos em minutos em que foi encontrada a melhor solução da heurística construtiva com heurística de melhoramento I, NI=10, NB=5 (HCMI)

| | A30L | B30L | A30M | B30M | A30H | B30H | A50L | B50L | A50M | B50M | A50H | B50H |
|----|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| 1 | 3,0 | 0,6 | 2,5 | 0,2 | 2,3 | 3,4 | 2,6 | 9,8 | 13,6 | 17,6 | 12,3 | 29,9 |
| 2 | 3,8 | 4,2 | 4,8 | 3,9 | 3,1 | 3,1 | 6,5 | 17,1 | 13,5 | 6,9 | 9,7 | 24,3 |
| 3 | 3,4 | 2,2 | 0,2 | 0,8 | 1,4 | 2,2 | 28,5 | 12,5 | 4,2 | 9,7 | 19,9 | 18,8 |
| 4 | 1,6 | 4,0 | 3,3 | 1,7 | 2,4 | 2,8 | 20,4 | 16,7 | 9,8 | 16,4 | 11,9 | 11,2 |
| 5 | 2,8 | 4,7 | 2,8 | 0,5 | 2,3 | 2,5 | 2,5 | 16,9 | 4,9 | 17,1 | 3,0 | 24,3 |
| 6 | 1,8 | 4,1 | 0,5 | 2,7 | 3,6 | 0,4 | 11,3 | 9,3 | 27,3 | 28,9 | 10,8 | 22,3 |
| 7 | 4,4 | 0,4 | 4,4 | 0,1 | 3,4 | 3,8 | 14,1 | 28,6 | 28,0 | 8,6 | 23,3 | 25,8 |
| 8 | 2,0 | 4,3 | 4,0 | 0,2 | 2,6 | 0,9 | 24,5 | 6,4 | 16,9 | 7,6 | 24,3 | 20,3 |
| 9 | 2,5 | 2,0 | 1,3 | 1,0 | 2,3 | 4,3 | 28,8 | 27,1 | 10,0 | 15,0 | 29,2 | 4,5 |
| 10 | 1,5 | 4,2 | 4,8 | 1,1 | 4,7 | 4,5 | 19,2 | 24,8 | 14,1 | 7,5 | 0,5 | 14,3 |

Tabela 62: Tempos em minutos em que foi encontrada a melhor solução da heurística construtiva com heurística de melhoramento I, NI=10, NB=10/30 (HCMI)

| | A30L | B30L | A30M | B30M | A30H | B30H | A50L | B50L | A50M | B50M | A50H | B50H |
|----|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| 1 | 4,4 | 0,2 | 1,3 | 2,3 | 4,7 | 0,8 | 29,2 | 20,1 | 29,3 | 29,1 | 21,2 | 24,7 |
| 2 | 1,7 | 2,9 | 1,3 | 0,3 | 4,6 | 4,4 | 7,8 | 21,2 | 10,2 | 10,5 | 13,8 | 19,3 |
| 3 | 3,2 | 3,2 | 1,3 | 1,9 | 3,7 | 0,5 | 23,0 | 1,0 | 3,5 | 6,6 | 26,5 | 4,3 |
| 4 | 1,0 | 0,9 | 1,7 | 3,7 | 4,2 | 1,9 | 15,0 | 11,1 | 8,1 | 1,1 | 25,4 | 19,7 |
| 5 | 2,2 | 1,5 | 1,2 | 1,0 | 0,9 | 0,8 | 17,5 | 16,4 | 21,5 | 24,3 | 5,4 | 1,0 |
| 6 | 2,9 | 1,6 | 4,9 | 3,7 | 2,1 | 1,6 | 20,8 | 17,2 | 12,8 | 13,0 | 24,0 | 10,6 |
| 7 | 4,4 | 3,1 | 4,3 | 3,4 | 0,4 | 1,1 | 21,1 | 13,8 | 7,4 | 0,2 | 21,6 | 25,4 |
| 8 | 2,0 | 1,9 | 3,7 | 1,2 | 0,3 | 3,6 | 21,4 | 2,6 | 1,7 | 9,7 | 27,2 | 26,9 |
| 9 | 0,2 | 2,4 | 0,7 | 4,3 | 2,3 | 3,4 | 29,8 | 6,0 | 22,7 | 27,0 | 3,6 | 21,0 |
| 10 | 3,1 | 0,7 | 2,9 | 1,9 | 2,6 | 3,4 | 8,0 | 2,1 | 15,4 | 17,4 | 6,7 | 11,9 |

Tabela 63: Tempos em minutos em que foi encontrada a melhor solução da heurística construtiva com heurística de melhoramento I, NI=100, NB=5 (HCMI)

| | A30L | B30L | A30M | B30M | A30H | B30H | A50L | B50L | A50M | B50M | A50H | B50H |
|----|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| 1 | 1,9 | 0,7 | 4,9 | 4,6 | 4,4 | 2,6 | 21,9 | 25,5 | 16,3 | 10,2 | 23,4 | 17,0 |
| 2 | 4,9 | 1,7 | 4,5 | 1,3 | 3,3 | 0,6 | 6,7 | 21,5 | 8,9 | 18,3 | 2,7 | 22,6 |
| 3 | 4,1 | 2,6 | 3,4 | 3,2 | 2,6 | 2,4 | 20,7 | 1,2 | 18,3 | 1,8 | 26,3 | 7,0 |
| 4 | 0,4 | 0,0 | 3,3 | 0,1 | 4,4 | 4,2 | 21,4 | 17,0 | 20,6 | 20,2 | 2,3 | 14,8 |
| 5 | 4,7 | 3,1 | 1,5 | 0,1 | 2,4 | 1,7 | 27,2 | 0,0 | 19,0 | 15,1 | 2,6 | 0,4 |
| 6 | 1,3 | 4,9 | 3,3 | 2,1 | 0,3 | 3,7 | 1,5 | 15,8 | 1,7 | 26,6 | 22,2 | 7,7 |
| 7 | 1,5 | 4,0 | 4,4 | 4,6 | 2,5 | 1,9 | 10,0 | 6,8 | 9,5 | 23,2 | 14,0 | 23,5 |
| 8 | 1,3 | 0,3 | 2,8 | 4,7 | 1,3 | 1,0 | 28,5 | 5,9 | 5,6 | 13,8 | 19,2 | 18,6 |
| 9 | 0,8 | 2,6 | 2,1 | 3,3 | 0,9 | 2,4 | 5,5 | 12,7 | 19,2 | 25,3 | 8,1 | 28,5 |
| 10 | 4,0 | 2,8 | 4,0 | 2,1 | 4,8 | 4,9 | 21,2 | 24,1 | 27,0 | 6,1 | 26,0 | 8,5 |

Tabela 64: Tempos em minutos em que foi encontrada a melhor solução da heurística construtiva com heurística de melhoramento I, NI=100, NB=10/30 (HCMI)

| | A30L | B30L | A30M | B30M | A30H | B30H | A50L | B50L | A50M | B50M | A50H | B50H |
|----|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| 1 | 1,8 | 4,1 | 1,6 | 5,0 | 4,4 | 2,2 | 22,2 | 5,9 | 2,6 | 0,0 | 10,4 | 17,8 |
| 2 | 1,9 | 1,9 | 1,1 | 4,5 | 1,0 | 2,2 | 2,2 | 10,8 | 15,2 | 26,0 | 13,8 | 10,7 |
| 3 | 4,4 | 2,4 | 1,2 | 4,9 | 1,8 | 2,6 | 19,6 | 20,0 | 16,7 | 27,7 | 5,6 | 18,3 |
| 4 | 3,7 | 5,0 | 1,2 | 3,6 | 4,0 | 2,0 | 15,9 | 23,7 | 11,6 | 7,0 | 17,2 | 19,1 |
| 5 | 1,2 | 2,5 | 3,9 | 1,1 | 3,9 | 3,7 | 27,8 | 29,5 | 9,4 | 11,2 | 11,0 | 17,6 |
| 6 | 3,8 | 4,8 | 0,7 | 3,8 | 1,0 | 0,9 | 24,0 | 1,2 | 27,4 | 21,6 | 17,9 | 29,1 |
| 7 | 1,4 | 2,9 | 2,2 | 1,7 | 3,7 | 1,0 | 8,4 | 13,5 | 21,5 | 11,1 | 1,2 | 7,1 |
| 8 | 0,8 | 0,7 | 1,4 | 2,9 | 0,9 | 4,4 | 14,8 | 27,1 | 1,7 | 4,9 | 28,3 | 2,0 |
| 9 | 3,1 | 0,9 | 0,3 | 3,0 | 2,2 | 1,7 | 27,4 | 2,2 | 29,4 | 20,3 | 0,0 | 25,0 |
| 10 | 1,2 | 3,7 | 3,6 | 3,4 | 4,2 | 1,4 | 1,4 | 16,5 | 22,4 | 11,3 | 7,9 | 12,4 |

Tabela 65: Tempos em minutos em que foi encontrada a melhor solução da heurística construtiva com heurística de melhoramento II, NI=10 (HCMII)

| | A30L | B30L | A30M | B30M | A30H | B30H | A50L | B50L | A50M | B50M | A50H | B50H |
|----|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| 1 | 3,8 | 3,1 | 4,5 | 3,6 | 3,5 | 0,0 | 4,8 | 9,7 | 13,6 | 2,2 | 29,4 | 27,6 |
| 2 | 3,9 | 2,5 | 3,4 | 3,9 | 4,2 | 3,4 | 25,9 | 1,3 | 21,4 | 8,3 | 25,2 | 21,9 |
| 3 | 0,2 | 1,5 | 4,1 | 2,0 | 1,8 | 2,8 | 1,1 | 5,5 | 21,3 | 6,7 | 29,2 | 1,5 |
| 4 | 4,5 | 3,7 | 2,3 | 0,3 | 2,4 | 2,1 | 10,6 | 12,9 | 26,8 | 14,7 | 1,6 | 28,8 |
| 5 | 2,0 | 3,2 | 1,9 | 2,5 | 5,0 | 4,0 | 28,3 | 8,6 | 10,1 | 19,8 | 30,0 | 22,9 |
| 6 | 1,3 | 3,6 | 1,1 | 4,6 | 0,4 | 2,7 | 22,4 | 0,6 | 19,9 | 5,6 | 13,2 | 12,8 |
| 7 | 4,2 | 3,7 | 4,1 | 0,3 | 4,3 | 0,9 | 11,0 | 11,9 | 3,0 | 0,6 | 19,6 | 7,1 |
| 8 | 4,4 | 0,4 | 4,6 | 4,6 | 4,5 | 2,1 | 11,2 | 9,9 | 5,4 | 4,9 | 7,7 | 18,4 |
| 9 | 0,2 | 2,9 | 2,3 | 4,9 | 3,1 | 4,9 | 17,1 | 2,5 | 0,2 | 12,4 | 0,0 | 0,4 |
| 10 | 3,5 | 1,1 | 3,1 | 3,6 | 2,8 | 3,5 | 11,7 | 19,4 | 18,7 | 3,7 | 28,4 | 19,7 |

Tabela 66: Tempos em minutos em que foi encontrada a melhor solução da heurística construtiva com heurística de melhoramento II, NI=100 (HCMII)

| | A30L | B30L | A30M | B30M | A30H | B30H | A50L | B50L | A50M | B50M | A50H | B50H |
|----|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| 1 | 0,0 | 3,5 | 5,0 | 3,0 | 2,2 | 2,8 | 22,8 | 26,3 | 20,5 | 3,8 | 4,0 | 0,4 |
| 2 | 0,5 | 2,1 | 3,6 | 2,1 | 1,7 | 1,5 | 2,8 | 20,4 | 25,7 | 6,1 | 15,8 | 1,8 |
| 3 | 2,1 | 3,1 | 0,4 | 0,6 | 1,8 | 2,0 | 5,9 | 27,0 | 0,4 | 18,3 | 25,4 | 26,7 |
| 4 | 4,1 | 2,3 | 4,0 | 1,6 | 1,7 | 3,3 | 19,3 | 22,8 | 25,2 | 16,6 | 7,1 | 12,8 |
| 5 | 1,8 | 4,7 | 1,9 | 0,3 | 2,9 | 3,5 | 20,9 | 16,2 | 16,1 | 15,4 | 27,0 | 5,5 |
| 6 | 2,1 | 4,2 | 4,7 | 1,8 | 3,7 | 1,1 | 24,0 | 7,7 | 28,8 | 1,2 | 27,7 | 17,6 |
| 7 | 2,4 | 2,6 | 1,9 | 0,8 | 1,0 | 4,6 | 11,9 | 4,9 | 5,1 | 2,0 | 27,0 | 22,8 |
| 8 | 2,4 | 0,8 | 3,4 | 4,8 | 3,1 | 1,4 | 27,9 | 13,9 | 11,1 | 24,7 | 14,6 | 7,0 |
| 9 | 3,3 | 3,2 | 2,4 | 0,8 | 2,4 | 2,9 | 18,0 | 19,7 | 5,4 | 2,5 | 1,3 | 29,2 |
| 10 | 2,7 | 0,6 | 4,1 | 4,4 | 4,4 | 3,4 | 26,9 | 14,2 | 13,1 | 5,1 | 25,1 | 2,2 |

Tabela 67: Tempos em minutos em que foi encontrada a melhor solução da heurística lagrangeana (HL)

| | A30L | B30L | A30M | B30M | A30H | B30H | A50L | B50L | A50M | B50M | A50H | B50H |
|----|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| 1 | 1,0 | 3,1 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 |
| 2 | 0,1 | 1,1 | 1,0 | 3,3 | 0,9 | 4,2 | 21,7 | 14,5 | 1,0 | 10,0 | 24,4 | 14,0 |
| 3 | 4,0 | 1,6 | 1,2 | 3,3 | 0,1 | 3,8 | 6,6 | 26,1 | 19,0 | 15,8 | 26,1 | 7,3 |
| 4 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 |
| 5 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 |
| 6 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 |
| 7 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 |
| 8 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 |
| 9 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 |
| 10 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 |
| 11 | 2,4 | 1,1 | 1,1 | 0,5 | 0,3 | 3,3 | 15,5 | 5,5 | 23,2 | 7,8 | 8,3 | 6,0 |
| 12 | 0,0 | 0,0 | 0,1 | 0,0 | 0,1 | 0,0 | 0,0 | 0,1 | 0,2 | 0,2 | 0,3 | 0,2 |
| 13 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,2 | 0,1 | 0,3 | 0,1 | 0,1 | 0,1 |
| 14 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,2 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,1 |

Tabela 68: Tempos em minutos em que foi encontrada a melhor solução da heurística lagrangeana com heurística de melhoramento I, NI=10, NB=5 (HLMI)

| | A30L | B30L | A30M | B30M | A30H | B30H | A50L | B50L | A50M | B50M | A50H | B50H |
|----|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| 1 | 3,6 | 4,8 | 0,0 | 0,0 | 1,0 | 0,0 | 0,0 | 0,2 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 |
| 2 | 2,7 | 2,8 | 3,3 | 4,8 | 2,1 | 3,6 | 12,5 | 26,5 | 0,0 | 26,3 | 23,9 | 24,4 |
| 3 | 1,5 | 0,1 | 0,2 | 1,2 | 2,6 | 0,0 | 14,7 | 17,3 | 12,3 | 0,7 | 3,8 | 9,3 |
| 4 | 0,2 | 1,6 | 2,1 | 4,7 | 2,9 | 1,9 | 9,6 | 11,2 | 19,3 | 3,3 | 4,0 | 25,0 |
| 5 | 4,7 | 4,4 | 3,6 | 3,3 | 3,7 | 2,1 | 8,0 | 1,4 | 27,3 | 14,6 | 7,8 | 14,3 |
| 6 | 3,6 | 4,9 | 3,1 | 4,0 | 2,4 | 1,4 | 0,7 | 27,2 | 25,7 | 26,7 | 19,3 | 22,9 |
| 7 | 4,2 | 0,2 | 2,7 | 4,7 | 1,1 | 0,6 | 17,7 | 14,7 | 11,8 | 26,2 | 24,7 | 18,9 |
| 8 | 0,1 | 4,5 | 0,6 | 3,7 | 0,2 | 4,6 | 11,2 | 27,1 | 27,6 | 6,2 | 19,8 | 5,9 |
| 9 | 4,0 | 0,1 | 3,1 | 1,0 | 0,9 | 0,2 | 22,3 | 12,7 | 13,3 | 6,2 | 21,3 | 26,9 |
| 10 | 4,9 | 0,0 | 2,5 | 0,7 | 0,1 | 2,1 | 7,1 | 19,5 | 11,4 | 12,6 | 19,2 | 28,3 |
| 11 | 2,9 | 0,6 | 3,3 | 3,2 | 2,3 | 4,7 | 2,1 | 27,9 | 3,8 | 7,4 | 9,4 | 15,9 |
| 12 | 2,5 | 2,9 | 4,8 | 4,5 | 3,1 | 4,2 | 22,9 | 17,0 | 28,6 | 17,4 | 20,5 | 13,0 |
| 13 | 4,3 | 1,0 | 3,0 | 2,4 | 1,9 | 2,6 | 14,4 | 11,3 | 29,6 | 24,2 | 11,6 | 16,8 |
| 14 | 1,1 | 1,4 | 3,2 | 3,2 | 1,3 | 4,7 | 25,0 | 9,0 | 27,0 | 6,5 | 7,5 | 19,9 |

Tabela 69: Tempos em minutos em que foi encontrada a melhor solução da heurística lagrangeana com heurística de melhoramento I, NI=10, NB=10/30 (HLMI)

| | A30L | B30L | A30M | B30M | A30H | B30H | A50L | B50L | A50M | B50M | A50H | B50H |
|----|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| 1 | 1,7 | 3,8 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,1 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 |
| 2 | 3,0 | 1,9 | 1,0 | 2,1 | 3,8 | 1,1 | 12,7 | 17,6 | 0,0 | 19,8 | 22,4 | 23,0 |
| 3 | 4,8 | 3,9 | 1,5 | 0,5 | 0,5 | 2,1 | 5,3 | 25,7 | 19,1 | 2,2 | 19,9 | 28,3 |
| 4 | 0,1 | 0,2 | 2,1 | 0,6 | 2,0 | 0,6 | 1,3 | 1,5 | 12,1 | 2,1 | 27,8 | 5,2 |
| 5 | 4,7 | 2,5 | 0,5 | 2,8 | 1,5 | 4,2 | 28,4 | 18,1 | 12,4 | 15,8 | 16,7 | 3,4 |
| 6 | 3,6 | 0,9 | 2,9 | 2,9 | 3,1 | 0,9 | 2,7 | 1,5 | 1,8 | 10,5 | 12,2 | 9,1 |
| 7 | 1,2 | 3,6 | 0,9 | 4,9 | 2,3 | 1,6 | 19,5 | 1,2 | 16,0 | 7,2 | 22,2 | 19,4 |
| 8 | 3,7 | 0,1 | 0,9 | 3,0 | 3,0 | 4,1 | 3,7 | 16,1 | 1,6 | 17,1 | 11,7 | 7,8 |
| 9 | 0,5 | 2,7 | 1,3 | 4,2 | 0,7 | 0,5 | 24,5 | 19,0 | 16,0 | 27,8 | 7,6 | 14,0 |
| 10 | 1,8 | 0,1 | 1,7 | 4,1 | 0,9 | 4,7 | 28,3 | 14,1 | 4,6 | 9,7 | 4,3 | 23,6 |
| 11 | 3,4 | 2,8 | 1,6 | 3,1 | 0,5 | 1,4 | 13,3 | 28,6 | 28,1 | 4,4 | 26,4 | 6,7 |
| 12 | 1,9 | 1,1 | 4,2 | 3,1 | 3,4 | 3,1 | 18,3 | 20,9 | 17,3 | 23,9 | 17,9 | 16,1 |
| 13 | 2,4 | 0,4 | 4,8 | 4,7 | 2,3 | 3,8 | 14,8 | 23,4 | 25,4 | 16,8 | 18,9 | 7,7 |
| 14 | 1,9 | 0,1 | 2,1 | 2,9 | 3,0 | 1,7 | 18,2 | 4,1 | 8,4 | 6,7 | 13,5 | 12,9 |

Tabela 70: Tempos em minutos em que foi encontrada a melhor solução da heurística lagrangeana com heurística de melhoramento I, NI=100, NB=5 (HLMI)

| | A30L | B30L | A30M | B30M | A30H | B30H | A50L | B50L | A50M | B50M | A50H | B50H |
|----|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| 1 | 0,8 | 3,2 | 1,5 | 0,0 | 4,1 | 2,0 | 0,0 | 0,0 | 0,1 | 0,1 | 0,0 | 0,1 |
| 2 | 1,6 | 4,4 | 1,2 | 4,2 | 3,5 | 4,6 | 25,8 | 29,9 | 0,0 | 1,2 | 24,5 | 7,9 |
| 3 | 3,0 | 3,6 | 3,8 | 2,8 | 3,9 | 2,0 | 19,4 | 4,9 | 2,9 | 26,1 | 24,7 | 15,9 |
| 4 | 1,9 | 1,5 | 2,4 | 2,6 | 1,7 | 2,4 | 29,2 | 28,1 | 23,4 | 23,6 | 13,0 | 15,9 |
| 5 | 2,5 | 0,6 | 1,9 | 1,1 | 1,7 | 1,1 | 23,3 | 28,7 | 22,3 | 12,0 | 16,0 | 13,3 |
| 6 | 3,3 | 3,0 | 1,8 | 0,2 | 1,6 | 1,2 | 24,7 | 19,2 | 25,6 | 26,4 | 10,9 | 6,2 |
| 7 | 0,6 | 0,8 | 1,9 | 1,3 | 1,1 | 0,8 | 29,8 | 14,1 | 14,9 | 29,1 | 10,8 | 10,2 |
| 8 | 1,5 | 3,7 | 1,7 | 1,1 | 1,1 | 0,7 | 14,3 | 14,2 | 22,7 | 5,9 | 6,0 | 6,6 |
| 9 | 0,1 | 0,3 | 0,4 | 0,3 | 1,0 | 0,8 | 20,7 | 9,8 | 18,5 | 24,3 | 2,4 | 8,1 |
| 10 | 3,0 | 3,9 | 1,2 | 0,2 | 0,3 | 0,3 | 16,8 | 18,4 | 26,0 | 21,3 | 1,7 | 7,4 |
| 11 | 3,7 | 3,3 | 1,5 | 0,2 | 3,2 | 1,3 | 27,7 | 16,7 | 4,3 | 22,8 | 15,3 | 9,8 |
| 12 | 0,4 | 3,1 | 4,5 | 5,0 | 5,0 | 2,0 | 0,1 | 0,0 | 0,1 | 0,0 | 0,0 | 0,1 |
| 13 | 1,6 | 4,4 | 1,2 | 4,1 | 3,5 | 4,6 | 12,0 | 15,7 | 0,0 | 1,2 | 24,5 | 7,9 |
| 14 | 2,5 | 3,5 | 3,8 | 2,7 | 3,9 | 2,0 | 12,0 | 20,7 | 2,9 | 26,2 | 24,8 | 15,9 |

Tabela 71: Tempos em minutos em que foi encontrada a melhor solução da heurística lagrangeana com heurística de melhoramento I, NI=100, NB=10/30 (HLMI)

| | A30L | B30L | A30M | B30M | A30H | B30H | A50L | B50L | A50M | B50M | A50H | B50H |
|----|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| 1 | 2,8 | 3,2 | 1,4 | 0,0 | 3,6 | 2,3 | 0,0 | 0,1 | 0,1 | 0,0 | 0,0 | 0,1 |
| 2 | 1,6 | 4,4 | 1,2 | 4,2 | 3,5 | 4,7 | 27,6 | 29,4 | 0,0 | 1,2 | 24,4 | 7,9 |
| 3 | 3,0 | 3,6 | 3,8 | 2,8 | 3,9 | 2,0 | 7,9 | 19,0 | 2,9 | 26,1 | 24,7 | 16,0 |
| 4 | 1,9 | 1,5 | 2,4 | 2,6 | 1,7 | 2,4 | 18,4 | 27,4 | 20,2 | 23,6 | 13,0 | 15,9 |
| 5 | 3,2 | 0,6 | 1,9 | 1,1 | 1,7 | 1,1 | 19,2 | 25,8 | 21,0 | 5,1 | 16,0 | 13,2 |
| 6 | 1,1 | 2,4 | 1,8 | 0,2 | 1,6 | 1,2 | 20,2 | 8,6 | 22,2 | 26,3 | 10,9 | 6,2 |
| 7 | 0,1 | 0,8 | 1,9 | 1,3 | 1,1 | 0,8 | 18,9 | 16,5 | 27,5 | 24,8 | 10,8 | 10,2 |
| 8 | 3,8 | 0,7 | 1,8 | 1,1 | 1,1 | 0,7 | 22,8 | 12,1 | 8,8 | 6,0 | 6,0 | 6,6 |
| 9 | 0,2 | 0,3 | 0,4 | 0,3 | 1,0 | 0,8 | 9,0 | 13,0 | 24,0 | 3,8 | 2,4 | 8,1 |
| 10 | 2,7 | 3,1 | 1,1 | 0,2 | 0,3 | 0,3 | 16,1 | 7,1 | 2,9 | 17,9 | 1,7 | 7,4 |
| 11 | 4,1 | 4,0 | 1,5 | 0,2 | 3,2 | 1,3 | 18,1 | 8,3 | 12,0 | 22,7 | 15,3 | 9,8 |
| 12 | 0,5 | 3,1 | 4,5 | 5,0 | 1,4 | 4,6 | 0,0 | 0,0 | 0,1 | 0,0 | 0,0 | 0,1 |
| 13 | 1,6 | 4,4 | 1,2 | 4,2 | 3,5 | 4,6 | 19,5 | 26,8 | 0,0 | 1,2 | 24,5 | 7,9 |
| 14 | 1,8 | 3,5 | 3,8 | 2,7 | 3,9 | 2,0 | 23,6 | 28,3 | 2,9 | 26,2 | 24,8 | 15,9 |

Tabela 72: Tempos em minutos em que foi encontrada a melhor solução da heurística lagrangeana com heurística de melhoramento II, NI=10 (HLMI)

| | A30L | B30L | A30M | B30M | A30H | B30H | A50L | B50L | A50M | B50M | A50H | B50H |
|----|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| 1 | 3,5 | 3,2 | 3,1 | 0,0 | 4,5 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 |
| 2 | 3,0 | 0,9 | 3,7 | 0,4 | 0,3 | 1,3 | 21,9 | 5,4 | 6,5 | 15,5 | 2,0 | 29,2 |
| 3 | 2,9 | 1,0 | 1,7 | 3,1 | 3,1 | 4,4 | 14,1 | 24,5 | 29,5 | 17,5 | 20,2 | 29,1 |
| 4 | 0,5 | 4,2 | 3,2 | 2,5 | 1,7 | 1,9 | 9,0 | 29,5 | 19,8 | 22,1 | 29,3 | 24,4 |
| 5 | 4,6 | 0,1 | 4,5 | 4,9 | 2,8 | 4,8 | 0,2 | 1,3 | 27,3 | 18,9 | 2,6 | 7,9 |
| 6 | 2,5 | 4,9 | 3,3 | 1,2 | 4,2 | 4,4 | 16,6 | 16,8 | 22,6 | 9,6 | 2,7 | 25,6 |
| 7 | 3,8 | 1,7 | 4,5 | 2,8 | 0,2 | 2,3 | 15,5 | 3,8 | 6,5 | 20,9 | 14,4 | 11,4 |
| 8 | 4,6 | 3,3 | 4,0 | 4,2 | 4,2 | 0,6 | 3,8 | 22,1 | 3,3 | 14,0 | 21,9 | 2,0 |
| 9 | 3,2 | 3,3 | 3,3 | 1,3 | 0,4 | 0,3 | 14,5 | 26,4 | 1,2 | 23,5 | 10,5 | 18,3 |
| 10 | 0,4 | 0,6 | 4,9 | 1,0 | 0,7 | 0,6 | 28,9 | 28,2 | 29,5 | 0,8 | 9,7 | 22,8 |
| 11 | 1,0 | 3,5 | 3,2 | 4,9 | 3,6 | 1,3 | 20,0 | 21,3 | 20,8 | 6,1 | 28,0 | 14,6 |
| 12 | 0,3 | 4,1 | 1,1 | 1,7 | 4,1 | 4,3 | 27,1 | 7,2 | 9,1 | 26,7 | 19,0 | 15,6 |
| 13 | 0,8 | 0,2 | 3,2 | 1,0 | 4,7 | 0,4 | 14,9 | 0,7 | 10,6 | 1,2 | 10,9 | 2,0 |
| 14 | 4,4 | 2,9 | 2,2 | 2,1 | 1,9 | 0,3 | 18,4 | 13,0 | 28,7 | 3,2 | 25,4 | 24,4 |

Tabela 73: Tempos em minutos em que foi encontrada a melhor solução da heurística lagrangeana com heurística de melhoramento II, NI=100 (HLMII)

| | A30L | B30L | A30M | B30M | A30H | B30H | A50L | B50L | A50M | B50M | A50H | B50H |
|----|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| 1 | 0,3 | 1,2 | 5,0 | 0,0 | 3,5 | 2,2 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 |
| 2 | 0,8 | 3,0 | 1,7 | 3,6 | 4,6 | 2,8 | 18,4 | 12,5 | 23,1 | 13,2 | 18,2 | 29,0 |
| 3 | 0,6 | 0,1 | 4,5 | 3,6 | 4,3 | 4,8 | 28,7 | 9,6 | 7,4 | 21,4 | 23,7 | 21,2 |
| 4 | 2,9 | 4,3 | 0,9 | 0,2 | 3,3 | 4,4 | 20,2 | 27,8 | 4,3 | 22,0 | 3,7 | 18,2 |
| 5 | 1,3 | 3,7 | 1,3 | 1,1 | 3,3 | 1,9 | 7,7 | 21,1 | 20,5 | 3,2 | 20,5 | 1,1 |
| 6 | 4,8 | 1,1 | 1,2 | 2,5 | 3,0 | 1,9 | 6,3 | 19,8 | 26,9 | 6,3 | 21,3 | 19,8 |
| 7 | 2,8 | 1,8 | 0,4 | 2,6 | 2,9 | 1,5 | 6,5 | 18,5 | 6,1 | 7,1 | 29,7 | 9,1 |
| 8 | 1,5 | 1,1 | 1,1 | 4,7 | 1,9 | 0,9 | 3,4 | 20,6 | 29,6 | 29,3 | 12,5 | 26,6 |
| 9 | 1,4 | 2,2 | 3,1 | 2,9 | 3,3 | 0,1 | 9,1 | 18,6 | 13,0 | 25,4 | 2,0 | 6,5 |
| 10 | 0,7 | 0,9 | 3,6 | 3,6 | 1,1 | 3,6 | 4,2 | 18,0 | 8,1 | 4,9 | 27,9 | 8,0 |
| 11 | 2,5 | 1,4 | 2,4 | 2,9 | 0,3 | 4,1 | 10,2 | 12,4 | 11,9 | 18,8 | 3,6 | 2,0 |
| 12 | 5,0 | 3,9 | 4,8 | 2,8 | 2,6 | 3,7 | 21,6 | 14,2 | 14,8 | 17,8 | 12,6 | 7,0 |
| 13 | 3,6 | 2,9 | 4,3 | 3,8 | 1,8 | 3,6 | 14,4 | 10,5 | 27,9 | 18,7 | 6,8 | 9,5 |
| 14 | 4,9 | 0,8 | 3,1 | 4,6 | 1,7 | 3,5 | 18,9 | 28,2 | 11,9 | 28,3 | 5,7 | 15,6 |

Tabela 74: Tempos em minutos em que foi encontrada a melhor solução da variação da heurística lagrangeana (VHL)

| | A30L | B30L | A30M | B30M | A30H | B30H | A50L | B50L | A50M | B50M | A50H | B50H |
|----|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| 1 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 |
| 2 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 |
| 3 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,3 | 0,0 |
| 4 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 |
| 5 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 |
| 6 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,1 | 0,0 | 0,0 | 0,1 | 0,5 | 0,0 |
| 7 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 |
| 8 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 |
| 9 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 1,8 | 0,0 | 0,1 | 0,1 | 5,6 | 0,1 |
| 10 | 0,1 | 0,3 | 0,1 | 0,4 | 1,8 | 0,5 | 14,6 | 11,1 | 0,9 | 2,7 | 12,9 | 0,8 |
| 11 | 1,7 | 0,1 | 0,9 | 1,2 | 1,8 | 1,0 | 1,0 | 22,6 | 23,5 | 12,8 | 8,9 | 12,2 |
| 12 | 0,1 | 0,1 | 0,2 | 4,3 | 3,7 | 1,1 | 28,7 | 14,8 | 25,7 | 5,3 | 27,9 | 1,5 |
| 13 | 3,3 | 4,6 | 1,8 | 2,4 | 2,6 | 1,9 | 2,0 | 0,7 | 7,6 | 25,2 | 6,9 | 24,1 |

Tabela 75: Tempos em minutos em que foi encontrada a melhor solução da variação da heurística lagrangeana com heur. de melhoramento I, NI=10, NB=5 (VHLMI)

| | A30L | B30L | A30M | B30M | A30H | B30H | A50L | B50L | A50M | B50M | A50H | B50H |
|----|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| 1 | 3,6 | 4,1 | 4,1 | 2,2 | 4,3 | 1,4 | 18,4 | 29,0 | 28,8 | 28,4 | 26,5 | 0,1 |
| 2 | 0,5 | 2,5 | 0,7 | 5,0 | 2,3 | 1,2 | 16,1 | 0,1 | 24,1 | 18,0 | 0,1 | 0,1 |
| 3 | 2,0 | 3,8 | 1,3 | 0,1 | 0,0 | 0,0 | 25,1 | 0,1 | 0,0 | 0,0 | 15,9 | 0,5 |
| 4 | 4,5 | 0,4 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,1 | 0,1 | 0,1 | 0,1 | 0,1 | 0,2 |
| 5 | 0,5 | 0,1 | 4,7 | 0,1 | 0,1 | 0,2 | 17,6 | 0,1 | 0,5 | 0,4 | 0,1 | 0,5 |
| 6 | 2,4 | 4,3 | 0,2 | 0,3 | 0,0 | 0,2 | 10,0 | 0,1 | 1,6 | 11,6 | 16,9 | 0,5 |
| 7 | 2,0 | 4,6 | 0,1 | 0,0 | 0,1 | 0,1 | 0,1 | 0,8 | 1,1 | 0,1 | 0,7 | 1,0 |
| 8 | 2,4 | 0,1 | 0,2 | 0,0 | 0,1 | 0,3 | 0,4 | 0,7 | 1,3 | 1,3 | 1,6 | 0,1 |
| 9 | 4,1 | 0,2 | 0,3 | 0,0 | 0,6 | 0,8 | 7,0 | 7,5 | 2,2 | 5,8 | 7,9 | 1,3 |
| 10 | 0,7 | 0,7 | 2,0 | 4,3 | 4,6 | 1,3 | 6,9 | 14,5 | 4,4 | 12,6 | 14,3 | 15,5 |
| 11 | 2,9 | 4,2 | 1,8 | 2,6 | 1,0 | 2,4 | 15,8 | 11,4 | 8,3 | 25,5 | 4,7 | 3,4 |
| 12 | 0,1 | 0,6 | 1,5 | 3,5 | 1,3 | 4,1 | 27,1 | 10,0 | 28,9 | 21,8 | 21,0 | 20,0 |
| 13 | 4,8 | 4,9 | 2,8 | 2,9 | 1,9 | 1,6 | 19,4 | 4,7 | 20,4 | 24,6 | 26,0 | 6,7 |

Tabela 76: Tempos em minutos em que foi encontrada a melhor solução da variação da heurística lagrangeana com heur. de melhoramento I, NI=10, NB=10/30 (VHLMI)

| | A30L | B30L | A30M | B30M | A30H | B30H | A50L | B50L | A50M | B50M | A50H | B50H |
|----|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| 1 | 0,1 | 2,4 | 1,3 | 2,7 | 2,8 | 3,1 | 7,4 | 20,2 | 18,3 | 2,9 | 25,5 | 0,1 |
| 2 | 1,9 | 1,6 | 2,3 | 2,8 | 0,0 | 1,0 | 16,2 | 0,1 | 22,6 | 13,4 | 0,1 | 0,1 |
| 3 | 3,5 | 1,2 | 4,2 | 1,9 | 0,0 | 0,0 | 18,2 | 0,6 | 0,0 | 0,0 | 25,7 | 0,5 |
| 4 | 3,6 | 2,3 | 0,4 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,1 | 0,1 | 0,2 | 0,1 | 0,1 | 0,4 |
| 5 | 0,7 | 0,7 | 0,0 | 0,0 | 0,1 | 0,0 | 0,2 | 0,1 | 0,1 | 0,2 | 0,1 | 0,1 |
| 6 | 4,3 | 4,3 | 0,1 | 0,0 | 0,2 | 0,2 | 26,4 | 1,7 | 3,2 | 27,2 | 28,1 | 1,8 |
| 7 | 0,1 | 1,2 | 0,0 | 0,1 | 0,1 | 0,1 | 0,6 | 0,2 | 1,0 | 0,8 | 0,2 | 0,4 |
| 8 | 0,2 | 0,3 | 0,0 | 0,0 | 0,3 | 0,1 | 1,6 | 1,4 | 0,7 | 1,2 | 1,8 | 1,0 |
| 9 | 0,3 | 0,5 | 0,2 | 0,6 | 0,4 | 0,2 | 10,4 | 2,9 | 0,2 | 20,7 | 20,2 | 3,4 |
| 10 | 4,0 | 1,8 | 3,9 | 0,9 | 0,8 | 3,3 | 15,1 | 21,9 | 5,4 | 25,4 | 24,7 | 2,1 |
| 11 | 1,8 | 3,2 | 4,9 | 0,3 | 4,4 | 1,0 | 5,1 | 2,8 | 8,7 | 8,0 | 20,2 | 8,4 |
| 12 | 2,9 | 4,5 | 4,1 | 2,7 | 2,7 | 4,8 | 11,1 | 26,3 | 6,0 | 24,6 | 8,6 | 4,7 |
| 13 | 0,2 | 2,5 | 4,2 | 3,2 | 0,1 | 0,6 | 19,6 | 22,2 | 19,4 | 10,8 | 20,1 | 22,1 |

Tabela 77: Tempos em minutos em que foi encontrada a melhor solução da variação da heurística lagrangeana com heur. de melhoramento I, NI=100, NB=5 (VHLMI)

| | A30L | B30L | A30M | B30M | A30H | B30H | A50L | B50L | A50M | B50M | A50H | B50H |
|----|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| 1 | 3,3 | 4,8 | 0,1 | 0,0 | 3,2 | 4,5 | 11,3 | 23,2 | 18,9 | 0,5 | 0,5 | 0,5 |
| 2 | 4,7 | 3,8 | 3,8 | 0,0 | 0,2 | 2,7 | 23,2 | 5,4 | 0,6 | 0,5 | 0,5 | 1,1 |
| 3 | 1,5 | 1,8 | 0,1 | 0,1 | 0,3 | 0,2 | 16,0 | 3,0 | 0,3 | 1,6 | 3,3 | 2,7 |
| 4 | 1,3 | 2,5 | 0,4 | 0,5 | 0,4 | 0,4 | 1,2 | 1,3 | 2,6 | 0,9 | 0,9 | 1,1 |
| 5 | 3,8 | 1,3 | 0,2 | 0,9 | 0,1 | 1,4 | 1,0 | 1,0 | 1,0 | 2,2 | 0,8 | 4,3 |
| 6 | 1,8 | 0,6 | 1,9 | 0,1 | 0,4 | 1,9 | 1,2 | 1,0 | 12,8 | 9,5 | 22,2 | 21,3 |
| 7 | 3,3 | 0,6 | 0,4 | 1,2 | 1,2 | 1,4 | 1,8 | 11,9 | 4,9 | 5,0 | 2,5 | 1,1 |
| 8 | 0,6 | 0,7 | 0,9 | 2,8 | 2,6 | 1,8 | 1,7 | 10,9 | 11,0 | 3,7 | 10,1 | 10,9 |
| 9 | 4,3 | 2,2 | 3,7 | 0,1 | 2,5 | 3,5 | 19,6 | 19,6 | 9,3 | 10,7 | 13,6 | 7,0 |
| 10 | 0,6 | 4,8 | 3,1 | 1,4 | 3,4 | 4,0 | 17,0 | 27,5 | 3,6 | 28,9 | 20,6 | 10,1 |
| 11 | 0,7 | 3,3 | 3,2 | 2,5 | 1,5 | 3,9 | 6,5 | 0,9 | 12,4 | 9,9 | 24,4 | 15,6 |
| 12 | 3,3 | 4,4 | 0,7 | 2,3 | 3,4 | 2,3 | 2,7 | 11,1 | 6,5 | 18,9 | 22,1 | 5,2 |
| 13 | 4,0 | 1,5 | 2,3 | 4,8 | 2,8 | 2,6 | 26,9 | 15,2 | 16,8 | 18,5 | 21,7 | 29,5 |

Tabela 78: Tempos em minutos em que foi encontrada a melhor solução da variação da heurística lagrangeana com heur. de melhoramento I, NI=100, NB=10/30 (VHLMI)

| | A30L | B30L | A30M | B30M | A30H | B30H | A50L | B50L | A50M | B50M | A50H | B50H |
|----|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| 1 | 0,2 | 2,6 | 0,1 | 0,0 | 0,4 | 3,3 | 22,0 | 19,6 | 15,5 | 0,5 | 0,5 | 0,5 |
| 2 | 0,9 | 0,8 | 0,5 | 0,0 | 0,2 | 2,6 | 25,5 | 26,7 | 5,1 | 0,5 | 0,5 | 1,1 |
| 3 | 2,4 | 2,9 | 0,1 | 0,1 | 0,3 | 0,2 | 10,1 | 25,5 | 0,4 | 1,6 | 3,3 | 2,7 |
| 4 | 1,3 | 2,8 | 0,4 | 0,5 | 0,4 | 0,4 | 1,3 | 7,4 | 2,6 | 0,9 | 0,9 | 1,1 |
| 5 | 3,7 | 1,9 | 0,2 | 0,9 | 0,1 | 1,4 | 10,4 | 1,5 | 1,0 | 2,2 | 0,8 | 3,6 |
| 6 | 1,3 | 0,6 | 1,9 | 0,1 | 0,4 | 1,9 | 7,2 | 0,8 | 5,0 | 9,5 | 22,1 | 21,3 |
| 7 | 1,2 | 0,4 | 0,4 | 1,2 | 1,2 | 1,4 | 1,7 | 1,6 | 4,9 | 5,0 | 2,5 | 1,1 |
| 8 | 2,2 | 0,3 | 0,9 | 2,8 | 2,6 | 1,8 | 2,4 | 8,2 | 11,0 | 3,7 | 10,1 | 10,9 |
| 9 | 4,5 | 2,2 | 3,7 | 0,1 | 2,5 | 3,5 | 14,1 | 8,2 | 9,3 | 10,7 | 13,5 | 7,0 |
| 10 | 3,8 | 4,8 | 3,1 | 1,4 | 3,4 | 4,0 | 23,6 | 5,6 | 3,6 | 28,9 | 20,6 | 10,1 |
| 11 | 0,7 | 3,3 | 3,2 | 2,5 | 1,5 | 3,8 | 17,0 | 16,3 | 12,4 | 9,9 | 24,4 | 15,6 |
| 12 | 2,0 | 4,4 | 0,7 | 2,3 | 3,4 | 2,3 | 8,4 | 16,3 | 2,0 | 18,9 | 22,0 | 5,2 |
| 13 | 4,0 | 1,5 | 2,3 | 4,8 | 2,8 | 2,6 | 15,4 | 23,1 | 16,8 | 18,5 | 21,7 | 29,5 |

Tabela 79: Tempos em minutos em que foi encontrada a melhor solução da variação da heurística lagrangeana com heur. de melhoramento II, NI=10 (VHLMII)

| | A30L | B30L | A30M | B30M | A30H | B30H | A50L | B50L | A50M | B50M | A50H | B50H |
|----|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| 1 | 3,1 | 4,8 | 4,1 | 3,7 | 3,2 | 2,3 | 9,6 | 8,4 | 13,1 | 14,5 | 24,4 | 0,0 |
| 2 | 2,0 | 0,2 | 2,8 | 0,6 | 1,3 | 4,1 | 25,8 | 26,9 | 22,0 | 5,9 | 4,4 | 0,0 |
| 3 | 3,8 | 3,0 | 4,7 | 1,4 | 0,0 | 0,0 | 8,4 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,5 | 0,1 |
| 4 | 4,1 | 0,2 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 9,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 |
| 5 | 1,8 | 3,1 | 3,9 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 2,3 | 0,0 | 0,1 | 0,0 | 0,1 | 0,0 |
| 6 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,8 | 0,2 | 0,3 | 22,1 | 3,6 | 0,0 |
| 7 | 1,2 | 3,9 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,1 | 0,0 | 0,1 | 0,0 | 0,1 |
| 8 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,1 | 0,1 | 0,1 | 0,1 | 0,0 | 0,1 |
| 9 | 0,1 | 0,0 | 0,2 | 0,1 | 0,0 | 0,0 | 29,1 | 0,0 | 0,5 | 23,9 | 21,2 | 0,2 |
| 10 | 0,1 | 2,5 | 4,1 | 5,0 | 0,9 | 0,7 | 0,1 | 19,2 | 17,5 | 8,0 | 20,7 | 23,4 |
| 11 | 0,0 | 0,7 | 0,2 | 4,6 | 4,1 | 1,5 | 15,1 | 10,7 | 0,8 | 6,0 | 19,8 | 5,7 |
| 12 | 1,4 | 4,8 | 1,1 | 0,6 | 1,8 | 1,7 | 25,3 | 2,3 | 24,5 | 26,8 | 29,5 | 24,0 |
| 13 | 2,3 | 2,7 | 0,5 | 4,5 | 2,8 | 1,1 | 11,7 | 9,6 | 23,4 | 17,6 | 22,9 | 12,0 |

Tabela 80: Tempos em minutos em que foi encontrada a melhor solução da variação da heurística lagrangeana com heur. de melhoramento II, NI=100 (VHLMII)

| | A30L | B30L | A30M | B30M | A30H | B30H | A50L | B50L | A50M | B50M | A50H | B50H |
|----|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| 1 | 2,2 | 0,7 | 3,7 | 2,1 | 1,6 | 2,6 | 29,2 | 20,9 | 28,5 | 16,9 | 5,6 | 0,0 |
| 2 | 3,1 | 1,6 | 2,7 | 3,7 | 0,1 | 1,5 | 18,6 | 14,0 | 26,1 | 20,2 | 0,0 | 0,1 |
| 3 | 2,3 | 3,2 | 4,4 | 4,4 | 0,0 | 0,9 | 19,1 | 1,4 | 0,0 | 0,0 | 2,0 | 0,4 |
| 4 | 2,8 | 0,8 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 10,4 | 0,1 | 0,1 | 0,1 | 0,1 | 0,3 |
| 5 | 3,7 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,1 | 0,0 | 0,2 | 0,1 | 0,4 | 0,1 | 0,3 | 0,3 |
| 6 | 4,2 | 0,0 | 0,4 | 0,2 | 0,1 | 0,2 | 4,9 | 0,1 | 1,8 | 3,1 | 24,8 | 0,4 |
| 7 | 3,4 | 0,1 | 0,1 | 0,0 | 0,1 | 0,1 | 0,4 | 0,2 | 0,1 | 0,3 | 0,1 | 0,3 |
| 8 | 0,8 | 0,0 | 0,2 | 0,2 | 0,1 | 0,2 | 0,1 | 0,1 | 1,5 | 0,8 | 0,2 | 0,1 |
| 9 | 0,3 | 0,5 | 0,0 | 0,0 | 0,4 | 0,1 | 26,3 | 0,8 | 2,7 | 1,4 | 19,6 | 6,0 |
| 10 | 2,8 | 1,5 | 0,9 | 3,8 | 3,4 | 1,6 | 24,7 | 5,3 | 17,1 | 7,5 | 23,6 | 19,0 |
| 11 | 3,8 | 1,4 | 1,4 | 3,5 | 4,4 | 1,3 | 9,9 | 14,1 | 19,2 | 8,4 | 26,9 | 21,6 |
| 12 | 0,5 | 0,2 | 4,2 | 4,1 | 4,4 | 1,7 | 28,4 | 9,2 | 13,6 | 12,8 | 21,1 | 1,9 |
| 13 | 2,5 | 4,4 | 2,5 | 2,1 | 4,7 | 4,7 | 1,8 | 7,3 | 26,6 | 15,3 | 2,4 | 29,0 |

As tabelas entre a Tabela 81 e a Tabela 84 apresentam os resultados em valores de custo da heurística lagrangeana e da sua variação com melhoramentos para as 2 melhores combinações de parâmetros.

Tabela 81: Resultados de 10 corridas de HLMI 11 com NI=10 e NB=5

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| A30L | 45285 | 45345 | 45490 | 45445 | 45400 | 45370 | 45045 | 45000 | 45295 | 45465 |
| B30L | 44190 | 44520 | 44685 | 44245 | 44435 | 44575 | 44710 | 44325 | 44030 | 44645 |
| A30M | 78665 | 78155 | 78365 | 78580 | 77810 | 78510 | 78210 | 78355 | 78225 | 77295 |
| B30M | 94150 | 94950 | 95185 | 93570 | 94095 | 94870 | 94545 | 95015 | 93785 | 94580 |
| A30H | 152960 | 152950 | 151840 | 152150 | 151820 | 152440 | 153060 | 152290 | 152850 | 152340 |
| B30H | 158115 | 157870 | 157915 | 158500 | 157915 | 158020 | 158555 | 158090 | 158115 | 158540 |
| A50L | 88725 | 88705 | 88670 | 89100 | 89045 | 89000 | 88840 | 89000 | 88670 | 89040 |
| B50L | 83485 | 83590 | 83650 | 83590 | 83165 | 83760 | 83400 | 83000 | 83340 | 83355 |
| A50M | 158985 | 158405 | 158465 | 157985 | 158885 | 159010 | 157515 | 158290 | 158820 | 158900 |
| B50M | 154160 | 154855 | 153690 | 154175 | 154530 | 153990 | 153790 | 154190 | 154415 | 153325 |
| A50H | 223300 | 223315 | 222915 | 223725 | 222625 | 222475 | 223510 | 222865 | 223500 | 222990 |
| B50H | 229930 | 230445 | 230630 | 230175 | 229985 | 230200 | 230035 | 230645 | 230250 | 229890 |

Tabela 82: Resultados de 10 corridas de HLMI 4 com NI=10 e NB=10/30

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| A30L | 45400 | 45510 | 45560 | 45530 | 45755 | 45690 | 45415 | 45630 | 45800 | 45390 |
| B30L | 44815 | 45090 | 44370 | 44495 | 45175 | 45200 | 45115 | 44210 | 44555 | 45125 |
| A30M | 78495 | 77450 | 78350 | 78610 | 78590 | 78465 | 78625 | 78385 | 78470 | 78215 |
| B30M | 94575 | 94975 | 94615 | 94265 | 94365 | 94425 | 94430 | 94250 | 95005 | 94675 |
| A30H | 152980 | 152355 | 152700 | 152995 | 152165 | 152445 | 152085 | 152725 | 152460 | 153000 |
| B30H | 157405 | 157755 | 158285 | 157955 | 157555 | 158090 | 158020 | 157790 | 157825 | 157365 |
| A50L | 89010 | 88885 | 88575 | 89065 | 88735 | 88850 | 89245 | 89265 | 88850 | 89090 |
| B50L | 83790 | 83630 | 83840 | 83520 | 83780 | 84005 | 84040 | 84030 | 83800 | 84100 |
| A50M | 158050 | 158775 | 158155 | 158600 | 158450 | 158170 | 158690 | 158865 | 158585 | 158480 |
| B50M | 154355 | 153865 | 154510 | 154350 | 154040 | 154500 | 154590 | 154280 | 154445 | 154445 |
| A50H | 223475 | 223510 | 223920 | 223355 | 223050 | 223745 | 223150 | 223410 | 223260 | 223320 |
| B50H | 230560 | 230215 | 229845 | 230070 | 230200 | 229240 | 230545 | 229960 | 229965 | 230405 |

Tabela 83: Resultados de 10 corridas de VHLMI 11 com NI=10 e NB=5

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| A30L | 45405 | 45230 | 45075 | 45050 | 45045 | 45275 | 44940 | 45540 | 45345 | 45170 |
| B30L | 44130 | 44440 | 43675 | 44275 | 44460 | 43975 | 44120 | 43645 | 44055 | 44240 |
| A30M | 78955 | 79395 | 78695 | 79085 | 78955 | 78910 | 79500 | 78740 | 79100 | 79370 |
| B30M | 94390 | 94610 | 95375 | 95215 | 95460 | 95085 | 95005 | 94970 | 94940 | 95125 |
| A30H | 152960 | 152840 | 153095 | 153010 | 153285 | 152910 | 153530 | 153495 | 152970 | 153115 |
| B30H | 159345 | 158230 | 158665 | 158565 | 158715 | 158480 | 159045 | 158840 | 158580 | 157540 |
| A50L | 89000 | 89340 | 89130 | 88525 | 89375 | 89210 | 89530 | 89170 | 89005 | 89395 |
| B50L | 83730 | 83605 | 83930 | 83345 | 83695 | 83815 | 84030 | 82970 | 83385 | 83615 |
| A50M | 158835 | 159525 | 159175 | 159035 | 159140 | 158565 | 159515 | 159725 | 159630 | 159375 |
| B50M | 154870 | 155065 | 155010 | 155390 | 155195 | 154280 | 155205 | 155270 | 154715 | 154880 |
| A50H | 224270 | 224365 | 224040 | 224010 | 224400 | 223505 | 223300 | 224330 | 224240 | 223295 |
| B50H | 230765 | 230810 | 231630 | 230765 | 231200 | 231555 | 230380 | 231055 | 230570 | 230895 |

Tabela 84: Resultados de 10 corridas de VHLMI 10 com NI=10 e NB=10/30

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| A30L | 45455 | 45580 | 45115 | 45590 | 44585 | 45540 | 45430 | 45580 | 44640 | 45115 |
| B30L | 44210 | 44410 | 44450 | 44570 | 44035 | 43625 | 44580 | 44185 | 44620 | 44325 |
| A30M | 79390 | 79160 | 78835 | 77010 | 79105 | 79115 | 79145 | 79385 | 78745 | 78860 |
| B30M | 94870 | 94480 | 95010 | 93770 | 94990 | 94915 | 94665 | 94740 | 94475 | 95330 |
| A30H | 153190 | 152840 | 153130 | 153575 | 152805 | 152540 | 153090 | 152995 | 152880 | 152850 |
| B30H | 158075 | 157725 | 158305 | 157880 | 158665 | 158145 | 158170 | 158975 | 158710 | 158535 |
| A50L | 89705 | 89255 | 89560 | 89300 | 89720 | 89315 | 89475 | 89385 | 89205 | 89710 |
| B50L | 83655 | 83555 | 83315 | 83250 | 83355 | 82835 | 83805 | 83605 | 82950 | 83320 |
| A50M | 159465 | 159460 | 159695 | 158585 | 159355 | 159145 | 159170 | 159910 | 159380 | 159460 |
| B50M | 154965 | 154955 | 155300 | 155110 | 154935 | 155150 | 154665 | 154650 | 154940 | 154780 |
| A50H | 223505 | 224185 | 224050 | 224200 | 223380 | 223700 | 223075 | 223380 | 224075 | 223690 |
| B50H | 231140 | 231305 | 231135 | 230700 | 230660 | 230965 | 230670 | 231110 | 231355 | 231875 |

A Tabela 85 apresenta os resultados obtidos com a relaxação linear das variantes da formulação do modelo completo para o dimensionamento de redes com encaminhamento por percursos de peso mínimo (ver secção 4.2). A coluna mais à esquerda indica o caso de estudo a que correspondem os resultados de cada linha. Os casos de estudo são os apresentados na secção 4.5.1. Estes são os 50 casos de estudo (A1 a B5) com valores de tráfego médio de 100, 200, 300, 400 e 600 Mbps.

Na coluna “Ótimo” estão indicados os valores ótimos de custo encontrados para cada caso de estudo. Os valores da relaxação linear das formulações são apresentados nas colunas “LP”, os intervalos duais calculados como $(\text{Ótimo}-\text{LP})/\text{LP}$ nas colunas “Int.Dual” e os intervalos de tempo consumido em segundos na resolução da relaxação linear das formulações nas colunas “ ΔT ”. São também apresentados os valores médios do intervalo dual e tempo consumido na resolução da relaxação linear para os diferentes valores de tráfego médio (linhas “Média X”, onde X indica o valor de tráfego médio) e para todos os casos de estudo (linha “Média Total”).

A Tabela 86 apresenta os tempos em minutos gastos a resolver as formulações cujos resultados estão expostos nas Tabela 85. Além da média dos tempos são também apresentados os tempos máximos gastos a resolver as formulações por quantidade de tráfego.

Tabela 85: Resultados da relaxação linear para as variantes da formulação do modelo completo

| Caso de estudo | Ótimo | Sem Restrições Adicionais | | | | | | Com Restrições Adicionais | | | | | |
|----------------|-------|---------------------------|----------|-------|----------|----------|-------|---------------------------|----------|-------|----------|----------|-------|
| | | Desagregada | | | Agregada | | | Desagregada | | | Agregada | | |
| | | LP | Int.Dual | ΔT(s) | LP | Int.Dual | ΔT(s) | LP | Int.Dual | ΔT(s) | LP | Int.Dual | ΔT(s) |
| A1 100 | 7890 | 4798,6 | 64,4% | 0,03 | 4798,6 | 64,4% | 0,02 | 7049,7 | 11,9% | 0,22 | 5653,3 | 39,6% | 0,05 |
| A2 100 | 9010 | 5921,0 | 52,2% | 0,05 | 5921,0 | 52,2% | 0,00 | 8330,0 | 8,2% | 0,22 | 7027,4 | 28,2% | 0,05 |
| A3 100 | 7780 | 5141,5 | 51,3% | 0,03 | 5141,5 | 51,3% | 0,00 | 7271,9 | 7,0% | 0,28 | 5976,1 | 30,2% | 0,05 |
| A4 100 | 8535 | 5318,0 | 60,5% | 0,05 | 5318,0 | 60,5% | 0,00 | 7260,7 | 17,6% | 0,22 | 5991,1 | 42,5% | 0,03 |
| A5 100 | 9010 | 5557,5 | 62,1% | 0,05 | 5557,5 | 62,1% | 0,01 | 7952,0 | 13,3% | 0,24 | 6667,3 | 35,1% | 0,03 |
| B1 100 | 9400 | 6567,5 | 43,1% | 0,03 | 6567,5 | 43,1% | 0,00 | 8552,1 | 9,9% | 0,20 | 7162,4 | 31,2% | 0,05 |
| B2 100 | 11165 | 7444,7 | 50,0% | 0,03 | 7444,7 | 50,0% | 0,00 | 10016,8 | 11,5% | 0,16 | 8894,5 | 25,5% | 0,03 |
| B3 100 | 10765 | 6000,8 | 79,4% | 0,03 | 6000,8 | 79,4% | 0,02 | 8692,8 | 23,8% | 0,16 | 7542,0 | 42,7% | 0,03 |
| B4 100 | 8920 | 5272,0 | 69,2% | 0,03 | 5272,0 | 69,2% | 0,00 | 8000,4 | 11,5% | 0,14 | 6303,6 | 41,5% | 0,03 |
| B5 100 | 9665 | 6212,5 | 55,6% | 0,03 | 6212,5 | 55,6% | 0,02 | 8382,4 | 15,3% | 0,17 | 7121,7 | 35,7% | 0,03 |
| Média 100 | | | 58,8% | 0,04 | | 58,8% | 0,01 | | 13,0% | 0,20 | | 35,2% | 0,04 |
| A1 200 | 14060 | 9314,1 | 51,0% | 0,03 | 9314,1 | 51,0% | 0,02 | 11732,6 | 19,8% | 0,26 | 11627,6 | 20,9% | 0,02 |
| A2 200 | 16005 | 11903,9 | 34,5% | 0,05 | 11903,9 | 34,5% | 0,00 | 13525,3 | 18,3% | 0,16 | 13106,3 | 22,1% | 0,03 |
| A3 200 | 12810 | 9564,8 | 33,9% | 0,03 | 9564,8 | 33,9% | 0,02 | 11381,9 | 12,5% | 0,24 | 11042,8 | 16,0% | 0,02 |
| A4 200 | 17025 | 12147,6 | 40,2% | 0,05 | 12147,6 | 40,2% | 0,00 | 14250,0 | 19,5% | 0,20 | 13909,8 | 22,4% | 0,02 |
| A5 200 | 15220 | 11263,7 | 35,1% | 0,05 | 11263,7 | 35,1% | 0,00 | 13214,2 | 15,2% | 0,16 | 13048,8 | 16,6% | 0,01 |
| B1 200 | 17925 | 14102,7 | 27,1% | 0,03 | 14102,7 | 27,1% | 0,02 | 15613,7 | 14,8% | 0,14 | 14938,5 | 20,0% | 0,02 |
| B2 200 | 19340 | 14299,1 | 35,3% | 0,03 | 14299,1 | 35,3% | 0,00 | 16067,3 | 20,4% | 0,11 | 15482,5 | 24,9% | 0,02 |
| B3 200 | 16365 | 12416,0 | 31,8% | 0,03 | 12416,0 | 31,8% | 0,02 | 13771,8 | 18,8% | 0,13 | 13373,6 | 22,4% | 0,02 |
| B4 200 | 14325 | 10303,2 | 39,0% | 0,03 | 10303,2 | 39,0% | 0,02 | 12155,8 | 17,8% | 0,14 | 11716,9 | 22,3% | 0,02 |
| B5 200 | 20175 | 14325,5 | 40,8% | 0,03 | 14325,5 | 40,8% | 0,00 | 15925,7 | 26,7% | 0,14 | 15243,0 | 32,4% | 0,02 |
| Média 200 | | | 36,9% | 0,04 | | 36,9% | 0,01 | | 18,4% | 0,17 | | 22,0% | 0,02 |
| A1 300 | 22605 | 17714,6 | 27,6% | 0,05 | 17714,6 | 27,6% | 0,00 | 19069,0 | 18,5% | 0,20 | 18961,0 | 19,2% | 0,02 |
| A1 300 | 20005 | 16062,4 | 24,5% | 0,05 | 16062,4 | 24,5% | 0,00 | 17430,6 | 14,8% | 0,17 | 17124,4 | 16,8% | 0,01 |
| A3 300 | 21785 | 17967,2 | 21,2% | 0,05 | 17967,2 | 21,2% | 0,00 | 18905,5 | 15,2% | 0,14 | 18620,3 | 17,0% | 0,01 |
| A4 300 | 21540 | 17506,3 | 23,0% | 0,03 | 17506,3 | 23,0% | 0,00 | 19042,0 | 13,1% | 0,20 | 18776,4 | 14,7% | 0,01 |
| A5 300 | 21690 | 17903,9 | 21,1% | 0,03 | 17903,9 | 21,1% | 0,01 | 19137,9 | 13,3% | 0,19 | 18850,1 | 15,1% | 0,01 |
| B1 300 | 23125 | 18539,2 | 24,7% | 0,03 | 18539,2 | 24,7% | 0,02 | 20579,7 | 12,4% | 0,14 | 20255,4 | 14,2% | 0,02 |
| B2 300 | 21570 | 17189,1 | 25,5% | 0,03 | 17189,1 | 25,5% | 0,00 | 18774,6 | 14,9% | 0,11 | 18321,2 | 17,7% | 0,02 |
| B3 300 | 25575 | 20440,5 | 25,1% | 0,03 | 20440,5 | 25,1% | 0,01 | 22346,5 | 14,4% | 0,09 | 22222,7 | 15,1% | 0,02 |
| B4 300 | 23245 | 18274,7 | 27,2% | 0,03 | 18274,7 | 27,2% | 0,01 | 19710,3 | 17,9% | 0,09 | 19616,2 | 18,5% | 0,01 |
| B5 300 | 22555 | 17335,8 | 30,1% | 0,03 | 17335,8 | 30,1% | 0,02 | 18431,5 | 22,4% | 0,17 | 18089,9 | 24,7% | 0,02 |
| Média 300 | | | 25,0% | 0,04 | | 25,0% | 0,01 | | 15,7% | 0,15 | | 17,3% | 0,02 |
| A1 400 | 27200 | 21457,0 | 26,8% | 0,05 | 21457,0 | 26,8% | 0,00 | 23109,3 | 17,7% | 0,13 | 23051,5 | 18,0% | 0,01 |
| A2 400 | 23765 | 20413,0 | 16,4% | 0,05 | 20413,0 | 16,4% | 0,00 | 22180,9 | 7,1% | 0,17 | 22045,3 | 7,8% | 0,02 |
| A3 400 | 23275 | 18714,5 | 24,4% | 0,03 | 18714,5 | 24,4% | 0,02 | 20082,9 | 15,9% | 0,22 | 19785,9 | 17,6% | 0,02 |
| A4 400 | 31200 | 25475,2 | 22,5% | 0,05 | 25475,2 | 22,5% | 0,02 | 27256,6 | 14,5% | 0,13 | 27222,1 | 14,6% | 0,02 |
| A5 400 | 21160 | 16566,4 | 27,7% | 0,03 | 16566,4 | 27,7% | 0,02 | 18823,5 | 12,4% | 0,16 | 18776,3 | 12,7% | 0,02 |
| B1 400 | 28345 | 23111,2 | 22,6% | 0,03 | 23111,2 | 22,6% | 0,00 | 24211,4 | 17,1% | 0,08 | 23988,3 | 18,2% | 0,02 |
| B2 400 | 34090 | 26909,6 | 26,7% | 0,03 | 26909,6 | 26,7% | 0,02 | 28245,2 | 20,7% | 0,08 | 28103,2 | 21,3% | 0,02 |
| B3 400 | 25635 | 20984,4 | 22,2% | 0,03 | 20984,4 | 22,2% | 0,02 | 22336,2 | 14,8% | 0,13 | 21799,3 | 17,6% | 0,01 |
| B4 400 | 29495 | 24071,6 | 22,5% | 0,03 | 24071,6 | 22,5% | 0,02 | 25090,3 | 17,6% | 0,09 | 24990,0 | 18,0% | 0,01 |
| B5 400 | 31225 | 25397,8 | 22,9% | 0,03 | 25397,8 | 22,9% | 0,00 | 26828,7 | 16,4% | 0,09 | 26406,8 | 18,2% | 0,02 |
| Média 400 | | | 23,5% | 0,04 | | 23,5% | 0,01 | | 15,4% | 0,13 | | 16,4% | 0,02 |
| A1 600 | 41545 | 35904,6 | 15,7% | 0,03 | 35904,6 | 15,7% | 0,02 | 36595,8 | 13,5% | 0,11 | 36575,3 | 13,6% | 0,02 |
| A2 600 | 43385 | 37110,9 | 16,9% | 0,05 | 37110,9 | 16,9% | 0,01 | 38155,9 | 13,7% | 0,09 | 38106,8 | 13,9% | 0,02 |
| A3 600 | 33220 | 28480,9 | 16,6% | 0,03 | 28480,9 | 16,6% | 0,00 | 29936,7 | 11,0% | 0,13 | 29770,1 | 11,6% | 0,01 |
| A4 600 | 36585 | 31857,4 | 14,8% | 0,03 | 31857,4 | 14,8% | 0,02 | 33005,5 | 10,8% | 0,13 | 32939,9 | 11,1% | 0,03 |
| A5 600 | 39810 | 33889,0 | 17,5% | 0,05 | 33889,0 | 17,5% | 0,00 | 35293,5 | 12,8% | 0,17 | 35263,5 | 12,9% | 0,02 |
| B1 600 | 44905 | 37855 | 18,6% | 0,03 | 37855 | 18,6% | 0,00 | 38699 | 16,0% | 0,06 | 38579 | 16,4% | 0,02 |
| B2 600 | 44055 | 38483 | 14,5% | 0,03 | 38483 | 14,5% | 0,02 | 39682 | 11,0% | 0,05 | 39637 | 11,1% | 0,02 |
| B3 600 | 48860 | 42401 | 15,2% | 0,03 | 42401 | 15,2% | 0,00 | 43629 | 12,0% | 0,05 | 43622 | 12,0% | 0,02 |
| B4 600 | 42370 | 36335 | 16,6% | 0,03 | 36335 | 16,6% | 0,01 | 37892 | 11,8% | 0,08 | 37822 | 12,0% | 0,00 |
| B5 600 | 36125 | 30004 | 20,4% | 0,03 | 30004 | 20,4% | 0,01 | 31482 | 14,7% | 0,11 | 31390 | 15,1% | 0,01 |
| Média 600 | | | 16,7% | 0,03 | | 16,7% | 0,01 | | 12,7% | 0,10 | | 13,0% | 0,02 |
| Média Total | | | 32,2% | 0,04 | | 32,2% | 0,01 | | 15,0% | 0,15 | | 20,8% | 0,02 |

Tabela 86: Tempos em minutos consumidos a resolver as várias formulações do modelo completo

| Caso de estudo | Pesos Reais | | | | Pesos Inteiros | | | |
|----------------|-----------------------|----------|-----------------------|----------|-----------------------|----------|-----------------------|----------|
| | Sem Restr. Adicionais | | Com Restr. Adicionais | | Sem Restr. Adicionais | | Com Restr. Adicionais | |
| | Desagreg. | Agregada | Desagreg. | Agregada | Desagreg. | Agregada | Desagreg. | Agregada |
| A1 100 | 0,9 | 2,8 | 0,5 | 1,5 | 1,0 | 1,6 | 0,5 | 0,7 |
| A2 100 | 2,1 | 1,5 | 0,3 | 0,4 | 1,0 | 1,7 | 0,6 | 0,7 |
| A3 100 | 0,8 | 0,5 | 0,4 | 1,3 | 0,4 | 0,6 | 0,2 | 0,8 |
| A4 100 | 2,6 | 2,4 | 1,1 | 1,8 | 2,7 | 2,0 | 0,8 | 1,9 |
| A5 100 | 2,7 | 2,8 | 0,8 | 1,5 | 2,9 | 1,3 | 1,3 | 1,7 |
| B1 100 | 0,3 | 0,4 | 0,1 | 0,2 | 0,3 | 0,3 | 0,2 | 0,1 |
| B2 100 | 1,3 | 2,5 | 0,4 | 0,3 | 1,2 | 1,3 | 0,6 | 0,6 |
| B3 100 | 2,3 | 3,9 | 0,6 | 0,8 | 2,7 | 3,1 | 0,5 | 0,6 |
| B4 100 | 0,6 | 0,6 | 0,2 | 0,3 | 0,4 | 0,8 | 0,1 | 0,3 |
| B5 100 | 0,7 | 0,5 | 0,2 | 0,3 | 0,5 | 0,6 | 0,2 | 0,3 |
| Média 100 | 1,4 | 1,8 | 0,5 | 0,8 | 1,3 | 1,3 | 0,5 | 0,8 |
| Máximo 100 | 2,7 | 3,9 | 1,1 | 1,8 | 2,9 | 3,1 | 1,3 | 1,9 |
| A1 200 | 46,9 | 95,7 | 16,6 | 21,5 | 47,1 | 24,8 | 7,8 | 13,1 |
| A2 200 | 35,7 | 39,4 | 15,7 | 10,4 | 37,4 | 27,8 | 19,5 | 13,6 |
| A3 200 | 4,7 | 15,4 | 3,1 | 2,3 | 9,3 | 9,8 | 2,5 | 2,8 |
| A4 200 | 54,2 | 145,5 | 7,2 | 10,4 | 156,3 | 217,0 | 7,9 | 10,2 |
| A5 200 | 4,0 | 8,6 | 1,2 | 1,9 | 5,3 | 7,6 | 2,4 | 2,2 |
| B1 200 | 0,3 | 0,4 | 0,5 | 0,4 | 0,8 | 0,7 | 0,4 | 0,4 |
| B2 200 | 3,0 | 3,8 | 2,1 | 5,9 | 3,6 | 6,0 | 2,2 | 3,4 |
| B3 200 | 1,6 | 2,3 | 1,4 | 1,3 | 1,8 | 2,0 | 1,7 | 2,0 |
| B4 200 | 1,4 | 1,2 | 0,4 | 1,1 | 1,5 | 1,5 | 0,8 | 1,5 |
| B5 200 | 8,0 | 25,5 | 8,7 | 6,4 | 11,7 | 54,0 | 6,9 | 6,8 |
| Média 200 | 16,0 | 33,8 | 5,7 | 6,2 | 27,5 | 35,1 | 5,2 | 5,6 |
| Máximo 200 | 54,2 | 145,5 | 16,6 | 21,5 | 156,3 | 217,0 | 19,5 | 13,6 |
| A1 300 | 19,6 | 57,1 | 12,3 | 15,1 | 49,2 | 45,1 | 18,9 | 21,4 |
| A2 300 | 14,6 | 8,9 | 3,8 | 3,9 | 16,6 | 19,4 | 7,4 | 11,5 |
| A3 300 | 6,8 | 4,5 | 6,7 | 3,4 | 7,2 | 25,4 | 2,7 | 2,9 |
| A4 300 | 24,1 | 13,6 | 6,6 | 4,2 | 10,9 | 14,6 | 14,4 | 11,6 |
| A5 300 | 5,5 | 12,7 | 1,8 | 1,5 | 3,7 | 6,6 | 6,1 | 0,8 |
| B1 300 | 0,8 | 0,6 | 0,2 | 0,4 | 1,0 | 1,2 | 0,1 | 0,2 |
| B2 300 | 0,7 | 1,2 | 1,2 | 0,9 | 0,9 | 1,7 | 1,0 | 1,4 |
| B3 300 | 2,7 | 0,6 | 0,7 | 0,4 | 4,8 | 1,5 | 0,8 | 0,4 |
| B4 300 | 1,8 | 2,1 | 0,8 | 1,4 | 3,9 | 3,7 | 2,5 | 1,8 |
| B5 300 | 4,0 | 4,6 | 1,1 | 1,5 | 3,9 | 7,4 | 2,7 | 4,2 |
| Média 300 | 8,1 | 10,6 | 3,5 | 3,3 | 10,2 | 12,6 | 5,7 | 5,6 |
| Máximo 300 | 24,1 | 57,1 | 12,3 | 15,1 | 49,2 | 45,1 | 18,9 | 21,4 |
| A1 400 | 44,3 | 64,7 | 52,1 | 31,4 | 41,6 | 44,7 | 24,0 | 23,2 |
| A2 400 | 1,2 | 0,5 | 0,5 | 0,6 | 0,8 | 0,5 | 0,4 | 0,7 |
| A3 400 | 17,7 | 15,2 | 5,1 | 7,6 | 22,4 | 9,9 | 6,1 | 2,9 |
| A4 400 | 12,8 | 8,7 | 4,5 | 2,7 | 8,5 | 14,9 | 4,3 | 2,0 |
| A5 400 | 14,2 | 17,1 | 4,3 | 6,8 | 11,2 | 15,7 | 6,1 | 9,9 |
| B1 400 | 1,9 | 4,1 | 2,7 | 1,1 | 1,7 | 2,0 | 3,2 | 1,9 |
| B2 400 | 1,9 | 4,4 | 6,0 | 3,2 | 2,0 | 13,4 | 2,3 | 4,0 |
| B3 400 | 0,4 | 0,3 | 0,3 | 0,3 | 0,2 | 0,6 | 0,4 | 0,3 |
| B4 400 | 0,9 | 1,1 | 0,4 | 0,6 | 1,0 | 1,4 | 0,7 | 1,0 |
| B5 400 | 0,7 | 0,4 | 0,6 | 0,3 | 1,2 | 0,4 | 0,5 | 0,4 |
| Média 400 | 9,6 | 11,7 | 7,7 | 5,5 | 9,1 | 10,3 | 4,8 | 4,6 |
| Máximo 400 | 44,3 | 64,7 | 52,1 | 31,4 | 41,6 | 44,7 | 24,0 | 23,2 |
| A1 600 | 1,2 | 1,2 | 1,2 | 1,5 | 2,8 | 0,6 | 2,1 | 0,7 |
| A2 600 | 4,1 | 1,8 | 4,1 | 2,8 | 2,9 | 4,3 | 3,1 | 3,6 |
| A3 600 | 0,9 | 0,6 | 0,4 | 0,8 | 1,0 | 1,5 | 0,6 | 0,2 |
| A4 600 | 0,3 | 0,2 | 0,2 | 0,1 | 0,1 | 0,1 | 0,2 | 0,2 |
| A5 600 | 3,1 | 7,3 | 1,9 | 2,9 | 16,5 | 6,1 | 1,6 | 1,1 |
| B1 600 | 0,3 | 0,5 | 0,4 | 0,3 | 0,4 | 0,3 | 0,3 | 0,2 |
| B2 600 | 0,2 | 0,2 | 0,2 | 0,1 | 0,2 | 0,2 | 0,1 | 0,3 |
| B3 600 | 0,1 | 0,2 | 0,2 | 0,1 | 0,1 | 0,3 | 3,5 | 0,4 |
| B4 600 | 0,3 | 0,2 | 0,2 | 0,2 | 0,2 | 0,2 | 0,1 | 0,2 |
| B5 600 | 0,9 | 1,0 | 1,2 | 0,5 | 0,7 | 1,0 | 1,4 | 0,5 |
| Média 600 | 1,1 | 1,3 | 1,0 | 0,9 | 2,5 | 1,5 | 1,3 | 0,7 |
| Máximo 600 | 4,1 | 7,3 | 4,1 | 2,9 | 16,5 | 6,1 | 3,5 | 3,6 |
| Média Total | 7,2 | 11,8 | 3,7 | 3,3 | 10,1 | 12,2 | 3,5 | 3,5 |
| Máximo Total | 54,2 | 145,5 | 52,1 | 31,4 | 156,3 | 217,0 | 24,0 | 23,2 |

As tabelas seguintes referem-se aos resultados obtidos com a técnica de duas fases. A Tabela 87 apresenta os tempos em minutos gastos a resolver a formulação da primeira fase para as variantes agregada e desagregada e com restrições de corte adicionais.

A Tabela 88 apresenta os resultados obtidos com a formulação da segunda fase. São apresentados os tempos em segundos demorados a resolver a formulação de segunda fase correspondente a cada uma das duas variantes agregada e desagregada da primeira fase. São também apresentados os pesos máximos encontrados para cada caso de estudo e para cada variante.

A Tabela 89 faz a comparação entre o modelo completo (variante agregada com restrições adicionais e pesos inteiros) e a técnica de duas fases (variante desagregada). A coluna “Ganho” indica $(MC-T2F)/T2F$, onde MC representa o tempo gasto a resolver modelo completo e $T2F$ representa o tempo gasto a resolver a técnica de duas fases.

Tabela 87: Tempos em minutos consumidos a resolver as formulações da primeira fase

| Caso de estudo | Desagreg. | Agregada |
|----------------|-----------|----------|
| A1 100 | 0,2 | 0,4 |
| A2 100 | 0,2 | 0,2 |
| A3 100 | 0,2 | 0,2 |
| A4 100 | 0,4 | 0,5 |
| A5 100 | 0,4 | 0,5 |
| B1 100 | 0,1 | 0,1 |
| B2 100 | 0,2 | 0,2 |
| B3 100 | 0,2 | 0,3 |
| B4 100 | 0,1 | 0,1 |
| B5 100 | 0,1 | 0,1 |
| Média 100 | 0,2 | 0,2 |
| Máximo 100 | 0,4 | 0,5 |
| A1 200 | 1,7 | 2,2 |
| A2 200 | 1,6 | 1,5 |
| A3 200 | 0,7 | 0,5 |
| A4 200 | 2,4 | 3,0 |
| A5 200 | 0,5 | 0,2 |
| B1 200 | 0,1 | 0,1 |
| B2 200 | 0,4 | 0,6 |
| B3 200 | 0,5 | 0,6 |
| B4 200 | 0,2 | 0,3 |
| B5 200 | 2,9 | 1,8 |
| Média 200 | 1,1 | 1,1 |
| Máximo 200 | 2,9 | 3,0 |
| A1 300 | 3,5 | 3,6 |
| A2 300 | 1,0 | 1,1 |
| A3 300 | 0,9 | 0,3 |
| A4 300 | 1,2 | 1,1 |
| A5 300 | 0,9 | 0,3 |
| B1 300 | 0,1 | 0,2 |
| B2 300 | 0,3 | 0,3 |
| B3 300 | 0,2 | 0,1 |
| B4 300 | 0,3 | 0,6 |
| B5 300 | 0,4 | 0,5 |
| Média 300 | 0,9 | 0,8 |
| Máximo 300 | 3,5 | 3,6 |
| A1 400 | 8,7 | 9,7 |
| A2 400 | 0,1 | 0,0 |
| A3 400 | 1,0 | 0,7 |
| A4 400 | 0,7 | 0,3 |
| A5 400 | 0,5 | 1,2 |
| B1 400 | 0,4 | 0,5 |
| B2 400 | 0,7 | 0,3 |
| B3 400 | 0,1 | 0,1 |
| B4 400 | 0,2 | 0,2 |
| B5 400 | 0,2 | 0,1 |
| Média 400 | 1,3 | 1,3 |
| Máximo 400 | 8,7 | 9,7 |
| A1 600 | 0,2 | 0,4 |
| A2 600 | 0,4 | 0,9 |
| A3 600 | 0,1 | 0,0 |
| A4 600 | 0,1 | 0,0 |
| A5 600 | 0,4 | 0,1 |
| B1 600 | 0,1 | 0,1 |
| B2 600 | 0,0 | 0,0 |
| B3 600 | 0,0 | 0,0 |
| B4 600 | 0,1 | 0,0 |
| B5 600 | 0,1 | 0,1 |
| Média 600 | 0,1 | 0,2 |
| Máximo 600 | 0,4 | 0,9 |
| Média Total | 0,7 | 0,7 |
| Máximo Total | 8,7 | 9,7 |

Tabela 88: Resultados da formulação da segunda fase

| Caso de estudo | Tempo (s) | | Peso máximo | |
|----------------|-----------|----------|-------------|----------|
| | Desagreg. | Agregada | Desagreg. | Agregada |
| A1 100 | 0,00 | 0,00 | 1 | 1 |
| A2 100 | 0,00 | 0,00 | 2 | 2 |
| A3 100 | 0,00 | 0,00 | 1 | 1 |
| A4 100 | 0,00 | 0,00 | 2 | 2 |
| A5 100 | 0,00 | 0,00 | 2 | 2 |
| B1 100 | 0,00 | 0,00 | 1 | 1 |
| B2 100 | 0,02 | 0,00 | 2 | 2 |
| B3 100 | 0,00 | 0,00 | 1 | 1 |
| B4 100 | 0,00 | 0,02 | 1 | 1 |
| B5 100 | 0,00 | 0,01 | 1 | 1 |
| A1 200 | 0,00 | 0,00 | 2 | 3 |
| A2 200 | 0,00 | 0,00 | 3 | 4 |
| A3 200 | 0,02 | 0,02 | 3 | 3 |
| A4 200 | 0,00 | 0,00 | 2 | 2 |
| A5 200 | 0,00 | 0,02 | 2 | 2 |
| B1 200 | 0,02 | 0,00 | 2 | 2 |
| B2 200 | 0,00 | 0,00 | 2 | 2 |
| B3 200 | 0,02 | 0,00 | 2 | 2 |
| B4 200 | 0,02 | 0,02 | 2 | 2 |
| B5 200 | 0,00 | 0,00 | 1 | 1 |
| A1 300 | 0,00 | 0,02 | 3 | 3 |
| A2 300 | 0,02 | 0,00 | 4 | 4 |
| A3 300 | 0,02 | 0,02 | 2 | 2 |
| A4 300 | 0,00 | 0,02 | 2 | 2 |
| A5 300 | 0,02 | 0,00 | 3 | 3 |
| B1 300 | 0,00 | 0,02 | 2 | 2 |
| B2 300 | 0,01 | 0,00 | 1 | 1 |
| B3 300 | 0,00 | 0,00 | 2 | 2 |
| B4 300 | 0,02 | 0,00 | 2 | 2 |
| B5 300 | 0,00 | 0,02 | 2 | 2 |
| A1 400 | 0,00 | 0,02 | 3 | 3 |
| A2 400 | 0,02 | 0,02 | 2 | 2 |
| A3 400 | 0,00 | 0,00 | 1 | 1 |
| A4 400 | 0,00 | 0,00 | 2 | 2 |
| A5 400 | 0,00 | 0,02 | 2 | 2 |
| B1 400 | 0,00 | 0,00 | 2 | 2 |
| B2 400 | 0,00 | 0,02 | 2 | 2 |
| B3 400 | 0,02 | 0,01 | 2 | 2 |
| B4 400 | 0,00 | 0,00 | 2 | 2 |
| B5 400 | 0,00 | 0,00 | 5 | 5 |
| A1 600 | 0,02 | 0,00 | 2 | 2 |
| A2 600 | 0,00 | 0,02 | 2 | 2 |
| A3 600 | 0,00 | 0,00 | 2 | 2 |
| A4 600 | 0,02 | 0,02 | 2 | 2 |
| A5 600 | 0,00 | 0,00 | 2 | 2 |
| B1 600 | 0,00 | 0,02 | 2 | 2 |
| B2 600 | 0,00 | 0,00 | 2 | 2 |
| B3 600 | 0,00 | 0,00 | 2 | 2 |
| B4 600 | 0,00 | 0,02 | 2 | 2 |
| B5 600 | 0,00 | 0,02 | 2 | 2 |
| Média | 0,01 | 0,01 | - | - |

Tabela 89: Comparação das técnicas de uma e duas fases (tempos em minutos)

| Caso de estudo | Modelo completo | Técnica 2 Fases | Ganho |
|----------------|-----------------|-----------------|--------|
| A1 100 | 0,7 | 0,2 | 65,9% |
| A2 100 | 0,7 | 0,2 | 74,5% |
| A3 100 | 0,8 | 0,2 | 74,4% |
| A4 100 | 1,9 | 0,4 | 79,3% |
| A5 100 | 1,7 | 0,4 | 73,9% |
| B1 100 | 0,1 | 0,1 | -14,8% |
| B2 100 | 0,6 | 0,2 | 73,4% |
| B3 100 | 0,6 | 0,2 | 67,5% |
| B4 100 | 0,3 | 0,1 | 61,8% |
| B5 100 | 0,3 | 0,1 | 60,1% |
| Média 100 | 0,8 | 0,2 | 61,6% |
| A1 200 | 13,1 | 1,7 | 86,7% |
| A2 200 | 13,6 | 1,6 | 88,4% |
| A3 200 | 2,8 | 0,7 | 75,7% |
| A4 200 | 10,2 | 2,4 | 76,9% |
| A5 200 | 2,2 | 0,5 | 76,5% |
| B1 200 | 0,4 | 0,1 | 72,9% |
| B2 200 | 3,4 | 0,4 | 88,0% |
| B3 200 | 2 | 0,5 | 77,3% |
| B4 200 | 1,5 | 0,2 | 89,4% |
| B5 200 | 6,8 | 2,9 | 56,7% |
| Média 200 | 5,6 | 1,1 | 78,9% |
| A1 300 | 21,4 | 3,5 | 83,6% |
| A2 300 | 11,5 | 1,0 | 91,0% |
| A3 300 | 2,9 | 0,9 | 68,8% |
| A4 300 | 11,6 | 1,2 | 90,0% |
| A5 300 | 0,8 | 0,9 | -14,0% |
| B1 300 | 0,2 | 0,1 | 71,1% |
| B2 300 | 1,4 | 0,3 | 75,8% |
| B3 300 | 0,4 | 0,2 | 59,1% |
| B4 300 | 1,8 | 0,3 | 84,0% |
| B5 300 | 4,2 | 0,4 | 89,5% |
| Média 300 | 5,6 | 0,9 | 69,9% |
| A1 400 | 23,2 | 8,7 | 62,5% |
| A2 400 | 0,7 | 0,1 | 85,0% |
| A3 400 | 2,9 | 1,0 | 67,0% |
| A4 400 | 2 | 0,7 | 63,4% |
| A5 400 | 9,9 | 0,5 | 95,3% |
| B1 400 | 1,9 | 0,4 | 77,9% |
| B2 400 | 4 | 0,7 | 81,3% |
| B3 400 | 0,3 | 0,1 | 56,8% |
| B4 400 | 1 | 0,2 | 82,6% |
| B5 400 | 0,4 | 0,2 | 46,3% |
| Média 400 | 4,6 | 1,3 | 71,8% |
| A1 600 | 0,7 | 0,2 | 76,3% |
| A2 600 | 3,6 | 0,4 | 89,7% |
| A3 600 | 0,2 | 0,1 | 54,8% |
| A4 600 | 0,2 | 0,1 | 74,8% |
| A5 600 | 1,1 | 0,4 | 65,8% |
| B1 600 | 0,2 | 0,1 | 53,3% |
| B2 600 | 0,3 | 0,0 | 88,7% |
| B3 600 | 0,4 | 0,0 | 88,8% |
| B4 600 | 0,2 | 0,1 | 69,3% |
| B5 600 | 0,5 | 0,1 | 74,6% |
| Média 600 | 0,7 | 0,1 | 73,6% |
| Média Total | 3,5 | 0,7 | 71,1% |
| Total | 173,6 | 36,0 | 79,3% |

A Tabela 90 indica o número total de iterações efectuadas pela técnica OH1 para cada caso de estudo e para cada combinação de parâmetros da primeira corrida (não são indicados os números de iterações das outras corridas, pois os valores são muito semelhantes). Da Tabela 91 à Tabela 105 são apresentados os resultados da técnica heurística OH1 para várias combinações de parâmetros, divididas em grupos de 3 tabelas para cada corrida. A primeira tabela indica o melhor valor de custo encontrado para o caso de estudo correspondente por cada combinação de parâmetros. A segunda tabela indica a percentagem de custo acima do melhor valor de custo encontrado de entre todas as combinação de parâmetros de todas as corridas. A terceira tabela indica o tempo em minutos em que foi encontrada a melhor solução para cada caso de estudo. Em todas as tabelas, a coluna “X” indica as potências de base 2 que identificam o conjunto X. A coluna “CM” indica o valor do parâmetro *ContMax*. As outras colunas identificam o caso de estudo.

Tabela 90: Número total de iterações total efectuadas para as várias combinações de parâmetros (1ª corrida)

| X | CM | A30L | A30M | A30H | B30L | B30M | B30H | A50L | A50M | A50H | B50L | B50M | B50H |
|--------|----|-------|-------|-------|-------|-------|-------|------|------|------|------|------|------|
| 1...4 | 0 | 29521 | 29431 | 29331 | 29362 | 29246 | 29213 | 4943 | 4932 | 4897 | 4914 | 4906 | 4904 |
| | 10 | 28703 | 28941 | 28852 | 28415 | 28433 | 28516 | 4864 | 4899 | 4906 | 4815 | 4859 | 4870 |
| | 40 | 28030 | 28241 | 28306 | 27708 | 27792 | 27825 | 4650 | 4724 | 4826 | 4698 | 4785 | 4768 |
| 1...16 | 0 | 20085 | 20038 | 19991 | 19977 | 19936 | 19872 | 3367 | 3363 | 3357 | 3341 | 3341 | 3336 |
| | 10 | 19066 | 19381 | 19396 | 18938 | 19039 | 19130 | 3244 | 3309 | 3323 | 3200 | 3263 | 3275 |
| | 40 | 18350 | 18811 | 18827 | 18079 | 18285 | 18494 | 3172 | 3224 | 3236 | 3057 | 3157 | 3192 |
| 1...64 | 0 | 17243 | 17313 | 17257 | 17263 | 17092 | 17165 | 2548 | 2548 | 2540 | 2530 | 2534 | 2529 |
| | 10 | 16577 | 16842 | 16844 | 16423 | 16522 | 16618 | 2473 | 2506 | 2513 | 2426 | 2480 | 2492 |
| | 40 | 16066 | 16384 | 16476 | 15902 | 15966 | 16161 | 2411 | 2461 | 2471 | 2359 | 2426 | 2435 |

Tabela 91: Custos obtidos para as várias combinações de parâmetros *ContMax* e conjunto X (1ª corrida)

| X | CM | A30L | A30M | A30H | B30L | B30M | B30H | A50L | A50M | A50H | B50L | B50M | B50H |
|--------|----|-------|-------|--------|-------|--------|--------|--------|--------|--------|-------|--------|--------|
| 1...4 | 0 | 52075 | 84740 | 161365 | 49550 | 100320 | 166830 | 102360 | 175365 | 243515 | 97355 | 170980 | 251480 |
| | 10 | 44265 | 79530 | 152570 | 44475 | 95005 | 159500 | 91045 | 162530 | 228895 | 84030 | 158110 | 236540 |
| | 40 | 44180 | 79000 | 152380 | 44940 | 94605 | 158940 | 90810 | 162530 | 228860 | 85320 | 158405 | 235265 |
| 1...16 | 0 | 52030 | 85710 | 162120 | 50705 | 102140 | 166520 | 102535 | 174755 | 242975 | 97435 | 172625 | 251190 |
| | 10 | 44290 | 79170 | 152170 | 44590 | 94420 | 159830 | 90605 | 162970 | 227185 | 85960 | 158885 | 236530 |
| | 40 | 44820 | 79805 | 152040 | 44230 | 94430 | 159510 | 91500 | 162140 | 228080 | 84630 | 159555 | 235830 |
| 1...64 | 0 | 51455 | 86145 | 162830 | 50920 | 101625 | 167250 | 102565 | 175700 | 243905 | 97870 | 172325 | 254310 |
| | 10 | 45210 | 79130 | 151765 | 44580 | 94865 | 159730 | 90890 | 161975 | 229365 | 86215 | 159335 | 235610 |
| | 40 | 44445 | 79165 | 152420 | 44630 | 93915 | 160135 | 90530 | 163230 | 229865 | 86215 | 160220 | 233970 |

Tabela 92: Percentagens de custo acima do melhor custo obtido para as várias combinações de parâmetros (1ª corrida)

| X | CM | A30L | A30M | A30H | B30L | B30M | B30H | A50L | A50M | A50H | B50L | B50M | B50H | Média |
|--------|----|--------|-------|-------|--------|-------|-------|--------|-------|-------|--------|--------|-------|--------|
| 1...4 | 0 | 18,06% | 7,65% | 6,86% | 13,31% | 6,83% | 5,33% | 14,71% | 8,94% | 7,51% | 16,09% | 8,98% | 7,57% | 10,15% |
| | 10 | 0,35% | 1,03% | 1,04% | 1,70% | 1,17% | 0,70% | 2,03% | 0,97% | 1,06% | 0,20% | 0,78% | 1,18% | 1,02% |
| | 40 | 0,16% | 0,36% | 0,91% | 2,77% | 0,75% | 0,35% | 1,77% | 0,97% | 1,04% | 1,73% | 0,97% | 0,64% | 1,03% |
| 1...16 | 0 | 17,96% | 8,88% | 7,36% | 15,95% | 8,77% | 5,14% | 14,90% | 8,56% | 7,28% | 16,18% | 10,03% | 7,45% | 10,70% |
| | 10 | 0,41% | 0,57% | 0,77% | 1,97% | 0,55% | 0,91% | 1,54% | 1,24% | 0,30% | 2,50% | 1,27% | 1,18% | 1,10% |
| | 40 | 1,61% | 1,38% | 0,69% | 1,14% | 0,56% | 0,71% | 2,54% | 0,73% | 0,70% | 0,91% | 1,70% | 0,88% | 1,13% |
| 1...64 | 0 | 16,65% | 9,43% | 7,83% | 16,44% | 8,22% | 5,60% | 14,94% | 9,15% | 7,69% | 16,70% | 9,84% | 8,78% | 10,94% |
| | 10 | 2,49% | 0,52% | 0,51% | 1,94% | 1,02% | 0,85% | 1,85% | 0,62% | 1,27% | 2,80% | 1,56% | 0,78% | 1,35% |
| | 40 | 0,76% | 0,57% | 0,94% | 2,06% | 0,01% | 1,10% | 1,45% | 1,40% | 1,49% | 2,80% | 2,12% | 0,08% | 1,23% |

Tabela 93: Tempo em minutos em que foi encontrada a melhor solução para as várias combinações de parâmetros (1ª corrida)

| X | CM | A30L | A30M | A30H | B30L | B30M | B30H | A50L | A50M | A50H | B50L | B50M | B50H |
|--------|----|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| 1...4 | 0 | 28,4 | 24,9 | 21,1 | 27,7 | 32,7 | 10,6 | 9,2 | 52,9 | 14,8 | 9,8 | 15,1 | 49,8 |
| | 10 | 49,4 | 23,2 | 20,7 | 44,4 | 11,8 | 38,8 | 15,0 | 25,7 | 16,8 | 7,9 | 23,5 | 35,9 |
| | 40 | 14,7 | 44,9 | 41,0 | 1,8 | 34,4 | 11,7 | 9,2 | 43,9 | 54,3 | 55,6 | 52,0 | 41,1 |
| 1...16 | 0 | 53,6 | 14,8 | 24,6 | 10,1 | 9,2 | 19,0 | 21,1 | 35,8 | 50,0 | 5,4 | 31,9 | 18,0 |
| | 10 | 55,1 | 11,4 | 51,9 | 12,9 | 23,5 | 46,0 | 29,4 | 40,0 | 53,4 | 28,0 | 49,3 | 35,0 |
| | 40 | 10,1 | 49,4 | 31,2 | 41,5 | 2,1 | 38,8 | 49,2 | 23,8 | 51,4 | 49,3 | 7,8 | 24,3 |
| 1...64 | 0 | 50,9 | 19,4 | 3,3 | 29,0 | 58,5 | 3,2 | 47,6 | 27,8 | 25,6 | 47,5 | 53,6 | 53,3 |
| | 10 | 28,2 | 59,0 | 42,1 | 6,9 | 6,8 | 57,8 | 17,9 | 45,1 | 12,8 | 38,9 | 19,1 | 22,2 |
| | 40 | 7,7 | 42,4 | 14,9 | 36,7 | 25,9 | 14,9 | 50,1 | 54,7 | 39,8 | 22,9 | 7,6 | 24,4 |

Tabela 94: Custos obtidos para as várias combinações de parâmetros *ContMax* e conjunto X (2ª corrida)

| X | CM | A30L | A30M | A30H | B30L | B30M | B30H | A50L | A50M | A50H | B50L | B50M | B50H |
|--------|----|-------|-------|--------|-------|--------|--------|--------|--------|--------|-------|--------|--------|
| 1...4 | 0 | 51955 | 85660 | 162270 | 51010 | 101115 | 165730 | 101545 | 173305 | 241405 | 97185 | 170790 | 252805 |
| | 10 | 45135 | 79400 | 152375 | 45020 | 94970 | 159640 | 91805 | 163455 | 227995 | 85700 | 158065 | 235510 |
| | 40 | 44710 | 78855 | 151000 | 43730 | 95035 | 160195 | 90720 | 160970 | 228280 | 85680 | 158330 | 234965 |
| 1...16 | 0 | 52290 | 86545 | 162675 | 50905 | 101175 | 167125 | 103010 | 175545 | 243680 | 98145 | 169880 | 252035 |
| | 10 | 44975 | 79125 | 152565 | 44505 | 94510 | 159420 | 90785 | 163105 | 229475 | 85635 | 159040 | 233780 |
| | 40 | 44690 | 78905 | 153205 | 44850 | 94660 | 159310 | 90720 | 162130 | 228055 | 85640 | 160410 | 235395 |
| 1...64 | 0 | 51265 | 86940 | 160660 | 50060 | 101435 | 168330 | 100140 | 175255 | 244235 | 97190 | 170160 | 254060 |
| | 10 | 44965 | 79360 | 153260 | 44460 | 94195 | 158915 | 91845 | 162145 | 229540 | 85150 | 159620 | 234515 |
| | 40 | 44710 | 79335 | 152285 | 44910 | 94560 | 159415 | 92210 | 161900 | 228415 | 84275 | 158275 | 235315 |

Tabela 95: Percentagens de custo acima do melhor custo obtido para as várias combinações de parâmetros (2ª corrida)

| X | CM | A30L | A30M | A30H | B30L | B30M | B30H | A50L | A50M | A50H | B50L | B50M | B50H | Média |
|--------|----|--------|--------|-------|--------|-------|-------|--------|-------|-------|--------|-------|-------|--------|
| 1...4 | 0 | 17,79% | 8,82% | 7,46% | 16,65% | 7,68% | 4,64% | 13,80% | 7,66% | 6,58% | 15,88% | 8,86% | 8,14% | 10,33% |
| | 10 | 2,32% | 0,86% | 0,91% | 2,95% | 1,13% | 0,79% | 2,88% | 1,54% | 0,66% | 2,19% | 0,75% | 0,74% | 1,48% |
| | 40 | 1,36% | 0,17% | 0,00% | 0,00% | 1,20% | 1,14% | 1,66% | 0,00% | 0,79% | 2,16% | 0,92% | 0,51% | 0,83% |
| 1...16 | 0 | 18,54% | 9,94% | 7,73% | 16,41% | 7,74% | 5,52% | 15,44% | 9,05% | 7,59% | 17,03% | 8,28% | 7,81% | 10,92% |
| | 10 | 1,96% | 0,51% | 1,04% | 1,77% | 0,64% | 0,65% | 1,74% | 1,33% | 1,32% | 2,11% | 1,37% | 0,00% | 1,20% |
| | 40 | 1,31% | 0,24% | 1,46% | 2,56% | 0,80% | 0,58% | 1,66% | 0,72% | 0,69% | 2,12% | 2,24% | 0,69% | 1,26% |
| 1...64 | 0 | 16,22% | 10,44% | 6,40% | 14,48% | 8,02% | 6,28% | 12,22% | 8,87% | 7,83% | 15,89% | 8,46% | 8,67% | 10,32% |
| | 10 | 1,94% | 0,81% | 1,50% | 1,67% | 0,31% | 0,33% | 2,92% | 0,73% | 1,34% | 1,53% | 1,74% | 0,31% | 1,26% |
| | 40 | 1,36% | 0,78% | 0,85% | 2,70% | 0,70% | 0,65% | 3,33% | 0,58% | 0,85% | 0,49% | 0,88% | 0,66% | 1,15% |

Tabela 96: Tempo em minutos em que foi encontrada a melhor solução para as várias combinações de parâmetros (2ª corrida)

| X | CM | A30L | A30M | A30H | B30L | B30M | B30H | A50L | A50M | A50H | B50L | B50M | B50H |
|--------|----|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| 1...4 | 0 | 18,2 | 32,1 | 46,1 | 54,5 | 45,1 | 11,2 | 53,9 | 50,1 | 16,6 | 37,6 | 38,6 | 33,4 |
| | 10 | 22,9 | 3,6 | 53,8 | 47,4 | 24,8 | 5,0 | 36,0 | 12,9 | 51,9 | 28,1 | 9,7 | 29,7 |
| | 40 | 19,9 | 11,2 | 15,9 | 0,7 | 7,5 | 47,3 | 26,7 | 21,9 | 27,5 | 21,9 | 55,4 | 27,0 |
| 1...16 | 0 | 41,1 | 46,0 | 49,9 | 37,5 | 28,2 | 17,0 | 19,4 | 27,3 | 49,7 | 39,4 | 50,2 | 34,7 |
| | 10 | 21,1 | 7,5 | 52,6 | 45,5 | 38,3 | 30,2 | 38,4 | 44,4 | 12,3 | 21,3 | 48,7 | 32,5 |
| | 40 | 47,6 | 20,9 | 42,5 | 6,4 | 38,8 | 56,2 | 11,2 | 36,0 | 11,4 | 37,5 | 52,4 | 37,4 |
| 1...64 | 0 | 15,8 | 44,2 | 28,4 | 53,9 | 20,3 | 41,1 | 13,4 | 49,1 | 0,0 | 24,5 | 50,0 | 40,0 |
| | 10 | 20,6 | 19,2 | 8,3 | 20,5 | 29,4 | 24,6 | 56,8 | 47,3 | 31,6 | 4,7 | 18,7 | 22,6 |
| | 40 | 49,6 | 25,2 | 10,2 | 19,0 | 31,5 | 44,7 | 43,5 | 9,2 | 10,0 | 50,0 | 13,6 | 10,8 |

Tabela 97: Custos obtidos para as várias combinações de parâmetros *ContMax* e conjunto *X* (3ª corrida)

| X | CM | A30L | A30M | A30H | B30L | B30M | B30H | A50L | A50M | A50H | B50L | B50M | B50H |
|--------|----|-------|-------|--------|-------|--------|--------|--------|--------|--------|-------|--------|--------|
| 1...4 | 0 | 52105 | 85760 | 162200 | 50460 | 101470 | 167495 | 101990 | 174750 | 243365 | 96260 | 169105 | 250270 |
| | 10 | 44885 | 79420 | 151955 | 44635 | 94760 | 159900 | 91665 | 163160 | 228595 | 85545 | 159115 | 234385 |
| | 40 | 45075 | 79065 | 151370 | 44100 | 94165 | 158445 | 89235 | 162920 | 227730 | 83865 | 158840 | 235350 |
| 1...16 | 0 | 52815 | 85125 | 162880 | 50495 | 102030 | 167840 | 102265 | 174060 | 244235 | 97555 | 173200 | 253455 |
| | 10 | 44840 | 79280 | 152495 | 44420 | 94720 | 158685 | 91755 | 163210 | 229335 | 86065 | 159315 | 234755 |
| | 40 | 44110 | 79520 | 152045 | 44135 | 94650 | 160040 | 90830 | 162165 | 226495 | 85940 | 159715 | 236360 |
| 1...64 | 0 | 51870 | 85805 | 161975 | 48870 | 101745 | 167410 | 103720 | 175240 | 243530 | 97120 | 170295 | 253050 |
| | 10 | 44290 | 79590 | 151975 | 43975 | 93905 | 159520 | 91200 | 163210 | 228440 | 84465 | 159850 | 236290 |
| | 40 | 44940 | 79295 | 152800 | 44665 | 94615 | 159765 | 90740 | 163385 | 228020 | 86450 | 160280 | 236295 |

Tabela 98: Percentagens de custo acima do melhor custo obtido para as várias combinações de parâmetros (3ª corrida)

| X | CM | A30L | A30M | A30H | B30L | B30M | B30H | A50L | A50M | A50H | B50L | B50M | B50H | Média |
|--------|----|--------|-------|-------|--------|-------|-------|--------|-------|-------|--------|--------|-------|--------|
| 1...4 | 0 | 18,13% | 8,94% | 7,42% | 15,39% | 8,06% | 5,75% | 14,29% | 8,56% | 7,45% | 14,78% | 7,79% | 7,05% | 10,30% |
| | 10 | 1,76% | 0,89% | 0,63% | 2,07% | 0,91% | 0,96% | 2,72% | 1,36% | 0,93% | 2,00% | 1,42% | 0,26% | 1,33% |
| | 40 | 2,19% | 0,44% | 0,25% | 0,85% | 0,28% | 0,04% | 0,00% | 1,21% | 0,55% | 0,00% | 1,24% | 0,67% | 0,64% |
| 1...16 | 0 | 19,73% | 8,14% | 7,87% | 15,47% | 8,65% | 5,97% | 14,60% | 8,13% | 7,83% | 16,32% | 10,40% | 8,42% | 10,96% |
| | 10 | 1,65% | 0,71% | 0,99% | 1,58% | 0,87% | 0,19% | 2,82% | 1,39% | 1,25% | 2,62% | 1,55% | 0,42% | 1,34% |
| | 40 | 0,00% | 1,02% | 0,69% | 0,93% | 0,79% | 1,04% | 1,79% | 0,74% | 0,00% | 2,47% | 1,80% | 1,10% | 1,03% |
| 1...64 | 0 | 17,59% | 9,00% | 7,27% | 11,75% | 8,35% | 5,70% | 16,23% | 8,87% | 7,52% | 15,81% | 8,54% | 8,24% | 10,41% |
| | 10 | 0,41% | 1,11% | 0,65% | 0,56% | 0,00% | 0,72% | 2,20% | 1,39% | 0,86% | 0,72% | 1,89% | 1,07% | 0,96% |
| | 40 | 1,88% | 0,73% | 1,19% | 2,14% | 0,76% | 0,87% | 1,69% | 1,50% | 0,67% | 3,08% | 2,16% | 1,08% | 1,48% |

Tabela 99: Tempo em minutos em que foi encontrada a melhor solução para as várias combinações de parâmetros (3ª corrida)

| X | CM | A30L | A30M | A30H | B30L | B30M | B30H | A50L | A50M | A50H | B50L | B50M | B50H |
|--------|----|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| 1...4 | 0 | 18,9 | 22,9 | 48,0 | 56,5 | 5,9 | 23,3 | 45,7 | 45,1 | 24,0 | 53,3 | 38,7 | 47,9 |
| | 10 | 30,8 | 54,3 | 32,2 | 52,7 | 50,3 | 38,6 | 45,1 | 30,5 | 21,7 | 1,8 | 5,9 | 25,3 |
| | 40 | 0,3 | 41,7 | 48,2 | 19,5 | 27,4 | 56,7 | 3,3 | 51,6 | 55,1 | 6,5 | 7,5 | 29,6 |
| 1...16 | 0 | 37,2 | 3,9 | 4,1 | 45,9 | 18,0 | 42,0 | 41,8 | 31,0 | 0,0 | 35,8 | 52,6 | 47,4 |
| | 10 | 53,3 | 14,7 | 1,7 | 55,7 | 12,4 | 14,3 | 3,5 | 8,3 | 2,4 | 18,5 | 1,8 | 38,5 |
| | 40 | 27,9 | 43,4 | 53,0 | 55,7 | 44,8 | 44,1 | 49,3 | 49,8 | 36,4 | 24,9 | 7,3 | 49,8 |
| 1...64 | 0 | 29,6 | 38,8 | 54,6 | 19,6 | 42,6 | 16,2 | 0,2 | 39,7 | 14,2 | 56,6 | 59,3 | 57,8 |
| | 10 | 9,5 | 59,9 | 15,4 | 40,1 | 25,0 | 44,8 | 54,3 | 22,8 | 42,5 | 42,6 | 50,6 | 20,9 |
| | 40 | 1,4 | 35,7 | 28,1 | 42,4 | 52,9 | 7,0 | 6,4 | 13,3 | 11,3 | 28,3 | 28,7 | 58,0 |

Tabela 100: Custos obtidos para as várias combinações de parâmetros *ContMax* e conjunto *X* (4ª corrida)

| X | CM | A30L | A30M | A30H | B30L | B30M | B30H | A50L | A50M | A50H | B50L | B50M | B50H |
|--------|----|-------|-------|--------|-------|--------|--------|--------|--------|--------|-------|--------|--------|
| 1...4 | 0 | 51420 | 86040 | 161310 | 50330 | 101570 | 167955 | 102010 | 174405 | 241870 | 96520 | 172965 | 249525 |
| | 10 | 45055 | 78950 | 152185 | 44515 | 94090 | 158945 | 90480 | 163655 | 228215 | 85465 | 160460 | 236135 |
| | 40 | 44560 | 78975 | 151000 | 44460 | 94430 | 159715 | 91730 | 162260 | 227025 | 85130 | 159370 | 236390 |
| 1...16 | 0 | 51980 | 85240 | 160960 | 50350 | 101915 | 167520 | 102445 | 174675 | 241320 | 97595 | 172905 | 252490 |
| | 10 | 44540 | 79325 | 151475 | 44550 | 94365 | 159880 | 91655 | 163040 | 228285 | 85785 | 159755 | 234180 |
| | 40 | 44390 | 79000 | 151760 | 44425 | 94320 | 159170 | 90240 | 162175 | 227600 | 84410 | 159415 | 235950 |
| 1...64 | 0 | 51490 | 86025 | 161380 | 50715 | 101660 | 168150 | 103345 | 173970 | 244235 | 98125 | 172405 | 254670 |
| | 10 | 45485 | 79825 | 153105 | 44265 | 94865 | 159505 | 92135 | 163670 | 228665 | 85330 | 159455 | 235120 |
| | 40 | 45075 | 79045 | 152265 | 44530 | 94490 | 160045 | 91450 | 162540 | 228685 | 86815 | 160455 | 236155 |

Tabela 101: Percentagens de custo acima do melhor custo obtido para as várias combinações de parâmetros (4ª corrida)

| X | CM | A30L | A30M | A30H | B30L | B30M | B30H | A50L | A50M | A50H | B50L | B50M | B50H | Média |
|--------|----|--------|-------|-------|--------|-------|-------|--------|-------|-------|--------|--------|-------|--------|
| 1...4 | 0 | 16,57% | 9,30% | 6,83% | 15,09% | 8,16% | 6,04% | 14,32% | 8,35% | 6,79% | 15,09% | 10,25% | 6,73% | 10,29% |
| | 10 | 2,14% | 0,29% | 0,78% | 1,80% | 0,20% | 0,35% | 1,40% | 1,67% | 0,76% | 1,91% | 2,28% | 1,01% | 1,21% |
| | 40 | 1,02% | 0,32% | 0,00% | 1,67% | 0,56% | 0,84% | 2,80% | 0,80% | 0,23% | 1,51% | 1,58% | 1,12% | 1,04% |
| 1...16 | 0 | 17,84% | 8,28% | 6,60% | 15,14% | 8,53% | 5,77% | 14,80% | 8,51% | 6,55% | 16,37% | 10,21% | 8,00% | 10,55% |
| | 10 | 0,97% | 0,77% | 0,31% | 1,88% | 0,49% | 0,94% | 2,71% | 1,29% | 0,79% | 2,29% | 1,83% | 0,17% | 1,20% |
| | 40 | 0,63% | 0,36% | 0,50% | 1,59% | 0,44% | 0,50% | 1,13% | 0,75% | 0,49% | 0,65% | 1,61% | 0,93% | 0,80% |
| 1...64 | 0 | 16,73% | 9,28% | 6,87% | 15,97% | 8,26% | 6,17% | 15,81% | 8,08% | 7,83% | 17,00% | 9,89% | 8,94% | 10,90% |
| | 10 | 3,12% | 1,40% | 1,39% | 1,22% | 1,02% | 0,71% | 3,25% | 1,68% | 0,96% | 1,75% | 1,63% | 0,57% | 1,56% |
| | 40 | 2,19% | 0,41% | 0,84% | 1,83% | 0,62% | 1,05% | 2,48% | 0,98% | 0,97% | 3,52% | 2,27% | 1,02% | 1,51% |

Tabela 102: Tempo em minutos em que foi encontrada a melhor solução para as várias combinações de parâmetros (4ª corrida)

| X | CM | A30L | A30M | A30H | B30L | B30M | B30H | A50L | A50M | A50H | B50L | B50M | B50H |
|--------|----|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| 1...4 | 0 | 53,9 | 23,0 | 1,2 | 23,8 | 3,6 | 12,2 | 34,2 | 1,9 | 54,5 | 46,1 | 15,1 | 45,6 |
| | 10 | 18,6 | 24,1 | 53,0 | 1,6 | 14,0 | 31,7 | 9,9 | 17,4 | 56,9 | 18,5 | 46,3 | 40,8 |
| | 40 | 25,5 | 13,2 | 9,4 | 5,8 | 59,1 | 2,2 | 59,7 | 21,7 | 34,0 | 27,5 | 46,8 | 30,2 |
| 1...16 | 0 | 43,4 | 52,1 | 43,6 | 51,0 | 35,3 | 3,5 | 3,7 | 37,8 | 11,6 | 10,8 | 52,0 | 0,2 |
| | 10 | 45,8 | 52,1 | 49,1 | 17,0 | 24,9 | 36,5 | 8,2 | 5,8 | 43,0 | 2,9 | 48,8 | 37,2 |
| | 40 | 50,6 | 29,5 | 59,3 | 5,5 | 0,7 | 44,1 | 56,5 | 23,6 | 9,3 | 27,6 | 55,3 | 12,1 |
| 1...64 | 0 | 37,4 | 58,6 | 16,2 | 28,6 | 22,4 | 40,7 | 45,8 | 23,8 | 0,0 | 1,6 | 19,8 | 54,5 |
| | 10 | 14,9 | 5,7 | 23,8 | 50,2 | 49,1 | 29,0 | 28,7 | 56,8 | 39,0 | 15,2 | 58,8 | 15,3 |
| | 40 | 2,9 | 50,7 | 39,8 | 16,6 | 54,0 | 27,1 | 36,4 | 32,7 | 52,3 | 40,1 | 15,6 | 53,4 |

Tabela 103: Custos obtidos para as várias combinações de parâmetros *ContMax* e conjunto *X* (5ª corrida)

| X | CM | A30L | A30M | A30H | B30L | B30M | B30H | A50L | A50M | A50H | B50L | B50M | B50H |
|--------|----|-------|-------|--------|-------|--------|--------|--------|--------|--------|-------|--------|--------|
| 1...4 | 0 | 52315 | 86100 | 161620 | 50695 | 101730 | 167190 | 102315 | 174665 | 242785 | 96870 | 171590 | 250060 |
| | 10 | 44845 | 79070 | 152030 | 43975 | 94195 | 159330 | 90640 | 162950 | 227790 | 85610 | 156890 | 234680 |
| | 40 | 45105 | 78915 | 151640 | 44815 | 94675 | 158385 | 91090 | 161765 | 228530 | 86265 | 158520 | 234270 |
| 1...16 | 0 | 52335 | 85905 | 162315 | 49655 | 102155 | 166250 | 103120 | 176120 | 242435 | 97195 | 171585 | 251740 |
| | 10 | 45465 | 79305 | 152580 | 44375 | 94475 | 158595 | 91525 | 162955 | 228710 | 85335 | 156905 | 236575 |
| | 40 | 45095 | 78720 | 151525 | 44505 | 94355 | 159885 | 90525 | 163770 | 228685 | 85510 | 159285 | 235965 |
| 1...64 | 0 | 50920 | 86590 | 162995 | 50225 | 101775 | 166695 | 101515 | 174800 | 242780 | 97715 | 173765 | 252985 |
| | 10 | 44965 | 78945 | 152190 | 44795 | 94815 | 159870 | 91850 | 163785 | 229765 | 85445 | 159280 | 235545 |
| | 40 | 45280 | 80020 | 152230 | 44500 | 93950 | 160145 | 91490 | 163195 | 228860 | 84835 | 157750 | 235090 |

Tabela 104: Percentagens de custo acima do melhor custo obtido para as várias combinações de parâmetros (5ª corrida)

| X | CM | A30L | A30M | A30H | B30L | B30M | B30H | A50L | A50M | A50H | B50L | B50M | B50H | Média |
|--------|----|--------|--------|-------|--------|-------|-------|--------|-------|-------|--------|--------|-------|--------|
| 1...4 | 0 | 18,60% | 9,38% | 7,03% | 15,93% | 8,33% | 5,56% | 14,66% | 8,51% | 7,19% | 15,51% | 9,37% | 6,96% | 10,59% |
| | 10 | 1,67% | 0,44% | 0,68% | 0,56% | 0,31% | 0,60% | 1,57% | 1,23% | 0,57% | 2,08% | 0,00% | 0,38% | 0,84% |
| | 40 | 2,26% | 0,25% | 0,42% | 2,48% | 0,82% | 0,00% | 2,08% | 0,49% | 0,90% | 2,86% | 1,04% | 0,21% | 1,15% |
| 1...16 | 0 | 18,65% | 9,13% | 7,49% | 13,55% | 8,79% | 4,97% | 15,56% | 9,41% | 7,04% | 15,89% | 9,37% | 7,68% | 10,63% |
| | 10 | 3,07% | 0,74% | 1,05% | 1,47% | 0,61% | 0,13% | 2,57% | 1,23% | 0,98% | 1,75% | 0,01% | 1,20% | 1,23% |
| | 40 | 2,23% | 0,00% | 0,35% | 1,77% | 0,48% | 0,95% | 1,45% | 1,74% | 0,97% | 1,96% | 1,53% | 0,93% | 1,20% |
| 1...64 | 0 | 15,44% | 10,00% | 7,94% | 14,85% | 8,38% | 5,25% | 13,76% | 8,59% | 7,19% | 16,51% | 10,76% | 8,21% | 10,57% |
| | 10 | 1,94% | 0,29% | 0,79% | 2,44% | 0,97% | 0,94% | 2,93% | 1,75% | 1,44% | 1,88% | 1,52% | 0,75% | 1,47% |
| | 40 | 2,65% | 1,65% | 0,81% | 1,76% | 0,05% | 1,11% | 2,53% | 1,38% | 1,04% | 1,16% | 0,55% | 0,56% | 1,27% |

Tabela 105: Tempo em minutos em que foi encontrada a melhor solução para as várias combinações de parâmetros (5ª corrida)

| X | CM | A30L | A30M | A30H | B30L | B30M | B30H | A50L | A50M | A50H | B50L | B50M | B50H |
|--------|----|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| 1...4 | 0 | 44,2 | 30,9 | 4,6 | 50,4 | 52,9 | 33,6 | 16,8 | 9,7 | 38,9 | 2,6 | 49,3 | 35,7 |
| | 10 | 34,1 | 47,3 | 12,3 | 44,5 | 11,8 | 28,5 | 55,6 | 39,2 | 30,8 | 53,0 | 8,5 | 11,3 |
| | 40 | 12,2 | 37,4 | 40,3 | 39,7 | 48,7 | 14,2 | 43,7 | 6,9 | 26,4 | 6,4 | 33,3 | 12,6 |
| 1...16 | 0 | 5,6 | 7,2 | 3,5 | 55,5 | 30,0 | 2,3 | 7,6 | 39,1 | 6,0 | 14,5 | 56,4 | 33,0 |
| | 10 | 29,9 | 56,2 | 31,7 | 1,7 | 13,1 | 35,3 | 48,1 | 12,0 | 22,7 | 40,4 | 41,5 | 59,1 |
| | 40 | 36,3 | 0,4 | 47,8 | 47,1 | 43,5 | 57,9 | 55,7 | 54,3 | 11,3 | 57,5 | 53,5 | 48,4 |
| 1...64 | 0 | 38,6 | 57,8 | 3,1 | 23,2 | 3,3 | 59,2 | 58,7 | 1,2 | 4,4 | 25,0 | 16,7 | 8,2 |
| | 10 | 37,3 | 43,3 | 36,0 | 39,0 | 17,0 | 50,1 | 56,7 | 34,3 | 59,7 | 7,0 | 23,5 | 35,3 |
| | 40 | 47,4 | 10,3 | 15,1 | 17,9 | 5,1 | 16,4 | 57,2 | 39,7 | 8,3 | 24,3 | 20,1 | 55,9 |

Tabela 106: Resultados da heurística OH1 para os casos de estudo de 30 e 50 nós

| | OH1 1 | OH1 2 | OH1 3 | OH1 4 | OH1 5 | OH1 6 | OH1 7 | OH1 8 | OH1 9 | OH1 10 |
|------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| A30L | 45400 | 45890 | 45595 | 45400 | 45305 | 45695 | 46175 | 46175 | 45310 | 45640 |
| B30L | 45500 | 44775 | 45080 | 45625 | 44900 | 44805 | 44740 | 45905 | 45265 | 45750 |
| A30M | 79945 | 80110 | 79200 | 79445 | 79780 | 80435 | 80240 | 80485 | 80230 | 80120 |
| B30M | 94875 | 95010 | 95995 | 95370 | 95600 | 95470 | 95080 | 95710 | 94960 | 95485 |
| A30H | 152040 | 154165 | 152005 | 154010 | 154530 | 152680 | 153965 | 153875 | 154375 | 153430 |
| B30H | 159905 | 161245 | 160235 | 159860 | 160220 | 160320 | 160275 | 160970 | 159470 | 158445 |
| A50L | 91405 | 91240 | 90850 | 90920 | 92115 | 91620 | 91870 | 91535 | 90890 | 90995 |
| B50L | 84890 | 86495 | 86140 | 85335 | 85185 | 86760 | 86565 | 84285 | 85685 | 87060 |
| A50M | 162655 | 161645 | 162180 | 162470 | 164160 | 162960 | 162520 | 164170 | 162825 | 162480 |
| B50M | 160400 | 160180 | 158565 | 159235 | 158320 | 158390 | 158465 | 158940 | 157505 | 161550 |
| A50H | 230710 | 228625 | 228600 | 228600 | 229395 | 227890 | 229175 | 230180 | 227680 | 227430 |
| B50H | 233785 | 235830 | 235215 | 235935 | 236190 | 236030 | 235515 | 235105 | 235690 | 235730 |

Tabela 107: Resultados da heurística OH2 para os casos de estudo de 30 e 50 nós

| | OH2 1 | OH2 2 | OH2 3 | OH2 4 | OH2 5 | OH2 6 | OH2 7 | OH2 8 | OH2 9 | OH2 10 |
|------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| A30L | 46960 | 46560 | 45685 | 47020 | 46340 | 46020 | 46440 | 46575 | 45665 | 46645 |
| B30L | 45580 | 45455 | 46100 | 45950 | 46055 | 45565 | 46055 | 45290 | 45795 | 45950 |
| A30M | 81235 | 80225 | 79855 | 80755 | 80935 | 81795 | 80805 | 81345 | 80290 | 81150 |
| B30M | 96380 | 96695 | 96100 | 96785 | 96585 | 96055 | 95440 | 96455 | 96625 | 96235 |
| A30H | 155030 | 154225 | 155410 | 156500 | 154130 | 155310 | 156155 | 154955 | 155270 | 155330 |
| B30H | 161215 | 161690 | 162330 | 161205 | 161490 | 161225 | 161010 | 161905 | 162455 | 161070 |
| A50L | 93580 | 92575 | 92680 | 93600 | 93520 | 93040 | 94260 | 93345 | 94580 | 93740 |
| B50L | 87405 | 89930 | 88440 | 87220 | 87820 | 87770 | 88370 | 85245 | 88465 | 90055 |
| A50M | 164840 | 166210 | 165155 | 164810 | 163430 | 165680 | 164125 | 165115 | 166800 | 166540 |
| B50M | 163265 | 163010 | 160530 | 162725 | 160570 | 163085 | 161465 | 161500 | 162680 | 163580 |
| A50H | 230640 | 230515 | 232415 | 232145 | 230880 | 231340 | 229825 | 231030 | 228280 | 233055 |
| B50H | 242640 | 238505 | 237950 | 237395 | 240020 | 239995 | 239110 | 239075 | 238690 | 237730 |

Tabela 108: Resultados da heurística OSA para os casos de estudo de 30 e 50 nós

| | OSA 1 | OSA 2 | OSA 3 | OSA 4 | OSA 5 | OSA 6 | OSA 7 | OSA 8 | OSA 9 | OSA 10 |
|------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| A30L | 47410 | 47970 | 47335 | 46675 | 46885 | 46105 | 48720 | 46905 | 46125 | 46515 |
| B30L | 47145 | 48030 | 47485 | 46515 | 47160 | 47080 | 47760 | 48135 | 47380 | 47715 |
| A30M | 83115 | 82725 | 81435 | 80315 | 81990 | 83100 | 81690 | 82120 | 80970 | 81545 |
| B30M | 99835 | 100910 | 100220 | 99830 | 101205 | 100125 | 100010 | 100100 | 100530 | 100815 |
| A30H | 162760 | 160260 | 158285 | 160380 | 158005 | 158425 | 158975 | 160615 | 161220 | 158635 |
| B30H | 168390 | 167945 | 168660 | 168720 | 166705 | 167595 | 169260 | 167115 | 167975 | 165930 |
| A50L | 100275 | 98815 | 99980 | 100090 | 97670 | 98135 | 100070 | 97115 | 99460 | 99395 |
| B50L | 89240 | 92735 | 92835 | 92255 | 92560 | 92880 | 93685 | 94160 | 93055 | 92520 |
| A50M | 172535 | 173500 | 173205 | 173755 | 173925 | 172815 | 173755 | 174800 | 172765 | 171950 |
| B50M | 167705 | 167065 | 166690 | 168285 | 165975 | 168595 | 169180 | 168890 | 169760 | 168535 |
| A50H | 241875 | 243225 | 240615 | 239950 | 241280 | 242260 | 240755 | 243705 | 242330 | 241680 |
| B50H | 248140 | 248430 | 244330 | 247125 | 248615 | 245245 | 248340 | 246005 | 248515 | 248040 |

Tabela 109: Resultados percentuais da heurística OH1 para os casos de estudo de 30 e 50 nós

| | OH1 1 | OH1 2 | OH1 3 | OH1 4 | OH1 5 | OH1 6 | OH1 7 | OH1 8 | OH1 9 | OH1 10 |
|------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|--------|
| A30L | 0,2% | 1,3% | 0,6% | 0,2% | 0,0% | 0,9% | 1,9% | 1,9% | 0,0% | 0,7% |
| B30L | 1,7% | 0,1% | 0,8% | 2,0% | 0,4% | 0,1% | 0,0% | 2,6% | 1,2% | 2,3% |
| A30M | 0,9% | 1,1% | 0,0% | 0,3% | 0,7% | 1,6% | 1,3% | 1,6% | 1,3% | 1,2% |
| B30M | 0,0% | 0,1% | 1,2% | 0,5% | 0,8% | 0,6% | 0,2% | 0,9% | 0,1% | 0,6% |
| A30H | 0,0% | 1,4% | 0,0% | 1,3% | 1,7% | 0,4% | 1,3% | 1,2% | 1,6% | 0,9% |
| B30H | 0,9% | 1,8% | 1,1% | 0,9% | 1,1% | 1,2% | 1,2% | 1,6% | 0,6% | 0,0% |
| A50L | 0,6% | 0,4% | 0,0% | 0,1% | 1,4% | 0,8% | 1,1% | 0,8% | 0,0% | 0,2% |
| B50L | 0,7% | 2,6% | 2,2% | 1,2% | 1,1% | 2,9% | 2,7% | 0,0% | 1,7% | 3,3% |
| A50M | 0,6% | 0,0% | 0,3% | 0,5% | 1,6% | 0,8% | 0,5% | 1,6% | 0,7% | 0,5% |
| B50M | 1,8% | 1,7% | 0,7% | 1,1% | 0,5% | 0,6% | 0,6% | 0,9% | 0,0% | 2,6% |
| A50H | 1,4% | 0,5% | 0,5% | 0,5% | 0,9% | 0,2% | 0,8% | 1,2% | 0,1% | 0,0% |
| B50H | 0,0% | 0,9% | 0,6% | 0,9% | 1,0% | 1,0% | 0,7% | 0,6% | 0,8% | 0,8% |

Tabela 110: Resultados percentuais da heurística OH2 para os casos de estudo de 30 e 50 nós

| | OH2 1 | OH2 2 | OH2 3 | OH2 4 | OH2 5 | OH2 6 | OH2 7 | OH2 8 | OH2 9 | OH2 10 |
|------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|--------|
| A30L | 3,7% | 2,8% | 0,8% | 3,8% | 2,3% | 1,6% | 2,5% | 2,8% | 0,8% | 3,0% |
| B30L | 1,9% | 1,6% | 3,0% | 2,7% | 2,9% | 1,8% | 2,9% | 1,2% | 2,4% | 2,7% |
| A30M | 2,6% | 1,3% | 0,8% | 2,0% | 2,2% | 3,3% | 2,0% | 2,7% | 1,4% | 2,5% |
| B30M | 1,6% | 1,9% | 1,3% | 2,0% | 1,8% | 1,2% | 0,6% | 1,7% | 1,8% | 1,4% |
| A30H | 2,0% | 1,5% | 2,2% | 3,0% | 1,4% | 2,2% | 2,7% | 1,9% | 2,1% | 2,2% |
| B30H | 1,7% | 2,0% | 2,5% | 1,7% | 1,9% | 1,8% | 1,6% | 2,2% | 2,5% | 1,7% |
| A50L | 3,0% | 1,9% | 2,0% | 3,0% | 2,9% | 2,4% | 3,8% | 2,7% | 4,1% | 3,2% |
| B50L | 3,7% | 6,7% | 4,9% | 3,5% | 4,2% | 4,1% | 4,8% | 1,1% | 5,0% | 6,8% |
| A50M | 2,0% | 2,8% | 2,2% | 2,0% | 1,1% | 2,5% | 1,5% | 2,1% | 3,2% | 3,0% |
| B50M | 3,7% | 3,5% | 1,9% | 3,3% | 1,9% | 3,5% | 2,5% | 2,5% | 3,3% | 3,9% |
| A50H | 1,4% | 1,4% | 2,2% | 2,1% | 1,5% | 1,7% | 1,1% | 1,6% | 0,4% | 2,5% |
| B50H | 3,8% | 2,0% | 1,8% | 1,5% | 2,7% | 2,7% | 2,3% | 2,3% | 2,1% | 1,7% |

Tabela 111: Resultados percentuais da heurística OSA para os casos de estudo de 30 e 50 nós

| | OSA 1 | OSA 2 | OSA 3 | OSA 4 | OSA 5 | OSA 6 | OSA 7 | OSA 8 | OSA 9 | OSA 10 |
|------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|--------|
| A30L | 4,6% | 5,9% | 4,5% | 3,0% | 3,5% | 1,8% | 7,5% | 3,5% | 1,8% | 2,7% |
| B30L | 5,4% | 7,4% | 6,1% | 4,0% | 5,4% | 5,2% | 6,8% | 7,6% | 5,9% | 6,6% |
| A30M | 4,9% | 4,5% | 2,8% | 1,4% | 3,5% | 4,9% | 3,1% | 3,7% | 2,2% | 3,0% |
| B30M | 5,2% | 6,4% | 5,6% | 5,2% | 6,7% | 5,5% | 5,4% | 5,5% | 6,0% | 6,3% |
| A30H | 7,1% | 5,4% | 4,1% | 5,5% | 3,9% | 4,2% | 4,6% | 5,7% | 6,1% | 4,4% |
| B30H | 6,3% | 6,0% | 6,4% | 6,5% | 5,2% | 5,8% | 6,8% | 5,5% | 6,0% | 4,7% |
| A50L | 10,4% | 8,8% | 10,0% | 10,2% | 7,5% | 8,0% | 10,1% | 6,9% | 9,5% | 9,4% |
| B50L | 5,9% | 10,0% | 10,1% | 9,5% | 9,8% | 10,2% | 11,2% | 11,7% | 10,4% | 9,8% |
| A50M | 6,7% | 7,3% | 7,2% | 7,5% | 7,6% | 6,9% | 7,5% | 8,1% | 6,9% | 6,4% |
| B50M | 6,5% | 6,1% | 5,8% | 6,8% | 5,4% | 7,0% | 7,4% | 7,2% | 7,8% | 7,0% |
| A50H | 6,4% | 6,9% | 5,8% | 5,5% | 6,1% | 6,5% | 5,9% | 7,2% | 6,6% | 6,3% |
| B50H | 6,1% | 6,3% | 4,5% | 5,7% | 6,3% | 4,9% | 6,2% | 5,2% | 6,3% | 6,1% |

Tabela 112: Resultados percentuais da heurística lagrangeana para os casos de estudo de 30 e 50 nós (HL)

| | A30L | B30L | A30M | B30M | A30H | B30H | A50L | B50L | A50M | B50M | A50H | B50H |
|----|--------|--------|--------|-------|-------|-------|--------|--------|-------|--------|-------|--------|
| 1 | 8,03% | 4,38% | 15,77% | 9,82% | 9,65% | 8,39% | 8,67% | 15,18% | 8,16% | 13,97% | 7,39% | 11,20% |
| 2 | 4,32% | 3,15% | 4,96% | 3,34% | 4,71% | 2,66% | 7,52% | 5,43% | 6,31% | 3,77% | 3,50% | 4,21% |
| 3 | 9,71% | 6,10% | 3,79% | 3,39% | 2,26% | 2,21% | 6,65% | 6,34% | 2,94% | 1,32% | 0,52% | 1,20% |
| 4 | 11,47% | 5,73% | 8,55% | 6,97% | 3,38% | 3,74% | 8,67% | 11,02% | 4,78% | 3,37% | 2,17% | 2,41% |
| 5 | 14,40% | 11,06% | 8,30% | 6,29% | 4,09% | 3,76% | 10,40% | 10,03% | 4,99% | 3,60% | 2,30% | 2,54% |
| 6 | 19,64% | 14,32% | 9,00% | 6,59% | 3,92% | 3,85% | 10,94% | 11,69% | 4,65% | 4,64% | 2,02% | 2,68% |
| 7 | 16,29% | 9,82% | 7,04% | 5,17% | 3,96% | 3,72% | 11,45% | 12,53% | 5,82% | 4,88% | 2,44% | 2,22% |
| 8 | 17,08% | 12,80% | 8,70% | 6,17% | 4,16% | 3,62% | 8,67% | 10,03% | 5,60% | 4,33% | 2,52% | 2,18% |
| 9 | 20,85% | 11,96% | 8,78% | 7,46% | 4,08% | 3,99% | 11,35% | 10,70% | 5,20% | 4,35% | 2,32% | 2,69% |
| 10 | 20,66% | 14,32% | 9,15% | 6,59% | 3,93% | 3,96% | 12,68% | 11,95% | 4,65% | 4,69% | 2,26% | 2,54% |
| 11 | 15,47% | 9,01% | 5,52% | 5,28% | 2,95% | 3,56% | 8,25% | 9,17% | 3,82% | 2,89% | 1,30% | 1,41% |
| 12 | 12,66% | 8,30% | 6,87% | 5,82% | 3,62% | 3,62% | 8,67% | 8,90% | 4,48% | 3,20% | 1,94% | 2,00% |
| 13 | 10,99% | 9,92% | 6,85% | 3,95% | 3,38% | 3,20% | 8,98% | 9,73% | 4,71% | 3,51% | 1,77% | 1,81% |
| 14 | 16,10% | 10,07% | 7,30% | 5,99% | 3,64% | 3,24% | 9,46% | 9,79% | 4,65% | 3,25% | 1,76% | 1,93% |

Tabela 113: Resultados percentuais da variante da heurística lagrangeana para os casos de estudo de 30 e 50 nós (VHL)

| | A30L | B30L | A30M | B30M | A30H | B30H | A50L | B50L | A50M | B50M | A50H | B50H |
|----|--------|--------|--------|--------|-------|-------|--------|--------|-------|--------|-------|-------|
| 1 | 23,93% | 19,45% | 13,59% | 11,46% | 9,65% | 7,78% | 19,37% | 21,74% | 9,26% | 10,49% | 6,57% | 5,59% |
| 2 | 16,07% | 16,03% | 16,67% | 11,46% | 7,64% | 7,80% | 18,93% | 12,61% | 8,69% | 8,52% | 3,96% | 5,56% |
| 3 | 18,99% | 17,28% | 13,58% | 9,87% | 5,75% | 5,42% | 12,27% | 10,84% | 6,78% | 7,54% | 2,07% | 3,42% |
| 4 | 19,93% | 14,30% | 9,59% | 7,82% | 5,58% | 4,56% | 14,65% | 12,63% | 6,18% | 4,83% | 3,15% | 3,00% |
| 5 | 16,07% | 16,03% | 9,29% | 5,99% | 4,91% | 4,81% | 14,20% | 12,61% | 5,75% | 4,06% | 1,98% | 2,66% |
| 6 | 17,83% | 12,71% | 7,00% | 5,77% | 4,23% | 3,45% | 8,55% | 10,10% | 5,10% | 3,03% | 1,38% | 2,47% |
| 7 | 19,93% | 14,14% | 9,45% | 5,37% | 3,95% | 3,37% | 11,06% | 12,04% | 5,87% | 4,28% | 2,48% | 3,00% |
| 8 | 16,07% | 13,11% | 8,59% | 5,57% | 3,75% | 3,59% | 10,83% | 8,03% | 4,41% | 4,06% | 1,94% | 2,63% |
| 9 | 13,22% | 9,40% | 7,00% | 5,77% | 3,84% | 3,45% | 6,10% | 10,10% | 4,51% | 2,81% | 0,82% | 1,92% |
| 10 | 10,72% | 7,51% | 3,84% | 3,86% | 2,22% | 2,16% | 7,73% | 7,07% | 2,94% | 1,14% | 1,05% | 1,24% |
| 11 | 9,56% | 6,26% | 4,07% | 3,89% | 2,75% | 2,37% | 6,86% | 5,86% | 2,83% | 1,48% | 0,82% | 1,12% |
| 12 | 10,72% | 6,94% | 3,84% | 3,21% | 2,22% | 2,16% | 7,73% | 6,79% | 2,89% | 1,14% | 0,87% | 1,24% |
| 13 | 9,56% | 5,96% | 4,07% | 3,89% | 2,30% | 2,37% | 6,86% | 6,79% | 3,01% | 1,48% | 0,74% | 1,12% |

As tabelas seguintes (Tabela 114 a Tabela 118) indicam os valores de custo obtidos nas corridas das várias técnicas heurísticas com os melhores parâmetros a metade do tempo total fornecido. A partir destas tabelas construíram-se as tabelas Tabela 119 a Tabela 123 que indicam a percentagem de custo que se reduziu dos valores de custo a metade do tempo até ao fim do intervalo de tempo total fornecido.

Tabela 114: Resultados de OH1 a metade do tempo total

| | OH1 1 | OH1 2 | OH1 3 | OH1 4 | OH1 5 | OH1 6 | OH1 7 | OH1 8 | OH1 9 | OH1 10 |
|------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| A30L | 46015 | 46130 | 45975 | 45400 | 45305 | 46440 | 46530 | 46175 | 45515 | 46065 |
| B30L | 45640 | 45385 | 45080 | 45945 | 44900 | 45270 | 44740 | 46210 | 45550 | 45750 |
| A30M | 80555 | 80780 | 79200 | 79785 | 79780 | 80950 | 80240 | 80645 | 80645 | 80410 |
| B30M | 95260 | 96350 | 96430 | 97035 | 95600 | 96100 | 95080 | 96155 | 94960 | 95485 |
| A30H | 153690 | 154165 | 152005 | 154010 | 154760 | 152680 | 154130 | 153875 | 154375 | 153430 |
| B30H | 159905 | 161245 | 160235 | 159860 | 161150 | 162000 | 160950 | 160970 | 160580 | 161715 |
| A50L | 91405 | 91240 | 90850 | 92135 | 92115 | 91620 | 91870 | 91535 | 91940 | 92045 |
| B50L | 84890 | 86495 | 86140 | 86175 | 85655 | 86760 | 86740 | 84285 | 86220 | 87390 |
| A50M | 163480 | 161645 | 162850 | 162990 | 164160 | 162960 | 162520 | 164615 | 162825 | 163640 |
| B50M | 160400 | 160180 | 159735 | 159610 | 158320 | 159760 | 160695 | 158940 | 160670 | 161740 |
| A50H | 230835 | 228625 | 229465 | 228600 | 229395 | 227890 | 229175 | 230270 | 230225 | 227585 |
| B50H | 236995 | 235830 | 238510 | 237445 | 236780 | 236495 | 235515 | 235105 | 237290 | 235730 |

Tabela 115: Resultados de OH2 a metade do tempo total

| | OH2 1 | OH2 2 | OH2 3 | OH2 4 | OH2 5 | OH2 6 | OH2 7 | OH2 8 | OH2 9 | OH2 10 |
|------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| A30L | 46960 | 46960 | 46905 | 47745 | 46340 | 48120 | 46440 | 46575 | 45665 | 47555 |
| B30L | 45950 | 45455 | 46305 | 46055 | 46055 | 46055 | 46055 | 45290 | 46055 | 45950 |
| A30M | 81300 | 80225 | 81410 | 80755 | 81440 | 81820 | 80805 | 81465 | 80290 | 81945 |
| B30M | 97525 | 97075 | 96100 | 97080 | 97650 | 97330 | 95440 | 96455 | 96960 | 96815 |
| A30H | 155670 | 154225 | 155740 | 156600 | 155255 | 155955 | 156355 | 154955 | 155270 | 155425 |
| B30H | 161215 | 162050 | 163040 | 161205 | 161870 | 161225 | 161010 | 161905 | 162665 | 161070 |
| A50L | 93740 | 92575 | 94480 | 94370 | 93560 | 93885 | 94260 | 93680 | 94580 | 93740 |
| B50L | 88810 | 89930 | 88795 | 90265 | 87820 | 87770 | 88370 | 85245 | 91005 | 90055 |
| A50M | 165020 | 166965 | 167485 | 166670 | 165400 | 166595 | 164125 | 165115 | 166800 | 166540 |
| B50M | 163270 | 163010 | 163490 | 162790 | 162200 | 164050 | 161465 | 161500 | 162680 | 164350 |
| A50H | 230640 | 232640 | 233700 | 232145 | 230880 | 231340 | 233465 | 231030 | 231545 | 233250 |
| B50H | 242640 | 240475 | 239020 | 240365 | 240605 | 241255 | 241095 | 239150 | 238690 | 242125 |

Tabela 116: Resultados de OSA a metade do tempo total

| | OSA 1 | OSA 2 | OSA 3 | OSA 4 | OSA 5 | OSA 6 | OSA 7 | OSA 8 | OSA 9 | OSA 10 |
|------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| A30L | 52470 | 52815 | 51585 | 51830 | 52180 | 53100 | 51690 | 52310 | 52200 | 52215 |
| B30L | 53320 | 50965 | 52095 | 50580 | 52010 | 52240 | 52125 | 52390 | 52080 | 52300 |
| A30M | 87295 | 86020 | 86585 | 88105 | 85225 | 86405 | 86230 | 87390 | 86550 | 87070 |
| B30M | 104295 | 103265 | 103090 | 103340 | 104015 | 102895 | 103930 | 104515 | 103155 | 103300 |
| A30H | 164175 | 165055 | 161665 | 164290 | 163990 | 163320 | 163665 | 162680 | 163705 | 163860 |
| B30H | 170090 | 170010 | 170670 | 170090 | 171740 | 171390 | 170150 | 171145 | 169370 | 169055 |
| A50L | 102990 | 101950 | 103210 | 103975 | 103270 | 103690 | 102880 | 103000 | 103035 | 102335 |
| B50L | 96375 | 95150 | 97275 | 96055 | 96965 | 94115 | 96400 | 95575 | 96280 | 97495 |
| A50M | 175710 | 175135 | 175855 | 175455 | 175540 | 173980 | 176615 | 176080 | 174305 | 176615 |
| B50M | 170700 | 172220 | 173195 | 168285 | 171925 | 171480 | 169180 | 169635 | 169760 | 170545 |
| A50H | 242200 | 243545 | 241810 | 239950 | 241775 | 242260 | 244235 | 244200 | 244235 | 243845 |
| B50H | 252900 | 252270 | 249365 | 250960 | 252320 | 253120 | 251680 | 250165 | 252295 | 249625 |

Tabela 117: Resultados de HL a metade do tempo total

| | HL 1 | HL 2 | HL 3 | HL 4 | HL 5 | HL 6 | HL 7 | HL 8 | HL 9 | HL 10 |
|------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| A30L | 48945 | 47260 | 50975 | 50500 | 51830 | 54205 | 52685 | 53045 | 54750 | 54665 |
| B30L | 47230 | 46150 | 47470 | 47305 | 49690 | 51145 | 49135 | 50465 | 50090 | 51145 |
| A30M | 91690 | 83130 | 82200 | 85970 | 85775 | 86325 | 84775 | 86090 | 86150 | 86445 |
| B30M | 104190 | 98365 | 98105 | 101485 | 100845 | 101125 | 99780 | 100725 | 101950 | 101125 |
| A30H | 166675 | 159165 | 155440 | 157145 | 158220 | 157965 | 158020 | 158330 | 158210 | 157985 |
| B30H | 171740 | 163280 | 162715 | 164375 | 164405 | 164540 | 164345 | 164180 | 164765 | 164715 |
| A50L | 98730 | 98100 | 96890 | 98730 | 100295 | 100785 | 101255 | 98730 | 101160 | 102370 |
| B50L | 97080 | 88865 | 90105 | 93575 | 92740 | 94140 | 94845 | 92740 | 93300 | 94360 |
| A50M | 174840 | 171845 | 166470 | 169375 | 169710 | 169155 | 171045 | 170700 | 170045 | 169155 |
| B50M | 179510 | 163450 | 160380 | 162810 | 163180 | 164820 | 165190 | 164325 | 164360 | 164890 |
| A50H | 244235 | 237315 | 229355 | 232360 | 232665 | 232020 | 232990 | 233150 | 232710 | 232575 |
| B50H | 259960 | 243625 | 236600 | 239425 | 239715 | 240040 | 238980 | 238880 | 240070 | 239715 |

Tabela 118: Resultados de VHL a metade do tempo total

| | VHL 1 | VHL 2 | VHL 3 | VHL 4 | VHL 5 | VHL 6 | VHL 7 | VHL 8 | VHL 9 | VHL 10 |
|------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| A30L | 56145 | 52585 | 53910 | 54335 | 52585 | 53385 | 54335 | 52585 | 51295 | 50160 |
| B30L | 53440 | 51910 | 52470 | 51140 | 51910 | 50425 | 51065 | 50605 | 48945 | 48100 |
| A30M | 89960 | 92405 | 89955 | 86795 | 86555 | 84745 | 86685 | 86000 | 84745 | 82240 |
| B30M | 105745 | 105745 | 104235 | 102290 | 100555 | 100350 | 99970 | 100155 | 100350 | 98535 |
| A30H | 166675 | 163620 | 160750 | 160480 | 159470 | 158430 | 158010 | 157705 | 157835 | 155380 |
| B30H | 170765 | 170800 | 167030 | 165675 | 166060 | 163910 | 163780 | 164140 | 163910 | 161875 |
| A50L | 108445 | 108050 | 102000 | 104160 | 103755 | 98615 | 100900 | 100685 | 96390 | 97875 |
| B50L | 102605 | 94915 | 93420 | 94930 | 94915 | 92800 | 94430 | 91055 | 92800 | 90240 |
| A50M | 176615 | 175695 | 172600 | 171630 | 170945 | 169895 | 171140 | 168780 | 168940 | 166405 |
| B50M | 174035 | 170925 | 169375 | 165105 | 163905 | 162285 | 164240 | 163905 | 161925 | 159295 |
| A50H | 242365 | 236445 | 232135 | 234600 | 231935 | 230575 | 233065 | 231840 | 229300 | 229825 |
| B50H | 246865 | 246790 | 241780 | 240805 | 240015 | 239565 | 240805 | 239945 | 238280 | 236685 |

Tabela 119: Percentagem de custo reduzida na metade final do tempo para OH1

| | OH1 1 | OH1 2 | OH1 3 | OH1 4 | OH1 5 | OH1 6 | OH1 7 | OH1 8 | OH1 9 | OH1 10 | OH1 |
|--------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|--------|-------|
| A30L | 1,34% | 0,52% | 0,83% | 0,00% | 0,00% | 1,60% | 0,76% | 0,00% | 0,45% | 0,92% | 0,64% |
| B30L | 0,31% | 1,34% | 0,00% | 0,70% | 0,00% | 1,03% | 0,00% | 0,66% | 0,63% | 0,00% | 0,47% |
| A30M | 0,76% | 0,83% | 0,00% | 0,43% | 0,00% | 0,64% | 0,00% | 0,20% | 0,51% | 0,36% | 0,37% |
| B30M | 0,40% | 1,39% | 0,45% | 1,72% | 0,00% | 0,66% | 0,00% | 0,46% | 0,00% | 0,00% | 0,51% |
| A30H | 1,07% | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 0,15% | 0,00% | 0,11% | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 0,13% |
| B30H | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 0,58% | 1,04% | 0,42% | 0,00% | 0,69% | 2,02% | 0,47% |
| A50L | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 1,32% | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 1,14% | 1,14% | 0,36% |
| B50L | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 0,97% | 0,55% | 0,00% | 0,20% | 0,00% | 0,62% | 0,38% | 0,27% |
| A50M | 0,50% | 0,00% | 0,41% | 0,32% | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 0,27% | 0,00% | 0,71% | 0,22% |
| B50M | 0,00% | 0,00% | 0,73% | 0,23% | 0,00% | 0,86% | 1,39% | 0,00% | 1,97% | 0,12% | 0,53% |
| A50H | 0,05% | 0,00% | 0,38% | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 0,04% | 1,11% | 0,07% | 0,16% |
| B50H | 1,35% | 0,00% | 1,38% | 0,64% | 0,25% | 0,20% | 0,00% | 0,00% | 0,67% | 0,00% | 0,45% |
| 30 | 0,65% | 0,68% | 0,21% | 0,47% | 0,12% | 0,83% | 0,21% | 0,22% | 0,38% | 0,55% | 0,43% |
| 50 | 0,32% | 0,00% | 0,48% | 0,58% | 0,13% | 0,18% | 0,26% | 0,05% | 0,92% | 0,40% | 0,33% |
| L | 0,41% | 0,47% | 0,21% | 0,75% | 0,14% | 0,66% | 0,24% | 0,17% | 0,71% | 0,61% | 0,44% |
| M | 0,42% | 0,56% | 0,40% | 0,67% | 0,00% | 0,54% | 0,35% | 0,23% | 0,62% | 0,30% | 0,41% |
| H | 0,62% | 0,00% | 0,44% | 0,16% | 0,24% | 0,31% | 0,13% | 0,01% | 0,62% | 0,52% | 0,31% |
| Global | 0,48% | 0,34% | 0,35% | 0,53% | 0,13% | 0,50% | 0,24% | 0,14% | 0,65% | 0,48% | 0,38% |

Tabela 120: Percentagem de custo reduzida na metade final do tempo para OH2

| | OH2 1 | OH2 2 | OH2 3 | OH2 4 | OH2 5 | OH2 6 | OH2 7 | OH2 8 | OH2 9 | OH2 10 | OH2 |
|--------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|--------|-------|
| A30L | 0,00% | 0,85% | 2,60% | 1,52% | 0,00% | 4,36% | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 1,91% | 1,12% |
| B30L | 0,81% | 0,00% | 0,44% | 0,23% | 0,00% | 1,06% | 0,00% | 0,00% | 0,56% | 0,00% | 0,31% |
| A30M | 0,08% | 0,00% | 1,91% | 0,00% | 0,62% | 0,03% | 0,00% | 0,15% | 0,00% | 0,97% | 0,38% |
| B30M | 1,17% | 0,39% | 0,00% | 0,30% | 1,09% | 1,31% | 0,00% | 0,00% | 0,35% | 0,60% | 0,52% |
| A30H | 0,41% | 0,00% | 0,21% | 0,06% | 0,72% | 0,41% | 0,13% | 0,00% | 0,00% | 0,06% | 0,20% |
| B30H | 0,00% | 0,22% | 0,44% | 0,00% | 0,23% | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 0,13% | 0,00% | 0,10% |
| A50L | 0,17% | 0,00% | 1,91% | 0,82% | 0,04% | 0,90% | 0,00% | 0,36% | 0,00% | 0,00% | 0,42% |
| B50L | 1,58% | 0,00% | 0,40% | 3,37% | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 2,79% | 0,00% | 0,81% |
| A50M | 0,11% | 0,45% | 1,39% | 1,12% | 1,19% | 0,55% | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 0,48% |
| B50M | 0,00% | 0,00% | 1,81% | 0,04% | 1,00% | 0,59% | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 0,47% | 0,39% |
| A50H | 0,00% | 0,91% | 0,55% | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 1,56% | 0,00% | 1,41% | 0,08% | 0,45% |
| B50H | 0,00% | 0,82% | 0,45% | 1,24% | 0,24% | 0,52% | 0,82% | 0,03% | 0,00% | 1,82% | 0,59% |
| 30 | 0,41% | 0,24% | 0,93% | 0,35% | 0,45% | 1,20% | 0,02% | 0,02% | 0,17% | 0,59% | 0,44% |
| 50 | 0,31% | 0,36% | 1,08% | 1,10% | 0,41% | 0,43% | 0,40% | 0,06% | 0,70% | 0,39% | 0,53% |
| L | 0,64% | 0,21% | 1,34% | 1,48% | 0,01% | 1,58% | 0,00% | 0,09% | 0,84% | 0,48% | 0,67% |
| M | 0,34% | 0,21% | 1,28% | 0,36% | 0,98% | 0,62% | 0,00% | 0,04% | 0,09% | 0,51% | 0,44% |
| H | 0,10% | 0,49% | 0,41% | 0,32% | 0,30% | 0,23% | 0,63% | 0,01% | 0,38% | 0,49% | 0,34% |
| Global | 0,36% | 0,30% | 1,01% | 0,72% | 0,43% | 0,81% | 0,21% | 0,04% | 0,44% | 0,49% | 0,48% |

Tabela 121: Percentagem de custo reduzida na metade final do tempo para OSA

| | OSA 1 | OSA 2 | OSA 3 | OSA 4 | OSA 5 | OSA 6 | OSA 7 | OSA 8 | OSA 9 | OSA 10 | OSA |
|--------|--------|-------|-------|-------|--------|--------|-------|--------|--------|--------|-------|
| A30L | 9,64% | 9,17% | 8,24% | 9,95% | 10,15% | 13,17% | 5,75% | 10,33% | 11,64% | 10,92% | 9,90% |
| B30L | 11,58% | 5,76% | 8,85% | 8,04% | 9,33% | 9,88% | 8,37% | 8,12% | 9,02% | 8,77% | 8,77% |
| A30M | 4,79% | 3,83% | 5,95% | 8,84% | 3,80% | 3,83% | 5,26% | 6,03% | 6,45% | 6,35% | 5,51% |
| B30M | 4,28% | 2,28% | 2,78% | 3,40% | 2,70% | 2,69% | 3,77% | 4,22% | 2,54% | 2,41% | 3,11% |
| A30H | 0,86% | 2,91% | 2,09% | 2,38% | 3,65% | 3,00% | 2,87% | 1,27% | 1,52% | 3,19% | 2,37% |
| B30H | 1,00% | 1,21% | 1,18% | 0,81% | 2,93% | 2,21% | 0,52% | 2,35% | 0,82% | 1,85% | 1,49% |
| A50L | 2,64% | 3,08% | 3,13% | 3,74% | 5,42% | 5,36% | 2,73% | 5,71% | 3,47% | 2,87% | 3,81% |
| B50L | 7,40% | 2,54% | 4,56% | 3,96% | 4,54% | 1,31% | 2,82% | 1,48% | 3,35% | 5,10% | 3,71% |
| A50M | 1,81% | 0,93% | 1,51% | 0,97% | 0,92% | 0,67% | 1,62% | 0,73% | 0,88% | 2,64% | 1,27% |
| B50M | 1,75% | 2,99% | 3,76% | 0,00% | 3,46% | 1,68% | 0,00% | 0,44% | 0,00% | 1,18% | 1,53% |
| A50H | 0,13% | 0,13% | 0,49% | 0,00% | 0,20% | 0,00% | 1,42% | 0,20% | 0,78% | 0,89% | 0,43% |
| B50H | 1,88% | 1,52% | 2,02% | 1,53% | 1,47% | 3,11% | 1,33% | 1,66% | 1,50% | 0,63% | 1,67% |
| 30 | 5,36% | 4,19% | 4,85% | 5,57% | 5,43% | 5,80% | 4,42% | 5,39% | 5,33% | 5,58% | 5,19% |
| 50 | 2,60% | 1,87% | 2,58% | 1,70% | 2,67% | 2,02% | 1,65% | 1,70% | 1,66% | 2,22% | 2,07% |
| L | 7,82% | 5,14% | 6,20% | 6,42% | 7,36% | 7,43% | 4,92% | 6,41% | 6,87% | 6,91% | 6,55% |
| M | 3,16% | 2,51% | 3,50% | 3,30% | 2,72% | 2,22% | 2,66% | 2,86% | 2,47% | 3,14% | 2,85% |
| H | 0,97% | 1,44% | 1,45% | 1,18% | 2,06% | 2,08% | 1,54% | 1,37% | 1,15% | 1,64% | 1,49% |
| Global | 3,98% | 3,03% | 3,71% | 3,63% | 4,05% | 3,91% | 3,04% | 3,55% | 3,50% | 3,90% | 3,63% |

Tabela 122: Percentagem de custo reduzida na metade final do tempo para HL

| | HL 1 | HL 2 | HL 3 | HL 4 | HL 5 | HL 6 | HL 7 | HL 8 | HL 9 | HL 10 | HL |
|--------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| A30L | 0,00% | 0,00% | 2,49% | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 0,25% |
| B30L | 1,12% | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 0,11% |
| A30M | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 0,00% |
| B30M | 0,00% | 0,33% | 0,02% | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 0,03% |
| A30H | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 0,00% |
| B30H | 0,00% | 0,38% | 0,47% | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 0,09% |
| A50L | 0,00% | 0,43% | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 0,04% |
| B50L | 0,00% | 0,00% | 0,53% | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 0,05% |
| A50M | 0,00% | 0,00% | 0,04% | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 0,00% |
| B50M | 0,00% | 0,00% | 0,50% | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 0,05% |
| A50H | 0,00% | 0,81% | 0,32% | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 0,11% |
| B50H | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 0,00% |
| 30 | 0,19% | 0,12% | 0,50% | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 0,08% |
| 50 | 0,00% | 0,21% | 0,23% | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 0,04% |
| L | 0,28% | 0,11% | 0,76% | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 0,11% |
| M | 0,00% | 0,08% | 0,14% | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 0,02% |
| H | 0,00% | 0,30% | 0,20% | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 0,05% |
| Global | 0,09% | 0,16% | 0,36% | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 0,06% |

Tabela 123: Percentagem de custo reduzida na metade final do tempo para VHL

| | VHL 1 | VHL 2 | VHL 3 | VHL 4 | VHL 5 | VHL 6 | VHL 7 | VHL 8 | VHL 9 | VHL 10 | VHL |
|--------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|--------|-------|
| A30L | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 0,00% |
| B30L | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 0,00% |
| A30M | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 0,00% |
| B30M | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 0,00% |
| A30H | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 0,00% |
| B30H | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 0,00% |
| A50L | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 0,00% |
| B50L | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 0,00% |
| A50M | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 0,00% |
| B50M | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 0,00% |
| A50H | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 0,00% |
| B50H | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 0,00% |
| 30 | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 0,00% |
| 50 | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 0,00% |
| L | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 0,00% |
| M | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 0,00% |
| H | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 0,00% |
| Global | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 0,00% |

A Tabela 124 indica os tempos gastos a resolver a formulação para determinar um conjunto de pesos compatível e com percursos de peso mínimo únicos aplicada às soluções das heurísticas da primeira fase (redes de 30 nós), A Tabela 125 corresponde aos mesmos resultados para as redes de 50 nós. A Tabela 126 indica os valores máximos de pesos

encontrados a resolver a formulação aplicada às redes de 30 nós. A Tabela 127 indica os valores máximos de pesos encontrados a resolver a formulação aplicada às redes de 50 nós.

Tabela 124: Tempos gastos em segundos na formulação para determinar os pesos para as redes de 30 nós

| | A30L | B30L | A30M | B30M | A30H | B30H |
|--------|------|------|------|------|------|------|
| OH1 1 | 0,08 | 0,02 | 0,16 | 0,03 | 0,16 | 0,09 |
| OH1 2 | 0,03 | 0,03 | 0,09 | 0,03 | 0,06 | 0,11 |
| OH1 3 | 0,08 | 0,08 | 0,05 | 0,03 | 0,05 | 0,20 |
| OH1 4 | 0,05 | 0,03 | 0,06 | 0,03 | 0,09 | 0,08 |
| OH1 5 | 0,03 | 0,05 | 0,05 | 0,06 | 0,08 | 0,05 |
| OH1 6 | 0,13 | 0,03 | 0,17 | 0,05 | 0,08 | 0,06 |
| OH1 7 | 0,05 | 0,03 | 0,05 | 0,03 | 0,25 | 0,05 |
| OH1 8 | 0,08 | 0,05 | 0,17 | 0,03 | 0,05 | 0,09 |
| OH1 9 | 0,13 | 0,03 | 0,52 | 0,05 | 0,20 | 0,06 |
| OH1 10 | 0,08 | 0,08 | 0,20 | 0,05 | 0,05 | 0,03 |
| OH2 1 | 0,06 | 0,02 | 0,09 | 0,06 | 0,11 | 0,06 |
| OH2 2 | 0,03 | 0,05 | 0,06 | 0,06 | 0,14 | 0,09 |
| OH2 3 | 0,05 | 0,05 | 0,05 | 0,09 | 0,08 | 0,11 |
| OH2 4 | 0,05 | 0,03 | 0,17 | 0,05 | 0,27 | 0,05 |
| OH2 5 | 0,05 | 0,03 | 0,22 | 0,03 | 0,08 | 0,05 |
| OH2 6 | 0,06 | 0,02 | 0,22 | 0,11 | 0,19 | 0,09 |
| OH2 7 | 0,05 | 0,03 | 0,14 | 0,03 | 0,22 | 0,03 |
| OH2 8 | 0,09 | 0,02 | 0,16 | 0,05 | 0,20 | 0,08 |
| OH2 9 | 0,05 | 0,05 | 0,14 | 0,06 | 0,25 | 0,03 |
| OH2 10 | 0,14 | 0,06 | 0,14 | 0,06 | 0,16 | 0,05 |
| OSA 1 | 0,08 | 0,05 | 0,11 | 0,06 | 0,08 | 0,05 |
| OSA 2 | 0,05 | 0,05 | 0,06 | 0,03 | 0,09 | 0,05 |
| OSA 3 | 0,03 | 0,05 | 0,14 | 0,06 | 0,05 | 0,09 |
| OSA 4 | 0,13 | 0,03 | 0,03 | 0,09 | 0,08 | 0,05 |
| OSA 5 | 0,06 | 0,03 | 0,06 | 0,05 | 0,13 | 0,06 |
| OSA 6 | 0,03 | 0,05 | 0,09 | 0,05 | 0,08 | 0,09 |
| OSA 7 | 0,06 | 0,03 | 0,06 | 0,03 | 0,08 | 0,05 |
| OSA 8 | 0,05 | 0,05 | 0,06 | 0,05 | 0,08 | 0,05 |
| OSA 9 | 0,05 | 0,03 | 0,05 | 0,05 | 0,06 | 0,05 |
| OSA 10 | 0,05 | 0,05 | 0,05 | 0,08 | 0,11 | 0,06 |
| HL 1 | 0,06 | 0,03 | 0,23 | 0,20 | 0,30 | 0,11 |
| HL 2 | 0,03 | 0,03 | 0,05 | 0,03 | 0,06 | 0,03 |
| HL 3 | 0,08 | 0,05 | 0,25 | 0,14 | 1,11 | 0,09 |
| HL 4 | 0,02 | 0,03 | 0,13 | 0,23 | 0,06 | 0,11 |
| HL 5 | 0,08 | 0,05 | 0,16 | 0,14 | 0,06 | 0,11 |
| HL 6 | 0,11 | 0,03 | 0,14 | 0,11 | 0,09 | 0,06 |
| HL 7 | 0,06 | 0,05 | 0,28 | 0,03 | 0,13 | 0,05 |
| HL 8 | 0,05 | 0,03 | 0,09 | 0,03 | 0,13 | 0,09 |
| HL 9 | 0,06 | 0,06 | 0,06 | 0,03 | 0,30 | 0,05 |
| HL 10 | 0,09 | 0,03 | 1,28 | 0,11 | 0,34 | 0,14 |
| VHL 1 | 0,00 | 0,00 | 0,09 | 0,11 | 0,30 | 0,05 |
| VHL 2 | 0,01 | 0,02 | 0,30 | 0,11 | 0,06 | 0,03 |
| VHL 3 | 0,02 | 0,02 | 0,13 | 0,03 | 0,06 | 0,05 |
| VHL 4 | 0,06 | 0,03 | 0,05 | 0,17 | 0,19 | 0,09 |
| VHL 5 | 0,02 | 0,00 | 0,06 | 0,06 | 0,39 | 0,05 |
| VHL 6 | 0,17 | 0,06 | 0,05 | 0,09 | 0,27 | 0,09 |
| VHL 7 | 0,06 | 0,06 | 0,06 | 0,08 | 0,08 | 0,06 |
| VHL 8 | 0,01 | 0,16 | 0,09 | 0,17 | 0,28 | 0,13 |
| VHL 9 | 0,11 | 0,03 | 0,05 | 0,09 | 0,08 | 0,09 |
| VHL 10 | 0,03 | 0,03 | 0,05 | 0,08 | 0,13 | 0,06 |
| Média | 0,06 | 0,04 | 0,14 | 0,07 | 0,16 | 0,07 |
| Máximo | 0,17 | 0,16 | 1,28 | 0,23 | 1,11 | 0,20 |

Tabela 125: Tempos gastos em segundos na formulação para determinar os pesos para as redes de 50 nós

| | A50L | B50L | A50M | B50M | A50H | B50H |
|--------|-------|------|--------|------|-------|-------|
| OH1 1 | 0,73 | 0,64 | 1,47 | 1,05 | 1,44 | 0,23 |
| OH1 2 | 0,81 | 0,84 | 16,33 | 4,97 | 1,75 | 0,20 |
| OH1 3 | 0,86 | 0,23 | 12,00 | 0,34 | 1,42 | 1,36 |
| OH1 4 | 1,08 | 0,98 | 1,33 | 1,28 | 1,67 | 0,89 |
| OH1 5 | 0,89 | 1,13 | 1,67 | 1,55 | 0,33 | 1,63 |
| OH1 6 | 0,73 | 0,69 | 1,58 | 1,00 | 1,48 | 1,14 |
| OH1 7 | 5,97 | 0,84 | 8,25 | 0,45 | 1,73 | 0,95 |
| OH1 8 | 0,67 | 0,19 | 17,97 | 0,83 | 1,00 | 0,81 |
| OH1 9 | 0,63 | 4,66 | 1,58 | 0,98 | 1,81 | 0,86 |
| OH1 10 | 1,16 | 0,33 | 1,00 | 1,33 | 8,66 | 1,38 |
| OH2 1 | 0,83 | 0,78 | 8,81 | 1,33 | 2,00 | 1,70 |
| OH2 2 | 1,02 | 0,61 | 8,64 | 0,89 | 0,41 | 1,47 |
| OH2 3 | 0,38 | 0,23 | 1,77 | 0,72 | 0,67 | 0,64 |
| OH2 4 | 0,53 | 0,38 | 1,13 | 0,44 | 12,39 | 1,50 |
| OH2 5 | 1,00 | 0,22 | 1,05 | 1,11 | 1,72 | 1,31 |
| OH2 6 | 0,81 | 0,84 | 0,95 | 1,08 | 1,56 | 1,55 |
| OH2 7 | 1,42 | 0,66 | 1,61 | 0,97 | 2,33 | 1,50 |
| OH2 8 | 0,66 | 0,13 | 0,48 | 0,91 | 1,36 | 0,89 |
| OH2 9 | 0,63 | 0,47 | 1,66 | 0,91 | 1,88 | 1,67 |
| OH2 10 | 1,00 | 1,22 | 0,92 | 0,89 | 0,25 | 0,69 |
| OSA 1 | 0,48 | 0,36 | 1,16 | 1,16 | 0,47 | 0,27 |
| OSA 2 | 1,12 | 0,58 | 1,44 | 1,05 | 1,16 | 0,31 |
| OSA 3 | 1,00 | 0,23 | 1,31 | 1,02 | 1,17 | 0,98 |
| OSA 4 | 1,52 | 0,24 | 0,97 | 0,28 | 1,92 | 1,44 |
| OSA 5 | 0,30 | 0,17 | 1,00 | 1,47 | 1,78 | 0,86 |
| OSA 6 | 0,16 | 0,38 | 1,11 | 0,99 | 1,88 | 1,30 |
| OSA 7 | 1,11 | 0,17 | 0,42 | 1,66 | 1,30 | 1,64 |
| OSA 8 | 0,66 | 0,44 | 1,63 | 1,30 | 0,69 | 1,39 |
| OSA 9 | 1,27 | 0,41 | 1,34 | 0,24 | 1,36 | 0,92 |
| OSA 10 | 12,97 | 0,61 | 1,52 | 0,47 | 2,11 | 0,27 |
| HL 1 | 1,06 | 1,33 | 0,88 | 0,88 | 1,94 | 0,92 |
| HL 2 | 0,47 | 0,17 | 1,89 | 0,80 | 1,53 | 0,55 |
| HL 3 | 1,08 | 0,25 | 1,84 | 1,98 | 2,34 | 1,84 |
| HL 4 | 1,08 | 0,75 | 73,55 | 1,83 | 2,34 | 1,75 |
| HL 5 | 2,27 | 0,27 | 206,70 | 1,73 | 2,34 | 10,95 |
| HL 6 | 1,19 | 0,36 | 2,20 | 1,59 | 2,23 | 0,88 |
| HL 7 | 1,53 | 0,80 | 2,13 | 2,23 | 2,47 | 2,56 |
| HL 8 | 1,05 | 0,83 | 3,56 | 1,73 | 1,69 | 1,53 |
| HL 9 | 1,53 | 1,13 | 2,89 | 2,31 | 2,03 | 10,97 |
| HL 10 | 1,36 | 1,41 | 2,17 | 2,20 | 1,61 | 2,11 |
| VHL 1 | 1,92 | 1,61 | 1,95 | 0,36 | 0,52 | 1,55 |
| VHL 2 | 1,09 | 1,01 | 0,80 | 0,41 | 2,05 | 1,03 |
| VHL 3 | 1,42 | 0,23 | 2,52 | 1,53 | 1,77 | 2,58 |
| VHL 4 | 0,45 | 1,14 | 1,97 | 1,23 | 2,81 | 1,42 |
| VHL 5 | 1,25 | 1,03 | 183,31 | 1,34 | 1,81 | 2,03 |
| VHL 6 | 1,36 | 0,38 | 9,78 | 1,14 | 2,27 | 1,58 |
| VHL 7 | 1,27 | 0,39 | 2,64 | 1,73 | 2,33 | 1,42 |
| VHL 8 | 2,13 | 0,70 | 1,86 | 1,33 | 2,00 | 1,42 |
| VHL 9 | 1,30 | 0,38 | 18,89 | 1,13 | 1,98 | 1,95 |
| VHL 10 | 1,06 | 1,06 | 3,69 | 1,14 | 2,41 | 1,89 |
| Média | 1,37 | 0,70 | 12,55 | 1,23 | 2,00 | 1,65 |
| Máximo | 12,97 | 4,66 | 206,70 | 4,97 | 12,39 | 10,97 |

Tabela 126: Pesos máximos obtidos pela formulação para determinar os pesos para as redes de 30 nós

| | A30L | B30L | A30M | B30M | A30H | B30H |
|--------|------|------|------|------|------|------|
| OH1 1 | 5 | 5 | 6 | 4 | 5 | 7 |
| OH1 2 | 4 | 4 | 6 | 4 | 5 | 4 |
| OH1 3 | 5 | 5 | 5 | 5 | 6 | 6 |
| OH1 4 | 7 | 4 | 6 | 4 | 6 | 4 |
| OH1 5 | 3 | 4 | 5 | 5 | 4 | 7 |
| OH1 6 | 4 | 4 | 5 | 5 | 6 | 4 |
| OH1 7 | 5 | 3 | 3 | 4 | 4 | 6 |
| OH1 8 | 7 | 4 | 5 | 4 | 6 | 6 |
| OH1 9 | 4 | 5 | 6 | 4 | 6 | 7 |
| OH1 10 | 5 | 3 | 5 | 4 | 5 | 5 |
| OH2 1 | 4 | 6 | 6 | 6 | 4 | 4 |
| OH2 2 | 4 | 3 | 4 | 4 | 7 | 5 |
| OH2 3 | 4 | 3 | 6 | 4 | 5 | 5 |
| OH2 4 | 5 | 3 | 5 | 5 | 5 | 4 |
| OH2 5 | 5 | 5 | 6 | 6 | 5 | 4 |
| OH2 6 | 4 | 2 | 6 | 5 | 5 | 4 |
| OH2 7 | 5 | 5 | 6 | 4 | 5 | 4 |
| OH2 8 | 6 | 5 | 6 | 4 | 5 | 7 |
| OH2 9 | 4 | 2 | 6 | 4 | 4 | 4 |
| OH2 10 | 4 | 5 | 5 | 6 | 5 | 4 |
| OSA 1 | 6 | 4 | 6 | 4 | 7 | 4 |
| OSA 2 | 5 | 4 | 5 | 4 | 5 | 3 |
| OSA 3 | 3 | 6 | 7 | 3 | 5 | 3 |
| OSA 4 | 5 | 4 | 4 | 4 | 6 | 5 |
| OSA 5 | 7 | 6 | 5 | 4 | 4 | 4 |
| OSA 6 | 4 | 3 | 5 | 5 | 6 | 4 |
| OSA 7 | 7 | 3 | 8 | 4 | 5 | 4 |
| OSA 8 | 7 | 4 | 5 | 3 | 6 | 4 |
| OSA 9 | 4 | 5 | 6 | 3 | 6 | 5 |
| OSA 10 | 6 | 3 | 5 | 5 | 7 | 6 |
| HL 1 | 7 | 3 | 4 | 3 | 4 | 3 |
| HL 2 | 4 | 4 | 7 | 5 | 6 | 6 |
| HL 3 | 6 | 5 | 7 | 7 | 6 | 5 |
| HL 4 | 4 | 5 | 6 | 7 | 6 | 8 |
| HL 5 | 5 | 4 | 6 | 5 | 7 | 6 |
| HL 6 | 6 | 3 | 6 | 8 | 6 | 6 |
| HL 7 | 4 | 4 | 6 | 4 | 5 | 6 |
| HL 8 | 6 | 11 | 6 | 5 | 5 | 6 |
| HL 9 | 4 | 5 | 6 | 5 | 6 | 7 |
| HL 10 | 8 | 3 | 6 | 8 | 6 | 7 |
| VHL 1 | 3 | 3 | 3 | 3 | 4 | 7 |
| VHL 2 | 2 | 1 | 4 | 3 | 7 | 4 |
| VHL 3 | 2 | 1 | 6 | 4 | 8 | 5 |
| VHL 4 | 6 | 5 | 6 | 7 | 7 | 7 |
| VHL 5 | 2 | 1 | 5 | 5 | 7 | 6 |
| VHL 6 | 5 | 4 | 6 | 6 | 7 | 5 |
| VHL 7 | 6 | 4 | 6 | 7 | 7 | 6 |
| VHL 8 | 2 | 7 | 6 | 5 | 6 | 6 |
| VHL 9 | 6 | 5 | 6 | 6 | 5 | 5 |
| VHL 10 | 5 | 4 | 5 | 7 | 6 | 7 |
| Máximo | 8 | 11 | 8 | 8 | 8 | 8 |

Tabela 127: Pesos máximos obtidos pela formulação para determinar os pesos para as redes de 50 nós

| | A50L | B50L | A50M | B50M | A50H | B50H |
|--------|------|------|------|------|------|------|
| OH1 1 | 6 | 4 | 5 | 7 | 6 | 5 |
| OH1 2 | 6 | 6 | 6 | 5 | 8 | 5 |
| OH1 3 | 6 | 6 | 5 | 6 | 7 | 6 |
| OH1 4 | 9 | 6 | 6 | 7 | 9 | 7 |
| OH1 5 | 5 | 5 | 7 | 5 | 7 | 7 |
| OH1 6 | 6 | 6 | 5 | 7 | 5 | 8 |
| OH1 7 | 9 | 6 | 6 | 4 | 7 | 6 |
| OH1 8 | 8 | 5 | 6 | 6 | 6 | 6 |
| OH1 9 | 5 | 6 | 6 | 7 | 6 | 6 |
| OH1 10 | 7 | 4 | 6 | 6 | 7 | 7 |
| OH2 1 | 6 | 6 | 7 | 7 | 7 | 8 |
| OH2 2 | 5 | 7 | 5 | 5 | 8 | 5 |
| OH2 3 | 5 | 6 | 6 | 6 | 6 | 7 |
| OH2 4 | 7 | 5 | 6 | 4 | 6 | 6 |
| OH2 5 | 6 | 5 | 5 | 9 | 10 | 7 |
| OH2 6 | 5 | 5 | 6 | 6 | 7 | 6 |
| OH2 7 | 6 | 6 | 7 | 7 | 6 | 8 |
| OH2 8 | 6 | 5 | 7 | 6 | 5 | 8 |
| OH2 9 | 6 | 6 | 7 | 5 | 6 | 7 |
| OH2 10 | 7 | 5 | 7 | 6 | 5 | 5 |
| OSA 1 | 9 | 10 | 7 | 7 | 8 | 8 |
| OSA 2 | 8 | 6 | 5 | 5 | 7 | 8 |
| OSA 3 | 10 | 6 | 6 | 6 | 6 | 7 |
| OSA 4 | 8 | 5 | 9 | 9 | 7 | 8 |
| OSA 5 | 8 | 6 | 8 | 7 | 8 | 5 |
| OSA 6 | 5 | 5 | 6 | 7 | 8 | 6 |
| OSA 7 | 7 | 5 | 7 | 6 | 7 | 10 |
| OSA 8 | 5 | 4 | 7 | 6 | 8 | 6 |
| OSA 9 | 9 | 5 | 8 | 7 | 7 | 6 |
| OSA 10 | 9 | 5 | 6 | 7 | 7 | 8 |
| HL 1 | 6 | 5 | 4 | 5 | 8 | 4 |
| HL 2 | 8 | 6 | 8 | 8 | 5 | 6 |
| HL 3 | 7 | 7 | 8 | 8 | 7 | 10 |
| HL 4 | 6 | 7 | 7 | 7 | 9 | 8 |
| HL 5 | 10 | 5 | 8 | 8 | 9 | 7 |
| HL 6 | 7 | 6 | 8 | 9 | 8 | 8 |
| HL 7 | 12 | 7 | 8 | 8 | 8 | 7 |
| HL 8 | 6 | 6 | 7 | 8 | 7 | 7 |
| HL 9 | 8 | 7 | 7 | 7 | 9 | 8 |
| HL 10 | 7 | 7 | 8 | 7 | 7 | 7 |
| VHL 1 | 8 | 6 | 8 | 7 | 8 | 8 |
| VHL 2 | 6 | 11 | 4 | 7 | 7 | 6 |
| VHL 3 | 7 | 8 | 8 | 7 | 8 | 8 |
| VHL 4 | 7 | 6 | 9 | 8 | 8 | 7 |
| VHL 5 | 6 | 11 | 8 | 9 | 7 | 7 |
| VHL 6 | 7 | 7 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| VHL 7 | 9 | 8 | 8 | 9 | 8 | 7 |
| VHL 8 | 7 | 7 | 8 | 9 | 9 | 9 |
| VHL 9 | 7 | 7 | 9 | 8 | 9 | 8 |
| VHL 10 | 6 | 9 | 7 | 8 | 9 | 7 |
| Máximo | 12 | 11 | 9 | 9 | 10 | 10 |

| | | |
|----------------------------------|----------------------|----------------------------|
| Page 84: [1] Formatted | Administrator | 07-04-2008 14:04:00 |
| Do not check spelling or grammar | | |
| Page 84: [2] Formatted | X | 14-10-2007 15:03:00 |
| Do not check spelling or grammar | | |
| Page 84: [3] Formatted | Administrator | 07-04-2008 14:04:00 |
| Do not check spelling or grammar | | |
| Page 84: [4] Formatted | X | 14-10-2007 15:03:00 |
| Do not check spelling or grammar | | |
| Page 84: [5] Formatted | Administrator | 07-04-2008 14:04:00 |
| Do not check spelling or grammar | | |
| Page 84: [6] Formatted | X | 14-10-2007 15:03:00 |
| Do not check spelling or grammar | | |
| Page 84: [7] Formatted | Administrator | 07-04-2008 14:04:00 |
| Do not check spelling or grammar | | |
| Page 84: [8] Formatted | X | 14-10-2007 15:03:00 |
| Do not check spelling or grammar | | |
| Page 84: [9] Formatted | Administrator | 07-04-2008 14:04:00 |
| Do not check spelling or grammar | | |
| Page 84: [10] Formatted | X | 14-10-2007 15:03:00 |
| Do not check spelling or grammar | | |
| Page 84: [11] Formatted | Administrator | 07-04-2008 14:04:00 |
| Do not check spelling or grammar | | |
| Page 84: [12] Formatted | X | 14-10-2007 15:03:00 |
| Do not check spelling or grammar | | |
| Page 84: [13] Formatted | Administrator | 07-04-2008 14:04:00 |
| Do not check spelling or grammar | | |
| Page 84: [14] Formatted | X | 14-10-2007 15:03:00 |
| Do not check spelling or grammar | | |
| Page 84: [15] Formatted | Administrator | 07-04-2008 14:04:00 |
| Do not check spelling or grammar | | |
| Page 84: [16] Formatted | X | 14-10-2007 15:03:00 |
| Do not check spelling or grammar | | |
| Page 84: [17] Formatted | Administrator | 07-04-2008 14:04:00 |

Do not check spelling or grammar

| | | |
|--------------------------------|----------|----------------------------|
| Page 84: [18] Formatted | X | 14-10-2007 15:03:00 |
|--------------------------------|----------|----------------------------|

Do not check spelling or grammar

| | | |
|--------------------------------|----------------------|----------------------------|
| Page 84: [19] Formatted | Administrator | 07-04-2008 14:04:00 |
|--------------------------------|----------------------|----------------------------|

Do not check spelling or grammar

| | | |
|--------------------------------|----------|----------------------------|
| Page 84: [20] Formatted | X | 14-10-2007 15:03:00 |
|--------------------------------|----------|----------------------------|

Do not check spelling or grammar

| | | |
|--------------------------------|----------------------|----------------------------|
| Page 84: [21] Formatted | Administrator | 07-04-2008 14:04:00 |
|--------------------------------|----------------------|----------------------------|

Do not check spelling or grammar

| | | |
|--------------------------------|----------|----------------------------|
| Page 84: [22] Formatted | X | 14-10-2007 15:03:00 |
|--------------------------------|----------|----------------------------|

Do not check spelling or grammar

| | | |
|---------------------------------|----------|----------------------------|
| Page 115: [23] Formatted | X | 14-10-2007 15:03:00 |
|---------------------------------|----------|----------------------------|

Do not check spelling or grammar

| | | |
|---------------------------------|----------------------|----------------------------|
| Page 115: [24] Formatted | Administrator | 07-04-2008 14:04:00 |
|---------------------------------|----------------------|----------------------------|

Do not check spelling or grammar

| | | |
|---------------------------------|----------|----------------------------|
| Page 115: [25] Formatted | X | 14-10-2007 15:03:00 |
|---------------------------------|----------|----------------------------|

Do not check spelling or grammar

| | | |
|---------------------------------|----------------------|----------------------------|
| Page 115: [26] Formatted | Administrator | 07-04-2008 14:04:00 |
|---------------------------------|----------------------|----------------------------|

Do not check spelling or grammar

| | | |
|---------------------------------|----------|----------------------------|
| Page 115: [27] Formatted | X | 14-10-2007 15:03:00 |
|---------------------------------|----------|----------------------------|

Do not check spelling or grammar

| | | |
|---------------------------------|----------------------|----------------------------|
| Page 115: [28] Formatted | Administrator | 07-04-2008 14:04:00 |
|---------------------------------|----------------------|----------------------------|

Do not check spelling or grammar

| | | |
|---------------------------------|----------|----------------------------|
| Page 115: [29] Formatted | X | 14-10-2007 15:03:00 |
|---------------------------------|----------|----------------------------|

Do not check spelling or grammar

| | | |
|---------------------------------|----------------------|----------------------------|
| Page 115: [30] Formatted | Administrator | 07-04-2008 14:04:00 |
|---------------------------------|----------------------|----------------------------|

Do not check spelling or grammar

| | | |
|---------------------------------|----------|----------------------------|
| Page 115: [31] Formatted | X | 14-10-2007 15:03:00 |
|---------------------------------|----------|----------------------------|

Do not check spelling or grammar

| | | |
|---------------------------------|----------------------|----------------------------|
| Page 115: [32] Formatted | Administrator | 07-04-2008 14:04:00 |
|---------------------------------|----------------------|----------------------------|

Do not check spelling or grammar

| | | |
|---------------------------------|----------|----------------------------|
| Page 115: [33] Formatted | X | 14-10-2007 15:03:00 |
|---------------------------------|----------|----------------------------|

Do not check spelling or grammar

| | | |
|----------------------------------|----------------------|----------------------------|
| Page 115: [34] Formatted | Administrator | 07-04-2008 14:04:00 |
| Do not check spelling or grammar | | |
| Page 115: [35] Formatted | X | 14-10-2007 15:03:00 |
| Do not check spelling or grammar | | |
| Page 131: [36] Formatted | X | 14-10-2007 15:03:00 |
| Do not check spelling or grammar | | |
| Page 131: [37] Formatted | Administrator | 07-04-2008 14:04:00 |
| Do not check spelling or grammar | | |
| Page 131: [38] Formatted | X | 14-10-2007 15:03:00 |
| Do not check spelling or grammar | | |
| Page 131: [39] Formatted | Administrator | 07-04-2008 14:04:00 |
| Do not check spelling or grammar | | |
| Page 131: [40] Formatted | X | 14-10-2007 15:03:00 |
| Do not check spelling or grammar | | |