Universidade de Aveiro Departamento de Didáctica e Tecnologia Educativa
2006

Dárida Maria Fernandes

Aprendizagens algébricas em contexto interdisciplinar no ensino básico

Universidade de Aveiro Departamento de Didáctica e Tecnologia Educativa
2006

Dárida Maria Fernandes

Aprendizagens algébricas em contexto interdisciplinar no ensino básico

Dissertação apresentada à Universidade de Aveiro para cumprimento dos requisitos necessários à obtenção do grau de Doutor em Didáctica, realizada sob a orientação científica do Prof. Doutor Jaime Carvalho e Silva, Professor Associado do Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra e da Profa. Doutora Isabel Maria Cabrita, Professora Auxiliar do Departamento de Didáctica e Tecnologia Educativa da Universidade de Aveiro.

Apoio financeiro no âmbito da formação avançada da Acção 5.3. do PRODEP.

À minha família…

Um agradecimento muito especial às minhas filhas,
Isabel Maria e Ana Luísa…
que com um brilhozinho nos olhos me acariciavam sempre a alma, dizendo baixinho: “*estamos contigo…*”

o júri

Presidente	Profa. Doutora Maria Paula Macedo Rocha Malonek Professora catedrática da Universidade de Aveiro
Vogais	Prof. Doutor Jaime Maria Monteiro de Carvalho e Silva Professor associado da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade de Coimbra
	Prof. Doutor Domingos Manuel Barros Fernandes Professor associado da Faculdade de Psicologia e de Ciências da Educação da Universidade de Lisboa
	Profa. Doutora Maria Elfrida de Matos Ralha Professora auxiliar da Escola de Ciências da Universidade do Minho
	Profa. Doutora Maria Paula de Sousa Oliveira Professora auxiliar da Universidade de Aveiro
	Profa. Doutora Isabel Maria Cabrita dos Reis Pires Pereira Professora auxiliar da Universidade de Aveiro
	Profa. Doutora Maria Isabel Piteira do Vale Professora adjunta da Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Viana do Castelo

agradecimentos

Aos meus orientadores, Prof. Doutor Jaime Carvalho e Silva e Profa. Doutora Isabel Maria Cabrita pela disponibilidade sempre demonstrada, pelas questões e reflexões provocadas que me apoiavam e estimulavam a prosseguir. Aos dois o meu reconhecido agradecimento, pois as orientações de ambos acarinhavam e fortaleciam sempre o meu querer.

- Às professoras que directamente colaboraram na investigação, no campo experimental: Dra. Belmira, Dra. Anabela, professoras do 1º ciclo do ensino básico, Dra. Lélia, professora do 2º ciclo que me acolheram afavelmente nas suas turmas e me acompanharam, mostrando-se disponíveis para realizar apreciações conjuntas sobre o trabalho desenvolvido. Às outras duas colegas do 2º ciclo que temporariamente apoiaram e seguiram a investigação vão também os meus agradecimentos, bem como aos colegas do projecto “Envolvências Geométricas” e aos dois professores que receberam as duas turmas no 7º ano, tendo tido a amabilidade de me conceder entrevistas e colaborar também nesta investigação.
- Aos estudantes das duas turmas que se entregaram ao trabalho de forma empenhada e entusiasta, sempre verdadeiros nas suas apreciações.
- Aos colegas de outras áreas que apoiaram a investigação no âmbito interdisciplinar.
- Aos órgãos directivos das duas Escolas do 1º e do 2º ciclo que me “abriram as portas” para investigar.
- Ao Prof. Doutor João Pedro Ponte, ao Prof. Doutor Castro Caldas, aos especialistas de Educação Física e Engº. Jorge Maia, pela colaboração dada.
- Ao colega José Manuel dos Santos pelas reflexões e sugestões delineadas.
- À colega Graça Zenhas, pelo apoio prestado na pesquisa de propostas concretas de trabalho no âmbito interdisciplinar e pela análise crítica realizada às tarefas matemáticas desenvolvidas e aos problemas incluídos no teste. Agradecimentos extensivos aos colegas: José Manuel, Madalena, Maria José, Raquel, Sara e Fernando Pedrosa.

- Ao presidente do Instituto Politécnico do Porto (IPP), Prof. Doutor Luís Soares, pelo estímulo constante a projectos de investigação no âmbito da Educação Matemática.
- À presidente do Conselho Directivo da Escola Superior de Educação do IPP, Profa. Doutora Rosário Gambôa pelo incentivo no desenvolvimento de investigações nesta área com vista à melhoria da qualidade do ensino desta disciplina nas Escolas de formação de professores e, consequentemente, nas Escolas básicas.

Um agradecimento muito especial ao *Calculus/IPP*, Centro de Investigação e Cultura Matemática do IPP, na pessoa do Director, Dr. Fernando Pedrosa, colega e amigo, que nas horas de desânimo sempre me apoiou a prosseguir, com palavras de incentivo e esperança. À Dra. Joana Rocha que pessoalmente ou em equipa procurou descobrir as melhores soluções práticas. Extensivos agradecimentos ao Sr. Joaquim e Sr. Rui Caetano pela colaboração dada na composição gráfica da tese.

Aos meus pais pelo incentivo e estímulo sempre presentes nos seus rostos...

palavras-chave

Álgebra, matemática em contexto, interdisciplinaridade, matematização, ensino básico, folha de cálculo

resumo

O presente trabalho propõe-se divulgar a análise dos resultados obtidos num estudo experimental sobre a aprendizagem inicial da álgebra em contexto interdisciplinar, realizado em duas turmas do ensino básico.
O desenvolvimento de estratégias de resolução de problemas e o uso da tecnologia desempenhou um papel central neste estudo, em particular, a folha de cálculo, revelando-se uma ferramenta natural para a aprendizagem da álgebra num trabalho de âmbito interdisciplinar.
No acompanhamento do estudo das turmas, do 2º ao 6º ano de escolaridade, foi possível, com base nos princípios da Educação Matemática e no quadro actual da flexibilidade curricular, desenvolver propostas de trabalho significativas, em contexto interdisciplinar, que visam fomentar a aprendizagem gradual e compreendida da álgebra.

keywords

Álgebra, mathematics in context, interdisciplinarity, mathematization, basic school, spreadsheet

abstract

The current work aims to publicise the analysis of the results obtained in an experimental case study regarding early learning and teaching process of algebra in an interdisciplinarity context, in two classes of basic school.
The development of problem solving skills and the use of tecnology have played the central role in this study, especially, in what concerns the use of spreadsheet, as a natural tool for this kind of work.
Along the study, that covered classes from 2nd to 6th grades it was possible to achieve significant work proposals, considering our flexible curriculum trends, the basic principles of maths education and an interdisciplinarity context that leads to understanding and "make sense" the learning and teaching process of algebra.

ÍNDICE

CAPÍTULO I – O PROBLEMA 11

1. Objecto de Estudo 11
2. Problema 13
3. Questões da Investigação 18
4. Objectivos 24
5. Importância do Estudo 27
6. Abordagem Metodológica 36
7. Organização da Tese 37

CAPÍTULO II – REVISÃO DA LITERATURA 39

1. Introdução 39
2. Pressupostos Educativos 39
   2.1. Enquadramentos 39
   2.2. A Educação como Campo Conceptual e de Interacção Social 41
      2.2.1. Construção individual do conhecimento 41
      2.2.2. Construção social do conhecimento 43
      2.2.3. Construção situada e participada do conhecimento 46
   2.3. Construção do Conhecimento Matemático 49
      2.3.1. Campos conceptuais, relações epistemológicas e semióticas 49
      2.3.2. Matematização, contextualização e níveis de formalização 52
3. Educação Matemática 55
   3.1. Princípios 55
   3.2. Comunicação e Conexões Matemáticas 57
      3.2.1. Componentes instrucionais da comunicação 57
      3.2.2. Componentes instrucionais das conexões matemáticas 61
4. Aprendizagem e Cultura Matemática 63
   4.1. Aprendizagem - aspectos conceptuais genéricos 63
   4.2. Aprendizagens significativas e compreendidas 66
   4.3. Aprendizagens contextualizadas 67
   4.4. Aprendizagem por tentativa e erro 70
   4.5. Aprendizagem e cultura matemática 70
   4.6. Competência matemática 74

4.7. Processos de avaliação ... 75
5. Matemática no Currículo ... 76
5.1. Aspectos conceptuais ... 76
5.2. Integração - Ciências e Matemática ... 79
5.3. Coerência e Interdisciplinaridade ... 82
6. Papel do Professor ... 85
6.1. Enquadramentos ... 85
6.2. Atitude do professor na construção do conhecimento ... 86
6.3. Criação de ambiências democráticas e significativas ... 90
7. Tarefas Matemáticas ou Experiências de Aprendizagem ... 91
7.1. Enquadramentos curriculares ... 91
7.2. Resolução de problemas ... 92
7.3. Actividades de Investigação ... 94
7.4. Projectos ... 96
8. Tecnologias de Informação e Comunicação nas Aprendizagens Matemáticas (TIC). 98
8.1. As TIC no contexto educativo ... 98
8.2. As TIC na aprendizagem matemática ... 100
8.3. As TIC no ensino da álgebra ... 103
8.4. A folha de cálculo no desenvolvimento de competências ... 105
9. Aprendizagem da Álgebra ... 107
9.1. Enquadramentos ... 107
9.2. Fundamentos Conceptuais ... 108
9.2.1. Pré-álgebra ... 108
9.2.2. Conceito de variável ... 110
9.2.3. Pensamento flexível e pensamento algébrico ... 112
9.2.4. Modelação matemática ... 114
9.2.5. Representação ... 117
9.3. Fundamentos Didácticos ... 121
9.3.1. Origem e contextos ... 121
9.3.2. Aproximações à álgebra ... 123
9.3.3. Problemas com ligações directas às aprendizagens algébricas ... 127
9.3.4. Programas instrucionais da aprendizagem da álgebra – cadeias de aprendizagem ... 140

CAPÍTULO III – METODOLOGIA 149

1. Introdução 149
2. Natureza do Estudo 150
   2.1. Estratégia qualitativa de recolha de dados 150
   2.2. Estudo qualitativo e *quantificável* 156
3. Planificação da Investigação – Etapas do Estudo 158
   3.1. Etapa 1 - Identificação dos elementos de estrutura 161
   3.2. Etapa 2 - Estabelecimento de interacções 162
   3.3. Etapa 3 - Definição de estratégias de intervenção em campo 162
   3.4. Etapa 4 - Formação dos intervenientes 166
   3.5. Etapa 5 - Avaliação 168
4. Contextualização 169
   4.1. Participantes - caracterização 169
   4.2. Contexto educativo 173
5. Estratégias e Instrumentos de Recolha de Dados 175
   5.1. Enquadramentos 175
   5.2. Fiabilidade e validação dos instrumentos 177
   5.3. Estratégia multimodal – *a triangulação* 179
   5.4. Observação participante 181
   5.5. Estratégias de Inquirição 184
      5.5.1. Questionário aos estudantes 184
      5.5.2. Entrevistas 185
   5.6. Tarefas matemáticas 186
   5.7. Teste de Avaliação 198
      5.7.1. Enquadramentos conceptuais 199
      5.7.2. Estrutura do Teste 202
   5.8. Materiais Tecnológicos 212
      5.8.1. Ferramentas tecnológicas genéricas 212
      5.8.2. Folha de Cálculo 213
6. Tratamento de Dados – Estratégias 215
   6.1. Enquadramentos 215
   6.2. Análise conceptual 215
   6.3. Análise de conteúdo 218

CAPÍTULO IV - ANÁLISE DE RESULTADOS ... 221
1. Introdução ... 221
2. Descrição do Trabalho Desenvolvido – Análise de Processos e Resultados ... 221
2.1. Tarefas realizadas no 1º ciclo do ensino básico - 2º e 3º anos de escolaridade.. 221
2.2. Reflexões e considerações genéricas – 2º e 3º anos de escolaridade ... 229
2.3. Tarefas desenvolvidas no 1º ciclo do ensino básico - 4º ano de escolaridade ... 232
2.4. Processos e resultados - 1º ciclo do ensino básico, 4º ano de escolaridade ... 233
2.5. Tarefas realizadas no 2º ciclo - 5º e 6º anos de escolaridade ... 250
2.6. Processos e resultados – 2º ciclo do ensino básico ... 254
3. Teste de Avaliação – Realizado no Ano Terminal do 2º Ciclo do Ensino Básico ... 268
3.1. Condições de realização, critérios e resultados genéricos ... 268
4. Teses da Investigação ... 271
4.1. Influência da folha de cálculo na aprendizagem da pré-álgebra ... 272
Tese 1 ... 273
Tese 2 ... 282
Questões emergentes relacionadas com as duas teses de investigação apresentadas (tese 1 e tese 2) ... 298
Tese 3 ... 300
Tese 4 ... 308
Tese 5 ... 314
4.2. Importância do contexto interdisciplinar na aprendizagem da pré-álgebra ... 321
Tese 6 ... 321
Tese 7 ... 350
Tese 8 ... 353
Tese 9 ... 357
Tese 10 ... 367
4.3. Influência do computador no trabalho de âmbito interdisciplinar ... 368
Tese 11 ... 368
CAPÍTULO V – CONCLUSÕES E IMPLICAÇÕES DO ESTUDO ... 379
1. Introdução ... 379
2. Dimensão Estrutural ... 380
2.1. Concepções curriculares e matematização ... 380

2.2. Programa de Matemática do ensino básico - linguagem e conteúdos 383
2.3. Trabalho de Âmbito Interdisciplinar – Interacção Educativa 389
2.3.1. Dinâmica estabelecida 389
2.3.2. Aprendizagens mais democráticas.. 391
2.3.3. Competências desenvolvidas.. 395
2.3.4. Avaliação.. 397
2.4. Tarefas matemáticas - essencialidades na formulação 398
2.5. Aprendizagens algébricas – princípios, estrutura e cadeias de aprendizagem.... 401
2.6. Papel da Escola e do Professor 403
2.7. Formação de professores - implicações curriculares.. 404
2.8. Matemática em contexto interdisciplinar.. 406
2.9. Reflexões complementares – aspectos neurológicos.. 409
3. Dimensão Operacional 414
3.1. Espaços de Aprendizagem 414
3.2. Tarefas Matemáticas ou Experiências de Aprendizagem.................................. 415
3.2.1. Resolução de problemas.. 415
3.2.2. Actividades de investigação 423
3.2.3. Projectos... 425
3.3. Componente Tecnológica – Folha de Cálculo 426
3.3.1. Interferências no campo educativo da matemática.................................... 426
3.3.2. Potencialidades e dificuldades educativas no ensino da álgebra em contexto interdisciplinar 428
4. Conclusões Genéricas e Reflexões Finais 432
5. Limitações do Estudo e Recomendações 437
5.1. Limitações do estudo 437
5.2. Recomendações.. 441

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS 443

ÍNDICE de Figuras

Figura 1: Ciências integradas – UNESCO (Vergani, 1993, p. 92) 29
Figura 2: Os dois eixos das teorias da aprendizagem social, propostos por Wenger (1998) 47
Figura 3: Componentes de uma teoria social de aprendizagem (Wenger, 1998) 48
Figura 4: Quatro níveis da actividade matemática propostos por Gravemeijer (1994, 2004) 54
Figura 5: Factores intervenientes no processo educativo proposto por D´Ambrosio (2005) 56
Figura 6: Ciclo de aprendizagem da "matematização" (De Lange, 1992) 69
Figura 7: Níveis de compreensão do conceito de variável, propostos por Drijvers (2003) 111
Figura 8: Cartões com números (Ameron, 2002)... 133
Figura 9: Problema de esquematização. Qual é o artigo mais caro: o guarda-chuva ou o boné? 137
Figura 10: Estratégia 5 – estratégia gráfica 138
Figura 11: O problema de esquematização - "*Galinhas!...*" proposto por Reeves (2000) 139
Figura 12: Conteúdos - Principles and Standards for School Mathematics, NCTM (2000) 142
Figura 13: Esquema sequencial do campo experimental da investigação. Duas Turmas - *´o caso´* 160
Figura 14: Pormenores arquitectónicos observados e fotografados............................... 223
Figura 15: Concepção de azulejos – *estrutura cromática individual*............................. 225
Figura 16: Uso de material manipulável para criar padrões e representar no plano......... 228
Figura 17: Representação de quatro planificações do cubo descobertas pelos estudantes do 3º ano.. 228
Figura 18: Uso de estratégias aditivas – "*A pintura das peças de cerâmica*" 274
Figura 19: Uso da estratégia mista: aditiva e da multiplicativa – "*A cantina escolar*"..... 275
Figura 20: Uso da estratégia multiplicativa no cálculo do valor da variável *´**b**´* – "*A cantina escolar*" 276
Figura 21: Uso de um modelo matemático simples explicado por palavras, com notação sequencial "incorrecta" – "*Respirar e descansar*" 285
Figura 22: Uso de um modelo matemático simples – "*Respirar e descansar*" 285
Figura 23: Uso de um modelo matemático simples, com notação sequencial "incorrecta" – "*Respirar e descansar*" 286
Figura 24: Uso de esquema próprio com estratégia de *tentativa e erro com ajustamento não sequencial – "As idades das filhas"* 304

Figura 25: Uso da estratégia de *tentativa e erro, em tabela, com ajustamento não sequencial* em *"As idades das filhas"* 305

Figura 26: Uso da estratégia iconográfica, com ajustamento ao valor médio – "*Animais na quinta*" 327

Figura 27: Uso da estratégia *iconográfica por tentativa e erro ajustado ao valor médio* – "*Animais na quinta*" 328

Figura 28: Uso da estratégia numérica com base nas tabuadas do 2 e 4 – "*Animais na quinta*" 330

Figura 29: Uso da estratégia iconográfica por tentativa e erro, com reflexões adicionais - "*Animais na quinta*" 331

Figura 30: Uso da estratégia iconográfica, com validação da expressão numérica - "*Animais na quinta*" 332

Figura 31: Uso da estratégia pictórica por tentativa e erro ajustado ao valor médio - "*Animais na quinta*" 333

Figura 32: Uso da estratégia iconográfica completada com dados numéricos – "*Animais na quinta*" 334

Figura 33: Uso da estratégia iconográfica por tentativa e erro – "*Animais na quinta*" 334

Figura 34: Uso da estratégia iconográfica ajustada ao valor médio com validação numérica da solução – "*Animais na quinta*" 335

Figura 35: Uso da estratégia iconográfica ajustada ao valor médio com validação numérica "*Animais na quinta*" 336

Figura 36: Uso da estratégia iconográfica com validação numérica – "*Animais na quinta*" 336

Figura 37: Uso da estratégia pictórica com solução correcta – "*Animais na quinta*" 337

Figura 38: Uso da estratégia pictórica com solução incorrecta – "*Animais na quinta*" 338

Figura 39: Uso de uma tabela linear, com identificação do período, 11min - "*Respirar e descansar*"....................341

Figura 40: Uso de uma tabela com descoberta da regularidade e do período de 11 minutos (11 min) "*Respirar e descansar*" 341

Figura 41: Uso de estratégia numérica sequencial, com identificação da regularidade numérica *"Respirar e descansar"*....................342

Figura 42: Uso de estratégia pictórica – "*Respirar e descansar*"....................342

Figura 43: Uso de um esquema associado ao reconhecimento de regularidades, com notação sequencial "incorrecta" – "*Respirar e descansar*" 342

Figura 44: Uso de um esquema – *"Respirar e descansar"* 343

Figura 45: Uso de estratégia mista: pictórica e esquemática – "*Respirar e descansar*"....343

Figura 46: Uso de regularidade e de um modelo explicitado - "*Respirar e descansar*" ...343

Figura 47: Uso de uma estratégia pictórica – "*Respirar e descansar*" 343

Figura 48: Uso de regularidades e dos operadores “+3” e “+8” – “*Respirar e descansar*” 343
Figura 49: Uso da estratégia iconográfica com validação numérica sequencial -“*Animais na quinta*” 356
Figura 50: Conceito de “matematização” aprofundado na investigação 382
Figura 51: Fases da resolução de um problema 422
Figura 52: Fases da resolução de um problema 422

ÍNDICE de Quadros

Quadro 1: Características conceptuais do estudo qualitativo 153
Quadro 2: Características de um bom estudo qualitativo 154

ÍNDICE de Tabelas

Tabela 1: Estratégias de resolução ligadas aos problemas do tipo “*numbers cards*” 133
Tabela 2: Programas instrucionais da aprendizagem da álgebra 141
Tabela 3: Metodologias sequenciais de intervenção 164
Tabela 4: Distribuição dos estudantes por idade e género 170
Tabela 5: Número de irmãos dos participantes do estudo 171
Tabela 6: Com quem vive o estudante e observações 171
Tabela 7: Critérios da qualidade da investigação (Ponte, 2002) 183
Tabela 8: Tarefas desenvolvidas no 4º ano de escolaridade 188
Tabela 9: Competências a desenvolver, no 4º ano, na realização destas tarefas 190
Tabela 10: Tarefas desenvolvidas no 5º ano de escolaridade 191
Tabela 11: Competências a desenvolver no 5º ano, na realização destas tarefas 192
Tabela 12: Tarefas desenvolvidas no 6º ano de escolaridade 193
Tabela 13: Teste de avaliação – síntese da tipologia dos problemas propostos 204
Tabela 14: Três tabelas das tarefas realizadas no 4º ano de escolaridade 233
Tabela 15: Duas tabelas sobre as tarefas realizadas no 5º ano de escolaridade 251
Tabela 16: Quatro tabelas sobre as tarefas realizadas no 6º ano de escolaridade 253
Tabela 17: Sub-questão 20.2. Resultados do Pré-Teste 278
Tabela 18: Sub-qestão 20.2.Resultados do Pós-Teste 278
Tabela 19: Questão 1.2. Resultados do Pré-Teste 289
Tabela 20: Questão 1.2. Resultados do Pós-Teste 289

Tabela 21: Questão Q1.3. Resultados do Pré-Teste 290
Tabela 22: Questão Q1.3. Resultados do Pós-Teste 290
Tabela 23: Questão Q2. Resultados do Pré-Teste 294
Tabela 24: Questão Q2. Resultados do Pós-Teste 295
Tabela 25: Questão Q7.2. Resultados do Pré-Teste 297
Tabela 26: Questão Q7.2. Resultados do Pós-Teste 297
Tabela 27: Resolução do problema: "A*s idades das filhas*" com fórmulas e apoio do cálculo mental 302
Tabela 28: Resolução do problema: "*As idades das filhas*" com fórmulas e sem apoio do cálculo mental 302
Tabela 29: Resolução do problema: "A*s idades das filhas*" com fórmulas, sem apoio explícito do cálculo mental, com experiências aleatórias, não respeitando os valores iniciais..303
Tabela 30: Questão Q4. Resultados do Pré-Teste 307
Tabela 31: Questão Q4. Resultados do Pós-Teste 308
Tabela 32: Sub-questão Q7.3. Resultados do Pré-Teste 313
Tabela 33: Sub-questão Q7.3. Resultados do Pós-Teste..313
Tabela 34: Questão Q15.2. Resultados do Pré-Teste...318
Tabela 35: Questão Q15.2. Resultados do Pós-Teste 319
Tabela 36: Uso da estratégia de tentativa e erro com controlo mental – "*Animais na quinta*" 325
Tabela 37: Uso da estratégia de tentativa e erro sem controlo das duas variáveis em estudo, com utilização de fórmulas - "*Animais na quinta*" 326
Tabela 38: Uso da estratégia de tentativa e erro com controlo das duas variáveis, com utilização de fórmulas – "*Animais na quinta*" 326
Tabela 39: Uso da estratégia das subtracções sucessivas até chegar ao valor zero, sem utilização de fórmulas – "*Animais na quinta*" 327

CAPÍTULO I – O PROBLEMA

1. Objecto de Estudo

O conceito de variável é uma das noções fundamentais da aprendizagem da Matemática no ensino básico, secundário e superior (Schoenfeld, 1987; Schoenfeld e Arcavi, 1988; Philipp, 1992). Os temas que surgem geralmente associados à álgebra elementar vão desde a exploração de símbolos literais, expressões algébricas, resolução de equações até ao estudo de funções, com utilização de expressões designatórias, representações tabelares e gráficas, passando pela manipulação e factorização de polinómios e expressões racionais (Kieran, 1992; Stewart, 1994; Stewart e Tall, 1995). A Álgebra escolar é vista como um dos temas da Matemática que influencia consideravelmente o conhecimento formal, quer pela potencialidade e simplicidade dos registos simbólicos, quer ainda pelas metodologias associadas, reconhecendo-se, todavia, que grande parte dos estudantes desenvolve uma má relação com este tópico e, consequentemente, com a própria Matemática (Kieran, 1981, 1988, 1992; Ponte, 1988, 2002; APM, 1988; Serrazina, 1988; Abrantes, 1988, 1994; Moreira, 1989; NCTM, 1989, 1991, 2000, 2001).

Diversos investigadores (Kieran, 1981, 1988; Schoenfeld, 1987b; Thompson, 1988; Schoenfeld e Arcavi, 1988; Rojano, 1996; Nemirovsky, 1996) reconhecem também que os adultos têm uma imagem negativa da álgebra escolar, o que influencia naturalmente os estudantes que, por várias razões, continuam a não encontrar sentido para esta temática. Segundo Kieran e Chalouh (1993); Kieran, Boileau e Garançon (1996); Wijers (1995); Ameron (2002) e Kindt (2004) existe uma explicação para isto. Ao longo dos tempos, a álgebra tem sido tratada de forma muito rígida, como um domínio abstracto da Matemática, contendo poucos "interfaces" com o mundo real e, como consequência, defendem que o foco da álgebra, no ensino básico, deve orientar-se para o uso mais prático do que somente para o estudo da álgebra como conteúdo abstracto. Acrescentam ainda que este tópico tem sido, muitas vezes, apresentado como *algo* pré-destinado com regras restritas, não deixando lugar para nenhum "*input"* do exterior e que as instruções iniciais da álgebra começam com regras sintácticas, recorrendo-se basicamente a uma linguagem simbólica, mas sem conexões (Kieran, 1981, 1988, 1992; Thompson, 1988; Kieran e outros 1993, 1996; Wheeler, 1996). Tal como estes autores, também Gray e Tall (1993); David e Lopes (2002) acreditam que a excessiva atenção dada ao treino das regras e dos algoritmos não estimula os estudantes a desenvolver pensamento flexível e, consequentemente, a aprender álgebra. Um dos aspectos que também não tem facilitado a aprendizagem deste conteúdo, segundo De Lange (1992) e Kindt (2004), diz respeito à rápida formalização da sintaxe algébrica.

Contudo, o NCTM (2000) e outros investigadores (Schoenfeld e Arcavi, 1988; Thompson, 1988; Kieran, 1988, 1992; Philipp, 1992; Stewart, 1994; Stewart, Tall, 1995; Wheeler, 1996) realçam a necessidade de todos os estudantes aprenderem Álgebra, pois consideram que esta parte da Matemática tem raízes históricas que inclui um conjunto de métodos para resolver equações que precisam de ser conhecidos por todos os estudantes, bem como o tratamento de relações funcionais, expressas por notações simbólicas, que permitem análises mais eficazes de ideias matemáticas complexas. Wheeler (1996) comunga desta ideia e reconhece também que o conhecimento histórico da álgebra alerta para dificuldades, mas também abre possibilidades de intervenção, pois acredita que este domínio foi construído a partir da aritmética, mas com fortes ligações às fundações geométricas.

Por outro lado, Lima (2003) salienta que concretamente a álgebra é um poderoso e eficaz instrumento na resolução de problemas do quotidiano, oferecendo o "seu lado operacional: a manipulação dos seus símbolos, tanto numéricos, como abstractos" (p. 43). Deste modo, o autor defende que o início da álgebra para os estudantes de hoje deve ser em idades elementares, nos conhecimentos geométricos, nas intuições, na familiaridade da exploração dos números inteiros e na resolução das primeiras situações problemáticas. Reiterando esta ideia, Hansen e Zweng (1984); Fey (1984); Abrantes, Serrazina e Oliveira (1999); Mewborn, 1999; Zazkis e Liljedahl (2002); Ameron (2002, 2004) e Drijvers (2004) preconizam a necessidade de ser promovida uma variedade de situações para proporcionar aos estudantes das classes elementares diversas oportunidades, disponibilizando um ambiente rico de experiências e de materiais, inclusive o computador, num processo de aprendizagem algébrica que se deseja gradual, reflectida e com significado, ao longo de toda a escolaridade.

Nas Normas para o Currículo e a Avaliação em Matemática Escolar, o NCTM (2001) amplia esta posição ao relembrar que "o entusiasmo por aprender e aplicar a matemática aparece quando os problemas se desenvolvem no contexto de uma situação familiar aos alunos" (p. vi). Assim, o NCTM defende que se deve permitir que os estudantes sejam confrontados com problemas no contexto de experiências do dia a dia para serem dadas oportunidades de pôr em prática a Matemática, observando a sua utilidade e aplicabilidade. Além disso, os estudantes devem "aperceber-se de como a matemática se relaciona com outras áreas como a ciência, a arte, a literatura, a música, os estudos sociais, o mundo dos negócios e a tecnologia" (NCTM, 2001, p. vii). De acordo com esta intenção a associação defende ainda o uso apropriado de materiais, considerando que o desenvolvimento da tecnologia conquistou um lugar de destaque na sociedade e, como consequência, recomenda que "a tecnologia esteja disponível na sala de aula de Matemática, no desenvolvimento de trabalhos individuais e de grupo, para explorar e descobrir o significado dos conceitos matemáticos, para finalidades de demonstração, de simulação de experiências, de tratamento de dados e de representação gráfica e "para manipular dados numa folha de cálculo" (p. ix).

Numa perspectiva global e mais actual do objecto matemático surge o termo "matematização", defendido pela filosofia em Educação Matemática designada por "Realist Mathematics Education" (RME), desenvolvida pelo Instituto Freudenthal[1] (FI), através do qual se reconhece que a aprendizagem da matemática deve ser feita em contexto para que as construções e produções mentais dos estudantes sejam indutoras da passagem dos seus próprios esquemas informais até aos processos formais. A "matematização" assume, assim, duas vertentes fulcrais: i) a formação de conceitos a partir de referências da

[1] Universidade de Utrecht, Holanda.

realidade fundamentada na busca de significados para o estudante, com explorações de situações e problemas "realistas" (matematização horizontal) e ii) a formalização dos aspectos matemáticos envolvidos nas situações (matematização vertical) integrando a reflexão dentro da estrutura da própria ciência matemática, incluindo o uso de esquemas, tabelas, símbolos, diagramas, gráficos (De Lange, 1992; Gravemeijer, 1990, 2000 e 2004, Kindt, 2004). Também Ponte, Matos e Abrantes (1999) partilham este conceito salientando que a "matematização" inclui competências e processos através dos quais os estudantes produzem, geram, constroem, imaginam e generalizam ideias matemáticas.

Numa posição mais ampla da Educação Matemática e no campo curricular, o Ministério da Educação (ME) recomenda que sejam desenvolvidas em diferentes domínios as competências essenciais e transversais, dado que envolvem simultaneamente conteúdos específicos e modos *do pensar* e *do fazer* que lhe são características. As orientações programáticas sobre as competências a desenvolver salientam a necessidade de, no trabalho escolar em cada disciplina, se estabeleçam conexões a três níveis: a) no interior da própria disciplina, entre os vários temas; b) na relação entre saberes e competências de diferentes disciplinas; c) na ligação da Escola com o meio envolvente e no mundo em geral (ME, 1999). De forma concomitante os programas de Matemática do ensino básico apelam à prossecução de diferentes objectivos, entre os quais se destacam: a) desenvolver o raciocínio; b) desenvolver a capacidade de comunicação; c) desenvolver a capacidade de utilizar a matemática na interpretação e intervenção no real; d) desenvolver hábitos de trabalho e de persistência, o espírito de tolerância e cooperação; e) desenvolver a capacidade de resolução de problemas; f) desenvolver a curiosidade e gosto de aprender. Deste modo, a exploração didáctica do domínio da álgebra deve ser enquadrada no campo curricular descrito e nos objectivos programáticos delineados, salvaguardando-se, assim, de forma integrada, os princípios fundamentadores da Educação Matemática.

Apesar de, no contexto escolar actual existirem abordagens variadas, constata-se que muitos estudantes continuam a revelar dificuldades na compreensão de conceitos gerais relacionados com a álgebra, em particular, na resolução de problemas (Booth, 1988; Lee, 1996; Bednarz, Kieran e Lee, 1996). Uma das especialistas desta temática (Kieran, 1992) reconhece que ainda não é claro como deve ser implementada a manipulação simbólica e como devem ser apoiados os estudantes, dos diferentes níveis de ensino, no processo de aprendizagem da álgebra. Assim, dada a importância desta problemática no ensino da Matemática a autora recomenda aos investigadores a realização de estudos neste domínio, para ser possível descortinar possibilidades de intervenção e tentar compreender melhor os factores determinantes na aprendizagem deste tópico que tem afastado, de modo definitivo, o estudante da Matemática e, na maior parte das vezes, de outras ciências.

2. Problema

A compreensão do conceito de variável determina uma transição basilar da aritmética para a álgebra, mas requer do estudante aprendizagens matemáticas superiores (Schoenfeld e Arcavi, 1988). Segundo estes autores, os estudantes têm dificuldades profundas no entendimento e na aplicação do conceito de variável, pelo menos parcialmente, pelo facto de as variáveis poderem ser usadas em diferentes contextos ("*significados*") e domínios científicos variados. Estes e outros investigadores (Thompson, 1988; Kieran, 1988, 1992; Philipp, 1992; Dubinsky e Leron, 1994; Wheeler, 1996) salientam que a maior parte dos currículos da Matemática trata as variáveis como termos primitivos que, depois de uma certa prática, tornam-se em processos automáticos, nos quais os estudantes vão manipulando a's, b's, x's e y's de uma forma simples e sem significado matemático relevante. Freudenthal (1983) reconhece que as fontes do "*insight*" podem ser reguladas por automatismos, mas defende que qualquer actividade que só se desenvolva de uma forma automática e perfeita raramente provoca a compreensão, o levantamento de questões e, consequentemente, a aquisição de novas e relevantes aprendizagens. Kieran (1992) reitera esta ideia e defende que um vasto leque do conhecimento apresenta-se ainda para os estudantes como um sistema de memorização de regras e procedimentos e é esta actividade que representa ainda a essência da álgebra, tal como já tinha salientado Brown, em 1981, reportando-se aos resultados do National Assessment of Educational Progress (NAEP), realizado nos Estados Unidos. Este investigador e outros responsáveis pelo estudo concluíram que a grande maioria dos estudantes sente que a Matemática é baseada em regras e que aprender esta disciplina é, fundamentalmente, memorizar.

De facto, no relatório final da 4ª avaliação em Matemática, a equipa coordenada por Brown (1981) salientou que os estudantes do ensino secundário parecem revelar conhecimentos algébricos, mas têm dificuldades em os aplicar na resolução de situações problemáticas concretas:

> Secondary school students generally seem to have knowledge of basic algebraic and geometric concepts and skills. However, the results of this assessment indicate, as the results of past assessments have, that students often are not able to apply this knowledge in problem-solving situations, nor do they appear to understand many of the structures underlying these mathematical concepts and skills (p. 346-347).

Nos diversos estudos realizados sobre o ensino da Matemática, também Abrantes (1988) revela que a maior parte dos estudantes continua a *aprender* uma técnica de cálculo aritmético ou algébrico por repetição mecânica de exercícios iguais, havendo um propósito implícito ou explícito de atingir um determinado objectivo comportamental, capaz de reproduzir uma resposta *aprendida* no teste de avaliação ou no exame final. Das várias investigações realizadas e como coordenador do Grupo de Trabalho (GT) "Matemática 2001" pode constatar que, no ensino básico[2] e também no ensino secundário, *os exercícios* são a situação de trabalho na aula mais frequente, concluindo que este tipo de actividades, só por si, não serve os objectivos da Educação Matemática. Palangana, Galuch e Sforni (2002) fortalecem esta ideia referindo que uma observação atenta das práticas pedagógicas revela a existência, na Escola, de uma forma de ensino padronizada, uma estratégia consagrada, "baseada numa estrutura repetitiva na introdução e desenvolvimento de qualquer conceito" (p. 115).

Para além das deficiências inerentes a um ensino baseado apenas na repetição de exercícios que intervêm na aprendizagem da Matemática e, em particular, no domínio da álgebra, os estudos realizados por Robayana e Medina (1997) denunciam outras dificuldades associadas às aprendizagens relacionadas com o conceito de variável e às matérias associadas à álgebra, designadamente, as de natureza intrínseca, destacando-se

[2] No 2º e 3º Ciclos do Ensino Básico (GT, 1998, p.31).

factores de índole histórica, científica e de natureza simbólica, bem como a representação dos objectos da álgebra, dos processos ligados às metodologias de abordagem e ao desenvolvimento cognitivo dos estudantes.

Os resultados dos estudos de Brown (1981) e dos seus colaboradores realçam também dificuldades na passagem das aprendizagens aritméticas para as algébricas e, em particular, na exploração de saberes de outras áreas do conhecimento que comportam este tipo de conhecimentos. Contudo, actualmente, as orientações curriculares já apelam ao tratamento interdisciplinar da Educação Matemática considerando relevante a exploração de conexões "uma componente essencial na formação matemática" (ME, 1999), pois permite a compreensão de relações entre ideias matemáticas, tanto entre diferentes temas da ciência Matemática como entre esta e outras áreas curriculares. Apesar de existirem orientações curriculares e programáticas precisas, a implementação de trabalhos de âmbito interdisciplinar, no quadro escolar, está praticamente ausente da exploração dos diferentes domínios da Matemática.

Por outro lado, nesta sociedade democrática, "onde o ensino parece estar, cada vez mais, ao alcance de todos torna-se imprescindível tomar como princípio fundamental da Educação Matemática *a equidade*" (NCTM, 2000, p. 12). Este princípio tem como missão alterar uma crença enraizada na comunidade escolar e na sociedade em geral de que só um grupo de estudantes é capaz de aprender Matemática e em particular a álgebra (Usiskin, 1994, 1999). Actualmente, acredita-se, que esta ciência está ao alcance de todos, bastando para isso alterar estratégias, elevar as expectativas dos estudantes, desenvolver fortes crenças, elevar a auto-estima e a motivação (PISA, 2003) e, simultaneamente, no âmbito interdisciplinar, procurar dar "apoio significativo a todos os estudantes" (NCTM, 2000, p. 13). Especificamente, na interacção educativa, o estudante deve ter oportunidade de construir conceitos matemáticos questionando, conjecturando e argumentando, numa estratégia baseada na resolução de exercícios, naturalmente, mas também na resolução de problemas do quotidiano (Silver, 1987; Schoen, 1988; Bernard e Cohen, 1988; Lester, 1993; Rojano, 1996; Nemirovsky, 1996), bem como na concretização de actividades de investigação e realização de relatórios, orientados para a matemática em contexto (Gravemeijer, 1990, 2000, 2004; Reeuwijk, 1995, 2004; Meira, 2000; Ameron, 2002, 2001-2004; Kindt, 2004;) e na resolução de problemas de âmbito interdisciplinar, em que o computador possa mobilizar estratégias de desenvolvimento harmonioso no acto de aprender e ensinar Matemática (Taylor, 1980; Turkle, 1989; NCTM, 1991, 2000, 2001; Drijvers, 2004, entre outros).

Apesar dos esforços desenvolvidos na democratização das aprendizagens matemáticas, os resultados dos programas de avaliação internacional indicam que os estudantes continuam a revelar fraco desempenho no domínio da Álgebra. Assim, no programa de avaliação internacional vocacionado para a avaliação de conhecimentos nas áreas de Ciências da Natureza e Matemática, através dos dados disponibilizados pelo TIMSS (1996); Carvalho, J. e outros (1996) conclui-se que: a) a maior parte dos estudantes teve grandes dificuldades na resolução faseada de problemas e na aplicação de conhecimentos e apenas dois países (Coreia e a Áustria) apresentaram uma percentagem de respostas correctas igual ou superior a 50%; b) em itens de conhecimento relacionados com a Álgebra, verificaram-se grandes diferenças de desempenho entre os países. A

República Checa, Hong-Kong, Japão, Federação Russa, Singapura e República Eslovaca obtiveram percentagens de respostas correctas iguais ou superiores a 75% e a Áustria 73%. Em Portugal, o desempenho dos estudantes em *Álgebra* foi respectivamente, no 7º e 8º anos, 31% e 39,5%, obtendo apenas resultados positivos (54%), no conteúdo de *Representação e Análise de Dados.* Os estudantes portugueses obtiveram ainda resultados mais baixos nos parâmetros *da justificação e demonstração* e da *comunicação* tendo sido, respectivamente, no 7º e 8º anos, de 3,9% e 19,1% e relativamente ao parâmetro da *comunicação* foi obtido, no 7º ano, apenas 8,5% de resultados positivos.

De forma concomitante refiram-se os resultados do estudo internacional do Programa PISA 2000 e PISA 2003 – *Programme for International Student Assessment*, realizado a jovens de 15 anos, cujo relatório nacional publicado em Dezembro de 2002, pelo Ministério da Educação (ME) e o Gabinete de Avaliação Educacional (GAVE). No PISA 2000, conclui-se que “o desempenho dos alunos portugueses foi inferior ao verificado em média no espaço da OCDE” (ME, 2002, p. 52). Contudo, o distanciamento de resultados ainda é mais acentuado em alguns itens, designadamente, “nas questões que apresentam uma maior complexidade e cuja resolução seja favorecida pela utilização de representações simbólicas” (ME, 2002, p. 52). No ano 2003, um dos domínios mais representados no estudo do PISA foi o da literacia matemática e nos relatórios oficiais constata-se que os resultados não são positivos, pois “Portugal tem ainda um elevado número de estudantes com níveis baixos de literacia matemática: cerca de 30% dos nossos alunos têm um nível de literacia matemática, igual ou inferior a 1, quando entre os países da OCDE esse valor é de 21%” (PISA 2003, p. 14). E nos níveis mais altos de literacia, enquanto 15% dos estudantes dos países da OCDE estão nos níveis de proficiência máxima (5 ou 6) do PISA, apenas 5% dos estudantes portugueses conseguem atingir esses níveis. Concretamente, em todos os conteúdos avaliados[3] e nos níveis baixos de literacia existe uma diferença acentuada entre Portugal e a média da OCDE, sendo sempre superiores no nosso país[4]. Em particular no conteúdo ligado a aprendizagens algébricas, designado amplamente por *mudança e relações*, nos níveis baixos de literacia, os valores são de 31% para Portugal e 23% para a média dos países da OCDE.

Estes resultados denunciam que existem problemas no desempenho dos estudantes em Matemática e, em particular, no campo da álgebra constituindo-se, por si só, num forte motivo para intervir e desenvolver estudos neste domínio.

Assim, o foco do problema a investigar localiza-se nas aprendizagens algébricas e fundamenta-se nas orientações curriculares e programáticas para a disciplina. Reconhece-se que várias investigações têm sido realizadas para descortinar as causas do insucesso na aprendizagem deste tópico, as quais têm originado novas reflexões e orientações metodológicas, mas, na acção educativa, não têm surtido o efeito desejado. É necessário continuar a estudar o assunto, como recomendam vários investigadores e associações de professores de Matemática, já referidos no ponto anterior, pois consideram que apesar de

---

[3] Núcleos de áreas e conceitos matemáticos relevantes considerados no PISA 2003: quantidade, espaço e forma, mudança e relações e incerteza.

[4] *Espaço e forma* (38% em Portugal *vesus* 25% na OCDE), *quantidade* (31% *versus* 21%), *incerteza* (27% *versus* 20%) (PISA 2003, p. 14)

terem sido delineados novos enquadramentos curriculares teóricos e possíveis estratégias de intervenção as dificuldades dos estudantes na aprendizagem da álgebra persistem.

Numa investigação realizada por Morais, Almeida e Dias (2000) sobre os conteúdos considerados mais complexos no ensino e na aprendizagem matemática concluíram que a resolução de problemas envolvendo equações foi considerada quer pelos professores, quer pelos estudantes, de todos os anos curriculares do 3º Ciclo do Ensino Básico, como o conteúdo de complexidade mais elevada. Assim sendo, os autores recomendam uma análise cuidada sobre as estratégias mais adequadas a promover na construção compreendida deste conteúdo, sugerindo ainda uma intervenção ao nível das idades elementares para, de forma gradual, diminuir o grau de complexidade deste conteúdo relacionado com a resolução de problemas envolvendo equações (Morais, 2000, 2003).

De facto, alguns dos projectos de pesquisa em Educação Matemática continuam a focar-se nas dificuldades da aprendizagem da álgebra na passagem dos problemas de palavras para a resolução de equações algébricas simples. Na generalidade, aceita-se que certos obstáculos da resolução de equações possam ser atribuídos às diferenças existentes entre a aritmética e a álgebra pois, segundo Ameron (2002, 2001-2004, 2004), os estudantes precisam de adoptar um raciocínio algébrico, ao desembaraçar-se de certas convenções aritméticas e de aprender gradualmente a tratar com o simbolismo algébrico, mas conclui ainda que este é apenas um dos aspectos da aprendizagem da álgebra.

Associada a esta problemática aparece, no programa instrucional do NCTM (2000), a comunicação como uma componente essencial da Educação Matemática, em particular da álgebra, sendo considerada como um meio para partilhar ideias e clarificar conhecimentos, pois "através da comunicação, as ideias transformam-se em objectos de reflexão, de debate e de pensamento social" (p. 60). Este processo permite a construção e a interiorização de significados e, consequentemente, uma aprendizagem profunda da Álgebra e da Matemática. Sobre o desenvolvimento da comunicação matemática na aula de Matemática os resultados divulgados pelo GT "Matemática 2001" referem que apenas 35% explora actividades de discussão/debate entre os estudantes. Este grupo de trabalho reconhece e recomenda a necessidade dos professores alterarem práticas, diversificarem o tipo de trabalho desenvolvido na sala de aula e darem importância à comunicação. Na aprendizagem da álgebra, também Kieran (1992) defende a urgência em investir e atribuir um papel relevante à componente da *comunicação*, designadamente, na importância da generalização dos fenómenos, numa primeira fase privilegiada de aproximação à álgebra, evocando raízes históricas em que a álgebra é entendida na Escola como uma linguagem de comunicação e manipulação de generalidades, requerendo, para isso, atenção na evocação e expressão natural do pensamento algébrico (Falcão, 1997, Pérez, 1997).

Pimm (1990) e Ortega (2001) também defendem o tratamento da componente da comunicação na aprendizagem da álgebra pois esta é considerada como uma linguagem poderosa de comunicação, um instrumento de prova não só na Matemática, mas também no campo das outras ciências. Neste sentido, o primeiro autor propõe-se seguir a metáfora "a matemática é uma linguagem" e, em particular, permite considerar a álgebra como um processo similar à aprendizagem de um idioma, onde existe a necessidade de aprender a falar, ler, escrever e interpretar matematicamente e Ortega (2001) completa este pensamento referindo que “estudar a álgebra é como realizar uma interacção entre dois códigos: linguagem natural e escrita simbólica” (p. 98).

De forma convergente pode-se ainda constatar que diversos projectos e investigações indicam o interesse valorativo das Tecnologias de Informação e Comunicação (TIC) e concretamente Morais (2000) defende a urgência da Escola aperfeiçoar certos níveis científicos e padrões culturais para simultaneamente assumir “o papel de um núcleo atraente e inovador para que aqueles que a frequentam sintam que aprendem algo de válido e actualizado o que dificilmente poderá ser conseguido sem a utilização das tecnologias de informação e comunicação” (p. 60). Dos vários estudos realizados e das preocupações associadas, Ponte (1988) conclui que os adultos e as crianças reagem diferentemente com o computador, mas a questão da sua utilização no quadro escolar ainda não se encontra totalmente resolvida. Assim, importa, essencialmente, saber quais os domínios mais pertinentes e quais os cuidados a ter na sua aplicação, de “forma que eventuais vantagens não sejam anuladas por correspondentes inconvenientes” (p. 22). Taylor (1980) e o NCTM (2001) salientam ainda a importância da tecnologia na capacidade de simular situações, na experimentação e na validação de conjecturas, apelando à necessidade de se continuar a analisar as vantagens e os inconvenientes no tratamento de diferentes conteúdos.

Após a identificação do problema, de abrangência educativa bastante complexa, a investigação em curso procura problematizar e descobrir, na matriz curricular actual, outros enquadramentos conceptuais, organizativos e instrumentais que possam vir a dar um contributo positivo na aprendizagem gradual e significativa da Álgebra. O propósito deste estudo orienta-se para a possibilidade de realizar abordagens mais actuais no processo aprendizagem-ensino da Matemática no âmbito interdisciplinar (Decreto-Lei nº 6/2001) de modo que o contexto assuma um papel relevante no percurso das aprendizagens numéricas às algébricas do 1º ao 2º Ciclo do Ensino Básico utilizando vários materiais, entre os quais o tecnológico. A exploração do computador surge, em si mesmo, como mais um contexto rico de aprendizagem e, em particular, a folha de cálculo, como um suporte tecnológico natural na construção de conceitos algébricos (Ponte, 1987, 1997; Veloso, 1987; Matos, 1987-1988; Moreira, 1989; Ponte, Nunes e Veloso, 1991; NCTM, 1991, 1995, 2000, 2001; Berlin e White, 1996; Drijvers, 2001-2004). Como nas circunstâncias actuais não se apresentaram outras alternativas tecnológicas credíveis[5] a folha de cálculo surgiu como uma ferramenta disponível e aliada natural da resolução de problemas em contexto interdisciplinar na aprendizagem da álgebra.

3. Questões da Investigação

Nos estudos realizados por vários investigadores (Brown, 1981; Schoenfeld, 1987b, 1987c; Abrantes, 1988; Kieran, 1992; Philipp, 1992; Dubinsky e Leron, 1994; Kindt, 2004, entre outros) constata-se que o tratamento de conceitos algébricos de forma rotineira e mecanicista tem acarretado deficiências nas aprendizagens dos estudantes.

[5] Como tinha sido inicialmente pensado com a exploração da linguagem de programação BOXER, mas tal não foi possível por não estar disponível a versão para PC.

De acordo com Heid e Kunkle (1986-88); Vergnaud (1989) e Bell (1996) somente o equilíbrio entre as diferentes componentes do processo da aprendizagem e a resolução de problemas significativos pode permitir o aprofundamento dos conhecimentos algébricos. O NCTM (1991) confirma também a necessidade de se explorarem diferentes componentes da Educação Matemática, defendendo que "nem todos os problemas requerem uma situação do mundo real" (p. 92) e que os estudantes ficam motivados e curiosos face a problemas imaginários ou da própria matemática. Neste campo, também Ralha (1992) corrobora esta posição defendendo que deve existir um equilíbrio entre a Matemática que se aprende e a Matemática de que se precisa no dia-a-dia, acrescentando: "cabe ao professor o papel de modelador das situações de modo que se estabeleça esta relação forte entre estes dois pólos" (p. 205). Retomando novamente o campo algébrico, Nemirovsky (1996) chama a atenção para a necessidade de se planificarem as actividades algébricas contextualizadas em problemas da vida real, com a exploração de ideias e situações da vida familiar e sócio-cultural dos estudantes, mas também as descontextualizadas do quotidiano, imaginadas pelo estudante e referenciadas estritamente ao campo matemático.

De uma maneira geral, o processo da aprendizagem-ensino da álgebra tem sido iniciado e desenvolvido basicamente num ambiente próprio de resolução de exercícios rotineiros, mecânicos, com a exploração de símbolos baseados em regras e desligados de problemas significativos para os estudantes, afastando-se, assim, do tratamento equilibrado deste conteúdo como é preconizado por vários investigadores. Da pesquisa bibliográfica efectuada tudo indica que as aprendizagens algébricas requerem outro tipo de abordagem que inclua, para além da resolução de exercícios rotineiros, a resolução de problemas em contexto e privilegie a comunicação, numa tentativa de acompanhar e apoiar os raciocínios algébricos do estudante.

Reconhecendo a necessidade de criar equilíbrios na Educação Matemática Chalouh e Herscovics (1988) relembram o papel da resolução de problemas no desenvolvimento da álgebra e no seu ensino, esclarecendo que a diversidade de problemas, contextos e metodologias de abordagem associadas indicam uma variedade subjacente de concepções. Paradis e Malet (1989) completam esta ideia referindo que esta dinâmica educativa surge relacionada com as origens históricas do conhecimento, as diferentes competências em desenvolvimento para obter a solução do problema; a exploração de contextos; a descoberta de uma solução generalizada que integre diversos casos particulares de problemas.

Para além do equilíbrio desejado na aprendizagem, baseado na diversidade de tarefas e estratégias associadas, como defendem diversos autores, a exploração de conceitos algébricos pressupõe um ensino gradual sustentado nas várias aproximações à álgebra que importa reter e aprofundar[6]. De acordo com Bednarz, Kieran e Lee (1996) podem-se considerar, genericamente, cinco aproximações à álgebra, a saber:

- *a primeira aproximação*, a generalização de padrões geométricos e numéricos e a descoberta de leis que governam numericamente essas relações (Kucheman, 1978, 1981;

[6] No segundo capítulo - Revisão da Literatura, nos Fundamentos Pedagógicos e Didácticos.

Booth, 1988; Schoenfeld e Arcavi, 1988; Kieran, 1988, 1992; Usiskin, 1988, 1999; Pimm, 1990; Mason, 1996; Radford, 1996; Lee, 1996; entre outros);

- *a segunda aproximação*, a resolução de problemas específicos ou classes de problemas (Chalouh e Herscovics, 1988; Demana e Leitzel, 1988; Maxim e Verhey, 1988; Schoen, 1988; Simon e Stimpson, 1988; Usiskin, 1988, 1999; Rojano, 1996; Charbonneau, 1996; Bednarz, 1996; Janvier, 1996; Bell, 1996; Bednarz, Kieran e Lesley, 1996; Wheeler, 1996, Ameron, 2001-2004, 2002; entre outros);
- *a terceira aproximação*, a resolução de equações com apoio de problemas e modelos concretos (Kieran, 1981, 1988, 1992; Heid e Hunkle, 1988; Thompson, 1988; Chalouh e Herscovics, 1988; Bernard e Cohen, 1988; entre outros);
- *a quarta aproximação*, a modelação de fenómenos físicos e matemáticos (Usiskin, 1988, 1994; Simon e Stimpson, 1988; Coxford e Shulte, 1988; Janvier, 1996; Nemirovsky, 1996; Wheeler 1996; Kieran, Boileau e Garaçon, 1996; Rojano, 1996; Matos e Carreira, 1996; Carreira, 1998; entre outros);
- *a quinta aproximação*, as relações funcionais e estudo de funções (Schoenfeld e Arcavi, 1988; Thompson, 1988; Kieran, 1988, 1992; Matos e Carreira, 1996; Carreira, 1998; entre outros).

Posteriormente, numa lógica de simplificação, Bednarz, Kieran e Lee (1996) consideram existir quatro aproximações à álgebra: generalização, resolução de determinado tipo de problemas[7], modelação e funções, respectivamente, *primeira, segunda, terceira e quarta aproximação à álgebra*. Contudo, a separação destas quatro aproximações para iniciar o estudo da álgebra é artificial e não disjunta em termos temporais; todas estas componentes são necessárias e complementares, devendo cada uma delas integrar gradualmente qualquer programa escolar de álgebra (Wheeler, 1996). Neste sentido, cada uma das aproximações à álgebra requer ainda uma fundamentação teórica envolvendo o estudo da(o): a) linguagem e sua sintaxe (é primordial não descurar o papel da linguagem simbólica e da sua manipulação (Bell, 1996)); b) processo de resolução de certa classe de problemas, apresentando-se a álgebra como uma ferramenta específica na generalização de leis que regem os fenómenos (Bednarz, Kieran e Lee, 1996).

Numa tentativa de identificar as primeiras aprendizagens desenvolvidas em idades elementares Fraile (1998) defende que antes de se inventar a palavra propriamente dita, *álgebra*, havia a pré-álgebra. Kieran (1992; 1996); Talbert e Stallings-Roberts (1994) reiteram a pertinência prática deste conceito no percurso de aprendizagem da álgebra e, tal como Ameron (2002), fundamentam-no na importância do pensamento histórico da álgebra na construção gradual de conceitos relacionados com este domínio.

Assim, com base nos dados recolhidos nas provas de avaliação e tendo como referência os enquadramentos científico, curricular e pedagógico actuais da Educação Matemática, importa investir num processo *continuum* da construção e desenvolvimento de conceitos no âmbito da pré-álgebra, na capacidade de os aplicar na resolução de problemas

[7] Englobam-se a 2ª e a 3ª aproximações numa só, ou seja a resolução de problemas específicos ou classes de problemas inclui a resolução de equações.

e outras tarefas matemáticas, ao longo da escolaridade básica, do 1º ao 2º ciclos, com especial incidência no ano terminal do 2º Ciclo do Ensino Básico – 6º ano de escolaridade. Este enfoque baseia-se no pressuposto de que este ano escolar revela-se como um momento delicado da aprendizagem do estudante[8]. Acresce o facto de ter sido ainda pouco estudado o processo de transição entre o 1º e 2º ciclos e ser possível, no plano estratégico da investigação, operacionalizar, de forma mais consistente e sustentada, o estudo num ano, optimizando o enquadramento educativo anterior e permitindo a estruturação e acompanhamento das actividades do ciclo seguinte.

Este estudo, de âmbito vertical, integra a preocupação e simultaneamente a necessidade de, desde cedo, as crianças se aperceberem que a Matemática é também uma linguagem que traduz ideias sobre o mundo e como tal deve ser utilizada, logo que seja conveniente, a linguagem simbólica matemática para que, nos primeiros quatro anos de escolaridade, possam ser usadas "setas, diagramas, tabelas, esquemas e gráficos que contribuam para registar e comunicar ideias, ler e interpretar informação com maior facilidade" (ME, 1990, Programa de Matemática do 1º Ciclo do Ensino Básico, p. 132). Por outro lado, esta necessidade de realizar um estudo atravessando, pelo menos, dois ciclos, 1º e 2º permite observar e interpretar longitudinalmente um processo lento e gradual da aprendizagem inicial da álgebra, pois a competência matemática associada integra vários aspectos e aptidões e desenvolve-se gradualmente, incluindo a compreensão de um conjunto de noções matemáticas fundamentais (Razel, Eylon, 1991). Como os estudantes não as desenvolvem do mesmo modo nem nos mesmos momentos, é necessário promover uma forte interligação entre as experiências de aprendizagem e ensino nos vários ciclos, o que implica uma visão global sobre os temas leccionados e o ensino desta disciplina ao longo da educação básica (ME, 1990).

Em idades elementares o ensino da Matemática enraíza-se na exploração de materiais manipulativos e ferramentas tecnológicas. "O computador, quando enquadrado numa ampla transformação dos processos pedagógicos pode vir a constituir um factor determinante na melhoria da aprendizagem da Matemática" (Veloso, 1987, p. 5). Moreira (1989) na investigação realizada com a folha de cálculo, na exploração do conceito de proporcionalidade directa através da resolução de problemas relacionados com conceitos algébricos, refere que esta ferramenta tecnológica proporciona a experimentação o que pode "conduzir os estudantes ao confronto com entes que desconhecem ou com conceitos que não detêm" (p. 210). Esta investigadora salienta que "a solução algébrica implica, sempre, a explicitação das relações entre os dados relevantes e a sua síntese numa expressão lacónica", sugerindo que a folha de cálculo pode constituir "uma ponte entre a Aritmética e a Álgebra" (p. 211-212), pois permite a experimentação, a análise e o estabelecimento de relações, referindo, no final do estudo: "não se pode deixar de concluir que a folha de cálculo é uma ferramenta eficaz para ajudar os estudantes a viverem a experiência matemática" (p. 214).

---

[8] Refira-se que nalguns países, nomeadamente em Espanha e na Holanda, o 6º ano de escolaridade corresponde ao ano terminal do 1º nível de ensino, chamado de *ensino primário* e o sucesso neste possibilita a passagem para um novo ciclo, apelidado de *ensino secundário*. No caso da Holanda, após um exame no ano terminal do 1º ciclo existem orientações precisas para o estudante poder optar seguindo uma via mais profissionalizante ou outra via de carácter mais científica.

Também Drijvers (2004), nas investigações acerca da exploração dos computadores no ensino da álgebra, defende a utilização da folha de cálculo, em idades elementares, pois tudo indica que pode proporcionar um ambiente computacional mais aberto à exploração de conceitos algébricos.

Apesar das investigações recentes considerarem a aritmética uma antecessora da álgebra, esta não parece ser simplesmente uma generalização da aritmética, dado que intrinsecamente suporta uma alteração no pensamento do estudante, na transição do que se pode chamar do modo informal ao formal na representação do processo de resolução de problemas e, nas investigações realizadas neste âmbito, em idades elementares, Matos (1991) salienta que a construção do conceito de variável em ambiente computacional, concretamente em actividades de programação na linguagem LOGO, permitiu concluir que as crianças desenvolvem um conceito primitivo de variável embora nem sempre se revelem capazes de explicitar essa ideia.

Na complexidade do estudo e face à presença de diversas "variáveis" surge a necessidade de delinear orientações para permitir desbravar caminhos de intervenção e caracterizar uma direcção de trabalho possível.

Indo ao encontro desta preocupação essencial do estudo, Yin (1994); Quivy e Campenhoudt (1998) defendem que construir a problemática de uma investigação equivale a formular os principais pontos de referência teóricos da investigação, pois é "a pergunta que estrutura o trabalho e os conceitos fundamentais e as ideias gerais que inspirarão a análise" (p. 90). Segundo estes dois últimos autores (1998) "a formulação da questão é um momento crucial da investigação e para que esta desempenhe correctamente a sua função deve apresentar qualidades de clareza (precisa, concisa e unívoca), exequibilidade (realista) e de pertinência (integrando conhecimentos já existentes, tendo uma intenção clara de compreensão dos fenómenos estudados)" (p. 44-45).

Após uma análise reflexiva e continuada da problemática associada ao processo aprendizagem e ensino da Álgebra "desenhou-se" uma determinada linha de intervenção no percurso escolar de duas turmas do ensino básico, desde as aprendizagens numéricas às algébricas, orientada pela formulação da seguinte questão principal (**QP**):

QP: *Qual a importância do contexto interdisciplinar na aprendizagem inicial da álgebra?*

Neste enquadramento educativo e pedagógico tornou-se necessário decompor a questão principal (**QP**) em sub-questões de investigação, designadas por **SQi** (i=1 até 8), direccionadas para a aprendizagem escolar da álgebra, explorando estratégias contextualizadas de modo a permitir a compreensão particular e holística do estudo.

SQ1: *Será que a resolução de tarefas no âmbito da matemática em contexto interdisciplinar induz uma dinâmica curricular específica com as aprendizagens algébricas?*

SQ2: *Quais as aproximações à álgebra que poderão ser exploradas com mais eficácia na aprendizagem contextualizada deste domínio, em idades elementares?*

SQ3: *Será possível identificar tarefas contextualizadas articularmente adequadas à construção significativa da aprendizagem inicial da álgebra?*

SQ4: *Será também possível identificar estratégias particularmente recomendáveis para a promoção da construção gradual e significativa da álgebra?*

SQ5: *Poderão ser evidenciadas competências específicas resultantes do uso da folha de cálculo na resolução de tarefas de matemática em contexto interdisciplinar na aprendizagem da álgebra no ensino básico?*

SQ6: *Que dificuldades ou obstáculos poderão ser identificados com o uso desta ferramenta tecnológica na resolução do mesmo tipo de problemas?*

SQ7: *Será que poderão ainda ser evidenciados constrangimentos de natureza conceptual, metodológica e, se possível, neurológica, ou outros, que possam vir a influenciar a construção de conhecimentos relacionados com a álgebra?*

SQ8: *Com a implementação deste género de trabalho que tipos de implicações curriculares poderão surgir no programa da disciplina de Matemática?*

Saliente-se que, naturalmente, as questões "desenhadas" vão guiar a investigação, mas não podem ser encaradas de uma forma isolada, pois a realidade educacional não o permite e, por tal motivo, também não devem ser vistas de forma restritiva, pois pode acontecer que no decorrer normal da investigação acabem por ser contemplados, naturalmente, mais uns aspectos do que outros. No campo onde a nossa experiência é nula, tal como aconteceu no da neurologia, apoiamo-nos, fundamentalmente, nas experiências e estudos de Castro Caldas (1999, 2000).

Deste modo, numa tentativa de responder às questões formuladas procura-se estudar propostas de articulação e intervenção nos dois primeiros ciclos de escolaridade, em contextos diversificados, integrando as actuais orientações curriculares, científicas e pedagógicas do programa de Matemática e delinear estratégias capazes de provocar a aprendizagem significativa da álgebra, baseadas no âmbito da matemática em contexto e interdisciplinar.

Tudo indica que as questões da investigação são bastante actuais e correspondem às preocupações presentes nas orientações curriculares definidas para o ensino da Matemática, consubstanciadas nos *standards* preconizados por associações de professores (APM, 1988 e NCTM, 1991, 1995, 2000, 2001), aliadas às orientações, representações e resultados de investigações de autores de referência e ainda de outras organizações responsáveis, programas internacionais de avaliação em Educação Matemática, entre os quais se destaca o PISA 2000 e 2003. Concretamente, este programa de avaliação o *PISA-Programme for International Student Assessment* revela preocupações no domínio das aplicações matemáticas para a vida real e coloca questões relacionadas com a Educação Matemática, numa perspectiva integradora e funcional do conhecimento:

> "Como estão a ser preparados os jovens adultos para se confrontarem com as mudanças futuras? Estão eles aptos a analisar, raciocinar e a comunicar ideias efectivamente? Têm capacidade de continuar a aprender ao longo da vida? Pais, estudantes, público e responsáveis pelos sistemas de educação de diferentes países precisam de ter respostas para estas questões" (PISA 2000, p.3).

As orientações curriculares e outros estudos sugerem o envolvimento dos estudantes em actividades matemáticas que lhes proporcionem uma aquisição e desenvolvimento gradual e construtivo do conhecimento matemático, numa perspectiva da existência da "capacidade para o indivíduo explorar, conjecturar e raciocinar logicamente, bem como a aptidão para usar uma variedade de métodos matemáticos para resolver problemas não rotineiros" (NCTM, 1991, 1995). Entretanto, o PISA 2003 elege precisamente a *literacia matemática* como componente fundamental da aprendizagem da matemática, interpretando-a como "a capacidade de um indivíduo identificar e compreender o papel que a matemática desempenha no mundo real, de fazer julgamentos bem fundamentados e de os usar e se envolver na resolução matemática das necessidades da sua vida, enquanto cidadão construtivo, preocupado e reflexivo" (OCDE, 2003 e ME, GAVE, 2004, p. 7).

Para além dos pressupostos curriculares, programáticos e conceptuais também os aspectos instrumentais têm-se mostrado relevantes na aprendizagem da Matemática e, em particular, na Álgebra. A utilização das Tecnologias de Informação e Comunicação (TIC) na educação e, em particular, na Educação Matemática tem merecido também atenções especiais de vários investigadores nacionais e internacionais. Contudo, as interrogações permanecem, o que aconselha, por um lado, a mobilização desta ferramenta na investigação, mas, por outro, o aparecimento de condicionalismos, que justamente fazem apelo à moderação e à utilização reflexiva do computador no processo aprendizagem-ensino da disciplina.

A preocupação de Rojano (1996) também está direccionada para as metodologias de abordagem na resolução de problemas, defendendo que as estratégias pessoais dos estudantes devem ser incorporadas como um ponto de partida essencial num processo sistemático e organizado da aprendizagem. Sugere ainda o ambiente computacional da folha de cálculo para apoiar os estudantes a simbolizar os procedimentos informais com vista à resolução de problemas. Este e outros autores (Moreira, 1989, Fernandes, 1994; Matos, Carreira, 1996) defendem a utilização da folha de cálculo como um programa tabelar por excelência, surgindo como uma ferramenta significativa de aprendizagem matemática, apresentando-se como uma matriz bidimensional não só para executar cálculos como também para organizar dados, envolvendo os estudantes num processo interactivo de descoberta das aprendizagens numéricas às algébricas.

4. Objectivos

Segundo Schoenfeld e Arcavi (1988) a álgebra é sintacticamente forte, mas semanticamente frágil. Uma forma de fazer chegar o papel semântico da álgebra aos estudantes deveria passar pela discussão sobre os diferentes contextos em que os símbolos literais são usados na matemática. Robayana e Medina (1997), Meira (2000) e Godino

(2000) defendem que os estudantes de todos os níveis de ensino devem ser encorajados a pensar mais cuidadosamente acerca dos diferentes significados, contextos e usos dos símbolos literais na álgebra para conseguirem desenvolver, assim, uma melhor compreensão conceptual da noção de variável. Por outro lado, a álgebra "das palavras" para a álgebra simbólica pode trazer dificuldades, mas, segundo o autor, não há como aprender matemática sem *aprender fazendo*[9]. Schoenfeld (1987a) refere também que as pessoas formulam determinado conceito de "variável", conforme a sua especialidade científica. Segundo este autor a noção de variável sob o ponto de vista matemático revela-se como um conceito abstracto, que deve ser preservado e não deve ser descurado na concepção do ensino, pois associada a uma situação concreta surge um contexto de inteligibilidade e, nesta perspectiva, também convém ser repensado o ensino da Matemática contextualizado de forma a conseguir maior proficiência nas aprendizagens, no campo da disciplina e nas outras ciências em que a matemática se apresenta como uma ferramenta fundamental.

O NCTM (1989, 1991, 1995, 2000, 2001) e a APM (1988-2004) fornecem orientações precisas para a Educação Matemática, dando ênfase à necessidade de se desenvolver as capacidades dos estudantes para investigar, entender as situações novas e construir significados, pela comunicação e partilha de ideias, formulando conjecturas e argumentando de forma sustentada. A aprendizagem deve centrar-se não só na resolução e formulação de problemas, mas também nas actividades de investigação, projectos, fazendo-se apelo à utilização das tecnologias de informação e comunicação, bem como ao debate de ideias matemáticas e à construção de modelos matemáticos capazes de integrarem um leque flexível de estratégias na resolução de diferentes tarefas.

Como não existe um modelo teórico capaz de suportar eficazmente a aprendizagem da álgebra em idades elementares, preconiza-se, nesta investigação a exploração e resolução de tarefas, no âmbito da matemática em contexto e de índole interdisciplinar assim como a utilização do computador, em especial da folha de cálculo, com vista a promover a aprendizagem gradual e sustentada de conceitos pré-algébricos.

O estudo visa, então, melhorar o desempenho dos estudantes na construção significativa desses conceitos, baseado na comunicação matemática e em conexão com as outras áreas do saber, numa abrangência natural da utilização da tecnologia em diversos ambientes sócio-culturais, procurando educar e ensinar Matemática numa dimensão plena para a cidadania.

Tendo por base a problemática focada e a contextualização das questões de investigação levantadas pretende-se, neste estudo, prosseguir a concretização dos seguintes *objectivos*:

- Problematizar e analisar a importância da utilização do contexto e do trabalho de âmbito interdisciplinar na exploração do conhecimento matemático, em especial, da aprendizagem inicial da álgebra.

---

[9] Como já defendia Celestin Freinet nos anos sessenta.

- Conceber tarefas ou experiências de aprendizagem (ME, 1999, p. 6) nos campos geométrico e numérico, no âmbito da matemática em contexto e de natureza interdisciplinar, numa perspectiva gradual e consistente das aprendizagens pré-algébricas, nos dois primeiros Ciclos do Ensino Básico.

- Reflectir sobre o interesse didáctico da implementação de determinado tipo de tarefas no quadro disciplinar nas aprendizagens pré-algébricas e problematizar sobre as implicações programáticas emergentes alargadas ao quadro curricular, através da análise da dinâmica e do diálogo estabelecidos com os estudantes e com as outras disciplinas e/ou áreas disciplinares.

- Analisar as potencialidades educativas de materiais próprios que fomentem a construção de conhecimentos no domínio da pré-álgebra, designadamente do computador, em especial da exploração didáctica da folha de cálculo, no processo amplo de resolução de problemas em contexto interdisciplinar.

- Analisar percursos conceptuais de estudantes e/ou de grupos, sempre que possível, acompanhando os processos da realização das tarefas propostas, estudando as competências básicas matemáticas desenvolvidas nas capacidades de aplicar ou criar modelos matemáticos e de os descrever, com utilização ou não do computador.

- Problematizar e, se possível, elaborar um referencial teórico estruturante de âmbito vertical, do 1º ao 2º Ciclo do Ensino Básico, capaz de identificar um modelo faseado de desenvolvimento da aprendizagem da pré-álgebra em contexto, de incidência interdisciplinar.

- Reflectir e analisar sobre aspectos de âmbito conceptual, metodológico e, se possível, do foro neurológico, ou outros, de forma a identificar constrangimentos que dificultam a aquisição gradual e significativa das aprendizagens iniciais da álgebra.

A investigação prevê uma pesquisa bibliográfica atenta, com formulação e aprofundamento do quadro teórico, bem como um estudo experimental de cinco anos, do 1º ao 2º Ciclo do Ensino Básico, que analise: (a) o aparecimento "dinâmico" do conceito de variável e a evolução ao longo dos dois primeiros Ciclos do Ensino Básico, prevendo-se a análise dos diferentes significados, aplicados a diversos contextos; (b) as implicações científicas e pedagógicas relacionadas com problemas conceptuais, de linguagem, programáticos e curriculares; c) os contextos concretos de aprendizagem inicial da álgebra, prevendo a utilização do suporte tecnológico na resolução de problemas em contexto interdisciplinar relacionados com a Matemática e com as outras áreas, designadamente, Língua Portuguesa, Estudo do Meio, Expressão Plástica (1º ciclo); Ciências da Natureza, Língua Portuguesa, História, Educação Física e áreas curriculares não disciplinares de

Formação Cívica, Área de Projecto e Oferta da Escola (TIC) (2º ciclo), num processo experimental de modelação e aplicação do conhecimento matemático.

5. Importância do Estudo

O valor atribuído à Álgebra no quadro escolar é decisivo para o desenvolvimento do pensamento abstracto e consequentemente, para o sucesso do estudante em Matemática e, na maior parte das vezes, nas outras ciências.

Dado que as dificuldades de aprendizagens algébricas se mantêm e admitida a relevância deste conteúdo na construção do edifício matemático e na aprendizagem de vários domínios em outras áreas científicas, assume-se de vital importância a promoção de investigações neste domínio no ensino da Matemática (Schoenfeld, 1987a, 1987b, 1987c; Kieran, 1992; NCTM, 2001), de forma a encontrar outros quadros curriculares e metodologias de abordagem apropriadas que promovam o sucesso deste conteúdo numa perspectiva ampla do conhecimento matemático de forma a alcançar *a equidade*, identificado como o primeiro princípio da Educação Matemática (NCTM, 2000).

Tudo indica que este estudo terá implicações no campo educativo e no processo aprendizagem-ensino da Álgebra nas diversas dimensões, das quais se destacam a: a) dimensão conceptual; b) dimensão curricular; c) dimensão didáctica; d) dimensão sócio-cultural ; e) dimensão pessoal/profissional.

Dimensão Conceptual. Apesar de existirem vários estudos sobre o tópico (Bednarz, Kieran e Lee, 1996) ainda não se compreende de forma suficiente o problema e muitos estudantes continuam a revelar dificuldades na compreensão de conceitos relacionados com a álgebra (Booth, 1988; Bednarz, Kieran e Lee, 1996). A transição compreendida da aritmética para a álgebra fomenta a universalidade de pensamento e exige dos estudantes aprendizagens matemáticas superiores e mais consolidadas. Constata-se ainda que a exploração de tarefas relacionadas com *a primeira e a terceira aproximação à álgebra* provoca o desenvolvimento do raciocínio indutivo e, nestas circunstâncias, promove a aprendizagem construtivista do saber do educando, transformando-o no arquitecto activo dos seus próprios saberes (Piaget, Choquet, Dieudonné, Thom, e outros, 1983). Assim, na capacidade de generalização de uma dada situação proporciona-se ao estudante o prazer da descoberta, a construção do conhecimento e o desenvolvimento do raciocínio indutivo na criação de leis algébricas que regem os fenómenos.

No quadro escolar actual, em que se pretende implementar aprendizagens significativas e graduais dos conhecimentos algébricos vários estudos referem que em investigações futuras devem ser aplicadas as diferentes aproximações à álgebra, já referenciadas no terceiro ponto deste capítulo e exploradas em diferentes contextos, usando várias representações e significados associados ao conceito de variável, expostos em 9.2. no segundo capítulo da revisão da literatura.

Para além da interpretação e implementação gradual destes aspectos, torna-se essencial promover o equilíbrio entre as diversas componentes do processo aprendizagem: fundamentos históricos, relações inter-pessoais e sociais (Doyle e Carter, 1986); a interacção do indivíduo com a própria ciência, através da resolução de problemas e/ou outras tarefas significativas, para permitir ao estudante a construção individual e o aprofundamento social dos conhecimentos algébricos (Vygotsky, 1979, 1993, 1995; Palangana, Galuch e Sforni, 2002), possibilitando a condução dos esquemas pessoais informais até aos processos formais numa vertente ampla do conceito de "matematização" (De Lange, 1992; Gravemeijer, 2000; Kindt, 2004).

Dimensão Curricular. Num artigo sobre uma visão global das ciências sociais Silva e Madureira Pinto (1986) referem que é fundamental perceber-se que *o económico, o político ou o simbólico* não constituem compartimentos estanques – são dimensões inerentes a *toda* a acção social, que permanecem profundamente interligadas. Acrescentam ainda que só assim se pode compreender porque "são tão precárias e flutuantes as fronteiras entre as várias disciplinas no quadro escolar, pois, em termos gerais, elas perspectivam, de diferentes maneiras, a mesma realidade" (p. 17). Por outro lado, reconhecem que as condições institucionais do trabalho científico alimentam e intensificam a conflitualidade. "A divisão de trabalho entre as disciplinas é sempre flutuante e provisória, porque, por um lado, é em grande parte fruto de condições sócio-institucionais, variáveis; e, por outro, as disciplinas não são elas próprias corpos teóricos-metodológicos, unitários e estanques" (Silva e Madureira Pinto, 1986, p.19). Segundo estes autores na procura de um quadro orientador opta-se por "ruas com cruzamentos", com interacções entre as várias perspectivas, ou seja, instala-se a "interdisciplinaridade efectiva".

Entretanto, na definição dos princípios orientadores para a organização e gestão curricular no ensino básico (Decreto-Lei nº 6/2001) apela-se à coerência e à sequencialidade entre os três ciclos e à articulação destes com o ensino secundário, valorizando-se a necessidade dos estudantes realizarem aprendizagens significativas e contextualizadas. Este quadro curricular procura criar uma rede de competências inter-relacionais, baseadas na "valorização da diversidade de metodologias e estratégias de ensino e actividades de aprendizagem, em particular com recurso a tecnologias de informação e comunicação" (DL 6/2001, artigo 3º, alínea h). Apontam-se ainda as grandes finalidades do ensino da Matemática para o conjunto dos três ciclos do ensino básico: desenvolver a capacidade de raciocínio, a capacidade de comunicação e a capacidade de resolver problemas. Estas devem estar presentes ao longo dos quatro anos que constituem o 1º ciclo de modo a "assegurar a articulação vertical do processo de ensino e aprendizagem desta disciplina fundamental para a estruturação do pensamento e da acção" (Programa de Matemática do 1º ciclo, ME, 1990, p. 125), sendo tal propósito reiterado na reorganização do currículo do ensino básico, ao se salientar a necessidade de "reforçar a articulação entre os três ciclos que o compõem, quer no plano curricular, quer na organização de processos de acompanhamento" (Decreto-Lei nº 6/2001).

Canavarro (2005) refere que todos os currículos sublinham a necessidade de incluir, na Educação Matemática, situações ligadas à "matemática-realidade" (p. 110) encarada como espaço de possibilidade para proporcionar aos estudantes experiências de aprendizagem em que possam descobrir a aplicação prática na resolução de problemas concretos do seu dia-a-dia, procurando, deste modo, desenvolver a capacidade de utilizar a Matemática na interpretação e intervenção no real (ME, 1991). Esta investigadora defende ainda que a valorização da receptividade da "matemática-realidade" deve ser suportada tanto por situações do dia-a-dia, como por outras áreas do saber, por disciplinas escolares e por outros domínios de preocupação social.

Por outro lado, através dos princípios e normas para a Escola o National Council of Teachers of Mathematics (NCTM, 2000) apela para que o ensino da Matemática abra portas para o futuro e contribua, de forma decisiva e positiva, para o mundo em mudança. Os novos conhecimentos, as ferramentas actuais e a emergência de outros percursos devem continuar a coexistir na comunicação matemática. Esta organização internacional refere ainda a necessidade de se promover um entendimento prático do uso da matemática *para* e *no* quotidiano e ainda *para* e *na* actividade profissional. Assim, a Escola deve orientar o desenvolvimento da Matemática para a vida, como parte de uma herança cultural, para o desempenho de uma profissão no futuro e para a comunidade científica e tecnológica.

Nesta perspectiva educacional, é curioso registar que, já em 1976 a UNESCO publicou um volume sobre o ensino integrado das ciências[10] que defendia o entrosamento da Matemática com outras Ciências, designadamente, com a Biologia, a Física e a Química, numa visão aplicada do conhecimento matemático (Vergani, 1993).

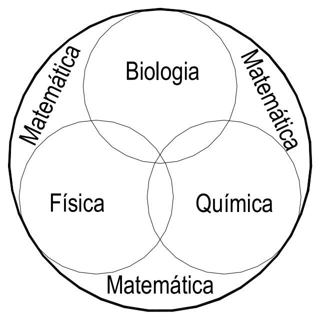


Figura 1: Ciências integradas – UNESCO (Vergani, 1993, p. 92)

Também o matemático português Bento de Jesus Caraça (1989) advoga que a Matemática é uma ciência de "*insights*" e defende ter uma posição privilegiada na construção do conhecimento em geral:

> "*A Matemática é geralmente considerada como uma ciência à parte, desligada da realidade, vivendo na penumbra do gabinete, um gabinete fechado, onde não entram os ruídos do mundo exterior, nem o sol, nem os clamores dos homens. Isto, só em parte é verdadeiro. Sem dúvida, a Matemática possui* problemas próprios*, que não têm ligação imediata com os outros problemas da vida social. Mas não há dúvida também de que os seus fundamentos* mergulham tanto como os de outro qualquer ramo da Ciência*, na vida real; uns e outros entroncam na mesma madre*" (p. xiv, itálico do autor).

Martins, no posfácio do livro de Praia (1999), *Educação para a cidadania. Teoria e Práticas*, defende uma Escola de partilha de saberes de forma entrosada com as diversas disciplinas: "(…) É este trabalho de diálogo educativo entre saberes e áreas disciplinares, na Escola e fora dela, que suscita a transformação da própria Escola, no sentido de a tornar um lugar de procura incessante e afirmação duma cidadania activa, exigente e responsável" (p. 81). Também no âmbito curricular o Decreto-Lei nº 6/2001 legitima esta e outras posições semelhantes explicitando que "a integração, com carácter transversal, da educação para a cidadania em todas as áreas curriculares constitui-se como um dos

[10] Tendances nouvelles sur l´ enseignement intégré des Sciences (III) (1976, p. 92).

princípios orientadores da organização e a gestão do currículo". A educação para a cidadania, bem como a dimensão humana do trabalho constituem-se como formações transdisciplinares no âmbito da estrutura curricular do ensino básico e como tal devem ser promovidas em diferentes disciplinas ou áreas disciplinares.

Dimensão sócio-cultural . Constituindo-se a matemática como "um património cultural da humanidade e um modo de pensar", sendo a sua apropriação "um direito de todos" (ME, 1999, p. 3) e como uma actividade humana por excelência (Freudenthal, 1983) importa disponibilizar ideias, meios e atitudes a todos os jovens de modo a desenvolverem-se harmoniosa e integralmente possibilitando-lhes um livre acesso à cultura matemática, como ciência e simultaneamente como meio de interpretar o mundo, num exercício pleno de cidadania. "Quanto mais alto for o grau de *compreensão* dos fenómenos naturais e sociais, tanto melhor o homem se poderá defender dos perigos que o rodeiam, tanto maior … será, enfim, a sua *liberdade*" (Caraça, 1989, p. 64). Neste sentido, Bebiano (2001) chama a atenção para o facto de Caraça defender que o desenvolvimento do raciocínio e das capacidades intelectuais deveriam ser apanágio da Escola para o indivíduo entender os fenómenos que o rodeiam. De certo modo o quadro curricular actual (Decreto-Lei nº 6/2001) comporta estas preocupações, pois apela ao desenvolvimento de iniciativas e estratégias que promovam o conhecimento significativo, com uma forte ligação ao quotidiano e aos outros domínios científicos.

De acordo com os programas actuais do ensino básico o processo aprendizagem-ensino da Matemática enquadra-se numa perspectiva construtivista do saber do educando. Parte-se do princípio que a criança potencia necessidades sociais, intelectuais e culturais; o êxito da sua aprendizagem reside na liberdade de raciocinar, comunicar, actuar, questionar, conjecturar e argumentar. Nesta perspectiva a Escola deve proporcionar instrumentos e meios que possibilitem o desenvolvimento harmonioso e integral da pessoa nas diversas componentes (Fernandes, 1994). Acredita-se seriamente que a Matemática se constitui como um desses meios e/ou instrumentos que pode apoiar, numa perspectiva integradora, a formação do indivíduo como pessoa proporcionando-lhe maior reflexão intelectual e sócio-cultural num novo paradigma educativo ao qual Praia (1999) designa por "formar cidadãos do mundo". Para Lave e Wenger (1991-2002) a identificação do pensamento matemático não é uma questão relacionada com a percepção ou o estudo de propriedades de alguns fenómenos independentes, mas uma partilha sócio-cultural. Por outro lado, a intervenção da matemática na comunidade não passa apenas pelo conhecimento da medida das coisas e de ser capaz de a aplicar, mas sobretudo pela capacidade de raciocinar correctamente e de resolver inteligentemente uma situação, partilhando ideias e integrando saberes.

Palangana, Galuch e Sforni (2002) acreditam, tal como outros autores, que o ensino e a aprendizagem modificam não só o que o sujeito pensa, mas também o modo como pensa, isto é, consegue intervir também nos processos mentais implicados nessa actividade. Estas autoras defendem ainda que as funções mentais são socializadoras e reconstruídas por meio da comunicação e do inter-relacionamento. Por tal motivo, "na Escola, deve-se dar atenção à qualidade das informações, ao saber mediado pela relação professor/estudante, uma vez que todas estas interacções carregam, em si, potencialidades, conhecimentos culturais em formação" (p. 115). Segundo Abrantes (1988) os currículos e os programas, em todos os níveis de ensino, têm sempre apresentado a Matemática como uma disciplina universal, cuja aprendizagem é independente de motivações e experiências de natureza social e cultural, não admitindo diversificações que não sejam devidas a diferenças no *suposto* destino dos estudantes (cursos superiores ou profissões) e ignorando, erroneamente, mesmo no ensino elementar, os conhecimentos *etnográficos* (Rist, 1982; D´Ambrosio, 1985, 2005) com que a criança chega à Escola ou que se desenvolvem fora dela (Piaget, 1975; Resnick, 1987b).

A problemática da investigação procura, assim, integrar, numa perspectiva cultural, os saberes da própria ciência matemática e a capacidade de a explorar em diferentes meios, num processo endógeno e simultaneamente exógeno, usando outros espaços, valorizando o saber do quotidiano dos estudantes e os conhecimentos adquiridos com outras disciplinas ou áreas curriculares. Deste modo, a Matemática apresenta-se por si só como uma ciência a aprender, mas simultaneamente como um instrumento necessário para provocar a descoberta, o gosto por conhecer outras ciências, apresentando-se como um dos estandartes da liberdade científica do indivíduo, aliada à capacidade de intervenção cívica e responsável na sociedade (NCTM, 2000, 2001).

Um dos princípios orientadores do ensino da Matemática baseia-se na necessidade da disciplina estar ao alcance de todos (ME, 1989) e, em particular, de cada estudante, numa perspectiva de integração e valorização das diferenças, num exercício pleno da cidadania numa pequena sociedade escolar, orientada cada vez mais para os valores e a humanização dos saberes. Assim, a Matemática pode diariamente, na Escola, apresentar-se como uma disciplina que comunica ideias, desenvolve diálogos e produz conhecimento, ou seja, fomenta e participa activamente no projecto pessoal e profissional do indivíduo e, como elemento sócio-cultural, potencia a dinamização da partilha de saberes e competências numa perspectiva de humanização da própria ciência (Kieran, 1988; Schoenfeld e Arcavi, 1988; NCTM, 2000, 2001).

Dimensão Didáctica. A competência matemática desenvolve-se através de experiências matemáticas ricas e diversificadas, de reflexão sobre essa experiência, de acordo com a maturidade dos estudantes (ME, 1999). Para que tal se cumpra devem ser propostas várias experiências de aprendizagem, desde a resolução de problemas, actividades de investigação, realização de projectos, passando pela comunicação matemática, exploração de conexões, utilização de materiais manipuláveis, exploração de jogos e do computador. A orientação curricular formula três níveis de competências e defende que todos os estudantes devem ter oportunidade de desenvolver no seu percurso ao longo do ensino básico: competências gerais, transversais e essenciais em cada disciplina. O desenvolvimento destas competências deve ser significativo e articulado com os diferentes ciclos, não podendo ser entendidas como objectivos terminais em cada etapa, mas devem ser encaradas como referências nacionais para o trabalho dos professores, adoptando-se como noção ampla de competência, a integração de conhecimentos, capacidades e atitudes, podendo ser entendida como "saber em acção" (ME, 1999, p. 4). Tal como é referido neste documento, ser matematicamente competente envolve, hoje, um conjunto integrado de atitudes, valores, capacidades e conhecimentos matemáticos a desenvolver ao longo do percurso da educação básica, no qual se inclui "a predisposição e a aptidão para raciocinar matematicamente, isto é, para explorar as situações problemáticas, procurar regularidades, fazer e testar conjecturas, formular generalizações, pensar de forma lógica" (ME, 1999, p. 4). As competências matemáticas integram os aspectos referidos, desenvolvendo e incluindo gradualmente a compreensão de um conjunto de noções matemáticas fundamentais. Como os estudantes não as desenvolvem do mesmo modo nem nos mesmos tempos de interacção matemática importa promover uma forte interligação entre as experiências de aprendizagem e ensino nos vários ciclos, procurando reter uma visão global sobre o ensino desta disciplina ao longo de toda a educação básica e, em particular, no que concerne à aprendizagem da Álgebra.

No 1º ciclo e, especialmente, no 2º ciclo não se tem dado relevância a aspectos cruciais relacionados com aprendizagens no domínio da álgebra (Matos, 1987-88, 1991; Abrantes, Serrazina e Oliveira, 1999), tais como: a) a predisposição para procurar padrões e regularidades e para formular generalizações em situações diversas, nomeadamente em contextos numéricos e geométricos; b) a aptidão para analisar as relações numéricas de uma situação e explicá-las em linguagem corrente e representá-las através de diferentes processos, incluindo o uso de símbolos; c) a aptidão para interpretar e construir tabelas de valores, regras verbais e outros processos que traduzam relações entre variáveis, assim como para passar de umas formas de representação para outras; d) a aptidão para concretizar em casos particulares relações entre variáveis e fórmulas e para procurar soluções de equações simples. Acresce ainda o facto de que as aproximações à Álgebra, fruto de várias investigações, não estão a ser explicitadas nos planos programáticos da disciplina de Matemática de modo a informar objectivamente os professores das estratégias e atitudes a desenvolver neste domínio, sendo a Álgebra e as Funções explicitadas no Currículo Nacional do Ensino Básico praticamente só no 3º ciclo, com suporte conteúdal muito genérico nos ciclos anteriores, provocando, na progressão da aprendizagem, dificuldades adicionais aos estudantes e, provavelmente, alguns "divórcios" com a Matemática.

Como as aprendizagens rotineiras e estritamente disciplinares não se revelaram significativamente eficazes na aquisição e desenvolvimento do conceito de variável (Kieran, 1988, 1992; Wheeler, 1996; Serrazina, 1998; Abrantes, Serrazina e Oliveira, 1999) a investigação em curso localiza-se numa perspectiva didáctica abrangente, relacionada com as aprendizagens vivenciais do estudante, descortinando a possibilidade de explorar a matemática em contexto e de natureza interdisciplinar na aprendizagem de conceitos algébricos, numa proposta integradora com outras disciplinas ou áreas curriculares e prevendo a utilização diferentes materiais, com especial destaque para o computador.

Deste modo, procura-se descortinar *cadeias de aprendizagem*, com a definição clara de objectivos e de desenvolvimento de competências, a exposição gradual de conteúdos e o planeamento de estratégias diversificadas, enfatizando, caso seja conveniente, a intervenção da componente tecnológica, que fomente a aplicação e a compreensão de conceitos algébricos. Nesta dinâmica de acção educativa deve ser evidenciada determinada classe de problemas e o tratamento modelar de certas situações, como por exemplo: fornecer o modelo matemático e aplicá-lo a problemas concretos ou, pela análise de uma dada situação, criar o modelo matemático que explicite e resolva o problema.

Dimensão pessoal/profissional. Pelo facto de possuir o Curso do Magistério Primário (Plano de Estudos de três anos), ter leccionado durante sete anos no ensino primário, actual 1º Ciclo do Ensino Básico, ter tido experiência durante três anos no ensino básico e secundário e ser, há mais de dezassete anos, docente na área de Matemática, na Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico do Porto na formação inicial e contínua de professores, é minha convicção profunda que o ensino escolar organizado da Matemática inicia-se no 1º ciclo e consequentemente o (in)sucesso poderá começar a ganhar raízes neste nível de ensino (ou quiçá na Educação de Infância, através da aplicação das orientações curriculares estipuladas para o domínio da Matemática). Também Abrantes, Serrazina e Oliveira (1999) e Cabrita (1996, 1998, 2000) defendem posição idêntica referindo que é a partir dos níveis mais elementares que se deve intervir com vista a uma melhoria do processo de aprendizagem e ensino de qualquer área disciplinar, em particular no das Ciências. Assim, todo o percurso ulterior de construção do edifício matemático baseia-se nesses alicerces científicos, sustentados pela capacidade do estudante em raciocinar, questionar, argumentar, conjecturar e ter gosto por *aprender a aprender* Matemática.

Dada a importância de um tratamento sequencial e consistente dos conteúdos da disciplina, designadamente, dos geométricos e numéricos aos algébricos, importa nesta investigação focalizar a situação escolar dos estudantes, numa perspectiva abrangente e de contexto especial inter-ciclos ("barreira" dos ciclos), analisando questões de natureza científica e pedagógica.

Se por um lado os níveis de insucesso em Matemática, qualquer que seja o sentido da expressão "insucesso", constituem um factor de grande apreensão de todos: estudantes, família, professores e comunidade em geral (Abrantes, 1988), por outro lado o *bom* ensino da Matemática não é uma questão pacífica e tem diversas respostas, dependendo dos objectivos da educação (Ponte, Boavida, Graça e Abrantes, 1997). Estes e outros autores (Mendes, 1998; Morgan, 1998; Matos e Serrazina, 1996) consideram que o actual ensino da Matemática é marcado por um domínio quase absoluto dos objectivos cognitivos de níveis mais baixos (memorização de factos, algoritmos, técnicas de resolução de exercícios) e de uma avaliação praticamente constituída por testes e exames. Por outro lado, têm sido praticamente subestimados ou mesmo arredadas das aulas, os objectivos de natureza afectiva e social, bem como as estratégias de desenvolvimento intelectual, assim como outros processos de avaliação mais humanos, flexíveis, incluindo outras provas de nível cognitivo diferenciado. Grande parte das vezes as actividades escolares são desprovidas de qualquer contexto (Abrantes, 1988), apresentando-se a Matemática como a ciência monolítica (Caraça, 1989), onde tudo já se encontra organizado, plenamente acabado, sem nada para descobrir, uma disciplina em que só há "certo ou errado", em que o estudante é constantemente incitado a indagar "o que é para fazer?" e "como é que se faz?", de modo a atingir determinado objectivo comportamental, isto é, de ser capaz de "produzir a resposta previamente aprendida para um dado tipo de exercício quando este lhe surgir no teste de avaliação ou, em última análise, no exame final" (Abrantes, 1988, p. 18).

Todavia, pode-se entender que o primeiro princípio orientador do programa de Matemática do 1º Ciclo do Ensino Básico apela ao papel do professor, no sentido de "conseguir que as crianças desde cedo aprendam a gostar de Matemática" (ME, 1990, p.

125) para que esta disciplina se torne “num instrumento de desenvolvimento de todos os estudantes” (ME, p. 125). Para isso, exige-se ao professor uma atitude activa, um organizador de meios adequados à criação de um ambiente de aprendizagem propício à concretização do programa, de forma a respeitar a natureza da criança, a qual nesta fase, deve revelar-se activa, questionadora e imaginativa e, a um nível curricular, que tudo seja feito para que as orientações programáticas e as grandes finalidades da disciplina de Matemática do ensino básico sejam cumpridas. Para concretizar os objectivos traçados propõe-se que a resolução de problemas, numa perspectiva abrangente de Educação Matemática, seja uma actividade central na aquisição do conhecimento, a qual deve estar presente na exploração de todos os tópicos, pois constitui-se como uma actividade que coloca o estudante numa atitude activa de aprendizagem e é promissora do desenvolvimento do raciocínio e da comunicação. Nesta dinâmica de aprendizagem são sugeridas diversas ferramentas, entre as quais se destaca o computador. A implementação das “novas” tecnologias no ensino da Matemática surgiu, basicamente, com o MINERVA, Projecto de âmbito nacional, que veio provocar uma reflexão sobre as práticas educativas desenvolvidas na sala de aula e noutros espaços escolares, bem como a existência de debates sobre a importância de aplicações e dos processos de modelação associados ao ensino e à aprendizagem da Matemática. Tendo integrado a comissão coordenadora do MINERVA (núcleo do Porto), com responsabilidades de coordenação na área de Matemática, no 2º e 3º Ciclos do Ensino Básico e ensino secundário, de 1986 a 1989, foi possível reflectir, investigar e experimentar, uma perspectiva mobilizadora e partilhada de conhecimentos inter-núcleos e a nível nacional sobre o papel das tecnologias no ensino da Matemática. Segundo Carreira (1998) “os projectos de desenvolvimento curricular e as perspectivas inovadoras que estiveram associadas àquele projecto constituíram-se como vertentes fortes e estruturantes da actividade educativa até então desenvolvida” (p. 29). Dando continuidade ao trabalho implementado no âmbito daquele projecto foi possível aprofundar o uso das tecnologias no ensino da matemática, na realização do Mestrado em Informática no Ensino, concretamente, no 1º ciclo, no 4º ano de escolaridade, com a exploração de programas educativos na consolidação de conteúdos e da utilização da folha de cálculo na resolução de problemas. Mas, neste estudo, encara-se o papel das tecnologias como mais um contexto natural de Educação Matemática capaz de potenciar o desenvolvimento de competências matemáticas na aprendizagem da álgebra num trabalho de âmbito interdisciplinar. Nesta dimensão, apesar de não ser objecto de um estudo aprofundado, também deverá emergir a relação professor-estudante, a qual se prevê que venha a ser alterada, no quadro referido, podendo vir a influenciar ideias, atitudes, convicções e práticas.

Por outro lado, em termos mais restritivos, mas verdadeiros, a investigação também encontra raízes no desejo de apreender as causas das frustrações confessadas em surdina, por colegas e amigos em trabalhos conjuntos realizados em vários projectos, designadamente, no Projecto MINERVA: *“... desde que na Escola comecei a dar aquele malfadado X, nunca mais entendi a Matemática!... Desisti de perceber e isso fez com que eu não fizesse o curso que queria... Paciência... Nunca percebi qual o interesse daquela letra na Matemática... e também agora já é tarde para o entender*”. Provavelmente são estes segredos que secretamente só se ouvem aos amigos e aos colegas que confiam nos nossos silêncios... Contudo, são estes e outros pensamentos similares que também estão presentes em muitos estudantes que ousam, na Escola de hoje, dizê-lo directamente ao professor. Esta interrogação, esta "incógnita" impulsionou ainda o tema desta investigação que, "em surdina", colocou a investigadora mais próxima do estudante para apreender o "percurso intimista" do sujeito com a ciência matemática e, em particular, na aprendizagem da álgebra no ensino básico.

Um dos aspectos relevantes na utilização do computador no ensino da Matemática localiza-se na capacidade do estudante desenvolver o pensamento abstracto e ser capaz de comunicar matematicamente, numa vertente de diálogo com a vida real e as outras disciplinas. Ora o programa de avaliação internacional PISA – *Programme for International Student Assessment*, da responsabilidade da OCDE, aponta para que a Matemática seja cada vez mais uma ciência ao serviço do indivíduo, na sua capacidade de aprender automatismos, realizar conexões com o mundo exterior e elevar o nível de compreensão dos fenómenos por processos de modelação algébrica, criando para isso, respectivamente, três classes de conhecimento/avaliação: *classe 1 - reprodução, definição e cálculo; classe 2 - conexões e integração de conhecimentos na resolução de problemas; classe 3 - matematização, pensamento matemático, generalização e interiorização*. Há ainda indicações que, num dos próximos programas do PISA, deverá ser reforçada a vertente da resolução de problemas de matemática em contexto e de âmbito interdisciplinar. Deste modo, organismos nacionais e internacionais apelam ao papel activo mental e social da Matemática, desenvolvendo naturalmente nos jovens os aspectos formais desta disciplina, entrelaçados com as vivências do quotidiano e as outras ciências, numa perspectiva integrada do conhecimento.

Também Canavarro, em Julho de 2005, no *cibem5*, defendeu que esta componente da Matemática encontra-se expressa em currículos de muitos países perspectivando-se, deste modo, mais valias na Educação Matemática e numa parte da sua intervenção sobre "Matemática-realidade como espaço de possibilidade" (p. 110) defendeu que as conexões criadas entre a Matemática e a realidade, representam uma oportunidade para construir "pontes" entre: a) a Escola e a vida que acontece para além das suas fronteiras; b) as diferentes áreas do saber, valorizando a sua complementaridade; c) o professor de Matemática e os seus pares.

Nesta dinâmica de interacção com o conhecimento matemático apela-se ao papel *mediador* do professor na implementação dos princípios orientadores da Matemática no ensino básico (Dacal, 1989). Espera-se sempre que o professor seja o principal aliado deste processo e que responda às alterações contínuas, com novas orientações curriculares e por vezes desconexas, desligadas da realidade escolar, necessitando de, para isso, despender um grande esforço para compreender as inovações, pois os actuais profissionais são produto de um velho currículo que desenvolveu neles crenças ou representações muitas vezes incompatíveis com as do novo currículo (Battista, 1994).

Ser professor, no enquadramento educativo actual, exige uma atitude de permanente actualização, valorização e intervenção capaz de melhorar práticas e provocar, de forma sustentada, o êxito pleno dos estudantes (Serrazina, 1998). É comummente aceite que o sucesso na Matemática não assenta apenas no cumprimento do programa escolar da disciplina, nem tão somente em cuidadosas planificações, mas alicerça-se em bons profissionais, como referiu Kindt (2004) numa entrevista concedida à investigadora no Institut Freudenthal (FI). Reconhece-se ainda que o desejado sucesso na disciplina, apoia-se também nas instituições, na organização escolar, no plano estratégico estabelecido, com enfoque para a formação em contexto, numa flexibilidade curricular que possa vir a legitimar e/ou aconselhar um trabalho intenso de âmbito interdisciplinar, fruto de um diálogo educativo promovido pelos professores e realizado, com os estudantes, nas salas de aula.

6. Abordagem Metodológica

Com base nos propósitos da investigação e tendo em vista a concretização dos objectivos delineados, os sujeitos directos da investigação foram estudantes de duas turmas, exactamente 49 estudantes no 6º ano de escolaridade, 25 na turma A e 24 na turma B, pertencentes a um agrupamento de Escolas da grande área metropolitana do Porto que foram acompanhadas desde o 2º ano de escolaridade (1998/99) ao 6º ano de escolaridade (2002/03). Estas duas turmas participaram, juntamente com outras, num projecto de âmbito interdisciplinar designado por: "Envolvências Geométricas I e II – A Geometria na cidade" (anexo 2), em que estavam integradas as disciplinas de Matemática, Educação Visual e Tecnologias de Informação e Comunicação. Pelas condições estabelecidas pelo Programa Ciência Viva só foi possível instalar um computador numa das turmas. Este projecto de âmbito interdisciplinar desenvolveu-se durante quatro anos em contexto longitudinal, desde a Educação de Infância, 1º, 2º e 3º Ciclos do Ensino Básico até ao ensino superior, passando por Jardins de Infância e Escolas do ensino básico do concelho de Valongo, Porto, Ílhavo, Gafanha da Nazaré e a Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico do Porto.

Assim sendo e conscientes das dificuldades da investigação no campo educativo, adoptou-se um percurso enraizado numa metodologia fundamentada no paradigma das ciências sociais, no qual os princípios de actuação prendem-se com o respeito pelo sujeito, numa busca reflexiva de permanente autenticidade, rigor e objectividade. O estudo relaciona-se com o todo do sujeito, enquanto *ser aprendente* e, nesta perspectiva, Myers (1997) refere que a mais pertinente apropriação filosófica da investigação educacional localiza-se no princípio epistemológico que guia a investigação, relacionada com o conhecimento e como pode ser obtido.

Nesta abrangência de actuação, simultaneamente linear e complexa, agravada pela multiplicidade de factores que envolvem a investigação adoptou-se uma abordagem de tipo qualitativa (Bogdan e Biklen, 1994). Com a preocupação de entender o desempenho individual e de grupo, numa perspectiva metacognitiva do conhecimento fez-se a opção pelo ´estudo de caso´ de duas turmas, com liames à investigação-acção, prevendo-se o desenvolvimento de tarefas contextualizadas e estratégias similares nas duas classes, tendo sido utilizado o computador numa delas. O estudo de cariz essencialmente qualitativo, mas quantificado, sempre que possível, procurou problematizar a aquisição e desenvolvimento de competências pré-algébricas na matemática em contexto e de âmbito interdisciplinar com utilização ou não do computador, com particular enfoque para a folha de cálculo.

Neste “paradigma interpretativo” a investigação acontece no seu enquadramento natural e preocupa-se com “o significado marcadamente humano na sala de actividades, com as questões emergentes e não apenas com as questões meramente mecanicistas” (Vasconcelos, 1997, p. 351).

Apesar das limitações da investigação, relacionadas essencialmente com o número de sujeitos, os instrumentos de recolha de dados e as condições de aplicabilidade, entre outras, pretendeu-se, através da análise qualitativa e, sempre que possível e necessário, com a recolha e análise de dados quantificáveis, averiguar da existência de alguns indicadores ao nível do *processo* e do *produto*, relacionados com a aquisição e aprofundamento de conceitos pré-algébricos. Assim, a investigação procurou analisar factores que intervêm no processo aprendizagem-ensino da Matemática, focalizando a atenção para um *continuum* das aprendizagens numéricas às algébricas, nos dois primeiros ciclos, concretamente, do 2º ao 6º ano de escolaridade, capaz de optimizar estratégias e materiais próprios na resolução de tarefas matemáticas, de modo a valorizar os saberes específicos, globais e integrados.

Para desenvolver a experiência investigativa referida em ambiente de sala de aula foram utilizados e aplicados diversos instrumentos de recolha de dados nos diferentes anos de escolaridade, entre os quais se destacam: questionários, entrevistas, gravações áudio e vídeo, blocos de notas, apreciações escritas realizadas pelos estudantes e professores, resultantes da resolução de vários problemas e de outras tarefas e um teste de avaliação, na versão pré e pós-teste, concretizado no 6º ano de escolaridade.

7. Organização da Tese

A parte escrita deste estudo integra, para além deste primeiro capítulo, mais quatro, sendo o segundo o da revisão da literatura, que fundamenta a temática da investigação, o terceiro da metodologia, o quarto da análise dos resultados, integrando também as teses de investigação e, por último, o capítulo destinado à apresentação das conclusões, implicações do estudo, limitações e identificação de algumas recomendações, com a apresentação final das referências bibliográficas.

O segundo capítulo da revisão da literatura engloba os pressupostos educativos na construção do conhecimento; Educação Matemática, aprendizagem, cultura e a importância dos computadores nas aprendizagens; orientações curriculares, focalizadas para a matemática em contexto e de âmbito interdisciplinar, numa perspectiva de educação para cidadania e as aproximações à álgebra, orientadas para a emergência dos fundamentos conceptuais e didácticos. Nos pressupostos educativos procura-se aprofundar a vertente educacional, com enfoque para os diversos paradigmas relacionados com a construção do conhecimento. Na Educação Matemática procura-se estudar diferentes assuntos considerados cruciais para a investigação: a importância do contexto e as implicações do trabalho de âmbito interdisciplinar na resolução de tarefas matemáticas, bem como a contribuição do ambiente tecnológico na construção e desenvolvimento de conceitos algébricos. Procura-se ainda aprofundar as implicações desta perspectiva de aprendizagem na componente curricular, numa vertente cultural e funcional do conhecimento.

No capítulo da Metodologia explicita-se a natureza do estudo, justificam-se as opções metodológicas tomadas no âmbito do debate do paradigma actual da investigação educacional, identificam-se as etapas do estudo, apresentam-se os participantes e o contexto, com a caracterização das duas turmas – ´Caso´, descrevendo-se os instrumentos utilizados na recolha de dados e, por último, explicita-se o tratamento de dados. Este capítulo encontra-se, assim, estruturado em seis partes: a) introdução; b) natureza do estudo; c) planificação – etapas da investigação; d) contextualização; e) instrumentos de recolha de dados; f) tratamento de dados.

No quarto capítulo são apresentados, analisados e discutidos os dados obtidos: processos e produtos baseados na resolução de problemas, actividades de investigação e projectos desenvolvidos em contexto interdisciplinar, bem como os alcançados na resolução do teste de avaliação, na versão pré e pós-teste. A análise qualitativa baseou-se ainda na observação directa e participante da investigadora nas aulas, num *continuum* de registo e de diálogo com os estudantes e professores. Através dos vários instrumentos de recolha de dados procurou-se seleccionar, compilar e inter-relacionar a informação disponível de modo a elaborar e fundamentar as teses da investigação e, sempre que possível, tentar prosseguir orientações para a aprendizagem de conceitos algébricos, tentando responder, de forma reflectida, às questões da investigação.

Termina-se este estudo com o quinto capítulo pela apresentação de conclusões organizadas em domínios considerados essenciais, com a explicitação das implicações didácticas e curriculares, bem como a identificação das limitações e das recomendações da investigação, assinalando-se, por último as referências bibliográficas.

Para acompanhar e aprofundar a análise dos resultados foram elaborados os anexos onde se incluem vários elementos e resultados complementares do estudo.

CAPÍTULO II – REVISÃO DA LITERATURA

1. Introdução

No capítulo anterior identificou-se o problema, definiram-se os objectivos, delinearam-se as questões da investigação e, neste segundo capítulo, fundamenta-se teoricamente o estudo. Este enquadramento teórico situa-se numa pesquisa aprofundada *a nível conceptual* e *a nível pedagógico*, respectivamente, na definição de termos e na fundamentação das opções didácticas baseadas, naturalmente, nos resultados já alcançados por investigadores, especialistas, centros de investigação e associações com responsabilidades na definição dos princípios orientadores da Educação Matemática.

Deste modo, aprofundou-se a vertente teórica com base numa pesquisa bibliográfica orientada por diferentes conteúdos e perspectivas da comunidade científica que permitisse compreender melhor e da forma mais completa possível o tema em análise. Assim, estudaram-se os pressupostos e as teorias da educação que fundamentam a construção do conhecimento e, posteriormente, orientou-se a pesquisa para a Educação Matemática analisando-se os princípios, a aprendizagem e a cultura matemática em contexto e de âmbito interdisciplinar, bem como os aspectos curriculares e o papel do professor nesta dinâmica interactiva. Numa perspectiva pedagógica mais ampla também se explicitaram as experiências de aprendizagem e aprofundou-se a importância do computador no ensino da Matemática, com particular destaque para a folha de cálculo no ensino da Álgebra. Por último, explorou-se o domínio da Álgebra, focando as diversas aproximações à álgebra e as respectivas propostas de intervenção educativa.

2. Pressupostos Educativos

2.1. Enquadramentos

É comummente aceite que o processo de aprendizagem-ensino é altamente condicionado pela compreensão que se tem dos processos subjacentes aos fenómenos de transmissão e apropriação dos conhecimentos e simultaneamente das dinâmicas desenvolvidas endogenamente pelo indivíduo a partir das interacções sociais estabelecidas (Vygotsky, 1979, 1993, 1995; Wenger, 1998; César, 2000). Os trabalhos actuais sobre os mecanismos psicossociais das construções cognitivas localizam-se numa perspectiva Vygotskiana do desenvolvimento humano, segundo a qual este não resulta exclusivamente da interacção sujeito/objecto, mas de um paradigma ternário, em que se consideram os factores de ordem social, como elementos fundamentais do desenvolvimento da actividade humana. Cada vez mais "a essência da Educação está na componente humana e social e também na contextualização reconhecendo-se que, neste domínio, as preocupações com a componente contextual são antigas, mas sofreram forte reforço no último século, com as contribuições de John Dewey" (Figueiredo, 2002, p. 59).

Na tentativa de compreender o acto educativo nas diversas componentes e de acordo com os objectivos do estudo procurou-se diferenciar e complementar as bases teóricas fundamentadas nas perspectivas de vários autores, directamente envolvidos (ou não) com trabalhos ou investigadores na área da Matemática, entre os quais se destacam: Piaget (1965, 1975); Bruner (1983, 1985, 1990) e o construtivismo; Vygotsky (1979; 1993; 1995) a teoria da actividade e da aprendizagem social; Lave (1988-1997); Lave e Wenger (1991-2002) e a abrangência situada na cognição e na aprendizagem social participada; Ausubel (1963) e Gagné (1977), na aprendizagem significativa e na hierarquia do conhecimento; Shoenfeld (1985) numa abordagem da aprendizagem da Matemática enquanto procura de um sentido matemático na resolução de problemas, adaptando-se também os estudos de Vergnaud (1982; 1986) com a finalidade de realizar uma análise estrutural dos enunciados, das situações e dos procedimentos utilizados pelos estudantes. Numa perspectiva contextualizada e funcional do conhecimento matemático aprofundou-se ainda a filosofia de Educação Matemática designada por "Realist Mathematics Education" (RME) (1980-2004) com génese na Universidade de Utrecht, desenvolvida por investigadores do Freudenthal Institut (FI).

Deste modo, num contexto de aprendizagem dinâmica e inter-relacional os pressupostos educacionais assentam sobre orientações pedagógicas precisas que se enunciam nos três parágrafos seguintes.

O *conhecimento é construído pelo sujeito, na interacção com o objecto e com o mundo* que o rodeia – físico e social. Nesta perspectiva, dois aspectos são de importância fulcral: a situação de partida do sujeito face ao problema a tratar e a relevância para o sujeito desse mesmo problema (Piaget, 1965; Vygotsky, 1979, 1993, 1995; Vergnaud, 1981, 1982, 1986, 1990; Bickhard, 1992; Becker, 2001, 2003).

O desenvolvimento cognitivo faz-se pelo *alargamento do reportório dos esquemas/rotinas* que o sujeito operacionaliza, aliado à capacidade de criar novos esquemas/rotinas sempre que este perceba que nenhum dos já conhecidos lhe permita resolver um novo problema (Vergnaud, 1982, 1990). Por outro lado, *o erro e a tomada de consciência pelo sujeito das causas que a ele* levam é um importante aspecto do desenvolvimento cognitivo, para que este sinta a necessidade de construir novos mapas conceptuais e esquemas/rotinas e se esforce por contrariar a natural tendência para um funcionamento por "deslizamento" considerando situações isomorfas que, por vezes, o não são (Vergnaud, 1989, 1990; Bickhard, 1992; Novak, 2000).

Na Escola, o professor tem um importante papel de líder e de *encenador da cena didáctica*, como proponente de situações de aprendizagem significativas – sob o duplo aspecto da *motivação* e do *desenvolvimento* e como mediador entre aquilo que o estudante é capaz de fazer relativamente ao problema proposto e o enriquecimento cognitivo que o professor tem em vista. Neste sentido a *intencionalidade* é um aspecto importante da actuação do professor (Vygotsky, 1979, 1993, 1995; Bruner, 1983, 1985, 1990; Vergnaud, 1990). Para o professor desempenhar cabalmente o seu papel, para além das competências gerais de inteligência precisa de demonstrar aptidões ao nível da componente da personalidade, nomeadamente, ao nível da capacidade de relacionamento interpessoal, de comunicação e acção e, simultaneamente, revelar *uma clara representação do conteúdo da aprendizagem*. Isto significa que, para além de dominar os saberes e saberes-fazer, bem como a função de organização do conhecimento, o professor deve ter consciência dos caminhos pelos quais o estudante se apropria progressivamente na exploração de um determinado conteúdo. A par desta qualificação abrangente, o professor tem ainda de dominar uma outra competência mais específica: de saber gerir os processos de aprendizagem, com os estudantes "*in loco*" - avaliando as várias hipóteses de intervenção, ou abstenção, de forma adequada ao momento, a nível verbal, gestual, de registo informal ou formal, bem como as questões a colocar ou não na construção de um determinado conceito ou na resolução de certos problemas (Vergnaud, 1990).

2.2. A Educação como Campo Conceptual e de Interacção Social

2.2.1. Construção individual do conhecimento

Sob o ponto de vista do *construtivismo* a aprendizagem é um processo activo construído pelo sujeito em que o conhecimento anterior é incorporado na criação do novo conhecimento (Piaget, 1965; Bruner, 1990), pela acção da *assimilação* e da *acomodação* (Piaget, 1965). Todavia, outros autores (Vygotsky, 1979; Resnick, 1987a, 1987b; Brown, Collins e Duguid, 1988; Gravemeijver, 1990, 1991, 1994, 2000, 2004; Kindt, 2004; Reeuwijk, 2004) acrescentam que a aprendizagem é um processo interactivo que depende também do contexto. Numa perspectiva filosófica do conhecimento e da aprendizagem, segundo Jaworski (1994), o construtivismo não deve ser considerado como uma pedagogia, mas como uma teoria que tem intervindo no campo da educação e tem oferecido muito à Educação Matemática. Becker (2001) comunga desta posição e defende que o construtivismo não é uma técnica de ensino, nem tão pouco uma forma de aprendizagem, nem sequer um projecto escolar, é uma teoria que permite interpretar o mundo em que se vive, além de nos situar como sujeitos desse mundo e "(re)interpretar todas aquelas coisas, jogando-nos para dentro do movimento da história – da humanidade e do universo" (p. 72).

Por outro lado, o construtivismo parece ter mais relevância, hoje em dia, devido à sociedade de informação, dado que esta se desenvolve a ritmos velozes e são disponibilizados cada vez mais dados, junto de todos os indivíduos para estes relacionarem a informação recebida e elaborarem o novo conhecimento (Anderson, 1992; César, 2000). Consequentemente, a construção do conhecimento parece tornar-se mais complexa, requerendo orientações precisas e credíveis para seleccionar a informação relevante e incorporar significativamente o novo conhecimento. Tendo o construtivismo derivado dos estudos de psicologia genética desenvolvidos por Piaget, os quais tiveram grande influência na educação em geral e, em particular, no ensino da Matemática, ficam-lhe associados dois princípios: a) o conhecimento não é passivamente recebido, mas activamente construído cognitivamente pelo sujeito; b) a função da cognição não se limita a uma atitude de descoberta face a uma realidade ontológica, mas é adaptável e acompanha a organização das experiências realizadas pelo indivíduo no mundo real (Piaget, 1975). Orton (1987) salienta que o trabalho de Piaget tem sido interpretado pela capacidade da criança aprender de forma gradual, lentamente, passando por vários estádios, através do qual o processo de abstracção alicerça-se no envolvimento efectivo de situações concretas.

Piaget cria, assim, uma noção básica, assumindo novo quadro de referência, ainda hoje partilhada pela maioria dos investigadores que actualmente trabalham na educação: as capacidades não estão definidas à partida. Isto significa que os sujeitos nascem com potencialidades que vão ou não emergindo ou vão sendo actualizadas, cabendo ao meio social um papel fulcral no seu desenvolvimento (César, 2000). Vários conceitos aparecem na teoria piagetiana particularmente importantes para a aprendizagem, estando um deles ligado à necessidade do sujeito desejar saber mais sobre o objecto que já é conhecido e que, segundo os seus princípios epistemológicos, são precisas aproximações sucessivas para o aprender. De acordo com este processo Piaget (1965, 1975) defende a existência de dois tipos de motivação: a afectiva e a cognitiva, através das quais o estudante retira prazer intrínseco e extrínseco, sendo este último de carácter social. Também os neurobiólogos Caldas e Reis (1999) defendem que a satisfação pessoal e o prazer que se tira da aprendizagem intervém favoravelmente na consolidação dos conhecimentos. Como para Piaget (1965) o conhecimento resulta das acções do sujeito sobre os objectos, através de processos de assimilação e acomodação, César (2000) defende que esta conceptualização arrasta efectivamente uma escolha metodológica em que o papel social na aprendizagem não é descurado, pois se tal não fosse, as preocupações de Piaget com a comunicação não teriam razão de existir. Na construção do conhecimento "no momento de mediação das fases de assimilação e acomodação o indivíduo passa por um período de *desequilíbrio*, mais ou menos longo, mais ou menos conturbado, principalmente porque o *novo conhecimento* entra em confronto com o anteriormente acomodado" (Cabrita, 1996, p. 128). É neste período de "confusão intelectual" que muitas vezes o estudante tem um desempenho inferior, em tarefas que, muitas vezes, já resolvia com alguma destreza e eficácia. Todavia, tal *desequilíbrio* desvanece quando o indivíduo rejeita o conhecimento anterior e o substitui pelo novo ou consegue conciliar e conviver de forma saudável com os dois ou ainda quando o anterior prevalece, rejeitando o novo conhecimento.

Piaget também admite a noção de conflito cognitivo interno na construção do conhecimento e o confronto com os pontos de vista diferentes do outro de modo a produzir a aprendizagem. Esta ideia é corroborada por Palangana, Galuch e Sforni (2002), pois defendem que normalmente a Escola não dedica atenção a estes dados, com perda para a eficiência do ensino, pois normalmente as capacidades dos estudantes são testadas pela repetição de conceitos, tal como lhe foram ensinados, não sendo criadas condições para o estudante falar, argumentar, provocando-lhe conflitos internos, dando possibilidades ao jovem de pensar e escrever cientificamente, realizando análises e sínteses, numa época vocacionada para uma sociedade da informação, na qual se defende ferozmente que os indivíduos precisam de "pensar"- considerada como a capacidade de característica eminentemente humana. Na teoria da aprendizagem com significado, Ausubel (1954; 1963) defende também a necessidade dos conflitos do significado ("cognitive dissonance") para que aconteça aprendizagem.

Numa abordagem de cariz epistemológico Becker (2003) inclui também explicitamente uma "nova" componente na origem do conhecimento, ao reconhecer que o conhecimento matemático não acontece apenas no plano das acções lógico-matemáticas, mas integra-se ainda "no disparador da acção: a afectividade" (p. 19). Também António Damásio (2000; 2003), neurocientista de renome mundial, defende a existência de uma estreita relação entre o conhecimento e a emoção, considerando a emoção, em si meso, um conhecimento e uma componente crucial e mobilizadora do comportamento racional. De acordo com César

(2000) a teoria de Piaget (1965) comporta também no esquema de assimilação uma estrutura (aspectos cognitivos) e uma dinâmica (aspecto afectivo), mas sob formas inseparáveis e indissociáveis. Para Moura e Sousa (2003) a Educação Matemática pressupõe a realização de um encontro pedagógico com o conceito, de forma que os

professores e os estudantes possam compor um movimento afectivo de entendimento de si mesmos, das coisas e dos outros ao (re)criarem os conceitos científicos em suas subjetividades. A partir desse pressuposto, entende-se que o movimento afectivo constitui-se, na sala de aula, como factor mobilizador do conhecimento enquanto educador-estudante-conceito e mantêm-se sob uma determinada "tensão criativa" (Caraça, 1989).

2.2.2. Construção social do conhecimento

Os autores neo-piagetianos, já influenciados pela teoria de Vygotsky (1979), ampliaram a noção de aprendizagem proposta por Piaget, passando a falar não apenas de conflito cognitivo, mas de conflito sócio-cognitivo, pois existe a necessidade do sujeito se descentrar das suas próprias conjecturas e estratégias de resolução para ser capaz de apreender as dos outros, num processo não apenas gerido a nível cognitivo, mas também por outros factores intervenientes no complexo processo da aprendizagem (César, 2000). Seguindo este propósito, já em 1992, De Lange defendia que, na matemática em contexto o professor disponibiliza "excelentes pontos de partida para a discussão, resultando em conflitos socio-cognitivos" (p. 311), mas que estas situações deveriam também estar conectadas com as condições de desenvolvimento previstas e tratadas ao nível do currículo.

Entretanto, no ocidente, a partir dos anos 60, Vygotsky começou a ter um papel fundamental na defesa da aprendizagem humana, considerando-a como uma natureza especial social e um processo pelo qual a criança cresce intelectualmente em interacção com os outros que a rodeiam, na qual as influências sociais, linguísticas e, em particular, o papel do professor ocupa um lugar primeiro e determinante no processo educativo (Lloyd e Wilson, 1998). Os níveis de generalização numa criança correspondem estritamente aos níveis de desenvolvimento de interacção social e qualquer novo nível na generalização significa um novo nível na possibilidade de interacção social (Vygotsky, 1995). A criança ao iniciar as aprendizagens na Escola, ingressa nesta instituição trazendo consigo inúmeras e variadas experiências e saberes apreendidos, no seu dia a dia, com os seus familiares e outras pessoas ou entidades (Piaget, 1965; Vygotsky, 1993, 1995). Estes conhecimentos prévios são espontâneos, basicamente sensoriais[11] (Piaget, 1965) e especialmente apreendidos de forma não organizada. Assim, espera-se que a Escola saiba proporcionar ao estudante formas de mobilizar saberes anteriores e aprendidos nas vivências exteriores à Escola para criar novo conhecimento e desenvolver o saber de maneira organizada, gradualmente orientado para um sistema de inter-relações conceptuais e coerente. Tal aprendizagem exige operações mentais complexas que canalizam a consciência do próprio conceito, ao acto de pensar, ou seja, o conhecimento desvincula-se do objecto particular para se evidenciar num plano de relações particulares para a generalidade (Vergnaud,

[11] A que Piaget apelida de "*reflexão simples*".

1989a, 1990). Este autor defende que no âmbito da educação escolar promove-se a evolução do conhecimento de forma organizada para que, por meio do saber científico, a criança apreenda a realidade sócio-cultural, descubra concepções, construa conceitos, adquira habilidade para abstrair, relacionar, generalizar e deduzir.

Zona Proximal de Desenvolvimento (ZPD). Num quadro de evolução conceptual Vygotsky (1993) descreve dois níveis de desenvolvimento: *nível real*, que equivale a conceitos, valores, regras e funções já estabelecidos e o *nível potencial*, que diz respeito a esses mesmos processos, porém, em formação. No primeiro nível, o sujeito é auto-suficiente no seu desempenho, enquanto que no segundo requer apoio, orientação. No que diz respeito às interacções sociais, este autor cria o conceito de "zona de desenvolvimento proximal" (ZPD). Esta foi definida como a diferença entre o que uma criança pode realizar sem ajuda na resolução de um problema e o que pode conseguir com a ajuda e apoio de alguém. Vygotsky argumenta que a actividade socialmente suportada na zona de desenvolvimento proximal despoleta e fornece pistas para o desenvolvimento intelectual, tornando-se particularmente importante quando se pensa na educação. Também para Rogoff e Wertsch (1984) o sujeito tem um conjunto de funções ou capacidades que já se encontram plenamente desenvolvidas e que constituem aquilo que ele designa por "desenvolvimento real". Todas as aptidões que fazem parte do desenvolvimento real são susceptíveis de serem usadas pelo sujeito quando trabalha individualmente. Porém, o sujeito possui também um "desenvolvimento potencial", constituído por aptidões em fase de amadurecimento que ele consegue mobilizar com pares mais competentes, quando trabalha em inter-acção. Segundo esta teoria a zona ZPD procura mediar entre o desenvolvimento real e o potencial e é precisamente para esta zona que era aconselhável os professores trabalharem com os estudantes. "O professor exerceria o papel de par mais competente, levando o estudante a aprender mais do que ele conseguiria aprender se resolvesse as tarefas individualmente" (César, 2000, p.19) e como Vygotsky considera o desenvolvimento uma função da aprendizagem os professores estariam a contribuir para o desenvolvimento qualitativo e substancial do estudante. Neste campo conceptual, Vygotsky defende que o ensino só se justifica se for capaz de interferir e produzir a formação de novas capacidades no estudante, principalmente de análise (abstracção) e síntese (generalização) de forma reflectida, compreendida e estruturada.

Da palavra ao conceito. Quando uma criança aprende uma palavra ela faz uma primeira generalização, mas do tipo mais primitivo, e à medida que o intelecto se desenvolve, o processo de elaboração mental torna-se cada vez mais complexo, chegando-se mesmo à formação dos verdadeiros conceitos (Vygotsky, 1995). A construção dos conceitos ou do significado das palavras pressupõe o desenvolvimento de muitas funções intelectuais, entre as quais se destacam: atenção deliberada, memória lógica, abstracção, capacidade para comparar e diferenciar. "A experiência prática mostra também que o ensino directo de conceitos é impossível e infrutífero. Um professor que tenta fazer isso geralmente não obtém qualquer resultado, excepto o verbalismo vazio, uma repetição de palavras pela criança, semelhante à de um papagaio, que simula um conhecimento dos conceitos correspondentes, mas que na realidade oculta um vácuo" (Vygotsky, 1995, p. 71-

72). Os conteúdos que a criança adquire nas interacções, contraídas com adultos ou os seus pares, faz com que ela os utilize para organizar e reorganizar as suas acções, contribuindo para que surjam novas e/ou completem outras características psicológicas e conceptuais (Vygotsky, 1993, 1995). As acções mentais que se formam na criança por meio das actividades cognitivas inter-individuais entre crianças e adultos têm a génese nas comunicações verbais, ou seja, pelas situações que provocam diálogos com perguntas e respostas em que envolvem a percepção, a memória, o raciocínio que "se transformam, aos poucos, em acções intra-individuais, constituindo-se como ponto de apoio para a próxima aprendizagem" (Palangana, Galuch e Sforni, 2002, p. 120). Para estes autores, quando um conteúdo é ensinado não significa que o estudante simplesmente repita palavras sem compreender o que está dizendo. Estes investigadores e Rodrigues (1998) defendem que a finalidade é levar o estudante a reelaborar, a atribuir significados com diferentes palavras e com um vocabulário que lhe pertença, sem deixar de expressar os significados essenciais, de modo coerente com a realidade e cientificamente correctos. De acordo com estes investigadores, a aprendizagem vai além da apropriação de um conteúdo específico, pois significa, especialmente, o desenvolvimento das capacidades cognitivas que possibilitam a acção conceptual sobre o conhecimento reelaborado.

Seguindo estas referências teóricas Jaworski (1994) coloca várias questões acerca do que é "a boa aprendizagem", como se estabelece a interacção com o professor e o sujeito aprendente e qual a natureza do ensino, isto é, como este é "nutrido". Von Glasersfeld (1987, citado por Jaworski) refere que na educação e na investigação nesta área adoptar apenas a perspectiva construtivista tem "respeitáveis" consequências, pois: a) tenderá a haver uma radical separação entre procedimentos educacionais que têm como objectivo a generalização da *compreensão* ("ensino") e aqueles que têm meramente como objectivo a *repetição de comportamentos* ("treino"); b) focar-se-á no que poderá ser inferido do "*inside*" do pensamento do estudante do que nas "respostas claras" apresentadas por ele; c) poderá inferir-se que o conhecimento não deverá ser "transferido" para o estudante através da comunicação e que a linguagem pode ser usada apenas como uma ferramenta num processo para guiar e acompanhar a construção do pensamento da criança; d) tenderá a manter-se o ponto de vista dos estudantes em vez de se tentar alcançar o "*make sense*" partilhado na sua experiência com o mundo que os rodeia; e) poderá conduzir para o desenvolvimento do ensaio (experiência, prova), numa extensão do método clínico usado por Piaget, cujos objectivos não é só inferir sobre as concepções e as operações estruturais, mas também encontrar caminhos e significados de transformação e aplicação diferenciadas. Este investigador conclui a sua análise referindo que para apoiar e facilitar o processo de aprendizagem, o professor deve compreender a estrutura conceptual do estudante e não apenas aquela que afecta o seu comportamento. Segundo Jaworski (1994) o terceiro ponto de von Gllaserfeld chama a atenção para a necessidade de se usar o poder da linguagem para apoiar os estudantes nas aprendizagens e, por outro lado, no quarto aspecto as actividades desenvolvidas na classe devem *fazer sentido* para o estudante. Esta é também a palavra-chave ("*make sense"*) do trabalho em desenvolvimento no Instituto Freudenthal (FI), pois insistem na vertente da exploração de tarefas matemáticas "realistas" que *façam sentido* para a criança (investigadores do FI: Freudenthal, De Lange, Gravemeijer, Drijvers, Kindt, entre outros, 1973-2004); Thirion (1999) e, deste modo, se possa facilitar a construção significativa dos conceitos.

2.2.3. Construção situada e participada do conhecimento

Lave e Wenger (1991-2002) procuram "lançar o desafio de se repensar o que significa aprender, em vez de se repensar sobre o que significa compreender" (p. 15). Para isso, os autores convidam-nos a realizar uma leitura atenta sobre os estudos de âmbito cognitivo, sócio-linguístico, da análise do discurso, no qual tratam os significados verbais como produtos de oratória na interpretação das actividades realizadas e não somente como conteúdo linguístico. Defendem ainda que existe um elemento comum como premissa do significado, da compreensão e da aprendizagem, definidos relativamente a contextos activos e não intrínsecos a uma dada estrutura. "A aprendizagem é um processo participado e construído e não é apenas um processo mental" (Lave e Wenger, 1991-2002, p. 15). Estes autores defendem o conceito de *aprendizagem situada*, em certas formas de participação social, de cooperação e não apenas como um acto individualizado. É um processo comunitário cuja definição do termo "aprender" emerge de actos participativos numa aprendizagem em contexto. Neste processo de *produção* e de *bricolage* intelectual e manual, as aptidões relevantes construídas na aprendizagem em contexto transportam-se e integram-se noutros contextos.

Nesta perspectiva "a aprendizagem é vista como uma actividade situada definida por uma característica fulcral a de *participação periférica legítima* (*legitimate peripheral participation)*" (Lave e Wenger, 1991-2002, p. 29). Isto significa que o aprendente participa em comunidades e inevitavelmente o conhecimento e as aptidões requerem a participação sócio-cultural do indivíduo e da comunidade. Reconhecem que a Escola é um lugar de contextos específicos, "lugar de contrastes e de prática social" (Lave, 1988-97, p. xiii) onde a aprendizagem em si mesma, "assume formas específicas educacionais para o futuro" (Lave e Wenger, 1991-2002, p. 40). Ao enfatizarem a *participação periférica legítima* não a encaram como uma forma educacional, nem tão pouco como uma estratégia pedagógica ou técnica de ensino, mas antes de tudo, como um percurso de análise e de aprendizagem significativa, na qual se providencia um contexto para aprender. Segundo estes autores as teorias de aprendizagem são baseadas em concepções fundamentais acerca da pessoa, do mundo e das relações e têm uma dimensão de prática social (Lave e Wenger, 1991-2002). Na verdade, os autores acreditam que o conceito de *legitimate peripheral participation* providencia uma construção, em que emergem as teorias da actividade situada e as teorias da produção e reprodução dos conhecimentos. Usualmente estas teorias são tratadas separadamente, mas agora devem ser estudadas e exploradas de forma integrada, desenvolvendo relações, alterando identidades, promovendo conhecimentos e aptidões de acções em comunidades, numa actividade engajada no dia a dia e em que os estudantes reconheçam que a Matemática pode beneficiá-los na resolução de problemas do seu quotidiano (Shannon, 1995; Reeves, 2000).

Esta teoria de prática social "enfatiza a interdependência das relações da pessoa, com o mundo, a actividade, o significado, a cognição, a aprendizagem e o conhecimento" (Lave e Wenger, 1991-2002, p. 50). Com esta visão objectiva, a aprendizagem, o pensamento e o conhecimento são relações entre as pessoas na sua actividade, cuja participação é sempre baseada numa negociação situada e renegociação desse significado na sociedade. (Lave e Wenger, 1991-2002, p. 51). O *legitimate peripheral participation* é entendido como uma ponte conceptual entre os processos comuns inerentes à transformação de pessoas e das práticas das comunidades. Deste modo, "A aprendizagem nunca pode ser simplesmente um processo de transfer ou de assimilação" (Lave e Wenger, 1991-2002, p. 57). "O conceito de *legitimate peripheral participation* arrasta uma multiplicidade de significados, teoricamente generalizáveis, inter-conexões com pessoas, actividades, saberes e o mundo em geral e a exploração destas ligações, em casos específicos, providenciam um caminho de prática" (Lave e Wenger, 1991-2002, p. 121). A aprendizagem situada defendida por estes dois autores é caracterizada pela participação, na qual tomam significado estas trajectórias de conhecimento situadas no mundo social. Dos estudos matemáticos realizados na actividade do dia a dia com diferentes pessoas, no campo da aritmética e expostos no livro "cognition in practice" Lave (1988-97) defende que o ensino da Matemática deve relacionar-se com o nosso dia a dia, mas questiona-se como pode ser concretizado este desiderato, que tipo de implicações escolares, individuais e sociais podem advir e ainda como podem ser transferidos esses saberes da Escola para a vida e vice-versa.

Aprendizagem Social. Wenger (1998), autor americano que realizou vários trabalhos individuais e em parceria com Lave sobre a aprendizagem situada e a criação de comunidades de aprendizagem deu, no século XX, um contributo significativo na compreensão das relações estabelecidas no campo destas teorias sociais da aprendizagem que, em parte, a figura seguinte ilustra.

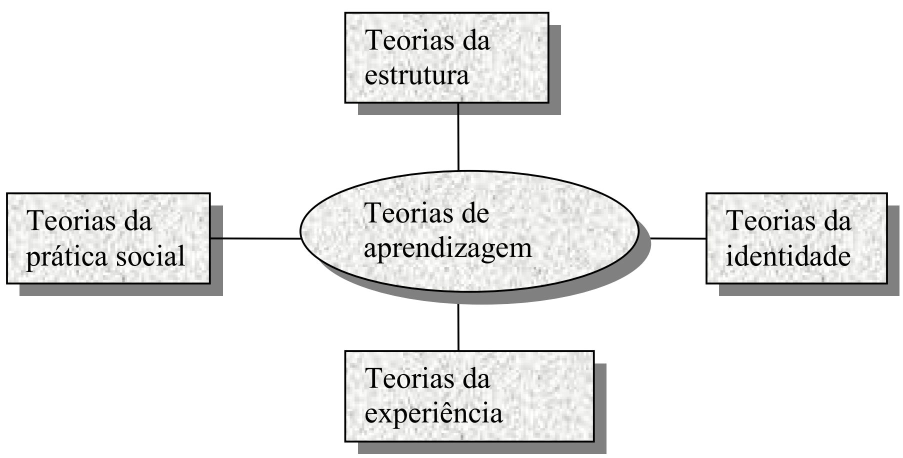


Figura 2: Os dois eixos das teorias da aprendizagem social, propostos por Wenger (1998)

Segundo Wenger (1998) as teorias sociais da aprendizagem, que ajudam a compreender a aprendizagem em comunidade (figura anterior) constroem-se na interacção entre os dois eixos: a) *um eixo vertical* que inclui as teorias que privilegiam a estrutura social (instituições, normas, regras, sistemas, culturas, história) e as que se dedicam a acção (dinâmicas relacionais, improvisação, coordenação, actividades); b) *um eixo horizontal* que procura interligar as teorias da prática social (coordenação e partilha de recursos em sistemas sociais) com as teorias da identidade (formação social da pessoa, pertenças, ritmos de passagem, categorias sociais). Segundo este autor surgem inúmeras combinações possíveis entre as teorias referidas, havendo a possibilidade de bissectar estes eixos por outros dois eixos, um deles ligado às teorias da colectividade (globalidade, localidade, coesão social) e da subjectividade (a experiência da subjectividade construída no mundo social) e outro, na direcção da diagonal secundária, relacionados com o poder (conciliadas diversas formas de poder) e as teorias do significado (construção de sentidos na participação social e nas relações de poder). Neste *continuum* de interacções e combinações Wenger (1998) considera que existem quatro componentes da teoria social da aprendizagem (Figura 3): a) *significado*, que traduz a capacidade e necessidade de encontrarmos um sentido para o mundo, ou seja, um sentido para a nossa existência individual e colectiva; b) *prática*, que exprime a vivência partilhada de recursos e perspectivas, o "aprender fazendo" defendido por Celestin Freinet, nos anos sessenta; c) *comunidade*, onde se definem as nossas iniciativas e a nossa participação é reconhecida; d) *identidade*, pela qual surge a forma como nós somos e construímos o conhecimento, através do processo de aceitação e criação da nossa própria identidade.

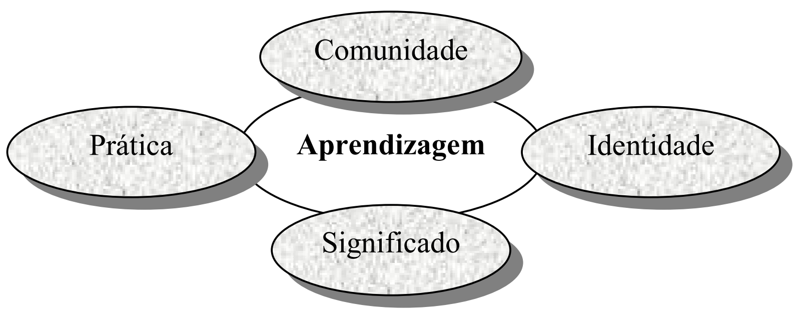


Figura 3: Componentes de uma teoria social de aprendizagem (Wenger, 1998)

Este autor considera ainda que para a concepção do contexto na teoria social da aprendizagem concorrem a participação/reificação[12]; a localidade/globalidade; o planeamento/emergência e a identificação/negociabilidade.

Apesar de nesta sociedade democrática existirem tentativas práticas de respeitar o indivíduo como ser pensante, Figueiredo (2002) refere que o funcionamento das nossas Escolas e dos próprios processos educativos de hoje remontam ainda ao século XIX, no período de desenvolvimento pleno da sociedade industrial. Acrescenta ainda que a imagem que a inspira é a metáfora da máquina, onde a perfeição era atingida, com o homem a operar como uma máquina. Perseguindo-se esse ideal de perfeição, as fábricas transformaram-se em máquinas e os trabalhadores em peças dessas máquinas, como tão bem retratou Charlie Chaplin no seu famoso filme "Tempos Modernos". Neste ambiente

[12] Abrantes, Serrazina e Oliveira (1999) clarificam o conceito de *reificação* associando-o a um processo ou procedimento entendido como um objecto mental.

mecanicista, onde os princípios mecanicistas do taylorismo[13] emergem, o estudante-peça-de-máquina que aprendia isolado, inserido numa classe de outros estudantes-peças-de-máquina, igualmente isolados e, em solidão, era avaliado, num sistema onde o instinto de entreajuda era entendido como batota, numa comunidade que se tornava individualista, pois era penalizado quem o não fosse. Hoje em dia, nos ambientes em rede, "os estudantes-nós-de-rede, membros de comunidades, sentem que a construção do seu conhecimento é uma aventura colectiva, onde constroem os seus saberes, mas onde contribuem, também, para a construção dos saberes dos outros" (Figueiredo, 2002, p. 41). Acrescenta ainda que o grande desafio da Escola do futuro é o de criar comunidades ricas de contexto onde as aprendizagens individuais e colectivas se construam e onde os aprendentes assumam a responsabilidade, "não só da construção do seu próprio saber, mas também da construção de espaços de pertença onde a aprendizagem colectiva tem lugar" (p. 42).

2.3. Construção do Conhecimento Matemático

2.3.1. Campos conceptuais, relações epistemológicas e semióticas

Um campo conceptual define-se como um conjunto de situações-problema, cuja resolução implica conceitos, procedimentos e representações de diversos tipos, mas em estreita conexão com domínios complementares (Vergnaud, 1981, 1982, 1986, 1990), como acontece, por exemplo, com as estruturas multiplicativas que requererem estruturas aditivas ou uma representação cartesiana.

Para Vergnaud o desenvolvimento dos conhecimentos práticos e teóricos de uma criança faz-se através de "campos conceptuais", isto é, de um conjunto de situações cujo domínio requer uma variedade de conceitos, de um conjunto de invariantes que constituem as diferentes propriedades do conceito, de procedimentos e representações simbólicas em estreita conexão. O quadro teórico dos "campos conceptuais" que este autor propõe integra algumas considerações: cada campo estaria por um lado, centrado num conteúdo de conhecimento bem identificado e por outro abarcaria um conjunto vasto de situações e de conceitos que estariam na origem da utilização do conhecimento em novas situações. A importância de estudar os campos conceptuais e não os conceitos isolados, deve-se essencialmente, a vários aspectos, dos quais se destacam: a) não colocar em jogo todas as propriedades de um conceito; b) não disponibilizar apenas um único conceito; c) não colocar em análise vários conceitos para os quais os estudantes, à partida, revelam dificuldades adicionais, normalmente, resultantes da conjunção da articulação desses vários conceitos.

Segundo Batanero e Godino (1998), no trabalho matemático, os símbolos (significantes) remetem-nos para as entidades conceptuais (significados). Estes autores consideram que o ponto crucial da instrução matemática não está no domínio da sintaxe da linguagem simbólica matemática, mas sim na compreensão da sua semântica, ou seja, na natureza dos próprios conceitos e proposições matemáticas e sua relação com os contextos

---

[13] Frederick Taylor foi um dos promotores e defensores do "behaviorismo" e da aprendizagem por estímulo-resposta.

e situações-problema. Para isso é necessário elaborar modelos teóricos que tratem de articular as dimensões: semiótica (nos aspectos sintácticos, semânticos e pragmáticos) (Pierce, 1965); epistemológica; psicológica e sócio-cultural em Educação Matemática. Esta modelação tem em conta, entre outros, os seguintes elementos: a) diversidade de objectos postos em jogo na actividade matemática tanto no plano da expressão, como no conteúdo (conceptuais, situações-problema, instrumentais-notações); b) diversidade de actos e processos semiose (interpretação) entre os distintos tipos de objectos e dos modos de produção de signos; c) diversidade de contextos e circunstâncias espácio-temporais e psicossociais que determinam e relativizam os processos de semiose.

Estes autores em 1994 e 1998 desenvolveram uma teoria sobre o significado dos objectos matemáticos, definindo pressupostos pragmáticos e antropológicos, considerando tais objectos como significantes do *sistema de práticas postas em jogo pelas pessoas numa classe de situações-problema*. Nos processos comunicativos que têm lugar na Educação Matemática não só se deve interpretar as entidades conceptuais, como também as situações problemáticas e os próprios meios expressivos.

De facto, a relação entre os signos usados para codificar o conhecimento e os contextos que servem para estabelecer o significado do mesmo foi modelado por diversos autores mediante esquemas de tipo triangular. Um deles foi defendido por Steinbring (1997) o de *triângulo epistemológico*, cujos elementos são: *conceito*, *signo/símbolo* e *objecto/contexto de referência*.

Por sua parte, Vergnaud (1982) considera um conceito como um "tríptico" formado pelo "*conjunto de situações* que tornam o conceito significativo, o *conjunto de invariantes* que constituem o conceito e o *conjunto de representações simbólicas* usadas para apresentar o conceito, suas propriedades e as situações às quais se refere" (p. 36).

Tendo por base estes pressupostos de Vergnaud (1982), Batanero e Godino (1998) também esboçam um modelo teórico que incluem os seguintes tipos de entidades elementares:

- *Entidades ostensivas*, isto é, todo o tipo de representações materiais usadas na actividade matemática (termos, expressões, notações, símbolos, gráficos, tabelas, diagramas, etc.).

- *Entidades extensivas*, considerando como tais os problemas, fenómenos, aplicações, tarefas, em geral, as situações que induzem as actividades matemáticas.

- *Entidades intensivas*, ideias matemáticas, generalizações, abstracções (conceitos, proposições, procedimentos, teorias).

Como o conhecimento matemático se produz como consequência da actividade do sujeito enfrentando as situações problemas e fazendo uso dos elementos ostensivos e intensivos disponíveis e dado que a acção do sujeito é fundamental nesta génese, Batanero e Godino (1998) incluíram no modelo uma quarta categoria:

- *Entidades activas*, acções do sujeito perante as situações ou tarefas (descrever, operar, argumentar, generalizar).

Estes autores esclarecem que as entidades ostensivas podem ser cadeias de letras, palavras, números, mas também, gráficos, diagramas, ou mesmo objectos físicos. Estes sistemas "notacionais" desempenham frequentemente o papel de "sistemas de representação" por estarem no lugar de outra coisa ou aspecto de outra entidade. Contudo, no processo de modelação, o papel da representação não pode ser assumido, em exclusividade, por estas entidades, mas as ideias matemáticas e as situações-problema também podem ser signos de outras entidades. Especificamente, Freudenthal (1983) considerava os objectos matemáticos como os designativos da mente e eram identificados como os objectos do pensamento (ideias) como, por exemplo, os números e os conceitos matemáticos, pois eram considerados, em geral, estruturas matemáticas que serviam para organizar os fenómenos tanto do mundo concreto como do universo matemático. Todavia, para Barrow (1992) na construção do conhecimento matemático as aptidões do indivíduo devem ser aplicadas de modo diferente consoante o conteúdo e o contexto. Por exemplo, na aprendizagem inicial do número, a criança não precisa de se implicar com o poder da abstracção, mas para operar, relacionar os números necessita de ter esse sentido e de o aplicar a situações novas.

Segundo Batanero e Godino (1998) para se estudar os processos educativos é necessário distinguir factores contextuais do acto educativo, dos quais elegem o *significado elementar* e o *significado sistémico*. O primeiro surge relacionado com o acto de interpretar/compreender realizado em determinada circunstância espacio-temporal fixada que relaciona uma expressão com um conteúdo específico e o segundo é caracterizado como outro "processo semiótico de formação de conceitos matemáticos para o estabelecimento e validação de proposições matemáticas e, em geral de resolução de problemas" (Batanero e Godino, 1998, p. 35). Os elementos estruturais deste significado sistémico estão relacionados com as quatro classes de entidades anteriormente referidas (ostensivos, extensivos, intensivos e activos). Estes autores acreditam que a noção de significado, apesar de extraordinariamente complexa, pode desempenhar um papel determinante nas investigações no processo aprendizagem-ensino da Matemática. Aquela noção revela-se de grande multiplicidade de códigos, onde se põem em jogo uma diversidade de factores contextuais que os condicionam.

Numa perspectiva convergente a destes dois autores, Becker (2003) defende que existe uma relação entre a construção de estruturas (operatórias) e a capacidade de aprendizagem e que na Escola se deveriam abordar os conteúdos, mas também as estruturas. De acordo com este autor as dificuldades de implementação dessa relação localiza-se quando se deseja ensinar para quem não tem estrutura de assimilação e o aspecto positivo é que a aprendizagem deve ser organizada na direcção das estruturas possíveis naquele momento, isto é, na direcção de acções e da coordenação de acções e não do treino verbal (opção preferida pela Escola, segundo este autor). Acrescenta ainda que os conteúdos devem estar ao serviço da capacidade de evolução individual da aprendizagem (construção de estruturas) e não constituir um fim em si mesmo, pois segundo este investigador "as estruturas permanecem ou são sub assumidas por estruturas mais capazes, mas os conteúdos caducam" (Becker, 2003, p. 21). Sendo assim, o ensino deve organizar-se, primeiramente, no sentido do conhecimento-estrutura e só secundariamente no sentido do conhecimento-conteúdo. Este autor exemplifica com o caso do ensino da álgebra, defendendo que a Escola deve propor a uma turma o estudo desse tópico, se esse for o melhor caminho para que os estudantes construam determinada estrutura cognitiva, e não porque a álgebra tenha um sentido em si mesma, que certamente pode ter, mas não para todos os estudantes. Neste campo, Piaget (1965) defende que o processo contínuo de assimilação e de acomodação provoca o desenvolvimento da aprendizagem no sentido amplo (estruturas) e no sentido estrito (conteúdos).

2.3.2. Matematização, contextualização e níveis de formalização

De Lange, Gravemeijer, Freudenthal, Drijvers, Kindt, entre outros investigadores (1987-2004), criadores da filosofia de Educação Matemática “Realist Mathematics Education” (RME) com génese no Instituto Freudenthal (FI), da Universidade de Utrecht, na Holanda e em desenvolvimento noutros países, como: na Inglaterra, nos Estados Unidos da América e na Austrália, defendem que os estudantes “reinventem” as matemáticas, mas “em contraste” com as teorias do construtivismo radical, salientam a necessidade de criar um meio favorável, com ambientes estimulantes para acontecer a aprendizagem, com materiais instrucionais e professores formados (Reeuwijk, 2004; Kindt, 2004). Esta teoria baseou-se nas ideias preconizadas por Freudenthal (1983), que via a Matemática como “uma actividade humana” e a aprendizagem como um processo de “re-invenção” e, como tal, a formação dos conceitos devia enraizar-se nos fenómenos que lhe dão origem na realidade, colocando-se em oposição à perspectiva tradicional de tomar como ponto de partida os sistemas formais e as estruturas matemáticas ou a materialização das mesmas. Neste sentido, a “Matemática Realista” atribui um papel relevante à resolução de problemas em contexto, em que os estudantes desenvolvem esquemas, desenhos, escrevem palavras, idealizam modelos e usam outras simbolizações. Além disso, esta filosofia de Educação Matemática reconhece que o cerne da aprendizagem reside na contribuição das construções e produções mentais dos estudantes que os conduzem a partir dos seus próprios esquemas informais até aos processos formais. A ideia chave deste programa é a “matematização”, a qual assume duas vertentes fulcrais: i) a formação de conceitos a partir de referências da realidade e de problemas “realistas” (matematização horizontal) e ii) a formalização dos conteúdos e aspectos matemáticos envolvidos nas situações (matematização vertical) (De Lange, 1987, 1992; Gravemeijer, 1990, 2004; Kindt, 2004).

A Matemática em Contexto (MiC) como sub-projecto da RME transporta também uma filosofia baseada nos seguintes vectores: a) a Matemática é uma actividade humana; b) os contextos reais suportam e motivam a aprendizagem; c) os modelos ajudam os estudantes a aprender matemática em diferentes níveis de abstracção; d) os estudantes reinventam matemáticas significativas; e) a interacção é essencial para aprender matemática; f) a valorização de múltiplas estratégias ocupa papel relevante nas aprendizagens; g) os estudantes e os professores assumem diferentes papéis; h) os estudantes não devem passar rapidamente para o abstracto, mas devem gradualmente usar primeiro estratégias informais que entendem e não procedimentos formais que não dominam ou compreendam; i) o programa curricular deve disponibilizar ideias e conexões entre os domínios da matemática e as outras áreas (Britannica Mathematics System, 1998).

Segundo Ponte, Matos e Abrantes (1999) é a partir do modo como as diferentes abordagens curriculares da Matemática se posicionam relativamente ao conceito de matematização que os autores do FI estabelecem a distinção entre elas: a) a abordagem mecanicista, típica do ensino da Matemática até aos anos 60, não prestava atenção a qualquer das duas vertentes; b) a abordagem estruturalista, que surgiu a partir do início dos anos 60 com o aparecimento da Matemática Moderna, sobrevalorizava a segunda vertente; c) a abordagem empirista, em que é valorizada apenas a primeira, ao proporcionar contextos de aprendizagem estimulantes, descurava a formalização da Matemática envolvida; d) a abordagem realista em que se procura ter em conta as duas vertentes da matematização atrás referidas (Thirion, 1999).

Segundo esta filosofia, o processo de aprendizagem-ensino da Matemática é visto como um processo activo de (re)orientação e de reinvenção educativa (Gravemeijer, 1990, 2004). O principal desafio que se coloca no processo instrucional reside na oportunidade de se transitar individualmente de um suporte informal do conhecimento para o formal, mas de maneira significativa para o estudante. Assim, um dos aspectos chave da RME é conseguir implementar, junto dos estudantes, as primeiras sequências instrucionais significativas - "experientially real" -, que façam sentido - "make sense" - e, deste modo, possam integrar na base de conhecimento do estudante (Gravemeijer, 1990, 2004). O termo "experientially real" significa apenas que as actividades podem ser experimentadas pelos estudantes como reais, desenvolvidas num determinado contexto, mas não é estritamente necessário que aquelas sejam situações similares vividas, pelos estudantes, na sua experiência pessoal. Neste sentido, Reeuwijk (2004) refere que a imaginação dos estudantes pode, e deve, também suportar algumas das actividades de investigação propostas no ensino da disciplina, pois o contexto pode ser estritamente matemático. O caminho a percorrer deve ser gradual e as primeiras soluções informais desenvolvidas devem suportar a imaginação e o desenvolvimento do raciocínio, tornando-se gradualmente abstracto. Numa primeira fase, o contexto suporta a manipulação e, muitas vezes, o passo para a abstracção é a formalização, mas os estudantes podem sempre que desejarem, "voltar atrás" na exploração da situação. Este procedimento tem implicações para o ensino, pois o papel do professor altera-se e transforma-se num acompanhante e facilitador da aprendizagem do estudante, necessitando ainda de saber negociar nos debates implementados na classe, respeitando as diferentes propostas e o desenvolvimento cognitivo dos estudantes (Henderson, 1987; Kindt, 2004, entre outros). Este novo papel não é fácil, mas os estudos mostram que, deste modo, há mais estudantes a aprender, a gostar de aprender e a divertir-se com a Matemática (Wijers, 1995).

Gravemeijer (1990) compara o papel dos problemas em contexto na instrução realista com os modelos concretos (tais como os blocos de Dienes) oferecidos à aprendizagem estruturalista, pois têm um importante papel factual no desenvolvimento de conhecimentos e das capacidades na construção compreendida dos conceitos. Este autor defende ainda que o conhecimento experimental e a resolução de problemas em contexto estão intimamente ligados ao conhecimento informal e ao desenvolvimento de noções intuitivas que não necessitam de ser ensinadas. "Aprender matemática significa fazer matemática, na qual a resolução de problemas reais é uma parte essencial desse processo" (Gravemeijer, 1990, p. 19). Contudo, este autor, Cobb (1987); Wood, Cobb e Yackel (1995) crêem que a RME envolve uma tensão inerente entre a expressão criativa individual do estudante e a sua "enculturação" nos caminhos matemáticos estabelecidos do pensamento. Os investigadores do FI acreditam que o ambiente criado, as tarefas propostas, o acompanhamento e a orientação do professor são fulcrais para estimular a implementação das notações simbólicas de forma a comunicarem a actividade matemática, passando da transição dos modelos informais matemáticos para modelos mais formais, provocando uma evolução significativa no raciocínio abstracto do estudante.

Níveis de formalização. É neste processo interactivo de matematização enunciado que os novos conhecimentos se desenvolvem (Gravemeijer, Cobb, Bowers e Whitenack, 2000). Inicialmente, Gravemeijer (2000, 2004) considera que o modelo da aprendizagem matemática deve situar-se num contexto específico, pois refere-se a um significado de uma situação concreta que é experimentada realmente pelos estudantes e é um modelo *de* uma certa situação. Através do trabalho com o modelo, este adquire gradualmente um carácter mais genérico e desenvolve-se num modelo *para* o raciocínio matemático, que se torna possível devido ao desenvolvimento mais abstracto de novos objectos matemáticos para o qual o modelo se refere. O desenvolvimento do *modelo-de* em direcção ao *modelo-para* provoca uma subida de nível quatro da estrutura, como mostra a figura seguinte.

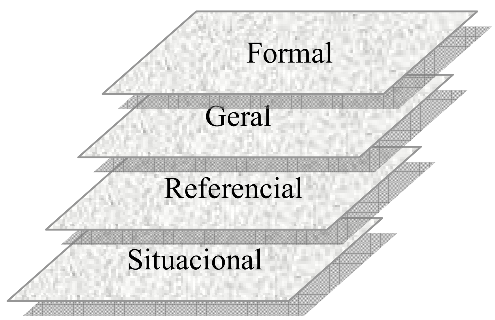


Figura 4: Quatro níveis da actividade matemática propostos por Gravemeijer (1994, 2004)

Estes quatro níveis são descritos da seguinte maneira:

Nível 1 (Situacional) - Actividade sobre a tarefa proposta, na qual há interpretações, apresentação de soluções, dependentes da compreensão e do modo como se actua, globalmente, na tarefa;

Nível 2 (Referencial) - Actividade de criação de um modelo, designado, pontualmente por *modelo-de*, que referencia a actividade no seu conjunto, num plano de descrição e entendimento da tarefa em resolução;

Nível 3 (Geral) - Actividade mais global cuja evolução da acção torna possível o enfoque nas interpretações e soluções imaginadas, independentemente da especificidade da situação, possibilitando a criação do *modelo-para*;

Nível 4 (Formal) – Actividade que inclui raciocínios com simbolizações convencionais, que não mais dependem do suporte do *modelo-para* da actividade matemática desenvolvida.

A terminologia de *modelo-de*/*modelo-para*, usada pela primeira vez, segundo Drijvers (2003), por Streefland em 1985, indica como o modelo se torna num raciocínio matemático básico, que está directamente relacionado com o contexto original e se transforma num referencial base para atingir o nível formal matemático.

Segundo Reeuwijk (1995) o movimento de aprendizagem do informal para o formal não é um sistema rígido, para ser pensado apenas numa sequência linear. Conforme sentirem necessidade os estudantes podem voltar atrás, saltar fora dos níveis, criar avanços e recuos, pois o objectivo não é forçar os estudantes a trabalhar em todas as situações problemáticas e a passarem, obrigatoriamente, por todos os níveis até chegarem ao nível formal. O passo para o estádio formal da manipulação é feito lentamente e de forma sustentada, de acordo com o ritmo pessoal de cada um, em que intervêm as capacidades e os estímulos recebidos; o desejo de ultrapassar dificuldades; a vontade de aprender e vencer, as motivações cognitivas, emocionais e vivenciais sentidas na Escola e na classe.

3. Educação Matemática

3.1. Princípios

Mudam-se os tempos, mudam-se as vontades... Para este mundo em mudança, para este tempo de extraordinárias e aceleradas transformações, precisa-se de uma matemática diferente em que o novo conhecimento se envolva com o nosso dia a dia e descubra novas ferramentas e caminhos para produzir um saber contextualizado e compreendido (Kindt, 1980-2004; Gravemeijer, 1990, 2004; NCTM, 2000). "A necessidade para compreender e ser capaz de usar a matemática no nosso quotidiano e no local de trabalho nunca foi tão imperiosa como hoje em dia e tende, cada vez mais, a aumentar" (NCTM, 2000, p, 4). Nestas circunstâncias o NCTM (2000, 2001) e Ponte (1987, 1997) apontam para a importância da Matemática na vida, como parte integrante de uma herança cultural que simultaneamente se apresenta como uma ferramenta preciosa no local de trabalho (Nelson, 1993) e como um meio poderoso para a comunidade científica e tecnológica admitindo que, se tal não acontecer, "as portas do futuro vão permanecer fechadas" (NCTM, 2000, p. 5). A matemática como actividade humana por excelência é considerada como um património da humanidade e um saber associado ao desenvolvimento cultural e social da Humanidade (Freudenthal, 1983) e, provavelmente por isso mesmo, em 2000, foi designado pela UNESCO, o ano mundial da Matemática (Goñi, 2000). De facto, numa perspectiva holística do conhecimento a Matemática é, muitas vezes, referida como uma ciência de estrutura significante e coerente (Janvier, 1996; Weber-Russell e LeBlanc, 2004), que se move entre o mundo real e o mundo dos símbolos (Freudenthal, 1987).

Todavia, para que a Matemática se considere uma actividade humana por excelência (UNESCO, 1980; Freudenthal, 1973, 1983; ME, 1999), o NCTM (2000, p. 11) defende que se deve cumprir, na Escola e nesta sociedade democrática, a prossecução de seis princípios:

Equidade. A excelência na Educação Matemática requer igualdade, altas expectativas, forte e decisivo apoio a todos os estudantes;

Currículo. O currículo é mais do que uma colecção de objectivos, conteúdos e actividades. Deve ser apresentado como uma estrutura coerente, focada para a matemática essencial e bem articulado com todos os níveis de ensino;

Ensino. O ensino efectivo da matemática requer uma compreensão estrita e alargada dos conteúdos a explorar, daquilo que os estudantes precisam ainda de saber, bem como do reconhecimento da importância do suporte cognitivo para a aquisição dos conhecimentos matemáticos;
Aprendizagem. Os estudantes devem construir activamente e de forma compreendida os conteúdos, dando-se particular prioridade à incorporação sustentada e integrada do novo conhecimento no já existente;
Avaliação. A avaliação deve ser diversificada e suportar a aprendizagem da matemática essencial, dando indicações preciosas para a acção dos professores e dos estudantes;
Tecnologia. A tecnologia mostra-se fundamental no processo aprendizagem-ensino, pois influencia a matemática naquilo que ela encerra, bem como no desenvolvimento do pensamento e do raciocínio, fortalecendo a aprendizagem do estudante.

A excelência na Educação Matemática requer o cumprimento do princípio da equidade, necessitando este de altas expectativas e de um forte e continuado apoio a todos os estudantes, pois "a visão da equidade em Educação Matemática altera a penetrante e crescente crença social do Norte da América a qual defende que somente alguns estudantes são capazes de aprender matemática" (NCTM, 2000, p. 12).

Numa posição mais abrangente D´Ambrosio (2005) defende que "a Educação Matemática é o resultado de vários factores, dos quais a disciplina de Matemática é apenas um deles" (p. 16), recorrendo à seguinte figura para ilustrar o seu pensamento.

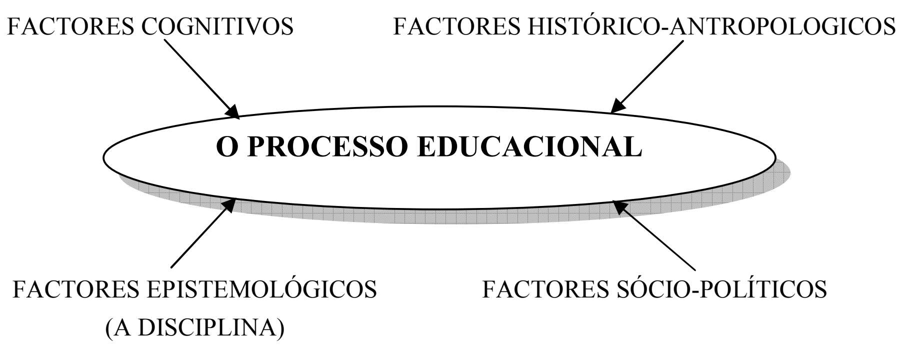


Figura 5: Factores intervenientes no processo educativo proposto por D´Ambrosio (2005)

Este autor salienta ainda que os factores que definem um projecto educacional são o resultado de um modelo de sociedade/projecto político de: economia, tecnologia, trabalho, estilo de vida, geopolítica, mapa demográfico e das percepções da natureza e do homem - tradições e religião, conhecimento (etnoconteúdos), quotidiano, órgãos de comunicação social. Segundo Pires (2005) este autor ao reflectir sobre "*por que ensinar Matemática"* propõe que nos situemos no contexto de um marco educativo variável, que se tem modificado profundamente, mas em que os benefícios da educação possam ser estendidos a todas as camadas da sociedade em que "todas as crianças e jovens tenham direito de alcançar as possibilidades que lhes permitam o desenvolvimento das suas próprias capacidades individuais" (p. 27), cumprindo-se assim, o desiderato da UNESCO (1990) e os propósitos do NCTM (2000).

3.2. Comunicação e Conexões Matemáticas

3.2.1. Componentes instrucionais da comunicação

Para que os princípios da Educação Matemática se cumpram é necessário que se respeitem fundamentalmente dois aspectos cruciais da Educação Matemática: *a comunicação*, através da qual o estudante é estimulado a comunicar e a partilhar conhecimentos e *as conexões*, em que os saberes matemáticos de diferentes domínios se inter-comunicam, ligando-se à realidade e a outras áreas do conhecimento. Neste sentido, o NCTM (2000) defende que "a comunicação é a parte essencial da matemática e da Educação Matemática" (p. 60) e considera a comunicação como um meio para partilhar ideias, tornando-as objectos de reflexão, cultura, discussão e meios para clarificar a compreensão, resultando necessariamente numa melhoria na aprendizagem da matemática. Por outro lado, Jaworski (1994) refere que o fundamental do processo aprendizagem-ensino é analisar como se desenvolve a comunicação na classe, ou seja, quais os significados que são partilhados e, em particular, na Matemática importa perguntar *quais* os significados e *de quem* emanam?

Quando as crianças estão a desafiar o pensamento e o raciocínio matemático e se envolvem em discussões, especialmente em caso de desacordo, em que precisam de justificar as suas posições, adquirem um entendimento mais profundo das causas matemáticas (Hatano e Inagaki, 1991). A simples decisão de comunicar os resultados aos outros, oralmente, ou por escrito, provoca necessariamente esforços no sentido de exprimir claramente o raciocínio, desenvolver a socialização, aprofundando o poder de argumentação de forma a definirem uma linha lógica e convincente de pensamento. Paulo Freire (1975) defensor da máxima: "o diálogo é uma exigência existencial" é recordado por Becker (2003) no seu último livro, defendendo ainda que não basta apenas dar a palavra aos estudantes, é especialmente necessário ajudá-los a aplicá-la. Os professores devem encorajar os estudantes a reflectir sobre os conteúdos das conversações desenvolvidas na classe e a falar acerca da própria matemática (Cobb, Wood e Yackel, 1994), ajudando a criar um ambiente favorável ao aprofundamento de processos metacognitivos do pensamento. "A elaboração de perguntas é um processo essencial para o desenvolvimento do raciocínio crítico e do pensamento criativo, o modo de perguntar constituirá, assim, um instrumento fundamental do processo de ensino e da aprendizagem" (Pedrosa, 2000, p. 149). César (2000) também reforça esta ideia salientando que o professor dá demasiadas respostas, pois cada pergunta deveria suscitar uma nova questão do professor para estimular a mente do estudante e provocar o diálogo educativo, produzindo-se, deste modo, conhecimento. De acordo com Weber-Russell e LeBlanc (2004) as pesquisas consistentes da Educação Matemática mostram que grupos de discussão informal sobre matemática surgem como um passo importante na evolução da compreensão conceptual e que ouvir os outros também proporciona oportunidades, às crianças, para implementarem as suas próprias compreensões e o desenvolvimento de certas competências metacognitivas. A linguagem natural surge, assim, como um primeiro meio de representação familiar da criança, que pode aprofundar o significado das expressões matemáticas e conectar as situações com as variadas representações abstractas. Crosswhite (1987) salienta ainda que esta "disciplina do pensar" não se pode identificar apenas como "experimental", "orgânica", mas como um processo autónomo do pensar, isto é, que seja considerado como "um postulado do pensamento" (p. 269).

O matemático português J. Sebastião e Silva, no período da implementação da Matemática Moderna – anos sessenta e setenta, defendia também que, a par da intuição e da imaginação criadora, era necessário desenvolver, ao máximo, no espírito dos estudantes, o poder de análise e o sentido crítico para promover o diálogo intelectual consigo mesmo e com o outro. Tal actividade ajudava também a implementar a capacidade de expressar ideias matemáticas, usando diversas linguagens: esquemas, tabelas, gráficos, etc e a apreciar também a necessidade de usar o rigor da linguagem matemática. "Os estudantes que têm oportunidade e são encorajados na sala de aula a falar, escrever, ler, ouvir matemática, têm, na realidade dois benefícios: comunicam para aprender matemática e aprendem a comunicar matematicamente" (NCTM, 2000, p. 60).

A linguagem usada para expressar ou captar ideias constitui-se como uma ferramenta poderosa que fortalece a aprendizagem matemática. Comunicar sobre ideias matemáticas é um caminho para os estudantes articularem, clarificarem, organizarem e consolidarem o seu pensamento. Escrevendo e falando uns com os outros os estudantes têm a oportunidade de aprender a usar mais frequentemente a linguagem matemática, de uma forma mais rigorosa e, gradualmente, com a ajuda dos símbolos, a expressar ideias matemáticas (NCTM, 1991-2000). A comunicação parece tornar-se, assim, o pensamento matemático mais observável e visível, aberto e tratável facilitando o aprofundamento da capacidade de pensar sobre o seu próprio pensamento (Cabrita, 2000). Ao defender-se a importância do "acto de questionar" no acto educativo está-se a preconizar que se promova, no sujeito, a autonomia, o interesse, a capacidade de pensar por si próprio (Pedrosa, 2000). Seguindo estas crenças educacionais, o NCTM (2000) criou *programas instrucionais facilitadores da comunicação*, desde o Jardim Escola ao 12º ano de escolaridade, enunciados por estes ítens: a) organizar e consolidar o pensamento matemático através da comunicação; b) comunicar o pensamento matemático coerentemente e de forma clara aos seus pares, professores e a outros elementos da comunidade; c) analisar e avaliar o pensamento matemático e estratégico dos outros; d) analisar a linguagem simbólica para expressar rigorosamente ideias matemáticas.

Na primeira componente os estudantes revelam "*insights*" no seu pensamento quando estão a resolver qualquer questão e justificam o seu raciocínio ou formulam algo acerca do que estão a realizar (NCTM, 1957; Krutetskii, 1976). Assim, as interacções que se estabelecem entre os diversos intervenientes nos processos de aprendizagem e ensino, sejam elas verbais, gestuais ou de outra natureza, são essenciais na comunicação que se reconhece como imprescindível para o êxito daqueles processos em qualquer área do saber (Pedrosa, 2000). A comunicação suporta ainda a aprendizagem de noções novas e pode identificar e clarificar, eventualmente, alguns conceitos não totalmente correctos, adquiridos pelos estudantes (NCTM, 2000).

Na segunda componente orientada para *comunicar o pensamento matemático coerentemente e de forma clara aos seus pares, professores e a outros elementos da comunidade* o NCTM (2000) defende que estudantes precisam de ter oportunidades para testar as suas ideias num conhecimento básico partilhado, para melhor compreenderem e tornarem-se absolutamente convincentes face à linguagem rigorosa utilizada e à postura colocada no poder de argumentação que exercem. Quando tais ideias são trabalhadas em público, por exemplo, na classe, os estudantes podem aproveitar para fazer parte da discussão, enquanto que o professor pode orientar a aprendizagem daí resultante (Lampert, 1990). Aprender a ver coisas segundo as perspectivas dos outros é um desafio que deve paulatinamente ganhar terreno, numa vertente ainda mais ampla e relacionada com a educação para a cidadania, tornando-se indispensável, a partir do 1º ciclo do ensino básico, fomentar a responsabilização e a participação na classe, nos debates e nas respostas a perguntas concretas (NCTM, 1991, 2000).

Adicionalmente a comunicação escrita deveria também ser cuidada e alimentada, desde a representação informal à formal, criando-se nos estudantes um similar fascínio pela comunicação com ele próprio e com o outro (Gravemeijer, 1990, 2004; Kindt, 1991-2004; Kieran, 1992; 1996). Os estudantes revelam um particular gosto pelas primeiras aptidões escritas. Inicialmente desenham para comunicar, mas gradualmente vão aprendendo a ler e a escrever frases, palavras e letras. Neste nível etário os estudantes podem trabalhar em ideias sequenciais, adicionando detalhes de modo a que a escrita comece a tornar-se mais elaborada. Para determinados propósitos poderá ser apropriado comunicar matematicamente, por meio de pensamento informal, mas gradualmente a aprendizagem estabiliza-se, aprofundam-se conhecimentos e a linguagem de comunicação torna-se mais formal, usando-se gradualmente a terminologia convencional matemática (Gravemeijer, 1990, 2004; NCTM, 2000). Os estudantes que praticam a comunicação procuram e esforçam-se por superar as dificuldades de maneira a realizarem um discurso claro e coerente, a adquirirem e a reconhecerem estilos convencionais de diálogo e de argumentação matemática e a alcançarem um processo evolutivo de aprendizagem em que se desenvolvem pequenas cadeias de raciocínio dedutivo.

Na quarta componente, o NCTM (2000) defende que, pela implementação da comunicação na classe, é possível *analisar a linguagem simbólica para expressar rigorosamente ideias matemáticas*. Os estudantes começam por articular conhecimentos e códigos matemáticos no seio familiar e nas vivências do dia a dia. Este tipo de convivência informal com o conhecimento e a aquisição efectiva de saberes providencia a base na qual se constrói a linguagem formal matemática. Os professores podem ajudar os estudantes a ver que algumas palavras são usadas na linguagem do dia a dia, em diferentes situações e com os mais variados significados. Este tipo de observação e conhecimento fundamentado permite que as crianças compreendam, porventura de forma mais completa, as definições dos conceitos matemáticos (Morgado, 2001). É importante dar aos estudantes experiências de modo que possam apreciar o poder e o rigor da linguagem matemática (Meyer, 1999; Meyer e Ludwig, 1999; Ameron, 2004). Segundo estes autores, em caso de dificuldades acrescidas, é possível ainda que os estudantes tenham a possibilidade de se continuarem a expressar de forma informal, mas capazes de transmitir e entender, dentro das suas possibilidades, ideias matemáticas.

Na classe, os estudantes devem ser desafiados para desenvolverem o pensamento e o raciocínio matemático e a comunicação é essencial para terem a possibilidade de expressarem, oralmente e por escrito, os resultados do seu pensamento. Este tipo de ambiente é desejável para todos os níveis de ensino (Matos 1987-88, 1991), distinguindo-se, à medida que se avança na idade, um grau de abstracção maior na representação das ideias. As próprias perguntas dos estudantes podem também ajudar os professores a reflectir mais e melhor sobre as suas práticas através de “um auto-diagnóstico diário sobre os problemas do ensino e de aprendizagem das suas turmas” (Pedrosa, 2000, p. 160). As relações de comunicação na sala de aula que são abertas, caracterizadas por uma maior riqueza e simultaneamente por uma maior selecção da informação, com uma diversidade de fontes e uma optimização dos processos de comunicação primam por interacções que contribuem e facilitam a “socialização cognitiva”, possibilitam um conhecimento discutido, por meio de negociação de significados e contribuem, sem dúvida, para a melhoria do ensino (Cañal, Lledó, Pozuelos e Trave, 1997).

A comunicação na resolução de problemas. Os estudantes usam a comunicação como uma natural e essencial parte do processo de resolução de problemas, sendo esta a terceira componente do programa instrucional facilitador da comunicação, defendido pelo National Council of Teachers of Mathematics (2000), através da qual se torna possível *analisar e avaliar o pensamento matemático e estratégico dos estudantes*. Para além de cada um exprimir o raciocínio, também há a possibilidade de avaliar o pensamento dos membros da classe e da própria comunidade em aprendizagem. Cada estudante deve não só expor a estratégia utilizada na resolução da situação, mas também analisar, comparar e perceber os contrastes de significados existentes, a eficiência e a elegância na variedade de estratégias expostas e as explanações que incluem argumentos matemáticos, racionais e não apenas descrições procedimentais e sumários (Yackel e Cobb, 1996). Segundo estes autores, normalmente as metodologias de abordagem são diferentes e, deste modo, os estudantes retiram vantagens, pois provoca-se usualmente discussão de ideias e de estratégias de resolução, podendo, deste modo, desenvolver a equidade de saberes estratégicos e de raciocínio, sendo possível, assim, humanizar mais o conhecimento matemático.

A resolução de problemas proporciona momentos privilegiados de partilha e de análise de uns com os outros na classe e, nestas situações, devem também aprender a questionar e a provar o seu pensamento, bem como o dos seus companheiros para clarificar ideias ou revelar outras subdesenvolvidas ou subjacentes às dadas (NCTM, 2000). Contudo, nem todos os métodos e ideias têm igual mérito, os estudantes precisam, pois, de aprender a examinar os métodos e as ideias dos outros na perspectiva de analisar as suas possibilidades e as suas limitações. Com cuidado e ouvindo os outros, pensando acerca de, compreendendo os objectivos colocados, os estudantes aprendem a tornar-se pensadores críticos e responsáveis acerca da matemática. Este procedimento encoraja os estudantes a reflectir sobre o seu próprio pensamento e em processos implementados na resolução de problemas (Cabrita, 1996, 2000). A possibilidade de trabalhar o pensamento matemático facilita o desenvolvimento de duas competências: a capacidade para abstrair, seleccionando os elementos significativos e olvidando os outros que o não são e a capacidade de subir na estrutura do pensamento baseada na problematização do contexto matemático de uma determinada situação, no qual partes relevantes precisam de ser consistentemente vistas ou relatadas (Weber-Russell e LeBlanc, 2004).

O NCTM (2000) defende também no processo de resolução de problemas a capacidade de ler, escrever, ouvir, pensar e comunicar acerca das situações desenvolvendo e aprofundando a compreensão dos estudantes na matemática, tornando-se o vocabulário mais rico e coerente para explicar conceitos. Nestes níveis de escolaridade básica, os estudantes procuram usar a comunicação como uma ferramenta para a compreensão e a generalização estratégica de soluções. A comunicação pressupõe partilha de pensamento, levantamento de questões, explicação e justificação de ideias, reconhecendo-se a necessidade de tudo isto ser integrado no ambiente da classe, devendo os estudantes ser encorajados a expressar verbalmente e por escrito as conjecturas matemáticas idealizadas, as questões e as soluções encontradas (Becker, 2003) e a falar acerca da matemática, para descrever e explicar as estratégias, recolocar questões e validar verbalmente as respostas encontradas (Cobb, Wood e Yackel, 1994).

Um dos aspectos importantes na comunicação matemática tem a ver também com a organização do pensamento e a clarificação das próprias ideias. Assim, o trabalho de elaboração mental que precede a comunicação é o momento chave que permite inicialmente uma comunicação interna com o próprio indivíduo seguida da abertura e transmissão da ideia para o exterior (Krutestskii, 1976; NCTM, 1991, 2000). Por isso, trabalhar aos pares, ou em pequenos grupos, na resolução de problemas ou em outras tarefas matemáticas, possibilita aos estudantes ouvir diferentes formas de pensar e de argumentar e refina as formas de explanar as suas ideias. Shoenfeld (1985, 1987) também estudou este tipo de interacções e concluiu que o professor ao ensinar a matemática por processos heurísticos, desenvolvendo estratégias de *problem solving* ajuda os estudantes a desenvolverem capacidades linguísticas relacionadas com o processo de discussão e resolução dos problemas.

3.2.2. Componentes instrucionais das conexões matemáticas

Conversações sobre ideias matemáticas possibilitam a exploração de múltiplas perspectivas e ajudam também os participantes a partilhar os seus pensamentos e a fazer conexões (Weber-Russell e LeBlanc, 2004), reconhecendo ainda que "o princípio da aprendizagem compreendida envolve também a realização de conexões matemáticas" (NCTM, 2000, p. 64). A capacidade de se poder desenvolver as conexões através da resolução de problemas e de outras tarefas matemáticas tem implicações no desenvolvimento do raciocínio, no relacionamento entre os dados, na integração do poder de argumentação, na facilidade em mobilizar o conhecimento e de o aplicar a situações novas (Gelman and Gallistel, 1978; Resnick, 1987b). A exploração de situações em contextos ricos envolvem conexões com outras disciplinas e, deste modo, os professores devem também procurar fontes de inspiração para tarefas matemáticas noutras disciplinas, tais como: ciências, estudos sociais e artes, bem como no mundo real e as experiências do quotidiano do estudante (investigadores do FI, 1983-2004; NCTM, 2000). Acrescentam ainda que podem ser desenvolvidas conexões, na própria ciência matemática entre os diferentes tópicos, mas também nos contextos entre a matemática e as outras áreas do saber e simultaneamente ligados aos próprios interesses e experiências dos estudantes. Através de um ensino que enfatiza a inter-relação das ideias matemáticas, os estudantes não só aprendem Matemática, mas também se consciencializam acerca da utilidade da própria disciplina, aprofundando a vertente de que “a Matemática não é uma colecção apenas de elementos e regras, mas é um campo de estudo integrado” (NCTM, 2000, p. 64).

Por outro lado, observando a Matemática como um conhecimento inter-relacional e integrado e de acordo com os pressupostos educativos referidos, surge a necessidade de estudar e pensar esta disciplina como um todo coerente, incluindo as ligações intrínsecas à própria disciplina, num determinado nível etário, entre diferentes níveis e entre diversas disciplinas ou áreas do saber. Para enfatizar as conexões matemáticas, os professores precisam de conhecer as necessidades dos próprios estudantes, mais propriamente, os conteúdos matemáticos que devem construir nos níveis precedentes e nos consequentes (Ausubel, 1963), reconhecendo-se ainda que a construção das conexões providencia oportunidades para enriquecer a aprendizagem nas diferentes áreas. Os estudantes precisam de desenvolver importantes processos de investigação conceptual e de resolução de problemas, inferindo, medindo, comunicando, classificando e predizendo, capacitando-os para construir processos que incluem, uma aprendizagem científica relacionada com a matemática significativa, de natureza prática e intimamente relacionada com a realidade envolvente do jovem (Gravemeijer, 1990, 2004). Este autor defende ainda que o desenvolvimento das ideias matemáticas está no cerne da própria matemática, mas também emerge no uso escolar, na ligação com as outras disciplinas e num contexto mais amplo direccionado para o mundo real.

O programa instrucional sobre as conexões, desde o Jardim Escola ao 12º ano de escolaridade, proposto pelas normas do NCTM (2000) contempla três aspectos fundamentais: a) reconhecer e usar conexões entre ideias matemáticas; b) compreender como as ideias matemáticas inter-conectam e se constroem como um todo coerente; c) reconhecer e aplicar matemática em diferentes contextos extrínsecos à própria matemática.

No interior do edifício matemático torna-se essencial *reconhecer e usar conexões entre ideias matemáticas*, pois prosseguindo este objectivo os professores podem ajudar os estudantes a disponibilizar-se para usar conexões no processo de resolução de problemas, construindo a ideia da matemática como um corpo de conhecimentos coeso e não como um conjunto desconexo de aptidões e conceitos isolados (Schoenfeld, 1985; 1987c; Schoen, 1988; Gravemeijer, 1990, 2004; Reeuwijk, 1995, 2004).

A noção de que as ideias matemáticas são conexas é fundamental, pois assim é possível serem trabalhadas em todos os níveis de escolaridade e em diversas experiências escolares. As primeiras actividades matemáticas das crianças são realizadas no dia a dia e torna-se imprescindível que esta integração matemática seja vivida na Escola, em vários contextos e de forma integrada (NCTM, 2000, investigadores do FI).

Por outro lado, *compreender como as ideias matemáticas se inter-conectam e se constroem sobre um outro conhecimento para produzir um todo coerente* é crucial para a Educação Matemática. Segundo aquela associação o progresso dos estudantes ao longo das suas experiências escolares deve ser baseada na matemática como um todo, um sistema coerente e consistente, mas com as suas particularidades contextuais e conteudais adaptadas ao nível de escolaridade. No Jardim Escola os estudantes reconhecem a contagem, o número, a forma; em seguida surgem as operações aritméticas e por fim aparecem os números racionais, a proporcionalidade e as relações lineares (Post e outros, 1985). Se os estudantes, no momento oportuno, começarem a desenvolver este ponto de vista sobre a matemática, conectada e integrada como um todo, gradualmente vão perdendo a tendência de aprender a disciplina como um corpo de conceitos separados e um conjunto de regras arbitrárias, conseguindo-se que: "a integração de conceitos e de procedimentos seja o elo central da matemática escolar" (NCTM, 2000, p. 65).

Esta associação de professores de Matemática defende ainda a necessidade de *reconhecer e aplicar matemática em diferentes contextos exteriores à própria matemática*. Nesta perspectiva propõe que em todos os níveis de escolaridade sejam proporcionadas experiências matemáticas Escolares de forma que os estudantes trabalhem problemas em contextos que ultrapassem o ambiente da própria disciplina. Estas conexões podem ser assuntos de outras áreas ou disciplinas ou ainda da vida diária dos estudantes (NCTM, 2000; Kindt, 2004 e outros investigadores do FI). No Jardim Escola e no 1º ciclo do ensino básico as crianças devem desenvolver conhecimentos relacionados com a vida real e ainda, especialmente, no ensino básico devem também aprender a aplicar as ideias matemáticas nos assuntos de outras áreas ou disciplinas. "A oportunidade dos estudantes realizarem experiências matemáticas em diferentes contextos é essencial a um conhecimento integrado e relacional" (NCTM, 2000, p. 66). Tal como defendiam Silva (1977), Caraça (1989), Adler (1968), também o NCTM (2000) salienta que a primeira *conexão* mais importante para o desenvolvimento da matemática elementar é o conhecimento intuitivo, o informal que os estudantes adquirem através das suas próprias experiências e nas desenvolvidas na Escola, na disciplina de Matemática. Todas estas conexões – entre um conceito matemático e um outro conhecimento disponível no quotidiano; entre diferentes tópicos da matemática, entre esta e outros campos do conhecimento e entre a matemática em geral e o dia a dia – são suportes que estabelecem ligações entre as experiências informais e os conhecimentos matemáticos formais. Quando os professores ajudam os estudantes a fazer estas conexões explícitas – matemática para o quotidiano, matemática para a ciência matemática e matemática para outras áreas científicas estão efectivamente a ajudar os estudantes a aprender a pensar matematicamente (NCTM, 2000).

4. Aprendizagem e Cultura Matemática

4.1. Aprendizagem - aspectos conceptuais genéricos

A aprendizagem é um processo construtivo, em que o tempo de instrução é limitado e, como tal, devem ser escolhidas cuidadosamente as oportunidades de construção natural da aprendizagem e desenvolvimento do estudante (Silver, 1987). Para Abrantes, Serrazina e Oliveira (1999) a aprendizagem apresenta-se como "um processo gradual de compreensão e aperfeiçoamento" (p. 26). Adicionalmente, Piaget (1965); Damásio (2000, 2003) e Becker (2001 e 2003) consideram que a aprendizagem é também um encontro emocional, pois os aspectos afectivos e culturais estão cada vez mais presentes e são, muitas vezes, determinantes, não podendo, assim, ser apenas tratada como uma questão meramente cognitiva. A aprendizagem da Matemática surge perspectivada como um processo de construção de significados e concomitantemente o significado matemático emerge como uma condição necessária à ocorrência da aprendizagem de Matemática, uma vez que é através desta negociação que são construídos consensos na sala de aula resultantes da partilha por parte dos estudantes e professores e dos múltiplos sentidos dos objectos matemáticos (Ogden, 1923; Voigt, 1994; Santos, 1996).

Numa investigação realizada sobre a aprendizagem escolar da Matemática, Santos (1996) concluiu que para se ajudar os estudantes a aprender Matemática é preciso compreender melhor o que é a aprendizagem escolar da Matemática. A autora apercebeu-se no estudo que "essa aprendizagem resultava essencialmente da acção dos indivíduos (os estudantes) quando participam com outros (colegas e professores), num mundo previamente estruturado (a Escola) que possui uma prática e uma retórica próprias" (p. 44). Observou ainda que, na aula de matemática, os estudantes procuram dar sentido às acções (as suas e as dos outros) apropriando-se, de certa forma, de um determinado conhecimento matemático, ao mesmo tempo que criam outros sentidos e saberes. Para Romão (2000) no novo paradigma do ensino, aprender matemática não é mais um acto isolado, mas é antes de tudo uma forma de pensar que envolve resolução de problemas, comunicação, cultura e compreensão de conceitos. Nesta envolvência educativa, a Matemática surge como disciplina de pendor particularmente abstracto que ajuda a desenvolver a capacidade de pensar em termos formais, como ciência com múltiplas ligações ao real e com a capacidade de criar modelos mentais (Ponte, Matos, Abrantes, 1999).

Numa visão construtivista integrada, Treffers (1991) defende quatro princípios para a aprendizagem matemática. O primeiro reporta-se à aprendizagem como actividade construtiva, que contraria a ideia da aprendizagem que é conhecimento apresentado ou transmitido por outrem, defendendo que a aprendizagem é uma actividade individual e, por tal motivo, cada um tem de fazer o seu percurso. Também a teoria da aprendizagem significativa, defendida por Ausubel (1963), requer no acto de aprender uma interiorização pessoal e hierárquica dos conhecimentos, ou seja, precisa de um processo através do qual o novo conhecimento é alicerçado, absorvido e conectado no já existente definindo-se como um aspecto relevante de incorporação na estrutura conceptual do indivíduo (Orton, 1987). No segundo princípio a aprendizagem apresenta-se como um conceito matemático ou capacidade dinâmica desenvolvida ao longo do tempo, na qual se movem vários níveis de abstracção em que os "materiais, os modelos visuais, os modelos situacionais, esquemas, diagramas e símbolos servem esse propósito" (Treffers, 1991, p. 24). O terceiro princípio da aprendizagem reporta-se à reflexão, à capacidade de pensar sobre os próprios processos do indivíduo e os dos outros, podendo existir um convite explícito à apresentação das estratégias envolvidas e à validação dos resultados (Talbert e Stallings- Roberts, 1994). Crê-se que a aprendizagem não é um acto solitário, mas sim um acto social, pois ocorre na sociedade e é directamente estimulado pelo contexto sócio-cultural, identificando-se este como o quarto princípio da aprendizagem. "E fecha-se o círculo dos princípios conectando com o primeiro" (Treffers, 1991, p. 24), pois a aprendizagem matemática não se resume a uma colecção de conhecimentos não relacionados, mas à construção de conhecimentos e capacidades numa entidade estruturada. Também para Orton (1987); Palagana e outros (2002) qualquer teoria da aprendizagem tem de ser alicerçada na estrutura do objecto a estudar, com o conhecimento profundo, compreendido e relacional.

Uma perspectiva que encara a aprendizagem como algo estreitamente ligado ao mundo sócio-cultural em que se vive - é a chamada aprendizagem situada. Lave e Wenger (1991-2002) consideram que se deve olhar a aprendizagem como um aspecto de qualquer actividade "a aprendizagem é uma parte integrante da prática generativa social no mundo em que se vive" (p. 35). Segundo Santos (1996) a metáfora que, nesta abordagem, melhor se pode associar à noção de aprendizagem é a de "participação", pois a aprendizagem liga-se à formação de capacidades mentais, afectivas, psicomotoras e estas antes de serem desenvolvidas em cada criança individualmente, encontram-se disponíveis na sociedade, na cultura em geral. Nesta perspectiva "a aprendizagem constitui-se como um processo de apropriação e transformação do saber socialmente elaborado, não sendo imanente ao sujeito mas construída na relação mediada pelo outro e pela cultura" (Palangana, Galuch e Sforni, 2002, p. 113).

Para Lave e Wenger (1991-2002) a aprendizagem é uma parte integral da prática social da vida em sociedade. Nestas teorias da cognição defendidas por estes e outros autores (Brown, Collins e Duguid, 1989), de uma forma pragmática, não se faz distinção entre o aprendiz e o contexto onde a aprendizagem tem lugar. A aprendizagem é vista como participação em que é contemplado o contexto de que faz parte o aprendiz (Askew, 2000). Também Wood, Cobb e Yackel (1995) realçam a natureza interactiva da aprendizagem matemática como construção de significados pessoais e reconhecem que este processo encerra partilha de ideias e pensamentos.

Por outro lado, os estudos tradicionais revelam que a aprendizagem matemática deve ser encarada como um processo que se passa no interior da mente do indivíduo que aprende (Santos, 1996). "A base conceptual destas abordagens apoia-se fortemente nas ideias da psicologia do desenvolvimento preconizadas por Piaget e pelos seus seguidores" (p. 26-27). Nestas perspectivas, o ensino e a aprendizagem apresentam-se como uma actividade reflexiva que envolve a negociação do significado através de um processo dinâmico em que a obrigação de comunicar emerge como uma expectativa mútua. Assim, para Hogben (1941, 1970); Cockcroft (1985) e Romão (1998, 2000) os modelos de comunicação desenvolvidos na sala de aula, as acções do professor, a organização da aula, o papel das tarefas e dos materiais usados são aspectos inter-relacionados a ter em conta na aprendizagem e no desenvolvimento da cultura matemática. De facto, quando um conteúdo é ensinado o objectivo não é que o estudante simplesmente repita palavras sem compreender o que está a verbalizar, mas que estabeleça relações entre os termos, reconhecendo-os em diferentes contextos e situações. Cobb (1987) como crítico interessado na aprendizagem e na formação dos objectos matemáticos abstractos, defende a necessidade de diferençar o ponto de vista do actor, que é o estudante e o ponto de vista do observador que é o professor ou o investigador. O "observador" deve tentar ver o mundo segundo o "*inside*" do estudante para prever e julgar a significância da aprendizagem. Segundo este autor é preciso ter presente esta realidade para ser capaz de analisar os resultados a partir do ponto de vista do estudante, no processo de representação na manipulação concreta e na representação interna, orientada pela elaboração mental. Os aspectos cognitivos do estudante, o seu nível de desenvolvimento não devem ser contemplados de forma isolada, mas devem ser integrados no contexto da aprendizagem.

4.2. Aprendizagens significativas e compreendidas

Segundo o NCTM (2000) "aprender matemática com compreensão é essencial e a compreensão conceptual é uma das mais importantes componentes da proficiência" (p. 20). Adicionalmente, Becker (2003) defende que a aprendizagem situa-se na acção "aprende-se por que se age e não por que se ensina" (p. 14). Isto significa que, no mínimo, segundo este investigador, o ensino não pode ser visto como a fonte da aprendizagem, pois esta reside na acção do sujeito sobre as coisas e/ou pensamentos. Abrantes, Serrazina e Oliveira (1999) reiteram esta ideia e escrevem: "a aprendizagem requer o envolvimento das crianças em actividades significativas" (p. 24).

Para Rogers (1985) a aprendizagem significativa é mais do que uma acumulação de factos é, sobretudo, uma aprendizagem que provoca modificação, quer seja no comportamento do indivíduo, quer seja na orientação da acção futura que escolhe, baseada nas atitudes e na personalidade. Completa o seu pensamento referindo que a aprendizagem significativa é "penetrante, que não se limita a um aumento de conhecimentos, mas que penetra profundamente em todas as parcelas da sua existência" (p. 253).

Também para Weber-Russell e LeBlanc (2004) o desenvolvimento da capacidade da criança para representar e manipular conceitos matemáticos requer uma *acção dinâmica procedimental* ("juntar isto a aquilo e ver o que se obtém") a outra *conceptual compreendida* (descritiva, declarativa), isto é, a descrição do que faz sentido ("make sense") na estrutura cognitiva do estudante. Este aspecto da estrutura depende mais da compreensão das relações do que das operações sequenciais produzidas. A compreensão das relações pode ser suportada pela reflexão das crianças nas várias situações (Brink, 1991). Assim, a implicação das ferramentas na aprendizagem deve facilitar a reflexão, a exploração de estruturas e as relações como um todo em contextos matemáticos relevantes que estimulem e aprofundem a compreensão (Weber-Russell e LeBlanc, 2004).

Os estudantes que memorizam factos ou procedimentos sem compreenderem, muitas vezes, não estão certos quando ou como podem usar o que eles sabem e tal aprendizagem é, na maior parte das vezes, muito frágil, comprometendo a aplicação, com êxito, a novas situações (Bransford, Brown and Cocking, 1999). Deste modo, cada vez mais as directrizes e os pressupostos pedagógicos da Educação Matemática de diversos organismos e entidades fazem apelo a uma *aprendizagem da matemática com compreensão*, baseada nas experiências da vida quotidiana, em que as crianças gradualmente desenvolvam um complexo conjunto de ideias informais acerca dos números, padrões[14], formas, tamanhos, quantidades e muitas outras, criando raízes com a matemática e simultaneamente a capacidade de as expressar oralmente sem terem necessidade de conhecer qualquer notação algébrica (NCTM, 2000; Williams, 2001). A finalidade é orientar o estudante a reelaborar um vocabulário que lhe pertença e "esquemas próprios com significados especiais e essenciais que possam transmitir correctamente e de modo coerente a situação em estudo ou a realidade envolvente" (Palangana, Galuch e Sforni, 2002, p. 120).

[14] É curioso registar que os autores Zazkis e Liljedahl (2002) reconhecem nos padrões "o coração e a alma das matemáticas" (p. 379).

De facto, as crianças, no seu dia a dia, aprendem diversas ideias matemáticas muito significativas antes de entrarem na Escola (Piaget, 1965; Gelman and Gallistel, 1978; Resnick, 1987b). Assim, nos procedimentos escolares a compreensão conceptual deve ser baseada nas experiências e saberes do quotidiano e no saber (in)formal anterior, funcionando, isoladamente e/ou em conjunto como pré-requisitos para a construção do novo conhecimento (Ausubel, 1963; Zazkis e Liljedahl, 2002).

Enquadrada na aprendizagem significativa da matemática surge ainda a cognição, baseada na relação e na compreensão de relações, no tratamento da informação através da manipulação de símbolos, representadores de aspectos do mundo real, a partir de regras sequenciais e interligadas (Rodrigues, 1998).

4.3. Aprendizagens contextualizadas

O modelo semiótico e epistemológico descrito por Batanero e Godino (1998) em 2.3. deste capítulo requer a integração de outro elemento primitivo para descrever e explicar os processos de interpretação e comunicação em Educação Matemática, que é a noção de *contexto*. Em termos gerais, definem a noção de contexto como um conjunto de factores do mundo envolvente e intra-linguístico que suportam e determinam a actividade matemática. Os autores completam esta definição concluindo que o *contexto* se pode descrever como um marco ou cenário em que se desenvolve a actividade matemática e que é caracterizado por: a) elementos interpretativos (convenções, regras) e instrumentais (recursos tecnológicos); b) organização interna, isto é, a natureza sistémica das relações entre os seus elementos; c) associação a sistemas expressivos que requerem traduções mútuas.

Gravemeijer (1991) defende que "a compreensão e os "*insights*" são suportados pelo contexto que podem surgir como uma situação modelo" (p. 77) e, reforçando esta ideia, o NCTM (1957, 1991, 2000) salienta que o raciocínio matemático é o hábito da mente e, tal como todos os hábitos, precisa de se revelar e ser desenvolvido de forma consistente em diversos contextos. De Lange (1987) defende que "o contexto tem um papel duplo: qualquer sub-currículo inicia-se em situações do mundo real, que não é apenas restrito ao ambiente físico e social, dado que a própria imaginação dos estudantes providencia também fontes e contextos para o desenvolvimento de conceitos matemáticos. O segundo papel do contexto é na aplicação, pois os estudantes encaram a realidade exposta como fonte e domínio de aplicação" (p. 37).

Numa sociedade em plena mutação, as evoluções tecnológicas, culturais e sociais vão influenciar claramente a aprendizagem escolar dos estudantes que diariamente se confrontam com situações e vivências de proveniências distintas e múltiplas (Mendes, 1998). A diferença entre o conhecimento do quotidiano e o escolar reside no poder de organização do segundo, pois a aquisição dos saberes no meio envolvente faz-se de forma desorganizada, solta e com ausência de orientação progressiva. O facto de existirem contactos com realidades diversificadas fora da sala de aula torna relevante o estudo da natureza e do contexto das actividades desenvolvidas na sala de aula.

Defendendo uma ideia mais globalizante, Nemirovsky (1996) apela à necessidade de nos libertarmos dos estereótipos que se constituem como um problema da vida real. "Torna-se necessário abrir as nossas mentes e explorar o que é real na experiência do aprendente" (p. 313). Este autor acredita que tantos os problemas contextualizados como os descontextualizados oferecem ideias e experiências ricas de aprendizagem aos estudantes. Nemirovsky (1996) defende ainda que existe um desconhecimento associado à noção de contexto, pois, segundo este autor, é desajustado considerar que o contexto pertence à formulação do problema, ignorando, muitas vezes, que alguns dos contextos reais são descobertos pelos estudantes, na própria experiência associada à resolução dos problemas.

Também um estudo realizado por Gonçalves (1996), no 1º ciclo do ensino básico, na resolução de problemas em estruturas aditivas, revela que resolver uma operação aritmética inserida numa situação problemática com contexto apela a procedimentos diferentes concluindo ser fundamental que os professores façam a exploração de erros e de operações aritméticas inseridas em contexto em vez de as trabalharem isoladamente.

Em todas as coisas úteis que nos rodeiam, desde a cama em que dormimos à casa que habitamos, da bicicleta ao automóvel que nos transporta até à ponte que atravessa a estrada, do comboio ao avião e à nave espacial, das facturas da electricidade e telefone, ao uso de cheques na compra de produtos, às sondagens eleitorais e eleição de candidatos, etc, parece existir sempre algo que esteja, de qualquer modo, associado, ainda que por vezes de forma não evidente, aos números e ao conhecimento matemático. "A Matemática afecta, sem dúvida, quase todos os aspectos da nossa vida. (…) Ou seja, independentemente dos objectos particulares ou específicos de cada pessoa – quer estes sejam profissionais ou meramente recreativos – o conhecimento da Matemática é essencial" (Ralha, 1992, p. 98-99). Reconhece-se, cada vez mais, a importância da Matemática na aplicação a problemas concretos, do quotidiano e a outras realidades em que esta disciplina está ligada, de um modo consistente e organizado (Mendes, 1998). Assim, segundo este autor, numa actividade de investigação ou na resolução de um problema, o contexto deve ser explorado até à exaustão pois, por vezes, quando o obstáculo parece intransponível a capacidade de perseverança para interpretar, analisar, argumentar, levantar novas conjecturas e procurar encontrar uma solução motiva e ajuda a não desistir facilmente na concretização da tarefa.

Tendo por base o postulado que a forma e o conteúdo não se separam, Vygostky (1995) investiga e conclui que, orientada e regulada por pessoas, a criança apropria-se da linguagem, dos signos e significados linguísticos, bem como dos objectos físicos disponíveis no meio. Defende ainda que ao assimilar o conteúdo veiculado por esses instrumentos, ela engloba, ao mesmo tempo, por meio deles, as formas de pensar, de perceber, de raciocinar, de interpretar, ou seja, um conhecimento complexo de inter-relações contextualizadas. Deste modo, a implicação das ferramentas para a aprendizagem deve facilitar a reflexão e a exploração de estruturas e relações como um todo em contextos matemáticos relevantes (Weber-Russell e LeBlanc, 2004). Assim, numa primeira abordagem, o mundo objectivo da realidade física e o mundo subjectivo dos pensamentos e sentimentos são concebidos como mundos separados e independentes, mas, no âmbito das ciências e das tecnologias, a cognição é encarada como a emergência de esquemas globais numa rede dinâmica de elementos simples, cujas interacções cooperativas são sensíveis ao contexto (Rodrigues, 1998) ou que depdendem dele (Taylor, 1980).

Também na filosofia da Educação Matemática designada por "Realist Mathematics Education" (RME) a ideia fulcral situa-se no desenvolvimento de caminhos contextualizados, "com sentido", para a aprendizagem e o ensino da matemática (Reeuwijk, 1995, p. 2). O grupo de investigadores que idealizou, desenvolveu e divulgou a teoria (Freudenthal, 1973; De Lange, 1987; Streefland, 1990; Gravemeijer, 1990; Treffers, 1991; entre outros investigadores do FI) considerou cinco aspectos cruciais no processo aprendizagem-ensino da Matemática: a) o mundo "real", os contextos realistas têm um papel vital, pois é preciso propor a resolução de situações com significado para os estudantes; b) as próprias produções e construções que podem provocar reflexões e simultaneamente indicar referências no progresso ao nível cognitivo do estudante; c) a matematização, através da qual o estudante interpreta a situação e representa-a, usando várias estratégias, na procura da solução; d) a interacção e a partilha de experiências permitindo, no processo de resolução de problemas, a cooperação, o debate, a construção de saberes e a reflexão; e) a integração de conhecimentos anteriores na mobilização dos novos, possibilitando, assim, a interligação de conteúdos e conexões entre diferentes domínios temáticos com vista ao desenvolvimento do conhecimento como um todo. Investigadores mostraram que os estudantes têm menos dificuldade em negociar com a matemática quando os problemas (do campo aritmético, algébrico ou qualquer outro domínio) estão embebidos num contexto (Reeuwijk, 1995, 2003). Neste sentido, o significado permanece estável ao longo de todas as alterações ocorridas em diferentes contextos, sendo construído através do desenvolvimento das interacções sociais, pela partilha de diferentes experiências e saberes (Voigt, 1994; Vygotsky, 1995). Para De Lange (1992) o conceito de *matematização* é essencial na aprendizagem em contexto, pois para aprender é necessário reflectir, analisar o percurso de resolução e o próprio meio onde se encerra o problema, o qual vai influenciar o estudante na maneira como pensa e age, estabelecendo-se um ciclo de aprendizagem, como mostra a figura seguinte.

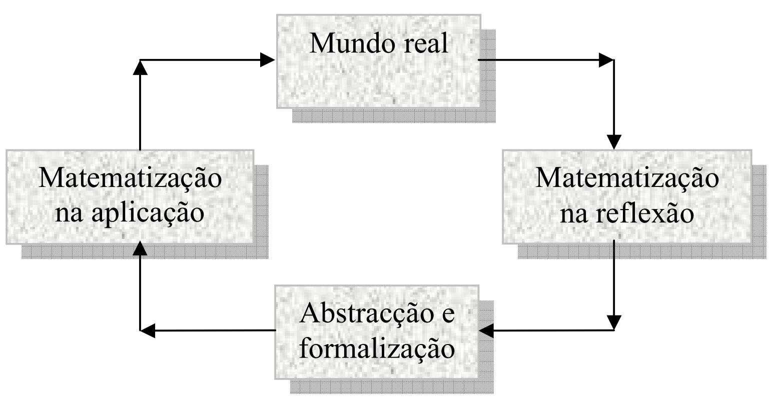


Figura 6: Ciclo de aprendizagem da "matematização" (De Lange, 1992)

4.4. Aprendizagem por tentativa e erro[15]

Para Bickhard (1992) o processo de desenvolvimento envolve mecanismos fundamentais tais como processos de variação e selecção que implicam, muitas vezes, a presença de situações de erro. Morgado (1970-2001) defende que o erro é uma forma de aprendizagem e Fernandes (1994; 2000) corrobora esta ideia, mas salienta que só o erro e a consciência deste, através de uma análise reflexiva, capacita o sujeito para mobilizar saberes, construir e incorporar novo conhecimento. A aprendizagem é, assim, considerada como um processo *construtivo de tentativa e erro* de novos sistemas de organização e de exclusão de ensaios que produzem interacções e diferenciações com vista à obtenção do êxito. "Saber detectar erros é uma fase do processo de aprendizagem" (Gravemeijer, 1991, p. 70) e este autor acrescenta que a consciencialização do erro, através de um processo de reflexão intrínseca, provoca necessariamente uma aprendizagem compreendida e aprofunda necessariamente uma posição cultural. Borasi (1987) chama também a atenção para o facto de aprendermos com os nossos próprios erros e daí serem considerados boas ferramentas pedagógicas. Segundo esta autora os erros produzem informações válidas sobre as causas do erro, sugerindo alternativas e podendo, através deles, conhecer-se a força e as limitações das estratégias disponíveis, assim como identificar as características específicas do próprio contexto. Pensa-se que a função essencial da Escola é a de constituir e desenvolver, na criança, "um controlo consciente, auto-dirigido sobre as modalidades da sua própria acção, numa dinâmica construtiva de avanços e recuos e, naturalmente, desenvolver a partir daí um processo interno de metacognição". (Borasi, 1987, p. 197).

Para Lerman (1989) "a Matemática é identificada por maneiras particulares de pensar, conjecturar, procurar contradições informais e formais, etc e não pelo conteúdo específico" (p. 77). Este autor, Meyer (1999); Meyer e Ludwig (1999) e Ameron (2004) acrescentam ainda que não é o tema ou o conteúdo programático específico que reconhecem identidade à aprendizagem matemática, mas sim o envolvimento dos estudantes em processos diversificados que os obriguem a reflectir, a procurar alternativas de modo a tomarem decisões convenientes nas diferentes situações que vão surgindo. As investigações de Moreira (1989) e Porfírio (1993) incluem também descrições de estratégias experimentadas pelos estudantes na resolução de problemas, indicando algumas sugestões de ordem didáctica e salientando que a utilização da folha de cálculo e da calculadora permitem a estimulação e a valorização da estratégia *de tentativa e erro*, identificando-a como uma fase importante da aprendizagem matemática (Ponte, Matos e Abrantes, 1999).

4.5. Aprendizagem e cultura matemática

Para além da crença defendida por Paulo Freire (1975) que: "todo o acto educativo é um acto político" reconhece-se que, no *devir pedagógico*, a natureza cultural dessa actividade humana entre a qual se destaca a aprendizagem matemática é a própria cognição humana (Freudenthal, 1973, 1983; Becker, 2001, 2003). A construção do conhecimento na

[15] Em 9.3.3. deste capítulo será analisado este termo, no contexto prático da resolução de problemas.

classe estabelece-se em interacção social e cultural do professor com o estudante e vice-versa e entre os próprios estudantes num ambiente rico de aprendizagem. “Isto é crucial para os professores de Matemática, pois devem consciencializar-se que a aprendizagem matemática liga-se à linguagem, à interacção social e ao contexto cultural” (Jaworski, 1994, p. 28).

Na sequência de diversas investigações, tem vindo a tomar forma uma concepção de aprendizagem como “enculturação”. Alguns autores (Brown, Collins e Duguid, 1989) propõem esta noção ao defenderem um paralelismo entre o conceito do saber e o de ferramenta. Estes e outros autores (concretamente os investigadores do FI) comparam a aquisição de uma ferramenta, que não se sabe usar, com a forma como os estudantes, normalmente, adquirem o conhecimento matemático na Escola, baseado fundamentalmente em algoritmos, rotinas e definições “descontextualizados” e que, quando não aplicado a situações concretas, transforma-se num saber inerte. Para Brown (1987) a cultura, o seu sistema de crenças e a forma como os membros de uma comunidade utilizam as suas ferramentas, quer sejam manuais ou conceptuais – determinam a maneira como eles vêem o mundo. Segundo este autor actividades, conceitos e cultura são interdependentes e nenhum deles pode ser totalmente compreendido sem o(s) outro(s), ou seja, cada um precisa dos outros dois para se desenvolverem processos mais completos de metacognição.

Nestas circunstâncias, o NCTM (2000) defende que a Escola oriente o ensino da Matemática para vários aspectos: a) *Matemática para a vida*. Aprendendo e sabendo matemática, na perspectiva de se tornar uma fonte de satisfação e empenho no dia a dia, pois quase todas as entranhas e aspectos mais superficiais da vida quotidiana estão intimamente ligados a conhecimentos matemáticos e tecnológicos. Tomar decisões, planear projectos de vida, analisar gráficos de diversos assuntos diários, são aspectos onde a matemática está presente e ajuda-nos a ponderar e a usar o pensamento lógico e simbólico; b) *Matemática como parte de uma herança (património) cultural*. A Matemática é uma das culturas mais grandiosas, fazendo parte do acervo intelectual da humanidade, sendo por isso indispensável que o cidadão comum seja educado para apreciar, respeitar e compreender esse património, incluindo os aspectos históricos, estéticos e recreativos; c) *Matemática para o local de trabalho* (ou para a vida profissional). Como o nível das necessidades matemáticas subiu drasticamente torna-se imprescindível que o nível de pensamento matemático na Escola seja elevado, bem como a necessidade de resolver problemas, para melhorar a capacidade de planeamento/concepção e execução das tarefas de modo a equilibrar mental e fisicamente o indivíduo; d) *Matemática para a comunidade científica e tecnológica*. Embora todas as carreiras profissionais necessitem de um conhecimento profundo e intensivo da Matemática, cada vez mais os estudantes precisam de uma educação que os prepare para uma longa vida profissional como matemáticos, engenheiros e cientistas, entre outras profissões.

Concomitantemente, o conceito de cultura emerge, não como o corpo de estudo da antropologia, mas como uma forma de estar e de ser, particular, pessoal e inter-relacional. Surge, então, o conceito de cultura como objecto da aprendizagem associado a uma abrangência educativa, humana e social inerente ao devir pedagógico. Ao abordar o desenvolvimento cognitivo do Homem como produto essencialmente sócio-cultural, Vygostsky (1979) problematiza o desenvolvimento da mente primitiva de uma criança até se transformar na de uma pessoa adulta, adquirindo "novas capacidades, novas formas de pensamento, lógicas e novas atitudes perante o mundo" (Vygostsky e Luria, 1993, p. 168). Estes autores consideram, assim, que na estrada do desenvolvimento cultural a criança não só amadurece, mas também se "rearma", isto é, adquire meios culturais (a linguagem e outras ferramentas psicológicas) que não sendo exteriores à mente crescem no seu interior, acabando por criar uma "segunda natureza". Vygostsky (1979) aborda também as tradições das investigações socio-genéticas e o desenvolvimento cognitivo do ser humano como um produto essencialmente sócio-cultural (ou histórico cultural). Embora não negando a linha natural (ou biológica) desse crescimento, dá uma ênfase acentuada à linha cultural do processo de desenvolvimento humano, pela qual se defende a história de cada indivíduo, reconhecendo-se que o desenvolvimento intelectual e a formação da sua própria personalidade se constrói na presença e na interacção com o outro.

Segundo Santos (1998) as culturas de ensino expressam-se nas crenças relacionadas com o trabalho (como agir apropriadamente e quais os aspectos recompensadores do ensino), no saber partilhado pelos professores que permite a estes profissionais tornar possível a sua profissão. Assim, as culturas de ensino não devem ser tidas apenas como um todo, mas encaradas na sua diversidade. No esquema conceptual de Vygotsky, a cultura surge como um mediador, um filtro, através do qual se percebe o mundo como significativo e coerente, mas, simultaneamente, encerra constrangimentos do nosso entendimento e actuação (Santos, 1996). Também para Munari (1968) "a educação tem uma função de informação cultural, mas deve estar ligada ao seu tempo, caso contrário deixará de se compreender" (p. 12), acrescentando ainda que "cada um vê aquilo que sabe" (p. 19), sendo a captação das mensagens visuais dependente de vários filtros, entre os quais destaca os filtros culturais, relacionados com a cultura da pessoa. De acordo com Shweder e Sullivan (1993) o carácter mediador da utilização das ferramentas (físicas, mas também as psicológicas, como a linguagem) é algo fundamental na evolução humana permitindo distinguir as funções naturais (não mediadas) das culturais (mediadas). Acrescentam ainda que a natureza interactiva da relação entre cultura e mente revela uma acção possível de causalidade, admitindo que: "cultura e mente fazem-se uma à outra" (p. 511).

Tudo indica que o conceito de cultura matemática se enraíza nos objectivos da Educação Matemática e integra naturalmente os conhecimentos sócio-culturais e matemáticos adquiridos pelos estudantes na vivência escolar e em sociedade. Também Santos (1996) defende que a Escola é uma das organizações sociais onde se tem como intenção explícita uma transmissão cultural. A sala de aula emerge como o local onde grande parte das actividades escolares diárias se desenrola de acordo com os objectivos da instituição escolar, assim como com os princípios gerais de educação definidos pelos organismos públicos responsáveis. Como Arendt afirma "a função da Escola (...) é ensinar aos estudantes o que o mundo é" (1968, p. 195) e, neste caso, importa descortinar "o que o mundo é" englobando conhecimentos, valores, artefactos, emoções, formas de pensar e de sentir, ou seja, envolve cultura (Santos, 1996). O acto de ensinar e de aprender, tal como qualquer outra actividade humana está associado a saberes, mas também a concepções, valorizando determinadas formas de pensar e de actuar (Cockcroft, 1985). Na Escola, as actividades que se definem, organizam e realizam, bem como os recursos que se disponibilizam, as atitudes que se reforçam, omitem ou ignoram propositadamente, as associações e interacções que se fomentam e proporcionam, reflectem uma perspectiva cultural. Portanto, um(a) professor(a) mesmo quando se propõe ensinar um determinado conteúdo que imagina como objectivo específico está a ensinar uma parte do que “o mundo é”, isto é, está a participar numa “forma deliberada e intencional de transmissão cultural” (Bishop, 1991, p. 5, sublinhado do autor).

Deste modo, a cultura matemática emerge como uma forma de estar com esta ciência, na Escola e com o estudante, na sala de aula, integrando ideias, saberes, crenças, emoções e práticas educativas inovadoras (Hogben, 1941, 1970; Wood, Cobb e Yackel, 1995). Estes autores acrescentam ainda que a comunicação partilhada e as conexões matemáticas tecem e suportam esta estrutura cultural. Assim, a aprendizagem da Matemática é influenciada tanto pelas práticas matemáticas desenvolvidas na sala de aula como pelas normas sociais negociadas, implícita ou explicitamente institucionalizadas pela comunidade.

A integração dos conhecimentos sócio-culturais e de outros saberes matemáticos apreendidos em sociedade, com outros adquiridos na Escola, designadamente, com a cultura profissional do professor que “compreende crenças, valores, hábitos e caminhos assumidos” (Hargreaves, 1995, p. 165) desenvolve a cultura matemática do estudante, impregnada de saberes, criando uma forma de estar com a própria ciência. Esta concepção concorre naturalmente para uma proposta curricular actual de Educação Matemática (Brown, 1987; Shweder e Sullivan, 1993). E como é que a Matemática se enquadra, de forma coerente, com estas abordagens de cultura e aprendizagem? De facto, “a Matemática tem sido uma ciência quase ignorada pela antropologia” (Santos, 1996, p. 28), dado que não é considerada uma ciência ontológica, mas uma ciência relacional (Guimarães, 1986), cujo objecto de estudo são conceitos abstractos, precisos, rigorosos, universais, demonstráveis e aplicáveis. Numa visão mais etnográfica e sócio-política, D´Ambrósio (1985, 2005) defende que têm existido estudos sobre a natureza da Matemática, no qual a universalização (no que concerne ao mundo civilizado) está ligada a processos de conquista e colonização. Contudo, o saber intrínseco matemático tende a alimentar a própria ciência, a exercer um poder científico transversal que abraça as outras ciências e simultaneamente parte do conhecimento matemático e tende a imiscuir-se na vida social do indivíduo, “descendo à rua”, para o quotidiano do cidadão, numa íntima relação do saber matemático com diversas actividades diárias, como defendeu Caraça, em 1989 de forma poética e particularmente envolvente, já descrita no primeiro capítulo da tese. Matos (2005) salienta também que a Matemática tem vindo a estar cada vez mais presente na cultura das sociedades desenvolvidas e que esta ciência, “ou melhor, a compreensão e o uso de uma linguagem matemática, constitui uma dimensão importante para o assumir da personalidade e tornou-se mesmo vital a uma cidadania plena” (p. 251).

4.6. Competência matemática

A questão dialéctica entre ensinar e obter competências para a sociedade de informação *versus* desenvolvimento das potencialidades do indivíduo, com a socialização, a preparação para a vida profissional, o desenvolvimento da ciência e da cultura, numa perspectiva de educação para a cidadania, requer coerência das instituições, em particular, ao nível escolar e não escolar (Ambrósio, 2002). Nas competências gerais e transversais preconizadas pelo Ministério da Educação (1999) define-se "*competência matemática* como uma aptidão integrada, englobando um conjunto de atitudes, valores, capacidades e conhecimentos relativos à matemática" (p. 3) e apela-se para que todos os jovens tenham oportunidade de a desenvolver no seu percurso formativo ao longo da educação básica. No documento ministerial ser matematicamente competente inclui um rol de situações e o desenvolvimento de diversas capacidades, das quais se destacam: a) a predisposição e a aptidão para raciocinar matematicamente, isto é, para explorar as situações problemáticas, procurar regularidades, fazer e testar conjecturas, formular generalizações e pensar de maneira lógica; b) a predisposição para procurar entender a estrutura de um problema e a capacidade de desenvolver processos de resolução, assim como para analisar os erros cometidos e ensaiar estratégias alternativas; c) a capacidade de decidir sobre a razoabilidade de um resultado e de o usar, consoante os casos, desenvolver o cálculo mental, os algoritmos de papel e lápis ou os instrumentos tecnológicos; d) a tendência para procurar "ver" e apreciar a estrutura abstracta que está presente numa situação, seja ela relativa a problemas do dia-a-dia, à natureza ou à arte que envolve elementos numéricos, geométricos ou ambos.

Apesar do conceito de *competência matemática* ainda não se encontrar devidamente estabilizado, como foi reconhecido por vários investigadores no encontro ibero-americano de Educação Matemática (cibem5), realizado no Porto, em Julho de 2005, eram unanimemente aceites as orientações curriculares prescritas nos programas de Matemática dos diferentes países e as definidas e divulgadas pelo PISA (2000) e GAVE (2002), através do qual são integradas três classes de competência matemática: *classe de competência 1 – reprodução, definições e cálculos*; *classe de competência 2 – conexões e integração para resolução de problemas* e *classe de competência 3 – matematização, pensamento matemático, generalização e perspicácia ("insight")*. Por outro lado, um aspecto comum que atravessa praticamente os currículos de Matemática é a atenção para que todos os estudantes tenham a oportunidade de desenvolver *competência matemática* (UNESCO, 1990; NCTM, 2000) adequada a uma participação informada e crítica na sociedade, "de forma a abranger os aspectos essenciais da numeracia e de *literacia matemática*[16] na sociedade" (Niss, 1996, p. 32). Neste sentido, Canavarro (2003, 2005) defende que o termo literacia matemática tem sido profusamente utilizado por diversos autores para evidenciar o que se pretende hoje em dia em relação à Educação Matemática através da qual se deve desenvolver nos estudantes o uso abrangente e funcional da Matemática, aspecto cada vez mais relevante na sociedade actual.

[16] No primeiro capítulo apresenta-se a definição do conceito segundo o PISA 2003 (OCDE, 2003, ME, GAVE, 2004, p. 7).

Segundo orientações ministeriais *ensinar matemática* requer o desenvolvimento continuado e persistente de saberes essenciais da disciplina, a aplicação desses conhecimentos à resolução de problemas diversificados, relacionados ou não com o dia a dia e com outras áreas do conhecimento, prevendo-se também a utilização, caso seja necessário, de instrumentos tecnológicos para que o estudante tenha possibilidades de desenvolver capacidades cognitivas, através de ensaios e de estratégias de tentativa e erro, num leque alargado de experiências significativas. A partir de um determinado tema a ideia é procurar evidenciar as conexões com os outros domínios, provocando necessariamente o desenvolvimento das competências matemáticas transversais, ou seja, "daquelas que atravessam todos os temas e devem constituir os grandes objectivos do ensino de um currículo de Matemática" (Abrantes, Serrazina e Oliveira, 1999, p. 14).

Segundo Simon (1993) o conhecimento matemático é construído individualmente e em interacção com o outro, através da exploração de hipóteses, verificação, explicação, justificação, partilha de ideias e pensamentos e negociação de significados, permitindo, assim, o desenvolvimento de diversas competências. Assim, a sala de aula torna-se o contexto social e cultural da aprendizagem matemática onde os estudantes não só "abraçam" a disciplina, como também aprendem a negociar os significados com o professor, promovendo diversas competências ao nível das atitudes e capacidades (Voight, 1994; Wood, Cobb e Yackel, 1995).

De Lange (1987), investigador e actual director do Institut Freudenthal (FI), defende que na Escola e, particularmente na classe de Matemática, se deveria prestar atenção ao desenvolvimento de grandes competências como sejam: a) pensar matematicamente; b) saber argumentar; c) saber representar e comunicar; d) saber resolver; e) saber usar técnicas matemáticas e instrumentos e f) saber modelar e concatenar todas estas competências numa proposta curricular coerente e integradora.

4.7. Processos de avaliação

A avaliação suporta uma aprendizagem gradual importante da matemática e fornece informação actualizada da qualidade do processo de ensino aos professores e aos estudantes. Quando a avaliação se constitui como uma parte integral da instrução matemática ela contribui significativamente para a aprendizagem de todos os estudantes (NCTM, 2000). A avaliação é um elemento curricular importante, pois é através deste conjunto de operações que é possível planificar e colocar em prática o conhecimento racional da turma e do que se instala na sala de aula. A avaliação, assim definida, é algo imprescindível para o professor, pois permite-lhe que conheça, melhore a sua prática profissional, adoptando também o papel de investigador.

O *Assessment Standards for School Mathematics* (ASSM) (NCTM, 1995) apresenta seis componentes relacionadas com a avaliação em matemática: a) reflectir sobre a matemática que os estudantes precisam de saber e a que são capazes de fazer; b) fortalecer a aprendizagem matemática; c) promover a equidade; d) desenvolver um processo aberto; e) promover válidas inferências; f) implementar um processo coerente.

Uma boa avaliação deve fortalecer a aprendizagem dos estudantes em diferentes perspectivas (Morgan, 1998). Em primeiro lugar as tarefas usadas no processo de avaliação disciplinam o estudo do estudante orientando-o para as matérias a avaliar, às quais dedica tempo e atenção. Em segundo lugar hierarquiza a importância dos assuntos a estudar, procurando o estudante adquirir os conhecimentos de forma compreendida e suportada pelos saberes anteriores (NCTM, 2000).

O documento do ASSM defende que devem ser usadas diversas técnicas de avaliação pelos professores, incluindo questões abertas e fechadas, tarefas de várias soluções a construir, de escolha múltipla, formulação e realização de tarefas, observações, conversação e debate, realização de relatórios ou jornais em concepção/concretização e organização de *portfolios*.

Cada um destes meios deve ser utilizado de acordo com os propósitos requeridos, por exemplo, as questões de resposta fechada ou de escolha múltipla ou de resposta induzida pelo próprio enunciado podem ajudar o estudante a aplicar procedimentos. As respostas em construção ou a realização de tarefas podem "iluminar melhor" os estudantes na capacidade de aplicar conhecimentos matemáticos em complexas e novas situações. Conversações e debate de ideias na classe podem providenciar "*insights*" no raciocínio dos estudantes e os próprios professores podem reorientar os diálogos e provocar alterações nas aprendizagens dos estudantes e na forma de pensar com a matemática (NCTM, 1995, 2000, 2001). A selecção dos meios mais adequados é baseada nos objectivos da Educação Matemática, no nível cognitivo, nas experiências vividas em sala de aula e ainda nas necessidades especiais reveladas pelos estudantes. Por outro lado, a diversidade da avaliação implementada, a avaliação formativa e/ou sumativa permite ao professor entender, de forma mais profunda, os próprios objectivos da Matemática, averiguar como pensam os estudantes para serem capazes de aplicar os conhecimentos adquiridos, munindo-se, assim, de diversas fontes de informação para tomarem decisões.

5. Matemática no Currículo

5.1. Aspectos conceptuais

Roldão (1999) defende que "em toda e qualquer prática educativa escolar está sempre presente um determinado modo de concretizar **uma opção de gestão curricular**" (p. 13, o negrito é da autora), existindo uma opção sobre o que ensinar, como organizar a aprendizagem e como avaliar os seus resultados. Para esta investigadora "**o currículo escolar é – em qualquer circunstância – o conjunto de aprendizagens que, por se considerarem socialmente necessárias num dado tempo e contexto, cabe à Escola garantir e organizar**" (p. 24, o negrito é da autora). Para Doyle e Carter (1986, p. 134) o currículo consiste num conjunto de tarefas académicas que os estudantes têm de enfrentar, resolver e que permite o processamento da informação a diferentes níveis de compreensão conteúdal. De acordo com Alonso (1998, p. 51-52) o currículo deve ser mesmo entendido como o *Projecto Global de formação* (capacidades a desenvolver) e de *cultura* (aprendizagens a realizar) da instituição escolar para a educação das novas gerações, que *fundamenta, articula e orienta*, a diferentes níveis de decisão e especificação, a intervenção pedagógica nas Escolas, com o fim de permitir uma mediação educativa de qualidade para todos os estudantes, reconhecendo que as decisões curriculares se revestem da máxima importância na inovação das práticas e dos contextos escolares. Trata-se, por um lado, de *tornar explícitas as intenções* do sistema educativo sobre os aspectos do desenvolvimento e da assimilação da cultura que a Escola trata de promover e, por outro lado, de *servir como guia* para orientar a organização das experiências e actividades na prática educativa. Também para o NCTM (2000) o currículo tem de ser mais do que uma colecção de actividades, deve apresentar-se, acima de tudo, como "um sistema coerente, focalizado no que é importante para a Matemática e bem articulado com os diferentes níveis de ensino" (p. 14).

De forma questionada e sistémica Roldão (1999) defende que gerir o currículo é decidir o que ensinar e porquê, como, quando, com que prioridades, com que meios, com que avaliação e quais os resultados que se esperam, entre outros factores. Assim, qualquer currículo para a disciplina da Matemática assenta necessariamente em diversos pressupostos que dizem respeito a determinados fundamentos teóricos e às condições previstas para a sua implementação (Ponte, Matos, Abrantes, 1999). Estes autores defendem ainda que o currículo envolve uma série de questões relacionadas com a essência, os objectivos, os conteúdos e as metodologias associadas ao ensino da Matemática os quais resultam, naturalmente, dos saberes experimentais acumulados, das investigações e publicações sobre Educação Matemática. Estudos realizados mostram que a inovação curricular é um fenómeno contextualizado, com efeitos muito diferenciados, consoante as práticas anteriores dos professores, as dinâmicas de trabalho cooperativo que existem nas Escolas, os níveis etários e as atitudes dos estudantes em relação à Matemática (Ponte, Matos, Abrantes, 1999). Segundo Roldão (1998,1999) as sociedades actuais são cada vez mais heterogéneas do ponto de vista étnico, cultural, linguístico e, nestas circunstâncias, a maneira como a Escola gere o currículo ainda continua a ser segundo um modelo curricular organizativo, pensado numa audiência homogénea, resultando, deste modo, num tremendo fracasso escolar, vulgarmente associado ao insucesso dos estudantes, pois continua apostada a aplicar um modelo de funcionamento arcaico.

Por outro lado, Abrantes, Serrazina e Oliveira (1999) alertam para a falta de experiência no entendimento de um currículo de Matemática fundamentado em competências e não baseado numa acumulação de conhecimentos mais ou menos isolados uns dos outros, de acordo com uma sequência pré-estabelecida e supostamente universal. Para além da noção associada à terminologia oficial com cerca de dez anos, em que as competências englobam conhecimentos, capacidades, atitudes e valores, surge um novo conceito de gestão curricular flexível que, segundo aqueles autores, urge fomentar na convivência escolar. Tudo indica que, neste momento, é preciso experimentar, averiguar das dificuldades e potencialidades e reorientar percursos e estratégias da acção educativa (Ponte, Matos e Abrantes, 1999). Adicionalmente a Educação Matemática pressupõe uma construção social, em que existe uma representação da realidade envolvente e a Matemática no currículo escolar emerge também como uma ciência socialmente construída (Noss, 1994; Niss, 1994; Roldão, 1999).

Para Niss (1994) "a Matemática surge como uma ciência que serve para generalizar o *conhecimento* e os "*insights*" (p. 367), acrescentando ainda que é simultaneamente neste sistema interno de *instrumentos*, processos e produtos que se podem assistir a *decisões* e a *acções*, independentes, inter-relacionadas ou desgarradas do currículo. Segundo Goñi,

(2000) a construção de propostas curriculares surge como um factor decisivo na hora de delinear uma alternativa credível, com garantias de êxito para a reforma do ensino das matemáticas. Para isso é necessário repensar numa política curricular adequada e conceber um compromisso claro para criar um corpo de professores preparados e motivados a lançarem-se num novo desafio de aplicar na prática aspectos inovadores da Educação Matemática (Goñi, 2000; Kindt, 2004). "Não é possível resolver um problema tão espinhoso como é o da reforma do ensino de uma matéria tão enraizada e tradicional como são as matemáticas" (Goñi, 2000, p. 42).

Nos *standards* do NCTM (1991, 2000) é recomendado o tratamento significativo de tópicos e as recomendações são ambiciosas, sugerindo-se que os estudantes aprendam muitos conteúdos em álgebra, alguns deles relacionados intrinsecamente com a geometria, mas também ligados a outros conteúdos e áreas. Nesta perspectiva, o currículo não pode ser sentido nem trabalhado de forma fragmentada, mas deve ser focado para a essencialidade do domínio matemático e integrado com as outras áreas disciplinares, numa preocupação de coerência e unidade científica.

O currículo da matemática escolar é fortemente determinante sobre o que os estudantes têm oportunidade de aprender e o que aprender. De facto, este instrumento tem uma importante missão: preparar os estudantes para continuar os estudos e para resolver problemas nas mais variadas situações: Escola, casa, dia a dia e noutros possíveis locais de trabalho e de lazer (NCTM, 2000). Isto significa que um currículo bem articulado, proporciona aprendizagens mais sólidas na construção de ideias matemáticas, permitindo uma progressão gradual e complexa dos estudos.

Nos Guias para professores, publicados em 1977, já o matemático português J. S. e Silva defendia que o programa de Matemática deveria ser um texto orgânico, onde as noções aparecessem devidamente concatenadas. Actualmente, Roldão (1999) ultrapassa a própria dimensão do programa e salienta que existe um desafio actual que consiste "na apropriação pela Escola da gestão do currículo" (p. 22) e que só a articulação de uma sólida informação, organização e transferência de processos é capaz de tornar todos os indivíduos competentes e sabedores.

Dacal (1989) salienta também que existe ainda um curriculo "escondido" que importa cuidar, tais como as crenças e as atitudes dos estudantes e professores que se revelam implícita ou explicitamente para com a Matemática. Assim, deve ter-se consciência deste currículo implícito de forma a dar oportunidade aos estudantes a exporem as suas motivações, interesses, receios, crenças, medos e atitudes e que se possa reflectir sobre como estão com a Matemática, dando a possibilidade desta se tornar numa disciplina vibrante, repleta de desafios, criativa, interessante e construtiva. Weber-Russell e LeBlanc (2004) alertam para a compreensão conceptual da aprendizagem e que esta, em última instância reflecte, de um modo pragmático, o ponto de vista do ambiente de aprendizagem e do currículo.

Entretanto, Stenhouse (1984) considera o currículo uma tentativa de comunicar os princípios e as matérias essenciais de uma proposta educativa e deve oferecer ao professor, em síntese, os fundamentos válidos para projectar, avaliar e justificar o projecto educativo. Em particular, deve proporcionar:

Na planificação - a) princípios para seleccionar o conteúdo; b) princípios para o desenvolvimento dos métodos; c) princípios para o tratamento da sequência dos conteúdos e d) princípios para diagnosticar as características dos estudantes.

Na avaliação - a) princípios para avaliar o progresso dos estudantes; b) princípios para avaliar o progresso dos professores; c) orientações para adaptar o projecto às particularidades de cada contexto e d) informação sobre a variabilidade dos efeitos em diferentes meios e sobre as causas da tal variabilidade.

Na justificação - formulação das intenções e expectativas do currículo acessíveis à crítica pública.

Tal como Stenhouse a proposta do desenho curricular de Cañal e outros (1997) é baseada nos objectivos que assumem por completo a função de delimitar as intenções no processo da aprendizagem-ensino que se vai desenvolver. Todos os outros elementos curriculares, incluindo os conteúdos, têm o carácter de instrumentos ou meios para o desenvolvimento do processo orientado, em consonância com as direcções definidas pelos objectivos. O ensino surge, então, como um processo de criação, animação e avaliação de situações propícias para a aprendizagem, exercendo o professor a função de desenhador e facilitador da implantação dos processos, com intervenção primordial na regulação do fluxo de informação no sistema de aula. Os conteúdos surgirão, pois, caracterizados como recursos ou instrumentos para o desenvolvimento de objectivos educativos de todo o tipo: atitudais, normativos, conceptuais e procedimentais (Cañal e outros, 1997).

5.2. Integração - Ciências e Matemática

A integração das Ciências e da Matemática na Escola tem sido objecto de atenção e discussão em vários países e naturalmente também em Portugal, na implantação da reorganização curricular. No âmbito da flexibilidade curricular tem-se dado particular atenção a este assunto, sendo apontado, por autores do currículo e das especialidades científicas, como mais um meio para melhorar o desempenho dos estudantes nas duas disciplinas, desenvolvendo outras capacidades e atitudes positivas no processo global da aprendizagem e ensino das Ciências.

Apesar de existir na literatura uma quantidade abundante de termos referenciados para sinónimo de “integração”, persiste simultaneamente o sentimento geral, no quadro escolar, de que integração é uma coisa “boa” (Crosswhite, 1987; Pollak, 1987; Cuampagne, 1992; Berlin e White, 1996). Por outro lado, muito pouco se tem escrito sobre o que significa, na realidade, integrar Ciências e Matemática e muito menos em investigar sobre benefícios e dificuldades (Berlin, 1991). Contudo, as investigações apontam para a “indispensabilidade” de desenvolver uma linguagem comum a partir da elaboração de um modelo de integração nos dois domínios, destacando-se, simultaneamente, a necessidade de integrar, em primeiro lugar, a forma de ensinar antes de integrar o que se ensina. Nesta perspectiva tornou-se absolutamente necessário, a existência de um leque alargado de particularidades que permitissem orientar as práticas educativas e a investigação neste domínio, destacando-se naturalmente o modelo *Integrated Science and Mathematics de Berlin-White (BWISM)* (1996) com seis aspectos a considerar: a) aprendizagem; b) formas de conhecimento; c) processos e capacidades de raciocínio; d) conhecimento conceptual; e) atitudes e percepções; f) ensino. A identificação destes aspectos permite uma melhor clarificação das características de cada um deles, conseguindo-se, provavelmente, definir com mais rigor a própria integração, a sua implementação e a avaliação. A integração pressupõe um estudo exaustivo dos princípios, objectivos e conteúdos das duas ciências, pelo menos no sentido de averiguar quais as ideias comuns e as exclusivas das Ciências da Natureza e da Matemática. Berlin e White (1996) identificam tópicos comuns a ambos os currículos destas duas ciências, tais como: o estudo da medição, padrões e relações, probabilidades e estatística, relações espaciais, variáveis e funções. Há matérias em que os conceitos a desenvolver nas Ciências e na Matemática são concomitantes e podem-se mesmo completar. Por isso, Berlin e White defendem a necessidade de interligar esses conceitos para torná-los mais significativos para o estudante e, deste modo, conseguir maior eficácia na aprendizagem.

A integração pode ser encarada através da perspectiva dos processos intrínsecos às dinâmicas próprias das duas ciências bem como à similitude de orientações curriculares estabelecidas pelos programas das disciplinas. Nestes reconhece-se a resolução de problemas (investigação), o raciocínio, a comunicação e as conexões (integração) como processos centrais nas Ciências e na Matemática. As associações de professores, designadamente o NCTM através das Normas, 1991, 1995 e 2001 a American Association for the Advancement of Science e outros especialistas têm defendido que as capacidades básicas de investigação, que incluem a observação, inferência, medição, comunicação, classificação, previsão, bem como o controlo de variáveis, definição de operacionalidade, formulação de hipóteses, interpretação de dados, experimentação e construção de modelos, fazem parte integrante do desenvolvimento de competências na resolução de problemas. Os hábitos de pensamento e os princípios orientadores dos currículos incluem, nos processos de ensino e avaliação das Ciências e da Matemática, curiosidade, criatividade, imaginação, liderança, organização, persistência, engenho, correr riscos, auto-confiança, autonomia e reflexão (Rutherford e Ahlgren 1990; NCTM; 1991).

A integração pode ser vista não só em termos de convicções e crenças nas quais as duas disciplinas podem ser consideradas nos planos curriculares, mas também numa perspectiva de atitudes e percepções relativas à oportunidade de aumentar a eficácia científica no plano do desenvolvimento da literacia em Ciências e em Matemática (Pollak, 1987; NCTM, 1991; Berlin e White, 1996).

Os actuais documentos curriculares de Ciências e Matemática apontam para valorizar e incorporar atitudes partilhadas, tais como: a) *desejar conhecer* – ver as matérias destes dois domínios como formas de conhecimento e compreensão; b) *ser crítico* – reconhecer o tempo e a altura apropriados para questionar afirmações; c) *confiar nos dados* – explicar ocorrências naturais recolhendo e organizando informação, testando ideias e respeitando os factos que são revelados; d) *aceitar ambiguidades* – reconhecer que os dados raramente são claros e ilativos, valorizando as novas questões e problemas que possam surgir; e) *estar disposto a alterar explicações* – ver novas possibilidades nos dados; f) *cooperar nas respostas às questões e na resolução de problemas* – trabalhar em conjunto para reunir ideias, explicações e soluções; g) *respeitar o raciocínio* – valorizar modelos de pensamento que partam dos dados, conduzam às conclusões e, possivelmente, à elaboração de teorias; h) *ser honesto* – ler a informação objectivamente, sem preconceitos.

Outra consideração afectiva partilhada por Berlin e White (1996) é a promoção das Ciências e da Matemática como empreendimentos humanos. Assim, experiências integradas em ambas as disciplinas baseadas em interesses pessoais e sociais podem motivar os estudantes para o sucesso. A integração deve ser vista através da perspectiva dos métodos e estratégias comuns ao ensino das duas ciências em que as actividades deverão envolver os estudantes no *planear*, *fazer*, *analisar* e *reflectir* sobre fenómenos interessantes, decorrentes e aplicados a situações do mundo real.

A actividade de resolução de problemas deve ser partilhada, sendo considerada o cerne da aprendizagem, como ponto de partida e chegada do discurso e debate científico. Fogarty (1991) propõe uma variedade de estratégias úteis para integrar as disciplinas:

Sequencial - os tópicos ou unidades de estudo são reagrupados e sequenciados para coincidirem temporalmente uns com os outros. Ideias próximas são ensinadas concertadamente embora permaneçam em temas separados;

Partilhada - a planificação das matérias é partilhada nas duas disciplinas, em que a sobreposição de ideias e conceitos emergem como elementos sistematizadores, organizadores e de aprofundamento;

Em rede - um tema rico é ligado aos conteúdos das disciplinas em que os assuntos recorrem ao tema para fazer uma selecção de conceitos tópicos e ideias apropriadas.

Transversal - a abordagem curricular combina capacidades de pensamento, capacidades sociais, inteligências múltiplas, tecnologia e capacidades de estudo através das várias disciplinas.

Integrada - esta aproximação interdisciplinar combina temas que se sobrepõem em tópicos e conceitos, em ensino colaborativo, formando um autêntico modelo integrado.

Segundo aquele autor (Fogarty, 1991), na aprendizagem, a integração deve ser encarada segundo o ponto de vista do estudante e no modo como são desenvolvidos e organizados os conceitos científicos e matemáticos, os processos, as destrezas e as atitudes na sua estrutura cognitiva. Tanto os programas de Ciências como os de Matemática valorizam a perspectiva construtivista da aprendizagem (Piaget, 1975; Vygostsky, 1979) e a necessidade da construção significativa e gradual do conhecimento (Ausubel, 1963; Gagné, 1977; Novak e Goewin, 1993). Na realidade, os fundamentos da investigação cognitiva procuram suportes válidos capazes de criar a infra-estrutura do desenvolvimento integrado das Ciências e da Matemática na Escola, em que o *conhecimento*: a) é construído a partir do conhecimento prévio; b) é organizado em torno de grandes ideias ou temas; c) envolve a inter-relação de conceitos e de processos; d) é situado ou contextualizado; e) progride através do discurso social; f) é socialmente construído ao longo do tempo. Estes princípios de raiz construtivista manifestam-se em todos os seis aspectos do modelo BWISM (*Integrated Science and Mathematics de Berlin-White*, 1996). Descobertas mais recentes na área da neuropsicologia, informam-nos que para além das várias capacidades de processamento de informação em série, os seres humanos têm a capacidade de processar informação e acontecimentos, paralela ou simultaneamente, de que resulta a habilidade única de fazer previsões. Esta circunstância poderá vir a acrescentar uma nova e intrigante dimensão à integração, na perspectiva da aprendizagem. As observações e experiências de indivíduos e os modelos, tanto qualitativos como quantitativos, que descrevem esses acontecimentos podem ser assimiladas de forma mais eficiente (Anderson, 1992), tornando-se, assim, desejável que as crianças desde pequenas experimentem modelos qualitativos e quantitativos apropriados a vários níveis de abstracção para desenvolverem a capacidade de relacionar esses modelos e fazer previsões.

Nesta proposta de integração das Ciências com a Matemática são ainda delineados procedimentos alternativos de avaliação do desempenho, designadamente, avaliação de projectos e organização de *portfolios*. Contudo, para se implementar o ensino integrado das Ciências e da Matemática é fundamental a mudança do papel do professor (Henderson, 1987; NCTM, 1991). Este deve assumir-se como instrutor intelectual, com vários papéis, quer de actor, consultor, moderador, questionador, havendo necessidade de surgirem equipas especialistas que acompanhem o professor nas actividades de planificação, desenvolvimento e de avaliação (Tanner e Jones, 2000).

5.3. Coerência e Interdisciplinaridade

Um currículo ***coerente*** organiza e integra efectivamente importantes ideias matemáticas e estas surgem ligadas umas às outras e são construídas em interdependência, de acordo com a compreensão, o conhecimento e a capacidade de aplicação desses saberes matemáticos. Para isso, os estudantes devem ter oportunidade de observar como as ideias se constroem ou como se interligam e emergem outros tópicos, possibilitando o desenvolvimento de novos entendimentos e aptidões (NCTM, 2000). Esta associação aponta o exemplo da álgebra e da geometria, pois considera serem dois tópicos que se constituem como uma "linha" coerente e altamente interligada. Deste modo, a acção do professor deve basear-se neste princípio de coerência, proporcionando aos estudantes estas vivências escolares, em que a aprendizagem matemática se cumpra numa perspectiva organizada e integrada do conhecimento.

O currículo coerente deve permitir aos estudantes apreender a matemática como uma disciplina que usa o poder da modelação, na predição dos fenómenos da vida real, enfatizando os processos e aptidões suportando, de forma consistente, a *literacia* dos estudantes (Price, 1997). Para participar de forma inteligente e numa cidadania plena, estes têm de ser capazes de aprender na comunidade escolar e, em particular, na Educação Matemática, a capacidade de pensar e validar os objectivos traçados, encontrar falhas e de as minorar, avaliar riscos, comparando evidências e sabendo decidir (Price, 1997). Este autor defende ainda que um currículo coerente é bem articulado e fornece aos professores orientações preciosas para o desenvolvimento profícuo de temas e ideias matemáticas e tende a envolver, cumulativamente, ideias e construções sucessivamente mais profundas e de apuradas compreensões disciplinares, nos planos horizontal, vertical e interdisciplinar.

Nos anos oitenta, investigadores do Instituto Freudenthal da Universidade de Utrecht (Treffers, De Lange, Gravemeijver e Kindt, entre outros) ao desenvolverem a "Realist Mathematics Education" (RME), criaram o conceito de "matematização", exposta em 2.3.2. deste capítulo, através da qual o currículo da Matemática torna-se mais coerente e consistente, pelo entrosamento dos dois planos: o curricular/programático da disciplina e o funcional, ligada ao quotidiano do estudante.

Um outro aspecto que emerge associado à *literacia* matemática e às orientações curriculares da Educação Matemática é o conceito de ***interdisciplinaridade*** que inclui, naturalmente, uma conceptualização teórica e uma outra prática. Em relação a esta última identificam-se alguns processos, mas na definição do conceito parece não existir qualquer consenso (Pombo, Guimarães, Levy, 1993, p. 4). Para Piaget (1965, 1975) a interdisciplinaridade surge como um movimento sem fronteiras e uma interacção recíproca entre várias disciplinas, resultando um enriquecimento mútuo para todos os domínios envolvidos. Através da interdisciplinaridade é possível integrar os saberes disciplinados e, desse modo, "contrariar a progressiva abstracção que a tendência fragmentadora inerente ao processo científico implica" e simultaneamente criar condições para proporcionar formas de entendimento da realidade natural e humana. A organização disciplinar do currículo permite "o olhar aprofundado por um certo ângulo, mas limita a visão do todo, cuja complexidade requer a permanente interdisciplinaridade do trabalho científico" (Roldão, 1999, p. 46), coexistindo estas duas tendências em permanente tensão e equilíbrio – a especialização e a integração dos saberes na compreensão do real (Pombo, Guimarães e Levy, 1993). Palangana, Galuchi e Sforni (2002) defendem também que a qualidade do ensino não está apenas na transmissão e na retenção de um elenco de informações pelos estudantes e não é na memória que se eleva a condição cognitiva da criança. Quando esta assimila um determinado conteúdo espera-se que este proporcione o desenvolvimento da capacidade de compreender, analisar, estabelecer relações, entre as diferentes situações e sintetizar. "É importante, pois, que o professor organize o ensino, articulando o conteúdo escolar à realidade concreta, de modo que se perceba como o conteúdo se traduz na vida real de todos e, logicamente, na vida de cada um" (2002, p. 122). Estes autores e Atiyah (2002) defendem ainda que o significado das actividades desenvolvidas na Escola é dado pelo conteúdo propagado nas interacções, localizado nas regulações que o interlocutor, professor e/ou estudante, exerce no ensino, não podendo ser este reduzido à transmissão de definições, fórmulas, dados ou regras.

Já em 1975 José S. e Silva defendia que a matemática "não se reduz a ciência isolada platonicamente de tudo o resto" (p. 12), mas emerge, antes de tudo, como um instrumento ao serviço do homem nos mais variados ramos da ciência e da técnica. O professor deve ter consciência deste facto e "tentar estabelecer, sempre que possível, as conexões da matemática com outros domínios do pensamento" (p. 12) e para Caraça (1989) "a matemática e as outras ciências entroncam na mesma madre" (p. xiii). Assim, para além dos "professores terem de saber mais matemática precisam ainda de conhecer muito mais acerca do desenvolvimento psicológico do adolescente, descobrir alternativas pedagógicas e aprender sobre interdisciplinaridade" (NCTM, 2000, p. 213). Sendo repetidamente recomendada, há mais de trinta anos, a interdisciplinaridade curricular visa, antes de mais, a criação de espaços de trabalho conjunto e articulado em todas as metas educativas (Roldão, 1999). Todavia, para Pombo, Guimarães e Levy (1993) o significado da palavra interdisciplinaridade é objecto de significativas flutuações: desde a simples cooperação de disciplinas ao seu intercâmbio mútuo e integração recíproca ou, ainda, a uma integração capaz de romper a estrutura de cada disciplina e alcançar uma axiomática comum, provocando em cada uma das posições epistemológicas e pedagógicas práticas distintas nas salas de aula.

Contudo, para Weber-Russell e LeBlanc (2004) o foco da investigação interdisciplinar reside nos aspectos da apresentação dos problemas, designadamente, no contexto dos mesmos, na estrutura semântica e na formulação. No Desenho Curricular de Base (DCB) nos níveis da Educação Obrigatória os investigadores espanhóis Cannone e Socas (1998) defendem também que o processo de aprendizagem-ensino para a construção do conhecimento matemático deve ser implementado através da resolução de problemas, mas também com as outras áreas, numa perspectiva ampla e interdisciplinar.

De acordo com o NCTM (2000) "em muitas Escolas os professores estão interessados em promover a interdisciplinaridade. Os professores de Matemática realizam trabalhos com outros professores de outras disciplinas para desenvolver unidades de estudo integradas" (p. 278). Assim, em cada uma das disciplinas é preservada a metodologia, completando-se e integrando-se conhecimentos de tal forma que a unidade em estudo surge como uma entidade identificável e analisada em várias perspectivas. Os professores de Matemática, neste sentido, devem ser capazes de ajudar os estudantes a reconhecer e analisar formas de argumentação e justificação próprias desta ciência. Estes são os principais beneficiados, pois realizam o esforço de inter-relação e de compreensão das diferentes temáticas, concretizando as conexões entre os assuntos e as estratégias mobilizadoras e diferenciadas da exploração do conhecimento. Por outro lado, no que concerne à Matemática, os estudantes concluíram que muitas das capacidades e aptidões exploradas nesta ciência podem ser usadas nas outras disciplinas, como estava previsto, desde os anos oitenta, num documento da UNESCO, apelando ao carácter funcional da Matemática, como ferramenta ou base conceptual instrumental para as outras ciências. As experiências de interdisciplinaridade servem como meios de revisitar as ideias matemáticas e ajudam os estudantes a ver a utilidade desta disciplina na Escola e em casa. Se todos os professores do ensino médio na Escola dessem o seu melhor para conectar os conteúdos das diferentes áreas, a Matemática e as outras disciplinas seriam vistas como "permeating life" e não como apenas uma existência isolada do conhecimento (NCTM, 2000). Assim, mais do que uma nova proposta pedagógica no quadro curricular, a interdisciplinaridade surge do próprio interior da Escola, onde cada vez mais frequente e sem apoio, os professores continuam a tomar a iniciativa de realizar experiências de integração (Pombo, Guimarães e Levy, 1993).

A título complementar saliente-se ainda que, provavelmente, pela origem da sua formação e percurso investigativo, desde o domínio da Zoologia, defendendo um doutoramento em Ciências, fazendo uma incursão pela Filosofia, antes de se ter dedicado à Psicologia, Piaget revela uma profunda crença na interdisciplinaridade, na formação de equipas pluridisciplinares na necessidade de inovação na educação, ao criar o Centro Internacional de Epistemologia Genética, provavelmente um dos centros mais longevos e melhor exemplo de interdisciplinaridade na investigação científica (César, 2000). No campo da Matemática ele próprio também trabalhou com diversos matemáticos e realizou investigações comuns, entre os quais se destaca, por razões óbvias, a concretizada com Papert, matemático investigador da Universidade de Massachusetts, na criação da linguagem de programação LOGO para jovens.

Nesta sociedade científica e empresarial cada vez faz mais faz sentido falar e implementar equipas multidisciplinares de investigação e, consequentemente, importa na

Escola, criar uma cultura interdisciplinar que passe por organizar as disciplinas e os campos curriculares de outro modo. Como salienta Roldão (1998, 1999) é necessário estruturar a vida da instituição e a prática curricular e organizativa com base na concretização de lógicas de trabalho colaborativo (quer no plano disciplinar que no interdisciplinar). "Parece indispensável romper uma lógica fragmentada instituída que não facilita a formação dos cidadãos para a sociedade do conhecimento, onde a **alfabetização científica** é uma necessidade crescente para a compreensão da complexidade do real" (Roldão, 1999, p. 47, negrito da autora). Nas rubricas sobre currículo e diferenciação, currículo e adequação, esta autora defende, respectivamente, a necessidade de diferenciar os modos de ensinar e organizar o trabalho para garantir a aprendizagem bem sucedida de cada um e também que a aprendizagem ocorra e seja significativa, ou seja, faça sentido para quem a adquire e incorpora.

Na implementação da interdisciplinaridade como prática educativa para aprender e ensinar surgem sérios obstáculos, desde logo a organização da Escola, dado que esta está programada disciplinarmente, em que emerge a figura do professor para a disciplina, ou seja, existe de uma forma evidente e explícita marca da segmentação temporal e espacial e programática na instituição Escola (Pombo, Guimarães e Levy, 1993). Mas estes autores referem que, apesar das dificuldades sentidas, já na Reforma dos planos curriculares dos Ensinos Básico e Secundário (Decreto-Lei nº 286/89) parece promissora a abertura de perspectivas de trabalho interdisciplinar nas Escolas, tendo sido reforçada essa ideia pela Proposta de Reorganização dos Planos Curriculares dos Ensinos Básico e Secundário e mais actualmente pelo Decreto-Lei nº 6/2001 em que são definidos os princípios orientadores para a organização e gestão curricular no ensino básico e onde se apela à coerência e sequencialidade entre os três ciclos e à articulação destes com o ensino secundário, valorizando-se a necessidade dos estudantes realizarem aprendizagens significativas e a contextualização dos saberes. Este quadro curricular procura criar uma rede de competências inter-relacionais, mas baseadas na "valorização da diversidade de metodologias e estratégias de ensino e actividades de aprendizagem, em particular com recurso a tecnologias de informação e comunicação" (DL 6/2001, artigo 3º, alínea h). Apesar de não existir um consenso na definição do termo "interdisciplinaridade" (Pombo, Guimarães e Levy, 1993), identificam-se alguns processos e práticas inovadoras com sucesso que importa cada vez mais experimentar, vivenciar e corporalizar para legitimar e fomentar linhas consistentes de saberes interdisciplinares no quadro da instituição Escola e da Educação Matemática.

6. Papel do Professor

6.1. Enquadramentos

Para alcançar a *equidade* na Educação Matemática é necessário disponibilizar recursos humanos e materiais apropriados nas Escolas e nas classes (NCTM, 2000). Os professores que criam e mantêm um ambiente de desenvolvimento da compreensão também fomentam, de forma consistente, a reflexão, através da qual os estudantes sentem responsabilidade pelo trabalho realizado, pela divulgação e apresentação dos resultados aos seus pares e a toda a classe, numa perspectiva global de educação para o conhecimento e para a cidadania. Segundo De Lange (1992) "os professores têm um papel chave em qualquer inovação" (p. 328), na sala de aula ao estimular e acompanhar os estudantes e ainda ao suportarem um papel "pivot" nas Escolas, influenciando e convencendo os seus pares e a comunidade educativa em geral. O Professional Standards for Teaching Mathematics (NCTM, 1991) salienta a importância do papel do professor do discurso no acto pedagógico para com o estudante, o grupo, a classe, na criação de uma ambiência estimulante para a aprendizagem. Ferramentas instrucionais, currículo apropriado, materiais adstritos, programas suplementares especiais e ainda a utilização dos recursos da comunidade têm, indubitavelmente, um importante papel a desempenhar no percurso escolar do estudante, "mas a componente ímpar neste processo é, sem dúvida, o desenvolvimento profissional dos professores" (NCTM, 2000, p. 14). A cultura profissional compreende crenças, valores, hábitos e caminhos assumidos pelos professores e encontra-se relacionada com os significados que o professor atribuiu à Escola, às actividades escolares, à experiência pedagógica em sala de aula para ser possível planear/intervir como elemento, de um grupo dinamizador do trabalho de âmbito disciplinar e interdisciplinar (Hargreaves, 1995).

Martin Kindt, professor jubilado do Freudenthal Institut (FI), especialista em currículo, numa sessão de esclarecimento desenvolvida na Universidade de Utrecht, em Setembro de 2004, à questão colocada pela investigadora: "o que é um bom currículo?" respondeu que "antes de pensar no currículo tinha de responder à pergunta: o que é um bom professor?" e concluiu que são os bons professores que têm um papel decisivo na criação do sucesso da aprendizagem matemática. Para ilustrar este conceito de "bom professor" recordou os dez "mandamentos" enunciados por Polya e relembrados por Ralha (1992), defendendo-os como "um conjunto de regras que são gerais e aplicáveis a qualquer assunto que se pretenda ensinar em Matemática seja a que nível for" (p. 148). Para José S. e Silva (1975) o professor ocupa um papel determinante na aprendizagem, mas devia, em seu entender, "abandonar, tanto quanto possível, o método expositivo tradicional, em que o papel dos estudantes é quase cem por cento passivo" (p. 11) e procurar seguir "o método activo, estabelecendo diálogo com os estudantes e estimulando a imaginação destes, de modo a conduzi-los, sempre que possível à descoberta" (p. 11).

6.2. Atitude do professor na construção do conhecimento

O professor tem um papel central na condução das aprendizagens significativas, no saber abrir portas e permitir que o estudante saiba que essas portas existem. Torna-se implícito que o professor vai apreendendo e orientando os "*constructos*", tentando perceber o que vai no pensamento dos estudantes, envolvendo-se na construção da história conceptual de cada um e procurando, para isso, usar a linguagem apropriada para guiar, estimular e acompanhar os estudantes nessa construção (Bruner, 1983, 1985). Este tipo de interacções também foi estudado por Shoenfeld (1985, 1987) e concluiu que o professor, ao ensinar a Matemática por processos heurísticos, desenvolve várias capacidades linguísticas relacionadas com o processo de discussão e resolução dos problemas.

O estudante, ao estar a resolver determinada tarefa, ao falar com o professor, ao ser estimulado pelas propostas e respostas deste, revela aspectos do seu conhecimento e providencia outras ajudas para continuar no seu processo de construção (Jaworski, 1994). Este autor admite ainda que o professor, ao focalizar a sua atenção para a actividade do estudante e para as suas respostas, adapta-se ao seu esquema de representação, à actividade e às respostas e infere o que o estudante precisa para continuar no processo intrínseco de construção. Estas intervenções enfatizam a importância da relação entre professor e estudante que atribuem ao primeiro a responsabilidade do duplo papel de promotor e empreendedor do conhecimento conceptual dos estudantes, através da constituição do conhecimento partilhado na comunidade da sala de aula, criando oportunidades para os estudantes aprenderem (Wood, Cobb e Yackel, 1995). Como as interacções sociais têm um papel determinante no desenvolvimento da inteligência, numa perspectiva piagetiana e ainda com mais acuidade segundo o ponto de vista "Vygotskiano", então os professores têm um papel preponderante na promoção e compreensão das capacidades e aptidões dos seus estudantes, como tem sido realçado nas obras mais recentes do domínio da Educação Matemática (Abrantes, Serrazina e Oliveira, 1999). Vygotsky veio também realçar o papel do professor pois acreditava ser o par mais competente de forma a estimular e a trabalhar, da maneira mais eficiente a zona proximal de desenvolvimento (ZPD), conceito já abordado em 2.2.2. deste capítulo.

De facto, o papel do professor é fulcral na orientação para a aprendizagem, pois pode extrair, duma variedade de propostas, situações de ensino susceptíveis de levar os estudantes a enriquecer o seu reportório e a rejeitar concepções falsas. Contudo, o professor não se pode limitar a conduzir e a controlar exaustivamente o processo de conceptualização que ajuda os estudantes a analisar os objectos e as relações matemáticas contidas nestas situações (César, 1999, 2000). Com toda a certeza as concepções e as competências ficam relativamente estereotipadas se não se oferecer a possibilidade de reencontrar as situações diferentes daquelas que lhe parecem como o protótipo (Stern, 1993), como por exemplo, no caso da adição e da subtracção, em que os estudantes têm a ideia de se tratar, respectivamente, de uma quantidade que aumenta e outra que diminui (Gonçalves, 1996).

De acordo com Becker (2003) o conhecimento depende de processos individuais, como a abstracção reflexivante e a generalização. Todavia, o desenvolvimento e a aprendizagem percorrem caminhos sinuosos que somente um professor consciente e atento pode identificar e fecundar. Assim, os estudantes, desde as idades elementares, precisam de ser ajudados pelos professores para partilharem, de forma clara, ideias matemáticas e terem ambiência para serem compreendidos pelos seus colegas de classe.

No percurso escolar, os estudantes precisam de progredir na *comunicação* matemática tornando-a, gradualmente, cada vez mais complexa e abstracta. Segundo Pedrosa (2000) existem vários factores que influenciam e contribuem para que a comunicação se estabeleça de forma eficaz, sendo a empatia dos professores um dos que funciona de forma mais positiva. E acrescenta que, sendo a aprendizagem um processo interactivo, cabe ao professor criar condições para que seja efectivamente implementado um verdadeiro processo de construção de saberes. Por isso, é preciso que *o professor* crie um *ambiente* desejável para o desenvolvimento gradual desta ferramenta simbólica poderosa, que é a linguagem matemática, ajudando o estudante, ao longo da escolaridade, a comunicar e a partilhar, através deste veículo, ideias e conceitos matemáticos (NCTM, 2000). Para esta associação, os professores devem ser considerados como mentores e motores fundamentais do processo educativo e, para isso, necessitam de entender as resistências, os saberes, as necessidades dos estudantes, que vêm de diversos campos linguísticos e culturais. Para gerir e efectivamente compreender estas diferenças os professores precisam de comunicar e trabalhar em conjunto para confrontarem com os seus pares e as suas próprias crenças, preconceitos, fundamentos e naturalmente os saberes (NCTM, 2000). Segundo esta associação os estudantes aprendem matemática sobre as experiências que os professores lhes providenciam. Por isso, o entendimento que os estudantes têm da Matemática e da capacidade para a usar, designadamente, na resolução de problemas, na confiança no desenvolvimento deste tipo de actividade, depende basicamente, do que é implementado na Escola, em particular, na sala de aula. Portanto, os professores precisam de ter amplas e frequentes oportunidades, diversos recursos para fortalecer, actualizar e inovar o seu conhecimento.

Vergnaud (1981, 1982, 1989, 1990) considera crucial o papel do professor no acto pedagógico e defende que este necessita de: a) conhecer qual a conceptualização implícita que o estudante precisa de dominar para resolver determinado exercício ou quais os conceitos envolvidos na situação; b) conseguir explicitar essa conceptualização de forma adaptada à idade dos estudantes com quem está a trabalhar; c) conhecer as filiações e rupturas desta nova conceptualização relativamente àquelas que o estudante já operacionaliza, de forma a antecipar i) as representações erradas que podem ser facilmente mobilizadas; ii) os obstáculos que podem surgir na exploração de representações adequadas – os quais podem advir de representações pouco correctas que o estudante adquiriu na sua vivência escolar ou mesmo na escolaridade.

Segundo Vergnaud, os professores normalmente estão apenas preocupados com os aspectos do conteúdo específico da Matemática e da sua lógica interna, ignorando outros fundamentos na acção educativa, como sejam: a) os relacionados com a aprendizagem gradual do estudante num determinado conceito, ajudando-o e percebendo se está ou não a mobilizar a representação adequada ao problema que está a resolver; b) os subordinados à didáctica específica de determinado domínio, nomeadamente, as representações mais adequadas em cada momento ou as rupturas que necessita de fazer, ou não, o estudante.

O que deve desafiar e ocupar os professores não são as actividades desempenhadas sozinhos pelos estudantes, com declarada competência, pois essas pouco ou nada acrescentam ao desenvolvimento, mas sim ocuparem-se com os conteúdos e as actividades, nos quais o desempenho do estudante depende da mediação no ensino (Vygotsky, 1995). Na perspectiva do NCTM (2000), "o ensino efectivo requer conhecimento e entendimento da matemática de estudantes aprendizes e das estratégias pedagógicas bem delineadas pelos professores" (p. 17). Os professores de Matemática precisam de uma variedade enorme de conhecimento – conhecimento alargado, profundo e flexível acerca do domínio científico, dos objectivos do currículo e das ideias matemáticas centrais do nível de escolaridade correspondente, de apreender a representação da matemática como um sistema coerente e um empreendimento encadeado, dos conhecimentos psicológicos abrangentes, abordando aspectos de natureza cognitiva, pedagógica e didáctica, percebendo o tipo de representações que os estudantes fazem de determinada matéria e entender o tipo de acesso à informação e ao conhecimento que é efectivamente mobilizado (Schifter, 1999; Ma, 1999).

Becker (2003) salienta que os dados da psicologia, por mais claros e importantes que sejam, não bastam, por si só, para melhorar o trabalho educativo, pois, é preciso, antes de tudo, que os professores os conheçam e se inspirem neles para traduzi-los em estratégias pedagógicas inovadoras. Acrescenta ainda que "a matéria-prima do trabalho do professor é o conhecimento" (2003, p. 65). Assim, não se trata de conseguir que o estudante faça coisas, mas que entenda essas coisas, por reflexão e tomada de consciência própria e que saiba explicar como fez, pois "o conhecimento prático compreendido constitui a matéria prima do conhecimento" (2001, p. 65). Segundo o NCTM (2000) "os professores têm diferentes estilos e estratégias para apoiarem os estudantes na aprendizagem particular de ideias matemáticas e não há um único "caminho certo" para ensinar" (p. 18). O ensino efectivo da matemática requer uma confiança séria no desenvolvimento da compreensão dos estudantes, porque estes aprendem ligando e integrando as ideias no conhecimento anterior e, neste sentido, os professores devem conhecer e compreender o que os seus estudantes já sabem. De facto, ensinar matemática requer criatividade, enriquecimento de saberes, actualidade e instrução dinâmica adaptada aos objectivos, captando e mantendo o interesse, mas simultaneamente conseguindo provocar o envolvimento dos estudantes na construção compreendida de conceitos matemáticos.

Torna-se implícito que o professor vai apreendendo e orientando os "*constructos*" do estudante, tentando perceber o que vai no seu pensamento, acompanhando a sua história conceptual, procurando através da linguagem, guiar, estimular e acompanhar os estudantes nessa construção (De Lange, 1992; Gravemeijer, 1990, 2004). Na resolução de determinada tarefa o estudante ao falar com o professor, ao ser estimulado pelas propostas e respostas, revela aspectos do seu conhecimento e providencia outras ajudas para continuar no seu processo de construção (Abrantes, Serrazina e Oliveira, 1999). O professor ao focalizar a sua atenção para a actividade do estudante e para as suas respostas, adapta-se ao esquema de representação do estudante, à actividade e às respostas e infere do que o estudante precisa para continuar no seu processo de construção. Estas interacções enfatizam a importância da relação entre o professor e o estudante e a construção do conhecimento na classe estabelece-se entre a interacção social e cultural do professor com o estudante e vice-versa e entre os próprios estudantes num ambiente rico de aprendizagem (Jaworski, 1994). Este autor defende que "é crucial para os professores de matemática, pois podem ter conhecimento como é importante para acontecer a aprendizagem matemática que esta esteja ligada à linguagem, à interacção social e ao contexto cultural" (p. 28)

Por outro lado, o papel do professor não pode ser isolado do ambiente de Escola (Henderson, 1987), de um conselho de turma, de um grupo disciplinar, pois o trabalho do professor de uma disciplina "é fortemente influenciado pelo ambiente que lhe é proporcionado pelas estruturas de gestão e de coordenação pedagógica da Escola que, por sua vez, ele próprio ajuda a construir" (Abrantes, Serrazina e Oliveira, 1999, p. 30).

6.3. Criação de ambiências democráticas e significativas

Para suster efectivamente o discurso fluente e criativo numa classe os professores precisam de criar uma comunidade que expresse livremente as ideias, respeitando a diferença e os tempos de interacção social e, deste modo, valorizar as capacidades de pensamento dos estudantes, conciliando o método expositivo com a vivência de "experiências concretas sobre as quais essas explicações fazem sentido" (Abrantes, Serrazina e Oliveira, 1999, p. 25). O ensino efectivo da Matemática requer entendimento sobre o que os estudantes sabem e precisam de aprender e simultaneamente necessita de definir ambientes, criar desafios inerentes e os suportes necessários para os estudantes construírem solidamente os conceitos (NCTM, 2000). Por outro lado, Cañal e outros (1997) defendem a necessidade de contar com recursos adequados para uma dinâmica investigadora do processo de resolução de problemas, como os materiais de usos múltiplos e os construídos pelos estudantes, assim como outras fontes de conhecimento. Contudo, deve evitar-se que os meios técnicos se empreguem para substituir sistematicamente a relação directa da classe com a realidade em estúdio, esquecendo-se a envolvência socionatural próxima do estudante.

A aprendizagem encontra-se profundamente ligada aos contextos sociais e é reflexo dos desafios propostos, do ambiente estimulante criado na Escola e na sala de aula (Matos, 1991; Weber-Russell e LeBlanc, 2004). Neste sentido, os professores têm um papel fundamental em criar e manter bons ambientes na classe que propiciam a resolução de problemas, para questionar, divulgar e reflectir sobre as estratégias desenvolvidas e as soluções. Suportar a resolução de problemas num bom ambiente interpessoal desenvolve a confiança, a vontade de enfrentar desafios e a autonomia. Nestas circunstâncias, uma das dificuldades do professor consiste em escolher, adaptar e usar os problemas mais significativos para este ou aquele assunto e para este ou outro estudante (NCTM, 2000).

Durante a adolescência os estudantes sentem muitas vezes relutância em fazer algo que os distancie do grupo e, por causa disso, muitos deles ficam hesitantes em expor o seu pensamento aos outros para provavelmente não serem objecto de ridicularização. Segundo o NCTM (2000), cabe ao professor valorizar e reorientar as ideias e criar um ambiente honesto, aberto e favorável à socialização e à vivência democrática na sala de aula, criando um espaço propício e acolhedor ao debate e à aprendizagem de ideias matemáticas. Os estudantes devem claramente, de forma regular e disciplinada interiorizar a necessidade, em determinadas situações, de serem capazes de explicar ao professor e colegas o pensamento e o raciocínio matemático experimentado (Shoenfeld, 1985, 1987). O professor deve ainda saber gerir conflitos, intervenções menos oportunas e evidenciar as contribuições mais relevantes fazendo apelo à essencialidade da matemática, à continuidade sustentada da discussão, procurando focalizar-se no essencial, sistematizando posteriormente, ideias e conceitos matemáticos. Apoiar os estudantes a reflectir sobre a sua própria aprendizagem torna-se o papel fulcral dos professores que devem pedir assiduamente "comentários aos estudantes sobre o que aprenderam na aula ou numa série de aulas, o que é nuclear e o que não o é" (NCTM, 2000, p. 272). Também na sala de aula individualmente ou em grupo pode-se realizar este tipo de trabalho e ajudar os jovens a cumprir os objectivos da Educação Matemática, procurando ainda certificar-se como todos os membros do grupo participam e compreendem o trabalho que estão a realizar (Kindt, 2004). Deste modo, as acções dos professores podem encorajar ou não os estudantes a pensar, a questionar, a resolver problemas, a debater ideias, estratégias e soluções, sendo o professor responsável por criar um ambiente intelectual onde seja normalmente promovido o pensamento matemático (Matos, 1987-88; Kindt, 2004).

Mais do que usar materiais ou outros instrumentos de trabalho para explorar este ou aquele conteúdo, o valor da aprendizagem e do ensino da matemática reside fundamentalmente nas respostas afirmativas a estas questões: estão os estudantes encorajados a debater e a colaborar? Estão os estudantes interessados em justificar os seus pensamentos? Se os estudantes estão a aprender a realizar conjecturas, a experimentar várias aproximações à(s) solução(ões) na resolução de problemas, a elaborar argumentações matemáticas, a responder e a justificar as decisões apresentadas, então estão a criar um ambiente que promove este tipo de actividades e isto é o essencial para a Educação Matemática (NCTM, 2000). Para implementar estes princípios os professores devem ser capazes de analisar o que estão a fazer com os seus estudantes ao aprender matemática, pois "para melhorar uma prática instrucional no ensino é essencial criar oportunidades diferenciadas para reflectir sobre a actividade matemática realizada" (p. 19). Pelo que foi exposto tudo indica que a ambiência criada pelo professor é determinante nas aprendizagens realizadas pelo estudante (Kindt, 2004) e está profundamente enraizada no conhecimento que o professor tem da disciplina, da sua atitude, da empatia que cria, da capacidade de interiorização e reflexão que promove na classe e da confiança que transmite a cada um dos estudantes. Aliada a este relacionamento pessoal surge, de forma convergente para o sucesso na disciplina, a escolha criteriosa e diversificada de tarefas e de materiais adaptados ao nível cognitivo dos estudantes.

7. Tarefas Matemáticas ou Experiências de Aprendizagem[17]

7.1. Enquadramentos curriculares

O programa de Matemática do ensino básico e os documentos oficiais sobre as competências essenciais e transversais da Educação Matemática (ME, 1999) integram nas experiências de aprendizagem, diversas situações que concorrem, todas elas, para uma aprendizagem significativa e o desenvolvimento harmonioso e mais completo da aprendizagem-ensino da Matemática. Pelos objectivos definidos para a investigação em curso destacam-se a resolução de problemas, as actividades de investigação, os projectos, reconhecendo-se que esta diversidade de situações enriquece naturalmente o processo de construção da aprendizagem matemática.

Segundo Fernandes (1992), para que os objectivos do actual programa de Matemática sejam atingidos, é necessário que os problemas e outras experiências de aprendizagem sejam diversificados e se constituam como um desafio intelectual, em que os estudantes se envolvam individualmente ou em grupo no processo de resolução de tarefas e consequentemente na construção do próprio conhecimento matemático. Já o actual

[17] Termo usado pelo Ministério da Educação nas competências previstas no Currículo Nacional do Ensino Básico para o 1º Ciclo.

programa e as competências previstas no Currículo Nacional do Ensino Básico para o 1º Ciclo apontam para uma reflexão cuidada das tarefas a explorar no processo de aprendizagem-ensino da disciplina (Fernandes, 1994) de modo a prosseguir os objectivos delineados para a Educação Matemática nesse nível de ensino. Por outro lado, as actividades a seleccionar deverão contribuir para o desenvolvimento do pensamento científico, levando o aluno a intuir, conjecturar, experimentar, provar, avaliar e ainda para o reforço das atitudes de autonomia e de cooperação (Ministério da Educação, 1991). Segundo Mendes (1998), as mudanças nos modelos de ensino têm as suas raízes em vários factores, designadamente: nas mutações ocorridas na formação de professores, que exigem novos papéis para os professores e estudantes, nas possibilidades tecnológicas actuais, e, por tal motivo, assume algum significado "analisar e estudar modalidades de trabalho e actividades na sala de aula com cariz inovador, com dinâmica própria" (p. 141).

O mesmo autor considera ainda que "a partir da década de oitenta, começaram a operar-se gradualmente dinâmicas diferentes de trabalho na sala de aula em algumas Escolas do nossos país, em que o aluno assume um papel mais activo, fruto de mudanças e tomadas de consciência assumidas por professores acerca do seu papel na sala de aula" (1998, p. 136). Defende ainda que a exploração de diferentes materiais promove ambiências ricas para promover o conhecimento, designadamente: a) a existência de um ambiente favorável ao aprofundamento da curiosidade dos alunos; b) a diversidade de experiências vividas, as acções e etapas envolvidas, bem como a reflexão sobre a actividade; c) a existência de um vocabulário próprio e uma linguagem acessível ao aluno e ao grupo de modo a permitir a comunicação técnica entre eles e o professor; d) a vontade de saber, argumentar e fundamentar as opções.

7.2. Resolução de problemas

A Declaração Mundial sobre Educação para Todos da UNESCO (1990) explicita a resolução de problemas como um dos instrumentos de aprendizagem essenciais (ao lado de outros como a leitura, a escrita e o cálculo) e refere que, além dos conhecimentos, as capacidades, os valores e as atitudes constituem-se conjuntamente e de *per si* como conteúdos básicos de aprendizagem. Contudo, já nos anos oitenta, a Agenda do NCTM situava a resolução de problemas no primeiro plano da aprendizagem-ensino da Matemática e as Normas Profissionais para o Ensino da Matemática (1991) defendem que os estudantes devem ser capazes de formular e resolver problemas, de julgar o papel do raciocínio matemático numa situação da vida real e de comunicar matematicamente. Abrantes (1988) considera a resolução de problemas uma situação amplamente completa, pois apresenta-se simultaneamente como um conteúdo, um processo e um objectivo da Educação Matemática. Serrazina (1988) amplia esta ideia defendendo que a resolução de problemas é uma linha de força que atravessa todo o currículo, apresentando-se como um elemento integrador das diversas áreas do currículo onde um dos principais propósitos deve ser o de ajudar as crianças a compreender e a interpretar o mundo em que vivem.

A resolução de problemas pressupõe uma empenhada e comprometida tarefa para a qual o método de abordagem e a solução não são conhecidos antecipadamente (Polya, 1968). Para descortinar uma solução os estudantes precisam de "parar para pensar"

(Fernandes, 1994, p. 41, sublinhado da autora) e de aplicar conhecimentos através dos quais se desenvolvem novos entendimentos matemáticos. Resolver problemas não é o único objectivo da matemática, mas o processo de realização reflecte um significado profundo da aprendizagem, através do qual existe um extenso domínio específico vital do conhecimento que emerge (Silver, 1987).

Já em 1945, para Polya, o principal objectivo da educação era ensinar os mais novos a pensar e, para alcançar este desiderato, a resolução de problemas era apresentada como uma arte prática em que todos os estudantes deveriam ser envolvidos e encorajados a dominar. O autor considera o ensino uma arte e, nesta perspectiva, ninguém pode programar ou mecanizar o ensino da resolução de problemas, dado que esta é uma actividade humana que requer experiência, gosto e bom senso. Para tentar apoiar os professores na difícil tarefa de resolver problemas com os estudantes, Schoenfeld (1985) descreve quatro aspectos qualitativamente diferentes, que se completam, na complexa actividade de resolver problemas, como: *recursos cognitivos*, corpo de factos e procedimentos disponíveis; *crenças heurísticas*, caracterizadas como as operações mentais tipicamente usadas para descobrir a solução do problema, isto é, para atingir com sucesso situações difíceis; *regras de controlo*, para se conseguir, com eficiência, ter êxito, na utilização e exploração individual do conhecimento; *crenças no sistema*, relacionadas com as perspectivas como se encara a disciplina e como se deve trabalhar nela. Assim, a partilha de saberes e experiências na resolução de problemas oferece oportunidades aos estudantes para comparar similitudes e diferenças, esclarecer várias perspectivas, ter uma visão do todo e das partes como o propósito de proporcionar uma compreensão conceptual do conhecimento e das relações (Weber-Russell e LeBlanc, 2004).

Por outro lado, segundo Vergnaud (1986), a tendência mais corrente de ensinar "maneiras de fazer" ou os algoritmos usuais, fica ligada a determinado tipo de classes de problemas relativamente limitados. Para este autor, as concepções dos estudantes são modeladas pelas situações com que se deparam. Devido a esta modelação pode existir um grande desfasamento entre as concepções das crianças face a um problema e o respectivo conceito matemático. Sobre a teoria da resolução de problemas, este autor defende a existência de um certo homomorfismo entre a realidade e a representação da mesma, que permitirá ao sujeito produzir acções adaptadas, eficazes e significativas. Neste campo, Vergnaud (1986) defende que resolver um problema aritmético é, em primeiro, lugar efectuar uma boa escolha dos dados a utilizar e das operações a aplicar, sendo certo que a compreensão de um problema aritmético envolve uma interacção complexa entre a compreensão do texto e os processos matemáticos implementados (Weber-Russell e LeBlanc, 2004). Neste sentido, os estudantes precisam de analisar a situação, apresentá-la seguindo um modelo de representação, operar sobre essa representação para encontrar uma solução e recomeçar, todo o processo, se a solução encontrada não for a adequada (Gonçalves, 1996). Aprender a resolver problemas em matemática significa que os estudantes se apropriam de meios para pensar, adquirir hábitos de persistência, curiosidade e confidência em situações não familiares que poderão também servir para aprender a resolver problemas da vida real (NCTM, 2000). Esta associação defende que seja através da resolução de problemas que se construa o novo conhecimento matemático e, em particular, que se explorem diferentes contextos para, nestas circunstâncias, o professor estimular o estudante a aplicar uma variedade apropriada de estratégias que facilitam a exploração de diferentes materiais e formas de reflectir no processo de resolução de problemas. Nas competências gerais e transversais preconizadas pelo Ministério da Educação (1999) apela-se à resolução de problemas no ensino básico da Matemática, pois esta actividade constitui, em matemática, um contexto universal da aprendizagem e "neste sentido, deve estar sempre presente, associada ao raciocínio e à comunicação integrada naturalmente nos diversos tipos de actividades" (p. 8). Também os investigadores espanhóis Cannone e Socas (1998), no Desenho Curricular de Base (DCB) da Educação Obrigatória, defendem que a resolução de problemas no currículo da matemática deve apresentar-se como um conteúdo prioritário, porque é em si mesmo um meio de aprendizagem, constituindo-se como um reforço de outros conteúdos e permitindo a inter-relação entre os diferentes blocos temáticos e as outras áreas.

Segundo Kissane (1988) a resolução de problemas implica um dinamismo na aprendizagem, pois permite a reformulação do ponto de partida, a formulação de novos problemas ou de novos caminhos de resolução, evidenciando-se a individualização de aspectos do processamento da informação na mente. Por outro lado, o NCTM (2000) considera ser essencial que "os estudantes tenham tempo para explorar e resolver problemas" (p. 186), pois a perseverança e o desejo de encontrar uma solução são aspectos fulcrais do processo activo de raciocinar. Um dos objectivos fundamentais da resolução de problemas é ajudar os estudantes a desenvolver determinadas aptidões intelectuais e a reflectir sistematicamente sobre as diversas possibilidades de actuação, organização e registo do pensamento. No processo de resolução de problemas torna-se essencial o desenvolvimento das aptidões reflexivas (chamadas de metacognição) que devem ser desenvolvidas na classe, principalmente, em períodos de avaliação de processos e de encontro com a(s) solução(ões) (Crosswhite, 1987; Cunha, 1998).

7.3. Actividades[18] de Investigação

Nos Guias para os professores, Silva (1977) indicava as vantagens das actividades investigativas, escrevendo: "os estudantes não precisam, em geral, de ser investigadores, mas precisam de ter espírito de investigação. Intuição, experiência, lógica indutiva, lógica dedutiva, alternam-se constantemente na investigação científica" (p. 111). Os referenciais teóricos aludidos orientavam para o desenvolvimento de diferentes propostas de trabalho que envolviam os estudantes em ambientes propícios à descoberta participativa de forma a desenvolver o gosto pela ciência e a tornarem-se sujeitos intelectualmente activos e intervenientes na construção dos seus saberes.

As actividades de investigação são "experiências de aprendizagem" (ME, 1999) com consistência e abertura suficiente para serem desenvolvidas na aula de Matemática visto influenciarem pela positiva conceitos e orientações programáticas relacionadas com o ensino e a aprendizagem da disciplina (Mendes, 1998, p.144). Também Amorim e Matos (1990) consideram que as actividades investigativas devem ser propostas de trabalho abertas, com possíveis linhas orientadoras e exploratórias no início, mas mantendo uma

[18] No terceiro capítulo, no da Metodologia, em 5.6., diferenciam-se os termos "actividade" e "tarefa".

margem de liberdade que permita aos estudantes diferentes níveis de envolvimento com a situação, proporcionando-lhes a experiência da descoberta, da realização do conhecimento matemático, em partilha e debate com os outros.

De forma concisa, Kissane (1988) considera existirem cinco razões importantes para reservar no currículo espaço para as actividades de investigação: a) tratam do essencial da natureza da actividade matemática – o levantar de problemas e a tentativa de analisar situações que não são conhecidas antes, de modo a encontrar-se uma ou várias soluções e a testar conjecturas; b) colocam ênfase nos aspectos da disciplina menos susceptíveis de serem substituídos pela tecnologia; c) podem fomentar a persistência ocupando os estudantes numa via segura com uma tarefa ou um conjunto de tarefas; d) têm possibilidade de aprender mais e melhor, sobre a natureza da Matemática, do que aprendem actualmente; e) fornecem um contexto no qual os estudantes podem interessar-se mais pela investigação matemática acerca daquilo que estão fazendo ou despertando outros interesses concomitantes. Esta autora salienta ainda que as actividades de investigação são propostas abertas em que não é fornecida uma indicação precisa do que é pedido, mas é o estudante ou o grupo de estudantes que num determinado contexto define o rumo a seguir.

Apesar das actividades de investigação terem alguns aspectos comuns com outras desenvolvidas a nível escolar, nomeadamente a resolução de problemas, reúnem particularmente diferentes características, dignas de registo: a) são mais abertas, porque permitem o desenrolar de algo não chegando logo à conclusão nem eventualmente a uma mesma conclusão; b) apresentam-se percursos ou caminhos, mais ou menos elaborados, permitindo vários *processos* para chegar às respostas; c) são de resposta múltipla, ou seja, da mesma actividade poderão resultar *produtos* diversos e não antagónicos (Mendes, 1998). Acredita-se ainda que, ao desenvolver este tipo de actividades, os estudantes poderão melhorar a capacidade de resolução de problemas quer na Matemática, quer na vida real, visto que terão de procurar interacções, estratégias diversificadas e conjugar ideias para suplantar obstáculos e erros cometidos, permitindo, com a própria experiência, voltar atrás, se necessário, levantando novas questões até atingir a(s) solução(ões).

No decorrer de uma actividade investigativa surgem etapas que poderão ser mais ou menos demoradas, fruto da estratégia adoptada, da definição de novos pontos de partida, com outra(s) *leitura*(s) sobre os dados apresentados, das reflexões ocorridas, do envolvimento e do *apropriar* dos seus pontos fulcrais de modo a poderem dar por concluídas as questões que sucessivamente lhes vão surgindo no decorrer da actividade (Mendes, 1998). Este investigador salienta ainda que a integração gradual deste tipo de actividades para a sala de aula poderá proporcionar aos estudantes a promoção de diferentes capacidades: a) o desenvolvimento do espírito crítico; b) a confiança em fazer matemática, designadamente, formular hipóteses e prever resultados; c) o aumento do sentimento de tolerância e de cooperação. Progressivamente, dá-se a aquisição de uma base conceptual consistente e duradoira que mais tarde possibilite aos estudantes reconstruir o seu conhecimento e aplicá-lo a situações novas e distintas. Adicionalmente, no programa de Matemática (ME, 1991, p. 7), corroboram-se algumas das capacidades defendidas por Mendes (1998) no desenvolvimento prático das actividades investigativas, pois estas não se limitam à apreensão das noções e conceitos, mas abrangem a prossecução de outros objectivos, designadamente: a) desenvolver a confiança em si próprio; b) promover hábitos de trabalho e persistência; c) desenvolver o espírito de tolerância e de compreensão; d) desenvolver a capacidade de utilizar a Matemática na interpretação e intervenção no real; e) promover o raciocínio e a capacidade de comunicar matematicamente, bem como: f) matematizar situações simples da vida real e fenómenos de outras ciências; g) manifestar hábitos de reflexão; h) revelar rigor e confiança na apresentação e processos elaborados e i) revelar capacidade de criar soluções pessoais para problemas novos.

As actividades de natureza investigativa devem ser promovidas no processo de aprendizagem-ensino da Matemática, pois são mobilizadoras do conhecimento matemático, fomentam a cooperação, criam um novo enquadramento, fazem gerar a discussão e a verbalização dos pensamentos do jovem, contribuindo, deste modo, para melhorar a capacidade de comunicação oral e escrita dos estudantes (Serrazina, 1988; Ponte, Matos, Abrantes, 1999; NCTM, 1991, 2000). Por outro lado, através da prática de actividades investigativas os estudantes: a) têm oportunidade de criar e gostar do seu próprio trabalho em Matemática; b) tendem a desenvolver confiança nas suas capacidades de fazer Matemática; c) desenvolvem o trabalho cooperativo e incorporam trabalho prático; d) tornam a Matemática mais acessível e personalizada e e) são também encorajados a assumir posições (Amorim e Matos 1990; Matos, 1991; Mendes, 1998).

Para Abrantes, Leal e Ponte (1996) as actividades de investigação caracterizam-se por partirem de enunciados e objectivos pouco precisos e estruturados, possibilitando aos estudantes a (re)definição dos mesmos, a condução de experiências, a formulação e a testagem de hipóteses. Adicionalmente, implicam processos complexos de pensamento e requerem o envolvimento da criatividade dos estudantes.

Rocha (2002) realizou um estudo numa turma do 7º ano de escolaridade e propôs aos estudantes que realizassem investigações matemáticas para compreender: a) o tipo de processos e raciocínios matemáticos usados pelos estudantes; b) as dificuldades experimentadas; c) as interacções entre os colegas; d) o papel do professor; e) o modo como este põe em prática esta forma de ensino. Nas conclusões do estudo referiu que as actividades de investigação constituem-se como um desafio à capacidade de adaptação a novas experiências e a sua apropriação decorre de forma gradual e contínua da exploração do conhecimento. Este autor acrescenta ainda que, através deste tipo de actividades, os estudantes aperfeiçoam o modo de trabalhar em grupo procurando, sempre que possível, dialogar com os membros da equipa, evidenciando, a partir da quinta actividade, uma melhoria na capacidade de comunicar ideias matemáticas, quer oralmente quer por escrito.

"As actividades de investigação são suficientemente ricas e de complexidade adequada para colocarem os estudantes no papel de matemáticos a tentar compreender e a encontrar relações que lhes permitam fazer generalizações" (Matos 1991, p. 19), processo fulcral na construção de conhecimentos pré-algébricos (Kieran, 1981, 1988, 1992).

7.4. Projectos

O ME (1999) refere que as competências gerais e transversais matemáticas devem ser promovidas através do desenvolvimento de experiências ricas, diversificadas e reflexivas, de acordo com as experiências de aprendizagem e a maturidade dos estudantes. Dos vários tipos de experiências de aprendizagem preconiza-se a realização de projectos.

Esta é definida como "uma actividade prolongada que normalmente inclui trabalho dentro e fora da sala de aula e é realizado em grupo. Pressupõe a existência de um objectivo claro, aceite e compreendido pelos estudantes e a apresentação dos resultados" (ME, 1999, p. 8). Completa-se a ideia referindo-se que qualquer tema da matemática pode proporcionar ocasiões para a realização de projectos e que, pela sua natureza, esta experiência de aprendizagem constitui-se como um meio natural para o desenvolvimento de trabalho interdisciplinar.

A ideia de projecto tem surgido associada à necessidade de organizar uma dada situação que de alguma forma precisa de estruturação ou reordenamento (Matos, Carreira, 1996). Os autores referem ainda que o conceito de projecto tem evoluído, mas inclui diversos produtos, entre os quais um relatório, uma realização, um artefacto e apesar de se ter já instalado na sociedade, não entrou ainda com força na Escola. Trabalhar em projectos pressupõe uma relação nova com o saber, pois o objectivo não é que o estudante aprenda um conjunto de noções bem determinadas, mas capacitá-lo para resolver problemas relativamente complexos, enfrentando dificuldades variadas, reconhecendo que a realização de projectos tem uma dimensão educativa fundamental nos dias de hoje (Ponte, 1987; Ponte, Matos e Abrantes, 1999). A realização de projectos inclui, de certo modo, alguns aspectos metodológicos do trabalho de projecto integrando características específicas que têm a ver com a natureza das actividades que, sob uma visão construtivista da Matemática, têm vindo a ser propostas para a disciplina (APM, 1988; ME, 1990; NCTM, 1991, 2000). Abrantes (1994) considera que a realização de projectos engloba várias características, a saber: é uma actividade continuada, envolvendo uma variedade de tarefas, desde a resolução de problemas, à formulação de outros e à resolução de novas questões, proporcionando um certo impacto fora da aula de Matemática e provocando iniciativa e autonomia nos estudantes. Matos e Carreira (1996) referem ainda que são típicos na realização de projectos o envolvimento progressivo dos participantes, os tempos de reflexão, a execução por várias fases e a avaliação de resultados. Acrescentam ainda que o debate conjunto tende a aumentar o grau de cooperação dos estudantes entre si. Como o projecto é visto como um "problema *aberto*" (Matos, Carreira, 1996, p. 24) deixa lugar para a realização de uma variedade de actividades, entre as quais se destaca: a recolha de dados no exterior, a organização e tratamento desses dados com escrita de relatórios, a apresentação de resultados entre os participantes. Esta variedade aumentará a participação dos estudantes com a diferenciação de interesses, motivações e graus de empenhamento diversificado, permitindo integrar diferentes estilos cognitivos. Adicionalmente, Ponte (1987) elege determinadas etapas no desenvolvimento de um projecto: a) a discussão e a definição de objectivos; b) a discussão e definição da metodologia a adoptar e das estratégias para concretizar essa metodologia; c) a condução das actividades do projecto; d) a finalização dos produtos e e) a divulgação dos resultados ou produtos através da apresentação a uma dada audiência.

8. Tecnologias de Informação e Comunicação nas Aprendizagens Matemáticas (TIC)

8.1. As TIC no contexto educativo

Numa sociedade em contínua mutação, as evoluções tecnológicas, culturais e sociais influenciam claramente tudo o que se passa na Escola, em geral, e, em particular, na sala de aula (Fey, 1984; Mendes, 1998). Nestas circunstâncias, a Escola deve munir-se de mecanismos e de uma organização capaz de atender aos estudantes com maiores dificuldades e deficiências em matemática e simultaneamente aos mais talentosos para conseguirem suportar e orientar as suas aprendizagens para a excelência, procurando criar, assim, a equidade na classe (NCTM, 2000). Vale a pena recordar o pensamento de Bento de Jesus Caraça, em 1942, que depois de ter constatado que as tábuas de logaritmos estavam a ser ultrapassadas por máquinas de calcular lembrou que cada época cria e usa os instrumentos de cálculo conforme a técnica lhe permite e se o ensino deveria ser para todos, então tinha a missão de ser orientado de forma a proporcionar, a todos, o manejo do novo instrumento.

A tecnologia começa a apresentar-se como uma base e factor de *comunicação* (NCTM, 1991, 2000), na qual os estudantes precisam de resolver tarefas que incluam tópicos de discussão e confronto de ideias matemáticas (Pollak, 1987). Lave e Wenger (1991-2002) defendem convictamente que num processo sócio-cultural da aprendizagem "a tecnologia mostra-se relevante e simultaneamente insuficiente para o desenvolvimento adequado da teoria da aprendizagem, pois as aproximações ao desenvolvimento e à compreensão das potencialidades da tecnologia deveriam ser caracterizadas e analisadas como um "*legitimate peripheral participation*" numa prática em comunidade" (p. 30). As tecnologias não são apenas meios ou instrumentos, mas "são também contextos, linguagens e modos de comunicação", constituindo-se como janelas de oportunidades fundamentais para a organização progressiva e "para a construção no terreno dos sistemas de educação" (Silva, 2002, p. 29). Assim, a tecnologia tem surgido associada a vários ambientes e domínios e apresenta-se como um instrumento capaz de criar oportunidades pedagógicas e didácticas na exploração de ideias matemáticas, na recuperação de estudantes e na resolução de problemas, surgindo como mais um meio, dia após dia, para produzir sucesso na aprendizagem matemática. O NCTM (2000) considera que "o acesso à tecnologia precisa de se tornar numa outra dimensão educacional da equidade" (p. 14), pois essa pretensão necessita de fontes e de suportes democráticos e variados para todas as classes. Nesta perspectiva, Miguéns (2002) defende que as TIC permitem uma intensificação muito significativa da cooperação e intercâmbio educativo, com vista à construção optimizada das competências individuais. "A tecnologia é essencial no processo de ensino e aprendizagem, dado que esta influencia a própria matemática que é ensinada e amplia simultaneamente a aprendizagem do estudante" (NCTM, 2000, p. 24). Já em 1996, Heid defendia que a funcionalidade do computador afecta a orientação curricular bem como o desenvolvimento do princípio da equidade e da excelência na classe. Acrescentava ainda que a presença de computadores na sala de aula cria um ambiente diferente na classe que passa pelo acesso facilitado e individualizado à tecnologia, proporcionando a aprendizagem do estudante sob o olhar e a orientação atenta do professor. O computador e as tecnologias, por ele suportadas, podem contribuir para dar corpo a novos paradigmas educacionais os quais deverão proporcionar o desenvolvimento de várias competências, entre os quais se destacam: o estudante continuar a trabalhar numa tarefa até atingir um nível elevado de realização, ter mais iniciativa e responsabilidade na aprendizagem, testar uma diversidade de métodos para suportar a sua aprendizagem e trabalhar tanto em grupo como individualmente, tornando-se o professor mais um guia do que "um sábio no palco". A interacção interpessoal deve continuar a ter um papel de destaque no ambiente de sala de aula, mas com a generalização e as potencialidades das tecnologias de informação e comunicação pode-se melhorá-la e fomentá-la, principalmente, através do desenvolvimento de actividades colaborativas que envolvam a Escola e a comunidade educativa (Yates, 1988; Morais, Almeida e Dias, 2000).

Tecnologias electrónicas – calculadoras e computadores – são ferramentas essenciais para ensinar, aprender e fazer matemática, permitindo a organização e a realização dos cálculos e a análise de dados. Por outro lado, quando as ferramentas tecnológicas estão disponíveis, os estudantes podem "focalizar a atenção para a capacidade de experimentar, reflectir, raciocinar e resolver problemas" (NCTM, 2000, p. 169) e providenciam um ambiente especial para se poder explorar relações, elaborar e testar conjecturas. Adicionalmente, as ferramentas tecnológicas oferecem oportunidades para se realizarem diferentes experiências com múltiplas representações, tais como: pictóricas, geométricas, numéricas, tabelares, gráficas, algébricas e manipulações que dinamizam o processo de aprendizagem e ensino da Matemática, permitindo o levantamento de determinadas questões e a consciencialização da necessidade de reflexão que importa aproveitar para incentivar a construção do conhecimento matemático. Segundo esta associação, os programas interactivos de computador providenciam um ambiente rico de aprendizagem nos quais os estudantes são apoiados a interactuar com o programa de forma a compreenderem melhor a matemática e a construírem necessidades intelectuais capazes de valorizar, de forma dinâmica, a experiência e o saber adquirido.

Seguindo esta perspectiva educacional vários investigadores, entre os quais se destacam: Fey (1984); Schoenfeld (1985); Veloso (1987); Pea (1987); Yates (1988); Matos (1991); Sheets (1993); Duarte, 1993; Dunham and Dick (1994); Groves (1994); Silva (1994); Rojano (1996); Matos e Carreira (1996); Ponte (1997); Cabrita (1998); Drijvers (2001-2004) defendem que os estudantes podem aprender mais matemática, pelo levantamento de novas questões e reflexões, proporcionando um tratamento mais profundo dos temas com a utilização apropriada da tecnologia. O poder versátil da tecnologia provoca, necessariamente, o reexame das matérias, aprendizagens mais questionadas e profundas. Computadores e calculadoras alteram, assim, o que os estudantes podem fazer com as representações convencionais e ampliam o conjunto de simbolismos com os quais eles podem trabalhar. Os estudantes aprendem a usar ferramentas versáteis quando utilizam o computador, no qual algumas representações diferem da simbologia convencional, como acontece com a utilização da folha de cálculo, designadamente, na notação científica dos números, que tem representação diferente nesta ferramenta tecnológica, nas calculadoras e nos livros (NCTM, 2000). Segundo esta associação de professores de Matemática, quando se pensa em utilizar o computador no ensino da matemática emerge, de imediato, o estudo em dois campos: no campo educativo, concretamente na reflexão sobre o processo aprendizagem-ensino da Matemática e no campo tecnológico, na descoberta de meios tecnológicos disponíveis ou a descobrir que possam vir a interactuar formativamente na aprendizagem dos estudantes. Para Jensen e Williams (1993) as Tecnologias de Informação e Comunicação (TIC) podem ser um suporte inovador da instrução matemática que altera a dinâmica e a cultura a estabelecer na classe, especialmente, nas aprendizagens significativas.

8.2. As TIC na aprendizagem matemática

Segundo o NCTM (2000) "a tecnologia pode ajudar os estudantes a aprender matemática e mais matemática" (p. 280). Com computadores e calculadoras é possível produzir representações tabelares e gráficas, ser eficaz em cálculos e facilitar o estudo entrelaçado da proporcionalidade com as relações lineares, baseado numa aprendizagem flexível de análise e de representação não convencional (Cabrita, 1998; NCTM, 2000). De facto, o uso de diferentes ferramentas sustenta o domínio do problema e das expressões associadas e a capacidade de utilização e interpretação de variado e apropriado *software* (Fey, 1984; Weber-Russel e LeBlanc, 2004).

Bentes (1998) destaca a utilização das TIC como papel formativo e como meio para desenvolver competências e atitudes críticas, nomeadamente, a promoção da criatividade, "da capacidade explorativa, da auto-confiança e "abertura de espírito" na resolução de problemas no âmbito curricular" (p. 108). Refere ainda que a evolução das TIC e o modo como têm sido utilizadas no ensino da Matemática ao longo destas últimas décadas constituem-se factores condicionantes na escolha dos conteúdos, metodologias e estratégias de ensino.

O compromisso do estudante com as ideias matemáticas abstractas pode ser promovido através da tecnologia. "A tecnologia enriquece o grupo e a qualidade das investigações, promovendo o significado das ideias matemáticas segundo múltiplos pontos de vista" (NCTM, 2000, p. 25). No caso da folha de cálculo os números podem ser alterados, observando-se a alteração instantânea de valores a serem modificados, permitindo ao estudante reformular os raciocínios baseados em novos valores. Para esta associação de professores a tecnologia possibilita e implementa a diferenciação e a personalização das aprendizagens, disponibilizando aos professores um leque alargado de opções para adaptar a instrução matemática a estudantes com desempenho elevado, médio e com necessidades educativas especiais. As crianças com mais dificuldade de concentração que revelam deficiências profundas ou ligeiras nos procedimentos numéricos básicos podem ser ajudadas com *software* adequado, que contribuirá para atenuar essas dificuldades de aprendizagem e dar um contributo significativo para a prossecução do princípio da equidade da Educação Matemática.

Jensen e Williams (1993) defendem também a utilização dos computadores na classe, pois possibilitam: a) ampliar opções educacionais para o ensino de conteúdos e áreas nas quais os estudantes tradicionalmente têm dificuldades; b) permitir a individualização de ambientes de aprendizagem dos estudantes; c) encorajar a participação activa dos estudantes na construção do seu próprio conhecimento e compreensão; d) providenciar respostas imediatas e sem julgamentos do seu trabalho; e) providenciar muitas oportunidades para cooperar em actividades da resolução de problemas; f) completar o papel tradicional do professor, como transmissor do conhecimento e qualitativamente no papel de facilitador da aprendizagem; g) implementar uma atitude positiva para a matemática através das crenças nas capacidades e na aprendizagem. O NCTM (1991, 1995) enfatiza o uso do computador na classe, defendendo: a) a existência de um computador, em cada classe, para servir os propósitos da demonstração e esclarecimento de conceitos; b) o livre acesso ao computador na classe para cada estudante/grupo; c) o uso do computador como ferramenta para processar a informação, realizar cálculos, investigar e resolver problemas.

Mendes (1998) acredita que o aparecimento dos computadores revalorizou os processos experimentais da investigação matemática. Segundo este autor, a presença dos computadores na sala de aula faz emergir um contexto novo em que competências básicas da matemática escolar têm de ser redefinidas. Como as calculadoras e os computadores solucionam a esmagadora maioria das questões de cálculo, vêm permitir um investimento maior nas faculdades de entender as situações e no desenvolvimento do raciocínio.

Por outro lado, Pea (1987) analisa o computador como amplificador e organizador do conhecimento e refere que o actual contexto sócio-histórico pode orientar a utilização do computador na Educação Matemática, provocando necessariamente reformulação nos objectivos, métodos e conteúdos a leccionar. As tecnologias estão a receber mais atenção como ferramentas cognitivas (Crosswhite, 1987), com a escrita de *uma nova linguagem* e com um *novo sistema de notação matemática*, como na álgebra ou no cálculo e em símbolos numéricos, num processo amplo de comunicação matemática e de metacognição, associados à “reflexão sobre a cognição” e “pensar acerca do seu próprio pensamento” (Schoenfeld, 1987c, p. 189). Este autor defende que a metacognição se focaliza para o conhecimento acerca dos processos do pensamento, para o controlo ou auto-regulação e para as crenças e intuições. Conciliando várias possibilidades de intervenção na acção educativa, o computador pode-se transformar numa ferramenta conceptual ajudando os estudantes a tornarem-se mais fluentes na realização de tarefas rotineiras matemáticas disponibilizando tempo para a promoção do pensamento matemático (Pea, 1987, Mendes, 1998; Drijvers, 2003), libertando os estudantes para o desenvolvimento de potencialidades intelectuais no processo árduo de resolução de problemas. Segundo Pea o ambiente de computação providencia um contexto rico para uma aprendizagem pela descoberta, o desenvolvimento da intuição e a abertura de alguma transcendência nas próprias capacidades mentais. Tal como Berger (1998), Drijvers (2003) também defende que o uso das ferramentas tecnológicas estimula e amplia as possibilidades da “zona aproximal de desenvolvimento” ZPD, proposta por Vygotsky (1993; 1995). E a função de amplificador das TIC, sugerida por Pea (1987), também pode ser experimentado e implementado na generalização, das aprendizagens algébricas (Mason, 1996).

O NCTM (1991, 1995, 2000) defende ainda que a tecnologia é, cada vez mais, na sociedade de informação de hoje, uma ferramenta poderosa capaz de criar oportunidades e desafios na comunicação matemática, especificamente, no desenvolvimento e análise da linguagem. Para Mendes (1998), os computadores, além de muitas outras coisas, permitem construir e analisar uma gama enorme de gráficos, que os estudantes vêem diariamente em alguns manuais escolares, jornais e revistas. Tornou-se uma exigência da própria sociedade, interpretar e fornecer informação de modos diversificados que possam ser percebidos e entendidos por todos os cidadãos. O documento do Ministério da Educação (1999) sobre as competências gerais e transversais para o ensino básico da Matemática também apela à utilização das tecnologias na aprendizagem da Matemática, designadamente, à calculadora e ao computador, consideradas ferramentas essenciais na abordagem de conteúdos e desenvolvimento de competências específicas.

Papel do professor. Por outro lado, o uso prático efectivo da tecnologia na aula de matemática depende do professor (Veloso, 1987; Ponte, Matos e Abrantes, 1999; Drijvers, 2001-2004). Os professores devem usar a tecnologia para fortalecer a aprendizagem dos estudantes e criar oportunidades vantajosas para aprofundar os conhecimentos, apresentando-se como uma mais valia, designadamente, com a construção e visualização de gráficos e a criação de imagens, entre outros procedimentos.

A introdução do computador na educação veio proporcionar ao professor um desafio ao seu desempenho profissional, pois exige que este "identifique o contexto da sua integração e elabore a sequência conceptual para abordar o assunto" (Santos, 1998, p. 121).

Para Duarte (1993) é o contexto pedagógico que envolve o computador e são as actividades desenvolvidas e o papel de apoio do professor que lhe determinam o seu real valor. Ponte (1997) também comunga desta ideia e defende que as tecnologias podem ser usadas ao serviço das mais variadas perspectivas pedagógicas e como tal, tem de ser dada responsabilidade aos educadores para determinar como, quando e com que finalidade se devem utilizá-las. Para que isto aconteça salienta que o domínio da exploração das tecnologias no ensino requer um importante suporte de formação dos educadores. Com calculadoras e computadores os estudantes podem examinar mais exemplos do que aqueles que são possíveis de ser representados à mão, com a possibilidade de explorarem facilmente e de formularem, mais e mais conjecturas. A capacidade de cálculo dos meios tecnológicos pode ser estendido, de forma acessível, ao processo de resolução de problemas permitindo que os estudantes executem rotinas rápidas e correctamente, de modo que possam dedicar mais tempo à conceptualização, à modelação, à reflexão e à comunicação de conhecimentos produzidos (Ponte, Matos, Abrantes, 1999). Da investigação realizada por Santos (1998) acerca da identificação das percepções dos professores sobre a utilização do computador na Escola e na sala de aula, concluiu que os conhecimentos computacionais e a utilização daquela ferramenta de trabalho, na prática lectiva, influenciam as culturas profissionais dos professores criando, de um modo geral, um contexto que influencia o desenvolvimento de estratégias de ensino, conferindo uma maior identidade ao trabalho do professor.

Mas a tecnologia não substitui o papel do professor de Matemática. O professor joga importantes e diferentes papéis numa classe rica em tecnologia, tomando decisões que afectam a aprendizagem dos estudantes com importantes orientações. Quando a opção do professor é usar a tecnologia, os estudantes podem mostrar como pensam matematicamente o que, de outra forma, teriam mais dificuldade em revelar e observar (NCTM, 2000). Por isso, a tecnologia ajuda na avaliação dos processos, permitindo aos professores examinarem o método usado pelos estudantes nas suas investigações matemáticas, como também nos resultados, enriquecendo a informação avaliável pelos professores para usar e tomar decisões instrucionais, avaliativas e formativas. Ao permitir que os estudantes tentem compreender melhor determinada matéria, com o uso das tecnologias origina-se, também, um melhor entendimento ou gosto por outras matérias até então "mal-amadas". De facto, a tecnologia pode ajudar os professores a conectar as aptidões dos estudantes com os procedimentos necessários, de forma a provocar um melhor desenvolvimento e entendimento da matemática (Drijvers, 2001-2004). Pea (1987) faz apelo aos professores de Matemática para conhecerem as potencialidades do computador e de as usarem efectivamente no ensino, conseguindo atingir um dos objectivos primordiais que é a promoção do pensamento matemático. Segundo Weber-Russell e LeBlanc (2004) as ferramentas tecnológicas conseguem criar efectivamente ambientes favoráveis à exploração do conhecimento e a desenharem princípios que promovam o saber reflectido.

Numa perspectiva mais ampla, os investigadores espanhóis Cannone e Socas (1998) referem que a falta de sintonia com a realidade social provoca uma desmotivação dia a dia mais acentuada nos estudantes que olham a Escola como uma "obrigação" desagradável e sem objectivo. Apesar de estes autores reconhecerem a existência de dificuldades relacionadas com a falta de preparação dos professores e da ausência de *software* adequado aos objectivos didácticos pretendidos, concluíram da necessidade de introduzir o computador neste contexto para que esta realidade se altere. Cannone e Socas reflectem sobre a questão ideológica associada à acção educativa e reconhecem que só é possível obter resultados significativos quando o computador estiver integrado num processo aprendizagem-ensino, onde o professor e o estudante pratiquem uma comunicação aberta, participativa e a atitude do professor passe de informador central para colaborador e orientador, onde o estudante saia da sua passividade para aprender a participar, pois o computador actua somente quando é estimulado por um elemento externo, neste caso, do professor e/ou estudante. Contudo, estes dois autores alertam para o ainda existente autoritarismo do sistema educacional e crêem que "o computador por si só, não poderá modificar o sistema e será um instrumento a mais desse autoritarismo" (Cannone e Socas, 1998, p. 170). Jensen e Williams (1993) e Ponte, Matos e Abrantes (1999) comungam da mesma ideia, defendendo que o computador não é nenhuma panaceia para o mal do ensino da Matemática e é necessário que o professor desempenhe um papel fulcral na exploração inovadora e comprometida dos objectivos da Educação Matemática.

8.3. As TIC no ensino da álgebra

Os ambientes computacionais surgem como perspectivas inovadoras das aprendizagens algébricas (Drijvers, 2003). Na aproximação funcional à álgebra, "as calculadoras e os computadores permitem novas possibilidades no estudo de relações entre dois conjuntos de números" (Ameron, 2001-2004, p. 6-7). Na realidade, os estudantes precisam de compreender os conceitos algébricos, a estrutura e os princípios que orientam a manipulação simbólica, optimizando vários instrumentos e meios disponíveis. Devem ainda entender que os símbolos podem ser usados para registar ideias, obter e progredir nos "*insights*" das situações. Os computadores, hoje em dia, podem produzir tabelas, gráficos de funções, realizar operações com símbolos e instantaneamente calcular dados, organizados ou não, em colunas que permitem a manipulação de símbolos em diversos contextos. Concretamente, o NCTM (2000) defende que o estudo da álgebra deve ser trabalhado de forma abrangente, designadamente, com o computador de modo a não limitar a exploração das situações e a manipulação simbólica. Neste tópico, a tecnologia permite que os estudantes possam raciocinar sobre diversas possibilidades de edição, alterando o valor dos parâmetros, podendo modelar e resolver problemas mais complexos que à partida se apresentavam como inacessíveis. Nas aproximações à álgebra, designadamente, a compreensão do conceito de função requer o desenvolvimento da capacidade de resolver problemas usando múltiplas representações, gráficas, numéricas e simbólicas (Heid, 1996). Segundo este autor, o programa de computadores "*Computer-Intensive Álgebra*" (CIA) permite que os estudantes sejam iniciados nestes domínios, facilitando situações de exploração da álgebra, num processo gradual e continuado da aprendizagem, com a exploração de números, gráficos, e representações simbólicas de funções. Este programa, *Computer-Intensive Álgebra*, focaliza a aprendizagem para a compreensão acerca de alguns conceitos fundamentais da matemática, providenciando aos estudantes oportunidades para os explorar num ambiente realista. Este autor defende que é preciso capitalizar a importância de um ambiente tecnológico nas aprendizagens algébricas. Por outro lado, Drijvers (2003; 2004) salienta ainda que as investigações realizadas com a integração do computador na aula de Matemática, especificamente, no ensino da álgebra, têm revelado que a ideia da tecnologia realizar operações elementares conduz os estudantes a concentrarem-se mais na compreensão conceptual dos assuntos explorados. Muitas vezes, a álgebra não tem sido bem tratada explicitamente no currículo e o uso laboratorial de computadores, na organização dos dados, na velocidade dos cálculos, na apresentação dos gráficos, parece facilitar o trabalho, possibilitando aos estudantes estudarem a realidade e com alguma variedade de experimentos alargarem a intervenção num espectro amplo de situações (Gravemeijer, 1990, 2004; NCTM, 1991, 2000; Drijvers, 2001-2004). Este último investigador e Wijers (1996) defendem ainda que algumas aptidões consideradas essenciais sejam mobilizadas pelo uso das tecnologias para permitir um trabalho a outros níveis de generalização e abstracção, como aconteceu na investigação que realizou Drijvers sobre a aprendizagem da álgebra em que foram explorados os "applets"[19]. Depois dos primeiros níveis de escolaridade em que os estudantes começam a reconhecer e a descrever padrões numéricos cujo termo seguinte é obtido com base no número anterior, começa por emergir o *pensamento recursivo*, de extrema importância no raciocínio matemático (Piaget, 1965; Williams, 2001). "A aplicação da recursividade no trabalho em sequências é de extrema importância e surge naturalmente em vários contextos que podem ser amplamente aprendidos com a tecnologia" (NCTM, 2000, p. 38).

O maior objectivo do ensino básico é desenvolver, nos estudantes, facilidades em usar padrões e funções para representar, modelar e analisar uma variedade de fenómenos e relações matemáticas na resolução de problemas da vida real. Com computadores e calculadoras é possível produzir representações gráficas e ser eficaz em cálculos complexos, podendo, assim, os estudantes focalizar a sua atenção para modelar padrões respeitantes a alterações quantitativas. Os estudantes devem ter frequentemente

[19] Os "applets" são pequenos aplicativos escritos em Java que se utilizam na JVM (Java Virtual Machine) e são geralmente usados para adicionar interactividade a aplicações web. No Freudenthal Institut foram desenvolvidos "applets" para o estudante explorar e aprender conhecimentos algébricos.

experiências na modelação de situações com equações da forma y=kx e precisam de ter oportunidades para modelar situações em contextos diários (Cabrita, 1998; NCTM, 2000).

Para entrosar a álgebra tradicional com estratégias e ambientes actuais e mais divertidos, Reeuwijk (2004) sugere também ferramentas e ambientes tecnológicos e, tal como Drijvers, indica os ”applets”, que permitem explorar métodos tradicionais no ensino da álgebra, mas numa busca constante da compreensão dos conceitos e do desenvolvimento de capacidades em percursos didácticos que façam sentido para os estudantes[20], onde sejam propostas situações com significado e envolvidas num contexto “realista”. Reeuwijk e Drijvers (2004) acrescentam que esses “applets” constituem-se, no dia a dia das aulas de Matemática, como uma mais valia na aprendizagem da álgebra, e considera que a utilização do computador deve ser pensado neste contexto curricular não como uma ferramenta extra, mas como um meio tecnológico a ser usado regularmente nas aulas de Matemática.

No âmbito das narrativas matemáticas Nemirovsky (1996) realizou investigações durante sete anos, com jovens dos 12 aos 15 anos, baseadas na exploração de *problemas da vida real* na aprendizagem da álgebra com utilização ou não do ambiente tecnológico, designadamente, do *Computer-Intensive Álgebra* e juntamente com Heid (1996) desenhou e implementou actividades para a aprendizagem da álgebra, envolvendo “situações realistas” que foram consideradas como fontes ricas de “*insigths*”. Neste sentido, também o NCTM (2000) defende que os estudantes precisam de aprender a saber como interpretar as representações tecnológicas e como utilizar a tecnologia de forma inteligente para compreender, explorar situações diversificadas, quer do quotidiano quer dos domínios intrínsecos à própria Matemática.

8.4. A folha de cálculo no desenvolvimento de competências

O princípio da tecnologia refere que: “a tecnologia é essencial no processo ensino e aprendizagem da matemática; ela influencia a matemática que é pensada e valoriza a aprendizagem do estudante” (NCTM, 2000, p. 373). Para que a tecnologia faça parte da vida da classe é necessário seleccionar as ferramentas tecnológicas mais adequadas ao contexto educativo e ao domínio a explorar, usando, para isso, meios que sejam compatíveis com os objectivos instrucionais traçados. Contudo, a decisão para incorporar as tecnologias na aula de Matemática requer professores preparados para as usar de acordo com as finalidades educativas e as competências a desenvolver. Abrantes, Serrazina e Oliveira (1999) defendem este propósito e consideram que a folha de cálculo deve fazer parte da experiência de aprendizagem de todos os estudantes.

Relativamente à utilização dos computadores, nas competências gerais e transversais preconizadas pelo Ministério da Educação (1999) apela-se para a utilização das tecnologias na aprendizagem da Matemática, onde se refere que: “os alunos devem ter oportunidade de trabalhar com a folha de cálculo e com diversos programas educativos, nomeadamente de gráficos de funções e de geometria dinâmica, assim como utilizar as capacidades educativas da rede Internet. Entre os contextos possíveis incluem-se a resolução de

[20] In sense-making ways (Drijvers, 2003-2004; Reeuwijk, 2004).

problemas, as actividades de investigação e os projectos" (ME, p. 8). No quadro curricular actual, Santos dos Santos (1998) considera que a promoção do sucesso da Matemática passa pelos docentes serem capazes de procurar "relações interdisciplinares e abordagens interactivas, com o uso de meios informáticos e de outros" (p. 245).

O NCTM (1991, 1995, 2000) e Weber-Russell e LeBlanc (2004) defendem que a tecnologia é uma ferramenta poderosa capaz de criar ambientes favoráveis à aprendizagem, oportunidades e desafios na comunicação matemática, especificamente, no desenvolvimento e análise da linguagem. Neste sentido, apontam a folha de cálculo como um desses instrumentos potenciador de boas práticas, no qual é possível experimentar algum dinamismo intelectual, permitindo ao estudante reformular os raciocínios baseados em novas quantidades. Por exemplo, os símbolos usados na folha de cálculo podem ser relacionados e bem trabalhados, pois não são, normalmente, os mesmos símbolos algébricos usados na Matemática. Os estudantes poderão, assim, aproveitar positivamente as experiências que desenvolvem com ferramentas do quotidiano, tal como a calculadora e a folha de cálculo, para realizarem comparações com as expressões estandardizadas da Matemática e aprofundarem o significado das mesmas, numa perspectiva de conteúdo e de forma.

Também Drijvers (2003) na investigação realizada com os "applets" conclui que este tipo de aplicações informáticas apresentam-se, por vezes, como ferramentas redutoras da aprendizagem da álgebra e defende a utilização anterior da folha de cálculo como ferramenta mais ampla, capaz de libertar o pensamento do estudante e provavelmente mais eficaz no desenvolvimento de um trabalho contextualizado no ensino da álgebra.

Das experiências desenvolvidas com estudantes do 6º ano de escolaridade com esta ferramenta tecnológica, Santos e Ferreira (1995) concluíram que a folha de cálculo permite que: a) o percurso de aprendizagem se desvie das propostas iniciais e, por vezes, únicas, utilizando estratégias inesperadas; b) o professor se apresente como observador atento às estratégias, propondo reflexões, partilha de ideias, estimulando a descoberta e a ajuda para ultrapassar as dificuldades; c) o estudante aprenda a resolver problemas paulatinamente, desde a estratégia escolhida até à construção crítica do resultado; d) a avaliação do estudante não seja apenas baseada numa via tradicional. Estas autoras acrescentam ainda que, numa perspectiva de valorização dos produtos alcançados no computador, torna-se imprescindível que seja implementada uma avaliação mais completa e variada, incluindo os processos clássicos da avaliação e ainda os de auto e hetero-avaliação e em que estejam previstos também os próprios processos, os diversos resultados e diferentes instrumentos utilizados, a observação do professor, registos de diários de bordo, entrevistas, relatórios realizados pelos estudantes, organização de *portfolios*, etc.

Em 1987, trabalhando com duas turmas do 6º ano de escolaridade de uma Escola da periferia de Lisboa, Moreira (1989) investigou os efeitos do uso da folha de cálculo no desenvolvimento de capacidades de resolução de problemas, concretamente, em torno do conceito de proporcionalidade. Esta autora concluiu que o grupo experimental, em que os estudantes foram encorajados a usar a folha de cálculo, obteve melhores resultados, em relação ao conjunto das questões sobre proporcionalidade, não acontecendo o mesmo para o conjunto das restantes questões. Nesta investigação, Moreira considera que a folha de cálculo é uma ferramenta particularmente útil na descoberta de regularidades e na resolução de problemas por ensaio e erro sistemático, uma vez que permite ao estudante experimentar muitos valores e variar as relações, com uma visualização imediata dos resultados numéricos obtidos.

Tal como Moreira (1989) também Fernandes (1994) concluiu que os estudantes do 4º ano de escolaridade, para tirarem partido da folha de cálculo, precisam de conhecer a funcionalidade de alguns comandos e não necessitam de ter um conhecimento profundo das potencialidades desta ferramenta tecnológica. Na investigação realizada esta autora constatou que o uso desta ferramenta tecnológica, fomentou a organização de pesquisas e proporcionou a capacidade do estudante resolver problemas. A classe revelou-se ainda mais aberta para a partilha do conhecimento, emergindo "novos diálogos" e uma nova dinâmica de harmonização da turma, provocando reflexões no professor sobre a sua prática. Esta investigadora refere ainda que, neste nível etário, devem ser exploradas tarefas matemáticas diversificadas, mas a par da utilização da folha de cálculo devem também ser usados materiais manipuláveis.

No 10º ano de escolaridade, em duas turmas, Carreira (1996) desenvolveu um estudo em que utilizou a folha de cálculo como instrumento de modelação na exploração da unidade temática da trigonometria. Segundo esta autora, os estudantes colocados perante uma situação da vida real começaram por procurar referências para clarificar o contexto geral. Os estudantes vão criando imagens mentais da situação apresentada e estas fornecem pistas para o tratamento intuitivo de algumas questões envolvidas e são materializadas em esboços esquemáticos que ilustram aspectos essenciais do modelo real.

Amorim e Matos (1990) num estudo qualitativo com estudantes do 11º ano de escolaridade na área de Economia sobre as representações múltiplas no desenvolvimento de trabalhos com a folha de cálculo consideram que esta ferramenta pode funcionar como amplificador conceptual, na medida em que possibilita aos estudantes a exploração da situação, permitindo que, para cada uma delas, a representação gráfica adquira um poder próprio, levando-a a ir mais longe no estudo do problema.

9. Aprendizagem da Álgebra

9.1. Enquadramentos

A Álgebra surge como um domínio da Matemática, que inclui o estudo de relações (sendo a função apenas um tipo especial de relação) e outros conteúdos, como: o estudo de estruturas abstractas, a computação e a modelação (Reeuwijk, 1995, 2003). Para este autor "a álgebra (sua estrutura e símbolos) não é um objectivo em si mesmo, mas é uma ferramenta para resolver problemas" (p. 18). A Álgebra apresenta-se, assim, como um suporte e veículo linguístico e simbólico do desenvolvimento da Matemática (Rojano, 1996). A Álgebra enfatiza relações funcionais expressas por notação simbólica que permite que complexas ideias matemáticas possam ser apresentadas sucintamente e analisadas efectivamente. Na Britannica Mathematics System a Álgebra abrange diferentes níveis de escolaridade e revela-se como matéria relevante nas operações, no estabelecimento de relações entre quantidades, no tratamento de dados numéricos e gráficos, na utilização de expressões e fórmulas, no uso e criação de padrões e símbolos, na tomada de decisões, na construção de fórmulas, na generalização de fenómenos e no estabelecimento de relações funcionais. Zazkis e Liljedahl (2002) retomam este ponto de vista e tal como Lee (1996), Williams (2001) defendem que a álgebra é uma ferramenta poderosa de comunicação matemática orientada fundamentalmente para a generalização de padrões e de leis que regem os fenómenos.

Para Mason (1996) as raízes da álgebra estão na *generalização aritmética*, oferecendo, por um instante, uma oportunidade de dar atenção ao particular, dando-se revelância aos objectos, tal como eles são e simultaneamente "estabilizando-os" universalmente pela expressão que os generaliza. Para isso, aponta vários procedimentos anteriores, a saber: a) a manipulação de objectos e materiais característicos da Matemática, blocos de Dienes, material de tipo Cuisenaire, entre outros materiais estruturados e não estruturados; b) a realização de operações e construção de conceitos, bem como a descoberta de propriedades da aritmética; c) a resolução de exercícios com a utilização de uma linguagem própria; c) a descrição de fenómenos através do uso de expressões algébricas e ainda d) a reflexão sobre os procedimentos executados.

Contudo, como se referiu no primeiro capítulo na apresentação do problema, existem diversas dificuldades na aprendizagem da álgebra e Drijvers (2003, p. 3) aponta várias: a) o estabelecimento da relação entre procedimentos naturais e informais com os formais a não terem, muitas vezes, significado para os estudantes; b) o nível abstracto com que muitos problemas são resolvidos, comparando-os com as situações concretas que os estudantes vivem e o significado que estes possam atribuir aos objectos matemáticos, situando-se a um nível elevado da abstracção; c) a necessidade de conservar procedimentos elementares da álgebra no processo de resolução de problemas, que fazem parte integrante e essencial das aprendizagens algébricas; d) a dificuldade na apreensão e uso da linguagem compacta que a álgebra encerra, com específicas convenções e símbolos; e) o obstáculo situado na caracterização do objecto da álgebra, com a manipulação de fórmulas e expressões, que os estudantes apreendem como processos e acções fechados, com regras muito rígidas a respeitar, num "lack of closure".

9.2. Fundamentos Conceptuais

9.2.1. Pré-álgebra

Diversas investigações concluíram que os estudantes revelam dificuldades no conceito de variável (Kücheman, 1978, 1981; Schoenfeld e Arcavi, 1988; Kieran, e Chalouh, 1993; Kieran, Boileau e Garançon, 1996; Drijvers, 2001-2004; Ameron, 2004 e outros já anteriormente referidos) e, por tal motivo, torna-se necessário o desenvolvimento gradual, compreendido e sustentado daquele conceito. Segundo Zazkis e Liljedahl (2002) a álgebra integra dois conceitos: a álgebra do pensamento e a álgebra do simbolismo. A álgebra dos símbolos apresenta-se como uma componente necessária da álgebra do pensamento e como uma ferramenta de comunicação matemática. Charbonneau (1996) esclarece referindo que o simbolismo emerge como o foco central da álgebra, mas "não é o todo da álgebra" (p. 35). Este autor considera o simbolismo como uma linguagem que pode condensar a apresentação de um argumento, mas encerra também um significado relevante para resolver problemas. Para Kieran (1988; 1996) a generalização não é equivalente ao pensamento algébrico, mas o primeiro requer o segundo, isto é, o simbolismo algébrico fundamenta e expressa a generalização. Todavia, Mason (1996) acredita que o simbolismo algébrico é uma linguagem que dá voz ao pensamento e simultaneamente uma linguagem que expressa a generalidade. Por outro lado, Dörfler (1991) sugere que teoricamente a generalização necessita de uma certa descrição simbólica, mas salienta que a descrição simbólica não precisa de incluir o uso das letras. De acordo com este autor estes símbolos podem ser verbais, icónicos, esquemáticos, geométricos ou, naturalmente, algébricos. As explorações de padrões, detectando diferenças e similitudes, classificando, etiquetando, usando algoritmos, conjecturando e argumentando, estabelecendo relações numéricas ou generalizações são actividades que se identificam com as componentes do pensamento algébrico (Mason, 1996; Williams, 2001). Estes autores acrescentam ainda que as notações usadas isoladamente podem ser, só por si, um indicador da inabilidade do indivíduo ser capaz de pensar algebricamente.

Neste enquadramento educativo Kieran e Chalouh (1993) definem o conceito de *pré-álgebra* como um processo de transição da aritmética para a álgebra. Ameron (2002) esclarece este termo, salientando que a existência da pré-álgebra situa-se ao nível mental, nas conexões internas realizadas pelos estudantes, quando começam a usar algum simbolismo na representação das situações. Kieran e Chalouh (1993) insistem em considerar a pré-álgebra como um pré-requisito a partir da qual os estudantes constroem a álgebra, construindo o significado para os símbolos e as operações da álgebra com base no conhecimento da aritmética. Estes autores defendem ainda que, no âmago da pré-álgebra, emergem dois aspectos cruciais: a) o *uso de letras* para representar os números; b) a explicitação do conhecimento do *método matemático* que inclui os números e as letras. Posteriormente, a introdução da álgebra envolve usualmente o estudo de expressões algébricas, a identificação e a resolução de equações, o uso de variáveis e fórmulas.

Por outro lado, Ameron (2002) na sua investigação alerta para que não seja apenas vista "a álgebra como uma aritmética generalizada" (p. 26), pois a álgebra não tem apenas como objectivo último a generalização das propriedades dos números como a comutatividade, a distributividade, entre outras. Em vez disso considera existir uma relação bilateral forte entre a álgebra e a aritmética, pois enquanto que a aritmética tem amplas oportunidades de simbolização e generalização a álgebra tem as suas raízes na aritmética e depende profundamente desta forte "arithmetical foundation" (p. 26). Nesta perspectiva também sugere o termo ´pré-álgebra´ como uma zona de transição de actividade exploratória informal oriunda da aritmética para iniciar a álgebra. Ameron (2002) defende que a pré-álgebra envolve pensamento algébrico e simbolização informal no campo da aritmética, acrescentando que não é a natureza da tarefa, mas sim a natureza da estratégia na descoberta da solução que interessa e que distingue a aritmética, da pré-álgebra ou da álgebra num processo gradual de formalização das notações que acompanham o processo intelectual de abstracção. Talbert e Stallings-Roberts (1994) defendem ainda na pré-álgebra a utilização variada de materiais que motivem os estudantes nos diferentes processos de pensamento e resolução de problemas.

Entretanto, Kieran (1988, 1992) considera que as dificuldades de aprendizagem na álgebra estão concentradas no significado das letras, no reconhecimento e no uso da estrutura e na alteração das convenções aritméticas às algébricas. Existem, assim, segundo esta autora, duas dificuldades de ordem ontológica no estudo da álgebra e, em particular, no seu ensino inicial: *operacional* (ou procedimental) e *estrutural* (relacional), isto é, nos modos de resolver e pensar nos problemas. Tal como Kieran, também Sfard (1991) considera existirem fundamentalmente duas formas diferentes de conceber as noções matemáticas: *operacionalmente* (os processos) e *estruturalmente* (os objectos). Este último autor explica que a expressão algébrica: ´$3(x+5)+1$´ pode ser vista como um *processo* computacional, isto é, a sequência de instruções: adicionar 5 a um dado número, multiplicar o resultado por três e depois adicionar 1. De outra perspectiva, a expressão pode ser também vista como um *produto* da computação representando um certo número. Por outro lado, a expressão ´$3(x+5)+1$´ pode comportar-se como uma *função*, isto é, como um objecto algébrico, pode ser manipulado e combinado com outras expressões simbólicas. As três concepções: como um produto computacional, uma função e um cordão simbólico, revelam, todos eles, a compreensão estrutural da álgebra (Kieran, 1988, 1992; Sfard, 1991). Posteriormente Kieran, Boileau e Garançon (1996) acrescentam que "uma aproximação funcional da álgebra não necessita necessariamente do estudo de funções" (p. 257). Numa expressão algébrica a letra pode ser interpretada como uma variável ou como um valor desconhecido "*unknown*". Por exemplo, na expressão ´$3x+5$´ pode ser vista como uma função, isto é, ´x´ é visto como uma variável, pois pode tomar um conjunto de valores. Pelo contrário, quando duas funções, tais como: ´$3x+5$´ e ´23´ são igualadas, ´x´ é claramente interpretado como um "*unknown*", ou seja, um número para o qual o valor das duas expressões dos dois membros da igualdade toma a mesma quantidade.

9.2.2. Conceito de variável

Muitos investigadores têm estudado os vários aspectos relacionados com o conceito de variável, em particular os diferentes papéis e significados que este conceito tem no quadro escolar (Kieran, 1988, 1992; Schoenfeld e Arcavi, 1988; Thompson, 1988; Boers-van Oosterum, 1990; Wheeler, 1996, entre outros).

Para Drijvers (2003) a primeira concepção sensível de variável é vista como o "empty place" ou uma espécie de "lettered box". Este autor considera que os diferentes papéis e significados das variáveis dependem das diferentes situações a explorar e que este papel pode ser alterado durante o processo de resolução do problema. Assim, segundo este autor, os papéis são relatados nas seguintes situações algébricas: a) a variável como uma caixa vazia para valores numéricos; b) a variável como alteração de uma quantidade numa expressão algébrica; c) a variável como valor desconhecido na resolução de problemas; d) a variável como número generalizado na álgebra de padrões e estruturas; e) a variável como símbolo na linguagem algébrica de funções. Assim, uma das dificuldades associadas à construção da noção de variável, no quadro escolar, reside em distinguir os diferentes papéis e significados e negociá-los com os estudantes de uma forma flexível (Sfard, 1991; Drijvers, 2003). Nos níveis elementares os estudantes desenvolvem tipicamente a noção de "variável", ou mais propriamente, segundo Drijvers (2001-2004) e Ameron (2002), o conceito, apelidado, numa primeira fase de "unknown", a um nível mais básico "a caixa", "o espaço vazio", através da existência de uma lacuna a preencher, numa sentença matemática, com um número específico, de forma a tornar a proposição verdadeira, tal como acontece em: ´___+2=11´. Mais tarde os estudantes aprendem que a variável ´*x*´ aparece associada à resolução de uma equação linear, tal como: ´3*x*+2=14´ em que ´*x*´ tem um uso diferente do da identidade ´0x*x* =0´ e que ambas são completamente diferentes do uso de ´r´ na fórmula ´A=πr^2´ (tendo um entendimento semelhante ao da alínea b anterior). A compreensão da noção de variável desenvolve-se num longo período de tempo e precisa ainda de experiências ricas, variadas e suportadas por conhecimentos anteriores (Sfard, 1991).

Deste modo, Drijvers distingue, no nível básico de escolaridade, fundamentalmente, três patamares para a variável: lugar vazio; valor desconhecido ou alteração da quantidade; generalizador (Figura 7), acrescentando que a passagem entre os diferentes patamares de entendimento do significado da variável deve ser trabalhada na base da atribuição de significados e nas reflexões objectivas e estruturais, realizadas durante o processo de resolução de diferentes problemas.

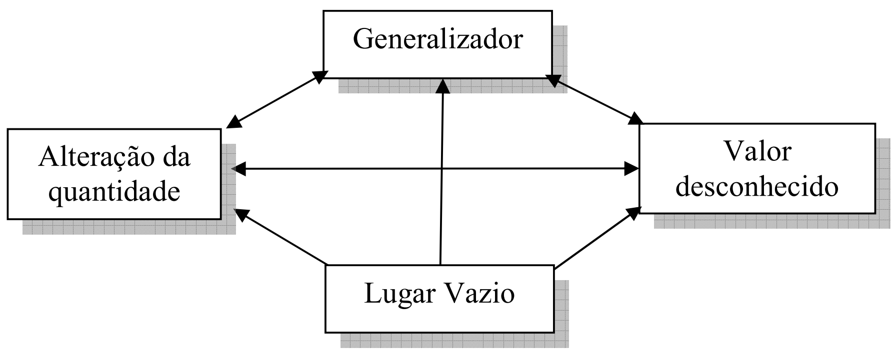


Figura 7: Níveis de compreensão do conceito de variável, propostos por Drijvers (2003)

Abrantes, Serrazina e Oliveira (1999) comungam posições similares, sublinhando que as investigações mais recentes sobre a aprendizagem da álgebra têm identificado diversos tipos de dificuldades conceptuais dos estudantes, estando uma delas ligada à própria interpretação do conceito de variável. Apesar dos estudantes normalmente identificarem variáveis com letras que se usam no lugar de números desconhecidos, reconhece-se que esta interpretação é redutora, pois o conceito apresenta diversas facetas. As letras desempenham papéis diferentes em várias expressões. Tal como propõe Drijvers (2003) Abrantes, Serrazina e Oliveira (1999) salientam que nas expressões do tipo ´6+___=9´; ou ´[ ]+12=18´, o espaço ou o quadrado ou os parêntesis identificam uma "caixa" temporariamente vazia a preencher com um determinado valor numérico que torne a proposição verdadeira. Na equação: ´6+*x*=14+2´, a letra ´*x*´ representa um número, temporariamente desconhecido (uma *incógnita*), mas que pode ser determinado resolvendo a equação. Em ´*A=cxl*´, pensa-se numa fórmula, que neste caso identifica a área de um rectângulo de comprimento ´*c*´ e de largura ´*l*´ e as letras não são encaradas como incógnitas. Uma expressão do tipo ´2xn´, representa um conjunto de valores e se ´*n*´ for substituído por números naturais, a expressão gera a sequência de números pares. A ideia de variação ainda é mais nítida na expressão ´*y*=4*x*+1´, pois à medida que é atribuído um valor a ´*x*´, ´*y*´ toma um determinado valor de acordo com a expressão dada. Numa expressão como ´*a*+*b*=*b*+*a*´, as letras podem ser substituídas por quaisquer valores numéricos, uma vez que a expressão traduz uma propriedade, a generalização de um padrão aritmético. Para Abrantes, Serrazina e Oliveira (1999), a compreensão destes diversos significados não é linear e requer um trabalho prolongado e paciente. Como já se referiu no primeiro capítulo, a prática meramente repetitiva de procedimentos apenas enfatiza os cálculos e normalmente gera incompreensões que, muitas vezes, levam ao uso incorrecto das letras e das relações entre expressões. Para os diferentes investigadores já referenciados, o trabalho a desenvolver requer que os estudantes tenham oportunidade de explorar relações, explicitar as suas ideias, oralmente e por escrito, discuti-las e reflectir sobre elas, acrescentando ainda que um dos aspectos essenciais localiza-se na capacidade de explorar situações de aprendizagem variadas, tanto do ponto de vista dos contextos como dos significados que as expressões matemáticas assumem.

Refira-se ainda que, cada vez mais, a álgebra é vista como uma aritmética generalizável e, simultaneamente, caracterizada como meio de estudo de procedimentos para o processo de resolução de problemas, de relações entre quantidades (incluindo modelação e funções) e como estudo de estruturas (Usiskin, 1994). Reforçando esta ideia Pérez (1997) e Falcão (1997) defendem que a necessidade de aprender álgebra com base no suporte conceptual da aritmética, provoca um estudo mais aprofundado das leis numéricas e do desenvolvimento das competências genéricas da aritmética.

Numa investigação relacionada com as dificuldades dos estudantes no estudo de fracções no 7º ano, Ponte, Matos e Abrantes (1999) salientam que Alves (1995) defende que a aritmética constitui um pré-requisito da álgebra e o conceito de variável (enquanto incógnita e representante dos elementos de um conjunto), constitui um tema organizador de todo o programa do 7º, 8º e 9º anos de escolaridade, que permite a transição da aritmética para a álgebra de modo indutivo e numa perspectiva de universalização, de linguagem matemática, sendo a álgebra vista, mais uma vez, como a generalização da aritmética.

9.2.3. Pensamento flexível e pensamento algébrico

O PISA (2000) define como pensamento funcional o pensamento em termos de relações que "é um dos objectivos fundamentais do ensino da disciplina de Matemática" (ME, GAVE, 2002, p. 9). Por outro lado, o *pensamento flexível* é identificado por Gray e Tall (1993) como uma das possibilidades do pensamento matemático e defendem que este se revela necessário quando se deseja ampliar e aprofundar o sucesso na Matemática, num longo período de tempo. Subjacente a esta descrição de pensamento flexível emerge o conceito de "*procepts*", definido como objectos mentais, que combinam processos e conceito(s) produzido(s), surgindo o símbolo como a representação de um ou dos dois elementos: processo e conceito. Por exemplo, a expressão: ´3+2´ pode representar ou o processo da adição de 3 por 2 ou o conceito de adição de 3 com 2. De acordo com Gray and Tall a noção de "*procept*" aplica-se à aritmética, à álgebra e a outras temáticas. Nos trabalhos de investigação desenvolvidos por Drijvers (2003, 2004) e Kindt (2004) e em conversas realizadas com estes investigadores no Instituto Freudenthal (Universidade de

Utrecht, 2004), foi referido que os estudantes que têm sucesso na Matemática são aqueles que são capazes de pensar flexivelmente, aqueles que conseguem usar os símbolos como um processo de resolver problemas e simultaneamente como um conceito.

Tal como Gray e Tall (1993); David e Lopes (2002), investigadores do FI, entre outros, acreditam que a excessiva atenção dada ao treino das regras e dos algoritmos não tem estimulado os estudantes a usarem um pensamento flexível e a tratar, de forma conveniente, os conceitos, os quais devem ser versáteis, extensivos e eficazes na resolução de problemas não rotineiros. A possibilidade deste conceito atravessar todos os níveis de ensino, associando o símbolo, à representação do processo e/ou do conceito, em combinação com o desenvolvimento de várias aptidões, designadamente, modelação, autonomia, flexibilidade de pensamento e simbolismo, tem levantado várias questões, mas as fronteiras entre estes diferentes modos de pensar ainda não estão devidamente definidas e esclarecidas (Gray e Tall, 1993). Concomitantemente com as aptidões cognitivas emanam também manifestações do pensamento matemático, a *metacognição*, que provoca a consciência do pensamento e da forma de pensar, bem como do saber regular todas estas interacções (Crosswhite, 1987; Brown, 1987). David e Lopes (2002) acreditam que os aspectos da metacognição começam a fazer parte da actividade normal matemática e aceita-se que é uma condição necessária para desenvolver o próprio pensamento matemático. Nesta construção de conhecimento é essencial a interacção social, como defende Vygotsky (1979), reconhecendo que o acto da linguagem é um mediador e um elemento fundamental da socialização e do pensamento matemático na classe.

Por isso, o desenvolvimento do pensamento matemático fica, necessariamente, dependente do acompanhamento da linguagem matemática. Neste sentido, Ralha (1992) defende a utilidade da Matemática pelo facto de poder ser usada como um meio de comunicação poderoso que "nos fornece a razão principal para ensinar Matemática a todas as crianças" (p. 113). De acordo com Vygotsky (1979), a linguagem tem duas funções: em primeiro lugar, como comunicação de ideias e de interacção social e em segundo lugar como "generalização do pensamento" quando a linguagem é usada como um instrumento do pensamento. Estas duas funções são importantes na classe, pois ambas contribuem para dar mais significado às palavras usadas. De acordo com este autor, a relação entre palavra e pensamento é tão estreita e o significado é tão próximo que é quase impossível distinguir entre o fenómeno de falar e o fenómeno de pensar. Contudo, Struik (1997) parece completar esta ideia, ao colocar a matemática noutro patamar de entendimento, defendendo que "a matemática é uma grande aventura nas ideias; a sua história reflecte alguns dos mais nobres pensamentos de inúmeras gerações" (p. 17). Deste modo, importa estar atento ao pensamento matemático, à linguagem matemática, falar acerca da ciência e da sua própria história e do processo matemático (Boyer, 1968; Katz, 1993). Seria interessante e até necessário interpretar a noção de linguagem como um instrumento de pensamento e essencial para o desenvolvimento do pensamento matemático no contexto da aula de Matemática. E, segundo Vygotsky, a melhor maneira de o fazer é dentro da própria classe. Nesta pode-se observar o pensamento matemático a socializar-se e a expor-se em interacção com os seus pares e o professor.

Todas estas reflexões revestem-se da máxima importância, pois uma das componentes do pensamento algébrico tem a ver com a capacidade para operar mentalmente com os entes abstractos de acordo com as propriedades das classes de objectos às quais pertencem (Abrantes, Serrazina e Oliveira, 1999). No raciocínio formal, os elementos são conceitos e proposições abstractas e o aspecto operacional tem a ver com as relações mentais entre esses objectos não necessitando de referências reais. Segundo estes autores, parece haver um relacionamento entre o desenvolvimento desta capacidade e o conhecimento linguístico na linguagem, "ter conhecimento do simbolismo algébrico é semelhante a ter conhecimento da palavra" (p. 120) e, por tal motivo, é importante explorar a oralidade, em idades elementares, na apresentação individual e em grupo, dos conceitos de modo a lidar construtivamente e a consolidar processos de metacognição (Carpenter e Levi, 1999). Estes autores salientam ainda que a partir do momento que os estudantes lidam com símbolos estão a promover ideias algébricas e gradualmente apercebem-se como manipular algarismos, números, letras, expressões e outros signos matemáticos que podem ser tratados como símbolos separados dos referentes do mundo real.

9.2.4. Modelação matemática

A ciência tem desenvolvido o conhecimento através da observação e manipulação dos fenómenos para posteriormente procurar descobrir modelos consistentes e verificáveis que construam o conhecimento de base e expliquem o mundo real. Segundo Berlin e White (1996), na Matemática, a procura do conhecimento envolve frequentemente modelação, pesquisa de padrões e relações que não são limitadas pelo mundo observável. Nesta disciplina usa-se a lógica e os sistemas simbólicos podem ser manipulados sem constrangimentos da realidade ou da necessidade de representações concretas. Para expressar e comunicar relações entre os dados podem ser usados diferentes modelos: gráfico, simbólico, tabelar, geométrico,... os quais podem ser manipulados para realizar previsões em diversos campos da ciência, quer antes do fenómeno acontecer ou após o acontecimento do mesmo e ainda provar a periodicidade da sua existência (NCTM, 2000). A característica mais significativa desta "forma de conhecimento" parece residir justamente na importância desta relação simbiótica entre os processos indutivos e dedutivos. Considerando que os estudantes devem beneficiar desta relação, Berlin e White (1996) recomendam o aumento do uso da modelação matemática nas aulas de ciências e o uso de dados científicos obtidos pelos estudantes nas aulas de matemática, de forma a articular os processos de indução e dedução e a promover a construção integrada e holística do conhecimento.

A aplicação da Matemática ao mundo real constitui uma preocupação pedagógica desde os anos 80 para a qual o aparecimento das calculadoras e dos computadores vieram dar um impulso muito grande a esta vertente didáctica, surgindo como uma alternativa ao que era visto como uma Matemática escolar virada para si própria, preocupada essencialmente com o ensino de estruturas e com os aspectos da linguagem (Ponte, Matos, Abrantes, 1999).

Modelo. Um dos mais importantes poderes da matemática é a possibilidade da representação modelar de um fenómeno (Abrantes, Serrazina e Oliveira, 1999). Segundo Carreira (1996) "habitualmente fala-se de *modelação matemática* como um processo mediante o qual concebemos uma situação ou um problema real *em termos* matemáticos" (p. 187-88). A fase de formulação no processo de modelação é crucial para dar significado às fórmulas e generalizar o modelo (Janvier, 1996). Um modelo matemático de uma situação problemática real constitui uma representação dessa situação (experiência concreta, ideia, objecto ou fenómeno), sendo esta representação concretizada com objectos, relações e estruturas da Matemática, tais como: tabelas, relações funcionais, gráficos, figuras geométricas, etc. (Matos e Carreira, 1996). Para estes autores o recurso a múltiplos sistemas de representação promove a *actividade metacognitiva* na resolução de problemas de aplicação, pois pode contribuir para a monitorização do processo de modelação e para a reflexão sobre a relação entre os modelos e o objecto ou o fenómeno em estudo. Segundo estes autores a construção de modelos matemáticos pressupõe um processo dinâmico, que envolve vários passos ou fases: a) compreensão da situação e elaboração de modelos conceptuais, com o estudo de um modelo real e a criação de uma nova situação mental; b) descrição da tradução realizada, por expressões, números, equações, gráficos, etc; c) manipulação do modelo com vista a alcançar uma solução que deverá ser validada na adequação do modelo à situação.

De acordo com o nível etário, os estudantes devem ter oportunidades, numa variedade de situações, para descobrirem e usarem modelos matemáticos que descrevam o fenómeno em causa (NCTM, 2000). Nas idades elementares os estudantes podem usar objectos, imagens e símbolos para modelar situações que envolvam a adição e a subtracção de números inteiros. Por exemplo, quando as crianças resolvem a situação: "João tem 4 maçãs e Maria tem mais cinco. Quantas maçãs tem a Maria?" pela utilização de operadores aditivos ou da operação aritmética da adição elas estão a começar a trabalhar com a modelação. Do 3º ao 5º ano de escolaridade os estudantes podem usar estes modelos para fazer predições, desenhar conclusões e compreender relações quantitativas. O uso destes modelos deve ser, no percurso escolar do estudante, gradualmente sofisticado, isto é, num crescente domínio da abstracção (NCTM, 2000), conectando "ideias dentro dos domínios da matemática e entre esta e as outras disciplinas" (2000, p. 171). Segundo esta associação, os estudantes do 3º ao 5º ano de escolaridade têm dois significados para a ideia de *modelo matemático*: o *descritivo* e o *preditivo*. Neste nível de ensino podem modelar uma variedade de situações, incluindo padrões geométricos, situações do mundo real e experiências científicas. Às vezes usam o modelo para predizer o elemento seguinte do padrão ou ainda para descrever uma área, ou a analisar situações numéricas semelhantes a "se uma sanduíche custa 3 euros, se duas 6 euros e se três custam 9 euros, quanto custarão 4?" Os estudantes são capazes de imaginar uma expressão geral, relacionando uma variável com outra variável. Neste caso concreto os estudantes podem desenvolver um modelo proporcional: o valor de uma variável (total custa C) e é sempre três vezes o valor de uma só (sendo S o número de sanduíches) ou $C=3\mathrm{x}S$ (NCTM, 2000). Neste ou noutros exemplos similares, Abrantes, Serrazina e Oliveira (1999) defendem que o conceito de função, percebido inicialmente como um processo ou procedimento será entendido como um objecto mental, designada esta operação por *reificação*. Lesh (1981) defende também a ideia de que para cada modelo existem entendimentos externos e internos e o primeiro corresponderia aos significados que a situação real tem para o indivíduo, estando o segundo fortemente ligado aos diversos sistemas de representação disponíveis, como uma dada linguagem, os símbolos, os diagramas, os desenhos, podendo cada um clarificar as potencialidades ou limitações inerentes ao processo de resolução de um determinado problema.

Num aspecto amplo de conceptualização o termo *modelo* tem muitos e diferentes significados. Por isso não constitui nenhuma surpresa que a palavra seja usada em diversos meios e que seja objecto de discussão actual na Educação Matemática. Por exemplo, *modelo* é usado para referenciar materiais físicos com os quais os estudantes trabalham na Escola – modelos manipulativos. O termo é também usado para sugerir exemplificação ou simulação quando o professor modela o processo da resolução de problemas para os estudantes (Almeida e Viseu, 2002).

Niss (1989) descreve um modelo matemático como um terno (R,M,f) em que R significa uma parte do mundo real a ser modelado, M é um conjunto de conceitos, regras e ideias matemáticas utilizadas na modelação e "f" consiste numa correspondência que se estabelece entre os dados de R e certos elementos de M.

Para Carreira (1996) "são os conceitos matemáticos que temos disponíveis que irão balizar a forma como interpretaremos a situação real. Diremos então: esta matemática aplica-se a esta situação" (p. 189).

Também Almeida e Viseu (2002, p. 195) defendem que a construção do conhecimento matemático processa-se, fundamentalmente, através de *representações* e de modelos. As representações podem ser internas e externas. As primeiras são imagens mentais construídas sobre a realidade, referindo-se a *modelos cognitivos*, conceitos ou objectos mentais, não sendo portanto directamente observáveis, e podendo apenas ser inferidas através da acção e das palavras dos indivíduos. Por seu lado, as representações externas são construídas para ilustrar uma dada situação matemática, usando um *modelo simbólico*, para o qual concorrem notações simbólicas ou gráficas, específicas de cada conceito. Nemirovsky (1996) refere que muitas vezes o termo "modelo matemático" é usado para se referir a uma equação ou a um gráfico que se escreveu no papel ou no ecrã de um computador que, por várias vias, pode também ficar associado à "narrativa matemática", que reflecte modos de compreender e reconhecer conexões entre símbolos e fenómenos.

De facto, modelos geométricos são importantes na investigação e nas relações numéricas, pois rectas numéricas, "arrays" e outras formas geométricas manipuláveis constituem-se como modelos numéricos de concepção e realização. As observações e as discussões dos estudantes quando relacionam elementos e representam matematicamente essas situações pela utilização de objectos concretos, figuras e símbolos são actividades de iniciação à modelação matemática (NCTM, 2000, p. 91). Reconhece-se que a aplicação do modelo matemático a uma situação em estudo torna-se mais acessível do que o outro procedimento, em que o problema real é analisado, interpretado pelo estudante para, de seguida, ser idealizado e representado o modelo matemático.

O termo modelo matemático, que é o foco neste contexto, significa uma representação matemática dos elementos e relacionamentos numa versão idealizada de um fenómeno complexo. Modelos matemáticos podem ser usados para clarificar, interpretar o fenómeno e ainda para resolver problemas, numa forma mais abstracta. Nalgumas actividades os modelos permitem uma visão sobre os fenómenos da vida real, revelando uma certa estrutura conceptual e uma dinâmica associada (NCTM, 2000).

9.2.5. Representação

Os estudantes compreendem que representar ideias matemáticas é uma parte essencial para aprender matemática, apercebendo-se que esta ciência requer também um trabalho mental anterior com conceitos e o relacionamento entre entidades abstractas. É, por isso, importante encorajar os estudantes a pensar e posteriormente a representar as suas ideias numa simbologia com significado para eles próprios. Por tal motivo, as primeiras representações não devem ser convencionais, pois gradualmente, os estudantes devem aprender a linguagem formal da matemática para conseguirem comunicar universalmente com os outros. Investigações referem que estudantes de todos os níveis de escolaridade precisam de trabalhar no desenvolvimento da compreensão das ideias, captando gradualmente as representações convencionais (NCTM, 2000). Para Martínez (2005) o conceito de representação foi tratado por vários filósofos ao longo dos tempos e o seu significado tem-se alterado e evoluído, adaptando-se ao conhecimento de cada época. Para além das concepções filosóficas associadas ao objecto representado e ao objecto representante existe uma aceitação generalizada de que para pensar e raciocinar sobre ideias matemáticas é necessário "realizar uma representação interna das mesmas de forma que a mente tenha possibilidade de operar com essas ideias e para as comunicar precisa de representá-las externamente de modo que aconteça a comunicação" (p. 204). As idiossincrasias das representações construídas pelos estudantes quando eles resolvem problemas e investigam ideias matemáticas podem jogar um papel importante na ajuda à compreensão e à resolução de problemas, providenciando-se caminhos significativos para registar o método e a solução, descrevendo-a para os outros. É cada vez mais fundamental que os estudantes tenham oportunidades para aprender a usar as representações convencionais da Matemática, mas também para construir, refinar e explorar as suas próprias ferramentas de representação que suportem as suas aprendizagens e realizações matemáticas (Kieran, 1988, 1992). Representações originais em idades elementares devem ser incentivadas de forma a compreenderem melhor os conceitos matemáticos (Carpenter, Levi, 1999). Assim, a manipulação e a representação simbólica devem também estar presentes nas experiências instrucionais como um veículo de interiorização e realização matemática (Ameron, 2002; Drijvers, 2001-2004). De forma convergente, Martínez (2005) defende que a visualização mental que se produz através de uma representação ajuda o estudante a compreender os conceitos matemáticos. O raciocínio matemático exige especialmente um trabalho intensivo com representações externas, sejam elas símbolos matemáticos, diagramas, tabelas ou gráficos (Ponte, Matos, Abrantes, 1999). Estes investigadores partilham a ideia de Martínez acrescentando ainda que as representações referidas são usadas como forma de tornar os processos de comunicação mais visíveis, provavelmente mais acessíveis, interligando a manipulação simbólica com os significados que associamos aos conceitos. Todavia, como os conceitos matemáticos são também trabalhados mentalmente, utilizam-se as representações internas dos conceitos (Dreyfus, 1986). Este autor defende que esta capacidade matemática produtiva está associada ao pensamento avançado, a modelos mentais necessariamente ricos e às capacidades de representar e relacionar os conceitos matemáticos.

O NCTM (2000) amplia as vantagens das representações escritas referindo que estas ajudam os estudantes a organizar o pensamento, tornam as ideias matemáticas mais concretas e os estudantes mais disponíveis para a reflexão. Os caminhos pelos quais as ideias matemáticas são representadas constituem-se como fundamentais para as pessoas compreenderem e usarem aquelas ideias. Na caracterização de representações Bruner (1983, 1985, 1987, 1990) distingue três estratégias: as *estratégias de acção*, quando é usado material de concretização para a resolução do problema; as *estratégias icónicas*, quando a criança representa a situação através de esquema ou desenho; as *estratégias simbólicas*, quando a criança expressa o processo de resolução do problema através da linguagem simbólica matemática. Na mesma linha de pensamento já Pestalozzi (1746-1826) defendia que no processo aprendizagem-ensino a observação, a prática experimental precedem sempre o universo abstracto da palavra e da representação.

De acordo com o NCTM (2000) "o termo *representação* refere-se ao processo e produto, por outras palavras, ao acto de captar o conceito matemático ou ao relacionamento na forma de estar com ele próprio" (p. 67). Algumas formas de representação, tais como os diagramas, gráficos, expressões simbólicas, fazem parte do património escolar da matemática, mas, muitas vezes, estas representações orientam-se para um fim e não para um meio do estudante se envolver com a própria matemática. De facto, as representações precisam de ser tratadas como elementos essenciais na compreensão dos conceitos e das relações, na comunicação matemática, no poder de argumentação e na compreensão interna conectada com os conceitos matemáticos. O NCTM (2000) propõe um programa educacional para a representação desde o Jardim Escola ao 12º ano de escolaridade, orientado basicamente para: a) criar e usar representações para organizar, registar e comunicar ideias matemáticas; b) seleccionar, aplicar e transferir representações no processo de resolução de problemas; c) usar representações para modelar e interpretar física, social e matematicamente o fenómeno.

Segundo esta associação de professores de Matemática, do 3º ao 5º ano de escolaridade os estudantes precisam de desenvolver e usar uma variedade de representações de ideias matemáticas para modelar situações, para investigar relações matemáticas e para justificar ou comprovar conjecturas. Eles devem usar representações e/ou modelos físicos para representar e compreender ideias. A importância da utilização de diferentes representações favorece a aprendizagem do estudante num determinado conceito, por exemplo, no 1º ciclo do ensino básico a estrutura em quadro cartesiano de pontos permite observar e apreender visualmente a propriedade comutativa da multiplicação. As representações informais, tais como desenhos, apresentam-se como ferramentas para pensar acerca da resolução dos problemas e um meio poderoso para comunicar os pensamentos de uns aos outros (NCTM, 2000). As representações começam a ser de natureza diferente à medida que se caminha no percurso escolar do estudante e ampliam-se, tornando-se mais complexas, com o uso de: figuras, palavras, tabelas, gráficos, símbolos para modelar situações e problemas, iluminando diferentes aspectos do complexo processo da conceptualização e da relação entre os entes matemáticos.

No ensino as representações começam a ser usadas no desenvolvimento das ideias algébricas, sendo um dos poderes da matemática o uso da *abstracção*, um caminho de simbolização que abre diversas possibilidades para interpretar, analisar e criar símbolos próprios que permitem operar e facilmente chegar a um resultado (NCTM, 2000).

As representações devem ser, antes de tudo, ferramentas para construir, compreender, comunicar informação e simultaneamente para demonstrar o raciocínio (Greeno, 1987; Greeno e Hall, 1997). O propósito do professor é estimular os estudantes a serem flexíveis na escolha e criação de representações – standard, não standard, modelos físicos ou mentais, pois devem aperceber-se das diversas oportunidades e formas de o fazer, considerando as vantagens e limitações das várias representações usadas.

Aprender a registar ou a representar o pensamento num caminho organizado, na resolução de problemas e na partilha das soluções, constituem-se como capacidades essenciais da cultura matemática que devem ser desenvolvidas pelos estudantes e os professores devem enfatizar a importância da representação de ideias matemáticas, com especial relevo para as aprendizagens algébricas (NCTM, 2000).

Tabelas, Gráficos e Fórmulas. Grande parte da actividade da matemática de hoje tem a ver com a organização (Freudenthal, 1973; 1983). Também Zawojewski, Robinson e Hoover (1999) defendem que no currículo de Matemática devem ser fomentadas diversas representações matemáticas, não só a flexibilização e a interpretação de fórmulas, mas também "a aplicação de vários procedimentos de forma a estimular a comunicação matemática" (p. 324). No ensino básico os estudantes devem ser capazes de entender as relações entre tabelas, gráficos e símbolos, reconhecer os significados associados aos conceitos, descortinar desvantagens dos vários tipos de representação, bem como descobrir os propósitos de cada um destes processos a fim de terem a possibilidade de desenvolver uma aprendizagem mais compreensiva das funções (Leinhardt, Zaslavsky e Stein, 1990; Moschkovich, Schoenfeld e Arcavi, 1988). Os responsáveis pelo PISA (2000) ao considerarem como um dos objectivos fundamentais da Matemática o estudo de relações defendem que estas "podem ter uma variedade de representações, incluindo as simbólicas, as algébricas, as gráficas, as tabulares, as geométricas" (ME, GAVE, 2002, p. 9) e, simultaneamente, salientam que as diferentes representações podem servir fins distintos, revelando um papel crucial quando se lida com a resolução de tarefas. O raciocínio matemático também exige um trabalho intensivo com este tipo de representações externas, como forma de tornar os processos de comunicação mais fáceis e fluidos (Ponte, Matos, Abrantes, 1999; Abrantes, Serrazina e Oliveira, 1999). Reeuwijk (1995, 2003, 2004) e o NCTM (2000) salientam que os estudantes reconhecem o crescimento linear em tabelas, gráficos e fórmulas e no projecto MiC os problemas requerem um trabalho com esta variedade de representações: desenhos, palavras, tabelas, gráficos, símbolos e fórmulas. Esta variedade de representações abre um caminho natural de reconhecimento por parte do estudante sobre equivalência de expressões que é uma importante parte da álgebra. Os estudantes são, assim, encorajados a generalizar, formalizar, a construir estruturas e a escreverem as suas próprias generalizações e formalizações (Reeuwijk, 1995, 2004; Ameron, 2004). O NCTM (2000) defende que as ferramentas tecnológicas, como programas temáticos e de geometria dinâmica, folha de cálculo, oferecem oportunidades para se realizarem diferentes experiências com múltiplas representações.

Tabelas, gráficos e fórmulas são meios para expressar e visualizar relações entre variáveis (Zawojewski, Robinson e Hoover, 1999). Os diferentes aspectos associados ao conceito de variável devem surgir, numa primeira fase, informalmente e em diferentes contextos (Reeuwijk, 1995). Deste modo, os estudantes têm a oportunidade de aprender diversas maneiras de "olhar" a variável, de a manipular e de simplificar expressões. Nas fórmulas com mais de uma variável os estudantes podem substituir uma variável por um número e obter a fórmula com apenas uma variável, sendo mais simples de ser manipulada.

J. Sebastião e Silva (1975) defendeu também que a par da intuição e da imaginação criadora era necessário desenvolver, ao máximo, no espírito dos estudantes, o poder de análise e o sentido crítico para promover o diálogo intelectual com a própria pessoa e com o outro e a capacidade de expressar ideias matemáticas, usando diversas linguagens: esquemas, tabelas, gráficos, etc, procurando sempre o rigor na linguagem matemática.

Fazer uma *tabela* envolve actividades matemáticas como realizar escolhas sobre organização e etiquetagem de informação (Reeuwijk, 1995, 2004). Segundo este autor os estudantes aprendem a ler, a interpretar e a trabalhar num vasto leque de tabelas, a re-organizar uma tabela, a organizar dados, a manipular, a transformar e a reunir colunas extra para representar nova informação.

Os *gráficos* são usados para representar a informação visualmente. "O processo de crescimento pode ser visualizado, e os gráficos são um bom meio para obter uma impressão imediata da relação entre variáveis" (Reeuwijk, 1995, p. 11). Acrescenta ainda este autor que os gráficos são também um meio ideal para descrever uma história: o processo, o padrão, as restrições. Explorar um gráfico é observar o todo, estudando a forma e o conteúdo globalmente. Genericamente interpretar um gráfico e raciocinar qualitativamente acerca da forma e da relação entre as variáveis são aspectos característicos das aprendizagens curriculares realizadas por estudantes dos 12 aos 16 anos. Os gráficos não são apenas estudados globalmente, mas os estudantes também marcam pontos e precisam de interpretar o significado de pontos particulares no gráfico.

Fórmulas. Muitos dos estudantes compreendem a noção de função como uma regra ou uma fórmula tal como "dado o n, encontrar 2^n, para n=0, 1, 2 e 3" (Vinner e Dreyfus, 1989). "Muitos dos gráficos e tabelas são representações de relações que podem ser expressas por uma fórmula" (Reeuwijk, 1995, p. 12). No currículo da Holanda, dos 12 aos 16 anos, uma vasta variedade de fórmulas são estudadas e muitas dessas *fórmulas* vêm da realidade e têm diversos formatos. Um estudo da exploração de diversas fórmulas que surgem na vida real com as quais os estudantes se confrontarão na sociedade e no trabalho, mostra que devem ser exploradas em diferentes formatos, algumas até com o mesmo significado, para que os estudantes aprendam a generalizar fórmulas particulares e a distinguir famílias de fórmulas. Sumariamente refira-se que naquele país os assuntos explorados no currículo dos estudantes de 12 a 16 anos de idade são: a diversidade de fórmulas, a interpretação, desenho e criação de fórmulas (numa linguagem activa, como se se falasse, para expressar o raciocínio); alterar as variáveis e estudar o seu efeito na fórmula (raciocínio qualitativo, com fórmulas); usar palavras nas fórmulas (para tornar mais claro possível a compreensão do seu significado); utilizar uma linguagem de acção (matriz de linguagem, ordenar operações dinâmicas). A exploração de fórmulas na folha de cálculo ajuda os estudantes a compreender como a fórmula trabalha (Drijvers, 2001-2004). Segundo este autor, as fórmulas têm três papéis: a fórmula como preditor para cálculos; a fórmula para descrever uma relação e a fórmula como um objecto (estudo de fórmulas; reescrevendo fórmulas, analisando a estrutura da fórmula, estudando a equivalência). Os estudantes aprendem também a construir fórmulas de fórmulas simples e a explorar a relação inversa (NCTM, 2000). Segundo esta associação, aplicar técnicas apropriadas, ferramentas e fórmulas para determinar medidas é crucial para a aprendizagem de conceitos algébricos. As técnicas de medida e estratégias que se usam para determinar uma medida podem ser baseadas em contagem, estimativa e uso de fórmulas. Os instrumentos de medida são dispositivos familiares que as pessoas associam à determinação de uma medida, tais como: réguas, transferidores, escalas, relógios, cronómetros,... Fórmulas são geralmente relações que produzem medidas quando os valores são especificados por variáveis numa fórmula. Como acontece no ensino básico, os estudantes começam a formalizar aquelas técnicas, quando aprendem e aplicam fórmulas na determinação da medida de um comprimento, de um perímetro, da área da superfície de um objecto, do volume de um corpo. Contudo, muitos deles, no ensino básico e secundário têm dificuldades em compreender o perímetro e a área (Lindquist e Kouba, 1989; Kenney e Kouba, 1997) e usam fórmulas, como ´A=cxl´ ou ´P=2l+2c´ sem perceberem como se relacionam com os atributos a serem medidos e a unidade de medida usada. Neste sentido, os professores têm de ajudar os estudantes, desde cedo, a observar conexões existentes entre a fórmula e o significado aplicado ao objecto ou à situação.

9.3. Fundamentos Didácticos

9.3.1. Origem e contextos

Os conceitos algébricos podem envolver os estudantes num processo gradual ("passo a passo") do conhecimento, desde o Jardim Escola até ao 12º ano de escolaridade, manifestando-se, nos primeiros anos, através das actividades de classificação, padrões e relações, operações com números inteiros e posteriormente em explorações de funções (NCTM, 2000; Williams, 2001). Também Abrantes, Serrazina e Oliveira (1999) referem que é comum relacionar-se o trabalho da álgebra a partir da aritmética, ou seja, dar sentido aos símbolos e às operações da álgebra em termos dos seus conhecimentos aritméticos e o começo da aquisição do conceito de variável com o momento em que os estudantes começam a contactar com variáveis representadas por letras e a lidar com equações e polinómios. Contudo, esta autora considera que os estudantes, até aquele momento, já tinham resolvido "muitas equações desde os primeiros anos de escolaridade sem se darem conta de que o faziam e a noção de variável foi-se desenvolvendo aos poucos a partir de experiências com sequências numéricas e geométricas" (Abrantes, Serrazina e Oliveira, 1999, p. 14). Também para Reeuwijk (2004) trata-se de "negociar com a álgebra tradicional tópicos e capacidades, desenvolvendo e investigando estratégias e ambientes nos quais os estudantes, desde idades elementares, possam aprender álgebra "in sense-making" e usando processos divertidos" (p. 1). Para este investigador o pensamento algébrico é mais importante do que a manipulação algébrica. Já em 1995, Martin Kindt do Instituto Freudenthal referia que era necessário dedicar mais tempo à exploração deste assunto, não acelerar o processo de aprendizagem da álgebra, implementar uma boa sequência de problemas e criar a necessidade de se deixar fluir naturalmente a formalização, de maneira intrínseca, pelos "*insights*" e não apenas de forma procedimental.

Segundo os autores referidos no parágrafo anterior os estudantes começam a construir a álgebra nos primeiros anos de escolaridade. Nesta fase as crianças podem e devem ser encorajadas a observar padrões, a apresentá-los oralmente e a representá-los usando várias formas, procurando estabelecer conexões entre a geometria e a aritmética, pois o reconhecimento de padrões envolve diversas noções, disjuntas ou conjuntas, como a cor, a forma, o tamanho e o número. A observação e a investigação posterior de sequências numéricas e a generalização através de regras, formuladas pelos estudantes, permitem o aprofundamento gradual da capacidade de abstracção, suporte fundamental para as aprendizagens algébricas. Antes de se iniciar a manipulação algébrica formal (usando-se expressões literais, a resolução de equações, etc) é essencial "um percurso que inclua um grande número de experiências algébricas informais" (Abrantes, Serrazina e Oliveira, 1999, p, 112). Estes autores acrescentam ainda que, a partir de dados recolhidos em diversas situações do dia-a-dia e/ou em contextos puramente matemáticos, os estudantes têm oportunidade de trabalhar com padrões generalizáveis que podem ajudar a desenvolver ainda a ideia de relação funcional. Usiskin (1994) refere que naturalmente a álgebra não tem, na sociedade, a mesma importância do que a aritmética e consequentemente vai ter repercussões na aprendizagem, pois alguns estudantes chegam mesmo a perguntar: "por que é que aprenderam álgebra na escola, mas nunca indagaram o mesmo sobre a aritmética" (p. 319). Por outro lado, este autor recorda que o tratamento contextual da álgebra não é tão explícito, pois nos jornais, revistas e outros documentos existem imensos números, tabelas, gráficos de barras e de sector circular, mas raramente se encontram referências a quaisquer elementos da álgebra. Carpenter e Levi (1999) referem que existem dois temas centrais do pensamento algébrico e que são apropriados para desenvolver com estudantes. O primeiro envolve generalizações e o uso de símbolos para representar ideias matemáticas e o segundo a representação matemática na resolução de problemas. Os estudantes, ao generalizarem observações, usando desenhos, esquemas, formas, números e operações, vão formando o pensamento algébrico básico.

Numa perspectiva curricular cautelosa, Usiskin (1994) relembra que há ainda vários países onde muitos dos professores de álgebra acreditam que este tópico não pode ser aprendido por todos. E o autor refere que um dos argumentos que ouviu foi em Xangai, o mesmo que já tinha ouvido, em Chicago, no seu país: "todos os estudantes podem fazer álgebra, mas nem todos podem compreender o que estão fazendo" (p. 322).

9.3.2. Aproximações à álgebra

Segundo Bednarz, Kieran, Lee (1996) existem genericamente cinco aproximações à álgebra defendidas também por vários investigadores: *a primeira aproximação*, a generalização de padrões geométricos e numéricos e a descoberta de leis que governam numericamente essas relações; *a segunda*, a resolução de problemas; *a terceira aproximação*, a resolução de equações no apoio à resolução de problemas e modelos concretos; *a quarta*, a modelação de fenómenos físicos e matemáticos e *a quinta aproximação*, as relações funcionais. Aqueles autores colocam algumas questões sobre a passagem de uma aproximação da álgebra para outra, por exemplo: como é que os estudantes negoceiam a passagem da álgebra como uma ferramenta para a generalização e a álgebra como uma ferramenta da resolução de problemas ou a álgebra como uma ferramenta para a modelação de situações funcionais e questionam se será uma passagem simples ou se implicará o ajustamento de importantes conceitos. Segundo aqueles autores esta é ainda uma questão por esclarecer. Berdnarz, Kieran e Lee (1996) no aprofundamento do estudo deste domínio e numa lógica de simplificação, consideram quatro aproximações à álgebra: generalização, resolução de determinado tipo de problemas[21], modelação e funções. Para estes autores e para Wheeler (1996) a separação entre estas quatro aproximações para "começar a álgebra" é artificial, mas "as quatro componentes são necessárias em qualquer programa de álgebra" (p. 325)". Neste trabalho de investigação, focalizado para o ensino básico, apenas as três primeiras aproximações são estudadas, em que a segunda aproximação à álgebra engloba, na resolução de problemas, a resolução de equações.

Primeira aproximação à álgebra - generalização geométrica e numérica de padrões. Para Mason (1996) uma das chaves da generalização está nas orientações pedagógicas a desenvolver na turma existindo várias "vizinhanças" que suportam a construção da fórmula que induz a conexão entre os dados, a saber a: a) *visualização*; b) manipulação de figuras; c) *descoberta* do padrão; d) *formulação de lei(s) recursiva(s)* que mostrem o processo de criação do padrão.

A capacidade de generalização consiste no desenvolvimento da aptidão do estudante para distinguir entre "*looking through*" e "*looking at*", "que permite uma primeira abstracção baseada em experiências concretas e passar de uma visão generalista do particular para o geral" (Mason, 1996, p. 65). Relacionada com esta perspectiva de aproximação à álgebra, em trabalhos experimentais envolvendo adultos e jovens, Lee (1996) considera que a dificuldade não reside no estudo do padrão, mas na descoberta da "utilidade da álgebra", isto é, no interesse prático da aplicação dos conceitos algébricos. Radford (1996) faz apelo à revisão histórica e salienta que o processo de generalização depende da natureza dos elementos: números, configuração dos objectos, intenções do observador, entre outros. Ao nível conceptual da álgebra, Kücheman (1978, 1981) salienta que a fórmula que emerge na construção dos números inteiros é um conceito generalizado

[21] Nesta segunda aproximação à álgebra inclui a resolução de equações.

de número. Para este investigador, os números aparecem como pré-conceitos ao conceito de variável, sendo a generalização assumida como um estatuto epistemológico particular.

Tal como Schoenfeld e Arcavi (1988) também Mason (1996) tem uma visão alargada da álgebra e entende que na escola este domínio surge como uma linguagem de comunicação e manipulação de generalidades, necessitando os estudantes de realizar experiências de observação de padrões, de regularidades numéricas e de descobrir generalizações antes de usarem variáveis.

Lee (1996) convida-nos ainda a fazer uma reflexão "cultural" sobre o ensino experimental e o papel da generalização na introdução de conceitos algébricos.

> "I find it helpful to think of algebra as a mini-culture within the wider culture of mathematics. This allows me to integrate algebra as a set of activities, algebra as a language, and all the other metaphorical and metonymic ways of defining algebra. It is also helpful in thinking about the interaction of language and knowledge in the gradual process of algebraic acculturation that takes place in the classroom as well as the interaction between algebra and other mathematical cultures such as arithmetic" (p. 87).

Contudo, Booth (1988) é cauteloso ao defender que a álgebra não pode ser reduzida à "aritmética generalizada", apesar de considerar que um dos aspectos mais importantes da álgebra consiste na ideia que o estudante tem de variável sendo esse entendimento conceptual suportado por um profundo conhecimento dos processos operatórios no contexto aritmético e também no geométrico (Charbonneau, 1996; Clements, 1997).

Segunda aproximação à álgebra - Resolução de Classes de Problemas, incluindo a **resolução de equações**. O importante papel desempenhado, ao longo dos tempos, pela resolução de problemas no desenvolvimento da álgebra e do seu ensino não pode ser esquecido. Consequentemente, nesta aproximação à álgebra, torna-se importante apreender a perspectiva histórica e didáctica, relacionada com a resolução de problemas (Bednarz, 1996; Janvier, 1996; Rojano, 1996; Bell, 1996; Ameron, 2002, 2001-2004).

A diversidade de problemas, contextos, metodologias de abordagem associadas indica uma variedade subjacente de concepções. Estas surgem relacionadas com diferentes competências entre as quais se destacam a aplicação de regras ou técnicas para obter uma solução; a exploração de contextos com a apresentação de diversas soluções; a descoberta de uma solução generalizada que integre diversos casos particulares de problemas. No estudo localizado na transição da aritmética para a álgebra, Bednarz (1996) e Janvier (1996) em vez de enfatizarem o simbolismo usado nas equações, focalizam a atenção para o problema em si e o raciocínio desenvolvido pelos alunos no processo de resolução de problemas Também Chalouh e Herscovics (1988) acreditam que "a exploração de problemas no campo geométrico, com a aplicação de fórmulas, designadamente no cálculo do perímetro e da área de rectângulos, aprofunda a vertente numérica e fortifica o conhecimento algébrico" (p. 33-42)..

A preocupação de Rojano (1996) está direccionada para as metodologias de abordagem na resolução de problemas, defendendo que as estratégias pessoais dos estudantes devem ser incorporadas como um ponto de partida essencial num processo sistemático e organizado da aprendizagem. Sugere ainda o ambiente computacional da folha de cálculo para apoiar os estudantes a simbolizar os procedimentos informais com vista à resolução do problema. Por outro lado, na perspectiva de resolução de problemas, alguns autores (Kieran, 1992; Gravemeijer, 1994, 2004; Drijvers, 2001-2004; entre outros) defendem que o ambiente de programação permite ao estudante envolver-se no seu próprio raciocínio e uma aproximação dinâmica na representação algébrica do problema baseado no modo "*input-output*" do raciocínio. O poder do ambiente computacional suporta uma aproximação operacional que envolve especificamente um algoritmo e enfatiza a interpretação funcional das relações em situações problemáticas (Fey, 1984; Heid e Kunkle, 1986-1988; Kieran, 1988, 1992; Heid, 1996).

Maxim e Verhey (1988) defendem também a utilização da folha de cálculo como um programa tabelar por excelência, apresentando-se como uma ferramenta significativa de aprendizagem matemática, isto é, "como uma matriz bidimensional a folha de cálculo não só executa cálculos como também permite a organização dos dados, envolvendo os estudantes num processo interactivo de descoberta " (p. 179).

A computação numérica e a resolução de problemas constituem-se como pré-requisitos na aprendizagem da álgebra e para isso é necessário investigar as potencialidades da calculadora e da folha de cálculo no campo matemático (Demana e Leitzel, 1988). Neste sentido, consideram existir fases distintas na resolução particular de certos problemas: 1) utilização da calculadora e/ou da folha de cálculo na resolução numérica do problema, com a construção de tabelas; 2) investigação do problema, com a realização de gráficos, desenhos, diagramas que possibilitem um entendimento mais profundo do problema; 3) revisão do problema com a análise das tabelas construídas e a escrita em equação do entendimento que se tem do problema; 4) descoberta da(s) solução(ões) do problema, resolvendo a(s) equação(ões) associadas. Defendendo o uso da tecnologia no desenvolvimento de actividades pré-algébricas, Demana e Leitzel (1988) referem que "os estudantes podem compreender conceitos básicos da álgebra quando são iniciados por processos de computação e de resolução de problemas" (p. 62).

Resolução de Equações. No processo aprendizagem-ensino da álgebra existe uma fase próxima da resolução de equações, que consiste no desenvolvimento de actividades com termos literais, contextualizando-os em referências numéricas e expressões algébricas (Kieran, 1981, 1988, 1992). No estudo que esta investigadora realizou sobre o significado da utilização das letras nas equações com estudantes que ainda não tinham iniciado o estudo da álgebra colocou, em evidência, três aspectos: 1) o reconhecimento de uma equação, com diferentes partes que a compõem, tais como o sinal de igualdade e o termo desconhecido; 2) a resolução de uma equação; 3) a equivalência entre equações. Contudo, Kieran e outros autores (1993, 1996) reconhecem que a aproximação à álgebra passa por tentativas numéricas e pelo estabelecimento de uma representação funcional expressa, numa primeira fase, em linguagem natural.

Prevendo-se esta gradualidade de aprendizagens e a progressão sequencial proposta por Piaget, do nível concreto ao abstracto, Thompson (1988) desenvolveu investigações com crianças de idades elementares e tendo em conta o conceito a estudar e a maturidade da criança, aprofundou a componente pictórica do conhecimento, concluindo que "a todos os estudantes que completaram o estudo dos números inteiros, da adição e da subtracção satisfatoriamente, pode ser introduzida a noção de variável numa equação linear" (p. 73)

Para Bernard e Cohen (1988) aprender a resolver equações é ainda um elemento essencial no estudo da álgebra, associando o significado do conceito de raiz de uma equação linear à descoberta desse valor desconhecido. "A definição de *raiz* indica o conhecimento básico por que o aluno tem de passar para iniciar o estudo significativo do processo de resolução de equações" (p. 98). Por outro lado, a resolução de equações não requer apenas uma concepção estrutural, mas também capitaliza um procedimento de *input-output*, podendo para isso usar problemas de tabelas no computador (Heid e Kunkle, 1986-1988). Neste ambiente os estudantes podem experimentar valores num dos membros da equação, numa coluna, e na outra manipular o 2º membro da equação, até que as quantidades numéricas das expressões sejam equivalentes. O computador torna-se numa ferramenta explícita de "*input*" e "*outputs*" numéricos. Contudo, o essencial do estudo elementar da álgebra consiste na compreensão conceptual das expressões algébricas de uma ou duas variáveis (Heid e Kunkle, 1986-1988), tendo sido uma das investigações realizadas por Heid, em 1986, baseada na utilização modular do computador no currículo tradicional. Com programas educativos explorando tabelas, o estudante tinha a possibilidade de observar e trabalhar a incrementação de valores e comparar o resultado numérico dos dois membros da equação. A aprendizagem revela-se dinâmica, com a realização de trabalho individual, discussão em pequeno e grande grupo das estratégias desenvolvidas numa variedade de situações problemáticas cuja resolução era sustentada por uma correspondência tabelar entre processos algébricos e resultados numéricos.

Terceira aproximação à álgebra – Modelação. O processo de modelação reforça o papel da verbalização e dá significado ao simbolismo que gradualmente é entendido e desenvolvido pelo estudante (Nemirovsky, 1996). Neste contexto o simbolismo é baseado em acções reais ou imaginadas (crescimento de plantas, deslocamento de carros, etc) e surge como uma expressão de uma certa variação continuada e não como o resultado de uma medida isolada. O uso de "narrativas matemáticas" surge como um contexto rico para descrever o percurso da transformação dos fenómenos, permitindo a ligação ao estabelecimento de uma certa forma de expressões simbólicas (Nemirovsky, 1996).

O ponto crucial no processo de modelação reside na compreensão do conceito de variável e na fase da formulação de hipóteses que resulta na criação do modelo (expressão simbólica, gráfico, tabela de valores, etc) (Coxford, 1988; Janvier, 1996). Neste tipo de aproximação à álgebra, assim como na perspectiva funcional deve-se ter cuidado com muitos "alçapões" escondidos que distanciam ou constrangem o estudante. Segundo Janvier a distinção entre fórmula, equação, incógnita, variável, valor indeterminado e nome polivalente numa expressão simbólica ajuda-nos a situar melhor as possíveis aproximações à álgebra, alertando que estas distinções não podem ser determinadas *a priori*, mas elas devem surgir e permanecer, essencialmente, ligadas à actividade do estudante. A pesquisa sobre esta temática não deve ser limitada a clarificar o que é que os estudantes pensam sobre os símbolos e os meios possíveis de os aplicar, mas deve, antes de tudo, envolver um conhecimento mais abrangente acerca da maneira como os estudantes aplicam os modelos matemáticos, a forma como é manipulada e analisada a informação relativa aos fenómenos frequentemente complexos que são objecto de modelação (Heid, 1996). Por outro lado, este e outros autores defendem que a orientação futura na aprendizagem da álgebra deve ser capitalizada para novas competências e entendimentos funcionais através da exploração intensiva das tecnologias. Algumas das dificuldades dos estudantes na interpretação de símbolos algébricos podem ser atenuadas por actividades tornadas didacticamente significativas se forem integradas em certos ambientes computacionais (Sutherland, 1989, citado por Rojano).

Na perspectiva funcional da aproximação à álgebra o desenvolvimento tecnológico tem possibilitado a utilização dos computadores na aquisição dos conceitos de variável, no desenvolvimento de processos de modelação e do conceito de função implementados no ensino secundário (Heid, 1996; Kieran, Boileau e Garançon, 1996; Carreira, 1998). Todavia, a um nível de escolaridade mais avançado "a noção de variável surge também na definição de um padrão generalizador como elemento fundamental da modelação matemática" (Usiskin, 1988, p. 11). Wagner e Parker (1993) e Janvier (1996) defendem ainda que a fase de formulação no processo de modelação é crucial para dar significado às fórmulas básicas dos modelos generalizáveis e considera ser vital ligar a modelação à construção do conceito de variável no contexto algébrico.

Na vertente da modelação, Lesh (1981); Simon e Stimpson (1988); Simon (1993); Nemirovski (1996); Janvier (1996) reconhecem a pertinência e a validade do novo objecto matemático – a álgebra - que permite aos estudantes construir significativas e variadas representações e de as usar com relativa flexibilidade na descrição e interpretação de fenómenos físicos e de actividades do quotidiano. O pensamento algébrico envolve, muitas vezes, diferentes e importantes modos de representação: tabelas, gráficos, símbolos (equações), desenhos, diagramas (Lesh, 1981). Para além deste tipo de representações estes autores referem a necessidade dos estudantes serem capazes de construir modelos algébricos para resolverem problemas da vida familiar, social e fenómenos da vida real utilizando para isso diagramas como passo intermédio da abstracção e do simbolismo algébrico.

9.3.3. Problemas com ligações directas às aprendizagens algébricas

A resolução de problemas inscreve-se na *2ª aproximação à álgebra*, entre os quais surgem os problemas relacionados com a noção de recursividade; os problemas de indução, relacionados com a generalização de regularidades e padrões; os problemas ligados à exploração de relações proporcionais e os problemas de esquematização. Reconhece-se também que na investigação em curso deu-se preferência à exploração destes três últimos tipos de problemas, por se acreditar que seriam os mais significativos na exploração contextualizada e que a folha de cálculo se apresentaria como uma mais valia instrumental e provavelmente conceptual, na resolução concreta destes problemas, possibilitando a organização tabelar e a exploração de fórmulas que valorizasse a construção sustentada das aprendizagens iniciais da álgebra. Concomitantemente com esta posição, havia a convicção firme de que, para resolver problemas próximos da noção de recursividade, os instrumentos mais adequados seriam o papel, o lápis e a borracha, tendo sido explorado, neste quadro programático investigativo, algumas situações problemáticas deste género. Por outro lado, de acordo com o nível de escolaridade, a literatura aconselha, nesta fase, a exploração de problemas ligados, fundamentalmente, às relações de proporcionalidade e aos problemas de esquematização, por se encontrarem também mais próximos dos conteúdos programaticamente estabelecidos, respectivamente, da noção de proporcionalidade directa e da resolução de equações. Os problemas de indução, com a generalização de padrões e o estabelecimento da lei que rege o fenómeno devem ser explorados, nestes níveis de escolaridade, informalmente, usando basicamente a expressão oral ou esquemática, para mais tarde ser trabalhada formalmente o conceito de “função”.

Assim, neste ponto pretende-se caracterizar metodologicamente as essencialidades e a ambiência relacionadas com a exploração de problemas ligados às aprendizagens algébricas, designadamente, os problemas associados às relações de proporcionalidade e os problemas de esquematização, respectivamente, com enfoque particular à *2ª aproximação à álgebra*. A compartimentação de enfoques algébricos não é totalmente disjunta, pois reconhece-se que alguns problemas têm ligações a outras aproximações à álgebra, como acontece com os primeiros, que revelam conexões com a *1ª e à 3ª aproximações à álgebra*, dependendo estas ligações do contexto do problema e do modo como o estudante interpreta, analisa e resolve esse mesmo problema (Nemirovsky, 1996).

Sob o tema fundamental da investigação “a aprendizagem da álgebra”, baseada numa opção clara de flexibilidade curricular e contemplando a exploração das TIC, concretamente da folha de cálculo, importa relembrar, neste contexto, as orientações defendidas pelo NCTM (2000) sobre os programas instrucionais da Educação Matemática, em especial, das aprendizagens algébricas que, segundo esta associação, desde o Jardim de Infância ao ano terminal do Ensino Secundário, devem orientar-se pelos seguintes procedimentos: a) entender padrões, relações e funções; b) representar e analisar situações matemáticas e estruturas usando símbolos algébricos; c) utilizar modelos matemáticos para representar e compreender relações quantitativas; d) analisar alterações em vários contextos. Por outro lado, desde os anos 80 e através da “agenda para a acção” o NCTM a resolução de problemas é considerada como a primeira prioridade da Educação Matemática e como o veículo privilegiado da construção dinâmica, diversificada e gradual do conhecimento matemático. As pesquisas bibliográficas realizadas indicam-nos que existem problemas mais próximos das aprendizagens algébricas que devem ser idealizados, propostos e desenvolvidos, individualmente e em grupo na escola básica, com vista a uma construção organizada e conceptual dos conhecimentos pré-algébricos. Assim, destacam-se, de seguida, dois tipos de problemas que fomentam aprendizagens algébricas, pelas ligações directas ou implícitas às aproximações à álgebra referidas: problemas associados às relações de proporcionalidade e problemas de esquematização.

Problemas associados às relações de proporcionalidade. Segundo Weber-Russell e LeBlanc (2004) problemas e outras tarefas da vida real têm sido extensivamente discutidos nos princípios da Educação Matemática. Os que relatam interesses do exterior do ambiente da Escola, oferecem um bom ponto de partida para partilhar questões matemáticas. Na classe, com a professora, os estudantes podem observar os problemas da vida real e falar acerca deles, para que exista envolvência e compreensão, especificamente, a descoberta de relações inerentes à situação (NCTM, 2000, 2001). O conceito de proporcionalidade constitui-se como um pré-requisito da abordagem posterior da função linear $x \rightarrow Kx$, isto é, da relação $y=kx$ (Cabrita, 1998) e, por esta razão, encontra-se também intimamente ligado *à terceira aproximação à álgebra*, de particular importância na modelação de fenómenos (Kieran, 1988, 1992; Moreira, 1989; Nemirovsky, 1996, Radford, 1996; entre outros).

Numa análise global do currículo de Matemática do ensino básico apreende-se que um dos conceitos chave da matemática é o de proporcionalidade. Este conceito inicia-se, formalmente, no 6º ano de escolaridade pelo tópico "proporcionalidade directa", mas alicerça-se e aprofunda-se, curricularmente, no 7º ano de escolaridade através da resolução de determinados exercícios e problemas (Cabrita, 1998). Segundo Ponte, Matos e Abrantes (1999) o conceito de proporcionalidade é um dos conceitos-chave da Matemática, através do qual se passa do estudo de diversos tipos de números para a matematização de uma relação entre duas grandezas. Este conceito parte do número e abre o campo para o estudo das funções, da geometria analítica e da modelação. Os resultados do programa de avaliação TIMSS no campo das Ciências e da Matemática indicam que existem deficiências na aprendizagem do conceito de proporcionalidade por parte dos estudantes portugueses. De facto, no tema Proporcionalidade os nossos estudantes do 7º ano de escolaridade distanciam-se mais da média internacional e no 8º ano de escolaridade posicionam-se ainda em lugar mais baixo entre os países analisados. Ponte, Matos e Abrantes (1999) reconhecem que a nossa tradição curricular de abordagens muito rígidas e pouco tolerantes para com a utilização de processos de raciocínio informais poderão estar na origem da falta de sucesso no tópico "proporcionalidade". Nas conclusões dos estudos sobre a aprendizagem da proporcionalidade directa, Oliveira (1994) defende a extensão do tratamento deste tema a níveis mais baixos. Segundo esta investigadora o estudo da proporcionalidade é iniciado no 6º ano de escolaridade sem nenhuma preparação prévia, mas deveria ser possível e desejável incluir, em anos anteriores, abordagens informais, mais ou menos qualitativas, sugerindo a ampliação ou redução de receitas culinárias, preparando bebidas, ampliando ou reduzindo desenhos. Acrescenta ainda que estes procedimentos seriam benéficos e aprofundariam até este conteúdo iniciado curricularmente no 6º ano de escolaridade, mas só seria possível trabalhar esta visão da Matemática se se valorizassem os processos informais explorados pelos estudantes, mas lamenta, que esta não é a visão predominante do ensino português, muito mais preocupado com aspectos da linguagem ou com a correcta execução dos algoritmos. Também já em 1983 Freudenthal defendia que, inicialmente, "as ideias de proporcionalidade são intuitivas" (p. 17) e, como tal, devem decorrer do quotidiano e, na Escola, os problemas devem ser contextualizados e emergentes desta ambiência natural. Também para Moreira (1989) o raciocínio proporcional é, frequentemente, baseado na resolução de problemas nas mais diversas situações do dia a dia: no ajustamento de uma receita para um número de pessoas, no cálculo do consumo esperado de gasolina, no cálculo da quantia a pagar por uma determinada quantidade de maçãs, entre outras situações. O NCTM (2000) salienta que neste tópico os estudantes deverão ser capazes de imaginar uma expressão geral, relacionando uma variável com outra variável, por exemplo: "se duas camisolas custam 12 euros e se três custam 18 euros, e 4 custam 24 euros quanto custarão 5?" Esta associação defende que, neste caso, os estudantes deviam ser estimulados a usar modelos matemáticos para representar e compreender relações quantitativas e a desenvolver um modelo proporcional como, por exemplo, neste caso, o valor total ($'T'$ – custo total) é sempre seis vezes o valor de uma só camisola (sendo ´*C*´ o número de camisolas), resulta, simbolicamente, a expressão ´T=6xC´.

Até 1999, segundo Ponte, Matos e Abrantes houve três trabalhos publicados sobre proporcionalidade directa (Moreira, 1989; Oliveira, 1994 e Cabrita, 1996, 1998). No primeiro caso a investigadora estudou, no 2º ciclo do ensino básico, a importância da folha de cálculo na resolução de problemas na aprendizagem do conceito de proporcionalidade; no segundo caso o estudo baseou-se na aprendizagem dos números racionais e no terceiro caso a investigação foi orientada para a formação inicial de professores, pela análise do desempenho de dez estudantes de uma licenciatura em Ensino da Matemática na resolução de problemas. Este último estudo fazia parte de um mais vasto que perseguia como principal finalidade averiguar a influência da exploração de um documento hipermédia na construção do modelo de proporcionalidade directa por parte dos estudantes do 7º ano de escolaridade (Cabrita, 1998). Todos estes investigadores reconhecem a necessidade de se valorizarem os aspectos informais resultantes dos conhecimentos práticos e intuitivos da relação de proporcionalidade e defendem estudos em idades elementares na construção gradual deste conceito.

Para Moreira (1989) "o raciocínio proporcional concorre, também, para a construção de muitos conceitos matemáticos e entra em jogo na interpretação e na resolução de numerosas situações problemáticas no campo de outras ciências, da técnica e da arte" (p. 71). Conclui, portanto, que é por estas e outras razões que a proporcionalidade se tem mantido como um tópico importante nos programas de Matemática. No 1º ciclo do ensino básico os estudantes começam a estudar o sistema métrico e esta matéria pode ajudá-los a compreender aspectos relacionados com o nosso sistema de base decimal posicional e, na concretização de equivalências, os estudantes aplicam também o conhecimento proporcional. Numa perspectiva ampla do conhecimento, Abrantes, Serrazina e Oliveira (1999) consideram ainda que a característica essencial do raciocínio proporcional é envolver uma relação entre duas relações, isto é, uma relação de segunda ordem, em vez de, simplesmente, uma relação entre dois objectos concretos, que se vai desenvolvendo ao longo da educação básica. E acrescentam: "a compreensão da relação de proporcionalidade implica que o estudante seja capaz de usar as estratégias multiplicativas" (p. 62), defendendo ainda que sejam dadas oportunidades na classe para se trabalhar com situações problemáticas envolvendo o raciocínio proporcional, começando por casos em que podem lidar com materiais concretos e esquemas, dando o exemplo do conteúdo "escalas" que pode dar origem a boas situações de aplicação do raciocínio proporcional, permitindo relacioná-lo com o raciocínio espacial. Estes autores defendem ainda que "a capacidade de utilizar o raciocínio proporcional corresponde a uma fase importante do desenvolvimento cognitivo, por ser um ponto culminante das aprendizagens da matemática no ensino elementar e uma base fundamental para o estudo da matemática no ensino secundário" (Abrantes, Serrazina e Oliveira, 1999, p. 63). Nesta perspectiva formativa Carpenter e Levi (1999) e o NCTM (2000) defendem que a álgebra encontra-se ligada à exploração de vários conceitos e apresenta-se como uma linha condutora ao longo do currículo desde as idades elementares, permitindo que os professores ajudem os estudantes a construir uma sólida formação experimental para preparar o trabalho futuro de interiorização e de abstracção no ensino médio e superior.

Deste modo, importa explorar o conceito de proporcionalidade de forma consistente e interligada e simultaneamente alicerçá-lo, no ensino básico, a partir do 1º ciclo, com propostas de problemas capazes de desenvolver este conteúdo neste nível de ensino, numa perspectiva contínua de abordagem diversificada, significativa, vertical e integrada, adaptada ao nível etário e cognitivo dos estudantes. Segundo o NCTM (1991, 2000) e o ME (1999), esses conceitos devem ser aprofundados ao longo da escolaridade e integrados na disciplina de Matemática e nas outras áreas do conhecimento.

O estudo futuro da álgebra requer um tratamento contínuo, próximo de actividades relacionadas com a proporcionalidade, "podendo esta ser desenvolvida em várias áreas e ser conectada com outros domínios, designadamente, a ciência e a arte" (NCTM, 2000, p. 212). Como já se salientou neste capítulo, são idealizados programas instrucionais da aprendizagem da álgebra que requerem fundamentalmente, neste nível de ensino, a generalização de padrões, a resolução de determinada classe de problemas e o estudo da modelação de fenómenos.

Segundo Bednarz, Kieran e Lee (1996) e Schifter (1999) o conteúdo da proporcionalidade joga um papel central no desenvolvimento da aprendizagem da álgebra. Também Radford (1996) corrobora esta ideia e dos estudos que fez no âmbito da análise histórica da aquisição dos conhecimentos algébricos destaca a importância do raciocínio proporcional na resolução de determinados problemas algébricos.

Dadas as dificuldades manifestadas pelos estudantes no tópico sobre relações de proporcionalidade têm existido diversos estudos sobre esta temática, no campo da didáctica e no da psicologia. As diversas investigações realizadas, incluindo as de Moreira (1989) referem que as capacidades dos estudantes para lidar com este tipo de problemas evoluem lentamente com a idade, mesmo quando lhes são ensinadas estratégias e procedimentos especificamente com esse fim, como é o caso da regra do "produto-cruzado" (Cabrita, 1998), que "no contexto das teoria das proporções não se revela como um problema simples" (Radford, 1996, p. 21). Moreira (1989) considera, então, existir uma especial atenção à análise na resolução de problemas que assentam no raciocínio proporcional e entre as estratégias correctas identificam-se duas: estratégia construtiva e a estratégia multiplicativa. A primeira, muito frequente, no estádio pré-formal, consiste em exprimir a medida como combinação linear de diferentes medidas, a segunda consiste em reconhecer que os termos de uma relação estão ligados por um operador multiplicativo e em reconhecê-lo ou aplicá-lo à segunda relação.

"O raciocínio proporcional, por implicar uma actividade de pensar sobre o pensar, tem sido considerado um dos componentes do pensamento formal adquirido na adolescência" (Cabrita, 1996, p. 117). Tudo indica que existe uma evolução gradual de competências práticas associada a este conceito e que se manifesta na resolução de problemas, em que é usado o mesmo modelo de "proporcionalidade", mas naturalmente com algumas variações no tratamento e relação entre os dados, influenciados pelo conteúdo, contexto do problema, ao nível da forma e da sintaxe. O estudo realizado pela autora no 7º ano de escolaridade, na unidade didáctica "proporcionalidade", localizado na resolução de problemas permitiu concluir que os estudantes revelam dificuldades na aplicação deste conceito e alguns deles pioraram o desempenho do pré para o pós-teste, devido à complexidade da construção do modelo da "proporcionalidade", não obstante o facto de os estudantes já terem vivenciado e trabalhado com este conceito, em anos anteriores. Acresce ainda o facto, segundo este autor, de existir pouco tempo de aprendizagem neste tópico não permitindo uma interiorização acompanhada da construção gradual, sustentada e compreendida da "proporcionalidade". Cabrita (1996) reconhece que nos *schèmes* de assimilação e acomodação, no processo de construção do conhecimento, existe uma fase, ainda não totalmente decifrada, mais ou menos longa e conturbada associada à interiorização e aquisição do novo conhecimento e, por tal motivo, importa que se dê importância à aquisição correcta daquele conceito, dispensando-se o tempo necessário para o efeito. Assim, Cabrita (1996) defende que "no contexto do algoritmo do "produto-cruzado" – um instrumento muito poderoso e válido ao qual dificilmente os estudantes teriam acesso sem a intervenção da Escola – não deve surgir precocemente, não deve ser utilizado selectiva e exclusivamente nas situações ao qual se pode aplicar de imediato e não deve constituir a ferramenta privilegiada do professor que a ele recorre insistentemente" (1996, p. 129). Esta autora salienta ainda a necessidade dos estudantes adquirirem uma formação adequada sobre o modelo de proporcionalidade, dado que este se revela imprescindível em estudos ulteriores, nas áreas da Matemática e Ciências, como também na resolução de problemas do quotidiano e de âmbito profissional.

Dada a importância de uma construção correcta e plena do conceito de proporcionalidade, Moreira (1989), Oliveira (1994), Cabrita (1996, 1998) defendem, então, que se deve dar atenção à unidade temática respectiva, disponibilizando-se um longo período de tempo e uma exploração diversificada de situações, utilizando tabelas, gráficos, expressões analíticas, entre outras, integrando naturalmente conhecimentos adquiridos da Escola e das vivências do dia a dia do estudante. Pelas referências pesquisadas pode-se salientar que as aproximações ao conceito de proporcionalidade requerem a resolução de determinado tipo de problemas que devem ser implementados, no ensino básico, de forma gradual, com propósitos bem definidos e orientados contextualmente para a aquisição de determinadas competências matemáticas. Pela importância deste tópico no quadro escolar, no quotidiano do estudante e na temática em estudo das aprendizagens algébricas no âmbito da matemática em contexto, tornava-se pertinente e essencial a resolução deste tipo de problemas, como foi naturalmente concretizado na investigação, desde o 4º ao 6º ano de escolaridade e ainda no teste de avaliação.

Problemas de Esquematização. Com a exploração de problemas de esquematização procura-se desenvolver as capacidades de representação do estudante, fomentando-se a criatividade na divulgação dos raciocínios experimentados, pela utilização de desenhos, palavras, esquemas, tabelas e/ou símbolos (Meyer, 1999; Ameron, 2002). Estas situações podem apresentar-se segundo um esquema visual, como um sistema "pictórico" explícito ou implícito de equações, baseado na manipulação de duas grandezas e percorrendo uma determinada organização. Numa perspectiva de abordagem lúdica Ameron (2002) identifica nesta categoria os problemas "*numbers cards*". Estes caracterizam-se por se apresentarem constituídos por um par de valores desconhecidos, tendo ainda a particularidade de pertencerem a uma classe restrita de problemas que joga um papel chave na Escola primária básica. Esta tarefa é ainda similar aos enigmas, às adivinhas numéricas, mas numa forma diferente de apresentação. Na investigação desenvolvida com estudantes entre os 11 e 13 anos, Ameron (2002) concluiu que estes reconhecem os "*numbers cards*" (Figura 8) como um problema restrito de duas condições, o qual deve ser estudado na aula em diferentes e variadas situações para desenvolver capacidades de esquematização. Se o problema é globalmente reconhecido pelo estudante, conseguindo identificar cada uma das partes como uma adivinha numérica ou com outros formatos próximos de outras situações, então "esta tarefa pode ser compreendida e resolvida em diferentes níveis" (Ameron, 2002, p. 68). Tal como Ameron, também Meyer (1999) já considerava existirem dois tipos de estratégias aritméticas na resolução de determinado tipo de problemas: por *tentativa e erro* e por *tentativa e erro com ajustamento*. As autoras consideram que, na maior parte das vezes, os ajustamentos são de tipo qualitativo e não há sinal explícito de quantas tentativas foram realizadas. Segundo Ameron (2001-2004), na resolução deste tipo de problemas, concretamente nos "*numbers cards*" (Figura 8) pode-se distinguir seis tipos de soluções caracterizadas por duas estratégias de resolução algébrica, duas outras de estratégia pré-algébrica e mais duas de resolução aritmética, como indica a tabela seguinte.

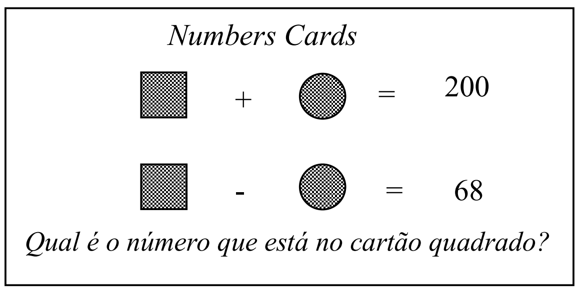


Figura 8: Cartões com números (Ameron, 2002)

Tabela 1: Estratégias de resolução ligadas aos problemas do tipo "*numbers cards*"

Nível da estratégia	**Algébrica**	**Pré-algébrica**	**Aritmética**
1	raciocínio com valores desconhecidos		
2	algoritmo da diferença entre as metades		
3		ajustamento da diferença simétrica	
4		razão e tentativa	
5			tentativa e ajustamento
6			tentativa e erro

i) <u>Estratégias aritméticas</u>

Na aprendizagem por *tentativa e erro* o estudante tenta encontrar os dois números desconhecidos, realizando vários cálculos aleatórios, sem reflectir no seu erro. A próxima tentativa continua a ser aleatória como a imediatamente anterior e o erro na solução não diminui no passo actual e no seguinte.

A um nível superior surge a estratégia de resolução por *tentativa e erro com ajustamento* em que é revelada quando o estudante considera, por um instante, o erro antes de tentar novamente, consumando um erro menor.

ii) Estratégias pré-algébricas

Razão e tentativa e ajustamento de diferença simétrica

Nesta categoria localizam-se estratégias que implicam a utilização de raciocínio baseado em tentativa numérica. Por exemplo, um estudante pode usar a estratégia aproximativa por tentativa e ajustamento, por um período e, no estádio final, descobrir o erro na diferença encontrada (por exemplo, se o ensaio deu a diferença de 60, em vez de 68, conclui que o erro é de 8), pode ser dividida esta quantidade ao meio e então distribuir a solução. Se é reconhecido este raciocínio durante o processo da descoberta da solução, a estratégia usada é considerada como sendo de *razão e tentativa* com *ajustamento de diferença simétrica*.

Um outro pensamento possível pode orientar-se para os últimos dígitos dos números 200 e 68, os quais irão determinar os últimos algarismos dos números em questão.

Esta estratégia é classificada, num primeiro momento, como algébrica, considerando o raciocínio envolvido (Ameron, 2002), pois o estudante exibe uma noção abstracta do número, com entendimento das suas propriedades. Na segunda parte do processo, para encontrar uma solução o estudante pode descobrir a particularidade de o primeiro número terminar em 4 e o segundo em 6, o método utilizado é o de *tentativa e ajustamento* aos resultados obtidos.

Em seguida regista-se a resolução do problema realizada por um estudante e que pode elucidar o que foi referido (Ameron, 2002).

A diferença tinha de ser 68, então tinha de acabar no algarismo "8":

10-2=8	*12-4=8*	*14-6=8*	*16-8=8*
18-10=8	*20-12=8*	*22-14=8*	

e também na soma o resultado é 200, tinha de acabar no algarismo "0" resulta, então, que a situação 4 e 6 é que serve, isto é, o primeiro número tem de terminar no algarismo "4" e o segundo em "6".

A partir deste estudo, realizado pelo estudante, foi possível, executar várias experiências e concluir correctamente.

iii) Estratégias algébricas

Algoritmo da diferença entre as metades

O mais avançado desempenho ajusta-se ao iniciar-se o processo de resolução do problema pelo valor médio, pois torna-se num algoritmo aplicável a qualquer problema deste tipo. “A característica geral deste processo situa-se no topo de valores desconhecidos e legitima-se pela chamada estratégia algébrica” (Ameron, 2001-2004, p. 72). Esta autora recomenda algumas reservas na atribuição do pensamento algébrico apenas pela representação exterior, pois pode tratar-se tão-somente de um pensamento inteiramente aritmético. Ameron acredita ainda que “a notação simbólica nem sequer é um pré-requisito do pensamento algébrico”, pois “tudo depende de como o estudante trata mentalmente a situação”, referiu Ameron, numa conversa com a investigadora, na Universidade de Utrecht, no Freudenthal Institut, em Setembro de 2004. Deste modo, Ameron defende o conceito de pré-álgebra, numa perspectiva da elaboração mental, intrínseca ao indivíduo com carácter cognitivo estrutural.

Para ilustrar esta estratégia registam-se, de seguida, os procedimentos usados por um estudante:

200:2=100	*100+34=134*	*134-66=68*
68:2=34	*100-34=66*	*134+66=200*

Estes procedimentos mostram como o estudante começa, depois de encontrar o valor médio das quantidades dadas, com a tentativa e uma aproximação ajustada e com a troca posterior do algoritmo pela “*diferença entre as metades*”, denunciando subitamente que reconhece o isomorfismo da tarefa.

Raciocinando com valores desconhecidos

Um estudante com desempenho médio propôs uma estratégia na qual eliminou um dos valores desconhecidos. Os cálculos produzidos foram tão eficientes que “nós queremos assumir que ele sabe e compreende o que fez e que esta resolução não é uma coincidência” (Ameron, 2001-2004, p. 73).

A resolução consistiu no seguinte:

200-68=[22]*132:2=66*

200-66=134-66=68

Esta autora reconhece ainda não ser de todo possível explicar como o estudante descobriu o método, pois na classe não foram usadas mais estratégias ou processos de formalização na resolução de problemas similares.

Ameron (2001-2004; 2002) salienta que, numa visão global das estratégias usadas nos “*numbers cards*”, pode-se referir que esta tarefa reflecte uma progressão gradual do pensamento matemático, começando a um nível aritmético e terminando a um nível algébrico. Defende ainda que se pode identificar este desenvolvimento progressivo na

[22] Repare-se que esta notação não é correcta. Todavia, vários autores (Kieran, 1992; Tompson, 1996) estudiosos da temática da aprendizagem da álgebra referem que numa primeira fase de resolução de problemas os estudantes gostam de pensar e não se preocupam da forma como representam para chegarem, o mais depressa possível, ao resultado desejado. Os investigadores defendem ainda que não se deve, de imediato, corrigir os estudantes, para não retrair o pensamento e o raciocínio, mas realizar reflexões individuais posteriores sobre as notações usadas e conceber mais tempo para optarem gradualmente por representações correctas.

aprendizagem individual do estudante, como um processo *vertical de matematização*, isto é, de formalização progressiva da actividade matemática. Esta trajectória de aprendizagem pode ocorrer num período em que os estudantes trabalhem, de forma continuada, numa série de aulas, sobre este tipo de problemas e escolham um caminho de resolução que não é sempre linear, evidente e inequívoco.

Refira-se ainda que, num artigo publicado em 1999 na revista *Mathematics Teaching in the Middle School*, sobre a exploração didáctica e estratégica de problemas de esquematização, em particular, os que se enunciam por uma expressão visual como aconteceu, por exemplo, no caso do problema resolvido na investigação "*compras nos saldos*" em que existem duas colecções em que cada uma delas tem dois elementos de espécies diferentes, neste caso, chapéus e guarda-chuvas organizados no esquema: "2+1" e "1+2", com preços associados, Meyer (1999) identifica estas colecções como uma situação vital a explorar, nas aprendizagens algébricas, na unidade algébrica "comparando quantidades"[23]. Refere ainda que existem situações como "Calcula ¾ de 60" para as quais o professor conhece antecipadamente os processos seguidos pelos estudantes, bem como os erros geralmente cometidos, sendo também previsíveis as dificuldades encontradas. Isto significa que o professor está preparado para, nestas situações, ajudar o estudante a superar deficiências e a apoiá-lo na sua aprendizagem. Existem ainda outros problemas no currículo da matemática em que é possível encontrar uma variedade estratégica de soluções, mas usualmente algumas surpresas tendem a "saudar" a experiência do professor, pois provocam a reflexão e a análise sobre os processos implementados na resolução das questões.

Segundo Meyer (1999) as reflexões, a familiaridade com novos cálculos e estratégias implementadas pelos estudantes potenciam um melhor nível de proficiência na relação destes com o professor e com a Matemática. Esta investigadora defende ainda a necessidade de proporcionar também aos estudantes problemas que lhes permitam desenvolver capacidades estratégicas inovadoras de resolução de problemas, provocar a mobilização e a progressão de conhecimentos fundamentais que sustentam a construção de novos conceitos. Nestas circunstâncias, Meyer defende a exploração deste tipo de problemas na aprendizagem da álgebra, permitindo aos estudantes terem oportunidades variadas e significativas que promovam a reflexão e a selecção de estratégias e que os conduzam, com êxito, à solução do problema.

No artigo sobre *Multiple Strategies=Multiple Challenges*, Meyer (1999) analisa as diferentes estratégias implementadas pelos estudantes na resolução do problema já descrito num dos parágrafos anteriores (Figura 9).

[23] From the *Middle School Curriculum Mathematics in Context* (MiC) and Freudenthal Institut.

Figura 9: Problema de esquematização. Qual é o artigo mais caro: o guarda-chuva ou o boné?

Meyer (1999) considera existirem cinco possíveis estratégias associadas à resolução deste tipo de problemas. A ***estratégia 1*** é caracterizada pelo estudante estruturar mentalmente a resolução do problema pela elaboração de um sistema linear de duas equações a duas incógnitas, mas em idades elementares revela dificuldades procedimentais, impedindo-os de conhecer a solução correcta. A ***estratégia 2*** designada por estratégia de aprendizagem por *tentativa e erro*, *com e sem ajustamento*, respectivamente, com valor ou não de referência, baseado este, particularmente, na terça parte do preço total da colecção, por serem três produtos em cada colecção, com uso ou não desse valor inicial. Na ***estratégia 3*** o estudante usa os valores numéricos das duas colecções adicionando-os, reparando que somou o preço de três guarda-chuvas e de três bonés. Ao dividir o valor total por três, reconhece que a soma do preço de um guarda-chuva e de um boné tem um determinado valor que subtraído ao valor do preço de uma das colecções, dá o valor do outro produto que resta da colecção. Por exemplo: no caso de subtrair na primeira colecção tem-se o valor do preço do guarda-chuva, pois esta é constituída por dois guarda-chuvas e um boné.

A ***estratégia 4*** está ligada à transferência de informação (pictórica e numérica) de uma figura para a outra de forma a obter uma colecção constituída por três elementos do mesmo produto e através de uma simples divisão por três conseguir determinar o preço unitário do artigo. Esta estratégia está fundamentada mais no visual do que nas palavras ou aspectos simbólicos e na alteração mínima de um dado de uma colecção, com transferência de uma informação visual para a outra colecção de forma a transformá-la num conhecimento linear e facilmente tratável.

Meyer (1999) salienta ainda uma outra estratégia possível na resolução deste tipo de problemas, a ***estratégia 5***, introduzida numa unidade do programa MiC (*Mathematics in Context*), envolvendo a chamada “combinação gráfica”. Meyer (1999), no estudo que realizou com estudantes de 11 a 14 anos, descobriu a possibilidade de exploração desta ***estratégia 5***, combinando tabelas e gráficos, não tendo sido usado por nenhum estudante, na investigação realizada por esta autora. O “gráfico” seguinte mostra os valores para todas as combinações dos preços dos dois artigos. Explorando diversas combinações gráficas em diferentes contextos, os estudantes podem observar cada gráfico contendo vários padrões de números.

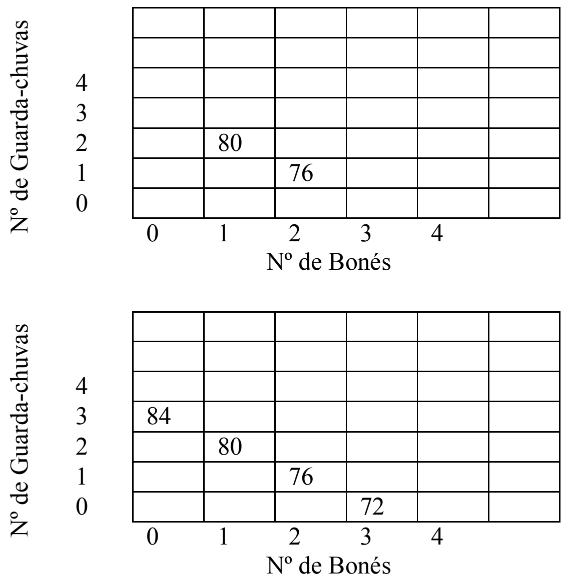


Figura 10: Estratégia 5 – estratégia gráfica

A existência do padrão da diagonal faz emergir o uso da ***estratégia 5*** (Meyer, 1999). Segundo esta autora a eminência desta estratégia revela a importância da utilização de tabelas e gráficos na resolução de problemas e a existência de um padrão numérico, expresso por "*-4*" "*quando se move para baixo e para a direita*" e por "*+4*" "*quando se move para cima e para a esquerda*". A abordagem ao problema pode ser feita sem referência ao contexto dos guarda-chuvas e bonés e apenas pela análise do padrão numérico. As entradas para o gráfico permitem um jogo numérico desligado do contexto, mas os movimentos, "para baixo e para cima", transportam-nos para a ***estratégia 4***. Na descoberta da solução deste problema na "combinação gráfica", existem várias estratégias de resolução: visuais e numéricas, baseadas em padrões. Por outro lado, Meyer salienta ainda que a fase de partilha de saberes dos vários processos na descoberta da solução permitiu aos estudantes descobrirem novas estratégias e aprofundarem capacidades cognitivas relacionadas com o processo amplo de resolução de problemas.

Sfard (1991) defende também que este problema surge intimamente ligado à resolução de equações e sistemas. Nas primeiras lições sobre a aprendizagem de equações os estudantes devem ser confrontados com diferentes formas de símbolos: desenhos, pictogramas, expressões alfanuméricas (combinações de letras e números), "etiquetas" e valores desconhecidos, não necessariamente por esta ordem.

Segundo este autor, em problemas do tipo "*numbers cards*" e no caso de "*compras nos saldos*", os desenhos das duas colecções de guarda-chuvas e bonés representam visualmente um sistema de duas equações a dois valores desconhecidos (incógnitas): o preço do guarda-chuva e o preço do boné. É de salientar que esta representação visual significa que o problema já está organizado e os desenhos referenciam directamente os objectos em estudo. A um nível informal aceita-se que os estudantes digam: "*2 guarda-chuvas e 1 boné custam 80 euros*", pois nestas idades, não se espera que o estudante pronuncie a expressão matemática "*a soma do dobro do preço do guarda-chuva com o* *preço do boné é 80*". Os símbolos são significativos, mas não são ainda ligados ao significado formal da expressão.

Sobre esta experiência Ameron (2001-2004) defende que abreviações também podem reflectir um nível informal de entendimento do significado, no sistema de equações, pois, por exemplo, no sistema:

2gc + 1bo =80

1gc + 2bo = 76

as letras *´gc´* e *´bo´* são usadas como "etiquetas". A ligação entre "etiquetas" e o contexto pode facilmente ser reconstruído, porque, como acontece na resolução deste problema concreto, estas "etiquetas" referem-se directamente aos objectos situacionais: guarda-chuvas e bonés.

Contudo, a um nível formal, no sistema:

2g + b = 80

g + 2b = 76

as incógnitas *´g´* e *´b´* são significantes para os objectos matemáticos – significados - "preço do guarda-chuva" e "preço do boné". Neste caso, as letras não são mais "etiquetas" mas grandezas, "de facto representam determinados valores desconhecidos" (Ameron, 2001-2004, p. 13).

Um outro tipo de problemas de esquematização e desenvolvido também na investigação teve como base uma ideia divulgada e trabalhada por Reeves (2000), com estudantes de 11/12 anos de idade, aproximadamente. Este investigador refere que o problema das "galinhas!..." (baseado no desenho da Figura 11) "envolve raciocínio algébrico" (p. 398) e acrescenta: "A solução é acessível, aritmética, mas uma vez estudado o sistema de equações em álgebra, provavelmente o estudante resolve este problema pela via formal algébrica, isto é, usando variáveis na resolução de um sistema de equações" (p. 398). Contudo, segundo este autor, problemas que envolvam raciocínio algébrico, como o problema das "galinhas!", deviam começar a aparecer nos manuais escolares, para que os estudantes mais novos tivessem a oportunidade de se aproximarem e resolverem estes problemas de forma intuitiva, antes de realizarem estudos mais abstractos na álgebra formal.

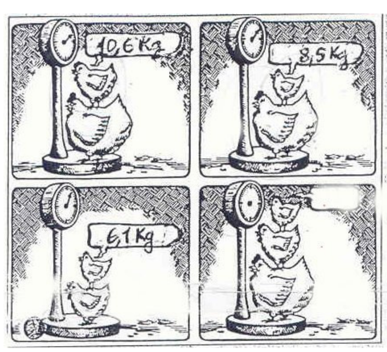


Figura 11: O problema de esquematização - "*Galinhas!...*" proposto por Reeves (2000)

Por outro lado, Stonewater (1994) e Reeves (2000) referem que, em idades elementares é necessário existir uma preocupação especial em contextualizar o problema e salienta que, como numa classe surgiu a ideia em desenvolver aquele problema próximo do Dia de Acção de Graças, as "*galinhas*" tinham sido substituídos por "*perús*".

Um outro aspecto importante neste processo de aprendizagem é a repetição da resolução de problemas em tempos e anos de escolaridade diferentes como defendem: Drijvers e Gravemeijer (1994, 2004). Reeves (2000) também atribui relevância pedagógica à reutilização do mesmo problema em diferentes tempos de escolarização[24]. Assim, no mesmo ano e na mesma classe desenvolveu, posteriormente, duas extensões do problema das galinhas, uma delas com números diferentes, correspondentes a massas diferentes e uma outra com associações diferenciadas das dadas nas "pesagens" das galinhas.

Segundo Reeves (2000) é necessário que o estudante tenha a oportunidade de explorar este tipo de problemas de esquematização para se aproximar, de várias formas, do pensamento algébrico e adquirir um conjunto de ferramentas que lhes permita resolver problemas estruturantes para o desenvolvimento deste tipo de raciocínio. Este autor acrescenta ainda que a implementação de uma variedade de problemas de esquematização emerge como percursora do estudo do sistema de equações e deve ser resolvido ouvindo os outros, designadamente, os pais ou elementos da família e posteriormente os colegas, escutando e debatendo as diferentes resoluções desenvolvidas. "O mais importante na resolução deste tipo de problemas são as estratégias e são estas que devem ser enfatizadas e menos os cálculos. Os estudantes devem ser encorajados a explicar os processos, mesmo sem usar números" (Reeves, 2000, p. 401). Diversos investigadores desta temática (Meyer, 1999; Reeves, 2000 e Ameron, 2001-2004, entre outros) defendem que os estudantes não devem aprender automaticamente a usar variáveis e, por tal motivo, precisam de, naturalmente, conviver com situações de referência na exploração de determinadas temáticas, de modo a serem encorajados e a exporem pequenos detalhes, ideias inovadoras, pensamentos desenvolvidos e diversas estratégias de resolução.

9.3.4. Programas instrucionais da aprendizagem da álgebra – cadeias de aprendizagem

No aspecto programático, o NCTM (2000) e Ameron (2004) identificam vários domínios da álgebra na Escola: padrões e regularidades, relações e modelação, funções, linguagem e representação. Por outro lado, Kaput (1988) identifica e focaliza a atenção para cinco formas no ensino da álgebra: a álgebra como generalização e formalização, a álgebra como uma linguagem com sintaxe própria de manipulação de símbolos, a álgebra como estudo de estruturas, a álgebra como estudo de variações, relações e a álgebra como uma linguagem de modelação e estudo de funções. Com base nestas percepções gerais da álgebra e nos típicos obstáculos da sua aprendizagem baseados nos contributos de Bednarz, Kieran e Lee (1996) bem como nos estudos, de duas décadas, elaborados por Kieran e outros autores (1993, 1996) encara-se a aprendizagem da álgebra como uma linguagem simbólica de generalização, como uma estrutura e simultaneamente como uma ferramenta

[24] Uma no meio do ano e outra próxima do final do ano lectivo ou em anos lectivos diferentes.

para a resolução de problemas e como um processo de modelação de fenómenos, terminando com o estudo de funções.

O NCTM (2000) defende Princípios Instrucionais (PI) para o ensino da Álgebra, segundo os quais os estudantes deveriam ser capazes de:

- interpretar e compreender padrões, relações e funções;
- analisar e representar matematicamente situações e estruturas, usando símbolos algébricos;
- usar modelos matemáticos para representar e compreender relações quantitativas;
- analisar alterações em vários contextos.

Em cada um dos princípios instrucionais (PI) anteriores espera-se que os estudantes, nos diferentes níveis de ensino, desde o Pré-Escolar ao Básico, tenham oportunidade para desenvolver as competências, indicadas na tabela seguinte.

Tabela 2: Programas instrucionais da aprendizagem da álgebra

PI	Pré-Escolar; K-2	K 3-5	K 6-8
1	Seleccionar, classificar, ordenar objectos pelo tamanho, número e outras propriedades. Reconhecer, descrever e ampliar padrões de sequências musicais, formas, ou simples padrões numéricos e transferir conhecimentos de uma representação para outra. Analisar como crescem os padrões e como se generalizam.	Descrever, ampliar e realizar generalizações de padrões geométricos e numéricos. Representar e analisar padrões e relações usando palavras, tabelas e gráficos. Tentar fundamentar a utilização variada de representações aplicada a situações concretas.	Representar relações quantitativas como um modelo de pensamento matemático para formalizar padrões, funções e generalizações. Compreender padrões, relações e funções.
2	Ilustrar, com números, princípios gerais e propriedades como, por exemplo, a propriedade comutativa. Utilizar representações concretas, pictóricas e verbais para aprender de forma compreensiva notações simbólicas convencionais.	Identificar propriedades, tais como a comutativa, a associativa e a distributiva e usá-las de forma útil e significativa, com números inteiros. Representar a ideia de variável como um quantidade desconhecida e usar uma letra ou um símbolo para identificá-la. Expressar relações matemáticas, usando equações.	Resolver equações. Resolver vários problemas onde se aplicam as diversas aproximações ao conceito de variável. Explicar e compreender os processos implementados na resolução de problemas com identificação de propriedades e a utilização de letras para identificar variáveis
3	Modelar situações que envolvam a adição e a subtracção de números inteiros, usando objectos, desenhos e símbolos.	Modelar situações-problema com objectos e usar diferentes representações, tais como: gráficos, tabelas, e equações para apresentar conclusões.	Usar modelos matemáticos para representar relações quantitativas Modelar situações com expressões algébricas do tipo: $y=kx$; $2xn+1$; …
4	Descrever alterações qualitativas, tais como o crescimento da altura de plantas ou dos estudantes. Descrever alterações quantitativas como, por exemplo, o crescimento de 2cm da altura de um estudante, num ano.	Investigar como se altera o valor de uma variável relacionada com outra; Identificar e descrever situações com constantes ou variando razões, comparando os resultados.	Utilizar expressões simbólicas contendo variáveis, representações tabelares e gráficas de números e de relações quantitativas. Representar e analisar situações matemáticas e estruturas usando símbolos algébricos.

Como se pode observar na tabela anterior o NCTM, através dos princípios e das normas (2000), explicita que a aprendizagem gradual de conceitos pré-algébricos inicia-se, em termos escolares, no Jardim de Infância, tal como é assinalado no esquema da figura seguinte (Figura 12). Os Princípios e as Normas para a matemática escolar identificam o aparecimento da álgebra em idades elementares e o NCTM (2000) preconiza determinados tópicos em que a álgebra se insere no currículo da Matemática a partir da Educação de Infância.

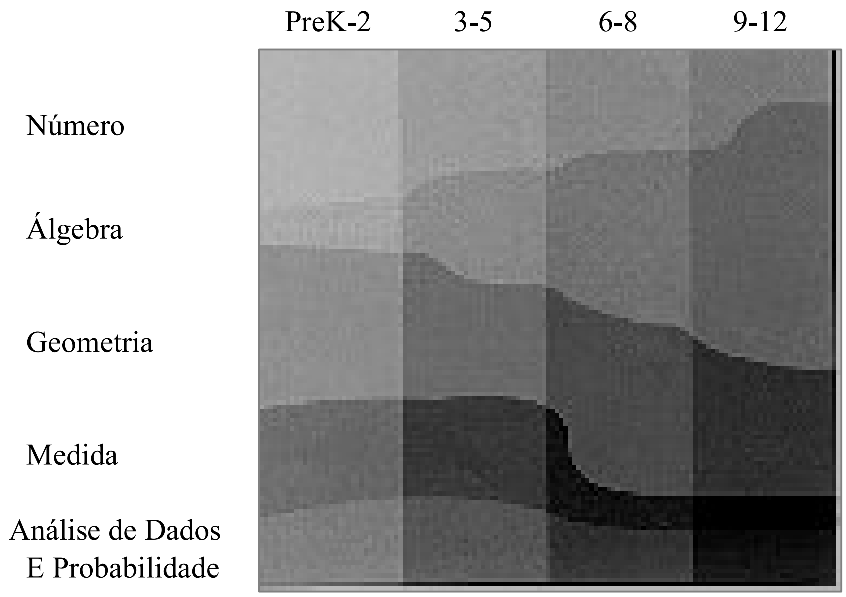


Figura 12: Conteúdos - Principles and Standards for School Mathematics, NCTM (2000)

Assim, o NCTM (2000, p. 38-40) considera que os programas instrucionais da aprendizagem da álgebra desde o Jardim Escola até ao ano terminal do secundário que devem ser orientados pelos seguintes procedimentos: a) observar, ler e compreender padrões, relações e funções; b) analisar alterações em vários contextos; c) representar e analisar situações matemáticas e estruturas usando símbolos algébricos; d) utilizar modelos matemáticos para representar e compreender relações quantitativas. Assim, a álgebra apresenta-se como um domínio que atravessa todo o currículo desde as idades elementares, permitindo que os professores ajudem os estudantes a construir uma sólida formação experimental para preparar o trabalho futuro de interiorização e de formalização do ensino básico, médio e ao ensino superior.

De acordo com Bell, Malone e Taylor (1988) e investigadores do Freudenthal Institut, só existe equilíbrio entre os diferentes componentes se as várias situações se tornarem significativas para os estudantes e, desta forma, forem capazes de aprofundar a pertinência da álgebra, como estrutura e na significância de cada um dos conceitos, aplicá-los em contextos adequados nos quais as manipulações algébricas podem ser enraizadas e frutificadas.

No Currículo Nacional para o Ensino Básico – Competências Essenciais e Abrantes, Serrazina e Oliveira (1999, p. 125) salientam que a competência no domínio da álgebra e das funções ao longo de todos os ciclos passa pelo desenvolvimento dos seguintes aspectos: a) a predisposição para procurar, observar padrões e regularidades e formular generalizações, em situações diversas, em contextos geométricos e numéricos; b) a aptidão para analisar as relações numéricas de uma situação e explicitá-las em linguagem corrente e representá-los através de diferentes processos, incluindo o uso de símbolos; c) a aptidão para interpretar e construir tabelas de valores, gráficos, regras verbais e outros processos que traduzam relações entre variáveis, assim como para passar de umas formas de representação para outras; d) a aptidão para concretizar, em casos particulares, relações entre variáveis e fórmulas e para procurar soluções de equações simples; e) a sensibilidade para entender e usar noções de correspondência e de transformação em situações concretas diversas.

Assim, as primeiras experiências com classificação, seriação e ordenação de objectos são actividades naturais e importantes para as crianças mais novas. Os professores devem ajudar as crianças, por exemplo, a verbalizar a sequência *vermelho-azul-azul-vermelho-azul-azul* pode ser ampliada com um outro *vermelho-azul-azul* ou ajudá-los a predizer que o vigésimo termo é azul, assumindo que o padrão *vermelho-azul-azul* se repete indefinidamente. Inicialmente os estudantes podem manipular e descrever as regularidades, verbalmente, enunciando o padrão, antes dos símbolos matemáticos (English e Warren, 1998). Zazkis e Liljedahl (2002) focam a necessidade de repetir este género de padrões de uma só dimensão, no ensino primário e defendem que o uso repetido de padrões surge como um veículo para trabalhar com símbolos, um passo significativo para armazenar a álgebra num contexto para a generalização. A generalização é defendida como um objecto e um significado de pensamento e de comunicação. As crianças dos 3-5 anos de idade precisam de investigar, gradualmente, padrões geométricos e numéricos e de expressá-los matematicamente, por palavras ou símbolos. Por tal motivo, necessitam de: a) analisar a estrutura do padrão, reconhecendo como cresce ou se altera; b) organizar esta informação sistematicamente, analisando casos em concreto; c) desenvolver a generalização da relação matemática do padrão. As crianças desde idades elementares sentem-se inclinadas naturalmente para observar e descrever uma variedade de formas e de enunciar as propriedades. Identificar formas é importante, mas o foco na análise de propriedades e de relações torna-se cada vez mais essencial e sólido. "Padrões são o caminho para os jovens estudantes reconhecerem ordem e organização no mundo" (NCTM, 2000, p. 91). As crianças aprendem a repetir canções, a entoar cânticos ritmados, a predizer "poemas" que são baseados em repetidos e crescentes padrões. O reconhecimento, a comparação e a análise de padrões são importantes componentes do desenvolvimento intelectual do estudante na aprendizagem da álgebra.

Posteriormente, nos primeiros níveis de escolaridade os estudantes devem também descrever padrões numéricos, como: 2, 4, 6, 8,..., sendo o começo do pensamento recursivo, de extrema importância no raciocínio matemático, como defendia Piaget, para dedicar-se, mais tarde, a exemplos em que é bem evidenciada a recursividade, tal como o estudo da sequência da série de Fibonacci: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13,...

De acordo com o (NCTM, 2000) “sempre que seja possível o processo de aprender e ensinar álgebra pode e deve ser integrado noutros tópicos do currículo” (p. 223). O professor deve encorajar os estudantes a: a) descrever verbalmente um padrão dado (geometrica e numericamente); b) fazer predições do que poderá acontecer se a sequência continuar.

> A facilidade dos estudantes em utilizar a manipulação simbólica pode ser aumentada se esta for baseada e extensiva a experiências em quantidade e contextos diferentes, através dos quais desenvolvem uma compreensão inicial dos significados e do uso de variáveis, bem como a capacidade de associar as expressões simbólicas a problemas com contexto (p. 227).

Segundo esta associação de professores de Matemática, do 3º ao 5º ano de escolaridade, a ideia e o uso da variável (representado por uma caixa, letra ou símbolo) deve também emergir e ser desenvolvida integralmente.

Numa fase posterior, Boavida (2001) defende que, mesmo quando o pensamento se situa ainda ao nível das operações concretas, os estudantes devem ser estimulados para realizar acções encadeadas com objectos manipuláveis de modo a provar uma proposição, tendo por pano de fundo o raciocínio dedutivo. Por outro lado, ficam aptos ainda para tornar explícito o conhecimento que usam quando apresentam argumentos e justificações, de reflectir sobre a natureza de uma conjectura e até de elaborar juízos acerca do poder explicativo de argumentos apresentados pelos seus pares. Defende ainda a autora que a génese da aprendizagem da demonstração matemática surge nos primeiros anos de escolaridade e enraíza-se ao longo da escolaridade na compreensão contínua das asserções matemáticas. Assim, deve-se dar uma atenção específica à selecção de tarefas que ajudem os estudantes a criarem, descreverem e examinarem padrões para detectarem regularidades, a formularem e a explorarem conjecturas, de modo a validarem-nas ou a rejeitá-las. Nesta perspectiva defende ser importante que, desde cedo, o professor torne os estudantes responsáveis pela articulação dos seus raciocínios, desenvolva uma atitude solidária de compreensão pelas dificuldades do outro, dando atenção aos raciocínios dos seus pares, num processo gradual e criativo de respeito pela sua aprendizagem.

Posteriormente, o estudo dos atributos das formas e propriedades torna-se mais abstracto e é no debate e na experimentação que o foco da aprendizagem se situa para que o estudante seja capaz de conjecturar, de desenvolver o raciocínio indutivo e mais tarde usar o raciocínio dedutivo usando demonstrações mais formais (NCTM, 2000). Em todos os níveis os estudantes precisam de aprender a formular convictamente conjecturas e de validar soluções, bem como descrever, representar e investigar relações dentro do sistema geométrico e numérico de as justificar dentro de uma cadeia lógica de opções.

Sempre que os estudantes noticiam as operações, parecendo dar a impressão de referir propriedades particulares eles estão a começar a pensar algebricamente como acontece, por exemplo, quando realizam a adição entre dois números particulares, em que um deles é zero e verificam que resultado ficou inalterado (NCTM, 2000, p. 91). Esta associação defende que os estudantes devem ter várias experiências de organização de dados e de representação, apresentando-se as simulações computacionais como um meio interactivo para explorar relações funcionais e as várias formas de as representar de modo que se sintam confortáveis no uso das várias técnicas para organizar e expressar ideias acerca das relações funcionais. Também através da resolução de problemas pode-se providenciar autênticas experiências algébricas, que não se resumem apenas a explorar estratégias usuais da resolução de problemas, colocando ou resolvendo equações, e desenvolvendo capacidades algébricas fundamentais, designadamente, escrevendo, lendo e manipulando expressões simbólicas (Bell, 1996).

De facto, a álgebra enfatiza relações funcionais expressas por notação simbólica permitindo que complexas ideias matemáticas possam ser apresentadas sucintamente de modo que sejam analisadas efectivamente. Segundo o NCTM (2000), hoje em dia, os métodos e as ideias da álgebra suportam o trabalho matemático em várias áreas como, por exemplo, a distribuição de redes de comunicação, as leis físicas, os modelos de população e resultados estatísticos que podem, todos eles, ser representados recorrendo à linguagem simbólica algébrica. Grande parte da estrutura simbólica da álgebra pode ser construída pelos estudantes por extensivas experiências com os números, com a geometria e com a análise de dados. As ideias inclusas na álgebra constituem a componente mais ampla e crucial da matemática e as competências associadas são importantes na vida do adulto, no trabalho e na preparação científica. De um modo geral, se os estudantes se limitam a manipular simbolicamente antes de desenvolverem uma sólida concepção do significado da expressão tornam-se inábeis e apenas conseguirão manipular mecanicamente. O suporte para um trabalho significativo com notação simbólica deve permanecer através de um longo tempo de amadurecimento (NCTM, 2000).

Também Lee (1996) salienta que a velha divisa "exercício e prática" em que a Escola se esquece de dar ênfase à compreensão e à conexão com a "vida real", não se aproxima dos interesses e motivações dos estudantes, pois estes querem saber para que serve a álgebra, quais são os seus objectos primitivos e os seus conteúdos. Para Bell (1996) a álgebra consiste numa ferramenta conceptual no qual se operam e produzem hierarquias de abstracção. Ainda no estudo desta temática, Nemirovsky (1996) defende a importância dos estudantes aprenderem esta linguagem e, para isso, deve-se alterar o ensino deste tópico, considerando essencial identificar e criar domínios das experiências do quotidiano dos estudantes, de forma a resolver problemas num terreno fértil para o crescimento de ideias matemáticas. Mas este autor questiona ainda que se a álgebra pode ser trabalhada através de edições factuais de relevância pessoal, por que se inventam problemas? Seria melhor porventura usar-se apenas situações que surjam em artigos de jornais ou em histórias pessoais… Contudo, Nemirovsky (1996) concluiu que a importância das situações realistas na aprendizagem da álgebra situam-se em três aspectos fundamentais: a) provocar a aproximação dos estudantes a conceitos novos de matemática, usando ideias e situações que lhes são familiares; b) sugerir que as definições adoptadas na aprendizagem da álgebra são naturais e razoáveis; c) oferecer contextos ricos para aprender e negociar com a complexidade. O primeiro aspecto é fulcral, pois aprendendo álgebra em contexto são maximizadas as fontes que os estudantes desenvolvem na sua experiência de vida, revelando-se mais simples ou mais complexo, dependendo de como o estudante o explora. Deste modo, permite-se que os estudantes, desde idades elementares, participem como membros competentes de uma sociedade e que a Escola os guie gradualmente e de forma compreendida em estratégias de simbolização, modelação, abstracção, formalização e generalização, proporcionando um conhecimento amplo do mundo que os rodeia (Keijzer, 2001-2004).

O ensino da álgebra no programa RME. Vários investigadores do Freudenthal Insitut (Freudenthal (1973, 1983; Streefland, 1990; Treffers, 1991; De Lange, 1987, 1992; entre outros) defendem que o uso de situações problemáticas realistas para iniciar o desenvolvimento do conhecimento matemático tem-se mostrado numa via muito poderosa e esta circunstancia também tem influenciado o processo aprendizagem-ensino da álgebra.

Na Holanda, a partir dos anos 80 Martin Kindt[25] investigou, problematizou e sumariou, durante vinte anos, as ideias existentes na Escola sobre o ensino e a aprendizagem da álgebra e concluiu que os estudantes aprendiam a reproduzir regras, a realizar "truques", sem compreender o que estavam realmente a fazer e porquê. De facto, existia ainda alguma atenção na classe para aspectos da generalização e da aplicação do conceito de variável, mas este investigador do Instituto Freudenthal concluiu ainda que o salto para o nível de conhecimento formal era demasiado rápido, adquirido pelos exercícios típicos dos manuais e não havia tempo para o estudante desenvolver os seus próprios pensamentos e esquemas pessoais de resolução. As conclusões do estudo apontaram para a existência de três grandes problemas no ensino da álgebra: não se dispensava nenhuma atenção ao raciocínio e a aspectos mentais relacionados com a generalização, com um salto demasiado rápido para a formalização e a falta de aplicação da funcionalidade da álgebra. Este estudo provocou uma intervenção sistemática e continuada nas Escolas da Holanda[26], no estudo da álgebra, em classes dos 12 aos 16 anos de idade, através da filosofia da Educação Matemática "Realist Mathematics Education" - RME e da implementação do projecto MiC (Mathematics in Context). A este nível etário, pretendia-se que o estudo da álgebra escolar aprofundasse relações, usando tabelas, gráficos e fórmulas e começasse a dar mais atenção ao papel das variáveis. Algumas opções foram tomadas: 1) a focalização para o uso e a aplicação funcional da álgebra e não para o desenho da álgebra; 2) a interpretação da situação como um todo é considerada mais importante do que a manipulação apenas simbólica; 3) a atenção é direccionada para a compreensão de uma ampla variedade de técnicas algébricas, em vez de um estudo intenso da aplicação de algumas técnicas; 4) o desenvolvimento paralelo de diferentes conceitos algébricos e não apenas do empilhamento de conceitos (do mais simples ao mais difícil) como é muito comum no currículo tradicional da matemática. Segundo o projecto MiC o programa da álgebra proporciona oportunidade de aprofundamento e consolidação do conhecimento matemático, sendo eleita a "a compreensão como palavra-chave", reconhecida como a semântica da álgebra, mais importante do que a sua sintaxe, pois deste modo é possível tornar a álgebra mais significativa, isto é, que "faça sentido" para o estudante. Segundo os investigadores do FI existem três categorias ao nível da abstracção e cognição complexa associados à concretização dos objectivos do currículo e de uma unidade instrucional. A primeira categoria é *conceptual e de conhecimento procedimental*. Nesta categoria incluem-se aptidões e conhecimentos matemáticos tradicionais: definições, objectos, aptidões técnicas, algoritmos usuais e computação. A segunda categoria inclui *procedimentos não rotineiros*, de resolução de problemas e da concretização de conexões

[25] Actual professor jubilado da Universidade de Utrecht e investigador do Freudenthal Institut (FI).

[26] Com posterior extensão nalgumas Escolas dos Estados Unidos da América, da Austrália e da Inglaterra.

entre conteúdos, incluindo a integração de tópicos de diferentes domínios, raciocínio e a descoberta de uma estratégia apropriada, bem como a negociação com problemas que permitam a exploração de diferentes estratégias e respostas. A *terceira* e mais alta categoria, *a estrutural*, possibilita a negociação com o nível mais elevado do pensamento e das capacidades cognitivas, designadamente: interpretação, reflexão, criatividade, generalização, atitude crítica, matematização e raciocínios mais complexos.

Na aprendizagem da álgebra a RME estuda e aplica o conceito de "matematização", trabalha os quatro níveis relacionados com a actividade matemática propostos por Gravemeijer (1994, 2004) e atribui um papel ao uso do computador no ensino da álgebra especialmente através dos "applets", que segundo Drijvers (2003) apesar de terem algumas limitações, surgem como uma ferramenta algébrica que promove o pensamento formal e a abstracção, pois apresentam-se como um "pequeno mundo de objectos matemáticos, de relações e procedimentos sem referências à vida real e exteriores a este ambiente" (p. 57).

CAPÍTULO III – METODOLOGIA

"O essencial é invisível ao olhar"
A. de Saint-Exupery
O principezinho

1. Introdução

Neste capítulo explicita-se a natureza do estudo, justificam-se as opções metodológicas tomadas no âmbito do debate do paradigma actual da investigação educacional, reflecte-se sobre as etapas do estudo, apresentam-se os participantes e o contexto da investigação, descrevem-se as estratégias e os instrumentos utilizados na recolha de dados e, por último, explicita-se o tratamento dos dados. Deste modo, encontra-se organizado em seis partes: a) introdução; b) natureza do estudo – opções metodológicas; c) planificação e desenho experimental – as etapas da investigação; d) contextualização e caracterização das duas turmas; e) estratégias e instrumentos de recolha de dados; f) tratamento dos dados.

O tema da investigação localiza-se, assim, na aprendizagem inicial da álgebra no âmbito da matemática em contexto e de natureza interdisciplinar, recorrendo, ou não, à tecnologia. Numa perspectiva de flexibilidade curricular actual pretende-se, assim, problematizar e analisar a importância do contexto interdisciplinar no desenvolvimento sustentado das aprendizagens pré-algébricas, em que um dos materiais a utilizar, para além de outros é o computador, em particular, a folha de cálculo.

No desenvolvimento desta temática procurou-se apreender a ambiência criada na sala de aula, ao longo dos dois primeiros ciclos do ensino básico[27] e reflectir sobre os diversos cenários possíveis de intervenção para, de acordo com os objectivos e o contexto do estudo, poder delinear quadro(s) metodológico(s) mais adequado(s) de forma a provocar o sucesso do estudante na construção da pré-álgebra (Kieran, 1988, 1992).

Ora, uma das dificuldades da investigação reside naturalmente numa pesquisa bibliográfica adequada, seleccionada e ajustada aos objectivos da investigação, evitando a dispersão de leituras e desviando o foco principal para aspectos colaterais ao estudo (Quivy e Campenhoudt, 1998). Ao longo do estudo tornou-se claro que um dos aspectos a considerar seria desenvolver esforços de modo a controlar todo o processo, com flexibilidade e com discernimento crítico, realizando os reajustes necessários, de forma a prosseguir os propósitos da investigação e procurando seguir, segundo (Myers, 1997), o princípio epistemológico que guia uma investigação.

Para Pires (1995) "durante as últimas décadas assistiu-se ao surgimento de múltiplas linguagens científicas, de pluralidade de posições epistemológicas e de novas perspectivas de investigação englobadas na denominação de paradigmas de investigação" (p. 52). Nesta abrangência, simultaneamente linear e complexa, agravada pela multiplicidade de factores que envolvem a investigação e pela impossibilidade de os estudar isoladamente procurou-se adoptar uma abordagem de tipo qualitativa (Bogdan e Biklen, 1994), recolhendo dados

[27] Do 2º ao 6º ano de escolaridade.

de diferente natureza, com a preocupação de entender o desempenho individual e de grupo, numa perspectiva metacognitiva e relacional do conhecimento. Procurando dar respostas singulares e plurais às interrogações de "como" e "porquê" optou-se por um ´estudo de caso´, com recolha, sempre que possível, de elementos de natureza quantificável, associados à construção e desenvolvimento de competências algébricas em contexto e de âmbito interdisciplinar com utilização ou não das TIC. Neste "paradigma interpretativo" a investigação acontece no enquadramento natural, na Escola e em particular, na sala de aula, partindo da descrição para a análise e preocupando-se com "o significado marcadamente humano na sala de actividades, com as questões emergentes e não com as questões meramente mecanicistas" (Vasconcelos, 1997, p. 351).

Apesar das limitações da investigação, relacionadas essencialmente com o número de sujeitos (duas turmas), os instrumentos de recolha de dados e as condições de aplicabilidade pretendeu-se, neste estudo, averiguar da existência de indicadores ao nível do *produto*, relacionados com a aquisição e aplicação de conceitos pré-algébricos, associados essencialmente aos resultados obtidos na resolução das tarefas propostas (*análise de protocolos*) e do teste de avaliação e simultaneamente focalizar a atenção para a evolução dos próprios *processos*, basicamente ligados às estratégias exploradas pelos estudantes revelando ainda particular interesse pelo desenvolvimento global da pessoa, especialmente na relação estabelecida com a própria ciência matemática. Neste processo dinâmico e *continuum* das aprendizagens numéricas às algébricas, desde o 1º ao 2º ciclo do ensino básico, procurou-se investigar como pensa e interage intelectualmente o estudante, consigo mesmo e socialmente, com os outros (colega e professor) no trabalho particular da resolução de problemas e de outras tarefas no âmbito da matemática em contexto e interdisciplinar, com a utilização de materiais diversificados, incluindo o tecnológico, com destaque natural para a folha de cálculo.

2. Natureza do Estudo

2.1. Estratégia qualitativa de recolha de dados

A escolha da metodologia a utilizar num trabalho de investigação em educação depende especificamente, dos objectivos do estudo, do tipo de questões a que se procura responder, da natureza do fenómeno e das condições em que esse fenómeno ocorre. Por outro lado, a educação é uma actividade humana por excelência e extremamente complexa (Guimarães, 1993), onde intervêm aspectos de carácter subjectivo, relacionados com as relações interpessoais, as concepções, os fundamentos, crenças e atitudes dos professores sobre a educação e o ensino da matemática (Serrazina, 1998; Ponte, 2002).

Como vem sendo descrito, esta investigação procura analisar a influência do contexto e do trabalho de âmbito interdisciplinar na aprendizagem da pré-álgebra no ensino básico e descortinar o impacto das tecnologias de informação e comunicação, em particular da folha de cálculo, na construção desses conceitos. Nesta especificidade didáctica pretende-se orientar a investigação para a reflexão das ambiências criadas, a implementação e análise das tarefas propostas e das estratégias de resolução experimentadas pelos estudantes no desenvolvimento de diversas competências matemáticas, reconhecendo-se "a importância do que é único e particular para o sujeito" (Pires, 1995, p. 53) na procura cuidadosa e reflexiva de generalizações.

Neste estudo de carácter essencialmente qualitativo, de âmbito vertical e sequencial, iniciado no 1º ciclo e com enfoque particular no 2º ciclo do ensino básico, no 6º ano de escolaridade, tornou-se absolutamente necessário descrever fenómenos de interacção educativa para problematizar e entender, na globalidade, as dinâmicas do processo que se estabelecem no acto do aprender e ensinar Matemática. Simultaneamente procurou-se analisar os resultados obtidos pelo estudo do *continuum* das aprendizagens numéricas às algébricas, concretamente, durante cinco anos, com natural aprofundamento de conteúdo no ano terminal do 2º ciclo do ensino básico. De facto, a sequencialidade do estudo num período de tempo significativo, geralmente designado por *´follow up´* é considerado cada vez mais relevante, pois permite seguir o percurso escolar do estudante e retirar inferências (Bardin, 1977; Bennett, 1986; Bogdan e Biklen, 1994; Stake, 1998; César, 2000). Devido à influência da teoria de Vygotsky (1979) o saber passou a ser cada vez mais encarado como socialmente construído pelo sujeito, nomeadamente quando se trata de conhecimento matemático, leccionado numa instituição como a Escola. Assim, segundo César (2000) a necessidade de estudos contextualizados e efectuados em diferentes contextos sociais ganhou especial relevância no interior e exterior da instituição escolar, bem como a análise dos desempenhos matemáticos particulares, designadamente, de sujeitos em situação real, como no projecto "street mathematics", desenvolvido por Lave (1988-1997). Lave e Wenger (1991-2002) concluíram que as tarefas realizadas na vida quotidiana são significativas para os sujeitos, que sabem, nestas circunstâncias, interpretar e arranjar "estratégias naturais" de resolução não coincidentes com os procedimentos académicos mais habituais. Todavia, no contexto escolar, as tarefas aparecem, na maior parte das vezes, descontextualizadas para os sujeitos, revelando-se incapazes para as resolver (Lave e Wenger, 1991-2002). Para César (2000) "não é o nível operatório, nem o nível de conhecimento matemático que pode explicar o que sucede. É o modo como o sujeito interpreta o significado da tarefa que é determinante" (p. 27). Por outro lado, este conjunto de estudos alerta-nos para o facto de ser importante, na sala de aula, ter em conta as estratégias naturais de resolução que os sujeitos são capazes de criar e desenvolver, provocando ainda reflexões sobre as questões de avaliação. Ao longo dos tempos diversificaram-se estudos sobre interacções didácticas, em contextos escolares e a tendência geral orienta-se para que os estudos sejam cada vez mais contextualizados (Pombo, Guimarães e Levy, 1993; Abrantes, 1996; Matos e Carreira, 1996; Santos dos Santos, 1998; Kindt, 2004).

Na década de 80, na Psicologia Social da Transmissão do Conhecimento apelava-se cada vez mais à necessidade de promover estudos contextualizados e na década de 90 surgiu uma nova unidade de análise, mais complexa e multifacetada que "deu novos contornos ao papel do professor e do estudante em contexto de sala de aula, iniciando-se também o estudo das relações interpessoais, com o conhecimento de outro tipo de contextos e culturas" (César, 2000, p. 30). Assim, do ponto de vista metodológico, a observação participada, a entrevista, a análise de protocolos, a recolha de materiais produzidos pelos estudantes, a análise documental foram processos de recolha de dados que ganharam cada vez mais importância. Começaram também a existir estudos mais longos e, em alguns casos, uma preocupação crescente com a realização de *´follow ups´* com a implementação de processos de avaliação dos projectos de investigação (César, 1999, 2000). Na década de 80 passou, então, a ser atribuída uma maior importância à situação, ao significado que o sujeito lhe atribui, ao contrato didáctico e às conjecturas e argumentações dos sujeitos, procedendo-se cada vez mais a uma análise detalhada do discurso (Perret-Clermont, Brun, Saada e Schubauer-Leoni, 1984). Posteriormente, na década de 90 já não se procura estudar o sujeito, enquanto pensador isolado afectado por factores sociais mas, nesta época, a unidade de análise são as interacções e as trocas entre os parceiros sociais.

Nestas circunstâncias educativas e tendo em conta os contornos investigativos presentes optou-se por uma metodologia de natureza qualitativa, segundo um paradigma basicamente interpretativo uma vez que: a) não existe uma realidade objectiva, independente do pensamento e da actividade cognitiva dos indivíduos, já que "a realidade é construída socialmente e é mediada pela interpretação" (Santos dos Santos, 1998, p. 253) e b) o objectivo fundamental da investigação não é sequer explicar relações causais através de técnicas rigorosas de medição, no âmbito de um planeamento de estudo experimental, em que o investigador se mantém distanciado do fenómeno em estudo. Pretende-se, assim, descrever, problematizar e interpretar as relações existentes entre os elementos mutuamente constitutivos, a partir das perspectivas dos participantes envolvidos no mesmo, das próprias expectativas do investigador, baseadas num campo conceptual, teórico e prático, incluindo as actividades em ocorrência, com o envolvimento do investigador nas situações a estudar, no respectivo contexto natural (Hammersley, 1986; Patton, 1990; Estrela, 1990; Lessard-Hébert e outros, 1994; Bogdan e Biklen, 1994).

Santos dos Santos (1998) salienta que só se torna possível captar a complexidade do fenómeno da aprendizagem, inseparável do contexto educativo, se estudarmos todas as suas componentes – a natureza dos significados matemáticos construídos pelos estudantes em situação de sala de aula, a utilização do computador e as interacções sociais – de uma forma *holística*, relacionando-as intrinsecamente, de tal forma que, ao atender-se uma das dimensões consideradas se tenha, simultaneamente, em conta a influência recíproca de outras. Para Merriam (199; 1998) esta perspectiva de investigação, em que as componentes do fenómeno não podem ser estudadas isoladamente é, precisamente, conseguida através da aplicação de métodos qualitativos.

Por outro lado, para Ludke e André (1986), o estudo de processos metacognitivos, relacionados com a exploração das TIC em aulas de Matemática e em aulas de formação interdisciplinar, necessita de uma abordagem do tipo qualitativo, pois: a) ocorre num contexto natural de trabalho e pretende descrever essa realidade que é complexa; b) existe uma preocupação privilegiada com o processo e com o significado que, a turma, o grupo, o estudante, o professor dão às situações.

De facto, o uso dos computadores na sala de aula providencia uma zona de *skills* de conversação que interactua com aspectos académicos da Educação Matemática (Mehan, 1986; Tall, 1994) e cada vez mais outros estudos têm mostrado, especialmente os de Doyle e Carter (1986), que os estudantes precisam de desenvolver competências sociais e interpretativas para participar, com êxito, nos eventos da classe. Para que tal aconteça torna-se necessário que o investigador identifique os problemas para seleccionar os registos áudio e audio-visual das actividades da classe, classificando cada tarefa em "closedness", numa aproximição à realidade, a validar, como uma categoria do sistema de aprendizagem (Scarth e Hammersley, 1986). Neste tipo de metodologia torna-se absolutamente necessário analisar os dados e simultaneamente descortinar os significados inerentes aos dados coligidos, pois para Pires (1995): "o paradigma interpretativo, também referenciado como qualitativo, fenomenológico, naturalista, humanista e etnográfico, penetra no mundo pessoal dos participantes, verificando como estes interpretam as situações, o que significam para eles, quais as suas intenções" (p. 53).

Myers (1997) clarifica o termo "qualitativo" e defende que não é sinónimo apenas de "interpretativo", pois a investigação qualitativa pode ser ou não interpretativa. Segundo este autor esta apropriação depende da posição filosófica do investigador e salienta que a investigação qualitativa pode ser descritiva, interpretativa ou crítica. Na primeira assume-se que a realidade é objectivamente dada e que pode ser descrita por certas propriedades que são independentes do observador e dos seus instrumentos de recolha de dados. Na investigação qualitativa e interpretativa ou crítica a filosofia de base é hermenêutica e fenomenológica, no qual se analisam os fenómenos pelos seus significados e o papel preponderante não é a realidade, mas sim a linguagem e a influência do contexto na forma de pensar e actuar.

Stake (1998) é defensor de um estudo qualitativo no campo educativo e enuncia nos quadros seguintes (1 e 2) vários aspectos intrínsecos a este paradigma que, de certo modo, orientaram metodologicamente a presente investigação.

Quadro 1: Características conceptuais do estudo qualitativo
É Holístico: está bem desenvolvida a contextualidade; está orientado para o caso (o caso entenda-se como um "sistema acotado") evita o reducionismo e o elementarismo é relativamente não comparativo procura compreender o objecto mais do que diferenciá-lo de outros.
É Empírico: está orientado para o campo de observação; centra-se a atenção no que observa, incluindo as observações realizadas por observadores; faz todo o possível por ser naturalista, não intervencionista; tem uma relativa preferência pela naturalidade linguística nas descrições, revelando até algum desdém por grandes expressões.
É Interpretativo: os investigadores confiam mais na intuição, com a utilização natural de critérios importantes sem os especificar; os observadores de campo tratam de manter desperta a atenção para reconhecer os acontecimentos relevantes para o problema; os observadores sintonizam-se com a ideia de que a investigação é uma interacção do investigador com o sujeito.

É Empático: atende à intencionalidade do actor; procura os esquemas de referência do actor e seus valores; atende o desenho a novas realidades, ainda que planificado, e responde a novas situações; procura o enfoque progressivo dos temas e as informações servem de experiência indirecta.

Quadro 2: Características de um bom estudo qualitativo
As observações e as interpretações imediatas estão validadas: é habitual a triangulação de dados; há um esforço deliberado para colocar em dúvida as próprias interpretações; as informações contribuem para que os leitores façam as suas próprias interpretações; as informações ajudam os leitores a reconhecer a subjectividade.
Não é exortatório e evita explorar a posição privilegiada do especialista.
Está consciente dos riscos relacionados com a investigação de sujeitos humanos.
As investigações são competentes, não só em seus métodos, pois estão versados nalguma disciplina fundamental, mas também em disciplinas relevantes.

Refira-se ainda que, no caso concreto, optou-se, essencialmente, por um estudo qualitativo de referencial interpretativo, baseado em ´estudo de caso´, com características próximas da investigação-acção. Para Merriam (1998) a investigação qualitativa encerra "um conceito de "umbrella" que abarca várias formas de observação, inquirição, ajuda, compreensão e explicação do fenómeno social em estudo" (p. 5). De forma concomitante são usados, ou estão próximos, outros termos que se integram neste tipo de investigação qualitativa: "*pesquisa interpretativa*, *campo de estudo*, *observação participante*, *pesquisa indutiva*, *´estudo de caso´* e *etnografia*" (Merriam, 1998, p. 5, o itálico é da autora).

´Estudo de caso´. O termo ´estudo de caso´ tem múltiplos significados. Este pode ser usado para descrever uma unidade de análise (o estudo de um caso de uma particular organização) ou descrever um método de investigação (Myers, 1997). Segundo este autor o ´estudo de caso´ é o mais comum método usado na investigação qualitativa. Para Yin (1994) o ´estudo de caso´ é um estudo empírico que investiga fenómenos contemporâneos dentro de um contexto de vida real e onde as fronteiras entre o próprio fenómeno e o contexto não são claramente evidentes. A característica que melhor identifica e distingue o ´estudo de caso´ é o facto de se tratar de um plano de investigação que envolve um estudo intensivo e detalhado de uma entidade bem definida: "o caso" (Coutinho e Chaves, 2002). Segundo Kemmis (1988); Kemmis e Mactaggart (1988) um ´caso´ pode ser um indivíduo, um pequeno grupo, uma organização, uma comunidade ou mesmo uma nação! No ´estudo de caso´, tal como a expressão indica examina-se o ´caso´ em detalhe, em profundidade, no seu contexto natural, reconhecendo-se a sua complexidade e recorrendo-se para isso a todos os métodos que se revelem apropriados (Yin, 1994; Punch, 1998; Merriam, 1998).

Smith (1979), um dos primeiros etnógrafos educativos, define ´o caso´ como um "sistema acostado", confinado à sua condição de objecto, mais do que um processo e, nestas circunstâncias, o ´estudo de caso´ tem os seus limites e partes constituintes. A finalidade deste tipo de investigação é sempre holística (sistémica, ampla, integrada) ou seja, visa preservar e compreender o ´caso´ no seu todo e na sua unicidade (Yin, 1994; Gomez, Flores e Jimènez, 1996; Punch, 1998).

Para Stake (1998) o ´estudo de caso´ é uma comunicação interactiva, primeiro entre o investigador singular com o ´caso´ e depois com o leitor. Em parte, é um exercício de condolência, em parte de congratulação, mas sempre um exercício intelectual, de transferir ideias e de criar significados. Este autor refere ainda que terminar um ´estudo de caso´ é a consumação de uma obra de arte. O ´estudo de caso´ é um exercício de grande profundidade, pois é uma oportunidade de ver o que os outros ainda não viram, de reflectir na unicidade do fenómeno, de dedicar as nossas melhores capacidades interpretativas e de fazer uma defesa integral daquelas coisas que observamos e apreciamos.

Yin (1994) considera também que o ´estudo de caso´ é conduzido por cada um dos três propósitos básicos: explorar, descrever e explicar. Este autor recomenda o uso de protocolo no ´estudo de caso´ para desenhar cuidadosamente o projecto de investigação, que inclui as seguintes fases: a) visão global do projecto (objectivos, tópicos a investigar, possíveis intervenções; b) definição de campos de procedimentos (fontes de informação, onde e como actuar); c) elaboração das questões sobre o caso em estudo (questões específicas que devem ser focalizadas para "como" e "porquê") e que permanecem sempre na atenção do investigador, durante a recolha de dados; d) concepção do guia e da estrutura do relatório (formato da narrativa e da descrição dos fenómenos, a apresentação de conclusões). Yin encoraja ainda os investigadores a esforçarem-se por produzir uma análise de alta qualidade no ´estudo de caso´ e para isso recomenda a prossecução de determinados princípios a ter em atenção: a) mostrar que a análise denuncia todas as evidências relevantes; b) incluir todas as possíveis interpretações na análise; c) elencar os aspectos mais significativos do ´estudo de caso´; d) usar as investigações anteriores para aprofundar o conhecimento e elaborar de forma sustentada novas análises.

Para além do ´estudo de caso´ a investigação em curso comporta ainda dinâmicas próprias da investigação-acção que a seguir se descrevem.

Investigação-acção. Neste tipo de abordagem metodológica, a problemática ancora-se na "linearidade", defendida por Kemmis (1988), e reflecte-se na forma de pesquisa auto-reflectida que intervém em situações para melhorar e compreender as práticas sociais ou educacionais desenvolvidas em determinado contexto. Contudo, esta estratégia de investigação não se confina apenas a um instrumento de mudança social no campo educacional, mas a um espectro alargado de domínios, entre os quais se destacam a saúde, ambiente, justiça e comunicação (Bogdan e Biklen, 1994). Considera-se a investigação-acção como um percurso dinâmico que se desenvolve directamente num ambiente natural de trabalho, *com* os intervenientes do estudo e com a colaboração destes, especialmente no campo educativo dos estudantes, dos professores e ainda dos pais e encarregados de educação. Por outro lado, o que caracteriza a investigação-acção é a espiral reflexiva constituída por quatro fases que se articulam e complementam entre si recursivamente: a planificação, a acção, a observação e a reflexão (Kemmis, 1988; Kemmis e Mactaggart, 1988).

Também Richardson (1994) (citado por Ponte, 2002) frisa que a investigação sobre a prática "não é conduzida para desenvolver leis gerais relacionadas com a prática educacional e não tem como propósito fornecer a resposta *a* um problema. Em vez disso, os resultados sugerem novas formas de olhar o contexto e o problema e/ou possibilidades de mudanças na prática" (p. 7, itálico do autor). A investigação-acção é caracterizada, assim, por uma intenção de mudar a prática profissional, num *continuum* compromisso entre a reflexão e a intervenção planeada e a avaliação, numa perspectiva de participação activa e transformadora dos fenómenos (Ponte, 2002).

Segundo Bogdan e Biklen (1994), num projecto de investigação-acção, existe um compromisso do investigador, num contexto real, com a apropriação de uma lógica de intervenção reflexiva positiva na evolução do fenómeno em causa. A aceitação deste forte comprometimento do investigador orienta-se para a detecção do problema, a organização, o planeamento, a implementação da ideia e a reflexão construtiva posterior, envolvendo-se no propósito firme de ultrapassar dificuldades e dinamizar o processo numa lógica de sucesso. Por outro lado, Estrela (1986) defende que a investigação-acção organiza-se em função de três objectivos: a) *investigação académica*, para produzir conhecimento sobre a realidade; b) *inovação*, que compreende a identificação dos problemas e a intervenção de modo a resolver os problemas; c) *formação de competências*, que consiste no desenvolvimento de "um processo de aprendizagem social envolvendo todos os participantes, em função dos dois primeiros objectivos, no quadro de um processo mais amplo de transformação social, cultural e política" (p. 271).

Deste modo, a investigação em curso localiza-se no campo educacional e pretende "*in loco*" observar e compreender a dinâmica estabelecida nas aulas de Matemática, em duas turmas (estudo do ´caso´) com a implementação de estratégias de âmbito interdisciplinar, com vista à prossecução dos objectivos da Educação Matemática preconizados pelo Ministério da Educação, centrados fundamentalmente na aprendizagem da álgebra, com utilização ou não do computador. A estratégia implementada consubstancia-se na cooperação dos intervenientes nas vertentes da planificação, acção, avaliação e reflexão (*investigação-acção*) e com o propósito firme de melhorar a prática profissional *(investigação sobre a prática*[28]), de produzir e alargar o conhecimento científico e didáctico do objecto em estudo.

2.2. Estudo qualitativo e *quantificável*

Nesta investigação, de carácter essencialmente qualitativo, procura-se recolher dados diversificados que possam ampliar, aprofundar e, consequentemente, compreender melhor o assunto em estudo. Na construção de conceitos pré-algébricos, no âmbito da matemática em contexto e de natureza interdisciplinar, utilizando ou não as TIC, pretende-se analisar os *processos* metacognitivos e as *competências* desenvolvidas, na resolução de determinadas tarefas, entre as quais se desatacam: resolução de problemas, actividades de investigação e projectos. Em determinados campos educativos Tellis (1997) aconselha a

---

[28] João Pedro da Ponte aprofunda os conceitos de *investigação académica* usual e a *investigação sobre a prática* profissional (2002, p. 12-14).

investigação numa combinação da abordagem de tipo qualitativo, concretamente, no ´estudo de caso´, com outros métodos, de forma a enriquecer o processo de análise.

A metodologia de ´estudo de caso´ teve o seu auge entre 1900 e 1935. Difundida na Europa, através fundamentalmente da França, ficou associada, nos Estados Unidos, ao Departamento de Sociologia da Universidade de Chicago, onde residia um acervo significativo de literatura sobre esta temática (Tellis, 1997). Nesta altura vários problemas do campo sociológico eram fortemente investigados através do ´estudo de caso´. A partir de 1935 surgiu um movimento interno na própria sociologia que exigia um trabalho cientificamente mais forte, associando-se, à prossecução destes objectivos, o uso de métodos quantitativos através dos quais a medida emergia como um instrumento fiável da análise. Segundo Tellis (1997) a Universidade da Colômbia defendia esta posição, enquanto que a de Chicago identificava-se com o ´estudo de caso´, numa perspectiva de valorização e compreensão dos fenómenos estudados. Num debate público entre as duas Escolas, realizado em 1935, os professores e investigadores da Universidade da Colômbia "venceram" iniciando-se, logo de seguida, o declínio abrupto da crença na metodologia de investigação qualitativa. Assim, o uso dos métodos quantitativos avançou e o declínio do ´estudo de caso´ instalou-se. Nos anos 60 vários investigadores começaram a denunciar as limitações dos métodos quantitativos e iniciou-se um novo interesse pelo ´estudo de caso´ e, nalguns casos, estes dois métodos aliavam-se e completavam-se mutuamente no processo investigativo.

Tudo indica que Strauss e Glaser (1967) apressaram o renascimento da importância do ´estudo de caso´, mas a crítica mais feroz ao método situava-se apenas na impossibilidade de providenciar conclusões generalizáveis.

Pela evolução histórica referida e por aquilo que ela significa na procura constante de "perfeição" na investigação, a análise qualitativa não rejeita toda e qualquer forma de quantificação (Bardin, 1977) tendo a discussão da abordagem quantitativa *versus* abordagem qualitativa marcado um "volte-face" na concepção da análise de conteúdo. Este autor caracteriza a análise qualitativa pelo facto de a "inferência – sempre que é realizada – ser fundada na presença do índice (tema, palavra, personagem, etc) e não sobre a frequência da sua aparição, em cada comunicação individual" (p.115-116). Tudo leva a crer que "na primeira metade do século XX, o que marcava a especificidade deste tipo de análise, era o *rigor* e, portanto, a *quantificação*. Seguidamente compreendeu-se que a característica da análise de conteúdo é a *inferência* (a partir de variáveis de inferência ao nível da mensagem), quer as modalidades de inferência se baseiem ou não, em indicadores quantitativos" (Bardin, 1977, p. 116).

Bogdan e Biklen (1994) consideram importante que os investigadores qualitativos se disponham também à recolha de dados quantitativos de forma crítica: "Não é que os números por si só não tenham valor" (p. 195), mas o investigador qualitativo tende a problematizar e a compreender o processo de compilação dos dados perguntando-se qual o significado desses números.

Nóvoa e Campos (1991) também valorizam a recolha e o tratamento sistematizado de dados qualitativos e quantitativos, pois consideram que as opções metodológicas dos investigadores em Ciências da Educação têm sido relativamente simples com grande predominância dos métodos descritivos e dos inquéritos, sendo, nestas circunstâncias, o esforço de inovação metodológica relativamente limitado e reduzido. Também Estrela (1986) defende que já se começam a atenuar alguns antagonismos e dicotomias entre métodos quantitativos e qualitativos que afectaram, nos últimos anos, o desenvolvimento das Ciências da Educação, mas que hoje em dia a recolha dos dois tipos de dados enriquece e valoriza a matriz investigacional.

Tanto os métodos qualitativos como os quantitativos podem ser utilizados na investigação-acção (Bogdan e Biklen, 1994) e os investigadores que se conduzem por esta metodologia são exaustivos na busca de materiais que documentam, de forma consistente, as suas intervenções e as recomendações para a mudança. Relativamente à investigação qualitativa e quantitativa (ou de natureza quantificável) vários autores (Fernandes, 1991; Yin, 1994; Bogdan e Biklen, 1994; Ponte, 2002) são unânimes em afirmar que o mais importante é recolher dados adequados e merecedores de confiança para o fim que se tem em vista. Por consequência, é necessário planificar e agendar as intervenções necessárias, de forma sistemática, continuada e com procedimentos claros e bem definidos para facilitar a análise posterior de resultados.

Assim, nesta investigação pretende-se conjugar esforços, no sentido de se obterem dados de natureza qualitativa e quantificável, considerados complementares e não disjuntos, pois torna-se "evidente que há vantagens e desvantagens em cada um dos paradigmas da investigação e que dados de natureza quantitativa e qualitativa podem ser recolhidos, com claras vantagens no processo de resolução do mesmo problema" (Fernandes, 1991, p. 66).

3. Planificação da Investigação – Etapas do Estudo

Tendo por base os objectivos da investigação foi possível optar por determinadas formas e meios de observação, preconizados por Estrela (1986, 1990) e que ajudaram a delinear, o *projecto de observação*.

Segundo o autor, a análise dos objectivos gerais e específicos permite a construção do *projecto de observação*, baseado nos seguintes itens:

1 – A *delineação do campo de observação* – situações e comportamentos, tarefas, tempos e espaços de acção, formas e conteúdo da comunicação, interacções verbais e não verbais; etc.

2 – A *definição de unidades de observação* – as classes, os estudantes, um determinado tipo de fenómenos.

3 – O *estabelecimento de sequências comportamentais* – o *continuum* dos comportamentos e das aprendizagens realizadas.

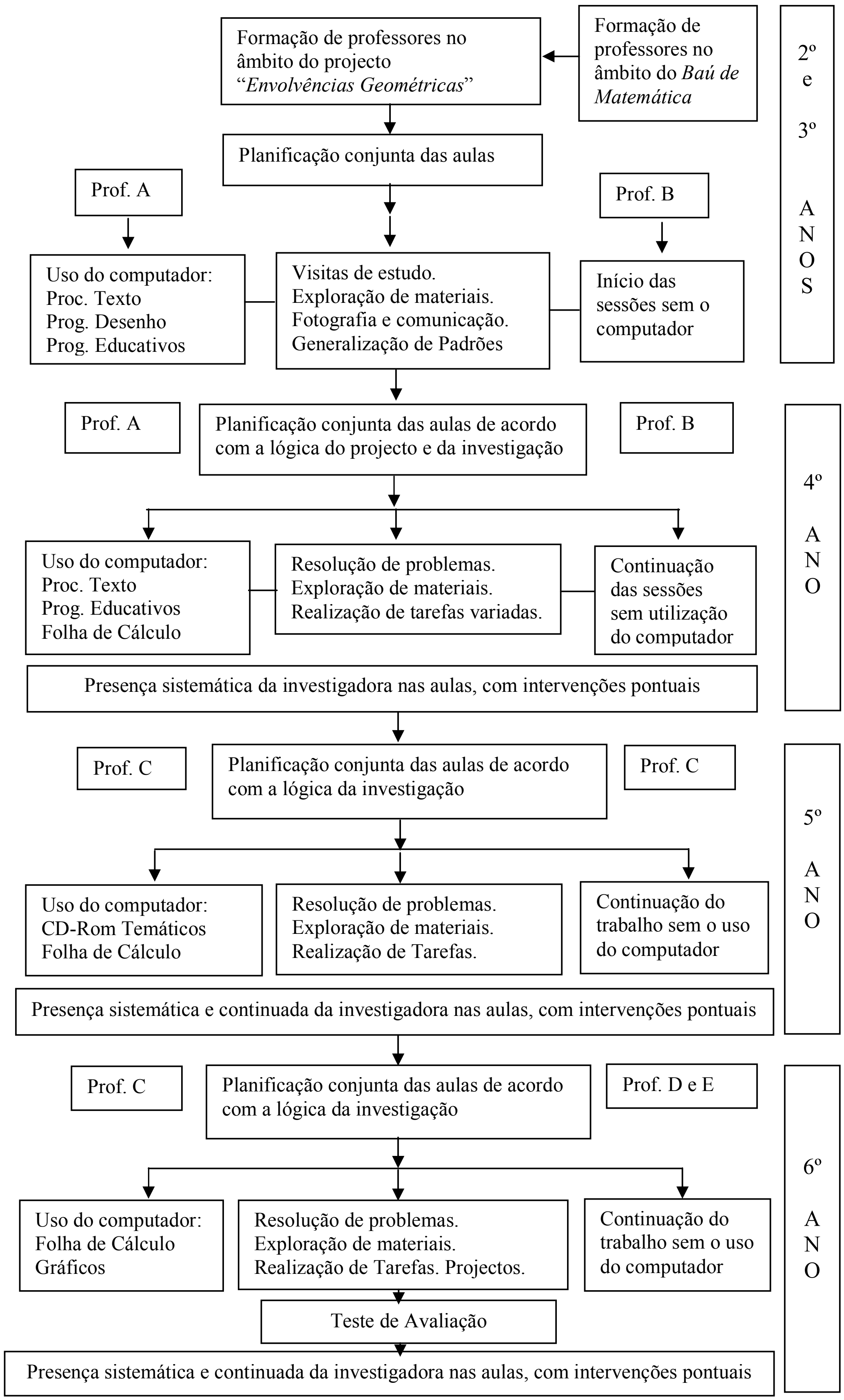
Assim sendo, a condução da investigação orientou-se pelo estabelecimento de etapas, de sequencialidade cíclica, que incluiram momentos particulares de aprofundamento progressivo, com sequencialidade temporal e integrando elementos que completaram o entendimento dos fenómenos, enquadrando-se num processo que Estrela (1990) apelida de "investigação aproximativa". O autor salienta a necessidade de uma macro-perspectiva inicial, para, de seguida, se decompor o todo nas suas partes, sem descurar a articulação da dinâmica global. As diferentes etapas do estudo prevêem a observação participante da investigadora, o estabelecimento de protocolos com as instituições e os professores, privilegiando sempre procedimentos abertos e "negociados" com os responsáveis pelas turmas. Neste processo de "investigação aproximativa, Estrela (1990) considera a existência de cinco etapas procedimentais essenciais. A primeira etapa identifica-se com a recolha de elementos de estrutura que não decorrem da observação directa da investigação. Na etapa dois, estabelece-se o diálogo com as instituições e os intervenientes mais directos no estudo. Na etapa três, definem-se os papéis da investigadora e dos professores e respectivas estratégias de intervenção. Na etapa quatro, delineiam-se as linhas orientadoras da formação dos intervenientes e a recolha de dados e, por fim, na quinta, emerge a avaliação, onde se analisam os dados, problematizam-se e analisam-se os processos e os produtos obtidos.

Bogdan e Biklen (1994) defendem também que "o plano geral do ´estudo de caso´ pode ser representado por um funil. (…) o início do estudo do funil representado pela extremidade mais larga" (p. 89). Num estudo qualitativo os investigadores começam por organizar uma malha larga de possíveis intervenções, procuram indícios, traçam planos iniciais, definem objectivos, perscrutam vários terrenos, pessoas a interpelar e cenários possíveis a implementar. À medida que se vai recolhendo informação e conhecendo melhor o tema em estudo, definem-se as finalidades, os planos, os tempos e as estratégias de actuação. Costa (1986) completa esta ideia referindo que a unidade social em observação não pode ser demasiado extensa nem o período de observação demasiado curto uma vez que se pretende uma recolha intensiva de informação para a descrever, caracterizar, interligar e interpretar.

Após a problematização da investigação, exposta no primeiro capítulo, com o levantamento de questões, a definição de objectivos e a delimitação da área de intervenção, delinearam-se estratégias de intervenção nesta *estrutura topo-base*. Assim, em cada uma das cinco etapas propostas por Estrela (1990), incluíram-se acções de intervenção de forma a aprofundar o estudo como um todo lógico, consistente e coerente.

Antes da apresentação descritiva de cada uma das fases do estudo apresenta-se, de seguida, o esquema da sequencialidade experimental da investigação no estudo das duas turmas – "*o caso*" (Figura 13, p. 160).

Figura 13: Esquema sequencial do campo experimental da investigação. Duas Turmas - ´*o caso*´



3.1. Etapa 1 - Identificação dos elementos de estrutura

Como se referiu anteriormente, esta etapa corresponde a um período de recolha de dados que não decorre da observação directa do processo. Refere-se, fundamentalmente, a "elementos de ordem histórica". Assim, nesta primeira etapa, foi solicitado ao Instituto de Inovação Educacional (IIE), em 1997, os resultados do TIMSS (anexo 1) os quais fundamentaram a apresentação do problema e as questões da investigação, expostas no primeiro capítulo. Na sequência desse estudo foram ainda contactadas as embaixadas dos países que obtiveram melhores resultados em Álgebra (anexo 1): República Checa, Hong-Kong, Japão, Federação Russa, Singapura e República Eslovaca e Áustria, com o intuito de recolher dados que pudessem contribuir para o enriquecimento do processo investigativo, designadamente, a possibilidade de: a) descortinar elementos essenciais dos sistemas educativos; b) conhecer a organização dos planos curriculares da disciplina de Matemática no ensino básico e c) aprofundar os objectivos, conteúdos e metodologias implementadas.

Numa perspectiva de alargar o espectro metodológico especialmente no que concerne à abordagem tecnológica foi pesquisada e estudada, em 1999, a linguagem de programação BOXER. Contactou-se uma das responsáveis americanas pela concepção deste *software* específico tendo obtida a informação de que uma primeira versão para Macintosh deveria estar disponível, possivelmente, em 2001.

Ao Gabinete da Avaliação Educativa – GAVE foram também solicitados os resultados do PISA – *Programme for International Student Assessment* da responsabilidade da OCDE e das Provas de Aferição do 4º e 6º anos de escolaridade (anexo 1). Dirigiram-se ainda cartas ao Programa Ciência Viva – Ministério da Ciência e Tecnologia e ainda ao Instituto Politécnico do Porto (anexo 1) no sentido de disponibilizarem um ou dois computadores Macintosch para explorar a linguagem de programação BOXER, nas aulas de Matemática. Todavia, por inexistência no mercado deste programa computacional não foi possível realizar tal experiência na investigação, inviabilizando-se a exploração desta linguagem de programação, no 2º ciclo do ensino básico, no estudo na construção de conceitos pré-algébricos.

Procurou-se, ainda nesta etapa, prestar atenção a estudos individuais ou institucionais realizados sobre Educação Matemática e fundamentar teoricamente a investigação, aprofundando-se a pesquisa bibliográfica em diversos campos, designadamente, o científico, conceptual, histórico, didáctico e instrumental.

Foram ainda analisados "dossiers" da instituição escolar alusivos aos estudantes das duas turmas em estudo, quer no 1º ciclo (1998/2000), quer no 2º ciclo do ensino básico (2001/2003). Outros espaços de natureza educativa também foram conhecidos, tais como: cantina, recreio, salas de aula, salas de estudo. Estes procedimentos procuraram fomentar o conhecimento prévio da instituição escolar, através do contacto e recolha de dados ao nível de estrutura e simultaneamente provocar o diálogo entre a investigadora, a direcção da Escola e os professores, bem como a integração gradual e harmoniosa da responsável pelo estudo na comunidade escolar.

3.2. Etapa 2 - Estabelecimento de interacções

Nesta etapa foram estabelecidos protocolos de comunicação e colaboração entre a investigadora, a Escola e os professores. Esta etapa foi facilitada no 1º ciclo do ensino básico pelo diálogo já existente no trabalho conjunto desenvolvido no "Baú de Matemática"[29] e no âmbito do projecto de âmbito interdisciplinar desenvolvido em Matemática, Educação Visual e as Tecnologias de Informação e Comunicação, designado por "Envolvências Geométricas" que também se estava a desenvolver no 2º ciclo do ensino básico na Escola onde iria continuar a investigação (anexo 2). Conhecidas as perspectivas de ambas as partes delinearam-se estratégias gerais de actuação, pela definição clara de espaços e tempos de intervenção, designadamente, da presença da investigadora na sala de aula. Refira-se que, nesta etapa, e especialmente no 2ºciclo do ensino básico, foi necessário negociar a autorização seguindo três conselhos propostos por Bogdan e Biklen (1994), em que "o investigador deve ser persistente, flexível e criativo" (p. 121). Ainda neste período analisaram-se ainda outros documentos: fichas individuais dos estudantes, contendo dados pessoais e familiares, registos dos professores sobre os conhecimentos e comportamentos dos estudantes.

Foi decidido que a base de trabalho deveria alicerçar-se no diálogo, na planificação conjunta, ficando acordado que algumas das tarefas deveriam ser propostas pela investigadora e desenvolvidas na sala de aula, após apresentação, discussão e análise prévia com as professoras responsáveis pelas turmas. Na preparação das aulas deveriam ser delineados os objectivos, os conteúdos, as estratégias a implementar, incluindo a escolha das tarefas a fim de serem desenvolvidas determinadas competências.

A análise e o registo de resultados seria da responsabilidade da investigadora, com a colaboração das professoras através da inclusão de comentários orais e escritos e de reflexões individuais ou em conjunto, com a investigadora.

Contemplou-se ainda, nesta etapa, o aprofundamento da fundamentação teórica e prática da investigação com a idealização e concepção de tarefas concretas, de problemas relacionados com as vivências do estudante, numa aproximação à matemática em contexto e/ou de âmbito interdisciplinar, com utilização ou não do computador.

3.3. Etapa 3 - Definição de estratégias de intervenção em campo

Para esta etapa foram definidos, especificamente, os papéis da investigadora e dos professores. Estes deveriam ser os principais responsáveis pela condução das actividades escolares na sala de aula, incluindo as relacionadas com o computador. Contudo, a iniciativa na realização de algumas actividades específicas, individuais, de grupo ou colectivas, bem como a gestão do tempo das mesmas, seria decorrente da negociação entre a investigadora e o(s) professor(es) responsável(eis) pelas turmas.

---

[29] O projecto anual em Educação Matemática "Baú de Matemática", iniciado em 1995, a partir de um projecto educativo de Escola. A investigadora foi co-responsável pela concepção/planeamento e execução das diversas edições do projecto (em 2004 já se tinham realizado nove edições).

Para conhecer as perspectivas iniciais dos estudantes face à utilização do computador e tendo em vista o trabalho futuro a desenvolver na sala de aula, a investigadora propôs a elaboração de um questionário para ser respondido pelos estudantes das duas classes, no 5º ano de escolaridade (anexo 3).

No período experimental do estudo e como observadora participante a investigadora participaria nas vivências escolares das crianças, com enfoque para algumas aulas de Matemática com a presença assídua e com possíveis intervenções de compromisso, pré-estabelecidas com as professoras responsáveis pelas turmas. O enquadramento curricular disciplinar, a definição de objectivos e competências, bem como a escolha de conteúdos específicos de carácter interdisciplinar deveriam ser propostos e analisados conjuntamente com os professores e, posteriormente, reflectidos e dinamizados em Conselho Escolar de Turma. As estratégias, os materiais a explorar e a calendarização das actividades deveriam também ser planeadas, tendo sido negociada a presença da investigadora nas duas turmas, em tempos próprios de observação e de participação activa, implicando, naturalmente, uma contínua reavaliação de processos e reflexões conjuntas. Assim, o acompanhamento e a orientação deveriam concretizar-se, fundamentalmente, ao nível da *concepção/planificação*, com sugestão concreta de materiais e tarefas a implementar e a fase da *reflexão/avaliação* do trabalho desenvolvido com estudantes e professores permitindo a reorganização e reorientação de objectivos e estratégias. Para sensibilizar a família para os objectivos educacionais do projecto e a realização de determinado tipo de tarefas foi entendido como necessário a realização, no 1º ciclo do ensino básico, reuniões com pais e encarregados de educação e numa delas esteve presente a investigadora e outros docentes do núcleo afectos ao projecto "Envolvências Geométricas".

Para acompanhar o percurso comportamental e cognitivo de estudantes, desde o 1º ciclo – 2º, 3º e 4º anos de escolaridade ao 2º ciclo, 5º e 6º ano de escolaridade, sendo este último ano o objecto da investigação formal optou-se, como foi referido, pelo estudo de caso de: a) *duas turmas*, com exploração e resolução de problemas e outras tarefas matemáticas em contexto interdisciplinar, sendo numa das turmas utilizado naturalmente e de forma circunstancial o computador; b) *alguns percursos de aprendizagem*, com "investigação aproximativa", que permitissem definir cenários possíveis de intervenção no domínio da álgebra e compreender os processos metacognitivos implementados na aquisição de conceitos pré-algébricos.

Para Stake (1998) o principal objectivo do estudo de casos é, antes de tudo, a particularização e não a generalização:

> "Se toma un caso particular y se llega a conocerlo bien, y no principalmente para ver em qué se diferencia de los otros, sino para ver qué es, qué hace. Se destaca la unicidad, y esto implica el conocimiento de los otros casos de los quel el caso en cuestión se diferencia, pero la finalidad primera es la comprensión de este último" (p. 20).

A tabela seguinte (Tabela 3) resume as metodologias sequenciais de intervenção, prevendo-se desde a fase *preparatória*, de registo e interpretação da informação recolhida, do 2º ao 5º ano de escolaridade, à fase de plena *operacionalização*, da análise global dos dados, com enfoque específico no 6º ano de escolaridade.

Tabela 3: Metodologias sequenciais de intervenção

Nível e ano de Escolaridade	**Ano Lectivo**	**Turma A**	**Turma B**
1º ciclo 2º ano 3º ano	1998/1999 1999/2000	Profa. A Planificação conjunta. Participação no Programa Ciência Viva III Projecto: “Envolvências Geométricas” de âmbito interdisciplinar, nas áreas de Matemática, Expressão Plástica e das Tecnologias de Informação e Comunicação (TIC). Tarefas idênticas de desenvolvimento e avaliação.	Profa. B
		Utilização do Processamento de Texto e de Programas de Desenho.	
Diálogo reflexivo e avaliativo com as professoras. Tomada de conhecimento da ambiência das turmas e das actividades desenvolvidas.			
1º ciclo 4º ano	2000/2001	Planificação conjunta. Criação e resolução de problemas, projectos de trabalho no campo geométrico e numérico relacionados com as áreas de Língua Portuguesa e Estudo do Meio. Fase exploratória para aferir estratégias, com a experimentação de problemas significativos.	
1º ciclo 4º ano (continuação)	2000/2001	Utilização de materiais manipuláveis, podendo também ser explorada a calculadora. Utilização do computador: Processador de texto, exploração de programas educativos temáticos e iniciação à folha de cálculo.	Utilização de materiais manipuláveis, podendo também ser explorada a calculadora.
	2001 - Junho	Realização de entrevistas. Reflexão conjunta com os professores sobre o trabalho desenvolvido. Registo a análise de dados.	
Aproximação ao **2º ciclo**	2001 - Junho	Diálogo com a direcção da Escola do 2º ciclo (EB 2,3) Planificação do trabalho. Definição de metodologias de actuação.	
	2001- Setembro	Recolha de informação baseada nas fichas individuais dos estudantes do 1º e 2º ciclos. Diálogo intensivo com a(s) professora(s) de Matemática e as directoras das duas Turmas.	

<table>
<tr>
<td rowspan="3">2º ciclo

5º ano
de escolaridade</td>
<td rowspan="3">2001/2002</td>
<td colspan="2">Profa. C Profa. C
Planificação conjunta, com aprofundamento da lógica do trabalho apresentado, discutido e desenvolvido nos anos anteriores.
Criação e desenvolvimento de tarefas no campo geométrico e numérico, relacionados com as disciplinas de Ciências da Natureza, Educação Física, Língua Portuguesa e História e outras áreas curriculares: Formação Cívica, Estudo Acompanhado, Área de Projecto e “Oferta da Escola” (TIC).
Utilização diversificada de materiais, tais como: o tangran chinês, os sólidos geométricos, mapas da cidade, jogo de cartas com poliedros…
Realização do questionário aos estudantes.</td>
</tr>
<tr>
<td>Utilização de materiais manipuláveis, podendo também ser explorada a calculadora.
Uso do computador, com CD-ROM temático sobre sólidos, figuras geométricas e medida;
Exploração da folha de cálculo na resolução de problemas.</td>
<td>Utilização de materiais manipuláveis, podendo ser também explorada a calculadora.</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">Elaboração de pareceres individuais, realizados pelos estudantes, das tarefas concretizadas.
Apresentação dos relatórios da professora.
Reflexão e avaliação do trabalho realizado.</td>
</tr>
<tr>
<td rowspan="5">2º ciclo
6º ano</td>
<td>2002
Set/Out

Out/Nov
Novembro</td>
<td colspan="2">Prof. C Prof. D e E
Diálogo/Negociação com os professores envolvidos.
Planificação e concepção de tarefas. Pesquisa de tarefas.
Elaboração do teste diagnóstico (pré-teste).
Pilotagem e validação do teste.
Aplicação do pré-teste.</td>
</tr>
<tr>
<td rowspan="3">2002/2003</td>
<td colspan="2">Aprofundamento do trabalho desenvolvido nos anos anteriores com enfoque para a operacionalização da investigação formal.</td>
</tr>
<tr>
<td>Utilização de materiais manipuláveis, podendo também ser explorada a calculadora.
Uso da folha de cálculo e dos gráficos</td>
<td>Utilização de materiais manipuláveis, podendo ser também explorada a calculadora.</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">Elaboração de pareceres individuais sobre as tarefas realizadas.
Concretização de relatórios temáticos integrados no processo de aprendizagem e avaliação de uma tarefa.</td>
</tr>
<tr>
<td>2003 - Junho</td>
<td colspan="2">Elaboração/Apreciação dos questionários e das entrevistas.
Aplicação do pós-teste.
Reflexão e avaliação do trabalho realizado.</td>
</tr>
</table>

3.4. Etapa 4 - Formação dos intervenientes

Formação dos estudantes

A utilização da folha de cálculo, na classe, provoca "diferentes aprendizagens quer de índole informática, quer de natureza interdisciplinar" (Fernandes, 1994, p. 221). Esta autora acrescenta ainda que, no 4º ano de escolaridade, os estudantes devem ser confrontados com actividades preparatórias à utilização da folha de cálculo contempladas, fundamentalmente, em dois tempos de interacção com o computador: *actividade lúdica,* com exploração de programas educativos temáticos que permitam ao estudante descobrir e explorar o teclado; *actividade de escrita de textos* que promova a criatividade e a capacidade de comunicar ideias.

Assim, no 1º ciclo do ensino básico, na turma A, foram implementadas, gradualmente, as seguintes actividades computacionais: a) exploração de programas educativos temáticos existentes no mercado para que, com aprofundamento conteúdal e de forma lúdica, o estudante descobrisse ou aprofundasse o conhecimento do teclado; b) realização de projectos de carácter curricular disciplinar e intersdisciplinar que possibilitassem o uso do processador de texto e de programas de desenho; c) utilização, por alguns grupos, da folha de cálculo na resolução de problemas.

No 2º ciclo do ensino básico, na turma A, foram utilizadas diferentes ferramentas computacionais: CD-ROM temáticos, a folha de cálculo e a construção de gráficos em enquadramento disciplinar, nas aulas de Matemática e na área curricular - oficina "Oferta da Escola". A exploração da folha de cálculo seguiu basicamente as orientações propostas por Fernandes (1994) num ´estudo de caso´ realizado em duas turmas do 4º ano de escolaridade, por Moreira (1989), numa investigação realizada no 2º ciclo e ainda por Santos e Ferreira (1995), num trabalho experimental desenvolvido com estudantes do ensino básico. Nos 1º e 2º ciclos do ensino básico foi também acompanhada a turma B, na qual não se usou o computador[30] nas aulas de Matemática, na resolução das tarefas propostas idênticas às da turma A, com exploração de materiais postos à disposição das duas classes, entre os quais se destacam: sólidos geométricos, jogos de cartas sobre poliedros, "tangran", mapas da cidade, entre outros.

Formação dos Professores e da Investigadora

Após a implementação do projecto de âmbito interdisciplinar "Envolvências Geométricas", foram realizados encontros reflexivos e formativos[31] com as professoras do 1º ciclo para debater alguns assuntos, entre os quais se destacam: (a) a importância da abordagem interdisciplinar do conhecimento matemático; (b) o interesse da utilização das tecnologias de informação e comunicação no desenvolvimento global do estudante e na concretização de projectos de âmbito disciplinar e interdisciplinar; (c) os aspectos

[30] Nesta turma o computador foi apenas explorado na área curricular não disciplinar "Oferta da Escola" (OE).

[31] Nas diversas edições do Baú de Matemática, até então realizadas, desde 1995 a 2004, tinha sido possível organizar, juntamente com alguns professores do concelho, experiências matemáticas inovadoras que proporcionaram a todos os intervenientes reflexões teóricas e práticas em Educação Matemática. O projecto interdisciplinar "Envolvências Geométricas" estava a permitir implementar, junto dos professores participantes, novas práticas educativas no ensino da Matemática.

pedagógicos relacionados com a exploração da folha de cálculo neste nível de ensino; (d) a importância da resolução de problemas no contexto da aprendizagem e do ensino da Matemática. Posteriormente, no âmbito da formação contínua de professores foi ainda desenvolvida uma acção de formação, da responsabilidade da investigadora, no âmbito do programa FOCO, designada por "Geometria, Arte e Comunicação", na modalidade de projecto, de cariz essencialmente interdisciplinar, nos domínios da Matemática, Educação Visual e das Tecnologias de Informação e Comunicação, onde intervieram formadores especialistas das três áreas e que, genericamente, faziam parte da equipa do Projecto, concretizado em duas fases: "Envolvências Geométricas I" e "Envolvências Geométricas II" desenvolvido nas Escolas do 1º e 2º ciclos onde estava a decorrer a investigação e ainda em Jardins de Infância e Escolas de diferentes níveis de escolaridade situados em diferentes localidades (Gafanha da Nazaré, Ílhavo, Porto e Valongo) (anexo 2).

Com o objectivo de se desenvolver uma atitude de auto-formação e de consolidação dos conhecimentos foi ainda acordado com os professores do 1º e 2º ciclos, a necessidade de se realizar o acompanhamento das actividades dos estudantes, dentro de uma filosofia de "aprendizagem em campo" (Matos, 1987-1988, p. 65). Também Benavente (1988) reconhece a investigação como parte do trabalho do professor. Para além desta postura profissional, a criatividade e a inovação devem marcar a acção do educador, considerando-se como um elemento de uma equipa educativa e de investigadores a tempo inteiro. Este propósito educativo requer a participação dos professores em acções de formação numa procura constante de aprofundamento de temas e de reflexões contínuas sobre a acção educativa. Relativamente a esta vertente os professores colaborantes na investigação participaram em diversas acções de formação promovidas pelos Centros de Formação de Professores e pelo Conselhos Directivos das Escolas, tendo sido, algumas delas, propostas e dinamizadas pela investigadora, designadamente, na Escola do 2º ciclo do ensino básico. Uma das acções subordinou-se ao tema: "educar para a cidadania", frequentada pela investigadora, pelas professoras responsáveis pelas turmas onde decorria o estudo e por outros elementos da comunidade escolar.

Nesta etapa foi ainda realçada a importância dos professores desenvolverem uma atitude experimental, de observação, registo e problematização. Esta preocupação vem na linha de vários pedagogos, entre os quais se destacam: Mialaret (1975); Dickson, Brown e Gibson (1984), Andersen e Estrela (1986, 1990) e Benavente (1988) que defendem a necessidade do professor ser formado cada vez mais através da investigação, dado que permite a descoberta dos comportamentos mais adaptados à sua personalidade e mais eficazes para o desempenho da sua função. De facto, cada vez mais o sistema educativo determina que o professor desempenhe o papel de investigador, devendo, para isso, ser capaz de recolher e organizar criteriosamente a informação e de se adaptar continuamente aos elementos da situação, o que provoca, segundo Estrela, a renovação do conceito tradicional de investigação, colocando-se directamente ao serviço da acção. Benavente (1988) reconhece também a investigação como parte do trabalho do professor, considerando que numa postura profissional coerente, a criatividade e a inovação devem marcar a acção do educador, apresentando-se como um elemento de uma equipa educativa e de investigadores a tempo inteiro.

Numa perspectiva ampla e aprofundada do objecto em estudo a investigadora frequentou também diversas acções de formação no âmbito da educação para a cidadania e de exploração computacional, designadamente, a aprendizagem dos programas de geometria dinâmica *Sketchpad* e *Cinderella.*

3.5. Etapa 5 - Avaliação

A avaliação relaciona-se com o processo de tentativa de compreensão dos significados atribuídos pelos estudantes no acto do ensinar e aprender, baseado em diversos diálogos interpessoais existentes em sala de aula:

> "A avaliação é mais do que o estabelecimento de conclusões definitivas. A avaliação é por natureza cíclica e segue um processo de observação, conjectura e constante reformulação dos juízos feitos sobre a compreensão dos estudantes. A avaliação deve ser fonte de juízos evolutivos por natureza independentemente destes terem por base os diálogos na aula ou os aspectos mais formais de testagem, característicos de quase todos os programas educativos" (NCTM, 1995, p. 240).

Avaliar não pode ser apenas testar capacidades, mas tem de ser um processo contínuo, diversificado, formal e informal de reforço de (auto)formação e do gosto (e da *aventura*) de aprender a aprender (Fernandes, 2001, documento interno da Escola). Contudo, a avaliação dos estudantes é considerada como "uma das tarefas mais problemáticas para os professores e tem sido acentuada, esta realidade, nos últimos anos com a reforma curricular" (Ponte, Boavida, Graça e Abrantes, 1997, p. 97). Tudo indica que o fenómeno não se restringe ao nosso país e constata-se que os instrumentos de avaliação utilizados[32] não têm acompanhado os objectivos, as dinâmicas de aprendizagem e ensino desenvolvidas em sala de aula e as orientações preconizadas por investigações e fundamentações teóricas recentes para o ensino da Matemática.

Nas *Normas para o Currículo e a Avaliação*, o NCTM (2000) propõe princípios para a avaliação dos estudantes e recomenda que esta faça parte integrante do processo de aprendizagem-ensino da Matemática e que sejam utilizados múltiplos meios de avaliação, dando-se atenção a um maior número das diferentes componentes do conhecimento matemático. Para a consecução destas orientações o NCTM recomenda a concretização dos seguintes procedimentos: a) focar uma grande variedade de tarefas matemáticas e adoptar uma visão holística da Matemática, em vez de focar capacidades específicas e isoladas organizadas numa matriz de objectivos/conteúdos comportamentais; b) recorrer a vários métodos de avaliação, incluindo formas escritas, orais e de demonstração (e algumas vezes ao uso de calculadoras, computadores e materiais manipuláveis), em vez de utilizar apenas testes escritos.

Assumindo a avaliação intenções didácticas, foi possível, ao longo do *continuum* da investigação, organizar e privilegiar momentos de avaliação. A análise dos dados recolhidos por diversos instrumentos de avaliação previa a integração de informação diversificada numa perspectiva de complementação e selecção dos dados efectivamente

---

[32] Segundo Ponte, Boavida, Graça e Abrantes (1997) os instrumentos de avaliação por excelência continuam a ser os testes e os exames, os quais tendem a valorizar os conhecimentos factuais dos estudantes, a sua rapidez e a eficiência na execução de procedimentos de cálculo.

relevantes, de acordo com os objectivos traçados para a investigação. As práticas de avaliação desenvolvidas procuraram respeitar as orientações de associações de professores de Matemática, nacionais e estrangeiras, investigações realizadas, designadamente, a do projecto MAT_{789}, realizado por Abrantes (1994) o qual concluiu que: a) não há um único instrumento capaz de captar os aspectos essenciais da evolução de um estudante nos vários domínios que se pretendem analisar; b) a aprendizagem de um dado conceito ou procedimento não deve estar associada a um momento único nem a uma forma única de o testar; c) o trabalho realizado por um estudante ou por um grupo não deve ser considerado como definitivo.

As preocupações expostas sobre a avaliação e os conceitos a ela associados incluem-se naturalmente no processo avaliativo do próprio estudante que precede, internamente, a análise e a avaliação da investigação em curso. Nestas circunstâncias as reflexões expostas acompanham o estudo e fornecem linhas orientadoras para momentos cruciais da investigação.

4. Contextualização

4.1. Participantes - caracterização

Os sujeitos directos e principais da investigação são quarenta e nove estudantes de duas turmas, designadas por turma A e turma B, pertencentes a um agrupamento de Escolas da área metropolitana do Porto que foram acompanhados, pela investigadora, na sua aprendizagem matemática, desde o 2º ao 6º ano de escolaridade, isto é, desde o ano lectivo de 1998/99 ao 2002/03. Estas classes, juntamente com outras deste e de outros concelhos participaram num projecto de âmbito interdisciplinar designado, na globalidade, por: "Envolvências Geométricas I e II – A Geometria na cidade", em que estavam integradas as disciplinas de Matemática, Educação Visual e Tecnologias de Informação e Comunicação. Sob a coordenação da investigadora e com a colaboração de uma equipa pluridisciplinar nas áreas focadas da Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico do Porto, de Jardins de Infância e de Escolas do Ensino Básico envolvidas no projecto, foi possível desenvolvê-lo no quadro do Programa Ciência Viva e nas condições definidas em anexo 2. Este projecto, de âmbito vertical, desenvolveu-se durante quatro anos[33], desde a Educação de Infância, 1º, 2º e 3º ciclos do ensino básico e ensino superior.

O início desta investigação teve origem neste enquadramento educativo e pedagógico com um primeira abordagem no campo geométrico, pela observação e manipulação de padrões, frisos e pavimentos e posteriormente no campo numérico com a implementação de diversas experiências de aprendizagem, surgindo o computador como um aliado natural na exploração do conhecimento matemático.

[33] O projecto foi desenvolvido de 1998 a 2002, em duas fases. De 1998 a 2000 designado por "Envolvências Geométricas" e a segunda fase de 2000 a 2002 denominado por: "Envolvências Geométricas II – A Geometria na cidade".

Caracterização da entidade Turma. Como a investigação previa um estudo vertical ao longo de dois ciclos com grau de aprofundamento no 2º ciclo do ensino básico, com enfoque aproximativo no 6º ano de escolaridade e atendendo a que a variação do número de estudantes foi mínima, considerou-se por conveniente, apenas neste ano, coligir, registar e sistematizar os dados escolares e pessoais dos estudantes.

As duas turmas, designadas por turma A e turma B eram constituídas, respectivamente, por 25 estudantes, 13 raparigas (52%) e 12 rapazes (48%) e 24 estudantes, 12 rapazes e 12 raparigas (50%). As idades dos estudantes variavam entre 10 e 12 anos na turma A e entre 10 e 14 anos na turma B, notando-se, nas duas turmas, uma grande concentração nos 11 anos, respectivamente, 60% e 71% (Tabela 4).

Tabela 4: Distribuição dos estudantes por idade e género

	Idade	**Raparigas**	**Rapazes**	**Total**	**%**
Turma A	10	3	4	7	28
	11	8	7	15	60
	12	2	1	3	12
Total		*13*	*12*	*25*	*100*
Turma B	10	2	2	4	17
	11	9	8	17	71
	12	0	1	1	4
	13	0	1	1	4
	14	1	0	1	4
Total		*12*	*12*	*24*	*100*

A caracterização de cada uma das turmas teve por base os dados recolhidos em: a) entrevistas realizadas às professoras do 1º ciclo de cada uma das turmas; b) ficha de caracterização do estudante, elaborada na Escola do 1º ciclo e preenchida para cada estudante pelas professoras das turmas; c) ficha de caracterização do estudante concebida no 2º ciclo e respondida individualmente por cada um dos estudantes; d) entrevistas realizadas às professoras de Matemática das duas turmas e às duas directoras de turma.

Para caracterizar aspectos relacionados com vivências pessoais e familiares dos estudantes foi reunida informação sobre: a) o número de irmãos; b) com quem vive o estudante; c) as observações dos estudantes; d) as actividades profissionais dos pais ou encarregados de educação. A situação de filhos únicos e de um único irmão é relativamente próxima nas duas turmas A e B, respectivamente, num total, nos dois casos, de 21 (5+16) e 17 (4+13) estudantes. Contudo, apenas há dois estudantes na turma A que têm dois irmãos e quatro na B e só nesta última turma é que há estudantes que têm três e nove irmãos (Tabela 5).

Tabela 5: Número de irmãos dos participantes do estudo

Número de Irmãos	**Turma A** (Total de estudantes)	**Turma B** (Total de estudantes)
0	5	4
1 com idade superior ou igual a 15 anos com idade inferior a 10 anos	 6 10	 5 8
2 com idade superior a 15 anos com idade inferior a 10 anos um com idade inferior a 10 e outro com idade superior a 15 anos	 2 0 0	 2 1 1
3 um com idade inferior a 10 anos e dois com idades superior a 15 anos	0	1
9 Com idades superiores a 15 anos	0	1
Não respondeu	2	1

A maior parte dos estudantes das duas turmas vive com os pais, sendo sensivelmente o mesmo número nas duas turmas, 17 na turma A e 18 na turma B (Tabela 6). É de salientar que os estudantes da turma A referem observações relacionadas com o lazer: o gosto de realizarem várias actividades e de se relacionarem com animais. De modo diferente responderam os estudantes da turma B que não revelaram este tipo de preferências e as observações são em menor número, registando-se apenas preocupações relacionadas basicamente com a saúde.

Tabela 6: Com quem vive o estudante e observações

	Com quem Vive	**Quantos**	**Observações**
Turma A	Vivo comigo	2	Pais separados
	Mãe e irmã	1	Pais separados
	Pais e irmãos	9	Tenho um peixe que gosto muito Tive um peixe que adorava, mas já morreu; Tenho um cão que gosto muito; Adoro orcas; Gosto de brincar com a minha cadela e jogar computador; Gosto de jogar à bola; Adoro Inglês
	Pais ou Pai e mãe	8	Gosto de brincar; Gosto de comer; Adoro Matemática e Inglês; Eu gosto de estudar; Gosto de jogar futebol
	Pai, irmã e avós	2	
	Mãe	1	
		2	Não responderam

	Com quem Vive	Quantos	Observações
Turma B	Pais e irmão	4	
	Pais ou Pai e mãe	14	Alergia ao pó da casa (dois estudantes) Alergia ao pólen e a alguns medicamentos (um rapaz); Estrabismo (uma rapariga).
	Pai, irmã e avó	3	
	Mãe	1	
	Mãe e dois sobrinhos	1	
		1	Não respondeu

É curioso registar que dois estudantes, um rapaz e uma rapariga da turma A referiram que vivem "com eles próprios", pois os pais estão separados.

Grau de instrução dos pais ou encarregados de educação. Relativamente ao grau de escolaridade e à profissão, os familiares dos estudantes das duas turmas revelaram algumas diferenças que a seguir se destacam.

Na turma A há oito mães com instrução superior, ocupando quadros médios superiores; três domésticas; uma desempregada; quatro quadros médios e as restantes exercem actividade no sector dos serviços. As profissões dos pais são muito variadas e em diferentes sectores, existindo apenas dois com formação superior, alguns com "arte" de serralheiro, sucateiro, moleiro e outros trabalham no sector dos serviços.

Na turma B há sete mães que são domésticas e apenas uma com formação superior, uma desempregada e as outras exercem profissões no sector dos serviços. É de registar que nesta turma apenas um pai é quadro médio, no sector da banca; há dois funcionários públicos; dois gerentes; dois vendedores; três profissionais de seguros; outros com uma "arte" de louseiro, sucateiro, estofador, marmorista, marceneiro, pasteleiro, exercendo, os restantes pais e/ou encarregados de educação, profissões no sector de serviços. Há ainda um estudante órfão e outro que não refere a profissão do pai.

Caracterização genérica das duas turmas. Pelos dados recolhidos junto da professora do 1º ciclo do ensino básico pode-se concluir que a maioria dos estudantes da *turma A* desenvolveu as capacidades e competências em Língua Portuguesa, previstas para esse nível de ensino, destacando apenas seis estudantes com dificuldades a nível de expressão oral e escrita. Foram ainda referenciados sete estudantes pouco empenhados e oito com pouca capacidade de concentração, fazendo parte da turma um estudante indicado como uma criança com necessidades educativas especiais.

É de referir que a directora de turma do 2º ciclo do ensino básico considera que os estudantes desta turma têm um nível sócio-cultural médio/elevado e que mais de metade da turma aspira a estudar e a realizar um curso de nível superior e, nesta perspectiva, a maior parte deles empenha-se para conseguir concretizar os seus projectos de vida. Contudo, a professora de Língua Portuguesa desta turma referir, continuamente, que os estudantes revelavam deficiências ao nível da comunicação oral e escrita, usando vocabulário pobre e sintaxe incorrecta na realização de composições escritas.

A informação recolhida junto da professora do 1º ciclo do ensino básico e da directora de turma do 2º ciclo da *turma B* indica que a maior parte dos estudantes tem um nível de literacia baixo em Língua Portuguesa e o vocabulário é restrito, revelando graves deficiências ao nível ortográfico. Por outro lado, a maior parte dos estudantes são interessados e gostam de resolver, com êxito, as tarefas que lhe são propostas. O nível sócio-cultural e económico das famílias é, na generalidade, médio/baixo, mas são empenhados em colaborar com a Escola, apoiando indirectamente os seus filhos, através da participação em reuniões escolares, quando solicitados, mas declarando, grande parte deles, alguma incapacidade para realizarem uma ajuda concreta nos trabalhos escolares dos seus educandos.

Na generalidade, as professoras de Matemática e os directores das duas turmas referiram que a maior parte dos estudantes revela conhecimentos, interesses e empenho em realizar, com êxito, as tarefas propostas na disciplina de Matemática. Contudo, grande parte dos estudantes da turma B manifesta necessidade e forte motivação para resolver questões práticas e situações do dia a dia, valorizando esta vertente nas aprendizagens matemáticas.

4.2. Contexto educativo

O período experimental da investigação decorreu no ensino básico durante cinco anos, do 2º ao 6º ano de escolaridade, com níveis de intervenção diferenciada e já referidos na etapa três do estudo. A opção foi no campo "experimental", por oposição ao espaço "clínico" e não "laboratorial", dado que é desenvolvido em aulas, no meio natural, onde as actividades escolares diárias são implementadas. Cabrita (1998) num estudo que realizou de cariz "laboratorial" sobre a exploração dum documento hipermédia na aprendizagem do modelo de proporcionalidade directa, justifica a sua opção pelo facto da utilização do computador na sala de aula estar longe de se tornar uma realidade sistemática num futuro próximo e interroga-se, no final do estudo, sobre a pertinência e interesse que investigações futuras analisem "até que ponto o local ideal para o desenvolvimento de experiências afins seja a própria Escola e preferencialmente com o acompanhamento do próprio professor" (p. 226). Perante estas vontades reforçadas por estudos de outros investigadores que defendem, no campo educativo, um estudo "*in loco*" e já fundamentado em tópicos anteriores deste capítulo, recolheram-se, especificamente, dados em duas turmas, num *continuum* das aulas e na vida escolar dos estudantes, a partir da coordenação de um projecto de âmbito interdisciplinar, já caracterizado (anexo 2). Por sua vez, as tarefas propostas desenvolveram-se num quadro escolar actual mais amplo, ultrapassando as aulas de Matemática e enquadrado na flexibilidade curricular definida pelo Decreto-Lei nº 6/2001. Inicialmente o projecto de investigação teve o enfoque no estudo de frisos e pavimentos, no qual se previa o desenvolvimento de conhecimentos matemáticos, numa envolvência cultural forte e focalizada para o campo geométrico, concretamente para a observação da realidade, pelo estudo da forma, da cor, numa perspectiva alargada da valorização do património arquitectónico e do meio ambiente.

Integrada nos objectivos do projecto interdisciplinar e da investigação em curso, no ano terminal do 1º ciclo do ensino básico, houve uma opção clara de intervenção na aprendizagem da matemática em contexto, com uma forte incidência na resolução de problemas de âmbito interdisciplinar, alargadas aos domínios da Língua Portuguesa e do Estudo do Meio, sendo usado, numa das turmas, o computador. Assim, a acção da investigadora, no 1º ciclo do ensino básico, situou-se ao nível da planificação/acompanhamento das actividades em co-responsabilização com as professoras e posterior participação nas aulas, com observação e algumas intervenções pontuais no 4º ano de escolaridade.

No 2º ciclo do ensino básico, a investigação situou-se ao nível da planificação e definição de estratégias conjuntas de intervenção, numa relação mais próxima com os estudantes, especialmente, nas aulas de Matemática, mas também na oficina das Tecnologias de Informação e Comunicação, "Oferta da Escola" (OE), e, de acordo com as necessidades de resolução das tarefas propostas, no Estudo Acompanhado, Formação Cívica, Área de Projecto, Ciências da Natureza, Língua Portuguesa, História e Educação Física. Tal como no ciclo transacto, no 2º ciclo do ensino básico houve uma opção clara de intervenção na aprendizagem da matemática em contexto e de âmbito interdisciplinar, com uma forte incidência na resolução de problemas, actividades de investigação e concretização de projectos, respectivamente, relacionados com a vida escolar e social do estudante e com as disciplinas ou áreas curriculares referidas. A participação da investigadora noutros espaços de acção educativa foi também possível, designadamente, em reuniões de pais ou encarregados de educação, em Conselhos Escolares de Turma e em acções de formação promovidas e desenvolvidas na Escola.

Devido à presença de diversas variáveis no processo educativo e acumuladas naturalmente pelo *continuum* da investigação, houve uma preocupação constante em planear e "controlar" as condições de aprendizagem nas duas turmas, de acordo com os propósitos da investigação, o que de certo modo foi conseguido no 1º ciclo do ensino básico. Relativamente ao 2º ciclo solicitou-se à direcção da Escola a possibilidade das duas turmas terem horários no mesmo turno e a mesma professora de Matemática, de forma a poderem ser criadas condições análogas de investigação nas duas turmas. Contudo, apenas foi possível cumprir a "anulação" da variável professor na área de Matemática no 5º ano de escolaridade e por constrangimentos de ordem institucional tal propósito não pôde ser cumprido no 6º ano de escolaridade. Depois de analisada a situação, criada neste ano de escolaridade, optou-se por não se restringir o ´estudo de caso´ a uma só turma, continuando a acompanhar-se as duas turmas, com a implementação de tarefas similares, com diálogos idênticos e a vontade objectiva e "serena" de optimizar o trabalho realizado a montante e já bastante significativo para a investigação. Por outro lado, reforçava-se a ideia da inviabilidade de estudos comparativos amplos, assumindo-se a possibilidade de análises mais contextualizadas e particulares, focalizadas na tarefa e nos procedimentos dos estudantes e enquadrados nas condições institucionais criadas, em que cada uma das classes funcionou como um referencial de análise, com a abertura reflexiva suficiente para se poder recolher mais dados consistentes para o estudo.

Erickson (1986), conhecedor destas e de outras dificuldades nos estudos qualitativos, enfatiza a interpretação como chave da investigação em campo, considerando indispensável a presença de um investigador-intérprete no terreno para que observe o desenvolvimento do caso, recolha com objectividade o decurso das actividades, examine o significado e reoriente a observação para precisar e suster esses significados. Segundo este autor o investigador de casos pode, em determinada altura, modificar e inclusivamente substituir as perguntas iniciais da investigação. Como no ´estudo de caso´ o importante é entender a totalidade (Stake, 1998) então, se as primeiras perguntas não funcionam ou se aparecem temas novos, deve-se, de forma realista e, se for caso disso, alterar o desenho da investigação, designado por Parlett e Hamilton (1976), como um *enfoque progressivo*.

Reconhecendo a veracidade da afirmação proferida por um dos responsáveis pela Escola do 2º ciclo: "A Escola é uma realidade não é um Laboratório" e de não ter sido possível "isolar" ou "controlar" totalmente variáveis que intervêm neste complexo processo do aprender e ensinar (Merriam, 1991, 1998; Santos dos Santos, 1998) reflectiu-se, então, conjuntamente e, de forma objectiva, consciente, lúcida e responsável, optou-se por não se limitar o estudo a uma só turma (já que a tentação era essa!), num firme propósito de concatenar mais dados, problematizar e compreender melhor o fenómeno em causa.

5. Estratégias e Instrumentos de Recolha de Dados

5.1. Enquadramentos

A recolha de dados foi orientada por um referencial metodológico de aprofundamento científico, histórico e pedagógico, em que a ênfase é colocada no contexto do trabalho escolar, no qual se promovem as actividades matemáticas procurando, a investigadora, observar, interpelar, provocar, ouvir para descrever, da forma mais completa possível, o fenómeno e, simultaneamente, o problematizar e o interpretar. No acompanhamento das turmas procurou-se, assim, descortinar os pontos de vista dos participantes principais do fenómeno, os estudantes, e simultaneamente reunir tudo o que pudesse completar e enriquecer os processos, designadamente: impressões, sentimentos, emoções, reacções, alterações de interesses ou motivações, significados que atribuem às situações, bem como acções que se iam vivendo e partilhando socialmente.

Myers (1997) reconhece que o tipo de dados recolhidos influencia a análise de forma muito significativa, bem como as estratégias e os instrumentos de recolha de dados. Tendo como referência outras investigações e programas internacionais de avaliação do desempenho em Matemática, entre os quais o TIMSS (IIE, Novembro de 1996), o PISA 2001 e o PISA 2003 em que se utilizaram diferentes instrumentos de recolha de dados (resolução de testes, tarefas experimentais e questionários aplicados a estudantes, professores e Escolas) na investigação presente construíram-se, fundamentalmente, dois tipos de instrumentos de recolha de dados: a) uns dirigidos preferencialmente para uma avaliação qualitativa, com o objectivo de se registarem e analisarem os *processos* envolvidos, identificando-se dinâmicas, níveis de participação, reacções dos sujeitos envolvidos, atitudes, (pré)disposições e b) outros passíveis de serem quantificáveis, orientados para os *produtos* obtidos, relacionados com o desenvolvimento de competências matemáticas, em particular das pré-algébricas desenvolvidas pelos estudantes, com utilização ou não do computador. Neste enquadramento educativo usaram-se basicamente três técnicas de recolha de dados: a observação, a inquirição e a análise documental e para cada uma delas recorreu-se a um conjunto variado de instrumentos de recolha de dados. Na *observação* dos estudantes em aulas forma utilizados diversos instrumentos, entre os quais se destacam: i) *registos* de notações em *blocos de notas*, com presenças esporádicas da investigadora nas aulas de Matemática no 2º e 3º anos de escolaridade e presenças contínuas e regulares, a partir do 4º ano e com ainda maior frequência no 5º e 6º ano de escolaridade nas duas turmas; ii) *registos fotográficos, áudio e video de aulas*, para recolha da informação factual.

Na inquirição também forma utilizados vários instrumentos de recolha de dados, dos quais se destacam: i) *questionário* aplicado aos estudantes sobre a utilização do computador na Escola, classe e aula de Matemática; ii) *entrevistas* aos professores e estudantes; iii) *conversas informais* com estudantes e professores, em aulas ou em outros espaços; iv) *fichas individuais de estudantes* elaboradas pelas Escolas do 1º e 2º ciclo para registo de dados pessoais, comportamentais e de aproveitamento, preenchidas pelos estudantes ou pelos professores ou directores de turma; v) *registos pontuais* da iniciativa dos estudantes ou solicitados pela investigadora; vi) *apreciações escritas periódicas*, realizadas pelos estudantes, sobre o trabalho desenvolvido; vii) *documentos de análise* elaborados pelos professores, com apreciações genéricas e específicas; viii) *tarefas* resolvidas pelos estudantes; ix) *teste de avaliação* - concretizado no 6º ano de escolaridade.

Orientada pela metodologia de ´estudo de caso´ com liames aos pressupostos da investigação-acção procurou-se, através da utilização dos diferentes técnicas e instrumentos de recolha de dados, dar ênfase às opiniões fundamentadas das pessoas, principalmente, aos estudantes, ao(s) professor(es) e, pontualmente, aos pais e/ou encarregados de educação. Assim, os estudantes realizaram comentários particulares após a realização das tarefas e comentários periódicos ou apreciações globais dos trabalhos concretizados. Alguns dados factuais da observação foram registados em áudio e vídeo. Deste modo, na recolha de dados procurou-se assumir, de forma sistemática e continuada no tempo, uma atitude de permanente atenção aos modos de pensar e de análise crítica dos intervenientes no estudo.

A recolha de dados localizou-se ainda ao nível da pesquisa, concepção/planeamento e realização de tarefas concretizadas nas aulas e ainda em casa, nomeadamente: a) resolução de problemas de âmbito disciplinar, de matemática em contexto e de abrangência interdisciplinar; b) actividades de investigação; c) desenvolvimento de projectos; d) realização do teste de avaliação no 6º ano de escolaridade. Todos os instrumentos de aprendizagem e avaliação foram concretizados individualmente ou em grupos de dois ou três estudantes, mas o teste (pré e pós-teste) foi realizado individualmente. A maior parte das tarefas desenvolveram-se em aulas de Matemática, total ou parcialmente, sendo, neste último caso, implementadas ou em parte concretizadas noutras disciplinas e áreas curriculares, respectivamente, Língua Portuguesa, História, Ciências da Natureza, Educação Física; Estudo Acompanhado e Formação Cívica, tendo sido experimentada, com mais frequência, a Oficina da Escola na turma A, por ter sido utilizado o computador na concretização de algumas tarefas.

Dada a importância do trabalho escolar em casa, como evidencia o programa de avaliação TIMSS e assumindo-se a necessidade de um estudo continuado na disciplina de Matemática em diferentes tempos e espaços, foram também propostas tarefas para serem concretizadas, em casa, individualmente e/ou apoiados pela família.

5.2. Fiabilidade e validação dos instrumentos

Para aumentar a credibilidade de um ´estudo de caso´ é fundamental realizar uma descrição pormenorizada e abundante de todo o processo da investigação, reconhecendo que o ponto crítico na investigação qualitativa não é tanto reunir dados, mas "filtrar" e objectivar a grande parte dos dados que se acumula (Stake, 1998). Este autor insiste na necessidade de uma "descrição compacta" da lógica de inferência utilizada pelo investigador ou nas palavras de Yin (1994, p. 34), da "cadeia de evidências" (*chain of evidence*). Segundo Stake a "arte" do ´estudo de caso´ está em o investigador obter confirmações necessárias para aumentar a credibilidade das interpretações que faz e, para isso, deverá recorrer a um ou vários "protocolos de triangulação" que existem para o efeito, que segundo o autor são quatro, a saber: a) *triangulação de fontes de dados*, em que se confrontam os dados provenientes de diferentes fontes; b) *triangulação do investigador*, em que entrevistadores/observadores diferentes procuram detectar desvios derivados da influência do factor "investigador"; c) *triangulação da teoria*, em que se abordam os dados partindo de perspectivas teóricas e hipóteses diferentes; d) *triangulação metodológica*, em que para aumentar a confiança nas suas interpretações o investigador faz novas observações directas com base em registos antigos, ou ainda procedendo a múltiplas combinações "inter metodológicas" (aplicação de um questionário e de uma entrevista semi-estruturada, etc).

Fiabilidade. Em termos gerais, a fiabilidade (fidelidade ou fidedignidade) de um estudo científico, seja ele de cariz quantitativo ou qualitativo está relacionada com a replicabilidade das conclusões a que se chega (Vieira, 1999), ou seja, com a possibilidade de diferentes investigadores, utilizando os mesmos instrumentos poderem chegar a resultados idênticos sobre o mesmo fenómeno (Yin, 1994; Mertens, 1998). Na prática, trata-se de verificar se os dados recolhidos na investigação são estáveis no tempo e se têm consistência interna, sobretudo se provirem de fontes múltiplas (Stake, 1998; Punch, 1998). Se na investigação quantitativa este requisito se alcança com o recurso a instrumentos fiáveis e técnicas padronizadas para a recolha de dados, num ´estudo de caso´ a situação é distinta porque, por um lado, o investigador é o principal e, muitas vezes único, "instrumento" do estudo (Costa, 1986; Vieira, 1999) e, por outro, porque o ´caso´ em si não pode ser replicado ou reconstruído (Yin, 1994).

Mesmo assim, este último autor considera que a questão da fiabilidade não pode deixar de ser colocada se queremos que ao nosso ´estudo de caso´ seja reconhecida pertinência e valor. Para isso Yin (1994) defende a necessidade de se fazer uma descrição tão pormenorizada quanto possível de todos os passos operacionais do estudo e a conduzir a investigação de modo que outros autores, independentes, possam repetir os mesmos procedimentos em contextos comparáveis. Também Goetz e Lecompte (1984) defendem que só uma descrição clara e detalhada pode possibilitar que os resultados do estudo sejam utilizados por outros investigadores permitindo a "tradução" e a "comparação", depois das componentes do estudo, incluindo unidades de análise, conceitos gerados e contextos, estarem suficientemente bem descritos e definidos.

Por outro lado, Ponte (2002) salienta que "não devemos esquecer que os critérios clássicos da investigação em ciências sociais e humanas, validade e fiabilidade, são uma herança do positivismo, preocupado sobretudo com a possibilidade de garantir a "certeza" das conclusões" (p. 22). Acrescenta ainda o carácter ilativo do conceito de certeza, mesmo nas ciências exactas e da natureza, defendendo que há outros valores que devem ser considerados numa investigação, pois "muitas vezes uma investigação é importante, não pelas suas conclusões, mas pelas questões que coloca ou pelo olhar que proporciona sobre uma dada realidade" (Ponte, 2002, p. 22). Assim, os critérios de qualidade de uma investigação não devem estar apenas centrados na questão da validade e da certeza, mas da prossecução das finalidades, da compreensão de uma situação ou da resolução de um problema concreto. Neste capítulo, no ponto sobre a observação participante apresenta-se um quadro (Tabela 7, p. 183), em que o autor define os critérios de qualidade da investigação e que naturalmente constituem um elemento de referência do presente estudo.

Como o problema da fidelidade se reveste de algumas dificuldades particulares no caso da análise de conteúdo, pois qualquer conteúdo é susceptível de diversas interpretações (Vala, 1986), procurou-se objectivar, o mais possível, descrições factuais de situações observadas e vividas, destacando-se evidências no percurso da investigação possibilitando uma interpretação mais rigorosa e uma compreensão mais ampla do fenómeno de modo a promover a emergência de indicadores específicos de intervenção e a possibilidade da identificação de inferências globais.

Validação. Para Tellis (1997) o problema principal numa investigação de ´estudo de caso´ é a construção da validade. É uma fonte de criticismo neste tipo de pesquisa devido à potencial subjectividade do investigador. Para minorar esse problema Yin (1994) propõe usar múltiplas fontes de evidências, estabelecendo uma cadeia de evidências. Stake (1998) e Yin (1984, 1994) identificam pelo menos seis fontes de evidências no ´estudo de caso´: documentos, registos em arquivos, entrevistas, observação directa, observação participante e registos recolhidos. Assim, utilizando várias fontes e instrumentos de recolha de dados é possível realizar a "triangulação" das evidências, pois a informação obtida nuns documentos pode corroborar a evidência de outras fontes de dados. Em termos gerais, a validade interna de um estudo refere o rigor ou a precisão dos resultados obtidos, ou seja, o quanto as conclusões obtidas representam e/ou explicam a realidade estudada (Punch, 1998). A validade atravessa todas as etapas de uma análise de conteúdo e, neste sentido, importa ciclicamente averiguar se cada instrumento serve os propósitos da investigação ou se o investigador está presente nos tempos e espaços correctos para prosseguir os objectivos do estudo (Vala, 1986). Por outro lado, Quivy e Campenhoudt (1998) completam esta ideia, pois consideram que a validade do trabalho de investigação qualitativa, em que "o instrumento principal de recolha de dados é a observação participante, reside na precisão e no rigor das observações, bem como no contínuo confronto entre as observações e as hipóteses interpretativas" (p. 197-199). Neste sentido, torna-se necessário dar particular atenção à reprodução ou não dos fenómenos observados, bem como à convergência entre as diferentes informações obtidas que devem ser sistematicamente delimitadas. Segundo estes autores a validade da observação de tipo etnográfico, como é a observação participante, deve ser "fundada num trabalho de grande fôlego e necessita, além disso, de uma sólida formação teórica por parte dos investigadores" (1998, p. 199). Por outro lado, a triangulação, segundo Yin (1984), emerge como uma necessidade ética de confirmar a validação dos processos e para Myers (1997) as investigações (qualitativas e/ou quantitativas) são baseadas nos princípios da constituição da "validade" para os quais estes métodos são mais adequados de forma a conduzirem a uma análise apropriada.

Os instrumentos escritos de recolha de dados utilizados no 2º ciclo, como o questionário e as diferentes tarefas: problemas, actividades de investigação, projectos e o teste, foram submetidos a um painel de docentes especialistas (10 juízes), do ensino básico e superior, politécnico e universitário com larga experiência de ensino. Assim, todos estes instrumentos de recolha de dados foram analisados seguindo diferentes parâmetros: a) linguagem, revendo os vocábulos usados, bem como a construção sintáctica das frases adaptada ao nível etário dos estudantes; b) organização e formulação das questões, analisando a gradualidade sequencial das questões e a respectiva adequabilidade ao desenvolvimento cognitivo do estudante; c) objectivos delineados e conteúdos pretendidos; d) outros aspectos considerados relevantes (aspectos pictóricos e gráficos, espaço disponível para a resolução das questões, etc). A partir da *pilotagem*, reflectia-se, reformulava-se e obtia-se a versão final dos vários instrumentos de recolha de dados.

5.3. Estratégia multimodal – *a triangulação*

Numa investigação de carácter essencialmente qualitativo é desejável que o modelo conceptual inicial seja *multidisciplinar* ou, mais precisamente, "*multireferencial*", isto é, que comporte referências teóricas múltiplas, numa perspectiva indutiva e de aplicação (Maren, 1996, p. 375). Nesta perspectiva, o investigador não se pode limitar a uma só teoria (que é verificada ou não), mas deve munir-se de várias orientações teóricas que completem o mais possível o quadro teórico conceptual do problema, utilizando variados instrumentos para recolher informação procurando uma estratégia capaz de aumentar o rigor e a profundidade de qualquer investigação. Segundo aquele e outros autores (Hammerseley 1986; Stake, 1998; Serrazina 1998) a *triangulação* é a melhor técnica que serve os objectivos traçados de uma investigação de cariz qualitativo. Para corresponder à exigência de rigor e coerência da metodologia qualitativa é necessário usar múltiplos métodos e uma variedade de fontes, identificando-se a triangulação como a estratégia de recolha de dados mais adequada (Serrazina, 1998, p.113), proporcionando a reflexão e a análise de conteúdo dos dados recolhidos e ainda "no tratamento dos dados qualitativos e/ou quantitativos é imprescindível realizar a *triangulação* das fontes para se poder atingir com mais acuidade o grau de fidelidade da medida em estudo" (Maren, 1996, p. 381). Este último autor acrescenta ainda que o modelo conceptual inicial constitui-se, em si mesmo, como uma modelação integrando, de maneira dinâmica, os modelos parciais sugeridos por diversas orientações teóricas.

No sentido estrito, a triangulação designa "a comprovação de dados obtidos a propósito de um mesmo tema ou evento recolhidos por diversas fontes sobre várias dimensões e a partir de técnicas diferenciadas" (Maren, 1996, p. 380). Acrescenta ainda que se torna necessário, nas ciências humanas, *triangular* os dados que considera serem de três tipos: invocados, suscitados e provocados. Posteriormente, é desejável analisá-los com origem em diversas fontes e obtidos por técnicas diversificadas, para reflectir, avaliar e analisar em que medida a informação recolhida permitirá elaborar uma ideia válida ou uma cadeia de evidências capaz de caracterizar e interpretar globalmente o fenómeno (Bardin, 1977; Yin, 1994; Stake 1998).

No sentido técnico, o termo "*triangulação*" parece ter origem na trigonometria. Para Maren (1996) há referências mais poéticas, descrevendo a origem do termo, como vindo da navegação (marítima ou aérea) onde o piloto é obrigado a tomar vários pontos (medida da orientação definida pelo ângulo entre o Norte e a vista de um objecto no horizonte), sendo possível, a partir de diferentes indicações, cruzar as estimativas da sua posição e situar-se, assim, com maior precisão.

Elliot (1990, p. 150) acrescenta algo de significativo ao termo "*triangulação*" e conclui estar associado ao tipo de recolha de dados sobre os sujeitos, o que implica, necessariamente, a obtenção de informação sobre uma situação particular de ensino baseada em três pontos de vista distintos: os correspondentes ao professor, aos estudantes e ao observador participante. Refere ainda que a determinação de quem obtem a informação, de como se apresentam os relatórios e de quem os compara depende, consideravelmente, do contexto. Por outro lado o processo de integrar os relatos dos três pontos de vista tem uma justificação epistemológica: "Cada vértice do triângulo situa-se numa posição epistemológica singular com respeito ao acesso de dados relevantes sobre uma determinada situação do ensino e da aprendizagem" (Elliot, 1990, p. 150).

Na opção pela investigação participante, em que diversos autores defendem a triangulação como a estratégia de recolha de dados mais eficiente no quadro metodológico qualitativo escolhido impõe-se, naturalmente, saber escolher o terreno para observar os factos, mas simultaneamente:

> "… assurer la drecibilité de ce qu´il rapporte en utilisant plusieurs techniques, don't le recoupement de ses observations, de ses sources d´information et de ses… interprétations! Car pour amplifier la difficulté, le chercheur doit aussi être juge de la valeur et des significations apportées par les faits d´observation qu´il a lui même produits. Or, la communauté des chercheurs attend bien de lui que non seulement ses données soient crédibles, mais aussi que ses interprétations soient impartiales, qu´elles ne soient pas contaminées par ses préjugés, ses espérances, ses croyances" (Maren, 1996, p. 293).

Apesar de Stake (1998) assumir que um dos inconvenientes deste processo é a subjectividade considera que esta não é uma falha que se possa ou deva eliminar, mas um elemento essencial da compreensão. A falsa compreensão só se verifica se o investigador intérprete não está consciente das suas próprias limitações intelectuais, e como consequência usa métodos defeituosos e não consegue evitar as falsas interpretações. Segundo Stake (1998) os investigadores qualitativos têm uma preocupação respeitável pela validação das suas observações e procedimentos habituais de "*triangulação*", cujos propósitos se aproximam da dos investigadores quantitativos, mas com a consciência tranquila da carência de estratégias amplamente consensuais que submetam as falsas compreensões subjectivas a uma comprovação exaustiva.

5.4. Observação participante

Uma das fontes usadas na recolha de dados foi a observação participante, pois permite ao investigador ter uma participação activa nos eventos, desenvolvendo o estudo nas proximidades do grupo e criando oportunidades especiais de recolha de dados (Tellis, 1997). Esta maneira de recolher dados proporciona a construção do "objecto de pesquisa por meio de aculturação progessiva e da endoculturação permanente do investigador, na aprendizagem do conhecimento do grupo que estuda como se fosse membro do grupo em questão" (Uturra, 1986, p. 157). Também através da observação participante é possível "estudar uma comunidade durante um longo período, participando na sua vida colectiva" (Quivy e Campenhoudt, 1998, p. 197). A literatura refere que a partir da década de 1970-80, a investigação pedagógica passou a utilizar frequentemente a observação participante, umas vezes como fonte de recolha de dados, outras como método, exercendo uma forte influência nos investigadores educacionais, ao propor esta estratégia de análise do real centrado na convergência de metodologias quantitativas e qualitativas. Ao desenvolver trabalhos de pesquisa utilizando esta forma de observar a realidade Smith (1979) atribui um papel heurístico à observação participante, definindo e utilizando um modelo que inclui vários aspectos: (1) a estratégia experimental, apoiada em grupo de controlo e grupo experimental, com estudos estatísticos dos resultados do pré e pós-teste; (2) o "*survey*" constituído por entrevistas, questionários e quantificação de dados; (3) a observação participante, centrada no problema a avaliar. A observação participante é, assim, considerada, por este autor, fundamentalmente, uma técnica de análise qualitativa do real, centrada na interpretação dos fenómenos, a partir das diversas significações que os participantes, na acção, lhes conferem.

Costa (1986) defende que na investigação qualitativa baseada na observação participante o instrumento principal de pesquisa da informação é o próprio investigador e "os principais procedimentos são a presença prolongada no contexto social em estudo e o contacto directo, em primeira mão, com as pessoas, as situações e os acontecimentos" (p. 137). Também Lessard-Hébert, Goyette e Boutin (1994) corroboram esta ideia e referem que a observação participante é uma técnica de investigação qualitativa em que o próprio investigador é o instrumento principal da investigação, sendo necessário que defina, com rigor, o seu papel em relação ao *continuum* da observação-participação. De acordo com os postulados epistemológicos do paradigma interpretativo ou compreensivo "o investigador *pode compreender* o mundo social *do interior*, pois partilha a condição humana dos indivíduos que observa" (Lessard-Hébert, Goyette e Boutin, 1994, p. 155-157).

As acções investigativas podem ser melhor compreendidas quando observadas no seu ambiente habitual de ocorrência, interessando-se mais pelo processo do que simplesmente pelos resultados ou produtos e, neste sentido, Bogdan e Biklen (1994) defendem que: "os investigadores qualitativos frequentam os locais de estudo, porque se preocupam com o contexto" (p. 48). Também Pires (1995) corrobora esta posição salientando que os investigadores qualitativos assumem que "o comportamento humano é significativamente influenciado pelo contexto em que ocorre e por isso frequentam os locais de estudo para compreenderem e interpretarem melhor a realidade educativa" (p. 53). O objectivo de uma investigação de tipo qualitativo consiste em descrever e interpretar as interacções do grupo e de o acompanhar nos trabalhos para preservar a identidade do mesmo, tornando-se os investigadores, mais recentemente, observadores participantes (Heath, 1986).

Para se realizar um estudo qualitativo no campo educacional, Serrazina (1998) defende a investigação participada na recolha de informação, mas simultaneamente salienta que, tal opção, acarreta alguns compromissos de neutralidade:

> "My role as a teacher educator could not be neutral in this research. The teachers with whom I worked knew that I had views about mathematics education. It is obvious that it was impossible to carry out my job without my personal values and opinious being evident. (…) The methodology should also allow me to interact with teachers in their natural sitting and should be sufficiently flexible to embrace a variety of research techniques, as and when they became relevant" (p. 111).

Por outro lado, Ball (1990) (citado por Serrazina, 1998, p. 112-113) refere que existem, também, compromissos de "reflexividade" assumidos pelo próprio investigador constituindo-se como base do rigor da pesquisa qualitativa, o qual se esforça por minorar a subjectividade inerente à observação participante, encontrando acordos no campo das relações sociais e na tomada de decisões. Ponte (2002) também comunga desta ideia, mas salienta que existem mecanismos funcionais para ultrapassar estas dificuldades, entre as quais destaca "o plano de trabalho, bem como os registos realizados (por exemplo, no diário de bordo) que possibilitarão ao investigador um espaço autónomo de realização que lhe permitirá, quando necessário, o distanciamento relativamente aos acontecimentos do dia a dia" (p. 19).

Landsheere (1986) considera que "o *conhecimento qualitativo da realidade educativa* é um empreendimento humano por excelência, através do qual a educação surge como um domínio da contingência" (p. 140) e, por tal motivo, defende que é absolutamente necessário encontrar mecanismos para que uma parte dos investigadores seja originária do corpo docente. Vasconcelos (1997) corrobora esta ideia e escreve: "No paradigma da investigação qualitativa, não existe uma realidade exterior a ser investigada por um investigador supostamente objectivo. As realidades construídas socialmente são múltiplas. Assim, não é possível o investigador ser exterior ao estudo: tem que estar dentro do estudo, tal como Velásquez está dentro do seu quadro" (p. 350).

Por outro lado, o investigador tem de ser capaz de se afastar das actividades observadas e reflectir, de forma conhecedora, no contexto das mesmas, tentando discernir e perceber a perspectiva sócio-cultural envolvente (Hammersley, 1986). Este último autor salienta, ainda, que uma das críticas feitas ao estudo realizado por Bennett (1986), que relaciona o estilo de ensino do professor com o progresso do estudante na área de Matemática, residiu no facto de terem sido usadas, como documentação inicial, as respostas aos questionários previamente elaborados e não a resultante de uma observação participada que possibilitasse o contacto directo com o comportamento desses professores. Nesta perspectiva, Patton (1990) salienta que o investigador, ao preocupar-se em contextualizar o objecto de estudo, tem como centro de pesquisa a inter-relação do "como" e do "onde", com descrição das circunstâncias, sempre com a intenção de compreender o fenómeno, a situação ou o programa como um *todo*. Acrescenta ainda que a selecção, o desenho e a implementação dos métodos de investigação devem ser flexíveis, baseados em necessidades práticas e numa sensibilidade situacional, próximo da realidade, mais do que na consonância de um conjunto de métodos confinados a um determinado paradigma filosófico.

Na realidade, a objectividade de qualquer análise requer tempos "infinitos" de reflexão para reformular olhares, descrições e também avaliações (Hammerseley, 1986; Patton, 1990). Toda a ambiência criada na sala de aula intervém na aprendizagem, pois até mesmo a interacção de factos eminentemente sociais, como as respostas a perguntas formuladas pelo professor tem implicações nas competências académicas e no ambiente educacional criado (Mehan, 1986) tornando-se, por tal motivo, essencial acompanhar e registar o *dia a dia* da classe. Também Hammersley (1986) defende que o estudo em sala de aula é o mais completo aspecto da investigação educacional pois, para este autor, quem quiser entender o que se passa na Escola, para desenvolver ou alterar, tem de entender o que ocorre na classe. Pires (1995) reforça esta ideia defendendo também a necessidade de se "analisar a prática educativa a partir do contexto, do sentido, da história e da intencionalidade dos dados observados" (p. 53).

A investigação participante persegue, como objectivo primeiro, a implicação do grupo observado com vista ao seu desenvolvimento, mas, simultaneamente, tende a criar conhecimento útil aos outros, tornando-se o investigador mais receptivo a encontrar soluções (Landsheere, 1986). Por outro lado, surgem dificuldades suplementares que o investigador deverá saber transpor, resultantes da riqueza do processo, designadamente, na acumulação rápida de uma grande quantidade de material heterogéneo para tratar (Maren, 1996, p. 295), entre o qual se destaca: dados dos espaços, observação das acções, recolha de documentos, registo de diálogos, ensaio de materiais, etc, onde os problemas relacionados com a classificação e a sistematização implicam dificuldades na análise e no tratamento da informação como um todo, não descurando ainda as particularidades do processo. Na perspectiva de orientar, reajustar objectivos e procedimentos metodológicos no sentido de cumprir as metas delineadas, Ponte (2002) refere que "uma investigação sobre a prática pode ter menos sofisticação metodológica mas, em contra partida, tenderá a possuir um forte vínculo com a prática, autenticidade, novidade e dialogicidade" (p. 21) e apresenta critérios de qualidade da investigação sobre a prática que importa destacar (Tabela 7).

Tabela 7: Critérios da qualidade da investigação (Ponte, 2002)

Critério	**A investigação…**
Vínculo com a prática	… refere-se a um problema ou situação prática vivida pelos actores.
Autenticidade	… exprime um ponto de vista próprio dos respectivos actores e a sua articulação com o contexto social, económico, político e cultural.
Novidade	… contém algum elemento novo, na formulação das questões, na metodologia usada, ou na interpretação que faz dos resultados.
Qualidade metodológica	… contém de forma explícita, questões e procedimentos de recolha de dados e apresenta as conclusões com base na evidência obtida.
Qualidade dialógica	… é pública e foi discutida por actores próximos e afastados da equipa.

Como o estudo se insere num contexto pluri-relacional e de âmbito interdisciplinar, de vivências escolares, que ultrapassam a disciplina de Matemática e a própria sala de aula requer necessariamente a utilização de várias estratégias de recolha de dados entre os quais se destaca a observação participante. Importa, assim, observar continuamente fenómenos e as inter-relações pessoais *do pensar e do agir*, coligir e analisar resultados recolhidos nas aulas de Matemática e nas diferentes sessões de trabalho realizadas noutras disciplinas ou áreas curriculares.

5.5. Estratégias de Inquirição

5.5.1. Questionário aos estudantes

As exigências de rigor e de objectividade de um estudo qualitativo determina o uso de múltiplas técnicas e fontes de recolha de dados (Merriam, 1991, 1998). Procurando ir ao encontro desta pretensão, incluíram-se nestas estratégias de inquirição diversos instrumentos de recolha de dados, entre os quais se destacam: um questionário aos estudantes das duas turmas (anexo 3), apreciações orais ou escritas realizadas pelos estudantes e pelas professoras sobre o trabalho implementado, entrevistas, tarefas matemáticas e um teste de avaliação.

A elaboração do questionário aplicado aos estudantes teve origem numa investigação realizada anteriormente pela investigadora sobre a utilização das TIC, no 4º ano de escolaridade, numa Escola da área metropolitana do Porto. Segundo Ary, Jacobs e Razaviech (1987) a elaboração de instrumentos de recolha de dados, designadamente questionários, deve merecer cuidados especiais, uma vez que têm de se mostrar adequados às pessoas a interrogar, de forma a respeitar os requisitos de clareza e de precisão, evitando-se, deste modo, respostas erradas, ambíguas ou incompletas.

Estrutura e Objectivos. Tendo presente algumas das vantagens e desvantagens de determinada concepção de questionário, relativo ao nível das componentes de elaboração e tratamento de dados, optou-se pela realização de um questionário semi-estruturado, contendo, a maior parte das questões, itens não mutuamente exclusivos, outros de escolha múltipla exclusiva e ainda uma questão aberta, que requeria, tanto quanto possível, uma resposta livre. Nesta, pedia-se ao estudante que escrevesse uma pequena composição baseada nos seus gostos, necessidades e anseios relacionados com as potencialidades expressas pelos estudantes, com ou sem experiência de utilização do computador.

Para Ary, Jacobs e Razaviech (1987) os questionários estruturados são caracterizados por conterem perguntas e respostas alternativas, excluindo-se mutuamente. Referem ainda que a resposta a um questionário estruturado realiza-se de uma forma directa e os resultados apresentam-se de fácil análise. No entanto, salientam como desvantagem fundamental a de obrigar os respondentes a escolher uma das alternativas previamente seleccionadas, o que, por vezes, não representa realmente a(s) atitude(s) do inquirido ou podendo ainda não haver, por parte deste, uma interpretação clara e precisa de cada uma das respostas alternativas.

Por outro lado, os questionários semi-estruturados revelam naturalmente uma definição prévia das questões, mas têm a vantagem do formato não ser tão rígido, atribuindo maior liberdade ao inquirido para que possa expressar as suas opiniões e opções, reconhecendo-se, à partida, que a informação recolhida não é de análise linear. Os autores consideram ainda que os questionários devem conter uma estrutura previamente delineada, pois só assim, é possível que os sujeitos inquiridos não omitam aspectos importantes para o estudo ou, por outro lado, realcem assuntos que careçam de interesse para o investigador.

Os objectivos da investigação, o contexto, o grau etário dos estudantes, o nível sócio-cultural, bem como as orientações definidas pela investigação, determinaram a escolha da estrutura do questionário. Neste contexto, elaborou-se um questionário semi-estruturado orientado para os estudantes do 2º ciclo do ensino básico (anexo 3), permitindo basicamente a concretização dos objectivos seguintes.

Conhecer a experiência anterior do estudante com o computador. Para isso colocaram-se questões relacionadas com o tempo, espaços[34] e actividades desenvolvidas pelo estudante, semanalmente, no computador, sendo a maior parte das questões de escolha múltipla não exclusiva.

Descortinar as motivações e as expectativas dos estudantes face à utilização do computador em vários espaços, incluindo a sala de aula. Elaboraram-se ainda questões de escolha múltipla, não mutuamente exclusiva e uma questão em aberto possibilitando maior liberdade de expressão ao estudante.

5.5.2. Entrevistas

Para Tellis (1997) as entrevistas são uma das principais fontes de recolha de informação no estudo de casos e um dos elementos da cadeia das evidências preconizados por Yin (1994) e Stake (1998). Segundo Bardin (1977) os instrumentos utilizados na recolha e organização dos dados influem no tipo de análise que se deseja implementar. Por exemplo, respostas a questões, organizadas para codificação, com tudo o que isso implica de *standardização*, nivelamento e conformação orientam-se para uma análise quantitativa. Contudo, segundo este autor, as mensagens provenientes de um único ou vários emissores, mas irredutíveis à normalização (singularidade da expressão, da situação, nas condições de produção e de finalidade no objectivo da comunicação), como no caso das entrevistas não directivas, apresentam-se como um todo, um sistema estruturado segundo leis que lhe são próprias e portanto analisáveis em si ou incomparáveis. Segundo Bardin, (1977) torna-se também imprescindível, numa investigação de carácter qualitativo "distanciarmo-nos da crença sociológica na significação da regularidade. O acontecimento, o acidente e a raridade, possuem, por vezes, um sentido muito forte que não deve ser abafado" (p.116).

[34] Dado que nos resultados do TIMSS (IIE, 1996) "os estudantes do 8º ano de Escolaridade, em mais de metade dos países, referem que o trabalho de casa ocupa 2 a 3 horas por dia, sendo o tempo destinado aos trabalhos de Matemática superior àquele que é destinado aos de Ciências" (p. 3) e que nos resultados nacionais - contextos em que decorrem as aprendizagens -, regista-se que nas actividades lectivas de Matemática e de Ciências dos 7º e 8º anos de Escolaridade "muitos dos trabalhos de casa não são contabilizados para a classificação final dos estudantes" (p. 9) pareceu-nos aconselhável incluir no questionário uma questão sobre o uso do computador nos Trabalhos de Casa (TPC) de Matemática.

O psicoterapeuta Rogers (1985) defende que uma entrevista deve ser caracterizada pela não-directividade. Na prática, um dos princípios que norteou a condução das entrevistas, num âmbito de terapia em grupo, estava relacionado com a formulação das questões da maneira mais aberta possível, de modo que o entrevistado pudesse exprimir o que pensava, de forma livre e espontânea, na sua linguagem e nos seus quadros de referência.

Na condução da entrevista Quivy e Campenhoudt (1998) defendem que não se devem temer os silêncios, pois as pequenas pausas numa entrevista podem permitir ao entrevistado reflectir mais calmamente, reunir as suas recordações e sobretudo aperceber-se que dispõe de uma importante margem de liberdade. Por outro lado, estes autores defendem que o êxito da entrevista depende da maneira como funciona a interacção entre os dois parceiros com a observação dos seguintes preceitos: a) abster-se, o entrevistador, de se implicar no conteúdo da entrevista e fazer o menor número de perguntas; b) procurar que a entrevista se desenrole num ambiente e contexto adequados e c) gravar a entrevista.

Na investigação realizaram-se entrevistas de carácter "cirúrgico" em ambiência de sala de aula, para entender esta ou aquela informação, atitude ou resolução e ainda outras entrevistas gravadas, concretizadas na sala de aula ou noutros espaços com objectivos mais globais e precisos procurando entender as posições e opiniões fundamentadas dos estudantes e dos professores sobre o trabalho desenvolvido.

As entrevistas realizadas na investigação possibilitaram abrir pistas de reflexão, alargar horizontes, tomar consciência das dimensões e dos aspectos de um dado problema, nos quais possivelmente "de outra forma, o investigador não pensaria espontaneamente" (Quivy e Campenhoudt, 1998, p. 197).

5.6. Tarefas matemáticas

As tarefas têm um papel importante na regulação da actividade desenvolvida pelos estudantes (Pires, 2002) e parecem possuir uma ordem interna, existindo em cada tipo de tarefa um padrão próprio, que se traduz num plano mais ou menos preciso, ou seja, num esquema de actuação prática que pode desencadear a actividade dos estudantes. A aprendizagem da matemática, na maior parte das vezes, tem sido baseada na repetição de procedimentos rotineiros (NCTM, 2000) e, segundo esta organização, é necessário, por conseguinte, implementar a resolução de tarefas nas aulas de Matemática, de diferente tipologia, para que os estudantes apliquem os conhecimentos, compreendam as matérias e desenvolvam competências.

Christiansen e Walther (1986) tratam a tarefa como o suporte da aprendizagem e simultaneamente o objecto da acção do *aprendente*. Ponte, Boavida, Graça e Abrantes (1997) consideram que: "a natureza das tarefas propostas pelo professor e das actividades realizadas pelos estudantes constitui um factor decisivo na dinâmica da sala de aula de Matemática" (p. 73) e, consequentemente, na aprendizagem da disciplina.

Tarefa *versus* Actividade. As diferentes tarefas em que os estudantes se envolvem: problemas, exercícios, investigações, construções, produção de relatórios, jogos, apreciações escritas, entre outras, proporcionam o ponto de partida para o desenvolvimento da actividade matemática (Ponte, Boavida, Graça e Abrantes, 1997). Estes autores e Christiansen e Walther (1986) associam a criação da tarefa, na maior parte das vezes, a uma acção do professor e a actividade, podendo ser física ou mental, que a sucede em termos temporais, diz respeito ao estudante. Neste livro de Didáctica, Ponte e os outros investigadores defendem, tal como Christiansen e Walther (1986), que a tarefa surge como o objecto do ensino sobre a qual o estudante actua, relacionando e compreendendo dados, planificando e executando, na tentativa de descobrir uma solução. Tudo indica que é nesta intervenção de compromisso que se produz a aprendizagem.

Estes autores concluem que a tarefa é exterior ao estudante e, normalmente, é ela que aponta para a mobilização de diferentes estruturas e conceitos matemáticos, provocando no estudante a vontade e também a motivação (ou não!) de intervir. A conjugação destas acções intrínsecas e de visibilidade exterior constituem a actividade, na qual o estudante se envolve e aprende matemática. Christiansen e Walther (1986) defendem que "a tarefa educacional tem sido concebida/construída e formulada num certo contexto e influenciada por certas intenções didácticas" (p. 277).

Na investigação a escolha das tarefas desenvolvidas com os estudantes foi criteriosa e pautou-se pela diversidade, procurando cumprir os objectivos previamente estabelecidos e prevendo um grau de complexidade gradual, contemplando a proposta pedagógica de Ausubel (1963) e de outros autores da área das teorias da aprendizagem, entre os quais se destacam Piaget (1965, 1975), Vygostsky (1979-1995). Collis (1974); Cannone e Socas (1998) consideram que uma das actividades básicas nas aulas de Matemática é a de resolver problemas e que isto não é somente um objectivo da área, mas também um instrumento metodológico importante.

Como o uso da matemática está interligado a todas as actividades computacionais, os estudantes deveriam ser encorajados a confrontarem-se com situações do dia a dia, a transportá-las para expressões matemáticas, a resolvê-las e a interpretar os resultados à luz da situação inicial (Weaver e Morse, 1981). Por outro lado, Shoenfeld (1985) e Lester (1993) consideram ser essencial que os estudantes utilizem estratégias de resolução de problemas e, para isso, é necessário evidenciá-las tal como se faz com qualquer outro conteúdo curricular, pois o ensino explícito de estratégias de resolução de problemas tem um impacto positivo e significativo no desempenho matemático dos estudantes. Cabrita (1998) assume a complexidade do processo de resolução de problemas, mas defende que "a capacidade para desenvolver tal actividade é de tal ordem importante que a não podemos descurar" (p. 64), vincando bem a necessidade da resolução de problemas não poder ser um acto isolado e verificável apenas em momentos específicos ou ocasiões especiais.

Também Pires (1995); Rojano (1996); Piaget (1975) e Bruner (1987), entre outros, referem que na Educação Matemática não devem ser esquecidos os "problemas da vida real", dado que a solução de qualquer deste tipo de problemas requer uma quantidade substancial de informação e de estudo baseado nas relações estabelecidas entre os dados. Estes e outros investigadores salientam algumas das características relevantes deste tipo de problemas: a) não têm questões definidas, mas talvez a(s) questão(ões) deva(m) ser formulada(s) desde o princípio; b) os dados necessários não são todos fornecidos, mas têm de ser recolhidos e avaliados; c) a sua análise e interpretação são muito complicadas; d) uma resposta definitiva muitas vezes não é possível, sendo a validação apenas possível para o quadro actual (de momento ou momentâneo).

Assim, tornou-se essencial para a investigação pesquisar e seleccionar as tarefas mais adequadas aos *objectivos*, *conteúdos* da disciplina, ao nível escolar e cognitivo dos estudantes, integrando-os na exploração da matemática em *contexto* e de âmbito *interdisciplinar*. Algumas das tarefas foram adaptadas de revistas nacionais e internacionais da especialidade e de programas de avaliação nacional ou internacional sobre o desempenho da matemática, designadamente, das provas de aferição, programas TIMSS e PISA e outras foram ainda idealizadas pela investigadora.

As diferentes propostas apresentadas, desde problemas, actividades de investigação a projectos orientaram-se, basicamente, para o desenvolvimento de competências essenciais no domínio da pré-álgebra e transversais pela interacção com outros saberes curriculares. As tarefas propostas visavam a promoção de raciocínios de tipo: a) *(empírico)-indutivo*, pela descoberta de padrões e explicitação da regra que generalizava o fenómeno bem como a formulação e verificação de conjecturas; b) *dedutivo e condicional* pelo estabelecimento de relações de causa e efeito e pela aplicação de conhecimentos matemáticos, em determinadas condições, capazes de verificar ou validar o modelo matemático pré-estabelecido ou criado pelo estudante.

Tarefas Matemáticas Desenvolvidas. Neste ponto serão identificados os conceitos de variáveis associados às aprendizagens algébricas na resolução dos diferentes problemas, identificados os enquadramentos curriculares e as competências essenciais e transversais a desenvolver. As condições de implementação das tarefas, as reacções dos estudantes e os resultados obtidos serão apresentados no capítulo seguinte, na análise dos resultados. A tabela seguinte mostra as tarefas concretizadas no 4º ano de escolaridade (anexo 5).

Tabela 8: Tarefas desenvolvidas no 4º ano de escolaridade

Tarefas	**Aprendizagem da álgebra** (conceito de variável)[35]	**Âmbito** (Duas turmas: A e B)	**Informações Complementares**
Valor lógico de proposições	"lugar vazio" – a caixa	Interdisciplinar: Matemática, Língua Portuguesa e E. Visual	Exploração oral baseada no projecto "Envolvências geométricas"
À descoberta dos números	"lugar vazio" – a caixa "unknown" - valor desconhecido	Contexto estritamente matemático	Folha de trabalho
A idade dos filhos[36]	"lugar vazio" – a caixa "unknown" - valor desconhecido	Matemática em contexto	Interligado à tarefa anterior

[35] Aplicação das diferentes abordagens à variável seguindo basicamente a proposta de Drijvers (2003), exposta no capítulo anterior na Figura 7, p. 111.

Vamos fazer um bolo!...	"alteração de uma quantidade"; aplicação de relações do tipo y=kx	Matemática em contexto (familiar)	Com a possibilidade de ser aprofundado no ambiente familiar
A compra de cromos	"unknown"; descoberta e aplicação da relação y=3x	Matemática em contexto	Baseado na realidade do estudante
A pintura das peças de ...	"unknown"; descoberta e aplicação da relação y=1,5x	Matemática em contexto	Baseado numa visita de estudo
A carga certa para o "peso" certo	"unknown"; descoberta e aplicação significativa da relação y=10x	Interdisciplinar: Matemática e Estudo do Meio	Utilização de dados reais pesquisados numa revista da especialidade
A cantina escolar	"unknown"; descoberta e aplicação da relação y=0,34x	Matemática em contexto	Dados sugeridos
O terreno do Sr. António!...	"alteração de uma quantidade numa expressão algébrica"; uso de fórmulas	Matemática em contexto	Maximização da área de rectângulo. Utilização de papel quadriculado
Uma razão importante!...	Descoberta da constante ´k´ na relação aproximada do tipo y/x=k	Interdisciplinar: Matemática e Estudo do Meio	Manipulação de objectos redondos da vida real. Uso da calculadora.

Tendo presente que o conceito de competência ainda não se encontra estabilizado, como foi referido por vários investigadores no congresso cibem5, realizado em Julho de 2005 e que cada país adopta orientações precisas curriculares, na investigação em curso integram-se naturalmente as defendidas por Portugal, na qual o conceito de competência matemática engloba conhecimentos, capacidades, atitudes e valores. Por outro lado, existem actualmente outras orientações aceites pela comunidade científica no domínio da Matemática que são as veiculadas pelo PISA que considera aliado ao conceito de literacia em matemática as competências, as quais em literacia matemática integram: a) *o conhecimento* de matérias específicas, da extensão e dos limites dos conteúdos matemáticos; b) *o estudo* de situações problemáticas, com aptidão para interpretar, conjecturar e argumentar; c) *a resolução* de problemas, aplicando conhecimentos e usando modelos matemáticos.

Na tabela seguinte apresentam-se, de forma sintetizada, as competências a desenvolver com a implementação daquelas tarefas no 4º ano de escolaridade. Nas competências essenciais privilegiam-se as noções relacionadas com a aprendizagem da álgebra, com as especificidades do conceito de variável já focadas na tabela anterior.

[36] Também explorado, com valores diferentes, no 5º ano de escolaridade.

Tabela 9: Competências a desenvolver, no 4º ano, na realização destas tarefas

Tarefa	***Competências Essenciais***	***Competências Transversais***
Valor lógico de proposições	Averiguar e atribuir o valor lógico de proposições em Língua Portuguesa e Matemática Completar lacunas em frases de modo a torná-las verdadeiras.	Procura-se que os estudantes tenham oportunidades para desenvolver de forma integrada um conjunto de atitudes, capacidades e conhecimentos que inclui: - a predisposição para relacionar saberes interdisciplinares, concretamente, da Língua Portuguesa, com a Matemática e a Educação Visual; - a tendência para procurar ver e apreciar a estrutura abstracta que está presente numa situação seja ela relativa a problemas do dia-a-dia, à natureza ou à arte, envolvendo elementos numéricos, geométricos ou ambos; - a aptidão para integrar gradualmente conhecimentos intuitivos e informais com saberes matemáticos formais; - a aptidão para observar, analisar uma situação e revelar o espírito crítico relativo ao uso de procedimentos e resultados matemáticos; - a aptidão para reconhecer valores aproximados em conhecimentos reais. - a tendência para usar a matemática em combinação com outros saberes, na compreensão de situações da realidade - a compreensão de contextos, em domínios fortemente significativos para a criança.
À descoberta dos números	Praticar o cálculo mental. Aprofundar aprendizagens numéricas por tentativa e erro.	
A idade dos filhos	Organizar dados em tabelas de duas entradas. Usar estratégias de tentativa e erro. Aplicar o cálculo mental.	
Vamos fazer um bolo!...	Identificar e aplicar relações numéricas	
A compra de cromos	Interpretar dados em tabelas. Aplicar o conceito de proporcionalidade na relação entre dois dados numéricos correspondentes a duas variáveis.	
A pintura das peças de cerâmica	Analisar a situação e aplicar o modelo matemático teórico, relacionando-o com a realidade prática.	
A carga certa para o "peso" certo	Interpretar e relacionar dados numa tabela de dupla entrada e descobrir o modelo matemático existente. Aplicar o modelo simbólico concreto e tirar conclusões matemáticas.	
A cantina escolar	Aprofundar e aplicar conhecimentos no domínio das relações.	
O terreno do Sr. António!...	Construir em papel quadriculado rectângulos com o mesmo perímetro e área diferente. Analisar as situações e seleccionar os rectângulos que minimiza e maximiza a área.	
Uma razão importante!	Aprofundar o conhecimento da divisão real e a análise de resultados. Experimentar, analisar resultados e tirar conclusões. Organizar dados em tabelas de dupla entrada.	

2º ciclo

No 5º ano de escolaridade foram realizadas várias actividades nas aulas de Matemática (anexo 6), relacionadas apenas com esta disciplina e/ou com outras, a saber: *Ciências da Natureza, Educação Física, História, Estudo Acompanhado, Formação Cívica e "Oferta da Escola" (TIC).*

As duas tabelas seguintes sintetizam as tarefas e as estratégias implementadas, com a utilização ou não do computador, respectivamente, na turma A e B, bem como as competências promovidas.

Tabela 10: Tarefas desenvolvidas no 5º ano de escolaridade

Material / Tarefas	**Âmbito** (Duas turmas)	**Informações Complementares** **Sem computador** (Duas turmas: A e B)	**Com computador** (Turma A)
1. Sólidos geométricos: "à descoberta da fórmula de Euler". Jogo dos poliedros.	Interdisciplinar: História e Matemática	Mostra da estrutura atómica de alguns corpos feita pela professora de Química do 8ºano. Folha de trabalho. Utilização de poliedros em modelos de madeira e *polidrons* Em OE, utilização de **CD ROM** temáticos sobre sólidos geométricos para estudantes com mais dificuldades (turma A).	
2. Compras nos saldos "chapéus e bonés"	Matemática em contexto	Folha de trabalho. Ideia baseada na revista *Arithmetic Teacher*	
3. Itinerários na planta da minha cidade	Matemática em contexto: História e Matemática	Plantas da cidade - 1:5000 Folha de trabalho	
4.Cálculo da área dos pavilhões da Escola	Matemática em contexto: Matemática e História	Plantas da Escola - 1:1000 Questões orais e escritas no quadro	Uso da folha de cálculo para organizar os dados e realizar cálculos
5. Gerar diferentes nºs: naturais, pares, ímpares, múltiplos, ...	Estritamente matemático	Questões colocadas oralmente e realizadas apenas na turma A	Utilização da folha de cálculo (mais cálculo do que folha)
6. Animais na quinta e idades das pessoas	Matemática em contexto	Folha de Trabalho	Uso da folha de cálculo
7. Lavar os dentes e poupar água.	Contexto famíliar Interdisciplinar: Ciências da Natureza - CN e Matemática-M	Folha de Trabalho (TPC) Bacia, copo, água,... Baseada numa ideia da revista *APM*	Uso da calculadora e, caso fosse possível, da folha de cálculo
8. Boatos e bactérias	Matemática em contexto: M e CN	Folha de Trabalho	Utilização da folha de cálculo
9. Método de Hond't e as eleições autárquicas	Interdisciplinar: História, Formação Cívica e Matemática	Folha de Trabalho	Utilização de um ficheiro na folha de cálculo
10. Correr, saltar e aprender Matemática	Interdisciplinar: Matemática e Educação Física	Folha de Trabalho Fita métrica, cronómetro e outros materiais... Recolha directa de dados	Utilização de um ficheiro na folha de cálculo

Pretendia-se que cada uma das actividades apresentadas no quadro anterior proporcionasse aprendizagens pré-algébricas, com aproximações ao conceito de variável. Assim, com base na definição/classificação proposta por Drijvers (2003) e seguindo a ordem das actividades expostas refira-se que na primeira foi possível explorar a "variável como alteração de uma quantidade numa expressão algébrica", baseada na descoberta da "lei generalizadora do fenómeno" (a fórmula de Euler). Na segunda e sexta actividade foi desenvolvido o conceito de "valor desconhecido" na resolução de problemas. Na terceira e quarta os estudantes aplicaram implicitamente a relação do tipo y=k*x*, na aplicação do conceito de escala. Na sétima e oitava actividade procurou-se desenvolver o conceito de variável baseado na "alteração da quantidade" e na descoberta, de forma mais ou menos explícita, do "generalizador" que rege o fenómeno. Na nona actividade foi aplicada e mobilizada uma fórmula dada e realizado o estudo com base na "alteração da quantidade" e, na última, foram desenvolvidas fundamentalmente duas aproximações ao conceito de variável, "valor desconhecido" e de "generalizador".

Na actividade "gerar números", realizada apenas na turma A, foi explorada a noção de variável como "alteração de uma quantidade numa expressão algébrica" e como "generalizador". A tabela seguinte apresenta, de forma sintetizada, as competências a desenvolver com a realização destas actividades.

Tabela 11: Competências a desenvolver no 5º ano, na realização destas tarefas

Tarefa	***Competências Essenciais***	***Competências Transversais***
Sólidos geométricos *Jogo de cartas dos poliedros*	Descobrir a fórmula de Euler, pela observação de poliedros, experimentação e verificação. Organizar em tabelas as pesquisas efectuadas. Aprofundar os conhecimentos geométricos pela actividade lúdica.	Assume-se a predisposição para desenvolver na criança um conjunto de atitudes, capacidades e conhecimentos que inclui: - a aptidão para recolher informação sobre o percurso escolar, vida e obra de Euler, a partir da disciplina de História. - o gosto e a confiança pessoal para debater com os outros, aprofundar vivências e conhecimentos escolares em grupo. - a aptidão para ser criativo na resolução de problemas, na representação informal, procurando gradualmente investir na linguagem simbólica matemática; . - o gosto por integrar conhecimentos da vida real, designadamente, os sinais de trânsito e a noção de escala na resolução de problemas. - a aptidão para organizar e sistematizar conhecimentos; - o gosto por estabelecer e aprofundar o diálogo da Matemática com a família; - a vontade para relacionar saberes interdisciplinares, concretamente, os das Ciências da Natureza, da História,
Compras nos saldos Chapéus e bonés	Desenvolver o poder de observação, a correspondência termo a termo e as aprendizagens por tentativa e erro. Aplicar estratégias pessoais de cálculo e de resolução de problemas.	
Itinerários na planta da minha cidade	Desenvolver a capacidade de resolver problemas próximos da vida real. Aprofundar conhecimentos de localização cartesiana. Apreender conceitos relacionados com itinerários e a medida.	
Cálculo da área dos pavilhões da Escola	Calcular o perímetro e a área de polígonos convexos e côncavos, pela decomposição de figuras em rectângulos.	
Gerar diferentes nºs: naturais, pares,...; múltiplos, ...	Organizar dados em tabelas. Enunciar e aprofundar a sintaxe de uma fórmula na folha de cálculo Conjecturar, verificar e concluir. Desenvolver o raciocínio indutivo.	
Animais na quinta e idades das pessoas	Organizar a informação, de forma adequada. Desenvolver o poder de relacionar e seleccionar os dados mais relevantes Descobrir estratégias pessoais de cálculo e de representação.	
Lavar os dentes e poupar água.	Desenvolver o gosto por aplicar conhecimentos matemáticos em situações práticas do dia a dia. Aprofundar conceitos operatórios, concretamente o da multiplicação. Aplicar o espírito crítico e o poder da argumentação na tentativa de descobrir a lei que modela o fenómeno	
Boatos e bactérias	Aprofundar e aplicar saberes relacionados com a potenciação Apreender o significado prático desta operação.	

Método de Hond´t e as eleições autárquicas	Desenvolver o gosto por aplicar conhecimentos matemáticos na vida cívica democrática. Aprofundar conceitos operatórios, concretamente da divisão não inteira. Aplicar o espírito crítico e argumentativo.	da Formação Cívica e da Educação Física com a Matemática; - a aptidão para observar e experimentar, relacionar e entender melhor os fenómenos, com base numa recolha directa de dados realizada pelo estudante. - a confiança em comunicar e debater matemática para fundamentar e decidir.
Correr, saltar e aprender Matemática	Desenvolver o gosto por aprender matemática pela utilização de materiais diversos. Analisar dados organizados e escritos numa tabela de duas entradas sobre uma determinada actividade em que o estudante participou, para relacionar, debater e tirar conclusões Desenvolver a atenção, a capacidade de relacionar, argumentar, podendo, ou não, criar e justificar um modelo matemático que rege o fenómeno.	

<u>2º ciclo</u>

Tal como no ano transacto, também no 6º ano de escolaridade foram realizadas várias tarefas nas aulas de Matemática (anexo 7), tendo sido possível aprofundar o trabalho realizado nos anos anteriores com as disciplinas ou áreas disciplinares de: *Língua Portuguesa*, *Ciências da Natureza, Educação Física, História, Estudo Acompanhado, Formação Cívica e "Oferta da Escola" (TIC)*.

A tabela seguinte sintetiza as tarefas e as estratégias implementadas, com a utilização ou não do computador, respectivamente, na turma A e B.

Tabela 12: Tarefas desenvolvidas no 6º ano de escolaridade

Material / **Tarefas**	**Âmbito** (Duas turmas)	**Informações Complementares** **Sem computador** (Duas turmas: A e B)	**Com computador** (Turma A)
1.Tantas Caixas!...	Matemática em contexto	Folha de trabalho	Em Oferta da Escola com o uso da folha de cálculo na resolução da 1ª questão
2.Banda desenhada "As fracções como motivo de conversa"	Matemática em contexto	Folha de trabalho Resolvida em Matemática e Estudo Acompanhado (EA). Ideia baseada na revista *Mathematics Teachers in the Middle School*	
3.Vencer a Fome, consolidar a Paz – Angola 2002	Interdisciplinar: várias disciplinas – Ling. Port.; Formação Cívica; Educação Visual; Matemática	Folhas de trabalho	Uso da folha de cálculo e do Processador de Texto
4.Respirar e Descansar	Contexto interdisciplinar: Ciênc. da Nat e Matemática	Folha de trabalho Ideia baseada no *PISA*.	
5.Cheques e compras	Matemática em contexto	Folhas de trabalho. Utilização de cheques. Narrativas matemáticas - simulação de situações	
6.Expressões com euros	Contexto estritamente matemático	Quadro negro	

7.Pulsação	Interdisciplinar: iniciou-se em Ciênc. da Nat., depois em Educação Física, em Matemática, em OE, Líng Portug., Est. Acompanhado	Folhas de trabalho. Ideia adaptado do TIMSS.	Uso da folha de cálculo (tabelas e gráficos) e do processador de texto
8.A festa de aniversário	Matemática em contexto	Folha de trabalho	
9.A área dos pavilhões da minha Escola e sua história	Interdisciplinar: Estudo Acompanhado (EA), Língua Portuguesa, História e Matemática	Folha de trabalho. Projecto educativo da Escola. Exploração do site Internet.	Folha de cálculo Processador de Texto
10.Galinhas!...	Matemática em contexto	Folha de trabalho. Ideia adaptada da revista *Arithmetic Teacher (AT)* (TPC, em família)	
11.A Cabra	Matemática em contexto	Folha de trabalho. Ideia adaptada da revista *AT*	Ilustração da situação com um desenho criado no programa de geometria dinâmica *Sketchpad*
12.Padrões em V!...	Matemática em contexto	Folha de Trabalho. Adaptada de uma ideia do Freudenthal Institut (FI).	Folha de cálculo e gráficos.

Cada uma das actividades apresentadas no quadro anterior procura proporcionar aprendizagens pré-algébricas, com aproximações ao conceito de variável. Assim, com base na definição/classificação proposta por Drijvers (2003) e seguindo a ordem das actividades expostas refira-se que na primeira foi possível explorar a variável como generalizador, baseada na descoberta da lei que rege o fenómeno, do tipo $1/2^n$ (n natural). Na segunda, terceira, quinta e sexta actividade foi desenvolvido o conceito de "valor desconhecido" na resolução de problemas. Na quarta os estudantes trabalharam a noção desenvolvida nos problemas anteriores e ainda a noção de "generalizador" pela tentativa de descoberta da lei que rege o fenómeno, do tipo: 11xn (n natural). Na sétima, oitava e nona actividade procurou-se desenvolver o conceito de variável na "alteração da quantidade" e a descoberta, de forma mais ou menos explícita, do "generalizador" com o uso de expressões algébricas variadas e do tipo $y=kx$, concretamente, nos dois últimos casos no estudo de uma relação proporcional e da aplicação do conceito de escala. Na décima e décima primeira actividade foi também explorado o conceito de "valor desconhecido" na resolução conextualizada de problemas e na última actividade foi explorado o conceito de "generalizador", pela descoberta da expressão algébrica: $2xn+1$ (sendo ´*n*´ - nº inteiro positivo) ou do tipo $u_{n-1}+2$ (referido oralmente ou escrito deste modo: "*o valor anterior da tabela mais 2*" ou "*o valor anterior mais 2*").

Em seguida, apresentam-se, de forma sumária, as competências essenciais para cada uma das tarefas apresentadas, reconhecendo-se que relativamente às competências transversais procurou-se aprofundar as enunciadas e implementadas nos anos anteriores.

Tantas Caixas!
Competências essenciais
Relacionar cada caixa com o respectivo "peso".
Desenvolver a observação de uma situação próxima da vida real.
Interligar a informação tipo texto com a respectiva informação numérica, organizando os dados em tabela.
Descrever explicitamente ou implicitamente a relação numérica existente, descobrindo o operador numérico que relaciona um número com o imediatamente seguinte ou com o anterior.

Banda desenhada "As fracções como motivo de conversa"
Competências essenciais
Interpretar matematicamente a informação escrita em banda desenhada e em discurso directo.
Interligar a informação lida com a linguagem simbólica escrita posteriormente.
Aplicar os conhecimentos dos números racionais, na escrita em fracção, numa situação contextualizada e próxima da vida real.
Interpretar e simbolizar a *parte-todo*, em representação fraccionária.

Vencer a Fome, consolidar a Paz – Angola 2002
Competências essenciais
Interpretar matematicamente a informação escrita em quadros.
Relacionar e seleccionar a informação mais relevante.
Desenvolver a observação e o poder de argumentação.
Resolver problemas de resposta numérica e não numérica.

Respirar e Descansar
Competências essenciais
Identificar o intervalo de tempo que se repete.
Desenvolver a capacidade de observação de fenómenos naturais.
Estabelecer relações directas dos acontecimentos cíclicos dos fenómenos naturais com o intervalo de tempo considerado.
Analisar as condições do período cíclico do fenómeno descrito e descobrir o modelo.

Cheques e Compras
Competências essenciais
Identificar um cheque como um "quadro" onde se organiza adequadamente informação.
Identificar as partes constituintes de um cheque e aplicar esse conhecimento na resolução de problemas de compra e venda de produtos.
Reconhecer a existência de seis "campos" num cheque e a inter-relação directa existente entre dois deles, designadamente, nome-assinatura; e na quantia numérica, por extenso, especialmente na validação do cheque.
Decompor e compor quantidades monetárias usando processos diversos, a partir de condições previamente estabelecidas.

Identificar e entender o significado da noção "*2/3 de ...*" num contexto próximo do real e de âmbito socio-económico.
Aplicar o conhecimento da regra do cálculo do produto de um número inteiro por um número racional na resolução concreta de um problema de economia doméstica.
Inventar um problema de âmbito socio-económico.
Formular um problema.
Analisar situações e retirar conclusões de âmbito geral ou mais específico, designadamente, relacionadas com a folha de trabalho, o problema criado ou ainda com a importância dos cheques na vida económica diária.

Expressões com euros
<u>Competências essenciais</u>
Desenvolver a capacidade de interpretação textual e da correspondente expressão numérica correcta que resolve o problema.
Analisar conteúdo de problema e realizar uma interpretação correcta da relação entre os dados, promovendo a noção de recursividade.
Interpretar e desenvolver procedimentos lógicos de resolução, designadamente, usar mais do que uma vez um dado numérico nas operações necessárias que conduzam, com êxito, à solução do problema.
Inventar o enunciado de um problema concatenando logicamente a informação alfanumérica com a numérica.
Desenvolver a criatividade aliada ao conteúdo e à forma de relacionar a informação.
Identificar estratégias diferenciados de resolução de um problema.

Pulsação
<u>Competências essenciais</u>
Recolher valores e registá-los em tabelas.
Identificar diferentes formas de recolher e tratar dados, entre os quais se destacam tabelas e gráficos de barras.
Identificar e analisar variações de fenómenos.
Reconhecer a existência de duas variáveis inter-relacionadas: tempo e número de pulsações.
Organizar informação correctamente, construindo gráficos de barras.
Identificar e aplicar conhecimentos interdisciplinares, na procura de explicações da existência e desenvolvimento de determinados fenómenos.
Reconhecer e argumentar a inter-relação existente entre espaços e saberes interdisciplinares na concretização de uma actividade.
Interligar e aplicar conhecimentos científicos na explicação de ocorrência de um determinado fenómeno.

Festa de Aniversário

<u>Competências essenciais</u>

Interpretar passo a passo a linguagem corrente e codificá-la para linguagem matemática.

Reconhecer a "metade de..." como inverso de "dobro de..." ou evidenciar a existência de uma variável, na resolução implícita de uma "equação".

Interpretar os dados e resolver as questões de forma prática e contextualizada, mobilizando conhecimentos anteriores.

Identificar e aplicar conceitos relacionados com a proporcionalidade directa na resolução dos problemas expostos.

Fundamentar os raciocínios usando desenhos, palavras, esquemas, tabelas, expressões e cálculos.

A área dos pavilhões da minha Escola e sua história

<u>Competências essenciais</u>

Integrar os dados obtidos no ano transacto ou calcular a área novamente dos pavilhões e analisar os resultados obtidos.

Aprofundar conhecimentos relacionados com a noção de escala.

Desenvolver a capacidade de organização tabelar e de outras formas para apresentar o relatório.

Pesquisar sobre a origem da Escola, no projecto educativo de Escola e na Internet, no site próprio.

Elaborar um relatório que integre informação histórica e dados actuais, designadamente, os respeitantes às áreas dos pavilhões, calculadas no ano anterior, número de estudantes da Escola e por turma, etc.

Galinhas!...

<u>Competências essenciais</u>

Reconhecer a existência de três "variáveis": massa da galinha grande, massa da galinha média e da pequena.

Identificar e aplicar conhecimento matemático em contexto próximo do real, formulando hipóteses de resolução.

Analisar e inter relacionar a informação apresentada em quadros figurativos.

Desenvolver estratégias pessoais de cálculo e de representação na resolução de problemas.

A Cabra!

<u>Competências essenciais</u>

Reconhecer as figuras geométricas: círculo e quadrado.

Identificar e aplicar conhecimento matemático em contexto próximo do real, formulando hipóteses de resolução.

Identificar a possibilidade de aplicar o factor escala para desenhar e interpretar com maior rigor a situação.

Analisar sobre a relação existente entre a informação figurativa pictórica e a numérica.

Desenvolver estratégias pessoais de resolução de problemas.

Padrões em V

Competências essenciais

Reconhecer a repetição iconográfica e numérica de um fenómeno e encontrar a lei que o generaliza.

Identificar e aplicar conhecimento matemático em contexto próximo do real, formulando hipóteses de resolução.

Analisar e argumentar sobre a relação existente entre a informação figurativa pictórica e a numérica.

Desenvolver estratégias pessoais de resolução de problemas.

Identificar a existência de duas "variáveis" e estabelecer relações que cumpram o fenómeno.

Desenvolver a capacidade de formular hipóteses e de levantar conjecturas.

Desenvolver o raciocínio indutivo.

5.7. Teste de Avaliação

Os testes são instrumentos de grande utilidade para avaliar a aprendizagem, pois fornecem boas indicações sobre o desempenho dos estudantes (Pires, 1995, p. 56).

Segundo Maren (1996), num teste, devem ser consideradas as seguintes validades: a) conteúdo; b) concordância; c) preditiva e d) conceptual. Na *validação de conteúdo* prevê-se que exista uma similitude observável entre as operações exigidas pelo teste e aquelas que supostamente o teste simula. A *validação de concordância* (ou também chamada validade imediata) resulta na comparação das operações previstas no teste com as que podem ser obtidas por outros meios, como um exame escolar, uma entrevista, uma observação clínica. *A validação preditiva* consiste na relação dos resultados do teste com a competência em situação real que o teste supostamente pretende vaticinar. A existência deste conhecimento provoca vantagens adicionais na elaboração/concepção de um teste, mas este tipo de validação, segundo o autor, é muito difícil de realizar, dado que:

> "... dans certains cas, la situation réelle n´est que partiellement accessible à l´observation alors que, dans d´autre cas, la situation est d´une telle complexité que les critères d´observation de l´habileté que l´on identifier sont difficiles à préciser et à isoler" (Maren, 1996, p. 340).

Quando na elaboração do teste se tenta integrar a teoria surge a v*alidade conceptual* (ou de construção, em referência ao construtivismo conceptual) e surge a concepção do teste como uma operacionalização da teoria, ou seja, é com base numa teoria coerente e consistente do conceito que se procura realizar o teste.

Por outro lado, a relação da linguagem com o pensamento tem sido objecto de extensivos debates no campo linguístico, filosófico e psicológico (Dickson, Brown e Gibson, 1984). Segundo estes autores, torna-se ainda mais complexo realizar um teste para estudantes em idades elementares, porque a fonte de maiores dificuldades das crianças reside na experiência de resolução de problemas, no processo de transformação das palavras escritas em operações matemáticas, bem como na apreensão correcta do significado do simbolismo matemático utilizado.

Assim, na construção do teste de avaliação procurou-se incorporar as precauções e as exigências teóricas e teve-se em conta os objectivos do estudo, o grau etário e cognitivo dos estudantes, bem como o processo aprendizagem-ensino desenvolvido nas aulas.

5.7.1. Enquadramentos conceptuais

Na perspectiva de conhecer a realidade educativa a OECD (Organisation for Economic Co-operation and Development) criou o grupo de trabalho PISA-Programme for International Student Assessment para, de uma forma continuada e faseada, realizar estudos internacionais, nos domínios da literacia em leitura, matemática, ciências, e mais actualmente na capacidade de resolução de problemas (PISA 2003), providenciando a análise, a reflexão, o registo e a discussão de resultados.

Este programa define domínios de intervenção, contextos, metodologias e descreve competências que o estudante necessita de desenvolver, designadamente na área de Matemática, para se tornar num adulto capaz de raciocinar, argumentar, comunicar efectivamente ideias, tendo em vista uma plena assunção da dimensão de cidadania, com uma consciente participação activa na vida social, cultural e política (PISA 2000).

Assim, a elaboração dos instrumentos de avaliação e os relatórios produzidos pelo PISA, também se constituíram como documentos actuais de referência na actual investigação, designadamente na proposta de tarefas e explicitamente no teste na definição de termos, na concepção da estrutura e na delineação dos contornos da tipologia das questões de avaliação. Os dados do Estudo Nacional sobre Literacia (ENL) e os resultados do TIMSS (Terceiro Estudo Internacional em Matemática e Ciências) constituíram-se, também, como elementos relevantes na elaboração deste instrumento de recolha de informação e na análise dos resultados obtidos.

Definição de Termos. No programa PISA 2000 a avaliação de cada domínio da literacia encontra-se focalizada para três dimensões fundamentais:

os conteúdos, as matérias que os estudantes necessitam de dominar;

os processos, os passos de resolução que devem (ou podem) ser implementados;

os contextos[37], os ambientes nos quais as capacidades e os conhecimentos são aplicados.

A intervenção do PISA 2000 faz-se ao nível de três domínios de "literacia": literacia na leitura, literacia em matemática e literacia em ciências e em "cada domínio a avaliação é organizada em três dimensões: conhecimento e compreensão; processos; contexto de aplicação" (p. 11). O conceito de <u>*literacia*</u> surge associado a um conjunto de <u>*competências*</u> pessoais e configura-se como um processo contínuo de apreender conhecimentos ao longo da vida e à capacidade de os aplicar em contextos diversificados de vivência social: pessoal, profissional, económica e política.

[37] No PISA 2003, usam-se os termos "*conteúdo* ou *estrutura* de conhecimento" em vez de conteúdos e "*situações"* em substituição de *contexto* (PISA 2003, ME e GAVE, Dezembro de 2004, p. 6).

Nesta abordagem, importa que o indivíduo explicite os conhecimentos de forma compreendida e interiorizada numa relação estreita com situações funcionais do dia a dia, sendo *a literacia em matemática* definida pelo PISA como:

> "the capacity to identify, to understand, and to engage in mathematics and make well-founded judgements about the role that mathematics plays, as needed for an individual´s current and future life, occupational life, social life with peers and relatives, and life as a constructive, concerned, and reflective citizen" (2000, p. 50).

Conhecimento e Compreensão (Conteúdos). No relatório final, o desenvolvimento do conhecimento e da compreensão específica em cada domínio é considerado como uma importante componente do desenvolvimento da literacia. Segundo o PISA (2000) "a literacia envolve, para além da mestria num corpo alargado de conhecimentos, o entendimento dos métodos, processos e limitações do próprio domínio, bem como a aptidão para compreender e aplicar conhecimentos em diversos contextos do dia a dia" (p. 14). O conceito de literacia matemática na dimensão *conhecimento e compreensão* integra a necessidade do indivíduo adquirir conhecimento matemático, com domínio efectivo das matérias, termos e conceitos e pressupõe ainda o entendimento dos princípios e das relações matemáticas. Mais recentemente no relatório do PISA 2003, este conceito relaciona-se com o uso mais abrangente e funcional da matemática; o envolvimento requer a capacidade de reconhecer e formular problemas matemáticos em várias situações (ME, GAVE, 2004).

Processos. Segundo o PISA a literacia em matemática envolve um espectro alargado de capacidades, em que o *focus* reside na aptidão do estudante para analisar, raciocinar e comunicar ideias, estudando, argumentando, formulando e resolvendo problemas matemáticos:

> "Mathematical literacy skills include thinking skills (e.g., distinguishing between different kinds of mathematical statements); argumentation skills (e.g., following and evaluating chains of mathematical arguments); modelling skills (e.g., translating "reality" into mathematical structures); problem posing and solving skills; representation skills (e.g., distinguishing between different forms of representation of mathematical situations); symbolic skills; technical skills (e.g., solving equations); communication skills; and skills in using mathematical tools and aids" (PISA, 2000, p. 11).

Nos processos focaliza-se, assim, a atenção para o "*modus operandis*" do estudante para a capacidade de pensar, argumentar, analisar, desenvolver processos de modelação simples e mais complexos, resolver problemas, bem como a capacidade para comunicar ideias matemáticas.

Contexto de Aplicação. A literacia matemática inclui a capacidade de aplicar o conhecimento matemático em situações novas, desenvolver as aptidões e compreender os contextos "autênticos" em que os problemas são resolvidos. Um contexto é considerado autêntico se está relacionado com experiências e práticas actuais do mundo real dos participantes. Um dos aspectos importantes ligados ao conceito de literacia matemática reside na capacidade de construir a matemática em situações variadas, tais como em contextos da vida pessoal e escolar, em situações de trabalho e desporto ou lazer, numa vivência local, na comunidade ou na sociedade em geral, incluindo ainda o contexto científico.

O PISA 2000 considera que a literacia em matemática depende de um corpo familiar de conhecimentos, tais como: números e operações; sistema monetário; espaço e forma, incluindo a medida e as relações. A literacia matemática reside no próprio contexto e relaciona-se com as capacidades matemáticas do indivíduo, designadamente, na forma de pensar, argumentar, apresentar e representar raciocínios, integrando a modelação e a capacidade de resolver problemas. Portanto, as competências em literacia matemática integram: a) *o conhecimento* de matérias específicas, da extensão e dos limites dos conteúdos matemáticos; b) *o estudo* de situações problemáticas, com aptidão para interpretar, conjecturar e argumentar; c) *a resolução* de problemas, aplicando conhecimentos e usando modelos matemáticos. Nesta perspectiva a literacia matemática está ligada à retenção, compreensão e aplicação de conhecimentos a um largo e variado espectro de situações do dia a dia, de âmbito pessoal, social, cultural e da vida económica.

No PISA, os níveis de competência matemática organizam-se em três *classes*: i) reprodução, definição e cálculo, relacionados com a aplicação de algoritmos e o registo de procedimentos rotineiros; ii) conexão, integração e aplicação de conhecimentos na resolução de problemas; iii) matematização, com a expressão simbólica do pensamento matemático e a consequente generalização.

A *classe 1: reprodução, definição e cálculo* inclui matérias e processos avaliados em muitos testes estandardizados, operacionalizados muitas vezes pelo formato de questões de escolha múltipla. Esta classe encontra-se relacionada com conhecimento de factos, representação, identificação de equivalências, com registo de propriedades, procedimentos rotineiros, uso de algoritmos usuais e técnicas de cálculo.

A *classe 2: conexões e integração de conhecimentos na resolução de problemas* permite o estabelecimento de relações entre diferentes domínios matemáticos e a integração de dados no processo de resolução de problemas simples. Embora os problemas sejam, supostamente, não rotineiros requerem um pequeno grau de matematização. Um dos aspectos também a considerar nesta classe é a capacidade de entender as relações na linguagem natural e interpretá-las simbolicamente, usando a linguagem formal matemática.

A *classe 3: matematização, pensamento matemático, generalização e interiorização* procura o entendimento do problema na sua globalidade, percebendo a situação exposta e usando a matemática para a resolver. Para isso é necessário analisar, interpretar e desenvolver modelos próprios e estratégias pessoais de interpretação e de cálculo, fundamentando ainda raciocínios, com inclusão de provas e generalizações. Estes processos de interacção matemática envolvem pensamento crítico, análise e reflexão (Steen, 1999).

Segundo este Programa os estudantes devem, não só, ser capazes de resolver problemas, mas também estudar problemas, comunicar apropriadamente soluções e interiorizar os objectivos e a essência da Matemática enquanto ciência. O PISA defende ainda que esta classe é considerada "o coração da matemática e da literacia matemática, mas é difícil de a avaliar" (2000, p. 52) e recomenda a não utilização de questões de escolha múltipla nesta classe de competência. Apesar de serem questões de resposta matemática bastante interessante os mentores do Programa reconhecem que o desenho das questões em aberto, não sendo uma tarefa linear, dificulta ainda a avaliação e a atribuição de pontuação.

As investigações já realizadas sobre a temática deste estudo e referidas em capítulos anteriores defendem que, para uma aprendizagem significativa e gradual dos conhecimentos algébricos, devem ser contempladas quatro aproximações à álgebra.

Bednarz, Kieran e Lee (1996) defendem que, numa lógica de simplificação, a álgebra deve ser trabalhada, de forma gradual, em quatro perspectivas fundamentais:

- *generalização*, explorando padrões numéricos e algébricos;
- *resolução de problemas*[38], aproximando-se à classe dos "problemas de palavras";
- *modelação*, relacionando informação, estabelecendo conexões, apelando às descrições verbais e à representação em gráficos, tabelas e expressões simbólicas;
- *funcional*, apelando ao estudo de funções.

Atendendo a estes dados e tendo em conta o nível etário e cognitivo dos estudantes, na elaboração do teste de avaliação foram integradas três das quatro aproximações à álgebra descritas:

- *Generalização de padrões* (1ª) - Numéricos e geométricos
    - Identificar e completar sequências.
    - Descrever o padrão e generalizar e, sempre que possível, identificar a regra correspondente.
- *Resolução de classes de problemas* (2ª) – Numéricos e geométricos
    - Identificar, resolver e formular essencialmente "word-problems" (problemas de palavras) em que o modelo algébrico surge de forma implícita.
- *Resolução de problemas numa perspectiva de modelação dos fenómenos* (3ª)
    - Numéricos e geométricos
    - Relacionar e interpretar a informação.
    - Conjecturar e generalizar, com organização de dados em quadros, tabelas e gráficos.

5.7.2. Estrutura do Teste

Na construção do teste de avaliação (anexo 8) foram contemplados, fundamentalmente, dois domínios: números e operações e a geometria (espaço, forma e medida); as três classes definidas e dois contextos: o estritamente disciplinar e o de natureza interdisciplinar, incluindo, neste último o da matemática em contexto. Tal como nos testes elaborados pelo PISA, TIMSS ou ENL (Estudo Nacional da Literacia) foram idealizadas questões de escolha múltipla, outras que requeriam uma ou mais respostas elaboradas pelo estudante e outras ainda que exigiam uma resposta mais aberta, descritiva

---

[38] Esta 2ª aproximação à álgebra, integra a resolução de problemas e a resolução de equações. Como foi referido no segundo capítulo da revisão da literatura, nas diversas aproximações à álgebra, vários autores consideram a modelação associada à 3ª aproximação à álgebra.

e fundamentada, relacionando vários dados do problema, explícitos ou não. No que respeita à correcção e à classificação das questões foram tomados, como referência, os critérios e a grelha de avaliação previstos no TIMSS, por serem considerados mais completos, por se crerem mais ajustados ao nível etário dos estudantes e por, de certo modo, também poderem cumprir os objectivos da investigação (anexo 10).

Por outro lado, com base nos princípios instrucionais propostos pelo NCTM (2000) elaboraram-se tarefas a integrar no teste que permitissem avaliar o desempenho dos estudantes nas seguintes competências:

- reconhecer conceitos matemáticos e mobilizá-los;
- relacionar conhecimentos e aplicá-los na resolução de situações novas;
- reflectir e incorporar conceitos novos na base de conhecimento do estudante.

Com o registo e a análise dos resultados recolhidos na realização específica do teste e de outros instrumentos de avaliação pretendeu-se: a) descrever, reflectir e problematizar um modelo sequencial de abordagens estratégicas das aprendizagens numéricas às algébricas, com utilização ou não das TIC; b) referenciar e contextualizar tarefas e ambientes significativos de aprendizagens pré-algébricas, num trabalho de âmbito interdisciplinar.

Na elaboração do teste foram identificadas três aproximações à álgebra (1ª, 2ª, 3ª) aplicadas a dois domínios temáticos fundamentais: *números e operações* (N) e *geometria* (G).

Assim, tendo em conta o objecto da investigação, na elaboração do teste optou-se por dois contextos fundamentais: *estritamente disciplinar (ED)* e o de *âmbito interdisciplinar, incluindo a matemática em contexto (AI).* Em ambos foi também contemplada a vertente *tecnológica (tec)* e, sempre que se justificasse, poderia ser utilizada a calculadora na resolução da tarefa.

No contexto *estritamente disciplinar* (*ED*), como o nome indica, apresenta-se o problema restrito à disciplina de Matemática, sem "roupagem" e de forma usualmente entendida como académica, com os dados estritamente necessárias e "despida de contexto". No *âmbito interdisciplinar (AI), incluindo a matemática em contexto,* engloba-se a componente de natureza *pessoal*, relacionada com a vida real do estudante *(Np) e* a componente curricular ligada a *outras disciplinas ou áreas curriculares (Nc)*. Assim, com o intuito de recolher dados precisos e orientados para o objecto da investigação elaboraram-se questões idênticas no conteúdo, mas diferentes na abordagem, procurando-se diferenciar o problema pela presença ou não do contexto.

Para além deste aspecto procurou-se diversificar as propostas de trabalho, com um número significativo de questões e em formatos diferentes, com possibilidades de resposta sucinta (fechada, escolha múltipla, verdadeiro ou falso ou para completar) ou de respostas mais elaboradas, com uma forte componente da exploração do contexto, contemplando também a formulação de problemas.

Tal como no PISA, foram considerados três tipos de classes: a Classe 1, ligada à reprodução, definição e cálculos algorítmicos; a Classe 2, relacionada com conexões, integração e resolução de problemas e por fim, a <u>Classe 3</u>, associada à matematização, comunicação matemática e à generalização.

Assim, o teste foi elaborado com base no entrosamento de quatro elementos considerados fundamentais: classe (1,2,3); contexto (AI, ED); domínio (N, G) e aproximações à Álgebra (1ª, 2ª, 3ª).

A Tabela 13 sistematiza a caracterização de cada uma dos problemas existentes no teste de avaliação (anexo 8).

Tabela 13: Teste de avaliação – síntese da tipologia dos problemas propostos

Contexto	***Âmbito Interdisciplinar*** (AI) Natureza Pessoal (Np) Natureza curricular (Nc)	***Estritamente Disciplinar*** (ED)

Sub-Contexto e tipologia	Nc tb1	Np tb2	Nc tb2	Np fr	Np qd	Nc	Np ds	Np ds	Np ds	Npd ds	Nc g	Nc bd		tb1	tb2	fr	qd	re	vfen	en	mq	tb2 g	ds g	tq
Aproxim. à álgebra	1ª 3ª	3ª	3ª	2ª 3ª	2ª 3ª	2ª	2ª	2ª	2ª	2ª 3ª	1ª 3ª	2ª		1ª	1ª	1ª	2ª	2ª	2ª	2ª	2ª	2ª 3ª	3ª	2ª
Classe 1	2			7			13			19				1	3	6	8		12			18		
Classe 2	2		5	7	9	11	13	15	17	19	20	23					8	10	12	14	16	18	21	22
Classe 3	2	4	5	7	9				17	19	20											18		
Domínio	N G	N	N	G	N €	G	N €	N €	G	G N	N	N		N	N	G	N €	G	N €	N €	G	G N	N	N

Os números existentes no interior do quadro referem-se à identificação numérica do problema do teste de avaliação. O domínio geométrico é identificado por ´G´, o numérico por ´N´ e o da medida, neste caso aplicado ao sistema monetário, é designado por ´N€´.

<u>Legenda:</u>

tb1– tabelas de uma única entrada	bd – banda desenhada
tb2 – tabela de duas entradas	re - recta
fr - friso	vf – questão lógica
qd – quadro	en – expressão numérica
ds – desenho(s)	mq – malha quadrangular
g – gráfico	tq – tabelas e quadros

Descrição sucinta dos problemas propostos. Apesar de, nos *critérios de avaliação/classificação*, se terem definido intrinsecamente os critérios operacionais de cada um dos problemas (anexo 10), considerou-se conveniente, aqui e agora, descrever, de forma sucinta, os propósitos de cada uma das situações apresentadas no teste.

Completar três tabelas de uma única entrada com as regras dadas (Problema 1 – P1). Situação definida no domínio dos números (inteiros absolutos) e operações e no âmbito estritamente disciplinar. As três alíneas que integram a questão localizam-se na *primeira aproximação à álgebra – generalização de padrões*, em tabelas de uma única entrada, respectivamente, na: a) aplicação de uma regra numérica enunciada em linguagem corrente; b) aplicação de uma regra apresentada em linguagem simbólica, através do uso de uma expressão numérica; c) observação da regularidade numérica existente, identificação e explicitação da regra[39]. Através desta situação procurou-se avaliar as competências do estudante em: reconhecer, mobilizar conhecimentos anteriores, designadamente, os adquiridos no ano anterior sobre expressões numéricas e aplicá-los a situações novas. Pretendeu-se ainda nesta situação que o estudante relacionasse os entes numéricos, num formato de antecedente/consequente, numa tabela de uma entrada.

Salto de força inferior (P2). Situação apresentada no domínio dos números racionais, de representação decimal e ainda no das operações, grandezas e medida, definida no contexto interdisciplinar com ligação prática à disciplina de Educação Física. Duas das três alíneas que a integram localizam-se especificamente na *primeira aproximação à Álgebra – generalização de padrões*, numa tabela de uma entrada, na qual é solicitada a análise da situação, a descoberta e a explicitação da regra. A última questão relaciona-se com a *terceira aproximação à álgebra*, ligada à *resolução de problemas numa perspectiva de modelação dos fenómenos*, pois preconiza a descoberta do modelo matemático, com expressão numérica e geométrica, pelo desenho da marca, que generaliza o fenómeno em causa. Através desta situação, procurou-se avaliar no estudante as competências para observar, analisar e integrar conhecimentos de outras disciplinas e adquiridos em diversos espaços escolares, designadamente os explorados no ano transacto nas aulas de Educação Física e Matemática e aplicá-los a situações novas, promovendo o raciocínio indutivo.

Completar três tabelas de dupla entrada com as regras dadas (P3). Situação definida no domínio dos números (inteiros absolutos) e operações e no âmbito estritamente disciplinar. As três alíneas que a integram localizam-se na *primeira aproximação à álgebra – generalização de padrões*, em tabelas de duas entradas, respectivamente, na: a) aplicação de uma regra numérica enunciada em linguagem corrente; b) aplicação de uma regra apresentada em linguagem simbólica, através do uso de uma expressão numérica; c) identificação e explicitação da regra. Através desta situação procurou-se avaliar as competências de: reconhecer, mobilizar conhecimentos numéricos anteriores, designadamente os adquiridos no ano anterior sobre expressões numéricas e aplicá-los a situações novas, promovendo o raciocínio indutivo. Pretendeu-se ainda que o estudante

[39] A explicitação da regra pode ser apresentada em linguagem corrente, em linguagem simbólica ou de forma mista.

relacionasse os entes numéricos numa tabela de duas entradas, num formato tabelar[40] e de correspondência termo a termo operacionalizada por uma expressão designatória.

Emagrecer lenta e saudavelmente (P4). Problema apresentado no domínio dos números (racionais, em representação decimal) e operações, especificamente, no da divisão, definida na matemática em contexto, de natureza pessoal e interdisciplinar, ligada à disciplina de Ciências da Natureza[41]. Esta situação localiza-se na *3ª aproximação à álgebra relacionada com a resolução de problemas numa perspectiva de modelação dos fenómenos*. Pela interpretação da informação e da identificação do modelo matemático dado pretendia-se que o estudante aplicasse e resolvesse o problema numa perspectiva indutiva do fenómeno. Considerada essencial nesta aproximação à álgebra foi ainda solicitada a organização dos dados em tabela, neste caso, de dupla entrada, bem como a justificação dos resultados obtidos. Na aplicação do modelo dado pretendia-se ainda que o estudante tivesse oportunidade de apreender a indução do fenómeno, através da identificação da *noção* prática *de infinitésimo*. A avaliação deste problema localizava-se, assim, na capacidade de descobrir e aplicar a lei que rege o fenómeno, representar informação em tabela e reconhecer infinitésimos.

Tabela Nutricional Parcial (P5). Situação tabelar basicamente de duas entradas, mas de múltiplas variáveis, no domínio dos números (inteiros absolutos e dos números racionais) e operações, grandezas e medida, definida no contexto de âmbito interdisciplinar com ligação prática à disciplina de Ciências da Natureza[42]. As três alíneas que a integram localizam-se na *3ª aproximação à álgebra associada à resolução de problemas numa perspectiva de modelação dos fenómenos*. Na primeira questão pretendia-se, pela leitura da tabela, verificar a aplicação do modelo dado, ou seja, se o estudante era capaz de averiguar o valor lógico da proposição dada e interpretar o conceito de "triplo de um número" nessa frase contextualizada e escrita em linguagem corrente. Nas duas últimas questões pretendia-se que o estudante seleccionasse uma determinada informação da tabela, a identificasse e formulasse[43] o modelo matemático associado à relação existente das calorias ou elementos minerais entre os nutrientes seleccionados.

Os autocolantes da Marta (P6). Situação tabelar, de uma única entrada, no domínio geométrico e com a conjugação de dois atributos: forma e cor, definida no âmbito estritamente disciplinar. A questão localiza-se na *primeira aproximação à álgebra – generalização de padrões geométricos*, pela: a) interpretação da informação geométrica conjugando dois atributos: *cor* (duas, branco ou negro) e *forma* (três, quadrangular, circular ou estrelada); b) descoberta do padrão geométrico e aplicação do mesmo no preenchimento das lacunas existentes. Através desta situação procurava-se avaliar no

[40] Um dos formatos mais comuns usados na explicitação da noção de *função*.

[41] No tema da "*Alimentação*".

[42] Na disciplina de Ciências da Natureza, no tema da "*Alimentação*", foi utilizada outra tabela nutricional.

[43] Em linguagem corrente, numa relação numérica ou de forma mista.

estudante a capacidade para observar, reconhecer e conjugar atributos do campo geométrico e raciocinar indutivamente.

Estrutura em grade (P7). Problema apresentado no domínio geométrico, das grandezas e medida definido na matemática em contexto, de natureza interdisciplinar, relacionado com a disciplina de Educação Visual. As duas primeiras questões integram-se na *segunda aproximação à álgebra – resolução de classes de problemas* e as duas últimas, com a *aproximação à álgebra, ligada à resolução de problemas numa perspectiva de modelação dos fenómenos*. Após a identificação do módulo-padrão pretendia-se que o estudante identificasse o número de quadrados que o formam, relacionando a medida do comprimento de um dos lados do quadrado, designado por 1uc, com o respectivo perímetro. Nas duas últimas perguntas questionava-se a organização e o registo dos dados em tabela. Por último, pretendia-se que o estudante interpretasse e estabelecesse uma relação funcional entre os perímetros dos diferentes quadrados. Através deste problema procurava avaliar-se o desenvolvimento de várias competências, entre as quais se destacam a capacidade para observar e mobilizar conhecimentos anteriores[44], seleccionar e integrar dados geométricos, analisar e interligar a parte com o todo, organizar os dados em tabelas, bem como identificar e registar relações.

Compra de sumos (P8). Situação problemática de contexto estritamente disciplinar, apresentada em quadros, com alguma informação pictórica, nos domínios dos números racionais (em representação fraccionária) e das operações. Esta situação enquadra-se na *segunda aproximação à álgebra – resolução de classes de problemas* e pretendia desenvolver, no estudante, o raciocínio condicional, a mobilização e aplicação de conhecimentos adquiridos no ano transacto: o uso adequado de expressões numéricas e de outros assuntos explorados no presente ano lectivo: operações com números racionais, em representação fraccionária, bem como a noção de percentual.

Compra do Leite (P9). Situação problemática apresentada em quadros, no domínio dos números inteiros[45], de âmbito real e de natureza pessoal. Esta situação enquadra-se na *segunda aproximação à álgebra – resolução de classes de problemas*. Pretendia-se que o estudante relacionasse a informação da vida corrente, especialmente, a adquirida em vivências do quotidiano com conhecimentos escolares, adquiridos no ano transacto e neste ano lectivo. Através da resolução deste problema procurava-se prosseguir o desenvolvimento de determinadas competências, entre as quais se destacam: interpretar matematicamente, de forma contextualizada e vivencial uma das linguagens publicitárias mais comuns utilizada na venda de produtos; fundamentar a opção tomada numa lógica matemática e/ou aberta a outras áreas, num ambiente mais prático e próximo do quotidiano e das vivências do estudante.

[44] Tópicos explorados no 1º ciclo, especificamente no desenvolvimento do Projecto interdisciplinar: "Envolvências Geométricas I" e "Envolvências Geométricas II – A Geometria na cidade".

[45] Os números racionais, na representação fraccionária e na noção de percentagem surgem de forma implícita.

Marcar pontos... (P10). Situação definida nos domínios numérico e geométrico (na representação de um número racional, em representação decimal, na recta real) e no âmbito estritamente disciplinar. A questão localiza-se na *segunda aproximação à Álgebra – resolução de problemas*. Através desta situação procurava-se avaliar o conhecimento do número racional, pela representação na recta real de um número na ordem das milésimas, seleccionado entre dois números dados escritos com aproximação às centésimas, diferindo apenas de uma unidade no algarismo das centésimas.

Na aula de Educação Física (P11). Situação apresentada nos domínios numérico e geométrico (na representação de um número racional, em representação decimal) definido no âmbito da matemática em contexto interdisciplinar de natureza pessoal. A questão localiza-se na *segunda aproximação à álgebra – resolução de problemas*. Deste modo, procurava-se avaliar a capacidade do estudante em reconhecer a situação real vivida no ano transacto[46], em mobilizar conhecimentos e os aplicar, aprofundando o conhecimento do número racional, pela identificação de um número na ordem das milésimas, seleccionado entre dois números escritos com aproximação às centésimas, diferindo apenas de uma unidade no algarismo das centésimas.

Fazendo compras (P12). Situação problemática apresentada com alguma informação pictórica, nos domínios dos números racionais (em representação fraccionária) e operações, grandezas e medida (uso dos euros) em âmbito disciplinar. Esta situação enquadra-se na *segunda aproximação à álgebra – resolução de classes de problemas*, num formato de lógica bivalente (1ª questão) e de escolha múltipla (2ª questão). Através desta situação pretendia-se averiguar da capacidade do estudante aplicar o raciocínio condicional, mobilizar conhecimentos adquiridos no ano transacto: as expressões numéricas e aprofundar no presente ano lectivo: operações com números racionais, em representação fraccionária.

Colecções de Artigos (P13). Situação problemática apresentada com alguma informação pictórica, no domínio dos números inteiros e operações, grandezas e medida (uso dos euros) e definida no contexto real e de natureza pessoal. Esta situação enquadra-se na *segunda aproximação à álgebra – resolução de classes de problemas*. Pretendia-se que o estudante relacionasse a informação da vida corrente, adquirida em vivências do quotidiano com os conhecimentos escolares, apreendidos apenas, no ano transacto, na resolução de *um* problema idêntico. Baseada numa proposta de trabalho apresentada na revista *Arithmetic Teacher* procurava-se averiguar da capacidade do estudante interpretar matematicamente e de forma contextualizada a situação criada, partindo do todo para as partes; estabelecer correspondências termo a termo, usando a estratégia de tentativa e erro ou desenvolvendo outros processos pessoais de cálculo.

[46] Por tal motivo, o teste em anexo apresenta a versão para a turma A e para a da turma B, com valores reais recolhidos no ano transacto, pelos estudantes de cada uma das duas turmas.

Expressões com euros (P14). Problema definido nos domínios dos números inteiros e operações, grandezas e medida (uso dos euros) e no âmbito estritamente disciplinar. Esta situação enquadra-se na *segunda aproximação à álgebra – resolução de classes de problemas*, num formato de escolha múltipla. Através desta situação, adaptada do programa de avaliação internacional PISA (2000), pretendia-se avaliar a capacidade de aplicar o raciocínio condicional, mobilizar e integrar conhecimentos adquiridos no ano transacto (expressões numéricas).

Visita à avó (P15). Situação apresentada nos domínios dos números racionais (em representação decimal) e operações, grandezas e medida (uso dos euros) com aproximação à matemática em contexto real. Esta situação enquadra-se na *segunda aproximação à álgebra – resolução de classes de problemas* e foi adaptado de um exemplo existente no artigo “The learning and teaching of school algebra” de Carolyn Kieran (1992) do *handbook of research on mathematics teaching and learning*, editado por Douglas A. Grows. Através desta situação pretendia-se que o estudante: a) interpretasse correctamente a informação dada, estritamente necessária, e mobilizasse o conhecimento e os dados de forma reversível (na primeira questão), desenvolvendo noções sobre recursividade; b) analisasse pictoricamente a situação criada e formulasse correctamente um problema (segunda questão).

Desenhando um rectângulo (P16). Situação definida nos domínios da geometria, grandezas e medida (uso de medida de comprimento) e no contexto estritamente disciplinar. Esta situação enquadra-se na *segunda aproximação à álgebra – resolução de classes de problemas* e consistia em desenhar um rectângulo em determinadas condições. Através desta situação, adaptada do programa de avaliação internacional TIMSS, pretendia-se avaliar a capacidade de aplicar o raciocínio proporcional, mobilizando e aplicando conhecimentos geométricos, designadamente, os relacionados com a construção de um rectângulo, usando a malha quadrada de 1cm por 1cm, pela utilização prática das noções de “metade” e de “uma vez e meia”.

A cerca do Tedy (P17). Situação apresentada com alguma informação pictórica, no domínio geométrico, das grandezas e medida (uso de medidas de comprimento), definida próximo do contexto real e de natureza pessoal. Esta situação enquadra-se na *segunda aproximação à álgebra – resolução de classes de problemas*. Nesta questão procurava-se avaliar a competência para interpretar matematicamente e de forma contextualizada a situação criada, distinguindo as noções de perímetro e de área de um rectângulo. A partir de uma situação próxima das vivências do estudante pretendia-se que este, em termos operacionais, ao desenhar dois rectângulos com o mesmo perímetro e com área diferente seleccionasse o rectângulo com menor área. Procurava-se, assim, que o estudante reconhecesse propostas de trabalho anteriormente desenvolvidas, concretamente no 4º ano de escolaridade[47] e fosse capaz de mobilizar e aplicar conhecimentos práticos já adquiridos.

---

[47] “*O terreno do Sr. António!...*”

Regando o Jardim (P18). Situação problemática definida nos domínios dos números racionais (em linguagem verbal e em representação decimal) e de matemática em contexto. Esta questão enquadra-se na *segunda e terceira aproximações à álgebra, numa perspectiva de modelação de fenómenos*. Pretendia-se que o estudante interligasse e completasse o conhecimento intuitivo com o conceito formal da noção de "...terça parte de..." e o aplicasse numa situação concreta do dia a dia e seguidamente o mobilizasse, com valores aleatórios, o inverso daquela noção: "...triplo de..." numa tabela de duas entradas. Através da terceira questão procurava-se que o estudante, integrando os dados da tabela anterior, aprofundasse o modelo numérico "...triplo de..." construindo um gráfico de barras numa grelha e num sistema de eixos de coordenadas, representando a relação existente entre as duas variáveis numéricas.

Área cultivada e rega vantajosa[48] (P19). Situação problemática, com alguma informação pictórica, definida nos domínios dos números inteiros e racionais (em representação fraccionária) e em contexto real e interdisciplinar, relacionada basicamente com a disciplina de História. Esta situação enquadra-se na *segunda e terceira aproximação à álgebra,* respectivamente, *na resolução de classes de problemas e na resolução de problemas numa perspectiva de modelação de fenómenos*. Pretendia-se que o estudante analisasse e interpretasse a situação apresentada em linguagem corrente e pictórica e representasse, em fracção, a relação parte-todo. Procurava-se ainda que fosse aplicada a noção de escala a unidades de medida linear, calculando posteriormente a área de um rectângulo, realizando equivalências nas unidades de área. Por outro lado, supunha-se ainda que o estudante fosse capaz de mobilizar e integrar conhecimentos da alínea anterior, interpretando o modelo matemático dado e fundamentando a opção tomada.

Crescimento de Bactérias (P20). Problema definida nos domínios dos números inteiros e operações e no âmbito interdisciplinar com ligação prática à disciplina de Ciências da Natureza. Na primeira questão, com preenchimento de lacunas, pretendia-se que o estudante integrasse conhecimentos intuitivos adquiridos nesta disciplina com os dados do gráfico de barras apresentado sobre o crescimento exponencial de bactérias. O problema enquadra-se na *primeira e terceira aproximações à álgebra, ligada à generalização de padrões e à resolução de problemas numa perspectiva de modelação dos fenómenos*. Deste modo, pretendia-se que o estudante fosse capaz de analisar convenientemente a situação apresentada no gráfico de barras, descobrindo e explicitando a regra. Procurava-se, assim, que o estudante aplicasse o raciocínio indutivo, interpretasse graficamente a modelação do fenómeno, usando, na explicitação do modelo matemático, apenas uma ou duas operações, respectivamente, a multiplicação e/ou a potenciação (de base 2).

[48] As situações designadas por 18. e 19. situam-se no limiar da matemática em contexto, uma ou outra podem ser entendidas num âmbito mais interdisciplinar ou de vivência quotidiana.

Bactérias em tabelas!... (P21). Problema no domínio dos números inteiros e operações, definida no âmbito interdisciplinar com ligação prática à disciplina de Ciências da Natureza. Pretendia-se que o estudante integrasse conhecimentos da alínea anterior, os dados do gráfico de barras sobre o crescimento das bactérias e os reorganizasse numa tabela de duas entradas, aplicando o modelo matemático descoberto e ampliando-o até, ao nono dia. O problema enquadra-se na *3ª aproximação à álgebra, numa perspectiva de modelação dos fenómenos*.

Inventando problemas (P22 e P23). Estas duas últimas situações procuram desenvolver e avaliar competências na formulação de problemas baseadas em vivências próximas do dia a dia escolar do estudante ou do meio ambiente, concretamente, neste último caso, relacionado com a experiência de um incêndio, numa vivência imaginativa, próxima de uma fábula e apresentada em banda desenhada. As duas situações enquadram-se na *segunda aproximação à álgebra - resolução de classe de problemas*, sendo a primeira questão de âmbito mais estritamente disciplinar e a segunda de âmbito interdisciplinar, ligada às Ciências da Natureza e à Formação Cívica. Procurava-se que o estudante analisasse a informação dada, a caracterizasse, seleccionasse e relacionasse os dados relevantes para elaborar um enunciado objectivo, coerente e consistente sob o ponto de vista matemático.

A estrutura do teste previu, ao nível da resolução e formulação de problemas nos domínios numérico, operatório e geométrico, bem como a utilização explícita ou implícita do conceito de variável. Algumas questões incluíram ainda a indicação da regra, por escrito, sendo possível a expressão do raciocínio do estudante por meio de signos (palavras), esquemas, desenhos, entre outros e não apenas por meio de símbolos numéricos.

Definiu-se o grau de dificuldade dos problemas, delinearam-se campos de interpretação e representação de dados em quadros, tabelas, bem como a exploração e aplicação de raciocínios de tipo condicional, indutivo e dedutivo possibilitando, assim, diferentes formas de resolução dos problemas e de apresentação de dados.

Refira-se ainda que os problemas procuraram satisfazer as seguintes orientações: a) os objectivos educacionais definidos pelo ME para a disciplina de Matemática do 2º ciclo do ensino básico (2º CEB); b) as competências a desenvolver no ensino básico, com enfoque para o 2º CEB; c) os conteúdos do ensino básico, com enfoque para o 2º CEB; d) as experiências de aprendizagem propostas pelo ME; e) as concepções e o tipo de actividades propostas pelos investigadores no âmbito da construção de conceitos pré-algébricos e intrinsecamente ligado à aquisição da noção de variável; f) as análises baseadas nos resultados do desempenho em Matemática dos programas de avaliação do TIMSS e do PISA, tendo em conta as propostas de problemas apresentados; g) o nível etário e o desenvolvimento conceptual e cognitivo do estudante; h) os dados inerentes às provas de aferição realizadas no ensino básico, ao nível da concepção e avaliação.

Esta prova (no pré-teste e no pós-teste) teve dois tempos de realização: uma primeira parte resolvida na aula de Matemática e uma segunda na aula de Estudo Acompanhado.

Convém ainda salientar que no *contexto interdisciplinar* o enfoque residiu ainda em:

- Analisar um assunto ou tema ou resolver problemas segundo vários códigos, linguagens e perspectivas disciplinares, alargando o espectro da análise e do conhecimento disciplinar e sócio-cultural.
- Desenvolver competências essenciais e transversais do conhecimento matemático.
- Utilizar os conhecimentos da disciplina de Matemática no desenvolvimento de competências funcionais e no aprofundamento de saberes de outras áreas.
- Provocar outro tipo de atitudes.

As atitudes, fundamentalmente acompanhadas e analisadas no *continuum* da investigação, também se tornaram objecto de observação aquando da realização do teste de avaliação.

Stake (1998) refere que num estudo de âmbito qualitativo os modelos de inter-acção professor-estudante podem ser outro sistema de classificação. O investigador que conhece e avalia as interacções pode ensaiar o seu esquema num grupo piloto para averiguar e usar as categorias disponíveis seguintes para ver se presta maior atenção aos estilos pedagógicos ou ao conteúdo curricular. Importa contemplar, desde logo, várias componentes, entre as quais se destacam: a) vontade de ultrapassar dificuldades; b) persistência na tarefa; c) gosto por resolver problemas; d) gosto por resolver problemas com meios tecnológicos; e) vontade de colaborar e cooperar.

5.8. Materiais Tecnológicos

5.8.1. Ferramentas tecnológicas genéricas

Processamento de Texto e Programa de Desenho. A primeira experiência realizada pelos estudantes no computador foi a descoberta do teclado e das letras que originou a "marca" no ecrã das letras soltas e de pequenas frases. Posteriormente, algumas delas foram impressas no papel, o que causou muito entusiasmo e alegria. Vários estudantes já tinham experimentado, em casa, esta sensação de representação verbal mas outros ainda não. Para além desta exploração, também outra se seguiu, em que os estudantes deram largas à sua imaginação, desenhando livremente figuras sugestivas num programa de desenho do computador, no 2º ano de escolaridade, no início do desenvolvimento do Projecto de âmbito interdisciplinar "Envolvências Geométricas".

Programas Educativos. A utilização do computador comportou a exploração de determinados programas educativos temáticos orientados basicamente para: a) a aprendizagem e aprofundamento de matérias específicas matemáticas; b) a familiarização com o teclado e a aquisição de destrezas computacionais.

Atendendo aos objectivos do projecto interdisciplinar: "Envolvências Geométricas" e às inerências da investigação e do grau etário e nível cognitivo dos estudantes foram explorados no 3º ano de escolaridade, determinados programas educativos orientados para o campo geométrico e o processo operatório tabelar, concretamente, o *sym* e o *table*. O *sym* é uma aplicação que permite a exploração de conceitos relacionados com a simetria axial (reflexão) e o *table* prevê o treino da multiplicação em representação tabelar e simultaneamente o desenvolvimento do cálculo mental.

Ambos os programas eram constituídos por uma componente lúdica que muito encorajava e motivava os estudantes. Estes revelavam um gosto particular quando exploravam estes programas e os repetiam, pois verificavam que as situações apresentadas eram sempre diferentes... e o treino estimulava-os, pela componente lúdica e pela contínua avaliação individual realizada pelo computador (nº de respostas certas, percentagem, nº de respostas em que hesitou e nº de respostas que pediu ajuda).

CD-ROM Temáticos. Os jogos integram um carácter lúdico e os problemas criativos e os de desenvolvimento lógico constituem-se como factores motivantes e atraentes para o ensino da Matemática (Cannone e Socas, 1998). Segundo Cockroft (1985) seja qual for o nível de conhecimentos, o emprego cuidadoso de "quebra-cabeças" e jogos matemáticos podem contribuir para clarificar as ideias do programa e desenvolver o pensamento lógico.

Nesta perspectiva foram utilizados CD-ROM temáticos para permitir uma ligação gradual com o computador e simultaneamente promover o aprofundamento de matérias, no 5º ano de escolaridade, designadamente: os sólidos geométricos, o cálculo de perímetros e áreas.

De forma sistemática foi utilizado um CD-ROM temático, no 5º ano de escolaridade, sobre sólidos geométricos: tipos de sólidos, poliedros e não poliedros. Este foi explorado por todos os estudantes da turma A e, em particular, em determinadas aulas da "Oferta da Escola" e em Estudo Acompanhado, por estudantes com mais dificuldades nesta matéria.

Mais tarde, no desenvolvimento de assuntos relacionados com a geometria euclideana, foi novamente explorado o mesmo CD-ROM temático para o cálculo de perímetros, de áreas de rectângulos, paralelogramos e de outras figuras geométricas, basicamente orientado também para estudantes com dificuldades de aprendizagem.

5.8.2. Folha de Cálculo

Uma das ferramentas tecnológicas utilizadas foi a folha de cálculo, *mais folha do que cálculo*, numa perspectiva primordial de organização da informação, ou *mais cálculo do que folha*, orientada fundamentalmente para a realização de determinados cálculos ou ainda *mais folha e mais cálculo* direccionada para a experimentação e/ou simulação de situações e validação de conjecturas. Tendo por base as investigações realizadas e conclusões apresentadas por Fernandes (1994) foram desenvolvidas as actividades de iniciação e aprofundamento à folha de cálculo.

Estrutura e comandos básicos. Qualquer folha de cálculo existente no mercado, pode ser definida, basicamente, como uma matriz bidimensional programável onde se podem introduzir dados numéricos e alfanuméricos e estabelecer relações entre eles. Esta ferramenta permite calcular o valor de cada uma das expressões designatórias introduzidas e exibe os dados e os valores calculados, no ecrã do computador. Fazendo variar os dados ou modificando as relações entre eles, o utilizador pode alterar os parâmetros do modelo ou modificar as hipóteses que estabeleceu, elaborando e verificando conjecturas, provocando, pela simulação "*in loco*" e instantânea, a dinamização do próprio conhecimento.

Para este estudo foi seleccionada a folha de cálculo Excel, por ser a existente no pacote integrado *Microsoft Windows*, e por constituir uma ferramenta, dentro do género, com imensas potencialidades de tratamento numérico, alfanumérico e relacional.

A estrutura basilar da folha de cálculo *Excel* contém linhas, identificadas por números naturais; colunas, designadas por letras; células, cada uma delas resultantes da intersecção de uma linha com uma coluna; área de comandos, colocada na parte superior do ecrã; a área de diálogo, localizada na parte inferior do ecrã; a janela de trabalho, que é a parte visível no momento, de toda a matriz potencialmente disponível. Cada célula é identificada pelo seu endereço, constituído por uma expressão alfanumérica, cujo primeiro símbolo é uma letra indicando a coluna e o segundo é um número designando a linha. O endereço indica a conjunção de dois atributos de posição referencial matricial bidimensional, de que resulta uma e uma só célula.

A folha de cálculo *Excel*, tal como outras folhas de cálculo, inclui, já de origem, algumas fórmulas, habitualmente designadas por "funções", que podem ser utilizadas isoladamente ou integradas noutras fórmulas construídas pelo utilizador.

De entre os vários comandos disponíveis, interessa destacar o comando cópia *editar preencher* (*para baixo e direita*) pela facilidade que proporciona à implementação de algoritmos matemáticos e por ser frequentemente explorado, em particular ao nível do ensino básico, em que foi realizado o estudo.

As folhas de cálculo, em geral, possuem ainda muitas outras características, possibilitando ao utilizador usar de criatividade na organização dos dados e na resolução dos problemas propostos. Assim, é possível, nesta folha de cálculo, inserir dados, apagar informação, linhas ou colunas ou modificar-lhes o aspecto; diminuir ou aumentar a largura de cada coluna (*Formatar coluna largura ou Formatar linha altura,...*), para que mais colunas sejam visíveis ou, pelo contrário, alargar as colunas, de forma a aumentar o número de algarismos significativos visíveis no ecrã e variar os formatos, com apresentação de números em vírgula fixa ou em vírgula flutuante, construir gráficos (*Inserir Gráfico*), escolher, no menu dos gráficos, vários formatos de gráficos, corrigir dados das células, etc. O trabalho pode ainda ser gravado (*Ficheiro Guardar ou Ficheiro Guardar como...)* em disco flexível, e pode ser, mais tarde, reutilizado através do comando (*Ficheiro Abrir...).* Pode também optar-se por imprimir o trabalho (*Imprimir*) e, por último, sair do programa (*Ficheiro Sair*). Os comandos em itálico deveriam ser os basicamente utilizados no desenvolvimento das propostas de trabalho, mas outros foram também pesquisados e explorados pelos estudantes.

Iniciação à folha de cálculo. Como já existiam, na classe A, algumas destrezas associadas ao uso do computador, a iniciação à folha de cálculo foi direccionada para a resolução do problema "*à descoberta dos números*", no 4º ano de escolaridade, com o uso directo desta ferramenta tecnológica, exposta no capítulo seguinte, em 2.4. Processos e resultados - 1º ciclo do ensino básico, 4º ano de escolaridade, (p. 233).

6. Tratamento de Dados – Estratégias

6.1. Enquadramentos

Uma das componentes da investigação insere-se numa perspectiva qualitativa de recolha e análise de dados. Esta assume uma dimensão particularmente significativa, dado que a investigação, de âmbito conceptual, focaliza-se num contexto educativo, em si mesmo complexo e recente no quadro curricular actual, definido pelo Decreto-Lei nº6/2001, em que são estabelecidos os princípios orientadores da organização e da gestão curricular do ensino básico, da avaliação das aprendizagens e do processo de desenvolvimento do currículo nacional, entendido este como o conjunto de aprendizagens e competências, integrando conhecimentos, capacidades, atitudes e valores. Nesta perspectiva, as dificuldades de análise adstritas à sala de aula alargam-se a outros espaços, emergindo da actual flexibilidade curricular a necessidade de estabelecer novos diálogos educativos entre o professor de Matemática e professores de outras áreas e naturalmente com o estudante, enquanto pessoa, influenciando necessariamente as dinâmicas de interacção educativa. Importa ainda ressaltar mais uma dificuldade metodológica relacionada com a utilização das TIC, pois segundo Coutinho e Chaves (2002) existe ainda pouca tradição da metodologia do ´estudo de caso´ na investigação nacional em Tecnologia Educativa, associada ao facto de se tratar de uma abordagem metodológica exigente, não sendo fácil de ser implementada.

É neste contexto escolar que a investigação qualitativa se instala, sendo *a fonte directa de dados o ambiente natural e constituindo-se o investigador como instrumento principal de recolha de dados*, num estudo de carácter *descritivo* e *interpretativo* em que *o interesse é orientado mais para o processo do que simplesmente para os resultados ou produtos* (Bogdan e Biklen, 1994, p. 47-49, o itálico é dos autores).

6.2. Análise conceptual

Para Quivy e Campenhoudt (1998) conceber uma problemática é explicitar o quadro conceptual da investigação, isto é, descrever o quadro teórico em que se inscreve a metodologia pessoal do investigador, precisar os conceitos fundamentais e as relações existentes, construir um sistema conceptual adaptado ao objecto da investigação.

Assim, para além do propósito de recolher dados de natureza inter-relacional, orientados para as atitudes, as interacções estabelecidas na classe e os diálogos educativos produzidos importa, também, reunir informação de carácter conceptual, tanto quanto for possível, direccionada para a forma "*como*" o estudante aprende determinado conteúdo e "*o que*" efectivamente aprende, traduzida especificamente, na forma como aplica o conhecimento e na própria aplicação do mesmo, na resolução de determinado tipo de tarefas: problemas, actividades de investigação e projectos.

Para Maren (1996) esta vertente do estudo torna-se mais significativa se a análise conceptual se localizar na descoberta, por diversas comparações, da intenção do conceito; da sua verdadeira extensão e do seu entendimento ou compreensão. Trata-se de examinar em que situações o conceito se aplica, em que condições e modalidades se deve iniciar e desenvolver:

> L´analyse conceptuelle a pour objectif de dégager le sens et les possibilités d´application d´un concept ou d´une notion, en identifiant les constituants du champ sémantique de ce concept ou de cette notion et ses interactions avec d´autres champs. (p. 139).

Segundo Maren (1996) a análise conceptual deve contemplar várias fases. A primeira fase consiste em rever a história do conceito em estudo, em que se integra a(o): a) evolução histórica; b) utilização pelos primeiros autores, de modo a examinar as transformações havidas desde o conceito original até ao uso contemporâneo; c) levantamento de questões relacionadas com o tempo, os contextos e a realidade sócio-cultural envolvente. Posteriormente, devem ser realizadas comparações e examinarem-se ainda as relações entre as diversas ocorrências teóricas e práticas e finalmente analisar as comparações das operacionalidades do conceito por diferentes autores, dado que podem alargar o grau de proficiência do estudo em diferentes contextos e domínios.

Estrutura Conceptual Investigativa. Para além das várias preocupações que assolam o investigador no "estudo de caso", uma delas localiza-se na vontade de organizar convenientemente a informação e a capacidade de prever. Para isso procura apreender aspectos, que julga necessários, nos diversos paradigmas da investigação educacional, de forma a reter ideias e propostas de intervenção imediatas ou mais estruturadas. Apesar de reconhecer que as referências dos investigadores Tuckman (1978 e 2002) e Landsheere (1986) orientam-se numa lógica de investigação comparativa referenciam-se, de seguida, como meras orientações, itens de recolha de dados propostos por estes dois autores, na tentativa de dar resposta a uma multiplicidade de aspectos e situações que emergem neste ´estudo de caso´.

Tuckman (1978 e 2002) considera existirem três tipos de categorias de variáveis num processo de investigação educacional em sala de aula: a) *variáveis independentes*; b) *variáveis moderadoras* e c) *variáveis dependentes*. Tais variáveis estão relacionadas, respectivamente, com diversas componentes, das quais se destacam: a) programa educacional, ambientes e actividades de aprendizagem; b) características da aprendizagem do estudante - estilo de aprendizagem; atitudes, sexo, idade, capacidades, …; características da professora - atitude, idade, experiência, estilo; características dos materiais da aprendizagem - estrutura, materiais específicos, …; e c) conhecimento específico e compreensão; raciocínio e resolução de problemas; atitudes e valores; aprendizagem e comportamento.

Contudo, para Landsheere (1986) numa investigação do campo educacional, existem três tipos de variáveis: as contextuais, as de processos e as de produtos.

Nas *variáveis contextuais* deverão ser descritas a(s): a) experiência de vida do estudante (classe social, idade, sexo, …); b) características do estudante (aptidões, conhecimentos, atitudes, etc); c) Escola comunidade (clima, composição étnica da comunidade, dimensão da Escola, …); d) aula (número de estudantes, manuais,…). Nas *variáveis de processos* importa descrever o comportamento dos estudantes na aula e mudanças observáveis no comportamento dos estudantes e nas *variáveis de produtos* interessa explicitar o desenvolvimento imediato do estudante/grupo (aprendizagem da matéria, atitude face à matéria, desenvolvimento de outras competências) e efeitos a longo prazo sobre o estudante (personalidade do adulto, competências profissionais).

Por outro lado, a estrutura conceptual defendida por Stake (1998) realça "a importância da singularidade e simultaneamente a da complexidade do todo, permitindo-se um estudo mais completo pelo entrelaçamento dos contextos e das interacções existentes" (p. 26). Segundo este autor a maior parte das vezes as hipóteses e as declarações de objectivos delimitam o enfoque e reduzem, em grande medida, o interesse pela situação e circunstâncias criadas. Stake (1998) considera ainda que os *temas* de investigação constituem-se como estrutura conceptual, isto é, como o cerne para os problemas e os conflitos, transformando-se as perguntas temáticas como as perguntas básicas da investigação, centralizando-se a atenção para a complexidade na contextualidade.

Assim, após apurada reflexão sobre os elementos em estudo, foi seleccionada como unidade de investigação principal a *TURMA - duas turmas*, designadas por A e B, as quais serão objecto de ´estudo de caso´, num processo *continuum* avaliativo *per si*, podendo emergir na análise o modelo comparativo, numa tentativa de reunir mais dados e entender melhor cada uma das dinâmicas das unidades de investigação. Nas duas turmas deverão ser desenvolvidas actividades educativas similares, utilizando-se apenas na turma A o computador na consecução de algumas das tarefas propostas, para se problematizar e analisar a importância educativa das ferramentas computacionais, em especial da folha de cálculo no desenvolvimento de competências pré-algébricas. Na perspectiva de uma "investigação aproximada" e tendo como objectivo aprofundar e compreender os processos metacognitivos utilizados na construção de conceitos pré-algébricos com a utilização ou não das TIC foi também seleccionada a *entidade estudante*, com o objectivo de avaliar alguns cenários de competências individuais ou grupais. Do estudo individual espera-se, apreender com maior acuidade, a complexidade única do singular e recolher "detalhes" significativos para compreender melhor a *amplidão da complexidade* das interacções e dos processos metacognitivos implementados na aquisição e desenvolvimento de determinadas competências matemáticas.

Considerou-se, assim, a unidade de investigação principal a *Entidade Turma*, com aproximações à *Entidade Estudante*, para objectivar o estudo, problematizar, individualmente e em grupo, percursos de aprendizagens algébricas, pela implementação de tarefas de âmbito da matemática em contexto e de natureza interdisciplinar.

Para organizar e definir elementos sistematizadores e inter-relacionais de análise adaptaram-se as propostas de base de Tuckman (1978, 2002) e Landsheere (1986) à investigação em curso e seleccionaram-se os seguintes elos na estrutura conceptual investigativa: a) os <u>estudantes</u>, englobando a experiência de vida dos estudantes - idade, sexo, ambiente sócio-cultural, … as características dos estudantes - atitudes, valores, potencialidades ou aptidões, expectativas dos estudantes face ao computador; b) as <u>competências</u>, integrando atitudes, valores e conhecimentos, destacando-se a predisposição para aprender a matéria e construir conhecimentos específicos do campo numérico ao algébrico; a capacidade para resolver tarefas, entre as quais se destacam: problemas, actividades de investigação e projectos; c) as <u>estratégias</u>, reunindo o ambiente criado em sala de aula com a apresentação e o desenvolvimento de diferentes tarefas, as relações inter-disciplinares experimentadas, os materiais manipulativos e as ferramentas tecnológicas usadas.

A estrutura delineada visa somente orientar o estudo e a análise pois, segundo Myers (1997), na investigação qualitativa de índole interpretativa não faz mais sentido haver uma predefinição de variáveis dependentes e independentes, dado que a atenção se focaliza para a complexidade do ser humano, como um todo, em interacção do acto de aprender com o meio envolvente.

As estratégias englobam uma componente tecnológica, prevista na investigação, que diferencia a abordagem metodológica efectuada nas duas turmas, designadamente, na turma A, implementando-se a utilização do(a): a) Processamento de Texto, programas de desenho, programas educativos e CD-ROM temáticos; b) folha de cálculo em diferentes experiências de aprendizagem.

O acompanhamento das duas turmas não contempla, globalmente, um estudo comparativo, mas possibilita a reunião de dados significativos para averiguar causas nas diferenças ou semelhanças dos objectos de análise, viabilizando possíveis explicações ou possibilitando a emergência de evidências ou indicadores de referência, bem como o levantamento de questões e reflexões complementares.

6.3. Análise de conteúdo

Uma das dificuldades da investigação qualitativa é coligir os dados relevantes e os estritamente necessários que contribuam significativamente para a essencialidade e a qualidade da investigação. Por outro lado, as dificuldades ainda são mais acentuadas quando a temática da investigação é recente e não existem instrumentos e meios já validados capazes de se constituírem como ponto de partida para a recolha de dados e a construção de outros meios fiáveis que fomentam a continuidade, a objectividade e a profundidade da investigação. De registar também a dificuldade de percurso relacionada com a análise das mensagens e das informações recolhidas por diversos meios na investigação qualitativa. Quivy e Campenhoudt (1998) reconhecem que a função da análise de conteúdo é heurística, dado que se orienta fundamentalmente para a descoberta de ideias e pistas de trabalho. Por outro lado, a análise é um processo de busca e de organização sistemático de dados, de transcrição e notas de campo e de outros materiais que vão sendo acumulados com o objectivo de compreender o fenómeno em causa (Bogdan e Biklen, 1994). Assim, na investigação em curso a descrição e problematização do conteúdo das mensagens coligidas por diferentes instrumentos de recolha de dados será orientada pela análise de conteúdo.

A intenção da análise de conteúdo é "*a inferência de conhecimentos relativos às condições de produção (ou, eventualmente, de recepção), inferência esta que ocorre de indicadores (quantitativos ou não)*" (Bardin, 1977, p. 38, o itálico é do autor). Este autor sistematiza o conceito de análise de conteúdo como um *conjunto de técnicas de análise das comunicações visando obter, por procedimentos, sistemáticos e objectivos de descrição do conteúdo das mensagens, indicadores (quantitativos ou não) que permitam a inferência de* *conhecimentos relativos às condições de produção/recepção (variáveis inferidas) destas mensagens*" (p. 31 e p. 42).

Bardin refere que por detrás da aparente semelhança de certos procedimentos, como a análise documental e a análise de conteúdo, há diferenças essenciais, no plano epistemológico, que importa atender: a) a documentação trabalha com documentos, a análise de conteúdo com mensagens (comunicação); b) a primeira faz-se principalmente por classificação-indexação e a análise categorial temática é, entre outras, *uma* das técnicas da análise de conteúdo; c) o objectivo da análise documental é a representação condensada da informação, para consulta e armazenagem e o da análise de conteúdo é a manipulação de mensagens (conteúdo e expressão desse conteúdo), com código e significância inerentes, para evidenciar os *indicadores* que permitam inferir sobre uma outra realidade que não seja a da mensagem (1977, p. 46 e p. 49).

Assim, relativamente à análise de conteúdos dos problemas e tarefas desenvolvidas, refira-se que algumas delas encontravam-se, desde logo, associadas a estudos anteriores da investigadora e/ou a experiências de investigação desenvolvidos por vários investigadores ou por programas de avaliação internacional, com determinadas categorias já validadas. Outras houve que não estavam associadas a categorias previamente estudadas, objectivamente, no 4º ano de escolaridade - "*o valor lógico de proposições*"; "*a carga certa para o "peso" certo*"; no 5º ano de escolaridade - "*itinerários na planta da minha cidade*"; "*cálculo da área dos pavilhões da Escola*"; "*lavar os dentes e poupar água*"; "*o método de Hond´t e as eleições autárquicas*"; "*correr, saltar e aprender Matemática*"; no 6º ano de escolaridade – "*vencer a fome, consolidar a paz, Angola 2002*"; "*cheques e compras"; "a área dos pavilhões da minha Escola*". A análise de conteúdo destas actividades baseou-se nas(no): a) expectativas e objectivos que se delinearam previamente; b) desenvolvimento da actividade nas aulas e c) estratégias de resolução desenvolvidas pelos estudantes.

A avaliação das questões do teste, como já foi referida, em 5.7.2. deste capítulo, foi baseada nas orientações do TIMSS, com a criação de várias categorias de análise (anexo 10). Este estudo prévio foi cuidadosamente desenvolvido para criar os "patamares" de avaliação que denunciassem diferentes entendimentos do estudante com a questão, o qual foi baseado num apurado processo de *pilotagem* com um grupo de estudantes de outra turma e ainda, de forma recursiva, com as diversas reformulações que iam surgindo realizadas no decorrer das correcções às respostas dos estudantes das duas turmas em estudo. Os resultados genéricos da *pilotagem* foram expostos no anexo 9. Após este moroso trabalho de análise e de se ter alcançado o documento final realizou-se uma análise posterior e a primeira abordagem situou-se no número de categorias, pois tudo levava a crer que tinham sido criadas "demasiadas" categorias, tendo havido a tentação imediata de as sistematizar. Contudo, sendo esta investigação analítica concluiu-se que um documento síntese seria sempre mais redutor do que este documento apresentado, pois este já inclui, numa mesma categoria, várias resoluções próximas dos estudantes, mas que olvida naturalmente a unicidade de todas as respostas e a diversidade surpreendente das diferentes estratégias desenvolvidas.

Rerelson (1952) e Krippenorf (1980) (citados por Vala (1986)) definem análise de conteúdo, respectivamente, como uma estratégia de investigação que permite "a descrição objectiva, sistemática e quantitativa do conteúdo manifesto da comunicação" (p. 103) e "uma técnica de investigação que permite fazer inferências, válidas e replicáveis, dos dados para o contexto" (p. 103). Segundo Vala (1986) a análise de conteúdo permite o tratamento da informação e efectuar inferências, com base numa lógica explicitada, sobre as mensagens cujas características foram inventariadas e sistematizadas. (…) Para proceder a inferências a partir dos dados, o analista recorre a um sistema de conceitos analíticos cuja articulação permite formular as regras de inferência" (p. 104). Segundo este autor trata-se da desmontagem de um discurso e da produção de um novo através de um processo de localização-atribuição de traços de significação, resultado de uma relação dinâmica entre as condições de produção do discurso a analisar e as condições de produção da análise.

Tal como outros autores Bardin defende que não há nenhum modelo para a análise de conteúdo e esta faz-se pela prática e pela conjugação de três elementos: as *hipóteses*, as *técnicas* e a *interpretação*, acrescentando ainda que a intenção de qualquer investigação é de produzir *inferências* válidas a partir de dados. Assim, a análise de conteúdo para Bardin constitui "um bom instrumento de indução para se investigarem as causas (variáveis inferidas) a partir dos efeitos (variáveis de inferência ou indicadores, referências de texto)" (1977, p. 137). No caso concreto das *entrevistas* Quivy e Campenhoudt (1998) consideram ser necessário a análise de conteúdo, tal como noutros elementos de recolha de dados, que se apresenta como um método complementar da observação participante que possibilita, juntamente com outros instrumentos de recolha de dados, suprir as deficiências *per si* e contribuírem, na globalidade, para uma visão mais alargada e diferenciada do fenómeno, para uma inter-validação de cada um dos instrumentos e permitir, espera-se, uma interpretação mais objectiva das matérias em estudo.

CAPÍTULO IV - ANÁLISE DE RESULTADOS

"No que as leis da Matemática dizem respeito à realidade elas não são certas;
e no que são certas, não dizem respeito à realidade"
Albert Einstein (1879-1955)

1. Introdução

No primeiro capítulo apresentou-se o problema, identificaram-se as questões da investigação, definiram-se os objectivos e delineou-se o enquadramento educativo.

No segundo capítulo aprofundou-se a vertente teórica com enfoque para os pressupostos educativos da construção do conhecimento, os princípios da Educação Matemática com destaque para as orientações curriculares no âmbito da matemática em contexto e de natureza interdisciplinar, incluindo a componente tecnológica, aprofundaram-se as aproximações à álgebra como conteúdos e veículos da abstracção e, por último, desenvolveu-se o estudo dos fundamentos e dos programas instrucionais relacionados com a aprendizagem de conceitos algébricos.

Tal como foi referido no capítulo anterior da metodologia, este estudo tem um carácter essencialmente qualitativo suportado por dados quantitativos recolhidos na resolução do teste de avaliação e durante a concretização de diversos problemas, actividades de investigação e projectos de âmbito interdisciplinar, numa vertente global e integrada da matemática em contexto, recorrendo ou não ao computador, em particular, à folha de cálculo. A análise dos resultados resulta, assim, de um *continuum* da observação, análise, registo e tratamento de dados realizados desde o 1º ciclo, concretamente nos 2º, 3º e 4º anos de escolaridade ao último ano do 2º ciclo do ensino básico.

Este capítulo, da apresentação dos resultados, contemplará três assuntos principais: o primeiro direccionado para a descrição do trabalho desenvolvido, incluindo algumas reacções e resultados conseguidos pelos estudantes, o segundo vocacionado para o relato sucinto das condições de realização do teste, os critérios de avaliação, as condições de análise, bem como a síntese dos resultados obtidos e, por último, o terceiro orientado para a apresentação e fundamentação das teses da investigação.

2. Descrição do Trabalho Desenvolvido – Análise de Processos e Resultados

Neste ponto são apresentadas as tarefas matemáticas implementadas no decorrer do *continuum* da investigação bem como a análise de processos e resultados obtidos em cada um dos dois ciclos do ensino básico, desde o 2º ao 6º ano de escolaridade.

2.1. Tarefas realizadas no 1º ciclo do ensino básico - 2º e 3º anos de escolaridade

No 2º ano de escolaridade (1998/99) definiram-se os objectivos e delinearam-se as linhas orientadoras do Projecto interdisciplinar, "*Envolvências Geométricas*" (anexo 2), nos domínios da Matemática, da Educação Visual e das Tecnologias de Informação e Comunicação, desenvolvido no âmbito do programa Ciência Viva, integrando-se, simultaneamente, as finalidades da investigação em curso. No estabelecimento dos protocolos com as Escolas envolvidas, definiram-se prioridades, planearam-se estratégias de formação[49] e actuação, procurando-se descortinar formas de diálogo estreito e profícuo com os educadores e professores integrados no Projecto.

Delineou-se o plano de intervenção conjunta, incluindo a agenda de encontros regulares para planificações, reflexões e acções conjuntas. Nestes definiram-se as actividades a desenvolver com os estudantes, indicaram-se materiais específicos, com destaque inicial para os do campo geométrico, delinearam-se estratégias de intervenção, dinamização interna e de divulgação do Projecto na comunidade escolar e na sociedade em geral. Assim, no 2º e 3º anos de escolaridade focou-se a atenção para o desenvolvimento do Projecto, no campo geométrico, privilegiando-se as actividades de investigação consideradas como situações abertas onde os estudantes "procuram regularidades, fazem e testam conjecturas, argumentam e comunicam oralmente ou por escrito as suas conclusões. Qualquer tema da matemática pode proporcionar ocasiões para a realização de actividades de natureza investigativa. Ao nível da educação básica, a geometria e os números são temas privilegiados para este tipo de experiências" (ME, 1999, p. 8). Posteriormente, de forma gradual, iniciou-se o contacto com o computador, seguindo as propostas de Fernandes (1994), numa primeira fase, de forma lúdica, com jogos e programas educativos de matemática, posteriormente, numa perspectiva integradora do conhecimento e num ambiente mais aberto, foram explorados um programa de desenho e o processamento de texto.

No 3º ano de escolaridade deu-se continuidade ao trabalho de planificação e de desenvolvimento de actividades no campo geométrico e posteriormente no domínio numérico, resolvendo-se diversos problemas relacionados com medida e explorando-se as noções de perímetro e área. Em anexo 4, encontram-se alguns exemplos das actividades desenvolvidas nestes dois anos no âmbito do projecto interdisciplinar referido. Numa perspectiva de dar a conhecer à comunidade escolar o trabalho desenvolvido envolveram-se também os pais e/ou encarregados de educação nos objectivos e nas dinâmicas do Projecto, designadamente, no apoio à concretização de algumas propostas de trabalho e na participação, em Lisboa, nos Fóruns promovidos pelo Programa Ciência Viva.

Ver e Explorar Superfícies

O trabalho desenvolvido nestes dois anos foi orientado preferencialmente para o campo geométrico e concretizado em diversos espaços e tempos, a três e a duas dimensões, com actividades diversificadas e usando diferentes materiais, inclusive o computador na turma A. Em seguida, descrevem-se, sucintamente, as actividades propostas, as estratégias implementadas, os materiais explorados e as reacções dos estudantes desenvolvidas na concretização dos trabalhos.

[49] Formação interdisciplinar, nos domínios da Matemática, Educação Visual e Tecnologias de Informação e Comunicação, no âmbito do FOCO, na modalidade de Oficina de Formação, coordenada pela investigadora e onde participaram formadores dos três domínios.

i) Composição de superfícies – numa folha branca

O estudo de superfícies é um dos primeiros exercícios básicos, já que é necessário que o estudante "estude a forma de comunicar visualmente" (Munari, 1968, p. 21). "Através do estudo da geometria, os estudantes aprendem a lidar com superfícies, formas e estruturas geométricas, assim como a analisar propriedades e relações" (NCTM, 2000, p. 41). Por outro lado, a construção da compreensão da geometria atravessa todos os níveis de ensino, do informal para o pensamento formal, defendido de forma consistente por vários investigadores, entre os quais se destaca van Hiele (1986).

Para sensibilizar[50] as crianças para a observação de superfícies os estudantes foram convidados "a olhar com olhos de ver", quer na sala de aula, quer em espaços próprios exteriores, especialmente espaços de referência da cultura patrimonial da região onde se insere a Escola, descobrindo pormenores arquitectónicos figurativos, fotografando, reproduzindo e reinventando imagens e formas (alguns exemplos mostrados, na figura seguinte, observados e fotografados pelas crianças e professores, existindo outros em anexo 4).

Figura 14: Pormenores arquitectónicos observados e fotografados

Para aprofundar esta vertente de sensibilização da observação de superfícies foi pedido aos estudantes que, com toda a imaginação e meios à sua disposição, transformassem uma folha de papel normal branca e inexpressiva, com significado, usando para isso composições artísticas. O primeiro problema de exploração da superfície foi quase ilimitado, surgindo dificuldades acrescidas, mas de grande interesse geométrico, pois emergiram competências ao nível da: a) selecção de elementos para realizar a composição; b) coordenação espacio-temporal e estética resultante da combinação dos elementos escolhidos; c) execução efectiva do projecto gráfico imaginado, designadamente, pelo recorte e colagem, da utilização de figuras anteriormente observadas ou fotografadas. Segundo Munari (1968) "estas superfícies anteriormente anónimas passam a ter uma caracterização matérica, pois podem tornar-se mais ou menos densas as texturas, até se chegar ao aparecimento de figuras reconhecíveis" (p. 23).

Por outro lado, alguém poderia objectar que nem todas as coisas da natureza têm uma estrutura, e que segundo aquele autor, existem amontoados caóticos que não são mais do que composições casuais. Pode-se responder citando, de memória, uma frase de Einstein que diz: "o acaso tem leis que ainda não conhecemos". De facto, muitas coisas que julgávamos não terem estrutura, porque esta não era perceptível, encontram-se depois com

[50] Termo usado por Bruno Munari, especialista em design e comunicação.

estruturas rigorosíssimas, como nos revelou o microscópio comum e mais tarde o microscópio electrónico mostrando-nos outras imagens, bem mais dentro da matéria e sempre com estruturas evidentes. “As estruturas não são mais do que um equilíbrio de forças, como diz um antigo sábio chinês, tudo é estruturado, mesmo a neve[51] que parece uma massa disforme, se a observarmos ao microscópio, mostra os seus belíssimos e variados cristais hexagonais” (Munari, 1968, p. 35) O autor conclui que não se deve confiar demasiado naquilo que o nosso olho vê; ele não é um instrumento perfeito e, por isso, dá-nos informações bastante limitadas sobre o conhecimento da natureza.

Tall (1994) refere que em geral os estudantes não fazem a ligação do pensamento visual ao pensamento analítico, mas a visualização pode assumir um papel complementar na percepção global de alguns conceitos matemáticos. De acordo com este autor, só é possível que os estudantes tenham sucesso em Matemática se começarem por observar, manipular, questionar, conjecturar para, posteriormente, aprenderem uma vasta série de algoritmos e um complicado sistema de regras e representações mentais ricas de conceitos.

Estas leituras, observações e reflexões ajudaram-nos a analisar sobre o interesse educativo destas actividades geométricas de visualização, exploração no espaço e concretização no plano. Reconheceu-se que estas actividades tornaram-se relevantes no processo de apreensão, observação e comunicação geométrica onde os estudantes precisaram de coordenar vários *atributos*, numa perspectiva mobilizadora do conhecimento, entre os quais se destacam a cor, a forma, a espessura, o tamanho, a textura e até mesmo o sentido estético.

As composições imaginadas e realizadas pelos estudantes constituíram-se como um exercício de grande importância em que primou a liberdade de expressão e de comunicação. Várias questões foram levantadas e este diálogo de dificuldades iniciais e posteriormente de competências adquiridas possibilitou o desenvolvimento de uma primeira estrutura individual, capaz de comunicar com o outro e de transmitir significado. Através da criação de um azulejo foi possível realizar uma estrutura cromática com *significante* (os elementos seleccionados, a composição realizada associada à cor escolhida) e *significado*, divulgado oralmente por cada um dos estudantes, com mensagens mais ou menos explícitas e entendidos pela classe. Este exercício individual e colectivo, quando partilhado posteriormente por todos, proporcionou momentos especiais de comunicação e de estabelecimento de conexões temáticas. De facto, existiram imagens explícitas, em que uma composição representava um significado para o estudante e outro para os colegas, para a professora ou investigadora, havendo casos em que a imagem não era perceptível e a surpresa instalava-se e, normalmente, a divulgação do significado, era “funalizado”, com a divulgação de diferentes olhares que surpreendiam, quase sempre, pela positiva. Como se estava na quadra natalícia os motivos mais significativos e trabalhados pelas crianças para a concepção de azulejos, neste período, foram pormenores relacionados com este tempo festivo (figura seguinte).

[51] A estrutura de fractal, como estudou Mandelbrot, no final dos anos noventa.

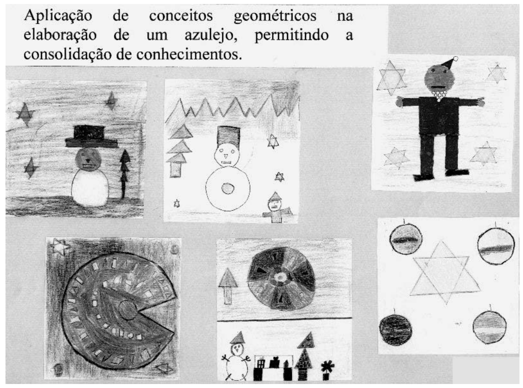


Figura 15: Concepção de azulejos – *estrutura cromática individual*

ii) Composição de superfícies – numa folha quadriculada

Numa fase posterior surgiu o quadriculado na folha, de um tamanho maior para um menor, no final do 2º e princípio do 3º ano de escolaridade até recorrerem às dimensões 1cm por 1cm[52]. Segundo Munari (1968) a quadrícula de uma superfície é a mais simples e elementar estruturação modulada, pois divide o espaço bidimensional em partes iguais e fornece a possibilidade de ocupá-lo de variadíssimas maneiras apoiando as formas nas linhas de modulação. Enquanto que no caso de ter que dispor as formas "num espaço não modulado, o operador se encontra bastante incerto acerca do lugar onde fixá-las, sobre uma superfície modulada, pelo contrário, ele tem o apoio de um módulo que lhe permite considerar a inteira superfície e lhe oferece relações precisas entre os elementos que deverá arranjar dando a eles, consequentemente, uma maior segurança na acção" (Munari, 1968, p. 36). É esta consciência gradual do espaço que o irá transportar para o reconhecimento e exploração de coordenação cartesiana, concretizada pela construção matricial de tabelas e, posteriormente, pela identificação de um sistema de eixos cartesianos.

Para permitir maior segurança no traço, no desenvolvimento da motricidade fina e na noção de limite[53], foram então desenvolvidas diferentes actividades, na estrutura quadricular, na qual os estudantes reproduziam o que tinham observado ou fotografado na Escola ou no exterior, aquando da realização das diferentes visitas de estudo realizadas. Este tipo de actividades proporcionou o desenvolvimento de conceitos, entre os quais se destacam: a cor, as formas e figuras geométricas, as composições, o reconhecimento de deslocamentos e de reflexões, bem como o sentido estético do estudante e a exploração de regularidades geométricas.

O meio envolvente, especialmente o património histórico-cultural e arquitectónico da região onde se insere a Escola, serviu de mote para o estudo da geometria. Para Munari (1968) "o passado nunca mais volta e este, na educação, terá uma função de informação cultural, mas deve estar ligado ao seu tempo, caso contrário deixará de se compreender" (p. 12). Este autor defende que um dos aspectos primordiais da comunicação é a

[52] Para interligar com a exploração de conteúdos da aritmética, onde o papel quadriculado é utilizado com o material de tipo Cuisenaire e as peças multibásicas de base 10 ou material de Dienes ou MAB – Material Aritmético Básico.

[53] A ideia de limite(s) permanece constantemente associada ao conceito de educar (Munari, 1968).

objectividade. “Se a imagem usada para uma certa mensagem não é objectiva, tem muito menos possibilidades de comunicação visual: é necessário que a imagem usada seja legível para todos e por todos da mesma maneira; caso contrário não há comunicação, mas confusão visual” (p. 16).

Segundo este autor trata-se então de explicar o que sucede quando uma imagem externa procura estabelecer um contacto com o conjunto das imagens que fazem parte do próprio mundo e que se vai acumulando e formando durante a vida do indivíduo, com imagens conscientes e inconscientes, imagens longínquas da primeira infância e imagens próximas, simultaneamente, ligadas a elas as emoções. É com este bloco pessoal que se faz o contacto, é neste bloco de imagens e sensações subjectivas que se torna necessário procurar as objectivas, as imagens comuns a muitas situações. Saber-se-á, assim, quais as imagens, quais as formas, quais as cores a usar para comunicar certas informações a uma determinada categoria de público. Apesar de grande parte desta linguagem visual ser conhecida, há que ter sempre presente a documentação sobre o assunto e a experimentação pessoal é a que melhor ensina. É nesta perspectiva que Munari (1968) conclui “cada um vê aquilo que sabe” (p. 19). Este autor defende que a captação das mensagens visuais feita pelo receptor depende de filtros sensoriais[54], filtros operativos[55] e filtros culturais[56] e é preciso, neste contexto, estar atento quando se trata de usar a imagem no ensino como estímulo e/ou complemento da informação matemática. Por outro lado, a mensagem visual pode decompor-se em duas partes: a informação veiculada pela mensagem oral ou escrita e a outra dada pelo suporte visual, que inclui a textura, a forma, a estrutura, o módulo e o movimento. E tudo isto parece influenciar o modo como o indivíduo apreende e interpreta a informação e, consequentemente, como aprende a matemática.

Tendo presente os dados recolhidos pelo NCTM (1995, 2000) e os resultados das pesquisas efectuadas por este especialista no campo do design e comunicação[57], Munari, procurou-se, nestes primeiros anos, orientar o estudante para a observação, questionando algumas das descrições enunciadas, com o intuito preciso de aprofundar e objectivar o que os estudantes realmente viam nas visitas efectuadas a diversas ruas, locais e edifícios arquitectónicos de referência da região. Posteriormente, com base no material genuíno da região – a ardósia, procurou-se estimular os estudantes das duas turmas a realizar construções que permitissem promover a comunicação matemática e o desenvolvimento de diversas competências geométricas, entre as quais se destacam a: a) identificação e criação de figuras geométricas; b) descoberta de regularidades e padrões; c) identificação e construção de frisos e pavimentos; d) apreensão do conceito de reflexão e deslocamento.

---

[54] Por exemplo, no caso dos daltónicos que não distinguem ou vêem certas cores e assim, as mensagens, baseadas exclusivamente na linguagem cromática, são alteradas, quando não anuladas.

[55] Este tipo de filtros depende das características psicofisiológicas constitutivas do receptor, por exemplo, é evidente que uma criança analisará uma determinada mensagem de maneira muito diferente da de um indivíduo mais velho.

[56] Neste tipo de filtros Munari (1968) refere que o receptor reconhece a mensagem visual de acordo com as que fazem parte do seu universo cultural.

[57] Indicado pelo professor, investigador e *designer* responsável pela Educação Visual no projecto “Envolvências Geométricas I e II – a Geometria na cidade”

Na construção de frisos e pavimentos (observados e fotografados ou idealizados), utilizaram-se ainda diversas técnicas e materiais (barro, lousa, cartolinas plastificadas ou não, papéis coloridos, etc) e outros elementos naturais, como folhas variadas, pedrinhas, paus, …

Entretanto, os estudantes da turma A iniciavam contactos com o computador através de um programa de desenho, expressando a imaginação, pela criação ou reprodução de motivos observados, desenvolvendo ainda outras competências.

Construir Figuras e Resolver Problemas

Numa perspectiva dinâmica e estruturante do conhecimento matemático, geriram-se as expectativas e os saberes adquiridos pelos estudantes, integrando ideias próprias no diálogo, concebendo e realizando diversas actividades interdisciplinares na classe, entre as quais se destacam: a) idealização e concretização de um postal de Natal; b) construção de frisos figurativos para toalhas de mesa do Natal ou panos individuais, plastificados, sugerindo-se este trabalho como prenda para o dia da mãe; c) concretização de frisos e pavimentos com materiais de plástico próprios a três e duas dimensões; d) construção de frisos, em lousa ou ardósia, com figuras geométricas em diferentes formas; e) resolução de problemas geométricos (anexo 4). Após a observação da realidade existente, identificaram-se formas e em diálogo com os estudantes decidiu-se usar as formas descritas e aprendidas na idealização/concretização de um postal de Natal. Neste contexto foram exploradas as figuras geométricas: triângulo, quadrado, rectângulo e círculo e aplicadas num contexto novo, diversificado e único, surgindo o postal de Natal como *uma unidade individualizada* e *irrepetível*.

Conjugada com esta actividade surgiu a necessidade de enfeitar as mesas de Natal e por tal motivo foi proposta a concepção/realização de "toalhas individuais" resultantes de dobragens e recortes de concepção simétrica ou da idealização/concretização de frisos figurativos ou geométricos para toalhas individuais ou de mesa.

A actividade foi executada com muito entusiasmo – estendida a toda a comunidade escolar, numa perspectiva de concepção do módulo-padrão, como *a unidade simples individualizada* e *repetível*. A professora sugeriu que esta ideia fosse aproveitada para o dia da Mãe, sendo plastificada a toalha individual de frisos. Os estudantes ficaram entusiasmados e a professora delineou contactos para concretizar a ideia, o que foi possível, encantando as mães no seu dia comemorativo. Mais tarde, com a ajuda de modelos em plástico de figuras geométricas – "caixa de formas coloridas", que era constituída por triângulos, quadrados, paralelogramos, hexágonos e trapézios isósceles de várias cores, os estudantes idealizaram, a três dimensões, e realizaram no plano, em papel quadriculado, frisos e pavimentos, como mostra a figura seguinte (outros exemplos em anexo 4). Trabalho idêntico foi realizado em placas de lousa, com desenho e pintura de diversas figuras geométricas.

Os estudantes das duas turmas foram criativos, com um sentido estético bastante apurado, descobrindo, simultaneamente, diversas possibilidades de composição de figuras geométricas e a criação de diferentes frisos, revelando dinamismo na maneira de conjugar formas e cor, explorando diversas transformações geométricas, designadamente, a identificação particular de deslocamentos e simetrias ou reflexões. Nesta tarefa foi possível desenvolver a comunicação matemática, pois os estudantes precisaram de explicar a toda a classe a origem da inspiração para a criação do friso, identificar os elementos geométricos constituintes e o processo de repetição existente.

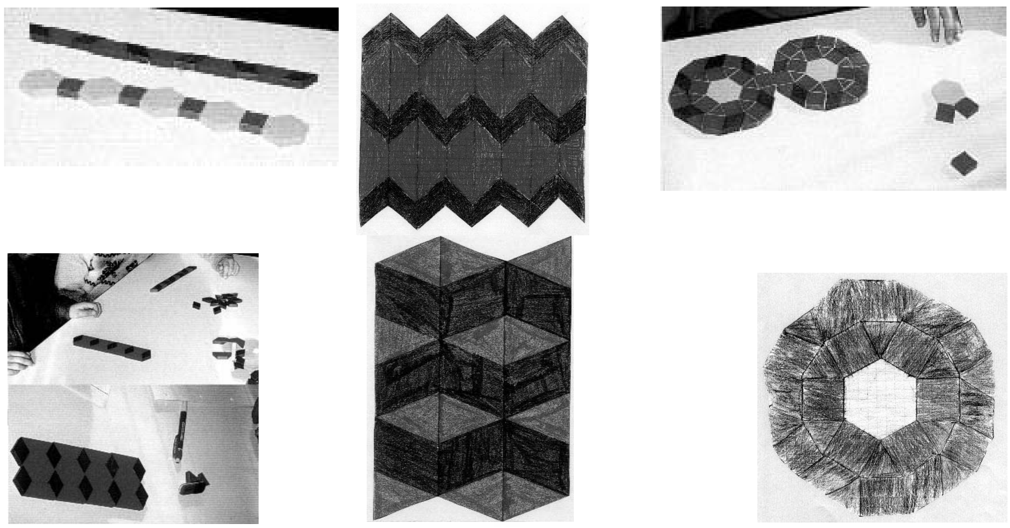


Figura 16: Uso de material manipulável para criar padrões e representar no plano

Ainda no 3º ano de escolaridade foi possível que os estudantes resolvessem problemas, a três e a duas dimensões, designadamente, o estudo do cubo e descobrissem diversas planificações deste sólido geométrico.

Para isso, imaginaram o "módulo-padrão" numa das faces do cubo, repetiram-no nas seis faces e ao fazerem diversas experiências, descobriram e construíram quatro planificações.

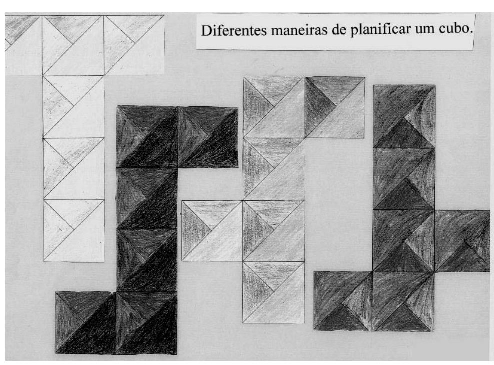


Figura 17: Representação de quatro planificações do cubo descobertas pelos estudantes do 3º ano

Na continuidade desta tarefa, realizada no plano, os estudantes resolveram questões relacionadas com a observação das formas e do número de elementos num determinado friso ou pavimento, numa perspectiva de atomização do conjunto e de uma "observação em zoom", possibilitando ainda a resolução de problemas relacionadas com o cálculo de perímetros e áreas das figuras geométricas criadas ou observadas (anexo 4).

Num dos relatórios realizados, as professoras responsáveis na Escola pelo Projecto referiram que: "*as actividades foram desenvolvidas, pelos estudantes, com grande entusiasmo e dedicação, mas também por todos aqueles que se envolveram neste projecto: professores da Escola, pais e encarregados de educação e responsáveis pela autarquia*". E numa das reuniões de trabalho uma professora salientou ainda que: "*com mais de vinte e cinco anos de experiência reconheço que esta forma de aprender geometria encantou os estudantes e também os professores, pais e encarregados de educação e estou convicta que os estudantes aprenderam mais e melhor matemática, pois foi mais estimulante e questionada a aprendizagem*".

2.2. Reflexões e considerações genéricas – 2º e 3º anos de escolaridade

No 2º ano de escolaridade foram propostas diversas tarefas aos estudantes, no campo geométrico, numa *primeira aproximação à álgebra*, fomentando a observação e o reconhecimento de uma identidade *não repetível*, posteriormente com a possibilidade de se tornar *repetível*. A repetição da identidade, isto é, do módulo-padrão, em determinadas condições, permitiu a ampliação da sequência e consequentemente a generalização do padrão – *primeira aproximação à álgebra*. O trabalho desenvolvido revelou-se bastante diversificado, com a exploração de diferentes estratégias e materiais, inclusive o computador na turma A. "A visualização espacial, com a construção, manipulação e representação mental a duas e três dimensões, apreendendo os objectos de diferentes perspectivas é um importante aspecto do pensamento geométrico" (NCTM, 2000, p. 41). Ponte, Matos e Abrantes (1999) salientam que a capacidade de visualização tem grande influência em diversos aspectos da aprendizagem da Matemática e "embora apareça normalmente associada à aprendizagem da geometria, ela é importante para o desenvolvimento de muitos outros conceitos entre os quais o de função" (p. 176). As crianças, como seres criativos, questionadores e entusiastas com o mundo que as rodeia, sentiram-se inclinadas naturalmente para observar uma variedade de formas e de enunciar as propriedades e, segundo o NCTM (1991, 1995, 2000), desde cedo, o professor deve estimular esta curiosidade natural. "Começam por identificar formas, mas o foco da atenção progride e o enfoque nas propriedades e relações torna-se cada vez mais essencial e sólido" (NCTM, 2000, p. 41-42). Estudos recentes realizados em diferentes países apontam para que a introdução à álgebra se faça por actividades de generalização, por padrões geométricos e posteriormente por padrões numéricos e pela descoberta de "leis que governam os diferentes números" (Bednarz, Kieran e Lee, 1996, p. 7). Também Wheeler (1996) salienta que uma das lições a retirar do estudo da história da álgebra ao longo dos tempos refere-se à circunstância da álgebra ter sido construída com base nas fundações da geometria. Desde a matemática Islâmica à do Renascimento as evidências sugerem que os primeiros conhecimentos algébricos iniciaram-se pelo saber geométrico e pela intuição. Abrantes, Serrazina e Oliveira (1999) defendem também que o estudo das formas no espaço e das relações espaciais oferece às crianças e aos jovens "uma das melhores oportunidades para relacionar a matemática com o mundo real" (p. 71). Acrescentam ainda que as primeiras experiências de relacionamento com o mundo físico são de âmbito geométrico, pois têm de se movimentar, de saber distinguir um objecto do outro, analisar se um deles está mais próximo ou afastado do outro. Assim, a compreensão e construção do espaço faz-se no plano *receptivo*, no contacto directo com os objectos e prossegue no terreno da *representação*, que envolve a evocação dos objectos na sua ausência (Piaget, 1975).

Como já se referiu, as primeiras aquisições algébricas surgem, muitas vezes, no campo geométrico e, neste sentido, a visualização e raciocínio espacial são também implementados na interacção com o computador e com outros materiais tecnológicos (Battista, 1994; Battista e outros, 1998; Steen, 1999). A tecnologia também tem um papel importante no processo de aprendizagem-ensino da geometria, pois oferece possibilidades aos estudantes para observar, comparar, analisar, modelar, tendo um papel interactivo experimental relevante, numa larga variedade de formas (Tall, 1994). Usando tecnologia os estudantes podem visualizar, analisar e generalizar muitos exemplos, num caminho de exploração de conjecturas, formalizando-as e verificando-as experimentalmente (Fernandes, 2000). Nos primeiros anos de escolaridade os estudantes necessitam de desenvolver as aptidões visuais através das mãos, em experiências diversificadas com objectos variados e o uso da tecnologia permite também movimentar os objectos em várias perspectivas, (de)formando-os a duas e a três dimensões (NCTM, 2000).

Hans Freudenthal (1983), nas III Jornadas sobre "aprendizaje y enseñànza de las matemáticas", referiu que após a oportunidade de se repensar na "geometria tradicional pseudo axiomática, pretensiosamente dedutiva, uma geometria fortemente temida pelos estudantes a que muitos professores estavam obrigados a ensinar" (p. 15), deve-se "continuar a ensinar geometria em todos os níveis de ensino e independentemente do nível cognitivo dos estudantes há uma geometria que se aprende por si mesma e sempre que o professor proporciona isto ao estudante dá-lhe a possibilidade de este desenvolver uma componente essencial do seu conhecimento geométrico" (p. 15). Com efeito, a criança adquire muito facilmente a capacidade para identificar objectos da mesma forma, distinguir diferentes dimensões de um objecto com a mesma forma ou formas diferentes, de identificar o mesmo objecto em diferentes distâncias, um objecto com a sua imagem em qualquer escala, ou duas imagens do mesmo objecto em diferentes escalas. Segundo aquele autor "era um erro do ensino tradicional que a geometria fosse ensinada de uma forma rígida num determinado nível de ensino" (Freudenthal, 1983, p. 27). Por outro lado, toda a pedagogia das matemáticas, que aspira que o estudante se desenvolva ao máximo do que seja potencialmente capaz, deve ter como objectivo o entendimento dos assuntos ensinados. Segundo Freudenthal (1983) para se conseguir isso deve-se parar e observar, analisar situações estáticas como as de um laboratório, numa aprendizagem no ensino formal, na sala de aula, mas também ter liberdade para que se possa observar e analisar o estudante na actividade livre e "de todas as que observei, esta última foi, para mim, a fonte mais fecunda" (Freudenthal 1983, p. 27). Gravemeijer (1990, 1991) defende também que se estimule a curiosidade do estudante, sendo "a geometria real um maravilhoso campo para desenvolver a atitude reflexiva da matemática" (1990, p. 83) que é essencial na construção e aplicação dos conceitos, especialmente os relacionados com o campo algébrico. "Através do estudo da geometria, os estudantes aprendem formas e estruturas geométricas e analisam propriedades e relações" (NCTM, 2000, p. 41). A visualização espacial – surge como um processo de construção, manipulação e representação mental a duas e a três dimensões e a apreensão dos objectos em diferentes perspectivas torna-se num importante aspecto do pensamento geométrico. A modelação geométrica e o raciocínio espacial oferecem também muitos caminhos para a interpretação e a descrição de ambientes físicos que podem ser importantes ferramentas na resolução de problemas. As orientações do NCTM (2000) salientam que as representações geométricas podem ajudar o estudante a apreender e a interligar o conceito de área ao de fracção e a construção de histogramas e de outro tipo de gráficos pode apoiar os estudantes a criar "*insights*" acerca de como conectar a geometria com a álgebra.

No 3º ano continuou-se a aprofundar o trabalho iniciado no 2º ano de escolaridade, no campo geométrico, na exploração de determinados conteúdos, como as simetrias ou reflexões e os deslocamentos e no campo aritmético, no conjunto dos números naturais e números racionais, em representação decimal. Tornava-se, assim, possível ampliar o universo dos conhecimentos dos estudantes de forma gradual e sustentada, dando relevo e importância *à generalização de padrões*, numa primeira fase, no campo geométrico, pela identificação e repetição do módulo-padrão na observação e criação de frisos e pavimentos e posteriormente no campo aritmético e numérico, através da exploração da noção de *operador numérico*, associado fundamentalmente à *primeira aproximação à álgebra* e na resolução de problemas em contexto e de âmbito interdisciplinar no desenvolvimento de competências relacionadas com a *3ª aproximação à álgebra*, pela possibilidade da modelação da situação em estudo.

Neste ano de escolaridade resolveu-se determinada classe de problemas, ligada à *segunda aproximação à álgebra*, na qual se entrosaram conhecimentos matemáticos, com aptidões artísticas e outras capacidades relacionadas com a interpretação e a análise da informação, designadamente, na resolução de problemas de medida, com o cálculo de perímetros e áreas de figuras geométricas.

Com este tipo de trabalho os estudantes tiveram a possibilidade de aprender, de forma gradual e significativa, a geometria e a álgebra e simultaneamente descortinar como estes dois domínios se interligam. Nos *standards* do NCTM (1991, 2001) é recomendado o tratamento significativo da geometria e as recomendações são ambiciosas: os estudantes têm de aprender muitos tópicos em álgebra, alguns deles relacionados intrinsecamente com a geometria, mas também ligados a outros conteúdos e áreas.

A realização das diferentes actividades proporcionou, nas duas classes, a emergência de um ambiente favorável à concretização dos objectivos da Educação Matemática, em particular, no âmbito da comunicação, das conexões matemáticas e no aprofundamento de competências pré-algébricas, designadamente, através da resolução de problemas associados à *1ª e 3ª aproximação à álgebra*, na exploração de regularidades e padrões, na aplicação da noção de operador, na exploração de problemas associados à generalização e ao desenvolvimento do raciocínio indutivo. Segundo o NCTM (2000) o processo de comunicação ajuda a construir e a manter o significado das ideias, tornando-os do domínio público e quando "os estudantes podem conectar ideias matemáticas aprofunda-se e torna-se mais duradoira a compreensão" (NCTM, 2000, p. 64).

Na dinamização das diferentes actividades integradas no projecto de âmbito interdisciplinar implementado, foi possível promover o debate, a comunicação de ideias matemáticas e a conexão com diferentes áreas do conhecimento, numa apropriação colectiva do saber integrado de cada um e da classe, situado numa socialização abrangente e de educação para a cidadania.

2.3. Tarefas desenvolvidas no 1º ciclo do ensino básico - 4º ano de escolaridade

De forma sistematizada e cronológica – por anos de escolaridade -, são apresentados os problemas e as tarefas, caracterizados por três parâmetros fundamentais: âmbito curricular; utilização ou não do computador; aproximação à álgebra e informações complementares.

Os problemas propostos no 4º ano de escolaridade (anexo 5) e (Tabela 14, p. 233) pretendiam desenvolver competências que funcionassem como pré-requisitos para a construção de conhecimentos matemáticos posteriores, numa perspectiva coerente e articulada com o 1º e 2º ciclos. Segundo esta associação e outros investigadores (Ausubel, 1963; Adler, 1968) o ensino efectivo da matemática requer uma compreensão estrita e alargada do que os estudantes sabem e precisam de saber, reconhecendo-se a necessidade da importância do suporte cognitivo para a aquisição de novos conhecimentos matemáticos. Também nos princípios orientadores do programa de Matemática oficial do 1º ciclo do ensino básico contemplam-se as grandes finalidades do ensino desta disciplina, canalizadas para o desenvolvimento da capacidade de raciocínio, de comunicação e de resolver problemas, as quais "devem estar presentes ao longo dos quatro anos do 1º ciclo de modo a assegurar a articulação vertical do processo de ensino e aprendizagem desta disciplina fundamental para a estruturação do pensamento e da acção" (ME, 1989, p. 125).

Para além dos enquadramentos pedagógicos e curriculares referidos existiram ainda preocupações ao nível da prossecução dos objectivos previstos na investigação, dos conteúdos específicos do 4º ano de escolaridade, bem como da inclusão das orientações contempladas nas aproximações à álgebra: a) a generalização de padrões; b) a resolução de determinada classe de problemas, incluindo a resolução de equações; c) a modelação matemática de fenómenos reais.

Como sugere o NCTM (1991, 1995, 2000) procurou-se, de forma consistente e interligada, desenvolver conteúdos para este nível de ensino numa perspectiva contínua de abordagem significativa, gradual e integrada do conhecimento matemático.

No 4º ano de escolaridade iniciou-se naturalmente o trabalho com a folha de cálculo aquando da resolução do problema "*à descoberta dos números*" e continuou-se a utilizar esta ferramenta tecnológica na concretização dos problemas "*a idade dos filhos*" e "*uma razão importante*". Para além deste tipo de situações concretizaram-se ainda problemas relacionados com a exploração de relações proporcionais e actividades de investigação de âmbito interdisciplinar, assinalados na tabela seguinte (Tabela 14).

Tabela 14: Três tabelas das tarefas realizadas no 4º ano de escolaridade

Problemas de Esquematização

Nome	Âmbito	Utilização da folha de cálculo	Aproximação à Álgebra	Informações complementares
Á descoberta dos números	Contexto estritamente matemático	Sim (quatro grupos)	2ª	Uso da calculadora, em caso de necessidade do estudante
A idade dos filhos	Matemática em contexto	Sim (quatro grupos)	2ª	Idem.
O terreno do Sr. António!	Matemática em contexto	Sim (quatro grupos)	2ª	Maximização da área de um terreno rectangular Uso do papel quadriculado

Problemas ligados às Relações Proporcionais

Nome	Âmbito	Utilização da folha de cálculo	Aproximação à Álgebra	Informações complementares
A compra de cromos	Matemática em contexto	Não	2ª e 3ª	Relações proporcionais (nºs inteiros)
A pintura das peças de cerâmica	Matemática em contexto	Não	2ª e 3ª	Relações proporcionais ("números decimais")
A cantina escolar	Matemática em contexto	Não	2ª e 3ª	Relações proporcionais (medida, uso dos euros)

Actividades de Investigação de âmbito Interdisciplinar

Nome	Âmbito	Utilização da folha de cálculo	Aprox. Álgebra	Informações complementares
Valor lógico de proposições	Interdisciplinar (Língua Portuguesa Matemática e Educação Visual)	Não	2ª	Preenchimento de lacunas: imagens, palavras e números
A carga certa para o "peso" certo	Interdisciplinar (Matemática e Estudo do Meio)	Não	2ª e 3ª	Actividade significativa para a criança; relações proporcionais
Vamos fazer um bolo!...	Interdisciplinar (Matemática em família)	Não	2ª e 3ª	Relações proporcionais
Uma razão importante!...	Interdisciplinar (Matemática e Estudo do Meio)	Sim (quatro grupos)	3ª	Modelação de um fenómeno Uso da calculadora

2.4. Processos e resultados - 1º ciclo do ensino básico, 4º ano de escolaridade

No 4º ano de escolaridade a orientação do trabalho dirigiu-se fundamentalmente para a resolução de problemas no âmbito da matemática em contexto e de tarefas de natureza interdisciplinar, explorando conceitos de proporcionalidade e de relações entre os dados, designadamente, com ligações directas às diversas aproximações à álgebra. No 4º ano de escolaridade a incidência fundamental das aprendizagens pré-algébricas orientou-se para a 2ª e *3ª aproximações à álgebra*, dado que no 2º e 3º anos de escolaridade tinha sido dado enfoque à *1ª aproximação à álgebra*, pela aplicação e descoberta de regularidades e padrões no campo geométrico e posteriormente no campo numérico.

Problemas de Esquematização

a) Problema em contexto estritamente disciplinar

"***À descoberta dos números***"

Após a entrega desta folha de trabalho (anexo 5) os estudantes iniciaram a resolução das diferentes questões. Na turma A um grupo de duas estudantes foi para o computador resolver este problema, acompanhado pela investigadora e, quando este terminou, mais três grupos se seguiram para continuarem a desenvolver as pesquisas já iniciadas no caderno.

Nesta turma, quatro grupos realizaram, então, o problema na folha de cálculo ou usaram esta ferramenta de trabalho para validar alguns dos resultados previamente alcançados.

Na primeira questão pretendia-se que os estudantes *descobrissem dois números cuja soma é 29 e cuja diferença é 9*. Cerca de 82% dos estudantes da turma A responderam correctamente e 63% na turma B, tendo metade desta classe usado o seguinte esquema de resolução:

$$\_\_\_\_\_ + \_\_\_\_\_ = 29$$

$$\_\_\_\_\_ - \_\_\_\_\_ = 9$$

Na segunda questão *os estudantes deveriam descobrir dois números cuja soma é 25 e o produto 126*. Aproximadamente 59% dos estudantes na turma A, e mais um estudante na classe B, cerca de 63% resolveram correctamente. Quatro dos dez grupos da turma A explicitaram em tabelas as pesquisas efectuadas e oito dos doze grupos da turma B expuseram um esquema de execução idêntico ao utilizado na questão anterior:

$$\_\_\_\_ + \_\_\_\_\_ = 25$$

$$\_\_\_\_ \; x \; \_\_\_\_\_ = 126$$

Na terceira e quarta questões relacionadas com o trabalho com números racionais, em representação decimal, os resultados foram bastante diferentes, pois a turma A obteve melhores resultados do que a B, os quais são apresentados, mais à frente neste capítulo, em 4.1. Influência *da folha* de cálculo na aprendizagem da pré-álgebra.

Reflexões/Conclusões genéricas

Os estudantes das duas turmas utilizaram a estratégia de *tentativa e erro*, mais provavelmente a *estratégia de tentativa com ajustamento*[58], difícil de destrinçar na maior parte dos casos, orientado pela experimentação de três processos básicos: a) sem uma organização planeada[59], explorados pelos estudantes das duas turmas; b) com organização

[58] Termos propostos por Meyer (1999) e Ameron (2004) desenvolvidos em 9.3.3. do segunda capítulo.

[59] Associado basicamente à estratégia de *tentativa e erro*.

em tabelas, especialmente na turma A; c) com esquemas próprios de execução, como aconteceu na turma B.

A maior parte dos estudantes da turma B baseou a resolução das questões na exploração de um esquema peculiar e interpretativo das relações expostas no enunciado, mobilizando conhecimentos anteriores, provavelmente, ligados ao preenchimento de lacunas numa expressão, de forma a construir uma frase verdadeira[60]. Pelas resoluções apresentadas tudo indica que nenhum grupo da turma A usou este esquema e aqueles que resolveram correctamente as questões utilizaram pesquisas aleatórias ou tabelas. Acrescente-se ainda que nenhum grupo da turma B tentou usar tabelas para resolver qualquer destas questões.

Iniciação à folha de cálculo. A iniciação à folha de cálculo concretizou-se de forma questionada e integrada aquando da realização deste problema. Na turma A foram colocadas algumas questões e desenvolvido o seguinte diálogo com cada um dos grupos que resolveu o problema na folha de cálculo:

"*Como vos parece que está organizada a folha de cálculo?*"

"*Em linhas e colunas*", respondeu o grupo.

"*É isso mesmo. O cruzamento de uma linha com uma coluna forma a célula na qual se podem escrever números, letras, palavras, frases e também fórmulas… Vamos exemplificar. Escrever na célula A2 a palavra Matemática*".

E os estudantes concretizaram esta ordem sem dificuldade alguma.

"*Agora, na C5 vamos escrever o número 5 e na D5 o número 126*".

Os estudantes concretizaram os procedimentos solicitados.

"*Agora, queremos adicionar estes dois valores, como fazer?*"

"*É só escrever em qualquer lado 5+126*", respondeu um estudante

"*Experimentem*", referiu a investigadora

"*Que rápido?!...*", salientaram alguns estudantes

"*Podemos fazer isso… ou usar o endereço das células para depois alterar o conteúdo e o computador faz automaticamente as contas, perceberam?*", indagou a investigadora

"*Mais ou menos…*"

"*Vamos experimentar... Por exemplo, na E5 quero que surja a soma de 5 com 126, mas com o endereço das células onde estão estes valores e assim, escrevo a expressão ou a fórmula "= C5+D5" e depois carrego na tecla <enter>*"

"*Que engraçado o computador fez logo a conta e apareceu rapidamente o resultado131 e está certo!...*", respondeu, com entusiasmo, uma estudante.

"*E agora se alterar os números em C5 e D5, o que acontecerá na célula E5?*"

"*O valor também se altera em E5*"

"*Vamos experimentar?... Estejam atentos…*"

"*Que rápido!...*", disse uma estudante.

"*Posso experimentar mais?*", indagou outra estudante

---

[60] Tarefa de âmbito interdisciplinar designada por "*o valor lógico de proposições*", desenvolvida no 4º ano de escolaridade e apresentada mais à frente, na *tese 9 da investigação.*

“*Claro que sim… Podem experimentar e depois tentem resolver a primeira questão. Só mais uma informação: a folha de cálculo faz-nos lembrar uma tabela gigante…*”

“*Pois é…*”, disse a estudante.

“*Na folha de cálculo é importante a organização dos dados e têm de ter cuidado com este aspecto. Por exemplo, na primeira questão fala-se em dois números, como fazer então? Pensem e depois tentem escrever na folha de cálculo…*”

“*Está bem…Vamos experimentar*” disseram os estudantes.

Entretanto, a investigadora acompanhou outros estudantes para, eventualmente, esclarecer e tirar dúvidas. Nas duas turmas os estudantes experimentavam de maneira desorganizada a resolução do problema proposto e foi lembrada, de uma forma genérica, a actividade de investigação realizada no 3º ano de escolaridade sobre a análise do resultado da soma[61] de um número ímpar com um número par ser sempre ímpar e assinaladas, no quadro, as respectivas estratégias de resolução.

O grupo que estava no computador pediu ajuda na resolução de uma dificuldade, surgida na folha de cálculo, pois o visor indicava ocorrência de erro… Chamou-se a atenção para a necessidade de uma leitura atenta da informação visualizada no ecrã de forma a entender-se a mensagem e actuar de acordo com essa indicação.

“*Reparem, é a fórmula que não está bem escrita, isto é, este formato não é aceite pelo computador… Anteriormente referiu-se que o sinal de igual na folha de cálculo vem no início da expressão. Está bem a fórmula, mas só falta o sinal de “igual” para o computador realizar a conta e rapidamente colocar o resultado na célula onde está escrita a fórmula*”.

“*Ah! É verdade, é isso*”, respondeu uma estudante.

“*Também me parece que devem fazer as experiências em diferentes linhas para conhecerem todas as que fizeram, está bem? E depois não se esqueçam de gravar. Podem fazer na mesma folha de cálculo as várias questões*”

“*Está bem, já estou a perceber! E já estou a ver quais são os números que servem, vamos experimentar com o 10 e 19, acho que dá*”, referiu um estudante.

“*Ora vamos também aprender a copiar esta fórmula para baixo para poderem fazer as experiências que quiserem…Reparem bem como se pode fazer…*”, referiu a investigadora

“*Mas deu zeros, nas outras linhas…*”, disse uma estudante

“*E por que será?*”, indagou a investigadora.

Silêncio…

“*Que fórmulas estão nas linhas seguintes, ora vejam…*”, referiu a investigadora.

“=A3+B3 e na outra =A4+B4, …”, responderam as estudantes.

“*O que está na A3? E na B3?...*”

“*Nada, zero,…* “, respondeu o grupo.

“*Ah! Pois então zero com zero tinha de dar zero*”, respondeu uma estudante.

“*Agora coloquem valores nessas células para ver o que acontece…*”

“*Já percebemos… Agora vamos conseguir*”, responderam as estudantes.

---

[61] E posteriormente, nesse mesmo ano, explorou-se esta actividade de investigação com o produto: “*O produto de um número par por um número ímpar será par ou ímpar? Investiga e tira as tuas conclusões*”.

É interessante registar que os diversos grupos de estudantes da turma A não estavam a organizar da forma mais conveniente a informação na folha de cálculo, pois colocavam-na no canto superior, o mais à esquerda possível. Este fenómeno aconteceu em todos os grupos do 1º ciclo em que se investigou sobre a utilização da folha de cálculo. De facto, nas primeiras experiências com esta ferramente, a tendência é utilizar o espaço do canto superior esquerdo. Como na matemática importa a essencialidade, localizada na compreensão e na descoberta de soluções correctas, procurou-se respeitar este procedimento e posteriormente, só na resolução de outros problemas, se alertou os estudantes para outros aspectos relacionados com a organização e divulgação da informação construída e no 5º ano de escolaridade aprofundou-se esta vertente da organização dos dados na resolução de problemas na folha de cálculo.

b) Problemas em contexto relacionados com o quotidiano

i) "***As idades dos filhos***"

Após a entrega da folha de trabalho (anexo 5) solicitou-se, a cada um dos estudantes, uma leitura atenta de cada uma das questões e uma resolução adequada da situação com a exploração de diversas estratégias pessoais, com base: no cálculo mental, na construção de tabelas ou na descoberta de outros esquemas que permitissem, com êxito, chegar ao resultado pretendido. Quatro grupos da turma A utilizaram a folha de cálculo para iniciarem a resolução do problema ou continuarem o trabalho já iniciado ou para validarem os resultados obtidos.

Na primeira questão, o estudante deveria ser capaz de descobrir *quais eram as idades dos três filhos do Sr. Manuel, sabendo que a soma das idades era 20 e o produto 160*.

Na turma A cerca de 82% respondeu correctamente.

Várias estratégias foram descobertas, ente as quais se destacam as seguintes.

Uma estudante assinalou a seguinte resolução:

"10+8+2=20 e 10x8=80; 80x2=160".

Alguns estudantes descobriram a solução na folha de cálculo, outros não evidenciaram as estratégias utilizadas, ou realizaram cálculos mentais ou ainda fizeram experiências e apagaram, mas outros usaram explicitamente tabelas.

Uma estudante usou a tabela e o método de *tentativa e erro* e/ou de *tentativa e erro com ajustamento* e à parte usou cálculos auxiliares:

Num	*Num*	*Num*	*Soma*	*Produto*
9	*9*	*2*	*20*	*162*
10	*8*	*2*	*20*	*160*

9x9=81 81x2=162

10x8=80 80x2=160

Uma outra estudante também utilizou o processo análogo ao anterior, mas inclui uma outra coluna[62] e assinalou todos os cálculos auxiliares.

Número	*Número*	*Número*	*Soma*	*Produto*	*Conclusão*
9	*9*	*2*	*20*	*162*	*Não*
9	*8*	*3*	*20*	*216*	*Não*
10	*8*	*2*	*20*	*160*	*Serve*

Também outra estudante utilizou uma tabela com alguns cálculos auxiliares, mas designando, de forma abreviada, cada uma das colunas.

N	*N*	*N*	*S*	*P*
2	*9*	*9*	*20*	*162*
12	*6*	*2*	*20*	*224*
10	*8*	*2*	*20*	*160*

Outros estudantes ainda desenharam a tabela e colocaram nesta apenas os três números que correctamente assinalavam o resultado.

Tal como na turma A, também na turma B houve a mesma percentagem de estudantes (82%) que conseguiram resolver correctamente esta questão e tudo indica que utilizaram a estratégia de *tentativa e erro* e/ou a de *tentativa e erro com ajustamento*, com base num esquema inventado pelos estudantes e baseado no conceito de preenchimento de lacunas numa frase, de modo a criar uma proposição verdadeira:

$$\_\_\_\_ + \_\_\_\_ + \_\_\_\_\_ = 20$$

$$\_\_\_\_ \; x \; \_\_\_\_ \; x \; \_\_\_\_\_ = 160$$

Registe-se ainda que nenhum estudante da turma B usou tabelas para resolver este problema.

Entretanto foi desenvolvido um diálogo com uma estudante da turma B, com bom desempenho em Matemática (AAlex, nome fictício) sobre o esquema utilizado.

Perguntou a investigadora:

"*Este esquema ajuda-te a resolver o problema?*"

"*Sim*", respondeu a estudante.

Porquê?"

"*Vou usar o mesmo esquema que usei na questão anterior, para os dois números. Nesse caso usei dois traços, agora como o problema fala na soma das idades de três*

---

[62] Um esquema idêntico usado na actividade de investigação desenvolvida no 3º ano de escolaridade, cujo enunciado era o seguinte: "*A soma de um número ímpar com um ímpar é sempre um número par. Justifica. Substitui agora soma por produto e investiga a veracidade desta proposição*".

filhos, uso três. Em cima dos traços vou colocar os números e fazer as minhas tentativas. Vou escrever em cada um deles as idades dos filhos. O sinal de "+" é porque se fala na soma e o sinal "x" é por causa do produto", respondeu a estudante.

"*E agora, como é que sabes quantas e quais foram as tuas tentativas?*", indagou a investigadora.

"*Penso primeiro em dois números ou três, conforme a situação, que seja aquela soma. Por exemplo, neste caso para 20, com três parcelas, penso em 7, 11 e 2. E depois calculo o produto, com a calculadora ou faço as contas de cabeça e vejo se o produto dá 160. Como deu 154 apago e penso noutros números*", explicou a estudante.

"*Pensas noutros números, mas tens por base a tentativa anterior, não é? Como fazes? Aumentas uma unidade num e diminuis no outro número?*", perguntou a investigadora

"*É mais ou menos assim, e penso também um pouco mentalmente a ver qual é o número que devo aumentar ou diminuir. Eu verifiquei isso, no caso anterior!... Começa-se pela soma, mas no produto não é a mesma coisa ... É preciso pensar*", respondeu a estudante.

"*Mas quantas tentativas fizeste e quais foram?*", indagou a investigadora.

"*Foram menos do que na questão anterior, mas não sei bem… o mais difícil é no produto, mas fui experimentando até dar o produto 160"*

"*E se usasses uma tabela, não seria melhor?*"

"*Como?*", perguntou a estudante

"*Usar uma tabela como fizemos no 3º ano de escolaridade, no ano passado, ao realizar aquela actividade de investigação, sobre a soma e o produto de um número ímpar por um número par!... Depois dos vários processos usados por cada um de vós fez-se uma tabela no quadro, para resolver o problema e referiu-se que era um esquema interessante para resolver problemas deste tipo*", relembrou a investigadora.

"*Ah! Não sei se me lembro muito bem, mas agora acho que o esquema que eu fiz percebi-o bem e consegui chegar ao resultado que queria*", retorquiu a estudante.

"*Então não vês vantagens em utilizar a tabela? Por exemplo, colocando numa coluna um número, noutra o outro número, uma coluna para a soma e na outra o produto e sem apagar, podes no final saber quais as tentativas que fizeste e quantas*"

"*Pois é, mas se eu fizesse muitas, podia ficar triste e além disso acho que não fazia tanto as contas de cabeça, pois tinha de apontar tudo. Enquanto que neste esquema que eu inventei, acho que faço mais contas de cabeça e faço mais depressa*", referiu a estudante

"*Mas há uma informação que se perde e a organização é outra*", reforçou a investigadora

"*Pois é… Mas estou contente com o meu esquema, pois resultou*"

"*Muito Bem… Mas podes em questões idênticas usar as tabelas, não achas?*", indagou a investigadora

"*Está bem…Vamos ver*", rematou a estudante.

O diálogo estabelecido com esta estudante bem como as observações efectuadas no desenrolar dos trabalhos com outros colegas revelou a fragilidade deste esquema, na óptica do professor/investigador no registo e análise das tentativas realizadas e, provavelmente, no controlo dos experimentos, na mobilização das experiências e na impossibilidade de visualizar o exemplo anterior para evoluir mais facilmente da estratégia de *tentativa e erro* para o de *tentativa e ajustamento* (Meyer, 1999 e Ameron, 2002). Contudo, a estudante revelou auto-confiança nos processos utilizados, mostrando uma atitude positiva no seu desempenho, pois o esquema criado serviu-lhe, na perfeição para alcançar os objectivos pretendidos.

Reflexões/Conclusões Genéricas

Com este problema pretendia-se *contextualizar* as aprendizagens numéricas adquiridas, explorando situações novas que possibilitassem a mobilização de dois ou três elementos conjugando os valores *soma* com o do *produto*.

De uma maneira geral os estudantes conseguiram obter bom desempenho nas questões colocadas.

O diálogo desenvolvido com uma estudante da turma B e com outros companheiros da mesma turma, que tinham usado um esquema próprio de resolução na segunda questão, proporcionou as seguintes reflexões: a) os estudantes acreditam e defendem os seus esquemas de execução; b) os estudantes procuraram utilizar esquemas com que se identificam e que lhes permitam descortinar vantagens significativas, apesar da indicação de outros esquemas de execução, designadamente, as tabelas; c) os estudantes revelam gosto em resolver um problema e realizam continuamente perguntas adicionais originando, por vezes, alguma desestabilização no ambiente da sala de aula e no apoio individualizado que esteja a acontecer, tendo como objectivo a concretização das ideias nas quais acreditam convictamente e que os levam, de certeza, à solução correcta. No uso de tabelas ou dos esquemas próprios de execução os estudantes exploram o valor de "caixa", de "cosa", na aproximação do conceito de variável, num par de elementos que verificam uma primeira condição que posteriormente deverá ser validada, ou não, pela outra condição, numa exploração implícita também de conceitos lógicos.

O esquema criado e utilizado por alguns estudantes da turma B pode também proporcionar a passagem da estratégia de *tentativa e erro* para o de *tentativa e erro com ajustamento*, pois existe uma pré-etapa de validação do par ou do terno de números que verifica as condições do problema, possibilitando o desenvolvimento do cálculo mental, evitando uma nova tentativa e a utilização da borracha e lápis para a explicitação de um novo experimento. Todavia, o estudante perde alguma informação importante, tal como: quais os experimentos que fez e o número de tentativas que desenvolveu (irrelevante, numa primeira fase, apenas essencial para a actividade lúdica competitiva posterior) e os estudantes com mais dificuldade na Matemática se não tiverem apoio individualizado podem desorientar-se e desmotivar-se nas pesquisas como frequentemente acontece com estudantes mais novos na resolução deste tipo de trabalho.

Na turma A o esquema usado foi basicamente a exploração de tabelas, já conhecido e experimentado no quadro negro aquando da realização de outras questões semelhantes e a utilização da folha de cálculo ou a visualização deste tipo de utilitário orientou, provavelmente, alguns estudantes para a exploração dos dados em tabela, na descoberta da solução.

Como também se verificou na resolução de outros problemas de esquematização saliente-se ainda que este tipo de actividades requer um acompanhamento individualizado e se tal estímulo ou reorientação não se encontrar por perto do estudante, quer no uso de tabelas quer na exploração de outros esquemas de resolução, a exploração da estratégia de *tentativa e erro* e/ou de *tentativa e erro com ajustamento* pode provocar desânimo e desmotivação, acabando o estudante por desistir mais cedo da tarefa. Este tipo de procedimento é naturalmente inconveniente para o processo individual da aprendizagem, que se deseja de crescimento harmonioso, equilibrado e de sucesso na resolução das situações criadas, mediante um processo de responsabilidade orientado pelo professor.

A resolução deste tipo de problemas permitiu ainda registar que:

- A exploração das tabelas, com utilização ou não da folha de cálculo, parece fomentar a transição da estratégia de *tentativa e erro* para a de *tentativa e ajustamento*, pois os estudantes têm a possibilidade, "mais visível", de pensar numa nova proposta de solução, fazendo os reajustamentos necessários com base nos experimentos anteriores. Tal procedimento é pouco provável acontecer na utilização do esquema apresentado pela maior parte dos estudantes da turma B, exceptuando os que revelam facilidades em matemática, pois esta estratégia requer atenção e um trabalho intelectual elaborado, baseado num bom cálculo mental[63], para não haver repetição de experiências;

- A utilização de tabelas e, em particular, a *folha de cálculo* permitiu atingir resultados mais positivos na turma A, especialmente, na ampliação do universo dos números inteiros para o dos números racionais, com representação decimal tendo-se verificado que nenhum estudante da turma B resolveu a 3ª questão do primeiro problema anterior, enquanto que 53% na turma A conseguiram e, na 4ª questão, sete estudantes da turma A responderam correctamente e apenas dois na B, como poderá ser constatado na fundamentação da *tese 3 da investigação*, exposta neste capítulo, em 4.1. Influência da folha de cálculo na aprendizagem .

- A exploração da *folha de cálculo* facilitou a utilização do modelo tabelar próximo da formulação do problema, proporcionando: a) a *organização dos dados* em tabelas; b) a *utilização de fórmulas*, com a familiarização de uma simbologia própria, cuja indicação do endereço da célula engloba implicitamente um conjunto de valores, mas com exploração operatória unitária; c) o uso da estratégia de *tentativa e erro*, numa primeira fase, com avanços para o de *tentativa e erro com ajustamento*, podendo esta ser estimulada e aprofundada com a inclusão da vertente lúdica, orientada para o melhor desempenho alicerçado no menor número possível de tentativas realizadas pelo grupo/estudante na obtenção correcta da solução.

ii) "***O terreno do Sr. António***"

A situação proposta "o terreno do Sr. António" é um problema "realista", ligado à exploração e aprofundamento dos conceitos de área e de perímetro, orientado concretamente para a optimização da área de um terreno rectangular. Este problema de

[63] Pode-se constatar esta afirmação na exploração do problema "*As idades dos filhos*", nas ajudas realizadas a vários estudantes da turma B e no diálogo estabelecido com uma estudante dessa classe.

esquematização permitiu a exploração de diferentes materiais, concretamente, o uso do papel quadriculado por todos os estudantes das duas turmas e da folha de cálculo na turma A e o desenvolvimento de aprendizagens pré-algébricas ligadas à *2ª e 3ª aproximações à álgebra*.

Tal como noutras situações de exploração deste tipo de problemas, os estudantes revelaram algumas dificuldades iniciais na compreensão da situação exposta, mas o diálogo promovido ajudou a clarificar conceitos e as relações entre os dados, tendo a maior parte dos estudantes das duas turmas resolvido correctamente a questão colocada. O papel quadriculado continuou a revelar-se como uma mais valia na resolução compreendida deste problema e, de forma organizada, em tabelas ou em espaços aleatórios, realizaram os cálculos e encontraram com relativa facilidade a solução para o problema. Registe-se ainda que nenhum estudante das duas turmas associou esta situação proposta a um problema de esquematização do tipo dos problemas anteriores e, consequentemente, nenhum estudante apresentou um esquema idêntico ao que se indica ou outro similar:

2 * _____ + 2* _____ = 20

_____ * _____ = ?

Dado que não foi possível explorar este problema, como estava previsto, designadamente, com a utilização alargada da folha de cálculo na turma A e como os resultados obtidos não se apresentaram relevantes para a elaboração das teses optou-se, tal como noutros casos, por não descrever, com pormenor, os processos implementados e os resultados obtidos.

Actividade de investigação de âmbito interdisciplinar

i) "***Valor lógico de proposições", com preenchimento de lacunas***

A resolução desta actividade de investigação mostrou-se significativa no trabalho de âmbito interdisciplinar e relevante para as aprendizagens algébricas contextualizadas, com ligações directas à *3ª aproximação à álgebra* contribuindo para a fundamentação da *tese 9*, apresentada, mais à frente, em 5.2 deste capítulo.

ii) "***Uma razão importante***" - à descoberta de "*pi"*

Esta tarefa de âmbito interdisciplinar mostrou-se relevante na aprendizagem da matemática em contexto de *'follow up'*. Os estudantes no 4º ano de escolaridade recolheram diferentes objectos redondos, levaram-nos para a sala de aula e com a ajuda de um fio e de uma régua calcularam perímetros, mediram comprimentos e determinaram quocientes. Procurou-se experimentar e adquirir conhecimentos relacionados com a *3ª aproximação à álgebra*, num processo de modelação da situação, ao descobrirem a lei que rege o fenómeno existente na natureza (aplicação da noção de "generalizador"), expresso pela razão constante "pi" entre a medida do perímetro do contorno do objecto circular e a medida do diâmetro do mesmo objecto, explorando ainda o conceito de variável "a alteração da quantidade numa expressão algébrica", como propõe Drijvers (2003, Figura 7, p. 111).

Esta actividade foi iniciada no 4º ano de escolaridade, mas tornou-se mais significativa no 6º ano, com impacto curricular na exploração dos conteúdos: perímetro da circunferência, a descoberta do número "especial" ´pi´ e a escrita formal da expressão algébrica $P=2\pi r$. Na resolução do problema "a cabra!..." os estudantes tiveram de aplicar estes conhecimentos e explorar esta fórmula. No ano terminal do 2º ciclo do ensino básico recordaram o trabalho desenvolvido no 4º ano de escolaridade e alguns materiais que trouxeram para a sala de aula, reconhecendo-se a mais valia educativa na optimização de processos e conhecimentos adquiridos experimentalmente e aprofundados gradualmente ao longo de vários anos de escolaridade.

No 4º ano foi utilizada a folha de cálculo, não no início da actividade, mas na sistematização de conhecimentos, pois em termos logísticos não era viável ter o computador à frente, seleccionar os objectos, usar a régua ou fita para realizar as medições, para registar, analisar resultados, realizar novas medições, etc… Assim, a folha de cálculo mostrou-se apenas uma ferramenta, *à posteriori*, de sistematização de dados recolhidos, na versão *mais folha do que cálculo* e de validação de conjecturas efectuadas, tendo sido a calculadora, de uma maneira geral, o material mais adequado para a realização, com êxito, desta tarefa.

Os processos desenvolvidos na exploração gradual desta tarefa, nos diferentes anos de escolaridade, mostraram-se significativos, especialmente, no 6º ano de escolaridade, conseguindo-se optimizar o trabalho realizado nos anos anteriores.

Problemas ligados às relações de proporcionalidade

a) Problemas em Contexto

i) "***A compra de cromos***"

No início da aula de Matemática foram levantadas algumas questões, das quais se destacam: "*Algum de vós está a coleccionar cromos? De que colecções?*"

Após o desenvolvimento de um breve diálogo com os estudantes foi entregue a folha de trabalho (anexo 5).

A maior parte dos estudantes nas duas turmas (quinze) respondeu correctamente à primeira questão, que consistia em preencher lacunas numa tabela de duas entradas, relacionadas com "as imagens" (número de cromos) e com o valor de "o objecto" (número de carteiras). As respostas incorrectas situaram-se fundamentalmente ao nível do valor numérico do "objecto" da tabela (número de carteiras, sendo dado o número de cromos).

Na resposta a esta questão não se conseguiu vislumbrar o processo de resolução usado pelos estudantes das duas turmas.

Nº de carteiras	1	2	3	5	[ ]	10	12
Nº de cromos	3	6	9	[ ]	24	30	[ ]

Em relação à segunda questão: "*se era possível que o João tivesse comprado, num só dia, 11 cromos? Porquê?*" todos os estudantes das duas turmas responderam correctamente, alicerçando as respostas em duas noções básicas: a) na tabuada do 3, com argumentações do tipo: "*o 11 não está na tabuada do 3*"; "*porque não tem tabuada*"; "*porque 3x4=12 e não são 11*"; b) na aplicação da relação descoberta de forma contextualizada, utilizando o operador multiplicativo "x3", com justificações deste género: "*porque em quatro carteiras não saem 11, mas 12 cromos*"; "*porque cada carteira tem 3 cromos e 4 carteiras são 12 cromos*"; "*cada carteira tem três cromos e 3x4 dá 12*"; "*porque 4 carteiras são 12 cromos*".

É curioso ainda registar que houve uma estudante e um estudante da turma B que exprimiram implicitamente a impossibilidade da resolução da equação: *?x3=11*, quando escreveram em linguagem corrente: "*não há nenhum número de carteiras que multiplicado por 3 possa dar 11 cromos*". Um estudante justificou ainda o resultado por enquadramento numérico, denunciando também o uso do operador multiplicativo: "*Não, porque se ele comprasse 5 carteiras traria 15 cromos e se comprasse 3 traria 9 cromos*".

Reflexões/Conclusões genéricas

As investigações de Moreira (1989), Meyer (1999) e Ameron (2002), referidas em 9.3.3. no segundo capítulo, salientam que não é fácil descortinar as estratégias implementadas na resolução dos problemas ligados a relações de proporcionalidade e apreender se o estudante utilizou o operador multiplicativo, neste caso "x3", realizando uma leitura relacional com as duas variáveis da tabela ou se resolveu com base no operador aditivo "+3", usando apenas uma variável.

Na resolução do problema sobre "*a compra de cromos*", em que se mobilizava o conceito do operador inteiro multiplicativo, os resultados obtidos, nas duas primeiras questões, relacionadas com o preenchimento de lacunas na tabela e com a possibilidade de comprar, nas condições dadas, 11 cromos (implicitamente tratava-se de resolver a equação: "?x3=11") foram francamente positivos e idênticos nas duas turmas. Apenas dois estudantes da turma B, com alto desempenho em matemática, referiram implicitamente, em linguagem corrente, a representação formal da equação "?x3=11", escrevendo: "*não há nenhum número de carteiras que multiplicado por 3 possa dar 11 cromos*". Na resolução desta questão existiram basicamente três tipos de respostas nas duas turmas: a) ***algorítmica***, relacionada com a noção explícita da tabuada do 3; b) ***contextualizada*** e ligada à noção implícita de operador "x3" (em cada carteira existiam três cromos); c) ***simbólica***, com a resolução implícita ou explícita da equação ?x3=11; d) ***por enquadramento***, pois um estudante justificou "*se comprasse 5 carteiras teria 15 cromos e se comprasse 3 adquiria 9*".

ii) "***A pintura das peças de cerâmica***"

Recordou-se a visita de estudo realizada há alguns meses e lembraram-se pormenores passados com registos efectuados. Após este enquadramento propôs-se a realização desta folha de trabalho (anexo 5), que irá ser explorada na fundamentação da tese 1, em 4.1. deste capítulo.

iii) “***A cantina escolar***”

Sem qualquer comentário inicial foi entregue a cada estudante uma folha de trabalho (anexo 5), designada por: “*a cantina escolar*”, que também irá ser usada na fundamentação da *tese 1*, em 4.1. deste capítulo.

Reflexões/Conclusões genéricas

Nestes três problemas sobre relações proporcionais houve o cuidado de explorar de forma gradual este conteúdo, desde os números inteiros a números racionais (de representação decimal), colocando os valores de forma não consecutiva na tabela.

Designadamente neste último problema a informação existente na tabela apresentava-se com uma ordem pouco comum para reorientar processos de interpretação, aprofundar a análise entre os dados e simultaneamente provocar uma maior compreensão do problema.

Os estudantes da turma B procuraram, com mais frequência, explorar *estratégias aditivas* ou *construtivas*[64] para resolver o problema, usando a composição e a decomposição de quantidades e relacionando linearmente os respectivos valores da tabela.

b) Actividades de investigação de âmbito interdisciplinar

i) “***Vamos fazer um bolo!...***”

Após a evocação de alguns hábitos dos estudantes, designadamente os relacionados com o gosto de saborear doces, foi lembrada a confecção de um bolo realizado na cozinha da Escola, no ano anterior. Imediatamente a seguir ao diálogo estabelecido foi entregue uma folha de trabalho (anexo 5) a cada um dos estudantes onde se disponibilizava uma receita de um bolo de maçãs, que poderia ser confeccionado, eventualmente, em casa, com a família. Para além disso, foi referido que a folha de trabalho continha questões às quais deveriam responder com o objectivo de realizar adaptações às quantidades dos ingredientes na confecção do bolo tendo em conta o número de comensais. No diálogo então estabelecido houve uma observação de um estudante da turma A (o Joe, nome fictício) que, devido ao interesse educativo da mesma, foi descrita com algum pormenor na fundamentação *da tese 8 da investigação*, apresentada em 4.2. deste capítulo, relacionada com as aprendizagens não escolares do estudante.

Na resolução da primeira questão da folha de trabalho pretendia-se que, *com base no número de ovos (passar de 4 para 8), os estudantes aplicassem o operador multiplicativo (“x2”) às quantidades de todos os outros ingredientes de modo a confeccionar convenientemente o bolo de maçãs*. Os resultados nas duas turmas foram idênticos: praticamente, todos os estudantes responderam correctamente. Na turma A houve apenas uma resposta incompleta, pois o estudante indicou a regra (“*é preciso achar o dobro*”) e não a aplicou a todos os ingredientes.

[64] Termo proposto por Moreira (1989) e exposto em 9.3.3. do segundo capítulo.

Partindo-se do princípio que a receita do bolo de maçãs era adequada para seis pessoas, na segunda questão indagava-se como deveria ser adaptada a receita para chegar para *dezoito pessoas*. A maior parte dos estudantes nas duas turmas respondeu correctamente à questão, de forma completa ou parcialmente correcta, respectivamente, 74% e 16%, na turma A e 82%, 4%, na turma B. Três estudantes da turma A responderam de forma incompleta, justificando do seguinte modo: "*Era preciso fazer três bolos como aquele*" (16%) e um estudante na turma B efectuou apenas alguns cálculos correctos (4%). Assim, na resposta a esta questão os resultados nas duas turmas foram idênticos, mas com uma ligeira diferença positiva para a turma B, dado que mais dois estudantes nesta turma aplicaram correctamente o operador inteiro multiplicativo.

Neste problema pretendia-se orientar progressivamente os estudantes da identificação de operadores multiplicativos inteiros para "decimais", num processo gradual do conhecimento, indagando-se na 3ª questão quais as alterações que se deveriam fazer na execução do bolo para que a receita chegasse para quinze pessoas. Obtiveram-se resultados mais positivos na turma A do que na B, respectivamente, de 69% e 14% de respostas correctas, na aplicação do operador multiplicativo decimal na mudança de contextos[65].

Refira-se ainda que, na resolução de vários problemas e, em particular, neste: "*vamos fazer um bolo!...*", não se previa, no enunciado, que no alargamento para um determinado número de pessoas, por exemplo, de 6 para 18 pessoas, se comesse rigorosamente a mesma quantidade de bolo. Os estudantes não levantaram esta questão e, nestas circunstâncias, atendendo às orientações de Skemp (1976)[66] e Kilpatrick (1987) considerou-se oportuno não fazer qualquer referência, pois tal informação é tacitamente aceite[67] e evitaria qualquer perturbação de natureza cognitiva no normal desenvolvimento dos trabalhos.

ii) "***A carga certa para o "peso" certo***"

A resolução desta tarefa de âmbito interdisciplinar teve início na área do Estudo do Meio, no domínio da saúde, com destaque para o estudo da coluna vertebral, dando-se enfoque à necessidade de adquirir uma postura corporal correcta.

Com a ajuda de material específico, concretamente de um modelo em fibra plástica do corpo humano[68], foi encetado o diálogo com os estudantes sobre aspectos relacionados com a coluna vertebral, designadamente, a constituição e as funções básicas. Posteriormente, focalizou-se o debate para as posturas corporais correctas a ter no dia a dia de maneira a manter uma coluna vertebral saudável e prevenir problemas futuros.

---

[65] Com a especificação de mais resultados na fundamentação da *tese 1* da investigação, apresentada em 4.1. deste capítulo.

[66] Assim, nos níveis elementares de Escolaridade, para resolver um exercício e/ou problema do tipo: "Quanto custam seis rebuçados, sabendo que um custa cinco cêntimos?", o estudante tem de partir, pelo menos, do pressuposto que se trata, num e noutro caso, do mesmo vendedor. Também no exercício e/ou problema: "Se dois amigos da Joana comam duas fatias de bolo num dia, quantas fatias de bolo comem quatro?" não está explícito que os outros dois amigos comem a mesma quantidade do que os outros. Neste sentido, Skemp (1976) e Kilpatrick (1987) referem que, na generalidade, os entendimentos implícitos na resolução de um problema são tacitamente aceites e devem ser salvaguardados em idades elementares.

[67] Possivelmente implícito como acontece no termo "completar" e já explorado anteriormente nos campos linguístico e matemático, na realização da tarefa "*valor lógico de proposições*".

[68] Pertença da Escola e desempacotado para a exploração desta actividade.

Das referências e recomendações lembradas pelos estudantes, salientou-se a necessidade de adquirirem determinadas posturas corporais em várias situações, designadamente, a estudar e a caminhar.

Entretanto, colocou-se, à turma, a seguinte questão:

"*Para além dos cuidados que expuseram não haverá outros?*"

Respondeu uma estudante: "*Sim, nós na Escola, também devemos sentarmo-nos, nas cadeiras, com as costas direitas".*

Outro estudante completou a ideia: "*E também quando viajamos de carro ou de autocarro temos de nos sentar correctamente para manter a coluna direita*".

Concordou-se com estas afirmações e imediatamente a seguir indagou-se:

"*E não há que ter mais cuidados?*"

Uns instantes de silêncio e continuou-se[69]: "*Por acaso sabem que cuidados especiais devem ter com o "peso" das vossas mochilas ao transportarem-nas às costas, todos os dias, para a Escola?*"… "*Será que há um "peso" mais ou menos adequado para não virem a ter problemas futuros na coluna?*"

"*Pois é*", disseram vários estudantes.

"*Eu, às vezes, sinto que trago peso a mais, ficam-me a doer as costas…*", disse uma estudante.

"*Bem!... Querem então saber qual é o peso adequado para transportarem, às costas, a vossa mochila?*", indagou a investigadora.

"*Queremos. Qual é?*", perguntaram os estudantes.

"*Bem, para isso cada um de vós vai ter de resolver esta folha de trabalho, onde irão interpretar uns dados escritos numa tabela, realizar o que se pede e depois tirarem as vossas conclusões*".

A primeira questão da folha de trabalho consistia apenas em *observar e analisar cuidadosamente a tabela* com os seguintes dados – reais e recolhidos de uma revista da especialidade.

"Peso" da criança	Carga da mochila
20	2
	2,7
31	3,1
39	
45	4,5
	5
51	

Com a apresentação dos dados em tabela na segunda questão pretendia-se que o estudante descobrisse a relação entre o "peso" da criança e a carga da mochila. Na turma A

[69] Para não se dispersar a atenção dos estudantes e responder ao silêncio estes foram orientados para o assunto.

dois estudantes não responderam à questão e 90% apresentaram correctamente a solução[70], expondo diversas expressões da relação: a) "*a relação que encontro … é de 1 para 10*" (8 estudantes); b) "*… é a décima parte*" (5); c) "*passei do peso da criança para o peso da mochila dividindo por 10*" (2); d) "*A carga da mochila tem de ser dez vezes menor*" (2); "*Tive de multiplicar por 10 o peso da mochila para me dar o peso da criança*" (1).

Na turma B, 60% de estudantes responderam correctamente, tendo 5 estudantes justificado de forma idêntica a alínea *a* anterior ou seguindo a ordem normal da relação entre os dados, como na alínea *d* anterior. Um estudante justificou da seguinte forma: *"… a carga pesa 0,1 da parte do peso da criança*"; ou seguindo a ordem da direita para a esquerda, quatro estudantes apresentaram respostas deste teor: "*eu encontro uma relação de 10 vezes maior o peso da criança do que a carga da mochila*" ou "*a criança pesa 10 vezes mais do que a mochila*" ou ainda numa forma mais ambígua, um estudante respondeu: "*encontro a relação 0,1maior (10 vezes menor)*".

Praticamente sem dificuldades, os estudantes responderam à terceira questão, preenchendo as lacunas na tabela de duas entradas que relacionava o "peso" da criança com a carga da mochila (quatro lacunas, duas na 1ª coluna do "peso" da criança e duas na 2ª coluna da carga da mochila). Na turma A todos os estudantes preencheram correctamente, acontecendo o mesmo na turma B, excepto dois deles que não escreveram o resultado.

Para resolverem a quarta e quinta questão os estudantes precisaram de usar uma balança. Com a ajuda da professora e da investigadora, cada criança determinou a sua massa com e sem mochila. Calcularam a diferença para determinarem a carga da mochila e retiraram as conclusões, justificando se a carga da mochila era, ou não, a mais adequada.

Na turma A dois estudantes não responderam, um outro resolveu incorrectamente, cinco fizeram-no de forma pouco clara e mais cinco precisaram de alguma ajuda na organização dos dados para registarem e tirarem as conclusões e sete apresentaram as respostas completamente correctas.

De forma idêntica à da turma A, na turma B, oito estudantes conseguiram responder correctamente à questão, fizeram-no incorrectamente e os restantes oito responderam de forma incompleta ou pouco clara.

Registe-se ainda que os estudantes revelavam compreensão em todas as operações realizadas, mas os resultados obtidos requeriam um apoio individualizado, especialmente, para ouvir os estudantes, as suas reflexões e comentários, pois indicavam estar muito interessados e entusiasmadíssimos na resolução da tarefa. Também a fase posterior de cálculo e registo dos dados recolhidos requeria uma atenção especial por parte dos estudantes e um apoio constante do professor. Todavia, tal não aconteceu da melhor forma possível, devido à dinâmica estabelecida na aula, à ansiedade manifestada pelos estudantes em realizar as experiências de pesagem e à necessidade de registar, organizar os dados e responder às questões… Como não é muito habitual a realização deste tipo de tarefas e apesar de elas serem preparadas ao pormenor, há sempre imprevistos que surgem e que desorientam o desenrolar normal da actividade. Tudo indica que este estado de

[70] Dois estudantes não responderam à questão.

envolvimento e de euforia dos estudantes não permitiu que se obtivessem resultados escritos mais positivos na resolução desta questão, como os explorados oralmente.

Reflexões/Conclusões genéricas

Após a consecução deste trabalho concluiu-se que os estudantes das duas classes participaram com entusiasmo no desenvolvimento da actividade, baseado numa pesquisa individual intensa, positiva e com significativas aquisições matemáticas, de âmbito interdisciplinar no campo matemático e da saúde.

Saliente-se que a matemática em contexto e de natureza interdisciplinar requer um conhecimento prévio dos conteúdos tratados nas áreas envolvidas, de forma a facilitar a comunicação, a interpretação, a compreensão do assunto em causa, possibilitando ao estudante a capacidade de relacionar e analisar significativamente os dados numéricos.

A realização da actividade de âmbito interdisciplinar: "*a carga certa para o "peso" certo*" foi vivida pela criança de forma verdadeiramente significativa, constatando o carácter funcional da matemática no campo da saúde, na prevenção de uma postura corporal correcta. Com esta situação problemática os estudantes puderam averiguar da utilidade prática da matemática, mas de forma muito pessoal e "com sentido" para o seu quotidiano.

Por outro lado, esta actividade ainda se tornou mais completa e verdadeiramente significativa no 6º ano de escolaridade. Isto aconteceu quando uma equipa da área da saúde fez um rastreio na Escola. Alertando os estudantes para vários temas, entre os quais os associados a hábitos de estudo e posturas da coluna vertebral, alguns deles lembraram-se da relação descoberta, no 4º ano de escolaridade, entre o "peso" e a carga da mochila e, entusiasmados, referiram-na à equipa, que desconhecia essa relação. Esta informação só foi apreendida quando se realizou uma entrevista no final do 6º ano de escolaridade a um grupo de estudantes, no "último ano" do estudo experimental contínuo realizado em observação participante pela investigadora. Assim, nesta altura, ao indagar sobre qual tinha sido a actividade mais significativa vários estudantes das duas turmas referiram "*a do "peso" da pessoa e da carga da mochila"*. Pelos dados recolhidos parece que, no percurso escolar, esta actividade tornou-se marcante do conhecimento construído pelo estudante e tudo indica que este trabalho interdisciplinar disponibiliza e mobiliza, de forma significativa, o conhecimento. De facto, esta actividade estava relacionada com a saúde dos estudantes e proporcionou, através do estudo de determinadas relações numéricas, na disciplina de Matemática, a necessidade de intervir em determinados hábitos pessoais para adquirirem uma postura corporal correcta e como referiram vários estudantes "*estudamos esta matéria no 4º ano de escolaridade e no 6º ano lembramo-nos dela com a equipa médica por causa das posturas corporais. Tem de ser muito importante!*". Por outro lado, referiu ainda uma estudante que estava a alertar a sua irmã mais nova para este problema: "*a minha irmã anda no 1º ano e eu já lhe ensinei esta relação e disse-lhe ainda que ia estar atenta para controlar a carga da mochila dela para não levar mais do que uma décima do "peso" dela*".

Assim, a relação exposta na forma tabelar podia ser suportada por um modelo com o operador quociente (":10"), de uma relação estabelecida da coluna da esquerda para a da direita, ou por um modelo multiplicativo, com o uso do operador "x10", mais acessível ao estudante, mas numa ordem não tão habitual, no sentido da direita para a esquerda.

Esta possibilidade de análise permitiu dois tipos de resposta: a) uma resposta mais frequente, isto é, "*a relação que encontro entre o "peso" da criança e o "peso" da mochila é de 1 para 10*" ou uma segunda b) com um sentido mais usual da relação, da esquerda para a direita, mas, neste caso, menos acessível para os estudantes com formulações deste teor: "*é a décima parte*" ou "*do peso da pessoa para o peso da mochila é a décima parte*". Todavia, houve também respostas do tipo: "*a carga da mochila tem de ser dez vezes menor*" ou mais concretizada: "*passei do peso da criança para o peso da mochila dividindo por 10*" e há mesmo um estudante que faz o esquema: "→:10" de uma coluna par outra.

Como se expôs num dos parágrafos anteriores, a linguagem usada pelos estudantes da turma B na abordagem da segunda questão "*que relação encontras entre o "peso" da criança e a carga da mochila*" apresentou-se menos simbólica do que a utilizada pelos estudantes da turma A.

2.5. Tarefas realizadas no 2º ciclo - 5º e 6º anos de escolaridade

Quinto ano de escolaridade. No 5º ano de escolaridade foram resolvidos vários problemas e outras tarefas nas aulas de Matemática nas duas turmas, ligadas apenas a esta disciplina e/ou a outras, desenvolvendo-se, assim, trabalhos de âmbito interdisciplinar relacionados com as disciplinas de *Ciências da Natureza, Educação Física, História* e as áreas de *Estudo Acompanhado, Formação Cívica e "Oferta da Escola" (TIC)* (anexo 6).

No campo da geometria, no conteúdo dos sólidos geométricos foi desenvolvida a actividade de investigação: "*à descoberta da fórmula de Euler*" e realizada a actividade lúdica "*o jogo dos poliedros*"[71]. Ainda no âmbito da geometria, no conteúdo relacionado com a identificação e a localização cartesiana e o cálculo de áreas, foram desenvolvidas, no âmbito da matemática em contexto e de natureza interdisciplinar, as actividades de investigação: "*itinerários na planta da minha cidade: de casa à Escola*" e "*cálculo da área dos pavilhões da Escola"*. O raciocínio espacial ajuda a usar mapas, a planificar ruas, caminhos, itinerários, a desenhar plantas e a criar arte. Os estudantes podem aprender a ver estruturas e a observar simetrias à sua volta, usando materiais concretos; trabalhar activamente com ideias matemáticas, devendo, para isso, ser ajudados a desenvolver aptidões para localizar elementos num mapa da cidade, localizar ruas, definir caminhos, usando as coordenadas cartesianas (Liben e Downs, 1989).

No campo numérico, no conteúdo da multiplicação e divisão não inteira foram desenvolvidas, no âmbito interdisciplinar, as actividades de investigação: "*lavar os dentes e poupar água"*, "*o método de Hondt e a escolha dos nossos governantes autárquicos*" e no âmbito estritamente matemático foi resolvida na folha de cálculo, apenas na turma A, a actividade "*gerar números*".

---

[71] Baseados nas propostas de António Sá no livro "A aprendizagem da matemática e o jogo" publicado pela APM em 1995.

No conteúdo sobre as potências desenvolveram-se problemas relacionados com as Ciências da Natureza, designando-se a folha de trabalho por: "*Boatos e bactérias*".

No domínio das relações e da descoberta de possíveis processos de modelação de fenómenos concretizou-se, para além da actividade anterior, uma outra relacionada com as vivências escolares dos estudantes em Educação Física, concretamente, nos conteúdos do "salto de força inferior" e "corrida", subordinada ao tema: "*a correr, a saltar e a aprender matemática!...*".

Numa perspectiva de cumprimento do programa de Matemática, no que concerne ao desenvolvimento de competências essenciais de conexão e comunicação matemática, bem como à necessidade de concretizar aproximações directas à álgebra previstas por vários investigadores (Bednarz, Kieran e Lee, 1996); Bednarz, 1996; Janvier, 1996; Rojano, 1996; Radford, 1996; Bell, 1996; entre outros), de forma a promover a construção gradual dos conhecimentos algébricos, foi ainda proposta a resolução de três problemas, designados por "*compras nos saldos – colecções com guarda-chuvas e bonés*" e "*animais na quinta*" e um outro já concretizado no 4º ano de escolaridade: "*a idade das pessoas*". Estes problemas foram criados pela investigadora ou adaptados de investigações nacionais, do Instituto Freudenthal e publicados em diferentes revistas de referência, com especial destaque para "Mathematics Teaching in the Middle School", "Teaching Children Mathematics" e "Arithmetic Teacher".

Tabela 15: Duas tabelas sobre as tarefas realizadas no 5º ano de escolaridade

Problemas de Esquematização

Nome	**Âmbito**	**Utilização da folha de cálulo**	**Aprox. à Álgebra**	**Informações complementares**
Compras nos saldos	Matemática em contexto	Não	2ª	Ideia baseada numa revista da especialidade e do Freudenthal Institut (FI)
Animais na quinta	Matemática em contexto	Sim	2ª	Idem
A idade dos filhos	Matemática em contexto	Sim	2ª	Continuar a aprofundar o trabalho realizado no 4º ano de escolaridade
Boatos e bactérias	Interdisciplinar (Matemática e Ciências da Natureza - CN)	Sim	2ª e 3ª	Conteúdo: Potências

Actividades de Investigação de âmbito Interdisciplinar

Nome	**Âmbito**	**Utilização da folha de cálculo**	**Aprox. Álgebra**	**Informações complementares**
Fórmula de Euler	Interdisciplinar: (Matemática (M); História (H) Formação Cívica (FC)	Não	2ª e 3ª	Conteúdo do campo geométrico: descoberta da fórmula de Euler. Pesquisas para conhecer vida e obra de Euler.
Itinerários	Interdisciplinar: (origem em H e depois em M)	Não	2ª	A escala não é conteúdo da Matemática neste ano de escolaridade
Áreas dos Pavilhões	Interdisciplinar: (M e H)	Sim	2ª	Idem

Lavar os dentes e…	Interdisciplinar: (M e CN)	Não	2ª e 3ª	Trabalho para casa (TPC) Matemática em família
Método de Hondt	Interdisciplinar: (H, FC e M)	Sim	3ª	Conteúdo explorado: divisão real
A Correr e saltar e …	Interdisciplinar: (M e Educação Física (EF))	Sim	3ª	Conteúdos de EF (salto de força inferior e corrida) e de Matemática (relações)

Sexto ano de escolaridade. No 6º ano de escolaridade foram realizados problemas e tarefas nas aulas de Matemática, ligadas apenas a esta disciplina e/ou a outras, desenvolvendo-se, assim, trabalhos de âmbito interdisciplinar relacionados com as disciplinas de *Língua Portuguesa*, *Ciências da Natureza, Educação Física, História* e as áreas de *Estudo Acompanhado, Formação Cívica e Oferta da Escola (TIC)* (anexo 7).

No âmbito da aprendizagem do conjunto de números racionais e da matemática em contexto foi proposta a leitura atenta de uma banda desenhada e a interpretação numérica da mesma através da realização da folha de trabalho, como actividade de investigação: "*banda desenhada – as fracções como motivo de conversa*". Numa perspectiva global, dinâmica e interdisciplinar do conhecimento matemático foram desenvolvidos os projectos: "*vencer a fome, consolidar a Paz, Angola 2002*"; "*Pulsação*" e "*a área dos pavilhões da minha Escola e sua história*".

Para explorar a vertente funcional da matemática, a resolução de problemas ligados à noção de recursividade e aprofundar os conhecimentos do sistema monetário europeu foram resolvidos os problemas: "*cheques e compras*" e "*expressões com euros*".

No domínio das relações e da descoberta de possíveis processos de modelação de fenómenos resolveram-se, no âmbito da matemática em contexto, os problemas: "*tantas caixas!...*", "*respirar e descansar*" e "*padrões em V*" e, ligados ao conceito de proporcionalidade directa, os estudantes concretizaram ainda a situação problemática: "*a festa de aniversário*".

Tendo como finalidade educativa o aprofundamento do programa de Matemática, nas vertentes do desenvolvimento de competências essenciais de conexão e comunicação matemática, incentivando-se a construção gradual de conhecimentos algébricos resolveram-se ainda problemas de esquematização, designadamente: "*galinhas!...*" e "*a cabra*", relacionados com diversas aproximações à álgebra previstas por vários investigadores (Bednarz, Kieran e Lee, 1996; Bednarz e Janvier, 1996; Rojano, 1996; Radford, 1996; Bell, 1996; Meyer, 1999; Ameron, 2001-2004, 2002; entre outros).

Tabela 16: Quatro tabelas sobre as tarefas realizadas no 6º ano de escolaridade

Problemas de Esquematização

Nome	**Âmbito**	**Utilização da Computador**	**Aproxim. Álgebra**	**Informações complementares**
Tantas caixas!...	Matemática em contexto	Sim	1ª e 3ª	Aplicação de um modelo numérico; estudo dos nºs racionais
Respirar e descansar	Matemática em contexto (Ciências da Natureza e M)	Não	2ª	Ideia baseada no PISA
Galinhas!	Matemática em contexto	Não	2ª	TPC, com a ajuda ou não da família
A cabra!	Matemática em contexto	Sim	2ª	Utilização do *PGD Sketchpad* para ilustrar a situação
Padrões em V	Matemática em contexto	Sim	1ª e 3ª	Ideia baseada num trabalho desenvolvido no FI

Outros Problemas

Nome	**Âmbito**	**Utilização do Computador**	**Aproxim. Álgebra**	**Informações complementares**
Cheques e compras	Matemática em contexto	Não	2ª	Utilização de cheques reais
Expressões com euros	Contexto estritamente matemático	Não	2ª	Problemas ligados à recursividade de pensamento
A festa de aniversário	Matemática em contexto	Não	2ª e 3ª	Continuidade e aprofundamento do trabalho já desenvolvido

Actividade de Investigação de Matemática em Contexto e de Âmbito Interdisciplinar

Nome	**Âmbito**	**Utilização do Computador**	**Aproximação à Álgebra**	**Informações complementares**
Banda desenhada e fracções...	Interdisciplinar (M e Língua Portuguesa)	Não	2ª	Ideia baseada numa revista de Educação Matemática; Exploração do conteúdo: nºs racionais.

Projectos de Âmbito Interdisciplinar

Nome	**Âmbito**	**Utilização do Computador**	**Aproximação à Álgebra**	**Informações complementares**
Vencer a Fome ...	Interdisciplinar: (Formação Cívica; Língua Portuguesa-LP; Educação Visual; Oferta da Escola; Matemática – Mat.)	Sim	2ª	Campanha da Cruz Vermelha (CV). Acção de solidariedade e exploração de vários conteúdos em diferentes áreas. Envio de produtos oferecidos pelos estudantes à CV.
Pulsação	Interdisciplinar: (Ciências da Natureza, Educação Física, Mat.)	Sim	1ª e 3ª	Ideia baseada no TIMSS
A área dos pavilhões ...	Interdisciplinar: (História, Língua Portuguesa, Mat. e Estudo Acomp.	Sim	2ª	Continuação e aprofundamento do trabalho já iniciado no ano anterior.

2.6. Processos e resultados – 2º ciclo do ensino básico

A. No 5º ano de escolaridade

A. 1. Problemas de Esquematização

Tal como defende Meyer (1999) e Ameron (2001-2004; 2002) os vários problemas de esquematização propostos e desenvolvidos nas duas classes, revelaram-se de importância fulcral para as aprendizagens pré-algébricas no âmbito da matemática em contexto. O desenvolvimento deste tipo de problemas e a apresentação dos resultados serão divulgados na fundamentação das teses no ponto 4 do presente capítulo.

A.2. Actividades de Investigação – Âmbito Interdisciplinar

i) "***Fórmula de Euler***"

Na perspectiva global e interdisciplinar da construção do conhecimento matemático, com enfoque para a *1ª aproximação à álgebra*, na descoberta de regularidades nos poliedros e na tentativa de explorar conteúdos em História relacionados com o percurso social e intelectual da vida de Euler e na área de Formação Cívica, com a natural abordagem de aspectos particulares de vida deste grande matemático, considerou-se oportuno trabalhar a fórmula de Euler. Assim, quatro razões fundamentais originaram o desenvolvimento desta actividade de investigação: i) integra-se no primeiro tópico da geometria e é acessível ao nível etário dos estudantes; ii) proporciona o desenvolvimento experimental do conhecimento matemático e o prazer da descoberta; iii) permite a exploração de uma actividade relacionada com regularidades e padrões, conectada com a *primeira aproximação à álgebra*; iv) proporciona o desenvolvimento de actividades de âmbito interdisciplinar, consideradas significativas para os estudantes, com liames fundamentais à disciplina de História e à área de Formação Cívica.

Os estudantes das duas turmas reagiram positivamente à realização desta actividade de investigação que por sugestão da professora e com a ajuda de alguns sólidos geométricos, em especial de poliedros, pesquisaram segundo determinados parâmetros, organizaram os dados em tabelas e concluíram "é +2" ou "é -2", conforme a ordem que seguiam ao "ler" a informação registada. Os estudantes acharam esta actividade muito acessível, tendo alguns da turma A referido: "*esta fórmula é tão fácil! … O matemático Euler teve de descobrir outras coisas importantes para ficar célebre, pois senão também todos nós éramos importantes, pois todos descobrimos esta relação*".

Refira-se que esta actividade revelou-se significativa nas aprendizagens pré-algébricas, mas como não se desenvolveu um trabalho interdisciplinar profundo como se previa, no âmbito da disciplina de História sobre o percurso de vida de Euler e dado que, nestas circunstâncias não parece ter influenciado directamente nenhuma tese enunciada não se registam mais pormenores do desenvolvimento desta actividade.

ii) "***Itinerários na planta da minha cidade***"

A génese deste trabalho de natureza interdisciplinar (anexo 6) desenvolveu-se a partir da História[72], tendo sido posteriormente aprofundado na disciplina de Matemática e na área de Estudo Acompanhado.

As aulas foram previamente preparadas de modo a permitir o desenvolvimento de um trabalho individualizado, com a pesquisa de mapas fornecidos pela Câmara Municipal e a disponibilização de diferentes materiais, como ´pioneses´, réguas, lupas, entre outros. Apesar da actividade ser significativa no quadro da flexibilidade curricular actual e ter sido estimulante nas aprendizagens relacionadas com a localização cartesiana onde foi possível, cada um dos estudantes, localizar no mapa, a zona onde se situava a casa onde moravam, identificar as ruas e os cruzamentos por onde passavam todos os dias, concluiu-se que deveria ser apenas promovida no ano seguinte - 6º ano de escolaridade, dado que requer noções e abordagens intelectuais em que os estudantes necessitam de outro desenvolvimento cognitivo e ainda por ser apenas neste ano que o conteúdo "escala" faz parte do programa de Matemática. A propósito deste aspecto a professora responsável pelas duas turmas referiu: "*ao aprofundar-se o assunto "escalas" que não é do programa este não deve ser objecto de avaliação na disciplina de Matemática. As famílias são insensíveis a estes aspectos didácticos que, se não forem bem tratados, podem bloquear o próprio processo de aprendizagem do estudante*".

Assim, pensa-se que a flexibilidade curricular prevista na gestão escolar do ensino básico deve ser acompanhada por uma programação temática das diferentes disciplinas para que todas elas concorram, num mesmo ano, para um saber comum, partilhado pelos professores e compreendido e integrado pelos estudantes, de modo a evitar-se esta "décalage" conteúdal, como aconteceu no caso da noção de escala iniciada no 5º ano de escolaridade em História, mas apenas fazendo parte do conteúdo de Matemática no 6º ano de escolaridade (como parece ser mais adequado).

Contudo, este tipo de trabalho e pesquisas realizadas proporcionou uma aprendizagem social diferente, com a exploração de saberes geométricos de natureza espacio-temporal estimulantes para os estudantes e para o próprio professor, pois as respostas a algumas questões requeriam um conhecimento matemático "mais real" das ruas da cidade que naturalmente o jovem dispunha e o professor nem sempre. Nas questões relacionadas com o trânsito, sentidos proibidos ou obras em determinadas ruas que requeriam respostas não apenas estritamente matemáticas, mas contextualizadas, mais abrangentes e "realistas" eram totalmente dominadas e reconhecidas pelos estudantes. De facto, no desenvolvimento desta actividade, os estudantes sentiam-se no centro da aprendizagem e os motores do saber, fazendo algumas observações realistas, originais e de forte argumentação lógica. Esta experiência de aprendizagem de âmbito interdisciplinar revelou-se "realista", contextualizada e significativa para o estudante, requerendo, por parte do professor uma planificação prévia cuidadosa e, na classe, um apoio individualizado constante.

---

[72] Relembrar que já tinha havido um pedido de cooperação da professora de Matemática à docente de História relacionado com a exploração da fórmula de Euler.

Esta experiência de aprendizagem interdisciplinar, baseada na exploração do conteúdo "escala", com origem na aula de História para a aula de Matemática, a pedido da professora de História, proporcionou a reflexão de determinados aspectos pedagógicos, que importa registar: a) a abordagem curricular do assunto "escala", a realizar a partir do 6º ano de escolaridade deve passar pela exploração de situações similares às expostas neste estudo, isto é, pela resolução de actividades "realistas", contextualizadas e fortemente significativas para o estudante; b) o reconhecimento do interesse em estudar esta matéria, de carácter fortemente funcional, explorando diferentes situações, usando diferentes mapas e vários materiais, em que seja amplamente vivenciada a aplicação prática do conceito; c) a necessidade e o interesse em desenvolver um trabalho de âmbito interdisciplinar, designadamente, com a disciplina de História e/ou de Geografia, em que estas noções sejam também exploradas no mesmo ano de escolaridade; d) no 6º ano de escolaridade o estudante revela outra maturidade cognitiva que lhe permite outra desenvoltura e uma apreensão mais compreendida do conceito, com a capacidade de o aplicar em casos concretos, como aconteceu com a resolução do problema: "*a cabra*", em que vários estudantes da turma A resolveram o problema "à escala".

iii) ***Áreas dos pavilhões da minha Escola***

A actividade de investigação proposta de âmbito interdisciplinar (anexo 6) estava relacionada implicitamente com a disciplina de História, na aplicação do conceito "escala" e concretamente com a Matemática, na exploração do conteúdo programático: cálculo de áreas de polígonos. A concretização desta actividade de investigação tinha como objectivos: a) explorar a informação dada; b) seleccionar um dos pavilhões do mapa dado da Escola e outros dados relevantes; c) observar atentamente pormenores; d) determinar a área do pavilhão pela decomposição de figuras geométricas conhecidas, cuja fórmula do cálculo da área era dominada pelo estudante. Na turma A, os estudantes posteriormente usaram a folha de cálculo para organizar a informação, numa perspectiva de *mais folha do que cálculo* e, em seguida, no cálculo das áreas parcelares e na área total, explorar a situação nesta ferramenta tecnológica, *mais cálculo do que folha*. De forma dinâmica os estudantes das duas turmas tiveram de lidar com conhecimentos anteriormente adquiridos e de os adaptar a situações novas, mobilizando saberes geométricos e numéricos na decomposição de figuras planas geométricas conhecidas e no cálculo da área de um dos pavilhões escolhidos na planta da Escola. Neste trabalho os estudantes revelaram dificuldades acrescidas em reconhecer a linearidade do conceito "escala" e de o aplicar no cálculo da área "real" do pavilhão, em que este cálculo requeria uma passagem pela "equivalência" de um valor linear do desenho para um outro valor linear na realidade e só posteriormente a aplicação da fórmula no cálculo da área.

Na turma A, apenas dois grupos reconheceram ter dificuldades na realização da tarefa na folha de cálculo. Assim, a maior parte dos grupos considerou a tarefa acessível, interessante, mas "*muito puxada*", pois "*com os valores reais temos de pensar mais*", como salientaram alguns estudantes da turma A. Nas justificações apresentadas evocaram as potencialidades da folha de cálculo na apresentação dos dados, salientando que esta ferramenta tecnológica ajuda "*a organizar melhor os conteúdos e o pensamento*", como referia um estudante e outros defendiam: "*foi importante para aprenderem melhor, pois o computador realizava os cálculos e isso facilitava o estudo da matéria*".

Apesar da maior parte dos grupos da turma B ter organizado os dados e a realização da tarefa ter-se revelado também acessível demorou mais tempo e não conseguiu ter resultados tão positivos como os alcançados pelos estudantes da turma A, revelando-se a folha de cálculo como um instrumento facilitador da concretização da tarefa, numa primeira vertente organizativa, *mais folha*, e posteriormente, mais *cálculo do que folha*, na operacionalização dos resultados.

Contudo, nas duas turmas os resultados finais não se apresentaram totalmente positivos, pois a maior parte dos estudantes parece não ter entendido ainda cabalmente a dimensão linear da noção "escala", dado que, inicialmente, alguns deles tendiam a calcular primeiro as áreas e só depois aplicar a noção de escala.

Com a concretização desta actividade delinearam-se reflexões e adquiriram-se orientações neste domínio registando-se vantagens educativas na repetição da resolução de alguns problemas e/ou tarefas defendidas por vários investigadores (Ameron, 2001-2004; Drijvers, 2001-2004, 2004 e Gravemeijer, 1994, 2004), tendo-se considerado oportuno aprofundar a realização desta actividade no 6º ano de escolaridade, ligado à História e às áreas de Estudo Acompanhado e Oferta da Escola (TIC), na exploração interdisciplinar do conceito "escala", previsto apenas no ano terminal do 2º ciclo do ensino básico.

iv) "***Lavar os dentes e poupar água***"

Esta actividade de investigação de natureza interdisciplinar (anexo 6) foi concretizada em casa, em Trabalhos Para Casa (TPC) de Matemática, mostrando-se significativa na disciplina de Matemática, designadamente, no conteúdo da multiplicação e na área das Ciências da Natureza, na preservação do património ambiental, numa perspectiva de educação para a cidadania. De facto, as estatísticas apontam que se está a gastar dez vezes mais água do que se deveria e que se não houver uma consciencialização deste problema este elemento natural poderá ser insuficiente no planeta, nas gerações vindouras. Assim, através da realização desta actividade, pretendia-se sensibilizar o estudante para esta problemática e simultaneamente revelar-se como um dos motores promocionais, no seio da família, na educação para os valores no respeito pelo ambiente e pelas riquezas naturais.

Esta investigação de âmbito interdisciplinar, iniciada na Escola, mas concretizada em casa, apresentou-se como uma actividade integrada e significativa para os estudantes, sendo apresentados mais pormenores de execução no desenvolvimento da *tese 2 da investigação*, apresentada no ponto 4 deste capítulo.

v) "***Método de Hond´t e as eleições autárquicas***"

Esta actividade de investigação (anexo 6) desenvolveu-se por se terem realizado, nesse período, eleições autárquicas, aliada à curiosidade manifestada pelos estudantes quando questionados sobre o interesse em conhecer o método usado na eleição dos deputados e à vontade em compreender a informação gráfica apresentada, nestas alturas, na televisão. Para além destes aspectos de âmbito sócio-cultural o assunto a explorar estava directamente relacionado com a divisão real, conteúdo do 5º ano de escolaridade da disciplina de Matemática, reconhecendo-se ainda que no percurso escolar, básico e secundário, o método de Hondt não é tópico de exploração, num quadro amplo de conhecimentos e de educação para a cidadania.

Após uma explicação realizada, com a apresentação e debate de um exemplo prático, os estudantes da turma A realizaram esta actividade na folha de cálculo, abrindo um ficheiro, contendo os dados reais obtidos nas últimas eleições autárquicas no município onde se integrava a Escola. Apesar da sala de Informática se encontrar distante da sala de aula de Matemática, o que dificultou a gestão dos espaços e tempos de acção educativa, tudo indica que a folha de cálculo foi uma mais valia, primeiro na vertente *mais folha do que cálculo*, pois tinha sido usado previamente um ficheiro para a apresentação e organização dos dados reais e, posteriormente, *mais cálculo do que folha*, tendo o estudante de solicitar, através do uso de uma fórmula, a realização dos cálculos para analisar e concluir. Enquanto que os estudantes desta turma gastaram apenas 25min a realizar a actividade, os da turma B, gastaram cerca de 75 min, três vezes mais tempo. A interpretação desta situação real e contextualizada provocou um estímulo significativo de aprendizagem para o estudante. De facto, solicitou-se aos estudantes das duas turmas, no final do 5º ano de escolaridade, uma apreciação sobre o trabalho realizado, designadamente, sobre as actividades em que tiveram mais ou menos dificuldades, daquelas de que gostaram mais ou menos, com pedido de justificação de respostas e houve várias referências a esta actividade, dignas de registo, realizadas pelos estudantes da turma A: "*Achamos uma actividade interessante, pois estávamos a lidar com votos reais e é uma forma de praticar a divisão e gostar da matemática*" "*É mesmo bom estudar problemas que acontecem mesmo!*", escreveu uma estudante; "*Foi mesmo bom, pois estivemos a estudar números que existiram na realidade!*"; "*Eu gostei muito de estudar este método, porque assim já sei quais são os partidos que estão na Câmara e quantos deputados dos partidos estão*"; "*Eu nunca pensei que fosse assim – é mesmo muito interessante!*"; "*É bom estudarmos coisas da nossa Câmara, na Matemática...* ".

Em face dos dados obtidos os estudantes da turma A surpreenderam-nos pela positiva, quer pelo interesse manifestado, quer pelo gosto e vontade em participar nos diálogos estabelecidos na classe. Nesta turma os resultados também foram positivos pela análise realizada pelos estudantes, pelos dados apresentados na folha de cálculo, pela utilização correcta das fórmulas e ainda pelo tempo gasto na concretização desta actividade tendo sido, nalguns casos, menor do que se tinha inicialmente delineado. De facto, excederam-se as expectativas mais optimistas, resultando numa situação problemática significativa para o estudante da turma A, quer sob o ponto de vista da aprendizagem funcional da Matemática, quer de educação para a cidadania.

A interpretação desta situação real e relativamente próxima da vida social e cívica parece não ter provocado o mesmo estímulo nos estudantes da turma B, nem na análise, nem no registo de resultados significativos. Apesar de se terem estabelecido diálogos interessantes na classe aquando da explicação do método, na apreciação global ou mais específica, não houve, por parte dos estudantes, nenhuma referência digna de registo. O conhecimento de que a situação dizia respeito à eleição de "governantes" locais para a Câmara Municipal do concelho, não foi alvo de qualquer comentário estimulante e relativamente ao interesse da aprendizagem do método os estudantes também não se pronunciaram.

O diálogo estabelecido na turma B indiciou, mais uma vez, a necessidade dos estudantes entenderem as situações propostas e numa perspectiva alargada resolverem, de forma significativa, o problema. Grande parte dos estudantes, nesta turma, gosta de desafios matemáticos, no contexto da própria disciplina, relacionando-se satisfatoriamente com os aspectos formais implicados, mas no que concerne a situações mais amplas e relacionadas com outras disciplinas ou a vida quotidiana precisam de compreender a situação para não se dispersarem na análise do contexto e resolverem, com êxito, o problema. Tudo indica que só aparentemente, esta actividade, se revelou próxima da vida destes estudantes, pois não a consideraram interessante, não se sentiram implicados e provavelmente não compreenderam a funcionalidade e a aplicação do método. Na exploração oral deste método proporcional, com a apresentação de um exemplo prático, um dos estudantes com bom desempenho em Matemática (Tig, nome fictício) indagou: "*não percebo por que não se pode arredondar*[73]*… Oh! Professora, não entendo… Então são pessoas a votar, são números inteiros, depois fazem-se estas divisões, não se arredonda e ficam números decimais, por causa de não poder haver empates e para ordenar os partidos… Depois tem de dar novamente números inteiros, pois as pessoas são eleitas, vêm novamente os números inteiros… Não percebo nada!...*" Repare-se que este estudante revelou muitas dificuldades no entendimento da mudança da natureza do número aplicado a contextos diferentes. Contudo, como existia comunicação na classe era possível "ouvir" o pensamento dos estudantes e compreender até que ponto esta actividade poderia ser essencial para uns e não o ser para outros, podendo até criar, a estes últimos, dificuldades adicionais. Registe-se ainda que o diálogo estabelecido foi profícuo, pois apreendeu-se que o estudante, no quadro escolar, tende a integrar os conhecimentos já abordados e, neste caso concreto, como tinham já explorado os arredondamentos, a acção imediata e "lógica" era arredondar os valores resultantes das divisões sucessivas. Neste diálogo desenvolvido foi necessário, em determinado momento, esclarecer alguns aspectos particulares previstos na lei, tendo lido a investigadora artigos sobre algumas especificidades da aplicação deste método proporcional ou o método de Hond´t.

Nesta turma B, os estudantes sentiram mais dificuldades na resolução e na compreensão dos resultados, pois não se concentraram na essencialidade matemática do conteúdo em causa e ao resolverem o problema com a calculadora ou através de papel e lápis, aproveitando para treinar a divisão real, dispersaram a atenção do assunto principal, orientado para o entendimento global da situação criada e o reconhecimento do significado prático da aplicação do método, conseguido através do levantamento de questões e a verbalização de novas conjecturas.

Esta actividade de investigação deverá ser novamente abordada na fundamentação da *tese 11*, apresentada em 4.3., deste capítulo.

[73] Refira-se que os estudantes tinham estudado os arredondamentos há pouco tempo.

vi) “***A correr e a saltar e a aprender Matemática com a Educação Física***”

Enquadramento. A elaboração da proposta da actividade “*a correr e a saltar também se aprende matemática*” foi fundamentada junto de peritos desta área, da Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico do Porto e da Faculdade de Ciências do Desporto e de Educação Física da Universidade do Porto. Com base em documentação científica específica e em investigações já realizadas pelos professores foi possível alargar conhecimentos nesta área e, apreender de forma mais completa, as questões lançadas pelos estudantes.

Segundo os investigadores consultados não há uma relação directa entre o comprimento do pé ou a altura da perna com a corrida ou o salto em força inferior. De facto, Falize e Hunebelle (1970) salientam que “no mundo da educação física e do desporto, a atenção dirige-se prioritariamente para a atitude física, as qualidades energéticas (força, velocidade, resistência) e as capacidades motrizes (habilidade específica) ” (p. 19).

Apesar de existirem pesquisas relacionadas com as proporções corporais e a possibilidade de concretamente se poderem vir a estabelecer relações de medida interessantes, considerou-se que estes dados e expressões matemáticas são complexas e inadequadas ao nível cognitivo e psicológico do estudante do ensino básico. Sabe-se que a construção do “homem” não é aleatória. Por exemplo, para os clássicos a beleza estava associada à harmonia das proporções, isto é, à dependência do “número de ouro” (número irracional com dificuldades acrescidas para estes estudantes). Segundo aqueles autores “os cânones estéticos – da palavra grega *Kânon* que significa regra – apoiava-se na escolha de uma parte do corpo como unidade de medida” (Falize e Hunebelle, 1970, p. 20), mas pela temática científica em causa esta vertente não pôde ser aprofundada neste nível etário.

As conversas, reflexões e aprendizagens havidas com os professores e investigadores da área de Educação Física dos dois estabelecimentos de ensino superior possibilitaram a apreensão de determinados dados e a certeza de que não existia nenhuma expressão matemática que relacionasse as condições físicas do indivíduo em estudo com os resultados das provas da corrida e do salto de força inferior.

Com dados reais dos estudantes, registados nas aulas de Educação Física sobre a corrida e o salto de força inferior, foi possível concretizar uma actividade de investigação orientada para a observação atenta da informação existente numa tabela e a oportunidade de levantar conjecturas e de as validar, com tentativas de modelação de fenómenos e, consequentemente, o desenvolvimento de competências ao nível da *terceira aproximação à álgebra*.

Nesta actividade, os estudantes da turma A, ao usarem um ficheiro da folha de cálculo orientaram as pesquisas para o relacionamento de quantidades e tendiam, fundamentalmente, a descobrir relações numéricas entre os dados. Pela ideia generalizada que na Matemática se estudam apenas números e relações, os estudantes teimavam em não confiar nas conjecturas qualitativas, não numéricas, que delineavam.

Assim, a realização deste tipo de tarefa requeria necessariamente tempo: *tempo para pensar* e *tempo para experimentar*. Apesar da maior parte dos estudantes ainda se sentirem “*presos*” à forma inicial, isto é, ao ficheiro aberto, ou aos dados iniciais fornecidos, alguns grupos ficaram “*mais soltos*” e tentaram, “*in a open way*”, fazer as suas experiências, exteriores ao próprio ecrã onde se encontrava a informação fundamental, sem pedir ajuda e experimentando, com alguma autonomia, relações numéricas entre os dados.

Apesar de sentirem dificuldades iniciais, pode-se concluir que os estudantes realizaram com êxito a tarefa, superando mesmo as expectativas, pois observaram os dados da tabela com interesse, trocando impressões com os colegas, a professora e a investigadora, procurando ainda observar, analisar, descobrir outras ligações, conjecturar, colocar novas questões, revelando vontade em experimentar e mobilizar novas relações.

Os estudantes da turma B observaram com atenção e interesse os dados da tabela, partilharam ideias e saberes e descobriram outras variáveis intervenientes no desempenho da corrida, designadamente, o esforço, o "peso", a persistência, a vontade de vencer, entre outras. Mais uma vez a tarefa proposta e o ambiente criado na turma influenciou o desenvolvimento intelectual dos estudantes, permitindo que indagassem, discutissem ideias, clarificassem conceitos e concretizassem este tipo de actividades com assinalável êxito. Os estudantes desta classe revelaram uma vertente vivencial muito prática e funcional, demonstrando apetência por resolver tarefas "reais", vividas no quadro escolar em algumas disciplinas, neste caso em Educação Física e aplicadas na disciplina de Matemática.

Após a concretização desta actividade de âmbito interdisciplinar, relacionada com as disciplinas de Educação Física e Matemática evidenciaram-se determinados aspectos relevantes para o estudo:

- a vivência interdisciplinar tornou-se numa experiência de aprendizagem real e significativa para o estudante, tendo sido possível "trazer" conteúdos da disciplina de Educação Física para a aula de Matemática. Neste sentido, os estudantes das duas turmas sentiram-se fortemente estimulados para a aprendizagem;
- a noção de correspondência foi particularmente explorada nesta actividade, que é um pré-requisito, neste caso, ainda mais ou menos distante, da aprendizagem do conceito formal de função;
- a capacidade do estudante para pensar efectivamente sobre dados reais, analisando-os e descobrindo, sem limites, possíveis relações, conjecturando, sem ter à partida a certeza que uma dada resposta o levará com êxito à solução desejada (base do conceito de "problema");
- a construção prática e funcional de um desafio intelectual em contexto aberto proporcionava o desenvolvimento da capacidade de raciocinar e relacionar dados apresentando-se como uma situação nova com relevância para a aprendizagem.

Esta actividade mostrou-se particularmente importante no aprender a questionar, na falta de respostas imediatas, na possibilidade de conjecturar, na capacidade de levantar hipóteses, associando-a ao método científico explorado nas Ciências da Natureza, como defendia a professora responsável pela turma: "*esta actividade revela-se essencial para a Educação Matemática, pois não há respostas definitivas, mas sim a necessidade de levantar hipóteses e, neste sentido, aproxima-se do método científico das Ciências da Natureza… Por outro lado, este tipo de actividades parece-me muito formativa, pois na matemática aparece tudo feito, é só repetir e, deste modo, dá-se uma ideia errada ao jovem,… nada é feito sem esforço, sem dedicação, sem insistência, espírito de sacrifício,* *para se conseguir e descobrir algo e esta actividade mostra isso e incita o estudante a observar, a relacionar, a experimentar, a descobrir… Para mim foi uma das actividades mais importante que se realizou este ano…* " concluiu a professora responsável por Matemática e Ciências da Natureza.

Ao realizarem esta actividade para além de utilizarem dados escritos, os estudantes das duas turmas evocavam também elementos reais para a resolução mais completa e correcta do problema, designadamente, o esforço, a vontade, o gosto em correr ou saltar.

B. No 6º ano de escolaridade

B.1. Problemas de Esquematização

Os vários problemas de esquematização propostos e desenvolvidos nas duas classes, revelaram-se de importância fulcral para as aprendizagens pré-algébricas no âmbito da matemática em contexto e para as conclusões, enunciadas nas teses da investigação, designadamente, na *tese 2*, *tese 3* e na *tese 6,* apresentadas em 4.1. e 4.2., deste capítulo. Na fundamentação destas serão aprofundados e divulgados alguns pormenores relacionados com a análise de resultados obtidos nas duas turmas.

B.2. Outros Problemas

Os outros problemas enunciados enquadram-se na *2ª e 3ª aproximações à álgebra* e os resultados serão explanados na fundamentação de algumas teses de investigação. Concretamente o problema "*o aniversário do João*" encontra-se ligado à relação proporcional e fundamenta particularmente algumas teses, com destaque para a *tese 7*.

Os problemas de "*cheques e compras*" (anexo 7) e "*expressões com euros*" desenvolvido num enquadramento curricular preciso – com o aprofundamento do conhecimento prático do euro, respectivamente, no âmbito da matemática em contexto e estritamente disciplinar, este último relacionado com o desenvolvimento do pensamento recursivo, mostraram-se naturalmente importantes nas aprendizagens pré-algébricas, mas não significativos para a elaboração das teses de investigação e por tal motivo não serão apresentados, com pormenor, nem definidas as ambiências criadas e os resultados obtidos.

B.3. Actividade em contexto e de âmbito interdisciplinar

A actividade de investigação "*banda desenhada e fracções*" (anexo 7) revelou-se significativa na aprendizagem do número racional e do conceito de variável, pois através da visualização da banda desenhada o estudante foi capaz de apreender outros ambientes de aprendizagem, outros espaços de interacção com o conhecimento matemático. Nesta actividade o estudante reflectiu sobre o seu dia a dia, sistematizou, geralmente em tabela, as várias actividades que realizou e quantificou o tempo gasto em cada uma delas de forma a completar a unidade diária - 24 horas. Esta actividade foi realizada nas aulas de Matemática e de Estudo Acompanhado e os resultados foram também expostos na fundamentação da *tese 4 da investigação*.

B.4. Projectos

No 6º ano de escolaridade foram desenvolvidos três projectos no âmbito interdisciplinar, realizado cada um no respectivo período, nesta sequência temporal: "*vencer a fome, consolidar a Paz, Angola 2002*"; "*a área dos pavilhões da minha Escola e sua história*" e "*pulsação*". O segundo pretendia aprofundar o trabalho realizado no ano anterior no domínio da geometria, com a utilização das fórmulas no cálculo do perímetro e da área do quadrado e do rectângulo, com a correspondente exploração de um dos conceitos associados à noção de "variável" e, consequentemente, à construção progressiva das aprendizagens algébricas.

A realização do projecto "*pulsação*" apresentou-se significativa no desenvolvimento de competências transversais e na fundamentação da *tese 11 de investigação* cujos processos e resultados serão apresentados junto dessa tese de investigação.

i) Projecto "***Vencer a fome, consolidar a Paz, Angola 2002***"

O projecto "*vencer a fome, consolidar a Paz, Angola 2002*" foi desenvolvido no 1º período e teve como mote uma informação oriunda da associação "Cruz Vermelha" e todo o trabalho científico e de solidariedade social teve o seu auge na entrega dos produtos recolhidos nas turmas à delegação regional dessa associação.

Na concretização desta actividade pretendia-se desenvolver competências ao nível dos(as): a) c*onhecimentos* - interpretar informação apresentada em quadros; relacionar dados numéricos com os de tipo texto; mobilizar conhecimentos numéricos – o euro; comparar e identificar diferentes produtos e preços e organizar a informação dada em tabelas; b) *aptidões* - dinamizar, participar e organizar na recolha de donativos, registando os dados numa tabela e c) *atitudes* - cooperar com o grupo, a turma, a Escola na definição e implementação das tarefas definidas, responsabilizando-se pelo projecto de modo a ser desenvolvido e finalizado com êxito, debatendo ideias e conhecimentos, ouvindo os outros e expondo claramente as suas posições; d) *valores* – revelar posturas solidárias numa perspectiva ampla de educação para a cidadania.

No computador procurou-se que os estudantes da turma A fossem capazes de utilizar o processador de texto, a folha de cálculo e outros programas de ilustração para escrever mensagens, organizar dados, sistematizar informação e torná-la atraente de forma a melhorar a comunicação com os outros. Cada estudante pode desenvolver diversas competências, designadamente a: a) interpretação matemática e linguística da informação escrita; b) organização logística associada; c) escrita de mensagens individuais, em grupo ou colectivas de solidariedade, neste caso concreto, para as crianças de Angola.

Formação Cívica

Esta actividade foi iniciada na área de *Formação Cívica* devido aos conteúdos e objectivos da mesma e pelo facto das *instituições de solidariedade social* fazerem parte integrante do programa desta área curricular e serem leccionados nas aulas neste período do ano. Em Formação Cívica foram lidos documentos da Fundação de Direitos Humanos *Pro Dignitate* que em cooperação com a Cruz Vermelha Portuguesa e a União das Misericórdias Portuguesas, encontravam-se a organizar uma campanha de recolha de donativos para Angola.

Foram explicados os propósitos da realização da actividade e realçado o elo integrador baseado no gesto fraterno para com o povo de Angola, SER SOLIDÁRIO.

Por outro lado enunciaram-se ainda as diferentes etapas a considerar no desenvolvimento desta actividade de âmbito interdisciplinar e após a boa vontade manifestada pelos professores e estudantes em a concretizar, foram definidas as condições de recolha de alimentos e a responsabilização de cada um nas diferentes tarefas. Idealizaram-se e compilaram-se mensagens natalícias em Formação Cívica e na Língua Portuguesa, resolveram-se problemas na disciplina de Matemática e confeccionaram-se caixas com enfeites na Educação Visual para transportar as prendas a oferecer à Cruz Vermelha Local.

Matemática

Na aula de Matemática foi concretizada uma actividade relacionada com a interpretação numérica e textual da documentação divulgada pela Cruz Vermelha (em anexo 7), apresentando-se, de forma sucinta, os resultados obtidos.

Relativamente à primeira questão: *qual a diferença de géneros entre os três pacotes de emergência?* um grupo da turma A não respondeu, três responderam correctamente, tendo revelado alguma originalidade na interpretação e representação dos dados e os restantes grupos responderam de forma incompleta.

Na turma A os dados numéricos foram mais trabalhados e estudados do que os dados em texto. Os estudantes na aula de Matemática continuavam a dar mais relevância aos dados numéricos do que a qualquer outro tipo de informação, tendo revelado algumas dificuldades em interpretar e inter-relacionar a informação numérica e em texto. Dos três grupos que resolveram correctamente a questão realce-se que dois deles responderam numa folha suplementar e organizaram os dados em texto corrido, utilizando siglas, e simbologia própria. Um dos grupos que usou a folha de trabalho para dar a resposta referiu o seguinte: "*A diferença é que o 1º serve apenas para emergências, enquanto que o 2º serve para emergências, mas também para higiene, porque tem um sabonete e o 3º serve para emergências, higiene, mas também para o conforto, porque tem manta. O 2º custa € 10,14 a mais que o 1º, o 3º custa €40,14 amais que o 1º e €30,00 a mais que o 2º*".

Destaque-se ainda que alguns estudantes tiveram necessidade de clarificar aspectos levantados nas questões, tais como: *o significado da palavra "géneros*", *como devem organizar e escrever a resposta.* Propositadamente foi utilizado o signo "géneros", pois para além de ser o termo mais adequado, nestas circunstâncias, permitia o enriquecimento do vocabulário dos estudantes e provavelmente a interiorização do conceito de "variável" num contexto rico e significativo para a aprendizagem.

De facto, o espaço destinado à resposta era exíguo, propositadamente para delinear tempos próprios de reflexão, sistematização e organização da resposta. A maior parte dos estudantes parecia entender a pergunta, mas perante o espaço destinado levantavam questões sobre o modo de expressar a resposta e nalguns casos os estudantes resolveram usar uma folha suplementar. Contudo, foi possível observar que o próprio espaço destinado à resposta de uma determinada questão é um elemento desencadeador de reflexão, porventura, do modo de pensar e de organizar o pensamento do estudante, podendo proporcionar uma resposta mais ligeira ou mais completa.

Refira-se também que os estudantes revelaram bastantes dificuldades na capacidade de interpretar dados expostos em quadro. Contudo, a resolução da folha de trabalho foi posteriormente trabalhada em sala de aula para que os estudantes tivessem oportunidade de reflectir sobre o modo como interpretaram a informação e responderam às perguntas.

Relativamente à 2ª questão em que se pedia *o preço de um sabonete e em seguida o de uma manta* a maior parte dos grupos respondeu correctamente. Após análise detalhada dos pacotes, os estudantes sentiram algumas dificuldades em determinar correctamente o preço da *manta*, mas sentiram ainda mais obstáculos em calcular o preço do *sabonete*. Assim, oito grupos indicaram o preço certo da *manta* e quatro não. Por outro lado, os estudantes ao verificarem que não tinham dados para determinar o preço do sabonete concluíram que tal não era possível, pois deveriam encontrar um valor numérico. Um estudante expôs oralmente e de forma correcta o seu raciocínio, mas posteriormente concluiu: "*não pode ser assim, tem de dar um valor, isto não é resposta*"; e uma estudante dizia: "*ai pode não ser possível? Eu pensava que tinha sempre de dar um número*".

Assim, seis grupos responderam correctamente a esta questão argumentando do seguinte modo: "*com os dados que temos não podemos descobrir o preço do sabonete*" (3); "*não temos informações para calcular o preço do sabonete*"; "*os nossos dados não nos permitem saber o preço do sabonete"; "não é possível resolver*";

À terceira questão: "*quais os alimentos com que podes contribuir para te associares a esta Campanha*", todos os estudantes responderam correctamente, referindo alguns dos produtos dos pacotes de emergência. Mas há um grupo que se reportou à sua própria realidade, referindo que podem colaborar com todos os géneros, excepto com sabonete ou manta.

Oito grupos responderam correctamente à quarta questão: "*com base na informação inventar uma questão e dar a resposta*", mas um grupo fê-lo de forma incompleta e três formularam impropriamente a questão.

É de destacar que a maior parte dos estudantes colocaram questões que exigiam uma resposta numérica. Por outro lado, como algumas formulações revelaram problemas de sintaxe e de semântica foi possível serem trabalhados na disciplina de Língua Portuguesa.

Na turma B, de forma similar à da turma A, iniciou-se a actividade pela área de *Formação Cívica* e em seguida continuou a ser desenvolvida nas disciplinas de Língua Portuguesa e Matemática.

Relativamente à primeira questão concluiu-se que a maior parte dos estudantes respondeu às duas sub-questões de forma *incompleta,* pois só analisaram as diferenças do primeiro com o segundo pacote, do segundo com o terceiro, esquecendo o estudo do pacote de "emergência" (1º) com o do "conforto" (3º). Note-se ainda que a informação escrita e os dados numéricos foram tratados de forma idêntica, mas sem grande sistematização e originalidade, não realçando o conteúdo dos pacotes, nem relacionando o nome à funcionalidade. Destaque-se ainda que os estudantes não tiveram necessidade de usar outros espaços para organizarem e apresentarem as respostas. À semelhança do que aconteceu na turma A, a resolução da folha de trabalho foi explorada posteriormente para que os estudantes tivessem, mais uma vez, a oportunidade de reflectir sobre o modo como interpretaram a informação e responderam às perguntas.

Relativamente à 2ª questão em que se pedia *o preço de um sabonete e em seguida o de uma manta* a maior parte dos grupos respondeu correctamente. Após análise detalhada dos pacotes os estudantes sentiram também algumas dificuldades em determinar correctamente o preço da *manta* e em calcular o preço do *sabonete*.

Assim, onze grupos indicaram o preço certo da *manta,* mas um grupo não respondeu e outro apresentou incorrectamente um valor. Por outro lado, os estudantes ao verificarem que não tinham dados para determinar o preço do sabonete concluíram que tal não era possível, pois deveriam encontrar um número. Todavia, posteriormente, sete grupos responderam correctamente a esta questão, referindo sucintamente que era impossível calcular ou descobrir o preço do sabonete.

À terceira questão: "*quais os alimentos com que podes contribuir para te associares a esta Campanha*", todos os estudantes responderam correctamente, referindo alguns ou até todos os produtos dos pacotes de emergência, tendo um grupo o cuidado de referir que "*os alimentos que podem contribuir são os alimentos que não se estragam*". Um grupo reportou à sua própria realidade e referiu que podem colaborar com todos os géneros, excepto com o leite em pó ou a manta.

Relativamente à formulação de uma questão destaque-se que a maior parte dos estudantes (11 grupos) colocaram questões que exigiram resposta numérica.

Notou-se também alguma falta de rigor nalgumas questões e/ou respostas dos estudantes e concretamente na última pergunta o grupo respondeu incorrectamente, porque usou indevidamente o valor de €10,14 para o preço do sabonete.

<u>Reflexões/Conclusões genéricas</u>

Tudo indica que na turma A espaço disponível para a resposta condicionou, de certo modo, essa mesma resposta, na capacidade de expressão do raciocínio e na apresentação das estratégias implementadas. Alguns estudantes desta classe questionaram sobre o espaço afecto à apresentação da solução e dois dos grupos utilizaram uma outra folha para responder a algumas questões, não acontecendo o mesmo na turma B.

Os estudantes trabalharam com diversas "variáveis", mas concretamente nos quadros estudados exploraram duas: os *géneros* e os preços das *colecções*. Esta descoberta e encontro de relações facilitou a compreensão do problema e a sistematização da informação.

Nas duas turmas os estudantes revelaram ainda dificuldades na capacidade de interpretar e analisar informação registada em quadros, valorizando em demasia os dados numéricos e remetendo para segundo plano a informação textual que faz parte integrante da divulgação de uma ideia. Na comparação dos pacotes a análise foi, na generalidade sequencial, com a enumeração dos géneros existentes nos pacotes e apenas um grupo da turma A ousou fazer uma interpretação mais completa da situação, evidenciando a essência e os objectivos da diferenciação dos pacotes.

Mesmo num "open" contexto, quando são solicitados para inventar e apresentar problemas os estudantes das duas turmas preocuparam-se, fundamentalmente, com questões de natureza numérica.

Saliente-se ainda as dificuldades encontradas pelos estudantes das duas turmas na resposta à segunda questão, quando se indagava para, nas condições definidas pelos pacotes, indicar o preço de um sabonete e de uma manta. As respostas requeriam uma análise exaustiva dos constituintes e dos preços dos pacotes, um estudo relacional da situação e conjugando estes dois elementos seria possível encontrar uma resposta numérica numa das sub-questões e numa outra deveria apresentar-se uma resposta de tipo texto, concluindo-se que: "*com os dados disponíveis não seria possível determinar o preço de um sabonete*", isto é, tratava-se de registar uma resposta não numérica, o que não é muito usual na Matemática. Este estudo exaustivo e relacional dos dados ainda se encontra pouco trabalhado no quadro escolar. As actividades indicadas nos manuais apontam para uma certa exercitação o que naturalmente dificulta uma exploração da educação matemática de situações análogas e mais estimulantes para os estudantes, com significados explícitos, mas que, por serem pouco frequentes, dificultam a exploração "realista" da tarefa.

De uma maneira geral, nas duas turmas, os resultados na disciplina de Matemática foram positivos e a actividade foi vivida intensamente por todos os estudantes e pelos professores das outras áreas envolvidas, Língua Portuguesa, Educação Visual, Oferta da Escola e em Formação Cívica, especialmente nesta última, em que o tema surgiu muito a propósito, com enquadramento Escolar adequado aos conteúdos a serem explorados e à envolvência social experimentada pela quadra natalícia. Pode-se assim referir que esta actividade foi bem sucedida e altamente gratificante para todos que a trabalharam, numa perspectiva ampla de aprendizagens matemáticas com as outras áreas e de vivência solidária em comunidade.

ii) Projecto "***A área dos pavilhões da minha Escola e sua história***"

Neste projecto pretendia-se aprofundar as pesquisas desenvolvidas no 5º ano de escolaridade sobre uma temática semelhante e pesquisar documentos existentes na Escola, sobre o Projecto Educativo de Escola e outros elementos históricos procurados na Internet. No desenvolvimento deste projecto tudo se conjugou para que o computador, de uma maneira geral, se apresentasse como um instrumento auxiliar de pesquisa, de tratamento de dados e de sistematização de resultados.

iii) Projecto "***Pulsação***"

Este projecto foi experienciado pelos estudantes em várias disciplinas (Ciências da Terra e da Vida, Educação Física, Língua Portuguesa, Matemática e Estudo Acompanhado) e explorado com muito entusiasmo, sentindo-se que o computador se revelou como um instrumento fundamental na sistematização dos dados e na apresentação dos relatórios. Os procedimentos experienciados são apresentados na fundamentação da *tese 11 da investigação*, em 4.3., deste capítulo.

3. Teste de Avaliação – Realizado no Ano Terminal do 2º Ciclo do Ensino Básico

Uma das ideias genéricas que orientou a estrutura do teste, apresentada em 5.7 do segundo capítulo, foi baseada na informação recolhida junto do programa PISA, designadamente, na necessidade de incluir, na construção do teste, problemas de três classes (teste, em anexo 8). Como o estudo está focalizado para desenvolver competências na linguagem formal (pré)-algébrica, seleccionaram-se problemas relacionados com as três das quatro primeiras aproximações à álgebra, consideradas por vários autores como as essenciais neste nível etário e abordaram-se conteúdos leccionados no 6º ano de escolaridade. Na procura de reflexões, análises e intervenções profundas no processo aprendizagem e ensino da álgebra, em trabalho de natureza interdisciplinar seleccionaram-se problemas de âmbito estritamente disciplinar e outros, com conteúdo próximo, mas de âmbito interdisciplinar, numa abrangência global de exploração da matemática em contexto.

No terceiro capítulo da metodologia descreveram-se e fundamentaram-se as opções tomadas e caracterizaram-se os problemas, conjugando-se quatro vertentes de construção: *classe* (três classes), *aproximações à álgebra* (três aproximações[74]), *âmbito* (estritamente matemático ou interdisciplinar, numa perspectiva global de matemática em contexto) e *conteúdos* (geométrico e numérico).

3.1. Condições de realização, critérios e resultados genéricos

Este tópico inclui a descrição das condições de realização do teste, os critérios de avaliação definidos para cada questão e as condições de análise de cada uma delas e os resultados genéricos obtidos.

Condições de realização do teste. Para preservar e dar continuidade ao trabalho já realizado em diversos espaços de aprendizagem matemática e, simultaneamente, contemplar a vertente da flexibilidade curricular, o teste foi realizado em dois tempos distintos, na disciplina de Matemática e na área de Estudo Acompanhado. Contudo, só os testes realizados em condições idênticas foram considerados nesta avaliação. Como alguns estudantes, na turma A, faltaram a certas aulas e não conseguiram resolver na totalidade o teste, apenas foi possível contabilizar vinte para estudo. Como na turma B havia a possibilidade de serem analisados e vinte e dois testes foi necessário retirar, nesta classe, aleatoriamente, dois testes. Assim, o número total de testes analisados, em cada uma das turmas, foi de vinte.

---

[74] Numa perspectiva de simplificação e de essencialidade temporal orientada pelo nível de Escolaridade dos estudantes e defendida por vários autores (Wheeler, 1996; Bednarz, Kieran e Lee, 1996) a 2ª e a 3ª aproximações à álgebra pode-se conjugar numa só, na 2ª aproximação à álgebra e então considera-se como absolutamente relevantes, neste quadro escolar, as três aproximações à álgebra referidas: generalização (1ª), resolução de problemas específicos ou classe de problemas (2ª) e modelação (3ª).

Critérios de avaliação. Os critérios de avaliação de cada questão foram definidos tomando como referência o modelo usado pelo programa de avaliação de desempenho em Matemática e Ciências – TIMSS, pois os juízes colaboradores na validação dos instrumentos de avaliação desta investigação consideraram-no o mais apropriado, atendendo ao nível etário e cognitivo dos estudantes e aos objectivos definidos para a investigação. Assim, a avaliação da resolução de cada questão do teste contemplou quatro tipos de respostas: resposta completa; resposta parcialmente completa, resposta incorrecta e a não resposta. Pretendeu-se, assim, registar e analisar amplamente o processo de resolução individual de cada questão, focalizando pormenores de raciocínio e de execução, caracterizando o tipo de respostas em "patamares" consistentes de avaliação (anexo 10).

Na análise e correcção das questões formuladas foi seleccionado o termo "completa", em vez de "correcta", tal como é considerado no programa TIMSS, pois o primeiro indica maior abrangência e exigência em relação a todo o processo de resolução, dado que tende a incluir o raciocínio desenvolvido e as operações implementadas pelo estudante até chegar ao resultado pretendido. A designação "correcta" está efectivamente orientada para o resultado final e reduz-se a uma análise bivalente: resultado certo ou resultado errado. Naturalmente que o termo "correcta" está incluso no termo "completa".

No processo de avaliação de cada questão foram previamente definidos critérios para a obtenção de uma resposta completa ou de uma resposta parcialmente completa.

Tendo por base as respostas obtidas por estudantes colaboradores no processo de *pilotagem*, cujos resultados genéricos são expostos em anexo 9, foi possível elaborar, numa primeira fase, os critérios de avaliação para cada sub-questão, organizando "patamares" consistentes de avaliação. Posteriormente, na aplicação dos testes e, perante as respostas dadas pelos estudantes das duas turmas em estudo, houve necessidade de os redefinir, ampliar e reformular, criando-se uma categorização final para cada uma das questões, chegando-se a uma última versão apresentada em anexo (anexo 10), tendo esta sido aplicada na análise de resultados do pré e pós-teste.

Condições de Análise. A análise de cada questão do teste englobou: a) *o registo*, numa tabela, do número de respostas obtido, do tipo de resposta completa (RC), da parcialmente completa (RPC), da incorrecta (RI) e da não resposta (NR); b) *a apreciação* sucinta da *evolução* baseada fundamentalmente no número de respostas completas, com uma visão mais globalizante, incluindo as respostas parcialmente completas obtidas no pré e pós-teste. Considera-se *ligeira evolução* (↑) se o número de respostas completas for superior a um ou dois valores no pós-teste ao obtido no pré-teste; admite-se que houve *evolução* (↑↑) se no pós-teste, no resultado global, existirem mais três respostas completas do que as alcançadas no pré-teste ou com mais duas respostas completas e mais de três parcialmente completas; com *evolução significativa* (↑↑↑) considera-se quando os valores obtidos no pós-teste forem em número superior aos últimos referidos. Quando tal não aconteceu, isto é, se os resultados forem idênticos no pré e pós-teste, no número de respostas completas e, globalmente, nas respostas parcialmente completas considera-se que *não houve evolução* (—), ou seja, houve *estagnação* na aprendizagem do assunto. Por outro lado, se o número de respostas completas diminuir e/ou também globalmente, nas respostas parcialmente completas, significa que houve *retrocesso* e usando uma sinalética análoga à anterior, mas associada ao decréscimo do número de respostas completas utilizam-se os símbolos (↓) para *ligeiro retrocesso*, ou (↓↓) para *retrocesso* ou (↓↓↓) para *retrocesso significativo* ou *retrocesso acentuado*. Por "default" consideram-se os valores analisados positivos, isto é, em que a maioria dos estudantes resolveu completamente a questão, mas quando tal não acontece assinala-se o sinal (-) para referir que os resultados obtidos são negativos, isto é, em que a maioria dos estudantes não conseguiu resolver completamente a questão e (-+) para indicar que houve passagem de valores negativos para positivos ou vice-versa, com a notação (+-). Na tentativa de compreender e problematizar os resultados obtidos, o estudo contempla uma avaliação baseada nos resultados e nas estratégias implementadas pelos estudantes, suportada por uma análise qualitativa do *continuum* desenvolvido na investigação, com enfoque para o enquadramento educativo previamente definido para cada questão ou grupo de questões.

Análise-síntese dos resultados. Realizou-se uma análise específica dos resultados obtidos pelos estudantes das duas turmas, em cada um dos Problemas/Questões (Pi/Qi, de i=1 a 23), encontrando-se este estudo[75], na íntegra, em anexo 11. Para além de alguns desses resultados virem a ser usados na elaboração e fundamentação das teses da investigação, apresentadas no ponto seguinte faz-se, neste âmbito, uma análise sintetizada dos resultados obtidos, apelando-se a aspectos considerados essenciais para o estudo em causa. De uma maneira geral, os resultados conseguidos são mais positivos na turma A do que na turma B, quer na resolução de problemas em contexto estritamente matemático: P1, P3, P8, P10, P12, P13/Q13.1. P14. quer na exploração de problemas em contexto interdisciplinar, designadamente, P2, P4, P7, especificamente, nesta última questão na organização dos dados em tabelas e ainda em P9, P11, P15/Q15.1., PQ16

A turma B obteve resultados mais positivos na questão P15/Q15.2, no âmbito da matemática em contexto e de natureza interdisciplinar, na resolução de um problema ligado à noção de recursividade, concretamente, na alínea orientada para a formulação de um problema baseado em dados pictóricos e numéricos e explanada na *tese 5 da investigação*.

Saliente-se ainda que os estudantes das duas turmas revelaram dificuldades em dois aspectos fundamentais: na interpretação da noção de escala - P19, na aplicação deste conceito linear no cálculo da área de um rectângulo e na construção de gráficos de barras - P18, relacionando duas variáveis numéricas[76].

Na P5, de natureza interdisciplinar relacionada com as Ciências da Natureza, no conteúdo da alimentação, na primeira sub-questão ligada à atribuição do valor lógico de uma proposição, os resultados foram positivos nas duas turmas. Na segunda alínea P5/Q5.2., relacionada com a possibilidade de modelação de um fenómeno os resultados

[75] Como a maior parte dos Problemas são estruturados em questões, optou-se por usar a nomenclatura Qi, na análise de resultados, em vez de Pi/Qi, para facilitar a representação e a leitura dos dados.

[76] Num estudo realizado sobre a capacidade de interpretação e representação gráfica, em idades elementares, Fernandes (1994) concluiu que é mais acessível para os estudantes realizaram a leitura de um gráfico de barras do que fazerem a representação gráfica. Nos dois casos os estudantes revelaram mais dificuldades quando as duas variáveis relacionadas são da mesma natureza e demonstraram mais facilidades quando são de natureza diferente, concretamente, quando uma delas é texto e outra numérica.

foram negativos. Tudo indica que a tabela que foi usada no teste, diferente da explorada na sala de aula, dificultou a resolução desta situação já de si complexa, no conteúdo e agravada pela situação de avaliação. Assim, tudo indica que nos problemas em contexto interdisciplinar na situação de teste, devem ser usados suportes próximos dos explorados nas aulas das disciplinas com as quais se fizeram as conexões.

Na P6 houve uma evolução positiva nas duas turmas. Mas na P17, relacionada com o problema contextualizado realizado no 5º ano de escolaridade, designado por "*o terreno do Sr. António*", ligado à maximização da área de um rectângulo as duas turmas obtiveram ainda resultados negativos.

Refira-se também que os resultados mais positivos foram obtidos na resolução de problemas em contexto estritamente disciplinar, denunciando que a exploração de tarefas de matemática em contexto e de âmbito interdisciplinar não interferiram negativamente nas aprendizagens basilares e não impediram que os estudantes adquirissem as noções matemáticas programadas para este ano de escolaridade e o desenvolvimento de competências essenciais na disciplina, conseguindo, com êxito, resolver problemas rotineiros. Por outro lado, os estudantes revelaram maiores dificuldades na resolução de problemas em contexto e de âmbito interdisciplinar, denunciando "deficit" neste domínio e, consequentemente, a necessidade de criar e implementar nas aulas este tipo de problemas com o intuito firme de salvaguardar, não só as competências essenciais, mas também as competências transversais propostas no programa da disciplina da Matemática.

4. Teses da Investigação

Na definição dos objectivos do estudo, apresentados no primeiro capítulo, delinearam-se princípios educativos, levantaram-se questões investigativas, definiram-se estratégias de intervenção específicas e, naturalmente, perspectivaram-se alguns resultados, confirmados ou não pelo *continuum* da investigação, onde também surgiram novos contornos e evidências.

Como a investigação experimental realizou-se ao longo de cinco anos, foi recolhida muita, variada e significativa informação tendo sido, por isso, necessário reflectir prolongada e aprofundadamente, de forma sequencial e relacional sobre todos os dados disponíveis. A partir dessa análise exaustiva, enunciaram-se as teses da investigação sustentadas naturalmente pelos dados recolhidos ao longo do estudo que, de forma sistémica e consistente, pudessem suportar e fundamentar essas teses.

Deste modo, procurou-se realizar uma meta-análise, no sentido amplo do termo, em que a intervenção dos diferentes instrumentos de avaliação e a consequente produção de dados pudesse contribuir, de forma reflexiva, construtiva e sistemática para a recolha, a análise, a elaboração e a fundamentação das teses da investigação.

A problematização de algumas evidências emergentes do *continuum* do estudo proporcionou novas reflexões e uma melhor compreensão do acto educativo, levantando possibilidades concretas de novas abordagens num processo de complexidade gradual associado à aprendizagem e ensino da álgebra. As teses da investigação emergiram, então, das experiências significativas desenvolvidas ao longo do estudo, relacionadas com a resolução de tarefas no decorrer da acção educativa e ligadas à construção das aprendizagens algébricas, numa perspectiva global da matemática em contexto, num trabalho particular de âmbito interdisciplinar, com utilização ou não do computador, em especial da folha de cálculo e também dos problemas concretizados em situação de avaliação em teste, no 6º ano de escolaridade.

As teses de investigação procuram dar respostas à questão principal da investigação, relacionada com a importância do contexto interdisciplinar na aprendizagem da pré-álgebra, bem como a outras sub-questões, designadamente, com as relacionadas com a natural utilização do computador na aula de Matemática, com destaque para a folha de cálculo na resolução de problemas e tarefas em contexto interdisciplinar na construção gradual dos conceitos algébricos.

As análises e reflexões produzidas relacionadas com as sub-questões de âmbito curricular, programático, metodológico, de ordem neurológica, entre outras, serão abordadas no capítulo seguinte dedicado às conclusões e às implicações do estudo, baseadas naturalmente no trabalho desenvolvido, nos processos e resultados obtidos bem como na análise reflexiva mais ampla e integradora, de natureza estrutural e procedimental realizada.

Assim, a elaboração e fundamentação das teses da investigação resulta das análises produzidas baseadas no trabalho contínuo realizado no campo experimental da investigação, com suporte na resolução dos problemas em contexto interdisciplinar, actividades de investigação, projectos e os resultados obtidos no teste. Para facilitar a organização e a leitura da informação, as teses da investigação são apresentadas sequencialmente em três domínios a) a influência da folha de cálculo na aprendizagem inicial da álgebra, no âmbito da matemática em contexto interdisciplinar; b) a importância do contexto interdisciplinar na aprendizagem da pré-álgebra; c) a importância do computador no trabalho de âmbito interdisciplinar.

4.1. Influência da folha de cálculo na aprendizagem da pré-álgebra

Em seguida, serão enunciadas as teses de investigação sustentadas por estratégias de resolução e resultados obtidos pelos estudantes na: a) resolução de problemas contextualizados e em tarefas matemáticas de âmbito interdisciplinar, em que um dos suportes tecnológicos utilizado foi a folha de cálculo; b) concretização de problemas resolvidos no teste.

Tese 1

> *A folha de cálculo, no contexto interdisciplinar, promoveu a utilização da estratégia multiplicativa*[77].

Quarto ano de escolaridade. Os cinco problemas propostos: "*vamos fazer um bolo!...*"; "*a compra de cromos*"; "*a pintura das peças de cerâmica*"; "*a cantina escolar*"; "*a carga certa para o "peso" certo*" inserem-se numa determinada classe de problemas cujos conteúdos explorados estão próximos do conceito de proporcionalidade e abrangem as três aproximações à álgebra referidas, com incidências específicas e particulares a cada uma delas. Esta orientação prevê uma linha de complexidade gradual e de aplicação progressiva, de um contexto real, próximo das vivências da criança, com a possibilidade de uma resolução mais concreta e experimental a um contexto mais afastado do quotidiano, da criança exigindo um tratamento mais formal e simbólico. Tudo indica que a folha de cálculo parece ter influenciado a resolução deste tipo de problemas, designadamente, no estabelecimento de uma relação a "duas dimensões", pela aplicação do "operador multiplicativo", em que o estudante usa uma estratégia multiplicativa, relacionando duas "variáveis" e não uma estratégia aditiva ou construtiva (Moreira, 1989), em que é apenas mobilizada uma "variável".

Como já se referiu na análise de resultados da resolução do problema: "*a compra de cromos*", no preenchimento das lacunas na tabela não se conseguiu vislumbrar o processo de resolução usado pelos estudantes das duas turmas. Assim, não foi possível descortinar se os estudantes das duas turmas utilizaram o operador aditivo "+3" ou o operador multiplicativo "x3" e, consequentemente, se exploraram a estratégia aditiva ou multiplicativa.

Na realização da folha de trabalho: "*a pintura das peças de cerâmica*", a primeira questão compreendia duas sub-questões: uma de um valor sequencial e outra com a extrapolação do valor, questionando-se: "*nas condições idênticas da tabela qual seria o tempo gasto na pintura de nove peças do modelo? E na elaboração de 20 peças? Expõe os teus raciocínios*". A maior parte dos estudantes das duas turmas, vinte e um e vinte e dois estudantes respondeu correctamente à questão, respectivamente, na turma A e B.

Nº de peças pintadas	2	4	5	7	8
Tempo (em horas)	3	6	7,5	10,5	12

Na turma A doze estudantes usaram expressamente o operador multiplicativo "*x1,5*", outros omitiram os cálculos utilizados, mas nenhum utilizou, explicitamente, uma forma aditiva para chegar ao resultado pretendido.

[77] Designação proposta por Moreira (1989) e desenvolvida em 9.3.3. do segundo capítulo, no tópico: "problemas com ligações directas às aprendizagens algébricas".

Na determinação do tempo gasto na pintura das nove peças saliente-se que apenas 2 estudantes da turma B usaram o operador multiplicativo, neste caso "x1,5", e que os restantes fizeram-no, de forma aditiva, usando uma diversidade de possibilidades, registando-se, a título de exemplo, as seguintes.

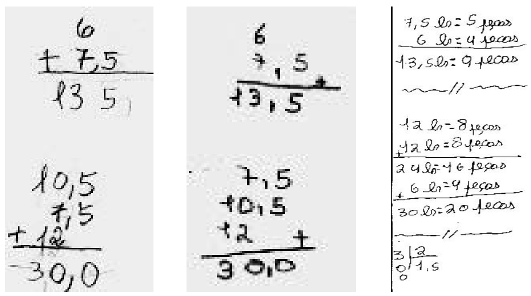


Figura 18: Uso de estratégias aditivas – "*A pintura das peças de cerâmica*"

Alguns estudantes, da turma B, referiram oralmente à investigadora:

5 peças demoram a ser pintadas – 7,5h

4 peças demoram a ser pintadas – 6h,

ora: 6+7,5=13,5, correspondendo a 5+4=9 peças, que é o número pedido

E acrescentou um dos estudantes:

Ou 10,5+3, correspondendo a 7 peças e mais 2 peças, que é a resposta correcta.

No caso das 20 peças os estudantes apresentaram também vários processos, principalmente a composição e a decomposição da quantidade 20, designadamente:

i) Como *20 peças=8+8+4* e, concretizando o algoritmo, como se observa na figura anterior, chegou ao resultado: *12+12+6=30*

Outro estudante chegou ao resultado correcto, sem assinalar os procedimentos, mas referiu oralmente à professora o seu raciocínio:

ii) Como 20 peças=4+4+4+4+4 então, soma-se o 6 cinco vezes: 6+6+6+6+6=30

Assim, os estudantes da turma B basearam-se num modelo aditivo para responder à questão decompondo, de forma diferenciada, as quantidades: 9 e 20. Na resolução das questões, os estudantes da turma B procuraram, com maior frequência, explorar *estratégias aditivas* para resolver o problema, aproximando-se da composição e decomposição de quantidades e relacionando linearmente, "*per si*" com os respectivos valores da tabela. Apenas dois estudantes da turma B usaram o operador multiplicativo, explorando a relação numérica que relacionava as duas variáveis: a *variável discreta*, número de peças com a *variável contínua*, número de horas gastas na pintura das mesmas. Este procedimento não aconteceu na turma A na qual a maior parte dos estudantes (12) utilizou efectivamente o *operador multiplicativo* para determinar o tempo gasto aproximado na pintura de nove e vinte peças.

Na concretização da folha de trabalho designada por: "*a cantina escolar*", a maior parte dos estudantes das duas turmas, cerca de 70%, conseguiu resolver correctamente a primeira questão, na qual se pretendia que fosse atribuído um valor numérico a cada uma das duas letras que se encontravam na tabela dada.

Quantidade de maçãs (em quilos)	40	35	30	**a**	10
Preço	€13,60	**b**	€10,20	€8,50	€3,40

Na apresentação dos cálculos apreende-se que a maior parte dos estudantes das duas turmas alcançou a solução através do preço unitário[78] calculado com base nos valores apresentados na última coluna da tabela, no preço de 10Kg de maçãs, cuja correspondência era de 10 para €3,40.

Na turma A nove estudantes usaram o operador multiplicativo ("*x0,34*") para determinar o valor da letra ***b*** e o operador inverso ("*:0,34*") para atribuir o valor à letra ***a***.

Na turma B, alguns estudantes usaram estratégias aditivas, mas também estratégias mistas, pois para calcular o valor da letra ***a*** utilizaram processos aditivos e para determinar o valor de ***b*** exploraram já a estratégia multiplicativa, descobrindo o operador multiplicativo.

Uma estudante (AAlex, nome fictício) utilizou a decomposição de quantidades com cálculos algorítmicos para calcular o valor da letra ***a*** e explicou oralmente:

> Como €3,40 corresponde a 10Kg e 3,40+3,40+1,70=8,50, que é o valor que está na tabela, então dá-me o valor de cima, que é o valor da letra **a**.

Entretanto, na folha de trabalho desenhou o esquema seguinte e usou o operador multiplicativo[79], realizando o algoritmo no cálculo da letra ***b***.

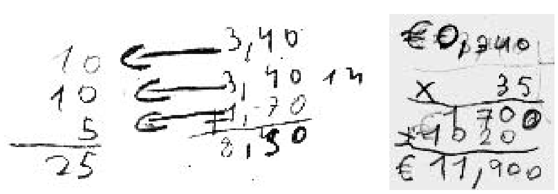


Figura 19: Uso da estratégia mista: aditiva e da multiplicativa – "*A cantina escolar*"

[78] Moreira (1989) salienta que, em idades elementares, os estudantes tendem a conhecer o valor unitário do produto para depois reconhecerem e aplicaram esse conhecimento à resolução do problema.

[79] É curioso registar que mais de metade dos estudantes da turma B, ao responderem à segunda questão: "Qual é o preço unitário de cada peça?" apresentaram o resultado na ordem das milésimas, o que não aconteceu na turma A, com a apresentação da resposta numérica na ordem das centésimas. Todavia, uma outra questão surge: será que esta pergunta, relacionada com a determinação do cálculo unitário, conjugada com um dos valores da tabela – o último, numa relação de 1 para 10 (mais familiar à criança?) impulsionou o uso de estratégias multiplicativas? Pois, segundo Moreira (1989), neste nível etário o conhecimento do valor unitário é crucial para a exploração de estratégias multiplicativas. Refira-se ainda que na questão anterior também se pedia a relação unitária, mas não estava presente esta correspondência na tabela, mas sim outras, sendo, provavelmente, a mais simples, a relação de 2 para 3.

Um outro estudante desta turma B, com facilidades em Matemática (Tig, nome fictício), realizou cálculos mentais e rapidamente chegou aos resultados, explicando à investigadora como tinha calculado o valor da letra ***b*** *e de* ***a***.

Experimentei com o valor 10, o último valor da tabela

Como 35=10+10+10+5, então tem-se: 3,40+3,40+3,40+1,70=11,90. É este o valor de **b**.

Para ***a*** *também é simples: 3,40+3,40+1,70=8,50, então tenho: 10+10+5 e* ***a****=25.*

Um outro estudante com bom desempenho em Matemática (JA, nome fictício) para calcular o valor da letra ***a*** analisou os dados da tabela e procedendo por analogia relatou à investigadora que usou o cálculo mental, determinando o valor da letra ***b*** e, em seguida, o valor de ***a***:

"*Como 13,60-11,90=1,70 e vinha 40-5=35 e como 10,20-8,50=1,70 tinha então de ser 30-5=25*"

Para determinar o valor da letra **b**, usou o preço unitário, reconheceu o operador multiplicativo ("*x0,34*") e realizou o algoritmo, como mostra a figura seguinte:

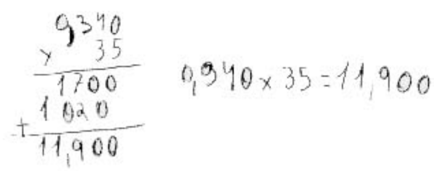


Figura 20: Uso da estratégia multiplicativa no cálculo do valor da variável ´***b***´– "*A cantina escolar*"

Tudo indica que os estudantes que analisam linearmente os valores da tabela e propõem correspondências pontuais, não relacionam os dados a "duas dimensões", isto é, não estabelecem a relação entre as duas variáveis das duas linhas da tabela e, deste modo, não conseguem de forma extrapolada, descobrir uma expressão universal que relacione qualquer número de quilos de maçãs com o respectivo preço.

Na resolução da tarefa: "*Vamos fazer um bolo!...*", na terceira questão pretendia-se que o estudante fosse capaz de identificar um operador multiplicativo "decimal", conectando a quantidade dos ingredientes com o número de comensais. Assim, conhecendo-se as condições iniciais do problema[80] pretendia-se que o estudante fizesse as adaptações necessárias de forma a confeccionar adequadamente o bolo para 15 pessoas.

Os resultados nas duas turmas foram bastante diferentes. A maior parte dos estudantes da turma A, cerca de 69% e 5%, reconheceu o operador numérico decimal e respondeu correctamente e/ou de forma incompleta à questão, havendo resultados diferentes na turma B, apenas com 14% de respostas correctas e 32% incompletas. Três estudantes da turma A responderam de forma incompleta, referindo: "*tenho de multiplicar todas as quantidades por 2,5*", identificando apenas o operador numérico multiplicativo

[80] A confecção do bolo chegaria para 6 pessoas.

"decimal", mas não aplicaram cada uma das quantidades dos ingredientes do bolo (5%). Também na turma B cerca de 32% dos estudantes respondeu de forma incompleta, pois identificou o operador multiplicativo "decimal", mas calculou correctamente apenas alguns valores.

Sexto ano de escolaridade. Neste ano de escolaridade leccionou-se o conteúdo sobre proporcionalidade directa e foram resolvidos vários problemas, entre os quais "*a festa de aniversário*". Com o mote: "c*omo o António faz anos, vamos fazer uns queques…*" forneceu-se, em quadro, os ingredientes e as quantidades necessárias para se confeccionarem queques para seis pessoas. Em seguida, colocou-se a seguinte afirmação: "*Calcula as quantidades de ingredientes necessários para se fazerem queques para 12 pessoas*" a que todos os estudantes responderam correctamente, usando procedimentos diferentes. A maior parte dos estudantes da turma A multiplicou por dois as quantidades dos diferentes ingredientes (11 respostas) ou adicionou duas vezes essas quantidades (2) ou aplicou a noção de proporção (1), excepto na quantidade do fermento q. b. e dez estudantes não apresentaram os cálculos. Também na turma B a maior parte dos estudantes conseguiu resolver correctamente a questão tendo apenas um estudante indicado explicitamente essa resolução, multiplicando por dois as quantidades dos diferentes produtos com que se confecciona o bolo.

Relativamente à questão seguinte (2.2.) pedia-se que: "*Se em vez de 2 ovos usares 5, que quantidade de manteiga deves usar? Explica como chegaste à tua resposta. Podes fazê-lo utilizando palavras, esquemas, expressões ou cálculos*" e a maior parte dos estudantes da turma A (20), aproximadamente 83%, respondeu correctamente. Os estudantes justificaram utilizando diferentes estratégias, designadamente: a) a relação unitária (6); b) a noção de proporção ou de fracção equivalente (1); c) o factor multiplicativo (6); d) um processo misto - a noção de proporção e do operador "x2,5" (3).

Também a maior parte dos estudantes da turma B (cerca de 88%) respondeu correctamente, usando, especificamente: a) a relação unitária (10); b) a noção de metade (2); c) o factor multiplicativo (3); d) o factor aditivo (1).

Como se pode verificar na resolução deste problema nenhum estudante da turma A apresentou uma estratégia aditiva e houve mais estudantes desta classe a utilizarem o operador multiplicativo do que nos da turma B, apesar de ter existido uma evolução gradual nessa turma na passagem da estratégia aditiva para a multiplicativa.

Dados recolhidos do Teste. Na pergunta número vinte do teste, na segunda sub-questão, focavam-se conhecimentos relacionados com o operador "x2", numa circunstância relacionada com o crescimento exponencial de bactérias. Os resultados obtidos e processos desenvolvidos na segunda sub-questão, pelos estudantes das duas turmas, são apresentados nos quadros seguintes.

<u>*Sub-questão 20.2*</u>

Tabela 17: Sub-questão 20.2. Resultados do Pré-Teste

Tipo de Resposta		RC		RPC		RI		NR		Total
	Turma	A	B	A	B	A	B	A	B	
Questão	Classe									
Q20.2	2 3	c - 9	c - 8	a - 1	b -1	b - 3	a - 2 b - 2 c - 1 d - 3			
Total		9	8	1	1	3	8	7	3	20

Legenda: RC – Resposta Completa; RPC – Resposta Parcialmente Completa; RI – Resposta Incompleta; NR – Não Resposta

Os resultados das duas turmas foram muito idênticos no que concerne às respostas completas, nove (45%) e oito (40%), respectivamente, na A e B e um estudante de cada turma respondeu parcialmente.

Tabela 18: Sub-qestão 20.2.Resultados do Pós-Teste

Tipo de Resposta		RC		RPC		RI		NR		Total
	Turma	A	B	A	B	A	B	A	B	
Questão	Classe									
Q20.2	2 3	b - 1 c - 12	b - 1 c - 8	b - 2	b - 1	b - 4	a - 2 b - 4 c - 1 d - 1			
Total		13	9	2	1	4	8	1	2	20

Na turma A houve uma *evolução significativa* (↑↑↑)(-+), dado que a maior parte dos estudantes (65%) conseguiu resolver completamente a questão pelo uso de uma regularidade multiplicativa evocando simbolicamente ou por linguagem corrente o operador "x2" e dois estudantes apresentaram uma resposta parcial, pois confirmaram o crescimento das bactérias, mas não recorreram a uma regularidade quantitativa.

Na turma B houve uma *ligeira evolução* (↑)(-), mas ainda em resultados negativos em que 45% dos estudantes resolveu completamente a questão e um fê-lo de forma parcial.

<u>Apreciação genérica 20.2.</u>

A turma A *evoluiu significativamente* nos resultados (↑↑↑)(-+), de nove estudantes (45%) para treze (65%), descobrindo a regularidade que regia o fenómeno através de um modelo matemático multiplicativo recorrente: $2xu_{n-1}$, em que u_{n-1} é o valor anterior, apresentado por linguagem corrente ou por um modelo multiplicativo misto, isto é, "*2 vezes o valor anterio*r". Nenhum estudante identificou esta regularidade tendo por base a noção de potência de base 2, num modelo exponencial do tipo: $2^n x1000$, com n Є IN_0.

Apesar de ter existido uma ligeira evolução (↑)(-), na turma B, esta aconteceu em terreno negativo pois nos dois tempos de interacção com o teste, menos de metade dos estudantes conseguiu atingir uma resposta completa.

Refira-se ainda que o uso do operador multiplicativo nesta questão tem um contexto diferente dos problemas anteriores, pois trata-se de aplicar "x2" ao valor imediatamente anterior de uma tabela a uma dimensão.

Reflexões/Conclusões genéricas sobre as relações de proporcionalidade

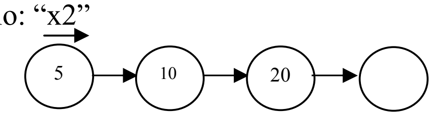
Pelas pesquisas realizadas e destacadas nas referências bibliográficas sobre esta temática perspectivou-se a necessidade de, desde cedo, de forma gradual e contextualizada, desenhar e desenvolver com os estudantes problemas associados às relações de proporcionalidade. Nesta investigação propôs-se a realização de problemas diversificados, contextualizados, gradualmente complexos, com enfoque temático e de compreensão crescente dos métodos envolvidos ligados às relações de proporcionalidade, pois tratava-se de explorar *diversas aproximações à álgebra*, desde logo à *2ª aproximação à álgebra* e, em particular, de forma explícita, à *1ª* e à *3ª aproximação à álgebra*.

Segundo Adler (1968) o desenvolvimento mental da criança avança através de estágios qualitativamente distintos e que devem ser tidos em consideração quando se elabora um programa ou se desenvolve um tópico. Este autor defende dois critérios para seleccionar as experiências matemáticas que devem ser proporcionadas à criança em qualquer idade: a) experiências para as quais a criança esteja pronta, com vista ao estágio de crescimento mental que atingiu; b) e outras que prevejam a preparação da criança para o estágio seguinte. Segundo Adler (1962-1968) não se deve ensinar um tópico cedo demais, mas também não se deve adiar durante anos um assunto para o qual está pronta, devendo existir um compromisso natural e didáctico na exploração de determinados assuntos. Também Bruner (1983, 1987) comunga da mesma ideia e desafia o professor para sair da rotina escolar que, eventualmente, se possa instalar progressivamente nas aulas e lançar novos desafios aos estudantes, concluindo ainda que estes irão certamente surpreender, pela positiva, "os mestres". Piaget (1975) também defende que não se deve ensinar prematuramente a uma criança algo que pode ser descoberto por si, pois se tal acontecer a criança foi impedida de inventar e, consequentemente, de compreender completamente, mas isto não significa que o professor tenha uma acção passiva perante a situação, bem pelo contrário, deve criar condições para facilitar a invenção e o progresso da criança.

Também o grande matemático português José S. e Silva já em 1976, defendia a necessidade de "estimular ao máximo os estudantes talentosos, facultando-lhes a leitura fácil de certos assuntos do programa" (p. 12).

Reconhecendo-se neste estudo a importância do tópico "relações de proporcionalidade" nas aprendizagens algébricas, verificou-se que, ao longo da escolaridade básica do 1º ciclo, são desenvolvidas determinadas experiências e competências que importa destacar e problematizar:

Exemplo: “x2”



1. Números Inteiros

- Aquisição e aplicação da noção de operador sequencial multiplicativo, de desenho idêntico ao que se apresenta (primeira, de orientação horizontal, e, posteriormente, vertical e/ou oblíqua).
- Aquisição e aplicação da noção de operador sequencial multiplicativo em tabelas (orientação horizontal, seguida de orientação vertical).

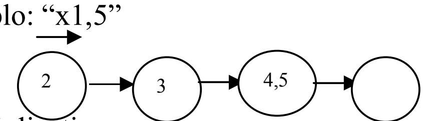
Exemplo:

3	9	27				

- Aquisição da noção de múltiplo e divisor de um número.
- Resolução de exercícios, problemas ou jogos, com a mobilização e aplicação dos conhecimentos anteriores.

2. “*Números Decimais*”[81]

Exemplo: “x1,5”



- Aquisição e noção de operador sequencial multiplicativo “decimal”, de desenho idêntico ao que se apresenta (de orientação horizontal, vertical, e/ou oblíqua).

- Aquisição e aplicação da noção de operador sequencial multiplicativo “decimal” em tabelas (de orientação horizontal e/ou vertical).

Exemplo:

2	1	0,5				

- Resolução de exercícios, problemas ou jogos, com a mobilização e aplicação dos conhecimentos já adquiridos.

3. *Modelação de fenómenos*

- Aplicação ou descoberta de uma relação entre duas variáveis numa tabela de duas entradas de x para Kx, como a aplicação do operador multiplicativo K, no estabelecimento da relação *objecto* x para a *imagem* Kx, entre duas variáveis discretas; uma variável discreta e contínua; duas variáveis contínuas.

$\boldsymbol{x}$	x_1	x_2	x_3	x_4	…
$\boldsymbol{Kx}$	Kx_1	Kx_2	Kx_3	Kx_4	…

ou

[81] Com uma sequência semelhante ao dos números inteiros.

x	kx
x_1	Kx_1
x_2	Kx_2
x_3	Kx_3
x_4	Kx_4
...	…

- Resolução de problemas relacionados com a vida real, contextualizados, de âmbito interdisciplinar, numa perspectiva de modelação do fenómeno: numa primeira fase conhecida a relação para a aplicar a casos concretos "realistas" e posteriormente, na descoberta da relação que modele o fenómeno, através da análise de alguns casos particulares, criteriosamente escolhidos.

Após a apresentação destas experiências de aprendizagem relacionadas com este importante tópico: "relações proporcionais" uma questão, pelo menos, se pode levantar: qual deverá ser o percurso didáctico a desenvolver para que o estudante alcance o sucesso neste tópico? Numa lógica de aprendizagem significativa e contextualizada a orientação deve ser dada de forma que o conhecimento adquirido *faça sentido* para o estudante, isto é, que possa ser trabalhado numa base de integração gradual e compreendida na estrutura conceptual do estudante (Gravemeijer e outros, 2000, Gravemeijer, 2004).

Refira-se que os estudantes no processo de resolução deste tipo de problemas usam, neste nível etário, fundamentalmente duas estratégias, como refere Moreira (1989) e constatadas na investigação: a) ***modelo aditivo***, *modelo pré-formal*, identificado com uma estratégia construtiva relacional e linear, orientado para a exploração de uma só variável, analisando dados de uma só "fila" (linha ou coluna), baseando-se na composição e decomposição de quantidades e numa resolução particular e casuística; b) ***modelo multiplicativo***, identificado com a estratégia multiplicativa relacionando duas variáveis, analisando do particular para o geral, com definição da "fórmula" ou "expressão matemática" que generaliza o fenómeno. Enquanto que o modelo multiplicativo tem uma expressão universal, revelando-se como um processo generalizável, objectivo e não dependente do indivíduo, o modelo aditivo é "funalizado", tem carácter subjectivo, é diferenciado e revela variadas formas de representação do raciocínio.

O estudo realizado com estas duas turmas indica que os estudantes da turma A, na resolução de problemas sobre conceitos associados às relações de proporcionalidade, tendem a iniciar mais cedo a exploração da estratégia multiplicativa do que aqueles que não utilizaram a folha de cálculo. Assim, tudo indica que esta ferramenta tecnológica estimula e favorece o processo dinâmico de conhecimento, através do qual o estudante aplica a relação dada entre duas variáveis ou descobre a lei que rege o fenómeno, aprofundando conhecimentos relacionados com a generalização do padrão – *1ª aproximação à álgebra* e a 3ª *aproximação à álgebra*, numa perspectiva contextualizada da explicitação do modelo multiplicativo que rege o fenómeno.

Nas tarefas e problemas resolvidos, os estudantes foram orientados gradualmente, de uma forma mais acessível, com a aplicação do operador já conhecido no enunciado, para uma via mais avançada da modelação em que o estudante lê a informação, interpreta, relaciona e, através da análise dos casos, desenvolve o raciocínio indutivo, descrevendo e generalizando simbolicamente o fenómeno. A selecção dos problemas foi criteriosa, seguindo um processo "closeness" de relacionamento significativo e próximo do jovem ao mais afastado, com retoma à aproximidade da vida do estudante, com um problema de âmbito interdisciplinar, com significado relevante e profundo para a vida pessoal do estudante, como aconteceu no campo da saúde, na resolução do problema: "*a carga certa para o "peso" certo*", apresentado anteriormente.

Esta *primeira tese de investigação*, de certo modo, reafirmou os resultados obtidos em pesquisas anteriores desenvolvidas por Moreira (1989), reconhecendo-se a importância da folha de cálculo na promoção da exploração de uma estratégia multiplicativa, na resolução de problemas em contexto ligados à noção de proporcionalidade directa, facilitando, deste modo, o estabelecimento de uma relação entre duas variáveis, com uma clara ligação directa à *quarta aproximação à álgebra* e ao conceito implícito de função.

Tese 2

A folha de cálculo proporcionou o uso de fórmulas e de uma linguagem simbólica na resolução de problemas em contexto

O trabalho próximo com a folha de cálculo permitiu naturalmente a construção de "expressões designatórias", escritas numa sintaxe própria que potencia a criação de uma simbologia peculiar capaz de generalizar um fenómeno, tendo naturalmente influenciado a resolução de problemas e tarefas em contexto e de âmbito interdisciplinar.

Como já se referiu, na tese elaborada anteriormente, a folha de cálculo promove a exploração de uma estratégia já de si simbólica, concretamente o uso do "operador multiplicativo" na resolução de problemas relacionados com o conceito de proporcionalidade. Contudo, na realização de outro tipo de problemas, em ambiente de teste ou não, verificou-se que os estudantes da turma A tendem a utilizar uma linguagem mais simbólica[82].

Quarto ano de escolaridade. Na resolução do problema "*a carga certa para o "peso" certo*", concretizado no 4º ano de escolaridade, a linguagem usada pelos estudantes da turma B na abordagem da segunda questão "*que relação encontras entre o "peso" da criança e a carga da mochila?*" apresentou-se menos simbólica do que a utilizada pelos estudantes da turma A. Como se pode verificar em 3.4., deste capítulo, sobre a descrição das tarefas implementadas e dos processos e resultados obtidos, constata-se que a turma A obteve resultados mais positivos do que a classe B, respectivamente, 90% e 60% dos estudantes responderam correctamente, indicando a lei que regia o fenómeno em estudo.

---

[82] Constatando-se que o tipo de problema e o contexto influenciam a decisão do estudante, como aconteceu no caso da resolução do problema "*compras nos saldos*", em que houve um grupo de dois estudantes da turma B que tentou explorar uma estratégia de cariz mais simbólica do que os da classe A, como se analisa mais à frente, em 4.2., na fundamentação da *tese 6 da investigação*.

“Peso” da criança	Carga da mochila
20	2
	2,7
31	3,1
39	
45	4,5
	5
51	

Os estudantes observaram os valores das duas tabelas, relacionaram-nos e enunciaram objectivamente a relação existente, com expressões, na turma A, do tipo: “*a relação é de 1 para 10*” ou “*... é a décima parte*”, num total de treze estudantes e apenas dois estudantes usaram a linguagem corrente: “*a carga da mochila tem de ser dez vezes menor*”.

Na turma B, num total de doze estudantes que responderam correctamente, apenas cinco usaram uma linguagem mais simbólica, com expressões idênticas às da classe A.

Quinto ano de escolaridade. Neste ano resolveu-se o problema de âmbito interdisciplinar: “a fórmula de Euler”, cujos estudantes da turma A após algumas experiências e após a organização dos dados em tabela concluíram de imediato que a relação era “*+2*” ou “*-2*”, conforme o caso: ou $V+F=A+2$ ou $V+F-2=A$, representando A o número de arestas, F o número de faces e V o número de vértices de um poliedro.

Também foi realizada uma tarefa investigativa, no domínio interdisciplinar, designada por “*lavar os dentes e poupar água!...*”, ligada fundamentalmente à área das Ciências da Natureza donde emergiram determinados resultados e certos procedimentos que importa agora destacar para, porventura, optimizar em experiências e estudos futuros. Numa perspectiva de educação ambiental e de conexão interdisciplinar, concretamente, com a área de Ciências da Natureza, na qual tinha sido leccionada a importância do elemento *água* na natureza considerou-se relevante, neste quadro curricular, realizar, em família, esta actividade de investigação, como TPC de Matemática.

Os estudantes das duas turmas tiveram dificuldades idênticas na diferenciação dos valores associados ao desperdício de água por cada um dos membros da família em que implicitamente aceitaram o mesmo gasto de água do obtido pelo estudante e os resultados foram idênticos nas duas turmas.

Na última questão “*comenta os resultados que obtiveste*” um estudante da turma A tentou enunciar uma relação numérica entre a água gasta na lavagem dos dentes usando o copo e a água a correr, referindo: “*Se lavarmos os dentes com a água a correr gasta-se muito mais água, cerca de oito vezes mais do que se lavarmos apenas com um copo*”. Se designarmos por “*at”*, “o volume da água gasta pela torneira” e por “*ac*”, “o volume da água gasta num copo”, tem-se a expressão matemática: $at=8xac$, informando-nos que em cada lavagem diária de dentes, aquela estudante pode desperdiçar ou não determinada quantidade de água se optar, respectivamente, por usar a torneira a correr ou um copo para lavar os dentes.

Naturalmente que esta resposta não é significativa em termos de número de estudantes, mas é apenas um marco e, nesta circunstância, passível de suscitar o levantamento de algumas questões importantes na turma A, designadamente: será que qualquer um de vós poderá estabelecer também uma relação entre a quantidade de água que se gasta a lavar os dentes com o copo ou com a torneira a correr? Será que essa relação é igual para todos os estudantes? Porquê? Estas e outras questões poderiam proporcionar o estabelecimento de outras condições na exploração do tema e o desenvolvimento de um trabalho mais profundo sob o ponto de vista relacional e simbólico. Este diálogo não pode surgir do seio da classe B, mas apenas quando provocado extrinsecamente pela professora o que, necessariamente, provocaria outro impacto didáctico.

Nestas circunstâncias, considera-se relevante que esta actividade fosse novamente retomada no 3º ciclo do ensino básico no conteúdo sobre funções, para se desenvolver um trabalho mais profundo de aprendizagem matemática em contexto e de âmbito interdisciplinar, designadamente, na tentativa de modelação do fenómeno e, consequentemente, de uma maior consciencialização cívica e ambiental, alicerçada na compreensão efectiva do significado de função.

Sexto ano de escolaridade. Também na resolução do problema "*respirar e descansar*", verificou-se que os estudantes das duas turmas usaram estratégias diversificadas: pictórica, regularidades, linguagem corrente, modelos matemáticos simples, conjugados ou não com as outras estratégias utilizadas. No uso do modelo simples assinalaram-se ligeiras diferenças nas duas turmas.

Na primeira questão, relacionada com os movimentos de uma foca - estar à superfície ou permanecer dentro de água para respirar e descansar, onze estudantes da turma A responderam correctamente e apresentaram justificações diferenciadas, baseadas fundamentalmente no(a)[83]: a) modelo pictórico e numérico (1); b) regularidade numérica (2); c) modelo matemático simples (8), em que dois casos apresenta explicação em linguagem corrente. Um dos estudantes que usou a linguagem corrente e implicitamente o modelo matemático também tentou justificar a sua conclusão através de uma tabela, embora de forma incompleta, considerando que 4 minutos eram gastos pela foca a subir para a superfície e outros 4 minutos eram gastos a descer para um nível inferior, ficando submersa.

Doze estudantes da turma B responderam correctamente à primeira questão, apresentando também justificações muito diferenciadas, designadamente, a(o)[62]: a) linguagem corrente pouco clara (1); b) modelo pictórico (1); c) regularidade temporal sequencial (5); d) modelo matemático simples (5).

O *modelo matemático simples* usado pelas duas turmas, denuncia a identificação do período, 11 minutos (8+3) e com base no modelo matemático aditivo ou multiplicativo, respectivamente: adicionando 11 continuamente até 1 hora, *11+11+11+11+11+5=60*; ou *11n = 55* e *sobram 5 minutos* ou *55+8= 63*, *ora 63-60=3* (sendo nesta diferença de cinco ou três minutos que residiu o cerne da resposta, indicando a posição da foca) *ou de forma*

[83] O número escrito entre parêntesis indica o número de estudantes que responderam correctamente à questão.

sequencial alternada com os operadores: "+8" e "+3", explicitando objectivamente o modelo matemático descoberto**.**

Na turma A *dez estudantes* usaram um modelo matemático simples para apoiar e fundamentar a resposta, oito com resposta correcta e na turma B *sete estudantes* usaram também um modelo matemático simples numérico, com cinco respostas correctas. Todavia, na turma A existem, pelo menos, três casos, em que o modelo matemático simples é "mais algébrico", próximo da expressão do tipo: *11xn=55* ou *11xn=60*, como se mostra nas três figuras seguintes e na fundamentação da *tese 6.*

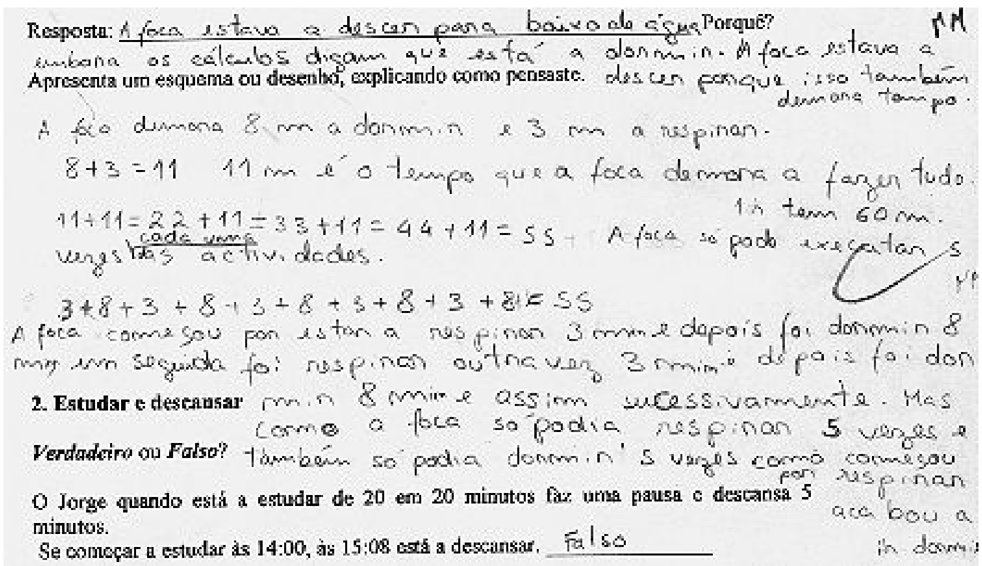

Resposta: A foca estava a descan para baixo de água Porquê?
embora os cálculos digam que está a dormir. A foca estava a descan porque isso também demora tempo.
Apresenta um esquema ou desenho, explicando como pensaste.
A foca demora 8 mn a dormir e 3 mn a respirar.
8+3=11 11 mn é o tempo que a foca demora a fazer tudo.
1h tem 60 mn.
11+11=22+11=33+11=44+11=55 A foca só pode executar 5 vezes cada uma das actividades.
3+8+3+8+3+8+3+8+3+8=55
A foca começou por estar a respirar 3 min e depois foi dormir 8 min em seguida foi respirar outra vez 3 min e depois foi dormir 8 min e assim sucessivamente. Mas como a foca só podia respirar 5 vezes e também só podia dormir 5 vezes como começou por respirar acabou a ir dormir
2. Estudar e descansar
Verdadeiro ou Falso?
O Jorge quando está a estudar de 20 em 20 minutos faz uma pausa e descansa 5 minutos.
Se começar a estudar às 14:00, às 15:08 está a descansar. Falso

Figura 21: Uso de um modelo matemático simples explicado por palavras, com notação sequencial "incorrecta" – "*Respirar e descansar*"

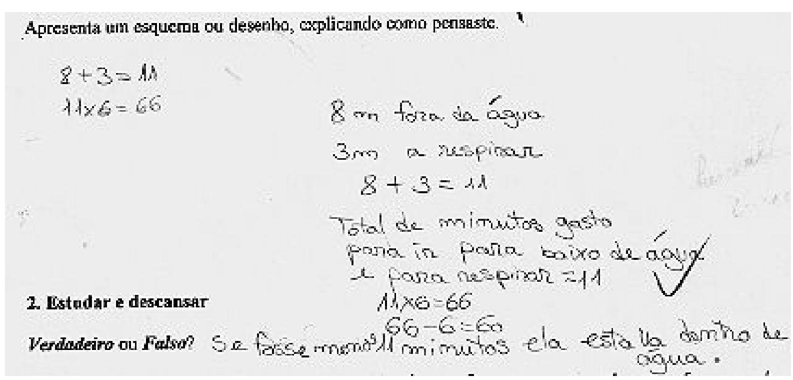

Apresenta um esquema ou desenho, explicando como pensaste.
8+3=11
11x6=66
8 m fora da água
3m a respirar
8+3=11
Total de minutos gasto para ir para baixo de água e para respirar =11
11x6=66
66−6=60
2. Estudar e descansar
Verdadeiro ou Falso? Se fosse menos 11 minutos ela estava dentro de água.

Figura 22: Uso de um modelo matemático simples – "*Respirar e descansar*"

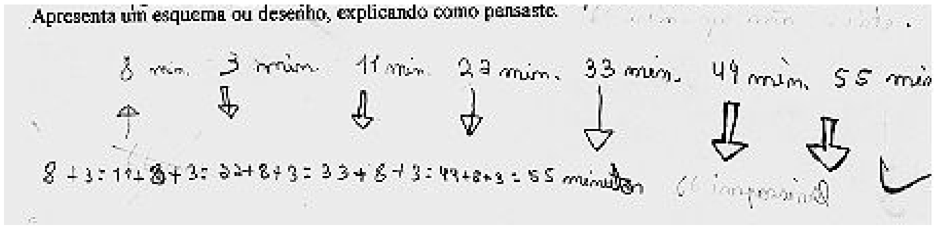


Figura 23: Uso de um modelo matemático simples, com notação sequencial "incorrecta" – "*Respirar e descansar*"

Também no 6º ano de escolaridade a resolução, em parte, do problema em contexto "*padrões em V*", na folha de cálculo, permitiu entender que a concretização de algumas questões com esta ferramenta tecnológica foi a mais adequada, reconhecendo-se ainda que, por esta via, os estudantes puderam descrever simbolicamente, a "duas dimensões", a lei que regia o fenómeno.

Na primeira questão pretendia-se que o estudante, através da observação de um desenho ilustrativo do movimento de pássaros em bando, analisasse a sequência dos padrões e desenhasse o padrão em "V" seguinte. Todos os estudantes/grupos da turma A assinalaram correctamente a resposta, mas usando marcas iconográficas variadas e processos mentais diferentes, entre os quais se destacam: um processo iconográfico "unitário" ("+1" em cada um dos "braços do V") ou "paritário" ("+2" para os dois "braços do V") ou expondo um processo conceptual simbólico, basicamente definido por recorrência, aplicando o operador aditivo "+2" à quantidade de pássaros anteriores. Também os estudantes da turma B reagiram de forma idêntica à classe A e obtiveram resultados semelhantes, fundamentalmente, no registo gráfico da sequência.

Na segunda questão pretendia-se averiguar, de forma justificada, se seria possível desenhar um padrão em "V" com 84 pontos. Onze grupos da turma A responderam correctamente, referindo que não era possível obter um padrão em "V" com este número de pontos, justificando a resposta de forma contextualizada, pictórica ou simbólica. De forma ***pictórica*** (1 resposta): "*porque os padrões em V nunca são em números pares, devido a terem um ponto em baixo e sempre pontos pares à medida que vai subindo*" e de forma ***contextualizada*** e/ou ***conceptual***[84] (10): "*porque cada bando de pássaros tem um número ímpar*"; "*porque o número de pássaros que há neste padrão tem que ser ímpar, pois existe um pássaro sempre sem par*"; "*porque o número de pássaros de cada bando é sempre ímpar e 84 é par*"; "*porque como o 1º V tinha 3 pontos sempre que se some 2 dá sempre um número ímpar*" (de reparar, neste caso, o rigor da justificação, evocando o primeiro elemento da sequência e o respectivo número de pontos para, em seguida, expor, por indução, a lei que rege o fenómeno); "*porque 84 é um número par*" (2); "*porque 84 é um número par e os outros todos são ímpares*"; "*porque para fazer um padrão em V é preciso ser um número ímpar e 84 é um número par*", "*porque 84 é um número par e na sequência anterior o padrão era sempre par*"; "*porque tem de dar sempre ímpar*".

Na turma B também onze grupos responderam correctamente, tendo oito justificado a resposta de forma ***pictórica*** (2): "*pois vai dar um número a menos porque o ponto ao*

[84] Mais próxima da linguagem simbólica matemática.

centro conta para os dois lados"; "*porque não ficavam 43 de um lado e 41 do outro*" e de forma ***conceptual*** (6): "*porque 84 é um número par*" (4)"; "*só podia ser um padrão em V se fosse um número ímpar*"; "*porque se um padrão pode ter 5 pontos então também não pode ter 84 pontos é impossível*", tendo mais dois grupos usado uma linguagem pouco rigorosa e clara.

Nas duas turmas, especialmente na turma A, alguns estudantes tiveram necessidade de contextualizar a resposta e, reportando-se aos bandos de pássaros da folha de trabalho, contornaram *os ´Vs´ esboçados pelos pássaros* e com a régua desenharam os ´*V*s´ nas sequências de pontos. É de registar ainda que *a maior parte dos estudantes* justificou a resposta usando uma *argumentação conceptual,* implicitamente *simbólica*.

Na terceira questão: "*por quantos pontos será constituído o sexto padrão em V*" nove grupos da turma A responderam correctamente, tendo apenas dois justificado a resposta. Um deles usou a tabela seguinte, registando a fórmula que induz o fenómeno e um outro argumentou: "*se cada padrão aumenta 2, então 5º 9+2=11 e 6º 11+2 = 13*" *e é sempre mais dois*".

Padrão em V	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*
Nº de pontos	*3*	*5*	*7*	*9*	*11*	*13*

$\xrightarrow{}$ *+2* $\quad$ $\xrightarrow{}$ *+2* $\quad$ $\xrightarrow{}$ *+2* $\quad$ $\xrightarrow{}$ *+2* $\quad$ $\xrightarrow{}$ *+2*

Alguns estudantes iniciaram a resolução da 5ª questão ainda na aula de Matemática, descobrindo previamente a fórmula geral que relacionava as duas variáveis: admitida a existência do primeiro pássaro, como o chefe do bando, o *padrão-zero em V*, então *o número de pontos do padrão* seria dado pela fórmula*: 2xnº de padrão em V+1* para, de seguida, ser organizada, simulada e desenvolvida na folha de cálculo, na aula da Oferta da Escola.

Também *todos os grupos responderam correctamente* à quinta questão, preenchendo a coluna do número de pontos com as quantidades: 9, 11 e 13, integrando os conhecimentos aplicados e apreendidos nas questões anteriores e baseando-se na fórmula recorrente: "*+2 em relação ao resultado anterior*". Por outro lado quatro grupos preencheram correctamente mais duas linhas das colunas do padrão em V e do número de pontos escrevendo, respectivamente, 7 e 9 e 15 e 17.

Na mesma questão e na alínea seguinte em que *se pedia para referirem quantos pontos deveria ter o quadragésimo padrão em "V"*, onze grupos responderam correctamente, indicando que deveria ter 81 pontos. Alguns deles sentiram dificuldade em descobrir a resposta deduzindo-a através de uma fórmula recorrente e apenas relacionando os dados de uma coluna (*utilizando apenas uma variável*!). Assim, foi-lhes proposto que relacionassem o número do padrão em "V" com o número de pontos, o que foi possível realizar pela maior parte dos estudantes, assinalando, alguns estudantes, oralmente a fórmula: "*2 vezes o padrão em V com mais um*".

Posteriormente, foi então proposto que experimentassem na folha de cálculo e averiguassem da veracidade da fórmula descoberta.

De facto, a maior parte dos estudantes teve facilidade em organizar os dados e resolver estas duas últimas questões na ferramenta tecnológica disponibilizada, revelando-se muito adequada para simular numericamente a situação e comprovar as conjecturas formuladas pelos estudantes.

O termo *fórmula geral* significa que os estudantes criaram correctamente a fórmula relacionando as duas colunas na folha de cálculo. Assim, estabeleceram uma relação entre duas variáveis, isto é, entre o número do padrão em “V” e o número de pontos do padrão, através da fórmula “$2*A_n+1$”, definindo implicitamente a condição “$B_n=2*A_n+1$”.

O termo *fórmula recorrente* indica que os estudantes apenas relacionaram o número de pontos do padrão em “V”, isto é, usaram apenas uma coluna da folha de cálculo para estabelecerem a relação “$A_{n-1}+2$” definindo implicitamente a condição “$A_n=A_{n-1}+2$”.

Na turma B, na terceira questão, a maioria dos grupos (8) respondeu correctamente, tendo um deles apresentado uma resposta numérica e desenhada e um outro descreveu implicitamente o padrão de forma numérica e pictórica: “*será 13, pois serão 6 de cada lado e um no meio*”. Contudo, os outros seis grupos não responderam de forma completa, existindo vários tipos de justificações: “*sim, porque ficam 43 de um lado e 41 no outro*”; “*por 29 pontos*”; “*por 6 bolinhas*”, descrevendo o grupo, neste caso, apenas um dos lados do padrão e ainda houve um grupo que desenhou o padrão, mas fê-lo erradamente, só com 11 pontos; um outro desenhou incorrectamente o padrão e escreveu “*12 pontos*”; e um grupo apenas apresentou correctamente o desenho.

Na resolução da 5ª questão apenas um grupo da turma B tentou relacionar a informação entre as duas colunas e descobrir a fórmula.

Nesta questão 5.1., em que se pedia para completar, na tabela ao lado, a coluna da direita, a maior parte dos grupos (10) respondeu correctamente, tendo quatro deles completado os dados da coluna pedida e ainda da outra e três dos grupos excederam os valores das linhas assinaladas para certamente se apoiarem nestes dados e responderem às questões seguintes.

Na mesma questão e na alínea seguinte em que se pedia para referirem quantos pontos deveria ter o quadragésimo padrão em V, cinco grupos não apresentaram a resposta e nenhum grupo respondeu correctamente. Registe-se que os estudantes da turma B não conseguiram ampliar o fenómeno e levantar hipóteses de generalização relacionando as ocorrências do número de padrões em V com o número de pontos que o constituíam, ou simplesmente analisando os número de pontos do padrão em V interligando-o com o número anterior.

Pode-se, assim, concluir que os estudantes da turma A tiveram mais facilidade em delinear a relação e elaborar conjecturas do que os da classe B, revelando-se a folha de cálculo como uma ferramenta adequada na simulação numérica da situação e uma mais valia na comprovação das conjecturas formuladas pelos estudantes. Assim, a folha de cálculo mostrou-se um instrumento tecnológico potenciador de aprendizagens pré-algébricas, capaz de apoiar no estabelecimento de relações entre os dados e ampliar o fenómeno, proporcionando, desta forma, o desenvolvimento do raciocínio indutivo na descoberta de um modelo matemático que orienta, prevê e descreve o acontecimento, facilitando a construção de conhecimentos ligados à *terceira aproximação à álgebra*.

Dados recolhidos do Teste. Relembrem-se também os resultados e os processos associados a algumas questões realizadas no teste, em contexto estritamente disciplinar, em matemática em contexto ou de âmbito interdisciplinar respectivamente, questões 1.2 e 1.3; as questões 2 e 7.2, em que os estudantes da turma A conseguiram interpretar e apresentar uma linguagem mais simbólica, na realização dos problemas, explorando noções relacionadas com *a primeira* e a *terceira aproximação à álgebra*.

Questão Q1.2

Tabela 19: Questão 1.2. Resultados do Pré-Teste

Tipo de Resposta		RC		RPC		RI		NR		Total
	Turma	A	B	A	B	A	B	A	B	
Questão	Classe									
Q1.2	1	a - 6 b - 4	a - 10 b - 4	1a - 1 2a - 1 4a - 3 3b -1	3a - 1	a - 3	a - 2 b - 2			
Total		10	14	6	1	3	4	1	3	20

Legenda: RC – Resposta Completa; RPC – Resposta Parcialmente Completa; RI – Resposta Incompleta; NR – Não Resposta

Na turma A 50% dos estudantes respondeu correctamente à questão, tendo conseguido completar as lacunas da tabela de uma entrada com base na regra apresentada simbolicamente: *"...x2+1"*. Tudo indica que estes estudantes interpretaram correctamente o significado da expressão simbólica, tendo seis dos dez estudantes respondido correctamente recorrendo ao cálculo mental e os restantes quatro estudantes explicitaram, de forma completa, os cálculos numéricos.

Na turma B 70% dos estudantes respondeu correctamente à questão e quatro dos catorze estudantes explicitou os cálculos numéricos.

Tabela 20: Questão 1.2. Resultados do Pós-Teste

Tipo de Resposta		RC		RPC		RI		NR		Total
	Turma	A	B	A	B	A	B	A	B	
Questão	Classe									
Q1.2	1	a -12	a - 4 b - 4	8a - 1 6a - 2 4a - 1	8a - 3 6a - 3 8b - 1	1a - 4	1a - 3			
Total		12	8	4	7	4	3	0	2	20

Na turma A os estudantes continuaram a não explicitar os cálculos e 60% respondeu completamente à questão, enquanto que na turma B apenas 40% o conseguiu, mas as respostas parcialmente completas desta turma indicam que os estudantes apreenderam o significado da regra dada, pois conseguiram completar algumas lacunas com ou sem explicitação de cálculos, respectivamente, assinaladas pelas alíneas a e b.

Apreciação específica Q1.2.

Na turma A existiu uma ligeira evolução (↑) e um retrocesso acentuado na turma B (↓↓↓) (+-).

Questão Q1.3

Tabela 21: Questão Q1.3. Resultados do Pré-Teste

Tipo de Resposta		RC		RPC		RI		NR		Total
	Turma	A	B	A	B	A	B	A	B	
Questão	Classe									
Q1.3	1	a -11 b - 4	a - 2 b - 1 c - 9	8a - 2 2c - 1 c - 1			a - 6			
Total		15	12	4	0	0	6	1	2	20

Legenda: RC – Resposta Completa; RPC – Resposta Parcialmente Completa; RI – Resposta Incompleta; NR – Não Resposta

A maior parte dos estudantes da turma A, 75%, conseguiu resolver completamente a questão e onze dos quinze estudantes descobriram e assinalaram a regra usada em linguagem simbólica, evidenciando o operador numérico.

Também 60% dos estudantes da turma B conseguiu, com êxito, resolver a questão, tendo apenas dois estudantes usado a linguagem simbólica e os restantes utilizaram a linguagem mista (mistura de linguagem corrente e simbólica).

Tabela 22: Questão Q1.3. Resultados do Pós-Teste

Tipo de Resposta		RC		RPC		RI		NR		Total
	Turma	A	B	A	B	A	B	A	B	
Questão	Classe									
Q1.3	1	a - 2 b - 7 c - 4 d - 5	a - 2 b - 6 c - 1 d - 5	a - 2	b - 4 4d - 1 2d - 1					
Total		18	14	2	6	0	0	0	0	20

Dois estudantes da turma A responderam parcialmente à questão e os restantes, isto é, 90%, responderam correctamente, tendo descoberto e assinalado a regra, com duas respostas em linguagem simbólica e sete em linguagem corrente, com evidência do operador numérico (“+1,5”) junto das setas direccionais que acompanharam as entradas da tabela e nove respostas assinalando também a regra em linguagem corrente, com formulações variadas.

Na turma B 70% dos estudantes responderam completamente, tendo também dois estudantes usado a linguagem simbólica, seis a formulação mista e os restantes seis estudantes expressaram a regra em linguagem corrente. Nesta turma ainda seis estudantes responderam parcialmente à questão, pois realizaram incorrectamente alguns cálculos ou não descobriram a regra.

Apreciação específica Q1.3.

Nas duas turmas houve uma *evolução* (↑↑), pois na turma A existiu um aumento de três respostas completas e na B de duas e mais três respostas parcialmente completas. Nas duas turmas os processos utilizados na explicitação da regra foram muito variados, desde o uso da linguagem simbólica (ls) à linguagem corrente (lc) ou mista (lm).

Apreciação genérica de Q1.

Esta questão comportava a manipulação de valores numéricos em diferentes apresentações, numa tabela de uma só entrada, integrando *a primeira aproximação à álgebra de âmbito estritamente disciplinar*.

Os resultados genéricos obtidos na resolução da questão 1, nas duas turmas, registam-se no quadro seguinte.

Questão	Turmas		Conclusão genérica
	A	B	A turma A apresenta resultados mais positivos na Q1.2. do que a turma B e esta tem evolução mais positiva do que a A, na Q1.1.
Q1.1.	↓	↑	
Q1.2.	↑	↓↓↓(+-)	
Q1.3.	↑↑	↑↑	

A primeira sub-questão Q1.1. estava ligada à interpretação de uma regra, indicada em linguagem corrente, "*o dobro do número anterior*" e à aplicação desta regra em quantidades racionais, numa tabela de uma entrada.

Tudo indica que a linguagem corrente emerge como um veículo privilegiado da convivência social e como uma primeira abordagem natural da comunicação matemática. Nos fundamentos históricos da aprendizagem da álgebra e nas fases matemáticas propostas por Piaget (1965, 1975), Bruner (1985, 1987) e outros, normalmente o uso da linguagem verbal, oral e escrita revela-se como o primeiro suporte da conceptualização. Esta primeira aproximação à linguagem corrente basifica, de forma dinâmica, o conhecimento científico emergindo como primeiro elemento de um sistema coerente simbólico e inter-relacional da ciência matemática. Assim, tudo indica que deve ser estimulado o uso da linguagem corrente nos níveis elementares e, nesta perspectiva, deve ser explorada em diversas situações, com objectivos muito concretos orientados fundamentalmente para uma aprendizagem gradual e dinâmica do conhecimento matemático.

Na resolução da sub-questão Q1.1. a aproximação da linguagem corrente à linguagem matemática requer um processo intermédio de operacionalização simbólica que acarreta dificuldades e, neste caso concreto, acrescidas pelo facto de se estar a trabalhar com números racionais. Por outro lado, à medida que a idade dos estudantes avança a linguagem corrente fica cada vez mais afastada dos conceitos matemáticos que trabalham fundamentalmente com uma linguagem simbólica. Assim, os estudantes que revelam um conhecimento matemático mais abstracto tendem a usar uma linguagem simbólica e a desligar-se da linguagem corrente. Provavelmente estas duas circunstâncias e o trabalho realizado na folha de cálculo influenciaram as resoluções desta sub-questão e consequentemente os resultados obtidos na turma A.

Apesar da aprendizagem do conceito de número racional e dos respectivos processos operatórios fazerem parte integrante do programa de Matemática do 6º ano de escolaridade, alguns estudantes das duas turmas sentiram dificuldades na aplicação da regra, na resolução da questão Q1.1. isto é, no cálculo do dobro de um número racional, tendo alguns deles apresentado respostas incorrectas, seis na turma B e três e cinco na turma A, respectivamente, no pré e no pós-teste. Por outro lado, as respostas incorrectas indicam que estes estudantes não apreenderam o significado numérico da regra *"o dobro do número anterior*" aplicado a um número racional em representação fraccionária, tendo simplesmente, alguns deles, adicionado a quantidade dois ao numerador.

Na questão Q1.2. relacionada com a manipulação da regra "*...x2+1*" existiu, na turma A, *evolução* (↑) e um *retrocesso acentuado* (↓↓↓)(+-) na turma B.

Uma das questões que se pode colocar está relacionada com a diferença de resultados obtidos pelas duas turmas no pré-teste e no pós-teste e, em particular, no resultado obtido pela turma B. Assim, por que razão, no pré-teste a turma A obteve resultados menos positivos do que os da turma B e que explicação haverá para os resultados obtidos pela turma B no pós-teste?

Numa primeira análise, na qual a contagem das respostas completas não estava organizada em duas categorias, mas apenas numa, tudo levava a crer que a diferença de resultados nas duas turmas residia, fundamentalmente, nos processos operatórios utilizados na resolução da questão e eventualmente nalguns erros cometidos nos cálculos intermédios. Entretanto, numa segunda fase, passou-se a subdividir a análise da questão em duas categorias, sem a explicitação dos cálculos (alínea a) e com a explicitação dos cálculos (alínea b). Seguindo esta orientação verificou-se que, nas duas turmas, houve o mesmo número de respostas completas, em que não foram explicitados os cálculos efectuados e em termos relativos a turma B executou menos cálculos. Contudo, como no pré-teste a maior parte dos estudantes da turma A não explicitou os cálculos, usou o cálculo mental e as soluções não foram totalmente conseguidas, sucederam-se erros de cálculo, sendo o número de respostas parcialmente correctas superior naquela turma do que nos da turma B, respectivamente, seis e um.

Para além desta circunstância, provavelmente uma das razões que explica a diferença de resultados entre o pré-teste e o pós-teste tem a ver com o enquadramento curricular dos conteúdos desenvolvidos. De facto, um dos temas explorados no 5º ano de escolaridade foi as expressões numéricas e como a realização do pré-teste estava, temporalmente, mais próxima desta temática talvez tivesse sido possível aos estudantes da turma B, com mais apetência por este tipo de exercícios conseguirem resolver, com êxito, esta situação. Nesta turma os estudantes revelaram confiança no entendimento daquele tipo de expressão, o que de certo modo pode ter interferido na resolução da questão e o mesmo não se ter passado com os estudantes da turma A.

Por outro lado, como aquele tema não tinha sido um conteúdo explorado no 6º ano, a turma B não teve referências próximas deste assunto na concretização do pós-teste.

Em termos de exploração de conteúdos o percurso foi semelhante nas duas turmas e apesar das actividades desenvolvidas na classe A, na folha de cálculo, no 6º ano de escolaridade, não terem sido da natureza da questão em análise tudo indica que permitiu, nalgumas situações, a exploração de fórmulas proporcionando a definição de expressões designatórias com uso de "letras" e sintaxe própria que consequentemente provocou o desenvolvimento de determinadas competências específicas.

Registe-se ainda a circunstância de alguns estudantes da turma A comentaram que as reticências na expressão "*...x2+1*" designavam a "letra", como acontecia no computador e confiaram nas suas capacidades, no tipo de trabalho que tinham desenvolvido calculando mentalmente e, na maior parte dos casos com êxito, libertando-se do cálculo em suporte de papel, mas, nalgumas circunstâncias, a confiança traiu-os, dado que alguns cálculos não foram totalmente conseguidos, tendo quatro estudantes obtido respostas parcialmente completas.

A realização de determinado tipo de tarefas no computador parece estimular a elaboração mental, a confiança nos cálculos pessoais, em detrimento da realização manual. No pós-teste, não houve um único estudante da turma A que tentasse resolver o exercício com a explicitação de cálculos, enquanto que na turma B cinco fizeram-no, tendo quatro conseguido uma resposta completa e apenas uma resposta parcialmente completa.

Na questão Q1.3. relacionada com *completar a tabela e indicar a regra descoberta* os estudantes das duas turmas obtiveram resultados idênticos e exploraram expressões bastante variadas.

Nesta sub-questão, em ambas as turmas, os estudantes utilizaram uma linguagem simbólica com expressões do tipo: "*+1,5*"; "*...+2-0,5*"; " *...+1,5*", entre outras, tal como o esquema que se segue (turma A); em linguagem mista, em que os estudantes desenharam a seta e especificaram *mais 1,5* ou *somar 1,5*, etc e em linguagem corrente exemplos, tais como: *aumentar sempre 1,5*; *adicionar o nº que está na tabela a 1,5*; entre outras.

2	3,5	5			

$\xrightarrow{+1,5}$ $\xrightarrow{+1,5}$ $\longrightarrow$ $\longrightarrow$ $\longrightarrow$

Pode-se concluir que, apesar de terem existido resultados mais completos na turma A, *não há uma diferença significativa em termos de formulação da regra descoberta*. À partida, esperava-se que um maior número de estudantes desta turma, em que foi utilizado o computador, especificamente a folha de cálculo, viesse a formular simbolicamente a regra operatória, mas tal não aconteceu. Com o estímulo e o desenvolvimento da comunicação matemática, oral e escrita, e com um leque alargado de opções, verifica-se que os estudantes tendem a usar diferentes formatos de respostas entre os quais a linguagem corrente e a linguagem simbólica ou as duas.

A utilização da folha de cálculo no 4º ano, esporadicamente, por alguns grupos na resolução de tarefas específicas e estendida a toda a turma A, no 5º e 6º anos de escolaridade foi direccionada e optimizada para a resolução de problemas em contexto, realização de relatórios ou concretização de projectos de natureza interdisciplinar e não com o objectivo final e intensivo de resolver, com êxito, este tipo de questões, apenas acontecendo essa oportunidade na resolução da tarefa "gerar números", explorada na folha de cálculo por todos os estudantes da turma A. Estes estudantes, no 5º ano de escolaridade, conseguiram fazer gerar, com a ajuda das fórmulas, os números pares, os números ímpares e diferentes múltiplos de vários números. Na resolução desta tarefa de carácter estritamente disciplinar os estudantes revelaram entusiasmo, facilidades em utilizar a sintaxe da fórmula e de realizar cópia relativa, analisando os resultados e retirando conclusões, mas provavelmente o tempo foi escasso para reflectir sobre o significado da sintaxe e o conteúdo das fórmulas.

Por outro lado, a exploração da folha de cálculo foi naturalmente integrada na resolução de problemas em contexto interdisciplinar, apresentando-se como mais um material, neste caso de âmbito tecnológico, capaz, nalguns casos, de valorizar processos e de ser uma mais valia na dinâmica de resolução. Contudo, quando se utilizou esta ferramenta o tempo disponível para optimizar o trabalho nestas circunstâncias não foi o desejável, mas sim o possível, tendo sido fortemente condicionado por constrangimentos de ordem institucional, pois nem sempre a sala de Informática estava disponível e simultaneamente por factores de natureza curricular, pois a organização por conteúdos do programa da disciplina de Matemática restringe e limita o uso desta tecnologia e por condições estratégicas, dado que também grande parte dos problemas e/ou de outras tarefas propostas não comportam a exploração didáctica daquela ferramenta tecnológica.

No âmbito de matemática em contexto foi possível verificar que na resolução da questão 2. do teste, os estudantes utilizaram a linguagem simbólica para induzir o fenómeno, concretamente, na evidência do operador.

Questão Q2. do teste

Tabela 23: Questão Q2. Resultados do Pré-Teste

Tipo de Resposta		RC		RPC		RI		NR		Total
	Turma	A	B	A	B	A	B	A	B	
Questão	Classe									
		a - 3	a - 7	a - 7	a - 2					
Q2.	1		b - 1		b - 2					
	2				c - 2	c - 2	c - 4			
	3	d - 4				d - 1	d - 1			
			e - 1	e - 2		e - 1				
Total		7	9	9	6	4	5	0	0	20

Legenda: RC – Resposta Completa; RPC – Resposta Parcialmente Completa; RI – Resposta Incompleta; NR – Não Resposta

Apenas 35% dos estudantes da turma A conseguiram resolver completamente a questão e, na turma B, 45%. Oito dos nove estudantes da turma B que responderam completamente à questão evidenciaram o operador numérico que induz o fenómeno (alíneas a e b), explicitando-o em linguagem simbólica. Por outro lado, na turma A, apenas três dos sete estudantes o fizeram e os restantes quatro usaram, na explicação do procedimento, a linguagem corrente.

Nove estudantes da turma A, 45%, responderam de forma parcialmente completa (RPC), pois alguns estudantes não desenharam a marca, mas expuseram, de forma simbólica, a resposta, generalizando correctamente o padrão numérico. As restantes duas respostas, parcialmente completas, também evidenciaram correctamente o operador numérico, mas os estudantes realizaram incorrectamente os cálculos.

Na turma B seis estudantes resolveram parcialmente a questão, tendo quatro usado a linguagem simbólica. Dois estudantes desta turma exploraram apenas, no pré-teste, a calculadora e explicitaram o seu uso, tendo um deles obtido o resultado correcto e o outro não. Assim, na indução do fenómeno, pelo menos metade dos estudantes, em cada uma das duas turmas, usou o operador numérico escrito em linguagem simbólica, em respostas completas ou parcialmente completas.

Tabela 24: Questão Q2. Resultados do Pós-Teste

Tipo de Resposta		RC		RPC		RI		NR		Total
	Turma	A	B	A	B	A	B	A	B	
Questão	Classe									
Q2.	1 2 3	a - 9 d - 1	a - 7 b - 2 c -1 d - 2	a - 7 d - 1 f - 1	 c - 1	 c - 1	a - 3 b - 2 e - 1 f - 1			
Total		10	12	9	1	1	7	0	0	20

Legenda: RC – Resposta Completa; RPC – Resposta Parcialmente Completa; RI – Resposta Incompleta; NR – Não Resposta

Registe-se que 50% dos estudantes da turma A conseguiram resolver completamente a questão e 60% na turma B obtendo-se, numa primeira análise, uma *evolução* idêntica nas duas turmas (↑↑)(-+), da passagem de resultados negativos para positivos. Na maior parte das respostas foi evidenciado, na ampliação do fenómeno, o operador numérico, tendo havido, nas duas turmas, respostas diferenciadas, tais como: "*+0,35*"; "*1,75+0,35*" ou "*0,35x6*", quer nas respostas completas, quer nas parcialmente completas.

Por outro lado, houve ainda nove estudantes da turma A que responderam de forma parcialmente completa à questão, tendo sete explicitado o operador numérico em linguagem simbólica, enquanto que na turma B o único estudante que respondeu parcialmente à pergunta não usou este tipo de resposta. Refira-se ainda que sete estudantes desta turma resolveram incorrectamente a questão e apenas um na turma A.

Estes resultados e o enquadramento do contexto que esta questão encerra levam-nos indubitavelmente para uma segunda análise, um estudo de segunda linha. Contemplando apenas as alíneas dos critérios de avaliação em que se evidencia a mobilização do operador numérico, conclui-se que praticamente dezasseis estudantes da turma A (9RC+7RPC) interpretaram correctamente, na globalidade, a questão, com a indicação da regra operatória que induz o fenómeno, enquanto que na turma B houve apenas dez respostas nestas condições (10RC). As outras respostas correctas, incluem a explicação do procedimento, mas em linguagem corrente.

Apreciação genérica **Q2.**

Este problema enquadra-se no domínio da matemática em contexto, numa representação tabelar de "uma dimensão" que requer uma atenção global e origina, por vezes, uma falta de focalização para sub-questões consideradas por alguns estudantes como acessórias, como surgiu, na turma A, na marcação geométrica, enfatizando fundamentalmente as sub-questões de natureza numérica, operatória e (pré)-algébrica.

É de registar a *evolução* conseguida, nas duas turmas (↑↑)(-+), na resolução completa desta questão, tendo havido, no segundo momento de interacção com o teste, mais três estudantes, em cada uma das turmas, que resolveram correctamente a questão.

Numa primeira frente de análise, isto é, focalizando os resultados apenas nas respostas completas, conclui-se que a turma B obteve resultados mais positivos, nos dois tempos de avaliação. Todavia, uma análise mais alargada, observando o número de respostas completas e parcialmente completas, permite concluir que os resultados são idênticos nas duas turmas no pré-teste, sendo no pós-teste mais positivos na turma A do que na B, especificamente, na emergência e utilização do operador numérico.

Registe-se que a resposta completa à questão 2 incluiu a resolução correcta a três sub-questões: a descoberta do modelo que induz o fenómeno; a explicitação do padrão numérico; a elaboração de cálculos e registo de dois tipos de resposta - a numérica e a gráfica, com o desenho da marca no espaço adequado. A maior parte dos estudantes da turma A não conseguiu obter a resposta completa, porque não desenhou a marca, mas na explicação da aplicação da regra indicaram correctamente o operador numérico.

Os estudantes da turma B usaram processos mais variados e tiveram alguma facilidade em resolver, na globalidade, esta questão relacionada com o quotidiano, revelando competências mais práticas e dando maior atenção a vários aspectos da realidade envolvente, com destaque para a actividade lúdica.

Contudo, apesar da turma B revelar resultados mais positivos em termos gerais, relativamente à explicitação do operador numérico e à utilização da linguagem simbólica a turma A conseguiu melhores resultados, no pós-teste, 80% (9RC+7RPC) do que na turma B, 50% (10RC+0RPC).

Também na resolução da questão 7.2. do teste houve uma evolução idêntica nas duas turmas no uso da etiqueta generalista "uc" ou mais concretizada, em "cm", na atribuição do perímetro de diferentes quadrados em que é explorada intrinsecamente a regularidade numérica "+4". Todavia, analisando os diferentes patamares dos critérios de avaliação para uma resposta completa desta questão, conclui-se que, no primeiro patamar, relacionado com o uso da unidade de medida de comprimento generalista "uc" a turma A passa de três respostas para oito e na turma B de quatro para seis, denunciando, assim, que na turma em que são utilizados os computadores, existe um maior número de estudantes a evoluir para a utilização de uma linguagem mais abstracta.

Questão Q7.2.

Tabela 25: Questão Q7.2. Resultados do Pré-Teste

Tipo de Resposta		RC		RPC		RI		NR		Total
	Turma	A	B	A	B	A	B	A	B	
Questão	Classe									
Q7.2	2	a - 3 c - 5	a - 4 c - 4	a - 1 c - 1		a - 1 b - 1 c - 3 d - 2	b - 1 c - 10			
Total		8	8	2	0	7	11	3	1	20

Legenda: RC – Resposta Completa; RPC – Resposta Parcialmente Completa; RI – Resposta Incompleta; NR – Não Resposta

Menos de metade dos estudantes, 40%, das duas turmas conseguiu obter uma resposta completa. Dois estudantes da turma A e nenhum na B apresentaram uma resposta parcialmente completa.

Tabela 26: Questão Q7.2. Resultados do Pós-Teste

Tipo de Resposta		RC		RPC		RI		NR		Total
	Turma	A	B	A	B	A	B	A	B	
Questão	Classe									
Q7.2	2	a - 8 c - 4	a - 6 c - 7	b - 1 c - 1		a - 2 b - 1 c - 1 e - 1	c - 5 e - 1			
Total		12	13	2	0	5	6	1	1	20

Um estudante em cada uma das duas turmas não respondeu à questão e mais de metade dos estudantes respondeu de forma completa, 60% e 65%, respectivamente, na turma A e B. Dois estudantes da turma A apresentaram uma resposta parcialmente completa e nenhum na outra turma.

Apreciação específica ***7.2.***

Nas duas turmas existiu uma *evolução significativa* (↑↑↑)(-+).

Registe-se que os resultados das respostas completas nas duas turmas são idênticos, no pré-teste e apenas com a diferença de uma resposta no pós-teste. Por outro lado, nas duas turmas passou-se de resultados negativos no pré-teste, pois menos de metade dos estudantes resolveu completamente a questão, para positivos, no pós-teste.

Estes resultados revelam que os estudantes para além de terem conseguido contextualizar o cálculo dos perímetros dos quadrados que constitui cada módulo-padrão, descobriram uma relação e aplicaram-na, tendo alguns estudantes utilizado uma “etiqueta” mais algébrica “uc” do que outra mais conhecida “cm” para interligar a informação recolhida e indicar a medida do perímetro de cada quadrado.

No pós-teste, mais dois estudantes na turma A do que na B indicaram o perímetro de cada um dos quatro quadrados do módulo-padrão tomando como unidade de medida de comprimento "*uc"* (*4uc*; *8uc*; *12uc*; *16uc*), tendo a primeira evoluído de 3 para 8, com notação simbólica e na turma B de 4 para 6, mas a maior parte dos estudantes que respondeu de forma completa não indicou a unidade de medida de comprimento, "*uc*", mas o "*cm".*

Questões emergentes relacionadas com as duas teses de investigação apresentadas (tese 1 e tese 2)

Associada aos resultados destas duas primeiras teses de investigação uma questão emerge: *será que o estímulo da folha de cálculo para a linguagem simbólica impede o desenvolvimento harmonioso e natural da aprendizagem matemática?* Ou seja: será que o *estudante ao utilizar esta ferramenta tecnológica acelera em demasia o processo formal da aprendizagem matemática e o estudante fica impedido de criar e experimentar as suas próprias estratégias pessoais, consideradas fulcrais no desenvolvimento harmonioso, integral e sustentado da Educação Matemática?*

Reconhece-se que aprender matemática é trabalhar com conceitos. Mentalmente relacionam-se entes abstractos e a folha de cálculo emerge como um instrumento capaz de divulgar simbolicamente esses pensamentos e estimular o caminho para a abstracção. O estudante ao pensar na relação entre os dados interioriza mentalmente essa relação e refere-a oralmente por meio da linguagem corrente. Quando usa a folha de cálculo essa relação é codificada, através de uma nova expressão, em que é usada uma sintaxe própria capaz de operacionalizar o pensamento do estudante. A repetição deste processo conduz à utilização da linguagem simbólica, através da qual o estudante reconhece que a simbologia utilizada dá expressão ao seu pensamento, explorando um código próprio, mas acessível, reforçando aprendizagens mais abstractas.

Tudo indica que a folha de cálculo acelera, assim, o processo mental e formal do conhecimento matemático, mas durante a sua utilização, nenhum estudante foi impedido de usar outras estratégias, como aconteceu com o estudante Joe (nome fictício), na resolução do problema "*animais na quinta*"[85]. Por outro lado refira-se também que quando é sugerida a utilização da folha de cálculo a maior parte dos estudantes da turma A preferia usá-la, porque acreditavam que esta ferramenta tecnológica ajudava-os a pensar e a organizar melhor os dados, como referiram vários grupos, entre os quais os grupos do Jo e do Flav (nomes fictícios), com observações deste teor: "*como tem a ver com a matemática, às vezes é mais fácil resolver o problema, pois o computador faz as contas e nós só temos de pensar e outras vezes para resolver o problema é preciso organizar tudo e para isso temos de raciocinar mais*".

Todavia, numa primeira análise, isto é, tomando atenção apenas aos resultados obtidos na resolução de um problema particular, como o das "*compras nos saldos*", resolvido no 5º ano de escolaridade com relato na *tese 6 da investigação*, tudo levava a crer

[85] Situação apresentada na *tese 8 da investigação – o trabalho desenvolvido no âmbito da matemática em contexto valorizou as aprendizagens não escolares*.

que a resposta seria afirmativa às questões emergentes levantadas, pois na descoberta da solução daqueles problemas os estudantes da turma B utilizaram estratégias de resolução mais diferenciadas do que as da turma A, tendo o grupo do Tig e do JA (nomes fictícios) experimentado uma proposta mais próxima do esquema de um sistema de duas equações a duas incógnitas, mas incapazes de alcançar a solução pretendida, pois desconheciam os processos associados. Contudo, a investigação tornou possível a análise de vários problemas ou situações em tempos diferenciados, com a exploração de vários materiais permitindo um estudo aprofundado, global e relacional dos resultados.

Em primeiro lugar refira-se que o trabalho desenvolvido com a folha de cálculo não impediu que os estudantes da turma A, no 4º ano de escolaridade, na resolução do problema "*as idades dos filhos*", apresentado anteriormente, no qual usaram esquemas próprios, com enfoque especial para a exploração de tabelas. No 6º ano, os estudantes da turma A resolveram também problemas de esquematização em que experimentaram variadas estratégias e diferentes dos da turma B, como aconteceu no problema "*respirar e descansar*" e no das "*galinhas!*", inventando e criando vários esquemas próprios de resolução, enquanto que os da turma B, nomeadamente, neste último caso foram incapazes de apresentar uma resolução correcta construtiva, baseada em estratégias pessoais de exploração relacional dos dados apresentados na situação.

Também no problema "*a festa de aniversário*", ligado às relações de proporcionalidade e concretizado no 6º ano de escolaridade, na resolução da primeira questão: "*adicionando um quarto de 32 com dois quintos de 60, obténs o dobro da minha idade*". "*Afinal, que idade tem o António? Explica como chegaste à tua resposta. Podes utilizar palavras, esquemas, expressões ou cálculos*" a maior parte dos estudantes da turma A não teve dificuldades em resolvê-la e usaram esquemas, expressões e cálculos diversos.

Com base neste "flash" de experiências significativas pode-se, assim, enunciar *uma outra tese* de investigação relacionada com o desenvolvimento de estratégias pessoais de cálculo na resolução de problemas em contexto interdisciplinar, podendo ser enunciada uma tese mais genérica e explanada em 4.2., na *tese 6*, num âmbito que ultrapassa o uso da tecnologia e se enquadra na importância do contexto interdisciplinar nas aprendizagens algébricas. Para melhor sistematizar as conclusões resultantes da investigação, continua-se a apresentar as teses relacionadas com a exploração da folha de cálculo e, em 4.2., as ligadas directamente à importância do contexto na aprendizagem inicial da álgebra.

Tese 3

A folha de cálculo permitiu ampliar o universo numérico na resolução de problemas em contexto interdisciplinar.

Esta tese é fundamentada basicamente pela resolução dos problemas de esquematização "*à descoberta dos números*" e "*as idades dos filhos*"[86] concretizados no 4º e 5º anos de escolaridade e no desenvolvimento de determinadas questões do teste, realizadas no 6º ano.

Quarto ano de escolaridade. Na turma A quatro grupos realizaram o problema "*à descoberta dos números*" na folha de cálculo, ou usaram esta ferramenta de trabalho para validar os resultados alcançados. A análise dos resultados das duas primeiras questões está apresentada em 2.4. deste capítulo.

Na terceira questão pretendia-se que *os estudantes descobrissem dois números cuja soma é 24 e o produto é 9 e a* turma B usou basicamente o esquema seguinte:

$$\_\_\_\_\_ + \_\_\_\_\_ = 24$$

$$\_\_\_\_\_ - \_\_\_\_\_ = 9$$

Cerca de 53% dos estudantes da turma A resolveram correctamente a questão e nenhum estudante da turma B o conseguiu, apesar de terem construído um esquema idêntico à resolução das questões anteriores, como se apresentou anteriormente.

Para além dos estudantes que usaram a folha de cálculo só apenas mais dois da turma A conseguiram resolver correctamente a questão.

Refira-se que neste caso era preciso explorar números racionais em representação decimal e, apesar de alguns estudantes nas duas turmas terem usado a calculadora, não foram capazes de ampliar o universo dos números inteiros para encontrarem noutro conjunto de números, a solução correcta do problema.

Na quarta questão pretendia-se que *os estudantes descobrissem dois números cuja soma é 11 e o produto é 29,25*.

Neste caso já se fazia apelo à possível exploração dos "números decimais", dado que no enunciado já aparecia um número racional. Na turma A sete estudantes (cerca de 41%) conseguiu responder correctamente (três grupos, seis estudantes na folha de cálculo e um estudante sem usar o computador), mas os restantes estudantes não tentaram, sequer, resolver a pergunta. Na turma B apenas dois estudantes conseguiram resolver, em grupo, com êxito, a questão e os restantes nem sequer tentaram.

[86] Especialmente no caso em que os estudantes da turma A solicitaram à investigadora, no 5º ano de escolaridade, a experimentação de casos em que as idades dos filhos eram representados por um número racional de representação decimal.

Quinto ano de escolaridade. Numa perspectiva global e de aprofundamento do conhecimento que alguns investigadores defendem (Grameveijer, 1994; Drijvers, 2001-2004; Ameron, 2001-2004 e Reeuwijk, 2004) foi proposto, de novo, o problema "*as idades dos filhos*", com outros dados numéricos. Este problema foi resolvido pela primeira vez no 4º ano de escolaridade no universo dos números inteiros e aprofundado no 5º ano de escolaridade. Em 2.4. deste capítulo está descrito o trabalho realizado, as estratégias implementadas e os resultados obtidos pelos estudantes das duas turmas.

Assim, a resolução repetida[87] do problema sobre as idades da D. Maria: "*A D. Maria tem duas filhas. A soma das idades é 23 e o produto[88] é 102. Qual é a idade de cada uma das filhas?*" proporcionou novas abordagens e o gosto, nos estudantes, da turma A, por explorar esta situação no universo dos números racionais.

Na mesma folha de trabalho foi proposta a realização conjunta deste problema e dos "*animais na quinta*", mas como os estudantes demoraram bastante tempo a compreender e a resolver, na folha de cálculo, o problema "*animais na quinta*" alguns deles não tiveram tempo para resolver esta segunda situação proposta. Contudo, na turma A, os nove grupos que resolveram o problema seis usaram a folha de cálculo para conseguirem chegar, com êxito, à solução. Quatro grupos usaram fórmulas e a estratégia de *tentativa e erro por ajustamento* para atingirem a solução correcta. Como alguns grupos resolveram rapidamente o problema e solicitaram novos dados para realizarem outro idêntico. Foi, então, sugerida a situação com a exploração de números racionais, em representação decimal, em que a soma das idades fosse dezassete anos e meio e o produto trinta e sete anos e meio.

A título de exemplo, apresentam-se, de seguida, as resoluções concretizadas, na folha de cálculo, por alguns grupos de estudantes da turma A, em que as "janelas" seguintes revelam o uso de fórmulas, a pesquisa sistematizada e a estratégia *de tentativa e erro por ajustamento* usada na resolução deste problema.

O primeiro grupo usa a folha de cálculo para confirmar os resultados que são primeiro trabalhados mentalmente, isto é, utiliza esta ferramenta tecnológica como *instrumento de validação de resultados numéricos*, obtidos por prévia elaboração mental e ainda tem tempo para simular outra situação, com a exploração de "números decimais".

[87] No 4º ano de escolaridade tinha sido explorado um problema idêntico a este, mas segundo vários investigadores (Ameron, 2000; Reeves (2000); Grameveijer, 2004; Drijvers, 2003-2004; Reeuwijk, 2004) a repetição de problemas similares em diferentes tempos e em anos diferenciados, possibilita uma maior integração de conhecimentos e o desenvolvimento gradual e sustentado dos conteúdos, bem como a compreensão mais profunda da situação proposta.

[88] Nas duas turmas houve estudantes que revelaram dificuldades na resolução do problema por desconhecimento do significado do termo "produto". Dois estudantes da turma A e quatro da B pediram esclarecimentos à professora sobre esta noção.

Grupo do(a) Jo(a)			
			Usaram fórmulas
Idade da filha 1	Idade da filha 2	Soma (23)	Produto (102)
9	14	23	126
17	6	23	102
Idade da 1	Idade da 2	Soma(17,5)	Produto(37,5)
8,5	9	17,5	76,5
15	2,5	17,5	37,5

Tabela 27: Resolução do problema: "A*s idades das filhas*" com fórmulas e apoio do cálculo mental

No trabalho seguinte o grupo usa a folha de cálculo como *ferramenta de organização de dados*, mas no primeiro caso usa mais o cálculo mental e a utilização da fórmula célula a célula, sem usar a cópia relativa no cálculo do produto. Na segunda experiência o grupo foca a atenção para o valor numérico da fórmula, utilizando *a estratégia de tentativa e erro por ajustamento não sequencial* e tem ainda tempo para explorar outra situação, em que foi resolvido o problema das idades das filhas com "números decimais".

	Grupo da RA		
			Usaram fórmulas
1ª filha	2ª filha	soma (23)	produto (102)
10	13	23	130
12	11	23	132
5	18	23	90
7	16	23	112
4	19	23	76
6	15	21	90
6	17	23	102
1ª filha	2ª filha	soma (17,5)	produto (37,5)
7	10,5	17,5	73,5
6	11,5	17,5	69
4	13,5	17,5	54
2	15,5	17,5	31
3	14,5	17,5	43,5
2,5	15	17,5	37,5

Tabela 28: Resolução do problema: "*As idades das filhas*" com fórmulas e sem apoio do cálculo mental

Outros casos houve em que os estudantes usaram resoluções idênticas, mas também existiram processos de experimentação, quase "aleatórios", em que os estudantes tiveram gosto em experimentar e encontrar os seus próprios limites, revelando até algum esquecimento momentâneo dos dados do problema e usando até experiências de "nonsense", como no caso do par (100, 2), como aconteceu com o exemplo seguinte.

Nesta situação, a folha de cálculo surge como *instrumento de organização de dados*, como *ferramenta de experimentação* e *de simulação de* resultados.

	Grupo do DioCrist		
	Usaram Fórmulas		
Idade da primeira filha	Idade de outra filha	soma (23)	produto (102)
0	0	0	0
10	2	12	20
100	2	102	200
11	12	23	132
18	5	23	90
20	3	23	60
19	4	23	76
17	6	23	102
		0	0

Tabela 29: Resolução do problema: "A*s idades das filhas*" com fórmulas, sem apoio explícito do cálculo mental, com experiências aleatórias, não respeitando os valores iniciais

Um grupo da turma B (JA, nome fictício) usou *a estratégia de tentativa e erro com ajustamento sequencial* explorando dois espaços diferentes numéricos, um para o produto e outro para a soma. Supõe-se que o estudante iniciou o processo com os números: 1 e 22 e não com os números 2 e 21, como assinalou, possivelmente, porque realizou o produto mentalmente e verificou que o resultado se afastava bastante do valor pretendido: 112[89].

2x21=42 *2+21=23*
4x19=38 *4+19=23*
5x18=90 *5+18=23*
6x17=102 *6+17=23*
7x16=112 *7+16=23*

Tal como no 4º ano de escolaridade, alguns grupos exploraram o esquema abaixo apresentado. Um dos grupos com facilidades nas aprendizagens matemáticas estava quase a desistir da resolução do problema, mas num esquema usado por alguns grupos e sugerido pela professora, conseguiu, na décima quinta tentativa, apresentar a solução do problema.

______ + ______ *= 23*

______ *x* ______ *=112*

Um grupo de rapazes também usou um esquema idêntico ao anterior para conseguir encontrar a solução correcta, mas não foi possível descortinar quantas tentativas realizou.

[89] No produto, foi este o valor usado pela turma B.

Um outro grupo de raparigas (AAlex, nome fictício) usou o mesmo esquema anterior, fazendo quatro tentativas até chegar à solução correcta. Experimentaram os números: 8 e 15; 10 e 13; 9 e 14; 7 e 16 e mantiveram estas quantidades na folha de trabalho (Figura 24). Tudo indica que este grupo interiorizou um diálogo havido no ano anterior, com a investigadora, no momento da resolução de um problema idêntico, exposto em 2.4., deste capítulo, em que as estudantes usaram o mesmo esquema, mas apagaram todas as tentativas realizadas, o que impossibilitava a orientação da própria pesquisa, de conhecerem e revelarem o número de tentativas realizadas Assim, a notação utilizada indica-nos que o grupo usou *a estratégia de tentativa e erro com ajustamento não sequencial*.

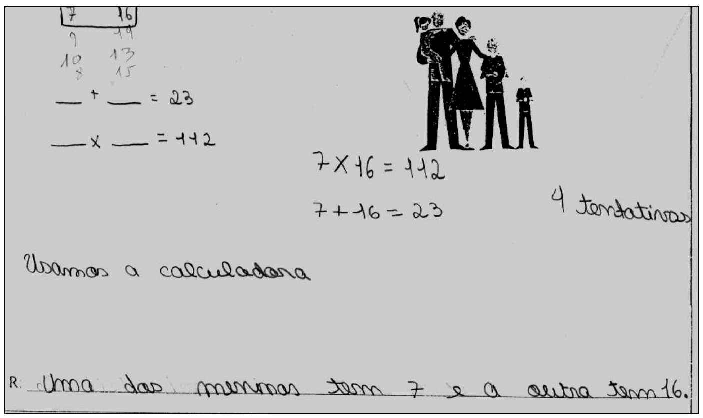


Figura 24: Uso de esquema próprio com estratégia de *tentativa e erro com ajustamento não sequencial – "As idades das filhas"*

O grupo do Tig (nome fictício) organizou os dados em tabela e usou a *estratégia de tentativa e erro, com ajustamento sequencial*:

11	+	*12*	*=23*	*11*	*x*	*12*	*=132*	*X*
10	+	*13*	*=23*	*10*	*x*	*13*	*=130*	*X*
9	+	*14*	*=23*	*9*	*x*	*14*	*=126*	*X*
8	+	*15*	*=23*	*8*	*x*	*15*	*=120*	*X*
7	+	*16*	*=23*	*7*	*x*	*16*	*=112*	*sim*

Um grupo de raparigas, após alguns esclarecimentos com a professora, organizou *numa tabela* o processo de resolução do problema baseado na *estratégia de tentativa e erro, com ajustamento não sequencial* (Figura 25):

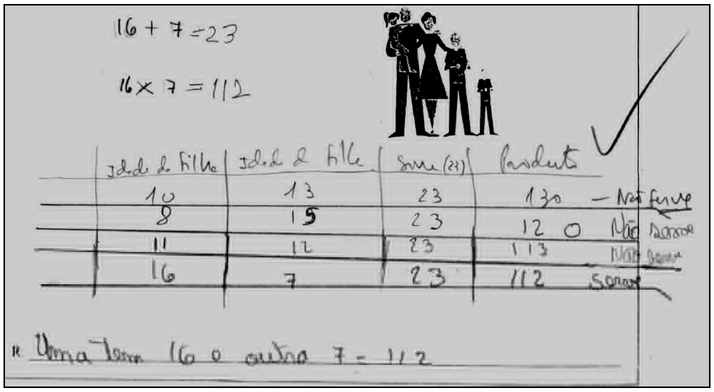


Figura 25: Uso da estratégia de *tentativa e erro, em tabela, com ajustamento não sequencial* em *"As idades das filhas"*

Um outro grupo utilizou uma estratégia idêntica à anterior, mas apenas fez duas tentativas. Três grupos apresentaram a solução correcta sem ter sido possível descortinar o processo de resolução utilizado.

Reflexões/Conclusões genéricas

Na turma A nove grupos resolveram o problema tendo seis usado a folha de cálculo para conseguirem chegar, com êxito, à solução. A exploração da folha de cálculo, com a organização da informação e a utilização ou não de fórmulas, permitiu também aos estudantes da turma A chegar à solução correcta do problema. Esta ferramenta possibilitou a resolução rápida da situação e a realização de um problema similar, mas com a ampliação do universo dos números, com a experimentação de números racionais em representação decimal para averiguarem da existência ou não de outras soluções.

Na resolução deste problema os grupos revelaram diversas formas de explorar a folha de cálculo, designadamente, como: a) *instrumento de experimentação e validação instantânea de resultado numérico*, após prévia elaboração mental; b) *ferramenta de organização e experimentação de resultados,* sem utilização de fórmulas, com controlo caso a caso; c) *ferramenta de organização*, *experimentação, simulação e validação de resultados*, com a utilização de fórmulas existindo controlo unitário e genérico da situação, podendo chegar à experimentação e à simulação de limites de "nonsense"[90]. Neste sentido, Matos (1987-88) relembra que os jovens tendem a desafiar o computador, a levar mais longe as experimentações realizadas que "poderá ser explicada pela necessidade de conhecer os limites da variação dos valores a atribuir àqueles comandos[91], que leva os alunos a aprocurarem explorar melhor os limites do poder da máquina, como se com esse conhecimento pretendessem dominar melhor a variável que está em jogo" (p. 116).

---

[90] Como aconteceu com um grupo da turma A, em que as condições dos dados iniciais eram olvidadas ou usado um par atípico (100, 2), simulando a situação de um filho ter 100 anos e outro dois.

[91] Neste caso concreto eram os comandos VE e VD, respectivamente, Vira à Esquerda e Vira à Direita da linguagem de programação LOGO.

Três grupos da turma B utilizaram, no 5º ano de escolaridade, estratégias mais variadas e diferenciadas do que as exploradas no 4º ano, explicitamente tabelas, mas continuaram a explorar o esquema exposto anteriormente e já identificado no 1º ciclo do ensino básico. Mais uma vez a resolução deste problema possibilitou o desenvolvimento de esquemas pessoais de pesquisa de dados e de cálculo na descoberta da solução, alguns já usados em resoluções anteriores, notando-se, nesta classe, a inclusão de outros processos, como a utilização de tabelas, registando-se um progresso na aprendizagem e denunciando que a exploração de tabelas representa uma etapa posterior, da evolução positiva e gradual na resolução deste tipo de problemas. Tal como aconteceu na turma A, na turma B não houve tempo para experimentar um outro problema relacionado com as idades das filhas em que se deveriam utilizar os números racionais.

Sexto ano de escolaridade. Na resolução do problema "*tantas caixas!...*" com ajuda ou não da folha de cálculo, e da questão 4. do teste foi possível fundamentar e reforçar também a elaboração desta *tese 3 da investigação*.

Na turma A todos os grupos responderam correctamente à questão número três do problema "*tantas caixas!...*", enunciada desta maneira: "Se a Mafalda continuasse a utilizar mais caixas, nestas condições, conseguiria alguma vez que todas juntas "pesassem" 2,5 Kg?". A maior parte dos grupos desta classe fez experiências, simulou a situação e concluiu posteriormente: "*não é possível dividir mais"; "dá números que não conhecemos e números com letras"; "dá números com E e cada vez que se soma dá um valor inferior a 2,5Kg";"fizemos tantas experiências e nenhuma deu o resultado pretendido"; "já vamos em 17 caixas e não se obtêm os 2,5kg"; "porque se continuarmos a dividir por 2 e adicionarmos tudo obtemos o número 1,99987793, que é inferior ao peso das caixas de 2,5kg"; "porque fizemos muitas experiências e os números eram tão pequenos, tão pequenos, quase zero que sempre que somamos obtíamos sempre 2"; "porque os números vão sendo cada vez mais pequenos"; "porque só se as caixas pesassem mais"; "porque as caixas são muito pouco pesadas"; "porque cada vez a caixa era mais pequena e a partir de um certo momento já não dava para dividir mais*".

Todavia, é de realçar que apenas um grupo da turma A (Jo e Joa, nomes fictícios) respondeu de forma completa, evocando explicitamente a apreensão da noção de quantidades infinitésimas.

Refira-se ainda que o tempo de realização da folha de trabalho na turma A foi inferior ao estipulado, mas alguns grupos quiseram realizar muitas experiências (um deles simulou até à quantidade 3,8E-152, calculou o "peso" das diferentes caixas e adicionando todos estes valores a 2 verificou que a partir de determinado valor o "peso" total era sempre 2kg e nunca o iria ultrapassar, porque referiam os elementos do grupo que "*as caixas eram tão tão pequeninas que praticamente não se podiam fazer e tinham peso zero*").

Deste modo, a folha de cálculo permitiu a exploração da lei que regia o fenómeno até à exaustação, potenciando a abordagem intuitiva da noção prática de infinitésimo e a simulação da situação, comprovando as conjecturas efectuadas. Na folha de cálculo apareceu a notação já visualizada por alguns estudantes[92] – o registo de quantidades em notação científica, provocando o levantamento de outras questões, a abordagem de novos conteúdos, ampliando os conhecimentos dos números em termos de representação. Contudo, foi necessário disponibilizar tempo para explicar o significado numérico desta nova notação e sendo um assunto de entendimento não linear colocou temporariamente algumas dificuldades na descrição e compreensão do valor numérico da notação científica e no registo de algumas conclusões, especialmente nos estudantes com mais dificuldades em Matemática.

Um grupo da turma B não realizou a terceira questão e metade dos outros grupos respondeu correctamente, mas usando uma argumentação pouco clara. Os grupos apresentaram argumentações pouco convincentes e apenas um deles se preocupou em perceber bem a questão e respondeu: "a *soma do peso de muitas caixas não chega a 2,5kg, pois calculando metade do peso anterior de cada caixa obtivemos valores muito baixos que adicionados ao valor total não obtivemos 2,5kg (sem a calculadora)"*. Nenhum estudante desta turma apreendeu e explicitou a noção de infinitésimo e do efeito deste valor no cálculo da soma de uma determinada quantidade.

Dados recolhidos no teste de avaliação. A resolução da questão 4 relacionada com estratégias de emagrecimento de uma pessoa fundamentou também a elaboração desta tese.

Questão 4. do teste

Tabela 30: Questão Q4. Resultados do Pré-Teste

Tipo de Resposta		RC		RPC		RI		NR		Total
	Turma	A	B	A	B	A	B	A	B	
Questão	Classe									
Q4	3	b - 5 c - 1 e - 6	e - 8	c - 1	c - 1	a - 3 b - 2 d - 1	a - 1 c - 1 e - 6			
Total		12	8	1	1	6	8	1	3	20

Legenda: RC – Resposta Completa; RPC – Resposta Parcialmente Completa; RI – Resposta Incompleta; NR – Não Resposta

Na turma A 60% dos estudantes responderam completamente à questão e metade destes doze estudantes organizou os dados em tabela. Nenhum estudante explicitou que tivesse usado a calculadora e apenas um estudante respondeu parcialmente à questão.

Na turma B 40% dos estudantes resolveram completamente a questão, mas nenhum deles organizou os dados em tabela, apenas fizeram uma listagem de valores ou foram "amontoando" as somas obtidas. Apenas houve uma resposta parcialmente completa e, tal como na turma A, o estudante concluiu de forma intuitiva, com base em alguns dados obtidos.

[92] No 5º ano de escolaridade, na resolução das experiências: "gerar números".

Tabela 31: Questão Q4. Resultados do Pós-Teste

Tipo de Resposta		RC		RPC		RI		NR		Total
	Turma	A	B	A	B	A	B	A	B	
Questão	Classe									
Q4	3	a - 2 b - 11 e - 3	b - 5 e - 4		a - 1	a - 1 e - 2	a - 3 c - 1 e - 5			
Total		16	9	0	1	3	9	1	1	20

Legenda: RC – Resposta Completa; RPC – Resposta Parcialmente Completa; RI – Resposta Incompleta; NR – Não Resposta

Na turma A, 80% dos estudantes conseguiram resolver completamente a questão, tendo dois estudantes identificado os infinitésimos e extrapolado a resposta e treze destes dezasseis estudantes (65%) organizaram toda a informação em tabelas. Nenhum estudante respondeu de forma parcial à questão.

Na turma B, 45% dos estudantes responderam correctamente, tendo cinco deles organizado os dados em tabelas e quatro não. Um estudante respondeu parcialmente à pergunta.

Apreciação genérica Q4.

Esta questão de matemática em contexto e de âmbito interdisciplinar integrava implicitamente quatro competências: a obtenção de cálculos (determinação de metades e da soma), a organização dos resultados em tabelas, a análise e a interpretação dos dados obtidos, a apresentação da solução correcta e, numa aquisição mais profunda e induzida do problema, a identificação de infinitésimos.

Na obtenção dos cálculos a maior parte dos estudantes, das duas turmas, utilizou a calculadora.

A turma A conseguiu atingir uma *evolução significativa* ($\uparrow\uparrow\uparrow$) e a turma B apenas uma *ligeira evolução* ($\uparrow$)(-), em resultados negativos.

Verifica-se que na turma A, no pós-teste, ainda houve dois estudantes que identificaram implicitamente os "infinitésimos", pois induziram numericamente o modelo matemático e concluíram a questão da forma mais completa possível.

Tese 4

A folha de cálculo promoveu o uso de tabelas na resolução de problemas em contexto interdisciplinar

Nos dois primeiros problemas de esquematização, designadamente, "*à descoberta dos números*" e "*as idades dos filhos*", constatou-se que os estudantes da turma A usaram tabelas na organização dos dados e na resolução de determinadas questões, representando correctamente a informação, bem como na resolução de problemas sobre números racionais: "*tantas caixas!...*" e "*banda desenhada…*", concretizados no 6º ano de escolaridade. Uma das ideias fundamentais da álgebra "é introduzir um conjunto de ferramentas no conhecimento do estudante – tabelas, gráficos, fórmulas, equações, matrizes, identidades, funções, relações, etc, que proporcionem a relação entre os dados, conexões, constituindo-se, no conjunto, como uma tecnologia substancial que pode ser usada para descobrir e inventar coisas" (Wheeler, 1996, p. 322). Bednarz, Kieran e Lee (1996), bem como Nemirovsky e Janvier (1996) comungam da mesma ideia, pois defendem que a pré-álgebra permite que os estudantes construam significados usando diversas representações, designadamente, tabelas, gráficos, equações, entre outras. Também Heid (1996) no estudo que desenvolveu num ambiente computacional designado por *Computer Intensive Álgebra* concluiu que os estudantes constroem aprendizagens algébricas na resolução de "real world situations", tendo para isso necessidade de interpretar e inventar certos modelos matemáticos que passam pelo uso de tabelas, gráficos, equações, inequações, etc.

Para além da resolução das tarefas referidas, concretamente, no 4º e 6º ano de escolaridade, também na resolução de problemas no teste de avaliação denota-se essa facilidade na turma A em relacionar, divulgar os dados em tabelas, na interpretação e representação tabelar, designadamente, na questão 4. do teste, apresentada anteriormente, na fundamentação da *tese 3 da investigação* e na questão 7.3. a expor, na parte final da fundamentação desta *tese 4*.

Sexto ano de escolaridade. A realização do problema "*tantas caixas!...*", como se pode constatar na tese anterior, possibilitou o desenvolvimento de determinadas competências orientadas para a organização tabelar, a interpretação da informação explícita e a capacidade de aplicar um modelo matemático dado, induzindo o fenómeno e promovendo aprendizagens algébricas focalizadas para a *3ª aproximação à álgebra*.

Também no mesmo ano concretizou-se a actividade de investigação: "*banda desenhada – as fracções como motivo de conversa*"[93], em contexto interdisciplinar, tendo grande parte dos estudantes da turma A organizado os dados em tabelas na resolução da última questão.

A maior parte dos estudantes das duas turmas analisou sem dificuldades a mensagem numérica principal da banda desenhada e interpretou correctamente os dados matemáticos apresentados em linguagem corrente nas caixas de diálogo.

Na aula de Matemática e posteriormente na área de Estudo Acompanhado foi desenvolvida a quarta questão da folha de trabalho, relacionada com o registo em tabela das actividades desenvolvidas diariamente pelos estudantes, sendo enunciada a questão da seguinte maneira:

"Já pensaste como é que tu passas o teu dia? Reflecte sobre as actividades que desenvolves num dia, como por exemplo: dormir, comer, estar na Escola (na aula), brincar, estudar, jogar, conversar, ver televisão, entre outras. Tenta agora registar numa tabela e em fracção o tempo gasto em cada uma dessas actividades. Reflecte também sobre se gastas bem ou não o <u>teu</u> precioso tempo e realiza um relatório sobre este assunto, tentando encontrar as razões dos teus "afazeres".

[93] As professoras consideraram esta tarefa como uma das mais interessantes, dado que se relaciona directamente com os conteúdos do 6º ano de escolaridade na disciplina de Matemática – nºs racionais e encontra-se ligada às actividades do dia-a-dia do estudante, conseguindo ainda dar pistas para a área curricular de Estudo Acompanhado.

As respostas a esta questão são variadas e de complexidade diferenciada. Apenas uma estudante da turma A não apresentou correctamente os dados em tabela, mas todos os outros estudantes fizeram-no correctamente. Contudo, a maior parte dos estudantes manifestou dificuldades na representação fraccionária da relação parte-todo, com especial destaque para a representação de partes da hora, mais propriamente de meias horas e ainda para a validação dos resultados. Nem todos realizaram os cálculos correctamente e, a título de exemplo, divulgam-se algumas soluções apresentadas em tabelas e, por conveniência de espaço, juntam-se, na mesma tabela, as várias respostas dadas, sendo cada uma das dez assinaladas da autoria de um estudante (**Ei**).

Tempo gasto ***Actividades***	*Estudante1* ***E1***	***E2***	***E3***	***E4***	***E5***	***E6***	***E7***	***E8***	***E9***	***E10***
Dormir	*7/24*	*10/24*	*8/24*	*9/24*	*9/24*	*9/24*	*9/24*	*9/24*	*8/24*	*9/24*
Comer	*1/24*	*3/24*	*2/24*	*3/24*	*4/24*	*4/24*	*2/24*	*2/24*	*3/24*	*2/24*
Estar na sala de aula	*3/24*	*9/48*	*7/24*	*5/24*	*5/24*	*3/24*	*9/48*	*6/24*	*9/48*	*4/24*
Brincar	*2/24*	*1/48*	*2/24*	*2/24*	*1/24*	*1/24*			*2/24*	*1/24*
Estudar	*2/24*	*2/24*		*3/24*	*2/24*	*2/24*	*2/24*	*1/24*	*4/24*	*1/24*
Jogar	*1/24*				*2/24*	*1/24*	*1/48*			*1/24*
Jogar no computador		*40/60*								
Jogar e brincar								*1/24*		
Conversar	*1/24*	*1/24*		*1/24*	*1/24*	*1/24*	*2/24*	*1/24*		*2/24*
Ver televisão	*3/24*	*1/24*	*6/24*		*0/24*	*2/24*	*1/24*	*3/24*	*2/24*	*2/24*
Dançar	*4/24*									
Música									*1/24*	
Higiene		*1/24*		*1/24*	*1/24*	*1/24*	*1/24*		*1/24*	*1/24*
Tomar banho, lavar os dentes, vestir								*1/24*		
Transporte		*1/24*								
Ler							*1/48*			
Viagens							*1/48*			
Praticar desporto							*1/24*			
Total	*=1=24/24*	*>1*	*>1*	*=1*	*>1*	*=1*	*=1*	*=1*	*>1*	*<1*

Era ainda pedido na questão uma apreciação individual sobre o tempo gasto diariamente na realização das diferentes actividades.

A título de exemplo apresentam-se apenas os comentários descritos por alguns estudantes. Na segunda coluna são apresentados os resultados de uma estudante que toma o dia 3 de Dezembro como referência para responder à questão e reconhece que o seu tempo tem sido bem aproveitado e que tem "*distribuído bem as actividades"*.

Na terceira coluna são expostos os dados de um estudante que realiza um relatório do seguinte teor: "*Eu acho que a comer ocupo bem o meu tempo logo a seguir vou para as aulas onde também ocupo muito tempo, mas o tempo que eu gasto nas aulas é bem gasto. Eu acho que nós temos de ver televisão, mas não muito senão podemos ficar cegos. Nós temos de brincar, porque não é só estudar também temos de brincar. Como nós fizemos muitos esforços também temos de descansar*".

Na oitava coluna o estudante considerou que ocupa bem o tempo, pois "*faço tudo o que preciso para ser feliz. Por isso acho que faço tudo com calma e sem pressa. Por isso não perco o dinheiro*".

Na nona coluna a estudante contemplou correctamente as meias horas em determinadas actividades e no relatório considera que ocupa bem o tempo, pois dorme para ganhar energia para o dia seguinte e "*como, porque tenho de me alimentar; vou às aulas, porque quero ter estudos; vou à música, porque gosto; estudo para saber a matéria; vejo televisão, porque gosto e para passar o tempo. Brinco, porque acho que nos faz bem e enfim faço também a minha higiene como todas as pessoas devem ter*".

Alguns estudantes não verificaram objectivamente a soma de todos os tempos parciais gastos em cada uma das actividades, havendo casos que perfaz 24 horas e outros não. Provavelmente fazem-no mentalmente auxiliados por pequenos registos dado que se nota na folha de trabalho as várias experiências realizadas com o número de horas a atribuir a cada um dos "afazeres diários". Alguns estudantes não organizaram as actividades seguindo a mesma ordem, mas fizeram-no apresentando, normalmente, esta sequência: referência às três actividades fundamentais: dormir, comer e estar nas aulas e/ou estudar e depois incluíram, de forma indiscriminada, outras actividades consideradas relevantes para a vida de cada um dos estudantes.

Na área de *Estudo Acompanhado* os estudantes da turma B também resolveram a quarta questão relacionada com o registo em tabela das actividades desenvolvidas diariamente. Pedia-se ainda ao estudante que reflectisse e desenvolvesse um relatório, baseado nos dados registados. Dois estudantes faltaram e não puderam finalizar esta actividade. As respostas a esta questão são variadas e de complexidade diferenciada, tendo dois estudantes representado meias horas escrevendo, na notação fraccionária, 24 no denominador e 0,5 ou 30m, no numerador.

Três estudantes apresentaram a tabela de forma incompleta, porque não identificaram a natureza dos dados e oito não expuseram a informação em tabela. Os restantes estudantes escreveram os dados em tabela, mas usaram diversas representações, tendo a maior parte deles utilizado "o todo", o dia de 24 horas.

Quatro estudantes expuseram os resultados de forma idêntica e, deste modo, foram sistematizados na tabela seguinte, apresentando tempos diferenciados nas várias actividades:

Tempo gasto ***Actividades***	***Estudante E1***	***E2***	***E3***	***E4***
Dormir	*9/24*	*8/24*	*8/24*	*9/24*
Comer	*1/24*	*1/24*	*1/24*	*1/24*
Estar na sala de aula	*5/24*	*6/24*	*6/24*	*8/24*
Brincar	*1/24*	*2/24*	*3/24*	*1/24*
Estudar	*2/24*	*6/24*	*2/24*	*1/24*
Jogar	*3/24*	*1/24*	*2/24*	
Jogar no computador				*1/24*
Jogar e brincar				
Jogar cartas				*1/24*
Conversar	*1/24*	*6/24*	*1/24*	*1/24*
Ver televisão	*2/24*	*4/24*	*1/24*	*1/24*
Total	*=1*	*>1*	*=1*	*=1*

Na segunda coluna são apresentados os resultados de um estudante que referiu o seguinte: "*Gasto bem o tempo pois tenho tempo para tudo. Os meus pais ajudam-me a regular o tempo"*.

Na terceira coluna são expostos os dados de uma estudante que realizou um relatório do seguinte teor: "*Eu acho que o meu tempo não é bem aproveitado, porque devia ter mais tempo para estudar. As "razões" para os meus afazeres são razoáveis*".

Um outro estudante assinalou valores muito próximos aos da quarta coluna e no relatório referiu que gasta bem o seu tempo: "*Tenho tempo para fazer tudo. Faço tudo nas calmas, tudo o que está na tabela. Às vezes ainda me sobra tempo. O povo diz: "tempo é dinheiro". Acho que cumpro esse ditado. Faço as actividades com muito prazer*".

Refira-se ainda que dois estudantes apresentaram a tabela, mas num formato diferente do habitual:

Dormir	Comer	Estar na Escola	Brincar	Estudar	Jogar computador	Conversar	Ver TV	Total
9/24	1/24	6/24	2/24	3/24	1/24	1/24	1/24	24/24 =1 dia
2/24	7/24	4/24	1/24	4/24	1/24	4/24	1/24	24/24 =1 dia

Estes estudantes concluíram que gastam bem o tempo, porque "*para além disto tudo ainda me sobra um pequeno tempo para coisas pessoais*" e "*divido os meus afazeres de uma forma justa, não como tanto quanto durmo, mas acho que é uma forma justa. Não me canso muito e faço tudo o que tenho a fazer*".

Reflexões/Conclusões Genéricas

A maior parte dos estudantes das duas turmas representou correctamente a informação em tabelas, mas enquanto que todos[94] os estudantes da turma A as utilizaram, apenas treze estudantes as usaram na turma B.

Os estudantes das duas turmas fizeram um tratamento diferenciado da relação parte-todo e apesar da maior parte ter usado "o todo", o *dia-24h*, nem todos o fizeram de forma totalmente correcta, pois, por vezes, não validaram os resultados. Acrescente-se ainda que a maioria dos estudantes das duas turmas, para responder à última questão, teve necessidade de considerar um dia como referência e de concretizar a situação em estudo.

Na organização dos elementos na tabela, os estudantes do 6ºA seguem naturalmente a sugestão da construção da tabela para os três primeiros elementos e depois acrescentaram outros ou pormenorizaram situações particulares, designadamente: dança, música, higiene, leitura, viagens, transportes, prática de desporto, enquanto os do 6ºB não o fizeram e seguiram estritamente as actividades sugeridas no enunciado da folha de trabalho.

Dados recolhidos do Teste. Em primeiro lugar refira-se que na questão 4, já tratada na tese de investigação anterior, pode-se concluir também que a maioria dos estudantes da turma A (16), nos dois tempos de interacção, conseguiu resolver completamente a questão tendo, no pós-teste, treze estudantes organizado toda a informação em tabelas. Na turma B,

[94] Salvo raras excepções devidamente assinaladas, a expressão "todos os estudantes" significa, 25 na turma A e 24 na classe B.

no pós-teste, apenas 45% dos estudantes respondeu correctamente à questão, tendo cinco deles organizado os dados em tabelas e quatro não.

Também na questão 7. do teste, na terceira sub-questão, relacionada com a capacidade de representar tabelarmente a informação, constatou-se que os estudantes da turma A obtiveram resultados mais positivos do que os da classe B.

Sub-Questão Q7.3.

Tabela 32: Sub-questão Q7.3. Resultados do Pré-Teste

Tipo de Resposta		RC		RPC		RI		NR		Total
	Turma	A	B	A	B	A	B	A	B	
Questão	Classe									
Q7.3	2	a - 1 b - 4 c - 1	a - 1 b - 1	a - 1	b - 1	b - 3 c - 1 d - 2	a - 1 c - 3 d - 9			
Total		6	2	1	1	6	13	7	4	20

Legenda: RC – Resposta Completa; RPC – Resposta Parcialmente Completa; RI – Resposta Incompleta; NR – Não Resposta

Menos de metade dos estudantes, 30%, na turma A e 10% na turma B conseguiu obter uma resposta completa. Um estudante em ambas as turmas respondeu de forma parcialmente completa, sete estudantes não responderam na turma A e quatro na B.

Tabela 33: Sub-questão Q7.3. Resultados do Pós-Teste

Tipo de Resposta		RC		RPC		RI		NR		Total
	Turma	A	B	A	B	A	B	A	B	
Questão	Classe									
Q7.3	2	a - 5 b - 6	a - 3 b - 3 c - 1	b - 2	a - 1 b - 2	a - 1 d - 3	b - 2 c - 3 d - 2			
Total		11	7	2	3	4	7	3	3	20

Mais de metade dos estudantes da turma A, 55%, respondeu de forma completa à questão. Na turma B menos de metade dos estudantes, 35%, resolveu de forma completa. Dois estudantes da turma A apresentaram uma resposta parcialmente completa e três na outra turma.

Apreciação específica 7.3.

Nesta questão pretendia-se que os estudantes organizassem em tabela os dados obtidos, relacionando cada um dos quatro quadrados com o respectivo perímetro. Os estudantes da turma A tiveram mais facilidade em interpretar a informação dada e registá-la numa tabela de dupla entrada. Esta classe conseguiu atingir uma *evolução significativa* nos resultados (↑↑↑)(-+), passando de resultados negativos, em que menos de metade dos estudantes não conseguiu resolver completamente a questão, para resultados positivos, em que 55% dos estudantes apresentaram uma resposta completa.

Na turma B existiu também um aumento de cinco respostas completas, isto é, uma evolução significativa, mas em resultados negativos (↑↑↑)(-), em que apenas 35% dos estudantes, no pós-teste, conseguiram atingir a resposta completa.

Apesar de ser uma exploração diferente das desenvolvidas na folha de cálculo, a turma A sentiu mais facilidade para apresentar os dados obtidos em tabela de dupla entrada.

Na resolução das questões 7.2 e 7.3, a turma A, conseguiu atingir resultados com *evolução significativa* (↑↑↑), respectivamente, na indicação do perímetro de quatro quadrados tomando como unidade de medida "uc" e na organização de dados numa tabela, relacionando cada um dos quadrados com o respectivo perímetro, já apresentados na *tese 2 da investigação*. Os resultados obtidos são indicadores de que a folha de cálculo promoveu a organização de dados numa estrutura tabelar.

Estes resultados levam-nos a acreditar que a exploração desta ferramenta tecnológica proporciona aos estudantes capacidades de organização de dados e orienta-os naturalmente para a sistematização da informação em tabelas e provavelmente para a construção de uma certa estrutura de pensamento, não totalmente ainda decifrável.

Tudo indica que a organização tabelar requer competências reflexivas a montante, designadamente, o conhecimento aprofundado da própria informação e da relação existente entre os dados. Assim, a organização tabelar pressupõe uma apreensão linear dos conteúdos e dos "elos" inter-relacionais. Nesta perspectiva, a folha de cálculo parece ser uma ferramenta potenciadora da prática da organização tabelar e de um maior entendimento de conhecimento relacional numa perspectiva abrangente da aprendizagem da matemática em contexto.

Tese 5

> *Os estudantes que utilizaram a folha de cálculo tendem a esgotar as diversas possibilidades de resolução formal do problema, seguida de possível contextualização. Na formulação de problemas os estudantes que usaram a folha de cálculo tendem a não contextualizar os problemas.*

Quarto ano de escolaridade - relações de proporcionalidade. No problema "*a compra de cromos*" já caracterizado anteriormente na resposta à segunda questão: "S*e era possível se o João tivesse comprado, num só dia, 11 cromos? Porquê?*" todos os estudantes das duas turmas responderam correctamente, mas surgiram algumas respostas contextualizadas nas duas turmas, designadamente, um estudante da turma A escreveu: "*Não, porque 3x4 são 12 e por isso o João nunca podia comprar 11, só se vendessem ainda cromos separadamente*" e uma estudante da turma B justificou: "*Não só se comprasse 4 carteiras e ficaria com 12, mas dava 1 à Isabel*".

Na terceira questão deste problema "*Será que os dois amigos poderiam ter comprado exactamente 21 cromos. Como?*" quase todos os estudantes da turma A (cerca de 90%) resolveram correctamente, tendo respondido a maior parte dos estudantes 7 carteiras, mas também escolhendo 4 e 3 carteiras, 6 e 1 carteira e apenas um estudante seleccionou para resposta 5 e 2 carteiras. Neste caso, esta turma apresentou várias soluções, sugerindo as diversas decomposições do número 7 (usando números inteiros e duas parcelas): 7; 6+1; 5+2; 3+4. Os estudantes desta turma revelaram, neste caso concreto, alguma mobilidade de pensamento e simultaneamente a capacidade de abordar diferentes contextos e possibilidades reais de resolução da questão, o mesmo não acontecendo na turma B, que se restringiram apenas a duas soluções 7 e 5+2. Na turma A, parece existir uma primeira vontade e preocupação em resolver as questões formalmente, numa resposta estritamente matemática, para depois ser completada com o contexto apropriado associado à situação, tal como se passou na resposta à segunda pergunta (na compra de 11 cromos) e nesta à terceira (na decomposição da quantidade 7, interligada com as várias maneiras de adquirir os cromos). Nesta última questão, relacionada com as possibilidades existentes na compra de 21 cromos, a turma A conseguiu obter resultados mais positivos e contextualizados do que a B.

Na turma B também a maior parte dos estudantes (cerca de 67%) respondeu de forma correcta, tendo, a maior parte, escolhido 7 carteiras e apenas um estudante optou por: 5 e 2 carteiras.

Na quarta questão do problema "*a compra de cromos*" pretendia-se que os estudantes inventassem e formulassem uma pergunta com base na informação dada.

Menos de metade dos estudantes da turma A (cerca de 47%) respondeu correctamente com questões objectivas e praticamente despidas de contexto, designadamente: "*Quantos cromos haverá em 17 carteiras?*" (com o número de carteiras a variar – 2 estudantes); "*Seria possível à Ana Isabel comprar 16 cromos?*"; "*Se eles comprassem todos os dias 24 cromos, quantos cromos tinham ao fim do mês?*"; "*Na primeira semana de cada mês o João compra 5 carteiras e a Ana Isabel 4 carteiras. Em 7 meses quantos cromos têm os dois?*"; "*O João tem 30 cromos e a Isabel 24 cromos. Quantos cromos tem o João a mais que a Isabel?*"; "*Se cada carteira custa 50$00*[95] *quanto custam 10 carteiras? Paguei com uma nota de 1000$00, quanto recebi de troco?*"; "*Eles têm 9 cromos, mas querem ter 24, quantas carteiras vão ter de comprar?*"; "*Poderiam comprar 42 cromos? Porquê?*"; "*Eles poderiam comprar 44 cromos? Porquê?*" e o estudante responde: "*Não, porque 3x15=45 e por isso eles não poderiam comprar 44 cromos*".

Na turma B cerca de 75% dos estudantes inventou e formulou a questão de forma contextualizada, nomeadamente: "*A Joana faz anos; cada um dos seus amigos ofereceu-lhe uma carteira com 3 cromos. Ao todo foram 42 carteiras. Com quantos cromos ficou a Joana?*"; "*Cada carteira tinha 3 cromos e ele num dia comprou 14 carteiras. Quantos cromos tinham catorze carteiras?*"; "*se eles comprassem 41 carteiras, quantos cromos eles juntavam?*" (formulações idênticas – 8 estudantes); "*os dois meninos compraram 42 cromos. Como?*"; "*se 12 carteiras trazem 36 cromos, 14 carteiras quantos cromos trazem?*"; "*se cada carteira de cromos custa 150 escudos, quanto custam 27 carteiras?*" (formulações

[95] Este era o ano de transição dos escudos para os euros.

idênticas – 2 estudantes); "*O Miguel foi à papelaria e comprou 36 carteiras. Sabendo que cada carteira leva 3 cromos, com quantos cromos ficou o Miguel?*"; "*Quantas carteiras precisariam os dois meninos para ter 100 cromos?*"; "*Se o João comprasse 45 carteiras, quantos cromos receberia? E se cada carteira custasse 50$00, quanto tinha de pagar*?"

Assim, na questão relacionada com a formulação os estudantes da turma A obtiveram resultados mais objectivos e direccionados para conteúdos matemáticos e os da classe B, apresentaram os enunciados mais contextualizados e diferenciados.

No problema "*a pintura das peças de cerâmica*", na terceira questão, solicitava-se ao estudante uma análise crítica e argumentativa dos dados fornecidos por uma tabela averiguando-se se seriam rigorosamente exactos ou aproximados. Sobre este assunto Silva (1976) salientava que ao ouvir-se falar de "cálculo numérico aproximado" ou de "processos de cálculo aproximado" julga-se estar em presença de matemática pouco rigorosa, que "é como quem diz de matemática degenerada. Ora isto, sim, é um erro grosseiro, que convém desde logo contrariar" (p. 13).

Assim, os resultados obtidos na turma A denunciam aspectos curiosos: sete estudantes não responderam, dois fizeram-no de forma incompleta e treze responderam correctamente e de uma maneira mais formal, tendo seis contextualizado a resposta, apresentando, a título de exemplo, as seguintes argumentações: "*sim, exactas, porque elas já tinham prática na pintura*"; "*aproximado, porque as peças demoram mais ou menos 1hora e meia a pintar*"; "*penso que os dados são aproximados, porque alguns pintores enganam-se ou começam a falhar e a atrasar-se, podendo demorar mais de 1,5horas*"; "*penso que são aproximados, porque uns são difíceis de pintar, podem-se enganar, etc*"; "*eu penso que os dados fornecidos são rigorosamente aproximados, porque seria muito difícil pintar as peças produzidas na fábrica sempre exactamente no tempo assinalado na tabela*" (tabela do problema dado).

Na turma B, a quase totalidade dos estudantes (vinte), respondeu correctamente, dezassete contextualizaram a resposta e três fizeram-no de uma maneira mais formal e intimamente relacionada com a linguagem matemática.

Os estudantes desta turma apresentaram basicamente justificações deste teor: "*os dados fornecidos pela tabela são aproximados, porque uns demoram mais tempo a fazer e outros menos tempo*"; "*são aproximados, porque depende da peça" (6 estudantes); "depende do modelo da peça*" (3); "*é preciso muito cuidado a pintar o barro*"; "*penso que os dados fornecidos são rigorosamente aproximados, pois é só para nos dar uma ideia*"; "*aproximados, porque no tempo que se fazem peças se correr mal, nunca é esse tempo exacto*".

No caso do problema "*a cantina escolar*", na terceira questão, apenas 40% dos estudantes da turma A formularam correctamente a questão e 59% na turma B. Algumas das formulações dos estudantes da turma A apresentaram-se "outside" do contexto dado e quer na turma A, quer na B a formulação foi quase única e do tipo: "*Qual é o preço de 78Kg de maçãs*?", existindo apenas mudanças no número de quilogramas de maçãs, ou ainda: "*Se 40Kg custam €13,60 quanto custarão 100kg*?" (um estudante na turma A).

No pedido de formulação de problemas tudo indica que os estudantes precisam que o assunto os motive para inventarem e formularem, com alguma originalidade, o problema. O tema da *cantina escolar*, não sendo próximo das vivências da criança, não se revelou significativo e por tal motivo a invenção e a formulação, nas duas turmas, foi menos conseguida, não acontecendo o mesmo na *compra dos cromos*, cujo tema do coleccionismo está presente nas experiências diárias da criança, especialmente, nestas idades.

Na última questão do problema "*a carga certa para o "peso" certo*", já caracterizado anteriormente, pretendia-se que o estudante escrevesse "*um pequeno "slogan" publicitário relativo à informação apresentada na tabela*". Na turma A existiram frases com base no conhecimento adquirido, denunciando as informações matemáticas apreendidas com preocupações de contextualização da resposta. Na turma B, foram usados "slogans" publicitários mais vagos, com a aplicação da lei que rege o fenómeno, por vezes, conectados e suportados a um caso concreto.

A título de exemplo, transcrevem-se alguns "slogans" publicitários da turma A:

"*Diminui o peso da tua mochila para quando fores grande não teres problemas de coluna*"; "*Venha com a sua mochila pesar para, no futuro, sem problemas ficar*"; "*Este aviso é para as crianças se pesarem e depois coloquem também a mochila. Se o peso da mochila for a décima parte do vosso peso estão bem, senão têm de diminuir o peso da mochila e se não acreditam nisto, observem esta tabela*"; "*Se não queres chegar a velho curvado, diminui a carga da tua mochila*"; "*Não deves andar com peso a mais na mochila, porque podes ficar com problemas na coluna*" (2); "*venham comparar o vosso peso com a carga da vossa mochila! Venham ver se o vosso peso é dez vezes mais do que a sua mochila, como deve ser!*"; "*Venham ver o peso da mochila para não ficarem doentes*" (2); "S*e não reduzir o peso da sua mochila até 1 décimo do seu peso, mais tarde poderá ter problemas*"; "S*e com problemas não quer ficar venha com a sua mochila se pesar*"; entre outras.

Na turma B os estudantes escreveram frases que denunciam a necessidade de concretizar, apresentando casos concretos:

"*Os meninos que não têm as mochilas com a carga adequada devem tirar as coisas que eles não precisam e estão a mais*"; "N*ão se deve levar peso a mais nas costas*"; "A *carga da tua mochila deve ser sempre dez vezes menor do que o teu peso*"; "A*s crianças que pesam 30Kg ou mais não podem ter uma mochila com a carga a valer mais de 3Kg*"; "O*s meninos têm de levar o peso adequado na mochila*" (2 estudantes); entre outras.

É importante referir que após as experiências pessoais realizadas, alguns estudantes das duas turmas concluíram que tinham de retirar alguns objectos da sua mochila e salientaram: "*A minha mãe põe-me coisas que não são necessárias e eu hoje já vou falar com ela, para tirar a "tralha" que não interessa… e amanhã já venho com o peso devido*". Outra estudante salientou: "*Eu bem me parecia que tinha carga a mais. Eu hoje vou ver tudo melhor. Tenho muitos lápis, borrachas, canetas, já vi isso e tenho de se conseguir o peso devido…*", entre outras respostas.

Neste problema as frases do "slogan" publicitário propostas pelos estudantes das duas turmas são do tipo imperativo ou meramente informativo com alusão, por vezes, à relação numérica estabelecida na tabela ou ainda apresentadas na forma de convite, apelando às pessoas para a realização de algumas experiências com a possibilidade de tirarem conclusões…

Os estudantes da turma B revelaram preocupações mais práticas referindo casos concretos, como aconteceu na especificação da relação de *30Kg para 3Kg* da carga da mochila. Contudo, os estudantes da turma B ao preocuparem-se com aspectos práticos, fizeram-no de forma incompleta, enunciando algumas frases muito vagas, como por exemplo: "*Não podes levar muito peso*" (2 estudantes); "*Nunca a tua mochila pode pesar mais do que tu!*"; "*Não se deve levar peso a mais na mochila*" (3) ou "C*uidado com o peso da mochila*" (3); "*Não andes com peso a mais na mochila*" e na turma A apenas uma resposta deste teor: "N*ão deves andar com a mochila pesada*". Este tipo de respostas revela a importância da matemática funcional na vida das crianças que denotam vontade e sensibilidade em aplicar esses conhecimentos no quotidiano.

Neste sentido importa que as situações a explorar sejam previamente avaliadas e promovam gradualmente o conhecimento matemático e o sucesso do estudante, numa perspectiva global de compreensão do problema e dos conteúdos explorados.

Dados recolhidos do teste de avaliação. A questão 15.2. do teste estava orientada para a formulação de um problema, baseado no conteúdo, na interpretação da informação pictórica e numérica exposta na questão anterior. A questão 15.1. estava ligada à noção de recursividade, um conceito importante no desenvolvimento de competências pré-algébricas e já focalizadas na resolução do problema "*expressões com euros*", desenvolvido no 5º ano de escolaridade. Investigações neste domínio indicam que o papel e lápis são os suportes mais indicados para resolver este tipo de questões. Apesar da turma A ter tido evolução do pré para o pós-teste, mas ainda em resultados negativos, a turma B conseguiu atingir uma evolução muito positiva e passar de resultados negativos para positivos.

Questão 15.2

Tabela 34: Questão Q15.2. Resultados do Pré-Teste

Tipo de Resposta		RC		RPC		RI		NR		Total
	Turma	A	B	A	B	A	B	A	B	
Questão	Classe									
Q15.2	2	a - 1 b - 2	a - 2 b - 4	a - 1 b - 1 c - 1	c - 3	a - 7 c - 2	a - 6 b - 1			
Total		3	6	3	3	9	7	5	4	20

Legenda: RC – Resposta Completa; RPC – Resposta Parcialmente Completa; RI – Resposta Incompleta; NR – Não Resposta

Cinco estudantes da turma A não responderam à questão e apenas três (15%) fizeram-no de forma completa. Três estudantes responderam parcialmente e nove não conseguiram resolvê-la correctamente.

Na turma B quatro estudantes não responderam e seis (30%) fizeram-no de forma completa, tendo três resolvido a questão.

Tabela 35: Questão Q15.2. <u>Resultados do Pós-Teste</u>

Tipo de Resposta		RC		RPC		RI		NR		Total
	Turma	A	B	A	B	A	B	A	B	
Questão	Classe									
Q15.2	2	a - 6 1a - X	a - 8 b - 3	a - 2	c - 3	a - 9	a - 5			
Total		6	11	2	3	9	5	3	1	20

X - usou a variável ´X´

Legenda: RC – Resposta Completa; RPC – Resposta Parcialmente Completa; RI – Resposta Incompleta; NR – Não Resposta

No pós-teste os resultados melhoraram na turma A, na qual 30% dos estudantes já conseguiram resolver completamente a questão. Contudo, três estudantes não resolveram a pergunta, dois fizeram-no parcialmente e nove estudantes responderam incorrectamente.

Os resultados da turma B melhoraram substancialmente, pois mais de metade dos estudantes (55%) conseguiu resolver completamente a questão. Um estudante não respondeu, três fizeram-no de forma parcialmente correcta e cinco resolveram-no incorrectamente.

<u>Reflexões/Conclusões genéricas</u>

No pós-teste, cerca de 55% dos estudantes da turma B conseguiram alcançar resultados positivos, tendo respondido completamente à questão, não se tendo passado o mesmo na turma A. Por outro lado, a maior parte destes estudantes da classe B conseguiu, na formulação do problema, integrar os dados do enunciado da questão anterior.

Alguns estudantes, na resolução do teste, teceram algumas considerações, para clarificar algumas notações, tais como: "*o 2 é 2,00 não é?... São euros, não são?*"; "*Isto é dinheiro, não é?*".

Grande parte dos estudantes que respondeu incorrectamente desenvolveu uma redacção confusa, sem lógica e desligada da imagem e dos valores apresentados. De facto, os estudantes estão muito pouco habituados a formular problemas e esta vertente não foi explorada nas aulas, dado que os estudos próximos da temática da investigação não referiram explicitamente a necessidade fundamental de a implementar.

Numa perspectiva mais actual e alargada do ensino da Matemática considera-se crucial a formulação de problemas e Cunha (1998) apela aos professores para a necessidade de a realizarem, com os seus estudantes, explorando e investigando esta temática nas aulas. Todavia, Moreira (1989, p. 64) reconhece que "não existe investigação nem prática escolar sobre a formulação de problemas" e acrescenta que muitos professores e investigadores são unânimes em atribuírem-lhe uma importância tão grande como a conferida à resolução de problemas. Contudo, tudo indica que a experiência de descobrir e criar os seus próprios problemas matemáticos devia fazer parte da educação de todos os estudantes. Kilpatrick (1987) constata que esta não é a realidade e prevê que, com a entrada do computador na sala de aula, a aprendizagem da Matemática deslocará a sua ênfase da memorização de algoritmos para actividades em que a formulação de problemas vai ter um papel importante.

Adicionalmente “admite-se que a flexibilidade e a criatividade são desenvolvidas quando se trabalha na formulação de problemas, mas não existe investigação que o confirme ou que mostre da influência da formulação de problemas na sua resolução ou vice-versa” Moreira (1989, p. 65). Esta autora acrescenta ainda que nas situações reais complexas, os problemas não estão formulados, são os indivíduos confrontados com essas situações que formulam as questões, reformulam os termos, na tentativa de as interpretar e resolver, dando-lhes, por vezes, um tratamento matemático. No quadro escolar quando é colocado um problema ao estudante, este, quase sempre, reformula-o de modo a entender e a interpretar da forma mais completa possível o problema.

Weber-Russell e LeBlanc (2004) referem que o processo de escrita de problemas pelos próprios estudantes proporciona a conexão de situações e um processo profundo de reflexão da compreensão da situação criada e das operações aritméticas sublinhadas. A criação e a partilha de expressões em problemas facilitam um discurso sobre a matemática e a formulação de questões a um outro nível. Estes autores defendem que o cenário de formulação de problemas como experiência de aprendizagem, na classe, transporta diversas vantagens, designadamente: a) proporciona um sentido mais lato da compreensão no processo de resolução de problemas; b) reforça a abstracção baseada numa realidade, não estrutural e noutra situação mais organizada e estrutural, desencadeada por uma linguagem natural pertença do mundo da criança; c) ajuda os estudantes a entender que a matemática não é um conjunto de regras, nem é uma disciplina difícil.

Segundo Ponte, Matos e Abrantes (1999) existem três trabalhos sobre a formulação de problemas realizados por Alverca (1990), Palhares (1992) e Porfírio (1993). No primeiro caso a autora refere que a maior parte dos estudantes do 1º ano do estudo apresentam um enunciado perceptível e realça a riqueza de conhecimentos utilizado na construção de enunciados e no desenvolvimento de estratégias de resolução de problemas. Os trabalhos de Palhares (1992) com estudantes do 3º ano de escolaridade sugerem que os estudantes na formulação de problemas procuram manter um contexto credível e propõem valores numéricos que tornam a resolução do problema suficientemente difícil. No estudo realizado no 7º ano de escolaridade Porfírio (1993) concluiu que, quando trabalham em grupo, os estudantes quase sempre apresentam formulações de problemas, enquanto que individualmente tendem a formular exercícios e procuram ser elaborados de forma gradual.

Apesar de não existir um estudo exaustivo da formulação de problemas, este emergiu em várias situações, no próprio processo de resolução do problema, no qual está associada uma particular reformulação intrínseca, realizada pelo próprio estudante, com vista a uma compreensão mais profunda da situação e a descoberta eficaz da solução.

4.2. Importância do contexto interdisciplinar na aprendizagem da pré-álgebra

Tese 6

> *O contexto interdisciplinar estimulou o estudante para a exploração diversificada de estratégias pessoais de cálculo na resolução de tarefas*

Quarto ano de escolaridade. Neste ano de escolaridade, na resolução dos problemas de esquematização, já analisados anteriormente, em 2.4. e noutras teses de investigação, como na *tese 1*, *tese 3*, como "*à descoberta dos números*", "*as idades das filhas*", "*o terreno do Sr. António*" e "*uma razão importante!...*" verificou-se que as estratégias apresentadas pelos estudantes da turma A orientaram-se preferencialmente para a exploração concreta de tabelas e que os estudantes da turma B utilizaram esquemas inventados pelos próprios, seguindo uma interpretação linear e de representação sequencial do enunciado do problema. Bednarz, Kieran e Lee (1996) consideram que "a utilização e a interpretação de certos modelos matemáticos como tabelas, gráficos, equações e inequações, etc constitui um pretexto para existir uma relação mais próxima com situações da vida real e uma motivação forte para o estudo posterior do conceito de função" (p. 11).

Quinto ano de escolaridade. Quatro problemas de esquematização: "*compras nos saldos*", "*os animais na quinta*", "*as idades das filhas*" e "*boatos e bactérias*" foram explorados neste ano de escolaridade. Na resolução dos três últimos utilizou-se a folha de cálculo e naturalmente os processos de exploração dos estudantes da turma A orientaram-se preferencialmente para a utilização de tabelas, usando ou não aquela ferramenta tecnológica. Contudo, na resolução do problema "*animais na quinta*" houve grupos da turma A que o resolveram seguindo uma estratégia iconográfica, como se poderá constatar na análise exaustiva de resultados deste problema, na fundamentação desta tese em que vários estudantes usaram outras estratégias, explorando ou não as fórmulas usuais implementadas na folha de cálculo. Os estudantes da turma B usaram basicamente três estratégias diversificadas: pictóricas, iconográficas ou numéricas.

Na primeira questão do problema "*compras nos saldos*" pretendia-se que os estudantes *indicassem, entre os dois artigos constituintes – guarda-chuvas e bonés das duas colecções, qual o artigo mais caro e qual a diferença de preços existente entre os dois produtos*. Inicialmente os estudantes das duas turmas sentiram as dificuldades próprias da resolução de um problema, da necessidade de "parar para pensar" como refere Fernandes (1994, p. 41), procurando: a) interpretar os diferentes tipos de informação, neste caso a pictórica e a numérica; b) analisar os dados e, posteriormente c) delinear um plano de execução. Apesar das dificuldades iniciais reveladas, os grupos mostravam vontade, empenho e entusiasmo em resolver o problema.

A primeira questão requeria dois tipos de resposta: texto e numérica, pois pretendia-se que o estudante identificasse o artigo mais caro e calculasse a diferença de preços entre um guarda-chuva e um boné. A maior parte dos estudantes da turma A resolveu correctamente a primeira questão e na turma B apenas um grupo não respondeu correctamente à pergunta (misto: 2 meninas e um rapaz) e os restantes onze grupos responderam correctamente.

Os estudantes da turma A usaram basicamente a ***estratégia 2*** ("tentativa e erro", com e sem ajustamento numérico[96]) e a ***estratégia 4*** (Meyer, 1999 e Ameron, 2001-2004).

Os estudantes da turma B usaram estratégias mais diferenciadas do que os da turma A, desde a ***estratégia 1*** à ***estratégia 4***[97]**.**

Um grupo de rapazes da turma B (Tig e JA, nomes fictícios) pensou oralmente e escreveu as seguintes expressões:

"*2 guarda-chuvas + 1 boné = 80 euros e 1guarda-chuva + 2 bonés = 76 euros*", respectivamente, para o primeiro e o segundo desenho das colecções.

Referia um estudante do grupo, "*eu preciso de pensar em duas expressões, 2**g**+1**b** = 80 e 1**g** + 2**b** = 76, sendo **g** o guarda-chuva e **b** o boné*".

Contudo, perguntava: "*mas como é que se pode resolver com estas duas expressões se eu não sei o preço de nenhum dos dois produtos?*".

Este tipo de estratégia é identificado por Meyer (1999) como ***estratégia 1***. Este grupo, que estruturou mentalmente a resolução do problema num sistema de duas equações a duas incógnitas, após algum tempo e em breve diálogo com a investigadora reparou que os produtos constituintes de cada colecção eram três e, por este motivo, consideraram que deveriam dividir os montantes de cada uma das duas colecções por três, concluindo que não poderia ser só assim, pois "*era uma primeira aproximação*" e "*a seguir vamos tentar ver se servem estes valores nas duas colecções…*". Os dois estudantes deste grupo, com facilidades na Matemática, ao observarem as duas colecções repararam, recorrendo à correspondência termo a termo, que o guarda-chuva era o produto mais caro, mas queriam saber o preço de cada um deles e não conseguiam!... Posteriormente o grupo mobilizou vários saberes e experiências realizadas, fez novos cálculos, estabeleceu a correspondência um a um dos elementos da mesma espécie de cada uma das colecções e reparou que numa delas havia a mais um guarda-chuva e noutra um boné, concluindo, assim, que a diferença de preços era de 4 euros. Após um processo longo de elaboração mental, o grupo referiu que afinal a questão era mais simples do que tinham pensado inicialmente e responderam correctamente às duas sub-questões da primeira pergunta.

Um grupo da turma B ao analisar a constituição de cada colecção e o respectivo preço reparou que o artigo mais caro era o guarda-chuva, mas questionaram: *qual deveria ser o preço de cada peça para colocar o valor na etiqueta de cada produto?*

---

[96] Com referência inicial ou não, baseada no cálculo do quociente por três do preço de cada uma das colecções.

[97] A análise dos processos de resolução deste problema baseou-se nas designações propostas pelos investigadores Meyer (1999) e Ameron (2004) apresentadas em 9.3.3., do segundo capítulo.

Para dar resposta a esta interrogação resolveram calcular o preço unitário de cada produto, aplicando basicamente a ***estratégia 3*** (Meyer, 1999). O processo utilizado seguiu esta sequência:

- determinaram o preço das duas colecções: 80 + 76 = 156.

- calcularam o preço total de cada colecção, partindo do princípio que os produtos tinham preços iguais 156 : 2 = 78.

- determinaram o preço unitário de cada peça, partindo do princípio que as duas peças tinham o mesmo valor 78 : 3= 26.

- usaram este valor de referência resolvendo o problema pelo método de tentativa e erro, com o conhecimento adquirido pela observação das colecções que o guarda-chuva custava mais.

Neste grupo foi visível a estrutura de pensamento implementada, com um controlo eficaz na resolução do problema, localizando a atenção para o objectivo pré-definido. Tendo por base o cálculo mental e a validação do resultado, com a utilização do algoritmo da adição, o método de tentativa e erro foi eficaz, com êxito à terceira tentativa. Registe-se ainda que este grupo conseguiu resolver a folha de trabalho em apenas 20 min, metade do tempo estipulado.

As três questões colocadas na resolução deste problema facilitaram a compreensão gradual da situação e o desenvolvimento de processos adequados, existindo uma preocupação dos estudantes das duas turmas, desde a primeira questão, em calcular *o valor unitário* de cada produto, tal como aconteceu na resolução de alguns problemas ligados às relações proporcionais, especificamente, no problema "*a cantina escolar*".

Também no 5º ano de escolaridade os estudantes das duas turmas resolveram o problema "*Animais na quinta*", na turma A, na folha de cálculo e na B sem a utilização do computador. Nesta classe os estudantes exploraram estratégias pictóricas, iconográficas e numéricas. Todavia, como alguns grupos da turma A não conseguiam resolver o problema na folha de cálculo usaram também estratégias iconográficas para alcançar, com êxito, a solução do problema.

Nove grupos da turma A conseguiram resolver correctamente o problema na folha de cálculo, mas um grupo considerou um pouco difícil, só conseguindo atingir a solução à décima segunda tentativa. Quatro grupos não conseguiram resolver o problema nesta ferramenta tecnológica, mas três deles encontraram a solução através de uma *estratégia iconográfica*, que se divulga na apresentação desta tese e que servirá também para a fundamentação da *tese 8* (Figura 49, 356). De uma maneira geral, estes grupos usaram riscos ou círculos pequenos[98] para representar os animais, agrupando-os em 4 elementos, para simbolizar um porco com 4 patas e em 2 elementos para simbolizar uma galinha com 2 patas.

No desenvolvimento desta aula optou-se por gravar a interacção existente num grupo da turma A, dado que se pretendia registar o percurso completo desenvolvido pelo mesmo na resolução do problema. Por outro lado, esta estratégia de registo permitia

[98] "*Bolinhas*", numa linguagem usada pelos estudantes.

simultaneamente à investigadora dialogar com os outros grupos de forma a corresponder às solicitações dos estudantes e de apreender ainda outros processos de resolução do problema.

De uma forma essencial o diálogo estabelecido no grupo da Joa e do Jo (nomes fictícios) desenvolveu-se no seguinte registo:

Joa: *Vamos dividir 18 animais por 4.*

E entretanto o Jo dividia 18 por 4, na folha de cálculo.

Jo: *Vamos também experimentar dividir 52 por quatro, está bem?*

Joa: *Está bem. Então vamos fazer na folha de cálculo.*

Joa: *A4/B4, acho que é isso!*

Experimentou, mas como deu mensagem de erro, o grupo leu a mensagem e lembrou-se que era necessário escrever o sinal de igual antes da fórmula.

Joa: *Ah! Agora está bem… Era necessário o sinal de igual. Acho que também devíamos dividir 18 por 4, ora experimenta...*

Joa: *Então vamos pegar nas patas dos animais e dividir por dois e dá 26, e o que fazemos com o 26?*

Jo: *E depois esse valor vai ser dividido por 4, para dar o número de porcos e por 2, para dar o número das galinhas.*

Joa: *Mas assim depois?... Ah! Está bem?!...*

Joa: *Queres ver...Se tu chegaste à conclusão que as galinhas são 13 então é fácil saberes qual o número de porcos, escusas de fazer os cálculos.*

Jo: *Pois. São 8 porcos.*

Joa: *Mas mesmo assim eu duvido muito!... Eu acho que é ao contrário.*

Jo: *Não é. Vais ver!...*

Joa: *Duvido muito, mas experimenta.*

Joa: *Então vamos agora conferir... Os porcos são 5, têm quatro patas e dá ao todo 20, não é? E depois as galinhas são 13 e como têm 2 patas dá 26 e ao todo somam 46 patas, que não dá 52 patas.*

Joa: *Assim, não dá!... Vamos experimentar 8 porcos e 10 galinhas. Vamos fazer os cálculos. Está certo! 8X4 = 32 e 10X2=20 e então dá 52 patas e 18 animais. Está certo. Agora temos de colocar tudo direitinho na folha de cálculo.*

Este grupo usou a folha de cálculo, numa primeira fase, apenas para experimentar e dar visibilidade numérica aos seus pensamentos soltos, permitindo a realização e o registo de cálculos sequenciais[99]. Alguns valores ainda eram calculados mentalmente, mas na fase final, após a descoberta correcta da solução, os estudantes tiveram necessidade de usar a folha de cálculo para apresentar, de *forma organizada*, a resolução do problema. Neste caso, o grupo usou a folha de cálculo, numa primeira fase, apenas *cálculo* ou *mais cálculo do que folha* e numa fase posterior, *mais folha do que cálculo* na organização da informação principal.

Inicialmente este grupo experimentou de forma aleatória, realizando uns cálculos aparentemente sem significado, dividindo por 4 o número de animais e, em seguida, fazendo o mesmo, para o número de patas. Numa segunda fase pensaram que dividindo o

[99] Note-se que tal procedimento é muito usual numa situação profissional do dia a dia, ao usar-se a folha de cálculo para a determinação de cálculos pontuais.

número de patas por 2, e em seguida uma das metades, 26 por 4 e a outra metade por 2 daria o resultado pretendido, respectivamente, o número de porcos e o número das galinhas. Aproveitando apenas o último resultado concluíram que havia 13 galinhas, mas como eram 18 animais, olvidaram o quociente da divisão de 26 por 4, chegando à conclusão que havia apenas 5 porcos. Mentalmente validaram a solução encontrada e repararam que o número de patas era 46, em vez de 52, como estava no enunciado do problema. Implicitamente trabalharam com apenas um dado, o número de patas, usando a expressão numérica 4xP+2xG=52 equivalente a 2x(2xP+G)=52 donde 2xP+G=52/2 ou 2xP+G=26.

E, sem se perceber qual foi a estratégia usada pelos estudantes, quase por "*insight*", intuição ou provavelmente surgindo como corolário lógico dos diversos cálculos e diálogos estabelecidos no grupo, por o método de tentativa e erro ajustado (como mostra a tabela seguinte)[100], o grupo avançou com uma solução correcta posteriormente validada pelos cálculos.

Tabela 36: Uso da estratégia de tentativa e erro com controlo mental – "*Animais na quinta*"

GRUPO: Jo e Joa - 5º A					*Usaram Fórmula*		
animais	patas			Porcos	Galinhas		
18	52			5	13		46
				8	10		52
							0
							0
Idade filha 1	Idade da filha 2	Soma	Produto		*Não usaram Fórmula*		
		23	112				
17	6	23	102				
16	7	23	112				

Dos três grupos que usaram fórmulas, um deles parece também ter explorado *o método de tentativa e erro sem controlo*, relativamente às duas variáveis: animais e patas. Alguns estudantes ainda não conseguem *conservar*, tornar *invariante*[101] as duas quantidades dadas: de 52 patas e 18 animais (tabela seguinte).

[100] Nos ficheiros apresentados pelos estudantes estão resolvidas duas questões que faziam parte desta folha de trabalho: "*as idades das filhas*" e "*animais na quinta*".

[101] Esta situação faz recordar a aprendizagem da adição com duas parcelas em que num estado mais avançado a criança deve fazer a conservação da primeira quantidade. Por exemplo, no cálculo da soma 6+3, o estudante pensa "já tenho seis", conserva esta quantidade e adiciona mais três à quantidade já tornada "invariante", "conservada".

Tabela 37: Uso da estratégia de tentativa e erro sem controlo das duas variáveis em estudo, com utilização de fórmulas - "*Animais na quinta*"

Grupo das Anas - 5º A					
				Usaram Fórmulas	
	Animais (18)	Patas (52)	Galinha (2)	Porco (4)	
		54	9	9	
		48	12	6	
		46	13	5	
		42	15	3	
		44	14	4	
		40	16	2	
		56	8	10	
		50	9	8	
		50	11	7	
		48	10	7	
		44	10	6	
		52	10	8	
	Usaram Fórmulas				
Soma	Produto				
17	17				
6	6				
23	102				
16	16				
7	7				
23	112				

Um outro grupo realizou, com algum controlo, as pesquisas, usou fórmulas, com experiências pontuais e, de forma não sequencial, usaram o método de tentativa e erro até alcançarem a solução desejada.

Tabela 38: Uso da estratégia de tentativa e erro com controlo das duas variáveis, com utilização de fórmulas – "*Animais na quinta*"

	Grupo da Flav e Dani		
			Usaram fórmulas
Nº de animais	Nº de patas	Porcos	Galinhas
18	52	10	8
		13	5
		7	11
		8	10
			Usaram fórmulas
Filha 1	Filha 2	Soma das idades	Produto
11	12	23	132
9	14	23	126
7	16	23	112
		0	0
		0	0
		0	0
		0	0

Por fim, um outro grupo (Pape) organizou os dados de forma diferente, referindo "*fomos subtraindo o número de patas das galinhas e dos porcos até gastarmos o número 52*" (tabela seguinte). Assim, a partir da decomposição do 52, provavelmente, pelo valor médio inicial e com a ajuda do cálculo mental, realizaram várias experiências usando subtracções sucessivas baseadas nos operadores ´-2´ e ´-4´.

Tabela 39: Uso da estratégia das subtracções sucessivas até chegar ao valor zero, sem utilização de fórmulas – “*Animais na quinta*”

	Grupo do Pape			
			Não usaram fórmulas	
Galinhas	Porcos	Total		
2	4			
2	4			
2	4			
2	4			
2	4			
2	4			
2	4			
2	4			
2				
2				
20	32	52		
Fomos subtraindo o número de patas				
das galinhas e dos porcos até gastarmos o número 52.				
Há 10 galinhas (=20 patas) e 8 porcos (=32 patas).				

Na turma A um grupo não conseguiu encontrar a solução correcta e três grupos conseguiram resolver o problema com papel e lápis usando uma *estratégia iconográfica*. Um deles identificou as patas dos animais com riscos e formou agrupamentos de quatro riscos, numa sequência vertical, para representar os porcos e agrupamentos de dois elementos para identificar as galinhas (figura seguinte) e usou o valor médio como valor inicial de referência.

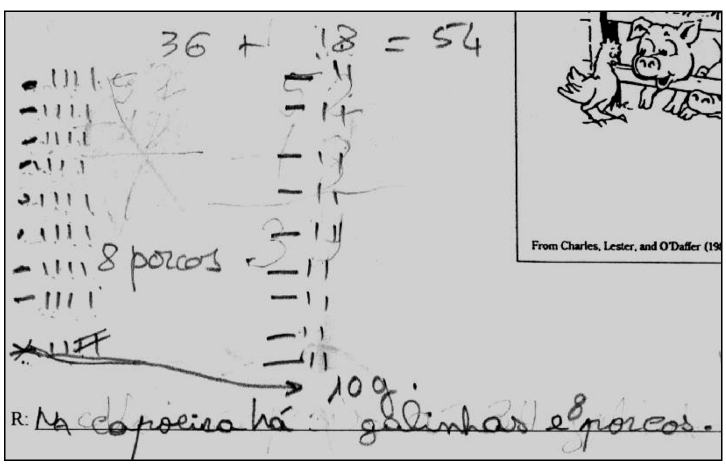


Figura 26: Uso da estratégia iconográfica, com ajustamento ao valor médio – “*Animais na quinta*”

O grupo anterior ao usar a estratégia de tentativa e erro com ajustamento ao valor médio inicial desenhou, de um lado, nove agrupamentos, com conjuntos de 4 riscos cada simbolizando cada grupo um porco com quatro patas e, do outro lado, nove agrupamentos de dois riscos cada um, para representar as nove galinhas. Na validação da expressão numérica 9x4+9x2= 36+18, o grupo verificou que o valor era superior a 52 - o número de patas existente. Então, um dos agrupamentos que representava os porcos foi "desfeito" e "os riscos" moveram-se para o lado das galinhas… Mentalmente realizaram posteriormente os cálculos e validaram os dados do problema, concluindo correctamente a existência de 10 porcos e 8 galinhas.

Um outro grupo usou uma *estratégia iconográfica de tentativa e erro ajustado,* com *referência inicial ao valor médio* encontrado na base dos 18 animais existentes e pictoricamente identificados pelas 18 "bolinhas", desenhadas na parte inferior do espaço para o problema e com um risco entre a 9ª e a 10ª "bolinha" - Figura 27.

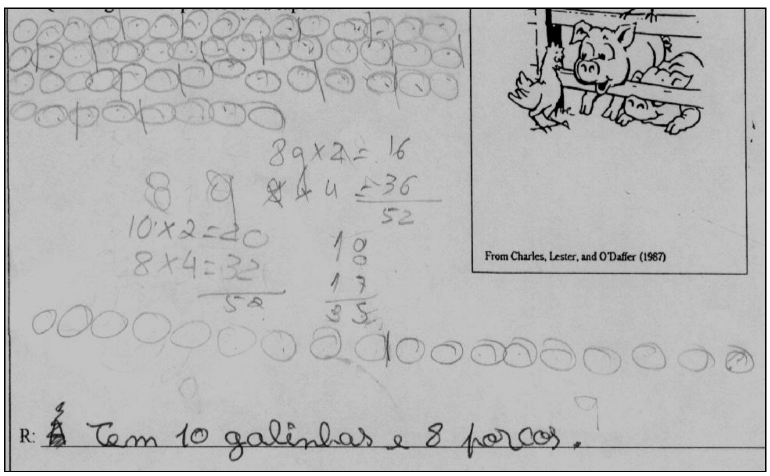


Figura 27: Uso da estratégia *iconográfica por tentativa e erro ajustado ao valor médio* – "*Animais na quinta*"

Seguidamente, este grupo explorou a outra "variável" ´patas´ e fez uma tentativa de validação numérica verificando que a condição associada a esta "variável" não é satisfeita, isto é, 9x4+9x2 é diferente de 52. O grupo fez uma segunda tentativa e constatou que se verificavam as condições definidas, auxiliando-se da parte pictórica para comprovar a veracidade da solução encontrada.

O Joe (nome fictício) da turma A referiu:

"*Eu não sei resolver este problema no computador. Só sei resolvê-lo à primária, como fazia na outra Escola… Posso fazer assim?*"

"*Claro que sim*", respondeu a investifgadora.

Desenhou 18 riscos verticais, numa sequência horizontal para identificar os animais e desenhou, por baixo destes outros riscos horizontais, em agrupamentos de 2 e 4 elementos e numa correspondência de um (animal) para dois ou quatro, respectivamente, no caso de representar a galinha ou o porco… Esta estratégia está exposta mais à frente (Figura 49, p. 356), na fundamentação da *tese 8*.

Para resolver o problema, os estudantes da turma A usaram basicamente a folha de cálculo, tabelas, com utilização ou não de fórmulas, estratégias iconográficas e numéricas, mas não exploraram estratégias pictóricas, como aconteceu na turma B.

Um grupo da turma B começou por descortinar primeiro uma solução e chamou a investigadora (Inv), desenvolvendo o seguinte diálogo com um dos estudantes (o JA, nome fictício):

JA: *Como os porcos têm quatro patas fiz a tabuada dos quatro e depois fiz a tabuada do dois para as galinhas. Tenho 4X10 =40 e 2X5=10 e somei 40 com 10 dá 50. Ah! Não pode ser! Tenho de multiplicar 2 por 6 e dá 12 e fico então com 52, que são as 52 patas dos animais.*

Inv: - *E qual é o número de animais?*

JA: *É 10 + 6= 16. Ah! Não pode ser!... Assim não dá.*

(E esboçou a intenção de ter necessidade de apagar as tabuadas).

Inv: *Não apagues... Podes pensar noutras hipóteses. Talvez a tua ideia resulte. Experimenta mais.*

JA: *36 (4X9) com 14 (2X7)? Dá 50. Não serve.*

Inv: *E o número de animais? Pode ser que seja outra combinação...*

JA: *36 com 18 ? Dá 54. Mas aqui o número de animais já é 18. Mas não pode ser por causa do número de patas dos animais… Vou pensar melhor!*

A investigadora foi para outro grupo e passado pouco tempo aquele estudante (o JA) apontava a solução correcta, apresentando-a na expressão numérica "*8x4+10x2=",* referindo que havia 8 porcos e 10 galinhas:

8x4+10x2=

32+20=

52

E retomando o pensamento inicial mostrou à investigadora o esquema usado baseado nas tabuadas do 4 e do 2 (Figura 28) para justificar a forma como encontrou a solução. "*Eu fiz as tabuadas e depois estudei os casos que dava 52, que era o número de patas. Havia só um caso é que serviu*[102]*: 32 com 20, ora como 32=4x8 e 20=2x10 conclui que havia 8 porcos e 10 galinhas"*. E observou: "*Eu pensei sempre assim, só que tinha, no esquema da tabuada do 4 um resultado errado e não conseguia chegar à solução certa!*".

[102] Tudo indica que o estudante não identificou os vários casos que satisfaz a condição das ´patas´, como 36 e 16; 40 e 12; 44 e 8; 48 e 4; 24 e 28, entre outros.

Tabuada do 4	Tabuada do 2
4	2
8	4
12	6
16	8
20	10
24	12
28	14
32	16
36	18
40	20
44	22
	24
	26
	28

Figura 28: Uso da estratégia numérica com base nas tabuadas do 2 e 4 – "*Animais na quinta*"

Neste caso concreto, o estudante usou uma *estratégia numérica*, baseada na utilização das tabuadas do 4 e do 2 e na composição e decomposição da quantidade 52, conjugando-a com as diversas possibilidades do número de animais para perfazer um total de 18. Implicitamente o estudante explorou a expressão numérica 4xP+2xG=52 relacionada com o número de *´patas´* dos animais, conjugando-a posteriormente com o número total de animais existentes na quinta, isto é, com a expressão: P+G=18.

Provavelmente o estudante pensou numericamente, baseado implicitamente neste sistema de equações a duas incógnitas, aliás, como já o tinha feito na resolução do problema "*Compras nos saldos*". A primeira expressão trabalhada, relacionada com o número de patas permitiu-lhe levantar uma primeira hipótese de resolução, isto é, um par de números que tornasse a primeira expressão verdadeira e a segunda também. Caso o par de números não fosse validado pela segunda expressão imediatamente o estudante levantava a possibilidade de uma nova proposta de solução, começando por validá-la na primeira expressão e depois na segunda, repetindo-se o processo até chegar à solução pretendida.

Um outro grupo de raparigas a AAlex (nome fictício) usou uma *estratégia iconográfica*, com *estudo numérico associado* (figura e esquemas da página seguinte). No diálogo havido com o grupo, uma estudante argumentou da seguinte maneira:

AA: *É assim... A gente começou e estávamos errados... pois duas patas mais duas patas tínhamos já duas galinhas e vimos que se somássemos até ao fim não ia chegar, pois dava mais do que 18 animais. Mas como para o porco são quatro, assim já não ocupava tanto e é assim que se vê!... Por exemplo, têm de ter 18 animais no total, se tivéssemos 4 porcos, como cada porco tem quatro patas, que são o dobro das galinhas (temos também de pensar nisto), já são 16 patas para os porcos e depois tínhamos de ter muitas galinhas para dar 52 e não ultrapassar o número de animais... Estamos a pensar bem, não estamos?*

Inv: *Sim... e se escrevessem esses exemplos e pensassem neles para ver qual serviria?*

AA: *Está bem vamos pensar nisso.*

A tomada de consciência do erro e a liberdade em o expressar é um aspecto importante a reter neste diálogo, indo ao encontro do que se referiu no capítulo da fundamentação teórica, segundo capítulo, em 4.4. Aprendizagem por tentativa e erro (p. 70). Por outro lado, este grupo resolveu o problema considerando apenas as patas de uma espécie de animal, neste caso, as galinhas, conjugando posteriormente com o número de animais referido no enunciado do problema. Numa segunda tentativa de realização do problema o grupo incluiu o outro animal, concentrando a atenção nas patas e simultaneamente no número de animais para chegar à solução correcta.

Na pesquisa realizada estes estudantes usaram as letras auto-explicativas "P" para designar o número de porcos e "G" para as galinhas e concluíram ainda que nunca podia ser um número ímpar de porcos, pois "*ia dar um número ímpar de animais*[103]", como mostra a figura e o esquema seguintes.

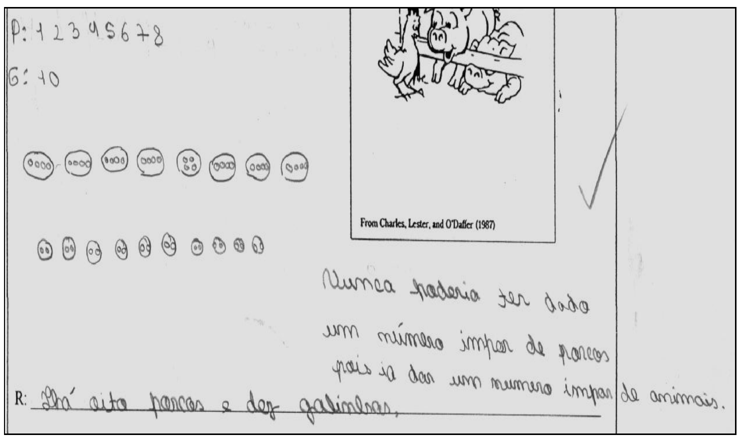


Figura 29: Uso da estratégia iconográfica por tentativa e erro, com reflexões adicionais - "*Animais na quinta*"

Este grupo ao pesquisar até encontrar a solução parece estar a trabalhar implicitamente com estes dois esquemas:

Esquema 1			*Esquema 2*
			Animais **P**atas
Nº de Patas	**P**x4+**G**x2=52	**P**=Nº de porcos	4x ______ = ______
Nº de Animais	**P**+**G**=18	**G**=Nº de galinhas	2x ______ = _____
			18 52

[103] Possivelmente relacionando este problema com um resolvido no 3º e 4º anos de escolaridade numa actividade de investigação sobre a soma e o produto de dois números pares, de um número ímpar por um par ou por dois números ímpares.

Um grupo misto (APJ) desenvolveu com a investigadora o seguinte diálogo:

APJ: *Como as galinhas têm duas patas, fizemos 2X10.*

Investigadora (Inv): *Foi logo a primeira tentativa para resolverem o problema?*

APJ: *Não. Primeiro fizemos rodinhas no caderno a representar os animais. Depois em cada rodinha pusemos um conjunto de patas que cada animal tem, dois no caso das galinhas e quatro no caso dos porcos. E depois somamos para ver se dava 52 patas.*

Inv: *Então fizeram primeiro o desenho e depois os cálculos para ver qual era a solução?*

APJ: *Sim, ainda tivemos de fazer vários casos até chegarmos à solução: são 8 porcos e 10 galinhas.*

Este grupo, tal como o anterior, tem como referência os animais, neste caso *as galinhas*, usando basicamente uma *estratégia iconográfica* e por tentativa e erro descobriu a solução para o problema. Nesta estratégia de resolução e após a descoberta da solução ainda usou a expressão numérica: 8x4+10x2 e resolveu-a confirmando o número total de patas dos animais: 32+20=52 (figura seguinte).

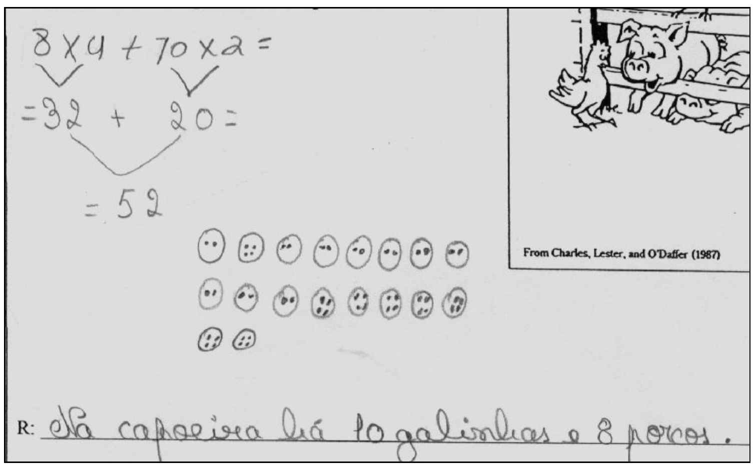


Figura 30: Uso da estratégia iconográfica, com validação da expressão numérica - "*Animais na quinta*"

Outro grupo de estudantes (ARC) usou uma *estratégia pictórica*, com "desenhos" próprios simbolizando as patas dos animais, mas utilizando um valor de referência, pelo método "*da metade*" para iniciar *a estratégia de tentativa e erro ajustada*, como se pode constatar no diálogo que a investigadora teve com o grupo (figura seguinte).

No diálogo desenvolvido com os elementos do grupo, foi possível descortinar os pensamentos aplicados na resolução do problema.

ARC: *Nós fizemos desenhos e concluímos que havia 8 porcos… e dava, 32 patas e 10 galinhas que dava 20 patas; ora 20 com 32 dá 52, que são as patas...*

Inv: *Mas como é que fizeram isso? Como chegaram rapidamente a essa conclusão?*

ARC: *Nós fomos dividir 18 por dois e deu nove e então fizemos nove porcos e nove galinhas. Mas fizemos as contas 4X9=36 e 2X9=18; ora dava 54 patas e não podia ser. Então vimos que sobravam duas patas (54-52=2), então pensamos que como havia duas patas a mais deveria haver um porco a mais e pensamos em 8 porcos e 10 galinhas, para serem 18 animais.*

Inv: *E foram verificar se estava certo com as contas ou com o desenho?*

ARC: *Primeiro fomos fazer as contas e em seguida aproveitamos o desenho, tiramos as patas de um porco e pusemos as patas de mais uma galinha.*

Inv: *E assim chegaram a esta solução?*

ARC: Sim, gostamos muito.

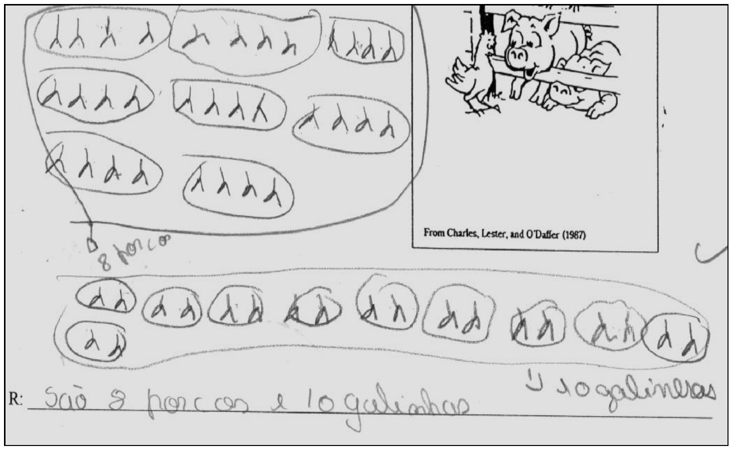


Figura 31: Uso da estratégia pictórica por tentativa e erro ajustado ao valor médio - "*Animais na quinta*"

Este grupo usou o método de tentativa e erro ajustado pela referência inicial do "valor médio" (18:2=9). Como eram 18 animais, dividiram por dois, para a partir de um valor médio de referência experimentarem um processo de resolução, usando como primeira tentativa: *9x2=18 e 9x4=36*. Neste caso o número de animais estava correcto, mas ao conjugarem com o outro dado, *as patas*, o número definido no enunciado não era validado, pois existiam patas a mais, sobrando 2. Como aconteceu isto concluíram que o número de animais estava incorrecto e reformularam-no, verificando que retirando apenas uma galinha (duas patas), o número de patas mantinha-se, mas o número de animais não. Então concluíram que deveria haver menos porcos do que galinhas, pois aqueles têm mais patas e ao conjugar as duas "variáveis": *animais e patas* alcançaram o resultado correcto.

Um outro grupo usou uma *estratégia iconográfica*, revelada na figura seguinte (Figura 32, p. 334) e de forma organizada, separou os animais: *galinhas* e *porcos* com representação em grupos: em círculos pequenos, de dois traços cada, simbolizando as 2 patas de cada uma das galinhas e em grupos de quatro traços simbolizando as 4 patas de cada um dos porcos. O grupo usou o método de tentativa e erro, com algum controlo numérico, para chegar ao resultado pretendido, mas desconhece-se também o número de tentativas realizadas. Para além de surgir a representação iconográfica ainda aparece a anotação numérica 32+20=52, para validar o resultado.

Provavelmente este grupo desenhou círculos no espaço destinado *às galinhas* e outros no espaço para *os porcos* e depois foi colocando os traços correspondentes ao número de patas de cada um dos animais validando os resultados mentalmente e/ou em folha auxiliar até chegar à solução correcta. Tal como este, um outro grupo usou uma *estratégia iconográfica* similar, destacando os dados fundamentais do problema, número de animais e número total de patas e os cálculos: 8x4=32; 10x2=20; 32+20=52.

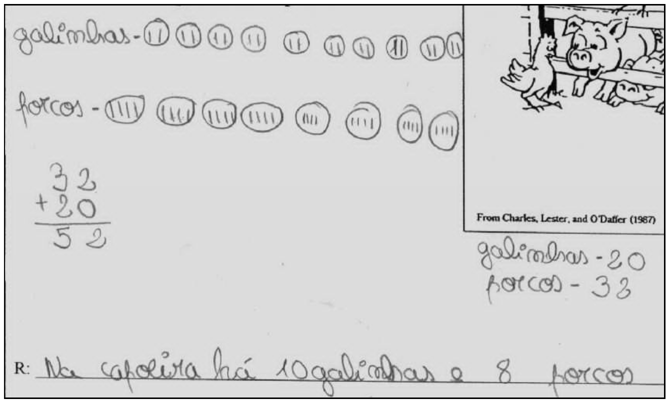


Figura 32: Uso da estratégia iconográfica completada com dados numéricos – "*Animais na quinta*"

Um outro grupo destacou na resolução os dados fundamentais do problema, *18 animais e 52 patas* e apresentou uma *estratégia iconográfica*, representando em duas colunas as patas dos porcos e das galinhas (Figura 33). Na primeira coluna "desenharam" grupos de 4 "bolinhas" para simbolizar as patas de cada um dos porcos e na outra coluna grupos de 2, representando as patas de cada uma das galinhas. No final da apresentação sequencial deste processo o grupo expôs correctamente a solução, não se conseguindo vislumbrar o número de tentativas realizadas ou processos adicionais de resolução.

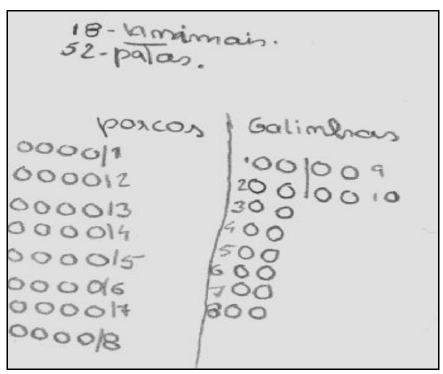


Figura 33: Uso da estratégia iconográfica por tentativa e erro – "*Animais na quinta*"

Tal como aconteceu com outro grupo de três estudantes, o grupo seguinte (RHP) utilizou uma *estratégia iconográfica* baseada na "metade", com duas *tentativas numéricas de validação do resultado* (Figura 34, p. 335). Neste caso, os estudantes usaram grupos de 4 pontos para representar as patas de cada um dos porcos e de 2 pontos para simbolizar as patas de cada uma das galinhas e realizaram duas tentativas para conseguir atingir, com êxito, a solução.

Os estudantes deste grupo (RHP, nome fictício, resultante da conjunção das iniciais dos nomes de cada um dos estudantes) expuseram os procedimentos utilizados.

RHP: *Foi assim... Primeiro, como são 18 animais e os porcos têm 4 patas, pensamos em 9 porcos e 9 galinhas*

Inv: *Mas por que é que começaram por 9 porcos e 9 galinhas?*

P: *Foi uma estimativa que fizemos.*

Inv: *E essa estimativa como surge?*

P e R: *Vem de serem 18 animais...*

R: *Então 9X4 dá 36 e 9X2 dá 18 e então dava 54 patas. Fizemos outras experiências, como 9 porcos e 8 galinhas… mas também não dava... Depois o He esteve a fazer umas experiências e deu-lhe 32 patas dos porcos e 20 patas das galinhas. Fizemos os cálculos e vimos que o He tinha razão... Eram afinal 8 porcos e 10 galinhas.*

Inv: *Como pensaste, He*?

H: *Lembro-me de ter realizado um problema parecido, na primária.*

Inv: *E gostaste de realizar esse problema?*

H: *Sim.*

Inv: *Gostas de resolver problemas?*

H: *Sim.*

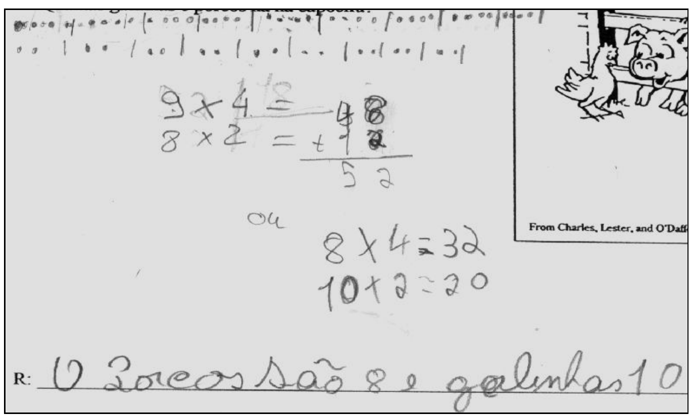


Figura 34: Uso da estratégia iconográfica ajustada ao valor médio com validação numérica da solução – “*Animais na quinta*”

Este grupo usou uma estratégia idêntica ao do grupo seguinte, mas o valor de referência foi encontrado por estimativa e não por um cálculo linear (metade de 18). A partir de determinada altura da resolução, este grupo recordou processos usados no 1º ciclo do ensino básico e aplicou-os com êxito.

Pelas indicações registadas tudo indica que um grupo misto também usou uma *estratégia iconográfica* baseada na “metade”, com duas *tentativas numéricas de validação do resultado*, sendo a primeira com os valores 9 porcos e 9 galinhas. Neste caso, os estudantes usaram, sequencialmente, grupos de 4 pontos ou pequenos riscos para representar as patas de cada um dos porcos e de 2 riscos para simbolizar as patas de cada uma das galinhas e realizar duas tentativas para conseguir atingir, com êxito, a solução (Figura 35).

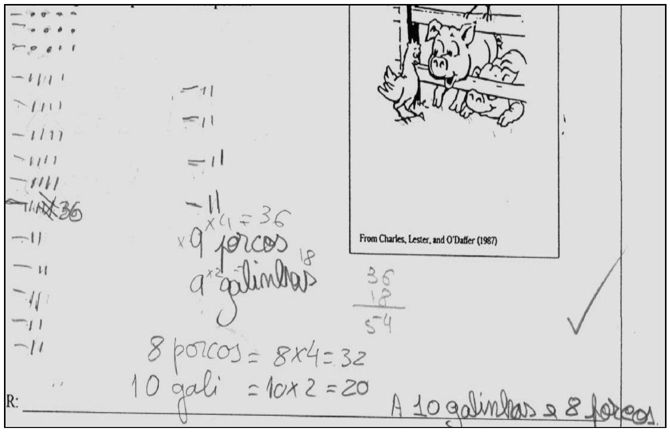


Figura 35: Uso da estratégia iconográfica ajustada ao valor médio com validação numérica "*Animais na quinta*"

Um outro grupo de duas estudantes usou uma *estratégia iconográfica*, representando as patas dos porcos com 4 traços e as das galinhas com dois traços (figura seguinte). Em espaços diferentes o grupo conjugou os dados das patas de cada um dos animais e conseguiu, com êxito, indicar a solução, não se descortinando as tentativas realizadas.

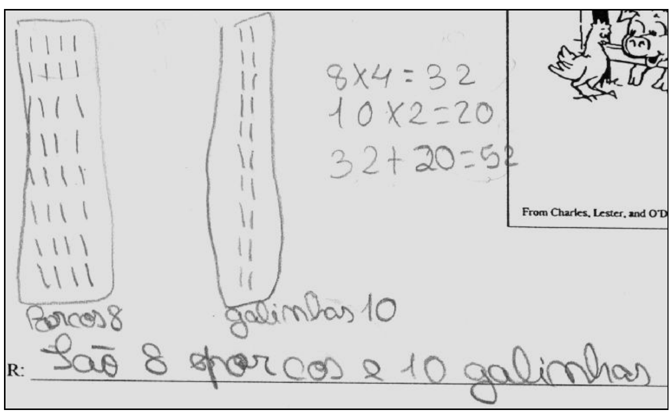


Figura 36: Uso da estratégia iconográfica com validação numérica – "*Animais na quinta*"

Um grupo de raparigas da turma B (AR) chamou a investigadora para reflectir alto sobre a resolução do problema.

AR: *Se forem cinco galinhas e como cada uma tem duas patas é igual a dez.*

Inv: *Sim e então?*

AR: *E agora se forem dois porcos e como cada porco tem quatro patas é igual oito. Dez mais oito é igual a 18...*

Inv: *E então? Esse número o que é?*

AR: *Ah! É o número de patas... Não pode ser!...*

Inv: *Mas podem continuar, pois o vosso raciocínio parece estar certo… O que é preciso é distinguir patas de animais, não é?*

AR: *Pois é. Vamos pensar mais...*

E continuaram o raciocínio, apresentando uma *estratégia pictórica*, usando uma "bolinha" com dois traços para simbolizar uma galinha e as duas patas de cada uma e cada "bolinha" com quatro traços para representar cada porco, com as suas quatro patas (figura seguinte). Como não surgiram notações numéricas não se consegue descortinar o número de tentativas realizadas.

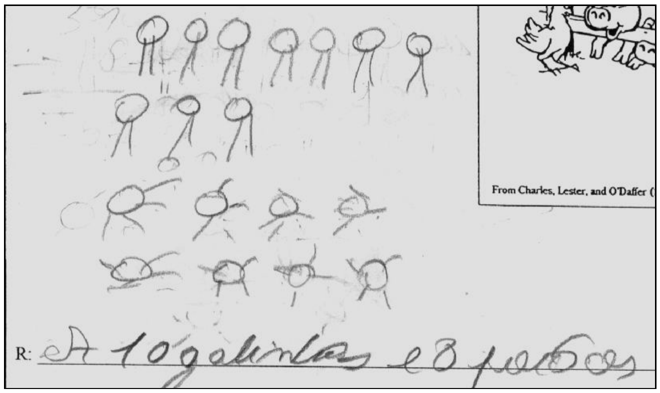


Figura 37: Uso da estratégia pictórica com solução correcta – "*Animais na quinta*"

Um grupo de raparigas apresentou correctamente a solução, apenas resolvendo algumas operações, mas não se descortinou o processo usado na resolução:

10x2=20 patas
8x4=32 patas
32+20=52 patas

Um outro grupo de estudantes (onde se integrava Tig, nome fictício, um estudante com bom desempenho em Matemática) usou apenas uma *estratégia pictórica*[104], "desenhando" as 52 patas dos animais[105] e por tentativa e erro fez combinações de 4 e de 2 patas, simbolizando, respectivamente, os porcos e as galinhas.

Ao usar esta *estratégia pictórica*, como mostra a figura seguinte e o *método de tentativa e erro*, o grupo trabalhou basicamente com um dado do problema: as patas dos animais, desenhando 52. Numa primeira fase da resolução ainda pensaram sobre o outro dado, o do número de animais, validando a solução*, etapa a etapa*, mas momentaneamente fixaram-se apenas num dado e aceitaram a solução encontrada, que estava incorrecta.

---

[104] Registe-se que a *estratégia pictórica* distingue-se da *estratégia iconográfica*, pela primeira representar de forma "mais próxima" a realidade e a segundo apenas usar ícones (pontos, círculos ou riscos) para a representar, revelando esta última maior poder de abstracção e mais distanciamento da realidade concreta.

[105] É curioso referir que os estudantes não diferençaram o tipo de patas das galinhas e dos porcos, tendo usado a mesma simbologia para os dois animais.

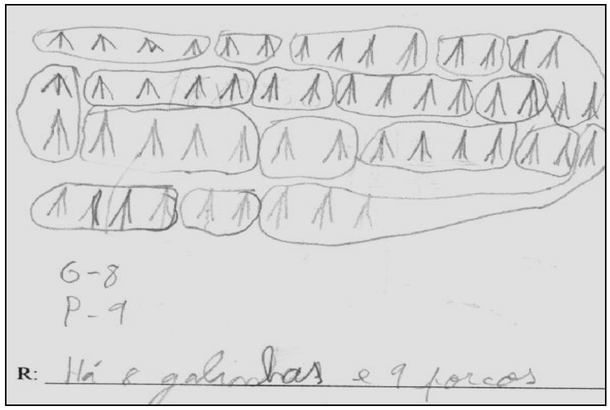


Figura 38: Uso da estratégia pictórica com solução incorrecta – “*Animais na quinta*”

<u>Reflexões/Conclusões genéricas</u>

A resolução de problemas de esquematização revela-se crucial no aprofundamento de conhecimentos relacionais, quer na mobilização de uma ou mais “variáveis”, quer no desenvolvimento de estratégias pessoais, designadamente, na criação e aplicação de um modelo que oriente os estudantes na descoberta de uma solução.

Do acompanhamento realizado nas duas turmas pode-se concluir que na resolução deste tipo de problemas existem várias estratégias que indiciam diferentes níveis de desenvolvimento. A um *nível básico 1* situa-se a exploração da *estratégia pictórica, incompleta* em que o estudante se fixa apenas num dos dados (numa das variáveis do problema), provavelmente na quantidade maior, neste caso, nas patas dos dois animais, raciocinando de forma concreta e manipulatória. Desenha e conta todos os elementos, usando ainda *o método de tentativa e erro*, não conseguindo atingir a solução correcta.

Ainda neste *nível básico 1*, situa-se também a exploração da *estratégia pictórica completa* na qual o estudante consegue usar os dois dados do problema (as duas “variáveis”, patas e animais), normalmente iniciando a manipulação por um deles, neste caso, pelas patas dos animais e, de forma experimental e concreta, usa o segundo dado: o número de animais para validar, momento a momento, a solução intermédia encontrada até chegar à solução correcta. Aconteceu isto com dois grupos da turma B, num dos casos foi usado o *método de tentativa e erro*, *sem valor inicial de referência* e no outro caso a estratégia *de tentativa e erro com ajustamento*, com referência inicial pelo valor médio do número de animais (com ajustamento pelo valor médio), por cálculo numérico (18:2=9) ou por estimativa. Relembre-se que a investigação iniciou-se por um projecto de âmbito interdisciplinar, relacionado com a Matemática, a Educação Visual e as Tecnologias de Informação e Comunicação, reconhecendo-se que a aprendizagem matemática, sobretudo em idades elementares, encontra-se intimamente ligada à educação visual, na procura de desenhos e esquemas visuais próprios que expressem o raciocínio do estudante e as estratégias pessoais de resolução de um problema.

A um *nível básico 2* situa-se a *estratégia iconográfica* pela qual o estudante manipula graficamente um dos dados do problema, desenhando ícones (pontos, riscos ou círculos) para representar as patas dos animais e manipula numericamente um outro dado, neste caso, o número de animais, validando, momento a momento, a solução intermédia encontrada até chegar à solução correcta. Este tipo de abordagem foi usado pela maior parte dos estudantes da turma B (oito grupos) e por três da classe A.

Em dois grupos foi explorado, *em primeiro lugar, o número de galinhas* e posteriormente a solução temporária era validada pelo outro dado, neste caso, o número de animais. Em quatro grupos os estudantes utilizaram *sempre os dois dados* na resolução do problema, o número de patas e o número de animais, realizando o controlo numérico nas duas expressões implicitamente criadas (2xG+4xP=52 e P+G=18, representando P o número de porcos e G o número de galinhas); um grupo usou como primeira referência os animais e pela estratégia *tentativa e erro com ajustamento* pelo "*valor médio*", calculado *por estimativa*, conseguindo chegar à solução correcta; um outro grupo explorou também como primeira referência os animais e pela estratégia *tentativa e erro com ajustamento* pelo *valor médio*. Os três grupos da turma A usaram basicamente esta última estratégia.

A um *nível de abstracção 1*, localiza-se uma *estratégia numérica*, em que os estudantes manipulam os dados numericamente, usando eventualmente as tabuadas respectivas, neste caso, a dos 4 e do 2, numa primeira etapa verificando um dos dados, neste caso, o número de patas e, posteriormente, validando o segundo dado, o número de animais ou, na folha de cálculo, por subtracções sucessivas do 4 e do 2, respectivamente, usada por um grupo da turma B e por um grupo da turma A.

A um *nível de abstracção 2* usa-se uma estratégia pré-simbólica, baseada numa organização tabelar, por exemplo, na folha de cálculo, através da qual o estudante dispõe os dados de forma organizada semelhante à que se apresenta e desenvolve as experiências necessárias até alcançar a solução pretendida:

Patas Nº	Animais Nº	Nº de Galinhas	Nº de Porcos
Fórmula 1	Fórmula 2	Valor 1	Valor 3
Fórmula 1	Fórmula 2	Valor 2	Valor 4
Fórmula 1	Fórmula 2	…	…
Fórmula 1	Fórmula 2	Solução pretendida	

A um outro *nível de abstracção 3*, aplica-se uma *estratégia simbólica*, que requer conhecimentos relacionados com a resolução de um sistema de duas equações a duas incógnitas baseada num esquema semelhante ao assinalado. Nenhum estudante das duas turmas usou esta estratégia.

Nº de Patas	Px4+Gx2=52	P=Nº de Porcos
Nº de Animais	P+G=18	G=Nº de galinhas

De uma maneira geral, na turma A, os estudantes revelaram dificuldades em organizar e resolver o problema na folha de cálculo. Neste caso tinham de conjugar *a folha*, a organização, com *o cálculo*, na obtenção dos resultados numéricos.

Este problema parece revelar-se ajustado ao nível etário dos estudantes, pois a maior parte deles conseguiu encontrar, com êxito, uma solução. Tudo indica ainda que a folha de cálculo proporcionou outras abordagens e provavelmente um "salto" no nível de desenvolvimento do estudante, mas numa primeira abordagem, não é a melhor opção, principalmente ao levar-se toda a turma para a sala de Informática, pois, havendo condições, na sala de aula, deveriam permanecer nela, de modo a utilizar-se um ou dois computadores para alguns grupos terem a possibilidade de experimentar esta ferramenta e descobrir a solução do problema, sendo acompanhados e apoiados nas suas experiências. Deste modo, a folha de cálculo não se apresentaria como a primeira ferramenta e suporte estratégico para resolver a situação proposta, mas como mais um meio auxiliar de cálculo para alcançar, com êxito, a solução. Apesar dos estudantes terem tido recomendações iniciais para usarem diferentes estratégias, a maior parte dos estudantes da turma A reconheceu que a folha de cálculo seria o melhor instrumento de trabalho, pois teriam de pensar mais, e, por tal motivo, preferiram descobrir a resposta através desta ferramenta tecnológica. Tem-se a convicção que esta experiência com a folha de cálculo permitiu perceber que os estudantes exploraram esta ferramenta como meio auxiliar de cálculo e ferramenta organizadora da informação, pois, como referiram alguns, os resultados ficavam registados no ecrã e tinham mais hipótese de "*ver os números, realizar mais experiências e pensar melhor*". Adicionalmente pode-se ainda afirmar que na turma A, surgiu mais uma estratégia diferente das usadas na classe B, pois um grupo a partir da decomposição da quantidade do número total de patas realizou subtracções sucessivas até chegar ao resultado pretendido. Assim, a folha de cálculo proporcionou a abertura para outras estratégias de resolução do problema, naturalmente mais abstractos, mas que requeriam, eventualmente, a dinamização de uma fase anterior em que os estudantes estivessem "mais soltos" para resolver o problema, possibilitando a exploração e a experimentação pictórica, iconográfica e numérica, como aconteceu na turma B. Numa fase posterior, deveria ser, então, utilizada a folha de cálculo para consolidar a resolução do problema numa perspectiva de um melhor entendimento dos processos usados, na promoção da organização do pensamento, na consolidação da compreensão do problema e, consequentemente, na orientação para uma resolução mais organizada e abstracta do problema. Como acontece com a exploração didáctica de materiais, tudo indica que existe um tempo próprio para a utilização da folha de cálculo na resolução de determinado tipo de problemas de esquematização.

Como se pode constatar, na turma B, a maior parte dos grupos resolveu o problema a um nível básico, mas também três grupos da turma A o fizeram, tendo Joe (nome fictício) referido o seguinte: "*só sei resolver à primária, como fazia com outros problemas, quando estava com a professora… da outra Escola*", reconhecendo que o tipo de resolução implementada era básico.

Pela análise das estratégias desenvolvidas na resolução destes dois problemas de esquematização, com utilização de estratégias iconográficas, sem e com ajustamento ao valor médio e com a exploração da folha de cálculo, utilizando ou não fórmulas, e com a estratégia baseada nas subtracções sucessivas, pode-se concluir que os estudantes da turma A desenvolveram também estratégias diferenciadas na descoberta da solução deste problema e a folha de cálculo não impediu que o fizessem. Refira-se ainda que, a turma B, usou basicamente três tipos de estratégias, gradualmente de um nível mais concreto para o mais abstracto, designadas por: pictórica, iconográfica e numérica. Na turma A, nenhum estudante ou grupo utilizou a estratégia pictórica para resolver o problema proposto e basicamente explorou a estratégia iconográfica, numérica e pré-simbólica.

Sexto ano de escolaridade. Na resolução do problema "*Respirar e descansar*" a maior parte dos estudantes da turma A (67%) e da turma B (56%) respondeu correctamente à primeira questão de múltipla escolha, relacionado com os movimentos da foca para "respirar", à superfície e "descansar", debaixo de água. Os estudantes apresentaram justificações diferenciadas, como já se registou anteriormente na *tese 2 da investigação*, baseadas fundamentalmente num(a): a) modelo pictórico e numérico; b) regularidade numérica; c) modelo matemático simples, com a explicitação da linguagem corrente em dois casos.

A título de exemplo, apresentam-se várias estratégias criadas e desenvolvidas, na folha de trabalho, pelos estudantes da turma A e da B.

<u>Turma A</u> (apresentam-se outras estratégias para além das expostas anteriormente, na fundamentação da *tese 2*, nas figuras 21, 22 e 23 das páginas: 285 e 286.

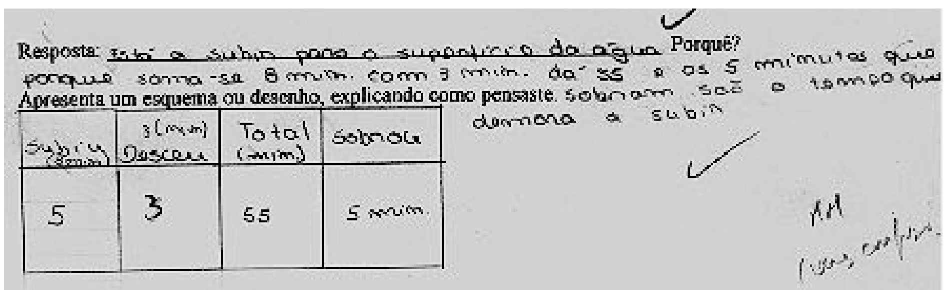


Figura 39: Uso de uma tabela linear, com identificação do período, 11min - "*Respirar e descansar*"

Os estudantes identificaram *o dormir* como a foca estando *debaixo de água*.
A estudante apresenta a tabela *seguinte e refere:*

"há aqui uma regularidade professora – É sempre 8+3.
Como 11x6=66, então tem de ser 11x5=55 e sobra 5, por isso a foca está debaixo de água"

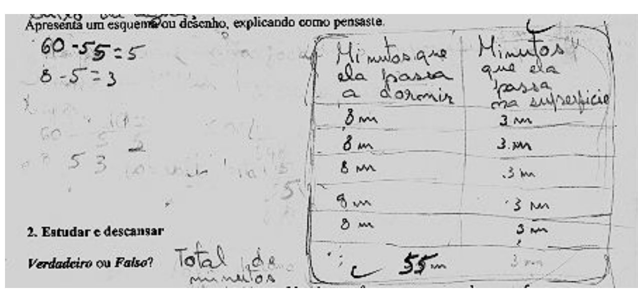


Figura 40: Uso de uma tabela com descoberta da regularidade e do período de 11 minutos (11 min) "*Respirar e descansar*"

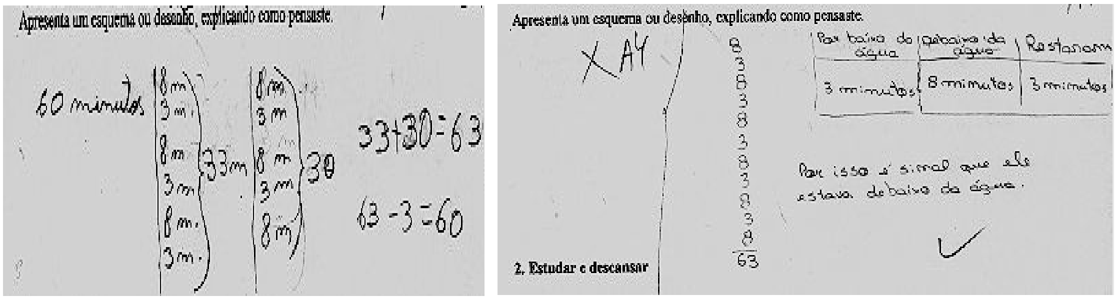


Figura 41: Uso de estratégia numérica sequencial, com identificação da regularidade numérica *"Respirar e descansar"*

Dois estudantes com algumas facilidades na matemática apresentaram os seguintes esquemas de resolução (um pictórico e outro esquemático):

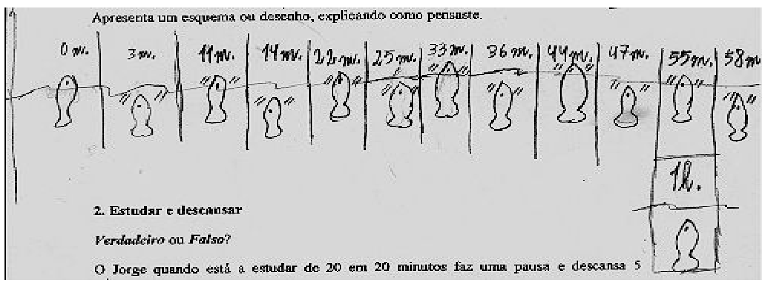


Figura 42: Uso de estratégia pictórica – "*Respirar e descansar*"

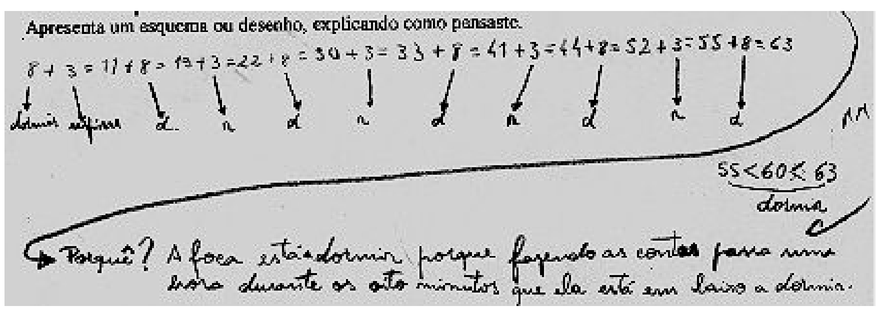


Figura 43: Uso de um esquema associado ao reconhecimento de regularidades, com notação sequencial "incorrecta" – "*Respirar e descansar*"

Este último esquema denuncia que o estudante raciocinou e usou um algoritmo com um cálculo próximo do da "programação", pois utiliza como *acumulador*, o resultado anterior e uma *quantidade* de cada vez, ou "+8" ou "+3" que funcionaram, alternadamente, como *alimentador*es até chegar ao resultado pretendido. Para simplificar a representação do seu pensamento o estudante utiliza uma notação incorrecta.

Na <u>Turma B</u> os estudantes também usaram diversas estratégias, diferentes das exploradas pela classe A, sendo apresentadas, de seguida, algumas propostas de resolução desenhadas e assinaladas pelos estudantes.

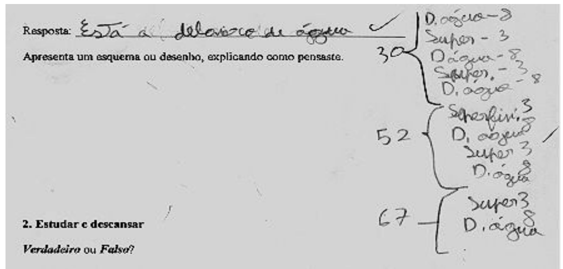


Figura 44: Uso de um esquema – *"Respirar e descansar"*

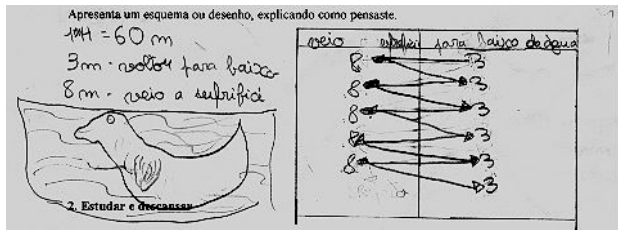


Figura 45: Uso de estratégia mista: pictórica e esquemática – "*Respirar e descansar*"

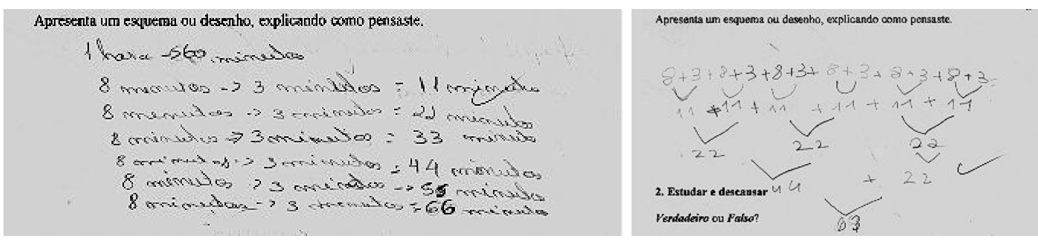


Figura 46: Uso de regularidade e de um modelo explicitado - "*Respirar e descansar*"

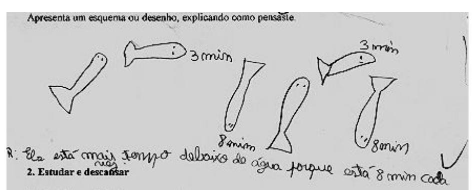


Figura 47: Uso de uma estratégia pictórica – "*Respirar e descansar*"

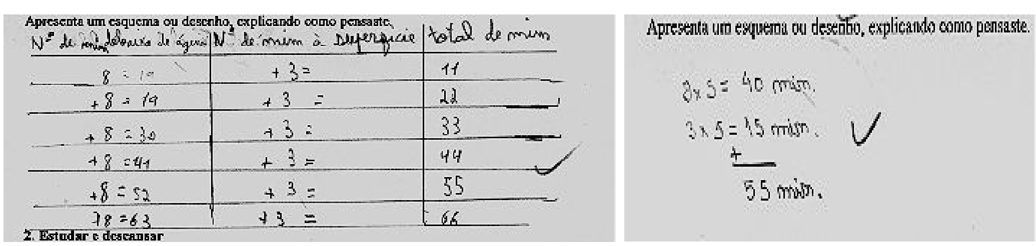


Figura 48: Uso de regularidades e dos operadores "+3" e "+8" – "*Respirar e descansar*"

A proposta de resolução deste problema de esquematização revelou-se importante para o estudante sob o ponto de vista curricular, dado que foi possível concatenar conhecimentos das Ciências da Natureza com os de Matemática, permitindo nesta última disciplina um estudo relacional "dinâmico" de dois movimentos regulares da vida da foca: *o respirar e o descansar* com outro elemento fundamental associado a esses movimentos regulares: *o tempo*. A existência de dois períodos distintos, de 3 minutos e 8 minutos, respectivamente, relacionados com o *respirar*, à superfície e *o descansar*, debaixo de água possibilitou ao estudante a identificação e a mobilização de duas "variáveis": o tempo e o espaço; o tempo gasto a respirar em 3 minutos e para descansar em 8 minutos, relacionando, respectivamente, com o local onde se encontrava a foca: *a respirar*, à superfície ou a *descansar*, debaixo de água.

Esta proposta de estudo da vida animal possibilitou uma maior mobilidade de pensamento, através do estabelecimento de relações entre as duas "variáveis". O estudante teve a possibilidade de "observar" e analisar a regularidade do fenómeno, de elaborar um esquema mental de resolução, integrando e conjugando toda a informação disponível, permitindo delinear um modelo que induzisse o fenómeno, favorecendo o desenvolvimento de conhecimentos relacionados com a *terceira aproximação à álgebra*.

Também no final do 6º ano de escolaridade foram resolvidos dois problemas, um na sala de aula: "*a cabra!...*" e um outro problema de esquematização, o das "*as galinhas!...",* este último apresentado para trabalho de casa, "*in a open way*", numa perspectiva complementar dos conhecimentos adquiridos na Escola.

Como se pode constatar, a maior parte dos estudantes da turma A utilizou processos bastante variados e resolveu, com êxito, as principais questões propostas.

Em seguida, apresentam-se os resultados e estratégias implementadas pelos estudantes das duas turmas, na resolução do problema de esquematização "*galinhas!...*".

Solicitado pela investigadora e pela professora responsável e/ou a pedido do estudante, alguns elementos da família apoiaram o desenvolvimento e a resolução da actividade, o que foi positivo e significativo para o estudante, fomentando a aproximação e o diálogo entre os elementos da família.

Contudo, a maior parte dos familiares optou por ensinar o estudante a resolver *formalmente* o problema proposto, através de um sistema de três equações a três incógnitas.

Registe-se ainda que nos comentários solicitados à resolução desta actividade um(a) explicador(a) de vários estudantes das duas turmas enviaram a seguinte informação (igual para todos os estudantes que têm este(a) explicador(a): "*Uma das maneiras de resolver este problema é por um sistema de três equações a três incógnitas. Pelo método da substituição fui resolvendo as equações até chegar a uma equação de 1º grau a uma incógnita (z) depois novamente pelo método da substituição fui descobrindo o y e o x. Como este método não está ao alcance de um estudante do 6º ano tive que naturalmente pedir ajuda. A ajuda que tive deu-me para perceber a essência do problema*" (cinco estudantes escreveram esta informação nos comentários).

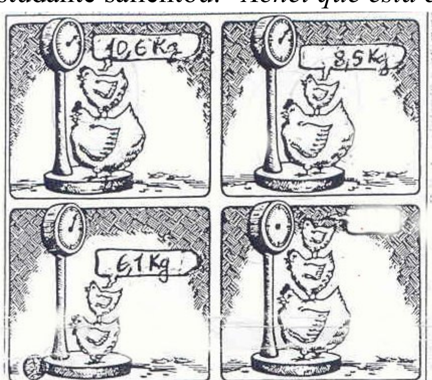
Alguns estudantes solicitaram ajuda e outros não o fizeram, tentando encontrar sozinhos a solução do problema. Os dois estudantes que responderam incorrectamente, com a ajuda da avó e do pai, apresentaram, respectivamente, os seguintes comentários[106]: "*Era difícil, mas era de aventura e eu gostei*"; "*Achei esta actividade interessante e boa para treinar o cálculo mental*".

Apesar de se terem compilado todos os resultados correctos e as estratégias associadas, com e sem ajuda, apenas se expõem os processos imaginados e desenvolvidos pelos estudantes, sem ajuda, pois a folha de trabalho (anexo 7) continha duas questões, a saber: fizeste com ajuda? Com quem? Tendo sido, assim, possível descortinar se o estudante realizou, ou não, o problema, com ajuda.

Resultados correctos <u>sem ajuda</u> (usados pelos estudantes da turma A)

Os cinco estudantes que resolveram sozinhos o problema apresentaram as seguintes estratégias:

Um estudante usou basicamente dois espaços, com exploração de uma estratégia mista: conjugação da linguagem corrente com dados numéricos criando expressões relacionais, num primeiro membro com texto e no segundo membro um valor numérico. O estudante salientou: "*Achei que esta é uma actividade interessante*".



Grande + Média = 10,6Kg
Grande + Pequena = 8,5Kg
Média + Pequena = 6,1Kg
Média =[107] *Pequena + 2,1*

Pequena = Média – 2,1
6,1=(Pequena +2,1)+Pequena=2xPequena+2,1

6,1 – 2,1 = 4   4:2 = 2 $\rightarrow$ *Pequena*
2 + 2,1 = 4,1 $\rightarrow$ *Média*
10,6 – 4,1 = 6,5 $\rightarrow$ *Grande*

Neste tipo de resolução a estudante *interpreta* cada um dos quadros figurativos e *representa-os* segundo uma lógica de sistema, mas designando as "variáveis" por nomes

---

[106] Será que os familiares também têm estes pensamentos?

[107] Subtraindo a 2ª à 1ª equação obteve o resultado: "*Média – Pequena=2,1*" ou mais provavelmente pensou que a diferença entre a massa da galinha média e da pequena é de 2,1 ou a massa da galinha média é a massa da galinha pequena + 2,1.

auto-explicativos com significado para a estudante. Seguindo esta estrutura de pensamento, resolve as equações em causa pela via intuitiva e compreensiva do fenómeno exposto, aplicando expressões de valor equivalente e, por isso mesmo, "resolvendo equações" por conteúdo (por exemplo: *média=pequena+2,1* ou *pequena=média-2,1*).

Uma estudante usou uma estratégia numérica, apoiada visualmente pelos desenhos e com critérios muito bem definidos. Esta estudante escreveu: "*Logo que se olha para esta ficha parece difícil, mas depois de observarmos bem as gravuras e de pensarmos conseguimos fazer com a maior das facilidades!*".

Grande+ Media + Grande+Pequena= 19,1
10,6 + 8,5 = 19,1
2Grandes + Média+Pequena=19,1 | *Galinha grande*
2Grandes + 6,1=19,1

19,1 – 6,1 = 13

13:2 = 6,5

Grande+Média=10,6 | *Galinha média*
10,6 – 6,5=4,1

Grande+Pequena=8,5
8,5 – 6,5 = 2 | *Galinha pequena* *6,1 + 6,5 = 12,6* | *três galinhas*

Esta estudante estruturou a resolução do problema usando implicitamente determinadas expressões algébricas, mas "mascaradas" pelos números, pois quando teve de explicar, no quadro negro, aos seus colegas de turma, teve necessidade de universalizar e usar letras e explorou as seguintes expressões.

2G + 1M + 1P = 19,1 (a massa das duas galinhas grandes e a da média e pequena, usando os dois quadros sequenciais da figura).

2G + 1M + 1P – 1M – 1P = 2G =13 (usou o terceiro quadro com valores numéricos que informava sobre as massas da galinha média e pequena e retirando este valor à expressão anterior restou-lhe a massa de duas galinhas grandes).

2G:2 = 6,5 (determinou a massa de uma galinha grande)

.. a partir deste valor tudo se apresentou mais simples... – referiu a estudante

Um outro estudante conseguiu expor aos seus colegas mais um método diferente, terminando por referir: "*Foi uma actividade em que tive bastantes dificuldades, mas após* *alguns cálculos e raciocínios consegui obter a resposta. Foi um trabalho difícil, mas interessante*".

Na explicação aos colegas, no quadro negro, expôs as seguintes expressões e comentários:

10,6 – 8,5 = 2,1 → *usei os dois primeiros desenhos e calculei a diferença entre a galinha média e a galinha pequena*

6,1 – 2,1 = 4 → *com a ajuda do terceiro quadro calculei a diferença que tem a mais a galinha média e então calculei a massa de duas galinhas pequenas*

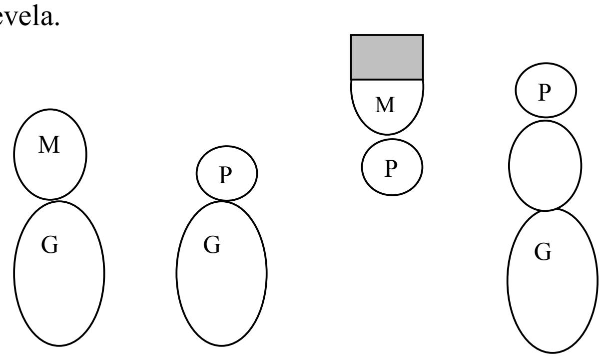
4:2 = 2 → *calculei a massa da galinha pequena*

e tudo se tornou mais simples... - referiu o estudante.

6,1-2 = 4,1 → *no terceiro desenho calculei a diferença da massa das duas galinhas: pequena e média com a massa da galinha pequena e determinei a massa da galinha média*

10,6 – 4,1 = 6,5 → *com a ajuda do primeiro desenho calculei a diferença da massa das duas galinhas: grande e média com a massa da galinha média e determinei a massa da galinha grande*

Para apoiar a explicação e ajudar um outro estudante a expor o seu raciocínio aos colegas a professora esboçou, no quadro negro, um esquema iconográfico simples como a seguir se revela.



10,6 *8,5*

10,6-8,5 = 2,1, que representa a diferença entre a quantidade de massa da galinha média e a da galinha pequena.

Como GMédia+GPequena=6,1, então 2GPequena=4 – GPequena=4:2=2[108]

O rectângulo assinalado indica a diferença numérica da quantidade de massa entre a galinha média e a galinha pequena, "sobrando" a massa de duas galinhas pequenas.

Uma outra estudante usou uma estratégia semelhante à explorada pelo estudante anterior, com apresentação de cálculos básicos, como os que se expõem e referiu: "*Acho que foi muito fácil. Se olharmos com atenção é menos complicada*".

10,6 – 8,5 = 2,1[109], realizou o algoritmo e referiu: "*É a diferença entre a média e a pequena"*

6,1 – 2,1 = 4 *4 : 2 = 2*

2 + 2,1 = 4,1 (massa da GMédia)

10,6 – 4,1 = 6,5 (massa da GGrande)

6,5 + 4,1 + 2 = 12,6 (massa das três Galinhas)

Um estudante também resolveu, com êxito, este problema e escreveu: "*Esta actividade é muito útil e está muito bem feita. Tive algumas dificuldades, mas consegui realizar a ficha*"

Apesar de um outro estudante ter dificuldades em expor o seu raciocínio desenvolveu processos de cálculo próprios, usando esquemas que passam a ser reproduzidos na íntegra.

$$\underset{\substack{\downarrow\\ M.}}{4{,}1Kg} + \underset{\substack{\downarrow\\ P.}}{2Kg} = 6{,}1Kg$$

$$\underset{\substack{\downarrow\\ G.}}{6{,}5Kg} + \underset{\substack{\downarrow\\ P.}}{2Kg} = 8{,}5Kg$$

$$\underset{\substack{\downarrow\\ G.}}{6{,}5Kg} + \underset{\substack{\downarrow\\ M.}}{4{,}1Kg} = 10{,}6Kg$$

$$\underset{\substack{\downarrow\\ G.}}{6{,}5Kg} + \underset{\substack{\downarrow\\ M.}}{4{,}1} + \underset{\substack{\downarrow\\ P.}}{2Kg} = 12{,}6Kg$$

[108] Reparar na simplicidade da notação usada pelo estudante, denunciando que está a compreeender, mas indiferente aos aspectos formais.

[109] Realizou o algoritmo.

Os estudantes da turma B não conseguiram usar outras estratégias diferentes da resolução formal sugerida pelo(a) explicador(a). Houve um estudante, com bom desempenho em Matemática (Tig, nome fictício) que foi apoiado pelo irmão e referiu que o tinha tentado apoiar daquela maneira formal, isto é, num sistema de quatro equações a três incógnitas, mas que não estava a compreender e que não sabia continuar a resolver a situação, comentando: "*foi o que me aconteceu na resolução do problema dos guarda-chuvas e dos bonés realizado no ano anterior, pensava bem, mas não conseguia continuar a encontrar a solução correcta!...*". De facto, este aluno (Tig), também na resolução do problema, no 5º ano de escolaridade, "*compras nos saldos*", começou por usar a estratégia 1[110] (Meyer, 1999), mas como não conseguiu alcançar uma solução explorou com o grupo outra experimentando, com êxito, uma resolução aritmética de tentativa e erro. No problema "*animais na quinta*" utilizou, juntamente com outro colega a estratégia mais básica: a estratégia pictórica, com resultado incorrecto (Figura 38, p.338), referida na fundamentação exposta no princípio desta *tese 6 de investigação.*

<u>Reflexões/Conclusões genéricas</u>

Pelo estudo exaustivo realizado às resoluções apresentadas pelos estudantes das duas turmas pode-se concluir que os estudantes da turma A não se inibiram de pensar, implementar e desenvolver estratégias pessoais, descortinando processos básicos ou mais simbólicos para atingir, com êxito a solução pretendida. Este tipo de problemas de esquematização requer tempo de observação, atenção aos dados, compreensão da mensagem em linguagem pictórica, gráfica e texto com que a situação é apresentada, tempo para questionar, partilhar ideias e estabelecer conexões, tempo para experimentar e validar relações… Estes procedimentos tendem a consolidar mais a aprendizagem, pois aliada aos mecanismos internos de cognição, juntam-se o prazer intrínseco e a satisfação pelo reconhecimento do êxito adquirido reclamado, tantas vezes, por vários autores (Piaget, 1965; Vygotsky, 1979, Caldas e Reis, 1999), dando sentido emocional e racional ao gosto de descobrir e progredir na aprendizagem.

Na turma B os estudantes revelaram dificuldades acrescidas na resolução deste último problema e o tempo de reflexão e de estímulo intelectual parece ter sido mais diminuto. Constatou-se que a maior parte dos estudantes não apresentou outras propostas de resolução, para além daquelas formais que os familiares ou explicadores indicaram.

Registe-se ainda que o Tig (nome fictício) com bom desempenho em Matemática e que gosta de desafios referiu à investigadora que tinha sido ajudado pelo irmão que anda na Universidade no curso de Matemática e que não percebeu os *x*´s, os *y*´s e os *z*´s com que o irmão lhe quis ensinar a resolver este problema.

"*Oh! Professora, está a ver ele ainda começou a explicar-me no caderno, mas era muito complicado para mim e eu desisti…*"

"*Como assim?*"- respondeu a investigadora.

E continuou:

---

[110] Termo usado em 9.3. no capítulo da revisão da literatura.

"*Então, durante estes anos gostavas tanto de resolver problemas e de encontrar soluções para estes desafios e agora desanimaste? Vamos lá pensar… é capaz de ser mais simples do que estás a pensar…*"

"*Não eu achei que é muito difícil, deste vou desistir…*" – respondeu o estudante prontamente.

Refira-se ainda que a professora substituta desta turma já não dava assim tanta importância à resolução de problemas e, como tal o estímulo tinha esmorecido um pouco, não só para este estudante, mas, provavelmente, para todos os outros…

Tese 7

> *Na matemática em contexto a apresentação textual e pictórica deve ser "realista", pois a informação foi mobilizada como um todo*

Na matemática em contexto nada pode ser deixado ao acaso. O problema pode ser ou não ilustrado, mas quando existir uma imagem pictórica esta deve ser "realista" e não funcionar como um mero adereço. Também os investigadores: Gravemeijer (2004); Ameron (2004); Keeuwijk (2004) chegaram a conclusões idênticas nas suas investigações, defendendo que a parte gráfica do problema em contexto tem significado e, como tal, deve ser coerente com a mensagem explorada no enunciado.

Sexto ano de escolaridade. Na situação: "*a festa de aniversário*" o desenho do menino que acompanha o enunciado constituiu-se como mais um dado a ter em conta na resolução do problema, especialmente para os estudantes da turma A, pois estes usaram a informação pictórica e textual e na B, apenas a textual. Será que o computador apela mais à observação, prende mais a atenção e provoca mais estímulos visuais, tácteis, desenvolvendo outras capacidades cognitivas no indivíduo?

Como esta questão não é de resposta linear e, como tal requer outro tipo de estudos, a abordagem que é possível fazer nestas condições passa fundamentalmente por levantar questões e elaborar reflexões de âmbito pedagógico. Como já se pôde constatar em várias circunstâncias, no âmbito desta e de outras investigações quando o professor decide usar o computador na turma, na exploração de qualquer assunto, ou parte à "aventura" sozinho ou solicita ajuda a um(a) colega. No primeiro caso, resultam dificuldades acrescidas para o professor e também para o estudante, pois este vai ter menor apoio individualizado, originando, por vezes, uma maior atenção do estudante/grupo para tudo o que se passa na sua proximidade, inclusivé, para a informação existente no ecrã do computador e, consequentemente, o desenvolvimento de outras capacidades para ultrapassar as dificuldades que surjam e, assim, aprender a aprender, de forma dinâmica e autónoma, bem como aprofundar ainda outras competências ainda não totalmente decifráveis (Drijvers, 2001-2004, 2003).

No desenvolvimento de uma actividade de *matemática em contexto* tudo se torna essencial, desde a linguagem escrita, à gráfica, ao desenho, ao tamanho e às expressões associadas, isto é, todo o enquadramento visual e linguístico torna-se absolutamente relevante e "utilizável". Os elementos constituintes dum problema em contexto devem ser rigorosamente claros e conjugados para se apresentarem ao estudante como um todo integrado e credível. Se este aspecto se torna relevante para todos os estudantes ainda o é mais para os que mostram maiores dificuldades nas disciplinas de Matemática e Língua Portuguesa, sobretudo nas capacidades generalistas de ler e interpretar. Deste modo, o estudante reúne os elementos disponíveis e trabalha-os, alimentando o seu raciocínio com a análise cuidada e exaustiva do problema. Pela observação da informação pictórica e pela interpretação dos dados disponíveis o estudante é capaz, muitas vezes, de repensar nas diversas estratégias de resolução e descortinar uma maneira lógica de resolver, com êxito, a situação, sendo despertado possivelmente para a integração de dados e de conhecimentos mais familiares. Refira-se que isto aconteceu a vários estudantes da turma A, designadamente, ao Ric (nome fictício), pois como não estava a conseguir interpretar correctamente a informação escrita usou o dado pictórico e conjugando os dois conseguiu, com êxito, encontrar a solução, para grande admiração do seu companheiro Jonas (nome fictício). Este procedimento aconteceu a estudantes com dificuldades em Matemática, pois como têm deficiências na interpretação na mensagem em linguagem corrente munem-se de mais um elemento - parte pictórica, para alcançar, com êxito, a solução.

Relativamente à primeira questão do problema "*a festa de aniversário*": "*Adicionando um quarto de 32 com dois quintos de 60, obténs o dobro da minha idade*". "*Afinal, que idade tem o António? Explica como chegaste à tua resposta. Podes utilizar palavras, esquemas, expressões ou cálculos*" 18 estudantes da turma A (75%) responderam correctamente.

Os estudantes que o conseguiram usaram basicamente dois processos: a) *identificação, interpretação e tratamento da expressão numérica como um todo e aplicação da noção de "a metade de..." como inverso de "o dobro de..."* (3)*; b) identificação, interpretação e tratamento separado das partes constituintes da expressão numérica e aplicação da noção de "metade de..." como inverso do "dobro de..."* (15).

Um estudante, à semelhança de alguns colegas tratou separadamente cada expressão, usou o cálculo mental e expôs o procedimento realizado, escrevendo: *"explicação: Primeiro procurei saber quanto era ¼ de 32 e quanto era 2/5 de 60, adicionei os resultados e obtive 32. Dividi esse nº por dois e descobri a idade".* Um estudante procedeu de forma idêntica à anterior, mas sem divulgar, por palavras, o procedimento.

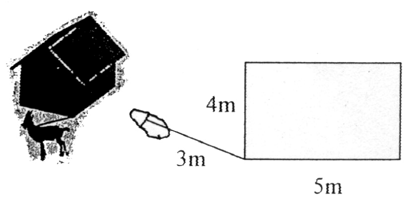
A maior parte dos estudantes da turma A não teve dificuldades em resolver esta questão e fizeram-no usando esquemas, expressões e cálculos diferenciados.

Alguns dos estudantes da turma A que resolveram correctamente o problema tiveram necessidade de fazer apelo à observação do desenho alusivo à situação para, de forma conjugada, conseguirem interpretar e validar a solução encontrada. Assim, houve estudantes que observaram primeiro o desenho do aniversariante e, por estimativa, atribuíram-lhe uma determinada idade cujo valor foi posteriormente validado pela solução encontrada. Porém existiram também casos em que o processo desenvolvido teve uma ordem diferente, primeiro delinearam uma expressão, determinaram a solução para posteriormente a validarem pela observação atenta do desenho existente na folha de trabalho. Um destes estudantes, numa primeira abordagem ao problema, referiu: "*não pode ser este resultado… O menino do desenho não tem esta idade, tem menos. Não é* *professora? Alguma coisa está mal!... o rapaz do desenho é novo, não tem mais do que dezassete anos e a mim está a dar-me o valor 32*".

É curioso registar que a conjugação desta informação disponível: linguística e pictórica não foi tão explorada pelos estudantes da turma B. Os estudantes desta classe que resolveram correctamente a questão (50%), usaram basicamente os dados numéricos e de texto existentes no enunciado do problema.

Também na resolução do problema de esquematização "*a cabra!...*", concretizado no 6º ano de escolaridade, foi possível descortinar o poder de observação e atenção dos estudantes da turma A, em relação ao desenho que acompanhava a exposição do problema.

Era retratada uma situação essencialmente campestre: "O filho de um pastor, chamado Avelino, prendia a sua cabra numa corrente de 3 metros, ao nível do chão, no meio de um quintal de forma quadrangular de 10 metros de lado." Na primeira questão perguntava-se qual era a área máxima da relva que a cabra conseguiria atingir.



Os estudantes das duas turmas indagaram sobre o significado da expressão: "*O Avelino prendia a sua cabra... ao nível do chão...*", tendo sido necessário identificarem a situação com a ajuda de material disponível.

Relativamente à segunda questão: "Às vezes o Avelino amarrava a cabra na esquina de uma pequena casota que media 5 metros de comprimento e 4 metros de largura, como mostra a figura. Qual seria agora a área da relva que a cabra conseguiria atingir? Explica a tua resposta, usando esquemas, desenhos, números ou palavras" os estudantes pareciam ter entendido a situação, mas a ilustração surgia com alguns pormenores pouco claros. Assim os estudantes da turma A colocaram algumas observações, como a representação do tamanho da corda no desenho que, segundo eles, deveria ser mais curta e o desenho do terreno que ocupava a casota era demasiado pequena face ao espaço rectangular pré-destinado.

Com o material disponível (um gravador e fio) foi possível simular a situação criada e dar a possibilidade aos estudantes de imaginarem e descobrirem alguns pormenores, provocando um melhor entendimento da questão colocada.

A maior parte dos estudantes da turma A (17) resolveu de forma completa a questão (numérica ou iconográfica), um estudante fê-lo de forma incorrecta, três estudantes apenas conseguiram descobrir a solução pela via numérica e quatro realizaram os cálculos correctamente, mas a parte iconográfica não foi bem resolvida, pois dois dos desenhos da circunferência cortaram a meio o lado de 4m e um outro na extremidade desse lado. Posteriormente, com a intenção dos estudantes interpretarem melhor a situação exposta foi construída, no programa de geometria dinâmica *Sketchpad,* uma aplicação demonstrativa da situação e, mais tarde, foi divulgada, na Sala de Informática, na explicação colectiva da solução do problema.

Os estudantes da turma B, tal como na classe A, revelaram dificuldades iniciais na compreensão do problema, designadamente, no significado da expressão: "... O Avelino prendia a sua cabra... *ao nível do chão*...", tendo sido necessário explicações adicionais com material improvisado a alguns estudantes.

Perante as dificuldades sentidas na resolução da última questão registe-se que, na realidade, a geometria requer uma dinâmica de pensamento e de acção, a três e a duas dimensões, que não se compadece com a simples aplicação de fórmulas, mas requer uma forma de pensar e de interactuar mais flexível com a situação real e os conhecimentos matemáticos.

A maioria dos estudantes da turma A tentaram aplicar a noção de escala no exemplo indicado e realizar o desenho de forma proporcional, tendo alguns conseguido. Simultaneamente esforçavam-se por concretizar o problema da forma mais correcta e rigorosa possível, tentando mobilizar os conceitos aprendidos, na base da análise crítica da apresentação do problema, permitindo uma maior compreensão da parte pictórica apresentada no enunciado do problema.

Assim, os estudantes das duas turmas, mas especialmente os da classe A, preocuparam-se em *usar o desenho para tentar compreender integralmente o problema em contexto*, tecendo mesmo comentários sobre pormenores pictóricos, mais ou menos bem explorados, revelando a importância desta componente na leitura atenta, particularizada, global e compreensiva do problema.

Pode-se referir que na matemática em contexto o desenho apresenta-se como mais um elemento estimulante e propiciador para desencadear a aprendizagem ou, numa fase posterior, proporcionar a validação da solução alcançada por via numérica.

Tese 8

> *O trabalho desenvolvido no âmbito da matemática em contexto ou de natureza interdisciplinar valorizou as aprendizagens não escolares do estudante.*

Segundo Adler (1968) "a matemática não é toda ela formal e dedutiva. Em primeiro lugar a descoberta não é dedutiva" (p.65). E conclui: "o pesquisador matemático que abre caminho em direcção a novos teoremas é guiado pela analogia, por pressentimentos, por tentativa e erro e por lampejos de intuição" (p. 66), referindo ainda que estas competências adquiridas pelo indivíduo no quotidiano devem ser valorizadas na Escola, tal como defendem outros autores (Piaget, 1965, 1975; Lave, 1988-1997; Lave e Wenger, 1991-2002; Nemirovsky, 1996, Kindt, 2004; entre outros).

Quarto ano de escolaridade. É curioso registar que, na apresentação da folha de trabalho designada por "*Vamos fazer um bolo!...*", no desenvolvimento da conversa inicial um dos estudantes da turma A (o Joe, nome fictício), com dificuldades em Matemática, referiu: "*Eu sei fazer bolos e sei fazer as contas para outras quantidades, porque eu costumo fazer isso com a minha mãe… A minha mãe é pasteleira e eu quando vou ajudá-la temos de fazer isso e eu faço sempre certo. Essa matemática eu gosto muito, porque é* *muito fácil para mim!...*". De facto, este estudante com dificuldades reais em Matemática, sobretudo na resolução formal de problemas foi o primeiro a terminar e a entregar a folha de trabalho, completamente correcta.

Quinto ano de escolaridade. Apesar de ter sido retido no 5º ano de escolaridade, aquele estudante (Joe, nome fictício) distinguia-se pela procura de estratégias pessoais na descoberta da solução de determinados problemas, designadamente, na resolução do problema "a*nimais na quinta*", desenvolvido em grupo, no 5º ano, com o apoio da folha de cálculo. O estudante evocou conhecimentos vivenciados e optou por seguir uma estratégia pessoal de resolução, a qual foi explicada à investigadora com grande entusiasmo.

É curioso registar que o Joe (nome fictício) foi capaz de comunicar com a investigadora e a professora, apresentando uma solução iconográfica correcta (Figura 49, p. 356), mas não com o seu colega, pois a mensagem não estava a ser apreendida por este.

Também a exploração da actividade "i*tinerários na planta da minha cidade"* estimulou os estudantes das duas turmas para a aprendizagem e valorizou os conhecimentos "reais" disponibilizados por estes nas questões relacionadas com o trânsito, sentidos proibidos ou obras em determinadas ruas que naturalmente exigiam respostas não apenas estritamente matemáticas, mas respostas contextualizadas, mais abrangentes e "realistas" que, normalmente, eram reconhecidas pelos estudantes, mas não dominadas pelo professor, como aconteceu, concretamente, com a resposta à questão: "Qual é o itinerário mais curto da tua casa para a Escola? Assinala no mapa esse percurso.". No desenvolvimento desta actividade, os estudantes das duas turmas estiveram sempre muito activos, curiosos, sentindo-se no centro da aprendizagem, fazendo algumas observações realistas, lógicas e originais.

Refira-se aqui os trabalhos desenvolvidos por Reed e Lave (1981) e citados por Nunes (1993) onde se mostram que os alfaiates liberianos sem escolaridade aprenderam a resolver problemas de aritmética de maneira diferente dos alfaiates que frequentaram a Escola durante um período de tempo, concluindo que, por exemplo, as noções aritméticas podem também desenvolver-se quando as pessoas estão envolvidas em tarefas que requerem a capacidade de resolução de problemas, mesmo quando não as aprenderam formalmente na Escola. A investigadora Gonçalves (1996) defende também que os professores precisam de estar interessados nos significados adquiridos pela criança no seu dia a dia, no "*street mathematics*" (Nunes, 1993) e valorizá-los na sala de aula, pois quando o estudante de um nível escolar possui determinados conceitos matemáticos resultantes das suas experiências fora da Escola, os novos conhecimentos ganhos na Escola podem aumentar o poder do conhecimento construído fora da Escola, sendo o ensino na sala de aula não de um principiante, mas "de um perito de rua diferente" (p. 137).

O pensamento matemático do estudante da turma A (Joe) baseava-se num suporte concreto, num modelo manipulável, a três dimensões ou a duas dimensões, em representação iconográfica. Apesar de ter apetência por resolver problemas da vida real, revelava dificuldades em compreender e usar a linguagem formal matemática. Assim, ao resolver problemas experimentava representações muito pessoais, explorando a linguagem pictórica, mas pouco decifrável para os seus colegas, o que provocava alguma incompreensão e rejeição por parte do seu companheiro.

Todavia, Meyer (1999) defende que é preferível que "o estudante use uma estratégia "naïf" com compreensão do que uma abstracta sem compreensão" (p. 522). Para que tal aconteça é necessário que seja criado um ambiente na sala de aula que estimule o diálogo intelectual, os processos individuais de criação e a auto-estima nos estudantes, valorizando as estratégias pessoais de resolução dos problemas.

De facto, este estudante revelava interesse por problemas com contexto relacionados com as suas próprias vivências e tinha gosto em os resolver, descortinando estratégias pessoais que usualmente o conduziam a uma resposta correcta. Apesar de ter dificuldades visíveis na resolução de exercícios ou problemas rotineiros, não os rejeitava totalmente, mas reconhecia que aqueles faziam pouco ou nenhum sentido para ele, isto é, não se constituíam com significado matemático relevante. Diversos investigadores do FI (Gravemeijer, 1991; 2004; Drijvers, 2001-2004; Kundt, 2004) defendem e colocam o enfoque na matemática em contexto como uma "alavanca" estratégica que provoca e parece sustentar a aprendizagem matemática do "make sense" do estudante.

Neste estudo constatou-se ainda que a Escola teve dificuldades em integrar e valorizar os conhecimentos deste estudante[111], adquiridos emocionalmente noutros espaços e, por outro lado, o próprio estudante muniu-se de determinados processos para conseguir ter êxito na resolução do problema, atribuindo, deste modo, menor importância aos apresentados formalmente pela Escola. Tudo indica que esta "décalage" existente de incompreensão bilateral, entre estudantes com este perfil e a Escola não valoriza nem promove a aprendizagem.

No problema "*animais na quinta*" este estudante explorou uma estratégia iconográfica e conseguiu apresentar correctamente a solução (Figura 49[112]), tal como aconteceu com alguns estudantes, enquanto outros resolviam o problema, na folha de cálculo, de uma maneira mais formal.

[111] O estudante ficou retido no 5º ano de escolaridade.

[112] A informação escrita existente no desenho resultou de uma tentativa inicial da investigadora em registar o raciocínio do estudante exposto oralmente.

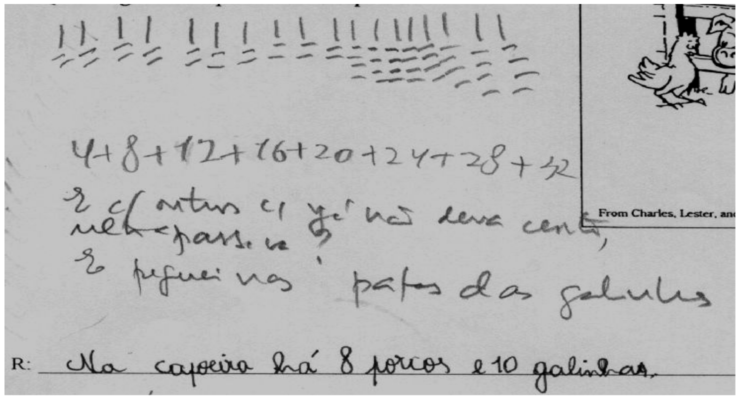


Figura 49: Uso da estratégia iconográfica com validação numérica sequencial -"*Animais na quinta*"

No diálogo estabelecido com este estudante verificou-se que trabalhou com duas variáveis, mas inicialmente fixou-se numa delas: no número de animais – dezoito, porcos e galinhas existentes na quinta, e colocou os dezoito riscos verticais para os assinalar. Depois, como havia mais outra variável a usar, o número de patas, num total de cinquenta e duas e sabendo que cada porco tem quatro patas e cada galinha duas, procurou distribuir o número de patas por cada animal, simbolizando com pequenos riscos na horizontal, assinalados debaixo de cada risco vertical.

Referiu o estudante: "*primeiro comecei a distribuir o número de patas dos porcos, porque são mais. Coloquei alguns e deixei os outros riscos para as galinhas… Comecei a fazer uma experiência e verifiquei que com mais porcos sobravam riscos na vertical, isto é, não chegava para todos os animais e então não podia ser… Fiz outra experiência, com menos porcos e os animais não chegavam… até que consegui chegar à solução*".

Perguntou a investigadora: "*Quais as experiências que fizeste? Não te aborrecias de realizar essas experiências que não sabias ao certo se davam certo?*"

O estudante respondeu: "*Só foi uma para um lado e outra para o outro e depois cheguei ao resultado certo, mas também usava a cabeça, pois fazia mentalmente a ver se estava certo, em vez de escrever logo… Não me aborreci nada. Eu gosto muito de fazer este tipo de problemas. Para mim, isto é que é matemática!*".

Sexto ano de escolaridade. A resolução da tarefa: "*Banda desenhada – as fracções como motivo de conversa*", já apresentada anteriormente, foi considerada, pelos professores das duas turmas, como uma actividade de âmbito interdisciplinar relevante na didáctica do número racional, conectada à Língua Portuguesa e à Formação Cívica, dado que valorizou atitudes e saberes adquiridos no quotidiano e reuniu cumulativamente os seguintes aspectos: a) *centrada no dia a dia do estudante* - os estudantes tiveram oportunidade de reflectir formativamente sobre o seu quotidiano e averiguar do tempo gasto em diferentes actividades de forma a estruturarem temporalmente a realização das diferentes tarefas diárias; b) *prática e significativa* - os estudantes aprofundaram a vertente funcional da matemática e tiveram oportunidade para reconhecer e experimentar a utilidade prática do conhecimento matemático, concretamente, na representação fraccionária dos números racionais para relacionar o tempo dispendido nas diferentes tarefas no dia a dia do estudante; c) *problematizada e contextualizada* – os estudantes encaram-na como um problema real e pessoal, tendo sido essencial, em termos matemáticos, a escolha adequada da unidade de tempo para o estudo da relação *parte-todo*, com representação racional fraccionária, contemplando horas inteiras e meias horas. Acrescente-se ainda que o contexto do problema era de natureza social, pois requeria, nas primeiras questões, uma interpretação do diálogo entre dois colegas e, posteriormente, uma análise prévia individual de cada estudante para resolver a última questão, reflectindo e validando sobre o seu dia a dia. As professoras sentiram que o trabalho realizado foi muito intensivo e necessitou de apoio e acompanhamento individual contínuo na concretização desta tarefa.

Para além dos aspectos positivos salientados pelas professoras, refira-se ainda que esta actividade valorizou os conhecimentos adquiridos em ambiente exterior à própria Escola, tornando-a continuamente um desafio matemático estimulante e gratificante para os estudantes e até mesmo para os próprios professores, pois emergiram outras características relevantes que convém assinalar: a) a *utilização da banda desenhada e de outros espaços de formação* - o ambiente criativo da banda desenhada estimulou a aprendizagem do estudante, valorizando as aprendizagens construídas no exterior do ambiente Escola e o caminho para casa revelou-se como um espaço de debate com os colegas, de levantamento de interrogações e de aprendizagem matemática; b) a *identificação da referência temporal* - grande parte dos estudantes teve necessidade de uma referência temporal, isto é, localizar-se num dia específico, para responder à questão. Isto significa que os estudantes não fizeram uma "média" de um número de dias, considerando um dia em abstracto, mas tiveram necessidade de concretizar a situação pela evocação de um dia concreto; c) *interdisciplinar e de carácter intrínseco* - esta actividade foi considerada interdisciplinar por excelência, não centrada apenas nas disciplinas onde foi explorada, Estudo Acompanhado e Matemática, mas focalizada também na vida real do estudante, tendo sido também o ponto de partida para a promoção da comunicação, reflexões convergentes e aprendizagens complementares nas áreas de Língua Portuguesa e Formação Cívica; d) *sequencial e não validada pelo estudante* - salvo algumas notações a maior parte dos estudantes representou as actividades em tabela ou noutros formatos, pela ordem dada e indicou os respectivos tempos gastos, mas a maior parte não validou os resultados, não havendo muitas vezes um tratamento adequado da relação parte-todo (hora-dia ou (meia hora-dia)).

Tese 9

A aprendizagem inicial da álgebra, em contexto interdisciplinar, permitiu desenvolver a comunicação significativa do conhecimento matemático

A prossecução dos objectivos matemáticos e a exploração de conteúdos específicos, como o da álgebra, num ambiente de matemática aberto à aprendizagem em contexto interdisciplinar, numa persectiva do quotidiano do estudante ou numa visão mais curricular proporciona um clima aberto à discussão, à partilha de ideias, à interligação de saberes onde o papel do professor de Matemática é crucial na "sabedoria" da orientação e na promoção do diálogo implementado na classe.

Quarto ano de escolaridade. A verificação desta tese pode ser evidenciada na resolução do problema "*a pintura das peças de cerâmica*", em que foi possível, especialmente na última questão relacionada com o tempo aproximado da pintura das peças de cerâmica, dialogar sobre os dados reais existentes na fábrica visitada e o tipo de trabalho existente. O debate de ideias foi muito participado por todos os estudantes das duas turmas, apresentando cada um deles razões diferenciadas, mas demonstrando, simultaneamente, uma linha lógica e fundamentada de pensamento, como revelam alguns registos escritos pelos estudantes e apresentados anteriormente na fundamentação da *tese 5 da investigação*.

A actividade de investigação "*a carga certa para o "peso" certo*", já apresentada anteriormente em 2.4. deste capítulo, nas actividades de investigação de âmbito interdisciplinar revelou-se altamente significativa para o estudante, não só no desenvolvimento da actividade em si, mas também na capacidade de interiorização da importância da mesma na saúde pessoal, visível em *´follow up´* escolar e na possibilidade de indução para a vida familiar e social.

A realização da actividade de investigação "*valor lógico de proposições*", a seguir descrita, também contribuiu para enunciar e fundamentar esta tese. Com ligações à 2ª aproximação à álgebra permitiu, num ambiente rico de interdisciplinaridade, desenvolver-se o conceito de variável, ao nível básico, designadamente, na descoberta da "cosa" ou "thing" ou "unknown" em termos visuais (Radford, 1996; Ameron, 2002) na criação de uma proposição verdadeira relacionada com o preenchimento de lacunas nas disciplinas de Língua Portuguesa, Matemática e na área de Educação Visual. Adicionalmente a implementação desta actividade encontrava-se relacionada com o tipo de raciocínio utilizado na exploração dos esquemas criados pelos estudantes e aplicados na resolução dos problemas de esquematização do tipo "*numbers cards*", já descritos em 9.3.3. do segundo capítulo.

Descrição da Actividade "*valor lógico de proposições*". Evocando a necessidade de comunicação foi encetado o diálogo na classe. Entre as diferentes formas de linguagem usadas, foi destacada a Língua Materna, por ser uma das mais marcantes para o estudante no seu percurso escolar, cuja primeira motivação, quase sempre é, no 1º ano de escolaridade, a aprendizagem da leitura e da escrita de palavras e frases.

Após breve troca de ideias foi solicitado aos estudantes a criação/referência de frases, tendo surgido várias, entre as quais se destacam: "*Hoje está a chover*"; "*Eu gosto de Matemática*"; "*Eu não gostava de Matemática*", mas "*Agora já gosto mais de Matemática*"; "*Eu tenho um irmão*"; "*Eu gosto da minha mãe*"; "*Eu gosto da Escola*"; "*Eu gosto de fazer contas*"; ... "*Eu não gosto de me levantar cedo*"...

A definição e divulgação destas e de outras frases criou, de imediato, vontade nos estudantes de expressar ideias, comunicar com os companheiros, com a professora e com a turma. Algumas das frases foram escritas no quadro, para posteriormente serem explorados os conteúdos e significados. Foi ainda analisada a estrutura sintáctica de cada uma delas e estudado o valor lógico.

Após breves comentários, os estudantes concluíram que todas as frases enunciadas eram *verdadeiras* e, na sua maior parte, eram frases *declarativas afirmativas*, com excepção de "*Eu não gosto de me levantar cedo*", que era declarativa negativa. Registou-se ainda que, na maior parte das vezes, a conversação que se estabelece entre as pessoas revela certas particularidades, nomeadamente, na construção comum de frases declarativas afirmativas e verdadeiras.

Com o intuito de evidenciar o poder da atenção, observação e curiosidade dos estudantes, estabeleceu-se um diálogo mais profundo, averiguando-se algumas especificidades das frases e concluiu-se que:

- *a veracidade da frase pode ser independente do indivíduo* que a pronuncia, por exemplo, na frase: "*Hoje, está a chover*" a frase é verdadeira, devido às condições atmosféricas, mas é independente da pessoa que a enuncia, podendo mesmo ser extrapolada para um ambiente exterior à sala de aula, revelando um carácter ainda mais universal, possivelmente, até mesmo num contexto regional no qual se verificam aquelas condições atmosféricas, mas *temporal*, *localizada num tempo*, pois num outro dia as condições atmosféricas podem apresentar-se diferentes;

- *a veracidade da frase pode ser dependente do indivíduo* que a refere, isto é, a veracidade de algumas frases revelam o carácter *subjectivo* da mesma, podendo ser intemporal, como no caso de um estudante que refere: "*Eu gosto de Matemática*", sendo sempre verdadeira, qualquer que seja o tempo em que é proferida; ou temporal, quando outro estudante salienta que "*Já gostei pouco de Matemática*", mas "*Agora já gosto mais de Matemática*" a veracidade desta frase depende do indivíduo que a pronuncia, bem como do tempo em que é dita. No caso da frase: "*Eu tenho apenas um irmão*" ela é verdadeira para o estudante que a formulou em primeiro lugar e também para outros quinze estudantes da turma A, que confirmaram ter também um único irmão, mas não para os outros estudantes da classe.

Neste último caso os estudantes tiveram gosto e entusiasmo em analisar outras frases e concluiu-se que uma frase dita por uma pessoa sobre um assunto particular da sua vida pode ser temporariamente verdadeira e depende única e exclusivamente do indivíduo que a pronuncia. Contudo, após a análise de uma frase e do seu conteúdo ser aceite por todo o grupo, foi possível passar de uma ideia de cariz individual para uma outra de domínio mais universal. Exemplo disto foi o que aconteceu na frase: "*Eu gosto da Escola*", dita por uma estudante, que após a interpelação da professora, toda a classe comungou da mesma ideia. Assim, reconstruiu-se a frase e escreveu-se: "*Todos os estudantes gostam da Escola*", transformando-se numa frase verdadeira e universal para a classe, sublinhando a professora: "*É muito importante que os meus meninos gostem da Escola, pois só assim é possível aprender com gosto e ter êxito nos estudos"*.

Apesar de no início se mostrarem algo expectantes, os estudantes estavam agora muito entusiasmados e as frases não cessavam, surgindo ainda, de imediato, outras com carácter marcadamente subjectivo, ligadas a gostos, vontades e sentimentos dos estudantes, entre os quais se destacam: "*Eu gosto da cor azul*"; "*Eu gosto do programa de televisão: gato preto, gato branco*"; "*Eu gosto muito do meu avó*". Assim, algumas frases que eram verdadeiras para alguns estudantes, eram falsas para outros, verificando-se o carácter subjectivo da veracidade de uma frase, o que provocou uma interessante discussão. No diálogo estabelecido foi possível concluir que mantendo-se a estrutura da frase e alterando-se apenas uma palavra seria possível, de imediato, construir frases verdadeiras para cada um dos estudantes. Podia-se quase criar uma frase para cada estudante ou grupo de forma que a frase fosse verdadeira nas condições iniciais definidas, apenas sendo alterada uma palavra na frase. E com os dois exemplos dados, do gosto da cor e do programa de televisão foi possível exemplificar e conhecer também os gostos, hábitos e outras facetas particulares dos estudantes.

À questão: "*As frases que construíram foram todas verdadeiras ou falsas? Porquê?*" os estudantes responderam que foram todas verdadeiras e justificaram concretizando novamente: "*é verdade que eu gosto da cor verde*"; "*é verdade que eu tenho um irmão*". Depois de algum entusiasmo e breves momentos de troca de ideias, os estudantes tomaram consciência que as sentenças enunciavam estados de alma, divulgavam gostos, sentimentos, até condições ambientais, relações entre as pessoas, etc, fomentavam a comunicação, numa perspectiva verdadeira e "*de educação para a cidadania*".

Numa segunda parte introduziu-se um novo elemento:

"*Suponhamos agora que na frase falta uma palavra e é preciso completar a frase, como fazer? Vamos pensar em exemplos concretos*:

"*Eu gosto da cor*_____ ".
"*Eu tenho uma* ______".
"*O rio* _______ *banha a cidade do Porto*".
"*A capital de Portugal é* _______ ".

A investigadora perguntou: "*Quais as diferenças entre estas quatro frases?*".

Após alguns segundos um estudante respondeu: "*é para completar as frases e faltam palavras no fim ou no meio das frases*".

Outro estudante respondeu: "*As duas primeiras frases é sobre os gostos, as coisas e as duas últimas é sobre Estudo do Meio*".

Refira-se que grande parte dos estudantes respondeu, com casos concretos, completando as frases, escrevendo-se algumas das sugestões dadas no quadro.

Os estudantes concluíram, de imediato, que as duas primeiras frases tinham sido completadas com palavras diferentes, variando de estudante ou grupo de estudantes e que as duas últimas eram completadas com as mesmas palavras.

Assim, mais uma vez se salientou o carácter subjectivo das duas primeiras frases e a natureza universal das duas últimas.

Após a clarificação exemplificada do conceito ´valor lógico´, insistiu-se ainda: "*Qual o ´valor lógico´ das frases que estão a criar, depois de preencherem as lacunas?*"

Os estudantes responderam que eram todas verdadeiras e um deles sublinhou: "*se não fossem podia valer tudo, podíamos escrever qualquer palavra e isso não tinha interesse, pois assim, não estava bem e não conseguíamos comunicar*".

Concluiu-se então que apesar de não ter sido referido expressamente no enunciado a necessidade de completarem as frases de modo a torná-las verdadeiras, os estudantes reconheceram que tal procedimento seria o mais lógico e adaptado à situação. Contudo, procurou-se reflectir se tal deveria acontecer ou não, isto é, se deveria existir um enunciado do problema com um pedido explícito como, por exemplo: "*completar de forma a construíres uma frase verdadeira*". Apesar de não parecer muito lógico aos estudantes que pudesse ser completada uma frase de forma a construir uma proposição falsa, insistiu-se que tal poderia acontecer e o estudante teria, nestas condições, uma resposta correcta, face ao enunciado de um exercício em que apenas surgia a palavra "completar". A importância desta informação residia no facto do estudante ter necessidade de ler com atenção o enunciado de uma questão, de forma a interpretá-la amplamente e responder cabal e correctamente ao que lhe era solicitado. Lembraram-se ainda algumas situações existentes no manual de Língua Portuguesa onde é apenas pedido para se completar uma determinada frase sem haver mais nenhuma referência específica, originando alguma ambiguidade e diferentes interpretações e respostas. Os estudantes permaneceram atentos, mas não totalmente convencidos.

Especificaram-se ainda alguns exemplos e passou-se, logo que possível, para o domínio da Matemática.

Indagou a investigadora: "*Quando fazemos contas, não acham que estamos a realizar "frases matemáticas" que podem estar certas ou erradas e consequentemente, as frases podem ser verdadeiras ou falsas*?" Os estudantes reagiram apenas com olhares meio enigmáticos!?...

"*Não será idêntico ao que se passa na Língua Portuguesa?*", insistiu a investigadora.

"*Por exemplo, quanto é 7+8?*" E todos os estudantes responderam 15.

"*Ora podemos ler a frase: sete mais oito são quinze ou a soma de sete com oito é quinze ou ...*" "*Cada uma das leituras é ou não é uma "frase matemática"?*"

"*Quem me dá mais exemplos?*"

Os estudantes referiram vários, inicialmente com a adição, mas posteriormente, usando a subtracção, multiplicação e até a divisão, mas sempre preocupados em realizar contas correctas e enunciar "frases verdadeiras".

"*Mas aqui na Matemática há frases que podem ser verdadeiras para uns e falsas para outros? A veracidade das frases depende do indivíduo que a inventa ou não?*", indagou a investigadora.

Quase em uníssono, os estudantes referiram desta forma similar: "*Não, não pode ser, ou está certa a conta e é verdadeira a frase ou não está certa e então, a frase é falsa*".

"*Sabem agora responder-me se a Matemática é uma linguagem universal ou depende da pessoa?*", perguntou a investigadora.

"*Não depende da pessoa, é igual para todos, quando estamos a fazer uma conta tem de dar o mesmo resultado a todos, o que podemos é ter "os números" diferentes, uns mais pequenos, outros maiores, eu por exemplo, desenho "os números" muito pequenos, o João desenha-os muito grandes,...*", sublinhou um estudante. E completou outro: "*É como naquelas duas últimas frases, que só podia ser, para estar certa, o rio Douro, numa e a capital é Lisboa e na outra frase também não podiam ser outras palavras*".

O diálogo com os estudantes fluía, mostrando-se extremamente interessante e profícuo. De facto, a professora e a investigadora tinham a forte convicção de que os objectivos estavam a ser alcançados....

Em seguida, passamos para as "*frases matemáticas*" com lacunas.

"*Por exemplo no exemplo:*

$9 + \boxed{} = 15$

Qual é o número que falta?". Quase de imediato os estudantes responderam: "*Seis*", "*falta no quadrado o 6*".

"*Quem dá mais exemplos?*", indagou a investigadora.

Várias sugestões foram referidas pelos estudantes, mas destacam-se apenas por curiosidade, as seguintes:

$34 + \boxed{} = 50 \qquad 20 - \boxed{} = 15$

$17 + \boxed{} = 25 \qquad \boxed{} + 18 = 25$

E depois de completadas as lacunas, foi indagado se as frases construídas eram "frases verdadeiras". Em seguida, os estudantes foram informados que, na maior parte dos manuais, surge apenas no enunciado do exercício a palavra: "*Completa*" e não uma informação mais precisa como, por exemplo: "*Completa os espaços para obteres contas certas*" ou "*Completa as lacunas para obteres frases verdadeiras*" ou "*Completa, fazendo a conta certa*" ou ...

A investigadora inquiriu: "*O que pensam sobre o modo como devem ser escritos os enunciados deste género de exercícios?*"

Os estudantes discutiam e alguns deles argumentavam: "*basta apenas a palavra "Completa", pois nós já sabemos que é para se fazer a conta certa, pois senão não tinha interesse*" Foi motivador e estimulante sentir os estudantes a pensar, a reflectir sobre esta temática e a opinar, fundamentando os seus raciocínios.

A investigadora referiu ainda: "*Mas reparem, pode haver frases verdadeiras ou frases falsas e temos de saber objectivamente o que se pretende, pois "Completa" é muito vago e podemos fazê-lo conforme se queira, de uma forma ou de outra*".

Esta informação gerou mais debate, os estudantes observaram e constataram que ao preencherem as lacunas fizeram-no de forma a obter "frases matemáticas" verdadeiras. Contudo, para desenvolver o poder de observação, o sentido crítico, o rigor na resposta e também na formulação os estudantes aceitaram ainda que seria mais conveniente apresentar o enunciado o mais completo possível, para não gerar ambiguidades.

Foi estimulante comunicar com os estudantes sobre esta problemática, averiguando as diferenças e notando-se que o termo "Completa" arrasta naturalmente, e de forma implícita, a concretização correcta da operação em causa, pois, segundo um estudante: "*se não fosse assim, não teria interesse este tipo de exercícios, pois valia tudo*".

Aflorou-se ainda a possibilidade da existência de mais de uma lacuna numa frase, por exemplo:

$17 + \boxed{} + \boxed{} = 30$

E exploraram-se diversas soluções[113] para cada lacuna de modo a criar uma frase verdadeira.

Em seguida, foi proposta a realização de um trabalho individual, escrevendo-se no quadro negro, questões simples relacionadas com a Língua Portuguesa e a Matemática. Duas delas orientadas para o preenchimento de lacunas de forma a obter "frases verdadeiras" e uma outra relacionada com a escolha de quatro "frases matemáticas" dadas para ser realizada a leitura diversificada das mesmas.

Completa as lacunas para obteres frases verdadeiras

A primeira refeição do dia chama-se _______________.
As águas do rio _______________ transbordaram as margens.
Neste Inverno choveu muito e por isso houve muitas _______________.
A _______________ gosta de chocolate branco.

Preenche as lacunas e constrói frases verdadeiras

$125 + \square = 165$	$135 - \square = 110$	$21 \times \square = 105$	$96 : \square = 32$
$\square + 17 = 30$	$\square - 45 = 150$	$\square \times 13 = 78$	$\square : 5 = 16$
$\square + 145 = 185$	$\square - 125 = 169$	$\square \times 25 = 275$	$\square : 6 = 41$

Escolhe quatro frases anteriores e faz a leitura das mesmas.

Reflexões/Conclusões Genéricas

Na turma A responderam vinte e dois estudantes e na B vinte e três.

Registe-se que os resultados obtidos nas questões expostas foram semelhantes nas duas turmas. Refira-se ainda que a segunda e a terceira questão estavam intimamente ligadas às vivências de um Inverno rigoroso, em que o rio Douro tinha inundado as zonas ribeirinhas.

No preenchimento das lacunas *na adição* a maior parte dos estudantes das duas turmas conseguiu obter resultados francamente positivos. Nalguns casos a 100%, nas duas lacunas na 2ª parcela, na turma B e na primeira lacuna da 2ª parcela e da 1ª parcela, da turma A.

No preenchimento das lacunas *na subtracção, no diminuidor,* a maior parte dos estudantes nas duas turmas conseguiu obter resultados francamente positivos. No preenchimento das lacunas *na subtracção, no diminuendo,* os resultados ainda foram positivos na turma A, pois mais de metade dos estudantes resolveu correctamente, mas o

[113] Uma questão que poderia ser levantada, mas não o foi, para não dispersar a atenção e o desenvolvimento do raciocínio dos estudantes seria: neste exemplo apresentado, existiria um número finito de soluções se os dois números fossem inteiros? E se fossem "números decimais"? Porquê?

mesmo não aconteceu na turma B, na qual menos de metade dos estudantes não conseguiu resolver a questão correctamente.

No preenchimento das lacunas *na multiplicação, no 2º factor,* a maior parte dos estudantes na turma A conseguiu obter resultados positivos, mas na turma B grande parte dos estudantes não resolveu a questão e aqueles que o fizeram não conseguiram fazê-lo correctamente. No preenchimento das lacunas *na multiplicação, no 1º factor* os resultados continuaram positivos na turma A, pois mais de metade dos estudantes atingiu o resultado correcto, o mesmo não acontecendo na turma B, na qual mais de metade dos estudantes nem sequer tentou resolver a questão.

No preenchimento das lacunas *na divisão, no divisor,* a maior parte dos estudantes na turma A conseguiu resolver correctamente a questão, mas na turma B mais de 70% dos estudantes não tentou resolvê-la. No preenchimento das lacunas *na divisão, no dividendo* os resultados continuam positivos na turma A, pois mais de metade dos estudantes conseguiu resolver correctamente a questão, o mesmo não acontecendo na turma B, na qual 78% dos estudantes nem sequer tentou resolver a questão.

Após a resolução e posterior correcção das questões propostas no quadro colocou-se a seguinte questão: "*Recordam-se das visitas de estudo que fizeram no 2º e 3º anos e dos trabalhos que realizaram? Quando foram à estação do caminho-de-ferro lembram-se de terem visto o painel constituído por azulejos quadrangulares com triângulos azuis e brancos?... E dos edifícios com soletos, também se recordam?*" A maior parte dos estudantes recordava-se muito bem das visitas realizadas e das construções feitas com materiais na sala de aula... *"Acham que há alguma ligação entre o preenchimento das lacunas nas frases e expressões matemáticas e os painéis de azulejos das paredes, de alguns edifícios?*" Silêncio...

"*E de algumas casas que já estavam com paredes deterioradas em que faltavam lá azulejos?*" Alguns estudantes lembravam-se e recordavam aos colegas... A professora e a investigadora usaram fotografias e um dossier de turma devidamente organizado para avivar as memórias...

Um grupo de estudantes concluiu sem grandes dificuldades que preencher a lacuna é semelhante a colocar um azulejo que falta num painel ou um soleto num telhado ou numa parede. Esta resposta foi altamente gratificante, dado que os estudantes relembravam com entusiasmo o trabalho anteriormente realizado e a conexão dos conhecimentos fazia-se naturalmente, sem grandes pressões... "*de facto, isto é interessante*", comentou um estudante com um brilhozinho especial nos olhos!...

Da análise dos resultados obtidos nas duas turmas emergiram fundamentalmente duas questões: Como se poderão relacionar os resultados obtidos, nas duas turmas, nas duas últimas questões? Como interpretar estes resultados?

De facto, a turma B não conseguiu resultados positivos no preenchimento das lacunas, na subtracção com a lacuna no diminuendo, na multiplicação e na divisão, mas atingiu resultados positivos na leitura das expressões matemáticas, nas quais os estudantes revelaram, para além dos conhecimentos algorítmicos, saberes aritméticos, nomeadamente, o reconhecimento prático da propriedade comutativa da adição e da multiplicação e da existência da operação inversa destas operações, bem como o início da utilização da linguagem matemática.

Nestas circunstâncias a turma B parece revelar maior informalidade e mobilidade de pensamento, algum desprendimento, denunciando maior abertura na análise, permitindo-lhe optar e usar diversos mecanismos para relacionar a informação. Por outro lado, a leitura sequencial em que é usada a propriedade comutativa, especialmente, na adição tem a ver com aspectos lineares, básicos e práticos do conhecimento aritmético. A aplicação da operação inversa da adição, na leitura de uma expressão, requer um conhecimento aritmético mais profundo, o que também é conseguido, pela turma B, no preenchimento de lacunas em que é envolvida a adição e até a subtracção. Mas nesta classe, apesar de alguns estudantes terem também realizado leituras de expressões matemáticas em que estavam envolvidas a multiplicação e a divisão, grande parte dos estudantes não completou as lacunas nestas operações.

Tudo indica que os estudantes da turma A orientaram-se por um pensamento mais formal no preenchimento das lacunas, possivelmente com abordagens aritméticas mais profundas, pela utilização, nalguns casos, da operação inversa da operação dada, tendo a leitura das expressões sido baseada num esquema sequencial e linear. Estas observações não são naturalmente conclusivas, apenas colocam reflexões e destacam dados de forma a serem concatenados com possíveis análises posteriores.

Na realização desta actividade um dos aspectos fulcrais a referir teve a ver com as relações estabelecidas e as conexões promovidas entre as áreas de Língua Portuguesa, a Matemática e a de Educação Visual. A diversidade de competências reveladas pelos estudantes, na comunicação oral e na *cadeia de aprendizagem* produzida, com mais ou menos (in)formalidade, enriqueceu de forma compreendida e contextualizada a *2ª aproximação à álgebra*, relacionada com a resolução de equações no campo interdisciplinar, em que o conceito de variável foi explorado da forma mais básica, como “caixa em branco”, “cosa” ou “unknown”.

A postura dos estudantes neste tipo de actividades de investigação surge mais solta, com alguns graus de liberdade, o que lhes permite realizar várias associações e ligações, mas simultaneamente exige um maior controlo e apoio individualizado por parte do professor. Este aspecto talvez possa justificar a falta de respostas da maior parte dos estudantes da turma B à questão relacionada com o preenchimento de lacunas nas duas últimas operações. A maior parte dos estudantes desta turma foi, ao longo dos anos, captando a atenção e revelando a necessidade da presença próxima do professor, para lhe transmitir segurança e estímulo intelectual, pois, parecem reconhecer que a sua actividade mental é centrada, basicamente, na Escola e na sala de aula.

O preenchimento de lacunas numa expressão matemática associa-se a uma das aproximações à álgebra: *à 2ª aproximação à álgebra*, que integra a *resolução de equações*, na sua forma mais elementar, em que o estudante actua de maneira diferente conforme a existência da operação em causa na expressão. Assim, na adição, com lacuna na segunda parcela o estudante usou basicamente três estratégias: i) pela *operação dada*, completando de forma sequencial, usando a conservação da primeira quantidade, com contagem progressiva, até chegar ao resultado pretendido ou ii) pela *operação inversa*, realizando a diferença entre a soma e a primeira parcela resultando, deste modo, o valor da segunda. Na adição com a lacuna na primeira parcela é basicamente utilizado esta segunda hipótese; iii) pela subtracção com o significado explícito de ´completar´ podendo, de certo modo, aproximar-se à primeira estratégia referida.

Na subtracção com a lacuna no diminuidor o estudante também usou basicamente dois métodos: i) por *tentativa e erro*, com aproximações ao método de *tentativa e erro com ajustamento* com algumas experiências necessárias até chegarem ao resultado pretendido; ii) pela *operação em causa*, a diferença entre o diminuendo e o resto.

Na subtracção com a lacuna no diminuendo o estudante usou basicamente a definição da prova real da subtracção.

Na multiplicação, com lacuna no primeiro ou segundo factor o estudante utilizou, basicamente, dois métodos: i) por *tentativa e erro*, com o cálculo da "tabuada" pela obtenção de alguns produtos até chegar ao resultado pretendido; ii) pela *operação inversa*, isto é, dividindo o produto pelo primeiro ou segundo factor.

Na divisão com lacuna no divisor, o estudante explorou basicamente dois métodos: a) pela *operação dada*, dividindo o dividendo pelo quociente; b) pela *operação inversa* e a noção da tabuada aplicada ao quociente, com experiências, de tentativa e erro, aleatórias ou sequenciais até chegar à solução pretendida.

Na divisão com lacuna no dividendo o estudante usou apenas o conceito da prova real da divisão.

Ainda no 4º ano de escolaridade uma actividade de investigação algo enigmática, designada por "*uma razão importante!...*", descrita anteriormente, em 2.4. neste capítulo, causou admiração nos estudantes pela descoberta de um valor praticamente constante, próximo do valor ´3´, no cálculo do quociente entre duas medidas particulares em objectos circulares. Esta actividade teve um significado especial no 6º ano de escolaridade, quando foi "recuperada" e integrado esse valor no cálculo do perímetro de uma circunferência e da descoberta do "pi". Tudo indica que este *´follow up´* de processos, resultados e conteúdos de forma aberta e em contexto real proporcionou uma aprendizagem compreendida e significativa de conceitos relacionados com a álgebra, no trabalho com as fórmulas: ´$P=2\pi r$´ ou ´$P=\pi d$´ ou ´$P/3=d$´ e na iniciação e aprofundamento da noção de variável associada à "alteração da quantidade numa expressão algébrica" e da descoberta do "generalizador" (Drijvers, 2003, 2004).

Quinto ano de escolaridade. A resolução de problemas de esquematização: "*compras nos saldos*" e "*animais na quinta*", já apresentados na fundamentação de teses anteriores constituíram-se como fortes estímulos e desafios para os estudantes. Após breves momentos iniciais de insegurança e incapacidades manifestadas, revelaram vontade em as ultrapassar realizando esforços visíveis para entenderem os problemas, colocando questões e descobrindo diferentes estratégias de resolução, permitindo o desenvolvimento da comunicação e, provavelmente, uma melhor compreensão dos assuntos explorados.

As actividades de investigação "*itinerários…*" e "*a correr e a saltar e a aprender matemática…*" provocaram diversos diálogos, respostas abertas (quantitativas e de tipo texto), através das quais foi possível os estudantes apresentarem soluções temporariamente desconhecidas do professor e desenvolverem processos metacognitivos diferenciados, denunciando uma compreensão mais profunda das matérias exploradas, salvo o conceito de "escala" demasiado avançado para este nível de escolaridade.

Sexto ano de escolaridade. Pode-se referir que a maior parte dos problemas de esquematização, actividades de investigação e projectos resolvidos neste ano de escolaridade, sustentam esta *tese 9*, pois mobilizaram aprendizagens significativas, pelos diálogos desenvolvidos, pelas abordagens realizadas, pelas estratégias experimentadas pelos estudantes e já expostas na fundamentação de teses anteriores. A apresentação pormenorizada do projecto "*pulsação*" na fundamentação da *tese 11*, também consolida o que foi exposto nesta *tese 9 da investigação*.

Tese 10

A repetição de tarefas em diferentes contextos e anos de escolaridade mobilizou e fortaleceu o conhecimento inicial da álgebra

Kieran (1992) e Reeves (2000) salientam que alguns problemas relacionados com a aprendizagem da álgebra em idades elementares devem ser repetidos ao longo do tempo para consolidar conhecimentos. Também no projecto MiC - Matemática em Contexto, desenvolvido no Freudenthal Institut (FI) vários investigadores (Gravemeijer, 1991, 2004; Ameron, 2002, 2001-2004; Drijvers, 2001-2004, 2004; Reeuwjik, 2004) defendem este tipo de procedimento para provocar uma aprendizagem gradual, sustentada e compreendida da álgebra. Com base neste pressuposto, alicerçado em conversas havidas com estes investigadores no FI, procurou-se repetir a exploração de assuntos de modo a fortificar conhecimentos em problemas similares ou complementares realizados em diferentes anos de escolaridade.

Na actividade de âmbito interdisciplinar "*uma razão importante!... à descoberta de "pi*", exposta em 2.4. deste capítulo, foram utilizados vários objectos redondos para medir o perímetro (P) de cada um deles e o diâmetro (d) e calcular o quociente P/d de forma a ser explorada experimentalmente a expressão algébrica aproximada P/d=3. A partilha de objectos redondos, instrumentos de medida, calculadoras, saberes e questões foi constante no desenrolar do trabalho, procurando-se simultaneamente registar os resultados em tabelas ou usando outras representações descobertas pelos estudantes.

Entretanto, no 6º ano de escolaridade fez-se apelo ao trabalho realizado no 4º ano, que os estudantes recordaram facilmente, evocando até diversos objectos utilizados e com o registo no quadro de alguns resultados obtidos explorou-se simbolicamente a expressão algébrica da determinação do perímetro de uma circunferência. O aparecimento desta expressão surgiu de forma natural, integrada, tendo os estudantes encontrado sentido para o trabalho realizado nos anos anteriores. Tudo indica, que a fórmula apresentada foi significativa pelos estudantes, mas simultaneamente, tal como tinha acontecido no 4º ano de escolaridade, ficaram estupefactos e motivados face a esta universalidade do pensamento: "*todos os objectos redondos verificam esta expressão?!*" ou "O *perímetro de qualquer circunferência determina-se por aquela fórmula? Descoberta por nós?* E outro estudante: "*Basta, então substituir o ´3´ pelo número ´pi´, professora?*".

Também no problema em contexto "*as idades dos filhos*", resolvido no 4º ano de escolaridade e posteriormente no 5º ano de escolaridade, tal como se referiu na fundamentação da *tese 6*, possibilitou a diversificação de estratégias, em que designadamente, os estudantes da turma B criaram, no 4º ano de escolaridade, um esquema próprio de resolução, mas no ano seguinte já utilizaram quadros, tabelas, bem como os esquemas anteriores, mas notando-se um amadurecimento maior, uma compreensão diferente do trabalho desenvolvido, com um plano estratégico mais conseguido que englobava a exploração de um menor número possível de experiências na estratégia de tentativa e erro, como aconteceu com a estudante AAlex (nome fictício) da turma B. Esta estudante já tinha conversado com a investigadora sobre o esquema utilizado[114] e no 5º ano de escolaridade parece ter integrado esses conhecimentos, revelando uma maior compreensão da situação e da resolução do problema.

Também na resolução da actividade de âmbito interdisciplinar, ligada ao Estudo do Meio e à Matemática, "*a carga certa para o "peso" certo*" notou-se a importância desta actividade na vida pessoal do estudante e no entendimento significativo dos conteúdos tratados. Nas reflexões e conclusões genéricas expressas no 4º ano de escolaridade e apresentadas no final de 2.4. deste capítulo foca-se a importância do significado desta actividade em termos de contexto vertical, especialmente no 6º ano de escolaridade. Nas entrevistas realizadas no ano terminal do 2º ciclo do ensino básico, os estudantes de ambas as turmas referiram que esta actividade tinha sido uma das mais significativas.

Registe-se ainda o desenvolvimento da actividade de investigação de âmbito interdisciplinar "*o cálculo da área dos pavilhões da Escola*" no 5º ano de escolaridade e "a *área dos pavilhões da minha Escola e sua história*", no 6º ano de escolaridade. No primeiro ano do 2º ciclo do ensino básico foi possível relacionar conteúdos explorados em História com os de Matemática, tratando-se o conceito "escala" no cálculo de perímetros e áreas. O trabalho teve por base uma planta dos pavilhões da Escola e houve dificuldades acrescidas devido à exploração dos conceitos de escala e da noção de proporcionalidade na determinação das áreas reais de cada um dos pavilhões. Ao tentar integrar-se este trabalho no 6º ano de escolaridade alargou-se o âmbito interdisciplinar: incluiu-se a Área de Projecto na História e com a Matemática, permitindo a exploração mais profunda, questionada e possivelmente mais compreendida das fórmulas usadas nos cálculos das áreas dos pavilhões.

4.3. Influência do computador no trabalho de âmbito interdisciplinar

Tese 11

O computador facilitou a pesquisa, o desenvolvimento da matemática em contexto e a realização do trabalho de âmbito interdisciplinar

[114] Esse diálogo educativo foi transcrito anteriormente na resolução do problema no 4º ano de escolaridade.

No 1º ciclo do ensino básico. O desenvolvimento do Projecto interdisciplinar "*Envolvências geométricas I e II - a Geometria na cidade*" e a utilização do computador, com programas de desenho e do processamento de texto proporcionou aos estudantes da turma A, de uma forma mais entusiasta e envolvente, a criação de elementos pictóricos e geométricos; a (re)escrita de textos e a composição destes dois elementos na exposição e divulgação da informação.

A folha de cálculo teve um papel relevante na sistematização da informação, designadamente, na utilização de tabelas, tal como se expôs e fundamentou na *tese 4 da investigação* e na resolução de diferentes problemas e actividades de investigação, com destaque para "*uma razão importante*" desenvolvida no quarto ano de escolaridade e já explanada anteriormente. O carácter transversal da situação criada fomentou a utilização posterior daquela ferramenta tecnológica, surgindo como um meio de realização concreta da actividade, num espaço privilegiado de sistematização e arrumação de dados, numa utilização de *mais folha do que cálculo*.

No 2º ciclo do ensino básico. **No *5º ano de escolaridade***, destacam-se as actividades de investigação sobre o método de Hondt e a pesquisa efectuada nas aulas de Educação Física, no desenvolvimento da actividade "*a correr e a saltar e a aprender matemática*". Como já foi analisado anteriormente, estas situações revelaram-se como actividades interdisciplinares significativas e na aplicação de "*o método de Hond´t nas eleições autárquicas*" a folha de cálculo surge como uma mais valia na optimização do tempo dispendido relacionado com o tratamento do conteúdo "divisão real", numa utilização mais eficaz de *mais cálculo do que folha*, a partir dos dados existentes num ficheiro. Na segunda actividade "*a correr, a saltar e a aprender matemática*", a folha de cálculo proporcionou a observação atenta dos dados, o estabelecimento de correspondências, o levantamento e a validação ou não de conjecturas relacionais numéricas.

No 6º ano de escolaridade. As situações de significado mais abrangente na pesquisa e organização de dados localizaram-se fundamentalmente no desenvolvimento de três projectos: "*vencer a fome, consolidar a Paz, Angola 2002*"; "*pulsação*", "a *área dos pavilhões da minha Escola e sua história*", tornando-se a segunda a mais significativa, pois os conteúdos explorados "faziam sentido" para os estudantes, quer sob o ponto de vista científico e curricular, expressamente ligado às disciplinas de Educação Física e Ciências da Natureza, quer sob o ponto de vista funcional e vivencial, relacionado com a vida pessoal dos estudantes.

Contudo, refira-se que a primeira actividade "v*encer a fome, consolidar a Paz, Angola 2002*", desenvolvida na quadra natalícia revelou-se bastante significativa para os estudantes, tendo sida explanada anteriormente em 2.6. deste capítulo. No terceiro período foi realizado o projecto "*a área dos pavilhões da minha Escola e sua história*" que procurava aprofundar um assunto abordado no ano anterior. Na concretização deste projecto foi explorado o processador de texto e a folha de cálculo na sistematização de dados e na elaboração do relatório. Tratava-se de explorar os conteúdos "escala" e "áreas" no estudo dos pavilhões da Escola, tendo presente o enquadramento histórico e cultural da instituição, baseado no Projecto Educativo de Escola. No desenrolar desta actividade houve pesquisas na Internet, no “sítio” da Escola, pois tratava-se de realizar um trabalho de âmbito interdisciplinar, o mais completo possível, não se revelando, contudo, particularmente interessante para os estudantes.

Desenvolvimento do Projecto “Pulsação” (anexo 7). Em Ciências da Natureza a professora explorou conhecimentos relacionados com o aparelho circulatório - a pequena e a grande circulação e os estudantes aprenderam a medir as pulsações.

Na aula de Educação Física foi desenvolvida a *actividade de subida e descida de um degrau*, medida a pulsação e registado o número de pulsações, durante cinco minutos, em intervalos regulares de um minuto. Houve procedimento idêntico na actividade *em repouso*, tendo sido possível, deste modo, responder às duas primeiras questões da folha de trabalho, nas quais era solicitado o registo destes resultados.

Na aula de Matemática da turma A foram resolvidas as questões propostas da segunda parte da folha de trabalho, da terceira à sexta questão. As duas primeiras questões estavam relacionadas com as actividades desenvolvidas numa aula de Educação Física, descritas no parágrafo anterior, existindo o consequente registo dos resultados obtidos, numa tabela.

Relativamente à quarta questão relacionada com *a construção dos gráficos de barras em cada uma das situações criadas: em actividade e em repouso*, a maioria dos estudantes teve dificuldades na construção do gráfico, mas cerca de 70% dos estudantes conseguiu uma resposta completa ou parcialmente correcta. Saliente-se ainda que um estudante realizou apenas um gráfico, registando os resultados das duas situações criadas: em *actividade* e em *repouso*. A maioria da turma identificou os dois eixos e as duas variáveis em causa: tempo e número de pulsações, mas revelou dificuldades na definição da escala, designadamente, na escolha da unidade adequada, na opção do intervalo e na repetição regular, bem como no início da contagem da escala e respectiva marcação dos intervalos regulares escolhidos.

Na quinta questão em que se pretendia *uma explicação da variação da pulsação durante o tempo da actividade de subir e descer o degrau*, reconhecendo-se a aplicação de conhecimentos no âmbito da disciplina de Ciências da Natureza, *a maior parte dos estudantes respondeu correctamente à questão*, mas não de forma completa, pois não foi capaz de *identificar*, *relacionar* e *aplicar* cabalmente os conhecimentos adquiridos nas aulas de Ciências da Natureza na compreensão do acontecimento físico vivido na aula de Educação Física, tendo apenas seis estudantes referenciado o aparelho circulatório e/ou o aparelho respiratório na análise da situação criada. Grande parte dos estudantes referiu o esforço realizado na actividade e considerou-o como factor responsável pelo aumento do número de pulsações, tendo optado por respostas descritivas ou repetindo procedimentos ou dados, sem conseguirem integrar saberes de âmbito científico.

Também na turma B os estudantes desenvolveram procedimentos idênticos aos da classe A.

Na construção dos gráficos os estudantes revelaram dificuldades acrescidas, designadamente, no(a): a) reconhecimento de dois eixos; b) necessidade de pensar numa escala adequada ao problema, com definição de intervalos regulares, marcas precisas e o início da contagem a zero no ponto de intersecção dos dois eixos, como acontece no uso de uma régua e no cálculo da medida de comprimento de objectos; c) desenho das barras, na textura, largura e cor preservadas, indicando o comprimento da barra o número de pulsações para cada minuto.

Relativamente à terceira questão em que se pretendia que os estudantes *analisassem como tinha variado a pulsação, durante a actividade de subir e descer o degrau e durante a fase de repouso* a maior parte dos estudantes (80%) respondeu correctamente, mas não conseguiu justificar convenientemente relacionando os resultados obtidos com os conhecimentos apreendidos em Ciências da Natureza.

<u>Realização de um relatório</u>

Após a realização da actividade "*Pulsação"* implementada nas áreas das Ciências da Natureza, Educação Física e Matemática foi solicitado aos estudantes das duas turmas a realização de um relatório. Iniciou-se a elaboração deste relatório na área do Estudo Acompanhado onde foi possível conversar com os estudantes sobre o que se pretendia na concretização do relatório e baseados na técnica de "brainstorming", motivá-los para a realização da tarefa, definindo em conjunto, as partes fundamentais do relatório. Naturalmente, como o relatório é conteúdo do programa de Língua Portuguesa, dialogou-se com os responsáveis por esta disciplina no sentido de anteciparem a exploração deste conteúdo para esse período de forma a apoiar efectivamente os estudantes no desenvolvimento desta tarefa concreta de âmbito interdisciplinar. O diálogo estabelecido foi acessível e frutífero, os professores acederam com entusiasmo, pois reconheciam interesse educativo na exploração de um conteúdo tão prático, como o relatório, numa matéria tão significativa para os estudantes. De facto, sentia-se este ambiente de partilha e comungava-se esta inter-relação de conhecimentos e saberes, em que a aprendizagem emergia de forma natural e integradora.

Esta experiência foi bastante gratificante e relevante para os estudantes, pela elaboração do relatório apreendido na disciplina de Língua Portuguesa e especialmente para a turma A em que era utilizado o computador, pois perceberam que poderiam interligar o processamento de texto, a folha de cálculo e a construção dos gráficos. Por outro lado, foi referido que o relatório deveria ser desenvolvido em diferentes espaços e tempos, designadamente no Estudo Acompanhado, em Língua Portuguesa, Matemática, Ciências da Natureza e em casa.

Na turma onde se usou o computador foi salientada ainda a necessidade de se realizar o relatório na área da Oferta da Escola, na qual iriam aprofundar a aprendizagem da construção de gráficos na folha de cálculo e integrá-los em composições com informação escrita concebida em Processador de Texto.

Foi ainda estabelecido um período de aproximadamente três semanas para os grupos elaborarem e apresentarem os relatórios em suporte de papel, especialmente para a turma

B[115], e também em suporte electrónico para os estudantes da turma A. Neste tempo destinado à elaboração do relatório os estudantes desta turma A procuraram realizar outras pesquisas no computador para enriquecerem o trabalho, integrando outros conteúdos aprendidos na Oferta da Escola. Posteriormente tiveram a iniciativa de explorar diversas tipologias de gráficos, de tal forma que a professora passou a controlar essas experiências realizadas, procurando centrar a atenção do estudante para o que era essencial na Matemática.

A professora de Matemática da turma A aproveitou a actividade da pulsação para iniciar conceitos básicos de Estatística, designadamente, os processos de recolha de informação, a organização dos dados, com destaque para as tabelas e os gráficos.

As respostas dos estudantes foram analisadas pela professora e investigadora, tendo sido destacados, pela professora, no quadro negro, os *pontos fracos* e *pontos fortes* da representação gráfica de modo a servirem de ponto de partida para a exploração inicial dos conceitos relacionados com a Estatística. Evidenciaram-se as primeiras fases da *recolha e tratamento de dados*, entre as quais se destacou a organização da informação recolhida, numa primeira fase, em tabela e, posteriormente, em gráficos.

Relativamente à construção dos gráficos aludiram-se a algumas incorrecções expostas pelos estudantes aquando da realização com papel e lápis, referindo-se a aspectos práticos das aprendizagens escolares já efectuadas, designadamente: a) o reconhecimento de dois eixos e a identificação destes noutros gráficos visualizados noutras disciplinas, designadamente, em Ciências da Natureza; b) a necessidade de pensar numa escala adequada ao problema, com definição de intervalos regulares, marcas precisas e o início da contagem a zero no ponto de intersecção dos dois eixos, como acontece no uso de uma régua e no cálculo da medida de comprimento de objectos; c) no desenho das barras, na textura, largura e cor preservadas, indicando o comprimento da barra o número de pulsações para cada minuto.

Após análise detalhada dos gráficos de barras, construídos pelos estudantes, com papel e lápis, na folha de trabalho da "*pulsação*", a professora aproveitou as incorrecções observadas, tais como: origem da contagem dos eixos de coordenadas, escala usada, largura das colunas, cores, … para, posteriormente, no quadro negro, desenhar correctamente os gráficos e apontar os aspectos cruciais na construção de um gráfico. A professora relembrou ainda que esta temática não era nova, pois já tinham visualizado e estudado gráficos na disciplina de Ciências da Natureza.

Tudo indica que a orientação seguida estava a resultar, pois os estudantes sentiram que tinham, intuitivamente, desenhado os gráficos, mas que precisavam das explicações dadas pela professora para corrigirem pormenores e aprenderem melhor esta matéria. Sentiu-se mesmo os lampejos de intuição de que fala Adler (1968) para despoletaram o conhecimento e a abertura para a construção de novos saberes.

Posteriormente, numa aula da Oferta da Escola, foram explorados os passos fundamentais na construção de gráficos de barras com a utilização da folha de cálculo. Os estudantes revelaram algumas facilidades iniciais em assimilar a construção dos gráficos.

[115] Refira-se ainda que alguns estudantes da turma B entregaram também o relatório em suporte electrónico.

Posteriormente os grupos aplicaram os conhecimentos adquiridos usando os dados obtidos individualmente, na *pulsação*, nas duas situações: em actividade e em repouso. Alguns estudantes tiveram ensejo de integrar conhecimentos informáticos adquiridos em aulas anteriores na Oferta da Escola, concretamente, na realização de mapas de conceitos e ideias, onde exploraram a cor e a forma. Assim, englobaram como suporte dos gráficos as paletas cromáticas bem como paisagens diversificadas. Nestas circunstâncias foi levantada a questão do conceito subjectivo de "bonito" na Matemática e como poderia ser prejudicial na divulgação e interpretação da informação. Após debate com os estudantes foi possível concluir que na matemática, mais do que em qualquer outra área, é absolutamente necessário distinguir o essencial do acessório e discernir o que é importante, para seleccionar criteriosamente a informação relevante e a divulgar de forma clara e objectiva. Após esta breve e necessária discussão, os estudantes interiorizaram o que se lhes pediu, tendo reflectido sobre a apresentação dos gráficos. Na aula seguinte de Oferta da Escola ainda se explorou a incorporação de um gráfico num texto e a respectiva composição gráfica.

Estas aprendizagens basilares, consideradas pelos estudantes acessíveis e "muito simples" motivaram-nos para a realização de outras experiências. No apoio aos diferentes grupos foi possível observar a autonomia com que os estudantes vagueavam pelos gráficos, realizando explorações livres, com (ou sem) lógica solicitando sempre uma explicação para algo que acontecesse e, para a qual, não soubessem encontrar resposta. De forma aberta e autónoma revelaram facilidades na descoberta de outros aspectos relacionados com a construção dos gráficos, designadamente, a mudança de escala dos eixos, diferentes tipos de gráficos,... Nesta perspectiva o computador parece ajudar a colocar o estudante numa atitude positiva face ao novo conhecimento, despertando-o para o prazer da descoberta e a capacidade de questionar, aprender e reequacionar conhecimentos.

Contudo, os estudantes tiveram algumas dificuldades técnicas, designadamente, na gravação dos ficheiros dado que os computadores não se apresentavam nas melhores condições, o que originou dificuldades na compreensão de alguns procedimentos e maior atraso na entrega dos relatórios.

A maior parte dos estudantes reitera, na conclusão dos relatórios, o gosto e o empenho em ter realizado esta actividade, porque:

- *aprendemos a sentir e a medir a pulsação* (2);
- *aprendemos a medir a pulsação em Ciências da Natureza e a fazer a recolha e o tratamento dos dados obtidos durante a actividade física, em Matemática;*
- *envolveu várias disciplinas, nas quais aprendemos várias matérias de uma maneira diferente*;
- *com esta actividade consegui aprender que, se puser o dedo polegar numa determinada parte do pulso consigo sentir e medir a pulsação. Também aprendi que nem todas as pessoas têm o ritmo cardíaco igual*;
- *achamos que esta actividade foi interessante, porque assim podemos medir as nossas pulsações e fazer gráficos no Excel*;
- *achei esta actividade interessante pois aprendi mais sobre o tema "o coração e vasos sanguíneos" e também como elaborar um gráfico. Com esta actividade pude ainda verificar através da experiência aquilo que nos tinham dito em teoria*;

- *conclui que todas as pessoas se cansam nesta actividade e que têm pulsações diferentes*;
- *achamos que a actividade pulsação foi interessante, divertida, útil e aprendi mais conhecimentos sobre a pulsação* (2);
- *aprendi bastante com esta actividade, por exemplo: fazer gráficos, relatórios e a medir a pulsação*.

Registe-se ainda que os estudantes gostaram efectivamente de resolver este tipo de actividade e foi absolutamente gratificante e significativo para os professores sentirem o pulsar integrador da ciência numa atitude dinâmica e "disciplinadora", cujo ritmo de realização progressiva era "saboreado" pelos estudantes, mas também pelos professores. A actividade resultou na abrangência das competências essenciais das várias disciplinas que dinamicamente se converteram em conhecimentos transversais, emergindo o gosto por aprender e compreender a ciência emergindo num todo de partes comuns.

A professora de Matemática da turma A referiu que esta actividade, de uma forma geral, revelou-se importante para a leccionação dos conceitos básicos da Estatística, na qual despendeu menos tempo do que era habitual nos outros anos, pois foi possível optimizar as capacidades de interpretação e representação gráfica dos estudantes com a ajuda do computador. Assim, a folha de cálculo e a construção de gráficos surgiram como ferramentas amigáveis e úteis no ensino de conteúdos específicos, designadamente, nos ligados à Estatística.

Os estudantes da turma B desenvolveram os relatórios em diversas disciplinas ou áreas curriculares, designadamente, em Estudo Acompanhado, Formação Cívica, Língua Portuguesa e em casa.

De uma maneira geral os estudantes referiram nos relatórios os objectivos da actividade e num trabalho individual, um estudante escreveu: "*A actividade "Pulsação" foi realizada no dia 21 de Fevereiro de 2003, numa sexta-feira, iniciando-se na aula de Educação Física e teve como objectivo sabermos como está a funcionar o nosso coração. Ainda no mesmo dia, na aula de Matemática analisámos os resultados obtidos na actividade*".

Contudo, como a professora de Matemática da turma B não aproveitou a actividade para explorar as noções básicas de Estatística, a realização do relatório no que concerne à construção dos gráficos foi mais problemática. O mesmo estudante referiu, sobre este assunto, na conclusão: "*A actividade correu bem, os estudantes portaram-se razoavelmente bem, tendo sido a maior dificuldade a elaboração do gráfico correspondente à análise de resultados*".

Na generalidade os estudantes desta turma tiveram necessidade de usar o computador na realização e apresentação do relatório e, para isso, solicitaram à professora de Oferta da Escola ajuda na construção dos gráficos, mas nesta turma a maior parte dos estudantes não conseguiu realizar um tratamento gráfico correcto da situação.

Contudo, houve estudantes que construíram correctamente os gráficos e reiteraram o que tinham escrito na apreciação das actividades desenvolvidas.

Três estudantes referiram: "*Esta actividade correu muito bem, foi muito divertida e muito interessante. A actividade, para além de ter sido boa, foi também muito cansativa, e* *muitos estudantes tiveram dificuldade em encontrar a pulsação. Com esta actividade aprendemos muitas coisas, tais como, medir a pulsação e elaborar um relatório, que mais tarde poderemos vir a precisar de fazer. Os estudantes gostaram de realizar esta actividade e penso que nos portamos muito bem. Alguns professores ajudaram-nos nesta actividade, a quem nós ficamos agradecidos. Esses professores foram: …. Nós gostamos de realizar esta actividade e até gostávamos de a repetir".*

Outros três estudantes destacaram: "*Esta actividade ajudou-nos a ver como está a nossa pulsação. (...) Tratou-se de uma actividade interdisciplinar, que envolveu as disciplinas que na introdução referimos". (...)* E na conclusão estes estudantes escreveram: *"A actividade correu bem, suamos um pouco, mas valeu a pena, porque assim já ficamos a saber como varia a nossa pulsação. Todos portamo-nos bem, fizemos as coisas bem e ninguém se portou mal. Alguns sentiram dificuldades em encontrar a pulsação, mas correu tudo bem".*

Um estudante realizou o seu relatório individualmente e começou por localizar no tempo a actividade: "*No dia 21 de Fevereiro de 2003 (sexta-feira) a turma do 6º B iniciou uma actividade interdisciplinar sobre a pulsação, dinamizada pela professora (...)".* Este estudante, tal como a maior parte da turma, organizou o relatório em partes*: Introdução, o que é a pulsação?; Objectivos da actividade; Descrição da actividade; Disciplinas envolvidas e Análise dos resultados"*. Nos objectivos referiu: "*Com esta actividade pretendeu-se aprofundar conhecimentos teóricos sobre o tema e com a componente prática ficamos mais conscientes que os valores da pulsação podem reflectir no nosso organismo".* Este estudante escreveu ainda que esta actividade esteve envolvida com as disciplinas de Educação Física, Ciências da Natureza, Matemática e Estudo Acompanhado.

Na análise dos resultados o estudante apresentou os gráficos, mas construídos incorrectamente, e concluiu que tinha resultados muito elevados em relação aos valores considerados normais para a sua idade. Nesta análise referiu: "*só há duas hipóteses ou cometi algum erro durante a medição ou tenho na realidade um batimento cardíaco elevado. Assim, vou repetir a actividade com o objectivo de esclarecer as dúvidas*. Tal como aconteceu com este estudante, também outros mostraram ensejo em repetir a actividade da pulsação para confirmarem (ou não!) os resultados obtidos. Caso continuassem fora dos limites normais para a idade, alguns deles mostraram desejo de ir ao médico para tentar esclarecer melhor esta situação clínica.

Registe-se ainda que, neste e noutros casos, a actividade também proporcionou aos estudantes o desenvolvimento do raciocínio de tipo condicional e do método científico, iniciado em Ciências da Natureza, com levantamento e confirmação das hipóteses.

Na conclusão três estudantes escreveram: "*Esta actividade correu bem, porque os estudantes tiveram um comportamento bom e as dificuldades foram poucas. Nenhum estudante teve muitas dificuldades"*.

A maioria dos grupos encontrava-se preocupado com o comportamento e referiram nos relatórios que se tinham portado bem. Assim, os estudantes estão atentos à sua atitude comportamental e à dos colegas, considerando-a explicitamente positiva no desenvolvimento desta actividade.

Três estudantes referiram também na introdução: "*Nesta actividade envolvemos três disciplinas úteis*". No desenvolvimento escreveram ainda: "*Na actividade desenvolvemos as nossas capacidades. (...) durante algumas semanas pesquisamos critérios sobre a pulsação*". E ainda na conclusão referiram: "*A actividade correu bem e nós gostamos de a realizar, porque ficamos a saber coisas melhores acerca da pulsação e a saber se a nossa pulsação estava com os batimentos correctos ou errados. Nós achamos que o comportamento dos estudantes foi bom, porque portaram-se todos bem e não houve confusão. Tivemos dificuldade em resolver as contas para obter o resultado*".

De facto, os estudantes revelaram algumas dificuldades no cálculo mental, pois na medição da pulsação a professora de Educação Física só pedia aos estudantes para contarem os batimentos durante 15 segundos[116]. Posteriormente deveriam multiplicar por 4, o que não era simples, pois logo de seguida tinham de se colocar em posição correcta para iniciar a subir e descer o degrau. Apesar de lhes ter sido dito que poderiam realizar os cálculos mais tarde, alguns estudantes teimaram em realizá-los em simultâneo o que lhes causou perturbação na dinâmica da actividade.

Dois estudantes concluíram nos relatórios que: "*A actividade correu bem, fizemos tudo o que nos foi proposto, quanto ao comportamento acho que nos portamos bem, apesar de às vezes haver um pouco de distracção*".

Três estudantes fizeram o relatório descritivo, construíram correctamente os gráficos, mas com manchas cromáticas muito acentuadas, referindo que a actividade: "C*orreu bem, não foi cansativa, mas nesse dia avisaram-nos para não levarmos equipamento (não tomamos banho). Assim, ficamos todos suados. No geral portamo-nos bem, apesar de algumas vezes termos feito algum barulho. Não tivemos grandes dificuldades, mas algumas pulsações ou foram mal medidas ou estão fora do normal. Gostamos muito desta actividade, pois foi muito interessante para nós*".

Contudo, este e outros grupos não analisaram nem reflectiram sobre os dados obtidos individualmente. Alguns estudantes também não construíram os gráficos e apresentaram os dados só em quadros. Três estudantes não construíram os gráficos nem analisaram individualmente os resultados obtidos e referiram que o objectivo desta actividade era "A*profundar os nossos conhecimentos sobre o nosso corpo, mais precisamente o nosso coração*". Sublinharam ainda que: *"Os resultados variam com as pessoas"* e apresentaram a seguinte conclusão: *"Depois de termos concluído esta actividade ficamos a compreender perfeitamente o que é a pulsação e o que significa. Esta actividade ajudou-nos a desenvolver os nossos conhecimentos acerca do nosso coração. Para nós foi muito importante"*.

Um estudante salientou na conclusão que tinha gostado de realizar este trabalho, "*Pois fiquei a saber o que era a pulsação e a saber contar os batimentos cardíacos. Tive algumas dificuldades, mas consegui ultrapassá-las*".

[116] Registe-se ainda o seguinte: peritos ligados à área do desporto referiram que a medição da pulsação, sendo realizada em períodos de tempo curtos, deveria fazer-se de 20 em 20 segundos para haver a possibilidade da pulsação ser par ou ímpar e, não contada de 15 em 15 minutos, como foi na turma B.

Outro estudante, que apresentou todo o trabalho em computador, com construção correcta dos gráficos, referiu: "*A actividade foi interdisciplinar, abrangeu as disciplinas de Ciências da Natureza, Educação Física, Matemática e Estudo Acompanhado"*. Analisou os resultados obtidos e teceu algumas considerações: *"Talvez o método de contar em apenas 15 segundos não seja o mais exacto, ou talvez o meu ritmo cardíaco esteja um pouco alterado"*. Por último o estudante escreveu: "*A actividade correu bem e tivemos bom comportamento. Tivemos alguma dificuldade na medição da pulsação, pois é difícil encontrar o local mais correcto para a medir"*.

Os estudantes estiveram muito preocupados em localizar, no tempo, as tarefas realizadas em cada uma das disciplinas. No início da realização do relatório, a pedido dos estudantes, foram recordadas as datas do desenvolvimento da actividade nas diversas disciplinas ou áreas curriculares e a maior parte dos grupos usou-as nos relatórios.

Reflexões e Conclusões genéricas

Esta actividade foi baseada numa ideia exposta no programa internacional de avaliação da Matemática e Ciências da Natureza - TIMSS. A primeira concepção tinha já um enquadramento interdisciplinar implícito, tendo sido desenvolvida nas áreas previamente definidas e noutras consideradas também fundamentais para a implementação e aprofundamento do projecto de natureza interdisciplinar. Realizou-se em vários espaços e tempos que importa destacar: a) recolha activa da informação pelo estudante sendo agente activo da pesquisa desenvolvida na Educação Física, em duas situações, em movimento e em repouso; b) tratamento e análise numérica e gráfica dos dados recolhidos; c) reflexão sobre o trabalho desenvolvido e elaboração de um relatório, com registo dos resultados.

A recolha de informação fez-se de forma diferente nas duas turmas, na classe A de 60s a 60s e na B, de 15s em 15s e, neste último caso, os estudantes precisaram de multiplicar por 4, mentalmente, o que dificultou o processo de registo de informação. Apesar de nas duas turmas a maior parte dos estudantes ter conseguido executar, com êxito, esta tarefa, não foi possível "in loco" assinalar os resultados obtidos em tabelas, nem no período de execução do exercício, nem posteriormente numa possível segunda leitura do enunciado na aula de Matemática, aquando da resolução da segunda parte da folha de trabalho - da terceira à sexta questão.

Relativamente à terceira questão, em que se pretendia que os estudantes *analisassem como tinha variado a pulsação, durante a actividade de subir e descer o degrau e durante a fase de repouso*, a maior parte dos estudantes das duas turmas conseguiu interpretar correctamente os resultados obtidos. Em relação à quarta questão relacionada com *a construção dos gráficos de barras em cada uma das situações criadas: em actividade e em repouso*, apesar de na turma A se ter obtido melhores resultados do que na classe B, a maioria dos estudantes das duas turmas não conseguiu descortinar correctamente a noção básica de gráfico, revelando dificuldades na identificação dos dois eixos e das duas variáveis em causa: tempo e número de pulsações; na representação correcta das barras, na forma, tamanho e cor; na escolha adequada da unidade de tempo e no correspondente intervalo e respectiva marcação regular nos eixos, e na identificação da actividade em desenvolvimento, escrita em cabeçalho da actividade de subida e descida do degrau ou na de repouso, conforme o caso. Num estudo realizado por Fernandes (1994) refere-se que a capacidade de interpretação e representação gráfica é mais acessível, em idades elementares quando se faz uma correspondência entre uma variável de tipo texto e outra numérica, do que quando se estabelece uma relação entre duas variáveis numéricas.

Após a resolução da folha de trabalho, a professora de Matemática, na turma A, analisou as respostas desta questão dos estudantes e assinalou algumas das resoluções individuais, no quadro negro, para provocar reflexões e a aprendizagem correcta de novos conhecimentos relacionados com a Estatística. Refira-se que esta circunstância foi significativa para os estudantes, surtindo efeitos de natureza correctiva, de provocação dos saberes intuitivos e de lançamento para a aprendizagem de novos conhecimentos. Posteriormente, na folha de cálculo, foi explorada a construção de gráficos que iria apoiar a realização do relatório especificamente na apresentação gráfica dos resultados.

Registe-se ainda que esta metodologia de trabalho foi altamente valorizada pela professora, devido à evolução dada no tratamento de assuntos relacionados com a estatística, do conhecimento intuitivo ao formal, com passagem pelo conhecimento experimental na folha de cálculo, não linear e que provocou o levantamento de diversas questões esclarecedoras (ou quiçá perturbadoras) na evolução do próprio conhecimento.

Relativamente à quinta questão, em que se pretendia *uma explicação da variação da pulsação durante o tempo da actividade de subir e descer o degrau*, a maior parte dos estudantes das duas turmas não respondeu completamente à questão e não foi capaz de *identificar*, *relacionar* e *aplicar* completamente os conhecimentos adquiridos nas aulas de Ciências da Natureza na compreensão do fenómeno físico vivido pelos estudantes na aula de Educação Física. Na sexta pergunta pedia-se que os estudantes *explicitassem as disciplinas que estiveram presentes na resolução da actividade, justificando a resposta* e a maior parte dos estudantes das duas turmas respondeu cabalmente à questão de forma completa ou parcialmente correcta, identificando as disciplinas e as matérias em estudo na disciplina das Ciências da Natureza.

Em relação aos relatórios realizados em grupo, refira-se que a tarefa não era acessível, pois, em termos escolares, os estudantes não têm ainda o hábito de reflectir frequentemente sobre as actividades realizadas, levantar questões, problematizar e registar conclusões. De facto, não existe o hábito de realizar relatórios de âmbito interdisciplinar, em que se procura relacionar informação pesquisada ou aprendida em diferentes disciplinas ou áreas. Contudo, notou-se da parte dos estudantes vontade e interesse em concretizar este projecto intrinsecamente significativo para cada um, pois tratava-se de estudar aspectos relacionados com a sua saúde pessoal. Alguns estudantes ao reconhecerem o número anormal de pulsações por minuto nas duas situações, de movimento e de repouso, referiram que iriam repetir a experiência em casa e se alguns valores se repetissem teriam de consultar o médico. Os estudantes da turma A entregaram o relatório em suporte de papel e electrónico e alguns da turma B também entregaram nos dois suportes, pois pediram apoio à professora de Oferta da Escola para o concretizarem. Tudo indica que ao ter existido a oportunidade dos estudantes aplicarem os conhecimentos das Ciências da Natureza de forma relacional e compreendida com os conteúdos matemáticos o desenvolvimento deste projecto tornou-se mais significativo indo ao encontro dos interesses e motivações dos estudantes, revelando-se o computador, nas duas classes, uma ferramenta útil na organização e tratamento da informação.

CAPÍTULO V – CONCLUSÕES E IMPLICAÇÕES DO ESTUDO

1. Introdução

A presente investigação permitiu problematizar e reflectir sobre a aprendizagem inicial da álgebra no ensino básico e procurou delinear, no actual quadro da flexibilidade curricular, um novo envolvimento conceptual e estratégico numa matriz aberta às outras áreas do saber. Esta perspectiva educacional visa melhorar o desempenho dos estudantes na disciplina, em particular, na construção de conhecimentos pré-algébricos, alicerçada na exploração de estratégias contextualizadas e de âmbito interdisciplinar, suportadas pela utilização de diferentes materiais, entre os quais o computador, com especial destaque para a folha de cálculo.

Em jeito de primeira conclusão, previamente assumida, refira-se que não é, de todo conveniente, generalizar os resultados obtidos na investigação, dado que a amostra não o permite (estudo de duas turmas) e a complexidade do acto educativo assim o exige. De facto, na interacção educativa estudada avivam-se diariamente diferentes motivações, interesses, objectivos, crenças e vontades pessoais, emergem laços de cooperação instalados, com processos de avaliação contínuos que anseiam conviver harmoniosamente, respeitando o indivíduo e o grupo. Nestas circunstâncias, cada comunidade educativa, identidade escolar, turma, classe e indivíduo constituem-se como uma unidade irrepetível e, cada um por si e, no todo, integram um sistema pragmaticamente coerente, aberto à reflexão, à inovação e a intervenções construtivas que valorizem, "*in loco*", a aprendizagem. É neste enquadramento que a investigação se situa e, por tal motivo, parece desejável e até conveniente disponibilizar resultados, no quadro actual da flexibilidade curricular, que provoquem reflexões educacionais e identifiquem outras perspectivas pedagógicas no processo aprendizagem-ensino da álgebra.

Neste último capítulo pretende-se reflectir e analisar o estudo como um todo e enquadrar os resultados obtidos num vasto campo curricular programático, de contexto interdisciplinar, de forma a procurar responder às sub-questões de investigação ou a parte delas[117], previamente identificadas no primeiro capítulo da tese. Na perspectiva de organizar os resultados obtidos optou-se por apresentar as conclusões do estudo seguindo dois campos complementares de análise: um ao nível *estrutural* e um outro ao nível *procedimental*, sendo certo que o primeiro se situa numa abrangência organizacional e programática da Educação Matemática e o segundo orienta-se para uma intervenção didáctica, mais operacional e tecnológica. Com as cautelas que uma investigação em educação sempre sugere e merece serão expostas as conclusões directamente relacionadas com os resultados das teses, enunciadas e fundamentadas no capítulo anterior e com os dados resultantes da realização de tarefas no campo experimental, num *´follow up´* de cinco anos, do 1º ao 2º ciclo do ensino básico.

---

[117] Já na elaboração e fundamentação das teses de investigação surgiram respostas a algumas das sub-questões formuladas.

Este último capítulo será, então, apresentado em três partes, duas delas dedicadas às conclusões, na organização referida e uma terceira orientada para a indicação das limitações do estudo e a formulação de algumas recomendações.

2. Dimensão Estrutural

Nesta secção o foco da análise será a Educação Matemática, no campo curricular, prevendo a componente da flexibilidade curricular no 1º e 2º ciclos do ensino básico e a organização programática da disciplina de Matemática, no domínio das aprendizagens algébricas. Nesta componente emerge necessariamente a atitude do professor na acção educativa, com um novo papel na *cena didáctica*, com outros estímulos no *contrato didáctico* (César, 2000) que, implicitamente, solicitam uma intervenção também a montante, no âmbito da formação de professores.

2.1. Concepções curriculares e matematização

O grupo de trabalho GT "Matemática 2001" (1998) recomenda que devem ser clarificadas as grandes finalidades para o ensino da Matemática propostas nos currículos, ao nível da formulação e da articulação com os objectivos gerais, proporcionando maior integração dos diversos domínios (conhecimentos, capacidades, atitudes e valores) e maior ênfase nos objectivos dos domínios das atitudes e valores relacionados com a Matemática.

Na concepção dos problemas, actividades de investigação e projectos pode-se constatar, neste estudo, que não existe nos programas de Matemática, especialmente, no 2º ciclo do ensino básico, um entrosamento visível entre os diferentes domínios da Matemática e de outras disciplinas ou áreas curriculares. Assim, à semelhança do que existiu, de forma explícita, no 1º ciclo do ensino básico, parece viável que se continue a divulgar neste nível de escolaridade e se promovam no 2º ciclo do ensino básico, *quadros de interacção do conhecimento interdisciplinar*, no programa de Matemática, entre as diferentes disciplinas ou áreas curriculares e com algumas propostas concretas de trabalho. Para além deste aspecto programático e de natureza curricular deveria ser disponibilizado, neste nível de ensino, que é básico e obrigatório para todos os estudantes[118], documentação de apoio às orientações curriculares, divulgando junto das Escolas projectos de âmbito interdisciplinar, afectando equipas de formação de formadores a Centros de Investigação Multidisciplinares e a Instituições de Ensino Superior. Estas deveriam gerir equipas pluridisciplinares de apoio, acompanhamento e coordenação às Escolas do(s) Agrupamento(s), que provocasse, numa primeira fase, uma formação experimentada, problematizada e reflexiva, com base em propostas concretas interdisciplinares para que, numa segunda fase, se compilassem experiências documentadas, sugerindo concretamente planos de aula com instrumentos e propostas de intervenção já validadas, em que as TIC poderiam ter um papel "pivot" no desenvolvimento deste trabalho investigativo de âmbito interdisciplinar, como foi de certo modo, verificado, junto dos estudantes, na exposição da

[118] À semelhança do que aconteceu já no ensino secundário e, tudo indica, com resultados positivos.

tese 11. Uma proposta semelhante de planificação e intervenção é também defendida pelo NCTM (1991) no plano curricular de integração das Ciências com a Matemática, apresentado no capítulo da revisão da literatura e onde é ainda assinalada a necessidade de especialistas acompanharem o professor nas actividades de planificação e desenvolvimento.

De facto, a gestão do currículo recomenda que não há um modo único de intervir na Escola e os princípios orientadores de Educação Matemática reconhecem a diversidade como forma prática de atingir a equidade. Todavia, é a Escola que, através dos seus órgãos próprios, define linhas orientadoras precisas, atribuindo aos professores responsabilidades acrescidas, apelando ao seu profissionalismo e à vontade de intervir numa postura flexível, continuada e sustentada, visando, em última instância, o sucesso do estudante.

Para além da responsabilidade dos órgãos de gestão escolar em coordenar competências e optimizar esforços dos diferentes profissionais é necessário, tal como referem Abrantes, Serrazina e Oliveira (1999), que os professores desenvolvam, especificamente na Matemática, uma visão global inter-ciclos sobre o ensino da disciplina ao longo de toda a escolaridade e não restrita ao ciclo em que leccionam, salientando que a aprendizagem de certas noções não começa quando se apresentam as noções formais mas, normalmente, inicia-se muitos anos antes quando os estudantes contactam, de modo informal, com esses conteúdos, como acontece, como já se referiu na revisão da literatura, nos fundamentos didácticos da aprendizagem da álgebra, com o início da exploração da pré-álgebra (Kieran, 1992; Talbert e Stallings-Roberts, 1994).

Numa perspectiva horizontal dos objectivos e conteúdos a explorar na Matemática, em cada ano ou nível de escolaridade, torna-se indispensável atender ao diálogo educativo a estabelecer entre os domínios da própria disciplina e os outros tópicos de outras disciplinas ou áreas disciplinares para se tentar alcançar, de forma sustentada, o desenvolvimento integral e harmonioso da criança. De facto, como se constatou neste estudo, existe uma "décalage" no desenvolvimento interdisciplinar e horizontal do conceito de "escala" surgida da aula de História para a Matemática, no 5º ano de escolaridade.

De uma forma convergente e complementar com esta perspectiva importa desenvolver também uma abordagem vertical sustentada dos assuntos, de modo a fortalecer os saberes anteriores e suportar os seguintes, numa perspectiva sólida e integrada do conhecimento matemático, com especial destaque para a aprendizagem da álgebra que requer: repetição de problemas contextualizados em diferentes anos de escolaridade e níveis de ensino, com abordagens similares ou variadas, como foi experimentado e fundamentado na *tese 10*.

Tudo indica que, desde cedo, no plano do cumprimento dos objectivos do ensino pré-escolar e do ensino básico e no desenvolvimento de competências, devem ser construídas pontes de conhecimento de modo que sejam criadas *cadeias temáticas de aprendizagem matemática*, capazes de promover, não apenas a matemática operacional, a algorítmica e a dos símbolos, mas também a matemática do pensamento, da comunicação partilhada com o meio envolvente, como, de certo modo, fundamenta a *tese 9*. Neste sentido, o contexto interdisciplinar das aprendizagens algébricas vem dar um contributo significativo, numa perspectiva funcional e prática do conhecimento matemático, nas vertentes horizontal e vertical, prevendo a exploração harmoniosa e integral do termo “matematização”, conceito crucial no desenvolvimento da matemática em contexto.

Na investigação em curso foi possível trabalhar este conceito, já estudado por vários investigadores do FI: Freudenthal, De Lange, Gravemeijer, Drijvers, Kindt, entre outros (1973-2004) e constatar que, na realidade educativa, torna-se indispensável que os estudantes tenham hipóteses de idealizar, pensar e resolver problemas, explorar actividades de investigação e concretizar projectos numa perspectiva alargada de “matematização”.

Os investigadores do Freudenthal Institut (FI) realçam que o conceito de “matematização” assume duas vertentes fulcrais: i) a formação de conceitos a partir de referências da realidade e de problemas “realistas” (matematização horizontal) e ii) a formalização dos aspectos matemáticos envolvidos nas situações (matematização vertical). Na investigação em curso e no enquadramento curricular actual do programa de Matemática, foi possível ampliar e aprofundar este conceito e constatar que a “matematização” encerra, então, duas componentes fundamentais: *componente vertical cognitiva/conceptual*, ligada à estrutura conceptual do estudante e à relacionada com a estrutura do edifício matemático e a *componente horizontal*, marcada pela orientação funcional da matemática, ligada ao quotidiano e ao aspecto curricular, com conexões a outras disciplinas ou áreas do conhecimento. Deste modo, a primeira componente é de orientação estrutural e a segunda de cariz procedimental (Figura 50).

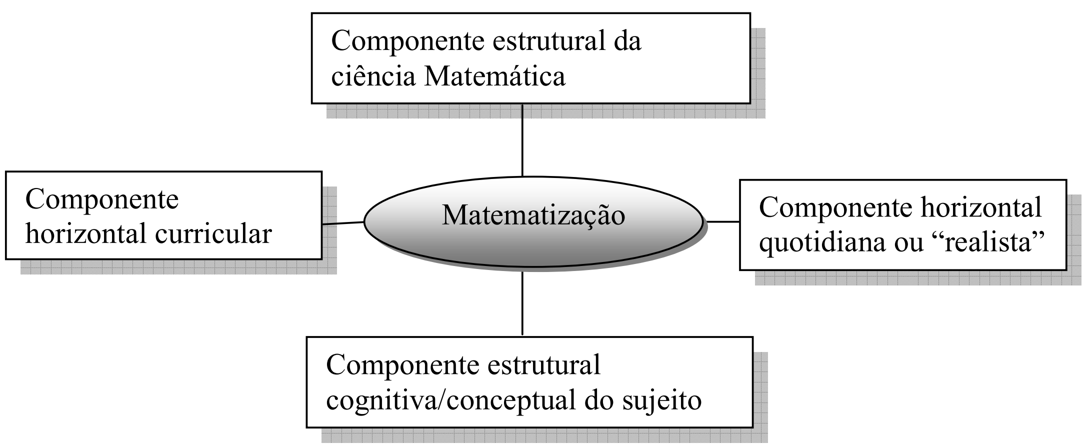


Figura 50: Conceito de “matematização” aprofundado na investigação

As diferentes teses de investigação enunciadas no capítulo anterior ajudam a clarificar este conceito e apoiam, de certo modo, o entendimento desta estrutura, designadamente, no que concerne à confirmação dos dois modos da componente vertical e à abrangência funcional e curricular da componente de âmbito horizontal apresentada. Tal como defende De Lange (1987), a “matematização” não pode ser considerada um conceito estático, mas dinâmico, pois pressupõe um determinado tipo de trabalho em ambiente de sala de aula em que a observação, as ideias e as estratégias de resolução possam ser confrontadas entre estudantes, assim como a análise prática e rotineira de cadernos e livros de apontamentos, bem como a reflexão do trabalho realizado, sendo todos estes procedimentos considerados essenciais.

A mobilização e o aprofundamento de cada uma das componentes parecem depender do tipo de tarefa proposta, do grau de desenvolvimento do estudante, da relação professor-estudante estabelecida e dos materiais a explorar. Relativamente à utilização de suportes práticos, Ameron (2002) defende que estes poderão dar mais oportunidades ao estudante para "matematizar as suas construções: horizontalmente (esquematizando e construindo modelos na resolução das actividades) e verticalmente (com a abstração de notações, generalização estratégica de soluções e o desenvolvimento de modelos para o raciocínio matemático" (p. 164).

Nesta investigação, a resolução de cada uma das diferentes tarefas propostas evidenciou e fundamentou, por si só, e em conjunto, uma ou várias componentes associadas ao conceito de "matematização". Se se considerar que os dois eixos evidenciam implicitamente a existência de quatro quadrantes e imaginando-se o enquadramento das tarefas nestes espaços pode-se inferir, a título de exemplo, que os problemas de esquematização, de uma maneira geral, possibilitaram a intervenção mais acentuada da *componente vertical estrutural do edifício matemático* e da matriz cognitiva do estudante, mas também da *componente horizontal quotidiana*, situadas, principalmente, ao nível do desenvolvimento de competências no 1º e 4º quadrantes (Figura 50, p. 382). Na resolução das actividades de investigação, também várias combinações podem emergir como, por exemplo, na actividade "*uma razão importante!...*" as componentes mais trabalhadas situaram-se ao nível do eixo da *componente estrutural da ciência matemática* e da pessoa, integrando também a *componente horizontal do quotidiano*, situada de forma experimental, pela mobilização de conhecimentos implícitos e desenvolvendo-se competências próximas do 1º e 4º quadrantes. Enquanto que a exploração do problema "*a carga certa para o "peso" certo*" e da: "*banda desenhada…"* situaram-se no envolvimento das duas componentes estruturais, desenvolvendo-se competências ao nível do 1º, 3º e 4º quadrantes. Por último, na concretização do projecto proposto "*pulsação*", de uma maneira geral, todas as componentes são mobilizadas, desenvolvendo-se competências em todos os quadrantes.

2.2. Programa de Matemática do ensino básico - linguagem e conteúdos

Como se pode constatar no aprofundamento do conceito de "matematização", o carácter relacional da Matemática provoca, necessariamente, entrosamentos entre os domínios internos da própria ciência, entre esta e as outras ciências e o "nosso" quotidiano, constituindo-se a Matemática, na realidade, como "património cultural da humanidade" (ME, 1999). Mas provavelmente é esta vertente democrática que certamente lhe assegura a dupla dimensão, a do campo interdisciplinar, conectada com as outras ciências e a do campo funcional disponibilizada ao serviço do Homem, no seu dia a dia. Neste sentido, crê-se que a linguagem utilizada nos programas deve ser apropriada e contemplar linguisticamente estas duas componentes: a científica e a funcional, tornando a disciplina mais atraente para todos e contemplando uma visão contextualizada e holística do conhecimento. Sendo a Matemática uma linguagem (Shoenfeld, 1985; 1987; 1988) importa observar não só a organização dos tópicos e as aproximações a explorar na aprendizagem da álgebra, mas também reflectir sobre a linguagem utilizada no próprio Programa de Matemática.

Os termos ou o vocabulário adstrito aos tópicos inclusos nos programas actuais de Matemática do 1º e 2º ciclos do ensino básico revelam uma linguagem interna hermeticamente fechada e restrita ao campo matemático. Concretamente, o programa do 1º ciclo do ensino básico está organizado em três blocos temáticos, a saber: bloco temático 1, "Números e operações"; bloco temático 2, "Espaço e forma" (iniciação à Geometria) e o bloco temático 3, "Grandezas e medida" e no currículo nacional/competências apela-se ainda à exploração da "Análise de dados, estatística e probabilidades". No 2º ciclo, no 5º ano de escolaridade são explorados diferentes conteúdos, designados genericamente por: "Sólidos geométricos", "Números inteiros e números decimais, adição e subtracção e perímetros", "Áreas e multiplicação", "Divisão", "Ângulos e triângulos", "Volumes" e no 6º ano de escolaridade outros tópicos são apresentados: "Geometria", "Números racionais e operações numéricas", "Razões e proporções", "Áreas e volumes" e "Estatística".

Ora, no programa "Realist Mathematics Education" (RME) e no projecto MiC, desenvolvido no Freudenthal Institut (FI), no domínio da álgebra, os termos usados para os tópicos que naturalmente integram conteúdos matemáticos, surgem mais amplos e contextualizados, designados por: "Padrões e símbolos", "Expressões e fórmulas", "Comparando quantidades", "Tomar decisões", "Gráficos", e "Equações" e "Crescimento", que incluem expressamente temáticas mais abrangentes.

Assim, no projecto relacionado com a aprendizagem da álgebra no currículo da Escola Holandesa, existem três grandes temas: "Linearidade"; "Comparando"; "Relacionando e crescendo" (Reeuwijk, 1995, 2004). Constata-se que este projecto integra a aprendizagem da álgebra num contexto "realista", numa linguagem mais abrangente, não estritamente matemática, tornando-se esta disciplina acessível e integradora, conectando vocábulos próprios da matemática com os do senso comum. Por outro lado, e de forma concomitante, existe um controlo sobre a organização, o planeamento estratégico e os conteúdos focados nos manuais escolares, estudados por Treffers (1991), cujos dados são referidos numa das páginas seguintes deste tópico. No sistema holandês, no caso da "Linearidade", muitas relações são estudadas e várias expressões lineares são (re)escritas, substituídas por outras equivalentes, com palavras, expressões, desenhos, tabelas, gráficos, etc. As relações lineares são exploradas nas diferentes dimensões: físicas, em modelos artificiais ou descrevendo situações reais ou próximas do quotidiano. No segundo tema são explorados problemas, interpretados e representadas relações. Nesta análise ocupam papel fulcral o estudo de tabelas, gráficos, a resolução de equações e de inequações, não se dando, numa primeira fase, atenção a aspectos formais, mas a estratégias de resolução pessoal ou de grupo. No tema "Relacionando e crescendo" descrevem-se e intensificam-se aptidões de análise de situações e de representação, em que diversos tipos de crescimento são estudados e comparados, uns com os outros, para diferenciar crescimentos distintos, tais como: ax; $ax+b$; $2\pi r$; 2^n, entre outras.

Também no programa de avaliação internacional PISA 2000 considera-se que a *literacia* em matemática depende de um corpo familiar de conhecimentos genéricos, tais como: *números e operações*; *sistema monetário*; *espaço e forma*, incluindo *a medida* e *as relações*, confirmadas pelo ME e GAVE (2002, p. 9): "os conceitos envolventes considerados foram os seguintes: mudança e relações, espaço e forma e quantidade e incerteza". Ainda no PISA 2003 na "dimensão do "conteúdo" os núcleos de áreas e conceitos matemáticos relevantes são: *quantidade*, *espaço e forma*, *mudanças* e *relações e incerteza*" (Ministério da Educação (ME), Dezembro de 2004, p. 7). Por outro lado, o programa PISA 2000 propõe determinados níveis de competência matemática, enunciados numa linguagem global e organizados em três *classes*: i) *reprodução*, definição e cálculo, relacionados com a aplicação de algoritmos e o registo de procedimentos rotineiros; ii) *conexão*, integração e aplicação de conhecimentos na resolução de problemas; iii) *matematização*, relacionada com a expressão simbólica do pensamento matemático e da consequente generalização. Tal como no PISA 2000, concretamente no PISA 2003 os domínios de avaliação são definidos em termos de "*conteúdo* ou *estrutura* de conhecimento que o estudante precisa de adquirir em cada domínio de avaliação, *processos* que têm de ser desempenhados e *situações* em que os estudantes encontram problemas matemáticos e em que são aplicados conhecimentos relevantes" (PISA 2003, Dezembro de 2004, ME, p. 6). Concretamente, neste programa é salientado que "*mudança e relações* envolve manifestações de mudança bem como de relações e dependências funcionais entre variáveis; está muito relacionado com a álgebra" (PISA 2003, ME, 2004, p. 10). Mais informação está associada a este conteúdo, designadamente, as relações matemáticas que tomam muitas vezes a forma de equações e inequações, mas as relações de natureza mais geral são também relevantes, podendo as representações apresentar-se "de forma bastante diversa, incluindo representações simbólicas, algébricas, gráficas, tabulares e geométricas" (PISA 2003, p. 10), podendo servir fins distintos, terem propriedades diferentes e mostrar a importância-chave quando se lida com situações e com tarefas.

Assim, no quadro actual da flexibilidade curricular (Decreto-Lei nº 6/2001) e quando se propõe que a matemática seja uma actividade humana de todos e para todos, baseada no desenvolvimento de actividades, no âmbito da matemática em contexto e de trabalho interdisciplinar, tudo indica que deveriam existir ajustamentos linguísticos na elaboração do programa de Matemática, com a inclusão de tópicos apropriados, que contemplassem a componente científica e funcional do conhecimento matemático. Estas reflexões e conclusões surgiram em plena investigação, pois a organização e os conteúdos existentes no programa dificultaram, em vários momentos, o desenvolvimento do estudo. De facto, na abordagem relacionada com as aprendizagens algébricas, estão previstas diversas aproximações à álgebra, entre as quais a *2ª aproximação à álgebra*[119], relacionada com a resolução de determinada classe de problemas, designadamente, os problemas de esquematização (Ameron, 2001-2004; Drijvers, 2001-2004) que no projecto MiC, incluem-se na exploração da matemática em contexto no conteúdo "Comparando quantidades".

---

[119] Na *2ª aproximação à álgebra* está prevista a resolução de determinada classe de problemas: problemas ligados a relações de proporcionalidade; problemas de esquematização; problemas de palavras relacionados com a noção de recursividade e problemas de indução ou de generalização.

Os problemas de esquematização são necessários e "fazem sentido" para os estudantes, mas no caso concreto do sistema de ensino português, não existe enquadramento curricular programático que fomente a exploração dos mesmos, como aconteceu na resolução de vários, entre os quais se destacam: "*as idades dos filhos*"; "*à descoberta dos números*"; "c*ompras nos saldos*" e "a*nimais na quinta*". Apesar de considerar crucial a resolução deste tipo de problemas para promover o desenvolvimento do raciocínio e despoletar o aprofundamento das noções matemáticas, especialmente, as relacionadas com conhecimentos pré-algébricos a primeira questão que a professora responsável pela turma colocava era: "*em que conteúdos do programa se vai enquadrar o problema?*", acrescentando, logo de seguida: "*de facto*, *não se está a perder tempo, os estudantes só beneficiam com a possibilidade de resolverem este tipo de problemas, pois afinal as provas de aferição são deste género…"*. E concluía: " *logo deve ser este tipo de actividades que o Ministério da Educação quer que sejam também resolvidas nas aulas de Matemática, mas os manuais existentes no mercado não ajudam… Apenas contêm exercícios e mais exercícios, quase sempre do mesmo género e são estas situações que a família está à espera que se desenvolvam na Escola...*".

As investigações recentes de Ameron (2002, 2001-2004) e de Meyer (1999) relacionadas com a matemática em contexto, com estudantes com idades entre 11 e 13 anos, assinaladas em 9.3.3. no segundo capítulo, proporcionam orientações precisas da necessidade de explorar problemas de esquematização na aprendizagem da álgebra, reclamados ainda por vários investigadores peritos neste domínio (Kieran, 1988, 1992; Shoenfeld, 1985, 1987; Nemirovsky, 1996; entre outros).

Também nesta investigação a elaboração e a fundamentação das *teses 8, 9 e 10* confirmam que a contextualização dos problemas provoca uma maior abrangência do conhecimento matemático, ultrapassando aspectos curriculares programáticos e valorizando os saberes não escolares do estudante, onde a comunicação matemática proporciona a aprendizagem participada, diferenciada e, porventura, se existir um trabalho posterior de reflexão, a construção holística do conhecimento.

A revisão atenta e profunda da literatura da especialidade mostra à clarividência que os problemas de esquematização contextualizados apresentam-se como o âmago da construção individual das aprendizagens pré-algébricas. Contudo, houve a consciência profunda que este tipo de trabalho estava a ser desenvolvido à "revelia", no actual programa de Matemática do ensino básico, com estudantes, de 11 e 12 anos. A professora reforçou os comentários em diferentes situações, referindo: "*para além de não haver enquadramento no programa de Matemática e nem no manual adoptado na Escola torna-se necessário fundamentar bem o trabalho, pois o diálogo com a família não é fácil… Por vezes, indagam, por que razão se está a desenvolver determinadas actividades que não fazem parte do programa de Matemática e consequentemente, estão atentos, pois consideram que não devem fazer parte da avaliação. Neste caso da investigação é diferente… Existe uma fundamentação científica sólida, um trabalho anterior com as turmas, já conhecido pelas famílias e o estabelecimento de diálogos que não cria perturbações no desenrolar do trabalho... Senão eu não poderia realizá-lo*"…

A partir destes dois tópicos várias questões adicionais surgem: para além das referências aos princípios educativos, objectivos, conteúdos e metodologias genéricas de um determinado ciclo e ano não deveria também o programa de Matemática destacar *cadeias de aprendizagem* sobre determinado tópico[120], designadamente, da álgebra, na qual os estudantes revelam tantas dificuldades? Não deveria o programa de Matemática[121] incluir sugestões de problemas e outras experiências de aprendizagem, capazes de mobilizar conhecimentos e competências transversais a todos os tópicos, especialmente naqueles em que o estudante revela mais dificuldades, como é o caso da álgebra? E a matemática veiculada pelos manuais não responderá apenas à organização conteúdal dos programas, esquecendo o desenvolvimento de competências essenciais e transversais para a Matemática? Sendo o manual um veículo privilegiado da exploração do conhecimento matemático, na Escola, com o estudante, a família e a sociedade em geral, não se deveria dar mais importância a este material educativo?

De facto, os programas de Matemática dos dois primeiros ciclos do ensino básico não incluem, explicitamente, tópicos claros direccionados para a construção gradual de conceitos algébricos, apenas existindo algumas orientações genéricas no domínio "álgebra e funções" no currículo nacional do ensino básico - competências essenciais. Contudo, nos programas de Matemática de outros países existem orientações expressas, com propostas claras de problemas no programa de Matemática vocacionados para o desenvolvimento do conhecimento algébrico, bem como a existência de uma coordenação oficial com os manuais que existem no mercado, como já tinha sido constatada, nos anos 90, nos programas de Matemática da Inglaterra, Suécia e Áustria, num trabalho conjunto da investigadora com docentes/investigadores da área de Matemática desses países. Relativamente a este assunto Treffers (1991) salienta que existiu "uma revolução silenciosa em Educação Matemática na Holanda no início do período 1980-1990" (p. 11) quando se criou o programa ("Realist Mathematics Education" – RME) e, consequentemente, no tipo de manuais adoptados nas Escolas primárias. Este investigador refere que, em 1980, 95% de Escolas usavam livros escolares com exercícios rotineiros e mecânicos e 5% com problemas realistas e, em 1990, 75% de Escolas primárias privilegiaram os manuais com problemas realistas e 25% com manuais com exercícios mecânicos e rotineiros. Assim, em 1991, a maior parte das Escolas adoptaram o programa RME "três quartos das Escolas da Holanda usam já manuais com séries de problemas realistas" (Treffers, 1991, p. 21).

Ainda a propósito da resolução de problemas de esquematização, concretamente, na experiência realizada com o problema das "*galinhas!...*", Reeves (2000) defende que este tipo de problemas que envolvem raciocínio algébrico deviam aparecer também nos manuais para que os estudantes mais novos tivessem oportunidade de resolver estas situações, primeiro pela via intuitiva e posteriormente pela via abstracta da álgebra formal.

---

[120] Como existe, por exemplo, na *didáctica do número inteiro absoluto*, no 1º ciclo, sustentada por investigações de vários pedagogos e matemáticos, entre os quais se destacam: Piaget, Bruner, Dienes, Maria Montessori, Kamii, Cuisenaire, Macias, etc numa perspectiva construtivista do saber do educando.

[121] Ou existir documentação anexa que completasse, de forma mais prática, as orientações programáticas estabelecidas.

Os próprios estudantes sentem a necessidade de explorar outras situações para além daquelas que são transportadas pelos manuais (Bauwrann, 1997). De facto, pode-se constatar na investigação que a conjugação controlada de tarefas diversificadas e criativas, relacionadas com a aprendizagem gradual dos temas em desenvolvimento suporta e estimula os estudantes para a aprendizagem. Alguns estudantes das duas turmas, especialmente, os da turma B, indagavam frequentemente a investigadora no início de diversas aulas se iriam realizar algum problema ou actividade diferente e ficavam tristes quando a resposta não era conclusiva ou positiva. Vários estudantes teciam considerações do seguinte teor: "*ainda bem que vem cá para resolvermos coisas interessantes, senão era mesmo uma chatice!*; *"É sempre a mesma coisa…. Só exercícios e mais exercícios e eu já sei isto… Quero mas é fazer coisas diferentes e ligados à Matemática, como costumamos fazer consigo…"*; "*Não traz por aí outro problema?*"

Para além dos aspectos motivadores da aprendizagem da Matemática, tudo indica que o Currículo Nacional do Ensino Básico deveria interactuar com o Programa de Matemática, privilegando uma relação forte ao nível da concepção, da elaboração de uma estrutura conectiva e de uma operacionalização contextualizada efectiva no próprio domínio da ciência e na ligação com o quotidiano, aspectos determinantes e focados no conceito de "matematização", exposto no ponto anterior. Segundo Becker (2001, 2003) a existência de problemas curriculares a este nível arrasta consequências nas dificuldades de implementação dessa relação quando se deseja ensinar a quem não tem estrutura de assimilação e o aspecto positivo é que a aprendizagem deve ser organizada na direcção das estruturas possíveis naquele momento, isto é, na direcção de acções e da coordenação de acções e não do treino verbal (opção preferida pela Escola, segundo este autor). Acrescenta ainda que os conteúdos devem estar ao serviço do aumento da capacidade da aprendizagem (construção de estruturas) e não constituir um fim em si mesmo, pois, segundo este autor, "as estruturas permanecem ou são subsumidas por estruturas mais capazes; os conteúdos caducam" (p. 21). Sendo assim, Becker (2003) conclui que o ensino deve organizar-se, primeiramente, no sentido do *conhecimento-estrutura* e só secundariamente no sentido do *conhecimento-conteúdo*. De facto, o exercício verbal, tão apreciado pela Escola, é campo aberto para aprendizagens de todo o tipo, *se e somente se* forem previamente construídas estruturas pertinentes. Neste campo, também já em 1965, Piaget defendia que a aprendizagem alimenta e renova o processo contínuo de assimilação e de acomodação e que aquela traz novidades para o desenvolvimento ou para a aprendizagem no sentido amplo (estruturas), assim como o desenvolvimento abre possibilidades para novas aprendizagens no sentido estrito (conteúdos). Certamente, que neste entrosamento de posições teóricas, conhecimentos práticos e experiências bem sucedidas se encontrará um percurso equilibrado e sólido de aprendizagem significativa do estudante nas componentes funcional, científica, cultural, ligada ao quotidiano, à própria disciplina e a outros ramos científicos e sociais.

2.3. Trabalho de Âmbito Interdisciplinar – Interacção Educativa

Como os estudantes revelam deficiências ao nível do conhecimento da medida no 2º e 3º ciclos do ensino básico várias investigações sugerem que devem ser reforçadas as competências associadas a outras disciplinas, como a Física, a Química, as Ciências e a Educação Visual (Abrantes, Serrazina e Oliveira, 1999). A maior parte das vezes contam que seja a Matemática a desenvolver essas competências e estes autores consideram oportuno que sejam desenvolvidos conceitos e destrezas relativas à medição em situações de natureza interdisciplinar, exemplificando com a construção de uma planta ou maqueta, dando-se a oportunidade aos estudantes de raciocinarem em termos proporcionais, desenvolvendo a criatividade e, ao mesmo tempo, associarem a Matemática a outras disciplinas. Também neste estudo, e a título de exemplo, esta situação aconteceu quando foi sugerido pela professora da disciplina de História a abordagem, na Matemática, da noção de "escala" em que foram usados mapas da cidade e da Escola para se implementarem as actividades de investigação: "*itinerários na planta da minha cidade*", no 5º ano de escolaridade e "*cálculo das áreas dos pavilhões da minha Escola*" no 5º e 6º anos do ensino básico. A primeira actividade, para além de ter o propósito de realizar uma abordagem inicial à noção de "escala", por solicitação da professora de História, procurava ainda consolidar um trabalho de orientação, identificação e representação cartesiana relacionada com a sintaxe da fórmula a explorar na folha de cálculo, na turma A.

2.3.1. Dinâmica estabelecida

Como se referiu no capítulo dois, da revisão da literatura, a implementação da interdisciplinaridade como prática educativa arrasta sérios obstáculos, designadamente, porque a Escola está organizada disciplinarmente, de onde emana explicitamente a figura do professor para a disciplina, emergindo, de uma forma evidente, a marca da segmentação temporal, espacial e programática na instituição Escola (Pombo, Guimarães e Levy, 1993). Assim, as dificuldades estruturais de organização curricular arrastam processos de responsabilização acrescidas aos professores que procuram dinamizar iniciativas de âmbito interdisciplinar.

No decurso da investigação foi possível registar o interesse manifestado pelos educadores e professores em inovar a sua prática pedagógica, mostrando-se disponíveis para colaborar com a investigação ao nível da concepção e da realização das propostas de trabalho de matemática em contexto e de âmbito interdisciplinar. A idealização e a implementação deste tipo de trabalho surgiu naturalmente no 1º ciclo do ensino básico, mas no 2º ciclo iniciou-se pelo Conselho Escolar, pela emergência da ideia do(a) professor(a) responsável pela área disciplinar de Matemática e/ou Ciências da Natureza, ou por professor(a) de outra disciplina ou área disciplinar ou curricular. Posteriormente, o diálogo educativo estabelecido, de tipo "brainstorming", era desenvolvido nesse órgão, com a definição de objectivos, conteúdos e estratégias a implementar, designadamente, com a possibilidade de outra calendarização para os conteúdos de outras disciplinas, como aconteceu, no 5º ano de escolaridade, com a noção de "escala" e no 6º ano de escolaridade, designadamente, no 2º período, pela necessidade de realizar o relatório do projecto: "*Pulsação*" permitindo que o conteúdo "relatório" fosse antecipado na Língua Portuguesa para este período, em vez de ser no 3º período, como era normalmente explorado.

Por outro lado, a directora de turma, no 2º ciclo do ensino básico, tem um papel crucial na dinâmica educativa estabelecida, sendo o "pivot" da inovação, funcionando na turma como catalizador de motivações, interesses, planeamentos conjuntos, reflexões, análises particulares e gerais e posterior avaliação do trabalho interdisciplinar realizado. Como referia a professora da turma "*o director de turma é um pivot pessoa e não um pivot da disciplina*". Nesta perspectiva, este cargo provoca exigências acrescidas e tudo indica que a definição de critérios rigorosos na escolha desse professor(a) deve ser baseada, em primeiro lugar, no carácter relacional e emocional do profissional, na crença na inovação e numa postura de debate educativo com os seus pares, abraçando o diálogo como "uma exigência existencial" (Freire, 1975) e simultaneamente reunindo sólidas competências científicas e pedagógicas. A professora que apoiou o estudo no terreno referiu, numa entrevista, que o papel da directora de turma é fulcral no desenvolvimento deste tipo de actividades, pois "*praticamente é o mentor prático e o motor da acção. Alguém tem a ideia, que também pode passar (ou não) pela directora de turma, mas é esta que faz com que os estudantes e os professores adiram ao desenrolar das actividades. Por exemplo, as actividades da "pulsação" e "vencer a fome…" resultaram, porque eu como directora de turma era responsável por várias disciplinas e áreas curriculares e poderia acompanhar e estimular estudantes e professores"*.

Por outro lado, a própria Escola, de acordo com os projectos desenvolvidos, deve procurar mobilizar vontades e propor formação específica como aconteceu no decorrer da investigação, tendo sido promovidos, por sugestão da investigadora e da directora de turma, dos professores responsáveis ou da direcção da Escola, temas de interesse para a comunidade escolar, de acordo com as prioridades exigentes da prática educativa, designadamente: "gestão flexível do currículo"; "educação para os valores e a cidadania"; "directores de turma", entre outros. Neste sentido, as Escolas vocacionadas para a formação de professores devem disponibilizar ofertas de formação na área interdisciplinar e em domínios afins.

No presente estudo, a existência do trabalho interdisciplinar desenvolvido em várias actividades de investigação: "*itinerários…*", "*cálculo da áreas dos pavilhões*", "*a correr, a saltar e a aprender matemática!...*", "*banda desenhada…*" e nos projectos: "*envolvências geométricas I e II*"; "*vencer a fome, consolidar a paz, Angola 2002*", "*pulsação*" fortaleceu laços de companheirismo na cultura profissional do professor e da própria Escola que procurou disponibilizar espaços de interacção educativa para planificar e avaliar as actividades desenvolvidas. Imaginando-se a comunidade escolar como um laboratório da própria sociedade, tudo indica que se abriram "corredores de diálogo" na sala de aula e na capacidade de planear e gerir, em conjunto, várias situações. No desenvolvimento da investigação constatou-se que o trabalho de natureza interdisciplinar aprofundou a comunicação entre os professores, entre os professores e os estudantes, entre os estudantes e, nalguns casos, fomentou o diálogo educativo entre estudantes e família e consequentemente entre a família e o director de turma. Por outro lado, reconhece-se que as crenças, as convicções e as práticas fortemente veiculadas tendem a selar o compromisso e a enraizar-se na Escola se tiverem a legitimidade do Grupo Disciplinar e/ou do Conselho de turma e/ou sobretudo do Conselho Pedagógico, órgão capaz de acolher uma ideia, de a lançar e promover, de a avaliar, de forma a criar elos de co-responsabilização, de cooperação entre órgãos e professores, prosseguindo os objectivos educacionais de âmbito curricular e simultaneamente desenvolvendo competências essenciais e transversais da Educação Matemática.

2.3.2. Aprendizagens mais democráticas

A diversidade de tarefas parece não deixar ninguém indiferente. Isto significa que as várias situações apresentadas na investigação abarcam os diversos interesses manifestados pelos estudantes que reagem, pensam, debatem, questionam e avaliam, como se pode constatar nas diferentes *teses* formuladas, com especial destaque para *a tese 6, tese 8 e* a *tese 9*. Deste modo parece ser possível que a aprendizagem da matemática se processe de forma significativa, com a participação activa, pessoal e intelectual dos estudantes, pois a diversidade tem mais probabilidades de chegar a todos e a cada um, de modo que a disciplina deixe de ser, como refere o ME (1990), factor de selecção e se transforme num instrumento de desenvolvimento global e integral de todos os estudantes.

Na investigação em curso pode-se averiguar que *os estudantes com mais dificuldades na disciplina* apreendem outra forma de a descobrir, apercebem-se da utilidade prática da mesma, e é reconhecido que os conhecimentos não escolares são valorizados, como foi identificado e fundamentado na *tese 8*, exposta no capítulo anterior: "*o trabalho desenvolvido no âmbito da matemática em contexto e de âmbito interdisciplinar valorizou as aprendizagens não escolares do estudante*".

De facto, a tentativa de explorar a matemática em contexto e de âmbito interdisciplinar capta interesses e motivações diferenciadas nos estudantes. Por isso, os estudantes com mais dificuldades normalmente revêem-se naquele tipo de situações práticas e relacionadas com o seu dia a dia e parecem reclamar mais uma hipótese de aprender matemática, mas as deficiências inerentes ao processo de resolução das tarefas reside fundamentalmente na capacidade de organizar os dados, na representação e na resolução simbólica das situações. Contudo, como defende Meyer (1999, p. 522), é preferível que o estudante apresente uma estratégia simples mas compreendida, do que uma abstracta sem compreensão. Nestas circunstâncias, os estudantes, usam a linguagem comum para proporem soluções ou até podem chegar a usar códigos apropriados, fazendo desenhos, esquemas ou ícones, como aconteceu, especialmente, na resolução dos problemas de esquematização, com especial destaque para o problema "*animais na quinta*" exposto, pormenorizadamente, no capítulo anterior, na formulação e fundamentação da *tese 6*. Nesta perspectiva, os estudantes de desempenho mais fraco em Matemática são estimulados intelectualmente ao serem valorizadas as propostas de resolução e de apresentação dos resultados. Deste modo, estimula-se o pensamento e os saberes do estudante, pelas vivências intelectuais e até as aprendizagens não escolares, como referia o Joe "*Eu consigo resolver este problema, é simples para mim…eu ajudo a minha mãe na pastelaria e estou sempre a resolver destas situações e a minha mãe diz que eu percebo muito bem*"; "*Assim, para mim isto é a matemática*". E também o Ric (nome fictício da turma A), com observações: "*assim, eu consigo gostar desta matemática*" e na utilização da folha de cálculo: "*agora já estou a compreender, vou fazer =a3+2 e é sempre mais 2 mais dois, é giro…*" ou "*sabe professora o meu problema é nas contas, eu até com a calculadora e o computador vou lá pois vou pensando sobre o que dá e chego a uma conclusão que costuma estar certa*" ou "*é bom trabalharmos no computador para fazermos as coisas em conjunto com os colegas e podermos falar e aprender com eles*" ou de outro estudante da turma B: "*eu gosto de resolver estes problemas, tenho de puxar pela cabeça, mas no livro é sempre a mesma coisa, é só fazer exercícios*".

Os trabalhos realizados por Lave (1988-1997); Lave e Wenger (1991-2002) provocaram algumas reflexões e revelaram que resolver problemas num supermercado é diferente de resolver problemas com papel e lápis e concluem que os estudantes poderão ter rotinas de sucesso superiores na resolução de problemas diários comparativamente aos problemas resolvidos na Escola. Por outro lado, Nunes refere que "*street mathematics*" é um exemplo de prática cognitiva que revela a existência de um potencial considerável para aprender e compreender conceitos matemáticos, em pessoas que têm sido frequentemente tratadas como incapazes de aprenderem matemática na Escola. A "*street mathematics*" é oral e preserva muito o significado das situações em mão ("in loco") e, segundo aqueles autores, a prática matemática nas escolas é escrita e abandona as especificações das situações para a generalidade, desvalorizando conhecimentos adquiridos no quotidiano. Na investigação em curso o Joe (nome fictício) na concretização da tarefa "*vamos fazer um bolo!...*", realizada no 4º ano de escolaridade e apresentada no capítulo anterior em 2.4. conseguiu ter êxito total porque transportou para a escola os conhecimentos "realistas" desenvolvidos socialmente com a mãe, no decurso da sua actividade profissional de pasteleira[122]. Fazendo ainda apelo às suas vivências e à relação entre os conhecimentos na resolução do problema "*animais na quinta*", com proposta de exploração na folha de cálculo, conseguiu descobrir uma solução, com lápis e papel, usando somente estratégias iconográficas, como se fundamentou na *tese 8*.

Os estudantes com bom desempenho na disciplina revelaram maior desenvolvimento das suas próprias capacidades, pois tiveram a possibilidade de pensar sobre problemas em diferentes contextos, de aprofundar, problematizar e ampliar os conhecimentos matemáticos, de forma significativa, mobilizando e aplicando conhecimentos em situações novas, como aconteceu concretamente na resolução do problema "*animais na quinta*", que apesar de reconhecerem dificuldades na folha de cálculo insistiram em resolvê-lo nesta ferramenta tecnológica, convictos que assim desenvolveriam competências matemáticas mais profundas. Estes estudantes consideraram as tarefas referidas como desafios intelectuais estimulantes através das quais seriam mobilizados conhecimentos anteriores ou outros a descobrir. A título de exemplo refiram-se os comentários de Fav e Jo (nomes fictícos), respectivamente, "*Eu gosto de resolver estes problemas… São desafios. E tenho a vantagem de usar ou não a folha de cálculo. Alguns deles têm mesmo muito interesse, pois usamos dados reais como aconteceu com Educação Física e nas autárquicas, mas tem de ser para se pensar e não só para fazer contas… Eu acho que no computador tenho de*

[122] Todavia, estes e outros saberes não foram valorizados na Escola, pois no 5º ano de escolaridade o estudante ficou retido.

raciocinar mais e logo que não seja demais gosto, pois sinto-me a pensar, a desenvolver, mas se for muito difícil, fico triste e tenho tendência a desistir…”; “*Eu gosto de resolver este tipo de problemas, são diferentes do manual e fazem-me raciocinar mais…*”

Os estudantes de desempenho médio em Matemática devem ser cuidadosamente guiados, para serem estimulados e acompanhados e não se desmotivarem na resolução das diferentes tarefas matemáticas e simultaneamente considerarem-nas uma mais valia no processo aprendizagem-ensino da Matemática e não uma dificuldade acrescida. Normalmente, estes estudantes revelam orgulho e vaidade em terem êxito naquela matemática “certinha”, como referia uma estudante, mas a abertura do campo de referência para outras actividades cria algum desconforto e porventura algumas desilusões. Todavia, Vygotsky (1979, 1995) reconhece no professor o papel do par mais competente para estimular da maneira mais eficiente a Zona Proximal de Desenvolvimento (ZPD) e, por tal motivo, torna-se necessário e imprescindível provocar este tipo de acção educativa para que, com todos os estudantes, aconteça, efectivamente, aprendizagem.

Os estudantes com aproveitamento médio têm posturas diferenciadas, ou consideram as tarefas matemáticas propostas como dificuldades acrescidas e opinam que são desajustáveis, o que arrasta problemas adicionais na progressão da sua aprendizagem ou consideram-nas um estímulo forte para aprenderem a gostar mais de Matemática e, neste último caso, tendem a incluir-se no grupo que tem mais facilidades para resolver este tipo de problemas. De uma estudante da turma A do 5º ano de escolaridade de desempenho médio com relativo sucesso em Matemática emergiu o seguinte pensamento: “*estes problemas são interessantes, mas não fazem com que eu goste mais de Matemática. Eu já gostava e não vão ser estas actividades que vão fazer com que goste mais da disciplina. E penso que para os meus colegas que têm dificuldades ou que não gostam de Matemática ainda é pior, pois como estes problemas são difíceis, ainda vão encontrar mais dificuldades em Matemática*”. Esta ideia divulgada por apenas um estudante da turma A, com personalidade forte e algum orgulho no êxito atingido regularmente na disciplina de Matemática, revela simultaneamente as suas competências, bem como algum desconforto na resolução de problemas não rotineiros. Contudo, ao longo do trabalho realizado a sua opinião foi-se alterando e com a experiência em trabalhos desenvolvidos aos pares, em grupo ou individualmente, onde às vezes conseguia “brilhar” (ou não!) começou a constatar que também alguns dos seus companheiros, com dificuldades na disciplina, tinham ideias e contribuíam positivamente para a resolução das questões, e outros, com bom desempenho em Matemática não conseguiam, por vezes, ter ideias e resolver cabalmente a situação.

Segundo Piaget (1965) as aulas de Matemática são demasiado previsíveis, faz-se quase sempre o mesmo tipo de exercícios orientados para certos estudantes e a disciplina tratada assim só chega e estimular apenas estes jovens. Piaget sugere que o professor de Matemática proponha outros problemas que promovam o raciocínio, façam desabrochar outras capacidades e sobretudo “os *insights*” dos estudantes, pois só assim esta ciência poderá cumprir as responsabilidades cognitivas e sociais adstritas, provocando novas aprendizagens e estimulando *todos* os estudantes para a Matemática. Deste modo, tudo indica que a diversidade de situações problemáticas, no âmbito da matemática em contexto e de natureza interdisciplinar promovem a equidade na classe, defendida pelo NCTM

(2000) e referida no segundo capítulo, da revisão da literatura, como o primeiro princípio da Educação Matemática. Esta associação propõe que a Escola se muna dos mecanismos necessários e da organização capaz de modo a atender os estudantes mais talentosos, os médios e os que revelam mais dificuldades para se suportar a aprendizagem matemática para a excelência e para a equidade na classe.

Nesta investigação pode-se mais uma vez constatar que o ambiente criado na sala de aula constitui-se como um factor determinante no desenvolvimento do próprio conhecimento matemático, tendo o trabalho de matemática em contexto e de âmbito interdisciplinar dado um contributo significativo no estabelecimento desta ambiência. A dinâmica própria da resolução de problemas, de actividades de investigação e de projectos proporcionou diálogo, partilha de ideias, levantamento de questões, resolução de novos problemas e o desenho de novas ambiências. A conjugação de tarefas diversificadas, desde naturalmente as exposições do professor, à resolução de exercícios e problemas, à realização de actividades de investigação, passando por jogos ou desenvolvimento de projectos, permitiram criar um ambiente de trabalho rico, estimulante que proporcionou cenários pedagógicos favoráveis ao levantamento de questões, à partilha de ideias, ao desenvolvimento de competências e à cooperação entre estudantes e professores. Esta ambiência aberta e de cariz interdisciplinar com uma diversidade de propostas, meios e instrumentos de abordagem, inclusive o computador, favoreceu a aquisição gradual de saberes matemáticos e facultou aos estudantes o desenvolvimento de capacidades que progressivamente proporcionava a reelaboração do conhecimento, a integração e a aplicação a situações novas. Este ambiente permitiu desenvolver a autonomia do estudante/grupo e uma certa cultura, provocando também uma postura mais disciplinada e exigente do professor para concretizar um acompanhamento contínuo individual e de grupo ao trabalho desenvolvido. De facto, *a diversidade de propostas* permite ampliar o espectro de intervenção conceptual e relacional dos estudantes não só para os altamente motivados, como também para os que têm desempenho razoável em Matemática, assim como para os que revelam graves deficiências na disciplina. Esta variedade de tarefas matemáticas possibilitou outros entendimentos e estímulos com o conhecimento matemático, a exploração de estratégias diversificadas, como foi descrito e fundamentado na *tese 6*, a utilização de diferentes espaços e materiais manipuláveis ou computadores, designadamente, a folha de cálculo, a criação de ambientes descontraídos de aprendizagem, provocando cooperações diferenciadas: individuais, aos pares, em grupo e na classe, o levantamento de diferentes questões e a maior possibilidade de despertar e aprofundar conhecimentos matemáticos. Neste enquadramento didáctico deseja-se colocar a matemática ao serviço de todos os estudantes procurando-se incessantemente *humanizar a Matemática*, valorando-se as aprendizagens não escolares, como se averiguou na *tese 8*, integrando-as na vida escolar do estudante e nas comunidades científicas, que são a classe e a Escola, de forma que a Matemática possa chegar a um maior número de estudantes e prosseguir a equidade - primeiro princípio educativo defendido por NCTM (2000).

Esta ciência, assim explorada, desenvolve a comunicação e torna-a "*mais verdadeira*", como acrescentou outra estudante "*assim, já percebo para que serve esta disciplina*". Reforçar esta componente da matemática ligada à vida real no quadro curricular actual parece assegurar vantagens educativas, pois inclui aspectos práticos que, provavelmente, podem provocar sucesso na aprendizagem como aconteceu com a investigação realizada no "street mathematics" (Lave, 1988-1997 e Lave e Wenger, 1991-2002), em que as pessoas com dificuldades na matemática escolar desenvolvem processos comuns, não formais, num ambiente natural, para resolver problemas matemáticos, adquirindo sucesso na concretização da tarefa proposta.

Segundo as professoras das turmas foi também importante realizar problemas para casa, através dos quais se procurou implicar as famílias e conhecer, de forma mais ampla, as ajudas e o trabalho desenvolvido pelos estudantes. A professora da turma A salientava que os estudantes não estão habituados a pensar, a raciocinar sobre situações novas como aquelas que foram propostas, mas não é só a Escola que tem responsabilidades, as famílias também são cúmplices. "*Há estudantes, nomeadamente, o Jojo (nome fictício) que continua a ter os resumos feitos pela mãe para estudar. Ora como na Matemática não é possível fazer resumos, assim como noutras disciplinas, o progresso do estudante fica comprometido! Os estudantes têm mais capacidades do que aquelas que imaginamos, como aconteceu na resolução de várias tarefas, entre as quais destaco "galinhas!..." e "a correr, a saltar e a aprender matemática!...*". E acrescentava: "*vale a pena fazer um esforço na Escola para pôr os jovens a pensar, pois é a única esperança que lhes resta. As famílias normalmente protegem-nos em demasia, dão respostas a mais ou arranjam ajudas com intervenções*[123] *que primam pela formalidade, não lhes dando tempo para pensar, facilmente os desculpabilizam de notas menos favoráveis na disciplina e continuam a sobrevalorizar ainda mais as regras, as técnicas do que o próprio raciocínio do seu educando*".

2.3.3. Competências desenvolvidas

A *literacia* matemática compreende diversas competências entre as quais se destaca a capacidade de *comunicar e compreender* ideias matemáticas. Nesta perspectiva a fundamentação da *tese 9* vem ao encontro destes dois objectivos cruciais da Educação Matemática, salientando que o trabalho de aprendizagem e ensino num contexto interdisciplinar facilita e promove a comunicação significativa de conteúdos matemáticos e favorece a compreensão dos conceitos, naturalmente, em processos metacognitivos ainda não totalmente decifráveis. Para além desta tese, as primeiras *duas teses*, a *tese 4* e a *tese 6* ilustram a panóplia de possibilidades de interpretação dos estudantes e a capacidade de representação das diversas elaborações mentais conseguidas, factores que procuram promover a partilha de ideias dos saberes matemáticos construídos.

No trabalho de âmbito estritamente matemático, o estudante só tem possibilidades de expressar ideias matemáticas no interior da própria disciplina, enquanto que num trabalho de natureza interdisciplinar é possível coordenar um diálogo interno, intrínseco à Matemática, com outro de comunicação externa, desenvolvida com outras disciplinas, em espaços e tempos diversificados, como aconteceu com a resolução de diversas tarefas expostas[124], mais concretamente, com o desenvolvimento dos projectos, a resolução das

[123] Entenda-se "explicações"

[124] No capítulo anterior, em 2., na descrição do trabalho desenvolvido – análise de processos e resultados.

actividades de investigação e dos problemas de esquematização. Nestas circunstâncias, a vertente da comunicação fica altamente enriquecida, exigindo uma organização de dados mais atenta e flexível e tudo indica que, com esta dinâmica, se assegura uma maior interiorização e compreensão dos assuntos estudados. A palavra-chave para a aprendizagem presente e possivelmente para os próximos anos, deverá ser *flexibilidade*: flexibilidade na estrutura do currículo, flexibilidade nos conteúdos do currículo, flexibilidade operacional, na valorização de estratégias de intervenção no acto de ensinar, com a exploração de diferentes tipos de problemas, tarefas e projectos associados à mobilização de diversos materiais e ferramentas e flexibilidade na avaliação. No trabalho de âmbito interdisciplinar o desenvolvimento da comunicação emerge em duas vertentes distintas: na *análise de conteúdo*, em termos estritamente disciplinares e ligado a outras disciplinas ou áreas curriculares; na *análise do contexto*, exigindo o levantamento de questões, o encontro de respostas plausíveis que provoquem uma análise inter-relacionada e consistente, numa vertente inter-conteúdal e significativa para o estudante. Registe-se aqui a circunstância casuística de, na turma B, no último período do 6º ano de escolaridade, a professora da área disciplinar de Matemática e de Ciências da Natureza ter sido substituída. Na introdução e exploração de um conceito, a nova professora primava pela formalidade. Contudo, enquanto não entendiam a explicação ou a resolução do(s) problema(s) os estudantes desta turma questionavam e não paravam de perguntar, pois procuravam relacionar a nova informação e incorporá-la na já conhecida para assimilar melhor os assuntos, aspecto primordial na "matematização" - a capacidade de integrar, de forma compreendida, o novo saber, na base de conhecimento estruturada do estudante (Gravemeijer, 1990; 2004). Por vezes, a professora mostrava algum enfado, mas tentava, dentro do possível, pacientemente e de forma preocupada, explicar o melhor possível o assunto. Numa destas vivências a professora comentou com a investigadora: "*Estes estudantes não param de perguntar!... Questionam tudo e constantemente querem entender os assuntos que são tratados nas aulas. Enquanto não compreendem e conseguem relacionar os assuntos não desistem. Só quando se faz "luz" nas suas cabeças é que ficam satisfeitos. Na outra turma em que também lecciono estas disciplinas*[125] *já dei a matéria toda deste período, mas nesta turma ainda não consegui!... Estes alunos também gostam muito de resolver problemas, enquanto que os da outra turma é só os exercícios do manual*". Várias vezes estes desabafos aconteciam… Mais tarde, na altura da realização do teste, ficou estupefacta com os resultados e comentou: "*Os estudantes desta turma saíram-se muito bem no teste… surpreenderam-me, raciocinaram bem sobre determinadas questões e conseguiram obter melhores resultados do que os da outra turma!…*".

Também no 7º ano, na conversa havida com os professores das duas classes, estes salientaram que os estudantes perguntavam, revelavam curiosidade em aprender, tinham argúcia no pensamento e na acção, exprimiam-se muito à vontade e gostavam de resolver problemas. Com vários anos de experiência na docência os professores referiram ainda que não se recordavam de terem tido estudantes que revelassem, de modo tão claro, estas competências. Refira-se ainda que dois grupos de estudantes da turma B, ao encontrarem, novamente, a investigadora na Escola salientaram, de forma muito entusiasta, que o

---

[125] Ciências da Natureza e Matemática.

professor do 7º ano de escolaridade estava satisfeito com eles, porque "*sabemos matemática e temos bom raciocínio*".

De facto, os resultados das diversas teses da investigação indicam que uma ambiência aberta de cariz interdisciplinar, com a exploração de determinadas tarefas, a utilização de vários materiais, entre os quais o computador e o papel determinante e disciplinado do professor, na procura das essencialidades da Educação Matemática, favorece a comunicação e o desenvolvimento de competências diferenciadas e a prossecução de objectivos, definidos no primeiro capítulo da tese.

2.3.4. Avaliação

A resolução de problemas e de outras tarefas matemáticas encerra um binómio de interacção intelectual do sujeito com o objecto, que requer: estratégia mental/processo representativo (processos) e o resultado ou solução(ões). Se apenas um destes elementos é realçado, há uma perda de informação crucial para apoiar o estudante no seu desenvolvimento intelectual e na sua relação harmoniosa com a matemática, especialmente em determinada classe de problemas que requer pré-requisitos de entendimento e conhecimento relacional que só os processos podem elucidar e mobilizar, como aconteceu na análise de diferentes problemas, especialmente, nos ligados às relações proporcionais, cujos resultados foram expostos e particularmente fundamentados na *tese 1*. Neste caso é particularmente importante o modelo matemático idealizado, construído e usado pelo estudante que pode ser pré-formal, com a utilização do modelo aditivo (estratégia construtiva) ou formal (estratégia multiplicativa), com a exploração do modelo multiplicativo (Moreira, 1989), como se pôde também constatar nesta investigação. A estratégia multiplicativa universaliza o pensamento matemático, enquanto que a estratégia aditiva "fulaniza" os processos de resolução, pois são individualizados, existindo diferentes representações para alcançar o mesmo resultado.

Ao analisar-se só os resultados, apenas uma parte da situação é observada, esquecem-se os processos na resolução de um problema e de toda a dinâmica associada e "perde-se" fundamentalmente a informação do pensamento do estudante, como ele age em determinadas circunstâncias, relativamente à tarefa e ao grupo. No caso concreto da resolução de problemas associados às relações de proporcionalidade e como se pode verificar na elaboração e fundamentação da *tese 1* ainda é mais importante acompanhar e prestar atenção ao processo, na relação estreita com aprendizagens pré-algébricas, pois há estudantes que realizam um raciocínio fundamentalmente aditivo, linear, interligando apenas uma variável e outros estudantes aplicam o operador multiplicativo, especialmente os que exploraram a folha de cálculo, relacionando as duas variáveis das duas "filas" da tabela, denunciando outro desenvolvimento intelectual e outra fase do conhecimento relacional matemático, com especial importância na construção de conceitos algébricos.

De forma mais abrangente e complementar foram ainda elaboradas e fundamentadas *as teses 2 e 6* através das quais se destacam os processos informais e outros mais formais aplicados na resolução de problemas, denunciando diferentes fases do desenvolvimento do raciocínio matemático dos estudantes, possibilitando a revelação de outras informações para o processo avaliativo numa procura formativa do processo de aprendizagem-ensino da

Matemática. Para além desta preocupação ao nível da avaliação individual e de grupo no acompanhamento das estratégias implementadas e naturalmente das aprendizagens produzidas e dos resultados finais obtidos, a avaliação, de uma maneira geral, deve integrar-se naturalmente na educação, com diferentes figurinos, incluindo testes, resolução de problemas, desenvolvimento de actividades de investigação e de projectos, a elaboração de relatórios e defesas de *portfolios*, explorando vários instrumentos que valorizem os processos didácticos desenvolvidos. A avaliação está associada a uma variedade de instrumentos avaliativos e, também explorados na investigação, dos quais se destacam: realização de testes, resolução de questões e de problemas individualmente ou em grupo, apresentação de relatórios, que valorizam os processos, os registos dos resultados, tornando a avaliação mais completa e equitativa, diferenciando e valorando as aprendizagens e as competências dos estudantes.

Deste modo, neste processo avaliativo importa disponibilizar instrumentos e dados diversificados para a avaliação ser mais justa, democrática e formativa, valorizando as diferenças e as competências individuais, grupais e colectivas reconhecendo-se que a contextualização e a interdisciplinaridade de saberes matemáticos prossegue estes objectivos, exigindo do professor, um papel mais activo, atento, disciplinador e um professor de essencialidades matemáticas que deseja promover a equidade na classe.

Acrescente-se ainda que a resolução de problemas em contexto e de âmbito interdisciplinar provocam naturalmente outros focos de atenção e interesse dos estudantes, que se não forem bem construídos e geridos podem provocar dispersão, originando respostas de carácter apenas sócio-cultural, desenquadradas dos entendimentos específicos matemáticos. Nestas circunstâncias emerge a problemática da avaliação, numa lógica de resposta <u>correcta</u>, numa relação só matemática ou mais abrangente, ligada apenas a conhecimentos não escolares de vária ordem, à experiência do estudante, aos gostos, às vontades não criteriosas, etc, mas que não resulta numa resposta <u>completa</u>, pois esta deve incluir, naturalmente, aspectos de natureza científica, de enquadramento disciplinar e também de vivência sócio-cultural relativa ao assunto em análise.

2.4. Tarefas matemáticas - essencialidades na formulação

Muitas vezes a matemática é apenas identificada com os símbolos, orais ou escritos e não se valorizam os meios de os conseguir, os caminhos traçados, as justificações possíveis, os esquemas de resolução individuais, as questões colocadas… (NCTM, 2000). Segundo Ponte (1988), o método do ensino tradicional da Matemática, baseia-se na apresentação aos estudantes de um conjunto de exrcícios e padrões de resolução exemplificativos dos conteúdos programáticos, isto é, para que a aquisição de uma nova noção do programa curricular seja cumprida existe um conjunto exemplificativo de problemas que são apresentados às crianças. Quando estas aprendem um conceito novo, as tarefas que lhe são apresentadas pretendem construir este novo conceito, no entanto, existem outras variáveis (a estrutura do enunciado ou a apresentação dos dados, etc.) que podem comprometer o objectivo inicial do enunciado.

Se isto é verdade na exploração conceptual disciplinar, ainda parece ser de forma mais premente no trabalho realizado na matemática em contexto ou de natureza interdisciplinar em que os aspectos da estrutura do enunciado devem ser cuidadosamente delineados, optando-se por uma linguagem rigorosa e clara, uma organização essencial da informação, bem como uma apresentação "realista" dos diferentes tipos de dados, como é delineado e fundamentado na *tese 7*. Apesar de se assumir, de forma controlada, o risco de uma possível perda da essencialidade do conhecimento matemático e dos objectivos associados à exploração de um ou mais conceitos, o trabalho da matemática em contexto ou de âmbito interdisciplinar amplia a construção de *cadeias transversais de aprendizagem*. Tudo indica que a envolvência da aprendizagem se torna mais criativa para o(s) professor(es) e para os estudantes fomentando o desenvolvimento de competências essenciais à disciplina e de saberes transversais, cruzando-se com outras áreas do conhecimento e com o quotidiano, como aconteceu concretamente com as actividades de investigação: "*os itinerários na planta da minha cidade*" e "*cálculo da áreas dos pavilhões da minha Escola*", nos conteúdos "escala" e "cálculo de áreas" de rectângulos e quadrados e "multiplicação real", com ligações à disciplina de História; "*lavar os dentes e poupar água*", na exploração da multiplicação de um número inteiro por um número racional (em representação decimal) ligado às Ciências da Natureza, no conteúdo da "água"; nos diversos problemas de esquematização, relacionados com os animais, com a exploração do habitat dos mesmos na disciplina das Ciências da Natureza e nos projectos realizados no 6º ano de escolaridade, com o estabelecimento de uma dinâmica educativa com várias disciplinas e áreas curriculares.

A concatenação dos variados suportes do problema dificulta, a montante, a metodologia de abordagem, a definição conceptual, linguística e ambiental do problema e, posteriormente, no processo de resolução, pois o estudante revela uma maior exigência na compreensão e tratamento dos dados, como se pode identificar e aprofundar no desenvolvimento da *tese 7 - Na matemática em contexto a apresentação textual e pictórica do problema deve ser "realista", pois a informação foi mobilizada como um todo*. Relativamente à matemática em contexto ou de âmbito interdisciplinar, o rigor da informação é crucial, seja esta relacionada com assuntos do mundo envolvente ou com as outras disciplinas ou áreas curriculares. Neste último caso é imperioso que se usem, no quadro escolar, termos e definições "quase decalcáveis", explorados nas outras disciplinas, ou assuntos do quotidiano para não existir qualquer ruído no tratamento dos assuntos matemáticos explorados na realização de uma determinada tarefa. Esta deficiência que pode existir no tratamento de uma questão foi sentida particularmente na resolução da *questão 5 do teste de avaliação*, problema de âmbito interdisciplinar ligado às Ciências da Natureza, já que nesta área disciplinar não tinha sido utilizada a tabela nutricional apresentada, mas outra mais simples e, como tal, ao disponibilizar-se uma de complexidade superior dificultou a descoberta das soluções desejadas. Esta situação parece ter sido repetida na *questão 7 do teste*, relacionada com a Educação Visual, em que a situação gráfica era particularmente nova, pois não tinha sido explorada naquela Escola, mas noutra aquando do desenvolvimento do projecto interdisciplinar "Envolvências Geométricas", tendo originado dificuldades acrescidas nas aprendizagens matemáticas. Estas situações concretizadas em teste no 6º ano de escolaridade e outras resolvidas, noutros contextos e em diferentes anos de escolaridade, com destaque para: "*a carga certa para o peso certo*", "*a pintura das peças de cerâmica*", "*valor lógico de proposições*", "*uma razão importante*"[126], "*o método de Hond´t nas eleições autárquicas*", "*a correr e a saltar e a aprender matemática*", "*padrões em V*", "*banda desenhada e fracções…*", "*pulsação*", "*vencer a fome e ser solidário em Angola*", indicam-nos que o sucesso do ensino da Matemática requer, cada vez mais, o foco na essencialidade, na objectividade do conteúdo, na clareza da formulação e num contexto adequado e coerente que suporte a concepção da tarefa a explorar.

Na concepção/realização da tarefa matemática em contexto ou de natureza interdisciplinar o tratamento pictórico deve requerer também cuidados especiais. Nestas circunstâncias a imagem desempenha um papel fulcral para "fazer sentido" (Dörfler, 1991; Reynolds e Wheatley, 1992; Wheatley e Brown, 1994, entre outros) e exercer influência no desenvolvimento do raciocínio matemático a todos os níveis (Thompson, 1996), como foi também confirmada na *tese 7* da investigação.

Segundo Mourão (1998) durante o processo de aprendizagem matemática os estudantes constroem imagens mentais de conceitos matemáticos que podem favorecer ou inibir o desenvolvimento desse mesmo processo. Um dos objectivos das ciências cognitivas tem sido o tentar descobrir como se apresenta e organiza o conhecimento na mente e, neste âmbito, de uma imagem é muito mais do que uma figura mental (Thompson, 1996), isto é, emerge uma construção ou representação mental de um objecto, situação, acção, etc, elaborada através de um papel activo da mente a partir de experiências sensoriais de um ou mais sentidos. Por outro lado, Dörfler (1991) ao referir-se à construção do significado matemático sugere que a "manipulação cognitiva de conceitos matemáticos é altamente facilitada pela construção mental e disponibilidade de esquemas imagéticos adequados" (p. 20). Este autor defende ainda que o significado matemático tem um aspecto predominantemente holístico, que não pode ser construído cumulativamente a partir de partículas elementares que corresponde ao esquema imagético pertinente para o respectivo conceito, o qual se obtém a partir de campos de experiência adequados. Reynolds e Wheatley (1992) sugerem também que, cada estudante, ao estar envolvido na resolução de problemas usa a imagética à medida que vai tentando dar sentido ("make sense") à tarefa matemática, mas que a imagética pode não ser usada quando os estudantes realizam métodos computacionais prescritos ("modo procedimental/algoritmo de fazer matemática"), acreditando que a aprendizagem significativa da matemática é bastante sustentada pela imagem. Assim, na elaboração de uma tarefa matemática há a necessidade de usar desenhos "rigorosos" no sentido de representarem adequadamente a situação a ser explorada. De facto, na tarefa "*o aniversário do João*", realizada no 6º ano de escolaridade, exposta na *tese 7*, em que vários estudantes da turma A compararam os resultados obtidos com a imagem do João, concluíram, efectivamente que a solução não estava correcta, porque a imagem do semblante do rapaz não correspondia ao resultado numérico dado ou vice-versa, em que a imagem do aniversariante na apresentação do problema constituiu-se como mote para provocar, orientar ou validar o processo computacional desenvolvido na expressão dada. Também, no problema "*a cabra*", alguns estudantes da turma A consideraram que a corda que prendia o animal à casota não estava bem colocada e o

[126] Acresce ainda o facto desta tarefa ter sido optimizada no tratamento vertical do conteúdo: *perímetro e área da circunferência*, explorado no 6º ano de escolaridade, em que foram reutilizados os dados pesquisados no 4º ano.

comprimento da corda não era o mais adequado, porque, com aquele comprimento, o animal não podia satisfazer as condições previstas no enunciado do problema. De facto, os estudantes, especialmente os da turma A estavam bastante atentos e críticos a todos os pormenores gráficos na resolução de problemas, como se enuncia e fundamenta na *tese 7*. Assim, a parte pictórica que ilustra as tarefas matemáticas em contexto deve ter a adequabilidade necessária à situação que se deseja problematizar, evidenciando aspectos linguísticos, tabelares, gráficos, simbólicos, que representam situações "realistas" e assumem significados implícitos atribuídos pelos estudantes num processo global complementar e, certamente, mais complexo de aprendizagens significativas.

2.5. Aprendizagens algébricas – princípios, estrutura e cadeias de aprendizagem

Segundo Abrantes, Serrazina e Oliveira (1999), Kindt (2004) e outros investigadores do FI deve-se promover uma melhor ligação entre os diferentes domínios da álgebra, de modo a evitar-se que seja apenas considerado um conjunto de regras a memorizar. As tendências mais recentes apontam para se "iniciar o estudo da álgebra e das funções de modo fortemente intuitivo e informal, adiando-se o tratamento mais formal dos tópicos da álgebra" (Abrantes, Serrazina e Oliveira, 1999, p. 110) para que o desenvolvimento do raciocínio algébrico seja apoiado pela compreensão gradual das relações funcionais sustentadas pelas diversas aproximações à álgebra que exploram as várias representações associadas à noção de variável.

Na aprendizagem gradual de um percurso algébrico foi importante desenvolver na criança o gosto por observar, por "ver" de forma analítica, como refere Munari (1968). Assim, é possível cumprir, desde os primeiros anos de escolaridade, um dos aspectos ligados ao desenvolvimento de competências essenciais referidas na documentação do ME (1999) na qual é salientada "a tendência para procurar "ver" e apreciar a estrutura atomista abstracta que está presente numa situação, seja ela relativa a problemas do dia-a-dia, à natureza ou à arte, envolva elementos geométricos e numéricos ou ambos" (p. 3).

O presente estudo revela que a generalização do módulo padrão no campo geométrico a duas e a três dimensões, verbalizado, manipulado ou representado por palavras, esquemas ou códigos, ligado à *1ª aproximação à álgebra*, deve ser iniciado nos primeiros anos escolares, pelo estímulo dos órgãos dos sentidos, com destaque para a *observação*, mas não descurando todos os outros de modo a incentivar os estudantes a "ver com olhos de ver" os elementos naturais, arquitectónicos ou culturais existentes na cidade onde se insere a Escola, a apreciar as belezas, reconhecendo e descobrindo regularidades e a repetição de elementos dentro e fora da sala de aula.

Naturalmente que, tal como refere Piaget (1965) e Bruner (1985, 1987, 1990), devem posteriormente cumprir-se as fases do conhecimento matemático, tal como se verificou na resolução de diversas situações: fase manipulatória, pictórica, iconográfica e simbólica, sendo cada uma delas apoiada pela fase da verbalização. Neste contexto, parece existir um paralelismo entre a evolução histórica da álgebra e a aprendizagem actual deste domínio. Assim, numa primeira fase explorou-se oralmente o conhecimento visualizado e manipulado, interligado com as outras áreas do saber, como aconteceu no desenvolvimento do projecto de âmbito interdisciplinar "Envolvências Geométricas I e II – a Geometria na

Cidade". Na descoberta da regularidade, da lei que rege o fenómeno e da verbalização do módulo-padrão, numa primeira fase no campo geométrico e posteriormente no campo numérico, o jovem teve a possibilidade de fazer "ouvir" o seu pensamento e de provavelmente experimentar "*insights*" cognitivos (Meissner, 1989). Esta primeira componente da generalização da álgebra é oral, manipulativa, seguida de uma outra de registo, com esquemas pessoais de execução, reprodução ou criação de repetições regulares de padrões geométricos, com utilização ou não do computador. Na orientação posterior para o campo numérico, começa a ser usada a noção e a expressão do operador numérico e, neste caminho gradual para a abstracção do conhecimento, emerge a fase simbólica da exploração da álgebra. Assim, de uma fase a três dimensões, passa-se para uma fase a duas dimensões, no plano, para se culminar na fase a "uma dimensão", a fase simbólica, da expressão universal, mas nesta fase ainda numérica, do conhecimento matemático.

Neste período de aprendizagens (pré)–algébicas importa despoletar situações gradualmente diferenciadas para que posteriormente à fase manipulatória, os estudantes possam, em diferentes contextos, não esquecendo o contexto estritamente matemático, implantar várias conexões e aprofundar a generalização, importante componente da aprendizagem da álgebra.

Tudo indica que nos 3º e 4º anos de escolaridade deve-se aprofundar a vertente da resolução de problemas explorando a noção de recursividade, de proporcionalidade e problemas de esquematização, com ligação à *2ª aproximação à álgebra* e à generalização do fenómeno, com liames aos problemas de desenvolvimento do raciocínio indutivo e à *3ª aproximação à álgebra*. A folha de cálculo surge, na classe, como mais um instrumento pedagógico, numa primeira fase *só cálculo* e depois *mais folha do que cálculo*, numa proposta de organização e pesquisa sistematizada do saber. De uma forma paralela ou numa fase posterior deve ser trabalhada esta ferramenta numa perspectiva de *mais cálculo do que folha* e, na conjugação destas duas vertentes, emerge como "*uma janela*" *aberta para a organização, o cálculo e a simulação* de situações, numa proposta ampla de levantamento e validação de conjecturas, numa busca constante da generalização e da modelação do fenómeno, com estreita ligação à *3ª aproximação à álgebra*.

No 5º e 6º anos de escolaridade, reforça-se a resolução de tarefas matemáticas "realistas", no âmbito da matemática em contexto e de natureza interdisciplinar, em que emergem, com mais consistência processos de modelação dos fenómenos, diversificando a tipologia das tarefas: problemas, actividades de investigação, projectos e usando, de forma criteriosa, a folha de cálculo como uma mais valia na resolução de determinada tarefa.

Assim, na fase da resolução de problemas contextualizados, relacionados com a *1ª, 2ª e 3ª aproximação à álgebra*, a utilização de palavras, esquemas, desenhos, expressões, fórmulas criadas pelos estudantes, deve ser acolhida de forma reflectida pela turma para, numa fase posterior, serem construídos tabelas, gráficos e símbolos, dando-se particular atenção à linguagem formal, nas capacidades de generalização e modelação do fenómeno.

2.6. Papel da Escola e do Professor

Na investigação em curso foi necessário que o professor conhecesse os objectivos e, especialmente, as metodologias associadas aos saberes promovidos no ciclo imediatamente anterior e seguinte, pelo menos, no reconhecimento dos programas e das competências a adquirir ou a construir pelos estudantes. Apesar de se ter constatado da existência de documentos e iniciativas que promovem o diálogo entre os professores do 1º e 2º ciclos do ensino básico, verificou-se que algumas dúvidas se levantavam sobre aspectos comportamentais e cognitivos de certos estudantes e, nestas circunstâncias, tudo indica que existiriam vantagens educativas se se implementassem mais mecanismos de *circulação de dados*, *corredores de informação*, com valorização e optimização efectiva do que foi concretizado a montante e do que se espera vir a realizar. Na actual flexibilidade curricular e gestão escolar faz sentido mobilizar conscientemente estes conhecimentos, pois os professores dos dois ciclos têm a possibilidade, nos actuais Agrupamentos de Escolas, reconhecer competências e fragilidades individuais ou de grupo e poder colmatar dificuldades, ultrapassando possíveis deficiências iniciais, com o planeamento e a estruturação de tarefas de diferente natureza nos vários níveis de escolaridade, valorizando as competências diferenciadas e específicas dos professores dos vários ciclos. O papel da Escola de planeamento estratégico e organizativo pode permitir valorizar e optimizar as competências dos profissionais e enriquecer, assim, o processo educativo.

Por outro lado, a criação de um ambiente favorável à exploração do conhecimento matemático está intimamente ligada à *atitude do professor* que tem um papel determinante na exploração positiva da aprendizagem contextualizada e de natureza interdisciplinar (Serrazina, 1998 e Kindt, 2004). Tal como foi referido na fundamentação teórica, o trabalho de âmbito interdisciplinar a implementar na Escola tem sobretudo a ver com os propósitos educativos do professor enquadrados numa cultura profissional sólida. O conteúdo das culturas de ensino "compreende crenças, valores, hábitos e caminhos assumidos na capacidade de intervenção dos professores na comunidade escolar" (Hargreaves, 1995, p. 165) e que pode ser conhecido através daquilo que os professores pensam, dizem e fazem.

Sublinhe-se ainda que no campo concreto do desenvolvimento de competências a experiência do professor é diminuta (Abrantes, Serrazina e Oliveira, 1999), bem como no tema da investigação em curso, que é, em Portugal, praticamente nula. O êxito da acção educativa decorre fortemente da atitude do professor que conhece, à partida, as respostas aos problemas, os processos usuais implementados pelos estudantes. Contudo, na aprendizagem em contexto ou de natureza interdisciplinar, pode dar-se o caso em que temporariamente o professor não entenda a estratégia desenvolvida pelo estudante ou consiga apenas segui-la até certo ponto ou até mesmo desconhecer a resposta, como aconteceu concretamente com a resolução da tarefa "*itinerários...*". Se tal acontecer uma questão pode ser levantada: como se deve proceder? Deveria ser aceitável criar alguns embaraços na compreensão da estratégia proposta pelo estudante/grupo a quem orienta a aprendizagem e estimular processos diferentes de resolução de um problema. Todavia, esta atitude não é assim tão comum, o que pode dificultar esta interacção entre professor e estudante e simultaneamente exigir do professor o acompanhamento mais atento e próximo, com acentuadas exigências de apoio científico e pedagógico, desenvolvendo novas atitudes, planeamentos e estratégias diferenciadas. Verifica-se, assim, que o papel do professor torna-se mais complexo, mas simultaneamente, mais inter-actuante com o estudante, para apreender processos, vislumbrar raciocínios, orientar percursos, disciplinar conteúdos, estimular estratégias, proporcionar encontro/debate de ideias e sistematizar conhecimentos.

2.7. Formação de professores - implicações curriculares

O Sistema Educativo Português revela algumas práticas inovadoras e de qualidade, com professores dedicados e lideranças capazes, mas deverá ser percorrido um longo caminho até que sejam disseminadas, na generalidade, boas práticas educativas (Miguéns, 2002). Este autor acrescenta ainda que se o investimento em equipamento nas Escolas depende apenas da disponibilidade e oportunidade para investir, já a formação dos professores, tanto no domínio tecnológico, como no didáctico, bem como na mudança de atitudes e práticas educativas, podem exigir uma verdadeira mudança cultural.

As Escolas de Formação Inicial e Contínua de Professores são o local privilegiado e o ponto de partida (e de chegada) por excelência para divulgar e implementar resultados de investigação que contribuam para uma participação reflexiva e empenhada da comunidade escolar de forma a inovar práticas educativas e a contribuir para um melhor desempenho no campo profissional. A Formação Inicial dos professores em Educação Matemática deve concorrer para a emergência de uma nova cultura matemática que provoque, de modo eficaz, o sucesso do estudante na disciplina e “contribua para a construção de identidades profissionais que se afirmem e se impliquem na mudança das mentalidades” (Cabrita, 2000, p. 130).

Conscientes do papel reprodutor que a Escola tem na prática profissional e nas crenças, representações e atitudes na vida em sociedade importa *desenhar* a instituição Escola como um espaço criativo, exigente e inovador, que do ponto de vista didáctico, possa implementar e dinamizar práticas diversificadas orientadas para o sucesso do formando enquanto estudante e futuro profissional (Silva, 2002). É necessário avançar claramente para um conjunto de referenciais, compromissos e exigências, nos quais ganhem muito maior flexibilidade as condições do desempenho profissional, repensando em melhores formas de organizar o trabalho educativo. Ferreira (2003) corrobora esta ideia e num estudo sobre a formação de professores para a educação básica salienta que uma das orientações deve ser focalizada para a aquisição dos “conhecimentos científicos inerentes à estruturação e disponibilização do conhecimento disciplinar e interdisciplinar em área ou áreas específicas” (p. 72).

Tudo indica que os resultados desta e porventura de outras investigações deveriam merecer atenção para se optimizarem estruturas organizativas já existentes nas Escolas de formação de professores, na perspectiva de incentivar e propor um planeamento estratégico no campo da matemática em contexto e de âmbito interdisciplinar. Isto significa que era de todo conveniente intervir no campo da própria estrutura programática da Escola através da concepção e implementação de Planos de Estudo que integrem a componente interdisciplinar, através da realização de projectos temáticos transversais, estabelecendo, posteriormente na prática, *elos de ligação organizacional* espacio-temporal que permitissem o encontro didáctico entre as diferentes áreas científicas. Assim, a partir do domínio científico da Matemática ou de Centros de Investigação em Didáctica deveriam ser propostos encontros sistemáticos de planeamento e desenvolvimento de trabalho interdisciplinar com os outros domínios: Ciências da Natureza, Língua Portuguesa, História e Meio Social, Educação Física e Educação Visual, Educação Musical, Tecnologias de Informação e Comunicação ou, num outro sentido, por iniciativa de uma ou mais destas áreas para e com a Matemática. No rumo que está a tomar o ensino da Matemática e os objectivos preconizados em particular para o ensino básico: desenvolver a capacidade de raciocinar, desenvolver a capacidade de resolver problemas e de comunicar matematicamente (ME, 1989) e face aos resultados obtidos nos programas de avaliação TIMSS e PISA, os quais integram problemas de matemática em contexto e de natureza interdisciplinar, para os quais a maior parte dos estudantes portugueses não têm qualquer experiência no ensino básico, importa, desde já, reflectir, divulgar e, se possível, planear e aplicar, no quadro actual da flexibilidade curricular, algumas das propostas implementadas. A Escola, como sistema reprodutor de atitudes e práticas, deveria promover um modelo pedagógico capaz de galvanizar vontades e promover conexões, delinear projectos de natureza interdisciplinar nos Planos de Estudos dos Cursos e implementá-los dentro da própria Escola e em Escolas de Prática Pedagógica, ligadas ao Estágio Curricular dos estudantes, indicando exemplos de diálogo educativo sólido, enraizado em suportes teóricos e práticas de referência.

Na implementação de uma estrutura planeada de *elos de ligação conceptual e de organização de tempos e espaços* poderia ser repensado o processo de concepção/planificação de projectos, as quais incluíriam, para além da componente disciplinar, a componente de natureza interdisciplinar orientadas, respectivamente, para o desenvolvimento de competências, essenciais e transversais, sustentadas por diálogos inter-científicos e didácticos. Este tipo de procedimento contemplaria a reflexão planeada e a procura de soluções metodológicas capazes de se adaptaram aos problemas emergentes na sala de aula permitindo, deste modo, uma estreita ligação da aprendizagem com o desenvolvimento do indivíduo enquanto pessoa, como ser pensante e elemento integrante de um grupo, de uma comunidade científica, que é a Escola, e membro actuante de uma sociedade em constante mutação. Os elos de ligação organizacional e científica devem ser idealizados num ciclo de renovação, com base numa ideia de concepção/planeamento, ao nível de estrutura e posteriormente ao nível da execução simulatória ou no terreno, numa base operacional e procedimental para, numa terceira fase, coligir dados, reflectir sobre os resultados e promover um entrosamento final, reformulando a concepção e o planeamento renovando-o, num ciclo de concepção/planeamento estratégico, implementação, reflexão/avaliação e nova concepção/planeamento estratégico.

Torna-se oportuno relembrar as recomendações do grupo de trabalho "Matemática 2001" que, na rubrica da formação de professores, defende a necessidade da Profissionalização dos professores com o planeamento de cursos e programas que respeitem as orientações curriculares actuais e as funções que os professores desempenham nas Escolas e que incluam todas as componentes necessárias à formação: científica, didáctica e tecnológica e, simultaneamente, uma componente significativa da prática profissional em contexto e da reflexão sobre essa prática.

De forma a implementar e aprofundar o diálogo educativo na formação de professores deve-se privilegiar a área *das tecnologias de informação e comunicação,* de formação transdisciplinar e de natureza transversal em diversos domínios. Como já se escreveu no segundo capítulo, da fundamentação teórica, no tema da utilização do computador na sala de aula, Ponte (1997, 2002) defende que o domínio das tecnologias requer um importante suporte de formação. A evolução normal e natural da sociedade veio contribuir, também, para alargar o conceito de formação que deixou de ser uma acção fechada e passou a ser também "entendida como processo aberto, virado para a criação de novas ideias ou para o desenvolvimento de novas técnicas, como um processo catalisador de inovação e transformação" (Ponte, 1997, p. 102). Por outro lado, este tipo de formação torna possível "estimular o surgimento de professores capazes de proporcionar aos estudantes actividades educacionais concordantes com as novas exigências que a Escola é agora chamada a satisfazer". Na actual sociedade da informação importa conhecer mais profundamente as potencialidades educativas do computador com vista a criar melhores condições no ensino e na aprendizagem sustentada e harmoniosa do estudante. Pelo que foi exposto, tudo indica que devem ser implementadas tarefas, como aquelas que foram promovidas na investigação experimental, que poderão ser desenvolvidas tanto no campo da Formação Contínua, como no âmbito da Formação Inicial de professores, aprofundando os conhecimentos científicos e didácticos da Matemática.

2.8. Matemática em contexto interdisciplinar

Na investigação em curso foi trabalhado o conceito de *contexto interdisciplinar*, em particular, na aprendizagem da álgebra. Ora este conceito integra genericamente duas noções, não disjuntos, mas complementares, a saber: o da *matemática em contexto* e o da *matemática de âmbito interdisciplinar*. Cada um deles, naturalmente, engloba conhecimentos e competências estritamente matemáticas e essenciais da Educação Matemática, mas também outras ligadas a diferentes áreas do conhecimento, numa vertente mais ampla, funcional e "realista" - *matemática em contexto* e outra de carácter mais escolar, de cariz curricular relacionada com as outras disciplinas ou áreas disciplinares - *matemática de âmbito interdisciplinar*. Como foi referido na revisão da literatura, Pombo, Guimarães, Levy (1993) reconhecem que, em relação ao termo ´interdisciplinaridade´ identificam-se alguns processos, mas na definição do conceito parece não existir qualquer consenso. Nesta investigação, os dois termos surgem, fundamentalmente, associados à "praxis", isto é, à formulação do problema, à envolvência e ambiência "realista" criada, ao reconhecimento do carácter eminentemente funcional da matemática e à necessidade do "make sense" na aprendizagem específica do estudante. Acrescente-se ainda que apesar da *matemática em contexto* estar ligada à vida do quotidiano precisa, muitas vezes, de se "alimentar" e de se "valer" dos conhecimentos aprendidos na Escola, nas outras áreas, como aconteceu, por exemplo, na tarefa "*a carga certa para o "peso" certo*". Por isso, estes dois conceitos, apesar de terem ambiências e enquadramentos próprios, inter-cruzam-se em determinadas circunstâncias, devidamente identificadas, podendo assim, surgirem num só termo, o de *contexto interdisciplinar* evidenciando-se, conforme a situação, uma ou outra componente, ou a do quotidiano ou a curricular. Esta referência interliga-se ao que exposto, no primeiro ponto deste capítulo orientado para o conceito de "matematização", em que a matemática em contexto, de predominância mais funcional, de vivência do quotidiano do estudante e o trabalho de âmbito interdisciplinar de predominância curricular e de vivência escolar fazem parte de um mesmo eixo, existindo incidências num ou noutro sentido, consoante a tarefa e o tópico em desenvolvimento, com conexões inerentes ao desenvolvimento de competências transversais e provocando, provavelmente, processos metacognitivos diferenciados (Meissner, 1989).

Num termo ou noutro convém referir que o conceito de "contexto" ou a "contextualização das aprendizagens" encerra, não só os conteúdos a explorar, mas também o enunciado do problema, a formulação e ainda as estratégias implementadas pelos estudantes, pois espera-se que estas sejam, numa primeira fase, mais pessoais, diversificadas, denotando compreensão na exploração da situação e não uma mera aplicação de resoluções rotineiras iguais para todos os estudantes. Contudo, quando surge adicionalmente o termo "interdisciplinar" outro aspecto pode ser cumprido - a possibilidade de ser resolvido noutros espaços e áreas curriculares, como aconteceu em várias situações, designadamente, nas tarefas: "*pulsação*"; "*banda desenhada e as fracções…*", tendo sido, esta última, resolvida em Matemática e em Estudo Acompanhado, completando os saberes e as estratégias associadas a esta segunda área disciplinar.

Assim, dependendo das tarefas propostas, o trabalho de *âmbito interdisciplinar*, como o nome indica tem um enquadramento específico curricular e promove um diálogo educativo entre os professores das disciplinas, áreas curriculares, com a elaboração de programações em conjunto, resultando para o estudante um modelo curricular *reprodutor* de partilha de ideias, de saberes conexos, de conjugação de esforços, de realização de pesquisas e trabalhos em grupo com vista a resolver um problema, em que é necessário o entrosamento de vários saberes curriculares, adquiridos e formalizados na Escola.

De forma complementar, refira-se ainda que a *matemática em contexto* surge particularmente em problemas relacionados com as vivências do quotidiano do estudante, em que se torna necessário aplicar naturalmente conhecimentos escolares matemáticos, mas entrosados com intuições, saberes implícitos já construídos nas vivências do dia-a-dia.

Numa análise, provavelmente, mais completa constata-se que o termo *matemática em contexto* numa lógica de resolução de problemas encerra genericamente duas componentes: a componente extrínseca ou exógena e a componente intrínseca ou endógena. A primeira surge ligada à matemática funcional, com liames à vida real e naturalmente mobilizando competências escolares nos domínios da própria Matemática ou de outras áreas científicas curriculares. A segunda diz respeito ao indivíduo e também à própria ciência matemática, isto é, ao explorar-se um problema contextualizado é despoletada uma ambiência cultural, psicológica e cognitiva, mobilizando-se interesses, motivações, vontades e afectos do estudante, mas simultaneamente, conteúdos adstritos ao quadro conceptual da própria ciência, nos domínios ou nas conexões previstas no processo de resolução do problema. Assim, tudo indica que quando o estudante trabalha a matemática em *contexto interdisciplinar* na resolução de um problema o processo de intervenção é mais complexo do que na resolução de problemas de âmbito estritamente disciplinar, ou problemas rotineiros, na qual as componentes endógenas e exógenas revelam outras fronteiras, mas, de certo modo, mais controladas.

Por outro lado, tudo indica, como é exposto mais à frente, na dimensão operacional, em 3.2.1., que as próprias fases defendidas por Polya, no processo de resolução de problemas, se disponibilizam de outra forma face à presença do contexto.

Refira-se ainda que este tipo de trabalho de *contexto interdisciplinar* requer recursos variados, designadamente, diversos materiais de Matemática e relacionados com as outras disciplinas, designadamente - no 4º ano de escolaridade nas tarefas: "*a carga certa para o "peso" certo*"; "*uma razão importante!*" no 5º ano de escolaridade: "*a fórmula de Euler*"; "*itinerários na planta da minha cidade*"; "*cálculo dos pavilhões da minha Escola*", entre outros; "*a correr e a saltar…*"; "*o método de Hond´t*"; no 6º ano de escolaridade: "*vencer a fome…*" "*pulsação*"; "*a área dos pavilhões...*"; "*cheques e compras*"; entre outros.

O desenvolvimento da resolução de problemas da *matemática em contexto* e de âmbito interdisciplinar necessita de uma ambiência especial na classe, baseada na comunicação, partilha de ideias e saberes, na valorização de processos individuais e de grupo; na prévia e cuidada preparação da concepção da tarefa, no acompanhamento constante e estimulante do professor, na sala de aula.

Contudo, também existem dificuldades inerentes à exploração do conhecimento nestas circunstâncias e estas localizaram-se fundamentalmente nalguma falta de controlo da situação, como aconteceu pontualmente com alguns problemas, designadamente: "*os itinerários na planta da minha cidade*" e no perigo de se perder parte das essencialidades da disciplina de Matemática, como surgiu na aplicação do "*método de Hond´t…*" (apenas na turma B). Steen (1999) salienta que na última década vários investigadores têm situado as investigações na área da matemática em contexto, mas para este autor o contexto pode afectar a aprendizagem em dois caminhos opostos: aumentar a motivação e a longo prazo a aprendizagem pode limitar a utilidade do que é aprendido. Provavelmente, Steen está a alertar para o facto desta aprendizagem concreta, na matemática em contexto, dificultar a generalização, como também problematiza Drijvers (2004), na aprendizagem da álgebra. Todavia, o objectivo da matemática em contexto é alargar o espectro do conhecimento do estudante, aplicar os conhecimentos matemáticos, ampliar e provocar o desenvolvimento de novas questões e competências, valorizar os processos individuais de resolução e, especialmente, aprofundar os saberes, numa perspectiva científica e sócio-cultural. Por outro lado, Steen (1999) admite que a matemática vive em vários ambientes: em casa, na Escola, na rua, nas conversas, nas compras, no trabalho e que o sucesso do estudante na matemática passará provavelmente por a Escola ser capaz de conciliar, valorizar e optimizar todos estes conhecimentos[127]. Para além destes aspectos é importante relembrar a elaboração e a fundamentação da *tese 10* que confirmou aspectos positivos na repetição do trabalho contextualizado e de âmbito interdisciplinar, já defendido por outros autores, pois tal como acontece noutro tipo de problemas rotineiros, fortalece a aprendizagem da Matemática, em particular o domínio da álgebra.

[127] A formulação da *tese 8* parece ir ao encontro da posição defendida por este autor.

Na perspectiva de participarem como membros competentes de uma comunidade, capazes de resolverem problemas em sociedade, Keijzer (2001-2004) defende que os estudantes devem ser guiados para o desenvolvimento de estratégias de simbolização, abstracção, modelação, formalização e generalização, "convertendo problemas em contexto em problemas matemáticos" (p. 25), prevendo naturalmente a passagem por vários níveis de conhecimento propostos por Gravemeijer (Figura 4, p. 54). Num artigo subordinada ao tema "sabes o significado do que eu digo" Boer (2001-2004) considera a *linguagem*, os *contextos* e o *raciocínio* como áreas fundamentais na capacidade do estudante se relacionar com os problemas e naturalmente com a aprendizagem contextualizada da Matemática.

Como complemento refira-se ainda que a exploração da matemática em *contexto interdisciplinar* não reduz a aprendizagem da matemática, no processo de resolução de problemas, às questões muitas vezes usuais e experimentadas por vários estudantes do 1º ciclo do ensino básico ou sugeridas pelos professores do tipo: "é de somar?"; "oh! Professora, é de subtrair" ou "é de menos?" ou "já sei é de mais porque tem o "**e**" na frase como já disse a professora, quando tem o "**e**" é de somar…"[128] ou … Ora na *matemática em contexto*, durante a investigação em curso, na resolução de variados e diferentes problemas, durante cinco anos, frases como aquelas que se apresentam nunca foram ouvidas ou questionadas. Assim, associadas àquelas interrogações a aprendizagem da Matemática parece ficar reduzida a "mnemónicas" ou apenas a processos operatórios mais ou menos "despidos" do contexto, mas na matemática em *contexto interdisciplinar* existe, por parte do estudante, a procura de um entendimento global da situação, uma identificação e até mesmo um envolvimento com o problema criado, existindo uma exploração complementar do mesmo ao nível do contexto.

2.9. Reflexões complementares – aspectos neurológicos

A preocupação de abordar também aspectos de natureza neurológica prende-se com o conhecimento da existência de processos complexos relacionados com a aprendizagem da linguagem e, sendo a álgebra considerada por vários autores uma linguagem (Pimm, 1990; Ortega, 2001) existiu, naturalmente, um impulso natural por descortinar alguns estudos relacionados com este domínio. Por outro lado, procurou-se, numa lógica de abertura, realizar reflexões mais amplas, ultrapassando as fronteiras do nosso próprio conhecimento, de modo a entender melhor, se possível, ou apenas evidenciar e problematizar outros aspectos relacionados com a construção progressiva individual dos conceitos algébricos. Na verdade, a evocação de constrangimentos de âmbito neurológico surgiu não por se acreditar que a investigação em curso pudesse fornecer uma resposta cabal a este assunto, mas tão somente por se intuir e se aflorar durante a investigação experimental que provavelmente existiriam factores de outra natureza que intervêm na aquisição de conhecimentos da Álgebra. De forma concomitante refira-se ainda que existiram leituras no domínio da neurociência, que "têm começado a abrir janelas no

[128] Como por exemplo, no problema: "A Maria comprou 2,5m de fazenda para fazer um fato **e** depois para o colete comprou 1,5m. Quantos metros de fazenda comprou?"

mecanismo neural da cognição" (Steen, 1999) e simultaneamente apontam para dificuldades neurológicas associadas à aprendizagem da linguagem oral e escrita (Caldas e Reis, 1999). Neste contexto e assumindo-se a álgebra como uma linguagem poderosa de comunicação, tudo indica que, com maior acuidade, deverão existir também dificuldades neurológicas na aprendizagem da Álgebra. De facto, na investigação experimental alguns estudantes revelaram deficiências na resolução das situações propostas ou por não conseguirem resolver as questões colocadas ou por permanecerem apenas na fase esquemática e pictórica, com o uso de códigos próprios pessoais de entendimento com a própria matemática ou ainda por necessitarem de um longo período de tempo na passagem desta fase esquemática e "retórica" para uma fase mais simbólica, numa lógica universal de representação do pensamento matemático.

Squire e Kandel (2002) defendem que para aprender é preciso memória e Steen (1999) completa esta ideia salientando que, num instante, a memória movimenta várias e diferentes estruturas anatómicas e questiona-se se a neurociência pode ajudar os educadores a compreender a problemática do "transfer" ou as capacidades do raciocínio dos estudantes. "A memória possui vários graus de força e que a repetição é necessária para converter a memória a curto prazo[129] na memória a longo prazo[130]. É a prática que resulta na perfeição" (Squire e Kandel, 2002, p. 139). Estes autores acrescentam ainda que a memória de uma nova tarefa aprendida é perturbada pelas convulsões e de forma mais grave quando as mesmas ocorrem pouco tempo depois da aprendizagem, durante o período de consolidação e que a memória a longo prazo exige "o entendimento bioquímico do interruptor de memória a longo prazo" (Squire e Kandel, 2002, p. 140), ou seja, torna-se necessária a produção e a síntese de uma nova proteína enquanto que a formação de uma memória de curto prazo não o exige. Provavelmente quando Steen (1999) refere que a aprendizagem por contexto motiva os estudantes, aliás como também se constatou na investigação em curso, mas também insiste que pode limitar o que é aprendido se porventura não for repetido e reforçada a aprendizagem em vários contextos e anos de escolaridade para consolidar a aprendizagem algébrica, como se verificou na identificação da *tese 10* e que é, de certo modo, entrosada por aspectos neurobiológicos defendidos por Squire e Kandel (2002) quando referem da necessidade de repetição para passar da "memória de curto prazo" para "a memória a longo prazo". Por vezes, a falta de treino, ou outras alterações clínicas, ferimentos e traumatismos na cabeça podem inibir a produção desta nova proteína, impedindo o desenvolvimento do período de consolidação e a passagem para uma memória a longo prazo, que integra, naturalmente, outro tipo de competências. Será que estes aspectos de natureza bioquímica poderão interferir nos processos pedagógicos de assimilação e acomodação, defendidas por Piaget (1965, 1975)? Ou estarão ligados a uma dinâmica não linear referida por Cabrita (1996) num estudo realizado sobre a construção do conceito de proporcionalidade em que a investigadora salienta que "no momento de mediação das fases de assimilação e acomodação o indivíduo passa por um período de *desequilíbrio*, mais ou menos longo, mais ou menos conturbado, principalmente porque o *novo conhecimento* entra em confronto com o anteriormente

[129] Também chamada de "memória primária".

[130] Também apelidada de "memória secundária".

acomodado" (p. 128). Que processos internos serão estes que tendem interferir no processo de construção do conhecimento? Em particular, na aprendizagem da álgebra, considerada como uma linguagem poderosa de comunicação, que aspectos neurobiológicos poderão ou deverão ser mobilizados?

Squire e Kandel (2002, p. 203) destacam ainda o suporte biológico da individualidade, como "a capacidade do cérebro para a mudança – o nosso sentimento do eu". Segundo estes autores à medida que se vão adquirindo novas informações no dia-a-dia e que se armazenam sob a forma de memória, estabelecem-se no cérebro novas alterações anatómicas. "Este princípio simples tem implicações profundas" (p. 203). Assim, uma vez que todos nós somos educados em ambientes diferentes, com experiências variadas, resulta que a arquitectura do cérebro de cada um de nós é modificada de forma *única*. Todavia, cada um dos seres humanos tem o mesmo conjunto de estruturas cerebrais e um padrão comum de ligações sinápticas, baseadas no esquema partilhado dentro da nossa espécie, mas os pormenores do esquema variam de pessoa para pessoa. "Por exemplo, o padrão exacto de ligações entre os neurónios e a força dessas ligações é diferente entre os vários indivíduos, de acordo com a sua constituição genética. Além disso, tanto o padrão como a força das ligações sinápticas são adicionalmente modificados, de acordo com as nossas experiências específicas" (Squire e Kandel, 2002, p. 204). Le Pape e Puzenat (2000) e Steen (1999) também salientam que o desenvolvimento do cérebro humano não pára à nascença, pois a maturação cognitiva vai muito para além da aprendizagem e, em particular, da linguagem, encontrando-se em relação estreita com o meio físico e social envolvente. Contudo, estes e outros autores reconhecem que esse desenvolvimento contínuo só é possível graças à "plasticidade que se faz sentir ao nível das sinapses, por meio de um jogo de reforço ou inibição das ligações existentes entre os múltiplos pares de neurónios" (Le Pape, Puzenat, 2000 p.17). Conjugando estas informações com as do foro pedagógico, tudo indica que estas pesquisas do âmbito neurológico parecem dar mais consistência à teoria defendida por Vygotsky (1979, 1995), apresentada no segundo capítulo da revisão da literatura, através da qual é possível o par mais competente, no acto do aprender e ensinar, actuar numa zona potencial de capacidades do indivíduo, desenvolver essas aptidões intervindo, de forma efectiva, na Zona Proximal de Desenvolvimento (ZPD). Com os dados pesquisados, levanta-se uma outra questão: se a diversidade das tarefas, dos recursos materiais, designadamente, dos computadores provocam aprendizagens diferenciadas e mais democráticas não deveria ser necessário que o educador tivesse também conhecimento dessas diferenças, no foro neurológico, para ser possível um apoio personalizado mais conhecedor e eficaz? Murray (2000) completa esta ideia referindo que os educadores tentam alterar diariamente o raciocínio dos estudantes e, por consequência, devem saber como funciona o cérebro do jovem, em que circunstâncias são alteradas e que tipo de alterações são produzidas. Neste sentido, este autor defende uma compreensão alargada dos métodos básicos, paradigmas e teorias que caracterizam a psicologia moderna cognitiva e os estudos da neurociência para apoiar a acção educativa.

Por outro lado, Posner e Raichle (2001) defendem que de entre todos os sistemas cognitivos, a linguagem regista a mais longa história de estudo no âmbito da neurologia. A ideia de que diferentes áreas do córtex humano desempenham funções diferentes foi referida pela primeira vez, no século XIX, por Pierre Paul Broca (Caldas, 2000; Posner e

Raichle, 2001). Todavia, Posner e Raichle (2001) questionam: o que faz com que uma palavra, vista ou ouvida, desencadeie uma memória ou, por outras palavras, conduza ao acesso lexical? Segundo estes autores podem-se identificar três categorias gerais de representação ou códigos mentais: a visual, a fonológica e a semântica[131]. E acrescentam que os sujeitos utilizam a nível mental para responder a uma série de perguntas relativas a determinadas palavras, tal como "se descreve na palavra "quilómetro", onde os sujeitos podem considerar aspectos visuais da palavra (algumas letras da palavra), aspectos fonológicos (por exemplo, se "quilómetro" rima com "metro") ou aspectos semânticos (se um quilómetro é maior do que um metro)" (Posner e Raichle, 2001, p. 119). Uma das questões que tem preocupado diferentes investigadores neste domínio (Carl Wernicke, referido por Posner e Raichle, 2001; Caldas e Reis, 1999) tem sido: será que as formas visuais das palavras acedem aos códigos semânticos de forma directa ou apenas através da mediação da codificação fonológica? Posner e Raichle defendem que os dois modelos de processamento da linguagem – cognitivo e neurológico apesar de terem atingido um patamar avançado do conhecimento existem ainda "muitas perguntas sobre o que verdadeiramente se passa no cérebro humano que continuam sem resposta" (2001, p. 122). Os modelos cognitivos e neurológicos não parecem estar de acordo quanto à necessidade real de converter a representação visual de uma palavra ou grupo de palavras na sua correspondente representação fonológica para extrair o respectivo significado. Os modelos neurológicos afirmam, geralmente, que esta etapa é necessária, mas muitos modelos cognitivos dizem que não. "Independentemente do momento em que os códigos semânticos são acedidos, não é claro o local onde estão representados no cérebro" (Posner e Raichle, 2001, p. 22). Concretamente, a aquisição da linguagem oral é um processo natural resultante da interacção do indivíduo com o meio, sendo, em termos neurológicos, "a função que resulta de mecanismos neuronais que envolvem processos auditivos e processos de motricidade do aparelho fonador" (Caldas e Reis, 1999, p. 69) para concluir que "o conhecimento da leitura e da escrita modifica de forma significativa a função e a estrutura cerebral dando origem a maiores recursos para o tratamento da informação" (p. 70). Relembre-se que depois da teoria behaviorista, baseada no estímulo-resposta, cuja responsabilidade da aprendizagem residia basicamente no indivíduo, nas capacidades (ou não) que possuía, emanou a teoria da aprendizagem social em que o meio começa a ter um papel relevante no estímulo das aptidões da pessoa, emergindo a valorização do contexto na aprendizagem e noutras dimensões do conhecimento, incluindo a necessidade de entender os próprios processos metacognitivos desenvolvidos pelo estudante e daí a vontade de descortinar aspectos do âmbito neurológico. Apesar da dimensão neuropsicológica da aquisição e uso da escrita e da leitura não estar ainda completamente definida, Caldas e Reis (1999) defendem que ao contrário do que se passa com a linguagem oral, que se aprende pelo simples convívio social, a leitura e a escrita carecem de aprendizagem formal que "se reveste do simbolismo da porta da entrada para a cultura e para a dimensão intelectual do homem" (p. 72) e Murray (2000) reforça a ideia de que não se pode ensinar matemática, sem a aprendizagem da linguagem. Tal como Squire e Kandel

[131] Nesta temática refira-se que Caldas e Reis (1999) consideram existir na aprendizagem da linguagem três processamentos: o fonológico, o lexical e o semântico.

(2002), Caldas e Reis (1999) defendem a importância das memórias neste processo, pois seja qual for o método para se chegar à forma da palavra escrita, há que considerar as memórias prévias, que dizem respeito à experiência que o indivíduo foi tendo ao longo da vida, arquivada em vários tipos de registos, de que importa agora destacar, apenas dois: o que informa o sistema semântico do significado da mensagem e o que informa o sistema articulatório de forma a ser possível produzir a palavra de forma oral. Assim, a via semântica pode ser considerada a mais natural e à qual constantemente se recorre pois o controlo do significado é o que dá sentido à linguagem, seja ela escrita ou falada, permitindo que o conhecimento da leitura e da escrita corresponda ao aproveitamento de múltiplos recursos existentes no cérebro humano (Caldas e Reis, 1999). Nas investigações desenvolvidas por estes dois autores, com grupos escolarizados e não escolarizados, foi possível concluir que o comportamento do grupo não escolarizado, quando confrontado com problemas que podem ser resolvidos ou pela "*forma*" ou pelo conteúdo semântico, prefere claramente o último. Acrescentam ainda que foi possível demonstrar que a organização conceptual destes sujeitos está mais apoiada em associações léxico-semânticas do que em associações relacionadas com os atributos léxico-fonológicos das palavras. Estes especialistas concluíram ainda que, numa população analfabeta, a semântica desempenha um papel fulcral nas operações cognitivas, quando outras representações não foram desenvolvidas, mas "um sujeito letrado pode recorrer à semântica, mas nesta prova lidará com a representação abstracta dos dígitos que lhe permite maior operacionalidade e por isso melhor desempenho" (Caldas e Reis, 1999, p. 82). Estes médicos investigadores acrescentam ainda que os indivíduos analfabetos necessitam de compreender a informação, ou seja, aceder ao seu conteúdo semântico para a utilizar em operações futuras. Esta dependência ou estreita associação entre estas duas operações não se verificou nos indivíduos letrados com o mesmo quadro afásico, pois os dois autores referem que têm a possibilidade de utilizar vias alternativas, sugerindo uma maior comunicação inter-hemisférica para os indivíduos letrados. Estes estudos sugerem que existe uma complexidade de fenómenos neurológicos internos que influenciam a aprendizagem da linguagem, assim como as experiências do indivíduo, as repetições que impressionam e ficam associadas às memórias de vida da pessoa e que marcam o modo de agir e de resolver problemas e que, naturalmente, parece influenciar a aprendizagem da matemática e, provavelmente, a construção de conceitos algébricos. Tudo indica que uma das conclusões de Caldas e Reis (1999) pode ser relevante para a aprendizagem em matemática em contexto e de âmbito interdisciplinar, descortinando-se neste tipo de aprendizagem o significado do "fazer sentido" para os estudantes, especialmente, para os que têm mais dificuldades na aprendizagem da matemática, pois como referem estes investigadores "os indivíduos analfabetos necessitam de compreender a informação, ou seja, aceder ao seu conteúdo semântico para a utilizar em operações futuras" (p. 84).

Para ampliar este quadro de entendimento do fenómeno neurológico evocam-se ainda, de forma sucinta, os estudos recentes de António Damásio (2003) reconhecido como um dos maiores neurocientistas mundiais e já aflorados no primeiro capítulo da tese ao ser evocado um pensamento de Becker (2001, 2003). Nas investigações sobre as fundações neurobiológicas na vida humana os resultados obtidos ligam-se à importância da emoção no comportamento racional, revelando-se como cruciais no acto de aprender e ensinar, na qual a atitude do professor é considerada charneira na capacidade de mobilização de vontades, criando empatias, provocando reacções que necessariamente produzirão aprendizagens diferenciadas internas nos estudantes. Ora nestes "*insights*" (ainda não totalmente decifráveis) para além dos aspectos neurobiológicos anteriormente focados emerge, segundo Damásio, o factor emoção, que num contexto linear bilateral (professor-estudante) pode ajudar ou inibir o desenvolvimento harmonioso e equilibrado do raciocínio do estudante, na construção sólida e individual do edifício matemático. Assim, tudo indica que existem pontos de contacto entre os aspectos neurológicos e os factores de natureza pedagógica que influenciam o acto de aprender e de ensinar, especialmente, no contexto interdisciplinar, pois é neste ambiente onde estão mais expostas as emoções, o diálogo educativo, a partilha de ideais e saberes, onde tudo parece ser mais fecundo e diferenciado, tornando-se cada vez mais crucial o papel do professor.

3. Dimensão Operacional

3.1. Espaços de Aprendizagem

Os espaços e os materiais destinados à aprendizagem reorientam o acto de aprender e de ensinar. A simples organização das mesas na sala de aula influenciou o tipo de trabalho desenvolvido e a promoção das diversas competências matemáticas. Concretamente, com os estudantes do 5º ano de escolaridade foi possível trabalhar individualmnete, em pequenos grupos, aos pares e na classe, pois estavam organizados em grupos de quatro elementos, mas no 6º ano de escolaridade, como os estudantes estavam agrupados dois a dois, trabalhou-se apenas individualmente, aos pares e, colectivamente, na classe.

No 1º ciclo do ensino básico a existência de apenas um computador a funcionar na sala de aula fez a diferença e provocou necessariamente outro tipo de trabalho, bem como o desenvolvimento de diferentes organizações e espaços de aprendizagens.

Os espaços de aprendizagem matemática existentes na Escola EB 2,3, designadamente, no 5º e parte do 6º ano de escolaridade, não favoreceram a utilização e a exploração inicial do computador na resolução de problemas e concretização de projectos. A existência de uma única sala com equipamento informático para toda a Escola, situada no pavilhão principal, dificultou o normal desenvolvimento dos trabalhos, quer no dispêndio de tempo, quer na dispersão causada, provocando sucessivas reorganizações de tempos e espaços numa mesma aula de Matemática. Contudo, a partir do 2º período do 6º ano de escolaridade o Conselho Directivo pôde criar uma sala de recursos informáticos para o pavilhão onde se desenvolvia o ensino regular das duas turmas em estudo. Deste modo, foi possível implementar um outro tipo de trabalho, com estabelecimento de outras prioridades, objectivos, organização de espaços, conciliando as actividades desenvolvidas pelas outras turmas com as planeadas e implementadas na investigação em curso. Nestas condições, tornou-se mais viável e acessível coordenar, em espaços próximos, os trabalhos individuais e de grupo, a elaboração de relatórios, a realização de pesquisas, a concretização de diferentes tarefas, com utilização ou não do computador. Ao professor coube-lhe a responsabilidade de moderar, coordenar e facilitar o processo de construção do conhecimento baseado na comunicação, na autonomia da aprendizagem e no diálogo estabelecido entre os pares e entre estes e o professor, numa perspectiva construtivista e de acção inter-social do conhecimento. Também a professora responsável pela turma reiterou a necessidade de, na Escola, existirem condições para se utilizar o computador e referiu numa entrevista que "*a sala de recursos no pavilhão onde se desenrolam as aulas da turma é fundamental para a acção educativa, em especial agora, que pude verificar, as vantagens que o computador proporciona na resolução de diferentes tarefas e no desenvolvimento de competências, no ensino da Matemática*".

3.2. Tarefas Matemáticas ou Experiências de Aprendizagem

3.2.1. Resolução de problemas

Nas aprendizagens algébricas a resolução de problemas inscreve-se na *2ª aproximação à álgebra*, entre os quais surgem: os problemas relacionados com a noção de recursividade; os problemas de indução baseados, fundamentalmente, na generalização de regularidades e padrões; os problemas ligados à exploração de relações proporcionais e os problemas de esquematização. Reconhece-se ainda que, neste estudo, deu-se preferência à exploração dos três últimos tipos de problemas, por se acreditar que reuniam as condições mais favoráveis para o desenvolvimento do contexto interdisciplinar e aceitar-se que o computador, em especial a folha de cálculo, seria uma mais valia instrumental na orientação gradual do processo de organização tabelar e da exploração de fórmulas na resolução deste tipo de problemas, de modo a valorizar, de forma sustentada, as aprendizagens pré-algébricas. Concomitantemente com esta posição, havia a convicção firme de que para resolver problemas próximos da noção de recursividade, os instrumentos mais adequados seriam o papel, lápis e borracha, já confirmados por vários investigadores, entre os quais se destaca Kieran (1992). Todavia, estes tipos de problemas também foram contemplados em três situações: duas com propostas de enunciados, uma a partir do quadro negro, no 6º ano "*expressões com euros*" e outra na situação 15.1. do teste de avaliação e a terceira relacionada com a formulação de um problema na questão 15.2. do teste, resolvido no 6º ano de escolaridade.

Como defende o NCTM (2001) um dos aspectos positivos explorados nesta investigação foi o facto de se assegurar o envolvimento na resolução de problemas de forma repetida em diferentes anos de escolaridade, dando possibilidade ao estudante de "olhar para trás" e reconhecer procedimentos, esclarecer e aprofundar conceitos e de "reflectirem nos seus próprios processos" (NCTM, 2001, p. 22), tornando-se um meio eficaz de ilustrar estratégias diferenciadas e compreendidas de resolução do problema. Estes resultados foram também verificados na investigação em curso através da identificação da *tese 9*, relacionada com a comunicação matemática e a compreensão dos conhecimentos, e, particularmente na *tese 10*, ligada à repetição de problemas em diversos contextos e anos de escolaridade que fortalece a aprendizagem da álgebra (Steen, 1999).

Problemas ligados às relações proporcionais. Estas situações foram exploradas no 4º e 6º anos de escolaridade. No primeiro ciclo, seguindo uma abordagem intuitiva e relacionada com as vivências do quotidiano do estudante e, no 2º ciclo, explorando o conteúdo "proporcionalidade directa" definido na disciplina de Matemática no ano terminal do 2º ciclo do ensino básico. A partir da interpretação da situação surgem representações diferenciadas e a sistematização de dados em tabelas, conteúdos fundamentais para este tipo de aprendizagens. Na passagem de uma estratégia aditiva para uma estratégia construtiva, nesta última com o estabelecimento de relações entre duas variáveis, a folha de cálculo emerge como uma mais valia nesse processo de construção, estimulando a implementação da estratégia multiplicativa, como é registado e fundamentado na *tese 1* da investigação.

A exploração da estratégia multiplicativa sofre uma evolução do 4º para o 6º ano de escolaridade, numa primeira fase associada à representação tabelar, como aconteceu particularmente na turma A, no 4º ano de escolaridade, e no 6º ano de escolaridade, a resolução de problemas surge associada à noção de fracções equivalentes, como aconteceu com o problema "*a festa de aniversário*" e também na aplicação da noção de escala, na resolução da questão 1. do problema "*a cabra!...",* mas em que os estudantes começam a ter, por parte da professora, algumas indicações da regra do "produto-cruzado". Neste tipo de problemas surge implicitamente a noção básica de variável com o entendimento de "caixa", "coisa" através da notação "?", criada pelos estudantes ou com o uso da primeira letra da variável associada ao dado da "incógnita" do problema, ou próxima dele, como aconteceu com as letras "P" e "G" na resolução do problema "*animais na quinta*" e da letra "C" para indicar a dimensão do terreno da casota da Cabra ou já do uso de "X" na resolução da questão 15.2. do teste e exposta na fundamentação da *tese 5 da investigação*.

Problemas de indução ou generalização, relacionados com regularidades e padrões. Estas situações foram desenvolvidas no 1º ciclo, no campo geométrico, pela estimulação da observação, a manipulação de materiais não estruturados e estruturados, a descrição oral de alguns aspectos e construções visualizados, fundamentalmente, na exploração do projecto de âmbito interdisciplinar "Envolvências Geométricas I e II", relacionados com a *1ª e a 3ª aproximação à álgebra*. No campo numérico, a descoberta de sequências de números, operadores numéricos, designadamente: aditivos, subtractivos, multiplicativos e de quociente tornou possível a ligação às aproximações à álgebra referidas, designadamente, pela resolução de vários problemas desenvolvidos desde o 4º ao 6º ano de escolaridade: "*uma razão importante!...*", "*a carga certa para o "peso" certo*"; "*o método de Hond´t e as autárquicas*", "*a correr e a saltar e a aprender matemática*"; "*tantas caixas!..."* e "*padrões em V*". Na resolução deste tipo de problemas também a folha de cálculo se revelou como uma mais valia, no tratamento e na exploração das expressões, bem como no uso de operadores e de outra linguagem simbólica, como foi enunciado e fundamentado na *tese 2 da investigação*.

Problemas de Esquematização. Meyer (1999) e Ameron (2004) defendem a resolução de problemas de esquematização nas aprendizagens pré-algébricas de forma a desenvolverem um trabalho dinâmico na sala de aula, procurando: a) criar um ambiente aberto onde seja possível incrementar a multiplicidade de estratégias e fomentar fóruns de discussão para partilhar e fundamentar as opções estratégicas tomadas; b) reconhecer a existência de uma compreensão matemática alicerçada no conhecimento e debate das diferentes estratégias de resolução do problema; c) valorizar as estratégias pessoais dos estudantes logo que sejam compreendidas por estes; d) criar uma atmosfera positiva na classe e de grande auto-estima entre os estudantes, sentindo-se matematicamente capazes, em que a classe se torna mais cooperativa do que competitiva.

Segundo estas autoras este tipo de problemas de formulação visual (por exemplo, "c*ompras nos saldos*", compras de artigos em colecções, ou outros do tipo "*numbers cards*" (Ameron, 2004)) ou de formulação verbal ("*à descoberta dos números*", "*a idades dos filhos*" ou "*animais na quinta*") integra-se na *2ª aproximação à álgebra* e revelam-se de importância crucial num processo gradual e significativo das aprendizagens algébricas.

Apesar de não existir um enquadramento curricular explícito no programa actual da disciplina de Matemática os estudantes aderiram à resolução deste tipo de problemas e apreenderam o enfoque essencial dos mesmos, conseguindo obter, na generalidade resultados positivos, como se pode constatar: nos problemas desenvolvidos no 4º, 5º e 6º anos de escolaridade e já expostos anteriormente, na análise de resultados e na fundamentação de diferentes teses.

Verificou-se que este tipo de problemas, para além de necessitarem de requisitos a montante, designadamente, um adequado enquadramento linguístico e gráfico também exigem um *tempo* apropriado de realização, geralmente mais longo do que a resolução de um exercício normal, (*tempo* para pensar, compreender, planear, executar e avaliar) e ainda *espaço* adequado de execução, isto é, o estudante tem de ter, na folha de trabalho, espaços disponíveis para experimentar, corrigir, fazer novamente. Numa primeira fase, deve-se também evitar a pressão da avaliação e da indicação da representação "errada" usada, inicialmente, pelo estudante, como aconteceu, designadamente, com a resolução do problema "*respirar e descansar*". Tudo indica que o não cumprimento cabal dos três parâmetros referidos: tempo, espaço e pressão da avaliação, originou um resultado menos positivo do que se estava à espera, na questão 13. do teste. Acresce ainda o facto de não ter havido tempo a montante para experimentar, com outros problemas deste género, dado que os professores não encontravam enquadramento programático possível e estavam ansiosos por cumprir os conteúdos estipulados no programa de Matemática do 2º ciclo do ensino básico. Adicionalmente, refira-se ainda que a estrutura do problema do teste foi diferente daquele que tinha sido explorado na situação "*compras nos saldos*", pois retirou-se uma questão e, deste modo, não pode ser cumprido um pormenor relevante que caracterizava a gradualidade da compreensão e execução do problema.

Neste tipo de problemas de matemática em contexto, como: "c*ompras nos saldos*", "a*nimais na quinta*" desenvolvidos no 5º ano de escolaridade, foi possível destacar alguns pormenores de execução desta última situação, como se expôs na análise de resultados, na qual os estudantes exploraram variáveis, numa representação pictórica, iconográfica, numérica ou pré-simbólica.

Estratégias de Resolução

As estratégias exploradas foram variadas e, apesar de no 1º ciclo ser usual os estudantes procurarem, no texto do enunciado, palavras que sugerissem a operação aritmética mais adequada para resolver com êxito o problema, nos últimos anos do 1º ciclo e no 2º ciclo do ensino básico tal não acontecia, pois tentavam compreender, na globalidade o problema, para depois o entenderem na especificidade, aprofundando abordagens diferenciadas de intervenção, como se pode constatar nas diferentes *teses* enunciadas, no capitulo anterior. Importa ainda referir que, num estudo realizado por Gonçalves (1996) sobre a resolução de problemas no 1º ciclo com base na estrutura aditiva concluiu que as estratégias usadas pelos estudantes são diferentes em função do contexto e quando estavam na presença de um enunciado mais difícil e de entender qual o tipo de resolução a aplicar, centravam-se essencialmente no contexto.

Problemas de esquematização. Prosseguindo a nomenclatura gradual proposta por Ameron (2002), as estratégias normalmente utilizadas, neste nível etário, na resolução de problemas de esquematização são, basicamente, *estratégias aritméticas*, de uma maneira geral evoluindo da estratégia de *tentativa e erro* à de *tentativa e erro com ajustamento*, como se apurou também na investigação, com algumas abordagens de interpretação etiquetada seguindo um esquema inicial de sistemas de duas equações a duas incógnitas, mas sem possibilidade de progressão, como aconteceu com dois estudantes da turma B, no problema "*compras nos saldos*", usando as ´etiquetas´: "*gc"* – guarda-chuva e "*bo"* – boné.

Segundo Meyer (1999) este problema e de outros propostos pelo projecto MiC, por exemplo, como "*animais na quinta*" são situações ricas sob o ponto de vista conceptual e estratégico, desenhando-se novas oportunidades relacionais de aprendizagem para os estudantes e professores, com enfoque para o campo algébrico, alterando-se significativamente o ensino da disciplina na classe, no modo de saber e fazer matemática.

Este aspecto também se pôde constatar na investigação em curso, na análise de processos e resultados desenvolvidos no capítulo anterior, especialmente, na justificação da *tese 6*, onde é enunciado genericamente que *os estudantes desenvolvem estratégias pessoais de cálculo na resolução de problemas em contexto.* A fundamentação desta tese foi muito minuciosa e diversificada em particular com a ilustração dos esquemas utilizados na resolução do problema "*animais na quinta*", explorando, naturalmente, estratégias pictóricas, iconográficas, numéricas, tendo a maioria dos estudantes da turma A usado a folha de cálculo, com a exploração de fórmulas ou não, conscientes, segundo os estudantes, que esta ferramenta tecnológica era mais exigente e, por tal motivo, podiam desenvolver outras capacidades. Todavia, três grupos utilizaram estratégias iconográficas, atingindo também, com êxito, a solução, após terem tentado e reconhecido a exigência organizativa e procedimental da folha de cálculo.

Ameron e Meyer questionam: se nestas idades não se disponibilizarem problemas de cariz algébrico, como os problemas de esquematização referenciados, como podem os estudantes desenvolver estratégias pessoais pré-algébricas? Refira-se, como curiosidade, que foi proposta a resolução do problema das "*compras e saldos*" e do problema "*animais na quinta*" a estudantes do ensino superior, do Curso de Formação de Professores do ensino básico, variante de Matemática e Ciências da Natureza. Ao ser solicitada a resolução dos mesmos por processos não formais, os estudantes referiram que não eram capazes e todos os grupos procuraram a solução pela via de um sistema de duas equações a duas incógnitas. Posteriormente, e depois de dispensarem vários minutos de atenção ao problema, um grupo conseguiu resolvê-lo, mas a maioria revelava dificuldades e manifestava-se "descrente" face ao levantamento de outras hipóteses de resolução. A maior parte dos estudantes ficou estupefacto por ser possível resolver aqueles problemas por uma via tão linear, bastando para isso desenvolver outras competências, como a observação, a atenção, a intuição, o estabelecimento da relação entre os dados, que raramente são estimuladas. Uma dessas estudantes comentou: "*Nunca tinha pensado nisso. Nunca me chamaram a atenção para estas possibilidades… Nós aprendemos a matemática com muitas fórmulas, muitas regras, sistemas e outros conteúdos e não nos fizeram apelo a outras competências que temos. E agora como vai ser quando exercermos a nossa profissão? Foram muitos anos a aprender assim… não acha professora? Provavelmente, não é só esta cadeira, com um ou outro exemplo, que nos capta para este tipo de Matemática!...*"

Tal como defende Drijvers (2001-2004) e, de certo modo, foi o que se confirmou na investigação em curso, designadamente, com a resolução do problema "*animais na quinta*" que, por tal motivo, foi analisado à exaustão, os problemas de esquematização, requerem numa primeira fase, de exploração com papel e lápis e, numa fase posterior, a resolução dos mesmos na folha de cálculo, para se aprofundarem processos e consolidarem competências, provocando necessariamente a emergência e mesmo o desenvolvimento de outras aptidões, ainda não totalmente detectadas e reconhecidas.

Nesta investigação, as pesquisas realizadas pelos estudantes na resolução deste tipo de problemas denunciaram dados adicionais aos apresentados por Meyer (1999) e Ameron (2001-2004). Na estratégia de tentativa e erro com ajustamento, verificou-se a existência do *ajustamento sequencial*, ou *do ajustamento não sequencial*, como aconteceu concretamente na resolução do problema: "*as idades dos filhos*", respectivamente, casos em que o estudante inicia a pesquisa com dois valores muito próximos de modo a satisfazer as condições do problema e continua o processo, diminuindo uma unidade a um valor e aumentando outra unidade no outro valor até chegar à solução desejada ou outros casos de pesquisa mais aleatória, em que existem os valores iniciais e a partir destes, surgem os seguintes pela variação de quantidades de acordo com as possibilidades imaginadas pelo estudante, aumentando uma ou mais unidades num valor e diminuindo a mesma quantidade na outra coluna até chegar à solução pretendida. Numa primeira abordagem parece não existir preocupações ao nível do número de experimentos realizados, mas mais tarde esta preocupação surge, denunciando a eminência de um cálculo prévio, provavelmente com maior desenvolvimento mental, pois o estudante/grupo pensa antes de concretizar a proposta realizar o menor número possível de tentativas e chegar ao resultado pretendido, como aconteceu com um grupo de trabalho na turma B (AAlex, nome fictício) exposto no capítulo anterior, em 2.4. e, posteriormente, na identificação e fundamentação da *tese 3* (Figura 24, p. 304).

Refira-se ainda que a maior parte dos estudantes da turma B baseou a resolução de problemas do tipo "*numbers cards*" (Ameron, 2002), designadamente, "*à descoberta dos números*", "*as idades das filhas*" na exploração de um esquema peculiar e interpretativo das relações expostas no enunciado do problema, mobilizando conhecimentos anteriores, especificamente no preenchimento de lacunas numa expressão, de forma a construir uma frase verdadeira, numa actividade eminentemente interdisciplinar[132].

O esquema linear criado e aplicado pelos estudantes, que a seguir se apresenta, é constituído, na primeira linha, por um primeiro espaço para colocar um número (primeira experiência – e1), a seguir coloca o símbolo da primeira operação referida no enunciado da questão, um segundo espaço para o estudante colocar um segundo número (e2) e operar com o primeiro para resultar o valor N1 assinalado no enunciado do problema. Os valores experimentados na primeira linha têm de satisfazer também as condições da segunda. Se tal não acontecer os estudantes apagavam os números (e1 e e2) e tentavam de novo com e1 ou e3 ou e4 e e2 ou e3 e e4, etc.

__e1__ operação 1 __e2__ =N1

__e1__ operação 2 __e2__ =N2

Assim, pode-se concluir que na concretização de problemas de esquematização, deste tipo, identificaram-se, fundamentalmente, três processos explorados pelos estudantes das duas turmas: a) exploração aleatória de valores, em espaços diferenciados; b) construção de esquemas lineares correspondentes à interpretação sequencial do enunciado do problema, num esquema idêntico ao que se apresenta, com experimentação e apagamento caso a caso e ou com experimentação de uma lista de valores devidamente identificados nos espaços (e1 e e2 ou e3, se houver), com divulgação dos experimentos realizados; c) construção de tabelas, usadas especialmente pelos estudantes que utilizaram a folha de cálculo na resolução de diversos problemas, com a identificação da lista de valores experimentados.

O esquema linear apresentado, usado pela maioria dos estudantes da turma B, não favoreceu a passagem da estratégia de *tentativa e erro* para a de *tentativa e erro com ajustamento*, apenas quando são explicitados todos os experimentos usados, mas a exploração de tabelas parece reunir outras condições que favorecem a progressão e a passagem da estratégia de *tentativa e erro* para a de *tentativa e erro com ajustamento sequencial ou não sequencial*. Tal como foi observado nas primeiras realizações e confirmado nas concretizações posteriores nos problemas em contexto deste tipo, os estudantes: a) acreditam e defendem os seus esquemas de execução; b) utilizam apenas esquemas com que se identificam e que lhes permitem descortinar vantagens significativas, apesar da indicação de outros esquemas de execução, com vantagens adicionais, designadamente, as tabelas; c) revelam gosto em resolver a situação proposta e realizam continuamente perguntas adicionais originando, por vezes, alguma desestabilização no ambiente da sala de aula e no apoio individualizado que esteja a acontecer, mas têm como objectivo concretizar as ideias, nas quais convictamente acreditam e que os levam, com certeza, à solução desejada.

A utilização das tabelas e da folha de cálculo parece fomentar a transição do método de *tentativa e erro* para o de *tentativa e erro com ajustamento sequencial ou não*

[132] Como aconteceu com o problema: "*o valor lógico de proposições*", realizado no 4º ano de escolaridade.

sequencial, pois os estudantes têm a possibilidade de pensar de forma "mais visível", numa nova proposta de solução, fazendo os reajustamentos necessários com base nos experimentos anteriores. Tal é quase impossível de acontecer na utilização do esquema apresentado pela maior parte dos estudantes da turma B. Mas, como se salientou não se pode rejeitar a hipótese do uso da estratégia de *tentativa e erro com ajustamento* neste esquema criado pelos estudantes, pois é provável que aqueles que revelam mais facilidades em Matemática, possam assegurar uma boa memória visual e um trabalho intelectual mais elaborado, baseado num bom cálculo mental, como provavelmente aconteceu com um grupo do 4º ano (AAlex, nome fictício) e que no 5º ano de escolaridade sentiu necessidade de escrever todos os experimentos explorados na pesquisa realizada (Figura 24, p. 304), salientando: "é *para nos orientarmos melhor e sabermos as tentativas que fizemos*", comentaram as estudantes e acrescentaram: "*pois nós lembramo-nos de ter conversado com a professora no ano anterior e termos chegado à conclusão que era melhor assim, pois agora já não fazíamos tantas tentativas*".

Resolução de Problemas - Fases. Segundo Polya há quatro fases na resolução de problemas - leitura e compreensão do problema, estabelecimento de um plano, execução do plano e revisão. Ora no trabalho de matemática em contexto ou de âmbito interdisciplinar, tudo indica que a primeira fase desdobra-se efectivamente em duas, pois existe a fase de interpretação e compreensão dos dados escritos e, simultaneamente, a análise do contexto, ou seja, dos assuntos de outras áreas ou do quotidiano que concorrem para a compreensão integrada do problema. Nestas circunstâncias, os estudantes procuram ler atentamente a informação apresentada, tentando descodificar o significado dos vocábulos e das expressões escritas, permitindo-lhes um entendimento teórico da situação e da integração de "mais dados" - elementos científicos, reais, de natureza pictórica, entre outros. Nesta perspectiva, os estudantes questionam mais e só tentam resolver o problema após uma compreensão exaustiva e efectiva do fenómeno em causa. Na resolução deste tipo de problemas, em contexto ou de âmbito interdisciplinar toda a informação apresentada se afigura de relevante, como aconteceu concretamente com os problemas "*a festa de aniversário*", "*a cabra!...*", analisados na fundamentação da *tese 7*. Assim, deve existir na formulação de um problema de contexto ou de âmbito interdisciplinar *coerência* entre a linguagem pictórica e a linguagem verbal escrita e *consistência* na definição do contexto (existir "fidelidade" vocabular e pictórica, com as aproximações adequadas ao "real").

O estabelecimento de um plano de execução na resolução do problema em contexto é mais demorado, dado que é necessário analisar, seleccionar a informação relevante e integrar os dados escolhidos num esquema de execução eficaz.

Na fase de revisão, Polya inclui três aspectos importantes na resolução de problemas: validar a solução; verificar se é única e se existem outros processos para chegar à mesma solução. Nesta fase da resolução de problemas em contexto ou de âmbito interdisciplinar podem ser explorados estes três aspectos, mas normalmente o estudante foca a sua atenção para a componente da apresentação da solução ou possível validação, isto porque o processo é moroso e logo que encontra a solução explicita-a, frequentemente reflectindo sobre toda a dinâmica do processo implementado na resolução do problema, parecendo validar não só a solução, mas também a estratégia usada.

Na Suécia, num trabalho de investigação realizado na Mid Sweden University, nos anos noventa, concluíram que na resolução dos problemas se poderiam distinguir cinco fases, desdobrando-se, a primeira fase, em duas, a saber: *compreensão do problema* e *tratamento de dados* e todas as outras três, propostas por Polya, se repetiam. Este grupo de investigadores também concluiu que o tempo gasto pelos estudantes, com melhor desempenho em matemática, em cada uma das diferentes fases era organizado segundo o exposto na Figura 51, enquanto que os estudantes que obtinham menor êxito dispendiam outros tempos em cada uma das diferentes fases, como mostra a Figura 52.

Figura 51: Fases da resolução de um problema

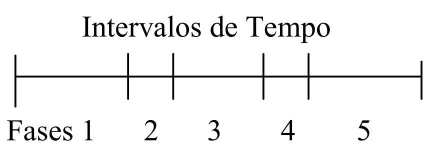
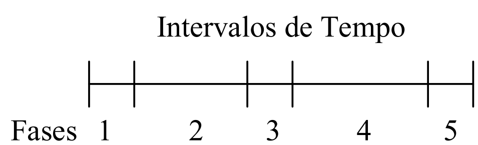


Figura 52: Fases da resolução de um problema



Na Figura 51, revela-se que o estudante gasta mais tempo na compreensão do problema, no estabelecimento de um plano e na fase da retrospecção ou revisão e gasta menos tempo no tratamento dos dados e na execução do plano. Na situação representada na Figura 52 o estudante gasta mais tempo no tratamento dos dados, no uso dos números, na realização das operações e na execução do plano, despendendo menos tempo nas outras fases de importância crucial para uma abordagem significativa do problema.

Na investigação em curso verificou-se que os estudantes gastam bastante tempo na compreensão do problema, explorando duas componentes, a *análise do conteúdo matemático* e a *análise do contexto*, seja do quotidiano, imaginado ou ligado a outras áreas do conhecimento. Por outro lado, uma outra fase começa a emergir, neste processo de resolução de problemas em contexto ou de âmbito interdisciplinar – a fase da interiorização/reflexão, delineada na fase final da resolução do problema, pois o estudante/grupo cria apetência por reconhecer os aspectos ligados ao contexto, os temas tratados, as disciplinas envolvidas, os resultados alcançados, os processos desenvolvidos, incluindo as dificuldades, bem como a significância da progressão na aprendizagem. Para existir apropriação de novas ideias e novos conhecimentos, não basta que o estudante participe em actividades concretas, é preciso que ele se envolva num processo de reflexão sobre essas actividades (Abrantes, Serrazina e Oliveira, 1999) e "se acaso não houver reflexão sobre a acção manipulativa provavelmente não há o resultado mental pretendido dessa mesma acção" (Gravemeijer, 1991, p. 75). Este autor acrescenta ainda que o principal problema da aprendizagem situa-se na aquisição de uma mais valia conceptual e na transição do pensar da acção sobre os objectos para o pensar sobre as relações e os conceitos matemáticos. Observou-se ainda que a existência destas fases não é estanque, nem tão pouco linear, constituindo-se como um todo e simultaneamente como processos cíclicos não fechados, pois, grande parte das vezes, o estudante/grupo avança e recua, empenha-se, desmotiva-se, mas esforça-se por descobrir novas estratégias de sucesso para o problema e as fases de resolução sobrepõem-se para emergirem de uma outra forma, porventura mais clara e eficiente. No Instituto Freudenthal alguns investigadores (Reewuijk, 1995-2004; Gravemeijer, 1991, 2004) consideram também que as fases da resolução do problema propostas por Polya provavelmente não têm aplicação imediata à resolução de problemas em contexto e, numa visão pragmática, defendem também que o processo de construção de conhecimento do estudante é cíclico, não linear e baseia-se em avanços e recuos contínuos. O processo de resolução de problemas em contexto e de âmbito interdisciplinar parece proporcionar mais valias aos estudantes, na capacidade de interagir socialmente, de compreender a situação na globalidade, desenvolvendo para isso o poder de comunicação no levantamento de questões e na capacidade de reflectir sobre os processos e os conhecimentos construídos, como aconteceu com a maior parte dos problemas que foram desenvolvidos neste estudo.

3.2.2. Actividades de investigação

As actividades de investigação exploradas desde o 4º ao 6º ano de escolaridade foram basicamente de dois géneros ou de resultados numéricos, relacionais e universais, com resultados fechados e previsíveis, designadamente: "*valor lógico de proposições*", "*a carga certa para o peso certo*", "*uma razão importante!...*", "*o método de Hond´t e as eleições autárquicas*", "*a fórmula de Euler*" ou de resultados mais abertos, menos conclusivos e individualizados, como aconteceu com a actividade de investigação ligada à Educação Física "*a correr e a aprender matemática*", "*lavar os dentes e poupar água*", "*banda desenhada e fracções…*".

Tal como se referiu no enquadramento teórico, as actividades de investigação desenvolvidas na aula de Matemática são uma proposta pedagógica aberta, de levantamento de questões, com descoberta e verificação de conjecturas, podendo estabelecer-se trajectos diferenciados para chegar às soluções (caso as haja!) e proporcionar re-orientações da estratégia inicial. A(s) alteração(ões) ao percurso inicial, resulta(m) de uma reflexão e discussão sobre as situações permitindo aos intervenientes a partilha de ideias, de opiniões e vivências diferenciadas de situações, facilitando uma apropriação gradual de significados mais precisos e objectivos.

No caso da tarefa referida "*a correr, saltar e aprender Matemática*" os estudantes das duas turmas usaram dados reais obtidos individualmente na disciplina de Educação Física para analisar os resultados e tiveram plena consciência de ser uma situação aberta que eles deveriam explorar, encontrar o fio condutor, levantar questões, elaborar conjecturas e como geralmente não eram capazes de validar a nova ideia delineada, surgiam novas interrogações o que originou, após certo tempo de resolução, algum cansaço, quiçá falta de estímulo para continuar, concluindo que a aprendizagem de assuntos novos ou a descoberta de soluções para novos problemas não seria tão acessível como eles imaginavam!... Mas após breves momentos de reflexão com a professora, a investigadora dirigiu-se novamente aos estudantes solicitando-lhes que observassem melhor os dados recolhidos, organizados em tabelas e reavaliassem as situações, levantassem novas questões, repensassem, pois só assim poderiam chegar a algumas conclusões. A professora de Matemática das duas turmas considerou que "*os estudantes tiveram uma grande oportunidade para aprender e descobrir coisas completamente diferentes do que estavam habituados a explorar, pois perante um conjunto de dados, em aberto consciencializavam-se das dificuldades em relacionar dados e da complexidade das respostas às questões formuladas, pois não sabiam por onde começar ou relacionar o quê, com quem ou com quê e como*". A professora da turma insistiu na importância da realização desta tarefa, pois os estudantes tiveram oportunidade de explorar a informação real, recolhida por eles em aulas de Educação Física e de promover a capacidade de relacionar dados em tabelas, de conjecturar, verificar e reformular conjecturas, "*como acontece com o método científico trabalhado em Ciências da Natureza*", como salientou a professora responsável pela turma. Simultaneamente esta actividade permitiu que "*os estudantes se consciencializassem que os saberes resultam do levantamento de questões que podem ter uma resposta numérica ou não e que a Matemática precisa de ser construída por cada um deles e não ser apresentada como se já tudo estivesse feito, como quase na totalidade das vezes fazemos. E isto não é formativo para a criança…*" referiu a professora da turma. Os estudantes tiveram a oportunidade de persistir nas conjecturas, de experimentar, não tendo a certeza de encontrar alguma solução (alfa)numérica, de partilhar e debater ideias numa perspectiva global e verdadeiramente realista de aprendizagem matemática e de educação para a cidadania.

Assim, nesta e noutras aulas em que foi possível desenvolver actividades de investigação, os estudantes revelarem atenção temporária na tarefa, ciclicamente renovada pelos estímulos provocados, solicitados pelo estudante/grupo ou da iniciativa do professor, que pode levar a alguma falta de vontade para prosseguir, desânimo momentâneo, mas, simultaneamente, a necessidade de expressar ideias, argumentar, revelar sentimentos e emoções, discutir e trabalhar em grupo para questionarem e obterem solução(ões) intermédias, provavelmente, não totalmente finalizadas. Para verbalizar os pensamentos nas diferentes etapas de observação, discussão e exploração os estudantes usaram termos específicos que dão significado à interpretação que fazem das situações. É, com certeza, toda esta dinâmica aglutinadora que faz parte do processo global da actividade matemática, numa perspectiva "*não certinha*" mas "*possível*", como referia uma estudante de desempenho médio. As actividades de investigação em contexto procuraram abrir perspectivas na concepção a montante e, posteriormente, durante a resolução, provocaram novas aprendizagens como foi verificado e fundamentado em várias teses da investigação, em particular, na *tese 6* e *tese 7*.

Tal como refere Matos (1995) o contexto em que se desenvolvem as actividades de investigação cria uma ocasião em que os estudantes têm a possibilidade de se apropriar de "ideias centrais da Educação Matemática, tais como: as ideias de definição, observação, conjectura, generalização, particularização, demonstração, etc. Por outro lado, a capacidade de convencer os outros da validade das suas asserções e conjecturas ou seja, a argumentação (e demonstração) constitui um prolongamento e um complemento natural de qualquer actividade investigativa" (p. 66).

No 5º ano de escolaridade desenvolveram-se duas actividades com mapas municipais do concelho onde a Escola estava inserida e mapas da Escola, respectivamente, realizando-se as tarefas: "i*tinerários…*" e "*cálculo da área dos pavilhões da minha Escola*" para esclarecer os estudantes na aquisição gradual do conceito de escala, iniciado na disciplina de História. A professora de Matemática apesar de ter acedido a realizar este tipo de trabalho, procurando esclarecer da forma mais contextualizada possível o conceito e dando continuidade ao trabalho desenvolvido no 1º ciclo do ensino básico, na turma A, na iniciação à folha de cálculo, no que concerne ao entendimento e registo da informação cartesiana, decidiu não englobar este assunto no processo de avaliação do estudante. É curioso registar que a resolução desta tarefa contextualizada e promovida no âmbito interdisciplinar revelou-se antecipada no tempo, dado que foram identificadas dificuldades no entendimento do conceito de "escala", encontrando-se este conteúdo programático previsto apenas para o 6º ano de escolaridade. Contudo, a actividade mostrou-se significativa na valorização dos conhecimentos pessoais dos estudantes, chegando várias vezes a surpreender os professores com as respostas baseadas em conhecimentos reais que os estudantes possuíam e os docentes não.

Nas actividades de investigação o conceito de variável surge de forma implícita, envolvida no contexto, no qual é trabalhada mais livremente e de acordo com o conteúdo, a formulação dos problemas e o nível de desenvolvimento cognitivo do estudante, como foi abordado, em várias situações, no capítulo anterior, na análise de resultados.

3.2.3. Projectos

Na investigação em curso verificou-se que o desenvolvimento de projectos requer a escolha de um tema aglutinador interdisciplinar, do interesse dos estudantes, ou seja, que faça sentido, tenha significado, mobilize vontades e integre crenças dos estudantes, preservando o enquadramento curricular programático. De facto, a realização de um projecto exige mesmo uma escolha criteriosa de um assunto que diga respeito à própria vida pessoal do estudante, no âmbito da saúde, da intervenção social ou de outros aspectos e que despolete outros factores para além dos intelectuais, como aconteceu com os projectos: i) "Envolvências Geométricas – a Geometria na cidade", desenvolvido no 1º ciclo do ensino básico, em que foram dinamizados factores relacionados com a apreciação das belezas naturais e arquitectónicas, numa envolvência sensorial ampla, em que os estudantes davam sentido às visitas de estudo realizadas, observando, fotografando, e mais tarde reproduzindo, desenvolvendo, assim, conhecimentos no âmbito da *1ª aproximação à álgebra*; ii) no 5º e 6º anos de escolaridade "*as áreas dos pavilhões da minha Escola*", em que se incluíam particularidades culturais e emocionais do espaço onde viviam os estudantes, as dimensões dos pavilhões onde tinham aulas, a história do edifício e da instituição, as vivências escolares; iii) no 6º ano de escolaridade, "*vencer a fome… um gesto solidário em Angola*", em que os sentimentos altruístas emanaram não só explicitados na vida real, mas também na área de Formação Cívica e iv) "*pulsação*", que fez despoletar interesses pelos aspectos orgânicos e psicossomáticos pessoais, essenciais da saúde dos estudantes, especialmente no campo da circulação e dos consequentes batimentos controlados do coração. Nestes anos, a concretização de projectos proporcionou a aquisição de conhecimentos relacionados com a *2ª aproximação à álgebra* e, concretamente, no 6º ano de escolaridade, no projecto "*pulsação*" com a possibilidade de modelação do fenómeno dos batimentos do coração em repouso e com a acção de esforço profundo e a consequente ligação à *3ª aproximação à álgebra*.

Por outro lado, a concretização do projecto, normalmente realizado em grupo, exige diálogos adicionais, entre professores, entre estudantes, entre estes e os professores e outros membros da comunidade educativa, com a definição clara de metas, pesquisas suplementares, espaços diferenciados de aprendizagem, tempos adequados de execução, com o acompanhamento necessário e imprescindível do professor, nalguns momentos cruciais do desenvolvimento do projecto. Concomitantemente, o projecto requer tempos individuais, de grupo, colectivos e o uso de diversos instrumentos de trabalho, inclusive os computadores, para sistematizar a informação, realizar relatórios e divulgar as conclusões de determinada forma, como foi constatado, especificamente, na elaboração e fundamentação da *tese 11*. No actual quadro curricular interdisciplinar, registou-se ainda que a realização do relatório faz sentido ser desenvolvido no 6º ano de escolaridade, pois é neste ano que o conteúdo "relatório" faz parte do programa estipulado para a disciplina de Língua Portuguesa.

Acrescente-se ainda que a realização de projectos amplia a construção conceptual e o conhecimento prático de alguns conteúdos e provoca necessariamente a dispersão de outros, cabendo ao professor a missão de disciplinar e de reorientar percursos de desenvolvimento e aprendizagem das competências essenciais e transversais da disciplina.

3.3. Componente Tecnológica – Folha de Cálculo

3.3.1. Interferências no campo educativo da matemática

O recurso aos materiais manipuláveis a aos instrumentos tecnológicos torna-se imprescindível como ponto de partida ou suporte de muitas tarefas escolares, mas trata-se de um meio e não de um fim, pois o essencial está na natureza da actividade intelectual dos estudantes (Abrantes, Serrazina e Oliveira, 1999). Segundo Drijvers (2001-2004) o computador surge como um "instrumental approach" e neste sentido emana na classe como mais um elemento que se junta ao triângulo: a) professor; b) estudante e c) materiais, como: tipo de tarefa, manual, folha de papel, lápis, calculadora, régua,... relativamente ao qual ainda não foram suficientemente estudadas as influências didácticas na construção do conhecimento. Contudo, as investigações já realizadas referem que o computador provoca, necessariamente, outros diálogos educativos, novas formas de trabalho, outras competências que vão para além da simples descoberta da solução do problema.

Reconhece-se que as tecnologias de informação e comunicação não se perfilam como uma panaceia para o ensino (Ponte, Matos, Abrantes, 1999; Streefland, 1990), mas a sua implementação na aula de Matemática depende de vários factores, entre os quais se destaca fundamentalmente a formação, a atitude e papel do professor na dinâmica que imprime ao processo de aprendizagem-ensino da disciplina (Pollak, 1987; Henderson, 1987), valorizando o crescimento gradual e os conhecimentos construídos, ano a ano, pelos estudantes (Zawojewski, Robinson e Hoover, 1999).

Segundo o NCTM (2000) "ser capaz de raciocinar é essencial para compreender a matemática. Desenvolver ideias na exploração dos fenómenos, com o levantamento de conjecturas matemáticas, a justificação de resultados, faz com que os estudantes, em diferentes níveis, concluam que faz sentido aprender matemática". (p. 56). Miguéns (2002) defende que as TIC permitem uma intensificação muito significativa da cooperação e intercâmbio educativo e considera que "a tecnologia é essencial no processo de ensino e aprendizagem, dado que esta influencia a própria matemática que é ensinada e amplia simultaneamente a aprendizagem do estudante".

Para além da existência, na classe, do estudante, do(a) professor(a), dos problemas e dos materiais incluiu-se, nesta interacção já de si tão complexa, o computador, em particular a folha de cálculo, associada a diversos estímulos intelectuais: a própria tarefa que, muitas vezes, tem outra estrutura e contornos, o diálogo do estudante com o computador, com diferentes respostas e informações, a partilha de ideias com o(a) companheiro(a) e com o professor que só o tempo de utilização da folha de cálculo e de estudo poderá vir a clarificar, como chama a atenção Drijvers (2001-2004), reconhecendo existirem algumas interferências na aprendizagem progressiva da álgebra.

Tal como reconhece o NCTM (2000) também na investigação em curso constatou-se que o ambiente criado com a tecnologia proporcionou oportunidades didácticas na exploração de ideias matemáticas, na resolução de problemas e nas oportunidades criadas na recuperação de estudantes. Ao utilizarem esta ferramenta tecnológica os estudantes desenvolveram capacidades específicas (*tese 1 e tese 2* da investigação), ampliaram os conhecimentos numéricos (*tese 3*), exploraram outro tipo de representações (*tese 4*) e adquiriram, porventura, outras competências acrescidas, pouco trabalhadas e decifráveis. Para além de se defender a realização de cálculos morosos na máquina na resolução de determinados problemas, orientando-se o foco de atenção para outras essencialidades, também se alerta para o facto do seu uso, em demasia, se poder tornar nefasto, pois poderia impedir o aprofundamento e a consolidação do cálculo mental, competência significativa para as aprendizagens matemáticas em geral e, em particular, para as construídas no campo algébrico. Por outro lado, foi ainda referido que a exploração antecipada da folha de cálculo na resolução de um problema contextualizado pode desfocar a atenção para a máquina e a ferramenta, em vez de permitir uma exploração primeira do contexto e a descoberta de outras estratégias de resolução do problema, como aconteceu, no particular com o problema "*animais na quinta*" explorado no 5º ano de escolaridade.

Familiaridade com a folha de cálculo. Na pesquisa realizada concluiu-se que a utilização da folha de cálculo não se apresentou transcendental às capacidades dos estudantes, mas surgiu como um material tecnológico natural na exploração do conhecimento matemático e na resolução de problemas.

A abordagem e a apreensão da estrutura da folha de cálculo, hoje em dia, torna-se bastante acessível e familiar aos estudantes do 4º ano de escolaridade[133] do que há anos atrás, pois alguns estudantes já tinham visualizado ou trabalhado com esta ferramenta

[133] Concatenando resultados de estudos anteriormente realizados com esta ferramenta tecnológica.

tecnológica em casa, na própria Escola ou no local de trabalho dos próprios pais e/ou encarregados de educação. Esta ferramenta tecnológica encontra-se actualmente disponível na Escola, normalmente associada à formação complementar oferecida na área da Oferta da Escola e está também presente na classe, por evocação dos próprios estudantes e professores no desenvolvimento de diversas tarefas, designadamente, na construção de gráficos, na elaboração de relatórios, como aconteceu no desenvolvimento dos projectos: "*vencer a fome – ser solidário em Angola*" e "*pulsação*" em que os estudantes do 6º ano da turma B, que não usavam os computadores nas aulas de Matemática, sentiram necessidade de explorar o computador para realizar composições escritas para "os meninos de Angola", em postais de Natal e para elaborar e apresentar os relatórios.

A sintaxe da fórmula tem uma lógica inerente à estrutura cartesiana da folha de cálculo, de apreensão imediata e facilmente manipulada pelos estudantes. Estes não colocaram qualquer questão sobre essa expressão simbólica e usavam-na sem levantar dificuldades. Refira-se ainda que os estudantes não sentiram necessidade de memorizar a fórmula, pois verificaram que a sua aplicação era dinâmica, dependendo do problema e, sempre que tinham de a usar, indagavam: "*como se diz ao computador para ele fazer as contas?*" ou escreviam a fórmula sem o sinal de igual no início e após observarem a mensagem de erro transmitida pelo computador concluíam que se tinham esquecido de usar o sinal de "igual" no início da fórmula. Um dos aspectos críticos de alguns investigadores face ao uso desta ferramenta tem a ver com o facto de, na folha de cálculo, os estudantes terem tendência de "decorar" a fórmula da sintaxe da folha de cálculo, mas como se referiu, tal não aconteceu nesta investigação.

Registe-se ainda que a exploração de gráficos não é acessível ao nível etário destes estudantes, nem para os que utilizaram a folha de cálculo, nem para os que a não utilizaram, pois os resultados obtidos nalguns relatórios não foi positiva e na questão 18.3 do teste de avaliação, em que os estudantes tinham de construir um gráfico de barras, apenas 10% dos estudantes das duas turmas, nas duas situações de pré e pós-teste, conseguiram desenhar correctamente.

3.3.2. Potencialidades e dificuldades educativas no ensino da álgebra em contexto interdisciplinar

Tal como se enunciou e fundamentou, no capítulo anterior, na *tese 4*, a utilização da folha de cálculo orienta os estudantes para a organização e representação de dados em tabelas, que se constituem como ferramentas base para as aprendizagens algébricas (Bednarz, Kieran e Lee, 1996; Wheeler, 1996; Heid, 1996).

A estrutura da folha de cálculo parece adaptar-se ao enunciado e ao conteúdo associado a certo tipo de problemas de esquematização, como: "*à descoberta dos números*", "*as idades das filhas*" e a actividades de investigação: "*uma razão importante!...*", para organizar informação em tabelas, após pesquisa e registo com lápis e papel, o uso da calculadora e de diversos materiais redondos do quotidiano; através do "*o método de Hond't e as eleições autárquicas*" aprofundar o conteúdo "divisão real" e o estudo dos diferentes universos numéricos; "*a correr a saltar e a aprender matemática*", para estabelecer e aprofundar relações entre os dados. Nestas circunstâncias parece lógico fomentar a exploração desta ferramenta tecnológica de forma a optimizar as potencialidades deste material e a disponibilizar-se como uma mais valia na resolução, com êxito, destes problemas.

Problemas de esquematização. Com base na pesquisa realizada por Ameron (2002) e no estudo agora desenvolvido parece que na exploração de problemas de esquematização, do tipo dos "*numbers cards*" deve existir, uma primeira etapa, o uso de papel e lápis, de cariz mais lúdico para posteriormente poder ser utilizada na concretização deste tipo de problemas, a folha de cálculo, optimizando os próprios esquemas inventados e explorados pelos estudantes numa perspectiva gradual da aprendizagem e formalização do pensamento matemático, valorizando processos e instrumentos. Na investigação, o problema "*compras nos saldos*" foi apenas resolvido com papel e lápis. Tal já não aconteceu, posteriormente, na concretização do problema "*animais na quinta*", em que foi proposta a utilização da folha de cálculo na resolução do problema e a maioria dos estudantes da turma A explorou esta ferramenta tecnológica e conseguiu alcançar, com êxito, a solução e os que revelaram maiores dificuldades resolveram-no correctamente por via iconográfica. Pelas dificuldades iniciais de organização encontradas tudo indica que seria mais eficaz, numa primeira fase, a orientação para de resolução do problema com papel e lápis de modo a provocar aprendizagens mais equilibradas e harmoniosas.

A proposta de abordagem deste tipo de problemas, enunciada no parágrafo anterior, surge, não por se sentir que a exploração da folha de cálculo tivesse provocado qualquer desestabilização intelectual aos estudantes, mas por se ter verificado a existência de algumas dificuldades iniciais na organização dos dados no ecrã do computador e por se constatar das facilidades tecnológicas e potencialidades educativas encontradas na resolução de outros problemas de esquematização, como por exemplo: "*as idades das filhas*" e "*à descoberta dos números*".

Estes problemas de esquematização integram-se naturalmente na exploração da matemática em contexto e na *2ª aproximação à álgebra*. Acrescente-se ainda que qualquer que seja o processo utilizado na resolução dos problemas de esquematização, resolvidos ou não com a ajuda do computador, requerem apoio individualizado do professor, para o estudante não esmorecer ou desistir e, desta forma, continuar estimulado para alcançar a solução e o sucesso desejado.

Na investigação em curso verificou-se que a utilização da *folha de cálculo* é uma mais valia na resolução de determinado tipo de problemas de esquematização em contexto, numa primeira ou segunda abordagem, pois permitiu, na turma A, a ampliação do universo numérico, na passagem do conjunto dos números inteiros para os racionais, possibilitando experiências organizadas com os números inteiros e "números decimais" na descoberta da solução que verificasse as duas condições do problema "*à descoberta dos números*" e, no teste, no problema "*emagrecer de modo saudável!*". Mesmo podendo utilizar a calculadora nenhum estudante da turma B conseguiu alcançar a solução no domínio do conjunto dos números racionais, conclusão exposta e fundamentada na *tese 3*.

A utilização da folha de cálculo na resolução deste tipo de problemas arrasta diversos procedimentos, entre os quais se destacam: a) *instrumento cálculo*, com experimentação de resultados pontuais, em que os estudantes não se preocupam com aspectos organizacionais, mas apenas com os cálculos; b) *ferramenta de organização de dados e de validação de resultados*, *mais folha do que cálculo*, pois podem não usar fórmulas e realizam as operações mentalmente ou utilizam, caso a caso, a fórmula numérica da folha de cálculo para alcançarem os valores pretendidos, com algum controlo e organização de dados em tabelas; c) *instrumento de organização de dados*, *ferramenta de experimentação* e *de simulação* de resultados de uma forma aleatória, *mais folha e mais cálculo*, chegando até aos limites do "nonsense", como aconteceu concretamente, num grupo na resolução do problema "*as idades dos filhos*" (Tabela 29, p. 303). Nesta era orientada pelas tecnologias, a folha de cálculo surge, na classe, de forma natural, como um instrumento pedagógico, inicialmente como uma folha em branco (diferente da folha em branco explorada no 2º ano de escolaridade, com as indicações do mestre da comunicação – Munari (1968), referidas em 2.1, p. 221, no capítulo anterior), pronta a ser utilizada para calcular ou organizar o conhecimento, numa proposta ampla de *mais cálculo do que folha* ou *mais folha do que cálculo*, e posteriormente conjugando estas duas vertentes emergindo como *ferramenta aberta para a organização, o cálculo e a simulação* de situações, numa proposta ampla de levantamento e validação de conjecturas.

Problemas ligados às relações proporcionais. Como se verificou, a folha de cálculo fomentou e aprofundou uma abordagem construtiva das relações estabelecidas entre as duas variáveis das tabelas, conclusão exposta e fundamentada na *tese 1 da investigação*, confirmando-se os resultados já expostos por Moreira (1989).

Os resultados da *tese 1* da investigação, enunciada no capítulo anterior, indicam que esta ferramenta de trabalho promove a exploração da estratégia multiplicativa no tratamento de relações proporcionais, possibilitando a exploração de expressões simbólicas, como se expôs na *tese 2*, facilitando a modelação da situação, estabelecendo ligações com uma e sobretudo com duas "variáveis", facilitando a aproximação estreita ao conceito de relação e a ligação à *3ª aproximação à álgebra*, bem como o uso de tabelas, fundamentado, este último resultado, na *tese 4*.

Com a folha de cálculo emerge uma linguagem simbólica que acarreta necessariamente a formalização do conhecimento matemático, *tese 2*. Que implicações terá esta formalização no conhecimento matemático? Naturalmente que ainda é cedo para tirar conclusões… A "praxis" investigativa indica que foi disponibilizado mais um instrumento de trabalho com que os estudantes, à partida, na turma A, aceitaram e muitas vezes, sugeriam a utilização deste instrumento na resolução dos problemas, o que não aconteceu, na turma B, em que os estudantes tinham uma ideia concreta sobre a utilização do computador na aula de matemática como se descreve, no ponto seguinte deste capítulo. Será que esta motivação interfere e é esta que mobiliza os aspectos conceptuais ou é a utilização da folha de cálculo ou de outros programas de computador?

Tal como defende o NCTM (2000) a folha de cálculo permite a manipulação de expressões algébricas, representações que diferem das representações convencionais. Por exemplo, para além de outro tipo de representações inerentes à sintaxe das fórmulas usadas na folha de cálculo, a notação científica dos números são representados de forma diferente das calculadoras e dos livros. De facto, este aspecto foi experimentado e vivenciado na turma A, exposto na *tese 3*, em que os estudantes observaram e tiveram oportunidade de reconhecer e questionar outras formas de representação das quantidades.

Actividades de Investigação. A utilização da folha de cálculo na realização da actividade de investigação de âmbito interdisciplinar: "*correr, saltar e aprender Matemática*" permitiu uma pesquisa mais organizada e dinâmica do processo de aprendizagem, pois foi possível experimentar e validar algumas das relações quantitativas[134] elaboradas, designadamente, do tipo: "a medida do comprimento do salto de força inferior é o dobro da medida do comprimento da perna"; "a medida do comprimento do salto de força inferior é uma vez e meia da medida do comprimento da perna"; "a medida do comprimento da perna é seis vezes superior à medida do comprimento do pé", entre outras, o que não aconteceu com os estudantes da turma B que estabeleceram apenas relações qualitativas.

No caso da exploração da actividade de investigação: "*o método de Hond´t nas eleições autárquicas*" a folha de cálculo foi o instrumento tecnológico adequado, pois os estudantes da turma A focalizaram a atenção principal para o conteúdo, a organização dos dados e dos resultados, aportando, sem problemas à solução pretendida. Na turma B, os estudantes dispersaram-se, demoraram mais tempo, pois realizaram os cálculos na calculadora ou à mão no quadro, perdendo naturalmente algumas das essencialidades do conteúdo tratado.

Projectos. Na realização desta experiência de aprendizagem foi possível que os estudantes pesquisassem informação, debatessem, sistematizassem os resultados, usando vários meios e instrumentos de trabalho e, por fim, divulgassem as conclusões. Murray (2000) defende que o computador ajuda o estudante a implementar a leitura e a aprendizagem da matemática. Saliente-se ainda que um dos instrumentos essenciais na sistematização e divulgação dos resultados é o computador, que através de várias ferramentas possibilita a compilação dos dados, relacionando-os, destacando-os ou porventura, omitindo-os, com destaque para o processamento de texto, folha de cálculo, programa de gráficos, programas de desenho, entre outros. Especialmente na *tese 11* elaborou-se e fundamentou-se a importância do computador, em geral, e dos gráficos da folha de cálculo na concretização de projectos e de pesquisas de âmbito interdisciplinar. O estudo realizado entre 1996 e 1998 pelo GT "*Matemática 2001"* (APM, 1998) cujo propósito era "elaborar um diagnóstico e um conjunto de recomendações sobre o ensino e a aprendizagem da Matemática no nosso país" (p. 1) no relatório final conclui que cerca de 93% dos professores, em todos os níveis de ensino, a situação mais frequente nas aulas de Matemática é a resolução de exercícios, as actividades de exploração só são adoptadas com bastante frequência por cerca de 15% dos professores, recolhendo o trabalho de projecto apenas 2% de realização muito frequente. Reconhece-se actualmente que este tipo de

[134] Pois no estabelecimento das relações qualitativas não houve diferenças entre as duas turmas, como por exemplo: "o comprimento das pernas tem a ver com a capacidade de corrida".

trabalho realizado na sala de aula de Matemática não corresponde às necessidades reais da disciplina, das orientações curriculares, dos interesses dos estudantes e da sociedade em geral como comprovam os resultados dos diversos programas de avaliação.

4. Conclusões Genéricas e Reflexões Finais

De acordo com Kindt (2004) a transição da álgebra informal para a formal é um salto qualitativo na aprendizagem da matemática, que arrasta dificuldades. Nesta perspectiva, este autor, questiona se a diversidade de instrumentos, processos e estratégias poderão gradualmente atenuar essas dificuldades, sentidas pelos estudantes, num processo gradual da aprendizagem da Álgebra.

Drijvers (2001-2004; 2003) defende que na aprendizagem da Álgebra existe uma tensão entre o concreto e o abstracto, isto é, entre o informal e a natural aproximação à resolução de problemas algébricos e à formalização, com a utilização de rotinas algorítmicas. "A álgebra tende a orientar-se para a abstracção, mas o seu significado tem origem em problemas concretos" (Drijvers, 2003, p. 43). Este autor conclui ainda que uma das dificuldades da álgebra reside na separação entre o significado e a forma, respectivamente, entre a semântica e a sintaxe das expressões algébricas. Segundo Drijvers, o ensejo do professor de Matemática é ajudar os estudantes a desenvolverem significados dos objectos e das operações algébricas que não estão só relacionados com situações problemáticas "realistas", mas também com aqueles que tenham significado para as construções internas das próprias relações matemáticas. Assim, fórmulas e expressões devem ser consideradas como objectos que têm significado em construções simbólicas nas relações algébricas e não somente nos processos associados. Então, este autor considera que a dificuldade na aprendizagem da álgebra reside na dualidade de *processo-objecto*. A matemática oferece duas faces do conceito: de um ´lado´ o processo operatório e do outro o objecto estrutural. Para este autor, inicialmente, o processo domina o conceito. A maturação cognitiva, a compreensão e a flexibilidade de permutar entre os dois ´lados´ fazem progredir esta aprendizagem, difícil de realizar. No Computer Álgebra System (CAS), em que Drijvers (2003) utiliza os "applets" para apoiar os estudantes nas aprendizagens algébricas, considera que se reforça a visão objecto da álgebra na exploração das fórmulas e das expressões, mas não se valoriza a componente contexto. Também Wijers (1996) enfatiza este propósito, defendendo que a álgebra deve ser explorada curricularmente numa visão aplicada, interpretativa, manipulativa e integrada nos tópicos do programa, contemplando uma diversidade de problemas realistas em contexto, utilizando diversas representações, tais como: gráficos, tabelas e fórmulas e apontando o computador como uma das soluções no difícil processo aprendizagem-ensino da álgebra.

Recordando a questão principal da investigação:

QP: *Qual a importância do contexto interdisciplinar na aprendizagem inicial da álgebra?*

Consta-se que um dos propósitos essenciais do estudo era encontrar sentido para a aprendizagem da álgebra, desde as idades elementares, num contexto alargado de vivências do estudante (escolares e não escolares), procurando dar um contributo na construção gradual e significativa dos conceitos algébricos com vista ao sucesso do estudante na disciplina. Nesta intervenção educativa surge, naturalmente, o computador, objecto do quotidiano, já de muitos estudantes, em casa, na Escola, na vida profissional dos pais ou encarregados de educação, revelando-se como mais um contexto interactivo de aprendizagem, em especial, a folha de cálculo, por ser uma ferramenta que é indicada como potenciadora da dinamização de aprendizagens algébricas, quer pelo ambiente de trabalho criado, na organização da informação em tabelas, quer pela possibilidade de mobilização de fórmulas na resolução de problemas.

Assim, após este estudo experimental em *´follow up´* de cinco anos reconhece-se limites e constrangimentos naturais, mas tudo indica que a aprendizagem inicial da álgebra em contexto interdisciplinar provoca abordagens intelectuais mais abertas, com o estabelecimento de relações, porventura nalgumas circunstâncias mais indisciplinadas do que se desejaria ou previa, mas que o professor na sua "sabedoria" procura contornar e reorientar, descobrindo processos de exploração adaptados aos estudantes. Neste sentido, o professor pode diferenciar as aprendizagens, sugerindo aos estudantes a utilização de vários materiais, entre os quais se destacam os tecnológicos, designadamente, o computador, em especial, a folha de cálculo.

Relativamente à tecnologia constatou-se na investigação que a utilização da folha de cálculo proporciona a exploração de fórmulas que requerem um trabalho mental a montante de relacionamento entre os dados, de elaboração conceptual (*significado funcional*) surgindo posteriormente consubstanciado e sintetizado na sintaxe da mensagem usada na fórmula (*significante funcional*).

Contudo, todas as cautelas são necessárias nos estudos realizados no campo educativo e Drijvers (2003) no seu trabalho de investigação sobre a utilização do computador na criação de um ambiente de aprendizagens algébricas, refere que a integração do computador contribui para resolver as dificuldades na aprendizagem da álgebra, mas, acrescenta; "estas coisas não são simples" (p. 5). Salienta ainda que a integração do computador num ambiente próprio para a aprendizagem da álgebra – Computer Álgebra System (CAS) na Educação Matemática provoca muitas questões relacionadas com o currículo e a pedagogia, tais como: o que é que os estudantes precisam de aprender e o que não precisam de aprender se a máquina "fizer tudo" por eles? Qual é, na realidade, a relevância das aptidões adquiridas com papel e lápis? Como pode ser o CAS integrado num percurso didáctico? Pode o desenvolvimento conceptual tomar lugar quando o estudante trabalha com o CAS? Termina ainda dizendo que estas questões estão a ser estudadas por educadores e investigadores em matemática por todo o mundo, envolvendo a aprendizagem da álgebra, estudando todo o processo de interacção educativa, as pedagogias associadas ao uso do computador e, em particular, os programas com características similares às do CAS. Refere ainda que o foco principal do seu estudo é continuar a investigar sobre o uso do ambiente computacional em álgebra de modo a promover "*insights*" conceptuais e operacionais.

Drijvers realizou investigações basicamente no 9º e 10º anos de escolaridade, mas refere que em idades elementares, provavelmente, a folha de cálculo pode proporcionar um ambiente mais aberto de exploração algébrica e desejável, defendendo simultaneamente que faz sentido e tem mais significado explorar, posteriormente, programas específicos de ambientes computacionais para a aprendizagem da álgebra, em particular, para aprofundar conteúdos específicos.

A ideia fulcral do presente estudo localizou-se na aprendizagem inicial da álgera, concretamente na resolução de problemas em contexto interdisciplinar, reconhecendo-se no computador, designadamente, na folha de cálculo, um suporte tecnológico natural no desenvolvimento de competências algébricas.

Assim, o enunciado e a fundamentação das teses anteriores resultaram da "praxis" e das evidências do percurso investigativo, sendo porém, algumas delas, a confirmação de resultados de estudos anteriores, de vários investigadores Contudo, alguns resultados e interrogações foram levantados no decorrer do trabalho que se reforçam, também, nestas reflexões finais. Aliada às cautelas que uma investigação na educação requer surge a consciência que este estudo proporcionou abertura a um campo novo de reflexão - a aprendizagem inicial da álgebra no âmbito da matemática em contexto e interdisciplinar Tal como foi exposto, na análise pormenorizada de várias situações corrobora-se a ideia defendida por vários investigadores da necessidade de se dar mais atenção à conciliação da técnica do papel e lápis com o uso da tecnologia na aprendizagem da álgebra, pois ainda se receia que os estudantes, com a tecnologia, sejam impedidos de desenvolver esquemas próprios de execução algébrica.

Ao longo da investigação também se pode constatar que o suporte tecnológico é em si mesmo um contexto, um ambiente interactivo de aprendizagem e, por tal motivo, mais complexo de ser analisado. De acordo com Wragg (1996) o ambiente tecnológico apresenta-se como um campo aberto de intervenção nos conteúdos curriculares, porque e enquanto objectos de aprendizagem.

Refira-se ainda que a utilização do computador, designadamente, da folha de cálculo na resolução de problemas em contexto e de âmbito interdisciplinar contribui para promover a equidade na Educação Matemática, referida no segundo capítulo, da revisão da literatura, como o primeiro princípio da Educação Matemática (NCTM, 2000). Esta associação propõe que a Escola se organize e se muna dos mecanismos necessários capazes de atender os estudantes mais talentosos, os de desempenho médio e os que revelam mais dificuldades para se suportar a aprendizagem matemática para a excelência e para a equidade na classe, constituindo-se os computadores como "janelas de oportunidades para a aprendizagem", com as potencialidades e dificuldades reais o que o termo "janela" encerra (Silva, 2002, p. 29). O NCTM (2001) recomenda a utilização da folha de cálculo na resolução de determinados problemas, considerando-a uma ferramenta útil e eficaz "na manipulação dos números, pois nalguns casos mesmo com a calculadora pode ser entediante" (p. 33), acrescentando que a folha de cálculo permite recalcular todos os dados de uma só vez e indica os resultados imediatamente, dando oportunidade ao professor de se concentrar "no efeito de introduzir certas alterações que, de outro modo, poderiam perder-se no pântano dos cálculos individuais" (NCTM, 2001, p. 33).

Nesta ambiência tecnológica ou não o NCTM (2000, 2001) orienta os professores de Matemática para a necessidade de interligar os conhecimentos da disciplina com as outras do currículo, de modo a servir-lhes de suporte científico e completar os saberes de outras áreas.

Nestes cinco anos de investigação experimental constatou-se da importância dos pressupostos teóricos delineados para a aprendizagem matemática, em particular dos seleccionados directamente para a aprendizagem da álgebra em contexto interdisciplinar, pois os estudantes necessitam, intrinsecamente, de *compreender* a situação como um todo, não se apresentando como apenas uma componente que suporta a teoria, mas como uma exigência intrínseca do próprio estudante, sob pena de rejeitar a resolução da tarefa, numa perspectiva global e sócio-cultural do conhecimento.

Em síntese, o que os estudantes pensam do trabalho realizado e do computador, em especial da folha de cálculo. Na apreciação escrita do trabalho realizado no 5º e 6º anos de escolaridade (documento apresentado em anexo 12), a maior parte dos estudantes identifica-se com as actividades desenvolvidas, mais com umas do que com outras, naturalmente, considerando que, deste modo, podem motivar e entender melhor as matérias, não só da Matemática como também de outras disciplinas e reconhecer os aspectos funcionais da Matemática, como referiram alguns estudantes: "*assim, percebo melhor para que serve a matemática*" ou "*já consigo entender que a matemática também me ajuda noutras disciplinas, como fizemos na pulsação*" ou "*não entendi bem o método de Hond´t, mas gostava de repetir porque penso ser importante para saber como são escolhidos os deputados e falar com os meus pais acerca disso*" ou "*gostei muito de saber sobre o peso da mochila e agora estou a ajudar a minha irmã a não levar coisas demais para a Escola*" ou "*penso que com estas actividades a matemática é mais motivante*" ou "*no manual é só exercícios e não sei para que servem tantos exercícios e com esta matemática compreendo para que é que ela serve e tenho de pensar mais… gosto disto*". Como foi dito e explicado anteriormente, em 2.3.2., em "aprendizagens mais democráticas" deste capítulo só apenas uma estudante da turma A referiu algumas dificuldades iniciais em envolver-se de forma positiva nas actividades, mas a sua posição evoluiu face ao trabalho realizado com os seus colegas, descobrindo e valorizando outras formas de estar com a Matemática.

Relativamente ao uso do suporte tecnológico, a classe A defendeu a utilização do computador, em especial da folha de cálculo que se apresentou como uma ferramenta natural para a aquisição do conhecimento matemático, tendo sido encarada como um instrumento de aventura na resolução de problemas. A quase totalidade dos estudantes da turma A considerou que o computador, em particular, a folha de cálculo é uma ferramenta útil para aprender matemática e evocaram basicamente três motivos principais: i) nova atitude para a Matemática, com justificações deste teor: "*acho que todas as pessoas gostam de trabalhar nos computadores e mesmo as pessoas que não gostam de matemática dá-lhes gosto, porque estão a resolver problemas nas coisas que gostam*"; "*aprendemos matemática e ao mesmo tempo ficamos a saber mais de computadores que gostamos muito*"; ii) ferramenta adequada para a Matemática, com os seguintes pensamentos expressos "*há exercícios que só dá para fazer no computador*"; "*fica tudo mais correcto*"; "*aprendemos a utilizar o computador para resolver coisas de matemática*"; "*para fazer gráficos e contas*"; "*com os computadores aprendemos mais coisas sobre a matemática e se tivermos dúvidas os computadores podem ajudar-nos*"; "*é mais fácil*" (2); "*para aprendermos a trabalhar a Matemática com os computadores e para se tivermos dúvidas podemos tirar fazendo as contas no Excel*"; "*facilita-nos o trabalho*"; *iii)* organiza-se melhor a informação e executam-se mais rapidamente os cálculos, com justificações do seguinte teor: "*com o computador é mais rápido*"; "*o computador permite-nos fazer os trabalhos de forma muito mais rápida*"; "*é uma maneira mais fácil e rápida de fazer os exercícios*"; "*é mais organizado e os cálculos quase impossíveis passam a ser mais fáceis e rápidos*" (4).

Na turma B os estudantes encararam a utilização do computador nas aulas de Matemática de forma diferente. Numa primeira apreciação realizada pelos estudantes no 5º ano apenas 32% acreditava nas potencialidades do computador e, no 6º ano de escolaridade, 72% já aceitavam o computador no apoio à realização de problemas e na apresentação dos resultados. Refira-se que foi interessante a mudança de opinião manifestada pelos estudantes desta turma, pois no 5º ano de escolaridade um dos estudantes desta turma B perguntou:

"*Oh! Professora também está a acompanhar a turma C*[135] *no estudo, não está?*"

A investigadora respondeu afirmativamente e relembrou o trabalho comum que as duas turmas têm vindo a fazer juntamente com os seus professores. O estudante relembrou até alguns episódios havidos em comum e salientou:

"*Mas professora os outros estudantes são mais fracos do que nós, não são?"*

"*Por que dizes isso?*", indagou a investigadora

"*Porque eles têm necessidade de usar os computadores e nós não… Nós trabalhamos sozinhos, puxamos pela cabeça e eles não. Têm de pedir ajuda ao computador. Mas eu prefiro fazer sozinho*". E vários estudantes reiteraram a ideia do colega, naquele momento e no ano seguinte em diversas circunstâncias, designadamente, quando no final do ano se realizou uma entrevista.

A investigadora, procurou explicar o que se estava a realizar com a outra turma, em particular, no computador e convidou os estudantes a irem revisitar os colegas da outra classe para conhecerem o trabalho em desenvolvimento e clarificarem as dúvidas levantadas.

No 6º ano alguns estudantes da turma B começaram a reconhecer a importância do papel do computador na realização de actividades em contexto e de âmbito interdisciplinar, com a realização de relatórios tendo usado, alguns estudantes desta turma, o computador e disponibilizado o trabalho realizado, em suporte electrónico. Tal como o NCTM (2000) defende, também se pôde constatar na investigação que a tecnologia influencia a própria matemática que é ensinada e amplia, simultaneamente, a aprendizagem do estudante, como aconteceu na resolução de várias tarefas. Por outro lado, a professora de Matemática responsável pela turma A salientou ainda que "*a utilização das ferramentas tecnológicas permitiu rentabilizar o tempo e abordar mais assuntos do que aqueles que era possível,*

[135] Leia-se turma A da investigação em curso.

pela via expositiva normal. Concretamente, os conteúdos da estatística foram explorados de uma forma muito especial, com as tabelas da folha de cálculo e os gráficos… E depois na Geometria também se poupou tempo, pois com o programa foi possível explorar, de forma dinâmica muitos dos conteúdos propostos no programa de Matemática que se não fosse deste modo não seriam abordados".

5. Limitações do Estudo e Recomendações

5.1. Limitações do estudo

Como se poderá compreender, as limitações no desenvolvimento da investigação em curso foram de ordem variada e para facilitar a apresentação das mesmas organizaram-se, de forma sucinta, em diversos itens.

Campo educativo. Sendo a educação uma actividade humana por excelência e extremamente complexa (Guimarães, 1993), onde intervêm aspectos de carácter subjectivo, relacionados com as relações interpessoais, as concepções, os fundamentos, crenças e atitudes dos professores sobre o ensino e em particular sobre a Educação Matemática (Serrazina, 1998; Ponte, 2002) e realizando-se a investigação neste campo educacional, a primeira grande dificuldade do estudo emergiu desta circunstância a qual é, de uma maneira geral, inerente ao ser humano em convivência social e intelectual, em particular, no quadro escolar. Concomitante com esta realidade, surge a limitação relacionada com a organização do sistema formal da própria Escola, evidenciada por Tavares (1991): "os sistemas educativos são sempre realidades complexas, multiformes e variáveis no espaço e no tempo" (p. 13), existindo, adicionalmente, constrangimentos institucionais reais, que não respeitam nem protegem o trabalho de investigação experimental.

Tema novo. Apesar de existirem alguns estudos com referências conceptuais relativas às aproximações à Álgebra, a investigação neste domínio em idades elementares, em contexto e de âmbito interdisciplinar é relativamente nova. Assim sendo, estudar casos em que o foco da investigação é a matemática em contexto e de natureza interdisciplinar, com utilização ou não do computador, com destaque para a folha de cálculo, no grupo específico dos 7 aos 12 anos de idade, sendo uma tarefa aliciante revela em si dificuldades acrescidas, localizadas ao nível etário dos estudantes e ao nível das componentes curricular, programática e conceptual, instrumental e relacional da Educação Matemática. Também a flexibilidade curricular surge como um conceito novo assim como a matemática em contexto e de natureza interdisciplinar, pois apesar de terem existência legal pelo enquadramento curricular do Decreto-Lei nº 6/2001 é um "modus operandis" relativamente recente de convivência escolar, com a validação de novas tarefas e procedimentos. A matemática em contexto, mas sobretudo a exploração da matemática de âmbito interdisciplinar provoca a implementação de novas abordagens didácticas nas aulas de Matemática, numa acção coordenada e dialogante com outras disciplinas, numa perspectiva de cidadania e de educação para os valores constituindo-se simultaneamente como uma dificuldade acrescida na dinamização do processo investigativo. Apesar do conceito de *interdisciplinaridade*, já integrar, há alguns anos, diversos documentos oficiais, ainda está pouco aprofundado na "praxis". Recentemente, tem surgido o termo *matemática em contexto*, que apesar de existirem *elos de ligação* entre estes dois termos numa perspectiva prática e de desenvolvimento curricular, ainda não se encontram teoricamente esclarecidos, estabilizados e devidamente implementados no processo aprendizagem-ensino da Matemática.

Conteúdo Programático e Modalidades de trabalho. Uma das limitações localizou-se na procura incessante em cumprir o programa de Matemática e em realizar os exercícios propostos no manual adoptado pela Escola. Os professores revelaram uma preocupação constante, especialmente os do 2º ciclo do ensino básico, em cumprir os conteúdos previstos para a disciplina, salientando a falta de enquadramento programático para explorar problemas relacionados com as aprendizagens pré-algébricas. Adicionalmente, existiram dificuldades ao nível do desenvolvimento de competências previstas no currículo da Matemática do ensino básico, numa linguagem relativamente nova e de práticas ainda com contornos pouco definidos.

Por outro lado, a vontade de aprofundar o impacto de diversas modalidades de trabalho, tais como: resolução de problemas, actividades de investigação e projectos, consideradas como experiências de aprendizagem relevantes na acção educativa, capazes de requalificar e valorizar as vertentes: científica e didáctica do processo em contexto interdisciplinar de aprendizagem-ensino da Matemática revelaram-se como dificuldades acrescidas no percurso investigativo, especialmente, localizadas ao nível da inexistência de tarefas validadas para serem utilizadas na investigação, salvo as adaptadas dos programas de avaliação internacional do TIMSS e PISA ou de revistas da especialidade. A necessidade de adaptar criar e validar grande parte das tarefas com a *pilotagem*, cujos resultados genéricos foram expostos em anexo 9, e a análise avaliativa realizada pelos juízes, tornaram o processo mais moroso e porventura de atenção mais diluída, devido à complexidade e à demora dos procedimentos.

Estudo de Âmbito Vertical. As dificuldades inerentes a um estudo de âmbito vertical, inter-ciclos e prolongado no tempo, um *´follow up´* necessário, pois importava estudar o percurso das aprendizagens numéricas às algébricas, provocou um prolongamento do estudo no tempo, que fez arrastar naturalmente problemas adicionais, na selecção, registo e sistematização do material mais relevante. No domínio experimental a investigação integrou uma fase exploratória de *pré-investigação*, prevendo o desenvolvimento de actividades comuns e de diálogo continuado com duas professoras do 1º ciclo da educação básica (2º, 3º e 4º anos de escolaridade), com laços de cooperação à educação Pré-Escolar, através da implementação de um projecto comum interdisciplinar com enfoque principal no campo geométrico. Esta fase visava uma colaboração estreita com os professores no sentido de entender a dinâmica de intervenção na sala de aula, atenuar diferenças e orientar para um *perfil de partida* conhecido e plenamente identificado. Nesta intervenção foi necessário respeitar o ritmo das turmas, as concepções e crenças dos professores e trabalhar em cooperação, (re)negociando as opções profissionais na acção educativa. Estes procedimentos tiveram efeito semelhante no 2º ciclo do ensino básico, onde foi necessário respeitar regras pré-estabelecidas e protocolos de colaboração já existentes e outros a renegociar.

Pesquisa Bibliográfica. Uma das dificuldades da investigação residiu naturalmente numa pesquisa bibliográfica credível, especialmente ligada ao tema recente em estudo, seleccionada e ajustada aos objectivos da investigação, evitando a dispersão de leituras e o desvio do foco principal para aspectos colaterais ao estudo. Quivy e Campenhoudt (1998) referem que existe muita tentação para a "gula livresca ou estatística" que consiste em "encher a cabeça" com uma grande quantidade de livros (p. 21). Acrescentam ainda que esta atitude conduz invariavelmente ao desalento, pois a abundância de informações mal integradas acaba por confundir as ideias. Por isso, importa, isso sim, "voltar atrás, reaprender a reflectir e estudar, com maior profundidade alguns textos, em vez de os devorar" (p. 21). Segundo estes autores (1998, p. 31) uma investigação é, por definição, algo que se procura e é um caminhar para um melhor conhecimento, em que surgem hesitações, desvios e incertezas. Neste enquadramento, a pesquisa bibliográfica foi prolongada no tempo, anterior ao início formal da investigação e durante a mesma houve uma preocupação crescente na actualidade das pesquisas. Apesar de ter sido mais tarde do que se desejaria, foi possível realizar um estágio de duas semanas no Instituto Freudenthal da Universidade de Utrecht (anexo 13), tendo havido a possibilidade de apresentar parte da investigação em curso, reflectir e reorientar objectivos e procedimentos, conversar com diversos investigadores[136] e realizar ainda uma pesquisa bibliográfica mais profunda, com a consulta de livros e revistas da especialidade.

Abordagem metodológica. Conscientes das dificuldades da investigação no campo educativo, adoptou-se um percurso enraizado numa metodologia fundamentada no paradigma das ciências sociais, no qual os princípios de actuação prendem-se com o respeito pelo sujeito, enquanto ser aprendente, numa busca reflexiva de permanente autenticidade e objectividade. Deste modo, ao longo do desenvolvimento do trabalho tornou-se imprescindível controlar todo o processo de investigação, com flexibilidade e com discernimento crítico, na realização dos reajustes necessários, para cumprir os objectivos da investigação.

A escolha do paradigma da metodologia qualitativa provocou a exploração de diferentes instrumentos de recolha de dados e um consequente tratamento reflexivo, tornando-se imprescindível o controlo de todo o processo de investigação, capaz de realizar as adaptações que se julgassem oportunas, para cumprir ou reformular, caso fosse necessário, os objectivos da investigação. Nesta abrangência de perspectivas, simultaneamente lineares e complexas, agravadas pela multiplicidade de factores que envolvem a investigação qualitativa (Bogdan e Biklen, 1994), com algumas descrições de cariz quantificável, surgiram dificuldades acrescidas, limitando-se ou ampliando-se, de forma sustentada, este estudo.

[136] Estando alguns deles a colaborar com o projecto PISA.

Constrangimentos curriculares e institucionais. Obstáculos institucionais surgiram directamente relacionados com a dinâmica da Escola, com regras próprias internas a respeitar, sem estar previsto qualquer apoio implícito à investigação, designadamente, na continuidade para o 2º ciclo do ensino básico. De facto, a Escola ainda não funciona como um laboratório aberto à investigação experimental, pois não estão previstas condições que acolham efectivamente a investigação experimental… É um favor que se faz à investigadora e não se encara como um bem para a Escola e, naturalmente, para o sistema educativo, neste caso, direccionado para o ensino da Matemática, uma área onde existe tanto insucesso e considerada prioritária no ensino e na evolução da sociedade em geral.

De facto, existiram constrangimentos de ordem institucional, especialmente no 2º ciclo do ensino básico que dificultaram a realização de um estudo de cariz comparativo e uma experiência com mais controlo de determinados elementos, designadamente, da variável professor e dos horários atribuídos às duas turmas que vinham ser acompanhadas, desde o 2º ano de escolaridade.

Do tamanho da amostra, ao estudo concreto de duas turmas, à definição de regras e ao cumprimento de programas definidos ministerialmente e implementados na Escola pelos professores, foram limitações explícitas que comprometeram a prossecução linear dos objectivos da investigação.

Outra condicionante cumulativa surge ligada à falta de recursos informáticos próximos à sala de aula de Matemática que impediram a exploração, em tempo útil, de diferentes programas computacionais, a organização eficaz do trabalho idealizado, passando pela constituição de grupos diferenciadas de competências e de um acompanhamento mais individualizado do trabalho de âmbito experimental desenvolvido.

Impossibilidade de usar a linguagem de programação BOXER. Dado que em 2002 esta linguagem de programação ainda só se encontrava disponível para versão Macintosch e sob pena da investigação neste assunto ficar comprometida, foi redigida uma carta ao Ministério da Ciência e Tecnologia para obter apoio no empréstimo de um ou mais computadores "Mac". Como a resposta não foi positiva e o PRODEP estipulava um tempo próprio para a investigação, não foi possível realizar tal experiência, comprometendo-se a exploração da linguagem de programação BOXER.

Estudo de Programas de Matemática. Também não foi possível conhecer mais aprofundadamente os programas de alguns países, como era desejável, designadamente, os da Suécia, Áustria, Inglaterra e Noruega onde a investigadora tinha tido oportunidade de trabalhar com docentes/investigadores sobre os programas de Matemática e visitar Escolas do ensino superior e do ensino básico. Nessa altura as visitas efectuadas proporcionaram encontros, partilha de ideias, análises práticas e a constatação generalizada das dificuldades dos estudantes na aprendizagem da Álgebra. Devido à escassez de tempo não foi de todo possível aprofundar ainda os programas dos países onde os estudantes obtiveram, no programa TIMSS, os melhores resultados na Álgebra: República Checa, Hong-Kong, Japão, Federação Russa, Singapura e República Eslovaca e Áustria, apesar de na correspondência trocada ter existido receptividade para a investigadora visitar esses países.

Na deslocação à universidade de Utrecht, considerou-se oportuno aprofundar a pesquisa bibliográfica, a troca de ideias e experiências, com diversos investigadores do Instituto Freudenthal (Kindt, Gravemeijer, Reeuwijk, Ameron, Drijvers, Treffers, entre outros, 1990-2004) e ainda com professores de Matemática responsáveis pela formação de professores, pelos programas da disciplina e pela organização curricular do sistema escolar holandês.

5.2. Recomendações

Apesar das limitações existentes era de todo conveniente o alargamento desta investigação a outras Escolas, a outras disciplinas e/ou áreas curriculares, com a adaptação das tarefas já implementadas. Por outro lado, esta investigação deveria ser também completada com a concepção/realização de outras tarefas, com algumas reformulações, com mais observações, diálogos com estudantes e professores e a permissão da sequencialidade deste estudo no tempo, no 7º ano de escolaridade, aquando da introdução e primeiro desenvolvimento formal do conceito de variável[137] na resolução de equações.

Parece fundamental divulgar de uma forma mais eficaz, junto dos professores e outros agentes da educação, os resultados da investigação, em geral e, em particular, na área de Matemática, nas quais há vontade dos organismos responsáveis, em melhorar o ensino e respectivo aproveitamento escolar dos estudantes. Apesar de se poder argumentar que as conclusões gerais das investigações não podem ser transpostas de forma automática para a sala de aula e que o facto dos professores conhecerem os resultados dos trabalhos dos investigadores não é uma garantia de que estes os irão implementar na sua prática diária (Ramalho, 1996), a divulgação dos resultados é uma das etapas fundamentais do processo investigativo tornando-se absolutamente necessário o conhecimento da temática e dos resultados para os professores poderem reflectir e decidir da sua aplicabilidade ou não. Tal como Ameron (2002) defende nas recomendações finais do seu estudo também neste se concluiu da necessidade de estudar com mais acuidade a simbolização e os diferentes esquemas de raciocínio implementados pelos estudantes neste nível de ensino para orientar e prestar mais atenção a uma natural passagem da aritmética para a álgebra, sem o estabelecimento de conflitos formais e do uso prematuro de convenções arbitrárias.

O presente estudo procurou aliar dois campos: o da aprendizagem algébrica e o do contexto interdisciplinar, no qual interactuava o ambiente tecnológico. Esta situação provocou dificuldades acrescidas, originando, necessariamente, reflexões sobre cada um dos campos e a integração dos mesmos com vista a uma análise real do que é o acto educativo e numa visão ampla e holística do conhecimento. Durante a investigação procurou-se fomentar o "*inside*" dos estudantes, focalizar a análise da informação recebida e, posteriormente, nos dados obtidos e trabalhados, possibilitar a reflexão sobre a sua própria aprendizagem, estimulando o raciocínio matemático. Este aspecto enunciado é, simultaneamente, uma limitação e uma recomendação, pois tudo indica que se deve procurar investir neste domínio em futuras investigações.

[137] Contudo, foi possível reflectir com os professores sobre o trabalho anteriormente realizado e o promovido, por estes, no 7º ano de escolaridade.

Uma das dificuldades do estudo resulta também numa recomendação e está relacionada com o tempo de utilização do computador no ensino, pois a instrumentalização do mesmo requer um longo período de exploração, como também concluiu Drijvers (2003, 2004) na investigação realizada sobre a utilização do CAS no processo de aprendizagem-ensino da álgebra. Uma das dificuldades relacionadas com a utilização do computador nas aulas de Matemática é a avaliação e, neste sentido, torna-se absolutamente necessário desenvolver estudos sobre o papel da tecnologia na avaliação e complementarmente, que tipo de avaliação implementar quando se usa o computador na aula de Matemática, em particular na aprendizagem da álgebra em contexto interdisciplinar.

Por outro lado, a aprendizagem da álgebra requer o estudo da *relação de igualdade* que engloba vários significados, quer estritamente matemáticos, quer da abertura para outros contextos. De facto, no estudo, ao desenvolver-se a actividade de investigação de âmbito interdisciplinar: "*o valor lógico de proposições*", relacionada com o conceito de igualdade verificou-se que esta noção cria algumas ambiguidades de interpretação e, como tal, necessita de ser aprofundada em diversas vertentes. Usualmente a relação de igualdade está associada ao conceito de representação da mesma quantidade e não em termos de equivalência entre expressões numéricas. Alguns investigadores são de opinião que a causa das dificuldades na tradicional linguagem aritmética mergulha no sinal de "igual" que não é suficientemente apreendido pelas crianças (Brink, 1991). É vulgarmente reconhecido que as crianças usam este sinal como resultado (operativo) e não como um sinal indicando uma relação. As crianças não olham para o sinal como símbolo isolado, mas ligam-no a uma das quatro operações aritméticas conhecidas e, numa expressão, transmite sequencialidade natural, com vista a um resultado único. Segundo Kieran (1988, 1992) a noção de igualdade também deve ser desenvolvida no currículo e acompanhar o conceito de variável. Também o NCTM (2000) defende que os estudantes vêm o sinal de igualdade, neste tópico, como um símbolo de equivalência e equilíbrio[138] entre duas expressões que não está ainda suficientemente trabalhado. Os estudantes precisam de começar por desenvolver aptidões produzindo expressões equivalentes e resolver equações lineares no ensino médio, mentalmente e com papel e lápis, assim como desenvolver capacidades na operação com símbolos e usando o computador. "O raciocínio acerca de variáveis e expressões é uma forma de "aritmética qualitativa" (Reeuwijk, 1995, p. 14). Descartes refere que a igualdade tem a primeira importância na álgebra, como defende também Kieran (1988, 1992), pois em termos pedagógicos esta relação não é restrita à álgebra, mas encontra-se em todas os domínios da matemática, entre os quais a geometria (Moor, 1991). Nestas circunstâncias recomenda-se que um dos temas a investigar deveria integrar-se ou focalizar-se na relação de "igualdade" no campo numérico ou algébrico.

Para terminar refira-se que as questões colocadas ao longo da análise de resultados, de leituras iniciadas no campo neurológico (nas dimensões psicológica e biológica) e na apresentação de conclusões constituem-se, em si mesmo, como "motes" para futuras investigações.

[138] No currículo actual português esta noção é trabalhada, pela primeira vez, no 7º ano de escolaridade pelo modelo experimental da balança de dois pratos, usando-se a metáfora: "para se equilibrar a balança precisa de existir a mesma quantidade de massa, nos dois pratos".

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Abrantes, P. (1988). *A renovação do currículo de Matemática*. Lisboa: APM. (Publicação deste artigo na Gazeta de Matemática, nº 146, Janeiro de 2004).

Abrantes, P. (1994). *O trabalho de projecto e a relação dos estudantes com a Matemática: A experiência do projecto MAT$_{789}$* (tese de doutoramento). Lisboa: APM.

Abrantes, P.; Leal, C. e Ponte, J. P. (1996). *Investigar para Aprender Matemática*. Lisboa: APM e Projecto Matemática para todos.

Abrantes, P. (1996). Interpretação dos níveis de literacia: o domínio quantitativo. In Benavente A. e outros (Eds.), *A literacia em Portugal: resultados de uma pesquisa extensiva e demográfica*. (p. 94-102). Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian e Conselho Nacional de Educação (CNE).

Abrantes, P. e outros. Grupo de Trabalho "Matemática 2001". (1998). *Matemática 2001 – Recomendações para o Ensino e Aprendizagem da Matemática* (relatório preliminar). Lisboa: APM.

Abrantes, P., Serrazina, L e Oliveira, I. (1999). *A Matemática na educação básica*. Lisboa: Ministério da Educação. Direcção de Educação Básica.

Abrantes, P. (2001). *Reorganização Curricular do Ensino Básico*. Lisboa: Ministério da Educação. Departamento da Educação Básica.

Abrantes, P. (2001). *Reorganização Curricular. Ensino Básico. Princípios, Medidas e Implicações* (Decreto-Lei 6/2001 de 18 de Janeiro). Lisboa: Ministério da Educação. Departamento de Educação Básica.

Adler, I. (1968). *Matemática e desenvolvimento mental*. S Paulo: CULTRIX.

Alonso, M. L. (1998). Desenvolvimento Curricular e Projecto Educativo de Escola. In Estrela, Albano e outros (Eds.), *Investigação e Reforma Educativa*, (p. 51-63). Lisboa: Instituto de Inovação Educacional. Ministério da Educação.

Almeida, C. e Viseu, F. (2002). Interpretação gráfica das derivadas de uma função por professores estagiários de Matemática. *Revista Portuguesa de Educação*, 15 (1), (p. 193-219). Braga: Universidade do Minho.

Ambrósio, T. (2002). Comunicação na sessão de abertura do Seminário. Em Manuel, M. e Maria Amélia M. (Eds.), *Redes de Aprendizagem, Redes de Conhecimento*. Lisboa. CNE. Ministério da Educação.

Ameron, B. (2001-2004). Reinvention of early álgebra. In Drijvers, P. (Ed.), *Classroom-based research in Mathematics Education,* (p. 25-34). Utrecht: Freudenthal Institut.

Ameron, B. (2002). *Reinvention of early álgebra. Developmental research on the transition from arithmetic to álgebra*. Utrecht: Institut Freudenthal.

Ameron, B. (2004). Documentos internos e entrevista concedida à investigadora em Utrecht, no Freudenthal Institut.

Amorim, I. e Matos, J. F. (1990). Actividades investigativas em Matemática: Porquê, Para quê. Como? *Actas da PROFMAT90*, vol I, Caldas da Rainha, (p. 155-171). Lisboa: APM.

Anderson, R. (1992). Some Interrelationships between Constructivist Models of Learning and Current Neurobiological Theory with Implications for Science Education. *Journal of Research in Science Teaching*, 29, (p. 1037-1058).

Associação de Professores de Matemática (APM) (1988). *Renovação do currículo de matemática*. Seminário de Vila Nova de Mil Fontes. APM.

Arendt, H. (1968). *Between past and future*. New York: Penguim Books.

Ary, D.; Jacob, L. C. e Razavieh, A. (1987). *Introduccion a la Investigacion Pedagogica*. Nueva Editorial Interamericana. S. A. de C. V.

Askew, M. (2000). Mathematics as a social practice: implications for interactions and grouping. In Monteiro C., Tavares F., Almiro J., Pedro J. P., Matos J. M. e Menezes L. (Eds.), *Interacções na aula de Matemática*. Viseu: Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação. Secção de Educação Matemática.

Atiyah, M. F. (2002). A Matemática no Século XX. *Gazeta de Matemática*, nº 142.

Ausubel, D. (1954). *Theory and problems of adolescent development*. New York: Green anda Stratton.

Ausubel, D. (1963). *The Psychology of Meaningful Learning*. New York: Grune e Stratton.

Bardin, L. (1977). *Análise de conteúdo*. Lisboa: Edições 70.

Barrow, J. (1992). *Pi in the Sky*. Oxford: Clarendon Press.

Bauwrann, R. (1997). *Mathematik 7/8*. Klasse. Innsbruk: Mentor Verlag München.

Batanero, C. e Godino, J. (1998). Funciones Semióticas en la Ensenañza y Aprendizaje de las Matemáticas. In *Seminário de Investigação em Educação Matemática IX*, (p. 25-45).

Battista, M. T. (1994). Teacher beliefs and the reform movement in mathematics education. *Phi Delta Kappan*, 75(6), (p. 462-470).

Battista, M. e outros (1998). "Students´ Spacial Structuring of 2D Arrays of Squares". *Journal for Research in Mathematics Education* 29, November, (p. 503-532).

Bebiano, N. (2001). Bento Caraça e a Matemática, aquela Difusa Substância. *Gazeta de Matemática*, 141, (p. 11-23).

Becker, F. (2001). *Educação e construção do conhecimento*. Porto Alegre: ARTMED. Editora S.A.

Becker, F. (2003). *A origem do conhecimento e a aprendizagem escolar*. S. Paulo: ARTMED Editora S.A.

Bednarz, N. (1996). Emergence and development of algebra as a problem-solving tool: continuities and discontinuities with arithmetic. In Bednarz, N.; Kieran, C. e Lee, L. (Eds.), *Approaches to algebra: perspectives for research and teaching*, (p.115-136). Mathematics Education Library. Dordrecht/Bóston London: Kluwer Academic Publishers.

Bednarz, N., Kieran, C. e Lee, L. (Ed.) (1996). *Approaches to algebra. Perspectives for Research and Teaching*. London: Kluwer Academic Publishers.

Bednarz, N.; Kieran, C. e Lee, L. (1996). Approaches to algebra: perspectives for research and teaching. In Bednarz N., Kieran C. e Lee L. (Eds.), *Approaches to algebra: perspectives for research and teaching*, (p. 3-12). Mathematics Education Library. Dordrecht/Bóston/London: Kluwer Academic Publishers.

Bell, A., Malone, J. E Taylor, P. (1988). *Algebra: an exploratory teaching experiment*. Nottingham, UK: Shell Centre for Mathematical Education; Perth, Australia: Curtin University, SMEC.

Bell, A. (1996). Problem-solving approaches to álgebra: two aspects. In Bednarz, N.; Kieran, C. e Lee, L. (Eds.), *Approaches algebra: perspectives for research and teaching*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Bell, A. (1996). Algebraic thought and the role of a manipulablensymbolic language. In Bednarz, N.; Kieran, C. e Lee, L. (Eds.), *Approaches to algebra: perspectives for research and teaching*, (p. 151-154) e (p. 167-185). Mathematics Education Library. Dordrecht/Bóston/London: Kluwer Academic Publishers.

Bennett, S. N. (1986). Teaching Styles and Pupil Progress. In Hammersley, Martyn. (Ed.), *Case Studies in Classroom Research*, (p. 3-19). Philadelphia: Open University Press.

Bentes, J. M. (1998). Curricula de Informática para professores de Matemática: Que problemas? *Seminário de Investigação em Educação Matemática*, IX, (p. 103-119). Guimarães: APM.

Berger, M. (1998). Graphic calculators: an interpretative framework. *For the Learning of Mathematics*. *18*(2), (p. 3-20).

Berlin, D. (1991). *Integrating Science and Mathematics in Teaching and Learning: A Bibliography*. School Science and Mathematics Association Topics for Teachers Series, Nº 6. Columbus. Ohio: ERIC Clearing-house for Science, Mathematicsand Environmental Education.

Berlin, D. e White, A. (1996). Connecting School Science and Mathematics. In House, P. A e Coxford A F. (Eds.*), Connecting Mathematics across the Curriculum*. Yearbook. NCTM.

Bernard, J. E. e Cohen, M. P. (1988). In Arthur, Coxford F. e Albert Shulte P. (Eds.), *The Ideas of Álgebra, k-12*. Yearbook 1988. N. C. T. M.

Bickhard, M. H. (1992). Scaffolding and self-scaffolding: central aspects of development. In L. T. Winegar e J. Valsiner (Eds.), *Children´s development within social context: research and methodology*. Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Bishop, A. J. (1991). *Mathematical enculturation: a cultural perspective on mathematics education*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Boavida, A. M. (2001). *Um olhar sobre o ensino da demonstração em Matemática*. Educação e Matemática nº 63, Maio/Junho, (p. 11-15).

Boer, C. (2001-2004). If you know what I mean. In Paul, D. (Ed.), *Classroom-based research in Mathematics Education*, (p. 35-46). Utrecht: Freudenthal Institut.

Boers-van Oosterum, M. A. M. (1990). *Understanding of variables and Their Uses Acquired by Students in Traditional and Computer-Intensive Algebra*. University of Maryland College Park.

Bogdan, R. e Biklen, S. (1994). *Investigação Qualitativa em Educação. Uma Introdução à Teoria e aos Métodos.* Porto: Porto Editora.

Booth, L. R. (1988). Children´s difficulties in beginning algebra. In Arthur, Coxford F. e Albert Shulte P. (Eds.), *The Ideas of Algebra, k-12*. Yearbook 1988. N. C. T. M.

Borasi, R. (1987). Exploring mathematics through the analysis of erros. *For the Learning of Mathematics*, 7(3), (p. 2-8). Montreal, Quebec: FLM Publishing Association.

Boyer, C. B. (1968). *A history of mathematics*. New York: Wiley.

Bransford, J. D.; Brown, A. L. and Cocking, R. (1999). *How People Learn: Brain, Mind, experience, and School*. Washington, D.C.: National Academy Press.

Brink, F. J. (1991). Realist arithmetic education for young children. In L. Streefland (Ed.), *Realista Mathematics Education in primary school. On the occasion of the opening of the Freudenthal Institut*. Utrecht: Center for Science and Mathematics Education (CD-β).

Brown, M. (1981). Golas as a reflection of the needs of the learner. In Robert Morris (Ed.), *Studies in Mathematics Education*, vol. 2. Paris: Unesco.

Brown, A. (1987). Metacognition, executive control, self-regulation, and more mysterious mechanisms. In F. E. Weinert & R. H. Kluwe (Eds.), *Metacognition, motivation and understanding* (p. 65-116). Hillsdale, New Jersey: Erlbaum.

Brown, J. S., Collins, A. e Duguid, P. (1988). *Situated Cognition and the Culture of Learning*. Califórnia: Relatório preparado para o Institute for Research on Learning.

Brown, J. S.; Collins, A. e Duguid, P. (1989). Situated cognition and the culture of learning. *Educational Researcher*, (p. 32-41).

Bruner, J. (1983). *Le développement de l´enfant – Savoir faire, savoir dire*. Paris: Press Universitaires de France.

Bruner, J. (1985). Vygotsky: a historical and conceptual perspective. In J. Wertsch (Ed.), *Culture, communication and cognition: Vygotsky perspectives*. New York: Academic Press.

Bruner, J. (1987). *O processo da educação*. Companhia Editorial Nacional. Volume 126.

Bruner, J. (1990). *Acts of meaning*. Cambridge, MA: Havard University Press.

Cabrita, I. (1996). Processos de resolução de problemas de proporcionalidade utilizados por estudantes do 7º ano de escolaridade. In Ramalho G.; Silva, A. C. e Oliveira I. (Eds.), *VII Seminário de Investigação em Educação Matemática*, (p. 117-132). Almada: APM.

Cabrita, I. (1998). Efeitos da Exploração dum Documento Hipermédia na Aprendizagem do Modelo de Proporcionalidade. In Novo, A.; Amaral, A.; Carvalho, C.; Vale, I.; Portela, J. e Pimentel, T. (Eds.), *IX Seminário de Investigação em Educação Matemática*, (p. 207-226). Guimarães: APM.

Cabrita, I. (1998). *Resolução de problemas: aquisição do modelo de proporcionalidade directa apoiada num documento hipermédia*. Aveiro: Universidade de Aveiro – Portugal. (Tese de doutoramento).

Cabrita, I. (2000). As (Inter)acções na aula de Matemática e a gestão do tempo. In Monteiro C., Tavares F., Almiro J., Pedro J. P., Matos J. M. e Menezes L. (Eds.), *Interacções na aula de Matemática*. Viseu: Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação. Secção de Educação Matemática.

Caldas, A. C. e Reis, A. (1999). Adaptação Bio-funcional do Cérebro ao Conhecimento da Leitura e da Escrita. 1º Prémio Pfizer de Investigação, 1999. *Jornal das Ciências Médicas*, 163, (p. 69-86).

Caldas, A. C. (2000). *A Herança de Franz Joseph Gall. O cérebro ao Serviço do Comportamento Humano*. Lisboa: McGraw-Hill

Cañal, P.; Lledó, A. I.; Pozuelos, F. J. e Trave, G. (1997). *Investigar en la escuela: elementos para una enseñanza alternativa*. Sevilla: Díada Editora S. L.

Canavarro, A. P. (2003). *Práticas de ensino da Matemática: Duas professoras, dois currículos*. (Tese apresentada para obtenção do grau de Doutor em Educação, Universidade de Lisboa). Lisboa: APM.

Canavarro, A. P. (2005). Matemática na Escola. Muro ou ponte? In Guimarães H. M. e Serrazina, L. (Ed.), *V CIBEM Conferências*, (p. 89-113). Porto: APM.

Cannone, G. e Socas, M. M. (1998). Jogos educativos ADI e ADIBÚ no ensino e aprendizagem das matemáticas em Educação Primária. *Seminário de Investigação em Educação Matemática*, IX, (p. 165-190). Lisboa: APM.

Caraça, B. J. (1989). *Conceitos Fundamentais da Matemática*. Livraria Sá da Costa Editora. e Gradiva, edições de 1951, 1984 e 1998.

Carneiro, R. (2003). *Fundamentos da Educação e da Aprendizagem. 21 Ensaios para o século 21*. (2ª edição). Vila Nova de Gaia: Fundação Manuel Leitão.

Carpenter, T. e Levi, L. (1999). "Developing Conceptions of Algebraic Reasoning in the Primary Grades". *Paper presented at the annual meeting of the American Educational Research Association*. Montreal.

Carreira, S. (1996). Metáforas conceptuais e construção de significados em problemas de aplicação matemática. *Seminário de Investigação em Educação Matemática VII*, (p. 173-196). Almada: APM.

Carreira, S. (1998). *Significado e aprendizagem da Matemática*. *Dos problemas de aplicação à produção de metáforas conceptuais*. Tese de Doutoramento. Universidade de Lisboa.

Carvalho, J. M.; Amaro, G.; Reis, P. e Neves, F. (1996). *Terceiro Estudo Internacional em Matemática e Ciências (TIMSS). Semelhanças num Contexto de Diferenças*. Lisboa: Instituto de Inovação Educacional. Ministério da Educação.

César, M. (1999). *Interacções Sociais e Apreensão de Conhecimentos Matemáticos: a investigação contextualizada*. Actas da Escola de Verão de Educação Matemática.

César, M. (2000). Interacções na aula de Matemática: Um percurso de 20 anos de investigação e reflexão. In Monteiro, C.; Tavares, F.; Almiro, J.; Ponte J.; Matos, J.,; Menezes, L. (Ed.), *Interacções na aula de Matemátic*a, (p. 13-34). Viseu: Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação Secção de Educação Matemática.

Chalouh, L. e Herscovics, N. (1988). Teaching algebraic expressions in a meaningful way. In Arthur, Coxford F. e Albert, Shulte P. (Eds.), *The Ideas of Algebra, k-12*. Yearbook 1988. N. C. T. M.

Charbonneau, L. (1996). From Euclid to Descartes: Álgebra and its Relation to Geometry. In Bednarz, N.; Kieran, C. e Lee, L. (Eds.), *Approaches algebra: perspectives for research and teaching*, (p. 15-37). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Christiansen, B. E Walther, G. (1986). Task and Activity. In B. Christiansen; A. G. Howson e M. Otte (Eds.), *Perspectives on Mathematics Education*, (p. 243-307). Dordrecht: D. Reidel Publishing Company.

Clements, D. H.; Battista, M. T.; Sarama, J. e Swaminathan, S. (1997). "Development of Students´Spatial Thinking in a Unit on Geometric Motions and Area". *Elementary School Journal 98*, nº 2, (p. 171-186).

Cobb, P. (1987). Information-processing Psichology and mathematics education – A Constructivist Perspective. *The Journal of Mathematical Behavior*, 6(1), (p. 4-40).

Cobb, P.; Wood, T. e Yackel, E. (1994). "Discourse, Mathematical Thinking, and Classroom Practice". *Contexts for learning: Sociocultural Dynamics in Children´s Development*. New York: Oxford University press.

Cockcroft, W. H. (1985). *Las matemáticas sí cuentan*. Madrid: Servicio de Publicaciones do MEC.

Collis, K. F. (1974). Cognitive development and mathematics learning. Comunicação apresentada no Workshop de Psicologia da Matemática. London: Chelsea College.

Costa, A. F. (1986). A pesquisa de terreno em sociologia. In Augusto S. Silva, J. Madureira Pinto, (Eds.), *Metodologia das Ciências Sociais*. Porto: Edições Afrontamento.

Coutinho, C. P. e Chaves, J. H. (2002). O ´estudo de caso´ na investigação em Tecnologia Educativa em Portugal. *Revista Portuguesa de Educação*, 15(1), (p. 21-243).

Coxford, A. F. e Shulte, A. P. (Eds). (1988). *The Ideas of Algebra, K-12*. National Council of Teachers of Mathematics. Yearbook.

Crosswhite, F. J. (1987). Cognitive Science and Mathematics Education: A mathematics Educator´s Perspective. In Schoenfeld A. (Ed.), *Cognitive Science and Mathematics Education*, (p. 265-277). London: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.

Cuampagne, A. B. (1992). Cognitive Research on Thinking in Academic Science and Mathematics: Implications for Pratice and Policy. In Diane F. Halpem. *Enhancing Thinking Skills in the Sciences and Mathematics*. Hillsdale. N.J.: Lawrence Erbaum Associates.

Cunha, H. (1998). Dilemas e dificuldades de professors de Matemática na realização de tarefas de investigação. In Vale, I. e Portela, J. (Eds.), *Seminário de Investigação em Educação Matemática*, IX, Actas de Guimarães, (p. 191-205). Lisboa: APM.

Cunha, J. A. (1987). *Princípios Matemáticos*. Departamento de Matemática da Faculdade de Ciencias e Tecnología da Universidade de Coimbra.

Cury, A. (1998). *Inteligência Multifocal. Análise da construção dos pensamentos e da formação dos pensadores*. S. Paulo: Editora Cultrix.

Dacal, G. (1989). *El diseño curricular en la educación*. Editorial Escuela Española, S. A.

Damásio, A. (2000). *O erro de Descartes: emoção, razão e o cérebro humano*. Lisboa: Publicações Europa-América, Lda.

Damásio, A. (2003). *Ao Encontro de Espinosa. As emoções sociais e a neurologia do Sentir.* Lisboa: Publicações Europa-América, Lda.

D´Ambrosio, U. (1985). *Sócio-cultural bases for Mathematics education*. Campinas: UNICAMP.

D´Ambrosio, U. (2005). Uma reflexão a partir dos modelos de desenvolvimento das Américas e seus reflexos na educação. In Henrique M. Guimarães e Lurdes Serrazina (Ed.), *V CIBEM Conferências*, (p. 9-18). Porto: APM.

David, M. M. e Lopes, M. (2002). Students-Teacher Interactions and the Development of Students´ Mathematical Thinking. In Simon, Goodchild and Lyn English (Eds.), *Researching Mathematics Classrooms A Critical Examination of Methodology*, 11-38. Westport, Connecticut and London: PRAEGER.

De Lange, J. (1987). *Mathematics, insight and meaning*. Utrecht: Freudenthal Institut.

De Lange, J. (1992). Critical factors for real changes in mathematics learning. In Leder, Gilah C. (Ed.), *Assessment and learning of mathematics*, (p. 305-329). Utrecht: ACER.

Demana, F. e Leitzel, J. (1988). Establishing fundamental concepts through numerical problem solving. In Arthur, Coxford F. e Albert, Shulte P. (Eds.), *The Ideas of Algebra, k-12*. Yearbook 1988. N. C. T. M.

Dickson, L.; Brown, M. e Gibson, O. (1984). *Children Learning Mathematics. A teacher´s guide to recent research*. Holt. Rinehart and Winston for the Schools Council.

Dörfler, W. (1991). Meaning: Image schemata and protocols. In F. Furinghetti (Ed.), *Proceedings of the Fifteenth International PME Conference*. Vol 1, (p. 17-32).
Doyle, W. e Carter, K. (1986). Academic Tasks in Classrooms. . In Martyn Hammersley. (Ed.), *Case Studies in Classroom Research,* (p. 133-155). Philadelphia: Open University Press.
Dreyfus, T. (1986). Advanced mathematical thinking processes. In Tall, D. (Ed.), *Advanced mathematical thinking*, (p. 25-41). Dordrecht: Kluwer.
Drijvers, P. (2003), *Learning algebra in a computer álgebra environment. Design research on the understanding of the concept of parameter*. Utrecht: FI.
Drijvers, P. (2001-2004). Learning algebra in a computer environment. In Drijvers, P. (Ed.), *Classroom-based research in Mathematics Education*, (p. 83-104). Utrecht: Freudenthal Institut.
Drijvers, P. (2004). Documentos internos do Freudenthal Institut e entrevistas pessoais solicitadas pela investigadora.
Duarte, J. (1993). *O computador na Educação Matemática: Percursos de Formação*. (Tese de mestrado). Lisboa: APM.
Dubinsky, E. e Leron, U. (1994). *Learning abstract algebra with ISETL*. New York: Springer-Verlag.
Dunham, P. e Dick, T. (1994). Research on Graphing Calculators. *Mathematics Teacher 87*, September, (p. 440-445).
Elliot, J. (1990). *La investigación-acción en educación*. Madrid: Morata.
English, L. e Warren, E. (1998). Introducing the variable through Pattern Exploration. *Mathematics Teacher*. February, (p. 166-170).
Erickson, F. (1986). Qualitative methods in research of teaching. In M. Wittrock. (Ed.), *Handboook of research on teaching*, (p. 119-161). New York: Macmillan.
Estrela, A. (1986). A investigação-acção. In Silva, A. S.; Madureira, J. P. (Eds.), *Metodologia das Ciências Sociais*. Porto: Edições Afrontamento.
Estrela, A. (1990). *Teoria e Prática de Observação de Classes. Uma Estratégia de Formação de Professores*. Lisboa: Instituto Nacional de Investigação Científica.
Falcão, J. (1997). Lenguaje algebraico. Un enfoque psicológico. *Uno*, 14, (p. 25-38).
Fernandes, D. (1991). Notas sobre os paradigmas da investigação em educação. *Noesis*, 18, (p. 64-66).
Fernandes, D. (1992). Resolução de problemas: investigação, ensino, avaliação e formação de professores. In Brown, M.; Fernandes, D.; Matos, J. F. e Ponte, J. P. (Eds.), *Educação Matemática. Colecção Temas de investigação*. Lisboa: Instituto de Inovação Educacional. Secção de Educação Matemática da Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação.
Fernandes, D. e Vale, I. (1993). Concepções e Práticas de Dois Jovens Professores Perante a Resolução de Problemas. In Fernandes, D.; Gertrudes, A. (Ed.), *Resolução de problemas: processos cognitivos, concepções de professores e desenvolvimento curricular*. Lisboa: Instituto de Inovação Educacional.
Fernandes, D. M. (1994). *Utilização da folha de cálculo no 4º ano de escolaridade. Estudo de uma Turma*. Tese de Mestrado em Educação. Braga: Universidade do Minho.
Fernandes, D. M. (1994). *Educação Matemática no 1º ciclo. Aspectos inovadores*. Porto: Porto Editora.
Fernandes, D. M. (2000). *Aprender matemática com a calculadora e a folha de cálculo*. Porto: Porto Editora.

Fernandes, D. M. ; Pedrosa, F.; Freitas, D. e Ferreira, H. e Carvalho, V. (2003). A prototype application for helping to teach how to read numbers. In Julie, J. e Constantine, S. (Eds.). *Human – Computer Interaction: Theory and Practice*. *10th International Conference*. Volume I. London: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.

Ferreira, H. (2003). A formação de Professores para a Educação Básica. *EduSer*, Nº 1, Outubro, (p. 65-81).

Fey, J. T, (Ed.) (1984). *Computing and Mathematics*. Reston, E.U.A.: NCTM.

Figueiredo, A. D. (2002). Redes de educação: a surpreendente riqueza de um conceito. In Manuel, M. e Maria Amélia M. (Eds.), *Redes de Aprendizagem, Redes de Conhecimento*. Lisboa. CNE. Ministério da Educação.

Fogarty, R. (1991). *The Mindful School: How to Integrate the Curricula*. Palatine III: Skylight Publishing.

Fraile, A. R. (1998). *El álgebra: del arte de la cosa a las estructuras abstractas*. Santillana: Ciência Hoy.

Freinet, C. (1969). *Para uma Escola do povo*. Lisboa: Editorial Presença.

Freire, P. (1975). *Pedagogia do oprimido*. (2ª edição). Porto: Afrontamento.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as na Educational Task*. Reidel: Dordrecht.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of mathematical Structures*. Reidel: Dordrecht.

Fullan, M. (2003). *Liderar numa cultura de mudança*. Edições ASA.

Gagné, R. M. (1977). *The conditions of learning*. (3ª edição). New York.

Gambôa, Rosário. (2004). *Educação, ética e democracia. A reconstrução da modernidade em John Dewey*. Porto: Edições ASA.

Gelman, R. e Gallistel, C. R. (1978). *The Child´s Understanding of Number*. Cambridge: Harvard University Press.

Godino, J. D. (2000). Significado y comprensión de los conceptos matemáticos. *Uno*, 25, (p. 77-87).

Goetz, J. P. e Lecompte, M. D. (1984). *Ethnography and Qualitative Design in Educational Research*. Orlando: Academic Press, Inc.

Gomez, G.; Flores, J.; Jimènez, E. (1996). *Metodologia de la Investigacion Cualitativa*, 378. Málaga: Ediciones Aljibe.

Gonçalves, M. J. (1996). Resolução de problemas de matemática no 1º ciclo do ensino básico: a estrutura aditiva. *Seminário de Investigação em Educação Matemática VII*, (p. 133-146). Almada: APM.

Goñi, J. M. (2000). La enseñanza de las matemáticas, aspectos sociológicos y pedagógicos. In Goñi, J. M. (Ed.), *El curriculum de matemáticas en los inícios del siglo XXI*. Barcelona: GRAÓ. Biblioteca de Uno.

Gravemeijer, K. (1990). Context Problems and Realist Mathematics Instruction. In K. Gravemeijer; M. Van den Heuvel; L. Streefland (Eds.), *Contexts Free productions Tests anda Geometry in Realistic Mathematics Education*. Utrecht: Researchgroup for Mathematical Education and Educational Compuer Center. OW&OC.

Gravemeijer, K. (1990). Realist Geometry Instruction. In K. Gravemeijer; M. Van den Heuvel; L. Streefland (Eds.), *Contexts Free productions Tests anda Geometry in Realistic Mathematics Education*. Utrecht: Researchgroup for Mathematical Education and Educational Compuer Center. OW&OC.

Gravemeijer, K. P. (1991). Na instruction-theoretical reflection on the use of manipulatives. In L. Streefland (Ed.), *Realist Mathematics Education in primary school. On the occasion of the opening of the Freudenthal Institute*. Utrecht: Center for Science and Mathematics Education (CD-β).

Gravemeijer, K. (1994). Educational development and development research in mathematics education. *Journal for Research in Mathematics Education, 25*(5), (p. 443-471).

Gravemeijer, K. (1994). *Developing Realistic Mathematics Education*. Utrecht University: Freudenthal Institut.

Gravemeijer, K.; Cobb, P.; Bowers, J. e Whitenack, J. (2000). Symbolizing, modeling e instructional design. In Paul Cobb, Erna Yackel e Kay, MacClain (Eds.), *Symbolizing anda communicating in Mathematics Classrooms. Perspectives on Discourse, Tools, and Instructional Design*, (p. 225-273). London: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.

Gravemeijer, K. (2004). Documentos internos do Freudenthal Institut (FI) e entrevistas concedidas à investigadora na Universidade de Utrecht, no FI.

Gray, E. e Tall, D. (1993). Success and failure in mathematics: The flexible meaning of symbols as process and concept. *Mathematics Teaching*, 142, (p. 6-10).

Greeno, J. (1987). Instructional Representations Based on Research about Understanding. In Alan. Schoenfeld (Ed.), *Cognitive Science and Mathematics Education*, (p. 61-88). London: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.

Greeno, J. e Hall, R. (1997). Practicing Representation: Learning with and about Representational Forms. *Phi Delta Kappan*. January, (p. 361-367).

Groves, S. (1994). *Calculators: A Learning Environment to promote Number Sense*. Paper present at the annual meeting of the American Educational Research Association. New Orleans.

GT "Matemática 2001". (1998). Matemática 2001. Diagnóstico e Recomendações para o Ensino e Aprendizagem da Matemática. In Abrantes, P. (Ed.), *Relatório preliminar – documento para discussão*. APM.

Guimarães, A. (1986). *Bloco Elementar I e II*. Documentos internos do Departamento de Matemática. Porto: Faculdade de Ciências da Universidade do Porto.

Guimarães, H. (1993). *Ensinar Matemática. Concepções e Práticas*. Lisboa: APM.

Hammersley, M. (1986). *Case Studies in Classroom Research.* Philadelphia: Open University Press.

Hansen, V. P. e Zweng, M. J. (1984). *Computers in Mathematics Education*. Reston, E.U.A.: NCTM.

Hargreaves, A. (1995). *Changing Teachers, Changing Times*. London: Cassel.

Hatano, G. e Inagaki, K. (1991). Sharing Cognition through Collective Comprehension Activity. In Lauren Resnick, John Levine e Stephanie Teasley (Eds.), *Perspectives on Socially Shared Cognition*, (p. 331-348). Washington, DC.: American Psychological Association.

Heath, S. B. (1986). Questioning at Home and at School: A Comparative Study. In Hammersley, Martyn. (Ed). *Case Studies in Classroom Research,* (p. 104-132). Philadelphia: Open University Press.

Heid, M. K. e Kunkle, D. (1986-88). Computer-generated Tables: Tools for Concept Development in Elementary Algebra. In Arthur, Coxford F. e Albert, Shulte P. (Eds.), *The Ideas of Algebra, k-12*. Yearbook 1988. N. C. T. M.

Heid, M. K. (1996). A technology-intensive functional approach to the emergence of algebraic thinking. In Bednarz, N.; Kieran, C. e Lee, L. (Eds.), *Approaches to algebra: perspectives for research and teaching*, (p. 239-255). Mathematics Education Library. Dordrecht/Bóston/London: Kluwer Academic Publishers.

Henderson, A. (1987). From the Teacher´s of the Desk. In Alan. Schoenfeld (Ed.), *Cognitive Science and Mathematics Education*, (p. 149-164). London: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.

Hogben, L. (1941). *La matemática en la vida del Hombre*. (2 volumes). Barcelona: Ibéria.

Hogben, L. (1970). *Maravilhas da Matemática: influência em função da Matemática nos conhecimentos humanos*. Porto Alegre: Editora Globo.

Janvier, C. (1996). Modeling and the initiation into algebra. In Bednarz, N.; Kieran, C. e Lee, L. (Eds.), *Approaches to algebra: perspectives for research and teaching*, (p. 225-236). Mathematics Education Library. Dordrecht/Bóston/ London: Kluwer Academic Publishers.

Jaworski, B. (1994). *Investigating Mathematics Teaching: A Constructivist Enquiry*. London e New York: RoutledgeFalmer.

Jensen, R. J. e Williams, B. (1993). Technology: Implications for Middle Grades Mathematics. In Douglas, T. Owens (Ed.), *Research ideas for the Classroom. Middle Grades Mathematics*. NCTM. Research Interpretation Project. New York: Macmillan Publishing Company.

Kaput, J. (1988). Transforming Álgebra from na Engine of Inequity to an Engine of Mathematics Power by "Algebrafying" the K-12 Curriculum. In *the Nature and Role of Algebra in the K-14 Curriculum: Proceedings of National Symposium*, May, (p. 27-28). Washington D.C.

Katz, V. J. (1993). *A History of Mathematics. An Introduction*. HarperCollins-College Publishers.

Keijzer, R. (2001-2004). Teaching formal mathematics in primary school. In Paul, D. (Ed.), *Classroom-based research in Mathematics Education*, (p. 25-34). Utrecht: Freudenthal Institut.

Kemmis, B e Mactaggart, R. (1988). *Como Planificar la Investigación-Acción*. Barcelona: Editorial Laertes.

Kemmis, S. (1988). Action research. In J. P. Keeves (Ed.), *Educational Research Methodology and Measurement: An International Handbook*, (p. 42-49). Oxford: Pergamon Press.

Kenney, P. e Kouba, V. (1997). What Do Students Know about Measurement?" In Patrícia Ann Kenney e Edward Silver (Eds.), *Results from the Sixth Mathematics Assessment of the National Assesssment of Educational*, (p. 141-163). Reston, Va.: NCTM.

Kieran, C. (1981). Concepts Associated with the Equality Symbol. *Educational Studies in Mathematics 12*, August, (p. 317-326).

Kieran, C. (1988). Two different approaches among algebra learners. In Arthur, Coxford F. e Albert, Shulte P. (Eds.), *The Ideas of Algebra, k-12*. Yearbook 1988. N.C.T.M.

Kieran, C. (1992). The Learning and Teaching of School Algebra. In Douglas, A. Grows (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. New York: Macmillan Publishing Company.

Kieran, C.; Chalouh, L. (1993). Prealgebra: the transition from arithmetic to algebra. In Douglas, T. Owens (Ed.), *Research ideas for the Classroom. Middle Grades Mathematics*. NCTM. Research Interpretation Project. New York: Macmillan Publishing Company.

Kieran, C. ; Boileau, A. e Garançon, M. (1996). Introducing algebra by means of a technology-supported, functional approach. In Bednarz, Nadine; Kieran, Carolyn e Lee, Lesley (Eds.), *Approaches algebra: perspectives for research and teaching*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Kilpatrick, J. (1987). Problem Formulating: Where Do Good Problems Come From? In Alain Schoenfeld (Ed.), *Cognitive Science and Mathematics Education*, (p. 123-147). Hillsdale, New Jersey, London: Lawrence Erlbaum Associates.

Kindt, M. (2004). *Positive Algebra. A collection of produtive exercises*. Utrecht: Freudenthal Institut.

Kindt, M. (2004). Documentos internos do Freudenthal Institut (FI) e entrevistas pessoais concedidas à investigadora, na Universidade de Utrecht no FI.

Kissane, B. (1988). Mathematical Investigations: description, rationale and example. *The Mathematics Teacher*, 81, (p. 520-528).

Krutetskii, V. A. (1976). *The Psychology of Mathematical Abilities in School-children*. Chicago: University of Chicago Press.

Kücheman, D. (1978). Children´s Understanding of Numerical Variables. *Mathematics in the School 7*, nº 4, (p. 23-26).

Kücheman, D. (1981). Álgebra. In K. Hart (Ed.), *Children´s understanding of mathematics*: (p. 11-16; p. 102-119). London: John Murray.

Lampert, M. (1990). When the Problem Is Not the Question and the Solution Is Not the Answer: Mathematical Knowing and Teaching. *American Educational Research Journal* 27, nº 1, (p. 29-63).

Landsheere, G. (1986). *A investigação experimental em Pedagogia*. Lisboa: Publicações Dom Quixote.

Lave, J. (1988-1997). *Cognition in Practice. Mind, mathematics and culture in everyday life*.Cambridge: Cambridge University Press.

Lave, J. e Wenger, E. (1991-2002). *Situated learning. Legitimate peripheral participation*. Cambridge: Cambridge Press University.

Lee, L. (1996). An Initiation algebraic culture through generalization activities. In Bednarz, N.; Kieran, C. e Lee, L. (Eds.), *Approaches to algebra: perspectives for research and teaching*, (p. 87-111). Mathematics Education Library. Dordrecht/Bóston/London: Kluwer Academic Publishers.

Leinhardt, G. Zaslavsky, O. e Stein, M. K. (1990). Functions, Graphs and Graphing: Tasks, Learning and Teaching. *Review of Educational Research 60*, nº 1, (p.1-64).

Le Pape, G. e Puzenat, N. (2000). *ABCedário do Cérebro*. Paris: Edição Portuguesa da Reborn.

Lerman, S. (1989). Investigations. Where to Know? In P. Ernest (Ed.), *Mathematics Teaching: The State of the Art,* (p. 73-80). London: Farmer Press.

Lesh, R. (1981). Applied Mathematical Problem Solving. *Educational Studies in Mathematics*, 2(12), (p. 235-264).

Lessard-Hébert, M.; Goyette, G. e Boutin, G. (1994). *Investigação qualitativa: fundamentos e práticas*. Lisboa: Instituto Piaget.

Lester, F. K. (1993). O que aconteceu à Investigação em Resolução de Problemas de Matemática? A situação nos Estados Unidos. In Domingos F.; António B. E Gertrudes A. (Ed.), *Resolução de problemas: processos cognitivos, concepções de professores e desenvolvimento curricular*. Lisboa: Instituto de Inovação Educacional.

Liben, L. e Downs, R. (1989). Understanding Maps as Symbols: The Dvelopment of Map Concepts in Children. In Hayne Reese (Ed.), *Advances in Child Development and Behavior*. vol 22, (p. 145-201). San Diego, Calif.: Academic Press.

Lima, E. L. (2003). O Ensino Médio da Matemática. *Gazeta da Matemática*, nº 144.

Lindquist, M. M., e Kouba, V. (1989). "Measurement". In Mary M. Lindquist (Ed.), *Results from the Fourth Mathematics Assessment of the National Assesssment of Educational*, (p. 35-43). Reston, Va.: NCTM.

Lloyd, G. M. e Wilson, M. (1998). Supporting Innovation: the impact of teacher´s conceptions of functions on his implementation of a reform curriculum. *Journal for Research in Mathematics Education*, Vol 29, Nº3, (p. 248-274).

Ludke, Menga e André, Marli E. D. A. (1986). *Pesquisa em Educação: Abordagens Qualitativas*. Lisboa: Editora Pedagógica e Universitária Ltda.

Macias, E. R. (1983). *Didáctica de las matemáticas*. Ministério de Educación y Ciência. Madrid: ANAYA, S. A.

MacKinnon, R. S. (January, 1996). *Atlantic Canada Mathematics Curriculum, Grades 4-6*. Nova Scotta. Education anda Culture. English Program Services

Mahoney, M. S. (1972). Babylonian algebra: Form vs. content, *Studies in History and Philosophy os Science*, 1, (p. 369-380).

Ma, L. (1999). *Knowing and Teaching Elementary Mathematics: Teacher´s Understanding of Fundamental Mathematics in China and the United States*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Mandelbrot, B. (1998). *Objectos fractais*. (2ª edição). Ciência Aberta. Gradiva.

Maren, J. M. (1996). *Méthodes de Recherche pour l´education*. Paris: De Boeck Université.

Maren, J. M. (1996). *Méthodes de Recherche pour L´Éducation. Méthodes en Sciences Humaines*. (2ª edition). Paris, Bruxelles: De Boeck Université.

Martínez, E. C. (2005). Configuraciones pontuales. Sistema de representación idóneo para las sucesiones de números naturales. In Henrique M. Guimarães e Lurdes Serrazina (Ed.), *V CIBEM Conferências*, (p. 251-264). Porto: APM.

Mason, J. (1996). Expressing generality and roots of álgebra. In Bednarz, Nadine; Kieran, Carolyn e Lee, Lesley (Eds.), *Approaches algebra: perspectives for research and teaching*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Mathematics in Context. (1998). *Teacher Resource and Implementation Guide*. Britannica Mathematics System. National Science Fundation.

Matos, J. F. (1987-88). *A Natureza do Ambiente de Aprendizagem com a utilização da linguagem LOGO no ensino primário e as suas implicações na construção do conceito de variável*. Projecto MINERVA. Departamento de Educação da Faculdade de Ciências.

Matos, J. F. (1991). *Logo na Educação Matemática: um estudo sobre as concepções e atitudes dos estudantes*. (Tese de Doutoramento). Lisboa: Projecto MINERVA. Departamento de Educação da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa.

Matos, J. F. (1992). Atitudes e Concepções dos Alunos: Definições e problemas de Investigação. In M. Brown, D. Fernandes, J. F. Matos e J. P. Ponte (Eds.), *Educação Matemática. Colecção Temas de investigação*. Lisboa: Instituto de Inovação Educacional. Secção de Educação Matemática da Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação.

Matos, J. F. (1995). As Calculadoras e as Actividades Investigativas na Aprendizagem da Matemática. *Noesis*, 34, (p. 1-66). Lisboa: Instituto de Inovação Educacional.

Matos, J. e Serrazina, L. (1996). *Didáctica da Matemática*. Lisboa: Universidade Aberta.

Matos, J. F. e Carreira, S. P. (1996). *Modelação e Aplicações no Ensino da Matemática. Situações e Problemas*. Lisboa: Instituto de Inovação Educacional. Ministério da Educação.

Matos, J. F. e Carreira, S. P. (1996). *Modelação e Aplicações no Ensino da Matemática: situações e problemas*. Instituto de Inovação Educacional.

Matos, J. M. (2005). Matemática e a ordenação do real e do transcendente. Episódios da culura portuguesa. In Guimarães, H. M. e Serrazina L. (Ed.), *V CIBEM Conferências*, (p. 251-264). Porto: APM.

Maxim, B. R. e Verhey, R. F. (1988). Using Spreadsheets in Algebra Instruction. In Arthur, Coxford F. e Albert, Shulte P. (Eds.), *The Ideas of Algebra, k-12*. Yearbook 1988. N. C. T. M.

Mehan, H. (1986). What time is it Denise?: Asking Known Information Questions in Classroom Discourse. In Martyn Hammersley. (Ed.), *Case Studies in Classroom Research* (p. 85-103). Philadelphia: Open University Press.

Meira, L. (2000). Lo real, lo cotidiano y el contexto en la enseñanza de las matemáticas. *Uno*, 25, (p. 59-74).

Meissner, H. (1989). Cognitive Conflicts in Mathematics Learning. *European Journal of Psychology of Education*, 1(2).

Mendes, E. (1998). Características e potencialidades educativas das actividades de investigação. *Seminário de Investigação em Educação Matemática*, IX, (p. 135-164). Lisboa: APM.

Merriam, S. B. (1991). *Case study research in education: A qualitative approach* (2ª edição). São Francisco: Jossey-Bass Publishers.

Merriam, S. B. (1998). *Qualitative Research and Case Study Applications in Education*. San Francisco: Jossey Bass Publishers.

Mertens, D. (1998). *Research Methods in Education and Psychology: Integrating Diversity with Quantitatve e Qualitative Approaches*. London: SAGE Publications.

Mewborn, D. (1999). Reflective Thinking Among Preservice Elementary Mathematics Teachers. *Journal for Research in Mathematics Education*. Vol. 30, Nº3, (p. 316-341).

Meyer, M. R. (1999). Multiple Strategies = Multiple Challenges. *Mathematics Teaching in the Middle School*. Vol. 4, Nº 8, (p. 519-523).

Meyer, M. R. e Ludwig, M. A. (1999). Teaching Mathematics with Mic. An Opportunity for Change. Innovations in curriculum. *Mathematics Teaching in the Middle School*. Vol. 4, Nº 4, (p. 264-269).

Mialaret, J. (1975). *A aprendizagem da Matemática*. Coimbra: Livraria Almeida.

Miguéns, M. I. (2002). Comunicação no Seminário. In Manuel, M. e Maria Amélia M. (Eds.), *Redes de Aprendizagem, Redes de Conhecimento*. Lisboa. CNE. Ministério da Educação.

Ministério da Educação. (1990). *Programa de Matemática do 1ºciclo do ensino básico*. Lisboa: ME. Direcção Geral do Ensino Básico e Secundário.

Ministério da Educação (1991). *Programa de Matemática e Métodos Quantitativos. Ensino Secundário*. Lisboa: Ministério da Educação.

Ministério da Educação.(1991). *Objectivos Gerais de Ciclo*. Direcção Geral do Ensino Básico e Secundário.

Ministério da Educação.(1991). *Programa Matemática. Plano de Organização do Ensino-Aprendizagem. Volume II. Ensino Básico 2º Ciclo.* Direcção Geral dos Ensinos Básico e Secundário.

Ministério da Educação.(1991). *Programa Matemática. Plano de Organização do Ensino-Aprendizagem. Volume II. Ensino Básico 3º Ciclo.* Direcção Geral dos Ensinos Básico e Secundário.

Ministério da Educação (1999). *Ensino Básico. Competências Gerais e Transversais*. Lisboa: Departamento da Educação Básica.

Ministério da Educação (2001). *Currículo Nacional do Ensino Básico. Competências Essenciais*. Lisboa: Departamento da Educação Básica.

Ministério da Educação (2004). *Resultados do Estudo Internacional PISA 2003*. Programme for International Student Assessment. Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Económico. Primeiro Relatório Nacional. GAVE.

Montagne-Smith, A. (1998). *Mathematics in Nursery Education*. London: David Fulton Publishers.

Moor, E. (1991). Geometry instruction in Netherlands (ages 4-14) – the realistic approach. In L. Streefland (Ed.), *Realist Mathematics Education in primary school. On the occasion of the opening of the Freudenthal Institut*. Utrecht: Center for Science and Mathematics Education (CD-β).

Morais, C. (2000). *Complexidade e Comunicação Mediada por Computador na Aprendizagem de Conceitos Matemáticos. Um Estudo no 3º Ciclo do Ensino Básico*. Tese de Doutoramento em Educação. Braga: Universidade do Minho.

Morais, C.; Almeida, C. E Dias, P. (2000). Interacção e aprendizagem de conceitos numéricos complexos. In Monteiro C.; Tavares, F.; Almiro, J., Pedro, J. P.; Matos, J. M. e Menezes, L. (Eds.), *Interacções na aula de Matemática*. Viseu: Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação. Secção de Educação Matemática.

Morais, C. (2003). Aprendizagem de Conceitos Matemáticos Complexos em Ambientes com Comunicação Suportada pela Internet. In Alves, J. M. (Ed.), *EduSer*, nº 1, Outubro, (p. 13-33).

Morgado, J. (1970-2001). *Documentos internos* da Faculdade de Ciências da Universidade do Porto. Departamento de Matemática.

Morgado, J. (2001). Importância da observação em Matemática. *Gazeta da Matemática*, 141, (p. 24-29).

Morgan, C. (1998). Assessment in Mathematics Education: a Critical Social Research Perspective. In Novo, A.; Amaral, A.; Carvalho, C.; Vale, I.; Portela, J. e Pimentel, T. (Eds.), *IX SIEM*, Guimarães: APM, Actas, (p. 5-23).

Moreira, M. L. (1989). *A Folha de Cálculo na Educação Matemática*. Tese de Mestrado. Lisboa: Projecto MINERVA. Departamento de Educação. Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa.

Moschkovich, J.; Shoenfeld, A. H. e Arcavi, A. (1993). Aspects of Understanding: On Multiple Perspectives and Representations of Linear Relations and Connections among them. In Thomas A. Romberg; Elizabeth Fennema and Thomas P. Carpenter (Eds.), *Integrating Research on the Graphical Representation of Functions*. Hillsdale, N. J.: Lawrence Erlbaum Associates.

Moura, A. R. e Sousa, M. C. (2003). *Lógico-histórico da álgebra: actividade formadora de professores*. Faculdade de Educação – UNICAMP –BRASIL. Documento Interno.

Moura, A. R. e Sousa, M. C. (2003). *O Lógico-histórico da álgebra não simbólica e da álgebra simbólica: dois modos de ver.* Faculdade de Educação – UNICAMP – BRASIL Documento Interno.

Mourão, A. P. (1998). Imagens mentais na aprendizagem matemática. *Seminário de Investigação em Educação Matemática*, IX, (p. 83-102). Guimarães: APM.

Myers, M. D. (1997). Qualitative Research in Information Systems. *MIS Quarterly*, 21(2), (p. 241-242).

Munari, B. (1968). *Design e comunicação visual*. Arte e comunicação. Edições 70.

Murray, B. (2000). From Brain Scan to Lesson Plan. *Monitor on Psychology*. Vol. 31 e Nº 3, (p. 15-23).

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). (1957). *Insights into modern mathematics*. Twenty-third year book. Washington: D. C.

National Council of Teachers of Mathematics. (1989). *Curriculum and Evaluation Standars for School Mathematics*. Reston, Va: NCTM.

National Council of Teachers of Mathematics. (1991). *Normas para o currículo e a avaliação em Matemática escolar*. Lisboa: APM e IIE (tradução portuguesa de *Curriculum and evaluation standards for school mathematics*, 1989).

National Council of Teachers of Mathematics. (1995). *Assessment Standards for School Mathematics*. Reston, Va.: National Council of Teachers of Mathematics.

National Council of Teachers of Mathematics. (1996). *International Handbook of Mathematics Education*. Part two. Kluwer Academic Publishers.

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. NCTM.

National Council of Teachers of Mathematics. (2001). *Navigating through Algebra: Prekindergarten-Grade 2*. Reston, Va: NCTM.

National Council of Teachers of Mathematics. (2001). *Normas para o Currículo e a Avaliação em Matemática Escolar*. Colecção de Adendas. Anos de Escolaridade 5-8. Lisboa: APM.

National Council of Teachers of Mathematics. (2001). *Navigating through Algebra: in Grades 3-5*. Reston, Va: NCTM.

Nelson, D.; Joseph, G. e Williams, J. (1993). *Multicultural Mathematics. Teaching Mathematics from a Global Perspective*. Oxford, New York: Oxford University Press.

Nemirovsky, R. (1996). A functional approach to algebra: two ssues tha emerge. In Bednarz, N., Kieran, C. e Lee, L. (Eds.), *Approaches algebra: perspectives for research and teaching*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Nemirovsky, R. (1996). Mathematical narratives, modeling, and algebra. In Bednarz, N., Kieran, C. e Lee, L. (Eds.), *Approaches to algebra: perspectives for research and teaching*, (p. 197-220). Mathematics Education Library. Dordrecht/Bóston/ London: Kluwer Academic Publishers.

Niss, M. (1989). Aims and Scope of Applications and Modelling in Mathematics Curricula. In W. Blum, J. Berry, R. Biehler et al (Eds.), *Applications and Modelling in Learning and Teaching Mathematics*. Chichester: Ellis Horwood.

Niss, M. (1994). Mathematics in society. In Rolf, Biehler; Roland W. Scholz; Rudolf, Strässer e Bernard, Winkelmann (Eds.), *Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline*, (p. 367-378). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Niss, M. (1996). Goals of mathematics teaching. In A Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick e C. Laborde (Ed.), *International handbook of mathematics education*, (p. 11-47). Dordrecht: Kluwer.

Noss, R. (1994). Mathematics and ideology. In Rolf, Biehler; Roland W. Scholz; Rudolf, Strässer e Bernard, Winkelmann (Eds.), *Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline*, (p. 431-441). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Novak, J., e Goewin, D. (1993). *Learning How to Learn*. Cambridge: University Press.

Novak, J. (2000). *Aprender, criar e utilizar o conhecimento. Mapas conceptuais como Ferramentas de facilitação nas Escolas e Empresas*. Plátano.

Nóvoa, A. e Campos B. (1991). *Ciências da Educação e Mudanças*. Porto: Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação.

Nunes, P. (1567). *Álgebra*.

Nunes, T. (Ed.) (1993). *Street mathematics and school mathematics*. Cambridge: University Press.

Ogden, C. K. e Richard, R. A. (1923). *The meaning of meaning*. London: Routledge and Kegan.

Ortega, S. (2001). Enfoque del álgebra desde la teoria de la información. *Revista de Didáctica de las matemáticas*, nº 26, (p. 97-110).

Orton, A. (1987). *Learning Mathematics. Issues, Theory and Classroom Practice*. Philadelphia: Cassell.

Palagana, I. C., Galuch, M. T. e Sforni, M. S. F. (2002). Acerca da relação entre ensino, aprendizagem e desenvolvimento. *Revista Portuguesa de Educação* 15(1), (p. 111-128). Instituto de Educação e Psicologia. Universidade do Minho.

Palhares, P. (1992). *The Introduction of Problem Solving trategy as a mean to teach mental arithmetic*. Tese de Mestrado. Universidade de Londres. Lisboa: APM.

Paradis, J e Malet, A. (1989). *La génesis del Álgebra Simbólica. En àlgebra en el período renacentista. La recuperación de los clásicos griegos*. Vol II. Barcelona: Promociones e Publicaciones Universitaris, S. A.

Parlett, M. e Hamilton, D. (1976). Evaluation as illumination: A new approach to the study of innovative programmmes. In Glass, G. (Ed.). *Evaluation Studies Review Annual,* 1, (p. 450-466).

Patton, M. Q. (1990). *Qualitative Evaluation Methods*. Sage Publications: Newbury Park.

Pea, R. D. (1987). Cognitive Tchnologies for Mathematics Education. In Alan H. Schoenfeld (Ed.), *Cognitive Science and Mathematics Education*, (p. 89-122). Hillsdale, New Jersey, London: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.

Pedrosa, M H. (2000). A comunicação na sala de aula: as perguntas como elementos estruturadores da interacção didáctica. In Monteiro, C.; Tavares, F.; Almiro, J.; Ponte, J. P.; Matos, J. M. e Menezes, L. (Eds.), *Interacções na aula de Matemática*. Viseu: Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação. Secção de Educação Matemática.

Pérez, R. (1997). Lenguajes algebraicos. *Uno* 14, (p. 5-6).

Perret-Clermont, A.; Brun, J.; Saada, E. E Schubauer-Leoni, M. (1984). Learning: a social actualization anda reconstruction of Knowledge. In H. Tajfel (Ed.), *The Social Dimension*. Vol 1. Cambridge: Cambridge University Press.

Philipp, R. A. (1992). The many uses of algebraic variables. *Mathematics Teacher*, 85(7), (p. 557-561).

Piaget, J. (1965). *The child´s conception of the world*. Totowa, NJ: Littlefield, Adams e Co.

Piaget, J. e Inhelder B. (1975). *Gênese das estruturas lógicas elementares*. (2ª edição). Rio de Janeiro: Zahar Editores/MEC.

Piaget, J. (1975). *A construção do Real na Criança*. (2ª edição). Rio de Janeiro: Zahar Editores/MEC.

Piaget, J. (1975). *A formação do símbolo na Criança*. (2ª edição). Rio de Janeiro: Zahar Editores/MEC.

Piaget, J. ; Choquet, G.; Dieudonné, J.; Thom R. y otros. (1983). *La enseñanza de las matemáticas modernas*. Alianza Editorial, S. A.

Pierce, Ch. S. (1965). *Obra lógico-semiótica*. Madrid: Taurus, 1987.

Pimm, D. (1990). *El lenguaje matemático en el aula*. Madrid: M.E.C.- Morata.

Pires, C. M. (2005). Educação Matemática na educação básica: uma análise das experiências brasileiras. In Henrique M. Guimarães e Lurdes Serrazina, *V CIBEM Conferências*, (p. 21-35). Porto: APM.

Pires, M. (2002). A diversificação de tarefas em matemática no ensino secundário: Um projecto de reflexão acção. GTI. *Reflectir e investigar sobre a prática profissional*. (p. 125-154).

Pires, M. C. V. (1995). *Os conceitos de perímetro e área em estudantes do 6º ano: concepções e processos de resolução de problemas*. Bragança: APM.

Polya, G. (1968). *A arte de resolver problemas*. Editora Interciência.

Pollak, H. O. (1987). Cognitive Science anda Mathematics Education: A Mathematician´s Perspective. In Alan. Schoenfeld (Ed.), *Cognitive Science and Mathematics Education*, (p. 253-264). London: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.

Pombo, O.; Guimarães, H. e Levy, T. (1993). *A interdisciplinaridade – Reflexão e Experiência*. Lisboa: Texto Editora.

Ponte, J P. (1986). *O computador – Um Instrumento de Educação*. Lisboa: Texto Editora.

Ponte, J. P.(1987). *O Computador e o Trabalho de Projecto*. Lisboa: Projecto MINERVA DEFCUL.

Ponte, J. P. (1988). Matemática, insucesso e mudança: Problema possível, impossível ou indeterminado? In *Revista Aprender*, 6, (p. 20-23).

Ponte, J. P.; Nunes, F. e Veloso, E. (1991). *Computadores no Ensino da Matemática. Uma colecção de estudos de caso*. Lisboa: A.P.M. e Projecto MINERVA. DEFCUL.

Ponte, J. P. (1997). *As Tecnologias e a Educação*. Educação Hoje. Texto Editora.

Ponte, J P.; Boavida, A; Graça, M e Abrantes, P. (1997). *Didáctica da matemática: matemática - ensino secundário*. Lisboa: Ministério da Educação. Departamento do Ensino Secundário.

Ponte, J. P.; Matos, J. M. e Abrantes, P. (1999). *Investigação em Educação Matemática. Implicações curriculares*. Lisboa: Instituto de Inovação Educacional.

Ponte, J. P. (2000). Tecnologias de informação e comunicação na educação e na formação de professores: Que desafios? *Revista Ibero-Americana de Educação*, 24, p. (p. 63-90).

Ponte, J. P. (2002). Investigar a nossa própria prática. *Reflectir e Investigar sobre a Prática Profissional*. Grupo de Trabalho sobre Investigação. APM.

Posner, M. I. e Raichle, M. E. (2001). *Imagens da Mente*. Porto: Porto Editora.

Post, T. R., Behr, Merlyn J. e Lesh R. (1985). Proportionality and the Development of prealgebra understandings. In Arthur, Coxford F. e Albert, Shulte P. (Eds.), *The Ideas of Algebra, k-12*. Yearbook 1988. N. C. T. M.

Praia, M. (1999). *Educação para a cidadania. Teoria e Práticas*. Porto: Cadernos Correio Pedagógico. ASA.

Price, G. (1997). Quantitative Literacy across the Curriculum. Lynn Arthur Steen (Ed.). In *Why Numbers Count: Quantitative Litaeracy for Tomorrow´s America*, (p. 155-160). New York: College Entrance Examination Board.

Punch, K. (1998). *Introduction to Social Research: Quantitative e Qualitative Approaches*. London: SAGE Publications.

Qin, Y.; Cárter, C.; Silk, E. M.; Stenger, V. A.; Fissel, K.; Goode, A. e Anderson, J. (2004). *PNAS (Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America),* nº 15, vol. 101, (p. 5686-5691).

Quivy, R.e Campenhoudt, L.. (1998). *Manual de Investigação em Ciências Sociais*. Trajectos. Lisboa: Gradiva.

Radford, L. (1996). The roles of geometry and arithmetic in the development of álgebra: historical remarks from a didactic perspective. In Bednarz, N., Kieran, C. e Lee, L. (Eds.), *Approaches to algebra: perspectives for research and teaching*, (p. 39-53). Mathematics Education Library. Dordrecht/Bóston/London: Kluwer Academic Publishers.

Radice, L. L. (1971). *A Matemática de Pitágoras a Newton*. Biblioteca Básica da Ciência. Porto: Edições 70.

Ralha, M. E. (1992). *Didáctica da Matemática. Perspectivas Gerais sobre Educação Matemática*. (Volume 1). Lisboa: Universidade Aberta.

Ramalho, G. (1996). Como os professores lidam com os erros dos estudantes. In Ramalho, G; Silva, A. C.; Oliveira I. (Eds.), *Seminário de Investigação em Educação Matemática VII*, (p. 89-115). Almada: APM.

Ramalho, G. (2002). *PISA 2000 – conceitos fundamentais em jogo na avaliação de literacia Matemática e competências dos alunos portugueses*. Lisboa: Ministério da Educação. Gabinete de Avaliação Educacional.

Razel, M. e Eylon, B. (1991). Developong Mathematics Readiness in Young Children with the Agem Program. Paper presented at the Fifteenth Conference of the international Group for Psychology of Mathematics Education. Genoa, Italy.

Reeuwijk, M.. (1995). *Early School Algebra a Dutch perspective*. Freudenthal Instiute (documeno interno). Utrecht: University.

Reeuwijk, M. (2003). *Álgebra in Mathematics in Context*. Utrecht: University. Documento interno do Freudenthal Institut (FI).

Reeuwijk, M. (2004). *School álgebra struggle, what about álgebra computer games?* (documento interno) Utrecht University: Netherlands.

Reeves, A. (2000). The Chicken Problem. In Hamp Sherard (Ed.), *Mathematics Teaching in the Middle School*, vol 5, nº 6, February, (p. 398-401).

Resnick, L.B. (1982). Syntax and semantics in learning to subtract. In T. P. Carpenter, Moser e T. Roserberg (Eds.), *Addition and Subtraction: a cognitive perspective*, (p. 136-155). New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers Hilldale.
Resnick, L. B. (1987a). *Education and learning to think*. Washington, D. C.: National Academy Press.
Resnick, L. B. (1987b). Learning in school and out. *Education Researcher*, 16, (p. 13-20).
Reynolds, A. e Wheatley, G. H. (1992). The elaboration of images in the process of mathematics meaning making. In W. Geeslin e K. Graham (Eds.), *Proceedings of the Sixteenth International PME Conference*, Vol 2, (p. 242-249).
Rist, R. C. (1982). On the application of ethnografic inquiry to Education: procedures and possibilities. *Journal of Research in Science Teaching,* 19 (6), (p. 439-450).
Robayna, M. M. S. e Medina, M. M. P. (1997). Las fuentes de significado, los sistemas de representación y errores en el Algebra Escolar. *Uno* 14, (p. 7-22).
Rocha, A. (2002). Os estudantes de matemática e o trabalho investigativo. *Reflectir e Investigar sobre a prática profissional*. Grupo de Trabalho sobre Investigação. APM.
Rodrigues, M. (1998). A construção de significado na aprendizagem da Matemática. In Vale, I. e Portela, J. (Eds.), *Seminário de Investigação em Educação Matemática, IX*, Actas de Guimarães, (p. 247-261). Lisboa: APM.
Rogers, C. (1985). *Tornar-se Pessoa*. (7ª edição). Lisboa: Moraes Editores.
Rogoff, B. e Wertsch, J. V. (1984). *Children´s Learning in the Zone of Proximal Development*. San Francisco: Jossey-Bass.
Rojano, T. (1996). The role of problems and problem solving in the development of álgebra. In Bednarz, N., Kieran, C. e Lee, L. (Eds.), *Approaches to algebra: perspectives for research and teaching*, (p. 55-62). Mathematics Education Library. Dordrecht/Bóston/London: Kluwer Academic Publishers.
Rojano, T. (1996). Developing algebraic aspects of problem solving within a spreadsheet environment. In Bednarz, N., Kieran, C. e Lee, L. (Eds.), *Approaches to algebra: perspectives for research and teaching*, (p. 137-149). Mathematics Education Library. Dordrecht/Bóston/London: Kluwer Academic Publishers.
Rojano, T. (1996). The role of problems and problem solving in the development of álgebra. In Bednarz, N., Kieran, C. e Lee, L. (Eds.), *Approaches algebra: perspectives for research and teaching*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
Roldão, M. C. (1998). O que está a mudar no currículo. *Noesis*, (p. 14-15).
Roldão, M. C. (1999). *Gestão curricular. Fundamentos e Práticas*. Lisboa: Ministério da Educação. Departamento de Educação Básica.
Roldão, M. C. (1999). Currículo e cidadania. *Inovação*, 12, (p. 9-26).
Romão, M. M. (1998). *O papel da comunicação na aprendizagem da Matemática: um estudo realizado com quatro professores no contexto das aulas de apoio de Matemática*. Lisboa: APM.
Romão, M. (2000). O papel da comunicação na aprendizagem da Matemática. In Cecília Monteiro, Fernanda Tavares, João Almiro, João Pedro da Ponte, José Manuel Matos e Luís Menezes (Eds.), *Interacções na aula de Matemática*. Viseu: Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação. Secção de Educação Matemática.
Rutherford, F. James e Ahlgren, Andrew. (1990). *Science for All Americans*. New York: Oxford University Press.

Santos dos Santos, J. (1998). Experimentalidade na matemática – Uma abordagem. In Isabel, V. José P. (Eds.), *Seminário de Investigação em Matemática*, IX, Actas, (p. 241-261). Lisboa: APM.
Santos, I. M. e Ferreira, M. L. (1995). *A folha de cálculo na sala de aula de Matemática*. GEP Educação.
Santos, E. (1998). As relações entre as percepções, conhecimentos, e práticas da utilização do computador em sala de aula. *Seminário de Investigação em Educação Matemática IX,* (p. 121-134). Guimarães: APM.
Santos, M. P. (1996). A aprendizagem escolar da Matemática através da apropriação escolar dos artefactos matemáticos. *Seminário de Investigação em Educação Matemática VII,* (p. 25-45). Almada: APM.
Scarth, J. e Hammersley, M. (1986). Some problems in Assessing the Closedness of Classroom Tasks. In Hammersley, Martyn. (Ed.), *Case Studies in Classroom Research,* 70-84. Philadelphia: Open University Press.
Schifter, D. (1999). Reasoning about Operations: Early Algebraic Thinking in Grades K-6. Leea V. Stiff (Ed.). In Year Book of National Council of Teachers of Mathematics *Developing Mathematical Reasoning in Grades K-12*, (p. 62-81). Reston, Va: NCTM.
Schoen, H. L. (1988). Teaching Elementary Algebra with a Word Problem Focus. In Arthur, Coxford F. e Albert, Shulte P. (Eds.), *The Ideas of Algebra, k-12*. Yearbook 1988. N. C. T. M.

Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical Problem Solving*. Academic Press, Inc.
Schoenfeld, A. H. (1987a). *Cognitive Science and Mathematics Education*. London: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.

Schoenfeld, A. H. (1987b). Cognitive Science and Mathematics Education: An Overview. In Alan. Schoenfeld (Ed.), *Cognitive Science and Mathematics Education*, (p. 1-31). London: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.

Schoenfeld, A. (1987c). What´s all the fuss about metacognição? In Alan H. Schoenfeld (Ed.), *Cognitive Science and Mathematics Education*, (p. 189-215). London: Lawrence Erlbaum Associates, Pubishers.
Schoenfeld, A e Arcavi, A. (1988). On the meaning of Variable. *Mathematics Teacher* 81, September, (p. 420-427).
Serrazina, M. L. (1988). Algumas considerações sobre os currículos de Matemática nos ensino Pré-Escolar e Primário. In *Revista Aprender*, 6, (p. 20-23).
Serrazina, M. L. (1998). *Teacher´s professional development in a period of radical change in primary mathematics education in Portugal*. Lisboa: APM.
Sfard, A. (1991). On the Dual Nature of Mathematical Conceptions: Reflections on Processes and Objects as Different Sides of the Same Coin. *Educational Sudies in Mathematics 22*, (p. 1-36).
Shannon, B. K. J. (1995). Our diets May Be Killing Us. *Mathematics Teaching in the Middle School*, Vol 1, nº 5, April-May.
Sheets, C.. (1993). *Effects of Computer Learning and Problem Solving Tools on the Development of Secondary School Students. Understanding of mathematical Functions*. University of Maryland College park.
Shweder, R. A. e Sullivan, M. (1993). Cultural Psychology: Who needs it? *Annual Revue osf Psychology*, 44, (p. 497-523).

Silva, A. S. (2002). Comunicação na sessão de abertura do seminário. Em Manuel, M. e Maria Amélia M. (Eds.), *Redes de Aprendizagem, Redes de Conhecimento*. Lisboa. CNE. Ministério da Educação.

Silva, A. S. e Madureira P. J. (1986). Uma visão global sobre as ciências sociais. In Augusto, Silva e Madureira, Pinto (Eds.), *Metodologia das Ciências Sociais*. Porto: Edições Afrontamento.

Silva, J. C. (1994). *Princípios de Análise Matemática Aplicada*. Lisboa: McGraw-Hill.

Silva, J. C. (2003). Novos programas de Matemática no Ensino Secundário – 203/2004. *Gazeta de Matemática*, 145, (p. 10 e p. 17).

Silva, J. C. e Leal, Carlos M. F. (1996). *Análise matemática Aplicada. Exercícios. Actividades, complementos e provas de avaliação*. Lisboa: McGraw-Hill

Silva, J. S. (1975). *Guia para a utilização do Compêndio de Matemática. Curso complementar do Ensino Secundário* (1º volume). Lisboa: GEP.

Silva, J. S. (1976). *Compêndio de Matemática. Curso complementar do Ensino Secundário* (2º volume). Lisboa: GEP.

Silva, J. S. (1977). *Guias para utilização do Compêndio de Matemática, 2º e 3º volume*. Lisboa: Ministério da Educação.

Silva, J. S. (1977). *Compêndio de Matemática. Guias*. Lisboa: Gabinete de Estudos e Planeamento do Ministério da Educação e Investigação Científica.

Silva, J. S. (1999). *Textos Didácticos*. Volumes I e II. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian.

Silver, E. A. (1987). Foundations of Cognitive Theory and Research for Mathematics Problem-Solving Instruction. In Alan H. Schoenfeld (Ed.), *Cognitive Science and Mathematics Education*. Hillsdale, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.

Simon, M. A. e Stimpson, V. C. Developing algebraic representation using Diagrams (1988). In Arthur, Coxford F. e Albert, Shulte P. (Eds.), *The Ideas of Algebra, k-12*. Yearbook 1988. N. C. T. M.

Simon, M.(1993). Context for change: themes related to Mathematics Education Reform. In T. Wood, P. Cobb, E. Yackel, D. Dillon(Eds.), *Rethinking Elementary School Mathematics: Insights and Issues*. USA: NCTM.

Skemp, R. R. (1976). Relational understanding and instrumental understanding. *Mathematics Teaching*, 77.

Smith, D. (1958). *History of mathematics*. Vol I. New York: Dover.

Smith, L. (1979). An envolving logic of participant observation, educational etnography, and other case studies. In Shulman, L. (Ed.). *Review of research in education* (316-377). Itasca, IL, F. E. Peacock.

Soarez L., Lopes P. C. e Martins, S. (2001). *Sketchpad na aula de Matemática*. Vila Real: Profmat.

Squire, L. R. e Kandel, E. R. (2002). *Memória. Da mente às moléculas*. Porto: Porto Editora.

Stake, R. E. (1998). *Investigación com estudio de casos*. Madrid: Ediciones Morata, S. L.

Steen, L. A. (1999). Twenty questions about Mathematical reasoning. In Lee, Stiff (Ed.), *Developing Mathematical Reasoning in Grades K-12*. Yearbook 1999. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Steinbring, H. (1997). Epistemological investigation of classroom interaction in elementary mathematics teaching. *Educational Studies in Mathematics*, 32, (p. 49-92).

Stenhouse, L. (1984). *Nuevas perspectivas en el desarrollo del niño*. Madrid: Morata.

Stern, E. (1993). What makes certain arithmetic word problems involving the comparison of sets so difficult for children? *The Journal of Education Psychology*, 85(1), (p. 7-23).

Stewart, I. (1994). *Os problemas da Matemática*. Lisboa: Gradiva.

Stewart, I. e Tall, D. (1995). *Algebraic Number Theory*. London: Chapma e Hall.

Stonewater, J. K. (1994). The "Mangoes". *Mathematics Teaching in the Middle School*, Vol 1, nº 3, November-December.

Strauss, A e Glaser, B. (1967). *The discovery of grounded theory: Strategies for qualitative research*. Chicago: Aldine.

Streefland, L. (1990). Free productions in Teaching and learning Mathematics. In K. Gravemeijer; M. Van den Heuvel; L. Streefland (Eds.), *Contexts Free productions Tests anda Geometry in Realistic Mathematics Education*. Utrecht: Researchgroup for Mathematical Education and Educational Compuer Center. OW&OC.

Struik, D. (1997). *História Concisa das Matemáticas*. Lisboa: Ciência Aberta. Gradiva.

Talbert, M. K. e Stallings-Roberts, V. (1994). Introducing Prealgebra Skills. *Mathematics Teaching in the Middle School*, Vol 1, nº 3 November-December, (p. 198-202).

Tall, D. (1994). Computer environments for the learning of mathematics. In Biehler, Rolf et al. (Eds.), *Didactics of mathematics as scientific discipline*, (p. 189-199). Dordrecht: Kluwer.

Tanner, H. e Jones, S. (2000). *Becoming a Successful Teacher of Mathematics*. London e New York: Routledge Falmer.

Taylor, R. (Ed.) (1980). *The Computer in the School – Tutor, Tool, Tutee*. New York: Teachers College Press.

Tavares, L. (1991). *Desenvolvimento dos sistemas educativos/modelos e perspectivas*. Lisboa: GEP-ME.

Tellis, W. (1997). Introduction to Case Study. *The Quality Report*, 3 (2).

Thirion, M. (1999). *Les mathématiques et le reel*. Paris: Ellipses.

Thompson, F. (1988). Algebraic instruction for the younger child. In Arthur, Coxford F. e Albert, Shulte P. (Eds.), *The Ideas of Algebra, k-12*. Yearbook 1988. N. C. T. M.

Thompson, P. (1996). Imagery and the development of mathematical reasoning. In L. Steffe et al (Eds.), *Theories of mathematical learning*, (p. 267-283). Nova Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

TIMSS Study Center. (1996). *Terceiro Estudo Internacional de Matemática e Ciências. Tarefas e Avaliação do Desempenho*. Lisboa: Instituto de Inovação Educacional. Ministério da Educação.

Treffers, A. (1991). Realist mathematics education in the Netherlands 1980-1990. In L. Streefland (Ed.), *Realist Mathematics Education in primary school. On the occasion of the opening of the Freudenthal Institute*. Utrecht: Center for Science and Mathematics Education (CD-β).

Treffers, A. (1991). Didactical background of a mathematics program for primary education. In L. Streefland (Ed.), *Realist Mathematics Education in primary* *school. On the occasion of the opening of the Freudenthal Institute*. Utrecht: Center for Science and Mathematics Education (CD-β).

Tuckman, B. W. (1978). *Conducting Eduational Reseach*. New York: Harcourt Brace Jovanovich, Inc.

Tuckman, B. W. (2002). *Manual da Investigação em Educação* (2ª edição). Lisboa: Fundação Gulbenkian.

Turkle, S. (1989). *O Segundo Eu. Os Computadores e o Espírito Humano. Editorial* Presença.

Usiskin, Z. (1988). Conceptions of school algebra and uses of variables. In Arthur, Coxford F. e Albert, Shulte P. (Eds.), *The Ideas of Algebra, k-12*. Yearbook 1988. N. C. T. M.

Usiskin, Z. (1994). From Mathematics for some to Mathematics for all. In Rolf, Biehler; Roland W. Scholz; Rudolf, Strässer e Bernard, Winkelmann (Eds.), *Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline*, (p. 315-326). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Usiskin, Z. (Ed.) (1999). *Developments in school mathematics education around the world* (Vol. 4). Reston, VA: Reston.

Uturra, R. (1986). Trabalho de campo e observação participante. In Augusto S. Silva e J. Madureira Pinto (Eds.), *Metodologia das Ciências Sociais*. Porto: Edições Afrontamento.

Vala, J. (1986). A Análise de Conteúdo. In Silva, Augusto S. e Pinto Madureira, J. (Eds.), *Metodologia das Ciências Sociais*. Porto: Edições Afrontamento.

Van Hiele, P. M. (1986). *Structure and Insight: A Theory of Mathematics Education* 20, July, (p. 356-366).

Vasconcelos, T. M. S. (1997). Investigação qualitativa e qualidade na educação: da etnografia num Jardim-de-infância ao poder da metáfora. In Estrela, Albano; Fernandes, Rogério; Costa, Fernando A. e Valério, Odília (Ed.), *Contributos da Investigação Científica para a Qualidade do Ensino*. II Volume, (p. 349-360). Porto: Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação.

Veloso, E. (1987). *O computador na aula de matemática*. Lisboa: APM.

Veloso, E. (1998). *Geometria: temas actuais*. Lisboa: Instituto de Inovação Educacional.

Vergani, T. (1993). *Educação Matemática. Um horizonte de possíveis sobre uma Educação Matemática viva e globalizante*. Universidade Aberta.

Vergnaud, G. (1981). *Lénfant, la Mathématique et la Réalité*. Berne: Peter Lang.

Vergnaud, G. (1982). Cognitive and development psychology and research in mathematics education: some theorical and methodological issues. *For the Learning of Mathematics* 3, (p. 31-41).

Vergnaud, G. (1984). Understanding mathematics at the secondary school level. In A. Bell, B. Low e J. Kilpatrick (Eds.), *Theory, research and practice in mathematical education* (Report of ICME5 Working Group on Research in Mathematics Education, 27-35. Nottingham, UK: Shell Centre for Mathematical Education.

Vergnaud, G. (1986). Psicologia do desenvolvimento cognitivo e didáctica das matemáticas. Um exemplo: as estruturas aditivas. *Análise Psicológica*, V(1), (p. 75-91).

Vergnaud, G. (1989). Difficultés conceptuelles erreurs didactiques et vrais obstacles épistémologiques dans l´apprantissage dês mathématiques. In Nadine, Bednarz; Garnier, C. (Eds.), *Constructions des Savoirs*. Ottawa: Agence D´ARC Inc.

Vergnaud, G. (1989a). Difficultés conceptuelles erreurs didactiques et vrais obstacles épistémologiques dans l´apprantissage dês mathématiques. In Bednarz, N.; Garnier, C. (Eds.), *Constructions des Savoirs*. Ottawa: Agence D´ARC Inc.

Vergnaud, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 23, (p. 133-170).

Vieira, C. A., e Candeias, N. (2001). *Curso 11: Iniciação ao programa "Geometer´s Sketchpad"*. Vila Real: Profmat.

Vieira, C. M. (1999). A credibilidade da investigação científica de natureza qualitativa: questões relativas à sua fidelidade e credibilidade. *Revista Portuguesa de Pedagogia*, Ano XXXIII, 2, (p. 89-111).

Vinner, S. e Dreyfus, T. (1989). "Images and Definitions for the Concept of Function. *Journal for Research in Mathematics Education 20*, July, (p. 356-366).

Voigt, J. (1994). Negotiation of mathematical meaning and learning mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 26, (p. 275-298).

Vygotsky, L. S. (1979). *Pensamento e Linguagem*. (M. Resende, Trans.). Lisboa: Portugal. Edições Antídoto.

Vygostky, L. S. e Luria, A. R. (1993). *Studies on history os behavior: primitive and child*. New Jersey: Lawrence Erlbaumn Associates.

Vygotsky, L. (1995). *Pensamento e Linguagem* (5ª edição). São Paulo: Livraria Martins Fontes Editora Ltda. (Trabalho original em inglês publicado em 1961).

Wagner, S. e Parker, S. (1993). Advancing Algebra. In Patrícia S. Wilson (Ed.), *Research Ideas for the Classroom, High School Mathematics*, (p. 119-139). New York: Macmillan Publishing Co.

Weaver, J. F. e Morse, William C. (1981). *Teaching mathematics to social and emotionally impaired pupils*. NCTM.

Weber-Russell, S. e LeBlanc, M. D. (2004). Learning by seeing by doing: arithmetic word problems. In Janet L. Kolodner e Sasha Barab e Michael Elsenberg (Eds.), *The journal of he learning sciences*. Vol 13, nº 2. Utrecht: Freudenthal Institut.

Wenger, R. H. (1987). Cognitive Science and Algebra Learning. In Alan. Schoenfeld (Ed.), *Cognitive Science and Mathematics Education*, (p. 217-251). London: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.

Wenger, E. (1998). *Communities of Practice: Learning, Meaning and Identity*. New York: Cambridge University Press.

Wheatley, G. H. e Brown, D. (1994). The construction and re-presentation of images in mathematical activity. In J. P. Ponte e J. F. Matos (Eds.), *Proceedings of the Eighteenth International PME Conference*. Vol 1, 81.

Wheeler, D. (1996). Backwards and forwards: reflexions on different approaches to álgebra. In Bednarz, N., Kieran, C. e Lee, L. (Eds.), *Approaches to algebra: perspectives for research and teaching*. (p. 317-325). Mathematics Education Library. Dordrecht/Bóston/London: Kluwer Academic Publishers.

Wijers, M. (1995). *Using Real-World Contexts to Make Variables and Formulas Meaningful*. Paper apresentado em S. Francisco.

Wijers, M. (1996). *How to deal with Algebraic Skills in Realistic Mathematics Education?* Utrecht: Freudenthal Institut.

Williams, J. M. (2001). What is Álgebra in Elementary School? *Teaching Children Mathematics*. December, (p. 196-200).

Wood, T.; Cobb, P.; Yackel, E. (1995). Reflexions on Learning and Teaching Mathematics in Elementary School. In L. P. Steffe e J. Gale (Eds.), *Construtivism in education*. USA: Laurence Erlbaum Associates, Publishers.

Wragg, E. (1996). *The cubic curriculum*. Londres: Routledge.

Yackel, E. e Cobb, P. (1996). "Sociomathematical Norms, Argumentation, and Autonomy in Mathematics"" *Journal for Research in Mathematics Education* 27, July, (p. 458-477).

Yates, B. C. (1988). The Computer as na Instructional Aid and Problem Solving Tool: Na Experimental Analysis of Two Instructional Methods for Teaching Spatial Skills to Junior High School Students (Doctoral Diss., University of Oregon). *Dissertation Abstracts International* 49: 3612-A. (University Microfilms nº DA8903857).

Yin, R. (1984). *Case study research: Design and methods*. Beverly Hills, CA: Sage Publishing.

Yin, R. (1994). *Case Study Research: Design and Methods* (2ª Ed) Thousand Oaks, CA: SAGE Publications.

Zawojewski, J.; Robinson, M. e Hoover, M (1999). Reflexions on Mathematics and Connected Mathematics Project. *Mathematics Teaching in the Middle School*. Vol. 4, Nº 5, (p. 324-330).

Zazkis, R. e Liljedahl, P. (2002). Generalization of patterns: the tension between algebraic thinking and algebraic notation. In *Eductional Studies in Mathematics, International Jiournal*, Volume 49, (p. 379-402). Kluwer Academic Publishers.

www.misq.org/misqd961/isworld/
http://www.qual.auckland.ac.nz/
http://www.nova.edu/ssss/QR/QR3-2/tellis1.html
http://www.pnas.org/cgi/content/full/101/15/5686

Universidade de Aveiro Departamento de Didáctica e Tecnologia Educativa
2006

Dárida Maria Fernandes

Aprendizagens algébricas em contexto interdisciplinar no ensino básico

Anexos

ÍNDICE:

Anexo 1
(Alguns ofícios enviados a várias entidades ou instituições) …………………………. 1

Anexo 2
(Excertos do Projecto de âmbito interdisciplinar “Envolvências Geométricas)…......… 9

Anexo 3
(Questionário aos estudantes) …………………………………………………..…..35

Anexo 4
(Algumas das Tarefas propostas no 2º e 3º ano de escolaridade) ……………….…. 39

Anexo 5
(Tarefas propostas no 4º ano de escolaridade) ……………………………..……… 47

Anexo 6
(Tarefas propostas no 5º ano de escolaridade) ……………………………………. 59

Anexo 7
(Tarefas propostas no 6º ano de escolaridade) ……………………………………. 73

Anexo 8
(Teste de Avaliação) ……………………………………………………………. 91

Anexo 9
(Pilotagem – resultados genéricos) ……………………………………….…... 109

Anexo 10
(Critérios de avaliação/classificação do Teste) …………………………..… 115

Anexo 11
(Análise dos Resultados do Teste) ………………………………………...... 161

Anexo 12
(Documento para Apreciação do trabalho desenvolvido, a realizar pelos estudantes) 269

Anexo 13
(Alguns documentos relativos à visita de estudo ao Freudenthal Institut) ………….. 279

ANEXO 1
(Alguns ofícios enviados a várias entidades ou instituições)

Dárida Maria Fernandes
(Professora Adjunta da Área de Matemática)
Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico do Porto
Rua Roberto Frias
4200 Porto

Tel: 225073460/469/480
Fax: 225073464
(Email: darida@mail.telepac.pt)

Exmo. Sr. Presidente do Instituto de Inovação Educacional(*)

As minhas cordiais saudações.

Nesta quadra festiva aproveito desde já para desejar a V. Exa. um Novo Ano repleto de saúde e êxitos pessoais.

Para apoio a uma investigação em curso no âmbito de um ***doutoramento em Educação Matemática*** solicito a V. Exa. o envio de documentação ou informação onde recolher os resultados dos estudos internacionais de avaliação do programa TIMSS.

Desde já agradecida, aguardo resposta ao pedido formulado e envio os meus sinceros cumprimentos.

ESE/IPP, 7 de Janeiro de 2001

Dárida Maria Fernandes

(Professora Adjunta da Área de Matemática da ESE/IPP)

(*) Ofício semelhante enviado também ao GAVE – Gabinete de Avaliação Educacional. Ofícios similares enviados a estes dois organismos para receber informação idêntica do PISA 2000.

Dárida Maria Fernandes
(Professora Adjunta de Matemática)
Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico do Porto
Rua Roberto Frias
4200 Porto

Tel: 225073460/469/480
Fax: 225073464
(Email: darida@mail.telepac.pt)

Exmo. Sr. Embaixador(*)

As minhas cordiais saudações.

Nesta quadra festiva que se avizinha aproveito desde já para desejar a V. Exa. um Santo Natal e um Ano Novo repleto de Saúde e êxitos pessoais.

Após contactos telefónicos e informações dos procedimentos a seguir, no pedido a formular a V. Exa., venho por este meio solicitar documentação precisa para apoio a uma investigação em curso no âmbito do ***doutoramento em Educação Matemática***.

O tema da investigação está relacionado com a **aprendizagem do conceito de variável no ensino básico** e dado que os alunos do país que V. Exa. representa obtiveram, no último estudo do *TIMSS* (*Terceiro Estudo Internacional em Matemática e Ciências*), resultados positivos nesta matéria, apresentando percentagens de respostas correctas iguais ou superiores a 75%, solicito a V. Exa. o acesso a documentação específica governamental, se possível em língua inglesa, do programa curricular da disciplina de Matemática, dos 6 aos 15 anos, dos manuais propostos para os alunos e da documentação para professores.

Desde já agradecida, aguardo com brevidade o pedido formulado e envio os meus sinceros cumprimentos.

Porto, 16 de Janeiro de 2001

Dárida Maria Fernandes

____
(Professora Adjunta da Área de Matemática da ESE/IPP)

(*) Ofício enviado aos embaixadores dos vários países que reuniam as condições definidas no texto.

Dárida Maria Fernandes
(Professora Adjunta de Matemática)
Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico do Porto
Rua Roberto Frias
4200 Porto

Tel: 225073460/469/480
Fax: 225073464
(Email: darida@mail.telepac.pt)

Exmo. Sr. Presidente do Instituto Camões

As minhas cordiais saudações.

Com o objectivo de realizar investigação no âmbito de um ***doutoramento em Educação Matemática*** subordinado ao tema **aprendizagem do conceito de variável em contexto de trabalho interdisciplinar no ensino básico** contactei com determinadas embaixadas no sentido de reunir elementos sobre o último estudo do *TIMSS* (*Terceiro Estudo Internacional em Matemática e Ciências*), solicitando o acesso a documentação específica.

Uma das Embaixadas contactadas foi a Embaixada Eslovaca que me enviaram uma carta muito simpática, disponibilizando os serviços do Dr. Bálint, do Instituto Nacional de Educação e do apoio do Ministério da Educação no alojamento na Eslováquia. Para tornarem viável a minha visita de estudo, designadamente, no apoio a despesas de deslocação sugerem uma consulta ao Instituto Camões para me candidatar a uma eventual vaga à bolsa de investigação que o governo eslovaco disponibiliza anualmente.

É neste contexto que me dirijo a V. Exa. para me candidatar a uma bolsa de investigação para a Eslováquia, por um período de 10 dias. Caso seja necessário enviarei outros elementos para apreciação de V. Exa.

Desde já agradecida pela atenção dada, aguardo com brevidade o pedido formulado e envio os meus sinceros cumprimentos.

ESE/IPP, 16 de Janeiro de 2002

Dárida Maria Fernandes

____

(Professora Adjunta da Área de Matemática da ESE/IPP)

Dárida Maria Fernandes
(Professora Adjunta de Matemática)
Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico do Porto
Rua Roberto Frias
4200 Porto

Tel: 225073460/469/480
Fax: 225073464
(Email: darida@mail.telepac.pt)

Exmo. Sr. Director do Programa Ciência Viva

As minhas cordiais saudações.

Nestes próximos anos encontro-me a desenvolver uma investigação no âmbito de um ***doutoramento em Educação Matemática*** subordinado ao tema **aprendizagem do conceito de variável no ensino básico, em contexto de trabalho interdisciplinar**.

Esta investigação prevê a utilização das tecnologias de informação e comunicação, designadamente o estudo da linguagem de programação BOXER. Como para já a BOXER só se encontra disponível, na Internet, para o Macintosch e segundo um dos meus orientadores, Doutor Jaime Carvalho e Silva, era imprescindível a sua exploração com alguns alunos em sala de aula, venho por este meio solicitar a V. Exa. um apoio financeiro para a aquisição do material informático conveniente ou o empréstimo de dois computadores Mac ou um portátil, com respectiva impressora para concretizar a investigação em curso.

Desde já agradecida, aguardo com brevidade o pedido formulado e envio os meus sinceros cumprimentos.

ESSE/IP Porto, 2 Fevereiro de 2002

Dárida Maria Fernandes

(Professora Adjunta da Área de Matemática da ESE/IPP)

Dárida Maria Fernandes
(Professora Adjunta de Matemática)
Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico do Porto
Rua Roberto Frias
4200 Porto

(Email: darida@mail.telepac.pt ou daridaf@esse.ipp.pt)

Exmo. Sr. Presidente do Instituto Politécnico do Porto

As minhas cordiais saudações.

No âmbito da investigação em curso orientada para a obtenção do ***doutoramento em Didáctica da Matemática***, subordinado ao tema **aprendizagem do conceito de variável no ensino básico, em contexto de trabalho interdisciplinar** torna-se imprescindível a utilização das tecnologias de informação e comunicação, designadamente o estudo da linguagem de programação BOXER. Contudo, nesta fase a BOXER só se encontra disponível, na Internet, para Macintosch e segundo um dos meus orientadores, Doutor Jaime Carvalho e Silva, era fundamental a exploração daquela linguagem de programação por alguns alunos, em sala de aula.

Assim, tendo conhecimento pelo responsável do departamento de fotografia do Instituto, António Gorgal, da possibilidade de disponibilizar tal material informático, venho por este meio solicitar a V. Exa. a cedência, no próximo ano lectivo 2002/03, de pelo menos dois computadores Mac e uma impressora para apoiar a investigação em curso.

Desde já agradecida, aguardo resposta ao pedido formulado e envio os meus sinceros cumprimentos.

Porto, 25 de Março de 2002

Dárida Maria Fernandes
(Professora Adjunta da Área de Matemática da ESE/IPP)

ANEXO 2
(Excertos do Projecto de âmbito interdisciplinar: Matemática, Educação Visual e as TIC
"*Envolvências Geométricas I e II- A Geometria na cidade*" – 1998/2002)

4. Enquadramento das Acções

C. S. – Comissão de Selecção	*Reservado para a C. S.*
Título **ENVOLVÊNCIAS GEOMÉTRICAS**	
Resumo[1]: O projecto que se apresenta tem como objecto de estudo padrões geométricos pesquisados em frisos e pavimentos que fazem parte do património cultural de duas regiões: área metropolitana do Porto e Aveiro. Através desta pesquisa pretende-se evidenciar o "envolvimento" da Matemática na cultura e no património artístico da região, numa estreita relação do campo científico com a realidade do aluno. Procura-se, assim, investir em aprendizagens multidisciplinares, explorando competências, valores e atitudes em vários campos do saber, em diferentes níveis de ensino e modalidades de formação, valorizando-se o gosto pela arte e pelo conhecimento do património histórico-cultural das localidades e, consequentemente, do país, através do recurso a tecnologias de informação e comunicação actuais ABSTRACT The Project aims to acknowledge the existence of geometrical patterns in bands, friezes and pavements that take part in the cultural heritage of two regions: metropolitan area of Porto and Aveiro. Through this research we aim to highlight the "commitment" of Mathematics in the cultural and artistic heritage of the region, thus merging scientific knowledge with the pupils own reality and cultural background. We seek to invest in multidisciplinary learning, exploring competencies, values and attitudes in several fields of knowledge, enhancing the apetence for arts and for the knowledge of the historical and cultural heritage of the places studied and, consequently of the country, through the use of several instruments based on information and communication technologies.	
Áreas disciplinares: Matemática, Educação Visual e Tecnologias da Informação e de Comunicação	
Destinatários e Intervenientes O projecto desenvolver-se-á numa **1ª fase**, em dois anos, com alunos da Educação de Infância, do Ensino Básico e do Ensino Superior (em formação inicial), em actividades de resolução de problemas, baseadas na pesquisa experimental e bibliográfica, no desenvolvimento de pequenos projectos, orientados pela observação, reprodução e representação de frisos e pavimentos e pela concepção/idealização de novos padrões geométricos.	

[1] O Resumo não deverá exceder 10 linhas e, sempre que possível, também em Inglês.

Numa **2ª fase** do processo pretende-se alargar o projecto a outras escolas do país, a escolas europeias, mais provavelmente, à Holanda, a escolas dos PALOP e ainda a Macau.
Neste contexto, o projecto desenvolver-se-á transversalmente e num âmbito multidisciplinar, numa intervenção mais directa nas áreas de Matemática, Educação Visual e Tecnológica e Tecnologia de Informação e de Comunicação, englobando duas vertentes de formação:
a) formação inicial (básica e superior);
b) formação contínua de educadores e professores do Ensino Básico.

Atendendo à natureza do projecto foram constituídas parcerias com escolas, direcções regionais de educação e órgãos do poder local.

Escolas em parceria:

- Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico do Porto (ESE/IPP);
- Unidade de Ensino a Distância do Instituto Politécnico do Porto (UED/IPP);
- Jardim de Infância do Centro Social e Paroquial da Gafanha da Encarnação - Aveiro;
- Escola EB 1 – Ilha, Valongo – Porto;
- Escola EB 2/3, Valongo - Porto;
- Escola EB 2/3 da Gafanha da Nazaré, Ílhavo – Aveiro.

Direcções Regionais
Direcção Regional de Educação do Norte

Autarquias:

- Câmara Municipal de Valongo
- Câmara Municipal de Ílhavo

Assim, o público-alvo será constituído por: **alunos** da Educação de Infância, do Ensino Básico e do Ensino Superior; **Educadores e Professores** do Ensino Básico em formação contínua, nas modalidades presencial e não presencial do FOCO, nomeadamente, em Complementos de Formação de Licenciaturas do Curso de Educação de Infância e de Professores do 1º CEB.

Educação de Infância

- Jardim de Infância do Centro Paroquial da Gafanha da Encarnação, do concelho de Ílhavo, 20 a 25 alunos de 4 anos, orientados pela educadora Sara Cristina Labrincha Gomes

Ensino Básico

- **Escola do Ensino Básico EB1 – Ilha**, do concelho de Valongo - uma turma do 2º ano de escolaridade, com 19 alunos orientados pela professora Maria Belmira Mariz Dias Ferreira.

- **Escola do Ensino Básico EB 2.3 de Valongo**, com a participação de duas turmas: 6ºano e 8º ano. A turma do 6º ano de escolaridade tem 24 alunos e é orientada pelos professores de Matemática e Educação Visual e Tecnológica, respectivamente, Maria Manuela Dauphinet Tavaz Rocha; Gustavo Amílcar da Silva Bessa e Albina dos Anjos Neves Pereira da Silva. A turma do 8º ano de escolaridade tem 26 alunos e é orientada pela mesma professora de Matemática e pelo professor de Educação Visual e Tecnológica Jorge Franklim Teixeira Ribeiro.
- **Escola do Ensino Básico EB 2.3. da Gafanha da Nazaré** – Aveiro, com a participação de 5 turmas do 8º ano de escolaridade, 8º A – 21 alunos, 8º B – 19 alunos, 8º C – 14 alunos, 8º D – 21 alunos e 8º E – 21 alunos, sob a responsabilidade de três professores de Matemática (professores orientadores de estágio): Paula Cristina Santos Pires, Edite Maria Sequeira Peixoto e Cláudia Susana Fidal Morais Capela e de dois professores de Educação Visual e Tecnológica: Helena Zália Martins Pereira e Joana Maria Peixoto Marques Ribeiro.

Ensino Superior

- **Alunos do Curso de Professores do Ensino Básico da Escola Superior de Educação** do Instituto Politécnico do Porto (ESE/IPP), variantes de Educação Visual e Tecnológica e de Matemática/Ciências.
- Aluna da Faculdade de Arquitectura da Universidade do Porto
- Alunos do Instituto Superior de Engenharia do Porto (ISEP) através da Unidade de Ensino a Distância do instituto Politécnico do Porto (UED/IPP)
- Educadores e Professores em formação contínua, integrada no FOCO, designadamente, em Curso de Complementos de Formação

O desenvolvimento do projecto decorrerá em sala de aula através da elaboração de trabalhos com a leccionação de conteúdos específicos. Numa fase anterior está previsto um trabalho de campo de pesquisa, com visitas no exterior a monumentos, a exposições, ou outros eventos e, na escola, com procura bibliográfica e realização de tarefas específicas, em oficinas próprias.

5. Caracterização das Acções

FINALIDADES:

O projecto pretende agregar escolas e professores em torno de um projecto transversal, centrado em metodologias de participação inovadoras e princípios educativos convergentes. Neste contexto, a concretização deste projecto pretende atingir as seguintes finalidades:

- Promover o diálogo entre os diversos intervenientes educativos, com especial destaque para professores de diferentes áreas, de diversos níveis de ensino e de diversas regiões.
- Potenciar as tecnologias de Informação e Comunicação no intercâmbio cultural, científico e estético, sistematizando informação e compilando dados.

- Promover a divulgação de padrões geométricos, a partir de experiências significativas que interliguem o concreto ao abstracto.
- Proporcionar orientações específicas no ensino em modalidades de formação não presenciais, através da organização de uma base de dados com frisos e pavimentos e criação de "sites" na Internet.
- Promover e divulgar a cultura matemática, orientando a ciência para um "diálogo" permanente com especificidades da realidade.

OBJECTIVOS:

Com a concretização deste projecto pretende-se atingir, na **Matemática**, objectivos gerais e alguns objectivos de conteúdo, que a seguir se indicam.

Objectivos gerais:

- Desenvolver a capacidade de resolver problemas
- Promover o desenvolvimento do raciocínio
- Desenvolver o gosto pela disciplina
- Desenvolver a capacidade de descobrir diversas formas de comunicar matematicamente
- Promover o gosto pelo trabalho em equipa e de cooperar com o outro
- Promover o uso de software específico como ferramentas de pesquisa e de aprendizagem matemática e, se possível, da Internet.

Objectivos de Conteúdo:

- Descobrir Regularidades
- Criar e completar padrões
- Descobrir frisos e pavimentos
- Identificar e criar figuras geométricas
- Reconhecer isometrias
- Identificar diferentes tipos de ângulos
- Usar instrumentos de medida na concepção de padrões.
- Identificar e analisar diversos tipos de transformações geométricas.

No âmbito da **Expressão e Educação Visual** os objectivos a atingir resumem-se a :

- Desenvolver capacidades de observação análise e representação de formas do Mundo envolvente
- Descobrir a geometria das formas no seu envolvimento global e particular
- Desenvolver capacidades de expressão plástica e comunicação visual.
- Compreender e dominar materiais e processos de realização tecnológica de projectos
- Desenvolver processos de resolução de problemas e de planeamento de projectos

Na área das **Tecnologias de Informação e Comunicação** pretende-se essencialmente

- Proporcionar alguma literacia informática vendo o computador como "ferramenta de trabalho", em especial no âmbito da utilização de programas de desenho vectorial e de mapeamento de bits
- Potenciar recursos telemáticos como forma de partilhar informação
- Promover o uso da Internet como canal de comunicação multimedia

METODOLOGIAS:

As metodologias a seguir no desenvolvimento do projecto basear-se-ão nos seguintes procedimentos:

- Pesquisa de dados bibliográficos e de quadros cronológicos
- Utilização da máquina fotográfica no registo de padrões geométricos observados no meio envolvente
- Uso de materiais manipuláveis para reprodução e criação de frisos e pavimentos
- Discussão e reflexão, em grupos, sobre a natureza dos padrões existentes e criação de outros
- Cooperação entre os diferentes intervenientes do projecto
- Análise reflexiva dos aspectos cromáticos, geométricos e temáticos dos exemplares em estudo
- Utilização do computador para desenhar, pesquisar e sistematizar informação
- Exploração da Internet, quando possível, para pesquisa e divulgação dos materiais em análise.

RECURSOS TÉCNICOS E MATERIAIS:

Dos materiais a utilizar, destacam-se os materiais de suporte manipuláveis para reprodução/concepção de padrões geométricos observados ou inventados, que permitam um estudo a três dimensões e materiais audiovisuais e tecnológicos que proporcionem um estudo experimental, a duas dimensões, de pesquisa e sistematização de dados.
Deverá então ser providenciado a execução de alguns materiais, em oficinas próprias ou nas aulas da disciplina de Expressão Educação Visual e Tecnológica desenvolvidos por alunos e professores, colaboradores do projecto.

Assim, para a concretização do projecto será necessária a aquisição dos seguintes materiais :

- Objectos específicos: azulejos, cartolinas, lápis, vernizes, ...
- Um computador multimedia por escola com ligação à Internet
- Uma impressora por Escola
- Uma máquina fotográfica digital por escola

Produtos Esperados

Relativamente aos produtos esperados, prevê-se que a concretização deste projecto:

1. Privilegie o intercâmbio cultural e científico entre alunos, professores e escolas dos diferentes níveis de ensino.
2. Aprofunde intervenção na comunidade educativa, num diálogo permanente com as autarquias. Neste contexto privilegiar-se-á a integração deste projecto numa das componentes pedagógicas do ***Baú de Matemática****, através da exposição dos trabalhos realizados,
3. Valorize e reforce atitudes inovadoras de alunos professores, pais e encarregados de educação e de outros intervenientes na comunidade educativa, no domínio da atitudes, capacidades e conhecimentos.

Em termos de produtos, entendidos como resultados materiais espera-se:

1. Melhoria das condições pedagógico-didácticas do processo ensino-aprendizagem, através da aquisição e mobilização de materiais de apoio audiovisual e tecnológico e a sua efectiva utilização.
2. Recolha, pesquisa e sistematização dos frisos e pavimentos de significativo valor histórico-cultural e artístico das regiões.
3. Compilação de material ilustrativo de aprendizagem: fotografias, confecção de frisos e pavimentos (duas e três dimensões), recorrendo a software específico, com posterior organização em *portfolios*

Baú de Matemática - iniciativa conjunta em Educação Matemática da ESE/IPP da Câmara Municipal de Valongo e da Direcção Regional de Educação do Norte, que se realiza há quatro anos consecutivos, envolvendo Jardins de Infância e escolas do Ensino Básico do concelho de Valongo e educadores e professores de outros concelhos da região Norte.

Actividades

Os alunos da Educação Básica realizarão actividades diversificadas nas áreas disciplinares de Matemática e de Educação Visual e Tecnológica, das quais se destacam:

- Desenhos: reprodução e criação de frisos e pavimentos
- Recortes
- Dobragens
- Pintura
- Decalque
- Preencher/Contornar linhas
- Estampagem
- Utilização de espelhos
- Construções com materiais manipulativos, utilizando instrumentos específicos de desenho (compasso, régua, esquadro, transferidor, …)
- Exploração de software específico (programas de desenho e de matemática)
- Digitalização de informação
- Recolha de dados, utilizando a máquina fotográfica
- Criação de uma base de dados e de um “site” na Internet
- Pesquisa na Internet para recolha de informação, registo de dados e partilha de ideias com alunos e professores de outras escolas
- Resolução de problemas de âmbito topológico e de geometria euclideana, com destaque, para as transformações geométricas.
- Discriminação detalhada das actividades e calendarização:

Seguidamente descreve-se a agenda e a calendarização do desenvolvimento do projecto ao longo de dois anos.
Esta calendarização tem em conta o projecto educativo e a planificação/programação das actividades do calendário escolar previsto nas escolas envolvidas.
A proposta apresentada prevê a definição das actividades fundamentais, podendo (e devendo) algumas delas prolongarem-se no tempo, para aprofundamento e/ou satisfazendo motivações e contextos educativos existentes.

Ano 1999

Fevereiro

- Pesquisa bibliográfica, cronológica e cultural do assunto em estudo. Trabalho, em grupo, de cooperação entre professores da mesma disciplina ou das áreas disciplinares propostas ou afins. Definição de linhas orientadoras com os Centros que compõem a equipa coordenadora.
- Trabalho em grupo dos elementos que constituem a equipa coordenadora que conjuntamente com os professores envolvidos e alunos em formação inicial do Ensino Superior.
- Contactos com as autarquias, através dos Pelouros da Cultura.

Março e Abril

- Visitas a locais do património histórico-cultural mais significativo das regiões, em termos de frisos e pavimentos.
- Registo fotográfico com revelação da fotografia, no clube de Fotografia.
- Utilização de materiais na confecção de padrões geométricos, com reprodução do observado ou criação de outros exemplares.
- Actividades de resolução de problemas, relacionadas com conteúdos da Geometria e Grandezas e Medidas, baseadas na experimentação e no levantamento de conjecturas.
- Análise reflexiva e (re)definição das estratégias de actuação.

Maio

- Promoção de actividades de resolução de problemas com utilização de software específico e/ou materiais manipuláveis, de acordo com o nível de ensino dos alunos, abordando os conteúdos: polígonos (identificação/classificação); cálculo de perímetros e áreas (de triângulos, rectângulos, quadrados e de outras figuras geométricas); transformações geométricas, com identificação/selecção e descoberta de propriedades.

Junho

- Colaboração/participação nas actividades, das escolas, de encerramento do ano escolar, com divulgação dos trabalhos realizados.

Julho

- Avaliação interna. Estudo da extensão do projecto a outras escolas. Análise de possíveis apoios financeiros. Elaboração do Relatório.

Setembro e Outubro

- Reflexão e planificação de novas actividades e metodologias de modo a contemplar os parâmetros diagnosticados e analisados na avaliação interna.
- Diálogo com os pais e encarregados de educação na colaboração no desenvolvimento do projecto, designadamente no registo bibliográfico, pesquisa de dados no meio envolvente, através do registo fotográfico e também na Internet.

Novembro

- Contacto com empresas das regiões que se relacionem directamente com o estudo, com vista à colaboração na concretização do projecto.
- Criação de peças decorativas e ilustrativas de frisos.
- Confecção sistematizada e duradoira de materiais com vista ao desenvolvimento de protocolos e pesquisas experimentais no domínio da Matemática.

<u>*Ano 2000*</u> Janeiro • Aprofundamento do trabalho realizado. Pesquisas com envolvimento pessoal e observação do meio envolvente, registo fotográfico, confecção de materiais e enriquecimento do "site" na Internet (quando possível). • Divulgação à comunidade educativa escolar do trabalho desenvolvido. Fevereiro e Março • Preparação de uma mostra de materiais, a integrar na iniciativa conjunta da ESE/IPP, da C. M. de Valongo (Pelouro do Ensino e Cultura) e da DREN, em Educação Matemática, designada por *Baú de Matemática VI*, a realizar em Valongo e dirigida a todos os alunos do concelho de Valongo e a todos os professores da região Norte e Centro. Abril • Realização do encontro em data a definir. Maio • Análise reflexiva do trabalho realizado. Elaboração de instrumentos de avaliação. Selecção dos trabalhos mais significativos. • Elaboração de documentação de suporte. Junho • Avaliação interna. Julho • Compilação e sistematização de dados. • Colaboração no encerramento do ano escolar nas escolas. • Realização de um relatório final.	

6. Disseminação

	Reservado para a C. S.
A disseminação dos resultados deverá ser concretizada do seguinte modo: • Colaboração no projecto educativo das escolas, com o envolvimento na planificação de actividades de início, desenvolvimento e encerramento do ano escolar. • Integração dos conteúdos relacionados com o tema em estudo na formação contínua de educadores e professores do Ensino Básico de Valongo e de concelhos limítrofes, na modalidade do FOCO. • Integração numa iniciativa em Educação Matemática – Baú de Matemática. • Divulgação conjunta com as Câmaras Municipais, através dos Pelouros da Cultura, e com empresas, do trabalho realizado, com participação em mostras culturais. • Elaboração e publicação de artigos em revistas de educação, em particular, em Educação Matemática. • Comunicação em Encontros e Congressos de Educação e de âmbito cultural. • Avaliação de resultados e consequentemente o estudo da possibilidade de extensão do projecto a outras escolas das regiões ou outras regiões. • Participação em Encontros promovidos pelo Programa Ciência Viva. • Recolha e sistematização dos trabalhos em *port-folio* para posterior divulgação.	

Ministério da Ciência e da Tecnologia

RELATÓRIO DE ACTIVIDADES

Projecto "Envolvências Geométricas"

PIII-900

Resumo das Actividades Escolares desenvolvidas no âmbito do Projecto

"Envolvências Geométricas" é um subprojecto do ***Baú de Matemática***, projecto em Educação Matemática, idealizado em 1989, passando por várias fases de intervenção, com uma implantação no terreno desde 1995.

O Projecto: "Envolvências Geométricas" teve nesta primeira fase três pólos de desenvolvimento: **Valongo** (Agrupamento de Escolas Básicas EB1 e EB2,3), **Gafanha da Nazaré** (Jardim de Infância da Encarnação e EB 2,3) e **Porto** (Escola Superior de Educação do I. P. do Porto, na formação inicial e contínua de professores).

Como o projecto tem como foco de aprendizagem o património histórico, cultural e artístico da região onde se encontra inserida a Escola, cada um dos pólos implementou o projecto de acordo com o meio envolvente e o contexto educativo existente.

Valongo. Na Escola EB2.3 o trabalho desenvolvido no âmbito das "Envolvências geométricas" foi integrado no projecto educativo de escola. Partindo da disciplina de Matemática, em contexto de sala de aula estabeleceu-se um diálogo preferencial com a área de Educação Visual e a partir destas duas disciplinas foram integradas outras, como a História e a Língua Portuguesa, reforçando o carácter multidisciplinar do projecto.

Aos trabalhos desenvolvidos em ambiente de sala de aula sucedeu-se uma fase de intervenção na comunidade escolar e mais tarde na comunidade educativa de Valongo, com o apoio da Câmara Municipal de Valongo.

Na área de Matemática iniciou-se o projecto pelo registo de formas e revestimentos particulares existentes nas paredes e telhados de algumas casas de Valongo que ainda utilizam o material genuíno da região: a ardósia.

A partir deste motivo desenvolveu-se o estudo da forma, proporcionando a exploração didáctica dos sólidos geométricos, com a construção de alguns modelos na disciplina de Educação Visual. Foram elaboradas máscaras e outros elementos decorativos da quadra carnavalesca e realizado o desfile dos alunos nas ruas de Valongo.

Tendo como ponto de partida casas antigas em ruína, como finalidade última de preservar o património da região, os professores de Matemática e de Educação Visual planificaram o estudo de figuras geométricas. Neste contexto, construíram-se suletos e azulejos em ardósia na disciplina de Educação Visual. Na área de Matemática foram planeados e desenvolvidas actividades relacionadas com o cálculo de perímetros e áreas e aprofundados conceitos ligados a transformações geométricas.

Os professores do agrupamento das Escolas Básicas EB 1 de Valongo envolvidos no projecto desenvolvem-no segundo aquela linha de pesquisa, aprofundada pelo diálogo estabelecido com a escola EB 2,3, com a adaptação própria ao nível etário dos alunos. Realizaram-se reuniões com pais e encarregados de educação, para apoio ao projecto e exploraram-se materiais manipuláveis, proporcionando a criação de modelos e o estudo no plano.

Gafanha da Nazaré. O projecto iniciou-se na EB 2. 3 a partir da disciplina de Educação Visual. Com todas as turmas do 8º ano da Escola realizou-se o estudo de padrões cromáticos de uma rua da Gafanha da Nazaré. A articulação estava naturalmente prevista com a disciplina de Matemática que planearia o estudo de diversos conteúdos curriculares, tendo como base a pesquisa realizada. A professora de Matemática responsável pelo projecto na Escola procurou dinamizar os professores do grupo disciplinar no sentido de os alunos, já no 9º ano de escolaridade, estudarem conteúdos relacionados com a geometria, designadamente, as transformações geométricas. Foram idealizados programas no computador para os alunos aprenderem de uma forma experimental os conceitos matemáticos, interligando-os ao trabalho implementado na disciplina de Educação Visual e à realidade envolvente.

Na Educação de Infância partiu-se da realidade envolvente, pela observação de padrões geométricos e cromáticos em algumas ruas da Gafanha da Encarnação. Destacaram-se os mais simples e a educadora propôs o “desenho” dos mesmos no papel, e mais tarde em azulejo. Foi idealizada, com base no trabalho feito, uma lembrança para o dia da Mãe. Este diálogo permitiu estreitar relações e uma colaboração próxima da família no desenvolvimento do projecto. Pela construção de vários azulejos com o mesmo padrão foi possível a construção de diversos frisos e o desenvolvimento de actividades no domínio da Matemática. Depois deste trabalho, realizado a três e a duas dimensões foram promovidas actividades no computador, no qual as crianças criaram padrões.

ESE/IPP. Integrados nos conteúdos da geometria euclideana previstas nas disciplinas de Matemática e Ensino da Matemática, respectivamente, do curso da formação inicial e da formação contínua de professores, alguns alunos desenvolveram trabalhos de pesquisa, seleccionando temas no âmbito do projecto “Envolvências Geométricas”.

Através das Tecnologias de Comunicação e Informação descobriram-se ferramentas tecnológicas para (re)criação de modelos e apoio às pesquisas realizadas, numa ponte privilegiada de diálogo educativo entre alunos, professores, escolas e regiões.

O grupo de professores da ESE/IPP deslocaram-se às várias escolas e ao jardim de infância de modo a tomar conhecimento, a apoiar, a estimular e a participar nas actividades desenvolvidas, quer a nível temático e focalizado na disciplina, quer a nível do projecto educativo de escola. Também os professores directamente envolvidos no projecto e presidentes dos conselhos directivos das diferentes escolas deslocaram-se à Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico do Porto para participar em reuniões de trabalho de modo a avaliar, estruturar, reorganizar e perspectivar as actividades desenvolvidas ou a promover no âmbito do projecto.

A todas as escolas foi solicitado um *port-folio* relatando as actividades fundamentais desenvolvidas com os alunos, a comunidade escolar e a comunidade educativa da região em que se insere a escola, permanecendo no pólo para consulta e análise, permitindo a compilação e divulgação das actividades do Projecto.

.

Na última reunião de trabalho (em 17 de Julho de 2000) foi decidido participar no Encontro regional de Educadores e Professores do Ensino Básico - *Baú de Matemática VI* - a realizar em Valongo, de 29 a 30 de Novembro e no próximo ano no encontro anual de professores de Matemática PROFMAT 2001. Foi ainda decidido aprofundar os contactos com a Câmara Municipal do Porto e encetar novos contactos, com a Câmara Municipal de Ílhavo e outras entidades.

Segue, em anexo, “dossier” documental (*port-folio*) das diversas actividades realizadas.

A Coordenadora do Projecto

____

(Profa. adjunta da ESE/IPP e
coordenadora da área científica de Matemática)

Ministério da Ciência e da Tecnologia

"FORMULÁRIO DE CANDIDATURA AO PROGRAMA CIÊNCIA VIVA - 1999"
Proposta de continuidade do Projecto PIII - 900

4. Enquadramento das Acções

	Reservado para a C. S.
Título ***Envolvências Geométricas II - A Geometria na Cidade***	
Resumo[2]**:** O projecto que se apresenta tem como objecto de estudo padrões geométricos pesquisados em frisos e pavimentos que fazem parte do património cultural do núcleo urbano do Porto. Através desta pesquisa pretende-se evidenciar o "envolvimento" da Matemática na cultura e no património artístico da região, numa estreita relação do campo científico com a realidade do aluno. Procura-se, assim, investir em aprendizagens multidisciplinares, explorando competências, valores e atitudes em vários campos do saber, em diferentes níveis de ensino e modalidades de formação, valorizando-se o gosto pela arte e pelo conhecimento do património histórico-cultural das localidades e, consequentemente, do país, através do recurso a tecnologias de informação e comunicação. Este projecto pretende aprofundar o já existente, designado por "Envolvências Geométricas", lançar e integrar escolas do concelho do Porto, com vista a uma intervenção educativa em dois espaços culturais de referência para a cidade: Museu Soares dos Reis e Casa de Serralves. ABSTRACT The Project aims to acknowledge the existence of geometrical patterns in bands, friezes and pavements that take part in the cultural heritage of Porto. Through this research we aim to highlight the "commitment" of Mathematics in the cultural and artistic heritage of the region, thus merging scientific knowledge with the pupils own reality and cultural background. We seek to invest in multidisciplinary learning, exploring competencies, values and attitudes in several fields of knowledge, enhancing the apetence for arts and for the knowledge of the historical and cultural heritage of the places studied and, consequently of the country, through the use of several instruments based on information and communication technologies. The Projects intends to complement the former Project (Envolvências Geométricas), and was designed to integrate schools from Porto in educative projects regarding two of the most significant cultural references in town: the Soares dos Reis museum and Casa de Serralves. **Áreas disciplinares**: Matemática, Educação Visual e Tecnologias da Informação e da Comunicação	

[2] O Resumo não deverá exceder 10 linhas e, sempre que possível, também em Inglês.

Destinatários e Intervenientes

À semelhança do Projecto anterior, este desenvolver-se-á, preferencialmente, em dois anos, com alunos da Educação de Infância, do Ensino Básico e do Ensino Superior (em formação inicial), em actividades de resolução de problemas, baseadas na pesquisa experimental e bibliográfica, no desenvolvimento de pequenos projectos, orientados pela observação, reprodução e representação de frisos e pavimentos e pela concepção/idealização de novos padrões geométricos.

Estão ainda programadas parcerias com as Escolas de Valongo e Aveiro que participam activamente no projecto "Envolvências Geométricas".
Neste contexto, o projecto desenvolver-se-á transversalmente e num âmbito multidisciplinar, numa intervenção mais directa nas áreas de Matemática, Educação Visual e Tecnológica e Tecnologia de Informação e de Comunicação, englobando duas vertentes de formação:

a) formação inicial **(básica e superior);**
b) formação contínua **de educadores e professores do Ensino Básico.**

Atendendo à natureza do projecto foram constituídas novas parcerias com escolas, direcções regionais de educação e órgãos do poder local.

Parcerias actuais no âmbito do Projecto C.Viva III:
- Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico do Porto (ESE/IPP);
- Unidade de Ensino a Distância do Instituto Politécnico do Porto (UED/IPP);

Educação de Infância
- Jardim de Infância do Centro Paroquial da Gafanha da Encarnação, do concelho de Ílhavo, 20 a 25 alunos de 4 anos, orientados pela educadora Sara Cristina Laurincha Gomes

Ensino Básico

- **Escola do Ensino Básico EB1 – Ilha**, do concelho de Valongo - uma turma do 3º ano de escolaridade, com 19 alunos orientados pela professora Maria Belmira Mariz Dias Ferreira.
- **Escola do Ensino Básico EB 2.3 de Valongo**, com a participação de duas turmas: 6ºano e 8º ano. A turma do 6º ano de escolaridade tem 24 alunos e é orientada pelos professores de Matemática e Educação Visual e Tecnológica, respectivamente, Maria Manuela Dauphinet Tavaz Rocha; Gustavo Amílcar da Silva Bessa e Albina dos Anjos Neves Pereira da Silva. A turma do 8º ano de escolaridade tem 26 alunos e é orientada pela mesma professora de Matemática e pelo professor de Educação Visual e Tecnológica Jorge Franklim Teixeira Ribeiro.
- **Escola do Ensino Básico EB 2.3. da Gafanha da Nazaré** – Aveiro, com a participação de 5 turmas do 9º ano de escolaridade, 9º A – 21 alunos, 9º B – 19 alunos, 9º C – 14 alunos, 9º D – 21 alunos e 9º E – 21 alunos, sob a responsabilidade de três professores de Matemática: Paula Cristina Santos Pires (orientadora de estágio), Edite Maria Sequeira Peixoto e Cláudia Susana Morais Capela e as professoras estagiárias: Sandra Duarte, Carla Almeida e Claudia e de dois professores de Educação Visual e Tecnológica: Helena Zélia Martins Pereira e Joana Maria Peixoto Marques Ribeiro.

Assim, o público-alvo será constituído por: alunos da Educação de Infância, do Ensino Básico e do Ensino Superior; Educadores e Professores do Ensino Básico em formação contínua, nas modalidades presencial e não presencial do FOCO, nomeadamente, em Complementos de Formação de Licenciaturas do Curso de Educação de Infância e de Professores do 1º CEB.

Educação de Infância
Jardim de Infância de CEPI - Centro de Educação para a Infância Aurélia de Sousa – Porto - Alunos da faixa etária dos 4 e 5 anos, respectivamente 24 e 25 crianças, contando com o apoio das educadoras de infância Margarida Ferreira, Conceição Santa, Carla Terra e Leonor Ramos, e ainda de Fernanda Moreira, Cristina Sousa, Cristina Vasconcelos, Joaquim Santa e Clara Araújo (apoio informático)

Ensino Básico

- **Escola EB 1 nº34 inserida no TEIP** – Porto Escola do Bairro de costa Cabral com a participação de 5 turmas do 1º Ano (15 alunos) Professor José Manuel Sousa; 2º Ano (20 alunos) Professores Manuel de Jesus Linhares; 4º ano (3 turmas, num total de 62 alunos) Professora Claudia Sofia Valente, Maria de Fátima Isidora, Maria de Lurdes Vieira e Filomena do Vale Coelho (Professora especialista em EVT que lecciona naquela área as 22 turmas desta Escola).
- **Agrupamento EB 1 Nº 9 – Porto**, com a participação de 4 turmas do 2º ano e do 3º ano, respectivamente, 20 e 72 alunos, sendo responsáveis as professoras: Maria Leonor Coelho, Maria da Graça Pinto, Lúcia Cardoso e Ilídia Magalhães Silva.

Escolas e instituições a englobar em novas parcerias**:**

- Jardim de Infância de CEPI **- Centro de Educ. para a Infância Aurélia de Sousa - Porto;**
- Escola EB 1 nº34 inserida no **TEIP - Porto;**
- Agrupamento EB 1, nº 9 **– Porto ;**
- Câmara Municipal do Porto
- Museu Soares dos Reis e Casa de Serralves

Ensino Superior

- Docentes da Escola Superior de Educação do IPP de diferentes Departamentos.
- Alunos do Curso de Professores do Ensino Básico da Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico do Porto (ESE/IPP), variantes de Educação Visual e Tecnológica e de Matemática/Ciências.
- Alunos do Instituto Superior de Engenharia do Porto (ISEP) através da Unidade de Ensino a Distância do instituto Politécnico do Porto (UED/IPP).
- Educadores e Professores em formação contínua, integrada no FOCO, designadamente, em Curso de Complementos de Formação.

O desenvolvimento do projecto decorrerá em sala de aula através da elaboração de trabalhos com a leccionação de conteúdos específicos. Numa fase anterior está previsto um trabalho de campo de pesquisa, com visitas no exterior a monumentos, a exposições, ou outros eventos e, na escola, com procura bibliográfica e realização de tarefas específicas, em oficinas próprias.	

5. Acções Realizadas	

5.1 - Descrição das actividades desenvolvidas no ano anterior:

- Processo de adjudicação/aquisição de material informático e audiovisual para todas as escolas envolvidas no Projecto;
- Reuniões com os órgãos directivos e executivos das Escolas com vista à definição de estratégias e metodologias de acompanhamento do Projecto;
- Reuniões com os encarregados de educação, a fim de os sensibilizar para o desenvolvimento do Projecto;
- Reuniões concelhias com as Escolas envolvidas com o objectivo de realizar o enquadramento educativo do projecto e de elaborar metodologias de actuação face à pesquisa e concretização do mesmo, programando reuniões coma as Câmaras (pelouros do Ensino e da Cultura e Património Histórico);
- Definição de linhas de actuação futuras relacionadas com os produtos esperados do projecto;
- Elaboração de um projecto de formação de professores, dando prioridade aos professores envolvidos, em modalidade presencial e não presencial, com vista à acreditação, no âmbito do Programa FOCO;
- Estudo/elaboração de um modelo de trabalho/pesquisa que poderá servir e de orientação e linha condutora das actividades para todos os professores envolvidos;
- Reuniões de âmbito interdisciplinar com orientações concretas no âmbito da matemática e da educação visual;
- Divulgação de todas as actividades através de acções concretas ao nível das instituições e disponibilização da informação em site da Internet;
- Reunião com a Câmara Municipal do Porto, através da vereadora do pelouro da Cultura e Património Histórico, para exposição do Projecto. Houve com receptividade e disponibilidade para apoio futuro, designadamente na participação no Porto – 2001 capital europeia da cultura;
- Criação dos meios logísticos e espaços adequados, nas escolas e no pólo da ESSE/IPP, para o desenvolvimento das actividades previstas no Projecto;
- Pesquisa bibliográfica do assunto em estudo;

- Trabalho de grupo da Equipa Coordenadora com vista à intervenção no terreno;
- Visitas a locais do Património histórico-cultural com registo fotográfico.
- Registo das despesas realizadas
- Participação no Forum Ciência Viva na qualidade de observador das actividades desenvolvidas no âmbito do Programa Ciência Viva
- Estudo da possibilidade da extensão do projecto a outras escolas.

5.2 – Actividades previstas e não realizadas

- Utilização aprofundada de materiais na confecção de padrões geométricos, com reprodução do observado ou criação de outros exemplares.
- Actividades ainda não consolidadas de resolução de problemas relacionados com os conteúdos da geometria e grandezas e medidas.
- Resolução de problemas com utilização de software específico por motivos de falta de verba para aquisição dos respectivos programas
- Conclusão do relatório de actividades

6. Acções a Desenvolver

6.1 - Discriminação detalhada das actividades a realizar e respectiva calendarização:

Os alunos da Educação Básica realizarão actividades diversificadas nas áreas disciplinares de Matemática e de Educação Visual e Tecnológica, das quais se destacam:

- Desenhos: reprodução e criação de frisos e pavimentos
- Recortes
- Dobragens
- Pintura
- Decalque
- Preencher/Contornar linhas
- Estampagem
- Utilização de espelhos
- Construções com materiais manipulativos, utilizando instrumentos específicos de desenho (compasso, régua, esquadro, transferidor, …)
- Exploração de software específico (programas de desenho e de matemática)
- Digitalização de informação
- Recolha de dados, utilizando a máquina fotográfica
- Criação de uma base de dados e de um "site" na Internet
- Pesquisa na Internet para recolha de informação, registo de dados e partilha de ideias com alunos e professores de outras escolas
- Resolução de problemas de âmbito topológico e de geometria euclideana, com destaque, para as transformações geométricas.
- Outras

Seguidamente descreve-se a agenda e a calendarização do desenvolvimento do projecto ao longo de dois anos. Esta calendarização tem em conta o projecto educativo e a planificação/programação das actividades do calendário escolar previsto nas escolas envolvidas.
A proposta apresentada prevê a definição das actividades fundamentais, podendo (e devendo) algumas delas prolongarem-se no tempo, para aprofundamento e/ou satisfazendo motivações e contextos educativos existentes.

Calendarização

Ano 2001

Janeiro e Fevereiro

- Pesquisa bibliográfica, cronológica e cultural do assunto em estudo. Trabalho, em grupo, de cooperação entre professores da mesma disciplina ou das áreas disciplinares propostas ou afins. Definição de linhas orientadoras com os Centros que compõem a equipa coordenadora.
- Trabalho em grupo dos elementos que constituem a equipa coordenadora que conjuntamente com os professores envolvidos e alunos em formação inicial do Ensino Superior.
- Diálogo mais profundo com a C. M. do Porto, definindo estratégias de cooperação.

Março e Abril

- Visitas a locais do património histórico-cultural mais significativo da cidade do Porto, em termos de frisos e pavimentos.
- Registo fotográfico com revelação da fotografia, no clube de Fotografia.
- Utilização de materiais na confecção de padrões geométricos, com reprodução do observado ou criação de outros exemplares.
- Actividades de resolução de problemas, relacionadas com conteúdos da Geometria e Grandezas e Medidas, baseadas na experimentação e no levantamento de conjecturas.
- Análise reflexiva e (re)definição das estratégias de actuação.

Maio

- Promoção de actividades de resolução de problemas com utilização de software específico e/ou materiais manipuláveis, de acordo com o nível de ensino dos alunos, abordando os conteúdos: polígonos (identificação/classificação); cálculo de perímetros e áreas (de triângulos, rectângulos, quadrados e de outras figuras geométricas); transformações geométricas, com identificação/selecção e descoberta de propriedades.

Junho • Colaboração/participação nas actividades, das escolas, de encerramento do ano escolar, com divulgação dos trabalhos realizados. Julho • Avaliação interna. Estudo da extensão do projecto a outras escolas. Análise de possíveis apoios financeiros. Elaboração do Relatório. Setembro e Outubro • Reflexão e planificação de novas actividades e metodologias de modo a contemplar os parâmetros diagnosticados e analisados na avaliação interna. • Diálogo com os pais e encarregados de educação na colaboração no desenvolvimento do projecto, designadamente no registo bibliográfico, pesquisa de dados no meio envolvente, através do registo fotográfico e também na Internet. Novembro • Contacto com empresas que se relacionem directamente com o estudo, com vista à colaboração na concretização do projecto. • Criação de peças decorativas e ilustrativas de frisos. • Confecção sistematizada e duradoira de materiais com vista ao desenvolvimento de protocolos e pesquisas experimentais no domínio da Matemática. *Ano 2002* Janeiro • Aprofundamento do trabalho realizado. Pesquisas com envolvimento pessoal e observação do meio envolvente, registo fotográfico, confecção de materiais e enriquecimento do "site" na Internet (quando possível). • Divulgação à comunidade educativa escolar do trabalho desenvolvido. Fevereiro e Março • Preparação de uma mostra de materiais, a integrar na iniciativa conjunta da ESE/IPP, da C. M. do Porto, da C. M. de Valongo e da DREN, em Educação Matemática. Abril • Participação no Porto 2001 – capital europeia da cultura. Maio • Análise reflexiva do trabalho realizado. Elaboração de instrumentos de avaliação. Selecção dos trabalhos mais significativos. • Participação no Forum da Ciência Viva. • Elaboração de documentação de suporte.	

Junho • Avaliação interna. Julho • Compilação e sistematização de dados. • Colaboração no encerramento do ano escolar nas escolas. • Elaboração de um relatório final. **6.2 – Materiais que pensa adaptar/desenvolver ao longo do projecto:** Dos materiais a utilizar, destacam-se os materiais de suporte manipuláveis para reprodução/concepção de padrões geométricos observados ou inventados, que permitam um estudo a três dimensões e materiais audiovisuais e tecnológicos que proporcionem um estudo experimental, a duas dimensões, de pesquisa e sistematização de dados. Deverá então ser providenciado a execução de alguns materiais, em oficinas próprias ou nas aulas da disciplina de Expressão Educação Visual e Tecnológica desenvolvidos por alunos e professores, colaboradores do projecto. Assim, para a concretização do projecto será necessária a aquisição dos seguintes materiais: • Objectos específicos: azulejos, cartolinas, lápis, vernizes, liga de metal, … • Um computador multimedia por escola com ligação à Internet • Uma impressora por Escola • Uma máquina fotográfica digital por escola.	

6.3 – Forma de divulgação do projecto e dos materiais produzidos A disseminação dos resultados deverá ser concretizada do seguinte modo: • Colaboração no projecto educativo das escolas, com o envolvimento na planificação de actividades de início, desenvolvimento e encerramento do ano escolar. • Integração dos conteúdos relacionados com o tema em estudo na formação contínua de educadores e professores do Ensino Básico de Valongo e de concelhos limítrofes, na modalidade do FOCO. • Integração numa iniciativa em Educação Matemática – Baú de Matemática. • Divulgação conjunta com as Câmaras Municipais, através dos Pelouros da Cultura, e com empresas, do trabalho realizado, com participação em mostras culturais. • Elaboração e publicação de artigos em revistas de educação, em particular, em Educação Matemática.	

• Comunicação em Encontros e Congressos de Educação e de âmbito cultural. • Avaliação de resultados e consequentemente o estudo da possibilidade de extensão do projecto a outras escolas das regiões ou outras regiões. • Participação em Encontros promovidos pelo Programa Ciência Viva. • Recolha e sistematização dos trabalhos em *port-folio* para posterior divulgação. • Actividades na Comunidade Educativa no âmbito do PORTO 2001 Capital Europeia da Cultura.	

7. Avaliação

	Reservado para a C. S.
7.1 - Como pretende avaliar as acções Estão previstas avaliações internas do projecto sob a orientação/responsabilidade do Professor Doutor Alcino Matos Vilar, docente da ESSE/IPP. Também está prevista a avaliação formal relativa aos conteúdos leccionados ao longo do Projecto, através de entrevistas realizadas aos alunos, testes individuais e em grupo Avaliações internas da equipa coordenadora, dos professores das escolas em grupos interdisciplinares e em reuniões concelhias.	

8. Apoios Esperados

	Reservado para a C. S.
8.1 - Recursos materiais existentes: Para além de alguns equipamentos já existentes nas escolas envolvidas, no âmbito do projecto UARTE, a Escola Superior de Educação, enquanto entidade coordenadora, disponibiliza também um laboratório de 13 computadores para as sessões de formação e aferição de critérios de utilização dos meios informáticos a disponibilizar. 8.2 - Proposta de orçamento ….	

Ministério da Ciência e da Tecnologia

"Envolvências Geométricas I e II – A Geometria na cidade" - RELATÓRIO FINAL

1. Introdução e Caracterização Genérica do Projecto

"Envolvências Geométricas" é um subprojecto do ***Baú de Matemática*** direccionado para aprendizagens geométricas interdisciplinares. ***O Baú de Matemática*** é um projecto de investigação-acção em Educação Matemática, iniciado em 1995, resultante da implementação de um projecto educativo de escola, envolvendo escolas do ensino básico, do ensino superior, poder autárquico e centros de formação de professores.

O projecto "Envolvências Geométricas I e II" iniciou-se em 1998 e terminou oficialmente em 2002, tendo sido realizado no âmbito do programa Ciência Viva. Este projecto desenvolveu-se em duas fases, numa primeira fase com três pólos de desenvolvimento: **Valongo** (Agrupamento de Escolas Básicas EB1 e EB2,3), **Gafanha da Nazaré** (Jardim de Infância da Encarnação e EB 2,3) e **Porto** (Escola Superior de Educação do I. P. do Porto, na formação inicial e contínua de professores) e numa segunda fase integrando mais um Jardim de Infância e duas escolas do 1º ciclo do ensino básico, respectivamente, o CEPI do Porto, a escola de Fernão de Magalhães e a de Costa Cabral.

O projecto tem como foco de aprendizagem o património histórico, cultural e artístico da região onde se encontra inserida a Escola, tendo cada um dos pólos implementado-o de acordo com o meio envolvente e o contexto educativo existente.

O projecto "Envolvências Geométricas" tem como objecto de estudo padrões geométricos pesquisados em frisos e pavimentos que fazem parte do património cultural do núcleo urbano de várias cidades do distrito do Porto e de Aveiro.

Através desta pesquisa pretendeu-se evidenciar o "envolvimento" da Matemática com a cultura e o património artístico de uma região, numa estreita relação do campo científico com a realidade do aluno. Procurou-se, assim, investir em aprendizagens multidisciplinares, explorando competências, valores e atitudes em vários campos do saber, em diferentes níveis de ensino e modalidades de formação. No desenvolvimento do projecto valorizou-se o gosto pela observação, pela arte e sentido estético e pelo conhecimento do património histórico-cultural das localidades, com recurso às tecnologias de informação e comunicação.

ABSTRACT

The Project aims to acknowledge the existence of geometrical patterns in bands, friezes and pavements that take part in the cultural heritage of Porto and Aveiro.

Through this research we aim to highlight the "commitment" of Mathematics in the cultural and artistic heritage of the region, thus merging scientific knowledge with the pupils own reality and cultural background. We seek to invest in multidisciplinary learning, exploring competencies, values and attitudes in several fields of knowledge, enhancing the apetence for arts and for the knowledge of the historical and cultural heritage of the places studied and, consequently of the country, through the use of several instruments based on information and communication technologies.

Áreas disciplinares:

Matemática, Educação Visual e Tecnologias da Informação e de Comunicação

2. Actividades Desenvolvidas

O relatório foi estruturado de acordo com as actividades de preparação, concepção, implementação e avaliação desenvolvidas no terreno que integram as seguintes rubricas:

Reuniões de trabalho
Aquisição de material
Concepção de material
Processo Aprendizagem-ensino
Contactos/Disseminação do Projecto
Formação Contínua
Participação em Encontros
Extensão e Registo

Reuniões de trabalho

Reuniões da equipa coordenadora da ESE/IPP para reflexão, elaboração de propostas de actuação com vista à intervenção no terreno.
Reuniões com entidades responsáveis por instituições: presidente do Instituto Politécnico do Porto, presidente da Direcção Regional de Educação do Norte, presidente da Câmara Municipal de Valongo e com os órgãos directivos e executivos das Escolas com vista à definição de estratégias e metodologias de acompanhamento do Projecto.

Reuniões concelhias nas Escolas com professores de diferentes níveis de ensino e de diferentes áreas (Matemática, Educação Visual e Novas Tecnologias), com o objectivo de realizar o enquadramento educativo do projecto e elaborar metodologias de actuação face à pesquisa e concretização do mesmo, programando reuniões com as Câmaras através dos Pelouros do Ensino e da Cultura e Património Histórico.

Reuniões de âmbito interdisciplinar com orientações concretas no âmbito da Matemática, da Educação Visual e outras áreas curriculares não disciplinares, designadamente, a Oferta da Escola em Tecnologias de Informação e Comunicação.

Reuniões com os encarregados de educação, a fim de os sensibilizar para o desenvolvimento do Projecto.

Aquisição de Material

Processo de adjudicação/aquisição do material informático e audiovisual previsto para todas as escolas envolvidas no Projecto.

Processo de aquisição de material específico para apoio contínuo e/ou temporário às Escolas.

Concepção de Material

Pesquisa, concepção e construção de material específico para o desenvolvimento do projecto, dos quais se destacam: realização de azulejos, em barro e em lousa, confecção de vestuário em papel e plástico, produção de slides e de fotografias, elaboração de sites na Internet, com a exploração de programas vectoriais de desenho, organização de *por-folios*, entre outros.

Processo Aprendizagem e Ensino

Actividades de desenvolvimento de competências nas diferentes áreas disciplinares propostas, com aprofundamento na área de matemática, em aprendizagens experimentais de conteúdos relacionados com a geometria e grandezas e medida.

Utilização de espelhos na aprendizagem do conceito de reflexão.

Observação de diferentes formas, representação e construção. Análise de propriedades e classificação.

Estudo experimental de diferentes transformações geométricas e de conceitos de geometria euclideana.

Trabalho interdisciplinar de animação da Escola e de intervenção no meio, especificamente, na festa popular carnavalesca, em Valongo.
Estudo aprofundado, sob o ponto de vista visual e matemático de uma rua da Gafanha da Nazaré.

Visitas a locais do Património histórico-cultural com registo fotográfico.

Mostra de trabalhos, nos diferentes Jardins de Infância e Escolas do 1º e 2º ciclos, realizados no âmbito do Projecto.

Participação activa e responsável no Baú de Matemática VII, através da dinamização de várias oficinas (consultar, em anexo, as actas do Baú VII)

Contactos/Disseminação do Projecto

Reunião com a Câmara Municipal do Porto, através da vereadora do pelouro da Cultura e Património Histórico, para exposição do Projecto. Houve receptividade e disponibilidade para apoio futuro, designadamente na participação no Porto – 2001 capital europeia da cultura.

Encontros com directores executivos e professores das escolas com vista à elaboração da proposta de alargamento do projecto e apresentação da candidatura ao programa Ciência Viva IV.

Criação dos meios logísticos e espaços adequados, nas escolas e no pólo da ESE/IPP, para o desenvolvimento das actividades previstas no Projecto abrangendo, designadamente, a alunos da formação inicial e contínua de professores.

Divulgação de todas as actividades através de acções concretas ao nível das instituições e disponibilização da informação em site da Internet.

Estudo da possibilidade da extensão do projecto e contactos efectivos com outras escolas nacionais e estrangeiras.

Apresentação do projecto, em ambiente de aula, a alunos da formação inicial e contínua com vista à colaboração em actividades a desenvolver futuramente.

Formação Contínua

Elaboração de um projecto de formação de professores, dando prioridade aos professores envolvidos, em modalidade presencial e não presencial, com vista à acreditação, no âmbito do Programa FOCO, o qual foi já acreditado (segue, em anexo, processo completo);

Estudo/elaboração de um modelo de trabalho/pesquisa que poderá servir de orientação e linha condutora das actividades para todos os professores envolvidos.

Pesquisa bibliográfica do assunto em estudo.

Participação em Encontros

Participação em dois Fóruns do Ciência Viva: Fórum Ciência Viva III e V, como observadores e expositores das actividades desenvolvidas.

Participação no Baú de Matemática V, VI e VII.

Extensão e Registo

Definição de linhas de actuação futuras relacionadas com os produtos esperados do projecto.

Organização de *port-folios* e *dossiers* que proporcionaram a compilação e a divulgação das actividades do Projecto.

ESE/IPP, 22 de Setembro de 2002

A Coordenadora do Projecto

____

Dárida Maria Fernandes

ANEXO 3
(Questionário aos estudantes)

Questionário aos Alunos

Nome:	Ano/Turma:	Data:

O *computador* faz parte do teu dia a dia: está nas escolas, nos museus, nas empresas, na casa dos teus amigos, …
e muitas vezes usa-lo para desenhares, escrever textos, aprender coisas novas.
De facto, esta máquina tem imensas capacidades com as quais também podes desenvolver as tuas!
Mas, afinal, o que pensas tu do computador? Qual é a sua utilidade? Será que te pode ajudar a raciocinar melhor?

Para conhecermos as tuas ideias sobre estas e outras questões elaboramos este questionário. Pedimos a tua colaboração, assinalando com uma cruz, a(s) tua(s) opção(ões) e, sempre que te for pedido, apresenta as razões da tua escolha.

Obrigada.

1. Já alguma vez utilizaste o computador? Sim [ ] Não [ ]
   Se assinalaste Sim, responde agora às questões seguintes. Se optaste pelo Não passa à questão nº 7.

2. Utilizas o computador, aproximadamente:
   menos de 1 hora/semana [ ] entre 1 a 5 horas/semana [ ] mais de 5 horas/semana [ ]

3. Gostavas de utilizar mais horas o computador? Sim [ ] Não [ ]

   Porquê? ____

4. Utilizas o computador em:

   Casa [ ] Casa de amigos [ ] Casa dos avós [ ] ATL [ ] Escola [ ]

   Aulas [ ] Quais? ____________ Outros Locais [ ] Quais? ____________

5. Utilizas o computador para fazeres os TPC de Matemática? Sim [ ] Não [ ]
   Se Sim, aproximadamente:
   menos de 1 hora/semana [ ] entre 1 a 5 horas/semana [ ] mais de 5 horas/semana [ ]

6. Utilizas o computador para realizar várias actividades
   6.1. Como por exemplo:
   Jogar [ ] Desenhar [ ] Escrever Textos [ ] Resolver Problemas de Matemática [ ]
   Pesquisar na Internet [ ] Usar correio electrónico [ ] Outras [ ]Quais?__________

   6.2. Em quais destas actividades gastas mais tempo? ____________________

7. Achas que o computador poderia ajudar-te a gostares mais da(e):
   Escola [ ] Matemática [ ] Outras disciplinas [ ] Quais? ________________
   Outros interesses [ ] Quais? ______________________________

8. Pensas que o computador poderia ajudar-te a:

Raciocinar melhor	[ ]	Trabalhar em grupo	[ ]
Colocar mais questões	[ ]	Comunicar melhor	[ ]
Resolver problemas de Matemática	[ ]	Desenvolver outros aspectos	[ ] Quais?

   ____

   Porquê? ____

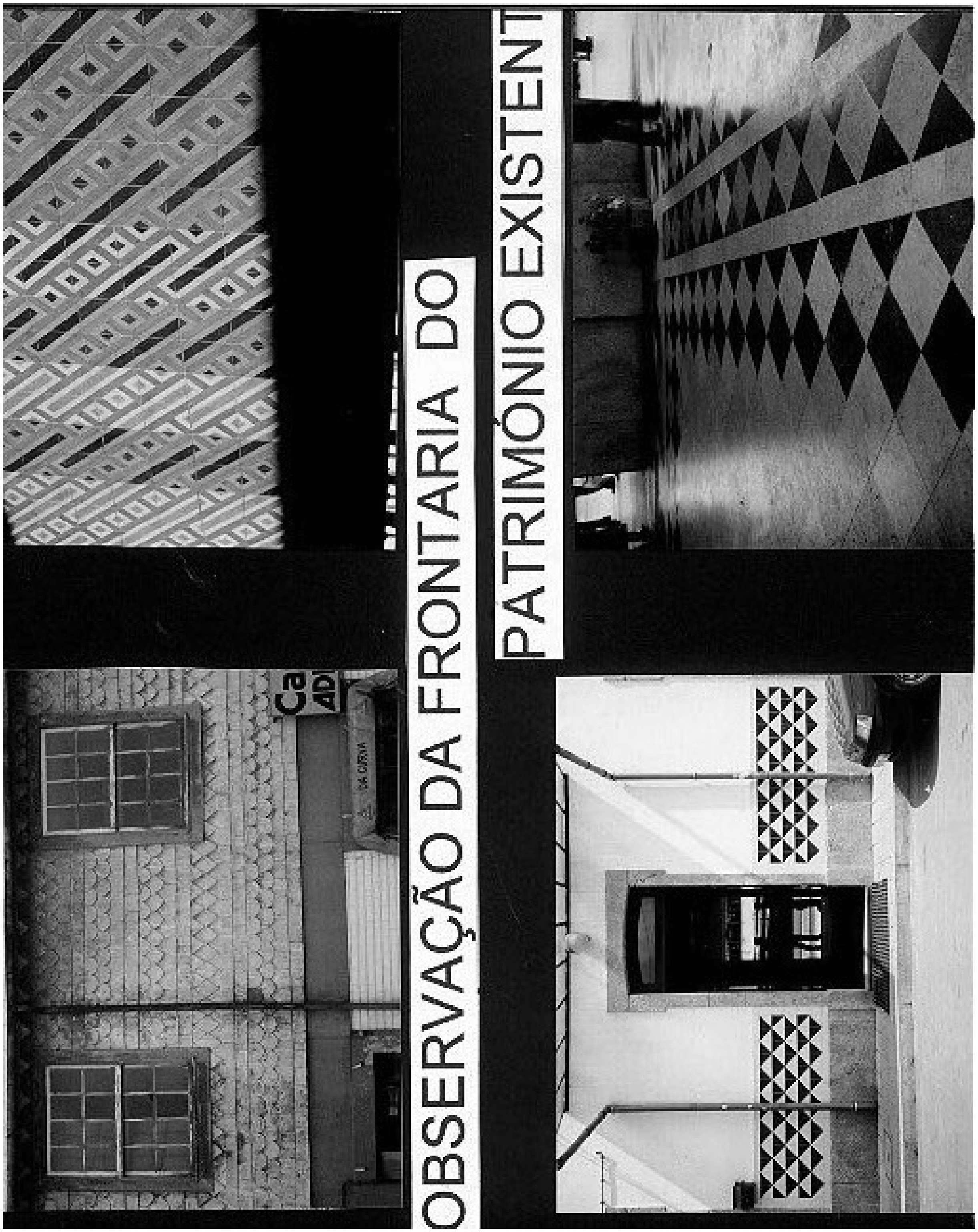
9. O que representa para ti o computador?
   Faz uma pequena composição sobre a importância do computador na tua vida e o papel que representa na sociedade moderna. Ilustra as tuas ideias com um desenho.

Mais uma vez obrigada pela tua colaboração.

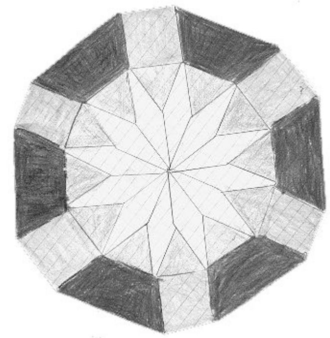
ANEXO 4

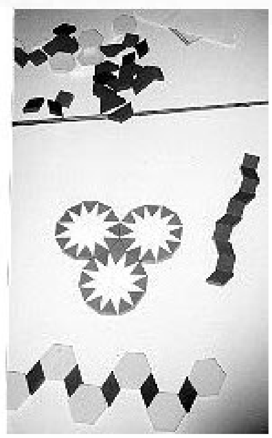
(Algumas das Tarefas propostas e realizadas no 2º e 3º ano de escolaridade)

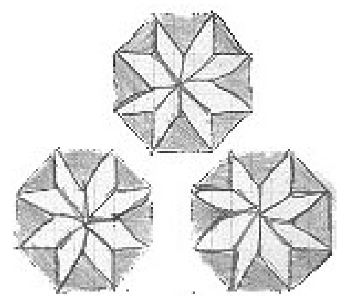
Observação de padrões nos espaços envolventes à Escola: pavimentos, frontarias, …
Registo particular dos azulejos da Estação do Caminho de Ferro da cidade.

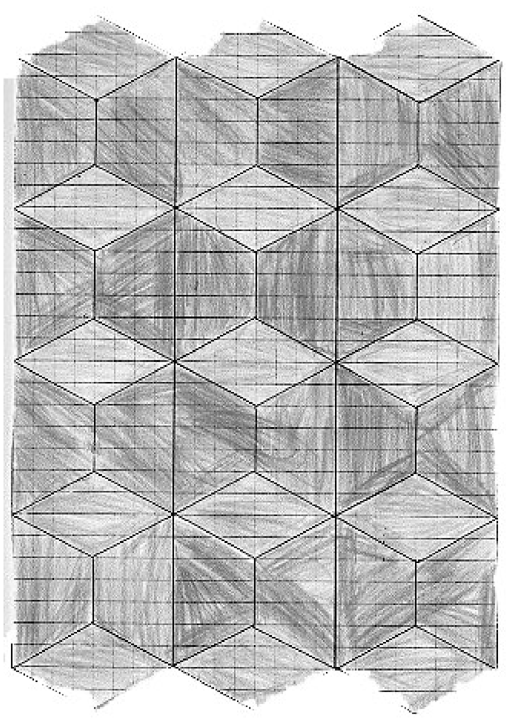


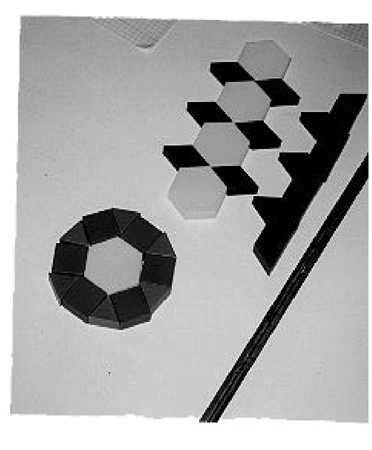
Com o material manipulável – “caixa de formas coloridas”
A criança cria, constrói, observa e regista





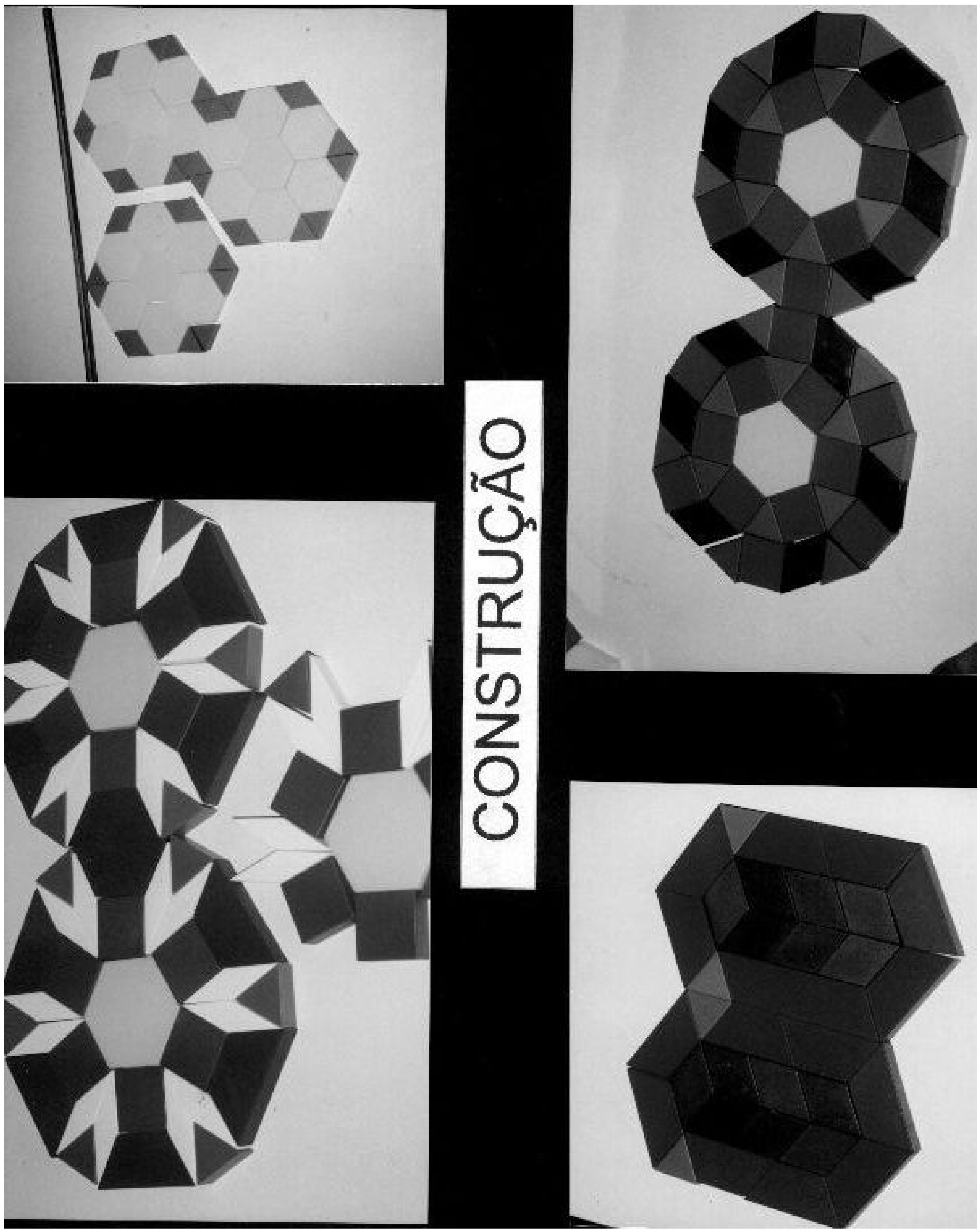




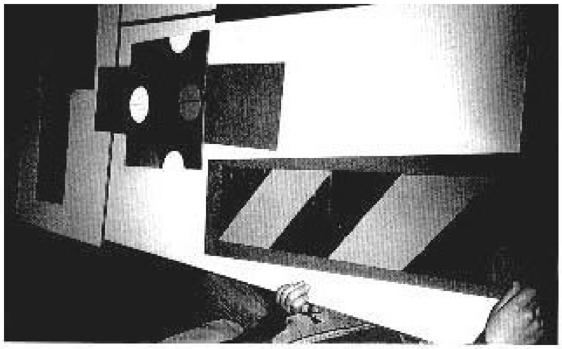


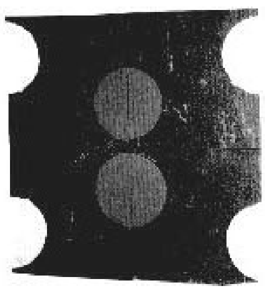
Descobrir regularidades
Criar e completar padrões
Descobrir frisos e pavimentos
Identificar e criar figuras geométricas
Identificar diferentes tipos de ângulos
Usar instrumentos de medida na concepção de padrõ

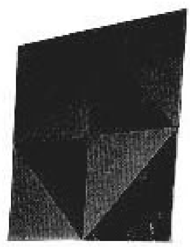
Trabalhos de composição de padrões com utilização dos materiais
da "caixa de formas coloridas"



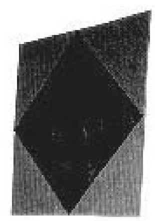
Construção de frisos com material da região - ardósia



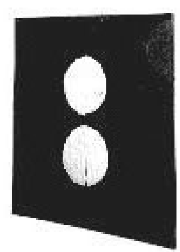




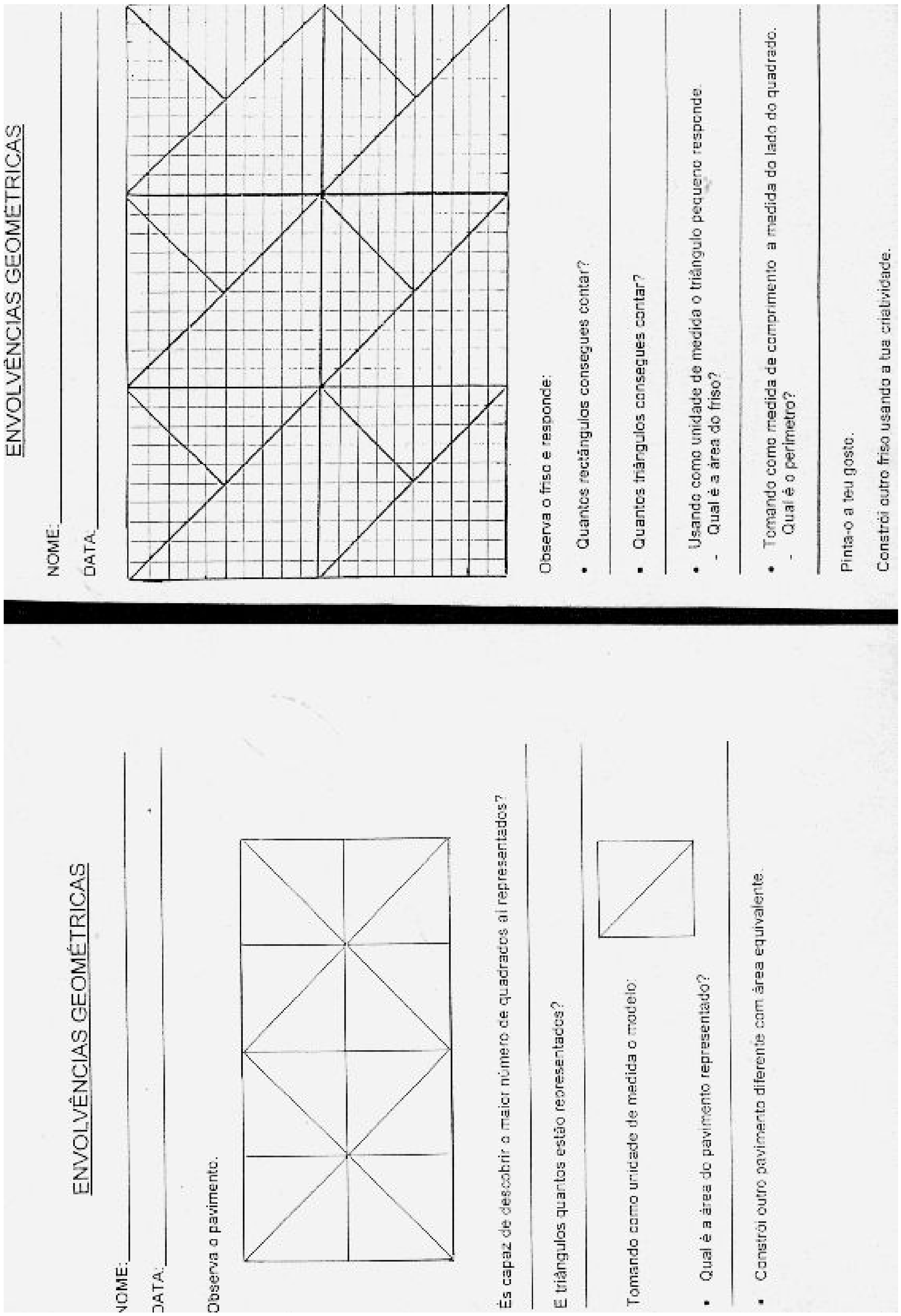
Reproduzir o que observaram



Identificação de formas



Folha de trabalho
Consolidação de conhecimentos geométricos


ENVOLVÊNCIAS GEOMÉTRICAS

NOME:

DATA:

Observa o friso e responde:

- Quantos rectângulos consegues contar?
- Quantos triângulos consegues contar?
- Usando como unidade de medida o triângulo pequeno responde.
  - Qual é a área do friso?
- Tomando como medida de comprimento a medida do lado do quadrado.
  - Qual é o perímetro?

Pinta-o a teu gosto.

Constrói outro friso usando a tua criatividade.

ENVOLVÊNCIAS GEOMÉTRICAS

NOME:

DATA:

Observa o pavimento.

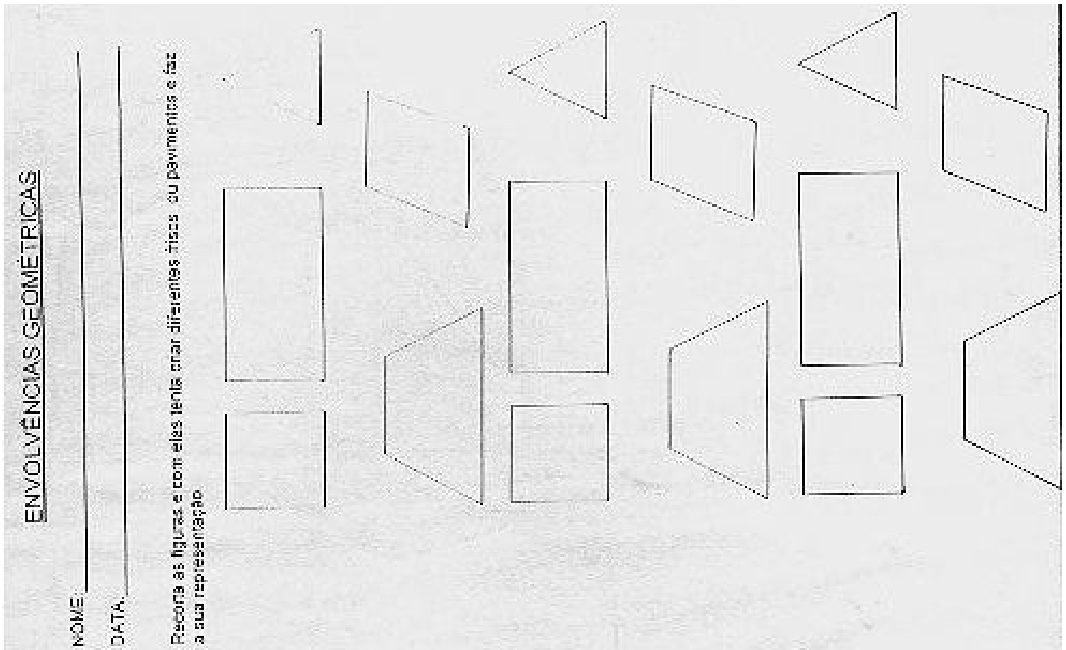
És capaz de descobrir o maior número de quadrados aí representados?

E triângulos quantos estão representados?

Tomando como unidade de medida o modelo:

- Qual é a área do pavimento representado?
- Constrói outro pavimento diferente com área equivalente.

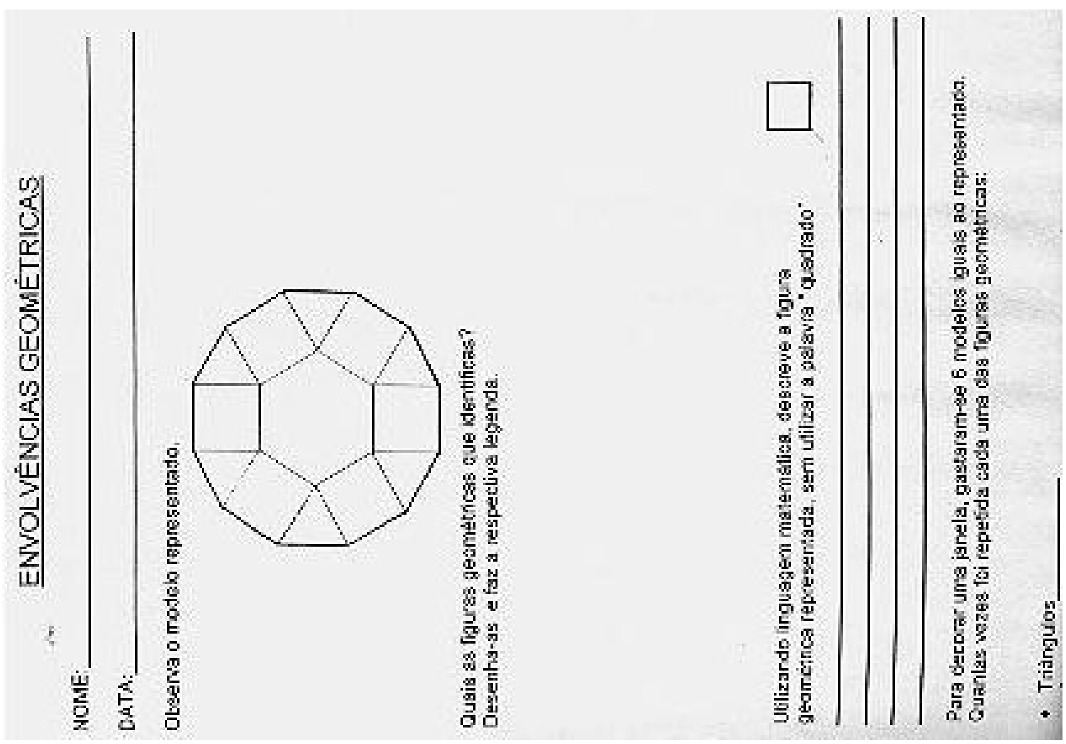
Folha de trabalho
Consolidação dos conhecimentos geométricos


ENVOLVÊNCIAS GEOMÉTRICAS

NOME: ____________________

DATA: ____________________

Recorta as figuras e com elas tenta criar diferentes frisos ou pavimentos e faz a sua representação.


ENVOLVÊNCIAS GEOMÉTRICAS

NOME: ____________________

DATA: ____________________

Observa o modelo representado.

Quais as figuras geométricas que identificas?
Desenha-as e faz a respectiva legenda.

Utilizando linguagem matemática, descreve a figura geométrica representada, sem utilizar a palavra "quadrado"

Para decorar uma janela, gastaram-se 6 modelos iguais ao representado.
Quantas vezes foi repetida cada uma das figuras geométricas:

- Triângulos ____

ANEXO 5

(Tarefas propostas no 4º ano de escolaridade)

FOLHA de TRABALHO
Escola: ___________________________________ *Ano e Turma:* _______ *Ano Lectivo:* _______ / _____
Nome dos Alunos: ____ Data: _________

À Descoberta de Números

O António e alguns dos seus amigos resolveram participar num concurso de actividades matemáticas.

Uma das questões relacionava-se com números. Era necessário descobrir, em cada pergunta, dois números diferentes, de tal forma que, cada um dos números, não fosse superior a 20 e que verificassem as seguintes condições:

1. Descobrir dois números cuja soma é 29 e cuja diferença é 9.

R: ____

2. Encontrar dois números cuja soma é 25 e cujo produto é 126.

R: ____

3. Encontrar dois números cuja soma é 24 e cuja diferença é 9.

R: ____

4. Descobrir dois números cuja soma é 11 e cujo produto é 29,25.

R: ____

FOLHA de TRABALHO

Escola: ________________________________ *Ano e Turma:* _______ *Ano Lectivo:* _______ / _____

Nome dos Alunos: ____ Data: _________

As Idades dos Filhos

1. O Sr. Manuel tem três filhos. Que idade têm eles, sabendo que:

   - a soma das suas idades é 20;
   - o produto das suas idades é 160.

R: ____

2. A D. Maria tem dois filhos. Sabendo que a soma das idades dos filhos é 35 e o produto é 300, qual é a idade de cada filho?

R: ____

3. Inventa, agora, um problema relacionado com a idade das pessoas.

R: ____

____

____

FOLHA de TRABALHO

Escola: ________________________________ *Ano e Turma:* _______ *Ano Lectivo:* _______ / _____

Nome dos Alunos: ____ Data: _________

Vamos Fazer um Bolo!…

Receita de bolo de maçã:

4 ovos, 150g de açúcar, 100g de margarina, 250g de farinha, 2 maçãs, 1 limão, 2 colheres de sopa de geleia de fruta, 1 colher de chá de fermento.

1. Supondo que se utilizam 8 ovos, faz as adaptações necessárias para elaborares o bolo de maçã.

R.: ____

____

____

2. Supondo que a receita inicial era adequada para 6 pessoas, adapta esta receita para 18 pessoas.

R.: ____

____

____

3. Conhecendo as condições iniciais do problema, elabora de novo a receita de modo que dê para 15 pessoas.

R.: ____

____

____

4. E se multiplicares os dados da receita por 1,5, para quantas pessoas chega o bolo?

R.: ____

FOLHA de TRABALHO

Escola: __________________________________ *Ano e Turma:* _______ *Ano Lectivo:* _______ / _____

Nome dos Alunos: ____ Data: _________

A Compra de Cromos

A Ana Isabel e o João costumam comprar cromos na papelaria do Sr. António.
A tabela seguinte indica alguns dados das compras efectuadas pelos dois amigos.

nº de carteiras	1	2	3	5	[ ]	10	12	[ ]
nº de cromos	3	6	9	[ ]	24	30	[ ]	60

1. Completa o quadro.

2. Seria possível que o João tivesse comprado, num só dia, 11 cromos? Porquê?

R: ____

____

3. Os dois meninos poderiam ter comprado, exactamente, 21 cromos? Como?

R: ____

____

4. Com os dados do problema, inventa uma questão e apresenta a respectiva resposta.

R: ____

____

____

FOLHA de TRABALHO

Escola: ________________________________ *Ano e Turma:* _______ *Ano Lectivo:* _______ / _____

Nome dos Alunos: ____ Data: _________

A Pintura das Peças de Cerâmica

Durante a visita de estudo à fábrica de louça e perante a questão levantada por um aluno sobre o tempo gasto na pintura de uma peça o gerente referiu que dependia, fundamentalmente, do modelo da peça e forneceu-lhes uma tabela sobre um deles.

Os dados recolhidos estão na tabela seguinte.

Nº de Peças Pintadas	2	4	5	7	8
Tempo em horas	3	6	7,5	10,5	12

1. Em condições idênticas, qual seria o tempo gasto na pintura de 9 peças, do mesmo modelo? E na elaboração de 20 peças? Expõe os teus raciocínios.

R: ____

2. Qual é, aproximadamente, o tempo gasto na pintura de uma peça?

R: ____

3. Achas que os dados fornecidos pela tabela são rigorosamente exactos, ou aproximados? Porquê?

R: ____

____

FOLHA de TRABALHO
Escola: ___________________________________ *Ano e Turma:* _______ *Ano Lectivo:* _______ / _____
Nome dos Alunos: ____ Data: _________

A Cantina Escolar

A tabela abaixo refere-se à compra de maçãs, para a cantina, de uma Escola, durante alguns meses do ano.

Quantidade de Maçãs (Em Quilos)	40	35	30	**a**	10
Preço (em euros)	13,60	**b**	10,20	8,50	3,40

1. Calcula os valores de **a** e **b**.

R: ____

2. Qual é o preço de cada quilo de maçãs?

R: ____

3. Inventa pelo menos uma questão sobre estes dados.

R: ____

____

____

FOLHA de TRABALHO

Escola: ___________________________________ *Ano e Turma:* _______ *Ano Lectivo:* _______ / _____

Nome dos Alunos: ____ Data: _________

A carga certa para o "peso" certo

1) A tabela seguinte tem como finalidade ajudar-te a perceber que deves transportar, na tua mochila, uma carga adequada ao teu "peso".

"Peso" da criança	**Carga da mochila**
20	2
	2,7
31	3,1
39	
45	4,5
	5
51	

1.1.Observa e analisa cuidadosamente a tabela.

1.2. Que relação encontras entre o "peso" da criança e a carga da mochila?

____

____

2. Completa a tabela, tendo em conta a relação que encontraste.

3. Sabendo o teu "peso" prevê a carga adequada para a tua mochila.

4. Verifica se a tua mochila tem a carga correcta para o teu "peso".

5. Escreve um pequeno "slogan" publicitário relativo à informação apresentada na tabela.

____

____

FOLHA de TRABALHO

Escola: ________________________________ *Ano e Turma:* _______ *Ano Lectivo:* _______ / _____

Nome dos Alunos: ____ Data: _________

Uma Razão Importante!

A natureza é linda e por vezes apresenta formas bem interessantes.

Por exemplo, sabes que num tronco de uma árvore, os círculos, mais ou menos concêntricos, informam a idade da planta. Pois é, há também regularidades entre aspectos de determinado tipo de objectos que vale a pena pensar. Vejamos o que acontece com objectos circulares.

Para estudarmos essas particularidades precisamos de uma fita métrica e de termos à mão objectos circulares, tais como: troncos de árvore, panelas ou testos de panela, caixas cilíndricas, latas, garrafas, etc, objectos de forma circular.

O projecto de trabalho consiste em:

1. Medir, com a ajuda de uma fita métrica, a "grossura" do objecto.

2. Medir ainda "largura" do objecto, isto é, medir o comprimento que vai de um ponto exterior do objecto a outro diametralmente oposto, passando pelo centro.

3. Organizar estes dados na folha de cálculo.
   Para cada objecto identificar o nome, assinalar a "grossura" e a "largura".

4. Determinar a razão, ou o quociente, entre a "grossura" do objecto e a sua "largura", utilizando uma outra coluna da folha de cálculo.

Que observas? Qual é o valor desse quociente, qualquer que seja o objecto?
Será que isto acontece com todos os objectos de forma circular? Investiga.

Pensa noutros objectos, tais como, botão, roda, disco, etc.
Anota todas as tuas experiências no teu caderno e tenta tirar conclusões….

R: ____

____

____

FOLHA de TRABALHO

Escola: ___________________________________ *Ano e Turma:* _______ *Ano Lectivo:* _______ / _____

Nome dos Alunos: ____ Data: _________

O terreno do Sr. António!...

O Sr. António quer comprar um terreno cujo perímetro seja de 20 unidades de comprimento mas onde possa plantar o máximo de batatas, isto é, cuja área do terreno seja máxima.

Sabendo que a largura e o comprimento são números inteiros as dimensões dos terrenos poderão ser várias, qual é aquela que interessa mais ao Sr. António?

Por exemplo, o rectângulo de 6 por 4, verifica as condições do problema, isto é o perímetro é 20 (6 + 6 + 4 + 4 =20), mas a área é 24.

Será que há mais rectângulos com este perímetro e cuja área seja superior? Investiga…

Para resolveres o problema deves usar papel quadriculado e desenhar todos os possíveis terrenos rectangulares nas condições definidas pelo problema.

Podes ainda organizar os dados, numa tabela, prevendo todos os casos possíveis, como ilustra o quadro seguinte.

Comprimento	*Largura*	*Perímetro*	*Área*
1	*9*	*20*	*9*
2	*8*	*20*	*16*

Conclusões:

R: ____

____

____

ANEXO 6

(Tarefas propostas no 5º ano de escolaridade)

FOLHA de TRABALHO

Escola: ____________________________________ *Ano e Turma:* ______ *Ano Lectivo:* _____ / __

Nome dos Alunos: ____ Data: ________

SÓLIDOS GEOMÉTRICOS

I. **Leiam** e **reflictam** em cada uma das três frases seguintes.
Com os colegas de grupo discutam e estudem o valor lógico de cada uma das frases, isto é, analisem se cada uma das afirmações é **verdadeira** ou é **falsa**.
Escrevam a conclusão a que chegaram.

FRASES:

1. *O **número de vértices** de um **prisma** é **sempre um número par**.* _______

2. *O **número de vértices** de uma **pirâmide** pode ser um número par ou ímpar.* _______

3. *Dos poliedros estudados, a fórmula* $\boldsymbol{8^{(*)}+F^{(*)} = A^{(*)}+2}$ *só pode representar um **prisma**.* _______

II. Justifiquem, por palavras vossas, a conclusão a que chegaram na última frase.

____

____

____

____

III. Numa turma do 5º ano os alunos estavam entusiasmados a estudar os *sólidos geométricos*.

1. No grupo da Maria, depois de algumas pesquisas, um aluno exclamou:
*- Olha que engraçado o número de faces e o número de vértices de uma **pirâmide** é sempre igual!...*

Acham que o colega da Maria tinha razão? Justifiquem a vossa resposta.

____

____

____

____

(*) **8** representa o número de vértices (**V**) de um poliedro
(*) **F** representa o número de faces do poliedro e **A** representa o número de arestas do poliedro

III. 2. A professora gostou do entusiasmo dos alunos e perguntou:

- Será que há ***outras regularidades*** *nos* ***prismas****?*

Os alunos pesquisaram e chegaram entusiasticamente a mais conclusões…
A que resultados os alunos poderiam ter chegado? Justifiquem a vossas respostas.

____

____

____

____

IV. Gostaram de realizar, em grupo, esta folha de trabalho? Porquê?

____

____

____

____

FOLHA de TRABALHO
Escola: ___________________________________ *Ano e Turma:* _______ *Ano Lectivo:* ________ / ____
Nome dos Alunos: ____ Data: _________

Itinerários na planta da minha cidade[3]

Organiza, na tabela seguinte, os dados recolhidos na **planta da cidade de Valongo**, nas aulas de *Estudo Acompanhado* e de *Matemática*.

Da Casa à Escola – Itinerários

Grupos (Casa escolhida)	**Planta** (medida em **cm**)	**Real** (medida em ________)	Cálculos necessários
A			
B			
C			
D			
E			

1. Onde estão localizadas cada uma das casas escolhidas pelos cinco grupos de trabalho?

Casa A ________ Casa B ________ Casa C ________ Casa D ________ Casa E _________

2. Quais são as casas que ficam sensivelmente à mesma distância da Escola? R: _______________

3. Seguindo as ruas indicadas na planta coloca **V** ou **F** à frente de cada afirmação, conforme ela seja **v**erdadeira ou **f**alsa.

i) *A casa escolhida pelo grupo A está mais perto da casa do grupo B do que da casa do grupo E.* ____

ii) *A casa do grupo B é a que fica mais perto da "Rua do Mercado".* _____

iii) *A casa do grupo D é a que fica mais longe da Escola.* ____

4. Uma das meninas da turma foi passear de carro.

i) Sabendo que a sua casa é a do grupo **A**, que distância percorreu à casa do grupo **C**, optando pelo itinerário mais curto?

ii) Para convidar colegas para o seu aniversário resolveu no dia 18 de Janeiro passar por todas as cinco casas. Que distância percorreu, em **quilómetros**, sabendo que à noite, após ter entregue todos os convites regressou imediatamente a casa?

[3] Para cada grupo de cinco estudantes foi disponibilizada uma planta da cidade na escala de 1:5000 e ainda alguns materiais como pioneses e réguas para o desenvolvimento da actividade.

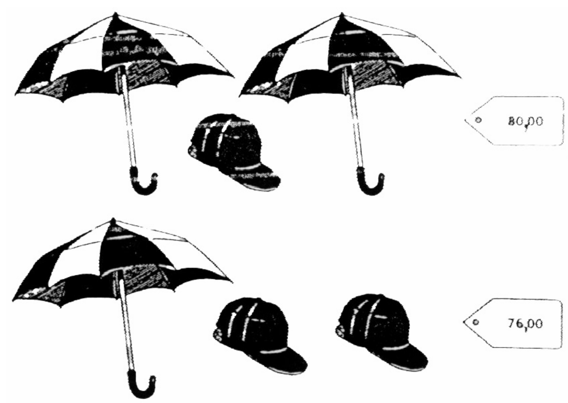
FOLHA de TRABALHO

Escola: ______________________________ Ano e Turma: _____ Ano Lectivo: _____ / ___

Nome dos Alunos: ____ Data: ________

Compras nos Saldos

A Joana e o Pedro foram com a mãe aos saldos de 2001, no intuito de comprar um guarda-chuva e um boné.
Numa das Lojas o preçário encontrava-se naturalmente em Euros.
Nessa loja os meninos observaram as colecções que estão representadas nas gravuras seguintes.



1. Qual é o artigo mais caro: o guarda-chuva ou o boné? Qual é a diferença de preços?

R: ____

2. Desenha agora duas colecções: uma delas apenas com guarda-chuvas e outra só com bonés e indica o preço de cada colecção.

3. Qual é o preço de um guarda-chuva? E de um boné? Apresenta os raciocínios e os cálculos utilizados.

R: ____

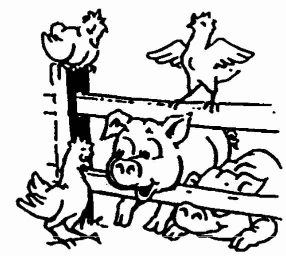
FOLHA de TRABALHO

Escola: ______________________ Ano e Turma: _____ Ano Lectivo: _____ / ____

Nome dos Alunos: ______________________________ Data: _________

Problemas

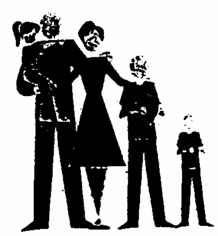
1. O António e a Marta foram visitar o avô na Quinta das "Flores", nas férias da Páscoa.
Os meninos deliciaram-se a ver os animais da quinta...
Na capoeira havia alguns porcos e galinhas.
O António disse: "Ao todo, eu vejo 18 animais".
A Marta respondeu: "Sim, e têm ao todo, 52 patas".
Quantas galinhas e porcos há na capoeira?



From Charles, Lester, and O'Daffer (1987)

R: ______________________________

2. A D. Maria tem duas filhas. A soma das idades é 23 e o produto é 112.
Qual é a idade de cada uma das filhas?



R: ______________________________

FOLHA de TRABALHO - POTÊNCIAS

Escola: __________________ *Ano e Turma:* ______ *Ano Lectivo:* ____ / ___ *Material utilizado:* ________

Nome dos Alunos: _______________________________________ Data: ____________

Boatos e Bactérias

1. Espalhando a notícia como um boato!...

Imagina-te no país da "Matemágica"!...
Nesse país há uma pequena cidade com sete mil habitantes.
Estes são bastantes curiosos e quando as novidades chegam gostam de espalhar a notícia aos seus amigos...
Numa bela noite de luar um dos habitantes, observando bem o céu, reparou numa constelação muito brilhante nunca antes vista e rapidamente quis espalhar a notícia...
Às 8:00 da manhã do dia seguinte contou-a a três dos seus concidadãos e a notícia ia sendo assim espalhada: de quinze em quinze minutos e cada habitante contava a notícia a outras três pessoas diferentes e, nos quinze minutos seguintes, cada uma destas contava a outros três habitantes que não conheciam a notícia e assim sucessivamente...

Pelas 10:00 do mesmo dia a quantos habitantes foi espalhada a notícia?
Será que a essa hora todos os habitantes da cidade já conheciam a notícia? Porquê?

2. Bactérias!...

Na aula de Ciências da Natureza falaste de uns seres vivos muito especiais: ***as bactérias!***
O crescimento de micro-organismos como as bactérias pode tornar-se assustador!?

Repara o que aconteceu numa população de bactérias: no início da contagem existia **1 milhar** de bactérias e essa população de seres vivos todos os dias ***duplicava***. Assim, no 2º dia já havia **2 milhares**, no 3º dia **4 milhares**, no 4º dia **8 milhares** e assim sucessivamente...

Quantas bactérias havia no 6º dia? E no décimo dia? (Escreve essa quantidade usando uma potência).
E ao fim de "*muitos dias*"? Porquê?

FOLHA de TRABALHO – TPC de Matemática

*Escola Básica do **2º e 3º Ciclo de Valongo*** ***Ano e Turma**: ______ Ano Lectivo: 2001/2002*

Nome dos Aluno ____ Data: __________

LAVAR OS DENTES E POUPAR ÁGUA!...

A água é indispensável à vida dos animais e das plantas. Mas a água não é inesgotável e está a desaparecer no planeta. É preciso poupar água!...

Vamos propor-te a realização de uma experiência e a partir dela podes descobrir uma maneira simples de poupar água!...

1. Lava os dentes com a água da torneira sempre a correr.
   Mede a água que gastaste com um copo graduado.

Se tivesses utilizado um copo de água, terias gasto, aproximadamente 0,25 l. Isto significa que, de cada vez que lavas os dentes com água corrente, desperdiças água.

2. Que quantidade de água desperdiças de cada vez que lavas os dentes com água corrente?

R: ____

E se lavares os dentes três vezes por dia?

R: ____

3. E ao fim de um ano?

R: ____

4. E que quantidade de água desperdiçará uma família composta por pai, mãe e dois filhos?

R: ____

5. Comenta os resultados que obtiveste.

R: ____

____

____

FOLHA de TRABALHO

*Escola Básica do **2º e 3º*** ______________________ ***Ano e Turma**:* ______ *Ano Lectivo: 2001/2002*

Nome dos Aluno ____ Data: __________

Eleições autárquicas - Método de Hond´t[4]

A	B	D	F	H	K	M	O
Escola EB 2,3							
2001/2002 - 5º ano							
		Aplicação do método de Hond´t					
Autárquicas 2001 - Valongo			**RESULTADOS**				
	Divisões						
Partidos	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	
PPD/PSD e CDS/PP	21801	10900,5					
PS	12579						
PCP/PEV	2347						
BE	459						
São **nove** mandatos							

Quais são os partidos que elegem deputados? Quantos de cada partido?

Qual é o partido que elege o último deputado? E qual é, então, a ordem de eleição dos deputados?

[4] A turma A abriu o ficheiro na folha de cálculo com os dados reais obtidos nas últimas eleições autárquicas do concelho em 2001 e a turma B recebeu a mesma informação organizada numa tabela em folha de papel.

FOLHA de TRABALHO		
Escola Básica do 2º e 3º ciclos de Valongo	*Ano e Turma: ______*	*Ano Lectivo: 2001/2002*
Nome dos Alunos: ______________________	Material utilizado: __________	Data: _____

Matemática e Educação Física – *a correr, a saltar e a aprender matemática!...*

Na disciplina de Educação Física realizaram diversas actividades, entre as quais a ***corrida*** *e o* ***salto de força inferior****.*
Na tabela junta foram registados os resultados obtidos pelos alunos da turma.
Agora na aula de Matemática vais analisar os dados constantes da tabela, responder a questões e ainda tirar algumas conclusões.

I. Questões:

1. Quantos ***metros*** é preciso percorrer em cada volta da **corrida**?

R: ____

2. Quais são os cinco meninos mais rápidos na **corrida**?

3. Quais são os três meninos que têm a melhor marca de **salto de força inferior** ? Porquê?

4. Indica agora o nome dos meninos que, na **corrida**, fizeram menos de 10 voltas em 10 min.

R: ____

5. Inventa agora uma questão sobre os dados existentes na tabela e responde à mesma.

P: ____

R: ____

Dados reais recolhidos na aula de Educação Física[5]

	A	C	D	E	F	G	H	I
1	Escola EB 2,3 - Actividades em Educação Física - 5º A					2001/2002		
2								
3		Medidas (cm)			Corrida	Experiências	Que relações?	Que conclusões?
4	Nº do Aluno	Comprimento do pé	Comprimento da perna	Salto de força inferior	Nº de Voltas			
5		(com sapatilhas)	(até à anca)		Tempo (10 min)			
6	1	28,5	97	125	10			
7	2	23,5	84	80	8			
8	3	24,5	90	133	10			
9	4	23,5	88	125	9			
10	5	25	93	134	11			
11	6	24	87	110	10			
12	7	21	84	140	11			
13	8	21	80	130	11			
14	9	23,5	87	125	11			
15	10	24	85	130	12			
16	11	26	95	128	9			
17	12	24	89	120	9			
18	13	26	90	110	9			
19	14	25,5	88	145	12			
20	15	26,5	92	125	9			
21	16	24	82	115	13			
22	17	25	92	120	10			
23	18	24	86	95	9			
24	19	24,5	94	100	9			
25	20	22,5	83	90	10			
26	21	28	91	135	11			
27	22	27	89	130	11			
28	23	25	87	172	22			
29	24	22	83	181	15			
30	25	27	96	115	9			
31	26	24	94	90	9			
32	27	26	92	153	12			

[5] Naturalmente que na folha de trabalho original constavam os nomes dos estudantes. Após a recolha dos dados reais os estudantes da turma B preencheram também uma tabela semelhante a esta onde cada um deles colocou os seus dados pessoais e só depois deste preenchimento personalizado estar completo tiraram-se cópias para ser possível todos os estudantes realizarem a tarefa proposta.

FOLHA de TRABALHO

Matemática e Educação Física - a c***orrer, a saltar e a aprender matemática!...***
(continuação - folha 2)

II. Relacionar dados e tirar conclusões

Ao analisares os dados da tabela podes criar relações entre alguns deles e tirar conclusões!...

1. Por exemplo, estuda o caso da **CORRIDA** e relaciona a medida dos comprimentos dos pés e das pernas com o número de voltas dadas.

2. Em seguida, faz o mesmo para o **SALTO de FORÇA INFERIOR...**

3. Por último, com os dados da tabela procura tirar **outras conclusões**.

1. CORRIDA

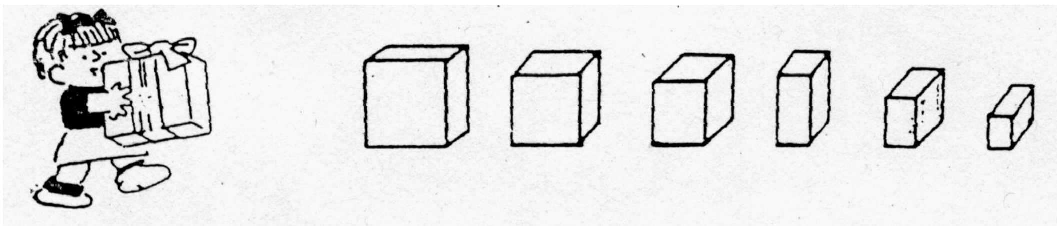
2. SALTO de FORÇA INFERIOR

3. Outras Conclusões

ANEXO 7
(Tarefas propostas no 6º ano de escolaridade)

Folha de Trabalho
Escola: ________________ *Ano e Turma:* ____ *Ano Lectivo:* ____ / ___ *Material utilizado:* ________
Nome dos Alunos: ____ Data: ___________

Tanta Caixa!



1. A Mafalda quer transportar as sete caixas ao mesmo tempo. A caixa que carrega pesa 1kg e todas as outras pesam metade da anterior.
   Organiza, em tabela, o peso de cada uma das sete caixas.

2. **V**erdadeiro ou **F**also? O peso das sete caixas é igual ou superior a 2,5 Kg ____________

3. Se a Mafalda continuasse a utilizar mais caixas nestas condições conseguiria alguma vez que todas juntas pesassem 2,5 Kg? ___________
   Porquê? ____

   ____

   ____

4. **Que vença o melhor!**
   O quadro ao lado indica os melhores resultados obtidos por cinco atletas em salto em comprimento. atribui as classificações (do 1º ao 5º)

	Salto (em metros)	Classificação
A	5,10	
B	5,65	
C	6,05	
D	5,05	
E	5,70	

Folha de trabalho

Escola: _________________ Ano e Turma: _____ Ano Lectivo: ____ / ___ Material utilizado: ______

Nome dos Alunos: ____ Data: __________

VENCER A FOME, CONSOLIDAR A PAZ – ANGOLA 2002

Vamos todos juntos ajudar os angolanos a superar a fome. E como poderemos fazer isso?
Uma das maneiras é colaborar na campanha de recolha de alimentos para Angola em cooperação com a Cruz Vermelha.
Desde muito cedo devemos aprender a SER SOLIDÁRIO.
E neste caso vamos pensar em Angola, um país que fala a NOSSA LÍNGUA.

Vamo-nos organizar em várias etapas

Na **1ª etapa** vamos ler o texto recebido da Cruz Vermelha Portuguesa e estudar cada um dos ***pacotes de emergência*** propostos.
Conhecer: 1. Os produtos referenciados 2. O valor de cada pacote e de alguns artigos

Na **2ª etapa** organizar esta informação em tabelas

Na **3ª etapa** organizar a recolha dos alimentos

Na **4º etapa** escrever e ilustrar mensagens de esperança para os meninos angolanos

Na **5º etapa** enviar para a Cruz Vermelha Portuguesa a recolha de alimentos e fundos efectuada

1ª Etapa:

1. Qual a diferença de géneros entre os três pacotes de emergência? E a diferença de valores?

Respostas: ____

____

____

2. Nestes pacotes de emergência qual é o "preço" de um sabonete? E de uma manta?

Respostas: ____

____

3. Quais os alimentos com que podes contribuir para te associares a esta Campanha?

Resposta: ____

4. Com base na informação dada inventa agora uma questão. Dá a resposta a essa questão.

Questão e Resposta: ____

____

"VENCER A FOME, CONSOLIDAR A PAZ – ANGOLA 2002"

A Pro Dignitate – em cooperação com a Cruz Vermelha Portuguesa e a União das Misericórdias Portuguesas – consciente da trágica situação em que vivem os angolanos, vítimas da guerra que atingiu parte considerável do território, apela a todos os cidadãos de boa vontade, no sentido de se associarem a esta Campanha.

PEDE-SE A CONTRIBUIÇÃO ATRAVÉS DE:

PACOTE DE EMERGÊNCIA / SOS:
1 KG. DE ARROZ,
1 LATA DE CONSERVA,
½ KG. DE FARINHA DE MILHO
OU O VALOR - € 2,50

PACOTE DE EMERGÊNCIA:
1 KG. DE ARROZ,
1 LATA DE CONSERVA,
½ KG. DE FARINHA DE MILHO
1KG. DE LEITE EM PÓ
1 SABONETE
OU O VALOR - € 12,64

PACOTE DE EMERGÊNCIA / CONFORTO:
1 KG. DE ARROZ,
1 LATA DE CONSERVA,
½ KG. DE FARINHA DE MILHO
1KG. DE LEITE EM PÓ
1 SABONETE
1 MANTA
OU O VALOR - € 42,64

Esses donativos devem ser entregues nas Delegações da Cruz Vermelha Portuguesa ou no Armazém da CVP (Rua da Guiné – Prior Velho) e serão enviados para a CEAST – Conferência Episcopal de Angola e S. Tomé e Príncipe.

Quaisquer contributos em dinheiro poderão ser depositados na conta da Nova Rede **"Vencer a Fome, Consolidar a Paz - Angola 2002" nº 45213248509.**

Para mais esclarecimentos: Telef.: 21 392 93 10 / Fax: 21 397 02 79 / e-mail: prodigni@esoterica.pt

Folha de trabalho		
Escola: ______________________________	*Ano e Turma:* _________	*Ano Lectivo:* ________ / ______
Nome do(s) Aluno(s): _______________________________________		Data: _________

Respirar e Descansar

1. Os movimentos da foca

Uma foca precisa de respirar mesmo a dormir na água. Francisco observou a foca durante uma hora. No início da observação a foca estava já à superfície a respirar. Ela voltou para baixo da água e começou a dormir. Passados 8 minutos a foca veio novamente à superfície respirar. Passados 3 minutos voltou novamente para baixo da água.

Francisco reparou que todo este processo se repetia com a mesma regularidade.

Passada uma hora a foca estava:

a) à superfície da água	b) a subir para a superfície da água
c) a respirar	d) a descer para baixo da água

Resposta: ____ Porquê?

Apresenta um esquema ou desenho, explicando como pensaste.

2. Estudar e descansar

Verdadeiro ou ***Falso***?

O Jorge quando está a estudar de 20 em 20 minutos faz uma pausa e descansa 5 minutos.

Se começar a estudar às 14:00, às 15:08 está a descansar. ________________

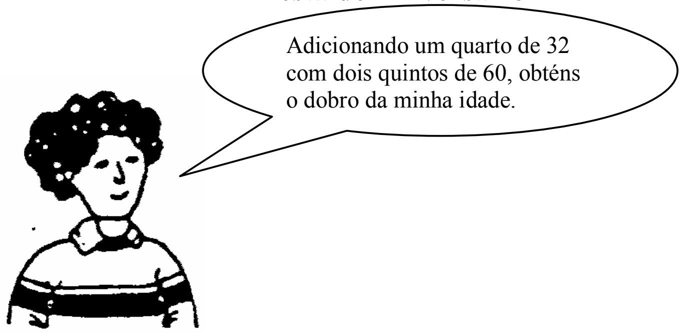
Folha de trabalho

Escola: ______________________________ *Ano e Turma:* _________ *Ano Lectivo:* _______ / ______

Nome do Aluno: ____ Data: _______

Festa de Aniversário

1.



Afinal, que idade tem o António? Explica como chegaste à tua resposta. Pode utilizar palavras, esquemas, expressões ou cálculos.

____

2. Como o António faz anos, vamos fazer uns queques.

Queques (para 6 pessoas)

1 dl de leite	2 ovos	250g de açúcar
250g de farinha	100g de manteiga	fermento q.b.

2.1. Calcula as quantidades de ingredientes necessários para se fazerem queques para 12 pessoas.

_____________________ _____________________ _____________________

_____________________ _____________________ _____________________

2.2. Se, em vez de 2 ovos usares 5, que quantidade de manteiga deves usar? Explica como chegaste à tua resposta. Podes fazê-lo utilizando palavras, esquemas, expressões ou cálculos.

R: ____

2.3. Se utilizares 6 ovos que quantidades dos outros ingredientes deves usar?

______________________ ______________________ ______________________

______________________ ______________________ ______________________

2.4. Neste último caso, a receita dá para quantas pessoas?

R: ____

2.5. Calcula as quantidades necessárias para 15 pessoas. Explica como procedeste.

____

____

____

____

- *Qual a tua opinião sobre esta actividade – "Festa de Aniversário"?*
-

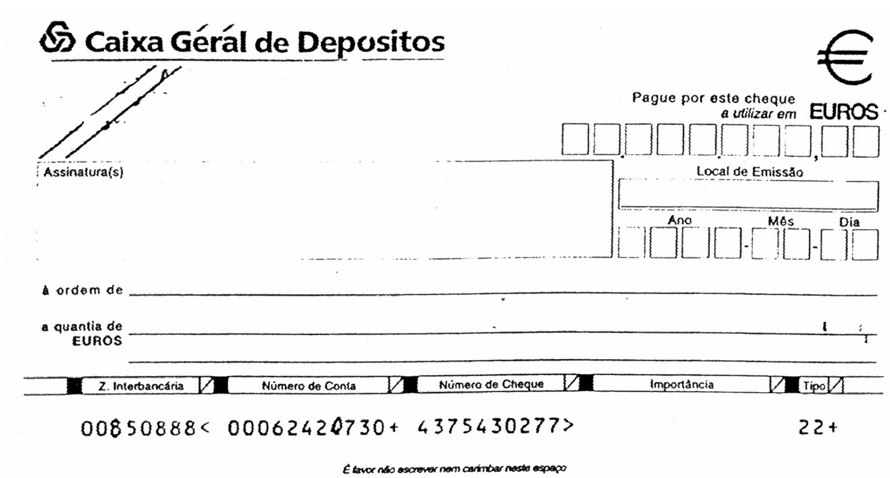
Folha de trabalho

Escola: ______________________________ *Ano e Turma:* _________ *Ano Lectivo:* ______ / ______

Nome do(s) Aluno(s): ____ Data: ________

Cheques e Compras

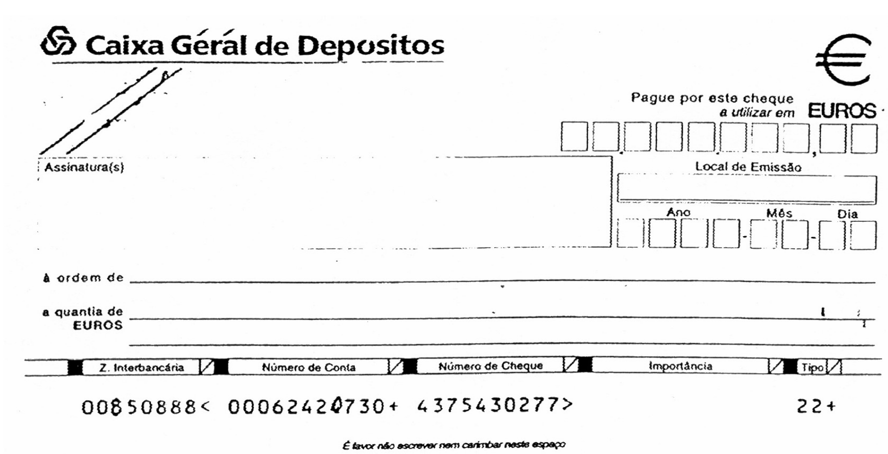
1. Vamos descobrir, todos juntos, os elementos fundamentais de um cheque.
   Para isso <u>*observa atentamente*</u> o cheque e <u>*coloca as questões*</u> que considerares pertinentes para aprenderes as partes constituintes do cheque e suas funções.



2. O Sr. Rui Tavares foi ao banco levantar mil e setecentos euros e dois cêntimos de uma prestação de serviços realizada ao Sr. António Silva. Completa o cheque anterior, escrevendo a importância que o Sr. Rui Tavares levantou.

3. O Sr. Tavares quer receber a quantia em notas de 5, 10 e 20 euros. Se fosses tu o empregado do banco como lhe pagarias aquela importância? Porquê?

4. O Sr. Tavares comprou uma mercadoria ao Sr. Américo Dias por €180 euros em duas prestações. Na 1ª pagou 2/3 do total do preço da mercadoria. Como deveria o Sr. Tavares preencher o cheque para pagar a 1ª prestação?



4. Com o teu colega inventa agora um problema e simula uma situação de compra e venda, com pagamento através de cheque.

Deves para isso:

1º) inventar um problema.
2º) escrever nesta folha o enunciado do problema criado, dando nome ao vendedor e ao comprador.
3º) decidir entre os dois colegas quem é o vendedor e o comprador.
4º) realizar o pagamento - o comprador deve pagar a mercadoria através do cheque, preenchendo-o devidamente.

5º) descrever o diálogo havido entre o comprador e o vendedor.

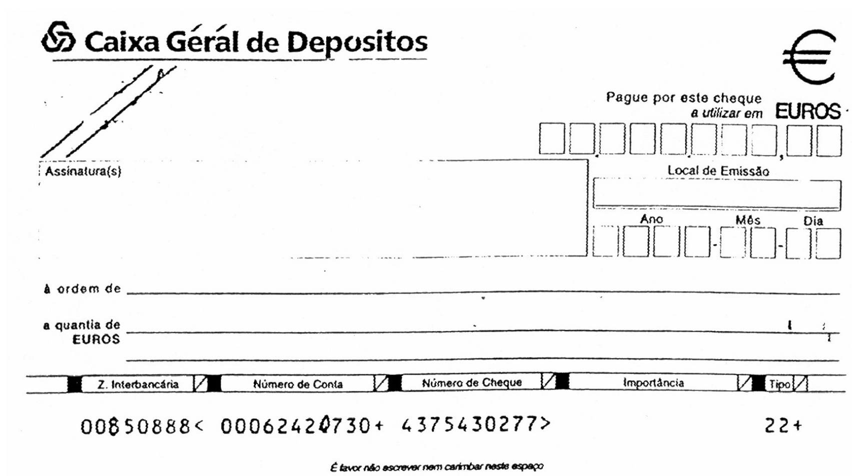
6º) concluir do interesse da situação problemática criada e da sua resolução.

Enunciado do problema: ____

____

____

____


Caixa Gérál de Depositos

Pague por este cheque
a utilizar em EUROS

Assinatura(s)

Local de Emissão

Ano Mês Dia

à ordem de

a quantia de EUROS

Z. Interbancária | Número de Conta | Número de Cheque | Importância | Tipo

00850888< 000624240730+ 4375430277> 22+

É favor não escrever nem carimbar neste espaço

Conclusões: ____

____

____

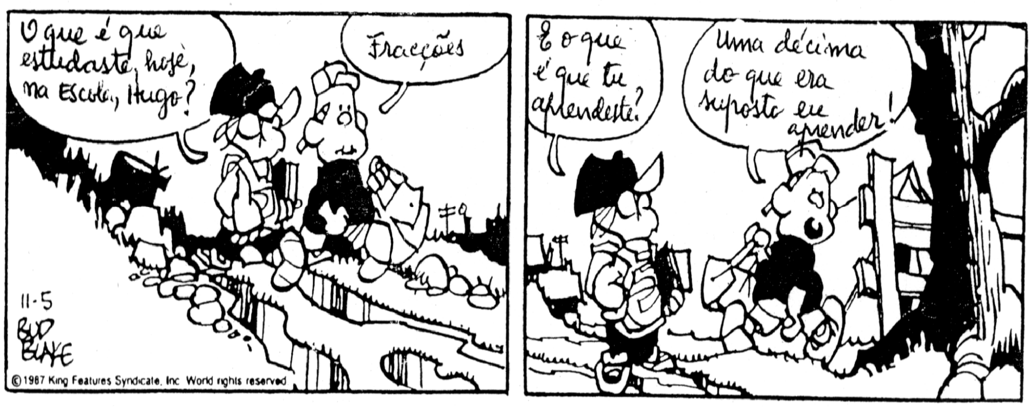
____

Folha de trabalho

Escola: _________________ *Ano e Turma:* ____ *Ano Lectivo:* ____ / ___ *Material utilizado:* ________

Nome do Aluno: ____ Data: _________

Banda desenhada
"As fracções como motivo de conversa"



Fracções na vida real

Questões

1. Como se representa, em fracção, o sucesso da aprendizagem do Hugo, na lição sobre fracções? E que parte da lição <u>*não*</u> aprendeu?

2. Se o Hugo respondeu correctamente a um décimo de vinte questões colocadas pela professora, a quantas perguntas respondeu correctamente o Hugo?

3. O que representa a expressão numérica: $20 - 1/10 \times 20$?

4. Já pensaste como é que tu passas o teu dia?
   Reflecte sobre as actividades que desenvolves num dia, como por exemplo: *dormir*, *comer*, *estar na escola (na aula)*, *brincar*, *estudar*, *jogar*, *conversar*, *ver televisão*, entre outras. Tenta agora registar numa tabela e em fracção o tempo gasto em cada uma dessas actividades.
   Reflecte também sobre se gastas *bem* ou *não* o <u>*teu*</u> precioso tempo e realiza um relatório sobre este assunto, tentando encontrar as razões dos teus "afazeres".
   <u>*Não te esqueças*</u>*: diz o povo e com razão: "tempo é dinheiro!"*

Folha de trabalho

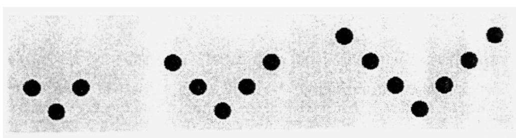
Escola: _____________________________ *Ano e Turma:* _________ *Ano Lectivo:* ________ / ______

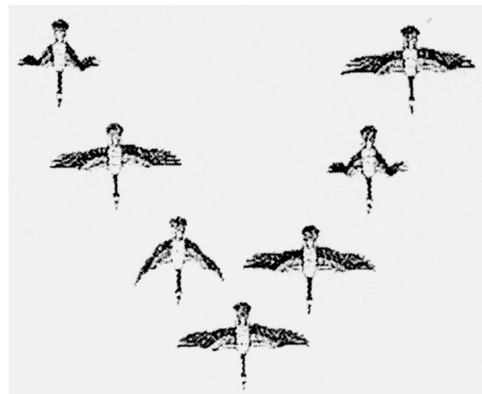
Nome do(s) Aluno(s): _______________________________________ Data: ________

PADRÕES em V

Por vezes observam-se, no céu, bandos de pássaros que voam num ***padrão em V***.

Em baixo estão assinalados os três mais pequenos ***padrões em V*** que é possível criar.





1. Faz o desenho do ***padrão em V*** que se segue.

2. É possível que um ***padrão em V*** tenha 84 pontos? _________ Porquê?

3. Por quantos pontos será constituído o sexto ***padrão em V***?

4. Constrói, ao lado, um ***padrão em V*** com 19 pontos.

5.

Padrão em V	Nº de Pontos
1	3
2	5
3	7
4	
5	
6	

5.1. Completa a tabela ao lado, preenchendo a coluna da direita.

Podes construir um ***padrão em V*** com o número de pontos que quiseres...

Quantos pontos deve ter o quadragésimo ***padrão em V***?

R: ____

Como encontraste a resposta?

5.1. Qual o ***padrão em V*** que corresponde a 101 pontos? R: ______________________________

Folha de trabalho

Escola: ____________________________ *Ano e Turma:* _________ *Ano Lectivo:* ________ / ______

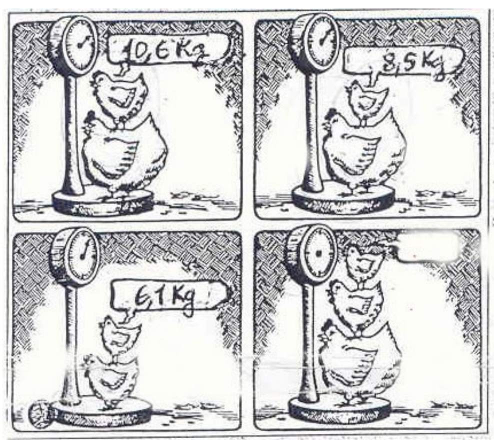
Nome do(s) Aluno(s): ______________________________________ Data: ________

Galinhas e mais galinhas!....

Segundo dizem os peritos já não há problemas com as galinhas!...
Vamos lá pensar e descobrir a massa de cada uma destas galinhas...

Basta observares bem as gravuras, analisares os dados do problema e começares o processo de elaboração mental...
Podes usar qualquer material e a Família também pode participar... É só tu quereres....

Boa sorte. Não desistas... A verdadeira aventura começa com um pequeno senão...



A massa da galinha grande é _______

A massa da galinha média é ________

A massa da galinha pequena é _______

Tiveste ajuda? _________ Se sim, de quem? __________________________________

Comentários a esta actividade ____

____

____

____

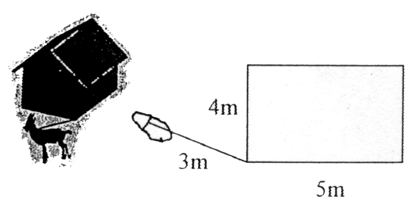
Folha de trabalho
Escola: ___________________________ *Ano e Turma:* _________ *Ano Lectivo:* ________ / ______
Nome do(s) Aluno(s): ____________________________________ Data: ________

A cabra!...

O filho de um pastor, chamado Avelino, tinha uma cabra e quando regressava a casa prendia a sua cabra numa corrente de 3 metros ligada a um gancho de metal no chão.

1. Quando o menino prendia a cabra no meio do seu quintal qual seria a área de relva que a cabra conseguiria atingir? Esboça (desenha) uma figura e explica como pensaste.

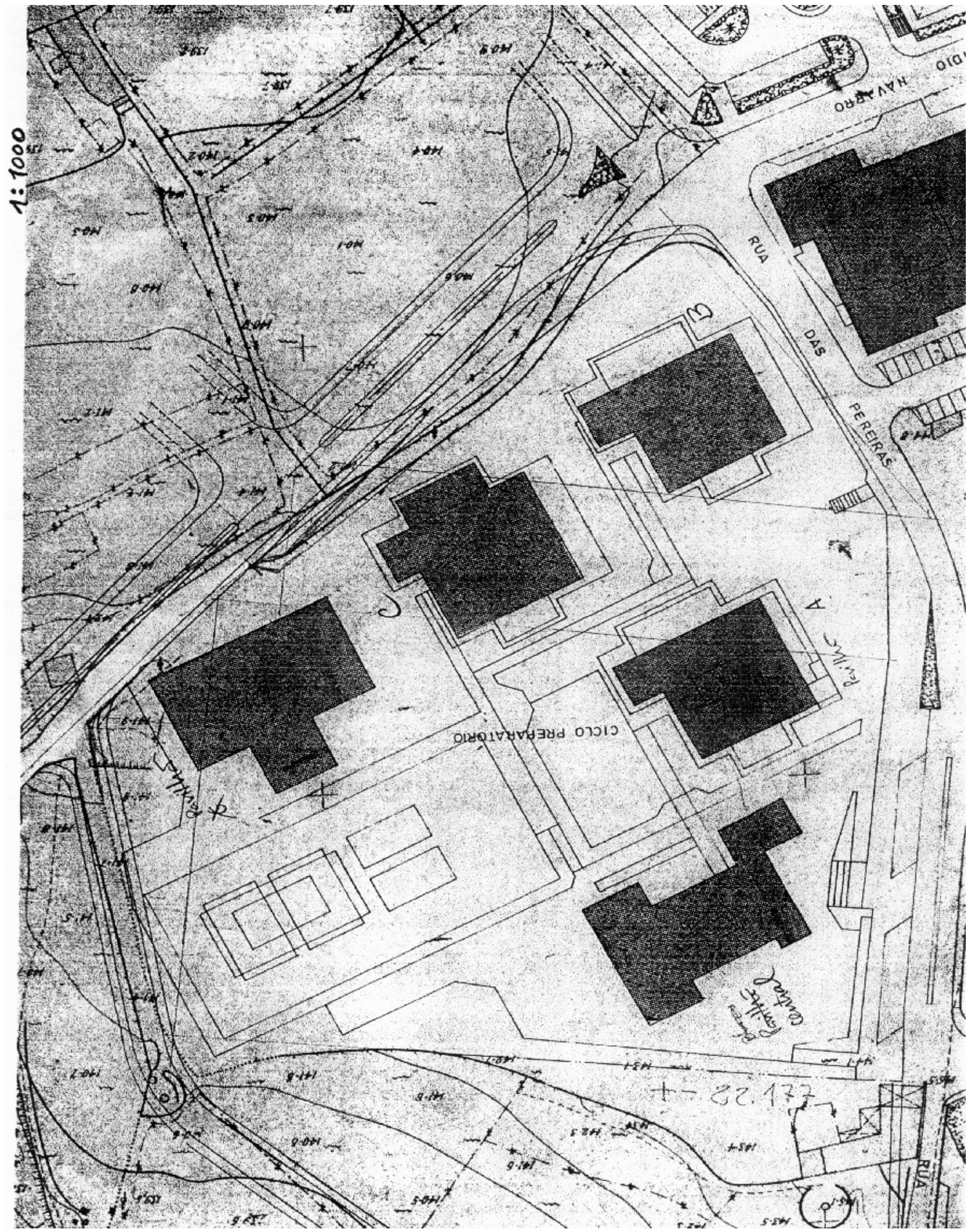
2. Às vezes o Avelino amarrava a cabra na base do muro ao nível do chão na esquina de uma pequena casota do quintal do tio que media 5 metros por 4 metros, como mostra a figura.
   Qual seria agora a área da relva que a cabra conseguiria atingir? Explica a tua resposta, usando esquemas, desenhos, números ou palavras.



3. E se a cabra fosse colocada ao nível do chão no meio do muro de 4 metros? Será que agora o total da relva que a cabra conseguia atingir era maior? Explica a tua resposta.

Cálculo da Área dos Pavilhões da minha Escola[6]

Planta da Escola



[6] Actividade de investigação realizada no 5º ano e aprofundada no 6º ano de escolaridade com a entrega de documentos históricos da pertença dos terrenos que foram desapropriados para construir a Escola (documento seguinte) e de cópias do Projecto Educativo de Escola, com indicação de outros dados para análise documental e pesquisa na Internet, no site da instituição.

Documento Histórico[7]

PARCELAS	PROPRIETARIOS	ÁREAS	NATUREZA DO TERRENO
1	HERDEIROS DE JOSÉ AGUIAR NOGUEIRA RUA SILVA TAPADA, 128 - 3º Dº PORTO	6.040 m2	TERRENO DE CULTIVO E VINHA
2	ENG. JAIME DA SILVA VALE PRAÇA MACHADO DOS SANTOS, - VALONGO	12225 m2	TERRA DE CULTIVO PINHAL E MATO
3	ENG. JAIME DA SILVA VALE	3.600 m2	TERRA DE CULTIVO E VINHA
4	DR. JOÃO ALVES DO VALE RUA ALVES SALDANHA - VALONGO	3596 m2	TERRA DE CULTIVO E VINHA
	ÁREA TOTAL	25461 m2	

— LIMITES APROVADOS — AREA - 25461 m

PARCELA SOBRANTE DA PARCELA 3 E A ADQUIRIR
— A ENG.º JAIME DA SILVA VALE E MULHER — AREA - 669 m

— LIMITES PROPOSTOS — AREA - 26.130 m²

diferença de 1050 m
(tem menos)

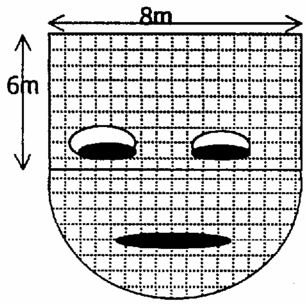
Afinal: 25641 m²

[7] Este e outros documentos permitiram o aprofundamento do trabalho iniciado no ano anterior em que a tarefa se restringiu às disciplinas de História e Matemática. No 6º ano de escolaridade foi possível desenvolver o projecto de forma mais ampla onde intervieram várias disciplinas.

Exemplo de um teste realizado no 6º ano de escolaridade onde foram integrados problemas próximos dos concretizados, noutras situações, em sala de aula

Matemática 6º ano ficha de avaliação nº	13 / 06 / 03
Apreciação : *O teu trabalho está* ______________________	
Assin. Enc. de Educação ______________________	Assin. da Prof ______________
Nome ____	Nº _____ 6ºC

1. O Rui está a fazer um boneco para o S. João.

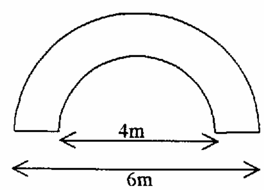


Observa-o atentamente e calcula:

1.1. Quantos metros de papel necessita para cobrir o boneco.

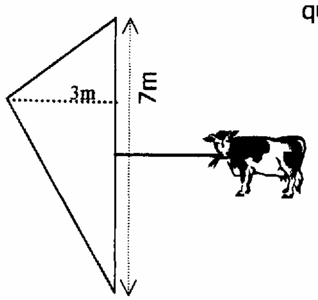
1.2. Quantos metros de fita necessita para contornar o boneco

2. Na noite de S. João o Rui vai desfilar com um arco como o que está representado na figura. Para o enfeitar, colocou uma renda a toda a volta. Quantos metros de renda usou?



3. A Ana tem uma vaquinha muito comilona. Para que ela não coma a relva toda do jardim, prendeu-a com uma corda a meio da parede da sua garagem que tem a forma triangular.

3.1. Sabendo que a corda tem 3m de comprimento, calcula a área de relva que a vaquinha pode comer



3.2. Calcula a área da garagem da Ana.

ANEXO 8
(Teste de avaliação)

Instruções Gerais sobre a Prova

- A prova deve ser realizada a tinta azul ou preta, com excepção dos desenhos, que devem ser feitos a lápis. Podes ainda usar borracha, apara-lápis régua graduada e calculadora.
- Todas as respostas devem ser dadas no enunciado da prova.
- Se precisares de alterar alguma resposta, risca-a e escreve a nova resposta.
- Há questões em que apenas tens espaço para escrever as respostas. Noutras questões encontras espaços em branco que podes utilizar para justificar a resposta ou para apresentar cálculos ou esquemas de apoio ao teu raciocínio, o que deverá ser considerado, mesmo que a resposta não esteja totalmente correcta.
- Em algumas questões terás de colocar **X** num quadrado correspondente à resposta correcta. Se puseres **X** no quadrado errado, risca-o e coloca-o no lugar certo.
- Responde a todas as perguntas com o máximo de atenção.

A Prova tem duas partes

Uma parte vai ser realizada na aula de **Matemática**

e outra

na aula de ***Estudo Acompanhado***.

Nome do Aluno: ____

Ano de escolaridade: ____________ Data: ___________________________

1. Completa as tabelas com as regras dadas

1.1. Regra: *O dobro do número anterior*

1/3
2/3
4/3

1.2. Regra: $\boxed{\ldots \ \text{x } 2 + 1}$

Exemplos

$\boxed{1 \text{ x } 2 + 1 = 3}$

$\boxed{3 \text{ x } 2 + 1 = 7}$

1
3
7

1.3 Completa a tabela e indica a regra

2	3,5	5				

$\xrightarrow{?}$ $\xrightarrow{?}$

Regra: ____

2. **Salto de força inferior**

Na aula de Educação Física os alunos da turma do 5º ano realizam o salto de força inferior e registam a marca.

Estão assinaladas cinco marcas.

Se a Maria ultrapassasse a última marca como seria desenhada uma nova marca?

E qual seria a sua medida?

Resposta: ____________________________

Explica como pensaste.

____

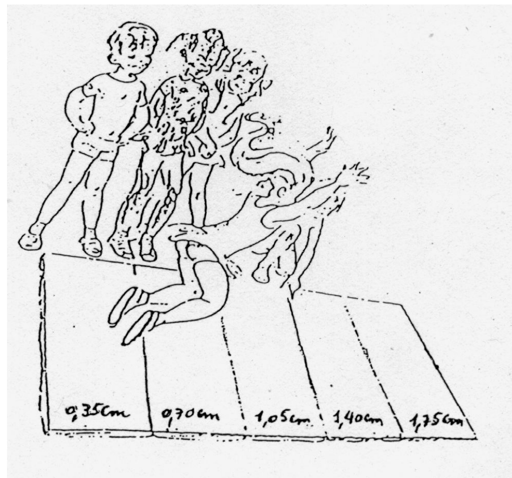
____

____

____

____

____



3. Completa as tabelas seguintes e indica a regra de C para D

3.1. De **A** para **B**
(<u>Regra:</u> *A soma do triplo de A com 2*)

A	**B**
0	
1	
2	
3	
4	

3.2. **A** $\xrightarrow{\mathbf{A} \times 2 + 1}$ **B**

A	**B**
0	
1	
2	
3	
4	

3.3. De **C** para **D**

C	**D**
0	1
1	4
2	7
3	10
4	13
5	16
6	19

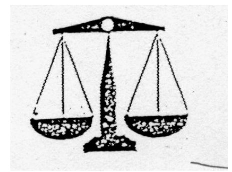
Regra (de C para D): ____

4. Emagrecer lentamente é saudável

A Maria quer emagrecer mas de forma comedida. Na primeira semana de Outubro emagrece 1kg, na segunda semana emagrece metade de 1 Kg, na semana seguinte emagrece metade do que tinha conseguido na semana anterior e assim sucessivamente, isto é, na semana seguinte consegue emagrecer sempre metade do que tinha emagrecido na semana imediatamente anterior.

Com este processo de emagrecimento será que ao fim de seis semanas a Maria vai conseguir emagrecer 2,5Kg? Porquê?

(Para resolveres o problema podes usar tabelas e a calculadora).



Resposta: ____

5. Tabela Nutricional Parcial

Quantidade de nutrientes por cada **100 gramas** *de cada* um dos alimentos indicados.

TABELA NUTRICIONAL

PRODUTOS ALIMENTARES	Calorias	PRINCÍPIOS ENERGÉTICOS			Fibras	ELEMENTOS MINERAIS			VITAMINAS			
		Proteínas	Lípidos	Glícidos		Fósforo	Cálcio	Ferro	C	B1 + B2	A + Provit. A	D
CARNES E PRODUTOS DERIVADOS		g	g	g	g	mg	mg	mg	mg	mg	mg	mg
Carne magra (vaca, cavalo, carneiro, vitela, borrego, porco)	170	20	10			200	10	3	1	0.4	0.02	
Fígado (de vaca, de porco, etc.)	142	22	6			500	10	9	35	1.8	6	0.001
PEIXES E MARISCOS												
Peixes gordos (atum, enguia, salmão)	215	20	15			200	100	1	20	0.3	2	0.06
Peixes magros (pescada, bacalhau, raia, lúcio etc.)	77	17	1			250	60	1	15	0.3	0.05	0.002
Crustáceos (caranguejos, camarões, etc.)	90	18	2			300	50	2	10	0.3	0.1	0.002

5.1. **V***erdadeiro* ou **F***also*?

100g de pescada contêm o triplo de **vitamina *D*** *que 100g de fígado de carne.* _____

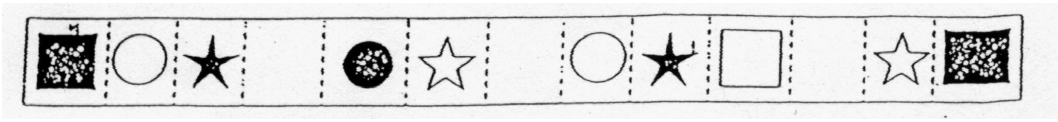
5.2. Observa na tabela a quantidade de nutrientes em ***100g de bacalhau*** e em ***100g de fígado de vaca.*** O que podes concluir sobre a relação entre o número de ***calorias***? E sobre a quantidade de ***fósforo***?

Resposta: ____

Resposta: ____

6. Os autocolantes da Marta

A Marta tem uma fita com autocolantes pretos e brancos, dispostos segundo um padrão que se repete, pela mesma ordem.
A figura mostra essa fita, da qual a Marta já retirou três autocolantes.
Desenha, no respectivo local, os autocolantes que a Marta retirou.



7. Estrutura em grade

Numa rua da cidade do Porto há uma casa que tem um gradeamento bonito com um padrão interessante.
Em baixo, à direita, podem observar o ***módulo – padrão*** (Fig. 2) desse gradeamento:

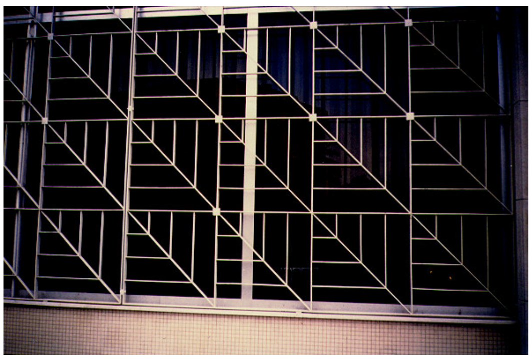


Fig. 1

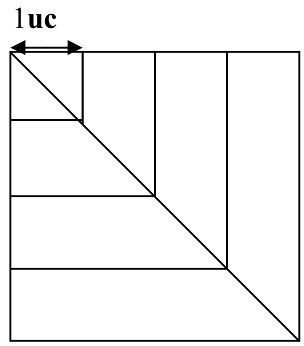


Fig. 2

7.1. Quantos quadrados tem cada ***módulo-padrão***? Resposta: ____________________

7.2. Centra a tua atenção no ***módulo-padrão*** (Fig. 2). Se o lado do quadrado mais pequeno medir uma unidade de comprimento (1**uc**) qual é o perímetro de cada um dos diferentes quadrados?

Resposta: ____

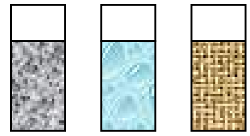
7.3 Regista, numa tabela, os dados obtidos na resolução da questão anterior.

7.4 Qual é a relação que se pode estabelecer entre o perímetro dos diferentes quadrados?

Resposta: ____

____

8. Compra de sumos



PROMOÇÕES

Preço inicial de ***1l*** de qualquer sumo: ***€ 0,48***

Sumo A ¾ do preço inicial	***Sumo B*** ¼ do preço inicial	***Sumo C*** ½ do preço inicial

Para realizar cálculos
(se for necessário)

Completa as frases:

8.1. Quis comprar o sumo mais barato, por isso comprei o sumo ____

8.2. Se a expressão ¾ x 0,48 representa o custo de ***1l*** do ***sumo A*** então a expressão

¾ x 0,48 + ½ x 0,48 representa ______________________________________

____

9. A Compra do Leite

A Joana foi ao supermercado com a mãe. Como o leite achocolatado estava em promoção resolveram aproveitar para comprar alguns pacotes.

Leite "Olá Vida" Pague 2, Leve 3	Leite "Olá Aida" Pague 3, Leve 4	Leite "Olá Diva" Pague 1, Leve 2

9.1. Que marca de leite achocolatado aconselharias a Joana e a mãe a comprar? Porquê?

Resposta: ____

____

____

9.2. Sabendo que a Joana e a mãe optaram pelo leite "Olá Aida", quais seriam, na tua opinião, as razões de tal escolha?

Resposta: ____

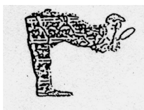
____

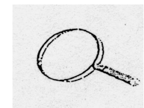
____

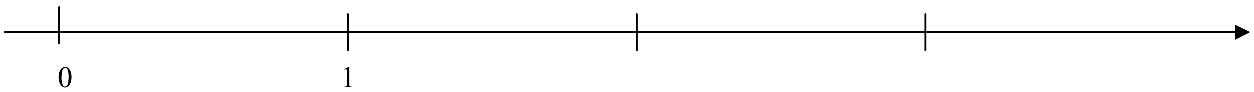
10. Marcar pontos...

Indica um número compreendido entre 2,62 e 2,63. Resposta: __________________

Representa na recta esse número.







11. Na aula de Educação Física

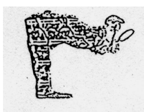
Na aula de Educação Física os alunos no 5º ano de escolaridade realizaram, durante 10 minutos, uma prova de resistência.
O Ricardo obteve a melhor marca, percorrendo um total de 2, 25 Km. A Flávia ficou em 3º lugar, com 2,24 Km. O Tiago obteve a segunda melhor marca. Indica um valor possível para a marca obtida pelo Tiago.

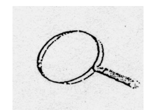
Resposta: ____

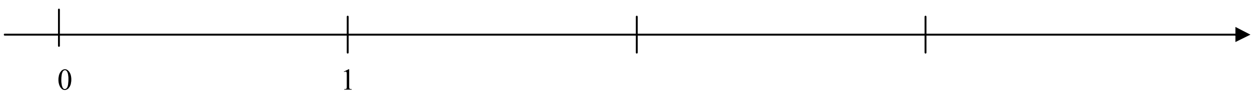
10. Marcar pontos...

Indica um número compreendido entre 2,46 e 2,47. Resposta: ___________________

Representa esse número na recta.





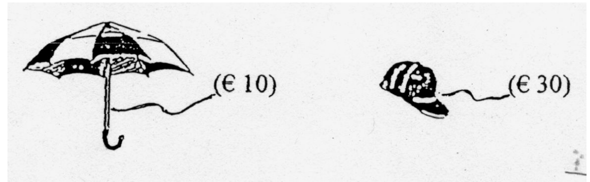


11. Na aula de Educação Física

Na aula de Educação Física os alunos no 5º ano de escolaridade realizaram, durante 10 minutos, uma prova de resistência.
O Pedro Miguel obteve a melhor marca, percorrendo um total de 2,03 Km. O João Miguel ficou em 3º lugar, com 2,02 Km. O Carlos Alberto obteve a segunda melhor marca. Indica um valor possível para a marca obtida pelo Carlos Alberto.

Resposta: ____

12. Fazendo compras



12.1. V_erdadeiro_ ou **F**_also_?

O preço de um guarda-chuva corresponde à quarta parte do preço das duas peças (de um guarda-chuva e de um boné). ________

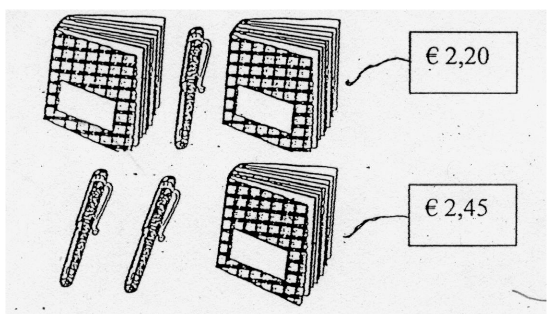
12.2. Se **A** representar o preço de um guarda-chuva assinala com um **X** a expressão matemática correcta que corresponde à frase anterior:

A = 1/4 x 10 + 30 ☐ **A** = 1/4 (10 + 30) ☐ 15 x 1/4 x 30 = **A** ☐

A = 1/2 x (10 + 30) ☐ **A** = 10 + 1/3 x 30 ☐

13. Colecções de Artigos

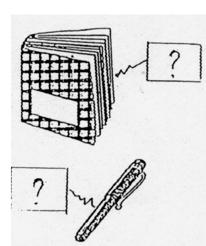
O André vai começar o novo ano escolar e precisa de esferográficas e cadernos.
A mãe do André foi à papelaria "Joaninha" e reparou que alguns artigos estavam organizados em colecções, entre os quais cadernos e esferográficas.



13.1. Qual é a diferença de preços das duas colecções? Resposta: ________________

Qual é o artigo mais caro? Resposta:__________________________________

13.2. Nestas colecções, qual é o preço de uma esferográfica? E de um caderno?
Resolução:



Resposta: ____

14. Expressões com euros

Qual das representações numéricas seguintes pode resolver o problema?
Joaquim tinha 107 euros, mas gastou 6 num livro. O pai deu-lhe 11 euros. Quantos euros tem agora?
Assinala com um **X** a expressão correcta.

107 – (6 + 11) = A ☐

(107 – 6) + 11 = A ☐

(107 + 11) + 6 = A ☐

11 – 6 = 107 + A ☐

(107 – 11) + 6 = A ☐

15. Visita à avó

15.1. Daniel foi visitar a avó que lhe deu € 2,50. Mais tarde comprou um livro que lhe custou € 3,80. Sabendo que ainda tem € 1,70, quanto dinheiro tinha antes de visitar a avó?

Resolução:

Resposta: ____

15.2. Que se terá passado com a Rita, irmã do Daniel?
Inventa um problema do mesmo tipo.

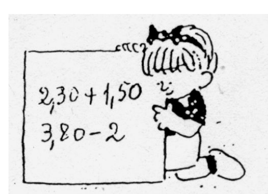
____

____

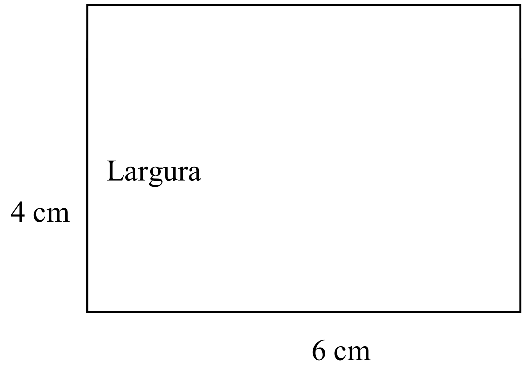
____

____

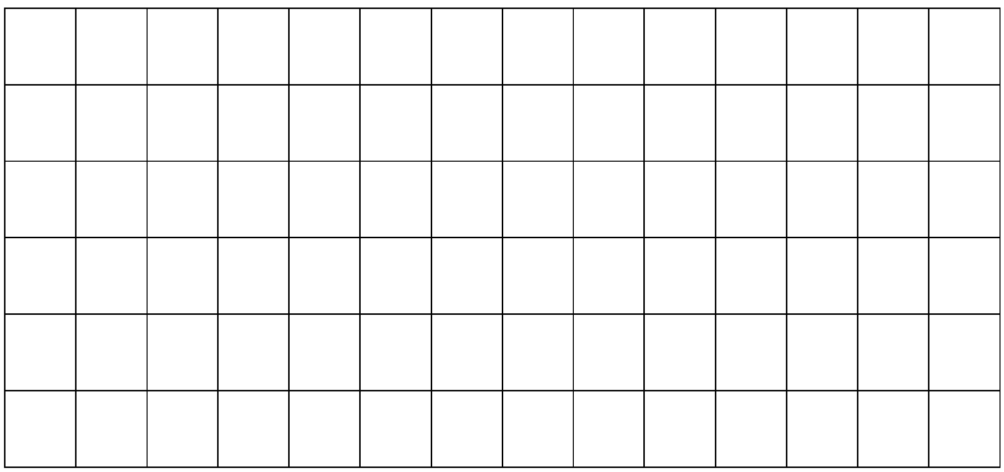
____



16. Desenhando um rectângulo



No espaço abaixo, desenha um novo rectângulo cujo comprimento é uma vez e meia o comprimento do rectângulo acima representado e cuja largura é metade da largura do rectângulo acima representado. Assinala na figura, o comprimento e a largura do novo rectângulo, em centímetros.



17. A cerca do *Tedy*

Tens 20 m de rede e vais construir, com a ajuda do teu tio, uma cerca para o teu cão.
Se quiseres usar toda a rede, desenha duas formas rectangulares diferentes para a cerca e indica, das duas, aquela que tem menor espaço para o *Tedy* brincar.

<u>Resolução</u>:

Resposta: ____

18. Regando o Jardim

Na técnica de rega *gota a gota* gasta-se a terça parte de água do que se gasta quando se usa *a mangueira*.

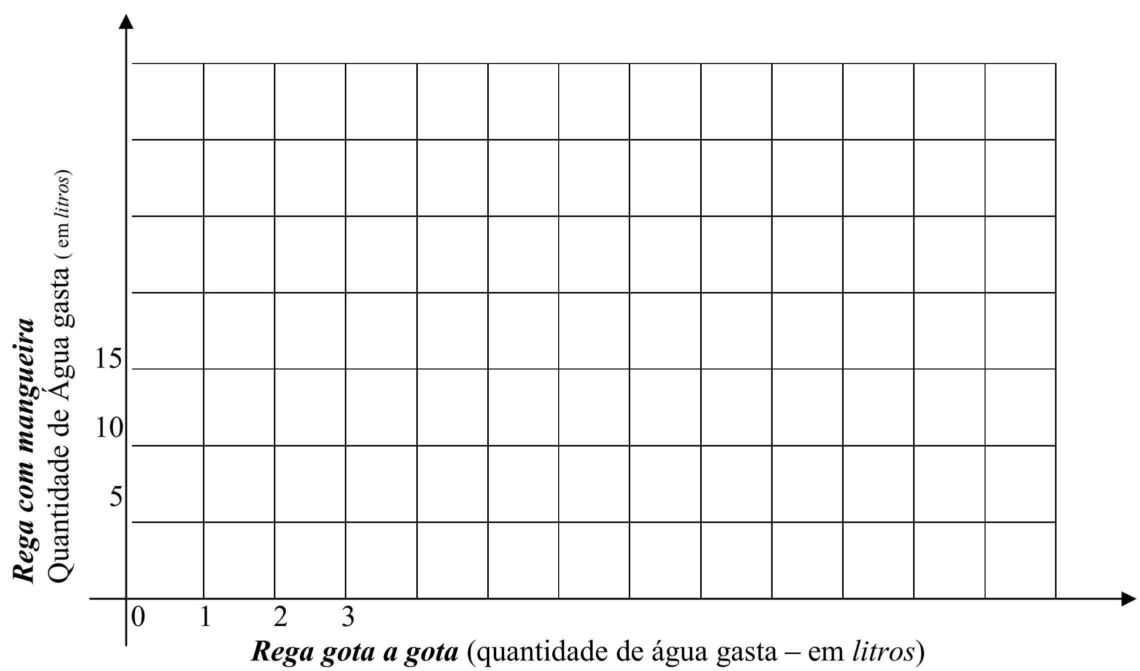
18.1. Em que processo de rega se gasta mais água?

Resposta: ____

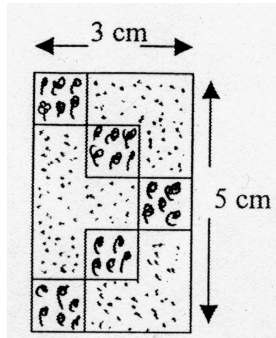
18.2. Completa agora a tabela abaixo – informação da água gasta (em litros) nos dois processos de rega.

Rega gota a gota (Água gasta – em litros)	***Rega com mangueira*** (Água gasta – em litros)
1,5	
4	
5,3	
7	
8,4	
10,1	

18.3. Representa num gráfico de barras a relação entre a quantidade de água gasta pelo processo de rega *gota a gota* e de *mangueira*.



19. Área cultivada e rega vantajosa



A figura representa o jardim do padrinho do André.
Está desenhado numa ***escala de 1: 100***.
O padrinho do André plantou flores nos canteiros com forma de quadrado tendo semeado relva na parte restante.

Completa de forma a construíres três frases verdadeiras:

19.1. A **área cultivada de flores** do padrinho do André é _______ (***maior*** ou ***menor***) do que a área relvada.

19.2. A **área relvada** representa ________ de todo a área do seu jardim.

Selecciona a resposta certa: (5/15; 7/15; 8/17; 10/15; 9/15)

19.3 Aplicando o factor escala, a ***largura real*** do jardim do é de _______ ***cm*** e o ***comprimento real*** é de _________ ***cm***. Pode-se concluir que a ***área real*** de **todo o terreno** é de _________________ cm^2 = _______________ ***m^2.***

Resolução:

19.4 O padrinho do André pode regar o seu jardim pela técnica da rega *gota a gota* ou por *mangueira*. Neste Verão, optou por usar a técnica da rega *gota a gota*. Quais seriam as razões de tal opção?

Resposta: ____

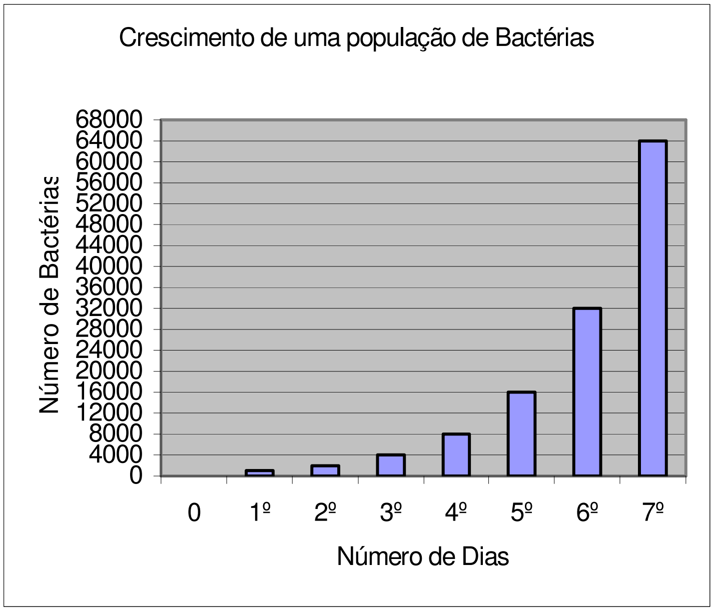
____

____

20. Crescimento de Bactérias

Na disciplina de Ciências da Natureza falaste de uns seres vivos muito especiais: as bactérias. Aprendeste que o crescimento destes micro-organismos é extremamente rápido e pode mesmo tornar-se assustador!...

Observa o gráfico e repara o que aconteceu a uma população de bactérias...



20.1. Lê o gráfico e completa de modo a obteres uma frase verdadeira:

No 1º dia há ***1000*** bactérias, no 2º dia ***2000***, no 3º dia ____________, no 4º dia há ___________, no 5º dia ____________ e no 6º dia _____________.

20.2. Pela leitura atenta do gráfico, certamente que consegues encontrar regularidade no crescimento das bactérias. Explica qual é essa regularidade.

Resposta: ____

____

21. Bactérias em tabelas!...

Com base nos dados do gráfico anterior organiza, em tabela, o crescimento daquela população de bactérias até ao nono dia.

22. e 23. Inventando Problemas

22. No bar da Escola, durante uma semana, venderam-se fundamentalmente quatro tipo de produtos: *iogurtes*, *queques*, *copos de leite*, *sandes de queijo*.
Inventa um problema baseado na figura e dados apresentados.

	Iogurtes	Queques	Copos de Leite	Sandes de queijo
2ª feira	15	7	20	20
3ª Feira	12	8	19	17
4ª Feira	13	9	18	16
5ª Feira	14	7	20	15
6ª Feira	16	8	19	12
Total	70			

Precário

Yogurtes	€ 0,35
Sandes de fiambre	€ 0,45
Sandes de queijo	€ 0,40
Sandes mistas	€ 0,50
Queques	€ 0,25
Pão com manteiga	€ 0,20
Copos de Leite	€ 0,20
Bolos	€ 0,30
Chocolates	€ 0,50

____

____

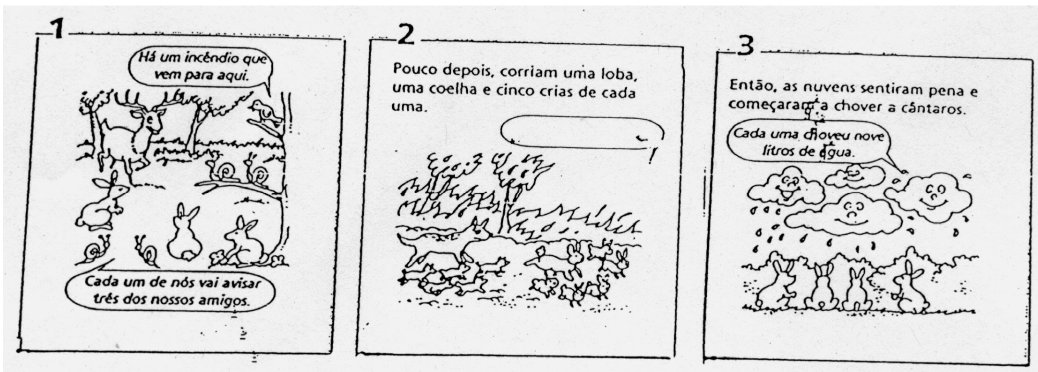
____

Resolve agora o problema e apresenta a solução.

23. Os animais na floresta enfrentam diversos perigos. Um deles é o FOGO!...

Observa a banda desenhada, reflecte e completa alguns diálogos.

Inventa questões matemáticas para cada uma das três molduras da banda desenhada ou inventa apenas um problema para todas.



____

____

____

____

Apresenta as respostas para cada uma das questões ou resolve o problema inventado.

ANEXO 9

(Pilotagem – Resultados genéricos)

Pilotagem – Teste
Resultados genéricos

Nove alunos resolveram a primeira versão do teste numa aula de Estudo Acompanhado e numa sala própria. A selecção dos alunos foi realizada em regime de voluntariado e por indicação das professoras de Matemática e Língua Portuguesa, responsáveis pelo Estudo Acompanhado, com a anuência dos mesmos.

Ao acompanhar os alunos na resolução do teste e posteriormente na respectiva correcção foram detectados alguns aspectos a corrigir e realçados indicadores importantes a contemplar na definição de critérios da avaliação do pré-teste.

Conclui-se que para uma melhor compreensão das questões deveriam ser dadas mais informações nas questões: 1.2, 1.3, 13.1, 18.3 e 20.; alterar a formulação de: 7.2, 7.3, 20.; subdividir em duas ou mais sub-questões: 5.2, 10., 13.2, 19.3 e colocar espaço para possíveis cálculos na pergunta 8.

Torna-se também necessário na realização do pré-teste providenciar o seguinte material: réguas, calculadoras, papel suplementar, lápis, borracha e esferográfica.

Descrevem-se, de seguida, os resultados obtidos.

A maior parte dos alunos respondeu correctamente à *questão 1.1*. Os dois alunos que o não fizeram somaram dois ao numerador em vez de calcularem o *dobro da fracção anterior*. Registe-se que este procedimento incorrecto acontece frequentemente na resolução de questões similares.

Todos os alunos responderam correctamente à *questão 1.2*. Como dois alunos tiveram dúvidas, optou-se por completar a simbologia dada, exemplificando a aplicação da fórmula nas duas primeiras linhas da tabela, usando-se o modelo de resolução apresentado por uma aluna.

A maior parte dos alunos respondeu correctamente à *questão 1.3*, utilizando na resposta três tipos de linguagem: simbólica, corrente ou mista. Um dos alunos ao indicar a regra utilizou a linguagem simbólica e aplicou o modelo da questão 1.2 *("... +2–0,5*"). Contudo, como houve alguns pedidos de ajuda e um aluno não resolveu a questão, optou-se por incluir informação específica: uma seta e um ponto de interrogação nas três primeiras colunas da tabela.

Todos os alunos responderam correctamente à *questão 2*. Realce-se ainda a existência de dois tipos de justificação: a) **argumentação numérica**, expondo apenas a regra aplicada à marca imediatamente anterior (por exemplo: "*Eu aos 1,75cm somei 0,35cm e assim obtive o resultado 2,10*"); b) **argumentação explicativa do padrão**, pela identificação de uma tabela ou do próprio padrão (por exemplo: "*Pensei que <u>os colchões fazem uma tabela</u> e utilizei a regra nas medidas dos colchões* "*Em cada marca os alunos aumentaram 0,35cm então acrescentei 0,35cm à última marca*";"). Por outro lado há alguns alunos que não apresentam a resposta gráfica, não desenhando a nova marca.

Nas *questões 3.1, 3.2, 3.3* não houve nenhuma dúvida e todos os alunos resolveram-nas correctamente. Na última pergunta a maior parte dos alunos apresenta a regra usando a linguagem corrente, mas há dois que utilizam a linguagem simbólica, aplicando um deles o modelo observado na questão anterior 3.2 ("*A regra de C para D é X3+1*") . Há ainda um aluno que completa correctamente as duas primeiras tabelas até à quinta linha não acrescentando dados numéricos nas duas últimas.

Quase todos os alunos responderam de forma completa à *questão 4*. Pretendia-se que apresentassem os dados em tabela e, caso fosse necessário, usassem a calculadora. A maior parte dos alunos utilizou a calculadora para todos os cálculos e outros só o fizeram para a determinação da soma total, realizando os cálculos intermédios "à mão". Há alunos que apresentam apenas uma argumentação numérica, invocando que a soma total se distancia do objectivo pretendido - "emagrecer 2,5 Kg" -, realizando ou não a sistematização dos cálculos numa tabela. Todavia, há alunos que apresentam todos os cálculos necessários, organizam-nos numa tabela e justificam o seu raciocínio com uma resposta interpretativa, denunciando uma compreensão indutiva do resultado obtido ("*Não, porque sempre a emagrecer assim sucessivamente eram precisos uns cem anos*").

Apenas um aluno respondeu incorrectamente à *questão 5.1*.

Apesar da maior parte dos alunos ter respondido correctamente à *questão 5.2*. há alguns que apenas apresentam uma resposta interpretativa e descritiva ("*O fígado de vaca é mais saudável que 100g de bacalhau, porque o número de calorias em relação ao número de fósforo no fígado a distância é maior, o que significa que o fígado tem mais fósforo que calorias do que o peixe*"; "*O fígado é mais rico que o bacalhau, quer em calorias, quer em fósforo*") e apenas dois descobrem a relação numérica existente entre os nutrientes pedidos dos dois produtos ("*A quantidade de fósforo do fígado de vaca é o dobro do fósforo do bacalhau e nas calorias é aproximadamente o dobro*"; "*podemos concluir que o bacalhau tem quase metade das calorias e do fósforo que o fígado de vaca*"). Por tal motivo considerou-se conveniente subdividir a questão em duas sub-questões.

Relativamente à *pergunta 6*. a maior parte dos alunos apenas se fixou na variável *forma* e esqueceu *a cor*. Contudo, tudo indica que os alunos descobriram o padrão do friso, mas não foram capazes de o concretizar.

À *questão 7.1*. todos os alunos responderam correctamente.

Todavia, a maioria dos alunos respondeu incorrectamente à *questão 7.2*, apresentando a medida do lado de cada um dos quadrados, em vez do respectivo perímetro. A maioria dos alunos não resolveu *a pergunta 7.3*, mas aqueles que o fizeram apresentaram correctamente a solução. Por tal motivo alterou-se a formulação da questão. Os alunos revelaram algumas dificuldades na resolução da *questão 7.4*., pois não responderam ou fizeram-no incorrectamente, mas outros houve que apresentaram correctamente a resposta e de uma forma diversificada ("*os perímetros são todos de 4 em 4*"; "*a soma do número anterior com 4*"; "*são números pares*").

Todos os alunos responderam à *questão 8*. A maior parte respondeu correctamente à *8.1*, tendo alguns alunos realizado cálculos adicionais. É de notar que apesar de ainda não ter sido ensinado a multiplicação com números racionais os alunos que realizaram esses cálculos fizeram-no correctamente. Assim, optou-se por incluir nesta pergunta espaço para realização de cálculos. Na interpretação da expressão numérica, na *questão 8.2,* a linguagem usada pelos alunos não foi a mais adequada ("*3/4x0,48 é o custo do sumo e ½x0,48 o custo do sumo que vai dar qualquer coisa que é o preço dos dois sumos*"; "*a soma do custo do sumo A com o custo do sumo B*").

Relativamente à *questão 9*. apenas dois alunos apresentaram conclusões plausíveis. Os restantes ou não resolveram ou apresentaram uma resposta incorrecta. Contudo na justificação das respostas pode-se salientar dois tipos de argumentação: a) **numérica**, invocando a *quantidade do produto*; b) **não numérica**, evocando a *qualidade do produto*.

A maior parte dos alunos não respondeu correctamente à *questão 10*. Refira-se que o papel milimétrico dificultou ainda mais o processo. Optou-se por retirá-lo e colocar duas sub-questões: a indicação de um número num determinado intervalo e posteriormente a representação na recta desse número.

A maior parte dos alunos respondeu correctamente à *questão 11*., tendo alguns deles apresentado não só a resposta numérica, mas também a gráfica, representando numa recta, por eles criada, o número indicado.

A maior parte dos alunos respondeu correctamente à *questão 12*.

Relativamente à *questão 13*. os alunos revelaram algumas dificuldades. Como, no ano transacto, problemas deste tipo revelaram-se importantes na dinâmica da aprendizagem do conceito (implícito) de variável optou-se por manter este problema, alterando-se um pouco a formulação.

Todos os alunos responderam correctamente à *questão 14*.

Relativamente à *questão 15*., os alunos tiveram facilidade em interpretar a situação gráfica apresentada em *15.2* e inventaram correctamente o problema. Apesar da formulação do problema *15.1* ser familiar ao aluno, todos tiveram dificuldades e nenhum conseguiu apresentar uma resposta final correcta.

Por tal motivo pensou-se em alterar o enunciado do problema. Contudo, vários investigadores, entre os quais se destacam Kieran (1992-96), Shoenfeld (1988) consideram importante o uso deste tipo de problemas e desta linguagem na aquisição do conceito de variável. Assim, optou-se por mantê-lo com o objectivo de provocar no aluno competências profundas de leitura atenta e reflectida de forma a compreender o enunciado do problema, com interpretação "*frase a frase*" e aplicando a reversibilidade do pensamento na necessidade de pensar "*de trás para a frente*" e "*da frente para trás*".

A maior parte dos alunos teve dificuldades e resolveu incorrectamente o *problema 16.* Contudo, como esta situação foi aplicada no TIMSS e conhecendo-se os resultados do mesmo achou-se conveniente manter o problema sem nenhuma alteração.

Na *questão 17.* os alunos tiveram algumas dificuldades, especialmente, na aplicação do factor escala que surge implicitamente na formulação do problema. Realce-se ainda que o aluno para responder ao problema pode usar a régua e/ou a malha quadrangular, em transparência, existente na folha seguinte desta prova de avaliação, na *questão 18.3*.

Relativamente à *situação problemática 18*, os alunos só tiveram dúvidas na representação gráfica da *questão 18.3*,. Apesar de reconhecermos dificuldades acrescidas na representação gráfica entre duas variáveis numéricas sendo mais acessível, neste nível etário, a interpretação e representação gráfica entre uma variável tipo texto e outra numérica (Fernandes, 1994) optou-se por serem dadas mais informações no gráfico, designadamente, a identificação da variável em cada um dos eixos. Escolheu-se também este tipo de representação, porque este ano, na disciplina de Ciências da Natureza, os alunos também se familiarizam com esta *linguagem* gráfica.

No *problema 19* os alunos tiveram apenas dificuldade na *questão 19.3*, no entendimento do conceito de "***área real***". Assim, como a generalidade dos alunos não aplicou o factor escala optou-se por reformular a linguagem e colocar sub-questões de complexidade gradual levando o aluno a entender e a aplicar o conceito exposto, de uma a duas dimensões.

Na *questão 20*. optou-se por indicar o número de bactérias no primeiro e segundo dia para tornar perceptível a leitura de todos os dados numéricos do gráfico. A maior parte das respostas dos alunos concluem que há aumento no crescimento das bactérias, mas não quantificam esse aumento nem descobrem a relação numérica indutiva. Por outro lado concluiu-se que a formulação deveria ser alterada, pois as respostas dos alunos ("*encontrei uma regularidade entre 1600 e 2400*"; "*no gráfico encontro uma regularidade entre 8 000 e 16 000 e também entre 32 000 e 64 000 ...*") indiciam que a questão deveria ser mais objectiva.

Os alunos compreendem a *questão 21*., representando em tabela o crescimento da população de bactérias, mas nem todos ampliam correctamente os dados numéricos.

Relativamente às *questões 22.1 e 22.2*. não foi possível recolher dados significativos.

ANEXO 10
(Critérios de avaliação/classificação)

TESTE – na versão do Pré e Pós-teste
Critérios de avaliação

1. Introdução

A avaliação da resolução de cada questão do teste contemplou uma vertente quantitativa, pela atribuição de uma classificação/pontuação a cada pergunta e uma vertente qualitativa associada a diferentes tipos de resposta – resposta completa; resposta parcialmente completa, resposta incorrecta e a não resposta. Nesta última vertente procurou-se registar amplamente todo o processo de resolução individual de cada questão, focalizando pormenores de raciocínio e de execução, caracterizando o tipo de respostas em "patamares" consistentes de avaliação.

Na análise e correcção das questões formuladas foi seleccionado o termo "completa", em vez de "correcta", pois aquele parece ser mais abrangente e exigente em relação a todo o processo de resolução, dado que tende a incluir o raciocínio desenvolvido e as operações implementadas pelo aluno até chegar ao resultado pretendido. A designação "correcta" está efectivamente orientada para o resultado final e reduz-se a uma análise bivalente: resultado certo ou resultado errado. Naturalmente que o termo "correcta" é incluso no termo "completa".

No processo de avaliação e classificação de cada questão foram definidos previamente critérios para a obtenção de uma resposta completa.

Tendo por base as respostas obtidas pelos alunos no processo de pilotagem foi possível elaborar, numa primeira fase, os critérios de avaliação/classificação para cada sub-questão. Posteriormente ao serem aplicados tiveram de ser redefinidos, ampliados, reformulados e adaptados ao universo do tipo de respostas dadas pelos alunos em estudo.

Cada sub-questão foi identificada com um código, atribuída uma classificação e definidos critérios de avaliação qualitativa, prevendo "patamares" consistentes nos diversos tipos de respostas.

Em cada uma das turmas foram analisados e avaliados os resultados de vinte alunos, pois tiveram de ser eliminadas as respostas dos alunos que só realizaram um dos testes, o pré-teste ou o pós-teste, porque faltaram a um deles ou a uma parte da prova. Também não puderam ser avaliados os alunos que integraram a turma apenas este ano e um outro aluno que não teve condições idênticas de realização do teste como os restantes alunos da turma.

2. Questões e Critérios de avaliação/classificação

Para a primeira questão (**Q1**): "*Completa as tabelas com as regras dadas*" constituída por três sub-questões definiram-se os seguintes **critérios para obtenção de uma resposta completa.**

i) Completa a tabela pela aplicação da regra indicada em linguagem corrente.
ii) Completa a tabela pela aplicação da regra indicada em linguagem simbólica matemática, explicitando ou não os cálculos.
iii) Completa a tabela e identifica explicitamente a regra associada.

Classificação: cada uma das sub-questões: 1.1. e 1.2. tem a classificação de 10 valores, sendo atribuídos 2 valores ao preenchimento correcto de cada uma das lacunas da tabela.

Sub-questão Q1.1.: "Regra: *O dobro do número anterior*" (Segue-se a tabela de uma só entrada com três valores e cinco lacunas para preencher e completar a tabela)

Questão	**Classificação**	**RESPOSTA**
		RESPOSTA COMPLETA
Q1.1	2x5 = 10	Completa a tabela multiplicando por 2 o numerador da fracção anterior, mantendo inalterável o denominador.
		RESPOSTA PARCIALMENTE COMPLETA
Q1.1	2xn 1≤ n ≤4	Completa a tabela multiplicando por 2 o numerador da fracção anterior, mantendo inalterável o denominador, num máximo de quatro lacunas.
		RESPOSTA INCORRECTA
Q1.1	1 **a**	Completa a tabela adicionando 2 ao numerador da fracção, mantendo o valor numérico do denominador.
Q1.1	1 **b**	Completa a tabela, multiplicando por 2 o numerador e o denominador.
Q1.1	1 **c**	Completa a tabela adicionando um ao numerador 5, 6, 7, ... mas mantendo o valor numérico do denominador.
Q1.1	1 **d**	Completa a tabela com valores aleatórios, sem se descortinar a regra.
Q1.1	1 **e**	Apresenta-se ilegível, apagado com borracha, riscado com um traço por cima, ou impossível de interpretar.
		NÃO RESPOSTA
Q1.1	0	Em branco.

Sub-questão 1.2. "Regra: ... $x\ 2\ +\ 1$" (Segue-se a tabela de uma só entrada com três valores e cinco lacunas para preencher e completar a tabela)

Questão	**Classificação**	**RESPOSTA**
		RESPOSTA COMPLETA
Q1.2	2x5 = 10 **a**	Completa a tabela com os valores numéricos resultantes de regra dada em linguagem simbólica, sem explicitação dos cálculos numéricos.
Q1.2	2x5 = 10 **b**	Completa a tabela com os valores numéricos resultantes de regra dada em linguagem simbólica, com explicitação dos cálculos numéricos.

RESPOSTA PARCIALMENTE COMPLETA

Q1.2	2xn 1≤ n ≤4 **a**	Completa a tabela segundo a regra dada, num máximo de quatro lacunas, sem explicitação dos cálculos.
Q1.2	2xn 1≤ n ≤4 **b**	Completa a tabela segundo a regra dada, num máximo de quatro lacunas, com explicitação dos cálculos.

RESPOSTA INCORRECTA

Q1.2	1 **a**	Completa a tabela usando valores numéricos aleatórios ou valores emergentes de uma regra não explícita.
Q1.2	1 **b**	Apresenta-se ilegível, apagado com borracha, riscado com um traço por cima, ou impossível de interpretar

NÃO RESPOSTA

Q1.2	0	Em branco.

<u>Classificação</u>: na sub-questão 1.3 é atribuído dois valores ao preenchimento correcto de cada uma das quatro lacunas da tabela, num total de oito. Pela explicitação correcta da regra em linguagem simbólica - **a**, em linguagem mista – **b**, em linguagem corrente - **c** ou **d** – em linguagem corrente, menos rigorosa do que a anterior.

Sub-questão Q1.3 "*Completa a tabela e indica a regra*" (Segue-se a tabela de uma só entrada com três valores e quatro lacunas para preencher e completar a tabela e ainda espaço para indicar a regra descoberta).

Questão	Classificação	RESPOSTA

RESPOSTA COMPLETA

Q1.3	questões: 2x4 = 8 fórmula: 2 8+2=10 **a**	Completa a tabela com os valores numéricos resultantes da regra descoberta e explícita em linguagem simbólica, do tipo *+1,5* ou *...+2-0,5 ou ...+1,5* ou *mais 1,5*.
Q1.3	8+2=10 **b**	Completa a tabela com os valores numéricos resultantes da regra descoberta e explícita em linguagem corrente e simbólica (especificamente indicando por baixo da seta *+1,5 ou 1,5*).
Q1.3	8+2=10 **c**	Completa a tabela com os valores numéricos resultantes da regra descoberta e explicita-a em linguagem corrente, de forma sintética, quase reduzida ao operador numérico (ex: *somar 1,5*; *a regra é sempre mais 1,5*; ...)
Q1.3	8+2=10 **d**	Completa a tabela com os valores numéricos resultantes da regra descoberta e explicita-a em linguagem corrente, de forma extensa e por vezes pouco rigorosa (ex: *aumentar sempre 1,5*; *a regra é andar de 1,5 em 1,5*; *adicionar o nº que está na tabela a 1,5*; ...)

RESPOSTA PARCIALMENTE COMPLETA

Q1.3	8 **a**	Completa a tabela correctamente, mas não explicita a regra.
Q1.3	8 **b**	Completa a tabela correctamente, mas explicita incorrectamente a regra.
Q1.3	0+2 **c**	Completa incorrectamente a tabela, mas explicita correctamente a regra (em linguagem simbólica, em linguagem mista ou corrente).
Q1.3	2xn $1\leq n \leq 3$ **d**	Completa a tabela com apenas alguns dos valores numéricos correctos explicitando ou não a regra.

RESPOSTA INCORRECTA

Q1.3	1 **a**	Completa a tabela com valores numéricos aleatórios, mas tenta explicitar a regra ou assinala valores numéricos de acordo com uma regra explícita, mas incorrecta.
Q1.3	1 **b**	Apresenta-se ilegível, apagado com borracha, riscado com um traço por cima, ou impossível de interpretar.

NÃO RESPOSTA

Q1.3	0	Em branco.

<u>**Classificação**</u>: a questão 2. Inclui implicitamente três sub-questões: o desenho da marca, o valor numérico da marca e a fundamentação da regra, com explicitação ou não do operador numérico. A cada sub-questão é atribuída a mesma classificação, num total de 15 valores.

Relativamente à questão 2. (**Q2**) "*salto de força inferior*" **os critérios definidos para uma resposta completa** são:

i) Assinala uma resposta numérica.
ii) Indica uma resposta pictórica, com o desenho da marca respectiva (um quadrilátero) no espaço apropriado.
iii) Fundamenta o resultado, explicitando a regra, evidenciando ou não o operador numérico aditivo, usando linguagem simbólica ou linguagem corrente.

Questão	**Classificação**	**RESPOSTA**

RESPOSTA COMPLETA

Q2	5x3 = 15 1 **a**	Resposta numérica correcta, desenho correspondente da marca ou indicação de como seria desenhado e explicação simbólica do procedimento efectuado, pela evidência do operador numérico aditivo na fundamentação ou nos cálculos (+0,35 ou +35cm ou mais 0,35 ou mais 35cm).
Q2	1 **b**	Resposta numérica correcta, desenho correspondente da marca ou indicação de como seria desenhado e explicação simbólica do procedimento efectuado, pelo produto 0,35x6=, baseado ou não na operação inversa (0,70:2=0,35 ou 1,05:3 ou outras)

Q2	1 **c**	Resposta numérica correcta, com desenho correspondente da marca e indicação do procedimento efectuado em linguagem corrente, sem evidenciar a presença contínua do operador numérico.
Q2	1 **d**	Resposta numérica correcta, com explicação de como deveria ser desenhada a marca e indicação do procedimento efectuado em linguagem corrente, não evidenciando o operador numérico.
Q2	1 **e**	Outras, por ex, com resposta numérica correcta, desenho da marca e uma explicação operatória (*eu usei 1,40-1,05 = 0,35*).

RESPOSTA PARCIALMENTE COMPLETA

Q2	1 **a**	Resposta numérica correcta, sem desenho, mas com explicação correcta do procedimento, usando linguagem simbólica, indicando o operador numérico: *+0,35* ou *mais 0,35* ou *+35cm*.
Q2	1 **b**	Resposta numérica correcta, sem desenho, mas com explicação correcta do procedimento, usando linguagem simbólica do tipo: *0,35x6*.
Q2	1 **c**	Resposta numérica correcta, sem desenho, mas com explicação simples do procedimento em linguagem corrente.
Q2	1 **d**	Explica como desenharia a marca e indica, de forma qualitativa, o procedimento efectuado, com referência implícita ao operador numérico. Não responde numericamente à questão.
Q2	1 **e**	Indica o operador numérico correcto, desenha a marca, mas calcula incorrectamente.
Q2	1 **f**	Indica o número correcto, não desenha e explica pelo último procedimento (1,75+0,35=2,10) ou apenas entre dois valores.
Q2	1 **g**	Indica o valor numérico correcto, não desenha e explica incorrectamente o procedimento.
Q2	1 **h**	Outras...

RESPOSTA INCORRECTA

Q2	1 **a**	Indica o valor numérico incorrecto da marca, mas não o desenha, realizando uma explicação confusa do procedimento ou descobre o operador, mas calcula incorrectamente (ex: *0,35+1,75 = 0,525* ou *0,35+1,05*=).
Q2	1 **b**	Indica o valor numérico incorrecto, desenha a marca e a explicação revela interiorização e evolução no pensamento ou é apenas baseada em dois valores (ex: *de 0,35 para 0,70 conclui que é o dobro*; *no princípio achei que era o dobro mas depois cheguei à conclusão que era acrescentar 0,35cm*; ...)
Q2	1 **c**	Assinala uma resposta numérica incorrecta, não executa o desenho e aponta um procedimento vago, designadamente com os cálculos, mas não os executa.

Q2	1 **d**	Não indica o valor numérico da marca ou indica-o incorrectamente, não desenha a marca e tenta explicar o procedimento
Q2	1 **e**	Outras, por exemplo, indicando apenas incorrectamente o valor numérico ou um valor vago, (ex: responde com o número 1,75 ou *21,00*; ou *seria desenhado à beira dos outros*, ...)
Q2	1 **f**	Responde às três questões, mas incorrectamente.
Q2	1 **g**	Apresenta-se ilegível, apagado com borracha, riscado com um traço por cima, ou impossível de interpretar.

NÃO RESPOSTA

Q2	0	Em branco.

Para a terceira questão (**Q3**): "*Completa as tabelas seguintes e indica a regra de C para D*" constituída por três sub-questões foram definidos os seguintes **critérios generalistas para obtenção de uma resposta completa**.

i) Completa a tabela numérica que relaciona duas variáveis pela aplicação da regra dada em linguagem corrente.
ii) Completa a tabela numérica que relaciona duas variáveis pela aplicação da regra dada em linguagem simbólica matemática.
iii) Analisa os valores numéricos da tabela e indica a regra que relaciona as duas variáveis, em linguagem simbólica e/ou em linguagem corrente.

Questão 3.1. "*De A para B (Regra: A soma do triplo de A com 2)*" Segue-se a tabela de duas entradas A e B, com a coluna A com os valores numéricos "origem".

Questão	**Classificação**	**RESPOSTA**

RESPOSTA COMPLETA

Q3.1	2x5 = 10 2,5+ 2,5 = 5 **a**	Completa a tabela aplicando a regra, colocando ainda dois valores numéricos na coluna "origem" e determinando o objecto "imagem".
Q3.1	2x5 = 10 2,5+ 2,5 = 5 **b**	Completa a tabela aplicando a regra, colocando ainda dois valores numéricos na coluna "origem", evidenciando as fórmulas e os cálculos respectivos.

RESPOSTA PARCIALMENTE COMPLETA

Q3.1	2x5 = 10 **a**	Completa a tabela, aplicando a regra, mas só coloca um dos dois números que faltam na primeira coluna.
Q3.1	2x5 = 10 **b**	Completa a tabela, aplicando a regra, mas não coloca os dois números que faltam na primeira coluna.
Q3.1	2x5 = 10 **c**	Completa alguns valores da tabela, mas não o faz correctamente no cálculo do 1º valor da tabela.

Q3.1	1≤ n < 7 2xn **d**	Completa a tabela, colocando os dois números que faltam na primeira coluna, mas realiza apenas alguns cálculos correctamente.
Q3.1	**e**	Outras...

RESPOSTA INCORRECTA

Q3.1	1 **a**	Completa a tabela com outra regra, possivelmente a da questão seguinte ou outra, por exemplo: a tabuada do 3 e completa os dois valores que faltam.
Q3.1	1 **b**	Completa a tabela com outra regra, possivelmente a da questão seguinte e só completa um dos valores que faltam.
Q3.1	1 **c**	Completa a tabela com outra regra, possivelmente a da questão seguinte ou escreve os números naturais: 1, 2, 3, 4,... e não completa os dois valores que faltam.
Q3.1	1 **d**	Apresenta-se ilegível, apagado com borracha, riscado com um traço por cima, ou impossível de interpretar.
Q3.1	1 **e**	Outras....

NÃO RESPOSTA

Q3.1	0	Em branco.

Questão Q3.2: $A \xrightarrow{A \times 2 + 1} B$

Questão	**Classificação**	**RESPOSTA**

RESPOSTA COMPLETA

Q3.2	2x5 = 10 2,5+2,5 = 5 **a**	Completa a tabela aplicando a regra dada, colocando ainda dois valores numéricos na coluna "origem" e determinando o objecto "imagem".
Q3.2	2x5 = 10 2,5+2,5 = 5 **b**	Completa a tabela, aplicando a fórmula e alarga o procedimento a dois valores que faltam na coluna "origem", explicitando os cálculos respectivos.

RESPOSTA PARCIALMENTE COMPLETA

Q3.2	2x5 = 10 **a**	Completa a tabela, aplicando a regra, mas coloca um dos dois números que faltam na primeira coluna.
Q3.2	2x5 = 10 **b**	Completa a tabela, aplicando a regra, mas não coloca os dois números que faltam na primeira coluna.
Q3.2	2x5 = 10 **c**	Completa alguns valores da tabela, mas não o faz correctamente no cálculo do 1º valor da tabela.
Q3.2	1≤ n < 7 2xn **d**	Completa a tabela, colocando os dois números que faltam na primeira coluna, mas realiza apenas alguns cálculos correctamente.
Q3.2	**e**	Outras...

RESPOSTA INCORRECTA

Q3.2	1 **a**	Completa a tabela com outra regra e completa os dois valores que faltam.
Q3.2	1 **b**	Completa a tabela com outra regra e só completa um dos valores que faltam.
Q3.2	1 **c**	Completa a tabela com outra regra e não completa os dois valores que faltam.
Q3.2	1 **d**	Apresenta-se ilegível, apagado com borracha, riscado com um traço por cima, ou impossível de interpretar.
Q3.2	1 **e**	Outras....

NÃO RESPOSTA

Q3.2	0	Em branco.

Na questão (Q 3.3) existe uma tabela de duas entradas que relaciona, com uma regra, os números entre as duas colunas C e D. Pede-se a regra de C para D.

Questão	**Classificação**	**RESPOSTA**

RESPOSTA COMPLETA

Q3.3	15 **a**	Descobre a regra e explicita-a simbolicamente, usando a letra C, na expressão *Cx3+1*.
Q3.3	15 **b**	Descobre a regra e explicita-a através da expressão *...x3+1*.
Q3.3	15 **c**	Descobre a regra e explicita-a em linguagem corrente.
Q3.3	15 **d**	Explicita a regra correctamente, mas concretizando-a com exemplos (ex: *a regra é 0x3+1; depois 1x3+1; 2x3+1; ...*).

RESPOSTA PARCIALMENTE CORRECTA

Q3.3	10 **a**	Descobre a regra, mas usa indevidamente a letra A, em vez de C. (ex: Ax3+1)
Q3.3	10 **b**	Descobre a regra, mas usa indevidamente a letra A e expressa-a em linguagem corrente (ex: *é o triplo de A com 1*)
Q3.3	10 **c**	Descobre a regra e explicita-a simbolicamente, mas com parte da expressão incorrecta.
Q3.3	10 **d**	Descobre a regra e explicita-a em linguagem corrente, mas com parte da expressão incorrecta

RESPOSTA INCORRECTA

Q3.3	1 **a**	Explicita correctamente uma regra relacionando apenas os entes numéricos da coluna B (ex: *de 3 em 3; aumenta de 3 a em 3*; *tem de se somar 3*, *fazer sempre mais 3*,...)

Q3.3	1 **b**	Explicita uma outra regra (ex: *tabuada do 3*, *é de multiplicar e de somar*, *...x2+1*, ou *Cx2+3*; *é que se tem de somar*, aumentar 2; *acrescenta-se mais dois*; ou várias *Cx1+1/Cx2+1/Cx3+1*,...)
Q3.3	1 **c**	Apresenta-se ilegível, apagado com borracha, riscado com um traço por cima, ou impossível de interpretar.

NÃO RESPOSTA

Q3.3	0	Em branco.

Em relação à quarta questão (**Q4**): "*Emagrecer lentamente é saudável*" definiram-se os seguintes **critérios para obtenção de uma resposta completa**.

i) Calcula correctamente os seis valores previstos, sendo o valor seguinte metade do anterior.
ii) Organiza os dados em tabela.
iii) Identifica e/ou assinala o processo aditivo dos seis valores encontrados.
iv) Calcula a soma e analisa o resultado.
v) Interpreta os dados de forma abrangente, identificando os infinitésimos.

Questão	**Classificação**	**RESPOSTA**

RESPOSTA COMPLETA

Q4	15 **a**	Calcula os valores numéricos de cada uma das seis semanas e organiza-os correctamente em tabela. Determina a soma e analisa correctamente o resultado. Interpreta os dados obtidos de forma abrangente, identificando implicitamente os infinitésimos.
Q4	15 **b**	Calcula os valores numéricos de cada uma das seis semanas, com eventuais erros de cálculo, e organiza-os em tabela. Determina a soma e analisa correctamente e estritamente o resultado obtido.
Q4	15 **c**	Calcula os valores numéricos de cada uma das seis semanas e organiza-os correctamente em tabela. Determina a soma de forma recursiva e analisa correctamente e estritamente o resultado obtido
Q4	15 **d**	Calcula os valores numéricos de cada uma das seis semanas, organiza-os em tabela, mas de forma incompleta em termos de informação. Determina a soma e analisa correctamente e estritamente o resultado obtido ou de forma abrangente (a).
Q4	15 **e**	Calcula os valores numéricos de cada uma das seis semanas, mas não os organiza em tabela. Determina a soma e analisa correctamente e estritamente o resultado obtido.

RESPOSTA PARCIALMENTE COMPLETA

Q4	1≤ n < 5 2xn 2xn+5 **a**	Calcula correctamente alguns valores. Apresenta os resultados organizados em tabela e analisa coerentemente o resultado, baseado na soma obtida que é inferior a 2,5 ou na soma que é superior a 2,5.

Q4	**b**	Calcula correctamente os valores, mas não os apresenta organizados em tabela. Analisa correctamente o resultado, baseado na soma obtida que é inferior a 2,5
Q4	**c**	Conclui correctamente e de forma intuitiva, com a apresentação de alguns cálculos.
Q4	**d**	Outras...

RESPOSTA INCORRECTA

Q4	1 **a**	Conclui incorrectamente, com apresentação em tabela de todos ou de alguns valores numéricos correctos.
Q4	1 **b**	Conclui incorrectamente, com apresentação de alguns valores numéricos correctos, mas sem organização dos dados em tabela (ex: *1+0,5+0,5+0,5... =*).
Q4	1 **c**	Determina correctamente os valores, mas só aproveita o último para responder à questão.
Q4	1 **d**	Executa determinados cálculos e conclui correctamente, incluindo no cálculo da soma o primeiro o e o último valor determinados (ex: $1Kg:2^6 = 0,015625$ *e* $1+0,0156256 = ...$)
Q4	1 **e**	Apresenta-se ilegível, apagado com borracha, riscado com um traço por cima, ou impossível de interpretar, por exemplo, uma resposta de valor lógico.

NÃO RESPOSTA

Q4.	0	Em branco.

Em relação à quinta questão (**Q5**): "*Tabela Nutricional Parcial*" definiram-se os seguintes **critérios para obtenção de uma resposta completa**.

i) Faz a leitura de dados numéricos e de tipo texto numa tabela de duas entradas.
ii) Interpreta o conceito de "triplo de um número" numa frase escrita em linguagem corrente e contextualizado na tabela dada.
iii) Selecciona, na tabela, a informação dada e relaciona-a estabelecendo correspondências: quantitativas, com explicitação de modelos matemáticos ou qualitativas.

Questão 5.1. "**V**erdadeiro ou **F**also? *100g de pescada contêm o triplo de* **vitamina D** *que 100g de fígado de carne*. ____"

Questão	**Classificação**	**RESPOSTA**

RESPOSTA COMPLETA

Q5.1	5 **a**	Atribui o valor lógico **falso** à frase dada.
Q5.1	5 **b**	Responde negativamente, justificando ou não (ex: *Não, tem o dobro* ou apenas *Não*).

RESPOSTA INCORRECTA

Q5.1	1 **a**	Atribui o valor lógico **verdadeiro** à frase dada.
Q5.1	1 **b**	Apresenta-se ilegível, apagado com borracha, riscado com um traço por cima, ou impossível de interpretar.

NÃO RESPOSTA

Q5.1	0	Em branco.

Questão 5.2. "Observa na tabela a quantidade de nutrientes em **100g de bacalhau** e em **100g de fígado de vaca**. O que podes concluir sobre a relação entre o número de ***calorias*** e a quantidade de ***fósforo***?"

Questão	**Classificação**	**RESPOSTA**

RESPOSTA COMPLETA

Q5.2	10 **a**	Estabelece correctamente as correspondências quantitativas, com elaboração de <u>modelos matemáticos multiplicativos</u> nas duas relações: "número de calorias" e "quantidade de fósforo" existentes entre os dois nutrientes referidos: bacalhau e fígado de vaca (ex: *o fígado tem quase o dobro de calorias do que o bacalhau e o fígado tem o dobro de fósforo do que o bacalhau*).
Q5.2	10 **b**	Estabelece correctamente as correspondências quantitativas, com elaboração de <u>modelos matemáticos multiplicativos e aditivos</u> nas duas relações: "número de calorias" e "quantidade de fósforo: "número de calorias" e "quantidade de fósforo" existentes entre os dois nutrientes referidos: bacalhau e fígado de vaca (ex: .
Q5.2	10 **c**	Estabelece correctamente as correspondências nas duas relações: "número de calorias" e "quantidade de fósforo existentes entre os dois nutrientes referidos: bacalhau e fígado de vaca, <u>uma de natureza qualitativa</u> e <u>outra de âmbito quantitativo</u> (ex: .

RESPOSTA PARCIALMENTE COMPLETA

Q5.2	5 **a**	Estabelece correctamente apenas <u>uma</u> das relações, usando <u>modelos matemáticos quantitativos</u> ou do "número de calorias" ou da "quantidade de fósforo" existentes entre os dois nutrientes referidos: bacalhau e fígado de vaca.
Q5.2	5 **b**	Estabelece correctamente as correspondências das duas relações: "número de calorias" e "quantidade de fósforo: "número de calorias" e "quantidade de fósforo" existentes entre os dois nutrientes referidos: bacalhau e fígado de vaca, sendo <u>as duas de natureza qualitativa</u>, podendo ser uma delas ligada às aprendizagens realizadas nas Ciências da Natureza,

		ou construindo tabelas ou realizando operações (ex*: em relação às calorias o fígado de vaca tem mais e em relação ao fósforo, o fígado de vaca tem mais*.
Q5.2	5 **c**	Estabelece correctamente apenas <u>uma</u> das relações, usando <u>modelos matemáticos qualitativos</u> ou do "número de calorias" ou da "quantidade de fósforo" existentes entre os dois nutrientes referidos: bacalhau e fígado de vaca.
Q5.2	5 **d**	Faz uma apreciação qualitativa entre as duas substâncias: *o fígado de vaca é mais rico que o bacalhau, quer em calorias, quer em fósforo ou as calorias têm poucas e o fósforo tem muito,* ou *o fígado de vaca tem mais calorias e também tem mais fósforo* ....
Q5.2	**e**	Outras...

RESPOSTA INCORRECTA

Q5.2	1 **a**	Conclui incorrectamente sobre as duas relações.
Q5.2	1 **b**	Analisa, calculando apenas diferenças numéricas.
Q5.2	1 **c**	Resposta "outside". Estabelece relações qualitativas entre as calorias e o fósforo (ex: *as calorias têm poucas e o fósforo tem muito*, ou *deve-se consumir mais fósforo e não se deve consumir calorias*....)
Q5.2	1 **d**	Resposta "outside". Realiza operações ou anota números não se vislumbrando qual a origem.
Q5.2	1 **e**	Apresenta-se ilegível, apagado com borracha, riscado com um traço por cima, ou impossível de interpretar.

NÃO RESPOSTA

Q5.2	0	Em branco.

Em relação à sexta questão (**Q6**): "*Os autocolantes da Marta*" definiram-se os seguintes **critérios para obtenção de uma resposta completa**.

i) Interpreta a informação geométrica numa tabela de uma entrada, conjugando dois atributos: *cor* (duas, branco ou Qo) e *forma* (quadrangular, circular ou estrelada).

ii) Descobre o padrão geométrico e aplica-o preenchendo as lacunas existentes.

Questão 6. "*A Marta tem uma fita com autocolantes prestos e brancos, dispostos segundo um padrão que se repete, pela mesma ordem. A figura mostra essa fita da qual a Marta já retirou três autocolantes. Desenha, no respectivo local, os autocolantes que a Marta retirou*".

Questão	Classificação	RESPOSTA

RESPOSTA COMPLETA

Q6.	5+5+5=15 **a**	Preenche correctamente a sequência geométrica (“a fita”) respeitando, com rigor o padrão, nos dois atributos: forma e cor.
Q6.	5+5+5=15 **b**	Preenche correctamente a sequência geométrica (“a fita”) respeitando, com pouco rigor o padrão, nos dois atributos: forma e cor.

RESPOSTA PARCIALMENTE COMPLETA

Q6.	$1\leq n < 3$ 5xn **a**	Preenche a sequência geométrica (“a fita”) respeitando, com rigor o padrão, no atributo forma e numa ou em duas lacunas também o atributo cor.
Q6.	$1\leq n < 3$ 5xn **b**	Preenche correctamente a sequência geométrica (“a fita”) respeitando, com pouco rigor o padrão, no atributo forma e numa ou em duas lacunas o atributo cor.
Q6.	5 **c**	Preenche a sequência geométrica (“a fita”) respeitando o padrão no atributo forma e apresenta todas as figuras sem cor ou todas com cor.
Q6.	5 **d**	Outras...

RESPOSTA INCORRECTA

Q6.	1 **a**	Generaliza o padrão, mas não respeita nem a forma nem a cor.
Q6.	1 **b**	Continua a sequência geométrica (“a fita”), desenhando mais quatro quadrados, deixando uma lacuna e desenhando sequencialmente: circulo preenchido, quadrado preenchido e “estrela de 5 pontas” não preenchida.
Q6.	1 **c**	Apresenta-se ilegível, apagado com borracha, riscado com um traço por cima, ou impossível de interpretar.

NÃO RESPOSTA

Q6.	0	Em branco.

Em relação à sétima questão (**Q7**): “*Estrutura em grade*” definiram-se os seguintes **critérios para obtenção de uma resposta completa**.

i) Reconhece o módulo-padrão e o número de quadrados que o formam.
ii) Relaciona a medida do comprimento de um dos lados do quadrado, designado por **1uc**, com o respectivo perímetro.
iii) Organiza os dados e regista-os em tabela.
iv) Interpreta e estabelece relações funcionais entre os perímetros dos diferentes quadrados.

Questão 7.1. “*Quantos quadrados tem cada módulo-padrão?*”.

Questão	**Classificação**	**RESPOSTA**
		RESPOSTA COMPLETA
Q7.1.	10	Identifica no módulo-padrão os quatro quadrados.
		RESPOSTA INCORRECTA
Q7.1.	1 **a**	Não identifica no módulo-padrão o número correcto de quadrados, indicando um número inferior a quatro (ex*: 2 quadrados*).
Q7.1.	1 **b**	Não identifica no módulo-padrão o número correcto de quadrados, indicando um número superior a quatro (ex*: 5 quadrados*; *16 quadrados, 17*; ... .
Q7.1.	1 **c**	Apresenta-se ilegível, apagado com borracha, riscado com um traço por cima, ou impossível de interpretar.
		NÃO RESPOSTA
Q7.1.	0	Em branco.

Questão 7.2. “*Se no módulo-padrão o lado do quadrado mais pequeno medir uma unidade de comprimento (**1uc**) qual é o perímetro de cada um dos diferentes quadrados?*”.

Questão	**Classificação**	**RESPOSTA**
		RESPOSTA COMPLETA
Q7.2.	4x5 = 20 **a**	Indica correctamente o perímetro de cada um dos quatro quadrados tomando como unidade de medida de comprimento ***1uc*** (ex: *4uc; 8uc; 12uc; 16uc*);
Q7.2.	20 **b**	Toma o primeiro quadrado como referência e indica correctamente o perímetro de três dos quatro quadrados tendo como unidade de medida de comprimento ***1uc***, (ex: *8uc; 12uc; 16uc*).
Q7.2.	20 **c**	Indica correctamente o perímetro de quatro ou de três dos quadrados, mas não explicita a unidade de medida de comprimento 1***uc*** ou 1***cm***.
		RESPOSTA PARCIALMENTE COMPLETA
Q7.2.	$1\leq n < 4$ 5xn **a**	Indica correctamente o perímetro de alguns dos quatro quadrados tomando como unidade de medida de comprimento ***1uc ou 1cm***.
Q7.2.	$1\leq n < 4$ 5xn **b**	Indica correctamente o perímetro de alguns dos quatro quadrados, explicitando como unidade de medida de comprimento ***1uc*** ou *1cm*.

Q7.2.	10 **c**	Indica correctamente a regra, mas sem determinar o perímetro dos quadrados, relacionando o perímetro de um quadrado com o anterior (ex: *o perímetro de cada um dos diferentes quadrados é mais 4uc; a diferença entre os quadrados é de 4uc; ...*)
Q7.2.	**d**	Outras...

RESPOSTA INCORRECTA

Q7.2.	1 **a**	Indica incorrectamente o perímetro dos quatro quadrados, podendo usar como unidade de medida de comprimento *1uc* (ex: *2q -> 2uc, 3q-> 3uc, 4q->4uc; ...*)
Q7.2.	1 **b**	Indica uma relação incorrecta para o perímetro, assinalando apenas o aumento de uma unidade para a medida do comprimento do lado do quadrado (ex: *é 1uc*; *1cm*)
Q7.2.	1 **c**	Indica um ou mais números que normalmente coincide(m) com o perímetro de um dos quadrados (ex*: 16; 4; primeiro 8, segundo 12, terceiro 16,4*)
Q7.2.	1 **d**	Refere que o perímetro é constante (ex: *o perímetro de cada uma das diferentes quadrados é 4uc*)
Q7.2.	1 **e**	Estabelece uma relação incorrecta entre os perímetros (ex: *o perímetro é o dobro; mede duas vezes mais; sempre de 2 em 2;...*)
Q7.2.	1 **f**	Apresenta-se ilegível, apagado com borracha, riscado com um traço por cima, ou impossível de interpretar.

NÃO RESPOSTA

Q7.2.	0	Em branco.

Questão 7.3. "*Regista os dados que obtiveste numa tabela*".

Questão	**Classificação**	**RESPOSTA**

RESPOSTA COMPLETA

Q7.3.	4x5 = 20 **a**	Organiza correctamente os dados numa tabela, relacionando cada um dos quadrados com o respectivo perímetro, tomando como unidade de medida de comprimento ***1uc***.
Q7.3.	4x5 = 20 **b**	Organiza correctamente os dados numa tabela, relacionando cada um dos quadrados com o respectivo perímetro, mas não utiliza *1uc* como unidade de medida de comprimento no cálculo do perímetro, mas pode considerar *cm*.
Q7.3.	4x5 = 20 **c**	Organiza correctamente os dados em tabela, mas utiliza a informação pesquisada incorrecta, calculada na alínea anterior.

RESPOSTA PARCIALMENTE COMPLETA

Q7.3.	1≤ n < 4 5xn **a**	Organiza alguns dos dados numa tabela, relacionando cada um dos quadrados com o respectivo perímetro.
Q7.3.	1≤ n < 4 5xn **b**	Organiza os dados numa tabela, mas com informação relacional (textual) incompleta.
Q7.3.	**c**	Outras...

RESPOSTA INCORRECTA

Q7.3.	1 **a**	Indica os dados na tabela não relacionando correctamente cada um dos quadrados com o perímetro.
Q7.3.	1 **b**	Arruma os valores numéricos correctos, ou não, em pequenos "compartimentos", mas não em tabelas.
Q7.3.	1 **c**	Realiza apenas umas operações com indicação ou não do algoritmo (ex: *1ucx4=4*; *2x4=8, 4x3=12, 4x4=16; 4x4=16; 1ucx4=4;...*).
Q7.3.	1 **d**	Apresenta-se ilegível, apagado com borracha, riscado com um traço por cima, ou impossível de interpretar (ex: *desenhando novamente o módulo-padrão* ou *outros quadrados*; *escreve números sem lógica*; *fiz de cabeça;...*).

NÃO RESPOSTA

Q7.3.	0	Em branco.

Questão 7.4. "*Pode-se estabelecer alguma relação entre o perímetro dos diferentes quadrados? Qual?*".

Questão	**Classificação**	**RESPOSTA**

RESPOSTA COMPLETA

Q7.4.	10 **a**	Estabelece uma relação entre o perímetro de cada um dos quadrados em linguagem simbólica.
Q7.4.	10 **b**	Define a relação por recorrência. Estabelece uma relação entre o perímetro de um quadrado com o perímetro do quadrado anterior, evidenciando de forma implícita ou explícita o operador +4 (ex: *a soma do número anterior com 4; a regra é aumentando sempre mais 4uc;...*)
Q7.4.	10 **c**	Estabelece uma relação entre o número do quadrado e o perímetro (ex: *4x*; *a relação é multiplicado por 4 dá o perímetro dos diferentes quadrados*;...)
Q7.4.	10 **d**	Define uma relação baseada nas diferenças dos valores dos perímetros dos quadrados (ex: *a diferença entre os perímetros é de 4uc ou 4cm*).
Q7.4.	10 **e**	Estabelece uma relação entre o perímetro de cada um dos quadrados em linguagem corrente (ex: *anda sempre 4*; *a relação é de somar quatro*;..)

RESPOSTA PARCIALMENTE COMPLETA

Q7.4.	5 **a**	Indica uma relação próxima da correcta, mas em linguagem pouco adequada (ex: a *relação que se pode estabelecer é de 4cm*; *é de 4cm*; ...)
Q7.4.	5 **b**	Assinala o aumento de uma unidade de comprimento da medida do lado de cada quadrado (ex: *aumenta 1cm de comprimento em cada lado*; ...
Q7.4.	5 **c**	Indica apenas uma propriedade entre os números (ex: *são números pares*; ...
Q7.4.	**d**	Outras...

RESPOSTA INCORRECTA

Q7.4.	1 **a**	Assinala uma correspondência pouco clara ou incorrecta, relacionando os perímetros dos quadrados de uma só coluna ou entre a medida do lado dos quadrados (ex *somar sempre mais 8*; *é 1uc*; *1*; *a relação é para somar; um tem o perímetro maior que o outro*; *cada quadrado mede diferentes centímetros*; *é que são maiores*; *é a soma de todos os lados*;...)
Q7.4.	1 **b**	Refere uma relação incorrecta, frequente no 2º teste (ex: *a relação é o dobro*; *aumenta sempre 2*;...)
Q7.4.	1 **c**	Apresenta-se ilegível, apagado com borracha, riscado com um traço por cima, ou impossível de interpretar (ex: *a relação é sempre o triplo*; *a relação é fazer os quadrados*; *que é 16cm*; *é que são todos iguais*; *há sempre mais um quadrado;...*)..

NÃO RESPOSTA

Q7.4.	0	Em branco.

Em relação à oitava questão (**Q8**): "*Compra de sumos*" definiram-se os seguintes **critérios para obtenção de uma resposta completa**.

i) Identifica o valor e o significado de um número fraccionário no cálculo dos preços de determinados produtos.
ii) Realiza os cálculos, compara os valores obtidos e tira conclusões.
iii) Utiliza o raciocínio condicional na interpretação do significado de uma expressão numérica.

Questão 8.1. "*Quis comprar o sumo mais barato, por isso comprei o sumo ___*".

Questão	**Classificação**	**RESPOSTA**

RESPOSTA COMPLETA

Q8.1	10 **a**	Identifica correctamente o sumo B, sem se descortinarem os cálculos realizados ou identificando o preço promocional de cada sumo debaixo da etiqueta.
Q8.1	10 **b**	Identifica correctamente o sumo B pela noção de fracção equivalente, tomando como denominador de todas as fracções o número 4.

Q8.1	10 **c**	Identifica correctamente o sumo B, realizando expressamente cálculos (calcula o produto de um número fraccionário por um número em representação decimal).
Q8.1	10 **d**	Identifica correctamente o sumo B pela utilização da relação "parte-todo" e o cálculo do produto de um número inteiro por um número fraccionário.

RESPOSTA PARCIALMENTE COMPLETA

Q8.1	5 **a**	Identifica correctamente o sumo B, mas alguns cálculos intermédios estão incorrectos.
Q8.1	5 **b**	Outras...

RESPOSTA INCORRECTA

Q8.1	1 **a**	Indica incorrectamente o sumo.
Q8.1	1 **b**	Indica incorrectamente o sumo, porque utiliza a operação inversa no cálculo de "3/4 de...", "1/2 de..." e "1/4 de..." (ex: *0,48:3/4=0,48x4/3 = 0,64* ; *0,48:1/2=0,48:2=0,24*; *0,48:1/4=0,48:4=0,12*).
Q8.1	1 **c**	Apresenta-se ilegível, apagado com borracha, riscado com um traço por cima, ou impossível de interpretar.

NÃO RESPOSTA

Q8.1	0	Em branco.

Questão 8.2. "*Se a expressão 3/4x0,48 representa o custo de **1l** do **sumo A** então a expressão 3/4x0,48+1/2x0,48 representa ____*".

Questão	Classificação	RESPOSTA

RESPOSTA COMPLETA

Q8.2	10 **a**	Interpreta correctamente a expressão numérica, mas numa linguagem próxima do real, do tipo: *representa o preço total dos dois litros de sumo: 1l do sumo A e 1l do sumo C*.
Q8.2	10 **b**	Interpreta correctamente a expressão numérica, mas seguindo uma linguagem matemática, do tipo: *representa (a soma de) o custo de 1l do sumo A com o custo de 1l do sumo C***.**
Q8.2	10 **c**	Interpreta correctamente a expressão numérica, mas segue uma linguagem matemática sequencial, do tipo: *o custo de 1l do sumo A com o (custo) de 1l do sumo C*; *o preço inicial do sumo A com o sumo C* ou *o custo do sumo A mais o C*.
Q8.2	10 **d**	Interpreta a expressão dada, mas de forma pouco clara e rigorosa (ex: *o preço dos sumos "A" e "C"; o custo de 1l de sumo A e C*).

RESPOSTA PARCIALMENTE COMPLETA

Q8.2	5 **a**	Interpreta correctamente apenas uma parte da expressão numérica (ex: *custo do sumo A* ou *custo do sumo C*).
Q8.2	5 **b**	Escreve o número correspondente ao custo dos dois sumos (A e C) (ex: *€0,60*).
Q8.2	5 **c**	Interpreta globalmente a expressão, de forma incompleta, mas com algum suporte lógico (ex: *2l e o custo de dois sumos*).
Q8.2	5 **d**	Outras...

RESPOSTA INCORRECTA

Q8.2	1 **a**	Indica somente um sumo ou indica vagamente o significado de parte da expressão (ex: *metade de 0,48*; ...).
Q8.2	1 **b**	Usa uma linguagem corrente pouco rigorosa, identificando correctamente ou não os sumos (ex: *A soma do sumo A com o sumo C*; *os dois sumos juntos*; *o total do sumo A com o sumo B* ou *o custo de 1l de sumo B e mais o custo de 1l do sumo C*; ...).
Q8.2	1 **c**	Apresenta-se ilegível, apagado com borracha, riscado com um traço por cima, um número, ou impossível de interpretar.

NÃO RESPOSTA

Q8.2.	0	Em branco.

Em relação à nona questão (**Q9**): "*Compra de sumos*" definiram-se os seguintes **critérios para obtenção de uma resposta completa**.

i) Interpreta matematicamente ou de forma contextualizada e vivencial uma das linguagens publicitárias mais comuns utilizada na venda de produtos.
ii) Faz uma escolha e fundamenta a opção tomada numa lógica estritamente matemática e/ou aberta a outras áreas, num contexto mais prático e próximo das vivências e interesses da criança.

Questão 9.1. "*Que marca de leite achocolatado aconselharias a Joana e a mãe a comprar? Porquê?"*.

Questão	**Classificação**	**RESPOSTA**

RESPOSTA COMPLETA

Q9.1	10 **a**	Escolhe a marca de leite "CV" - "Cidade Viva" e fundamenta matematicamente a resposta (ex: "*CV", porque se comprassem 10, por exemplo, só pagavam 5; porque seria mais barato e elas ficariam a lucrar; se a mãe da Joana pagasse 3 levava 6; porque se comprar mais vezes este leite tem mais vantagens; o desconto é de ½ ou 50%; é o mais barato; se pagar 1 leva 2, mas se pagar 2 leva 4; ...)*.

Q9.1	10 **b**	Indica uma marca de leite e fundamenta de forma mista a resposta (evocando saberes matemáticos e/ou de contexto) (ex: *"CV" pois ficava mais barato e também porque faz mal à saúde*; ...)
Q9.1	10 **c**	Opta por uma marca de leite e fundamenta abertamente a resposta, de forma contextualizada e vivencial (ex: *"Va" porque é o que oferece mais; "Va", pois assim levavam mais pacotes; "Va", porque tem qualidade e é o que levavam mais pacotes; tem menos chocolate e é o melhor para o crescimento das crianças; é o que oferece mais; leva mais leite; "Va", porque se calhar era natural;...*)

RESPOSTA PARCIALMENTE COMPLETA

Q9.1	5 **a**	Escolhe correctamente o leite "Cidade Viva" sob o ponto de vista matemático, mas não argumenta ou fá-lo de forma incompleta e vaga (ex: "CV" *é a promoção mais razoável*; *pois se não tivesse uma promoção só levaria um em vez de dois*; *porque leva mais leite do que aquele que paga*; ...).
Q9.1	5 **b**	Opta pelo leite "Vaquinha" – "Va", argumenta de forma ampla e algo ambígua sob o ponto de vista matemático ou vivencial (ex: "*Va" porque estão a fazer essa promoção elevada porque era o melhor e o mais barato*; *paga 3 e leva 4 e acabaria por compensar*; *queria levar alguns pacotes* (reporta-se à redacção do problema); *era o pacote que tinha mais leite; era o que levava mais; traz mais; "Va" porque o leite que vem da vaca penso que seja melhor e mais barato*; ...)
Q9.1	5 **c**	Opta pelo leite "Olá Vida" – "OV" e argumenta de forma ampla e algo ambígua sob o ponto de vista matemático ou vivencial (ex: *"OV" porque tinha mais leite e estava em promoção*; ...)

RESPOSTA INCORRECTA

Q9.1	1 **a**	Escolhe e argumenta incorrectamente sob o ponto de vista matemático e/ou vivencial, apresentando uma resposta inconsistente (ex: "*Va" porque se leva mais e não se paga tanto*; *é o que fica mais barato; levavam mais pacotes, mesmo tendo de pagar mais pacotes do que os outros*; *durar mais dias e poupar mais*; *tem melhor frase e aproveitam-se alguns pacotes*; ...).
Q9.1	1 **b**	Opta por um dos leites e argumenta repetindo a informação dada (ex: *aconselharia o leite "Va" porque paga-se 3 e leva-se 4* (ou repete a informação relativa à promoção de todos os leites*); era o "Va" porque pague 3 e leve 4 é de aproveitar*; *OV, porque se paga 3 e leva 3*; ...).
Q9.1	1 **c**	Não escolhe nenhuma marca ou é indiferente a escolha de qualquer uma delas (ex: *Qualquer marca, porque levavam sempre um a mais não há nenhum que leve 2 ou 3. Depois é que sabem a quantidade que querem levar*; *era indiferente*

		escolher uma ou outra marca; era de aproveitar; qualquer uma tem a mesma promoção; ..)
Q9.1	1 **d**	Indica incorrectamente apenas o nome de um leite ou de outro existente no mercado (ex: *o leite Vaquinha; o Leite Agros, porque tem mais vitaminas*; *não devia ter escolhido esse devia ter escolhido o leite "OV", porque é mais barato e leva só menos um pacote*; ...)
Q9.1	1 **e**	Apresenta-se ilegível, apagado com borracha, riscado com um traço por cima, ou impossível de interpretar (ex: *devia estar em promoção*; ...).

NÃO RESPOSTA

Q9.1	0	Em branco.

Questão 9.2. "*Sabendo que a Joana e a mãe optaram pelo leite "Vaquinha", quais seriam, na tua opinião, as razões de tal escolha?*"

Questão	**Classificação**	**RESPOSTA**

RESPOSTA COMPLETA

Q9.2	10 **a**	Interpreta e justifica, de forma aberta, apresentando fundamentação matemática.
Q9.2	10 **b**	Argumenta com justificação matemática e de âmbito vivencial (ex: *Não era caro e para fazer bem ao crescimento da sua filha Joana*; *levavam mais do que os outros, mas também se paga mais*; *levava mais 4, mas era uma opção cara*; *levava-se mais do que os outros, mas também se paga mais*; ...).
Q9.2	10 **c**	Fundamenta usando argumentos de natureza social e vivencial (ex: *"Va", porque ficava com mais leite em casa*; *levavam mais quantidade do que dos outros; só queriam 4 leites achocolatados; só queriam comprar 4 pacotes; tem mais qualidade do que as outras duas marcas de leite; porque eram os que levavam mais pacotes*; *tem mais qualidade do que as outras duas marcas; fizeram mal, pois algum leite ainda se vai estragar; para chegar para 4 dias; talvez quisessem levar em maior quantidade; pensavam que levavam 4 pacotes e lucravam mais; queriam comprar mais leite de uma vez só*; *têm mais qualidade que as outras duas marcas; talvez fosse de melhor qualidade*; *porque levava mais leite e leite de vaca*; *era mais natural*; para chegar para 4 dias; ...)
Q9.2	10 **d**	Evoca as razões dadas na alínea anterior (ex: *como já referi era o leite "Va" que tinha mais quantidade*; ...).

RESPOSTA PARCIALMENTE COMPLETA

Q9.2	2 **a**	Fundamenta a questão de forma incompleta, pouco rigorosa e algo ambígua (ex: *o leite "Va" leva-se mais do que os outros, mas também se paga mais do que os outros*; *levavam 4 pacotes e só pagaram 3*; *não olharam para a promoção, pois esse leite é o mais caro*; *o desconto é intermédio entre as marcas e é de 33% e assim a Joana tinha mais ou menos leite achocolatado para beber; se calhar era o mais barato e em maior quantidade*; *pela quantidade, mas nem sempre os que têm mais pacotes em promoção são os mais baratos; porque se comprar1 leva 2 e por isso deve ser a melhor; se calhar era o mais barato e em maior quantidade; devia ser o mais barato*; ...)
Q9.2	2 **b**	Evoca as razões dadas na alínea anterior (ex: *tinha mais leite; paga-se três e leva-se 4 e acabaria por compensar; ...*)

RESPOSTA INCORRECTA

Q9.2	1 **a**	Fundamenta incorrectamente sob o ponto de vista matemático (ex: *levava mais pacotes, mas tem de pagar também mais pacotes do que os outros*; *pagava mais pacotes de leite e pagava menos 1 pacote*; *possivelmente seria para durar mais dias e poupar mais; tem mais pacotes e sai mais caro; acho que era mais caro; acho que teria leite a mais e tinha de pagar um bocado mais*; ...)
Q9.2	1 **b**	Repete a informação dada (ex: *levam 4 e pagam 3*; ...)
Q9.2.	1 **c**	Escolhe outro leite e fundamenta incorrectamente (ex: *Não devia ter escolhido esse leite, deveriam ter escolhido o leite "Olá Vida", porque é mais barato e leva só menos um pacote*; ...)
Q9.2.	1 **d**	Justifica-se usando uma resposta ambígua e quase sem fundamento (ex: *foi a melhor; devia estar em promoção; ...*).
Q9.2.	1 **e**	Apresenta-se ilegível, apagado com borracha, riscado com um traço por cima, ou impossível de interpretar.

NÃO RESPOSTA

Q9.2.	0	Em branco.

Em relação à décima questão (**Q10**): "*Marcar pontos...*" definiram-se os seguintes **critérios para obtenção de uma resposta completa**.

i) Observa a recta numérica e cria uma escala adequada à situação.
ii) Selecciona um número decimal até às milésimas entre dois números na ordem das centésimas que diferem apenas de uma unidade no algarismo das centésimas.
iii) Marca na recta numérica o número seleccionado.

Questão 10: "*Marca na recta um número compreendido entre 2,62 e 2,63.*"

Questão	Classificação	RESPOSTA
		RESPOSTA COMPLETA
Q10.	5x3 = 15 **a**	Indica o número, define uma escala adequada e assinala-o com *rigor* na recta real.
Q10.	15 **b**	Indica o número, define uma escala adequada e assinala-o com *pouco rigor* na recta real.
Q10.	15 **c**	Outras...
		RESPOSTA PARCIALMENTE COMPLETA
Q10.	5 **a**	Escolhe correctamente o número compreendido entre os números dados, mas não o assinala na recta real.
Q10.	5 **b**	Escolhe correctamente o número compreendido entre os números dados e assinala-o incorrectamente na recta real.
Q10.	5 **c**	Outras...
		RESPOSTA INCORRECTA
Q10.	1 **a**	Indica incorrectamente o número e não o assinala na recta real.
Q10.	1 **b**	Indica incorrectamente o número e assinala-o incorrectamente na recta real.
Q10.	1 **c**	Indica incorrectamente número, assinalando um valor superior ao maior dos números.
Q10.	1 **d**	Indica incorrectamente o número acrescentando mais um zero, na ordem das milésimas, ao número menor.
Q10.	1 **e**	Apenas marca uns traços, apresenta-se ilegível, apagado com borracha, riscado com um traço por cima, ou impossível de interpretar (ex: *2,45,6* (escreve o número com duas vírgulas)).
		NÃO RESPOSTA
Q10.	0	Em branco.

Em relação à décima questão (**Q11**): "*Marcar pontos...*" definiram-se os seguintes **critérios para obtenção de uma resposta completa**.

i) Recorda a situação real vivida pela turma, no ano transacto, numa aula de Educação Física e selecciona a informação relevante.

ii) Indica um número na ordem das milésimas compreendido entre dois números na ordem das centésimas, que diferem em um apenas no algarismo desta ordem.

Questão 11: "*Na aula de Educação Física os alunos do 5º ano de escolaridade realizaram, durante 10 minutos, uma prova de resistência. O Ricardo obteve a melhor* *marca, percorrendo um total de 2,25Km. A Flávia ficou em 3º lugar, com 2,24Km. O Tiago obteve a segunda melhor marca. Indica um valor possível para a marca obtida pelo Tiago."* E na outra turma esta questão teve o seguinte enunciado: *"Na aula de Educação Física os alunos do 5º ano de escolaridade realizaram, durante 10 minutos, uma prova de resistência. O Pedro Miguel obteve a melhor marca, percorrendo um total de 2,03Km. O João Miguel ficou em 3º lugar, com 2,02Km. O Carlos Alberto obteve a segunda melhor marca. Indica um valor possível para a marca obtida pelo Carlos Alberto".*

Questão	Classificação	RESPOSTA
		RESPOSTA COMPLETA
Q11.	15 **a**	Selecciona a informação relevante e indica um número na ordem das milésimas compreendido entre os números dados. Se for o número do meio acrescenta-se na análise da resposta a letra **m.**
Q11.	15 **b**	Selecciona a informação relevante e indica um número na ordem das milésimas em linguagem corrente. Se for o número do meio acrescenta-se na análise da resposta a letra **m.**
Q11.	15 **c**	Outras...
		RESPOSTA INCORRECTA
Q11.	1 **a**	Indica incorrectamente um número.
Q11.	1 **b**	Indica incorrectamente um número, acrescentando mais um zero ao número menor ou ao maior.
Q11.	1 **c**	Indica incorrectamente número, assinalando um valor até às milésimas superior ao maior dos números (ex: *2,555*; ...).
Q11.	1 **d**	Adiciona os números dados.
Q11.	1 **e**	Apresenta-se ilegível, apagado com borracha, riscado com um traço por cima, ou impossível de interpretar (e; *2,456*; ... escreve o número com duas vírgulas)).
Q11.	1 **f**	Outras...
		NÃO RESPOSTA
Q11.	0	Em branco.

Em relação à décima segunda questão (**Q12**): "*Fazendo compras*" definiram-se os seguintes **critérios para obtenção de uma resposta completa**.

i) Interpreta a situação pictórica exposta, reconhece a noção de "quarta parte de ..." numa frase escrita em linguagem corrente e analisa o seu valor lógico.
ii) Relaciona o significado de uma expressão numérica com uma frase dada, integrando informação anterior.
iii) Identifica e compara o significado de várias expressões numéricas e selecciona a correcta.

Questão 12.1. "*O preço de um guarda-chuva corresponde à quarta parte do preço das duas peças (de um guarda-chuva e de um boné) ___*".

Questão	**Classificação**	**RESPOSTA**

RESPOSTA COMPLETA

Q12.1.	5 **a**	Atribui o valor lógico **verdadeiro** à frase dada.
Q12.1.	5 **b**	Completa a frase escrevendo "*Sim*".

RESPOSTA INCORRECTA

Q12.1.	1 **a**	Atribui o valor lógico **falso** à frase dada.
Q12.1.	1 **b**	Apresenta-se ilegível, apagado com borracha, riscado com um traço por cima, ou impossível de interpretar.

NÃO RESPOSTA

Q12.1.	0	Em branco.

Questão 12.2. "*Se **A** representar o preço de um guarda-chuva assinala com um **X** a expressão matemática correcta que corresponde à frase anterior*" (Seguem-se cinco expressões numéricas em que apenas uma delas está correcta).

Questão	**Classificação**	**RESPOSTA**

RESPOSTA COMPLETA

Q12.2.	10 **a**	Assinala no quadrado um X colocado à frente da expressão numérica correcta, a terceira a contar da esquerda, de cima para baixo.

RESPOSTA PARCIALMENTE COMPLETA

Q12.2.	2 **a**	Assinala em mais de um o quadrado o X colocado à frente da respectiva expressão numérica correcta e numa outra.

RESPOSTA INCORRECTA

Q12.2.	1 **a**	Assinala no quadrado um X, colocado à frente de uma expressão numérica que não é a correcta, ou assinala o X em vários quadrados.
Q12.2.	1 **b**	Apresenta-se ilegível, apagado com borracha, riscado com um traço por cima, ou impossível de interpretar.

NÃO RESPOSTA

Q12.2.	0	Em branco.

Em relação à décima terceira questão (**Q13**): "*Colecções de Artigos*" definiram-se os seguintes **critérios para obtenção de uma resposta completa**.

i) Interpreta a situação pictórica como um todo, selecciona informação e observa as diferenças dos preços das duas colecções.
ii) Relaciona os objectos que constituem as colecções, fazendo correspondências termo a termo, isto é, objecto a objecto e indica qual é o artigo mais caro.
iii) Analisa e interpreta a situação como um todo, mobilizando conhecimentos já utilizados na alínea anterior e/ou integrando outras estratégias de cálculo.

Questão 13.1. "*O André vai começar o novo ano escolar e precisa de esferográficas e cadernos. A mãe do André foi à papelaria "Joaninha" e reparou que alguns artigos estavam organizados em colecções, entre os quais cadernos e esferográficas. Qual a diferença de preços das duas colecções e qual é o artigo mais caro?*"

Questão	**Classificação**	**RESPOSTA**

RESPOSTA COMPLETA

Q13.1	5+5 = 10 **a**	Indica o valor correcto da diferença de preços das colecções e assinala *a esferográfica* como o artigo mais caro.

RESPOSTA PARCIALMENTE COMPLETA

Q13.1	2 **a**	Assinala correctamente que *a esferográfica* é o artigo mais caro e responde incorrectamente à diferença de preço das duas colecções.
Q13.1	2 **b**	Indica o valor correcto da diferença de preços das colecções e assinala incorrectamente o artigo mais caro.
Q13.1	2 **c**	Outras...

RESPOSTA INCORRECTA

Q13.1	1 **a**	Assinala incorrectamente o valor da diferença das duas colecções e o artigo mais caro (ex: "*é a colecção de baixo*";...)
Q13.1	1 **b**	Apresenta-se ilegível, apagado com borracha, riscado com um traço por cima, ou impossível de interpretar.

NÃO RESPOSTA

Q13.1	0	Em branco.

Questão 13.2: *"Se a mãe do André quisesse apenas comprar uma esferográfica e um caderno daquelas colecções quanto pagaria?"*

Questão	**Classificação**	**RESPOSTA**

RESPOSTA COMPLETA

Q13.2.	5+5 = 10 **a**	Responde indicando o preço correcto conjunto de uma esferográfica e de um caderno, usando basicamente a correspondência termo a termo e os cálculos inerentes.

Q13.2.	5+5 = 10 **b**	Responde indicando o preço unitário de uma esferográfica e de um caderno, mas usando estratégias pessoais de exploração da situação, designadamente por tentativa e erro, ...
Q13.2.	5+5 = 10 **c**	Outras...

RESPOSTA PARCIALMENTE COMPLETA

Q13.2.	2 **a**	Assinala correctamente somente o preço de um dos artigos: da *esferográfica* (e) ou do caderno (c).
Q13.2.	2 **b**	Indica algumas estratégias correctas de exploração da situação, mas não é conclusivo (a).
Q13.2.	2 **c**	Outras...

RESPOSTA INCORRECTA

Q13.2.	1 **a**	Assinala incorrectamente os preços de cada um dos artigos.
Q13.2.	1 **b**	Realiza algumas experiências de cálculo, mas não conclui.
Q13.2.	1 **c**	Usa o cálculo 2,75:3, mas não conclui correctamente.
Q13.2.	1 **d**	Apresenta-se ilegível, apagado com borracha, riscado com um traço por cima, ou impossível de interpretar.

NÃO RESPOSTA

Q13.2.	0	Em branco.

Em relação à décima quarta questão (**Q14**): "*Expressões com euros*" definiram-se os seguintes **critérios para obtenção de uma resposta completa**.

i) Interpreta o enunciado do problema, apenas em linguagem escrita, com os dados estritamente necessários.
ii) Relaciona o significado de expressões numéricas dadas com o enunciado do problema dado, integrando informação anterior.
iii) Identifica o significado de uma das expressão numéricas como a correcta, assinalando a resolução do problema.

Questão 14. "*Qual das representações numéricas seguintes pode resolver o problema? Joaquim tinha 107 euros, mas gastou 6 num livro. O pai deu-lhe 11 euros. Quantos euros tem agora? Assinala com um X a expressão correcta"* (seguem-se 5 expressões numéricas distintas).

Questão	Classificação	RESPOSTA

RESPOSTA COMPLETA

Q14.	10 **a**	Assinala no quadrado um X, à frente da expressão numérica correcta, a segunda a contar de cima para baixo.

RESPOSTA PARCIALMENTE COMPLETA

Q14.	2 **a**	Assinala em mais de um o quadrado o X, à frente da respectiva expressão numérica correcta e numa outra.
Q14.	2 **b**	Outras...

RESPOSTA INCORRECTA

Q14.	1 **a**	Assinala nos quadrados um X, colocado à frente várias expressões numérica em que nenhuma delas é correcta.
Q14.	1 **b**	Assinala apenas num quadrado um X colocado à frente de uma expressão numérica que não é a correcta.
Q14.	1 **c**	Apresenta-se ilegível, apagado com borracha, riscado com um traço por cima, ou impossível de interpretar.

NÃO RESPOSTA

Q14.	0	Em branco.

Em relação à décima quinta questão (**Q15**): "*Visita à avó*" definiram-se os seguintes **critérios para obtenção de uma resposta completa**.

i) Interpreta o enunciado do problema, apenas em linguagem escrita, com os dados estritamente necessários.

ii) Relaciona os dados numéricos, de forma lógica, utilizando um valor mais do que uma vez na resolução do problema.

iii) Formula correctamente um problema, baseado numa situação pictórica simples.

Questão 15.1. *"Daniel foi visitar a avó que lhe deu €1,50. Mais tarde comprou um livro que lhe custou €3,20. Sabendo que ainda tem €2,30, quanto dinheiro tinha antes de visitar a avó?"*

Questão	Classificação	RESPOSTA

RESPOSTA COMPLETA

Q15.1.	5+5 = 10 **a**	Resolve de forma lógica e indica correctamente a quantidade de dinheiro que tinha antes de visitar a avó, usando o seguinte processo: 3,80-2,50=1,30 e 1,30+1,70=3,00.
Q15.1.	5+5 = 10 **b**	Resolve de forma lógica e indica correctamente a quantidade de dinheiro que tinha antes de visitar a avó, usando o seguinte processo: 3,80+1,70=5,50 e 5,50-2,50=3,00.
Q15.1.	5+5 = 10 **c**	Outras...

RESPOSTA PARCIALMENTE COMPLETA

Q15.1.	2 **a**	Resolve correctamente apenas uma parte do problema (ex: *3,80-2,50 e 1,70-1,30*; ...).
Q15.1.	2 **b**	Indica correctamente o processo de resolução, mas não o resolve: *?+2,50-3,80=1,70*.
Q15.1.	2 **c**	Indica correctamente o resultado, mas sem a resolução explícita e lógica.
Q15.1.	2 **d**	Realiza correctamente, mas com erro de cálculo (ex: *3,80-2,50=1,30 e 1,30+1,70=2,00*)
Q15.1.	2 **e**	Outras...

RESPOSTA INCORRECTA

Q15.1.	1 **a**	Apresenta uma resolução sem lógica e assinala incorrectamente a resposta (ex: usando, a maior parte das vezes, apenas dois valores;...).
Q15.1.	1 **b**	Evidencia os dados, faz tentativas de resolução, mas não conclui.
Q15.1.	1 **c**	Apresenta-se ilegível, apagado com borracha, riscado com um traço por cima, ou impossível de interpretar.

NÃO RESPOSTA

Q15.1.	0	Em branco.

Questão 15.2. “*Que se terá passado com a Rita, irmã do Daniel? Inventa um problema do mesmo tipo*.” (Este problema tem uma ilustração simples).

Questão	**Classificação**	**RESPOSTA**

RESPOSTA COMPLETA

Q15.2.	5+5 = 10 **a**	Inventa o enunciado do problema, integrando os dados da questão anterior e os do desenho.
Q15.2.	5+5 = 10 **b**	Inventa o enunciado do problema, integrando apenas os dados explícitos no desenho.
Q15.2.	5+5 = 10 **c**	Outras...

RESPOSTA PARCIALMENTE COMPLETA

Q15.2.	2 **a**	Formula correctamente o problema, mas não coloca a questão final.
Q15.2.	2 **b**	Formula completamente o problema, mas coloca a questão final incorrectamente.
Q15.2.	2 **c**	Inventa correctamente apenas parte do problema.

Q15.2.	2 **c**	Outras...

RESPOSTA INCORRECTA

Q15.2.	1 **a**	Apresenta o enunciado do problema sem lógica alguma, desligado da informação dada e do significado das operações da adição e da subtracção.
Q15.2.	1 **b**	Apresenta-se ilegível, apagado com borracha, riscado com um traço por cima, ou impossível de interpretar.

NÃO RESPOSTA

Q15.2.	0	Em branco.

Em relação à décima sexta questão (**Q16**): "*Desenhando um rectângulo*" definiram-se os seguintes **critérios para obtenção de uma resposta completa**.

i) Interpreta o enunciado do problema em linguagem escrita e pictórica, com os dados estritamente necessários.
ii) Desenha, na grelha dada, o novo rectângulo, aplicando as noções de "metade" e "uma vez e meia".

Questão 16. "*No espaço abaixo, desenha um novo rectângulo cujo comprimento é uma vez e meia o comprimento do rectângulo acima representado e cuja largura é metade da largura desse rectângulo. Assinala na grelha, o comprimento e a largura do novo rectângulo, em centímetros*". (Fazem parte do enunciado da questão o desenho de um rectângulo de 6cm por 4cm e de uma grelha de malha quadrangular de 1cm por 1cm).

Questão	**Classificação**	**RESPOSTA**

RESPOSTA COMPLETA

Q16.	5+5 = 10 **a**	Desenha correctamente o rectângulo de 2cm por 9cm, sem indicar qualquer cálculo.
Q16.	5+5 = 10 **b**	Desenha correctamente o rectângulo de 2cm por 9cm, indicando cálculos (ex: *6x1,5=9; 0,5x4=2*; *6:2=3+6=9 e 4:2*; ou *comprimento 6:2=3 3x3=9 largura 4:2=2*; ...)

RESPOSTA PARCIALMENTE COMPLETA

Q16.	5 **a**	Desenha o rectângulo de comprimento 9cm e de largura diferente de 2cm.
Q16.	5 **b**	Desenha o rectângulo de largura 2cm e cujo comprimento mede 6,5cm ou 7,5cm.
Q16.	5 **c**	Desenha o rectângulo de largura 2cm e cujo comprimento é diferente de 6,5cm, 7,5cm ou de 9cm (ex: *7cm; 11cm; 13cm*(*); *3cm*; ..)
Q16.	5 **d**	Outras...

RESPOSTA INCORRECTA

Q16.	1 **a**	Desenha o rectângulo com dimensões diferentes das definidas para a resposta completa ou parcialmente completa.
Q16.	1 **b**	Apresenta-se ilegível, apagado com borracha, riscado com um traço por cima, ou impossível de interpretar.

NÃO RESPOSTA

Q16.	0	Em branco.

(*) Uma aluna da turma A, no pós-teste, realizou os seguintes cálculos:
4cmx2+6cmx2 = 8cm+12cm = 20cm
20:2 = 10
20cm + 10cm = 30cm
4:2 = 2 ---- Largura
30cm – 4 = 26cm
26cm:2 = 13cm

Em relação à décima sétima questão (**Q17**): "*A cerca do Tedy*" definiram-se os seguintes **critérios para obtenção de uma resposta completa**.

i) Interpreta o enunciado do problema em linguagem escrita e pictórica.
ii) Analisa a situação exposta, distinguindo perímetro de área.
iii) Desenha rectângulos com o mesmo perímetro, mas com área diferente e selecciona o rectângulo com menor área.

Questão 17. "*Tens 20m de rede e vais construir, com a ajuda do teu tio uma cerca para o teu cão. Se quiseres usar toda a rede, desenha duas formas rectangulares diferentes para a cerca e indica das duas, aquela que tem menor espaço para o* Tedy *brincar"*. (Fazem parte do enunciado da questão o desenho de um cão).

Questão	**Classificação**	**RESPOSTA**

RESPOSTA COMPLETA

Q17.	5+5+5 = 15 **a**	Desenha correctamente, nas condições pedidas, os dois rectângulos, construindo-os com "números decimais" e seleccionando o que tem menor área.
Q17.	5+5+5 = 15 **b**	Desenha correctamente, nas condições pedidas, os dois rectângulos, construindo-os com números inteiros e seleccionando o que tem menor área, usando ou não escala (e) (ex: *um aluna usou a escala 1/100 e construiu rigorosamente os rectângulos 5 por 5 e 9 por 1*; ...).
Q17.	5+5+5 = 15 **c**	Desenha correctamente, nas condições pedidas, os dois rectângulos, construindo-os com base nas quadrículas da folha seguinte, sem explicitar as medidas e selecciona correctamente o que tem menor área.

RESPOSTA PARCIALMENTE COMPLETA

Q17.	5+5 **a**	Desenha os dois rectângulos nas condições pedidas, mas não selecciona correctamente o rectângulo com menor área (ex: um aluna desenha os rectângulos 5 por 5 e 6 por 4 e escreve: *as duas cercas têm o mesmo espaço para o Tedy brincar a única diferença é que estão divididas de maneira diferente*; desenho de *dois rectângulos de 7,5 por 2,5 e 5 por 5* e a aluna concluiu incorrectamente que *o rectângulo de 5 por 5 tinha menos espaço para o Tedy brincar*; ...)
Q17.	5+5 **b**	Desenha correctamente apenas um dos dois rectângulos.
Q17.	5+5 **c**	Desenha os dois rectângulos, mas só um é que está correcto (ex: *5 por 5 e 4 por 4*; ...).
Q17.	5+5 **d**	Desenha "proporcionalmente" os rectângulos, não indicando as medidas dos lados e selecciona, com lógica, o rectângulo com menor área.

RESPOSTA INCORRECTA

Q17.	1 **a**	Desenha "proporcionalmente" os dois rectângulos, mas sem rigor, seleccionando ou não o que tem menor área.
Q17.	1 **b**	Desenha um ou dois rectângulos sem critério, com medidas aleatórias explícitas ou não (ex: *3 por 1* e *4 por 2*; ...) .
Q17.	1 **c**	Desenha correctamente os dois rectângulos, mas com perímetro 10cm e selecciona correctamente o que tem menor área (ex: *2 por 3* e *4 por 1*).
Q17.	1 **d**	Desenha apenas figuras côncavas ou dois rectângulos com o mesmo tamanho e/ou escreve informação impossível de interpretar.

NÃO RESPOSTA

Q17.	0	Em branco.

Em relação à décima oitava questão (**Q18**): "*Regando o Jardim*" definiram-se os seguintes **critérios para obtenção de uma resposta completa**.

i) Apreende o significado da "...terça parte de..." num determinado contexto.
ii) Aplica a noção anterior ou o "...triplo de..." ao interpretar e completar uma tabela de duas entradas.
iii) Desenha barras numa grelha e num sistema de eixos de coordenadas, representando a relação existente entre duas variáveis numéricas e integrando os dados da tabela anterior.

Questão 18.1. "*Na técnica de rega gota a gota gasta-se a terça parte de água do que se gasta quando se usa a mangueira. Em que processo de rega se gasta mais água?"*

Questão	Classificação	RESPOSTA

RESPOSTA COMPLETA

Q18.1	6 **a**	Responde que se gasta mais água quando se usa *a mangueira.*

RESPOSTA INCORRECTA

Q18.1	1 **a**	Responde que é o processo de rega *gota a gota*.
Q18.1	1 **b**	Indica que gasta mais quando usa a torneira ou apenas refere: *gasta-se mais água* ou *gasta-se mais água na técnica*.
Q18.1	1 **c**	Assinala o significado da noção "...terça parte de..." (ex: *dividindo por 3*).
Q18.1	1 **d**	Apresenta-se ilegível, apagado com borracha, riscado com um traço por cima, ou impossível de interpretar.

NÃO RESPOSTA

Q18.1	0	Em branco.

Questão 18.2. "*Completa agora a tabela abaixo – informação da água gasta (em litros) nos dois processos de rega".* (Segue-se a tabela de duas entradas com os valores referentes à rega *gota a gota* e pede-se para preencher os valores da coluna respeitantes à rega *com mangueira*).

Questão	Classificação	RESPOSTA

RESPOSTA COMPLETA

Q18.2	2x6 = 12 **a**	Preenche os valores da coluna respeitantes à rega com mangueira, multiplicando os valores dados por três.

RESPOSTA PARCIALMENTE COMPLETA

Q18.2	$1\leq n < 6$ 2xn **a**	Preenche parcialmente os valores da coluna respeitantes à rega com mangueira, multiplicando os valores dados por três (nos casos analisados apenas erraram um único cálculo, ou primeiro ou o último).
Q18.2	$2\leq n < 12$ **b**	Outras...

RESPOSTA INCORRECTA

Q18.2	1 **a**	Preenche a tabela, calculando a terça parte dos valores dados, em vez de determinar o triplo.
Q18.2	1 **b**	Preenche a tabela, multiplicando por 10 os valores dados.
Q18.2	1 **c**	Preenche a tabela, multiplicando por 2, ou por 4 os valores dados, podendo realizar incorrectamente alguns cálculos.

Q18.2	1 **d**	Preenche a tabela, adicionando 5 aos valores dados, ou uma unidade, ou 4, ou ainda uma unidade nos números inteiros e uma décima aos "números decimais".
Q18.2	1 **e**	Preenche a tabela com valores indiscriminados, sem se descortinar a regra utilizada.
Q18.2	1 **f**	Apresenta-se ilegível, apagado com borracha, riscado com um traço por cima, ou impossível de interpretar.

NÃO RESPOSTA

Q18.2	0	Em branco.

Questão 18.3. "*Representa num gráfico de barras a relação, entre a quantidade de água gasta pelo processo de rega gota a gota e pelo processo de mangueira*". (Segue-se uma grelha quadrangular de 1cm por 1cm, com o sistema de eixos de coordenadas e com a definição de escala de um em um no eixo dos xx e de cinco em cinco no eixo dos yy, (omissos os nomes dos eixos)).

Questão	Classificação	RESPOSTA

RESPOSTA COMPLETA

Q18.3	2x6 = 12 **a**	Desenha barras, com rigor, com comprimento adequado aos valores obtidos na tabela anterior, relacionando as duas regas: gota a gota e por mangueira.
Q18.3	2x6 = 12 **b**	Desenha barras, com pouco rigor, cuja largura é variável e com comprimento adequado aos valores obtidos na tabela anterior, relacionando as duas regas: gota a gota e por mangueira.
Q18.3	2x6 = 12 **c**	Desenha as barras verticais como segmentos de recta, usando explicitamente linhas auxiliares horizontais.

RESPOSTA PARCIALMENTE COMPLETA

Q18.3	$1 \leq n < 6$ 2xn **a**	Desenha correctamente algumas das barras do gráfico, com comprimento adequado aos valores obtidos na tabela anterior, relacionando as duas regas: gota a gota e por mangueira.
Q18.3	$2 \leq n < 12$ **b**	Desenha gráfico de linhas correctamente.
Q18.3	$2 \leq n < 12$ **c**	Desenha gráficos de pontos e/ou definição correcta para este tipo de gráfico, com definição completa das escalas e eventualmente com algumas representações incorrectas.

RESPOSTA INCORRECTA

Q18.3	1 **a**	Desenha apenas correctamente os valores das escalas e/ou quadrados ao longo dos dois eixos.
Q18.3	1 **b**	Desenha as barras do gráfico com comprimento e valores indiscriminados ou usa os valores já existentes na escala do eixo dos yy e constrói incorrectamente algumas barras.

Q18.3	1 **c**	Constrói dois gráficos distintos, o relativo à rega gota a gota e o da rega com mangueira, não os relacionando.
Q18.3	1 **d**	Desenha apenas duas barras, com indicação ou não da rega gota a gota e de mangueira ou faz um gráfico de barras "em escada", mas não relacionado com os dados.
Q18.2	1 **e**	Apresenta-se ilegível, apagado com borracha, riscado com um traço por cima, ou impossível de interpretar.

NÃO RESPOSTA

Q18.3	0	Em branco.

Em relação à décima nona questão (**Q19**): "*Área cultivada e rega vantajosa*" definiram-se os seguintes **critérios para obtenção de uma resposta completa**.

i) Analisa a situação apresentada em linguagem corrente e pictórica e representa sob forma de fracção a relação parte-todo.
ii) Aplica a noção de escala a unidades de medida linear, calcula a área de um rectângulo e faz equivalências em unidades de área.
iii) Interpreta a modelação de um fenómeno, analisando concretamente as vantagens do uso de determinada técnica de rega no jardim.
iv) Integra conhecimentos de alíneas anteriores e/ou do quotidiano, transferindo-os para novas aprendizagens.

Questões 19. "*A figura representa o jardim do padrinho do André. Está desenhado numa escala de 1:100. O padrinho do André plantou flores nos canteiros com forma de quadrado tendo semeado relva na parte restante.*

Completa de forma a construíres frases verdadeiras:

Questão 19.1. A área cultivada de flores do jardim do padrinho do André é _________ (maior ou menor) do que a área relvada".

Questão	Classificação	RESPOSTA

RESPOSTA COMPLETA

Q19.1	2 **a**	Completa a frase com a palavra: *menor.*

RESPOSTA INCORRECTA

Q19.1	1 **a**	Completa a frase com a palavra: *maior ou igual*.
Q19.1	1 **b**	Apresenta-se ilegível, apagado com borracha, riscado com um traço por cima, ou impossível de interpretar (ex: *5*; *15*; *16*; ...).

NÃO RESPOSTA

Q19.1	0	Em branco.

Questão 19.2. A área relvada representa ________ de todo a área do seu jardim. Selecciona a resposta certa: (5/15; 7/15; 8/17; 10/15; 9/15)".

Questão	**Classificação**	**RESPOSTA**

RESPOSTA COMPLETA

Q19.2	2 **a**	Completa a frase com a fracção correcta 10/15, representando a área relvada.

RESPOSTA INCORRECTA

Q19.2	1 **a**	Completa a frase com a fracção não correcta 5/15, representando a plantação de flores.
Q19.2	1 **b**	Completa a frase com uma fracção não correcta, mas das indicadas.
Q19.2	1 **c**	Completa a frase com um número inteiro ou uma fracção não correcta, não usando nenhuma das indicadas.
Q19.2	1 **d**	Apresenta-se ilegível, apagado com borracha, riscado com um traço por cima, ou impossível de interpretar (ex: *perímetro*; *quadrado*; *mais*; *maior*; *igual*; ...).

NÃO RESPOSTA

Q19.2	0	Em branco.

Questão 19.3. *"A área real de todo o terreno é de _________ m^2".*

Questão	**Classificação**	**RESPOSTA**

RESPOSTA COMPLETA

Q19.3	2x3 = 6 **a**	Aplica a escala às unidades lineares, calcula a área e realiza correctamente a equivalência para m^2.

RESPOSTA PARCIALMENTE COMPLETA

Q19.3	$1 \leq n < 3$ 2xn **a**	Aplica a escala às unidades lineares e calcula a área, mas com erro de cálculo e realiza a equivalência correctamente para m^2 ou calcula correctamente e executa incorrectamente a equivalência (ex: $16m^2$ ou $150000cm^2 = 0{,}15m^2$).
Q19.3	$1 \leq n < 3$ 2xn **b**	Aplica correctamente a escala às unidades lineares mas não calcula correctamente a área (ex: *300+500 = 800*; $1500cm^2 = 0{,}15m^2$).
Q19.3	$1 \leq n < 3$ 2xn **c**	Aplica incorrectamente a escala às medidas de comprimento, mas por intuição responde correctamente, indicando que a área é $15m^2$ (ex*: 0,03 e 0,005 e 0,0015 e* $15m^2$).
Q19.3	2 **d**	Outras...

RESPOSTA INCORRECTA

Q19.3	1 **a**	Preenche as lacunas com números arbitrários, sem nenhuma ligação com a informação pictórica apresentada.
Q19.3	1 **b**	Não aplica a escala e realiza o produto entre os números dados.
Q19.3	1 **c**	Aplica incorrectamente a escala (ex: *0,03* e *0,05* e *0,00015*m^2; ...).
Q19.3	1 **d**	Preenche as lacunas com os números fraccionários existentes na questão anterior.
Q19.3	1 **e**	Apresenta-se ilegível, apagado com borracha, riscado com um traço por cima, ou impossível de interpretar.

NÃO RESPOSTA

Q19.3	0	Em branco.

Questão 19.4. *"O padrinho do André pode regar o seu jardim pela técnica de rega gota a gota ou por mangueira. Neste Verão optou por usar a técnica da rega gota a gota. Quais seriam as razões de tal opção"*.

Questão	**Classificação**	**RESPOSTA**

RESPOSTA COMPLETA

Q19.4	5+5 = 10 **a**	Integra conhecimentos anteriores interpretando a questão com modelos matemáticos dados e/ou fundamentando com razões de outra natureza (ex: *ao regar gota a gota regou o seu jardim todo, mas se usasse a mangueira regaria com a mesma quantidade de água, só a parte das flores*).
Q19.4	5+5 = 10 **b**	Integra conhecimentos anteriores interpretando a questão com modelos matemáticos dados (ex: *gasta 3 vezes menos do que a mangueira*; *gasta a terça parte da água*; ...)

RESPOSTA PARCIALMENTE COMPLETA

Q19.4	5 **a**	Evoca motivos de ordem matemática e de outra natureza (ex: *porque estaria mais calor e iria gastar menos água*; *para não gastar tanta água e poupar mais dinheiro*; *para não gastar muita água, pois o jardim é grande*; *no Verão há muito calor e por isso não se deve desperdiçar água*; *poderia estar mais calor e ele iria gastar menos água*; *para gastar menos água e no final do mês pagar menos na conta da água*; *não gastaria tanta água e poupava-se trabalho*; *ele estava com problemas financeiros e não queria gastar muita água*;...).
Q19.4	5 **b**	Evoca apenas uma razão de ordem matemática, interpretando de forma vaga o modelo matemático dado ou usa apenas a intuição (ex: *gasta-se mais água de mangueira*; *gasta menos água*; ...)

Q19.4	5 **c**	Indica apenas uma razão de natureza específica, não evocando a de ordem matemática (ex: *por que se fosse com uma mangueira podia não chegar a alguma flor e se não tivesse água morria*; *tem de se regar mais vezes por causa do calor*; *no Verão há muita falta de água*; *para as flores não beberem muita água, porque rega melhor as plantas*; o tipo de plantas *(para regar aquelas plantas era preciso a rega gota a gota)*; *o jardim é pequeno*; *como no Verão há mais calor e mais seca, com o sistema gota a gota, a água poderia estar o dia e a noite ligado*; *está muito calor*; *o jardim é pequeno*; *como iria de férias não tinha tempo para regar de mangueira e por isso optou por o sistema gota a gota*; ...).

RESPOSTA INCORRECTA

Q19.4	1 **a**	Evoca razões matemáticas contraditórias (ex: *porque gasta mais água*)
Q19.4	1 **b**	Indica razões inconsistentes de diversa natureza (ex: *para comparar*, *porque as plantas podem secar*; *para estar sempre a regar*;...).
Q19.4	1 **c**	Apresenta-se ilegível, apagado com borracha, riscado com um traço por cima, ou impossível de interpretar (ex: *acho que escolheu mal, pois podia ter escolhido a mangueira porque era melhor*; *está mal porque assim não podia regar o campo todo*; *queria que as flores morressem e não têm paixão pelo jardim*; ...).

NÃO RESPOSTA

Q19.4	0	Em branco.

Em relação à vigésima questão (**Q20**): "*Crescimento de bactérias*" definiram-se os seguintes **critérios para obtenção de uma resposta completa**.

i) Analisa a situação apresentada num gráfico de barras em linguagem corrente e gráfica.
ii) Completa numericamente, pela leitura do gráfico em barras, as lacunas numa frase.
iii) Interpreta graficamente a modelação do fenómeno relacionado com o crescimento das bactérias, já abordado na disciplina de Ciências da Natureza e define a lei que rege o fenómeno.

Questão 20.1. *"Lê o gráfico e completa de modo a obteres uma frase verdadeira: No 1º dia há 1000 bactérias, no 2º dia 2000, no 3º dia ________, no 4º dia há _________, no 5º dia ________ e no 6º dia ________".*

Questão	Classificação	RESPOSTA

RESPOSTA COMPLETA

Q20.1	2x4 = 8 **a**	Preenche correctamente o valor numérico de cada uma das quatro lacunas existentes na frase de modo a torná-la verdadeira.

RESPOSTA PARCIALMENTE COMPLETA

Q20.1	$1 \leq n < 4$ 2xn **a**	Preenche correctamente o valor numérico de algumas das quatro lacunas existentes na frase de modo a torná-la verdadeira.

RESPOSTA INCORRECTA

Q20.1	1 **a**	Preenche incorrectamente as lacunas, tendo por base uma regularidade aditiva (ex: normalmente adiciona 1000 ao número anterior ou a partir do 5º dia 4000).
Q20.1	1 **b**	Apresenta-se ilegível, apagado com borracha, riscado com um traço por cima, ou impossível de interpretar.

NÃO RESPOSTA

Q20.1	0	Em branco.

Questão 20.2. *"Pela leitura atenta do gráfico, certamente que consegues encontrar regularidade no crescimento das bactérias. Explica qual é essa regularidade".*

Questão	Classificação	RESPOSTA

RESPOSTA COMPLETA

Q20.2	12 **a**	Indica correctamente a regularidade que rege o fenómeno de forma simbólica, usando a multiplicação ou a potenciação.
Q20.2	12 **b**	Indica correctamente o modelo matemático que rege o fenómeno de forma simbólica e em linguagem corrente.
Q20.2	12 **c**	Evoca correctamente e em linguagem corrente o modelo matemático que rege o fenómeno (ex: *é sempre multiplicar por 2*; *a regularidade é multiplicar o número anterior por 2*).

RESPOSTA PARCIALMENTE COMPLETA

Q20.2	6 **a**	Confirma o crescimento das bactérias e a explicita a regularidade de forma vaga (ex: *a tabuada do 2*).
Q20.2	6 **b**	Confirma apenas o crescimento das bactérias, sem recorrer a uma regularidade (ex: *o número de bactérias é sempre a aumentar*; *é que dia a dia elas crescem*; *quantos mais dias, mais bactérias*; ...)
Q20.2	6 **d**	Outras...

RESPOSTA INCORRECTA

Q20.2	1 **a**	Evoca a regularidade aditiva de 1000 em 1000 (ex*: em cada dia é sempre de 1000 em 1000*).
Q20.2	1 **b**	Evoca uma regularidade aditiva (ex: *sempre de 400 em 400 por dia; ou de 4000 em 4000; ou mais 4 ou vezes 4 ou vai crescendo de 4 em 4*).
Q20.2	1 **c**	Relaciona a regularidade com o número de barras (ex: *essa regularidade é de seis dias*) ou refere que o crescimento é *de 2 em 2*.
Q20.2	1 **d**	Apresenta uma resposta de natureza qualitativa (ex*: acho que o número de bactérias por dia é muito*; *o regulamento das bactérias é sempre que crescemos temos mais bactérias*; *no sétimo dia as bactérias aumentaram; é o crescimento*).
Q20.2	1 **e**	Apresenta-se ilegível, apagado com borracha, riscado com um traço por cima, ou impossível de interpretar.

NÃO RESPOSTA

Q20.2	0	Em branco.

Em relação à vigésima primeira questão (**Q21**): "*Bactérias em tableas!...*" definiram-se os seguintes **critérios para obtenção de uma resposta completa**.

i) Realiza novamente a leitura do gráfico de barras da alínea anterior.
ii) Mobiliza dados adquiridos na resolução da questão anterior, passando a informação existente em gráfico de barras para uma tabela de duas entradas.
iii) Amplia o universo dos dados, aplicando a regularidade do crescimento das bactérias do sétimo ao nono dia.

Questão 21. *"Com base nos dados do gráfico anterior organiza, em tabela, o crescimento daquela população de bactérias até ao nono dia".*

Questão	**Classificação**	**RESPOSTA**

RESPOSTA COMPLETA

Q21.	5+5+5 = 15 **a**	Organiza os dados em tabela, relacionando o dia com o número de bactérias e amplia-os correctamente até ao nono dia.

RESPOSTA PARCIALMENTE COMPLETA

Q21.	5 **a**	Organiza os dados correctos em tabela, relacionando o dia com o número de bactérias até ao sexto ou sétimo dia.
Q21.	5 **b**	Amplia correctamente os dados numéricos do sexto ou sétimo ao nono dia e escreve-os em tabela.
Q21.	5 **c**	Escreve correctamente o número de bactérias do 1º ao 9º dia numa tabela, mas não coloca legenda.

Q21.	5 **d**	Assinala correctamente o número de bactérias do 1º ao 9º dia numa tabela com valores invertidos, mas não coloca legenda.
Q21.	5 **e**	Escreve os dados do crescimento das bactérias, ampliados ou não, em lista ou em colunas, mas não em tabela.

RESPOSTA INCORRECTA

Q21.	1 **a**	Escreve os dados incorrectos, ampliados ou não, em tabela.
Q21.	1 **b**	Escreve alguns dados incorrectos, ampliados ou não, mas não em tabela.
Q21.	1 **c**	Escreve incorrectamente os valores ampliados, 8º e 9º numa sequência linear, mas não em tabela.
Q21.	1 **d**	Apresenta-se ilegível, apagado com borracha, riscado com um traço por cima, ou impossível de interpretar (ex: desenhando gráficos ou quadros, escrevendo frases, ...)

NÃO RESPOSTA

Q21.	0	Em branco.

Em relação à vigésima segunda e vigésima terceira questão (**Q22 e Q23**): "*Inventando problemas*" definiram-se os seguintes **critérios para obtenção de uma resposta completa**.

i) Analisa a situação apresentada em linguagem corrente, pictórica e em organização tabelar.
ii) Analisa a situação apresentada em linguagem corrente e pictórica, baseada numa banda desenhada.
iii) Inventa um problema com os dados apresentados, formula-o e resolve-o.

Questão 22. *"No bar da escola, durante uma semana, venderam-se fundamentalmente quatro tipo de produtos: iogurtes, queques, copos de leite, sandes de queijo. Inventa um problema baseado na figura e nos dados apresentados". (*Segue-se informação pictórica e tabelar relacionada com o enunciado do problema, solicitando no final ao aluno a resolução do problema e a apresentação da solução).

Questão	**Classificação**	**RESPOSTA**

RESPOSTA COMPLETA

Q22.	10 **a**	Formula clara e logicamente o enunciado do problema adequando-o à ilustração e à informação apresentada, usando as duas tabelas e dados explícitos (e) ou não (ne). Apresenta solução correcta.
Q22.	10 **b**	Formula clara e logicamente o enunciado do problema adequando-o à ilustração e à informação apresentada, usando apenas uma das tabelas. Apresenta solução correcta.

RESPOSTA PARCIALMENTE COMPLETA

Q22.	5 **a**	Formula claramente o enunciado do problema, adequando-o à ilustração e aos elementos dados. Apresenta solução não totalmente correcta.
Q22.	5 **b**	Formula com pouco rigor o problema. Não apresenta solução ou assinala-a não totalmente correcta.
Q22.	5 **c**	Formula de maneira incompleta o problema, não usando, por vezes, correctamente os dados. Apresenta a solução correcta.

RESPOSTA INCORRECTA

Q22.	1 **a**	Formula incorrectamente o problema.
Q22.	1 **b**	Descreve apenas a situação e não formula um problema.
Q22.	1 **c**	Apresenta-se ilegível, apagado com borracha, riscado com um traço por cima, ou impossível de interpretar.

NÃO RESPOSTA

Q22.	0 **a**	Em branco, calculando apenas os totais da tabela dos produtos vendidos.
Q22.	0 **b**	Em branco.

Questão 23. *"Os animais na floresta enfrentam diversos perigos. Um deles é o FOGO!... Observa a banda desenhada, reflecte e completa alguns diálogos. Inventa questões matemáticas para cada uma das três molduras da banda desenhada ou inventa apenas um problema para todas". (*Segue-se informação pictórica relacionada com o enunciado do problema, solicitando no final ao aluno a resolução do problema e a apresentação da solução).

Questão	**Classificação**	**RESPOSTA**

RESPOSTA COMPLETA

Q23.	10 **a**	Formula clara e logicamente o enunciado do problema, elaborando questões para cada um dos desenhos da banda desenhada (d) ou globalmente (g) adequando-o à ilustração e à informação apresentada (e), podendo emergir outros elementos para além dos dados (ne). Apresenta solução(ões) correcta(s).
Q23.	10 **b**	Formula sem grande rigor o enunciado do problema, elaborando questões para cada um dos desenhos da banda desenhada (d) ou globalmente (g), adequando-o à ilustração e à informação explícita (e) e/ou não (ne). Apresenta solução correcta.

RESPOSTA PARCIALMENTE COMPLETA

Q23.	5 **a**	Formula clara e logicamente o enunciado do problema, elaborando questões para cada um dos desenhos da banda desenhada (d) ou globalmente (g) adequando-o à ilustração e à informação apresentada, podendo emergir outros elementos para além dos dados Apresenta solução(ões) ou o processo de resolução incorrectos.
Q23.	5 **b**	Realiza uma composição ajustada à informação pictórica dada e formula uma questão. Apresenta solução correcta.
Q23.	5 **c**	Formula de forma incompleta o problema, mas expondo os dados com alguma consistência. Não apresenta a solução ou expõe parte dela.

RESPOSTA INCORRECTA

Q23.	1 **a**	Formula incorrectamente as questões parcelares ou o problema.
Q23.	1 **b**	Descreve as imagens ou faz uma composição desajustada à informação pictórica dada.
Q23.	1 **c**	Apresenta-se ilegível, apagado com borracha, riscado com um traço por cima, ou impossível de interpretar (ex: *9x3=27, 1+5=6-1, 4x9*).

NÃO RESPOSTA

Q23.	0	Em branco.

ANEXO 11
(Análise de Resultados do Teste)

TESTE de Avaliação - Análise dos Resultados

Esta secção inclui a descrição das condições de realização do teste, os critérios de avaliação definidos para cada questão, as condições de análise, com o estudo específico e a análise global de cada uma delas e/ou conjunto de sub-questões, prevendo a integração de outras descrições e/ou resultados obtidos na resolução de problemas e tarefas afins concretizados no *continuum* da investigação, numa perspectiva convergente de entendimento e problematização dos resultados alcançados. A concepção do teste de avaliação segue critérios próximos dos delineados pelo PISA 2000 e está definida no capítulo três da Metodologia, em 5.7.

Condições de realização do teste. Para preservar e dar continuidade ao trabalho já realizado em diversos espaços de aprendizagem matemática e de contemplar a vertente da flexibilidade, o teste foi realizado em dois tempos distintos, na disciplina de Matemática e na área de Estudo Acompanhado. Os estudantes que integraram a turma apenas este ano ou que não tiveram condições idênticas de realização do teste não puderam ser considerados. Como alguns estudantes, na turma A, faltaram a certas aulas e não puderam resolver na totalidade o teste apenas se contabilizaram vinte com a possibilidade de serem analisados e vinte e dois na turma B e, por tal motivo, foi necessário retirar, nesta classe, aleatoriamente, dois testes. Assim, o número total de testes analisados, em cada uma das turmas, foi de vinte.

Critérios de avaliação. Os critérios de avaliação de cada questão foram definidos tomando como referência o modelo usado pelo programa de avaliação de desempenho em Matemática e Ciências – TIMSS, pois os juízes colaboradores na validação dos instrumentos de avaliação implementados nesta investigação consideraram-no o mais apropriado, atendendo ao nível etário e cognitivo dos estudantes e às circunstâncias pedagógicas vividas na investigação. Assim, a avaliação da resolução de cada questão do teste contemplou quatro tipos de respostas: resposta completa; resposta parcialmente completa, resposta incorrecta e a não resposta. Pretendeu-se, assim, registar e analisar amplamente o processo de resolução individual de cada questão, focalizando pormenores de raciocínio e de execução, caracterizando o tipo de respostas em "patamares" consistentes de avaliação.

Na análise e correcção das questões formuladas foi seleccionado o termo "completa", em vez de "correcta", tal como é considerado no programa TIMSS, pois o primeiro indica maior abrangência e exigência em relação a todo o processo de resolução, dado que tende a incluir o raciocínio desenvolvido e as operações implementadas pelo estudante até chegar ao resultado pretendido. A designação "correcta" está efectivamente orientada para o resultado final e reduz-se a uma análise bivalente: resultado certo ou resultado errado. Naturalmente que o termo "correcta" está incluso no termo "completa".

No processo de avaliação de cada questão foram definidos previamente critérios para a obtenção de uma resposta completa, parcialmente completa, resposta incorrecta e não resposta, usando-se ainda letras minúsculas: a, b, c, d, e, … para indicar o "patamar" de resolução da resposta, pormenorizadamente delineados em anexo anterior.

Tendo por base as respostas obtidas pelos estudantes no processo de pilotagem foi possível elaborar, numa primeira fase, os critérios de avaliação para cada sub-questão. Posteriormente ao serem aplicados houve necessidade de os redefinir, ampliar, reformular e adaptar ao universo do tipo de respostas dadas pelos estudantes das duas turmas em estudo, chegando-se à versão final apresentada em anexo.

Resultados. São apresentados em tabelas, de forma sistematizada, os resultados obtidos no pré-teste e pós-teste, nas duas turmas, que permitiram a análise estatística destes dados recolhidos.

Condições de Análise. A análise de cada questão do teste englobou: a) *o registo*, numa tabela, do número de respostas obtido, no tipo de resposta completa (RC), na parcialmente completa (RPC), na incorrecta (RI) e na não resposta (NR); b) *a apreciação* sucinta da *evolução* baseada fundamentalmente no número de respostas completas, com uma visão mais globalizante, incluindo as respostas parcialmente completas obtidas no pré e pós-teste. Considera-se *ligeira evolução* (↑) se o número de respostas completas for superior a um ou dois valores no pós-teste ao obtido no pré-teste; admite-se que houve *evolução* (↑↑) se no pós-teste, no resultado global, existirem mais três respostas completas do que as alcançadas no pré-teste ou com mais duas respostas completas e mais de três parcialmente completas; com *evolução significativa* (↑↑↑) considera-se quando os valores obtidos no pós-teste forem em número superior aos últimos referidos. Quando tal não acontecer, isto é, se os resultados forem idênticos no pré e pós-teste, no número de respostas completas e, globalmente, nas respostas parcialmente completas considera-se que *não houve evolução* (—), isto é, existiu *estagnação* na aprendizagem do assunto. Por outro lado, se o número de respostas completas diminuir e/ou também globalmente, nas respostas parcialmente completas, significa que houve *retrocesso* e usando uma sinalética análoga à anterior, mas associada ao decréscimo do número de respostas completas utilizam-se os símbolos (↓) para *ligeiro retrocesso*, ou (↓↓) para *retrocesso* ou (↓↓↓) para *retrocesso significativo* ou *retrocesso acentuado*. Por "default" consideram-se os valores analisados positivos, isto é, em que a maioria dos estudantes resolveu completamente a questão, mas quando tal não acontece assinala-se o sinal (-) para referir que os resultados obtidos são negativos, isto é, em que a maioria dos estudantes não conseguiu resolver completamente a questão e (-+) para indicar que houve passagem de valores negativos para positivos ou vice-versa, com a notação (+-). Na tentativa de compreender e problematizar os resultados obtidos, o estudo contempla uma avaliação baseada nos resultados e nas estratégias implementadas pelos estudantes, suportada por uma análise qualitativa do *continuum* desenvolvido na investigação, com enfoque para o enquadramento educativo, previamente, definido para cada questão ou grupo de questões.

Resultados

	Questões																		
Nomes	1.1	1.2	1.3	2	3.1	3.2	3.3	4	5.1	5.2	6	7.1	7.2	7.3	7.4	8.1	8.2	9.1	9.2
1A	RC	Ria	RPCc	Rid	NR	NR	NR	Rib	Rca	Rib	RPCb1	Rib	Ric	Rid	Ric	RIaC	Rib	RibVa	RCcVa
2A	RC	Ria	RCb	RPCa	Ria	Rca	Rca	Rce	Rca	RPCd	RPCb1	Ria	RPCc	Rib	Ria	RIaC	RCd	RPCbVa	RPCb
3A	RC	RCa	Rca	RCd	Rca	RCa	RCc	RCb	Rca	RPCd	Rca	RIa	NR	NR	NR	Rca	RCb	RPCbVa	RPCb
4A	RC	RCa	RCb	Rca	RPCb	RPCb	RCa	RPCc	Rca	RPCb	RCa	RC	RCc	RCb	RIa	RCc	Ric	RCcVa	RCc
5A	RC	RCb	RCa	RPCe	RPCb	RPCb	RCc	RCb	Rca	RPCb	RCb	RIb	RIc	NR	RIc	RIaC	NR	RiaVa	RPCa
6A	RC	RCb	RCa	RCa	RIa	RPC6d	Rca	RCb	Rca	Rca	Rib	RIb	RIc	Rib	RPCa	Rib	RCc	RIbVa	Ria
7A	RC	RCb	NR	RPCe	NR	NR	NR	RCc	Rca	NR	RPCb1	RIb	NR	NR	NR	RIaC	Ria	RIbT	RIdOV
8A	RC	RPC6b	RCb	RPCa	RPCb	RPCb	RCa	RCe	Rca	RCc	RCa	RC	Ria	NR	NR	RCc	NR	Ric	Rie
9A	RC	RCa	RCa	RPCa	RCa	RCa	RCa	RCb	Rca	RPCc	RCa	RIa	RPCa	RPCa	RIc	RCb	RCc	RIbOV	Rcc
10A	RC	RPC8a	RCa	RPCa	RPCb	RPCb	Rcc	RCe	Rca	RCc	RCa	RC	RCc	RCb	RCd	RCa	RPCa	RCaCV	RCc
11A	RC	RPC2a	RCa	Rie	RIa	RCa	RCb	Ria	Ria	RPCd	RPCc	RC	NR	NR	NR	RIaC	NR	RCcVa	RPCa
12A	RC	RCa	RCa	Ric	RPCb	RPCb	RCa	RIa	RIa	RPCd	RPCc	RC	RCc	RCb	RCb	RCa	RIc	RiaVa	Rid
13A	RC	RCa	RCb	RPCa	RCa	RCa	RCc	RCe	RCa	RCc	RCa	RC	Rca	RIb	RCb	RCb	RIc	RiaVa	RIa
14A	Ria	NR	RCa	RPCa	RCa	RCa	RCa	RCb	RCb	RCc	RCa	RC	Rib	RCc	RIa	NR	NR	RCcVa	RCc
15A	RC	RCb	RCa	RCd	RPCb	RCPb	Rcc	RCe	RCa	RPCb	RCa	RC	RCc	RCb	RCd	RCc	RCc	RCaCV	Rib
16A	RC	RCa	RCa	RCd	RPCb	RPCb	Rca*	Rid	RCa	RCb	RCb	RC	RCa	Rca	RCb	RCc	RCb	RCaCV	RCc
17A	RC	RPC8a	RCa	RCa	RIa	RPCb	NR	RIa	RCa	RPCb	RCa	RIB	RCa	NR	RCd	RCb	NR	RCcVa	RCc
18A	RIa	RIa	RPC8a	RIc	RCa	RCa	NR	NR	RCa	Ric	RPCa1	RC	RCc	Ric	RIc	NR	NR	RCaCV	RCc
19A	RC	RPC8a	RPC2c	RCd	RPCb	RPCb	Ria	RCe	RCa	RCc	RCa	RIa	Rid	RId	RIa	RIaC	RCc	RPCbVa	RPCb
20A	RIa	RPC4a	RPC8a	RPCa	RIa	RCa	Rcc	RIb	RCa	NR	RCb	RC	RId	NR	RIa	RPCa	RIb	RCcVa	RCb

Resultados Pré-teste (6º A)

10	11	12.1	12.2.	13.1	13.2	14	15.1	15.2	16	17	18.1	18.2	18.3	19.1	19.2	19.3	19.4	20.1	20.2	21.	22.	23.
RPCam	Ria	RC	RI4	RPCb	Ria	Rca	Ria	Ria	Rca	RPCb	Ric	Ria	NR	Rca	Rca	Rib	RPCb	Rca	Rib	Rid	RCae	RCbed
RCb	Rca	RC	RI4	RC	Rib	RCa	RIa	RIa	RPCc	NR	Rca	RIa	NR	Rib	Ria	RIb	RPCb	Ria	NR	RId	NRa	NR
RCbm	Ric	RC	RC	RC	Rca	RCa	Rca	RPCb	RCa	Rib	Ria	RIa	Ria	RCa	RCa	RPCb	RPCc	RCa	Rib	RId	NRb	NR
Rib	Rib	RC	RC	RPCb	NR	RCa	RIa	RIa	RCa	Rid	RCa	Rid	RIa	RCa	RCa	RPCb	RPCb	RCa	RIb	RId	RPCbe	NR
RPCam	RIc	RC	RC	RPCb	RIa	RCa	RIa	RIa	RCa	RCc	RCa	Rca	RIa	RCa	RCa	Ria	RPCb	RCa	RCc	RId	NRb	NR
Rid	NR	RC	RC	RPCb	Ric	RCa	RIa	RPCa	RCb	RIb	RCa	RCa	NR	RCa	RIa	NR	NR	NR	NR	NR	NRb	NR
NR	RIa	RI	RI2	Rib	NR	RCa	RCb	NR	Ria	Rid	RCa	Rca	NR	RCa	Rid	RIa	RPCb	RIa	NR	RId	NRb	Rib
RCbm	Rcam	RC	RC	RC	NR	RCa	RCa	Rca	RCa	RPCa	RCa	Rca	Rie	RCa	Rca	RPCb	RPCb	Rca	RCc	Rca	RCae	Rcaed
RCbm	RCam	RC	RI1	RC	NR	RCa	RCb	RCb	RCa	RCc	RCa	RCa	Rca	RCa	NR	Rca	RCb	RCa	RCc	RCa	RCane	Rcaed
RCb	Rca	RC	RC	RC	NR	RCa	RCb	RCb	RCa	Rca	RCa	RCa	NR	RCa	RCa	RCa	RPCb	RCa	RCc	Rib	Rcbe	Rcbeg
NR	NR	RI	RI1	RPCb	NR	RCa	RIa	RIa	Ria	NR	Rca	Rca	NR	RCa	RIa	RIa	RPCc	RCa	RCc	NR	NRa	NR
Ria	NR	RI	RC	RPCb	RIc	RCa	NR	Ric	RCa	RPCb	RCa	Rca	RPCc	RCa	RIa	RIa	RPCc	RCa	NR	NR	NRb	NR
RCb	RIc	RC	RC	RPCa	RCb	RCa	RCa	RIc	RCa	RIb	RCa	RCa	RPCc	RCa	RCa	RCa	RPCc	RCa	RCc	RId	NRb	NR
RCbm	RIa	RCb	RC	RC	RIa	RCa	RPCd	RIa	RPCb	RCb	RCa	RCa	RIa	RCa	RCa	RPCb	RPCb	RCa	RCc	RId	NRb	NR
RIa	RCam	RC	RC	RPCb	RCb	RCa	RCa	RPCc	RCb	RPCc	RCa	Rca	RCb	RCa	NR	Ric	NR	NR	NR	NR	NRb	NR
Rca	RCam	RC	RCrc	RC	NR	Rib	RCa	RIa	RCb	RCb	RCa	Rca	NR	RCa	RIa	RCa	RPCb	RCa	RCc	NR	Rcbne	NR
RCa	RIb	RC	RC	RC	NR	RCa	NR	NR	RCa	RId	RCa	Rca	NR	RCa	RCa	RIa	RPCa	RCa	RCc	RId	Rcbe	Ricneg
RIa	NR	RC	RI1	RC	RIa	RCa	RIa	NR	RIa	Rib	Rca	RCa	NR	RCa	RIa	RIa	RPCb	RIa	NR	RId	RICe	RICeg
RCbm	RCam	RC	RC	RC	NR	RCa	RCb	NR	RCa	RCc	RCa	RCa	NR	RCa	RIa	RIb	RPCb	RCa	RPCa	NR	RCae	Rcaed
NR	NR	RC	RC	RPCb	RIc	RCa	RIa	NR	RPCb	NR	RIa	NR	NR	NR	NR	NR	NR	NR	NR	NR	NRb	NR

d - por desenhos
e - apenas dados explícitos
g -globalmente

Resultados Pré-teste (6º B)

Nomes	Questões 1.1	1.2	1.3	2	3.1	3.2	3.3	4	5.1	5.2	6	7.1	7.2	7.3	7.4	8.1	8.2	9.1	9.2
1B	RC	RCb	Rca	Rca	RPCc	RPCc	RCb	Rce	Rca	RPCb	RPCa	RC	Rca	RPCb	Rce	Rca	NR	RCbCV	RCc
2B	RC	Rca	RCc	RPCb	Rca	Rca	RCa	RCe	RCa	Rid	RCb	RC	Ric	Rid	RPCb	RCd	RCc	RIbVa	Ric
3B	RC	RCa	RCa	RCa	RPCb	RPCb	RCc	NR	NR	NR	RCb	RC	RCc	RCb	RCb	RIaA	NR	RIcVa	Rib
4B	RPCa	RCb	RCb	RPCa	NR	NR	NR	Ric	RCa	Rie	RPCc	RC	RIc	Rid	Ric	RIaC	RPCc	RIbVa	Ria
5B	RC	RCa	RCc	RCb	RCa	RCa	RCc	RCe	RCa	RId	RPCc	RC	RIc	RId	RPCb	RCa	Rib	RPCbVa	RPCa
6B	RC	RCb	RCc	Rca*	RCa	RPC8c	RCb	RCe	RCa	RCb	Rca	RC	RCa	NR	Ria	RCa	Ric	Ric	RPCa
7B	NR	NR	NR	Rca	NR	NR	NR	Rie	Ria	NR	RPCb2	RC	RIc	RId	RIc	RIaC	RIc	RPCaVa	RIb
8B	RC	RCa	RCc	Rca	RPCa	RPCa	RCc	RCe	RCa	RPCa	RPCa2	Rib	RCc	Rid	RCb	RIaA	RIc	RIdVa	RPCa
9B	RC	Ria	Ria	Ric*	Rib	Rib	Ric	Rie	RIa	RIe	Ria	RIb	RIc	NR	Rib	NR	RIc	RIdO	RIc
10B	NR	NR	NR	RPCc	NR	NR	NR	RCe	RIa	NR	RCa	RC	NR	NR	NR	NR	RCc	RPCaVa	Rie
11B	RC	RIa	RCc	RPCb	RPCb	RPCb	RCa	RIe	Rca	RId	RPCb2	RC	Ric	Ric	RIa	RCc	RPCb	RPCaVa	RCc
12B	RC	RCa	Ria	Rca	Ria	Rca	RCb	Ria	Rca	RCc	RCb	Rib	RIc	RId	RIa	RIaA	Ria	RCcVa	RCd
13B	Rib	RCa	RCc	RPCa	RCa	RCa	Rib	RCe	Rca	RId	RPCc	RC	RCa	NR	RIa	RCa	RIc	Ric	RIe
14B	Rid	RCa	RIa	Ric	RIb	RPC4d	RIb	RIe	Ria	RId	RPCb1	RIb	RIc	RId	RIc	RIaA	RIc	RIbVa	Rib
15B	Ria	RCa	RIa	Rid	RIa	Ria	RIb	RPCc	RCa	RId	RCb	RC	RIc	RIc	RIa	RIaC	RIb	RPCbVa	RPCb
16B	RIa	RCb	RIa	Ric	RCa	RCa	RIb	NR	RCa	RPCd	RCb	RC	RCc	Ria	RIa	Ric	RIc	RCcVa	RCc
17B	RPC4	NR	RCc	Rce	RPCb	RPCb	RCa	NR	RCa	NR	RCa	RC	RCc	RIc	RPCa	RIaC	RIc	RCcVa	RPCa
18B	RId	RCa	RCc	RPCc	RPC2d	Ric	Ria	RIe	RIa	RIe	RPCa1	RIb	RIc	RId	RIa	RIaA	RIc	RIbVa	Rib
19B	RC	RCa	RCc	Rca	RCa	RCa	RCa	RCe	NR	RPCb	RCa	RC	RCa	Rca	RCd	RCc	RIb	RPCbVa	RCc
20B	RIa	RPC6a	RIa	Ric	Ric	RPC8b	RCa	RIe	RCa	RIe	RPCc	RIb	Rib	RId	RIc	RIaC	RIc	RCcVa	RCc

* utilização da calculadora   v - validação do resultado

Resultados Pré-teste (6º B)

10	11	12.1	12.2	13.1	13.2	14	15.1	15.2	16	17	18.1	18.2	18.3	19.1	19.2	19.3	19.4	20.1	20.2	21.	22.	23.
RCbm	Rca	RC	RC	Ria	Ria	Rca	Ria	Rca	Rca	Rib	Rca	Rca	NR	Rca	Rca	RPCa	RPCb	Ria	Ria	NR	Nra	Rcbed
NR	Rie	RC	RI2	RPCb	RIa	RCa	Rca	NR	NR	NR	NR	NR	NR	NR	NR	NR	NR	NR	NR	NR	NRb	NR
RCb	Rcam	RC	RC	RC	RCb	RIb1	RPCb	RPCc	NR	NR	RCa	RCa	NR	RCa	NR	Rca	RPCb	Rca	RCc	Rca	Rcae	NR
Ria	Ria	RC	RC	RIa	NR	RCa	RIa	Ria	Ria	NR	RCa	Rib	NR	RCa	Rid	Ria	Rib	RCa	RIa	Rid	Riae	Riced
Rib	Rie	RC	RC	RPCb	RIa	RCa	RCb	RIa	RCa	Rid	NR	NR	NR	NR	NR	NR	NR	NR	NR	NR	NRb	NR
RPCam	Rca	RC	RI1	RC	RIa	RCa	RCa	RCb	RCa	RCb	Ria	RCa	RPCc	RCa	Ria	RPCb	RPCa	RCa	RCc	RCa	Rcae	RPCaned
RCbm	RCam	RC	RC	RPCb	NR	NR	RIa	NR	RPCc	NR	RIa	NR	NR	Ria	NR	RIa	RPCc	RCa	Rib	Rib	Rcane	RPCceg
RIa	RIa	RC	RC	RPCb	NR	RCa	Rcav	RCb	RCb	RPCd	RIa	RCa	Ria	RCa	RId	Rib	RPca	RCa	RIb	Ric	RCane	Rcaneg
RIa	Rid	RC	RI4	RIa	RIa	Ria	Rian	RIa	RIa	RPCd	Rib	Rie	NR	Rib	RId	Rid	RIb	Ria	Ric	NR	RPCae	Riceg
RCbm	Rca	RC	RC	RC	NR	RCa	NR	NR	RCa	RId	RCa	NR	NR	RCa	RIa	RPCc	RPCa	RCa	RCc	Ric	Rcbe	NR
RCbm	RCam	RC	RI1	RPCb	RIa	RCa	RIan	RPCc	RIa	RCb	RCa	RCa	RPCb	RCa	RIa	RPCa	RPCb	RCa	RCc	RPCc	RCae	Rcbed
RPCam	RCam	RI	RI1	RPCa	RIa	RCa	Ria	RCa	RCb	Ridc	RCa	RCa	RCb	RCa	RCa	RPCb	Ric	RCa	RCc	RPCd	RCane	Rcbeg
RPCam	Rca	RC	RI1	RC	RIa	RCa	Rca	RIa	RPCc	NR	RIa	RCa	RPCc	RCa	RIa	RPCb	RPCc	RCa	RCc	Rca	Riae	RPCced
RIa	RIa	RI	RI2	RIa	RIa	RIb4	Ria	Rib	RPCc	RIdc	RIa	RCa	Ria	RCa	Ric	RIa	RCb	RCa	RPCb	RId	RPCae	RIceg
RIa	RIe	RC	RC	RPCa	NR	RPCa	Ria	RCb	RPCc	RIb	RIb	RCa	NR	RCa	RCa	RIa	RPCb	RCa	Rid	RId	Riae	RPCcned
RIa	RIa	RI	RI5	RIa	NR	RCa	Rca	RIa	RPCc	RPCa	RCa	RIc	Rib	RCa	RIa	RIa	RPCb	NR	NR	NR	NRb	NR
RPCam	RCam	RC	NR	RPCa	NR	RCa	Ria	RPCc	RCa	RIb	RCa	Rca	RCb	RCa	RIa	RIb	RPCb	RCa	RCc	RIb	RCane	NR
RIa	Ria	RC	RI1	RIa	NR	RCa	Ria	RIa	RPCc	RIb	RIa	RCa	NR	RIb	RIc	RIa	NR	RCa	RId	RId	RPCane	Riaeg
RCbm	RCam	RC	RC	RC	NR	RCa	Ria	RCb	RCa	RCb	RCa	RCa	RPCc	RCa	RCa	RPCb	RPCb	RCa	RCc	Rca	RCbe	NR
RIa	Ria	RC	RC	RC	RIa	RCa	RPCc	NR	RCa	RCb	RIa	RCa	RPCc	RCa	RCa	RPCb	NR	RIa	RId	RId	RPCbe	RIceg

an - adicição dos números

dc - figura côncava

d - por desenhos

e - apenas dados explícitos

g - globalmente

Resultados Pós-teste (6º A)

	Questões																			
Nº	1.1	1.2	1.3	2	3.1	3.2	3.3	4	5.1	5.2	6	7.1	7.2	7.3	7.4	8.1	8.2	9.1	9.2	10
1A	RC	Rca	RPCa	RCa	Ria	Rca	Ria	RCb	Rca	RPCb	Rca	Rib	RPCb	Rid	Rib	RCc	Rib	RPCcOV	RPCb	RPCam
2A	RC	RCa	RCd	RCa	RIa	RCa	Rca	RCb	RCa	RCc	RCa	RIb	Rca	Rca	RCc	RCc	Ric	RCaCV	Rid	Rcam
3A	RC	RCa	RCd	RCa	RPCa	RPCa	RPCa	RCb	Ria	RPCa	RCa	RC	RCc	RCb	Ria	RCc	RCc	RCcVa	Rib	RPCam
4A	RC	RCa	RCd	RCa	Rca	RCa	RCa	RCb	Rca	RPCb	RCa	RC	RPCc	RCb	RPCc*	RCc	RCc	RCcVa	RIa	RCb
5A	RC	RPC6a	RCb	RCa	RPCb	RPCb	RCd	RCb	RCa	RPCd	RCa	RC	RCa	RCa	RCb	RIaA	RCc	RIaOV	RIa	RCb
6A	RC	RCa	RCb	RCa	RCa	RCa	RCc	RCb	RCa	Rib	RCa	RC	RCc	Rcb	RPCa	RIaA	RCb	RCaCV	RCb	Rca
7A	Rid	RCa	RCb	Ric	RPCa	RPCa	Rib	RCb	RIa	RPCb	RPCc	RIb	Rib	RPCb	RIa	RIaA	Ria	Rib	RCc	Ria
8A	RC	RCa	RCb	RCa	RPCb	RPCb	RCa	RCb	RCa	RCb	RCa	RC	RCa	RCa	RCb	Rca	RCc	RCaCV	RCc	RCam
9A	RC	RCa	RCa	RCa	RCa	RCa	RPCa	RCb	RCa	Rca	RCa	RC	RCa	RCa	RCb	RCb	RCc	RCaCV	RCc	RCam
10A	RC	RPC8a	RCc	RPCa	RPCb	RPCb	RPCb	Rca	RCa	RPCb	RCa	RC	RCa	RPCb	RIb	RCa	RCc	RCaCV	RCc	RCbm
11A	RC	RCa	RCb	RPCa	Rib	RCa	RCa	Ria	RCa	RIb	RPCc	RC	Ric	NR	RIa	RIaA	RIc	RIbVa	RId	RCbm
12A	RC	RPC4a	RCb	RPCa	RPCb	RPCb	RCa	NR	RCa	Ric	RPCc	RC	RCc	RCb	Rce	RIaA	RCd	RIaVa	RCc	RIa
13A	RC	Ria	RCd	RPCa	RCa	RCa	Rce	RCe	RCa	RCa	RCa	RC	RCa	Rca	RCb	RCc	RCb	RCaCV	RPCa	RCam
14A	Ria	RPC6a	RCa	RCa	Rca	Rca	RPCb	RCb	Rca	RPCb	RCa	RC	Ria	Ria	RIa	RIaC	RCd	RPCaCV	RCc	RCam
15A	RC	RCa	RCc	RPCa	RCa	RCa	RCc	RCb	RIa	RPCb	RCa	RC	RCc	Rcb	Rcb	RCc	RCc	RCaCV	RPCa	RCam
16A	RC	RCa	RCc	RPCd	RPCb	RPCb	RCa	RCa	RCa	RCb	RCa	RC	RCa	RCb	Rcb*	RCc	RPCa	RCaCV	RCc	RCam
17A	RC	RCa	RCb	RCd	NR	RCa	RIb	Rce	RCa	RCc	RCa	RC	RCa	RId	RIb	RCa	RIb	RPCbVa	RCc	RCbm
18A	RIa	Ria	RPCa	RPCf	RPC10c	RPC10c	NR	Rie	RCa	Rie	RPCc	RC	Rie	RId	RIb	RIaA	RIc	RIbOV	RIa	NR
19A	RIa	RIa	RCd	RPCa	RCa	Rca	RCc	RCe	Rib	RCc	RCa	RIb	RIa	NR	NR	RCc	RCc	RCcVa	RIa	RCbm
20A	RIa	RIa	RCc	RPCa	RPC12c	RCa	RPCa	RIe	NR	NR	RCa	RIb	NR	NR	NR	RCa	RCd	NR	NR	RCbm

Resultados Pós-teste (6º A)

11	12.1	12.2	13.1	13.2	14	15.1	15.2	16	17	18.1	18.2	18.3	19.1	19.2	19.3	19.4	20.1	20.2	21.	22.	23.
Rcam	RI	RC	RC	NR	Rib	Ria	RPCa	RPCc	RPCa	Rca	Rca	Rib	RCa	Rca	Rib	RPCa	RPCa3	Rib	Ric	Rcbe	Rcbed
RCam	RC	RC	RPCb	Ria	Rca	Rib	Ria	RPCb	Rid	Ria	Ric	RIb	RCa	RCa	Ric	RCb	Rca	RCc	NR	Rcae	Riceg
Rca	RC	RC	RC	Rca	RCa	Rca	Rca	Rca	RCb	RIa	Ria	NR	RCa	Rca	RPCc	RPCc	RCa	RCc	Rca	Rcae	Rcbeg
Ric	RC	RC	RPCb	NR	RCa	RCa	RCa	RPCb	Ric	RCa	RCa	Ria	RCa	RCa	RIc	RPCa	RCa	RPCb	NR	RCbe	Rcaneg
Rca	RC	RC	RC	RIa	RCa	RCa	Ria	RCa	Ridc	RCa	RCa	Rid	RCa	Ria	RIc	RPCa	RCa	RCc	Rib	Rcae	Rcbed
Rca	RC	RC	RC	NR	RCa	RIa	RCa	RCa	RCc	RCa	RCa	RId	RCa	RCa	Ric	RPCb	RCa	RCc	Rca	Rcae	Rcaed
Ria	RC	RC	RPCa	RIa	RCa	RIa	RIa	Ria	Rib	RCa	RCa	RIb	RCa	Rib	RIc	RPCa	RCa	RIb	Rid	Rcbe	RCbed
RCam	RC	RC	RC	NR	RCa	RCb	Ria	RCa	RCb	RCa	RCa	Rca	RCa	RCa	NR	RPCb	RCa	RCc	RPCb	RCae	Rcaed
RCam	RC	RC	RC	RCb	RCa	RCb	RIa	RCa	RPCb	RCa	RCa	NR	RCa	RCa	RPCa	RPCa	RCa	RCc	Rca	NRb	Rcaned
RCam	RC	RC	RC	RCb	RCa	RCb	RCa	RCa	Ria	RCa	RIa	Rie	RCa	RIa	Rca	Rca	Rca	RCc	Rca	RCae	RPCaed
RIc	RC	RC	RC	NR	RCa	RIa	Ria	NR	NR	RIa	RIa	RId	Ria	Rid	Ria	RPCc	RCa	RIb	NR	NRa	RPCbeg
RIc	RI	RC	RPCb	NR	Rca	RIa	NR	RIa	RPCb	RCa	RIc	RId	RIa	RCa	RIb	RPCc	RCa	RPCb	NR	RPCce	RIceg
Rcam	RC	RI1	RC	RCb	RCa	RCbX	RIa	RCa	RCb	RCa	RCa	RPCc	RCa	RCa	RCa	RPCb	RCa	RCc	Rca	Rcbe	RPCaed
Rcam	RC	RC	RC	RCb	RCa	RCa	RCa	RPCc	RCb	RCa	RCa	RCa	RCa	RIa	RCa	RPCb	Rca	RCb	RPCb	Rcbe	RCbed
RCam	RC	RC	RC	RCb	RCa	RCa	RCa	RPCc	Rcbe	RCa	RCa	Ric	RCa	RCa	RCa	RPCb	Rca	RCc	RPCb	RCae	RPCaned
RCam	RC	RC	RC	NR	RCa	RCb	RIa	RCb	RCbe	RCa	RCa	NR	RCa	RCa	RCa	RPCb	RCa	RCc	RCa	Rcane	RCaed
Rca	RC	RC	RC	RIa	RCa	RIa	RPCa	RCa	RIa	RCa	RCa	RId	RCa	RCa	RPCb	RPCa	Rca	RCc	RPCc	RCbe	RCbed
Rcb	RC	RI2	RPCa	NR	RCa	RIa	NR	RPCc	NR	RCa	RCa	RIa	RCa	RId	RPCb	Ric	RCa	RIb	RId	Rice	Riced
Rca	RC	RC	RC	Ria	RCa	RCa	RIa	RCa	RId	RCa	Rca	NR	RCa	RCa	RPCb	RPCc	RCa	RCc	Rca	RCae	RCbed
Rca	RC	RI1	RPCb	RIa	RCa	NR	NR	RCa	NR	RIa	RIa	NR	RCa	RCa	NR	NR	Rca	NR	NR	NRb	NR

dc - figura côncava

d - por desenhos

e - apenas dados explícitos

g -globalmente

Resultados Pós-teste (6º B)

	Questões																			
Nomes	1.1	1.2	1.3	2	3.1	3.2	3.3	4	5.1	5.2	6	7.1	7.2	7.3	7.4	8.1	8.2	9.1	9.2	10
1B	RC	NR	RCa	RPCc	RPCa	RPC10d	RCa	Rce	Rca	RCb	RCb	RC	RCc	NR	RCb	RCc	Rcc	RPCaCV	RPCa	RCb
2B	RPC6	NR	RCb	Rcb	Rca	Rca	RCa	Ria	NR	NR	RCb	RC	Rca	RCb	Rib	RiaC	RCc	RPCaCV	Ria	Ria
3B	RC	RPC8a	RCb	Rca	RCa	RCa	RCa	RCe	RCa	NR	RCb	RC	RCa	Rca	Rcd	RCc	RCc	Ric	RIa	RCbm
4B	Rib	Ria	RPCb	Rib	RCa	RCa	Rib	Ric	RCa	Rie	RCb	Rib	NR	NR	NR	RiaC	Rib	RIbVa	Rie	RPCa
5B	RPC8	RCb	RCd	RCb	Rca	Rca	RCa	RCb	NR	NR	RCb	RIb	RCc	RCc	RCb	RIaA	RIb	RIbVa	RCc	RPCb
6B	RC	RCb	RCb	RCa	Rca	Rca	RCa	RCe	RCa	RPCb	Rca	RC	RCa	RCa	RCb	RCc	RCc	RIbVa	Rib	RPCb
7B	RC	RPC6a	RCd	RCa	RPCa	RPCa	NR	RIa	NR	NR	RCa	RIb	RCc	Ric	RPCb	Rca	Rib	RIbVa	NR	RPCa
8B	Rib	RCb	RCb	RCa	Ria	RCa	RCa	RCe	RCa	RPCa	RPCa2	RC	RCa	RPCb	Rce	RCc	RCc	RIbVa	Rib	RCbm
9B	Rid	Ria	RPCb	RIa	Rid	Rid	NR	Rie	Ria	Ric	RPCc	RIb	Ric	NR	RIb	Ric	Ric	RCaCV	Rid	RIa
10B	Ria	RPC6a	RCb	RIe	RPCa	RPCa	NR	RIa	Rca	RCc	RCb	RC	RCc	RPCb	NR	RIaA	RCb	RPCb	RCc	RCbm
11B	RC	RCb	RPCb	RIb	RPCb	RPCb	RCa	RCb	RCa	RCc	RPCb2	RC	RCc	RPCa	RCb	RCc	RCd	RPCbVa	RPCb	RPCbm
12B	RC	RPC8a	RCd	RCc	RCa	RCa	RCa	RCb	RCa	NR	RCb	RC	RCc	Rib	Ria	RCc	RCd	RCaCV	RCc	RCbm
13B	RC	RPC6a	RCd	RCa	RIa	RPC2d	Ria	NR	NR	NR	RCa	RC	RCc	RCb	RIb	RCa	RIb	RCcOV	RIe	RPCam
14B	RC	Rca	RPCb	Rif	RPCb	RPCb	RCa	RIe	RCa	Rid	RCa	RIb	RIc	RIc	RIa	RIaC	RIc	RPCbVa	RPCb	RIa
15B	RIb	RIa	RPCd2	RCa	RIa	Ria	RIa	RIe	RCa	RIe	RCb	RC	RIc	RIb	RCe	RIaC	RIc	RPCaCV	RIe	NR
16B	RIb	RCa	RCa	RCd	RCa	RCa	RIa	RIe	NR	NR	RCa	RIb	RCa	Rid	Ric	RIaA	RIc	RCcOV	RIb	Rie
17B	RC	RCa	RCc	RCa	RPCa	RPCa	RPCa	RCb	NR	NR	RCb	RC	Rie	RCb	RPCa	RIaA	RCd	RPCaCV	NR	RCbm
18B	RC	RPC8b	RCd	RIa	RPCa	RPCa	RCa	RPCa	RCa	RId	RCa	RIb	RIc	RIc	RIc	RIaC	RIb	RIbVa	RIe	RPCam
19B	RC	RCa	RCb	RCd	RPCb	RPCb	RCc	RCb	RCa	RCc	RCb	RC	RCa	RCa	RIa	RCc	RCb	Rie	RCc	RCbm
20B	RC	RPC8a	RPCd4	RIa	Ric	RPCb	RIb	RIe	RCa	RIe	RCb	RIb	RIc	RId	RIc	RIaA	RIc	RIdVa	RIa	RIa

Resultados Pós-teste (6º B)

11	12.1	12.2	13.1	13.2	14	15.1	15.2	16	17	18.1	18.2	18.3	19.1	19.2	19.3	19.4	20.1	20.2	21.	22.	23.
Ric	RC	RC	RC	NR	Rca	Ria	Rca	Rca	RPCd	Rca	NR	NR	Rca	Rca	Rca	RPCb	RPCa2	Rib	Ria	Rcane	Rcaned
NR	RC	RC	RPCb	Ria	Rca	RIa	RCb	RPCc	Rib	Ria	NR	NR	NR	NR	NR	NR	NR	NR	NR	NRb	NR
Rcam	RC	RCrc	RC	NR	RCa	NR	RCa	RPCb	NR	RCa	Rca	NR	RCa	RCa	NR	NR	Rca	RCc	Ric	Rcae	RPCaed
Ria	RC	RI2	Ria	Rib	Rca	NR	RPCc	Ria	Rib	RCa	Ric	NR	RCa	Rib	Ria	RPCb	Ria	Ria	RIc	Rice	Riced
Rca	RC	RI1	RPCb	NR	RCa	RCb	Ria	RCa	RPCa	RCa	RCa	Rid	RCa	RIb	NR	RPCb	NR	NR	NR	NRb	NR
RCam	RC	RC	RC	NR	RCa	Rca	RPCc	RCa	RPCa	RCa	Ria	Ria	RCa	RCa	RPCb	RPCa	RCa	RCb	Rca	RCae	Rcaed
RCam	RC	RC	RC	NR	RCa	RCa	Rca	RCa	NR	RCa	RIa	NR	NR	NR	NR	NR	RCa	RCc	Rid	Rcae	RPCced
RCam	RI	RI1	RPCb	NR	RCa	RIa	RCa	RCa	RCb	RCa	RCa	RCc	RCa	RCa	RPCb	RPCa	RCa	RCc	RCa	Rcbe	RPCaeg
Rid	RC	RI1	RIa	RIa	Ria	RIa	RIa	NR	Rid	Rib	Rid	NR	Ria	Rid	RIa	RPCb	RIa	RIa	NR	Nra	Ribeg
Rca	RC	RC	Ria	RIa	RCa	RCb	RCb	RCa	Ridc	RCa	RCa	RId	RCa	RCa	RCa	RPCc	RCa	RCc	RPCb	RCae	Riaeg
RIc	RC	RC	RPCb	RIa	RCa	RIa	RCa	RCa	Ria	RCa	Rca	Rca	Rca	RCa	RPCb	RPCb	RCa	RCc	RCa	Rcbe	RPCaed
RIa	RC	RC	NR	NR	Rib1	RIa	RPCc	RPCb	RIdc	RCa	RPCa	Ric	RCa	RCa	RIa	RPCc	RCa	RIb	RId	NRb	NR
RCam	RI	RC	RC	NR	RCa	NR	NR	NR	NR	RCa	RId	RId	RCa	Ria	Rib	RPCc	RCa	RCc	NR	NRb	NR
RIa	RC	RI2	RIa	RIa	RIb3	RIa	RIa	RIa	RIa	RCa	RIc	RId	RCa	RIa	RIa	RPCb	RCa	Rid	RId	RCbe	Rcbeg
RIa	RI	RI4	RPCa	NR	RCa	RIa	RIa	RPCc	RIb	RCa	RId	Rib	RCa	RIb	NR	Rib	RCa	Ric	RId	Rcae	RPCceg
Rie	RI	RC	RPCa	RIa	RIb1	NR	RCb	RPCb	RPCa	RIa	RPCa	RId	RCa	RCa	RIb	Ria	RCa	RIb	NR	NRb	NR
RCam	RC	RC	RPCa	NR	RCa	RCb	RIa	RCa	RIb	RIa	RCa	NR	RCa	RCa	RCa	RPCb	RCa	RCc	RPCb	Rcane	Riceg
RCam	RI	RI4	RPCb	RIa	RCa	RIa	Rcar	RPCc	RIb	RCa	RIa	RId	Rib	RIa	RIa	Ric	RCa	RPCb	RId	RCane	RPCceg
Rcam	RC	RC	RC	NR	Rca	RCa	Rca	RCa	RCb	RCa	RCa	RPCc	Rca	RCa	RCa	RPCb	RCa	RCc	RCa	RPCbe	NR
RIa	RC	RC	RIa	RIa	RIb3	RIa	RCar	RIa	RIb	RCa	RIc	RId	RIb	RId	RIa	RPCb	RCa	RIb	RIa	RPCa	RPCceg

r - linguagem imprópria ("roubou-lhe")
dc - figura côncava

e - apenas dados explícitos
d - por desenhos
g - globalmente

Análise dos Resultados Obtidos no Teste: Pré-Teste e Pós-Teste

O estudo dos resultados obtidos pelas duas turmas no pré-teste e no pós-teste comporta o enquadramento educativo de cada questão ou grupo de sub-questões, definido aquando da concepção e elaboração do teste e a Apreciação específica e global, numa perspectiva de compreender os processos implementados e os saberes mobilizados.

Questão 1.

Enquadramento educativo

Conteúdos:

- Cálculo do produto de um número inteiro por um número racional.
- Cálculo do valor numérico de expressões numéricas.
- Descoberta da regra que generaliza o padrão numérico.

Competências:

- Ampliar o padrão, completando a sequência numérica, em tabelas de uma única entrada:
  - com dados numéricos e a regra em linguagem corrente (lc);
  - com dados numéricos e a regra em linguagem simbólica matemática (lm);
  - com apenas dados numéricos;
- Descrever o padrão, numa tabela de única entrada, em linguagem:
  - corrente (lc);
  - matemática (lm);
  - mista (lc e lm);
- Desenvolver o raciocínio indutivo pela generalização de um padrão numérico.

Aproximações à álgebra:

- Generalizações de padrões numéricos, em tabelas de uma única entrada, pela:
  - aplicação da regra em linguagem corrente (classe 1)
  - aplicação da regra em linguagem simbólica (classe 2)
  - descoberta da lei que rege a sequência numérica (classe 3)

Contexto:

- Académico – estritamente matemático.

Questão Q1.1

Resultados do Pré-Teste

Tipo de Resposta		RC		RPC		RI		NR		Total
	Turma	A	B	A	B	A	B	A	B	
Questão	Classe									
Q1.1	1	17	10	0	1	a - 3	a - 4 b - 1 d - 2			
Total		17	10	0	1	3	7	0	2	20

Legenda: RC – Resposta Completa; RPC – Resposta Parcialmente Completa; RI – Resposta Incorrecta; NR – Não Resposta

No pré-teste 85% dos estudantes da turma A resolveram completamente a questão e apenas 50% o conseguiram na turma B.
Os três estudantes da turma A que responderam incorrectamente à questão, completaram a tabela adicionando dois ao numerador da fracção, em vez de multiplicarem dor dois, mantendo o valor numérico do denominador.
Na turma B dos sete estudantes que responderam incorrectamente, quatro adicionarem dois ao numerador, um estudante multiplicou o numerador e o denominador por dois e outros dois estudantes completaram a tabela com valores aleatórios, não se descortinando a regra utilizada.

Resultados do Pós-Teste

Tipo de Resposta		RC		RPC		RI		NR		Total
	Turma	A	B	A	B	A	B	A	B	
Questão	Classe									
Q1.1	1	15	12		2	a - 4 d - 1	a - 1 b - 4 d - 1			
Total		15	12	0	2	5	6	0	0	20

Legenda: RC – Resposta Completa; RPC – Resposta Parcialmente Completa; RI – Resposta Incorrecta; NR – Não Resposta

Na turma B, no pós-teste, mais dois estudantes conseguiram realizar completamente a questão, enquanto que na turma A houve uma diminuição do mesmo número de estudantes na resolução correcta da questão.
No pós-teste, 75% e 60% dos estudantes resolveram completamente a questão, respectivamente, nas turmas A e B.

Apreciação específica **Q1.1.**

Nesta primeira sub-questão, orientada para o preenchimento de lacunas numéricas numa tabela de uma entrada, pela aplicação de uma regra escrita em linguagem corrente (lc): "Completa com a regra: o dobro do número anterior" concluiu-se que: houve um *ligeiro retrocesso na* ***turma A*** (↓) e uma *ligeira evolução* na ***turma B*** (↑).

Questão Q1.2

Resultados do Pré-Teste

Tipo de Resposta		RC		RPC		RI		NR		Total
	Turma	A	B	A	B	A	B	A	B	
Questão	Classe									
Q1.2	1	a - 6 b - 4	a - 10 b - 4	1a - 1 2a - 1 4a - 3 3b -1	3a - 1	a - 3	a - 2 b - 2			
Total		10	14	6	1	3	4	1	3	20

Na turma A 50% dos estudantes respondeu correctamente à questão, tendo conseguido completar as lacunas da tabela de uma entrada com base na regra apresentada simbolicamente: *"...x2+1"*. Tudo indica que estes estudantes interpretaram correctamente o significado da expressão simbólica, tendo seis dos dez estudantes respondido correctamente recorrendo ao cálculo mental e os restantes quatro estudantes explicitaram, de forma completa, os cálculos numéricos.
Na turma B 70% dos estudantes respondeu correctamente à questão e quatro dos catorze estudantes explicitou os cálculos numéricos.

Resultados do Pós-Teste

Tipo de Resposta		RC		RPC		RI		NR		Total
	Turma	A	B	A	B	A	B	A	B	
Questão	Classe									
Q1.2	1	a -12	a - 4 b - 4	8a - 1 6a - 2 4a - 1	8a - 3 6a - 3 8b - 1	1a - 4	1a - 3			
Total		12	8	4	7	4	3	0	2	20

Legenda: RC – Resposta Completa; RPC – Resposta Parcialmente Completa; RI – Resposta Incorrecta; NR – Não Resposta

Na turma A os estudantes continuaram a não explicitar os cálculos e 60% respondeu completamente à questão, enquanto que na turma B apenas 40% o conseguiu, mas as respostas parcialmente completas desta turma indicam que os estudantes apreenderam o significado da regra dada, pois conseguiram completar algumas lacunas sem ou com explicitação de cálculos, respectivamente, assinaladas pelas alíneas a e b, .

Apreciação específica **Q1.2.**
Na ***turma A*** existiu uma *ligeira evolução* (↑) e um *retrocesso acentuado* na ***turma B*** (↓↓↓) (+-).

Questão Q1.3

Resultados do Pré-Teste

Tipo de Resposta		RC		RPC		RI		NR		Total
	Turma	A	B	A	B	A	B	A	B	
Questão	Classe									
Q1.3	1	a -11 b - 4	a - 2 b - 1 c - 9	8a - 2 2c - 1 c - 1			a - 6			
Total		15	12	4	0	0	6	1	2	20

A maior parte dos estudantes da turma A, 75%, conseguiu resolver completamente a questão e onze dos quinze estudantes descobriram e assinalaram a regra usada em linguagem simbólica, evidenciando o operador numérico.
Também 60% dos estudantes da turma B conseguiu, com êxito, resolver a questão, tendo apenas dois estudantes usado a linguagem simbólica e os restantes utilizaram a linguagem mista (mistura de linguagem corrente e simbólica).

Resultados do Pós-Teste

Tipo de Resposta		RC		RPC		RI		NR		Total
	Turma	A	B	A	B	A	B	A	B	
Questão	Classe									
Q1.3	1	1a - 2 1b - 7 1c - 4 1d - 5	1a - 2 1b - 6 1c - 1 1d - 5	a - 2	b - 4 4d - 1 2d - 1					
Total		18	14	2	6	0	0	0	0	20

Legenda: RC – Resposta Completa; RPC – Resposta Parcialmente Completa; RI – Resposta Incorrecta; NR – Não Resposta

Dois estudantes da turma A responderam parcialmente à questão e os restantes, isto é, 90%, responderam correctamente, tendo descoberto e assinalado a regra, com duas respostas em linguagem simbólica e sete em linguagem corrente, com evidência do operador numérico (+1,5) junto das setas direccionais que acompanharam as entradas da tabela e nove respostas assinalando também a regra em linguagem corrente, com formulações variadas.
Na turma B 70% dos estudantes responderam completamente, tendo também dois estudantes usado a linguagem simbólica, seis a formulação mista e os restantes seis estudantes expressaram a regra em linguagem corrente. Nesta turma ainda seis estudantes responderam parcialmente à questão, pois realizaram incorrectamente alguns cálculos ou não descobriram a regra.

Apreciação específica **Q1.3.**
Nas ***duas turmas*** houve uma *evolução* (↑↑), pois na turma A existiu um aumento de três respostas completas e na B de duas e mais três respostas parcialmente completas. Nas duas turmas os processos utilizados na explicitação da regra foram muito variados, desde o uso da linguagem simbólica (ls) à linguagem corrente (lc) ou mista (lm)

Apreciação genérica de **Q1.**
Esta questão comportava a manipulação de valores numéricos em diferentes apresentações, numa tabela de uma só entrada, integrando *a primeira aproximação à álgebra de âmbito estritamente disciplinar*.
Os resultados genéricos obtidos, nas duas turmas, foram registados no quadro seguinte.

Questão	Turmas		Conclusão genérica
	A	B	A ***turma A*** apresenta resultados mais positivos do que a ***classe B***.
Q1.1.	↓	↑	
Q1.2	↑	↓↓↓(+-)	
Q1.3	↑↑	↑↑	

A primeira sub-questão Q1.1. estava ligada à interpretação de uma regra, indicada em linguagem corrente, "*o dobro do número anterior*" e á aplicação a quantidades racionais.

Tudo indica que a linguagem corrente emerge como um veículo privilegiado da convivência social e como uma primeira abordagem natural da comunicação matemática. Nas fases matemáticas propostas por Bruner, Piaget (1960-85) e outros, normalmente o uso da linguagem verbal, oral e escrita revela-se como o primeiro suporte da conceptualização. Esta primeira aproximação à linguagem corrente basifica, de forma dinâmica, o conhecimento científico emergindo como primeiro elemento de um sistema coerente simbólico e inter-relacional da ciência matemática. Assim, tudo indica que deve ser estimulado o uso da linguagem corrente nos níveis elementares e, nesta perspectiva, deve ser explorada em diversas situações, com objectivos muito concretos orientados fundamentalmente para uma aprendizagem gradual e dinâmica do conhecimento matemático.
Na resolução da sub-questão Q1.1. a aproximação da linguagem corrente à linguagem matemática requer um processo intermédio de operacionalização simbólica que acarreta dificuldades e, neste caso concreto, acrescidas pelo facto de se estar a trabalhar com números racionais. Por outro lado, à medida que a idade dos estudantes avança a linguagem corrente fica cada vez mais afastada dos conceitos matemáticos que trabalham fundamentalmente com uma linguagem simbólica. Assim, os estudantes que revelam um conhecimento matemático mais abstracto tendem a usar uma linguagem simbólica e a desligar-se da linguagem corrente. Provavelmente estas duas circunstâncias e o trabalho realizado na folha de cálculo influenciaram as resoluções desta sub-questão e consequentemente os resultados obtidos na turma A.

Apesar da aprendizagem do conceito de número racional e dos respectivos processos operatórios fazerem parte integrante do programa de Matemática do 6º ano de escolaridade, alguns estudantes das duas turmas sentiram dificuldades na aplicação da regra, isto é, no cálculo do dobro de um número racional, tendo alguns deles apresentado respostas incorrectas, seis na turma B e três e cinco na turma A, respectivamente, no pré e no pós-teste. Por outro lado, as respostas incorrectas indicam que estes estudantes não apreenderam o significado numérico da regra *"o dobro do número anterior*" aplicado a um número racional em representação fraccionária, tendo simplesmente, alguns deles, adicionado a quantidade dois ao numerador.

Na questão Q1.2. relacionada com a manipulação da regra "*...x2+1*" existiu, na turma A, *evolução* (↑) e um *retrocesso acentuado* (↓↓↓)(+-), na turma B.
Uma das questões que se pode colocar está relacionada com a diferença de resultados obtidos pelas duas turma no pré-teste e no pós-teste e, em particular, neste último pela turma B. Assim, por que razão, no pré-teste a turma A obteve resultados menos positivos do que os da turma B e que explicações haverá para os resultados obtidos pela turma B no pós-teste?

Numa primeira análise, na qual a contagem das respostas completas não estava organizada em duas categorias, mas apenas numa tudo levava a crer que a diferença de resultados nas duas turmas residia, fundamentalmente, nos processos operatórios utilizados na resolução da questão e eventualmente nalguns erros cometidos nos cálculos intermédios. Então, numa segunda fase, passou-se a subdividir a análise da questão em duas categorias, sem a explicitação dos cálculos (alínea a) e com a explicitação dos cálculos (alínea b). Seguindo esta orientação verificou-se que, nas duas turmas, houve o mesmo número de respostas completas, em que não foram explicitados os cálculos efectuados e em termos relativos a turma B executou menos cálculos. Contudo, como no pré-teste a maior parte dos estudantes da turma A não explicitou os cálculos não foram totalmente conseguidos e sucederam-se erros, sendo o número de respostas parcialmente correctas superior naquela turma aos da turma B, respectivamente, seis e um.
Para além desta circunstância, provavelmente uma das razões que explica a diferença de resultados entre o pré-teste e o pós-teste tem a ver com o enquadramento curricular dos conteúdos desenvolvidos. De facto, um dos temas explorados no 5º ano de escolaridade foi as expressões numéricas e como a realização do pré-teste estava, temporalmente, mais próximo desta temática talvez tivesse sido possível aos estudantes da turma B, com mais apetência por este tipo de exercícios conseguirem resolver com êxito esta situação. De facto, estes pareciam estar confiantes no entendimento daquele tipo de expressão, o que de certo modo pode ter interferido na resolução da questão e o mesmo não se ter passado com os estudantes da turma A.
Por outro lado, como aquele tema não tinha sido um conteúdo explorado no 6º ano a turma B não teve referências próximas de execução deste assunto na concretização do pós-teste. Em termos de exploração de conteúdos o percurso foi semelhante nas duas turmas e apesar das actividades desenvolvidas na classe A, na folha de cálculo, no 6º ano de escolaridade, não terem sido da natureza da questão em análise tudo indica que permitiu, nalgumas situações, a exploração de fórmulas proporcionando a definição de expressões designatórias com uso de "letras" e sintaxe própria e, consequentemente, o desenvolvimento de determinadas competências Específicas.
De facto, alguns estudantes da turma A comentaram que as reticências na expressão "*...x2+1*" designavam a "letra", como acontecia no computador e confiaram nas suas capacidades, no tipo de trabalho que tinham desenvolvido calculando mentalmente e, na maior parte dos casos com êxito, libertando-se do cálculo em suporte de papel, mas, nalgumas circunstâncias, a confiança traiu-os, pois alguns cálculos não foram totalmente conseguidos, sucedendo isso a quatro estudantes que obtiveram respostas parcialmente completas.
A realização de determinado tipo de tarefas no computador parece estimular a elaboração mental, a confiança nos cálculos pessoais, em detrimento da realização manual. De facto, não houve um único estudante da turma A, no pós-teste que tentasse resolver o exercício com a explicitação de cálculos, enquanto que na turma B cinco fizeram-no, tendo quatro conseguido uma resposta completa e outro parcialmente completa.

Na questão Q1.3. relacionada com *completar a tabela e indicar a regra descoberta* os estudantes das duas turmas obtiveram resultados idênticos e exploraram expressões bastante variadas.
Nesta sub-questão, em ambas as turmas, os estudantes utilizaram uma linguagem simbólica com expressões do tipo: *+1,5*; *...+2-0,5*; *...+1,5*, entre outras, tal como o esquema que se segue (turma A); em linguagem mista, desenharam a seta e especificaram *mais 1,5* ou

somar 1,5, etc e em linguagem corrente exemplos, tais como: *aumentar sempre 1,5*; *adicionar o nº que está na tabela a 1,5*; entre outras,.

2	3,5	5			

$\xrightarrow[+1,5]{}$ $\xrightarrow[+1,5]{}$ $\longrightarrow$ $\longrightarrow$ $\longrightarrow$

Pode-se concluir que apesar de terem existido resultados mais completos na turma A, *não há uma diferença significativa em termos de formulação da regra descoberta*. Á partida, esperava-se que um maior número de estudantes desta turma em que foi utilizado o computador, especificamente a folha de cálculo, viesse a formular simbolicamente a regra operatória, mas tal não aconteceu. As expectativas prendem-se, de facto, com a formalização gradual do conhecimento matemático. Com o estímulo e o desenvolvimento da comunicação matemática: oral e escrita e com um leque alargado de opções verificou-se que os estudantes tendem a usar diferentes formatos de respostas entre os quais a linguagem corrente e a linguagem simbólica ou ainda as duas.

De facto, a folha de cálculo foi explorada no 4º ano, esporadicamente, por alguns grupos na resolução de tarefas específicas e estendida a toda a turma A, no 5º e 6º anos de escolaridade. Esta ferramenta de trabalho foi direccionada e optimizada para a resolução de problemas e para a concretização de projectos de natureza interdisciplinar e não com o objectivo final e intensivo de resolver, com êxito, este tipo de questões, de âmbito estritamente disciplinar. Apenas na tarefa "gerar números" concretizada pelos estudantes da turma A, no 5º ano de escolaridade, foi possível fazer gerar, com a ajuda das fórmulas, os números pares, os números ímpares e diferentes múltiplos de vários números. Na resolução desta tarefa de carácter estritamente disciplinar os estudantes revelaram entusiasmo, facilidades em utilizar a sintaxe da fórmula e de a copiar de forma relativa, analisando os resultados e retirando conclusões, mas provavelmente o tempo foi escasso para reflectir sobre o significado da sintaxe e o conteúdo das fórmulas.
Por outro lado, o tempo disponível para a exploração da folha de cálculo não foi o desejável, mas sim o possível, tendo sido fortemente condicionada por constrangimentos de ordem institucional, pois nem sempre a sala de Informática estava disponível e de natureza curricular, pois a organização por conteúdos do programa da disciplina de Matemática restringe e limita o uso desta tecnologia e por condições estratégicas, pois uma grande maioria da resolução dos problemas e/ou das tarefas propostas não comportam a exploração didáctica daquela ferramenta tecnológica.

Questão Q2.

Enquadramento Educativo

Conteúdos:

- Cálculo da soma de números racionais em representação decimal.
- Descoberta da regra que generaliza o padrão numérico definido no contexto.

Competências:

- Interpretar dados numéricos em contexto e relacionados transversalmente com a área de Educação Física.
- Reconhecer e mobilizar conceitos leccionados noutras áreas.

- Descrever e fundamentar a regra descoberta que generaliza o padrão dado, em contexto real e de natureza interdisciplinar.
- Desenvolver o raciocínio indutivo pela generalização de um padrão numérico.

Aproximações à álgebra:
- Generalização do padrão numérico dado pela descoberta da lei que rege o fenómeno (classe 3).

Contexto:
- Interdisciplinar, relacionado directamente com a Educação Física.

<u>Resultados do Pré-Teste</u>

Tipo de Resposta		RC		RPC		RI		NR		Total
	Turma	A	B	A	B	A	B	A	B	
Questão	Classe									
		a - 3	a - 7	a - 7	a - 2					
Q2.	1		b - 1	e - 2	b - 2					
	2				c - 2	c - 2	c - 4			
	3	d - 4				d - 1	d - 1			
			e - 1			e - 1				
Total		7	9	9	6	4	5	0	0	20

<u>Legenda</u>: RC – Resposta Completa; RPC – Resposta Parcialmente Completa; RI – Resposta Incorrecta; NR – Não Resposta

Apenas 35% dos estudantes da turma A conseguiram resolver completamente a questão e, na turma B, 45%.
Oito dos nove estudantes da turma B que responderam completamente à questão evidenciaram o operador numérico que induz o fenómeno (alíneas a e b), explicitando-o em linguagem simbólica. Por outro lado, na turma A, apenas três dos sete estudantes o fizeram e os restantes quatro usaram, na explicação do procedimento, a linguagem corrente.
Nove estudantes da turma A, 45%, responderam de forma parcialmente completa (RPC), pois alguns estudantes não desenharam a marca, mas expuseram, de forma simbólica, a resposta, generalizando correctamente o padrão numérico. As restantes duas respostas parcialmente completas também evidenciaram correctamente o operador numérico, mas realizaram incorrectamente os cálculos.
Na turma B seis estudantes resolveram parcialmente a questão, tendo quatro usado a linguagem simbólica. Dois estudantes desta turma usaram, apenas no pré-teste, a calculadora e explicitaram o seu uso, tendo um deles obtido o resultado correcto e o outro não.
Assim, na indução do fenómeno, mais de metade dos estudantes, em cada uma das duas turmas, usou o operador numérico escrito em linguagem simbólica, em respostas completas ou parcialmente completas.

Resultados do Pós-Teste

Tipo de Resposta		RC		RPC		RI		NR		Total
	Turma	A	B	A	B	A	B	A	B	
Questão	Classe									
			a - 7	a - 7			a - 3			
Q2.	1	a - 9	b - 2				b - 2			
	2	d - 1	c -1		c - 1	c - 1				
	3		d - 2	d - 1						
							e - 1			
				f - 1			f - 1			
Total		10	12	9	1	1	7	0	0	20

Registe-se que 50% dos estudantes da turma A conseguiu resolver completamente a questão e 60% na turma B, obtendo-se, numa primeira análise, uma *evolução* idêntica nas duas turmas (↑↑)(-+), da passagem de resultados negativos para positivos. Na maior parte das respostas foi evidenciado, na ampliação do fenómeno, o operador numérico, tendo havido, nas duas turmas, respostas diferenciadas, tais como: +0,35; 1,75+0,35 ou 0,35x6, quer nas respostas completas quer nas parcialmente completas.
Por outro lado, há ainda nove estudantes da turma A que responderam de forma parcialmente completa à questão, tendo sete explicitado o operador numérico em linguagem simbólica, enquanto que na turma B o único estudante que respondeu parcialmente à pergunta não usou este tipo de resposta. Refira-se ainda que sete estudantes desta turma resolveram incorrectamente a questão e apenas um na turma A. Destes resultados e do enquadramento de contexto que esta questão encerra leva-nos indubitavelmente para uma segunda análise, um estudo de segunda linha, e contemplando apenas as alíneas dos critérios de avaliação em que se evidenciam a mobilização do operador numérico, conclui-se que praticamente dezasseis estudantes da turma A (9RC+7RPC) interpretaram correctamente, na globalidade a questão, com a indicação da regra operatória que induz o fenómeno, enquanto que na turma B houve apenas dez respostas nestas condições (10RC), as outras respostas correctas, incluem a explicação do procedimento, usado mas em linguagem corrente.

Apreciação genérica **Q2.**
É de registar a *evolução*, nas duas turmas (↑↑), na resolução completa desta questão, tendo havido, nos dois momentos de interacção com o teste, mais três estudantes que resolveram correctamente a questão.
Contudo, numa primeira frente de análise, isto é, focalizando os resultados para apenas as respostas completas conclui-se que a turma B obteve resultados mais positivos, nos dois tempos de avaliação. Todavia, uma análise mais alargada, observando o número de respostas completas e parcialmente completas os resultados são idênticos nas duas turmas no pré-teste, sendo mais positivos na turma A do que na B, no pós-teste, especificamente, na emergência e utilização do operador numérico.

De facto, a resposta completa à questão 2, incluiu a resolução correcta de três sub-questões: a descoberta do modelo que induz o fenómeno; a explicitação do padrão numérico; a elaboração de cálculos e registo de dois tipos de resposta: a numérica e a gráfica, com o desenho da marca no espaço adequado. A maior parte dos estudantes da

turma A não conseguiu obter a resposta completa, porque não desenhou a marca, mas na explicação da aplicação da regra indicaram correctamente o operador numérico.
Os estudantes da turma B usaram processos mais variados e tiveram alguma facilidade em resolver, na globalidade, esta questão relacionada com o quotidiano, revelando competências mais práticas e maior atenção a vários aspectos da realidade envolvente, com destaque para a actividade lúdica. Dois estudantes desta turma explicitaram que usaram a calculadora, um com êxito e outro não.
Contudo, apesar da turma B revelar resultados mais positivos em termos gerais, relativamente à explicitação do operador numérico e à utilização da linguagem simbólica a turma A conseguiu melhores resultados, no pós-teste, 80% (9RC+7RPC) do que na turma B, 50% (10RC+0RPC).

Enquadramentos convergentes[8]. Esta questão enquadrava-se no domínio da matemática em contexto que requer uma atenção global e origina, por vezes, uma falta de focalização para sub-questões consideradas por alguns estudantes como acessórias, como surgiu, na turma A, na marcação geométrica, enfatizando fundamentalmente as sub-questões de natureza numérica, operatória e pré-algébrica.
Neste sentido, emerge uma preocupação inerente a estes resultados: será que a folha de cálculo, numa situação de matemática em contexto, enfatiza em demasia os processos operatórios e/ou os (pré)-algébricos relegando para segundo plano uma visão global da situação e dificultando a descoberta de uma solução completa, capaz de mobilizar todos os dados do problema?
Numa tentativa de reunir informação convergente ligada ao enquadramento educativo desta questão destaca-se uma actividade concretizada no 5º ano de escolaridade, com a explicitação dos resultados e processos desenvolvidos pelos estudantes, de âmbito interdisciplinar, relacionada com a Educação Física, "*a correr e a saltar e a aprender matemática"*, por ter uma vertente interdisciplinar próxima desta questão em análise.

É interessante referir que uma das conclusões retiradas da resolução da actividade de âmbito interdisciplinar no 5º ano de escolaridade "*a correr e a saltar e a aprender matemática*", apresentada no capítulo IV da tese, prende-se com as crenças generalizadas dos estudantes das duas turmas que na Matemática se estudam apenas números e relações, pois demoraram tempo a descortinar algo e a confiar nas conjecturas não numéricas que delineavam.
Saliente-se ainda que na concretização desta actividade "*in a open way*" os estudantes conseguiram realizá-la com êxito, superando mesmo as expectativas, porque observaram os dados na tabela com interesse, pois eram dados reais com significado relevante para os jovens das duas turmas e trocavam impressões com os colegas sobre o desempenho em Educação Física, com a professora e a investigadora, procurando observar, analisar, relacionar entes, conjecturar, descobrir outras relações, colocando novas questões, mobilizando conhecimentos relacionais e experimentando a reversibilidade de pensamento.
O facto de, nas duas turmas, os estudantes estarem na sala de aula à vontade, com a responsabilidade da realização da tarefa, mas num certo ambiente de aprendizagem permitiu que indagassem, discutissem ideias e clarificassem conceitos. Pelo que foi

[8] Estes enquadramentos convergentes procuram analisar os resultados da questão como um todo, fazendo emergir determinado tipo de trabalho desenvolvido no percurso da investigação, especialmente, os problemas ou tarefas com enquadramentos próximos da questão em análise, numa tentativa globalizante de compreender os resultados e os processos implementados pelos estudantes das duas turmas.

realizado na actividade "*a correr, a saltar e a aprender matemática*" pode-se concluir que a folha de cálculo apresentou-se como uma ferramenta "aberta", estimulando as experiências de simulação "outside" da tabela onde estavam divulgados os dados, reforçando a liberdade de pensamento, extremamente útil a todos os estudantes, mas especialmente, aos mais despertos para a aprendizagem e que começam a estar orientados intelectualmente para um raciocínio mais abstracto. A folha de cálculo fomentou a experimentação, especificamente, na descoberta de relações numéricas entre os elementos em estudo: medida do comprimento do pé, medida do comprimento da perna, respectivamente, com a corrida e o salto de força inferior e não impediu os estudantes de levantarem questões de natureza qualitativa, emitindo relações escritas em linguagem corrente.
Esta ferramenta permitiu um trabalho mais próximo com a construção de expressões designatórias, nas quais os estudantes usavam uma sintaxe própria potenciando, assim, provavelmente a criação de modelos matemáticos que generalizam os fenómenos.

<u>Questão 3.</u>
<u>Enquadramento educativo</u>

Conteúdos:
- Apreensão do significado das noções de soma e dobro numa expressão escrita em linguagem corrente.
- Cálculo do valor de uma expressão numérica escrita em linguagem corrente.
- Cálculo do valor de uma expressão numérica escrita em linguagem simbólica.
- Descoberta da regra que generaliza o padrão numérico, relacionando os dados entre dois conjuntos.

Competências:
- Ampliar o padrão, completando a sequência numérica, em tabelas de <u>duas entradas</u>:
  - com dados numéricos e a regra em linguagem corrente;
  - com dados numéricos e a regra em linguagem matemática;
  - com apenas dados numéricos;
- Descrever o padrão, numa tabela de <u>duas entradas</u>, em linguagem:
  - matemática (lm);
  - mista (lc e lm);
  - corrente (lc);
- Desenvolver o raciocínio indutivo pela generalização de um padrão numérico.

Aproximações à álgebra:
- Generalizações de padrões numéricos, em tabelas de duas entradas, pela:
  - aplicação da regra em linguagem corrente (classe 1)
  - aplicação da regra em linguagem simbólica (classe 2)
  - descoberta da lei que rege a sequência numérica (classe 3)

Contexto:
- Académico – estritamente matemático.

<u>Questão Q3.1</u>

<u>Resultados do Pré-Teste</u>

Tipo de Resposta		RC		RPC		RI		NR		Total
	Turma	A	B	A	B	A	B	A	B	
Questão	Classe									
Q3.1	1	a -5	a -6	b - 8	a - 1 b - 3 c - 1 d - 1	a - 5	a - 2 b - 2 c - 1			
Total		5	6	8	6	5	5	2	3	20

<u>Legenda</u>: RC – Resposta Completa; RPC – Resposta Parcialmente Completa; RI – Resposta Incorrecta; NR – Não Resposta

No pré-teste 25% e 30% dos estudantes resolveu correctamente a questão, respectivamente, na turma A e na turma B.

Contudo, oito estudantes da turma A resolveram parcialmente a questão (RPC), porque completaram correctamente a tabela com a regra dada em linguagem corrente, mas incluindo apenas um dos dois valores que faltava na primeira coluna. Este tipo de resposta surgiu devido à falta de explicitação concreta deste pormenor no enunciado da pergunta ou à falta de atenção dos estudantes em seguir o exemplo dado na terceira questão, em que a tabela se encontrava totalmente preenchida. Pode-se afirmar que a maior parte dos estudantes (5RC+8RPC), 65% conseguiu atingir o objectivo principal da questão, isto é, apreender o significado numérico da expressão escrita em linguagem corrente. Nesta turma cinco estudantes resolveram incorrectamente esta questão e tudo indica que foi por falta de atenção, pois preencheram a tabela com a regra da questão seguinte, escrita em linguagem simbólica e dois estudantes não responderam à questão.

Na turma B também seis estudantes responderam parcialmente à questão visto que só incluíram um dos dois valores que faltavam na primeira coluna ou nenhum. Assim, no essencial também 60% dos estudantes (6RC+6RPC), apenas incluindo as alíneas a e b conseguiu apreender correctamente o significado da expressão escrita em linguagem corrente. Cinco estudantes responderam incorrectamente, com respostas variadas, com a regra da questão seguinte ou outra regra (4+1) ou ainda realizaram alguns cálculos correctos e três estudantes não resolveram esta questão.

<u>Resultados do Pós-Teste</u>

Tipo de Resposta		RC		RPC		RI		NR		Total
	Turma	A	B	A	B	A	B	A	B	
Questão	Classe									
Q3.1	1	a - 7	a - 7	a - 2 b - 5 c - 2	a - 5 b - 3	a - 2 b - 1	a - 3 c - 1 d - 1			
Total		7	7	9	8	3	5	1	0	20

No pós-teste o mesmo número de estudantes, num percentual de 35, resolveu correctamente a questão nas duas turmas tendo existido *ligeira evolução* ($\uparrow$)(-) em ambas as turmas.
Os resultados foram muito próximos aos do pré-teste, pois também nove estudantes e oito estudantes responderam parcialmente à questão, respectivamente, na turma A e B tendo no primeiro caso sete incluído um dos dois valores que faltavam na primeira coluna ou nenhum e o mesmo se passou com oito estudantes, na turma B.
É de registar que todos os estudantes da turma B resolveram a questão e apenas um da turma A não o fez.
A maior parte dos estudantes, 80% (7RC+9RPC) e 75% (7RC+8RPC), respectivamente, na turma A e B conseguiu apreender o significado prático da expressão escrita em linguagem corrente.

Apreciação específica **Q 3.1.**
Nesta primeira questão, orientada para o preenchimento de lacunas numéricas numa tabela de duas entradas, pela aplicação de uma regra escrita em linguagem corrente "De A para B: a soma do triplo de A com 2" os resultados, na essencialidade, isto é, na apreensão do significado numérico de uma expressão, escrita em linguagem corrente, são idênticos na turma A e na turma B do pré-teste para o pós-teste, nas quais existiu uma *ligeira evolução* ($\uparrow$)(-).

De facto, a exploração do computador, em especial da folha de cálculo, tem muito pouca ou nenhuma influência na exploração e aplicação operatória da linguagem corrente. É curioso registar que os resultados foram idênticos aos obtidos na questão 1.1, em que era utilizada a regra indicada em linguagem corrente para se preencher a tabela de uma única entrada, tendo existido também uma *ligeira evolução* na turma B e algum retrocesso na turma A.

Questão Q3.2

Resultados do Pré-Teste

Tipo de Resposta		RC		RPC		RI		NR		Total
	Turma	A	B	A	B	A	B	A	B	
Questão	Classe									
Q3.2	1	a - 8	a - 6	b - 9 d - 1	a - 1 b - 4 c - 2 d - 1		a -1 b - 1 c - 1			
Total		8	6	10	8	0	3	2	3	20

Legenda: RC – Resposta Completa; RPC – Resposta Parcialmente Completa; RI – Resposta Incorrecta; NR – Não Resposta

No pré-teste 40% e 30% dos estudantes resolveram correctamente a questão, respectivamente, na turma A e na turma B.
Contudo, dez estudantes da turma A resolveram parcialmente a questão (RPC), porque completaram correctamente a tabela com a regra dada em linguagem matemática, mas nove estudantes não incluíram os dois valores que faltavam na primeira coluna e um não

realizou correctamente os cálculos. Mais uma vez este tipo de resposta parece ter surgido devido à falta de explicitação concreta deste pormenor no enunciado da pergunta ou à falta de atenção dos estudantes em seguir o exemplo dado na terceira questão, em que a tabela encontrava-se totalmente preenchida. Pode-se afirmar que a maior parte dos estudantes da turma A, isto é, 90%, (8RC+10RPC) conseguiu atingir cabalmente o objectivo principal da questão, isto é, apreender o significado numérico da expressão escrita em linguagem matemática. Nesta turma nenhum estudante resolveu incorrectamente a questão.
Na turma B também oito estudantes responderam parcialmente à questão, tendo quatro deles realizado correctamente os cálculos pedidos. Assim, metade dos estudantes daquela turma, 70%, (6RC+8RPC), conseguiu apreender correctamente o significado da expressão escrita em linguagem matemática.

<u>Resultados do Pós-Teste</u>

Tipo de Resposta		RC		RPC		RI		NR		Total
	Turma	A	B	A	B	A	B	A	B	
Questão	Classe									
Q3.2	1	a - 12	a - 8	a - 2 b - 5 c - 1	a - 4 b - 4 d - 2		a - 1 d - 1			
Total		12	8	8	10	0	2	0	0	20

<u>Legenda</u>: RC – Resposta Completa; RPC – Resposta Parcialmente Completa; RI – Resposta Incorrecta; NR – Não Resposta

A turma A, no pós-teste, conseguiu uma *evolução significativa* (↑↑↑)(-+) nos resultados, no qual 60% dos estudantes resolveu completamente a questão. Por outro lado, oito estudantes responderam parcialmente à questão, mas sete realizaram correctamente todos os cálculos conseguindo resolver numericamente a expressão, não incluindo um ou os dois valores que faltavam na primeira coluna ou nenhum. Assim, a totalidade dos estudantes desta turma conseguiu concretizar, com êxito, o significado numérico da expressão simbólica dada. Apenas uma resposta não foi completada, porque o estudante resolveu correctamente alguns valores da tabela, mas não fez correctamente o cálculo do produto por zero.
Oito estudantes da turma B, isto é, 40%, resolveram completamente a questão e dez resolveram-na parcialmente, obtendo oito estudantes êxito nos cálculos, mas incluíram apenas um dos dois valores que faltavam na primeira coluna ou nenhum. Assim, reunindo as respostas completas e parcialmente completas, pode-se concluir que a maior parte dos estudantes desta turma conseguiu, na generalidade, apreender o significado prático da expressão escrita em linguagem simbólica. Registe-se ainda que todos os estudantes da turma B resolveram a questão e dois fizeram-no incorrectamente.

<u>Apreciação específica **Q3.2.**</u>
Nesta questão, orientada para o preenchimento de lacunas numéricas numa tabela de duas entradas, pela aplicação de uma regra escrita em linguagem simbólica: "*Ax2+1*" pode-se referir que as duas turmas mostraram *evolução* nos resultados, mas na turma A a *evolução foi significativa* (↑↑↑)(-+) e na turma B registou-se evolução mas em valores negativos (↑↑)(-).

É curioso registar que um estudante da turma A associou esta expressão à usada no computador, referindo: "é muito parecido à fórmula que usamos na folha de cálculo", denunciando a mobilização de um conhecimento já explorado noutras circunstâncias. Os resultados obtidos na turma A indicam que, neste tipo de linguagem e abordagem simbólica, a exploração da folha de cálculo influencia positivamente o cálculo correcto deste tipo de expressões. Tudo indica que, esta ferramenta tecnológica potencia capacidades para o estabelecimento de relações entre dados numéricos estritamente disciplinares, numa tabela de dupla entrada com a utilização de uma sintaxe própria que promove a generalização.

Questão Q3.3

Resultados do Pré-Teste

Tipo de Resposta		RC		RPC		RI		NR		Total
	Turma	A	B	A	B	A	B	A	B	
Questão	Classe									
Q3.3	1	a- 8 b - 1 c - 6	a - 5 b - 3 c - 3			a - 1	a - 1 b -4 c - 1			
Total		15	11	0	0	1	6	4	3	20

Legenda: RC – Resposta Completa; RPC – Resposta Parcialmente Completa; RI – Resposta Incorrecta; NR – Não Resposta

No pré-teste 75% e 55% dos estudantes resolveram correctamente a questão, respectivamente, nas turmas A e B. Nenhum estudante das duas turmas obteve resposta parcialmente completa.

Dos quinze estudantes da turma A que responderam completamente à questão, mais de metade (nove) usou linguagem simbólica para representar a relação existente entre os números das duas colunas, oito usaram a expressão "*Cx3+1*" e uma estudante escreveu "*...x3+1*", e os restantes utilizaram linguagem corrente.

Na turma B oito estudantes usaram linguagem simbólica e dos onze que responderam correctamente, cinco usaram a expressão "*Cx3+1*", três a simbologia "*...x3+1*" e os restantes a linguagem corrente.

Resultados do Pós-Teste

Tipo de Resposta		RC		RPC		RI		NR		Total
	Turma	A	B	A	B	A	B	A	B	
Questão	Classe									
Q3.3	1	a - 7 c - 3 d - 1	a - 10 c - 1	a - 3 b - 2	a - 1	a - 1 b - 2	a - 3 b - 2			
Total		11	11	5	1	3	5	1	3	20

No pós-teste a maior parte dos estudantes, isto é, 55%, conseguiu resolver completamente a questão nas duas turmas. Os estudantes indicaram a regra usando uma ou outra das expressões referidas nos resultados do pré-teste.
Contudo, cinco estudantes da turma A obtiveram uma resposta parcialmente completa, enquanto que na turma B apenas existiu uma. Três dos cinco estudantes usaram a linguagem simbólica, mas colocaram indevidamente a letra ”A” em vez da letra “C”.

Apreciação específica **Q3.3.**
Nesta questão, orientada para a descoberta de uma regra escrita em linguagem simbólica os resultados são diferentes e pelos valores obtidos parece, numa primeira análise, isto é, observando o número de respostas completas que existiu um *retrocesso significativo* na aprendizagem dos estudantes na turma A. Mas num segundo tempo de análise, mais abrangente, englobando também o estudo das respostas parcialmente completas e da tipologia das mesmas pode-se concluir que turma A conseguiu resultados mais positivos no pré-teste do que a turma B, mas no pós-teste os resultados foram idênticos nas duas turmas, pois 50% dos estudantes desta turma (7RC+3RPC) usou a linguagem simbólica para descrever a regularidade numérica existente e 55% na turma B (10RC+1RPC). Assim, os resultados indicam que parece ter havido estagnação na aprendizagem global deste tipo de questões.
De facto, neste tipo de abordagem simbólica a exploração do computador, em especial da folha de cálculo, não parece ter influência significativa na descoberta da regra que interliga os dados numéricos numa tabela de duas entradas, pois nesta ferramenta tecnológica basta apenas ler a janela de entrada de dados para visualizar a expressão que os relaciona.

Apreciação genérica **Q3.**
Esta questão comportava a manipulação de valores numéricos, numa tabela de duas entradas, em diferentes apresentações, em linguagem corrente e em linguagem simbólica, esta última, para aplicar numericamente uma expressão algébrica ou para criar uma expressão algébrica que fundamentasse a relação numérica existente entre os valores de duas colunas da tabela, integrando a primeira aproximação à álgebra de âmbito estritamente disciplinar.
Os resultados genéricos obtidos, nas duas turmas, foram registados no quadro seguinte.

Questão	Turmas		Conclusão genérica
	A	B	Na globalidade a ***turma A*** apresenta resultados mais positivos do que a ***classe B***.
Q3.1.	↑(-)	↑(-)	
Q3.2	↑↑↑(-+)	↑(-)	
Q3.3	——	——	

A primeira sub-questão Q3.1. estava ligada à interpretação de uma regra, indicada em linguagem corrente, “*A soma do triplo de A com 2*” e á sua aplicação a quantidades inteiras. Nos dois casos, no pré e pós-teste a maioria dos estudantes não respondeu de forma completa à questão.
Como já se referiu a linguagem corrente surge como veículo natural da abordagem à comunicação matemática, mas num contexto puramente disciplinar, em que a relação entre duas colunas numéricas, pressupõe implicitamente uma organização tabelar e uma

estrutura matemática, a linguagem corrente emerge como demasiado básica e afastada do conhecimento matemático a mobilizar.
Assim, a partir de uma estrutura tabelar tipicamente matemática surge a linguagem corrente próxima e relacionada com a vida real, existindo, assim, uma "décalage" instrucional. A interacção destes dois conhecimentos pressupõe a existência de uma fase intermédia de codificação e de operacionalização em que a linguagem simbólica emerge, permitindo a realização dos cálculos. Nesta perspectiva a resolução desta questão encerra diversas fases de abordagem e competências estritamente matemáticas que, de certo modo, dificultaram o processo de resolução.

Por outro lado, o processo evolutivo do estudante para a abstracção, num contexto puramente matemático, parece cada vez mais afastado, aliás como convém, da linguagem corrente e como tal, os estudantes mais velhos tendem a olvidar e dar menos importância a esta forma de expressão. Todavia, é necessário continuar a dar toda a atenção à implementação e desenvolvimento da aprendizagem da matemática em contexto, pois na resolução de determinada questão ou problema precisa de experimentar e entrosar as competências relacionadas com a vida "realista", isto é, usar a linguagem do quotidiano e promover a linguagem simbólica, na construção dos conhecimentos matemáticos.

Na questão 3.2 em que a regra estava confinada à aplicação do significado de "*Ax2+1*" os estudantes da turma A obtiveram uma evolução significativa, pois na folha de cálculo as fórmulas usadas têm uma expressão muito idêntica à dada. Contudo, durante o desenvolvimento de algumas experiências operatórias neste campo levantou-se a hipótese que a "ordem" dada pelo estudante ao computador para realizar cálculos não fosse compreendida, isto é, colocasse o estudante numa atitude passiva do conhecimento, apenas apreendendo a sintaxe da fórmula e observando a determinação instantânea dos resultados, mas tudo indica que tal não aconteceu, pois os estudantes, em situações novas, tal como aconteceu nesta questão, souberam aplicar o significado operatório da expressão.

Saliente-se ainda que, na turma B, quer no pré-teste quer no pós-teste, houve resultados negativos, isto é, a maioria dos estudantes não conseguiu alcançar uma resposta completa.

Na questão 3.3. relacionada com a descoberta da regra que relaciona os valores numa tabela de duas entradas registe-se que a maioria dos estudantes conseguiu alcançar êxito, nos dois tempos de resolução do teste. Contudo, numa primeira análise tudo indica que a turma A teve um retrocesso significativo na aprendizagem, mas conjugando estes resultados com as respostas parcialmente completas pode-se concluir que a turma A conseguiu manter os resultados positivos. Todavia realce-se que a relação existente entre os dados numa tabela de duas entradas, na folha de cálculo, é imediatamente visível na janela de entrada de dados, na zona das fórmulas, onde há apenas uma constatação da expressão, não contribuindo aquela ferramenta, como se verificou nos resultados obtidos, para estimular o estudante a descobrir a regra emergente numa tabela dada.
Saliente-se ainda que entre os dois tempos de realização do teste não foram concretizadas actividades sobre expressões numéricas, nem na criação do "desenho" destas na passagem da linguagem corrente para a simbólica, nem na explicitação e aplicação do significado de expressões numéricas onde eventualmente poderiam ser incluídas letras. Este tipo de trabalho foi desenvolvido no 5º ano de escolaridade, pois faziam parte dos conteúdos programáticos. Também neste ano, e numa visão estritamente matemática, a turma A, na

iniciação à folha de cálculo, numa perspectiva *mais cálculo do que folha* realizou-se a actividade "gerar números" a partir da qual foi possível fazer gerar numa coluna os números naturais, noutra os números pares e ainda noutras os números ímpares e os múltiplos de vários números.

Emergências para a folha de cálculo. Na investigação, procurou-se gradualmente realizar o entrosamento selectivo e unificador do conhecimento matemático, reconhecendo a necessidade de problematizar os limites, caso a caso, da exploração e desenvolvimento da linguagem corrente e linguagem simbólica num enquadramento didáctico e pedagógico da matemática em contexto. Os resultados encontrados indiciam que neste âmbito é necessário a exploração gradual e ajustada à situação destes dois tipos de linguagem, dando ênfase, num dos limites, ao campo simbólico numa perspectiva de simulação e modelação do fenómeno e da universalização do pensamento matemático, no qual a folha de cálculo se revela como forte aliado instrumental ("instrumetal approach"[9], no sentido restrito), designadamente na interpretação de expressões do tipo: "*Ax2+1*", mas com nenhuma influencia na aplicação da linguagem corrente, por exemplo, "*a soma do triplo de A com dois*" e com algum entrosamento na capacidade dos estudantes idealizarem e representarem simbolicamente uma regra que relacione, no campo estritamente matemático, os dados numéricos numa tabela de uma ou duas entradas.

No domínio da matemática em contexto, designadamente, num campo interdisciplinar implicitamente relacionado com a Educação Física, e tal como indicam os resultados obtidos na questão 2. em que é simulada uma situação real próxima de uma tabela de uma única entrada, a turma A revelou resultados mais positivos no que concerne à explicitação do operador numérico e à utilização de uma linguagem simbólica que generalizasse o fenómeno em estudo.

Referências curriculares. Saliente-se que no percurso da investigação, especialmente no 2º ciclo do ensino básico, não foram resolvidos exercícios idênticos aos explorados com tabelas de uma e duas entradas, pois esta primeira aproximação à álgebra: *regularidades e padrões* não está prevista, como tópico do programa de Matemática, como acontece noutros países, nomeadamente, na Holanda ocupando este país o sétimo lugar no desempenho em Matemática no sétimo ano de escolaridade, no programa de avaliação TIMSS, enquanto que Portugal está na trigésima sexta posição, num grupo de trinta e nove países, situando-se também aquele país no nono lugar, no desempenho em Matemática no oitavo ano de escolaridade e Portugal no trigésimo sétimo, num grupo de quarenta e um países (ME, IIE, Novembro de 1996).

Questão 4.

Enquadramento educativo

Conteúdos:

- Cálculo de metades de números racionais, em representação decimal, determinadas recursivamente, cujo primeiro elemento é a unidade, utilizando ou não a calculadora.
- Cálculo da soma de um número inteiro com quantidades "decimais".

[9] Termo usado, na generalidade, por Paul Drijvers (2004), do Institut Freudenthal, quando se utiliza o computador na classe.

- Organização em tabela dos dados obtidos.
- Descoberta da existência de infinitésimos na generalização do padrão numérico "metade de".

Competências:
- Relacionar e interpretar dados numéricos próximos do contexto real e implicitamente ligados à disciplina de Ciências da Natureza.
- Relacionar conceitos matemáticos e aplicá-los a situações novas.
- Analisar os dados obtidos e usar modelos matemáticos para representar relações quantitativas.
- Organizar a informação pesquisada numa tabela de duas entradas.

Aproximações à álgebra:
- Resolução de problemas numa perspectiva de modelação implícita dos fenómenos (classe 3), pela:
  - aplicação do modelo matemático dado que rege o fenómeno, neste caso é o operador "metade de" ou $1/2xu_{n-1}$, sendo u_{n-1} o termo anterior da sequência numérica gerada;
  - descoberta de infinitésimos pela aplicação e generalização do modelo matemático dado.

Contexto:
- Realista e relacionado implicitamente com a disciplina de Ciências da Natureza.

<u>Resultados do Pré-Teste</u>

Tipo de Resposta		RC		RPC		RI		NR		Total
	Turma	A	B	A	B	A	B	A	B	
Questão	Classe									
Q4	3	b - 5 c - 1 e - 6	e - 8	c - 1	c - 1	a - 3 b - 2 d - 1	a - 1 c - 1 e - 6			
Total		12	8	1	1	6	8	1	3	20

<u>Legenda</u>: RC – Resposta Completa; RPC – Resposta Parcialmente Completa; RI – Resposta Incorrecta; NR – Não Resposta

Na turma A 60% dos estudantes responderam completamente à questão e metade destes doze estudantes organizou os dados em tabela. Nenhum estudante explicitou que tivesse usado a calculadora e apenas um estudante respondeu parcialmente à questão.
Na turma B 40% dos estudantes resolveram completamente a questão, mas nenhum deles organizou os dados em tabela, apenas fizeram uma listagem de valores ou foram "amontoando" as somas obtidas. Apenas houve uma resposta parcialmente completa, e tal como na turma A, o estudante concluiu de forma intuitiva, com base em alguns dados obtidos.

Resultados do Pós-Teste

Tipo de Resposta		RC		RPC		RI		NR		Total
	Turma	A	B	A	B	A	B	A	B	
Questão	Classe									
Q4	3	a - 2 b - 11 e - 3	b - 5 e - 4		a - 1	a - 1 e - 2	a - 3 c - 1 e - 5			
Total		16	9	0	1	3	9	1	1	20

Legenda: RC – Resposta Completa; RPC – Resposta Parcialmente Completa; RI – Resposta Incorrecta; NR – Não Resposta

Na turma A, 80% dos estudantes conseguiram resolver completamente a questão, tendo dois estudantes identificado os infinitésimos e extrapolado a resposta e treze destes dezasseis estudantes (65%) organizaram toda a informação em tabelas. Nenhum estudante respondeu de forma parcial à questão.
Na turma B, 45% dos estudantes respondeu correctamente à questão, tendo cinco deles organizado os dados em tabelas e quatro não. Um estudante respondeu parcialmente à pergunta.

Apreciação genérica **Q4.**
Esta questão integrava implicitamente quatro competências: a obtenção de cálculos (determinação de metades e da soma), a organização dos resultados em tabelas, a análise e interpretação dos dados obtidos, com a apresentação da solução correcta e ainda, numa aquisição mais profunda e induzida do problema, a identificação de infinitésimos.
Na obtenção dos cálculos a maior parte dos estudantes, das duas turmas, utilizou a calculadora.
A turma A conseguiu atingir uma *evolução significativa* (↑↑↑) e a turma B apenas uma *ligeira evolução* (↑)(-), em resultados negativos.
De facto, a turma A conseguiu obter resultados positivos na resolução desta questão, pois nos dois tempos a maior parte dos estudantes resolveu completamente a questão, não acontecendo o mesmo na turma B, apenas só metade da turma o conseguiu, no pós-teste, reunindo as respostas completas e uma parcialmente completa de primeira alínea.

Emergências para a folha de cálculo. Estes resultados levam-nos a concluir que a exploração da folha de cálculo proporciona aos estudantes capacidades de organização de dados e orienta-os naturalmente para a sistematização da informação em tabelas e possivelmente para a construção de uma certa estrutura de pensamento.

Refira-se ainda que a organização tabelar exige competências reflexivas a montante, designadamente, o conhecimento aprofundado da própria informação e da relação existente entre os elementos do "tecido" a criar. A organização da informação pressupõe a emergência de uma pequena estrutura de conhecimento, com apreensão linear dos conteúdos e dos "elos" inter-relacionais. Nesta perspectiva a folha de cálculo é uma ferramenta potenciadora da prática da organização tabelar e de um maior entendimento da

matemática como ciência relacional interligada a situações "realistas", como a que foi apresentada, numa perspectiva de aprendizagem de matemática em contexto.
Por outro lado, na turma A no pós-teste ainda houve dois estudantes que identificaram implicitamente os "infinitésimos", pois induziram numericamente o modelo matemático e concluíram da forma mais completa possível a questão. A folha de cálculo apresenta-se também como uma ferramenta capaz de verificar, na prática, conjecturas, orientando os estudantes para a capacidade de induzir e "ir mais longe" para além da interpretação casuística de um problema.

Referências Convergentes. Provavelmente as diferentes tarefas propostas e/ou problemas resolvidos com a ajuda da folha de cálculo contribuíram para a obtenção destes resultados, a partir do 4º ano de escolaridade, na actividade de âmbito interdisciplinar "*uma razão importante*" ou ainda no campo meramente disciplinar, no 5º ano de escolaridade, aquando da exploração de fórmulas na folha de cálculo ou possivelmente, até no 6º ano de escolaridade, no âmbito da matemática em contexto em que foi resolvido o problema de esquematização: "*tantas caixas!...*" em que um dos grupos, descobriu a resposta usando implicitamente com a noção de "infinitésimo": *"porque fizemos muitas experiências e os números eram tão pequenos, tão pequenos, quase zero, que sempre que somamos obtíamos sempre 2 e nunca chegaria ao peso de 2,5Kg".* A realização desta tarefa possibilitou o desenvolvimento de determinadas competências orientadas para a organização tabelar, a interpretação da informação explícita e a capacidade de aplicar um modelo matemático dado, induzindo o fenómeno. Cada um por si e/ou em conjunto poderão ter dado um contributo importante na resolução completa da quarta questão do teste. Contudo, devido ao enquadramento educativo desta questão e a proximidade da resolução da mesma no 4º ano de escolaridade tudo indica que este problema de esquematização influenciasse, da forma mais significativa a resolução correcta desta questão e por tal motivo expõem-se alguns dados sobre o mesmo.

Problema: Tantas caixas!...

Condições de Resolução	
6ºA	***6ºB***
19/11/02 – terça-feira, em Matemática 22/11/02 (sexta-feira) Oferta da Escola	25/11/02 - segunda-feira, em Matemática
Trabalho de grupo: em doze grupos de dois elementos e um com três em que participaram todos os estudantes	Trabalho de grupo: onze grupos com dois elementos e um de um elemento, estando três estudantes doentes
Tempo: 25min em Matemática 15min em Oferta da Escola	Tempo: 30min em Matemática
Material: folha de trabalho; lápis e papel e folha de cálculo	Material: folha de trabalho; lápis e papel e eventualmente a calculadora
Área de Intervenção: Matemática em contexto	

Propósitos: a) desenvolver competências essenciais na disciplina de Matemática, designadamente, na capacidade de aplicar o operador numérico na lei que rege o fenómeno; b) promover aprendizagens dos números racionais de forma contextualizada.

Desenvolvimento e Resultados

Na primeira questão pretendia-se que o estudante: a) *relacionasse cada caixa com o respectivo "peso" e organizasse esses dados em tabela,* isto é*, interligasse a informação tipo texto com a respectiva informação numérica*; b) *descrevesse explicitamente através do uso de fórmulas a relação numérica existente descobrindo o operador numérico que relaciona um número com o imediatamente seguinte ou com o anterior.*

Relativamente aos objectivos delineados todos os grupos da ***turma A*** representaram correctamente na folha de cálculo os dados na tabela e basicamente sob a mesma forma, usando uma coluna e a fórmula de recorrência "*é dividir o anterior por dois*", como referiram vários estudantes.

Após algumas dificuldades sentidas por vários grupos na utilização das fórmulas, mais uma vez, foram relembradas informações relevantes relativas à sintaxe das fórmulas e à necessidade de diferençar e localizar, de forma distinta, a informação de tipo texto dos dados numéricos para estes poderem ser mobilizados. Refira-se como nota importante que os estudantes não tendem a memorizar a sintaxe da fórmula, pois indagaram quase sempre na resolução de praticamente todas as actividades pelo formato da fórmula, como referia um estudante: "*oh! professora, já não me lembro como se ensina o computador a fazer contas!*" e a partir desta frase ou semelhante recordava-se a sintaxe para todos os grupos, pois todos eles revelavam esse esquecimento técnico, mas denotavam preocupações especialmente na compreensão da tarefa dada e como organizar a informação essencial na folha de cálculo.

A maior parte dos grupos usou o operador *":2"*, mas houve um grupo que utilizou o operador "*x0,5".*

Os estudantes da ***turma B*** reconheceram a necessidade de organizar a informação de determinada forma, basicamente explorando as duas dimensões, mas continuaram a sentir algumas dificuldades na representação tabelar, na explicitação das duas "variáveis" em estudo, relacionando a informação em texto com os correspondentes dados numéricos.

Na questão 2 pretendia-se uma resposta lógica e solicitava-se aos estudantes a análise da veracidade da seguinte afirmação: "*O peso das sete caixas é igual ou superior a 2,5Kg*" e após algumas hesitações prolongadas, a maior parte dos estudantes respondeu correctamente. Num grupo uma estudante indagou sobre o conteúdo e a forma da questão, referindo: "*ou é uma coisa ou outra, ou é igual ou superior, não pode ser as duas coisas ao mesmo tempo*". Após o diálogo estabelecido o raciocínio do estudante manteve-se e o grupo respondeu incorrectamente à questão. É de registar que esta estudante tem bom aproveitamento em Matemática e gosta de compreender bem os assuntos na resolução de problemas.

Na ***turma A*** todos os grupos responderam correctamente à questão número três, enunciada desta maneira: "se a Mafalda continuasse a utilizar mais caixas, nestas condições, conseguiria alguma vez que todas juntas "pesassem" 2,5 Kg?". A maior parte dos grupos fez experiências, simulando a situação, concluindo posteriormente e argumentando matematicamente ou focalizadas no objecto caixa: "*não é possível dividir mais"; "dá números que não conhecemos e números com letras"; "dá números com E e cada vez que se soma dá um valor inferior a 2,5Kg";"fizemos tantas experiências e nenhuma deu o resultado pretendido"; "já vamos em 17 caixas e não se obtêm os 2,5kg"; "porque se continuarmos a dividir por 2 e adicionarmos tudo obtemos o número 1,99987793, que é inferior ao peso das caixas de 2,5kg"; "porque fizemos muitas experiências e os números eram tão pequenos, tão pequenos, quase zero que sempre que* *somamos obtíamos sempre 2"; "porque os números vão sendo cada vez mais pequenos"; "porque só se as caixas pesassem mais"; "porque as caixas são muito pouco pesadas"; "porque cada vez a caixa era mais pequena e a partir de um certo momento já não dava para dividir mais*".

É de realçar que apenas um grupo respondeu correctamente evocando explicitamente a apreensão da noção de quantidades infinitésimas.

Refira-se ainda que o tempo de realização da folha de trabalho na ***turma A*** foi inferior ao estipulado, mas alguns grupos quiseram realizar muitas experiências (um deles simulou até à quantidade 3,8E-152, calculando o "peso" de todas as caixas e verificou que a partir de determinado valor o "peso" total era de 2kg e nunca o iria ultrapassar, porque referiam que "*as caixas eram tão tão pequeninas que praticamente não se podiam fazer e tinham peso zero*").

Deste modo, a folha de cálculo permitiu a exploração da lei que regia o fenómeno até à exaustação, potenciando a abordagem intuitiva dos infinitésimos e a simulação da situação, comprovando as conjecturas efectuadas. Na folha de cálculo apareceu a notação já visualizada por alguns estudantes[10] – a representação dos números em notação científica, que por ser um assunto de entendimento não linear dificultou a descrição e registo de algumas conclusões.

Um grupo da turma B não respondeu à terceira questão e metade dos outros grupos respondeu correctamente, mas usando uma argumentação pouco clara. Os grupos apresentaram argumentações pouco convincentes e apenas um grupo preocupou-se em perceber a questão e em responder da forma mais completa e rigorosa: "a *soma do peso de muitas caixas não chega a 2,5kg, pois calculando metade do peso anterior de cada caixa obtivemos valores muito baixos que adicionados ao valor total não se obtém 2,5kg (sem calculadora)"*. Nenhum estudante desta turma apreendeu e explicitou a noção de infinitésimo e da intervenção deste valor no cálculo da soma de uma determinada quantidade.

Questão 5.

Enquadramento educativo

Conteúdos:

- Leitura e interpretação de informação Específica organizada numa tabela de dupla entrada com dados numéricos e em texto.
- Estudo e indicação do valor lógico de uma frase construída a partir de dados organizados numa tabela.
- Leitura e interpretação de informação numérica e em texto existente numa tabela de dupla entrada para a descoberta e criação de modelos matemáticos relacionais.

Competências:

- Relacionar e interpretar dados numéricos próximos do contexto real e explicitamente ligados à disciplina de Ciências da Natureza.
- Relacionar conceitos matemáticos e aplicá-los a situações novas.
- Seleccionar e interpretar informação organizada em tabela de dupla entrada.
- Criar modelos matemáticos que representem relações entre elementos de um determinado contexto, organizados em tabelas.

[10] No 5º ano de escolaridade, na resolução das experiências: "gerar números"

Aproximações à álgebra:

- Resolução de problemas numa perspectiva de modelação explicita dos fenómenos, pela:
  - criação do modelo matemático simples (aditivo e/ou multiplicativo) que rege o fenómeno (classe 3)

Contexto:

- Interdisciplinar e ligado explicitamente à disciplina de Ciências da Natureza.

<u>Questão Q5.1.</u>

<u>Resultados do Pré-Teste</u>

Tipo de Resposta		RC		RPC		RI		NR		Total
	Turma	A	B	A	B	A	B	A	B	
Questão	Classe									
Q5.1	2	a - 17 b - 1	a - 13			a - 2	a - 5			
Total		18	13	Não tem[11]		2	5	0	2	20

<u>Legenda</u>: RC – Resposta Completa; RPC – Resposta Parcialmente Completa; RI – Resposta Incorrecta; NR – Não Resposta

Na turma A 90% dos estudantes atribuiu correctamente o valor lógico à frase dada.
Na turma B 65% dos estudantes assinalou o valor lógico correcto da frase dada.

<u>Resultados do Pós-Teste</u>

Tipo de Resposta		RC		RPC		RI		NR		Total
	Turma	A	B	A	B	A	B	A	B	
Questão	Classe									
Q5.1	2	a - 15	a - 13			a - 3 b - 1	a - 1			
Total		15	13	Não tem		4	1	1	6	20

Na turma A 75% dos estudantes conseguiu resolver completamente a questão, atribuindo o valor lógico correcto à frase dada.
Na turma B, tal como tinha acontecido nos resultados do pré-teste, 65% dos estudantes respondeu correctamente à questão.

[11] Nesta questão não foi considerada a resposta parcialmente completa.

Apreciação genérica **Q5.1.**
Tratava-se, nesta questão, de realizar uma leitura tabelar, não linear, com muita informação, de contexto interdisciplinar e averiguar o valor lógico de uma determinada proposição. A maior parte dos estudantes das duas turmas respondeu correctamente à questão, mas na turma A os resultados foram mais positivos nos dois tempos de execução. Os estudantes desta turma revelaram, mais uma vez, melhor *desempenho* e capacidades acrescidas para ler e interpretar dados organizados em tabelas de duas entradas, apesar de se ter verificado, dentro de resultados positivos um *retrocesso na aprendizagem* (↓↓) na turma A e *estagnação* (—) na turma B.

Questão 5.2.

Resultados do Pré-Teste

Tipo de Resposta		RC		RPC		RI		NR		Total
	Turma	A	B	A	B	A	B	A	B	
Questão	Classe									
Q5.2	3	a - 1 b - 1 c - 5	b - 1 c - 1	b - 4 c - 1 d -4	a - 1 b - 2 d - 1	b - 1 c - 1	d - 6 e - 4			
Total		7	2	9	4	2	10	2	4	20

Legenda: RC – Resposta Completa; RPC – Resposta Parcialmente Completa; RI – Resposta Incorrecta; NR – Não Resposta

Na turma A apenas 35% dos estudantes respondeu completamente à questão.
Entretanto nove estudantes (45%), responderam parcialmente à questão.
Dos estudantes que responderam completamente, apenas um deles usou, para as duas relações em causa, modelos matemáticos quantitativos multiplicativos, tendo um dos estudantes exposto um modelo matemático multiplicativo e aditivo; quatro estudantes utilizaram um modelo quantitativo e um outro estudante apontou uma explicação de natureza qualitativa. Nas respostas parcialmente correctas quatro estudantes expressaram dois modelos de natureza qualitativa, um deles exprimiu apenas um desses modelos e quatro apresentaram apreciações qualitativas em relação aos produtos, eventualmente, com referências à área de Ciências da Natureza, como por exemplo, "o fígado de vaca tem mais calorias e também tem mais fósforo" ou "o fígado de vaca é mais rico do que o bacalhau".

Na turma B apenas 10% dos estudantes respondeu completamente à questão.
Nas duas respostas completas, apenas um estudante respondeu evocando os dois modelos multiplicativos no estabelecimento das duas relações e um outro indicou um modelo multiplicativo e um aditivo para a outra situação. Nas quatro respostas parcialmente completas um estudante estabeleceu apenas uma relação quantitativa entre os elementos, dois indicaram modelos de natureza qualitativa e um outro realizou uma apreciação qualitativa entre os produtos, realçando aspectos próximos de aprendizagens realizadas na disciplina de Ciências da Natureza.

Resultados do Pós-Teste

Tipo de Resposta		RC		RPC		RI		NR		Total
	Turma	A	B	A	B	A	B	A	B	
Questão	Classe									
Q5.2	3	a - 2 b - 2 c - 3	b - 1 c - 3	a - 1 b - 6 d - 1	a - 1 d - 1	b - 2 c - 1 e - 1	c - 1 d - 2 e - 3			
Total		7	4	8	2	4	6	1	8	20

Legenda: RC – Resposta Completa; RPC – Resposta Parcialmente Completa; RI – Resposta Incorrecta; NR – Não Resposta

Na turma A continua a mesma percentagem de estudantes, 35%, a responder completamente à questão e 40% dos estudantes respondeu parcialmente à questão.

Nesta classe dos sete estudantes que responderam completamente, dois estudantes criaram modelos matemáticos quantitativos multiplicativos para modelar o fenómeno em causa, dois estudantes expuseram modelos matemáticos multiplicativo e aditivo e três estudantes utilizaram um modelo de natureza quantitativa e um outro estudante indicou uma explicação qualitativa. Nas oito respostas parcialmente correctas seis estudantes expressaram os dois modelos de natureza qualitativa, um dos estudantes exprimiu um modelo quantitativo e um outro fez apreciações qualitativas em relação aos produtos, com referências à área de Ciências da Natureza.

Na turma B apenas 20% respondeu completamente à questão, tendo exposto três estudantes modelos quantitativos e qualitativos e um outro evocou modelos multiplicativo e aditivo.

Nas duas respostas parcialmente completas um estudante estabeleceu apenas uma relação quantitativa entre os elementos e outro realizou uma apreciação qualitativa entre os produtos, realçando aspectos relacionados com aprendizagens da disciplina das Ciências da Natureza.

Apreciação genérica **Q5.2.**

Os resultados obtidos nas duas turmas são negativos, pois a maior parte dos estudantes não conseguiu responder completamente à questão.

Contudo, realizando um estudo mais global, incluindo também as respostas parcialmente completas, em que os estudantes estabeleceram uma das relações pedidas, com definição qualitativa, isto é, usando a linguagem corrente, a maior parte dos estudantes da turma A, 80% no pré-teste e 75% no pós teste conseguiu obter resultados positivos, mas na turma B apenas 30% o conseguiu alcançar.

Refira-se que nestas duas últimas questões do teste (4. e 5) tratava-se de analisar processos de modelação de fenómenos a um nível elementar. No primeiro caso procurava-se que o estudante interpretasse o modelo previamente dado e o aplicasse num determinado contexto para posteriormente o analisar e retirar conclusões e na segunda situação, na resolução desta questão pretendia-se que o estudante descobrisse modelos matemáticos que modelassem dois fenómenos. Já por si esta última situação é mais complexa, acrescida ainda do facto de o estudante ter de seleccionar os dados referidos numa tabela de dupla entrada com informação complexa, num assunto familiar, no contexto disciplinar das

Ciências da Natureza, mas praticamente desconhecido, naquela forma, no contexto da matemática, enunciado desta maneira: "Observa na tabela a quantidade de nutrientes em *100g de bacalhau* e em *100g de vaca*. O que podes concluir sobre a relação entre o números de *calorias* e a quantidade de *fósforo*?"

Apreciação genérica **Q5.**

Nesta questão 5, mais complexa do que a anterior, solicitava-se ao estudante, num ambiente contextualizado e de representação tabelar, com informação diversa sobre alguns alimentos que lesse e interpretasse tabelarmente relações, indicando o valor lógico e numa segunda questão criasse modelos matemáticos capazes de interpretar os fenómenos observados e estabelecesse uma relação numérica existente entre determinados dados seleccionados na tabela.

Ora a modelação de um fenómeno integra a *observação/selecção* rigorosa dos dados, de acordo com critérios definidos, a *interpretação da informação contextualizada* (neste caso ligada às Ciências da Natureza) e por fim ao *estabelecimento de uma relação numérica* que possibilite a indução implícita do fenómeno.

Apesar de ser uma situação contextualizada, que estimula o estudante para a aprendizagem, a tabela nutricional apresentada tem demasiada informação e, por tal motivo, exige uma atenção redobrada do estudante para a analisar e seleccionar os dados estritamente necessários. Naturalmente que este tipo de actividade desenvolveu no estudante diversas competências matemáticas, tais como: a leitura e interpretação de informação escrita em quadro cartesiano, a selecção criteriosa dos dados, mas por outro lado dispersou-lhe a atenção, provocando dificuldades acrescidas para atingir, com êxito, a resolução desta questão como comprovaram os resultados obtidos.

Os registos obtidos nas duas turmas denunciaram, mais uma vez, que a criação de um modelo matemático que modelize o fenómeno em estudo é uma situação mais complexa do que aquela que resulta da aplicação de um modelo matemático previamente existente que permita ao estudante determinar valores particulares, generalizar o fenómeno, interpretar os resultados e tirar conclusões.

Reflexões sobre a concepção da questão. Assim, quando se pede ao estudante, neste nível etário, para criar um modelo matemático que explique um determinado fenómeno "realista" ou de âmbito interdisciplinar deve ser cuidadosamente escolhido, com a informação contextualizada e só a estritamente necessária. Neste caso concreto, a informação científica fornecida ao estudante da tabela Nutricional foi densa e como não tinha sido apresentada com este aspecto nas aulas de Ciências da Natureza dificultou ainda mais o processo de interpretação. Provavelmente deveria ser utilizada a mesma tabela nutricional usada nas aulas de Ciências da Natureza, já familiar ao estudante, para a partir desse conhecimento, invocar outros saberes e ampliar processos de análise e de mobilização de novos conhecimentos.

Pode-se afirmar que a densidade de informação dificulta a análise do contexto, neste caso concreto, com uma dificuldade adicional, a apresentação em tabela, mas cujo conteúdo (e não a forma) era familiar ao estudante, de âmbito interdisciplinar e relacionado com a disciplina das Ciências da Natureza.

Uma das actividades desenvolvidas no percurso da investigação e que tem um enquadramento educativo próximo deste problema é uma de âmbito interdisciplinar designada por: "*a correr e a saltar e a aprender matemática*", realizada no 5º ano de escolaridade. Esta actividade matemática teve início na disciplina de Educação Física, com a recolha activa da informação necessária sobre a corrida e o salto de força inferior e com tratamento posterior dos dados na aula de Matemática. A tabela continha imensa informação, mas era familiar e significativa para o estudante, pois tinha sido objecto e agente activo dessa recolha de dados, em ambiente disciplinar, concretamente na disciplina de Educação Física.
Apesar de não ter, provavelmente, relação directa com os resultados obtidos, certamente que podem dar pistas de compreensão dos mesmos.

Actividade de Investigação:A correr, a saltar e a aprender matemática!...

5º A (18/06/02 – terça-feira)	**5º B** em 17/06/02 (segunda-feira)
Trabalho em grupo, aos pares, com a participação de todos os estudantes da turma	Constituição de treze grupos de dois elementos, com a participação de todos os estudantes da turma
Tempo: 75 min	Tempo: (50 +15)min, resolução e medição
Espaço: sala de aula de Educação Física, sala de Matemática e sala de Informática	Espaços: sala de aula de Educação Física e sala de aula de Matemática
Materiais: folha de trabalho, lápis e papel e folha de cálculo;	Materiais: folha de trabalho; fita métrica, lápis e papel
<u>Áreas de Intervenção</u>: Educação Física e Matemática	

<u>Propósitos</u> A realização desta tarefa visava: a) promover aprendizagens interdisciplinares, em que as actividades realizadas em Educação Física, corrida e salto de força inferior, fossem motores da construção de conhecimentos matemáticos; b) analisar e reflectir sobre os dados reais obtidos procurando descobrir e escrever em linguagem corrente ou simbólica as relações funcionais encontradas.

Nesta proposta de trabalho pretendia-se que os estudantes pudessem relacionar dados numa tabela, na folha de cálculo na turma A e em suporte de papel na turma B e, se possível, tirar conclusões sobre a medida do comprimento do pé, ou a medida do comprimento da perna com a corrida e o salto de força inferior. Apesar de esta actividade revelar contornos do problema do teste, quer na apresentação tabelar dos dados, quer no estudo de duas "variáveis": corrida e salto de força inferior, nesta actividade não existe praticamente a possibilidade de estabelecer correspondências numéricas que relacionem qualquer um dos dados em estudo. Contudo, esta actividade permitiria uma leitura atenta dos dados, o levantamento de algumas perguntas e a possibilidade de treinar estas competências relacionais num ambiente de âmbito interdisciplinar e profundamente significativo para o estudante.

Relativamente à ***corrida***, os estudantes da ***turma A*** apresentaram respostas correctas, mas com fundamentações bastante variadas.

Por um lado houve grupos que <u>*generalizaram relações*</u> usando a linguagem corrente, sem apresentar qualquer justificação, como por exemplo: "*Chegamos à conclusão que a medida do pé não tem a ver com a corrida*" ou *"O comprimento do pé não tem nada a ver com o número de voltas*"; "*Não há relação entre o comprimento do pé e da perna com o* *número de voltas dadas*" (3 respostas); *ou "O comprimento da perna não está relacionada com a corrida. O mesmo acontece com o comprimento do pé; "Não há. (...) O comprimento do pé não está relacionado com o número de voltas"*.

Um grupo realizou experimentações na folha de cálculo e sem ajuda das professoras, nem da segunda documentação de apoio dada, que só surgiu posteriormente, resolveu ***relacionar as medidas do comprimento da perna e do salto de força inferior***, determinando o quociente da divisão de uma pela outra. Após a análise dos dados concluiu: "*Da experiência que fizemos concluímos que a maior parte dos meninos, no salto de força inferior, tem o comprimento da perna mais qualquer coisa*".

Relativamente aos resultados relacionados com o ***salto de força inferior***, na ***turma A*** existiram respostas correctas, mas com fundamentações também bastante diferenciadas. Assim, seis grupos generalizaram relações, mas não apresentaram qualquer justificação: "*Não há relação entre o comprimento da perna com o salto de força inferior"; "Não há relação entre a medida do comprimento dos pés e das pernas com a medida do salto de força inferior"(3 repostas) ou "O comprimento da perna não está relacionada com a corrida. O mesmo acontece com o comprimento do pé"; "Não há. (...) A medida do salto inferior é sempre maior do que o comprimento da perna"*.

Três grupos generalizaram correctamente, justificando com casos concretos: "*Não, porque no meu caso eu não sou grande e a Cristina é muito grande e eu saltei mais do que ela*"; "*Não há relação entre o comprimento do pé com o nº de voltas, porque há estudantes com o pé pequeno que correm mais do que outros que têm o pé maior"; "O tamanho dos pés e das ancas não afecta no comprimento que se salta, pois o Ricardo tem os pés e as ancas mais pequenas que as da Cristina e saltou muito mais que ela"*.

Com a folha de cálculo, os estudantes da turma A orientavam as pesquisas no relacionamento de quantidades e tendiam, fundamentalmente, em descobrir relações numéricas entre os dados.

Na ***turma B*** existiram respostas correctas, relativamente à ***corrida***, mas com fundamentações bastante variadas.

Dois grupos generalizaram correctamente relações expressando-se em linguagem corrente, sem apresentar qualquer justificação: "*O comprimento da perna não tem nada a ver com o número de voltas*" *e "O comprimento do pé não tem nada a ver com o número de voltas*".

Os estudantes desta turma observaram também os dados da tabela com interesse, trocaram impressões com os colegas, conjecturaram, descobriram outras variáveis intervenientes no desempenho da corrida, designadamente, o esforço, o "peso", a persistência, não acontecendo o mesmo na turma A. Mais uma vez o ambiente criado na turma influenciou o desenvolvimento do estudante e da actividade, dado que a possibilidade de estarem na sala de aula à vontade, permitiu-lhes indagarem, discutirem ideias, clarificarem conceitos e concretizarem a actividade com assinalável êxito.

Pela ideia generalizada que na Matemática se estudam apenas números e relações, os estudantes das duas turmas demoraram a descortinar algo e a confiar nas conjecturas não numéricas que delineavam.

Assim, a resolução deste tipo de tarefa requer tempo: *tempo para pensar* e *tempo para experimentar*. Houve grupos (2) que, de início, concluíram incorrectamente, mas na última questão responderam de forma clara, precisa e correcta.

Os estudantes são raramente confrontados com este tipo de situações, que exigem simultaneamente a análise de dados, a formulação de questões e a apresentação da respectiva resposta. Esta situação problemática baseada num contexto aberto de aprendizagem interdisciplinar e vivencial, envolveu necessariamente competências profundas de natureza linguística, interpretativa e de matemática.

É interessante registar que na 2ª parte da folha de trabalho os estudantes revelaram alguma intranquilidade inicial, pois observaram os dados, reportaram-se ao conhecimento intuitivo e do senso comum e não conseguiam retirar qualquer relação… Houve grupos de estudantes que comentavam com a professora e a investigadora: "*mas pode haver alguma relação? Não nos parece que haja… Mas na Matemática há sempre uma resposta, nós arranjamos sempre uma resolução, mas desta vez parece não haver… Estão a ver não se pode escrever que quanto mais comprido é o pé mais se corre, pois com o João isso não se verifica…".* Davam outros exemplos com a corrida e com os dados do salto da força inferior e com as medidas do comprimento do pé e da perna, mas concluíam que pensando em algumas relações só se verificavam para alguns estudantes e não para outros, por isso, não eram relações a escrever, porque não se verificavam para todos… Os estudantes foram ainda estimulados para experimentarem algumas relações numéricas na folha de cálculo que emergiam de alguns casos concretos. Alguns grupos experimentaram relações numéricas, como por exemplo, calculando o quociente entre as medidas do salto de força inferior e a da perna ou da pista da corrida e da medida do pé, entre as duas medidas físicas, etc, mas não chegavam a conclusão alguma. Então, depois de muito experimentarem e referirem que não se podia estabelecer qualquer relação, a professora indagou: "*escrever isso não será uma conclusão? Aquilo que o grupo constatou não é a verdadeira conclusão? Bem isto até é bom para vocês saberem que as coisas, as investigações, não surgem à partida como um resultado, pré-concebido, mas é preciso persistir, indagar, questionar, levantar dúvidas, colocar questões, debater em grupo e depois experimentar muito até se poder tirar alguma conclusão*"…

A professora referiu à investigadora que: "*os estudantes estão habituados a resolver problemas que têm sempre solução, quase que a não procuram, pois ela é parecida com algo que já foi anteriormente resolvido, como se costuma dizer "a papinha" aparece toda feita. Eles precisam de resolver este tipo de situações para se habituarem a procurar, a insistir, a experimentar, a ter paciência e, se for possível, concluir algo universal ou aplicado apenas a determinados contextos, como acontece efectivamente, na vida real e na ciência, concretamente na aplicação do método científico".*

Entusiasticamente referiu ainda a professora: *"Esta actividade foi muito boa, mesmo para este aspecto metodológico de carácter interdisciplinar: quer ligada à Educação Física, quer ligada às Ciências da Natureza, em que foi explorado o método científico, referidas as fases e assim, tiveram também oportunidade de o aplicar, de forma genérica e nestas circunstâncias, na matemática… Esta actividade foi mesmo muito positiva e todos os estudantes deveriam ter a oportunidade de a resolver, pois permite, como disse, o desenvolvimento de várias competências*", concluiu a professora.

Pelos resultados obtidos na questão 5. e pelo trabalho realizado ao longo da investigação conclui-se que a situação exposta no teste era complexa para os estudantes e estes problemas requerem seguramente um diálogo educativo intenso, um compromisso pedagógico abrangente que não se compadece com a situação primeira de um teste.

<u>Questão 6.</u>

<u>Enquadramento educativo</u>

Conteúdos:

- Observação do friso geométrico;
- Estudo do friso dado, conjugando dois atributos: *cor* (preto e branco) e a *forma* (quadrangular, circular e estrelada).
- Descoberta do padrão geométrico que generaliza o friso.
- Aplicação do padrão geométrico pelo preenchimento das lacunas existentes no friso.

Competências:

- Observar e generalizar um padrão geométrico linear.
- Relacionar e interpretar dados geométricos implicitamente relacionados com a Educação Visual.

Aproximações à álgebra:

- Generalização de padrão geométrico linear, com conjugação de dois atributos cor e forma (classe 2) pela:
  - descoberta da lei que rege a sequência geométrica
  - aplicação da regra no preenchimento das lacunas que constituem a sequência geométrica.

Contexto:

- Disciplinar, mas implicitamente ligado à Educação Visual.

<u>Questão 6[12].</u>

<u>Resultados do Pré-Teste</u>

Tipo de Resposta		RC		RPC		RI		NR		Total
	Turma	A	B	A	B	A	B	A	B	
Questão	Classe									
Q6.	1	a - 10 b - 3	a - 4 b - 5	a - 1 b - 3 c - 2	a - 3 b - 3 c - 4	b - 1	a - 1			
Total		13	9	6	10	1	1	0	0	20

<u>Legenda</u>: RC – Resposta Completa; RPC – Resposta Parcialmente Completa; RI – Resposta Incorrecta; NR – Não Resposta

Na turma A 65% dos estudantes preencheram de forma completa as lacunas existentes no friso geométrico dado e a maior parte dos estudantes (10) conseguiu aplicar *com rigor* o padrão geométrico descoberto, conjugando os dois atributos: forma e cor e apenas três

[12] Esta questão fazia parte de uma prova de aferição concebida pela comissão científica do GAVE (Gabinete de Avaliação Educativa) e realizada a nível nacional por estudantes do 6º ano de escolaridade. Como se enquadrava nos objectivos da investigação optou-se por a incluir nesta parte do teste de avaliação.

estudantes fizeram-no com *pouco rigor*. Todos os estudantes responderam à pergunta e seis apresentaram uma resposta parcialmente completa.
Na turma B 45% dos estudantes conseguiram responder completamente à questão e dez fizeram-no de forma parcialmente completa. Dos nove estudantes que responderam de forma completa à questão, quatro fizeram-no com *rigor* e cinco preencheram as lacunas com *pouco rigor*.

Resultados do Pós-Teste

Tipo de Resposta		RC		RPC		RI		NR		Total
	Turma	A	B	A	B	A	B	A	B	
Questão	Classe									
Q6.	1	a - 16	a - 6 b - 11	c - 4	a - 1 b - 1 c - 1					
Total		16	17	4	3	0	0	0	0	20

Legenda: RC – Resposta Completa; RPC – Resposta Parcialmente Completa; RI – Resposta Incorrecta; NR – Não Resposta

Na turma A 80% dos estudantes respondeu completamente à questão e todos preencheram as lacunas de forma rigorosa, conseguindo conjugar os dois atributos cor e forma, enquanto que na turma B 85% dos estudantes respondeu de forma completa, tendo a maior parte deles (11) repetido o padrão geométrico descoberto de forma *pouco rigorosa*.
Quatro estudantes da turma A responderam parcialmente à questão e três na turma B.

Apreciação genérica **Q6.**
A turma A houve uma *evolução* (↑↑) e a turma B conseguiu atingir uma *evolução significativa* (↑↑↑)(-+).
Um dos aspectos a realçar está ligado aos resultados positivos alcançados pela turma A no pré-teste, 65%, registando-se uma diferença significativa de resultados nas duas turmas, tendo apenas nove estudantes na turma B, 45%, apresentado uma resposta completa.

Contudo, a turma B conseguiu melhorar o desempenho no pós-teste no número de respostas completas, embora *com pouco rigor na execução* (11 respostas em 17).
Face aos resultados pode-se concluir que, de uma forma genérica, os estudantes da turma A conseguiram executar com maior rigor a tarefa proposta, obtendo resultados positivos nos dois tempos de interacção com o teste, em que a maioria dos estudantes conseguiu alcançar respostas completas.
Assim, para realizarmos uma análise mais clara da percentagem das respostas completas de categoria ***a***, isto é, executando com maior rigor o desenho do padrão geométrico, conjugando os atributos, forma e cor, os resultados, no pós-teste, são de 80% e 30%, respectivamente, na turma A e B.

Emergências curriculares e de aproximação à álgebra. Este tipo de questões são essenciais nas diversas aproximações à álgebra, designadamente, na generalização do padrão em regularidades. Esta aproximação à álgebra, como foi referida na secção 1 da análise de resultados foi desenvolvida tão somente na Educação de Infância e no 1º ciclo,

no 2º e 3º anos de escolaridade, aquando do desenvolvimento do projecto de âmbito interdisciplinar: "Envolvências geométricas I e II – A geometria na cidade" e, mais tarde, neste nível de ensino com execução, de tarefas similares, no plano.
Como já se referiu, nessa secção, o tópico sobre regularidades e padrões (geométricos e numéricos) surge em situações pontuais como conteúdo, actividade e objectivo integrado num rol de sugestões do bloco temático 1, mas não mais é explicitado nos programas de Matemática do 2º ciclo do ensino básico.
A realização da questão 6 e da que se lhe segue surge numa perspectiva global do conhecimento matemático, disciplinar e/ou interdisciplinar, optimizando recursos, saberes e experiências desenvolvidas noutros ciclos, tendo sido iniciada no projecto de âmbito interdisciplinar "Envolvências Geométricas" em que se estimulava a observação, o registo fotográfico, a manipulação de materiais com reprodução e criação de frisos e pavimentos, numa perspectiva global de preservação do património arquitectónico da região, social e de cultura matemática.

Questão 7.
Enquadramento educativo

Conteúdos:
- Observação de um gradeamento, evidência e reconhecimento do módulo-padrão.
- Identificação de quadrados no módulo-padrão.
- Cálculo do perímetro de quadrados tomando como unidade de medida de comprimento a unidade arbitrária (*1uc*).
- Organização, em tabela de dupla entrada, dos dados obtidos que relacionam cada um dos quatro quadrados com o seu perímetro.
- Estudo da relação existente entre os perímetros dos diferentes quadrados do módulo-padrão.
- Estabelecimento de uma correspondência numérica que relacione o perímetro dos diferentes quadrados do módulo-padrão.

Competências:
- Relacionar e interpretar dados geométricos e numéricos em contexto real e explicitamente relacionados com a Educação Visual.
- Reconhecer e mobilizar conceitos de outras áreas.
- Relacionar conceitos matemáticos e aplicá-los a situações novas.
- Seleccionar, interpretar e organizar informação em tabela de dupla entrada.
- Criar modelos matemáticos que representem relações entre elementos de um determinado contexto.

Aproximações à álgebra:
- Resolução de problemas numa perspectiva de modelação explicita dos fenómenos pelo(a):
  - reconhecimento gradual da situação e identificação "atomizada" do contexto criado (classes 1 e 2).
  - criação do modelo matemático simples (aditivo e/ou multiplicativo) que rege o fenómeno, neste caso que relaciona o perímetro dos diferentes quadrado (classe3).

Contexto:

- Real e ligado à Educação Visual.

<u>Questão Q7.1.</u>

Resultados do Pré-Teste

Tipo de Resposta		RC		RPC		RI		NR		Total
	Turma	A	B	A	B	A	B	A	B	
Questão	Classe									
Q7.1	1					a - 4 b -5	b - 6			
Total		11	14	Não Tem		9	6	0	0	20

Legenda: RC – Resposta Completa; RPC – Resposta Parcialmente Completa; RI – Resposta Incorrecta; NR – Não Resposta

Todos os estudantes das duas turmas responderam à questão tendo 55% na turma A respondido completamente e 70%, na turma B.

Resultados do Pós-Teste

Tipo de Resposta		RC		RPC		RI		NR		Total
	Turma	A	B	A	B	A	B	A	B	
Questão	Classe									
Q7.1	1					b - 5	b - 8			
Total		15	12	Não Tem		5	8	0	0	20

Também no pós-teste todos os estudantes das duas turmas responderam a esta questão, tendo 75% dos estudantes da turma A respondido completamente à pergunta e 60% na turma B.

<u>Apreciação específica **Q7.1.**</u>

Na turma A houve *evolução significativa* (↑↑↑) e na B existiu um *ligeiro retrocesso* (↓). Destaque-se que ambas as turmas tiveram resultados positivos nos dois tempos de interacção com o teste. Contudo, os estudantes da turma B conseguiram resultados mais positivos no pré-teste e a turma A atingiu melhor *desempenho* no pós-teste. É curioso registar que no pós-teste todos os estudantes que inferiram incorrectamente sobre o número de quadrados do módulo-padrão indicaram um número superior, provavelmente, pela imagem do gradeamento exposta, denunciando provavelmente que estes estudantes não identificaram cabalmente o módulo-padrão.

Questão Q7.2.

Resultados do Pré-Teste

Tipo de Resposta		RC		RPC		RI		NR		Total
	Turma	A	B	A	B	A	B	A	B	
Questão	Classe									
Q7.2	2	a - 3 c - 5	a - 4 c - 4	a - 1 c - 1		a - 1 b - 1 c - 3 d - 2	b - 1 c - 10			
Total		8	8	2	0	7	11	3	1	20

Legenda: RC – Resposta Completa; RPC – Resposta Parcialmente Completa; RI – Resposta Incorrecta; NR – Não Resposta

Menos de metade dos estudantes, 40%, das duas turmas conseguiu obter uma resposta completa. Dois estudantes da turma A apresentaram uma resposta parcialmente completa e nenhum na B.

Resultados do Pós-Teste

Tipo de Resposta		RC		RPC		RI		NR		Total
	Turma	A	B	A	B	A	B	A	B	
Questão	Classe									
Q7.2	2	a - 8 c - 4	a - 6 c - 7	b - 1 c - 1		a - 2 b - 1 c - 1 e - 1	c - 5 e - 1			
Total		12	13	2	0	5	6	1	1	20

Um estudante em cada uma das duas turmas não respondeu à questão e mais de metade dos estudantes respondeu de forma completa, 60% e 65%, respectivamente, na turma A e B. Dois estudantes da turma A apresentaram uma resposta parcialmente completa e nenhum na outra turma.

Apreciação específica **7.2.**
Nas duas turmas existiu uma *evolução significativa* (↑↑↑)(-+).
Registe-se que os resultados das respostas completas nas duas turmas são idênticos, no pré-teste, mas apenas com a diferença de uma resposta no pós-teste. Por outro lado, nas duas turmas passou-se de resultados negativos no pré-teste, pois menos de metade dos estudantes resolveram completamente a questão, para positivos, no pós-teste.

Estes resultados revelam que os estudantes para além de terem conseguido contextualizar o cálculo dos perímetros dos quadrados que constitui cada módulo-padrão, descobriram uma relação e aplicaram-na, tendo alguns estudantes utilizado uma "etiqueta" mais algébrica "uc" do que outra mais conhecida "cm" para interligar a informação recolhida e indicar a medida do perímetro de cada quadrado.

No pós-teste, mais dois estudantes na turma A do que na B indicaram o perímetro de cada um dos quatro quadrados do módulo-padrão tomando como unidade de medida de comprimento *uc* (*4uc*; *8uc*; *12uc*; *16uc*), mas a maior parte dos estudantes que responderam de forma completa não indicaram a unidade de medida de comprimento ou usaram o *cm*.

<u>Questão Q7.3.</u>

<u>Resultados do Pré-Teste</u>

Tipo de Resposta		RC		RPC		RI		NR		Total
	Turma	A	B	A	B	A	B	A	B	
Questão	Classe									
Q7.3	2	a - 1 b - 4 c - 1	a - 1 b - 1	a - 1	b - 1	b - 3 c - 1 d - 2	a - 1 c - 3 d - 9			
Total		6	2	1	1	6	13	7	4	20

<u>Legenda</u>: RC – Resposta Completa; RPC – Resposta Parcialmente Completa; RI – Resposta Incorrecta; NR – Não Resposta

Menos de metade dos estudantes, 30%, na turma A e 10% na turma B conseguiu obter uma resposta completa. Um estudante em ambas as turmas respondeu de forma parcialmente completa, sete estudantes não responderam na turma A e quatro na B.

<u>Resultados do Pós-Teste</u>

Tipo de Resposta		RC		RPC		RI		NR		Total
	Turma	A	B	A	B	A	B	A	B	
Questão	Classe									
Q7.3	2	a - 5 b - 6	a - 3 b - 3 c - 1	b - 2	a - 1 b - 2	a - 1 d - 3	b - 2 c - 3 d - 2			
Total		11	7	2	3	4	7	3	3	20

Mais de metade dos estudantes da turma A, 55%, respondeu de forma completa à questão. Na turma B menos de metade dos estudantes, 35%, resolveu de forma completa. Dois estudantes da turma A apresentaram uma resposta parcialmente completa e três na outra turma.

<u>Apreciação específica **7.3.**</u>
A turma A conseguiu atingir uma *evolução significativa* nos resultados (↑↑↑)(-+), passando de resultados negativos, em que menos de metade dos estudantes não conseguiu resolver completamente a questão para resultados positivos, em que 55% dos estudantes apresentaram uma resposta completa.
Na turma B existiu também um aumento de cinco respostas completas, isto é, uma evolução significativa, mas em resultados negativos (↑↑↑)(-), em que apenas 35% dos estudantes, no pós-teste, conseguiu atingir a resposta completa.

Nesta questão pretendia-se uma organização em tabela dos dados obtidos, relacionando cada um dos quatro quadrados com o respectivo perímetro os estudantes da turma A tiveram mais facilidade em interpretar a informação dada e registá-la numa tabela de dupla entrada.

Emergências para a folha de cálculo. Apesar de ser uma exploração diferente das desenvolvidas na folha de cálculo a turma A sentiu mais facilidade para apresentar os dados obtidos em tabela de dupla entrada. Do trabalho desenvolvido tudo indica que aquela ferramenta promove a sistematização, organização e registo dos dados em localização cartesiana, como se constatou também na realização de diferentes actividades e/ou problemas: "uma razão importante!..."; "à descoberta dos números"; "a idade dos filhos"; "áreas dos pavilhões"; "boatos e bactérias"; "pulsação"; "tantas caixas!...".

<u>Questão Q7.4.</u>

<u>Resultados do Pré-Teste</u>

Tipo de Resposta		RC		RPC		RI		NR		Total
	Turma	A	B	A	B	A	B	A	B	
Questão	Classe									
Q7.4	3	b - 3 d - 3	b - 2 d - 1 e - 1	a - 1	a - 1 b - 2	a - 5 c - 4	a - 6 b - 1 c - 4 e - 1			
Total		6	4	1	3	9	12	4	1	20

<u>Legenda</u>: RC – Resposta Completa; RPC – Resposta Parcialmente Completa; RI – Resposta Incorrecta; NR – Não Resposta

Menos de metade dos estudantes, 30%, na turma A e 20% na turma B conseguiu obter uma resposta completa. Um estudante da turma A apresentou uma resposta parcialmente completa e três na B.

<u>Resultados do Pós-Teste</u>

Tipo de Resposta		RC		RPC		RI		NR		Total
	Turma	A	B	A	B	A	B	A	B	
Questão	Classe									
Q7.4	3	a - 1 b - 5 c - 1 e - 1	b - 4 d - 1 e - 2	a - 1 c - 1	a - 1 b - 1	a - 4 b - 4	a - 3 b - 3 c - 3			
Total		8	7	2	2	8	9	2	2	20

<u>Legenda</u>: RC – Resposta Completa; RPC – Resposta Parcialmente Completa; RI – Resposta Incorrecta; NR – Não Resposta

Menos de metade dos estudantes continuou a responder de forma completa à questão, 40% e 35%, respectivamente, na turma A e B. Dois estudantes nas duas turmas apresentaram uma resposta parcialmente completa.

Apreciação específica **7.4.**
Refira-se que nas duas turmas houve *evolução* (↑)(-), mas no interior dos resultados negativos, isto é, menos de metade dos estudantes apresentou resposta completa.
A pergunta requeria a modelação de um fenómeno e, neste caso, pretendia-se que o estudante estabelecesse, em linguagem simbólica, uma relação numérica funcional entre os perímetros de cada um dos quadrados. Os estudantes foram capazes de encontrar essa relação, com definição recursiva em linguagem corrente (ex: *a soma do número anterior com 4, a regra é aumentando sempre mais 4uc*, …) ou estabeleceram relações entre o quadrado e perímetro (ex: *4x; a relação é multiplicado por 4 dá o perímetro dos diferentes quadrados*, …), mas não de uma forma tabelar e explicita, com estabelecimento da relação entre os dois dados.
Apesar de ter havido melhor prestação na turma A ela não é assim tão significativa e os resultados no pós-teste são ainda negativos. Convém ainda sublinhar que a construção de um modelo matemático que generalize o fenómeno é sempre uma tarefa de dificuldade superior em diferentes níveis de escolaridade, especialmente em idades elementares, e ainda acresce o facto de, neste caso, ser no campo geométrico e de âmbito interdisciplinar.

Apreciação genérica da **Q7.**
Os resultados obtidos nas duas turmas forma registados na tabela seguinte.

Questão	Turmas		Conclusão genérica
	A	B	Na globalidade a ***turma A*** apresentou resultados mais positivos do que a ***classe B***.
Q7.1.	↑↑↑	↓	
Q7.2	↑↑↑(-+)	↑↑↑(-)	
Q7.3	↑↑↑(-+)	↑↑↑(-)	
Q7.4	↑(-)	↑(-)	

Esta actividade de âmbito interdisciplinar interliga-se ao projecto desenvolvido no 1º ciclo, nas duas turmas, designado por "Envolvências geométricas I e II – a geometria na cidade", relacionado com a Educação Visual, Matemática e Tecnologias de Informação e Comunicação.
Tudo indica que uma das dificuldades de resolução das sub-questões foi a linguagem utilizada, designadamente, "módulo-padrão", na primeira e o símbolo "uc" para indicar a unidade de medida de comprimento, na segunda e terceira pergunta. De facto, este tipo de notação praticamente não foi explorada na concretização de actividades neste âmbito na sala de aula do 1º ciclo do ensino básico e estas encontraram-se muito afastadas da realização do teste. Apesar de no programa do 6º ano de escolaridade não estar prevista a realização deste trabalho, isto é, a exploração de *regularidades e padrões geométricos* optou-se por esta actividade para integrar parte de um conhecimento adquirido em anos e ciclos anteriores, para determinar o cálculo de perímetros de quadrados existentes no módulo-padrão com base na unidade de medida de comprimento "uc", na organização em tabelas e na descoberta da regra que relaciona o número do quadrado com o perímetro.

Na turma A, nas questões 7.2 e 7.3 existiram resultados com *evolução significativa* (↑↑↑), respectivamente, na indicação do perímetro de quatro quadrados tomando como unidade de medida "uc" e na organização de dados numa tabela, relacionando cada um dos quadrados com o respectivo perímetro.

Emergência da utilização da folha de cálculo. Os resultados obtidos são indicadores de que a folha de cálculo promove a organização de dados numa estrutura tabelar. De facto, também se constatou isso na análise da resolução de problemas e de actividades desenvolvidas ao longo da investigação. Assim, estes resultados estão em concordância com os registados ao longo do percurso da investigação.

Questão Q 8.

Enquadramento educativo

Conteúdos:

- Apreensão do significado matemático e do valor numérico de uma fracção afecta ao preço de um produto.
- Realização de estudos comparativos dos preços de produtos em promoção, com a aplicação das noções: “3/4 de…”; “1/4 de…” e “1/2 de…”
- Interpretação e descrição do significado de uma dada expressão numérica usada numa determinada situação.

Competências:

- Interpretar informação matemática e seleccionar dados relevantes apresentados em quadros e em desenhos.
- Apreender e aplicar o raciocínio de tipo condicional na resolução de problemas.
- Analisar dados e interpretar as relações existentes para decidir.
- Analisar informação explícita.

Aproximações à álgebra:

- Resolução de classes de problemas, pela análise de dados, com utilização de expressões numéricas e aplicação do raciocínio de tipo condicional (classe 2)

Contexto:

- Estritamente matemático.

Questão Q 8.1

Resultados do Pré-Teste

Tipo de Resposta		RC		RPC		RI		NR		Total
	Turma	A	B	A	B	A	B	A	B	
Questão	Classe									
Q1	1	a - 3 b - 3 c - 4	a - 4 c - 2 d - 1	a - 1		aC - 6 b - 1	aA - 5 aC - 5 c - 1			
Total		10	7	1	0	7	11	2	2	20

A- sumo A; C- sumo C

Legenda: RC – Resposta Completa; RPC – Resposta Parcialmente Completa; RI – Resposta Incorrecta; NR – Não Resposta

Metade dos estudantes, 50%, da turma A conseguiu obter uma resposta completa.
Na turma B apenas 35% dos estudantes responderam de forma completa.

<u>Resultados do Pós-Teste</u>

Tipo de Resposta		RC		RPC		RI		NR		Total
	Turma	A	B	A	B	A	B	A	B	
Questão	Classe									
Q1	1	a - 4 b - 1 c - 8	a - 2 c - 7			aA - 6 aC - 1	aA - 5 aC - 5 c - 1			
Total		13	9	0	0	7	11	0	0	20

<u>Legenda</u>: RC – Resposta Completa; RPC – Resposta Parcialmente Completa; RI – Resposta Incorrecta; NR – Não Resposta

Mais de metade dos estudantes da turma A responderam de forma completa à questão, 65% e 45%, na turma B. Todos os estudantes das duas turmas responderam à questão e nenhum o fez de forma parcialmente completa.

<u>Apreciação específica **8.1.**</u>
Registe-se que houve *evolução* nas duas turmas, na turma B (↑) ainda em resultados negativos, isto é, menos de metade dos estudantes conseguiu resolver completamente a questão e na classe A existiu uma *evolução* (↑↑), mas sempre em valores positivos, isto significa que mais de metade dos estudantes conseguiu resolver completamente a questão.
Relativamente aos processos utilizados a maioria dos estudantes das duas turmas que respondeu de forma completa à questão tiveram necessidade de expor os cálculos, do produto do número fraccionário por um número racional, escrito em representação decimal.

Esta questão, com apresentação próximo do real, mas de âmbito disciplinar previa, tal como se verificou, uma evolução nos resultados, nas duas turmas. Refira-se que quando os estudantes das duas turmas resolveram o pré-teste ainda não tinham conhecimento dos procedimentos técnicos para multiplicar um número racional, em representação fraccionária, por outro em representação decimal.
Registe-se ainda que mais de metade dos estudantes da turma B, 70% e 55%, resolveu incorrectamente a questão, respectivamente, no pré-teste e no pós-teste e, nesta sequência, uma pergunta surge: como se explicam os resultados tão negativos na turma B, no pré-teste, onde apenas dois estudantes conseguiram resolver completamente a questão?
Tratava-se de realizar a compra de um sumo, numa lista de três, na qual se deveria calcular o produto de um número racional por cêntimos, em representação decimal, analisar os resultados e decidir qual seria o sumo mais barato. Reportava-se a uma situação algo trabalhada em diversos exercícios do manual, mas provavelmente o formato da questão, incluindo os desenhos de três sumos e a necessidade de completar uma frase de modo a torná-la verdadeira não era assim tão familiar ao estudante.
Constatou-se ainda o seguinte: a turma A obteve no pré-teste resultados negativos, mas houve mais estudantes a responder completamente à questão do que nos da turma B. Estes, no pré-teste, usaram apenas um único processo e, de forma intuitiva, realizaram os cálculos

apropriados, enquanto que na turma A utilizaram nos dois tempos de realização do teste diversas estratégias, a saber: noção de fracção equivalente, realização dos cálculos apropriados, relação parte-todo. Na turma B só no pós-teste é que os estudantes utilizaram estas três estratégias. Contudo, durante o percurso da investigação verificou-se que os estudantes daquela turma diversificaram as estratégias na resolução de diferentes problemas, designadamente, no âmbito das relações de proporcionalidade e dos problemas de esquematização.
Registe-se ainda que um estudante da turma B, resolveu a questão no pré-teste utilizando a relação "parte-todo" e simultaneamente o cálculo do produto de um número racional por um "decimal", revelando compreensão na resolução da questão.

<u>Questão Q 8.2</u>

<u>Resultados do Pré-Teste</u>

Tipo de Resposta		RC		RPC		RI		NR		Total
	Turma	A	B	A	B	A	B			
Questão	Classe									
Q2	2	a - 0 b - 2 c - 4 d - 1	c - 2	a - 1	a - 1 b - 1	a - 1 b - 2 c - 3	a - 1 b - 3 c - 10			
Total		7	2	1	2	6	14	6	2	20

<u>Legenda</u>: RC – Resposta Completa; RPC – Resposta Parcialmente Completa; RI – Resposta Incorrecta; NR – Não Resposta

Menos de metade dos estudantes da turma A (35%) obteve uma resposta completa. Um estudante apresentou a resposta parcialmente completa
Na turma B apenas 10% dos estudantes conseguiu responder de forma completa e dois estudantes responderam parcialmente.

<u>Resultados do Pós-Teste</u>

Tipo de Resposta		RC		RPC		RI		NR		Total
	Turma	A	B	A	B	A	B	A	B	
Questão	Classe									
Q2	2	b - 2 c - 8 d - 3	b - 2 c - 5 d - 3	a - 1		a - 1 b - 2 c - a d - 2	b - 5 c - 5			
Total		13	10	1	0	6	10	0	0	20

Mais de metade dos estudantes das duas turmas responderam completamente à questão, 65% e 50%, respectivamente, na A e B. Todos os estudantes das duas turmas resolveram a pergunta e apenas um da turma A respondeu parcialmente.

Apreciação específica **8.2.**
Nas duas turmas os resultados foram mais positivos no pós-teste com uma *evolução significativa* (↑↑↑)(-+), com passagem de resultados altamente negativos, em que menos de metade da turma não conseguiu resolver completamente a questão para outros, no campo positivo, em que mais de metade dos estudantes resolveu completamente a questão.
A maior parte dos estudantes das duas turmas que respondeu completamente à questão fizeram-no de forma muito diferenciada, interpretando a expressão numérica dada através do uso de uma linguagem matemática adequada; de uma linguagem próxima do real; realizando a leitura sequencial da “frase” com menor ou maior rigor matemático.

Apreciação genérica **8.**
Nesta questão estritamente disciplinar os resultados obtidos nas duas turmas foram registados no quadro seguinte.

Questão	Turmas		Conclusão genérica
	A	B	Na globalidade a ***turma A*** apresentou resultados mais positivos do que a ***classe B***.
Q8.1.	↑↑↑	↑(-)	
Q8.2	↑↑↑(-+)	↑↑↑ (-+)	

Como questão de âmbito estritamente matemático refira-se que os resultados obtidos na classe B, no pós-teste, revelam que a maior parte dos estudantes não apreendeu os conteúdos previamente definidos relacionados com o significado matemático do valor numérico do produto de uma fracção por o preço de um produto, designadamente, pela realização de estudos comparativos da aplicação das noções: “3/4 de…”; “1/4 de…” e “1/2 de…”. Refira-se ainda que esta temática só foi explorada formalmente depois da realização do pré-teste.
A dificuldade existente no cálculo do produto de um número racional de apresentação fraccionária por um número racional de representação decimal e o aspecto pictórico apresentado, diferente do usual, poderão explicar alguns resultados obtidos na turma B.
Na segunda questão a representação numérica é entendida pelos estudantes como um exercício tipicamente disciplinar e pode-se dizer que o trabalho desenvolvido neste âmbito consolidou a evolução das aprendizagens matemáticas rotineiras e tudo indica que o trabalho de âmbito interdisciplinar desenvolvido nas duas turmas e o realizado com a folha de cálculo na turma A não impediu a aprendizagem formal e disciplinar, revelando-se esta ferramenta tecnológica, em várias situações, como uma mais valia na exploração do conhecimento matemático.

Enquadramentos Convergentes. O formato da completação e atribuição do valor lógico de uma frase que se apelava nesta questão evocava saberes e experiências vividas na resolução de uma actividade de âmbito interdisciplinar desenvolvida no 4º ano de escolaridade, designada por “o valor lógico de proposições” e de uma outra explorada no 5º ano de escolaridade “a fórmula de Euler” relacionadas, respectivamente, com a 2ª e 3ª aproximação à álgebra e a 1ª e 4ª aproximação á álgebra.

Questão Q 9.

Enquadramento educativo

Conteúdos:
- Apreensão do significado matemático das frases “pague 2 e leve 3”; “pague 3 e leve 4”; “pague 1 e leve 2” utilizadas na promoção de produtos comerciais.
- Realização de estudos comparativos dos preços dos produtos em promoção, pela definição teórica das noções: “2/3 de…”; “3/4 de…”; e “1/2 de…”.
- Interpretação da informação promocional dada sob ponto de vista matemático e simultaneamente pessoal, integrando vontades individuais, interesses, motivações e aspectos inerentes ao produto a adquirir procurando uma decisão consciente.
- Observação explicita e implícita de dados, com vista a uma reflexão mais profunda dos aspectos (“variáveis”) envolventes e de uma intervenção cívica no acto da compra de um produto em promoção.

Competências:
- Interpretar informação matemática e seleccionar dados relevantes apresentados em quadros.
- Apreender e aplicar o raciocínio de tipo condicional na resolução de problemas.
- Analisar informação explícita numérica e em texto.
- Analisar informação implícita e fundamentar opções.
- Reconhecer e mobilizar conceitos de diversas áreas e conhecimentos do dia a dia.
- Pesquisar ou imaginar dados implícitos relevantes, relacionados com o produto em promoção ou com os conhecimentos do estudante, gostos, interesses, motivações e usá-los na tomada consciente de uma decisão.

Aproximações à álgebra:
- Resolução de classes de problemas próximos do dia a dia do estudante, pela análise explicita e implícita de dados, aplicação do raciocínio de tipo condicional e fundamentação das respostas (classes 2 e 3)

Contexto:
- Real, relacionado com o quotidiano do estudante.

Questão 9.1

Resultados do Pré-Teste

T. de Resposta		RC		RPC		RI		NR		Total
	Turma	A	B	A	B	A	B	A	B	
Questão	Classe									
Q9.1	2	a - 4 CV c - 5 Va	b - 1 CV c - 4 Va	b - 3 Va	a - 3 Va b - 3 Va	a - 3 Va b - 4 2Va (1T;1OV)	b - 4 Va c - 3 Va d - 2 1OV+1Va			
Total		9	5	3	6	8	9	0	0	20

Va – Leite da marca “Vaquinha”; CV – “Cidade Viva”; OV – “Olá Vida”; T – Todos

Legenda: RC – Resposta Completa; RPC – Resposta Parcialmente Completa; RI – Resposta Incorrecta; NR – Não Resposta

Todos os estudantes das duas turmas responderam à questão. Menos de metade dos estudantes da turma A, 45%, obteve uma resposta completa e três apresentaram uma resposta parcialmente completa.
Na turma B apenas 25% dos estudantes conseguiu responder de forma completa e seis estudantes apresentaram uma resposta parcialmente completa.

Resultados do Pós-Teste

T. de Resposta		RC		RPC		RI		NR		Total
	Turma	A	B	A	B	A	B	A	B	
Questão	Classe									
Q9.1	2	a - 8 CV c - 3 Va	a - 2 CV c - 2 OV	a - 1 CV b - 1 Va c - 1 OV	a - 4 CV b - 3	a - 2 1Va+1OV b - 3 1OV+2Va	a - 0 b - 6 Va c - 1 d - 1 Va e - 1			
Total		11	4	3	7	5	9	1	0	20

Legenda: RC – Resposta Completa; RPC – Resposta Parcialmente Completa; RI – Resposta Incorrecta; NR – Não Resposta

Mais de metade dos estudantes da turma A respondeu de forma completa à questão, 55% e 20%, na turma B. Na resposta parcialmente completa obtiveram-se os resultados três e sete, respectivamente, na turma A e B.

Apreciação específica **9.1.**
Nesta actividade de matemática em contexto, em que o estudante precisa de imaginar uma situação real de ida ao supermercado com um familiar para fazer determinadas opções na compra de leite, a turma A apresentou *evolução* (↑), dado que houve mais dois estudantes que resolveram completamente a questão e os resultados passaram de negativos para positivos. Todavia, a turma B obteve resultados *fortemente negativos*. Os resultados obtidos nesta turma surpreenderam, pois os estudantes revelaram ao longo do percurso uma vertente muito prática e vivencial.
Tratava-se de seleccionar um leite numa lista de três marcas de leite e fundamentar a resposta, que poderia ser de cariz estritamente matemática ou mais contextualizada, focando aspectos relacionados com o gosto do produto, a frescura, o desenho do pacote mais atraente, etc. Praticamente nas duas turmas a grande dificuldade dos estudantes nesta questão localizou-se na interpretação desta nova linguagem, por exemplo, "leve três e pague dois ", não treinada na sala de aula e, consequentemente, não justificada a resposta de forma coerente e consistente.
Grande parte dos estudantes ainda continua a refugiar-se numa resposta matemática, interpretando cabalmente a informação numérica e as relações existentes e outros estudantes fazem apelo a variados factores, designadamente, "a capacidade do pacote – levar mais leite", o nome sugerir frescura, natural, como aconteceu com o nome do leite "vaquinha", a qualidade do leite, etc.
Tudo indica que os critérios de avaliação nas questões de âmbito interdisciplinar devem contemplar respostas matemáticas e/ou não matemáticas, relacionadas com outros aspectos associados à formulação da questão e ao contexto da mesma.

Questão Q 9.2

Resultados do Pré-Teste

Tipo de Resposta		RC		RPC		RI		NR		Total
	Turma	A	B	A	B	A	B	A	B	
Questão	Classe									
Q2	3	b - 1 c - 8	c - 5 d - 1	a - 2 b - 3	a - 4 b - 1	a - 2 b - 1 d - 2 OV e - 1	a - 1 b - 4 c - 2 e - 2			
Total		9	6	5	5	6	9	0	0	20

Legenda: RC – Resposta Completa; RPC – Resposta Parcialmente Completa; RI – Resposta Incorrecta; NR – Não Resposta

Todos os estudantes das duas turmas responderam à questão. Menos de metade dos estudantes da turma A, 45%, obteve uma resposta completa e cinco estudantes apresentaram uma resposta parcialmente completa.
Na turma B apenas 30% dos estudantes conseguiu responder completamente e cinco apresentaram uma resposta parcialmente completa.

Resultados do Pós-Teste

Tipo de Resposta		RC		RPC		RI		NR		Total
	Turma	A	B	A	B	A	B	A	B	
Questão	Classe									
Q2	3	a - 0 b - 1 c - 8	c - 4	a - 2 b - 1	a - 1 b - 2	a - 4 b -1 d - 2	a - 3 b - 3 c - 0 d - 1 e - 4			
Total		9	4	3	3	7	11	1	2	20

Tal como no pré-teste, na turma A, nove estudantes, 45%, responderam completamente à questão.
Na turma B houve um decréscimo no número de estudantes que resolveu de forma completa a questão e apenas quatro estudantes, 20%, o conseguiram.

Apreciação específica **9.2.**
Registe-se que nas duas turmas foram obtidos resultados negativos, na turma A houve *estagnação* (—) e na turma B existiu *ligeiro retrocesso* em resultados *fortemente negativos*, em que menos metade dos estudantes resolveu completamente a questão. A resolução desta questão requeria uma argumentação matemática convincente e consistente e/ou contextual e, tal como na outra questão, também nesta os estudantes tiveram dificuldades na justificação na apresentação da solução proposta.

Esta pergunta requeria que o estudante reunisse argumentações válidas de âmbito Genérica, apelando a aspectos matemáticos implícitos e a outros de âmbito social e de cariz pessoal que fundamentassem, com lógica, a escolha do leite indicada.
Tudo indica que as dificuldades para responderem a esta pergunta avolumaram-se a partir do momento que o estudante verifica que tal solução proposta pelo enunciado do problema poderia colocar em dúvida a resposta dada na alínea anterior, verificando se estaria correcta ou não e originando alguma indefinição e confusão argumentativa. Assim, o estudante para apresentar respostas completas teria de compreender o problema, no seu todo, quase até à exaustão, interpretando a formulação e analisando a envolvência criada.
Com a reunião do número de respostas parcialmente completas em que os estudantes, apresentaram argumentações mais vagas verificamos, contudo, que a turma A consegue obter resultados positivos, mas a classe B não conseguiu.

Apreciação genérica **9.**
Nos dois tempos de interacção com o teste é justo destacar o entusiasmo com que os estudantes das duas turmas responderam à questão, a evolução alcançada na turma A, na primeira questão, e os resultados negativos obtidos na classe B, nas duas perguntas.
Na primeira questão, o estudo realizado pelos estudantes das duas turmas focalizou-se em dois tipos de resposta completa: baseada nos dados explícitos e direccionadas para o que é mais lucrativo, em que intervêm conhecimentos matemáticos e outra argumentação contextualizada orientada para os componentes do leite: lípidos, proteínas, cálcio, fósforo, vitaminas, etc, bem como para a identidade comercial, a proveniência do leite, a data de validade, a qualidade do leite, os gostos, entre outros. O primeiro tipo de argumentação, de âmbito matemático, é a mais usada no pós-teste na turma A, em que o número de respostas completas aumenta de quatro para oito, mas outras fundamentações emergem de índole mais Genérica.

Esta pergunta suscitava vários níveis de resolução:
- *aplicação de conhecimentos estritamente matemáticos*, "quase imediata", pela interpretação numérica do significado das frases promocionais explícitas e a aplicação de conhecimentos matemáticos;
- *conjugação de conhecimentos matemáticos com informação explícita ou de âmbito inter-relacional*, relacionada com aspectos existentes no quadro informativo, frases promocionais e o nome do leite que sugere também algo intrinsecamente ligado ao produto (como alguns estudantes referiram que o leite "Vaquinha" deveria ser o mais fresco) ou aspectos relacionados com a vida pessoal do estudante, gostos, interesses, saúde, …
- *inclusão de informação implícita*, mas omissa: capacidade de cada pacote de cada marca referida; preço real de cada pacote de leite, período de validade, tipo de embalagem, etc…
Ora o estudante poderia evocar apenas a informação explícita existente no quadro ou conjugá-la e interpretá-la com os outros dados implícitos, porventura importantes, já que se tratava de uma situação real vivida, algumas vezes, pelo estudante no seu dia a dia com mãe, pai ou encarregado de educação ou outro elemento da família.

De facto, esta questão foi pensada para, durante o ano, os estudantes terem tido oportunidade de resolverem questões deste tipo, individualmente e em grupo, com vista à mobilização dos conhecimentos matemáticos no dia a dia do estudante e a uma intervenção consciente na aquisição de um produto em promoção, numa perspectiva de educação para a cidadania. Neste contexto estava previsto o levantamento de certo tipo de questões, designadamente: por que razão muitos dos produtos de pacote existentes no mercados não têm uma determinada massa, como: 250g; 500g; 750g; 1Kg, … mas sim 375g, 475g; 745g;…?

Contudo, não foi possível realizar este tipo de trabalho, pois este não era prioritário em termos de investigação, dado que os estudos conhecidos e orientados para as aproximações à álgebra apontavam para determinado tipo de classes de problemas, que não estes de intervenção social e relacionados com a defesa do consumidor. Por outro lado, procuramos abrir de forma controlada esta componente neste estudo relacionado com a aquisição de conhecimentos pré-algébricos em trabalho interdisciplinar, dado que já se tínha implementado experiências, no 5º ano de escolaridade, orientadas para a cidadania, no domínio da História e da Matemática, na tarefa do "método de Hondt" na escolha de representantes para a autarquia, em que a maior parte dos estudantes da turma B referiu que tinha compreendido, mas considerou-a pouco acessível.
Contudo, os resultados ainda demasiado negativos na resolução de tarefas de âmbito interdisciplinar indicam que deviam ser desenvolvidas actividades de carácter mais geral, de matemática em contexto, em que os estudantes tivessem oportunidade, individualmente, na classe, ou em grupo de resolver este tipo de questões, interpretando dados explícitos e implícitos e debatendo ideias, fundamentando matematicamente e/ou contextualmente as opções tomadas.

Assim, tornou-se conveniente abrir o campo de investigação de forma controlada, isto significa que era necessário respeitar o grau etário dos estudantes, o nível de entendimento dos fenómenos, dos conteúdos propostos e a dinâmica estabelecida na turma pela professora responsável de acordo com os tempos e os conteúdos curriculares estabelecidos para a área de matemática neste ano de escolaridade, pois a própria organização do programa dificulta a implementação deste tipo de actividades.
Por outro lado, como o enunciado e a abordagem desta questão eram novas tornava-se possível constatar a reacção "virgem" dos estudantes a este tipo de questões, em situação de teste.
Os resultados da turma B surpreenderam pela negativa. Ao longo dos anos, acompanhados pela investigadora, os estudantes desta turma revelaram competências práticas na resolução de diversas tarefas, designadamente, na descoberta de processos menos comuns para chegar aos resultados correctos e no desenvolvimento de formas bastante pragmáticas para resolver problemas relacionados com o seu quotidiano. De facto, esta tarefa parece próxima da realidade da criança, mas não o é, pois os estudantes não têm este tipo de convivência familiar de, no supermercado, com os pais, encarregados de educação ou outros familiares pensarem, na melhor solução face a produtos em promoção. Por outro lado, o estudante parece não ter conseguido compreender o significado matemático das frases promocionais "pague 2 e leve 3"; "pague 3 e leve 4"; "pague 1 e leve 2" e realizar estudos comparativos dos preços dos produtos em promoção, pela definição teórica das noções: "2/3 de…"; "3/4 de…"; e "1/2 de…" e provavelmente o ambiente individualizado, de exigência emocional e de não debate no teste dificultou o processo de análise, para uma questão que intrinsecamente necessita deste tipo de abordagem.
Realce-se que na resposta à questão 9.2. pretendia-se que o estudante interpretasse a informação explícita e implícita, fomentando-lhe a observação, o espírito crítico e o poder de argumentação. Nesta perspectiva alargou-se a análise do espectro das respostas completas, podendo ser de âmbito estritamente matemático, relacionado com o produto

e/ou contemplando interesses de âmbito pessoal ou social. As respostas foram muito variadas, mas a maior parte delas desajustadas e incoerentes. Para serem consideradas respostas completas a argumentação deveria ser válida, podendo ser evocados um ou mais elementos intervenientes na escolha daquele produto. Refira-se ainda que não houve nenhum estudante que fundamentasse apenas matematicamente a resposta, tendo, a maior parte respondido completamente à questão, procurando conjugar vagamente o preçário com factores de natureza vivencial e inerentes ao produto ou ainda apresentando somente estas duas últimas razões.

Estes problemas parecem não ser ainda acessíveis aos estudantes deste nível etário, pois requerem competências matemáticas essenciais e transversais, relacionadas com saberes explícitos e implícitos. Por outro lado, a contextualização dos problemas numa procura vivenciada no quotidiano pelos estudantes, que nem sempre é possível, dificulta o entendimento da situação formulada, agravada ainda pela linguagem utilizada não ter sido explorada em ambiente de sala de aula[13] e, naturalmente, a situação de teste também originar dificuldades acrescidas.
Contudo, provavelmente, esta variedade de condições e situações podem dar um contributo mais valioso ao estudo, provocando outras reflexões e descortinando mais dados, evitando assim, a tendência para limitar ou espartilhar a análise ou apresentar conclusões reducionistas e mais incompletas do que aquelas que se esperam no campo educativo. Pela situação experimentada e vivida tudo indica que estas situações problemáticas devem ser exploradas a este nível etário, mas em ambiente simulatório, em sala de aula e só depois de algum treino, como acontece com outros problemas de natureza disciplinar devem ser colocadas em situações de teste, isto é criar condições análogas a estas situações e provavelmente, assim, é possível provocar outro tipo de competências e de resultados individuais.

Emergências para a utilização da folha de cálculo. Face às experiências e vivências de cada uma das turmas, bem como dos resultados obtidos, parece oportuno realçar que a utilização dos meios tecnológicos, designadamente, da folha de cálculo, na turma A, proporcionou outra dinâmica na forma de pensar, provocando novas atenções e pólos de interesse na resolução de problemas. Drijvers (2003-2004) e Gravemeijer (2000-2004) referem que a utilização do computador permite a abertura para outras competências e desenvolvimento de capacidades, mas dificilmente de serem controladas no impacto da aprendizagem do estudante.

Questão 10.

Enquadramento educativo

Conteúdos:

- Identificação de um intervalo de números escritos em representação decimal até à ordem das centésimas.
- Selecção de um número no intervalo dado, pelo menos até à ordem das milésimas.
- Identificação de números na recta real orientada e definição de uma escala numérica adequada.
- Localização e representação de um determinado número na recta real orientada.

[13] Por exemplo: "pague 2 e leve 3" ou "leve 4 e pague 3".

Competências:

- Identificar números racionais, em representação decimal pelo menos até às milésimas num intervalo de amplitude um na ordem das centésimas.
- Relacionar e localizar dados numéricos na recta real.

Aproximações à álgebra:

- Resolução de exercícios numa perspectiva de conhecimento profundo dos números racionais, na identificação e representação na recta real orientada (classe1).

Contexto:

- Académico – estritamente matemático.

<u>Questão Q 10.</u>

<u>Resultados do Pré-Teste</u>

Tipo de Resposta		RC		RPC		RI		NR		Total
	Turma	A	B	A	B	A	B	A	B	
Questão	Classe									
Q 10.	2	a - 2 b - 8 (6 m)	b - 6 (5 m)	a - 2 (2 m)	a - 4 (4 m)	a - 3 b - 1 d - 1	a - 8 b - 1			
Total		10	6	2	4	5	9	3	1	20

<u>Legenda</u>: RC – Resposta Completa; RPC – Resposta Parcialmente Completa; RI – Resposta Incorrecta; NR – Não Resposta

Na turma A 50% dos estudantes respondeu completamente à questão e apenas 30% o conseguiu na turma B, em que "m", significa que o estudante usou o valor médio do intervalo.
Dois estudantes e quatro responderam parcialmente à questão, respectivamente, na turma A e B.

<u>Resultados do Pós-Teste</u>

Tipo de Resposta		RC		RPC		RI		NR		Total
	Turma	A	B	A	B	A	B	A	B	
Questão	Classe									
Q 10.	2	a - 8 (7 m) b - 7 (5 m)	b - 7 (6 m)	a - 2 (2 m)	a - 4 (2 m) b - 3 (1 m)	a - 2	a - 4 e - 1			
Total		15	7	2	7	2	5	1	1	20

Na turma A 75% dos estudantes conseguiu resolver completamente a questão e dois parcialmente.

Na turma B apenas 35% do estudantes resolveu completamente e sete responderam parcialmente à questão.

Apreciação específica **10.**
Na turma A, com resultados positivos nos dois tempos de realização do teste, houve uma *evolução significativa* (↑↑↑) e na turma B tudo indica que houve uma *estagnação* na evolução dos conhecimentos, em resultados negativos. Contudo, reunindo o número de respostas parcialmente completas nota-se que houve falta de atenção e rigor em marcar o número na recta real e reconhece-se simultaneamente que a estagnação não foi assim tão significativa.
Refira-se ainda que a maior parte dos estudantes, nas respostas completas, ou parcialmente correctas, no pré e no pós-teste, usaram o valor médio do intervalo dado.
Com esta questão pretendia-se que os estudantes demonstrassem um conhecimento aprofundado dos números racionais pela identificação concreta de um número na casa das milésimas, descoberto num intervalo de amplitude de uma centésima, e posterior localização e representação na recta real. A turma A demonstrou ter conhecimento neste domínio, enquanto que a turma B não o revelou.

Questão 11.
Enquadramento educativo

Conteúdos:
- Reconhecimento da situação real vivida pelos estudantes, na disciplina de Educação Física, no ano transacto, identificando alguma informação já explorada na Matemática, em trabalho de âmbito interdisciplinar.
- Interpretação da informação dada e selecção da relevante.
- Identificação de um intervalo de números escritos em representação decimal na ordem das centésimas.
- Selecção de um número na ordem das milésimas num intervalo de amplitude de uma centésima.

Competências:
- Identificar números racionais, em representação decimal pelo menos até às milésimas num intervalo de amplitude um na ordem das centésimas.
- Interpretar e integrar informação ligada à vida real e escolar.
- Seleccionar dados relevantes para responder a uma questão.
- Relacionar e localizar números racionais na recta real.

Aproximações à álgebra:
- Resolução de uma questão relacionada com a vida real e escolar do estudante, designadamente, com a disciplina de Educação Física, para aprofundar o conhecimento dos números racionais, na identificação e representação na recta real orientada (classe 2).

Contexto:
- Real e interdisciplinar, ligado à disciplina de Educação Física.

Questão Q 11.

Resultados do Pré-Teste

Tipo de Resposta		RC		RPC		RI		NR		Total
	Turma	A	B	A	B	A	B	A	B	
Questão	Classe									
Q 11.	2	a - 7 (5 m)	a - 10 (6 m)			a - 3 b - 2 c - 3	a - 6 d - 1 e - 3			
Total		7	10	Não tem		8	10	5	0	20

Legenda: RC – Resposta Completa; RPC – Resposta Parcialmente Completa; RI – Resposta Incorrecta; NR – Não Resposta

Na turma A 35% dos estudantes respondeu completamente à questão e cinco não responderam.
Na turma B todos os estudantes responderam à questão e 50% fizeram-no de forma completa.
Nas duas turmas os estudantes que responderam completamente à questão indicaram o valor médio do intervalo dado.
A maioria das respostas incorrectas dos estudantes da turma A situaram-se na indicação de um número que excede o intervalo dado, concretamente, acrescentando 5 milésimas ao valor superior do intervalo ou colocando mais um zero na ordem das milésimas no valor inferior do intervalo. Na turma B os estudantes que responderam incorrectamente indicaram de forma "quase" aleatória o número, escreveram uma redacção impossível de interpretar, indicaram um número com duas vírgulas ou ainda adicionaram os dois valores.

Resultados do Pós-Teste

Tipo de Resposta		RC		RPC		RI		NR		Total
	Turma	A	B	A	B	A	B	A	B	
Questão	Classe									
Q 11.	2	a - 15 (9 m) b - 1	a - 10 (8 m)			a - 1 c - 3	a - 5 c - 2 d - 1 e - 1			
Total		16	10	Não tem		4	9	0	1	20

Na turma A todos os estudantes responderam à questão e 80% conseguiu resolvê-la completamente.
Na turma B, tal como tinha acontecido no pré-teste, 50% do estudantes resolveu completamente a questão.
Todos os estudantes da turma B que responderam completamente à questão indicaram o valor médio e na turma A dos dezasseis estudantes que responderam completamente à questão apenas um estudante não o fez.

Na turma B o tipo de respostas incorrectas foram idênticas às apresentadas no pré-teste, enquanto que na turma A indicaram o valor resultante do acréscimo de cinco milésimas ao valor superior do intervalo.

Apreciação genérica **11.**
Na turma A existiu uma *evolução significativa* nos resultados, de negativos para positivos (↑↑↑) (-+), enquanto que na turma B houve *estagnação*.
Apesar de demonstrarem conhecimento concreto sobre os números racionais, designadamente, na definição de uma escala adequada e localização do número na mesma, as respostas dadas pelos estudantes situaram-se no valor médio, revelando pouco dinamismo no tratamento dos números racionais.
Esta situação contextualizada, real, vivida pelos estudantes, com a identificação de dois dos estudantes da turma na questão, cujos dados foram recolhidos e trabalhados, no ano transacto, no desenvolvimento de uma actividade interdisciplinar, nas disciplinas de Educação Física e Matemática exigiu análise e selecção de dados especial e um tratamento da essencialidade da questão.
Tal como se concluiu na resolução do problema "a festa de aniversário" a contextualização do conhecimento deve ser acautelada pela adequação da linguagem verbal, pictórica e gráfica de forma a reforçar o estímulo, a atenção do estudante e o desenvolvimento de diversas competências.
Mais uma vez os estudantes da turma A apresentaram melhores resultados e uma evolução mais positiva na capacidade de interpretar esta questão contextualizada do que os estudantes da turma B.

Questão 12.
Enquadramento educativo
Conteúdos:
- Apreensão do significado matemático da noção "quarta parte de ..." numa frase escrita em linguagem corrente, relacionando o preço de dois produtos.
- Interpretação do significado de várias expressões numéricas e selecção daquela que responde correctamente a uma determinada situação.

Competências:
- Interpretar informação matemática e seleccionar dados relevantes apresentados pictoricamente e em linguagem corrente.
- Apreender e aplicar o raciocínio de tipo condicional na resolução de problemas.
- Analisar dados e interpretar relações evidenciadas em expressões numéricas, seleccionando a informação relevante.

Aproximações à álgebra:
- Resolução de classes de problemas, pela análise de dados pictóricos e de relações matemáticas escritas em linguagem corrente e pelo estudo do significado de expressões numéricas com a aplicação do raciocínio de tipo condicional (classes 1 e 2)

Contexto:
- Académico – estritamente matemático.

Questão Q 12.1

Resultados do Pré-Teste

Tipo de Resposta		RC		RPC		RI		NR		Total
	Turma	A	B	A	B	A	B	A	B	
Questão	Classe									
Q1	1	a - 16 b -1	a - 16 b -1							
Total		17	17	Não tem		3	3	0	0	20

Legenda: RC – Resposta Completa; RPC – Resposta Parcialmente Completa; RI – Resposta Incorrecta; NR – Não Resposta

Nas duas turmas todos os estudantes responderam à questão e obtiveram os mesmos resultados e dezassete (85%) responderam completamente.

Resultados do Pós-Teste

Tipo de Resposta		RC		RPC		RI		NR		Total
	Turma	A	B	A	B	A	B	A	B	
Questão	Classe									
Q1	1	a - 18	a - 15							
Total		18	15	Não tem		2	5	0	0	20

A turma A obteve uma *ligeira evolução* (↑), pois mais um estudante respondeu completamente à questão, num total de 90%.
Na turma B houve um *ligeiro retrocesso* (↓), pois dois estudantes deixaram de responder completamente à questão e apenas 75% o fizeram.

Apreciação genérica **12.1.**
Tratava-se de uma questão de âmbito essencialmente disciplinar, em que se solicitava a interpretação de uma proposição baseada na noção da quarta parte aplicada a uma expressão numérica relacionada com a compra de dois produtos e a atribuição do valor lógico da mesma. Nos dois tempos de interacção com o teste, as duas turmas obtiveram resultados positivos muito próximos, tendo a turma A conseguido uma *ligeira evolução* (↑) e a B um *ligeiro retrocesso* (↓).

Questão Q 12.2
Resultados do Pré-Teste

Tipo de Resposta		RC		RPC		RI		NR		Total
	Turma	A	B	A	B	A	B	A	B	
Questão	Classe									
Q2	2		1 c/ rc			en1 - 3 en2 - 1 en4 - 2	en1 - 5 en2 - 2 en4 - 1 en5 - 1			
Total		14	10	0	0	6	9	0	1	20

en – expressão numérica
Legenda: RC – Resposta Completa; RPC – Resposta Parcialmente Completa; RI – Resposta Incorrecta; NR – Não Resposta

Todos os estudantes da turma A resolveram a questão, com 70% de respostas completas. Apenas um estudante não respondeu e 50% fizeram-no de forma completa, na turma B, tendo um estudante registado os cálculos (rc).
Seis e nove estudantes, respectivamente, das turmas A e B responderam incorrectamente à questão, tendo a maioria dos estudantes escolhido a resposta 1/4x10+30 em vez de 1/4x(10+30).

Resultados do Pós-Teste

Tipo de Resposta		RC		RPC		RI		NR		Total
	Turma	A	B	A	B	A	B	A	B	
Questão	Classe									
Q2	2		1 c/ rc			en1 - 2 en2 - 1	en1 - 3 en2 - 2 en4 - 2			
Total		17	13	0	0	3	7	0	0	20

As duas turmas melhoraram o seu desempenho, houve *evolução* nos resultados (↑↑), pois mais de três estudantes em cada uma delas conseguiu responder completamente à questão, 85% e 65%, respectivamente na turma A e B.

Apreciação genérica **12**.
Apesar de uma maneira geral a turma A ter obtido resultados mais positivos do que a B, nos dois tempos de interacção com o teste as duas turmas conseguiram resultados positivos, tendo a maior parte dos estudantes respondido completamente a esta questão de escolha múltipla com aplicação do significado de uma expressão numérica na compra de dois produtos.
Refira-se ainda que também os resultados desta questão de âmbito estritamente disciplinar denunciam que o trabalho de natureza interdisciplinar desenvolvido durante a investigação não interferiu negativamente na construção de conhecimentos, de aplicação matemática mais estrita.

<u>Questão Q 13.</u>

<u>Enquadramento educativo</u>

Conteúdos:

- Observação dos elementos constituintes de cada colecção.
- Interpretação da informação numérica e pictórica apresentada.
- Realização de estudos comparativos dos preços dos produtos nas duas colecções
- Interpretação genérica e realização de correspondências termo a termo, nas "variáveis" produto e preço de cada colecção.

Competências:

- Analisar informação explícita numérica e pictórica.
- Relacionar e interpretar informação, analisando relações do tipo:
  - colecção-preço;
  - produto-preço.
- Integrar conhecimentos resultantes da resolução de problemas idênticos e aplicá-los a situações novas.
- Estimular a descoberta de modelos matemáticos para relacionar dados e resolver este tipo de questões.
- Promover e estimular estratégias pessoais de cálculo e de resolução de problemas.

Aproximações à álgebra:

- Resolução de classes de problemas próximos do dia a dia do estudante, pela análise explicita de dados, a correspondência termo a termo, contemplando a aprendizagem por tentativa e erro (classes 2 e 3)

Contexto:

- Realista, relacionado com o quotidiano do estudante.

<u>Questão Q 13.1</u>

<u>Resultados do Pré-Teste</u>

Tipo de Resposta		RC		RPC		RI		NR		Total
	Turma	A	B	A	B	A	B	A	B	
Questão	Classe									
Q13.1	1	a - 10	a - 6	a - 1 b - 8	a - 3 b - 5	b - 1	a - 6			
		10	6	9	8	1	6	0	0	20

<u>Legenda</u>: RC – Resposta Completa; RPC – Resposta Parcialmente Completa; RI – Resposta Incorrecta; NR – Não Resposta

Todos os estudantes responderam à questão. Na classe A 50% dos estudantes resolveu-a completamente e um deles respondeu incorrectamente. Nove estudantes, 45%, resolveram-na parcialmente, tendo oito estudantes assinalado correctamente a diferença de preços das duas colecções e um deles indicou o artigo mais caro.

Na turma B apenas 30% dos estudantes respondeu completamente à questão, 30% incorrectamente e 40% resolveu-a parcialmente. Destes oito estudantes, a sua maioria (cinco), indicou correctamente a diferença de preços das duas colecções e apenas três assinalaram o artigo mais caro.

<u>Resultados do Pós-Teste</u>

Tipo de Resposta		RC		RPC		RI		NR		Total
	Turma	A	B	A	B	A	B	A	B	
Questão	Classe									
Q13.1	1	a - 14	a - 6	a - 2 b - 4	a - 3 b - 5		a - 5			
Total		14	6	6	8	0	5	0	1	20

<u>Legenda</u>: RC – Resposta Completa; RPC – Resposta Parcialmente Completa; RI – Resposta Incorrecta; NR – Não Resposta

Na turma A houve *evolução significativa* nos resultados (↑↑↑), pois todos os estudantes responderam à questão, nenhum o fez de forma incorrecta, 70% respondeu completamente e seis (30%) fizeram-no de forma parcial.
Na turma B os resultados no pós-teste foram idênticos aos do pré-teste: o mesmo número de respostas completas (30%) e parcialmente correctas (40% e do mesmo tipo), um estudante que não resolveu a questão e cinco fizeram-no de forma incorrecta.

<u>Apreciação específica **13.1.**</u>
A maioria dos estudantes (70%), na turma A, obteve resultados positivos no pós-teste, tendo havido uma *evolução significativa* (↑↑↑) no número de respostas completas alcançadas.
Na turma B houve *estagnação* na interpretação desta questão, em resultados negativos, na qual a maior parte dos estudantes não obteve resultados positivos, nem no pré-teste, nem no pós-teste.
Registe-se ainda que os estudantes usaram basicamente dois processos para responderem à questão: a) *do particular para o geral*, realizando primeiro correspondência termo a termo, comparando as colecções produto a produto e analisando finalmente o preço total da colecção, concluindo da diferença de preços e do produto; b) *do geral para o particular* observando primeiro as colecções como um todo, comparando os preços das duas e analisando a constituição dos produtos de cada uma delas, um a um, colecção a colecção, para posteriormente concluírem do produto mais caro.

<u>**Questão Q 13.2**</u>
<u>Resultados do Pré-Teste</u>

Tipo de Resposta		RC		RPC		RI		NR		Total
	Turma	A	B	A	B	A	B	A	B	
Questão	Classe									
Q13.2	2	a - 1 b - 2	a - 1			a - 4 b - 1 c - 3	a - 10			
Total		3	1	0	0	8	10	9	9	20

Nas duas turmas apenas 55% dos estudantes respondeu à questão.
Dos onze estudantes que responderam somente três e um estudante resolveu completamente a questão, respectivamente, nas turmas A e B.

Resultados do Pós-Teste

Tipo de Resposta		RC		RPC		RI		NR		Total
	Turma	A	B	A	B	A	B	A	B	
Questão	Classe									
Q13.2	2	a - 1 b - 5				a - 6	a - 8 b - 1			
Total		6	0	0	0	6	9	8	11	20

Legenda: RC – Resposta Completa; RPC – Resposta Parcialmente Completa; RI – Resposta Incorrecta; NR – Não Resposta

Na turma B nenhum estudante respondeu completamente à questão, tendo nove resolvido incorrectamente e onze (55%) não responderam.
Por outro lado, mais três estudantes da turma A resolveram completamente a questão, num total de seis estudantes (30%), tendo o mesmo número de estudantes resolvido incorrectamente e oito não responderam.

Apreciação específica **13.2**
Na realização da questão 13.2 os resultados foram *negativos* nas duas turmas. Apesar de não chegarem a ser satisfatórios, os resultados mais positivos aconteceram na turma A.

Apreciação genérica **13.**
Os investigadores do Instituto Freudenthal, especialistas nesta temática salientam que esta classe de problemas e os conteúdos programáticos associados são muito significativos para o despertar de competências pré-algébricas, existindo um tópico no programa oficial de Matemática em contexto, “comparando quantidades”, que apela à resolução deste tipo de problemas.
No programa actual da disciplina de Matemática, em Portugal, não prevê o desenvolvimento deste tópico. Contudo, procurou-se aliar o tema da investigação e as indicações de vários investigadores relacionadas com processos de actuação e articulação que fomentassem, de forma gradual e equilibrada o desenvolvimento de competências significativas na construção do conceito de variável, em diferentes espaços, tempos e circunstâncias, com os objectivos globais estipulados pelo Ministério e concretizados pelo professor através do manual adoptado pela Escola, constituindo-se como instrumento didáctico fundamental na exploração do conhecimento matemático.
Como tinha sido resolvido com relativo êxito no ano transacto, à “rebeldia” do programa, a resolução de um problema idêntico, e contemplando os objectivos da investigação, considerou-se oportuno incluir uma questão deste tipo no teste, com a consciência tranquila de que a resolução não era linear e requeria tempo e a mobilização de diversas competências.

Analisando na globalidade a situação, refira-se o seguinte: a) pela pesquisa bibliográfica realizada deveria de forma gradual propor-se a resolução deste tipo de problemas, mas como estes conteúdos e tipo de problemas se consideravam "outside" do programa de Matemática e até da execução de exercícios rotineiros propostos nos manuais não foi possível resolver nenhum problema deste género no 6º ano de escolaridade, mas apenas no 5º ano; b) da resolução deste problema e de outros afins relatada no capítulo IV, constatou-se que os estudantes sentiram a situação, numa primeira fase, como um problema e utilizando diferentes estratégias encontraram, com êxito, a solução, revelando-se o problema adequado a estes níveis etários, mas com o tempo, a disponibilidade necessárias, não havendo, inicialmente uma situação constrangedora, que é a que naturalmente se vive numa situação de teste; c) a apresentação do problema tinha sido provavelmente mais sugestiva e conseguida, com o espaço suficiente para a realização de experiências, divulgação do pensamento, elaboração dos esquemas pessoais ou de grupo, não acontecendo o mesmo na concretização desta questão no teste.
Como a investigação em curso procura pistas de intervenção no conhecimento matemático escolar numa vertente interdisciplinar importa investir nas aproximações à álgebra de forma sustentada, mas simultaneamente com um "follow up" intencional, fomentando processos pessoais de resolução de problemas nos quais se previu o uso e tratamento implícito de "variáveis" em situações variadas.
Contudo, a resolução deste tipo de problemas deve ser proposta aos estudantes de forma gradual, porque permite, numa perspectiva *gestaltista* do conhecimento matemático, realizar um estudo *global* e sequencial da situação: parte/todo, com dados quantitativos, preço de cada colecção e cálculo da diferença e posterior tratamento da informação qualitativa, pelo destaque dos elementos constituintes de cada colecção. Por outro lado a conjugação e o tratamento relacional dos dois tipos de dados quantitativos e qualitativos requer o desenvolvimento de outras competências, outro tipo de "literacia" matemática.
Assim, enquanto que na resolução de um "word problem" numérico há uma selecção *atomista* dos dados com vista à inter-relação operatória, neste tipo de problemas há uma observação e estudo da situação pictórica, com a inclusão dos dados numéricos que exigem um *zoom* investigativo e relacional implementando, deste modo, o carácter funcional do conhecimento matemático, com liames e aproximações à realidade, que frequentemente se apresenta complexa e inter-relacional.

Como já se salientou foi resolvido apenas um problema deste tipo no 5º ano de escolaridade, cuja abordagem imediata foi assumido pelos estudantes como complexa, visto que sentiram profundas dificuldades, na compreensão do problema, mas especialmente no tratamento dos dois tipos de dados, de natureza qualitativa e quantitativa.
Contudo, após o levantamento de várias questões por parte dos estudantes e o esclarecimento de algumas dúvidas foi possível a resolução do problema, com a disponibilização do tempo necessário para a exploração dos dados, na qual foram utilizadas diversas estratégias pessoais de cálculo, tendo sido eficaz a busca e o encontro da solução do problema, como se revela na secção, deste capítulo, no tópico sobre problemas de esquematização.
No estudo do problema desenvolvido no 5º ano de escolaridade refere-se que a resolução da segunda questão associada ao desenho de uma colecção com três elementos do mesmo artigo permitiu um melhor entendimento da situação e, consequentemente, alguma reversibilidade de pensamento e de processos, facilitando a descoberta do preço unitário de cada produto por um método próximo à ***estratégia 4*** (Meyer, 1999) como em que o

estudante transfere informação de uma figura para a outra de forma a obter uma colecção constituída por três elementos do mesmo produto e por uma simples divisão por três conseguir determinar o preço unitário do artigo. Ora tudo leva a crer que a supressão de uma sub-questão na apresentação do problema dificultou a compreensão e a resolução do problema. De facto, pode-se referir ainda que a apresentação do problema: a linguagem proposta, vocabular e pictórica, o contexto, o espaço destinado à apresentação e à resolução do problema, influenciam directamente a compreensão e a descoberta de uma solução correcta do mesmo.
Por outro lado, este tipo de problemas são muito usuais na introdução do estudo de sistemas de duas equações a duas incógnitas e que raramente os estudantes são confrontados com a possibilidade de desenvolverem estratégias pessoais de cálculo, mas tão somente a exploração imediata e o domínio da resolução de sistemas de duas equações a duas incógnitas. De facto, numa proposta de resolução deste problema no 2º ano do ensino superior do Curso de Professores do Ensino Básico, variante de Matemática e Ciências da Natureza os estudantes tiveram dificuldades inicias na exploração e resolução desta situação quando lhes foi pedida a não utilização formal de variáveis e de um sistema de duas equações a duas incógnitas. Alguns grupos, numa primeira abordagem referiram peremptoriamente que não sabiam resolver o problema doutra forma que não fosse através de um sistema de duas equações a duas incógnitas. Após a insistência da investigadora e passados longos minutos alguns estudantes começaram a descortinar outros caminhos de resolução, deliciando-se com as descobertas realizadas e simultaneamente tecendo considerações sobre o percurso escolar trilhado na aprendizagem matemática.

Questão 14.

Enquadramento educativo

Conteúdos:

- Apreensão do significado matemático de uma situação escrita em linguagem corrente.
- Interpretação de várias expressões numéricas e selecção daquela que corresponde a uma determinada situação.

Competências:

- Analisar o significado de expressões numéricas e seleccionar a que se aplica adequadamente a um determinado enunciado.
- Interpretar a simbologia matemática apropriada, abstraindo-se da natureza do objecto.

Aproximações à álgebra:

- Resolução de classes de problemas, pela análise de dados e de relações matemáticas escritas em linguagem corrente e pelo estudo do significado de expressões numéricas (classe 2)

Contexto:

- Académico – estritamente matemático.

Questão 14.

Resultados do Pré-Teste

Tipo de Resposta		RC		RPC		RI		NR		Total
	Turma	A	B	A	B	A	B	A	B	
Questão	Classe									
Q14.	2	a - 19	a - 15		a - 1	b - 1	a - 1 b - 2 (1-1,4-1)			
Total		19	15	0	1	1	3	0	1	20

Legenda: RC – Resposta Completa; RPC – Resposta Parcialmente Completa; RI – Resposta Incorrecta; NR – Não Resposta

Apenas um estudante da turma A respondeu incorrectamente, tendo 95% respondido completamente à questão.
Na turma B um estudante não respondeu e 75% dos estudantes resolveu completamente a questão e um estudante apresentou a solução de forma parcialmente completa. Três estudantes responderam incorrectamente, tendo um deles assinalado, nos quadrados respectivos, várias expressões numéricas sem ter escolhido a correcta e ainda dois estudantes optaram incorrectamente pela primeira ou quarta expressão.

Resultados do Pós-Teste

Tipo de Resposta		RC		RPC		RI		NR		Total
	Turma	A	B	A	B	A	B	A	B	
Questão	Classe									
Q14.	2	a - 19	a - 15			b - 1	a - 1 b - 4 (1-2,3-2)			
Total		19	15	0	0	1	5	0	0	20

No pós-teste os resultados obtidos nas respostas completas foi o mesmo que no pré-teste, nas duas turmas, dezanove (95%) e quinze estudantes (75%), respectivamente, na A e B. Todos os estudantes responderam à questão, nenhum respondeu parcialmente, um da turma A respondeu incorrectamente e cinco na turma B.

Apreciação específica **14.**
Na realização da questão 14, de âmbito estritamente disciplinar, os resultados foram *positivos* nas duas turmas, embora na turma A tivessem sido *altamente positivos*, dado que 95% dos estudantes responderam completamente à questão no pós-teste, revelando compreensão total no enunciado do problema e uma selecção adequada da expressão numérica que representava numericamente a solução.
Provavelmente os problemas de âmbito estritamente disciplinar, como "expressões com euros" e de matemática em contexto, "cheques e compras", realizados no 6º ano de escolaridade poderão ter contribuído para o êxito alcançado na resolução da questão.

Registe-se ainda que a maior parte das respostas incorrectas localizou-se na escolha de uma única expressão, optando pela primeira ou quarta das cinco expressões numéricas dadas.

<u>Questão 15.</u>
<u>Enquadramento educativo</u>

Conteúdos:

- Compreensão do enunciado do problema e aplicação de estratégias pessoais de cálculo na descoberta de uma solução.
- Interpretação do significado da informação pictórica, das operações existentes e dos respectivos valores numéricos.
- Formulação de um problema adequado à situação dada.

Competências:

- Interpretar a informação dada escrita em linguagem corrente.
- Analisar o problema de contexto real, resolvendo-o por:
  - *interpretação gradual*, estudando cada frase e registando-a em linguagem matemática;
  - *interpretação genérica*, pela análise e compreensão geral do problema e o uso adequado da simbologia matemática.
- Analisar o contexto pictórico e formular um problema.
- Usar apropriadamente a simbologia matemática, abstraindo-se, nos procedimentos de cálculo, da natureza do objecto

Aproximações à álgebra:

- Resolução de classes de problemas, pela análise de dados pictóricos e de relações matemáticas escritas em linguagem corrente (classe 2).

Contexto:

- Matemática em contexto.

<u>Questão 15.1</u>

<u>Resultados do Pré-Teste</u>

Tipo de Resposta		RC		RPC		RI		NR		Total
	Turma	A	B	A	B	A	B	A	B	
Questão	Classe									
Q15.1	2	a - 5 b - 4	a - 5 b - 1	d - 1	b - 1 c - 1	a - 8 (1 c/ v)	a - 11 (n-2)			
Total		9	6	1	2	8	11	2	1	20

n - adicionou números; v - validação do resultado
<u>Legenda</u>: RC – Resposta Completa; RPC – Resposta Parcialmente Completa; RI – Resposta Incorrecta; NR – Não Resposta

Dois estudantes da turma A não responderam à questão e nove (45%) fizeram-no de forma completa. Um estudante respondeu parcialmente e oito não conseguiram resolvê-la correctamente.
Na turma B um estudante não respondeu e seis (30%) fizeram-no de forma completa. Dois estudantes resolveram de forma parcialmente completa e onze responderam incorrectamente.

<u>Resultados do Pós-Teste</u>

Tipo de Resposta		RC		RPC		RI		NR		Total
	Turma	A	B	A	B	A	B	A	B	
Questão	Classe									
Q15.1	2	a - 6 b - 5 (1 c/ X)	a - 3 b - 3			a - 7 b - 1	a - 10			
Total		11	6	0	0	8	10	1	4	20

X - usou a variável

<u>Legenda</u>: RC – Resposta Completa; RPC – Resposta Parcialmente Completa; RI – Resposta Incorrecta; NR – Não Resposta

No pós-teste os resultados melhoraram na turma A, na qual 55% dos estudantes já conseguiu resolver completamente a questão.
Tal como no pré-teste apenas seis estudantes (30%) da turma B conseguiram resolver completamente a questão.

Apenas um estudante da turma A usou a variável X, no pós-teste, para resolver a questão e conseguiu fazê-lo de forma completa, da seguinte maneira.

A avó deu €2,50
X= €3,80 + €1,70 = €5,50   X - €3,80 = €1,70
€5,50 - €2,50 = €3,00

Antes de visitar a avó o Daniel tinha €3,00.

<u>Apreciação específica **15.1.**</u>
A turma A evoluiu e obteve resultados mais positivos do que a turma B. Na resolução desta questão os estudantes *da turma A mostraram-se mais organizados,* mas tal como a turma B usaram basicamente dois processos para resolver completamente a questão:

i) 3,80 - 2,50 = 1,30 (da diferença entre o preço do livro e a oferta da avó, resultou a quantidade de dinheiro que ficaria a dever na compra do livro se não tivesse tido a oferta da avó, isto é, a parte do dinheiro que tinha antes de visitar a avó e que gastou na compra do livro);
1,30 + 1,70 = 3,00 (o total que tinha antes de visitar a avó, tendo uma parte gasto na compra do livro (1,30) e o restante que sobrou após a compra do livro (1,70);

ii) 3,80 + 1,70 = 5,50 (o total de dinheiro que tinha, incluindo a oferta da avó, uma parte gasta na compra do livro (3,80) e o que lhe sobrou (1,70);
5,50 – 2,50 = 3,00 (da diferença entre o total de dinheiro que pode movimentar e a oferta da avó resultou a quantidade de dinheiro que tinha antes de visitar a avó).

Dos seis estudantes que responderam completamente na turma B no pré-teste cinco usaram a primeira estratégia, enquanto que no pós-teste, na mesma turma, três utilizaram o primeiro processo e os outros três o segundo.
Na turma A o número de estudantes que explorou um ou outro processo é muito idêntico, no pré-teste foram cinco estudantes que utilizaram o primeiro processo e quatro o segundo e no pós-teste, respectivamente, seis e cinco.
O primeiro processo parece ser mais linear e lógico, mas não há dados suficientes que possibilitem outras análises e conclusões.
No primeiro processo da resolução do problema, na primeira operação, surgiram as noções de *débito* e de *crédito* (receita), na primeira operação, pois 2,50 é uma receita e 1,30 é parte do débito, surgindo implicitamente também a noção de número negativo, sendo neste contexto comercial que Bruno Lombardi defende o surgimento histórico dos números negativos.

Este tipo de problemas são muito importantes para a aquisição de conceitos pré-algébricos, pois há uma movimentação implícita do conceito de variável e uma mobilização sequencial dos dados numéricos como, por exemplo, aconteceu no esquema utilizado por uma estudante na turma B, na resolução deste problema, no pré-teste: *?+2,50-3,80=1,70*, colocando, deste modo, o problema *em equação*, mas não conseguindo responder cabalmente à pergunta colocada.

De facto, há adultos, com formação superior, que resolvem este problema do seguinte modo:
a = 2,5 (a – dinheiro dado pela avó)
l = 3,80 (l – dinheiro gasto no livro)
r = 1,70 (r – dinheiro que sobrou)
t = 3,80+1,70-2,50 =3,00 (t – total de dinheiro que tinha antes de visitar a avó)

Assim, resulta: *? = 3,80+1,70-2,50*. Observando a resolução dos estudantes, apresentada anteriormente, concluiu-se que as expressões usadas são equivalentes a esta expressão proposicional.

Se repararmos nas diversas resoluções dos estudantes verifica-se a utilização de raciocínios idênticos, em que a exploração de variáveis não é visível nem explícita, mas o conceito é mobilizado internamente na resolução prática do problema.
Assim, vários investigadores defendem o uso e abuso deste tipo de problemas, considerando-os essenciais para a abordagem posterior do conceito de variável e funcionam como pré-requisitos estruturais na aquisição natural e contextual da noção de variável ligada à resolução de problemas.
Pelo estudo realizado, naturalmente ainda de forma estrita, averiguou-se que existem duas maneiras básicas de iniciar curricularmente o conceito de variável pela: a) *noção de fracção equivalente*, em termos estritamente matemáticos, ou no estudo e aplicação da noção de escala, em matemática em contexto ou de natureza interdisciplinar; b) *resolução*

de problemas em que as noções de *débito* e *crédito* emergem implicitamente e surge um tratamento sequencial e natural em equação com vista à resolução do problema.

Por outro lado, a capacidade do estudante para relacionar os dados de determinada forma e não de outra faz com que seja capaz de interpretar e compreender mais profundamente o problema. O desenvolvimento deste tipo de capacidades provoca a reversibilidade de pensamento e de acção.
O problema ligado à matemática em contexto, relacionada com a vida do quotidiano "cheques e compras" apoiou a compreensão e resolução desta questão.

<u>Questão 15.2</u>

<u>Resultados do Pré-Teste</u>

Tipo de Resposta		RC		RPC		RI		NR		Total
	Turma	A	B	A	B	A	B	A	B	
Questão	Classe									
Q15.2	2	a - 1 b - 2	a - 2 b - 4	a - 1 b - 1 c - 1	c - 3	a - 7 c - 2	a - 6 b - 1			
Total		3	6	3	3	9	7	5	4	20

<u>Legenda</u>: RC – Resposta Completa; RPC – Resposta Parcialmente Completa; RI – Resposta Incorrecta; NR – Não Resposta

Cinco estudantes da turma A não responderam à questão e apenas três (15%) fizeram-no de forma completa e três responderam parcialmente.
Na turma B quatro estudantes não responderam e seis (30%) fizeram-no de forma completa e três fizeram-no de forma parcialmente completa.

<u>Resultados do Pós-Teste</u>

Tipo de Resposta		RC		RPC		RI		NR		Total
	Turma	A	B	A	B	A	B	A	B	
Questão	Classe									
Q15.2	2	a - 6 1a - X	a - 8 b - 3	a - 2	c - 3	a - 9	a - 5			
Total		6	11	2	3	9	5	3	1	20

X - usou a variável

No pós-teste os resultados melhoraram na turma A, na qual 30% dos estudantes já conseguiu resolver completamente a questão, mas ainda com resultados negativos, enquanto que a turma B conseguiu evoluir nos resultados e passar para positivos, em que a maioria dos estudantes, 55% conseguiu resolver completamente a questão.

Apreciação genérica **15.**
Esta questão de âmbito da matemática em contexto incluía a resolução de duas sub-questões e os resultados das duas turmas foram registados no quadro seguinte.

Questão	Turmas		Conclusão genérica
	A	B	Na globalidade a ***turma B*** apresentou resultados mais positivos do que a ***classe A***, especialmente na formulação do problema.
Q15.1.	↑↑(-+)	(—)	
Q15.2	↑↑(-)	↑↑↑(-+)	

Segundo vários autores (Kieran, 1981; Schoenfeld e Arcavi, 1988, entre outros) a resolução das questões do tipo 15.1. é fundamental na aprendizagem gradual e consistente de conceitos (pré)-algébricos. A turma A conseguiu evoluir (↑↑) (-+), passando de resultados negativos para positivos, não acontecendo o mesmo na turma B, em que houve estagnação em resultados negativos. Segundo estes investigadores estes problemas acompanham a 2ª aproximação à álgebra e constituem-se como alicerces no desenvolvimento de um raciocínio dinâmico sustentado pela reversibilidade do pensamento.

A turma B conseguiu alcançar resultados mais positivos na segunda pergunta, na criação e formulação correcta do enunciado de um problema baseado em dados pictóricos e numéricos. Saliente-se ainda que nesta turma a maior parte destes estudantes conseguiu, na formulação do problema, integrar os dados do enunciado da questão anterior.

Os resultados são de certo modo surpreendentes, pois os estudantes, especialmente os da turma A, mesmo os considerados "bons estudantes" tiveram dificuldades acrescidas na interpretação da informação numérica e pictórica bem como no significado comum das operações envolvidas: da adição e da subtracção.
Alguns estudantes, na resolução do teste, teceram algumas considerações, para clarificar algumas notações, tais como: "*o 2 é 2,00 não é?... São euros, não são?*"; "*Isto é dinheiro, não é?*".
Refira-se ainda que a linguagem utilizada por alguns estudantes não é a mais adequada, tendo dois estudantes da turma B associado ao sinal "menos" o termo "roubar"(!).
Grande parte dos estudantes que respondeu incorrectamente desenvolveu uma redacção confusa, sem lógica, desligada da imagem e dos valores apresentados.

De facto, os estudantes estão muito pouco habituados a formular problemas (Kilpatrick, 1987; Moreira, 1989) e esta vertente não foi explorada nas aulas, dado que os estudos próximos da temática da investigação não referem explicitamente a necessidade de a implementar. Contudo, como esta vertente da formação está implicitamente relacionada com a resolução de problemas, considerou-se oportuno colocar pelo menos uma questão neste domínio para reflectir e compreender, como um todo, a situação educativa investigada.

Emergências para a utilização da folha de cálculo. Pelos resultados obtidos nas turmas A e B tudo indica que esta ferramenta tecnológica pode eventualmente promover a reversibilidade de pensamento e uma estrutura mental mais dinâmica, mas parece não ter influência positiva na capacidade de criar e formular enunciado de problemas, com base em dados pictóricos e numéricos.

Questão 16.

Enquadramento educativo

Conteúdos:

- Compreensão do conteúdo do problema, baseado em conceitos de âmbito geométrico e numérico.
- Aplicação das noções de "vez e meia" e de "metade" num rectângulo de dimensões 6cm por 4cm.
- Desenho, na malha quadrangular, do novo rectângulo.

Competências:

- Analisar e interligar dados de diferente natureza: linguagem corrente, malha quadrangular e desenho de um rectângulo.
- Mobilizar o conteúdo estritamente matemático e realizar o *output* em linguagem geométrica.

Aproximações à álgebra:

- Resolução de classes de problemas geométricos, pela análise de dados pictóricos e de relações matemáticas escritas em linguagem corrente (classe 2).

Contexto:

- Estritamente matemático.

Questão 16

Resultados do Pré-Teste

Tipo de Resposta		RC		RPC		RI		NR		Total
	Turma	A	B	A	B	A	B	A	B	
Questão	Classe									
Q 16.	2	a - 11 b - 3	a - 7 b - 2	b - 2 c - 1	c - 6	a - 3	a - 3			
Total		14	9	3	6	3	3	0	2	20

Legenda: RC – Resposta Completa; RPC – Resposta Parcialmente Completa; RI – Resposta Incorrecta; NR – Não Resposta

Na turma A todos os estudantes responderam à questão, 70% resolveu-a completamente e a maior parte dos estudantes (11) não realizou explicitamente qualquer cálculo. Três estudantes resolveram parcialmente, desenhando dois deles o rectângulo com 2cm de

largura e com as medidas do comprimento de 6,5cm ou 7,5cm e um outro cuja largura era a mesma e a medida do comprimento era diferente das referidas.
Dois estudantes da turma B não responderam à questão e apenas 45% conseguiu resolvê-la completamente, desenhando o rectângulo nas condições pedidas e a maior parte (7) não explicitou qualquer cálculo e seis fizeram-no de forma parcialmente completa.

Resultados do Pós-Teste

Tipo de Resposta		RC		RPC		RI		NR		Total
	Turma	A	B	A	B	A	B	A	B	
Questão	Classe									
Q 16.	2	a - 10 b - 1	a - 9	b - 2 c - 4	b - 3 c -3	a - 2	a - 3			
Total		11	9	6	6	2	3	1	2	20

Na turma A um estudante não respondeu à questão e houve um *retrocesso* nos resultados (↓↓), tendo apenas onze estudantes, 55% conseguido desenhar, na malha quadrangular, o rectângulo nas condições exigidas, 2cm por 9cm. Seis fizeram-no de forma parcialmente correcta, pois todos eles desenharam-no com a largura de 2cm, mas dois deles tomaram o comprimento de medida 6,5cm ou 7,5cm e outros quatro desenharam-no com dimensões diferentes destas.
Na turma B os resultados foram exactamente os mesmos obtidos no pré-teste, tendo havido uma estagnação, mas com escolha de espaços diferentes para desenhar o rectângulo.

Apreciação genérica **16.**
Pode-se concluir que, apesar de haver um decréscimo na turma A os resultados foram mais positivos nesta turma do que na B, pois nesta nem metade dos estudantes conseguiu responder completamente à questão.
Este problema de âmbito geométrico foi proposto no programa TIMSS, na rubrica sobre a aprendizagem da álgebra, a estudantes do 7º ano de escolaridade e a maior parte dos estudantes de diversos países teve resultados negativos na realização desta tarefa.

Questão 17.
Enquadramento educativo

Conteúdos:
- Compreensão contextualizada do conteúdo do problema, baseado em conceitos de âmbito geométrico.
- Aplicação, em rectângulos, das noções de perímetro e de área.
- Desenho de dois rectângulos nas condições pedidas, isto é, com o mesmo perímetro e selecção daquele que minimiza a área.

Competências:
- Mobilizar o conteúdo matemático em contexto real, apresentado em linguagem corrente e com desenho ilustrativo simples.
- Analisar situações criadas numa perspectiva da optimização da solução.

- Concretizar solução do problema dado com *output* em linguagem geométrica, seleccionando o rectângulo que minimiza a solução.
- Relacionar conceitos matemáticos e aplicá-los a situações novas.

Aproximações à álgebra:
- Resolução de classes de problemas geométricos, pela análise de dados e de relações matemáticas, escritas em linguagem corrente (classe 2 e 3).

Contexto:
- Matemática em contexto.

<u>Questão 17</u>

<u>Resultados do Pré-Teste</u>

Tipo de Resposta		RC		RPC		RI		NR		Total
	Turma	A	B	A	B	A	B	A	B	
Questão	Classe									
Q 17.	2 3	a - 1 b - 2 c - 3	b - 4	a - 1 b - 2 c - 1	a - 1 d - 2	b - 4 d - 3	b - 4 d - 4 (2fc)			
Total		6	4	4	3	7	8	3	5	20

fc – desenho côncavo

<u>Legenda</u>: RC – Resposta Completa; RPC – Resposta Parcialmente Completa; RI – Resposta Incorrecta; NR – Não Resposta

Na turma A três estudantes não responderam à questão e apenas seis, 30%, o fizeram de forma completa, tendo um dos estudantes usado "números decimais" na construção dos dois rectângulos. Sete estudantes responderam incorrectamente, quatro dos quais desenharam apenas um ou dois rectângulos com medidas aleatórias, explicitando-as ou não e três desenharam dois rectângulos com o mesmo tamanho. Quatro estudantes responderam ainda parcialmente, tendo uma das estudantes desenhado com rigor os rectângulos nas condições pedidas, mas não seleccionou correctamente aquele que minimizava a área do terreno rectângular, dois estudantes desenharam correctamente apenas um rectângulo e ainda um esboçou os dois, mas apenas um satisfazia as condições dadas.

Na turma B cinco estudantes não responderam à questão e apenas quatro estudantes, 20%, responderam completamente. Oito estudantes resolveram incorrectamente a questão, tendo quatro desenhado um ou dois rectângulos com medidas aleatórias, enquanto que outros dois estudantes desenharam dois rectângulos com o mesmo tamanho e mais dois esboçaram figuras côncavas, escrevendo informação impossível de interpretar. Houve ainda três estudantes que responderam parcialmente à pergunta tendo uma das estudantes desenhado com rigor os rectângulos nas condições pedidas, mas não indicou correctamente o rectângulo que representava a cerca com menor espaço para o *Tedy* brincar. Os outros dois estudantes que responderam parcialmente à pergunta desenharam "proporcionalmente" os dois rectângulos, mas apesar de não terem indicado as medidas dos lados conseguiram, com lógica, seleccionaram correctamente o rectângulo com menor área.

Resultados do Pós-Teste

Tipo de Resposta		RC		RPC		RI		NR		Total
	Turma	A	B	A	B	A	B	A	B	
Questão	Classe									
Q 17.	2 3	b - 6 (2e) c - 1	b - 2	a - 1 b - 2	a - 3 d - 1	a - 2 b - 1 c - 1 d - 3 (1fc)	a - 2 b - 6 d - 3 (2fc)			
Total		7	2	3	4	7	11	3	3	20

e - escala fc - figura côncava

Legenda: RC – Resposta Completa; RPC – Resposta Parcialmente Completa; RI – Resposta Incorrecta; NR – Não Resposta

Nas duas turmas três estudantes não responderam à questão.

Relativamente aos resultados do pré-teste, na turma A, houve uma *ligeira evolução* (↑)(-) ainda negativos. De salientar que estes estudantes usaram números inteiros na construção dos rectângulos e dois deles usaram correctamente a noção de escala, utilizando 1/100, passando rigorosamente da realidade, em metros, para o desenho, em centímetros. Referir ainda que apenas um dos sete estudantes aproveitou a "sombra" das quadrículas em centímetros da folha seguinte para desenhar os rectângulos. Três estudantes responderam parcialmente à pergunta, tendo um dos estudantes desenhado os rectângulos com o perímetro pedido, mas não seleccionou correctamente o que tinha menor área e dois só desenharam correctamente um rectângulo.

Na turma B houve um ligeiro retrocesso (↓)(-) tendo apenas 10% dos estudantes conseguido responder completamente à questão. Quatro estudantes responderam parcialmente, tendo dois desenhado os rectângulos, mas não seleccionaram o de menor área e um estudante esboçou-os "proporcionalmente", não indicando as medidas dos lados, mas seleccionando, com lógica, o rectângulo que representava a cerca com menor espaço para o *Tedy* brincar.

Apreciação genérica **17.**

Os resultados foram negativos nas duas turmas, pois poucos estudantes conseguiram resolver, com êxito, a questão. Todavia foi na turma A que mais estudantes resolveram de forma completa a pergunta. Reunindo o número de estudantes que obteve este tipo de resposta (RC) e os que conseguiram concretizar respostas parcialmente completas (RPC) pode-se concluir que metade dos estudantes alcançou algum êxito na resolução da questão, denunciando compreensão no enunciado do problema, no tratamento dos dados e na capacidade para descortinar uma solução viável. Realizando uma abordagem idêntica para a turma B verifica-se que apenas sete estudantes, no pré-teste e seis no pós-teste conseguiu atingir algum êxito na concretização de uma solução.

Refira-se ainda que problemas relacionados com a optimização de espaços no plano, procurando minimizar ou maximizar áreas, não é "trivial" nestes níveis etários. Por outro lado, não foram realizados entre o pré e o pós-teste problemas idênticos, pois a geometria foi explorada no final do ano e utilizado o *Sketchpad* onde foram desenvolvidas noções e propriedades sobre os triângulos.

Reconhecendo-se importância na resolução deste tipo de problemas, designadamente, na exploração e consolidação das noções de perímetro e área, maximizando espaços de intervenção, na utilização posterior da noção de escala e numa estreita aproximação a conceitos pré-algébricos, em que enquadramento educativo e curricular devem ser implementados este tipo de problemas?
No 4º ano de escolaridade foi realizado o problema "O terreno do Sr. António", em que os estudantes utilizaram papel quadriculado e a calculadora para resolverem o problema. Refira-se que a maior parte dos estudantes conseguiu obter resultados positivos nas duas turmas.
A utilização dos meios tecnológicos, especialmente programas de geometria dinâmica, devem ser usados posteriormente à exploração de outros materiais manipuláveis e de representação no plano, como papel quadriculado de diferentes dimensões.
A experiência e o estudo aconselham-nos a explorar este tipo de problemas, no ano terminal do 1º ciclo e ainda no 2º ciclo, no 5º ou 6º ano de escolaridade, com ou sem utilização da folha de cálculo, sendo esta necessária, quando os estudantes querem realizar experiências, especialmente, com números racionais em representação decimal. Tudo indica que neste nível de ensino, numa primeira abordagem, não deve ser ligada à noção de escala, com medidas em centímetros, num âmbito estritamente disciplinar. Posteriormente deveriam ser exploradas situações contextualizadas ligadas à escala, no 6º ano de escolaridade, com um enquadramento curricular do programa da disciplina, no qual aquela noção surgiria associada ao tratamento numérico e geométrico linear e a duas dimensões da situação.
Contudo, refira-se ainda que houve uma *ligeira evolução* (↑)(-) em quantidade e qualidade na turma A, pois há mais rigor na construção dos rectângulos, com a aplicação correcta da noção "escala". Registe-se ainda outra particularidade no pré-teste: um estudante usou "números decimais" para construir os rectângulos.
Este tipo de problemas são importantes nas aprendizagens pré-algébricas, pois permitem, no campo geométrico, um trabalho dinâmico com a noção implícita de "variável", integrando conhecimentos anteriores, a noção de perímetro e área e as "fórmulas".
Como foi referido no capítulo da metodologia os problemas e/ou exercícios explorados no teste são de âmbito estritamente disciplinar *versus* de matemática em contexto e de natureza interdisciplinar. Contudo, ao longo do ano os estudantes foram mais "exercitados" para os primeiros, tendo sido resolvido apenas alguns problemas, na matemática em contexto e/ou em âmbito interdisciplinar.

Questão 18.

Enquadramento educativo

Conteúdos:

- Compreensão do conteúdo do problema, baseado em conceitos de natureza numérica e gráfica.
- Produto de um número inteiro por um "número decimal"
- Aplicação genérica e concreta da noção "terça-parte de..." e "triplo de..."
- Utilização de uma tabela para representar a relação numérica existente entre duas "variáveis" contextualizadas.
- Desenho de um gráfico de barras, relacionando duas "variáveis" numéricas.

Competências:

- Associar conhecimento intuitivo ao científico.
- Analisar determinada informação e tratá-la de forma diferente: em tabelas e em gráficos de barras.
- Reconhecer e relacionar dados numéricos apresentados em tabelas.
- Interpretar o esquema de gráficos XY e entender, na situação dada, o tipo de escala proporcional implementada no eixo dos XX e YY
- Usar modelos matemáticos para representar graficamente relações quantitativas.
- Interpretar tabelas, relacionando dados da seguinte natureza:
  - Texto-número
  - Número-número (de natureza proporcional).
- Interpretar dados de uma tabela e apresentá-los em gráficos de barras, do tipo:
  - Número-número (*para cada um dos eixos, com estudo de escala, legenda; rigor no traço das colunas; na largura e comprimento das mesmas; ...*)

Aproximações à álgebra:

- Resolução de classes de problemas numéricos e gráficos, pela análise de dados e de relações matemáticas escritas em:
  - linguagem corrente (classe 1 e 2);
  - linguagem gráfica (classe 2 e 3).

Contexto:

- Matemática em contexto.

<u>Questão 18.1</u>

<u>Resultados do Pré-Teste</u>

Tipo de Resposta		RC		RPC		RI		NR		Total
	Turma	A	B	A	B	A	B	A	B	
Questão	Classe									
Q18.1	1					a - 2 c - 1	a - 7 b - 2			
Total		17	9	Não tem		3	9	0	2	20

<u>Legenda</u>: RC – Resposta Completa; RPC – Resposta Parcialmente Completa; RI – Resposta Incorrecta; NR – Não Resposta

Todos os estudantes da turma A responderam à questão e 85% dos estudantes conseguiu resolvê-la completamente e apenas três respondeu incorrectamente.
Na turma B, dois estudantes não resolveram a questão e apenas 45% respondeu correctamente e outros tantos estudantes resolveram incorrectamente a pergunta.

Resultados do Pós-Teste

Tipo de Resposta		RC		RPC		RI		NR		Total
	Turma	A	B	A	B	A	B	A	B	
Questão	Classe									
Q18.1	1					a - 4	a - 1 b - 3			
Total		16	16	Não tem		4	4	0	0	20

Todos os estudantes responderam e 80%, nas duas turmas, conseguindo resolver de forma completa a questão.

Apreciação específica **18.1.**
Dentro de resultados altamente positivos obtidos pelos estudantes da turma A, houve apenas um *ligeiro retrocesso* (↓), na resolução completa da questão, passando-se de dezassete para dezasseis estudantes.
A turma B teve uma *evolução significativa* (↑↑↑), passando de resultados negativos para positivos.
As respostas incorrectas da turma A são dirigidas fundamentalmente para uma resposta de tipo "disjunção exclusiva", ou a rega gota a gota ou a rega com mangueira, enquanto que na turma B alargaram o espectro de respostas, propondo outras asserções pouco lógicas, no contexto referido.
Nas respostas completas dadas ficou a dúvida se os estudantes responderam intuitivamente à questão, colocando em prática conhecimentos do quotidiano e/ou formalmente, tendo apreendido o significado da noção de "terça-parte" ou de "triplo" na frase dada, relacionando os dois tipos de rega no gasto de água. As respostas à questão seguinte poderão, de certo modo, esclarecer esta situação.

Questão 18.2
Resultados do Pré-Teste

Tipo de Resposta		RC		RPC		RI		NR		Total
	Turma	A	B	A	B	A	B	A	B	
Questão	Classe									
Q18.2	2					a - 3 d - 1	b - 1 c - 1 e - 1			
Total		15	13	0	0	4	3	1	4	20

Legenda: RC – Resposta Completa; RPC – Resposta Parcialmente Completa; RI – Resposta Incorrecta; NR – Não Resposta

Na turma A, um estudante não respondeu à questão e 75% dos estudantes respondeu completamente.
Na turma B quatro estudantes não resolveram a questão e 65% conseguiu responder completamente.
As duas turmas obtiveram resultados bastante positivos e muito próximos.

Resultados do Pós-Teste

Tipo de Resposta		RC		RPC		RI		NR		Total
	Turma	A	B	A	B	A	B	A	B	
Questão	Classe									
Q18.2	2				a - 2	a - 4 c - 2	a - 3 c - 3 d - 3			
Total		14	7	0	2	6	9	0	2	20

Legenda: RC – Resposta Completa; RPC – Resposta Parcialmente Completa; RI – Resposta Incorrecta; NR – Não Resposta

Todos os estudantes da turma A responderam à questão e 70% de forma completa, nenhum estudante respondeu parcialmente e seis fizeram-no incorrectamente, tendo quatro estudantes preenchido a tabela calculando a terça parte dos valores em vez de determinar o triplo e um multiplicou por quatro todos os valores da tabela dada e outro fê-lo por dois.
Dois estudantes da turma B não responderam à questão, o mesmo número respondeu parcialmente e 35% resolveu-a completamente. Registe-se ainda que 45% dos estudantes resolveu incorrectamente a questão, tendo três calculado a terça parte, três multiplicado por dois ou por quatro e ainda três estudantes procederam do seguinte modo: um deles adicionou uma unidade a todos os valores da tabela, outro somou quatro e por fim houve um estudante que adicionou uma unidade aos números inteiros e uma décima aos "números decimais".

Apreciação específica **18.2.**

Nesta questão pretendia-se que os estudantes aliassem o conhecimento intuitivo ao formal. Assim, através de uma situação contextualizada e próxima do quotidiano procurou-se que o estudante realizasse uma primeira abordagem intuitiva e uma confirmação formal posterior, integrando conhecimentos da primeira questão, da veracidade da proposição apresentada, na qual era referido que *na técnica de rega gota a gota gastava-se a terça-parte de água do que se gasta quando se rega o mesmo jardim com a mangueira*.
Na resposta à questão apelava-se também à reversibilidade de pensamento, através da aplicação da noção inversa dada, explorando directamente a noção de *triplo* em vez da de *terça parte*. Pretendia-se, fundamentalmente, que estas duas noções fossem exploradas e trabalhadas de forma reversível, proporcionando uma reflexão contextual da situação criada.
A maior parte dos estudantes da turma A apreenderam e aplicaram as noções correctamente nas duas situações de interacção com o teste, enquanto que na turma B os resultados positivos aconteceram apenas na realização do pré-teste.
Por que razão a maior parte dos estudantes da turma B, não conseguiu completar correctamente a tabela, aplicando aquelas noções, na realização do pós-teste?
Na questão anterior, 18.1. os estudantes desta turma, no pré-teste, denunciaram dificuldades e alcançaram resultados negativos, em que menos de metade dos estudantes (45%) não conseguiu resolver a questão completamente. Todavia, no pós-teste, nesta mesma questão revelaram um entendimento cabal das noções numéricas em causa de tal

forma que 80% dos estudantes conseguiu obter resultados positivos resolvendo a questão completamente e denunciando a apreensão correcta do significado concreto dos conceitos "terça parte de..." e "triplo de ...".
Uma das hipóteses levantadas para explicar os resultados obtidos na turma B na resolução desta questão 18.2 situava-se na compreensão e resolução intuitiva da questão anterior e, consequentemente, na incapacidade de aplicar a noção de "terça parte de..." a situações novas.
Contudo, o conhecimento intuitivo presente na resolução desta questão não parece ter influenciado a resposta, pois no primeiro tempo de interacção com o teste, porventura menos formal, a maior parte dos estudantes não conseguiu responder correctamente... Assim, permanecem algumas dúvidas: os estudantes, no pós-teste aplicaram mais o conhecimento intuitivo e/ou o formal?! E generalizando, qual foi o tipo de conhecimento mais explorado, nas duas turmas, na resolução da questão 18.1? Face aos dados obtidos a resposta não pode ainda ser conclusiva.
Contudo, na resposta à segunda questão 18.2 não restam dúvidas de que foi a aplicação da noção de "triplo de..." e o uso do conhecimento formal, para responder cabalmente ao preenchimento correcto da tabela dada. Todavia, como explicar os resultados obtidos pela turma B, em que no pré-teste, a maior parte dos estudantes conseguiu resolver completamente a questão e no pós-teste nem metade (7 respostas completas e 2 parcialmente completas) alcançou o êxito desejável?
Muito provavelmente o trabalho realizado no percurso da investigação em que as tabelas foram usadas no 4º ano de escolaridade, nas relações proporcionais, em domínio estritamente matemático e/ou em matemática em contexto, "a carga certa para o "peso" certo"; "uma razão importante"; "a compra de cromos"; "a cantina escolar"; "a pintura das peças de cerâmica"; no 5º ano de escolaridade "a área dos pavilhões"; "a correr e a saltar e a aprender matemática"; e no 6º ano "a área dos pavilhões"; "a pulsação"; "promoções" e "tantas caixas!..." situaram-se mais próximas da realização do pré-teste do que do pós-teste e, nestas circunstâncias, ter influenciado positivamente os primeiros resultados.

<u>**Questão 18.3**</u>

<u>Resultados do Pré-Teste</u>

Tipo de Resposta		RC		RPC		RI		NR		Total
	Turma	A	B	A	B	A	B	A	B	
Questão	Classe									
Q18.3	3	a - 1 b - 1	b - 2	c - 2	b - 1 c - 4	a - 4 e - 1	a - 2 b - 1			
Total		2	2	2	5	5	3	11	10	20

<u>Legenda</u>: RC – Resposta Completa; RPC – Resposta Parcialmente Completa; RI – Resposta Incorrecta; NR – Não Resposta

Nas duas turmas apenas dois estudantes conseguiram desenhar completamente o gráfico de barras, tendo apenas um estudante da turma A construído rigorosamente e respeitando a largura e a textura das colunas.

Os resultados obtidos pelas duas turmas foram muito idênticos e *fortemente negativos*. Onze e dez estudantes, respectivamente, na turma A e B não representaram graficamente a situação.
Dois estudantes da turma A resolveram parcialmente a questão, marcando correctamente a escala e desenhando um gráfico de pontos e/ou apresentando uma definição correcta para este tipo de gráfico.
Cinco estudantes da turma B resolveram parcialmente, tendo um estudante construído correctamente um gráfico de linhas e os outros quatro procederam de forma idêntica aos estudantes da turma A.
As respostas incorrectas, cinco e três, respectivamente, na turma A e B, são muito variadas, desde apenas a definição correcta das escalas e desenho de quadrados ao longo de um dos eixos, à construção gráfica e independente de cada um dos processos de rega, ao desenho de duas colunas, à construção de barras "em escada", tendo sido apresentadas, nesta panóplia de resoluções, cinco e três respostas incorrectas, respectivamente, na turma A e B.

Resultados do Pós-Teste

Tipo de Resposta		RC		RPC		RI		NR		Total
	Turma	A	B	A	B	A	B	A	B	
Questão	Classe									
Q18.3	3	a - 2	a - 1 c - 1	c - 1	c - 1	a - 2 b - 3 c - 1 d - 5 e - 1	a - 1 b - 1 c - 1 d - 7			
Total		2	2	1	1	12	10	5	7	20

Legenda: RC – Resposta Completa; RPC – Resposta Parcialmente Completa; RI – Resposta Incorrecta; NR – Não Resposta

Neste tempo de interacção com o teste apenas dois estudantes continuaram nas duas turmas a resolver completamente a questão tendo havido, na turma A, maior rigor na construção. Um estudante resolveu parcialmente a questão nas duas turmas, tendo cinco e sete estudantes não resolvido a questão, respectivamente, na turma A e B.
Também doze estudantes da turma A e dez da B resolveram incorrectamente a pergunta e usaram processos idênticos já explorados no pré-teste.

Apreciação genérica **18.3.**
Na resolução desta questão os estudantes revelaram imensas dificuldades na representação gráfica da situação explorada anteriormente. Os resultados indicam que a questão apresentava-se a um nível bastante elevado do nível de desenvolvimento cognitivo do estudante e por tal motivo os resultados foram *fortemente negativos*.

Apreciação genérica **18.**
Esta questão incluía a resolução de três sub-questões e os resultados das duas turmas foram registados no quadro seguinte.

Questão	Turmas		Conclusão genérica
	A	B	Na globalidade a ***turma A*** apresentou resultados mais positivos do que a ***turma B***, especialmente na aplicação, em tabela, da lei que rege o fenómeno.
Q18.1.	↓(+)	↑↑↑(-+)	
Q18.2.	↓(+)	↓↓↓ (+-)	
Q18.3.	(—)(-)	(—)(-)	

Nas duas primeiras questões a turma A obteve resultados muito positivos no pré e pós-teste, mais de 75% dos estudantes resolveu completamente a questão, mas não houve evolução, apenas um *ligeiro retrocesso*↓(+), pois somente um dos estudantes, nas duas questões, deixou de resolver completamente a questão no pós-teste. Pode-se referir também que o número de respostas completas e incorrectas obtidas no pré e pós-teste foi muito idêntico nas questões 18.1 e 18.2, com uma diferença de uma ou duas respostas, respectivamente.
Relativamente à pergunta 18.3 houve resultados *fortemente negativos* nas duas turmas e uma diferença significativa no número de respostas incompletas e no número das não respostas, permanecendo *estagnação* nesta temática. Assim, dos onze estudantes que não responderam no pré-teste e dos cinco que o não fizeram correctamente passou-se, no pós-teste, respectivamente, para cinco e doze respostas. A tentativa de resolver a questão surtiu em respostas incorrectas e ainda uma resolução parcialmente completa realizada no pré-teste, passou a resposta incorrecta, no pós-teste.
Na turma B houve mais oscilação de resultados nas duas questões anteriores, mas na 18.3 e nos dois tempos de interacção com o teste a alteração do número das não respostas e das incorrectas foi idêntico ao da turma A.

A construção de gráficos de barras é um conteúdo do 6º ano de escolaridade integrante da Estatística. Contudo, este assunto não foi suficientemente explorado e aprofundado. Por outro lado, tinha sido leccionado no 2º semestre, apenas na concretização do projecto de âmbito interdisciplinar: "pulsação", com o desenvolvimento de determinados objectivos, nas duas turmas, realizado no princípio do 2º período, o qual ficou um pouco afastado temporalmente da realização do pós-teste.
Segundo Fernandes D. (1994) em idades elementares a *capacidade de interpretação gráfica* com dois tipos de variáveis nos dois eixos, isto é, com a relação entre a variável texto, no eixo dos xx, e a variável numérica, no eixo dos yy, é mais acessível do que a *capacidade de interpretação gráfica* baseada num sistema de eixos de coordenadas, em que as duas variáveis são numéricas. Por outro lado, segundo esta autora existem dificuldades acrescidas na *capacidade de representação gráfica*, cujo grau de complexidade está relacionado com a natureza dos dados do sistema de coordenadas e mostra-se idêntico ao que foi referido para a capacidade de interpretação gráfica.

Emergência para a utilização da folha de cálculo. Saliente-se que mais uma vez os estudantes da turma A revelaram melhor desempenho na aplicação, em tabela, da lei que regia o fenómeno do que os da classe B. Tudo indica que a estrutura tabelar da folha de cálculo favorece outros entendimentos com as tabelas e facilita melhor compreensão da relação numérica entre os dados e a respectiva divulgação.
Na turma A foi também utilizada a folha de cálculo e explorada a construção de gráficos na unidade temática da Estatística e na concretização do relatório de grupo relativa à tarefa de âmbito interdisciplinar "Pulsação". Contudo essa exploração apesar de ter sido

insuficiente, em apenas duas aulas, não facilitou a criação e a representação individual de gráficos, pois basicamente interferiu na capacidade de interpretação e análise gráfica do estudante.
De facto, a exploração gráfica na folha de cálculo, tem componentes técnicas do próprio utilitário que dificultam o processo de aprendizagem, perdendo-se o essencial das noções matemáticas, pelas observações técnicas e tratando-se apenas de procedimentos a repetir, a apreensão de uma lógica técnica, a lógica do computador, passando ao lado da compreensão do estudante. Ora ao longo do percurso de aprendizagem o estudante revelou avidez na necessidade de entender as razões e compreender o estabelecimento das relações envolvidas, sob pena de as olvidar ou memorizar, temporariamente, para algo pouco consequente. Por outro lado, as experiências realizadas foram diminutas e, consequentemente, não proporcionaram um trabalho profundo do assunto, acrescentando-se ainda que esta ferramenta tecnológica não promove a realização dos gráficos em suporte de papel e várias competências associadas, como o desenho dos eixos, a escolha das escalas, a largura das colunas, entre outros aspectos, surgindo quase "por magia" o gráfico no computador, fomentando, deste modo, apenas a interpretação gráfica e não a representação.

Questão 19.

Enquadramento educativo

Conteúdos:

- Compreensão do conteúdo do problema, baseado em conceitos de natureza geométrica, numérica e pictórica.
- Aplicação do conceito "parte-todo" na representação geométrica e fraccionária de um número racional.
- Aplicação do conceito de escala, no caso concreto de 1/100 em medidas lineares.
- Aplicação do conceito de escala no cálculo de áreas.
- Integração de conhecimentos anteriores e intuitivos, na análise de situações contextualizadas.

Competências:

- Associar conhecimento intuitivo ao científico.
- Interpretar informação matemática e seleccionar dados relevantes apresentados em linguagem corrente e pictórica.
- Interpretar o significado do número racional na relação parte-todo em configuração geométrica e em contexto real.
- Reconhecer conhecimentos de outra áreas, e mobilizá-los, através da aplicação do factor escala na determinação das dimensões reais do terreno rectangular.
- Interpretar a informação dada, relacionando:
  - conhecimentos académicos anteriores e aplicando o modelo matemático fornecido;
  - conhecimentos práticos adquiridos na vida quotidiana, descortinando razões plausíveis para fundamentar raciocínios.

Aproximações à álgebra:

- Resolução de classes de problemas numéricos e escalares, pela análise de dados e de relações matemáticas escritas em linguagem corrente, simbólica e pictórica (classe 1) e integração de dados complementares (classe 2)

Contexto:

- Matemática em contexto.

<u>Questão 19.1</u>

<u>Resultados do Pré-Teste</u>

Tipo de Resposta		RC		RPC		RI		NR		Total
	Turma	A	B	A	B	A	B	A	B	
Questão	Classe									
Q19.1	1					b - 1	a - 1 b - 2			
Total		18	15	NãoTem		1	3	1	2	20

<u>Legenda</u>: RC – Resposta Completa; RPC – Resposta Parcialmente Completa; RI – Resposta Incorrecta; NR – Não Resposta

Apenas um estudante da turma A não respondeu à questão, um outro resolveu-a incorrectamente e 90% dos estudantes conseguiu completar a frase dada, transformando-a numa proposição verdadeira, revelando domínio total no conhecimento da relação parte-todo na representação de um número racional.
Na turma B também mais de metade da turma B, 75%, conseguiu atingir, com êxito, o objectivo da pergunta, localizado na apreensão da relação parte-todo da representação de um número racional.

<u>Resultados do Pós-Teste</u>

Tipo de Resposta		RC		RPC		RI		NR		Total
	Turma	A	B	A	B	A	B	A	B	
Questão	Classe									
Q19.1	1					a - 2	a - 1 b - 2			
Total		18	15	Não Tem		2	3	0	2	20

Praticamente os resultados nas duas turmas mantiveram-se no pós-teste e são idênticos nas duas turmas. Todos os estudantes responderam na turma A, apenas dois não o fizeram na B e o número de respostas incorrectas passou de um, no pré-teste, para dois, no pós-teste, tendo-se mantido todos os outros resultados.

Apreciação específica **19.1.**
Os resultados nas duas turmas foram francamente positivos, com especial destaque para a classe A, tendo existido uma *estagnação* nos resultados obtidos nos dois tempos de realização do teste.

Refira-se que a relação parte-todo na representação de um número racional é a mais básica e acessível aos estudantes. Os resultados positivos obtidos no pré-teste e confirmados no pós-teste denunciaram a aquisição sólida deste tipo de conhecimentos. Os estudantes conseguiram reconhecer e identificar pictoricamente a ordem de grandeza da relação parte/todo na representação de um número racional.

Questão 19.2

Resultados do Pré-Teste

Tipo de Resposta		RC		RPC		RI		NR		Total
	Turma	A	B	A	B	A	B	A	B	
Questão	Classe									
Q19.2	1					a - 7 d - 1	a - 6 c - 2 d - 3			
Total		9	5	Não tem		8	11	3	4	20

Legenda: RC – Resposta Completa; RPC – Resposta Parcialmente Completa; RI – Resposta Incorrecta; NR – Não Resposta

Três e quatro estudantes não responderam a esta questão, respectivamente, nas turmas A e B. Na turma A 45% dos estudantes resolveram completamente e oito responderam incorrectamente, tendo sete estudantes apresentado a fracção completar da correcta, isto é, deveriam ter respondido 10/15, que representava a parte relvada do jardim e optaram por 5/15, indicando a parte da plantação de flores do jardim e na outra resposta incorrecta foi apresentado um texto.
Na turma B apenas 25% dos estudantes respondeu completamente e onze resolveram-na incorrectamente, tendo seis indicado a fracção complementar, dois um número não sugerido e três escreveram um nome.
Nesta questão não foi considerada a resposta parcialmente correcta.

Resultados do Pós-Teste

Tipo de Resposta		RC		RPC		RI		NR		Total
	Turma	A	B	A	B	A	B	A	B	
Questão	Classe									
Q19.2	1					a - 3 b - 1 d - 2	a - 3 b - 3 d - 2			
Total		14	10	Não tem		6	8	0	2	20

Todos os estudantes da turma A responderam à questão, seis fizeram-no incorrectamente, três indicaram a fracção completar, um estudante optou por uma das outras fracções sugeridas e dois escreveram um nome. Contudo houve no pós-teste uma evolução no número de respostas completas e 70% dos estudantes conseguiu, com êxito, reconhecer a parte-todo, em representação fraccionária, da parte relvada do jardim.
Na turma B dois estudantes não resolveram a questão e oito fizeram-no incorrectamente, tendo três indicado a fracção complementar, três optaram por uma das outras três das cinco fracções sugeridas e dois escreveram um nome. Também nesta turma metade dos estudantes, 50%, conseguiu ter êxito na identificação da fracção correcta representativa da parte relvada do jardim.

Apreciação específica **19.2**
A maior parte dos estudantes da turma A apreendeu com êxito o significado da parte-todo na identificação fraccionária da situação geométrica apresentada. Esta turma conseguiu uma *evolução significativa* (↑↑↑) nos resultados do pré para o pós-teste, de 45% para 70%, denunciando uma aprendizagem consolidada desta temática.
Na turma B o número de estudantes que obteve êxito na resolução completa desta questão não foi tão expressivo como os da A, mas conseguiram duplicar o número de respostas completas, passando de cinco para dez estudantes, conseguindo também atingir uma *evolução significativa* (↑↑↑) nos resultados.
Nesta questão, tal como noutras de carácter essencialmente disciplinar, os estudantes revelaram progressão nas aprendizagens dos conteúdos relacionados com o estudo dos números racionais, na relação parte-todo, não se vislumbrando a influência menos positiva do trabalho de âmbito interdisciplinar na evolução deste tipo de conhecimento.

Questão 19.3

Resultados do Pré-Teste

Tipo de Resposta		RC		RPC		RI		NR		Total
	Turma	A	B	A	B	A	B	A	B	
Questão	Classe									
Q19.3	2			b - 4	a - 2 b - 5 c - 1	a - 6 b - 3 c - 1	a - 6 b - 2 d - 1			
Total		4	1	4	8	10	9	2	2	20

Legenda: RC – Resposta Completa; RPC – Resposta Parcialmente Completa; RI – Resposta Incorrecta; NR – Não Resposta

Na turma A apenas quatro estudantes conseguiram aplicar a escala às unidades lineares, calcular a área e realizar correctamente a equivalência para m^2, alcançando a resolução completa da questão e na turma B apenas um estudante o conseguiu.
Dois estudantes em cada uma das turmas não responderam à questão, dez e nove estudantes responderam incorrectamente, respectivamente, na turma A e B. Seis estudantes em cada uma das duas turmas não aplicaram a escala e preencheram as lacunas com números arbitrários e desligados da informação pictórica dada; três estudantes na turma A

e dois na B, não aplicaram a escala e apenas realizaram o produto entre os dados numéricos afectos ao comprimento e largura do rectângulo; um estudante usou a escala e aplicou-a incorrectamente na turma A e na B, um outro preencheu as lacunas com os números fraccionários existentes na questão anterior. Por outro lado quatro estudantes da turma A e oito na B resolveram parcialmente a questão, tendo os da primeira turma aplicado correctamente a escala às unidades lineares, mas não o fizeram no cálculo da área (ex: *300+500 = 800 ou 1500cm^2 = 0,15m^2*) e os outros oito procederam de forma variada: dois aplicaram a escala às unidades lineares e calcularam correctamente a área, mas com um pequeno erro de cálculo ou de equivalência, cinco procederam como os da turma A e outros dois aplicaram incorrectamente a escala às medidas de comprimento, mas por intuição indicaram correctamente a área.

Resultados do Pós-Teste

Tipo de Resposta		RC		RPC		RI		NR		Total
	Turma	A	B	A	B	A	B	A	B	
Questão	Classe									
Q19.3	2			a - 1 b - 3 c - 1	b - 3	a - 1 b - 2 c - 5	a - 6 b - 2			
Total		5	4	5	3	8	8	2	5	20

Legenda: RC – Resposta Completa; RPC – Resposta Parcialmente Completa; RI – Resposta Incorrecta; NR – Não Resposta

Na turma A cinco estudantes, 25%, resolveram completamente a questão tendo o mesmo número de estudantes respondido parcialmente. Um deles aplicou a escala e determinou correctamente a área do terreno rectangular, mas com um erro no cálculo no produto, três usaram a escala correctamente nas unidades lineares, mas não calcularam correctamente a área, porque adicionaram as duas quantidades e uma outra estudante, aplicou incorrectamente a escala, mas por intuição indicou a área correcta.
Na turma B quatro estudantes, 20%, conseguiram resolver completamente a questão e três responderam incorrectamente, tendo aplicado correctamente a escala às medidas de comprimento e calculado incorrectamente a área, pois tal como aconteceu no pré-teste adicionaram os dois valores (*300 + 500 = 800 ou 1500cm^2 = 0,15m^2*).
Dois estudantes da turma A não responderam, oito fizeram-no incorrectamente, tendo um estudante preenchido as lacunas da frase com números arbitrários, dois não aplicaram a escala e apenas realizaram o produto entre os números dados e cinco aplicaram a escala, mas fizeram-no incorrectamente. Na turma B cinco estudantes não responderam e oito fizeram-no incorrectamente, com seis estudantes a preencherem com números arbitrários as lacunas da frase e dois estudantes não aplicaram a escala, tendo apenas realizado o produto dos números.

Apreciação específica **19.3.**
Apesar de nos dois tempos de interacção com o teste os resultados terem sido ligeiramente mais positivos na turma A do que na B, pode-se concluir que os estudantes não atingiram os objectivos delineados, relacionados com a capacidade de interpretar correctamente as

linguagens existentes no enunciado do problema: pictórica, verbal escrita e simbólica e a aplicação do conceito de escala.

A maior parte dos estudantes nas duas turmas, nos dois tempos de interacção com o teste, obtiveram resultados negativos e as dificuldades acrescidas situaram-se em dois aspectos fundamentais: a) na *apresentação do formato desta questão*, em que se pedia o preenchimento de lacunas de forma a construir uma frase verdadeira; b) na *compreensão global do problema* devido à utilização de determinada linguagem Específica tal como: *largura real*, *comprimento real* e *área real*.
De facto, os estudantes tinham resolvido diversas tarefas em que a exploração e aplicação implícita ou explícita do conceito de escala estava presente ("itinerários na planta da minha cidade"; "áreas dos pavilhões da Escola"; "a cabra"), mas não surgiram com este formato nem com este tipo de linguagem.
Estamos certos que o conceito de escala não é tão acessível como se pode crer nestas idades, pois está baseado no de proporcionalidade e este apresenta-se com algumas especificidades que urge respeitar e certamente aprofundar.

No ano transacto, no 5º ano de escolaridade, foi explorado o conceito de escala, em contexto interdisciplinar: nas disciplinas de História e Matemática, com utilização de mapas próprios do concelho da Escola e com situações de exploração mais próximas da vida real dos estudantes. Estas tarefas revelaram-se sugestivas e estimulantes, nas quais os saberes (in)formais confrontaram-se com conhecimentos intuitivos e vivenciais. Neste tipo de tarefa foi também possível fomentar uma ambiência inter-relacional grupal, com várias plataformas de entendimento que possibilitaram experimentar, mobilizar, completar e validar contextualmente os conhecimentos. Contudo, na resolução desta questão a exploração do conceito de escala foi realizada formalmente e numas condições pouco familiares ao estudante, quer na linguagem, quer no formato que provavelmente, dificultaram o processo, em si mesmo, mas também a aplicação da noção de escala, noção linear associada ao de proporcionalidade directa e a partir deste conceito aportar ao de área, conceito não linear, e determinar o valor da "área real" do terreno.

<u>Questão 19.4</u>

<u>Resultados do Pré-Teste</u>

Tipo de Resposta		RC		RPC		RI		NR		Total
	Turma	A	B	A	B	A	B	A	B	
Questão	Classe									
Q19.4	2 3	b - 1	b - 1	a - 1 b - 11 c - 4	a - 3 b - 7 c - 2		b - 2 c - 1			
Total		1	1	16	12	0	3	3	4	20

<u>Legenda</u>: RC – Resposta Completa; RPC – Resposta Parcialmente Completa; RI – Resposta Incorrecta; NR – Não Resposta

Os resultados nas duas turmas são muito idênticos, em ambas apenas um estudante conseguiu resolver completamente a questão, pois integraram conhecimentos da alínea anterior e aplicaram o modelo matemático dado a esta situação concreta (ex: *gasta 3 vezes*

menos do que a mangueira ou gasta a terça parte da água) e na turma A 80% dos estudantes resolveram parcialmente, tendo um estudante evocado motivos de ordem matemática e de outra natureza, onze referiram razões matemáticas, interpretando de forma vaga o modelo matemático dado, ou apenas usando a intuição e quatro explicitaram outros motivos, mais gerais relacionados com a natureza da rega, da plantação, do terreno ou de ordem pessoal, ligados à vida do dono do jardim.
Na turma B doze estudantes, 60%, apresentaram uma resposta parcialmente completa, evocando razões idênticas às enunciadas pelos estudantes da turma A, e pela mesma ordem, três, sete e dois estudantes.

Resultados do Pós-Teste

Tipo de Resposta		RC		RPC		RI		NR		Total
	Turma	A	B	A	B	A	B	A	B	
Questão	Classe									
Q19.4	2 3	a - 1 b - 1		a - 6 b - 6 c - 4	a - 2 b - 9 c - 3	c - 1	a - 1 b - 1 c - 1			
Total		2	0	16	14	1	3	1	3	20

Legenda: RC – Resposta Completa; RPC – Resposta Parcialmente Completa; RI – Resposta Incorrecta; NR – Não Resposta

Na turma A dois estudantes resolveram completamente a questão, evocando um razões de ordem matemática e de outra natureza e um referindo apenas motivos matemáticos. Nas dezasseis respostas parcialmente completas 80% dos estudantes apresentaram razões idênticas às do pré-teste, tendo seis estudantes justificado com motivos de ordem matemática e de outra natureza, seis referiram razões matemáticas, interpretando de forma vaga o modelo matemático dado e quatro estudantes explicitaram outros motivos, mais gerais relacionados com a natureza da rega, da plantação, do terreno ou de ordem pessoal, ligados à vida do dono do jardim.
Na turma B nenhum estudante apresentou uma resposta completa e catorze fizeram-no de forma parcialmente correcta, usando motivos semelhantes aos da turma A, respectivamente, dois, nove e três estudantes.

Apreciação específica **19.4**
A análise de uma questão de matemática em contexto requer, por vezes, um estudo mais geral para além da simples contabilização do número de respostas completas. Neste sentido, tal como noutras situações "realistas" idênticas a esta questão tornou-se necessário uma análise mais abrangente, com o estudo contextualizado da situação, incluindo, assim, a contabilização das respostas parcialmente completas e o estudo das respostas matemáticas e/ou contextualizadas incluídas nos critérios de avaliação previamente definidos.
Assim, os estudantes das duas turmas nesta situação "realista" usaram naturalmente justificações abertas, com referências no contexto social, descorando conhecimentos matemáticos explícitos.

Apreciação genérica **19.**
Esta questão incluía a resolução de quatro sub-questões e os resultados das duas turmas foram registados no quadro seguinte.

Questão	Turmas		Conclusão genérica
	A	B	As duas turmas apresentaram resultados muito semelhantes. Os dois últimos resultados relacionados com a noção de escala e a justificação contextualizada de uma situação são fortemente negativos.
Q19.1.	(—)(++)	(—)(++)	
Q19.2.	(↑↑↑)(-+)	(↑↑↑)(-+)	
Q19.3.	↑ (-)	↑↑ (-)	
Q19.4.	↑ (-)	↓(-)	

Os resultados nas duas turmas na questão 19.1 foram *francamente positivos*, com especial destaque para a classe A, tendo existido uma *estagnação* nos resultados (—)(++), obtidos nos dois tempos de realização do teste.

A maior parte dos estudantes da turma A apreendeu com êxito o significado da parte-todo na identificação fraccionária da situação geométrica apresentada. Esta turma, na questão 19.2., conseguiu uma *evolução significativa* (↑↑↑)(-+) nos resultados do pré para o pós-teste, de 45% para 70%, denunciando uma aprendizagem consolidada desta temática, bem como a classe B, passando de 25% para 50%.
Na questão 19.3. relacionada com a aplicação do conceito de escala os resultados foram bastante negativos, aliás como se previa, pois no tratamento desta noção ao longo da investigação reconheceu-se que é ainda um conceito complexo para os estudantes deste nível etário e provavelmente a linguagem e o formato utilizado ainda dificultou mais a resolução da questão.
Os estudantes, mais uma vez, sentiram dificuldades em integrar a informação matemática dada, designadamente, na aplicação do modelo matemático ao responder à questão 19.4.
Refira-se que, intencionalmente, não estava explícito que os dados fornecidos na alínea anterior relativamente ao modelo matemático que comparava a rega gota a gota e a da mangueira deveria ser aplicada nesta nova questão, mas pelo menos previa-se que o estudante pudesse vir a levantar essa possibilidade, pois era um problema estruturado em alíneas que fazia parte integrante da "tarefa" 19. Quando foram idealizadas estas duas questões procurou-se objectivar a formalização e a aplicação de um modelo matemático implícito e o consequente desenvolvimento do raciocínio dedutivo, em que de um modelo geral o estudante o particularizasse, ou eventualmente problematizasse apenas a sua exploração. Mas tal não aconteceu em nenhuma turma.
De facto, quando se pretende explorar matemática em contexto, a "realidade" passada ao papel reconhece dificuldades acrescidas, provocando necessariamente outro tipo de formalização, de mobilização do conhecimento, ao qual o estudante, o professor e a comunidade escolar ainda não está familiarizado.
Pelos resultados obtidos tudo indica que as situações contextualizadas requerem estudos mais gerais, no domínio matemático, evocando dados explícitos relacionados com relações numéricas previamente estabelecidas e com a mobilização de dados provavelmente implícitos que devem ser analisados e integrados na análise da questão. Os resultados negativos alcançados nesta e noutras questões de contexto "realista" indicam que se torna crucial realizar e desenvolver em ambiente de sala de aula mais problemas contextualizados, que requerem debate de ideias, partilha de saberes e interrogações bem como a posterior tomada de decisão fundamentada. Como em termos programáticos não

foi possível desenvolver este tipo de situações e como nas tarefas rotineiras, o estudante já consegue obter êxito, torna-se cada vez mais necessário abrir o diálogo matemático a outras realidades do quotidiano que fomentem a literacia matemática nas diversas vertentes.
Por outro lado, a análise de questões contextualizadas, em particular alguma delas, como a 19.4., em que poderiam ser evocadas razões matemáticas e/ou de outra natureza, requerem abertura no campo da avaliação dos resultados e não apenas resumir-se à contabilização de respostas completas orientadas normalmente para justificações matemáticas, mas também as parcialmente completas, com o objectivo de incluir respostas contextualizadas e averiguar do entendimento global do estudante.

Questão 20.
Enquadramento educativo

Conteúdos:
- Apreensão do enunciado do problema relacionado com conteúdos das Ciências da Natureza.
- Leitura de gráficos de barras de números inteiros.
- Aplicação do conceito "dobro de ..." ou de potências de base dois.
- Integração de conhecimentos anteriores pela análise de situações contextualizadas.

Competências:
- Reconhecer conhecimentos de outra áreas e mobilizá-los.
- Apreender informação da área das Ciências da Natureza e interpretá-la graficamente.
- Analisar informação matemática e seleccionar dados relevantes apresentados em linguagem gráfica.
- Descrever um padrão numérico, de contexto interdisciplinar, observado num gráfico de barras.

Aproximações à álgebra:
- Resolução de classes de problemas pela análise de gráficos e descoberta de uma regularidade numérica que modelize o fenómeno de contexto interdisciplinar (classe 2 e 3)

Contexto:
- Matemática em contexto.

Questão 20.1
Resultados do Pré-Teste

Tipo de Resposta		RC		RPC		RI		NR		Total
	Turma	A	B	A	B	A	B	A	B	
Questão	Classe									
Q20.1	2					a - 3	a - 3			
Total		14	14	0	0	3	3	3	3	20

Legenda: RC – Resposta Completa; RPC – Resposta Parcialmente Completa; RI – Resposta Incorrecta; NR – Não Resposta

Os resultados das duas turmas são exactamente os mesmos: catorze (70%) responderam completamente à questão, três não a resolveram e outros tantos fizeram-no de forma incorrecta, pois usaram a regularidade aditiva, em vez da multiplicativa, no preenchimento das lacunas da frase dada.

Resultados do Pós-Teste

Tipo de Resposta		RC		RPC		RI		NR		Total
	Turma	A	B	A	B	A	B	A	B	
Questão	Classe									
Q20.1	2			a - 1 (1 ec)	a - 1		a - 2			
Total		19	15	1	1	0	2	0	2	20

No pós-teste os resultados foram mais positivos na turma A, na qual 95% dos estudantes respondeu completamente e apenas um o fez de forma parcialmente correcta, registando-se apenas um erro de cálculo no preenchimento de uma das quatro lacunas.
Na turma B 75% dos estudantes resolveu completamente a questão, dois estudantes não responderam, o mesmo número resolveu-a incorrectamente e um estudante respondeu parcialmente.

Apreciação específica **20.1.**
Apesar da turma A conseguir atingir resultados mais positivos, em que houve uma *evolução positiva* (↑↑↑) e uma *ligeira evolução* na classe B (↑), ambas as turmas conseguiram realizar correctamente a leitura do gráfico de barras, integrando esta informação na existente, a qual consistia na presença de dois valores numéricos: *1000 e 2000* possibilitando, assim, o preenchimento correcto de mais quatro lacunas da frase dada.
Contudo, alguns estudantes, apenas três e dois, respectivamente, no pré e pós-teste na turma B e três e nenhum, na turma A, como não realizaram a concatenação destas duas informações: numérica e gráfica, concluíram incorrectamente da existência de um modelo matemático aditivo recorrente: +1000 em vez de um modelo multiplicativo também recorrente: $2xu_{n-1}$, em que u_{n-1} é o valor anterior.
Nas respostas dadas pelos estudantes das duas turmas não se vislumbrou o desenho de um modelo matemático multiplicativo geral, alicerçado na noção de potência, isto é, $2^n x1000$, com n € IN_0.
Registe-se ainda que na turma A houve uma evolução mais significativa do número de estudantes que resolveu completamente a questão, de catorze (70%) para dezanove (95%), enquanto que na turma B foi de 70% para 75%.
De facto, apesar de não ter existido um aprofundamento na leitura e construção de gráficos na folha de cálculo, algumas actividades desenvolvidas com esta ferramenta tecnológica, possibilitou aos estudantes da turma A maior abertura e desenvolvimento de competências neste domínio, designadamente, na capacidade de leitura e interpretação de gráficos de barras.

<u>Questão 20.2</u>

<u>Resultados do Pré-Teste</u>

Tipo de Resposta		RC		RPC		RI		NR		Total
	Turma	A	B	A	B	A	B	A	B	
Questão	Classe									
Q20.2	2 3	c - 9	c - 8	a - 1	b -1	b - 3	a - 2 b - 2 c - 1 d - 3			
Total		9	8	1	1	3	8	7	3	20

<u>Legenda</u>: RC – Resposta Completa; RPC – Resposta Parcialmente Completa; RI – Resposta Incorrecta; NR – Não Resposta

Os resultados das duas turmas foram muito idênticos no que concerne às respostas completas, nove (45%) e oito (40%), respectivamente, na A e B e um estudante de cada turma respondeu parcialmente.
Neste último tipo de respostas os estudantes da classe A justificaram usando uma regularidade aditiva relacionada com o número 4, ou *sempre de 4000 em 4000*, ou *vezes 4*, enquanto que na turma B usaram esta regularidade aditiva ou outra *de 1000 em 1000*, referiram o crescimento de 2 em 2 ou anotaram uma resposta de natureza qualitativa.

<u>Resultados do Pós-Teste</u>

Tipo de Resposta		RC		RPC		RI		NR		Total
	Turma	A	B	A	B	A	B	A	B	
Questão	Classe									
Q20.2	2 3	b - 1 c - 12	b - 1 c - 8	b - 2	b - 1	b - 4	a - 2 b - 4 c - 1 d - 1			
Total		13	9	2	1	4	8	1	2	20

Na turma A houve uma *evolução significativa* (↑↑↑)(-+), dado que a maior parte dos estudantes (65%) conseguiu resolver completamente a questão e dois apresentaram uma resposta parcial, pois confirmaram o crescimento das bactérias, mas sem recorrerem a nenhuma regularidade quantitativa.
Na turma B houve uma *ligeira evolução* (↑)(-), mas ainda em resultados negativos em que 45% dos estudantes resolveu completamente a questão e um fê-lo de forma parcial.

<u>Apreciação específica</u> **20.2.**
Mais uma vez a turma A *evoluiu significativamente* nos resultados (↑↑↑), de nove estudantes (45%) para treze (65%), descobrindo a regularidade que regia o fenómeno através de um modelo matemático multiplicativo recorrente: $2xu_{n-1}$, em que u_{n-1} é o valor anterior, apresentado por linguagem corrente ou por um modelo multiplicativo misto, isto

é, *2x o valor anterio*r. Nenhum estudante identificou esta regularidade tendo por base a noção de potência de base 2, num modelo exponencial do tipo: 2^nx1000, com n € IN_0.
Apesar de ter existido uma ligeira evolução(↑)(-), na turma B, esta aconteceu em terreno negativo no pós-teste, pois menos de metade dos estudantes conseguiu atingir uma resposta completa.

Análise genérica **20.**
Esta questão incluía a resolução de duas sub-questões e os resultados das duas turmas foram registados no quadro seguinte.

	Turmas		Conclusão genérica
Questão	A	B	A *turma A* obteve resultados mais positivos do que a ***classe B***.
Q20.1.	(↑↑↑)	(↑)	
Q20.2.	(↑↑↑)(-+)	(↑)(-)	

Na primeira sub-questão tratava-se de ler e interpretar a informação existente num gráfico de barras, completando os valores numa frase com lacunas. A turma A registou uma *evolução mais significativa* do número de estudantes que resolveu completamente a questão, de catorze (70%) para dezanove (95%), do que na turma B foi de 70% para 75%.

Na segunda sub-questão, relacionada com a evocação da lei que rege o fenómeno os resultados da turma A apresentaram-se *altamente positivos*, com uma *evolução* de resultados negativos para positivos (↑↑↑)(-+), enquanto que a turma B houve uma *ligeira evolução* e em campo negativo (↑)(-)

Emergência para a utilização da folha de cálculo. Pelos resultados obtidos tudo indica que a construção, a leitura e a interpretação dos gráficos construídos na folha de cálculo possibilitou o aprofundamento destas competências.
Da análise da segunda sub-questão infere-se que a implementação de tarefas na folha de cálculo possibilitou aos estudantes a familiarização com fórmulas, a criação de expressões que generalizam um determinado fenómeno, com a exploração das operações aritméticas básicas: adição, subtracção, multiplicação e divisão e o consequente desenvolvimento do raciocínio indutivo, possibilitando, uma resolução completa de questões relacionadas com estas temáticas.

Questão 21.
Enquadramento educativo

Conteúdos:
- Aplicação do conceito "dobro de ..." ou de potências de base dois.
- Organização em tabelas da informação analisada e recolhida.
- Integração de conhecimentos anteriores, na análise de situações contextualizadas.

Competências:
- Reconhecer conhecimentos de outra áreas e mobilizá-los.
- Incorporar conhecimentos de questões anteriores e utilizá-los.
- Aplicar modelos matemáticos para representar relações quantitativas.

- Interpretar dados de um gráfico de barras e representá-los em tabela, aplicando o modelo matemático para *ampliar* o fenómeno.

Aproximações à álgebra:
- Resolução de classes de problemas pela aplicação da regularidade numérica na ampliação do fenómeno de contexto interdisciplinar e organização dos dados obtidos em tabela (classe 2)

Contexto:
- Matemática (em contexto) – estritamente disciplinar

<u>Questão 21.</u>

<u>Resultados do Pré-Teste</u>

Tipo de Resposta		RC		RPC		RI		NR		Total
	Turma	A	B	A	B	A	B	A	B	
Questão	Classe									
Q21.	2	a - 2	a - 4		c - 1 d - 1	b - 1 d - 10	b - 2 c - 2 d - 5			
Total		2	4	0	2	11	9	7	5	20

<u>Legenda</u>: RC – Resposta Completa; RPC – Resposta Parcialmente Completa; RI – Resposta Incorrecta; NR – Não Resposta

Sete estudantes e cinco estudantes não responderam à questão, respectivamente, na turma A e B.
Na turma A apenas dois estudantes (10%) responderam completamente e nenhum o fez de forma parcial. Contudo onze estudantes resolveram incorrectamente à questão.
Na turma B 20% dos estudantes respondeu completamente à pergunta, nove resolveram-na incorrectamente e dois parcialmente.

<u>Resultados do Pós-Teste</u>

Tipo de Resposta		RC		RPC		RI		NR		Total
	Turma	A	B	A	B	A	B	A	B	
Questão	Classe									
Q21.	2	a - 7	a - 4	b - 3 c - 1	b - 2	b - 1 c - 1 d - 2	a - 2 c - 2 d - 5			
Total		7	4	4	2	4	9	5	5	20

Cinco estudantes nas duas turmas não responderam à questão.
Na turma A 35% dos estudantes resolveu completamente e quatro parcialmente, tendo o mesmo número resolvido incorrectamente.

Na turma B 20% dos estudantes resolveu completamente a pergunta, nove resolveram-na incorrectamente e dois parcialmente.

Apreciação genérica **21.**
Apesar da *evolução significativa* havida apenas na turma A (↑↑↑)(-) ela fez-se em resultados negativos, mas na turma B houve *estagnação* (—), tendo apenas 20% dos estudantes conseguido responder completamente à questão.
Contudo, realizando um estudo mais global, procurando respostas parcialmente completas saliente-se que no pré-teste foi a turma B que obteve melhores resultados, 6 respostas (4RC+2RPC) e a turma A duas respostas (2RC+0RPC).

Contudo, a turma A conseguiu uma evolução positiva nos resultados, com a obtenção de 11 respostas (7RC+4RPC), tendo a maioria dos estudantes 55% desenhado correctamente uma tabela para organizar os dados e representar o número de bactérias do 1º ao 9º dia ou apenas na ampliação do fenómeno do 6º ao 9º dia. Na turma B a evolução nos resultados foi praticamente nula. Claro que outros factores podem ter intervindo na resolução desta questão, como ter sido uma das últimas questões a ser realizada, o cansaço e possivelmente a falta de atenção dos estudantes ter influenciado negativamente em ambas as turmas.

Emergência para a utilização da folha de cálculo. Constatou-se que o trabalho desenvolvido na folha de cálculo promoveu a capacidade do estudante organizar dados, relacionando variáveis. Contudo, refira-se que nesta ferramenta de trabalho o mais usual é criar tabelas, relacionando duas ou mais variáveis numéricas mas, neste caso, o problema propunha o relacionamento entre uma variável de tipo texto com outra numérica.
Fernandes D. (1994) concluiu que, em idades elementares, a capacidade de interpretação tabelar é mais acessível do que a capacidade de representação, desde uma estrutura mais linear, relacionando dados do tipo texto com dados numéricos, a outra forma mais complexa, relacionando duas variáveis numéricas.

Questão 22.
Enquadramento educativo

Conteúdos:
- Interpretação da informação dada em linguagem corrente, pictórica, em banda desenhada ou não e tabelar.
- Integração de conhecimentos anteriores e intuitivos, na análise de situações contextualizadas.
- Problematização da informação dada, pela criação do enunciado de um problema.

Competências:
- Reconhecer conhecimentos de outra áreas e mobilizá-los.
- Interpretar dados e seleccionar os relevantes.
- Criar o enunciado de um problema relacionado com a informação dada.
- Resolver o problema, apresentando uma solução

Aproximações à álgebra:
- Resolução de classes de problemas pela selecção de dados e criação de um enunciado que defina a situação problemática (classe 2).

Contexto:

- Matemática em contexto.

<u>Questão 22.</u>

<u>Resultados do Pré-teste</u>

Tipo de Resposta		RC		RPC		RI		NR		Total
	Turma	A	B	A	B	A	B	A	B	
Questão	Classe									
Q22.	2	a - 4 (1ne) b - 3 (1ne)	a - 7 (4ne) b - 2	b - 1	a - 1 (1ne) b - 1	c - 1	a - 3	a - 2 b - 9	a - 1 b - 3	
Total		7	9	1	4	1	3	11	4	20

ne – dados não explícitos

<u>Legenda</u>: RC – Resposta Completa; RPC – Resposta Parcialmente Completa; RI – Resposta Incorrecta; NR – Não Resposta

Não responderam à questão onze e quatro estudantes, respectivamente, na turma A e B. Um estudante da turma A respondeu incorrectamente e um fê-lo parcialmente, tendo formulado com pouco rigor a situação problemática criada e sete (35%) responderam completamente à questão, tendo quatro usado as duas tabelas e três estudantes apenas uma das duas tabelas dadas na apresentação do problema. Por outro lado, dois estudantes com respostas completas tiveram necessidade de contextualizar o enunciado do problema, colocando dados explícitos e não explícitos (ne).

Na turma B três estudantes formularam incorrectamente o problema, quatro estudantes responderam parcialmente, tendo apresentado uma solução não totalmente correcta e nove estudantes (45%) resolveram-na completamente, tendo sete estudantes usado as duas tabelas existentes no enunciado e dois apenas uma.

Na turma B, quatro estudantes que resolveram completamente a questão e mais um que respondeu parcialmente tiveram necessidade de contextualizar na formulação do problema, usando para além dos dados explícitos, informação não explícita (ne).

<u>Resultados do Pós-teste</u>

Tipo de Resposta		RC		RPC		RI		NR		Total
	Turma	A	B	A	B	A	B	A	B	
Questão	Classe									
Q22.	2	a - 9 (1ne) b - 6	a - 8 (3ne) b - 3	c - 1	a - 1 b - 1	c - 1	c - 1	a - 1 b - 2	a - 1 b - 5	
Total		15	11	1	2	1	1	3	6	20

e - informação explícita

ne - informação não explícita

d - problema baseado em questões para cada um dos desenhos

g - problema com uma questão global

Nas duas turmas houve progresso nos resultados, com evolução na turma B (↑↑)(-+) e com evolução significativa na turma A (↑↑↑)(-+). Três e seis estudantes não responderam à questão, respectivamente, na turma A e B e um estudante resolveu incorrectamente a pergunta em ambas as classes. Apenas um estudante da turma A resolveu-a parcialmente e quinze (75%) conseguiu resolvê-la completamente, tendo nove estudantes usado as duas tabelas e seis apenas uma na proposta de enunciado do problema. Um dos estudantes usou também informação não explícita (ne).
Na turma B dois estudantes responderam parcialmente e onze (55%) resolveram-na completamente, tendo oito estudantes usado as duas tabelas dadas e três apenas uma. Nesta turma três estudantes sentiram necessidade de contextualizar o problema, utilizando dados explícitos e não explícitos (ne).

<u>Apreciação específica **22.**</u>
Na turma A houve uma *evolução significativa* (↑↑↑)(-+) e na classe B a progressão na aprendizagem não foi tão significativa (↑↑)(-+).
Refira-se que na turma A uma estudante, no pré-teste, usou indevidamente o termo *ganho*, em vez da palavra *custo* na elaboração do enunciado do problema sobre a venda de produtos no bar da Escola. No pós-teste também três estudantes da turma A, usaram impropriamente, na formulação do enunciado do problema, o termo *lucro* ou *ganho*, em vez de *custo* na venda dos produtos.

Na turma B também um estudante, no pré-teste e duas no pós-teste aplicaram indevidamente o termo *lucro* ou *ganho*, com formulações do tipo, no pré-teste: *quanto dinheiro a Escola lucrou nesse dia?* Ou no pós-teste: *quanto é que a Escola lucrou na semana toda só em queques?*
A utilização deste termo em ambas as turmas denunciou um entendimento insuficiente da situação exposta e uma falta de conhecimentos práticos duma realidade quotidiana ligada à actividade económica, na qual estão implícitas três elementos na venda de um produto: *custo* do produto, *preço* de venda e *lucro* ou ganho e *prejuízo* ou perda. Ora este tipo de problemas são pouco ou nada explorados durante o programa básico da disciplina, numa perspectiva de matemática funcional. Não estará esta vertente demasiado "arredada" do programa curricular da escolaridade obrigatória do estudante?

Um estudante da turma B na formulação do problema, no pré-teste, usou também informação não explicita de forma a contextualizar mais o problema 22., solicitando explicações plausíveis para os resultados obtidos: *A mãe do João deu-lhe €3,00 para ir ao bar da Escola e ele comprou 2 bolos, 1 copo de leite, 1 iogurte e 1 chocolate. O João quanto gastou?*
E o dinheiro que a mãe lhe deu chegou? Explica.

Um outro estudante da mesma turma, no pré-teste, usou uma contextualização mais ampla do problema 22.1, formulando-o do seguinte modo: *Na Escola do TIBETE o senhor TOTO vendeu iogurtes, queques, copos de leite e sandes de queijo. Baseando-te na tabela diz qual foi o dia da semana em que houve mais lucro?*

Um estudante também escreveu: *O João tinha €5 e utilizou para lanchar a semana toda. Na segunda comeu 1 iogurte e um queque. Na terça feira não quis lanchar. Na quinta* *comeu um copo de leite e uma sande de queijo. Na quinta comeu um queque e uma sande de queijo. Na sexta não lanchou. Quanto dinheiro sobrou?*

Outro estudante formulou o problema da seguinte maneira: *O João comprou 2 queques e 1 chocolate. O Nuno comprou 1 pão com manteiga e 2 iogurtes. O J. P. comprou 2 bolos. Sabendo que os 3 amigos compraram em conjunto e sabendo que tinha €5. Quanto gastaram? E quanto receberam de troco?*

Um estudante que respondeu completamente, formula de uma maneira bastante abrangente o problema: *Na escola do Ricardo vendeu-se 15 iogurtes na segunda-feira, na terça 12, na quarta 13, na quinta 19 e na sexta 16. Sabendo que cada iogurte custa €0,35 e se metade do dinheiro da semana foi para um lar. Quanto foi para um lar?*
E uma estudante nesta mesma turma, no pós-teste, concretiza de forma completa e simples o enunciado do problema: *Eu na segunda-feira comprei um pão com manteiga e um iogurte, eu tinha 1,00 euros com quanto fiquei?*

Refira-se ainda que uma estudante que respondeu parcialmente à questão formulou o problema usando dados explícitos e não explícitos, mas apresentou incorrectamente o algoritmo: *O Rui tinha 6 euros, comprou um iogurte, comprou uma sande de queijo e fiambre, depois resolveu comprar um chocolate e gastou 1,70 euros. Com quanto ficou?* Assinalou o resultado correcto, mas o processo incorrecto *1,70-6 = 4,30* (realizou o algoritmo).

No pré-teste, uma estudante da turma A escreveu: *A Joana toma todos os dias o lanche na escola. Traz sempre consigo uma amiga. Ambas comem um copo de leite e uma sande de queijo. Se a Joana e a amiga fossem as únicas clientes do bar qual era o total de dinheiro que o bar ganharia em duas semanas?*
Também um dos estudantes da turma A, no pré-teste apresentou o seguinte problema: *Se o André comprou 33 copos de leite , 23 queques, 13 iogurtes e 21 sandes de queijo. Ele comeu apenas a terça parte do que comprou. Quantos alimentos sobraram?*
Um dos estudantes da turma A, no pós-teste, tentou contextualizar matematicamente o problema 22.1, alicerçando-o num raciocínio de tipo condicional: *na quarta-feira venderam-se 13 iogurtes, 9 queques, 18 copos de leite e 16 sandes de queijo. Se se tivesse vendido metade do quádruplo do que se vendeu quanto teria ganho o vendedor? E qual seria o total de vendas de cada alimento?*

Após o trabalho de âmbito interdisciplinar os estudantes das duas turmas melhoraram o desempenho na capacidade de criar e formular uma situação problemática, tendo alguns estudantes utilizado dados explícitos e não explícitos. Na turma B os estudantes sentiram mais necessidade de "desenhar" o problema num determinado contexto, integrando outros dados na criação do enunciado.

<u>Questão 23.</u>
<u>Resultados do Pré-teste</u>

Tipo de Resposta		RC		RPC		RI		NR		Total
	Turma	A	B	A	B	A	B	A	B	
Questão	Classe									
Q22.	2	a - 3 b - 2	a - 1 (1ne) b - 3		a - 1 (1ne) c - 3 (1ne)		a - 1 c - 4			
Total		5	4	0	4	3	5	12	7	20

<u>Legenda</u>: RC – Resposta Completa; RPC – Resposta Parcialmente Completa; RI – Resposta Incorrecta; NR – Não Resposta

Doze estudantes na turma A não resolveram a questão e três fizeram-no incorrectamente. Nenhum estudante respondeu parcialmente e cinco (25%) resolveu a questão completamente.
Sete estudantes na turma B não responderam e cinco resolveram incorrectamente. Quatro estudantes (20%) resolveram completamente a questão e o mesmo número de estudantes fizeram-no de forma parcial.

<u>Resultados do Pós-teste</u>

Tipo de Resposta		RC		RPC		RI		NR		Total
	Turma	A	B	A	B	A	B	A	B	
Questão	Classe									
Q23.	2	a - 5 (4d+1g) (3e+2ne) b - 7	a - 2 (1ne) b - 1	a - 2 (3d+2ne) b - 1 (1eg)	a - 3 (3ed) c - 4 (3eg+1ed)	b - 1 c - 3	a - 1 b - 1 c - 2			
Total		12	3	3	7	4	4	1	6	20

e - informação explícita

ne - informação não explícita

d - problema baseado em questões para cada um dos desenhos

g - problema com uma questão global

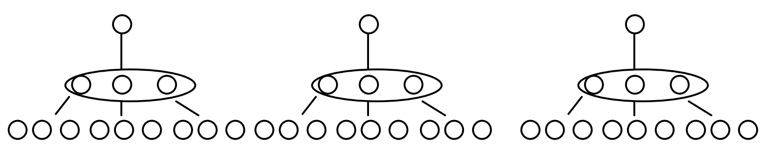
Na turma A houve uma *evolução significativa* (↑↑↑)(-+) e, no pós-teste, doze estudantes (60%) resolveram completamente a questão. Um não respondeu, quatro fizeram-no incorrectamente e três resolveram-na parcialmente.
Por outro lado, na turma B, 15% estudantes resolveu completamente a questão e sete fizeram-no parcialmente. Seis estudantes não responderam e quatro fizeram-no incorrectamente.

<u>Apreciação genérica</u>
Apesar das duas turmas, no pré-teste, terem tido resultados idênticos, posteriormente no pós-teste, a turma A teve uma *evolução mais significativa* (↑↑↑)(-+) do que a alcançada pela classe B (↓)(-). Registe-se esta evolução positiva e significativa da turma A, enquanto

que na turma B diminuiu o número de respostas completas e subiu o número de respostas parcialmente completas, de quatro para sete.
Na turma A para além de terem conseguido melhorar os resultados, três estudantes procuraram formular as situações usando informação explícita e não explícita, tentando contextualizar o problema.
Apesar da maior parte das questões formuladas situarem-se no campo numérico, registe-se que uma das estudantes, da turma A, na questão 22.2 formulou o problema, no pós-teste, num campo não numérico e relacionado com outras circunstancias inter-relacionais: *Que animais existiam? Os animais tiveram sorte? Porquê? Existiam os caracóis, coelhos, pássaros, loba e um veado. Sim, os animais tiveram sorte porque começou a chover*.

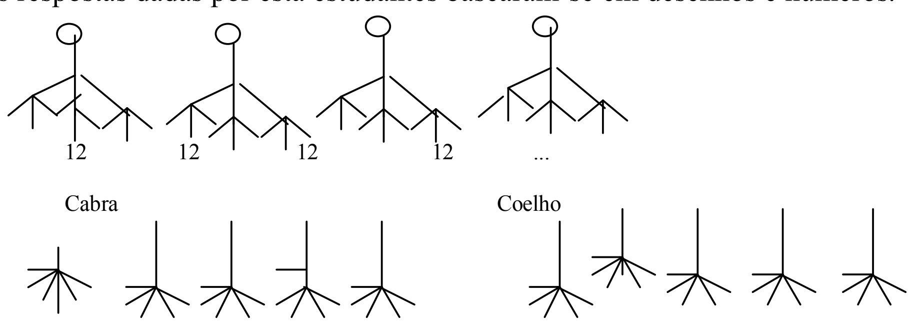
Um estudante da turma A, no pós-teste, que respondeu parcialmente fez uma pequena composição e no final levantou uma questão: *Num bosque onde havia muitos animais houve um incêndio que nove animais assustados foram avisar. Cada um foi avisar três amigos. Mas por salvação começou a chover a gastaram-se 10 litros de água. O fogo tinha três metros. Quantos litros de água sobraram?*

Uma estudante da turma B, no pré-teste, escreveu: *a floresta tem 34m^2 ardeu a terça-parte. Que quantidade de terreno ardeu?*
E continuou: *há 3 coelhos. Se cada amigo avisasse 3 e os que já sabiam diziam a mais 3. Quantos animais avisavam?*
Para resolver o problema o estudante fez o seguinte esquema:

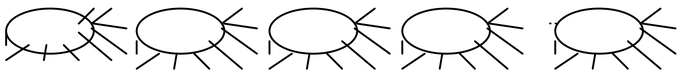


Provavelmente a criação deste problema poderia ter como base um que se desenvolveu em aula sobre "os boatos".

Uma das perguntas de um dos estudantes, desta turma, no pré-teste, foi do seguinte teor: *O que é que as nuvens sentiram?*
Uma estudante da turma B, no pós-teste formulou o enunciado e apresentou também soluções pictóricas e numéricas: *Cada um deles ia avisar três amigos, mas se cada amigo fosse também alertar outros três quantos seriam avisados? Se cada cria tivesse 5 brinquedos quantos teriam todas (ao todo)? Se existissem 9 nuvens quantos litros ao todo chovia?*
As respostas dadas por esta estudantes basearam-se em desenhos e números.



25 + 25 = 50



9 9 9 9 9 ...

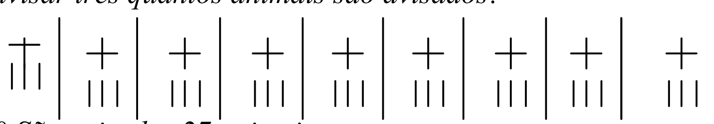
9x9 = 81 litros

Neste problema 22.2, no pós-teste, na turma B, uma estudante colocou uma questão de resposta *booleana*: *Se não fossem as nuvens os animais salvavam-se? R: Se não fossem as nuvens os animais não se salvavam*.

Relativamente à questão 22.2, um estudante da turma B, no pré-teste, usou informação explícita, contextualizando, escrevendo o problema: *Por dia os animais correm aproximadamente 5-6Km, no Verão. No Inverno percorrem 3Km. Se calcularmos os dias do Inverno e do Verão, quantos Km percorrem nas duas estações do ano?*

Na turma B, no pós-teste, no problema 22.2, houve três formulações mais contextualizadas, com exploração da informação explícita e não explícita: a) *Que animais existiam? Os animais tiveram sorte? Porquê?*; b) *Na floresta há 51 animais, que ainda não sabem do incêndio. Quantos animais serão precisos para avisar todos? Se houvesse o triplo das "mães" com 5 filhos quantas crias de lobo havia? Quantos litros de chuva cairiam se houvesse 9 nuvens?*; c) *A floresta tem 1500m^2 já arderam 500m^2. Quantos faltam arder? Se cada animal leva 5 crias e se há 5 espécies diferentes de animais na floresta, quantos animais há ao todo? (Há quatro nuvens cada nuvem choveu 9 litros ao todo, quantos litros choveu?)* Dos resultados obtidos conclui-se que a turma B necessitou de contextualizar mais a formulação dos problemas, utilizando informação explícita e não explícita. Por outro lado na resolução do problema exploraram mais intensamente a primeira fase do conhecimento matemático, usaram imagens pictóricas para representar a compreensão e resolução concreta do problema criado.

Um dos estudantes da turma B no pós-teste que respondeu parcialmente à questão, idealizou uma pergunta para cada moldura da banda desenhada, apresentando a solução pictórica e numérica. Assim, a questão elaborada para a primeira moldura foi: *Se cada um avisar três quantos animais são avisados?*



9 São avisados 27 animais.

Pelos processos pictóricos expostos na formulação dos problemas tudo indica que os estudantes da turma B precisam de contextualizar mais os problemas.

ANEXO 12

(Documento para Apreciação do trabalho desenvolvido,
a realizar pelos estudantes, no 5º e 6º anos de escolaridade)

Resumo de Algumas das Actividades realizadas no 5º A (2001/02)
na disciplina de *MATEMÁTICA*

No 5º ano realizaste várias actividades nas aulas de Matemática, relacionadas apenas com esta disciplina ou com outras, tais como: *Ciências da Natureza, Educação Física, História, Estudo Acompanhado, Formação Cívica e Oferta da Escola (TIC)*.

Vou recordar-te algumas das actividades que resolveste **com** ou **sem** o **computador**.

Material / **Tarefas**	**Sem computador**	**Com computador**	***Observações***
• Sólidos geométricos: "à descoberta da fórmula de *Euler*". • Jogo dos poliedros.	• Folha de trabalho • Utilização de poliedros em modelos de madeira e *polidrons*	• Em OE, utilização de **Cd Rom** sobre sólidos geométricos para alunos com mais dificuldades	• Mostra da estrutura atómica de alguns corpos feita pela professora de Química do 8ºano.
• Compras nos saldos "*chapéus e bonés*"	• Folha de trabalho		
• Itinerários na planta da minha cidade: "*De casa à escola*"	• Plantas da cidade de Valongo • Folha de trabalho		• Escala da planta da cidade 1:500 • Relação com História
• Cálculo da área dos pavilhões da escola	• Plantas da Escola • Questões orais e escritas no quadro	• Utilização da folha de cálculo para organizar os dados (*mais folha do que cálculo*)	• Escala da planta da Escola 1:1000 • Relação com História
• Gerar diferentes nºs: naturais, pares, ímpares, múltiplos, ... • Investigar sobre soma e produto entre dois nºs • Resolução de problemas.	• Questões colocadas oralmente • Indicações verbais	• Utilização da folha de cálculo (mais cálculo do que folha)	
• Resolução de problemas: *animais na quinta e idades das pessoas*	• Folha de Trabalho	• Utilização da folha de cálculo	
• *Lavar os dentes e poupar água*.	• Folha de Trabalho • Bacia, copo, água,...	• Utilização da calculadora	• TPC. • Relação com Ciências da Natureza (CN)
• Resolução de problemas: "*Boatos e bactérias*"	• Folha de Trabalho	• Utilização da folha de cálculo	• Relação com (CN)
• *Método de Hondt*	• Folha de Trabalho	• Utilização de um ficheiro da folha de cálculo	• Relação com História
• *Correr, saltar e aprender Matemática*	• Folha de Trabalho • Fita métrica, cronómetro, ... • Dados de Educ. Fis.	• Utilização de um ficheiro da folha de cálculo	• Relação com Educação Física (Educ. Fis.)

Depois de recordares as actividades gostaria que respondesses às seguintes questões e simultaneamente elaborasses um relatório sobre o trabalho realizado no ano transacto nas aulas de Matemática.

Gostaste de realizar as actividades? Porquê?
Qual a actividade de que gostaste mais? E de qual gostaste menos? Porquê?
Qual foi aquela em que tiveste mais dificuldades? E menos dificuldades? Porquê?

Qual a que gostarias de repetir? Porquê?

Achas que estas actividades têm algum interesse? Se sim, qual?
Consideras que estas actividades ajudam-te a gostares mais de Matemática? Porquê?
Achas importante utilizar o computador na resolução destas actividades? Porquê?
Tiveste dificuldades na utilização da folha de cálculo? Se sim, em que actividades?

Achas que este tipo de problemas e actividades relacionadas com a vida real e com outras disciplinas tem interesse serem resolvidos nas aulas de Matemática ? Porquê?

Refere ainda outros aspectos que consideres importantes e que não foram focados nas questões anteriores.

RELATÓRIO

Obrigada pela tua colaboração.

Resumo de Algumas das Actividades realizadas no 5º B (2001/02)
na disciplina de *MATEMÁTICA*

No 5º ano realizaste várias actividades nas aulas de Matemática, relacionadas apenas com esta disciplina ou com outras, tais como: *Ciências da Natureza, Educação Física, História, Estudo Acompanhado, Formação Cívica e Oferta da Escola (TIC)*.

Vou recordar-te algumas das actividades que resolveste.

Material / Tarefas	Sem computador	*Observações*
• Sólidos geométricos "à descoberta da fórmula de *Euler"*. • Jogo dos poliedros.	• Folha de trabalho • Utilização de poliedros em modelos de madeira e *polidrons*	• Mostra da estrutura atómica de alguns corpos feita pela professora de Química do 8ºano.
• Compras nos saldos "*chapéus e bonés*"	• Folha de trabalho	
• Itinerários na planta da minha cidade: "*De casa à escola*"	• Plantas da cidade de Valongo • Folha de trabalho	• Escala da planta da cidade 1:5000 • Relação com História •
• Cálculo da área dos pavilhões da escola	• Plantas da Escola • Questões orais e escritas no quadro	• Escala da planta da Escola 1:1000 • Relação com História
• Resolução de problemas: *animais na quinta e idades das pessoas*	• Folha de Trabalho	
• *Lavar os dentes e poupar água*.	• Folha de Trabalho • Bacia, copo, água,...	• TPC. • Relação com Ciências da Natureza (CN)
• Resolução de problemas: "*Boatos e bactérias*"	• Folha de Trabalho	• Relação com (CN)
• *Método de Hondt*	• Folha de Trabalho • Utilização da calculadora	• Relação com História
• *Correr, saltar e aprender Matemática*	• Folha de Trabalho • Fita métrica, cronómetro, ... • Dados de Educ. Fis.	• Relação com Educação Física (Educ. Fis.)

Depois de recordares as actividades gostaria que respondesses às seguintes questões e simultaneamente elaborasses um relatório sobre o trabalho realizado no ano transacto nas aulas de Matemática.

Gostaste de realizar as actividades? Porquê?
Qual a actividade de que gostaste mais? E de qual gostaste menos? Porquê?
Qual foi aquela em que tiveste mais dificuldades? E menos dificuldades? Porquê?

Qual a que gostarias de repetir? Porquê?

Achas que estas actividades têm algum interesse? Se sim, qual?
Consideras que estas actividades ajudam-te a gostares mais de Matemática? Porquê?
Achas importante poder utilizar a calculadora ou o computador na resolução destas actividades? Porquê?

Achas que este tipo de problemas e actividades relacionadas com a vida real e com outras disciplinas tem interesse serem resolvidos nas aulas de Matemática ? Porquê?

Refere ainda outros aspectos que consideres importantes e que não foram focados nas questões anteriores.

RELATÓRIO

Obrigada pela colaboração.

Resumo de Algumas das Actividades realizadas nos dois primeiros períodos no 6º A em 2002/03, na disciplina de *MATEMÁTICA*

Tal como no 5º ano, nestes dois períodos do 6º ano realizaste várias actividades nas aulas de Matemática, relacionadas apenas com esta disciplina ou com outras, tais como: *Ciências da Natureza, Educação Física, História, Estudo Acompanhado, Formação Cívica e Oferta da Escola (TIC)*.

Vou recordar-te algumas das actividades que resolveste **com** ou **sem** o **computador**.

Material / **Tarefas**	**Sem computador**	**Com computador**	***Observações***
• Tantas Caixa!	• Folha de trabalho	• Em Oferta da Escola com a Folha de cálculo	• Uma das questões da folha de trabalho não foi realizada na folha de cálculo
• Banda desenhada "As fracções como motivo de conversa"	• Folha de trabalho		• Resolvida em Matemática e Estudo Acompanhado (EA)
• Vencer a Fome, consolidar a Paz – Angola 2002	• Folhas de Trabalho	• Utilização da folha de cálculo	• Iniciou-se em Formação Cívica e desenvolveu-se em Língua Portuguesa, na Oferta da Escola (OE) e em Matemática
• Respirar e Descansar	• Folha de trabalho		• Relacionada com as Ciências da Natureza
• Cheques e compras	• Folhas de trabalho		• Matemática em contexto
• Expressões com euros	• Quadro negro		• Matemática
• Pulsação	• Folhas de trabalho	• Utilização da folha de cálculo (tabela e gráficos) e do processador de texto	• Iniciou-se em Ciências da Natureza, depois em Educação Física, em Matemática, em OE, Líng Portug. e EA
• Promoções	• Folha de trabalho		• Matemática em contexto
• A compra de cromos	• Folha de trabalho		• Matemática
• A área dos pavilhões da nossa Escola e sua história	• Folha de Trabalho • Site internet • Projecto educativo da escola	• Processador de texto • Internet	• Matemática, Estudo Acompanhado, Língua Portuguesa e História.
• A galinha	• Folha de Trabalho		• Matemática em família
• A Cabra	• Folha de Trabalho	• Demonstração com o Sketchpad	• Matemática em contexto
• Padrões em V	• Folha de Trabalho	• Folha de cálculo e gráficos	• Matemática em contexto
• Geometria dinâmica	• Folha de Trabalho	• Sketchpad	• Geometria euclideana

• No início do ano também resolveste um *"longo" teste* de competências em **Matemática** e no **Est. Acompanhado**

Depois de recordares as actividades gostaria que respondesses às questões da página seguinte e simultaneamente expusesses a tua opinião sobre o trabalho realizado nestes dois primeiros períodos do 6º ano de escolaridade.

QUESTÕES

1. Gostaste de realizar as actividades? Porquê?
2. Qual a actividade de que gostaste mais? E de qual gostaste menos? Porquê?
3. Qual foi aquela em que tiveste mais dificuldades? E menos dificuldades? Porquê?
4. Qual a que gostarias de repetir? Porquê?
5. Achas que estas actividades têm algum interesse? Se sim, qual?
6. Consideras que estas actividades ajudam-te a gostares mais de Matemática? Porquê?
7. Achas importante utilizar o computador na resolução destas actividades? Porquê?
8. Tiveste dificuldades na utilização da folha de cálculo? Se sim, em que actividades? E a construção de gráficos foi acessível?
9. Achas que este tipo de problemas relacionadas com a vida real (Matemática em contexto) e com outras disciplinas (âmbito interdisciplinar) têm interesse em serem resolvidos nas aulas de Matemática ? Porquê?

Refere ainda outros aspectos que consideres importantes e que não foram focados nas questões anteriores. Se achares conveniente usa outra folha para expores as tuas ideias.

RESPOSTAS e **OUTRAS IDEIAS**

Obrigada, mais uma vez, pela tua colaboração.

Resumo de Algumas das Actividades realizadas nos dois primeiros períodos no 6º B em 2002/03, na disciplina de *MATEMÁTICA*

Tal como no 5º ano, nestes dois períodos do 6º ano realizaste várias actividades nas aulas de Matemática, relacionadas apenas com esta disciplina ou com outras, tais como: *Ciências da Natureza, Educação Física, História, Estudo Acompanhado, Formação Cívica e Oferta da Escola (TIC)*.

Vou recordar-te algumas das actividades que resolveste.

Material / Tarefas	Sem computador	*Observações*
• Tantas Caixa!	• Folha de trabalho	• Uma das questões da folha de trabalho não foi realizada na folha de cálculo
• Banda desenhada "As fracções como motivo de conversa"	• Folha de trabalho	• Resolvida em Matemática e Estudo Acompanhado (EA)
• Vencer a Fome, consolidar a Paz – Angola 2002	• Folhas de Trabalho	• Iniciou-se em Formação Cívica e desenvolveu-se em Língua Portuguesa, na Oferta da Escola (OE) e em Matemática.
• Respirar e Descansar	• Folha de trabalho	• Relacionada com as Ciências da Natureza
• Cheques e compras	• Folhas de trabalho	• Matemática em contexto
• Expressões com euros	• Quadro negro	• Matemática
• Pulsação	• Folhas de trabalho	• Iniciou-se em Ciências da Natureza, desenvolveu-se em Educação Física, em Matemática, em OE, Língua Portuguesa e EA
• Promoções	• Folha de trabalho	• Matemática em contexto
• A compra de cromos	• Folha de trabalho	• Matemática
• A área dos pavilhões da nossa Escola e sua história	• Folha de Trabalho • Site internet • Projecto educativo da escola	• Matemática, Estudo Acompanhado, Língua Portuguesa e História.
• A galinha	• Folha de Trabalho	• Matemática em família
• A Cabra	• Folha de Trabalho	• Matemática em contexto
• Padrões em V	• Folha de Trabalho	• Matemática em contexto

- No início e no final do ano resolveste ainda um *"longo" teste* em **Matemática** e no **Estudo Acompanhado**.

Depois de recordares as actividades gostaria que respondesses às questões seguintes e simultaneamente expusesses a tua opinião sobre o trabalho realizado nestes dois primeiros períodos do 6º ano de escolaridade.

QUESTÕES

1. Gostaste de realizar as actividades? Porquê?
2. Qual a actividade de que gostaste mais? E de qual gostaste menos? Porquê?
3. Qual foi aquela em que tiveste mais dificuldades? E menos dificuldades? Porquê?
4. Qual a que gostarias de repetir? Porquê?
5. Achas que estas actividades têm algum interesse? Se sim, qual?
6. Consideras que estas actividades ajudam-te a gostares mais de Matemática? Porquê?

7. Achas importante poder ser usado o computador na resolução destas actividades? Porquê?

9. Achas que este tipo de problemas relacionadas com a vida real (Matemática em contexto) e com outras disciplinas (âmbito interdisciplinar) têm interesse em serem resolvidos nas aulas de Matemática ? Porquê?

Refere ainda outros aspectos que consideres importantes e que não foram focados nas questões anteriores. Se achares conveniente usa outra folha para expores as tuas ideias.

RESPOSTAS e **OUTRAS IDEIAS**

Obrigada, mais uma vez, pela tua colaboração.

ANEXO 13
(Alguns documentos relativos à minha estada no Instituto Freudenthal, Universidade de Utrecht, Holanda)

Dárida Maria Fernandes[14]
Professora Adjunta da área de Matemática
da Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico do Porto
Directora Científica e Pedagógica do ***Calculus*** – Centro de Investigação
e Cultura Matemática do IP Porto
Rua Dr, Roberto Frias 712 4200-465 Porto
Tel: 225571044

Exmo. Sr. Presidente da Fundação Calouste Gulbenkian

Como aluna de doutoramento da Universidade de Aveiro no domínio da Didáctica da Matemática, com orientação do Prof. Doutor Jaime Carvalho e Silva e da Profa. Doutora Isabel Cabrita, cujo tema da tese se centraliza na *aprendizagem do conceito de variável no trabalho de âmbito interdisciplinar*, *no ensino básico, com a utilização das Tecnologias de Informação e Comunicação* (TIC) e considerando que:

- o tema da investigação focaliza-se numa problemática prioritária a nível nacional, pois o insucesso na disciplina de Matemática tem impedido um desenvolvimento harmonioso intelectual do indivíduo e até do próprio país;
- o domínio de intervenção inovador na área das TIC revela-se de crucial e tem-se apresentado, no quadro escolar actual, altamente deficitária;
- o âmbito do ensino da Matemática em contexto interdisciplinar enquadra-se na actual flexibilidade curricular, mas não tem sido explorado e implementado nas nossas escolas por falta de experiências neste campo educativo;
- o estudo realiza-se no 1º e 2º ciclos do ensino básico, o qual se revela determinante e estruturante para as aprendizagens matemáticas ulteriores;
- o programa de avaliação de competências PISA – *Programme for International Student Assessment*, implementado pela OCDE, tem revelado deficiências graves nos estudantes na área de Matemática e, dada a importância da resolução de problemas em contexto interdisciplinar foi criada, nesta última edição, mais uma classe de resolução de problemas com esta dimensão;

Venho, por este meio, solicitar a V. Exa. apoio financeiro para uma estada no *Instituto Freudenthal na Holanda*, único centro especializado na Europa, que tem aprofundado a vertente da Matemática em contexto e de natureza interdisciplinar, permitindo que os alunos desenvolvam conhecimentos matemáticos práticos, baseados em estratégias estimulantes e relacionadas com as experiências do quotidiano do aluno e, consequentemente, conseguindo resultados positivos nos programas de avaliação internacional, no domínio da Matemática.

Desde já agradecida pela atenção dada ao assunto e certa que o pedido será considerado, permitindo o aprofundamento bibliográfico, que de outra forma se está a tornar muito difícil, proporcionando ainda o contacto com especialistas de uma temática tão recente, envio cordialmente a V. Exa. os meus sinceros cumprimentos.

Porto, 18 de Março de 2004

Dárida Maria Fernandes

[14] Junto envio curriculum vitae.

Realização de um estágio no Instituto Freudenthal – Holanda

Enquadramento educativo/formativo:

A investigação em curso situa-se no domínio da educação matemática no ensino básico, no 1º e 2º ciclos, com estudo experimental durante cinco anos, do 2º ao 6º ano de escolaridade com acompanhamento da investigadora no estudo de caso de duas turmas.

A investigação desenvolve-se no Departamento de Didáctica e Tecnologias Educativas da Universidade de Aveiro, tendo em vista a obtenção do grau de doutor e focaliza-se para a *aprendizagem do conceito de variável no trabalho de âmbito interdisciplinar*, *no ensino básico, com a utilização das Tecnologias de Informação e Comunicação* (TIC).

Importância do estudo:

- O tema da investigação focaliza-se para uma problemática prioritária a nível nacional, pois o insucesso na disciplina de Matemática tem impedido o desenvolvimento harmonioso de estudantes enquanto pessoas e o progresso do próprio país.
- A intervenção inovadora na área das Tecnologias de Informação e Comunicação revela-se de crucial e tem-se apresentado, no quadro escolar actual, altamente deficitária na exploração de conteúdos temáticos disciplinares e interdisciplinares.
- O estudo realiza-se no 1º e 2º ciclos do ensino básico, cujas aprendizagens se revelam determinantes e estruturantes para a construção de conhecimentos matemáticos posteriores.
- O ensino da Matemática em contexto interdisciplinar enquadra-se na actual flexibilidade curricular, mas não tem sido explorado e implementado nas nossas escolas por falta de experiências neste campo educativo.
- O programa de avaliação de competências PISA – *Programme for International Student Assessment*, implementado pela OCDE, tem revelado deficiências graves nos estudantes na área de Matemática e, dada a importância da resolução de problemas em contexto interdisciplinar foi criada, nesta última edição, mais uma classe de resolução de problemas com esta dimensão.

Objectivos

Dada o carácter inovador deste campo investigativo, em educação matemática, no quadro escolar actual e como o Instituto Freudenthal tem há já vários anos trabalhado neste domínio, pretende-se realizar o estágio neste Instituto para:

- dialogar e reflectir com alguns docentes responsáveis sobre as investigações, as experiências realizadas neste domínio, designadamente, com o director executivo Jan de Lange e os professores: Drijvers, Galen, Heuvel, Panhuizen e Kooj;
- trocar impressões sobre a experiência da participação de alguns destes professores na direcção do PISA e na orientação futura deste programa de avaliação internacional no campo da educação matemática;
- aprofundar a pesquisa bibliográfica sobre a aprendizagem matemática interdisciplinar e em contexto.

Mais informo que a Professora Doutora Nisa Figueiredo, investigadora portuguesa no Instituto, tem planeado junto da direcção a realização do estágio, encontrando-se já programado para duas a três semanas no mês de Setembro.

Porto, 14 de Junho de 2004

Dear Mrs. Fernandes,

With this letter we confirm that you are invited to visit the Freudenthal Institute from September 6, 2004 until September 17, 2004. The purpose of your visit is to exchange ideas, results and difficulties related to your research and learn more about research and experiences in realistic mathematics contexts.

Areas for collaboration include:

Exploring IT-oriented learning environments for education. More specifically, exchanging ideas on how IT-tools can support students to construct and develop algebraic concepts as well as influence the process of problem solving, effectively allowing more time for conceptualising, understanding and modelling.

Exploring the effectiveness and characteristics of the Realistic Mathematics Education approach. More specifically, exchanging ideas on the role of real life contexts in learning and teaching mathematics in primary school.

Identifying successful strategies for implementing IT-oriented courses and implications for professional development in mathematics education.

Exchanging ideas about which tasks promote mathematics communication, connections and understanding of algebraic concepts, in primary school.

Exchanging ideas on the research methodology of “Developmental Research” and on data analysis in qualitative educational studies.

You are expected to carry out your research in a relatively independent way. Every now and then, staff members of the Freudenthal Institute will be available to discuss with you your observations and findings.

This visit can take place under the following conditions:
the financing of the visit is your own responsibility, and
there is no financial support from the Freudenthal Institute available.

The Freudenthal Institute will arrange an office for you (that you will share with one of the Freudenthal faculty staff) and will assist you to find accommodation.

We expect that you can play an important role in the exchange of ideas between Portugal and the Netherlands in the area of mathematics education. As a result of our collaboration, we hope that we will continue to collaborate following your stay in the Netherlands.

Sincerely,
Prof. Dr. Jan de Lange,
Director Freudenthal Institute.