

**Ciclo de Conferencias en Educación Matemática
GEMAD**

**Una Empresa Docente
Universidad de los Andes**

***Tareas que suscitan actividades matemáticas
en estudiantes de temprana edad
en torno al álgebra escolar***

Rodolfo Vergel

[*rodolfovergel@gmail.com*](mailto:rodolfovergel@gmail.com)

Doctorado Interinstitucional en Educación

Universidad Distrital

Francisco José de Caldas

Bogotá, Colombia

7 de abril de 2018

Orden de la presentación

1. Algunas cuestiones iniciales.

2. Ejemplos de tareas y elementos de análisis sobre producciones de estudiantes.

3. Consideraciones finales.

Algunas cuestiones iniciales

- *¿Qué es pensar algebraicamente?*
- *Análisis de soluciones a tareas de generalización que los investigadores adjudican al álgebra, pero parece que serían todavía del orden del pensamiento aritmético.*
- *Análisis que se consideran y presentan como aritméticos, parece que son ya genuinamente algebraicos.*

Algunas cuestiones iniciales

- *¿El criterio de utilización de un **simbolismo alfanumérico** es garantía de que la forma de pensamiento subyacente sea **algebraica**?*
- *¿Podríamos decir que un estudiante que constata que $2+3 = 3+2$, que $4+5 = 5+4$ y que sobre la base de otros pocos (o muchos) casos particulares llega a afirmar que $a+b = b+a$, ha operado una generalización algebraica? Si ese fuese el caso, ¿cuáles serían exactamente los conceptos algebraicos puestos en juego?*
- *¿El simbolismo alfa-numérico caracteriza al pensamiento algebraico?*

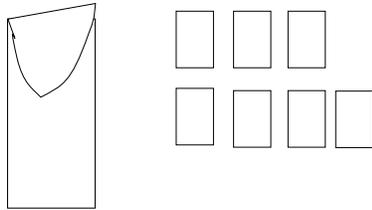
Resuelva sin usar álgebra

Leonardo y Carolina participan en la rifa de boletas para ingresar a las funciones de un festival de cine. Las boletas están guardadas en sobres, cada uno de los cuales contiene el mismo número de boletas.

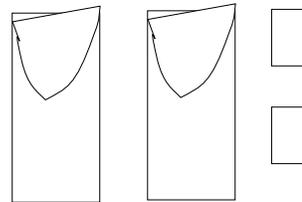
Leonardo, quien ya tenía 7 boletas, ganó 1 sobre y Carolina, quien ya tenía 2 boletas, ganó 2 sobres. Si ahora los dos quedan con el mismo número de boletas, ¿cuántas boletas contiene cada sobre?

Desde el método de ensayo-error

Leonardo



Carolina

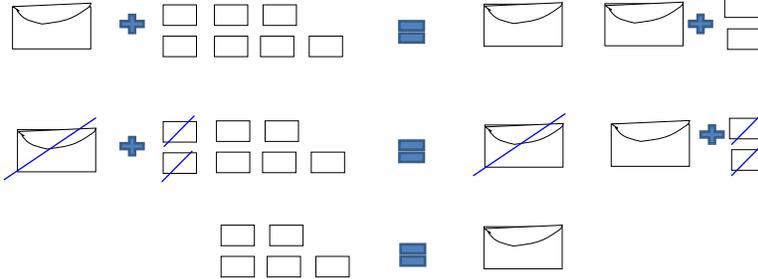


(Producción de una profesora de primaria)

Una propuesta de solución desde lo icónico

Leonardo

Carolina



Pensamiento algebraico

Radford (2006) Vergel (2015a, 2015b)

El pensamiento algebraico, como forma particular de reflexionar matemáticamente, puede caracterizarse mediante tres elementos interrelacionados:

- El **sentido de indeterminancia** (objetos básicos como: incógnitas, variables y parámetro; opuesto a la determinancia numérica).
- La **analiticidad** (como forma de trabajar los objetos indeterminados de manera analítica; reconocimiento del carácter operatorio de los objetos básicos).
- La **designación simbólica o expresión semiótica** de sus objetos (manera específica de nombrar o referir los objetos).

En consecuencia:

Las notaciones (algebraicas) no son una condición necesaria ni suficiente para el pensamiento algebraico (Radford, 2018; Vergel, 2015a, 2015b).

Analiticidad/Deducción

$$x + x = 30$$

$$2x = 30$$



O en nuestro ejemplo de Leonardo y Carolina:

$$x + 7 = 2x + 2$$

$$7 = x + 2$$



De $2+5 = 5+2$ se puede deducir que

$$2+5+1 = 5+2+1$$

- **La deducción en ella misma no implica un pensamiento algebraico.**
- **Necesitamos las cantidades indeterminadas, pues la forma de predicación algebraica es general.**

- ❑ El término *analítico* era considerado por Pappus en términos de movimiento.

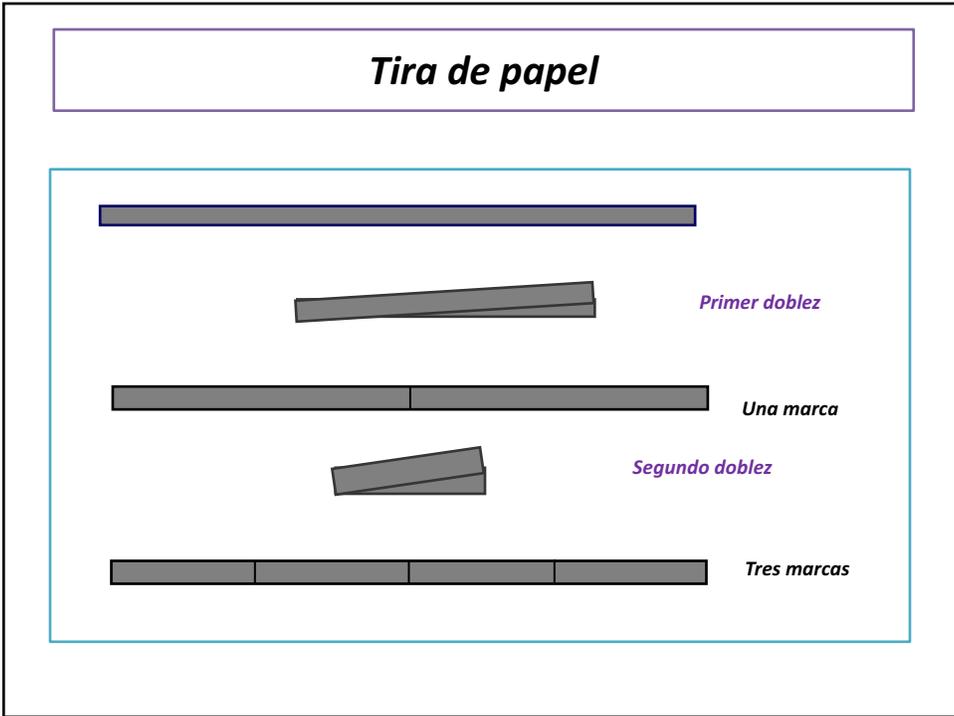
“El análisis es el movimiento desde lo que es dado hacia lo que es buscado”

(Rideout, 2008, p. 62) (Traducción propia)

- ❑ Para Viète “lo que era distintivamente algebraico [...] era la manera *analítica* en la cual pensamos cuando pensamos algebraicamente” (Radford, 2018, p. 6).

$$x + 7 = 2x + 2$$

- ❑ Una solución a través del **método de ensayo-error** no la consideramos como algebraica.
- ❑ Incluso los estudiantes pueden *movilizar signos alfanuméricos*, pero esto *no es lo que hace distintivo el pensamiento algebraico*; esto, más bien, descansa en conceptos aritméticos.
- ❑ Si el estudiante deduce de $x + 7 = 2x + 2$ que $7 = x + 2$ (por la suma de $-x$ a ambos lados de la ecuación), podemos afirmar que el estudiante *está pensando algebraicamente*.
- ❑ Los estudiantes están trabajando a través de consecuencias de asumir que $x + 7 = 2x + 2$; he aquí la idea de movimiento que precisa Pappus.



| <u>Nº de dobles</u> | <u>Nº de marcas</u> |
|---------------------|---------------------|
| 1 | 1 |
| 2 | 3 |
| 3 | 7 |
| 4 | 15 |
| 5 | 31 |
| 6 | |
| 8 | |

- Organización de la información
- Concreto/Abstracto
- Procesos

de generalización
de simbolización

➤ $3=2(1)+1$, $7=2(3)+1$, $15=2(7)+1$, $31=2(15)+1$ y, por tanto, $2(31)+1=63$ y $2(63)+1=127$.

➤ Frente a la pregunta sobre los dobleces que se obtendrían al realizar 100 veces la misma acción de doblar...

➤ Reconocimiento de que el proceso resulta poco práctico en tanto se requeriría conocer el número de dobleces para la acción 99.

➤ Posibilitar avances con respecto a la situación propuesta, al plantear una nueva pregunta:

*¿En cuántas **partes** queda dividida la tira de papel a medida que se realizan las acciones requeridas?*

| N° de dobleces | N° de marcas | N° de partes |
|----------------|--------------|--------------|
| 1 | 1 | 2 |
| 2 | 3 | 4 |
| 3 | 7 | 8 |
| 4 | 15 | 16 |
| 5 | 31 | 32 |
| 6 | 63 | |
| 7 | 127 | |

La interacción en la actividad

¿Qué ven en la última columna?

Estudiante 1: [...] números, profesor.

Profesor: ¿Qué más ven?

Estudiante 2: [...] números pares.

Profesor: ¿Quién ve algo más?

Estudiante 3: [...] cada número se obtiene multiplicando por dos.

Profesor: ¿Y qué más se ve al relacionar todos los números de la última columna?

Estudiante 4: Profe, que cada número es el doble del anterior .

Nadie más veía potencias de 2, excepto el profesor!

1, 10, 100, 1000, 10.000, ..., varios reconocieron que se trataba de "potencias de 10"; y al plantearles nuevamente la secuencia numérica 2, 4, 8, 16, ...

➤ *Necesidad de acudir al trabajo con secuencias numéricas y reconocer patrones ... y posiblemente expresiones asociadas:*

(1) 2, 4, 6, 8, 10, ...

(2) 1, 3, 5, 7, 9, ...

(3) 1, 10, 100, 1000, 10000, ...

(4) 2, 4, 8, 16, 32, ...

| | | |
|-----------|-----------|-----------|
| 2 | 5 | 8 |
| Término 1 | Término 2 | Término 3 |

NOMBRE: Laura Sofia Cava Ortiz
 Edad: 10 Curso: 501 300 Fecha: 08 de mayo

Ahora tienes la siguiente secuencia de números:

| | | |
|-----------|-----------|-----------|
| 2 | 5 | 8 |
| Término 1 | Término 2 | Término 3 |

Siguiendo la secuencia anterior,

1. ¿Cuáles son los números correspondientes a los Términos 4, 5 y 6? Resplica

11
14
17

Término 4 Término 5 Término 6

Porque una vez sumando 3

Figura 32. Reconocimiento del patrón en la secuencia por parte de Laura Sofia

2. ¿Cuál es el número que corresponde al Término 15? Explica cómo lo haces.

toca sumar desde: $17 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 = 44$

44
termino 15

3. ¿Cuál es el número correspondiente al Término 100? Explica cómo procediste para encontrar la respuesta

el termino 100 hay que hacer multiplicacion $100 \times 3 = 300 - 1$

Figura 34. Producción de Yaneth a los ítems 2 y 3 de la Tarea 3

- Yaneth instancia una forma aditiva para responder al número que corresponde al Término 15 (ítem 2):

“toca sumar desde: $17+3+3+3+3+3+3+3+3+3=44$ ”

- sugiere que el número 9 obtenido por la diferencia entre el Término 15 y el Término 6, determina las veces que debe repetirse el número 3 en la suma, anclándose en 17 que corresponde al Término 6.
- La **característica común** identificada por Yaneth (aumentar 3) a partir de su respuesta al ítem 2 **es generalizada y aplicada para encontrar el número que corresponde al Término 15.**
- Esta **abducción** (*generalización de la característica común*) es utilizada como simple posibilidad, es decir algo que es solamente plausible (Radford, 2013).

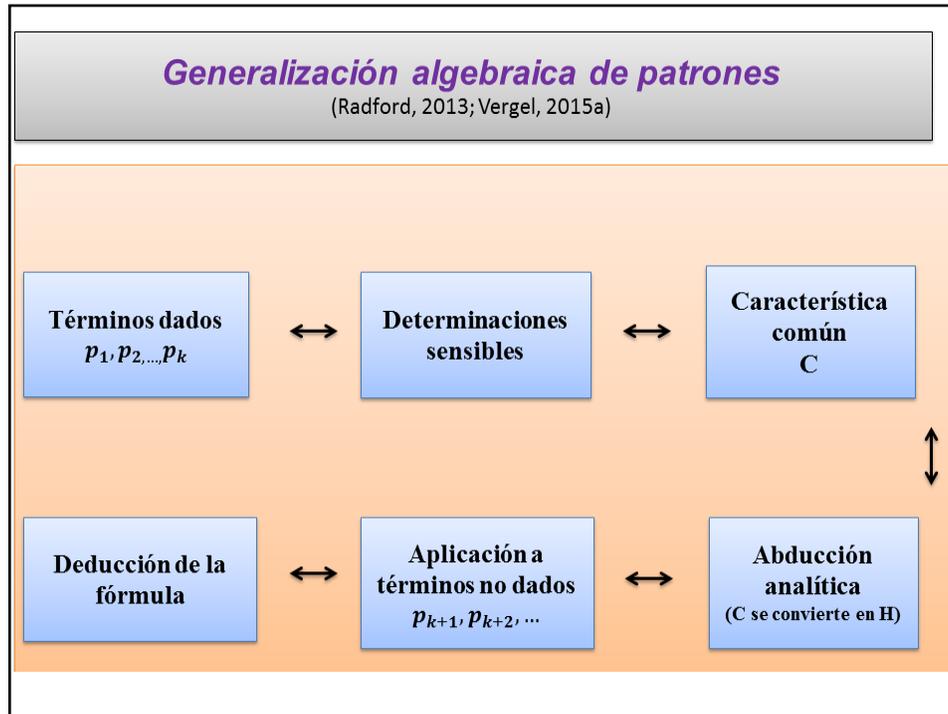
- Su producción sugiere que la abducción no es utilizada de manera analítica.

- Yaneth parece recurrir a una **generalización muy sofisticada** que se podría simbolizar así:

Se parte de un término cualquiera conocido T_a y se quiere hallar T_n .

$$T_a + (n - a) \times 3 = T_n.$$

- Yaneth efectúa una generalización aritmética. No es de naturaleza algebraica, pues la abducción no se constituye en principio asumido o hipótesis para deducir apodícticamente una fórmula que le proporcione el número correspondiente a cualquier término de la secuencia numérica (Radford, 2013).



Algunas precisiones

- ❑ En la generalización de patrones, una generalización algebraica implica **deducir** una fórmula desde algunos términos de una secuencia dada.
- ❑ **Que la fórmula sea expresada o no en simbolismo alfanumérico es irrelevante**

(Radford, 2018)

Volviendo a la producción de Yaneth...

- La abducción no es todavía analítica.
- La ausencia de **elementos espaciales o geométricos** (que sí comportan las secuencias figurales) parece provocar un trabajo de generalización por parte de Yaneth basado en **relaciones entre números (ver libro Vergel & Rojas, p.88)**, facilitando así implícitamente la aparición de estrategias de ensayo-error que se erigen en obstáculo al pensamiento deductivo sobre el que reposa la analiticidad.
- Esto sugiere pensar que **no existe tránsito entre la abducción y la hipótesis (abducción analítica)**.
- El contar con secuencias figurales propulsa una articulación de las **estructuras espacial y numérica**, lo cual constituye un aspecto importante del desarrollo del pensamiento algebraico.
- **“Los procesos perceptivos también dependen de las formas socio-históricas de vida”** (Luria, 1987, p. 18).

- En relación con el ítem 3 Yaneth parece poner en marcha un esquema operacional.
- ***Las formas de pensar y de producción del saber de nuestros alumnos necesariamente están vinculados con las formas culturales e históricas de interacción humana y cooperación, esto es, la normatividad y reglamentación entre individuos*** (Marx & Engels, 1970).
- Ella expresa que:

“el término 100 hay que hacer multiplicacion 100x3 = 300 - 1”
- Yaneth ha logrado **concretar** una generalización de acciones.
- Según Marx, ***lo concreto es concreto porque es la concentración de varias determinaciones, como la unidad de lo diverso.***

Consideraciones finales

- El simple cálculo con lo indeterminado no es suficiente para caracterizar el pensamiento algebraico. En la generalización de patrones y en la resolución de ecuaciones se requiere la *deducción*.
- Inicialmente al parecer nos topamos con *formas sofisticadas de generalización aritmética en las cuales la analiticidad no aparece explícitamente*. Estas formas sofisticadas de generalización aritmética parecen estar muy cerca de protoformas de pensamiento algebraico basadas en una protoanaliticidad.

Consideraciones finales

- *Necesidad de identificar generalizaciones aritméticas muy sofisticadas en los primeros grados de las que ni siquiera somos conscientes, dada la limitación del pensamiento aritmético que se ha adoptado con frecuencia en la investigación de álgebra temprana. Necesidad de un trabajo específico sobre pensamiento multiplicativo y pensamiento proporcional.*
- Premisa epistemológica dialéctico materialista acerca de la cognición y los signos:
“La manera, profundidad e intensidad en que un objeto aparece como objeto de conciencia son consustanciales con el material (contenido) semiótico que hace posible que tal objeto se convierta en un objeto de conciencia y pensamiento”.

(Radford, 2018, p. 17) (Traducción propia)

Consideraciones finales

➤ *Lógica de las especies y Lógica de los números:*
El Álgebra es un método para operar sobre formas generales mientras que la Aritmética es un método para operar sobre números concretos (Vieta, 1591)

➤ Perspectiva teórica de Radford:

Saber algebraico: Síntesis histórica y culturalmente codificada de hacer y de reflexionar en términos analíticos sobre números indeterminados y conocidos

Libro próximo a publicar...

Vergel, R. & Rojas, P. J. (en prensa). *Álgebra escolar y pensamiento algebraico: aportes para el trabajo en el aula*. Bogotá: Editorial UD.