

Cómo citar el artículo

Rivera Quiroz, S. M.; Londoño Orrego, S.M. & Jaramillo López, C.M. (2016). Medida de áreas en contextos auténticos: un enfoque desde la modelación matemática.

Revista Virtual Universidad Católica del Norte, 48, 79-99. Recuperado de <http://revistavirtual.ucn.edu.co/index.php/RevistaUCN/article/view/762/1288>

Medida de áreas en contextos auténticos: un enfoque desde la modelación matemática*

Area Measurement in Real Contexts: An Approach based on
Mathematical Modeling

Mesure de surfaces dans contextes réels: une approche
d'après la modélisation mathématique

*El presente artículo se deriva del proyecto de investigación "Medida del área y del volumen en contextos auténticos: una alternativa de aprendizaje a través de la modelación matemática". El proyecto se desarrolló en la Universidad de Antioquia - Maestría en Educación, se inició en marzo de 2012 y culminó en agosto de 2014.

Santiago Manuel Rivera Quiroz

Licenciado en Matemáticas y Física de la Universidad de Antioquia
Magister en Educación (Área de Educación Matemática)
Docente de la Institución Educativa Divino Niño (Caucasia-Antioquia)
Docente de Cátedra de la Universidad de Antioquia (Bajo Cauca)
Integrante del Grupo de Investigación Educación Matemática e Historia (U de A - EAFIT).
santiagorq@hotmail.com

Sandra Milena Londoño Orrego

Licenciada en Matemáticas y Física de la Universidad de Antioquia
Magister en Educación (Área de Educación Matemática)
Docente de la Facultad de Educación de la Universidad de Antioquia
Integrante del Grupo de Investigación Educación Matemática e Historia (U de A - EAFIT)
Integrante Grupo MATHEMA-Formación en Investigación en Educación Matemática
sandra.londonoo@udea.edu.co

Carlos Mario Jaramillo López

Licenciado en Matemáticas de la Universidad de Medellín
Doctor en Ciencias Matemáticas de la Universidad Politécnica de Valencia
Profesor titular del Instituto de Matemáticas de la Universidad de Antioquia
Coordinador del Grupo de Investigación Educación Matemática e Historia (U de A-EAFIT)
carlos.jaramillo1@udea.edu.co

Recibido: 18 de agosto de 2015

Evaluado: 14 de abril de 2016

Aprobado: 14 de abril de 2016

Tipo de artículo: Investigación e innovación

Resumen

Este artículo muestra algunos avances de la investigación llevada a cabo en el marco de la Maestría en Educación de la Universidad de Antioquia; usa el entorno de las inundaciones presentadas en una institución educativa por causa del desbordamiento del Río Cauca. El estudio tiene que ver con la construcción de modelos que hacen estudiantes de grado décimo a partir de relaciones de dependencia establecidas entre las áreas inundadas en su institución educativa y la altura del nivel del agua en un punto de referencia, lo que les ha permitido lograr no solo una forma alternativa de asociar las operaciones al medio, sino también reflexionar sobre cómo estas emergen en el fenómeno en cuestión y la proposición de alternativas de solución que contribuyan a minimizar el impacto social y ambiental de dicho fenómeno. Para el desarrollo del estudio, se tienen en cuenta el ambiente cotidiano, la comunicación, las experiencias de cada individuo y su interacción con el grupo, aspectos propios de la investigación cualitativa. En este sentido, el estudio de casos pretende explorar, indagar y analizar las diversas formas en que el alumno construye y otorga significado a elementos matemáticos en un contexto auténtico.

Palabras clave

Área, Función cuadrática, Inundaciones, Medida, Modelación matemática.

Abstract

This article shows some progresses in the research performed in the Master of Science program on Education of the University of Antioquia; it is based on the inundations caused in an educational institution by the flooding of the Cauca River. The study is related to the construction of models performed by students of the fifth year of high school based on relations of dependence established between the flooded zones, in their educational institution, and the water level in a reference point, which has allowed them to achieve not only an alternative way for associating geometrical operations to their context, but also reflecting on how these appear on this natural phenomenon and the proposal of alternative solutions which contribute to minimize the social and environmental influence of this phenomenon. In order to develop this study, different items has been considered such as the daily context, the communication, and the experiences of each individual and his interaction with the group, which are proper of qualitative research. In this sense, the study of cases is aimed at exploring, asking and analyzing for the different ways students construct and gives meaning to mathematical concepts into a real context.

Keywords

Area, Quadratic function, Inundations, Measurements, Mathematical modeling.

Résumé

Cet article présente quelques progrès de la recherche réalisé dans le contexte de la Maîtrise en Education de l'Université d'Antioquia (Colombie) ; en utilisant le contexte des inondations affrontées par une institution éducative à cause du débordement du fleuve Cauca. Cet étude est lié à la construction de modèles élaborés par étudiants de cinquième année secondaire à partir des relations de dépendances établis entre les surfaces inondées dans leur institution éducative et la hauteur du niveau de l'eau sur un point de référence, ce qui permet d'obtenir non seulement une forme alternative d'associer les opérations au contexte mais encore de réfléchir au sujet de comment ces

opérations émergent dans ce phénomène et la proposition d'alternatives qui aident à minimiser l'effet social et environnemental des inondations. Pour développer cet étude on a considéré des rapports propres de la recherche de type qualitative comme le contexte quotidien, la communication, les expériences de chaque individu et son interaction avec le groupe. Dans ce sens, l'étude de cas a comme objectif d'explorer, rechercher et d'analyser les différents formes dans lesquelles l'étudiant construit et donne signification aux éléments mathématiques dans un contexte réel.

Mots-clés

Surface, Fonction quadratique, Inondations, Mesure, Modélisation mathématique.

Introducción

A través de la historia, las matemáticas han contribuido al desarrollo de los pueblos y en gran medida se encuentran relacionadas con el medio social y cultural (Caraça, 1984; Bishop, 1999). Un aspecto fundamental en el entorno tiene que ver con los fenómenos naturales, en el caso concreto de este artículo, con las inundaciones formadas por desbordamientos de ríos, con los cuales se pueden asociar nociones numéricas emergentes. Sin embargo, de acuerdo con Moreno, A.; Bulla, B.; Giraldo, N.; Mantilla, A. y Mantilla, M. (1998) y Guillen (2010), en muchos casos, estas nociones se han fundamentado desde el concepto y la rigurosidad, sin tener en cuenta su relación estrecha con el hábitat. Se han generalizado como un conjunto fijo de conocimientos universalizados y acabados, donde su objetivo está limitado por la aplicación de números, fórmulas y teoremas que carecen de significados. Estos se presentan totalmente descontextualizados del vivir del estudiante, facilitando así la desmotivación y el escaso desarrollo de la creatividad. Por ello, se requiere de una construcción del conocimiento numerico fundamentado desde los ambientes en los que interactúan los educandos, pues esta pueden ser una herramienta que facilita la asimilación. Desde el campo educativo, a través de fenómenos naturales que hacen parte de la cotidianidad, ellos observan relaciones emergentes en el entorno, dando significado al aprendizaje. En este sentido, la modelación se convierte en la herramienta que interrelaciona la matemática y el contexto.

Este trabajo de investigación se desarrolló teniendo en cuenta las inundaciones presentadas en una institución educativa, ubicada en el municipio de Cauca, a causa del desbordamiento del Río Cauca. El estudio se centró en analizar la manera en que los estudiantes construyen ecuaciones a través de la medida del área que se inunda en dicha institución educativa. A partir de esto, se busca que manipulen datos que los lleven a generar espacios de reflexión en la práctica de algunas operaciones numéricas y geométricas dentro de su entorno (Villa-Ochoa, 2007;

Biembengut & Hein, 2004; Londoño & Muñoz, 2011). La situación facilitó en los escolares proponer soluciones que permitan minimizar los efectos del fenómeno, lo cual se convierte en un factor importante y en un punto de referencia para estudiar las situaciones de este en escenarios más amplios y complejos, tanto a nivel nacional como internacional.

El contexto y su implicación en el aprendizaje de los estudiantes

En la actualidad se ha venido incrementando el fenómeno de las inundaciones en el país, debido a múltiples factores ambientales. En particular, el Bajo Cauca (subregión del departamento de Antioquia) viene enfrentando inundaciones que afectan abundantes sectores de la población. Muchos de los estudiantes conviven con este flagelo y se ven obligados a desocupar sus viviendas y buscar albergues o casas de familiares como refugio en épocas de invierno. Este marco en el que está involucrado el alumno podría motivar el aprendizaje de los números y, en particular, de la geometría, puesto que es un medio conocido y ha hecho parte de su ambiente social y cultural y, por ello, desde él se pueden establecer elementos numéricos emergentes. En este sentido, Wagner (citado por Planas, 2002) afirma que las trayectorias individuales son también el producto de las prácticas sociales y de los significados culturales desde donde ellos aprenden a interactuar con su entorno. Para Jaramillo (2011), cultura es “aquella convivencia entre los miembros de un grupo, que resulta de la comunión de sus conocimientos”. Bajo esta idea, considerar el aprendizaje en el escenario social y cultural del individuo amplía las posibilidades para que este aprenda de una manera significativa los contenidos. Así mismo, Van Reewwijk (citado por Giménez et al., 2007) considera que es muy importante contextualizar las situaciones porque, entre otras:

1. Ayuda a comprender que estas son útiles y necesarias.
2. Contribuye a entender su utilidad en la vida cotidiana permitiendo el desarrollo de una actitud crítica y flexible.
3. Aumenta su conocimiento histórico.
4. Despierta la creatividad y el sentido común.

De acuerdo con Giménez et al. (2007), es fundamental orientar las matemáticas al hábitat en el que está inmerso el sujeto, pues de esta forma el aprendizaje tendrá un sentido diferente.

Las inundaciones que afectan a algunas instituciones educativas, ocasionadas por el desbordamiento del Río Cauca, han llevado a modificar las jornadas académicas y han generado el desplazamiento de estudiantes a otras sedes o instituciones, con el fin de no desescolarizar y continuar el trabajo normal en las aulas. Pese a esto, las clases continúan de la forma habitual, con la aplicación de

conceptos, teoremas y fórmulas, con problemas aislados y descontextualizados, ya que los contenidos son tomados de textos tradicionales. Sin embargo, según Arrieta (2003), "La matemática cobra vida, tiene sentido, exactamente en contextos sociales concretos" (p. 3), es decir, que no solo es imparcial, sino que es dependiente de la situación general, en la cual es afrontada.

Teniendo en cuenta investigaciones enmarcadas en la geometría (las de Guillen, 2010; Godino, Batanero & Roa, 2002), la experiencia docente y el escenario escolar y social, se pretendió desarrollar un estudio que permita asociar nociones numéricas al ambiente, con el cual los educandos reflexionen en torno a nociones numéricas emergentes del fenómeno y a las posibilidades de contribuir al mejoramiento del medio en el que se relacionan. Indagaciones como las de Biembengut y Hein (2004), Villa-Ochoa (2007), Londoño y Muñoz (2011), han mostrado que la modelación es una estrategia propicia para aproximarse a cumplir los propósitos de este trabajo. Por esto, es importante que, a partir de un fenómeno natural que afecta directamente a una población, como son las inundaciones, se puedan constituir situaciones desde el pensamiento métrico-geométrico, donde el individuo tiene la posibilidad de establecer situaciones que emergen dentro de un entorno particular y que le faciliten un acercamiento al conocimiento. Según Jaramillo (2011), esta es una actividad social resultado de las diferentes prácticas sociales en las que están involucrados los sujetos, es decir, que el individuo relaciona las operaciones numéricas como una actividad más del ser humano que le permite comprender otros factores dentro del escenario en que habita y que contribuyen a que se complemente como ser social, capaz de transformarlo.

83

La modelación matemática como estrategia de aprendizaje en las aulas

En el marco de la investigación, se consideran los elementos, los cuales dan significado a la relación con el medio.

Para Biembengut y Hein (2006), "Un modelo matemático de un fenómeno es un conjunto de símbolos y relaciones matemáticas que traducen, de alguna forma, el fenómeno en cuestión" (p. 2). De esta manera, funciona no solo para conseguir un procedimiento relativo, sino también para soportar otras aplicaciones o teorías. Estos autores también expresan que "En la práctica, ese conjunto de símbolos y relaciones puede estar vinculado a cualquier rama de las matemáticas, en particular, a los instrumentos fundamentales de las aplicaciones matemáticas" (p. 2). En este sentido, por una parte, se considera una construcción entre varios objetos y sus enlaces, y por otra un escenario o fenómeno. Estos aspectos primordiales de este conocimiento sugieren asuntos de índole epistemológica y metodológica para el aprendizaje. Lo que implica que, al usar nociones numéricas en un ambiente, se vea comprometido un modelo explícita o implícitamente. Como también, que un

individuo experimente a través de la producción de este, es decir, que describa algún fenómeno de interés y pueda reflexionar sobre las relaciones en él existentes, es una precondition entre el sujeto y el objeto que será conocido, donde se pueda observar y explorar el fenómeno y sus relaciones numéricas presentes, como elementos aislados pero al mismo tiempo interconectados a través de procesos que reflejan una parte de la realidad, dando significado al aprendizaje, puesto que el alumno observa y se relaciona directamente con el fenómeno natural. Londoño y Muñoz (2011) consideran que “un modelo constituye un conjunto de elementos relacionados, que cumplen una función de representar y describir mediante relaciones algún aspecto de una situación o fenómeno que se está estudiando” (p.54), por tanto, se asume que este surge de la actividad realizada, en marcos dotados de significados para los educandos. Las inundaciones en la institución producen esta connotación, pues el fenómeno en cuestión hace parte del aspecto que tienen que afrontar y con el cual se relacionan directamente, lo que le da un valor agregado para obtener y comprender resultados inmersos en el mismo entorno.

La modelación para Villa-Ochoa (2007) tiene que ver con la acción efectuada en la educación, la cual procede de la acción científica del profesional que se dedica a darla a conocer de forma aplicada. El autor plantea lo siguiente: “más que una herramienta para construir conceptos, se convierte en una estrategia que posibilita el entendimiento de un concepto matemático inmerso en un micromundo (contexto dotado de relaciones y significados)” (p.70). Es decir, brinda las herramientas necesarias para que el alumno desarrolle conocimientos y lo prepara para ir creando una condición distinta para cuestionarse y abordar los problemas de un escenario “auténtico”. Desde otra mirada, este es, según Gil, Fernández y Rubio (2000), “aquel que reside en experiencias y prácticas reales en el entorno del mundo real por parte de los participantes” (p. 86), es decir, que es todo ambiente existente que ocupa las prácticas y costumbres de los individuos. De este modo, se asume como el punto de inicio para el proceso, el cual se considera como un conjunto de aspectos relacionados con factores cotidianos, habituales y culturales de las personas y de su medio, los cuales se pueden categorizar como situaciones reales. Por esto, habituar al educando en atmósferas “reales” es un factor importante para trabajar en las clases.

El trabajo a partir de un marco “propio” posibilita la integración de diferentes áreas del conocimiento, el interés en la aplicación de estas y el progreso en la significación de los conceptos. Para Biembengut y Hein (2007), se convierte en el incentivo para la creatividad en la formulación y resolución de problemas, en la capacidad de uso de las máquinas electrónicas, en la capacidad de actuar en un grupo, en la orientación en hacer indagaciones y en la capacidad para la presentación de informes. Desde este punto de vista, la modelación relacionada a contextos auténticos aporta, además de lo expresado por Biembengut y Hein, elementos que permiten que los estudiantes formulen y propongan soluciones que contribuyan al mejoramiento de su ambiente. Por otro lado, Biembengut y Hein

(2007) exponen que, en el aprendizaje basado en esta estrategia, es necesaria una serie de actividades o etapas que consisten en delimitar y formular el problema, puesto que en una condición "real" se presentan diversidad de variables, las cuales no se pueden abordar en su totalidad: el desarrollo del contenido, el concepto, la definición, las propiedades, etc., en conexión con el tema que ha generado el proceso, puesto que, al abordar el entorno, es necesario retomar elementos propios de las matemáticas que facilitan la comprensión del fenómeno. En este sentido se pretende la interacción entre la teoría y la práctica, puesto que los alumnos tienen la posibilidad de realizar trabajo de campo, hacer mediciones, representaciones y fundamentarse en elementos teóricos y conceptuales para construir modelos que les permitan comprender la situación abordada.

Metodología de la investigación

El enfoque y el método

El presente trabajo está enmarcado en las relaciones que se forman entre el estudiante y el trabajo desde la actividad, el contexto y el ambiente participativo, teniendo en cuenta un escenario cotidiano, la comunicación y las experiencias de cada individuo, como también las del grupo, aspectos que son propios de un estudio basado en la investigación cualitativa. Este enfoque asume una visión compuesta de experiencias autónomas, de carácter subjetivo y flexible, implicadas en un proceso de construcción dentro y fuera del aula, en este caso a través de la modelación. En términos de D'Ambrosio (citado por Borba y Araujo, 2008), "la investigación cualitativa, también llamada naturalística, tiene como objetivo entender e interpretar datos y discursos, incluso cuando involucra grupos de participantes" (p. 10). Nuestro trabajo se realiza desde este enfoque, ya que se pretende analizar la manera en que los alumnos de grado décimo construyen conocimientos matemáticos emergentes de un contexto auténtico a través de la relación entre el área superficial de las aguas que afectan el establecimiento educativo y la altura del nivel del agua en un punto de referencia dentro de este, donde se evidencien las caracterizaciones sobre la descripción, observación, reflexión y análisis de las interacciones, experiencias, formas de expresión y acciones grupales e individuales que influyen el procedimiento desarrollado por los participantes. Esto con el fin de que se apropien de conceptos y que, a la vez, comprendan cómo estos emergen del ambiente abordado. Lo anterior podrá permitir que asuman una actitud crítica frente al fenómeno y planteen alternativas de solución para minimizar sus efectos. Esta indagación se realiza mediante un estudio de casos fundamentado desde los planteamientos teóricos abordados por Stake (1999) y Hays (2004), quienes lo sitúan en explorar, indagar y analizar las experiencias e interacciones que no han sido asimiladas y comprendidas. Este tipo de estudio permite la producción de representaciones e interpretaciones en forma reflexiva en un período de tiempo no muy extenso. En este caso, el fenómeno se encamina en el modo cómo los educandos, de grado décimo, construyen modelos

relacionados con la medida del área que tiene que ver con el fenómeno, a través de actividades que permitan, desde la geometría, abordarlo. Con esta mirada, se pretende observar la experiencia a partir de las determinaciones no aplicadas en forma general, sino analizadas con carácter particular.

El contexto

El estudio se desarrolla en una institución educativa del Municipio de Cauca (Antioquia) que tiene la particularidad de ser afectada directamente por las inundaciones causadas por el desbordamiento del Río Cauca. El estudio se realiza con un grupo de grado décimo con cuyos integrantes se buscó compartir experiencias, diálogos y conversaciones que generaran un clima de confianza, ya que este aspecto es fundamental dentro del enfoque del trabajo. Cuatro de ellos (Dani, Angélica, Pereira y Anyi) fueron elegidos para ser analizados en el estudio de caso. Tres son afectados directos del fenómeno (inundación de sus viviendas). El diseño investigativo se desarrolló como trabajo de campo, puesto que las actividades involucran directamente a los estudiantes con mediciones en el terreno de zonas afectadas por el fenómeno, dibujo de planos y representaciones.

A continuación se desglosa el proceso que utilizaron los escolares para construir sus propios modelos a partir de las medidas del área superficial de agua que emerge dentro de un fenómeno de inundación y que fueron identificadas por los alumnos como elementos presentes en dicho entorno. Para la obtención y análisis de los datos, se utilizan algunas consideraciones inherentes al proceso establecido por Biembengut y Hein (2006) en cuanto a la delimitación del problema y su formulación, elaboración, resolución y validación. Esta última se desarrolló a través de procesos que admiten comprobar resultados y de elementos tecnológicos que permiten al estudiante contrastar sus resultados y generalizarlos. Esto puede favorecer una visualización de las matemáticas en otros ambientes no escolares.

86

Hacia la construcción de modelos matemáticos

El contexto auténtico: fenómeno de las inundaciones y su impacto social

Los ambientes enmarcados en un contexto auténtico se establecieron como punto de partida para que los escolares construyeran modelos que les permitieran generalizar las relaciones entre el área superficial inundada con relación a la altura del nivel del agua, con el fin de comprender algunos elementos del entorno que contribuyan a la propuesta de alternativas que puedan minimizar los efectos del fenómeno en la comunidad. Si bien la idea de trabajar sobre las inundaciones nace del propósito de la investigación, es a partir de las experiencias y conocimiento del medio con el que los educandos interactúan que es posible aproximarse a las matemáticas escolares. El fenómeno, que afecta a la institución educativa y a la comunidad en general, se convirtió en un espacio de interacción. En él, ellos hacen

reflexiones de carácter social y económico acerca del fenómeno a partir de una serie de preguntas que les fueron planteadas.

El episodio que se presenta a continuación surge del diálogo que se sostuvo con los estudiantes mientras se hacía un recorrido por zonas que fueron inundadas. Ellos observaron, en esa actividad, las calles, caños cercanos y diferentes construcciones afectadas en la inundación anterior (15 días antes). Luego se discutió en el aula en torno a las preguntas planteadas según lo observado. La siguiente ilustración muestra un caño cercano y la destrucción de una construcción ubicada a orillas del río.



Ilustración 1. Zonas observadas por los estudiantes en el recorrido

Fuente: Rivera, S. (2012). [Fotografía consecuencias de la inundación].

Los estudiantes son conscientes de que la inundación es un fenómeno de la naturaleza que afecta a muchas comunidades a nivel nacional e internacional y que cada vez se ha presentado con mayor intensidad. La siguiente tabla resume las conclusiones más determinantes a nivel social y económico sobre las consecuencias del fenómeno de inundación a nivel nacional, después de hacer una reflexión con el grupo de educandos.

Tabla 1. Exploración general: el fenómeno de las inundaciones

Preguntas	Respuestas de los estudiantes
¿Por qué ocurren los fenómenos de inundación en el país?	Falta de cultura Botar los residuos a los caños y ríos
¿Qué factores consideras han incidido al incremento del fenómeno de las inundaciones a nivel nacional?	Basuras Falta de mantenimiento alcantarillas Daños al medioambiente Contaminación al río
¿Por qué crees que se inundan algunas zonas de nuestro municipio?	Cercanía al río y a los caños Contaminación Alcantarillas tapadas Construcción en zonas pertenecientes al río
¿Qué consecuencias consideras dejan las inundaciones en nuestro municipio?	Pobreza Pérdidas de enseres Deterioro de las viviendas
¿Qué tipo de enfermedades percibes durante y después de las inundaciones?	Gripas Alergias Dengue

¿Qué problemas sociales y del medioambiente consideras trae una inundación al municipio?	Sociales: pérdida de seres queridos Desplazamiento Ambientales: pérdida de cosechas, malos olores, barro en las calles y viviendas
¿Cómo crees se podría solucionar el problema de las inundaciones en el municipio de Cauca?	Colocando barreras de concreto en las orillas Campañas para no tirar basura

Hay que tener en cuenta que la mayoría de los alumnos vive en la zona de influencia del fenómeno y otros en cercanías al caño ubicado en ella y, año tras año, son afectados directos de él. Esto implica un conocimiento adicional sobre el impacto social y económico que han dejado las inundaciones en su municipio. Se debe tener en cuenta, también, que muchos de los resultados obtenidos del diálogo con los estudiantes y de sus vivencias cuando hay un fenómeno de inundación son variables que pueden ser cuantificadas y de alguna manera están relacionadas con cantidades, formas geométricas, etc. Con el propósito de establecer elementos numéricos que los educandos puedan asociar al contexto, se les hace la siguiente pregunta: *considerando el fenómeno de inundación en el municipio, ¿cuáles nociones matemáticas se pueden determinar?* Con relación a la pregunta, los escolares identifican diferentes elementos en este fenómeno, básicamente desde las estadísticas, puesto que muchos consideran que el saber sobre el número de viviendas deterioradas o sobre el número de personas afectadas, son variables que se pueden abordar desde el punto de vista matemático. Un aspecto importante tiene que ver con la respuesta de un grupo de alumnos sobre la idea de área superficial de las aguas presentada por ellos como elementos dentro de un proceso de inundación. Un grupo presenta la siguiente gráfica.

88

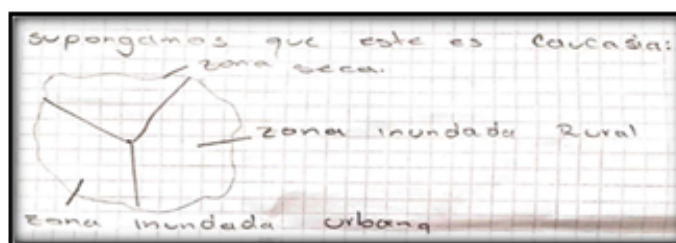


Ilustración 2. Representación equipo de Angélica.

En este sentido, al profundizar sobre la representación gráfica de la pregunta realizada, los estudiantes que conforman el grupo explican que en épocas de invierno muchos sectores urbanos y rurales del municipio se inundan.

En este modelo de representación de las áreas inundadas, producto de las conjeturas de los educandos debido al conocimiento del entorno, es interesante ver no solo cómo perciben la existencia de una correlación de zonas inundadas con relación a la proporción, sino también cómo estas proporciones evidencian una gran cantidad de área inundada (2/3 del área total aproximadamente), tanto en las zonas urbanas como en las rurales, que afecta a las comunidades del municipio, y cómo

solo una pequeña cantidad de terreno queda seca (1/3). Estas ideas, las cuales van encaminadas al propósito mismo de la investigación, permiten entonces delimitar las situaciones y el contexto.

Delimitación de las situaciones en el contexto de las inundaciones

Biembengut y Hein (2006), Villa-Ochoa y Ruíz (2009) y Blum y Borromeo (2009) consideran fundamental, en un proceso de modelación, delimitar el problema, puesto que en este escenario particular se presentan diversidad de variables, las cuales no se pueden afrontar en su totalidad. Es por esto que, luego de abordar varias preguntas, construidas conjuntamente con los alumnos, donde se evidencian situaciones de dependencia entre variables asociadas a dicho ambiente, como por ejemplo, la velocidad con que se inunda el colegio, el volumen de agua según la altura, etc., se ponen estas en consideración con el fin de seleccionar una de ellas, la que los estudiantes consideraran relevante para iniciar el proceso de análisis. Es así como el grupo de trabajo, a partir de unas reflexiones realizadas en torno al fenómeno, el medio y las nociones numéricas descritas por ellos, como por ejemplo las áreas inundadas en la zona urbana y rural (según la ilustración) y las necesidades académicas, puesto que en las clases regulares el concepto de área se ha abordado desde la teoría y la fórmula, se decide iniciar la exploración en la consecución de ecuaciones y situaciones que se puedan generar en la relación número-contexto. Por lo tanto, los educandos eligen la siguiente pregunta: *¿podría una expresión matemática determinar el área inundada a partir de la altura del nivel del agua?* Con esta no solo interactúan con las nociones emergentes en un entorno, pues al establecerse una relación de dependencia entre el área superficial y la altura del nivel del agua, se podría saber de forma aproximada la extensión de terreno que se inunda a partir de la altura del nivel del agua. Dichos resultados permiten reflexionar sobre futuras inundaciones (mejorar condiciones y previsiones) y, por otro lado, se abre campo a la discusión sobre alternativas que puedan minimizar el impacto social y ambiental que produce dicho fenómeno.

89

Se indaga a los alumnos por cómo medir las áreas inundadas del municipio. Ellos manifiestan que la forma del terreno y las grandes longitudes que habría que medir hacen que el proceso sea complicado. Producto de estas reflexiones, se hace una simplificación del problema. Se les propone a los estudiantes usar como lugar geográfico la institución educativa, por ser afectada por el fenómeno y, a la vez, por tener referencias y datos más específicos con relación a la medida del área y el nivel del agua, pues esta última deja marcas en las paredes después de haber ocurrido una inundación. Además, porque las inundaciones en la institución son un entorno conocido por ellos. En este sentido, la actividad estuvo centrada en establecer relaciones entre la altura del nivel del agua, tomando un punto de referencia y el área superficial de la zona inundada. Se repitió este proceso para diferentes alturas y el cálculo de diferentes áreas de las zonas inundadas. La primera parte del trabajo

consistió en hacer cálculos y estimar medidas. Es así como se les pide que elaboren un plano de la planta del colegio con el fin de identificar las diferentes zonas inundadas para diversas alturas, tomadas a partir de un punto de referencia: una pared al lado de una alcantarilla dentro de la institución, donde emerge el agua e inunda los diferentes sectores. Después de un proceso de trabajo en equipo, los grupos miden el colegio y, a través de su propia experiencia, preguntas al personal administrativo y referencias fotográficas, los escolares dibujan dichos planos e identifican, con colores, las diversas zonas inundadas. En el proceso de medida, los diferentes grupos se dividen el trabajo, hacen las mediciones, consultan datos, concretan procedimientos. Esto evidencia un trabajo colaborativo puesto que se designaron, según sus habilidades, diferentes roles, por ejemplo en la toma de medidas, dibujo del plano, análisis de resultados. Esto permite el desarrollo de otras habilidades que son producto de sus interacciones sociales y de sus relaciones con el entorno. El plano se convierte, por tanto, en un modelo de representación de los estudiantes que evidencia las áreas de las zonas inundadas, dependiendo de las diferentes alturas del nivel del agua en el punto de referencia.

La siguiente ilustración muestra los dibujos elaborados por dos equipos de trabajo. El equipo 1 lo conforman Angélica y Pereira, y el equipo 2, Dani y Anyi.

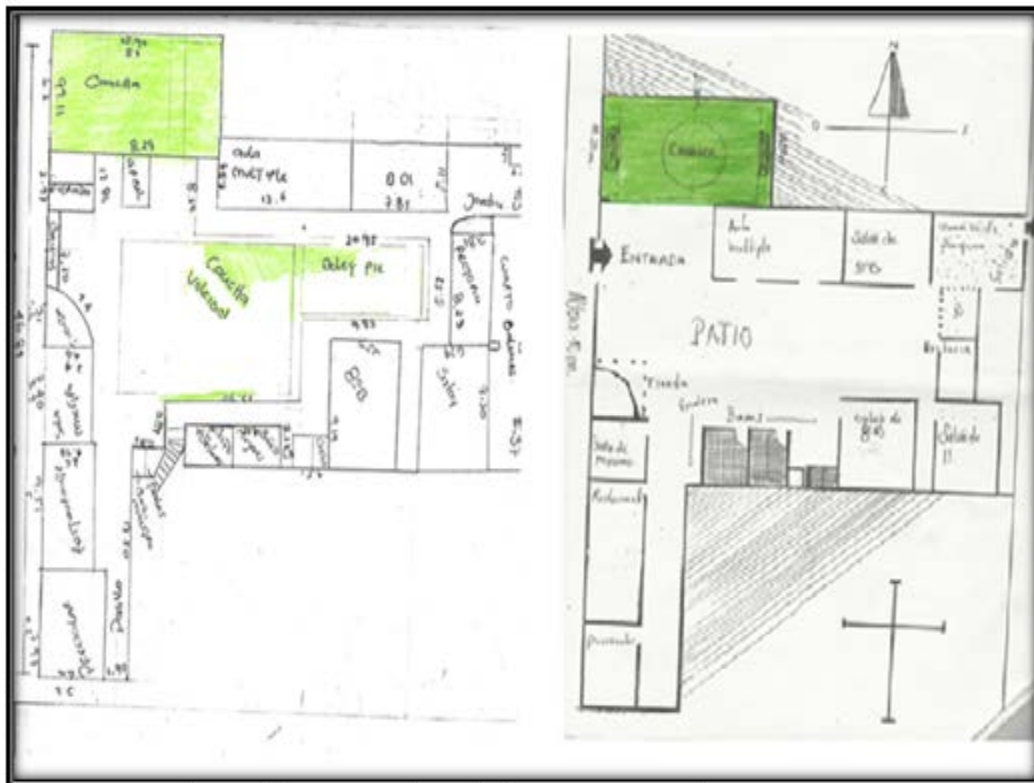


Ilustración 3. Zona inundada a 10 cm. Equipos 1 y 2

La representación de un modelo (el plano del colegio), se convierte en una herramienta importante dentro del proceso, pues es el medio que se pone en diálogo

con la matemática para construir modelos matemáticos y dar cuenta del problema planteado. En la ilustración anterior ambos equipos de trabajo utilizan colores para representar el área superficial de la zona inundada. El área superficial del colegio, cuando la altura del agua en el punto de referencia es 20 cm, fue dibujada por los dos equipos de la siguiente forma:

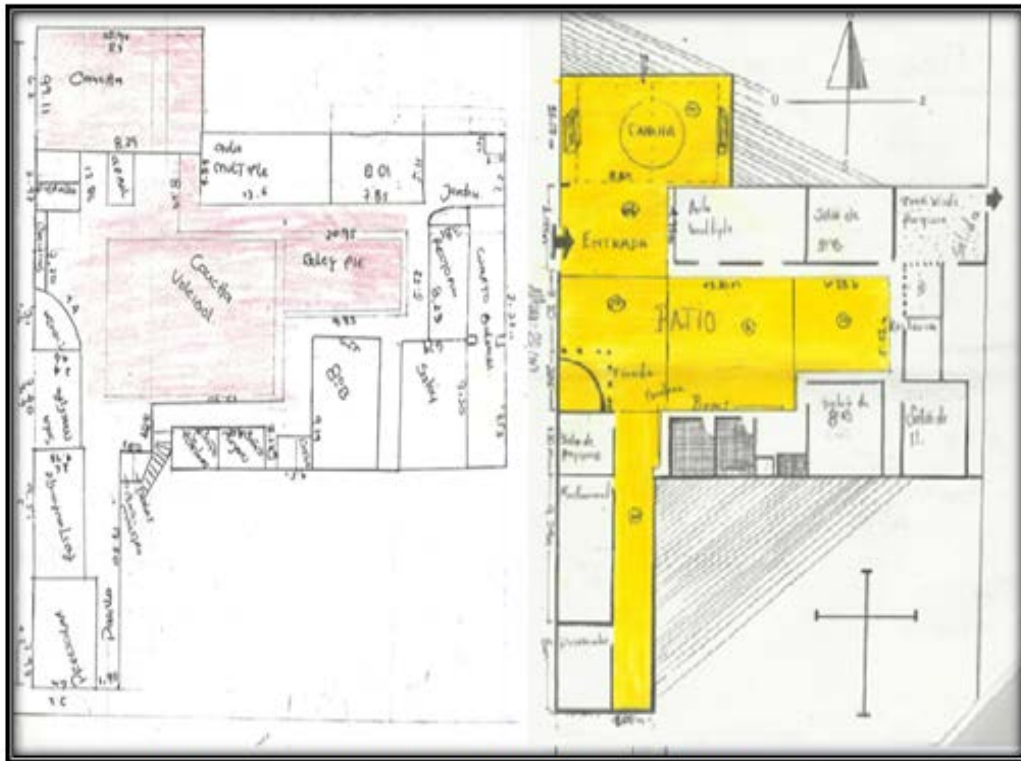


Ilustración 4. Zona inundada 20 cm. Equipos 1 y 2

Con relación a la zona inundada cuando la altura es 20 cm, se observa una clara similitud por parte de los dos equipos de trabajo en la selección del área del colegio afectada. Cuando el nivel del agua es 30 cm en el punto de referencia, ambos equipos consideran que a este nivel del agua, la institución es inundada completamente. Al medir el patio, los equipos 1 y 2 utilizaron el proceso mostrado por Del Olmo et al. (1993), donde hacen transformaciones, asociaciones y conservaciones a las figuras irregulares. Para identificar las áreas a diferentes alturas, los estudiantes se basaron en la toma de registros (fotos, marcas de agua en las paredes, preguntas a administrativos) y en la observación directa, pues conocen el contexto producto de la experiencia de haber presenciado muchas inundaciones en la institución. Conocen que la primera zona inundada es la cancha de microfútbol (altura del nivel del agua 10 cm), luego a medida que el nivel del agua aumenta (altura nivel del agua 20 cm), se inunda, además de la cancha, el patio y, finalmente, toda la institución cuando la altura del nivel del agua es 30 cm. En este sentido el conocimiento del entorno, la interacción con su cultura, media

con la construcción de modelos. La siguiente tabla resume los resultados del cálculo de las áreas de inundación dependiendo de la altura.

Área superficial de agua (m ²)	185	612	1178
Alturas del agua (cm)	10	20	30

Tabla 2. Área superficial del agua vs altura. Equipo 1.

Los educandos consideran que hay una relación entre las dos magnitudes, ya que observan que, a medida que el nivel del agua aumenta, también lo hace el área superficial. Por lo tanto, con el fin de tener una idea más clara sobre los resultados encontrados, los alumnos hacen una representación en el plano cartesiano, obteniendo una gráfica no lineal.

Un modelo matemático: área superficial vs. altura del nivel del agua

Para evidenciar con los estudiantes la existencia de una relación de dependencia entre el área superficial y la altura del agua en un fenómeno de inundación, se les hace la siguiente pregunta: *¿hay alguna relación entre el área superficial inundada y la altura del nivel del agua en el punto de referencia? ¿Por qué?* Los diferentes grupos de trabajo consideran que existe dicha relación y dan cuenta de ello respuestas como la siguiente:

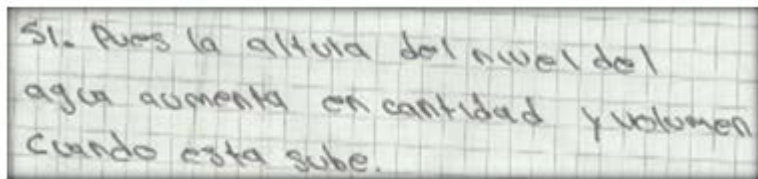


Ilustración 5. Relación área-altura. Equipo 1: Angélica-Pereira

Cuando los educandos establecen la relación área superficial - altura, intentan observar cómo se puede generalizar. Perciben una situación de dependencia entre esas dos magnitudes, por consiguiente, se propone lo siguiente: *plantea una expresión matemática que permita relacionar las dos variables (altura y área) de tal forma que se pueda encontrar el área a partir de cualquier altura del nivel del agua en el punto de referencia.* En primera instancia ambos grupos tienen dificultades para encontrar dicha expresión, pues en clase solo se habían trabajado la función lineal y los sistemas de ecuaciones lineales (2x2) y la gráfica obtenida no se ajustaba a una línea recta. Entonces, se les sugiere a los alumnos buscar en libros y en internet diferentes gráficas de funciones. El equipo 1, conformado por Angélica-Pereira, encontró algunas funciones cuadráticas, cúbicas y exponenciales, las cuales

relacionaron con su dibujo. La siguiente ilustración muestra la representación gráfica del equipo 2 con relación al área superficial vs. altura del nivel del agua.

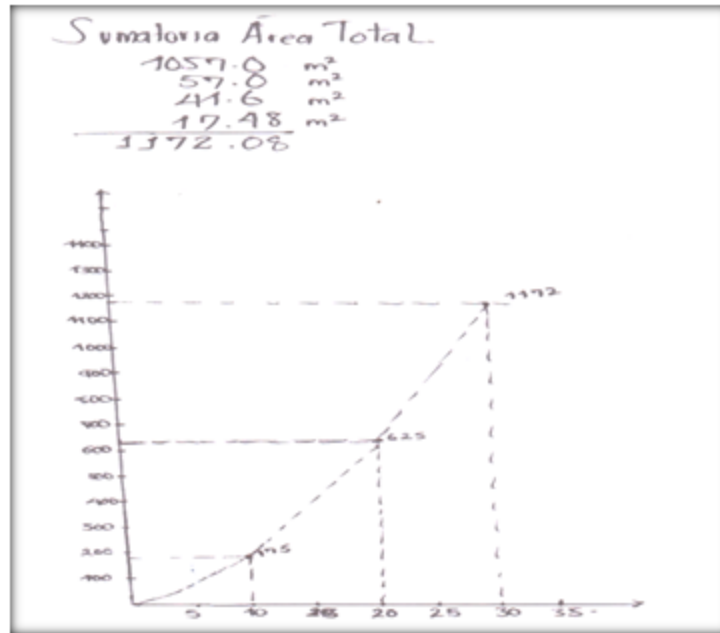


Ilustración 6. Gráfica de área vs altura-Equipo 2.

Para los participantes Dani y Anyi, la gráfica anterior es una aproximación a la función lineal, pues es el tema que se había trabajado en clase. Sin embargo, observan nuevamente que no es una línea “del todo recta”, por lo que ambos equipos la relacionan inmediatamente con la que ellos encontraron en libros e internet. Al respecto Dani comenta: “se parecen a la que tenemos aquí”, refiriéndose a una de las gráficas buscadas en los libros y que señala la gráfica de una función cuadrática. En clase habitual de matemáticas se trabajó con los estudiantes la función cuadrática, su definición, propiedades y se modeló una situación que relacionaba el lado del cuadrado con su área, donde se formó la ecuación $y=x^2$. Esta ecuación, al sustituir cualquier medida del lado de un cuadrado en la variable “x”, permitía encontrar su área. Lo anterior se fundamentó siguiendo la línea de Biembengut y Hein (2006), quienes consideran que en forma paralela se puede trabajar el contenido curricular en conexión con la pregunta a resolver. Teniendo en cuenta lo abordado en las clases, los participantes observaron que la función cuadrática se ajustaba mejor a la que ellos habían elaborado. Cabe aclarar que dicho ajuste no es total con respecto a los datos, sino una aproximación que hacen los educandos puesto que tal vez la gráfica obtenida no representa alguna función conocida, por lo tanto, ellos establecieron una analogía entre el área superficial inundada con el área del cuadrado y el lado del cuadrado con la altura del nivel del agua. Los alumnos optaron por considerar que la función dibujada con relación al área superficial del agua vs. altura del nivel de ella, se ajustaba también a una función cuadrática que tiene como forma general la ecuación “ $y=ax^2+bx+c$ ”.

Para la construcción del modelo, se orientó a los participantes con algunas preguntas que pudieran darles luces para avanzar en el proceso: *¿qué tipo de función es?, haciendo referencia a la dibujada por los alumnos según el ajuste realizado; ¿cuáles son las variables dependientes e independientes involucradas? ¿Son conocidas dichas variables?* Se discute cuáles eran las variables dependientes e independientes que habían establecido y cómo esas variables ya eran conocidas en las gráficas. En este sentido, siguiendo a Londoño y Muñoz (2011), "... los estudiantes comienzan estableciendo las variables y las relaciones que se observan entre ellas desde el entorno particular". Es así como las relaciones entre las variables requeridas por el contexto auténtico referenciado son las que se evidencian en las elaboraciones de los escolares. En este momento, los escolares evocan los temas vistos en clase y hacen deducciones a partir de las variables establecidas en el medio que se viene analizando. Una participante del equipo 2, Anyi, afirma: *"si reemplazo las variables, tendría tres términos desconocidos la a, la b y la c"*. Se les orientó entonces que la c es como la b de la ecuación lineal. Pereira dijo enseguida: *"entonces es cero porque la gráfica pasa por (0, 0)"*. Por lo tanto, hicieron las sustituciones de las alturas utilizando 10 cm y 20 cm que tomaron como variables del eje x y las áreas correspondientes con estas alturas en el eje y. De esta forma, establecieron un sistema de ecuaciones lineales 2x2. Utilizando el método de igualación conocido por ellos, lograron realizar los cálculos necesarios y armaron dos ecuaciones lineales con variables "a y b". La siguiente ilustración muestra el proceso seguido por los dos equipos.

$$\begin{array}{l}
 y = a(10)^2 + b(10) + c \\
 a(100) + b(10) + 0 \\
 \\
 y = a(20)^2 + b(20) + 0 \\
 a(400) + b(20) + 0. \\
 \\
 y_1 = 100a + 10b \\
 y_2 = 400a + 20b \\
 \\
 \begin{cases} 175 = 100a + 10b \\ 604 = 400a + 20b \end{cases}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 y = ax^2 + bx + c \\
 185 = a(10)^2 + b(10) + c \\
 185 = 100a + 10b + c \\
 \\
 \begin{cases} 1612 = 400a + 20b \\ -185 = 100a + 10b \end{cases}
 \end{array}$$

Ilustración 7. Construcción de modelo-área. Equipos 2 y 1

Después de que los dos equipos elaboraron los sistemas de ecuaciones lineales (2x2), ambos utilizaron el método de eliminación por igualación, despejaron la misma incógnita en ambas ecuaciones y hallaron los valores respectivos de "a" y "b". Luego reemplazaron estos valores de "a" y "b" en la función original, es decir, en la función cuadrática y así encontraron los siguientes modelos que pueden generalizar las relaciones entre el área superficial y la altura del nivel del agua en un punto de referencia, como se muestra en las ilustraciones 8 y 9.


$$y = 1.21x^2 + 6.9x + 0$$

Ilustración 8. Modelo matemático. Equipo 1


$$y = 1.27x^2 + 4.8x + 0$$

Ilustración 9. Modelo matemático. Equipo 2

Ambos equipos llegaron a la construcción de sus propios modelos, en los cuales:

Y = área superficial inundada dada en m².

X = altura del nivel del agua en el punto de referencia dada en cm.

La ecuación construida fue verificada para las alturas de 10 cm y 20 cm. Las áreas coincidieron con las encontradas en el terreno (tabla 2). Luego probaron para una altura de 30 cm, para la cual los resultados fueron bastante aproximados a la medida ya calculada. Al remplazar la altura de 30 cm en el modelo (del equipo 2), se obtiene un resultado de área superficial de 1281 m², mientras que el área superficial medida en el terreno es de 1178,57 m². Con relación a las dos ecuaciones, los estudiantes hacen comparaciones y observan algunas similitudes entre las constantes "a y b" y en los resultados obtenidos cuando reemplazaron la altura de 30 cm; igualmente comparan en un plano cartesiano las dos representaciones, es decir, la medida en el terreno y la elaborada según la ecuación. Al respecto Angélica afirma que "el resultado en las gráficas se observa que no es mucha la diferencia que hay entre las dos líneas curvas". Las dos curvas se ven casi superpuestas. Los equipos de trabajo consideran que ha habido una buena aproximación. Teniendo en cuenta los resultados obtenidos por los participantes, se refleja cómo, a la luz de experimentar con un contexto, se ve comprometido un modelo en el cual los alumnos pueden observar y explorar el entorno o fenómeno y su matemática presente, como elementos aislados pero, al mismo tiempo, interconectados. Lo anterior está en concordancia con Villa-Ochoa (2007).

95

La reflexión hecha por los dos grupos deja ver algunas de las implicaciones que tiene la construcción de las ecuaciones, puesto que proponen que podría servir para prever inundaciones y que, articulada con el medio, permite que los educandos entiendan no solo desde lo conceptual, sino desde la comprensión misma del fenómeno. Entender el entorno implica que se podrían utilizar los resultados para avanzar en la búsqueda de soluciones. Además, se observa que una de las ventajas de las construcciones puede explorarse a partir de diferentes perspectivas, intereses y propósitos. En el caso nuestro, se ha concebido desde una mirada realista, favoreciendo la idea de situarse en un principio en la significación de nociones matemáticas en situaciones y problemas en contextos auténticos, fundamentada por la construcción de ecuaciones con sentido para el estudiante. En este punto los grupos de trabajo deciden por iniciativa propia visitar a las entidades municipales con el fin de conocer cuáles son las acciones adoptadas para contrarrestar las causas

y consecuencias del fenómeno, teniendo en cuenta lo observado y analizado desde el estudio.

A manera de conclusión

Las dos ecuaciones construidas por los equipos son similares puesto que se tuvieron en cuenta los mismos sistemas de medidas y procesos en la construcción a través del trabajo en equipo. Sin embargo, cada estudiante, desde su experiencia y saberes previos, fue construyendo de manera orientada sus propios procesos. Estos resultados permiten encontrar de una forma aproximada el área superficial de agua que inunda una extensión de terreno a partir de una altura determinada. Basados en estos resultados, se observa cómo, a partir de un proceso de medida potencializado desde un contexto auténtico como el de las inundaciones, los alumnos pudieron construir modelos articulados con elementos variacionales como los establecidos en la relación área superficial vs. altura. Además, usaron sistemas de ecuaciones lineales para producir funciones de forma cuadrática (ilustración 7). En este sentido, relacionaron el área superficial inundada con el área de una figura geométrica, es decir, asumieron que la función cuadrática es una forma de representar el área de un terreno. Teniendo en cuenta que, en un fenómeno de inundación, la forma que toma el agua depende de la extensión y regularidad del terreno, estudiar estos aspectos requiere de otros elementos adicionales que se podrían abordar en cursos más avanzados y experimentar con otros tipos de funciones y entornos más amplios y complejos que podrían extenderse a estudios del fenómeno en educación matemática aplicada a nivel nacional e internacional.

96

El surgimiento de las ecuaciones durante el proceso experimentado por los estudiantes facilitó la integración de saberes previos con nuevos conocimientos, puesto que ellos conocen el contexto, las medidas, el proceso de hacer algunas transformaciones para encontrar las áreas y el nuevo conocimiento a través de su construcción (Biembengut & Hein, 2004; Villa-Ochoa, 2007 y Londoño & Muñoz, 2011).

De acuerdo con Biembengut y Hein (2004), las ecuaciones construidas por los educandos son modelos, ya que están relacionadas con elementos numéricos que emergen de un fenómeno, en este caso, las inundaciones presentadas en una institución educativa.

Con respecto al proceso, es posible analizar su pertinencia en la implementación de diferentes metodologías y estrategias didácticas en el aula de clases, además su papel en la interrelación entre el mundo "real" y los números. Sin embargo, una situación de contexto auténtico, por su complejidad, permite en el proceso considerar aspectos que tienen que ver con los posibles errores en la recolección de datos, medidas del terreno y en los planos, el cálculo de las áreas, las alturas del

nivel del agua, etc., pues al ser una situación "real", estos se encuentran sujetos a diversos factores externos propios del fenómeno, los cuales afectan de alguna forma la construcción de modelos.

Los estudiantes han podido establecer algunos factores inherentes en la relación altura del nivel del agua vs. el área inundada, puesto que ha sido claro para ellos que, a medida que la altura del nivel del agua en el punto de referencia aumenta, el área superficial del agua también aumenta. La situación ha permitido que los alumnos logren desarrollar algunos razonamientos en cuanto al proceso y el estudio realizado ya que consideran que los resultados encontrados podrían servir para que personas en zonas de riesgo pudieran prever futuras inundaciones e incluso podrían ser presentados a directivos con el fin de plantear posibles soluciones para minimizar sus efectos. Lo anterior teniendo en cuenta que, al ser un fenómeno natural y al estar la población en la ribera del río, las inundaciones son inminentes. Con respecto al problema en cuestión, al obtener resultados, los participantes han reflexionado sobre las posibles soluciones al problema, lo que evidencia que la actividad relacionada con la construcción elaborada por los equipos va más allá de ser un trabajo solo desde los números. En este sentido, los procesos construidos por los grupos de trabajo se asocian a un proceso de modelación que permitió aprendizajes. Esto implica que, al abordar contextos auténticos, se orienta hacia una perspectiva social y cultural de la educación matemática, en relación con lo fundamentado por Jaramillo (2011) y Giménez et al. (2007), puesto que en el estudio se han tenido en cuenta las consideraciones y disposiciones de los alumnos, de tal manera que se favorezca la participación y se dé paso a la discusión y reflexión sobre lo construido colectivamente. En esta misma perspectiva, somos conscientes de que la construcción realizada por los educandos refleja una realidad parcial del fenómeno, pues, según Skovsmose (citado por Valero, 1999), "algunos rasgos de la realidad se quedan por fuera del alcance de las matemáticas y permanecen dentro del alcance de las descripciones del lenguaje natural y viceversa" (p.185). Sin embargo, en el presente estudio, se privilegian las formas de construir el conocimiento, de relacionarse los unos con los otros y de experimentar con ecuaciones a partir de la relación con el medio, con el propósito de lograr en los estudiantes no solo una forma alternativa de asociar los números al entorno, sino también que reflexionaran sobre cómo estas emergen en el fenómeno y que consideraran alternativas de solución que contribuyan a minimizar el impacto social y ambiental que producen las inundaciones.

Con relación al proceso:

- En lo referente a la actividad de medición y al dibujo representativo de cada una de las secciones del colegio y al realizar las actividades de construcción, hubo participación colectiva: se repartieron tareas y desarrollaron los procesos en un ambiente de confianza y participación. Esto nos permite establecer que el trabajo de campo fue un escenario propicio para que se integraran muchos factores académicos

y de relaciones personales, lo que asumimos como un componente determinante en la motivación de los participantes.

- Los estudiantes han utilizado la medida para hacer comparaciones, repartos.
- El estudio ha posibilitado medir el área como magnitud bidimensional en función de la longitud.
- El trabajo ha permitido medir el área como magnitud unidimensional, admitiendo ser sumada, comparada, medida.
- Los alumnos han tenido la posibilidad de hacer transformaciones, asociaciones, transitividades y conservaciones en el proceso de medición de las áreas.
- Las actividades han posibilitado articular algunos elementos del pensamiento numérico con el métrico-geométrico y el variacional. Además, se relacionaron conocimientos previos de los estudiantes con nuevos conocimientos y la interacción entre la teoría y la práctica, elementos fundamentales en el proceso de modelación matemática.

Referencias

- Arrieta, J. (2003). *Las prácticas de modelación como proceso de matematización en el aula*. [Tesis doctoral inédita]. Departamento de Matemática Educativa. Mexico: CINVESTAV.
- Biembengut, M. S. & Hein, N. (2004). Modelación matemática y los desafíos para enseñar matemáticas. *Educación Matemática*, 16(2), 105-125.
- Biembengut, M. & Hein, N. (2006). Modelaje matemático como método de investigación en clases de matemática. *V Festival Internacional de Matemática. De Costa a Costa* (pp.1-25). Costa Rica: Educación Matemática.
- Biembengut, M. & Hein, N. (2007). *Modelagem Matemática no Ensino*. Sao Paulo: Contexto.
- Bishop, A. (1999). *Enculturación matemática. La educación matemática desde una perspectiva cultural*. Barcelona: Paidós. Temas de Educación.
- Blum, W. & Borromeo, R. (2009). Mathematical Modelling: Can It Be Taught And Learnt? *Journal of Mathematical Modelling and Application*, 1(1), 45-58.
- Borba, M. & Araujo, J. (2008). *Investigación cualitativa en educación matemática*. Mexico: LIMUSA.
- Caraça, B. (1984). *Conceitos fundamentais da matemática*. Lisboa: Livraria Sà Da Costa Editora.
- Del Olmo, M.; Moreno, M. & Gil, F. (1993). *Superficie y volumen: ¿algo más que el trabajo con fórmulas?* Madrid: SÍNTESIS, S.A.
- Gil, G.; Fernández, J.; Rubio, F. & López, C. (2000). *La medida de los conocimientos y destrezas de los alumnos: Un nuevo marco para la evaluación*. Madrid: OCDE.
- Giménez, J.; Díez-Palomar, J. & Civil, M. (2007). Exclusión y matemáticas. Elementos que explican la investigación actual en el área. En U. D'Ambrosio; P. López, G. Fitzsimons, G. Knijnik & N. Planas, *Educación Matemática y exclusión* (pp. 9-44). Barcelona: Graó.
- Godino, J.; Batanero, C. & Roa, R. (2002). *Medida de magnitudes y su didáctica para maestros*. Recuperado de http://www.ugr.es/~jgodino/edumat_maestros/manual/5_Medida.pdf
- Guillen, G. (2010). ¿Por qué usar los sólidos como contexto en la enseñanza/aprendizaje de la geometría?. ¿Y en la investigación? En M. M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo, & T. A. Sierra, *Investigación en Educación Matemática XIV* (pp.21-68). Lleida: Seiem.

- Hays, p. (2004). Case study research. En *Foundations for research: Methods of inquiry in education and the social* (pp.217-234). Mahwah, NJ: LEA.
- Jaramillo , D. (2011). La educación matemática en una perspectiva sociocultural: tensiones, utopías, futuros posibles. *Educación y Pedagogía*, 23(59), 13-36.
- Londoño, S. M., & Muñoz, L. M. (2011). *La modelación matemática: un proceso para la construcción de relaciones lineales entre dos variables*. [Tesis de maestría inédita]. Medellín: Universidad de Antioquia.
- Moreno, A.; Bulla, B.; Giraldo, N.; Mantilla, A. & Mantilla, M. (1998). Introducción a la medida del volumen. *EMA*, 3(3), 254-262.
- Moreno-Armella, L. & Hegedus, S. J. (2011). The Emergence of Mathematical Structures. *Educ Stud Math*, 77, 369-388.
- Planas, N. (2002). Nociones sociales recontextualizadas en educación matemática: el caso de la competencia comunicativa. *VI Simposio de la SEIM*, 175-186.
- Skovsmose, O. (1999). *Hacia una filosofía de la educación matemática crítica*. (P. Valero, Trad.) Colombia: Universidad de los Andes.
- Stake, R. (1999). *Investigación con estudio de casos* (2 ed.). Madrid: Morata.
- Villa-Ochoa, J. (2007). La modelación como proceso en el aula de matemáticas. Un marco de referencia y un ejemplo. *Tecno Lógicas*, 19, 63-85.
- Villa-Ochoa, J. A. & Ruiz, M. (2009). Modelación en educación matemática. Una mirada desde los lineamientos y estándares curriculares colombianos. *Revista Virtual Universidad Católica del Norte*, 27, 1-21.