

# VISUALIZACIÓN GRÁFICA 3D EN GEOGEBRA PARA LA ENSEÑANZA - APRENDIZAJE DE LAS CIENCIAS BÁSICAS<sup>1</sup>

3D graphical display in GeoGebra for the  
teaching - learning process of basic sciences

---

<sup>1</sup> Producto derivado del proyecto de investigación “Estrategia de innovación para mejorar el aprendizaje del Cálculo Diferencial apoyada en videos educativos y OVA. Experiencia interinstitucional”. Presentado por el Grupo de Investigación Grupo de Innovación en Matemáticas y Nuevas Tecnologías para la Educación - GNOMON -, del Instituto Tecnológico Metropolitano de Medellín.

C. A. Rojas docencia en la Facultad de Ciencias Exactas y Aplicadas, del Instituto Tecnológico Metropolitano de Medellín, Medellín (Colombia); email: [carojas72@gmail.com](mailto:carojas72@gmail.com)

E. A. Castrillón docencia en la Facultad de Ingenierías, del Instituto Tecnológico Metropolitano de Medellín, Medellín (Colombia); email: [elkincastrillon@itm.edu.co](mailto:elkincastrillon@itm.edu.co)

F. J. Córdoba docencia en la Facultad de Ciencias Exactas y Aplicadas, del Instituto Tecnológico Metropolitano de Medellín, Medellín (Colombia); email: [franciscocordova@itm.edu.co](mailto:franciscocordova@itm.edu.co)



## Resumen

El software GeoGebra está diseñado para interactuar dinámicamente y realizar cálculos matemáticos y geométricos por medio de una interfaz que permite visualizar simultáneamente lo planteado en forma algebraica, gráfica, análisis o cálculo y lo podemos utilizar para diferentes asignaturas de las ciencias básicas, se puede implementar en niveles de educación básica, media y superior.

Todos sabemos que las matemáticas están cargadas de conceptos abstractos y símbolos. A través del procesador geométrico GeoGebra, podemos convertir lo imaginable o invisible en una imagen que nos permitirá acercar a los estudiantes a los conceptos y saberes, sacándolos de lo abstracto, para que, por medio de la visualización matemática, puedan representar, modificar, reflexionar y documentar con base en la información visual generada a través del uso de tecnología, sin dejar de lado que los estudiantes tengan que realizar los cálculos que son fundamentales para la justificación académica, en la vida diaria de un futuro ingeniero.

## Palabras clave

Educación, Gráfico 3D, Geogebra, Innovación, Visualización.

## Abstract

The GeoGebra software is designed to interact dynamically and perform mathematical and geometric calculations through an interface that allows simultaneous viewing what is presented in algebraic form, graphic, analysis or calculation, and we can use it for different subjects of basic science, it can be used for levels of primary, secondary and higher education.

We all know that mathematics are full of abstract concepts and symbols. Through the GeoGebra geometric processor, what is considered as imagination or invisible in an image, will allow us to bring students to the concepts and knowledge, removing them from the abstractionism, and using mathematical visualization may represent, modify, reflect and document, based on visual information generated through the use of technology without neglecting that the students have to perform calculations which are fundamental for academic justification, in the daily life of a future engineer.

## Key words

Education, 3D Graphic, Geogebra, Innovation, Visualization.

## I. INTRODUCCIÓN

Actualmente nos encontramos ante una visión nueva de la realidad educativa donde la tecnología y la informática ya se encuentran inmersas en el quehacer diario de los estudiantes, pero el aplicarlos en los ambientes educativos depende de la concepción educativa institucional, del modelo pedagógico institucional, del modelo metodológico, del rol del profesor y de las estrategias de trabajo donde podamos utilizar la tecnología y la informática para aprovecharlos como nuestros aliados, para despertar el interés, la motivación y el apasionamiento de los estudiantes en su proceso de enseñanza aprendizaje.

Para poder hacer la inserción en el aula de clase, los profesores necesitamos formular actividades y tareas que inviten a la reflexión matemática, enriquecer el contexto de las clases para apoyar los diálogos de los estudiantes con el profesor, la formulación de nuevas preguntas y dar respuestas a los conocimientos y saberes matemáticos pretendidos.

En el cursillo explicaremos el manejo del ambiente gráfico 3D del software GeoGebra 5.0 y construiremos, con los participantes, paso a paso, diferentes actividades que nos conduzcan a figuras 3D a partir de conceptos geométricos o de funciones matemáticas que nos permitan visualizar sus interrelaciones, además de fundamentar la visualización como una estrategia interactiva que el profesor puede implementar para el trabajo en el aula, que brinde mejores posibilidades para un acompañamiento más óptimo a los estudiantes.

Las innovaciones tecnológicas nos proporcionan cada vez más canales de comunicación y fuentes de información que difunden cambios en modelos de comportamiento social, valores y actitudes. A partir de lo anterior, los profesores en la actual sociedad de la información estamos llamados a reflexionar sobre nuestra renovación pedagógica y considerar que el estudiante activo que debemos formar sea aquel que sabe hacer preguntas y que también aprenda a responderlas adecuadamente, además debemos comprender que la integración de las tecnologías es para dar un nuevo paso del diseño de estrategias de enseñanza a estrategias de aprendizaje.

## II. VISUALIZACIÓN GRÁFICA 3D

### A. Lineamientos desde el Ministerio de Educación Nacional de Colombia

El Ministerio de Educación Nacional de Colombia (MEN) ha venido desarrollando diferentes herramientas para fortalecer las prácticas escolares y así cualificar los aprendizajes de los niños y jóvenes en pro de mejorar los estándares de calidad de la educación [1] en el país. Es así como el MEN dio a conocer los Derechos Básicos de Aprendizaje (DBA), como una herramienta dirigida a toda la comunidad educativa incluyendo a la familia, con el propósito de identificar los saberes básicos que han de aprender los estudiantes en cada uno de los grados de la educación escolar en el área de las matemáticas, guardando coherencia con los Lineamientos Curriculares y los Estándares Básicos de Competencias (EBC). Esta iniciativa plantea en especial a los docentes, los elementos para la construcción de rutas de aprendizaje y un apoyo para el desarrollo de propuestas curriculares que puedan ser articuladas con las orientaciones, metodologías, estrategias y contextos definidos en los Proyectos Educativos Institucionales materializados en los planes de área y de aula.

La geometría, como herramienta para interpretar, comprender y apreciar un mundo que es eminentemente geométrico, constituye una importante fuente de modelación y un entorno por excelencia para desarrollar el pensamiento espacial y para generar diversas formas de argumentación. Desde esta perspectiva los enfoques en el hacer matemático en el aula estarían en aspectos como: el desarrollo de la percepción espacial y de las intuiciones sobre las figuras bidimensionales y tridimensionales, la comprensión y uso de las propiedades de las figuras y las interrelaciones entre ellas, así como del efecto que ejercen sobre ellas las diferentes transformaciones, el reconocimiento de propiedades, relaciones e invariantes a partir de la observación de regularidades que conduzca al establecimiento de conjeturas y generalizaciones, el análisis y resolución de situaciones problemas que propicien diferentes miradas desde lo analítico, desde lo sintético y lo transformacional.

Es indiscutible que el computador sobrepasa la capacidad de cálculo de la mente humana y es por ello que su utilización y aporte en el aula de clase debe ser orientado más a la comprensión de los procesos matemáticos.

### B. Desarrollo del pensamiento geométrico

Howard Gardner en su teoría de las inteligencias múltiples considera la espacial como una de ellas y plantea que el pensamiento espacial es esencial para el pensamiento científico, ya que es usado para representar y manipular información en el aprendizaje y en la resolución de problemas para resolver preguntas de ubicación, orientación y distribución de espacios.

### 1) Nivel de visualización o familiarización

Los alumnos perciben las figuras sin detectar relaciones entre sus formas o sus partes como puede verse en la Fig. 1, donde los objetos son clases de figuras reconocidas visualmente por los ellos, quienes recuerdan de memoria sus nombres.

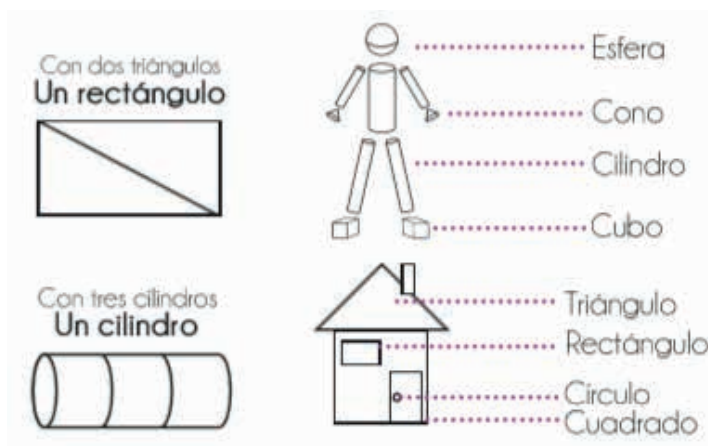
**Fig. 1.** Reconocimiento de formas geométricas sólidas del entorno.



### 2) Nivel de conocimiento de los componentes de las figuras y análisis de sus propiedades

Los objetos sobre los cuales los estudiantes razonan, son las clases de figuras, piensan en términos de conjuntos de propiedades que se asocian con ellas, como puede apreciarse en la Fig. 2. Los componentes y las propiedades básicas de las figuras van siendo comprendidos a través de observaciones efectuadas durante trabajos prácticos como dibujo, mediciones, construcción de modelos, entre otras.

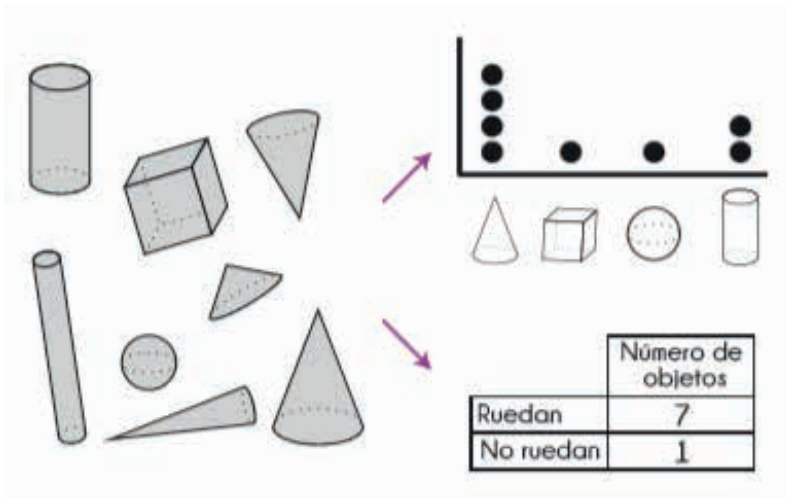
**Fig. 2.** Utilización de figuras para formar figuras más complejas.



### 3) Nivel de ordenamiento o de clasificación

Los objetos sobre los cuales razonan los estudiantes son las propiedades de clases de las figuras, comienzan a clasificar figuras jerárquicamente mediante la ordenación de sus propiedades y dan argumentos informales para justificar sus clasificaciones como puede observarse en la Fig. 3. Comienzan a establecerse las conexiones lógicas a través de la experimentación práctica y del razonamiento.

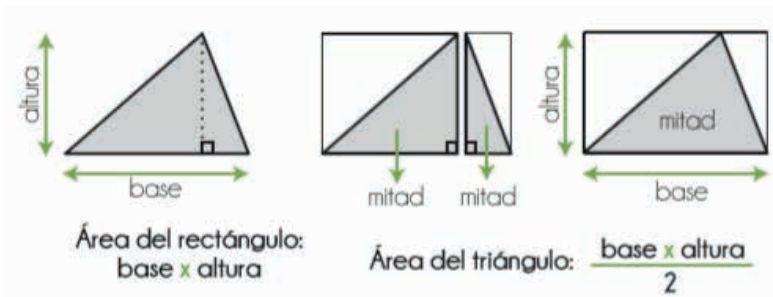
**Fig. 3.** Clasificación de formas gráficas en grupos de objetos.



### 4) Nivel de razonamiento deductivo

Se comprende el sentido de los axiomas, las definiciones, los teoremas, pero aún no se hacen razonamientos abstractos y no se comprende el significado de las demostraciones como puede verse en la Fig. 4.

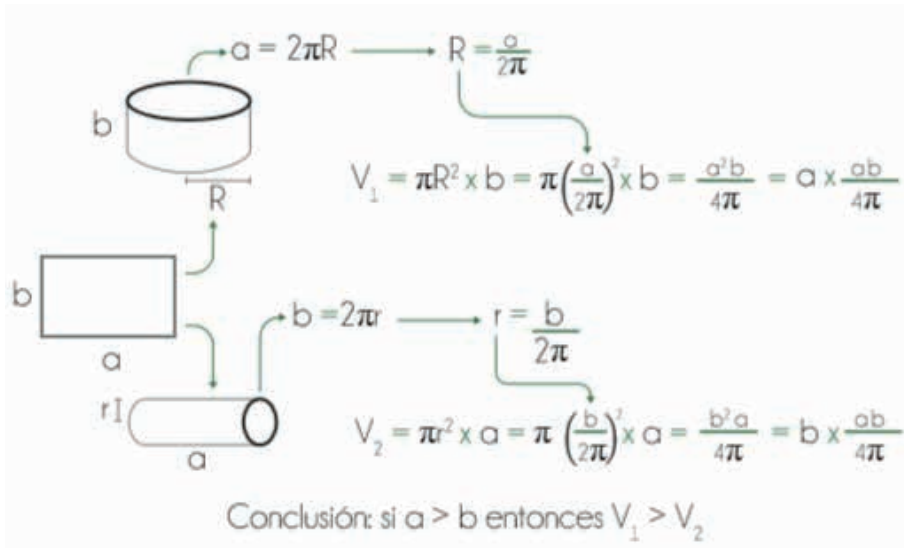
**Fig. 4.** Función de las fórmulas para calcular áreas.



### 5) Nivel de rigor

El razonamiento se hace rigurosamente deductivo, como puede apreciarse en la Fig. 5, se requiere del análisis algebraico y analítico.

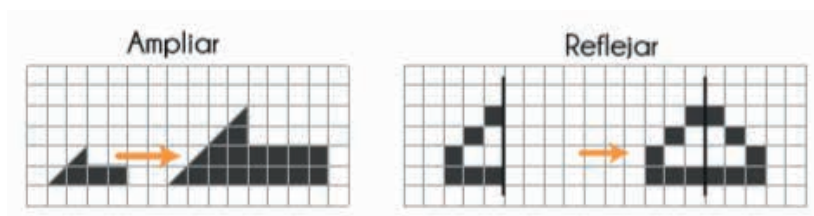
**Fig. 5.** Razonamiento geométrico y algebraico para resolver problemas.



### C. Realidad del pensamiento geométrico desde la escuela

Dentro de los logros más importantes del estudio de la geometría están el pensamiento espacial a través de la exploración del espacio tridimensional en la realidad externa y el desarrollo de la imaginación tridimensional y la representación de objetos solidos ubicados en el espacio, jugar con los diseños del plano y sus grupos de transformaciones como puede observarse en la Fig. 6, la formulación y discusión de conjeturas con los estudiantes.

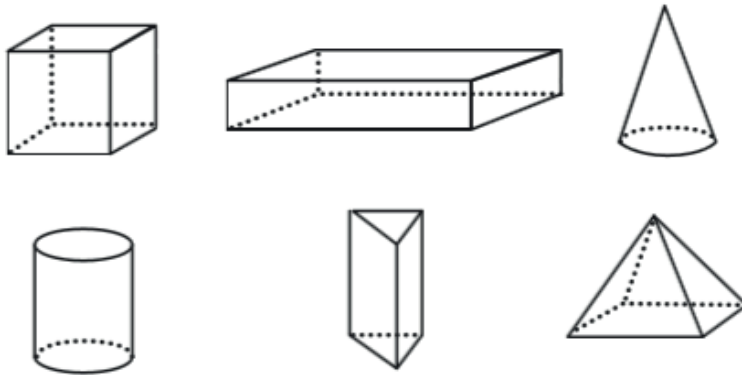
**Fig. 6.** Juego de diseño con la simetría y ampliación de los objetos.



Dado que aún se continua enseñando geometría con el uso del tablero normal dentro del aula del clase, caemos en imprecisiones de representación cuando nuestros alumnos comienzan a generarse conjeturas acerca de los objetos sólidos de la vida cotidiana, representados simplemente en un plano y marcando con líneas punteadas las líneas del objeto que no son visibles como puede verse en la Fig. 7, al respecto Lappan y Winter, afirman: “A pesar de que vivimos en un mundo tridimensional, la mayor parte de las experiencias matemáticas que proporcionamos a nuestros niños son bidimensionales.

Nos valemos de libros bidimensionales para presentar las matemáticas a los niños, libros que contienen figuras bidimensionales de objetos tridimensionales. A no dudar, tal uso de “dibujos” de objetos le supone al niño una dificultad adicional en el proceso de comprensión. Es empero, necesario que los niños aprendan a vérselas con las representaciones bidimensionales de su mundo. En nuestro mundo moderno, la información seguirá estando diseminada por libros y figuras, posiblemente en figuras en movimiento, como en la televisión, pero que seguirán siendo representaciones bidimensionales del mundo real” [2].

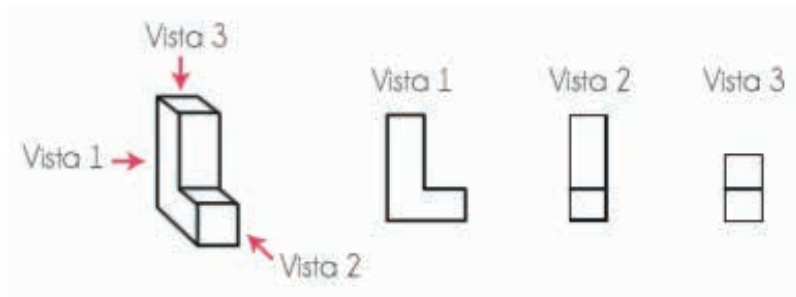
**Fig. 7.** Representación de figuras sólidas en forma bidimensional.



La representación en el plano de cuerpos sólidos o de objetos de la vida real, puede hacerse mediante dibujos de vista única, en los que se ilustran las tres dimensiones del objeto en una sola vista, con lo cual se logra representar el objeto de una manera muy próxima a la realidad como puede apreciarse en la Fig. 8 o dibujos de vista múltiples representan los objetos a través de una serie fraccionada de vistas relacionadas.

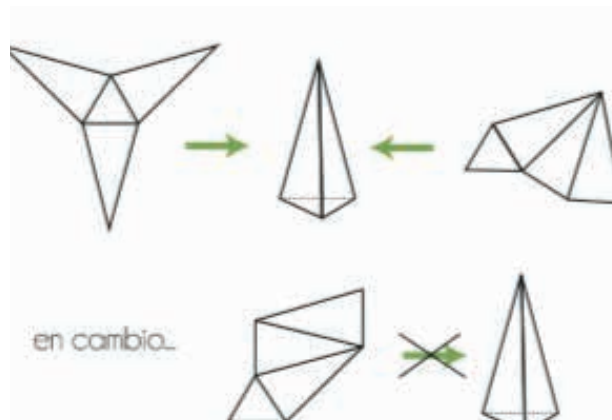


**Fig. 8.** Identificación de las vistas de un objeto tridimensional en un plano bidimensional.



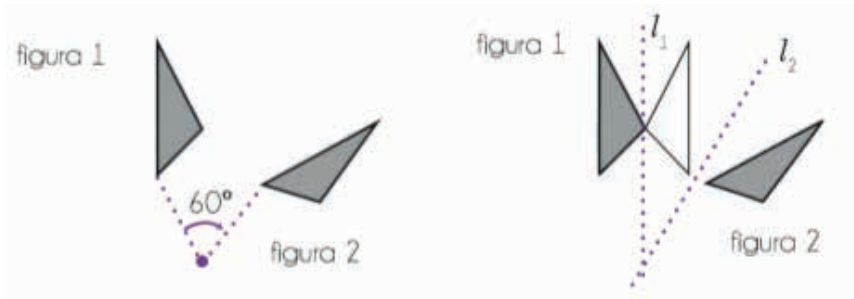
El dibujo en moldes se puede utilizar con mucho provecho para el ejercicio de proyectar los objetos tridimensionales desarrollados en la hoja de papel y de la hoja de papel al espacio como puede observarse en la Fig. 9. El dibujo en perspectiva sobre el papel se puede comenzar por dibujar cajas y cubos de cartón colocados sobre una mesa de tal forma que se vean en perspectiva y de tal manera que unos se oculten parcialmente detrás de los otros para buscar la forma como deseamos que se vean en el papel.

**Fig. 9.** Construcción de objetos sólidos a partir de moldes.



Gran parte de la geometría escolar se ha ocupado del movimiento de figuras geométricas desde una posición a otra, como puede verse en la Fig. 10, y de movimientos que cambian el tamaño o la forma. El estudio de las transformaciones de figuras ha ido progresivamente prevaleciendo sobre el programa tradicional de la geometría, apoyado en teoremas y demostraciones y en el método deductivo.

**Fig. 10.** Transformación de figuras a través de rotaciones, reflexiones, simetría y traslaciones para estudiar congruencia y semejanzas de figuras y objetos.



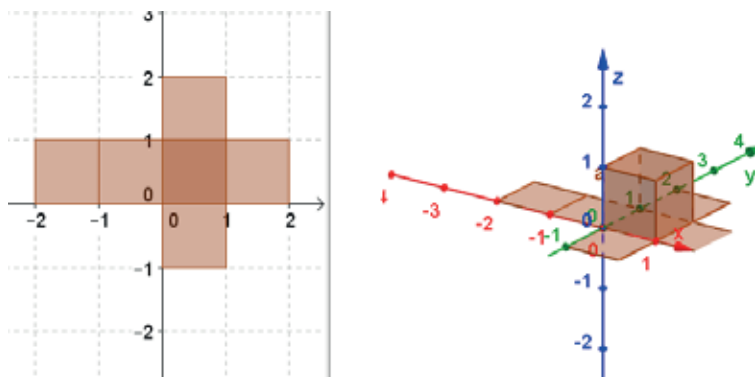
#### D. Hasta dónde se puede visualizar geoméricamente con el software libre GeoGebra

Con GeoGebra 5.0 el desarrollo de aplicaciones para la geometría en el espacio es cada vez más accesible y rápido de elaborar en el aula por parte de los estudiantes [3]. Las construcciones cuentan con la disponibilidad de animaciones, proyección en perspectiva, rotación y movimientos en 3D.

##### 1) Construcciones básicas

Construcciones básicas tales como distancia punto-plano, figuras planas, sólidos, cónicas y geometría analítica, entre otras. En la Fig. 11 puede verse la construcción de un cubo en el espacio 3d y su desarrollo en el espacio 2D.

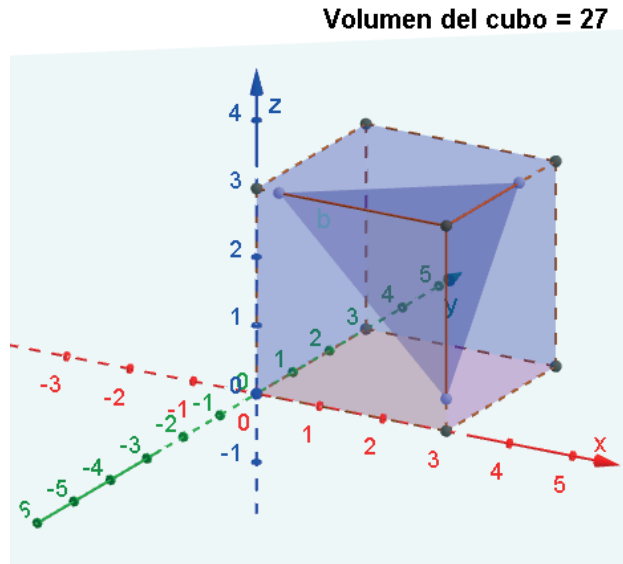
**Fig. 11.** Construcción de un cubo en GeoGebra.



## 2) Poliedros regulares

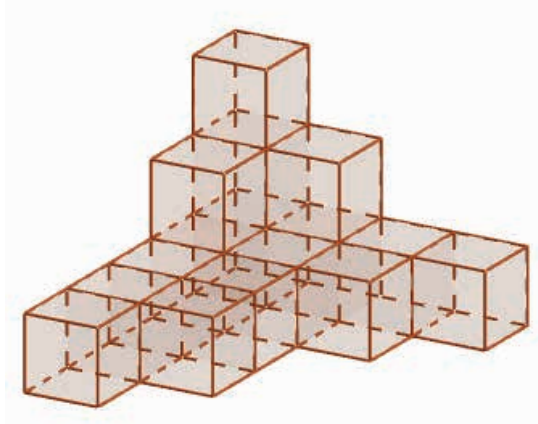
Construcción de un cubo cortado por un plano que intercepta tres aristas que concurren en un vértice del cubo como puede observarse en la Fig. 12. Podemos realizar múltiples construcciones con diferentes sólidos.

**Fig. 12.** Cubo cortado por un plano en GeoGebra.



Construcción con cubos de aristas congruentes para generar actividades de perspectiva como puede apreciarse en la Fig. 13. y determinar volúmenes en el espacio, vistas laterales, frontal y superior.

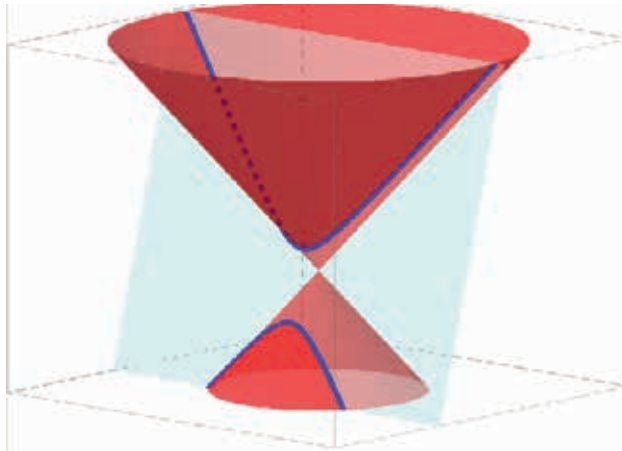
**Fig. 13.** Construcción con cubos de aristas congruentes en GeoGebra.



### 3) Secciones cónica

Construcción de cónicas en 3D a partir de intersección de sólidos con planos, como puede verse en la Fig. 14, que permite el estudio de la geometría analítica en el espacio.

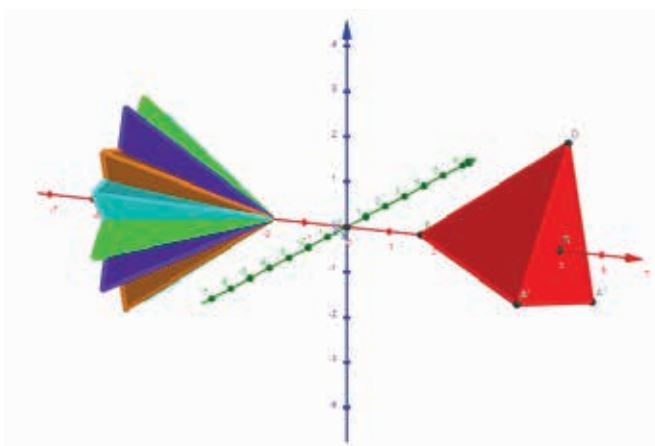
**Fig. 14.** Construcción de cónicas en GeoGebra.



### 4) Simetrías en el espacio

Construcción de simetrías alrededor de un eje, donde podemos decir que los puntos de una figura coinciden con los de otra, al tomar como referencia una línea que se conoce con el nombre de eje de simetría como puede verse en la Fig. 15.

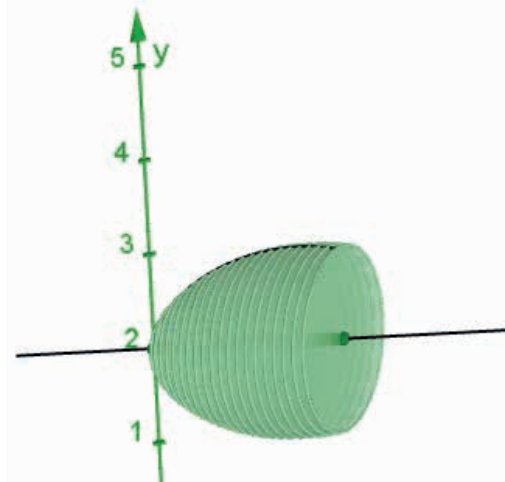
**Fig. 15.** Construcción de una simetría múltiple en el espacio con GeoGebra.



### 5) Superficies regladas

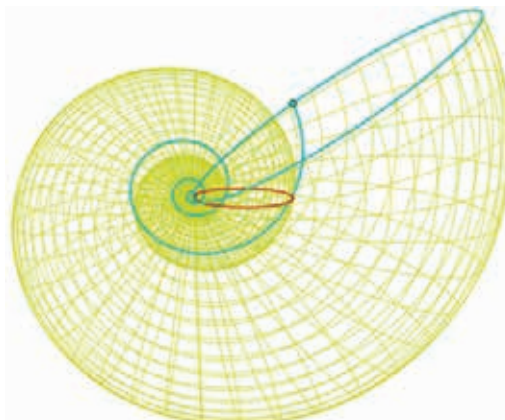
Construcción de superficies generadas por una recta que se mueve a lo largo de una curva, es decir, aquellas superficies que contienen infinitas rectas y los ejemplos más sencillos son los conos y cilindros. La generación de una superficie a partir de una curva sinusoidal puede verse en la Fig. 16.

**Fig. 16.** Superficie de revolución en GeoGebra.

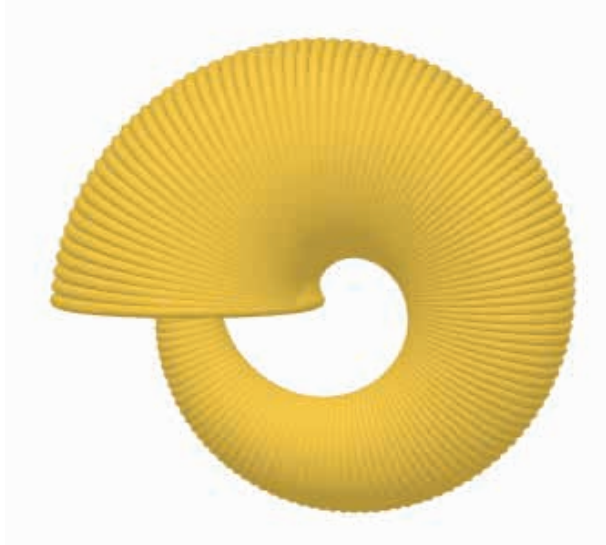


Las curvas paramétricas también se agrupan en familias como es el caso de las caracolas, cuya naturaleza se basa en dar vueltas (funciones trigonométricas) mientras aumentan su capacidad de crecimiento, a través de funciones exponenciales como puede verse en la Fig. 17 y en la Fig. 18, intersección de esfera y cilindro para conformar la curva de Viviani como puede verse en la Fig. 21.

**Fig. 17.** Construcción de un Nautilus en GeoGebra.

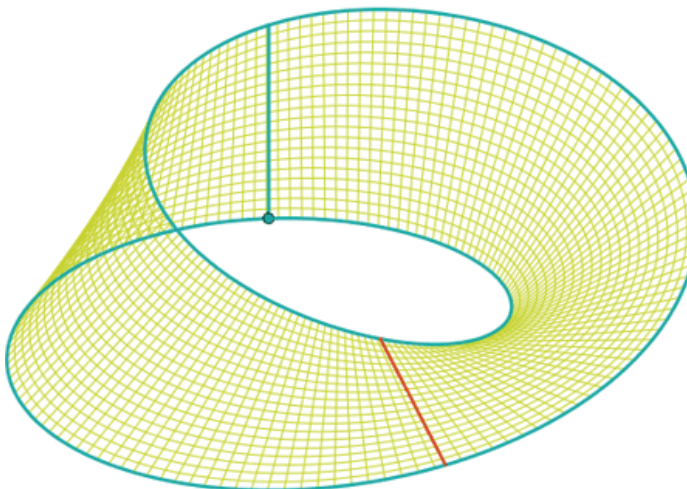


**Fig. 18.** Construcción de una caracola en GeoGebra.



La cinta de Möbius es una superficie que por sus sorprendentes propiedades es utilizada en el arte, la magia, la ingeniería, la arquitectura, el diseño, la ciencia, su estructura puede como puede verse en la Fig. 19.

**Fig. 19.** Cinta de Möbius en GeoGebra.



Construcción de la superficie de un toro creando familias de curvas que descansan sobre él como puede apreciarse en la Fig. 20.

Fig. 20. Construcción de la superficie de un toro en GeoGebra.

$$((2.3 + 0.4\cos(u)) \cos(v), (2.3 + 0.4\cos(u)) \sin(v), 0.4\sin(u))$$

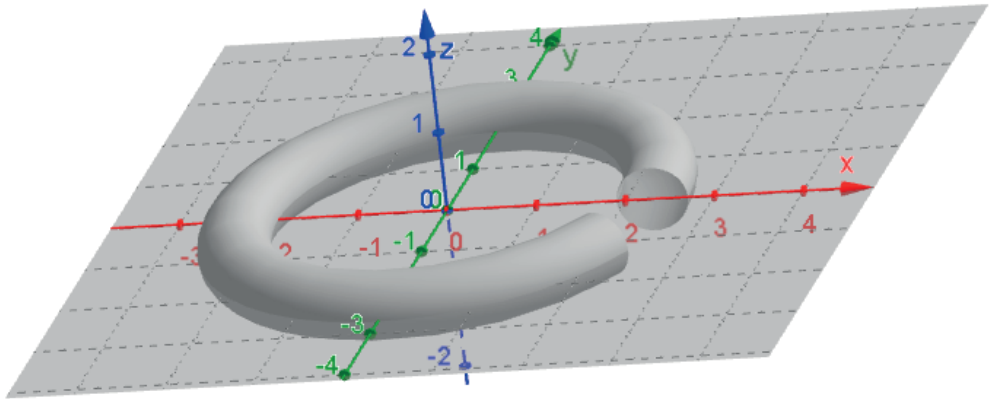
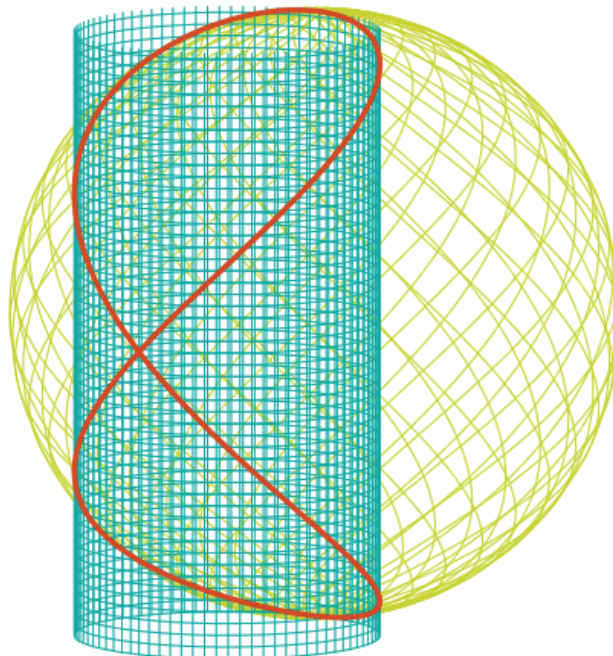


Fig. 21. Curva de Viviani en GeoGebra.





### III. CONCLUSIONES

Las nuevas tecnologías expanden el campo de indagación sobre el cual actúan las estructuras cognitivas que se tienen de la geometría, innovan el currículo con las nuevas pragmáticas asociadas y lo llevan a evolucionar mediante la integración de los procesadores geométricos como GeoGebra que han hecho más accesible e interesante los temas de geometría para los estudiantes.

Ante la iniciativa del MEN con los Derechos Básicos de Aprendizaje, los docentes podemos aportar en la construcción de rutas de aprendizaje y desarrollo de propuestas curriculares que puedan ser articuladas con las orientaciones, metodologías, estrategias y contextos definidos en los Proyectos Educativos Institucionales concretados en los planes de área y de aula.

### AGRADECIMIENTOS

Los autores reconocen las contribuciones de toda la comunidad de GeoGebra y al Ministerio de Educación Nacional de Colombia.

### REFERENCIAS

- [1] MinEducación, “¿Qué deben saber los niños de acuerdo al grado escolar que cursan?”. Disponible en: <http://www.mineducacion.gov.co/cvn/1665/w3-article-351473.html> Consultado el 30 de julio 2015.
- [2] L. Dickson, *El aprendizaje de las matemáticas*, Madrid: Labor S.A., 48. 1991
- [3] J. Dos Santos, “Introducción al GeoGebra 3D”, *XIV Congreso de Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas. Diversidad y Matemáticas*, Sociedad Andaluza de Educación Matemática THALES, Granada, 2013



**Elkin Alberto Castrillón Jiménez** nació en Bello, Colombia, el 13 de Diciembre de 1961. Se graduó como ingeniero en el Politécnico Colombiano Jaime Isaza Cadavid y estudió sus posgrados en el Instituto Tecnológico Metropolitano de Medellín.



Ejerció profesionalmente en el Instituto Tecnológico Metropolitano, en el Politécnico Colombiano Jaime Isaza Cadavid, en las empresas Enka de Colombia S.A. y Siderúrgica de Medellín S.A. Entre sus campos de interés están la formación y evaluación por competencias en educación superior.

El ingeniero Castrillón recibió Reconocimiento público como mejor profesor en docencia de la Facultad de Ingenierías del Instituto Tecnológico Metropolitano año 2013.

**Carlos Alberto Rojas Hincapié** nació en Medellín, Colombia, el 19 de Junio de 1972. Se graduó como Licenciado en la Universidad de Antioquia y estudió sus posgrados en el la Universidad de San Buenaventura.



Ejerció profesionalmente en el Instituto Tecnológico Metropolitano, en la Universidad de Antioquia y la universidad Pontificia Bolivariana. Entre sus campos de interés están la formación de maestros del municipio de Medellín en el manejo de los recursos TIC.

La secretaría de Educación de Medellín y la Universidad Pontificia Bolivariana ofrece un reconocimiento al licenciado Rojas por su compromiso permanente con la Ruta de Formación Docente en TIC y los aportes académicos realizados para la incorporación de las nuevas tecnologías en el aula y la transformación de los ambientes de aprendizaje de las instituciones educativas del municipio de Medellín.

**Francisco Javier Córdoba Gómez** nació en Medellín, Colombia, el 19 de Diciembre de 1972. Se graduó como ingeniero en la Universidad Nacional de Colombia y como licenciado en matemáticas en la Universidad Católica de Oriente y estudió posgrados, Mg. En Educación en la Pontificia Universidad Javeriana y Msc. En Matemática Educativa en el Instituto Politécnico Nacional.





Ejerció profesionalmente en el Instituto Tecnológico Metropolitano de Medellín. Entre sus campos de interés están el estudio de la integración de la tecnología en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, la modelación en matemática escolar y las creencias en el aprendizaje matemático.

El ingeniero Córdoba es el director del Instituto GeoGebra de Medellín.