

Analyse de sensibilité globale pour des modèles à paramètres dépendants

Y. Caniou^{a, b}, B. Sudret^{a, b}

a. Clermont Université, IFMA, EA 3867, Laboratoire de Mécanique et Ingénieries, BP 10448, F-63000 Clermont-Ferrand

b. Phimeca Engineering, Centre d'Affaires du Zénith, 34 rue de Sarliève, F-63800 Cournon d'Auvergne

Résumé :

En ingénierie mécanique, la performance d'un système est en général liée à la variabilité de sa réponse mécanique $Y = \mathcal{M}(\mathbf{X})$, où \mathbf{X} désigne les paramètres du modèle \mathcal{M} représentant le comportement du système. L'analyse de sensibilité permet d'identifier quels sont les paramètres X_i principalement responsable de la variabilité de Y . La méthode la plus répandue consiste à décomposer la variance du résultat, ce qui ne peut se faire que sous l'hypothèse d'indépendance statistique des paramètres d'entrée (décomposition de Sobol'). Pour des processus complexes, dont les paramètres sont dépendants, on propose de traiter le problème par une méthode basée sur l'analyse de la distribution probabiliste du résultat notée $f_Y(y)$. La méthode est appliquée à un exemple académique en mécanique.

Abstract :

In mechanical engineering, the performance of a system is generally linked to the variability of its mechanical response $Y = \mathcal{M}(\mathbf{X})$, where \mathbf{X} denotes the input parameters of the system modelling \mathcal{M} . Global sensitivity analysis allows one to identify the parameters X_i that are mainly responsible of the variability of Y . The most common methods consist in decomposing the variance of the response, which is possible only under the assumption of statistical independence among the input parameters (Sobol' decomposition). For complex processes, whose parameters are dependent, the authors propose to address the problem with a method based on the analysis of the complete model response distribution denoted by $f_Y(y)$. The method is finally applied to an academic mechanical example.

Mots clefs : Analyse de sensibilité globale, copules, modèles imbriqués

1 Introduction

Les progrès effectués dans le domaine de la modélisation numérique autorisent aujourd'hui les industriels à traiter des problèmes toujours plus complexes. Considérons un système décomposé en plusieurs sous-modèles de façon à décrire au mieux son comportement réel. Chacun d'eux correspondant à un composant, une discipline ou une échelle de modélisation différente, ils interagissent entre eux, les sorties des uns étant les entrées des autres : on parle de *modèles multi-échelles* ou *modèles imbriqués*.

Pour assurer le bon fonctionnement d'un tel système en toutes conditions, il convient de considérer la présence d'aléas dans les différents modèles. La méthodologie consiste à modéliser les paramètres *incertains* du système par des variables aléatoires. Les incertitudes sont alors propagées à travers tous les étages de la modélisation jusqu'à la (ou les) sortie(s) finale(s) du modèle. L'*analyse de sensibilité* consiste à déterminer quels paramètres d'entrée apportent le plus de variabilité à la réponse du système. Plusieurs modèles peuvent avoir une ou plusieurs entrées communes, leurs sorties sont alors statistiquement dépendantes. Pour donner du sens à l'analyse de sensibilité globale, on propose de modéliser cette dépendance de façon rigoureuse grâce à la *théorie des copules*.

L'analyse de sensibilité globale est coûteuse en nombre de simulations sur les modèles numériques. Il est nécessaire de remplacer ces modèles à l'évaluation numériquement onéreuse par un métamodèle, c'est à dire une représentation de celui-ci construit à partir d'un nombre réduit d'appels au modèle réel. Le *développement par chaos polynomial* permet de décomposer la réponse du modèle sur une base de polynômes. On bénéficie alors d'une approximation du modèle réel dont l'évaluation est équivalente à celle d'une fonction mathématique analytique.

Après avoir fixé le cadre mathématique de l'étude, une méthodologie pour traiter ce type de problèmes est appliquée à un exemple académique : une poutre en matériau composite sous poids propre.

2 Eléments sur la modélisation numérique

Cette première partie définit le cadre mathématique dans lequel s'applique la propagation des incertitudes à travers les modèles successifs ainsi que les outils numériques que sont l'analyse de sensibilité globale, le développement par chaos polynomial et la théorie des copules.

2.1 L'analyse de sensibilité globale

On considère un modèle \mathcal{M} ayant pour paramètres d'entrée les composantes du vecteur aléatoire $\mathbf{X} = \{X_1, \dots, X_n\}^\top$ dont la loi jointe est notée $f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$. La réponse scalaire Y du système est définie par :

$$Y = \mathcal{M}(\mathbf{X}) \quad (1)$$

On cherche à caractériser quels paramètres apportent le plus d'incertitudes à la réponse du modèle en calculant des *indices de sensibilité*. Les méthodes d'analyse de sensibilité globale les plus courantes utilisent la variance de la réponse $V[Y]$ comme grandeur d'intérêt. On applique le principe de la décomposition de Sobol' [6] au modèle \mathcal{M} :

$$\mathcal{M}(\mathbf{x}) = \mathcal{M}_0 + \sum_{i=1}^n \mathcal{M}_i(x_i) + \sum_{1 \leq i < j \leq n} \mathcal{M}_{i,j}(x_i, x_j) + \dots + \mathcal{M}_{1,2,\dots,n}(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (2)$$

Si les paramètres d'entrée du modèle, *i.e.* les composantes de $\mathbf{X} = \{X_1, \dots, X_n\}^\top$, sont indépendants, la variance de la réponse Y peut être décomposée comme suit :

$$V \equiv V[Y] = \sum_{i=1}^n V_i + \sum_{1 \leq i < j \leq n} V_{ij} + \dots + V_{12\dots n} \quad (3)$$

où $V_i = V[\mathbb{E}[Y|X_i]]$. On définit les indices de Sobol' de premier ordre et totaux [6], [4] par :

$$S_{1i} = \frac{V_i}{V} = \frac{V[\mathbb{E}[Y|X_i]]}{V} \quad \text{et} \quad S_{Ti} = 1 - \frac{V[\mathbb{E}[Y|\mathbf{X}_{\sim i}]]}{V} \quad (4)$$

où $\mathbf{X}_{\sim i}$ correspond au vecteur \mathbf{X} pour lequel la $i^{\text{ème}}$ composante a été supprimée. S_{1i} correspond à la part de variance de Y due au paramètre X_i pris indépendamment des autres. De façon à prendre en compte les interactions entre les paramètres, on définit les indices totaux S_{Ti} qui représentent alors la part de variance de Y due à X_i en considérant toutes ses interactions avec les paramètres X_j , $j \neq i$. Bien que cette approche soit très utilisée, elle présente deux limitations : d'abord, on fait l'hypothèse que les paramètres d'entrée sont indépendants, ce qui n'est pas le cas lorsque les modèles sont imbriqués. Enfin, on se concentre sur la variance de la réponse en ignorant les variations pouvant apparaître sur le reste de la distribution de la réponse $f_Y(y)$.

Une méthode basée sur l'analyse de la distribution de la réponse est introduite dans [1]. L'idée est de quantifier de combien le paramètre d'entrée X_i modifie la distribution de la sortie Y lorsque celui-ci est fixée à la valeur x_i en mesurant l'aire entre la densité de probabilité de la réponse $f_Y(y)$ et sa densité de probabilité conditionnelle $f_{Y|X_i}(y)$. Cette variation, ou *shift*, est définie par :

$$s(x_i) = \int_{D_Y} |f_Y(y) - f_{Y|X_i=x_i}(y)| dy \quad (5)$$

où D_Y est le domaine de variation de Y . Cette grandeur dépend fortement de la valeur de la réalisation x_i de X_i . On considère alors l'espérance du shift définie par :

$$\mathbb{E}[s(X_i)] = \int_{D_{X_i}} \left[\int_{D_Y} |f_Y(y) - f_{Y|X_i}(y)| dy \right] f_{X_i}(x_i) dx_i = \int_{D_{X_i}} s(x_i) f_{X_i}(x_i) dx_i \quad (6)$$

L'indice de sensibilité δ_i est défini par (7) où le coefficient $\frac{1}{2}$ est introduit dans un souci de normalisation.

$$\delta_i = \frac{1}{2} \mathbb{E}[s(X_i)] \quad (7)$$

2.2 Développement par chaos polynomial

Le calcul des indices de sensibilité nécessite un nombre élevé d'appels au modèle numérique \mathcal{M} . Pour limiter le nombre d'appels au modèle réel, on construit un métamodèle, *i.e.* une représentation approchée de celui-ci. On s'intéresse ici aux développements par chaos polynomial introduits dans [2] et repris dans [7].

Soit Y la réponse d'un modèle \mathcal{M} avec pour paramètres d'entrée $\mathbf{X} = \{X_1, \dots, X_n\}^T$. On propose de décomposer Y sur une base de polynômes $\psi_{\alpha}(\mathbf{X})$ comme suit :

$$Y = \mathcal{M}(\mathbf{X}) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} a_{\alpha} \psi_{\alpha}(\mathbf{X}) \quad (8)$$

où les a_{α} sont des coefficients déterministes inconnus qu'il faut déterminer. Dans la littérature, on fait référence à l'équation (8) comme *développement par chaos polynomial*. En pratique, on ne retient qu'un nombre fini de polynômes de façon à limiter le coût numérique. En général, seuls les polynômes dont le degré total $|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i$ ne dépasse pas un scalaire p sont conservés. On note alors :

$$Y \approx \mathcal{M}_p(\mathbf{X}) = \sum_{\alpha \in \mathcal{A}^{n,p}} a_{\alpha} \psi_{\alpha}(\mathbf{X}) \quad (9)$$

où $\mathcal{A}^{n,p} = \{\alpha \in \mathbb{N}^n : |\alpha| \leq p\}$ et $|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i$. On note également $P = \text{card } \mathcal{A}^{n,p}$. L'approximation de la réponse aléatoire Y du modèle \mathcal{M} se résume alors à l'estimation d'un ensemble de coefficients déterministes. Cette tâche peut être accomplie par l'intermédiaire de méthodes non intrusives (méthode de projection, méthode de régression).

2.3 La théorie des copules

Dans le paragraphe 2.1, l'hypothèse est faite que les composantes du vecteur aléatoire des paramètres d'entrée sont indépendantes pour simplifier la démonstration. Cependant, on montre que cette hypothèse ne tient plus pour des modèles imbriqués. Le coefficient de corrélation linéaire de Bravais-Pearson ρ et le coefficient de corrélation des rangs de Spearman ρ_S [5] sont des mesures de corrélation entre variables aléatoires parfois utilisées mais elles s'avèrent peu précises dans le cas où la structure de dépendance est complexe. Le cadre rigoureux pour modéliser la structure de dépendance entre variables aléatoires est fourni par la théorie des copules [3].

De façon simplifiée, une copule est une fonction de répartition d'un vecteur dont les lois marginales sont uniformes sur $[0, 1]$. Soit $F_{\mathbf{X}}$ une fonction de répartition de dimension n ayant pour marginales F_{X_i} , $i = 1, \dots, n$. Il existe une copule C de dimension n telle que pour $\mathbf{x} \in \mathbb{R}$:

$$F_{\mathbf{X}}(x_1, \dots, x_n) = C(F_{X_1}(x_1), \dots, F_{X_n}(x_n)) \quad (10)$$

Si les marginales sont continues, la copule C est unique et on a, quel que soit $\mathbf{u} \in [0, 1]^n$:

$$C(\mathbf{u}) = F_{\mathbf{X}}(F_{X_1}^{-1}(u_1), \dots, F_{X_n}^{-1}(u_n)) \quad (11)$$

La densité de probabilité jointe est alors définie par :

$$f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = c(F_{X_1}(x_1), \dots, F_{X_n}(x_n)) \prod_{i=1}^n f_{X_i}(x_i) \quad \text{avec} \quad c(\mathbf{u}) = \frac{\partial C(\mathbf{u})}{\partial u_1 \dots \partial u_n} \quad (12)$$

Une copule peut être considérée comme une *fonction de dépendance*. En d'autres termes, elle correspond à ce qu'il reste de la loi jointe $f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$ lorsque l'effet des marginales a été supprimé.

On considère ici la copule gaussienne C_{Θ} paramétrée par une matrice Θ telle que :

$$C_{\Theta}(\mathbf{u}) = \Phi_{\rho}^{-1}(\Phi(u_1), \dots, \Phi(u_n)) \quad \text{et} \quad \Theta_{ij} = 2 \sin\left(\frac{\pi}{6} \hat{\rho}_{S,ij}\right) \quad (13)$$

où Φ est la fonction de répartition de la loi normale, ρ est la matrice de corrélation et ρ_S est la matrice de corrélation des rangs du vecteur aléatoire des paramètres d'entrée \mathbf{X} .

3 Méthodologie appliquée

On propose d'utiliser les trois outils présentés à la section 2 pour réaliser une étude de sensibilité globale sur un exemple mécanique académique : le calcul de la déflexion maximale d'une poutre en matériau composite soumise à son poids propre.

3.1 Description du problème

La structure d'intérêt est présentée sur la figure 1.

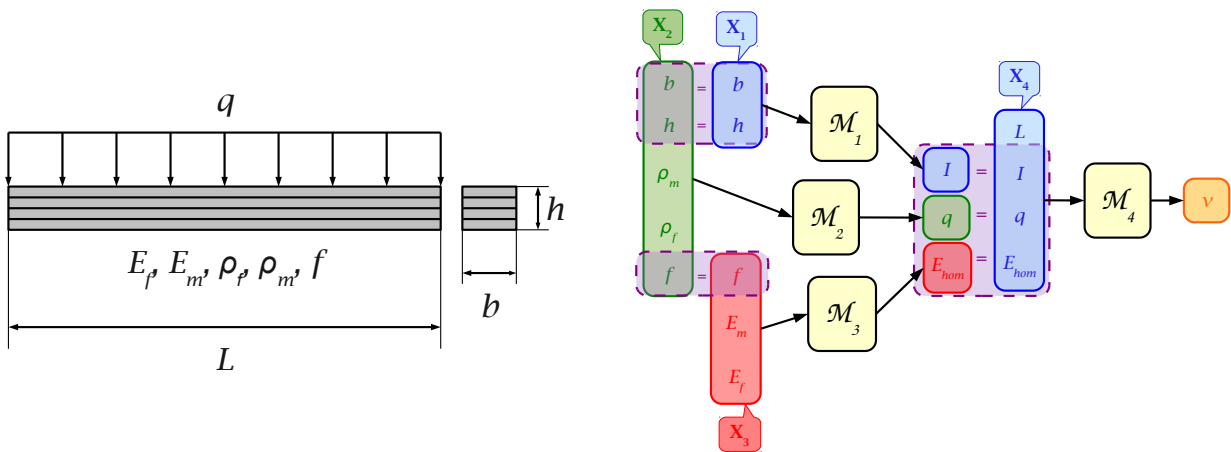


FIGURE 1 – Schéma et modèle imbriqué de la poutre en composite sous poids propre.

Le matériau constitutif de la poutre est composé d'une fraction f de fibres de carbone et d'une matrice de résine époxyde de modules d'Young respectifs E_f et E_m et de densités respectives ρ_f et ρ_m . Les dimensions de la poutre sont $L = 1\text{m}$, $b = 10\text{cm}$ et $h = 1\text{cm}$. Le moment d'inertie et le module d'Young homogénéisé de la poutre sont définis par :

$$I = \mathcal{M}_1(b, h) = \frac{bh^3}{12} \quad \text{et} \quad E_{hom} = \mathcal{M}_2(E_f, E_m, f) = E_r f + E_m(1 - f) \quad (14)$$

Le poids propre de la poutre est défini par :

$$q = \mathcal{M}_3(b, h, \rho_f, \rho_m, f) = \rho_{hom} g b h \quad \text{avec} \quad \rho_{hom} = \rho_r f + \rho_m(1 - f) \quad (15)$$

Le modèle imbriqué correspondant est présenté sur la figure 1. La flèche de la poutre vaut :

$$v = \mathcal{M}_4(q, l, E_{hom}, I) = \frac{5}{384} \frac{ql^4}{E_{hom}I} \quad (16)$$

Les paramètres de niveau 1 E_r , E_m , ρ_r , ρ_m , b et h sont modélisés par des lois lognormales et f par une loi Beta.

3.2 Métamodèles, distributions et Copules

la première étape consiste à construire les chaos polynomiaux correspondant aux modèles \mathcal{M}_1 , \mathcal{M}_2 , \mathcal{M}_3 pour obtenir les réponses correspondantes I , q et E_{hom} , paramètres de niveau 2. La taille du plan d'expériences LHS est $N_{DOE} = 1000$ et le degré d'expansion est $p = 5$. Les coefficients sont obtenus par une méthode de projection. Les distributions de I , q et E_{hom} sont approximées par des estimations à noyau gaussien à partir d'échantillons de 10^6 réalisations de chaque sortie.

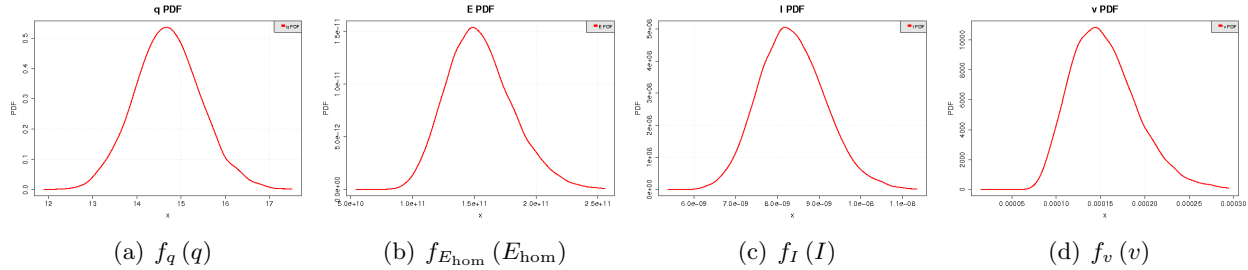


FIGURE 2 – Estimations à noyau des densités de probabilité des paramètres de niveau 2 et 3

Comme le montre la figure 1, les paramètres I , q et E_{hom} ont des paramètres d'entrée communs. On teste l'appartenance des 2 copules $C(q, I)$ et $C(q, E_{hom})$ à la famille des copules gaussiennes avec un test de Cramer-von Mises puis on estime leur paramètre à partir des estimations $\hat{\rho}_S(q, E_{hom}) = 0.34$ et $\hat{\rho}_S(q, I) = 0.74$ (figure 3). Conformément à l'équation (13), les paramètres correspondant sont $\hat{\theta}(q, E_{hom}) = 0.35$ et $\hat{\theta}(q, I) = 0.75$.

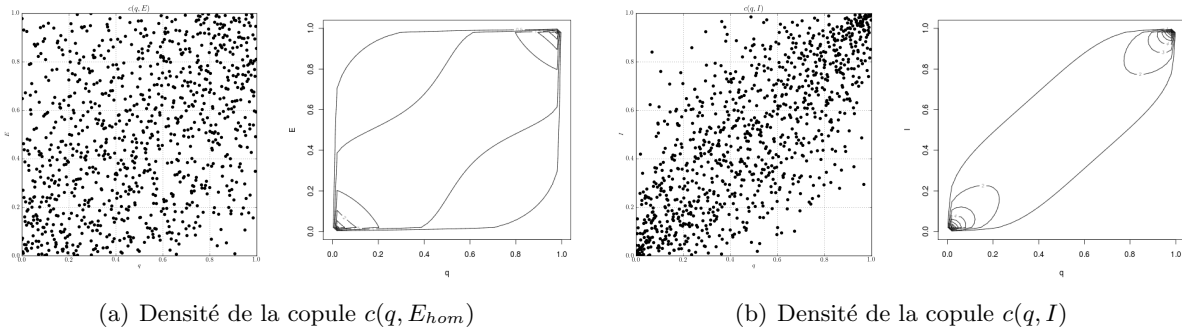


FIGURE 3 – Nuages de points des copules $c(q, E_{hom})$ et $c(q, I)$.

Le vecteur aléatoire des paramètres d'entrée de niveau 2 est construit avec les lois marginales de L , I , q et E_{hom} et les copules de $C(q, I)$ et $C(q, E_{hom})$. On note que par construction (figure 1), les variables I et E_{hom} sont indépendantes. La réponse globale du système, *i.e.* la déflexion de la poutre à mi-longueur v , est approximée en construisant le métamodèle \mathcal{M}_4 comme précédemment. Le plan d'expériences de taille N_{DOE} tient compte à la fois des marginales et de la copule.

3.3 Analyse de sensibilité

Le but est de calculer les indices de sensibilité globale de v aux paramètres q , L , E_{hom} et I . Afin de réduire le nombre de simulations, l'espérance du shift est estimée par la méthode de quadrature de Gauss. Un nombre $n_{quad} = 30$ de points de quadrature permet d'en assurer la convergence. Pour chaque réalisation $x_i^{(k)}$, $k \in \{1, \dots, n_{quad}\}$ de la variable X_i , un échantillon de taille 10^6 est simulé suivant la densité conditionnelle $f_{Y|X_i=x_i^{(k)}}(y)$. Le shift entre la densité inconditionnelle $f_Y(y)$ et la densité conditionnelle est évalué par la méthode des trapèzes. Le domaine de variation de la réponse v

est alors discrétiser en $n_{trap} = 200$ intervalles. Les résultats sont présentés dans le tableau 1. De façon à apprécier l'apport de la modélisation de la structure de dépendance par une copule gaussienne, le même calcul est réalisé avec des copules indépendantes, c'est à dire en ignorant la dépendance statistique des variables de niveau intermédiaire.

La première observation est que les indices δ basés sur l'entière distribution de v respectent le même ordre que les indices S_1 et S_T basés sur la variance. La longueur L est le paramètre qui apporte le plus d'incertitudes à v avec une contribution de 33% de la variance totale. Elle est suivie de E_{hom} avec 28% puis de I avec 24% et enfin de q avec 15%. La seconde observation est que les indices δ sont moins discriminant que les indices de Sobol'. En effet, l'écart entre les contributions respectives de chaque paramètre est plus faible lorsqu'on prend en compte l'entière densité de probabilité comme grandeur d'intérêt. Enfin, la comparaison montre qu'en ne prenant pas en compte la dépendance entre les paramètres de niveau 2, on néglige la contribution des paramètres corrélés. Ainsi, la contribution de q qui est de 15% avec une copule gaussienne n'est plus que de 12% avec une copule indépendante.

Paramètres	S_1	S_T	δ_i	δ_g
q	0.07	0.08	0.09	0.11
L	0.36	0.37	0.24	0.23
E_{hom}	0.31	0.32	0.21	0.20
I	0.23	0.24	0.18	0.17

TABLE 1 – Indices de sensibilité avec une copule indépendante (S_1, S_T, δ_i) et gaussienne (δ_g)

4 Conclusions

Dans cet article, une méthodologie est présentée pour réaliser une étude de sensibilité globale pour des modèles multi-échelles et imbriqués dont les paramètres sont aléatoires et dépendants. Tout d'abord, un indice de sensibilité basé sur la variation de la distribution de la réponse du modèle et tenant compte de la dépendance entre les paramètres est présenté. L'expansion sur un chaos polynomial est ensuite mise en avant pour l'évaluation du modèle à faible coût numérique. Puis, la théorie des copules est introduite pour fournir un cadre mathématique rigoureux à la modélisation de la structure de dépendance des variables. Enfin, la méthodologie est appliquée à un exemple académique, *i.e.* une poutre en matériau composite soumise à son poids propre pour laquelle la déflexion à mi-longueur est observée. L'étude montre qu'une modélisation peu rigoureuse de la structure de dépendance des paramètres conduit à une sous-estimation de la contribution des paramètres les plus fortement dépendants à la variabilité de la réponse globale du système. Cet aspect est à prendre en considération pour le dimensionnement de structure complexes.

Références

- [1] E. Borgonovo. A new uncertainty importance measure. *Reliab. Eng. Sys. Safety*, 92 :771–784, 2007.
- [2] R.G Ghanem and P.D Spanos. *Stochastic Finite Elements : A Spectral Approach*. Springer Verlag, 1991. (Reedited by Dover Publications, 2003).
- [3] R. B. Nelsen. *An introduction to Copulas*. Lecture Notes in Statistics. Springer, 1999.
- [4] A. Saltelli, S. Tarantola, and F. Campolongo. Sensitivity analysis as an ingredient of modelling. *Statistical Science*, 15 (4) :39–56, 2000.
- [5] G. Saporta. *Probabilités, analyse des données et Statistiques*. TECHNIP Editions, 2^e édition, 2006.
- [6] I.M. Sobol'. Sensitivity estimates for nonlinear mathematical models. *Mat Model*, 2 :112–8, 1993.
- [7] C. Soize and R. Ghanem. Physical systems with random uncertainties : Chaos representations with arbitrary probability measure. *Society for Industrial and Applied Mathematics*, 26(2) :395–410, 2004.