

# Optimisation multidisciplinaire sous incertitudes en conception préliminaire avion

L. Jaeger<sup>1</sup>, C. Gogu<sup>2</sup>, S. Segonds<sup>2</sup>, C. Bes<sup>3</sup>

<sup>1</sup> Doctorante, Université Paul Sabatier (UPS), 118 route de Narbonne, 31062 Toulouse, France

<sup>2</sup> Maître de Conférence, Université Paul Sabatier (UPS), Toulouse, France

<sup>3</sup> Professeur des universités, Université Paul Sabatier (UPS), Toulouse, France

## Résumé

*L'optimisation robuste permet de concevoir des systèmes optimaux dont les performances sont peu sensibles aux incertitudes. L'optimisation fiabiliste, quant à elle, répond à un niveau minimal de fiabilité mais n'offre pas de garantie en ce qui concerne la sensibilité des performances aux incertitudes. Ce papier met en œuvre une méthode utilisant ces deux techniques dans le cadre de la conception préliminaire avion. Les incertitudes sont prises en compte grâce à une méthode probabiliste découlant de l'exploitation de données historiques sur les avions (caractéristiques, performances, etc). Nous montrerons dans un premier temps que la prise en compte des incertitudes avec un écart-type constant issu des résidus de la base de données, engendre des résultats non physiques. Afin de pallier ce problème nous mettrons ensuite en place un écart-type variable qui permet de prendre en compte deux phénomènes : le nombre de données historiques dans une région donnée varie, certaines régions sont moins bien prédites par les fonctions analytiques. Après avoir modélisé les incertitudes, on montre que l'optimum robuste sous contraintes fiabilistes d'un avion court-courrier est proche de l'optimum déterministe mais la masse de l'avion correspondant est plus élevée du fait des marges supplémentaires prises.*

**Mots clés :** optimisation multidisciplinaire, incertitudes de modélisation, propagation d'incertitudes, conception préliminaire avion.

## 1. Introduction

De nos jours, les incertitudes sont couramment intégrées dans les méthodes de conception afin d'obtenir des systèmes fiables et / ou robustes [1], [2]. Les incertitudes apparaissent à diverses étapes de la conception d'un système : lors du dimensionnement, de l'usinage de pièces etc. Elles interviennent également tout au long de la durée de vie du système : incertitudes aléatoires dues à l'environnement. Les incertitudes sont ainsi intégrées dès les premières étapes de la conception d'un système : l'optimisation préliminaire. L'optimisation vise à minimiser un objectif (typiquement la masse de l'avion dans la phase de conception préliminaire avion) tout en respectant certaines contraintes de conception (généralement des contraintes d'inégalité sur les performances opérationnelles) [3]. Les systèmes conçus aujourd'hui sont de plus en plus complexes et font souvent intervenir plusieurs disciplines (pour un avion par exemple: la géométrie, le système de propulsion, l'aérodynamique, la structure etc.). Un problème multidisciplinaire comporte plusieurs disciplines qui sont parfois étroitement couplées : les entrées d'une discipline peuvent être les sorties d'autres disciplines et vice versa créant ainsi des boucles de rétroaction [4], [5]. Des méthodes spécifiques permettant de propager les incertitudes doivent être mises en place. Le but de notre étude est donc de développer une méthode d'optimisation permettant de prendre en compte les incertitudes dans un problème multidisciplinaire de conception préliminaire avion, notamment les incertitudes de modèle. En effet, les modèles analytiques obtenus lors du dimensionnement préliminaire avion sont souvent construits à partir de bases de données historiques regroupant divers modèles d'aéronefs. La simplicité des modèles signifie qu'il y a couramment une incertitude de modèle significative. En outre, certaines régions du modèle peuvent être déterminées avec plus de précision en raison d'un plus grand nombre de données accessibles. Nous allons donc introduire une méthode afin de prendre en compte les

incertitudes grâce à un écart-type variable (permettant ainsi de prendre en compte la variation de l'incertitude du modèle parmi les différentes régions). Nous examinerons ensuite les différents résultats en comparant la méthode d'optimisation déterministe et la méthode d'optimisation proposée mettant en œuvre des contraintes à la fois de robustesse et de fiabilité.

## 2. Conception préliminaire avion

Nous souhaitons appliquer notre méthode d'optimisation à un cas-test industriel de conception préliminaire dont le but est d'optimiser les caractéristiques principales d'un design avion pour une mission donnée (dans notre cas il s'agit d'un avion court-courrier). Le poids total de l'avion au décollage MTOW doit être minimisé tout en respectant diverses contraintes de performances opérationnelles  $g_i$ : la vitesse d'approche maximale, la longueur de piste maximale au décollage, les plafonds de vol (altitude minimale durant l'ascension, altitude minimale de croisière, altitude maximale avant tremblement aérodynamique, altitude minimale lorsqu'un des moteurs est en panne) et la capacité de carburant. Ce problème d'optimisation dépend de plusieurs disciplines : la géométrie, la propulsion, les masses, les performances opérationnelles, l'aérodynamique etc. Les paramètres principaux de la conception préliminaire sont de quelques dizaines, parmi ces paramètres deux ont une importance primordiale : la surface de voilure  $S_{wing}$  et la poussée maximale du moteur SLST, ce sont les variables d'optimisation. La conception préliminaire est, comme tout problème de conception, un problème inverse : trouver les caractéristiques d'un objet dont on connaît les performances alors que la physique nous permet seulement d'estimer les performances connaissant les caractéristiques. C'est une étape de la conception qui s'avère être cruciale mais complexe pour différentes raisons : les décisions sont prises dans un contexte où peu de choses sont définies et où les données du problème sont encore mal connues ; l'espace de recherche de solutions doit rester assez général pour ne pas écarter des solutions potentielles ; enfin les modèles utilisés sont souvent relativement grossiers. A ce stade de la conception les incertitudes prises sont donc importantes et sont principalement des incertitudes de modèle.

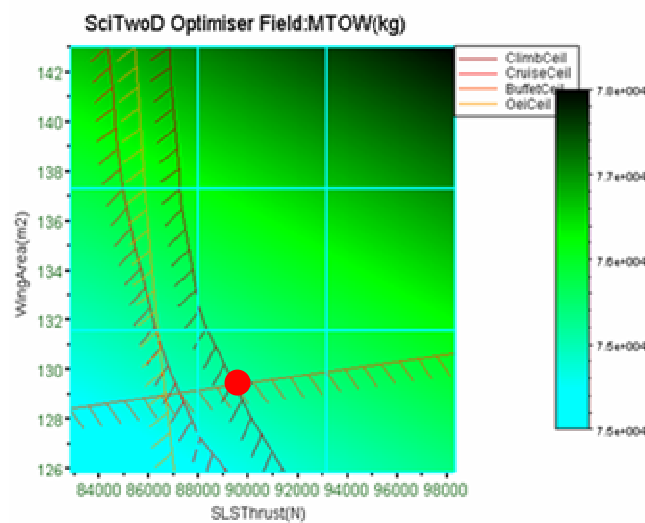


Figure 1 Optimisation déterministe

On détermine dans un premier temps l'optimum de notre problème sans incertitude par une méthode de type pattern search, [6]:

$$(1) \quad \begin{cases} \min_{S_{wing}, SLST} MTOW(S_{wing}, SLST) \\ \text{où } S_{wing}, SLST \in S, S \text{ espace de recherche} \\ \text{soumis à: } g_i(S_{wing}, SLST) \leq 0, i = 1, \dots, 7 \end{cases}$$

La masse au décollage trouvée est  $MTOW = 75415 \text{ kg}$  pour une surface de voilure  $S_{wing} = 129,35 \text{ m}^2$  et une puissance motrice  $SLST = 89474, \text{N}$  (cf. figure 1). Une illustration détaillée de ce problème pourra être trouvée dans [6].

### 3. Etude de sensibilité

Le problème de conception préliminaire avion comporte plus de 160 paramètres caractéristiques de l'incertitude des modèles, dans l'hypothèse où des incertitudes seraient introduites sur chacun de ces paramètres, l'évaluation de la fonction objectif deviendrait très coûteuse en temps de calcul et le calage de notre étude serait d'autant plus difficile avec un grand nombre de paramètres. Pour réduire le nombre de paramètres incertains et de ce fait le nombre de simulations dans le processus d'optimisation, nous mettons en place une étude de sensibilité.

On effectue une étude de sensibilité locale autour de l'optimum déterministe: on fait varier chaque paramètre incertain de  $\frac{1}{100}X$  où  $X$  est la valeur à l'optimum du paramètre étudié. On mesure ensuite l'impact de chaque paramètre incertain sur la fonction objectif ainsi que sur les contraintes [7]:

$$S_i = \frac{x_i^{opt}}{y^{opt}} \left. \frac{\partial f}{\partial X_i} \right|_{X_i=x_i^{opt}} \quad (2)$$

avec  $S_i$  la sensibilité de la variable  $x_i$  sur la fonction  $f(x)=y$ [7] où  $f$  peut être la fonction objectif ou une contrainte quelconque. La dérivée partielle est calculée par différence finie :  $\Delta X = \frac{1}{100}x_i^{opt}$ . On note que le calcul de la sensibilité est adimensionnel, il est normalisé afin d'obtenir une grandeur objective (on évalue quel est le pourcentage de variation de la fonction objectif et des contraintes lorsque le paramètre incertain  $X$  considéré varie d'un certain pourcentage). Les paramètres du modèle sont ainsi classés selon leur degré d'influence sur la variabilité de la fonction objectif et des contraintes. Il ressort de cette étude 15 paramètres : il s'agit de l'union des paramètres entraînant les plus grandes sensibilités (en %) de la fonction objectif et / ou des contraintes. Ces paramètres seront donc les paramètres incertains de notre optimisation non déterministe.

### 4. Optimisation non déterministe

Nous souhaitons concevoir un système faiblement sensible aux variations et ayant statistiquement les meilleures performances. Pour ce faire le problème déterministe est modifié afin d'inclure des contraintes de robustesse et de fiabilité. Le problème se pose de la façon suivante :

$$(3) \quad \begin{cases} \min_{S_{wing}, SLST} E(MTOW(S_{wing}, SLST, \delta)) \text{ avec } S_{wing}, SLST \in S, \delta \text{ l'incertitude} \\ \text{tel que :} \\ \text{var}(MTOW(S_{wing}, SLST, \delta)) \leq \alpha \text{ et } \Pr ob(g_i(S_{wing}, SLST, \delta) \leq 0) \geq \alpha_i^g \text{ avec } i=1, \dots, 7 \end{cases}$$

où  $\alpha$  est la variation tolérée qui représente la contrainte de robustesse et valant 0,07% et  $(1-\alpha_i^g)$  le risque de violer les contraintes imposées.

Dans un premier temps les incertitudes sont prises en compte grâce à un écart-type constant calculé à partir d'une base de données regroupant les différentes familles d'avions (avions représentatifs des familles A320, A340 etc.) : il s'agit de l'erreur des moindres carrés entre les points réels et les prédictions d'un modèle simple (linéaire ou quadratique) dépendant de variables pertinentes pour la fonction considérée. L'écart-type ainsi calculé caractérise les résidus sur l'ensemble de la plage de variation de la fonction. Ceci peut cependant poser problème, car en termes relatifs à la fonction, l'écart-type peut devenir très conséquent. Un exemple : l'écart-type empirique calculé pour la fonction  $F_{wing}$  (capacité du réservoir de carburant de l'aile) est en termes relatifs très grand pour des valeurs faibles de  $F_{wing}$ . Il y a donc une forte probabilité que pour des valeurs faibles de  $F_{wing}$  des tirages aléatoires donnent des points de valeur négative, par conséquent des points non physiques (cf. figure 2). Dans un premier temps, afin d'éviter de tirer des incertitudes trop importantes qui, en se propageant entraîneraient des variables négatives les écarts-types ont été tronqués à +/-2 écarts-types.

L'algorithme d'optimisation est un algorithme de recherche basé sur la méthode pattern search [8]. En chaque point de recherche on procède à un tirage de Monte-Carlo afin d'évaluer les contraintes de robustesse et de fiabilité. Chaque variable aléatoire est tirée avec une loi normale centrée, et un écart-type  $\sigma$  moyen constant calculé à partir des résidus. A cause des considérations de coût numérique nous nous sommes restreints à 500 tirages. Pour ce nombre d'expériences la loi des grands nombres donne une erreur inférieure à 5% sur l'estimation des probabilités de succès (contraintes de fiabilité) :

$$\frac{Pf}{\sqrt{n}} \leq 5\% \quad (4)$$

Ce qui a été considéré comme acceptable à ce stade de l'étude cependant nous envisageons de mettre en place des méthodes subsidiaires afin de réduire le bruit de Monte-Carlo. On obtient :

$$\begin{cases} \text{Awing} = 156,73 \text{ m}^2 ; \\ \text{SLST} = 124242 \text{ N} ; \\ \text{MTOW} = 81073 \text{ kg} \end{cases}$$

Due à de grandes incertitudes (données dispersées aboutissant à de grands écarts-types) la variabilité de la fonction objectif et des contraintes est importante : la variabilité de la fonction objectif ne peut être inférieure à 20% et les contraintes actives ont un seuil de fiabilité faible égal à 75% (ces fonctions sont à l'origine très bruitées, elles donnent des estimations mauvaises, l'ajout d'incertitudes engendre une variabilité encore plus importante). Nous souhaitons donc mettre en place un écart-type variable afin de moduler la dispersion et mieux refléter la précision du modèle. En effet, la base de données comporte des régions plus ou moins bien définies suivant le nombre de données accessibles. La méthode que nous allons exploiter permet de retranscrire ce phénomène (pour plus de détails cf. [9]): Chaque variable de sortie d'un modèle du problème de conception préliminaire avion est supposée pouvoir s'exprimer sous la forme suivante, de manière à inclure l'incertitude de modèle:

$$Y = \beta_1 X(1) + \beta_2 X(2) + \dots + \beta_p X(p) + \varepsilon \quad (5)$$

où  $Y$  est la variable incertaine (due à l'incertitude de modèle) ou « variable à expliquer » dépendant des variables explicatives connues  $X(i)$  (ce sont les paramètres incertains choisis suite à l'analyse de sensibilité, ici  $i=[1;2]$ ) et  $\varepsilon$  le bruit supposé gaussien centré, de sorte que  $E(Y) = \beta_1 X(1) + \beta_2 X(2) + \dots + \beta_p X(p)$ . On est donc confronté à un problème dit de régression linéaire. Les paramètres  $\beta$  sont obtenus en minimisant la somme des carrés des résidus:

$$L = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - \beta_0 - \beta_j X_{ij})^2. \quad (6)$$

Afin de minimiser la fonction  $L$  on annule les dérivées partielles de cette fonction par rapport aux paramètres  $\beta$ :

$$\left. \frac{\partial L}{\partial \beta_j} \right|_X = -2 \sum_{i=1}^n (y_i - \beta_0 - \beta_j X_{ij}) X_{ij} = 0 \quad (7)$$

Sous forme matricielle on obtient :

$$\beta = (X'X)^{-1} X'y \quad (8)$$

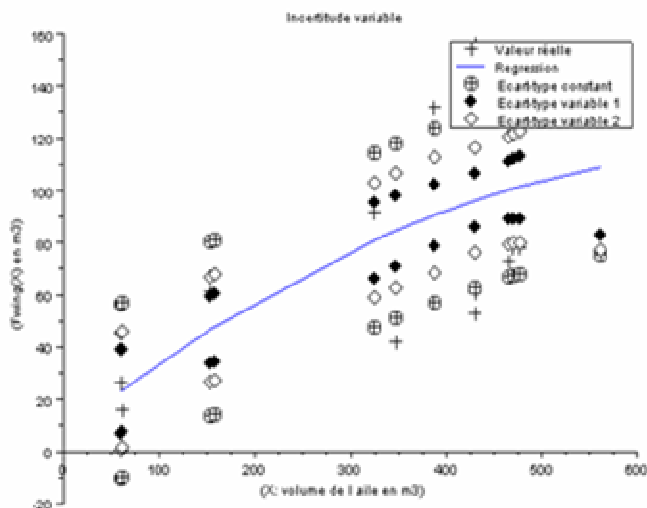
avec  $X$  la matrice des  $X_{ij}$ ,  $y$  le vecteur réponse au point du plan d'expériences. La variance de la prédiction au point  $x_0$  est donnée par la formule suivante [9]:

$$\sigma_1 = \text{Var}[\hat{y}(x_0)] = \sigma_0^2 x_0' (X'X)^{-1} x_0 \quad (9)$$

avec  $\sigma_0$  écart-type caractérisant les résidus. Les incertitudes de modèle considérées sont issues du fait qu'il y ait une différence entre les points réels et les prédictions du modèle. Il est à noter que la variance de la prédiction issue de la formule ci-dessus permet d'obtenir une variabilité de la fonction objectif plus faible (7%) et les contraintes de fiabilité sont plus facilement respectées (90%). Notons cependant sur la *figure 3* que les contraintes sont moins régulières que dans le cas déterministe dû au bruit lié aux simulations de Monte Carlo. La formulation de l'optimisation sous incertitudes présentée dans l'Equation (3) est exécutée avec l'écart type variable  $\sigma_1$  (cf. *figure 2*), on rappelle que chaque variable aléatoire est tirée avec une loi normale centrée, Le résultat d'optimisation est alors :

$$\begin{cases} \text{Awing} = 144,34 \text{ m}^2 ; \\ \text{SLST} = 103260 \text{ N} ; \\ \text{MTOW} = 78221 \text{ kg} \end{cases}$$

La valeur de notre écart-type s'ajuste aux informations disponibles : l'écart type sera moins important lorsque la région est bien définie, à l'opposé, il sera conséquent lorsque peu de points définissent la région (l'incertitude sur la prévision des caractéristiques est plus importante). Cependant cette formulation ne permet pas de rendre compte du fait que certains points ne sont pas bien estimés par la régression. Ce phénomène va être pris en compte en intégrant un écart-type moyen  $\sigma$  défini en fonction du point étudié. Cet écart-type est l'erreur au sens des moindres carrés calculée dans une fenêtre de dimensions fixes (moyenne des erreurs des points situés dans la fenêtre). L'écart-type devient alors  $\sigma_2 = \sqrt{\sigma_1 \sigma}$ . La différence entre les deux méthodes est mise en évidence avec la *figure 2*, l'écart-type 2 suit mieux les tendances des points réels.

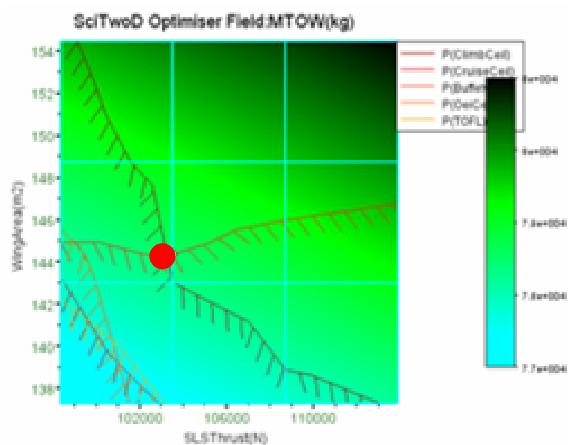


**Figure 2 Comparaison des différents écarts-types**

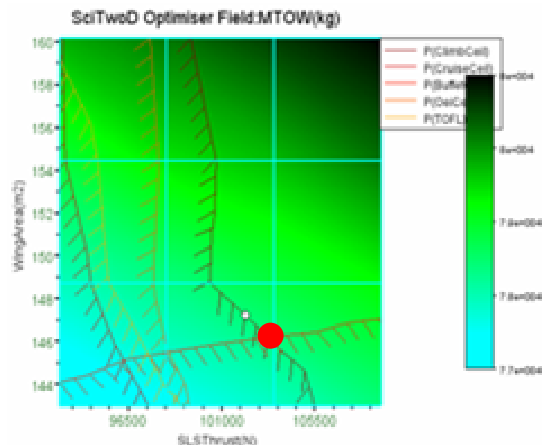
La combinaison des écarts-types variables permet d'aboutir au résultat d'optimisation suivant (cf. *figure 4*):

$$\begin{cases} A_{wing} = 146,17 \text{ m}^2 ; \\ SLST = 103215 \text{ N} ; \\ MTOW = 78212 \text{ kg} \end{cases}$$

Comme mentionné précédemment, l'écart-type constant issu des résidus est conséquent et entraîne des résultats non physiques (notamment pour le premier point de la *figure 2*). L'écart type variable  $\sigma_2$  permet de pallier ce phénomène. Contrairement à la première méthode, on trouve bien approximativement 68% de la population dans l'intervalle  $[m - \sigma_2 ; m + \sigma_2]$  où  $m$  est la valeur prédite par la régression (cf. *figure 2*). On obtient bien un avion ayant un niveau de robustesse garanti et satisfaisant à un certain niveau de fiabilité (les contraintes actives ont un seuil de fiabilité égal à 90%).



**Figure 3 Résultat optimisation sous incertitude avec écart-type variable 1**



**Figure 4 Résultat de l'optimisation sous incertitude avec écart-type variable 2**

## 5. Conclusion

Ce papier présente une méthode d'optimisation permettant de concevoir un système à la fois robuste et fiable. Cette méthode est appliquée dans le cadre de la conception préliminaire avion. Nous avons montré dans un premier temps que la prise en compte des incertitudes avec un écart-type constant issu des résidus, engendre des résultats non physiques. En effet la base de données utilisée regroupe des données issues d'avions de différentes familles ce qui a pour conséquence d'aboutir à des données dispersées. Nous avons donc mis en place un écart-type variable qui permet de prendre en compte deux phénomènes : les paramètres variables sont soumis à des incertitudes plus ou moins grandes selon les régions dans lesquelles ils se situent (le nombre de données accessibles varie), certains points sont moins bien prédits par la régression. Afin d'améliorer l'estimation des incertitudes, nous souhaitons affiner le calcul de l'écart-type  $\sigma_2$ . Pour ce faire nous envisageons de le déterminer non plus à partir du calcul des erreurs des moindres carrés dans une fenêtre fixe mais, dans une fenêtre dont les dimensions varient selon la région dans laquelle on se situe.

## Remerciements

Les auteurs souhaitent remercier M. Thierry Druot, ingénieur Airbus Operations SAS pour son aide et ses précieux conseils. Ce travail est supporté par l'agence nationale de la recherche (ANR) dans le cadre du programme Cosinus (ID4CS n° ANR-09-COSI-005).

## Références

- [1] Wagner, RL. Science, uncertainty and risk: the problem of complex phenomena. *APS News*, 12(1), pp. 8, 2003.
- [2] Oberkampf, WL, DeLand, SM, Rutherford, BM, Diegert, KV, Alvin, KF. "Error and uncertainty in modeling and simulation", *Reliability Engineering and System Safety*, 75(3), pp. 333–57, 2002.
- [3] Beyer, H. G., Sendhoff, B., "Robust Optimization - A Comprehensive Survey", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 196, No. 33-34, 2007, pp. 3190-3218.
- [4] Perez, R. E., Liu, H. H. T., Behdinan, K., "Evaluation of multidisciplinary optimization approaches for aircraft conceptual design", *10<sup>th</sup> AIAA/ISSMO multidisciplinary analysis and optimization conference*, Albany, New York, 2004.
- [5] DeLaurentis, D. A., Mavris, D. N., "Uncertainty modeling and management in multidisciplinary analysis and synthesis", AIAA paper 2000-0422, *Proc. 38<sup>th</sup> AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit*, Reno, NV, January 10-13, 2000.
- [6] Birman, J., Druot, T., "Robustness assessment of a margin setting process in preliminary aircraft sizing", *12<sup>e</sup> congrès annuel de la société française de recherche opérationnelle et d'aide à la décision*, Saint Etienne, France, 2011.
- [7] Jacques, J., Lavergne, C., Devictor, N., "Analyse de sensibilité globale", *36<sup>ème</sup> journée de Statistique*, Montpellier, France, 2004.
- [8] Torczon, V., "On the convergence of pattern search algorithms", *SIAM Journal on Optimisation*, Vol. 7, No. 1, 1997, pp. 1-25.
- [9] Myers, R. H., Montgomery, D. C., Anderson-Cook, C. M., "Process and product optimization using designed experiments", *Response surface methodology*, Third edition, Wiley, 2009, pp. 13-72.