

Cylindre roulant à proximité d'un plan à bas Reynolds

CHRISTOPHE FRANKIEWICZ ^a, ALAIN MERLEN^a

a. I.E.M.N. (Institut d'électronique microélectronique et nanotechnologies), Avenue Poincaré, 59652
VILLENEUVE D'ASCQ

Résumé :

L'écoulement à faible nombre de Reynolds autour d'un cylindre en rotation/translation à proximité d'un plan est étudié analytiquement et numériquement. Une solution analytique exacte est présentée pour le régime de Stokes. L'analyse des efforts montre alors que le contact est physiquement impossible sans l'existence d'un interstice entre le cylindre et la paroi. L'approximation de Rayleigh (équations de lubrifications) permet alors de résoudre ce problème quelque soit le régime d'écoulement autour du cylindre. Dans le cas des liquides, les conditions d'apparition de la cavitation dans l'interstice sont explicitées. Enfin, une étude numérique validée grâce à la solution analytique permet d'obtenir l'évolution de l'écoulement avec l'augmentation du Reynolds jusqu'au seuil de la première instabilité de sillage.

Abstract :

The flow around a cylinder rolling or sliding close to a wall has been investigated analytically and numerically for small Reynolds numbers. An exact analytical solution has been found in the Stokes regime. Infinite forces appear making impossible any physical contact between the plane and the cylinder and suggesting the existence of an interstice. Thanks to the lubrication approximation, this problem has then been solved for any Reynolds number. For liquids the cavitation onsets are explicitly obtained. Finally, a numerical study validated by the analytical solution considers the flow for higher Reynolds number, up to the onset of the first wake instability.

Mots clefs : Microfluidique, Cylindre, Lubrification

1 Introduction

L'écoulement de Stokes autour de cylindres en rotation et translation proche de parois a été étudié dès 1922 par Jeffery [3] qui utilisa les coordonnées bipolaires pour résoudre l'équation bi-harmonique dans différentes situations impliquant des cylindres en rotation. Néanmoins, seules quelques configurations permettent l'obtention de solutions sous forme de développements en séries finies, le paradoxe de Stokes aboutissant en général à des vitesses infinies au loin. C'est donc comme cas limite de celui de l'écoulement entre deux cylindres en rotation que celui du cylindre sur un plan a été analysé. Wakiya [9] ainsi que Jeffrey et al. [4] obtinrent ainsi les efforts de portance et traînée ainsi que le moment appliqué sur le cylindre. Un contact ponctuel entre le cylindre et le plan génère cependant des efforts infinis.

Dans la lignée de l'étude du coin anguleux par Moffatt [5], Schubert [7] a étudié le problème du coin compris entre un cylindre et un plan. Deux cas ont été envisagés : le cylindre en rotation en proximité d'une paroi fixe ou le cylindre fixe au voisinage d'une paroi en translation.

En revanche, dans le papier présenté ici, tous les cas de rotation et de translation sont examinés. La solution analytique exacte a été trouvée en régime de Stokes avec ou sans glissement. Les efforts et lignes de courant analytique et ceux obtenus par voie numérique sont confrontés positivement. La

singularité de pression infiniment négative en aval du point de contact conduit à exclure la possibilité d'un contact 2D parfait entre le cylindre et le plan. Il faut donc supposer l'existence d'un interstice entre le cylindre et la paroi.

Ce type d'écoulement interstitiel a été étudié par Taylor [8] puis par Gaskell et al. [2] mais seulement pour l'écoulement entre deux cylindres tournant à la même vitesse ou avec l'un des deux en rotation et l'autre fixe, de plus seule l'équation pour la pression était résolue. Ici, les fonctions de courant ont été déterminées permettant ainsi la localisation des points d'arrêts, et le raccord avec l'écoulement extérieur. On peut alors démontrer que la cavitation induit nécessairement une structure 3D comme le confirment les études expérimentales existantes [8], [6].

2 Résultats principaux

2.1 Ecoulement sans interstice

Nous considérons l'écoulement de Stokes plan autour d'un cylindre de rayon R en contact au point O avec un plan en translation à la vitesse $-U$ dans le repère lié au cylindre. Le cylindre tourne à la vitesse angulaire $\Omega = -kUR$ (fig. 1). Le nombre de Reynolds est défini par $Re = \frac{2UR}{\nu} \ll 1$ avec ν viscosité cinématique du fluide. L'écoulement obéit donc à l'approximation de Stokes et la fonction de courant satisfait l'équation bi-harmonique $\Delta\Delta\psi = 0$. Une solution de l'équation bi-harmonique est recherchée, en coordonnées polaires, sous la forme :

$$\psi(r, \theta) = \sum_{i=-1}^3 f_i(\theta)r^i$$

Avec les conditions aux frontières du problème définies par :

$$\begin{cases} \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = -U & \text{pour } \theta = 0 \\ \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = -Uk \cos \theta & \text{pour } r = 2R \sin \theta \\ \frac{\partial \psi}{\partial r} = Uk \sin \theta & \text{pour } r = 2R \sin \theta \\ \frac{\partial \psi}{\partial r} = 0 & \text{pour } \theta = 0 \end{cases}$$

A l'infini, les conditions sont :

$$\begin{cases} \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = -U \cos \theta & \text{pour } r \rightarrow \infty \\ \frac{\partial \psi}{\partial r} = -U \sin \theta & \text{pour } r \rightarrow \infty \end{cases}$$

La solution exacte de cette équation est la fonction de courant :

$$\psi = -\frac{U \sin \theta}{r} (r - 2R \sin \theta) [r - 2(1 + k)R \sin \theta] \quad (1)$$

Cette solution originale généralise certaines solutions rencontrées dans la littérature. En effet, à proximité du point de contact O , une approximation de $\sin \theta \approx y/x$ et de $r \approx x$, donne :

$$\psi_O \approx U(4R^2(k+1)\frac{y^3}{x^4} - 2R(k+2)\frac{y^2}{x^2} + y)$$

Lorsque $k = U = R = 1$, on obtient alors la solution de Bhattacharyya et al. [1]

On retrouve également une solution obtenue par Schubert [7] en séparant les effets dus à la translation de ceux dus à la rotation du cylindre. Pour cela, il suffit d'introduire $kU = V$, la vitesse de rotation à la surface du cylindre. La fonction de courant devient alors :

$$\psi = -\frac{U \sin \theta}{r} (r - 2R \sin \theta)^2 + \frac{2V \sin^2 \theta}{r} (r - 2R \sin \theta)$$

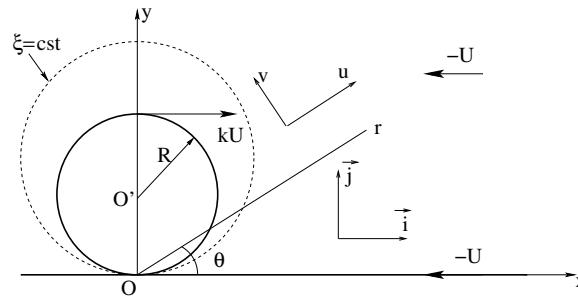


FIGURE 1 – Notations : r, θ coordonnées polaires ; R est le rayon du cylindre ; $-U$ la vitesse amont ($U > 0$) ; O Origine du repère de référence et point de contact cylindre/paroi. O' axe de révolution du cylindre, u and v composantes de la vitesse dans le repère de référence, k ratio entre la vitesse à la surface du cylindre et U . Les vecteurs unitaires \vec{i} , \vec{j} et $\vec{k} = \vec{i} \wedge \vec{j}$ dans le référentiel cartésien.

où on reconnaît la superposition des solutions de Schubert pour le cylindre en rotation au dessus d'une paroi fixe et pour le cylindre glissant sans rotation, respectivement, avec $y = r \sin \theta$: $\psi = V \frac{2y^2}{r^2} (1 - \frac{2yR}{r^2})$ pour $U = 0$ et $\psi = -Uy[1 - \frac{Ry}{r^2}]^2$ pour $V = 0$.

La figure 2 montre la fonction de courant (eq. 1) pour différentes valeurs de k . On remarque une coïncidence quasi-parfaite entre l'écoulement défini par la fonction de courant précédente et l'écoulement calculé numériquement via le logiciel commercial COMSOL à partir des équations de Navier-Stokes complètes. Une structure tourbillonnaire apparaît pour les cas $k > 0$ et enveloppe le cylindre, empêchant ainsi toute possibilité pour le fluide à l'extérieur à cette structure d'entrer en contact avec le cylindre. Plus le ratio k entre la vitesse de rotation du cylindre et celle de translation de la paroi est important, plus cette structure est étendue. Quand k devient négatif (rotation régressive), cette structure disparaît.

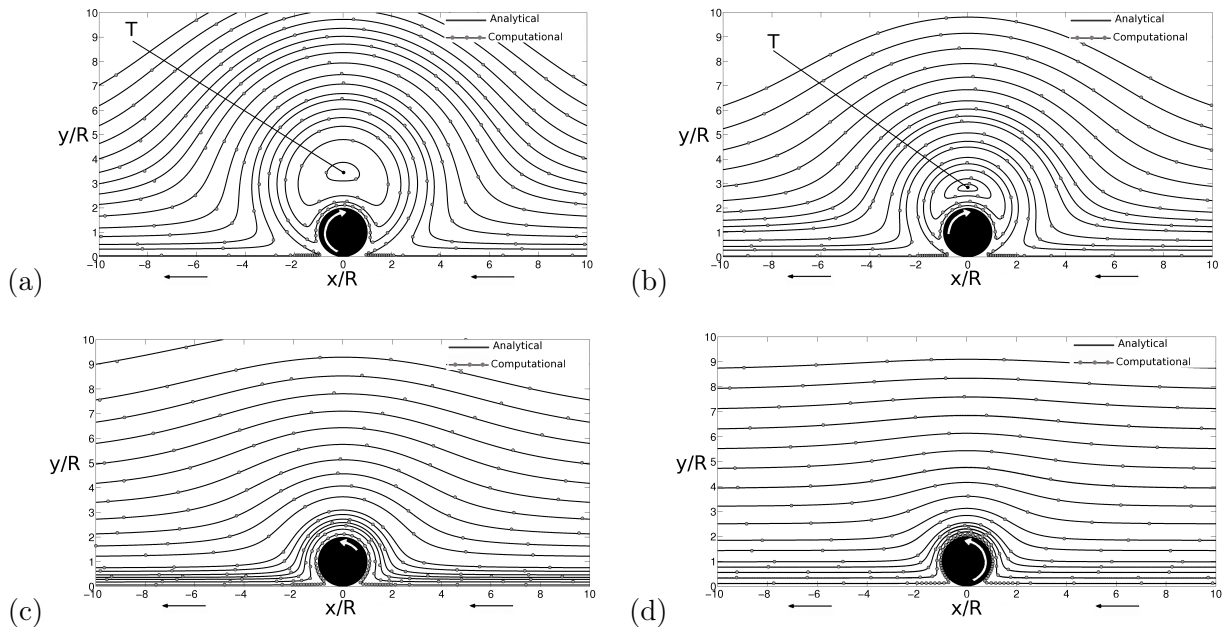


FIGURE 2 – Lignes de courants analytiques et numériques pour différentes valeurs de k : (a) $k = 2$ et (b) $k = 1$; le cylindre et la paroi entraîne le fluide vers O (c) $k = -0.5$ et (d) $k = -2$; vitesses opposées au point de contact entre cylindre et paroi. T : centre topologique de la structure tourbillonnaire.

2.2 Écoulement interstitiel

Le cylindre est désormais éloigné du plan par un interstice de hauteur $h \ll R$. La résolution de l'écoulement dans l'interstice, via les équations de lubrification, donne accès analytiquement aux pressions exercées sur le plan et la paroi inférieure du cylindre en fonction de h (fig 3) ainsi qu'aux lignes de courants (fig.4).

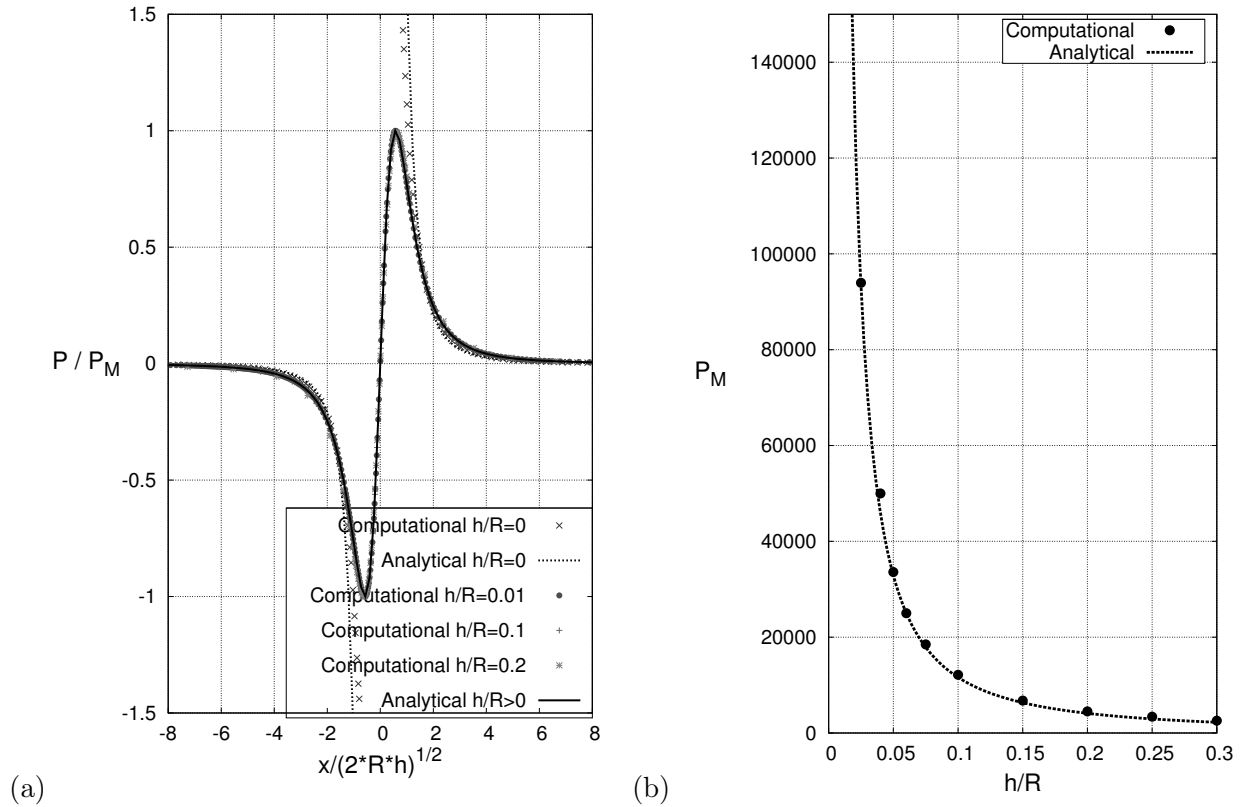


FIGURE 3 – (a) Distribution de pressions dans l'interstice (b) extrema de pression (Pa). Les valeurs numériques sont comparées aux solutions analytiques.

Il est intéressant de noter que la position des extrema de pression dans l'interstice, donnée par $\frac{x_A}{h} = \pm \sqrt{\frac{2R}{3h}}$, ne dépend que de facteurs géométriques. Cependant les paramètres caractéristiques de l'écoulement (nombre de Reynolds, ratio de vitesses k) interviennent dans la valeur de ces extrema, définis par $p_M = \frac{3\sqrt{3}|k+1|}{4\sqrt{2}} \frac{\mu U}{h} \sqrt{\frac{R}{h}}$. Il s'ensuit alors que plus le cylindre est proche de la paroi plus la pression augmente jusqu'à tendre vers des valeurs infinies dans le cas du contact parfait ($h = 0$). Ce comportement explique l'apparition de cavitation dans le cas des liquides, ou d'effets de compressibilité dans les gaz. Une portance infinie apparaît alors empêchant toute possibilité de contact entre le cylindre et le plan.

De manière asymptotique, les solutions analytiques, dans l'interstice (fig.4) se raccordent parfaitement avec l'écoulement de Stokes défini précédemment et qui apparaît donc très peu modifié par la présence de l'interstice sauf sur une distance de l'ordre de $\sqrt{2Rh}$ au voisinage du point O. Il faut noter néanmoins que la solution interstitielle reste valable quel que soit le nombre de Reynolds de l'écoulement autour du cylindre.

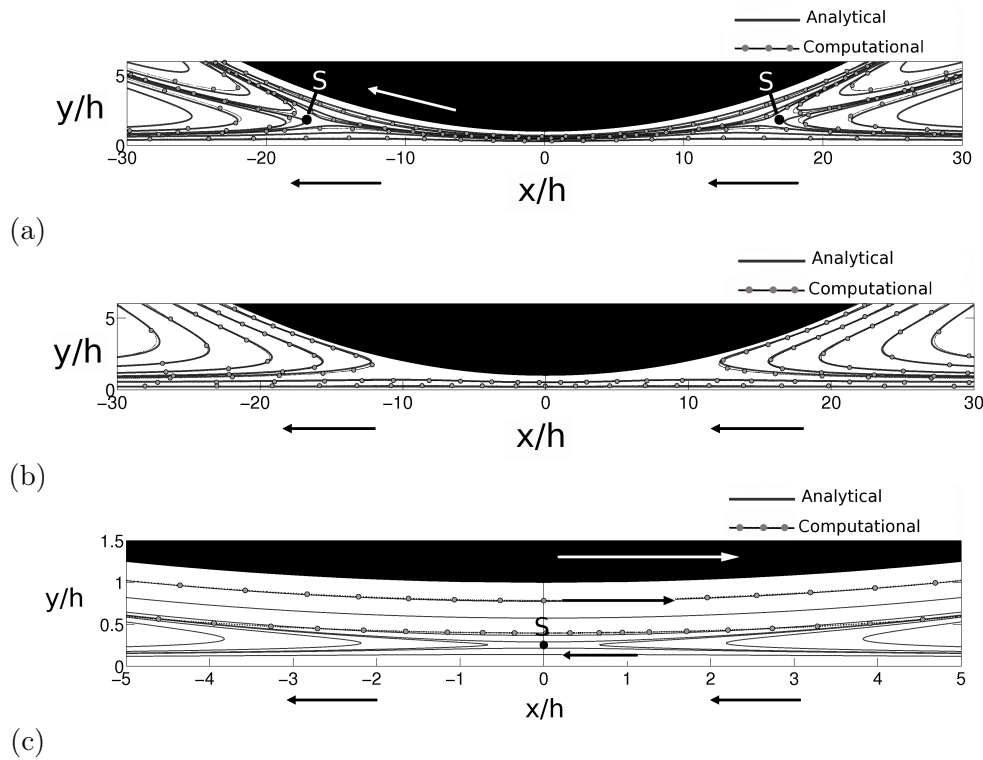


FIGURE 4 – Lignes de courants analytiques et numériques pour différentes valeurs de k : (a) $k = 1$, le cylindre et la paroi entraînent le fluide vers O (b) $k = 0$ le cylindre glisse sur le plan mobile et (c) $k = -2$; vitesses opposées au point de contact entre cylindre et paroi.

Dans le cas $k > 0$, l'origine de la structure tourbillonnaire présente autour du cylindre s'explique facilement. En effet, le fluide est entraîné dans l'interstice aussi bien par la paroi que par le cylindre mais la taille de l'interstice limite le débit de fluide passant en dessous du cylindre. Une partie du fluide entraîné est donc refoulée et contourne le cylindre. Cette déviation implique nécessairement l'existence d'un point d'arrêt dans l'écoulement (S sur les figures), dont la position $(x_s; y_s)$ est fonction du rapport des vitesses k ainsi que de la taille de l'interstice. Certaines valeurs de k conduisent à des positions particulières pour ces points d'arrêt.

Ainsi pour $k = 1$, le débit de fluide entraîné par la paroi est égal à celui dû à la rotation du cylindre, le point d'arrêt est donc exactement à mi-hauteur de l'interstice.

Pour les cas $k < 0$, il n'existe qu'un seul point d'arrêt d'abscisse $x_s = 0$.

Le cas $k = 0$ est singulier car le cylindre reste fixe. La surface même du cylindre est donc composée de points de vitesse nulle. Etant donné que l'interstice ne peut permettre le passage de la totalité du fluide entraîné par la paroi, une partie du fluide est refoulée et contourne le cylindre, l'autre entre dans l'interstice. Cette bifurcation est située sur un point d'arrêt localisé à la surface du cylindre et dont l'abscisse est $x_s = \pm\sqrt{2Rh}$ comme l'avait également déterminé Jeffrey et al. [4].

Finalement, on peut souligner que le flux interstitiel est indépendant de la nature du fluide et, en absence de cavitation, est égal à $\frac{2}{3}(k+1)Uh$. En cas de cavitation ce flux diminue jusqu'à zéro selon la valeur de la pression au loin p_∞ . On peut montrer que la localisation de la cavitation ne correspond pas avec celle d'un point d'arrêt de l'écoulement 2D ce qui exclut la possibilité de création d'un ménisque bidimensionnel stationnaire.

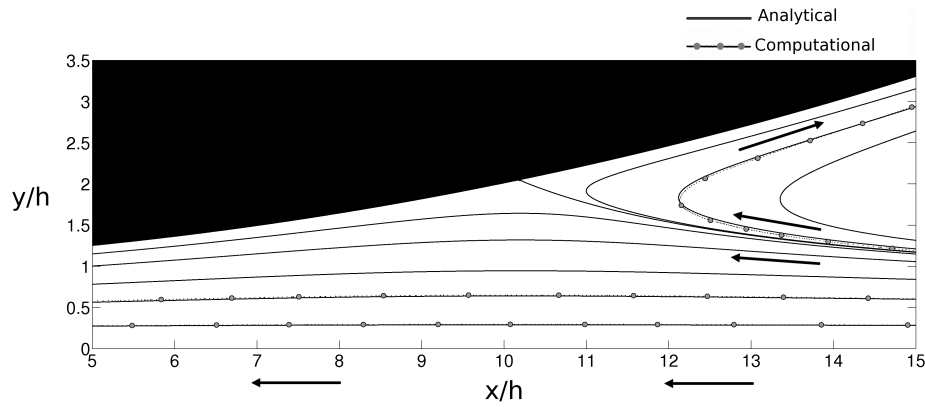


FIGURE 5 – Lignes de courants pour $k = 0$, zoom sur la séparation entre la partie du fluide déviée autour du cylindre et celle passant dans l'interstice. La ligne séparant les deux écoulements est une ligne de points d'arrêts.

3 Conclusions

L'écoulement d'un cylindre en rotation sur une paroi mobile a été résolu analytiquement et numériquement à bas Reynolds. Il apparaît que le contact parfait 2D ne peut exister sans produire, dans les liquides, une cavitation induisant une portance infinie. Il se forme alors un interstice dont l'écoulement a également été résolu en utilisant le cadre de la théorie de lubrification. La connaissance des fonctions de courant et des champs de pression de cet écoulement donne accès à de nombreuses propriétés comme la taille du films entraîné par le cylindre. L'écoulement de Stokes est influencé par la présence de cet interstice. La structure tourbillonnaire présente dans les cas $k > 0$ ainsi que l'écoulement singulier lorsque $k = 0$ persistent. L'écoulement dans l'interstice reste néanmoins valable quel que soit le nombre de Reynolds de l'écoulement autour du cylindre. Les solutions obtenues ici permettent donc de calculer la contribution de l'interstice aux efforts appliqués au cylindre. Enfin, dans le cas de l'apparition de la cavitation on montre que l'écoulement ne peut rester bidimensionnel en aval de la section cavitante comme cela est observé dans divers travaux expérimentaux (Seddon et Mullin [6]).

Références

- [1] Bhattacharyya, S., Mahapatra, S. & Smith, F. T. 2004 Fluid flow due to a cylinder rolling along ground. *J. of Fluids and Structures* **19**, 511–523.
- [2] Gaskell, P. H., Savage, M. D., & Thompson H., M. 1998 Stagnation-saddle points and flow patterns in Stokes flow between contra-rotating cylinders. *J. Fluid mech.* **370** 221-247.
- [3] Jeffery, G. B. 1922 The Rotation of Two Circular Cylinders in a Viscous Fluid. *Proc. R. Soc.* **A101** 169-174.
- [4] Jeffrey, D. J. & Onishi, Y. 1981 The slow motion of a cylinder next to a plane wall *Q. Jl. Mech. Appl. Math.* **34** 129-137
- [5] Moffat, H. K. 1964 Viscous and resistive eddies near a sharp corner. *J. Fluid mech.* **18** 1-18
- [6] Seddon, J. R. T. & Mullin, T. 2006 Reverse rotation of a cylinder near a wall. *Phys. of Fluids* **18**
- [7] Schubert, G. 1967 Viscous flow near a cusped corner. *J. Fluid mech.* **27** 647-656
- [8] Taylor, G. I. 1963 Cavitation of a viscous fluid in narrow passages. *J. Fluid mech.* **16** 595-619
- [9] Wakiya, S. 1975 Application of Bipolar Coordinates to the Two-dimensional Creeping Motion of a Liquid. Part II. *J. of the Phys. Soc. of Japan.* **39-6**, 1603-1607.