

Modélisation asymptotique des écoulements de gaz dans des micro-canaux – Comparaison avec des simulations DSMC

R. GATIGNOL, C. CROIZET

Institut Jean le Rond d'Alembert, Université Pierre et Marie Curie (UPMC) & CNRS
4 place Jussieu, 75005 PARIS

Résumé :

Les Simulations Directes de Monte Carlo (DSMC) donnent une bonne description des écoulements de gaz avec transfert de chaleur dans des microsystèmes. Mais elles sont coûteuses en temps de calcul. Notre objectif est d'étudier des écoulements compressibles dans des micro-canaux à partir d'une approche asymptotique des équations de Navier-Stokes avec, sur les parois, des conditions de saut pour la vitesse et la température. Des calculs DSMC sont réalisés pour le même problème. Les comparaisons entre solutions asymptotiques et simulations DSMC montrent un très bon accord dans les domaines de données considérés.

Abstract :

The Direct Simulation Monte Carlo (DSMC) methods are well adapted to describe gas flows with heat transfer in micro-systems. But they are computationally expensive. Our purpose is to study flows of compressible fluids in micro-channel by using an asymptotic approach of the Navier-Stokes equations with jump conditions for the velocity and the temperature written along the walls. DSMC simulations are made for the same problem. Comparisons between asymptotic solutions and DSMC simulations show a good agreement in the considered range of data.

Mots clefs : micro-fluidique, micro-canal, modélisation asymptotique, simulation DSMC

1 Introduction

Les appareillages submillimétriques sont présents dans des domaines variés tels que l'analyse biologique, le génie des procédés et les échangeurs de chaleur. Les micro-filtres à particules développés en vue de limiter la pollution environnementale et les micro-systèmes de refroidissement présents dans les circuits électroniques en sont deux exemples. Notre travail est centré sur la description des écoulements gazeux dans des micro-canaux présents dans ces systèmes.

De nombreux travaux [7,6] traitent des écoulements dans des micro-canaux où apparaissent des phénomènes nouveaux par rapport aux régimes macroscopiques classiques. Deux effets sont importants : la raréfaction et la compressibilité, caractérisées respectivement par le nombre de Knudsen Kn (rapport du libre parcours moyen du gaz et d'une longueur caractérisant la géométrie) et le nombre de Mach M . La compressibilité induit une chute de pression non linéaire le long du micro-canal, et la raréfaction conduit au phénomène de transpiration thermique.

Dans le cadre de la dynamique des gaz raréfiés, ces écoulements ont fait l'objet de très nombreuses études théoriques, numériques et expérimentales, en régime continu, glissant, de transition et moléculaire libre [8]. Les simulations directes de Monte Carlo (DSMC) donnent de bons résultats dans le cas des régimes de transition et sont bien appropriées pour traiter les écoulements de micro-fluidique [1,2]. Les méthodes des gaz sur réseaux et des « lattice gases » sont également intéressantes pour ces écoulements notamment dans des géométries complexes, bien que peu d'applications aux micro-canaux aient été réalisées [10,11].

Les méthodes DSMC sont coûteuses en temps de calcul [1,2], d'où l'intérêt de rechercher une modélisation asymptotique, permettant d'obtenir une description simple des phénomènes physiques et de mener une étude paramétrique. Notre objectif est la modélisation des écoulements de gaz dans des micro-canaux à faible nombre de Mach et avec des nombres de Knudsen faibles ou modérés. Les équations adoptées sont les

équations de Navier-Stokes avec, sur les parois, des conditions de saut pour la vitesse et la température.

Dans ce qui suit (Section 2), on présente quelques exemples de simulations DSMC dans un micro-canal. Dans la Section 3, les équations de Navier-Stokes sont écrites pour un micro-écoulement, sous forme dimensionnelle puis sous forme adimensionnelle. Un petit paramètre ε , lié au rapport de forme du micro-canal, est introduit et le Principe de Moindre Dégénérescence [13] est appliqué. Dans la Section 4, la solution asymptotique au premier ordre est explicitée. Les comparaisons entre solutions asymptotiques et simulations DSMC montrent un très bon accord dans les domaines de données considérés (Section 5).

2 Simulations par la méthode DSMC d'écoulements dans un micro-canal

On considère un écoulement laminaire, stationnaire, non isotherme, d'un gaz au travers d'un micro-canal plan (Fig. 1), en l'absence de force et de source de chaleur volumétriques. Deux chambres identiques (longueur $\ell' = 7 \mu\text{m}$, largeur $h' = 5 \mu\text{m}$) sont reliées l'une à l'autre par le micro-canal (longueur $\ell = 10 \mu\text{m}$, largeur $h = 1 \mu\text{m}$). On introduit un repère orthonormé (O, x, y) , l'origine O étant au centre de la section gauche du micro-canal, et l'axe (O, x) étant un axe de symétrie. Le gaz s'écoule d'une chambre à l'autre.

Afin de visualiser l'écoulement, quelques simulations DSMC avec la version stationnaire du code DS2V de Bird [3,4] sont réalisées. Le gaz considéré est l'azote. Pour la pression et la température, les valeurs d'initialisation du calcul, sont notées P_{in} et T_{in} dans la partie gauche du canal ($x < 5 \mu\text{m}$) et P_{out} et T_{out} dans la partie droite ($x > 5 \mu\text{m}$). Les conditions aux limites de « pression constante » définies par Bird [4] sont introduites aux deux extrémités gauche et droite des deux chambres. Le modèle de réflexion diffuse avec accommodation parfaite est adopté pour la description des interactions des molécules avec les parois du canal, et le modèle VHS (Variable Hard Sphere) est choisi pour les collisions intermoléculaires. La température T_w des deux parois du micro-canal dépend de la variable longitudinale x et varie de T_{in} à T_{out} avec un gradient constant. Les simulations sont faites avec les valeurs numériques indiquées sur la table 1. Le nombre de molécules simulées est de l'ordre de 7.2×10^5 et le nombre d'échantillons de l'ordre de 8.8×10^4 . Les niveaux de bruit pour la pression et la température déduits des formules d'Hadjiconstantinou *et al.* [9] sont de l'ordre de 0.2% et 0.1%. Pour la vitesse, ce niveau est proportionnel à $1/M$ et est de l'ordre de 3% (excepté pour les simulations n°7 et n°8 où les nombres de Mach sont très petits).

Les notations suivantes sont introduites : P_i et T_i sont les valeurs de la pression et de la température au centre de la section gauche du micro-canal ($x = 0 \mu\text{m}$) et P_o et T_o au centre de la section droite ($x = 10 \mu\text{m}$). Dans la table 1, on a fait figurer des résultats donnés par les calculs DSMC, à savoir, P_i , T_i , P_o , T_o et les nombres de Mach et de Knudsen au centre du micro-canal ($x = 5 \mu\text{m}$, $y = 0 \mu\text{m}$). Le nombre de Knudsen Kn varie de 0.043 à 0.066 et le nombre de Mach M de 0.0014 à 0.119. Les nombres de Mach et de Knudsen sont relativement petits. Notons pour finir, deux résultats de la littérature : une simulation [1] dans un canal similaire à celui de la figure 1 mais avec $\ell = 1 \mu\text{m}$ et $h = 0.05 \mu\text{m}$, avec $P_{in} \cong 133 \text{ kPa}$, $P_{out} \cong 102 \text{ kPa}$, $T_{in} = T_{out} = 300 \text{ K}$ qui donne $M \approx 0.04$ et $Kn = 0.054$; un résultat expérimental [5] dans un canal dont les dimensions sont $\ell = 5000 \mu\text{m}$ et $h = 4.48 \mu\text{m}$, les pressions telles que $P_{in} = 252 \text{ kPa}$ et $P_{out} = 102.6 \text{ kPa}$, qui donne $Kn = 0.16$. Dans la modélisation asymptotique que nous allons présenter, le nombre de Mach sera considéré petit et le nombre de Knudsen petit ou modéré.

3 Modélisation asymptotique des écoulements de gaz dans un micro-canal

Les parois du micro-canal (Fig. 1) situées en $y = \pm h/2$ sont au repos et à la même température $T_w(x)$. Les conditions aux limites en $x = 0$ et en $x = \ell$ pour la pression seront spécifiées plus tard. La pression, la masse volumique, la température, les vitesses longitudinale et transversale sont notées p , ρ , T , u et v respectivement. La viscosité de cisaillement est μ et la conductivité thermique κ . La loi des gaz parfait est $p = r\rho T$ avec $r = c_p - c_v$ et $c_p/c_v = \gamma$ (c_p et c_v sont les chaleurs spécifiques à pression et à volume constants). Les coefficients μ , κ , c_p et c_v sont supposés constants. Les indices x et y notent les dérivées partielles dans les deux directions x et y . Les équations de Navier-Stokes s'écrivent :

$$(\rho u)_x + (\rho v)_y = 0 \quad (1)$$

$$\rho(uu_x + vu_y) + p_x - \mu \left(\frac{4}{3}u_{xx} + u_{yy} + \frac{1}{3}v_{xy} \right) = 0 \quad (2)$$

$$\rho(uv_x + vv_y) + p_y - \mu \left(\frac{4}{3}v_{yy} + v_{xx} + \frac{1}{3}u_{xy} \right) = 0 \quad (3)$$

$$\rho c_v (uT_x + vT_y) + p(u_x + v_y) - \mu \left(\frac{4}{3}u_x^2 + \frac{4}{3}v_y^2 - \frac{4}{3}u_x v_y + u_y^2 + v_x^2 + 2u_y v_x \right) - k(T_{xx} + T_{yy}) = 0 \quad (4)$$

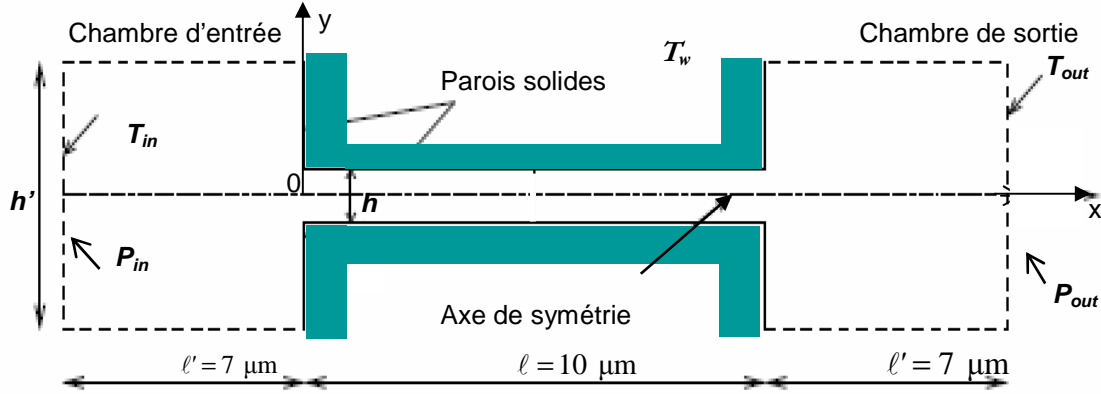


FIG. 1. Géométrie du micro-canal pour les simulations DSMC.

	P_{in} kPa	T_{in} K	P_{out} kPa	T_{out} K	P_i kPa	T_i K	P_o kPa	T_o K	Kn	M
Simulation n°1	120	300	100	300	121	299	99	300	0.050	0.050
Simulation n°2	130	300	100	300	131	299	98.9	301	0.047	0.075
Simulation n°3	140	300	100	300	141	299	98.7	301	0.045	0.097
Simulation n°4	150	300	100	300	151	299	98.1	301	0.043	0.119
Simulation n°5	130	400	100	300	118	392	101	303	0.061	0.04
Simulation n°6	120	400	100	300	109	391	101	302	0.064	0.02
Simulation n°7	111	400	100	300	101	392	101	302	0.066	0.0014
Simulation n°8	110	400	100	300	100	392	101	302	0.066	0.0033

TABLE 1. Valeurs numériques dans les simulations DSMC.

Le nombre de Prandtl et le libre parcours moyen sont définis classiquement par :

$$Pr = \frac{\mu c_p}{k}, \quad \lambda = \frac{\mu}{\rho} \sqrt{\frac{\pi}{2rT}} \quad (5)$$

Les conditions aux limites sur les deux parois $y = \pm h/2$ sont [7,2] :

$$\{u\}_{y=\pm h/2} = \left\{ \mp \lambda \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{3}{4} \frac{\mu}{\rho T} \frac{\partial T}{\partial x} \right\}_{y=\pm h/2}, \quad \{v\}_{y=\pm h/2} = 0, \quad \{T\}_{y=\pm h/2} = T_w \mp \left\{ \frac{2\gamma}{\gamma+1} \frac{\lambda}{Pr} \frac{\partial T}{\partial y} \right\}_{y=\pm h/2} \quad (6)$$

On écrit maintenant les équations de Navier-Stokes et les conditions aux limites avec les grandeurs sans dimensions \bar{x} , \bar{y} , \bar{u} , \bar{v} , \bar{p} , $\bar{\rho}$, \bar{T} et \bar{T}_w définies par $x = \ell \bar{x}$, $y = h \bar{y}$, $u = U_c \bar{u}$, $v = V_c \bar{v}$, $p = P_c \bar{p}$, $\rho = \rho_c \bar{\rho}$, $T = T_c \bar{T}$ et $T_w = T_c \bar{T}_w$, où les échelles caractéristiques pour les longueurs longitudinale et transversale, les vitesses longitudinale et transversale, la pression, la masse volumique et la température sont respectivement : ℓ et h , U_c et V_c , P_c , ρ_c et T_c (avec $P_c = \gamma \rho_c T_c$). On introduit classiquement le petit paramètre $\varepsilon = h/\ell$ et les nombres de Mach M , de Knudsen Kn et de Reynolds Re :

$$\varepsilon = \frac{h}{\ell}, \quad M = U_c \sqrt{\frac{\rho_c}{\gamma P_c}}, \quad Kn = \frac{1}{h} \frac{\mu}{\rho_c} \sqrt{\frac{\pi}{2rT_c}}, \quad Re = \frac{\rho_c U_c h}{\mu} = \frac{M}{Kn} \sqrt{\frac{\pi \gamma}{2}} \quad (7)$$

L'application du Principe de Moindre Dégénérescence [13] à l'équation de la conservation de la masse (1) impose que ses deux termes soient conservés. Ainsi $V_c = \varepsilon U_c$. Dans le but de déterminer les dégénérescences significatives, nous posons $Kn \approx \varepsilon^\alpha$ et $M \approx \varepsilon^\beta$. La comparaison des ordres de grandeur des termes dans les équations (2), (3) et (4) conduit, entre autres, à une solution dégénérée avec $\alpha=0$ et $\beta=1$. Cette solution correspond à des nombres de Mach petits et à des nombres de Knudsen d'ordre 1. Dans la suite, on pose $M = \varepsilon M_0$ et $Kn = Kn_0$ avec M_0 et Kn_0 tous deux d'ordre 1. Les équations en variables sans dimension sont explicitées ci-après (où pour simplifier les barres sont désormais omises) :

$$(\rho u)_x + (\rho v)_y = 0 \quad (8)$$

$$\gamma M_0^2 \varepsilon^2 (\rho u u_x + \rho v u_y) + p_x - \sqrt{\frac{2\gamma}{\pi}} M_0 Kn_0 \left(u_{yy} + \varepsilon^2 \frac{4u_{xx} + v_{xy}}{3} \right) = 0 \quad (9)$$

$$\gamma M_0^2 \varepsilon^4 (\rho u v_x + \rho v v_y) + p_y - \sqrt{\frac{2\gamma}{\pi}} M_0 Kn_0 \varepsilon^2 \left(\frac{4v_{yy} + u_{xy}}{3} + \varepsilon^2 v_{xx} \right) = 0 \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \rho (u T_x + v T_y) + (\gamma - 1) (u_x + v_y) p - \sqrt{\frac{2\gamma}{\pi}} (\gamma - 1) M_0 Kn_0 \frac{4}{3} \varepsilon^2 (u_x^2 + v_y^2 - u_x v_y) \\ - \sqrt{\frac{2\gamma}{\pi}} (\gamma - 1) M_0 Kn_0 (u_y^2 + \varepsilon^4 v_x^2 + 2\varepsilon^2 u_y v_x) - \sqrt{\frac{2\gamma}{\pi}} \frac{1}{Pr} \frac{Kn_0}{M_0} \left(T_{xx} + \frac{1}{\varepsilon^2} T_{yy} \right) = 0 \end{aligned} \quad (11)$$

On ajoute aux équations (8) à (11) la loi des gaz parfaits $p = \rho T$. Enfin, l'ensemble de ces équations est complété par les conditions aux limites (6) écrites sous forme adimensionnelle en $y = \pm 1/2$:

$$u = \mp Kn_0 \frac{1}{\rho \sqrt{T}} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{3}{4} \sqrt{\frac{2}{\pi \gamma}} \frac{Kn_0}{M_0} \frac{1}{\rho T} \frac{\partial T}{\partial x}, \quad v = 0, \quad T = T_w \mp \frac{2\gamma}{\gamma + 1} \frac{Kn_0}{Pr} \frac{1}{\rho \sqrt{T}} \frac{\partial T}{\partial y} \quad (12)$$

4 La solution asymptotique en première approximation

Pour trouver la première approximation du problème (8) à (12), nous posons : $u = \tilde{u} + O(\varepsilon^2)$, $v = \tilde{v} + O(\varepsilon^2)$, $\rho = \tilde{\rho} + O(\varepsilon^2)$, $p = \tilde{p} + O(\varepsilon^2)$, $T = \tilde{T} + O(\varepsilon^2)$. Les termes en $O(\varepsilon^2)$ sont négligés, d'où les équations (13) pour \tilde{u} , \tilde{v} , $\tilde{\rho}$, \tilde{p} , \tilde{T} et les conditions aux limites (14) en $y = \pm 1/2$:

$$(\tilde{\rho} \tilde{u})_x + (\tilde{\rho} \tilde{v})_y = 0, \quad \tilde{p}_x - \sqrt{\frac{2\gamma}{\pi}} M_0 Kn_0 \tilde{u}_{yy} = 0, \quad \tilde{p}_y = 0, \quad \tilde{T}_{yy} = 0, \quad \tilde{p} = \tilde{\rho} \tilde{T} \quad (13)$$

$$\tilde{u} = \mp Kn_0 \frac{1}{\tilde{\rho} \sqrt{\tilde{T}}} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} + \frac{3}{4} \sqrt{\frac{2}{\pi \gamma}} \frac{Kn_0}{M_0} \frac{1}{\tilde{\rho} \tilde{T}} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x}, \quad \tilde{v} = 0, \quad \tilde{T} = T_w(x) \mp \frac{2\gamma}{\gamma + 1} \frac{Kn_0}{Pr} \frac{1}{\tilde{\rho} \sqrt{\tilde{T}}} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial y} \quad (14)$$

Dans l'équation (14), la température adimensionnelle $T_w(x)$ sur les deux parois ne dépend que de la variable longitudinale x . Comme conséquence des troisième et quatrième équations dans (13), \tilde{p} ne dépend que de x , et \tilde{T} est une fonction linéaire de la variable y avec des coefficients dépendant de x . La troisième condition dans (14) et la symétrie du problème conduit à la solution : $\tilde{T} = T_w(x)$. La seconde équation dans (13) et la première condition dans (14) permettent d'écrire l'expression de la vitesse \tilde{u} :

$$\tilde{u} = \frac{\tilde{p}_x}{\sqrt{\frac{2\gamma}{\pi}} M_0 Kn_0} \left(\frac{y^2}{2} - \frac{1}{8} - \frac{Kn_0 \sqrt{T_w}}{2\tilde{p}} \right) + \frac{3\sqrt{2/\pi \gamma} Kn_0}{4\tilde{p} M_0} \frac{dT_w}{dx} \quad (15)$$

Considérons maintenant la première équation dans (13), la loi des gaz parfaits $\tilde{p} = \tilde{\rho} T_w(x)$ et la condition

pour \tilde{v} dans (14). L'équation est intégrée entre $y = -1/2$ et $y = 1/2$. Aux deux extrémités du micro-canal nous imposons les pressions : $\tilde{p} = \tilde{p}_i$ pour $x = 0$ et $\tilde{p} = \tilde{p}_o$ pour $x = 1$. La pression $\tilde{p} = \tilde{p}(x)$ s'obtient en résolvant une équation différentielle du second ordre avec conditions aux limites :

$$\frac{d}{dx} \left\{ \frac{\tilde{p} \tilde{p}_x}{6 Kn_0 T_w} + \frac{\tilde{p}_x}{\sqrt{T_w}} - \frac{3 Kn_0}{\pi T_w} \frac{dT_w}{dx} \right\} = 0, \quad \{\tilde{p}\}_{x=0} = \tilde{p}_i, \quad \{\tilde{p}\}_{x=1} = \tilde{p}_o \quad (16)$$

Dans le cas particulier où T_w est constant, la pression et la vitesse longitudinale ont des expressions explicites connues [7]. Avec un gradient de température le long des parois, l'équation (15) montre que la vitesse \tilde{u} de l'écoulement et la vitesse de glissement le long de la paroi (obtenue en $y = \pm 1/2$) dépendent de ce gradient : en d'autres termes, les effets dynamiques et les effets thermiques sont couplés.

En examinant l'expression (15) pour la vitesse \tilde{u} , on voit que \tilde{u} est la somme de deux termes : le premier est proportionnel au gradient de pression lequel, s'il est négatif, induit une vitesse positive ; le second est proportionnel au gradient de température lequel, s'il est négatif, induit une vitesse négative. Ce dernier phénomène est connu sous le nom de transpiration thermique ou « thermal creep ».

Les valeurs numériques de la pression \tilde{p} sont aisées à obtenir en réalisant, par exemple, une intégration numérique de l'équation (16) avec le logiciel Matlab. La vitesse \tilde{u} est ensuite calculée avec l'expression (15). Des exemples de telles solutions sont présentées dans la Section 5 suivante.

5 Comparaison entre solutions asymptotiques et simulations DSMC

Dans cette Section on va comparer, pour quelques écoulements à l'intérieur du micro-canal, les résultats des simulations DSMC avec ceux donnés par les solutions asymptotiques. Pour chaque simulation DSMC, n°1 à n°8, présentée dans la Table 1, le code DS2V exhibe la solution stationnaire. Les valeurs P_i , T_i , P_o , T_o provenant des simulations DSMC sont indiquées dans la table 1. Les échelles caractéristiques suivantes sont introduites : $T_c = (T_i + T_o)/2$, $P_c = (3\mu/h)\sqrt{2\pi r T_c}$, $U_c = (3h/\ell)\sqrt{2\pi r T_c}$. Alors on pose : $\tilde{p}_i = P_i/P_c$ and $\tilde{p}_o = P_o/P_c$. En utilisant ces valeurs comme données pour la solution de (15) et (16), on obtient la solution asymptotique en première approximation.

Deux ensembles de résultats sont présentés. D'abord, le cas particulier où T_w est une constante (simulations n°1 à n°4). Dans la figure 2, les profils de la pression sans dimension le long de l'axe du micro-canal sont représentés, les lignes continues correspondant aux solutions asymptotiques et les points aux simulations DSMC. Les deux résultats sont en très bon accord. La différence entre ces deux résultats, *i.e.* $100(1 - P_{ASYM}/P_{DSMC})$, est montrée. Ces fluctuations entre les deux solutions sont inférieures à 0.3 %. Pour la vitesse longitudinale, des comparaisons similaires montrent des fluctuations entre résultats asymptotiques et simulations DSMC plus importantes pouvant aller jusqu'à 10 %. Bien que peu visible sur la figure 2, il est à noter l'évolution non linéaire de la pression le long de l'axe du canal.

Le second ensemble de résultats correspond aux quatre simulations n°5 à n°8 où la température décroît linéairement de 400 à 300 K le long des parois du micro-canal. Dans la figure 3, les profils de la pression le long de l'axe du canal sont représentés (ici les grandeurs sont avec dimensions et $X = x - 5\mu\text{m}$). Les points correspondent aux simulations DSMC et les lignes continues aux solutions asymptotiques. Les fluctuations sont au plus de 0.5 % pour la pression (Fig. 3). De plus, on a vérifié que les fluctuations pour la vitesse sont importantes, notamment lorsque les vitesses sont faibles (n°7, n°8). Comme précédemment, solutions asymptotiques et résultats DSMC sont en très bon accord. Dépendant des conditions de simulation, on voit sur la figure 3 que le gradient de pression à l'intérieur du micro-canal est négatif (n°5, n°6), voisin de zéro (n°7), ou positif (n°8). On a pu vérifier (résultats non représentés dans ce papier) que la vitesse associée est positive (n°5, n°6), voisine de zéro (n°7) ou négative (n°8). Ces résultats sont en accord avec l'équation (15) où un gradient de pression négatif fait croître la vitesse et un gradient de température négatif fait décroître la vitesse. Cet effet est bien connu en dynamique des gaz raréfiés [12].

6 Conclusion

L'analyse asymptotique de l'écoulement dans un micro-canal conduit à des solutions en très bon accord avec

les simulations DSMC, dans le cadre des configurations d'écoulements considérées ici. Les expressions analytiques déduites du processus asymptotique mettent bien en évidence l'influence d'un gradient de température le long des parois. En particulier, il est clair sur l'expression analytique pour la vitesse longitudinale qu'un gradient de température peut induire un changement dans la direction de l'écoulement.

Les simulations DSMC n°1 à n°8 qui ont été faites sur un PC personnel demandent un temps de calcul pour chaque résultat stationnaire de l'ordre de 140 heures. Il est important de souligner que l'obtention de la solution asymptotique est, au contraire, extrêmement rapide.

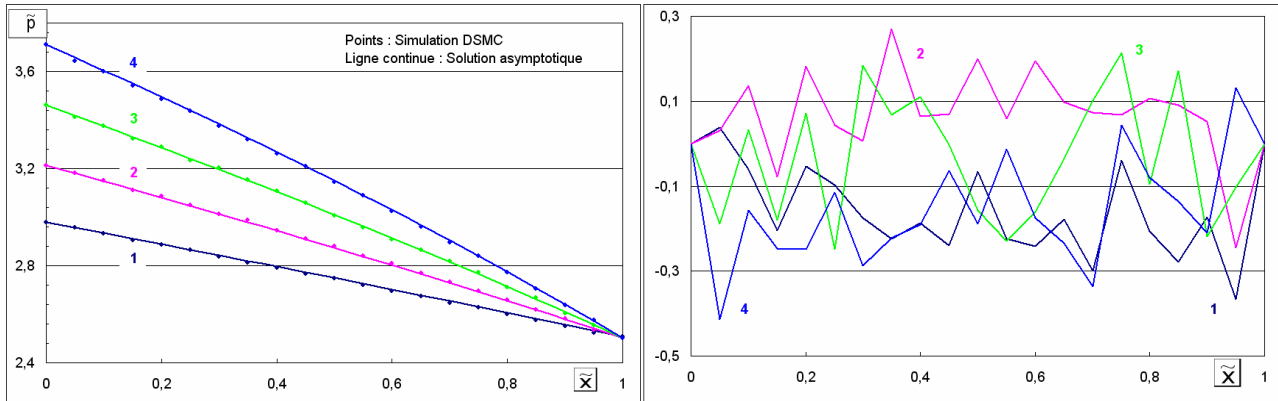


FIG. 2. Profils de pression (à gauche), et fluctuations des pressions en pourcentage (à droite) pour les simulations n°1 à n°4.

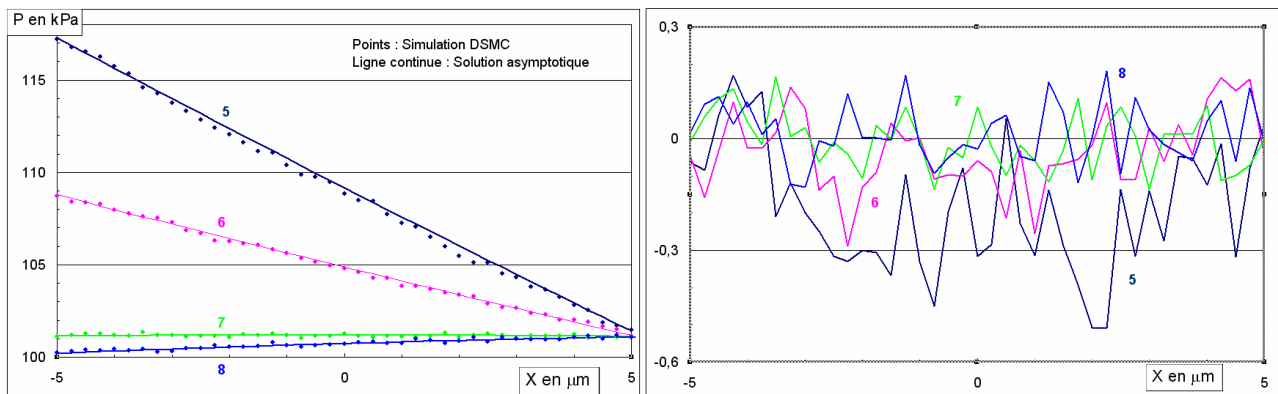


FIG. 3. Profils de pression (à gauche) et fluctuations des pressions en pourcentage (à droite) pour les simulations n°5 à n°8.

References

- [1] Aktas O., Aluru N.R., Ravaioli U., *Journal of Microelectromechanical Systems*, **10**, 538-549, 2001.
- [2] Ameer D., Croizet C., Maroteaux F., Gatignol R., *AIP Conference Proceedings*, **1084**, 1129-1134, 2009.
- [3] Bird G.M., *Molecular gas dynamics and the direct simulation of gas flows*, Oxford Univ. Press, 1994.
- [4] Bird G.M., *DSMC of Graeme Bird*, <http://gab.com.au>
- [5] Colin S., Lalonde P., Caen R., *Heat Mass Engineering*, **25**, 23-30, 2004.
- [6] Kandlikar S.G., Garimella S., Li D., Colin S., King M.R., *Heat transfer and fluid flow in minichannels and microchannels*, Elsevier, 2005.
- [7] Karniadakis G., Beskok A., *Microflows – Fundamentals and Simulation*, Springer, 2002.
- [8] Kogan M., *Rarefied Gas Dynamic*, Plenum Press, 1969.
- [9] Hadjiconstantinou N.G., Garci A.L., Bazant M.Z., He G., *J. Computational Phys.*, **187**, 274-297, 2003.
- [10] Shim J.W., Gatignol R., *AIP Conference Proceedings*, **1084**, 1033-1038, 2009.
- [11] Shim J.W., Gatignol R., *Physical Review E*, **81**, 046703, 2010.
- [12] Sone Y., *Molecular gas dynamics*, Birkhausen, 2007.
- [13] Van Dyke M., *Perturbation methods in fluid mechanics*, Academic Press, 1964.