

Stabilité des systèmes non conservatifs et critère du travail du second ordre

M. Al-douaji^a, J. Lerbet^a, N. Challamel^b, F. Nicot^c, F. Prunier^d, F. Darve^e,

a. IBISC, UFRST-UEVE, EVRY

b. Laboratoire de Génie Mécanique et Génie Civil, INSA, RENNES

c. Cemagref, ETNA $i\dot{\delta}_{\frac{1}{2}}$ Geomechanics Group, GRENOBLE

d. Laboratoire de Génie Civil et Ingénierie Environnementale, INSA, LYON

e. Laboratoire Sols Solides Structures, UJF-INPG-CNRS, GRENOBLE

Résumé :

Les systèmes non conservatifs conduisant à des matrices de rigidité non symétriques sont connus pour présenter des comportements paradoxaux relativement à la viscosité. L'étude de la stabilité par divergence sous contraintes cinématiques a récemment débuté pour le cas d'une contrainte et nous étudions ici le cas de deux contraintes pour relier la stabilité par divergence au critère du travail du second ordre. L'exemple d'un système de Ziegler à trois degrés de liberté soumis à une force suiveuse illustre le résultat général.

Abstract :

Non conservative systems leading to a non symmetric stiffness matrix are known to have paradoxical behaviors like destabilization by adding viscosity. The study of divergence instability of non conservative system under kinematic constraints has been reported recently under one kinematic constraint. We investigate here the case of two constraints, to highlight consequences on divergence instability and the link with the second order work criterion. We illustrate the results on a three degree of freedom Ziegler system subjected to follower loading under two additional kinematic constraints.

Mots clefs : Systèmes non conservatifs, critère du travail du second ordre, liaisons cinématiques

Introduction

Dans ce travail, nous étudions la stabilité des systèmes non conservatifs élastiques sous contraintes cinématiques. Ces systèmes possèdent des comportements paradoxaux puisque l'on sait depuis Ziegler et Bolotin en particulier ([5], [1]) que l'introduction de viscosité peut avoir un effet déstabilisant sur le système. Il est moins connu que l'ajout de contraintes cinématiques peut avoir également un effet déstabilisant. Nous ne nous intéressons ici qu'aux aspects statiques ou du point de vue de la stabilité qu'aux instabilités par divergence du système. Il a déjà été montré précédemment que le critère du travail du second ordre qui ne porte que sur la partie symétrique K_s de la matrice de rigidité K du système est très étroitement lié à la stabilité sous contrainte. Dans ([2], [3]), il a été montré par exemple que, dans le cas d'une contrainte, le système peut devenir instable dès lors que K_s cesse d'être définie positive et la contrainte déstabilisante doit alors être choisie dans le cône d'instabilité associé à K_s . Ici nous étendons le résultat à deux contraintes cinématiques.

Dans un premier temps, nous présentons le problème. Dans une seconde partie, nous montrons le résultat clé reliant la stabilité sous deux contraintes et le critère du travail du second ordre.

Dans le troisième et dernier paragraphe, nous illustrons le résultat sur un exemple à trois degrés de liberté et deux contraintes.

1 Présentation du problème

Soit un système Σ soumis à un chargement à un paramètre λ . Supposons le système à l'équilibre. Soit $K(\lambda)$ la matrice de rigidité de Σ . Nous supposons que la position d'équilibre ne varie pas quand λ varie (augmente!). Σ sans contrainte (plus précisément la position d'équilibre de Σ) est supposé stable du point de vue de la divergence et l'on étudie ensuite l'influence de l'ajout de contraintes sur la stabilité de la position d'équilibre qui est supposée ne pas changer lors de l'ajout des contraintes. On se limite à une analyse linéaire. Le système sans contrainte étant supposé stable du point de vue de la divergence, on a

$$K(\lambda)X = 0 \quad (1)$$

n'a que la solution $X = 0$ et alors $\det(K(\lambda)) \neq 0$. Puisque Σ est non-conservatif, $K(\lambda)$ est quelconque (ie non symétrique).

Supposons maintenant que l'on ajoute des contraintes au système sans que la position d'équilibre (supposée 0) ne soit perturbée. S'il y a p contraintes indépendantes $f(q) = f(q_1, \dots, q_n) = (f_1(q), \dots, f_p(q)) = 0_{\mathbb{R}^p}$ et si $A \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{R})$ est la matrice jacobienne de f en 0 ($A_{i,j} = \frac{\partial f_i(0)}{\partial q_j}$), alors le vecteur colonne X d'un déplacement infinitésimal doit satisfaire le système :

$$\begin{cases} K(\lambda)X + A\Lambda = 0 \\ {}^tAX = 0 \end{cases} \quad (2)$$

où $\Lambda = {}^t(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ est le multiplicateur de Lagrange associé à la contrainte dans la configuration d'équilibre. En suivant la même démarche que dans [2], le système précédent peut être réécrit sous la forme :

$$K_A(\lambda) = \begin{pmatrix} K(\lambda) & A \\ {}^tA & 0 \end{pmatrix} \quad Y = \begin{pmatrix} X \\ \Lambda \end{pmatrix}$$

(2) est alors équivalent à :

$$K_A(\lambda)Y = 0 \quad (3)$$

Or

$$\begin{pmatrix} K(\lambda) & A \\ {}^tA & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K^{-1}(\lambda) & -K^{-1}(\lambda)A \\ 0 & I_{pp} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{nn} & 0 \\ {}^tAK^{-1}(\lambda) & -{}^tAK^{-1}(\lambda)A \end{pmatrix}$$

D'où

$$\det(K_A(\lambda)) \det(K^{-1}(\lambda)) = (-1)^p \det({}^tAK^{-1}(\lambda)A)$$

Donc :

$$\det(K_A(\lambda)) = (-1)^p \det(K(\lambda)) \det({}^tAK^{-1}(\lambda)A) \quad (4)$$

Posons $\tilde{A} = K^{-1}(\lambda)A$. On obtient alors :

$$\det(K_A(\lambda)) = (-1)^p \det(K(\lambda)) \det({}^t\tilde{A}K(\lambda)\tilde{A}) \quad (5)$$

car

$$\begin{aligned} \det({}^tAK^{-1}(\lambda)A) &= \det({}^tA {}^tK^{-1}(\lambda) {}^tK(\lambda) K^{-1}(\lambda)A) \\ &= \det({}^t\tilde{A} {}^tK(\lambda) \tilde{A}) \\ &= \det({}^t({}^t\tilde{A}K(\lambda)\tilde{A})) \\ &= \det({}^t\tilde{A}K(\lambda)\tilde{A}) \end{aligned}$$

L'analyse des singularités de $K_A(\lambda)$ mettant en évidence les instabilités par divergence du système contraint est donc ramenée à celle des singularités de la matrice ${}^t\tilde{A}K(\lambda)\tilde{A}$ car $A \mapsto \tilde{A} = K^{-1}(\lambda)A$ est une bijection de l'ensemble $\mathcal{G}_{np}(\mathbb{R})$ des matrices de rang maximal p dans lui-même.

2 Cas de une ou deux contraintes

Le cas d'une contrainte a déjà été traité dans [3]. La stabilité par divergence du système contraint avec $p = 1$ contrainte conduit à la condition suivante $\forall A \in \mathcal{M}_{n1} \det({}^tAK(\lambda)A) > 0$. Cependant, la quantité ${}^tAK(\lambda)A$ est un scalaire et donc la condition revient à $\forall A \in \mathcal{M}_{n1} {}^tAK(\lambda)A > 0$ ce qui signifie tout simplement que la matrice $K(\lambda)$ est définie positive ou ce qui revient au même que sa partie symétrique $K_s(\lambda)$ est définie positive. La condition de stabilité du système contraint quelle que soit la contrainte cinématique est alors équivalente au critère du travail du second ordre.

La condition de stabilité sous deux contraintes indépendantes s'écrit de la manière suivante :

$$\forall A \in \mathcal{G}_{n2} \det({}^tAK(\lambda)A) > 0$$

Dire que le système est stable sous deux contraintes signifie qu'il est stable sous une contrainte ou sous deux contraintes indépendantes. En fait le résultat principal que nous avons obtenu est le suivant. Si le système est stable sous une contrainte quelle qu'elle soit, il l'est nécessairement sous deux contraintes indépendantes quelles qu'elles soient. La traduction formelle de ce résultat est la suivante :

Proposition 1 : Si K est définie positive alors

$$\forall A \in \mathcal{G}_{n2} \det({}^tAK(\lambda)A) > 0$$

Preuve

Soit $A \in \mathcal{M}_{n2}$ de rang 2, $A = (x_1 \ x_2)$ avec $x_i \in \mathcal{M}_{n1}$ avec $i = 1, 2$. On identifiera parfois \mathcal{M}_{n1} et \mathbb{R}^n . On a alors :

$$\det({}^tAKA) = \det \begin{pmatrix} {}^tx_1Kx_1 & {}^tx_1Kx_2 \\ {}^tx_2Kx_1 & {}^tx_2Kx_2 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} {}^tx_1K_sx_1 & {}^tx_1K_sx_2 \\ {}^tx_2K_sx_1 & {}^tx_2K_sx_2 \end{pmatrix}$$

où $K = K_s + K_a$ avec K_s (resp. K_a) la partie symétrique (resp. antisymétrique) de K .

$$\begin{aligned} \det({}^tAKA) &= ({}^tx_1K_sx_1)({}^tx_2K_sx_2) - ({}^tx_1K_sx_2)({}^tx_2K_sx_1) \\ &= ({}^tx_1K_sx_1)({}^tx_2K_sx_2) - ({}^tx_1K_sx_2)({}^tx_2K_sx_1) - ({}^tx_1K_ax_2)({}^tx_2K_ax_1) \\ &\quad - ({}^tx_1K_ax_2)({}^tx_2K_sx_1) - ({}^tx_1K_ax_2)({}^tx_2K_ax_1) \end{aligned}$$

Or ${}^tK_s = K_s$, ${}^tK_a = -K_a$ d'où :

$$\det({}^tAKA) = \det({}^tAK_sA) + ({}^tx_1K_ax_2)^2 \quad (6)$$

Or la forme quadratique associée à K_s définit un produit scalaire pour lequel l'inégalité de Cauchy-Schwarz s'écrit :

$$\det({}^tAK_sA) = ({}^tx_1K_sx_1)({}^tx_2K_sx_2) - ({}^tx_1K_sx_2)({}^tx_2K_sx_1) > 0$$

où l'inégalité est stricte car A étant de rang 2, les vecteurs x_1, x_2 ne sont pas colinéaires.

On en déduit que $\det({}^tAK_sA) = ({}^tx_1K_sx_1)({}^tx_2K_sx_2) - ({}^tx_1K_sx_2)({}^tx_2K_sx_1) > 0$. La relation (6) permet de conclure que $\det({}^tAKA) > 0$. **QUED**

La conséquence essentielle concernant la stabilité est donc la suivante. Posons λ_{sw} la plus petite racine positive de $\det(K_s(\lambda)) = 0$. Pour qu'un système qui est stable du point de vue de la divergence ($\det(K(\lambda)) > 0$) soit stable lorsqu'il est soumis à une ou deux contraintes, il suffit que le critère du travail du second ordre soit vérifié. Autrement dit, quel que soit $\lambda \in [0, \lambda_{sw}]$ c'est-à-dire tel que $K_s(\lambda)$ est définie positive, alors le système contraint par une ou deux contraintes cinématiques est encore stable vis-à-vis de la divergence.

En réalité, il s'agit même d'une équivalence. Si $\lambda = \lambda_{sw}$ alors il existe une et/ou deux contraintes indépendantes qui rendent instable le système. λ_{sw} apparaît donc comme la valeur optimale du paramètre de chargement assurant la stabilité sous une et/ou deux contraintes cinématiques. Pour montrer ce point, il suffit, selon la relation (6), de choisir x_1 dans $\text{Ker}(K_s(\lambda_{sw}))$ puis de prendre x_2 dans l'orthogonal de $K_a(\lambda_{sw})x_1$. $\det({}^tAKA)$ est alors la somme de deux termes nuls et vaut donc 0.

3 Exemple

Pour illustrer notre travail nous considérons maintenant une colonne de Ziegler à trois degrés de liberté (voir figure 1). Le système Σ est constitué de trois barres OA, AB, BC de même longueur $OA = AB = AC = \ell$ liés par des ressorts élastiques de raideur k . L'action non conservative est la force suiveuse \vec{P} et la position d'équilibre est $\theta = (\theta_1, \theta_2, \theta_3) = (0, 0, 0)$. Pour une présentation sans dimension du problème on posera $\lambda = \beta = \frac{P\ell}{k}$. La matrice de rigidité est alors :

$$K(\beta) = \begin{pmatrix} 2 - \beta & -1 & \beta \\ -1 & 2 - \beta & -1 + \beta \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Le calcul donne $\det(K(\beta)) = 1$ indépendant de β : le système libre ne peut pas être instable par divergence ce qui est bien connu. Il peut cependant bien entendu bifurquer par flottement.

La partie symétrique $K_s(\beta)$ est alors :

$$K_s(\beta) = \begin{pmatrix} 2 - \beta & -1 & \frac{\beta}{2} \\ -1 & 2 - \beta & -1 + \frac{\beta}{2} \\ \frac{\beta}{2} & -1 + \frac{\beta}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

Les racines de $\det(K_s(\beta)) = 0$ sont $1, 1 - \sqrt{3}, 1 + \sqrt{3}$ et donc ici $\beta_{sw} = 1$ ce qui mène à :

$$K_s(1) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & \frac{1}{2} \\ -1 & 1 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Ker}(K_s(1)) = \langle x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle \text{ et } K_a(1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Donc $\langle K_a(1)(x_1) \rangle$ est le sous espace vectoriel de dimension 1 $\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \rangle$ et son orthogonal

est le plan $z = 0$. Choisissons x_2 dans ce plan tel que (x_1, x_2) soit une famille libre. Par exemple,

$$x_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \text{ Soit maintenant } A = (x_1 x_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \text{ Les calculs donnent } {}^tAK(1)A =$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et évidemment } \det({}^tAK(1)A) = 0 \text{ ce qui signifie que la colonne de Ziegler 3 contrainte}$$

par $\theta_1 + \theta_2 = 0$ et $\theta_2 = 0$ est instable pour la divergence pour $\beta = 1$.

Résolvons maintenant classiquement le problème d'optimisation sur cet exemple. On recherche donc le minimum $\det({}^tAKA)$ pour $A \in \mathcal{G}_{n2} \subset \mathcal{M}_{n2}$ sous-ensemble ouvert des matrices de rang

2. On pose donc $A = (x_1 x_2) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \delta_1 \\ \alpha_2 & \delta_2 \\ \alpha_3 & \delta_3 \end{pmatrix}$. $A \mapsto \phi_K(A) = \phi_{K(\beta)}(A) = \det({}^tAK(\beta)A)$ est

considérée comme une fonction de six variables $\alpha_1, \delta_1, \alpha_2, \delta_2, \alpha_3, \delta_3$ et dépendant du paramètre de chargement β . Le problème d'optimisation revient donc à calculer

$$\inf_{(\alpha_i, \delta_i) \in U} \phi_{K(\beta)}(\alpha_i, \delta_i)$$

et à prouver que $\beta = \beta_{sw} = 1$ est la valeur optimale positive pour laquelle le minimum calculé reste > 0 tant que $0 \leq \beta < 1$. On a d'ailleurs vu juste précédemment que, pour cette valeur, la quantité $\phi_{K(1)}(A) = \det({}^tAK(1)A)$ vaut 0. U est l'ouvert de \mathbf{R}^6 tel que $\text{rank}(A) = 2$.

MAPLE résoud alors explicitement le système non linéaire suivant :

$$\frac{\partial \phi_{K(\beta)}(\alpha_i, \delta_i)}{\partial \alpha_i} = 0, \frac{\partial \phi_{K(\beta)}(\alpha_i, \delta_i)}{\partial \delta_i} = 0, i = 1, 2, 3$$

et donne les 9 solutions suivantes du problème d'optimisation :

$$\begin{aligned}
S_1 &= \{\beta = \beta, \alpha_1 = \alpha_1, \alpha_2 = \alpha_2, \alpha_3 = \alpha_3, \delta_1 = 0, \delta_2 = 0, \delta_3 = 0\} \\
S_2 &= \{\beta = \beta, \alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0, \alpha_3 = \alpha_3, \delta_1 = 0, \delta_2 = 0, \delta_3 = \delta_3\} \\
S_3 &= \left\{ \beta = \beta, \alpha_1 = \alpha_1, \alpha_2 = 0, \alpha_3 = \frac{\alpha_1 \delta_3}{\delta_1}, \delta_1 = \delta_1, \delta_2 = 0, \delta_3 = \delta_3 \right\} \\
S_4 &= \left\{ \beta = 1 \pm \sqrt{3}, \alpha_1 = \alpha_1, \alpha_2 = \alpha_2, \alpha_3 = \alpha_2 + \alpha_1, \delta_1 = \delta_1, \delta_2 = 0, \delta_3 = \delta_1 \right\} \\
S_5 &= \left\{ \beta = \beta, \alpha_1 = \frac{\alpha_2 \delta_1}{\delta_2}, \alpha_2 = \alpha_2, \alpha_3 = \frac{\delta_3 \alpha_2}{\delta_2}, \delta_1 = \delta_1, \delta_2 = \delta_2, \delta_3 = \delta_3 \right\} \\
S_6 &= \left\{ \beta = 1 \pm \sqrt{3}, \alpha_1 = \alpha_1, \alpha_2 = \alpha_2, \alpha_3 = \alpha_2 + \alpha_1, \delta_1 = -\delta_2 + \delta_3, \delta_2 = \delta_2, \delta_3 = \delta_3 \right\} \\
S_7 &= \{\beta = 1, \alpha_1 = \alpha_1, \alpha_2 = \alpha_2, \alpha_3 = 0, \delta_1 = \delta_1, \delta_2 = \delta_2, \delta_3 = 0\} \\
S_8 &= \left\{ \beta = \frac{-2\delta_1 \delta_2 + 2\delta_1^2 + \delta_2^2}{\delta_1(\delta_1 - \delta_2)}, \alpha_1 = \alpha_1, \alpha_2 = \frac{\alpha_1 \delta_2}{\delta_1}, \alpha_3 = \frac{\alpha_1 \delta_3}{\delta_1}, \delta_1 = \delta_1, \delta_2 = \delta_2, \delta_3 = \delta_3 \right\} \\
S_9 &= \left\{ \beta = 1 + \sqrt{3}, \alpha_1 = \alpha_1, \alpha_2 = \alpha_2, \alpha_3 = \alpha_2 + \alpha_1, \right. \\
&\quad \left. \delta_1 = 1/2 \pm 1/2 \sqrt{3 + 2\sqrt{3}} \delta_2, \delta_2 = \delta_2, \delta_3 = \delta_2 + 1/2 \pm 1/2 \sqrt{3 + 2\sqrt{3}} \delta_2 \right\}
\end{aligned}$$

Pour S_1, S_2, S_3, S_5, S_8 le rang de A vaut 1 : les vecteurs x_1 et x_2 sont colinéaires. Ces solutions doivent être exclues. Pour S_4 et S_9 , $\beta = 1 \pm \sqrt{3}$ correspond aux deux autres valeurs en dehors de 1 qui annulent $\det(K_s)$: elles sont soit < 0 soit > 1 . Donc la solution S_7 avec $\beta = 1$ correspond

bien à la solution optimale et la valeur proposée de la matrice A à savoir $A = (x_1 x_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

correspond à une valeur possible des solutions de S_7 : $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 1, \alpha_3 = 0, \delta_1 = 1, \delta_2 = 0, \delta_3 = 0$. Nous proposons pour illustrer ce problème d'optimisation, le graphe de $(\delta_2, \beta) \mapsto \det({}^t A K A)$ pour $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 1, \alpha_3 = 0, \delta_1 = 1, \delta_3 = 0$. On constate de visu le caractère minimal pour $\beta = 1$ (Figure 2).

Conclusion

Dans ce travail, nous avons montré que pour les systèmes non conservatifs, le critère du travail du second ordre donne la borne optimale du paramètre de chargement permettant au système contraint par une ou deux contraintes cinématiques de rester stable par divergence quelle que soit la ou les deux contraintes cinématiques.

Références

- [1] Bolotin 1963 *Non-conservative problems of the theory of elastic stability*, Pergamon Press,
- [2] Challamel et al N. Challamel, F. Nicot, J. Lerbet and F. Darve, 2009 "On the stability of nonconservative elastic systems under mixed perturbations", *European Journal of Environmental and Civil Engineering (EJECE)*, Vol. 13, No. 3, pp 347-367
- [3] Challamel et al N. Challamel, F., Nicot, J. Lerbet and F. Darve, 2010 "Stability of non-conservative elastic structures under additional kinematics constraints", *Engineering Structures*, 32, pp 3086-3092
- [4] Lerbet et al J. Lerbet, E. Absi and A. Rigolot, 2009 "About the stability of nonconservative undamped elastic systems : some new elements", *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, Vol. 9, No. 2, pp 357-367
- [5] Ziegler H. Ziegler, 1952, "Die Stabilitätskriterien der Elastomechanik", *Ing. Arch*, 20, pp 49-56

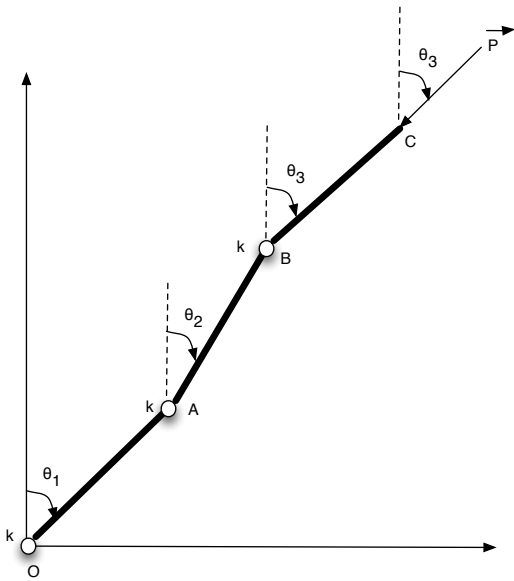


FIGURE 1 – 3dof Ziegler system

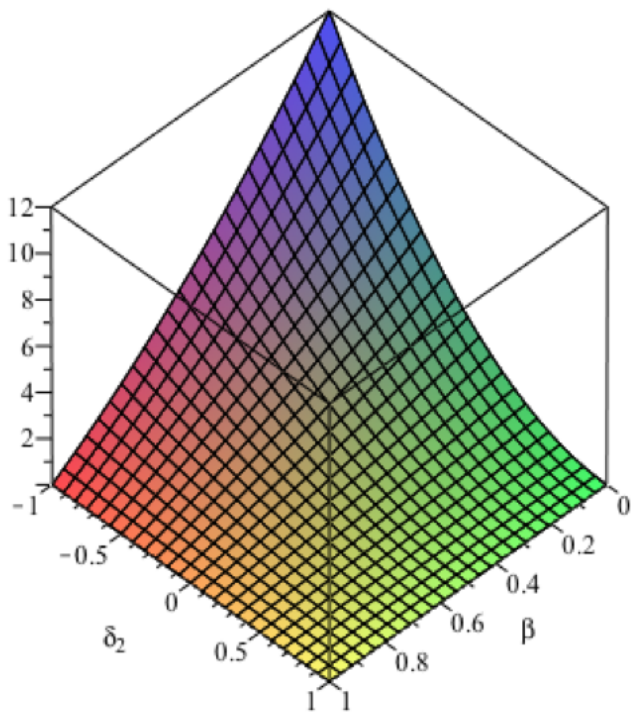


FIGURE 2 – δ_2 variable