

Adhésion capillaire d'une plaque mince sur un substrat courbé : contact, instabilité et motifs

J. HURE^a, B. AUDOLY^b, B. ROMAN^a, J. BICO^a

- a. PMMH-ESPCI ParisTech, CNRS UMR 7636, UPMC & Univ. Paris Diderot, 10 rue Vauquelin, 75231 PARIS Cedex 05
 b. Institut Jean le Rond d'Alembert, CNRS UMR 7190, UPMC, 4 place Jussieu, 75252 Paris Cedex 05

Résumé :

Nous considérons l'adhésion sans frottement d'une plaque mince sur une sphère rigide, réalisée par exemple par un fluide mouillant. Différents motifs de contact sont observés expérimentalement, allant d'une adhésion complète à des formes branchées. Dans un premier temps, nous décrivons la taille caractéristique de la zone de contact ainsi que la forme générale des motifs à l'aide de deux nombres sans dimensions qui comparent respectivement les énergies de courbure et d'extension à l'adhésion. Nous mettons en évidence et caractérisons une instabilité de flambage rendant oscillants les bords d'une région de contact initialement rectilignes parallèles.

Abstract :

We study the frictionless adhesion of an elastic plate on a rigid sphere, achieved for instance by a wetting fluid. A variety of contact patterns are observed experimentally, ranging from simple disks to branched patterns. We describe first the characteristics of these patterns - typical contact size and global morphologies - as a function of two non-dimensional numbers comparing respectively bending and stretching energies to adhesion. We then focus on a buckling instability affecting a rectangular region of contact with initially straight and parallel edges, causing oscillations of those edges.

Mots clefs : Plaque mince ; Adhésion ; Flambement unilatéral

1 Introduction

Le contact entre une surface flexible (plaque ou coque) et un substrat rigide courbé se retrouve dans diverses situations, allant de la pose d'une lentille de contact sur un œil [3] à l'adhésion de vésicules lipidiques sur une paroi biologique [1], de l'encapsulation [2] aux applications médicales [8]. Si le substrat et la surface flexible ne peuvent pas être reliés par une isométrie - ce qui d'après le *Theorema Egregium* se produit lorsque les courbures de Gauss sont différentes [11] - le contact induit des efforts membranaires dans la surface flexible, limitant l'extension de la zone de contact [10]. Nous considérons dans cette étude le problème modèle de l'adhésion sans frottement d'une plaque mince sur une sphère afin d'en dégager les principales caractéristiques. Dans un premier temps, nous décrivons de manière qualitative les motifs observés expérimentalement à l'aide de lois d'échelle faisant intervenir deux nombres sans dimensions. Dans un second temps, nous nous intéressons plus spécifiquement au flambement unilatéral des bords de la zone de contact résultant des contraintes compressives induites par le contact.

2 Observations expérimentales et description qualitative

Un film mince - d'épaisseur h , de module d'Young E et de taille caractéristique L - est déposé sur une calotte sphérique rigide - de rayon ρ - préalablement recouverte d'éthanol (Fig. 1a). La tension de surface de l'éthanol tend à mettre en contact le film et la sphère de manière à réduire les interfaces

air/liquide. Nous observons différents motifs de contact, allant d'une adhésion complète [6] à des motifs branchés (Fig. 1b et [4]). Dans cette partie, on décrit qualitativement les motifs obtenus. Nous modélisons l'effet de l'éthanol en associant une énergie $E_a \sim \gamma L^2$ au système, avec γ la tension de surface du liquide et L le rayon de la plaque. L'énergie élastique nécessaire à la plaque pour être en contact avec la sphère se décompose en deux parties : énergie de courbure $E_b \sim (Eh^3/\rho^2)L^2$ et énergie d'extension E_s [12]. Cette dernière provient du fait qu'une portion de sphère n'est pas isométrique à un plan, comme l'indique le théorème de Gauss qui stipule que le produit des courbures principales est invariant par isométrie. Ainsi, le plan moyen de la plaque subit une extension ou compression tangente. L'ordre de grandeur de l'énergie d'extension s'obtient en considérant par exemple que le contact conserve les distances radiales. Cela induit une déformation orthoradiale d'ordre L^2/ρ^2 , d'où une énergie d'extension $E_s \sim EhL^6/\rho^4$. La comparaison de ces trois énergies donne deux nombres sans dimension δ et ξ/L , qui décrivent l'état du système :

$$\delta = \frac{\rho}{L_{ec}} \quad \frac{\xi}{L} \quad \xi = \left(\frac{\gamma}{Eh}\right)^{1/4} \rho \quad L_{ec} = \sqrt{\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)\gamma}} \quad (1)$$

L_{ec} étant la longueur élasto-capillaire [9]. δ et ξ/L comparent respectivement l'énergie d'adhésion aux énergies de courbure et d'extension. Sachant que pour de faibles déflexions, l'énergie prépondérante dans la plaque est l'énergie de courbure, le premier paramètre indique le seuil en deçà duquel le contact entre la plaque et la sphère n'est pas possible : en effet, $\delta < 1$ correspond au cas où, quelque soit la taille de la zone de contact, le coût en énergie de courbure est supérieur au gain en adhésion. La longueur élasto-capillaire L_{ec} correspond donc au rayon de courbure typique en deçà duquel l'adhésion de la plaque sur la sphère n'est pas possible. En revanche, pour $\delta > 1$, quelque soit la taille de la zone de contact, la plaque préfère se courber pour être en contact avec la sphère. Dans ce cas, l'énergie d'extension limite la taille de la zone de contact. Nous mesurons (Fig. 1c) la taille de la zone de contact notée a - que l'on définit comme étant le rayon du plus grand cercle inscrit dans les branches en contact - pour différentes épaisseurs de plaques et rayons de sphère. On obtient $a \sim \xi$: le paramètre ξ correspond donc à l'ordre de grandeur de la taille de la zone de contact entre une plaque et une sphère.

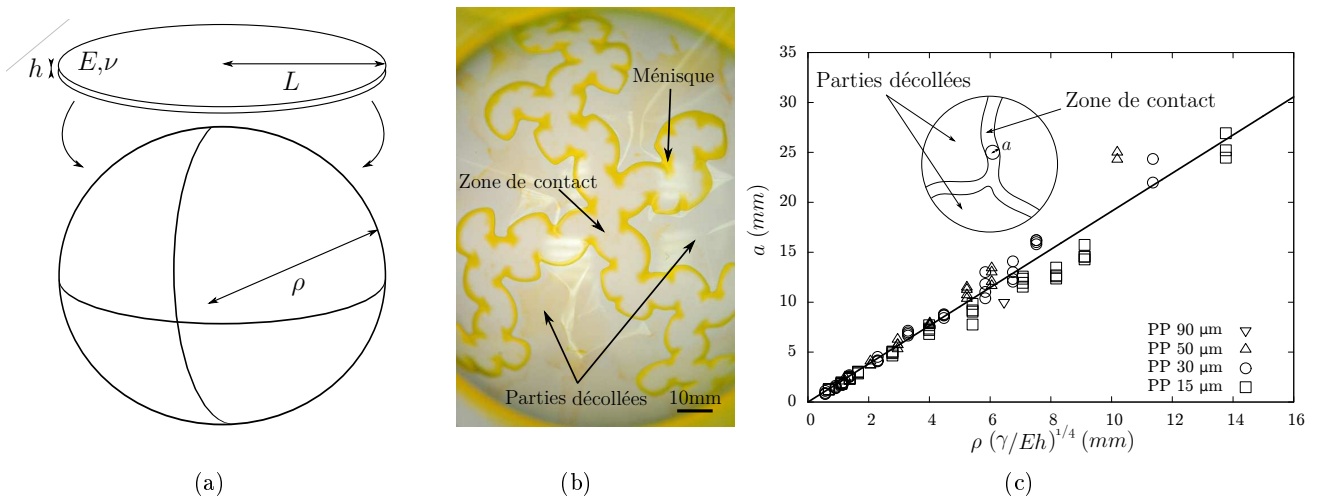


FIGURE 1 – (a) Dispositif expérimental. (b) Observation typique de l'adhésion d'une plaque mince sur une sphère ($E = 2600$ MPa, $h = 0.015$ mm, $\rho = 60$ mm). L'utilisation d'un colorant permet de différencier le ménisque liquide entourant la zone de contact. (c) Taille de la zone de contact en fonction de ξ , dans le régime $\delta \gg 1$: $a \approx 1.9\xi$.

Il est également possible de catégoriser les différents motifs de contact en fonction des paramètres δ et ξ/L , δ correspondant à l'axe selon lequel s'accroît la complexité du motif. Ce diagramme de configurations est décrit en détail dans [4].

L'une des caractéristiques des motifs branchés - comme sur la figure 1b- est le fait que les bords des zones de contact ne sont pas rectilignes. Dans la partie suivante, nous nous intéressons plus en détail à cette propriété, qui correspond au flambement unilatéral de la zone de contact du fait des contraintes membranaires induites par le contact.

3 Flambement de la zone de contact

3.1 Expérience et modélisation

Nous utilisons une membrane en latex sous pression (Fig. 2a). Dès que la déflexion est grande devant l'épaisseur de la membrane, celle-ci prend approximativement la forme d'une calotte sphérique. Nous déposons comme dans la partie précédente une plaque mince sur cette calotte préalablement recouverte d'éthanol. Ce dispositif permet de faire varier continûment le rayon du substrat courbé et d'observer l'évolution de la zone de contact en fonction de ρ .

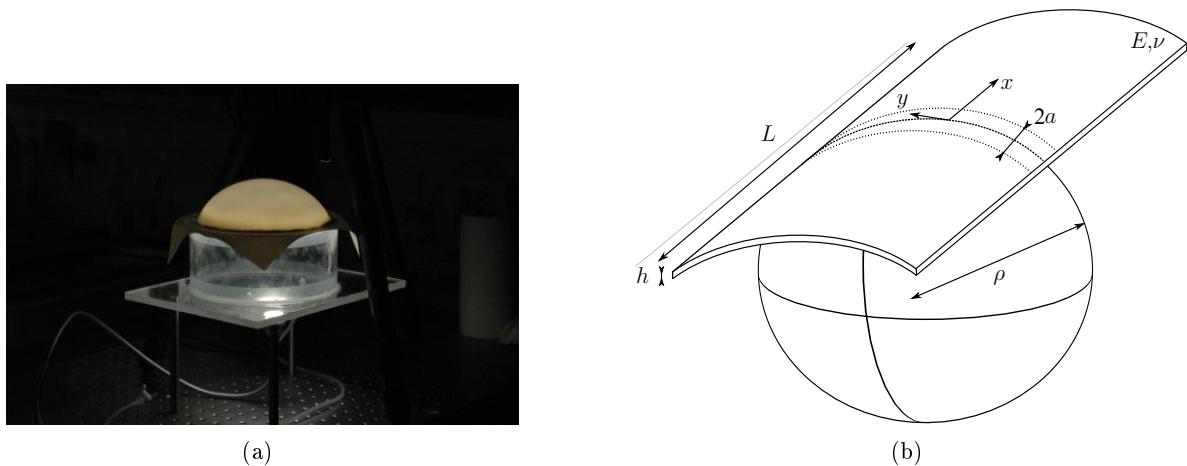


FIGURE 2 – (a) Dispositif expérimental : Membrane en latex sous pression permettant de faire varier continûment le rayon du substrat courbé. (b) Modèle théorique considéré : portion de coque cylindrique adhérent sur une sphère de même rayon (on note $y = \rho\theta$). Dans la suite, nous nous plaçons dans le cas $L \rightarrow +\infty$.

On s'intéresse plus particulièrement à la transition entre un contact de type bande à bords rectilignes (Fig. 3a) et à bords oscillants (Fig. 3b).

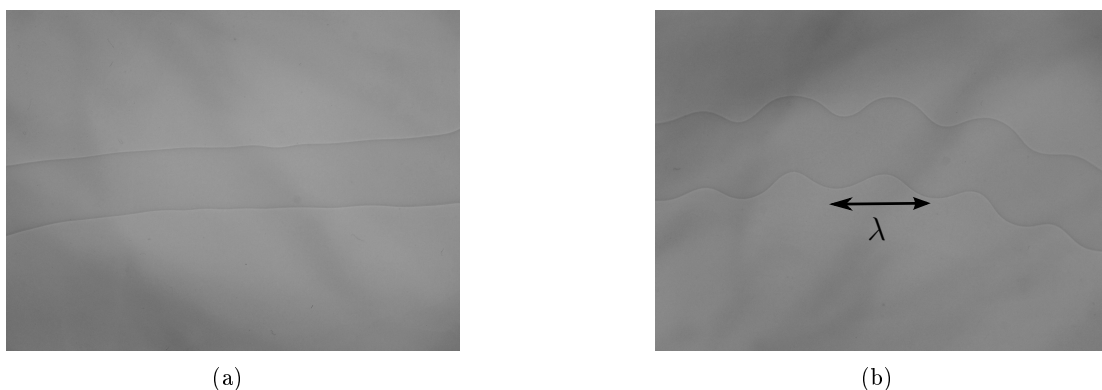


FIGURE 3 – La zone de contact entre la plaque et la sphère correspond à la zone la plus sombre sur les images. Transition entre un contact de type bande à bords rectilignes (a) et à bords oscillants (b) lorsque le rayon de courbure de la sphère augmente.

Afin de comprendre cette transition en détail nous considérons le modèle suivant : une coque cylindrique, de longueur infinie, adhère sans frottement sur une sphère rigide de même rayon. L'équilibre

de la coque est décrit par le modèle de Donnell [13]. En notant ϵ et K respectivement, les déformations membranaires et les courbures, les tenseurs des efforts normaux et des moments s'écrivent en coordonnées cylindriques :

$$\epsilon_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}[u_{\alpha,\beta} + u_{\beta,\alpha} + w_{,\alpha}w_{,\beta}] + \frac{1}{\rho}w\delta_{\alpha,\theta}\delta_{\beta,\theta} \quad (2)$$

$$K_{\alpha\beta} = -w_{,\alpha\beta} \quad (3)$$

$$N_{\alpha\beta} = \frac{Eh}{1-\nu^2}[(1-\nu)\epsilon_{\alpha\beta} + \nu\epsilon_{\tau\tau}\delta_{\alpha\beta}] \quad (4)$$

$$M_{\alpha\beta} = \frac{Eh^3}{1-\nu^2}[(1-\nu)K_{\alpha\beta} + \nu K_{\tau\tau}\delta_{\alpha\beta}] \quad (5)$$

en notant u_α les déplacements membranaires et w le déplacement transverse, avec $f_{,\theta} = (1/\rho)\partial f/\partial\theta$ and $f_{,x} = \partial f/\partial x$. Les équations d'équilibre de la coque s'écrivent :

$$N_{\alpha\beta,\alpha} = 0 \quad (6)$$

$$M_{\alpha\beta,\alpha\beta} - \frac{N_{\theta\theta}}{\rho} + w_{,\alpha\beta}N_{\alpha\beta} = 0 \quad (7)$$

La première équation correspond à l'équilibre membranaire, la seconde à l'équilibre transverse. En ce qui concerne les conditions aux limites, on note que le fait de considérer une énergie d'adhésion proportionnelle à la surface de contact entraîne de considérer une discontinuité de moment normal à l'interface entre les zones collées et décollées [7] :

$$M_{nn}(a_+) = M_{nn}(a_-) + 2\sqrt{D\gamma} \quad (8)$$

avec $D = Eh^3/12(1-\nu^2)$ le module de flexion de la plaque. Cette discontinuité de moment correspond en fait à un couple d'efforts tranchants à la limite de la zone de contact [10]. L'adimensionnement de ces équations permet de ne conserver que deux paramètres, à savoir ν et δ . (voir [5] pour de plus amples détails).

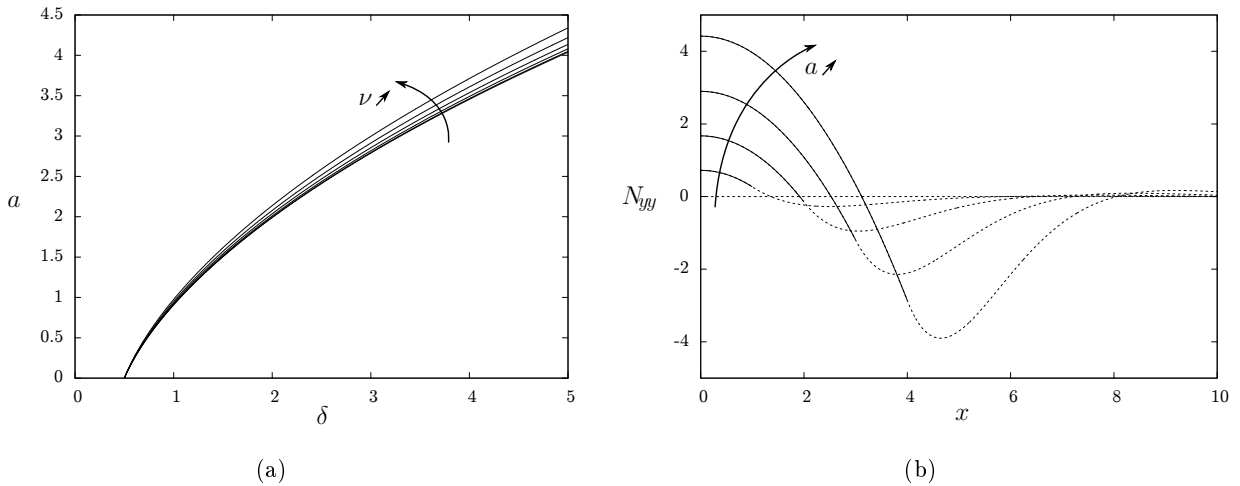


FIGURE 4 – (a) : Taille de la zone de contact a (adimensionnée par $\rho\eta$, avec $\eta^2 = h/\rho\sqrt{12}$) en fonction de δ . (b) : Contrainte N_{yy} (adimensionnée par $C\eta^2$, avec $C = Eh/(1-\nu^2)$) pour différentes tailles de zone de contact. Le trait plein correspond à la partie de la coque en contact avec la sphère, le trait en pointillés à la partie décollée.

La résolution de ces équations dans un premier temps dans le cas d'un contact à bords rectilignes ($a(y) = a$) permet d'obtenir la taille de la zone de contact adimensionnée en fonction de ν et δ , et également à la contrainte adimensionnée N_{yy} en fonction de a (Fig. 4a).

Comme dans la partie précédente, on retrouve bien que le paramètre δ correspond à un seuil pour l'apparition du contact. Nous remarquons que plus la taille de la zone de contact augmente, plus la contrainte le long du bord de la zone de contact est compressive. Les contraintes compressives conduisant naturellement au flambement dans le cas des plaques minces, nous nous intéressons à la stabilité de ces solutions.

3.2 Etude de stabilité linéaire

Nous considérons une perturbation harmonique de la solution précédente, en linéarisant les équations d'équilibre autour de celle-ci, afin de déterminer les positions d'équilibres à bords non rectilignes. Cette étude [5] permet de montrer que pour $\rho \geq \rho_c = 3.79L_{ec}$ (pour $\nu = 0.4$), des solutions à bords oscillants existent. Pour $\rho = \rho_c$, la perturbation solution est antisymétrique (par rapport à l'axe x) et de longueur d'onde $\lambda = 12.96\rho\eta$. Ces résultats sont en très bon accord avec les résultats expérimentaux (voir Fig. 5).

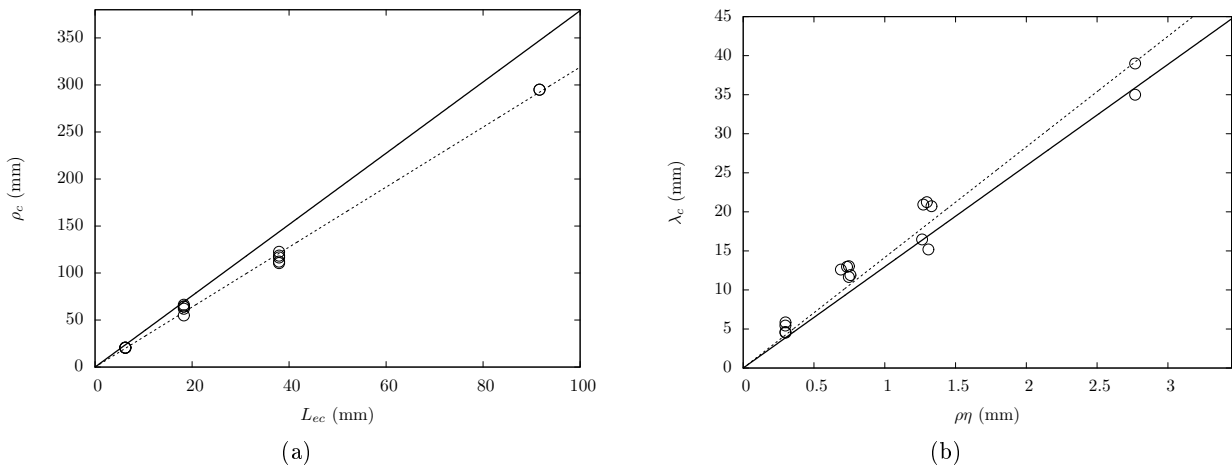


FIGURE 5 – (a) : Longueur d'onde en fonction du rayon de la sphère et de l'épaisseur du film. Points : Résultats expérimentaux, trait plein : valeurs théoriques, trait en pointillés : meilleur approximation des points expérimentaux. (b) : Rayon de sphère critique en fonction de la longueur élasto-capillaire.

Le modèle considère une coque cylindrique de longueur infinie alors que les expériences utilisent des plaques minces de dimension finie. Deux raisons font que la comparaison entre le modèle théorique et les expériences est valide. Premièrement, la condition de longueur infinie correspond en fait à $L \gg a$, soit $L \gg \rho\eta$, vérifié dans nos expériences. Deuxièmement, même sans adhésion, les plaques sont déjà courbées de façon cylindrique du fait de la gravité. Ainsi, notre modèle simplifié est comparable aux expériences et en très bon accord avec celles-ci. Le fait que les bords des zones de contact d'une plaque sur une sphère s'explique donc par un flambement unilatéral provoqué par les contraintes compressives induites par le contact lui-même.

4 Discussion et conclusion

L'étude du problème modèle de l'adhésion par capillarité d'une plaque mince sur une portion de sphère permet de décrire les principales caractéristiques du contact sans frottement entre une surface flexible et un substrat rigide courbé. Si la transformation nécessaire pour mettre en contact la surface sur le substrat n'est pas isométrique, les déformations membranaires vont limiter l'extension des zones de contact. Dans la limite où l'énergie de courbure est négligeable devant l'énergie d'adhésion, la taille caractéristique du contact est donc donnée par un équilibre local entre extension et adhésion. Cependant,

la complexité géométrique des motifs de contact dépend de l'énergie de courbure, majoritaire dans les parties décollées. Enfin, les contraintes membranaires compressives induites par le contact peuvent rendre le système instable et provoquer un flambement unilatéral des zones de contact, flambement qui explique qualitativement et quantitativement les morphologies observées expérimentalement dans le cas de l'adhésion d'une plaque mince sur une sphère.

Références

- [1] Das, S., Du, Q. 2009 Adhesion of vesicles to curved substrates. *Phys. Rev. E* **77** 011907
- [2] Demaine, E., Demaine, M., Iacono, J., Langerman, S. 2009 Wrapping spheres with flat paper. *Computational Geometry* **42** 748-757
- [3] Funkenbusch, G., Benson, R.C. 1996 The conformity of a soft contact lens on the eye. *J. Biomech. Eng.* **118** 341-349
- [4] Hure, J., Roman, B., Bico, J. 2011 Wrapping an adhesive sphere with a sheet. *soumis*
- [5] Hure, J., Audoly, B. 2011 en préparation
- [6] Majidi, C., Fearing, R. 2008 Adhesion of an elastic plate to a sphere. *Proc. R. Soc. A* **464** 1309-1317
- [7] Majidi, C., Adams, G. 2009 A simplified formulation of adhesion problems with elastic plates. *Proc. Roy. Soc. A* **465** 2217-2230
- [8] Pexa, C. 1985 US Patent 4534342
- [9] Roman, B., Bico, J. 2010 Elasto-capillarity : deforming an elastic structure with a liquid droplet. *J. Phys. : Condens. Matter* **22** 493101
- [10] Springman, R.M., Bassani, J.L. 2008 Snap Transitions in Adhesion. *J. Mech. Phys. Solids* **56** 2358-2380
- [11] Struik, D.J. 1988 Lectures on classical differential geometry. Dover.
- [12] Timoshenko, S., Woinowski-Krieger, S. 1959 Theory of plates and shells. McGraw-Hill
- [13] Yamaki, N. 1984 Elasticity stability of circular cylindrical shells. North-Holland series in Applied Mathematics and Mechanics