

# Modèle multi-bulles pour la cavitation : comparaison avec un modèle basé sur l'équation de Rayleigh-Plesset

M. ADAMA MAIGA<sup>a</sup>, A. DAZIN<sup>a</sup>, D. BUISINE<sup>b</sup>

a. Art et Métiers Paritech (ENSAM Lille), Bld Louis IVX, 59800 LILLE

b. LML, UMR CNRS 8107, USTL Bât M3 Dépt Mécanique, 59650 VILLENEUVE D'ASCQ

## Résumé :

*Dans le modèle multi-bulles pour la cavitation, on considère deux bulles non identiques localisées dans un volume de contrôle. La présence de deux bulles introduit une instabilité. Le modèle intègre le constat expérimental de disparition très précoce de petites bulles d'une part et d'autre part la prise en compte de l'interaction entre les bulles par la possibilité d'échange de volume de vide entre des bulles voisines.*

*Dans cette étude nous comparons dans un cas simple le modèle multi-bulles avec un modèle basé sur l'équation de Rayleigh-Plesset où on prend en compte  $n_b$  bulles.*

## Abstract :

*In the multi-bubbles model for the cavitation, we consider two not identical bubbles located in a control volume. The presence of two bubbles introduces an instability. The model integrates the experimental report of very premature disappearance of small bubbles on one hand and on the other hand the consideration of the interaction between bubbles by the possibility of exchange of void volume between nearby bubbles.*

*In this study we compare in a simple case the multi-bubbles model with a model based on the Rayleigh-Plesset equation where we take into account  $n_b$  bubbles.*

**Mots clefs:** Cavitation, Modélisation, Multi-bulles, Interactions

## 1 Introduction

La cavitation est un phénomène par lequel se forment des bulles quasi vides dans un fluide en dépression au cours d'un processus isotherme. L'apparition des bulles de cavitation est le plus souvent inévitable au niveau des appareils qui véhiculent du liquide (circuits hydrauliques, propulsions aérospatiale, sous-marine, turbines hydrauliques, pompes, inducteurs...), elle est aussi accompagnée de disparition de petites bulles mises en évidence par des études expérimentales [1, 2, 3]. Les effets de la cavitation sont extrêmement nuisibles, d'où la nécessité de sa modélisation.

Il existe plusieurs modèles de cavitation dans la littérature [4, 5, 6]. Parmi tous ces modèles ceux basant sur l'évolution d'une bulle en utilisant les équations du mouvement radial d'une bulle de Rayleigh-Plesset [7] ou celle de Gilmore [8] sont sans aucun doute les mieux adaptées pour prendre en compte la structure microscopique du mélange diphasique des écoulements cavitants. Néanmoins ces modèles ne prennent pas en compte l'interaction entre les bulles et n'offrent pas la possibilité de disparition très précoce de petites bulles constatée dès le début de la cavitation. Partant de ces constats nous avons proposé un nouveau modèle multi-bulles pour la cavitation [9] qui a été validé avec l'étude expérimentale de Ohl [1].

Dans ce nouveau modèle nous nous sommes intéressés plus particulièrement aux premiers instants de l'apparition de la cavitation. L'originalité du modèle est d'intégrer le constat expérimental de disparition très précoce de petites bulles d'une part et d'autre part la prise en compte de l'interaction entre les bulles par la possibilité d'échange de volume de vide entre des bulles voisines sans échange de masse. Cet échange de vide, du fait de la tension superficielle, offre la possibilité d'une instabilité entre bulles voisines ce qui conduit les petites bulles à disparaître au profit des grosses bulles. Des séquences successives impliquant deux bulles allant jusqu'au collapse de l'une d'entre elles. C'est ce qui distingue ce modèle de celui de [7] et

[8] qui ne suivent que l'évolution d'une seule bulle, et ne donnent que le volume en fonction d'une loi de pression.

L'idéal est de modéliser un grand nombre de bulles. Mais il est déjà difficile de les gérer même dans une configuration simple zéro dimension alors on imagine que la gestion dans un cas trois dimensions avec des termes convectifs est très compliquée. L'objectif de cette présente étude est de comparer dans un cas simple le modèle [9] avec le modèle de Rayleigh-Plesset où on prend en compte  $n_b$  bulles. En imposant une loi de divergence ceci permet d'avoir une configuration simple zéro dimension.

Notre travail comprend deux parties. Dans la première on développe le modèle basé sur l'équation de Rayleigh-Plesset et on rappelle très brièvement le modèle [9]. La deuxième partie est consacrée à l'analyse et la comparaison des résultats des modèles.

## 2 Modèles

Dans le modèle basé sur l'équation de Rayleigh-Plesset et le modèle multi-bulles, on s'intéresse d'une part à la grosse bulle car elle est la plus facilement observable et d'autre part à la pression du milieu ambiant.

### 2.1 Modèle de Rayleigh-Plesset élargi à un nuage de bulles

Le modèle de Rayleigh-Plesset est élargi à un nuage de  $n_b$  bulles contenues dans un volume de contrôle noté  $V_c$ . On considère des bulles isolées sans interaction entre elles. L'évolution de chaque bulle est gouvernée par l'équation de Rayleigh-Plesset [7]. Cette équation réécrite avec la variable débit est :

$$\dot{q}_i = \frac{1}{8\pi} \frac{q_i^2}{R_i^3} - 4\nu_L \frac{q_i}{R_i^2} - \frac{8\pi\sigma}{\rho_L} + \frac{4\pi R_i}{\rho_L} (p_{g_i} + p_v - p_c) \quad (1)$$

avec  $i$  le numéro de la bulle considérée,  $R_i$  le rayon,  $q_i = 4\pi R_i^2 \dot{R}_i$  le débit,  $\dot{R}_i$  la vitesse radiale à l'interface,  $\rho_L$  la masse volumique,  $\sigma$  la tension superficielle,  $\nu_L$  la viscosité cinématique et  $p_{g_i}$  la pression de gaz partiel.

Si le champ de pression est imposé, l'équation (1) permet de déterminer l'évolution de chaque bulle. La conservation du débit total donne :

$$\sum_{i=1}^{n_b} q_i = q_m, \quad (2)$$

avec  $q_m$  le débit global dû à l'expansion créée dans le volume de contrôle  $V_c$ . Le débit  $q_m$  est caractérisé par la divergence de la vitesse  $div\vec{U}$  uniforme imposée au fluide moyen contenu dans le volume de contrôle  $V_c$  :

$$q_m = \iint_{\partial S_c} \vec{U} \cdot \vec{n} dS = \iiint_{V_c} div\vec{U} dV = V_c \cdot div\vec{U}, \quad (3)$$

Il s'ensuit le taux de vide  $\alpha(t)$  qui est égal :

$$\alpha(t) = \frac{\int q_m dt}{V_c} = \int div\vec{U} dt, \quad (4)$$

Ainsi, si c'est la divergence qui est imposée, on a une contrainte cinématique sur le taux du volume. L'équation (2) apparaît comme une contrainte à respecter, il manque une équation pour la pression.

#### 2.1.1 Equation pour la pression du modèle de Rayleigh-Plesset élargi à un nuage de bulles

Pour une bonne conservation du débit total il est nécessaire de prendre en compte la variation de pression. La prise en compte de cette variation dans l'équation (2) permet d'écrire une équation pour la pression  $p_c$ . La variation de  $p_c$  pendant  $\Delta t$  est notée :  $p_c^{n+1} - p_c^n = \Delta p_c$ . Le débit d'une bulle  $i$   $q_i$  à l'état  $n+1$  estimé au premier ordre est :

$$q_i^{n+1} = \left( \dot{q}_i^n - 4\pi \frac{\Delta p_c}{\rho_L} R_i \right) \Delta t + q_i^n, \quad (5)$$

Il s'ensuit la somme des débits à l'état  $n+1$  :

$$\frac{4\pi\Delta t}{\rho_L} \Delta p_c \sum_{i=1}^{n_b} R_i = \sum_{i=1}^{n_b} \left( q_i^n + \Delta t \dot{q}_i^n \right) - q_m^{n+1}, \quad (6)$$

On obtient l'équation qui permet de déterminer la pression à l'état  $n+1$  :

$$p_c^{n+1} = p_c^n + \frac{\varpi}{\Delta t A_{\Delta p}} \left[ \sum_{i=1}^{n_b} \left( q_i^n + \Delta t \dot{q}_i^n \right) - q_m^{n+1} \right], \quad (7)$$

avec  $A_{\Delta p} = \frac{4\pi}{\rho_L} \sum_{i=1}^n R_i$  et  $\varpi$  un coefficient de relaxation.

## 2.2 Modèle multi-bulles avec interaction

Dans le modèle multi-bulles on considère deux bulles isolées dans le volume de contrôle  $V_c$ . Dans cette étude l'indice 1 est affecté à la grosse bulle et l'indice 2 à la petite bulle. Le modèle décrit et intègre successivement les hypothèses et le volume de contrôle dans lequel l'étude est menée, la dynamique du liquide, la dynamique de l'interface et la conservation du volume. Ceci permet d'obtenir les équations du modèle.

### 2.2.1 Equation pour le rayon $R_1$

L'équation qui gouverne l'évolution de la grosse bulle 1 est :

$$\begin{aligned} R_1 \ddot{R}_1 \left( 1 + \frac{R_1}{R_2} \right) + \dot{R}_1^2 \left[ \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \left( \frac{R_1}{R_2} - \frac{R_1^2}{R_2^2} + \frac{R_1^3}{R_2^3} \right) \right] \left( 1 + \frac{R_1}{R_2} \right) - \frac{q_m}{4\pi} \frac{R_1^2 \dot{R}_1}{R_2^4} + \dots \\ + 4V_L \frac{\dot{R}_1}{R_1} \left( 1 + \frac{R_1^3}{R_2^3} \right) + \frac{2\sigma}{\rho_L} \frac{1}{R_1} \left( 1 - \frac{R_1}{R_2} \right) + \frac{1}{\rho_L} (p_{g_2} - p_{g_1}) = \frac{1}{4\pi} \frac{\dot{q}_m}{R_2} - \frac{1}{32\pi^2} \frac{q_m^2}{R_2^4} + \frac{V_L}{\pi} \frac{q_m}{R_2^3} \end{aligned} \quad (8)$$

avec  $q_m$  le débit global dû à l'expansion créée. La conservation du volume total des deux bulles donne :

$$R_1^3 + R_2^3 = R_{10}^3 + R_{20}^3 + \frac{3}{4\pi} \int_{t_0}^t q_m dt, \quad (9)$$

où  $R_{10}$  et  $R_{20}$  sont les rayons initiaux dans la séquence et  $t_0$  la date du début de la séquence.

### 2.2.2 Equation pour la pression du modèle multi-bulles

En considérant  $p_c$  la pression de loin de deux bulles comme celle du milieu ambiant on a :

$$\frac{p_c}{\rho_L} = -\frac{1}{4\pi} \frac{\dot{q}_1}{R_1} + \frac{1}{32\pi^2} \frac{q_1^2}{R_1^4} - \frac{V_L}{\pi} \frac{q_1}{R_1^3} - \frac{2\sigma}{\rho_L R_1} + \frac{p_{g_1}}{\rho_L} + \frac{p_v}{\rho_L}, \quad (10)$$

Les équations (8), (9) et (10) forment le système d'équation du modèle [9].

Dans le modèle multi-bulles selon les conditions d'expansion la petite bulle peut disparaître ou non. On n'a recours à une nouvelle séquence que lorsque la petite bulle disparaît. On considère qu'elle est disparue si son rayon atteint un dixième de sa valeur initiale, soit un volume 1000 fois plus petit que celui de la bulle initiale. Pour prolonger les calculs dans une nouvelle séquence le volume de contrôle est redéfini et étendu pour englober une nouvelle petite bulle voisine. Ce qui nécessite des conditions au raccordement.

### 2.2.3 Conditions de raccordement entre les séquences $n$ et $n+1$

La condition principale qu'il faut respecter au raccordement entre deux séquences  $n$  et  $n+1$  est que le rapport du nouveau volume de contrôle  $V_c^{n+1}$  à celui de la séquence précédente  $V_c^n$  est égal au rapport du nouveau volume de vide  $V_v^{n+1}$  qui est le volume de la grosse bulle augmenté de celui de la nouvelle petite bulle à celui du volume de vide final de la séquence précédente  $V_v^n$ . On a :

$$\frac{V_c^{n+1}}{V_c^n} = \frac{V_v^{n+1}}{V_v^n}, \quad (11)$$

Au raccordement, il y a deux possibilités pour initialiser la vitesse. La première est de considérer la vitesse continue, la deuxième est de considérer la pression continue, ce qui détermine une vitesse nécessaire au respect de cette condition. La continuité de la vitesse est la condition qui assure le mieux le maintien des rôles respectifs de la petite et de la grosse bulle.

Concernant les rayons, on suppose  $R_1$  continu et  $R_2$  est réinitialisé proportionnellement au rayon  $R_1$ , avec  $R_2^{n+1} = kR_1^n$  où le paramètre  $k$  est donné.

### 2.3 Conditions initiales

L'équation (1) est une équation du second ordre en rayon qui nécessite deux conditions initiales. A l'état initial, les rayons  $R_{i0}$  sont donnés ainsi que les vitesses  $\dot{R}_{i0}$ . Le rayon de la plus grosse bulle est donné. Les autres rayons  $R_{i0}$  sont déterminés par une suite géométrique décroissante, où la raison est donnée. Les vitesses initiales sont calculées par l'équation (12) qui est la somme de la vitesse obtenue à partir de l'équation (8) sans second membre linéarisée et de celle due à l'expansion initiale :

$$\dot{R}_{i0} = \frac{\omega_1 \omega_2}{\omega_2 - \omega_1} (R_{i0} - R_g) \exp(\omega_2 t) + \frac{V_{ci} \operatorname{div} U_0}{4\pi R_{10}^2}, \quad (12)$$

$$\text{avec } \omega_1 = -\frac{2\mu}{\rho R_g^2} - \left( \left( \frac{2\mu}{\rho R_g^2} \right)^2 + \frac{2\sigma}{\rho R_g^3} \right)^{1/2}, \quad \omega_2 = -\frac{2\mu}{\rho R_g^2} + \left( \left( \frac{2\mu}{\rho R_g^2} \right)^2 + \frac{2\sigma}{\rho R_g^3} \right)^{1/2}, \quad R_g \text{ un rayon moyen pris}$$

est égal  $10^6$ ,  $V_{ci}$  le volume de contrôle contenant la bulle  $i$ ,  $\operatorname{div} U_0$  la divergence initiale et  $R_{10}$  rayon initial de la grosse bulle locale.

Le rayon et la vitesse de la bulle 2 et ceux de la petite bulle 1 du modèle multi-bulles sont respectivement les mêmes que ceux de la grosse et de la plus petite bulle du modèle mono-bulle élargi. Le rapport entre la grosse et la plus petite bulle initiales est noté  $k0$ .

Dans la suite de cette étude pour le besoin de la légende des courbes, le modèle de Rayleigh-Plesset élargi à un nuage sera codifié par RP-nb-k0 et celui du multi-bulles par MB-k0. Avec  $n_b$  la valeur du nombre de bulles et  $k0$  celle du rapport entre la grosse et la plus petite bulle initiales. Le nombre de bulles  $n_b$  utilisé est très limité pour des raisons d'instabilité et de difficulté de gestion d'un grand nombre de bulles. Dans le modèle on s'intéresse à la pression et à la grosse bulle locale qui est la plus observable, ainsi pour la comparaison seul le rayon de la grosse bulle est représenté.

## 3 Résultats et discussion

La cavitation englobe des situations très diverses allant du cas explosif (apparition) de durée d'expansion très courte de l'ordre de  $10 \mu s$ , comme c'est le cas dans de l'étude expérimentale de Ohl [1] au cas d'un écoulement autour d'un profil où la durée d'expansion est d'au moins de  $1000 \mu s$  (supercavitation).

D'une manière générale la durée de la phase d'expansion est très courte comparée à celle de contraction. Dans l'étude [10], les auteurs ont mesuré l'évolution du taux de vide autour d'un profil pour différentes vitesses. On constate que la phase d'expansion représente à peu près 25% de l'évolution de la cavitation. Dans cette présente étude pour les différents types de cavitation nous imposons une contraction de

durée 75% de la durée totale de l'évolution de la cavitation. Le taux de vide maximum est imposé et est égal 0.1. Ceci permet de déterminer une loi de divergence respectant l'équation (4). Dans cette étude on considère un fluide contenant 700 germes/cm<sup>3</sup>. Soit un volume de contrôle initial de 1.43 10<sup>-3</sup>cm<sup>3</sup> contenant la grosse bulle. Pour traiter les deux types de cas de cavitation, l'expansion est imposée sur une durée de 10 et 1000µs soit des durées totales de cavitation de 40 et 4000µs. Les lois de divergence instantanées imposées sont décrites par des fonctions polynomiales. La loi de divergence instantanée dans la phase d'expansion est :  $divU(t) = a_e t^4 + b_e t^3 + c_e t^2$  et dans la phase de contraction :  $divU(t) = a_c (t - t_{dc})^4 + b_c (t - t_{dc})^3 + c_c (t - t_{dc})^2$  avec  $t_{dc}$  temps de début de contraction. Voir tableau 1 pour les constantes des fonctions. On peut voir sur la figure 2, l'évolution de la divergence et du taux de vide.

	$t_{dc}$	$a_e$	$b_e$	$c_e$	$a_c$	$b_c$	$c_c$
40 µs	10 µs	3 10 <sup>25</sup>	-6 10 <sup>20</sup>	3 10 <sup>15</sup>	1.2222 10 <sup>23</sup>	-7.3333 10 <sup>18</sup>	1.10 10 <sup>14</sup>
4000 µs	1000 µs	3 10 <sup>15</sup>	-6 10 <sup>12</sup>	3 10 <sup>9</sup>	1,2222 10 <sup>13</sup>	-7.3333 10 <sup>10</sup>	1.10 10 <sup>8</sup>

Tableau 1 : valeurs des constantes des fonctions de loi de divergence

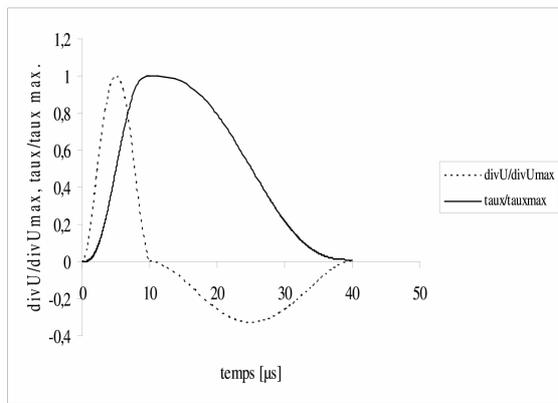


FIG 1 : Evolution de la divergence et du taux de vide pour une durée de 40 µs.

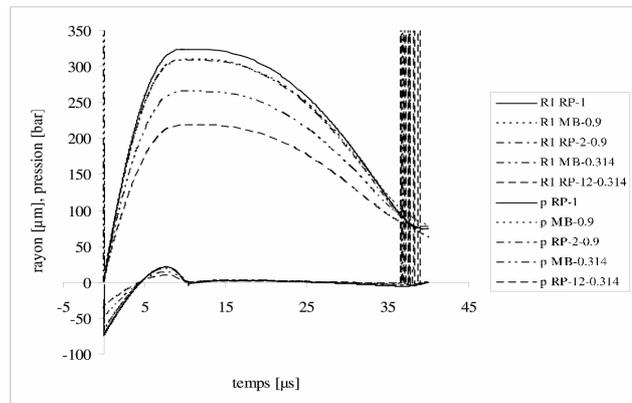


FIG 2 : Evolution du rayon et de la pression des deux modèles pour une cavitation type explosif.

Dans le cas d'une cavitation type apparition, sont représentées sur la figure 2 l'évolution du rayon et de la pression des modèles pour  $nb$  égal à 1, 2 et 12. On constate que pour ce type de cavitation la grosse bulle est un peu plus développée quand elle est seule que quand il y a d'autres petites bulles dans son environnement. On remarque que pour  $nb = 2$  les deux modèles donnent presque le même rayon. Par contre pour  $nb = 12$  le modèle multi-bulles donne un rayon plus grand que celui du Rayleigh-Plesset élargi à un nuage. Ceci est dû à des disparitions de petites bulles au début de la cavitation dans le modèle multi-bulles.

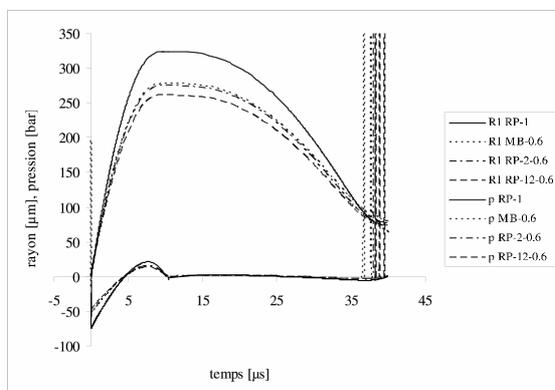


FIG 3 : Evolution du rayon et de la pression des modèles pour une cavitation type explosif avec un k0 fixe.

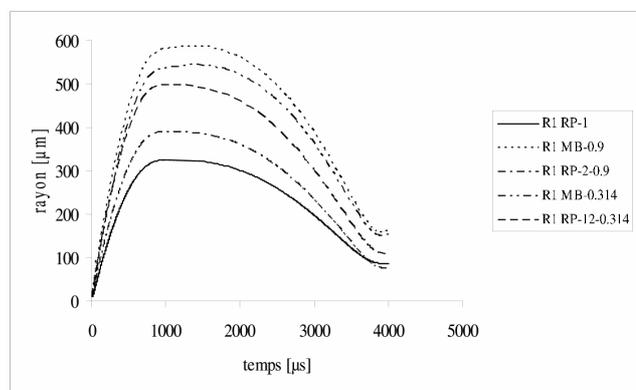


FIG 4 : Evolution du rayon pour une cavitation type profil.

On note que les pics de pression sont des signatures de disparitions de petites bulles. On remarque que plus  $k0$  diminue, plus la distribution entre la plus petite et la plus grosse bulle est grande, plus la dépression diminue. Comme le taux de vide initial est le même, pour voir la part d'influence du nombre de bulles sur ce phénomène le  $k0$  est fixé à 0.6 et le  $nb$  est varié. On peut voir sur la figure 3 avec un rapport  $k0$  constant le nombre de germes à très peu d'influence sur la dépression. D'où l'intérêt de connaître les écarts de diamètre des bulles.

Pour une cavitation de longue durée type profil, sont représentées sur la figure 4 l'évolution du rayon des modèles pour  $nb$  égal à 1, 2 et 12. On constate que dans ce type de cavitation la grosse bulle est beaucoup plus petite quand elle est toute seule que quand il y a des petites bulles dans son environnement. Comme il y a beaucoup de disparitions de petites bulles, leurs prises en compte influencent beaucoup l'évolution de la grosse bulle locale. On constate que le modèle multi-bulles donne une évolution de rayon beaucoup plus importante que celui du Rayleigh-Plesset élargi à un nuage. Ceci est principalement dû à la prise en compte de l'interaction par échange de volume et des disparitions des petites bulles. Pour exemple, pour  $nb = 2$ , on a une seule disparition dans le modèle Rayleigh-Plesset élargi à un nuage contre 46 dans celui du multi-bulles et pour  $nb = 12$  on a respectivement 12 et 56. On remarque qu'au début de la phase de contraction (après  $1000\mu s$ ) la grosse bulle du modèle multi-bulles continue de croître, car le volume d'échange qu'elle gagne de la petite bulle est plus important que le volume qu'elle perd dû à la contraction.

## 4 Conclusion

Dans ce travail nous avons comparé le modèle multi-bulles à un modèle basé sur l'équation de Rayleigh-Plesset élargi à un nuage ce qui nous permet de conclure que :

La dépression dans un écoulement cavitant dépend beaucoup de la distribution des germes initiaux et il est important de prendre en compte la présence et les collapsés des petites bulles sur l'évolution de la grosse bulle locale.

Le non prise en compte des interactions entre les bulles et la difficulté de gérer un grand nombre de bulles limitent la capacité du modèle de Rayleigh-Plesset à simuler l'évolution de la grosse bulle d'un nuage de cavitation.

Avec la distribution des bulles du nuage le modèle multi-bulles permet de simuler l'évolution de la grosse bulle tout en prenant en compte la présence et les disparitions des petites bulles locale.

## References

- [1] C.D. Ohl, Cavitation inception following shock wave passage, *Physics of Fluids*. 14 10 3512-3521 2002.
- [2] S. Buogo, G.B. Cannelli, Implosion of an underwater spark-generated bubble and acoustic energy evaluation using the Rayleigh model, *J. Acoust. Soc. Am.* 111 6 2594-2599 2002.
- [3] S. Takahashi, S. Washio, K. Uemura, A. Okazaki, Experimental study on cavitation starting at and flow characteristics close to the point of separation, Fifth International Symposium on Cavitation Osaka, Japan, November 1-4, 2003.
- [4] A. H. Koop, H. W. M. Hoeijmakers, Design of twisted cavitating hydrofoil using a barotropic flow method}, The sixth international symposium on cavitation, Wageningen, Pays-bas, 11-15 Sep 2006.
- [5] I. Senocak, and W Shyy., A Pressure-based Method for Turbulent Cavitating Flow Computations, *J. Comp. Phys.*, vol. 176, pp. 363-383, 2002.
- [6] A. Kubota, H. Kato, H. Yamaguchi, A new modelling of cavitating flows: a numerical study of unsteady cavitation on a hydrofoil section, *J. Fluid Mech.* 240 59-96 1992.
- [7] M.S. Plesset, Dynamics of cavitation bubbles, *J. of Applied Mech.* 16 228-231 1948.
- [8] F.R. Gilmore, The growth or collapse of a spherical bubble in a viscous compressible liquid, *Calif. Inst. Of Techn. Hydr. Labo. Report 26-4* 1952.
- [9] M. Adama Maiga, D. Buisine, Modèle multi-bulles pour la cavitation, *C. R. Mécanique*, vol 337, pp.791–800, 2009.
- [10] O. Coutier-Delgosha, B. Stutz, A. Vabre and S. Legoupil, Analysis of cavitating flow structure by experimental and numerical investigations, *Journal of Fluid Mechanics*, 578 171-222 2007.